



HAL
open science

Analyse der Wiederkehr in dynamischen Systemen auf einer Ordinalskala

Andreas Groth

► **To cite this version:**

Andreas Groth. Analyse der Wiederkehr in dynamischen Systemen auf einer Ordinalskala. Dynamical Systems [math.DS]. Ernst-Moritz-Arndt Universität Greifswald, 2006. German. NNT : . tel-01718849

HAL Id: tel-01718849

<https://hal.science/tel-01718849>

Submitted on 27 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse der Wiederkehr in dynamischen Systemen auf einer Ordinalskala

INAUGURALDISSERTATION

zur

Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

an der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

vorgelegt von:

Andreas Groth

geboren am 02.06.1976

in Greifswald

Greifswald, den 31. März 2006

Dekan: Prof. Dr. Klaus Fesser
1. Gutachter: Prof. Dr. Christoph Bandt
2. Gutachter: Prof. Dr. Jürgen Kurths

Tag der Promotion: 25. Juli 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Gliederung	2
1.3	Ordnungsmuster in Zeitreihen	2
1.4	Codierung der Ordnungsmuster	4
2	Ordinale Wiederkehr in univariaten Zeitreihen	7
2.1	Begriff der ordinalen Wiederkehr	7
2.2	Visualisierung der Wiederkehr durch Rekurrenzplots	10
2.3	Verteilung der Wiederkehrzeiten bei Modellfunktionen	14
2.3.1	Asymmetrische Sägezahnfunktion	15
2.3.2	Periodische Funktionen mit unimodaler Grundperiode	17
2.4	Schätzung der Periodendauer	20
2.4.1	Schätzung bei Modellfunktionen	21
2.4.2	Schätzung der Fundamentalperiode in Sprachsignalen	22
2.5	Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen	32
2.5.1	Bestimmung der Einbettungsdimension	36
2.6	Anpassung weiterer Einbettungsparameter	40
2.6.1	Teststatistik	42
2.6.2	Kombination verschiedener Parameterwerte	44
2.6.3	Skalierungsverhalten	46
2.7	Zeitlich veränderliche Fundamentalperiode	50
2.8	Evaluierung	53
2.8.1	Datenbank	53
2.8.2	Verteilung des Grobfehlers	54
2.8.3	Referenzmethoden	56
2.8.4	Auswertung	59
2.9	Zusammenfassung	62
3	Ordinale Wiederkehr in bivariaten Zeitreihen	63
3.1	Motivation	63
3.2	Begriffsbildung der Wiederkehr mittels Ordnungsmuster	65
3.3	Messung der Phasenkopplung	68
3.3.1	Definition einer Phase über Ordnungsmuster	68

3.3.2	Zeitverzögerung	69
3.3.3	Anpassung der Zeitverzögerung	71
3.3.4	Kopplungsmaß	75
3.3.5	Alternative Definitionen einer Phase	78
3.3.6	Phasenkopplung in Modellsystemen	80
3.4	Frequenzgang	82
3.5	Zusammenfassung und Ausblick	83
	Danksagung	87
	Literaturverzeichnis	89
	Anhang	95
	Visualization of coupling in time series by order recurrence plots	95
	Quantification of Order Patterns Recurrence Plots of ERP	105

Notation

Abkürzungen

CRP	Kreuzrekurrenzplot (Cross recurrence plot)
EEG	Elektroenzephalogramm
ERB	Equivalent rectangular bandwidth
FIR	Finite impulse response
GS	Verallgemeinerte Synchronisation
i.i.d.	Independent identically distributed
IIR	Infinite impulse response
JRP	Verbundrekurrenzplot (Joint recurrence plot)
ORP	Ordnungsrekurrenzplot (Order recurrence plot)
PS	Phasensynchronisation
RP	Rekurrenzplot (Recurrence plot)

Symbole

\wedge	UND-Verknüpfung (Konjunktion)
\vee	ODER-Verknüpfung (Disjunktion)
\cap	Durchschnitt
\cup	Vereinigung
$\langle \cdot \rangle$	Mittelwert
$ \cdot $	Absoluter Wert
$\ \cdot\ $	Norm
$\{\cdot\}$	Menge
$\#\{\cdot\}$	Kardinalität der Menge
$\Theta(\cdot)$	Heaviside Funktion
\mathbf{R}	Rekurrenzplot
\mathbf{R}_π	Rekurrenzplot der ordinalen Wiederkehr (univariat)
\mathbf{CR}	Kreuzrekurrenzplot
\mathbf{CR}_π	Ordnungsrekurrenzplot (bivariat)
Δ	Abstand im Phasenraum
τ	Wiederkehrzeit
ϑ	zeitlicher Abstand der Werte innerhalb eines Ordnungsmusters
\hat{p}	Rekurrenzrate
D	Dimension
T	Periodendauer
L	Länge der Zeitreihe

Résumé

Le traitement de données volumineuses nécessite des méthodes rapides et robustes. Dans le cadre de cette thèse de doctorat, l'approche de l'analyse des données à une échelle ordinale est étudiée. Bien que les méthodes statistiques à l'échelle ordinale soient de plus en plus utilisées, il n'y a que quelques méthodes dans l'analyse des séries temporelles. Dans une analyse ordinale, nous ne sommes pas intéressés aux valeurs réelles d'une série temporelle, mais seulement aux relations d'ordre. D'une part, nous ignorons beaucoup d'informations sur la structure des systèmes, mais d'autre part, les méthodes deviennent plus robustes. Par conséquent, en présence d'une transformation arbitraire, monotone et croissante de la série temporelle, les relations ne changent pas, ce qui rend les méthodes ordinales invariantes. Cela simplifie énormément l'analyse des données, car les problèmes tels que les changements de l'origine ou les distorsions de l'amplitude sont négligeables. En outre, une stationnarité beaucoup plus faible du système analysé est nécessaire, surtout si on considère les retards assez court.

Afin de caractériser la dynamique temporelle d'un système et la récurrence dans l'espace des phases, différentes approches sont discutées en fonction du problème. Seulement au moyen d'une analyse ordinale de séries temporelles univariées, la récurrence de la trajectoire est modélisé. Les statistiques ainsi obtenues sont invariantes par rapport à une grande classe de fonctions périodiques. Dans une application de traitement de la parole, un estimateur robuste est dérivé pour déterminer la fréquence de base.

Ensuite, le concept d'une récurrence ordinale est généralisé à une comparaison entre deux trajectoires (analyse de séries temporelles bivariées). Grâce à ce principe, il est possible d'analyser de manière plus robuste la synchronisation des oscillateurs couplés. Lors d'une évaluation des électroencéphalogrammes, les avantages d'une approche ordinale sont clairement démontrés. Dans une analyse des électroencéphalogrammes, on ne peut pas supposer que les conditions de mesure sont constantes au fil du temps. En raison de nombreux facteurs qui influent l'amplitude ou l'origine, les données peuvent varier considérablement et sont donc difficiles à évaluer sur une échelle métrique. Grâce à la transition vers une échelle ordinale, les données sont filtrées et cette thèse de doctorat se tourne également vers la question des paramètres appropriés.

Cette traduction du résumé ne fait pas partie de la thèse de doctorat et a été rajoutée par la suite.

Andreas Groth, le 27 février 2017

Kapitel 1

Einführung

1.1 Motivation

Bei der Auswertung umfangreicher Daten sind schnelle und robuste Methoden gefragt. Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Ansatz, Daten nur auf ordinalem Niveau zu analysieren. Während in der Statistik ordinale Verfahren immer mehr zur Anwendung kommen, gibt es in der Zeitreihenanalyse nur wenige Verfahren. In der ordinalen Analyse interessieren wir uns nicht für die tatsächlichen Werte einer Zeitreihe, sondern lediglich für die Ordnungsrelationen. Damit vernachlässigen wir zwar einerseits eine Menge Information über die Struktur des Systems, andererseits gewinnen die Verfahren jedoch an Robustheit. So ändern sich durch eine beliebige, monoton wachsende Amplitudentransformation der Zeitreihe die Relationen nicht, weshalb ordinale Verfahren demgegenüber invariant sind. Dies erleichtert die Analyse von Daten erheblich, da Probleme wie Nullpunktverschiebungen oder Verzerrungen in der Skala vernachlässigbar sind. Zudem ist eine viel schwächere Stationarität des zugrunde liegenden Systems erforderlich, insbesondere wenn wir Werte mit einem nicht allzu großen zeitlichen Abstand betrachten.

Um die zeitliche Dynamik eines Systems und dessen Wiederkehrzeiten im Phasenraum zu beschreiben, werden in Abhängigkeit von der Problemstellung verschiedene Ansätze diskutiert. Nur mit Mitteln der ordinalen Zeitreihenanalyse modellieren wir die Wiederkehr zunächst innerhalb einer Trajektorie (univariate Zeitreihenanalyse). Wir erhalten damit eine Statistik, die gegenüber einer großen Klasse periodischer Funktionen invariant ist. In einer Anwendung zur Sprachverarbeitung kann daraus ein robuster Schätzer zur Bestimmung der Pitchperiode abgeleitet werden.

Danach verallgemeinern wir das Modell einer ordinalen Wiederkehr auf einen Vergleich zwischen zwei Trajektorien (bivariate Zeitreihenanalyse). Eine darauf aufbauende Statistik ermöglicht eine robuste Analyse der Synchronisation von gekoppelten Oszillatoren. Bei der Auswertung von Elektroenzephalogrammen tritt der Vorteil einer ordinalen Herangehensweise deutlich hervor. In diesem Fall kann nicht davon ausgegangen werden, dass die Messbedingungen zeitlich konstant sind. Die Daten können aufgrund vieler Faktoren in der Amplitudenskala oder dem Nullpunkt stark variieren und sind deshalb auf einer metrischen Skala schwierig auszuwerten. Durch

den Übergang zu einer ordinalen Skala werden die Daten gefiltert, wobei diese Arbeit u.a. auch der Frage nach geeigneten Parametern nachgeht.

1.2 Gliederung

In den folgenden Abschnitten dieses einführenden Kapitels wird zunächst die Terminologie der ordinalen Zeitreihenanalyse eingeführt. Mit univariaten Zeitreihen und der Schätzung einer Fundamentalperiode beschäftigt sich dann Kapitel 2. In einer Anwendung zur Pitchperiodenbestimmung in Sprachsignalen wird dieser Ansatz gebräuchlichen Methoden gegenübergestellt. Um die Kopplungsmessung in bivariaten Zeitreihen geht es dann im Kapitel 3. Als Möglichkeit der Visualisierung von Kopplungen werden die Ordnungsrekurrenzplots eingeführt. Aus ihnen wird ein Maß zur Detektierung von Phasensynchronisation abgeleitet und üblichen Ansätzen an Modellsystemen gegenübergestellt.

1.3 Ordnungsmuster in Zeitreihen

Um ein dynamisches System auf ordinalen Niveau zu studieren, verwenden wir hier den Begriff des *Ordnungsmusters*. Ausgehend von einer Zeitreihe $(x_1, \dots, x_t, \dots, x_L)$ werden dabei lediglich die Relationen $<$ und $>$ in einer Teilmenge von D Zeitpunkten betrachtet. Im Allgemeinen müssen deren Abstände nicht äquidistant sein, in Kapitel 2 und 3 werden jedoch speziell angepasste Abstände betrachtet. Beginnen wir mit dem einfachsten Fall:

Dimension $D = 2$. Betrachtet werden zwei Zeitpunkte x_t und $x_{t+\vartheta}$, für die entweder $x_t < x_{t+\vartheta}$ oder $x_t > x_{t+\vartheta}$ gilt. Der Fall der Gleichheit nimmt eine gesonderte Stellung ein. Gehen wir davon aus, dass das zu Grunde liegende dynamische System eine stetige Verteilung der Werte aufweist, so kann die Gleichheit bei der statistischen Analyse vernachlässigt werden, da sie dann die Wahrscheinlichkeit Null hat.¹⁾ In der Praxis bei diskret abgetasteter Amplitude kann dieser Fall aber unter Umständen signifikant sein. In Abhängigkeit von der Anwendung gibt es unterschiedliche Strategien, wobei Näheres dazu in den jeweiligen Kapiteln steht.

Bei der Darstellung des dynamischen Systems im Phasenraum $(x_t, x_{t+\vartheta})$ spricht man auch von einer zeitverzögerten Einbettung²⁾. In diesem Fall zerlegen die Ordnungsmuster den Phasenraum in zwei Bereiche (Abb. 1.1).

Dimension $D = 3$. Als nächstes werden drei Zeitpunkte x_t , $x_{t+\vartheta_1}$ und $x_{t+\vartheta_2}$ betrachtet. Diese können 6 Ordnungsmuster bilden (Abb. 1.2), wobei auch hier zu-

¹⁾Im Englischen spricht man bei Gleichheit von *tied ranks*.

²⁾delay embedding

Abb. 1.1: Zerlegung des Phasenraums $(x_t, x_{t+\vartheta})$ durch Ordnungsmuster der Dimension $D = 2$ und möglicher Verlauf der Trajektorie einer Sinusfunktion

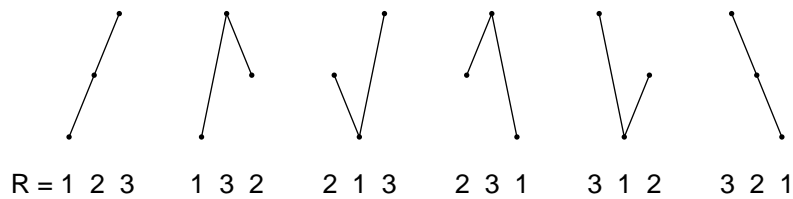
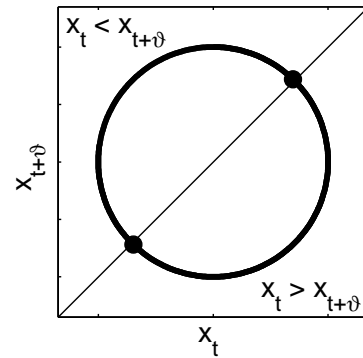


Abb. 1.2: Ordnungsmuster der Dimension $D = 3$ und zugehörige Rangzahlen (siehe Abschnitt 1.4)

nächst die Gleichheit vernachlässigt wird. Der Phasenraum wird dabei in 6 zueinander kongruente Gebiete zerlegt, die sich sternförmig an der Hauptdiagonalen anordnen. Diese Gebiete werden durch 3 sich schneidende Ebenen erzeugt, welche durch paarweise Gleichheit $x_t = x_{t+\vartheta_1}$, $x_t = x_{t+\vartheta_2}$ und $x_{t+\vartheta_1} = x_{t+\vartheta_2}$ definiert sind (Abb. 1.3).

Dimension $D > 3$. Dieses Schema der zeitverzögerten Einbettung kann beliebig fortgesetzt werden. Unter Ausschluss der Gleichheit ergeben sich $D!$ Ordnungsmuster, wobei in dieser Arbeit jedoch nur speziell angepasste Ordnungsmuster niedriger Dimension ($D \leq 4$) betrachtet werden.

In Abhängigkeit vom fachlichen Gebiet spricht man bei D von der Ordnung oder der Dimension. In der Statistik hat sich die Analyse von Daten auf Ordinalskala mittlerweile etabliert. Speziell auf globalen Rangzahlen basierende Tests (Wilcoxon, Kruskal-Wallis) haben klassische Parametertests (t-Test, f-Test) beim Vergleich kleiner Stichproben verdrängt. Eine bekannte Funktion für binäre Ordnungsmuster ($D = 2$) stellt Kendalls tau dar, mit der die Korrelation zweier Stichproben beschrieben wird (Kendall u. Gibbons, 1990). In der Zeitreihenanalyse hingegen gibt es so gut wie keine Verfahren, die Ordnungsmuster höherer Dimension ($D > 2$) verwenden. Auf binäre Vergleiche ($D = 2$) aufbauende Verfahren sind in den verschiedensten Gebieten zu finden (u.a. Hallin u. Jurečkova, 1999; Hallin u. Werker, 1999; Frisch u. a., 2004; Goettlein u. Pruscha, 1992), jedoch zu höheren Dimensionen gibt

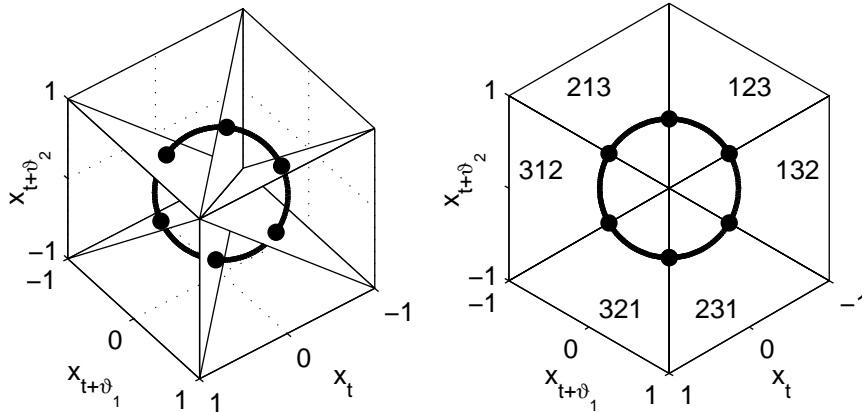


Abb. 1.3: links: Zerlegung des Phasenraums $(x_t, x_{t+\vartheta_1}, x_{t+\vartheta_2})$ durch Ordnungsmuster der Dimension $D = 3$. rechts: Gleiche Darstellung mit Blickwinkel in Richtung der Hauptdiagonalen

es bisher wenige Arbeiten. So wird von [Bandt u. Pompe \(2002\)](#) ein Komplexitätsmaß auf Basis der Entropie von Ordnungsmustern eingeführt. Dabei können Verbindungen zu Invarianten dynamischer Systeme wie die Kolmogorov-Sinai-Entropie gezeigt werden ([Bandt u. a., 2002](#); [Amigó u. a., 2005](#)). Ein Abstandsmaß zwischen Zeitreihen wird in einer Arbeit von [Keller u. Wittfeld \(2004\)](#) diskutiert. Einen Überblick über die Verteilung der Ordnungsmuster bei verschiedenen Prozessen findet man in der Dissertationsschrift von [Shiha \(2004\)](#).

1.4 Codierung der Ordnungsmuster

Durch die Ordnungsmuster wird eine Zeitreihe in eine Symbolfolge abgebildet. Dabei gibt es unterschiedliche Ansätze, sie zu beschreiben. Es läge z.B. nahe, diese durch Zahlen, Buchstaben oder andere Symbole willkürlich zu bezeichnen. Jedoch ist man in diesem Fall gezwungen eine Codierungstabelle mitzuführen, um die Ordnungsmuster wieder rekonstruieren zu können. Aus diesem Grund greifen wir auf eine algorithmische Beschreibung zurück, aus der die Ordnungsmuster wieder berechnet werden können. Dabei benutzen wir die intuitive *Darstellung durch Rangzahlen*, wobei die zu x_t gehörige Rangzahl

$$R_t = \#\{x_{t'} \mid x_{t'} \leq x_t, 1 \leq t' \leq L\} \quad (1.1)$$

deren Größe innerhalb der Zeitreihe angibt. Im Gegensatz zu den globalen Rangzahlen gehen in die Beschreibung von Ordnungsmustern jeweils nur D Zeitpunkte ein.

Im Fall $D = 2$ ergibt sich damit $(R_t, R_{t+\vartheta}) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, wobei wir auch

vereinfacht 12 bzw. 21 schreiben. Für $D = 3$ erhalten wir

$$(R_t, R_{t+\vartheta_1}, R_{t+\vartheta_2}) \in \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

(Abb. 1.2). Diesen Vektor aus Rangzahlen bezeichnen wir dann als *Ordnungsmuster*

$$\pi_x(t) = (R_t, R_{t+\vartheta_1}, R_{t+\vartheta_2}, \dots, R_{t+\vartheta_D}) \quad (1.2)$$

der Zeitreihe x zum Zeitpunkt t mit den Parameter $\vartheta_1, \dots, \vartheta_D$. In der Bezeichnung verzichten wir auf die Mitführung dieser Parameter, obwohl sie wichtige Variablen für die Ordnungsmuster darstellen. Zwar werden sie an das jeweilige Problem angepasst, zeitlich bleiben sie aber fixiert.

Kapitel 2

Ordinale Wiederkehr in univariaten Zeitreihen

In diesem Kapitel diskutieren wir eine spezielle Definition der Wiederkehr (Rekurrenz) in Zeitreihen auf ordinalem Niveau. Ausgehend vom gebräuchlichen Begriff der Wiederkehr definieren wir eine ordinale Wiederkehr nur mit Hilfe von Ordnungsrelationen (Abschnitt 2.1). Motiviert ist dieser Ansatz durch eine Invarianz gegenüber gewissen Amplitudentransformationen. Eine Untersuchung der Verteilung der Wiederkehrzeiten an mathematischen Modellfunktionen (Abschnitt 2.3) zeigt zudem eine allgemeinere Invarianz gegenüber dem Verlauf periodischer Funktionen. Dies motiviert die Anwendung der Methodik auf die Schätzung der Fundamentalperiode in Sprachsignalen. In Abschnitt 2.4 wird zunächst die Schätzung einer Periodendauer aus der Verteilung der Wiederkehrzeiten diskutiert. Danach gehen wir den Fragen nach einer geeigneten Einbettungsdimension (Abschnitt 2.5) und der Wahl von Parametern (Abschnitt 2.6) nach. Um diesen Ansatz einordnen zu können, wird dieser üblichen Methoden der Sprachverarbeitung gegenübergestellt (Abschnitt 2.8).

Erste Ideen zu diesem Konzept einer Wiederkehr wurden in der Arbeit (Groth, 2002) vorgestellt, wobei dort jedoch noch nicht vom Begriff einer ordinalen Wiederkehr gesprochen wird. Angeregt wurde dieser Ansatz durch Überlegungen, Kendalls tau zu einer Autokorrelationsfunktion für Zeitreihen zu modifizieren (Bandt u. a., 2001; Bandt, 2005).

2.1 Begriff der ordinalen Wiederkehr

In diesem Abschnitt soll diskutiert werden, was wir unter Wiederkehr bzw. Rekurrenz einer Zeitreihe in der ordinalen Zeitreihenanalyse verstehen. Gehen wir zunächst davon aus, dass uns ein Abstandsmaß zur Verfügung steht. Ein einfacher Ansatz wäre es, auf Gleichheit zu testen, d.h. von Wiederkehr zu sprechen, wenn $x_t = x_{t+\tau}$ gilt. Dieser Ansatz würde jedoch in der Praxis schon versagen, wenn die Zeitreihe durch inkommensurable Abtastung einer periodischen Funktion gewonnen wird. Zudem könne man bei vorhandenem Beobachtungsrauschen keine exakte Wiederkehr der Trajektorie erwarten. Deshalb muss dieser Ansatz erweitert wer-

den, indem eine gewisse Ungenauigkeit zugelassen wird. Wir sprechen nun von einer Wiederkehr nach der Zeit τ , wenn die Relation $|x_t - x_{t+\tau}| \leq \Delta$ gilt.

In der ordinalen Zeitreihenanalyse steht uns kein Abstandsmaß $|\cdot|$ zur Verfügung, lediglich die Ordnungsrelation zwischen zwei Werten können wir bestimmen. Dennoch ist es möglich, eine Wiederkehr auf ordinaler Skala sinnvoll zu definieren. Dazu betrachten wir zunächst die einfachste Definition

$$\begin{aligned} \text{ansteigend} & : x_t \leq x_{t+\tau} \leq x_{t+\vartheta} & (2.1) \\ \text{abfallend} & : x_t \geq x_{t+\tau} \geq x_{t+\vartheta} . \end{aligned}$$

Hierbei wird durch ϑ aus der Zeitreihe heraus eine Umgebung $[x_t, x_{t+\vartheta}]$ generiert, welche sich der Werteverteilung der Zeitreihe anpasst. Speziell in einer späteren Schätzung der Fundamentalperiode stellt sich diese Anpassung als günstig heraus. In Bereichen mit einer schnellen zeitlichen Änderung ist die Dichte der Werte geringer und die Umgebung wird größer gewählt. Bei langsamer Änderung und folglich hoher Dichte der Werte wird eine kleine Umgebung mit höherer Auflösung gewählt. Ähnliches erreicht man z.B. durch Transformation der kompletten Zeitreihe auf Rangzahlen und Verwendung eines festen Abstands.

In Hinblick auf die Schätzung der Periodendauer soll dieser Ansatz einer ordinalen Wiederkehr weiter präzisiert werden, um nur Wiederkehr in gleicher Richtung zu detektieren. Dazu betrachten wir zunächst nur den ansteigenden Fall und erweitern die Bedingung für eine ordinale Wiederkehr zu

$$x_t \leq x_{t+\tau} \leq x_{t+\vartheta} \quad \wedge \quad x_{t+\tau} \leq x_{t+\tau+\vartheta} , \quad (2.2)$$

wobei \wedge eine UND-Verknüpfung bezeichnet. Um eine sinnvolle Definition für die ordinale Wiederkehr zu finden, ist es erforderlich, dass die Definition unabhängig gegenüber einer Zeit- und Amplitudenumkehr ist. Sie sollte also invariant gegenüber den Transformationen

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x : (x_t, x_{t+\vartheta}, x_{t+\tau}, x_{t+\vartheta+\tau}) & \rightarrow (-x_t, -x_{t+\vartheta}, -x_{t+\tau}, -x_{t+\vartheta+\tau}) \\ & \text{(Amplitudenumkehr)} \\ \text{und } \mathcal{F}_t : (x_t, x_{t+\vartheta}, x_{t+\tau}, x_{t+\vartheta+\tau}) & \rightarrow (x_{t+\vartheta+\tau}, x_{t+\tau}, x_{t+\vartheta}, x_t) \\ & \text{(Zeitumkehr)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

sein, gilt doch auch bei der metrischen Wiederkehr $|x_t - x_{t+\tau}| = |x_{t+\tau} - x_t| = | -x_t - (-x_{t+\tau})|$.

Für eine übersichtliche Notation verwenden wir nun die Schreibweise als Ordnungsmuster π . Hierbei stellt (2.2) einen Test der vier Zeitpunkte auf die Ordnungsmuster $\pi = 1423$ oder $\pi = 1324$ dar, wobei Gleichheit zunächst nicht erfasst wird. Um später eine symmetrische Matrix zu erhalten, ist es wichtig, ebenso den Fall $\pi = 2413$ hinzuzufügen. Ausgehend von diesen drei Ordnungsmustern fügen wir zum Test auf ordinale Wiederkehr auch diejenigen Ordnungsmuster hinzu, die

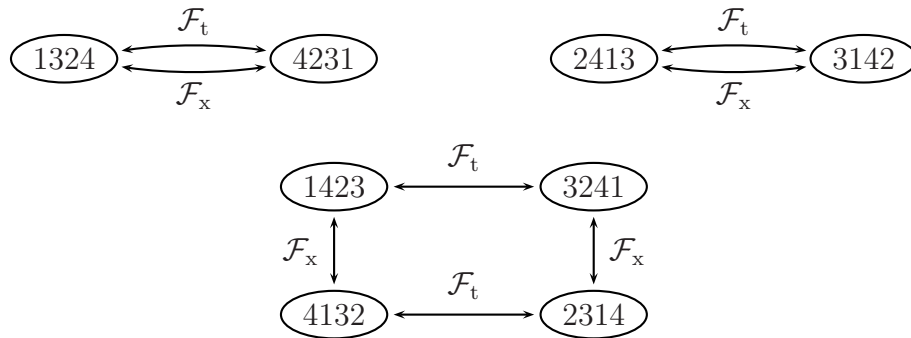


Abb. 2.1: Vollständiges Schema der Transformation der Ordnungsmuster 1324, 2413 und 1423 bzgl. \mathcal{F}_x und \mathcal{F}_t

sich durch die Transformationen \mathcal{F}_x und \mathcal{F}_t ergeben. Das vollständige Schema zeigt Abb. 2.1. Im jeweils linken oberen Knoten sind die drei Ausgangsmuster eingetragen und entlang der Pfeile kommt man zu den zugehörigen transformierten Ordnungsmustern. Die oberen beiden Schemata können vereinfacht werden, da hier \mathcal{F}_x und \mathcal{F}_t zum gleichen Resultat führen. Insgesamt beinhaltet der Test acht von 24 möglichen Ordnungsmustern, wobei durch \mathcal{F}_x auch der Fall $x_t > x_{t+\vartheta}$ wieder berücksichtigt wird.

Definition 2.1 (Ordinaler Wiederkehr mittels Ordnungsmustern)

Unter einer *ordinalen Wiederkehr mittels Ordnungsmustern*¹⁾ in die durch ϑ generierte Umgebung nach der Zeit τ verstehen wir den Fall, dass das Ordnungsmuster π der Zeitpunkte $(x_t, x_{t+\vartheta}, x_{t+\tau}, x_{t+\tau+\vartheta})$ einem der acht Ordnungsmuster aus Abb. 2.1 entspricht.

In der jetzigen Form ist die Definition nur sehr unbefriedigend, enthält sie doch sehr viele zu überprüfende Ordnungsmuster. Zudem ist der ursprünglich in (2.2) enthaltene Fall der Gleichheit nicht berücksichtigt. Aus diesem Grunde kehren wir zur Schreibweise als Ungleichung zurück und lassen auch Gleichheit zu. Im Fall $x_t \leq x_{t+\vartheta}$ reduzieren sich die vier Ordnungsmuster (vgl. Abb. 2.2) auf lediglich vier

¹⁾Diese Definition enthält im Gegensatz zur endgültigen Definition 2.2 noch nicht den Fall der Gleichheit.

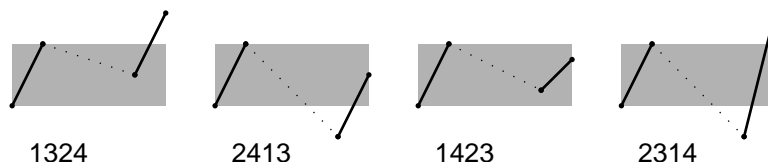


Abb. 2.2: Ordnungsmuster für eine ansteigende ordinale Wiederkehr

Bedingungen

$$\begin{aligned}
 b_t^{\text{auf}}(\tau, \vartheta) = & \quad x_t \leq x_{t+\vartheta} \\
 & \wedge \quad x_{t+\tau} \leq x_{t+\tau+\vartheta} \\
 & \wedge \quad x_{t+\tau} \leq x_{t+\vartheta} \\
 & \wedge \quad x_t \leq x_{t+\tau+\vartheta} \text{ ,}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

ebenso im Fall $x_t \geq x_{t+\vartheta}$ mit

$$\begin{aligned}
 b_t^{\text{ab}}(\tau, \vartheta) = & \quad x_t \geq x_{t+\vartheta} \\
 & \wedge \quad x_{t+\tau} \geq x_{t+\tau+\vartheta} \\
 & \wedge \quad x_{t+\tau} \geq x_{t+\vartheta} \\
 & \wedge \quad x_t \geq x_{t+\tau+\vartheta} \text{ .}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

In den jeweils ersten beiden Zeilen wird auf gleiche Richtung getestet. Mit den letzten beiden Zeilen wird sicher gestellt, dass die Zeitreihe im Zeitraum $[\tau, \tau + \vartheta]$ den grau hinterlegten Bereich kreuzt. Als *ordinale Wiederkehr* definieren wird dann:

Definition 2.2 (Ordinale Wiederkehr)

Unter einer *ordinalen Wiederkehr* in die durch ϑ generierte Umgebung nach der Zeit τ verstehen wir den Fall, dass für $(x_t, x_{t+\vartheta}, x_{t+\tau}, x_{t+\tau+\vartheta})$ entweder b_t^{auf} oder b_t^{ab} gilt.

Durch die Umschreibung in b_t^{auf} und b_t^{ab} reduziert sich der Aufwand erheblich, da insgesamt nur vier Vergleiche zu einem Zeitpunkt t nötig sind, um eine Wiederkehr der Zeitreihe bei einer gewissen Wiederkehrzeit τ zu erkennen. Im ersten Schritt wird überprüft, ob das erste Wertepaar aufsteigend oder abfallend ist. Danach folgen im jeweiligen Fall drei weitere Schritte, um entweder b_t^{auf} oder b_t^{ab} zu verifizieren. Abbildung 2.3 veranschaulicht die beiden Bedingungen.

2.2 Visualisierung der Wiederkehr durch Rekurrenzplots

Eine grafische Visualisierung der Wiederkehrzeiten wurde von [Eckmann u. a. \(1987\)](#) unter dem Begriff der *Rekurrenzplots* (RP) eingeführt. Dabei wird die Rekurrenz, im Allgemeinen im D -dimensionalen Phasenraum $\mathbf{x}_t = (x_t, x_{t+\vartheta_1}, \dots, x_{t+\vartheta_{D-1}})$, als Boolesche Matrix

$$\mathbf{R}(t, s) = \Theta(\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_s\| - \Delta) \tag{2.6}$$

dargestellt, wobei $\Theta(\cdot)$ die Heaviside-Funktion bezeichnet. Es handelt sich um einen Test auf benachbarte Zeitpunkte im Phasenraum, welcher durch eine übliche zeitverzögerte Einbettung einer Komponente des zugrunde liegenden Systems konstruiert wird. In den folgenden Beispielen wollen wir zunächst den einfachen Fall $D = 1$ betrachten. Im Allgemeinen sind höhere Dimensionen nötig, um die Topologie des

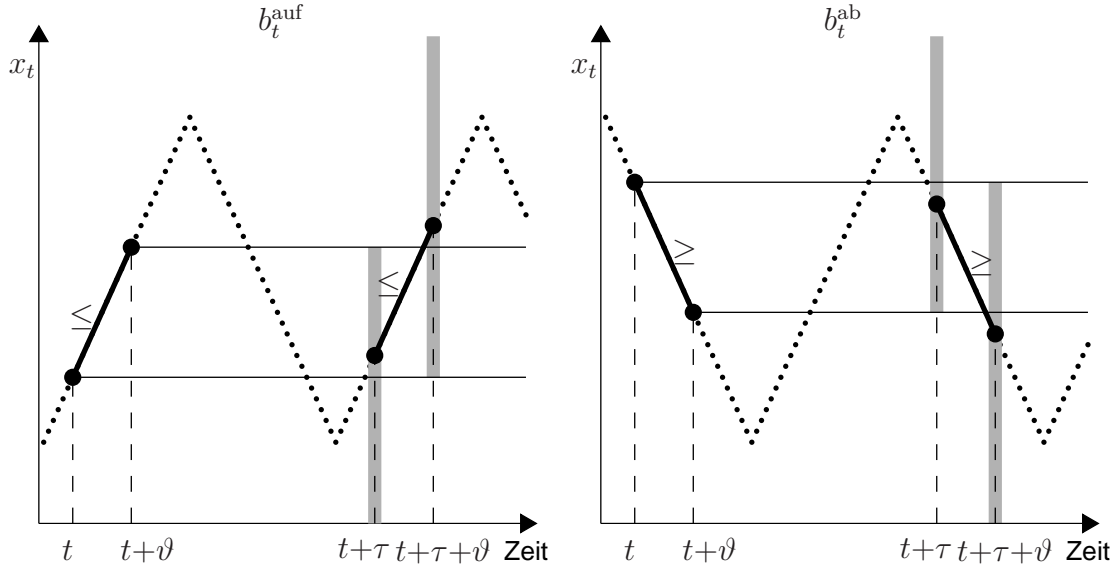


Abb. 2.3: Veranschaulichung der Bedingungen b_t^{auf} und b_t^{ab} an einer Sägezahnfunktion. Die grauen Bereiche markieren den zulässigen Wertebereich für $x_{t+\tau}$ und $x_{t+\tau+\vartheta}$, in denen die Bedingungen erfüllt sind

dynamischen Systems zu rekonstruieren (vgl. Abschnitt 2.5). Sind wir nur an kurzen Wiederkehrzeiten $\tau = s - t$ nahe der Hauptdiagonalen interessiert, so bietet sich die Darstellung

$$\mathbf{R}(t, \tau) = \Theta(\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t+\tau}\| - \Delta) \quad (2.7)$$

an (Close returns plots, Mindlin u. Gilmore, 1992). In gleicher Weise lässt sich die ordinale Wiederkehr in einer Booleschen Matrix der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\pi(t, s) &= b_t^{\text{auf}}(s - t, \vartheta) \vee b_t^{\text{ab}}(s - t, \vartheta) \\ \text{oder} \quad \mathbf{R}_\pi(t, \tau) &= b_t^{\text{auf}}(\tau, \vartheta) \vee b_t^{\text{ab}}(\tau, \vartheta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

darstellen, wobei wir in der Bezeichnung den Parameter ϑ nicht explizit angeben. Zudem verzichten wir auf eine unterschiedliche Bezeichnung der Matrizen in Abhängigkeit von der gewählten Darstellung. Hier unterscheiden wir durch die Verwendung von s oder τ .

In der originalen Definition der Rekurrenzplots wird ein variabler Abstand $\Delta = \Delta_t$ in der Weise eingeführt, dass eine feste Anzahl von Punkten \mathbf{x}_s in der Umgebung von \mathbf{x}_t enthalten sind (Fixed amount of nearest neighbors). Dies führt zu einem unsymmetrischen RP mit $\mathbf{R}(t, s) \neq \mathbf{R}(s, t)$, da im Allgemeinen $\Delta_t \neq \Delta_s$ gilt. Durch Wahl eines festen Abstands (vgl. Zbilut u. a., 1991) wird Symmetrie erreicht. Bei gewissen periodischen Funktionen, wie sie später in Abschnitt 2.3 behandelt werden, ergibt sich bei der ordinalen Wiederkehr trotz eines festen Abstands ϑ eine

feste Anzahl der Nachbarn. Zudem ist die Matrix der ordinalen Wiederkehr eine symmetrische Matrix mit $\mathbf{R}_\pi(t, s) = \mathbf{R}_\pi(s, t)$.

