HAL open science

Méthode intégrale pour la couche limite tridimensionnelle - Applications au givrage

Charlotte Bayeux

To cite this version:

Charlotte Bayeux. Méthode intégrale pour la couche limite tridimensionnelle - Applications au givrage. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. INSTITUT SUPERIEUR DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE (ISAE); UNIVERSITE DE TOULOUSE, 2017. Français. NNT : . tel-01715950

HAL Id: tel-01715950

https://hal.science/tel-01715950

Submitted on 23 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)*

Présentée et soutenue le *21 Décembre 2017* **par :**

CHARLOTTE BAYEUX

Méthode intégrale pour la couche limite tridimensionnelle Applications au givrage

---

JURY

HÉLOÏSE BEAUGENDRE	Maître de conférences	Rapporteur
JULIEN CLIQUET	Docteur	Examinateur
YANNICK HOARAU	Professeur	Rapporteur
EMMANUEL RADENAC	Docteur	Encadrant
CHRISTIAN RUYER-QUIL	Professeur	Président
JEAN-PAUL VILA	Professeur	Examinateur
PHILIPPE VILLEDIEU	Professeur	Directeur de thèse

École doctorale et spécialité :
MEGEP : Dynamique des fluides

Unité de Recherche :
ONERA Toulouse, Département Multi-Physique pour l'Energétique, Unité Multi-phasique Hétérogène

Directeurs de Thèse :
Philippe VILLEDIEU et *Emmanuel RADENAC*

Remerciements

Ce travail de thèse n'aurait pu être mené à bien sans l'aide et le soutien précieux de certaines personnes.

Je tiens tout d'abord à remercier très sincèrement mes encadrants Philippe Villedieu et Emmanuel Radenac pour m'avoir accompagnée tout au long de cette thèse et pour la confiance qu'ils m'ont accordée. Leur encadrement parfaitement complémentaire et leurs conseils avisés ont été déterminants pour la réussite de ma thèse. Ce fut un réel plaisir de pouvoir travailler avec eux. Je remercie aussi toutes les personnes qui ont participé à ces travaux de thèse, notamment Nikolaos Bempedelis, Ghislain Blanchard et Thomas Marchal pour leurs travaux sur BLIM3D ainsi que Bertrand Aupoix pour avoir volontiers partagé ses connaissances sur la couche limite.

Je remercie également tous les membres de mon jury de thèse, Héloïse Beaugendre, Yannick Hoarau, Julien Cliquet, Christian Ruyer-Quil et Jean-Paul Vila d'avoir accepté de rapporter et d'examiner mon travail. J'ai beaucoup apprécié leurs retours très constructifs et positifs. Les différents points de vue (théorique, industriel, ...) avec lesquels ils ont examiné mes travaux de thèse ont conduits à une discussion très enrichissante au cours de ma soutenance.

Je tiens à adresser un remerciement très chaleureux à Pierre Millan, Grégoire Casalis et Pierre Gajan pour leur accueil au sein du département DMPE et de l'unité MH, et pour leur soutien et leur bienveillance pendant ces trois années de thèse. De manière plus générale, je remercie tout le personnel du département pour les échanges toujours très sympathiques et agréables que j'ai pu avoir avec eux.

Un très grand merci aux personnes qui ont partagé mon bureau et qui ont permis, chacune à leur manière, de rendre ces trois années de thèse plus agréables. Merci à Rémi (Chauvin !) pour toutes ces grandes discussions existentielles mais passionnantes qu'on pouvait avoir pendant nos "pré-pauses". Merci à Pierre pour son soutien incroyable grâce à sa bonne humeur et son dynamisme communicatifs (et bien sûr les p'tites danses quotidiennes mais j'en parle pas trop !). Enfin merci à Thibault, qui a fait un passage éclair dans mon bureau mais dont le soutien, la bonne humeur et l'optimisme (ou pessimisme je sais plus ? !) ont été essentiels pour moi.

Je souhaite aussi remercier très sincèrement Isabelle, une véritable amie et une personne formidable, sur qui j'ai pu compter tout au long de ma thèse et qui a joué un rôle important pour la réussite de ma thèse, entre autres.

Je remercie chaleureusement tous les stagiaires, doctorants voire permanents avec qui j'ai partagé des parties de cartes, des goûters le vendredi soir, des "BDG", et bien d'autres moments très agréables, qui ont eux aussi contribué à la réussite de ma thèse. Merci donc à Baptiste (Déjean), François, Nathalie, Jean-Mathieu, Valentin, Lokman, Olivier, Fabien, Garazi, Aurore, Baptiste (Thoraval), Franck, Pierre (Lavoie), Anthony, Jeff, Loïc, Thomas, Anna, Swann, Julien, Thibault, Vincent, Jérémie, Guillaume, Stéphanie et Maxime.

Pour finir, je remercie du fond du cœur mes parents, ma sœur, toute ma famille et mes amis, qui ont toujours été là pour moi, surtout dans les moments difficiles, et sans qui je n'en serais pas là aujourd'hui. Les mots ne suffisent pas pour leur exprimer toute ma reconnaissance...

Table des matières

Nomenclature xiii

Introduction xvii

I. Modélisation intégrale de la couche limite en 3D 1

1. État de l'art sur les modèles intégraux de couche limite 3
1.1. Rappels sur la notion de couche limite et les équations associées . . . 4
1.1.1. Théorie de la couche limite . . . 4
1.1.2. Structure d'une couche limite turbulente . . . 5
1.2. Présentation des différents types de modèles intégraux de couche limite . . . 6
1.2.1. Principe général d'un modèle intégral de couche limite . . . 6
1.2.2. Les différents types de modèles intégraux de couche limite . . . 8
1.2.3. Formulation stationnaire ou instationnaire . . . 14
1.3. Recensement des principales méthodes existantes pour fermer un système d'équations intégrales de couche limite . . . 15
1.3.1. Présentation des relations de fermeture issues des solutions de similitude . . . 15
1.3.2. Présentation des relations de fermeture basées sur un profil de vitesse . . . 23
1.3.3. Présentation des relations de fermeture empiriques . . . 26
1.4. Recensement des principaux critères de transition laminaire-turbulent utilisés pour les méthodes intégrales de couche limite . . . 27
1.5. Présentation des effets de rugosité et de la manière dont ils sont pris en compte dans les méthodes intégrales . . . 30
1.6. Rappels sur les spécificités d'une méthode intégrale tridimensionnelle par rapport à une méthode intégrale bidimensionnelle . . . 32
1.6.1. Structure d'une couche limite tridimensionnelle . . . 32
1.6.2. Méthodes intégrales pour une couche limite tridimensionnelle . . . 34
1.6.3. Solutions de similitude pour une couche limite tridimensionnelle . . . 36
1.6.4. Transition laminaire-turbulent pour une couche limite tridimensionnelle . . . 37
1.7. Présentation des différentes méthodes pour calculer les échanges thermiques à l'interface paroi/air . . . 37

2. Développement d'un modèle intégral pour une couche limite dynamique 3D adapté à la simulation d'accrétion de givre 41
2.1. Établissement des équations intégrales . . . 41
2.2. Fermeture du système d'équations intégrales . . . 44
2.2.1. Relations de fermeture longitudinales . . . 46
2.2.2. Relations de fermeture transversales . . . 55
2.2.3. Calcul des variables primaires . . . 59

2.3. Établissement d'un critère de transition laminaire-turbulent 60
2.4. Adaptation du modèle pour prendre en compte les effets de rugosité 61

3. Modélisation des échanges thermiques par l'extension du modèle intégral 3D 65
3.1. Développement d'un modèle thermique basé sur les grandeurs dynamiques 65
3.1.1. Calcul des échanges de chaleur convectifs sur paroi lisse 66
3.1.2. Adaptation du modèle thermique simplifié pour prendre en compte les effets de rugosité 69
3.2. Développement d'un modèle thermique intégral 70
3.2.1. Établissement de l'équation intégrale de l'énergie 70
3.2.2. Établissement des relations de fermeture 72
3.2.3. Adaptation du modèle intégral pour prendre en compte les effets de rugosité 76

II. Résolution numérique des équations intégrales de couche limite 77

4. État de l'art sur les méthodes numériques de résolution des équations intégrales de couche limite 79
4.1. Rappels sur la nature des équations de couche limite 79
4.2. Présentation de la singularité de Goldstein et des problèmes rencontrés pour résoudre la couche limite décollée 80
4.3. Rappels sur les méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations intégrales de couche limite 83
4.4. Présentation des différentes méthodes de couplage entre l'écoulement de couche limite et l'écoulement de fluide parfait 84

5. Développement et mise en œuvre d'une méthode de résolution numérique robuste et adaptée à des géométries complexes 89
5.1. Étude théorique du système 2D 90
5.1.1. Formulation bidimensionnelle du système d'équations intégrales 90
5.1.2. Étude de l'hyperbolicité du système d'équations 2D 92
5.1.3. Traitement de la singularité de Goldstein et de la zone décollée pour le système 2D 94
5.2. Mise en œuvre d'une méthode de résolution Volumes-Finis bidimensionnelle 97
5.2.1. Définition du domaine de calcul 98
5.2.2. Discrétisation du système d'équations 98
5.2.3. Traitement des conditions limites et des conditions initiales 102
5.2.4. Traitement numérique spécifique de la zone proche du point d'arrêt 103
5.2.5. Limitation du gradient de pression dans le cas de forts gradients de pression adverses 105
5.3. Extension à une méthode de résolution Volumes-Finis tridimensionnelle 107
5.3.1. Définition du domaine de calcul 107
5.3.2. Changements de repère 107
5.3.3. Discrétisation du système d'équations 108
5.3.4. Traitement des conditions limites et des conditions initiales 113
5.3.5. Traitement numérique spécifique de la zone proche du point d'arrêt 114
5.3.6. Limitation du gradient de pression dans le cas de forts gradients de pression adverses 114
5.4. Implémentation de la méthode dans les solveurs BLIM2D et BLIM3D 114

6. Vérification de la validité des méthodes 2D et 3D sur des configurations de référence 117
6.1. Procédure utilisée pour la validation . . . 118
6.2. Validation de la méthode 2D sur une plaque plane sans gradient de pression . . . 119
6.2.1. Écoulement laminaire . . . 119
6.2.2. Écoulement turbulent . . . 123
6.3. Validation de la méthode 2D sur une plaque plane avec gradient de pression . . . 126
6.3.1. Écoulement laminaire . . . 126
6.3.2. Écoulement turbulent . . . 131
6.4. Validation de la méthode 2D sur un profil d'aile NACA . . . 134
6.4.1. Étude de convergence en maillage . . . 136
6.4.2. Cas sans incidence à faible nombre de Mach . . . 137
6.4.3. Influence de la correction de point d'arrêt sur la précision de la méthode . . . 138
6.4.4. Influence de l'incidence et de la vitesse sur la précision de la méthode . . . 141
6.5. Validation 2D de la méthode sur d'autres profils d'aile . . . 143
6.5.1. Profil d'aile MS317 . . . 143
6.5.2. Profil d'aile GLC305 . . . 146
6.6. Validation de la méthode 3D . . . 147
6.6.1. Validation de la méthode sur une plaque plane avec et sans gradient de pression 149
6.6.2. Validation de la méthode sur un profil d'aile NACA0012 . . . 149
6.6.3. Validation de la méthode pour un écoulement autosimilaire de couche limite tridimensionnelle . . . 149

III. Application à la simulation d'accrétion de givre 151

7. Évaluation des performances des méthodes 2D et 3D sur des profils givrés 153
7.1. Présentation des outils utilisés pour les calculs d'accrétion de givre . . . 153
7.1.1. Présentation de la chaîne de calcul 2D IGLOO2D . . . 153
7.1.2. Présentation de la chaîne de calcul 3D IGLOO3D . . . 156
7.2. Validation de la chaîne de calcul 2D sur un cas d'accrétion de givre blanc . . . 156
7.3. Vérification de la robustesse et de la validité de la chaîne de calcul 2D sur un cas d'accrétion de givre en corne . . . 160
7.4. Évaluation de l'apport de la méthode intégrale 2D par rapport à la méthode simplifiée 163
7.5. Validation de la chaîne de calcul 3D . . . 170

Conclusion et perspectives 177

Annexes 181

A. Établissement des équations intégrales 183

B. Construction du profil de vitesse laminaire longitudinal 193

C. Construction du profil de température laminaire 201

D. Construction du profil de température avec condition mixte en paroi 205

E. Calcul des fonctions de fermeture 209

F. Calcul des jacobiennes de $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{S}$ et de la dérivée de S_T **217**
F.1. Calcul de $\nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{U})$ . . . 217
F.2. Calcul de $\nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{S}(s,\boldsymbol{U})$ . . . 218
F.2.1. Cas d'une couche limite laminaire . . . 218
F.2.2. Cas d'une couche limite turbulente . . . 221
F.3. Calcul de $\frac{\partial S_T}{\partial U_T}$ . . . 223

G. Analyse de stabilité d'une équation scalaire modélisant de manière simplifiée la couche limite dans les cas de forts gradients de pression adverses **225**

H. Article de conférence - "A 3D Finite-Volume Integral Boundary Layer method for icing applications" **227**

I. Article de conférence - "3D ice accretion modeling using an integral boundary layer method" **249**

Bibliographie **263**

Table des figures

1. Accidents d'avions dus au givre . . . xvii
2. Principaux types de givre en aéronautique . . . xviii
3. Structure générale d'un code de givrage classique . . . xix

1.1. Concept de couche limite . . . 4
1.2. Interprétation physique de l'épaisseur de déplacement . . . 7
1.3. Écoulement sur un dièdre d'angle au sommet $\beta\pi$ . . . 16
1.4. Comparaison des relations de fermeture $g(H)$ proposées par Drela [30] et Cousteix [25] 19
1.5. Coefficient de frottement de Swafford (à gauche) et coefficient de dissipation de Whitfield (à droite) pour différentes valeurs de Re_θ en fonction du facteur de forme . 26
1.6. Couches limites bidimensionnelle et tridimensionnelle . . . 33
1.7. Profil de vitesse tranversale unidirectionnel (à gauche) et bidirectionnel (à droite) . . 34
1.8. Déviation pariétale pour une couche limite tridimensionnelle . . . 35

2.1. Repère 3D lié aux lignes de courant extérieures . . . 45
2.2. Relation de fermeture g tracée en fonction du facteur de forme H . . . 48
2.3. Exposant du profil de vitesse analytique p_s en fonction du facteur de forme H . . . 49
2.4. Profils de vitesse d'une couche limite laminaire sur un dièdre d'angle au sommet $\beta\pi$ pour différentes valeurs de β . . . 50
2.5. Coefficient de frottement (à gauche) et coefficient de dissipation (à droite) longitudinaux pour différentes valeurs de $Re_{\theta_{ss}}$ en fonction du facteur de forme H . . . 51
2.6. Profils de vitesse turbulents pour différentes valeurs de H . . . 53
2.7. Représentation des profils de vitesse longitudinaux dans une couche limite turbulente par des profils en puissance [26] . . . 53
2.8. Coefficients de frottement proposés par Ludwieg et Tillmann (à gauche) et par White (à droite) pour différentes valeurs de $Re_{\theta_{ss}}$ en fonction du facteur de forme H . . . 56
2.9. Coefficients de dissipation calculés avec les C_{fs} donnés par Ludwieg et Tillmann (à gauche) et par White (à droite) pour différentes valeurs de $Re_{\theta_{ss}}$ en fonction du facteur de forme H . . . 56
2.10. Profils de vitesse transverse laminaires pour différentes valeurs de H . . . 58
2.11. Coefficient de frottement (à gauche) et coefficient de dissipation (à droite) transversaux pour différentes valeurs de $Re_{\theta_{ss}}$ en fonction du facteur de forme H . . . 59
2.12. $Re_{\theta trans}$ en fonction du facteur de forme H . . . 61

4.1. Domaines d'influence et de dépendance . . . 80
4.2. Représentation de la ligne de décollement et de la ligne singulière [66] . . . 82
4.3. Système de coordonnées curvilignes pour calculer la couche limite (tiré de [26]) . . . 83
4.4. Fonctionnement des méthodes de couplage fluide parfait/couche limite . . . 86

5.1. Repère 2D lié aux lignes de courant extérieures . . . 90
5.2. Discriminant adimensionné de l'équation caractéristique en fonction du facteur de forme H pour une couche limite laminaire (gauche) et turbulente (droite) . . . 93
5.3. Valeurs propres adimensionnées du système d'équations en fonction du facteur de forme H pour une couche limite laminaire (gauche) et turbulente (droite) . . . 94

5.4. Dérivée de f en fonction de H pour une couche limite laminaire (gauche) et turbulente (droite) . . . 95
5.5. Détermination de α pour que le modèle laminaire soit hyperbolique et qu'il ne soit jamais singulier . . . 96
5.6. Valeurs propres adimensionnées du système d'équations modifié par la méthode de contrôle en fonction du facteur de forme H pour une couche limite laminaire . . . 97
5.7. Définition du domaine de calcul pour la méthode 2D sur un profil d'aile sans incidence 98
5.8. Définition du domaine de calcul pour la méthode 3D . . . 107
5.9. Schéma d'une coupe 2D de deux cellules non coplanaires et des variables associées . 110

6.1. Domaine de calcul pour une plaque plane laminaire 2D . . . 119
6.2. Épaisseur de quantité de mouvement en fonction du nombre de Reynolds local pour des maillages uniformes avec un nombre de cellules variable. . . . 121
6.3. Solution BLIM2D pour une couche limite dynamique laminaire sur plaque plane en fonction du nombre de Reynolds local . . . 122
6.4. Solution BLIM2D pour une couche limite thermique laminaire sur plaque plane en fonction du nombre de Reynolds local . . . 123
6.5. Écarts relatifs entre les solutions BLIM2D et les solutions de référence pour une couche limite thermique laminaire sur plaque plane . . . 124
6.6. Solution BLIM2D pour une couche limite dynamique turbulente sur plaque plane pour deux lois de frottement différentes . . . 125
6.7. Solution BLIM2D-SM pour une couche limite thermique turbulente sur plaque plane sans gradient de pression . . . 126
6.8. Domaine de calcul pour un écoulement 2D autosimilaire de Falkner-Skan . . . 127
6.9. Écarts relatifs entre la solution BLIM2D et la solution de Falkner-Skan pour une couche limite dynamique laminaire sur plaque plane avec différents paramètres de gradient de pression . . . 129
6.10. Écarts relatifs entre la solution BLIM2D sans la correction de point d'arrêt et la solution de Falkner-Skan pour un écoulement de point d'arrêt bidimensionnel (traits pleins : sans correction / pointillés : avec correction) . . . 129
6.11. Solutions BLIM2D-SM et BLIM2D-IM pour une couche limite thermique laminaire sur plaque plane avec différents paramètres de gradient de pression . . . 130
6.12. Solution BLIM2D pour une couche limite dynamique turbulente sur plaque plane avec un gradient de pression favorable pour deux lois de frottement différentes . . . 132
6.13. Écarts relatifs entre les solutions BLIM2D pour deux relations de fermeture et la solution de CLICET pour une couche limite dynamique turbulente sur plaque plane avec un gradient de pression favorable . . . 132
6.14. Solution BLIM2D-SM pour une couche limite thermique turbulente sur plaque plane avec un gradient de pression favorable . . . 133
6.15. Solution BLIM2D pour une couche limite dynamique turbulente sur plaque plane avec un gradient de pression adverse pour deux lois de frottement différentes . . . 135
6.16. Écarts relatifs entre les solutions BLIM2D pour deux relations de fermeture et la solution de CLICET pour une couche limite dynamique turbulente sur plaque plane avec un gradient de pression adverse . . . 135
6.17. Étude de convergence en maillage pour le solveur BLIM2D sur un profil d'aile NACA0012 . . . 136
6.18. Maillages utilisés pour la validation de la méthode . . . 137
6.19. Étude de convergence en maillage pour le solveur BLIM2D avec un maillage généré par MESH2D . . . 138

6.20. Solution BLIM2D pour les couches limites dynamique et thermique sur un profil d'aile NACA0012 sans incidence et à faible Mach 139
6.21. Solution BLIM2D au voisinage du point d'arrêt pour les couches limites dynamique et thermique sur un profil d'aile NACA0012 sans incidence et à faible Mach 140
6.22. Solution BLIM2D pour les couches limites dynamique et thermique sur un profil d'aile NACA0012 avec un nombre de Mach et un angle d'incidence relativement élevés 142
6.23. Profil d'aile MS317 maillé automatiquement par IGLOO2D 143
6.24. Solution BLIM2D pour les couches limites dynamique et thermique sur un profil d'aile MS317 sans incidence et pour un nombre de Mach de 0.2420 144
6.25. Solution BLIM2D pour les couches limites dynamique et thermique sur un profil d'aile MS317 à 8° d'incidence et pour un nombre de Mach de 0.2420 145
6.26. Profil d'aile GLC305 maillé automatiquement par IGLOO2D 146
6.27. Solution BLIM2D pour les couches limites dynamique et thermique sur un profil d'aile GLC305 à 4.5° d'incidence et pour un nombre de Mach de 0.2730 147
6.28. Solution BLIM2D pour les couches limites dynamique et thermique sur un profil d'aile GLC305 à 1.5° d'incidence et pour un nombre de Mach de 0.3940 148

7.1. Structure de la chaîne de calcul IGLOO2D 154
7.2. Structure de la chaîne de calcul IGLOO3D 157
7.3. Coefficients d'échange thermique et formes de givre obtenus lors des phase de prédiction et de correction pour un cas d'accrétion de givre blanc 159
7.4. Écoulement aérodynamique autour de la forme de givre obtenue par IGLOO2D associé à BLIM2D lors de la phase de prédiction 161
7.5. Solution BLIM2D calculée lors de la phase de correction sur la forme du dépôt de givre "prédicteur" 162
7.6. Formes de dépôt de givre obtenues lors de la phase de correction 163
7.7. Formes de dépôt de givre obtenues lors de la phase de correction pour différents cas d'accrétion de givre transparent 165
7.8. Formes de dépôt de givre obtenues avec les lois de frottement proposées par White et Ludwieg et Tillmann pour le cas n° 5 166
7.9. Formes de dépôt de givre obtenues lors de la phase de prédiction pour le cas n° 1 . . 167
7.10. Coefficients d'échange thermique et épaisseurs de quantité de mouvement calculés lors de la phase de prédiction pour le cas n° 1 (zoom sur la zone du point d'arrêt) . . 168
7.11. Formes de dépôt de givre obtenues lors de la phase de prédiction pour le cas n° 2 . . 169
7.12. Coefficients d'échange thermique et épaisseurs de quantité de mouvement calculés lors de la phase de prédiction pour le cas n° 2 (zoom sur la zone du point d'arrêt) . . 169
7.13. Maillage surfacique utilisé par BLIM3D sur un profil d'aile NACA0012 170
7.14. Formes de dépôt de givre obtenues par IGLOO3D et IGLOO2D-BLIM2D lors de la phase de prédiction pour les cas n° 5 et 6 171
7.15. Formes de dépôt de givre obtenues par IGLOO3D sur un maillage 2D extrudé lors de la phase de prédiction pour le cas n° 5 172
7.16. Nombres de Mach, pressions statiques, quantités d'eau impactante et coefficients d'échange thermique obtenus par IGLOO3D et IGLOO2D-BLIM2D lors de la phase de prédiction pour le cas n° 5 173
7.17. Épaisseurs de givre et coefficients d'échange thermique obtenus par IGLOO3D et IGLOO2D-BLIM2D lors de la phase de prédiction pour le cas n°5 (zoom sur la zone du point d'arrêt) 174

B.1. Évolution de $Hg(H)$ en fonction de H 196

B.2. Évolution de la valeur minimale ($\max(\frac{Hg(H)}{1-Hg(H)}, 2)$) du degré du polynôme modélisant le profil de vitesse en fonction du facteur de forme. 197
B.3. Exposant du profil de vitesse analytique p_s en fonction du facteur de forme H 198

Nomenclature

Sauf mention contraire, les notations utilisées dans le manuscrit sont celles définies ci-dessous.

Lettres latines

A_c	coefficient du profil de vitesse laminaire transversale
A_s	coefficient du profil de vitesse laminaire longitudinale
A_T	coefficient du profil de température laminaire
c	corde du profil d'aile (m)
C_D	coefficient de dissipation
C_E	coefficient d'entrainement
C_f	coefficient de frottement
c_p	chaleur spécifique $(J.kg^{-1}.K^{-1})$
$\boldsymbol{E}$	déficit d'énergie cinétique
$\boldsymbol{F}$	vecteur des flux
$\boldsymbol{G}$	vecteur des flux numériques
h	enthalpie massique $(J.kg^{-1})$
H	facteur de forme
h_i	enthalpie massique totale $(J.kg^{-1})$
h_{tc}	coefficient d'échange thermique $(W.m^{-2}.K^{-1})$
k	conductivité thermique $(W.m^{-1}.K^{-1})$
k_s	hauteur de grain de sable équivalent (m)
m	paramètre de gradient de pression pour les solutions de Falkner-Skan
$\boldsymbol{M}$	déficit de masse
P	pression statique (Pa)
Pr	nombre de Prandtl
Pr_t	nombre de Prandtl turbulent
p_s	exposant du profil de vitesse laminaire longitudinal
q	exposant du profil de température laminaire
$\boldsymbol{q}$	vecteur vitesse
r	facteur de récupération
Re	nombre de Reynolds
$\boldsymbol{S}$	vecteur des termes sources
St	nombre de Stanton
T	température statique (K)
$\bar{\bar{\boldsymbol{T}}}$	déficit de quantité de mouvement
T_r	température de récupération (K)
$\boldsymbol{U}$	vecteur des variables résolues

u, v, w	composantes de la vitesse ($m.s^{-1}$)
$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$	repère quelconque adapté à la géométrie
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$	repère cartésien fixe
$(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})$	repère lié aux lignes de courant extérieures

Lettres grecques

β_0	déviation pariétale (rad)
δ	épaisseur de couche limite (m)
δ_1	épaisseur de déplacement (m)
δ_3	épaisseur d'énergie cinétique (m)
Δ_{cond}	épaisseur de conduction (m)
η	variable adimensionnelle dans la direction normale à la paroi
θ	épaisseur de quantité de mouvement (m)
θ_T	épaisseur d'enthalpie (m)
λ	paramètre de gradient de pression basé sur θ ou valeur propre du système d'équations
Λ	paramètre de gradient de pression de Pohlhausen
μ	viscosité dynamique ($kg.m^{-1}.s^{-1}$)
ν	viscosité cinématique ($m^2.s^{-1}$)
ξ	variable adimensionnelle dans la direction normale à la paroi
ρ	masse volumique ($kg.m^{-3}$)
τ	contrainte de cisaillement (Pa)
Φ	flux de chaleur ($W.m^{-2}$)

Indices

$()_{dec}$	décollement de couche limite
$()_e$	écoulement extérieur
$()_p$	paroi
$()_T$	thermique
$()_\infty$	infini amont

Notations mathématiques

$\tilde{.}$ opérateur appliqué dans le plan tangent à la paroi
$\hat{.}$ grandeur adimensionnée

Abréviations

AOA	*Angle Of Attack* angle d'incidence du profil d'aile (°)
BLIM	*Boundary Layer Integral Method* solveur de couche limite basé sur le modèle intégral développé dans cette thèse
IGLOO	*IcinG tooL bOx Onera* chaîne de calcul d'accrétion de givre de l'ONERA
IM	*Integral Method* méthode intégrale pour la couche limite thermique
LWC	*Liquid Water Content* concentration massique en eau ($kg.m^{-3}$)
MVD	*Median Volumetric droplet Diameter* Diamètre volumique médian des gouttes d'eau (m)
SIM	*Simplified Integral Method* solveur de couche limite basé sur une méthode intégrale simplifiée et utilisé dans la chaîne IGLOO2D d'origine
SM	*Simplified Method* méthode simplifiée pour la couche limite thermique

Introduction

Contexte de l'étude

« La dégradation des performances aérodynamiques peut atteindre un niveau très dangereux avant même que le pilote ne soit à même de percevoir la formation du givre. »

Ces mots sont la conclusion alarmante des recherches menées par le NTSB (National Transportation Safety Board) et la FAA (Federal Aviation Administration), aidés par la NASA et l'université de l'Illinois à Urbana-Champaign suite au crash d'un Embraer RT120 à Détroit en 1997 (figure 1(a)). La cause de cet accident n'était autre que la formation d'une fine couche de givre sur les ailes, entrainant le décrochage de l'avion et tuant les 26 passagers et les 3 membres de l'équipage. En 1994, peu de temps avant le crash de l'Embraer RT120, un ATR72 de la compagnie American Eagle s'était écrasé près de Roselawn (Indiana, Etats-Unis) suite à un décrochage pendant la phase de descente faisant 68 morts (figure 1(b)). L'enquête montra que le circuit d'attente s'était fait en conditions givrantes et que du givre s'était accrété loin du bord d'attaque, en dehors des zones équipées de systèmes de dégivrage et d'anti-givrage. Ces deux accidents sont venus rappeler à la communauté aéronautique internationale que le givrage en vol reste un danger majeur pour la sécurité aérienne et a conduit au renforcement récent des réglementations FAA et EASA avec l'introduction d'une nouvelle annexe, dite "appendice O" [1].

(a) Embraer 120 à Détroit en 1997

(b) ATR72 à Roselawn en 1994

FIGURE 1. – Accidents d'avions dus au givre

L'accrétion de givre sur les avions est principalement due à l'impact de gouttes d'eau surfondues sur une surface froide. Normalement, pour une température en dessous de la température de fusion de l'eau, soit 0°C à pression atmosphérique, l'eau ne peut exister qu'à l'état solide. Pourtant, dans les nuages à haute altitude, on peut trouver des gouttelettes d'eau surfondues qui sont à l'état liquide et dont la température peut descendre jusqu'à −40°C. Ces gouttes sont dans un état appelé métastable. Ceci signifie que la moindre perturbation extérieure, comme l'impact de la goutte

1. L'appendice O couvre les nuages givrants contenant des gouttes dont le diamètre maximum est supérieur à 50 microns. Jusqu'à son introduction, la réglementation imposait seulement de tenir compte des nuages dont les gouttes étaient toutes inférieures à 50 microns.

sur un avion, va déclencher brutalement le processus de solidification. On peut alors distinguer deux types de glace susceptibles de se former : le givre blanc et le givre transparent. Le givre blanc apparait plutôt en conditions froides, en dessous de $-15°C$, et pour une concentration de gouttes pas trop importante. Ces gouttes gèlent complètement et quasiment instantanément après l'impact, si bien que des bulles d'air sont emprisonnées pendant la solidification. Ce phénomène est responsable du caractère opaque et cassant de la glace formée. Le givre transparent, quant à lui, apparait plutôt dans des conditions moins froides et avec une concentration de gouttes plus importante, si bien que seule une fraction de la goutte gèle instantanément. L'autre partie, encore à l'état liquide, peut ruisseler et éventuellement geler plus loin. Ceci peut donc créer des formes de glace plus complexes, en forme de cornes par exemple, et beaucoup plus pénalisantes au niveau aérodynamique que celles obtenues avec du givre blanc. La glace formée ne contient pas de bulle d'air, d'où sa couleur transparente et son caractère plus lisse et plus dense. Ce type de givre, plus tenace et résistant, peut s'avérer plus dommageable et plus délicat à éliminer que le précédent car les cornes, si elles se détachent, peuvent endommager l'avion.

(a) Givre blanc (b) Givre transparent

FIGURE 2. – Principaux types de givre en aéronautique

Paradoxalement, le phénomène de givrage est un processus exothermique. En effet, à température fixée, une goutte d'eau surfondue est dans un état d'énergie plus élevé que la glace. Ceci explique le fait que, pour pouvoir se solidifier, une goutte d'eau surfondue doit libérer une certaine quantité d'énergie sous forme de chaleur, appelée chaleur latente de fusion. Cette énergie libérée lors de la solidification sera susceptible de faire augmenter la température de la glace, ou d'empêcher l'eau encore liquide de se solidifier. En vol, une partie de cette chaleur est évacuée dans l'air, plus froid que le bloc de givre et le cisaillant à grande vitesse. Ce phénomène est modélisé à l'aide d'un coefficient d'échange thermique dont la valeur influe directement sur le type de givre formé. En effet, le givre sera blanc seulement si une quantité suffisante de chaleur est libérée dans l'atmosphère lors de la solidification pour que toute l'eau puisse geler.

Qu'il soit blanc ou transparent, les conséquences de la formation du givre sur l'avion sont multiples et dangereuses. Il peut notamment engendrer une augmentation de la masse, une baisse des performances aérodynamiques de l'avion, un dysfonctionnement des sondes ou encore un endommagement du moteur. Ainsi, l'étude des effets de l'accrétion de givre sur les performances de l'avion constitue une étape incontournable dans le processus de conception et de certification d'un avion. Pour qu'un avion puisse être certifié, l'avionneur doit démontrer que l'appareil peut voler en toute sécurité en cas d'exposition, intermittente ou continue, à des conditions givrantes bien particulières, qui sont définies dans les appendices C et O de la réglementation FAA et EASA. Il dispose pour cela de trois moyens complémentaires (dits "moyens de conformité acceptables" par les autorités de certification) que sont les outils numériques, les essais en soufflerie et les essais en vol. Les essais,

qu'ils soient au sol ou en vol, sont très coûteux si bien que tous les avionneurs cherchent à en minimiser le nombre par un recours de plus en plus important à la simulation numérique. C'est d'autant plus vrai pour les conditions givrantes relatives à l'appendice O (SLD) qui sont difficiles à reproduire en soufflerie et difficiles à rencontrer en vol. Aujourd'hui, les outils numériques utilisés pour la certification sont basés essentiellement sur des modélisations bidimensionnelles. Ainsi, pour une aile d'avion par exemple, la dégradation des performances aérodynamiques est évaluée par des essais en soufflerie en considérant une forme de givre 3D reconstituée. Celle-ci est obtenue par assemblage de formes de givre 2D calculées, section par section, à l'aide d'un code 2D en considérant les conditions givrantes les plus critiques pour chacune des sections. Cette méthodologie, malgré les simplifications qu'elle comporte, est acceptée par les autorités de certification car elle conduit à des dégradations de performance mesurées en soufflerie plus sévères que celles observées en vol. Cependant, avec le renforcement récent de la réglementation et la nécessité de faire des avions toujours plus légers et consommant moins d'énergie, les constructeurs souhaitent réduire le conservatisme des méthodes actuelles. Ils s'intéressent donc de plus en plus à des approches nouvelles s'appuyant sur des outils de simulation 3D.

La structure générale d'une chaîne de calcul d'accrétion de givre classique est schématisée sur la figure 3. Dans un premier temps, un calcul d'aérodynamique est effectué sur l'obstacle non

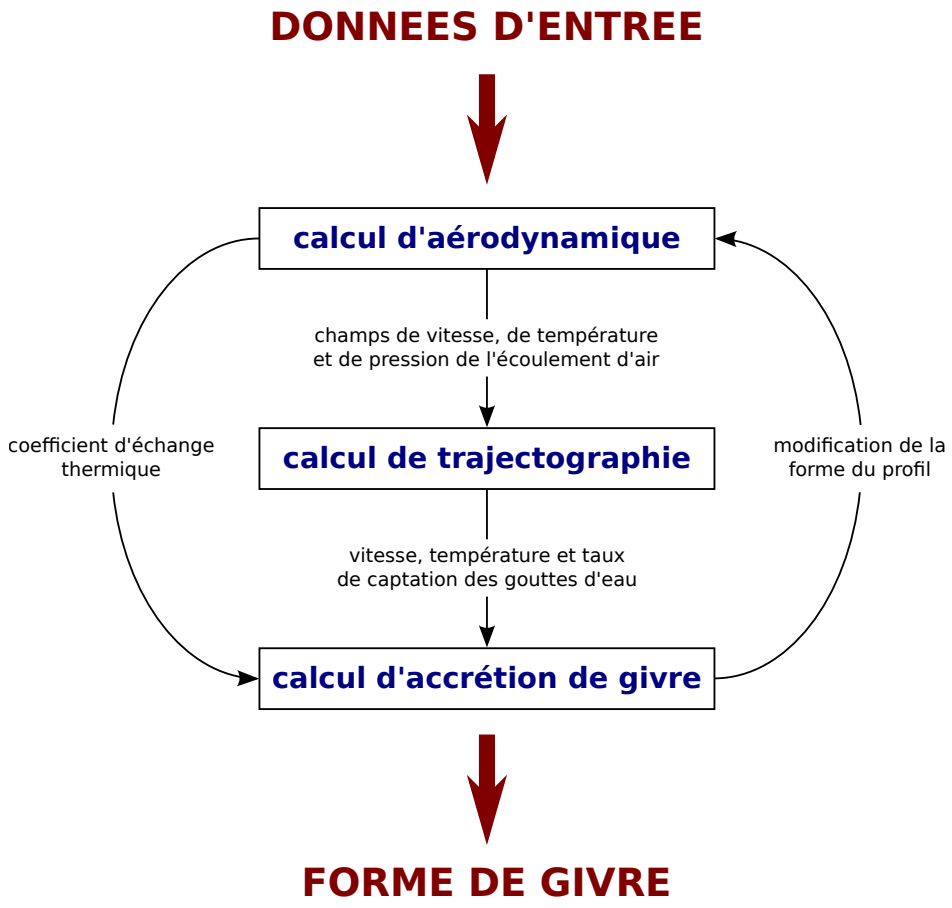


FIGURE 3. – Structure générale d'un code de givrage classique

givré et fournit le champ de vitesse, de pression et de température de l'écoulement d'air. Vient

ensuite un calcul de trajectographie, qui permet de connaître la quantité de gouttes impactantes sur les surfaces exposées. Enfin, le calcul d'accrétion fournit l'épaisseur de givre en tout point de ces surfaces. Aujourd'hui, le coût très élevé des simulations est l'inconvénient majeur des codes de givrage 3D par rapport à leurs homologues 2D. En effet, pour la plupart des chaînes 2D, le calcul aérodynamique est basé sur un calcul fluide parfait couplé (de manière faible) à un modèle intégral de couche limite [88, 98, 78], ce qui rend la méthode très rapide. En revanche, dans les rares chaînes de calcul 3D utilisées aujourd'hui, le calcul aérodynamique repose sur un modèle Navier-Stokes RANS [43, 64, 42, 8] qui requiert un maillage très fin en paroi et des temps de calcul importants. Ceci est d'autant plus pénalisant que les calculs doivent être lancés un grand nombre de fois. En effet, le processus schématisé sur la figure 3 est itératif et l'écoulement aérodynamique doit être mis à jour suite au calcul d'accrétion pour tenir compte de l'influence de la forme de givre sur l'écoulement. De plus, ceci nécessite de remailler le profil givré. Cette étape peut elle aussi s'avérer plus complexe à automatiser en raison de la complexité de la forme du dépôt de givre et de la finesse requise pour le maillage en proche paroi.

Pour éviter que les simulations ne soient trop coûteuses en temps de calcul, tout en conservant l'aspect tridimensionnel des résultats, certaines chaînes de calcul comme LEWICE3D reposent sur une méthode dite 2.5D. Celle-ci consiste à reconstituer la forme de givre sur une géométrie 3D à partir de plusieurs calculs bidimensionnels réalisés sur différentes sections de la géométrie. Cette méthode a néanmoins des limitations puisqu'elle n'est pas adaptée à tout type de géométries et qu'elle ne prend en compte les effets tridimensionnels que de manière simplifiée. Il subsiste donc un réel besoin de développer des outils de simulation 3D qui puissent être robustes, généraux et suffisamment efficaces en temps de calcul pour être intégrés dans une chaîne de calcul industrielle.

Objectifs de l'étude

C'est dans ce contexte que s'inscrit cette thèse. En effet, l'ONERA développe depuis de nombreuses années des outils de simulation numérique 2D et 3D correspondant au schéma de la figure 3. La chaîne 2D, IGLOO2D, utilise un couplage faible Euler/modèle intégral de couche limite pour le calcul aérodynamique. Elle a maintenant atteint un fort degré de maturité et commence à être utilisée par les principaux constructeurs aéronautiques français et leurs sous-traitants (Airbus, Dassault Aviation, Safran Aircraft Engines, Zodiac Aerospace, Liebherr Aerospace), en remplacement de la précédente chaîne appelée ONICE2D. En revanche, le développement de la chaîne de calcul 3D, IGLOO3D, est beaucoup plus récent. Celle-ci n'est pas encore mature pour des applications industrielles. En particulier, les calculs aérodynamiques et les calculs de transferts thermiques reposent sur des calculs Navier-Stokes qui sont longs et coûteux. Il est donc nécessaire de réduire le temps de calcul en se servant de l'expérience acquise en 2D et remplacer les calculs Navier-Stokes par une méthode couplée, de manière faible, Euler/couche limite intégrale.

Partant de ce constat, les objectifs de la thèse sont de développer une méthode intégrale 3D de couche limite, adaptée à la problématique du givrage en vol, de l'implémenter dans la chaîne de calcul IGLOO3D et d'en évaluer l'apport pour des calculs d'accrétion de givre sur des ailes d'avion.

Au cours de l'étude, il est apparu que les modèles de couche limite bidimensionnels utilisés dans les codes de givrage 2D tels que IGLOO2D ou LEWICE2D reposent sur de fortes hypothèses simplificatrices. En effet, ils sont basés sur des formules quasi-analytiques issues de modèles à une seule équation de transport qui rendent difficiles, voire impossible, leur extension directe en 3D. En revanche, il est possible de les remplacer par des modèles un peu plus complexes proposés dans la littérature. Ceux-ci s'appuient sur la résolution d'un système de plusieurs équations intégrales couplées. Ces modèles, qui font appel à moins d'hypothèses, sont plus généraux, plus précis (y

compris en 2D) et leur extension en 3D se fait naturellement. On trouve dans la littérature de nombreux travaux consacrés à ce type d'approche [6, 19, 23, 30, 32, 89, 38, 39, 44, 58, 62, 65, 69, 102, 76, 84, 101] mais, pour la plupart, ils ne sont pas directement adaptés aux besoins liés à la simulation d'accrétion de givre. En particulier, la plupart des modèles proposés portent uniquement sur la couche limite dynamique et ne traitent pas la couche limite thermique. De plus, ils ne tiennent pas compte des effets de rugosité de paroi, très importants quantitativement dans le cas d'une surface givrée.

Pour traiter la couche limite thermique, les modèles simplifiés de couche limite utilisent des relations quasi-analytiques qui dépendent directement des grandeurs dynamiques. Ces modèles thermiques simplifiés sont donc a priori compatibles avec un modèle intégral dynamique plus complexe. Cependant, ils reposent sur de nombreuses hypothèses et notamment sur le fait que les conditions aux limites thermiques sont uniformes sur toute la paroi. Or, sur une aile d'avion par exemple, il existe des zones comme le bord d'attaque où les parois sont chauffées pour empêcher la formation du givre. Les modèles simplifiés ne sont donc pas valables dans ce cas. Il faut alors faire appel à un code Navier-Stokes ou à un code qui résout les équations de Prandtl différentielles comme le fait par exemple Chauvin dans sa thèse [17]. Cependant, ces méthodes sont difficiles à utiliser dans des chaînes de calcul automatisées pour le givrage, en particulier en 3D, car elles requièrent de mailler dans la direction normale à la paroi et elles ne permettent pas, en général, le passage du décollement. Il est donc nécessaire de développer un modèle thermique qui permette d'étendre le domaine d'application des méthodes simplifiées, et notamment de traiter les zones protégées. Ceci peut être fait en utilisant une équation de transport intégrale de l'énergie mais la littérature est moins abondante sur le sujet que pour la dynamique. Le processus a donc été initié en se limitant d'abord au régime laminaire et à une masse volumique constante pour simplifier le problème. En l'état, ce modèle ne peut donc pas encore être appliqué pour traiter des configurations réelles (couches limite turbulente, paroi chauffée), mais il constitue une première approche qui devra être complétée au delà de la thèse.

Enfin, la méthode intégrale de couche limite développée dans cette thèse doit répondre à un certain nombre de critères spécifiques du givrage. Tout d'abord, le calcul du coefficient d'échange thermique est fondamental puisqu'il joue un rôle majeur dans le bilan thermique et a une forte influence sur le taux de solidification local. Il a donc une influence directe sur la forme du dépôt de givre. Ainsi, il est fondamental de pouvoir le calculer avec précision dans toutes les zones où sa valeur est élevée, c'est-à-dire principalement dans les zones où la couche limite est attachée et en particulier dans la zone du bord d'attaque, au voisinage du point d'arrêt. En revanche, dans les zones où la couche limite décolle, par exemple en raison de la forme du dépôt de givre, le coefficient d'échange thermique est beaucoup moins élevé, notamment car la vitesse chute fortement. Ainsi, le terme d'échange convectif à l'interface air/givre n'est plus le terme dominant dans le bilan d'énergie à la paroi. On s'attend donc dans la majorité des cas à ce qu'une erreur relative, même grande, sur ce terme dans une zone décollée n'ait pas une incidence forte sur la précision de la forme globale du dépôt de givre. Une solution précise du modèle thermique n'est donc pas attendue dans les zones de couche limite décollée, ni dans la zone proche du bord de fuite où il n'y a généralement pas de dépôt de givre. D'autre part, la méthode intégrale de couche limite est destinée à être intégrée dans la chaîne de givrage automatique IGLOO. La méthode doit donc être précise sur les maillages utilisés habituellement avec IGLOO pour traiter des cas industriels. Ces maillages ne sont pas nécessairement très raffinés. De plus, la méthode doit être particulièrement robuste. En effet, il existe des cas critiques où, en aval des cornes de givre, le solveur Euler prévoit un décollement massif de l'écoulement. La stabilité de la méthode doit donc être garantie même en présence d'écoulements de retour dans la solution fluide parfait à l'extérieur de la couche limite.

Plan du manuscrit de thèse

Le manuscrit se décompose en sept chapitres.

Le chapitre 1 présente un état de l'art sur les différentes méthodes intégrales existantes de couche limite. Il détaille plus particulièrement toutes les notions et les modèles qui sont repris dans les chapitres suivants.

Le chapitre 2 est consacré au développement d'un modèle intégral de couche limite dynamique 3D adapté aux besoins de la simulation d'accrétion de givre. Le système d'équations est basé sur une formulation instationnaire des équations intégrales de quantité de mouvement et d'énergie cinétique. Les relations de fermeture pour les couches limites laminaire et turbulente sont construites à partir de profils de vitesse présumés. En particulier, un modèle original est proposé pour traiter l'écoulement longitudinal dans la zone laminaire de la couche limite afin d'assurer une grande précision dans la zone proche du point d'arrêt. Enfin, le modèle est adapté pour prendre en compte les effets de rugosité dus au givre.

Dans le chapitre 3, on propose deux modèles thermiques différents qui permettent chacun, lorsqu'ils sont associés au modèle dynamique, de calculer le coefficient d'échange thermique nécessaire au calcul d'accrétion. Le premier modèle, dit simplifié, est similaire à ceux utilisés par les codes de givrage 2D actuels et basé sur des corrélations semi-empiriques. Celui-ci repose sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices et n'est pas valable sur des parois chauffées. Le second modèle est basé sur l'équation intégrale de l'énergie. Il est construit dans l'optique d'améliorer la précision du calcul du coefficient d'échange thermique et d'étendre le domaine de validité du modèle aux parois chauffées. Faute de temps, il n'a été établi que pour une couche limite laminaire et à masse volumique constante.

Le chapitre 4 est un état de l'art sur les différentes méthodes numériques qui sont utilisées pour résoudre les équations intégrales de couche limite. Il met aussi en évidence le problème de la singularité de Goldstein, rencontré lors de la résolution d'un décollement de couche limite. Il présente enfin les solutions mises en place par les auteurs de la littérature pour éviter cette singularité et permettre le calcul de couches limites avec décollement.

Le chapitre 5 est consacré au développement et à la mise en œuvre d'une méthode de résolution numérique robuste adaptée à des géométries complexes. Une méthode de Volumes-Finis est établie en 2D dans un premier temps, puis elle est étendue en 3D. Des traitements particuliers sont proposés dans la méthode 2D pour améliorer la précision et la robustesse de la méthode dans la zone proche du point d'arrêt et rendre le code robuste en cas de décollement et de forts gradients de pression adverses.

Dans le chapitre 6, la méthode intégrale de couche limite 2D est validée sur des cas de plaque plane sans et avec gradient de pression par comparaison avec des solutions analytiques ou avec des données expérimentales. La méthode est aussi comparée à un code de référence qui résout les équations de Prandtl différentielles pour des écoulements autour de profils d'aile. Enfin, on présente des cas de validation de la méthode en 3D.

Dans le chapitre 7, les modèles et les méthode numériques 2D et 3D développés dans cette thèse et intégrés dans les chaînes de givrage de l'ONERA sont appliqués à différents cas d'accrétion de givre, issus de bases de données de la NASA. Les formes de givre calculées sont comparées aux formes expérimentales et à celles obtenues par la chaîne de givrage 2D d'origine, utilisant un modèle de couche limite simplifié.

Première partie .

Modélisation intégrale de la couche limite en 3D

1. État de l'art sur les modèles intégraux de couche limite

Sommaire

1.1. Rappels sur la notion de couche limite et les équations associées 4

1.1.1. Théorie de la couche limite 4

1.1.2. Structure d'une couche limite turbulente 5

1.2. Présentation des différents types de modèles intégraux de couche limite 6

1.2.1. Principe général d'un modèle intégral de couche limite 6

1.2.2. Les différents types de modèles intégraux de couche limite 8

1.2.3. Formulation stationnaire ou instationnaire 14

1.3. Recensement des principales méthodes existantes pour fermer un système d'équations intégrales de couche limite 15

1.3.1. Présentation des relations de fermeture issues des solutions de similitude . . 15

1.3.2. Présentation des relations de fermeture basées sur un profil de vitesse . . . 23

1.3.3. Présentation des relations de fermeture empiriques 26

1.4. Recensement des principaux critères de transition laminaire-turbulent utilisés pour les méthodes intégrales de couche limite 27

1.5. Présentation des effets de rugosité et de la manière dont ils sont pris en compte dans les méthodes intégrales 30

1.6. Rappels sur les spécificités d'une méthode intégrale tridimensionnelle par rapport à une méthode intégrale bidimensionnelle 32

1.6.1. Structure d'une couche limite tridimensionnelle 32

1.6.2. Méthodes intégrales pour une couche limite tridimensionnelle 34

1.6.3. Solutions de similitude pour une couche limite tridimensionnelle 36

1.6.4. Transition laminaire-turbulent pour une couche limite tridimensionnelle . . 37

1.7. Présentation des différentes méthodes pour calculer les échanges thermiques à l'interface paroi/air 37

Ce chapitre présente les principaux thèmes, méthodes et modèles de la littérature qui sont utiles pour répondre au problème posé qui est de développer un modèle intégral de couche limite adapté aux besoins du givrage. Ainsi, après un bref rappel sur la notion de couche limite, nous décrivons les différents types de modèles intégraux présents dans la littérature et recensons les principales méthodes existantes pour fermer un système d'équations. Ensuite les critères de transition laminaire-turbulent utilisés dans les méthodes intégrales sont revus, ainsi que les modèles existants de couche limite sur paroi rugueuse. L'avant-dernière section met en évidence les spécificités des méthodes intégrales de couche limite tridimensionnelle par rapport aux méthodes bidimensionnelles. Enfin, la dernière section présente les différentes méthodes que l'on peut trouver dans la littérature pour calculer les échanges thermiques à l'interface paroi/air.

1.1. Rappels sur la notion de couche limite et les équations associées

1.1.1. Théorie de la couche limite

Même si certains auteurs comme Rankine, Froude ou Lorenz avaient déjà brièvement évoqué l'existence du phénomène de couche limite auparavant [86], la théorie de la couche limite a réellement commencé avec les travaux de Ludwig Prandtl en 1904 ("On the motion of a fluid with very small viscosity"). Il s'est aperçu que pour un écoulement sur une paroi avec un nombre de Reynolds suffisamment grand, les effets de la viscosité sur l'écoulement sont confinés dans une zone très mince, adjacente à la paroi. En d'autres termes, loin de la paroi, les effets visqueux ne se font pas ressentir et on peut considérer que l'écoulement se comporte comme un écoulement de fluide parfait, dit écoulement d'Euler. À l'inverse, il existe une fine couche de l'écoulement adjacente à la paroi, appelée couche limite, où les effets visqueux sont au moins aussi importants que les effets inertiels (voir figure 1.1). Dans cette couche limite, la vitesse est nulle à la paroi d'après la condition d'adhérence et elle est égale à la vitesse de l'écoulement extérieur à la frontière avec l'écoulement de fluide parfait. En toute rigueur, la vitesse dans la couche limite ne rejoint celle du fluide parfait qu'à une distance infinie de la paroi. C'est ce qui fait que l'épaisseur de couche limite est souvent difficile à définir de manière claire et sans ambiguïté. Conventionnellement, elle est donc définie comme étant la distance à la paroi où la vitesse longitudinale vaut 99 pour cent de la valeur de la vitesse de l'écoulement extérieur. Avec cette définition arbitraire, l'épaisseur de couche limite reste très faible puisque la vitesse dans la couche limite augmente très rapidement avec la distance normale à la paroi.

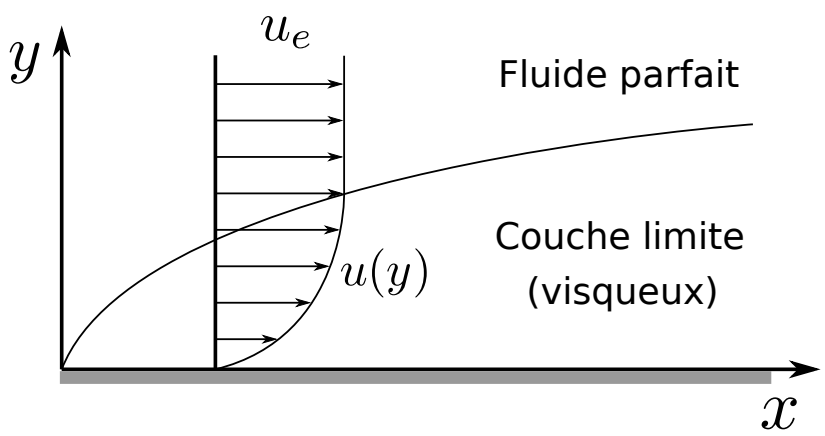


FIGURE 1.1. – Concept de couche limite

Le fait que cette couche soit très fine permet de faire un certain nombre d'approximations dans les équations du mouvement s'appliquant dans cette zone. En effet, en adimensionnant les équations de Navier-Stokes et en comparant les ordres de grandeur des différents termes, Prandtl a montré que plusieurs d'entre eux sont négligeables dans la couche limite. En particulier, la vitesse dans la direction normale à la paroi est négligeable devant la vitesse tangentielle et la variation de la vitesse le long de la paroi est très faible devant la variation de la vitesse dans la direction normale à la paroi. Les équations de Navier-Stokes ainsi simplifiées modélisent l'écoulement du fluide dans la couche limite et sont appelées "équations de Prandtl". Pour un écoulement bidimensionnel incompressible, elles s'écrivent de la manière suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.1a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \tag{1.1b}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{1.1c}$$

où τ_{xy} est la contrainte de cisaillement. Elle vaut $\tau_{xy} = \mu\frac{\partial u}{\partial y}$ pour un écoulement laminaire et $\tau_{xy} = \mu\frac{\partial u}{\partial y} - \rho < u'v' >$ pour un écoulement turbulent. On constate notamment, d'après l'équation (1.1c), que la variation de pression dans la direction perpendiculaire à la paroi est négligeable. Il faut noter que ces équations et le concept de couche limite ne sont valables que si l'épaisseur de la couche limite δ est très petite devant l'échelle de longueur L de l'écoulement (qui correspond souvent à la longueur de l'obstacle).

Cette théorie de la couche limite proposée par Prandtl a assez rapidement suscité l'intérêt d'autres auteurs. En particulier, Blasius a appliqué la théorie de Prandtl pour étudier en détail les écoulements de couche limite sur plaque plane (1908) et Boltze, quant à lui, s'est concentré sur les écoulements autour d'une sphère (1908). Peu de temps après, Prandtl a étendu le concept de couche limite à la couche limite thermique (1910). On peut encore citer Hiemenz, qui a calculé la couche limite à l'aide d'une distribution de pression obtenue expérimentalement sur un cylindre [46]. Il a ainsi été le premier à étudier les écoulements bidimensionnels de point d'arrêt. Le lecteur peut se référer au papier de Tani [86] pour plus de détails sur l'histoire de la théorie de la couche limite.

1.1.2. Structure d'une couche limite turbulente

Dans une couche limite turbulente, l'équation de quantité de mouvement (1.1b) peut se réécrire de la manière suivante (en l'absence de gradient de pression et sous sa forme stationnaire) :

$$\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{inertie}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\text{frottement visqueux}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(- < u'v' >)}_{\text{frottement turbulent}}$$

Si la structure de la couche limite laminaire est relativement simple, on peut en revanche distinguer différentes zones dans la couche limite turbulente, en fonction du caractère dominant ou négligeable des termes de l'équation ci-dessus. La zone à proximité de la paroi est la sous-couche visqueuse. Dans cette région, la vitesse est très faible et les termes visqueux sont prédominants, alors que les termes d'inertie et de frottement turbulent sont négligeables. En s'éloignant de la paroi, on trouve ensuite la zone tampon et la zone inertielle, dans lesquelles le terme de frottement turbulent devient progressivement prépondérant par rapport au terme de frottement visqueux. Le terme d'inertie est quant à lui toujours négligeable en raison des faibles vitesses de l'écoulement. Ces trois premières zones constituent la région interne de la couche limite dans laquelle les effets de viscosité sont importants. Dans cette région, la vitesse moyenne est de l'ordre de la vitesse de frottement $u_\tau = \sqrt{\tau_p/\rho}$ (avec τ_p le frottement pariétal) et l'échelle de longueur caractéristique est ν/u_τ.

Si on s'éloigne davantage de la paroi, on atteint la couche limite externe qui est composée de la zone de vitesse déficitaire puis de la zone de sillage. Dans cette région, le terme de frottement visqueux est négligeable et les termes d'inertie et de frottement turbulent sont prédominants. L'échelle de longueur caractéristique est l'épaisseur de la couche limite δ et le déficit de vitesse $u_e - u$ est de l'ordre de la vitesse de frottement u_τ.

On peut définir une zone dite logarithmique qui appartient à la fois à la région interne et à la région externe. Elle est composée de la zone inertielle et de la zone de vitesse déficitaire.

Enfin, il est important de souligner que la région externe représente la majeure partie de l'épaisseur de la couche limite, soit 80 à 90% de l'épaisseur totale de la couche limite. La localisation exacte de la frontière entre la région interne et externe dépend du nombre de Reynolds.

1.2. Présentation des différents types de modèles intégraux de couche limite

En 1921, von Kármán (1921) a développé l'équation intégrale de quantité de mouvement. Il a obtenu cette équation en intégrant l'équation de quantité de mouvement sur toute l'épaisseur de la couche limite dans le but d'obtenir une solution approchée de la couche limite. La même année, Pohlhausen a proposé une solution de l'équation de von Kármán, pour des cas particuliers, en la fermant à l'aide de profils de vitesse polynomiaux. C'est l'origine des méthodes intégrales de couche limite qui se sont ensuite fortement développées.

1.2.1. Principe général d'un modèle intégral de couche limite

Les méthodes intégrales de couche limite, initialement introduites par von Kármán et Pohlhausen, ont connu un large succès essentiellement pour leur simplicité de mise en œuvre. Elles reposent sur l'idée qu'il n'est pas nécessaire de connaître en détail le profil de vitesse dans la couche limite pour pouvoir calculer des paramètres caractéristiques de celle-ci, tels que le coefficient de frottement, l'épaisseur de déplacement ou l'épaisseur de quantité de mouvement. Ceci est possible en résolvant la forme intégrale des équations du mouvement au lieu de leur forme locale (1.1). Elle est obtenue en intégrant les équations locales dans la direction normale à la paroi, sur toute l'épaisseur de la couche limite. Ainsi, la direction normale à la paroi n'apparaît plus explicitement dans les équations et le problème de dimension n est modélisé et résolu dans un domaine de dimension $n-1$. C'est ce qui rend la méthode plus rapide. Les équations intégrales les plus couramment utilisées dans la littérature sont l'équation d'entrainement, l'équation intégrale de quantité de mouvement, aussi appelée équation de von Kármán, et l'équation intégrale de l'énergie cinétique. Elles sont écrites ci-dessous dans le cas d'un écoulement 2D stationnaire et incompressible. L'équation d'entrainement est obtenue en intégrant l'équation de continuité (1.1a) :

$$\frac{\mathrm{d}u_e(\delta-\delta_1)}{\mathrm{d}x} = u_e\left(\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} - \frac{v_\delta}{u_e}\right) = u_e C_E \tag{1.2}$$

où δ est l'épaisseur de couche limite, u_e est la valeur de la vitesse de l'écoulement extérieur, v_δ est la vitesse verticale en $y=\delta$ et C_E est le coefficient d'entrainement. De la même manière, l'équation de von Kármán résulte de l'intégration de l'équation de quantité de mouvement (1.1b) :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} + \theta\left(\frac{H+2}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{C_f}{2} \tag{1.3}$$

Enfin, l'équation intégrale de l'énergie cinétique est due à Leibenson [50]. C'est la forme intégrée de l'équation de quantité de mouvement (1.1b) multipliée par u :

$$\frac{1}{{u_e}^3}\frac{\mathrm{d}{u_e}^3\delta_3}{\mathrm{d}x} = 2C_D \tag{1.4}$$

Les équations intégrales sont établies en détail par Cousteix [25] et Kays et Crawford [49]. Elles sont aussi établies en trois dimensions, sous forme instationnaire, dans la section 2.1. Les équations (1.2), (1.3) et (1.4) font intervenir des épaisseurs intégrales caractéristiques de la couche limite qui sont définies de la manière suivante :

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \mathrm{d}y \tag{1.5a}$$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{u_e}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \mathrm{d}y \tag{1.5b}$$

$$\delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{u_e}\left(1 - \left(\frac{u}{u_e}\right)^2\right) \mathrm{d}y \tag{1.5c}$$

Les épaisseurs δ_1, θ et δ_3 sont appelées respectivement épaisseurs de déplacement, de quantité de mouvement et d'énergie cinétique. L'épaisseur de déplacement peut être vue comme la hauteur dont il faudrait déplacer en chaque point la paroi pour maintenir le débit inchangé en fluide parfait (voir figure 1.2). Le facteur de forme est quant à lui défini par le rapport $H = \delta_1/\theta$. D'autre part,

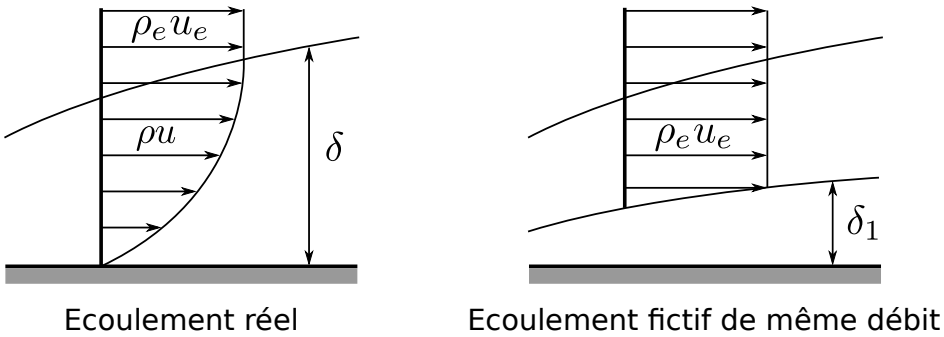


FIGURE 1.2. – Interprétation physique de l'épaisseur de déplacement

l'un des principaux objectifs du calcul de la couche limite est en général de déterminer le coefficient de frottement pariétal C_f. Il intervient directement dans l'équation de von Kármán et est défini de la manière suivante :

$$C_f = \frac{\tau_p}{1/2\rho_e {u_e}^2} \qquad \text{et} \qquad \tau_p = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{1.6}$$

où τ_p est la contrainte pariétale. Enfin, l'équation intégrale de l'énergie cinétique fait intervenir le coefficient de dissipation C_D. Il représente, au coefficient $\rho_e {u_e}^3$ près, la quantité d'énergie cinétique dissipée en chaleur par effet visqueux dans toute l'épaisseur de la couche limite, par unité de surface et de temps :

$$C_D = \frac{1}{\rho_e {u_e}^3} \int_0^\infty \tau \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}y \tag{1.7}$$

Dans les équations intégrales (1.2), (1.3) et (1.4), les épaisseurs caractéristiques de la couche limite δ_1, θ et δ_3, ainsi que l'épaisseur de couche limite δ, la vitesse v_δ et les coefficients de frottement et de dissipation C_f et C_D sont a priori des inconnues. Seule la vitesse extérieure u_e est une donnée du problème. Ainsi, il est clair que, quel que soit le nombre d'équations utilisées, le nombre d'inconnues est toujours supérieur au nombre d'équations. Ceci vient du fait que le processus d'intégration des équations engendre une perte d'information sur le comportement des grandeurs locales dans la couche limite, comme la vitesse par exemple. Toutes les méthodes font donc appel à une ou

plusieurs relations supplémentaires, appelées relations de fermeture, qui permettent de fermer le système d'équations et qui dépendent du régime laminaire ou turbulent de la couche limite. En effet, ces relations sont basées sur des propriétés de solutions particulières ou sur des hypothèses, qui sont faites le plus souvent sur la forme du profil de vitesse dans la couche limite [1]. C'est pourquoi, bien qu'elles soient rapides, les méthodes intégrales comportent forcément un certain degré d'approximation. Pour construire une méthode intégrale, la principale difficulté réside précisément dans le choix de ces relations de fermeture, qui conduisent, de par les hypothèses sur lesquelles elles reposent, à un domaine d'application plus ou moins étendu. C'est ce qui explique probablement la grande diversité des méthodes intégrales qui peuvent exister dans la littérature, la plupart d'entre elles étant calibrées pour un domaine d'application bien précis.

Toutes les méthodes n'utilisent donc pas les mêmes équations intégrales ni les mêmes relations de fermeture associées à ces équations. Les différents types de modèles intégraux que l'ont peut trouver dans la littérature sont répertoriés dans la sous-section suivante.

1.2.2. Les différents types de modèles intégraux de couche limite

Modèle intégral de couche limite à 1 équation

Pratiquement toutes les méthodes intégrales de couche limite sont basées sur l'équation de von Kármán qui permet de fournir le coefficient de frottement. La méthode la plus simple, et historiquement la première, est donc de résoudre uniquement l'équation de von Kármán (1.3) en la fermant à l'aide de relations supplémentaires. Un exemple de ce type de méthodes est donné ci-dessous pour une couche limite laminaire.

- Méthode de Pohlhausen pour une couche limite laminaire

L'une des méthodes les plus connues a été proposée par Pohlhausen en 1921 [25, pp.205-209]. Pour fermer l'équation de von Kármán, Pohlhausen a proposé d'exprimer le profil de vitesse dans la couche limite à l'aide d'une fonction polynômiale de quatrième degré :

$$\frac{u}{u_e} = A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3 + A_4\eta^4 = P_4(\eta) \qquad \text{avec } \eta = \frac{y}{\delta}$$

où δ représente l'épaisseur de couche limite. On suppose ici que $u/u_e = 1$ en $y = \delta$. Les constantes A_i sont déterminées par les conditions aux limites en $\eta = 0$ et $\eta = 1$. Cinq conditions aux limites sont alors nécessaires pour déterminer complètement le profil de vitesse. Les trois premières conditions aux limites sont évidentes :

1. $u(\eta = 0) = 0$
2. $u(\eta = 1) = u_e$
3. $\dfrac{\partial u}{\partial y}(\eta = 1) = 0$

Les autres conditions sont obtenues à partir de l'équation de quantité de mouvement selon $\boldsymbol{x}$ écrite à la frontière de la couche limite ou au niveau de la paroi. En se servant de l'équation du mouvement stationnaire écrite à l'extérieur de la couche limite, on peut exprimer le gradient de

1. profil de vitesse moyenne dans le cas turbulent

pression extérieur en fonction de la vitesse de l'écoulement extérieur :

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_e}{\partial x}$$

Or, comme la pression est constante selon la direction normale à la paroi (voir équation (1.1c)) et que la vitesse extérieure ne dépend que de x, on peut réécrire l'équation (1.1b) sous la forme stationnaire de la manière suivante :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_e\frac{du_e}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.8}$$

Donc :

4. en $y = \delta$ ($u = u_e$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$) on a alors $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\eta = 1) = 0$.

5. en $y = 0$ ($u = 0$ et $v = 0$), on trouve $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\eta = 0) = -\dfrac{u_e}{\nu}\dfrac{du_e}{dx}$.

   Compte tenu du fait que $u = u_e P_4(\eta)$ et donc que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{u_e}{\delta^2}P_4''(\eta)$, cette condition peut aussi s'écrire :

$$P_4''(0) = -\frac{\delta^2}{\nu}\frac{du_e}{dx} = -\Lambda \tag{1.9}$$

   avec Λ le paramètre de Pohlhausen.

Ces conditions limites conduisent à un système de 5 équations dont la résolution permet de déterminer les 5 constantes A_i. Finalement, le profil de vitesse s'écrit :

$$\frac{u}{u_e} = [2\eta - 2\eta^3 + \eta^4] + \frac{\Lambda}{6}\eta(1-\eta)^3 = P_4(\eta)$$

On remarque que Λ est un paramètre caractéristique de l'influence du gradient de pression extérieur sur le profil de vitesse de la couche limite. En effet, $\Lambda = 0$ correspond à un écoulement de plaque plane sans gradient de pression. Les profils de vitesse avec $\Lambda > 0$ correspondent à des écoulements de couche limite accélérés et les profils de vitesse avec $\Lambda < 0$ correspondent à des écoulements de couche limite ralentis. Une fois que le profil de vitesse est connu, les grandeurs caractéristiques de la couche limite θ, H et C_f qui interviennent dans l'équation de von Kármán (1.3) peuvent être déterminées en substituant le profil de vitesse dans les définitions (1.5a), (1.5b) et (1.6) :

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120} \qquad \frac{\theta}{\delta} = \frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072}$$

$$H = \frac{\delta_1/\delta}{\theta/\delta} = H(\Lambda) \qquad \frac{C_f}{2}Re_\delta = 2 + \frac{\Lambda}{6} \qquad \text{avec } Re_\delta = \frac{u_e\delta}{\nu}$$

Ainsi, les inconnues θ, H et C_f de l'équation de von Kármán sont exprimées en fonction d'une seule inconnue δ. En effet, Λ dépend uniquement de δ et du gradient de vitesse qui est supposé connu. L'équation est alors fermée et peut donc être résolue. En revanche, comme l'équation de von Kármán ne fait pas intervenir directement l'épaisseur de couche limite δ, il est plus commode d'utiliser un paramètre λ lié à l'épaisseur de quantité de mouvement plutôt que d'utiliser Λ qui est

basé sur l'épaisseur de couche limite δ (Holstein et Bohlen [47]). On définit donc souvent :

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu}\frac{du_e}{dx} \tag{1.10}$$

λ et Λ sont reliés par :

$$\lambda = \Lambda\left(\frac{\theta}{\delta}\right)^2 = \Lambda\left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072}\right)^2 \tag{1.11}$$

On a de plus

$$\frac{C_f}{2}Re_\theta = \frac{C_f}{2}Re_\delta\frac{\theta}{\delta} = \left(2 + \frac{\Lambda}{6}\right)\left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072}\right) = T(\lambda)$$

$\frac{C_f}{2}Re_\theta$ et H sont toutes deux des fonctions de Λ. Ce sont donc aussi des fonctions de λ d'après la relation (1.11). D'autre part, on peut faire apparaitre les deux fonctions précédentes dans l'équation de von Kármán en la multipliant par Re_θ :

$$u_e\frac{d\left(\theta^2/\nu\right)}{dx} = 2\left(\frac{C_f}{2}Re_\theta - (2+H)\lambda\right)$$

Finalement, la méthode de Pohlhausen fournit donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} u_e\dfrac{d\left(\theta^2/\nu\right)}{dx} = 2\left(T - (2+H)\lambda\right) & \text{(1.12a)} \\ \lambda = \Lambda\left(\dfrac{37}{315} - \dfrac{\Lambda}{945} - \dfrac{\Lambda^2}{9072}\right)^2 & \text{(1.12b)} \\ H = H(\Lambda) & \text{(1.12c)} \\ T(\Lambda) = \left(2 + \dfrac{\Lambda}{6}\right)\left(\dfrac{37}{315} - \dfrac{\Lambda}{945} - \dfrac{\Lambda^2}{9072}\right) & \text{(1.12d)} \end{cases}$$

Comme $\dfrac{du_e}{dx}$ est une fonction donnée de x, $T(\lambda)$ et $H(\lambda)$ sont des fonctions de $\dfrac{\theta^2}{\nu}$. Ainsi, l'équation (1.12a) est une équation différentielle ordinaire pour $\dfrac{\theta^2}{\nu}$. Sa résolution nous fournit alors $\theta(x)$ puis on en déduit $\lambda(x)$, $H(x)$ et $C_f(x)$.

La méthode de Pohlhausen fournit de très bons résultats dans les configurations proches de la plaque plane [25, pp.185-188]. Kays et Crawford [49, pp.101-102] utilisent d'ailleurs une méthode tout a fait comparable dans le cas d'un écoulement de plaque plane sans gradient de pression et montrent que l'erreur sur le coefficient de frottement C_f par rapport à la solution exacte de Blasius (voir section 1.3.1) est inférieure à 3%. Les résultats sont en revanche moins bons dans le cas général (avec gradient de pression) même s'ils restent corrects dans l'ensemble. D'une façon générale, cette méthode est plus précise lorsque le gradient de pression est favorable que lorsqu'il est défavorable.

La méthode de Pohlhausen est l'une des méthodes les plus classiques, mais il existe beaucoup d'autres méthodes de ce type. Le profil de vitesse utilisé par Pohlhausen a par exemple été étendu à un polynôme de degré quelconque [25, pp.185-188]. D'autres profils de vitesse ont aussi été proposés par Walz, Mangler ou encore Timman dans les années 40 pour tenter d'améliorer la précision de la méthode [86]. Rosenhead répertorie un grand nombre de ces profils de vitesse [73].

Cette méthode n'est qu'un exemple qui montre comment fermer l'équation de von Kármán pour une couche limite laminaire. Un aperçu plus complet des relations de fermeture pour des couches limites laminaire et turbulente est donné dans la section 1.3.

Solutions analytiques pour la couche limite intégrale (modèle à 0 équation)

Lorsque les relations de fermeture utilisées pour fermer l'équation de von Kármán sont assez simples, celle-ci peut être intégrée analytiquement, ce qui permet d'obtenir directement l'évolution du coefficient de frottement C_f en fonction de x. La grande majorité des chaînes de calcul d'accrétion de givre utilisent ce type de méthodes pour calculer la couche limite [71, 55, 88, 98, 100]. Elles ont en effet le gros avantage d'être extrêmement simples à mettre en œuvre en 2D et d'être quasi-instantanées puisqu'elles reposent sur des formules analytiques. Cette section présente plus en détail deux de ces méthodes très classiques qui sont notamment utilisées par IGLOO2D [88] et LEWICE [98].

- Méthode de Thwaites pour une couche limite laminaire

La méthode de Thwaites est directement basée sur la méthode de Pohlhausen décrite précédemment. Dans le système d'équations (1.12) obtenu par Pohlhausen, les fonctions T et H sont données par des expressions compliquées de λ et le système ne possède pas de résultat analytique. En revanche, différents auteurs ont pu observer que le second membre de l'équation (1.12a) peut être approché par une fonction linéaire très simple de la forme :

$$F(\lambda) = 2\left(T(\lambda) - (2 + H(\lambda))\lambda\right) \simeq a - b\lambda$$

En particulier, Thwaites a analysé de nombreux résultats obtenus pour des écoulements particuliers et il a pu montrer que, pour une large gamme de problèmes, on a l'approximation suivante pour F [16, 87] :

$$F(\lambda) \simeq a - b\lambda = 0.45 - 6\lambda$$

On rappelle que $\lambda = \dfrac{\theta^2}{\nu}\dfrac{du_e}{dx}$, $H = \dfrac{\delta_1}{\theta}$ et $T = \dfrac{C_f}{2}Re_\theta = \dfrac{\tau_p\theta}{\mu u_e}$. L'équation (1.12a) devient alors :

$$\frac{u_e}{\nu}\frac{d\theta^2}{dx} = a - b\frac{\theta^2}{\nu}\frac{du_e}{dx}$$

En réarrangeant cette équation et en l'intégrant entre 0 et x (on prend $x = 0$ au bord d'attaque du profil) on obtient :

$$u_e^b\theta^2 = \int_0^x a\nu u_e^{b-1}\,\mathrm{d}x$$

Finalement on obtient une solution analytique qui décrit l'évolution de θ en fonction de x :

$$\theta(x) = \frac{(a\nu)^{0.5}}{u_e^{b/2}}\left(\int_0^x u_e^{b-1}\,\mathrm{d}x\right)^{0.5} = \frac{0.67\nu^{0.5}}{u_e^3}\left(\int_0^x u_e^5\,\mathrm{d}x\right)^{0.5}$$

Une fois que $\theta(x)$ est calculé pour une vitesse extérieure donnée, $\lambda(x)$ peut être calculé grâce à la relation (1.10) et H et C_f peuvent être déterminés à partir des relations suivantes, sachant que $C_f = \dfrac{2\nu}{u_e\theta}T(\lambda)$:

Pour $0 \leq \lambda \leq 0.1$,

$$T(\lambda) = 0.22 + 1.57\lambda - 1.8\lambda^2$$
$$H(\lambda) = 2.61 - 3.75\lambda + 5.24\lambda^2$$

Pour $-0.1 \leq \lambda \leq 0$,

$$T(\lambda) = 0.22 + 1.402\lambda + \frac{0.018\lambda}{0.107 + \lambda}$$
$$H(\lambda) = \frac{0.0731}{0.14 + \lambda} + 2.088$$

Ces relations approchées sont données par Cebeci et Cousteix [16]. Elles ont été obtenues suite à l'analyse de résultats fournis par différentes solutions exactes.

- Méthode simplifiée pour une couche limite turbulente

Dans cette méthode développée pour une couche limite turbulente, l'équation de von Kármán est fermée à l'aide d'un profil de vitesse établi pour un écoulement de plaque plane [49, pp.207-209]. À première vue, cette méthode semble donc assez restrictive concernant ses conditions d'utilisation. Cependant, il s'avère qu'elle fournit malgré tout de bons résultats pour des écoulements de couche limite accélérés et pour des écoulement de couche limite légèrement ralentis.

Dans cette méthode, l'équation de von Kármán est donc fermée en modélisant la vitesse dans la zone logarithmique et la zone de sillage d'une couche limite turbulente par une loi en puissance. En particulier, la loi suivante représente bien le profil de vitesse jusqu'à au moins $y^+ = 1500$ pour un cas de plaque plane (c'est-à-dire sans gradient de pression extérieur) :

$$u^+ = 8.75 y^{+1/7} \qquad \text{avec} \qquad u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \tag{1.13}$$

On considère alors que (1.13) est valable jusqu'à la frontière de la couche limite, donc on peut écrire, en $y = \delta$, que :

$$\frac{u_e}{\sqrt{\tau_p/\rho}} = 8.75 \left(\frac{\delta \sqrt{\tau_p/\rho}}{\nu} \right)^{1/7} \qquad \text{d'où} \qquad \tau_p = 0.0225 \rho u_e^2 \left(\frac{\delta u_e}{\nu} \right)^{-1/4} \tag{1.14}$$

On détermine ensuite δ_1 et θ en fonction de δ en substituant les relations (1.13) et (1.14) dans leur définition (1.5a) et (1.5b) :

$$\delta_1 = 0.125\delta \qquad \text{et} \qquad \theta = 0.097\delta \tag{1.15}$$

Il vient alors :

$$H = \frac{\delta_1}{\theta} = 1.29 \qquad \text{et} \qquad \frac{C_f}{2} = \frac{\tau_p}{\rho u_e^2} = 0.0125 Re_\theta^{-1/4} \tag{1.16}$$

L'équation de von Kármán (1.3) peut donc être exprimée en fonction d'une seule inconnue qui est l'épaisseur de quantité de mouvement θ :

$$\frac{d\theta}{dx} + 3.29 \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} = 0.0125 \left(\frac{u_e \theta}{\nu} \right)^{-1/4} \tag{1.17}$$

On réarrange ensuite l'équation et on l'intègre entre 0 et x (en $x = 0$ au moins un des deux termes θ ou u_e est nul). On suppose ici que la couche limite turbulente prend son origine en $x = 0$, sans être précédée par une couche limite laminaire. On trouve finalement :

$$\theta = \frac{0.036\nu^{0.2}}{u_e^{3.29}} \left(\int_0^x u_e^{3.86} dx \right)^{0.8} \tag{1.18}$$

où $u_e^3\theta(0) = 0$. Une fois $\theta(x)$ calculé pour une vitesse extérieure donnée, C_f peut ensuite être évalué en fonction de x. Cette méthode n'est par contre pas valable dans les cas où $Re_x > 10^6$ car la relation (1.13) ne représente plus correctement le profil de vitesse dans la couche limite [49].

Modèle intégral de couche limite à 2 équations

Dans les méthodes précédentes, qui sont basées seulement sur l'équation de von Kármán, les solutions obtenues pour les grandeurs caractéristiques de la couche limite dépendent directement du gradient de vitesse extérieure, c'est-à-dire du gradient de pression extérieure. Ceci suppose que la couche limite réponde instantanément, d'un point de vue spatial, aux variations du gradient de pression. Cette hypothèse est acceptable dans le cas où le temps de réponse de la couche limite aux variations du gradient de pression le long de la paroi est petit devant le taux de variation du gradient de pression. Or, on peut facilement imaginer que ce ne soit pas le cas sur un profil d'aile quelconque. En effet, le gradient de pression est susceptible de varier très rapidement le long du profil, notamment au voisinage du bord d'attaque où la valeur du gradient de pression peut augmenter assez brutalement.

Pour pallier ce problème, il faut donc s'affranchir de toute relation directe entre les grandeurs caractérisant le profil de vitesse de la couche limite et un paramètre lié à l'écoulement extérieur. Il semble alors plus judicieux de relier directement entre elles les grandeurs caractéristiques de la couche limite. Ceci peut être fait en associant une deuxième équation intégrale à l'équation de von Kármán. Cette deuxième équation peut alors être vue comme une équation de transport sur une grandeur caractéristique de la couche limite, comme le facteur de forme H par exemple, permettant ainsi de prendre en compte l'effet d'histoire de la couche limite. C'est pour cette raison que les modèles dits avec équation auxiliaire sont réputés pour être plus précis que les modèles à une équation. Ce sont aussi les plus répandus dans la littérature, en particulier pour les méthodes les plus récentes. Cependant les modèles à 2 équations sont plus complexes et il n'existe pas, ou quasiment jamais de solution analytique comme cela peut être le cas pour les modèles à une équation. De plus, un inconvénient important des méthodes avec équation auxiliaire est qu'elles présentent une singularité au point de décollement lorsqu'elles sont résolues par une méthode directe. Ce point sera détaillé dans la section 4.2.

Il existe plusieurs choix possibles pour l'équation auxiliaire. La grande majorité des auteurs utilisent soit l'équation d'entrainement (1.2) soit l'équation intégrale de l'énergie cinétique (1.4). L'utilisation de l'équation d'entrainement est intéressante dans le sens où elle représente le bilan global de conservation de la masse, mais elle est rejetée par une partie des auteurs car elle fait intervenir l'épaisseur de couche limite δ qui, comme il a déjà été mentionné, est une quantité mal définie. Elle est malgré tout utilisée par d'autres, notamment Green [38, 39], Smith [77] ou encore Coenen [19]. Le système à résoudre, dans le cas d'un écoulement de couche limite bidimensionnel

stationnaire et incompressible, est alors le suivant :

$$\frac{\mathrm{d}u_e(\delta-\delta_1)}{\mathrm{d}x} = u_e\left(\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} - \frac{v_\delta}{u_e}\right) \tag{1.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} + \theta\left(\frac{H+2}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{C_f}{2} \tag{1.20}$$

L'équation intégrale de l'énergie cinétique, quant à elle, a été choisie par des auteurs comme Drela [30], Nishida [69], Milewski [62], Mughal [65, 66], L. Smith [76] ou encore Özdemir [102]. Toujours dans le cas d'un écoulement de couche limite bidimensionnel stationnaire et incompressible, le système à résoudre s'écrit cette fois-ci :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} + \theta\left(\frac{H+2}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{C_f}{2} \tag{1.21}$$

$$\frac{1}{{u_e}^3}\frac{\mathrm{d}{u_e}^3\delta_3}{\mathrm{d}x} = 2C_D \tag{1.22}$$

Comme pour les modèles à une équation, les relations de fermeture utilisées pour fermer le système d'équation sont nombreuses et varient beaucoup selon les auteurs. Il existe malgré tout trois grands types de relations de fermeture. Elles peuvent être construites à partir d'un profil de vitesse présumé ou être issues d'analyse de solutions particulières. Elles peuvent enfin être basées sur des relations semi-empiriques. La section suivante présente un aperçu des trois grands types de relations de fermeture qui sont utilisés dans la littérature pour fermer un modèle intégral de couche limite.

On pourrait imaginer une infinité d'autres méthodes basées sur d'autres équations auxiliaires, voire même des méthodes basées sur un plus grand nombre d'équations intégrales. Matsushita a par exemple développé une méthode à 3 équations qui sont l'équation de von Kármán, l'équation intégrale d'énergie cintétique, et l'équation de moment d'ordre supérieur à celui de l'équation d'énergie cinétique (voir [60] pour plus de détails). Ce type de méthodes reste en revanche très rare.

Dans le domaine du givrage, presque aucun code n'est basé sur la méthode avec équation auxiliaire pour la résolution de la couche limite, bien qu'elle soit connue pour être plus précise que celle avec une équation. Certains auteurs comme Fuzaro Rafael et al. ont cependant utilisé ce genre de méthodes dans un code de simulation d'accrétion de givre [71].

1.2.3. Formulation stationnaire ou instationnaire

Les écoulements de couche limite instationnaires sont aussi étudiés depuis de nombreuses années. Blasius a été le premier à traiter ce sujet en 1908. Puis, en 1936, Goldstein et Rosenhead ont étudié en détail le décollement instationnaire qui apparait pour un écoulement autour d'un cylindre. Beaucoup d'autres auteurs se sont ensuite intéressés au sujet des couches limites instationnaires après eux, Tani en répertorie quelques uns [86]. Ce type d'études peut trouver ses applications dans différents domaines, notamment celui des turbomachines. En revanche, le domaine du givrage utilise assez peu de méthodes instationnaires, celles-ci ne seront donc pas beaucoup détaillées dans cette thèse.

La modélisation de ces écoulements a nécessité le développement de méthodes intégrales de couche limite instationnaires. Les équations intégrales sont cette fois obtenues en intégrant la formulation instationnaire des équations de couche limite. Si l'équation d'entrainement reste inchangée [89, 28] (on peut aussi en trouver des versions instationnaires [89, 92]), les équations intégrales de quantité

de mouvement et d'énergie cinétique deviennent :

$$\frac{1}{{u_e}^2}\frac{\partial u_e \delta_1}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial x} + \theta\left(\frac{H+2}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{C_f}{2}$$
$$\frac{1}{{u_e}^3}\left({u_e}^2\frac{\partial \delta_1}{\partial t} + \frac{\partial {u_e}^2\theta}{\partial t}\right) + \frac{1}{{u_e}^3}\frac{\partial {u_e}^3\delta_3}{\partial x} = 2C_D$$

On constate que, du point de vue de la résolution numérique de ces équations, les variables principales ne sont pas les mêmes que pour la formulation stationnaire. En effet, les variables résolues ici à chaque itération en temps sont δ_1 et θ. En revanche, avec les équations stationnaires (1.3) et (1.4), les variables qui sont résolues à chaque pas d'espace sont θ et δ_3. La littérature propose aussi des relations de fermeture qui sont adaptées pour les écoulements instationnaires (solutions de similitude, profils de vitesse) mais elles ne seront pas évoquées dans cette thèse. Le lecteur peut se référer à l'état de l'art rédigé par van Es [89], par exemple, pour avoir plus de détails sur ce sujet.

Il est important de souligner que les méthodes instationnaires ne sont pas seulement utilisées pour modéliser des écoulements de couche limite instationnaires (Matsushita [59, 60], Cousteix, Le Balleur et Houdeville [27], Ye [101]). Elles peuvent aussi être choisies pour modéliser des écoulements stationnaires dans le but d'utiliser une formulation plus générale ou d'améliorer la robustesse de la méthode numérique employée (van Garrel [90], Swafford [82]).

1.3. Recensement des principales méthodes existantes pour fermer un système d'équations intégrales de couche limite

Comme il a déjà été mentionné précédemment, il existe différentes méthodes pour obtenir les relations supplémentaires qui vont fermer le système d'équations intégrales. Dans la littérature, on retrouve principalement trois types de relations de fermeture possibles, qui sont détaillés dans cette section et illustrés par quelques exemples.

1.3.1. Présentation des relations de fermeture issues des solutions de similitude

Solutions de similitude et relations de fermeture pour une couche limite laminaire

Le concept de solutions de similitude a été introduit par Prandtl (1905) et Blasius (1908) pour des écoulements de plaque plane, puis il a été étendu par Falkner et Skan (1930) à des écoulements "de dièdre" dont la vitesse extérieure varie proportionnellement à x^m (ce qui inclut la solution de Blasius sur plaque plane). Les solutions de similitude sont des solutions quasi-exactes qui peuvent être obtenues pour des écoulements de couche limite bien particuliers, appelés écoulements auto-similaires. Ils sont notamment supposés stationnaires, bidimensionnels et incompressibles et sont tels que les profils de vitesse dans la couche limite évoluent le long de la paroi en restant semblables à eux-mêmes. Ceci revient à dire que le profil de vitesse adimensionné ne dépend plus que d'une variable indépendante, η, au lieu de deux, x et y, dans le cas général.

Les solutions auto-similaires de Falkner-Skan sont obtenues pour une distribution de vitesse extérieure particulière de la forme :

$$u_e(x) = Cx^m \qquad \text{avec } m = \frac{\beta}{2-\beta}$$

où C, m et β sont des constantes. Cette distribution de vitesse correspond à celle d'un écoulement incompressible de fluide parfait sur un dièdre d'angle au sommet $\beta\pi$ (voir figure 1.3). Ici, m

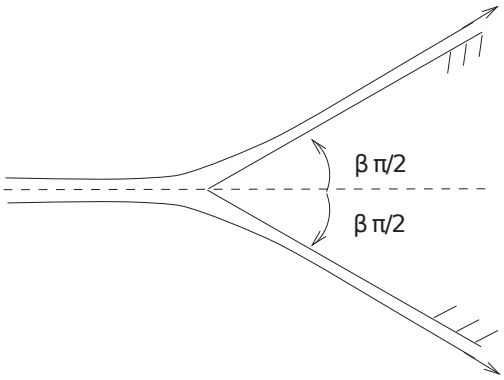


FIGURE 1.3. – Écoulement sur un dièdre d'angle au sommet $\beta\pi$

représente un paramètre de gradient de pression adimensionné défini comme suit :

$$m = \frac{x}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x}$$

On peut noter deux cas particuliers pour cet écoulement. Si $\beta = 0$ ($m = 0$) on retrouve la solution de Blasius [11], qui correspond à un écoulement sur une plaque plane en l'absence de gradient de pression. Si $\beta = 1$ ($m = 1$), on se trouve dans le cas d'un écoulement de point d'arrêt bidimensionnel. Ce dernier cas est particulièrement intéressant puisqu'il représente le voisinage immédiat d'un point d'arrêt de profil d'aile 2D avec un bord d'attaque arrondi. De manière plus générale, les valeurs positives de m correspondent à des écoulements de couche limite accélérés et les valeurs négatives à des écoulements de couche limite ralentis.