In Arbeiten von Zbilut u. a. (1998) und Marwan u. a. (2002b) wurden die Rekurrenzplots auf einen Abstandstest zwischen zwei Zeitreihen $\|\mathbf{x}_t - \mathbf{y}_s\| \leq \Delta$ verallgemeinert, um bivariate Kopplungen zu analysieren (Cross recurrence plots, CRP). Ein vergleichbarer, ordinaler Ansatz wird in Kapitel 3 eingeführt.

Zunächst folgen ein paar einführende Beispiele in Abhängigkeit von t und s . Danach gehen wir zu t und τ über, da in dieser Darstellung Veränderungen in der Periodendauer einfacher zu erkennen sind.

Beispiel 2.1 (t, s) Mit Hilfe der RPs können wir auf die Dynamik des untersuchten Systems zurückschließen, wobei wir an unterschiedlichen Strukturen interessiert sind.

Im Falle eines Rauschens treten nur zufällig verteilte Punkte auf (Abb. 2.4, oben). Bei der ordinalen Wiederkehr ist die relative Häufigkeit dieser Punkte unabhängig von ϑ und von der Verteilung des Rauschens, da die Ordnungsmuster gleichverteilt sind. Bei den Rekurrenzplots mit festem Δ hingegen hängt die Wiederkehr sowohl von Δ als auch von der Verteilung des Rauschens ab.

Bei periodischen Funktionen wie der Sinusfunktion weisen die Matrizen diagonale Linien auf (Abb. 2.4, Mitte), da die Trajektorien nach Vielfachen der Periode zurückkehren. Bei der Definition der ordinalen Wiederkehr werden nur Zeitpunkte mit gleichem Anstieg beachtet, folglich gibt es keine zur Hauptdiagonalen senkrechten Linien. Diese entstehen bei den RPs durch eine zu niedrige Einbettung (hier $D = 1$). Durch geeignete Einbettung $D \geq 2$ verschwinden diese Linien. Eine höherdimensionale Einbettung kann z.B. durch eine logische UND-Verknüpfung zeitlich verschobener RPs berechnet werden (siehe Abschnitt 2.5).

Ist die Periodendauer zeitlich veränderlich, führt dies zu gekrümmten Linien (Abb. 2.4, unten).

Beispiel 2.2 (t, τ) Gehen wir von der Parameterdarstellung (t, s) zu (t, τ) über, transformieren sich die Strukturen. So werden diagonale Linien $\mathbf{R}_\pi(t + k, s + k) = 1$ zu horizontalen Linien $\mathbf{R}_\pi(t + k, \tau) = 1$ transformiert (Abb. 2.5.a). Bei einer zeitlich veränderlichen Periode gibt der Abstand der Linie zur Nulllinie ($\tau = 0$) die momentane Periodendauer wieder (Abb. 2.5.b).

Bevor wir zur Schätzung der Periodendauer mit Hilfe der ordinalen Wiederkehr kommen, soll zunächst die Verteilung der Rekurrenzpunkte $\mathbf{R}_\pi = 1$ entlang t in Abhängigkeit von τ und ϑ an Modellsystemen analysiert werden.

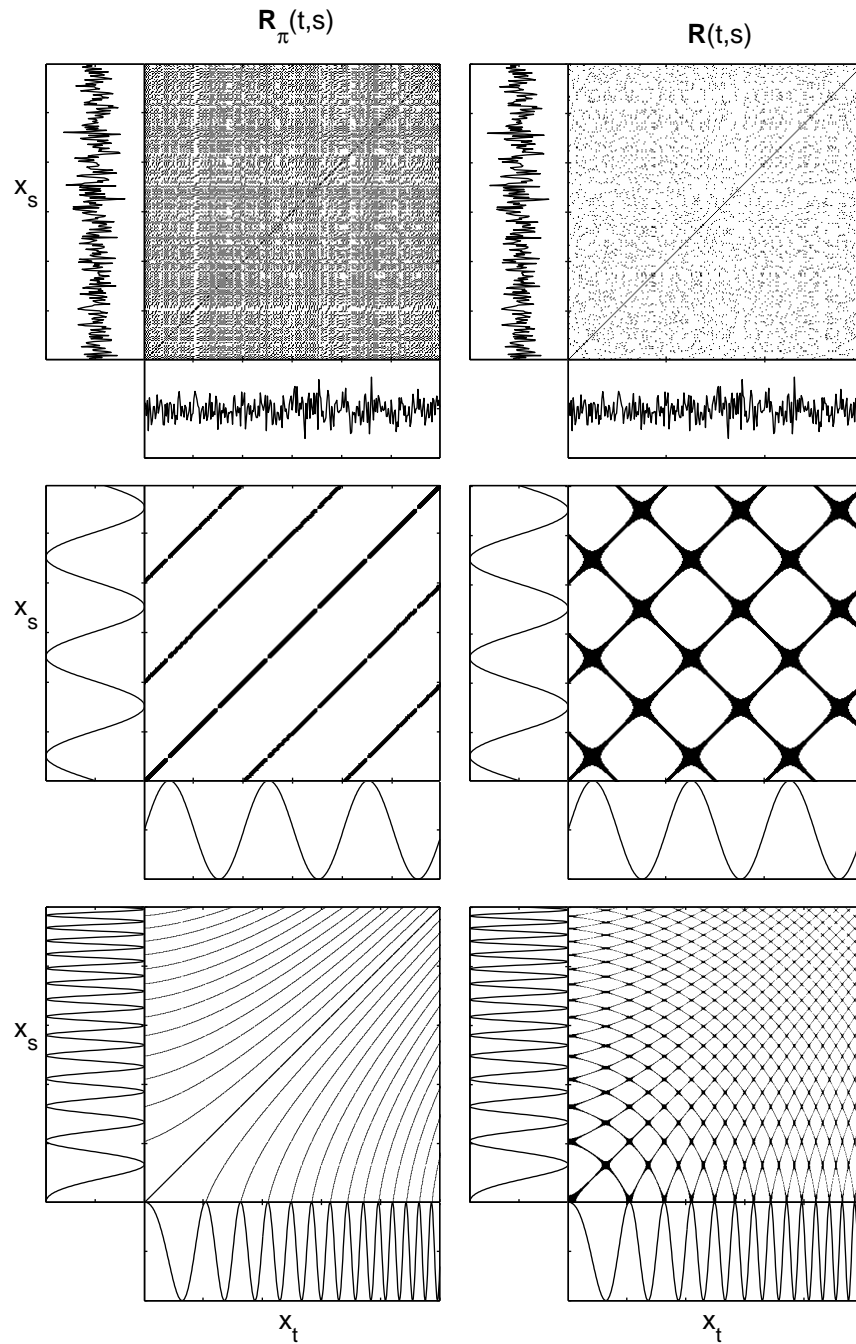


Abb. 2.4: links: Ordinale Wiederkehr, rechts: Rekurrenzplots mit $D = 1$ in Abhängigkeit von t und s . Oben: normalverteiltes Rauschen, Mitte: Sinusfunktion und unten: Sinus mit abfallender Periodendauer (sweep)

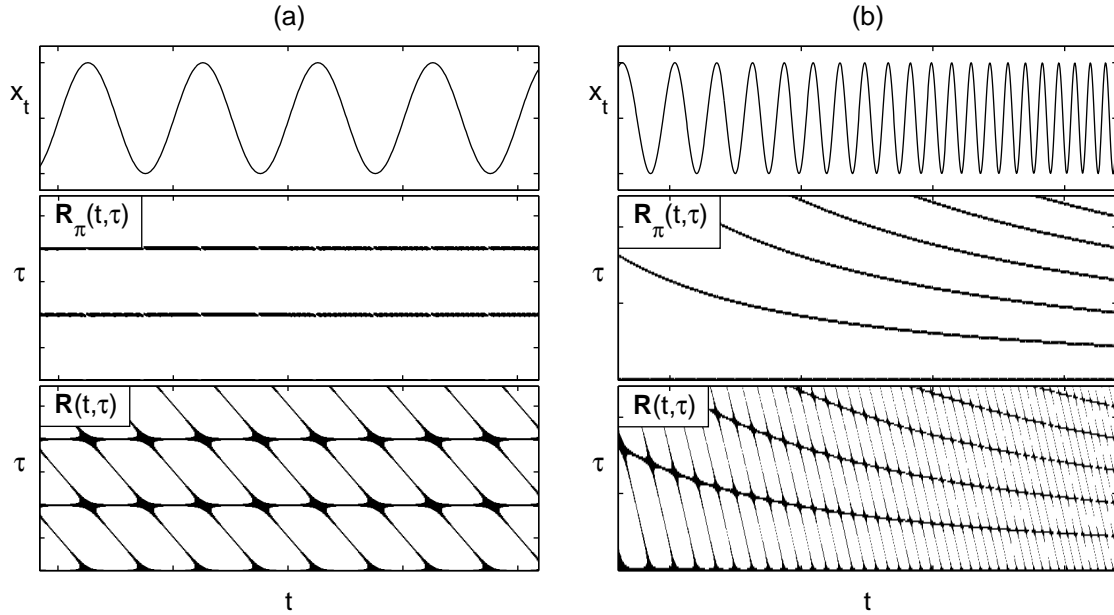


Abb. 2.5: Ordinale Wiederkehr und RP ($D = 1$) in Abhängigkeit von t und τ . (a) Periodische Funktion. (b) Sinus mit abfallender Periodendauer (sweep)

2.3 Verteilung der Wiederkehrzeiten bei Modellfunktionen

Um die Betrachtung der Verteilung von (2.4) und (2.5) zu vereinfachen, sollen die Parameter t , τ und ϑ als kontinuierlich, $t, \tau, \vartheta \in \mathbb{R}$, angenommen werden. So umgehen wir u.a. das Problem der inkommensurablen Abtastung periodischer Funktionen. In diesem Fall würde es nicht ausreichen, die diskreten Zeitreihen nur innerhalb weniger Perioden zu betrachten. Durch ein irrationales Verhältnis des Abtastintervalls zur Periodendauer können diese Zeitreihen durch eine periodische Fortsetzung nicht rekonstruiert werden.

Wir betrachten eine Funktion x_t mit kontinuierlicher Zeit $t \in \mathbb{R}$. Die Bedingungen für eine ordinale Wiederkehr (2.4) bzw. (2.5) bleiben dabei erhalten. In Abhängigkeit von der Wiederkehrzeit τ interessieren wir uns nun für die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Bedingungen erfüllt sind:

Definition 2.3 (Verteilung der ordinalen Wiederkehrzeit)

Gegeben sei eine Funktion x_t . Unter der *Verteilung der ordinalen Wiederkehrzeit* $P(\tau, \vartheta)$ in Abhängigkeit von der Zeitverzögerung τ verstehen wir die Gesamtlänge aller Zeitintervalle für t , in denen entweder $b_t^{\text{auf}}(\tau, \vartheta)$ oder $b_t^{\text{ab}}(\tau, \vartheta)$ gilt.

In der Terminologie der Rekurrenzplots wird diese Größe auch als *Rekurrenzrate* bezeichnet (Recurrence quantification analysis, [Webber Jr. u. Zbilut, 1994](#)).

Betrachten wir ein unendlich langes Zeitintervall, so würde die Gesamtlänge der Intervalle und damit die Verteilung auch gegen unendlich gehen. Deshalb beschränken wir P auf ein geeignetes, endliches Intervall. Ein sinnvolles Intervall bei periodischen Funktionen ist eine Periode der Länge T . Durch Normierung

$$p(\tau, \vartheta) = \frac{P(\tau, \vartheta)}{T} \quad (2.9)$$

erhalten wir die Wahrscheinlichkeit für eine ordinale Wiederkehr nach der Zeit τ , wobei $0 \leq p(\tau, \vartheta) \leq 1$ gilt.

2.3.1 Asymmetrische Sägezahnfunktion

Fangen wir zunächst mit einer zwar einfachen, aber dennoch grundlegenden Funktion, der asymmetrischen Sägezahnfunktion an (Abb. 2.6). Aufgrund der ordinalen Herangehensweise wird eine ganze Klasse von Funktionen erfasst, da eine streng monoton ansteigende Transformation der Amplitude die Ordnungsrelationen und damit \mathbf{R}_π nicht ändert. So erfassen wir mit der Sägezahnfunktion u.a. auch die Sinusfunktion ($a = T/2$). Mit dem Asymmetrieparameter $a \in [0, T]$ kann das Ver-

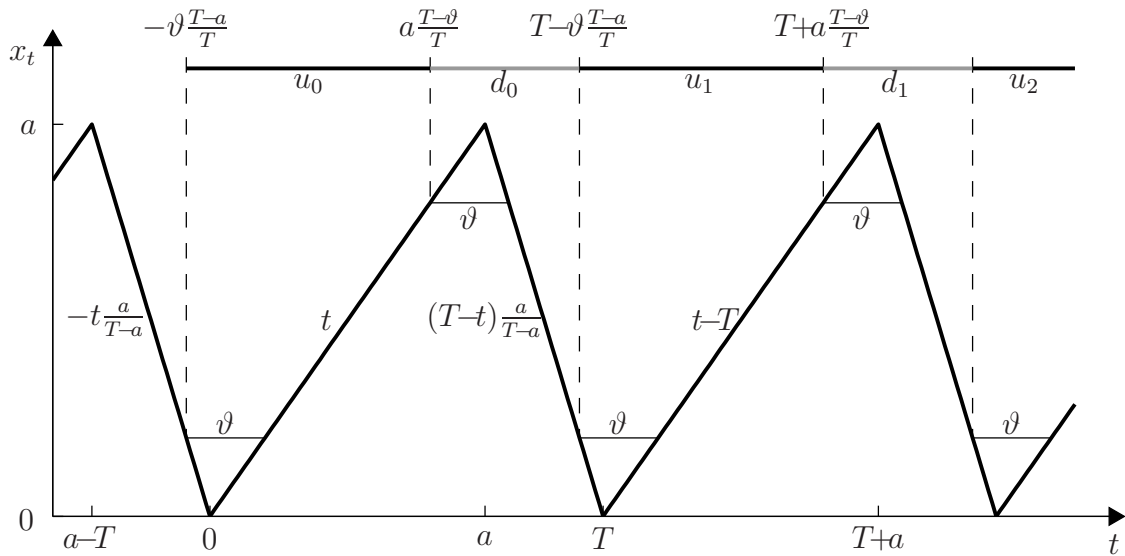


Abb. 2.6: Asymmetrische Sägezahnfunktion der Periode T und Asymmetrieparameter a

hältnis von an- und absteigenden Bereichen verändert werden. Bei $a = T/2$ sprechen wir von einer symmetrischen Sägezahnfunktion bzw. Dreiecksfunktion. In den Grenzfällen $a = 0$ und $a = T$ besitzt die Funktion Sprungstellen.

Um Regeln für die Gültigkeit von b^{auf} und b^{ab} in Abhängigkeit von den Parametern t , τ und ϑ zu finden, behandeln wir deren einzelne Ungleichungen schrittweise.

Zunächst zerlegen wir x_t in auf- und absteigende Intervalle u_n und d_n , wobei in ihnen

$$\begin{aligned} u_n &: x_t \leq x_{t+\vartheta} \\ d_n &: x_t \geq x_{t+\vartheta} \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (2.10)$$

gilt (Abb. 2.6). In diesen Intervallen sind jeweils die ersten beiden Ungleichungen aus (2.4) und (2.5) erfüllt, wenn entweder $\{t, t + \tau\} \subset \bigcup_n u_n$ oder $\{t, t + \tau\} \subset \bigcup_n d_n$ gilt. Um im nächsten Schritt die Gültigkeit der verbleibenden Ungleichungen zu diskutieren, gehen wir in den \mathbb{R}^2 über. Dabei wird der Zeitbereich t mit den Intervallen u_n und d_n auf die y-Achse übertragen (Abb. 2.7.a). Entlang der x-Achse

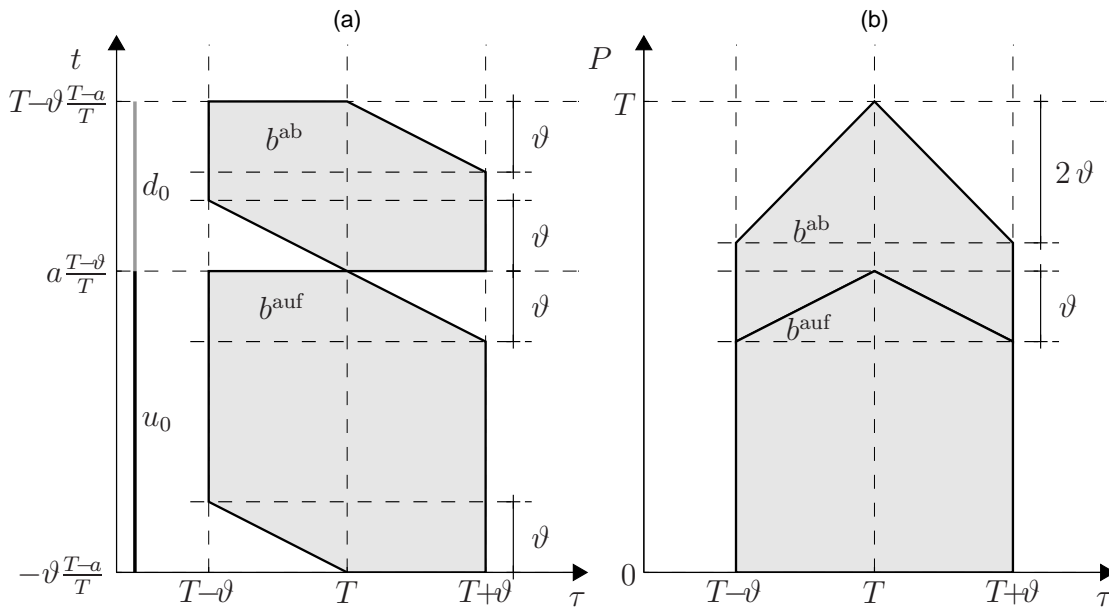


Abb. 2.7: (a) Gültigkeitsbereiche für b^{auf} und b^{ab} in Abhängigkeit von t, τ, ϑ und (b) die daraus resultierende Verteilung $P(\tau, \vartheta)$ bei einer asymmetrischen Sägezahnfunktion der Periode T (vgl. Abb. 2.6)

tragen wir die zeitliche Verzögerung τ auf. Wir behandeln zunächst nur den Fall $t \in u_0$ und $t + \tau \in u_1$ bzw. $t \in d_0$ und $t + \tau \in d_1$, was der Wiederkehr nach einer Periode entspricht. Es ist offensichtlich, dass aufgrund der jeweils letzten beiden Ungleichungen $t + \tau$ nicht in ganz u_1 bzw. d_1 variieren kann. In Abhängigkeit von t sind nur bestimmte, kürzere Intervalle für τ zulässig:

- Ist t gleich der linken Grenze von u_0 , so kann τ nur im Bereich $[T, T + \vartheta]$ variieren.
- Dieser Bereich erweitert sich zu $\tau \in [T - \vartheta, T + \vartheta]$, sofern t mindestens einen Abstand ϑ zu den Intervallgrenzen von u_0 hat.

- An der rechten Intervallgrenze von u_0 verringert sich der Bereich für τ auf $[T - \vartheta, T]$.

Abbildung 2.7.a verdeutlicht den Gültigkeitsbereich von b^{auf} in Abhängigkeit von dessen Parametern t , τ und ϑ . Vollkommen analog ergibt sich der Gültigkeitsbereich von b^{ab} .

Aus der Gesamtlänge der Intervalle, in denen entweder b^{auf} oder b^{ab} gilt, erhalten wir dann $P(\tau, \vartheta)$ (Abb. 2.7.b), wobei wir uns auf den Bereich einer Periode $u_0 \cup d_0$ beschränken. Es handelt sich dabei um eine symmetrische Funktion mit dem Maximum bei der Periodendauer $\tau = T$. Über den Abstand ϑ wird die Form verändert, mit den beiden Spezialfällen:

Dreiecksverteilung Mit $\vartheta = T/2$ erhalten wir eine Dreiecksverteilung, die bei $\tau \in \{T/2, T + T/2\}$ Null wird.

Deltaverteilung Mit $\vartheta = 0$ erhalten wir eine Deltaverteilung, die nur bei $\tau = T$ verschieden von Null ist.

Durch den Übergang zu $p = P/T$ wird die Höhe der Verteilung auf $p(\tau = T, \vartheta) = 1$ normiert.

Betrachten wir beliebige Parameter t und τ , so wiederholen sich die Bereiche b^{auf} und b^{ab} periodisch. In Richtung von t treten die Bereiche abwechselnd auf und bilden eine „Linienstruktur“. In Richtung von τ wiederholt sich diese Struktur im Abstand einer Periode. In der Verteilung $p(\tau, \vartheta)$ spiegelt sich dies ebenfalls durch eine periodische Struktur wider.

Ergebnis. Es zeigt sich zunächst also, dass die Verteilung der ordinalen Wiederkehr unabhängig vom Asymmetrieparameter a ist. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass die Klasse der Funktionen noch weiter verallgemeinert werden kann, ohne die Verteilung zu verändern.

2.3.2 Periodische Funktionen mit unimodaler Grundperiode

Wir wollen nun die zu betrachtende Klasse von Funktionen auf beliebige periodische Funktionen mit unimodaler Grundperiode erweitern.

Definition 2.4 (Unimodale Funktion)

Wir betrachten eine stetige Funktion x_t im Intervall $t \in [0, T]$. Wir sprechen von einer *unimodalen Funktion*, wenn für ein $a \in [0, T]$ folgende Bedingungen gelten:

1. Im Intervall $t \in [0, a]$ ist x_t streng monoton ansteigend.
2. Im Intervall $t \in [a, T]$ ist x_t streng monoton abfallend.

Diese Definition ist aufgrund der strengen Monotonie etwas verschärft gegenüber dem üblichen Begriff „unimodal“. Dies ist aber eine sinnvolle Forderung an die Funktion, um das Problem der Gleichheit bei der ordinalen Zeitreihenanalyse zu umgehen. Durch periodische Fortsetzung dieser Funktion gelangen wir dann zu folgender Klasse von Funktionen:

Definition 2.5 (Periodische Funktion mit unimodaler Grundperiode)

Gegeben sei eine unimodale Funktion x_t im Intervall $t \in [0, T]$. Unter einer *periodischen Funktion mit unimodaler Grundperiode* verstehen wir die periodische Fortsetzung dieser Funktion $x_{t+kT} = x_t$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Zudem verlangen wir $x_0 = x_T$.

In diese Klasse von Funktionen fällt auch die zuvor betrachtete asymmetrische Sägezahnfunktion. Dabei zeigt sich, dass die Verteilung der Wiederkehrzeit unabhängig

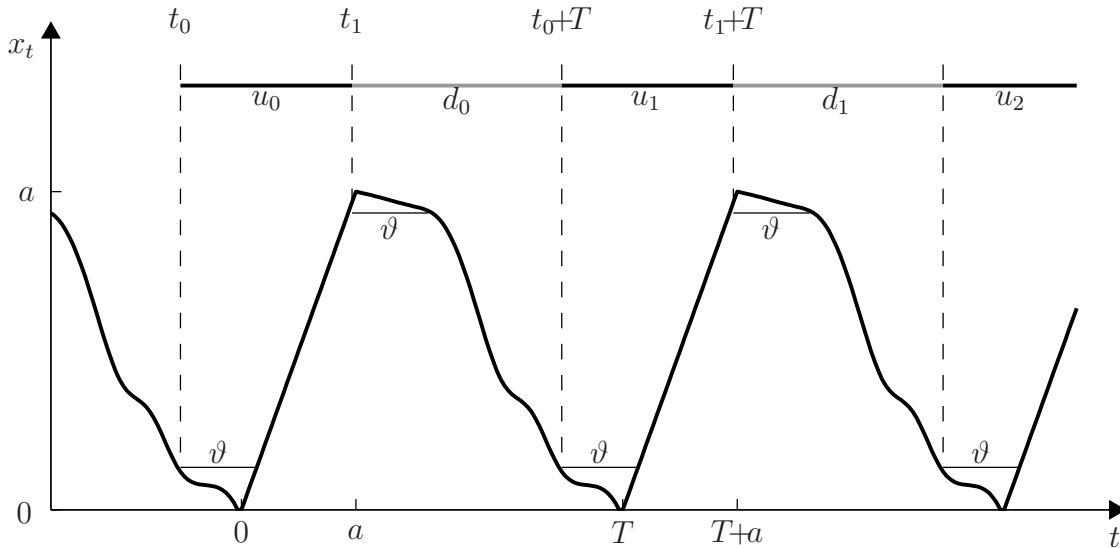


Abb. 2.8: Periodische Funktion mit unimodaler Grundperiode der Periode T und Asymmetrieparameter a

vom Verlauf der Funktion ist.

Satz 2.1 Gegeben sei eine periodische Funktion x_t mit unimodaler Grundperiode T , die der Definition 2.5 genügt. Wir betrachten einen zeitlichen Abstand ϑ im Bereich $0 \leq \vartheta \leq T/2$. Für die Verteilung $p(\tau, \vartheta) = P(\tau, \vartheta)/T$ der ordinalen Wiederkehr $b_t^{\text{auf}}(\tau, \vartheta)$ oder $b_t^{\text{ab}}(\tau, \vartheta)$ gilt dann

$$p(\tau, \vartheta) = \begin{cases} 1 - \frac{2\varepsilon}{T} & : \quad \varepsilon = |\tau - nT| \leq \vartheta \\ 0 & : \quad \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.11)$$

mit $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Die Herleitung von p verläuft in vergleichbarer Weise zu Abschnitt 2.3.1. Wir zerlegen auch hier zunächst x_t in Intervalle u_n und d_n wie in Abb. 2.8 eingezeichnet, wobei wiederum (2.10) gilt. Die Intervallgrenzen ergeben sich implizit zu

$$\begin{aligned} x_{t_0} &= x_{t_0+\vartheta} \\ x_{t_1} &= x_{t_1+\vartheta} \end{aligned} \quad (2.12)$$

die aufgrund der Forderungen der strengen Monotonie und Stetigkeit an x_t existieren und eindeutig definiert sind.

Wir betrachten zunächst die Wiederkehr b_t^{auf} nach einer Periode, d.h. $t \in u_0$ und $t + \tau \in u_1$. Dadurch sind die erste und zweite Zeile in (2.4) stets erfüllt. In Abhängigkeit von t erhalten wir für die verbleibenden zwei Zeilen die Fälle:

1. $t_0 \leq t \leq t_0 + \vartheta$: Damit $x_{t+\tau} \leq x_{t+\vartheta} = x_{t+T+\vartheta}$ ist, muss $t + \tau \leq t + T + \vartheta$ sein. Weil stets $x_{t+\tau+\vartheta} \geq x_{t_0+T} = x_{t_0} \geq x_t$ gilt, ist dies schon hinreichend, d.h. b_t^{auf} trifft für $t_0 + T \leq t + \tau \leq t + T + \vartheta$ zu.
2. $t_0 + \vartheta \leq t \leq t_1 - \vartheta$: Hier ist leicht einzusehen, dass b_t^{auf} gilt, sofern $t + T - \vartheta \leq t + \tau \leq t + T + \vartheta$ ist.
3. $t_1 - \vartheta \leq t \leq t_1$: Wie im letzten Fall muss $t + T - \vartheta \leq t + \tau$ gelten, damit $x_t = x_{t+T} \leq x_{t+\tau+\vartheta}$ ist. Dies ist analog zum ersten Fall schon hinreichend, da stets $x_{t+\tau} \leq x_{t_1+T} = x_{t_1} \leq x_{t+\vartheta}$ gilt. Damit trifft b_t^{auf} für $t + T - \vartheta \leq t + \tau \leq t_1 + T$ zu.

Subtrahieren wir von den erhaltenen Ungleichungen τ , so gilt b_t^{auf} in Abhängigkeit von ϑ und τ in einem kleineren Bereich von $t \in u_0 = [t_0, t_1]$ mit

$$t \in [t_0 + T - \tau, t_1 + T - \tau] \cap [t_0, t_1] \quad (2.13)$$

Es sind zwei Fälle für $\varepsilon = |\tau - T|$ zu unterscheiden: Ist $\tau \leq T$, dann erhalten wir das Intervall $t \in [t_0 + \varepsilon, t_1]$. Ist $\tau \geq T$, dann erhalten wir das Intervall $t \in [t_0, t_1 - \varepsilon]$. Die Länge reduziert sich damit auf $t_1 - t_0 - \varepsilon$. Zudem verlangen alle Ungleichungen, dass $\varepsilon \leq \vartheta$ ist, da sonst keine Intervalle für t existieren.

In gleicher Weise erhalten wir den Bereich für b_t^{ab} mit $t \in d_0$ und $t + \tau \in d_1$, wobei sich die Länge ebenfalls auf $t_0 + T - t_1 - \varepsilon$ reduziert (vgl. Abb. 2.9). Damit erhalten wir für die Gesamtlänge $T - 2\varepsilon$ im Intervall $t \in u_0 \cup d_0$.

Aufgrund der Periodizität von x_t erhalten wir für $t \in u_0 \cup d_0$ und $t + \tau \in u_n \cup d_n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ stets die gleichen Bedingungen für b_t^{auf} und b_t^{ab} , was zu einer in τ periodischen Verteilung p führt. \square

Es ist denkbar, die Funktion x_t in der Art zu transformieren, dass alle aufsteigenden Abschnitte linear ansteigen (vgl. Abb. 2.8). Im Allgemeinen gelangen wir damit jedoch nicht wieder zur Sägezahnfunktion, da wir in der Definition 2.5 viel

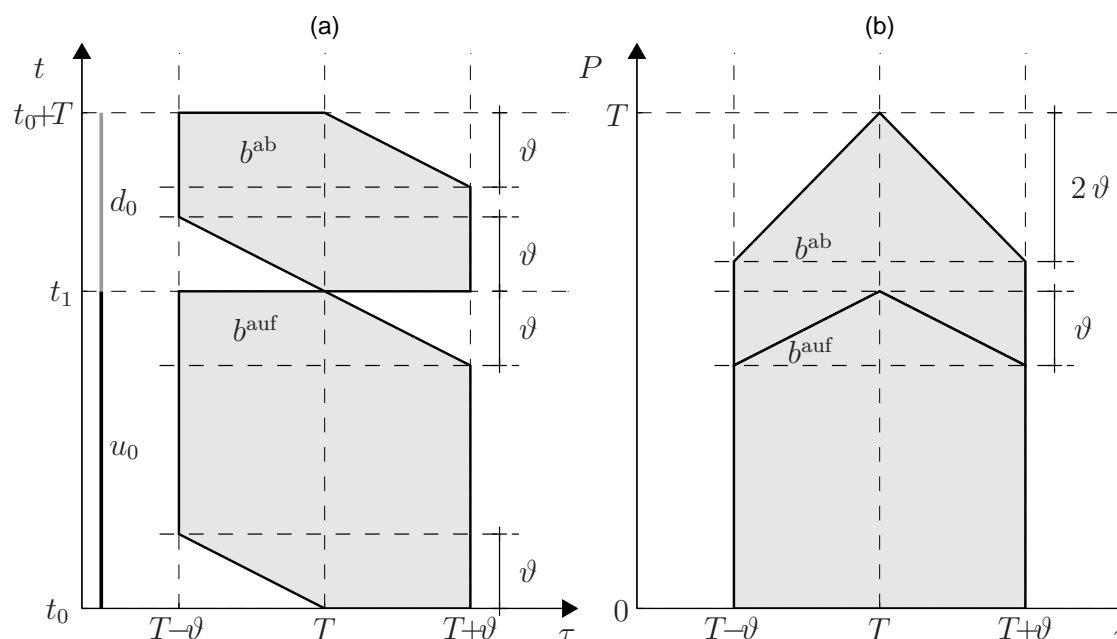


Abb. 2.9: (a) Gültigkeitsbereiche für b^{auf} und für b^{ab} in Abhängigkeit von t, τ, ϑ und (b) die daraus resultierende Verteilung $P(\tau, \vartheta)$ bei einer periodischen Funktion mit unimodaler Grundperiode der Länge T

allgemeinere Funktionen betrachten. Trotzdem stellt die Verteilung eine invariante Größe dar. Allein durch den Ansatz einer Analyse auf ordinalem Niveau ist Invarianz zunächst gegenüber gewissen Transformationen der Amplitude gegeben. Hinzu kommt die in diesem Abschnitt gewonnene Erkenntnis, dass die Analyse u.a. unabhängig von der Asymmetrie ist, solange die Funktion der Definition 2.5 genügt. Sind wir nur an einer Schätzung der Periodendauer interessiert, stellt uns diese Methode eine sehr robuste Möglichkeit zur Verfügung.

2.4 Schätzung der Periodendauer

In den vorangehenden Abschnitten wurde diskutiert wie die Verteilung der ordinalen Wiederkehrzeiten für eine bestimmte Klasse von Funktionen aussieht. In der Anwendung interessiert aber meist ein daraus extrahierter Wert für die Periodendauer. Im folgendem Abschnitt 2.4.1 soll zunächst mit Hilfe des Wissens über die theoretische Verteilung P bzw. p ein Schätzer für die Periodendauer unimodaler Funktionen konstruiert werden. Ein mehr praktisch motivierter Ansatz für allgemeinere Zeitreihen folgt in Abschnitt 2.4.2.

2.4.1 Schätzung bei Modellfunktionen

Wir betrachten eine beliebige Funktion der Periode T , die der Definition 2.5 genügt. Wie aus Abschnitt 2.3 bekannt, folgt für die Verteilung der Wiederkehrzeiten im Intervall $\tau \in [T - T/2, T + T/2]$

$$p(\tau, \vartheta) = p_T(\tau, \vartheta) = \begin{cases} (2\tau - T)/T & : T - \vartheta \leq \tau \leq T \\ (-2\tau + 3T)/T & : T \leq \tau \leq T + \vartheta \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Außerhalb dieses Intervalls setzt sich die Verteilung im Abstand T periodisch fort. Bei der Schätzung der Periodendauer ist uns nur diese Verteilung bekannt. Um bei der Periodenschätzung die Grundperiode und nicht deren Vielfache zu schätzen, vergleichen wir die zu untersuchende Verteilung p_T mit einer Test-Verteilung $p_{T'}$. Dabei liegt p_T der unbekanntten Periode T und $p_{T'}$ einer Test-Periode T' zugrunde. Wir betrachten deren Abstand

$$K(T', T, \vartheta) = \frac{\int_{T'-\vartheta}^{T'+\vartheta} |p_{T'}(\tau, \vartheta) - p_T(\tau, \vartheta)| \, d\tau}{\int_{T'-\vartheta}^{T'+\vartheta} p_{T'}(\tau, \vartheta) \, d\tau}, \quad (2.15)$$

welcher durch die Normierung zwischen $0 \leq K \leq 1$ variiert. Einen Schätzer \hat{T} für die Periodendauer T erhalten wir dann durch Minimierung des Abstandes K mit

$$\hat{T} = \arg \min_{T'} K(T', T, \vartheta). \quad (2.16)$$

Folgendes Beispiel soll die Funktionsweise dieses Schätzers an einem Modellsystem illustrieren.

Beispiel 2.3 Untersucht wird eine Sägezahnfunktion der Periode $T = 200$. Die Verteilung p_T wiederholt sich periodisch, während $p_{T'}$ von der gerade getesteten Periodendauer abhängt (Abb. 2.10.a). Nur bei $T' = T$ stimmen die beiden Verteilungen überein, womit K an dieser Stelle verschwindet (Abb. 2.10.b). Bei allen anderen Werten T' ist $K > 0$ und die geschätzte Periode \hat{T} stimmt mit der tatsächlichen Periode T überein.

Dass es sich um einen erwartungstreuen Schätzer handelt, kann auch auf analytischem Wege gezeigt werden. Dabei genügt es, nur die Fälle $T' = nT$ mit $n \in \mathbb{N}$ zu betrachten. Aufgrund der Symmetrie der Verteilungen müssen wir den Abstand nur in den Intervallen $\tau \in [nT - \vartheta, nT]$ berechnen. In ihnen gilt

$$p_T = \frac{2(\tau - (n-1)T) - T}{T}$$

$$p_{T'} = \frac{2\tau - nT}{nT},$$

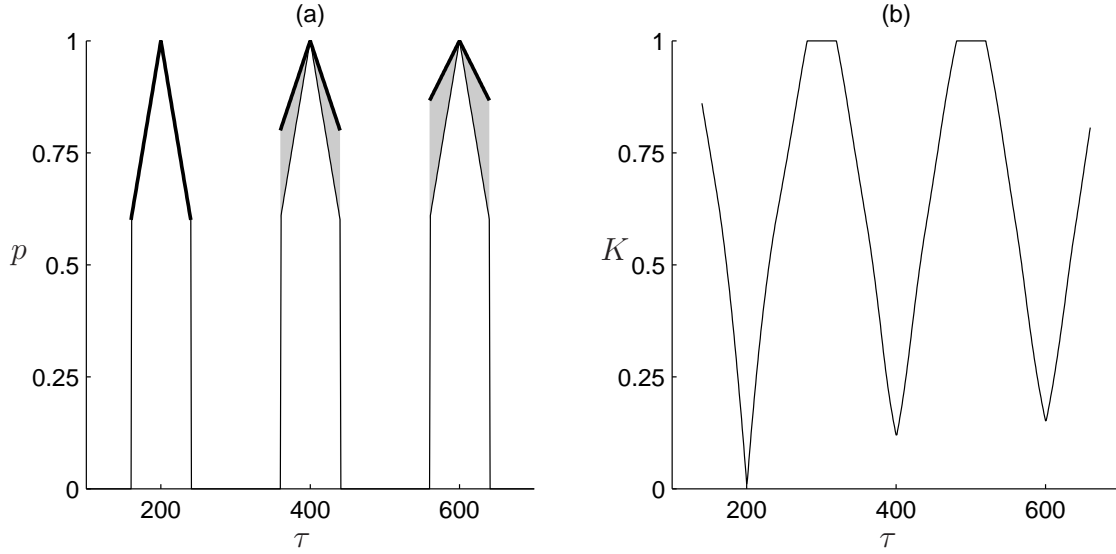


Abb. 2.10: (a) Verteilung p_T (dünne Linie) und Test-Verteilung $p_{T'}$ (dicke Linie) an den Stellen $T' = T, 2T, 3T$ und (b) der daraus resultierende Abstand K . Parameter $\vartheta = 40$

wobei p_T durch periodische Wiederholung des Falles $n = 1$ entsteht und $p_{T'}$ die Test-Verteilung bei $T' = nT$ darstellt. Eingesetzt in (2.15) ergibt sich für den Abstand

$$K(T' = nT, T, \vartheta) = \frac{2 \int_{nT-\vartheta}^{nT} \left| \frac{2\tau - nT}{nT} - \frac{2(\tau - (n-1)T) - T}{T} \right| d\tau}{2 \int_{nT-\vartheta}^{nT} \frac{2\tau - nT}{nT} d\tau} .$$

Da im Integrationsbereich stets $p_{T'} \geq p_T$ gilt, kann der Betrag auch weggelassen werden. Die beiden Integrale lassen sich ohne Probleme lösen und für den Abstand ergibt sich der einfache Ausdruck

$$K(T' = nT, T, \vartheta) = \vartheta \frac{n-1}{nT-\vartheta} \quad n \in \mathbb{N} . \quad (2.17)$$

Bei $n = 1$ verschwindet der Abstand, da hier beide Verteilungen übereinstimmen und es wird korrekt $\widehat{T} = T$ geschätzt (Abb. 2.11). Zwar wurde nicht der Fall $n \in \mathbb{R}$ beachtet, jedoch ist leicht einzusehen, dass der Abstand verschieden von Null ist, sobald T' geringfügig von T abweicht.