Le principe est de supposer que les profils de vitesse évoluent en restant semblables à eux-mêmes, c'est-à-dire que le profil de vitesse réduite est défini par :

$$\frac{u}{u_e} = \mathrm{f}'(\eta) \qquad \text{avec} \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{u_e}}} = y\sqrt{\frac{Cx^{m-1}}{\nu}} \tag{1.23}$$

Grâce à la définition (1.23) et à l'équation de continuité (1.1a), on peut exprimer les composantes u et v de la vitesse en fonction de $\mathrm{f}(\eta)$:

$$\begin{aligned} u &= u_e \mathrm{f}' \\ v &= -\sqrt{u_e \nu x}\left[\frac{\mathrm{f}}{\sqrt{u_e x}}\frac{\mathrm{d}\sqrt{u_e x}}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}'\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] \end{aligned}$$

On peut donc en déduire des conditions aux limites pour f en se basant sur le fait que $u = 0$ et $v = 0$ en $y = 0$, et que $u = u_e$ quand $y \longrightarrow \infty$. On a alors :

$$\mathrm{f}(0) = 0, \quad \mathrm{f}'(0) = 0, \quad \mathrm{f}'(\infty) = 1 \tag{1.24}$$

Enfin, en injectant l'hypothèse (1.23) dans l'équation de quantité de mouvement selon $\boldsymbol{x}$ (1.1b) sous sa forme stationnaire, on obtient finalement l'équation suivante :

$$\mathrm{f}'''(\eta) + \frac{m+1}{2}\mathrm{f}(\eta)\mathrm{f}''(\eta) + m(1 - \mathrm{f}'(\eta)^2) = 0 \tag{1.25}$$

Les solutions de similitude sont alors obtenues en résolvant l'équation différentielle ordinaire (1.25), associée aux conditions limites (1.24), à l'aide d'une méthode de tir. Ceci permet d'obtenir une table de valeurs pour f et ses dérivées en fonction de η et pour chaque valeur de m. Cette table de valeurs représente donc une famille de profils de vitesse dépendant du paramètre m. Ainsi, à partir de chaque profil de vitesse correspondant à une valeur particulière de m, on peut déduire les différentes grandeurs caractéristiques de la couche limite. Par exemple, le coefficient de frottement est calculé à l'aide de la pente à l'origine des profils $\mathrm{f}'(\eta)$, qui vaut $\mathrm{f}''(0)$:

$$C_f = \frac{\mu \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}}{1/2\rho u_e^2} = \frac{2\mathrm{f}''(0)}{\sqrt{Re_x}} \qquad \text{avec } Re_x = \frac{u_e x}{\nu}$$

On peut procéder de même pour les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement [25]. Il est important de noter que δ_1/x et θ/x sont inversement proportionnels à $\sqrt{Re_x}$, comme le coefficient de frottement. Ainsi, pour une valeur de m donnée, le facteur de forme $H = \delta_1/\theta$ est une constante indépendante du nombre de Reynolds.

Dans le cas particulier d'une plaque plane (c'est-à-dire sans gradient de pression), la vitesse extérieure u_e est une constante et $m = 0$. On retrouve la solution particulière de Blasius pour laquelle [25, 49] :

$$C_f \simeq \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \simeq \frac{0.441}{Re_\theta}, \qquad H \simeq 2.59 \qquad \text{avec } Re_\theta = \frac{u_e \theta}{\nu} \tag{1.26}$$

Suite à l'établissement de l'équation (1.25) par Falkner et Skan, de nombreux auteurs ont travaillé sur le sujet. En particulier, les solutions de l'équation (1.25) ont été étudiées en détail par Hartree [41]. D'autre part, des études d'unicité de la solution pour une valeur donnée de β (donc de m) ont été effectuées par Stewartson [79]. Il a montré que pour des valeurs positives de β, la solution est unique et la vitesse u est positive dans toute la couche limite. En revanche, il existe deux solutions pour chaque valeur de β dans la gamme $-0.1988 < \beta < 0$. L'une des solutions prévoit une valeur de u positive dans toute la couche limite tandis que l'autre prévoit l'existence d'une zone avec des courants de retour ($u < 0$) près de la paroi. Cette seconde solution correspond aux solutions de similitude pour des écoulements de couche limite décollés.

Dans la littérature, les solutions de Falkner-Skan sont souvent exploitées afin d'en déduire des relations de fermeture pour les systèmes d'équations intégrales de couche limite. On rappelle que les grandeurs caractéristiques de la couche limite déduites des solutions de Falkner-Skan, telles que le coefficient de frottement, le facteur de forme ou les épaisseurs de déplacement et quantité de mouvement, sont des fonctions de m. En revanche, il est possible, et de nombreux auteurs ont trouvé judicieux d'utiliser ces grandeurs comme des fonctions de toute autre quantité, et notamment du facteur de forme H. Ceci permet d'obtenir des lois qui relient les grandeurs caractéristiques de la couche limite directement entre elles. En supposant que ces relations sont généralisables à des écoulements quelconques, elles peuvent alors être utilisées comme relations de fermeture pour des systèmes d'équations intégrales de couche limite. Par exemple, pour fermer les équations intégrales de quantité de mouvement et d'énergie cinétique, les relations de fermeture obtenues par l'analyse

des solutions de similitudes sont de la forme :

$$\frac{\delta_3}{\theta} = f(H)$$
$$\frac{C_f}{2} Re_\theta = g(H)$$
$$\frac{2C_D}{H_{\delta_{3ss}}} Re_\theta = l(H)$$

où $H_{\delta_{3ss}} = \delta_3/\theta$. On peut trouver, dans la littérature, différentes formules analytiques pour représenter ces relations de fermeture. Drela [30, p.76] propose par exemple (en incompressible) :

$$f_1(H) = \begin{cases} 1.515 + 0.076\dfrac{(H-4)^2}{H} & \text{pour } H \leq 4 \quad (1.28a) \\ 1.515 + 0.040\dfrac{(H-4)^2}{H} & \text{pour } H > 4 \quad (1.28b) \end{cases}$$

$$g_1(H) = \begin{cases} -0.067 + 0.01977\dfrac{(7.4-H)^2}{H-1} & \text{pour } H \leq 7.4 \quad (1.29a) \\ -0.067 + 0.022\left(1 - \dfrac{1.4}{H-6}\right)^2 & \text{pour } H > 7.4 \quad (1.29b) \end{cases}$$

$$l_1(H) = \begin{cases} 0.207 + 0.00205(4-H)^{5.5} & \text{pour } H \leq 4 \quad (1.30a) \\ 0.207 - 0.003(H-4)^2 & \text{pour } H > 4 \quad (1.30b) \end{cases}$$

Cousteix, quant à lui, propose plutôt [25] :

Si $H \leq 4.02923$,

$$f_2(H) + \frac{50.84951}{f(H)} = -23.78186\left(\frac{1}{H} + \frac{H}{(4.02923)^2}\right) + 46.8818$$
$$g_2(H) = 2.99259\left[\left(\frac{1}{H} - \frac{1}{8.05846}\right)^{1.7} - \left(\frac{1}{8.05846}\right)^{1.7}\right]$$
$$l_2(H) = g_2(H) - (H-1)\left[-0.06815 + 4.336355\left(\frac{1}{H} - \frac{1}{4.02923}\right)^{2.095065}\right]$$

Si $H > 4.02923$,

$$f_2(H) + \frac{1.01191}{f(H)} = 0.58022\left(\frac{1}{H} + \frac{H}{(4.02923)^2}\right) + 1.89497$$
$$l_2(H) = 0.20644 - 90.30936\left(\left(\frac{1}{4.02923}\right)^{1.3} - \frac{1}{H^{1.3}}\right)^{3.35661}$$
$$g_2(H) = l_2(H) + (H-1)\left[-0.06815 + 46.34236\left(\frac{1}{(4.02923)^2} - \frac{1}{H^2}\right)^{2.338238}\right]$$

La figure 1.4 montre que les coefficients de frottement estimés par les formules de Drela et Cousteix

sont quasiment identiques pour des valeurs du facteur de forme comprises entre 2 et 10.

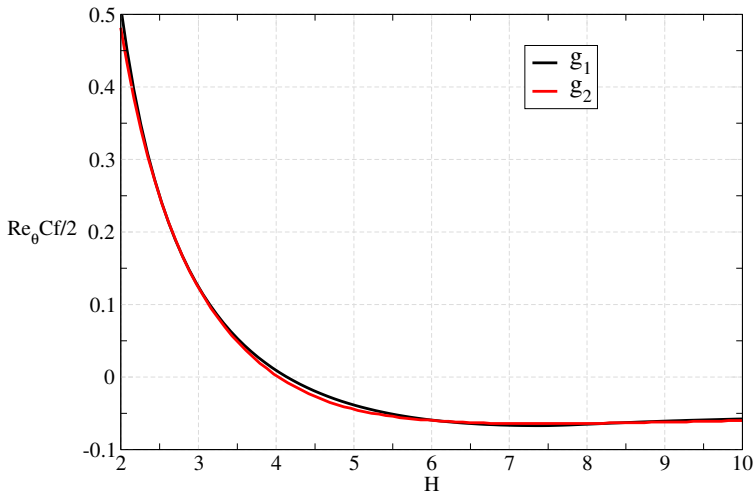


FIGURE 1.4. – Comparaison des relations de fermeture $g(H)$ proposées par Drela [30] et Cousteix [25]

Solutions de similitude et relations de fermeture pour une couche limite turbulente

Pour modéliser une couche limite turbulente, la vitesse et la pression instantanées sont décomposées en leurs valeurs moyennes et fluctuantes. C'est donc le mouvement moyen qui est modélisé par les équations (1.1) où u, v, et P sont les valeurs moyennes de la vitesse et de la pression. Pour le régime turbulent, τ_{xy} représente la tension totale, somme des tensions visqueuses et turbulentes. Elle vaut :

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho < u'v' >$$

Pour établir des solutions de similitude pour des écoulements turbulents, on considère principalement les propriétés de la couche limite de la région externe, dont l'épaisseur représente en général au moins 80% de l'épaisseur totale de la couche limite. Ainsi, on raisonne uniquement sur les profils de vitesse déficitaires et on suppose que la tension visqueuse est nulle car l'écoulement est contrôlé par la turbulence ($\tau \simeq -\rho < u'v' >$). Dans ce cas, et de manière analogue avec la couche limite laminaire, on suppose qu'il existe des écoulements particuliers qui vérifient les hypothèses d'auto-similitude suivantes :

$$\frac{u_e - u}{u_\tau} = F'(\eta) \tag{1.33a}$$

$$\frac{\tau}{\tau_p} = -\frac{\rho < u'v' >}{\tau_p} = \mathrm{g}(\eta) \tag{1.33b}$$

avec $\eta = y/\delta$ et $u_\tau = \sqrt{\tau_p/\rho}$. Les écoulements de couche limite qui vérifient ces hypothèses sont appelés "écoulements de couche limite d'équilibre". Ils ont été développés par Clauser qui a ensuite vérifié expérimentalement leur existence [18]. On précisera par la suite les conditions qui sont nécessaires pour obtenir de tels écoulements.

À partir de l'hypothèse de similitude (1.33a) et grâce à l'équation de continuité (1.1a) qui permet

d'écrire que $v = \int_0^\eta -\delta \frac{\partial u}{\partial x}\, \mathrm{d}\eta$, on peut exprimer les composantes de la vitesse u et v en fonction de $F(\eta)$ et de sa dérivée :

$$\begin{aligned} u &= u_e\left(1-\gamma F'(\eta)\right) \\ v &= -\delta\frac{\partial u_e}{\partial x}(\eta-\gamma F) + \delta u_e \frac{\partial \gamma}{\partial x}F - u_e\gamma\frac{\partial \delta}{\partial x}(\eta F' - F) \end{aligned}$$

où $\gamma = \frac{u_\tau}{u_e} = \sqrt{\frac{C_f}{2}}$. En supposant que $u = u_e$ en $\eta = 1$, on peut en déduire des conditions aux limites pour F sachant que $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ en $\eta = 1$ et que $v = 0$ en $\eta = 0$:

$$F(0) = 0, \quad F'(1) = 0, \quad F''(1) = 0, \quad \frac{\tau}{\tau_p}(1) = 0$$

Enfin, en injectant l'hypothèse de similitude (1.33a) dans l'équation de quantité de mouvement selon x (1.1b) sous sa forme stationnaire et en multipliant par $\delta/(\gamma^2 {u_e}^2)$, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\tau}{\tau_p}\right) = 2\beta F' - \beta\gamma F'^2 + \beta\frac{u_e}{u_e'}\frac{\gamma'}{\gamma}(F' - \gamma F'^2 + \gamma F F'') - \beta\left(1 + \frac{u_e}{u_e'}\frac{\delta'}{\delta}\right)(\eta F'' - \gamma F F'') \tag{1.34}$$

avec $\beta = -\frac{\delta}{\gamma}\frac{u_e'}{u_e}$, $u_e' = \frac{du_e}{dx}$, $\delta' = \frac{d\delta}{dx}$, $\gamma' = \frac{d\gamma}{dx}$.

D'après (1.33), F' et τ/τ_p ne dépendent que de η. Ainsi, pour que ces hypothèses de similitude soient satisfaites, il faut que :

$$\beta = cte \quad ; \quad \gamma = cte \quad ; \quad \frac{u_e}{u_e'}\frac{\gamma'}{\gamma} = cte \quad ; \quad \frac{u_e}{u_e'}\frac{\delta'}{\delta} = cte$$

Pour que ces termes soient des constantes, on peut montrer qu'il faut que $Re_\delta \longrightarrow \infty$ et on a alors (les calculs ont été détaillés par Cousteix [26]) :

$$\gamma \longrightarrow 0 \quad ; \quad \frac{u_e}{u_e'}\frac{\gamma'}{\gamma} \longrightarrow 0 \quad ; \quad H \longrightarrow 1 \quad ; \quad \frac{\delta_1}{\gamma} \longrightarrow 0 \quad ; \quad \frac{\theta}{\gamma} \longrightarrow 0 \tag{1.35}$$

Les conditions (1.35) sont les conditions qui doivent être satisfaites pour que l'écoulement soit auto-similaire, c'est-à-dire pour qu'on ait un écoulement de couche limite d'équilibre. En pratique, ces limites ne sont jamais atteintes, mais les couches limites d'équilibre sont réalisées expérimentalement pour de très grands nombres de Reynolds. Ainsi, les termes censés tendre vers zéro restent malgré tout très petits, à défaut d'être nuls.

Comme les écoulements de Falkner-Skan, les écoulements de couche limite d'équilibre ont des propriétés bien particulières. En particulier, on retrouve le fait que β, qui peut être vu comme un paramètre de gradient de pression, est constant pour une couche limite d'équilibre. De plus, on

peut définir un paramètre G de la manière suivante :

$$F_1 = \int_0^1 F' \, \mathrm{d}\eta$$
$$F_2 = \int_0^1 F'^2 \, \mathrm{d}\eta$$
$$G = \frac{F_2}{F_1}$$

Le paramètre G est appelé paramètre de Clauser. On pourrait montrer que $G = (H-1)/(H\gamma)$ [26]. Ce paramètre est particulièrement intéressant puiqu'il est lui aussi constant pour une couche limite d'équilibre et qu'il ne dépend pas de paramètres extérieurs à la couche limite. Il joue donc un rôle analogue à celui du facteur de forme dans les écoulements de Falkner-Skan.

Maintenant que les écoulements de couche limite d'équilibre sont mieux définis, l'équation (1.34) peut être simplifiée sachant que les couches limites d'équilibre vérifient forcément les conditions (1.35) (voir [26] pour plus de détails) :

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\tau}{\tau_p}\right) = 2\beta F' + \left(\frac{1}{F_1} + 2\beta\right)\eta F'' \tag{1.36}$$

L'équation (1.36) est l'équation de quantité de mouvement valable pour les couches limites d'équilibre. En revanche, cette équation n'est pas fermée puisque le frottement turbulent n'a pas été relié au profil de vitesse. Il faut donc utiliser un modèle de turbulence pour fermer l'équation. Mellor et Gibson ont par exemple utilisé un modèle de viscosité apparente et Michel et al. ont utilisé un modèle de longueur de mélange [61]. Ensuite, l'équation peut être résolue numériquement et la solution obtenue est une famille de profils de vitesse déficitaires $F'(\eta)$ dépendant seulement du paramètre de gradient de pression β, qui est une constante pour une couche limite d'équilibre. Ainsi, pour chaque valeur de β, on peut calculer les valeurs de F_1, F_2 et G en intégrant le profil de vitesse déficitaire.

Contrairement au cas laminaire, le coefficient de frottement ne peut pas être déduit directement du profil de vitesse. En effet, les solutions de similitude ont été établies en considérant uniquement les propriétés de la région externe de la couche limite. On peut malgré tout obtenir son expression en se basant sur une condition de raccordement entre les régions interne et externe de la couche limite. On rappelle que la couche limite turbulente se divise en deux régions dans lesquelles le profil de vitesse se comporte différemment (voir sous-section 1.1.2). La loi de paroi logarithmique dans la couche interne s'écrit :

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\chi}\ln\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right) + C \tag{1.37}$$

où C est une constante. D'autre part, dans la couche externe quand η tend vers 0, le profil de vitesse déficitaire suit la loi logarithmique suivante :

$$\frac{u_e - u}{u_\tau} = -\frac{1}{\chi}\ln\eta + B(\beta) \tag{1.38}$$

où B est une constante d'intégration qui dépend du paramètre de gradient de pression β. Le raccordement entre la région interne et la région externe doit être assuré à l'extrémité commune de leur domaine d'application, c'est-à-dire quand $y^+ \longrightarrow \infty$ et $\eta \longrightarrow 0$. On peut alors obtenir une expression implicite du coefficient de frottement en additionnant les lois (1.37) et (1.38), sachant

que $\dfrac{u_e}{u_\tau} = \dfrac{1}{\gamma} = \sqrt{\dfrac{2}{C_f}}$:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\chi}\ln\left(\gamma Re_\delta\right) + B + C \qquad \text{avec } Re_\delta = \frac{u_e\delta}{\nu}$$

Cette loi de frottement permet de calculer, de manière implicite, le coefficient de frottement C_f en fonction de deux paramètres qui sont δ et B. En général, on utilise plutôt cette loi en faisant intervenir le nombre de Reynolds Re_{δ_1} basé sur la vitesse extérieure et l'épaisseur de déplacement. Pour cela, il faut d'abord relier l'épaisseur de déplacement δ_1 à l'épaisseur de couche limite δ, ce qui peut être fait directement à partir de la définition de δ_1 :

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \mathrm{d}y = \delta\gamma \int_0^1 \frac{u_e - u}{u_\tau}\,\mathrm{d}\eta = \delta\gamma F_1$$

La loi de frottement peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\chi}\ln(Re_{\delta_1}) + D^* \tag{1.39}$$

avec $D^* = B + C - \dfrac{1}{\chi}\ln(F_1)$ une constante qui dépend de la valeur de β.

Comme dans le cas laminaire, les solutions de similitude fournissent les valeurs des grandeurs caractéristiques de la couche limite turbulente, comme le coefficient de frottement C_f, le coefficient d'entrainement C_E ou encore le paramètre de Clauser G, directement en fonction du paramètre de gradient de pression β. Mais là encore, il est possible d'utiliser ces grandeurs comme des fonctions de toute autre quantité et notamment comme des fonctions de G. C'est ce qui est fait par certains auteurs dans le but d'obtenir des relations de fermeture pour fermer les systèmes d'équations intégrales de couche limite. Il faut dans ce cas supposer que les relations obtenues sont généralisables à des écoulements quelconques. Bien que les conditions théoriques d'existence des couches limites d'équilibre soient très restrictives, cette hypothèse n'est pas irréaliste. En effet, Cousteix montre, notamment grâce à des expériences de Schubauer et Klebanoff, que la famille de profils théoriques représente bien l'expérience, même pour des couches limites hors d'équilibre [26].

Par exemple, pour fermer l'équation de von Kármán associée à l'équation d'entrainement, les relations de fermeture obtenues par l'analyse des solutions de similitude sont de la forme :

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \gamma F_1(G) \tag{1.40a}$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\chi}\ln Re_{\delta_1} + D^*(G) \tag{1.40b}$$

$$C_E = \gamma\overline{P}(G) \tag{1.40c}$$

Michel et al. ont notamment utilisé ce modèle intégral de couche limite [26]. Les fonctions F_1, D^* et $\overline{P}$ ont été déduites des solutions de similitudes puis ajustées pour mieux représenter les résultats expérimentaux de East et Sawyer. Elles s'écrivent :

$$F_1 = (0.613G - (3.6 + 76.86(1/G - 0.154)^2)/G)/(1 + 10/G^2) \tag{1.41a}$$

$$D^* = 1.4G + 20/G - 8.33 \tag{1.41b}$$

$$\overline{P} = 0.0558\frac{G^2}{F_1} - \frac{1.325}{F_1} \tag{1.41c}$$

Dans la littérature, les méthodes avec l'équation intégrale de l'énergie cinétique comme équation auxiliaire sont plus rares pour les couches limites turbulentes. Ceci est probablement dû au fait qu'il est assez difficile d'obtenir une relation de fermeture pour le coefficient de dissipation C_D. En effet, celui-ci dépend de la distribution de la tension de Reynolds dans la couche limite qui est mal connue. Drela utilise malgré tout une relation de fermeture pour le coefficient de dissipation qui est basée sur le concept des couches limites d'équilibre [30]. Cette relation a été développée à partir d'une formule empirique pour exprimer le paramètre de Clauser G en fonction du paramètre de gradient de pression β :

$$G = 6.7\sqrt{1 + 0.75\beta F_1(\beta)} \tag{1.42}$$

or, on a :

$$\beta F_1(\beta) = -\frac{\delta_1}{\gamma^2 u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x} \qquad \text{et} \qquad G = \frac{H-1}{H\gamma}$$

Donc la relation (1.42) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\frac{\delta_1}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{0.75}\left(\frac{C_f}{2} - \left(\frac{H-1}{6.7H}\right)^2\right) \tag{1.43}$$

La relation de fermeture sur C_D est ensuite obtenue en soustrayant l'équation de von Kármán (1.3) à l'équation intégrale de l'énergie cinétique (1.4) et en injectant la relation (1.43) afin d'éliminer le terme de gradient de vitesse. De plus, on suppose que le rapport $H_{32} = \delta_3/\theta$ est quasiment constant pour une couche limite d'équilibre et donc que sa dérivée est nulle (voir [30] pour plus de détails). On obtient finalement la relation de fermeture suivante :

$$\frac{2C_D}{H_{32}} = \frac{C_f}{6}\left(\frac{4}{H} - 1\right) + 0.03\left(\frac{H-1}{H}\right)^3 \tag{1.44}$$

Comme pour toutes les relations de fermeture développées dans le cadre des écoulements auto-similaires, on suppose ensuite qu'elle est valable pour tout type d'écoulements.

1.3.2. Présentation des relations de fermeture basées sur un profil de vitesse

Relations de fermeture pour une couche limite laminaire

Le premier auteur à avoir proposé de fermer les équations intégrales à l'aide d'un profil de vitesse est Pohlhausen en 1921 (voir section 1.2.2). Il a proposé un profil de vitesse polynômial de degré 4 avec un paramètre qui est le paramètre de gradient de pression Λ. Cependant, cette méthode ne fournit pas des résultats extrêmement précis, notamment pour les écoulements ralentis. D'autres auteurs ont essayé de construire des profils de vitesse permettant d'avoir une solution plus précise que la méthode de Pohlhausen. Entre autres, Schlichting et Ulrich ont construit un profil de vitesse polynomial de degré 6 pour satisfaire un plus grand nombre de conditions aux limites [85]. Mangler, quant à lui, est allé plus loin en construisant un polynôme de degré $n+2$ de la forme [73] :

$$\frac{u}{u_e} = \mathfrak{f}(\eta) = 1 - (1 + a_1\eta + a_2\eta^2)(1-\eta)^n$$

Il satisfait automatiquement n conditions en $\eta = 1$. De plus, les conditions imposées à la paroi sont $\mathfrak{f}(0) = 0$, $\mathfrak{f}''(0) = -\Lambda$ et, si a_2 est choisi non nul, $\mathfrak{f}'''(0) = 0$. Cette dernière condition peut être montrée facilement à l'aide de la dérivée de l'équation (1.8) par rapport à y, écrite en $y = 0$, et de

l'équation de continuité (1.1a) qui donnent $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$ et donc $\mathfrak{f}'''(0) = 0$. Les résultats obtenus sont plutôt concluants et plus précis que ceux obtenus par Pohlhausen. Par exemple, la valeur $n = 12$ et $a_2 \neq 0$ permet de bien représenter les écoulements de point d'arrêt et la valeur $n = 4$ avec $a_2 \neq 0$ fournit de très bons résultats pour des écoulements de plaque plane. En revanche, aucune valeur de n ne représente correctement le profil de vitesse pour tout type d'écoulements [73]. On peut encore citer Timman qui a proposé un profil de vitesse sous forme exponentielle plutôt que polynômiale [73] :

$$\frac{u}{u_e} = \mathfrak{f}(\eta) = 1 - \int_\eta^\infty \exp(-\eta^2)(a + c\eta^2 + \dots)\,\mathrm{d}\eta - \exp(-\eta^2)(b + d\eta^2 + ...)$$

La fonction $\mathfrak{f}$ tend naturellement vers 1 quand η tend vers l'infini et les seules conditions à imposer sont donc à la paroi, avec entre autres les conditions $\mathfrak{f}(0) = 0$, $\mathfrak{f}''(0) = -\Lambda$ et $\mathfrak{f}'''(0) = 0$.

Tous ces profils de vitesse ont permis de gagner en précision par rapport à la méthode proposée par Pohlhausen mais ils ont tous le même inconvénient : ils dépendent tous du paramètre de gradient de pression Λ. Or, selon Tani [85], Λ n'est pas forcément la grandeur la plus pertinente à utiliser comme paramètre pour le profil de vitesse. En particulier, en prenant Λ comme paramètre on peut montrer que le décollement a lieu pour une valeur bien définie du paramètre de gradient de pression, or ce n'est pas ce que montre l'étude des solutions exactes. Walz [85] a alors développé un profil de vitesse à un paramètre en abandonnant la condition qui imposait que l'équation de quantité de mouvement soit valable à la paroi, c'est-à-dire celle qui faisait intervenir le paramètre Λ. Les résultats sont assez concluants et la méthode est considérablement simplifiée.

Comme déjà mentionné précédemment, les méthodes avec équation auxiliaire sont plus précises que les méthodes à une équation. Il est donc intéressant d'abandonner une des conditions aux limites et de satisfaire l'équation auxiliaire à la place. C'est ce qu'a fait Wieghardt [73]. Il a obtenu un profil de vitesse de degré 11 de la forme :

$$\frac{u}{u_e} = \mathfrak{f}(\eta) = 1 - (1-\eta)^8(1 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3)$$

Avec ce profil, 8 conditions en $\eta = 1$ sont automatiquement satisfaites ainsi que la condition à la paroi $\mathfrak{f}(0) = 0$. Les autres conditions imposées à la paroi sont les conditions assez classiques $\mathfrak{f}''(0) = -\Lambda$ et $\mathfrak{f}'''(0) = 0$ et une condition plus rare qui porte sur le frottement pariétal $\mathfrak{f}'(0) = (\tau_p)\delta/(\mu u_e) = (\delta/\theta)T$. Ce profil de vitesse possède donc deux paramètres qui sont Λ et T. La méthode est probablement l'une des plus précises [73], sauf dans les cas d'écoulements avec des chutes de pression brutales où $\mathfrak{f}$ peut excéder 1. En revanche, l'expression du profil de vitesse est assez lourde du fait de son exposant élevé. Tani a, quant à lui, abandonné la condition à la paroi qui impose Λ comme paramètre, ce qui lui a permis d'obtenir un profil de vitesse beaucoup plus simple, de degré 4 qui fournit une solution précise pour les écoulements ralentis [85]. Il a notamment été utilisé par Matsushita [58].

Relations de fermeture pour une couche limite turbulente

Dans une couche limite turbulente, on peut distinguer une région très près de la paroi où la viscosité est importante et une région, loin de la paroi, qui est contrôlée par la turbulence. Ainsi, le profil de vitesse dans la couche limite aura un comportement bien différent, suivant qu'on se trouve près ou loin de la paroi. C'est pourquoi il est difficile de représenter le profil de vitesse avec une bonne précision dans toute l'épaisseur de la couche limite.

L'une des méthodes les plus simples pour représenter le profil de vitesse d'une couche limite turbulente est d'utiliser une loi en puissance. En effet, d'une façon générale, on peut admettre que le profil de vitesse est de la forme :

$$\frac{u}{u_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}$$

L'une des puissances souvent utilisées et qui modélise assez bien l'écoulement pour une plaque plane est la puissance 1/7. Certains auteurs, comme Tai notamment [84], utilisent ce profil de vitesse avec $n = 2/(H-1)$, ce qui permet de mieux prendre en compte les effets de gradient de pression positifs ou négatifs. Le gros avantage de ce profil de vitesse est qu'il est extrêmement simple. En revanche, il ne permet pas de modéliser les couches limites décollées et il n'est pas valable à proximité des frontières de la couche limite. En effet, il a une pente infinie à la paroi et une pente non nulle à la frontière avec l'écoulement extérieur.

Beaucoup de profils de vitesse, comme la loi en puissance, représentent correctement la vitesse seulement sur une partie de l'épaisseur de la couche limite même si on suppose qu'ils sont valables partout. Il existe en revanche quelques profils de vitesse qui sont valables dans toute l'épaisseur de la couche limite. C'est le cas par exemple de celui proposé par Swafford qui est, de ce fait, plus précis que la loi en puissance. De plus, il est valable aussi bien pour les couches limites attachées que décollées. Ce profil de vitesse est une extension de celui développé par Whitfield pour des écoulements attachés [95]. Il est la combinaison linéaire de deux solutions, l'une pour la région interne de la couche limite et l'autre pour la région externe. Il s'écrit [81] :

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{s}{0.09}\arctan(0.09y^+) + \left(\left|\frac{C_f}{2}\right|^{-1/2} - \frac{s\pi}{0.18}\right)\tanh^{1/2}\left(a\left(\frac{y}{\theta}\right)^b\right) \tag{1.45}$$

avec $y^+ = yu_\tau/\nu$, $u_\tau = u_e\,|C_f/2|^{1/2}$ et s le signe du coefficient de frottement. Il vaut 1 pour une couche limite attachée et -1 pour une couche limite décollée. De plus, les termes a et b sont des fonctions de H, Re_θ et C_f. Ce profil de vitesse est l'un des profils les plus utilisés dans les méthodes intégrales pour une couche limite turbulente. Son inconvénient majeur, en revanche, est la complexité de son expression. Swafford a aussi obtenu une relation pour C_f, en ajustant son profil de vitesse sur des profils de vitesse expérimentaux pour des couches limites attachées et décollées [81] :

$$C_f = \frac{0.3\ \mathrm{e}^{-1.33H}}{(\log Re_\theta)^{1.74+0.31H}} + (1.1\times 10^{-4})\left[\tanh\left(4 - \frac{H}{0.875}\right) - 1\right] \tag{1.46}$$

Le profil de vitesse de Swafford a aussi permis à Whitfield d'obtenir une relation sur le coefficient de dissipation en intégrant numériquement le profil de vitesse :

$$C_D = 0.009 - 0.011\times\exp(-0.15H^{2.1}) + 0.00003\times\exp(0.117H^2) + aRe_\theta{}^{-0.574} \tag{1.47}$$

avec

$$\begin{aligned} a &= 0.438 - 0.280H && \text{si } H \leq 3.5 \\ a &= 0.160(H-3.5) - 0.55 && \text{si } H > 3.5 \end{aligned}$$

Cette relation a notamment été utilisée par Mughal [65]. Les lois de Swafford et Whitfield, pour le C_f (1.46) et le C_D (1.47) respectivement, sont tracées en fonction du facteur de forme pour différentes valeurs de Re_θ sur la figure 1.5. On constante que la loi (1.46) autorise bien le décollement de la couche limite puisque le coefficient de frottement devient négatif pour une valeur du facteur

de forme d'environ 3.5 (la valeur exacte dépend de Re_θ). D'autre part, il semblerait que la loi (1.47) prévoit un coefficient de dissipation négatif pour de faibles nombres de Reynolds quand le facteur de forme est assez élevé, ce qui n'est pas réaliste. Mughal ne fait en revanche aucun commentaire sur ce point.

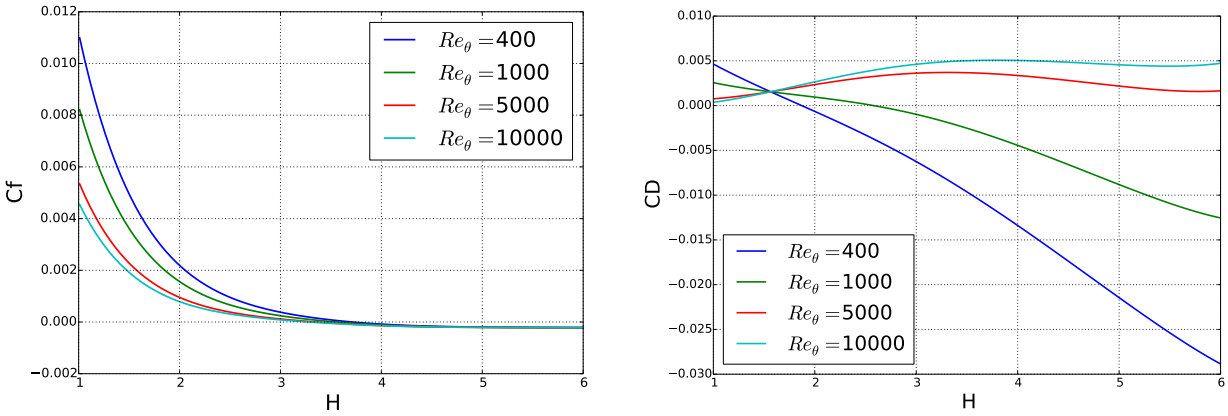


FIGURE 1.5. – Coefficient de frottement de Swafford (à gauche) et coefficient de dissipation de Whitfield (à droite) pour différentes valeurs de Re_θ en fonction du facteur de forme

Il faut noter que certains auteurs, comme Drela [30], Green [39], Milewski [62], Nishida [69], Ye [101] ou encore Özdemir [102], utilisent une équation supplémentaire pour compléter leurs relations de fermeture. Il s'agit d'une équation de transport pour la tension de Reynolds, qui permet de prendre en compte les effets d'histoire sur la tension de Reynolds (voir [30] ou [101] pour plus de détails sur le développement et l'utilisation de l'équation). Comme l'explique Drela, ces effets d'histoire ont une influence sur l'écoulement lorsqu'on est en présence d'un gradient de pression adverse qui varie beaucoup. Ceci se produit le plus souvent vers le bord de fuite, par exemple pour un écoulement de couche limite décollée.

1.3.3. Présentation des relations de fermeture empiriques

La plupart du temps, les relations de fermetures empiriques sont utilisées pour des écoulements turbulents. En effet, comme il a été mentionné précédemment, il existe très peu de profils de vitesse qui sont valables sur toute l'épaisseur de la couche limite et, ceux qui existent sont en général complexes. De ce fait il n'est pas toujours simple, voire impossible de déduire les grandeurs caractéristiques de la couche limite telles que le coefficient de frottement ou le coefficient de dissipation directement à partir du profil de vitesse. Les auteurs utilisent donc souvent des relations empiriques pour fermer les systèmes d'équations intégrales dans le cas de couches limites turbulentes.

L'une des lois empiriques les plus connues est due à Ludwieg et Tillmann [53]. Ils ont développé une loi de frottement qui repose sur des corrélations obtenues à partir de résultats expérimentaux portant sur le coefficient de frottement et le profil de vitesse dans la couche limite. Cette loi est la suivante :

$$C_f = 0.246 \times 10^{-0.678H} {Re_\theta}^{-0.268} \tag{1.48}$$

Elle permet d'atteindre une précision de ±10% comparé aux données expérimentales [94]. En re-

vanche, elle semble imprécise pour $Re_\theta < 1200$ selon Cousteix [26]. De plus, elle ne modélise pas le décollement de la couche limite. le coefficient de frottement ne s'annule donc pas pour une valeur finie de H. Une corrélation similaire a été proposée par Felsch et al. [26] :

$$C_f = 0.058 Re_\theta^{-0.268} (0.93 - 1.95 \log(H))^{1.705}$$

Contrairement à la loi proposée par Ludwieg et Tillmann, celle de Felsch et al. prévoit un décollement de la couche limite ($C_f = 0$) pour $H = 3.0$, ce qui semble réaliste. Il faut savoir que la valeur du facteur de forme au décollement d'une couche limite turbulente n'est pas précise, et selon les auteurs, elle peut varier entre $H = 2.5$ et $H = 4$.

White a développé une autre relation empirique pour le coefficient de frottement qui est, selon lui, l'une des plus précises [94]. Il l'a obtenue en utilisant la loi de sillage de Coles dont il a déduit une fonction reliant C_f, H, Re_θ. Il a enfin obtenu une formule approchée de cette fonction. Celle-ci s'écrit :

$$C_f = \frac{0.3\ \mathrm{e}^{-1.33H}}{(\log Re_\theta)^{1.74+0.31H}}$$

La relation proposée par White ne modélise pas non plus le décollement de la couche limite. En revanche, Swafford a étendu cette relation pour prendre en compte les couches limites décollées [81] (voir (1.46)).

Il existe des méthodes intégrales de couche limite qui sont basées uniquement sur des relations de fermeture empiriques. La méthode proposée par Head en fait partie [44]. Elle est basée sur l'équation d'entrainement et l'équation de von Kármán. À ces deux équations s'ajoute la loi de frottement de Ludwieg et Tillmann (1.48). Enfin Head suppose que C_E et $H^* = (\delta - \delta_1)/\theta$ ne dépendent que du facteur de forme H. Ces deux termes ont été déterminés empiriquement et ils sont représentés par :

$$C_E = 0.0306(H^* - 3)^{-0.653}$$
$$H^* = 1.535(H - 0.7)^{-2.715} + 3.3$$

1.4. Recensement des principaux critères de transition laminaire-turbulent utilisés pour les méthodes intégrales de couche limite

Le passage du régime laminaire au régime turbulent de la couche limite est causé en général par l'apparition d'instabilités dans la couche limite laminaire. La première étape est la formation d'ondes régulières et bidimensionnelles, appelées ondes de Tollmien-Schlichting. Puis celles-ci s'amplifient, se déforment et deviennent tridimensionnelles, ce qui entraine peu à peu la formation de structures tourbillonnaires. L'apparition de zones de turbulence se fait alors de manière aléatoire et intermittente. Elles grossissent petit à petit et finissent par occuper toute la couche limite qui devient alors turbulente.

Il existe de nombreux éléments qui peuvent avoir une influence sur la position de la transition laminaire-turbulent. Par exemple, un gradient de pression extérieur positif, un taux de turbulence de l'écoulement extérieur élevé ou encore des rugosités de paroi peuvent engendrer une transition prématurée par rapport à celle qui aurait lieu sur une plaque plane avec un environnement non

perturbé.

Pour un écoulement de plaque plane peu perturbé par la turbulence extérieure ou encore par la rugosité de surface, la transition dans la couche limite se traduit par une déformation du profil de vitesse moyenne, qui engendre une diminution du facteur de forme et une rapide augmentation du coefficient de frottement. De ce fait, l'épaisseur de quantité de mouvement croît de plus en plus vite dans la zone de transition ($\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{C_f}{2}$). Par contre, comme le facteur de forme diminue brutalement, l'épaisseur de déplacement $\delta_1 = H\theta$ n'évolue pas de manière monotone.

Il est donc important, dans un calcul de couche limite, de pouvoir déterminer le point de début de la transition laminaire-turbulent. Pour cela, des critères ont été développés et ils sont le plus souvent basés sur une valeur seuil d'un nombre de Reynolds caractéristique de la couche limite qui, lorsqu'elle est atteinte, définit le début de la transition.

Il existe des critères qui sont uniquement basés sur des résultats expérimentaux comme celui de Michel par exemple [94]. Il relie le nombre de Reynolds de transition Re_{θ_T} basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement au nombre de Reynolds local Re_{x_T} basé sur la longueur x_T, qui est la distance au point d'origine de la couche limite. Le début de la transition se trouve à la position où :

$$Re_{\theta_T} = 2.9 Re_{x_T}^{0.4}$$

Une adaptation de ce critère a été proposée par Cebeci et Smith [89] pour éviter des transitions prématurées :

$$Re_{\theta_T} = 1.174 \left(1 + \frac{22.400}{Re_{x_T}}\right) Re_{x_T}^{0.46}$$

Ces deux critères ont l'avantage d'être très simples et assez robustes mais contiennent peu de modélisation physique du phénomène de transition laminaire-turbulent.

D'autres critères, comme celui de Granville reposent à la fois sur des résultats expérimentaux mais aussi sur la théorie de la stabilité [26]. Le début de la transition est atteint à l'endroit où :

$$Re_{\theta_T} - Re_{\theta_{ins}} = 375 + \exp(6.1 + 55\overline{\lambda}_T) \quad ; \qquad (-0.04 \leq \overline{\lambda}_T \leq 0.024)$$

où $\overline{\lambda}$ est le paramètre de Pohlhausen moyen :

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{x - x_{ins}} \int_{x_{ins}}^{x} \frac{\theta^2}{\nu} \frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x \tag{1.49}$$

où x_{ins} est l'abscisse du point de début d'instabilité et $Re_{\theta_{ins}}$ la valeur du nombre de Reynolds Re_θ en ce point. On estime que $x = x_{ins}$ et $Re_\theta = Re_{\theta_{ins}}$ à l'endroit où $Re_\theta = Re_{\theta_{crit}}$, avec $Re_{\theta_{crit}}$ le nombre de Reynolds critique dont on suppose qu'il ne dépend que du facteur de forme H :

$$Re_{\theta_{crit}} = \exp\left(5.27 + 17.2\left(\frac{1}{H} - 0.39\right)^{0.5}\right)/H \quad ; \qquad H < 2.5 \tag{1.50a}$$

$$Re_{\theta_{crit}} = \exp\left(3.5 + \frac{2.897}{H} + \frac{22230}{H^{10}}\right)/H \quad ; \qquad H > 2.5 \tag{1.50b}$$

La fonction $Re_{\theta_{crit}}(H)$ a été déterminée grâce à l'étude de stabilité des profils de Falkner-Skan.

Un autre critère, qui est basé sur la théorie de la stabilité, est le critère e^n développé par Smith et Gamberoni [74] et Van Ingen [91]. Il est basé sur la courbe enveloppe n qui représente le rapport d'amplitude maximum $(A/A_0)_{max}$ des ondes de Tollmien-Schlichting en fonction du nombre de Reynolds. Le critère prévoit que le début de la transition est atteint quand :

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{max} = e^{n_T} \tag{1.51}$$

Smith et Gamberoni proposent d'utiliser $n_T = 9$ pour localiser la transition. Cette méthode a été utilisée entre autres par Drela [30]. En revanche, tous les auteurs ne sont pas d'accord sur la valeur de n_T à utiliser. Van Ingen définit plutôt une région de transition entre $n_T = 7.6$ et $n_T = 9.7$. Quelques années plus tard, Mack a voulu améliorer la précision du critère en tenant compte de l'influence du taux de turbulence Tu. Il a obtenu une nouvelle expression pour n_T grâce à des résultats expérimentaux sur plaque plane :

$$n_T = -8.43 - 2.4 \ln Tu$$

Ce critère n'est en revanche pas valable pour les taux de turbulence trop élevés (n_T devient négatif pour $Tu \geq 0.0298$) ou trop faibles ($Tu \leq 0.0007$) [94]. De plus, il a été établi pour des écoulements de plaque plane, il est donc plus incertain pour des écoulements avec gradient de pression. La valeur de $(A/A_0)_{max}$ peut être connue en résolvant l'équation d'Orr-Sommerfeld pour un grand nombre de profils de vitesse. En revanche, ceci nécessite un temps de calcul important. Arnal et al. ont donc proposé de calculer ce rapport dans le cas des écoulements auto-similaires de Falkner-Skan et d'en déduire une formule analytique qu'ils supposent valable pour tout type d'écoulements [26]. Celle-ci est de la forme :

$$\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)_{max} = f(Re_{\delta_1}, \lambda)$$

où λ est le paramètre de Pohlhausen basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement. Finalement, la forme finale du critère (1.51) obtenue grâce aux solutions d'Arnal et al. est donnée par :

$$Re_{\theta_T} - Re_{\theta_{ins}} = -206 \times \exp(25.7\overline{\lambda}_T)\left[\ln(16.8Tu) - 2.77\overline{\lambda}_T\right] \tag{1.52}$$

où $\overline{\lambda}$ est donné par (1.49) et, comme pour le critère de Granville, on a $x = x_{ins}$ et $Re_\theta = Re_{\theta_{ins}}$ à l'endroit où $Re_\theta = Re_{\theta_{crit}}$, avec $Re_{\theta_{crit}}$ donné par :

$$Re_{\theta_{crit}} = \exp\left(\frac{52}{H} - 14.8\right) \tag{1.53}$$

Le critère d'Arnal Habiballah Delcourt (critère AHD) (1.52) est, entre autres, utilisé par Coenen [19] ou dans la chaîne de givrage ONERA IGLOO2D. Il est limité aux écoulements incompressibles mais il a ensuite été étendu pour prendre en compte les effets de compressibilité et de paroi chaude, même si sa formulation est plus compliquée [3].

En givrage, certains auteurs utilisent le critère d'Abu-Ghannam et Shaw [29, 78]. Ce critère prévoit le lieu de début de la transition et le lieu de la fin de la transition. Il est basé sur l'étude de données expérimentales obtenues pour une large gamme de paramètres de gradient de pression et de taux de turbulence extérieure. Drela a modifié ce critère pour le rendre plus robuste et éliminer sa dépendance directe au gradient de pression extérieur, en la remplaçant par une fonction du facteur de forme et du taux de turbulence extérieure [31]. Le critère de Drela permet en plus de prévoir le déclenchement de la transition de manière naturelle, pour les faibles taux de turbulence extérieure,

en incluant des conditions issues de la méthode e^n. Ce critère est donné dans la section 2.3. Il a notamment été utilisé par Fuzaro Rafael et al. [71].

En toute rigueur, le calcul de la transition laminaire-turbulent comprend deux étapes. D'abord il s'agit de localiser le point de début de transition laminaire-turbulent, ce qui peut être fait à l'aide des critères proposés ci-dessus. Ensuite il faut modéliser le développement de la couche limite dans la région de la transition. Ce deuxième point ne sera pas détaillé dans cette thèse mais il existe pour cela des modèles d'intermittence qui permettent de pondérer les propriétés des couches limites laminaire et turbulente fictives (voir par exemple [26, 30]). Certains codes de givrage, comme celui de Fuzaro Rafael et al. [71] et Silva [29] par exemple, utilisent le modèle d'intermittence établi par Abu-Ghannam et Shaw grâce à des résultats expérimentaux. En revanche, la plupart des auteurs dans le domaine du givrage supposent que la transition est brutale, c'est-à-dire que le passage du régime laminaire au régime turbulent se fait en un seul point, ce qui évite d'avoir à calculer le développement de la couche limite dans la région de la transition [97, 40, 35].

1.5. Présentation des effets de rugosité et de la manière dont ils sont pris en compte dans les méthodes intégrales

Les rugosités de paroi ont un impact non négligeable sur le déclenchement de la transition laminaire-turbulent et sur le comportement dynamique et thermique des couches limites turbulentes. Elles engendrent notamment une augmentation du coefficient de frottement pariétal et du coefficient d'échange thermique. En givrage, la prise en compte des effets de rugosité dans les modèles de couche limite est donc très importante puisque l'accrétion du givre engendre forcément des rugosités. C'est pourquoi, tous les codes de givrage ont implémenté des modèles de couche limite sur paroi rugueuse [71, 55, 88, 98, 100].

En 1933, Nikuradse a été l'un des premiers a étudier l'effet de rugosités [68] sur l'écoulement de couche limite. Si ces rugosités sont de type grain de sable et de hauteur k_s, on peut distinguer trois régimes différents. En définissant une hauteur réduite de rugosité $k_s^+ = k_s u_\tau/\nu$ avec $u_\tau = \sqrt{\tau_p/\rho}$, les trois régimes se définissent de la manière suivante :

- $k_s^+ < 5$; régime hydrauliquement lisse, la couche limite n'est pas affectée par les rugosités
- $5 < k_s^+ < 70$; régime intermédiaire, l'épaisseur de la sous-couche visqueuse se réduit
- $k_s^+ > 70$; régime pleinement rugueux, on ne distingue plus de sous-couche visqueuse

Nikuradse a constaté d'après ses résultats expérimentaux que seul le comportement du profil de vitesse dans la région interne de la couche limite était modifié. Cette modification de comportement peut être modélisée par l'ajout d'un décalage ΔU^+ dans la loi logarithmique (1.37) :

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\chi} \ln\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right) + C - \Delta U^+ \tag{1.54}$$

où ΔU^+ dépend de la hauteur réduite k_s^+. En réalité, toutes les rugosités ne sont pas de type grain sable et ΔU^+ devrait dépendre aussi de leur géométrie et de leur densité. En pratique, pour des rugosités quelconques de hauteur h, on définit des rugosités équivalentes de type grain de sable de hauteur k_s qui sont censées avoir le même effet sur la couche limite. Ce concept a été introduit par Schlichting. La grandeur k_s est alors définie comme la hauteur de grain de sable équivalent. Le

décalage ΔU^+ de la loi logarithmique pour des rugosités quelconques dépend de k_s^+ mais aussi des caractéristiques des rugosités (voir [26] pour plus de détails).

La plupart du temps, l'introduction de ces effets de rugosité dans les méthodes intégrales nécessite uniquement de modifier la loi de frottement. En effet, comme il a déjà été mentionné, seul le comportement de la vitesse dans la région interne de la couche limite est modifié. Or, la région interne ne représente qu'une petite partie de la couche limite et on peut imaginer que cette modification aura donc peu d'impact sur des grandeurs qui sont intégrées sur toute l'épaisseur de la couche limite (δ_3, C_D). Par contre, les effets ne sont pas négligeables sur le coefficient de frottement qui est, à un facteur près, la pente à la paroi du profil de vitesse.

Il est possible d'introduire ces effets de rugosité dans les méthodes intégrales. Par exemple, dans la méthode de Michel et al. (voir section 1.3.1, eq. (1.40) et (1.41)), on peut utiliser la loi logarithmique pour paroi rugueuse (1.54). Pour cela, on suppose que le comportement de la couche limite dans la région externe est inchangé. Ainsi, seule la loi de frottement (1.40b) est modifiée dans le jeu de relations de fermeture (1.40) utilisé par Michel et al. Elle devient :

$$\left(\frac{C_f}{2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\chi} \ln R_{\delta_1} + D^*(G) - \Delta U^+ \tag{1.55}$$

où $D^*(G)$ est toujours donné par (1.41b) et ΔU^+ est une fonction de k_s^+ et des caractéristiques des rugosités (voir [26]).

Kays et Crawford ont obtenu une loi de frottement plus simple que (1.55) mais toujours à partir de la loi logarithmique sur paroi rugueuse [49]. Ils ont utilisé une méthode similaire à la méthode simplifiée ("solutions analytiques") décrite dans la section 1.2.2 en prenant cette fois la loi (1.54) qu'ils ont écrite en $y = \delta$. Ils ont ensuite considéré que la relation (1.15), $\theta/\delta = 0.097$, est toujours valable même pour une paroi rugueuse, ce qui est une hypothèse raisonnable car la rugosité ne modifie la structure de la couche limite que dans une petite zone proche de la paroi. Kays et Crawford obtiennent finalement la loi de frottement suivante :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{0.168}{\left[\ln(864\theta/k_s)\right]^2}$$

où k_s est la hauteur de grain de sable équivalent. Comme pour la méthode simplifiée sur paroi lisse, cette loi de frottement est basée sur des hypothèses de plaque plane ($\theta/\delta = 0.097$) mais on considère qu'elle est valable pour une plus large gamme d'écoulements. Cette loi est très utilisée dans le domaine du givrage. On peut citer par exemple Makkonen [55], Stefanini et al. [78] ou encore Fuzaro Rafael et al. [71]. On peut trouver dans la littérature une forme légèrement plus précise de cette loi de frottement qui s'écrit [36] :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{0.168}{\left[\ln(864\theta/k_s + 2.568)\right]^2}$$

La valeur numérique 2.568 a été obtenue grâce à une hypothèse de plaque plane. Dans le domaine du givrage, cette loi est notamment utilisée par IGLOO2D et LEWICE [98].

Comme il a déjà été mentionné dans la section 1.4, la rugosité de paroi a aussi une influence sur la transition laminaire-turbulent. En effet, la présence de rugosités engendre des perturbations supplémentaires qui ont tendance à déstabiliser la couche limite et donc à avancer le déclenchement de la transition. Mochizuki a établi un critère très simple pour déterminer la position de la transition

rugueuse [63]. Le début de la transition est donc atteint à l'endroit où :

$$Re_k = \frac{u_k k}{\nu} = 600$$

où u_k est la vitesse dans la couche limite non perturbée à la distance $y = k$ de la paroi, avec k la hauteur maximale de rugosité. Ce critère est notamment utilisé dans le code LEWICE. Il existe un autre critère, très similaire à celui de Mochizuki, qui utilise les grandeurs extérieures à la couche limite [45] :

$$Re_k = \frac{u_e k}{\nu_e} = 600$$

Dans le domaine du givrage, ce critère, plus simple que le précédent, a notamment été implémenté dans IGLOO2D et dans le code de Stefanini et al. [78]. Pour des rugosités de taille importante, telles que celles rencontrées en givrage, ces deux critères ne conduisent pas forcément à des positions très différentes pour le déclenchement de la transition laminaire-turbulent.

Dans la littérature, la prise en compte des effets de rugosité dans les méthodes intégrales de couche limite est assez rare, sauf dans le domaine du givrage où les modèles sont la plupart du temps des modèles du type solutions analytiques (section 1.2.2) avec des transitions laminaire-turbulent brutales. De ce fait, on trouve aussi assez peu de modèles d'intermittence pour les parois rugueuses dans la littérature.

1.6. Rappels sur les spécificités d'une méthode intégrale tridimensionnelle par rapport à une méthode intégrale bidimensionnelle

1.6.1. Structure d'une couche limite tridimensionnelle

Un écoulement de couche limite tridimensionnelle est caractérisé par la présence d'un écoulement transversal dans la couche limite, qui est perpendiculaire à la ligne de courant extérieure. Ceci peut se produire par exemple sur une aile en flèche, où le vecteur gradient de pression n'est pas aligné avec le vecteur vitesse. Il en résulte que les lignes de courant extérieures ne sont pas rectilignes, contrairement au cas de flèche nulle. Ainsi, dans le cas d'une aile en flèche, il existe une composante de la force de pression qui est perpendiculaire aux lignes de courant extérieures et dirigée vers l'intérieur de la courbure de ces lignes. C'est ce qui explique la présence d'une composante de vitesse transversale w dans la couche limite (voir figure 1.6). En effet, à l'intérieur de la couche limite, la vitesse est plus faible et la courbure des lignes de courant doit donc être plus importante qu'à l'extérieur de la couche limite, afin que les forces centrifuges qui en résultent, puissent équilibrer la force de pression transversale [16]. On peut le montrer par un rapide calcul. À l'extérieur de la couche limite, la force de pression transversale et la force centrifuge s'équilibrent de la manière suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\rho {u_e}^2}{R}$$

avec R le rayon de courbure de la ligne de courant extérieure. Or, d'après les équations de Prandtl, la pression statique est constante le long d'une normale à la paroi dans la couche limite, donc $\frac{\partial P}{\partial z}$ est constant aussi. Ainsi, dans la couche limite, l'équilibre entre la force de pression transversale et

la force centrifuge s'écrit (on néglige la tension de Reynolds et la contrainte visqueuse) :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\rho u^2}{r}$$

avec r le rayon de courbure des lignes de courant dans la couche limite. On en déduit donc que :

$$r = R\left(\frac{u}{u_e}\right)^2$$

Comme $u < u_e$, le rayon de courbure des lignes de courant à l'intérieur de la couche limite est plus faible que celui des lignes de courant extérieures pour pouvoir compenser la force de pression transversale. Ceci prouve bien l'existence d'un profil de vitesse transversale, même si très près de la paroi, ce sont en fait les forces visqueuses qui compensent les forces de pression.

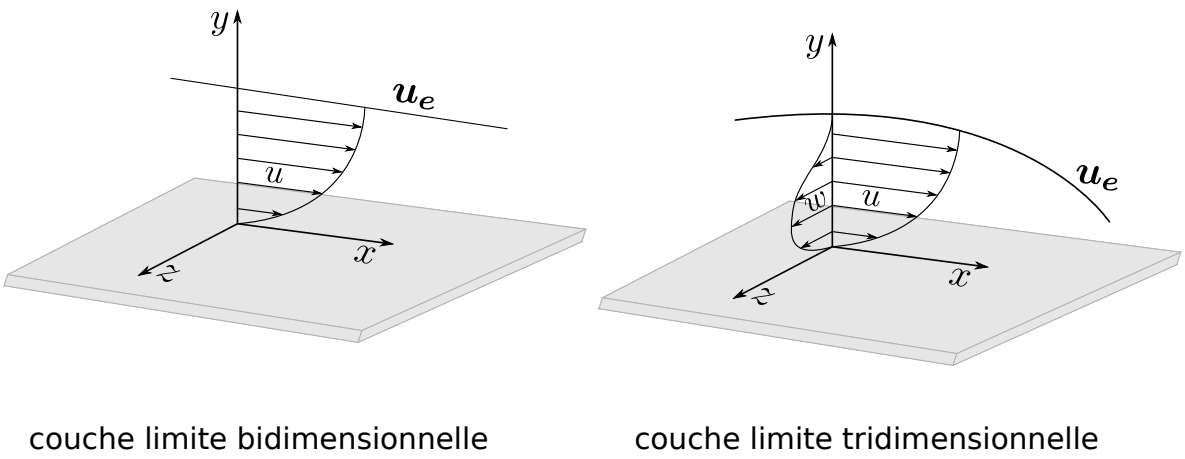


FIGURE 1.6. – Couches limites bidimensionnelle et tridimensionnelle

Ce profil de vitesse transversale possède des propriétés bien particulières. Il s'annule aussi bien à la paroi, pour assurer la condition d'adhérence, qu'à la frontière extérieure de la couche limite, pour assurer le raccordement avec l'écoulement extérieur. Il passe donc par un maximum et il est souvent unidirectionnel, c'est-à-dire qu'il conserve le même signe dans toute l'épaisseur de la couche limite (voir figure 1.7, à gauche). Ce n'est, en revanche, pas toujours le cas. En effet, si les lignes de courant extérieures possèdent un point d'inflexion, on peut trouver des profils de vitesse transversale bidirectionnels dans la couche limite, peu après le point d'inflexion (voir figure 1.7, à droite). Ceci peut s'expliquer simplement. Le point d'inflexion de la ligne de courant extérieure signifie que la composante transversale du gradient de pression change de signe. L'écoulement transversal dans la couche limite va d'abord changer de signe près de la paroi, où les effets d'inertie sont faibles. Le changement de signe de la partie extérieure de la couche limite se fait en revanche avec un certain retard à cause de l'effet des forces d'inertie. C'est ce qui explique la présence de profils de vitesse transversale en "S" ou bidirectionnels dans la couche limite.

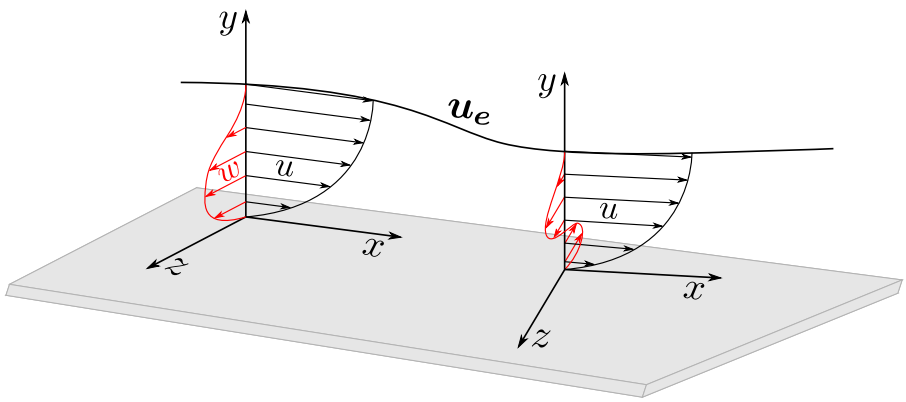


FIGURE 1.7. – Profil de vitesse tranversale unidirectionnel (à gauche) et bidirectionnel (à droite)

1.6.2. Méthodes intégrales pour une couche limite tridimensionnelle

La présence d'un écoulement transversal dans la couche limite se traduit, d'un point de vue de la modélisation, par la présence d'une seconde équation de quantité de mouvement, selon la direction transversale z. Le choix du repère dans lequel on considère les équations est donc moins évident que dans le cas bidimensionnel, où le système d'axes est naturellement aligné avec les lignes de courant extérieures. En 3D, on peut soit définir un système de coordonnées curviligne basé sur les lignes de courant de l'écoulement extérieur et leurs orthogonales, soit définir un système d'axes plus quelconque. On verra notamment dans la section 4.3 que la résolution des équations dans un repère local cartésien est souvent appréciée car elle permet d'éviter de calculer tous les coefficients liés à la métrique d'un repère curviligne.

Une fois que le repère est fixé, le principe des méthodes intégrales tridimensionnelles est le même que celui des méthodes bidimensionnelles. Elles reposent sur la résolution d'un système d'équations intégrales, souvent constitué des équations intégrales de continuité et de quantité de mouvement [67, 77, 23, 80, 84, 26, 19]. Comme en deux dimensions, l'inconvénient de l'équation de continuité est qu'elle fait intervenir l'épaisseur de couche limite δ, qui est une quantité mal définie. C'est pourquoi on trouve aussi dans littérature des méthodes composées des équations intégrales de quantité de mouvement et d'énergie cinétique [82, 65, 66, 62, 69]. Un exemple de l'établissement des équations intégrales de quantité de mouvement et d'énergie cinétique en 3D est donné dans la section 2.1. Ces équations font intervenir des grandeurs intégrales qui sont beaucoup plus nombreuses qu'en 2 dimensions. On retrouve notamment l'épaisseur de déplacement et l'épaisseur de quantité de mouvement, mais elles s'expriment respectivement sous la forme d'un vecteur et d'un tenseur. Elles ont des composantes purement longitudinales qui sont δ_{1x} et θ_{xx}, et qui ne font intervenir que la composante longitudinale de la vitesse. Elles ont aussi des composantes purement transversales, à savoir δ_{1z} et θ_{zz}, et aussi des composantes croisées qui font intervenir à la fois la vitesse longitudinale et la vitesse transversale (θ_{xz} et θ_{zx}). Ces quantités, exprimées dans un repère $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ lié aux lignes de courant extérieures tel que $\boldsymbol{u_e} = (u_e, 0, 0)$, sont définies par :

$$\boldsymbol{\delta_1} = \begin{pmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \mathrm{d}y \\ \displaystyle\int_0^\infty \left(-\frac{w}{u_e}\right) \mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_{xx} & \theta_{xz} \\ \theta_{zx} & \theta_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^\infty \frac{u}{u_e}\left(1-\frac{u}{u_e}\right)\mathrm{d}y & \displaystyle\int_0^\infty \frac{w}{u_e}\left(1-\frac{u}{u_e}\right)\mathrm{d}y \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{u}{u_e}\left(-\frac{w}{u_e}\right)\mathrm{d}y & \displaystyle\int_0^\infty \frac{w}{u_e}\left(-\frac{w}{u_e}\right)\mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

On peut aussi définir la déviation pariétale β_0 qui est l'angle entre la ligne de courant limite à la paroi (ligne de courant pariétale ou ligne de frottement) et la ligne de courant extérieure (voir figure 1.8). Il s'écrit :

$$\tan\beta_0 = \frac{\tau_{pz}}{\tau_{px}} = \left(\frac{\dfrac{\partial w}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}}\right)_{y=0} = \lim_{y\to 0}\frac{w}{u}$$

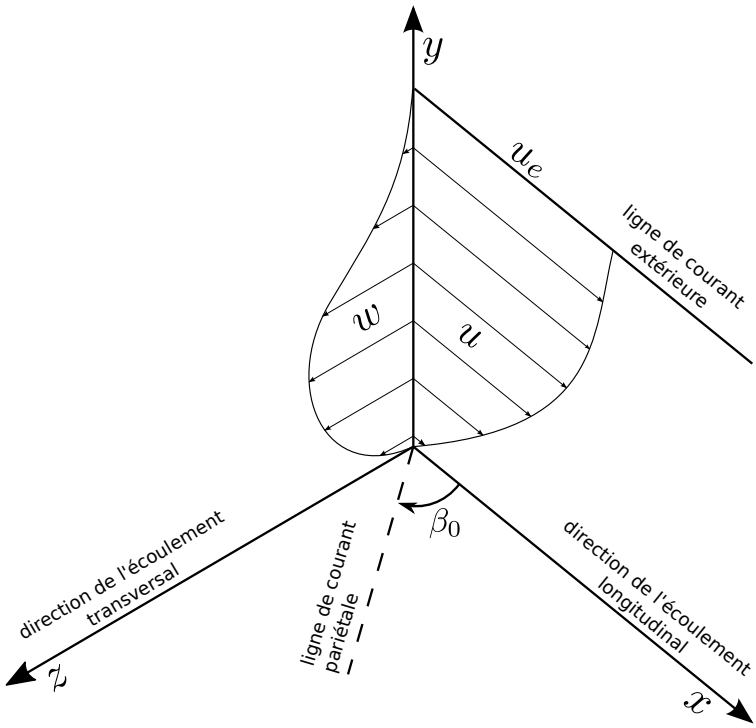


FIGURE 1.8. – Déviation pariétale pour une couche limite tridimensionnelle

Toutes ces nouvelles grandeurs intégrales représentent presque autant d'inconnues à fermer puisqu'une seule équation a été ajoutée au système par rapport au cas bidimensionnel. En pratique, pour fermer le système d'équations 3D, les auteurs utilisent en partie les résultats qui ont été obtenus pour les couches limites bidimensionnelles. En effet, si on se place dans un repère dont la direction $\boldsymbol{x}$ est alignée avec les lignes de courant de l'écoulement extérieur, il est très classique de supposer que l'écoulement dans cette direction $\boldsymbol{x}$ (écoulement longitudinal) se comporte comme un écoulement bidimensionnel [65]. Cette hypothèse est valable seulement si le gradient de pression transversal est faible et donc que la composante transversale w de la vitesse est faible. Dans ce cas, on peut montrer que les équations de couche limite pour un écoulement laminaire se simplifient et que l'équation de continuité et l'équation de quantité de mouvement selon la direction longitudinale

ne dépendent plus de w [16]. Elles peuvent donc être résolues indépendamment de l'équation de quantité de mouvement dans la direction transversale. C'est le principe d'indépendance initialement introduit par Prandtl [94]. Ainsi, avec une hypothèse de faible écoulement transversal, les relations de fermeture utilisées pour la partie longitudinale de l'écoulement sont les mêmes qu'en deux dimensions. Pour fermer la partie transversale de l'écoulement, les auteurs utilisent la plupart du temps un profil de vitesse transversale présumé, exprimé en fonction de la vitesse longitudinale. Ces représentations sont empiriques. Dans le cas d'une couche limite laminaire, Mughal utilise par exemple un profil à deux paramètres, qui autorise les écoulements bidirectionnels [66]. Il est détaillé dans la section 2.2.2. Pour un écoulement turbulent, les deux profils de vitesse les plus connus sont ceux établis par Mager [54] et par Johnston [48]. Même si ils permettent uniquement la modélisation de profils unidirectionnels, ils sont souvent plus proches des résultats expérimentaux que d'autres modèles, plus sophistiqués, qui autorisent les profils bidirectionnels [65]. Celui de Mager est utilisé entre autres par Myring [67], Smith [77], Stock [80] et Coenen [19]. Il s'écrit :

$$\frac{w}{u} = \tan\beta_0(1-\eta)^2$$

Celui de Johnston, quant à lui, est utilisé notamment par Swafford [82], Nishida [69] et Mughal [65]. Au voisinage de la paroi, la vitesse transversale est définie par :

$$w = u\tan\beta_0$$

Dans la région extérieure, elle devient proportionnelle au déficit de vitesse longitudinal :

$$w = A(u_e - u)$$

D'autres exemples de profils de vitesse transversale sont donnés par van Garrel [90].

1.6.3. Solutions de similitude pour une couche limite tridimensionnelle

Des études ont montré qu'on pouvait aussi identifier et calculer quelques solutions particulières pour des écoulements de couche limite tridimensionnelle. En particulier, Cooke a étudié des écoulements laminaires auto-similaires du type [22] :

$$U_e = CX^m \quad ; \quad W_e = cte$$

On peut dans ce cas définir les conditions d'autosimilitude suivantes :

$$\frac{U}{U_e} = \mathrm{f}'(\eta) \quad ; \quad \frac{W}{W_e} = \mathrm{g}'(\eta) \quad ; \quad \eta = Y\sqrt{\frac{U_e}{\nu X}}$$

De la même manière que dans la section section 1.3.1, en injectant les hypothèses d'autosimilitude dans les équations de quantité de mouvement selon $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Z}$, on obtient les équations suivantes :

$$\mathrm{f}''' + \frac{m+1}{2}\mathrm{ff}'' + m\left(1-\mathrm{f}'^2\right) = 0 \tag{1.56a}$$

$$\mathrm{g}''' + \frac{m+1}{2}\mathrm{fg}'' = 0 \tag{1.56b}$$

La résolution numérique des équations (1.56) permet d'en déduire les solutions de similitude, dites de Falkner-Skan-Cooke. Dans le cas particulier où $m = 1$ par exemple, Cousteix donne la solution

pour une couche limite le long du bord d'attaque d'une aile en flèche infinie [26] :

$$\delta_{1X} = 0.648\sqrt{\nu/C} \quad ; \quad \theta_{XX} = 0.292\sqrt{\nu/C}$$
$$\delta_{1Z} = 1.026\sqrt{\nu/C} \quad ; \quad \theta_{ZZ} = 0.404\sqrt{\nu/C} \quad ; \quad \tau_{pZ} = 0.57W_e\sqrt{C\rho\mu}$$

La solution suivant $\boldsymbol{X}$ est identique à celle d'un écoulement de point d'arrêt bidimensionnel.

L'existence de solutions de similitude en trois dimensions signifie qu'il est possible d'établir des relations de fermeture à partir de l'analyse de ces solutions, comme pour les écoulements bidimensionnels. En revanche, ce travail est plus complexe en trois dimensions et on trouve très peu de relations de fermeture de ce type dans la littérature. Cousteix propose malgré tout une méthode basée sur ces solutions de similitudes [26].

1.6.4. Transition laminaire-turbulent pour une couche limite tridimensionnelle

Il a été montré que le caractère tridimensionnel de l'écoulement a tendance à faire avancer le point de début de transition par rapport à un écoulement bidimensionnel [26]. C'est ce qui est observé par exemple sur une aile d'avion. Lorsqu'on augmente progressivement la flèche, la transition s'effectue de plus en plus proche du bord d'attaque. Ceci est dû au fait que les instabilités sont amplifiées par la présence d'un écoulement transversal. Ce point ne sera pas détaillé dans cette thèse mais le lecteur peut se référer au livre de Cousteix [26] ou au livre de Cousteix et Cebeci [16] pour plus de détails.

1.7. Présentation des différentes méthodes pour calculer les échanges thermiques à l'interface paroi/air

Le concept de couche limite thermique a été introduit par Prandtl en 1910. De manière tout à fait similaire à la couche limite dynamique, la couche limite thermique est définie par une zone d'épaisseur δ_T, très proche de la paroi, où se produisent des variations importantes de température. Il s'établit donc, dans cette zone, un profil de température qui vaut la température de paroi en $y = 0$ et la température extérieure à la frontière avec l'écoulement extérieur. Le calcul de la couche limite thermique permet de fournir des informations telles que la valeur du flux de chaleur pariétal ϕ_p et la valeur du coefficient d'échange thermique h_{tc} que l'on définit de la manière suivante :

$$\phi_p = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \quad ; \quad \phi_p = h_{tc}(T_p - T_r)$$

où k est la conductivité thermique de l'air, T_p la température de la paroi et T_r la température de récupération.

Le givrage est un domaine dans lequel le calcul de la couche limite thermique est indispensable puisque le coefficient d'échange h_{tc} est une donnée nécessaire dans le bilan thermique effectué pour calculer l'accrétion de givre. Dans ce domaine, la majorité des méthodes que l'on peut trouver dans la littérature pour le calcul de la couche limite thermique sont des méthodes qui reposent sur des solutions approchées avec des formules quasi-analytiques. Celles-ci expriment les grandeurs thermiques en fonction des grandeurs dynamiques de la couche limite. En général, les codes de givrage utilisent presque tous les mêmes relations qui semblent donc être les mieux adaptées pour le domaine du givrage [71, 55]. Pour une couche limite laminaire, c'est la relation de Smith et

Spalding qui est pratiquement toujours retenue [49, 75]. Dans le cas d'une couche limite turbulente sur paroi lisse, les auteurs utilisent plutôt une relation établie par Ambrok [49, 1]. Enfin, pour une couche limite turbulente sur paroi rugueuse, la relation décrite par Makkonen est aussi très utilisée [55]. Toutes ces relations sont détaillées dans la section 3.1. Il existe bien sûr d'autres lois qui sont cependant beaucoup moins utilisées comme l'analogie de Reynolds qui reste l'analogie la plus simple.

La couche limite thermique peut aussi être calculée par une méthode intégrale mais les études sur ce sujet sont beaucoup moins nombreuses que pour la couche limite dynamique. L'équation intégrale de l'énergie est obtenue, comme en dynamique, en intégrant l'équation de l'énergie sur toute l'épaisseur de la couche limite thermique. On peut écrire l'équation de l'énergie 2D stationnaire sous la forme :

$$\rho u \frac{\partial h_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial u \tau_{xy}}{\partial y} \tag{1.57}$$

où h_i est l'enthalpie totale à l'intérieur de la couche limite. On obtient alors l'équation intégrale suivante [25] :

$$\frac{\partial \rho_e u_e h_{ie} \Delta}{\partial x} = \phi_p$$

où h_{ie} est l'enthalpie totale de l'écoulement extérieur. Cette équation fait intervenir l'épaisseur d'énergie Δ qui est définie de la manière suivante :

$$\Delta = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\left(\frac{h_i}{h_{ie}} - 1\right) \mathrm{d}y$$

On trouve en revanche très peu de relations de fermeture dans la littérature pour les méthodes intégrales de couche limite thermique, même si quelques études ont été effectuées sur des solutions particulières. Kays et Crawford montrent par exemple que l'on peut obtenir des solutions de similitude pour un écoulement de type Falkner-Skan ($u_e = Cx^m$), sur une paroi de température constante et en supposant que la vitesse est assez faible pour que le terme de dissipation dans l'équation (1.57) soit négligeable [49]. Le principe est le même que celui utilisé pour établir les solutions autosimilaires de Falkner-Skan. On définit les conditions d'autosimilitude suivantes :

$$\frac{u}{u_e} = \mathrm{f}(\eta) \quad ; \quad \frac{T_p - T}{T_p - T_e} = \Theta(\eta) \quad ; \quad \eta = y\sqrt{\frac{u_e}{\nu x}}$$

En injectant ces hypothèses dans l'équation de l'énergie (1.57) on obtient l'équation suivante :

$$\Theta'' + \frac{m+1}{2} Pr \mathrm{f} \Theta' = 0 \tag{1.58}$$

où Pr est le nombre de Prandtl. Pour m et Pr fixés, $\mathrm{f}(\eta)$ est donnée par les solutions de similitude de Falkner-Skan (section 1.3.1) et l'équation (1.58) peut être résolue pour obtenir $\Theta(\eta)$. On en déduit alors une famille de profils de température qui dépend du paramètre de gradient de pression m et du nombre de Prandtl Pr. Kays et Crawford montrent que pour ce type d'écoulements on a :

$$StPrRe_x^{1/2} = cte$$

avec St le nombre de Stanton qui vaut :

$$St = \frac{\phi_p}{\rho_e u_e c_p (T_p - T_e)}$$

où c_p est la chaleur spécifique de l'air.

Si les méthodes intégrales de couche limite thermique 2D sont peu présentes dans la littérature, les méthodes sur paroi rugueuse ainsi que les méthodes étendues en 3D sont encore plus rares.

Conclusion

Au cours de ce chapitre, de nombreux rappels ont été faits sur les méthodes intégrales qui existent dans la littérature pour modéliser les couches limites dynamique et thermique, qu'elles soient bidimensionnelles ou tridimensionnelles, sur paroi lisse ou rugueuse. Ceci permet de constater qu'il n'existe pas de méthode intégrale de couche limite réellement adaptée à la simulation d'accrétion de givre en trois dimensions. En effet, les codes de givrage utilisent principalement des solutions approchées basées sur des études d'écoulements bidimensionnels. De plus, les méthodes intégrales de couche limite 3D qui existent ne sont, quant à elles, pas adaptées pour des applications givrage puisqu'elles ne modélisent pas la couche limite thermique et qu'elles ne sont en général pas valables sur des parois rugueuses. Cet état de l'art constitue donc un support utile pour le développement d'un modèle intégral pour des couches limites dynamique et thermique 3D adapté à la simulation d'accrétion de givre.

2. Développement d'un modèle intégral pour une couche limite dynamique 3D adapté à la simulation d'accrétion de givre

Sommaire

2.1. Établissement des équations intégrales **41**
2.2. Fermeture du système d'équations intégrales **44**
2.2.1. Relations de fermeture longitudinales 46
2.2.2. Relations de fermeture transversales 55
2.2.3. Calcul des variables primaires 59
2.3. Établissement d'un critère de transition laminaire-turbulent **60**
2.4. Adaptation du modèle pour prendre en compte les effets de rugosité . **61**

Dans ce chapitre, nous proposons un modèle intégral de couche limite dynamique 3D adapté aux besoins de la simulation d'accrétion de givre. Le modèle doit permettre de calculer précisément le coefficient de frottement pour des écoulements laminaires et turbulents, puisque celui-ci est une sortie majeure du code de couche limite. Pour cela, nous commençons par établir un système d'équations intégrales permettant de modéliser des écoulements laminaires et turbulents sur des géométries complexes. Dans un deuxième temps, des relations de fermetures pour les deux régimes d'écoulement sont construites à partir de profils de vitesse présumés, ce qui permet de faciliter le développement d'un modèle thermique. De plus, un critère de transition laminaire-turbulent simple à mettre en œuvre est proposé. Enfin, le modèle est adapté afin qu'il puisse prendre en compte les effets de rugosité de paroi qui sont très importants sur des profils givrés.

2.1. Établissement des équations intégrales

Dans cette étude, la méthode intégrale de couche limite a été développée sous quelques hypothèses qui ont permis de simplifier le problème pour pouvoir mettre en place un premier modèle, même si il est destiné à être amélioré par la suite.

Les hypothèses qui sont faites pour établir les équations intégrales de couche limite sont les suivantes :

- On suppose que l'écoulement est incompressible, dans le sens où la masse volumique est supposée constante. Ceci permet de traiter des écoulements modérément rapides sans chauffage important de paroi.
- L'écoulement extérieur et l'écoulement de couche limite sont couplés par une méthode directe associée à une approche 1-way, ce qui signifie que l'écoulement de fluide parfait n'est calculé qu'une fois et n'est pas corrigé suite au calcul de couche limite pour tenir compte de l'épaisseur de celle-ci. Cette approche est courante pour les codes de givrage. En effet, l'écoulement non visqueux n'est pas supposé être affecté de manière significative par l'écoulement de couche

limite, au moins dans les zones où une solution précise est attendue, c'est-à-dire principalement au bord d'attaque.

- L'écoulement extérieur est supposé connu et obtenu par un calcul Euler (notamment le champ de vitesse $\boldsymbol{q_e}$). On suppose que c'est un écoulement de fluide parfait stationnaire et irrotationnel.
- On néglige les effets de courbure en considérant que le rayon de courbure de la paroi est grand devant l'épaisseur de la couche limite. Ceci permet notamment de considérer que la vitesse à la frontière de la couche limite est égale à la vitesse de l'écoulement de fluide parfait. Ceci permet aussi d'éviter l'utilisation de tenseurs métriques dans les équations.

Les équations de couche limite différentielles 3D incompressibles et instationnaires constituent la base de la formulation intégrale de cette étude. Dans un système de coordonnées adapté à la géométrie du problème, où $\boldsymbol{y}$ est la direction normale à la paroi, ces équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0 & \text{(2.1a)} \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_x}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} & \text{(2.1b)} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} & \text{(2.1c)} \\ 0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} & \text{(2.1d)} \end{cases}$$

où $\boldsymbol{q} = (u_x, u_y, u_z)$ est le vecteur vitesse, ρ est la masse volumique de l'air et P est la pression. Les grandeurs $\tau_{:y}$ sont des composantes du vecteur contrainte de cisaillement $\boldsymbol{\tau}$. Elles s'écrivent $\tau_{:y} = \mu \frac{\partial u_:}{\partial y}$ pour un écoulement laminaire ou $\tau_{:y} = \mu \frac{\partial u_:}{\partial y} - \rho < u_:' u_y' >$ pour un écoulement turbulent avec μ la viscosité dynamique de l'air.

En utilisant (2.1d), on a $P(x, z) = P_e(x, z)$. Ainsi, les termes de gradient de pression tangentiel peuvent être exprimés en fonction du gradient de vitesse extérieur grâce à l'équation de quantité de mouvement écrite dans la région de l'écoulement extérieur (équation d'Euler) :

$$\frac{\partial u_{ex}}{\partial t} + u_{ex}\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + u_{ey}\frac{\partial u_{ex}}{\partial y} + u_{ez}\frac{\partial u_{ex}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_e}{\partial x}$$

De plus, dans la zone extérieure à la couche limite, on suppose que $\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0$ et $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$. D'où :

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_e}{\partial x} = u_{ex}\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + u_{ez}\frac{\partial u_{ex}}{\partial z} \tag{2.2a}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_e}{\partial z} = u_{ex}\frac{\partial u_{ez}}{\partial x} + u_{ez}\frac{\partial u_{ez}}{\partial z} \tag{2.2b}$$

Les équations intégrales 3D sont ensuite obtenues en intégrant les équations (2.3) dans la direction normale à la paroi, sur toute l'épaisseur de la couche limite :

$$u_{ex} \times [\text{continuité (2.1a)}] - [\text{qdm}_x \text{ (2.1b)}] \tag{2.3a}$$

$$u_{ez} \times [\text{continuité (2.1a)}] - [\text{qdm}_z \text{ (2.1c)}] \tag{2.3b}$$

$$|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2 \times [\text{continuité (2.1a)}] - 2u_x \times [\text{qdm}_x \text{ (2.1b)}] - 2u_z \times [\text{qdm}_z \text{ (2.1b)}] \tag{2.3c}$$

$\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}} = (u_{ex}, u_{ez})$ est défini comme le vecteur vitesse extérieure dans le plan tangent à la paroi. Le système d'équations intégrales 3D, écrit sous sa forme conservative, est alors le suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} + \tilde{\nabla} \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{T}}} = -\left(\boldsymbol{M} \cdot \tilde{\nabla}\right) \cdot \tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}} + \dfrac{\boldsymbol{\tau_p}}{\rho} & \text{(2.4a)} \\ \dfrac{\partial tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}})}{\partial t} + \tilde{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{E} - \bar{\bar{\boldsymbol{T}}}\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}\right) = 2|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3 C_D - \bar{\bar{\boldsymbol{T}}} : \tilde{\nabla}\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}} + \tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}} \cdot \left(\left(\boldsymbol{M} \cdot \tilde{\nabla}\right) \cdot \tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}} - \dfrac{\boldsymbol{\tau_p}}{\rho}\right) & \text{(2.4b)} \end{cases}$$

où $\tilde{\nabla}$ représente l'opérateur gradient dans le plan tangent à la paroi. Les variables de ce système sont définies comme suit :

$$\boldsymbol{M} = \int_0^\infty (\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}} - \tilde{\boldsymbol{q}})\, \mathrm{d}y \qquad \text{Déficit de masse} \qquad (2.5a)$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{T}}} = \int_0^\infty ((\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}} - \tilde{\boldsymbol{q}}) \otimes \tilde{\boldsymbol{q}})\, \mathrm{d}y \qquad \text{Déficit de quantité de mouvement} \qquad (2.5b)$$

$$\boldsymbol{E} = \int_0^\infty \left(\tilde{\boldsymbol{q}}\left(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2 - |\tilde{\boldsymbol{q}}|^2\right)\right) \mathrm{d}y \qquad \text{Déficit d'énergie cinétique} \qquad (2.5c)$$

$$C_D = \frac{1}{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3} \int_0^\infty \boldsymbol{\tau_p} \cdot \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{q}}}{\partial y}\, \mathrm{d}y \qquad \text{Coefficient de dissipation totale} \qquad (2.5d)$$

$$\boldsymbol{\tau_p} = \begin{cases} \mu \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{q}}}{\partial y}\big|_{y=0} & \text{régime laminaire} \\ \mu \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{q}}}{\partial y}\big|_{y=0} - \rho\overline{\tilde{\boldsymbol{q}}' u_y{}'} & \text{régime turbulent} \end{cases} \qquad \text{Vecteur contrainte de cisaillement} \qquad (2.5e)$$

avec $\tilde{\boldsymbol{q}} = (u_x, u_z)$ le vecteur vitesse dans le plan tangent à la paroi. Le système (2.4) est exprimé sous forme tensorielle, ce qui lui permet d'être indépendant du système de coordonnées utilisé. En revanche, on peut facilement relier ces variables à celles qui sont plus communément utilisées dans la littérature comme les épaisseurs de déplacement δ_{1i}, de quantité de mouvement θ_{ij} et d'énergie cinétique δ_{3ij} :

$$\boldsymbol{M} = |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}| \begin{pmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1z} \end{pmatrix} \qquad \bar{\bar{\boldsymbol{T}}} = |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2 \begin{pmatrix} \theta_{xx} & \theta_{xz} \\ \theta_{zx} & \theta_{zz} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{E} = |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3 \begin{pmatrix} \delta_{3xx} + \delta_{3zx} \\ \delta_{3xz} + \delta_{3zz} \end{pmatrix} \qquad (2.6)$$

sachant que :

$$|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1i} = \int_0^\infty (u_{ei} - u_i)\, \mathrm{d}y \qquad (2.7a)$$

$$|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{ij} = \int_0^\infty (u_{ei} - u_i)\, u_j\, \mathrm{d}y \qquad (2.7b)$$

$$|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3\delta_{3ij} = \int_0^\infty \left(u_{ei}^2 - u_i^2\right) u_j\, \mathrm{d}y \qquad (2.7c)$$

De plus, la contrainte de cisaillement peut être exprimée en fonction des coefficients de frottement C_{f_i} comme suit :

$$\boldsymbol{\tau_p} = \frac{1}{2}\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2 \boldsymbol{C_f} = \frac{1}{2}\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2 \begin{pmatrix} C_{fx} \\ C_{fz} \end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

Le coefficient de dissipation total, quant à lui, est la somme des coefficients de dissipation dans chacune des directions :

$$C_D = \frac{1}{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3} \int_0^\infty \tau_{p_x} \frac{\partial u_x}{\partial y}\, \mathrm{d}y + \frac{1}{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3} \int_0^\infty \tau_{p_z} \frac{\partial u_z}{\partial y}\, \mathrm{d}y = C_{Dx} + C_{Dz} \qquad (2.9)$$

Le détail des calculs permettant d'obtenir le système d'équations intégrales (2.4) est donné en annexe A. Le modèle (2.4) obtenu est un modèle intégral de couche limite avec équation auxiliaire. Ce type de modèle a été choisi car il permet une modélisation plus précise de la couche limite que les modèles à une équation (voir section 1.2.2). Dans le système (2.4), l'équation (2.4a) modélise le transport, dans la surface tangente à la paroi, du déficit de quantité de mouvement. C'est une version 3D instationnaire de l'équation de von Kármán. L'équation (2.4b), quant à elle, est l'équation intégrale de l'énergie cinétique. Elle modélise le transport dans la surface tangente à la paroi du déficit d'énergie cinétique dans la couche limite. Ces équations sont écrites sous forme conservative afin de permettre leur résolution par une méthode Volumes-Finis dans le chapitre 5.

Ce modèle (2.4) n'est pas le seul modèle intégral possible pour la couche limite, qu'elle soit bidimensionnelle ou tridimensionnelle. On peut trouver de nombreuses autres formulations dans la littérature, comme il a été mentionné dans la section 1.1. Certains auteurs préfèrent utiliser l'équation d'entrainement (issue de l'équation de continuité) au lieu de l'équation de l'énergie cinétique [77, 19] et beaucoup d'entre eux utilisent une formulation stationnaire [87, 65] ce qui semble a priori plus simple et moins coûteux d'un point de vue numérique. Bien que le modèle (2.4) semble plus compliqué que les autres, il présente des avantages non négligeables, en particulier si il est développé pour une couche limite tridimensionnelle. En effet, comme il est instationnaire, il peut être résolu de manière itérative, avec une discrétisation en temps, jusqu'à convergence de la solution stationnaire et en partant d'une condition initiale arbitraire. Ainsi, il n'est pas nécessaire d'utiliser un algorithme de marche en espace, de l'amont vers l'aval, ce qui est difficile à mettre en œuvre pour un maillage 3D non structuré et une géométrie arbitraire et pose de sérieux problèmes pour traiter les cas de couches limites décollées. D'autre part, l'équation intégrale de l'énergie cinétique a été préférée à l'équation d'entrainement car la version instationnaire de cette dernière ne peut pas s'établir de la même manière que les autres. De plus, l'équation d'entrainement fait intervenir l'épaisseur de couche limite δ comme une variable primaire du système, mais celle-ci n'est pas clairement définie sur le plan mathématique.

Dans tous les cas, les équations intégrales à elles seules ne suffisent pas à modéliser un écoulement de couche limite car le processus d'intégration utilisé pour dériver les équations intégrales engendre une perte d'information, en particulier sur le champ de vitesse à l'intérieur de la couche limite. C'est pourquoi le système (2.4) fait intervenir beaucoup plus d'inconnues que d'équations. Seul le vecteur vitesse extérieure $\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}$ est une donnée du problème. Il est donc nécessaire de fermer le système en reliant les nouvelles inconnues à trois variables primaires seulement (soit autant que le nombre d'équations) par des relations de fermeture. Pour cette étude, les trois variables primaires choisies sont δ_{1x}, δ_{1z}, θ_{xx} car ces quantités sont obtenues très facilement à chaque itération en temps (sauf pour θ_{xx}, voir sous-section 2.2.3) et sont couramment utilisées dans les modèles de fermeture proposés dans la littérature.