2.4.2 Schätzung der Fundamentalperiode in Sprachsignalen

In diesem Abschnitt geht es um die praktische Anwendung der ordinalen Wiederkehr zur Schätzung der Fundamentalperiode in Sprachsignalen. In Arbeiten von

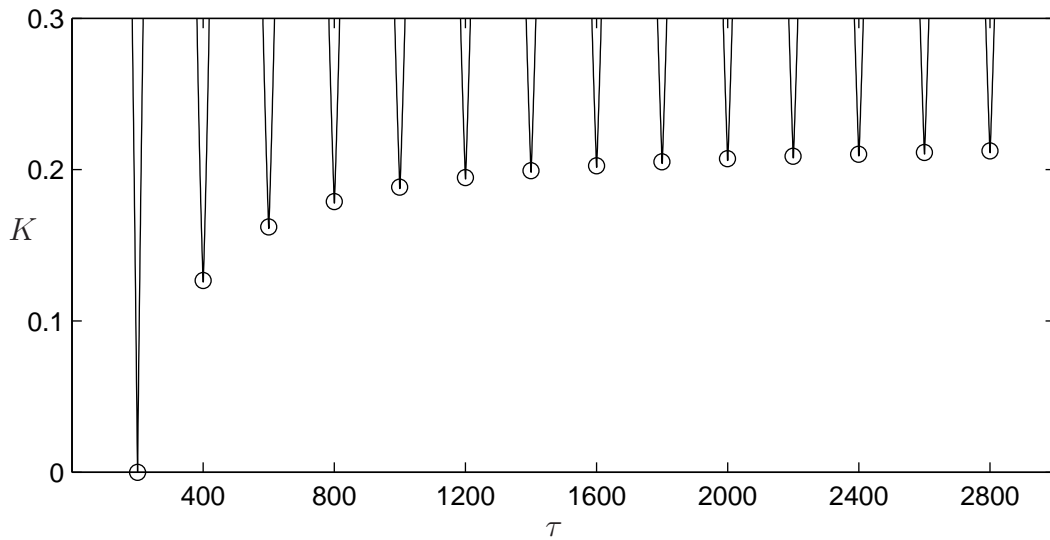


Abb. 2.11: Numerisch berechneter Abstand (Linie) und analytisch berechneter Abstand (Kreise)

Matassini u.a. wurden bereits Rekurrenzplots in der Sprachsignalverarbeitung angewandt. Dort lag jedoch der Schwerpunkt auf der Reduzierung des Rauschens und der Analyse von Sprachstörungen (Matassini, 2001; Matassini u. a., 2002).

In der Lautlehre, der Phonetik, unterscheidet man im Wesentlichen zwischen stimmhaften und stimmlosen Lauten. Bei den stimmhaften Lauten werden die Stimmbänder angespannt und formen eine enge Ritze. Im Luftstrom der Lunge fangen diese dann an zu schwingen, wodurch der Luftstrom periodisch moduliert wird. In Abhängigkeit von der Stärke der Anspannung verändert sich die Periodendauer und damit die Tonhöhe. Bei den stimmlosen Lauten sind die Stimmbänder so weit auseinander, dass es zu keinen Schwingungen kommt. Im weiteren Verlauf durch den Rachenraum wird der Luftstrom durch Geometrieveränderungen moduliert (z.B. mittels Zunge, Zähne und Lippen), was den Lauten ihren speziellen Charakter gibt. Die kleinste bedeutungsunterscheidende Einheit in der Sprache ist das *Phonem*. In Abb. 2.12 sind einige Beispiele für Phoneme dargestellt. Bei den stimmhaften Phonemen (/a:/, /e:/, /o:/, /n:/ und /m:/) ist die durch die Stimmbänder erzeugte Fundamentalperiode deutlich zu erkennen. Aufgrund der Modulation im Rachenraum ist der zeitliche Verlauf jedoch recht unterschiedlich. Das stimmlose Phonem /s:/ hingegen ähnelt sehr stark einem Rauschen. Diese Strukturen spiegeln sich auch in der ordinalen Wiederkehr \mathbf{R}_π wider. Bei stimmhaften Lauten finden wir ausgeprägte Linien im Abstand von einer Periode, während bei stimmlosen Lauten diese Linienstruktur fehlt.

Bei der Behandlung des Algorithmus betrachten wir zunächst nur stationäre Abschnitte von Phonemen, in denen das Signal als periodisch angesehen werden

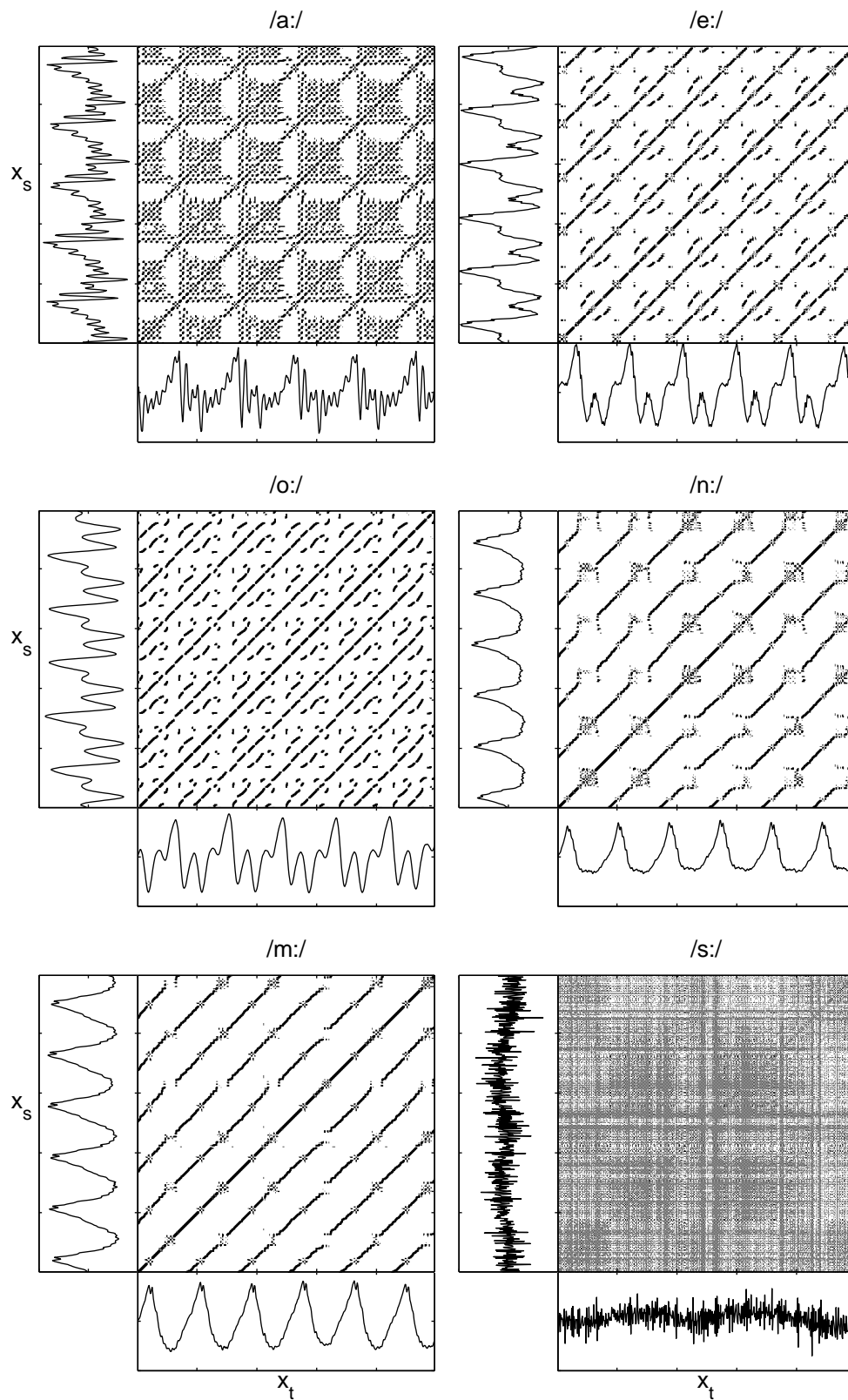


Abb. 2.12: Ordinale Wiederkehr $R_\pi(t, s)$ bei verschiedenen Phonemen, $\vartheta = 1.33\text{ms}$

kann (Monophthong). So gibt es in der Phonetik auch Zwielaute, bei denen ein Übergang zwischen zwei Vokalen (z.B. /ei/, /au/ und /eu/) gesprochen wird (Diphthongs). Im Allgemeinen verlangt die Analyse der Periode eine Zerlegung des Signals in hinreichend kurze Fenster, da zudem die Tonhöhe beim Sprechen variiert. Diese Aspekte werden in Abschnitt 2.7 näher beleuchtet.

Algorithmus

Im Allgemeinen genügen die stimmhaften Phoneme nicht dem Ansatz einer unimodalen Fundamentalperiode. Zudem ist das Problem des Beobachtungsrauschens gegeben. Deshalb muss von einem Schätzer wie in (2.16) abgesehen und die Problematik von praktischen Gesichtspunkten aus beleuchtet werden.

Haben wir bei kontinuierlichen Funktionen die Verteilung der Wiederkehrzeit über Intervalle betrachtet, so interessieren wir uns jetzt bei diskreten Zeitreihen (x_1, \dots, x_L) für die Häufigkeitsverteilung. Ausgehend von $\mathbf{R}_\pi(t, \tau)$ (vgl. (2.8) auf Seite 11) wird die Verteilung $p(\tau)$ (Rekurrenzrate) durch die relative Häufigkeit

$$\hat{p}(\tau) = \frac{1}{L - \tau - \vartheta} \sum_{t=1}^{L-\tau-\vartheta} \mathbf{R}_\pi(t, \tau) \quad (2.18)$$

geschätzt.

In Abb. 2.13 ist \mathbf{R}_π nun in Abhängigkeit von t und τ an ausgewählten Phonemen dargestellt. Dabei ist die Periodizität der stimmhaften Phoneme sehr deutlich an ausgeprägten Maxima (*Peaks*) in der Rekurrenzrate zu erkennen. Für das stimmlose Phonem /s:/ erhalten wir recht gut $\hat{p} \approx 1/3$, was der Verteilung bei Rauschen entspricht. In Abhängigkeit vom Abstand ϑ variiert die Breite der Maxima (vgl. Abb. 2.9), jedoch ist die Form einer Dreiecksfunktion nicht mehr gegeben (Abb. 2.14). In unserem Beispiel finden wir nur noch bei /n:/ und /m:/ diese Form annähernd wieder, während bei den übrigen Phonemen lokale, kleinere Peaks auftreten. Fügen wir außerdem noch Beobachtungsrauschen hinzu, so kommt es zu einem Verwischen der Peaks (Abb. 2.15).

Zunächst gehen wir davon aus, dass ϑ geeignet gewählt wurde und Peaks erkennbar sind. In Abschnitt 2.6 soll dann die Wahl des Abstandes ϑ diskutiert werden.

Der Algorithmus zur Bestimmung der Grundperiode T_0 aus der Rekurrenzrate (Peak-picking algorithm) kann in folgende Schritte unterteilt werden. Abb. 2.16 illustriert das Vorgehen am Beispiel des Phonems /a:/.

Schwellwert \tilde{q}_α Um signifikante Peaks zu extrahieren wird nur der Teil von \hat{p} betrachtet, der größer als ein Schwellwert $\hat{p}(\tau) \geq q$ ist. Zur Berechnung von q sind verschiedene Ansätze denkbar, wobei neben einem festen Schwellwert auch der Mittelwert oder die Standardabweichung der Werteverteilung von $\hat{p}(\tau)$ eingehen kann. Die dabei auftretenden Parameter können z.B. mit Hilfe

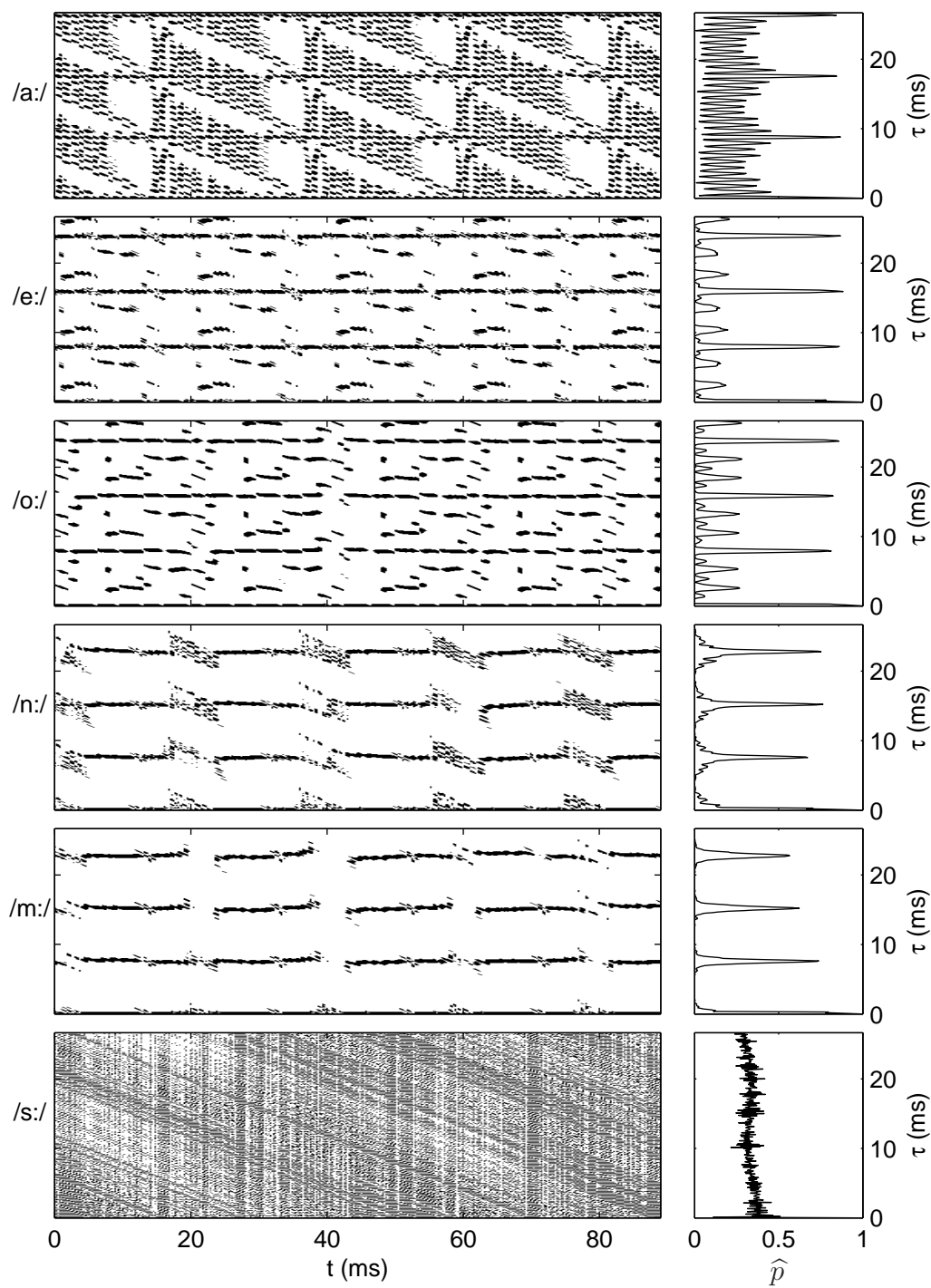


Abb. 2.13: Ordinale Wiederkehr $\mathbf{R}_\pi(t, \tau)$ bei verschiedenen Phonemen und zugehörige Rekurrenzrate $\hat{p}(\tau)$ mit $\vartheta = 0.27\text{ms}$

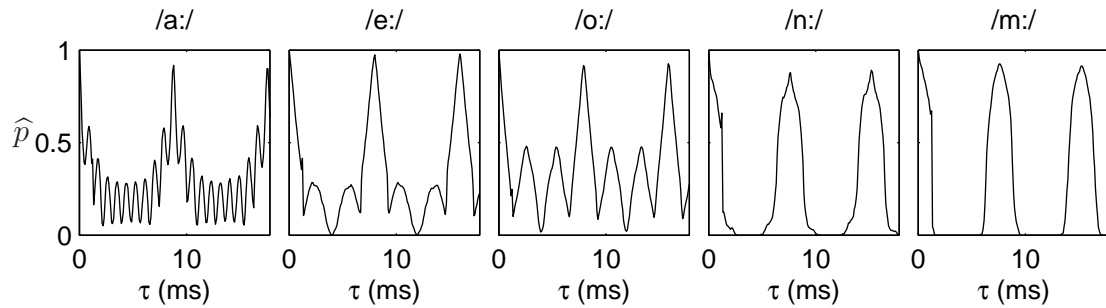


Abb. 2.14: Rekurrenzrate $\hat{p}(\tau)$ mit $\vartheta = 1.2\text{ms}$

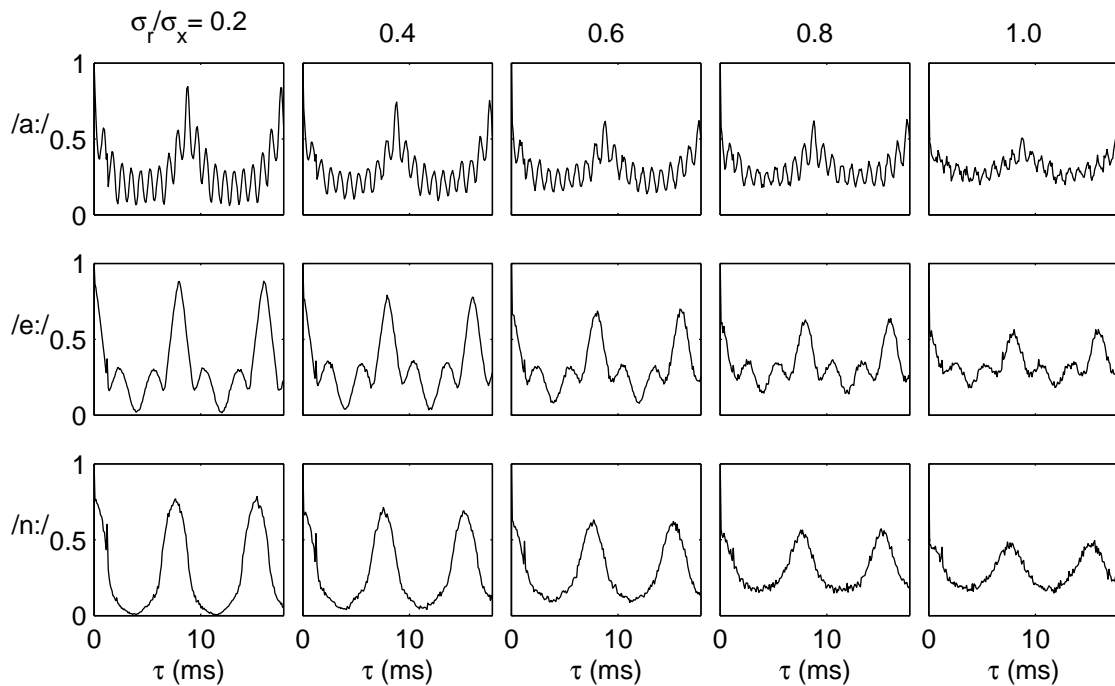


Abb. 2.15: Rekurrenzrate $\hat{p}(\tau)$ bei verschiedenen stimmhaften Phonemen in Abhängigkeit von der Stärke σ_r/σ_x des Rauschens r , Parameter $\vartheta = 1.2\text{ms}$

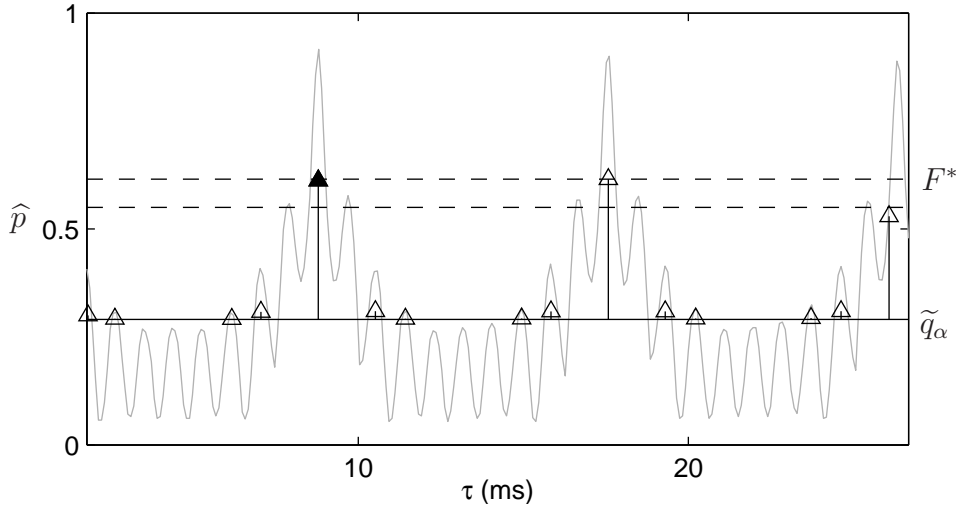


Abb. 2.16: T_0 -Kandidaten (Δ) und Schätzung \widehat{T}_0 (\blacktriangle) aus der Rekurrenzrate $\widehat{p}(\tau)$ (graue Linie). Die Höhe der Kandidaten T_i über der Schranke \widetilde{q}_α (waagerechte Linie) gibt deren normierte Fläche $F_i / \sum_i F_i$ an. Die gestrichelten Linien geben den Bereich der Peaks an, die in die T_0 -Schätzung eingehen. Parameter sind $\vartheta = 1.2\text{ms}$, $\alpha = 0.6$ und $\beta = 0.8$.

eines Testdatensatzes trainiert werden. Wir legen die Schranke über ein α -Quantil \widetilde{q}_α der Werteverteilung von \widehat{p} fest. Liegt die Rekurrenzrate \widehat{p} oberhalb des α -Quantils

$$\widehat{p}(\tau) \geq \widetilde{q}_\alpha , \quad (2.19)$$

so wird der Wert $\widehat{p}(\tau)$ als signifikant angesehen und geht in die Schätzung ein.

Alternativ zu diesem Schwellwert wird in der Literatur häufig ein Schwellwert durch Test auf die Null-Hypothese „Rauschen“ berechnet. Aus der Werteverteilung eines i.i.d. Prozesses²⁾ folgend wird ein α -Quantil bestimmt und nur der Teil von \widehat{p} betrachtet, der über diesem Quantil liegt, d.h. die Null-Hypothese Rauschen abgelehnt wird. Ein Vorteil ist die Möglichkeit einer analytischen Berechnung, da hier einfach nur die Binomialverteilung eingeht. Des Weiteren ist dieser Schwellwert sogar unabhängig von der Verteilung des Rauschens. Jedoch zeigt sich in der Anwendung, dass ein dynamischer Schwellwert, wie der oben betrachtete, bessere Ergebnisse liefert, da die Null-Hypothese „Rauschen“ nicht unbedingt geeignet ist, auf Periodizität zu testen.

T_0 -Kandidaten Δ Im Allgemeinen erhalten wir unter der Bedingung (2.19) mehrere Intervalle h_i mit signifikanten Werten. Um die Peaks später bewerten zu

²⁾independent identically distributed

können, betrachten wir deren Fläche oberhalb der Schranke

$$F_i = \sum_{\tau \in h_i} [\widehat{p}(\tau) - \widetilde{q}_\alpha] \quad i = 1, 2 \dots \quad (2.20)$$

In jedem Intervall ergibt sich dann der T_0 -Kandidat als arithmetischer Mittelwert

$$T_i = \frac{1}{F_i} \sum_{\tau \in h_i} \tau [\widehat{p}(\tau) - \widetilde{q}_\alpha] \quad i = 1, 2 \dots \quad (2.21)$$

T_0 -Schätzung ▲ Als Schätzer für T_0 genügt es nicht, das T_i mit größter Fläche auszuwählen. Es kann zu sogenannten *Oktavfehlern* kommen, d.h. die tatsächliche Periode wird um ein ganzzahliges Vielfaches überschätzt.³⁾ Deshalb müssen auch T_0 -Kandidaten mit kleinerer Fläche beachtet werden. Dieses Problem ergibt sich z.B. bei inkommensurabler Abtastung einer periodischen Funktion. Es kann passieren, dass das Verhältnis zwischen τ und T bei einem Vielfachen der Grundperiode dichter an einen ganzzahligen Wert herankommt und die Rekurrenzrate dort größer ist. Wir betrachten deshalb auch Peaks, die geringfügig kleiner sind als der maximale Peak

$$\mathcal{A} = \{i \mid F_i \geq \beta F^*\} \quad \text{mit} \quad F^* = \max_i \{F_i\} \quad (2.22)$$

Wie sich später zeigt, hängen geeignete Werte für β vom Sprecher ab (vgl. Abschnitt 2.8.2). Ist β passend gewählt, so wird als Schätzer für T_0 einfach die minimale Periodendauer

$$\widehat{T}_0 = \min_i \{T_i \mid i \in \mathcal{A}\} \quad (2.23)$$

aus der Menge \mathcal{A} genommen.

Beispiel 2.4 An verschiedenen Phonemen unterschiedlicher Sprecher soll der Algorithmus zur T_0 -Schätzung diskutiert werden. Abbildung 2.17 zeigt die Verläufe der Sprachsignale. Die Länge der Zeitreihen entspricht einer in der Sprachverarbeitung üblichen Anzahl von 256 Werten, so dass in der späteren Evaluierung die schnelle Fouriertransformation als eine Referenzmethode durchgeführt werden kann. Im zeitlichen Verlauf der Sprachsignale gibt es deutliche Unterschiede in der Dominanz der Fundamentalperiode. Während diese vor allem beim /n:/ und /m:/ und zum Teil auch noch beim /a:/ stark ausgeprägt ist, verschwindet sie teilweise beim /e:/

³⁾Der eigentliche Begriff des Oktavfehlers kommt aus der Frequenzanalyse. Neben der Grundfrequenz treten im Spektrum auch Oberwellen auf, die fälschlicherweise als Schätzung vorkommen können. Dabei liegen die Oberwellen und damit die Schätzungen mindestens eine Oktave höher. In diesem Fall liegen die weiteren Peaks aber bei einem Vielfachen der Grundperiode. Dadurch kann die T_0 -Schätzung mindestens eine Oktave unterhalb der Fundamentalperiode liegen.

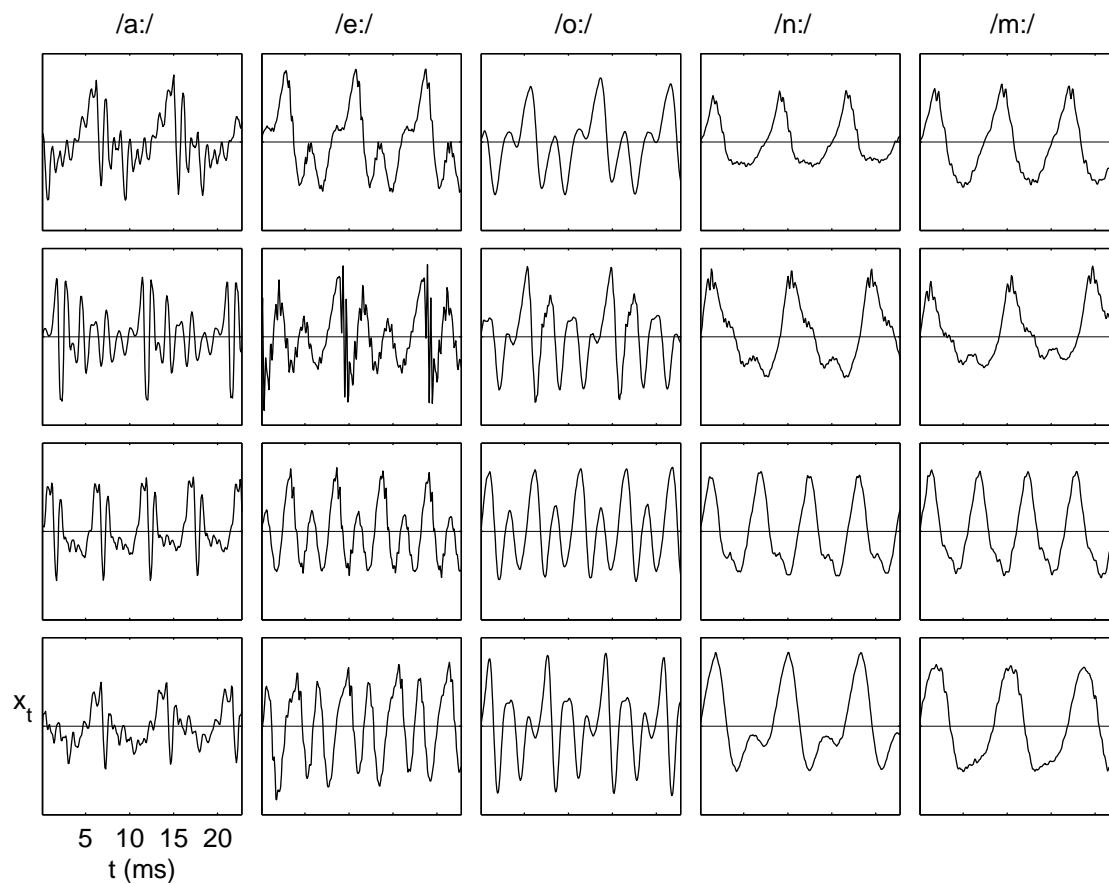


Abb. 2.17: Phoneme (Spalten) verschiedener Sprecher (Zeilen). Die Länge der Zeitreihen beträgt 256 Abtastwerte. Bei einer Abtastrate von 11.025 kHz entspricht dies ≈ 23 ms

und /o:/. Man spricht auch vom Phänomen der fehlenden Fundamentalen (missing fundamental), wobei im Spektrum die Oberwellen dominieren. Beim /e:/ in der vierten Zeile ist die erste Harmonische besonders stark ausgeprägt, es wird also gerade die doppelte Frequenz bzw. die halbe Periodendauer geschätzt. In Abb. 2.18 sind die zugehörigen Rekurrenzzraten und die T_0 -Schätzungen dargestellt. Auch in der dritten Zeile des Phonems /e:/ tritt dieses Problem auf, obwohl im zeitlichen Verlauf die Fundamentalperiode besser zu erkennen ist. In der zweiten Zeile wird gar $T_0/3$ geschätzt, da hier die zweite Harmonische sehr stark im Spektrum dominiert. In diesen Fällen versagt also der Algorithmus, da angenommen wird, dass nur die Peaks bei der Fundamentalperiode und deren Vielfachen stark ausgeprägt sind. Dieses Verhalten ist ein eindeutiger Hinweis auf eine zu niedrige Einbettungsdimension, weshalb im nächsten Abschnitt die Definition einer ordinalen Wiederkehr auf höhere Dimensionen verallgemeinert wird.

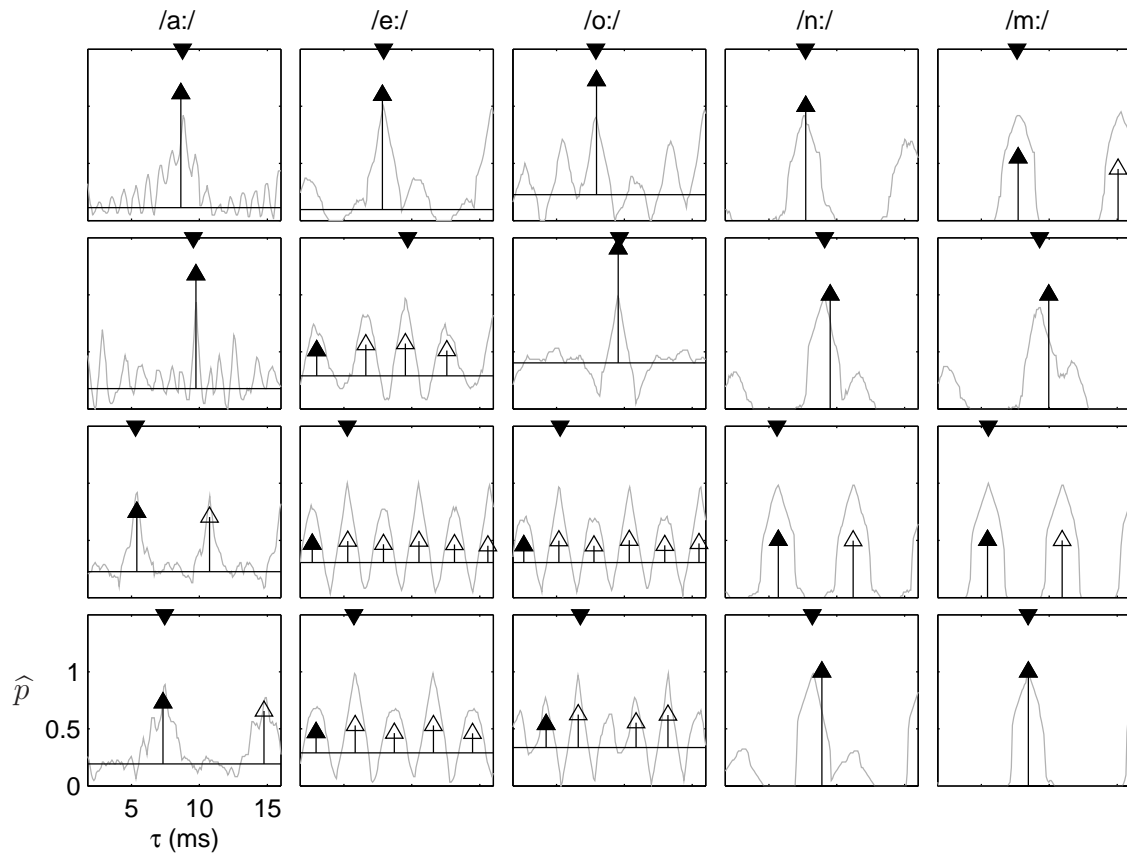


Abb. 2.18: T_0 -Kandidaten (Δ) und Schätzung \hat{T}_0 (\blacktriangle) aus der Rekurrenzrate $\hat{p}(\tau)$ (graue Linie) der Phoneme in Abb. 2.17 mit der Fundamentalperiode T_0 (\blacktriangledown). Die Höhe der Kandidaten T_i über der Schranke \tilde{q}_α (waagerechte Linie) gibt deren normierte Fläche $F_i / \sum_i F_i$ an. Parameter sind $\vartheta = 1.2$ ms, $\alpha = 0.3$ und $\beta = 0.7$

Anmerkung. Auf der Suche nach einem Algorithmus zur Ermittlung der Maxima ist es verständlich, dass es keine universelle Antwort geben kann, denn je nach Anwendungsgebiet gibt es verschiedene Anforderungen und Voraussetzungen. Mathematisch gesehen sind lokale Maxima durch das Verschwinden der ersten Ableitung definiert. So läge es also nahe, diese auf Nulldurchgänge zu analysieren. Jedoch ist in der Praxis die Rekurrenzrate nicht notwendigerweise glatt, was die Bestimmung der Ableitung erschwert. Zwar gibt es dafür robuste Filter, wie den Savitzky-Golay FIR Filter⁴⁾ (u.a. Orfanidis, 1996), jedoch ergeben sich dadurch neue Fragen u.a. nach der Länge des Filters. Zudem bleibt das Problem der Ermittlung der T_0 -Kandidaten und der Wahl eines geeigneten \hat{T}_0 aus der Ableitung erhalten.

⁴⁾Finite impulse response

2.5 Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen

Bis jetzt wurde nur der einfache Fall einer ordinalen Wiederkehr betrachtet. Nur bei periodischen Signalen mit dominanter Grundperiode erhalten wir auch ausgeprägte Linienstrukturen und damit Maxima in der Rekurrenzrate bei der Periodendauer. Wie aber bei der vorangehenden Behandlung der Sprachsignale deutlich wird, passen die stimmhaften Phoneme nicht notwendigerweise in dieses Schema. Die Trajektorien der Sprachsignale sind im Allgemeinen viel komplexer und benötigen eine höhere Einbettungsdimension. Ist die Dimension zu niedrig, so können in der Geometrie des zugrunde liegenden Systems weit entfernte Punkte durch Projektion in einen zu niedrigen Phasenraum benachbarte Punkte werden. Man spricht hier vom Phänomen der *falschen Nachbarn*. Dies beeinflusst natürlich die Statistik und kann zu falschen Ergebnissen führen. Deshalb betrachten wir nun eine Erweiterung der ordinalen Wiederkehr auf höhere Einbettungsdimensionen.

Die bisherige Definition der ordinalen Wiederkehr mittels b_t^{auf} bzw. b_t^{ab} verlangt nicht nur ein Kreuzen der Trajektorien, sondern auch ein Übereinstimmen der Vorzeichen der Anstiege. Im Vergleich zur üblichen Definition der Wiederkehr wird dadurch eine höherdimensionale Einbettung erreicht. So treten u.a. in Abb. 2.4 (auf Seite 13) im Gegensatz zu \mathbf{R} keine zur Hauptdiagonalen senkrechte Linien in \mathbf{R}_π auf.⁵⁾ Dennoch zeigt sich bei den Sprachsignalen, dass auch diese Einbettung nicht hoch genug ist. Wie schon in Abschnitt 2.4.2 gezeigt, werden nur einige Phoneme wie das /n:/ und /m:/ durch das Modell der unimodalen Grundperiode gut approximiert. Dies bestätigt auch Abb. 2.19, da es hier zu keinen falschen Nachbarn kommt. Im Gegensatz dazu kommt es bei /a:/, /e:/ und /o:/ durch Projektion der Trajektorien in den \mathbb{R}^2 zu Überschneidungen verschiedener Zyklen. Die Auswirkungen auf die T_0 -Schätzung wird u.a. beim /o:/ in der dritten und vierten Zeile deutlich. Hier besteht eine Periode aus zwei bzw. drei Zyklen, wodurch diese mit $\hat{T} \approx T_0/2$ bzw. $\hat{T} \approx T_0/3$ falsch geschätzt wird.

Analog zu den RPs soll der höherdimensionale Fall der ordinalen Wiederkehr aus dem eindimensionalen Fall abgeleitet werden. Zunächst wiederholen wir deshalb die Konstruktion höherdimensionaler RPs.

Rekurrenzplots höherer Einbettungsdimension. Bei der Einführung der Rekurrenzplots in Abschnitt 2.2 wurde die Definition der Norm $\|\cdot\|$ bisher nicht weiter diskutiert. So kann die Umgebung eines Punktes z.B. durch eine D -dimensionale Kugel beschrieben werden, was der L_2 -Norm entspricht. Jedoch verwendet man auf-

⁵⁾Bei $x_{t+\vartheta} - x_t$ handelt es sich um eine Differenz erster Ordnung. Diese liefert eine Approximation für die erste Ableitung, weshalb wir hier auch von einer Zerlegung der Phasenraums (x, \dot{x}) durch b_t^{auf} und b_t^{ab} sprechen können. In Richtung von x beschreibt ϑ die Genauigkeit der Zerlegung, während in Richtung von \dot{x} unabhängig von ϑ nur $\dot{x} \geq 0$ unterschieden wird. In Kapitel 3 werden Ordnungsmuster der Dimension $D = 3$ betrachtet, die den Phasenraum (\dot{x}, \ddot{x}) in sechs äquivalente Gebiete zerlegen.

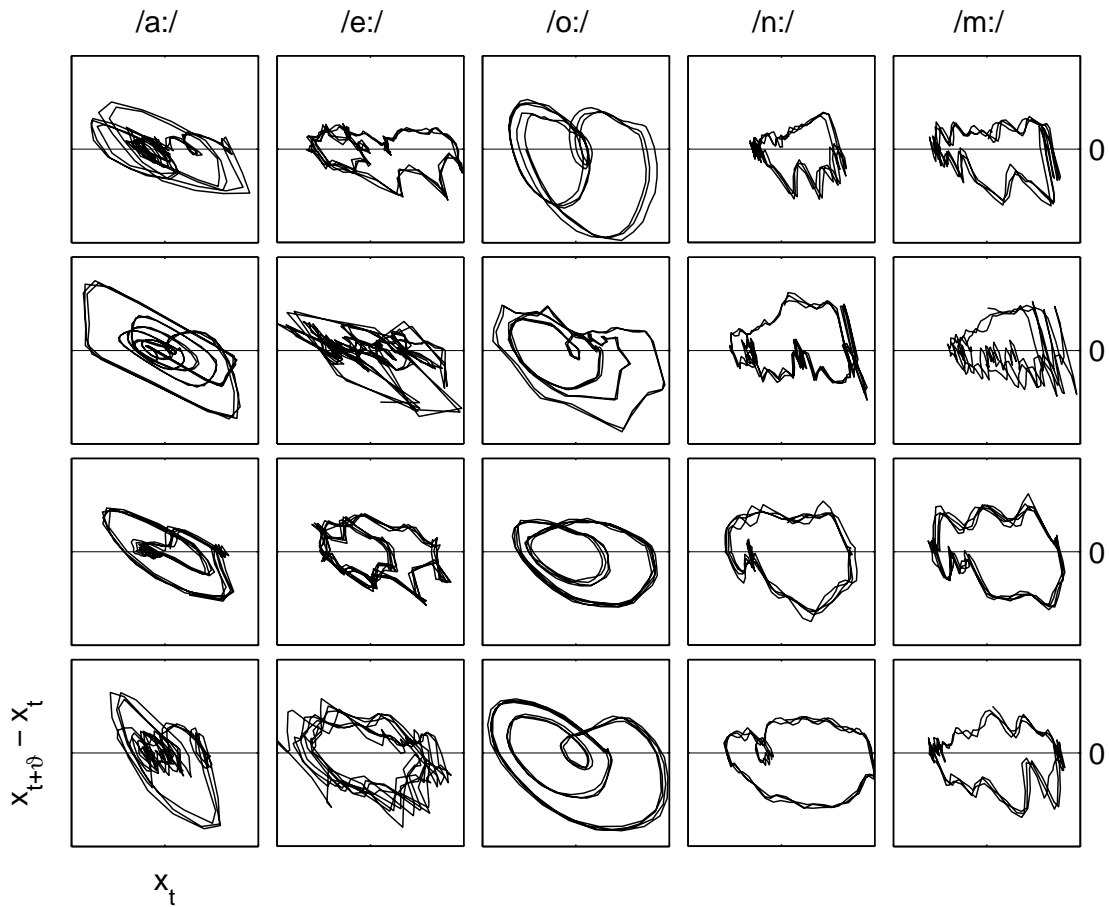


Abb. 2.19: Einbettung der Phoneme aus Abb. 2.17 in den Phasenraum $(x_t, x_{t+\vartheta} - x_t)$. Parameter $\vartheta = 0.44$ ms

grund der schnelleren Berechenbarkeit häufig die L_∞ -Norm (Maximumnorm), wenn der Phasenraum über eine zeitverzögerte Einbettung $\mathbf{x}_t = (x_t, x_{t+d}, \dots, x_{t+(D-1)d})$ einer eindimensionalen Zeitreihe rekonstruiert wird. Der Abstand berechnet sich zu

$$\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_s\| = \max_{i=0}^{D-1} |x_{t+id} - x_{s+id}| \quad (2.24)$$

und die Bedingung einer Verbundrekurrenz (joint recurrence) entspricht dann

$$\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_s\| \leq \Delta_t \Leftrightarrow \prod_{i=0}^{D-1} \Theta(|x_{t+id} - x_{s+id}| - \Delta_t) = 1 \quad (2.25)$$

Damit muss ein Rekurrenzplot mit den notwendigen Abstandsberechnungen nur einmal in der Dimension $D = 1$ berechnet werden und jede höhere Dimension

ergibt sich einfach durch eine elementweise Verknüpfung zeitlich verschobener Rekurrenzplots

$$\mathbf{R}^D(t, s) = \prod_{i=0}^{D-1} \mathbf{R}(t + i d, s + i d) . \quad (2.26)$$

Man spricht hier auch vom *Verbundrekurrenzplot*, da die Matrix Verbundereignisse darstellt (Joint recurrence matrix, [Romano u. a., 2004](#)). Bei der Rekurrenzmatrix handelt es sich um eine binäre Matrix, weshalb der Verbundrekurrenzplot in der Literatur auch üblicherweise als logische UND-Verknüpfung $\mathbf{R}^D = \bigwedge_i \mathbf{R}$ oder als Minimum $\mathbf{R}^D = \min_i \mathbf{R}$ geschrieben wird.

Diese Matrizen repräsentieren eine zeitlich aufgelöste Verbundwahrscheinlichkeit, aus denen sich direkt die Korrelationssumme ableitet. Betrachtungen zur Korrelationssumme und der Schätzung der Rényi-Entropie und der verallgemeinerten Transinformation findet man in einem Artikel von [Pompe \(1993\)](#). In der späteren Habilitationsschrift ([Pompe, 1997](#)) wird die Schätzung unter dem Gesichtspunkt von sogenannten Rang-Abstands-Matrizen u.a. auch mit grafischen Beispielen zu Sprachsignalen ausführlicher behandelt. Die Transformation der Zeitreihe auf Rangzahlen vor der Berechnung der Matrix ist ein entscheidender Trick zur schnellen Schätzung der Rényi-Entropie und der verallgemeinerten Transinformation. Ein Zusammenhang zwischen diesen Informationsmaßen und den Rekurrenzplots ist in einem Artikel von [Thiel u. a. \(2003\)](#) zu finden.

Ordinale Wiederkehr höherer Dimension. In analoger Weise gehen wir vor, um aus \mathbf{R}_π den Fall höherer Dimensionen durch elementweise Verknüpfung abzuleiten, mit

$$\mathbf{R}_\pi^D(t, s) = \prod_{i=0}^{D-1} \mathbf{R}_\pi(t + i d, s + i d) \quad (2.27)$$

oder im Parameterraum (t, τ)

$$\mathbf{R}_\pi^D(t, \tau) = \prod_{i=0}^{D-1} \mathbf{R}_\pi(t + i d, \tau) . \quad (2.28)$$

Im Gegensatz zu \mathbf{R}^D , wo die tatsächliche Einbettungsdimension D' mit D übereinstimmt, liegt bei \mathbf{R}_π^D eine höherdimensionale Einbettung $D' > D$ des dynamischen Systems vor.

Mit steigender Dimension verringert sich die Anzahl der falschen Nachbarn, da die Trajektorie im Phasenraum entfaltet wird. Damit werden bei annähernd periodischen Signalen, wie den stimmhaften Phonemen, nur noch Rekurrenzpunkte mit einem zeitlichen Abstand einer Periode oder deren Vielfachen detektiert. (Abb. 2.20). Ab einer gewissen Dimension weist \mathbf{R}_π dann im Wesentlichen nur noch horizontale Linien auf, die der Periodizität entsprechen. Dadurch kommt es

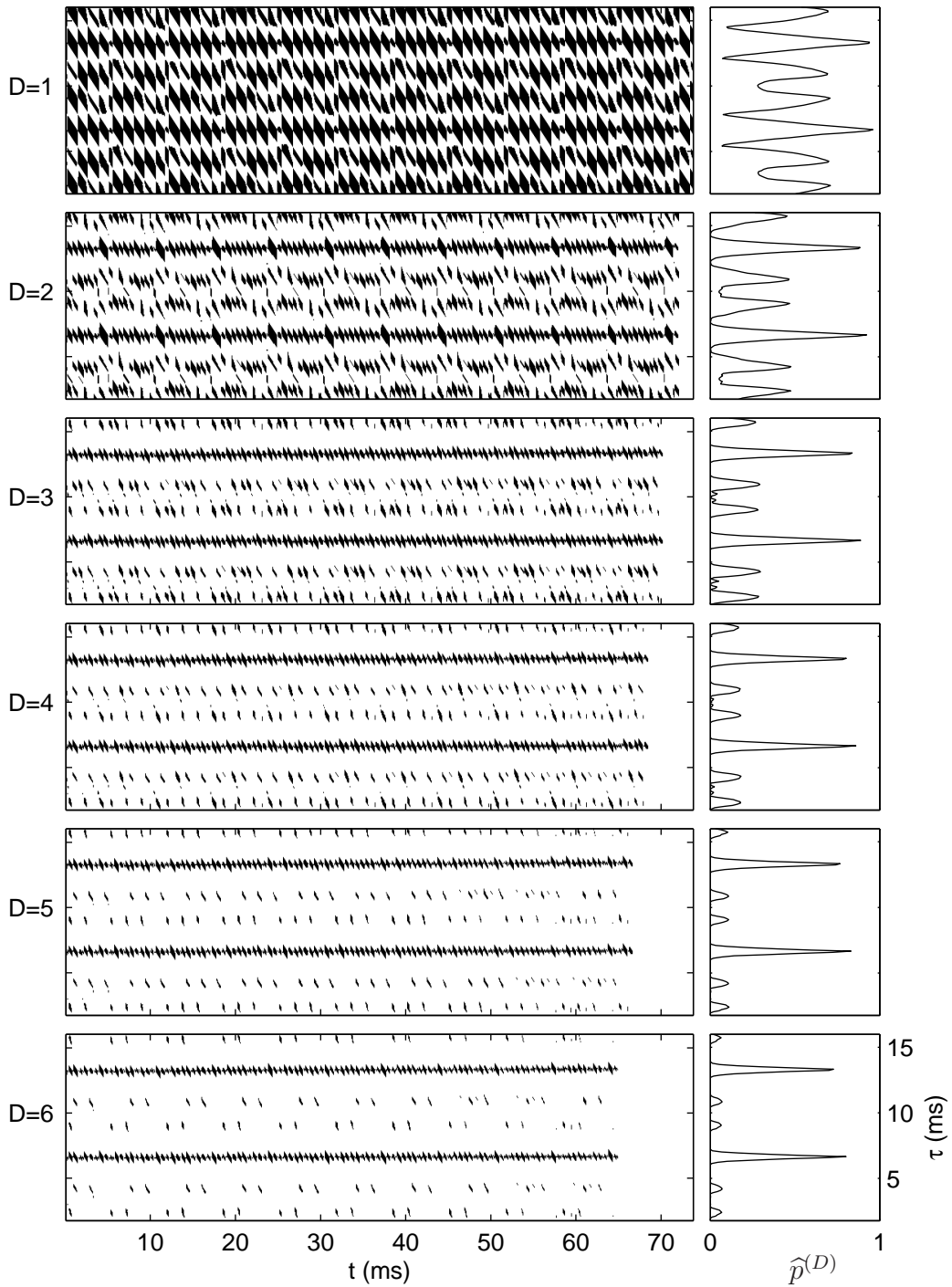


Abb. 2.20: D -dimensionale Einbettung des Phonems /o:/ (vierte Zeile in Abb. 2.17) in $\mathbf{R}_\pi^D(t, \tau)$ und zugehörige Rekurrenzrate $\hat{p}^{(D)}(\tau)$ (vgl. (2.34)). Parameter sind $\vartheta = 1.2$ ms, $d = 1.8$ ms

zu dominierenden Peaks bei der Fundamentalperiode und deren Vielfachen, wie es der Algorithmus zur T_0 -Schätzung verlangt. Jedoch sind neben der Dimension D die Wahl der Umgebung ϑ und der Zeitverzögerung d noch offen. Um einen Eindruck über eine geeignete Wahl zu bekommen, werden in den nächsten Abschnitten diese Parameter exemplarisch an einigen Sprachsignalen variiert und die Qualität der Einbettung beurteilt.

2.5.1 Bestimmung der Einbettungsdimension

Um die Dynamik eines Systems zu rekonstruieren, genügt es im Allgemeinen, nur eine einzelne skalare Größe als Funktion der unbekanntenen Komponenten zu messen. Durch eine zeitverzögerte Einbettung dieser Größe kann das dynamische System im topologischen Sinne rekonstruiert werden.⁶⁾ Eine allgemeine topologische Aussage über die Einbettung dynamischer Systeme der Dimension (Kapazität) D_A besagt, dass Überschneidungen der Trajektorie durch Projektion vermieden werden, wenn $D > 2D_A$ gilt (Takens, 1981; Sauer u. a., 1991). Jedoch ist diese Bedingung nur hinreichend, aber nicht notwendig. Ein Beispiel ist der bekannte Lorenz-Attraktor ($D_A \approx 2.5$), welcher bei geeigneter Zeitverzögerung d in der Dimension $D = 4$ rekonstruiert werden kann (Kennel u. Abarbanel, 2002). Hier ist also nicht unbedingt eine Dimension $D > 5$ notwendig. Zwar begeht man mit einer zu hohen Einbettung keinen Fehler, der Attraktor ist dann nur auf einen Unterraum beschränkt, jedoch verlieren Schätzungen aufgrund der endlichen Stichprobenlänge an Genauigkeit und können gar zu falschen Interpretationen führen.

Zunächst wird ein häufig zu findender Ansatz für beliebige dynamische Systeme betrachtet, um daraus einen speziellen Ansatz für periodische Zeitreihen und für die ordinale Wiederkehr abzuleiten.

Abschätzung bei beliebigen Zeitreihen. Ein mit den Rekurrenzplots verknüpfter Ansatz ist der der *falschen Nachbarn* (False Neighbors, Kennel u. a., 1992). Gegeben sei dazu eine zeitverzögerte Einbettung $\mathbf{x}_t^{(D)} = (x_t, x_{t+d}, \dots, x_{t+(D-1)d})$ einer skalaren Größe. Mit $\mathbf{x}_{k(t)}^{(D)}$ sei ein benachbarter Punkt von $\mathbf{x}_t^{(D)}$ im D -dimensionalen Phasenraum bezeichnet. Vergrößert sich der Abstand bei Erhöhung der Dimension stärker als ein Faktor r , d.h. gilt

$$\left\| \mathbf{x}_t^{(D+1)} - \mathbf{x}_{k(t)}^{(D+1)} \right\| > r \left\| \mathbf{x}_t^{(D)} - \mathbf{x}_{k(t)}^{(D)} \right\| , \quad (2.29)$$

so kann dies nicht auf die Dynamik des Systems sondern muss auf eine Projektion in einen zu niedrigen Phasenraum zurückgeführt werden. Im Allgemeinen ist es notwendig $r > 1$ zu betrachten, da chaotisches Verhalten vorliegen kann und somit

⁶⁾Zwischen den unbekanntenen Koordinaten des dynamischen Systems und den zeitverzögerten Koordinaten aus einer skalaren Messgröße gibt es eine bijektive, hinreichende glatte Abbildung.

auch echt benachbarte Punkte aufgrund eines positiven Lyapunov-Exponenten zeitlich auseinander driften würden. Für den Spezialfall $r = 1$ und einer Maximumnorm $\|\cdot\|$ kann der prozentuale Anteil der falschen Nachbarn direkt aus der Veränderung der Rekurrenzrate

$$\widehat{p}^{(D)}(\tau) = \langle \mathbf{R}^D(t, \tau) \rangle_\tau \quad (2.30)$$

berechnet werden mit

$$\text{prob}\{\text{falsche Nachbarn}\} = \frac{\sum_\tau \widehat{p}^{(D)} - \widehat{p}^{(D+1)}}{\sum_\tau \widehat{p}^{(D)}} \quad \text{für } r = 1 \quad (2.31)$$

Um auch stochastische Prozesse behandeln zu können, wird in dem Ansatz eine zusätzliche Bedingung eingeführt, denn auch bei einem i.i.d. Prozess können Punkte im Phasenraum nur einen endlichen Abstand erreichen. Es gehen deshalb nur diejenigen Punkte $\mathbf{x}_{k(t)}$ in die Statistik ein, deren Abstände

$$\left\| \mathbf{x}_t^{(D)} - \mathbf{x}_{k(t)}^{(D)} \right\| < s \cdot \sigma_x \quad (2.32)$$

kleiner einem Vielfachen s der Standardabweichung σ_x der Zeitreihe sind. Aus der Verknüpfung von (2.29) und (2.32) ergibt sich die Statistik zur Bewertung der Dimension zu

$$X_{\text{fnn}}(r, s) = \frac{\sum_t \Theta \left(\frac{\left\| \mathbf{x}_t^{(D+1)} - \mathbf{x}_{k(t)}^{(D+1)} \right\|}{\left\| \mathbf{x}_t^{(D)} - \mathbf{x}_{k(t)}^{(D)} \right\|} - r \right) \cdot \Theta \left(s \sigma_x - \left\| \mathbf{x}_t^{(D)} - \mathbf{x}_{k(t)}^{(D)} \right\| \right)}{\sum_t \Theta \left(s \sigma_x - \left\| \mathbf{x}_t^{(D)} - \mathbf{x}_{k(t)}^{(D)} \right\| \right)} \quad (2.33)$$

wobei, wie von den Autoren vorgeschlagen, zum Zeitpunkt t nur der dichteste Nachbar $k(t) = \arg \min_{t'} \left\| \mathbf{x}_t^{(D)} - \mathbf{x}_{t'}^{(D)} \right\|$ eingeht (vgl. Kantz u. Schreiber, 2005, Abschnitt 3.3.1). Ist durch sukzessive Erhöhung der Dimension die Anzahl der falschen Nachbarn hinreichend klein, so kann von einer geeigneten Einbettung ausgegangen werden. Es wird empfohlen die Statistik für variables r und s zu berechnen, wobei in der Arbeit von Kennel u. a. (1992) $s > 1$ verwendet wird. In einer späteren Arbeit von Hegger u. Kantz (1999) wird hingegen argumentiert, $s = 1/r < 1$ zu verwenden.

Durch die Bedingung (2.32) geht ein gewisser Anteil der rekurrenten Zeitpunkte, bei denen \leq in (2.29) gilt, nicht in die Statistik ein. Dies entspricht einer Reduzierung der Rekurrenzrate, d.h. nur oberhalb einer Schranke geht diese in die Statistik ein. Diese Festlegung einer Schranke für die Rekurrenzrate findet auch Anwendung in der Bestimmung der Fundamentalperiode (vgl. Abschnitt 2.4). Dort werden ebenfalls nur Teile der Rekurrenzrate betrachtet, die größer einem α -Quantil sind. Im Falle eines i.i.d. Prozesses gehen dadurch nur $1 - \alpha$ Prozent der Rekurrenzrate ein. Hingegen bei der Bestimmung der falschen Nachbarn in (2.33) liegt

die Schranke nicht explizit vor, sondern wird implizit über die Standardabweichung σ_x der zugrunde liegenden Zeitreihe definiert. Abschätzungen für die Wahrscheinlichkeit, dass (2.32) erfüllt ist, liefern u.a. Ungleichungen von Tschebyschew oder Gauß. Sie treffen allgemeine Aussagen über die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsgröße innerhalb eines Vielfachen der Standardabweichung liegt. So liegen bei einem unimodal-verteiltern Zufallsprozess höchstens $4/9$ der Werte außerhalb σ_x (vgl. Müller, 1991, S. 457). Dies entspricht bei der T_0 -Schätzung einem α -Quantil von $\alpha \approx 0.5$, d.h. der Median bildet die Schranke \tilde{q}_α . Jedoch ist zu beachten, dass die Ungleichungen nicht anwendbar sind, wenn bei der Berechnung von X_{fnn} nur der jeweils dichteste Nachbar eingeht.

Abschätzung bei periodischen Zeitreihen. Da wir uns hier auf eine günstige Einbettung bei der T_0 -Bestimmung in Sprachsignalen beschränken wollen, kann die Definition der falschen Nachbarn auf periodische Funktionen angepasst werden. Wir können also annehmen, dass die Zeitreihe nach einer Periode zur gleichen Umgebung der Nachbarn zurückkehrt und ein exponentielles Wachstum der Umgebung ausgeschlossen wird. Beim Durchlauf einer Periode kann sich der räumliche Abstand der Nachbarn natürlich ändern. Jedoch beeinflusst dies die ordinale Wiederkehr nicht, da gerade nur der zeitliche Abstand ϑ und nicht der Abstand der Werte eingeht. Im Falle einer unimodalen Grundperiode wurde schon theoretisch gezeigt, dass die Rekurrenzrate nur in den Intervallen $[nT - \vartheta, nT + \vartheta]$ verschieden von Null ist. Auch bei beliebigen periodischen Signalen ist zu erwarten, dass bei genügend hoher Einbettung die Trajektorie nur nach einer Periode und deren Vielfachen zurückkehrt und die Rekurrenzrate

$$\hat{p}^{(D)}(\tau) = \langle \mathbf{R}_\pi^D(t, \tau) \rangle_\tau \quad (2.34)$$

ebenfalls nur in diesen Intervallen verschieden von Null ist. Dies motiviert den folgenden Begriff der falschen Nachbarn bei der ordinalen Wiederkehr:

Definition 2.6 (Falsche Nachbarn bei periodischen Funktionen)

Unter dem Begriff der *falschen Nachbarn bei periodischen Funktionen* der Periode T im Sinne der ordinalen Wiederkehr verstehen wir diejenigen Punkte in $\mathbf{R}_\pi^D(t, \tau)$, die nicht in den Intervallen $\tau \in [nT - \vartheta, nT + \vartheta]$ mit $n \in \mathbb{N}$ liegen.

Diese Definition setzt die Kenntnis von T voraus, was natürlich in der Praxis nicht sinnvoll ist. Jedoch können wir mit Hilfe dieser Definition anhand bekannter Sprachsignale, dem Trainingsdatensatz, einen Eindruck über eine geeignete Wahl der Parameter gewinnen. Des Weiteren muss auch wieder ein stochastischer Anteil wie in (2.32) beachtet werden. Hierbei verwenden wir, wie schon bei der T_0 -Schätzung, das α -Quantil \tilde{q}_α und betrachten die Rekurrenzrate nur oberhalb dieser Schranke

$$f^{(D)}(\tau) = (\hat{p}^{(D)}(\tau) - \tilde{q}_\alpha) \cdot \Theta(\hat{p}^{(D)}(\tau) - \tilde{q}_\alpha) \quad (2.35)$$

Dieser Ansatz einer Schranke ist insofern berechtigt, da auch schon bei der T_0 -Schätzung nur dieser Anteil der Rekurrenzrate maßgeblich ist. Als Statistik zur Bewertung der Qualität der Einbettungsdimension betrachten wir den Anteil der falschen Nachbarn, die sogenannte *Fehlerrate*

$$E = E(D, \vartheta, d) = \frac{\sum_{\tau} f^{(D)}(\tau) - \sum_n \sum_{\tau=nT-\vartheta}^{nT+\vartheta} f^{(D)}(\tau)}{\sum_{\tau} f^{(D)}(\tau)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.36)$$

Ist auch hier durch sukzessive Erhöhung der Dimension die Fehlerrate hinreichend klein, so können wir von einer geeigneten Einbettungsdimension bei der Untersuchung der ordinalen Wiederkehr ausgehen.

Beispiel 2.5 Die stimmhaften Phoneme entsprechen diesem Modell nur annähernd, weshalb die Fehlerrate E nur in einem gewissen Rahmen reduziert werden kann. Für die in Abb. 2.17 dargestellten Phoneme zeigt Abb. 2.21 den Verlauf. Dabei spiegelt sich deutlich die unzureichende Einbettung der Phoneme /e:/ und /o:/ bei $D = 1$ wider, wie schon aus Abb. 2.18 ersichtlich wurde. Aufgrund eines Anteils der falschen Nachbarn von zum Teil $E > 0.5$ kommt es dort zur vollkommen falschen T_0 -Schätzung. Mit steigendem D verringert sich E , was sich positiv auf die Schätzung der Fundamentalperiode auswirkt (Abb. 2.22).⁷⁾ Wie erwartet, dominieren nun bei fast allen Phonemen die Peaks der Fundamentalperiode und deren Vielfache, womit der Algorithmus für die T_0 -Schätzung den richtigen Peak auswählt. Dennoch gibt es eine Ausnahme, was sich ebenfalls in einer deutlich erhöhten Fehlerrate zeigt. Ein Grund ist hier in der möglicherweise ungünstigen Wahl von ϑ oder d zu finden, da diese Parameter auch maßgeblich die Einbettung beeinflussen. Deshalb wird in Abschnitt 2.6 auch deren Wahl untersucht.

Neben der Fehlerrate E ist in Abb. 2.21 auch die Statistik X_{fnn} eingezeichnet. Sie gibt eine Bewertung für falsche Nachbarn oder auch falsche Rekurrenzpunkte in den Rekurrenzplots \mathbf{R} . Es ist verständlich, dass bei allen Phonemen die Dimension $D = 1$ unzureichend ist, da ja auch schon bei einer Sinusfunktion $D \geq 2$ erforderlich ist. Es zeigt sich, dass im Allgemeinen $D = 3$ ausreicht und die Trajektorien im dreidimensionalen Phasenraum entfaltet sind. Jedoch lässt dies keinen Rückschluss auf die ordinale Wiederkehr zu und vor allem nicht auf die Periodenschätzung. Deutlich wird dies vor allem beim /e:/, wo X_{fnn} die Einbettungsdimension $D = 3$ vorschlägt, hingegen E eine unzureichende Einbettung anzeigt. Letzteres spiegelt sich dann auch bei der T_0 -Schätzung in Abb. 2.22 wider.

⁷⁾Aufgrund der höheren Einbettungsdimension verringert sich mit der Fehlerrate natürlich auch die Rekurrenzrate. Dies hat zur Folge, dass sich das α -Quantil in diesen Beispielen zu $\tilde{q}_\alpha = 0$ verringert.

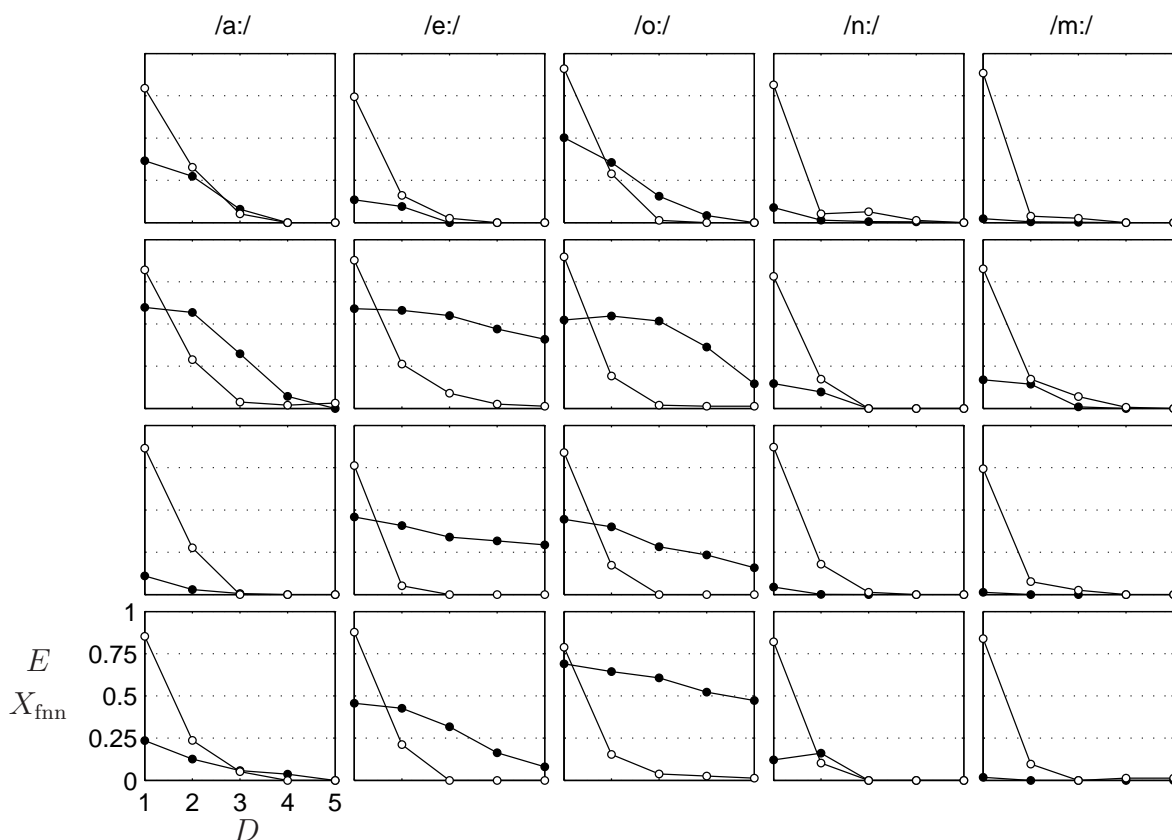


Abb. 2.21: Fehlerraten E und $X_{\text{fnn}}(r = 1, s = 1/8)$ an den Phonemen aus Abb. 2.20 in Abhängigkeit von der Einbettungsdimension D . Parameter sind $\vartheta = 1.2$ ms, $d = 1.8$ ms und $\alpha = 0.3$

Anmerkung. Dieses Beispiel zeigt aber auch, dass die Testgröße E nicht alleine ausreicht, um die T_0 -Schätzung zu bewerten. Es gibt ebenso Gegenbeispiele, wo E sehr groß ist, obwohl der richtige Peak ausgewählt wurde. Deshalb soll im nächsten Schritt der Erfolg und die Genauigkeit der Schätzung anhand allgemein gebräuchlicher Fehlerarten der Sprachverarbeitung evaluiert werden.

2.6 Anpassung weiterer Einbettungsparameter

Parameter ϑ . Aus der Definition 2.6 der falschen Nachbarn wird ersichtlich, dass allein durch Vergrößerung von ϑ der Bereich der echten Nachbarn größer wird und damit E abfällt. Deshalb ist diese Testgröße weniger geeignet, den Parameter ϑ zu bewerten. Ein möglicher Ansatz wäre die Einführung einer Straffunktion A , die den

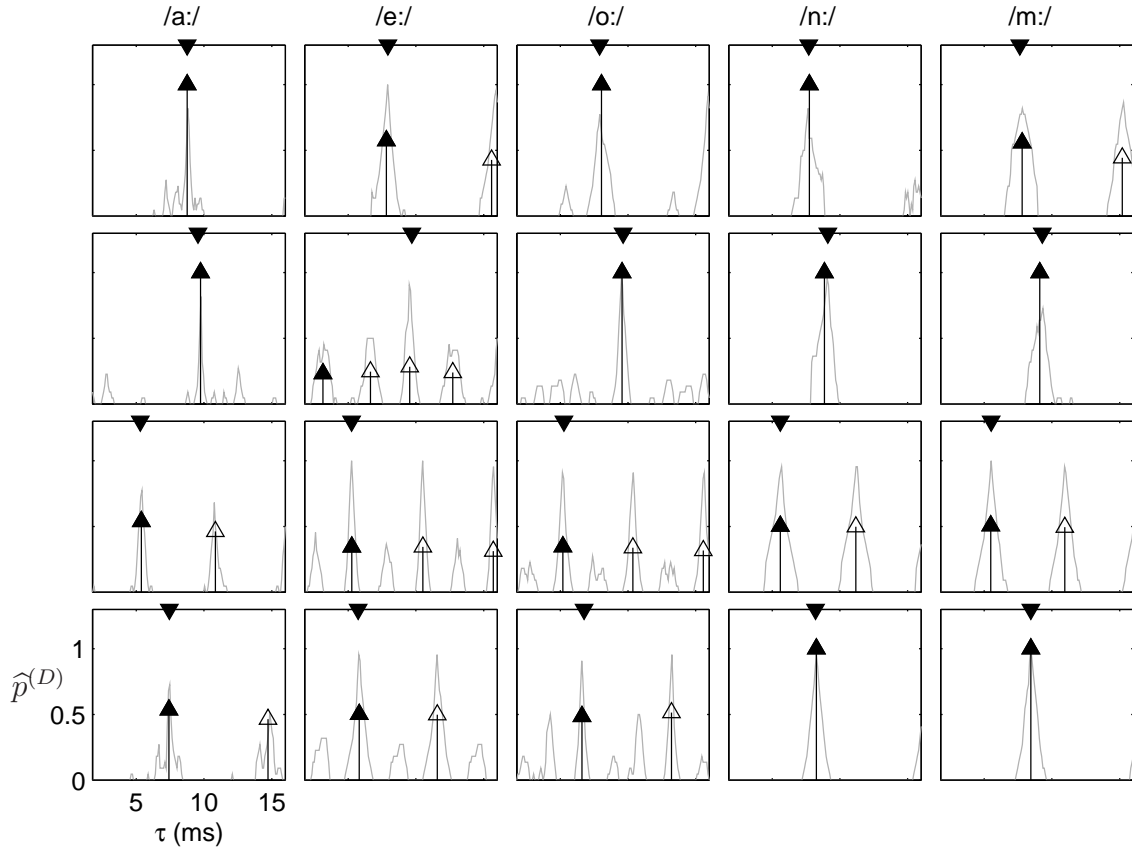


Abb. 2.22: T_0 -Kandidaten (Δ) und Schätzung \hat{T}_0 (\blacktriangle) aus der Rekurrenzrate $\hat{p}^{(D)}(\tau)$ (graue Linie) der Phoneme in Abb. 2.17 mit der Fundamentalperiode T_0 (\blacktriangledown). Die Höhe der Kandidaten T_i über der Schranke \tilde{q}_α (waagerechte Linie) gibt deren normierte Fläche $F_i / \sum_i F_i$ an. Parameter sind $\vartheta = 1.2$ ms, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.7$, $D = 3$ und $d = 1.8$ ms

Anteil der Fläche der echten Nachbarn $\tau \in [nT - \vartheta, nT + \vartheta]$ entlang τ mit

$$A = A(\vartheta) = \frac{2\vartheta}{T} \quad (2.37)$$

bewertet. So könnte die Fehlerrate zu

$$\tilde{E}(D, \vartheta, d) = E(D, \vartheta, d) + A(\vartheta) \quad (2.38)$$

modifiziert werden, wodurch mit steigendem ϑ die modifizierte Fehlerrate \tilde{E} größere Werte annimmt. Jedoch sehen wir von diesem Ansatz ab, da mit ihm der Algorithmus zur T_0 -Schätzung, d.h. die Bestimmung der T_0 -Kandidaten und die richtige Auswahl, nicht hinreichend erfasst wird. So kann die Breite der Peaks nicht mit dem Parameter ϑ gleichgesetzt werden. Es ist z.B. möglich, dass in $[nT - \vartheta, nT + \vartheta]$

mehrere Peaks liegen und ϑ somit keinen direkten Rückschluss auf deren Varianz zulässt. Des Weiteren ist nicht eindeutig zu erkennen, bei welcher Fehlerrate die T_0 -Schätzung erfolgreich ist.