2.2. Fermeture du système d'équations intégrales

Pour établir des relations de fermeture tridimensionnelles, la méthode adoptée dans cette thèse est celle qui est généralement utilisée dans la littérature. Elle suppose que la partie longitudinale de l'écoulement de couche limite, c'est-à-dire dans la direction liée aux lignes de courant extérieures, a un comportement similaire à un écoulement bidimensionnel de couche limite. C'est pourquoi les grandeurs longitudinales peuvent être fermées à l'aide de relations de fermeture bidimensionnelles. Cette approche suppose que la composante transversale de la vitesse dans la couche limite est faible devant la composante longitudinale. Dans ce cas et d'après le principe d'indépendance, les équations de continuité et de quantité de mouvement selon la direction longitudinale ne dépendent

plus de la composante transversale de la vitesse (voir sous-section 1.6.2). Les variables transverses, quant à elles, sont souvent fermées par des relations de fermeture qui dépendent des grandeurs longitudinales.

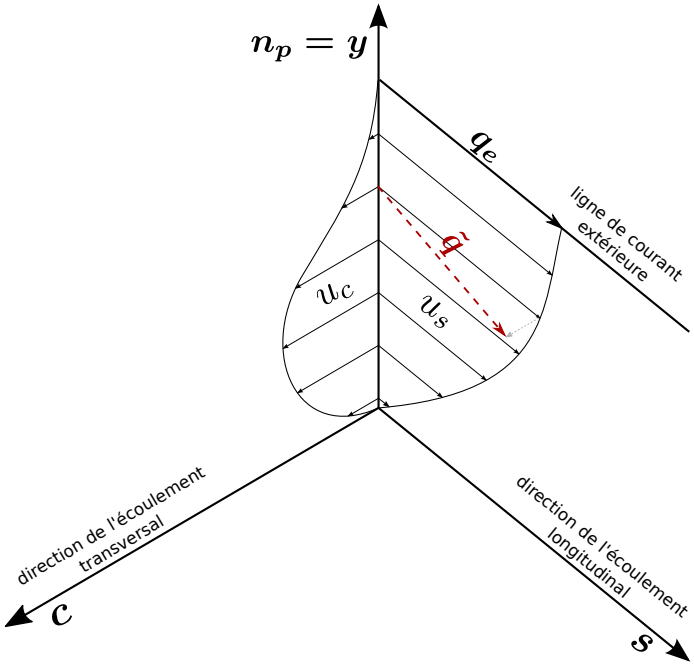


FIGURE 2.1. – Repère 3D lié aux lignes de courant extérieures

Dans la section 2.1, les équations de couche limite ont été établies dans un repère général $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. Or l'approche décrite ci-dessus pour fermer le système d'équations consiste à traiter l'écoulement en une partie longitudinale et une partie transversale. Elle impose donc de se placer dans un repère $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})$ lié aux lignes de courant extérieures pour pouvoir établir les relations de fermeture (voir figure 2.1). Ce repère est défini de la manière suivante :

$$\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{q_e}}{|\boldsymbol{q_e}|}, \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{n_p}, \qquad \boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{y}|} \tag{2.10}$$

où $\boldsymbol{n_p}$ est le vecteur normal à la paroi. Le vecteur vitesse dans le plan tangent à la paroi s'écrit alors :

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(\eta) = |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|(\widehat{u}_s(\eta)\boldsymbol{s} + \widehat{u}_c(\eta)\boldsymbol{c}) \tag{2.11}$$

où $\eta = y/\delta$, avec δ une estimation de l'épaisseur de couche limite. La particularité de ce repère est que la direction $\boldsymbol{s}$ est dans le sens de l'écoulement extérieur : $\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}} = (u_{es}, u_{ec}) = (|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|, 0)$. Pour la suite du chapitre, on se placera donc dans le repère particulier $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})$ lié aux lignes de courant au lieu du repère $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, plus général. L'objectif de cette section est de fermer le système d'équations intégrales à l'aide de relations qui lient toutes les inconnues aux trois variables primaires δ_{1s}, δ_{1c} et θ_{ss}.

Que ce soit pour la partie longitudinale ou transversale, la littérature propose différentes méthodes pour établir ces relations de fermeture. Les principales sont répertoriées dans la section 1.3. Dans cette thèse, les relations de fermetures choisies ont été établies majoritairement à partir de profils de vitesse présumés. En effet, si la vitesse $\tilde{\boldsymbol{q}}$ dans la couche limite est connue, les inconnues du système définies en (2.5) peuvent être facilement calculées. De plus, ce choix permet de faciliter l'extension du modèle à la couche limite thermique (développée dans la section 3.2) pour laquelle

il n'existe, dans la littérature, que très peu de relations empiriques ou basées sur des solutions particulières. Le plus simple est donc d'établir des relations de fermeture à partir de profils de vitesse et de température présumés. Il faut noter que ces relations de fermetures dépendent du régime de l'écoulement car les profils de vitesse et de température d'une couche limite laminaire sont très différents de ceux d'une couche limite turbulente.

2.2.1. Relations de fermeture longitudinales

Relations de fermeture pour une couche limite laminaire

De nombreuses expressions pour modéliser le profil de vitesse dans une couche limite laminaire bidimensionnelle ont été proposées dans la littérature (voir section 1.3.2). Beaucoup d'entre elles ont été répertoriées par Rosenhead [73]. Le profil de vitesse choisi dans cette thèse a la même forme que celui proposé par Mangler [56] qui, comme on l'a vu dans la section 1.3.2, fournit de meilleurs résultats que celui de Pohlhausen. Il s'écrit (avec $a_2 = 0$ dans la section 1.3.2) :

$$\frac{u_s}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|}(\eta) = \widehat{u}_s(\eta) = 1 - (1 + A_s\eta)(1-\eta)^{p_s - 1} \tag{2.12}$$

où $\eta = y/\delta$ et δ est une estimation de l'épaisseur de couche limite. Plus précisément, $y = \delta$ est la distance à partir de laquelle on suppose que $\tilde{\boldsymbol{q}} = \tilde{\boldsymbol{q}}_e$. En toute rigueur, cette condition s'applique uniquement quand y tend vers l'infini mais on suppose ici que cette condition peut s'appliquer à partir de $y = \delta$ sans que l'erreur commise ne soit significative. Le profil de vitesse (2.12) ainsi défini satisfait naturellement les conditions limites (2.13a), (2.13b) et (2.13c) :

$$\eta = 0 : \qquad \widehat{u}_s = 0 \tag{2.13a}$$

$$\eta = 1 : \qquad \widehat{u}_s = 1 \tag{2.13b}$$

$$\eta = 1 : \qquad \forall n \leq p_s - 2 \quad \frac{\partial^n \widehat{u}_s}{\partial \eta^n} = 0 \tag{2.13c}$$

La condition (2.13a) est une condition d'adhérence à la paroi. Les conditions (2.13b) et (2.13c) devraient, en toute rigueur, s'appliquer pour y qui tend vers l'infini mais elles ont été rapportées en $y = \delta$. De plus, on a vu dans la section 1.3.2 qu'aucune valeur de p_s ne permet de représenter correctement le profil de vitesse pour tout type d'écoulement. C'est pourquoi, au lieu de prendre une valeur fixe pour p_s comme dans la méthode de Mangler, il peut sembler judicieux de rendre ce paramètre variable et de l'exprimer, à l'aide d'une condition supplémentaire, en fonction des variables primaires du système. Il faut noter que p_s doit être strictement supérieur à 2 par construction, mais p_s n'est pas nécessairement un entier. Dans ce cas, le nombre de dérivées qui s'annulent en $\eta = 1$ est donné par la partie entière de $p_s - 2$.

Trois conditions supplémentaires sont donc nécessaires pour exprimer A_s, p_s et δ en fonction des variables primaires longitudinales δ_{1s} et θ_{ss}. Elles sont choisies comme suit :

$$\left(\frac{\partial \widehat{u}_s}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|\delta C_{fs}}{2\nu} \tag{2.14a}$$

$$\delta_{1s} = \delta \int_0^1 (1 - \widehat{u}_s)\,\mathrm{d}\eta \tag{2.14b}$$

$$\theta_{ss} = \delta \int_0^1 \widehat{u}_s(1 - \widehat{u}_s)\,\mathrm{d}\eta \tag{2.14c}$$

Les conditions (2.14b) et (2.14c) sont essentielles pour assurer la consistance du système d'équations. Il faut noter que par définition, dans le repère $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})$ lié aux lignes de courant extérieures, on a $u_{ec} = 0$ et $|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}| = u_{es}$, donc les expressions (2.14b) et (2.14c) correspondent aux définitions des épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement (2.7a) et (2.7b). En revanche, la condition (2.14a) est beaucoup moins classique. Mangler proposait d'utiliser une condition sur le paramètre de gradient de pression Λ qui assure une bonne modélisation des effets du gradient de pression. Cependant, ce paramètre n'est pas forcément le plus pertinent à utiliser, notamment car il relie directement les grandeurs caractéristiques de la couche limite à un paramètre lié à l'écoulement extérieur. Or l'intérêt des méthodes intégrales avec équation auxiliaire est justement de pouvoir s'affranchir de telles relations (voir section 1.2.2). La condition de Mangler est donc remplacée par la condition (2.14a), proposée par Wieghardt [96] (voir section 1.3.2), qui porte sur le frottement pariétal. Elle permet d'assurer une modélisation précise du frottement à la paroi sachant que le coefficient de frottement est une sortie majeure du code de couche limite. En effet, si le coefficient de frottement reste secondaire pour les calculs d'accrétion sur des parois non protégées, il est important pour le calcul du ruissellement sur des parois anti-givrées.

Le coefficient de frottement dans la condition (2.14a) est donné par une relation de fermeture proposée par Cousteix [25] (voir section 1.3.1) et issue des solutions autosimilaires de Falkner-Skan pour les équations de couche limite. Elle s'exprime en fonction du facteur de forme $H = \frac{\delta_{1s}}{\theta_{ss}}$ et s'écrit comme suit :

$$\frac{C_{fs}}{2} Re_{\theta_{ss}} = g(H) \qquad \text{avec } Re_{\theta_{ss}} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\theta_{ss}}{\nu} \tag{2.15}$$

et

$$g(H) = 2.99259 \left[\left(\frac{1}{H} - \frac{1}{8.05846} \right)^{1.7} - \left(\frac{1}{8.05846} \right)^{1.7} \right] \qquad \text{si } H \leq H_{dec} \tag{2.16a}$$

$$\begin{aligned} g(H) &= 0.20644 - 90.30936 \left(\left(\frac{1}{4.02923} \right)^{1.3} - \frac{1}{H^{1.3}} \right)^{3.35661} \\ &+ (H-1) \left[-0.06815 + 46.34236 \left(\frac{1}{(4.02923)^2} - \frac{1}{H^2} \right)^{2.338238} \right] \qquad \text{si } H > H_{dec} \end{aligned} \tag{2.16b}$$

La fonction g (2.16) donnée par Cousteix est préférée à celle proposée par Drela (voir section 1.3.1, eq.(1.29)) puisque, après quelques calculs, on s'aperçoit que cette dernière conduit à des relations de fermeture discontinues pour l'épaisseur d'énergie cinétique et pour le coefficient de dissipation avec le modèle développé dans cette thèse. La fonction g (2.16) est tracée sur la figure 2.2 en fonction de H. On constate que $g(H)$ (donc C_{fs}) est négatif pour des facteurs de forme supérieurs à $H_{dec} = 4.02923$. Ceci correspond à la zone où la couche limite est décollée. À l'inverse, les zones où la couche limite est attachée sont caractérisées par des valeurs du facteur de forme inférieures à H_{dec}.

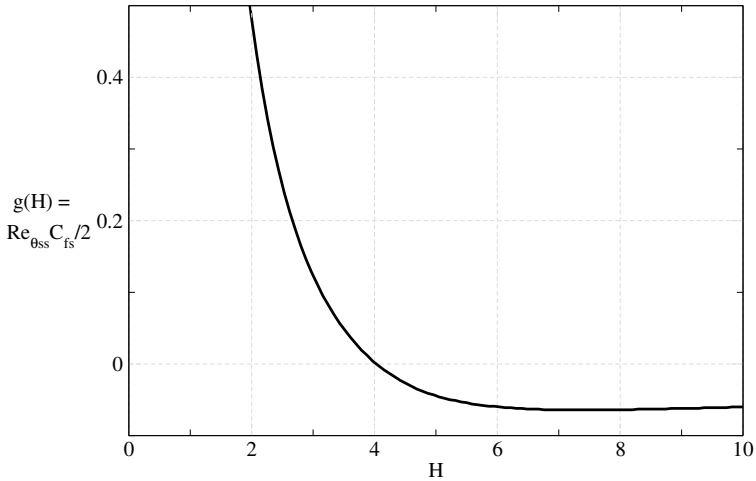


FIGURE 2.2. – Relation de fermeture g tracée en fonction du facteur de forme H

Grâce au profil de vitesse (2.12) et à la définition du facteur de forme $H = \delta_{1s}/\theta_{ss}$, les conditions (2.14a), (2.14b) et (2.14c) deviennent :

$$p_s - 1 - A_s = Hg(H)\frac{\delta}{\delta_{1s}} \tag{2.17}$$

$$\delta_{1s} = \frac{\delta(p_s + 1 + A_s)}{p_s(p_s + 1)} \tag{2.18}$$

$$\theta_{ss} = \delta\left(\frac{p_s + 1 + A_s}{p_s(p_s + 1)} - \frac{2A_s^2 + 2A_s(2p_s + 1) + 2p_s(2p_s + 1)}{(2p_s - 1)2p_s(2p_s + 1)}\right) \tag{2.19}$$

Ces conditions forment un système de trois équations à trois inconnues qui sont A_s, δ et p_s. À partir de la condition (2.17), on peut exprimer A_s comme une fonction de H, p_s et δ/δ_{1s}. Ensuite on peut déduire $\delta/\delta_{1s}(H, p_s)$ à partir de (2.18). Finalement, $p_s(H)$ peut être obtenu à partir de (2.19) qui est résolu numériquement pour de nombreuses valeurs de H (voir la courbe des valeurs cibles, figure 2.3). La solution numérique est très bien approchée par la fonction analytique suivante (voir la courbe $p_s(H)$, figure 2.3) :

$$p_s(H) = 2.4834 + \frac{0.7877}{(H - 1.9538)^{1.6001}} \qquad \text{si } H \leq H_{dec} \tag{2.20a}$$

$$p_s(H) = 2 + \frac{2.0411 \times 10^{11}}{(H + 25.890)^{7.7560}} \qquad \text{si } H > H_{dec} \tag{2.20b}$$

Plus de détails sur la dérivation du profil de vitesse sont données en annexe B. Finalement, le profil de vitesse peut être exprimé uniquement en fonction des variables primaires du système (ici en l'occurence, δ_{1s} et θ_{ss} sachant que $H = \delta_{1s}/\theta_{ss}$) :

$$\widehat{u}_s(\eta) = 1 - (1 + A_s(H)\eta)(1 - \eta)^{p_s(H)-1} \tag{2.21}$$

avec

$$A_s(H) = \sqrt{{p_s}^2 - p_s(p_s + 1)Hg(H)} - 1 \tag{2.22}$$

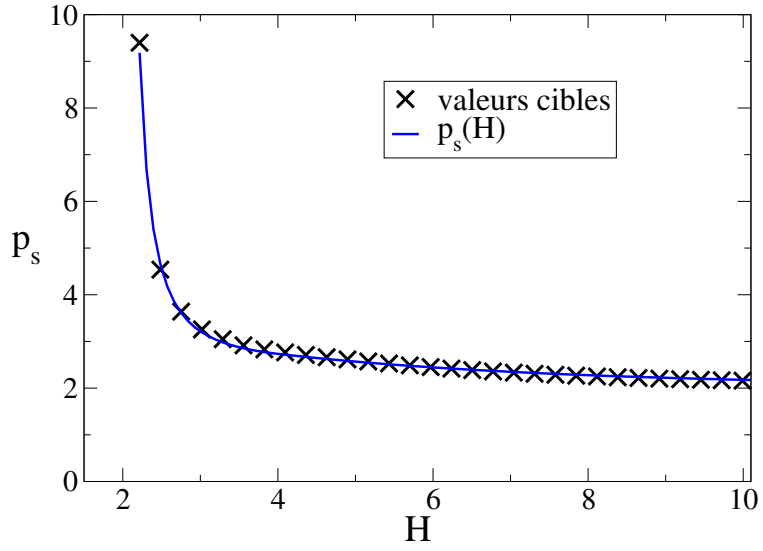


FIGURE 2.3. – Exposant du profil de vitesse analytique p_s en fonction du facteur de forme H

$p_s(H)$ est donné par l'équation (2.20), $\eta = \dfrac{y}{\delta}$ avec

$$\delta = \frac{\delta_{1s} p_s (p_s + 1)}{p_s + \sqrt{{p_s}^2 - p_s(p_s+1) H g(H)}} \tag{2.23}$$

et $g(H)$ est donné par l'équation (2.16).

Les profils de vitesse donnés en (2.21) sont comparés à ceux obtenus pour plusieurs solutions auto-similaires de Falkner-Skan sur la figure 2.4 (voir section 1.3.1). On rappelle que ces solutions auto-similaires sont obtenues pour des vitesses extérieures de la forme $|\tilde{\boldsymbol{q}}_e| = C s^m$. Le gradient de pression dépend donc de m ou de $\beta = \frac{2m}{1+m}$: il est du signe opposé à celui de β et le cas $\beta = 0$ correspond à un écoulement sur une plaque plane sans gradient de pression. On peut aussi noter que le cas $\beta = 1$ correspond à un écoulement de point d'arrêt bidimensionnel. Le lecteur peut se réferer à la sous-section 1.3.1 pour une description plus détaillée des écoulements auto-similaires. Les profils de vitesse tracés sur la figure 2.4 correspondent aux cas répertoriés dans le tableau 2.1, dont les valeurs sont données par Cousteix ([25, p.200]), et tirées des travaux de Christian et al.

β	m	H	Configuration
1.0000	1.0000	2.2162	écoulement de point d'arrêt
0.5000	0.3333	2.2969	écoulement accéléré
0.0000	0.0000	2.5911	écoulement de plaque plane
-0.1988	-0.0904	4.0292	écoulement ralenti (limite du décollement)
-0.1600	-0.0741	6.7520	écoulement ralenti (décollement)
-0.0800	-0.0385	16.4675	écoulement ralenti (décollement)

TABLE 2.1. – Solutions de Falkner-Skan

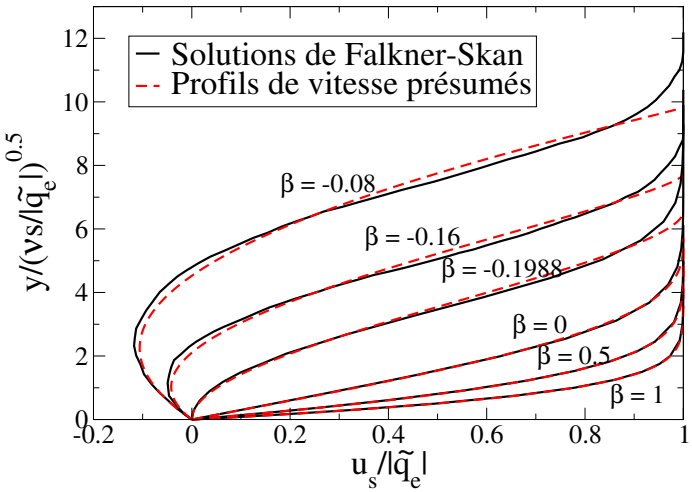


FIGURE 2.4. – Profils de vitesse d'une couche limite laminaire sur un dièdre d'angle au sommet $\beta\pi$ pour différentes valeurs de β

La figure 2.4 montre un bon accord avec les profils de vitesse de Falkner-Skan, en particulier pour des valeurs de H variant entre 2.21 et 2.59 (c'est-à-dire pour $\beta > 0$) correspondant à un écoulement accéléré dans une couche limite attachée. Les résultats sont toujours satisfaisants pour des valeurs du facteur de forme allant jusqu'à $H_{dec} = 4.0292$ ($\beta = -0.1988$), même si ils sont un peu moins précis. En revanche, on peut noter des écarts plus importants pour les profils de vitesse dans des couches limites détachées ($H > H_{dec}$ ou $\beta < -0.1988$) notamment loin de la paroi et en particulier à la frontière externe de la couche limite. Par contre, la pente à l'origine, qui est directement reliée au coefficient de frottement, semble assez bien modélisée. Mais, comme il a été mentionné précédemment, une grande précision de la solution n'est pas attendue dans les zones de couche limite décollée.

Grâce au profil de vitesse (2.21), δ_{3ss} et C_{Ds} peuvent maintenant être facilement calculés à partir de leur définition (C_{fs} est donné par (2.15)) :

$$\delta_{3ss} = \delta \int_0^1 \widehat{u}_s(1 - \widehat{u}_s^2)\,\mathrm{d}\eta$$
$$C_{Ds} = \frac{1}{\delta}\int_0^1 \frac{\nu}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|}\left(\frac{\partial \widehat{u}_s}{\partial \eta}\right)^2 \mathrm{d}\eta$$

On peut alors montrer que les relations de fermeture s'écrivent :

$$\frac{\delta_{3ss}}{\theta_{ss}} = f_l(H) \tag{2.24a}$$
$$\frac{C_{fs}}{2} Re_{\theta_{ss}} = g(H) \tag{2.24b}$$
$$\frac{2C_{Ds}}{f_l(H)} Re_{\theta_{ss}} = l(H) \tag{2.24c}$$

Le détail des calculs pour obtenir les relations de fermeture et les expressions des fonctions $f_l(H)$ et $l(H)$ sont donnés en annexe E. La fonction $g(H)$ est donnée par (2.16). Le coefficient de frottement C_{fs} et le coefficient de dissipation C_{Ds} sont tracés en fonction du facteur de forme pour différentes valeurs de $Re_{\theta_{ss}}$ sur la figure 2.5. On observe une forte influence du facteur de forme et donc du gradient de pression extérieur sur le coefficient de frottement pour un nombre de Reynolds donné. En particulier, on retrouve le fait que C_{fs} s'annule en $H_{dec} = 4.02923$ et devient négatif pour des

valeurs de H supérieures à H_{dec}. Cette plage de valeurs correspond par définition à une couche limite bidimensionnelle décollée. À l'inverse, le gradient de pression a moins d'influence sur le coefficient de dissipation longitudinal. En effet, celui-ci varie relativement peu en fonction du facteur de forme pour un nombre de Reynolds donné. Enfin, ces deux coefficients dépendent fortement de $Re_{\theta_{ss}}$ puisqu'ils sont proportionnels à $1/Re_{\theta_{ss}}$.

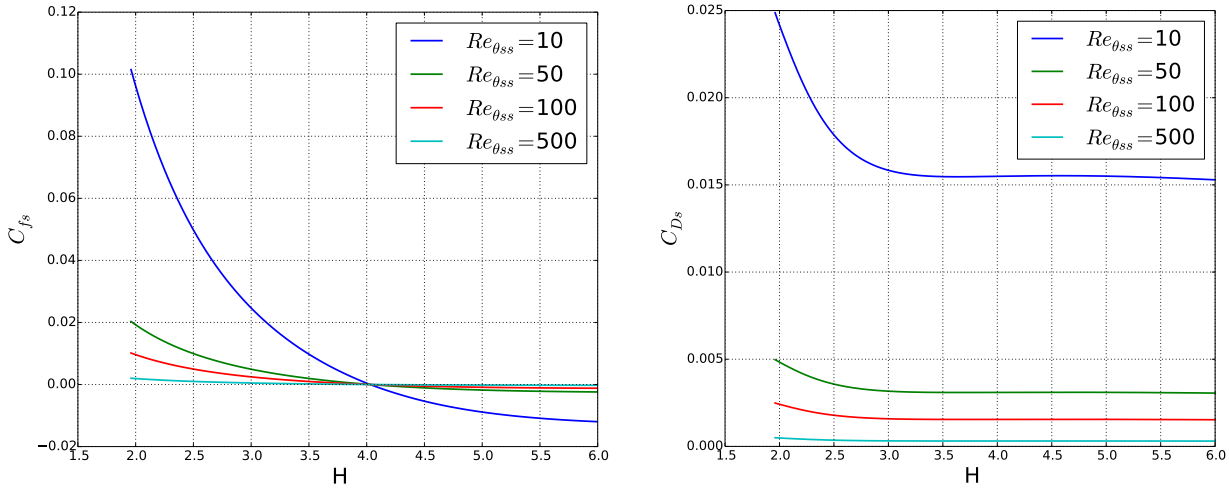


FIGURE 2.5. – Coefficient de frottement (à gauche) et coefficient de dissipation (à droite) longitudinaux pour différentes valeurs de $Re_{\theta_{ss}}$ en fonction du facteur de forme H

Relations de fermeture pour une couche limite turbulente

La couche limite turbulente se divise en une région interne où le cisaillement total (visqueux et turbulent) est quasiment constant et une région externe contrôlée par la turbulence et les effets inertiels (voir sous-section 1.1.2). Les profils de vitesse n'ont pas le même comportement dans les régions interne et externe. Pour représenter précisément le profil de vitesse, il faudrait deux expressions du profil de vitesse suivant qu'on se trouve dans la région interne ou externe. Il existe dans la littérature des profils de vitesse complets qui sont valables sur toute l'épaisseur de la couche limite. L'un des plus utilisés pour les méthodes de couche limite intégrale (Drela[30], Mughal[65], Nishida[69], Milewski[62]) a été développé par Swafford[81] et Whitfield[95] (section 1.3.2, eq. (1.45)). Mais son expression est très compliquée. On peut aussi utiliser une loi modélisant uniquement le profil de vitesse de la région externe car l'épaisseur de la région interne est petite devant l'épaisseur totale de la couche limite et l'erreur commise en intégrant le profil de vitesse sur toute l'épaisseur de la couche limite sera donc faible. C'est ce qui est fait dans cette étude car le profil de vitesse est beaucoup plus simple.

Le profil de vitesse choisi dans cette méthode a été utilisé en particulier par Tai[84] (voir section 1.3.2). Il s'écrit :

$$\widehat{u}_s = \eta^{1/n} \tag{2.25}$$

où $\eta = y/\delta$. Cette loi en puissance a une expression simple et constitue une bonne approximation du profil de vitesse, hormis dans la zone située très près de la paroi (sous couche visqueuse en particulier). Dans la littérature, elle est souvent utilisée pour $n = 7$ (Kays et Crawford[49]) et est,

dans ce cas, particulièrement bien adaptée pour un écoulement de plaque plane. Ici, l'exposant est variable pour permettre au profil de vitesse d'être adapté à une plus large gamme d'écoulements de couche limite. Deux conditions ont donc été imposées pour pouvoir exprimer n et δ en fonction des variables primaires longitudinales :

$$\delta_{1s} = \delta \int_0^1 (1 - \widehat{u}_s)\,\mathrm{d}\eta = \frac{\delta}{n+1} \tag{2.26a}$$

$$\theta_{ss} = \delta \int_0^1 \widehat{u}_s(1 - \widehat{u}_s)\,\mathrm{d}\eta = \frac{n\delta}{(n+1)(n+2)} \tag{2.26b}$$

Comme pour le cas laminaire, les conditions (2.26a) et (2.26b) permettent d'assurer la consistance des variables primaires du système d'équations. Ceci implique que :

$$\delta = (n+1)\delta_{1s} \tag{2.27}$$

et que :

$$n = \frac{2}{H-1} \tag{2.28}$$

sachant que $H = \dfrac{\delta_{1s}}{\theta_{ss}}$. Le profil de vitesse est alors exprimé uniquement en fonction des variables primaires du système (ici en l'occurence, δ_{1s} et θ_{ss}) :

$$\widehat{u}_s = \eta^{(H-1)/2} \qquad \text{avec } \delta = \frac{H+1}{H-1}\delta_{1s} \tag{2.29}$$

Des profils de vitesse sont tracés sur la figure 2.6 pour différentes valeurs du facteur de forme. On constate que ce type de profils de vitesse ne permet pas à la vitesse de changer de signe dans l'épaisseur de la couche limite, c'est-à-dire qu'il ne permet pas de modéliser les couches limites décollées. De plus, on remarque clairement qu'à partir de $H = 3$, les profils de vitesse ne sont plus réalistes. Or dans la littérature, il n'existe pas de valeur précise de H correspondant au décollement pour un écoulement turbulent mais, selon les auteurs, elle varie entre 2.5 et 4. Ainsi, les profils de vitesse associés à des valeurs du facteur de forme supérieures à 3 correspondent donc à des zones de couche limite décollées où à des zones de forts gradients de pression adverses. De la même manière que pour le cas laminaire, le fait que ces profils ne soient pas réalistes n'est pas très pénalisant pour la méthode développée dans cette thèse, sachant qu'elle est destinée à être implémentée dans une chaîne de calculs d'accrétion de givre. Une erreur importante sur le coefficient de frottement ou le coefficient d'échange thermique dans une zone décollée ou à fort gradient de pression adverse n'aura que peu d'influence sur le calcul de la forme du dépôt de givre. Il est cependant envisageable, dans un second temps, d'utiliser le profil de vitesse développé par Swafford[81] et Whitfield[95] (voir section 1.3.2, eq. (1.45)) même si les relations de fermeture sont plus difficiles à implémenter. Ceci permettrait d'étendre le domaine de validité de la méthode développée dans cette thèse.

En revanche, la loi en puissance (2.29) permet de représenter très simplement et assez correctement l'allure des profils de vitesse d'une couche limite accélérée, d'une couche limite sans gradient de pression voire d'une couche limite légèrement ralentie ($H < 3$). Ceci est illustré sur la figure 2.7 qui montre une comparaison de cette loi à des résultats expérimentaux pour des valeurs du facteur de forme de 1.277 et 2.234 [26]. Comme l'épaisseur de couche limite δ est mal définie expérimentalement, $u_s/|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|$ est tracé en fonction de y/θ_{ss}. On constate un bon accord avec les résultats expérimentaux dans une grande partie de la couche limite.

Grâce au profil de vitesse obtenu en (2.29), l'épaisseur d'énergie cinétique δ_{3ss} peut être facilement

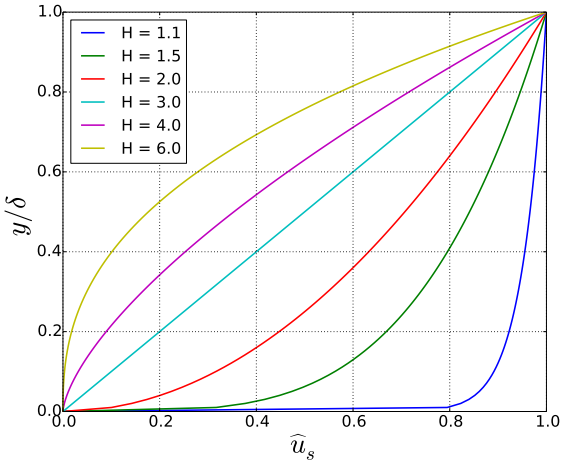


FIGURE 2.6. – Profils de vitesse turbulents pour différentes valeurs de H

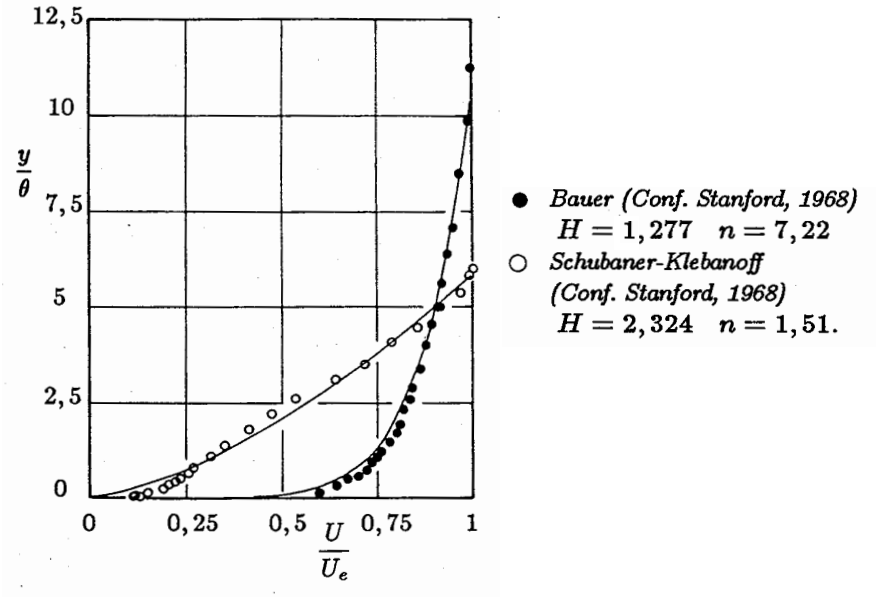


FIGURE 2.7. – Représentation des profils de vitesse longitudinaux dans une couche limite turbulente par des profils en puissance [26]

déterminée sachant que :

$$\delta_{3ss} = \delta \int_0^1 \widehat{u}_s(1 - \widehat{u}_s^2)\,\mathrm{d}\eta$$

On obtient :

$$\frac{\delta_{3ss}}{\theta_{ss}} = f_t(H) = \frac{2(n(H)+2)}{(n(H)+3)} \tag{2.30}$$

Il est important de noter que le profil de vitesse (2.29) n'est pas valable aux frontières de la couche limite. En effet, pour un facteur de forme strictement inférieur à 3, la loi en puissance a une pente infinie à la paroi (en $y = 0$) ce qui n'est pas correct et la pente en $y = \delta$ n'est pas nulle, ce qui n'est pas correct non plus. En pratique, ceci n'engendre pas d'erreur importante sur la valeur des épaisseurs δ_{1s}, θ_{ss} et δ_{3ss} puisque ce sont des quantités intégrales et que la loi en puissance représente bien le profil de vitesse dans une grande partie de la couche limite. Par contre, les coefficients de frottement et de dissipation ne peuvent pas être calculés directement à partir du profil de vitesse. C'est pourquoi ils sont donnés par des relations empiriques tirées de la littérature (voir sous-section 1.3.3).

Deux relations différentes ont été sélectionnées pour déterminer le coefficient de frottement C_{fs}. La première, très couramment utilisée dans la littérature, a été obtenue par Ludwieg et Tillmann[53] à partir de corrélations basées sur des résultats expérimentaux :

$$C_{fs} = 0.246 \times 10^{-0.678H} {Re_{\theta_{ss}}}^{-0.268} \tag{2.31}$$

On remarque que, quelle que soit la valeur du facteur de forme, le coefficient de frottement est toujours positif. Cette loi ne permet donc pas de modéliser une couche limite décollée mais cela reste cohérent avec le profil de vitesse qui a été choisi précédemment. C'est l'une des loi les plus simples et les plus sûres qu'on puisse trouver dans la littérature mais elle semble en revanche imprécise pour $Re_{\theta_{ss}} < 1200$ selon Cousteix [26]. La seconde relation a été proposée par White [94, p.450] :

$$C_{fs} = \frac{0.3\ \mathrm{e}^{-1.33H}}{(\log Re_{\theta_{ss}})^{1.74+0.31H}} \tag{2.32}$$

Cette relation, comme celle de Ludwieg-Tillmann, ne permet pas au coefficient de frottement de prendre des valeurs négatives. Il existe en revanche une version étendue de cette loi, qui a été développée empiriquement par Swafford [81], grâce à des données obtenues pour les écoulements de couches limites décollées (voir section 1.3.2, équation (1.46)). Cette extension pourrait être utilisée dans un second temps, avec le profil de vitesse développé par Swafford[81] et Whitfield[95] (section 1.3.2, équation (1.45)) pour améliorer la précision de la méthode dans les zones décollées.

Le coefficient de dissipation, quant à lui, est obtenu par une loi basée sur l'étude des couches limites d'équilibre proposée par Drela [30] (section 1.3.1, eq. (1.44) où H^* est noté H_{32}) :

$$C_{Ds} = \frac{H^*}{2}\left[\frac{C_f}{6}\left(\frac{4}{H} - 1\right) + 0.03\left(\frac{H-1}{H}\right)^3\right] \tag{2.33}$$

avec

$$H^* = 1.505 + \frac{4}{Re_{\theta_{ss}}} + \left(0.165 - \frac{1.6}{\sqrt{Re_{\theta_{ss}}}}\right)\frac{(H_0 - H)^{1.6}}{H} \qquad \text{si } H < H_0$$

$$H^* = 1.505 + \frac{4}{Re_{\theta_{ss}}} + (H - H_0)^2\left(\frac{0.04}{H} + 0.007\frac{\ln Re_{\theta_{ss}}}{\left(H - H_0 + \frac{4}{\ln Re_{\theta_{ss}}}\right)^2}\right) \qquad \text{si } H > H_0$$

et

$$H_0 = 4 \qquad \text{si } Re_{\theta_{ss}} < 400$$

$$H_0 = 3 + \frac{400}{Re_{\theta_{ss}}} \qquad \text{si } Re_{\theta_{ss}} \geq 400$$

Il existe peu de relations de fermeture pour le coefficient de dissipation dans la littérature car elles sont difficiles à obtenir (voir section 1.3.1). Une autre relation de fermeture pour C_D a cependant été étudiée au cours de la thèse. Elle a été utilisée par Mughal [65] et développée par Whitfield (équation (1.47)). Son expression est relativement simple mais elle ne semble pas toujours valable pour les faibles nombres de Reynolds, où elle prévoit un coefficient de dissipation négatif (voir section 1.3.2). Finalement, c'est donc la relation (2.33) qui a été choisie pour estimer le coefficient de dissipation longitudinal car elle semble la plus fiable.

Les coefficients de frottement C_{fs} obtenus pour les deux relations de fermeture et les coefficients de dissipation C_{Ds} correspondants sont tracés en fonction du facteur de forme pour différentes valeurs de $Re_{\theta_{ss}}$ sur la figure 2.8 et la figure 2.9. On observe que les relations de fermeture proposées par Ludwieg et Tillmann et White fournissent des valeurs de coefficient de frottement qui sont très proches pour une large gamme de $Re_{\theta_{ss}}$. En revanche, il est important de noter pour la suite que ces relations fournissent des résultats assez différents pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds (ici pour $Re_{\theta_{ss}} = 10$). La validité de ces relations pour de faibles nombres de Reynolds est donc incertaine. D'autre part, on peut remarquer que C_{fs} et C_{Ds} ont une dépendance en $Re_{\theta_{ss}}$ beaucoup plus faible que dans le cas laminaire où ils sont proportionnels à $1/Re_{\theta_{ss}}$. En revanche, le gradient de pression a globalement plus d'influence sur le coefficient de dissipation turbulent que sur le coefficient de dissipation laminaire. Enfin, on retrouve le fait que les relations de fermeture turbulentes ne permettent pas de modéliser un écoulement de couche limite décollée. Ceci se traduit par un coefficient de frottement turbulent qui reste toujours positif, contrairement au cas laminaire.

2.2.2. Relations de fermeture transversales

Relations de fermeture pour une couche limite laminaire

Pour modéliser la partie transversale de l'écoulement de couche limite laminaire, la littérature propose entre autres d'utiliser des profils de vitesse qui dépendent du profil de vitesse longitudinal. C'est le cas du profil de vitesse sélectionné dans cette thèse (voir [66]). Il s'écrit :

$$\frac{u_c}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|}(\eta) = \widehat{u}_c(\eta) = (A_c\eta + A_{1c}\eta^2)(1 - \widehat{u}_s(\eta)) \tag{2.34}$$

Cette expression admet les écoulements de retour. Le profil peut en revanche être simplifié en fixant $A_{1c} = 0$. Dans ce cas, il est valable uniquement pour des écoulements unidirectionnels c'est-à-dire sans courant de retour. C'est cette deuxième version qui a été choisie pour modéliser la vitesse

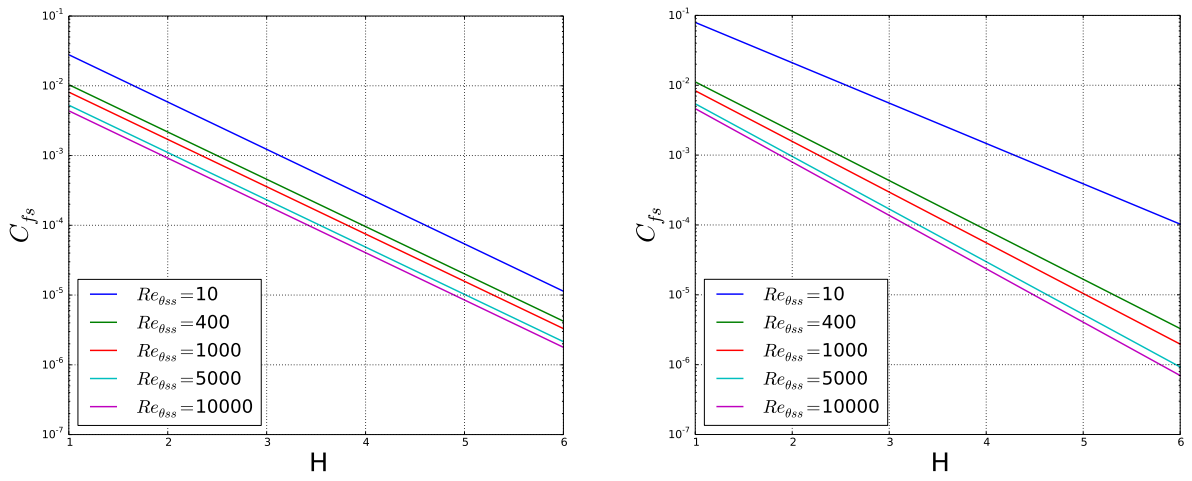


FIGURE 2.8. – Coefficients de frottement proposés par Ludwieg et Tillmann (à gauche) et par White (à droite) pour différentes valeurs de $Re_{\theta_{ss}}$ en fonction du facteur de forme H

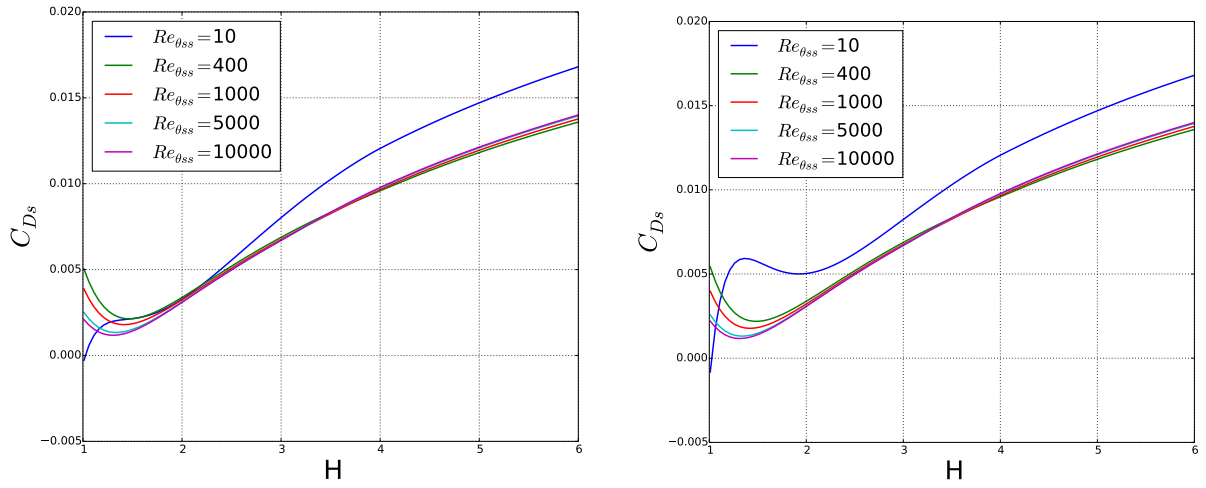


FIGURE 2.9. – Coefficients de dissipation calculés avec les C_{fs} donnés par Ludwieg et Tillmann (à gauche) et par White (à droite) pour différentes valeurs de $Re_{\theta_{ss}}$ en fonction du facteur de forme H

transverse car elle est plus simple. De plus, la modélisation précise des écoulements bidirectionnels n'est pas une priorité dans cette thèse. Le profil de vitesse transverse retenu s'écrit donc :

$$\frac{u_c}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|}(\eta) = \widehat{u}_c(\eta) = A_c\eta(1 - \widehat{u}_s(\eta)) \tag{2.35}$$

où $\eta = y/\delta$ et $\widehat{u}_s(\eta)$ est donné par (2.21). Ce type de profils de vitesse satisfait naturellement les conditions suivantes :

$$\eta = 0 : \qquad \widehat{u}_c = 0 \tag{2.36a}$$

$$\eta = 1 : \qquad \widehat{u}_c = 0 \tag{2.36b}$$

$$\eta = 1 : \qquad \forall n \leq p_s - 2 \quad \frac{\partial^n \widehat{u}_c}{\partial \eta^n} = 0 \tag{2.36c}$$

avec p_s donné en (2.20). Une condition supplémentaire est nécessaire pour exprimer A_c en fonction des variables primaires. Elle permet d'assurer la consistance du profil (2.35) avec la définition de δ_{1c}, et donc la consistance du système :

$$\delta_{1c} = \delta \int_0^1 -\widehat{u}_c(\eta)\,\mathrm{d}\eta \tag{2.37}$$

Remarque : Dans le repère $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})$ *lié aux lignes de courant extérieures,* $u_{ec} = 0$ *et la condition* (2.37) *est en fait la définition de* δ_{1c} *donnée en* (2.7a).

En substituant le profil de vitesse (2.35) dans la condition (2.37), on obtient la relation suivante :

$$\delta_{1c} = -A_c\delta \frac{p_s + 2 + 2A_s}{p_s(p_s + 1)(p_s + 2)} \tag{2.38}$$

Or, d'après (2.18) :

$$\delta = \delta_{1s} \frac{p_s(p_s + 1)}{p_s + A_s + 1} \tag{2.39}$$

On peut donc déterminer l'expression du coefficient A_c de manière à ce que le profil de vitesse ne dépende plus que des variables primaires du système :

$$\widehat{u}_c(\eta) = A_c\eta(1 - \widehat{u}_s(\eta)) \tag{2.40}$$

avec $\widehat{u}_s(\eta)$ donné par (2.21) et

$$A_c = -\frac{\delta_{1c}}{\delta_{1s}} \frac{(p_s + 1 + A_s)(p_s + 2)}{p_s + 2 + 2A_s} \tag{2.41}$$

Il est important de remarquer que, contrairement à δ_{1s} qui est toujours positif, le signe de δ_{1c} et de $\widehat{u}_c(\eta)$ dépend du gradient de pression transverse et bien sûr de l'orientation choisie pour le vecteur $\boldsymbol{c}$ par rapport au vecteur $\boldsymbol{s}$ lorsque le repère a été défini. Ici, les courants de retour n'étant pas autorisés, le signe de $\widehat{u}_c(\eta)$ est le même sur toute l'épaisseur de la couche limite. Il indique donc simplement le sens de l'écoulement transverse. Par conséquent, il n'a pas la même signification physique que le signe de $\widehat{u}_s(\eta)$ qui lui indique la présence ou non d'un décollement.

La norme du profil de vitesse adimensionnée $\widehat{u}_c$ divisée par δ_{1c}/δ_{1s} est tracée sur la figure 2.10 pour différentes valeurs du facteur de forme. Le profil de vitesse transverse diffère du profil longitudinal

(figure 2.4) principalement par son comportement à la frontière de la couche limite. En effet, $\widehat{u}_c$ s'annule en $y = \delta$ alors que $\widehat{u}_s$ vaut 1. En revanche, la condition de non-glissement à la paroi est respectée dans les deux cas. La vitesse transverse s'annule donc aux deux frontières de la couche limite. C'est ce qui fait qu'elle est globalement beaucoup plus faible que la vitesse longitudinale. Ceci appuie l'hypothèse que la partie transversale de l'écoulement joue un rôle mineur et qu'elle a peu d'influence sur l'écoulement global de couche limite. On peut donc penser que δ_{1c} est faible devant δ_{1s}, ce qui sera confirmé plus tard par les résultats numériques.

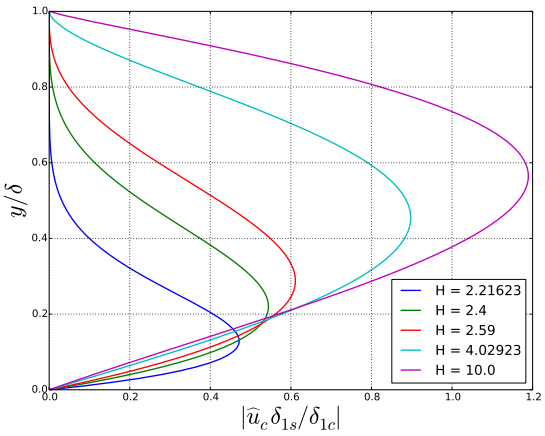


FIGURE 2.10. – Profils de vitesse transverse laminaires pour différentes valeurs de H

Grâce au profil de vitesse (2.40), les inconnues transverses peuvent maintenant être facilement déterminées. Les épaisseurs θ_{ij} et δ_{3ij} n'ont pas été calculées analytiquement car leur expression est très compliquée. Elles sont calculées numériquement, à la volée dans le code. En revanche, les expressions de C_{fc} et C_{Dc} ont été calculées analytiquement à partir de leur définition :

$$C_{fc} = \frac{\mu}{1/2\rho\delta|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|}\left(\frac{\partial\widehat{u}_c}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}$$
$$C_{Dc} = \frac{1}{\delta}\int_0^1 \frac{\nu}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|}\left(\frac{\partial\widehat{u}_c}{\partial\eta}\right)^2 \mathrm{d}\eta$$

On peut alors montrer que les relations de fermeture s'écrivent :

$$\frac{C_{fc}}{2}Re_{\theta_{ss}} = A_c\frac{\theta_{ss}}{\delta}$$
$$C_{Dc}Re_{\theta_{ss}} = \frac{A_c^2}{(2p_s-1)}\left(\frac{2A_s^2+(2p_s+1)A_s+(p_s-1)(2p_s+1)}{(2p_s-3)(2p_s+1)}\right)\frac{\theta_{ss}}{\delta}$$

avec $\dfrac{\theta_{ss}}{\delta} = \dfrac{p_s+1+A_s}{p_s(p_s+1)} - \dfrac{2A_s^2+2A_s(2p_s+1)+2p_s(2p_s+1)}{2p_s(2p_s-1)(2p_s+1)}$ donné par (2.19). Le détail des calculs pour établir les relations de fermeture est donné en annexe E.

La norme du coefficient de frottement C_{fc} divisé par δ_{1c}/δ_{1s} et le coefficient de dissipation C_{Dc} divisé par $(\delta_{1c}/\delta_{1s})^2$ sont tracés en fonction du facteur de forme pour différentes valeurs de $Re_{\theta_{ss}}$ sur la figure 2.11. Comme pour la partie longitudinale de l'écoulement laminaire, les coefficients C_{fc} et C_{Dc} varient en $1/Re_{\theta_{ss}}$ et sont donc assez fortement dépendants du nombre de Reynolds. En revanche, le coefficient de frottement est beaucoup moins sensible au gradient de pression, alors

que le coefficient de dissipation semble l'être un peu plus. La figure 2.11 confirme d'autre part que C_{fc} et C_{Dc} sont petits devant C_{fs} et C_{Ds} tracés sur la figure 2.5. En effet, on constate que les grandeurs $C_{fc}\delta_{1s}/\delta_{1c}$ et C_{fs} et $C_{Dc}(\delta_{1s}/\delta_{1c})^2$ et C_{Ds} sont du même ordre de grandeur. Or il a déjà été mentionné précédemment que le rapport δ_{1c}/δ_{1s} est censé être faible. Enfin, on constate que C_{fc} ne s'annule jamais ce qui confirme le fait que le profil de vitesse ne modélise pas les courants de retour.

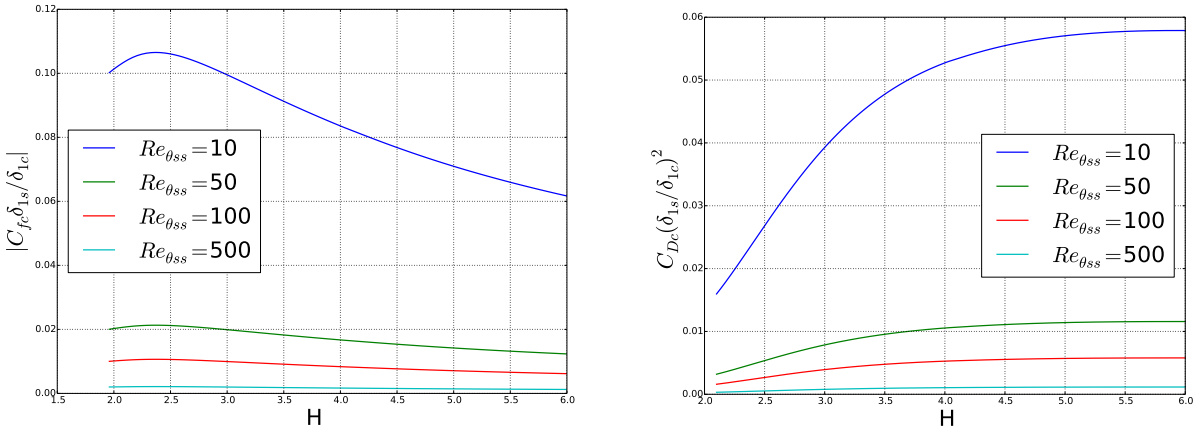


FIGURE 2.11. – Coefficient de frottement (à gauche) et coefficient de dissipation (à droite) transversaux pour différentes valeurs de $Re_{\theta_{ss}}$ en fonction du facteur de forme H

Relations de fermeture pour une couche limite turbulente

Faute de temps suffisant, en première approximation, l'influence du profil de vitesse transverse pour un écoulement turbulent a été négligée. On a donc posé :

$$\widehat{u}_c(\eta) = 0$$
$$C_{fc} = 0$$
$$C_{Dc} = 0$$

Ce choix est simpliste mais il reste malgré tout cohérent avec le fait que la partie transversale de l'écoulement est supposée avoir peu d'influence sur l'écoulement global de couche limite. En revanche, il est prévu dans le prolongement de cette thèse, d'utiliser un modèle plus évolué pour modéliser les profils de vitesse transverse dans un écoulement turbulent. Dans la littérature, l'approche la plus commune est de les exprimer en fonction de la vitesse longitudinale. Les deux modèles les plus fréquents utilisant cette approche ont été proposés par Johnston et Mager et sont détaillés dans la section 1.6.

2.2.3. Calcul des variables primaires

Les relations de fermeture établies dans la sous-section 2.2.1 et la sous-section 2.2.2 permettent d'exprimer toutes les inconnues en fonction des 3 variables primaires δ_{1s}, δ_{1c} et θ_{ss}. Or, contrairement à δ_{1s} et δ_{1c}, θ_{ss} n'est pas une variable résolue par le système (2.4). Elle n'est donc pas directement connue au début de chaque itération en temps. Elle peut malgré tout être déduite de

la troisième variable résolue par le système (2.4). Celle-ci s'écrit de la manière suivante :

$$tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}}) = |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2(\theta_{ss} + \theta_{cc})$$

or θ_{cc} est de la forme ($u_{ec} = 0$ par définition) :

$$\theta_{cc} = \delta \int_0^1 -\widehat{u}_c^2 \, \mathrm{d}\eta$$

et on a montré dans la sous-section 2.2.2 que $\widehat{u}_c$ dépendait uniquement de δ_{1s}, δ_{1c} et H (il est même nul selon nos hypothèses simplificatrices pour une couche limite turbulente). Donc on peut écrire que :

$$\frac{tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}})}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2} = \theta_{ss} + \delta \int_0^1 -\widehat{u}_c^2 \, \mathrm{d}\eta \tag{2.42}$$

Dans l'équation (2.42) le terme de gauche est connu et le terme de droite dépend uniquement de δ_{1s}, δ_{1c} et H, c'est-à-dire des trois variables primaires δ_{1s}, δ_{1c} et θ_{ss} puisque $H = \dfrac{\delta_{1s}}{\theta_{ss}}$. On a donc une équation à une inconnue qui est résolue de manière itérative à la volée dans le code pour déterminer θ_{ss} mais aussi H puisque $H = \dfrac{\delta_{1s}}{\theta_{ss}}$. Plus précisément, dans le cas d'une couche limite laminaire, l'équation (2.42) devient :

$$\frac{tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}})}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2} = \theta_{ss} + \delta \frac{{A_c}^2}{(2p_s - 1)p_s(2p_s + 1)} \left[1 + \frac{3A_s}{(p_s + 1)} + \frac{6{A_s}^2}{(p_s + 1)(2p_s + 3)}\right]$$

avec δ, A_c, A_s et p_s donnés respectivement par (2.23), (2.41), (2.22) et (2.20). Le détail du calcul de θ_{cc} est donné dans l'annexe E. Dans le cas d'une couche limite turbulente, θ_{cc} est nul donc on a simplement l'égalité suivante :

$$tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}}) = |\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2\theta_{ss}$$

En résumé, au début de chaque itération en temps, les variables primaires δ_{1s}, δ_{1c} et θ_{ss} sont calculées à partir des variables résolues $|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|\delta_{1s}$, $|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|\delta_{1c}$ et $|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2(\theta_{ss} + \theta_{cc})$ par le système (2.4) (on rappelle que $\tilde{\boldsymbol{q}}_e$ est une donnée du problème). Ensuite, ce système peut être fermé grâce aux relations de fermeture établies dans la sous-section 2.2.1 et la sous-section 2.2.2.

2.3. Établissement d'un critère de transition laminaire-turbulent

Le critère de transition utilisé dans cette méthode est un critère local. Il a été proposé par Drela[31] et il est basé sur le modèle d'Abu-Ghannam et Shaw (voir section 1.4). Le nombre de Reynolds de transition est calculé à partir du facteur de forme et du taux de turbulence :

$$Re_{\theta trans} = 155 + 89 \left[0.25 \tanh(\frac{10}{H - 1} - 5.5) + 1\right] \widetilde{n}^{1.25} \tag{2.43a}$$

$$\widetilde{n} = -8.43 - 2.4 \ln\left(\frac{Tu'}{100}\right) \tag{2.43b}$$

$$Tu' = 2.7 \tanh\left(\frac{Tu}{2.7}\right) \tag{2.43c}$$

où $Re_{\theta trans} = \dfrac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\theta_{ss,trans}}{\nu_e}$ est le nombre de Reynolds de transition et Tu est le taux de turbulence extérieure exprimé en %. Là encore, on suppose que la partie transversale de l'écoulement de couche limite a peu d'influence sur l'écoulement de couche limite global, c'est pourquoi $Re_{\theta trans}$ est basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement longitudinale θ_{ss}. La figure 2.12 montre l'évolution du nombre de Reynolds de transition $Re_{\theta trans}$ en fonction du facteur de forme pour différentes valeurs du taux de turbulence. Plus l'écoulement de couche limite est ralenti (H élévé), plus la transition laminaire-turbulent a lieu en amont ($Re_{\theta trans}$ faible). On retrouve aussi le fait que la turbulence extérieure a tendance à avancer la transition.

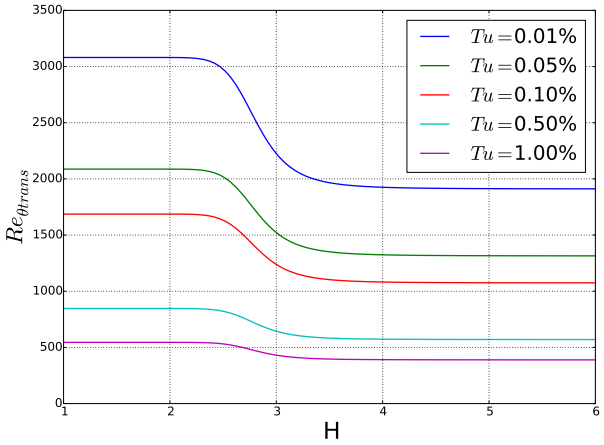


FIGURE 2.12. – $Re_{\theta trans}$ en fonction du facteur de forme H

Ce critère a principalement été choisi pour sa simplicité et parce qu'il a déjà été utilisé pour un code de givrage par Fuzaro Rafael et al[71]. Cependant, le choix du critère de transition sur paroi lisse n'a pas fait l'objet d'une étude très poussée dans cette thèse puisqu'il sera, en pratique, assez peu utilisé. En effet, la méthode est destinée à être implémentée dans une chaîne de calcul d'accrétion de givre. Les calculs seront donc principalement effectués sur paroi rugueuse et le modèle intégrale de couche limite développé dans ce chapitre doit donc être adapté pour prendre en compte les effets de rugosité. Ceci passe notamment par l'utilisation d'un autre critère de transition, adapté cette fois-ci aux parois rugueuses. L'adaptation du modèle pour prendre en compte les effets de rugosité est l'objet de la section suivante.

2.4. Adaptation du modèle pour prendre en compte les effets de rugosité

Le calcul de l'écoulement de couche limite dynamique permet d'estimer la contrainte de cisaillement pariétal qui est nécessaire à la modélisation tridimensionnelle du givrage, notamment pour le calcul du coefficient d'échange thermique et pour l'étude de l'écoulement en film de l'eau ruisselante. Mais pour obtenir une bonne estimation de cette grandeur, le calcul de la couche limite doit tenir compte des effets de la rugosité du givre et le modèle développé dans ce chapitre doit donc être adapté pour prendre en compte ces effets.

La rugosité influence l'écoulement de couche limite de deux manières différentes. D'abord, elle

a tendance à déstabiliser l'écoulement laminaire et accélère ainsi la transition laminaire-turbulent. D'autre part, elle modifie l'écoulement turbulent de la couche limite en engendrant un apport supplémentaire d'énergie cinétique turbulente. Ainsi, dans le modèle intégral dynamique, seuls le critère de transition et le coefficient de frottement turbulent doivent être modifiés pour prendre en compte les effets de rugosité (voir section 1.5). Le coefficient de frottement laminaire quant à lui n'est pas affecté car les rugosités ne sont pas censées avoir d'influence sur l'écoulement de couche limite laminaire, hormis l'avancement de la transition.

Critère de transition

En présence de rugosité, le critère de transition choisi est celui qui est déjà utilisé dans les chaînes de givrage ONICE et IGLOO [88] développées à l'ONERA (voir section 1.5). On définit un nombre de Reynolds rugueux Re_k, basé sur la hauteur de grain de sable équivalent k_s. On suppose que la transition laminaire-turbulent a lieu pour :

$$Re_k = \frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_e| k_s}{\nu_e} > 600 \tag{2.44}$$

où ν_e est la viscosité cinématique de l'air à l'extérieur de la couche limite. Une des difficultés aujourd'hui est de déterminer la hauteur de grain de sable équivalent k_s, qui n'est pas bien connue. Elle est généralement déterminée empiriquement, mais les relations utilisées diffèrent d'un code à l'autre. Pour les codes de givrage de l'ONERA, on prend pour les calculs sur des profils d'aile :

$$k_s = c/1000 \quad \text{et} \quad 0.2\ mm \leq k_s \leq 1.5\ mm \tag{2.45}$$

où c est la corde du profil. Dans cette thèse, k_s est aussi déterminé par (2.45).

Calcul du coefficient de frottement turbulent

Pour un écoulement de couche limite turbulent, il existe des relations qui permettent de calculer le coefficient de frottement rugueux en fonction des grandeurs intégrales calculées sur paroi lisse. La relation déjà utilisée par IGLOO2D et qui a donc été choisie pour cette méthode intégrale est la suivante [36] (voir section 1.5) :

$$\frac{C_{fs_r}}{2} = \frac{0.168}{(\ln(864\theta_{ss}/k_s + 2.568))^2} \tag{2.46}$$

Cette relation a été établie pour un régime pleinement rugueux et en supposant que la couche limite a la même épaisseur sur paroi lisse et sur paroi rugueuse. De plus, des hypothèses de plaque plane sans gradient de pression sont utilisées pour fixer les 2 constantes du dénominateur. Le coefficient de frottement rugueux longitudinal dépend uniquement de l'épaisseur de quantité de mouvement longitudinale θ_{ss} calculée sur paroi lisse et de la hauteur de grain de sable équivalent. En revanche, on peut remarquer que le coefficient de frottement C_{fs_r} est toujours positif et donc que la loi (2.46) ne permet pas de modéliser les décollements de couche limite. D'autre part, on suppose toujours que la partie transversale de l'écoulement a très peu d'influence sur l'écoulement de couche limite global. Ainsi, on peut considérer que le coefficient de frottement transverse est négligeable, comme sur paroi lisse :

$$C_{fc_r} = 0$$

Conclusion

Au cours de ce chapitre, un modèle intégral de couche limite dynamique 3D a été développé dans le but de répondre spécifiquement aux besoins d'un solveur d'accrétion dans une chaîne de simulation d'accrétion de givre. Ce modèle est basé sur une formulation instationnaire et conservative des équations intégrales de quantité de mouvement et d'énergie cinétique. La formulation instationnaire permet une résolution avec une marche en temps plutôt qu'en espace ce qui est plus simple à gérer sur des géométries complexes en 3 dimensions. Les relations utilisées pour fermer le système d'équations sont basées, pour la plupart, sur un profil de vitesse présumé. Ceci facilite le développement du modèle 3D et du modèle de couche limite thermique. De plus, le profil de vitesse laminaire longitudinal a été construit de manière à ce que le frottement à la paroi puisse être modélisé très précisément, en particulier dans la zone proche du bord d'attaque. La transition laminaire-turbulent peut être calculée soit par un critère adapté pour les parois lisses, soit par un critère rugueux. Enfin, une relation permettant de déduire le coefficient de frottement rugueux en fonction des grandeurs lisses a été adjointe afin de modéliser les effets de rugosité de paroi. Ce modèle intégral a donc été construit de telle manière qu'il permette de calculer précisément le coefficient de frottement sur des géométries complexes. En revanche, pour qu'il puisse être utilisé dans une chaîne de calcul d'accrétion de givre, il doit aussi pouvoir calculer les échanges thermiques à l'interface paroi/air ou glace/air. D'où la nécessité d'étendre ce modèle afin qu'il puisse également fournir la valeur du coefficient d'échange thermique.

3. Modélisation des échanges thermiques par l'extension du modèle intégral 3D

Sommaire

3.1. Développement d'un modèle thermique basé sur les grandeurs dynamiques . . . 65

3.1.1. Calcul des échanges de chaleur convectifs sur paroi lisse . . . 66

3.1.2. Adaptation du modèle thermique simplifié pour prendre en compte les effets de rugosité . . . 69

3.2. Développement d'un modèle thermique intégral . . . 70

3.2.1. Établissement de l'équation intégrale de l'énergie . . . 70

3.2.2. Établissement des relations de fermeture . . . 72

3.2.3. Adaptation du modèle intégral pour prendre en compte les effets de rugosité 76

La deuxième grande étape de ces travaux de thèse a été de compléter le modèle intégral dynamique par un modèle thermique. Ce dernier doit permettre d'obtenir le coefficient d'échange thermique qui est une variable d'entrée du solveur d'accrétion de givre. Pour ce faire, un premier modèle thermique simplifié, basé uniquement sur les grandeurs dynamiques et utilisé notamment par la chaîne de givrage 2D de l'ONERA, a été adapté. En effet, ce type de modèle est beaucoup plus simple à mettre en œuvre qu'un modèle intégral mais la précision attendue sur le coefficient d'échange est moins bonne et le domaine de validité moins étendu. C'est pourquoi un modèle plus complexe, basé sur l'équation intégrale de l'énergie, a été développé dans un deuxième temps. Par analogie avec la dynamique et pour que les deux modèles soient compatibles, les relations de fermeture ont été construites à partir d'un profil de température présumé.

3.1. Développement d'un modèle thermique basé sur les grandeurs dynamiques

La première approche développée dans cette thèse est la plus couramment utilisée par les chaînes de calculs d'accrétion de givre et notamment par IGLOO2D, dans le solveur de Méthode Intégrale Simplifiée SIM2D [88]. Cette méthode permet de déterminer très simplement les échanges de chaleur convectifs qui ont lieu entre la paroi (ou la glace) et l'air à partir des grandeurs dynamiques. Il faut noter que toutes les relations développées dans la littérature comme celles qui sont présentées dans cette section sont basées sur l'étude d'écoulements purement bidimensionnels. Le modèle thermique est donc construit à partir de ces relations en supposant que la partie transversale d'un écoulement de couche limite tridimensionnelle n'a aucun effet, ou un effet négligeable, sur les échanges thermiques en paroi. De plus, les relations de fermeture ont été établies en supposant que les conditions aux limites thermiques sont uniformes sur toute la paroi.

3.1.1. Calcul des échanges de chaleur convectifs sur paroi lisse

L'objectif du modèle thermique est de permettre de calculer le coefficient d'échange thermique qui est une variable d'entrée du solveur d'accrétion de givre. Celui-ci est calculé de la manière suivante :

$$h_{tc} = \rho_e c_{p_e} |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}| St \tag{3.1}$$

où ρ_e est la masse volumique de l'air et c_{p_e} est la capacité thermique massique à pression constante de l'air. Le nombre de Stanton St est déduit des grandeurs dynamiques, le plus souvent par des relations de type analogie de Reynolds. Il dépend donc du régime laminaire ou turbulent de la couche limite.

Expression du nombre de Stanton pour une couche limite laminaire

La méthode la plus simple pour calculer le nombre de Stanton pour une couche limite laminaire est d'utiliser l'analogie de Reynolds :

$$St = \frac{1}{2} C_{fs} \mathrm{Pr}^{-2/3} \tag{3.2}$$

où Pr est le nombre de Prandtl. Cependant, les conditions qui permettent d'établir cette loi sont assez restrictives. En particulier, elle n'est valable que pour un écoulement de plaque plane de température constante et sans gradient de pression. La méthode utilisée dans cette thèse, et proposée par Smith et Spalding [49, 75], est moins restrictive puisqu'elle est valable pour un écoulement autour d'un corps de forme arbitraire et de température constante. Elle est basée sur l'étude de solutions de similitudes pour des écoulements de type Falkner-Skan. On définit d'abord l'épaisseur de conduction Δ_{cond} comme suit :

$$\Delta_{cond} = \frac{k}{h_{tc}}$$

avec k la conductivité thermique de l'air. Smith et Spalding ont alors montré que l'épaisseur de conduction dépendait uniquement de l'évolution de la vitesse extérieure le long d'une ligne de courant :

$$(\Delta_{cond})^2 = \frac{11.68 \int_0^s \nu_e |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^{1.87} \, \mathrm{d}s}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^{2.87}} \tag{3.3}$$

où s représente la distance au point d'arrêt. Les coefficients numériques dans (3.3) ne sont valables que pour un nombre de Prandtl égal à 0.7. D'autre part, le nombre de Stanton s'écrit par définition :

$$St = \frac{h_{tc}}{\rho_e c_{p_e} |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|}$$

Or, sachant que le nombre de Prandtl vaut $\mathrm{Pr} = \dfrac{\mu_e c_{p_e}}{k}$, on en déduit que :

$$St = \frac{\nu_e}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}| \, \mathrm{Pr} \, \Delta_{cond}} \tag{3.4}$$

Finalement, en substituant (3.3) dans (3.4), le nombre de Stanton est donné par :

$$St = \frac{(11.68)^{-0.5}\nu_e\sqrt{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^{2.87}}}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\,\mathrm{Pr}\sqrt{\int_0^s \nu_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^{1.87}\,\mathrm{d}s}} \tag{3.5}$$

On peut alors remarquer que pour une couche limite laminaire, les échanges de chaleur convectifs ne dépendent pas des grandeurs intégrales de couche limite dynamique mais uniquement de la vitesse extérieure. Ceci est dû au fait que la méthode de Smith et Spalding est basée sur des solutions d'écoulements auto-similaires.

Il est important de noter que la loi (3.5) présente malgré tout une singularité au point d'arrêt. En effet, s et $\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}$ sont nuls à cet endroit et le numérateur et le dénominateur de la relation (3.5) sont tous les deux nuls. Ceci peut mener à des traitements numériques particuliers qui sont propres à chaque code pour éviter cette singularité. D'autre part, la loi (3.5) nécessite d'intégrer la quantité $|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^{1.87}$ le long de l'abscisse curviligne et à partir du point d'arrêt. Or s'il est assez simple de localiser le point d'arrêt en 2D, cela devient beaucoup plus compliqué en 3D. Dans ce dernier cas, comme pour la méthode intégrale, le point d'arrêt n'est pas localisé explicitement et l'équation suivante est résolue de façon stationnaire par une méthode de Gauss-Seidel afin de pouvoir calculer l'intégrale :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \tilde{\nabla}\cdot(\psi\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\psi}}) = 1 + \psi\tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\psi}}$$

où $\psi = \int_0^s \nu_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^{1.87}\,\mathrm{d}s$ et $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\psi}}$ est la vitesse locale. Elle s'écrit $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\psi}} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{s}}(s) = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{s}}/\left(\nu_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^{1.87}\right)$. Plus de détails sur la méthode pour calculer l'intégrale de $\nu_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^{1.87}$ en 3D sont donnés dans le rapport technique [70].

Expression du nombre de Stanton pour une couche limite turbulente

De la même manière que pour une couche limite laminaire, la méthode la plus simple pour calculer le nombre de Stanton pour une couche limite turbulente est d'utiliser l'analogie de Reynolds (3.2). En revanche, la méthode choisie dans cette thèse est valable pour une vitesse extérieure variable et elle s'avère plus précise que l'analogie de Reynolds pour le calcul du coefficient d'échange thermique. Elle a été proposée par Ambrok [49, 1] et elle est basée sur la résolution de l'équation intégrale de l'énergie stationnaire pour un écoulement bidimensionnel (pour laquelle le terme de dissipation a été négligé) :

$$\frac{\mathrm{d}\left[\rho_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|(T_p - T_e)\theta_{Ts}\right]}{\mathrm{d}s} = \rho_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|(T_p - T_e)St \tag{3.6}$$

où θ_{Ts} est l'épaisseur d'enthalpie :

$$\theta_{Ts} = \int_0^\infty \frac{u_s}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|}\frac{T_e - T}{T_e - T_p}\,\mathrm{d}y \tag{3.7}$$

En toute rigueur, l'épaisseur d'enthalpie est définie à partir de l'enthalpie totale mais Kays et Crawford considèrent des écoulements de gaz parfait à faible vitesse et dans ce cas, elle peut être définie par (3.7) (voir [49, p.71]). D'autre part, dans le cas d'un écoulement gazeux sur une plaque plane de température constante et sans gradient de pression (vitesse constante), une équation permettant d'exprimer le nombre de Stanton en fonction du nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur

d'enthalpie a été développée dans [49] :

$$St = 0.0125\mathrm{Pr}^{-0.5} {Re_{\theta_{Ts}}}^{-0.25} \tag{3.8}$$

avec $Re_{\theta_{Ts}} = |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\theta_{Ts}/\nu_e$. Même si, en toute rigueur, l'équation (3.8) est valable uniquement pour une vitesse extérieure et une température constantes, il a été montré expérimentalement que son domaine de validité est en fait beaucoup plus large [49]. Ainsi, le principe de la méthode d'Ambrok est de substituer la solution (3.8) dans l'équation intégrale de l'énergie (3.6) pour résoudre la couche limite thermique dans le cas d'une vitesse extérieure avec des gradients de vitesse modérés et d'une température de paroi variable. On obtient alors une équation de la forme :

$$\mathrm{d}[\rho_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|(T_p - T_e)\theta_{Ts}]^{1.25} \simeq 0.0156\mathrm{Pr}^{-0.5}{\mu_e}^{0.25}\rho_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|(T_p - T_e)^{1.25}\,\mathrm{d}s \tag{3.9}$$

L'épaisseur d'enthalpie θ_{Ts} est ensuite obtenue en intégrant l'équation (3.9) à partir du point de transition laminaire-turbulent donné par (2.43). Si $\theta_{Tstrans}$ et $|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|_{trans}$ sont l'épaisseur d'enthalpie et la vitesse extérieure au point de transition s_{trans}, alors on obtient :

$$\theta_{Ts} = \left(\frac{0.0156\mathrm{Pr}^{-0.5}{\mu_e}^{0.25}\displaystyle\int_{s_{trans}}^{s} \rho_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|(T_p - T_e)^{1.25}\,\mathrm{d}x}{(\rho_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|(T_p - T_e))^{1.25}} + \left(\frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|_{trans}}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|}\theta_{Tstrans}\right)^{1.25} \right)^{1/1.25} \tag{3.10}$$

avec

$$|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|_{trans}\theta_{Tstrans} = \int_0^{s_{trans}} \frac{\nu_e}{\mathrm{Pr}\Delta_{cond}}\,\mathrm{d}s \tag{3.11}$$

calculé à partir de l'équation (3.6) dans laquelle on substitue le nombre de Stanton donné par la relation laminaire (3.4). Pour obtenir (3.11), il faut ensuite résoudre cette équation en supposant que $(T_p - T_e)$ et ρ_e sont constantes (hypothèse plaque plane de température constante).

En pratique, la formule utilisée dans IGLOO2D a été légèrement modifiée. Elle s'écrit plutôt :

$$\theta_{Ts} = \left(\frac{0.0156\mathrm{Pr}^{-0.5}{\mu_e}^{0.25}\displaystyle\int_{s_{trans}}^{s} \rho_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|(T_p - T_e)^{1.25}\,\mathrm{d}s}{(\rho_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|(T_p - T_e))^{1.25}} \right)^{1/1.25} + \theta_{Tstrans} \tag{3.12}$$

Sur la base de l'expérience acquise avec la chaîne de calcul IGLOO2D, la formule modifiée (3.12) conduit en général à des formes de givre plus proches des formes expérimentales que la formule (3.10). C'est donc la formule (3.12) qui a été choisie afin que le modèle développé dans cette thèse soit le plus comparable possible à celui d'IGLOO2D. Finalement, le nombre de Stanton pour une couche limite turbulente est donné par la relation (3.8) dans laquelle θ_{Ts} est obtenu grâce à l'expression (3.12). En pratique, il n'est pas indispensable d'imposer une valeur pour la température de paroi si on choisit que $T_p - T_e = cte$. Dans ce cas, les termes $(T_p - T_e)^{1.25}$ se simplifient au numérateur et au dénominateur dans l'expression (3.12) et θ_{Ts} ne dépend plus de la différence de tempétaure. C'est ce qui est fait dans le code.

On peut remarquer que, comme pour le cas laminaire, cette méthode approchée ne fait pas intervenir les grandeurs intégrales dynamiques dans le calcul du coefficient d'échange thermique car elle résout uniquement l'équation intégrale de l'énergie.

3.1.2. Adaptation du modèle thermique simplifié pour prendre en compte les effets de rugosité

De la même manière que pour le modèle dynamique, le modèle thermique doit être adapté pour pouvoir prendre en compte les effets de rugosité de surface. Comme il a déjà été mentionné dans la section 2.4, ceci implique de modifier le calcul du nombre de Stanton uniquement pour la couche limite turbulente. Ensuite, le coefficient d'échange thermique est toujours calculé grâce à l'équation (3.1) :

$$h_{tc} = \rho_e c_{p_e} |\tilde{\boldsymbol{q}}_e| St$$

La transition laminaire-turbulent sur paroi rugueuse, quant à elle, est déjà déterminée par le critère (2.44).

Calcul du coefficient d'échange thermique turbulent

La relation choisie pour calculer le nombre de Stanton sur paroi rugueuse est utilisée notamment par Makkonen [55]. Elle a été sélectionnée pour ce modèle parce qu'elle est déjà utilisée dans IGLOO2D et qu'elle fournit des valeurs de coefficients d'échange souvent jugées satisfaisantes au regard des formes de givre produites. Elle a été obtenue en supposant que la couche limite thermique et la couche limite dynamique ont la même épaisseur [49]. Elle s'écrit :

$$St = \frac{C_{fs_r}/2}{\mathrm{Pr}_t + \sqrt{C_{fs_r}/2}/St_k} \tag{3.13}$$

avec Pr_t le nombre de Prandtl turbulent et C_{fs_r} est donné par (2.46). St_k est le nombre de Stanton basé sur la vitesse de frottement. Il modélise l'impact de la rugosité sur le déplacement de la zone logarithmique de la couche limite par rapport à la paroi lisse, en régime pleinement rugueux :

$$St_k = 1.92\mathrm{Pr}^{-0.8} {Re_k}^{-0.45}$$

où Re_k est le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de frottement u_τ et la hauteur de grain de sable équivalent k_s :

$$Re_k = \frac{k_s u_\tau}{\nu_e} \qquad \text{avec} \qquad u_\tau = |\tilde{\boldsymbol{q}}_e| \sqrt{\frac{C_{fs_r}}{2}}$$

Finalement, le modèle thermique simplifié proposé dans la section 3.1 permet de calculer le coefficient d'échange thermique grâce à des expressions analytiques faisant intervenir les grandeurs extérieures à la couche limite et certaines grandeurs dynamiques de la couche limite pour les cas rugueux. Les méthodes de ce type ont l'avantage d'être très simples et extrêmement rapides. C'est pourquoi elles sont utilisées par de nombreuses chaînes de calculs d'accrétion de givre [55, 88, 71, 29, 78] et elles fournissent en général de bons résultats dans des conditions de paroi non chauffée. En revanche, ces méthodes supposent en général que les conditions aux limites thermiques sont uniformes sur toute la paroi. Elles ne sont donc pas valables dans n'importe quelles conditions. Par exemple, elles ne sont pas adaptées pour des calculs sur des parois partiellement chauffées (dégivrage électrothermique). De plus, les relations de fermeture de ce type de modèles sont basées sur l'étude d'écoulements de couche limite purement bidimensionnels voire d'écoulements de plaque plane. Bien qu'elles puissent être appliquées en 3D en supposant que la partie transversale de l'écoulement n'a qu'un effet négligeable, leur application à un cas purement 3D n'est pas envisageable. C'est pourquoi il est préférable d'établir un modèle intégral basé sur l'équation intégrale de l'énergie, dont le

domaine de validité est a priori bien plus large.

3.2. Développement d'un modèle thermique intégral

3.2.1. Établissement de l'équation intégrale de l'énergie

Le modèle thermique intégral a été développé sous les mêmes hypothèses que le modèle dynamique (voir section 2.1). On rappelle en particulier que dans cette thèse, l'écoulement de couche limite est supposé incompressible dans le sens où la masse volumique est considérée comme constante. Cette hypothèse est plus restrictive qu'en dynamique mais elle permet de traiter dans un premier temps des écoulements de couche limite sans chauffage important de paroi. Il est bien sûr envisagé, dans le futur, d'étendre ce modèle au cas d'une couche limite à densité variable. D'autre part, les effets de courbure sont négligés. De plus, l'écoulement extérieur est connu (notamment $\boldsymbol{q_e}$ et T_e) et obtenu par un calcul Euler. On suppose que c'est un écoulement de fluide parfait stationnaire et irrotationnel. On considère enfin que l'air obéit à l'équation d'état des gaz parfaits et donc que l'enthalpie n'est fonction que de la température :

$$dh = c_p dT$$

De plus, si on admet que la chaleur spécifique c_p de l'air est constante et égale à 1005 J.kg^{-1}.K^{-1} jusqu'à une température de l'ordre de 500 K, alors l'enthalpie est directement proportionnelle à la température (à une constante additive près qu'on peut supposer nulle sans perte de généralité) :

$$h = c_p T \tag{3.14}$$

Le principe pour établir le modèle thermique intégral est le même que pour le modèle dynamique. L'équation différentielle de l'énergie 3D, incompressible et instationnaire constitue la base du modèle thermique intégral. Comme dans le chapitre 2, l'équation est d'abord établie dans un système de coordonnées $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, adapté à la géométrie du problème mais relativement général. La seule contrainte est que $\boldsymbol{y}$ est la direction normale à la paroi. Comme la masse volumique est supposée constante, on choisit de travailler avec une équation sur la température statique T, plus simple à manipuler qu'une équation sur l'enthalpie d'arrêt h_i. En tenant compte de l'hypothèse (3.14), l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{1}{\rho c_p}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{\rho c_p}\left(u_x \frac{\partial P}{\partial x} + u_z \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho c_p}\left(\tau_{xy}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zy}\frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \tag{3.15}$$

où $\boldsymbol{q} = (u_x, u_y, u_z)$ est le vecteur vitesse, ρ est la masse volumique de l'air et P est la pression. Le flux de chaleur est défini par $\Phi = -k\dfrac{\partial T}{\partial y}$ où k est la conductivité thermique. Enfin, les composantes du vecteur contrainte de cisaillement $\boldsymbol{\tau}$ s'écrivent $\tau_{:y} = \mu\frac{\partial u_:}{\partial y}$ pour un écoulement laminaire ou $\tau_{:y} = \mu\frac{\partial u_:}{\partial y} - \rho < u_:{}' u_y{}' >$ pour un écoulement turbulent avec μ la viscosité dynamique de l'air.

L'équation intégrale 3D est ensuite obtenue en intégrant l'équation (3.16) dans la direction normale à la paroi, sur toute l'épaisseur de la couche limite :

$$T_e \times [\text{équation de continuité (2.1a)}] - [\text{équation de l'énergie (3.15)}] \tag{3.16}$$

où T_e est la température de l'écoulement à l'extérieur de la couche limite. Les termes de gradient de pression peuvent être simplifiés en supposant que l'écoulement extérieur est irrotationnel. Le

lecteur est renvoyé à l'annexe A pour le détail de l'obtention de l'équation intégrale. En supposant que l'écoulement extérieur est un écoulement de fluide parfait stationnaire dont l'enthalpie totale est constante, l'équation intégrale de l'énergie s'écrit, sous sa forme conservative, de la manière suivante :

$$\frac{\partial((T_e - T_p)\delta_{1T})}{\partial t} + \tilde{\nabla} \cdot ((T_e - T_p)|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\boldsymbol{\theta_T}) = -\frac{\Phi_p}{\rho c_p} - \frac{1}{c_p}|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3 C_D \tag{3.17}$$

Les variables de cette équation sont définies comme suit :

$$(T_e - T_p)\delta_{1T} = \int_0^\infty (T_e - T)\,\mathrm{d}y \tag{3.18a}$$

$$(T_e - T_p)|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\boldsymbol{\theta_T} = \begin{pmatrix} (T_e - T_p)|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\theta_{Tx} \\ (T_e - T_p)|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\theta_{Tz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^\infty u_x(T_e - T)\,\mathrm{d}y \\ \int_0^\infty u_z(T_e - T)\,\mathrm{d}y \end{pmatrix} \tag{3.18b}$$

$$\Phi_p = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{3.18c}$$

$$C_D = \frac{1}{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3}\int_0^\infty \boldsymbol{\tau_p} \cdot \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{q}}}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{3.18d}$$

avec $\tilde{\boldsymbol{q}} = (u_x, u_z)$ le vecteur vitesse dans le plan tangent à la paroi. Le détail des calculs permettant d'obtenir l'équation intégrale (3.17) est donné en annexe A. L'équation modélise le gain (ou la perte) de débit d'enthalpie dû à la quantité de chaleur transmise par conduction au contact de la paroi et à la quantité d'énergie cinétique dissipée en chaleur par effet visqueux dans toute l'épaisseur de la couche limite représentée par le terme C_D. Ce terme de dissipation intervient aussi dans l'équation intégrale de l'énergie cinétique, il est donc déjà connu par la résolution de la couche limite dynamique.

Comme dans le cas de la couche limite dynamique, l'équation intégrale de l'énergie ainsi obtenue possède trop d'inconnues. Elle doit donc être fermée en reliant toutes ces inconnues à une seule variable primaire (les variables dynamiques sont supposées déjà connues). Pour cette étude, la variable primaire choisie est δ_{1T} puisqu'elle est obtenue de manière directe à partir de la variable résolue $(T_e - T_p)\delta_{1T}$. D'autre part, on constate que le coefficient d'échange thermique h_{tc}, qui doit être une variable de sortie du solveur, n'apparaît pas dans l'équation intégrale (3.17). En revanche, h_{tc} dépend directement du flux pariétal Φ_p et de la température de paroi T_p. Il s'écrit :

$$h_{tc} = \frac{\Phi_p}{(T_p - T_r)}$$

où T_r est la température de récupération. On suppose que la température de récupération s'exprime de la manière suivante :

$$T_r = T_e\left(1 + r\frac{(\gamma - 1)}{2}{M_e}^2\right) \tag{3.19}$$

avec r le facteur de récupération. Il vaut $r = Pr^{1/2}$ pour un écoulement laminaire et $r = Pr^{1/3}$ pour un écoulement turbulent. On peut alors déduire facilement la valeur du coefficient d'échange à partir de la résolution de l'équation intégrale grâce à laquelle T_p et Φ_p sont connus. Pour éviter de faire une hypothèse sur la valeur de la température de récupération, une méthode plus précise

pour calculer h_{tc} serait d'effectuer deux calculs différents :

$$\text{calcul n°1 :} \qquad h_{tc} = \frac{\Phi_{p_1}}{(T_{p_1} - T_r)}$$
$$\text{calcul n°2 :} \qquad h_{tc} = \frac{\Phi_{p_2}}{(T_{p_2} - T_r)}$$

On peut alors résoudre le système de deux équations à deux inconnues qui sont h_{tc} et T_r. C'est la méthode qui a été utilisée dans cette thèse (voir section 6.1) pour calculer le coefficient d'échange car elle est plus précise.

3.2.2. Établissement des relations de fermeture

Dans la chaîne IGLOO2D, les calculs de couche limite thermique intégrale seront donc effectués à température de paroi imposée. Ceci permettra d'en déduire le flux correspondant et donc de calculer le coefficient d'échange thermique. C'est pourquoi les relations de fermeture sont établies en considérant un écoulement sur une paroi de température constante T_p.

Dans la sous-section 3.2.1, l'équation intégrale de l'énergie a été établie dans un repère général $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. Mais comme pour le chapitre 2, on se place maintenant, et pour toute la suite du chapitre, dans le repère lié aux lignes de courant extérieures $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})$ schématisé sur la figure 2.1. Ceci permet l'utilisation de relations de fermeture basées sur l'étude d'écoulements bidimensionnels. En effet, on suppose que la partie transversale de l'écoulement n'a que peu d'influence sur le comportement de l'écoulement global de couche limite et que la partie longitudinale se comporte comme un écoulement de couche limite bidimensionnel. Contrairement à la méthode simplifiée, la partie transversale de l'écoulement joue malgré tout un rôle dans la résolution de l'équation intégrale à travers le terme $(T_e - T_p)|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|\theta_{Tc} = \int_0^\infty u_c(T_e - T)\,\mathrm{d}y$, où u_c est la composante transverse de la vitesse dans la couche limite.

Relations de fermeture pour une couche limite laminaire

Par analogie avec la couche limite dynamique, le profil de température laminaire utilisé dans cette thèse a une forme similaire à celle du profil de vitesse laminaire longitudinal :

$$\widehat{\Theta}(\xi) = \frac{T_e - T}{T_e - T_p}(\xi) = (1 + A_T\xi)(1 - \xi)^{q-1} \qquad \text{avec} \qquad \xi = \frac{y}{\delta_T} \tag{3.20}$$

où δ_T est une estimation de l'épaisseur de couche limite thermique. Plus précisément, $y = \delta_T$ est la distance à partir de laquelle $T = T_e$. En toute rigueur, cette condition s'applique uniquement quand y tend vers l'infini mais on suppose, comme dans le cas dynamique, que cette condition peut s'appliquer à partir de $y = \delta_T$ sans que l'erreur commise ne soit significative. Le profil de température (3.20) ainsi défini satisfait naturellement les conditions limites suivantes :

$$\xi = 0 : \qquad \widehat{\Theta} = 1 \tag{3.21a}$$
$$\xi = 1 : \qquad \widehat{\Theta} = 0 \tag{3.21b}$$
$$\xi = 1 : \qquad \forall n \leq q - 2 \quad \frac{\partial^n \widehat{\Theta}}{\partial \xi^n} = 0 \tag{3.21c}$$

La condition (3.21a) est une condition de Dirichlet à la paroi. Les conditions (3.21b) et (3.21c) devraient, en toute rigueur, s'appliquer pour y qui tend vers l'infini mais elles ont été projetées en $y = \delta_T$. Comme pour le profil de vitesse, q doit être strictement supérieur à 2 par construction, mais il n'est pas nécessairement entier. Le nombre de dérivées qui s'annulent en $\xi = 1$ est donné par la partie entière de $q - 2$.