Parameter d . Ein neben der Einbettungsdimension D wichtiger Parameter ist die Zeitverzögerung d . Bis jetzt wurde dieser Parameter außen vorgelassen, da mathematisch gesehen die Wahl von d unabhängig von der Frage nach einer Einbettungsdimension ist. So gilt das Theorem von Takens bei chaotischen Attraktoren bei nahezu beliebiger Zeitverzögerung. Jedoch werden nur zeitkontinuierliche dynamische Systeme betrachtet. Deshalb kann dort die Trajektorie auf infinitesimalen Zeitskalen mit infinitesimalem ϑ betrachtet werden. In der Praxis ist dies aber nicht der Fall. Ist d zu klein, so bewegt sich die Trajektorie dicht entlang der Hauptdiagonalen. Bei vorhandenem Beobachtungsrauschen führt dies zur starken Überlagerung verschiedener Zyklen der Trajektorie. Bei allzu großem d führt die Trajektorie unnötigerweise komplexe Bewegungen durch, da die Zeitpunkte weniger korrelieren. Dies erschwert ebenfalls die Auswertung der Wiederkehr. Trotzdem zeigt sich in den folgenden Untersuchungen, dass die Qualität der Einbettung über einen weiten Bereich unabhängig von d ist.

2.6.1 Teststatistik

Zur Beurteilung günstiger Parameter betrachten wir unterschiedliche Fehlerarten zwischen Schätzung und Referenzwert. Da jedoch das menschliche Gehör nicht in allen Frequenzbereichen die gleiche Sensibilität hat, insbesondere werden Unterschiede in niedrigen Frequenzen deutlicher wahrgenommen als in höheren, betrachten wir Abstände nicht auf der Frequenzskala f . Stattdessen gehen wir zu einer *ERB-Skala*⁸⁾ r über, die wir durch die Transformation (Moore u. Glasberg, 1983)

$$r = r(f) = 43 + 11.17 \cdot \ln \frac{f + 312 \text{ Hz}}{f + 14675 \text{ Hz}} \quad (2.39)$$

erhalten. Das menschliche Ohr hat auf dieser Skala im Bereich $0.1 \dots 6.5$ kHz eine in etwa konstante Auflösung. Mit der Transformation erhalten wir als neuen Referenzwert $r_0 = r(f_0) = r(1/T_0)$.

Bei der Bestimmung der Fundamentalfrequenz unterscheiden wir zwischen zwei typischen Fehlern (Rabiner u. a., 1976):

Grobfehler (gross error) Weicht die Schätzung \hat{r}_0 deutlich vom Referenzwert r_0 ab, so sprechen wir von einem *Grobfehler*

$$g = g(\vartheta, d, D) = \begin{cases} 1 & : |\hat{r}_0 - r_0| \geq c r_0 \\ 0 & : \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.40)$$

⁸⁾Equivalent Rectangular Bandwidth

wobei wir in dieser Arbeit $c = 0.2$ verwenden. In diese Fehlerkategorie gehören u.a. die Oktavfehler. Durch Mittelung des Grobfehlers über verschiedene Sprachproben m erhalten wir die *Grobfehlerrate*

$$G(\vartheta, d, D) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g_m(\vartheta, d, D) . \quad (2.41)$$

Feinfehler (fine error) Liegt kein Grobfehler vor, d.h. ist die Schätzung in der Nähe des Referenzwertes, so geht der Abstand in die Berechnung eines mittleren Abstandes

$$S = \left(\frac{1}{\sum_m 1 - g_m} \sum_m (1 - g_m) (\hat{f}_{0,m} - f_{0,m} - \bar{f})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.42)$$

ein, wobei eine eventuell vorhandene systematische Abweichung

$$\bar{f} = \frac{1}{\sum_m 1 - g_m} \sum_m (1 - g_m) (\hat{f}_{0,m} - f_{0,m}) \quad (2.43)$$

abgezogen wird.

Beispiel 2.6 In diesem Beispiel soll der Erfolg der T_0 -Schätzung anhand des Grobfehlers g am Phonem /e:/ in Abhängigkeit von ϑ , d und D verdeutlicht werden. Geeignete Parameter ϑ und d hängen dabei stark vom jeweiligen Sprecher ab (Abb. 2.23). Dies ist auch verständlich, da mit dem Sprecher die dynamischen Eigenschaften bei der Stimmerzeugung wechseln. Zwar sprechen alle Sprecher in Abb. 2.19 die gleichen Phoneme, jedoch unterscheiden sich die einzelnen Realisierungen (Allophone) stark voneinander und damit auch die Wahl geeigneter Parameter. Trotzdem gibt es in Abb. 2.23 durchaus Parameterkombinationen, bei denen bei allen Sprechern kein Grobfehler auftritt, jedoch ist dies allgemein nicht zu erwarten. Wie das nächste Beispiel zeigt, liefern bestimmte Parameterbereiche im Mittel bessere Ergebnisse als andere.

Beispiel 2.7 Über einen repräsentativen Ausschnitt der in der Evaluierung untersuchten Datenbank (vgl. Abschnitt 2.8.1) wird die Grobfehlerrate G in Abhängigkeit vom Geschlecht der Sprecher berechnet. Für weibliche und männliche Sprecher gehen $M = 800$ bzw. $M = 1000$ stimmhafte Abschnitte der Länge $L = 256$ ein. In der Verteilung der Grobfehlerrate spiegelt sich eine deutliche Sprecherabhängigkeit wider (Abb. 2.24). Bei den weiblichen Sprechern ist die Qualität der T_0 -Schätzung in großen Bereichen von ϑ und d unabhängig. Dies lässt auf einen einfachen Verlauf der Trajektorie im Phasenraum schließen, zumal die Einbettungsdimension $D = 1$ auch die beste Einbettung darstellt. Hier wird die geringste Fehlerrate erreicht. Bei

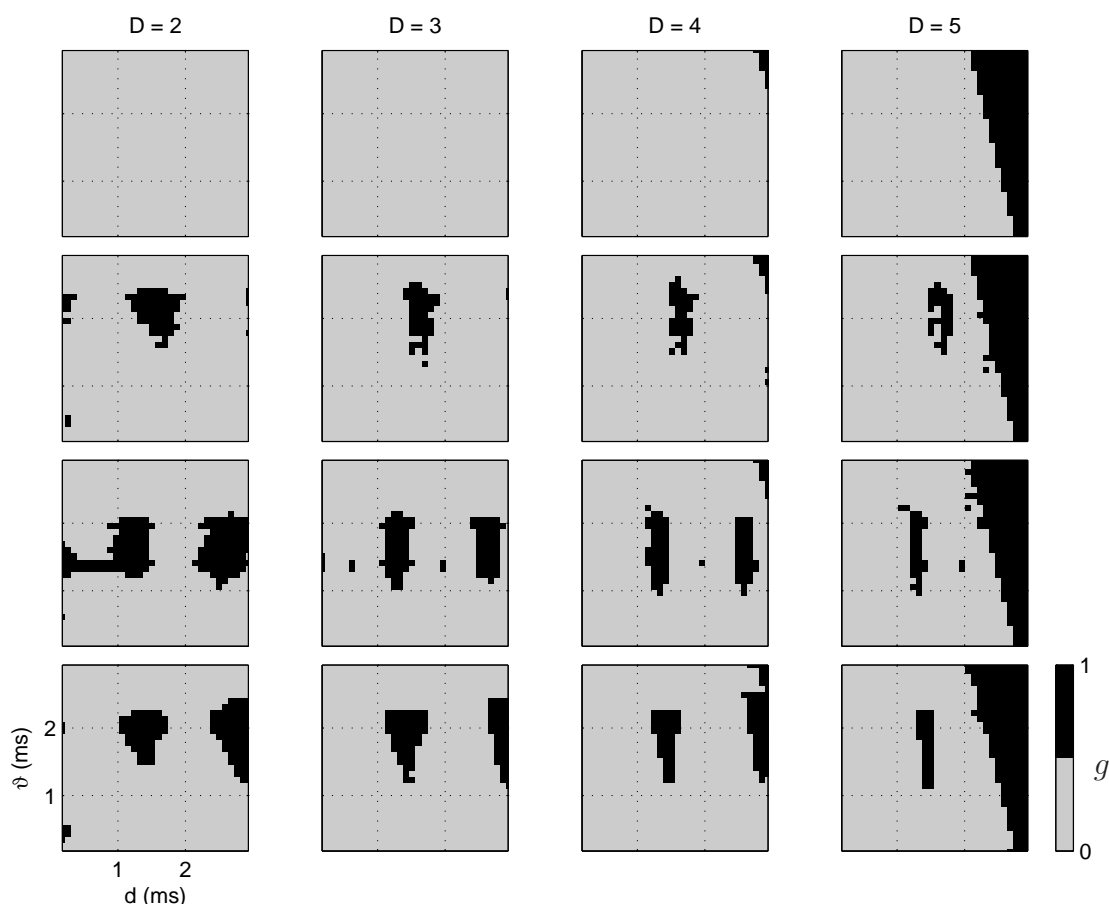


Abb. 2.23: Grobfehler $g(\vartheta, d, D)$ am Phonem /e:/ verschiedener Sprecher (Zeilen) (vgl. Abb. 2.17) bei unterschiedlichen Einbettungsdimensionen (Spalten). Parameter sind $\alpha = 0.5$ und $\beta = 0.8$

den hier untersuchten männlichen Sprechern ist die Trajektorie im Allgemeinen komplexer, was sich auch in der Fehlerrate widerspiegelt. Erstens ist sie viel sensibler bezüglich der Wahl von ϑ , zweitens sind höhere Einbettungsdimensionen nötig, um geringere Werte zu erreichen. Insgesamt treten bei den männlichen Sprechern auch mehr Grobfehler auf.

2.6.2 Kombination verschiedener Parameterwerte

Bei der Frage nach optimalen Parametern in Beispiel 2.7 zeigt sich, dass deren Wahl von verschiedenen Bedingungen abhängt und es keine generelle Antwort geben kann. Günstige Parameter hängen u.a. vom Sprecher ab und müssten erst über einen Referenzdatensatz ermittelt werden. Dies würde die Erstellung einer T_0 -Referenz beinhalten, eine nicht trivial zu lösende Aufgabe (siehe Abschnitt 2.8.1, Problem der

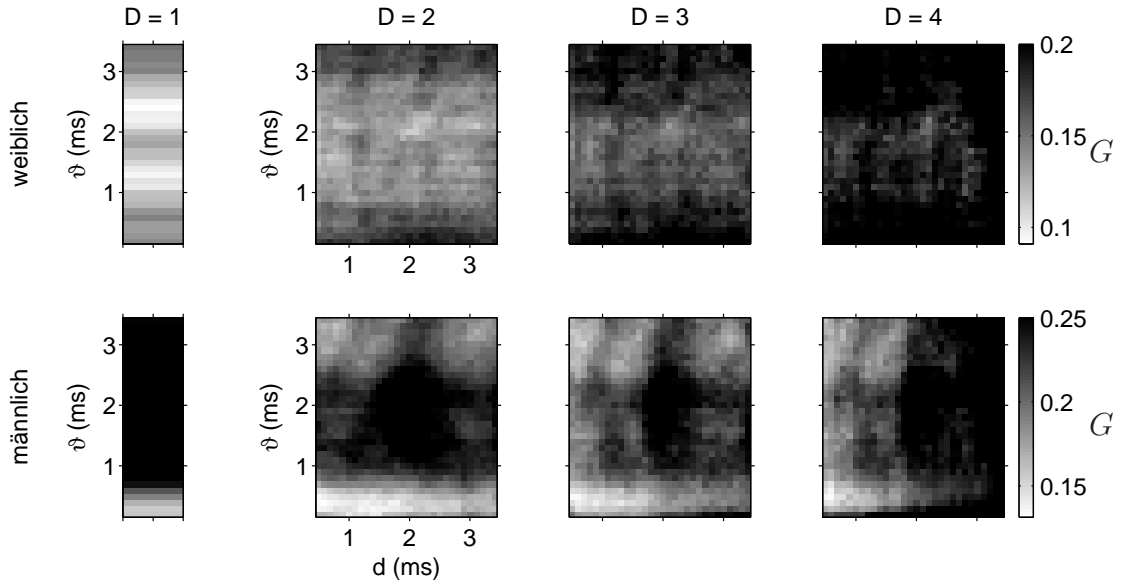


Abb. 2.24: Grobfehlerrate $G(\vartheta, d, D)$ an kontinuierlich gesprochenen Sprache in Abhängigkeit vom Geschlecht (Zeilen) und der Einbettungsdimension (Spalten). Parameter sind $\alpha = 0.5$ und $\beta = 0.8$

Referenzwerte). Deshalb soll hier ein Ansatz diskutiert werden, der nicht von einem einzigen günstigen Parametersatz abhängt, sondern im Mittel eine bestmögliche Schätzung liefert.

Wie die Grobfehlerrate G in Beispiel 2.7 zeigt, hängt diese im Wesentlichen von ϑ ab. Dieser Parameter repräsentiert einen Abstand im Phasenraum, bei dem Punkte als rekurrent angesehen werden. Von einer zuverlässigen und aussagekräftigen Statistik wird erwartet, dass die Aussagen, in diesem Fall die Schätzung der Fundamentalperiode, in einem ganzen Wertebereich dieses Abstandes gelten. Man spricht hier auch von einem *Skalierungsverhalten* (scaling behavior, scaling region).⁹⁾ Anstatt also die Rekurrenzrate $\hat{p}^{(D)}(\tau, \vartheta, d)$ bei festem ϑ zu betrachten, gehen wir jetzt zur einer *Mittlung der Rekurrenzrate*

$$\hat{p}^{(D)}(\tau, \mathcal{S}, d) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{p}^{(D)}(\tau, \vartheta_n, d) \quad (2.44)$$

über, mit $\mathcal{S} = \{\vartheta_n\}_{n=1}^N$. Des Weiteren wird erwartet, dass durch Auswahl einer hinreichend großen, repräsentativen Menge \mathcal{S} die Schätzung der Fundamentalperiode mehr oder weniger unabhängig von der Skalierung wird und damit auch unabhängig vom Sprecher.

⁹⁾So ist bei der Bestimmung der Korrelationsdimension aus der Korrelationssumme dieses Verhalten in Abhängigkeit von Δ unbedingt zu überprüfen, um eine aussagekräftige Schätzung zu erhalten (vgl. [Kantz u. Schreiber, 2005](#), Kapitel 6.3).

Wie diese Menge aussehen kann und wie viele Parameter hinreichend sind, zeigt eine Abschätzung mit Hilfe einer ebenfalls über \mathcal{S} gemittelten Grobfehlerrate

$$\widehat{G}(\mathcal{S}, d, D) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N G(\vartheta_n, d, D) . \quad (2.45)$$

Es handelt sich insofern um eine Abschätzung, da der tatsächliche Grobfehler $G(\mathcal{S}, d, D)$ bei der T_0 -Schätzung aus der Rekurrenzrate $\widehat{p}^{(D)}(\tau, \mathcal{S}, d)$ zunächst unbekannt ist. Diese Herangehensweise ermöglicht jedoch eine Bewertung vieler verschiedener Parameterkombinationen \mathcal{S} relativ zueinander, ohne jedes Mal die Rekurrenzrate neu zu berechnen. Dies verringert den Rechenaufwand erheblich. In der Evaluierung hingegen werden absolute Werte G an ausgesuchten Parameterkombinationen \mathcal{S} betrachtet, um einen direkten Vergleich mit anderen Methoden zu ermöglichen.

2.6.3 Skalierungsverhalten

Aus der Definition von $\widehat{G}(\mathcal{S}, d)$ wird sofort ersichtlich, dass das Minimum schon bei einer Parameterkombination $G(\vartheta^*, d^*)$ erreicht wird, da $G \geq 0$ gilt. Durch Hinzunahme weiterer Parameter zu \mathcal{S} kann $\widehat{G}(\mathcal{S}, d)$ lediglich ansteigen oder gleich bleiben. Jedoch sind uns in der Praxis weder die optimalen Parameter (ϑ^*, d^*) noch die Referenzwerte und damit die Fehlerrate bekannt. Deshalb stellt sich die Frage nach einer günstigen Auswahl für \mathcal{S} , so dass $\widehat{G}(\mathcal{S}, d)$ im Mittel minimale Werte liefert. Zu diesem Zweck betrachten wir unterschiedliche Auswahlkriterien für ϑ_n :

Zufällig Die Menge $\mathcal{S}_{\text{rand}}$ wird durch eine zufällige Auswahl von N Werten aus dem betrachteten Wertebereich erzeugt.

Äquidistant Mit \mathcal{S}_{lin} wird der Wertebereich von ϑ in äquidistante Stücke zerlegt (vgl. Abb. 2.25, links).

Fibonacci Denkbar sind auch nicht äquidistante Zerlegungen, wobei diese dann in einzelnen Fällen besser aber auch schlechter sein können. Hier betrachten wir eine aus der Fibonacci-Folge abgeleitete Zerlegung \mathcal{S}_{fib} mit $\vartheta_n = \vartheta_{n-2} + \vartheta_{n-1}$, wobei die Startwerte auf $\vartheta_1 = 0.2$ ms und $\vartheta_2 = 0.3$ ms gesetzt werden. Der Wertebereich von ϑ wird bei kleineren Werten zunächst feiner partitioniert und zu größeren Werten hin immer grober (vgl. Abb. 2.25, rechts). Damit wird ein großer Wertebereich abgedeckt, ohne unnötig viele Punkte mit einzubeziehen. Das Verhältnis benachbarter Punkte ist in etwa konstant $\vartheta_n/\vartheta_{n-1} \approx 1.618$ und konvergiert gegen den Goldenen Schnitt. In dem hier untersuchten Wertebereich ist \mathcal{S}_{fib} auf $N \leq 7$ beschränkt.

Den Einfluss auf die Qualität der T_0 -Schätzung in den ersten beiden Fällen zeigt Abb. 2.26. Zudem ist in Abhängigkeit des Geschlechts und der Dimension der mi-

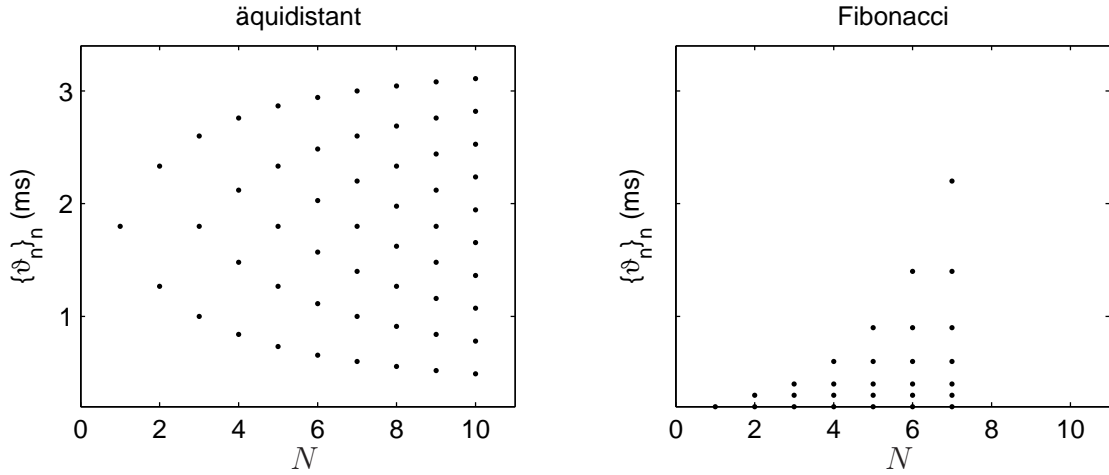


Abb. 2.25: Zerlegung des Wertebereichs von ϑ durch \mathcal{S}_{lin} und \mathcal{S}_{fib} in Abhängigkeit von der Anzahl N (Kardinalität)

nimale Wert $G(\vartheta^*, d^*)$ und der Mittelwert $\langle G(\vartheta, d) \rangle_{\vartheta, d}$ über den in Abb. 2.24 betrachtenden Parameterbereich eingezeichnet. Des Weiteren ist die Grobfehlerrate unabhängig vom Geschlecht berechnet worden (gemischt), um die Wichtigkeit der Vorkenntnis des Geschlechts bewerten zu können.

Zunächst fallen deutlich die unterschiedlichen Mittelwerte und deren Verhalten bei Erhöhung der Dimension auf. Ist die mittlere Grobfehlerrate bei den weiblichen Sprechern schon bei $D = 1$ minimal, so erfordern die Sprachsignale der männlichen Sprecher eine höhere Einbettungsdimension. Dies lässt auf eine höhere Komplexität der Trajektorien bei den hier vorliegenden männlichen Sprechern schließen. Die einzelnen Realisierungen bei einer zufälligen Zerlegung $\mathcal{S}_{\text{rand}}$ verteilen sich um die jeweiligen Mittelwerte. Mit steigender Kardinalität repräsentiert die Menge $\mathcal{S}_{\text{rand}}$ den gesamten Parameterbereich immer besser, weshalb die Varianz fällt. Bei der äquidistanten und der Fibonacci-Zerlegung (Abb. 2.27) sehen die Verläufe anders aus. Hierbei zeigt sich, dass die äquidistante Zerlegung bei den weiblichen Sprechern und die Fibonacci-Zerlegung bei den männlichen Sprechern günstiger ist. Dies entspricht auch der Verteilung der Grobfehlerrate (Abb. 2.24) und der jeweiligen Art der Zerlegung (Abb. 2.25). Bei der Fibonacci-Zerlegung macht sich die bevorzugte Betrachtung kleinerer Werte stark bemerkbar. Bei den männlichen Sprechern erhalten wir deshalb Grobfehlerraten weit unterhalb des Mittelwertes. Für die weiblichen Sprecher ist dies aber eine ungünstige Parameterwahl, weshalb die Grobfehlerrate oberhalb des Mittelwertes liegt. Bei der äquidistanten Zerlegung sieht das Verhalten genau umgekehrt aus. Zunächst werden bei kleinem N nur größere ϑ -Werte betrachtet, was ungünstig für die männlichen Sprecher ist. Erst bei größerem N werden auch kleine ϑ -Werte betrachtet und die Grobfehlerrate nähert sich dem Mittelwert an. Für die weiblichen Sprecher sind aber gerade mittlere ϑ -Werte günstig, weshalb

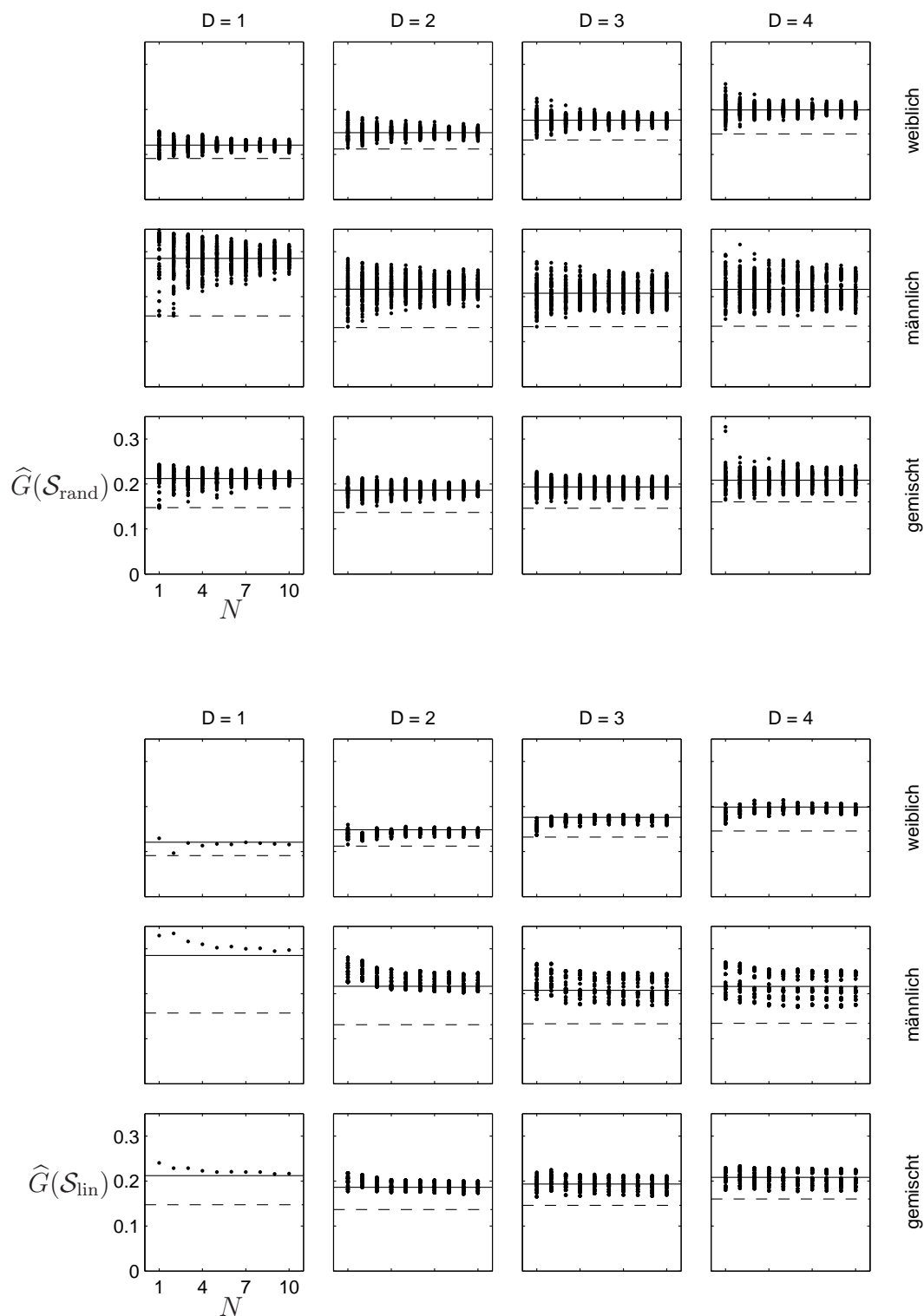


Abb. 2.26: Grobfehlerate \widehat{G} in Abhängigkeit von der Zerlegung \mathcal{S} mit der Kardinalität N , sowie der Einbettungsdimension D und der Sprecher. Gestrichelte Linie: Minimum $G(\vartheta^*, d^*)$; durchgezogene Linie: Mittelwert $\langle G(\vartheta, d) \rangle_{\vartheta, d}$

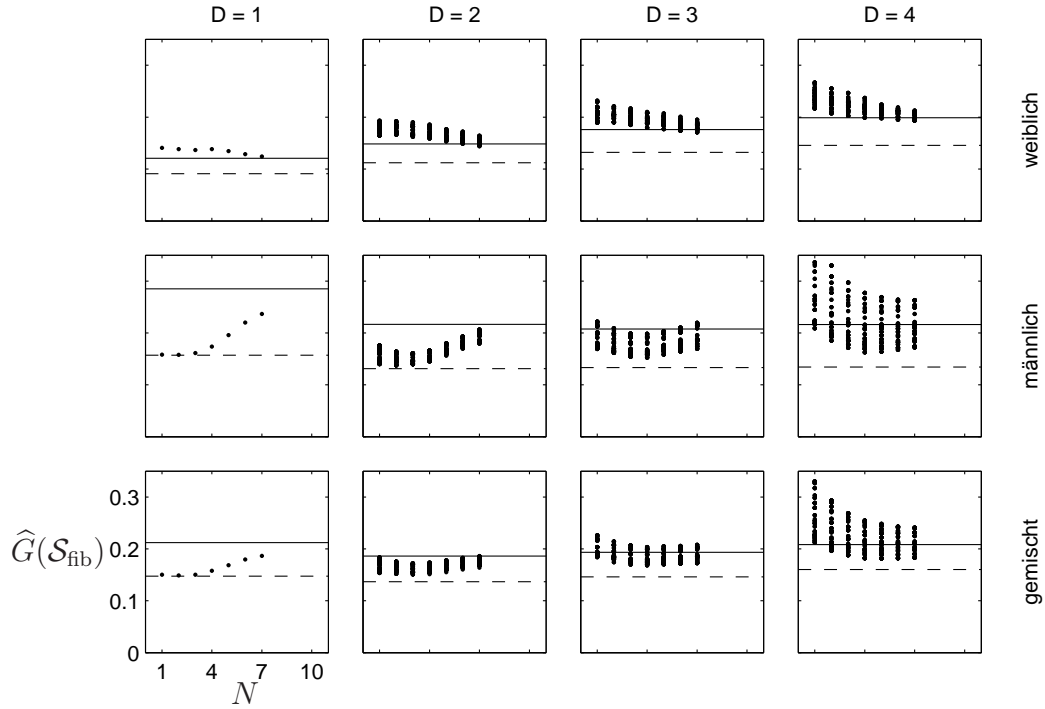


Abb. 2.27: Grobfehlerrate \widehat{G} in Abhängigkeit von der Zerlegung \mathcal{S} mit der Kardinalität N , sowie der Einbettungsdimension D und des Geschlechts. Gestrichelte Linie: Minimum $G(\vartheta^*, d^*)$; durchgezogene Linie: Mittelwert $\langle G(\vartheta, d) \rangle_{\vartheta, d}$

die Grobfehlerrate bei kleinem N unterhalb des Mittelwertes liegt.

Betrachten wir die Grobfehlerrate unabhängig vom Geschlecht, d.h. mitteln wir über alle Sprecher, so stellt sich die Fibonacci-Zerlegung als günstig heraus. In diesem Fall kommt die Grobfehlerrate bei den männlichen Sprechern in die Nähe des Minimalwertes, während bei den weiblichen Sprechern die Grobfehlerrate nur geringfügig schlechter als bei der äquidistanten Zerlegung ist. Wie nicht anders zu erwarten, zeigt sich, dass es für die Zuverlässigkeit der T_0 -Schätzung günstiger ist, die Sprechereigenschaften zu kennen. Deshalb untersuchen wir in der Evaluation zwei Szenarien:

Sprecher bekannt Wir gehen davon aus, dass die Sprechereigenschaften und damit günstige Zerlegung bekannt sind. Bei den weiblichen Sprechern wird \mathcal{S}_{lin} bei $D = 1$ und $N = 2$ verwendet. Bei den männlichen Sprechern \mathcal{S}_{fib} bei $D = 2$, $d = 1.5$ ms und $N = 3$ verwendet.

Sprecher unbekannt Sind die Eigenschaften des Sprechers unbekannt, so kann keine spezielle Zerlegung postuliert werden. Da jedoch sowohl kleine als auch große Werte für ϑ günstig sein können, verwenden wir die Fibonacci-Zerlegung.

Sie repräsentiert bei kleiner Kardinalität den größten Parameterbereich. Um den Rechenaufwand gering zu halten, setzen wir zudem $D = 1$ und $N = 3$, da hier schon gute Werte erreicht werden.

Die resultierenden Parameter fasst Tab. 2.1 nochmals zusammen.

Tab. 2.1: Auswahl der Parameter in der Evaluierung (Abschnitt 2.8) in Abhängigkeit vom Szenario

Szenario	Zerlegung	N	$\{\vartheta_n\}_n$ (ms)	D	d (ms)
weiblich	äquidistant	2	1.3, 2.3	1	-
männlich	Fibonacci	3	0.2, 0.3, 0.5	2	1.5
gemischt	Fibonacci	3	0.2, 0.3, 0.5	1	-

2.7 Zeitlich veränderliche Fundamentalperiode

In kontinuierlich gesprochener Sprache verändert sich die Fundamentalperiode ständig. So wird in der deutschen Sprache die Melodie dazu benutzt, um grammatische Strukturen oder Betonung hervorzuheben (z. B. Stimmhebung am Ende einer Frage). In tonalen Sprachen gehört der Ton fest zum Wort und ist essentiell für die lexikale Informationsübertragung. Es gibt Wörter ganz unterschiedlicher Bedeutung, die sich klanglich nur durch den Verlauf der Tonhöhe unterscheiden. Zu den Tonsprachen gehören u.a. chinesisch und vietnamesisch.

Um die Fundamentalperiode zuverlässig zu schätzen, ist eine gewisse Stationarität des zugrunde liegenden, dynamischen Systems notwendig. Da sich aber bei der kontinuierlich gesprochenen Sprache ständig die Tonhöhe und die Phoneme ändern, ist in der Sprachverarbeitung eine Kurzzeitanalyse notwendig. Zwei typische Sprachsignale aus der später verwendeten Datenbank (vgl. Abschnitt 2.8.1) zeigt Abb. 2.28. Aus der ordinalen Wiederkehr sind sehr gut die Verläufe der Melodien zu erkennen. Unterbrochen werden die Linienstrukturen durch schwarze Balken (konstante Zeitreihe am Anfang und Ende der Aufnahme) und Gebiete mit zufälliger Struktur (Hintergrundrauschen oder stimmlose Phoneme). Diese Linien korrespondieren sehr gut mit den Referenzwerten T_0 aus der Datenbank, wobei die stimmlosen Abschnitte an den Lücken in den Linien zu erkennen sind. Um dieses dynamische Verhalten in der ordinalen Wiederkehr zu erfassen, wird die Rekurrenzrate abschnittsweise berechnet. Dies kann auf zwei Wegen erfolgen:

Gleitender Rahmen (sliding frame) Zunächst wird die Matrix der ordinalen Wiederkehr für die gesamte Zeitreihe berechnet. Aus ihr wird durch Mittelung über die Zeit in einem festen Rahmen der Länge L die zeitabhängige Rekurrenzrate

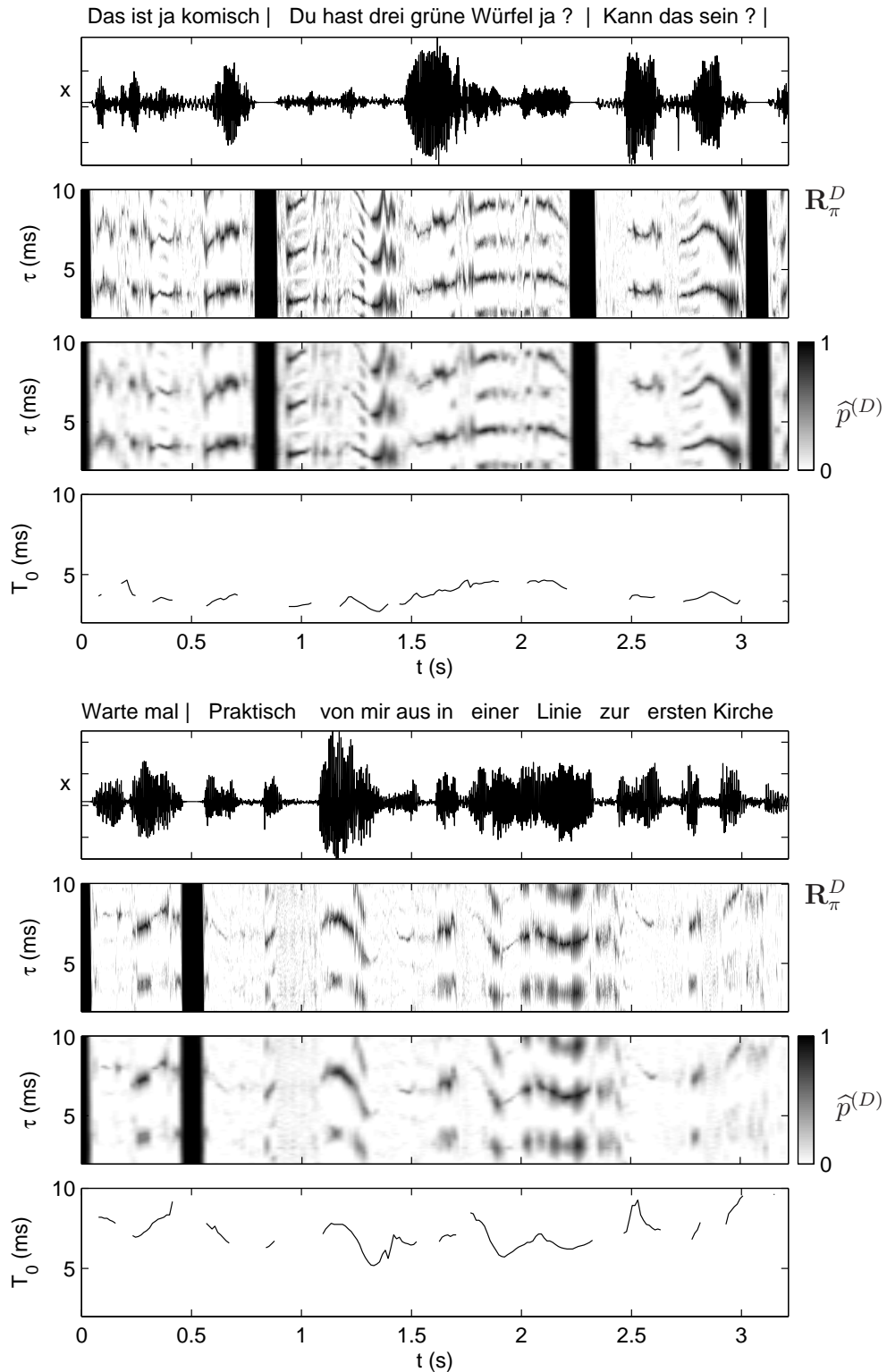


Abb. 2.28: Sprachsignale (oben) weiblicher und (unten) männlicher Sprecher. Zudem sind jeweils die ordinale Wiederkehr \mathbf{R}_π und die zugehörige Rekurrenzrate \hat{p} , sowie der Referenzwert T_0 der Datenbank dargestellt. Parameter sind $L = 25.6$ ms, $\vartheta = 1.5$ ms, $d = 1.5$ ms und $D = 3$

renzrate

$$\widehat{p}^{(D)}(t, \tau) = \frac{1}{L} \sum_{t'=t}^{t+L} \mathbf{R}_{\pi}^D(t', \tau) \quad (2.46)$$

berechnet. Um jedoch später mit anderen Methoden vergleichen zu können, muss die Summation auf einen kleineren Bereich eingeschränkt werden.

Gleitendes Fenster (sliding window) Wir gehen davon aus, dass für die Berechnung der Rekurrenzzrate zum Zeitpunkt t nur die Zeitreihe (x_t, \dots, x_{t+L}) zur Verfügung steht. Daher modifiziert sich die *zeitabhängige Rekurrenzzrate* zu

$$\widehat{p}^{(D)}(t, \tau) = \frac{1}{L - \tau - \vartheta - d(D-1)} \sum_{t'=t}^{t+L-\tau-\vartheta-d(D-1)} \mathbf{R}_{\pi}^D(t', \tau) , \quad (2.47)$$

wobei $\tau \geq 0$ gilt. In dieser Form wird sie in der Evaluierung in Abschnitt 2.8 angewendet. Dabei zeigt sich in dieser Schreibweise schnell die Problematik kurzer Fensterlängen. Der Variationsbereich von τ und die damit maximal erkennbare Periodendauer hängt maßgeblich von L ab. Mit höherer Einbettungsdimension nimmt dieser Bereich ebenfalls ab, weshalb für eine zuverlässige Schätzung der Rekurrenzzrate niedrige Dimensionen zu bevorzugen sind.

Fensterlänge

Bei der Analyse von Zeitreihen in kurzen Fenstern stellt sich natürlich die Frage nach sinnvollen Fensterlängen. Einerseits möchte man das dynamische Verhalten möglichst gut zeitlich auflösen (kleines L). Andererseits verlangt die Auswertung aber auch nach einer zuverlässigen Statistik (großes L). Dies sind zwei gegensätzliche Forderungen, zwischen denen ein Kompromiss zu finden ist. Bei der Schätzung der Periodendauer sollte wesentlich mehr als eine Periode in einem Fenster enthalten sein. Insbesondere bei den männlichen Sprechern verlangt dies nach einem längeren Fenster, wie die Verteilung der Fundamentalperiode in der Datenbank zeigt (Abb. 2.29). In der Evaluierung wird der hier eingeführte Schätzer verschiedenen Methoden gegenübergestellt, die auf die schnelle Fouriertransformation aufbauen. Daher ist es notwendig sich auf $L = 2^n$ einzuschränken. Die Sprachsignale in der Datenbank sind mit $f_s = 10$ kHz abgetastet, d.h. mit $L = 2^8 = 256$ (25.6 ms) sind die männlichen Sprecher gut erfasst. Demgegenüber könnten bei $L = 2^7 = 128$ die männlichen Sprecher nicht mehr analysiert werden und bei $L = 2^9 = 512$ wäre Stationarität innerhalb eines Fensters nicht mehr gegeben. Deswegen wird in Abschnitt 2.8 die Fensterlänge $L = 256$ verwendet.

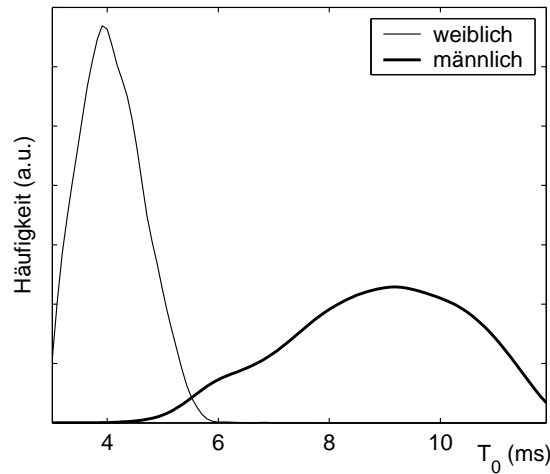


Abb. 2.29: Häufigkeitsverteilung der Fundamentalperiode T_0 in der Datenbank

2.8 Evaluierung

Nach einer allgemeinen Behandlung der Einbettungsdimension und einer Anpassung der Einbettungsparameter an die T_0 -Schätzung steht jetzt ein Vergleich mit anderen Methoden im Mittelpunkt. Zunächst werden die Parameter α und β des Algorithmus und deren Einfluss auf die Verteilung des Grobfehlers untersucht (Abschnitt 2.8.2). Nachdem geeignete Werte gefunden wurden, wird dieser Ansatz üblichen Methoden der Sprachverarbeitung (Abschnitt 2.8.3) in Abhängigkeit vom Beobachtungsrauschen gegenübergestellt (Abschnitt 2.8.4).

2.8.1 Datenbank

Bei der hier verwendeten Datenbank handelt es sich um den sogenannten „Spontankorpus“ aus dem DFG-Projekt „Intonation-Register-Modus-Funktion“ der Universität München (vgl. [Batliner u. a., 1992, 1995](#)). Es stehen mehrere weibliche und männliche Sprecher zur Verfügung, deren Äußerungen in verschiedenen Gesprächen aufgenommen wurden. Die Abtastfrequenz beträgt dabei 10 kHz. Die Datenbank enthält Informationen über verschiedene Parameter aus einer gefensterten Analyse. Unten anderem sind dies:

1. stimmhafter oder stimmloser Abschnitt
2. Transkription
3. Fundamentalfrequenz
4. handkorrigierte Fundamentalfrequenz
5. Energie

Die Fensterlänge beträgt lediglich $L = 128$ (12.8 ms), was vor allem für die männlichen Sprecher zu wenig ist (vgl. [Abb. 2.29](#)). Deshalb werden jeweils zwei benach-

barte stimmhafte Abschnitte (jeweils $L = 128$) zu einem Abschnitt ($L = 256$) zusammengefasst und die Referenzwerte (handkorrigierte Frequenzen) gemittelt. Insgesamt besteht die Datenbank aus 4822 Abschnitten weiblicher und 5185 Abschnitten männlicher Sprachdaten, was jeweils zwei Minuten entspricht.

Problem der Referenzwerte. So weit wie das Feld der Sprachverarbeitung und der T_0 -Analyse ist, so zahlreich sind auch die Möglichkeiten, Referenzwerte zu erzeugen. Selbst wenn man grundlegende Fragen nach dem Zusammenspiel zwischen dem Menschen und der Empfindung von Tonhöhen weglässt¹⁰, bleibt die Frage nach einer sinnvollen Behandlung einer Grundperiode in schnell veränderlichen Signalen. Prinzipiell gibt es nicht die einzige richtige Grundperiode, vielmehr hängt es von der Methode und dem dahinter liegenden Modell ab, was darunter verstanden wird. Deshalb kann die Evaluierung nur einen Hinweis auf die Qualität der T_0 -Schätzung geben. Quantitative Bewertungen verschiedener Fehlerarten sind nur bedingt interpretierbar. So ist ein systematischer Fehler zwischen einem Referenzwert und dem im jeweiligen Modell geschätzten Wert nicht auszuschließen. Jedoch können verschiedene Parameterbereiche innerhalb eines Modells durchaus miteinander verglichen werden. Stellt man verschiedene Modelle gegenüber, so sind zumindest Vergleiche des Verhaltens auf äußere Einflüsse, wie dem Beobachtungsrauschen möglich.

2.8.2 Verteilung des Grobfehlers

Der in Abschnitt 2.4.2 eingeführte Algorithmus zur T_0 -Schätzung aus der Rekurrenzrate benötigt zwei Parameter. Einerseits muss ein Schwellwert \tilde{q}_α für die Rekurrenzrate festgelegt werden (α -Quantil). Andererseits ist nach Berechnung der Kandidaten mit β ein weiterer Wert anzupassen, um im geeigneten Maße auch kleinere Peaks in der T_0 -Schätzung zu berücksichtigen. Der Einfluss dieser beiden Parameter auf die Verteilung des Grobfehlers wurde in Abhängigkeit der drei Szenarien aus Tab. 2.1 (auf Seite 50) untersucht (Abb. 2.30).

Aufgrund eines unterschiedlichen dynamischen Verhaltens bei den weiblichen und männlichen Sprachsignalen zeigt sich auch hier einmal mehr, dass unterschiedliche Parameter benötigt werden. Bei den weiblichen Sprachsignalen ist die Fundamentalperiode im Mittel viel geringer als bei den männlichen (vgl. Abb. 2.29). Deshalb werden auch Vielfache der Periodendauer in der Rekurrenzrate erfasst. Bei $\beta = 1$ wird lediglich der größte Peak als Schätzung ausgewählt, weshalb es gerade dort zu vielen Grobfehlern kommt. Dies reduziert sich drastisch, sobald ein kleinerer β -Wert genommen wird. Bei den männlichen Sprachsignalen ist aufgrund der größeren Periodendauer dieser Effekt vernachlässigbar. Hier kommt es durch meist zu geringe

¹⁰Man unterscheidet auch zwischen der empfundenen Tonhöhe (Pitchfrequenz) und der modellierten Fundamentalfrequenz.

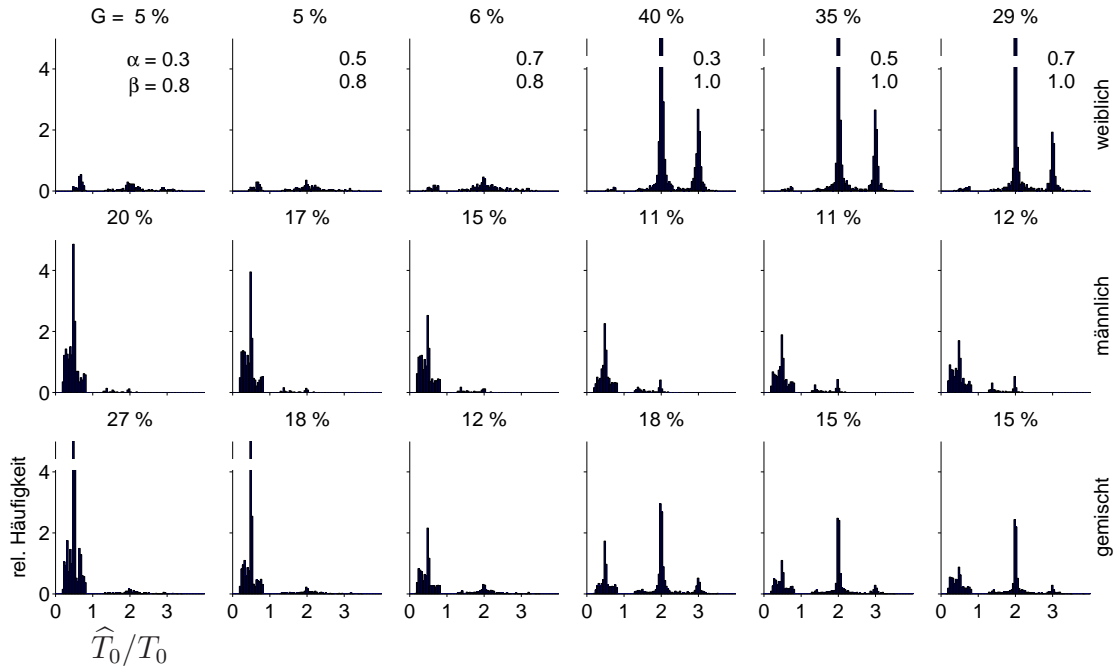


Abb. 2.30: Relative Häufigkeitsverteilung (%) des Grobfehlers in Abhängigkeit vom Verhältnis zwischen geschätzter Fundamentalperiode und Referenzwert bei verschiedenen Sprechern (Zeilen) und Parametern α und β des Schätzers (Spalten). Zudem ist jeweils die gesamte Grobfehllerrate angegeben

Einbettung zu weiteren Peaks, die nicht bei einem Vielfachen der Fundamentalperiode liegen. Deshalb ist gerade $\beta = 1$ eine günstige Wahl. Werden die Sprachsignale unabhängig vom Geschlecht betrachtet, so mischen sich beide Effekte, wobei sich zeigt, dass die Wahl von $\alpha = 0.7$ und $\beta = 0.8$ einen guten Kompromiss darstellt. Durch den hohen α -Wert gehen zunächst viele falsche Peaks bei den männlichen Sprechern nicht in die Kandidatenliste mit ein. Mit $\beta < 1$ werden dann die Vielfachen der Fundamentalperiode abgelehnt. Ergänzend zu Tab. 2.1 fasst Tab. 2.2 die Wahl der Schwellwerte α und β zusammen.

Tab. 2.2: Auswahl der Schwellwerte zur Peak-Extraktion bei der ordinalen Wiederkehr und dem Cepstrum (siehe Abschnitt 2.8.3) in Abhängigkeit vom Szenario

Szenario	ordinal		Cepstrum	
	α	β	α	β
weiblich	0.3	0.8	0.7	0.8
männlich	0.3	1.0	0.7	1.0
gemischt	0.7	0.8	0.7	1.0

2.8.3 Referenzmethoden

Um die Ergebnisse der Auswertung in Abschnitt 2.8.4 einordnen zu können, vergleichen wir die Methode mit allgemeinen Ansätzen der Sprachverarbeitung. Ausgesuchte Verfahren, die im Zeit- oder Frequenzbereich vorgehen, werden zunächst vorgestellt. Diese Referenzmethoden beinhalten zum einen allgemeine Ansätze, wie die Korrelation oder die Fouriertransformation, zum anderen aber auch speziell an die Signaleigenschaften angepasste Ansätze, wie das Cepstrum oder die subharmonische Summation. Dies ist natürlich nur eine kleine Auswahl, zudem werden komplexere Ansätze wie z.B. neuronale Netzwerke oder Modellierung der Gehöreigenschaften (human auditory modelling) nicht einbezogen. Einen guten Einblick in verschiedene klassische Methoden liefert Hess (1983). Ein Überblick über verschiedene Generationen von Algorithmen ist in einem Artikel von Hermes (1993) zu finden.

Autokorrelation (AC). Eine Standardmethode zur Erkennung von Abhängigkeiten in Zeitreihen ist die *empirische Autokorrelationsfunktion*

$$\rho(\tau) = \frac{\frac{1}{L} \sum_{t=1}^L (x_t - \bar{x})(x_{t+\tau} - \bar{x})}{\sigma_x^2} . \quad (2.48)$$

Bei periodischen Zeitreihen weist $\rho(\tau)$ auch eine periodische Struktur mit lokalen Maxima im Abstand einer Periode auf. Wie auch bei der ordinalen Wiederkehr müssen neben dem absoluten Maximum im betrachteten Bereich von τ auch kleinere, lokale Maxima in die Schätzung der Grundperiode mit einbezogen werden (vgl. Abb. 2.31). Der hier verwendete Algorithmus aus dem Programm `praat` (www.praat.org, `to pitch (ac)`, vgl. Boersma, 1993) beachtet deswegen auch kleinere, lokale Maxima, wobei der voreingestellte Wert `octave cost=0.01` genommen wird. Die Möglichkeiten der Nachverarbeitung wurden ausgeschaltet. Der Bereich für τ ist auf 2 – 12.8 ms eingeschränkt.

Subharmonische Summation (SHS). Bei periodischen Zeitreihen ist es nahe liegend, sie mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{t=1}^L w_t \cdot x_t \cdot e^{-i 2\pi \frac{f \cdot t}{f_s}} \quad (2.49)$$

auf harmonische Anteile hin zu analysieren. Hierbei bezeichnet f_s die Abtastfrequenz. Der aktuelle Ausschnitt der Zeitreihe wird dabei mit einer geeigneten Fensterfunktion w_t gewichtet, in diesem Fall ein Hamming-Fenster, um Abschneideeffekte im Frequenzbereich aufgrund einer kurzen Fensterlänge zu verringern. Die

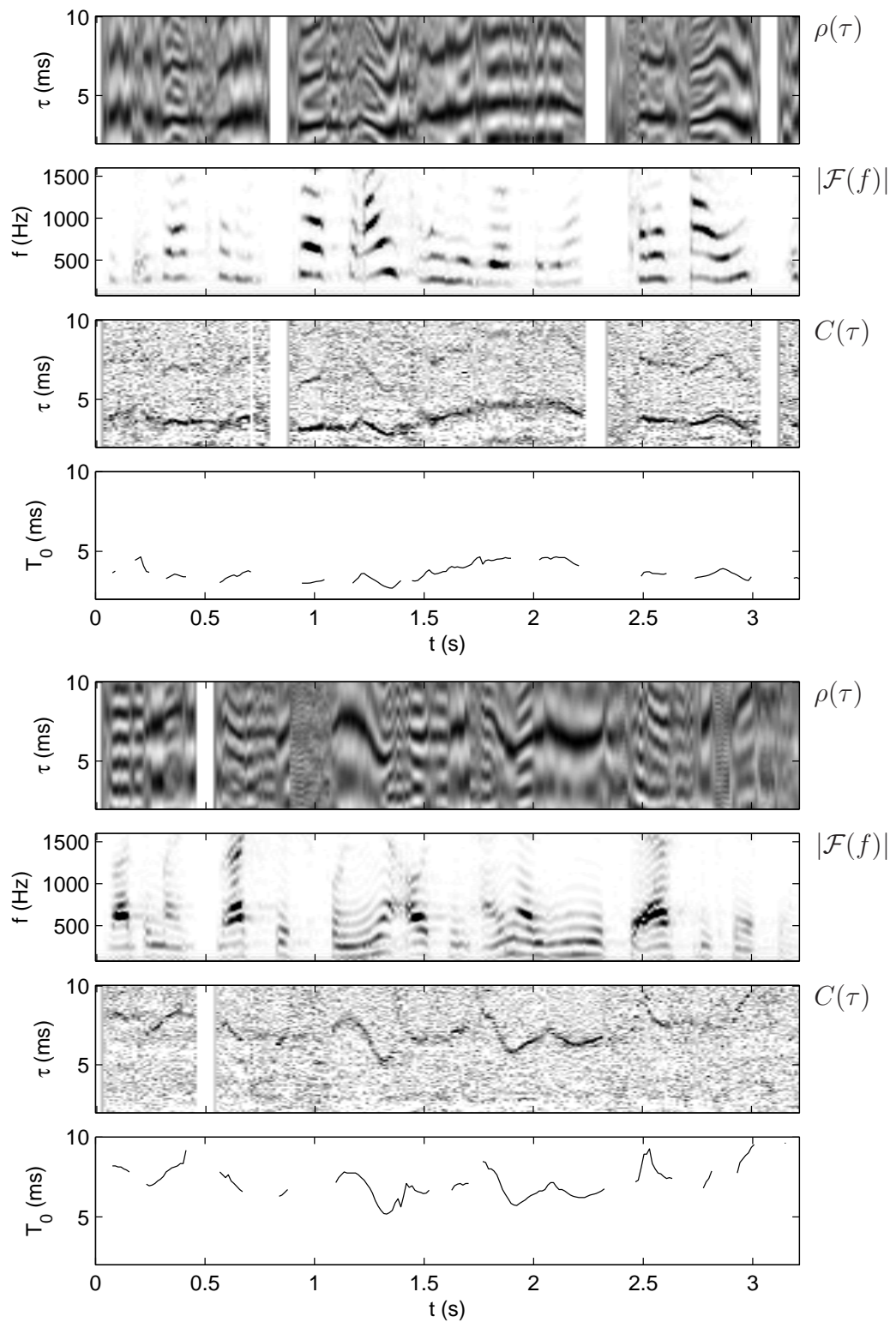


Abb. 2.31: Gefensterte Analyse der Referenzmethoden an den Sprachsignalen aus Abb. 2.28. Oben: weibliche und unten: männliche Sprecher. Fensterlänge $L = 25.6$ ms

subharmonische Summation (Hermes, 1988) nutzt dabei aus, dass periodische Funktionen, sobald sie von einer harmonischen Sinusfunktion abweichen, höhere Harmonische in $\mathcal{F}(f)$ aufweisen (Abb. 2.31). Bei den Sprachsignalen gehen lokale Maxima bei der Grundfrequenz f_0 wie auch bei den Harmonischen $n f_0$ in die T_0 -Schätzung ein. Durch Summation der Fouriertransformierten mit komprimierten Versionen

$$H(f) = \sum_{n=1}^N h_n P(nf) , \quad \text{mit } P(f) = W(f) |\mathcal{F}(f)| \quad (2.50)$$

werden Peaks verstärkt, die im ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen. Vorab wird die Amplitude der Fouriertransformierten durch $W(f)$ gefiltert, um eine frequenzabhängige Sensitivität des Gehörs zu beachten. Zudem werden höhere Harmonische durch $h_n = 0.84^{n-1}$ geringer gewichtet. Als Schätzer für die Fundamentalfrequenz wird dann das Maximum von $H(f)$ genommen. Auch dieser Schätzer ist in dem Programm `praat` implementiert (`to pitch (shs)`), wobei der empfohlene Wert für die Kompression $N = 15$ verwendet wird. Dies erfordert jedoch einen großen Frequenzbereich von 78 – 1600 Hz. Um trotzdem eine schnelle Analyse zu ermöglichen, verwendet der Algorithmus wie von Hermes (1988) vorgeschlagen eine logarithmische Skalierung $H(s) = H(\log_2 f)$ im Frequenzbereich.

Cepstrum (CEP). Eine Methode, die ebenfalls das Vorhandensein von Harmonischen in $\mathcal{F}(f)$ ausnutzt, ist das *Cepstrum* (Noll, 1967). Dazu wird die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(f)$ nichtlinear verzerrt $\log |\mathcal{F}(f)|$, um die Amplituden zu komprimieren. Durch diese Transformation gleichen sich die Amplituden der Fundamentalfrequenz und der Harmonischen an, wodurch nach Rücktransformation in den Zeitbereich

$$C(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(\log |\mathcal{F}(f)|) \quad (2.51)$$

sich der Verlauf von $C(\tau)$ einer periodischen Impulsfolge annähert. Sowohl bei der Grundperiode als auch deren Vielfachen weist das Cepstrum lokale Maxima auf (Abb. 2.31). Geht man bei der Peak-Extraktion wie bei der ordinalen Wiederkehr vor (vgl. Abschnitt 2.4.2), so zeigt sich bei der Verteilung des Grobfehlers ein ähnliches Verhalten wie in Abb. 2.30. Auch hier wählen wir zunächst $\beta = 0.8$ bei den weiblichen und $\beta = 1$ bei den männlichen Sprechern. Da jedoch das Cepstrum aufgrund der endlichen Länge der Zeitreihe zu größeren τ -Werten hin abfällt, ist es weniger anfällig gegenüber der doppelten bzw. dreifachen Fundamentalperiode. Deshalb ist bei gemischten Sprechern $\beta = 1$ am günstigsten. Als α -Quantil wählen wir generell $\alpha = 0.7$, um eine Sensitivität gegenüber Beobachtungsruschen gering zu halten. In Tab. 2.2 sind ebenfalls die Werte für das Cepstrum zusammengefasst.

Bei der logarithmischen Transformation spricht man auch von einer spektralen Einebnung. Dabei hängt es bei der Periodenbestimmung vom Problem ab, wie die Verzerrung auszusehen hat. Durch den Logarithmus werden große Amplituden komprimiert und kleine Amplituden expandiert. Bei der Autokorrelationsfunktion ist

es genau umgekehrt. Diese kann nämlich auch als eine Verzerrung der Amplituden bei der Fouriertransformierten angesehen werden, wobei es sich hier um das Quadrat der Amplituden handelt.¹¹⁾ Folgt man dieser Argumentation (vgl. Hess, 1992), so ist das Cepstrum im Vergleich zur Autokorrelationsfunktion anfälliger gegenüber Beobachtungsrauschen. Demgegenüber ist die Autokorrelationsfunktion aber anfälliger gegenüber der falschen Auswahl von Peaks im Falle dominierender Harmonischer. Je nach Anwendungsgebiet muss zwischen diesen beiden Problemen abgewogen werden. So wurden auch weitere Transformationen vorgeschlagen, die aber zwischen diesen beiden Fällen liegen und deshalb für eine Gegenüberstellung weniger interessant sind. Die Art der spektralen Einebnung spiegelt sich sehr gut in Abb. 2.31 wider. Die Autokorrelation zeigt zwar in einer ausgeprägten Linie den Verlauf der Grundperiode, enthält jedoch das Spektrum stark ausgeprägte Harmonische, so treten auch bei der Autokorrelation viele weitere Linien auf. Beim Cepstrum hingegen sind nur die Grundperiode und deren Vielfache zu erkennen. Jedoch ist das Bild durch starke Störungen beeinträchtigt.

2.8.4 Auswertung

Die Sprachsignale aus der Datenbank wurden in einer störungsfreien Umgebung aufgenommen. In der Regel können aber die Signale durch eine Vielzahl von Ursachen verzerrt, verrauscht oder anderweitig beeinflusst sein. Im einfachsten Fall kann die Aufnahmetechnik (Mikrofon, Verstärker, analog-digital-Wandler) eine nichtlineare Charakteristik aufweisen. Dies führt zu einer Veränderung im Frequenzspektrum, auf das die Referenzmethoden aufbauen. Die ordinale Wiederkehr ist davon jedoch nicht beeinflusst, was ein wichtiger Vorteil ist, wenn die Aufnahmetechnik modifiziert wird. Viel schwieriger ist das Problem der Umgebungsgeräusche, die ungewollt das eigentliche Sprachsignal überlagern. So könnte die Person ein Telefongespräch im Auto oder einer anderen lauten Umgebung führen. Es ist aber problematisch, eine reproduzierbare Testumgebung zu schaffen, und vor allem ist nicht mathematisch definiert, wie die Störung aus zusehen hat. So kann die Störung einerseits einem Rauschen ähneln, andererseits aber auch zeitlich veränderliche Frequenzanteile enthalten.

Wir beschränken uns deshalb auf den einfachsten Fall und addieren zu den Sprachsignalen normalverteiltes Beobachtungsrauschen $\mathcal{N}(0, \sigma_r)$. Dieses wird im Verhältnis zur Standardabweichung der Sprachsignale σ_x variiert, wobei σ_x insge-

¹¹⁾Beim Betragsquadrat der Fouriertransformierten $|\mathcal{F}(f)|^2$ spricht man vom *Periodogramm*. Dieses stellt eine (nicht konsistente) Schätzung der Spektraldichte dar, aus der die Autokorrelation durch inverse Fouriertransformation berechnet werden kann (Wiener-Chintschin-Formel). So wird üblicherweise die empirische Autokorrelationsfunktion mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation berechnet, was u.a. auch bedeutend schneller ist, als direkt im Zeitbereich vorzugehen.

samt über alle jeweils betrachteten Abschnitte m gemittelt wird.¹²⁾

Die Auswirkungen auf die in Abschnitt 2.6.1 eingeführte Grobfehlerrate und den Feinfehler in Abhängigkeit von der Stärke des Beobachtungsrauschens zeigt Abb. 2.32. Wie zu erwarten, steigt die Grobfehlerrate G mit zunehmendem Beobachtungsrauschen an. Betrachtet man den Übergang von weiblichen zu männlichen Sprechern, so fällt zunächst die Autokorrelation auf. Hier verringert sich die Fehlerrate, während sie sich bei allen anderen Methoden vergrößert. Dies ist auf den stärkeren Einfluss der Harmonischen bei der Schätzung mittels der Autokorrelation zurückzuführen (vgl. Abschnitt 2.8.3). Das Cepstrum ist demgegenüber zwar weniger anfällig, zeigt aber eine erhöhte Fehlerrate bei verrauschten Sprachsignalen. Bei der subharmonischen Summation gehen bei den männlichen Sprechern weniger Harmonische in die Schätzung ein als bei den weiblichen Sprechern, wodurch sich die Fehlerrate auch hier vergrößert. Die Trajektorien bei den männlichen Sprechern in dieser Datenbank sind komplexer, folglich verschlechtert sich die Grobfehlerrate bei der ordinalen Wiederkehr. Werden die Sprachsignale unabhängig vom Geschlecht betrachtet, so liegen die Methoden im rauschfreien Fall dicht zusammen. Erst mit zunehmenden Rauschen gehen die Grobfehlerraten stärker auseinander, wobei die ordinale Wiederkehr und die Autokorrelation die größte Robustheit aufweisen.

Für den Fall, dass kein Grobfehler vorliegt, gibt der Feinfehler S die Streuung um den Referenzwert an. Dieser Fehler ist nicht unbedingt als Fehler in der Tonhöhe einzuordnen, jedoch kann er störend auf den Zuhörer wirken. Bei der Interpretation ist allerdings zu beachten, dass sich einerseits das Problem einer systematischen Abweichung zwischen untersuchter Methode und Referenzmethode stellt. Je nach Modellvorstellung wird die Fundamentalperiode unterschiedlich modelliert, was sich im Feinfehler deutlich bemerkbar macht. Deshalb wird bei der Berechnung von S (vgl. (2.42) auf Seite 43) der Mittelwert der Abweichung abgezogen. Andererseits gehen nur Werte in die Berechnung ein, bei denen kein Grobfehler vorliegt. Dadurch ist der Abstand nach oben beschränkt. Um Abschätzen zu können, wie gut die Ergebnisse sind, berechnen wir den Feinfehler im schlechten Fall einer Gleichverteilung zwischen Schätzung $\hat{r}_0 = r(\hat{f}_0)$ und Referenzwert r_0 . Dabei beschränkt der Grobfehler den Abstand $\hat{r}_0 - r_0$ in Abhängigkeit vom Referenzwert auf $\pm c \cdot r_0$ mit $c = 0.2$ (vgl. (2.40) auf Seite 42). Mit der mittleren ERB-Rate $\bar{r}_0 = \langle r_{0,m} \rangle_m$ berechnet sich der *Feinfehler bei Gleichverteilung* zu

$$S_{\text{GV}} = r^{-1} \left(\frac{2 \cdot c \cdot \bar{r}_0}{\sqrt{12}} \right) , \quad (2.52)$$

wobei r^{-1} die Rücktransformation von der ERB- zur Frequenzskala bezeichnet. Bei allen Methoden zeigt sich, dass der Feinfehler deutlich unter diesem ungünstigsten Fall (worst case) liegt und sich diesem mit zunehmendem Rauschen annähert (Abb. 2.32).

¹²⁾Im Gegensatz dazu kann σ_x auch für jeden Abschnitt einzeln berechnet werden, wodurch in leisen Passagen die Störung geringer wird. Dieser Ansatz ist jedoch weniger realistisch.

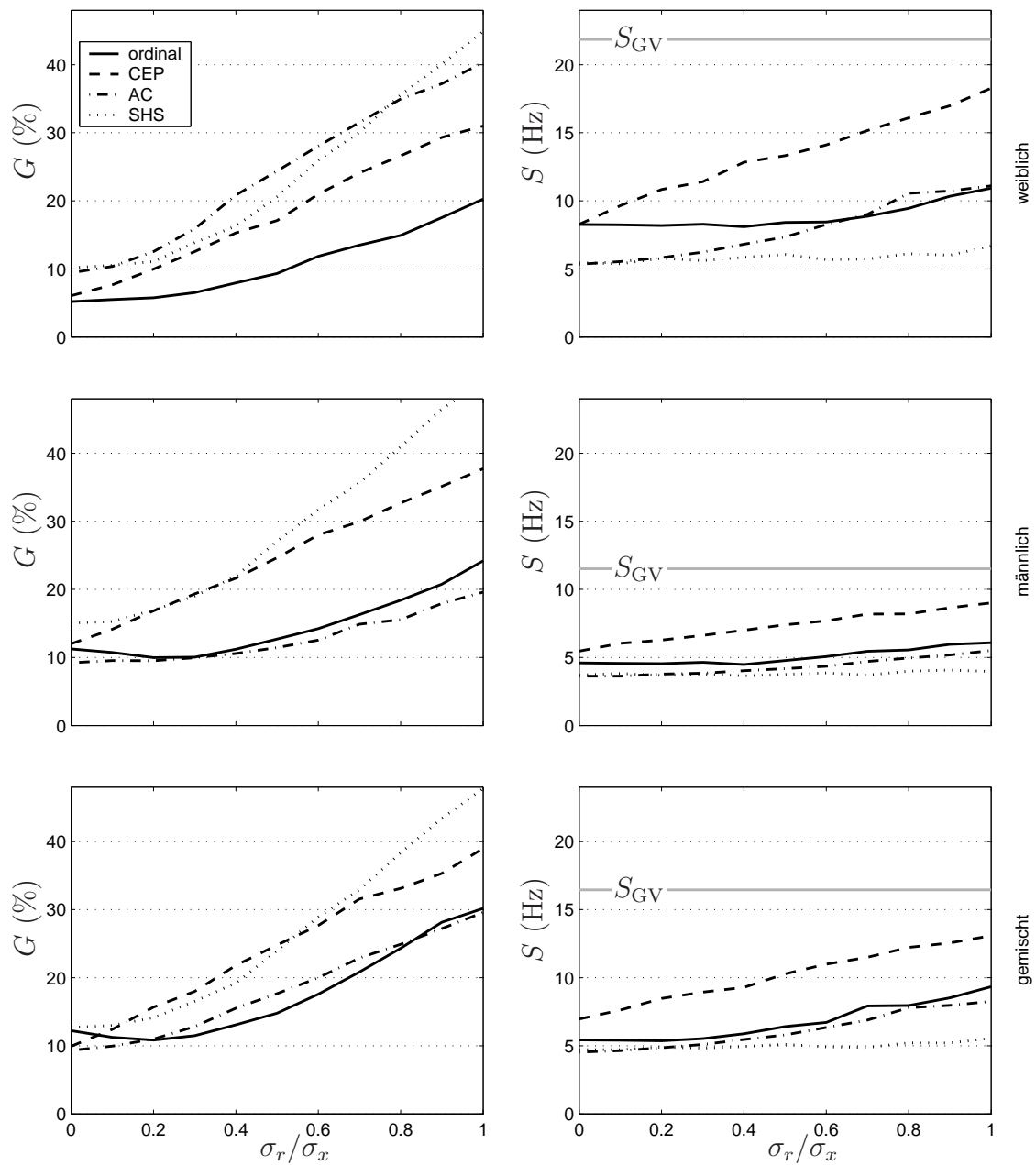


Abb. 2.32: Grobfehlerrate G und Feinfehler S in Abhängigkeit von der Stärke des Beobachtungsrauschens und der Sprecher. T_0 -Schätzung mittels (ordinal) ordinaler Wiederkehr, (CEP) Cepstrum, (AC) Autokorrelation und (SHS) Subharmonischer Summation. S_{GV} Feinfehler bei Gleichverteilung (vgl. (2.52) auf Seite 60)

2.9 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wird eine Methodik vorgestellt, in der Wiederkehrzeiten in einem speziell konstruierten Phasenraum untersucht werden. Dabei wird der übliche Begriff des Phasenraums mit seinen Abstandsmaßen verlassen und zu einer ordinalen Sichtweise übergegangen. Lediglich durch Verwendung der Relationen $<$ und $>$ wird ein Begriff der ordinalen Wiederkehr konstruiert. Motiviert ist dieser Ansatz durch eine Invarianz gegenüber monotoner Transformation der Amplitude, wodurch die Datenanalyse robust gegenüber einer Modifikation der Messapparatur ist. So kann an Modellsystemen nicht nur eine Invarianz der Verteilung der ordinalen Wiederkehr beim Übergang von einer Sinus- zu einer Dreiecksfunktion gezeigt werden, sondern auch bei einer ganzen Klasse von periodischen Funktionen mit unimodaler Grundperiode. Je nach Untersuchungsgegenstand ist dies ein entscheidender Vorteil gegenüber der metrischen Definition einer Wiederkehr.

In einer Anwendung zur Bestimmung der Fundamentalperiode in Sprachsignalen wird diese Eigenschaft der ordinalen Wiederkehr ausgenutzt. Denn obwohl stimmhafte Phoneme durch eine Periode gekennzeichnet sind, können sie einen völlig unterschiedlichen Verlauf aufweisen. Dennoch ist es erforderlich, die ordinale Wiederkehr auf höhere Einbettungsdimensionen im Phasenraum zu erweitern, um der unterschiedlichen Komplexität der Sprachsignale gerecht zu werden. Bei einer speziell angepassten Analyse der falschen Nachbarn zeigt sich, dass bei der ordinalen Wiederkehr schon niedrige Einbettungsdimensionen ausreichen, um Einbettungsfehler zu minimieren. In einer Gegenüberstellung dieser Methodik mit ausgesuchten Methoden der Sprachverarbeitung zeigt sich eine sehr gute Robustheit gegenüber Beobachtungsrauschen.

Kapitel 3

Ordinale Wiederkehr in bivariaten Zeitreihen

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die Definition einer Rekurrenz im Phasenraum mit Hilfe der Ordnungsmuster. Diese Idee wurde erstmals in den Arbeiten (Groth, 2004, 2005) vorgestellt, wobei letztere auch im [Anhang](#) dieser Schrift zu finden ist. Deshalb wird hier darauf verzichtet, diese Arbeit komplett wiederzugeben. Stattdessen konzentrieren wir uns auf wichtige Aspekte der Methodik und stellen diese in einer ausführlicheren Form dar. Ergänzt wird dieser Überblick durch weiterführende Bemerkungen und Erkenntnisse. Hinsichtlich der Anwendung liefern erste Untersuchungen von Elektroenzephalogrammen (EEG) vielversprechende Ergebnisse. So enthält die letztere Arbeit auch eine kurze Anwendung zur Kopplungsmessung in EEGs, die den Vorteil des ordinalen Ansatzes bei stark variablen Zeitreihen veranschaulicht. In einer Analyse ereigniskorrelierter Aktivitäten in EEGs wurde die Möglichkeit demonstriert, akustische Reize auf der Basis einzelner Versuche zu detektieren (Marwan u. a., 2006, im [Anhang](#) dieser Schrift). In dieser Untersuchung zeigt sich ebenfalls eine Verbesserung der Aussagen durch einen Übergang zur ordinalen Skala, wobei neben der Rekurrenzrate auch andere statistische Größen betrachtet wurden.