Trois conditions supplémentaires sont nécessaires pour exprimer A_T, q, et δ_T en fonction de δ_{1T}, la variable primaire de l'équation intégrale de l'énergie. Les deux premières conditions sont les suivantes :

$$\left(\frac{\partial^2 \widehat{\Theta}}{\partial \xi^2}\right)_{\xi=0} = \frac{\rho_e |\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^4 \left({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2\right) {\delta_T}^2}{4k\nu_e(T_e - T_p)} \tag{3.22a}$$

$$\delta_{1T} = \delta_T \int_0^1 \widehat{\Theta} \, \mathrm{d}\xi \tag{3.22b}$$

La condition (3.22a) est obtenue en écrivant l'équation locale de l'énergie (3.15) en $y = 0$:

$$0 = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{y=0} + \mu_p \left(\frac{\partial u_s}{\partial y}\right)^2_{y=0} + \mu_p \left(\frac{\partial u_c}{\partial y}\right)^2_{y=0}$$

On sait de plus que :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = -k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{y=0} = k \frac{(T_e - T_p)}{{\delta_T}^2} \left(\frac{\partial^2 \widehat{\Theta}}{\partial \xi^2}\right)_{\xi=0}$$

et

$$\left(\frac{\partial u_s}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2 C_{fs}}{2\nu_p} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial u_c}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2 C_{fc}}{2\nu_p}$$

On suppose de plus que ν est constant dans la couche limite et donc que $\nu_p = \nu_e$. De plus, le coefficient de frottement est connu grâce au calcul de couche limite dynamique. La condition (3.22b), quant à elle, est essentielle pour assurer la consistance du modèle avec la définition de la variable primaire δ_{1T}. En substituant le profil de température (3.20) dans les conditions (3.22a) et (3.22b), on peut écrire :

$$A_T = \frac{4(q-1)(q-2)k\nu_e(T_e - T_p) - \rho_e |\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^4 \left({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2\right) {\delta_T}^2}{8(q-1)k\nu_e(T_e - T_p)} \tag{3.23a}$$

$$\delta_{1T} = \frac{\delta_T(q + 1 + A_T)}{q(q+1)} \tag{3.23b}$$

Dans le cas où q est connu (il sera déterminé par la suite), si on substitue la condition (3.23a) dans (3.23b), on obtient une équation sur δ_T qui peut être résolue numériquement, à la volée dans le code :

$$\delta_{1T} = \frac{12q(q-1)k\nu_e(T_e - T_p)\delta_T - \rho_e |\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^4 \left({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2\right) {\delta_T}^3}{8q(q-1)(q+1)k\nu_e(T_e - T_p)} \tag{3.24}$$

Une fois δ_T connu, on peut calculer A_T et le profil de température est alors complètement déterminé. Plus de détails sur la dérivation du profil de température sont donnés en annexe C.

Une des limites du modèle est qu'il n'est pas valable pour une température de paroi inférieure à la température de l'écoulement extérieur (c'est-à-dire $T_p < T_e$). En effet, pour que le profil de température existe et soit physique, il faut que l'équation (3.24) fournisse une épaisseur de couche limite thermique positive pour tout δ_{1T} positif. C'est le cas lorsque $T_p > T_e$ puisque la fonction $\delta_{1T}(\delta_T)$ de (3.24) est alors monotone, croissante et passe par l'origine. En revanche, ce n'est pas le cas pour $T_p < T_e$. La fonction n'est plus monotone et il n'existe pas toujours de solution de δ_T positive pour δ_{1T} positif (voir annexe C pour plus de détails). En pratique, ceci n'est pas trop contraignant si le modèle est destiné à être utlisé pour des simulations d'accrétion de givre. En effet, la quasi totalité des cas rencontrés correspondent soit à des cas de paroi chauffée où $T_p \gg T_e$, soit à des cas avec une condition de paroi adiabatique où $T_p = T_r > T_e$, voire à des cas avec une condition isotherme $T_p = T_{fusion} > T_e$.

Enfin, la détermination de l'exposant q du profil de température est basée sur l'analyse de solutions obtenues pour des écoulements auto-similaires de type Falkner-Skan [49, pp.166-169]. Ces écoulements sont semblables à ceux utilisés pour construire le profil de vitesse laminaire longitudinal (voir sous-section 2.2.1) et sont obtenus pour des vitesses extérieures de la forme $|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}| = Cs^m$. De plus, les propriétés du fluide sont supposées constantes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas de la température. D'autre part, la vitesse est supposée suffisamment faible pour que le terme de dissipation visqueuse dans l'équation de l'énergie soit négligeable. Dans ces conditions, on peut obtenir des solutions quasi-exactes pour les profils de température et montrer que pour m et Pr fixés on a :

$$St\mathrm{Pr}{Re_s}^{1/2} = cte \tag{3.25}$$

avec $St = \dfrac{\Phi_p}{\rho_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|c_p(T_p - T_e)}$.

Remarque : Habituellement, le nombre de Stanton dépend de la différence de température $T_p - T_r$ mais, comme il a déjà été mentionné, l'étude des écoulements auto-similaires se fait dans des conditions particulières. On a notamment supposé que la vitesse est suffisamment faible pour que le terme de dissipation visqueuse soit négligeable. Dans ces conditions, la température de récupération est approximativement égale à la température extérieure et le nombre de Stanton dépend donc de la différence de température $T_p - T_e$.

Ainsi, pour Pr = 0.7 (valeur du nombre de Prandtl pour l'air), deux valeurs de m ont été sélectionnées. Pour chacune de ces valeurs, des simulations numériques ont été réalisées avec le code de couche limite intégrale en faisant varier q jusqu'à obtenir la solution quasi-exacte (3.25). Les valeurs de m choisies sont celles correspondant à un écoulement de point d'arrêt bidimensionnel et à un écoulement de plaque plane car ce sont deux cas de référence. Les résultats obtenus sont répertoriés dans le tableau ci-dessous :

Configuration	m	$St\mathrm{Pr}{Re_s}^{1/2}$	q	H_{num}
écoulement de point d'arrêt	1.0	0.496	3.69	2.22048
écoulement de plaque plane	0.0	0.292	3.25	2.59294

où H_{num} est la valeur du facteur de forme obtenue numériquement pour la configuration considérée.

Remarque : Les solutions de similitude sont obtenues pour des écoulements où le terme de dissipation est négligeable. Il a donc aussi été négligé dans l'équation intégrale de l'énergie (3.17) et dans

le profil de température pour lequel la condition (3.22a) *devient* $\left(\frac{\partial^2 \widehat{\Theta}}{\partial \xi^2}\right)_{\xi=0} = 0$ *et* A_T *se simplifie en* $A_T = \frac{q-2}{2}$.

Une approximation linéaire a ensuite permis de déduire q en fonction de H. Ce sont les valeurs numériques du facteur de forme qui ont été utilisées pour l'approximation linéaire. De plus, par construction, q doit rester strictement supérieur à 2, d'où :

$$q(H) = max\left[(-1.181319H + 6.313094), (2+\epsilon)\right] \tag{3.26}$$

avec ϵ très petit. En pratique il est imposé à 0.01 dans le code. L'exposant q a donc été déterminé de manière à ce que le modèle colle aux solutions quasi-exactes de référence obtenues pour des écoulements auto-similaires. On fait alors l'hypothèse que le profil de température ainsi obtenu est généralisable à tout type d'écoulements. La fonction $q(H)$ pourrait par la suite être améliorée en l'ajustant sur un plus grand nombre de solutions de similitude.

Finalement, le profil de température peut être exprimé uniquement en fonction de δ_{1T} et des grandeurs dynamiques :

$$\widehat{\Theta}(\xi) = (1 + A_T\xi)(1-\xi)^{q-1} \qquad \text{avec} \qquad \xi = \frac{y}{\delta_T} \tag{3.27}$$

où A_T est donné par (3.23a), q est donné par (3.26) et δ_T est résolu numériquement à partir de (3.24).

Grâce au profil de température, Φ_p peut être facilement calculé à partir de sa définition :

$$\Phi_p = -k\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{k(T_e - T_p)}{\delta_T}\left(\frac{\partial \widehat{\Theta}}{\partial \xi}\right)_{\xi=0}$$

On peut alors montrer que :

$$\Phi_p = \frac{k(T_e - T_p)}{\delta_T}(A_T - q + 1) \tag{3.28}$$

D'autre part, les termes $(T_e - T_p)|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\theta_{Ts}$ et $(T_e - T_p)|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\theta_{Tc}$ sont intégrés numériquement par une méthode de Simpson à partir du profil de température (3.27) et des profils de vitesse (2.21) et (2.40).

En pratique, le profil de température qui a été implémenté dans le code possède une condition de paroi mixte de type $\Phi = \Phi_0 + h_0(T_0 - T)$ au lieu d'un condition de température de paroi imposée. Les paramètres Φ_0, h_0 et T_0 sont imposés par l'utilisateur. Ceci rend le modèle plus général et permettrait par la suite d'étudier des écoulements avec une condition de Neumann en paroi ($h_0 = 0$) de type paroi adiabatique ou flux pariétal imposé et non nul. En revanche, dans cette thèse, l'étude du modèle thermique n'est faite qu'avec une température de paroi imposée. Ceci est obtenu en prenant $\Phi = 0$ et $h_0 \longrightarrow \infty$ ($h_0 = 10^{20}$ dans le code) et dans ce cas, le profil de température obtenu est équivalent à celui présenté dans cette sous-section. La formulation du profil de température avec une condition mixte telle qu'elle est implémentée dans le code est donnée dans l'annexe D.

Relations de fermeture pour une couche limite turbulente

L'établissement des relations de fermeture turbulentes n'a pas été traité au cours de cette thèse et fait partie des perspectives. Elles seront basées, comme en laminaire, sur un profil de température présumé. D'autre part, la transition laminaire-turbulente pour une condition de paroi lisse sera déterminée par le critère (2.43) détaillé dans la section 2.3.

3.2.3. Adaptation du modèle intégral pour prendre en compte les effets de rugosité

L'adaptation du modèle thermique intégral pour prendre en compte les effets de rugosité n'a pas été traitée au cours de cette thèse et fait partie des perspectives. Il est prévu d'une part de déterminer la transition laminaire-turbulent par le critère rugueux (2.44) détaillé dans la section 2.4. D'autre part, deux approches différentes sont envisagées pour calculer les grandeurs caractéristiques de la couche limite sur paroi rugueuse. Une première solution serait d'établir des relations exprimant les grandeurs rugueuses en fonction des grandeurs lisses. Ainsi, le calcul intégral serait effectué sur paroi lisse dans tous les cas puis, si besoin, les grandeurs rugueuses seraient déduites des grandeurs lisses en fin de calcul. Une autre solution serait de résoudre directement les équations de couche limite sur paroi rugueuse, c'est-à-dire avec des relations de fermeture qui tiennent compte des effets de rugosité. Cette seconde solution semble plus complexe à mettre en œuvre même si on s'attend à ce qu'elle soit plus précise. Dans les deux cas, il est prévu d'utiliser les travaux d'Aupoix [4] et de les adapter au modèle développé ici. Ceux-ci permettraient d'étendre le domaine de validité des modèles de rugosité par rapport à la sous-section 3.1.2 et de mieux modéliser la complexité de la physique du transfert de chaleur sur paroi rugueuse.

Conclusion

Au cours de ce chapitre, deux modèles thermiques différents ont été développés en complément du modèle dynamique construit dans le chapitre 2. Pour le modèle le plus simple, le coefficient d'échange thermique est directement déduit des grandeurs dynamiques grâce à des relations qui sont basées sur l'étude d'écoulements purement 2D et qui sont couramment utilisées dans les codes de givrage 2D actuels. Ce modèle a l'avantage d'être très simple mais repose sur des hypothèses fortes qui restreignent son domaine de validité. Le deuxième modèle développé dans le cadre de cette thèse est basé sur la résolution de l'équation intégrale de l'énergie en 3D. Les relations de fermeture laminaires sont basées sur un profil de température construit par analogie avec le profil de vitesse pour la couche limite dynamique, et grâce à l'étude d'écoulements auto-similaires. Les relations de fermeture turbulentes n'ont en revanche pas encore été développées. Ce second modèle est plus complexe mais plus général et plus adapté à la résolution des couches limites tridimensionnelles puisqu'il est basé sur la résolution d'une équation 3D. Il offre aussi de très nombreuses possibilités d'amélioration et de généralisation qui pourrait faire l'objet de travaux ultérieurs.

À ce stade, nous disposons donc d'un modèle intégral 3D pour modéliser les couches limites dynamique et thermique. Il fournit notamment le coefficient de frottement et le coefficient d'échange thermique qui sont nécessaires pour un calcul d'accrétion de givre. Pour résoudre numériquement ce modèle, il faut mettre en œuvre une méthode numérique robuste et adaptée à des géométries complexes sur maillages surfaciques non structurés. Le chapitre suivant présente donc un état de l'art sur les méthodes numériques de résolutions des équations intégrales de couche limite.

Deuxième partie .

Résolution numérique des équations intégrales de couche limite

4. État de l'art sur les méthodes numériques de résolution des équations intégrales de couche limite

Sommaire

4.1. Rappels sur la nature des équations de couche limite 79
4.2. Présentation de la singularité de Goldstein et des problèmes rencontrés pour résoudre la couche limite décollée 80
4.3. Rappels sur les méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations intégrales de couche limite 83
4.4. Présentation des différentes méthodes de couplage entre l'écoulement de couche limite et l'écoulement de fluide parfait 84

L'objectif de cette deuxième partie du manuscrit est de présenter la méthode numérique qui a été développée et mise en œuvre pour résoudre le modèle intégral de couche limite établi dans les chapitres 2 et 3 de la première partie. Ce chapitre expose donc les principales études présentes dans la littérature qui s'avèrent utiles pour répondre à cet objectif. Ainsi, après un bref rappel sur la nature des équations de couche limite, nous présentons la singularité de Goldstein et les problèmes rencontrés par les auteurs pour calculer les couches limites décollées. Nous exposons ensuite les différentes méthodes numériques utilisées dans la littérature pour résoudre les équations intégrales de couche limite et les différentes méthodes de couplage fluide parfait/fluide visqueux, entre l'écoulement extérieur et l'écoulement de couche limite.

4.1. Rappels sur la nature des équations de couche limite

En analysant les équations de couche limite laminaire tridimensionnelle incompressible et stationnaire sous leur forme différentielle, on peut montrer que toutes les racines du déterminant caractéristique sont réelles et confondues, ce qui signifie que le système est parabolique [26]. Les surfaces caractéristiques, qui sont normales à la paroi, sont principalement influencées par les termes visqueux et donc par le caractère diffusif des équations, ce qui empêche d'apprécier la structure de l'écoulement dans ses détails. Une analyse plus fine de la nature du système peut être obtenue en étudiant les sous-caractéristiques du système. Celles-ci ont été identifiées comme étant les surfaces normales à la paroi et les surfaces de courant. Ainsi, une perturbation introduite en un point P dans la couche limite va d'abord se propager instantanément sur une ligne AB, qui est la normale à la paroi passant par P, par diffusion (voir figure 4.1). Elle va ensuite être convectée le long de toutes les lignes de courant passant par AB. On peut ainsi définir les domaines d'influence et de dépendance d'un point P dans la couche limite. Le domaine d'influence de P est donc le volume situé en aval de ce point et délimité par les surfaces normales à la paroi contenant les lignes de courant les plus extrêmes passant par AB. On peut définir de la même façon le domaine de dépendance de P, situé en amont de ce point. Les lignes de courant les plus extrêmes sont en général la ligne de courant pariétale et la ligne de courant de l'écoulement extérieur [65]. Dans le cas d'une

couche limite turbulente, le modèle de turbulence peut éventuellement modifier les résultats.

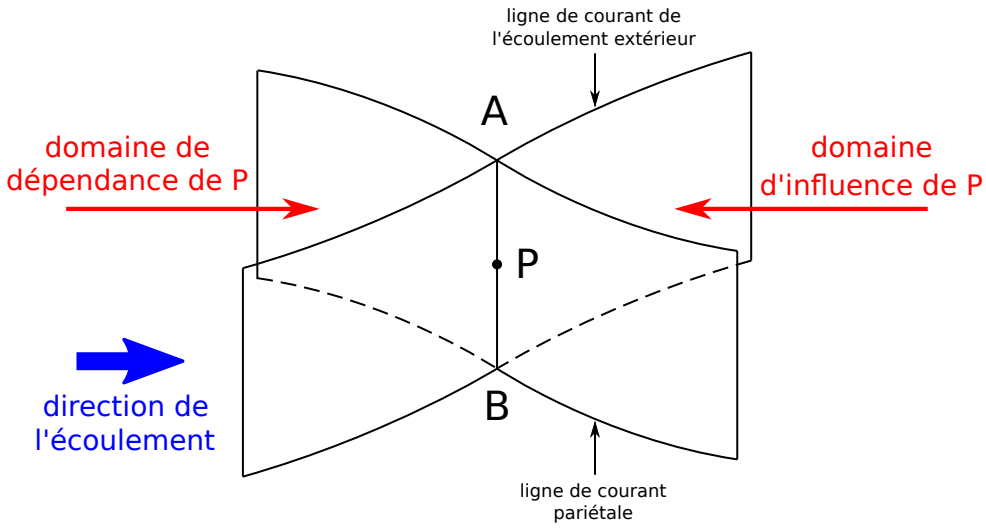


FIGURE 4.1. – Domaines d'influence et de dépendance

Considérons maintenant les équations sous leur forme intégrale. La construction du système intégral, qui consiste à intégrer les équations dans la direction normale à la paroi sur toute l'épaisseur de la couche limite, fait disparaitre la dépendance en y dans les équations en éliminant les termes en $\frac{\partial}{\partial y}$. Le système qui en résulte est alors purement convectif et de nature hyperbolique. Ceci a été montré par Cousteix et Houdeville par exemple, dans le cas de leur système d'équations intégrales composé de l'équation de von Kármán et de l'équation d'entrainement pour une couche limite turbulente [28]. Le système intégral admet, non plus des surfaces, mais des lignes caractéristiques. Le nombre de lignes caractéristiques correspond au nombre d'équations intégrales dans le système. Ces lignes sont en général comprises entre la ligne de courant pariétale et la ligne de courant extérieure. Cependant, l'hyperbolicité du système dépend malgré tout des relations de fermeture qui lui sont associées. En effet, selon Mughal, on ne peut pas affirmer que tous les systèmes d'équations intégrales de couche limite sont hyperboliques, quelles que soient les équations utilisées et leurs relations de fermeture [66].

L'hyperbolicité du système et les domaines d'influence et de dépendance ont des conséquences pratiques sur la manière de calculer la couche limite. En particulier, l'hyperbolicité du système permet une résolution à l'aide d'une méthode de Volumes-Finis et le nombre de conditions aux limites à imposer à chaque frontière du domaine correspond au nombre de caractéristiques qui entrent dans le domaine par cette frontière.

4.2. Présentation de la singularité de Goldstein et des problèmes rencontrés pour résoudre la couche limite décollée

Le décollement de la couche limite, et les singularités qui sont associées à ce phénomène, est un sujet qui a posé problème à bien des auteurs et qui reste encore délicat à traiter aujourd'hui. La nature parabolique des équations de couche limite qui a été présentée dans le paragraphe précédent laisse penser que la connaissance du champ de vitesse extérieur $u_e(x)$ et du profil de vitesse $u(y)$ à une certaine position x permet de déterminer les conditions en aval de ce point. Une résolution numérique avec marche en espace peut alors être envisagée. En revanche, les premiers calculs numé-

riques de la couche limite ont mis en évidence qu'il était extrêmement difficile d'obtenir une solution au voisinage du décollement. Ceci a ensuite été confirmé par Goldstein qui a montré analytiquement la présence d'une singularité dans la solution des équations de couche limite bidimensionnelle, qui apparait au voisinage du décollement [37].

La présence de cette singularité pourrait faire penser que les équations de couche limite ne sont plus valables à l'approche du décollement. Mais Brown et Stewartson ont montré que les équations de couche limite admettent une solution au voisinage du décollement si les champs de vitesse et de pression de l'écoulement extérieur ne sont pas imposés à l'avance [12]. En d'autres termes, il existe une zone au voisinage du décollement où les écoulements visqueux et non visqueux sont en forte interaction et il est difficile de les traiter séparément. Des méthodes inverses ont alors été inventées pour calculer la couche limite, notamment par Catherall et Mangler [15]. Dans ce type de méthodes, la pression (ou la vitesse) de l'écoulement extérieur n'est plus une donnée du calcul mais une inconnue. Elle permettent donc de déterminer le champ de pression de manière à ce que la solution ne soit pas singulière. Ces méthodes inverses, ainsi que d'autres méthodes similaires sont détaillées dans la section 4.4.

La singularité de Goldstein se manifeste aussi dans les équations intégrales de couche limite bidimensionnelle, en particulier dans les systèmes composés de l'équation intégrale de quantité de mouvement et de l'équation d'entrainement ou de l'équation intégrale d'énergie cinétique. Elle se traduit par le fait que la dérivée dH/dx devient infinie au voisinage du décollement. Analysons plus en détail ce problème à l'aide du système composé de l'équation de von Kármán (1.3) et de l'équation intégrale de l'énergie cinétique (1.4) en version stationnaire. Cette dernière peut se réécrire de la manière suivante, après quelques manipulations :

$$\theta \frac{dH_{32}}{dH}\frac{dH}{dx} = 2C_D - H_{32}\frac{C_f}{2} + H_{32}(H-1)\frac{\theta}{u_e}\frac{du_e}{dx} \tag{4.1}$$

avec $H_{32} = \delta_3/\theta$ une fonction du facteur de forme H donné par les relations de fermeture. La fonction $H_{32}(H)$ admet un minimum au point de décollement donc dH_{32}/dH s'annule en ce point. Comme, dans le cas général, il n'y a aucune raison pour que le membre de droite de l'équation (4.1) s'annule, on en déduit que la dérivée dH/dx devient infinie au point de décollement. Dans le cas où le membre de droite serait nul, la dérivée dH/dx aurait de toute façon une forme indéterminée du type 0/0. D'après l'équation de von Kármán, la dérivée $d\theta/dx$ reste finie au point de décollement et c'est donc la dérivée $d\delta_1/dx$ qui devient infinie en ce point [25]. On pourrait utiliser le même raisonnement pour le système intégral avec l'équation d'entrainement comme équation auxiliaire. On peut alors considérer une définition physique et une définition mathématique du décollement. D'un point de vue physique, la couche limite décolle à l'endroit où le coefficient de frottement s'annule. D'un point de vue mathématique en revanche, le décollement apparait à l'endroit où la dérivée dH/dx est infinie. On verra dans la sous-section 5.1.2 que les valeurs propres du système deviennent de signes opposés à l'endroit où dH_{32}/dH s'annule et dH/dx est infini. Les deux définitions sont très proches mais ne coïncident pas forcément parfaitement [26, 66]. En effet, la position exacte du point x_s, où la singularité apparait, par rapport au point x_d, où le coefficient de frottement s'annule, dépend des relations de fermeture qui ont été choisies.

Pour les couches limites tridimensionnelles, la définition du décollement est plus complexe. On n'a plus affaire à un point de décollement mais à une ligne de décollement. D'un point de vue physique, le décollement de la couche limite se trouve sur une ligne formée par la coalescence des lignes de courant pariétales. Comme dans le cas bidimensionnel, des singularités apparaissent dans

cette zone de décollement. Elles apparaissent, quant à elles, sur une ligne formée par la coalescence des lignes caractéristiques les plus extrêmes, c'est-à-dire qui forment l'angle le plus important avec les lignes de courant extérieur (voir section 4.1). De la même manière que pour le décollement 2D, la ligne de décollement et la ligne singulière sont assez proches mais ne coïncident pas forcément. Ceci vient du fait que la ligne caractéristique la plus extrême ne coïncide pas toujours exactement avec la ligne de courant pariétale en fonction des relations de fermeture qui ont été choisies. La figure 4.2, tirée de la thèse de Mughal [66], illustre la ligne de décollement et la ligne singulière pour une couche limite tridimensionnelle. Sur cette figure, on constate que les deux lignes ne coïncident pas.

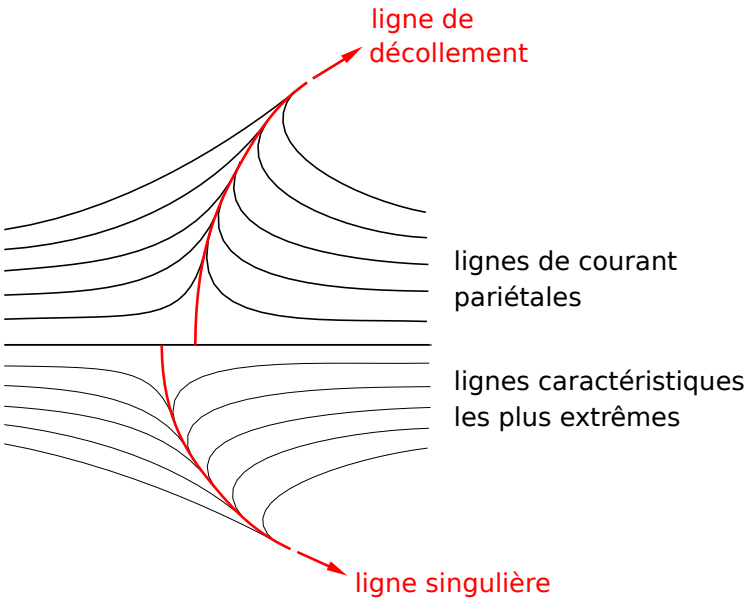


FIGURE 4.2. – Représentation de la ligne de décollement et de la ligne singulière [66]

Enfin, pour les méthodes instationnaires, le point de décollement n'est en général pas un point singulier en soi [59]. Il se traduit en revanche par une discontinuité qui peut être traitée comme un choc dû au croisement des caractéristiques (la valeur propre associée changeant de signe à la traversée de la discontinuité). Cependant, rien ne garantit que la solution converge vers une solution stationnaire. De plus, l'une des valeurs propres du système hyperbolique étant négative au delà du décollement, il est nécessaire d'imposer une condition aux limites en aval. Or, en pratique, celle-ci n'est pas connue.

Finalement, que ce soit pour des couches limites bidimensionnelle ou tridimensionnelle, la littérature met en évidence que les méthodes intégrales classiques ne permettent pas, en général, d'obtenir une solution dans la zone du décollement ni au delà à cause de la présence de singularités dans les équations. En revanche, comme pour les méthodes différentielles de couche limite, les auteurs s'accordent à dire que le fait de coupler le calcul fluide parfait et le calcul de couche limite permet de résoudre ce problème, au moins pour les décollements de faible étendue [28, 89, 101]. Très peu d'auteurs ont proposé d'autres solutions. On peut néanmoins citer Matsushita et Akamatsu qui proposent une formulation des équations intégrales qui est, selon eux, plus appropriée pour les calculs dans les zones décollées [58]. Leur formulation est basée sur le paramètre $E = \theta/\delta_1 = 1/H$ plutôt que sur le facteur de forme H. Ils justifient ce choix par le fait que pour une couche limite décollée, θ a tendance à tendre vers zéro. Ainsi, E tendra vers zéro là où H tendrait vers l'infini.

De plus, si θ devient négatif, E reste continu, ce qui n'est pas le cas du facteur de forme qui passe de $+\infty$ à $-\infty$.

4.3. Rappels sur les méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations intégrales de couche limite

Jusque dans les années 80, la méthode classique pour résoudre les équations intégrales de couche limite était une méthode de type différences finies (méthode de lignes en 3D) basée sur un système de coordonnées curvilignes [67, 77, 6, 24, 83]. En 2D, le système de coordonnées est simple, l'axe des x est tangent à la paroi et l'axe des y est normal à la surface. En 3D le choix du système est moins évident. D'un point de vue physique, le repère le plus naturel pour étudier la couche limite est le repère lié aux lignes de courant extérieures car c'est dans ce repère que sont définies les relations de fermeture. En revanche, d'un point de vue numérique, beaucoup d'auteurs préfèrent utiliser un repère curviligne quelconque lié à la paroi du corps à étudier [6, 24]. En effet, la résolution dans le repère curviligne modifie les équations par ajout de termes de courbure géodésique. Il est donc plus pratique d'évaluer ces termes dans un repère intrinsèque du maillage, non lié à l'écoulement extérieur. Dans ce cas, les lignes de coordonnées $x = cte$ et $z = cte$ sont tangentes à la paroi et l'axe y est normal à la paroi. Les deux axes x et z ne sont pas forcément orthogonaux et forment un angle λ (voir figure 4.3 tirée de [26]). L'inconvénient de ces systèmes de coordonnées curvilignes est qu'ils font apparaître dans les équations de nombreux coefficients liés à la métrique.

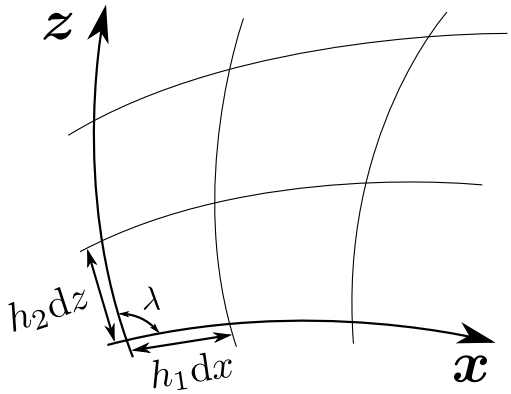


FIGURE 4.3. – Système de coordonnées curvilignes pour calculer la couche limite (tiré de [26])

Ces dernières années, les méthodes intégrales de couche limite ont connu un regain d'intérêt grâce à leur rapidité et leur robustesse qui sont des qualités très intéressantes notamment pour le design et la conception de profils d'aile par exemple. Ces méthodes ont en revanche été revisitées. La plupart des auteurs ont abandonné les repères curvilignes et préfèrent travailler avec un système local de coordonnées cartésiennes associé à une méthode de résolution de type Volumes-Finis [65, 20, 51] ou Élements-Finis [66, 62, 69, 32]. Ce choix est motivé par le fait que les équations intégrales écrites dans un repère curviligne sont très alourdies par les coefficients liés à la métrique, or ces coefficients n'existent pas dans un repère cartésien. Il est donc beaucoup plus simple de résoudre les équations intégrales dans un repère cartésien. En revanche, les relations de fermeture doivent être calculées dans le repère curviligne lié aux lignes de courant extérieures puisque c'est dans ce repère qu'elles sont définies. Des rotations doivent donc être effectuées pour passer d'un repère à l'autre au cours du calcul [6, 65]. Ce point est détaillé dans la sous-section 5.3.2 pour le cas particulier de la méthode développée dans cette thèse.

Lokatt et Eller ont adopté cette nouvelle manière de résoudre les équations intégrales de couche limite. Ils ont proposé une méthode de résolution de type Volumes-Finis qui permet d'assurer la conservation des flux sur des objets 3D et l'ont appliquée à un modèle de couche limite tridimensionnelle [51]. Pour éviter l'utilisation de repères curvilignes et des tenseurs métriques associés, leur formulation Volumes-Finis s'appuie sur un système local de coordonnées cartésiennes. Ils associent donc à chaque cellule son propre repère cartésien. Or, deux cellules voisines i et j ne sont en général pas coplanaires. De ce fait, le flux sortant $\boldsymbol{f}_i^{(i)}$ de la cellule i, qui est tangent à celle-ci, ne peut pas être directement traité comme le flux $\boldsymbol{f}_i^{(j)}$ rentrant dans la cellule j car il n'est pas tangent à celle-ci. Lokatt et Eller appliquent donc une transformation au flux $\boldsymbol{f}_i^{(i)}$ qui permet d'assurer sa conservation lors de son passage dans la cellule j. Cette transformation est du type :

$$\boldsymbol{f}_i^{(j)} = \boldsymbol{R}_{ij}\boldsymbol{f}_i^{(i)}$$

où $\boldsymbol{R_{ij}}$ est une matrice de rotation permettant de tourner le vecteur flux de manière à ce qu'il soit tangent à la cellule j. Ceci ne s'applique que pour des quantités vectorielles, aucune transformation n'est requise pour les quantités scalaires. Cette méthode peut s'interpréter comme une formulation discrète de la notion de transport d'un vecteur sur une surface non plane. Elle est davantage détaillée dans la section 5.3.3.

4.4. Présentation des différentes méthodes de couplage entre l'écoulement de couche limite et l'écoulement de fluide parfait

La méthode la plus simple et la plus classiquement utilisée pour coupler l'écoulement de couche limite à l'écoulement de fluide parfait est la méthode dite "directe". Elle consiste à considérer que l'écoulement de couche limite a peu d'influence sur l'écoulement de fluide parfait. Ainsi, un premier calcul fluide parfait est effectué autour du profil réel à étudier. Il fournit notamment les distributions de pression et de vitesse à la paroi. Ces distributions permettent ensuite de calculer la couche limite autour du profil et notamment l'épaisseur de déplacement. On rappelle que l'épaisseur de déplacement représente la hauteur dont il faudrait déplacer en chaque point la paroi pour maintenir le débit inchangé en fluide parfait (voir sous-section 1.2.1). Ainsi, l'épaisseur de déplacement obtenue indique que l'écoulement de fluide parfait devrait être calculé autour du profil engraissé de l'épaisseur de déplacement. Un second calcul de fluide parfait est donc réalisé autour d'un profil grossi de manière à décaler l'écoulement de fluide parfait pour tenir compte de la couche limite. L'écoulement de fluide parfait peut aussi être décalé à l'aide d'une vitesse de transpiration imposée à la paroi et calculée à partir de l'épaisseur de déplacement :

$$v(x) = \frac{\partial(u_e\delta_1)}{\partial x}$$

Dans tous les cas, le nouveau calcul de l'écoulement de fluide parfait modifie les distributions de pression et de vitesse et donne lieu à un nouveau calcul de couche limite. Les calculs de fluide parfait et de couche limite sont répétés jusqu'à atteindre une solution convergée.

En revanche, lorsque la couche limite décolle, on a vu que la singularité de Goldstein pouvait apparaitre dans la résolution des équations (voir section 4.2), et le processus décrit ci-dessus diverge. En réalité, l'influence de la couche limite sur l'écoulement de fluide parfait ne peut pas être négligée dans les zones de couche limite décollée. C'est la raison pour laquelle la méthode directe ne permet pas de résoudre de tels écoulements. Les deux calculs doivent donc être couplés autrement,

de manière à mieux prendre en compte l'influence que peut avoir la couche limite sur l'écoulement de fluide parfait. Des méthodes alternatives ont alors été proposées pour permettre de résoudre des écoulements de couche limite décollée, au moins pour des décollements de faible étendue. Ces méthodes sont décrites ci-dessous et leur fonctionnement est schématisé sur la figure 4.4. Elles sont applicables à la fois en deux et en trois dimensions. Pour plus d'informations sur le développement des méthodes de couplage en 3D, le lecteur peut se référer à la thèse de Coenen [19].

Méthode inverse

La méthode inverse a été initialement proposée par Catherall et Mangler [15]. Elle consiste, comme son nom l'indique, à résoudre les équations de couche limite et de fluide parfait en mode inverse. Le principe est l'exact opposé de celui de la méthode directe. Dans le calcul de l'écoulement de fluide parfait, u_e est une donnée et l'inconnue est l'épaisseur de déplacement. Celle-ci permet d'alimenter le calcul de couche limite dans lequel u_e est l'inconnue et l'épaisseur de déplacement est une donnée. L'inconvénient de cette méthode est que les équations sont beaucoup plus complexes que dans la formulation directe. D'ailleurs, la formulation inverse des équations n'existe pas toujours [89]. De plus, cette méthode converge très lentement [92].

Méthode semi-inverse

Le Balleur [7] et Carter [14] ont, quant à eux, mixé la méthode directe et la méthode inverse pour obtenir une méthode dite "semi-inverse". Le calcul est donc initialisé avec une épaisseur de déplacement δ_1 présumée. Le calcul de l'écoulement de fluide parfait est réalisé en mode direct, avec δ_1 comme donnée, ce qui permet de fournir une distribution de vitesse $u_{e_{FP}}$. Le calcul de couche limite, quant à lui, est effectué en mode inverse. Il fournit donc lui aussi une distribution de vitesse $u_{e_{CL}}$ à partir de la donnée δ_1. L'épaisseur de déplacement est ensuite recalculée à partir du rapport des distributions de vitesse extérieure obtenues respectivement par le calcul fluide parfait et le calcul de couche limite. Le processus est répété jusqu'à obtenir une solution convergée, c'est-à-dire jusqu'à ce que les vitesses obtenues par la résolution des deux régions de l'écoulement soient égales. L'épaisseur de déplacement peut par exemple être mise à jour comme suit, par une formule proposée par Carter [13] :

$$\delta_1{}^{(n+1)} = \delta_1{}^n + \omega\delta_1{}^n \left(\frac{u_{eCL}{}^n}{u_{eEuler}{}^n} - 1 \right)$$

où ω est un coefficient de sous-relaxation qui dépend de la taille du maillage. Cette méthode est plus robuste que la méthode directe, bien que sa vitesse de convergence ne soit pas très élevée.

Méthode simultanée

La méthode simultanée consiste à résoudre simultanément les écoulements de fluide parfait et de couche limite [33], et donc de regrouper les équations des deux types d'écoulement pour résoudre un seul et même gros système d'équations. Ceci nécessite la modification des équations de fluide parfait afin qu'elles tiennent compte des effets de la couche limite par l'introduction de l'épaisseur de déplacement. Cette méthode est robuste et donne de bons résultats [34]. Cependant, le système à résoudre devient complexe et la méthode est compliquée à implémenter, notamment si elle doit être implémentée dans un code fluide parfait/couche limite déjà existant, puisqu'elle nécessite de grosses modifications dans le code fluide parfait. Cette méthode est notamment utilisée par Drela

[30], Nishida [69] et Milewski [62].

Méthode quasi-simultanée

La méthode quasi-simultanée repose sur le concept de loi d'interaction qui a été introduit dans le but d'approcher les méthodes simultanées [93]. Le calcul de couche limite est couplé avec un calcul approché de l'écoulement fluide parfait, basé sur une description simplifiée de celui-ci. Concrètement, le comportement de fluide parfait est modélisé par une simple loi d'interaction. Cette approximation facilite grandement la résolution simultanée des deux régions de l'écoulement. La différence entre le résultat du calcul approché de l'écoulement fluide parfait et le résultat du calcul réel est ensuite réduite de manière itérative jusqu'à convergence. La force de cette méthode est que la loi d'interaction est juste un intermédiaire pour assurer la stabilité et accélérer la convergence du calcul, mais elle n'affecte en rien la précision de la solution convergée. De plus, le couplage est formulé de manière simple et cette méthode converge plus rapidement que la méthode semi-inverse. La principale difficulté réside dans le choix de la loi d'interaction à utiliser. Cette méthode a été particulièrement étudiée par Veldman [93, 92].

L'inconvénient de ces méthodes de couplage est qu'elles peuvent être coûteuses en temps de calcul, en particulier si le solveur fluide parfait est un solveur Euler, comme utilisé dans cette thèse.

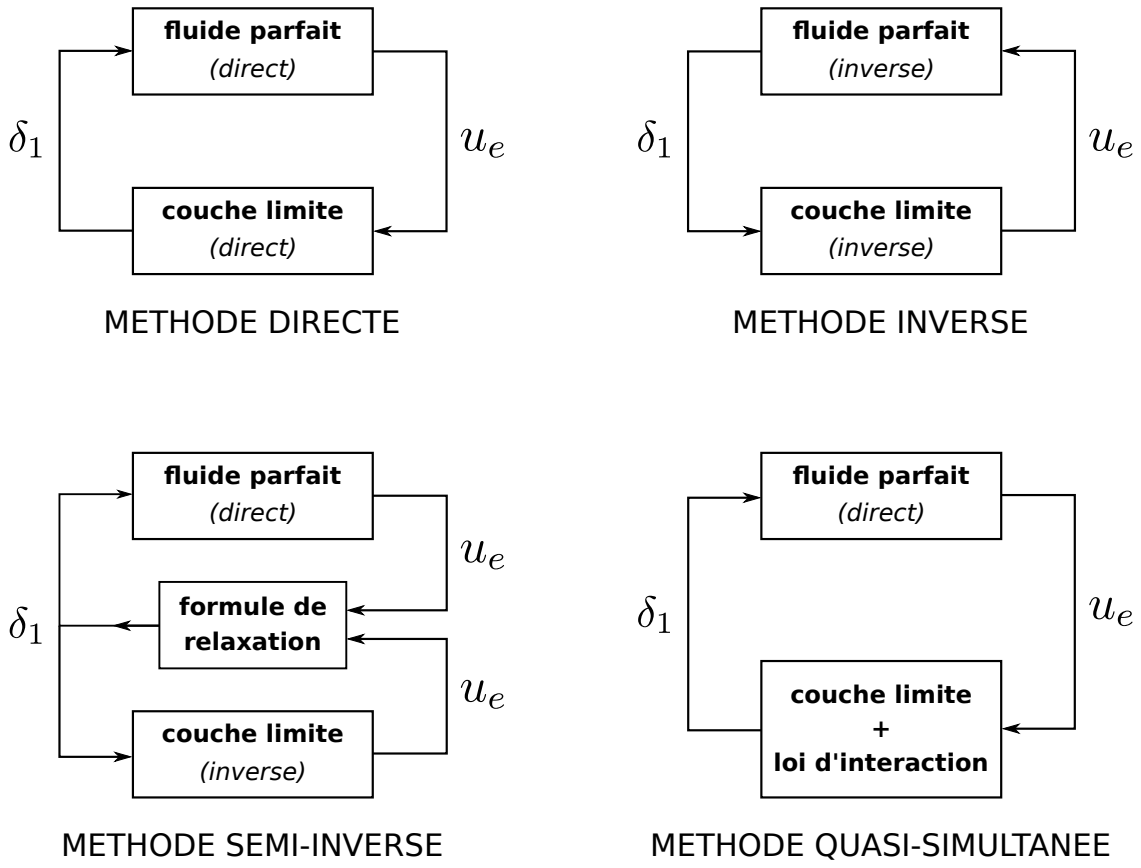


FIGURE 4.4. – Fonctionnement des méthodes de couplage fluide parfait/couche limite

Conclusion

Au cours de ce chapitre, des rappels ont été faits sur les méthodes numériques de résolution des équations intégrales de couche limite qui existent dans la littérature et sur les problèmes que l'on peut rencontrer lors de la résolution des ces équations, notamment la singularité de Goldstein. Cet état de l'art constitue un support utile pour le développement et la mise en œuvre d'une méthode de résolution numérique robuste et adaptée à des géométries complexes.

5. Développement et mise en œuvre d'une méthode de résolution numérique robuste et adaptée à des géométries complexes

Sommaire

5.1. Étude théorique du système 2D 90
5.1.1. Formulation bidimensionnelle du système d'équations intégrales 90
5.1.2. Étude de l'hyperbolicité du système d'équations 2D 92
5.1.3. Traitement de la singularité de Goldstein et de la zone décollée pour le système 2D 94
5.2. Mise en œuvre d'une méthode de résolution Volumes-Finis bidimensionnelle 97
5.2.1. Définition du domaine de calcul 98
5.2.2. Discrétisation du système d'équations 98
5.2.3. Traitement des conditions limites et des conditions initiales 102
5.2.4. Traitement numérique spécifique de la zone proche du point d'arrêt 103
5.2.5. Limitation du gradient de pression dans le cas de forts gradients de pression adverses 105
5.3. Extension à une méthode de résolution Volumes-Finis tridimensionnelle 107
5.3.1. Définition du domaine de calcul 107
5.3.2. Changements de repère 107
5.3.3. Discrétisation du système d'équations 108
5.3.4. Traitement des conditions limites et des conditions initiales 113
5.3.5. Traitement numérique spécifique de la zone proche du point d'arrêt 114
5.3.6. Limitation du gradient de pression dans le cas de forts gradients de pression adverses 114
5.4. Implémentation de la méthode dans les solveurs BLIM2D et BLIM3D 114

Dans ce chapitre, l'objectif est de présenter la méthode numérique qui a été développée et mise en œuvre afin de résoudre le modèle intégral établi dans les chapitres précédents. Celle-ci doit être robuste et adaptée à des géométries complexes de type profils givrés, le but étant ensuite de l'implémenter dans un outil de simulation d'accrétion de givre tel qu'IGLOO3D. Ainsi, la nature du système d'équations intégrales 2D a été analysée afin de vérifier son hyperbolicité et la possibilité de le résoudre par une méthode de Volumes-Finis bien adaptée pour les géométries complexes. Ensuite, une "méthode de contrôle" a été développée en 2D pour éviter la singularité de Goldstein, et donc rendre le code robuste au passage du décollement de la couche limite. Une méthode de résolution de type Volumes-Finis a alors été développée et mise en œuvre en 2D dans un premier temps. Il a notamment fallu s'assurer que la méthode était suffisamment précise au voisinage du point d'arrêt sachant que, comme on l'a déjà souligné, la précision de la solution dans cette zone a une grande influence sur la forme de givre finale. De plus, la méthode a été adaptée afin qu'elle soit toujours capable de fournir une solution sur la totalité de la géométrie, même si elle est inexacte

dans les zones de couche limite décollée. En effet, la précision de la solution dans ces zones a peu d'influence sur la forme de givre finale. Enfin, la méthode de résolution Volumes-Finis a été étendue en trois dimensions.

Il est important de noter que j'ai développé et mis en œuvre la totalité de la méthode en deux dimensions. J'ai aussi grandement participé au développement du modèle 3D. En revanche, l'extension de la méthode de résolution en 3D et son implémentation ont été effectuées, dans le cadre d'autres projets ou de stages, par Nikolaos Bempedelis, Ghislain Blanchard, Emmanuel Radenac et Thomas Marchal. Elles sont présentées dans cette thèse car elles sont basées sur le modèle que j'ai développé.

5.1. Étude théorique du système 2D

Comme le système intégral 3D est très complexe, son analyse théorique conduirait à des calculs lourds et difficilement exploitables. C'est pourquoi, dans le cadre de cette thèse, l'analyse a été faite uniquement en deux dimensions. On admettra que le modèle 3D possède des propriétés analogues à celles du modèle 2D. De plus, la mise en œuvre de la méthode numérique a d'abord été traitée en 2D, ce qui a donné lieu au développement d'un solveur nommé BLIM2D, avant d'être étendue en 3D avec le solveur BLIM3D. C'est également de cette manière qu'elle est présentée dans ce chapitre.

5.1.1. Formulation bidimensionnelle du système d'équations intégrales

Le modèle 2D peut être facilement déduit du modèle 3D en annulant tous les termes et les dérivées liés à la direction transverse $\boldsymbol{c}$. En effet, pour un cas bidimensionnel, l'écoulement de couche limite est dans le même plan que l'écoulement extérieur. Le plus naturel est alors de se placer dans le repère $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y})$ où $\boldsymbol{s}$ est le vecteur tangent à la paroi, orienté dans le sens de la vitesse extérieure, et $\boldsymbol{y}$ le vecteur normal à la paroi (voir figure 5.1). Dans ce repère, la version 2D du système d'équations intégrales (2.4) et (3.17) s'écrit :

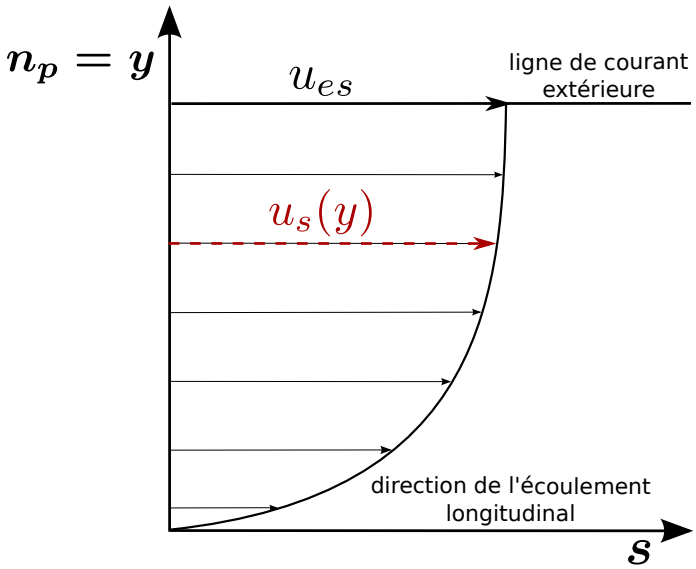


FIGURE 5.1. – Repère 2D lié aux lignes de courant extérieures

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(u_{es}\delta_{1s})}{\partial t} + \dfrac{\partial({u_{es}}^2\theta_{ss})}{\partial s} = -u_{es}\delta_{1s}\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} + \dfrac{1}{2}{u_{es}}^2 C_{fs} & (5.1a) \\ \dfrac{\partial({u_{es}}^2\theta_{ss})}{\partial t} + \dfrac{\partial({u_{es}}^3\delta_{3ss} - {u_{es}}^3\theta_{ss})}{\partial s} = ({u_{es}}^2\delta_{1s} - {u_{es}}^2\theta_{ss})\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} - \dfrac{1}{2}{u_{es}}^3 C_{fs} + 2{u_{es}}^3 C_{Ds} & (5.1b) \end{cases}$$

$$\frac{\partial((T_e - T_p)\delta_{1T})}{\partial t} + \frac{\partial((T_e - T_p)u_{es}\theta_{Ts})}{\partial s} = -\frac{\Phi_p}{\rho c_p} - \frac{1}{c_p}{u_{es}}^3 C_{Ds} \tag{5.1c}$$

Pour la partie dynamique, il n'est composé que d'une équation intégrale de quantité de mouvement selon la direction $\boldsymbol{s}$ et de l'équation intégrale de l'énergie cinétique. Les deux variables primaires associées sont δ_{1s} et θ_{ss}. Les inconnues δ_{3ss}, C_{fs} et C_{Ds} sont fermées par les relations (2.24a) , (2.24b) et (2.24c) pour une couche limite laminaire et (2.30), (2.31) ou (2.32) et (2.33) pour une couche limite turbulente. Ce système peut être associé à l'équation intégrale de l'énergie si la partie thermique est résolue par la méthode intégrale (développée uniquement en laminaire dans cette thèse). Dans ce cas, la variable primaire associée est δ_{1T} et Φ_p est fermé par la relation (3.28), associée à (3.23a) et (3.24). Le terme $(T_e - T_p)u_{es}\theta_{Ts}$ est intégré numériquement à partir des profils de vitesse (2.21) et de température (3.27). L'expression 2D de ces relations de fermeture s'obtient en annulant C_{fc}. La couche limite thermique peut aussi être résolue par la méthode simplifiée. Le développement de la méthode numérique associée au modèle thermique simplifié (voir section 3.1) ne sera pas traité dans ce chapitre puisqu'il repose sur des formules quasi-analytiques très simples à implémenter.

Le système (5.1) peut encore s'écrire sous une forme plus générale de la manière suivante :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(s, \boldsymbol{U})}{\partial s} = \boldsymbol{S}(s, \boldsymbol{U}) \tag{5.2a}$$

$$\frac{\partial U_T}{\partial t} + \frac{\partial F_T(s, U_T)}{\partial s} = S_T(s, U_T) \tag{5.2b}$$

avec

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u_{es}\delta_{1s} \\ {u_{es}}^2\theta_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \; ; \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} U_2 \\ u_{es}U_2\left(f(H) - 1\right) \end{pmatrix} \; ;$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} -U_1\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} + \dfrac{1}{2}{u_{es}}^2 C_{fs} \\ (u_{es}U_1 - U_2)\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} - \dfrac{1}{2}{u_{es}}^3 C_{fs} + 2{u_{es}}^3 C_{Ds} \end{pmatrix} \; ;$$

$$U_T = (T_e - T_p)\delta_{1T} \; ; \qquad F_T = (T_e - T_p)u_{es}\theta_{Ts} \; ; \qquad S_T = \frac{-\Phi_p}{\rho c_p} - \frac{1}{c_p}{u_{es}}^3 C_{Ds}$$

où $\boldsymbol{U}$ et U_T correspondent aux variables résolues, $\boldsymbol{F}$ et F_T aux termes de flux et $\boldsymbol{S}$ et S_T aux termes sources. La fonction $f(H) = \delta_{3ss}/\theta_{ss}$ vaut $f_l(H)$ pour une couche limite laminaire et $f_t(H)$ pour une couche limite turbulente (voir (2.24a) et (2.30)).

Il est important de souligner que les équations de couches limites dynamique et thermique sont

découplées, ce qui est une conséquence de l'hypothèse $\rho = cte$. Ainsi, dans le code, la couche limite thermique n'est résolue que dans un deuxième temps, c'est-à-dire après avoir obtenu une solution convergée pour la couche limite dynamique. C'est pourquoi ces deux parties du modèle sont traitées séparément dans ce chapitre.

5.1.2. Étude de l'hyperbolicité du système d'équations 2D

L'objectif de cette section est de montrer que le système (5.2) est hyperbolique et de calculer les valeurs propres du système d'équations. Ceci permettra de montrer que le problème est a priori bien posé [1] et de connaître les zones d'influence et de dépendance en fonction du signe des valeurs propres pour pouvoir ensuite choisir un schéma de discrétisation adapté. La partie thermique étant découplée de la dynamique, on peut se limiter à l'étude des valeurs propres du système dynamique dans cette section.

L'équation (5.10a) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{F}(s, \boldsymbol{U}) \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial s} = \boldsymbol{S}(s, \boldsymbol{U}) \tag{5.3}$$

où $\nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{F}(s, \boldsymbol{U})$ est la jacobienne de $\boldsymbol{F}$ par rapport à $\boldsymbol{U}$. Pour que le système soit hyperbolique, il faut que les valeurs propres de $\nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{F}(s, \boldsymbol{U})$ soient réelles et distinctes. Or, la jacobienne s'écrit :

$$\nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{F}(s, \boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_{es} U_2 f' \dfrac{\partial H}{\partial U_1} & u_{es} U_2 f' \dfrac{\partial H}{\partial U_2} + u_{es}(f-1) \end{pmatrix}$$

avec $f' = \dfrac{df}{dH}$. On peut constater que l'hyperbolicité du système dépend de la relation de fermeture choisie pour le terme ${u_{es}}^3 \delta_{3ss}$ (c'est-à-dire f dans notre cas). Sachant que $H = \dfrac{\delta_{1s}}{\theta_{ss}} = \dfrac{u_{es} U_1}{U_2}$, la jacobienne de $\boldsymbol{F}$ par rapport à $\boldsymbol{U}$ se simplifie en :

$$\nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{F}(s, \boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ {u_{es}}^2 f' & u_{es}(f - Hf' - 1) \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ_i de la jacobienne $\nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{F}(s, \boldsymbol{U})$ sont les solutions de l'équation caractéristique suivante :

$$\lambda^2 - \lambda u_{es}(f - Hf' - 1) - {u_{es}}^2 f' = 0 \tag{5.4}$$

Or, pour que les valeurs propres soient réelles et distinctes, il faut que le discriminant Δ de l'équation (5.4) soit strictement positif :

$$\Delta = {u_{es}}^2 \left[(f - Hf' - 1)^2 + 4f' \right] \tag{5.5}$$

On peut constater sur la figure 5.2 que le discriminant Δ adimensionné par ${u_{es}}^2$, qui n'est fonction que de H, est toujours strictement positif pour une très large gamme de valeurs du facteur de forme (au moins pour $1 < H < 50$), quel que soit le régime de la couche limite. Le système de couche limite intégrale associé aux relations de fermeture choisies est donc hyperbolique pour des écoulements laminaires et turbulents. Le problème linéarisé est donc bien posé, à condition d'imposer le

1. En réalité, l'hyperbolicité du système est seulement une condition nécessaire. Il n'existe pas aujourd'hui de théorie générale pour les systèmes hyperboliques non-linéaires.

bon nombre de conditions limites.

D'autre part, les valeurs propres du système sont tracées sur la figure 5.3 pour les deux types d'écoulements. Elles valent :

$$\lambda^{\pm} = \frac{u_{es}(f - Hf' - 1) \pm \sqrt{\Delta}}{2} \tag{5.6}$$

On s'attend à ce qu'elles soient toutes les deux positives pour une couche limite attachée et qu'elles soient de signes opposés dans une zone décollée. En effet, l'information se propage uniquement vers l'aval dans le premier cas et dans les deux directions (amont et aval) dans le second. Pour le cas turbulent, le modèle de fermeture, basé sur le profil de vitesse présumé (2.25), ne permet pas le décollement de la couche limite ($\widehat{u}_s(\eta) \geq 0$ pour $0 \leq \eta \leq 1$) et les valeurs propres sont effectivement toujours toutes les deux positives. Pour le modèle laminaire, les deux valeurs propres sont bien positives pour les faibles valeurs du facteur de forme, puis λ^- devient négative dans la zone de décollement. On peut montrer facilement, d'après (5.6) et (5.5), qu'elle s'annule pour $f'(H) = 0$, c'est-à-dire à l'endroit où la singularité de Goldstein apparait (voir section 4.2 où $f(H)$ est notée $H_{32}(H)$). Cependant, on a vu dans la section 4.2 que le point où cette singularité apparait ne coïncide pas forcément parfaitement avec le point où le coefficient de frottement s'annule. C'est le cas ici, puisque la valeur propre s'annule pour $H = 4.43$ alors que le coefficient de frottement s'annule pour $H = H_{dec} = 4.02923$. Il existe donc une zone, entre $H = H_{dec}$ et $H = 4.43$ où le coefficient de frottement est négatif (c'est-à-dire où la couche limite est détachée) alors que les valeurs propres sont toutes les deux positives. Comme l'explique Cousteix [26], la taille de cette zone dépend des relations de fermeture choisies.

En revanche, le modèle laminaire ne semble pas cohérent pour des valeurs du facteur de forme supérieures à 25.34 puisqu'au delà de cette valeur, les valeurs propres redeviennent toutes les deux positives et l'une d'elles devient supérieure à la vitesse extérieure, ce qui signifierait que l'information se propage plus vite que la vitesse extérieure. Dans le code, la valeur de H est donc limitée à 25 pour une couche limite laminaire et les valeurs supérieures ne sont donc pas autorisées. En pratique, ce n'est pas pénalisant car le plus souvent la couche limite a transitionné avant d'atteindre de telles valeurs du facteur de forme. De plus, même si la couche limite ne transitionne pas, de telles valeurs du facteur de forme ne peuvent être atteintes que dans le cas d'un décollement massif qui n'est de toute façon pas modélisé précisément par la méthode développée dans cette thèse.

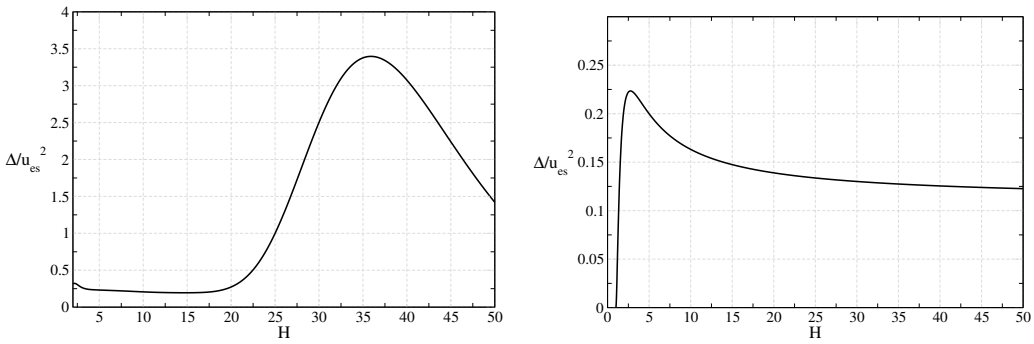


FIGURE 5.2. – Discriminant adimensionné de l'équation caractéristique en fonction du facteur de forme H pour une couche limite laminaire (gauche) et turbulente (droite)

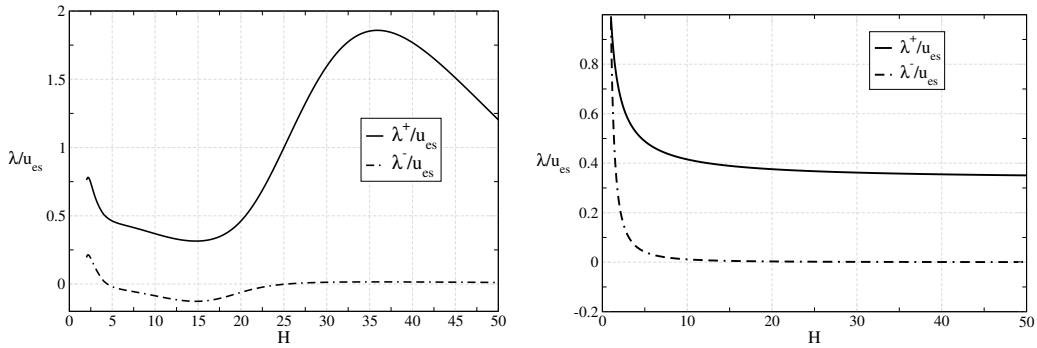


FIGURE 5.3. – Valeurs propres adimensionnées du système d'équations en fonction du facteur de forme H pour une couche limite laminaire (gauche) et turbulente (droite)

5.1.3. Traitement de la singularité de Goldstein et de la zone décollée pour le système 2D

On a vu dans la section précédente que le système d'équation pour la couche limite dynamique peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{F}(s, \boldsymbol{U}) \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial s} = \boldsymbol{S}(s, \boldsymbol{U})$$

avec

$$\nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{F}(s, \boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ {u_{es}}^2 f' & u_{es}(f - Hf' - 1) \end{pmatrix}$$

Or, le déterminant de la jacobienne de $\boldsymbol{F}$ par rapport à $\boldsymbol{U}$ vaut det $= -{u_{es}}^2 f'$. Celui-ci est donc susceptible de s'annuler si f', c'est-à-dire la dérivée de f par rapport à H, s'annule. Les dérivées des fonctions f_l pour le modèle laminaire et f_t pour le modèle turbulent sont tracées en fonction du facteur de forme sur la figure 5.4. On constate que dans le cas d'une couche limite turbulente, f' $(= f_t')$ ne s'annule jamais. En revanche, pour une couche limite laminaire, f' s'annule pour $H = 4.43$, proche de la valeur limite pour laquelle la couche limite décolle [2]. Ainsi, pour $H = 4.43$, la fonction $f(H)$ atteint un minimum, le déterminant de la jacobienne de $\boldsymbol{F}$ par rapport à $\boldsymbol{U}$ s'annule (l'une des deux valeurs propres devient nulle comme on l'a vu dans la section précédente) et les équations intégrales stationnaires deviennent singulières. On retrouve donc ici la singularité de Goldstein [37] qui est décrite dans la section 4.2 (où la fonction $f(H)$ est notée $H_{32}(H)$). En pratique, cela se traduit par le fait qu'une solution stationnaire ne peut pas être atteinte en présence d'un décollement de couche limite laminaire. La manière habituelle d'éviter cette singularité est, comme on l'a vu, de coupler le solveur couche limite au solveur fluide parfait. Il existe différentes méthodes de couplage qui sont présentées dans la section 4.4. Mais l'approche adoptée dans cette thèse est une méthode directe sans couplage, car les méthodes de couplage sont souvent coûteuses en temps de calcul et relativement complexes à mettre en œuvre en particulier en 3D. De plus, la zone décollée n'a pas besoin d'être calculée précisément.

Une "méthode de contrôle" a donc été développée pour éviter que les équations ne deviennent singulières au passage du décollement. Celle-ci consiste à rajouter artificiellement un terme dans les équations de manière à pouvoir contrôler la valeur du déterminant de la jacobienne de $\boldsymbol{F}$ et ainsi éviter qu'il ne s'annule. Ce terme doit évidemment être nul dans les zones de couche limite

2. La dérivée de f s'annule aussi pour $H = 25.34$ mais, comme discuté précédemment, la valeur de H pour une couche limite lamainaire est seuillée à 25 dans le code.

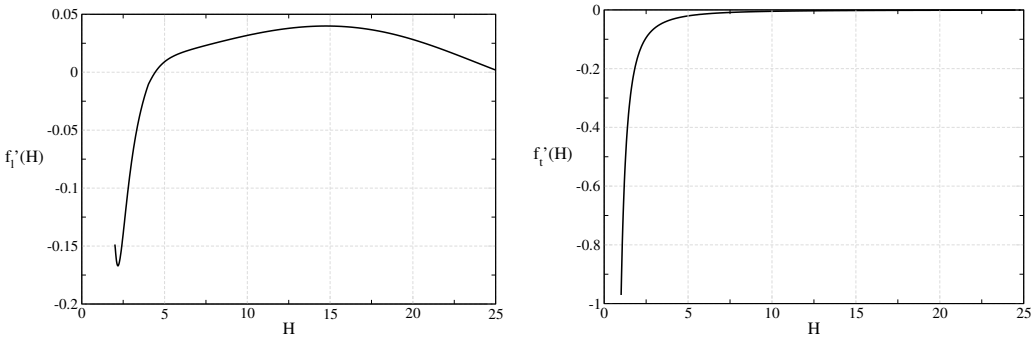


FIGURE 5.4. – Dérivée de f en fonction de H pour une couche limite laminaire (gauche) et turbulente (droite)

attachée afin qu'il ne modifie pas la solution dans les zones où celle-ci est déterminante pour le calcul d'accrétion de givre. Cependant, il est clair que la solution dans les zones de couche limite décollée ne correspondra pas réellement à la solution attendue. Ceci constitue la limite principale de cette méthode mais elle n'est pas trop contraignante pour des applications givrage. En effet, le givre se forme principalement dans la zone de bord d'attaque, peu propice au décollement. De plus, la transition laminaire-turbulent est généralement située en amont du point de décollement laminaire. La singularité de Goldstein est donc souvent évitée dans les faits, à l'état stationnaire. La méthode proposée ici est principalement utile pour la phase transitoire précédant l'état stationnaire.

Le système d'équations intégrales, auquel on a ajouté les termes de contrôle $u_{es}v_{\theta_{ss}}$ et ${u_{es}}^2 v_{\delta_{1s}}$, s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(u_{es}\delta_{1s})}{\partial t} + \dfrac{\partial({u_{es}}^2\theta_{ss})}{\partial s} = -u_{es}\delta_{1s}\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} + \dfrac{1}{2}{u_{es}}^2 C_{fs} + u_{es}v_{\theta_{ss}} & (5.7a) \\ \dfrac{\partial({u_{es}}^2\theta_{ss})}{\partial t} + \dfrac{\partial {u_{es}}^3(\delta_{3ss} - \theta_{ss})}{\partial s} = {u_{es}}^2(\delta_{1s} - \theta_{ss})\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} - \dfrac{1}{2}{u_{es}}^3 C_{fs} + 2{u_{es}}^3 C_{Ds} + {u_{es}}^2 v_{\delta_{1s}} & (5.7b) \end{cases}$$

avec

$$v_{\theta_{ss}} = \alpha(H)u_{es}\frac{\partial\theta_{ss}}{\partial s} \quad \text{et} \quad v_{\delta_{1s}} = \alpha(H)u_{es}\frac{\partial\delta_{1s}}{\partial s}$$

où α est une fonction de H qui sera déterminée par la suite. L'expression de ces deux termes $v_{\theta_{ss}}$ et $v_{\delta_{1s}}$ a été choisie de manière à ce qu'ils permettent de contrôler le signe du déterminant de la jacobienne de $\boldsymbol{F}$ par rapport à $\boldsymbol{U}$ qui est calculé ci-dessous. En effet, ces termes font intervenir les dérivées des variables primaires δ_{1s} et θ_{ss} par rapport à s. Ils sont traités comme des termes sources mais ils ont vocation à modifier les termes de flux. Les calculs détaillés dans l'annexe F montrent d'ailleurs qu'on peut définir la nouvelle jacobienne de $\boldsymbol{F}$ par rapport à $\boldsymbol{U}$, basée sur ces flux modifiés, de la manière suivante :

$$\nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} 0 & (1-\alpha) \\ {u_{es}}^2(f'-\alpha) & u_{es}(f - Hf' - 1) \end{pmatrix}$$

La fonction $\alpha(H)$ peut alors être vue comme un paramètre de contrôle. En effet, il permet de jouer sur le signe du déterminant de la jacobienne qui devient :

$$\det = -{u_{es}}^2(f'-\alpha)(1-\alpha)$$

Dans le cas d'une couche limite laminaire attachée (pour $H < H_{dec}$), α doit être nul pour ne pas dégrader la solution. On retrouve bien dans ce cas que le déterminant de la jacobienne vaut $\det = -{u_{es}}^2 f'$ et qu'il est strictement positif car $f_l' < 0$. Comme celui-ci ne doit jamais s'annuler, il faut donc qu'il reste toujours strictement positif quelle que soit la valeur du facteur de forme. De plus, on choisit $\alpha < 1$ pour que les termes de contrôle ne soient pas trop importants et modifient le moins possible les équations. Pour que le déterminant reste toujours strictement positif, il faut alors que α soit strictement supérieur à f_l'. Pour répondre à toutes ces contraintes, le paramètre α est choisi comme une fonction de H de la forme :

$$\alpha(H) = c\left[1 + \tanh\left(\frac{H - H_{dec}}{0.25}\right)\right]$$

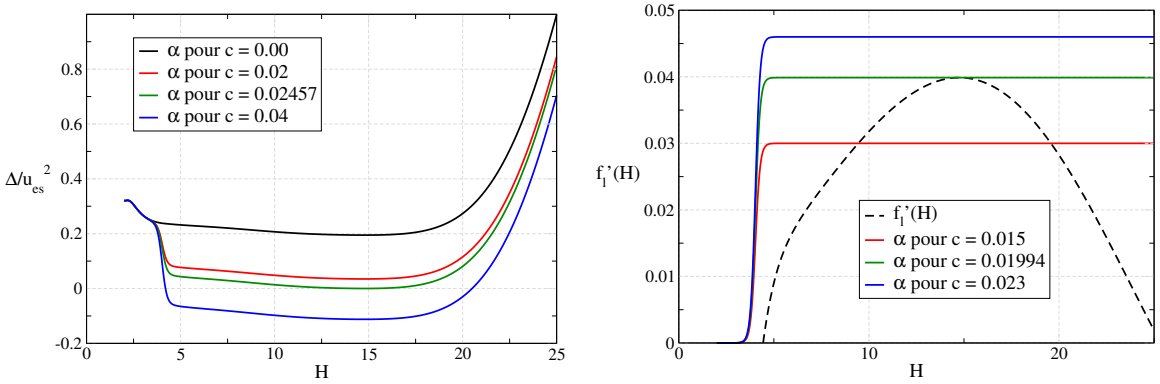
avec $c < 0.5$ de manière à ce que α soit strictement inférieur à 1. La forme de la fonction $\alpha(H)$ a été choisie pour que sa valeur évolue de manière assez rapide de 0 à $2c$ dans la zone autour de H_{dec}. De plus, c est une constante qui doit être choisie de telle sorte que α soit toujours strictement supérieur à f' et que le système d'équations soit toujours hyperbolique. En effet, l'équation caractéristique (5.4) du système devient :

$$\lambda^2 - \lambda u_{es}(f - Hf' - 1) - {u_{es}}^2(f' - \alpha)(1 - \alpha) = 0 \tag{5.8}$$

et son discriminant vaut :

$$\Delta = {u_{es}}^2\left[(f - Hf' - 1)^2 + 4(f' - \alpha)(1 - \alpha)\right] \tag{5.9}$$

On peut montrer numériquement que pour que le discriminant Δ soit toujours strictement positif, il faut que c soit inférieur à 0.02457 (voir figure 5.5(a)). De plus, pour que α soit toujours strictement supérieur à f_l' (pour $H < 25$), il faut que c soit strictement supérieur à 0.01994 (voir figure 5.5(b)).



(a) Étude de l'hyperbolicité du modèle laminaire en fonction de la valeur de c

(b) Superposition de α et de f_l' pour différentes valeurs de c

FIGURE 5.5. – Détermination de α pour que le modèle laminaire soit hyperbolique et qu'il ne soit jamais singulier

Finalement, on obtient une condition sur c pour que le modèle laminaire soit hyperbolique et qu'il ne soit jamais singulier :

$$0.01994 < c < 0.02457$$

On choisit de prendre $c = 0.020$. Le paramètre de contrôle s'exprime alors comme suit :

$$\alpha(H) = 0.020 \left[1 + \tanh\left(\frac{H - H_{dec}}{0.25}\right)\right]$$

Les valeurs propres sont toujours exprimées par la relation (5.6) mais cette fois, Δ est donné par (5.9). Elles sont tracées sur la figure 5.6 pour une couche limite laminaire. Comme prévu, elles restent toutes les deux positives, quelle que soit la valeur de H ($H < 25$), alors que la couche limite décolle à partir de $H = H_{dec}$ (C_{fs} devient négatif).

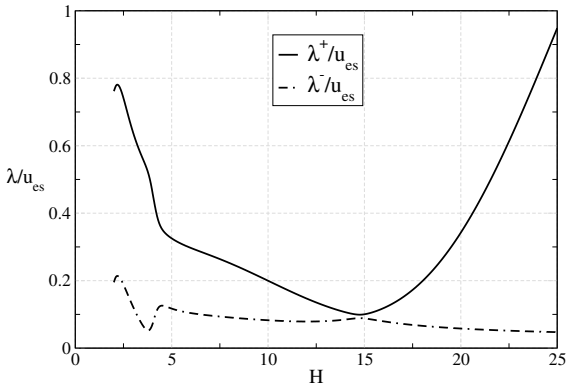


FIGURE 5.6. – Valeurs propres adimensionnées du système d'équations modifié par la méthode de contrôle en fonction du facteur de forme H pour une couche limite laminaire

Comme il a été mentionné précédemment, les termes de contrôle sont en pratique traités comme des termes sources. Ainsi, dans toute la section 5.2 relative à la discrétisation du système 2D, on remplacera le système (5.2) par le nouveau système d'équations suivant :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(s, \boldsymbol{U})}{\partial s} = \boldsymbol{S}(s, \boldsymbol{U}) + \boldsymbol{S_c}(s, \boldsymbol{U}) \tag{5.10a}$$

$$\frac{\partial U_T}{\partial t} + \frac{\partial F_T(s, U_T)}{\partial s} = S_T(s, U_T) \tag{5.10b}$$

avec

$$\boldsymbol{S_c}(s, \boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} u_{es} v_{\theta_{ss}} \\ {u_{es}}^2 v_{\delta_{1s}} \end{pmatrix}$$

En revanche, cette méthode de contrôle, qui rend le code robuste au passage du décollement, n'a pas été étendue en trois dimensions dans cette thèse. Son extension est prévue dans le prolongement de cette thèse. À l'heure actuelle, la valeur du facteur de forme est seuillée de manière brutale à H_{dec} dans le code 3D, de manière à éviter qu'il n'atteigne la singularité qui se produit pour $H = 4.43$.

5.2. Mise en œuvre d'une méthode de résolution Volumes-Finis bidimensionnelle

Une méthode de type Volumes-Finis a été choisie pour la résolution du système d'équations intégrales car elle est particulièrement bien adaptée aux systèmes hyperboliques de lois de conservation. De plus, cette méthode est couramment utilisée dans la littérature pour résoudre les modèles intégraux de couche limite, notamment dans les travaux les plus récents (voir section 4.3). On présente

dans cette section la méthode développée en 2D. Son extension en 3D sur un maillage non structuré sera présentée dans la section suivante.

5.2.1. Définition du domaine de calcul

Le domaine de calcul utilisé dans le solveur 2D BLIM2D est schématisé sur la figure 5.7. Les N cellules sont parcourues à partir du bord de fuite intrados ($i = 1$) jusqu'au bord de fuite extrados ($i = N$). Deux cellules fictives $i = 0$ et $i = N+1$ sont ajoutées aux extrémités du domaine de calcul pour pouvoir définir des conditions limites. Le vecteur $\boldsymbol{y}$ est toujours perpendiculaire à la paroi et le vecteur $\boldsymbol{s'}$ est tangent à la paroi et orienté dans le sens de parcours des cellules. Il est important de noter pour la suite qu'avec cette définition, on a $\boldsymbol{s'} = \boldsymbol{s}$ à l'extrados et $\boldsymbol{s'} = -\boldsymbol{s}$ à l'intrados. Dans la section section 5.2, pour alléger les notations, on écrira u_{es} pour $u_{es'} = \boldsymbol{q_e} \cdot \boldsymbol{s'}$. De même, on notera δ_{1s}, θ_{ss}, C_{fs}, C_{Ds} et θ_{Ts} pour $\delta_{1s'}$, $\theta_{s's'}$, $C_{fs'}$, $C_{Ds'}$ et $\theta_{Ts'}$. Ainsi, la vitesse extérieure $u_{es} = \boldsymbol{q_e} \cdot \boldsymbol{s'}$ est positive sur la partie extrados du profil mais elle est négative sur la partie intrados.

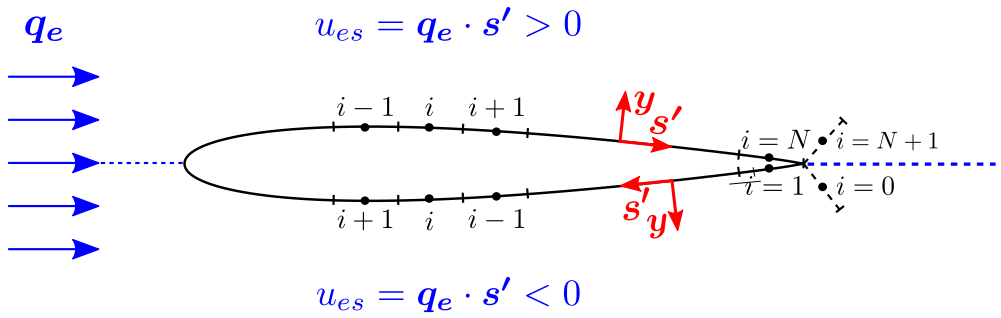


FIGURE 5.7. – Définition du domaine de calcul pour la méthode 2D sur un profil d'aile sans incidence

5.2.2. Discrétisation du système d'équations

Pour l'approche 2D structuré présentée dans cette section, le système d'équations (5.10) est intégré sur une cellule i de longueur $\Delta s'_i$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{C}_i} \boldsymbol{U}(t)\,\mathrm{d}s' + \left[-\boldsymbol{F}(s'_{i-1/2}, \boldsymbol{U}_{i-1/2}(t)) + \boldsymbol{F}(s'_{i+1/2}, \boldsymbol{U}_{i+1/2}(t))\right] = \int_{\mathcal{C}_i} \left(\boldsymbol{S}(s', \boldsymbol{U}(t)) + \boldsymbol{S_c}(s', \boldsymbol{U}(t))\right)\,\mathrm{d}s'$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{C}_i} U_T(t)\,\mathrm{d}s' + \left[-F_T(s'_{i-1/2}, U_{T,i-1/2}(t)) + F_T(s'_{i+1/2}, U_{T,i+1/2}(t))\right] = \int_{\mathcal{C}_i} S_T(s', U_T(t))\,\mathrm{d}s'$$

Le théorème de flux-divergence dans sa version simplifiée 1D a été utilisé pour transformer l'intégrale de la dérivée des termes de flux en une différence de flux exprimés aux nœuds de la cellule i. On suppose de plus que, dans chaque cellule i, $\boldsymbol{U}$ et U_T sont constants et égaux à leur valeur moyenne $\boldsymbol{U}_i$ et $U_{T,i}$ au centre s'_i de la cellule. Elles sont définies par :

$$\boldsymbol{U}_i(t) = \frac{1}{\Delta s'_i}\int_{s'_{i-1/2}}^{s'_{i+1/2}} \boldsymbol{U}(s', t)\,\mathrm{d}s' \;; \quad U_{T,i}(t) = \frac{1}{\Delta s'_i}\int_{s'_{i-1/2}}^{s'_{i+1/2}} U_T(s', t)\,\mathrm{d}s'$$

D'autre part, on définit les flux numériques $\boldsymbol{G}_{i+1/2}$ et $G_{T,i+1/2}$ en $s'_{i+1/2}$ comme étant une approximation des flux $\boldsymbol{F}$ et F_T sur la face $i+1/2$ de la maille i. On a alors :

$$\Delta s'_i \frac{d\boldsymbol{U}_i(t)}{dt} + \left[\boldsymbol{G}_{i+1/2}(t) - \boldsymbol{G}_{i-1/2}(t)\right] = \Delta s'_i \left(\boldsymbol{S}_i(t) + \boldsymbol{S}_{ci}(t)\right) \tag{5.11a}$$

$$\Delta s'_i \frac{dU_{T,i}(t)}{dt} + \left[G_{T,i+1/2}(t) - G_{T,i-1/2}(t)\right] = \Delta s'_i S_{T,i}(t) \tag{5.11b}$$

Les grandeurs $\boldsymbol{S}_i$, $\boldsymbol{S}_{ci}$ et $S_{T,i}$ représentent les valeurs moyennes de $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}_c$ et S_T dans la cellule i :

$$\boldsymbol{S}_i(t) = \frac{1}{\Delta s'_i}\int_{s'_{i-1/2}}^{s'_{i+1/2}} \boldsymbol{S}(s', \boldsymbol{U}(s',t))\,\mathrm{d}s' \;;\quad \boldsymbol{S}_{ci}(t) = \frac{1}{\Delta s'_i}\int_{s'_{i-1/2}}^{s'_{i+1/2}} \boldsymbol{S}_c(s', \boldsymbol{U}(s',t))\,\mathrm{d}s'$$

$$S_{T,i}(t) = \frac{1}{\Delta s'_i}\int_{s'_{i-1/2}}^{s'_{i+1/2}} S_T(s', U_T(s',t))\,\mathrm{d}s'$$

avec

$$\boldsymbol{S}(s', \boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} -U_1 \dfrac{\partial u_{es}}{\partial s'} + \dfrac{1}{2}{u_{es}}^2 C_{fs} \\ (u_{es}U_1 - U_2)\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s'} - \dfrac{1}{2}{u_{es}}^3 C_{fs} + 2{u_{es}}^3 C_{Ds} \end{pmatrix} \;;\quad \boldsymbol{S}_c(s', \boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} u_{es} v_{\theta_{ss}} \\ {u_{es}}^2 v_{\delta_{1s}} \end{pmatrix} \tag{5.12a}$$

$$S_T(s', U_T) = \frac{-\Phi_p}{\rho c_p} - \frac{1}{c_p}{u_{es}}^3 C_D \tag{5.12b}$$

où C_{fs} et C_{Ds} et Φ_p sont des fonctions de U_1, U_2 et U_T qui dépendent du régime laminaire ou turbulent de la couche limite.

Schéma décentré amont pour la discrétisation en espace

Les termes de flux sont discrétisés à l'aide d'un schéma décentré amont qui est valable uniquement lorsque les valeurs propres adimensionnées $\lambda^{\pm}/u_{es}$ sont toutes deux positives. En pratique, cette condition est toujours respectée grâce à la méthode de contrôle développée dans la sous-section 5.1.3. Comme les valeurs propres sont toujours du même signe que la vitesse extérieure, ce schéma peut donc être décentré directement en fonction du signe de u_{es} :

si $u_{es,i+1/2} > 0$

$$\boldsymbol{G}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} (u_{es,i+1/2})^2 \theta_{ss,i} \\ (u_{esi+1/2})^3 \theta_{ss,i}(f(H_i) - 1) \end{pmatrix} \tag{5.13a}$$

$$G_{T,i+1/2} = u_{es,i+1/2}\left[(T_e - T_p)\theta_{Ts}\right]_i \tag{5.13b}$$

si $u_{es,i+1/2} \leq 0$

$$\boldsymbol{G}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} (u_{esi+1/2})^2 \theta_{ss,i+1} \\ (u_{esi+1/2})^3 \theta_{ss,i+1}(f(H_{i+1}) - 1) \end{pmatrix} \tag{5.13c}$$

$$G_{T,i+1/2} = u_{es,i+1/2}\left[(T_e - T_p)\theta_{Ts}\right]_{i+1} \tag{5.13d}$$

Le flux à une interface $i+1/2$ est toujours estimé à partir des quantités calculées dans la cellule amont au regard de l'écoulement. Ainsi, si la vitesse extérieure est positive, les cellules sont parcourues dans le sens de l'écoulement (voir sous-section 5.2.1) et le flux doit être estimé à partir des quantités calculées dans la cellule précédente i. À l'inverse, si la vitesse est négative, les cellules sont parcourues à "contre courant" et le flux doit être estimé à partir des quantités calculées dans la cellule suivante $i+1$. Enfin, si la vitesse extérieure est nulle, alors le flux est nul et le sens du

décentrement n'a pas d'importance.

D'autre part, il faut noter que la valeur de la vitesse extérieure u_{es} est toujours prise à l'interface $i+1/2$. En effet, la vitesse extérieure est une donnée d'entrée du calcul et sa valeur à l'interface peut être directement utilisée pour le calcul des flux. D'ailleurs, il sera montré dans la sous-section 5.2.4 que son utilisation est même nécessaire pour que la zone proche du point d'arrêt soit calculée correctement. En pratique, on prend :

$$u_{es,i+1/2} = \frac{1}{2}(u_{es,i} + u_{es,i+1})$$

Enfin, la quantité $(T_e - T_p)\theta_{Ts}$ est intégrée numériquement à partir de sa définition (3.18b) avec une méthode de Simpson.

L'extension du schéma à l'ordre 2 n'a pas été traitée au cours de cette thèse mais elle pourra être envisagée par la suite à l'aide d'une reconstruction de type MUSCL.

Schéma semi-implicite pour la discrétisation en temps

Une méthode d'Euler explicite est utilisée pour la discrétisation des flux, alors que les termes sources sont calculés de manière implicite. Ceci permet notamment d'augmenter la stabilité de la méthode et d'utiliser une condition initiale arbitraire sans rencontrer de problème de robustesse lors de la phase transitoire. De plus, le terme $\boldsymbol{S_{ci}}$ de la méthode de contrôle est calculé de manière explicite pour être traité de manière similaire aux termes flux. Pour la même raison, les gradients intervenant dans le terme $\boldsymbol{S_{ci}}$ sont calculés de façon décentrée amont. L'équation (5.11) devient :

$$\Delta s'_i \frac{\boldsymbol{U}_i^{n+1} - \boldsymbol{U}_i^n}{\Delta t_i} + \left[\boldsymbol{G}_{i+1/2}^n - \boldsymbol{G}_{i-1/2}^n\right] = \Delta s'_i \boldsymbol{S}_i^{n+1} + \Delta s'_i \boldsymbol{S_{ci}}^n \tag{5.14a}$$

$$\Delta s'_i \frac{U_{T,i}^{n+1} - U_{T,i}^n}{\Delta t_i} + \left[G_{T,i+1/2}^n - G_{T,i-1/2}^n\right] = \Delta s'_i S_{T,i}^{n+1} \tag{5.14b}$$

L'objectif étant uniquement de connaitre la solution stationnaire, un pas de temps local peut être utilisé pour permettre une convergence plus rapide. De plus, comme les termes sources sont traités de manière implicite, la condition de stabilité sur le pas de temps Δt_i est uniquement liée aux termes de flux (qui sont traités de manière explicite). On impose donc la condition CFL classique :

$$\Delta t_i = CFL \frac{\Delta s'_i}{\lambda_{i,max}} \quad \text{avec} \quad \lambda_{i,max} = \max\left(|\lambda_i^+|, |\lambda_i^-|\right)$$

avec $CFL < 1$. En pratique, on constate qu'il faut en général $CFL \leq 0.4$. Ceci est dû notamment aux traitements numériques développés dans les sections 5.2.4 et 5.2.5.

Solution du système d'équations

On rappelle que les équations de couche limite dynamique et de couche limite thermique sont découplées. Elles sont donc résolues séparément. La formulation discrétisée (5.14a) du système d'équations dynamiques peut se réécrire :

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} - \Delta t_i \boldsymbol{S}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n - \frac{\Delta t_i}{\Delta s'_i}\left(\boldsymbol{G}_{i+1/2}^n - \boldsymbol{G}_{i-1/2}^n\right) + \Delta t_i \boldsymbol{S_{ci}}^n \tag{5.15}$$

On a donc un système non linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont $U_1 = u_{es}\delta_{1s}$ et $U_2 = {u_{es}}^2\theta_{ss}$. Il est résolu par une méthode de Newton. L'objectif étant uniquement de calculer la solution stationnaire, il n'est pas nécessaire de faire converger la solution à chaque pas de temps. Seulement une itération pour la méthode de Newton est suffisante pour chaque pas de temps. On peut linéariser le terme de gauche du système d'équations (5.15) en utilisant la jacobienne $\nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S}_i^{n+1} = \boldsymbol{S}_i^n + \nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{S}_i^n \left(\boldsymbol{U}_i^{n+1} - \boldsymbol{U}_i^n\right)$$

d'où

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} - \Delta t_i \boldsymbol{S}_i^{n+1} \simeq \boldsymbol{U}_i^n - \Delta t_i \boldsymbol{S}_i^n + [\boldsymbol{I} - \Delta t_i \nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{S}_i^n]\left(\boldsymbol{U}_i^{n+1} - \boldsymbol{U}_i^n\right)$$

Le système (5.15) devient alors :

$$[\boldsymbol{I} - \Delta t_i \nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{S}_i^n]\left(\boldsymbol{U}_i^{n+1} - \boldsymbol{U}_i^n\right) = -\frac{\Delta t_i}{\Delta s_i'}\left(\boldsymbol{G}_{i+1/2}^n - \boldsymbol{G}_{i-1/2}^n\right) + \Delta t_i \boldsymbol{S}_i^n + \Delta t_i \boldsymbol{S_c}_i^n$$

La solution est donc donnée par :

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n + [\boldsymbol{I} - \Delta t_i \nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{S}_i^n]^{-1}\,\Delta t_i \left(-\frac{1}{\Delta s_i'}\left(\boldsymbol{G}_{i+1/2}^n - \boldsymbol{G}_{i-1/2}^n\right) + \boldsymbol{S}_i^n + \boldsymbol{S_c}_i^n\right) \tag{5.16}$$

Le termes sources $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{S_c}$ sont donnés par (5.12a). La jacobienne $\nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{S}$ est, quant à elle, calculée de la manière suivante :

$$\nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{S}(s', \boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s'} + \dfrac{1}{2}{u_{es}}^2\dfrac{\partial C_{fs}}{\partial U_1} & \dfrac{1}{2}{u_{es}}^2\dfrac{\partial C_{fs}}{\partial U_2} \\ u_{es}\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s'} - \dfrac{1}{2}{u_{es}}^3\dfrac{\partial C_{fs}}{\partial U_1} + 2{u_{es}}^3\dfrac{\partial C_{Ds}}{\partial U_1} & -\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s'} - \dfrac{1}{2}{u_{es}}^3\dfrac{\partial C_{fs}}{\partial U_2} + 2{u_{es}}^3\dfrac{\partial C_{Ds}}{\partial U_2} \end{pmatrix}$$

Les dérivées de C_{fs} et C_{Ds} par rapport à U_1 et U_2 sont données en annexe F.