3.1 Motivation

In der Begriffsbildung der ordinalen Wiederkehr in Kapitel 2 wird vorausgesetzt, dass die Werte zu den Zeitpunkten $\{t, t + \vartheta\}$ mit den verschobenen Zeitpunkten $\{t + \tau, t + \tau + \vartheta\}$ verglichen werden können. Dies schränkt die Untersuchung der Wiederkehr auf univariate Zeitreihen ein. So ist es nicht möglich, zwei Messgrößen mit unterschiedlicher physikalischer Einheit zu vergleichen, d.h. $x_t < y_{t+\tau}$ oder $x_t > y_{t+\tau}$ zu entscheiden. Auch im Fall identischer Maßeinheiten können sich die Systeme auf unterschiedlichen Skalen bewegen. Jedoch ist es in der Analyse gekoppelter Systeme oft wünschenswert, Beziehungen zwischen verschiedenartigen Systemen zu studieren. Deshalb erweitern wir den Ansatz einer ordinalen Wiederkehr aus Kapitel 2 auf bivariate Systeme.

In der Analyse bivariater Systeme gibt es unterschiedlichste lineare und nicht-lineare Methoden, um *kooperatives Verhalten* zu studieren. Von der Korrelation und den darauf aufbauenden Methoden werden lediglich lineare Zusammenhänge zwischen zwei dynamischen Systemen x und y erkannt. So kann die Kreuzkorrelation als Anstieg der Trajektorie im Phasenraum (x, y) interpretiert werden.¹⁾ Es ist verständlich, dass dieser Ansatz bei nichtlinearen Zusammenhängen unzureichend ist.

Mit Hilfe der Transinformation werden beliebige statistische Zusammenhänge erkannt. Dazu wird die Verbundwahrscheinlichkeit von x und y und deren Abweichung von einer Gleichverteilung untersucht. Es gibt verschiedene Ansätze zur Schätzung einer Verbundwahrscheinlichkeit, wobei die Transinformation z.B. direkt aus einem Verbundrekurrenzplot geschätzt werden kann. Dabei werden Verbundereignisse durch elementweise Multiplikation von RPs zweier unterschiedlicher Systeme in einem *joint recurrence plot* (JRP)

$$\begin{aligned} \mathbf{JR}(t, s) &= \mathbf{R}_x(t, s) \cdot \mathbf{R}_y(t, s) \\ &= \Theta(\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_s\| - \Delta_x) \cdot \Theta(\|\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_s\| - \Delta_y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

dargestellt (Romano u. a., 2004).

Ein hierzu alternativer Ansatz zur Untersuchung rekurrenter Dynamik führt einen Abstandstest direkt zwischen zwei Trajektorien unterschiedlicher Systeme durch. Dabei werden die Trajektorien im Phasenraum zu den Zeitpunkte t und s als rekurrent angesehen, wenn $\|\mathbf{x}_t - \mathbf{y}_s\| \leq \Delta$ gilt. Hierbei bezeichnet Δ einen maximalen Abstand im Phasenraum. In Analogie zum RP (vgl. (2.6) auf Seite 10) ist der *Kreuzrekurrenzplot* definiert als (CRP, Cross recurrence plot, Zbilut u. a., 1998; Marwan u. a., 2002b)

$$\mathbf{CR}(t, s) = \Theta(\|\mathbf{x}_t - \mathbf{y}_s\| - \Delta) . \quad (3.2)$$

Jedoch ist es problematisch, physikalisch unterschiedliche Systeme gegenüberzustellen, da diese im gleichen Phasenraum existieren müssen, um einen Abstand $\|\cdot\|$ berechnen zu können. Durch eine geeignete Normierung der Zeitreihen kann dieses Problem teilweise umgangen werden, jedoch ist dieses Vorgehen mathematisch nicht zufriedenstellend. Deshalb vergleichen wir im folgenden Ansatz nur die Werte innerhalb einer Zeitreihe, während zwischen verschiedenen Zeitreihen lediglich die dimensionslosen Ordnungsmuster in Relation zueinander gesetzt werden.

¹⁾Bei Normierung der Zeitreihen auf $\sigma_x = \sigma_y = 1$ ist der Anstieg b der Regressionsgeraden $\hat{y} = a + b x$ identisch mit der Kreuzkorrelation $\rho = s_{xy}/(\sigma_x \sigma_y)$, denn es gilt $b = s_{xy}/\sigma_x^2$. Hierbei bezeichnen s_{xy} die Kovarianz und σ_x bzw. σ_y die Standardabweichung.

3.2 Begriffsbildung der Wiederkehr mittels Ordnungsmuster

Die Definition der ordinalen Wiederkehr in Abschnitt 2.1 wurde noch stark an die metrische Wiederkehr $\|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_s\| \leq \Delta$ angelehnt. Um jedoch unterschiedliche dynamische Systeme x und y betrachten zu können, verwerfen wir alle Vergleiche zwischen den Zeitpunkten $\{t, t + \vartheta\}$ und $\{t + \tau, t + \tau + \vartheta\} \equiv \{s, s + \vartheta\}$ in der Definition der ordinalen Wiederkehr (vgl. (2.4) und (2.5) auf Seite 10) und erhalten

$$\begin{aligned} & x_t \leq x_{t+\vartheta} \quad \wedge \quad x_{t+\tau} \leq x_{t+\tau+\vartheta} & (3.3) \\ \text{oder} \quad & x_t \geq x_{t+\vartheta} \quad \wedge \quad x_{t+\tau} \geq x_{t+\tau+\vartheta} . \end{aligned}$$

In diesem einfachen Fall geht also lediglich der Anstieg der Zeitreihe ein. Dabei handelt es sich um einen Vergleich von Ordnungsmustern der Dimension $D = 2$. Diesen Ansatz verallgemeinern wir auf Ordnungsmuster π beliebiger Dimension D (vgl. Notation in Abschnitt 1.4) und erhalten im univariaten Fall als *Bedingung für eine Wiederkehr*

$$\pi_x(t) = \pi_x(t + \tau) \equiv \pi_x(s) \quad (3.4)$$

bzw. im bivariaten Fall

$$\pi_x(t) = \pi_y(t + \tau) \equiv \pi_y(s) . \quad (3.5)$$

In dieser Modellvorstellung sprechen wir somit von einer Rekurrenz, wenn sich die Trajektorien im gleichen Bereich des durch die Ordnungsmuster zerlegten Phasenraums befinden (vgl. Abb. 1.1 und 1.3 auf Seite 3). Im Gegensatz zu den CRPs können die Trajektorien damit weit auseinander driften, ohne dass die Rekurrenz zerstört wird. Dies ist ein wichtiger Aspekt bei der Untersuchung realer Zeitreihen, bei denen Stationarität häufig nicht erfüllt ist.

In Analogie zu den CRPs definieren wir die *Ordnungsrekurrenzplots* als (ORP, order recurrence plots, Groth, 2005)

$$\mathbf{CR}_\pi(t, s) = \begin{cases} 1 & : \quad \pi_x(t) = \pi_y(s) \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (3.6)$$

bzw. in der Darstellung $s = t + \tau$ als

$$\mathbf{CR}_\pi(t, \tau) = \begin{cases} 1 & : \quad \pi_x(t) = \pi_y(t + \tau) \\ 0 & : \quad \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Wie auch schon bei \mathbf{R}_π verzichten wir auf eine unterschiedliche Bezeichnung, wobei die Art der Darstellung aus den Parametern hervorgeht.

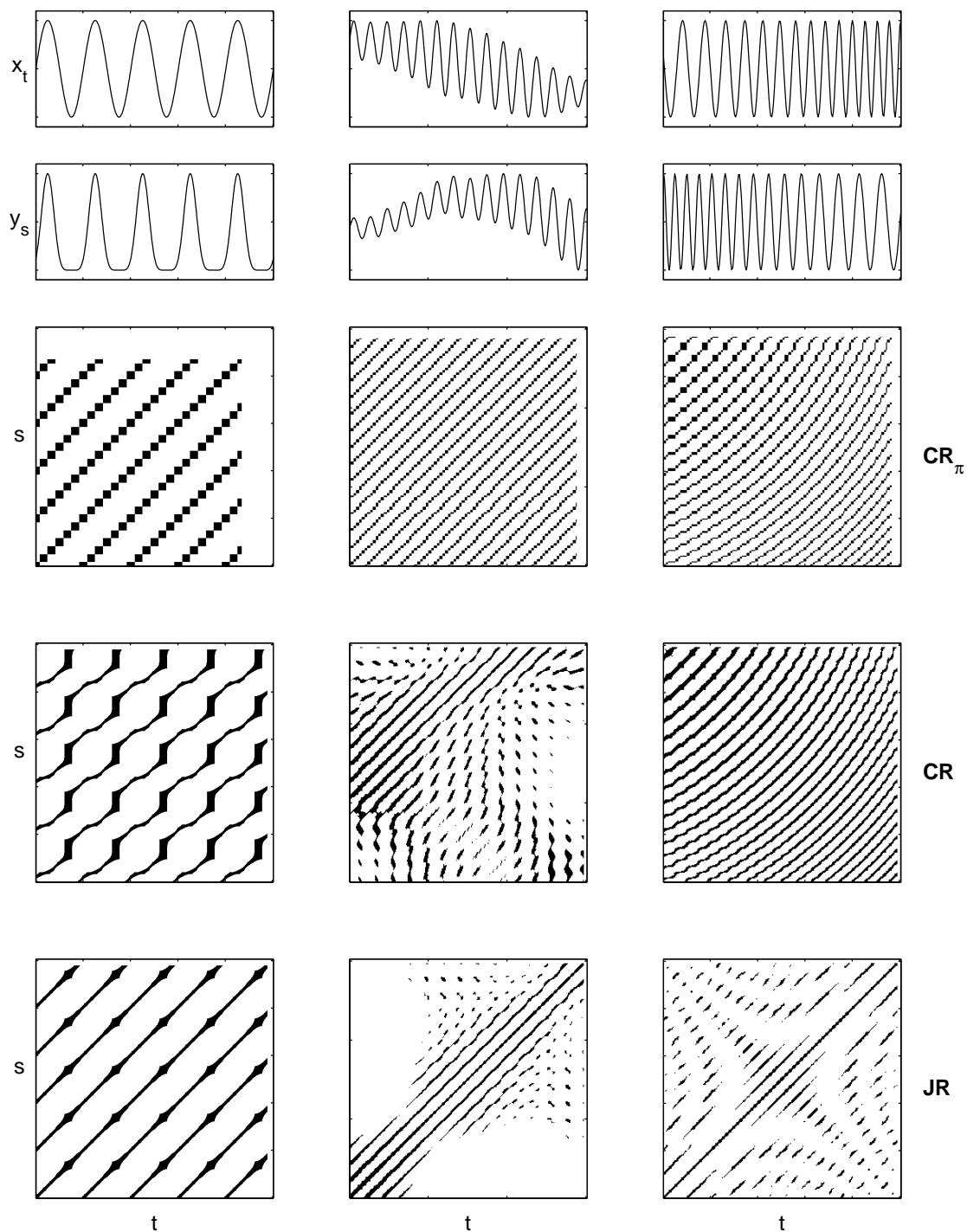


Abb. 3.1: Unterschiedliche Typen von Rekurrenzplots (Zeilen) zwischen verschiedenen Zeitreihen x_t und y_s (Spalten). Parameter sind bei \mathbf{CR}_π : $D = 3$ und $\vartheta = T/3$ und bei \mathbf{CR} bzw. \mathbf{JR} : $D = 2$ und $d = T/4$. Dabei entspricht T in der linken und mittleren Spalte der Periodendauer und in der rechten Spalte einer mittleren Periodendauer

Beispiel 3.1 Aus der Struktur in den verschiedenen Definitionen eines Rekurrenzplots können wir auf eine kooperative Dynamik und eventuelle Kopplungen zwischen den betrachteten Systemen zurückschließen. Dabei beleuchten die verschiedenen Ansätze unterschiedliche Aspekte des dynamischen Verhaltens.

Ähnelt sich das dynamische Verhalten beider Systeme sehr stark, so wird dies durch lange diagonale Linienstrukturen verdeutlicht (Abb. 3.1, linke Spalte). Dabei sind die ORPs aufgrund ihrer Definition auf einer Ordinalskala invariant gegenüber einer monoton ansteigenden Transformation der Amplitude. Ist die Transformation linear, so gilt dies auch für die JRPs, sofern die Abstände Δ_x und Δ_y in gleicher Weise transformiert werden. Bei der hier vorliegenden nichtlinearen Transformation gilt dies deshalb nur annähernd. In den CRPs hingegen verdeutlicht sich die unterschiedliche Transformation der Amplituden in gekrümmten Linien. So kann die Transformation in der Amplitude in diesem Beispiel auch als eine Transformation in der Zeit betrachtet werden.

Es ist offensichtlich, dass die Auswertung auf einer Ordinalskala eine viel schwächere Stationarität erfordert als die Auswertung auf einer metrischen Skala. Zudem gehen in die Definition der Rekurrenz in den ORPs lediglich Vergleiche in einem maximalen Abstand von $d \cdot (D - 1)$ ein. Nur in diesem zeitlichen Fenster muss eine Stationarität der Ordnungsrelationen vorliegen, weshalb auch bei einer angemessenen zeitlichen Veränderung der Amplitude und des Nullpunktes die Linienstrukturen erhalten bleiben (Abb. 3.1, mittlere Spalte). Demgegenüber verlangt die Auswertung von CRPs und JRPs aufgrund einer metrischen Skala eine viel stärkere Stationarität. Da außerdem große zeitliche Abstände $|t - s|$ betrachtet werden, ändern sich in diesem Fall die Strukturen signifikant. Lediglich in der Nähe der Hauptdiagonalen, d.h. bei kurzen zeitlichen Abständen, weist der JRP noch Linienstrukturen auf. Bei den CRPs sind durch die unterschiedlichen Nullpunktsverschiebungen und Amplitudenbereiche zunächst keine direkten Vergleiche der Zeitreihen möglich. Aus diesem Grund ist eine Vorverarbeitung notwendig.

Neben einer Instationarität in der Amplitude ist es auch möglich, dass die Zeitskalen der Systeme variieren. Dadurch kommt es in den ORPs und CRPs zu gekrümmten Linien (Abb. 3.1, rechte Spalte). Mit deren Hilfe können die Zeitreihen zeitlich zugeordnet werden (Lines of synchronization, [Marwan u. a., 2002a](#)). Bei den JRPs treten neben der Hauptdiagonalen nur Linien auf, wenn die Perioden der beiden Systeme in einem rationalen Verhältnis stehen. Nur dann kehrt die Trajektorie im Phasenraum (\mathbf{x}, \mathbf{y}) regelmäßig zu sich selbst zurück.

Anmerkung. Wie diese Beispiele gut verdeutlichen, gibt es je nach Art der Definition einer Rekurrenz unterschiedliche Möglichkeiten der Auswertung gekoppelter Systeme. Es wäre daher sinnvoll, die verschiedenen Ansätze miteinander zu kombinieren, um unterschiedliche Aspekte zu beleuchten. Dabei stellt sich die Frage, in welcher Weise die Ordnungsmuster und deren ORPs die Dynamik eines Systems er-

fassen und welchen Beitrag sie in einer Untersuchung liefern. In dem Artikel (Groth, 2005) wurde ein Zusammenhang zwischen einer Phase eines Signals und den Ordnungsmustern hergestellt. Deshalb ist es nahe liegend, die ORPs an gekoppelten Oszillatoren und dem bekannten Phänomen der Phasensynchronisation genauer zu untersuchen. Ein umfangreicher Einblick in das Gebiet der Synchronisation gekoppelter Oszillatoren findet sich in Pikovsky u. a. (2003).

3.3 Messung der Phasenkopplung

Wenn man von einfachen Fällen wie der einer Sinusfunktion absieht, ist der Begriff einer Phase eines Signals ist nicht eindeutig definiert. So gibt es viele Konzepte, Oszillationen in einem dynamischen System zu beschreiben. Zunächst zeigen wir in Abschnitt 3.3.1 die Möglichkeit der Definition einer Phase mit Hilfe der Ordnungsmuster. Danach gehen wir kurz auf andere übliche Definitionen ein (Abschnitt 3.3.5) und verdeutlichen Gemeinsamkeiten und Unterschiede (Abschnitt 3.3.6).

3.3.1 Definition einer Phase über Ordnungsmuster

Ein in diesem Zusammenhang interessanter Fall ist die Ordnung $D = 3$, da es hier Verknüpfungen zwischen einer Phase und den Ordnungsmustern gibt. Zu diesem Zweck betrachten wir nochmals die Zerlegung des Phasenraums $(x_t, x_{t+\vartheta}, x_{t+2\vartheta})$ (vgl. Abb. 1.3 auf Seite 4). Dabei ordnen sich die Gebiete der einzelnen Ordnungsmuster sternförmig an der Hauptdiagonalen an, welche von einer Sinusfunktion nacheinander durchlaufen werden (Abb. 1.3). Führen wir ein neues Zylinderkoordinatensystem (r, ϕ, z) mit der Transformation

$$\begin{aligned} r_t \cdot \cos \phi_t &= (x_t - 2x_{t+\vartheta} + x_{t+2\vartheta}) / \sqrt{6} \\ r_t \cdot \sin \phi_t &= (x_{t+2\vartheta} - x_t) / \sqrt{2} \\ z_t &= (x_t + x_{t+\vartheta} + x_{t+2\vartheta}) / \sqrt{3} \end{aligned} \quad (3.8)$$

ein (Abb. 3.2), so sind die Ordnungsmuster π vollständig durch den Winkel ϕ bestimmt

$$\pi = \pi(\phi) . \quad (3.9)$$

Dieser Winkel entspricht bis auf einen Anfangswert der Phase einer Sinusfunktion. Von z und r hingegen sind die Ordnungsmuster unabhängig. Der funktionelle Zusammenhang zwischen π und ϕ ist unter gewissen Bedingungen auch umkehrbar (vgl. Abschnitt 3.3.2).

Mit Hilfe der Ordnungsmuster wird die Phase diskret in sechs Abschnitte zerlegt. Dies erscheint zunächst recht grobauflösend zu sein. Jedoch genügt dies, wie die späteren Beispiele zeigen, um eine Phasenkopplung zu detektieren. Außerdem erfordern auch andere Ansätze der Phasenkopplung eine Diskretisierung der Phase zur statistischen Auswertung (Abschnitt 3.3.5).

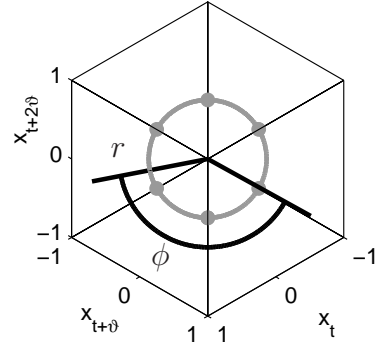


Abb. 3.2: Polarkoordinatensystem (r, ϕ, z) in der Dimension $D = 3$. Die z -Achse verläuft auf der Hauptdiagonalen und die r - und ϕ -Achsen spannen eine dazu senkrechte Ebene auf

Zwischen dem Winkel ϕ und den zeitverzögerten Koordinaten $(x_t, x_{t+\vartheta}, x_{t+2\vartheta})$ folgt aus (3.8) der Zusammenhang

$$\frac{\tan \phi_t}{\sqrt{3}} = \frac{x_{t+2\vartheta} - x_t}{x_{t+2\vartheta} - 2x_{t+\vartheta} + x_t} . \quad (3.10)$$

Ein Beweis ist ebenfalls im Anhang der Arbeit (Groth, 2005) zu finden. Der Nenner und der Zähler entsprechen Differenzen erster bzw. zweiter Ordnung, d.h. bis auf den Faktor $\sqrt{3}$ repräsentiert ϕ einen Winkel zwischen den beiden Differenzen. Wir können diese Differenzen durch Ableitungen an der Stelle $t + \vartheta$ approximieren

$$\begin{aligned} x_{t+2\vartheta} - x_t &\approx 2\vartheta \cdot \dot{x}_{t+\vartheta} \\ x_{t+2\vartheta} - 2x_{t+\vartheta} + x_t &\approx \vartheta^2 \cdot \ddot{x}_{t+\vartheta} \end{aligned} \quad (3.11)$$

und erhalten im Fall $\vartheta = 1$

$$\frac{\tan \phi_t}{2\sqrt{3}} \approx \frac{\dot{x}_{t+1}}{\ddot{x}_{t+1}} . \quad (3.12)$$

Dies bringt einen interessanten Zusammenhang zum Vorschein, da in ähnlicher Weise bereits Phasen für nicht-phasenkohärente, chaotische Oszillatoren eingeführt wurden (siehe Abschnitt 3.3.5). In analoger Weise zu den dort zitierten Artikeln kann argumentiert werden, dass die Phase ϕ über die Krümmung der Trajektorie im Raum (x, \dot{x}) sinnvoll definiert ist.

3.3.2 Zeitverzögerung

Ebenso wie die Ordnungsmuster durch den Winkel $\phi \rightarrow \pi$ bestimmt sind, kann in umgekehrter Weise der Winkel durch die Ordnungsmuster näherungsweise bestimmt werden. Dazu nehmen wir an, dass die Trajektorie die Ordnungsmuster gleichmäßig durchläuft und bei $D = 2$ und $D = 3$ der Winkel innerhalb eines Ordnungsmusters um $2\pi/2$ bzw. $2\pi/6$ ansteigt. Unter der Voraussetzung, dass die so gewonnenen Abtastwerte an den Übergängen zwischen den Ordnungsmustern die „tatsächliche“ Phase repräsentieren, kann durch Interpolation ein kontinuierlicher Verlauf der Phase rekonstruiert werden.

Betrachten wir in der Dimension $D = 2$ einen harmonischen Oszillator der Periode T , so durchläuft dessen Trajektorie unabhängig von $0 < \vartheta < T/2$ die beiden Ordnungsmuster 12 und 21 in gleichen Zeiten. In diesem Fall gilt nämlich $\text{prob}\{\pi = 12\} = \text{prob}\{\pi = 21\} = 1/2$ (vgl. [Shiha, 2004](#), Theorem 2.2.1.). Die Forderung nach einem Anstieg um jeweils $2\pi/2$, ist also unabhängig von der Frage nach einer günstigen Zeitverzögerung. In der Anwendung ist es jedoch wichtig, die Zeitverzögerung ϑ so zu wählen, dass die Trajektorie im Phasenraum maximal entfaltet wird. Damit werden Fehler in der Auswertung reduziert, die durch falsche Nachbarn entstehen. In diesem Fall bietet sich also $\vartheta = T/4$ an. Dies gilt auch annähernd für das hier untersuchte *Rössler-System*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega \cdot y - z \\ \dot{y} &= \omega \cdot x + a \cdot y \\ \dot{z} &= b + z \cdot (x - c) , \end{aligned} \tag{3.13}$$

da dessen Wiederkehrzeiten T_i im *phasenkohärenten Regime* ($a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 10$) auf einen schmalen Bereich beschränkt sind. Hierbei definieren wir T_i als die Dauer zwischen zwei aufeinander folgenden Übergängen von $x_{t+\vartheta} < x_t$ zu $x_{t+\vartheta} > x_t$. Wir setzen also $\vartheta = \bar{T}/4$, wobei $\bar{T} = \langle T_i \rangle_i$ eine mittlere Wiederkehrzeit bezeichnet (Abb. 3.3.a). Ist die Phase nicht kohärent, so sind die Wiederkehrzeiten T_i viel breiter verteilt (Abb. 3.3.b). Im sogenannten *Funnel-Regime* ($a = 0.28$, $b = 0.1$, $c = 8.5$) können deshalb nicht alle Zyklen gleichzeitig maximal entfaltet werden. Setzen wir insbesondere wieder $\vartheta = \bar{T}/4$, so werden Zyklen mit einer wesentlich kleineren Wiederkehrzeit als \bar{T} nicht korrekt erfasst, da es in ihnen zu Überschneidungen der Trajektorie kommt.

Im Gegensatz zu $D = 2$ durchläuft die Trajektorie eines harmonischen Oszillators bei $D = 3$ nicht immer gleichmäßig die Gebiete der Ordnungsmuster. Die Dauer, die die Trajektorie in den einzelnen Gebieten verweilt, hängt von ϑ ab. Damit die Ordnungsmuster aber trotzdem in nahezu gleichen Zeiten durchlaufen werden, ist es wichtig, die Trajektorie bezüglich der Hauptdiagonalen maximal zu entfalten. Ist ϑ zu klein, so ähneln sich die zeitverzögerten Werte zu stark, und die Trajektorie verläuft dicht entlang der Hauptdiagonalen. Ebenso ist die Trajektorie in der Nähe von $\vartheta = T/2$ eng zusammengefaltet, jedoch aufgrund unterschiedlicher Vorzeichen der zeitverzögerten Werte entlang einer anderen Diagonalen.

Das Problem einer günstigen Zeitverzögerung stellt sich generell bei der Rekonstruktion eines dynamischen Systems mit Hilfe einer zeitverzögerten Einbettung (siehe u.a. [Kantz u. Schreiber, 2005](#), Abschnitt 9.2). In der Literatur sind verschiedenste Ansätze zu finden, die z.B. die Autokorrelation oder die Transinformation betrachten. Aber auch geometrische Ansätze, die die Ausdehnung im Phasenraum quantifizieren, werden vorgeschlagen (vgl. [Buzug u. Pfister, 1992](#)).

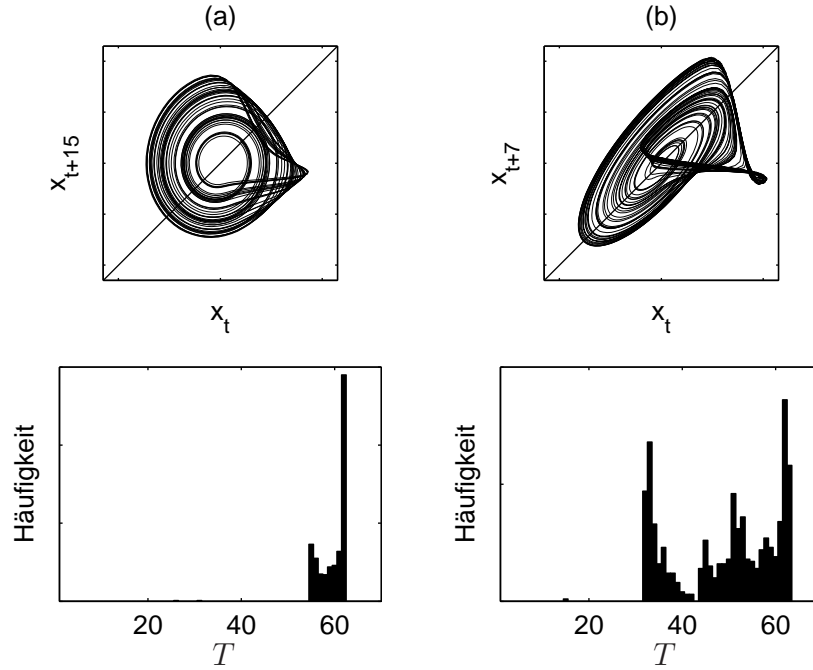


Abb. 3.3: Verteilung der Wiederkehrzeiten T_i der x -Komponente eines Rössler-Systems (a) im phasenkohärenten und (b) im nicht-phasenkohärenten Regime. Integrationsrittweite 0.1

3.3.3 Anpassung der Zeitverzögerung

Um eine optimale Zeitverzögerung ϑ zu ermitteln, betrachten wir einerseits zwei Ansätze, die die Geometrie der Trajektorie erfassen. Andererseits gehen wir auf einen speziell an die Ordnungsmuster angepassten Ansatz ein.

Minimale Dynamik in Richtung der Hauptdiagonalen. Wie schon bei der Einführung der Zylinderkoordinaten erwähnt, sind die Ordnungsmuster der Dimension $D = 3$ unabhängig von z . Deshalb ist es sinnvoll zu verlangen, dass sich die Trajektorie möglichst wenig in z -Richtung bewegt, da diese Dynamik von den Ordnungsmustern nicht erfasst wird. Als zu minimierende Funktion betrachten wir deshalb

$$Z = Z(\vartheta) = \left(\frac{1}{L - \vartheta} \sum_{t=1}^{L-\vartheta} (z_t - \bar{z})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.14)$$

mit $z_t = (x_t + x_{t+\vartheta} + x_{t+2\vartheta}) / \sqrt{3}$, wobei $\bar{z} = \frac{1}{L-\vartheta} \sum_{t=1}^{L-\vartheta} z_t$ den Mittelwert bezeichnet. Dieser Ansatz kann auf beliebige Dimensionen erweitert werden, wobei wir uns jedoch speziell für $D = 3$ interessieren. In diesem Fall verschwin-

det bei einer Sinusfunktion $x_t = \sin(2\pi t/T)$ die Funktion Z bei $\vartheta = T/3$ (vgl. Beispiel 3.2 auf Seite 72).

Maximaler Abstand zur Hauptdiagonalen. Bei einer Minimierung von Z spielt sich die Dynamik im Wesentlichen in der (r, ϕ) -Ebene ab. Um diese Dynamik zu erfassen, betrachten wir den *mittleren Abstand zur Hauptdiagonalen* (Displacement from diagonal, [Rosenstein u. a., 1994](#))

$$R(\vartheta) = \frac{1}{L - \vartheta} \sum_{t=1}^{L-\vartheta} r_t . \quad (3.15)$$

Im späteren Beispiel 3.2 zeigt sich, dass die Minimierung von Z und die Maximierung von R in den dort betrachteten Systemen vergleichbare Aussagen liefern.

Maximale Permutationsentropie. Das eigentliche Ziel der Anpassung von ϑ ist in unserem Fall die bestmögliche Beschreibung der Phase durch die Ordnungsmuster. Dies ist gewährleistet, sofern die Trajektorie bei phasenkohärenten Signalen gleichmäßig durch die Gebiete der Ordnungsmuster der Dimension $D = 3$ läuft. Deshalb betrachten wir als Kriterium für eine günstige Einbettung die Häufigkeitsverteilung der Ordnungsmuster

$$p_i = \frac{\#\{t \mid \pi_t = \pi_i, t = 1 \dots L - (D - 1) \vartheta\}}{L - (D - 1) \vartheta} \quad (3.16)$$

mit Hilfe der Shannon-Entropie

$$H(\vartheta) = - \sum_{i=1}^{D!} p_i \ln p_i , \quad (3.17)$$

der sogenannten *Permutationsentropie* ([Bandt u. Pompe, 2002](#)). Bei einem gleichmäßigen Durchlaufen der Gebiete erhalten wir eine Gleichverteilung der Ordnungsmuster und H wird maximal, $\max\{H\} = \ln D!$.

Beispiel 3.2 In diesem Beispiel werden die drei Kriterien Z , R und H , sowie die Autokorrelationsfunktion $\rho(\vartheta)$ an verschiedenen Oszillatoren gegenübergestellt.

Beim harmonischen Oszillator mit der Periodendauer T verschwindet Z bei $\vartheta = T/3$ (Abb. 3.4.a), denn es gilt $z_t \sqrt{3} = \sin(2\pi t/T) + \sin(2\pi t/T + 2\pi/3) + \sin(2\pi t/T + 4\pi/3) = 0$ für beliebiges t . Damit verläuft die Trajektorie auf einer Ebene, die orthogonal zur Hauptdiagonalen liegt. In diesem Fall wird auch der mittlere Abstand zur Hauptdiagonalen R maximal, wobei jedoch das Maximum weniger deutlich ausgeprägt ist. Auch bei $\vartheta = T/2$ indiziert R eine im Mittel große Entfernung zur Hauptdiagonalen. Jedoch ist dieser Wert nicht geeignet, da die Trajektorie wieder entlang einer anderen Diagonalen verläuft. Die Permutationsentropie H schlägt

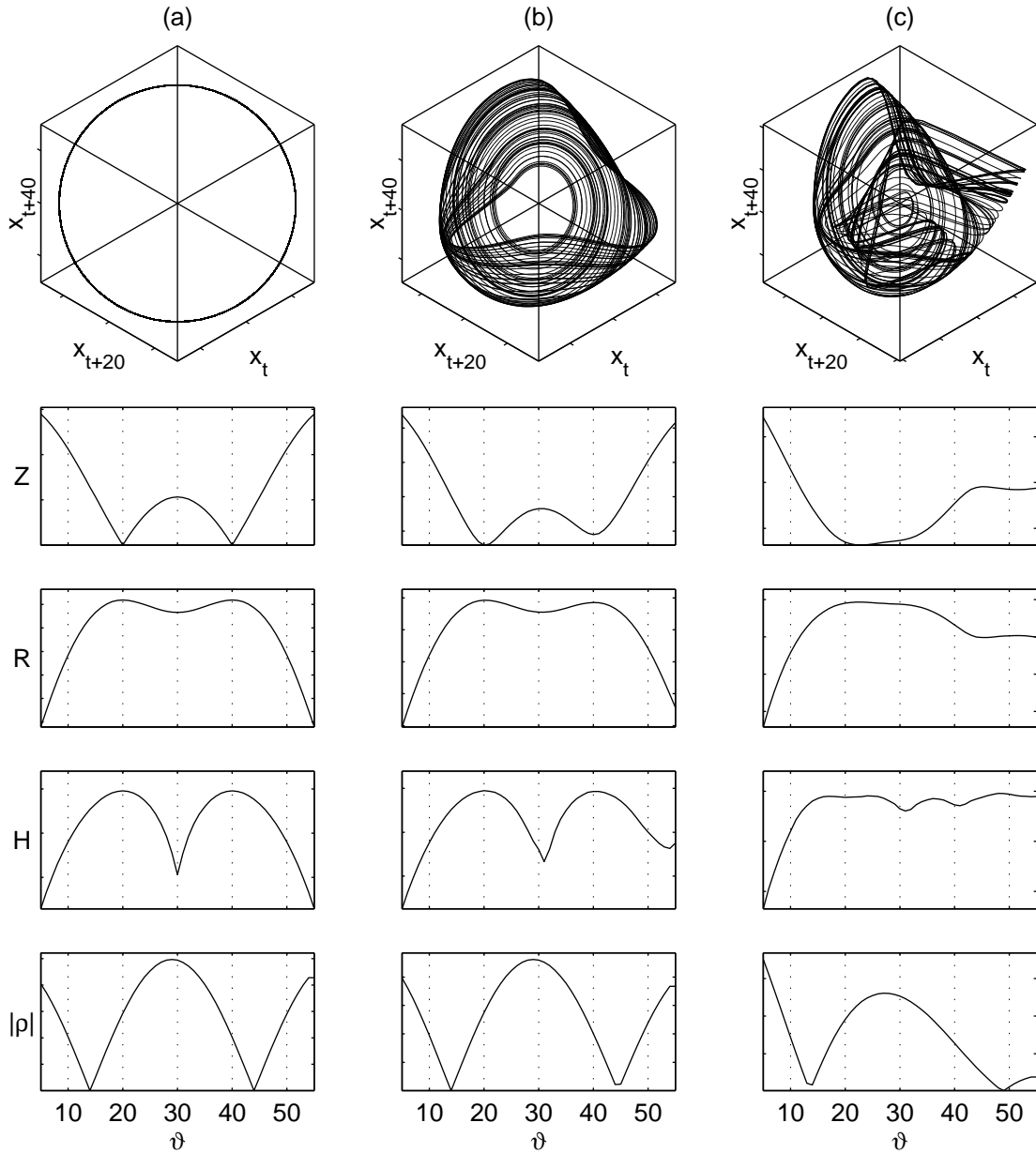


Abb. 3.4: Kriterien zur Auswahl der Zeitverzögerung bei der Einbettung verschiedener Oszillatoren. (a) Harmonischer Oszillator mit $T = 60$, (b) x -Koordinate eines Rössler-Systems im phasenkohärenten Regime und (c) im Funnel-Regime (Parameter siehe Abschnitt 3.3.2). Integrationschrittweite 0.1

ebenfalls $\vartheta = T/3$ vor, da die Ordnungsmuster in diesem Fall gleichverteilt sind (vgl. [Shiha, 2004](#), Corollary 2.2.3). Analog zu Z wird $\vartheta = T/2$ wiederum deutlich abgelehnt. Im Gegensatz zu diesen drei Kriterien, die auf die Einbettung in $D = 3$ eingehen, betrachtet die Autokorrelation ρ lediglich $D = 2$. Deshalb schlägt diese auch $\vartheta = T/4$ vor.

Im Falle eines phasenkohärenten chaotischen Oszillators verhalten sich die vier Kriterien in ähnlicher Weise (Abb. 3.4.b), da die Wiederkehrzeiten der Phase in einem schmalen Bereich liegen (vgl. Abb. 3.3).

Schwieriger gestaltet sich die Auswertung, wenn die Phase nicht kohärent ist. Dann hängt es von der Dominanz einzelner Wiederkehrzeiten ab, wie die Kriterien die Zeitverzögerung bewerten. Beim Rössler-System im Funnel-Regime gibt es eine breite Verteilung der Wiederkehrzeiten (vgl. Abb. 3.3.b). Dabei ist zu bedenken, dass mit der Dauer eines Zyklus auch die Anzahl dessen Abtastwerte in einer Zeitreihe zunimmt. Deshalb beeinflussen die unterschiedlichen Wiederkehrzeiten die Statistiken auch verschieden stark. Zudem hängt bei Z , R und ρ der Einfluss auch von der Amplitude des Zyklus ab. Dies hat zur Folge, dass im Funnel-Regime der Zyklus der Länge $T \approx 60$ dominiert und sowohl Z als auch R die Zeitverzögerung $\vartheta \approx 20$ vorschlagen. Bei ρ erhalten wir aufgrund dieser Dominanz wiederum $\vartheta \approx 15$. Bei den Ordnungsmustern und der Permutationsentropie spielt die Amplitude keine Rolle. Da jedoch die kürzeren Zyklen durch eine im Mittel geringere Amplitude gekennzeichnet sind, steigt deren Einfluss in H und es werden auch kleinere ϑ -Werte als günstig angezeigt. Trotzdem sind alle vorgeschlagenen Werte für die Zeitverzögerung unzureichend, um eine Phase angemessen zu beschreiben (Abb. 3.4.c, oben). Die schwache Ausprägung der Extrema bei Z , R und H deutet auf dieses Problem auch schon hin, weshalb eine visuelle Überprüfung der Einbettung nötig ist. Setzen wir unterdessen die Zeitverzögerung manuell auf $\vartheta = 9$, so erhalten wir wieder den gewünschten zyklischen Verlauf der Trajektorie um die Hauptdiagonale (Abb. 3.5).