Enfin, en posant :

$$\nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{S}(s', \boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

on a :

$$[\boldsymbol{I} - \Delta t_i \nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{S}_i^n]^{-1} = \frac{1}{(1-\Delta t_i A)(1-\Delta t_i D) - (\Delta t_i)^2 CB}\begin{pmatrix} 1-\Delta t_i D & \Delta t_i B \\ \Delta t_i C & 1-\Delta t_i A \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

Pour la partie thermique, on peut procéder de la même manière à partir de l'équation discrète (5.14b) du modèle thermique. La solution est finalement donnée par :

$${U_T}_i^{n+1} = {U_T}_i^n + \left[1 - \Delta t_i \left(\frac{\partial S_T}{\partial U_T}\right)_i^n\right]^{-1} \Delta t_i \left(-\frac{1}{\Delta s_i'}\left({G_T}_{i+1/2}^n - {G_T}_{i-1/2}^n\right) + {S_T}_i^n\right) \tag{5.18}$$

Le terme source S_T est donné par (5.12b). On précise d'autre part que :

$$\frac{\partial S_T}{\partial U_T} = \frac{\partial S_T}{\partial \delta_T}\frac{\partial \delta_T}{\partial U_T} = \frac{\partial S_T}{\partial \delta_T}\left(\frac{\partial U_T}{\partial \delta_T}\right)^{-1} \tag{5.19}$$

Les dérivées de S_T et U_T par rapport à δ_T sont données en annexe F.

5.2.3. Traitement des conditions limites et des conditions initiales

Grâce à la formulation instationnaire du modèle, il n'est pas nécessaire de localiser explicitement le point ou la ligne d'arrêt. Il n'est pas non plus nécessaire d'imposer des conditions aux limites aux frontières du domaine de calcul, qui se trouvent au bord de fuite, puisque la méthode de contrôle développée dans la sous-section 5.1.3 impose que les valeurs propres soient toujours du signe de u_{es}. On a donc toujours des caractéristiques sortantes aux frontières du domaine. Dans ce cas, seule une condition initiale est à imposer. La possibilité d'imposer des conditions aux limites est malgré tout prévue dans le code. En effet on verra dans le chapitre 6 qu'elles sont nécessaires pour quelques cas bien particuliers.

Conditions limites

Des cellules fictives sont définies aux frontières du domaine de calcul. Ce sont les cellules $i = 0$ et $i = N + 1$ qui se trouvent respectivement au bord de fuite intrados et au bord de fuite extrados (voir figure 5.7). Dans le cas général, ces cellules fictives sont inutiles et sont une simple copie des cellules $i = 1$ et $i = N$, mais ce choix est arbitraire. Ces cellules fictives seront cependant utiles pour quelques cas particuliers traités dans le chapitre 6. Les conditions aux limites imposées pour ces cas seront spécifiées par la suite.

Conditions initiales

La formulation instationnaire du modèle intégral de couche limite nécessite d'imposer une condition initiale. Cependant, la discrétisation semi-implicite en temps permet d'utiliser une condition initiale arbitraire. Le tableau 5.1 répertorie les valeurs utilisées pour initialiser la couche limite dynamique et la couche limite thermique.

Couche limite dynamique		**Couche limite thermique**	
quantité	valeur initiale	quantité	valeur initiale
θ_{ss}	3×10^{-6} m	δ_T	δ
H	2.5		

Table 5.1. – Initialisation des couches limites dynamique et thermique pour la méthode 2D

Les variables primaires dynamiques sont initialisées avec des valeurs constantes. L'épaisseur de quantité de mouvement θ_{ss} à l'instant initial est choisie assez petite, elle vaut 3×10^{-6} m et le facteur de forme est imposé à 2.5, ce qui correspond pratiquement à un facteur de forme pour une couche limite laminaire sur une plaque plane. Ceci sous-entend que l'épaisseur de déplacement δ_{1s} vaut 7.5×10^{-6} m à la première itération. Ces valeurs ont été choisies de manière assez arbitraire mais elles n'ont pas d'influence sur la solution convergée. Elles peuvent d'ailleurs être modifiées par l'utilisateur. De plus, l'écoulement de couche limite est supposé laminaire dans toutes les cellules à l'instant initial. Une fois les variables primaires imposées, le profil de vitesse est complètement déterminé et toutes les grandeurs dynamiques peuvent être calculées à l'instant initial. L'équation (5.16) peut ensuite être résolue pour déterminer les variables résolues et donc les variables primaires à l'instant suivant. On peut alors répéter l'opération jusqu'à atteindre la convergence.

Une fois que la solution de la couche limite dynamique est convergée, le calcul de la couche limite thermique est initialisé en imposant une épaisseur de couche limite thermique identique à celle de la couche limite dynamique : $\delta_T = \delta$. Ceci permet déjà d'estimer grossièrement la solution de la couche limite thermique puisque cette égalité est au moins vraie dans le cas d'un écoulement de plaque plaque avec un nombre de Prandtl égal à 1 (analogie de Reynolds). Une fois que la valeur initiale de δ_T est imposée, le profil de température est complètement déterminé puisque toutes les grandeurs dynamiques sont déjà connues (la température de paroi T_p étant imposée par l'utilisateur). Toutes les grandeurs thermiques sont alors calculées à l'instant initial et l'équation (5.18) est résolue pour connaître la valeur de la variable résolue et donc de la variable primaire δ_{1T} à l'instant suivant. Enfin, δ_T est déduit de δ_{1T}. L'opération est alors répétée jusqu'à atteindre la convergence.

5.2.4. Traitement numérique spécifique de la zone proche du point d'arrêt

Sur un profil d'aile, le point d'arrêt est défini comme étant le point où la vitesse extérieure u_{es} s'annule. En général, il est très souvent situé à l'extrémité de la zone de calcul et il est donc déterminé par une condition limite. Ceci nécessite en revanche de connaître précisément la position du point d'arrêt. Dans cette thèse, le point d'arrêt n'est pas localisé explicitement et il peut se trouver au milieu du domaine de calcul. Ceci peut engendrer des problèmes et des erreurs numériques importantes puisque les grandeurs calculées ($u_{es}\delta_{1s}$, ${u_{es}}^2\theta_{ss}$, ...) peuvent être très faibles voire nulles et conduire à des divisions par de très petits nombres. Cette section montre pourquoi le schéma numérique développé dans la sous-section 5.2.2 engendre des erreurs numériques importantes pour la résolution de la couche limite dynamique et comment il peut être adapté pour que la zone du point d'arrêt soit calculée avec précision.

Identification du problème

On considère une très petite zone autour d'un point d'arrêt de bord d'attaque. On peut alors faire l'hypothèse que l'écoulement dans cette zone se comporte comme un écoulement auto-similaire de point d'arrêt bidimensionnel laminaire (écoulement de Falkner-Skan pour $m = 1$). Dans ce cas, la vitesse extérieure est de la forme $u_{es} = Cs$ (où s est la distance au point d'arrêt) et les grandeurs H, δ_{1s}, θ_{ss} ne dépendent pas de s. Dans le système d'équations (5.2), le terme de flux

$$\boldsymbol{F}(s, \boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {u_{es}}^2\theta_{ss} \\ {u_{es}}^3\theta_{ss}\left(f_l(H) - 1\right) \end{pmatrix}$$

se dérive alors de la manière suivante :

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}(s, \boldsymbol{U})}{\partial s} = \begin{pmatrix} 2\theta_{ss}u_{es}\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} \\ 3\theta_{ss}\left(f_l(H) - 1\right){u_{es}}^2\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\theta_{ss}C^2 s \\ 3\theta_{ss}\left(f_l(H) - 1\right)C^3 s^2 \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

D'un point de vue discret, les hypothèses liées à l'écoulement de point d'arrêt bidimensionnel s'écrivent :

$$u_{es,i} = Cs_i, \quad \theta_{ss,i} = \theta_{ss,i-1}, \quad H_i = H_{i-1}$$

En posant Δs_i la longueur de la cellule i on a :

$$u_{es,i-1} = C\left(s_i - \frac{\Delta s_i}{2} - \frac{\Delta s_{i-1}}{2}\right), \quad u_{es,i-1/2} = C\left(s_i - \frac{\Delta s_i}{2}\right), \quad u_{es,i+1/2} = C\left(s_i + \frac{\Delta s_i}{2}\right)$$

En utilisant le schéma décentré amont (5.13) développé dans la sous-section 5.2.2, la première composante de la dérivée du vecteur flux (5.20) se discrétise comme suit :

$$\frac{{u_{es}}^2_{,i+1/2}\theta_{ss,i} - {u_{es}}^2_{,i-1/2}\theta_{ss,i-1}}{\Delta s_i} = 2\theta_{ss,i}C^2 s_i$$

On retrouve bien ici le résultat obtenu précédemment par le calcul continu (5.20). Il faut en revanche noter qu'il est nécessaire d'utiliser la vitesse estimée à l'interface (en $i+1/2$) plutôt que la vitesse au centre de la maille (en i). En effet, on aurait dans le deuxième cas :

$$\frac{{u_{es}}^2_{,i}\theta_{ss,i} - {u_{es}}^2_{,i-1}\theta_{ss,i-1}}{\Delta s_i} = 2\theta_{ss,i}C^2\left(s_i\left(\frac{1}{2}+\frac{\Delta s_{i-1}}{2\Delta s_i}\right) - \frac{\Delta s_{i-1}}{4} - \frac{\Delta s_i}{8} - \frac{\Delta s_{i-1}^2}{8\Delta s_i}\right)$$

Or, dans la zone proche du point d'arrêt, Δs n'est pas négligeable devant s, il peut même être supérieur à s dans la maille où se trouve le point d'arrêt. Ainsi, la dérivée discrète du terme de flux ne serait pas égale à sa dérivée continue.

Toujours en utilisant le schéma décentré amont (5.13) développé dans la sous-section 5.2.2, la seconde composante de la dérivée du vecteur flux (5.20) se discrétise de la manière suivante :

$$\frac{{u_{es}}^3_{,i+1/2}\theta_{ss,i}\left(f_l(H_i)-1\right) - {u_{es}}^3_{,i-1/2}\theta_{ss,i-1}\left(f_l(H_{i-1})-1\right)}{\Delta s_i} = 3\theta_{ss,i}\left(f_l(H_i)-1\right)C^3\left(s_i^2+\frac{\Delta s_i^2}{12}\right) \tag{5.21}$$

Dans la zone du point d'arrêt, où Δs n'est pas négligeable devant s, la dérivée discrète du terme de flux de la seconde équation n'est pas égale à sa dérivée continue obtenue en (5.20), même en utilisant la vitesse extérieure estimée directement à l'interface.

L'erreur engendrée s'explique par le fait que l'égalité

$$\frac{\partial {u_{es}}^3}{\partial s} = 3{u_{es}}^2\frac{\partial u_{es}}{\partial s}$$

n'est pas vérifiée au niveau discret avec le schéma numérique utilisé. Loin du point d'arrêt, Δs^2 est négligeable devant s^2 et le schéma (5.21) est consistant. Par contre, ce n'est pas le cas près du point d'arrêt et l'erreur numérique n'est pas négligeable.

Résolution du problème

Cette erreur peut être corrigée en ajoutant, au second membre du système d'équations discrètes, un terme de correction numérique $\boldsymbol{Er}$ qui correspond à la discrétisation de :

$$\boldsymbol{Er} = \begin{pmatrix} Er_1 \\ Er_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial {u_{es}}^2}{\partial s} - 2u_{es}\frac{\partial u_{es}}{\partial s}\right)\theta_{ss} \\ \left(\frac{\partial {u_{es}}^3}{\partial s} - 3{u_{es}}^2\frac{\partial u_{es}}{\partial s}\right)\theta_{ss}\left(f(H)-1\right) \end{pmatrix}$$

Ce terme est évidemment nul sous sa forme continue mais permet de compenser l'erreur introduite dans le calcul des flux sous sa forme discrète. Le système d'équations discrètes (5.14a) s'écrit avec

la correction (au voisinage du point d'arrêt, la couche limite est attachée et le terme $\boldsymbol{S_c}_i$ est nul) :

$$\Delta s_i \frac{\boldsymbol{U}_i^{n+1} - \boldsymbol{U}_i^n}{\Delta t_i} + \left[\boldsymbol{G}_{i+1/2}^n - \boldsymbol{G}_{i-1/2}^n\right] = \Delta s_i \boldsymbol{S}_i^{n+1} + \Delta s_i \boldsymbol{Er}_i^{n+1} \tag{5.22}$$

avec

$$\Delta s_i \boldsymbol{Er}_i^{n+1} = \begin{pmatrix} \left(\left(u_{es}{}^2_{i+1/2} - u_{es}{}^2_{i-1/2}\right) - 2u_{esi}\left(u_{esi+1/2} - u_{esi-1/2}\right)\right) \dfrac{U_{2i}^{n+1}}{u_{es}{}_i^2} \\ \left(\left(u_{es}{}^3_{i+1/2} - u_{es}{}^3_{i-1/2}\right) - 3u_{es}{}_i^2\left(u_{esi+1/2} - u_{esi-1/2}\right)\right) \dfrac{U_{2i}^{n+1}\left(f(H_i^{n+1}) - 1\right)}{u_{es}{}_i^2} \end{pmatrix}$$

On a vu que la première composante du terme de correction $\boldsymbol{Er}$ était inutile (car nulle) dans le cas d'un pur écoulement de point d'arrêt bidimensionnel. En revanche, il s'avère que ce terme est non nul pour un écoulement autour d'un profil d'aile par exemple. En effet, l'hypothèse $u_{es} = Cs$ utilisée dans cette démonstration est valable pour un écoulement auto-similaire de point d'arrêt bidimensionnel mais elle n'est pas tout à fait exacte pour une zone de point d'arrêt d'un écoulement quelconque.

D'autre part, on peut reformuler la seconde composante du terme de correction $\boldsymbol{Er}$ de la manière suivante :

$$Er_{2i} = K_i \left(\frac{\partial u_{es}}{\partial s}\right)_i (f(H_i) - 1)U_{2i}$$

En pratique, il a été constaté que la valeur de K_i peut devenir très importante dans la zone très proche du point d'arrêt, ce qui rend le système instable. Ainsi, pour assurer la stabilité du schéma numérique corrigé, une condition CFL empirique a été introduite. Elle est basée sur l'échelle de temps caractéristique du terme de correction qui est $1/\frac{\partial u_{es}}{\partial s}$. De plus, on souhaite que le pas de temps soit petit lorsque K est grand pour rendre le schéma plus stable. La condition sur le pas de temps a donc été choisie sous la forme :

$$\Delta t_i < \frac{2}{\left|K_i \left(\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s}\right)_i\right|}$$

La section 6.4 montre comment le terme de correction développé dans cette section pour le modèle dynamique permet d'améliorer fortement la précision de la méthode numérique au voisinage du point d'arrêt. En revanche, aucun problème particulier n'a été constaté pour la résolution de la couche limite thermique au voisinage du point d'arrêt (voir section 6.4), le modèle thermique n'a donc pas eu besoin d'être corrigé.

5.2.5. Limitation du gradient de pression dans le cas de forts gradients de pression adverses

Il a enfin été nécessaire d'introduire un traitement numérique particulier dans les zones de forts gradients de pression adverses pour rendre le code plus robuste. Quand le gradient de pression adverse est très important, le gradient de vitesse prend des valeurs très négatives. Dans ce cas, les

termes source du modèle dynamique

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S_c} &= \begin{pmatrix} -u_{es}\delta_{1s}\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s}+\dfrac{1}{2}{u_{es}}^2C_{fs}+u_{es}v_{\theta_{ss}} \\ ({u_{es}}^2\delta_{1s}-{u_{es}}^2\theta_{ss})\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s}-\dfrac{1}{2}{u_{es}}^3C_{fs}+2{u_{es}}^3C_{Ds}+{u_{es}}^2v_{\delta_{1s}} \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} -u_{es}\delta_{1s}\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} \\ ({u_{es}}^2\delta_{1s}-{u_{es}}^2\theta_{ss})\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5.23}$$

deviennent trop importants et le système dynamique devient instable. Pour pallier ce problème, une solution simple est de limiter le gradient de pression. Évidemment, les résultats dans cette zone ne seront pas corrects. En revanche, les zones de gradients de pression adverses très importants correspondent à des zones proches du bord de fuite et/ou à des zones où la couche limite est décollée. Comme il a déjà été mentionné précédemment, on ne cherche pas à avoir une solution précise dans ces zones où l'accrétion de givre se produit rarement. La condition utilisée pour limiter le gradient de pression est basée sur une analyse de stabilité matricielle pour une équation scalaire. Pour simplifier le problème, on suppose que, dans le cas de forts gradients de pression adverses, le système intégral de couche limite peut être représenté par une équation scalaire de la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial t}+a\frac{\partial v}{\partial s}=bv$$

Elle se discrétise de la manière suivante avec le schéma numérique développé dans la sous-section 5.2.2 :

$$\frac{v_i^{n+1}-v_i^n}{\Delta t}+a\frac{v_i^n-v_{i-1}^n}{\Delta s}=bv_i^n$$

On peut montrer que cette équation est stable si $|1-a\Delta t/\Delta s+b\Delta t|<1$ (voir annexe G), ce qui donne entre autres la condition sur le pas d'espace suivante :

$$\Delta s<\frac{a}{b} \qquad \text{avec} \quad b>0$$

Cette condition peut être adaptée au système d'équations intégrales de couche limite en prenant pour a la plus petite valeur propre de la jacobienne du terme de flux ($a=\lambda^-$) et pour b la plus grande valeur propre du terme source écrit sous sa forme simplifiée (5.23) ($b=-\frac{\partial u_e}{\partial s}$). La condition sur le pas d'espace devient alors :

$$\Delta s<\frac{\lambda^-}{\dfrac{\partial u_e}{\partial s}} \qquad \text{quand} \quad \frac{\partial u_e}{\partial s}<0$$

En pratique, il est compliqué d'imposer une condition sur le pas d'espace car la méthode doit être robuste quel que soit le maillage utilisé. C'est pourquoi cette condition a été transformée en une condition sur le gradient de vitesse, autrement dit sur le gradient de pression. Cette condition s'applique uniquement pour des gradients de pression adverses très importants. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned}\text{si} \quad & \frac{\partial u_e}{\partial s}<0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_e}{\partial s}>J\frac{\lambda^-}{\Delta s} \\ \text{alors} \quad & \frac{\partial u_e}{\partial s}=J\frac{\lambda^-}{\Delta s}\end{aligned}$$

où J est une constante qui peut être modifiée par l'utilisateur. Empiriquement, on trouve que $J = 0.1$ est la valeur optimale dans la plupart des cas.

5.3. Extension à une méthode de résolution Volumes-Finis tridimensionnelle

Cette section traite de l'extension en trois dimensions de la méthode de résolution de type Volumes-Finis 2D [9, 10], développée dans la section précédente. Elle correspond à ce qui a été programmé dans le code BLIM3D. En revanche, la partie thermique de la méthode de résolution n'a pas été implémentée dans BLIM3D au cours de cette thèse, même si elle est développée dans cette section. Ceci fait partie des perspectives de la thèse.

5.3.1. Définition du domaine de calcul

Le domaine de calcul ainsi que le type de maillage non structuré utilisés dans le solveur BLIM3D sont schématisés sur la figure 5.8 dans le cas typique d'un profil d'aile. Contrairement au cas 2D, le domaine de calcul est fermé au niveau du bord de fuite pour un profil d'aile. Les seules frontières du domaine sont les sections qui délimitent le domaine dans la direction transverse. Le vecteur $\boldsymbol{y}$ est toujours perpendiculaire à la paroi et le vecteur $\boldsymbol{s}$ est toujours tangent à la paroi, orienté dans le sens des lignes de courant extérieures. On a donc toujours $\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}} \cdot \boldsymbol{s} > 0$.

En revanche, le solveur BLIM3D est aussi compatible avec des domaines de calcul qui ne sont pas fermés, comme pour le cas d'une plaque plane par exemple, ou au contraire avec des domaines de calcul complètement fermés, comme pour le cas d'une sphère. Si le domaine de calcul n'est pas complètement fermé, il est possible d'imposer, si nécessaire, des conditions limites à chaque frontière du domaine.

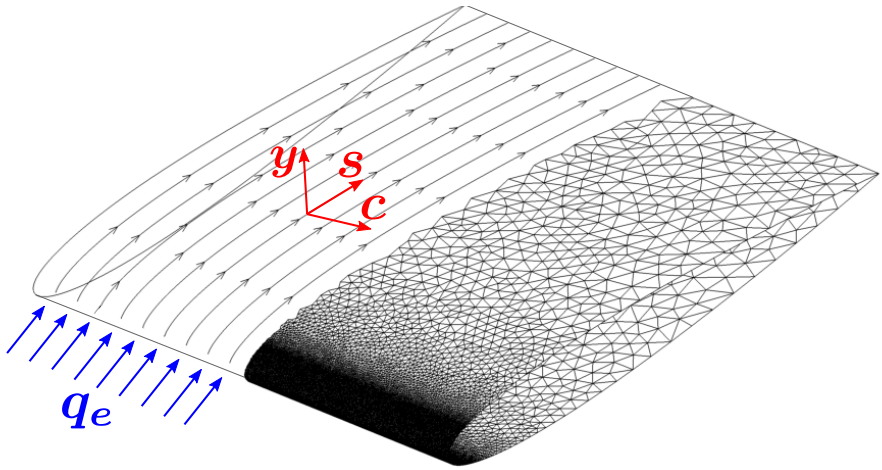


FIGURE 5.8. – Définition du domaine de calcul pour la méthode 3D

5.3.2. Changements de repère

Dans le solveur BLIM3D, les variables sont stockées dans un repère cartésien fixe $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ quelconque. Or, si la résolution des équations intégrales de couche limite (2.4) et (3.17) peut être

effectuée dans n'importe quel repère, ce n'est pas le cas pour l'établissement des relations de fermeture qui doit obligatoirement se faire dans le repère $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})$ lié aux lignes de courant extérieures. Au cours du calcul, des rotations devront donc être effectuées pour exprimer les différentes variables du repère global $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ dans le repère local $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})$ et inversement.

Remarque : Le repère $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ est encore plus général que le repère $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ utilisé dans la section 2.1 et la sous-section 3.2.1 puisqu'il n'est pas adapté à la géométrie, c'est-à-dire que la direction $\boldsymbol{Y}$ n'est pas nécessairement normale à la paroi.

On définit alors $\bar{\bar{\boldsymbol{R}}}$, la matrice de rotation permettant de passer du repère local $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c})$ vers le repère global $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$. Elle s'écrit :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{R}}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{s} & \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{y} & \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{s} & \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{y} & \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{s} & \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{y} & \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

Ainsi, au début de chaque itération, les variables résolues dans le repère global sont exprimées dans le repère local de la manière suivante :

$$(\boldsymbol{M})_{local} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{q_e}|\delta_{1s} \\ |\boldsymbol{q_e}|\delta_{1y} \\ |\boldsymbol{q_e}|\delta_{1c} \end{pmatrix} = \bar{\bar{\boldsymbol{R}}}^T \begin{pmatrix} |\boldsymbol{q_e}|\delta_{1X} \\ |\boldsymbol{q_e}|\delta_{1Y} \\ |\boldsymbol{q_e}|\delta_{1Z} \end{pmatrix} = \bar{\bar{\boldsymbol{R}}}^T (\boldsymbol{M})_{global} \tag{5.24}$$

avec δ_{1y} qui est, en fait, nul. Puis, une fois que les profils de vitesse ont été établis dans le repère local, ils sont exprimés dans le repère global par la relation suivante :

$$(\boldsymbol{q})_{global} = \begin{pmatrix} u_X \\ u_Y \\ u_Z \end{pmatrix} = \bar{\bar{\boldsymbol{R}}} \begin{pmatrix} u_s \\ u_y \\ u_c \end{pmatrix} = \bar{\bar{\boldsymbol{R}}} (\boldsymbol{q})_{local} \tag{5.25}$$

Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à la section 5.4 qui résume la structure principale de l'algorithme tel qu'il a été programmé dans les solveurs BLIM2D et BLIM3D.

5.3.3. Discrétisation du système d'équations

Les systèmes d'équations 3D (2.4) et (3.17) peuvent aussi s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \tilde{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}) \tag{5.26a}$$

$$\frac{\partial U_T}{\partial t} + \tilde{\nabla} \cdot \boldsymbol{F_T}(U_T) = S_T(U_T) \tag{5.26b}$$

avec

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M} \\ tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}}) \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{\boldsymbol{T}}} \\ \left(\boldsymbol{E} - \bar{\bar{\boldsymbol{T}}}\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}\right)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2 \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}} \\ |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3 \left(\boldsymbol{\Delta_3} - \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}} \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|}\right)^T \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} -\left(\boldsymbol{M}\cdot\tilde{\nabla}\right)\cdot\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}} + \dfrac{\boldsymbol{\tau_p}}{\rho} \\ 2|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3 C_D - \bar{\bar{\boldsymbol{T}}} : \tilde{\nabla}\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}} + \tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}\cdot\left(\left(\boldsymbol{M}\cdot\tilde{\nabla}\right)\cdot\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}} - \dfrac{\boldsymbol{\tau_p}}{\rho}\right) \end{pmatrix}$$

$$U_T = (T_e - T_p)\delta_{1T} \qquad \boldsymbol{F_T} = (T_e - T_p)|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\boldsymbol{\theta_T} \qquad S_T = \frac{-\Phi_p}{\rho c_p} - \frac{1}{c_p}|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3 C_D$$

et $\bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}$ et $\boldsymbol{\Delta_3}$ sont définis de la manière suivante :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}} = \int_0^\infty \left(\left(\frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|} - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|}\right) \otimes \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|}\right) \mathrm{d}y \tag{5.27}$$

$$\boldsymbol{\Delta_3} = \int_0^\infty \left(\frac{\tilde{\boldsymbol{q}}}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|}\left(1 - \frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}|^2}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}\right)\right) \mathrm{d}y \tag{5.28}$$

Mughal définit $\boldsymbol{\Delta_3}$ comme étant le vecteur d'épaisseur d'énergie cinétique totale[3]. Les termes $\boldsymbol{U}$ et U_T correspondent aux variables résolues, $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{F_T}$ aux termes de flux et $\boldsymbol{S}$ et S_T aux termes sources.

En utilisant une formulation de type Volumes-Finis sur un maillage non structuré, le système d'équations intégrales (5.26) est intégré sur une cellule i de surface Ω_i :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_i} \boldsymbol{U}(t)\,\mathrm{d}\Omega + \sum_{j\in\mathcal{N}(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{n}_{ij}\,\mathrm{d}\Gamma = \int_{\Omega_i} \boldsymbol{S}(t)\,\mathrm{d}\Omega$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_i} U_T(t)\,\mathrm{d}\Omega + \sum_{j\in\mathcal{N}(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{F_T}(t)\cdot\boldsymbol{n}_{ij}\,\mathrm{d}\Gamma = \int_{\Omega_i} S_T(t)\,\mathrm{d}\Omega$$

où le théorème de flux-divergence a été utilisé pour transformer une intégrale surfacique en une intégrale linéique. Γ_{ij} est le côté partagé par la cellule i avec l'une de ses $N(i)$ voisines, j. Le vecteur $\boldsymbol{n}_{ij}$ est le vecteur local, normal au côté Γ_{ij}, dans le plan tangent à la cellule i et orienté vers l'extérieur.

On suppose alors que, dans chaque cellule i, $\boldsymbol{U}$, U_T, $\boldsymbol{S}$ et S_T sont constants et égaux à leur valeur moyenne $\boldsymbol{U}_i$, $U_{T,i}$, $\boldsymbol{S}_i$ et $S_{T,i}$ au centre de la cellule i. Elles sont définies par :

$$\boldsymbol{U}_i(t) = \frac{1}{|\Omega_i|}\int_{\Omega_i} \boldsymbol{U}(x,z,t)\,\mathrm{d}\Omega\ ; \quad U_{T,i}(t) = \frac{1}{|\Omega_i|}\int_{\Omega_i} U_T(x,z,t)\,\mathrm{d}\Omega$$

$$\boldsymbol{S}_i(t) = \frac{1}{|\Omega_i|}\int_{\Omega_i} \boldsymbol{S}(x,z,\boldsymbol{U}(x,z,t))\,\mathrm{d}\Omega\ ; \quad S_{T,i}(t) = \frac{1}{|\Omega_i|}\int_{\Omega_i} S_T(x,z,U_T(x,z,t))\,\mathrm{d}\Omega$$

D'autre part, on définit les flux numériques $\boldsymbol{G}_{ij}$ et G_{Tij} comme étant une approximation des flux sur le côté Γ_{ij}.

$$\boldsymbol{G}_{ij} \simeq \frac{1}{|\Gamma_{ij}|}\int_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{n}_{ij}\,\mathrm{d}\Gamma$$

$$G_{Tij} \simeq \frac{1}{|\Gamma_{ij}|}\int_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{F_T}(t)\cdot\boldsymbol{n}_{ij}\,\mathrm{d}\Gamma$$

3. Contrairement aux déficits de masse et de quantité de mouvement, on trouve dans la littérature plusieurs grandeurs qui permettent d'exprimer le déficit d'énergie cinétique

On a alors :

$$|\Omega_i|\frac{d\boldsymbol{U}_i(t)}{dt} + \sum_{j\in\mathcal{N}(i)} \boldsymbol{G}_{ij}(t)|\Gamma_{ij}| = |\Omega_i|\boldsymbol{S}_i(t) \tag{5.29a}$$

$$|\Omega_i|\frac{dU_{T,i}(t)}{dt} + \sum_{j\in\mathcal{N}(i)} G_{Tij}(t)|\Gamma_{ij}| = |\Omega_i|S_{T,i}(t) \tag{5.29b}$$

Le calcul du gradient de vitesse, qui apparaît entre autres dans les termes sources, est effectué à l'aide d'une méthode des moindres carrés de premier ordre en espace.

Schéma décentré amont pour la discrétisation en espace

• Conservation du flux

Dans la formulation Volumes-Finis (5.29), les flux doivent être exprimés dans le plan associé à chaque cellule pour que le schéma soit conservatif. Or, pour un écoulement autour d'un corps quelconque, deux cellules voisines sont rarement coplanaires. C'est pourquoi, dans le cas général, on ne peut pas utiliser le fait que :

$$\boldsymbol{G}_{ji} = -\boldsymbol{G}_{ij}$$

L'expression du flux sur le côté ij sera donc différente selon qu'elle est associée à la cellule i ou j. Les travaux de Lokatt et Eller [51] ont été adaptés pour assurer le caractère conservatif des équations et les deux expressions du flux sur le côté ij se déduisent l'une de l'autre par une rotation. La figure 5.9 schématise deux cellules i et j, dans le cas général où elles ne sont pas coplanaires, et leurs variables associées.

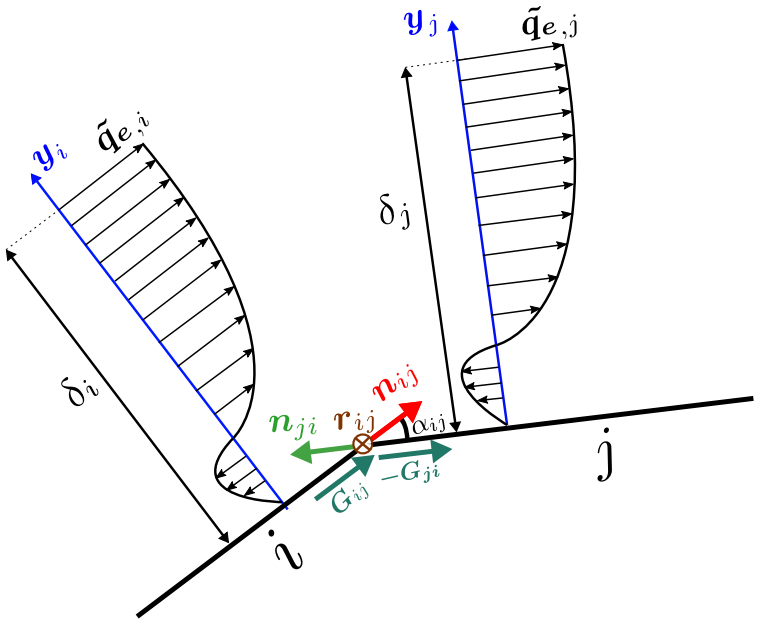


FIGURE 5.9. – Schéma d'une coupe 2D de deux cellules non coplanaires et des variables associées

On introduit donc la matrice de rotation $\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij}$ qui permet d'exprimer les quantités tensorielles du plan associé à la cellule i dans le plan associé à la cellule j. La méthode pour construire cette matrice est basée sur celle proposée par Lokatt et Eller et adaptée au modèle développé dans cette thèse. Elle consiste en plusieurs étapes :

- Définition de l'axe de rotation, $\boldsymbol{r}_{ij} = \dfrac{\boldsymbol{y}_i \times \boldsymbol{y}_j}{|\boldsymbol{y}_i \times \boldsymbol{y}_j|}$
- Définition de l'angle de rotation, $\alpha_{ij} = \cos^{-1}(\boldsymbol{y}_i \cdot \boldsymbol{y}_j)$
- Définition de la matrice de rotation $\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij}$ autour de l'axe $\boldsymbol{r}_{ij}$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij} = \cos\alpha_{ij}\bar{\bar{\boldsymbol{I}}} + \sin\alpha_{ij}\left[\boldsymbol{r}_{ij}\right]_\times + (1-\cos\alpha_{ij})\,\boldsymbol{r}_{ij}\otimes\boldsymbol{r}_{ij}$$

où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité, $\otimes$ est le produit tensoriel. $[\boldsymbol{r}_{ij}]_\times$ est le tenseur antisymétrique associé à l'axe de rotation $\boldsymbol{r}_{ij}$. Si l'axe de rotation est défini par $\boldsymbol{r}_{ij} = (r_{1,ij}, r_{2,ij}, r_{3,ij})$, alors $[\boldsymbol{r}_{ij}]_\times$ s'écrit :

$$[\boldsymbol{r}_{ij}]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -r_{3,ij} & r_{2,ij} \\ r_{3,ij} & 0 & -r_{1,ij} \\ -r_{2,ij} & r_{1,ij} & 0 \end{pmatrix}$$

Ces rotations s'appliquent uniquement aux flux vectoriels, et pas aux quantités scalaires. Dans notre cas, elles s'appliquent donc à $\boldsymbol{G}(1:3)$ pour l'équation intégrale de quantité de mouvement, mais pas à $G(4)$ pour l'équation intégrale de l'énergie cinétique ni à G_T pour l'équation intégrale de l'énergie. Finalement, les expressions des flux sur le côté ij, associées à la cellule i et à la cellule j, se déduisent l'une de l'autre par les relations suivantes :

$$\boldsymbol{G}_{ji}(1:3) = -\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij}\boldsymbol{G}_{ij}(1:3) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{G}_{ij}(1:3) = -\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ji}\boldsymbol{G}_{ji}(1:3) = -\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij}^T\boldsymbol{G}_{ji}(1:3) \tag{5.30}$$

• Expression des flux

Comme pour la méthode 2D, les termes de flux sont discrétisés à l'aide d'un schéma décentré amont. En pratique, ce schéma est toujours valable même si la méthode de contrôle n'a pas encore été étendue en 3D puisque la valeur du facteur de forme est seuillée et ne peut pas être supérieure à H_{dec}. Le décentrement du flux est basé sur la direction de la vitesse extérieure $\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},ij}$ qui est définie dans le plan tangent de la cellule i par :

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},ij} = \frac{1}{2}\left[\left(\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},i} + \tilde{\nabla}\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},i}\cdot\boldsymbol{Gr_i}\boldsymbol{Gr_{ij}}\right) + \bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ji}\left(\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},j} + \tilde{\nabla}\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},j}\cdot\boldsymbol{Gr_j}\boldsymbol{Gr_{ij}}\right)\right] \tag{5.31}$$

avec Gr_i, Gr_j et Gr_{ij} les centres de gravité des cellules i et j et de leur côté commun ij. L'expression des flux numériques associés à la cellule amont vis-à-vis du sens de l'écoulement extérieur est ensuite estimée avec les quantités de la cellule amont :

$$\text{si } (\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},ij} \cdot \boldsymbol{n}_{ij}) \geq 0 \qquad \boldsymbol{G}_{ij} = \begin{pmatrix} |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},ij}|^2 \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_i \boldsymbol{n}_{ij} \\ |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},ij}|^3 \left(\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{3}i} - \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_i \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},i}}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},i}|} \right) \cdot \boldsymbol{n}_{ij} \end{pmatrix} \tag{5.32a}$$

$$G_{Tij} = |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},ij}| \left[(T_e - T_p) \boldsymbol{\theta_T} \right]_i \cdot \boldsymbol{n}_{ij} \tag{5.32b}$$

$$\text{si } (\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},ij} \cdot \boldsymbol{n}_{ij}) < 0 \qquad \boldsymbol{G}_{ji} = \begin{pmatrix} |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},ji}|^2 \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_j \boldsymbol{n}_{ji} \\ |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},ji}|^3 \left(\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{3}j} - \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_j \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},j}}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},j}|} \right) \cdot \boldsymbol{n}_{ji} \end{pmatrix} \tag{5.32c}$$

$$G_{Tji} = |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},ji}| \left[(T_e - T_p) \boldsymbol{\theta_T} \right]_j \cdot \boldsymbol{n}_{ji} \tag{5.32d}$$

où $\bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}$ et $\boldsymbol{\Delta_3}$ sont calculés respectivement par l'intégration de (5.27) et de (5.28) à l'aide d'une méthode de Simpson dans la cellule amont. Il est aussi prévu que la quantité $(T_e - T_p)\boldsymbol{\theta_T}$ soit calculée par une méthode de Simpson à partir de sa définition (3.18b). Enfin, l'expression des flux pour l'équation intégrale de quantité de mouvement, cette fois associés à la cellule aval, est obtenue par la relation (5.30).

Schéma semi-implicite pour la discrétisation en temps

Comme pour la méthode 2D, une méthode d'Euler explicite est utilisée pour la discrétisation des flux alors que les termes sources sont calculés de manière implicite. L'équation (5.29) devient :

$$|\Omega_i| \frac{\boldsymbol{U}_i^{n+1} - \boldsymbol{U}_i^n}{\Delta t_i} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \boldsymbol{G}_{ij}^n |\Gamma_{ij}| = |\Omega_i| \boldsymbol{S}_i^{n+1} \tag{5.33a}$$

$$|\Omega_i| \frac{U_{T,i}^{n+1} - U_{T,i}^n}{\Delta t_i} + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} G_{T\,ij}^n |\Gamma_{ij}| = |\Omega_i| S_{T\,i}^{n+1} \tag{5.33b}$$

Comme il a déjà été mentionné en 2D, un pas de temps local est utilisé pour obtenir une convergence plus rapide vers l'état stationnaire. La valeur du pas de temps Δt_i pour chaque cellule i est calculée pour satisfaire la condition CFL empirique suivante, basée sur l'échelle de temps des termes convectifs :

$$\Delta t_i < CFL \, \frac{\Delta x_i}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e},i}|}$$

avec $CFL < 1$ et où Δx_i est la longueur caractéristique de la cellule donnée par :

$$\Delta x_i = \frac{|\Omega_i|}{\sum\limits_{j \in \mathcal{N}(i)} |\Gamma_{ij}|}$$

Solution du système d'équations

De la même manière que pour la méthode 2D, le système est résolu par une méthode de Newton avec une seule itération par pas de temps. En effet, l'objectif est uniquement de calculer la solution stationnaire. Suite aux mêmes manipulations que pour la méthode 2D, la solution de la couche

limite dynamique est finalement donnée par :

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n + [\boldsymbol{I} - \Delta t_i \nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{S}_i^n]^{-1} \Delta t_i \left(-\frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \boldsymbol{G}_{ij}^n |\Gamma_{ij}| + \boldsymbol{S}_i^n \right) \tag{5.34}$$

où $\nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{S}$ est la matrice jacobienne des termes sources qui est calculée par différenciation numérique. Un calcul analytique de cette matrice est en cours et a été réalisé en partie par Thomas Marchal lors de son stage [57]. La solution de la couche limite thermique est, quant à elle, donnée par :

$$U_{T_i}^{n+1} = U_{T_i}^n + \left[1 - \Delta t_i \frac{\partial S_{T,i}^n}{\partial U_T} \right]^{-1} \Delta t_i \left(-\frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} G_{T_{ij}}^n |\Gamma_{ij}| + S_{T,i}^n \right) \tag{5.35}$$

avec

$$\frac{\partial S_T}{\partial U_T} = \frac{\partial S_T}{\partial \delta_T} \frac{\partial \delta_T}{\partial U_T} = \frac{\partial S_T}{\partial \delta_T} \left(\frac{\partial U_T}{\partial \delta_T} \right)^{-1}$$

Les dérivées de S_T et U_T par rapport à δ_T sont les mêmes qu'en 2D et sont données en annexe F.

5.3.4. Traitement des conditions limites et des conditions initiales

Le traitement des conditions limites et des conditions initiales est très similaire à celui utilisé pour la méthode 2D. La ligne d'arrêt n'est pas localisée explicitement.

Conditions limites

Comme il a déjà été mentionné précédemment, dans le cas d'un profil d'aile, le domaine de calcul est fermé au niveau du bord de fuite, où il n'y a donc pas de cellule fictive. Des cellules fictives sont en revanche prévues sur les frontières du domaine dans la direction transverse. Une condition de symétrie y est imposée, c'est-à-dire que le contenu de la dernière cellule est recopié dans la cellule fictive voisine afin que le flux entre ces deux cellules soit nul.

Dans le cas plus général, des cellules fictives sont prévues à chaque frontière du domaine et des conditions limites y sont imposées dans le cas où la vitesse extérieure est entrante.

Conditions initiales

Le tableau 5.2 répertorie les valeurs utilisées pour initialiser la couche limite dynamique pour la méthode 3D.

Couche limite dynamique	
quantité	valeur initiale
θ_{ss}	3×10^{-6} m
H	2.5
δ_{1c}	0 m
θ_{cc}	0 m

Table 5.2. – Initialisation de la couche limite dynamique pour la méthode 3D

Comme pour la méthode 2D, les grandeurs dynamiques sont initialisées avec des valeurs constantes et de manière à ce que l'écoulement de couche limite soit laminaire et bidimensionnel dans toutes les cellules à l'instant initial. Les quantités transversales sont donc imposées égales à 0. Le facteur de forme vaut 2.5 et l'épaisseur de quantité de mouvement θ_{ss} est imposée à 3×10^{-6} m. Ceci sous-entend que l'épaisseur de déplacement δ_{1s} vaut 7.5×10^{-6} m à l'instant initial. Comme pour BLIM2D, ces valeurs ont été choisies de manière arbitraire mais elles peuvent être modifiées par l'utilisateur.

Une fois que la solution de la couche limite dynamique est convergée, le calcul de la couche limite thermique pourrait être initialisé en imposant, comme en 2D, une épaisseur de couche limite thermique identique à celle de la couche limite dynamique : $\delta_T = \delta$. Ceci n'a pas été testé car le modèle thermique n'a pas encore été implémenté dans BLIM3D mais cette initialisation n'a posé aucun problème de robustesse dans BLIM2D.

5.3.5. Traitement numérique spécifique de la zone proche du point d'arrêt

L'extension de la correction dans la zone proche du point d'arrêt en 3D a fait l'objet du stage de Thomas Marchal [57] mais le problème n'est pas encore complètement résolu. Il ne sera pas présenté dans cette thèse.

5.3.6. Limitation du gradient de pression dans le cas de forts gradients de pression adverses

Ce traitement numérique n'a pas été étendu en 3D au cours de cette thèse et fait partie des perspectives.

5.4. Implémentation de la méthode dans les solveurs BLIM2D et BLIM3D

L'algorithme dans le tableau 5.3 présente l'organisation des principales étapes qui ont été programmées dans les solveurs BLIM2D et BLIM3D (Boundary Layer Integral Method) pour la résolution de la couche limite dynamique. Les étapes en noir sont communes aux deux solveurs alors que les étapes en rouge (3, 5, 8) sont présentes uniquement dans BLIM3D. D'autre part, si le calcul du facteur de forme (étape 6) est un peu compliqué en trois dimensions (résolution numérique de (2.42)), il est en revanche immédiat en deux dimensions. En effet, le facteur de forme est égal au rapport de l'épaisseur de déplacement sur l'épaisseur de quantité de mouvement ($H = \delta_{1s}/\theta_{ss}$) qui correspondent directement aux variables résolues pour le système d'équations 2D. Il existe quelques autres différences entre les solveurs BLIM2D et BLIM3D qui n'apparaissent pas dans le tableau 5.3. En particulier, on rappelle que la méthode de contrôle pour passer le décollement et les traitements numériques développés en 2D pour améliorer la précision dans la zone du point d'arrêt et pour limiter les gradients de pression adverses n'ont pas été implémentés dans BLIM3D.

Une fois la couche limite dynamique résolue, le solveur BLIM3D résout la couche limite thermique par la méthode simplifiée adaptée aux parois rugueuses traitée dans la section 3.1 (la solution pour parois lisses (3.8) n'est pas accessible dans BLIM3D). C'est la seule option pour calculer la couche limite thermique avec BLIM3D puisque la méthode intégrale n'a pas été implémentée. En revanche, le solveur BLIM2D peut soit résoudre la couche limite thermique par la méthode simplifiée (parois lisses et rugueuses), soit utiliser la méthode intégrale pour la couche limite laminaire

	Algorithme BLIM	sections	équations
1 :	Récupération des données du solveur aérodynamique (géométrie, maillage, données de l'écoulement extérieur)	-	-
2 :	Calcul du gradient de vitesse extérieur	-	-
3 :	Détermination du système de coordonnées local	(5.3.2)	-
4 :	Initialisation de la solution de couche limite dynamique	(5.2.3)/(5.3.4)	-
Pour chaque pas de temps faire :			
5 :	Rotation du vecteur des variables résolues (repère global vers local)	(5.3.2)	(5.24)
6 :	Calcul du facteur de forme H	(2.2.3)	(2.42)
7 :	Calcul des relations de fermeture (repère local)	(2.2)	-
8 :	Rotation du profil de vitesse (repère local vers global)	(5.3.2)	(5.25)
9 :	Calcul des flux à travers les faces	(5.2.2)/(5.3.3)	(5.13)/(5.32)
10 :	Calcul des termes sources	(5.2.2)/(5.3.3) + (5.2.4) et (5.2.5)	-
11 :	Calcul de la jacobienne des termes sources	(5.2.2)/(5.3.3)	(5.17)
12 :	Mise à jour de la solution	(5.2.2)/(5.3.3)	(5.16)/(5.34)
Fin de la boucle en temps			
13 :	Stockage de la solution de couche limite dynamique	-	-

TABLE 5.3. – Principales étapes de BLIM2D/BLIM3D pour résoudre la couche limite dynamique

couplée à la méthode simplifiée pour la couche limite turbulente. Le couplage des deux méthodes a été fait uniquement parce que le modèle thermique intégral pour la couche limite turbulente n'a pas encore été développé. À terme, l'objectif est évidemment de pouvoir résoudre toute la couche limite thermique par une méthode intégrale.

L'algorithme pour la résolution de la couche limite thermique par la méthode simplifiée n'est pas détaillé ici puisqu'il consiste simplement à calculer le coefficient d'échange avec des formules quasi-analytiques. En revanche, l'algorithme dans le tableau 5.4 présente les principales étapes qui ont été programmées dans le solveur BLIM2D pour la résolution de la couche limite thermique par méthode intégrale (la partie laminaire uniquement). Cet algorithme est la suite de celui donné dans le tableau 5.3 pour la couche limite dynamique.

L'algorithme est présenté ici tel qu'il a été programmé au cours de la thèse. En revanche, il n'est pas encore optimisé et des modifications seront probablement nécessaires. Par exemple, il ne semble pas a priori indispensable que les étapes de rotation 5 et 8 soient effectuées à chaque pas de temps. À terme, il pourrait donc être envisagé de passer du repère global vers le repère local au début du calcul, d'effectuer toute la boucle en temps dans le repère local, et de repasser dans le repère global en toute fin de calcul, pour stocker les variables. Ceci permettrait d'éviter une accumulation d'éventuelles erreurs numériques due aux multiples rotations et de diminuer le coût du calcul.

	Algorithme BLIM2D	sections	équations
14 :	Initialisation de la solution de couche limite thermique	(5.2.3)	-
Pour chaque pas de temps faire :			
15 :	Calcul de l'épaisseur de couche limite thermique δ_T	(3.2.2)	(3.24)
16 :	Calcul des relations de fermeture	(3.2.2)	-
17 :	Calcul des flux à travers les faces	(5.2.2)	(5.13)
18 :	Calcul des termes sources	(5.2.2)	-
19 :	Calcul de $\dfrac{\partial S_T}{\partial U_T}$	(5.2.2)	(5.19)
20 :	Mise à jour de la solution	(5.2.2)	(5.18)
Fin de la boucle en temps			
21 :	Stockage de la solution de couche limite thermique	-	-

Table 5.4. – Principales étapes de BLIM2D pour résoudre la couche limite thermique

Conclusion

Au cours de ce chapitre, une méthode numérique de résolution du modèle intégral établi dans les chapitres précédents a été développée en 2D et en 3D, afin d'être implémentée dans les solveurs BLIM2D et BLIM3D. Plus précisément, une "méthode de contrôle" a d'abord été établie en 2D. Elle permet d'assurer que les valeurs propres du système soient toujours du même signe que la vitesse extérieure, même dans le cas d'une couche limite décollée. Ceci a l'avantage d'éviter la singularité de Goldstein et donc de rendre la méthode robuste au passage du décollement, même si la solution dans les zones décollées n'est pas précise. Il a aussi été montré, par l'analyse du modèle 2D, que le système d'équations intégrales était hyperbolique avec les relations de fermeture choisies. Ceci a permis la mise en œuvre d'une méthode de résolution de type Volumes-Finis en 2D, puis elle a été étendue en 3D. Elle est basée sur un schéma semi-implicite pour la discrétisation en temps et un schéma décentré amont pour la discrétisation en espace. L'extension de la méthode à la troisième dimension a, entre autres, consisté à adapter le calcul des termes de flux pour assurer leur conservativité et à introduire des changements de repère pour pouvoir calculer les relations de fermeture. La méthode de résolution pour le modèle thermique n'a en revanche pas été implémentée en 3D même si la théorie a été développée. D'autre part, la précision de la méthode 2D a été fortement améliorée au voisinage du point d'arrêt grâce à l'introduction d'un terme source de correction dans le système d'équations discrètes. Il permet de corriger la non-consistance du schéma numérique au voisinage d'un point d'arrêt. Celle-ci est due à la singularité des équations écrites sous forme conservative lorsque $|\tilde{\boldsymbol{q}}_e| = 0$. Enfin, un traitement numérique a été ajouté dans la méthode 2D pour limiter le gradient de pression dans les zones de très forts gradients de pression adverses qui correspondent la plupart du temps à des zones de couche limite décollée et/ou des zones proches du bord de fuite. Ceci permet de rendre la méthode beaucoup plus robuste même si la solution est inexacte dans les zones de couche limite décollée. On s'attend cependant à ce que cette erreur ait peu d'influence sur la forme des dépôts de givre. Les traitements numériques pour la zone du point d'arrêt et pour limiter les gradients de pression adverses ainsi que la méthode de contrôle n'ont, en revanche, pas été implémentés dans le solveur 3D. Finalement, la méthode de résolution ainsi mise en œuvre semble, en théorie, bien adaptée pour les simulations d'accrétion de givre. Il s'agit maintenant de vérifier qu'elle fournit des valeurs numériques correctes du coefficient de frottement et du coefficient d'échange thermique. Il faut donc vérifier sa validité sur des configurations de référence dans un premier temps.

6. Vérification de la validité des méthodes 2D et 3D sur des configurations de référence

Sommaire

6.1. Procédure utilisée pour la validation . . . 118
6.2. Validation de la méthode 2D sur une plaque plane sans gradient de pression . . . 119
6.2.1. Écoulement laminaire . . . 119
6.2.2. Écoulement turbulent . . . 123
6.3. Validation de la méthode 2D sur une plaque plane avec gradient de pression . . . 126
6.3.1. Écoulement laminaire . . . 126
6.3.2. Écoulement turbulent . . . 131
6.4. Validation de la méthode 2D sur un profil d'aile NACA . . . 134
6.4.1. Étude de convergence en maillage . . . 136
6.4.2. Cas sans incidence à faible nombre de Mach . . . 137
6.4.3. Influence de la correction de point d'arrêt sur la précision de la méthode . . . 138
6.4.4. Influence de l'incidence et de la vitesse sur la précision de la méthode . . . 141
6.5. Validation 2D de la méthode sur d'autres profils d'aile . . . 143
6.5.1. Profil d'aile MS317 . . . 143
6.5.2. Profil d'aile GLC305 . . . 146
6.6. Validation de la méthode 3D . . . 147
6.6.1. Validation de la méthode sur une plaque plane avec et sans gradient de pression . . . 149
6.6.2. Validation de la méthode sur un profil d'aile NACA0012 . . . 149
6.6.3. Validation de la méthode pour un écoulement autosimilaire de couche limite tridimensionnelle . . . 149

Dans ce chapitre, la validité des méthodes 2D et 3D, et donc des solveurs BLIM2D et BLIM3D, est vérifiée sur des configurations de référence. Dans le cas 2D, l'objectif est de valider les relations de fermetures choisies ainsi que les traitements numériques développés au voisinage du point d'arrêt et dans les zones de couche limite décollées. Pour cela, les épaisseurs intégrales et les coefficients de frottement et d'échange thermique fournis par BLIM2D sont comparés à des valeurs théoriques et/ou expérimentales. La validité de la méthode est évaluée pour des écoulements laminaires et turbulents sur des plaques planes sans et avec gradient de pression, mais aussi sur des profils d'ailes de type NACA0012, MS317 et GLC305. Concernant la méthode 3D, la procédure de validation est assez similaire et n'est pas présentée en détail dans ce chapitre. Pour plus d'informations, le lecteur est renvoyé à l'article de conférence [9] dans l'annexe H du manuscrit. L'objectif est de s'assurer que BLIM3D fournit les mêmes résultats que BLIM2D pour des configurations bidimensionnelles mais aussi d'évaluer la capacité de BLIM3D à résoudre des couches limite tridimensionnelles. Pour cela, la méthode est testée sur un cas d'écoulement autosimilaire tridimensionnel dont la solution quasi-exacte est connue. Seul le modèle dynamique est validé en 3D puisque le modèle thermique intégral n'a pas été implémenté.

6.1. Procédure utilisée pour la validation

Pour valider le modèle de couche limite dynamique, on compare les valeurs des principales grandeurs caractéristiques de la couche limite (H, δ_{1s}, θ_{ss} et C_{fs}) calculées par BLIM2D à des solutions quasi-exactes, à des données expérimentales ou à la solution obtenue par le code CLICET. Celui-ci est développé à l'ONERA. Il est considéré dans cette thèse comme une référence puisqu'il résout les équations de Prandtl différentielles et qu'il est utilisé depuis de nombreuses années à l'ONERA et dans l'industrie pour des applications variées.

D'autre part, on rappelle que dans cette thèse, la couche limite thermique peut être résolue par deux méthodes différentes implémentées dans BLIM2D. La première méthode repose sur le modèle thermique simplifié adapté dans la section 3.1. On la nomme BLIM2D-SM (Simplified Method). La seconde méthode, BLIM2D-IM (Integral Method), est basée sur le modèle thermique intégral développé dans la section 3.2.

Pour valider les modèles de couche limite thermique, on compare la valeur du coefficient d'échange thermique h_{tc} calculée par BLIM2D (-IM ou -SM) à celle obtenue par le code CLICET et, lorsqu'elles existent, à des solutions théoriques. Contrairement à BLIM2D-SM, BLIM2D-IM et CLICET ne fournissent pas directement la valeur du coefficient d'échange thermique mais il fournissent la valeur du flux pariétal Φ_p lorsque l'utilisateur impose une température de paroi T_p comme condition d'entrée. En pratique, on préfère en revanche comparer directement la valeur du coefficient d'échange h_{tc} déduit de Φ_p et T_p puisque c'est cette grandeur qui est ensuite fournie au solveur d'accrétion pour calculer la forme du dépôt de givre.

Pour CLICET, la détermination du coefficient d'échange thermique se fait à l'aide de deux calculs à deux températures de paroi imposées différentes, T_{p_1} et T_{p_2}, qui permettent chacun de calculer le flux pariétal correspondant, Φ_{p_1} et Φ_{p_2} (voir sous-section 3.2.1). On en déduit :

$$h_{tc} = \frac{\Phi_{p_2} - \Phi_{p_1}}{T_{p_2} - T_{p_1}}$$

Dans cette thèse, on prend toujours $T_{p_1} = T_r - 5\ K$ et $T_{p_2} = T_r + 5\ K$ pour les calculs CLICET car c'est ce qui est fait usuellement à l'ONERA [17]. La température de récupération T_r est estimée par (3.19). Pour BLIM2D-IM, on détermine le coefficient d'échange thermique de la même façon. En revanche, on rappelle que la méthode n'est pas valable pour des conditions de paroi froide (voir section 3.2.2), on prend donc dans cette thèse $T_{p_1} = T_r + 5\ K$ et $T_{p_2} = T_r + 10\ K$.

En pratique, on peut vérifier que le choix des températures de paroi à imposer pour déterminer h_{tc} a peu d'influence sur le calcul du coefficient d'échange thermique. En effet, deux calculs de h_{tc} pour un écoulement de plaque plane ont été réalisés avec CLICET dans les conditions de la sous-section 6.2.1 (voir la figure 6.1 et le tableau 6.1), l'un avec $T_{p_1} = T_r - 5\ K$ et $T_{p_2} = T_r + 5\ K$, et l'autre avec $T_{p_1} = T_r + 5\ K$ et $T_{p_2} = T_r + 10\ K$. On a montré que l'écart relatif maximum entre les deux valeurs de h_{tc} en fonction du nombre de Reynolds local vaut 0.3%. De la même manière, le coefficient d'échange thermique a été calculé de trois manières différentes avec BLIM2D-IM :

- $T_{p_1} = T_r + 2\ K$ et $T_{p_2} = T_r + 5\ K$
- $T_{p_1} = T_r + 2\ K$ et $T_{p_2} = T_r + 10\ K$
- $T_{p_1} = T_r + 5\ K$ et $T_{p_2} = T_r + 10\ K$

L'écart relatif maximum entre les valeurs de h_{tc} obtenues ne dépasse jamais 0.01%.

Pour BLIM2D avec la méthode thermique simplifiée (BLIM2D-SM), un seul calcul est suffisant puisque la méthode fournit directement le coefficient d'échange thermique. On précise qu'aucune température de paroi n'est à imposer (voir sous-section 3.1.1).

Le modèle turbulent prenant en compte les effets de rugosité n'est en revanche pas validé dans cette section. En effet, nous ne disposons pas de solution qui pourrait constituer une réelle référence. Même la solution de CLICET ne peut pas constituer aujourd'hui une solution de référence pour les couches limites sur paroi rugueuse car les modèles ont été implémentés récemment et leur calibrage pour des applications givrage est en cours. De plus, le modèle rugueux de BLIM2D est le même que celui qui est habituellement utilisé dans les codes de givrage classiques. Dans cette thèse, il est donc considéré comme valide pour les applications givrage, à condition que le modèle pour paroi lisse soit validé puisque les grandeurs rugueuses sont déduites des grandeurs lisses (voir section 2.4 et sous-section 3.1.2).

6.2. Validation de la méthode 2D sur une plaque plane sans gradient de pression

L'écoulement de couche limite sur une plaque plane semi-infinie sans gradient de pression est l'un des cas les plus classiques et les plus étudiés qu'on puisse trouver dans la littérature. Ce cas est le plus simple et constitue une étape incontournable pour la validation de la méthode intégrale développée dans cette thèse, puisque ses solutions sont bien connues.

On considère une plaque plane placée à incidence nulle dans un écoulement de fluide visqueux incompressible, uniforme à l'infini amont. Dans ce cas, la solution extérieure de fluide parfait est particulièrement simple et vaut $u_{es} = U_\infty = cte$. Pour ce cas particulier, le domaine de calcul utilisé dans le solveur BLIM2D est schématisé sur la figure 6.1. Le maillage utilisé est uniforme. Les N cellules sont donc réparties uniformément sur une longueur L et elles sont parcourues à partir de l'extrémité amont de la plaque. Contrairement au cas d'un profil d'aile, une condition limite doit être imposée dans la cellule fictive $i = 0$, puisque les caractéristiques sont rentrantes à cette extrémité du domaine. Cette condition va dépendre des cas laminaire ou turbulent étudiés ci-dessous. En revanche, aucune condition limite en $i = N + 1$ n'est nécessaire.

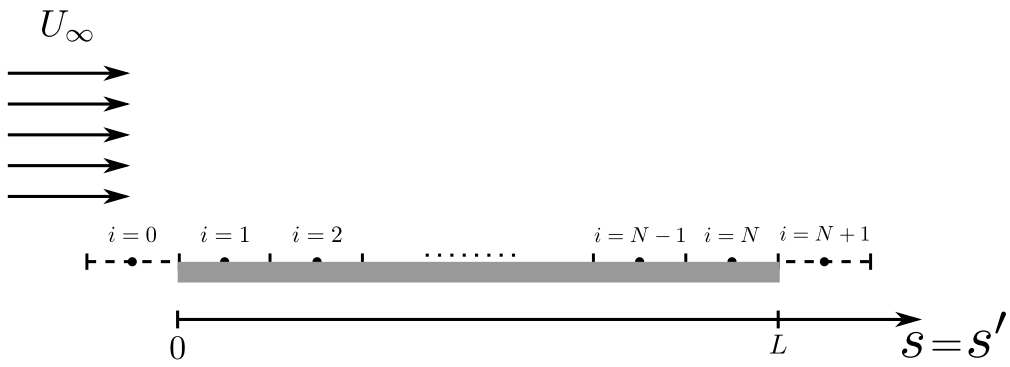


FIGURE 6.1. – Domaine de calcul pour une plaque plane laminaire 2D

6.2.1. Écoulement laminaire

La solution sur une plaque plane sans gradient de pression pour une couche limite dynamique laminaire a été initialement obtenue par Blasius. Cet écoulement fait aussi partie des écoulements autosimilaires qui ont été étudié par Falkner et Skan et qui ont des propriétés bien particulières (voir section 1.3.1). La solution quasi-exacte obtenue pour l'écoulement de plaque plane est la suivante :

$$H = 2.59110 \; ; \quad \delta_{1s} = 1.72079\sqrt{\frac{\nu s}{u_{es}}} \; ; \quad \theta_{ss} = 0.66411\sqrt{\frac{\nu s}{u_{es}}} \; ; \quad C_{fs} = \frac{0.66412}{\sqrt{Re_s}} \tag{6.1}$$

où $Re_s = u_{es}s/\nu$ est le nombre de Reynolds local. Ces valeurs, déduites de résultats de Christian et al., ont été données par Cousteix [25]. Cette solution sert de référence dans cette section.

Les données d'entrée pour ce cas test sont le nombre de Mach M_∞, la pression P_∞ et la température T_∞ à l'infini amont. La longueur L de la plaque est calculée automatiquement de manière à ce que le nombre de Reynolds local balaye toute la plage de valeurs sur laquelle la couche limite laminaire est stable. Il faut donc que :

$$Re_{smax} = \frac{u_{es}L}{\nu} = Re_{s_{crit}}$$

avec $Re_{s_{crit}}$ le nombre de Reynolds à partir duquel les instabilités commencent à s'amplifier dans la couche limite. Il est estimé de la manière suivante [5] (voir section 1.4, eq. (1.53)) :

$$Re_{\theta_{crit}} = exp\left(\frac{52}{H} - 14.8\right) \tag{6.2}$$

De plus, grâce à la solution de Blasius (6.1), on a $Re_{\theta_{crit}} = 0.66411\sqrt{Re_{s_{crit}}}$. On en déduit que :

$$L = \left(\frac{Re_{\theta_{crit}}}{0.66411}\right)^2 \frac{\nu}{M_\infty\sqrt{\gamma r T_\infty}}$$

avec $H = 2.59110$. De plus, $\gamma = 1.4$ et $r = 287\ J.kg^{-1}K^{-1}$ pour l'air et ν est approximé à $1.5 \times 10^{-5}\ m^2/s$ pour le calcul de L. En revanche, en règle générale, dans BLIM2D, la viscosité cinématique ν de l'air est calculée à partir du rapport de la viscosité dynamique μ sur la masse volumique ρ :

$$\nu = \mu/\rho$$

De plus, la masse volumique est supposée constante dans l'épaisseur de la couche limite et est calculée à partir de la loi des gaz parfaits :

$$\rho = \rho_e = \frac{P_e}{rT_e}$$

avec $r = 287\ J.kg^{-1}K^{-1}$ pour l'air. La viscosité dynamique de l'air est elle aussi supposée constante dans l'épaisseur de la couche limite, selon la direction normale à la paroi, et elle est calculée grâce à la loi de Sutherland :

$$\mu = \mu_e = 1.711 \times 10^{-5}\left(\frac{T_e}{273.15}\right)^{1.5}\left(\frac{273.15 + 110.4}{T_e + 110.4}\right) \tag{6.3}$$

Enfin, les conditions aux limites qui sont imposées dans la cellule $i = 0$ pour un écoulement de couche limite laminaire sur plaque plane sont les suivantes :

$$\delta_{1s} = 0\ m\ ; \quad \theta_{ss} = 0\ m\ ; \quad H = 2.59110$$

Une étude de convergence en maillage a été réalisée pour ce cas de validation. Des calculs ont été effectués avec BLIM2D pour des maillages uniformes de 8, 32, 128, et 512 cellules et avec un nombre CFL de 0.8. Les données d'entrée sont détaillées dans le tableau 6.1. La figure 6.2 montre par exemple l'évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement obtenue pour les différents maillages. On constate que la solution converge bien avec le raffinement du maillage.

M_∞	0.10
$P_\infty(Pa)$	80000
$T_\infty(K)$	263

TABLE 6.1. – Données d'entrée

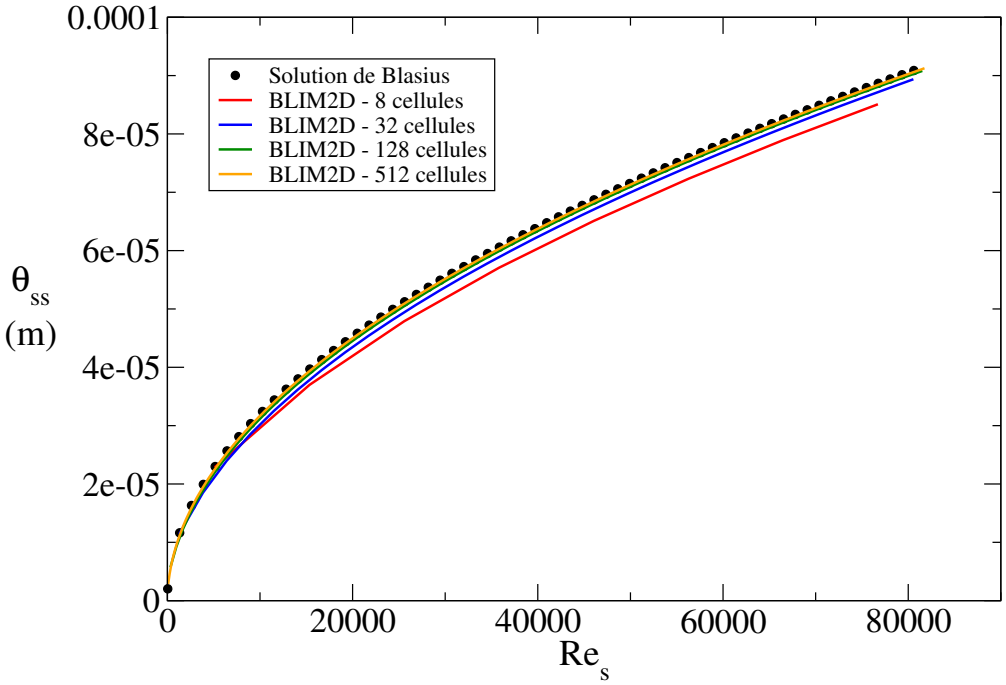


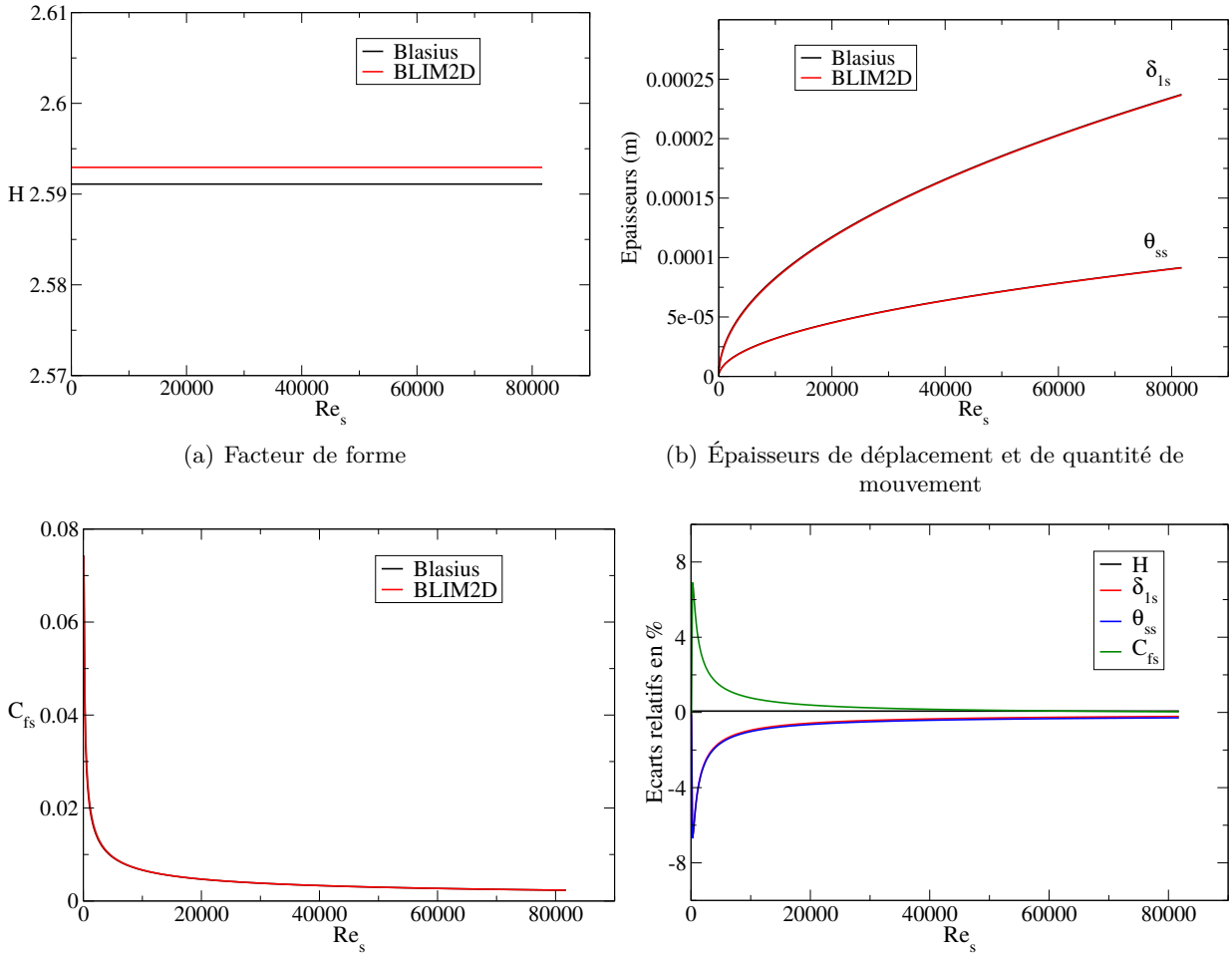
FIGURE 6.2. – Épaisseur de quantité de mouvement en fonction du nombre de Reynolds local pour des maillages uniformes avec un nombre de cellules variable.

La figure 6.3 compare la solution obtenue par BLIM2D pour une couche limite dynamique laminaire à la solution quasi-exacte de Blasius sur un maillage de 512 éléments et pour les conditions extérieures données dans le tableau 6.1. D'un point de vue qualitatif, les figures 6.3(a), 6.3(b) et 6.3(c) montrent que l'évolution des grandeurs caractéristiques de la couche limite prévue par BLIM2D est assez fidèle à la théorie. Le facteur de forme H est constant, les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement évoluent de manière similaire en $\sqrt{s}$ avec $\theta_{ss} < \delta_{1s}$ et le coefficient de frottement évolue en $1/\sqrt{Re_s}$. La figure 6.3(d) permet de faire une analyse plus quantitative des résultats. Elle donne les écarts relatifs en pourcent de H, δ_{1s}, θ_{ss} et C_{fs} par rapport à la solution de Blasius. L'écart relatif pour une quantité X est calculé de la manière suivante :

$$Ec = \frac{X_{BLIM2D} - X_{ref}}{X_{ref}} \times 100$$

Les résultats sont très bons puisque, sur presque toute la gamme de nombre de Reynolds étudiée, les écarts relatifs sont inférieurs à 1% pour toutes les grandeurs caractéristiques de la couche limite calculées par BLIM2D. On constate malgré tout que les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement et le coefficient de frottement sont un peu moins précis pour les très faibles nombres de Reynolds même si les écarts relatifs ne dépassent jamais 7%. Ceci est dû au fait que, dans cette

gamme de nombre de Reynolds, δ_{1s} et θ_{ss} tendent en théorie vers zéro et C_{fs} doit tendre vers l'infini. Or, ce type de comportement a tendance à amplifier les erreurs numériques relatives. On peut noter cependant que la valeur du facteur de forme, qui est le rapport de l'épaisseur de déplacement sur l'épaisseur de quantité de mouvement, est extrêmement précise (0.07% d'erreur), même pour les faibles nombres de Reynolds.



(a) Facteur de forme

(b) Épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement

(c) Coefficient de frottement

(d) Erreurs par rapport à la solution de Blasius

FIGURE 6.3. – Solution BLIM2D pour une couche limite dynamique laminaire sur plaque plane en fonction du nombre de Reynolds local

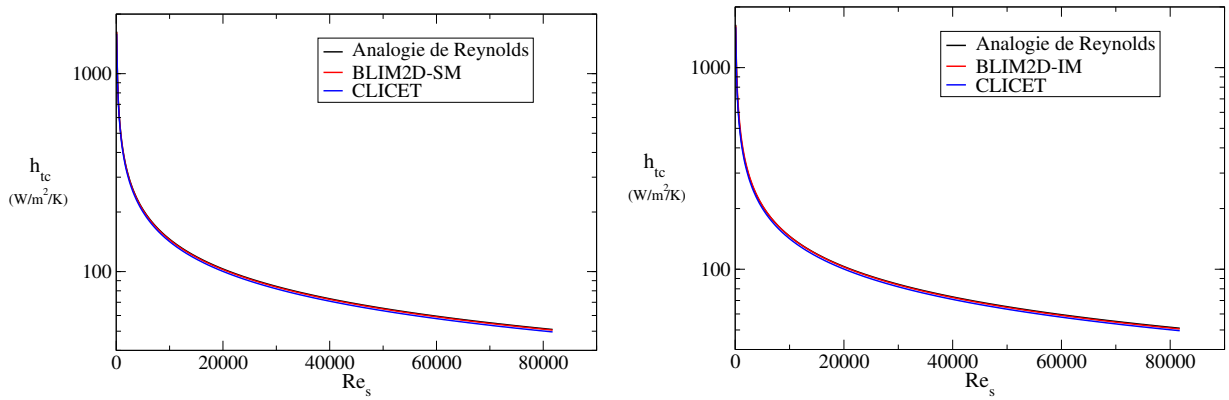
Pour la couche limite thermique laminaire sur plaque plane, la solution obtenue avec BLIM2D est comparée à une solution de référence très classique basée sur l'analogie de Reynolds (3.2). En utilisant la solution de Blasius (6.1) et la définition du coefficient d'échange thermique (3.1), l'analogie de Reynolds permet d'exprimer le coefficient d'échange thermique directement en fonction du nombre de Reynolds local :

$$h_{tc} = \rho_e c_{p_e} u_{es} Pr^{-2/3} \frac{C_{fs}}{2} = \rho_e c_{p_e} u_{es} Pr^{-2/3} \frac{0.33206}{\sqrt{Re_s}} \tag{6.4}$$

En toute rigueur, la relation (6.4) suppose que les effets de la dissipation visqueuse dans la couche limite sont négligeables. En pratique, le calcul BLIM2D est réalisé pour une faible vitesse ($M_\infty = 0.1$) et on peut considérer que les termes de dissipation sont négligeables. Pour s'assurer de la validité

de ces résultats, la solution de BLIM2D est aussi comparée à celle obtenue par le code CLICET (qui ne néglige pas les effets de dissipation visqueuse).

Les figures 6.4(a) et 6.4(b) comparent les coefficients d'échange obtenus avec BLIM2D-SM et BLIM2D-IM respectivement, à celui obtenu avec CLICET et celui déduit de l'analogie de Reynolds (6.4). Les résultats fournis par les deux méthodes sont quasiment identiques et sont extrêmement proches des solutions de référence. Ceci est quantifié sur la figure 6.5 qui donne les écarts relatifs en pourcent entre les solutions BLIM2D et les solutions de référence. Pour la majeure partie de la gamme de nombres de Reynolds étudiée, les solutions BLIM2D ont seulement 1% d'écart avec l'analogie de Reynolds et 2% avec la solution fournie par CLICET. Les solveurs BLIM2D-IM et BLIM2D-SM offrent la même précision sur le coefficient d'échange, hormis pour les faibles nombres de Reynolds. Dans cette zone, la précision du solveur avec la méthode simplifiée reste constante et excellente alors que le solveur avec la méthode thermique intégrale atteint des écarts un peu inférieurs à 10% avec les solutions de référence. Ces écarts peuvent s'expliquer par le fait que dans cette zone, le coefficient d'échange tend vers l'infini ce qui a tendance à amplifier les erreurs numériques. D'autre part, le fait que la méthode thermique simplifiée fournisse d'excellents résultats sur la plaque plane est logique, dans le sens où les coefficients numériques du modèle (3.5) ont été ajustés par Smith et Spalding de manière à ce que la relation soit exacte pour les écoulements de plaque plane et de point d'arrêt bidimensionnels [49].



(a) h_{tc} obtenu avec la méthode thermique simplifiée

(b) h_{tc} obtenu avec la méthode thermique intégrale

FIGURE 6.4. – Solution BLIM2D pour une couche limite thermique laminaire sur plaque plane en fonction du nombre de Reynolds local

6.2.2. Écoulement turbulent

Pour la couche limite turbulente dynamique, il n'existe pas de solution exacte, même dans un cas aussi simple que celui de la plaque plane puisque les équations de couche limite turbulente font intervenir la tension de Reynolds $-\rho < u'v' >$, qui n'est pas connue et qui doit être fermée. On trouve en revanche beaucoup de données expérimentales pour cet écoulement dans la littérature. L'expérience de Wieghardt et Tillmann [96] a été choisie pour valider le modèle dynamique turbulent développé dans cette thèse. Les données expérimentales correspondantes, initialement présentées à la conférence de Stanford en 1968, sont données dans le papier de Coles [21]. Ye [101] a aussi sélectionné cette expérience pour valider son code. Celui-ci résout aussi les équations intégrales de quantité de mouvement et d'énergie cinétique mais elles sont fermées à l'aide du jeu de relations de fermeture proposé par Drela [30]. Ceci permet donc une comparaison directe avec un solveur

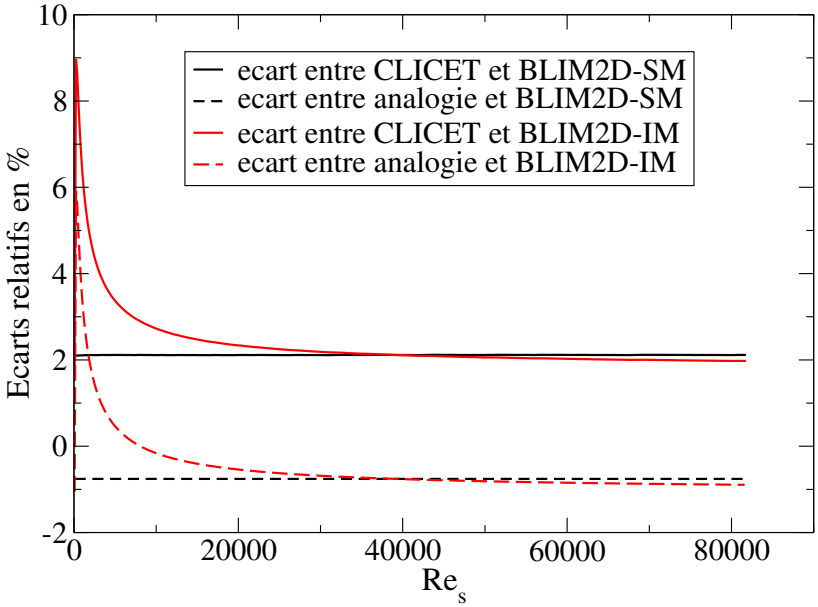


FIGURE 6.5. – Écarts relatifs entre les solutions BLIM2D et les solutions de référence pour une couche limite thermique laminaire sur plaque plane

similaire à BLIM2D, au moins pour la couche limite dynamique turbulente.

L'expérience a été réalisée à pression atmosphérique, sur une plaque plane de 5 m, pour une vitesse extérieure constante et égale à $33m/s$ et pour une viscosité cinématique de $1.51 \times 10^{-5}\ m^2/s$. Les données d'entrée imposées pour ce cas test sont répertoriées dans le tableau 6.2. La température a été choisie de manière à avoir la même viscosité cinématique que lors de l'expérience, selon la loi de Sutherland (6.3). Le nombre CFL est fixé à 0.8.

M_∞	0.0960
$P_\infty(Pa)$	101325
$T_\infty(K)$	294
$L(m)$	5

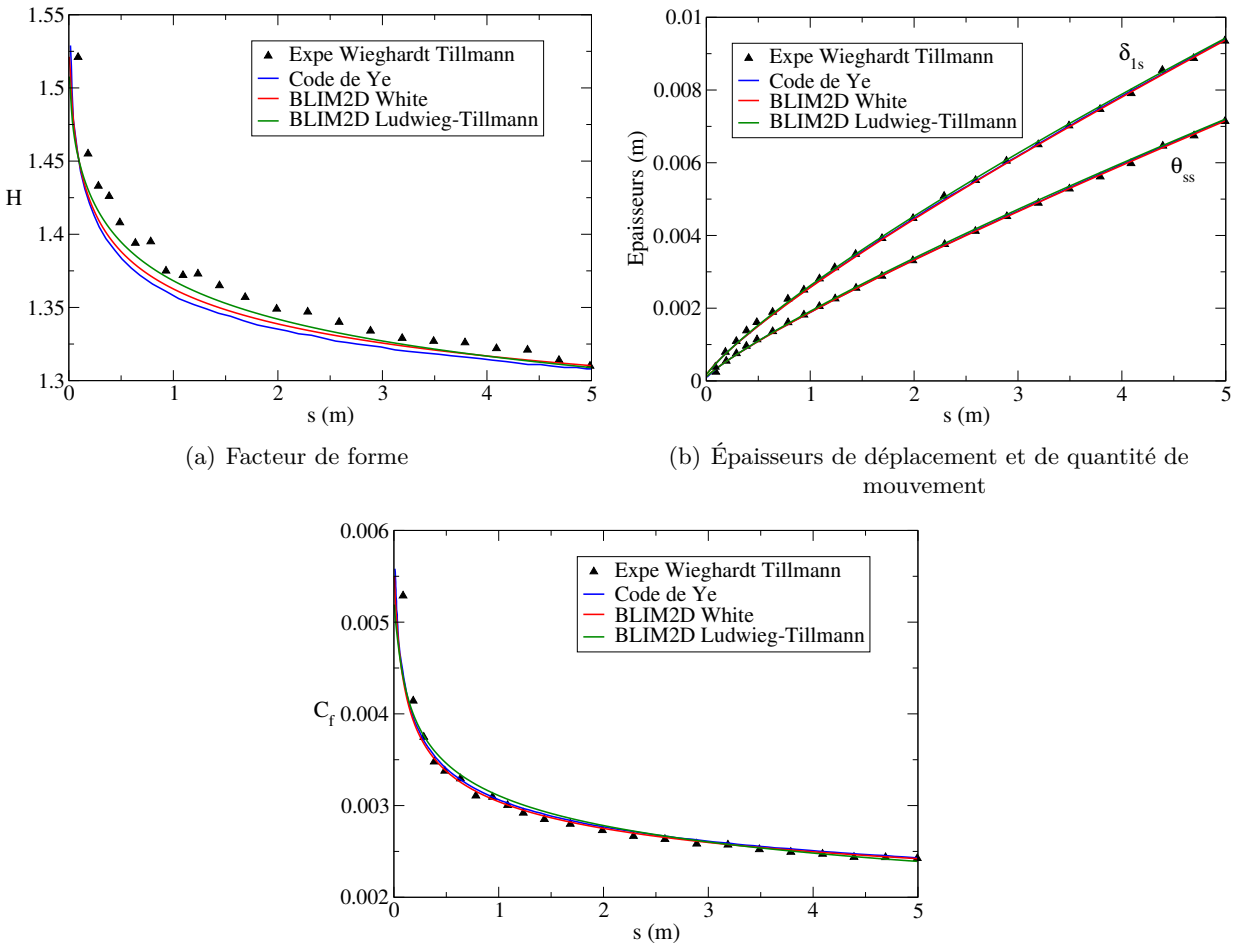
TABLE 6.2. – Données d'entrée

D'autre part, les conditions aux limites qui sont imposées dans la cellule $i = 0$ sont les mêmes que celles imposées par Ye :

$$\theta_{ss} = 10^{-4}\ m\ ; \quad H = 1.5$$

On rappelle que, pour une couche limite turbulente, BLIM2D propose deux relations de fermeture différentes pour le coefficient de frottement (voir section 2.2.1). La loi de frottement (2.31) est proposée par Ludwieg et Tillmann et la loi (2.32) est proposée par White. La figure 6.6 compare donc les solutions obtenues avec BLIM2D pour les deux relations de fermeture aux données expérimentales de Wieghardt et Tillmann et à la solution fournie par le code de Ye. On remarque que les deux relations de fermeture fournissent des solutions très proches. De plus, les facteurs de forme, les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement et les coefficients de frottement prévus avec BLIM2D sont très fidèles aux données expérimentales et aux résultats obtenus par Ye

(les écarts relatifs sont de l'ordre du pourcent).



(a) Facteur de forme

(b) Épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement

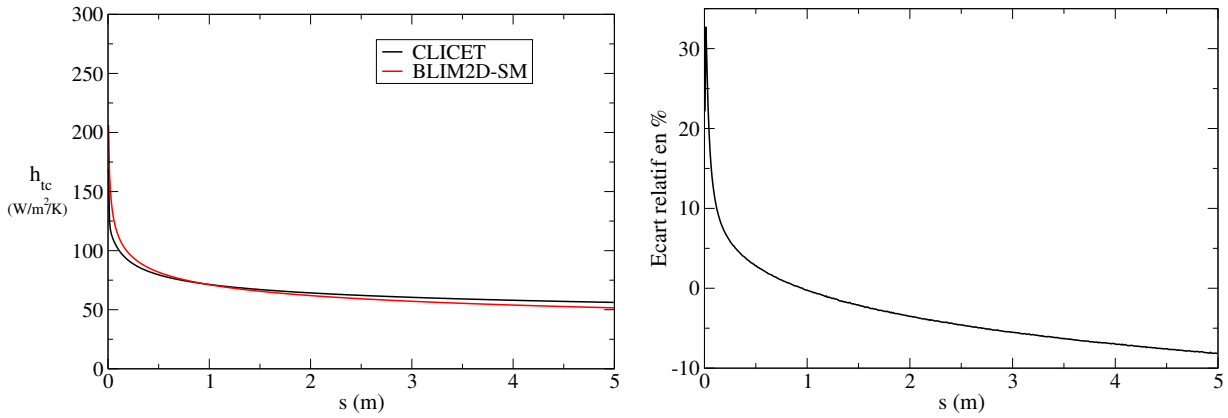
(c) Coefficient de frottement

FIGURE 6.6. – Solution BLIM2D pour une couche limite dynamique turbulente sur plaque plane pour deux lois de frottement différentes

Pour la couche limite thermique turbulente, l'analogie de Reynolds n'est pas utilisée comme solution de référence car la valeur théorique du coefficient de frottement n'est pas connue pour une couche limite turbulente. La solution de référence choisie est donc CLICET. En revanche, comme nous n'avons pas réussi à faire converger CLICET pour les conditions aux limites proposées par Ye, celles-ci ont été imposées de la manière suivante pour CLICET comme pour BLIM2D :

$$\theta_{ss} = 0\ m\ ; \quad H = 2.5$$

Le calcul de couche limite dynamique et thermique a donc été repris entièrement avec ces nouvelles conditions aux limites. D'autre part, on rappelle que la méthode thermique intégrale n'a pas été implémentée pour la couche limite turbulente. La figure 6.7(a) compare donc la solution obtenue avec BLIM2D-SM à la solution de référence fournie par CLICET. L'écart relatif entre les deux solutions est donné sur la figure 6.7(b). On constate que la précision est moindre pour les faibles valeurs de s, zone dans laquelle le coefficient d'échange tend vers l'infini. De plus, le coefficient d'échange prévu par BLIM2D-SM est globalement moins précis que pour une couche laminaire même si l'écart relatif ne dépasse pas les 10% hormis en début de plaque.



(a) Coefficient d'échange thermique

(b) Écart relatif entre les h_{tc} obtenus par BLIM2D-SM et CLICET

FIGURE 6.7. – Solution BLIM2D-SM pour une couche limite thermique turbulente sur plaque plane sans gradient de pression

6.3. Validation de la méthode 2D sur une plaque plane avec gradient de pression

Dans la section précédente, on a validé la méthode intégrale de couche limite implémentée dans BLIM2D dans le cas d'une plaque plane sans gradient de pression. Il s'agit maintenant de la valider en présence d'un gradient de pression. Dans cette section et pour toute la suite du chapitre, le nombre CFL est imposé à 0.4.

6.3.1. Écoulement laminaire

Pour valider le modèle intégral de couche limite dynamique laminaire, des calculs sont effectués avec BLIM2D dans le cas d'écoulements autosimilaires de Falkner-Skan pour lesquels les solutions quasi-exactes sont bien connues (voir section 1.3.1).

On considère un dièdre d'angle au sommet $\beta\pi$ placé dans un écoulement de fluide visqueux incompressible, uniforme à l'infini amont. Dans ce cas, on rappelle que la distribution de vitesse extérieure est de la forme :

$$u_{es} = Cs^m \quad \text{avec} \quad m = \frac{s}{u_{es}}\frac{\mathrm{d}u_{es}}{\mathrm{d}s} = \frac{\beta}{2-\beta}$$

où m est le paramètre de gradient de pression. Les solutions quasi-exactes obtenues pour ce type d'écoulements sont de la forme :

$$H = cte \ ; \quad \frac{Re_{\delta_{1s}}}{\sqrt{Re_s}} = k_{\delta_{1s}} \ ; \quad \frac{Re_{\theta_{ss}}}{\sqrt{Re_s}} = k_{\theta_{ss}} \ ; \quad \frac{C_{fs}\sqrt{Re_s}}{2} = k_{C_{fs}}$$

avec H, $k_{\delta_{1s}}$, $k_{\theta_{ss}}$ et $k_{C_{fs}}$ des constantes qui dépendent de m. Celles-ci ont été données par Cousteix [25] à partir des résultats de Christian et al. Il est possible de traiter ce type d'écoulements avec le domaine de calcul de la figure 6.1 en ne calculant qu'un côté du dièdre, pour $s' \in [0, L]$. Dans ce cas, une condition limite doit être imposée dans la cellule $i = 0$. On peut aussi utiliser un domaine de calcul comme celui représenté sur la figure 6.8. Dans ce cas, aucune condition limite n'est à imposer, ni en $i = 0$, ni en $i = N + 1$. En théorie, on doit obtenir la même solution, pour $s' \in [0, L]$, avec les deux domaines de calcul. Dans cette section, le domaine de calcul utilisé est celui

représenté sur la figure 6.8 car il a l'avantage d'être plus proche de celui utilisé pour les profils d'aile (voir figure 5.7). Il permet notamment d'estimer la précision de la solution obtenue par BLIM2D au voisinage du point d'arrêt (sommet du dièdre) lorsque celui-ci n'est pas localisé explicitement et qu'aucune condition limite n'y est imposée.

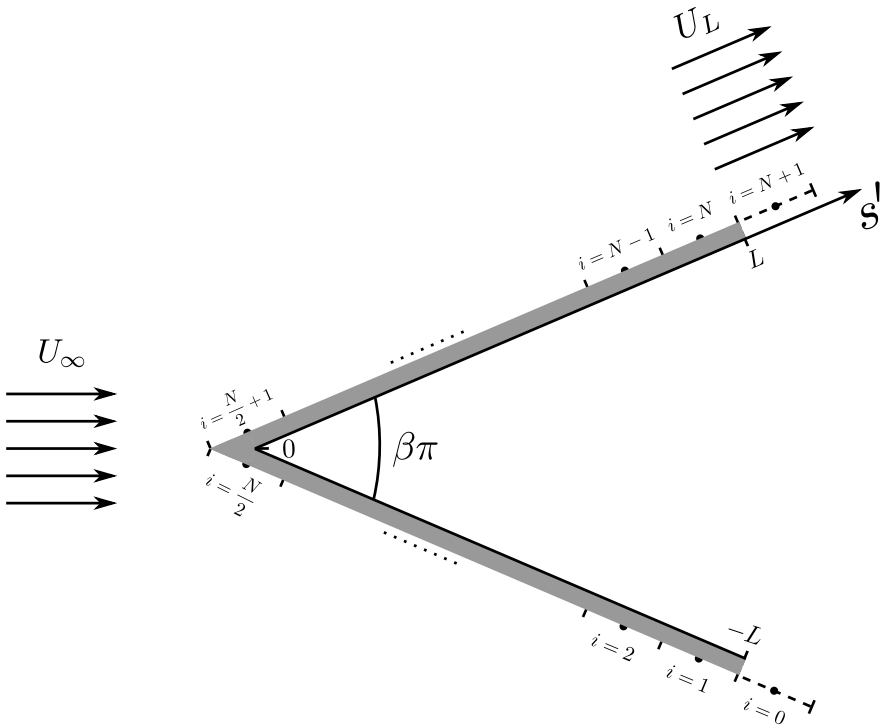


FIGURE 6.8. – Domaine de calcul pour un écoulement 2D autosimilaire de Falkner-Skan

Trois calculs ont été effectués afin de vérifier la validité de la méthode pour différents gradients de pression. Les cas sélectionnées correspondent à un écoulement de point d'arrêt bidimensionnel ($m = 1$), un écoulement de couche limite accéléré ($m = 1/3$) et un écoulement de couche limite ralenti ($m = -0.07$). Les données d'entrée utilisées pour ces calculs sont répertoriées dans le tableau 6.3. Elles correspondent aux conditions extérieures qui sont atteintes en bout de plaque, c'est-à-dire en $s' = L$. Comme pour la plaque plane sans gradient de pression, la longueur de la plaque est calculée automatiquement de manière à ce que le nombre de Reynolds local balaye tout la plage de valeurs sur laquelle la couche limite laminaire est stable :

$$L = \left(\frac{Re_{\theta_{crit}}}{k_{\theta_{ss}}}\right)^2 \frac{\nu}{M_L\sqrt{\gamma r T_L}}$$

avec $Re_{\theta_{crit}}$ donné par (6.2) et $k_{\theta_{ss}}$ et H donnés par les solutions de Falkner-Skan (voir tableau 6.4). De plus, $\gamma = 1.4$ et $r = 287\ J.kg^{-1}K^{-1}$ pour l'air et ν est approximé à $1.5 \times 10^{-5}\ m^2/s$ pour le calcul de L. M_L et T_L représentent respectivement le nombre de Mach et la température statique en $s' = L$. Le maillage utilisé est uniforme et compte 1024 éléments, donc 512 éléments sur $[0, L]$.

Les résultats des trois calculs sont répertoriés dans le tableau 6.4, ainsi que les écarts relatifs avec la solution quasi-exacte. Théoriquement, les quantités H, $k_{\delta_{1s}}$, $k_{\theta_{ss}}$ et $k_{C_{fs}}$ ne dépendent pas de Re_s. En revanche, les quantités obtenues numériquement ne sont pas toujours constantes, en particulier pour les faibles nombres de Reynolds. Les résultats donnés dans le tableau 6.4 correspondent aux valeurs asymptotiques de ces quantités, obtenues pour un nombre de Reynolds local suffisamment

M_L	0.1
$P_L(Pa)$	80000
$T_L(K)$	263

TABLE 6.3. – Données d'entrée

Cas	H		$k_{\delta_{1s}} = Re_{\delta_{1s}}/\sqrt{Re_s}$		$k_{\theta_{ss}} = Re_{\theta_{ss}}/\sqrt{Re_s}$		$k_{C_{fs}} = C_{fs}\sqrt{Re_s}/2$	
	théo.	num. (%err.)	théo.	num. (%err.)	théo.	num. (%err.)	théo.	num. (%err.)
$m = 1$	2.21623	2.22048 (0.19)	0.64789	0.64813 (0.04)	0.29234	0.29189 (-0.15)	1.23259	1.23191 (-0.05)
$m = 1/3$	2.29694	2.29685 (-0.004)	0.98537	0.98599 (0.06)	0.42899	0.42928 (0.07)	0.75745	0.75793 (0.06)
$m = -0.07$	3.09067	3.08777 (-0.09)	2.50823	2.47777 (-1.21)	0.81155	0.80244 (-1.12)	0.12981	0.13388 (3.13)

TABLE 6.4. – Solution BLIM2D pour une couche limite dynamique laminaire sur plaque plane avec différents gradients de pression

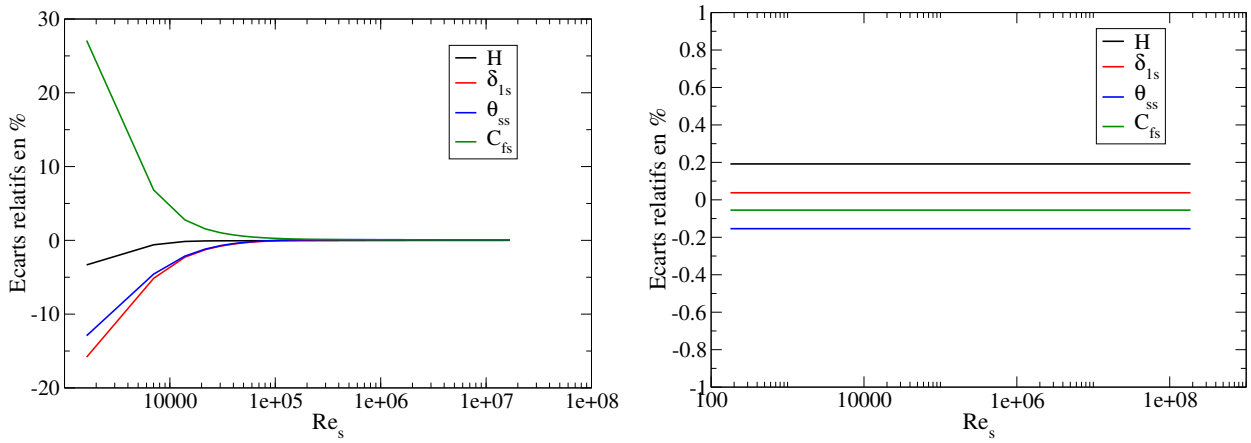
grand.

On constate que les résultats obtenus sont assez bons dans le cas de l'écoulement avec gradient de pression adverse (moins de 4% d'erreur) et ils sont excellents pour des gradients de pression favorables (moins de 0.3% d'erreur). Ceci est cohérent avec la figure 2.4 de la sous-section 2.2.1 qui montre que le profil de vitesse prévu par le modèle intégral représente parfaitement le profil de vitesse de Falkner-Skan pour des écoulements accélérés et qu'il est un peu moins précis pour des écoulements ralentis.

Comme il a été mentionné précédemment, pour la plupart des écoulements, les quantités H, $k_{\delta_{1s}}$, $k_{\theta_{ss}}$ et $k_{C_{fs}}$ obtenues par BLIM2D ne sont, en fait, pas constantes et leur précision est moindre pour les faibles nombre de Reynolds. La figure 6.9(a) illustre ce phénomène sur l'exemple du cas $m = 1/3$. Par contre la figure 6.9(b) montre que, pour l'écoulement de point d'arrêt bidimensionnel ($m = 1$), les résultats sont parfaitement constants et la zone de faible nombre de Reynolds est calculée aussi précisément que le reste de la solution (moins de 0.2% d'erreur). Cette précision de la solution dans la région des faibles nombres de Reynolds pour l'écoulement de point d'arrêt bidimensionnel est due à la correction de point d'arrêt qui est développée dans la sous-section 5.2.4. En effet, on peut voir sur la figure 6.10 que si la correction n'est pas activée, les résultats sont moins précis dans la région des faible nombres de Reynolds. Ceci montre l'importance de la correction de point d'arrêt car, lorsqu'une couche limite se développe sur un profil d'aile, la zone de faibles nombres de Reynolds locaux se situe au bord d'attaque, au voisinage du point d'arrêt (vitesse extérieure très faible). Or, on a vu dans la section 1.3.1 que le voisinage immédiat d'un point d'arrêt de profil d'aile 2D avec un bord d'attaque arrondi est bien représenté par l'écoulement autosimilaire de point d'arrêt bidimensionnel ($m = 1$). Ainsi, il est nécessaire d'avoir une solution précise pour les faibles nombres de Reynolds dans le cas $m = 1$ afin que la zone au voisinage du point d'arrêt d'un profil d'aile puisse être calculée correctement.

D'autre part, on a pu vérifier que la solution ne dépend pas de la position du point d'arrêt (point où la vitesse extérieure s'annule) dans la cellule. Dans le cas particulier où la vitesse extérieure s'annule exactement au centre de la cellule, celle-ci est modifiée et imposée à une valeur très faible

de manière à assurer la robustesse du code sans toutefois dégrader la qualité de la solution de manière significative.



(a) Écoulement autosimilaire de couche limite accéléré ($m = 1/3$)

(b) Écoulement de point d'arrêt bidimensionnel ($m = 1$)

FIGURE 6.9. – Écarts relatifs entre la solution BLIM2D et la solution de Falkner-Skan pour une couche limite dynamique laminaire sur plaque plane avec différents paramètres de gradient de pression

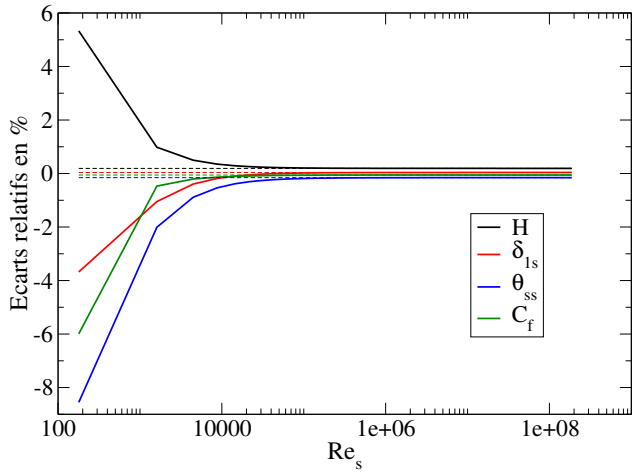
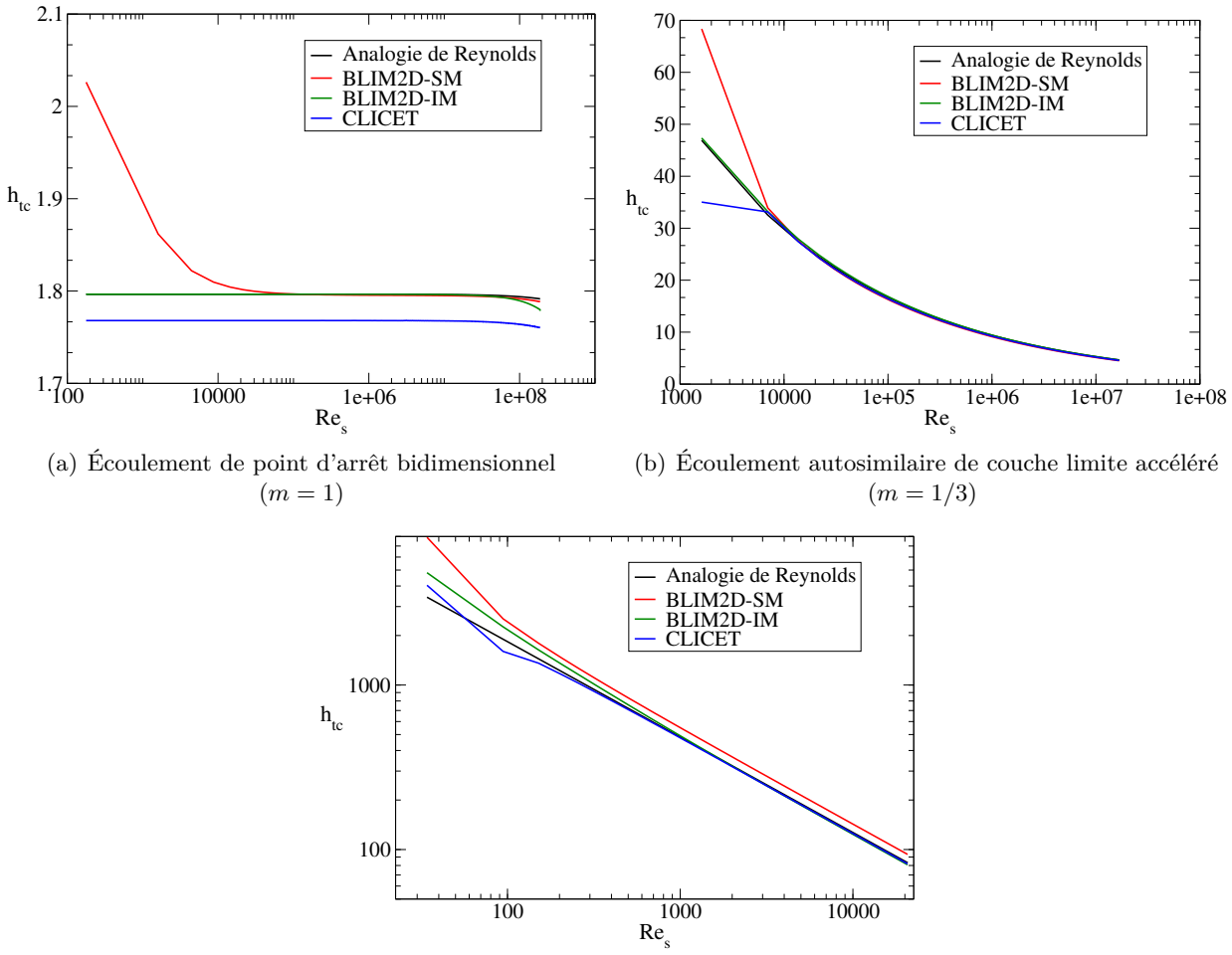


FIGURE 6.10. – Écarts relatifs entre la solution BLIM2D sans la correction de point d'arrêt et la solution de Falkner-Skan pour un écoulement de point d'arrêt bidimensionnel (traits pleins : sans correction / pointillés : avec correction)

Pour la couche limite thermique, les résultats obtenus par BLIM2D dans les conditions du tableau 6.3 sont comparés à ceux obtenus par CLICET et aux solutions quasi-exactes proposées par Kays et Crawford [49] (voir section 3.2.2) pour les cas $m = 1$, $m = 1/3$ et $m = -0.07$. On rappelle que les solutions quasi-exactes sont valables dans le cas où les termes de dissipation sont négligeables. Ici, on considère que la vitesse est suffisamment faible pour que les termes de dissipation, qui ne sont pas négligés dans CLICET et BLIM2D, soient suffisamment faibles pour ne pas fausser les résultats. On constate sur la figure 6.11 que le coefficient d'échange calculé par BLIM2D-IM est toujours extrêmement proche de celui fourni par CLICET et de la solution quasi-exacte. En revanche, il faut noter que nous n'avons pas réussi à obtenir une solution correcte avec CLICET

dans les deux premières cellules dont on ne tiendra pas compte puisque même le facteur de forme n'a pas la bonne valeur. Pour les trois cas, l'écart relatif avec les solutions de référence est strictement inférieur à 3%. On obtient une précision tout à fait similaire avec BLIM2D-SM dans le cas des gradients de pression favorables ($m = 1$ et $m = 1/3$), sauf pour les faibles nombres de Reynolds (ou les 3 ou 4 premières cellules en pratique) où on peut noter des écarts plus importants. Ceci est dû au fait que, dans le modèle de Smith et Spalding, le calcul du nombre de Stanton devient singulier en $s = 0$ (voir section 3.1.1, eq.(3.5)). Enfin, dans le cas du gradient de pression défavorable $m = -0.07$, la précision du coefficient d'échange thermique calculé avec BLIM2D-SM est un peu moins bonne et les écarts relatifs avec les solutions de référence valent 12 à 15% pour un nombre de Reynolds suffisamment grand.

Finalement, les deux modèles thermiques fournissent des valeurs de coefficient d'échange très satisfaisantes, que ce soit pour des écoulements de couche limite accélérés ou ralentis. Cependant, la méthode intégrale est plus précise que la méthode simplifiée, notamment pour les faibles nombres de Reynolds et en présence de gradients de pression adverses.



(a) Écoulement de point d'arrêt bidimensionnel ($m = 1$)

(b) Écoulement autosimilaire de couche limite accéléré ($m = 1/3$)

(c) Écoulement autosimilaire de couche limite ralentie ($m = -0.07$)

FIGURE 6.11. – Solutions BLIM2D-SM et BLIM2D-IM pour une couche limite thermique laminaire sur plaque plane avec différents paramètres de gradient de pression

6.3.2. Écoulement turbulent

Pour la couche limite dynamique turbulente, la validité des relations de fermeture en présence d'un gradient de pression est vérifiée à l'aide du code de référence CLICET. Deux cas sont étudiés, l'un avec un gradient de pression favorable et l'autre avec un gradient de pression adverse.

Cas d'un gradient de pression favorable

Le premier cas sélectionné, avec un gradient de pression favorable, admet une distribution de vitesse extérieure identique à celle correspondant aux écoulements de Falkner-Skan pour une couche limite laminaire, avec $m = 1/3$:

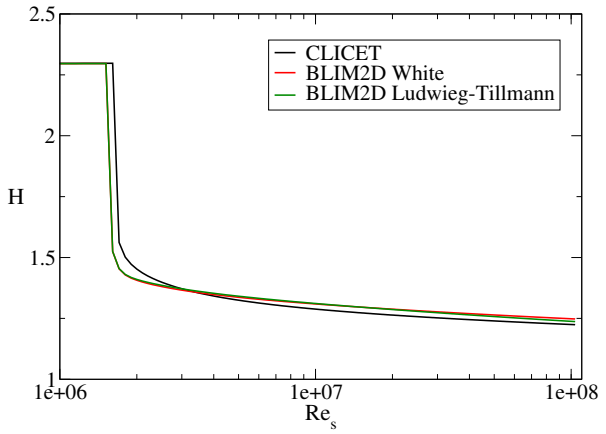
$$u_{es} = Cs^{1/3}$$

Il est important de noter que la solution de couche limite turbulente pour un tel écoulement ne correspond à la solution de Falkner-Skan qui n'est valable que pour une couche limite laminaire. Le domaine de calcul utilisé pour ce cas est celui correspondant à la figure 6.8, il n'est donc pas nécessaire d'imposer des conditions aux limites. Les conditions extérieures choisies pour le calcul sont données dans le tableau 6.5. Le maillage utilisé est uniforme et compte 1024 éléments (donc 512 éléments sur $[0, L]$). La solution n'est pas imposée comme étant pleinement turbulente et la couche limite est laminaire pour les faibles nombres de Reynolds locaux. La longueur L de la plaque a donc été choisie de telle manière que la solution admette une transition laminaire-turbulent et que la zone turbulente soit assez grande pour que la couche limite turbulente puisse s'établir correctement. Pour CLICET comme pour BLIM2D, le lieu de la transition est prévu par le critère (2.43). Ici, la transition a lieu pour $Re_s \simeq 1.6 \times 10^6$. La zone laminaire n'est pas étudiée ici puisqu'elle a déjà été validée dans la sous-section précédente.

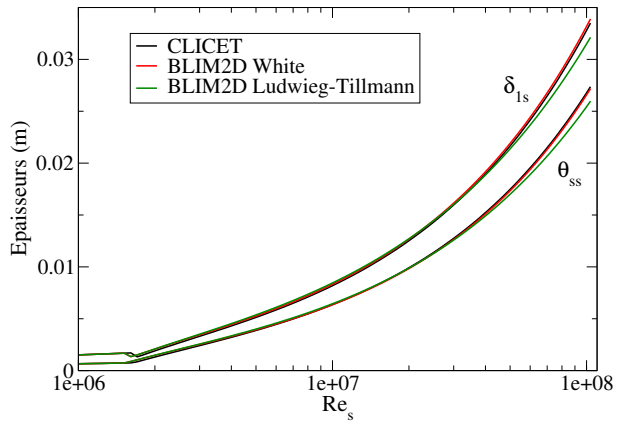
M_L	0.1
$P_L(Pa)$	80000
$T_L(K)$	263
$L(m)$	50

Table 6.5. – Données d'entrée

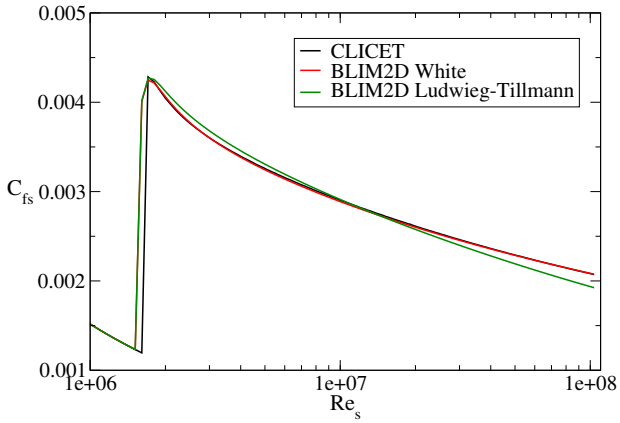
Pour la couche limite dynamique, la figure 6.12 montre l'évolution des grandeurs caractéristiques de la couche limite prévue par CLICET et par BLIM2D en utilisant les lois de frottement de Ludwieg et Tillmann (2.31) et de White (2.32). On constate que le facteur de forme, les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement et le coefficient de frottement obtenus avec BLIM2D sont très proches de ceux prévus par CLICET. De plus, le modèle avec la loi de frottement proposée par White semble un peu plus précis que le modèle avec la loi de frottement de Ludwieg et Tillmann. Ceci est confirmé par la figure 6.13 qui donne les écarts relatifs entre la solution de CLICET et celles de BLIM2D pour les deux relations de fermeture. Dans la zone turbulente, le modèle avec la loi de White semble très bon puisqu'il est précis à 2% près. L'erreur est légèrement plus élevée pour le modèle avec la loi de Ludwieg et Tillmann mais elle reste inférieure à 8%. On note en revanche des écarts très importants dans la zone de transition. Ceci est dû au fait que le transition n'est pas prévue exactement au même endroit par les deux solveurs, or la transition se traduit par une modification brutale du comportement de la couche limite, notamment une chute du facteur de forme, de l'épaisseur de déplacement et une brusque augmentation du coefficient de frottement.



(a) Facteur de forme

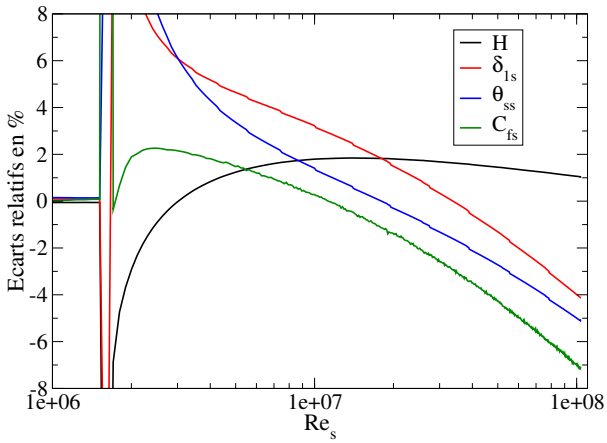


(b) Épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement

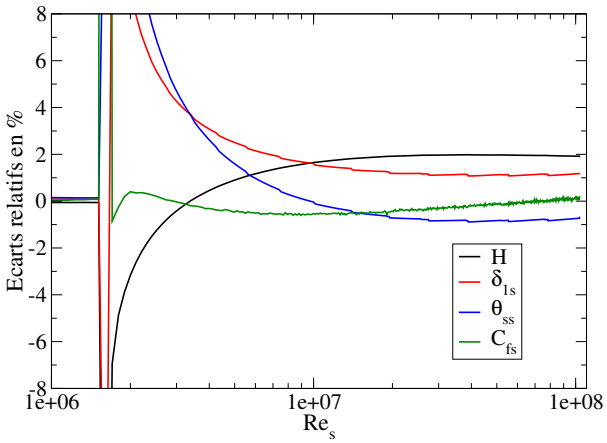


(c) Coefficient de frottement

FIGURE 6.12. – Solution BLIM2D pour une couche limite dynamique turbulente sur plaque plane avec un gradient de pression favorable pour deux lois de frottement différentes



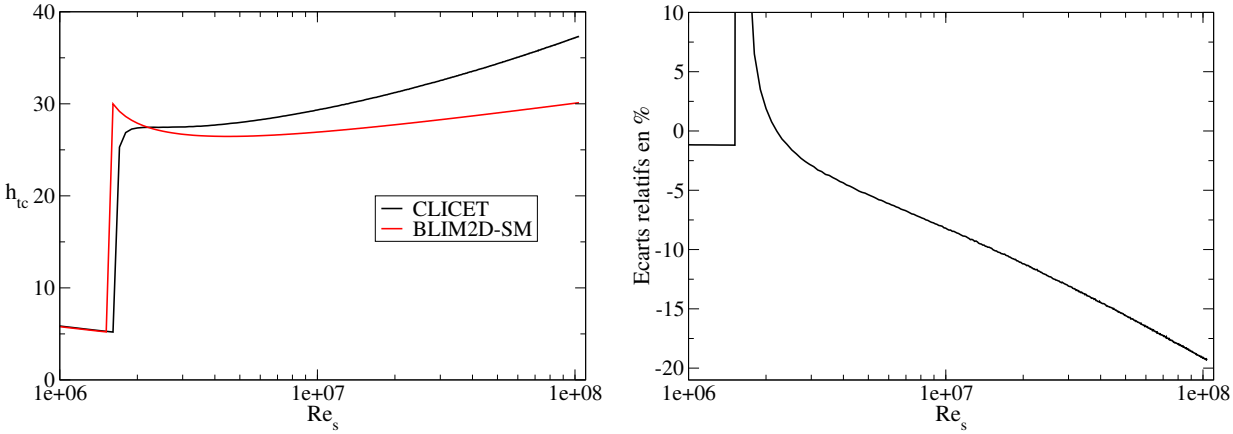
(a) Loi de frottement de Ludwieg et Tillmann



(b) Loi de frottement de White

FIGURE 6.13. – Écarts relatifs entre les solutions BLIM2D pour deux relations de fermeture et la solution de CLICET pour une couche limite dynamique turbulente sur plaque plane avec un gradient de pression favorable

Pour la couche limite thermique, le coefficient d'échange calculé avec BLIM2D-SM est comparé au coefficient d'échange fourni par CLICET sur la figure 6.14(a). La figure 6.14(b) donne l'écart relatif entre les deux solutions. On constate que l'erreur atteint presque 20% en bout de plaque et donc que la valeur du coefficient d'échange est moins précise que dans le cas d'une plaque plane sans gradient de pression. Ceci peut s'expliquer par le fait que la méthode d'Ambrok, utilisée pour calculer le coefficient d'échange dans le cas d'une couche limite turbulente, repose sur des hypothèses de plaque plane (voir section 3.1.1). La solution est donc moins bonne lorsque le gradient de pression devient non nul.



(a) Coefficient d'échange thermique

(b) Écart relatif entre les h_{tc} obtenus par BLIM2D-SM et CLICET

FIGURE 6.14. – Solution BLIM2D-SM pour une couche limite thermique turbulente sur plaque plane avec un gradient de pression favorable

Cas d'un gradient de pression adverse

Le deuxième cas sélectionné permet de tester la validité des relations de fermeture turbulentes pour un écoulement avec un gradient de pression adverse. Il est basé sur une expérience réalisée par Ludwieg et Tillmann [52] et présenté à la conférence de Stanford en 1968. Ce cas a d'ailleurs été classé comme étant l'un des plus difficiles à simuler numériquement [101]. Les données expérimentales ont été trouvées dans le papier de Coles [21]. Pour cette expérience, la distribution de vitesse extérieure est assez bien représentée par :

$$u_{es} = -3.11645s + 36.1652 \ m/s \tag{6.5}$$

L'expression (6.5) a été obtenue par Ye [101] en linéarisant la vitesse expérimentale. De plus, l'expérience a été réalisée avec une longueur de plaque de 5 m et une viscosité de $1.55 \times 10^{-5} \ m^2/s$. Les conditions d'entrée utilisées pour reproduire les conditions de l'expérience sont détaillées dans le tableau 6.6. La pression et la température ont été choisies de manière à avoir approximativement la bonne viscosité cinématique selon la loi de Sutherland (6.3). Les résultats sont aussi comparés à ceux obtenus avec CLICET pour les conditions du tableau 6.6.

Le domaine de calcul utilisé est du type plaque plane (voir figure 6.1). Le maillage est uniforme et compte 512 éléments. Les conditions limites imposées dans la cellule fictive $i = 0$ sont les mêmes

M_∞	0.1052
$P_\infty(Pa)$	101325
$T_\infty(K)$	294
$L(m)$	5

TABLE 6.6. – Données d'entrée

que celles utilisées par Ye :

$$\theta_{ss} = 10^{-3}\ m\ ; \quad H = 1.2$$

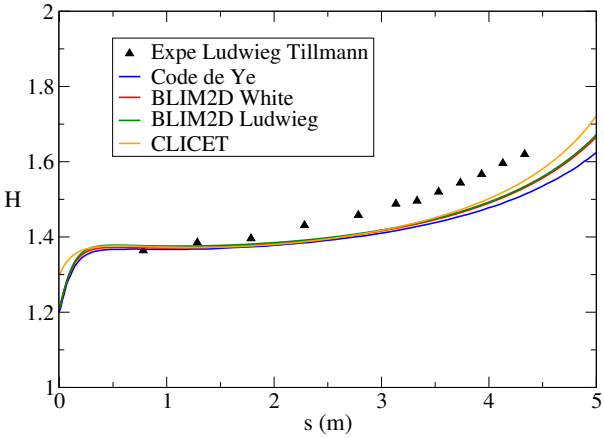
Pour la couche limite dynamique, la figure 6.15 compare les données expérimentales de Ludwieg et Tillmann aux solutions obtenues par CLICET et BLIM2D en utilisant les lois de frottement de White et de Ludwieg et Tillmann. Il faut noter que, suite à un problème de convergence du solveur CLICET qui n'a pas pu être résolu, la valeur du facteur de forme en $s = 0$ a dû être imposée à 1.3 au lieu de 1.2. En pratique, ceci ne modifie la solution que sur les premiers centimètres de la plaque. Au delà des premiers centimètres, le facteur de forme et les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement prévus par BLIM2D sont très proches de ceux calculés par CLICET avec moins de 5% d'erreur (voir figure 6.16), quelle que soit la relation de fermeture utilisée. En revanche l'erreur sur le coefficient de frottement est beaucoup plus importante et peut atteindre environ 50% en bout de plaque (voir figure 6.16). De plus, les solutions calculées par CLICET et BLIM2D ne collent pas vraiment bien aux données expérimentales obtenues par Ludwieg et Tillmann (on peut atteindre 30% d'erreur pour l'épaisseur de déplacement). La figure 6.15 présente aussi, à titre indicatif les résultats obtenus par Ye. On constate que les solutions sont du même ordre de grandeur et qu'elles ont une allure très similaire, bien que Ye ne semble pas avoir utilisé la même valeur de la viscosité pour son calcul, mais plutôt $\nu = 8.8 \times 10^{-6}\ m^2/s$.

L'étude de ce deuxième cas montre qu'en présence d'un gradient de pression adverse, le modèle fournit toujours des résultats cohérents mais ils sont moins précis que dans le cas d'un écoulement accéléré.

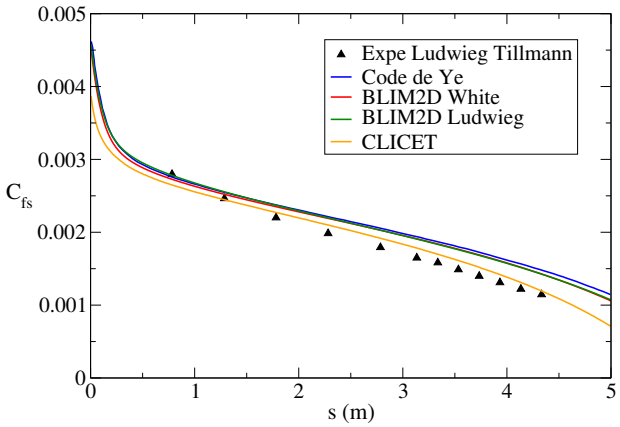
Pour la couche limite thermique, le modèle simplifié n'a pas été validé car la valeur de $\theta_{Tstrans}$ n'a pas pu être calculée (voir section 3.1.1, eq. (3.11)). En effet l'évolution de la couche limite n'est pas connue depuis son origine puisqu'en $s = 0$, θ_{ss} vaut $10^{-3}\ m$. On s'attend en revanche à ce que, comme dans le cas d'un gradient de pression favorable, la méthode simplifiée ne soit pas très précise puisqu'on s'écarte des conditions de plaque plane.

6.4. Validation de la méthode 2D sur un profil d'aile NACA

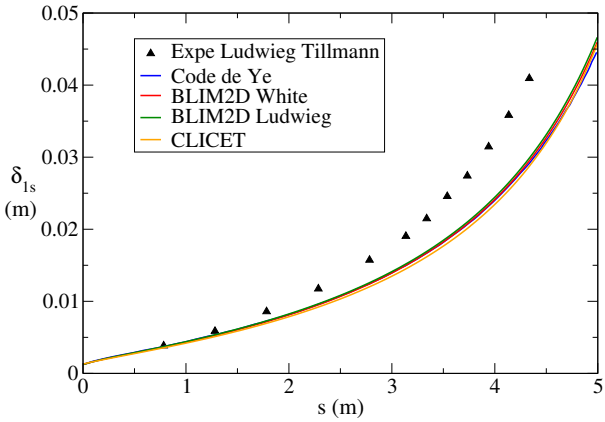
Dans les sections précédentes, le modèle intégral, et notamment les relations de fermeture ont été validés sur des configurations extrêmement simples de type plaque plane, avec et sans gradient de pression. Il s'agit maintenant d'évaluer la validité du modèle pour des écoulements autour de profils d'aile, plus complexes puisqu'ils admettent un gradient de pression variable. La solution dans la zone du point d'arrêt doit notamment être étudiée avec attention. En effet, elle doit être particulièrement précise à cet endroit qui est le plus touché par les dépôts de givre. Enfin, le voisinage du bord de fuite est une zone difficile à calculer puisque c'est principalement à cet endroit que se trouvent les plus forts gradients de pression adverses et donc, éventuellement, des écoulements de couche limite décollée. Ce n'est pas la précision de la méthode mais sa robustesse qu'il s'agit de valider dans cette zone où le givre ne se dépose jamais ou très peu. La capacité de la méthode à répondre



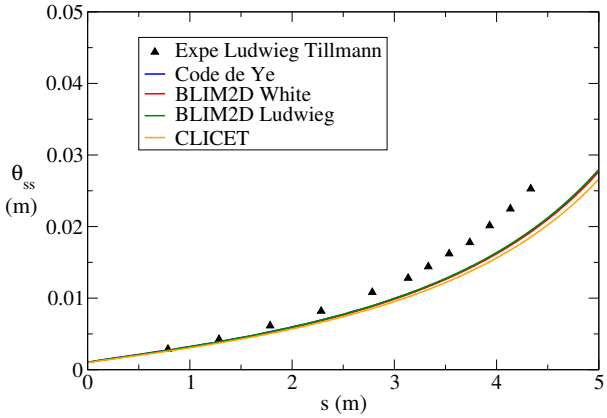
(a) Facteur de forme



(b) Coefficient de frottement

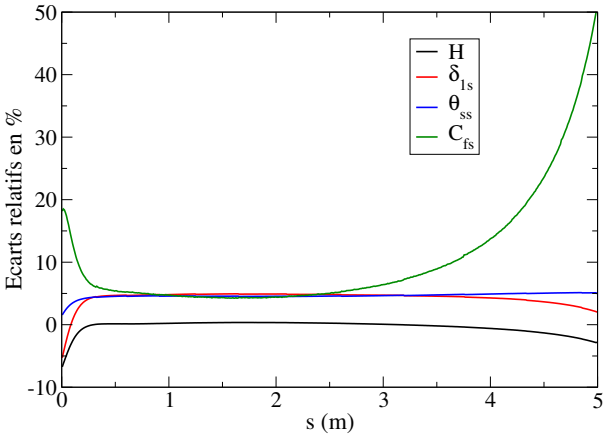


(c) Épaisseur de déplacement

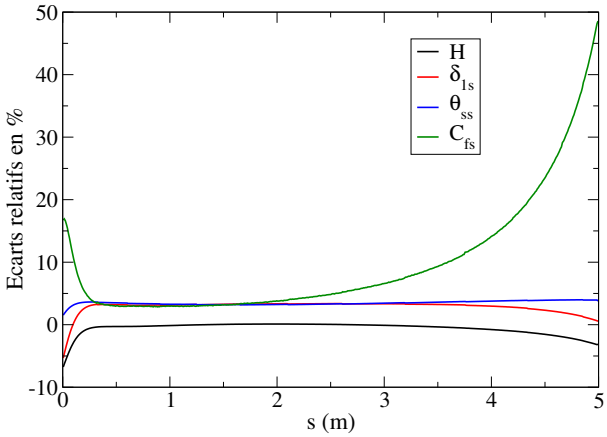


(d) Épaisseur de quantité de mouvement

FIGURE 6.15. – Solution BLIM2D pour une couche limite dynamique turbulente sur plaque plane avec un gradient de pression adverse pour deux lois de frottement différentes



(a) Loi de frottement de Ludwieg et Tillmann



(b) Loi de frottement de White

FIGURE 6.16. – Écarts relatifs entre les solutions BLIM2D pour deux relations de fermeture et la solution de CLICET pour une couche limite dynamique turbulente sur plaque plane avec un gradient de pression adverse

à ces critères est évaluée, dans cette section, sur un profil d'aile NACA0012 qui est symétrique. De plus, la loi de frottement utilisée pour fermer les équations de couche limite turbulente dans cette section est celle proposée par White. En effet, on a montré dans la section précédente que le modèle intégral fournit de meilleurs résultats avec la loi de frottement de White qu'avec celle de Ludwieg et Tillmann. Enfin, le domaine de calcul utilisé correspond à celui schématisé sur la figure 5.7. On rappelle qu'aucune condition limite n'est à imposer aux extrémités du domaine de calcul. Le solveur CLICET est utilisé dans cette section pour fournir une solution de référence.

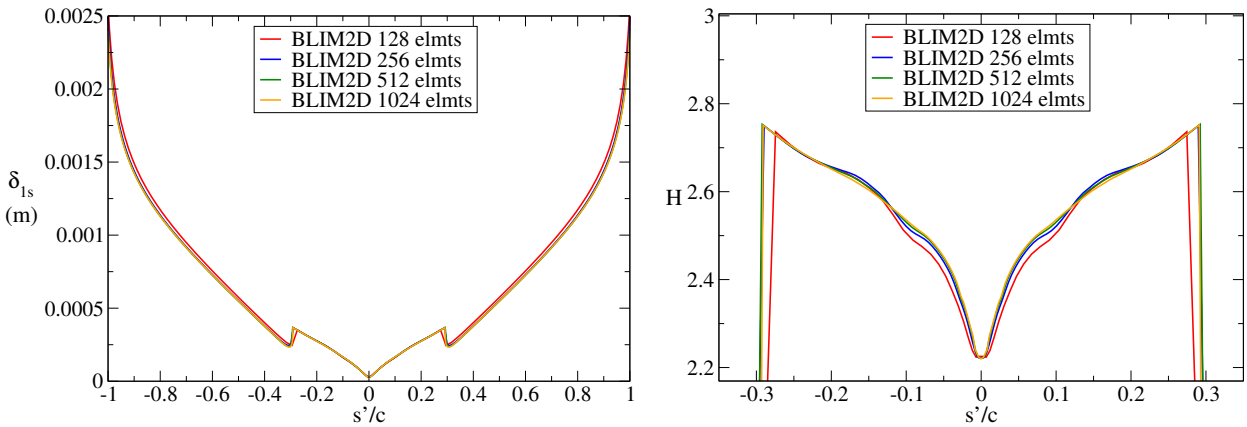
6.4.1. Étude de convergence en maillage

Une étude de convergence en maillage est effectuée dans un premier temps. Des calculs sont réalisés sur des maillages de 128, 256, 512 et 1024 éléments. Un calcul Euler est effectué dans chaque cas par le solveur EULER2D de la chaîne IGLOO2D pour alimenter BLIM2D (voir la figure 6.18(a) pour un exemple de maillage). Les conditions extérieures utilisées pour cette étude sont répertoriées dans le tableau 6.7. La figure 6.17 montre l'évolution de l'épaisseur de déplacement et du facteur de

Profil	NACA0012
corde (m)	0.500
AOA $(°)$	0
M_∞	0.15
$T_\infty(K)$	263
$P_\infty(Pa)$	80000

Table 6.7. – Données d'entrée

forme calculée par BLIM2D pour les différents maillages. On peut voir qu'à partir de 256 éléments, la solution obtenue est très bien convergée mais le maillage avec 128 éléments fournit aussi une solution satisfaisante. Cette étude est uniquement qualitative car la transition laminaire-turbulent n'a pas lieu exactement au même endroit sur tous les maillages. Or, la transition laminaire-turbulent est associée à une variation brutale des quantités observées et ceci crée des erreurs très importantes qui faussent les résultats de l'étude de convergence en maillage.

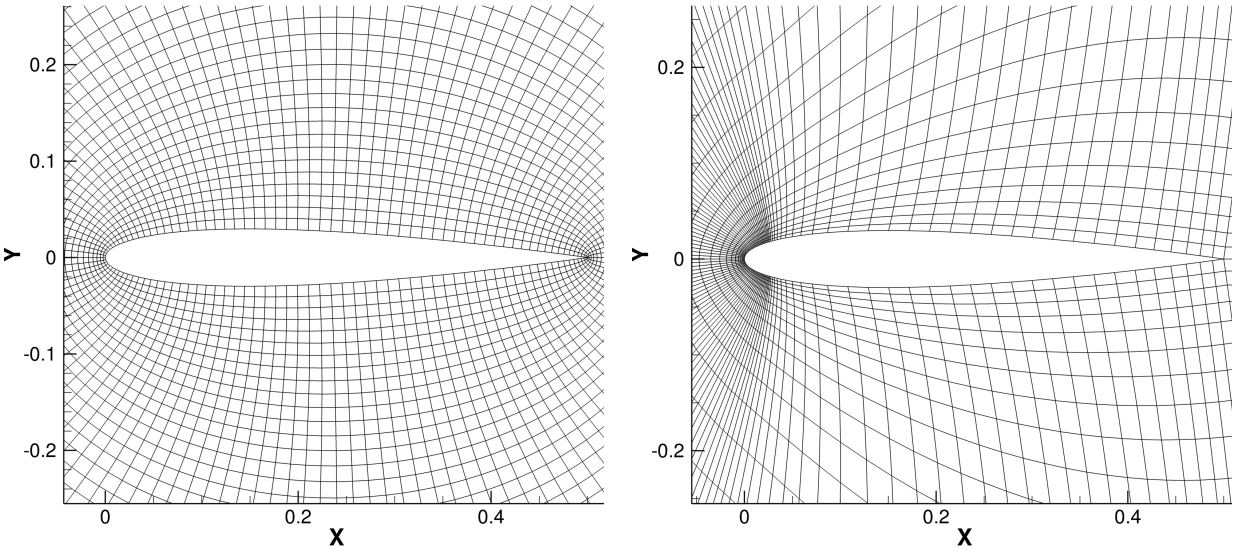


(a) Épaisseur de déplacement

(b) Facteur de forme (zoom sur le point d'arrêt)

Figure 6.17. – Étude de convergence en maillage pour le solveur BLIM2D sur un profil d'aile NACA0012

D'autre part, la chaîne de calcul IGLOO2D possède un mailleur structuré, MESH2D [88], qui fournit un maillage de 128 éléments, particulièrement raffiné au point d'arrêt et plus grossier au bord de fuite. Il est particulièrement adapté et usuellement utilisé pour des applications givrage puisqu'il permet un bon compromis entre le fait d'avoir un maillage assez raffiné dans les zones d'intérêt pour le givrage et le fait d'avoir un nombre de mailles assez faible pour que les calculs soient rapides. Le type de maillages utilisé pour l'étude de convergence et le maillage généré par MESH2D sont comparés sur la figure 6.18 pour un profil d'aile NACA0012. De plus, la solution calculée avec BLIM2D sur le maillage généré par MESH2D est donnée sur la figure 6.19. Comme on peut s'y attendre, on remarque que ce maillage permet d'obtenir une solution très bien convergée dans la zone du bord d'attaque et un peu moins précise sur le reste du profil. Ainsi, dans cette section, le maillage de 1024 éléments utilisé pour l'étude de convergence en maillage est choisi, ce qui permet d'avoir une solution parfaitement convergée sur tout le profil pour valider la méthode intégrale de couche limite. Le maillage de 128 éléments généré par MESH2D sera cependant utilisé dans la section 6.5 et le chapitre 7, puisqu'il est plus couramment utilisé pour les calculs d'accrétion de givre. La méthode doit donc aussi fournir des résultats satisfaisants sur ce type de maillages.



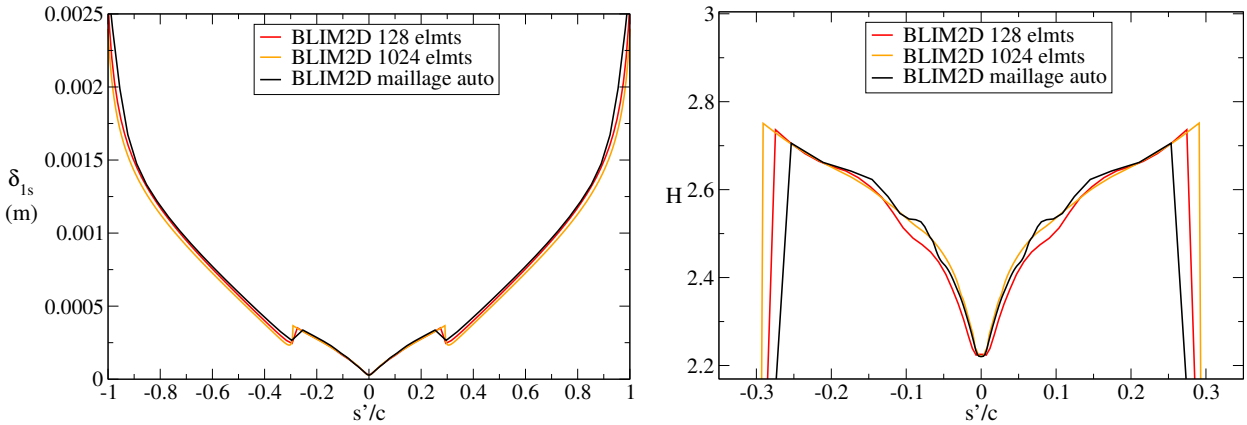
(a) Maillage de 128 éléments utilisé pour l'étude de convergence en maillage

(b) Maillage de 128 éléments généré par MESH2D

FIGURE 6.18. – Maillages utilisés pour la validation de la méthode

6.4.2. Cas sans incidence à faible nombre de Mach

Le premier cas de validation étudié est celui qui a été utilisé pour réaliser l'étude de convergence en maillage. Le profil d'aile est à incidence nulle et le Mach est assez faible. Les conditions extérieures sont données en détail dans le tableau 6.7. On rappelle que le maillage utilisé pour ce cas possède 1024 éléments. Les solutions pour les couches limites dynamique et thermique calculées avec BLIM2D sont comparées à celles obtenues avec CLICET sur la figure 6.20. L'axe des abscisses représente l'abscisse curviligne adimensionnée par la corde du profil. Son origine correspond au point d'arrêt. Les valeurs négatives correspondent à l'intrados du profil d'aile tandis que les valeurs positives représentent l'extrados du profil. Ce cas de validation permet de vérifier que les résultats



(a) Épaisseur de déplacement

(b) Facteur de forme (zoom sur le point d'arrêt)

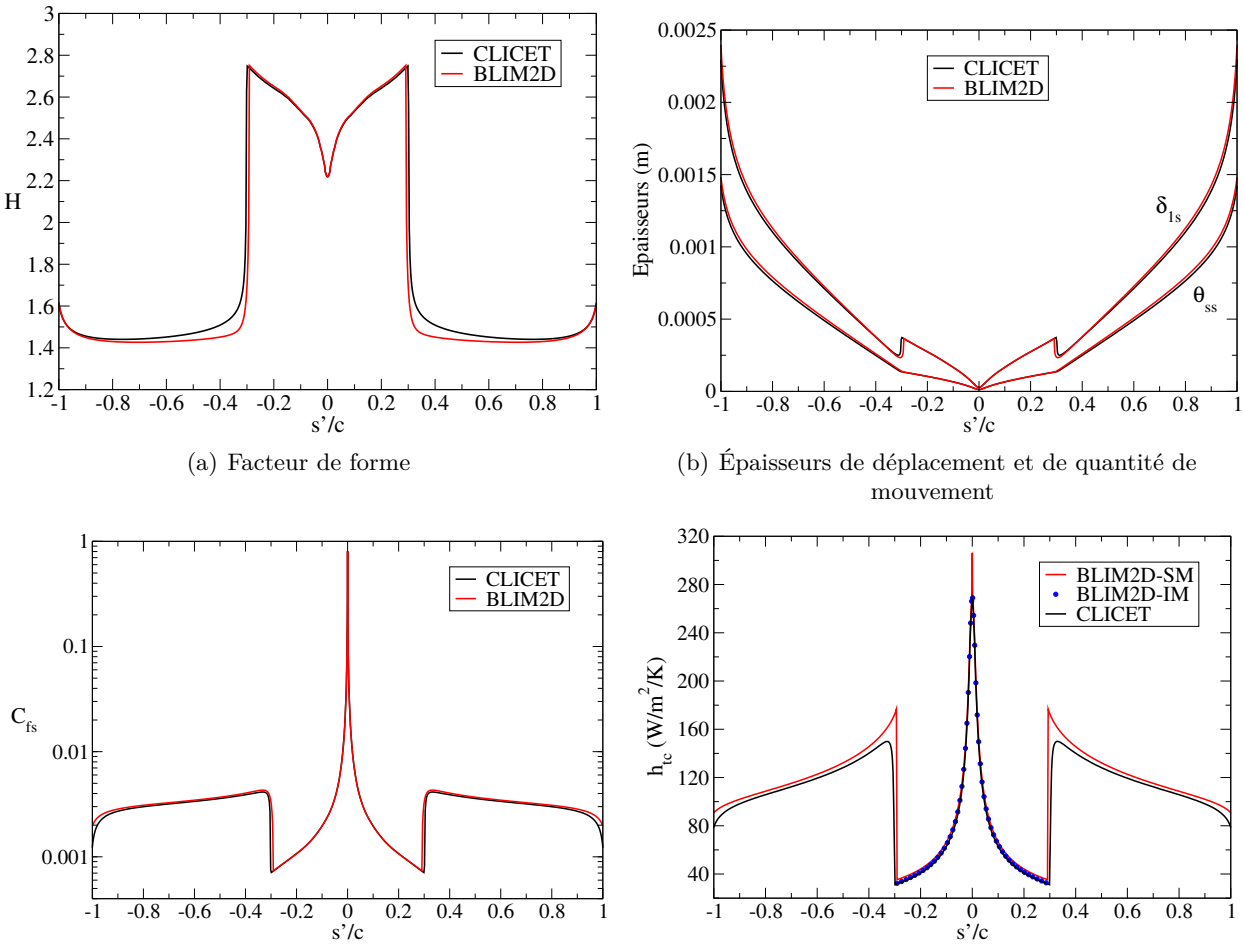
FIGURE 6.19. – Étude de convergence en maillage pour le solveur BLIM2D avec un maillage généré par MESH2D

sont parfaitement symétriques, puisque le profil d'aile l'est aussi et qu'il n'a pas d'incidence. De plus, le facteur de forme, les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement, le coefficient de frottement ainsi que le coefficient d'échange thermique calculés avec BLIM2D sont en accord avec ceux obtenus avec CLICET. Le lieu de la transition est prévu à la même abscisse par les deux solveurs, soit $s'/c = \pm 0.3$. Comme mentionné précédemment, on le repère à la chute brutale du facteur de forme et de l'épaisseur de déplacement, à l'augmentation du coefficient de frottement et du coefficient d'échange thermique et au changement de pente de l'épaisseur de quantité de mouvement. On peut enfin voir que le coefficient d'échange thermique fourni par BLIM2D-IM sur la zone laminaire (on rappelle que le modèle turbulent n'a pas été développé dans cette thèse) est plus proche de la solution de CLICET que celui fourni par la méthode thermique simplifiée.

6.4.3. Influence de la correction de point d'arrêt sur la précision de la méthode

Dans cette sous-section, on se focalise plus particulièrement sur la qualité de la solution dans la zone proche du point d'arrêt. L'objectif est d'estimer le gain, en terme de précision, que peut apporter la correction de point d'arrêt développée dans la sous-section 5.2.4 sur la solution dans cette zone. Pour cela, on compare sur la figure 6.21 les grandeurs caractéristiques de la couche limite calculées par BLIM2D, avec et sans la correction de point d'arrêt. Cette étude est faite pour le cas étudié dans la sous-section précédente (voir tableau 6.7).

On constate sur la figure 6.21 que, lorsque la correction de point d'arrêt est désactivée, les grandeurs dynamiques sont mal calculées dans les premières mailles, proches du point d'arrêt. À l'inverse, lorsque la correction est activée, les grandeurs calculées sont plus proches de celles obtenues par CLICET. Ceci est particulièrement visible pour le facteur de forme mais c'est le cas aussi pour les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement et le coefficient de frottement. En réalité, l'erreur relative entre les solutions avec et sans correction vaut entre 4 et 9% pour les quatre quantités. On peut voir en revanche que le coefficient d'échange thermique est déjà assez précis au voisinage du point d'arrêt même sans la correction de point d'arrêt. Ainsi, la correction de point d'arrêt développée pour le modèle dynamique a très peu d'influence sur le coefficient d'échange thermique et il n'est pas nécessaire de développer une correction pour le modèle thermique.



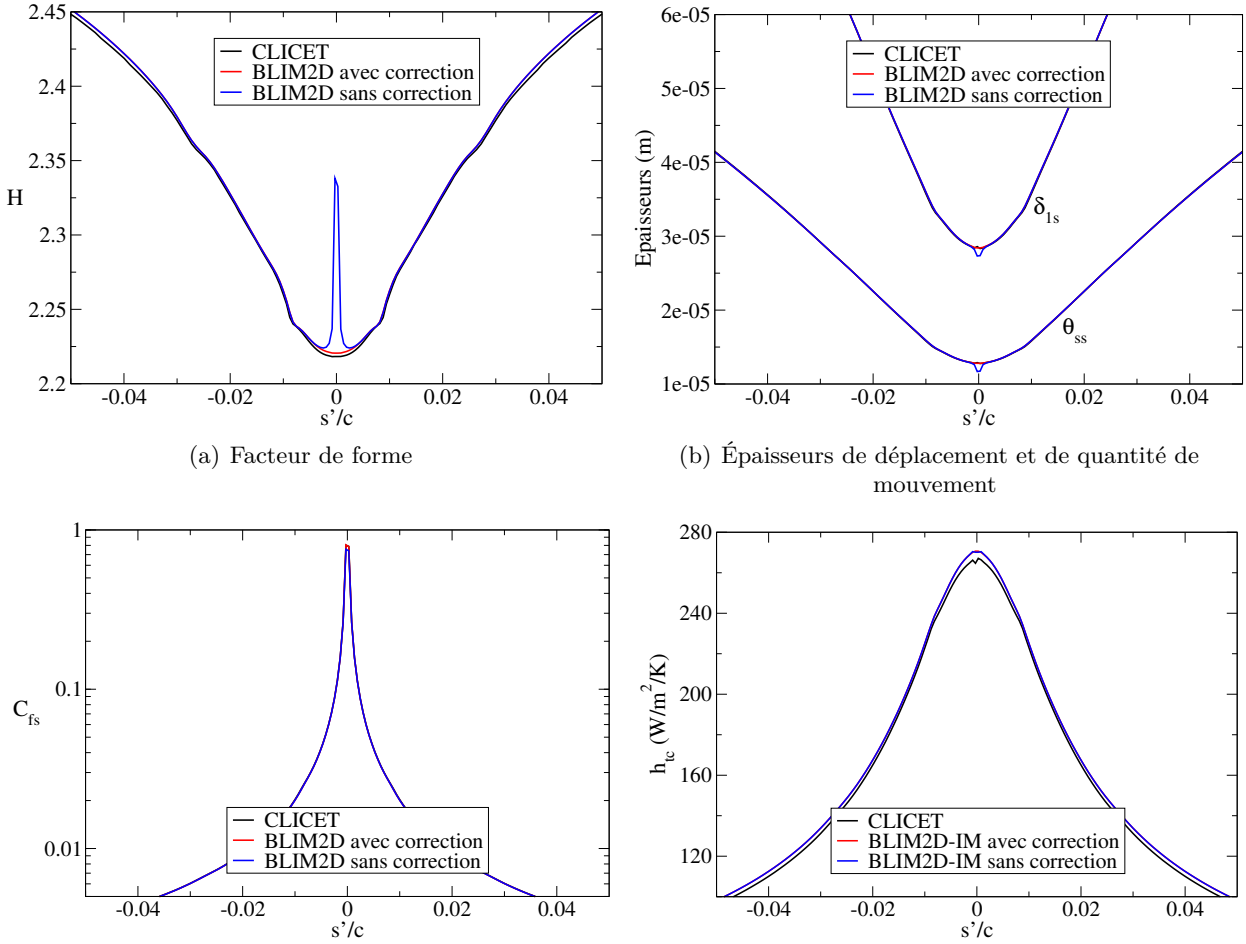
(a) Facteur de forme

(b) Épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement

(c) Coefficient de frottement

(d) Coefficient d'échange thermique

FIGURE 6.20. – Solution BLIM2D pour les couches limites dynamique et thermique sur un profil d'aile NACA0012 sans incidence et à faible Mach



(a) Facteur de forme

(b) Épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement

(c) Coefficient de frottement

(d) Coefficient d'échange thermique

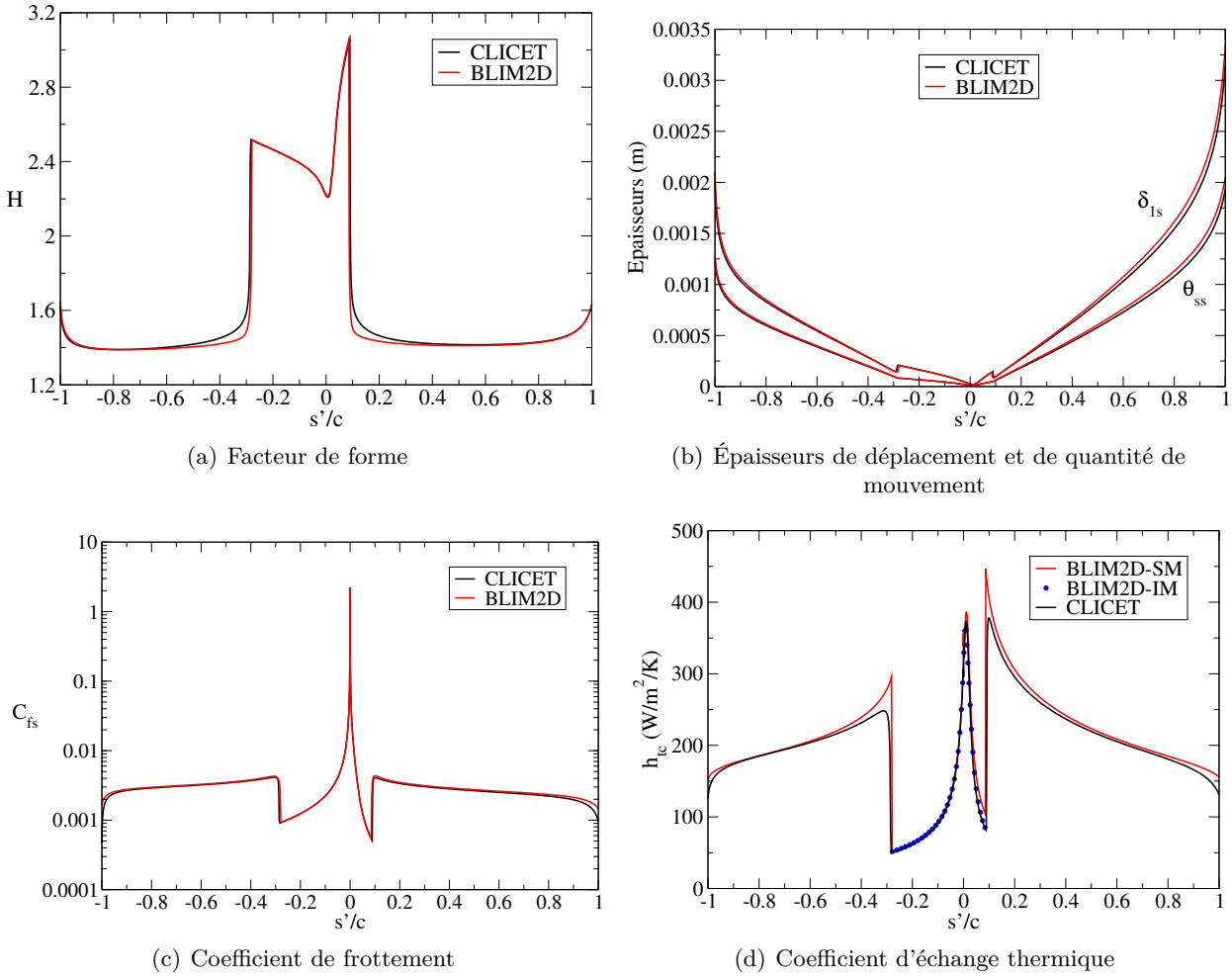
FIGURE 6.21. – Solution BLIM2D au voisinage du point d'arrêt pour les couches limites dynamique et thermique sur un profil d'aile NACA0012 sans incidence et à faible Mach

6.4.4. Influence de l'incidence et de la vitesse sur la précision de la méthode

Des calculs ont été réalisés, toujours avec un maillage de 1024 éléments, pour différentes valeurs de vitesse extérieure et d'angle d'incidence afin d'évaluer les capacités de la méthode sur une plus large gamme de conditions extérieures. Les données d'entrée de l'un d'entre eux, avec un nombre de Mach et une incidence relativement élevés, sont détaillées dans le tableau 6.8. Les résultats obtenus pour ce cas sont comparés à ceux fournis par CLICET sur la figure 6.22. On peut voir que, même pour des conditions extérieures plus sévères, la méthode intégrale est capable de prévoir l'évolution de la couche limite sur le profil d'aile de manière aussi précise que CLICET, que ce soit pour le facteur de forme, les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement ou encore sur le coefficient de frottement. Le coefficient d'échange thermique obtenu avec la méthode simplifiée diffère légèrement de celui calculé par CLICET, notamment dans la zone de transition laminaire-turbulent. De plus, comme pour le cas précédent, la méthode thermique intégrale prévoit un coefficient d'échange thermique plus proche de celui de CLICET que la méthode simplifiée sur la zone laminaire.

Profil	NACA0012
corde (m)	0.500
AOA $(°)$	4
M_∞	0.30
$T_\infty(K)$	263
$P_\infty(Pa)$	80000

Table 6.8. – Données d'entrée



(a) Facteur de forme

(b) Épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement

(c) Coefficient de frottement

(d) Coefficient d'échange thermique

FIGURE 6.22. – Solution BLIM2D pour les couches limites dynamique et thermique sur un profil d'aile NACA0012 avec un nombre de Mach et un angle d'incidence relativement élevés

6.5. Validation 2D de la méthode sur d'autres profils d'aile

Pour compléter la validation de la méthode, des calculs sont réalisés sur d'autres profils d'aile, tels que le MS317 et le GLC305, qui ne sont pas symétriques et qui peuvent être susceptibles d'engendrer des gradients de pression extérieurs plus importants que ceux présents autour d'un NACA0012. Dans cette section, les équations intégrales de couche limite turbulente sont fermées à l'aide de la loi de frottement de White. De plus, les calculs sont effectués sur le maillage généré par MESH2D.

6.5.1. Profil d'aile MS317

La forme du profil d'aile MS317 et le maillage de 128 éléments automatiquement généré sur ce profil sont donnés sur la figure 6.23. Deux calculs sont effectués sur ce profil, l'un sans incidence

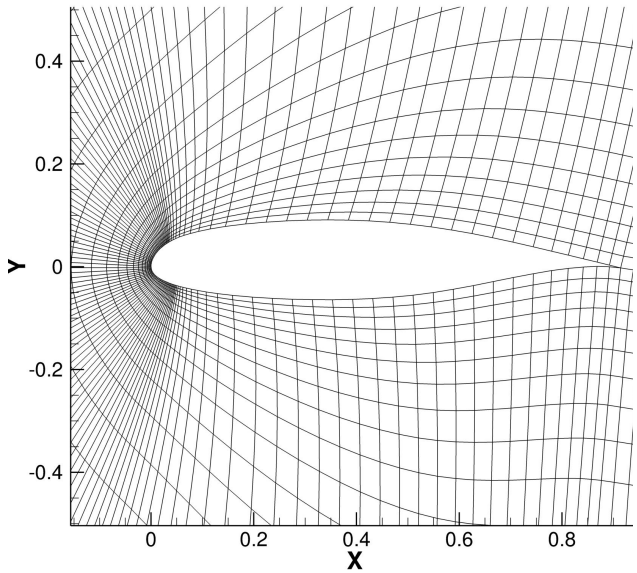
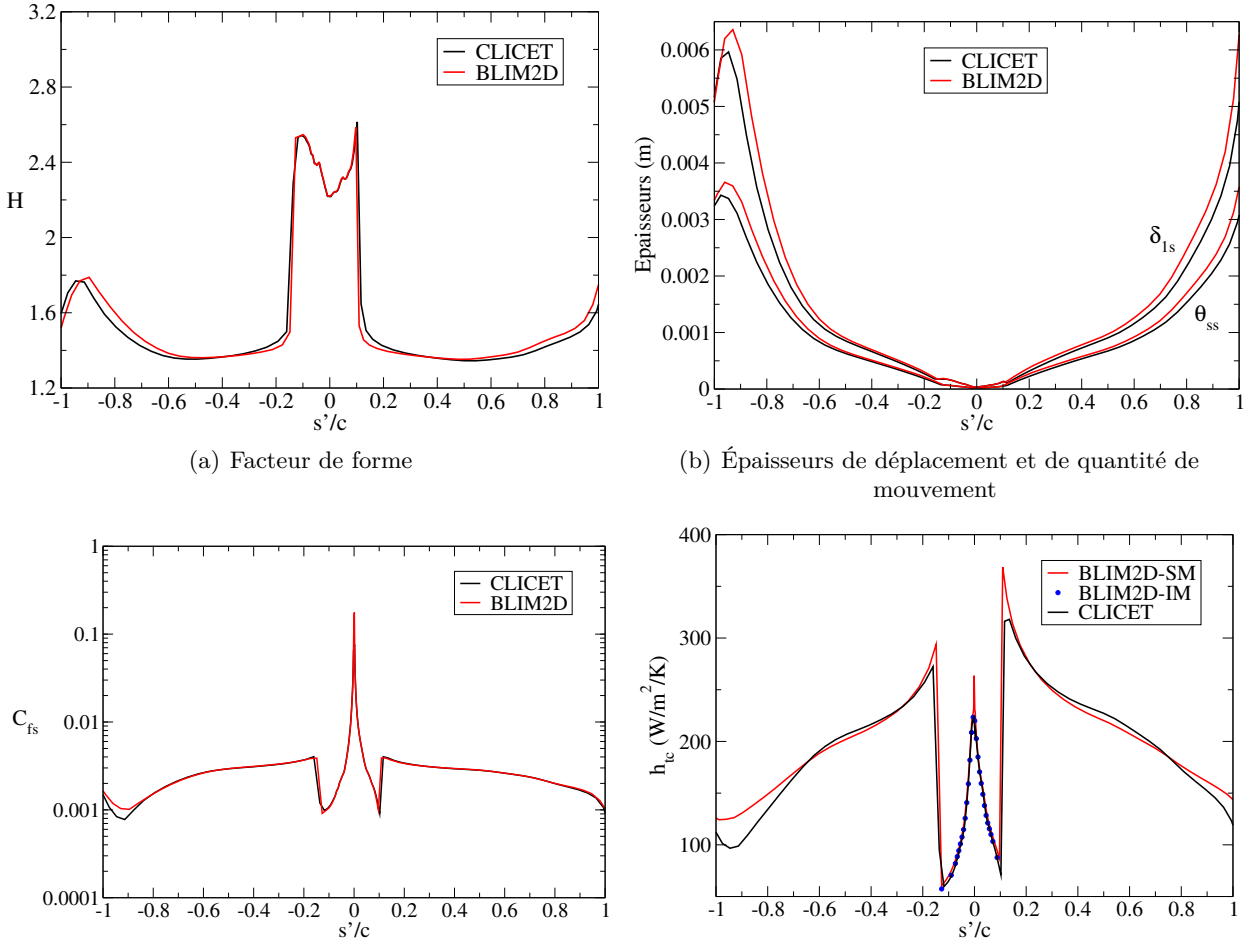


FIGURE 6.23. – Profil d'aile MS317 maillé automatiquement par IGLOO2D

et l'autre à 8° d'incidence. Le tableau 6.9 donne les conditions extérieures exactes utilisées pour ces deux calculs. On remarque sur les figures 6.24 et 6.25 que la précision du facteur de forme, des épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement et du coefficient d'échange thermique par rapport à la solution de référence est un peu moins bonne que sur le profil d'aile NACA0012 dans la zone turbulente (surtout visible pour δ_{1s} et θ_{ss}). Cette erreur est en grande partie due au fait que la transition laminaire-turbulent n'est pas prévue exactement au même endroit par les solveurs CLICET et BLIM2D. Ceci crée ensuite un décalage dans toute la zone turbulente. Celui-ci est amplifié pour le profil MS317 car le maillage utilisé est moins raffiné que pour le profil NACA0012, au moins en dehors de la zone du bord d'attaque. Les résultats restent malgré tout en accord avec ceux fournis pas CLICET. De plus, le coefficient de frottement est toujours calculé avec une grande précision et la méthode thermique intégrale prévoit un coefficient d'échange meilleur que celui prévu par la méthode thermique simplifiée dans la zone laminaire.

Profil	MS317	MS317
corde (m)	0.914	0.914
AOA $(°)$	0	8
M_∞	0.2420	0.2420
$T_\infty(K)$	263	263
$P_\infty(Pa)$	101325	101325

TABLE 6.9. – Données d'entrée



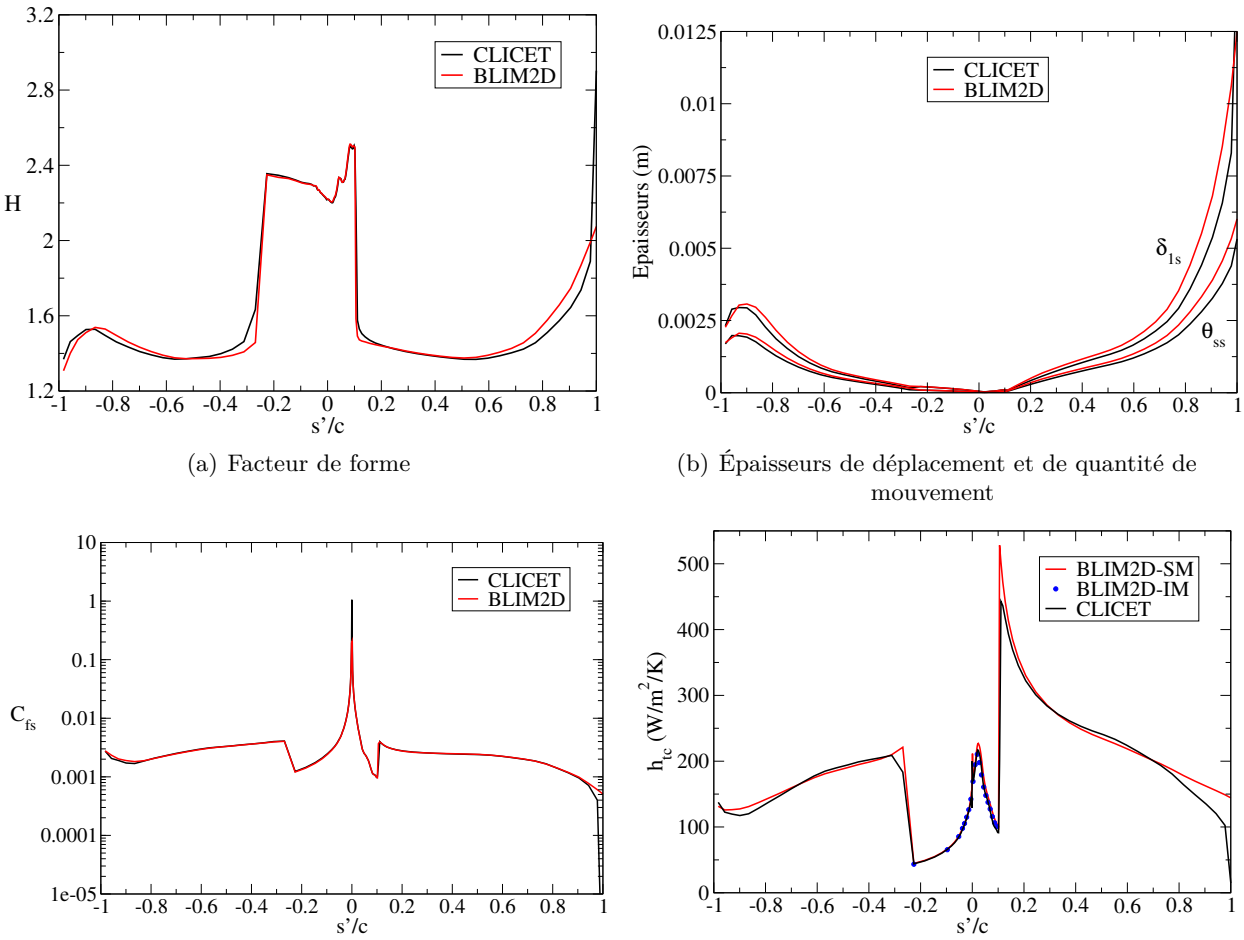
(a) Facteur de forme

(b) Épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement

(c) Coefficient de frottement

(d) Coefficient d'échange thermique

FIGURE 6.24. – Solution BLIM2D pour les couches limites dynamique et thermique sur un profil d'aile MS317 sans incidence et pour un nombre de Mach de 0.2420



(a) Facteur de forme

(b) Épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement

(c) Coefficient de frottement

(d) Coefficient d'échange thermique

FIGURE 6.25. – Solution BLIM2D pour les couches limites dynamique et thermique sur un profil d'aile MS317 à 8° d'incidence et pour un nombre de Mach de 0.2420

6.5.2. Profil d'aile GLC305

Les solveurs BLIM2D et CLICET sont aussi comparés sur un profil d'aile GLC305. La forme de ce profil et le maillage généré automatiquement sur celui-ci sont présentés sur la figure 6.26. Deux

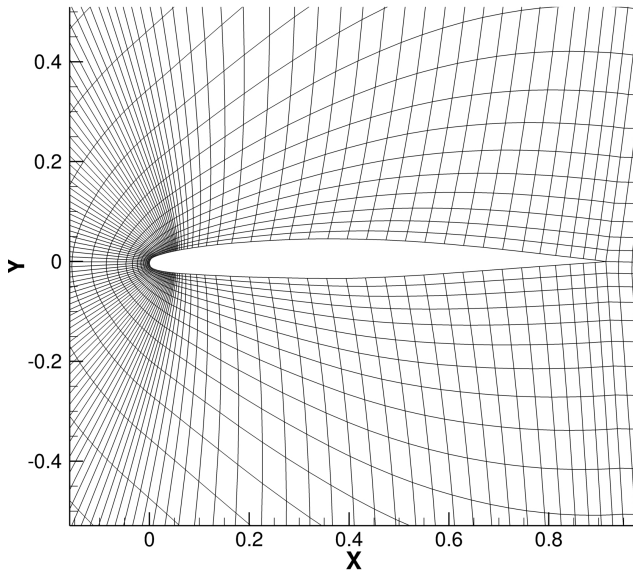


FIGURE 6.26. – Profil d'aile GLC305 maillé automatiquement par IGLOO2D

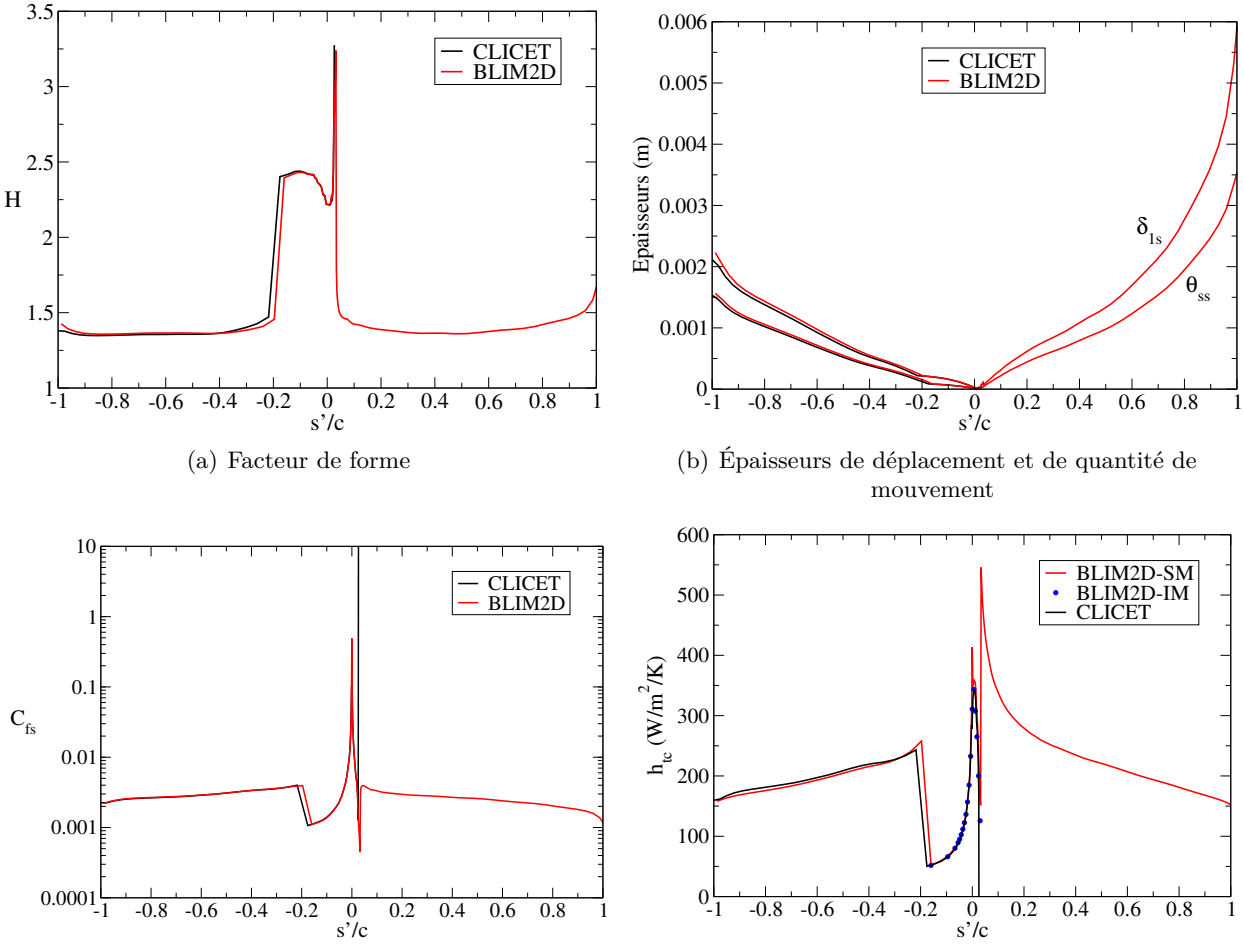
calculs sont réalisés pour les conditions extérieures détaillées dans le tableau 6.10. Dans le premier cas, on considère un profil à 4.5° d'incidence pour un nombre de Mach de 0.2730, tandis que dans le second cas, on considère un profil à 1.5° d'incidence pour un nombre de Mach de 0.3940. Les

Profil	GLC305	GLC305
corde (m)	0.9144	0.9144
AOA (°)	4.5	1.5
M_∞	0.2730	0.3940
$T_\infty(K)$	268.3	263.6
$P_\infty(Pa)$	101325	101325

TABLE 6.10. – Données d'entrée

figures 6.27 et 6.28 montrent les évolutions des grandeurs dynamique et thermique obtenues avec BLIM2D et CLICET. Les conclusions sont globalement les mêmes que celles pour le profil d'aile MS317. En revanche, pour le cas à 4.5° d'incidence, aucune comparaison ne peut être faite sur la partie extrados du profil ($s'/c > 0$). En effet, CLICET prévoit un décollement de couche limite juste après le point d'arrêt et le calcul est interrompu parce que le solveur ne permet pas le passage du décollement. La solution fournie par BLIM2D, quant à elle, ne semble pas prévoir de décollement de couche limite à cet endroit ($H < H_{dec} = 4.02923$), même si l'écoulement semble être fortement ralenti. Ceci est dû au fait que le gradient de pression adverse, qui est trop important dans cette zone, est limité par le solveur BLIM2D. La solution est donc incorrecte dans une petite zone proche de la transition, où on devrait a priori observer un bulbe de décollement. On peut en revanche

apprécier la robustesse du solveur BLIM2D, qui permet d'obtenir une solution cohérente sur la totalité du profil, même si elle est incorrecte sur certaines zones.



(a) Facteur de forme

(b) Épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement

(c) Coefficient de frottement

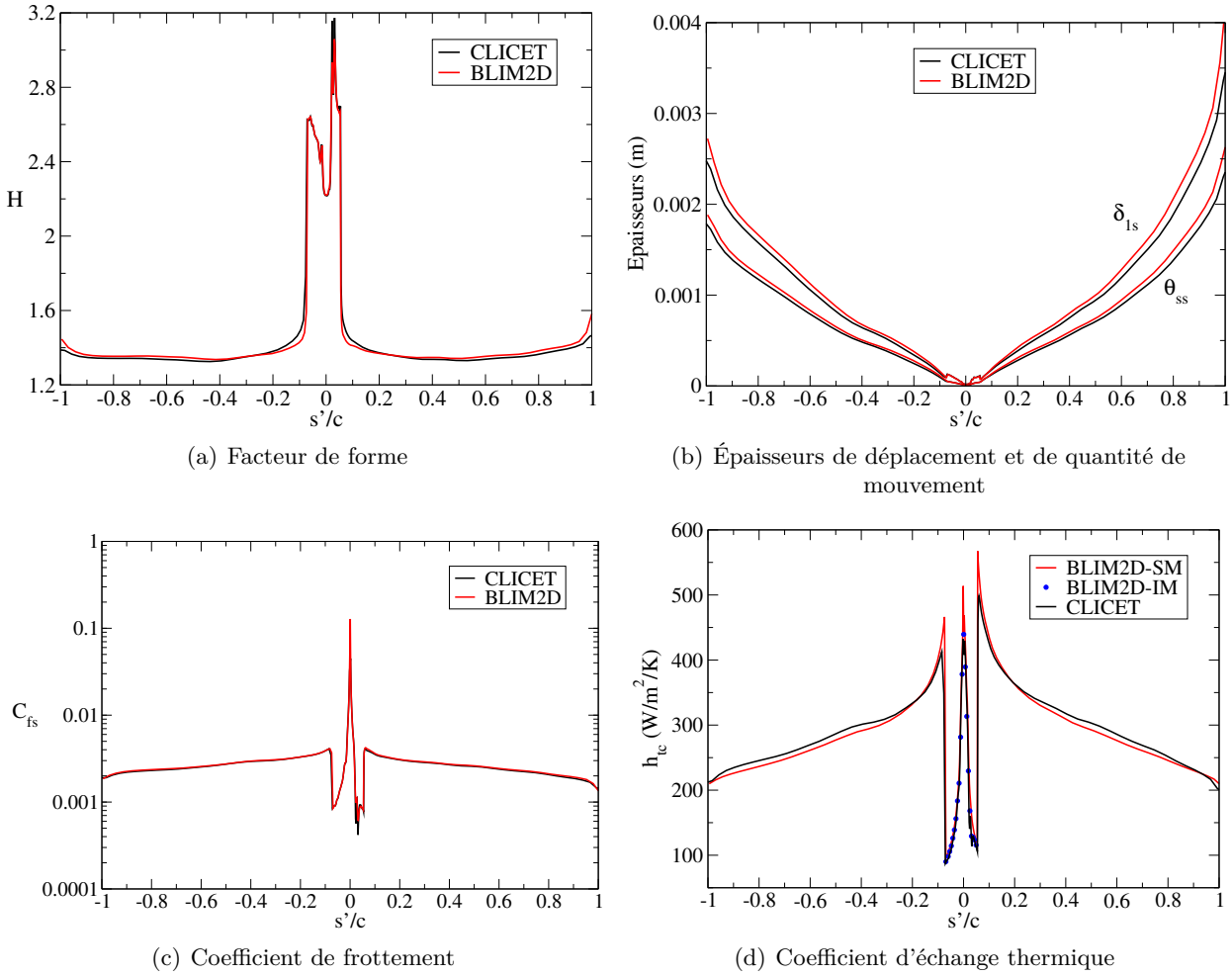
(d) Coefficient d'échange thermique

FIGURE 6.27. – Solution BLIM2D pour les couches limites dynamique et thermique sur un profil d'aile GLC305 à 4.5° d'incidence et pour un nombre de Mach de 0.2730

6.6. Validation de la méthode 3D

La validation de la méthode 3D n'est pas présentée en détail dans cette thèse puisqu'elle est très similaire à celle effectuée en 2D et que je ne l'ai pas réalisée moi-même. Les grandes étapes de la procédure de validation sont données dans cette section mais les résultats quantitatifs ne sont pas présentés. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à l'article de conférence [9] qui traite de ce sujet et qui est donné dans l'annexe H.

On rappelle que le modèle thermique intégral n'a pas été implémenté dans BLIM3D et le modèle thermique simplifié est purement bidimensionnel. Seul le modèle dynamique doit donc être validé. Cette validation s'effectue en deux étapes. D'abord il s'agit de vérifier que, pour des écoulements bidimensionnels, BLIM3D fournit des résultats identiques (ou presque) à ceux obtenus par BLIM2D lorsque les calculs sont effectués dans des conditions aussi proches que possible. En effet, on a vu dans la section 5.4 qu'il existe quelques différences dans la manière dont BLIM2D et BLIM3D ont



(a) Facteur de forme

(b) Épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement

(c) Coefficient de frottement

(d) Coefficient d'échange thermique

FIGURE 6.28. – Solution BLIM2D pour les couches limites dynamique et thermique sur un profil d'aile GLC305 à 1.5° d'incidence et pour un nombre de Mach de 0.3940

été implémentés. De plus, la capacité de BLIM3D à résoudre un écoulement de couche limite sur maillage non structuré doit aussi être démontrée. Dans un deuxième temps, il s'agit de valider le modèle 3D, c'est-à-dire les relations de fermeture transversales, pour des écoulements de couche limite tridimensionnelle.

6.6.1. Validation de la méthode sur une plaque plane avec et sans gradient de pression

Dans un premier temps, la méthode 3D est comparée aux solutions théoriques 2D de Falkner-Skan (voir sous-section 6.3.1) pour une couche limite laminaire. Trois cas sont étudiés. Le premier correspond à un écoulement de plaque plane ($m = 0$) et les deux autres correspondent à un écoulement avec gradient de pression favorable ($m = 1/3$ et $m = 1$).

Une étude de convergence en maillage réalisée pour $m = 1/3$ montre que le facteur de forme converge vers une valeur constante avec le raffinement du maillage. D'autre part, sur un maillage structuré avec une seule cellule dans la direction transverse, les résultats sont presque identiques à ceux obtenus avec la méthode 2D. En revanche, avec un maillage non structuré, il existe de petits écarts avec les résultats sur maillage structuré pour les faibles nombres de Reynolds dans le cas d'un écoulement de point d'arrêt ($m = 1$), mais ceux-ci restent acceptables.

Enfin, l'influence des effets de rotation est évaluée en résolvant un écoulement de couche limite sur une plaque plane arbitrairement placée dans un espace en 3 dimensions pour lequel, le vecteur vitesse n'est pas aligné avec une direction privilégiée du maillage de la plaque. Il est dans le plan tangent mais forme un angle de 45° avec celle-ci. L'objectif de ce test est de vérifier que les rotations entre le repère local et le repère global sont bien réalisées. Les résultats sont identiques à ceux obtenus dans le cas d'une plaque plane non inclinée ce qui confirme que les changements de repère sont bien exécutés.

6.6.2. Validation de la méthode sur un profil d'aile NACA0012

BLIM3D est aussi validé sur un profil d'aile NACA0012. Pour cela, il est comparé à son homologue 2D, BLIM2D, et au code de référence CLICET qui résout les équations de Prandtl différentielles. Le maillage 3D est généré à partir du maillage 2D grâce à une extrusion dans la direction transverse sur 3 cellules. Là encore, les solutions sont quasiment identiques à celles obtenues avec BLIM2D.