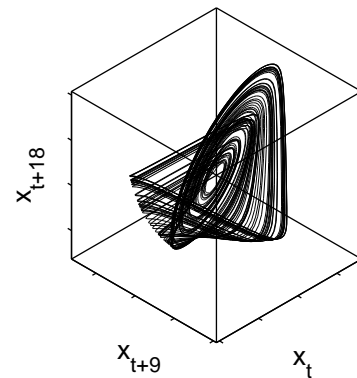


Abb. 3.5: Einbettung des Oszillators aus Abb. 3.4.c mit veränderter Zeitverzögerung $\vartheta = 9$

Anmerkung. Die hier diskutierten Kriterien zur Beurteilung günstiger Zeitverzögerungen optimieren lediglich die Ausdehnung der Trajektorie in der (r, ϕ) -Ebene. Problematisch ist jedoch, dass die eigentliche Entfaltung und die damit verbundene Reduzierung falscher Nachbarn nicht beachtet wird. Daher kommt es auch beim nicht-phasenkohärenten Rössler-System zu einer ungünstigen Einbettung und die Phase wird teilweise unzureichend erfasst. Deshalb ist es in einem zukünftigen Schritt wichtig, neben der Verteilung auch die zeitliche Folge der Ordnungsmuster mit einzubeziehen, um einen korrekten Durchlauf der Trajektorie sicherzustellen. Damit könnte auch beurteilt werden, ob überhaupt in einer sinnvollen Weise eine Phase definiert ist. In der Anwendung ist es nicht selbstverständlich, dass ein bandbeschränktes Signal und damit eine kohärente Phase vorliegt. Deshalb ist es wichtig, bei der Untersuchung von Phasenkopplungen zwischen beliebigen Systemen auch deren Spektren zu beobachten. Gegebenenfalls ist es erforderlich, sich auf einen relevanten Frequenzbereich zu beschränken (vgl. Abschnitt 3.4).

3.3.4 Kopplungsmaß

Nachdem wir gezeigt haben, dass die Ordnungsmuster in sinnvoller Weise die Phase eines Signals repräsentieren, liegt es nahe, ein Maß für die Phasenkopplung zu definieren. So kann z.B. die Verteilung der Differenz der Phasen zweier Systeme mit Hilfe von Entropie-Maßen quantifiziert werden (vgl. Abschnitt 3.3.5). Anstatt jedoch den Umweg über die Berechnung einer Phasendifferenz und deren Verteilung zu gehen, berechnen wir die Phasenkopplung direkt aus den Ordnungsmustern. Stimmen diese überein, so stimmen auch die beiden Phasen bis auf eine Ungenauigkeit $\pi/6$ überein. Mit Hilfe der *Rekurrenzrate der Ordnungsmuster*, die wir aus einem ORP als

$$\hat{P}(\tau) = \frac{1}{L - \tau - (D - 1)\vartheta} \sum_{t=1}^{L-\tau-(D-1)\vartheta} \mathbf{CR}_\pi(t, \tau) \quad (3.18)$$

erhalten, können wir die mittlere Differenz der Phasen beschreiben. Im Fall einer starken Kopplung erhalten wir im ORP horizontale Linien, was zu ausgeprägten Maxima in der Rekurrenzrate führt. Bei schwacher Kopplung tendiert die Rekurrenzrate zur Gleichverteilung. Mit der Normierung der Rekurrenzrate auf

$$\hat{p}(\tau) = \frac{\hat{P}(\tau)}{\sum_{\tau=\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \hat{P}(\tau)} \quad , \quad (3.19)$$

führen wir mittels der Shannon-Entropie den *Kopplungsindex*

$$\rho_\pi = 1 - \frac{\sum_{\tau=\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \hat{p}(\tau) \ln \hat{p}(\tau)}{\ln(\tau_{\max} - \tau_{\min})} \quad (3.20)$$

ein, für den $0 \leq \rho_\pi \leq 1$ gilt. Ist die Rekurrenzrate gleichverteilt, so wird die Entropie maximal, d.h. es gilt $\sum_{\tau=\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \hat{p}(\tau) \ln \hat{p}(\tau) = \ln(\tau_{\max} - \tau_{\min})$. Damit verschwindet der Kopplungsindex ρ_π . Der maximale Wert von ρ_π hängt unterdessen von dem untersuchten Intervall $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ ab und wie viele Maxima im Abstand einer mittleren Wiederkehrzeit enthalten sind.

Beispiel 3.3 Anhand gekoppelter chaotischer Oszillatoren soll das Konzept des Kopplungsindex ρ_π näher gebracht werden. Dazu betrachten wir zwei bidirektional gekoppelte Rössler-Systeme

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2} \cdot y_{1,2} - z_{1,2} + k \cdot (x_{2,1} - x_{1,2}) \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2} \cdot x_{1,2} + a \cdot y_{1,2} \\ \dot{z}_{1,2} &= b + z_{1,2} \cdot (x_{1,2} - c) , \end{aligned} \tag{3.21}$$

die mit der Stärke k diffus gekoppelt sind.²⁾ Die Frequenzen der Systeme $\omega_{1,2} = 1 \pm \Delta\omega$ sind gegeneinander verstimmt. Die Zeitreihen werden mit einem Runge-Kutta-Verfahren bei einer Schrittweite $\Delta t = 0.1$ berechnet.

Im phasenkohärenten Regime beobachten wir in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke das Phänomen der Phasensynchronisation (PS). Dabei ist die Phasendifferenz auch im Falle verstimmter Oszillatoren begrenzt (Rosenblum u. a., 1996). Dies spiegelt sich auch in den ORPs wider. Liegt keine Kopplung vor ($k = 0$), so laufen die Phasen und damit auch die Ordnungsmuster auseinander (Abb. 3.6, oben). Durch Erhöhung der Kopplungsstärke hängt das dynamische Verhalten der Oszillatoren immer stärker voneinander ab. Zunächst werden die Phasen aneinander gebunden und laufen über große Zeiten gleich. In den ORPs beobachten wir horizontale Linien, die unterbrochen sind von Phasensprüngen ($k = 0.025$). Bei hinreichend starker Kopplung beobachten wir durchgehende mehr oder wenig horizontale Linien ($k = 0.04$). Damit steigt auch die Größe der Maxima in der Rekurrenzrate.

Im nicht-phasenkohärenten Regime beobachten wir auch einen Gleichlauf der Ordnungsmuster bei hinreichend starker Kopplung (Abb. 3.6, unten). Jedoch liegt bei $k = 0.23$ keine PS sondern eine verallgemeinerte Synchronisation vor (GS, generalized synchronization).³⁾ Da es bei der GS einen funktionellen Zusammenhang zwischen den Trajektorien gibt, sind auch deren Ordnungsmuster voneinander abhängig. Aufgrund der breiten Verteilung der Wiederkehrzeiten kommt es aber nicht zu einer so stark ausgeprägten Linienstruktur wie im phasenkohärenten Fall. Lediglich bei $\tau \approx 0$ beobachten wir eine durchgehende Linie, während es bei anderen

²⁾Der Index in (3.21) bezeichnet in diesem Fall das System und nicht die Zeit t .

³⁾Von PS spricht man, wenn die Phasendifferenz beschränkt ist, jedoch die Amplituden nicht voneinander abhängen. Beim Übergang zu PS wird ein Lyapunov-Exponent, der vorher Null war, negativ. Demgegenüber gibt es bei der GS einen funktionellen Zusammenhang zwischen den Trajektorien beider Systeme. Dies zeigt sich im Lyapunov-Spektrum darin, dass ein positiver Lyapunov-Exponent negativ wird (vgl. Abschnitt 3.3.6).

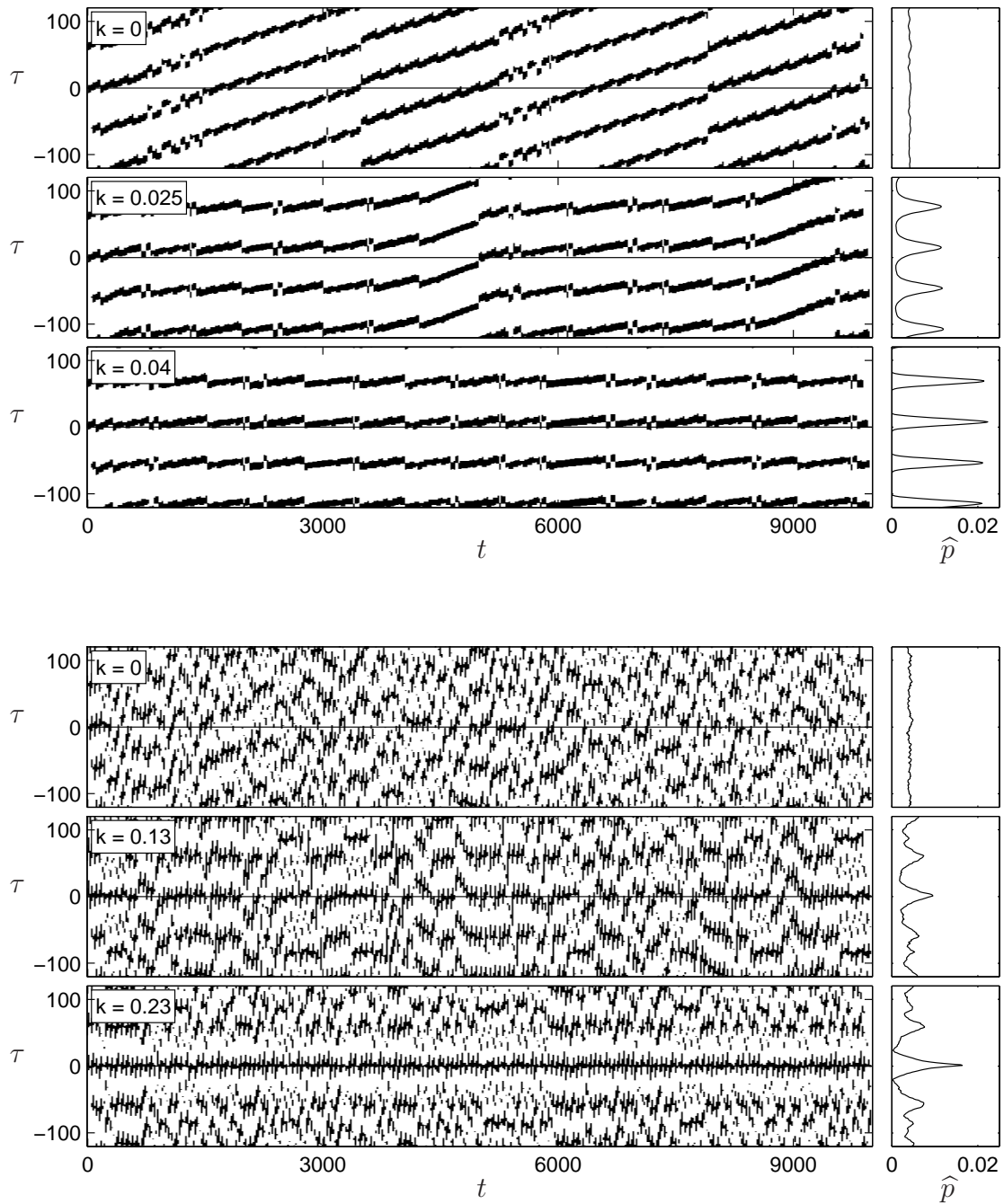


Abb. 3.6: ORP der x -Komponenten zweier gekoppelter Rössler-Systeme mit verstimten Frequenzen $\omega_{1,2} = 1 \pm 0.015$ in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke k . Oben: im phasenkohärenten Regime und unten: im Funnel-Regime. Einbettungsdimension $D = 3$, Zeitverzögerung oben: $\vartheta = 20$ und unten: $\vartheta = 9$. Integrations-schrittweite 0.1

Zeitverschiebungen nur kürzere Linien gibt. Die unterschiedlichen Wiederkehrzeiten aufeinander folgender Zyklen führen hierbei zu einer stark variierenden Linienstärke.

Anmerkung. Da bei der PS chaotischer Oszillatoren lediglich die Phasendifferenz, jedoch nicht die Amplitudendifferenz beschränkt ist, scheint es zunächst so, dass PS mit Mitteln der üblichen Rekurrenzplots nicht detektiert werden kann. So ist es verständlich, dass CRPs nur bedingt geeignet sind, um PS bei gekoppelten Rössler-Systemen zu erkennen (vgl. Romano, 2004, Abschnitt 2.6). Demgegenüber liefert ein Vergleich der einzelnen Rekurrenzraten, in denen sich die Wiederkehrzeit widerspiegelt, einen Hinweis auf PS, da ein Unterschied in den Frequenzen verschwindet (Romano u. a., 2005). Dort wird auch ein Maß für GS betrachtet, da sich ein funktioneller Zusammenhang der Trajektorien auch in einer Darstellung der Verbundereignisse als JRP widerspiegelt. So kann aus der Rekurrenzrate eines JRP der Fall der GS detektiert werden.

3.3.5 Alternative Definitionen einer Phase

Wie schon eingangs des Abschnittes 3.3 erwähnt, ist die Phase eines Signals nicht in jedem Fall eindeutig definiert. Es gibt unterschiedliche lineare und nichtlineare Modellvorstellungen, die Phase bzw. Winkel einer Trajektorie sinnvoll zu definieren.

Winkel in Phasenraum. Beschreibt die Trajektorie im Phasenraum (x, y) einen zyklischen Verlauf um einen Ursprung, so kann die Phase einfach als der Winkel um diesen Ursprung definiert werden. Dabei ist eine Rekonstruktion des Phasenraums über eine zeitverzögerte Einbettung möglich.

Poincaré-Abbildung. Mit Hilfe einer Poincaré-Abbildung wird eine Ebene im Phasenraum konstruiert, in deren Durchstoßungspunkten die Phase als konstant angesehen wird. Zwischen diesen einzelnen Punkten wird die Phase interpoliert. In gleicher Weise sind die Flächen zwischen den einzelnen Ordnungsmustern ebenfalls Ebenen konstanter Phase.

Analytisches Signal. Ein üblicher Ansatz eine Phase für eine beliebige skalare Größe x_t mit kontinuierlicher Zeit t zu definieren, betrachtet die Erweiterung von x_t mit Hilfe der Hilberttransformation (Gabor, 1946)

$$\tilde{x}_t = \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_{t'}}{t - t'} dt' \quad (3.22)$$

in die komplexe Ebene. Hierbei bezeichnet PV den Cauchyschen Hauptwert des Integrals. In dieser Ebene wird die Phase als Winkel $\phi_{\mathcal{H}}$ mit

$$z_t = x_t + i \tilde{x}_t = A_t \cdot e^{i \phi_{\mathcal{H}, t}} \quad (3.23)$$

definiert, wobei z_t auch als *analytisches Signal* bezeichnet wird. Dieser Ansatz setzt voraus, dass das Signal im Spektrum einen scharfen Peak aufweist. Gegebenenfalls ist es erforderlich, durch eine Bandpass-Filterung des Signals die Untersuchung auf einen Frequenzbereich einzuschränken.

Ableitungen. Neben der Konstruktion einer Poincaré Abbildung können auch Minima und Maxima einer Zeitreihe benutzt werden, um Punkte gleicher Phase zu definieren. Diese können z.B. durch Differenzen erster Ordnung approximiert werden. So kann die Phase als

$$\psi_t = \arctan \frac{\dot{x}_t}{\dot{y}_t} \approx \arctan \frac{x_{t+\vartheta} - x_t}{y_{t+\vartheta} - y_t} \quad (3.24)$$

eingeführt werden (Chen u. a., 2001). Auch im Falle nicht-phasenkohärenter Oszillatoren ist im Gegensatz zum analytischen Signal die Definition einer Phase möglich (Osipov u. a., 2003). So gibt es z.B. beim Rössler-System im Funnel-Regime eine ausgeprägte Oszillation um einen Ursprung in (\dot{x}, \dot{y}) . Dieser Ansatz setzt jedoch voraus, dass mindestens zwei Komponenten des zu untersuchenden Systems bekannt sind. Deshalb wird in einem Ansatz von Kiss u. a. (2005) die skalare Größe x_t zunächst wieder mittels der Hilberttransformation \tilde{x}_t in die komplexe Ebene erweitert und darin die Phase als

$$\phi_{c,t} = \arctan \frac{\tilde{x}_t}{\dot{x}_t} \quad (3.25)$$

definiert. Im Gegensatz zu $\phi_{\mathcal{H}}$ liefert dieser Ansatz u.a. auch im Funnel-Regime eine sinnvolle Phase. In der Anwendung ist zu beachten, dass die Ableitung eines Signals einer frequenzabhängigen Filterung entspricht (vgl. Abschnitt 3.4). Damit wird z.B. das Problem einer zeitabhängigen Nullpunktverschiebung umgangen (vgl. Pikovsky u. a., 2003, Anhang A2.3).

Um die *Kopplungsstärke* der Phasen zweier dynamischer Systeme zu quantifizieren, betrachten wir die Verteilung der Phasendifferenz

$$\Delta\phi_t = (\phi_{1,t} - \phi_{2,t}) \pmod{2\pi} \quad (3.26)$$

mit Hilfe der Shannon-Entropie (Tass u. a., 1998)

$$\rho = 1 - S/S_{\max} . \quad (3.27)$$

Dabei ist S die Entropie der Verteilung von $\Delta\phi_t$ und $S_{\max} = \ln m$ die maximale Entropie bei einer Einteilung in m Boxen. In den Fällen $\phi_{\mathcal{H}}$ und ϕ_c bezeichnen wir die Kopplungsindizes als $\rho_{\mathcal{H}}$ bzw. ρ_c .

3.3.6 Phasenkopplung in Modellsystemen

Die verschiedenen Typen der Synchronisation spiegeln sich auch in den Lyapunov-Exponenten wider. Sie charakterisieren die Dynamik der Trajektorien, indem sie das zeitliche Verhalten benachbarter Punkte hinsichtlich einer exponentiellen Divergenz beschreiben. In Abhängigkeit vom maximalen Lyapunov-Exponenten λ_{\max} unterscheidet man verschiedene Fälle: Laufen benachbarte Punkte unter der Wirkung des Phasenflusses auseinander und füllen irgendwann den ganzen Orbit aus, so wird dies durch $\lambda_{\max} > 0$ charakterisiert (Chaos). Bleibt hingegen die Umgebung im Mittel erhalten, so gilt $\lambda_{\max} = 0$ (stabiler Grenzzyklus). Verkleinert sich die Umgebung im Mittel, so wird dies durch $\lambda_{\max} < 0$ beschrieben (stabiler Fixpunkt). Das dreidimensionale Rössler-System besitzt drei Lyapunov-Exponenten, wovon bei den hier betrachteten Parametern einer Null ist und die anderen beiden kleiner bzw. größer Null sind.

Zunächst untersuchen wir wieder den Fall zweier gekoppelter phasenkohärenter Rössler-Systeme. Hier kann mit Hilfe der Hilberttransformation eine sinnvolle Phase definiert werden, und wir betrachten neben dem Kopplungsindex ρ_{π} (Parameter siehe Abb. 3.6 oben) auch $\rho_{\mathcal{H}}$. Erhöhen wir nun die Kopplungsstärke, so manifestiert sich die PS darin, dass ein Null-Lyapunov-Exponent negativ wird (Abb. 3.7, oben). Dies wird damit erklärt, dass die Kopplung eine Anziehung der Phasen erzeugt, wodurch sich die Phasendifferenz verkleinert (vgl. Rosenblum u. a., 1996). Dadurch erhalten wir ein signifikantes Maximum in der Verteilung von $\Delta\phi_{\mathcal{H}}$ und der Kopplungsindex $\rho_{\mathcal{H}}$ steigt stark an. Der Kopplungsindex der Ordnungsmuster ρ_{π} offenbart das gleiche Verhalten. Erhöhen wir die Kopplungsstärke weiter, so verhalten sich die Kopplungsindizes unterschiedlich. Chaotisches Verhalten in der Amplitude führt zu einer Störung der Phase, weshalb mit steigender Kopplung auch $\rho_{\mathcal{H}}$ weiterhin ansteigt. Demgegenüber sind die Ordnungsmuster schon vollständig durch die Phase ϕ bestimmt, weshalb ρ_{π} lediglich den Übergang zur PS detektiert. Ein weiteres Anwachsen der Kopplungsstärke mit einem Übergang zur GS wird nicht angezeigt, denn geringfügige Störungen in der Phase beeinflussen die Ordnungsmuster kaum. Bei $k \approx 0.11$ setzt GS ein, d.h. ein positiver Lyapunov-Exponent wird Null, da nun auch die Amplitudendifferenz begrenzt ist.⁴⁾

Als nächstes betrachten wir wieder den Fall des Funnel-Regimes. Da die Trajektorien keinen scharfen Peak im Spektrum aufweisen, kann aus dem analytischen Signal keine sinnvolle Phase definiert werden. Demgegenüber weist ϕ_c eine Oszillation um einen Ursprung auf, weshalb wir nun ρ_{π} (Parameter siehe Abb. 3.6 unten) und ρ_c vergleichen. Zunächst fällt auf, dass der Kopplungsindex ρ_{π} viel kleiner ist, obwohl viel stärkere Kopplungen betrachtet werden. Aufgrund der stark unterschiedlichen Dauer einzelner Zyklen ist es nicht möglich, dass die Phasen über längere Zeiten

⁴⁾Genau genommen handelt es sich hier um den Spezialfall der vollständigen Synchronisation (complete synchronization), bei dem die Oszillatoren einen identischen Verlauf aufweisen. Die funktionelle Abhängigkeit der Trajektorien vereinfacht sich dann auf die Identität.

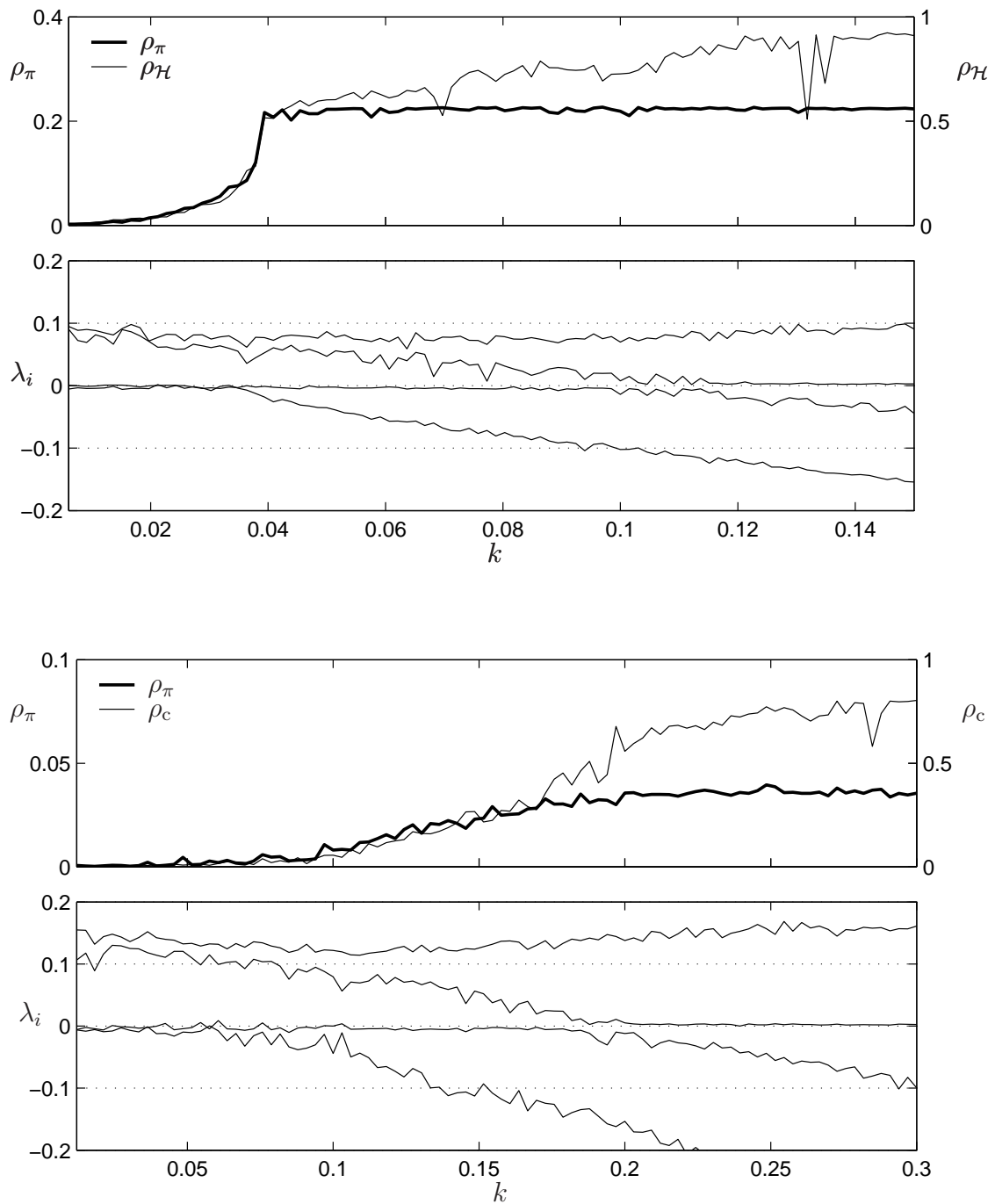


Abb. 3.7: Verschiedene Kopplungsindizes ρ_π (siehe (3.20) auf Seite 75) und $\rho_{\mathcal{H}}$ bzw. ρ_c (siehe (3.27) auf Seite 79), sowie die vier größten Lyapunov-Exponenten λ_i in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke k zweier gekoppelter Rössler-Systeme. Oben: im phasenkohärenten Regime und unten: im Funnel-Regime

synchron laufen. Deshalb sind die Linien im ORP relativ kurz. Erst wenn die Amplituden voneinander abhängen, können die Phasen synchronisieren (vgl. Osipov u. a., 2003). So steigt ρ_π beim Übergang eines Null-Lyapunov-Exponenten zu Werten zunächst nur geringfügig an und erreicht erst dann sein Maximum sofern ein positiver Lyapunov-Exponent Null wird und es zur vollständigen Synchronisation kommt. Wie auch schon im phasenkohärenten Fall steigt ρ_c auch nach diesem Übergang weiter an.

3.4 Frequenzgang

In der Anwendung liegen im Allgemeinen keine schmalbandigen Signale mit einer wohl definierten Oszillation vor. So können neben Ereignissen in einem für uns relevanten Frequenzbereich auch Ereignisse bei anderen Frequenzen auftreten. Deshalb ist es notwendig, sich auf bestimmte Frequenzanteile zu beschränken. Im Gegensatz zur Phasendefinition $\phi_{\mathcal{H}}$ über die Hilberttransformation, besitzen die Definitionen ϕ über die Ordnungsmuster und ϕ_c über die Ableitung der Hilberttransformation eine frequenzabhängige Charakteristik. Dabei berechnen wir die Ableitungen in ϕ_c mit Hilfe eines Savitzky-Golay-Filters (Savitzky u. Golay, 1964), einem FIR-Filter der Länge N .

Die Frequenzgänge der Phasen ϕ und $\phi_{\mathcal{H}}$ hängen von der Zeitverzögerung ϑ bzw. der Länge N des Filters ab. Dazu betrachten wir die frequenzabhängige Übertragungsfunktion

$$T_{xy}(f) = \frac{P_{xy}(f)}{P_{xx}(f)} \quad , \quad (3.28)$$

dem Verhältnis des Kreuzspektrum⁵⁾ zwischen dem Eingangssignal x und dem Ausgangssignal y zum Spektrum von x . Als Eingangssignal verwenden wir Gaußsches weißes Rauschen, das durch eine konstante Amplitude im Spektrum gekennzeichnet ist. Als Ausgangssignal betrachten wir dann die aus diesem Prozess berechneten Phasen, $y = \phi, \phi_{\mathcal{H}}$ bzw. ϕ_c . Wie zu erwarten, ist bei der Phase mittels der Hilberttransformation die Amplitude der Übertragungsfunktion im Rahmen der Schätzung konstant (Abb. 3.8). Demgegenüber spiegeln sich in ϕ und ϕ_c die Charakteristiken der Filter wider. Bei einer reinen Sinusfunktion liefern die Einbettungen in (x, \dot{x}) und (x, \tilde{x}) den gleichen Verlauf der Trajektorie. Infolgedessen ist zu erwarten, dass die Definitionen der Phasen als $\phi \approx \arctan(2\sqrt{3}\dot{x}/\ddot{x})$ und $\phi_c = \arctan(\tilde{x}/\dot{x})$ ähnliche Frequenzgänge besitzen. Gilt insbesondere $\vartheta = N/3$, so stimmt offenbar die Bandbreite der jeweiligen ersten Maxima überein. Die Abweichungen in den Bandbreiten der anderen Maxima und deren unterschiedliche Formen sind auf die verschiedenen Approximationen der Ableitungen zurückzuführen. Während diese bei ϕ lediglich

⁵⁾Die Fouriertransformierte der Kovarianzfunktion

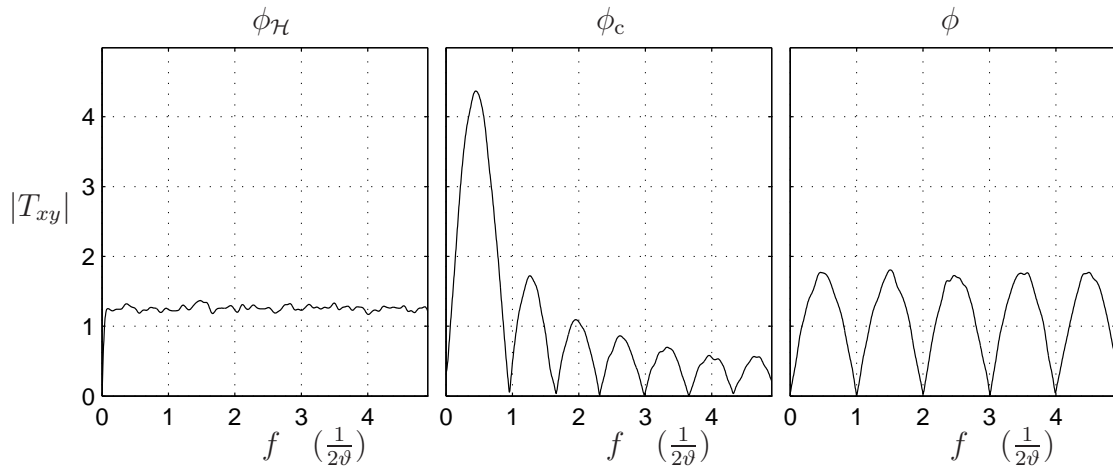


Abb. 3.8: Schätzung der Übertragungsfunktion der Phasendefinitionen $\phi_{\mathcal{H}}$, ϕ_c und ϕ mit $\vartheta = N/3$

aus einfachen Differenzgleichungen geschätzt werden, gehen bei ϕ_c insgesamt N Werte ein.

Die Übertragungsfunktion von ϕ verschwindet jeweils bei den Frequenzen $f = \frac{n}{2\vartheta}$ mit $n \in \mathbb{N}$. In diesen Punkten gilt für die Periodendauer $T = 1/f = 2\vartheta/n$ und damit $\vartheta = nT/2$. Folglich sind die Werte x_t , $x_{t+\vartheta}$ und $x_{t+2\vartheta}$ bei einer Sinusfunktion der Frequenz f identisch und der Winkel ϕ ist nicht mehr definiert.

In der Anwendung ist also darauf zu achten, dass die Parameter so angepasst werden, dass der relevante Frequenzbereich erfasst wird. Jedoch können die Methoden nicht auf einen beliebigen Frequenzbereich eingeschränkt werden, weshalb unter Umständen eine Vorverarbeitung notwendig ist.

3.5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel modellieren wir den Begriff der Wiederkehr im Phasenraum mit der Hilfe von Ordnungsmustern. Zu diesem Zweck verlassen wir vollkommen die metrische Auffassung eines Abstandes und definieren die Wiederkehr lediglich über die lokale Ordnung. Dabei wird die Definition einer ordinalen Wiederkehr aus Kapitel 2 auf bivariate Systeme erweitert. Obwohl der Phasenraum durch die Ordnungsmuster nur recht grobauflösend zerlegt wird, können vernünftige Aussagen über das betrachtete dynamische System gemacht werden. So offenbart sich in der Einbettungsdimension $D = 3$ ein Zusammenhang zwischen der Phase eines Signals und den Ordnungsmustern. Auf dieser Basis führen wir einen ordinalen Kopplungsindex zur Erfassung der Phasenkopplung dynamischer Systeme ein. Nicht nur auf numerischem sondern auch auf analytischem Weg können Gemeinsamkeiten zwischen diesem Kopplungsindex und bekannten Ansätzen zur Erfassung der Phasen-

kopplung dargelegt werden. Mittels des ordinalen Kopplungsindex können sowohl Phasen- als auch verallgemeinerte Synchronisation erfasst und quantifiziert werden. Als Werkzeug zur Visualisierung der Kopplung werden in Analogie zu den bekannten Rekurrenzplots die Ordnungsrekurrenzplots eingeführt. Aus den verschiedenen Strukturen dieser Grafiken können Rückschlüsse über die Dynamik der beobachteten Systeme gezogen werden. So präsentiert sich z.B. ein Gleichlauf der Phasen in einer durchgezogenen Linienstruktur.

In Hinblick auf die Anwendung und der Handhabung von Instationaritäten stellt sich dieser Ansatz als sehr vielversprechend dar. Da Abstände lediglich auf einer ordinalen und nicht auf einer metrischen Skala betrachtet werden, ist eine viel schwächere Stationarität erforderlich. Desweiteren werden nur Werte innerhalb eines Ordnungsmusters in einem geringen zeitlichen Abstand verglichen, weshalb lediglich in diesem zeitlichen Fenster eine Stationarität auf einer Ordinalskala notwendig ist. Ebenfalls hervorzuheben ist die Beschränkung der Methodik auf sehr wenige Parameter. Dadurch ist sie in der Anwendung nicht nur einfach zu beschreiben, sondern vor allem auch einfach zu realisieren. Lediglich die Dimension und die Zeitverzögerung sind an die jeweilige Anwendung anzupassen. Trotz dieser Einfachheit des Ansatzes sind die Ergebnisse nicht weniger aussagekräftig. In ersten Anwendungen auf EEGs können sogar Verbesserungen gegenüber anderen, auf einer metrischen Skala aufbauenden Methoden demonstriert werden.

Ausblick. In Hinblick auf zukünftige Untersuchungen haben sich viele interessante Fragen ergeben. Diese sollen hier zum Teil kurz skizziert werden.

Zunächst stellt sich die Frage nach der Bedeutung *höherdimensionaler Ordnungsmuster* hinsichtlich der Dynamik der Systeme. Zwar lassen die hier diskutierten Fälle niedriger Dimension schon aussagekräftige Rückschlüsse zu, jedoch wird durch sie das dynamische System nur teilweise erfasst. Es ist verständlich, dass durch eine Erhöhung der Dimension der Phasenraum immer feiner zerlegt wird und damit die Information über das dynamische System zunimmt.

Bei der Messung von Phasenkopplung wird in dieser Arbeit lediglich 1 : 1 Synchronisation behandelt. Nur wenn beide Oszillatoren in etwa die gleiche mittlere Frequenz und damit vergleichbare Geschwindigkeiten der Phasenänderung aufweisen, wird dies detektiert. Es ist aber möglich, dass die mittleren Frequenzen in einem beliebigen rationalen Verhältnis stehen, d.h. $n : m$ *Synchronisation* vorliegt.

In dieser Arbeit werden zunächst nur Methoden zur Messung uni- und bivariater Zusammenhänge eingeführt. Um aber in höherdimensionalen Systemen, wie z.B. dem EEG, Kopplungen richtig zu beurteilen, ist es notwendig, eine *multivariate Analyse* durchzuführen. Aus einer bivariaten Analyse erkannte Kopplungen müssen nicht die tatsächlichen Zusammenhänge innerhalb des Systems wiedergeben. So können zwei unabhängige Komponenten durch den Einfluss einer dritten Komponente als scheinbar abhängig gelten. Um dies zu erkennen, wurde in der Li-

teratur u.a. auch der Ansatz einer partiellen Transinformation diskutiert. In dieser Größe werden höherdimensionale Verbundwahrscheinlichkeiten betrachtet. Es ist offensichtlich, in diesem Zusammenhang auch Verbunderwahrscheinlichkeiten von Ordnungsmustern zu betrachten. Jedoch ist bei der Behandlung von Autoabhängigkeiten zu beachten, dass es durch gemeinsame Zeitpunkte zwangsläufig zu einer Abhängigkeit der Ordnungsmuster kommt. Diese Fälle wurden in dieser Arbeit außen vorgelassen. Im univariaten Fall wurden nur zeitliche Abstände $\tau > \vartheta$ und im bivariaten Fall Ordnungsmuster unterschiedlicher dynamischer Systeme betrachtet.

In der Einführung der Ordnungsmuster wurde der Fall der *Gleichheit* von Werten ausgeschlossen, da deren Wahrscheinlichkeit bei den hier betrachteten dynamischen Systemen Null ist. Im Allgemeinen kann dieser Fall aber nicht vernachlässigt werden, wobei es von der Art des untersuchten Systems abhängt, wie dieser zu behandeln ist. In diesem Zusammenhang ist eine Kombination der ordinalen mit der metrischen Wiederkehr, die gerade diesen Fall enthält, denkbar.