6.6.3. Validation de la méthode pour un écoulement autosimilaire de couche limite tridimensionnelle

Enfin, le caractère 3D de la méthode est validé pour un cas d'écoulement autosimilaire de couche limite tridimensionnelle dont la solution quasi-exacte est connue. Celle-ci est en fait une extension des solutions de Falkner-Skan en trois dimensions et elle a été proposée par Cooke [22]. Les écoulements autosimilaires étudiés par Cooke sont tels que la composante longitudinale de la vitesse extérieure suit la distribution de vitesse des écoulements de Falkner-Skan et la composante transversale de la vitesse extérieure est constante (voir sous-section 1.6.3) :

$$\boldsymbol{q_e} = (CX^m, 0, cte)$$

où $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ est le repère global. Dans ce cas, on montre facilement d'après l'étude de Cooke que les facteurs de forme définis par

$$H_{XX} = \frac{u_{e_X}\delta_{1X}}{|\boldsymbol{q_e}|\theta_{XX}} \quad ; \quad H_{YY} = \frac{u_{e_Y}\delta_{1Y}}{|\boldsymbol{q_e}|\theta_{YY}}$$

sont constants le long de la surface.

Les résultats pour le cas $m = 1$ montrent que la couche limite calculée par BLIM3D est bien tridimensionnelle puisque la ligne de courant extérieure et la ligne de courant pariétale ne sont pas alignées, au moins sur la partie amont de la plaque. De plus, les valeurs obtenues pour les deux facteurs de forme sont très proches de celles données par la solution quasi-exacte. Cependant, la valeur de H_{YY} est légèrement moins précise que celle de H_{XX}. L'amélioration du profil de vitesse transverse afin d'obtenir un valeur de H_{YY} plus précise fait partie des perspectives de cette thèse.

Conclusion

Dans ce chapitre, la validité des méthodes 2D et 3D a été vérifiée sur des configurations de référence. Tout le processus de validation a été effectué sur paroi lisse, sachant que le modèle sur paroi rugueuse est identique à celui des méthodes usuelles et qu'il est supposé être valide, à condition que le modèle sur paroi lisse le soit aussi. Concernant la méthode 2D, des simulations ont été effectuées sur des cas académiques, tels que des plaques planes sans ou avec gradient de pression, et les résultats obtenus ont été comparés à des solutions de référence. Ces simulations ont montré que les relations de fermeture choisies permettent d'obtenir des solutions précises, en terme de coefficient de frottement et de coefficient d'échange thermique, notamment pour des gradients de pression nuls ou favorables. En revanche, le modèle intégral représente un peu moins bien les écoulements de couche limite ralentis, en particulier lorsqu'ils sont turbulents. D'autre part, on a montré que dans le cas d'une couche limite turbulente, le modèle utilisant la loi de frottement proposée par White fournit des valeurs de coefficient de frottement plus précises que le modèle utilisant la loi de Ludwieg et Tillmann. Des simulations plus complexes ont aussi été réalisées sur différents profils d'aile, où le gradient de pression varie beaucoup. Elles ont d'abord confirmé que le solveur BLIM2D fournit des résultats, tels que le coefficient de frottement ou le coefficient d'échange thermique, d'une précision semblable à ceux obtenus par le solveur CLICET, qui résout les équations de Prandtl différentielles. De plus, elles ont montré que la correction de point d'arrêt permet d'améliorer la précision de la solution dynamique au voisinage du point d'arrêt de manière significative. Enfin, les simulations sur les profils d'ailes ont confirmé le fait que la méthode est particulièrement robuste dans les zones de forts gradients de pression adverses et/ou de couches limites décollées. Elles ont aussi permis de montrer la compatibilité de BLIM2D avec le niveau de raffinement des maillages utilisés habituellement dans IGLOO2D. Enfin, même si la méthode thermique intégrale n'a été développée que pour une couche limite laminaire avec une masse volumique constante, les premiers résultats sont très encourageants puisqu'elle fournit des valeurs de coefficient d'échange thermique plus précises que celles obtenues par la méthode thermique simplifiée usuelle. D'autre part, la procédure mise en place pour valider la méthode 3D est très similaire à celle utilisée en 2D. Les résultats calculés par BLIM3D sont pratiquement identiques à ceux obtenus par BLIM2D. De plus, un cas de validation pour un écoulement autosimilaire de couche limite tridimensionnelle a montré que les relations de fermeture transverses modélisent assez bien le comportement de la couche limite pour la partie transverse de l'écoulement, au moins pour le cas étudié. À ce stade, les méthodes 2D et 3D ont été validées sur différentes configurations de référence. Il s'agit maintenant d'évaluer les performances de ces méthodes, une fois intégrées dans les chaines de calcul d'accrétion de givre IGLOO2D et IGLOO3D.

Troisième partie .

Application à la simulation d'accrétion de givre

7. Évaluation des performances des méthodes 2D et 3D sur des profils givrés

Sommaire

7.1. Présentation des outils utilisés pour les calculs d'accrétion de givre . . 153
7.1.1. Présentation de la chaîne de calcul 2D IGLOO2D 153
7.1.2. Présentation de la chaîne de calcul 3D IGLOO3D 156
7.2. Validation de la chaîne de calcul 2D sur un cas d'accrétion de givre blanc 156
7.3. Vérification de la robustesse et de la validité de la chaîne de calcul 2D sur un cas d'accrétion de givre en corne 160
7.4. Évaluation de l'apport de la méthode intégrale 2D par rapport à la méthode simplifiée 163
7.5. Validation de la chaîne de calcul 3D 170

Dans ce chapitre, nous évaluons les capacités des méthodes intégrales 2D et 3D, intégrées respectivement dans les chaînes de calcul IGLOO2D et IGLOO3D, en réalisant des calculs d'accrétion de givre sur des profils d'aile. Les deux principaux critères d'évaluation sont la robustesse des méthodes et la capacité de la chaine de calcul à fournir une forme du dépôt de givre la plus proche possible de la forme expérimentale. Il s'agit en outre d'estimer l'apport de ces méthodes par rapport à la méthode intégrale simplifiée 2D actuelle, implémentée dans le solveur SIM2D d'IGLOO2D. Après une présentation des chaînes de calcul 2D et 3D utilisées pour les calculs d'accrétion de givre, l'intégration du solveur BLIM2D dans IGLOO2D est validée sur un cas très simple d'accrétion de givre blanc. Ensuite, la robustesse de la méthode 2D est démontrée sur une forme de givre en cornes qui induit un décollement massif de l'écoulement. Enfin, la capacité des chaines 2D et 3D à reproduire correctement les formes expérimentales est évaluée pour des formes de dépôt de givre variées et les résultats sont comparés à ceux obtenus par la chaîne de calcul usuelle. Cependant, faute d'optimisation des solveurs à l'heure actuelle, le gain apporté par la méthode intégrale en termes de coût de calcul n'a pas été évalué.

7.1. Présentation des outils utilisés pour les calculs d'accrétion de givre

7.1.1. Présentation de la chaîne de calcul 2D IGLOO2D

La chaîne de calcul 2D IGLOO2D utilisée pour les calculs d'accrétion dans ce chapitre est schématisée sur la figure 7.1. La génération du maillage, qui n'est pas représentée sur le schéma, est effectuée par le mailleur MESH2D qui fournit un maillage de 128 éléments particulièrement raffiné dans la zone du bord d'attaque (voir sous-section 6.4.1).

Dans un premier temps, l'écoulement de fluide parfait est résolu à l'aide d'un calcul Euler effectué par le solveur EULER2D. Il est utilisé avec un schéma implicite du premier ordre pour la discrétisation en temps et un schéma de Roe du second ordre pour la discrétisation en espace. Il

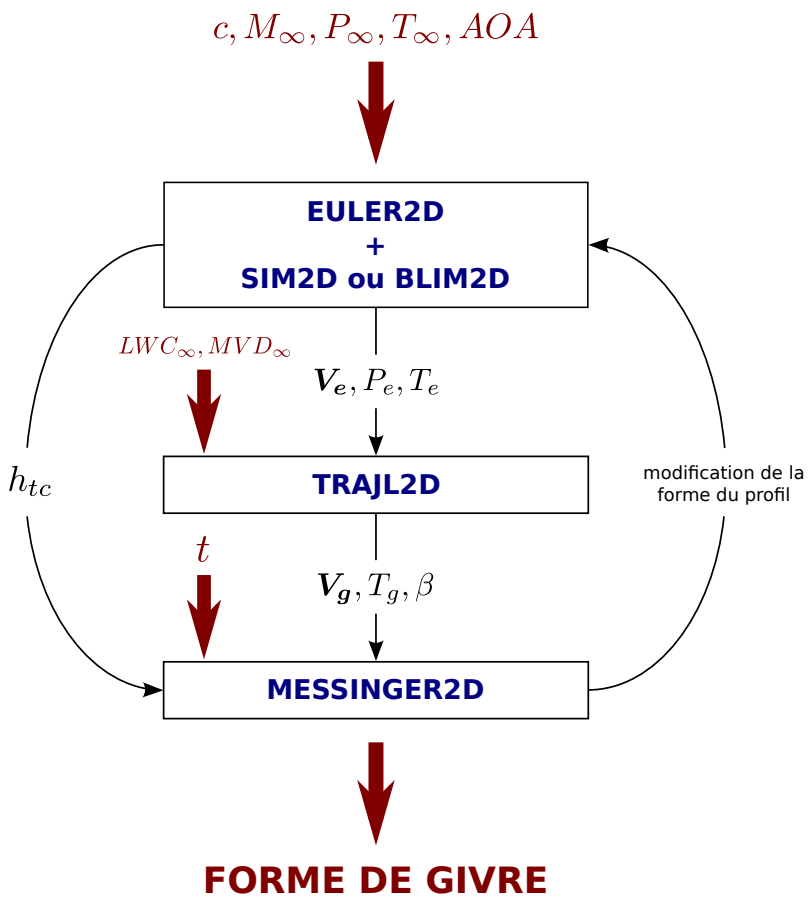


FIGURE 7.1. – Structure de la chaîne de calcul IGLOO2D

fournit les champs de vitesse, de pression et de température au solveur de couche limite. Usuellement c'est SIM2D qui est utilisé pour résoudre la couche limite. Il est basé sur une méthode intégrale simplifiée [88]. Dans ce chapitre, il peut être remplacé par le solveur BLIM2D. On précise que dans tout le chapitre, nous utiliserons le solveur BLIM2D-SM, basé sur la méthode thermique simplifiée, puisque la méthode thermique intégrale n'a pas été développée pour une couche limite turbulente. Il faut souligner que BLIM2D-IM a malgré tout été testé pour le régime laminaire, mais cette étude n'a pas fourni de résultats réellement exploitables puisque nous verrons par la suite que la zone laminaire est extrêmement réduite sur un profil givré. En ce qui concerne les relations de fermeture, la loi de frottement utilisée par défaut pour la couche limite turbulente est celle proposée par White (eq. (2.32)) puisqu'on a montré dans la sous-section 6.3.2 qu'elle est plus précise que la loi de Ludwieg et Tillmann (eq. (2.31)). D'autre part, le solveur de couche limite, que ce soit SIM2D ou BLIM2D, fournit la valeur du coefficient d'échange thermique au module d'accrétion de givre. On rappelle que les calculs d'accrétion de givre sont réalisés sur paroi rugueuse. Ainsi, dans tout le chapitre, on prendra une hauteur de grain de sable équivalent k_s constante sur tout le profil et définie par (2.45). Enfin, il faut souligner que le solveur de couche limite est couplé de manière faible avec EULER2D puisque le calcul de fluide parfait n'est pas relancé pour tenir compte de l'épaisseur de la couche limite.

Dans un deuxième temps, les champs de vitesse, pression et température de l'écoulement fluide parfait sont utilisés par le solveur TRAJL2D pour calculer la trajectoire des gouttelettes d'eau. Il est basé sur une approche lagrangienne et il fournit la vitesse et la température des gouttes, ainsi que le taux de captation de celles-ci en tout point du profil d'aile.

Enfin, les sorties du solveur de trajectographie ainsi que le coefficient d'échange thermique sont utilisées par le solveur MESSINGER2D pour calculer l'épaisseur de givre qui se forme sur le profil. Il est basé sur le modèle de Messinger, qui consiste en un bilan de masse et d'énergie à taux d'accrétion constant. Ce modèle repose sur une hypothèse de stationnarité dans le sens où toutes les grandeurs aérodynamiques sont supposées être constantes au cours du temps.

Cette hypothèse de stationnarité peut être corrigée en itérant sur le calcul d'aérodynamique. Différentes méthodes existent pour cela. Dans cette thèse, l'approche utilisée pour tenir compte de l'influence de la forme de givre est une méthode dite "prédicteur-correcteur". Elle consiste à réaliser un premier calcul d'accrétion sur le profil d'aile lisse (non givré) qui fournit une première estimation de la forme de givre dite "forme prédicteur". Après remaillage, des calculs d'aérodynamique, de couche limite et de trajectographie sont ensuite réalisés sur cette forme prédicteur. Enfin, un second calcul d'accrétion est effectué en divisant le temps de simulation en de petits intervalles de temps Δt et en interpolant linéairement les grandeurs physiques (vitesse, température, pression, coefficient d'échange, taux de captation des gouttes) entre le profil lisse et le profil givré prédicteur. Les formes du dépôt de givre obtenues après la phase de correction sont alors généralement plus proches des formes expérimentales que celles obtenues après la phase de prédiction.

Les modèles utilisées dans la chaînes de calcul IGLOO2D sont décrits plus en détail dans le papier de Trontin [88].

Les données d'entrée nécessaires pour effectuer un calcul d'accrétion de givre avec IGLOO2D sont les suivantes :

- la corde du profil d'aile (c)
- le nombre de Mach à l'infini amont (M_∞)
- la pression statique à l'infini amont (P_∞)
- la température statique à l'infini amont (T_∞)
- l'angle d'incidence du profil d'aile (AOA)

- la concentration massique en eau à l'infini amont (LWC_∞)
- le diamètre volumique médian de la distribution de gouttes à l'infini amont (MVD_∞). Par commodité, on parlera simplement de "diamètre des gouttes" dans la suite du chapitre.
- le temps d'exposition du profil d'aile aux conditions givrantes (t)

7.1.2. Présentation de la chaîne de calcul 3D IGLOO3D

La structure de la chaîne 3D IGLOO3D, utilisée pour les calculs d'accrétion dans la section 7.5, est présentée sur la figure 7.2. Suite à l'intégration du solveur BLIM3D, elle est désormais assez similaire à la chaîne de calcul 2D. Elle reste cependant modulaire et, pour les calculs de ce chapitre, des codes développés à l'ONERA tels que elsA ou CEDRE ont été utilisés.

Un calcul Euler est d'abord effectué par le solveur elsA. Celui-ci est couplé, de manière faible, à BLIM3D pour le calcul de l'écoulement de couche limite. Comme dans le cas 2D, la loi de frottement utilisée par défaut pour la couche limite turbulente est celle proposée par White. De plus, les calculs d'accrétion de givre sont réalisés sur paroi rugueuse. Ainsi, dans la section 7.5, on prendra une hauteur de grain de sable équivalent k_s constante sur tout le profil et définie par (2.45). Ensuite, la trajectoire des gouttelettes d'eau est calculée avec SPIREE, qui est un code de trajectographie eulérien de CEDRE [72]. Enfin, le solveur MESSINGER3D permet d'obtenir l'épaisseur de givre en tout point du profil. Il est, comme en 2D, basé sur le modèle de Messinger et utilise le coefficient d'échange thermique fourni par BLIM3D. En revanche, le coefficient de frottement est aussi utilisé par MESSINGER3D pour déterminer la direction du ruissellement de l'eau. Pour une description plus détaillée de la chaîne de calcul, le lecteur peut se référer à la documentation théorique d'IGLOO3D [70].

La principale différence avec la chaîne de calcul 2D est qu'IGLOO3D ne permet pas, à l'heure actuelle, d'itérer sur le calcul d'aérodynamique pour tenir compte de l'influence de la forme de givre. Ainsi, il n'est possible d'effectuer que la phase de prédiction avec la chaîne de calcul 3D. L'implémentation de la phase de correction est bien sûr envisagée.

Les données d'entrée nécessaires pour effectuer un calcul d'accrétion de givre avec IGLOO3D sont les mêmes que celles utilisées par la chaîne 2D (voir sous-section 7.1.1).

7.2. Validation de la chaîne de calcul 2D sur un cas d'accrétion de givre blanc

Tout d'abord, la chaîne de calcul 2D, présentée dans la sous-section 7.1.1 et associée au solveur BLIM2D, est validée sur un cas d'accrétion de givre blanc. En effet, ce type de givre est beaucoup plus simple à traiter que du givre transparent. Dans le cas du givre blanc, les gouttelettes d'eau surfondues gèlent entièrement et instantanément au niveau de leur point d'impact. La forme du profil givré ressemble donc grossièrement à un profil d'aile dont le bord d'attaque est épaissi. En général, le calcul de la couche limite sur ces formes de dépôt de givre ne représente pas un problème majeur puisque la géométrie est assez similaire à celle d'un profil d'aile lisse et que l'écoulement d'air (et donc le gradient de pression) n'est pas beaucoup plus perturbé que dans le cas sans accrétion. De plus, comme la chaleur est suffisamment bien évacuée dans l'atmosphère lors de la solidification pour que toute l'eau puisse geler [1], la valeur du coefficient d'échange n'a presque pas d'influence

1. On rappelle que le phénomène de givrage est un processus exothermique. Ainsi la chaleur libérée lors de la solidification est susceptible, si elle n'est pas suffisamment bien évacuée, d'empêcher l'eau encore liquide de se solidifier.

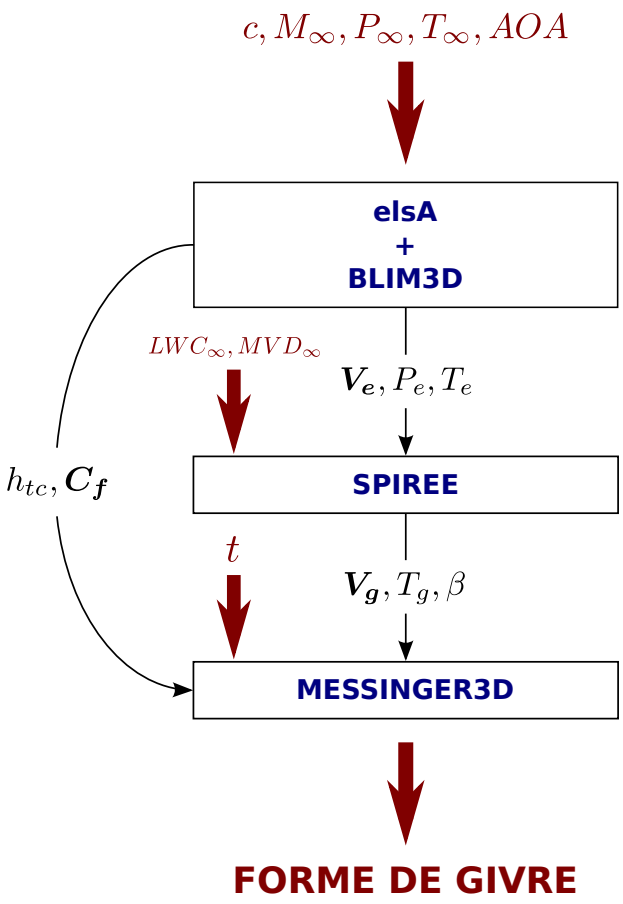


FIGURE 7.2. – Structure de la chaîne de calcul IGLOO3D

sur la forme du dépôt de givre. Ainsi, une erreur même importante sur la valeur du coefficient d'échange thermique ne modifie pas de manière significative la forme d'un dépôt de givre blanc.

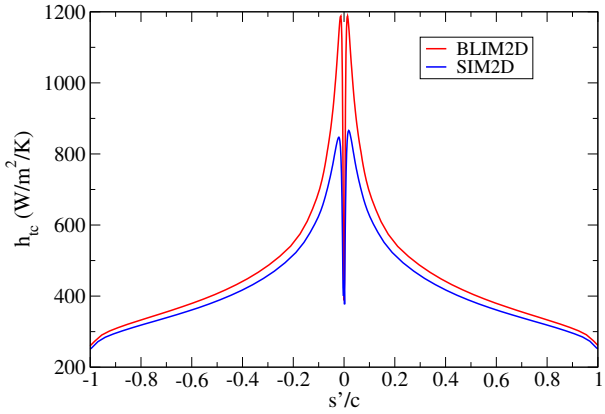
Les conditions du cas étudié dans cette section sont détaillées dans le tableau 7.1. Il est tiré du rapport d'Anderson [2] et la forme expérimentale a été obtenue à l'IRT (Icing Research Tunnel), soufflerie givrante de la NASA. On rappelle que le givre blanc apparait plutôt en conditions froides et pour une concentration de gouttes pas trop élevée. Dans ce cas, la température vaut $-20.71°C$ et la concentration massique en eau vaut 0.51 g/m^3.

Profil d'aile	c (m)	AOA $(°)$	M_∞	T_∞ (K)	P_∞ (Pa)	LWC_∞ (g/m^3)	MVD_∞ (μm)	t (s)
NACA0012	0.533	0	0.2807	252.44	93000	0.51	40	600

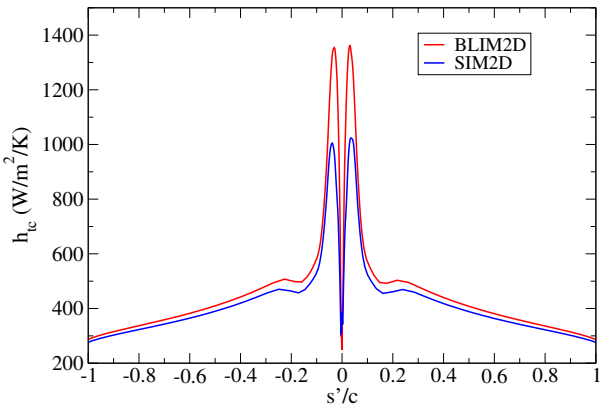
Table 7.1. – Données d'entrée

La figure 7.3 présente les coefficients d'échange thermique et les formes de givre obtenues lors des phases de prédiction et de correction. On peut tout d'abord remarquer sur la figure 7.3(d) que la phase de correction permet de modifier de manière significative la forme du dépôt de givre obtenue lors de la phase de prédiction. Ainsi, la forme finale du dépôt de givre est plus fidèle à la forme expérimentale. D'autre part, on constate que les formes de givre calculées avec IGLOO2D associé à SIM2D (IGLOO2D-SIM2D) et à BLIM2D (IGLOO2D-BLIM2D) sont quasiment identiques, que ce soit les formes obtenues lors de la phase de prédiction ou de correction (figures 7.3(c) et 7.3(d)). Le très faible écart observé au voisinage du point d'arrêt est uniquement dû au fait que le givre est transparent avec une très faible fraction liquide dans cette zone. Cependant les figures 7.3(a) et 7.3(b) montrent que, pour les deux phases du calcul d'accrétion, les coefficients d'échange calculés avec SIM2D et BLIM2D sont assez différents, notamment dans la zone proche du bord d'attaque où on peut atteindre 40% d'écart relatif. Il est important de souligner que, contrairement au chapitre 6, le lieu de la transition laminaire-turbulent est déterminé par le critère de transition sur paroi rugueuse (2.44) et celle-ci apparaît très près du point d'arrêt à cause de la présence des rugosités. Plus précisément, la couche limite est laminaire seulement dans les deux ou trois cellules qui entourent le point d'arrêt et la transition laminaire-turbulent a lieu en s'/c de l'ordre de 0.002. On distingue donc à peine la zone laminaire sur les figures 7.3(a) et 7.3(b) et les écarts observés sur la valeur du coefficient d'échange concernent la zone turbulente. Dans cette zone, le nombre de Stanton rugueux et le coefficient de frottement rugueux sont calculés par SIM2D et BLIM2D à partir des mêmes expressions (voir sous-section 3.1.2 eq. (3.13) et section 2.4 eq. (2.46)). En revanche, ces relations font intervenir l'épaisseur de quantité de mouvement sur paroi lisse qui est évaluée de manière différente par les deux solveurs. C'est ce qui justifie les écarts observés.

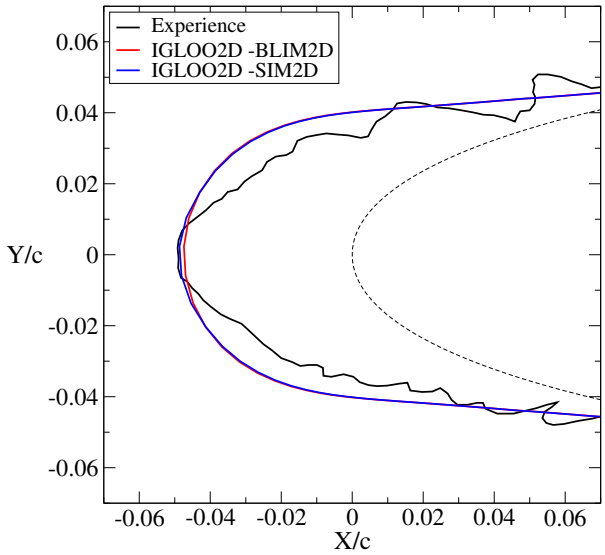
L'étude de ce cas a permis de montrer que le solveur BLIM2D s'intègre bien dans la chaîne de calcul IGLOO2D et que celle-ci fournit une forme de dépôt de givre très proche de la forme expérimentale. En particulier, le calcul effectué avec IGLOO2D-BLIM2D permet bien de retrouver une forme de givre blanc, comme attendu. L'étude de ce cas a aussi prouvé que, dans des conditions de givre blanc, la valeur du coefficient d'échange thermique n'a quasiment aucune influence sur la forme du dépôt de givre. Malgré le fait que SIM2D et BLIM2D prévoient des valeurs assez différentes pour le coefficient d'échange thermique, les formes de dépôt de givre obtenues finalement sont presque identiques. Ainsi, les cas d'accrétion de givre blanc ne permettent pas d'évaluer l'apport de la méthode intégrale de couche limite développée dans cette thèse par rapport à la méthode simplifiée usuelle. C'est pourquoi, dans toute la suite du chapitre, nous étudierons des cas d'accrétion de givre transparent pour lesquels le coefficient d'échange thermique a une grande influence sur la



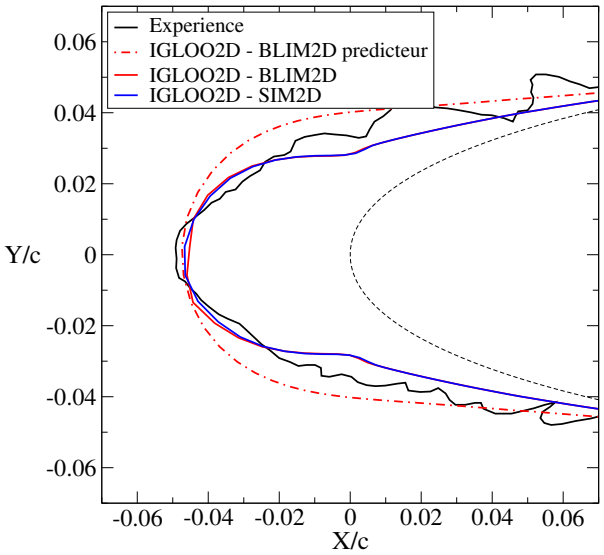
(a) Coefficients d'échange thermique calculés par BLIM2D et SIM2D sur le profil d'aile non givré



(b) Coefficients d'échange thermique calculés par BLIM2D et SIM2D sur la forme prédicteur



(c) Forme de dépôt de givre obtenue après la phase de prédiction



(d) Forme de dépôt de givre obtenue après la phase de correction

FIGURE 7.3. – Coefficients d'échange thermique et formes de givre obtenus lors des phase de prédiction et de correction pour un cas d'accrétion de givre blanc

forme du dépôt de givre.

7.3. Vérification de la robustesse et de la validité de la chaîne de calcul 2D sur un cas d'accrétion de givre en corne

L'objectif de cette deuxième section est de vérifier la robustesse et la validité du solveur BLIM2D dans des cas où l'écoulement extérieur est très fortement perturbé par la forme de givre. Pour cela, un calcul est réalisé dans les conditions décrites dans le tableau 7.2. Ces conditions, tirées du rapport d'Anderson [2], correspondent à un cas d'accrétion de givre transparent. Il est donc logique de constater que la température à l'infni amont est plus élevée que dans le cas précédent ($T_\infty = -12.37°C$), tout comme la concentration massique en eau ($LWC_\infty = 0.58\ g/m^3$). On remarque de plus que le nombre de Mach et le temps d'exposition aux conditions givrantes sont relativement élevés, ce qui favorise un dépôt de givre important sur le profil d'aile.

Profil d'aile	c (m)	AOA $(°)$	M_∞	T_∞ (K)	P_∞ (Pa)	LWC_∞ (g/m^3)	MVD_∞ (μm)	t (s)
GLC305	0.914	0	0.3660	260.78	77000	0.58	44	876

Table 7.2. – Données d'entrée

La figure 7.4 présente le champ de vitesse u_X (parallèle à la corde du profil) ainsi que les lignes de courant de l'écoulement de fluide parfait autour de la forme de givre obtenue par IGLOO2D-BLIM2D lors de la phase de prédiction. On peut remarquer que, dès la phase de prédiction, IGLOO2D prévoit l'apparition d'une forme de givre en corne, typique d'un cas de givre transparent. En effet, au vu des conditions extérieures, les gouttelettes d'eau qui impactent le profil au niveau du bord d'attaque ne gèlent pas entièrement et la masse d'eau restée encore liquide peut ruisseler et aller geler plus loin. C'est ce qui forme les cornes qu'on observe de part et d'autre du bord d'attaque. L'apparition de ces cornes, initialement de petite taille, engendre un gradient de pression favorable en amont de celles-ci qui accélère la vitesse de l'écoulement à cet endroit. Ceci se traduit par une augmentation du coefficient d'échange et l'eau liquide gèle donc plus facilement à cet endroit, ce qui tend à augmenter la taille de la corne. Ces cornes, très pénalisantes d'un point de vue aérodynamique, perturbent aussi grandement l'écoulement aval lorsqu'elles sont suffisamment développées. En effet, elles sont la plupart du temps à l'origine de décollements massifs de l'écoulement qui apparaissent juste en aval de celles-ci.

Pour ce type de forme de givre, le code Euler EULER2D prévoit en général un décollement massif de l'écoulement de fluide parfait, comme on peut le voir sur la figure 7.4. Ce phénomène est dû à la viscosité numérique. Cependant, le solveur BLIM2D doit être robuste y compris pour ce type d'écoulements extérieurs. Ceci est loin d'être évident puisque le décollement implique la présence d'écoulements de retour dans la solution externe, ce qui peut poser de gros problèmes numériques pour un solveur de couche limite. Ces problèmes sont en revanche évités pour SIM2D puisque ce solveur est basé sur des formules analytiques qui dépendent de la norme de la vitesse extérieure. Le solveur ne perçoit donc pas le décollement massif, ce qui le rend robuste même si la solution n'est pas correcte dans cette zone.

La figure 7.5 présente le facteur de forme, le coefficient de frottement et le coefficient d'échange thermique calculés par BLIM2D, lors de la phase de correction, sur la forme de givre "prédicteur". On constate que le solveur BLIM2D est robuste puisqu'il est capable de fournir une solution sur tout le profil d'aile. D'autre part, la figure 7.4 montre que la vitesse extérieure s'annule à deux

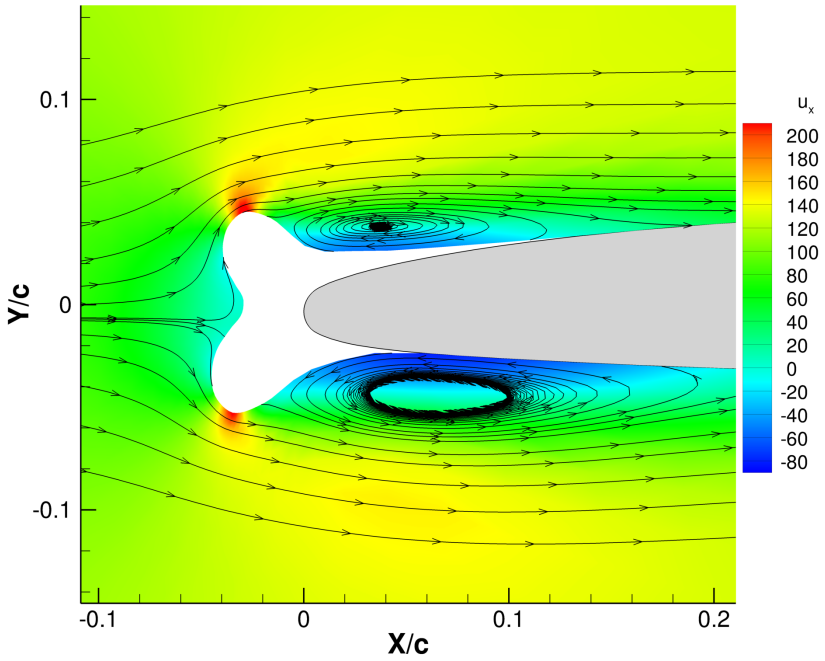


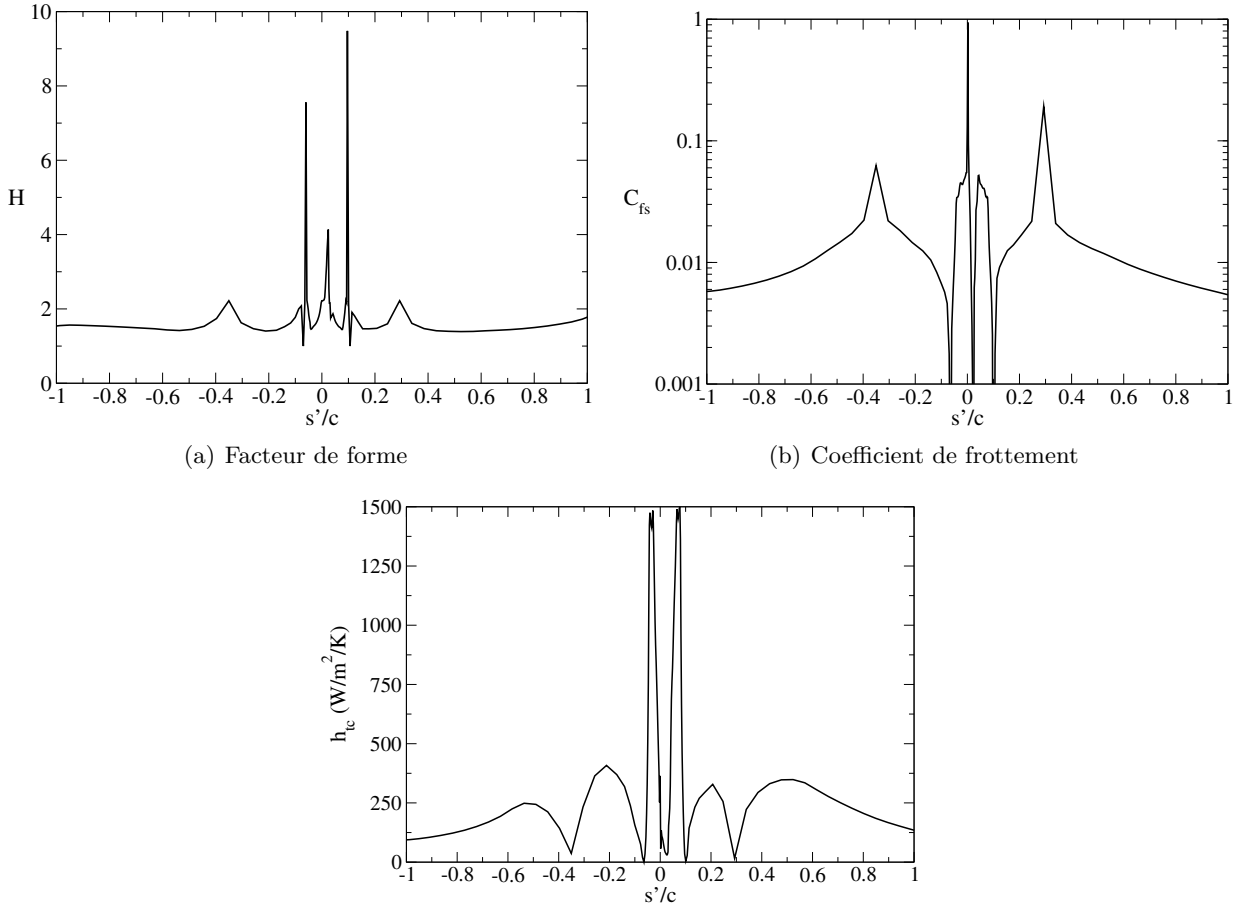
FIGURE 7.4. – Écoulement aérodynamique autour de la forme de givre obtenue par IGLOO2D associé à BLIM2D lors de la phase de prédiction

endroits sur l'intrados et deux endroits sur l'extrados, en plus du point d'arrêt qui est localisé en $s/c = 0$.

Les points $s'/c \simeq 0.1$ et $s'/c = -0.064$ correspondent au point de début du décollement massif où le gradient de pression adverse est très important. Ceci est cohérent avec le fait que le facteur de forme prend des valeurs très importantes en ces points et que le coefficient de frottement est très faible (voir figures 7.5(a) et 7.5(b)). En revanche, celui-ci ne devient pas négatif car le modèle turbulent rugueux n'autorise pas les décollements. Ces deux points sont les plus critiques à traiter et constituent le principal obstacle pour la stabilité du calcul. En effet, les gradients de pression adverse, beaucoup trop importants en ces points, ont été limités par BLIM2D grâce au traitement numérique développé dans la sous-section 5.2.5. La constante J a été fixée à 0.2 pour ce cas. Si la limitation du gradient de pression n'est pas activée, le calcul diverge.

Les points $s'/c \simeq 0.29$ et $s'/c \simeq -0.35$ correspondent quant à eux à la fin de la zone de décollement. Les vitesses extérieures de part et d'autre de ces points divergent donc l'écoulement se comporte comme un écoulement autour d'un point d'arrêt. On retrouve effectivement ce comportement sur les figures 7.5(a) et 7.5(b) : la valeur du facteur de forme vaut environ 2.21 et le coefficient de frottement prend des valeurs importantes en ces points. Cependant, la solution dans les zones de décollement massif n'a pas de signification physique puisque la couche limite n'est pas bien définie dans ces zones. Enfin, on peut observer sur la figure 7.5(c) que le coefficient d'échange thermique prend des valeurs très importantes en amont des cornes, et qu'il chute fortement en aval de celles-ci.

La figure 7.6 compare les formes de dépôt de givre calculées par IGLOO2D lors de la phase de correction à la forme expérimentale tirée du rapport d'Anderson [2]. Les résultats numériques ne sont pas très fidèles à la forme expérimentale, qui est particulièrement complexe puisque les



(a) Facteur de forme

(b) Coefficient de frottement

(c) Coefficient d'échange thermique

FIGURE 7.5. – Solution BLIM2D calculée lors de la phase de correction sur la forme du dépôt de givre "prédicteur"

cornes sont fines et les variations de l'épaisseur de givre en fonction de l'abscisse curviligne sont importantes. Les formes obtenues numériquement sont trop larges et l'angle entre les deux cornes est trop important. D'autre part, on note une différence beaucoup plus significative entre les formes obtenues par IGLOO2D-BLIM2D et par IGLOO2D-SIM2D que dans le cas d'accrétion de givre blanc. La chaîne de calcul IGLOO2D-BLIM2D fournit une forme de dépôt de givre plus proche de l'expérience que celle obtenue par la chaîne de calcul usuelle, notamment en ce qui concerne l'angle entre les cornes et la hauteur de celles-ci.

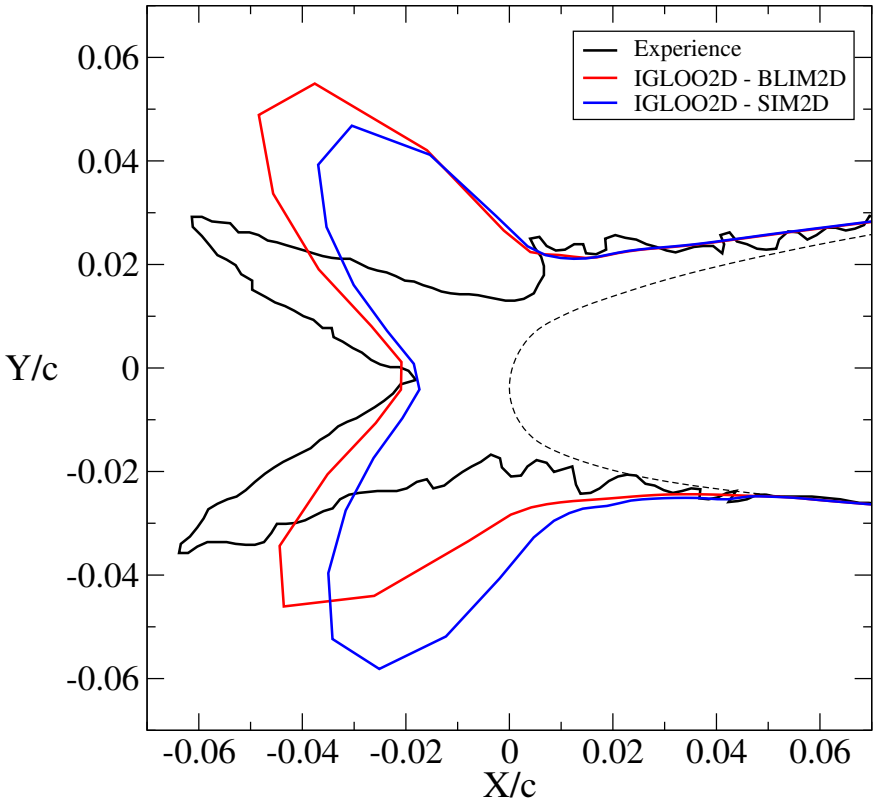


FIGURE 7.6. – Formes de dépôt de givre obtenues lors de la phase de correction

Finalement, l'étude de ce cas particulièrement défavorable a permis de montrer la robustesse du solveur BLIM2D. La chaîne de calcul est capable de fournir une solution sur la totalité du profil d'aile, même dans des zones de décollement massif où le solveur Euler prévoit des courants de retour dans l'écoulement de fluide parfait. La solution obtenue par BLIM2D dans ces zones n'est pas juste mais n'est pas aberrante. De plus, la solution donnée par IGLOO2D-BLIM2D conduit à une forme du dépôt de givre plus proche de la forme expérimentale que celle fournie par la chaîne de calcul usuelle. Ces premiers résultats sont très encourageants et demandent à être confirmés sur un plus grand nombre de cas, et pour des jeux de conditions extérieures assez variés. Ceci fait l'objet de la section suivante.

7.4. Évaluation de l'apport de la méthode intégrale 2D par rapport à la méthode simplifiée

Six autres cas d'accrétion de givre transparent ont ensuite été sélectionnés pour évaluer l'apport de la méthode intégrale 2D par rapport à la méthode simplifiée. Les conditions de ceux-ci sont spécifiées dans le tableau 7.3 et tirées de la base de données de la NASA (voir [99] pour la plupart

d'entre eux). Ces différents cas ont été choisis de manière à pouvoir comparer les méthodes sur différents profils d'aile (NACA0012, GLC305, LTHS) et pour des formes de dépôt de givre variées. En effet, on peut obtenir des formes assez différentes en faisant varier notamment le nombre de Mach (ici de 0.1770 à 0.4350), la température (de $-17.6°C$ à $-6.7°C$), la concentration massique en eau (de $0.56g/m^3$ à $1.30g/m^3$), le diamètre des gouttes (de $15\mu m$ à $40\mu m$) et le temps d'exposition aux conditions givrantes (de $138s$ à $1476s$). De plus, la précision des formes de dépôt de givre calculées par la chaîne 2D usuelle par rapport aux formes expérimentales est assez variable en fonction des cas. Il s'agit donc de vérifier qu'en remplaçant SIM2D par BLIM2D, la chaîne IGLOO2D ne dégrade pas les résultats pour les cas où la précision était bonne et qu'elle permette d'améliorer les résultats pour les cas où la forme de givre n'était pas vraiment en accord avec la forme expérimentale.

Numéro du cas	Profil d'aile	c (m)	AOA $(°)$	M_∞	T_∞ (K)	P_∞ (Pa)	LWC_∞ (g/m^3)	MVD_∞ (μm)	t (s)
1	NACA0012	0.9144	0	0.2377	261.85	101325	1.00	15	1224
2	GLC305	0.3048	0	0.4350	255.55	101325	1.12	19	138
3	GLC305	0.6096	0	0.2749	263.15	101325	1.30	35	360
4	LTHS	0.9144	0	0.4003	263.35	101325	0.56	21	1476
5	NACA0012	0.533	0	0.2056	264.82	95937	0.61	40	672
6	NACA0012	0.53	4	0.1770	266.45	95610	1.30	20	480

Table 7.3. – Données d'entrée

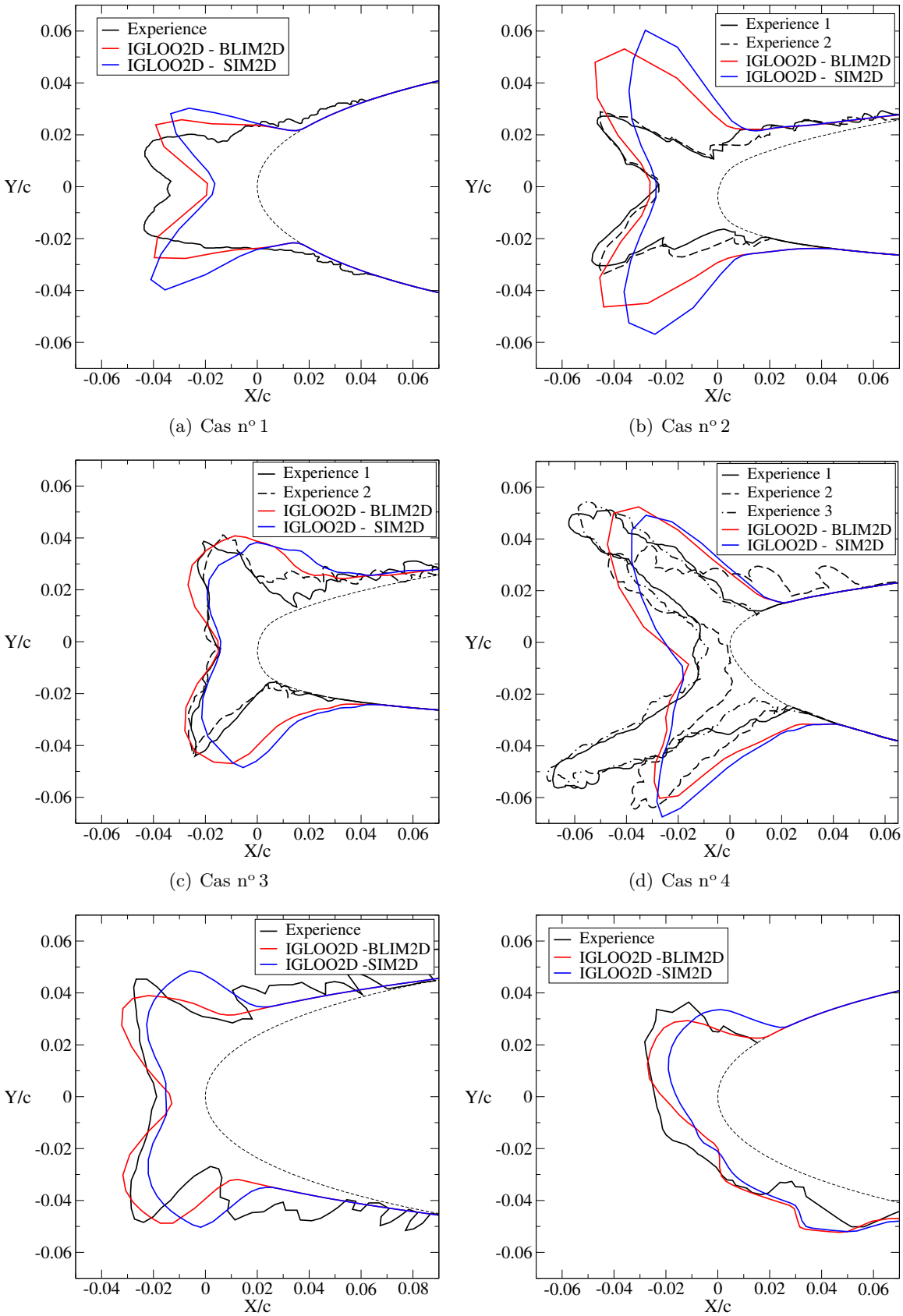
La figure 7.7 compare les formes de dépôt de givre calculées par IGLOO2D lors de la phase de correction aux formes expérimentales.

Analyse des cas n° 3, 5 et 6

Les résultats fournis par IGLOO2D-SIM2D pour les cas n° 3, 5 et 6 sont assez proches des données expérimentales. De plus, on peut observer que la précision des formes de dépôt de givre calculées par IGLOO2D-BLIM2D est équivalente à celle des formes fournies par la chaîne de calcul usuelle.

Les formes de dépôt de givre des cas n° 3 et 5 sont toutes les deux des formes en cornes avec un angle assez important entre celles-ci (figures 7.7(c) et 7.7(e)). L'angle entre ces cornes est un peu mieux reproduit pas IGLOO2D-SIM2D que par IGLOO2D-BLIM2D pour le cas n° 5 (ceci est moins évident pour le cas n° 3). À l'inverse, la hauteur des cornes prévue par IGLOO2D-BLIM2D est meilleure que celle obtenue par la chaîne de calcul usuelle. En revanche, dans tous les cas, la largeur des cornes calculées numériquement est trop importante comparé aux formes expérimentales. On peut aussi remarquer que les formes de dépôt de givre obtenues avec IGLOO2D (-SIM2D et -BLIM2D) ne sont pas parfaitement symétriques alors que l'angle d'incidence est nul et que le profil d'aile NACA0012 est symétrique. Ceci est dû au fait que le maillage de 128 éléments généré par MESH2D n'est pas strictement symétrique. De plus, la phase de correction a tendance à amplifier l'erreur puisqu'elle est réalisée sur une forme prédite qui n'est pas symétrique.

D'autre part, on rappelle que la loi de frottement utilisée par défaut dans BLIM2D pour la couche limite turbulente est la loi (2.32) proposée par White. Le solveur BLIM2D permet aussi l'utilisation de la loi de frottement (2.31) proposée par Ludwieg et Tillmann. En revanche, on peut montrer que celle-ci conduit à une forme de givre moins proche de la forme expérimentale que la loi de White. Par exemple, la figure 7.8 compare les formes de dépôt de givre obtenues



(a) Cas n° 1

(b) Cas n° 2

(c) Cas n° 3

(d) Cas n° 4

(e) Cas n° 5

(f) Cas n° 6

FIGURE 7.7. – Formes de dépôt de givre obtenues lors de la phase de correction pour différents cas d'accrétion de givre transparent

avec les deux lois de frottement pour le cas n° 5. On constate notamment qu'en utilisant la loi de proposée par Ludwieg et Tillmann plutôt que celle proposée par White, l'angle entre les cornes de la forme de dépôt de givre est moins bon. Ce résultat vient confirmer ce qui a été observé au cours du chapitre 6, à savoir que la loi de frottement proposée par White est plus précise que celle de Ludwieg et Tillmann. De plus, on a vu que la loi de Ludwieg et Tillmann est imprécise pour $Re_{\theta_{ss}} < 1200$ [26] (voir sous-section 1.3.3). Or, ceci est très fréquent en givrage puisque la transition laminaire-turbulent sur paroi rugueuse a lieu très près du point d'arrêt, où $Re_{\theta_{ss}}$ est encore faible (de l'ordre de 10^2 voire de 10). Mais, de manière plus générale, cette étude montre aussi que le choix des relations de fermeture dans la méthode intégrale de couche limite peut avoir une influence significative sur les formes de dépôt de givre calculées par IGLOO2D-BLIM2D. Ainsi, la modification des relations de fermeture pour la couche limite turbulente pourrait éventuellement permettre d'améliorer encore la précision des formes des givre obtenues. L'étude plus approfondie des relations de fermeture à utiliser pour une couche limite turbulente fait partie des perspectives de cette thèse.

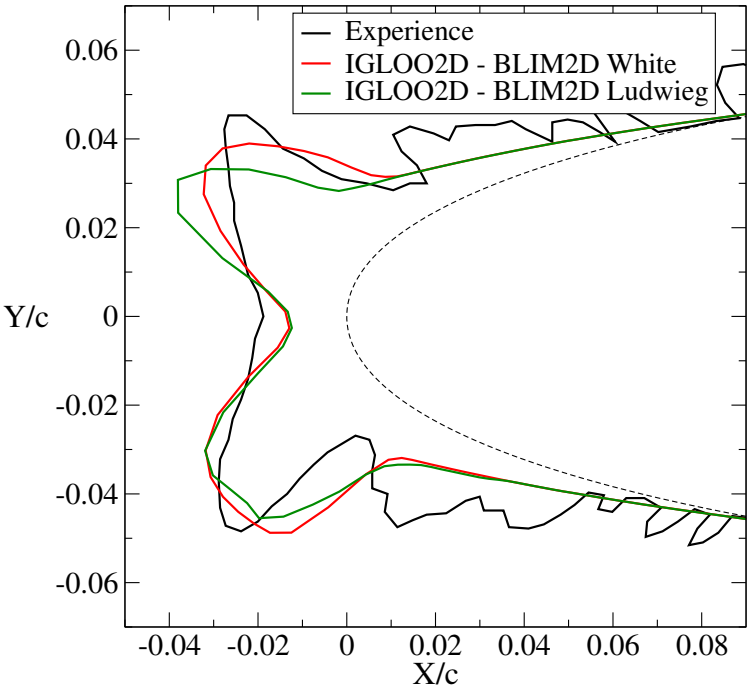


FIGURE 7.8. – Formes de dépôt de givre obtenues avec les lois de frottement proposées par White et Ludwieg et Tillmann pour le cas n° 5

La forme du dépôt de givre du cas n° 6 est assez différente des cas n° 3 et 5, ce qui est notamment dû à l'angle d'incidence de 4° qui est imposé (figure 7.7(f)). En effet, on ne distingue plus deux cornes comme précédemment et la forme n'est pas du tout symétrique. L'épaisseur du givre est moins importante à l'intrados qu'à l'extrados, mais l'étendue de la zone givrée est plus importante à l'intrados qu'à l'extrados. Cette forme est bien reproduite par IGLOO2D et les résultats fournis par IGLOO2D-BLIM2D semblent légèrement meilleurs que ceux de la chaîne de calcul usuelle. En effet, sur l'extrados, l'épaisseur du givre est légèrement plus proche des données expérimentales et l'extrêmité de la zone givrée est mieux située.

Analyse des cas n° 1, 2 et 4

Les formes de givre correspondant aux cas n° 1, 2 et 4 semblent plus complexes car elles sont moins bien reproduites par IGLOO2D-SIM2D.

Pour le cas n° 1, l'étendue de la zone givrée est assez faible mais l'épaisseur de givre dans cette zone est importante et les cornes sont assez petites (figure 7.7(a)). La faible étendue de la zone givrée peut s'expliquer par le fait que la vitesse n'est pas particulièrement élevée ($M_\infty = 0.2377$) et que les gouttes sont très petites ($MVD_\infty = 15\mu m$). Ainsi, l'inertie des gouttelettes d'eau est très faible et leur temps réponse à la déviation de l'écoulement (pour contourner le profil d'aile) est donc très faible aussi. C'est pourquoi les limites de captation des gouttes d'eau sont très proches de la zone du point d'arrêt. En revanche, la quantité d'eau impactante est importante à cause des valeurs élevées de la concentration massique en eau ($LWC_\infty = 1.00g/m^3$) et du temps d'exposition aux conditions givrantes ($t = 1224s$). Enfin, la température est assez basse pour que l'eau gèle rapidement après l'impact et ne ruisselle pas trop loin ($T_\infty = -11.3°C$). Ceci explique que le dépôt de givre soit très épais sur le bord d'attaque. Cependant, cette épaisseur de givre n'est pas bien reproduite par IGLOO2D (-BLIM2D et -SIM2D), notamment au niveau du point d'arrêt. La forme de dépôt de givre obtenue par IGLOO2D-BLIM2D est malgré tout un peu meilleure puisque l'angle entre les cornes est plus faible et donc plus proche de celui correspondant à la forme expérimentale. La figure 7.9 présente les formes de dépôt de givre obtenues lors de la phase de prédiction pour le

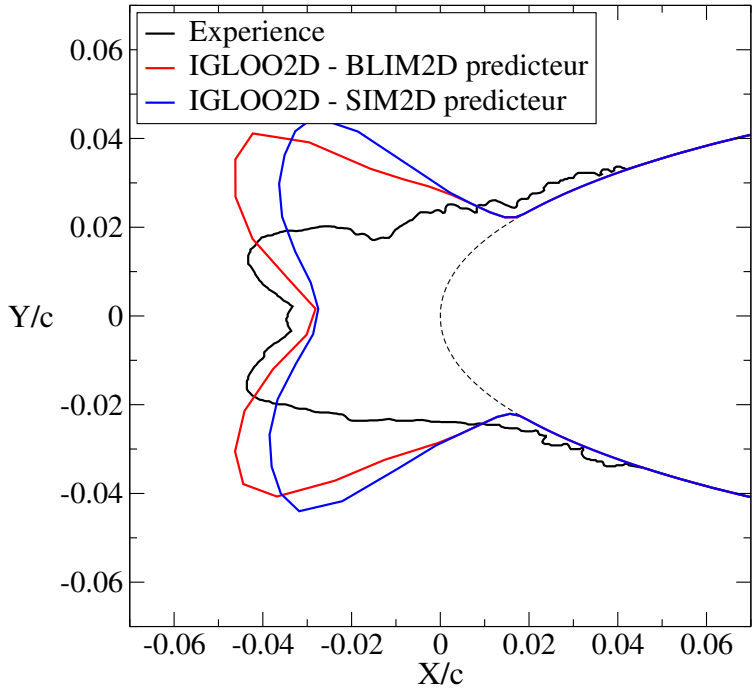
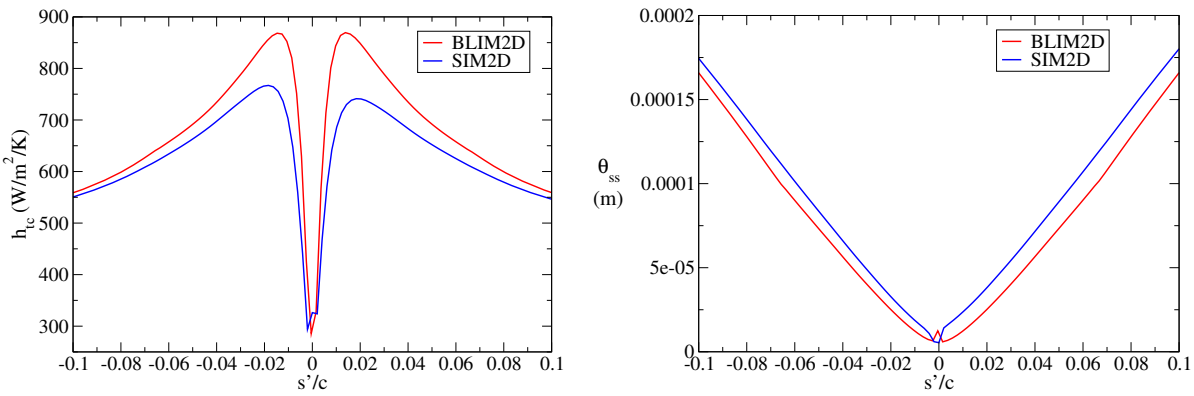


FIGURE 7.9. – Formes de dépôt de givre obtenues lors de la phase de prédiction pour le cas n° 1

cas n° 1. On constate que les problèmes apparaissant sur la forme finale sont présents dès la phase de prédiction. L'épaisseur de givre, trop faible au point d'arrêt puis trop importante en aval, laisse penser que les valeurs des coefficients d'échange thermique prévues par les solveurs de couche limite sont trop faibles dans la zone $|s'/c| < 0.2$. Ceci favorise une valeur élevée de la fraction liquide, c'est-à-dire que les gouttes impactantes ne gèlent pas entièrement et que l'eau encore liquide ruissèle pour aller geler plus loin. Cette hypothèse est cohérente avec la figure 7.10(a) qui montre que le coefficient d'échange thermique prévu par BLIM2D dans la zone $|s'/c| < 0.2$ est plus élevé que

celui prévu par SIM2D. Or la forme de dépôt de givre calculée par IGLOO2D-BLIM2D est plus proche de la forme expérimentale que celle fournie par la chaîne de calcul usuelle. Pour ce cas, l'écoulement de couche limite est laminaire seulement dans la cellule contenant le point d'arrêt. Les écarts entre les coefficients d'échange thermique prévus par BLIM2D et SIM2D sont donc dus au modèle thermique turbulent sur paroi rugueuse. Or, on rappelle que celui-ci est identique pour les deux solveurs et est basé sur la formule (3.13) qui permet de calculer le nombre de Stanton sur paroi rugueuse. Il fait intervenir le coefficient de frottement rugueux qui est, lui aussi, calculé de manière identique par les deux solveurs (eq. 2.46). La figure 7.10(b) montre que c'est en réalité l'écart sur l'épaisseur de quantité de mouvement, qui intervient dans l'équation (2.46), qui est à l'origine des différences observées sur les formes de dépôt de givre. On précise que dans SIM2D, l'épaisseur de quantité de mouvement est calculée à l'aide de la méthode simplifiée décrite dans la section 1.2.2 (eq. (1.18)). Ainsi, la méthode intégrale de couche limite développée dans cette thèse permet d'aboutir à une forme de dépôt de givre plus proche de la forme expérimentale qu'avec la méthode simplifiée utilisée habituellement.



(a) Coefficients d'échange thermique

(b) Épaisseurs de quantité de mouvement

FIGURE 7.10. – Coefficients d'échange thermique et épaisseurs de quantité de mouvement calculés lors de la phase de prédiction pour le cas n° 1 (zoom sur la zone du point d'arrêt)

Comme pour le cas précédent, la forme du dépôt de givre correspondant au cas n° 2 n'est pas bien reproduite par la chaîne de calcul usuelle. Cette fois-ci, la forme expérimentale possède deux cornes bien visibles mais les cornes calculées par IGLOO2D-SIM2D sont trop larges et l'angle entre celles-ci est trop important. Les cornes prévues par IGLOO2D-BLIM2D ne sont pas moins large mais l'angle entre celles-ci est plus faible et permet de se rapprocher très nettement de la forme expérimentale. Les figures 7.11 et 7.12 montrent que les conclusions sont exactement les mêmes que dans le cas précédent et que l'épaisseur de quantité de mouvement calculée par la méthode intégrale semble conduire à une forme de dépôt de givre plus proche de l'expérience.

Enfin, pour le cas n° 4, la quantité de givre déposée est assez importante du fait du temps d'exposition aux conditions givrantes particulièrement élevé ($t = 1476s$). La chaîne de calcul usuelle ne fournit pas des résultats extrêmement proches de l'expérience. Cependant on peut constater que trois formes expérimentales sont données pour ce cas et qu'il existe des différences significatives entre ces trois formes. Il est donc difficile de conclure sur la précision de la chaine de calcul dans ce cas. Les solutions IGLOO2D-SIM2D et IGLOO2D-BLIM2D sont très similaires. Elles fournissent notamment le même angle entre les cornes, la même largeur pour ces cornes et quasiment la même hauteur. L'épaisseur de givre au niveau du point d'arrêt est aussi pratiquement identique. De plus,

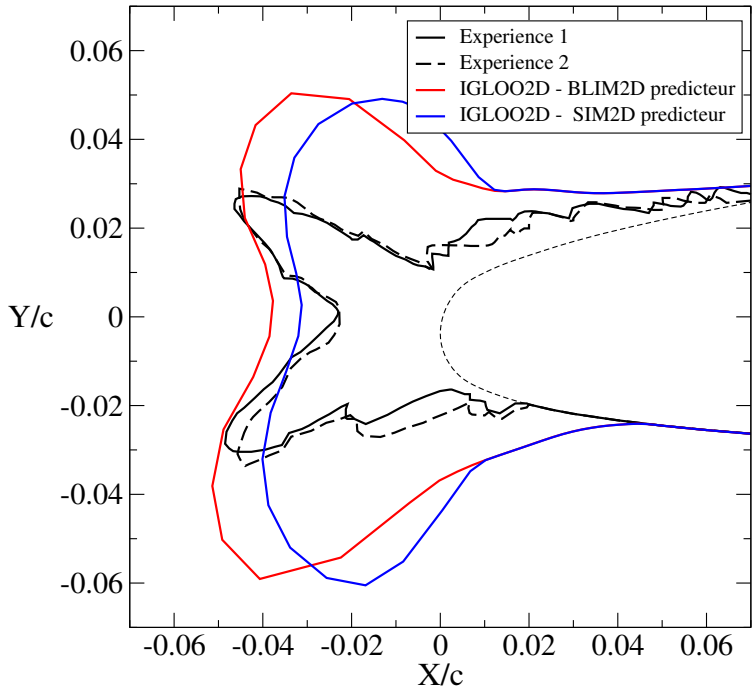
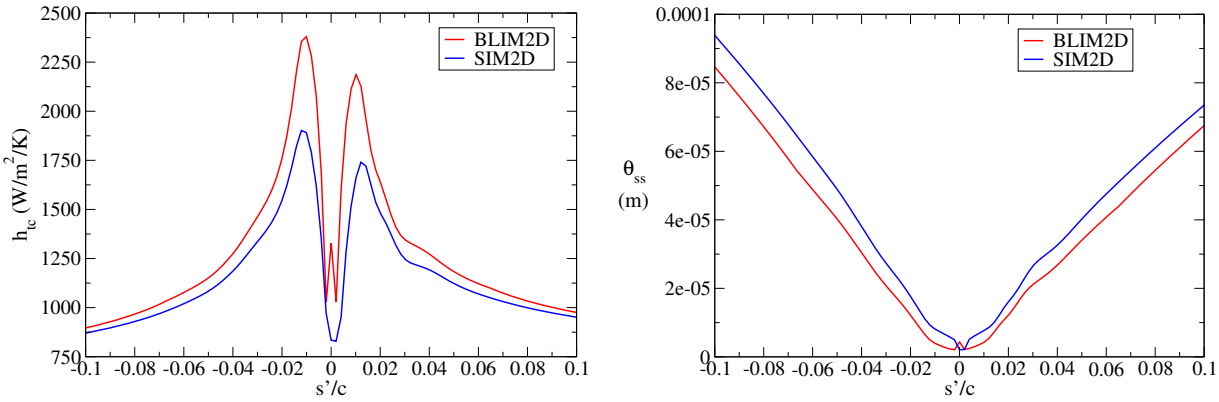


FIGURE 7.11. – Formes de dépôt de givre obtenues lors de la phase de prédiction pour le cas n° 2



(a) Coefficients d'échange thermique

(b) Épaisseurs de quantité de mouvement

FIGURE 7.12. – Coefficients d'échange thermique et épaisseurs de quantité de mouvement calculés lors de la phase de prédiction pour le cas n° 2 (zoom sur la zone du point d'arrêt)

l'angle entre les cornes est en accord avec celui de l'expérience 2 et l'épaisseur de givre au point d'arrêt est semblable à celles des expériences 1 et 3.

Finalement, pour tous les cas étudiés dans cette section, on peut conclure que l'utilisation de BLIM2D dans la chaîne IGLOO2D permet de conduire à des formes de dépôt de givre au moins aussi précises, voire souvent plus proches des formes expérimentales qu'avec la chaîne de calcul usuelle.

7.5. Validation de la chaîne de calcul 3D

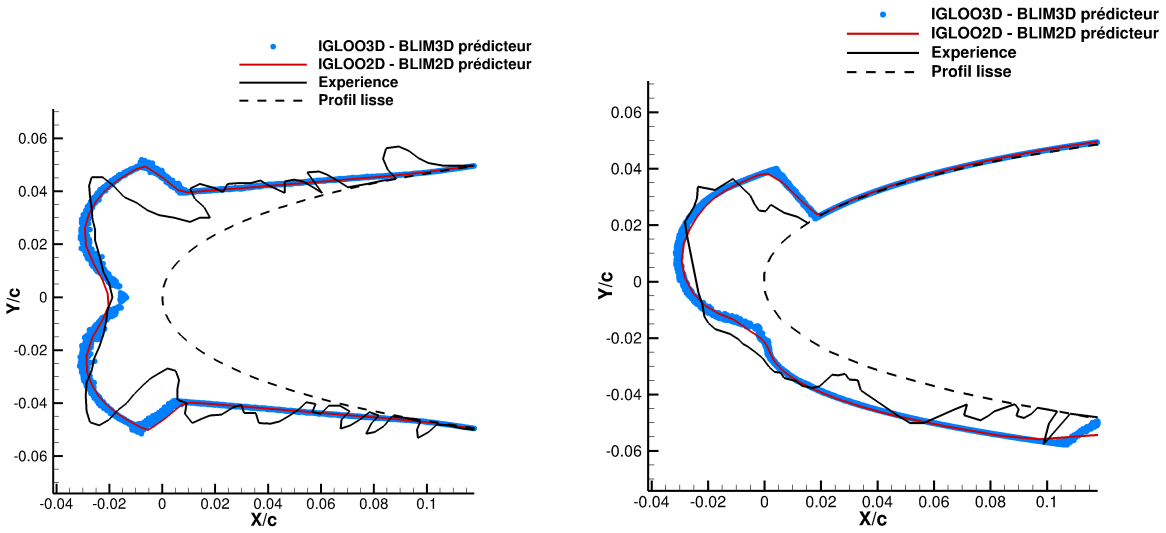
Dans cette section, la chaîne de calcul 3D présentée dans la sous-section 7.1.2 est comparée à la chaîne 2D sur des cas d'accrétion de givre 2D extrudés afin de tester sa validité. Comme dans la section 6.6, cette section est moins détaillée que le reste du chapitre puisque les calculs 3D ont été réalisés par Ghislain Blanchard et Emmanuel Radenac. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux articles de conférence [9] et [10] qui traitent de ce sujet et qui sont donnés dans les annexes H et I.

La chaîne de calcul 3D a été validée sur les cas n° 5 et 6 de la section précédente (voir tableau 7.3). C'est une première étape de validation qui consiste à réaliser des calculs sur des cas 2D avec un maillage non structuré pour ajouter un caractère tridimensionnel dans la résolution. L'écoulement est donc bidimensionnel mais le profil d'aile NACA0012 a été extrudé et un maillage 3D non structuré a été généré. La figure 7.13 illustre le maillage surfacique utilisé pour le calcul de couche limite. Celui-ci est particulièrement raffiné dans la zone de la ligne d'arrêt.

FIGURE 7.13. – Maillage surfacique utilisé par BLIM3D sur un profil d'aile NACA0012

On rappelle que la chaîne de calcul 3D ne permet pas d'effectuer la phase de correction. C'est pourquoi la forme de givre fournie par IGLOO3D est comparée à celle obtenue par IGLOO2D-

BLIM2D après la phase de prédiction uniquement. Celles-ci sont données sur la figure 7.14, pour les cas n° 5 et 6, avec les formes expérimentales correspondantes.



(a) Cas n° 5

(b) Cas n° 6

FIGURE 7.14. – Formes de dépôt de givre obtenues par IGLOO3D et IGLOO2D-BLIM2D lors de la phase de prédiction pour les cas n° 5 et 6

On remarque que, globalement, les formes de dépôt de givre calculées par IGLOO3D sont très proches de celles fournies par IGLOO2D-BLIM2D. Les résultats 3D sont légèrement bruités en raison du maillage non structuré sur lequel le calcul a été effectué.

Pour le cas n° 5, il existe cependant quelques petits écarts entre les formes de dépôt de givre 2D et 3D, en particulier en aval des cornes et au niveau du point d'arrêt où la méthode tridimensionnelle prévoit une épaisseur de givre plus faible (ces écarts sont plus visibles sur la figure 7.15 présentée ci-après). On peut d'abord montrer que ces différences ne sont pas dues au maillage non structuré utilisé. Pour cela, un maillage structuré a été généré pour réaliser un calcul IGLOO3D. Il est composé de 4 éléments dans la direction transverse et de 1312 éléments au total. La forme de givre obtenue par IGLOO3D sur ce maillage est illustrée sur la figure 7.15. On observe que les différences entre les formes de dépôt de givre 2D et 3D sont toujours présentes, quel que soit le type du maillage.

D'autre part, les figures 7.16(a), 7.16(b) et 7.16(c) montrent que même si le solveur fluide parfait et le solveur de trajectographie ne sont pas les mêmes pour les chaînes 2D et 3D (voir section 7.1), il fournissent des nombres de Mach, des pressions statiques et des quantités d'eau impactante tout à fait comparables. En revanche, on constate sur la figure 7.16(d) que le coefficient d'échange thermique prévu par BLIM2D au voisinage du point d'arrêt (situé en $s/c = 0$) est presque deux fois plus élevé que celui fourni par BLIM3D. Ainsi, les écarts observés entre les formes de dépôt de givre calculées par les chaînes 2D et 3D sont dus aux valeurs du coefficient d'échange thermique qui diffèrent à proximité du point d'arrêt. Ceci modifie la quantité d'eau qui ruissèle en aval de ce point et, de proche en proche, engendre des écarts sur la forme de dépôt dans toute la zone givrée. Pourtant, les valeurs du coefficient d'échange calculées par BLIM2D et BLIM3D sont comparables en dehors de la zone de point d'arrêt (voir figure 7.16(d)). Ce phénomène met en évidence l'importance d'avoir une solution pour l'écoulement de couche limite très précise à proximité du point

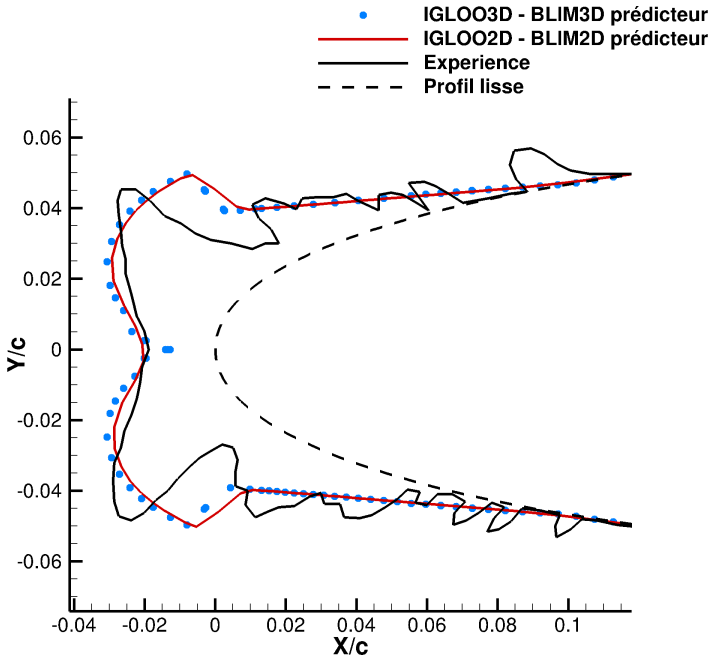
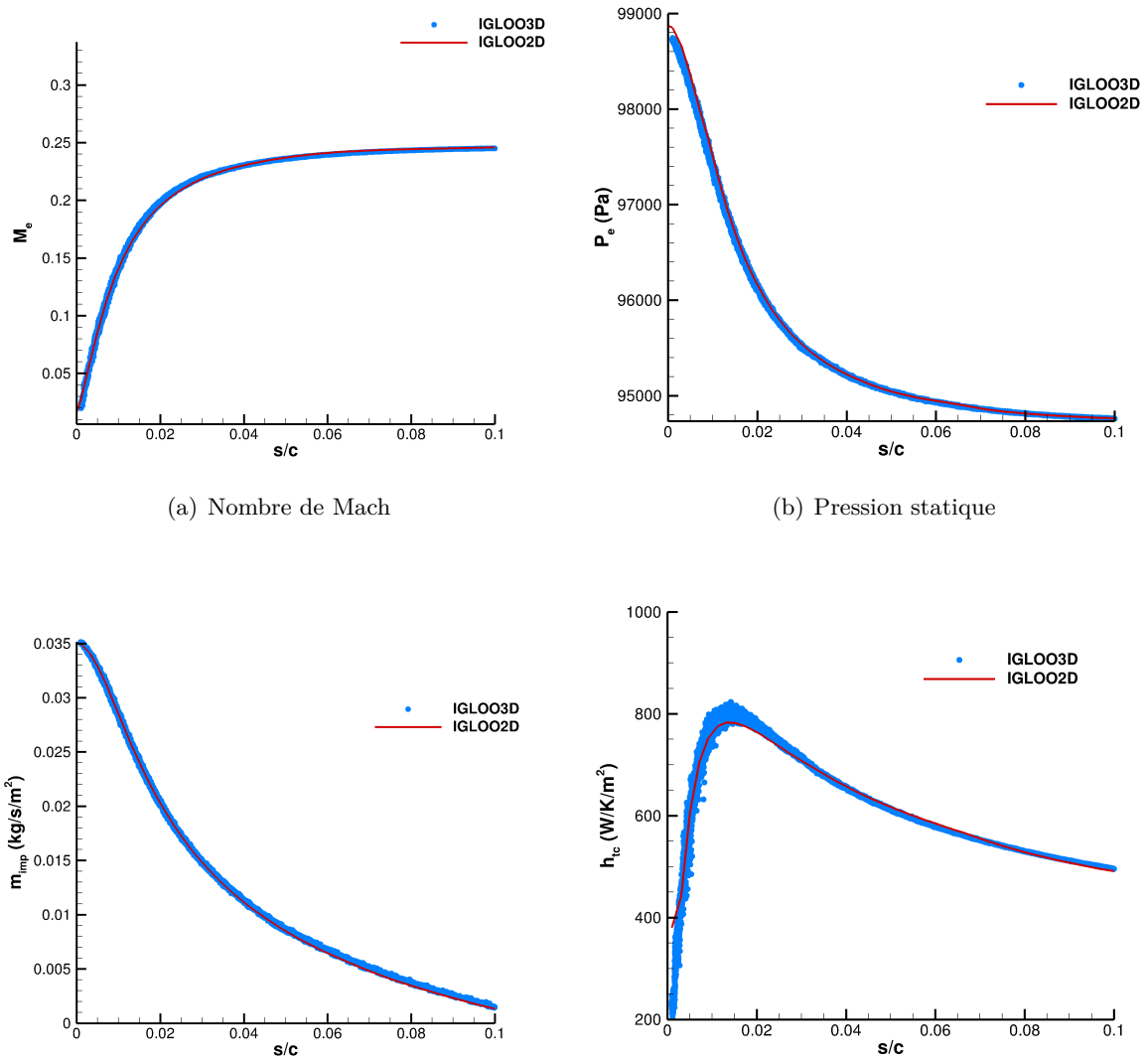


FIGURE 7.15. – Formes de dépôt de givre obtenues par IGLOO3D sur un maillage 2D extrudé lors de la phase de prédiction pour le cas n° 5

d'arrêt.

Comme le montre la figure 7.17, les écarts observés au voisinage du point d'arrêt sur le coefficient d'échange ne concernent qu'un seul point, correspondant à la cellule la plus proche du point d'arrêt. On précise d'autre part que la transition laminaire-turbulent de la couche limite se produit entre la première et la deuxième cellule en aval du point d'arrêt. De plus, pour une couche limite laminaire, le coefficient d'échange est évalué par la formule de Smith et Spalding (3.5) pour les deux chaînes de calcul. Cependant, comme on l'a déjà mentionné dans la section 3.1.1, cette loi présente une singularité au point d'arrêt et les erreurs numériques peuvent être amplifiées dans cette zone. À cela s'ajoute le fait que l'intégrale $\int_0^s \nu_e |\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^{1.87}\, \mathrm{d}s$ n'est pas calculée de la même manière par les deux chaînes de calcul, puisque la localisation du point d'arrêt n'est pas évidente en 3D (voir section 3.1.1). Ceci permet d'expliquer les différences existantes entre les valeurs du coefficient d'échange thermique calculées par BLIM2D et BLIM3D au voisinage du point d'arrêt.

Finalement, le solveur BLIM3D s'intègre bien dans la chaîne de calcul IGLOO3D et celle-ci fournit des résultats très proches de ceux obtenus par son homologue 2D sur des géométries 2D extrudées. En revanche, on a vu qu'une erreur sur la valeur du coefficient d'échange thermique dans une petite zone proche du point d'arrêt peut modifier la forme du dépôt de givre sur une zone beaucoup plus étendue.



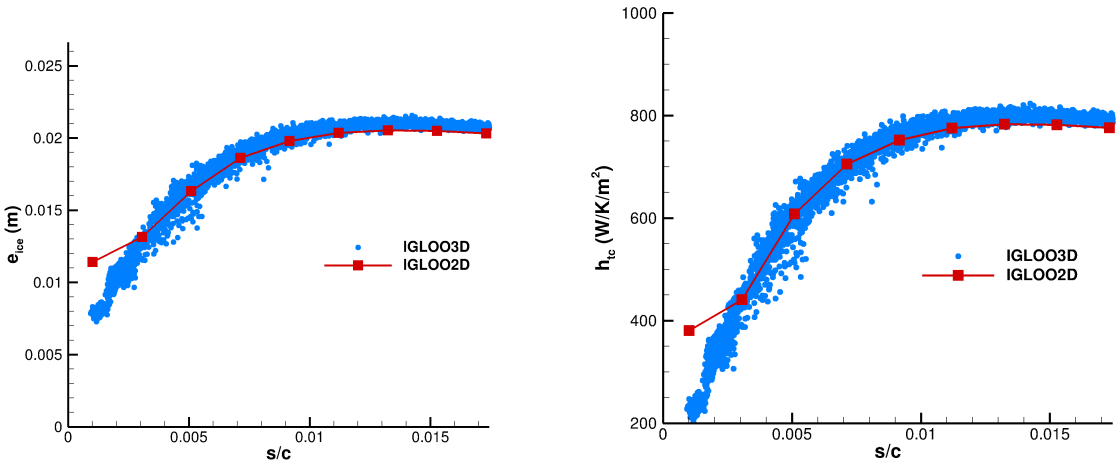
(a) Nombre de Mach

(b) Pression statique

(c) Quantité d'eau impactante

(d) Coefficient d'échange thermique

FIGURE 7.16. – Nombres de Mach, pressions statiques, quantités d'eau impactante et coefficients d'échange thermique obtenus par IGLOO3D et IGLOO2D-BLIM2D lors de la phase de prédiction pour le cas n° 5



(a) Épaisseur de givre

(b) Coefficient d'échange thermique

FIGURE 7.17. – Épaisseurs de givre et coefficients d'échange thermique obtenus par IGLOO3D et IGLOO2D-BLIM2D lors de la phase de prédiction pour le cas n°5 (zoom sur la zone du point d'arrêt)

Conclusion

Au cours de ce chapitre, les capacités des méthodes intégrales 2D et 3D, intégrées respectivement dans les chaînes de calcul IGLOO2D et IGLOO3D, ont été évaluées en réalisant des calculs d'accrétion de givre sur des profils d'aile. On a d'abord pu montrer que les solveurs BLIM2D et BLIM3D s'intègrent bien dans les chaînes de calcul IGLOO. Celles-ci sont robustes, même dans des conditions extérieures particulièrement défavorables, et fournissent des formes de givre assez proches des formes expérimentales. De plus, ce chapitre a permis de démontrer l'apport de la méthode intégrale développée dans cette thèse par rapport à la méthode intégrale simplifiée usuelle sur des cas bidimensionnels. En effet, dans la plupart des cas, l'épaisseur de quantité de mouvement évaluée par la méthode intégrale avec équation auxiliaire (BLIM2D) est plus faible que celle prévue par la méthode intégrale simplifiée (SIM2D). Ceci implique que BLIM2D prévoit des valeurs de coefficient d'échange thermique plus élevées que celles de SIM2D, notamment dans la zone proche du point d'arrêt. Or, pour les cas d'accrétion de givre transparent, les valeurs de coefficients d'échange thermique évaluées par BLIM2D conduisent en général à des formes de dépôt de givre plus proches des formes expérimentales que les valeurs obtenues par SIM2D. Ainsi, le nouvel outil de simulation IGLOO2D-BLIM2D fournit globalement de meilleurs résultats que la chaîne de calcul 2D usuelle. Cependant, aucune différence entre les résultats fournis par les deux méthodes n'est constatée sur les formes de dépôt de givre blanc, puisqu'elles ne dépendent pas de la valeur du coefficient d'échange thermique. D'autre part, nous avons mis en évidence le fait que la forme de dépôt de givre obtenue par IGLOO2D-BLIM2D dépend de manière significative des relations de fermeture choisies dans la méthode intégrale de couche limite. Une étude plus approfondie des relations de fermeture à utiliser pour la couche limite turbulente fait donc partie des perspectives de cette thèse afin d'améliorer encore la précision de la chaîne de calcul. Enfin, des calculs d'accrétion effectués par IGLOO3D sur des géométries 2D extrudées ont permis de s'assurer que l'outil de simulation 3D fournit des formes de dépôt de givre quasiment identiques à son homologue 2D, au moins concernant la phase

de prédiction. En effet, la phase de correction n'a pas encore été implémentée. De plus, nous avons montré qu'une valeur imprécise du coefficient d'échange thermique dans la zone du point d'arrêt peut modifier la forme du dépôt de givre sur une zone beaucoup plus étendue.

Conclusion et perspectives

Avec le renforcement récent des règles de certification en conditions givrantes, les avionneurs s'intéressent de plus en plus à l'utilisation d'outils de simulation d'accrétion de givre 3D pour réduire le conservatisme des méthodes de certification actuelles. Or, les chaînes de calcul 3D existantes ne sont pas assez rapides puisqu'elles sont souvent basées sur des calculs Navier-Stokes pour la résolution de l'écoulement d'air. L'expérience acquise sur les chaînes de calcul 2D montre pourtant que l'utilisation d'une méthode couplée Euler/couche limite intégrale est plus intéressante en termes de temps de calcul.

Les objectifs de ces travaux de thèse étaient donc de développer une méthode intégrale 3D de couche limite, adaptée à la problématique du givrage en vol, de l'implémenter dans la chaîne de calcul IGLOO3D et d'en évaluer l'apport pour des calculs d'accrétion de givre sur des ailes d'avion. De plus, ce travail a été l'occasion de revisiter les méthodes intégrales 2D de couche limite usuelles afin d'en proposer une méthode plus générale, permettant d'améliorer leur précision et d'étendre leur domaine d'application. En effet, les méthodes intégrales de couche limite usuelles, dites simplifiées, reposent sur des formules analytiques obtenues suite à la résolution approchée d'une équation de transport pour des conditions particulières. Ceci rend les méthodes 2D usuelles quasiment instantanées mais difficiles à étendre en trois dimensions.

Pour la couche limite dynamique, nous avons donc opté pour un modèle intégral 2D et 3D basé sur la résolution instationnaire de 2 équations de transport, pour mieux prendre en compte l'effet d'histoire de la couche limite. La formulation instationnaire permet une résolution avec une marche en temps plutôt qu'en espace, ce qui est plus simple a gérer sur des géométries complexes en trois dimensions. Les relations utilisées pour fermer le système d'équations sont basées, pour la plupart, sur un profil de vitesse présumé. Ceci facilite le développement du modèle 3D et du modèle de couche limite thermique. En particulier, un travail important a été réalisé pour établir un profil de vitesse laminaire qui permette de modéliser précisément le frottement à la paroi pour des gradients de pression extérieurs variables, comme c'est le cas sur des profils d'aile givrés. Le coefficient de frottement est en effet une sortie majeure du solveur de couche limite. Enfin, les effets de rugosité du givre sont pris en compte de la même manière que dans les modèles de couche limite usuels en givrage.

Pour des applications givrage, il est indispensable de modéliser la couche limite thermique en plus de la couche limite dynamique. En effet, le coefficient d'échange thermique est une donnée d'entrée du solveur d'accrétion et doit donc être connu. Nous proposons deux modèles différents pour la résolution de la couche limite thermique. Le premier modèle, dit simplifié, est identique à ceux utilisés par les codes de givrage actuels. Les grandeurs thermiques sont calculées à partir de formules analytiques basées sur les grandeurs dynamiques. Ce modèle a l'avantage d'être très simple et sa résolution est instantanée. En revanche, son domaine d'application est restreint et il est peu fiable dans des conditions de paroi chauffée. Nous avons donc proposé un second modèle de couche limite thermique, basé sur la résolution d'une équation de transport. Pour fermer cette équation, un profil de température présumé a été établi, par analogie avec le profil de vitesse pour la couche limite dynamique. Ce second modèle, plus général car basé sur moins d'hypothèses simplificatrices, doit permettre d'étendre le domaine d'application des méthodes de couche limite utilisées en givrage. En revanche, son développement n'est pas terminé puisqu'il n'a été établi que

pour une couche limite laminaire et pour une masse volumique constante. Il ne permet donc pas pour l'instant de réaliser des calculs en condition de paroi chauffée.

Sachant que les formes de dépôt de givre sont souvent complexes, nous avons choisi de résoudre le modèle intégral de couche limite développé dans cette thèse à l'aide d'une méthode de type Volume-Finis. Celle-ci est particulièrement bien adaptée à des maillages non-structurés sur des formes quelconques. Elle est basée sur une formulation instationnaire, avec un schéma semi-implicite pour la discrétisation en temps et un schéma décentré amont pour la discrétisation en espace. Elle a été développée en 2D et en 3D et un travail important a été effectué sur la méthode 2D afin de la rendre particulièrement bien adaptée pour les applications givrage. D'abord, la robustesse et la précision de la solution au voisinage du point d'arrêt ont été améliorées de manière significative pour la couche limite dynamique. Ceci est essentiel en givrage puisque la région du point d'arrêt est propice à la formation de givre et que c'est aussi la région où peuvent être installés des systèmes de protection contre celui-ci. De plus, nous avons mis en évidence que la solution dans cette zone peut avoir une influence sur la totalité de la forme de dépôt de givre. Ensuite, la robustesse de la méthode a été renforcée, au détriment de sa précision, dans les zones où le gradient de pression adverse est trop important et où la couche limite décolle. Ces deux cas sont, d'une manière générale, très difficiles à traiter pour un code de couche limite mais, en givrage, ils correspondent souvent à des zones où la solution a peu d'influence sur la forme de dépôt de givre. C'est pourquoi la rapidité et la robustesse de la méthode ont été préférées à sa précision dans ces cas. Cependant, les traitements numériques développés dans la zone du point d'arrêt et dans les zones de forts gradients de pression adverses et/ou de couche limite décollée n'ont pas été complètement étendus en trois dimensions. De plus, seul le modèle thermique simplifié a été implémenté dans la méthode tridimensionnelle. Par contre l'extension de la méthode de résolution en 3D a nécessité une adaptation du calcul des termes de flux pour assurer leur conservativité et l'introduction de changements de repères pour pouvoir calculer les relations de fermeture.

Cette méthode intégrale de couche limite a été implémentée dans les solveurs nommés BLIM2D et BLIM3D et un travail important a été réalisé afin de valider les choix effectués en termes de modélisation et de méthodes numériques. Nous avons d'abord vérifié la validité de la méthode sur des cas académiques de types plaque plane avec et sans gradient de pression en comparant ses résultats à des valeurs théoriques ou expérimentales. Ensuite, la méthode a été comparée au code CLICET, qui résout les équations de Prandtl différentielles, sur des cas d'écoulements autour de profils d'aile, plus proches des applications visées. Tout le processus de validation a été effectué sur paroi lisse, sachant que le modèle sur paroi rugueuse est identique à celui des méthodes usuelles et qu'il dépend directement des grandeurs obtenues sur paroi lisse. Ainsi, il est supposé être valide à condition que le modèle sur paroi lisse le soit aussi. Il résulte de cette étude que la méthode bidimensionnelle fournit des résultats très satisfaisants pour des écoulements de couche limite accélérés et légèrement ralentis. Ceux-ci sont en revanche moins précis pour des écoulements fortement ralentis. D'autre part, les calculs sur les profils d'aile ont notamment pu démontrer la précision de la méthode au voisinage du point d'arrêt. De plus, le modèle thermique intégral semble très prometteur puisqu'il fournit des valeurs de coefficient d'échange thermique plus précises que le modèle thermique simplifié, au moins dans le cas d'une couche limite laminaire. Enfin, la méthode tridimensionnelle fournit des résultats très similaires à son homologue bidimensionnelle sur des cas 2D extrudés. Les fermetures transverses, dans le cas d'une couche limite tridimensionnelle, conduisent elles aussi à des résultats satisfaisants, même si elle peuvent être améliorées.

Les solveurs de couche limite, associés au modèle thermique simplifié, ont enfin été intégrés dans les chaînes de calcul IGLOO2D et IGLOO3D et leurs capacités ont été évaluées en réalisant des calculs d'accrétion de givre. Il en résulte que la méthode intégrale de couche limite s'intègre très bien dans les outils de simulation d'accrétion de givre de l'ONERA. En particulier, elle est compatible avec les maillages peu raffinés utilisés en givrage. Elle est d'autre part très robuste, même pour des

conditions extérieures particulièrement défavorables et conduisant à des décollements massifs de l'écoulement, qui sont assez fréquents en givrage. En deux dimensions, l'utilisation de la méthode intégrale développée dans cette thèse conduit à des formes de dépôt de givre au moins équivalentes et souvent plus proches des formes expérimentales que celles calculées par les méthodes usuelles. Néanmoins, nous avons pu mettre en évidence le fait que les formes de dépôt de givre dépendent de manière significative des relations de fermeture choisies, qui sont donc un élément clé dans l'établissement d'un modèle intégral de couche limite. En trois dimensions, le développement de la chaîne de calcul est moins avancé et celle-ci ne permet pas encore de tenir compte de la rétroaction de la croissance du givre sur l'écoulement. Ceci est fait en deux étapes pour les calculs de cette thèse en 2D. La première est une phase prédicteur où les calculs sont effectués sur la géométrie lisse. La seconde est une phase de correction où les calculs sont réalisés sur une forme givrée prédite. La chaîne de calcul 3D fournit malgré tout des formes de dépôt de givre quasiment identiques à son homologue 2D lors de la phase de prédiction.

En résumé, la méthode intégrale de couche limite développée et mise en œuvre dans le solveur BLIM au cours de cette thèse semble très prometteuse en vue de son utilisation dans un contexte industriel. En effet, elle est adaptée aux formes de givre complexes, grâce à la méthode de Volumes-Finis mise en place et à sa formulation instationnaire. De plus, la zone proche du point d'arrêt est calculée de manière très précise grâce au traitement numérique effectué dans cette région et aux relations de fermeture laminaires particulièrement bien calibrées. Or la solution dans cette zone joue un rôle majeur dans les cas d'accrétion de givre ou pour dimensionner des systèmes de dégivrage. D'autre part, les calculs sur des formes de givre en cornes ont montré que la méthode était particulièrement robuste grâce à la méthode de contrôle développée pour passer le décollement et à la limitation des forts gradients de pression adverses. Or, la robustesse de la méthode est indispensable puisque cette dernière est destinée à être implémentée dans une chaîne de calcul automatisée. Enfin, sachant que le coefficient d'échange thermique joue un rôle majeur dans le phénomène de givrage, le développement d'une méthode intégrale a aussi été initié pour résoudre la couche limite thermique, ce qui est très rarement fait dans la littérature. Cette étape, associée au développement de profils de vitesse et de température présumés et à la modélisation fine de la zone laminaire, est un pas important pour la modélisation des parois protégées thermiquement contre le givre. Finalement, par rapport à la méthode intégrale simplifiée utilisée dans les codes de givrage 2D actuels, cette nouvelle méthode permet de modéliser la couche limite de manière plus précise et dans un domaine d'application plus large. Elle conduit aussi à des formes de dépôt de givre plus proches des formes expérimentales. Enfin, la formulation plus générale de cette nouvelle méthode a permis son extension en trois dimensions, qui est inexistante dans les codes de givrage 3D actuels. Ceux-ci reposent plutôt sur des calculs Navier-Stokes trop coûteux en temps de calcul.

Il convient cependant d'admettre que tous les objectifs initiaux n'ont pas pu être menés à leur terme. Premièrement, si un travail important a été réalisé concernant la méthode bidimensionnelle, son développement n'en est pas pour autant terminé. En particulier, le modèle thermique intégral n'a été établi que dans le cas d'une couche limite laminaire avec une masse volumique constante. Les prochains travaux devront donc porter sur l'extension du modèle au cas d'une couche limite turbulente sur paroi lisse puis rugueuse. Ceci implique l'établissement d'un profil de température pour fermer le système. La prise en compte des effets de rugosité pourrait intervenir, dans un premier temps, à la fin du calcul en corrigeant les grandeurs lisses, comme cela est réalisé actuellement pour le modèle dynamique. Puis, à plus long terme, elle pourrait apparaître directement dans les relations de fermeture en modifiant les profils de vitesse et de température. En effet, l'hypothèse d'un faible

impact de la rugosité sur les grandeurs intégrales dynamiques est souvent mise en défaut. Il faudrait ensuite étendre ce modèle au cas d'une masse volumique variable pour permettre de réaliser des calculs en conditions de paroi chauffée. Ceci nécessite de coupler les équations intégrales dynamiques et thermiques et donc de les résoudre simultanément. D'autre part, les calculs d'accrétion de givre ont montré que la couche limite est turbulente sur la quasi-totalité du profil à cause des rugosités du givre. Une étude plus approfondie sur le profil de vitesse turbulent à utiliser pourrait donc être menée pour tenter d'améliorer au maximum la précision des relations de fermeture. Enfin, le travail de validation de la chaîne 2D initié dans le chapitre 7 devra aussi être poursuivi sur un nombre de cas beaucoup plus important afin de balayer une large gamme de conditions extérieures.

Le développement de la méthode tridimensionnelle est moins avancé que celui de son homologue bidimensionnelle. Sur ce plan, les travaux futurs consisteraient à étendre ou valider l'extension en 3D des traitements numériques développés en 2D, pour améliorer la précision de la méthode au voisinage du point d'arrêt et la rendre plus robuste dans les zones où l'écoulement est trop ralenti voire décollé. Le modèle thermique intégral doit aussi être implémenté dans BLIM3D. De plus, les relations de fermeture transversales nécessiteraient d'être développées, dans le cas d'une couche limite turbulente, voire améliorées, dans le cas d'une couche limite laminaire, pour augmenter la précision de la méthode dans les cas de faibles écoulements transverses. Enfin, il s'agira d'évaluer les capacités du solveur BLIM3D sur des cas d'accrétion de givre purement tridimensionnels, tels qu'un écoulement autour d'une aile en flèche, d'une sonde, d'un radome, ... , ou d'objets simplifiés représentatifs tels qu'une sphère. Il faudrait enfin optimiser le solveur BLIM, et notamment BLIM3D, mais aussi l'ensemble des calculs Euler-couche limite, pour pouvoir chiffrer le gain en temps CPU de l'approche utilisée dans cette thèse par rapport à l'approche Navier-Stokes usuelle pour les chaînes de givrage 3D.

Annexes

A. Établissement des équations intégrales

Couche limite dynamique

Les équations intégrales de couche limite sont obtenues à partir des équations de Prandtl, écrites sous forme incompressible et instationnaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0 & \text{(A.1a)} \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_x}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} & \text{(A.1b)} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} & \text{(A.1c)} \\ 0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} & \text{(A.1d)} \end{cases}$$

où $\boldsymbol{q} = (u_x, u_y, u_z)$ est le vecteur vitesse, ρ est la masse volumique de l'air et P est la pression. Les grandeurs $\tau_{:y}$ sont des composantes du vecteur contrainte de cisaillement $\boldsymbol{\tau}$. Elles s'écrivent $\tau_{:y} = \mu \frac{\partial u_:}{\partial y}$ pour un écoulement laminaire ou $\tau_{:y} = \mu \frac{\partial u_:}{\partial y} - \rho < u_:{}' u_y{}' >$ pour un écoulement turbulent avec μ la viscosité dynamique de l'air.

En utilisant (A.1d), on a $P(x, z) = P_e(x, z)$. Ainsi, les termes de gradients de pression tangents à la paroi peuvent être exprimés en fonction du gradient de vitesse extérieur grâce à l'équation de quantité de mouvement écrite dans la région de l'écoulement extérieur (équation d'Euler) :

$$\frac{\partial u_{ex}}{\partial t} + u_{ex}\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + u_{ey}\frac{\partial u_{ex}}{\partial y} + u_{ez}\frac{\partial u_{ex}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_e}{\partial x}$$

De plus, dans la zone extérieure à la couche limite, on suppose que $\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0$ et $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$. D'où :

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_e}{\partial x} = u_{ex}\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + u_{ez}\frac{\partial u_{ex}}{\partial z} \quad \text{(A.2a)}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_e}{\partial z} = u_{ex}\frac{\partial u_{ez}}{\partial x} + u_{ez}\frac{\partial u_{ez}}{\partial z} \quad \text{(A.2b)}$$

Les équations de Prandtl deviennent alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0 & \text{(A.3a)} \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_x}{\partial z} = u_{ex}\dfrac{\partial u_{ex}}{\partial x} + u_{ez}\dfrac{\partial u_{ex}}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} & \text{(A.3b)} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = u_{ex}\dfrac{\partial u_{ez}}{\partial x} + u_{ez}\dfrac{\partial u_{ez}}{\partial z} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} & \text{(A.3c)} \end{cases}$$

Les équations intégrales 3D sont ensuite obtenues en intégrant les équations (A.3) dans la direction

normale à la paroi, sur toute l'épaisseur de la couche limite.
Dans cette section, on se donne une épaisseur fixe δ, assez grande et constante, sur laquelle on va intégrer les équations de couche limite et qu'on fera ensuite tendre vers l'infini. On écrit par définition :

$$\begin{aligned} u_x(\delta) = u_{x\delta} \qquad u_y(\delta) = u_{y_\delta} \qquad u_z(\delta) = u_{z\delta} \\ \tau_{xy}(0) = \tau_{xy_p} \qquad \tau_{zy}(0) = \tau_{zy_p} \\ \tau_{xy}(\delta) = \tau_{xy_\delta} \qquad \tau_{zy}(\delta) = \tau_{zy_\delta} \end{aligned}$$

Équation intégrale de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{x}$

L'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{x}$ (A.3b) peut être écrite sous sa forme conservative en lui ajoutant l'équation de continuité (A.3a). On obtient :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial {u_x}^2}{\partial x} + \frac{\partial u_y u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_z u_x}{\partial z} = u_{ex}\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + u_{ez}\frac{\partial u_{ex}}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \tag{A.4}$$

L'équation intégrale de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{x}$ est alors définie comme suit :

$$\int_0^\delta \left(u_{ex} \times [\text{continuité (A.3a)}] - [\text{qdm}_x \text{ (A.4)}]\right) \mathrm{d}y \tag{A.5}$$

L'intégration de l'équation de continuité (A.3a) multipliée par u_{ex} donne :

$$u_{ex}\frac{\partial \int_0^\delta u_x \,\mathrm{d}y}{\partial x} + u_{ex}u_{y_\delta} + u_{ex}\frac{\partial \int_0^\delta u_z \,\mathrm{d}y}{\partial z} = 0 \tag{A.6}$$

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{x}$ (A.4) donne :

$$\frac{\partial \int_0^\delta u_x \,\mathrm{d}y}{\partial t} + \frac{\partial \int_0^\delta {u_x}^2 \,\mathrm{d}y}{\partial x} + u_{y_\delta}u_{x\delta} + \frac{\partial \int_0^\delta u_z u_x \,\mathrm{d}y}{\partial z} = \int_0^\delta u_{ex}\,\mathrm{d}y\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + \int_0^\delta u_{ez}\,\mathrm{d}y\frac{\partial u_{ex}}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left(\tau_{xy_\delta} - \tau_{xy_p}\right) \tag{A.7}$$

On soustrait maintenant (A.7) à (A.6) (on rappelle que $\frac{\partial u_{ex}}{\partial t} = 0$) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \int_0^\delta (u_{ex} - u_x)\,\mathrm{d}y}{\partial t} + \frac{\partial \int_0^\delta u_x(u_{ex} - u_x)\,\mathrm{d}y}{\partial x} + \frac{\partial \int_0^\delta u_z(u_{ex} - u_x)\,\mathrm{d}y}{\partial z} &= u_{y_\delta}(u_{x\delta} - u_{ex}) - \int_0^\delta (u_{ex} - u_x)\,\mathrm{d}y\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} \\ &\quad - \int_0^\delta (u_{ez} - u_z)\,\mathrm{d}y\frac{\partial u_{ex}}{\partial z} + \frac{(\tau_{xy_p} - \tau_{xy_\delta})}{\rho} \end{aligned} \tag{A.8}$$

On fait alors tendre δ vers l'infini. Ceci signifie que :

$$u_{x\delta} \longrightarrow u_{ex} \qquad u_{y_\delta} \longrightarrow 0 \qquad \tau_{xy_\delta} \longrightarrow 0$$

On définit $\tilde{\boldsymbol{q}} = (u_x, u_z)$ le vecteur vitesse dans le plan tangent à la paroi. On a donc $\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}} = (u_{ex}, u_{ez})$. On introduit alors les grandeurs intégrales suivantes :

$$|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1x} = \int_0^\infty (u_{ex} - u_x)\,\mathrm{d}y \qquad |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1z} = \int_0^\infty (u_{ez} - u_z)\,\mathrm{d}y$$

$$|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{xx} = \int_0^\infty u_x(u_{ex} - u_x)\,\mathrm{d}y \qquad |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{xz} = \int_0^\infty u_z(u_{ex} - u_x)\,\mathrm{d}y$$

L'équation intégrale de quantité de mouvement selon $\boldsymbol{x}$ (A.5) devient finalement :

$$\frac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1x})}{\partial t} + \frac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{xz})}{\partial z} = -|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1x}\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} - |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1z}\frac{\partial u_{ex}}{\partial z} + \frac{\tau_{xy_p}}{\rho} \tag{A.9}$$

Équation intégrale de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{z}$

L'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{z}$ (A.3c) peut être écrite sous sa forme conservative en lui ajoutant l'équation de continuité (A.3a). On obtient :

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_x u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_y u_z}{\partial y} + \frac{\partial {u_z}^2}{\partial z} = u_{ex}\frac{\partial u_{ez}}{\partial x} + u_{ez}\frac{\partial u_{ez}}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \tag{A.10}$$

L'équation intégrale de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{z}$ est alors définie comme suit :

$$\int_0^\delta \left(u_{ez} \times [\text{continuité (A.3a)}] - [\text{qdm}_z \text{ (A.10)}]\right) \mathrm{d}y \tag{A.11}$$

L'intégration de l'équation de continuité (A.3a) multipliée par u_{ez} donne :

$$u_{ez}\frac{\partial \int_0^\delta u_x \,\mathrm{d}y}{\partial x} + u_{ez}u_{y_\delta} + u_{ez}\frac{\partial \int_0^\delta u_z \,\mathrm{d}y}{\partial z} = 0 \tag{A.12}$$

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{z}$ (A.10) donne :

$$\frac{\partial \int_0^\delta u_z \,\mathrm{d}y}{\partial t} + \frac{\partial \int_0^\delta u_x u_z \,\mathrm{d}y}{\partial x} + u_{y_\delta}u_{z\delta} + \frac{\partial \int_0^\delta {u_z}^2 \,\mathrm{d}y}{\partial z} = \int_0^\delta u_{ex}\,\mathrm{d}y\frac{\partial u_{ez}}{\partial x} + \int_0^\delta u_{ez}\,\mathrm{d}y\frac{\partial u_{ez}}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left(\tau_{zy_\delta} - \tau_{zy_p}\right) \tag{A.13}$$

On soustrait maintenant (A.13) à (A.12) (on rappelle que $\frac{\partial u_{ez}}{\partial t} = 0$) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \int_0^\delta (u_{ez} - u_z)\,\mathrm{d}y}{\partial t} + \frac{\partial \int_0^\delta u_x(u_{ez} - u_z)\,\mathrm{d}y}{\partial x} + \frac{\partial \int_0^\delta u_z(u_{ez} - u_z)\,\mathrm{d}y}{\partial z} &= u_{y_\delta}(u_{z\delta} - u_{ez}) - \int_0^\delta (u_{ex} - u_x)\,\mathrm{d}y\frac{\partial u_{ez}}{\partial x} \\ &\quad - \int_0^\delta (u_{ez} - u_z)\,\mathrm{d}y\frac{\partial u_{ez}}{\partial z} + \frac{(\tau_{zy_p} - \tau_{zy_\delta})}{\rho}\end{aligned} \tag{A.14}$$

On fait alors tendre δ vers l'infini. Ceci signifie que :

$$u_{z\delta} \longrightarrow u_{ez} \qquad u_{y_\delta} \longrightarrow 0 \qquad \tau_{zy_\delta} \longrightarrow 0$$

On introduit de plus les grandeurs intégrales suivantes :

$$|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1x} = \int_0^\infty (u_{ex} - u_x)\,\mathrm{d}y \qquad |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1z} = \int_0^\infty (u_{ez} - u_z)\,\mathrm{d}y$$

$$|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{zx} = \int_0^\infty u_x(u_{ez} - u_z)\,\mathrm{d}y \qquad |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{zz} = \int_0^\infty u_z(u_{ez} - u_z)\,\mathrm{d}y$$

L'équation intégrale de quantité de mouvement selon $\boldsymbol{z}$ (A.11) devient finalement :

$$\frac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1z})}{\partial t} + \frac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{zz})}{\partial z} = -|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1x}\frac{\partial u_{ez}}{\partial x} - |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1z}\frac{\partial u_{ez}}{\partial z} + \frac{\tau_{zy_p}}{\rho} \tag{A.15}$$

Équation intégrale de l'énergie cinétique

L'équation intégrale de l'énergie cinétique est définie comme suit :

$$\int_0^\delta \left(|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2 \times [\text{continuité (A.3a)}] - 2u_x \times [\text{qdm}_x \text{ (A.3b)}] - 2u_z \times [\text{qdm}_z \text{ (A.3c)}] \right) \mathrm{d}y \tag{A.16}$$

- L'intégration de l'équation de continuité (A.3a) multipliée par $|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2$ donne :

$$|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2 \frac{\partial \int_0^\delta u_x \,\mathrm{d}y}{\partial x} + |\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2 u_{y\delta} + |\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2 \frac{\partial \int_0^\delta u_z \,\mathrm{d}y}{\partial z} = 0$$

On peut aussi l'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \int_0^\delta u_x |\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2 \,\mathrm{d}y}{\partial x} + |\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2 u_{y\delta} + \frac{\partial \int_0^\delta u_z |\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2 \,\mathrm{d}y}{\partial z} = \int_0^\delta u_x \,\mathrm{d}y \frac{\partial |\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2}{\partial x} + \int_0^\delta u_z \,\mathrm{d}y \frac{\partial |\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2}{\partial z} \tag{A.17}$$

- D'autre part, l'équation de quantité de mouvement selon $\boldsymbol{x}$ (A.3b) multipliée par $2u_x$ donne :

$$2u_x \frac{\partial u_x}{\partial t} + 2{u_x}^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + 2u_x u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + 2u_x u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = 2u_x u_{ex} \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + 2u_x u_{ez} \frac{\partial u_{ex}}{\partial z} + \frac{2u_x}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \tag{A.18}$$

Or, en supposant que l'écoulement extérieur est irrotationnel, c'est-à-dire que $\text{rot}(\tilde{\boldsymbol{q}}_e) = \overrightarrow{0}$, on a entre autres :

$$\frac{\partial u_{ex}}{\partial z} = \frac{\partial u_{ez}}{\partial x}$$

Ainsi, l'équation (A.18) devient :

$$2u_x \frac{\partial u_x}{\partial t} + 2{u_x}^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + 2u_x u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + 2u_x u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = 2u_x u_{ex} \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + 2u_x u_{ez} \frac{\partial u_{ez}}{\partial x} + \frac{2u_x}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \tag{A.19}$$

En se servant du fait que $2u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} = \dfrac{\partial {u_x}^2}{\partial x}$ par exemple, l'équation (A.19) se simplifie en :

$$\frac{\partial {u_x}^2}{\partial t} + u_x \frac{\partial {u_x}^2}{\partial x} + u_y \frac{\partial {u_x}^2}{\partial y} + u_z \frac{\partial {u_x}^2}{\partial z} = u_x \frac{\partial |\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2}{\partial x} + \frac{2u_x}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \tag{A.20}$$

L'équation (A.20) peut être écrite sous sa forme conservative en lui ajoutant l'équation de continuité (A.3a) multipliée par ${u_x}^2$. On obtient :

$$\frac{\partial {u_x}^2}{\partial t} + \frac{\partial {u_x}^3}{\partial x} + \frac{\partial {u_x}^2 u_y}{\partial y} + \frac{\partial {u_x}^2 u_z}{\partial z} = u_x \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{q}}_e{}^2}{\partial x} + \frac{2u_x}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \tag{A.21}$$

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement selon $\boldsymbol{x}$ multipliée par $2u_x$ (A.21) donne :

$$\frac{\partial \int_0^\delta {u_x}^2 \,\mathrm{d}y}{\partial t} + \frac{\partial \int_0^\delta {u_x}^3 \,\mathrm{d}y}{\partial x} + {u_x}_\delta^2 u_{y\delta} + \frac{\partial \int_0^\delta {u_x}^2 u_z \,\mathrm{d}y}{\partial z} = \int_0^\delta u_x \,\mathrm{d}y \frac{\partial |\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^2}{\partial x} + \frac{2}{\rho} u_{x\delta} \tau_{xy\delta} - \frac{2}{\rho} \int_0^\delta \tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} \,\mathrm{d}y \tag{A.22}$$

- De la même manière, l'équation de quantité de mouvement selon $\boldsymbol{z}$ (A.3c) multipliée par $2u_z$ donne :

$$2u_z\frac{\partial u_z}{\partial t}+2u_zu_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+2u_zu_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+2{u_z}^2\frac{\partial u_z}{\partial z}=2u_zu_{ex}\frac{\partial u_{ez}}{\partial x}+2u_zu_{ez}\frac{\partial u_{ez}}{\partial z}+\frac{2u_z}{\rho}\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \tag{A.23}$$

Sachant que l'écoulement extérieur est supposé irrotationnel ($\frac{\partial u_{ez}}{\partial x}=\frac{\partial u_{ex}}{\partial z}$), l'équation (A.23) devient :

$$2u_z\frac{\partial u_z}{\partial t}+2u_zu_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+2u_zu_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+2{u_z}^2\frac{\partial u_z}{\partial z}=2u_zu_{ex}\frac{\partial u_{ez}}{\partial z}+2u_zu_{ez}\frac{\partial u_{ez}}{\partial z}+\frac{2u_z}{\rho}\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \tag{A.24}$$

En se servant du fait que $2u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}=\frac{\partial {u_z}^2}{\partial x}$ par exemple, l'équation (A.24) se simplifie en :

$$\frac{\partial {u_z}^2}{\partial t}+u_x\frac{\partial {u_z}^2}{\partial x}+u_y\frac{\partial {u_z}^2}{\partial y}+u_z\frac{\partial {u_z}^2}{\partial z}=u_z\frac{\partial {\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}}^2}{\partial z}+\frac{2u_z}{\rho}\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \tag{A.25}$$

L'équation (A.25) peut être écrite sous sa forme conservative en lui ajoutant l'équation de continuité (A.3a) multipliée par ${u_z}^2$. On obtient :

$$\frac{\partial {u_z}^2}{\partial t}+\frac{\partial u_x{u_z}^2}{\partial x}+\frac{\partial u_y{u_z}^2}{\partial y}+\frac{\partial {u_z}^3}{\partial z}=u_z\frac{\partial |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial z}+\frac{2u_z}{\rho}\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \tag{A.26}$$

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement selon $\boldsymbol{z}$ multipliée par $2u_z$ (A.26) donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \int_0^\delta {u_z}^2\,\mathrm{d}y}{\partial t}+\frac{\partial \int_0^\delta u_x{u_z}^2\,\mathrm{d}y}{\partial x}+{u_z}_\delta^2u_{y\delta}+\frac{\partial \int_0^\delta {u_z}^3\,\mathrm{d}y}{\partial z}&=\int_0^\delta u_z\,\mathrm{d}y\frac{\partial |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial z}+\frac{2}{\rho}u_{z\delta}\tau_{zy\delta}\\&\quad-\frac{2}{\rho}\int_0^\delta \tau_{zy}\frac{\partial u_z}{\partial y}\,\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{A.27}$$

On soustrait maintenant les équations (A.22) et (A.27) à l'équation (A.17) (on rappelle que $\frac{\partial |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2=0}{\partial t}$) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \int_0^\delta (|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2-|\tilde{\boldsymbol{q}}|^2)\,\mathrm{d}y}{\partial t}+\frac{\partial \int_0^\delta u_x(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2-|\tilde{\boldsymbol{q}}|^2)\,\mathrm{d}y}{\partial x}+\frac{\partial \int_0^\delta u_z(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2-|\tilde{\boldsymbol{q}}|^2)\,\mathrm{d}y}{\partial z}&=u_{y\delta}(|\tilde{\boldsymbol{q}}_\delta|^2-|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2)\\&\quad-\frac{2}{\rho}(u_{x\delta}\tau_{xy\delta}+u_{z\delta}\tau_{zy\delta})+\frac{2}{\rho}\int_0^\delta\left(\tau_{xy}\frac{\partial u_x}{\partial y}+\tau_{zy}\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{A.28}$$

On fait enfin tendre δ vers l'infini. Il faut remarquer que :

$$\begin{aligned}\int_0^\delta (|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2-|\tilde{\boldsymbol{q}}|^2)\,\mathrm{d}y&=\int_0^\delta ({u_{ex}}^2-{u_x}^2)+({u_{ez}}^2-{u_z}^2)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^\delta (u_{ex}-u_x)(u_{ex}+u_x)+(u_{ez}-u_z)(u_{ez}+u_z)\,\mathrm{d}y\\&=u_{ex}\int_0^\delta (u_{ex}-u_x)\,\mathrm{d}y+\int_0^\delta u_x(u_{ex}-u_x)\,\mathrm{d}y+u_{ez}\int_0^\delta (u_{ez}-u_z)\,\mathrm{d}y+\int_0^\delta u_z(u_{ez}-u_z)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{\delta\longrightarrow+\infty}\int_0^\delta (|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2-|\tilde{\boldsymbol{q}}|^2)\,\mathrm{d}y=u_{ex}|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1x}+u_{ez}|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1z}+|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{xx}+|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{zz}$$

On introduit de plus les grandeurs intégrales suivantes :

$$|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3\delta_{3xx} = \int_0^\infty u_x({u_{ex}}^2 - {u_x}^2)\,\mathrm{d}y \qquad |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3\delta_{3xz} = \int_0^\infty u_z({u_{ex}}^2 - {u_x}^2)\,\mathrm{d}y$$

$$|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3\delta_{3zx} = \int_0^\infty u_x({u_{ez}}^2 - {u_z}^2)\,\mathrm{d}y \qquad |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3\delta_{3zz} = \int_0^\infty u_z({u_{ez}}^2 - {u_z}^2)\,\mathrm{d}y$$

$$|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3E_x = |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3\delta_{3xx} + |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3\delta_{3zx} = \int_0^\delta u_x(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2 - \tilde{\boldsymbol{q}}^2)\,\mathrm{d}y$$

$$|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3E_z = |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3\delta_{3xz} + |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3\delta_{3zz} = \int_0^\delta u_z(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2 - \tilde{\boldsymbol{q}}^2)\,\mathrm{d}y$$

L'équation intégrale de l'énergie cinétique (A.16) devient finalement :

$$\frac{\partial(u_{ex}|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1x} + u_{ez}|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1z} + |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{xx} + |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{zz})}{\partial t} + \frac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3E_z)}{\partial z} = 2|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3C_D$$

avec

$$C_D = \frac{1}{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3}\int_0^\infty \tau_{p_x}\frac{\partial u_x}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3}\int_0^\infty \tau_{p_z}\frac{\partial u_z}{\partial y}\,\mathrm{d}y = C_{Dx} + C_{Dz}$$

le coefficient de dissipation totale.

Système d'équations intégrales

Le système d'équation s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1x})}{\partial t} + \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{xx})}{\partial x} + \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{xz})}{\partial z} = -|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1x}\dfrac{\partial u_{ex}}{\partial x} - |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1z}\dfrac{\partial u_{ex}}{\partial z} + \dfrac{1}{2}|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2C_{fx} & \text{(A.29a)} \\ \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1z})}{\partial t} + \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{zx})}{\partial x} + \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{zz})}{\partial z} = -|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1x}\dfrac{\partial u_{ez}}{\partial x} - |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1z}\dfrac{\partial u_{ez}}{\partial z} + \dfrac{1}{2}|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2C_{fz} & \text{(A.29b)} \\ \dfrac{\partial(u_{ex}|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1x} + u_{ez}|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1z} + |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{xx} + |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{zz})}{\partial t} + \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3E_x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3E_z)}{\partial z} = 2|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3(C_{Dx} + C_{Dz}) & \text{(A.29c)} \end{cases}$$

avec C_{fx} et C_{fz} définis comme :

$$\boldsymbol{\tau_p} = \frac{1}{2}\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\boldsymbol{C_f} = \frac{1}{2}\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\begin{pmatrix} C_{fx} \\ C_{fz} \end{pmatrix}$$

Le système peut encore s'écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1x})}{\partial t} + \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{xx})}{\partial x} + \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{xz})}{\partial z} = -|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1x}\dfrac{\partial u_{ex}}{\partial x} - |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1z}\dfrac{\partial u_{ex}}{\partial z} + \dfrac{1}{2}|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2C_{fx} \\ \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1z})}{\partial t} + \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{zx})}{\partial x} + \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{zz})}{\partial z} = -|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1x}\dfrac{\partial u_{ez}}{\partial x} - |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1z}\dfrac{\partial u_{ez}}{\partial z} + \dfrac{1}{2}|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2C_{fz} \\ \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{xx} + |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2\theta_{zz})}{\partial t} + \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3E_x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3E_z)}{\partial z} = 2|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3(C_{Dx} + C_{Dz}) - u_{ex}\dfrac{\partial|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1x}}{\partial t} - u_{ez}\dfrac{\partial|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta_{1z}}{\partial t} \end{cases}$$

Couche limite thermique

On considère que l'air obéit à la l'équation d'état des gaz parfaits et donc que l'enthalpie h n'est fonction que de la température T :

$$dh = c_p dT$$

De plus, si on admet que la chaleur spécifique c_p de l'air est constante et égale à 1005 J.kg^{-1}.K^{-1} jusqu'à une température de l'ordre de 500 K, alors l'enthalpie est directement proportionnelle à la température :

$$h = c_p T(+cte)$$

L'équation intégrale de l'énergie est obtenue à partir de l'équation différentielle de l'énergie écrite sous sa forme incompressible et instationnaire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{1}{\rho c_p}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{\rho c_p}\left(u_x \frac{\partial P}{\partial x} + u_z \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho c_p}\left(\tau_{xy}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zy}\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)$$

avec $\Phi = -k\dfrac{\partial T}{\partial y}$ et k la conductivité thermique.
On a déjà vu qu'on pouvait exprimer les termes de gradients de pression tangents à la paroi en fonction du gradient de vitesse extérieur avec les relations (A.2). Or, en supposant que l'écoulement extérieur est irrotationnel, c'est-à-dire que $\mathrm{rot}(\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}) = \overrightarrow{0}$, on a entre autres :

$$\frac{\partial u_{ex}}{\partial z} = \frac{\partial u_{ez}}{\partial x}$$

donc on peut écrire que :

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = u_{ex}\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + u_{ez}\frac{\partial u_{ez}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial x}$$
$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = u_{ex}\frac{\partial u_{ex}}{\partial z} + u_{ez}\frac{\partial u_{ez}}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial z}$$

L'équation différentielle de l'énergie devient donc :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{1}{\rho c_p}\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{2c_p}\left(u_x \frac{\partial |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial x} + u_z \frac{\partial |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial z}\right) + \frac{1}{\rho c_p}\left(\tau_{xy}\frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zy}\frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \tag{A.31}$$

L'équation intégrale de l'énergie est ensuite obtenue en intégrant l'équation (A.31) dans la direction normale à la paroi, sur toute l'épaisseur de la couche limite. Dans cette section, on se donne une épaisseur δ_T fixe, assez grande et constante, sur laquelle on va intégrer l'équation de l'énergie et qu'on fera ensuite tendre vers l'infini. On écrit par définition :

$$\begin{array}{lll} u_x(\delta_T) = u_{x\delta_T} & u_y(\delta_T) = u_{y_{\delta_T}} & \tau_{xy}(\delta_T) = \tau_{xy_{\delta_T}} \\ T(\delta_T) = T_{\delta_T} & \Phi(\delta_T) = \Phi_{\delta_T} & \Phi(0) = \Phi_p \end{array}$$

L'équation différentielle de l'énergie (A.31) peut être écrite sous sa forme conservative en lui ajou-

tant l'équation de continuité (A.1a) multipliée par T. On obtient :

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial T u_x}{\partial x}+\frac{\partial T u_y}{\partial y}+\frac{\partial T u_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho c_p}\frac{\partial \Phi}{\partial y}-\frac{1}{2c_p}\left(u_x\frac{\partial|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial x}+u_z\frac{\partial|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial z}\right)+\frac{1}{\rho c_p}\left(\tau_{xy}\frac{\partial u_x}{\partial y}+\tau_{zy}\frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \tag{A.32}$$

L'équation intégrale de l'énergie est alors définie comme suit :

$$\int_0^{\delta_T}\left(T_e\times[\text{équation de continuité (A.1a)}]-[\text{équation de l'énergie (A.32)}]\right)\mathrm{d}y \tag{A.33}$$

L'intégration de l'équation de continuité (A.1a) multipliée par T_e donne :

$$T_e\frac{\partial\int_0^{\delta_T}u_x\,\mathrm{d}y}{\partial x}+T_e\frac{\partial\int_0^{\delta_T}u_z\,\mathrm{d}y}{\partial z}=-T_e u_{y_{\delta_T}} \tag{A.34}$$

L'intégration de l'équation de l'énergie (A.32) donne (on rappelle que δ_T est une constante) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\int_0^{\delta_T}T\,\mathrm{d}y}{\partial t}+\frac{\partial\int_0^{\delta_T}Tu_x\,\mathrm{d}y}{\partial x}+\frac{\partial\int_0^{\delta_T}Tu_z\,\mathrm{d}y}{\partial z}&=-T_{\delta_T}u_{y_{\delta_T}}-\frac{\Phi_{\delta_T}}{\rho c_p}+\frac{\Phi_p}{\rho c_p}\\&-\frac{1}{2c_p}\left(\frac{\partial|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial x}\int_0^{\delta_T}u_x\,\mathrm{d}y+\frac{\partial|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial z}\int_0^{\delta_T}u_z\,\mathrm{d}y\right)+\frac{1}{\rho c_p}\int_0^{\delta_T}\left(\tau_{xy}\frac{\partial u_x}{\partial y}+\tau_{zy}\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{A.35}$$

On soustrait maintenant (A.35) à (A.34) (on rappelle que $\frac{\partial T_e}{\partial t}=0$) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\int_0^{\delta_T}(T_e-T)\,\mathrm{d}y}{\partial t}+\frac{\partial\int_0^{\delta_T}u_x(T_e-T)\,\mathrm{d}y}{\partial x}+\frac{\partial\int_0^{\delta_T}u_z(T_e-T)\,\mathrm{d}y}{\partial z}&=T_{\delta_T}u_{y_{\delta_T}}-T_e u_{y_{\delta_T}}+\frac{\Phi_{\delta_T}}{\rho c_p}-\frac{\Phi_p}{\rho c_p}\\&+\left(\frac{\partial T_e}{\partial x}+\frac{1}{2c_p}\frac{\partial|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial x}\right)\int_0^{\delta_T}u_x\,\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial T_e}{\partial z}+\frac{1}{2c_p}\frac{\partial|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial z}\right)\int_0^{\delta_T}u_z\,\mathrm{d}y\\&-\frac{1}{\rho c_p}\int_0^{\delta_T}\left(\tau_{xy}\frac{\partial u_x}{\partial y}+\tau_{zy}\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{A.36}$$

On peut montrer que les termes $\left(\frac{\partial T_e}{\partial x}+\frac{1}{2c_p}\frac{\partial|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial T_e}{\partial z}+\frac{1}{2c_p}\frac{\partial|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial z}\right)$ sont nuls. En effet, pour un écoulement de fluide parfait stationnaire, l'enthalpie totale est constante :

$$h_{ie}=h_e+\frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{2}=cte$$

d'où

$$\frac{\partial h_{ie}}{\partial x}=\frac{\partial h_e}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial x}=0\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial h_{ie}}{\partial z}=\frac{\partial h_e}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial z}=0$$

ou encore :

$$\frac{\partial T_e}{\partial x}+\frac{1}{2c_p}\frac{\partial|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial x}=0\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial T_e}{\partial z}+\frac{1}{2c_p}\frac{\partial|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}{\partial z}=0$$

L'équation (A.36) devient alors :

$$\frac{\partial \int_0^{\delta_T} (T_e - T)\,\mathrm{d}y}{\partial t} + \frac{\partial \int_0^{\delta_T} u_x (T_e - T)\,\mathrm{d}y}{\partial x} + \frac{\partial \int_0^{\delta_T} u_z (T_e - T)\,\mathrm{d}y}{\partial z} = T_{\delta_T} u_{y_{\delta_T}} - T_e u_{y_{\delta_T}} + \frac{\Phi_{\delta_T}}{\rho c_p} - \frac{\Phi_p}{\rho c_p} - \frac{1}{\rho c_p} \int_0^{\delta_T} \left(\tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \mathrm{d}y$$

On fait enfin tendre δ_T vers l'infini. Ceci signifie que :

$$u_{y_{\delta_T}} \longrightarrow u_{ey}, \qquad T_{\delta_T} \longrightarrow T_e \qquad \text{et} \qquad \Phi_{\delta_T} \longrightarrow 0$$

On introduit de plus les grandeurs intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
(T_e - T_p)\delta_{1T} &= \int_0^{\infty} (T_e - T)\,\mathrm{d}y \\
(T_e - T_p)|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\theta_{Tx} &= \int_0^{\infty} u_x (T_e - T)\,\mathrm{d}y \\
(T_e - T_p)|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\theta_{Tz} &= \int_0^{\infty} u_z (T_e - T)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

L'équation intégrale de l'énergie (A.33) s'écrit finalement :

$$\frac{\partial((T_e - T_p)\delta_{1T})}{\partial t} + \frac{\partial((T_e - T_p)|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\theta_{Tx})}{\partial x} + \frac{\partial((T_e - T_p)|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\theta_{Tz})}{\partial z} = -\frac{\Phi_p}{\rho c_p} - \frac{1}{c_p}|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3 C_D \tag{A.37}$$

B. Construction du profil de vitesse laminaire longitudinal

Le profil de vitesse longitudinal laminaire choisi dans cette thèse est le suivant :

$$\frac{u_s}{|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|}(\eta) = \widehat{u}_s(\eta) = 1 - (1 + A_s\eta)(1-\eta)^{p_s-1} \tag{B.1}$$

avec $\eta = y/\delta$. Les trois conditions qui ont été imposées pour exprimer A_s, p_s et δ en fonction des variables primaires longitudinales δ_{1s} et θ_{ss} sont :

$$\left(\frac{\partial \widehat{u}_s}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|\delta C_{fs}}{2\nu} \tag{B.2a}$$

$$\delta_{1s} = \delta \int_0^1 (1 - \widehat{u}_s)\,\mathrm{d}\eta \tag{B.2b}$$

$$\theta_{ss} = \delta \int_0^1 \widehat{u}_s(1 - \widehat{u}_s)\,\mathrm{d}\eta \tag{B.2c}$$

avec

$$\frac{C_{fs}}{2} Re_{\theta_{ss}} = g(H) \qquad \text{et } Re_{\theta_{ss}} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|\theta_{ss}}{\nu} \tag{B.3}$$

$g(H)$ étant donné par (2.16) et $H = \dfrac{\delta_{1s}}{\theta_{ss}}$.

Développement de la condition (B.2a)
On cherche à montrer que la condition (B.2a) est équivalente à :

$$p_s - 1 - A_s = Hg(H)\frac{\delta}{\delta_{1s}}$$

Pour cela, on calcule la dérivée du profil vitesse (B.1) :

$$\frac{\partial \widehat{u}_s}{\partial \eta} = -A_s(1-\eta)^{p_s-1} + (p_s - 1)(1 + A_s\eta)(1-\eta)^{p_s-2}$$

d'où :

$$\left(\frac{\partial \widehat{u}_s}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = p_s - 1 - A_s$$

D'autre part, d'après (B.3) et comme $H = \frac{\delta_{1s}}{\theta_{ss}}$:

$$\frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|C_{fs}}{2\nu}\frac{\delta_{1s}}{H} = g(H)$$

d'où

$$\frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_e|\delta C_{fs}}{2\nu} = Hg(H)\frac{\delta}{\delta_{1s}}$$

Finalement, la condition (B.2a) est bien équivalente à :

$$p_s - 1 - A_s = Hg(H)\frac{\delta}{\delta_{1s}}$$

Développement de la condition (B.2b)
On cherche à montrer que la condition (B.2b) est équivalente à :

$$\delta_{1s} = \frac{\delta(p_s + 1 + A_s)}{p_s(p_s + 1)}$$

En substituant (B.1) dans (B.2b) on a :

$$\begin{aligned}\delta_{1s} &= \delta \int_0^1 (1 + A_s\eta)(1-\eta)^{p_s-1}\,\mathrm{d}\eta \\ &= \delta\left[\int_0^1 (1-\eta)^{p_s-1}\,\mathrm{d}\eta + A_s\int_0^1 \eta(1-\eta)^{p_s-1}\,\mathrm{d}\eta\right]\end{aligned}$$

Or, on peut montrer par récurrence que pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \eta^N(1-\eta)^x\,\mathrm{d}\eta = \frac{N!}{\prod_{j=1}^{N+1}(x+j)} \tag{B.4}$$

d'où :

$$\delta_{1s} = \delta\left[\frac{1}{p_s} + \frac{A_s}{p_s(p_s+1)}\right]$$

Finalement, la condition (B.2b) est bien équivalente à :

$$\delta_{1s} = \frac{\delta(p_s + 1 + A_s)}{p_s(p_s + 1)}$$

Développement de la condition (B.2c)
On cherche à montrer que la condition (B.2c) est équivalente à :

$$\theta_{ss} = \delta\left(\frac{p_s + 1 + A_s}{p_s(p_s+1)} - \frac{2A_s^2 + 2A_s(2p_s+1) + 2p_s(2p_s+1)}{(2p_s-1)2p_s(2p_s+1)}\right)$$

En substituant (B.1) dans (B.2c) on a :

$$\begin{aligned}\theta_{ss} &= \delta\int_0^1 \left[1 - (1+A_s\eta)(1-\eta)^{p_s-1}\right](1+A_s\eta)(1-\eta)^{p_s-1}\,\mathrm{d}\eta \\ &= \delta\int_0^1 (1+A_s\eta)(1-\eta)^{p_s-1}\,\mathrm{d}\eta - \delta\int_0^1 (1+A_s\eta)^2(1-\eta)^{2p_s-2}\,\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

On reconnait le premier terme qui est δ_{1s}, on a donc :

$$\begin{aligned}\theta_{ss} &= \frac{\delta(p_s+1+A_s)}{p_s(p_s+1)} - \delta\int_0^1 (1+A_s\eta)^2(1-\eta)^{2p_s-2}\,\mathrm{d}\eta \\ &= \frac{\delta(p_s+1+A_s)}{p_s(p_s+1)} - \delta\left[\int_0^1 (1-\eta)^{2p_s-2}\,\mathrm{d}\eta + 2A_s\int_0^1 \eta(1-\eta)^{2p_s-2}\,\mathrm{d}\eta + {A_s}^2\int_0^1 \eta^2(1-\eta)^{2p_s-2}\,\mathrm{d}\eta\right]\end{aligned}$$

D'après (B.4), on a :

$$\theta_{ss} = \frac{\delta(p_s+1+A_s)}{p_s(p_s+1)} - \delta\left[\frac{1}{(2p_s-1)} + \frac{2A_s}{(2p_s-1)2p_s} + \frac{2{A_s}^2}{(2p_s-1)2p_s(2p_s+1)}\right]$$

Finalement, la condition (B.2c) est bien équivalente à :

$$\theta_{ss} = \delta\left(\frac{p_s+1+A_s}{p_s(p_s+1)} - \frac{2A_s^2+2A_s(2p_s+1)+2p_s(2p_s+1)}{(2p_s-1)2p_s(2p_s+1)}\right)$$

Les conditions (B.2a), (B.2b) et (B.2c) peuvent donc s'écrire comme un système de trois équations à trois inconnues qui sont A_s, δ et p_s :

$$p_s - 1 - A_s = Hg(H)\frac{\delta}{\delta_{1s}} \tag{B.5}$$

$$\delta_{1s} = \frac{\delta(p_s+1+A_s)}{p_s(p_s+1)} \tag{B.6}$$

$$\theta_{ss} = \delta\left(\frac{p_s+1+A_s}{p_s(p_s+1)} - \frac{2A_s^2+2A_s(2p_s+1)+2p_s(2p_s+1)}{(2p_s-1)2p_s(2p_s+1)}\right) \tag{B.7}$$

Calcul de A_s à partir de (B.5)
La condition (B.5) permet d'abord d'exprimer A_s comme une fonction de H, p_s et δ/δ_{1s} :

$$A_s = p_s - 1 - Hg(H)\frac{\delta}{\delta_{1s}} \tag{B.8}$$

Calcul de δ/δ_{1s} à partir de (B.6)
Ensuite on peut exprimer δ/δ_{1s} en fonction de H et p_s à partir de la condition (B.6) :

$$\frac{\delta}{\delta_{1s}} = \frac{p_s(p_s+1)}{p_s+1+A_s}$$

Or, d'après (B.8) :

$$\frac{\delta}{\delta_{1s}} = \frac{p_s(p_s+1)}{2p_s - Hg(H)\frac{\delta}{\delta_{1s}}}$$

d'où :

$$Hg(H)\left(\frac{\delta}{\delta_{1s}}\right)^2 - 2p_s\frac{\delta}{\delta_{1s}} + p_s(p_s+1) = 0 \tag{B.9}$$

Le discriminant de l'équation (B.9) vaut :

$$\Delta = 4{p_s}^2 - 4p_s(p_s+1)Hg(H)$$

$$\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad p_s(1-Hg(H)) > Hg(H)$$

$$\begin{array}{llll} \text{si } Hg(H) < 1 & \text{alors} & p_s \geq \dfrac{Hg(H)}{1-Hg(H)} & \\ \text{si } Hg(H) > 1 & \text{alors} & p_s \leq \dfrac{Hg(H)}{1-Hg(H)} & \text{(impossible car dans ce cas } p < 0) \end{array}$$

La figure B.1 montre l'évolution de $Hg(H)$ en fonction de H.

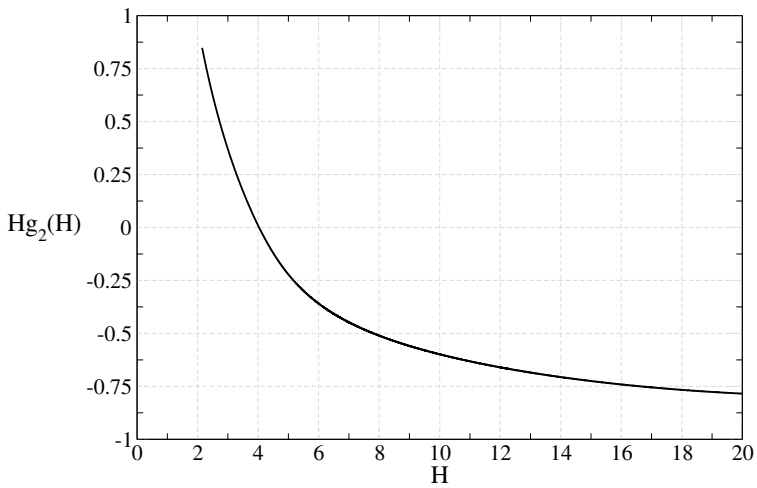


FIGURE B.1. – Évolution de $Hg(H)$ en fonction de H

Finalement, si $H < 1.9538$, $Hg(H) > 1$ et il n'existe pas de degré p pour le polynôme $\widehat{u}_s(\eta)$ tel que Δ soit positif. En revanche, si $H > 1.9538$, $Hg(H) < 1$ et il existe, à H fixé, des fonctions $\widehat{u}_s(\eta)$ pour lesquelles Δ est positif. Ces polynômes sont tels que $p_s \geq \dfrac{Hg(H)}{1-Hg(H)}$ et $p_s > 2$. La figure B.2 montre l'évolution de la valeur minimum que doit prendre p_s en fonction du facteur de forme pour que les solutions de δ/δ_{1s} soient réelles. On constate que plus la valeur de H est faible, plus le degré du polynôme doit être élevé. p_{lim} tend vers $+\infty$ quand H tend vers 1.9538 par valeur supérieure.

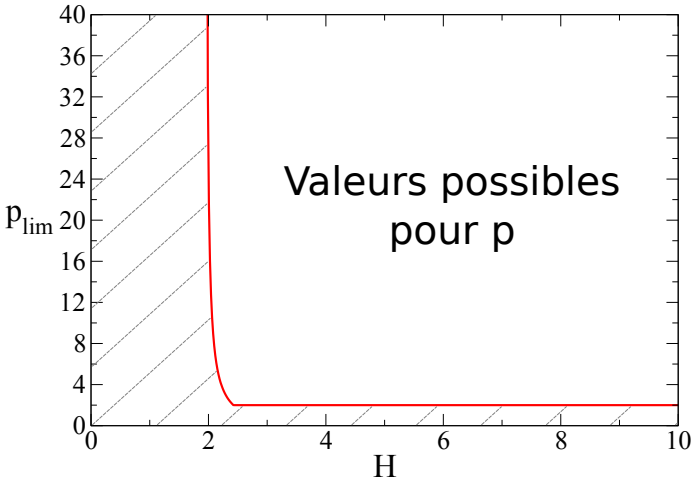


FIGURE B.2. – Évolution de la valeur minimale $(\max(\frac{Hg(H)}{1-Hg(H)}, 2))$ du degré du polynôme modélisant le profil de vitesse en fonction du facteur de forme.

Si la condition $p_s \geq \dfrac{Hg(H)}{1-Hg(H)}$ est respectée, alors les solutions de l'équation (B.9) sont :

$$\frac{\delta}{\delta_{1s}} = \frac{p_s - \sqrt{{p_s}^2 - p_s(p_s+1)Hg(H)}}{Hg(H)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\delta}{\delta_{1s}} = \frac{p_s + \sqrt{{p_s}^2 - p_s(p_s+1)Hg(H)}}{Hg(H)}$$

On sait d'autre part que δ/δ_{1s} doit toujours être positif car c'est un rapport de deux épaisseurs. Quand $g(H)$ est positif, alors $\sqrt{{p_s}^2 - p_s(p_s+1)Hg(H)}$ est inférieur à p_s et les deux solutions sont positives. Mais quand $g(H)$ est négatif, alors $\sqrt{{p_s}^2 - p_s(p_s+1)Hg(H)}$ est supérieur à p_s et la première solution est positive (car le numérateur et le dénominateur sont négatifs) et la deuxième est négative (numérateur positif et dénominateur négatif). Finalement, la solution retenue pour l'équation (B.9) est :

$$\frac{\delta}{\delta_{1s}} = \frac{p_s - \sqrt{{p_s}^2 - p_s(p_s+1)Hg(H)}}{Hg(H)} \tag{B.10}$$

On peut éviter une forme indéterminée (quand $g(H) = 0$) en l'écrivant plutôt sous cette forme :

$$\frac{\delta}{\delta_{1s}} = \frac{p_s(p_s+1)}{p_s + \sqrt{{p_s}^2 - p_s(p_s+1)Hg(H)}} \tag{B.11}$$

De plus, en injectant (B.10) dans (B.8), on peut aussi exprimer A_s en fonction de p_s et H uniquement :

$$A_s = \sqrt{{p_s}^2 - p_s(p_s+1)Hg(H)} - 1 \tag{B.12}$$

Calcul de p_s à partir de (B.7)

On peut enfin exprimer p_s en fonction de H grâce à la condition (B.7). Comme $H = \delta_{1s}/\theta_{ss}$, la condition devient :

$$\frac{1}{H} = \frac{\delta}{\delta_{1s}} \left(\frac{p_s + 1 + A_s}{p_s(p_s+1)} - \frac{2A_s^2 + 2A_s(2p_s+1) + 2p_s(2p_s+1)}{(2p_s-1)2p_s(2p_s+1)} \right)$$

Grâce à (B.12) et (B.11), la condition ci-dessus dépend uniquement de p_s et de H. Cette équation a donc pu être résolue numériquement pour obtenir $p_s(H)$ (voir la courbe "valeurs cibles" de la figure B.3). Pour approcher cette fonction, on se donne une expression de $p_s(H)$ par morceaux (car $g(H)$ est définie par morceaux) :

$$p_s(H) = x_1 + \frac{x_2}{(H - 1.9538)^{x_3}} \qquad \text{si } H \leq H_{dec}$$
$$p_s(H) = 2 + \frac{x_4}{(H - x_5)^{x_6}} \qquad \text{si } H > H_{dec}$$

avec $H_{dec} = 4.02923$. En effet, on sait que p_s doit tendre vers $+\infty$ quand H tend vers 1.9538 par valeur supérieure et p_s doit toujours être supérieur à 2 notamment quand H tend vers $+\infty$. De plus, on impose que $p_s(H)$ et $\frac{\partial p_s}{\partial H}$ doivent être continues en H_{dec}, d'où :

$$x_5 = H_{dec} - \left(\frac{x_4 x_6 (H_{dec} - 1.9538)^{x_3+1}}{x_2 x_3}\right)^{\frac{1}{x_6+1}} \qquad \text{(continuité de p'}(H)\text{)}$$
$$x_1 = 2 + \frac{x_4}{(H_{dec} - x_5)^{x_6}} - \frac{x_2}{(H_{dec} - 1.9538)^{x_3}} \qquad \text{(continuité de p}(H)\text{)}$$

Ce système est résolu à l'aide d'une méthode des moindres carrés pour approcher au mieux la fonction $p_s(H)$ et on trouve :

$$p_s(H) = 2.4834 + \frac{0.7877}{(H - 1.9538)^{1.6001}} \qquad \text{if } H \leq H_{dec} \tag{B.14a}$$
$$p_s(H) = 2 + \frac{2.0411 \times 10^{11}}{(H + 25.890)^{7.7560}} \qquad \text{if } H > H_{dec} \tag{B.14b}$$

La figure B.3 montre que la solution numérique est très bien approchée par la fonction analytique (B.14). Finalement, le profil de vitesse laminaire longitudinal s'écrit uniquement en fonction des

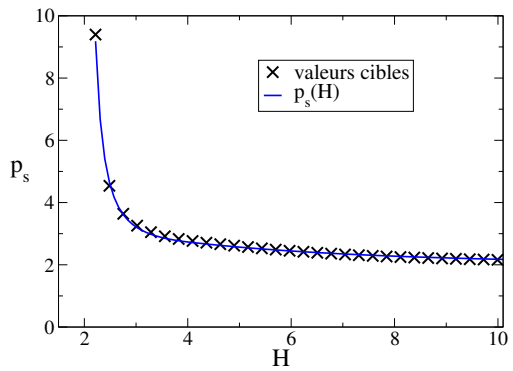


FIGURE B.3. – Exposant du profil de vitesse analytique p_s en fonction du facteur de forme H

variables primaires du système :

$$\widehat{u}_s(\eta) = 1 - (1 + A_s\eta)(1 - \eta)^{p_s - 1} \qquad \text{où} \qquad \eta = \frac{y}{\delta} \tag{B.15}$$

avec

$$A_s = \sqrt{{p_s}^2 - p_s(p_s+1)Hg(H)} - 1$$

et

$$\frac{\delta}{\delta_{1s}} = \frac{p_s(p_s+1)}{p_s + \sqrt{{p_s}^2 - p_s(p_s+1)Hg(H)}}$$

p_s est donnée par (B.14) et $g(H)$ est donné par (2.16).

C. Construction du profil de température laminaire

On suppose une paroi de température donnée $T_p = cte$. Par analogie avec la couche limite dynamique, le profil de température laminaire utilisé dans cette thèse a une forme similaire à celle du profil de vitesse laminaire longitudinal :

$$\widehat{\Theta}(\xi) = \frac{T_e - T}{T_e - T_p}(\xi) = (1 + A_T\xi)(1-\xi)^{q-1} \qquad \text{avec} \qquad \xi = \frac{y}{\delta_T} \tag{C.1}$$

On suppose dans un premier temps que q est connu, il sera déterminé par la suite. Les conditions qui ont été imposées pour exprimer A_T et δ_T en fonction de δ_{1T}, la variable primaire de l'équation intégrale de l'énergie, sont :

$$\left(\frac{\partial^2 \widehat{\Theta}}{\partial \xi^2}\right)_{\xi=0} = \frac{\rho_e |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4 \left({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2\right) {\delta_T}^2}{4k\nu_e(T_e - T_p)} \tag{C.2a}$$

$$\delta_{1T} = \delta_T \int_0^1 \widehat{\Theta}\, \mathrm{d}\xi \tag{C.2b}$$

La condition (C.2a) est obtenue en écrivant l'équation locale de l'énergie (3.15) en $y = 0$:

$$0 = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{y=0} + \mu \left(\frac{\partial u_s}{\partial y}\right)^2_{y=0} + \mu \left(\frac{\partial u_c}{\partial y}\right)^2_{y=0}$$

On sait de plus que :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = -k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{y=0} = k\frac{(T_e - T_p)}{{\delta_T}^2}\left(\frac{\partial^2 \widehat{\Theta}}{\partial \xi^2}\right)_{\xi=0}$$

et

$$\left(\frac{\partial u_s}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2 C_{fs}}{2\nu} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial u_c}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2 C_{fc}}{2\nu}$$

Cette condition fait intervenir le coefficient de frottement qui est connu grâce au calcul de couche limite dynamique.

Développement de la condition (C.2a)
On cherche à montrer que la condition (C.2a) est équivalente à :

$$(q-1)\left[(q-2) - 2A_T\right] = \frac{\rho_e |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4 \left({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2\right) {\delta_T}^2}{4k\nu_e(T_e - T_p)}$$

Pour cela, on calcule la dérivée seconde du profil de température (C.1) :

$$\frac{\partial \widehat{\Theta}}{\partial \xi} = A_T(1-\xi)^{q-1} - (q-1)\,(1+A_T\xi)\,(1-\xi)^{q-2}$$
$$\frac{\partial^2 \widehat{\Theta}}{\partial \xi^2} = -2(q-1)A_T(1-\xi)^{q-2} + (q-1)(q-2)(1+A_T\xi)(1-\xi)^{q-3}$$

d'où :

$$\left(\frac{\partial^2 \widehat{\Theta}}{\partial \xi^2}\right)_{\xi=0} = (q-1)\,[(q-2) - 2A_T]$$

Finalement, la condition (C.2a) est bien équivalente à :

$$(q-1)\,[(q-2) - 2A_T] = \frac{\rho_e |\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4 \left({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2\right) {\delta_T}^2}{4k\nu_e(T_e - T_p)}$$

Développement de la condition (C.2b)
On cherche à montrer que la condition (C.2b) est équivalente à :

$$\delta_{1T} = \frac{\delta_T(q+1+A_T)}{q(q+1)}$$

En substituant (C.1) dans (C.2b), on a :

$$\begin{aligned}\delta_{1T} &= \delta_T \int_0^1 (1+A_T\xi)(1-\xi)^{q-1}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \delta_T \left[\int_0^1 (1-\xi)^{q-1}\,\mathrm{d}\xi + A_T \int_0^1 \xi(1-\xi)^{q-1}\,\mathrm{d}\xi\right]\end{aligned}$$

Or, on peut montrer par récurrence que pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \eta^N (1-\eta)^x\,\mathrm{d}\eta = \frac{N!}{\prod\limits_{j=1}^{N+1}(x+j)}$$

d'où :

$$\delta_{1T} = \delta_T \left[\frac{1}{q} + \frac{A_T}{q(q+1)}\right]$$

Finalement, la condition (C.2b) est bien équivalente à :

$$\delta_{1T} = \frac{\delta_T(q+1+A_T)}{q(q+1)}$$

Si on suppose que q est connu, les conditions (C.2a) et (C.2b) peuvent donc s'écrire comme un système de deux équations à deux inconnues qui sont A_T et δ_T :

$$(q-1)\left[(q-2)-2A_T\right] = \frac{\rho_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4\left({C_{fs}}^2+{C_{fc}}^2\right){\delta_T}^2}{4k\nu_e(T_e-T_p)} \tag{C.3a}$$

$$\delta_{1T} = \frac{\delta_T(q+1+A_T)}{q(q+1)} \tag{C.3b}$$

Calcul de A_T à partir de (C.3a)
La condition (C.3a) permet d'exprimer A_T comme une fonction de δ_T et q :

$$A_T = \frac{4(q-1)(q-2)k\nu_e(T_e-T_p)-\rho_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4\left({C_{fs}}^2+{C_{fc}}^2\right){\delta_T}^2}{8(q-1)k\nu_e(T_e-T_p)} \tag{C.4}$$

Calcul de δ_T à partir de (C.3b)
Si on suppose que q est connu, comme δ_{1T} est connu aussi (puisque c'est la variable primaire), la condition (C.3b) est une équation sur δ_T qui peut être résolue numériquement en lui substituant l'expression de A_T (C.4) :

$$\delta_{1T} = \frac{12q(q-1)k\nu_e(T_e-T_p)\delta_T-\rho_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4\left({C_{fs}}^2+{C_{fc}}^2\right){\delta_T}^3}{8q(q-1)(q+1)k\nu_e(T_e-T_p)} \tag{C.5}$$

Attention, le modèle n'est pas valable pour une température de paroi inférieure à la température de l'écoulement extérieur (c'est-à-dire $T_p < T_e$). En effet, pour que le profil de température existe et soit physique, il faut que l'équation (C.5) fournisse une épaisseur de couche limite thermique positive pour tout δ_{1T} positif. La dérivée de la fonction $\delta_{1T}(\delta_T)$ s'écrit :

$$\frac{\partial\delta_{1T}}{\partial\delta_T} = \frac{12q(q-1)k\nu_e(T_e-T_p)-3\rho_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4\left({C_{fs}}^2+{C_{fc}}^2\right){\delta_T}^2}{8q(q-1)(q+1)k\nu_e(T_e-T_p)}$$

Lorsque $T_p > T_e$, $\dfrac{\partial\delta_{1T}}{\partial\delta_T}$ est toujours positif (on rappelle que $q > 2$) et la fonction (C.5) est alors monotone, croissante et passe par l'origine. Il existe donc toujours une épaisseur de couche limite positive pour δ_{1T} positif. En revanche, ce n'est pas le cas pour $T_p < T_e$. La fonction n'est plus monotone et il n'existe pas toujours de solution de δ_T positive pour δ_{1T} positif.

Détermination de q
La détermination de l'exposant q du profil de température est basée sur l'analyse de solutions obtenues pour des écoulements auto-similaires de type Falkner-Skan (voir sous-section 3.2.2). Une approximation linéaire a ensuite permis de déduire q en fonction de H. De plus, par construction, q doit rester strictement supérieur à 2 d'où :

$$q(H) = max\left[(...H+...),(2+\epsilon)\right] \tag{C.6}$$

avec $\epsilon = 0.01$ ici.

Finalement, le profil de température peut être exprimé uniquement en fonction de δ_{1T} et des

grandeurs dynamiques :

$$\widehat{\Theta}(\xi) = (1 + A_T\xi)(1 - \xi)^{q-1} \qquad \text{avec} \qquad \xi = \frac{y}{\delta_T} \tag{C.7}$$

où A_T est donné par (C.4), q est donné par (C.6) et δ_T est résolu numériquement à partir de (C.5).

D. Construction du profil de température avec condition mixte en paroi

On suppose que le profil de température s'écrit sous la forme d'un polynôme de degré q :

$$T_e - T = \Theta(y) = \sum_{i=0}^{q} \left(B_i \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^i \right)$$

où δ_T est une estimation de l'épaisseur de couche limite thermique. On a donc besoin de $q+1$ conditions aux limites pour déterminer les coefficients B_i. Les trois premières conditions utilisées sont :

$$\text{en } y = \delta_T \quad \Theta = 0 \tag{D.1}$$

$$\text{en } y = 0 \quad -k\frac{\partial T}{\partial y} = \Phi_0 + h_0(T_0 - T) \quad \text{donc} \quad k\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \Phi_0 + h_0(\Theta - \Theta_0) \tag{D.2}$$

$$\text{en } y = 0 \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)}{4k\nu} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = \frac{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)}{4k\nu} \tag{D.3}$$

avec $\Theta_0 = T_e - T_0$.
Pour les autres conditions, on impose que toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $(q-2)$ en $y = \delta_T$ soient nulles :

$$\text{en } y = \delta_T \quad \frac{\partial^j T}{\partial y^j} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial^j \Theta}{\partial y^j} = 0 \quad \forall j \leq q-2, \quad j \in \mathbb{N} \tag{D.4}$$

Remarque : les grandeurs Φ_0, h_0 et T_0 sont des paramètres donnés par l'utilisateur. Ils permettent d'imposer soit une température de paroi ($\Phi_0 = 0$, $h_0 \longrightarrow +\infty$ et $T_0 = T_p$), soit un flux pariétal ($\Phi_0 = \Phi_p$, $h_0 = 0$), soit une condition mixte.

La condition (D.3) est obtenue en écrivant l'équation locale de l'énergie en $y = 0$:

$$0 = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{y=0} + \mu\left(\frac{\partial u_s}{\partial y}\right)^2_{y=0} + \mu\left(\frac{\partial u_c}{\partial y}\right)^2_{y=0}$$

On sait de plus que $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = -k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{y=0}$ et $\left(\frac{\partial u_s}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2 C_{fs}}{2\nu}$ et $\left(\frac{\partial u_c}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2 C_{fc}}{2\nu}$.
On remarque que cette condition fait intervenir le coefficient de frottement qui est connu grâce au calcul de couche limite dynamique.

D'après les conditions (D.4), la dérivée du polynôme $\Theta(y)$, qui est de degré $(q-1)$ doit s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \left(a\frac{y}{\delta_T} + e\right)\left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right)^{q-2} \tag{D.5}$$

On note que q devra être strictement supérieur à 2. On peut déterminer e grâce à la condition (D.2) :

$$\text{en } y = 0 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\Phi_0 + h_0(\Theta - \Theta_0)}{k} = e$$

En dérivant (D.5) on a :

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = \frac{a}{\delta_T}\left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right)^{q-2} - \frac{q-2}{\delta_T}\left(a\frac{y}{\delta_T} + e\right)\left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right)^{q-3}$$

La condition (D.3) permet d'en déduire que :

$$\text{en } y = 0 \quad \frac{a - (q-2)e}{\delta_T} = \frac{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)}{4k\nu}$$

d'où

$$a = (q-2)e + \frac{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)\delta_T}{4k\nu}$$

Le profil de température est ensuite obtenu en intégrant (D.5) à l'aide d'une intégration par partie :

$$\Theta = \frac{-\delta_T}{q-1}\left(a\frac{y}{\delta_T} + e\right)\left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right)^{q-1} - \int \frac{-a}{q-1}\left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right)^{q-1} \mathrm{d}y + cte$$
$$\Theta = \frac{-\delta_T}{q-1}\left(a\frac{y}{\delta_T} + e\right)\left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right)^{q-1} - \frac{a\delta_T}{q(q-1)}\left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right)^{q} + cte'$$

La condition (D.1) permet d'en déduire que $cte' = 0$ d'où :

$$\Theta = \frac{-\delta_T}{q-1}\left(e + \frac{a}{q} + \frac{a(q-1)}{q}\frac{y}{\delta_T}\right)\left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right)^{q-1}$$

On a donc :

$$\Theta(y = 0) = \frac{-(a + eq)\delta_T}{q(q-1)}$$

d'où le système d'équations suivant pour a et e :

$$\begin{cases} a = (q-2)e + \dfrac{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)\delta_T}{4k\nu} \\ e = \dfrac{\Phi_0 - h_0\Theta_0}{k} - \dfrac{(a + eq)h_0\delta_T}{q(q-1)k} \end{cases}$$

La résolution du système nous donne :

$$\begin{cases} a = \dfrac{q\left(4(q-1)(q-2)k\nu(\Phi_0 - h_0\Theta_0) + \rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)h_0{\delta_T}^2 + (q-1)k\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)\delta_T\right)}{4(q-1)k\nu(qk + 2h_0\delta_T)} \\ e = \dfrac{4q(q-1)k\nu(\Phi_0 - h_0\Theta_0) - \rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)h_0{\delta_T}^2}{4(q-1)k\nu(qk + 2h_0\delta_T)} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} e + \dfrac{a}{q} & = \dfrac{8(q-1)^2 k\nu(\Phi_0 - h_0\Theta_0) + (q-1)k\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)\delta_T}{4(q-1)k\nu(qk + 2h_0\delta_T)} \\ \dfrac{a(q-1)}{q} & = \dfrac{4(q-1)(q-2)k\nu(\Phi_0 - h_0\Theta_0) + \rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)h_0{\delta_T}^2 + (q-1)k\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)\delta_T}{4k\nu(qk + 2h_0\delta_T)} \end{cases}$$

Finalement on peut écrire le profil de température sous la forme :

$$T_e - T = \Theta(y) = \left(C + D\frac{y}{\delta_T}\right)\left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right)^{q-1}$$

avec

$$\begin{cases} C = \dfrac{-\left(8(q-1)\nu(\Phi_0 - h_0\Theta_0) + \rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)\delta_T\right)\delta_T}{4(q-1)\nu(qk + 2h_0\delta_T)} \\ D = \dfrac{-\left(4(q-1)(q-2)k\nu(\Phi_0 - h_0\Theta_0) + \rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)h_0{\delta_T}^2 + (q-1)k\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)\delta_T\right)\delta_T}{4(q-1)k\nu(qk + 2h_0\delta_T)} \end{cases}$$

Cas d'une température de paroi imposée

Dans le cas d'une température imposée, c'est-à-dire avec $\Phi_0 = 0$, $h_0 \longrightarrow +\infty$ et $T_0 = T_p$, on a :

$$\begin{cases} C = \Theta_0 \\ D = \dfrac{4(q-1)(q-2)k\nu\Theta_0 - \rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2){\delta_T}^2}{8(q-1)k\nu} \end{cases}$$

Cas d'un flux pariétal imposé

Dans le cas d'un flux imposé en paroi, c'est-à-dire avec $\Phi_0 = \Phi_p$, $h_0 = 0$, on a :

$$\begin{cases} C = \dfrac{-\left(8(q-1)\nu\Phi_0 + \rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)\delta_T\right)\delta_T}{4q(q-1)\nu k} \\ D = \dfrac{-\left(4(q-1)(q-2)k\nu\Phi_0 + (q-1)k\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4({C_{fs}}^2 + {C_{fc}}^2)\delta_T\right)\delta_T}{4q(q-1)k^2\nu} \end{cases}$$

E. Calcul des fonctions de fermeture

Relations de fermeture longitudinales pour une couche limite laminaire

On cherche à montrer que les relations de fermeture longitudinales pour une couche limite laminaire s'écrivent :

$$\frac{C_{fs}}{2} Re_{\theta_{ss}} = g(H) \tag{E.1a}$$

$$\frac{\delta_{3ss}}{\theta_{ss}} = f_l(H) \tag{E.1b}$$

$$\frac{2C_{Ds}}{f_l(H)} Re_{\theta_{ss}} = l(H) \tag{E.1c}$$

Coefficient de frottement

La relation de fermeture (E.1a) est en fait une donnée du problème et $g(H)$ est donné par (2.16).

Épaisseur d'énergie cinétique

Par définition, on a :

$$\delta_{3ss} = \delta \int_0^1 \widehat{u}_s (1 - \widehat{u}_s^2) \, \mathrm{d}\eta$$

En remplaçant $\widehat{u}_s(\eta)$ par son expression (B.15) on obtient :

$$\delta_{3ss} = \delta \int_0^1 \left[A' + B' A_s + C' {A_s}^2 + D' {A_s}^3 \right] \, \mathrm{d}\eta$$

avec

$$\begin{aligned}
A' &= 2(1-\eta)^{p_s - 1} - 3(1-\eta)^{2p_s - 2} + (1-\eta)^{3p_s - 3} \\
B' &= 2\eta(1-\eta)^{p_s - 1} - 6\eta(1-\eta)^{2p_s - 2} + 3\eta(1-\eta)^{3p_s - 3} \\
C' &= -3\eta^2(1-\eta)^{2p_s - 2} + 3\eta^2(1-\eta)^{3p_s - 3} \\
D' &= \eta^3(1-\eta)^{3p_s - 3}
\end{aligned}$$

Or, sachant que pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \eta^N (1-\eta)^x \, \mathrm{d}\eta = \frac{N!}{\prod_{j=1}^{N+1} (x+j)}$$

on en déduit :

$$\delta_{3ss} = \delta \left[A + B A_s + C {A_s}^2 + D {A_s}^3 \right] \tag{E.2}$$

avec

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{2}{p_s} - \frac{3}{(2p_s-1)} + \frac{1}{(3p_s-2)} \\
B &= \frac{2}{p_s(p_s+1)} - \frac{6}{(2p_s-1)2p_s} + \frac{3}{(3p_s-2)(3p_s-1)} \\
C &= \frac{-6}{(2p_s-1)2p_s(2p_s+1)} + \frac{6}{(3p_s-2)(3p_s-1)3p_s} \\
D &= \frac{6}{(3p_s-2)(3p_s-1)3p_s(3p_s+1)}
\end{aligned}
$$

De la même manière, on peut calculer θ_{ss} :

$$\theta_{ss} = \delta \int_0^1 \widehat{u}_s(1-\widehat{u}_s)\,\mathrm{d}\eta$$

En remplaçant $\widehat{u}_s(\eta)$ par son expression (B.15) on obtient :

$$\theta_{ss} = \delta \int_0^1 \left[E' + F'A_s + G'{A_s}^2\right]\,\mathrm{d}\eta$$

avec

$$
\begin{aligned}
E' &= (1-\eta)^{p_s-1} - (1-\eta)^{2p_s-2} \\
F' &= \eta(1-\eta)^{p_s-1} - 2\eta(1-\eta)^{2p_s-2} \\
G' &= -\eta^2(1-\eta)^{2p_s-2}
\end{aligned}
$$

on en déduit :

$$\theta_{ss} = \delta\left[E + FA_s + G{A_s}^2\right] \tag{E.3}$$

avec

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{p_s} - \frac{1}{(2p_s-1)} \\
F &= \frac{1}{p_s(p_s+1)} - \frac{2}{(2p_s-1)2p_s} \\
G &= \frac{-2}{(2p_s-1)2p_s(2p_s+1)}
\end{aligned}
$$

Finalement on obtient donc l'expression de $f_l(H)$ dans (E.1b) en faisant le rapport de (E.2) sur (E.3) :

$$f_l(H) = \frac{A + BA_s + C{A_s}^2 + D{A_s}^3}{E + FA_s + G{A_s}^2} \tag{E.4}$$

Coefficient de dissipation
Par définition, on a :

$$C_{Ds} = \frac{1}{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^3} \int_0^\delta \mu \left(\frac{\partial u_s}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}y$$

ou encore :

$$C_{Ds} = \frac{\mu}{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta} \int_0^1 \left(\frac{\partial \widehat{u}_s}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}\eta$$

or on peut écrire que :

$$\frac{\partial \widehat{u}_s}{\partial \eta} = -A_s(1-\eta)^{p_s-1} + (p_s-1)(1+A_s\eta)(1-\eta)^{p_s-2}$$

donc :

$$C_{Ds} = \frac{\mu}{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta} \int_0^1 \left[I' + J'A_s + K'{A_s}^2\right] \mathrm{d}\eta$$

avec :

$$\begin{aligned}
I' &= (p_s-1)^2(1-\eta)^{2p_s-4} \\
J' &= -2(p_s-1)(1-\eta)^{2p_s-3} + 2\eta(p_s-1)^2(1-\eta)^{2p_s-4} \\
K' &= (1-\eta)^{2p_s-2} - 2(p_s-1)\eta(1-\eta)^{2p_s-3} + \eta^2(p_s-1)^2(1-\eta)^{2p_s-4}
\end{aligned}$$

Sachant que pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \eta^N (1-\eta)^x \,\mathrm{d}\eta = \frac{N!}{\prod\limits_{j=1}^{N+1}(x+j)}$$

on en déduit :

$$C_{Ds} = \frac{\mu}{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\delta} \left[I + JA_s + K{A_s}^2\right]$$

avec :

$$\begin{aligned}
I &= \frac{(p_s-1)^2}{(2p_s-3)} \\
J &= -\frac{2(p_s-1)}{(2p_s-2)} + \frac{2(p_s-1)^2}{(2p_s-3)(2p_s-2)} = -1 + \frac{(p_s-1)}{(2p_s-3)} \\
K &= \frac{1}{(2p_s-1)} - \frac{2(p_s-1)}{(2p_s-2)(2p_s-1)} + \frac{2(p_s-1)^2}{(2p_s-3)(2p_s-2)(2p_s-1)} = \frac{(p_s-1)}{(2p_s-3)(2p_s-1)}
\end{aligned}$$

ou encore :

$$C_{Ds} = \frac{\mu}{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\theta_{ss}} \frac{\theta_{ss}}{\delta} \left[I + JA_s + K{A_s}^2\right]$$

avec θ_{ss} donnée par (E.3). On peut ensuite écrire que :

$$Re_{\theta_{ss}} C_{Ds} = \left[E + FA_s + G{A_s}^2\right]\left[I + JA_s + K{A_s}^2\right]$$

Finalement, la fonction $l(H)$ définie dans (E.1c) est donnée par :

$$l(H) = \frac{2}{f_l(H)}\left[E + FA_s + G{A_s}^2\right]\left[I + JA_s + K{A_s}^2\right] \tag{E.5}$$

avec $f_l(H)$ donnée par (E.4).

Relations de fermeture transverses pour une couche limite laminaire

On cherche à montrer que les relations de fermeture transverses pour une couche limite laminaire s'écrivent :

$$\frac{C_{fc}}{2} Re_{\theta_{ss}} = A_c \frac{\theta_{ss}}{\delta} \tag{E.6}$$

$$C_{Dc} Re_{\theta_{ss}} = \frac{A_c^2}{(2p_s - 1)}\left(\frac{2A_s^2 + (2p_s+1)A_s + (p_s-1)(2p_s+1)}{(2p_s-3)(2p_s+1)}\right)\frac{\theta_{ss}}{\delta} \tag{E.7}$$

avec $\dfrac{\theta_{ss}}{\delta} = \dfrac{p_s + 1 + A_s}{p_s(p_s+1)} - \dfrac{2A_s^2 + 2A_s(2p_s+1) + 2p_s(2p_s+1)}{2p_s(2p_s-1)(2p_s+1)}$

Coefficient de frottement

Par définition, on a :

$$C_{fc} = \frac{\mu}{\frac{1}{2}\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^2}\left(\frac{\partial u_c}{\partial y}\right)_{y=0}$$

ou encore :

$$C_{fc} = \frac{\mu}{\frac{1}{2}\rho\delta|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|}\left(\frac{\partial \widehat{u}_c}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}$$

Or, on rappelle que :

$$\widehat{u}_c(\eta) = A_c\eta(1 - \widehat{u}_s(\eta)) \tag{E.8}$$

donc :

$$\left(\frac{\partial \widehat{u}_c}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = A_c$$

donc on peut écrire que

$$\begin{aligned} C_{fc} &= \frac{\mu}{\frac{1}{2}\rho\delta|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|} A_c \\ &= \frac{\mu}{\frac{1}{2}\rho\theta_{ss}|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|}\frac{\theta_{ss}}{\delta} A_c \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{C_{fc}}{2} Re_{\theta_{ss}} = A_c \frac{\theta_{ss}}{\delta}$$

avec θ_{ss}/δ donné par (2.19).

Coefficient de dissipation

Par définition, on a :

$$C_{Dc} = \frac{1}{\rho |\tilde{\boldsymbol{q}}_e|^3} \int_0^\delta \mu \left(\frac{\partial u_c}{\partial y} \right)^2 \mathrm{d}y$$

ou encore :

$$C_{Dc} = \frac{\mu}{\rho |\tilde{\boldsymbol{q}}_e| \delta} \int_0^1 \left(\frac{\partial \widehat{u}_c}{\partial \eta} \right)^2 \mathrm{d}\eta$$

Or, d'après (E.8) :

$$\left(\frac{\partial \widehat{u}_c}{\partial \eta} \right)^2 = {A_c}^2 (1 - \widehat{u}_s)^2 + {A_c}^2 \eta^2 \left(\frac{\partial \widehat{u}_s}{\partial \eta} \right)^2 - 2{A_c}^2 \eta (1 - \widehat{u}_s) \frac{\partial \widehat{u}_s}{\partial \eta}$$

donc on a :

$$C_{Dc} = \frac{\mu}{\rho |\tilde{\boldsymbol{q}}_e| \delta} {A_c}^2 \int_0^1 \left[L' + M' A_s + N' {A_s}^2 \right] \mathrm{d}\eta$$

avec

$$\begin{aligned}
L' &= (1-\eta)^{2p_s-2} - 2(p_s-1)\eta(1-\eta)^{2p_s-3} + (p_s-1)^2\eta^2(1-\eta)^{2p_s-4} \\
M' &= 4\eta(1-\eta)^{2p_s-2} - 6(p_s-1)\eta^2(1-\eta)^{2p_s-3} + 2(p_s-1)^2\eta^3(1-\eta)^{2p_s-4} \\
N' &= 4\eta^2(1-\eta)^{2p_s-2} - 4(p_s-1)\eta^3(1-\eta)^{2p_s-3} + (p_s-1)^2\eta^4(1-\eta)^{2p_s-4}
\end{aligned}$$

Sachant que pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \eta^N (1-\eta)^x \, \mathrm{d}\eta = \frac{N!}{\prod_{j=1}^{N+1} (x+j)}$$

on en déduit :

$$C_{Dc} = \frac{\mu}{\rho |\tilde{\boldsymbol{q}}_e| \delta} {A_c}^2 \left[L + M A_s + N {A_s}^2 \right]$$

avec :

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{(2p_s-1)} - \frac{2(p_s-1)}{(2p_s-2)(2p_s-1)} + \frac{2(p_s-1)^2}{(2p_s-3)(2p_s-2)(2p_s-1)} \\
M &= \frac{4}{(2p_s-1)2p_s} - \frac{12(p_s-1)}{(2p_s-2)(2p_s-1)2p_s} + \frac{12(p_s-1)^2}{(2p_s-3)(2p_s-2)(2p_s-1)2p_s} \\
N &= \frac{8}{(2p_s-1)2p_s(2p_s+1)} - \frac{24(p_s-1)}{(2p_s-2)(2p_s-1)2p_s(2p_s+1)} + \frac{24(p_s-1)^2}{(2p_s-3)(2p_s-2)(2p_s-1)2p_s(2p_s+1)}
\end{aligned}$$

ce qui se simplifie en :

$$L = \frac{(p_s - 1)}{(2p_s - 3)(2p_s - 1)}$$
$$M = \frac{1}{(2p_s - 3)(2p_s - 1)}$$
$$N = \frac{2}{(2p_s - 3)(2p_s - 1)(2p_s + 1)}$$

on a alors :

$$C_{Dc} = \frac{\mu}{\rho|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|\theta_{ss}} {A_c}^2 \left[L + MA_s + N{A_s}^2\right] \frac{\theta_{ss}}{\delta}$$

d'où

$$C_{Dc}Re_{\theta_{ss}} = {A_c}^2 \left[L + MA_s + N{A_s}^2\right] \frac{\theta_{ss}}{\delta}$$

ce qui est équivalent à la relation (E.7) :

$$C_{Dc}Re_{\theta_{ss}} = \frac{A_c^2}{(2p_s - 1)} \left(\frac{2A_s^2 + (2p_s + 1)A_s + (p_s - 1)(2p_s + 1)}{(2p_s - 3)(2p_s + 1)} \right) \frac{\theta_{ss}}{\delta}$$

avec θ_{ss}/δ donné par (2.19).

Épaisseur de quantité de mouvement

On cherche à montrer que :

$$\theta_{cc} = -\delta \frac{{A_c}^2}{(2p_s - 1)p_s(2p_s + 1)} \left[1 + \frac{6A_s}{(2p_s + 2)} + \frac{12{A_s}^2}{(2p_s + 2)(2p_s + 3)}\right]$$

Par définition, on a :

$$\theta_{cc} = \delta \int_0^1 -\widehat{u}_c^2 \, \mathrm{d}\eta$$

Or, d'après (E.8) et (B.15) :

$$\widehat{u}_c(\eta) = A_c\eta(1 + A_s\eta)(1 - \eta)^{p_s - 1}$$

d'où :

$$(\widehat{u}_c(\eta))^2 = {A_c}^2 \left[\eta^2(1 - \eta)^{2p_s - 2} + 2A_s\eta^3(1 - \eta)^{2p_s - 2} + {A_s}^2\eta^4(1 - \eta)^{2p_s - 2}\right]$$

Sachant que pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \eta^N (1 - \eta)^x \, \mathrm{d}\eta = \frac{N!}{\prod_{j=1}^{N+1} (x + j)}$$

on en déduit :

$$\theta_{cc} = -\delta {A_c}^2 \left[\frac{2}{(2p_s-1)2p_s(2p_s+1)} + \frac{12A_s}{(2p_s-1)2p_s(2p_s+1)(2p_s+2)} \right.$$
$$\left. + \frac{24{A_s}^2}{(2p_s-1)2p_s(2p_s+1)(2p_s+2)(2p_s+3)} \right]$$

ce qui se simplifie en :

$$\theta_{cc} = -\delta \frac{{A_c}^2}{(2p_s-1)p_s(2p_s+1)} \left[1 + \frac{6A_s}{(2p_s+2)} + \frac{12{A_s}^2}{(2p_s+2)(2p_s+3)} \right]$$

F. Calcul des jacobiennes de $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{S}$ et de la dérivée de S_T

F.1. Calcul de $\nabla_{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{U})$

On cherche à calculer la jacobienne de $\boldsymbol{F}$ par rapport à $\boldsymbol{U}$ pour le système modifié avec la méthode de contrôle. Celui-ci s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(u_{es}\delta_{1s})}{\partial t} + \dfrac{\partial({u_{es}}^2\theta_{ss})}{\partial s} = -u_{es}\delta_{1s}\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} + \dfrac{1}{2}{u_{es}}^2 C_{fs} + \alpha {u_{es}}^2\dfrac{\partial \theta_{ss}}{\partial s} \\ \dfrac{\partial({u_{es}}^2\theta_{ss})}{\partial t} + \dfrac{\partial {u_{es}}^3(\delta_{3ss}-\theta_{ss})}{\partial s} = {u_{es}}^2(\delta_{1s}-\theta_{ss})\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} - \dfrac{1}{2}{u_{es}}^3 C_{fs} + 2{u_{es}}^3 C_{Ds} + \alpha {u_{es}}^3\dfrac{\partial \delta_{1s}}{\partial s} \end{cases}$$

Sachant que $\delta_{3ss} = f(H)\theta_{ss}$, le système peut se réécrire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(u_{es}\delta_{1s})}{\partial t} + (1-\alpha)\dfrac{\partial({u_{es}}^2\theta_{ss})}{\partial s} = -u_{es}\delta_{1s}\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} - \alpha\theta_{ss}\dfrac{\partial {u_{es}}^2}{\partial s} + \dfrac{1}{2}{u_{es}}^2 C_{fs} \\ \dfrac{\partial({u_{es}}^2\theta_{ss})}{\partial t} - \alpha {u_{es}}^2\dfrac{\partial u_{es}\delta_{1s}}{\partial s} + \dfrac{\partial {u_{es}}^3\theta_{ss}(f-1)}{\partial s} = {u_{es}}^2(\delta_{1s}-\theta_{ss})\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} - \alpha {u_{es}}^2\delta_{1s}\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{2}{u_{es}}^3 C_{fs} + 2{u_{es}}^3 C_{Ds} \end{cases}$$

Or, on a :

$$\frac{\partial {u_{es}}^3\theta_{ss}(f-1)}{\partial s} = u_{es}\frac{\partial {u_{es}}^2\theta_{ss}(f-1)}{\partial s} + {u_{es}}^2\theta_{ss}(f-1)\frac{\partial u_{es}}{\partial s}$$

et

$$\begin{aligned} u_{es}\frac{\partial {u_{es}}^2\theta_{ss}(f-1)}{\partial s} &= u_{es}(f-1)\frac{\partial {u_{es}}^2\theta_{ss}}{\partial s} + {u_{es}}^3\theta_{ss}\left(\frac{\partial f}{\partial u_{es}\delta_{1s}}\frac{\partial u_{es}\delta_{1s}}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial {u_{es}}^2\theta_{ss}}\frac{\partial {u_{es}}^2\theta_{ss}}{\partial s}\right) \\ &= u_{es}(f-1)\frac{\partial {u_{es}}^2\theta_{ss}}{\partial s} + {u_{es}}^3\theta_{ss}\left(f'\frac{\partial H}{\partial u_{es}\delta_{1s}}\frac{\partial u_{es}\delta_{1s}}{\partial s} + f'\frac{\partial H}{\partial {u_{es}}^2\theta_{ss}}\frac{\partial {u_{es}}^2\theta_{ss}}{\partial s}\right) \\ &= {u_{es}}^2 f'\frac{\partial u_{es}\delta_{1s}}{\partial s} + u_{es}(f-1-Hf')\frac{\partial {u_{es}}^2\theta_{ss}}{\partial s} \end{aligned}$$

avec $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}H}$ et $H = \dfrac{{u_{es}}^2\delta_{1s}}{{u_{es}}^2\theta_{ss}}$

Finalement, le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(u_{es}\delta_{1s})}{\partial t} + (1-\alpha)\dfrac{\partial({u_{es}}^2\theta_{ss})}{\partial s} = -u_{es}\delta_{1s}\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} - \alpha\theta_{ss}\dfrac{\partial {u_{es}}^2}{\partial s} + \dfrac{1}{2}{u_{es}}^2 C_{fs} \\ \dfrac{\partial({u_{es}}^2\theta_{ss})}{\partial t} + {u_{es}}^2(f'-\alpha)\dfrac{\partial u_{es}\delta_{1s}}{\partial s} + u_{es}(f-1-Hf')\dfrac{\partial {u_{es}}^2\theta_{ss}}{\partial s} = {u_{es}}^2((1-\alpha)\delta_{1s} - f\theta_{ss})\dfrac{\partial u_{es}}{\partial s} \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{2}{u_{es}}^3 C_{fs} + 2{u_{es}}^3 C_{Ds} \end{cases}$$

d'où, en posant :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{F}(s, \boldsymbol{U}) \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial s} = \boldsymbol{S}(s, \boldsymbol{U})$$

on a :

$$\nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{F}(s, \boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} 0 & (1-\alpha) \\ {u_{es}}^2 (f' - \alpha) & u_{es}(f - Hf' - 1) \end{pmatrix}$$

F.2. Calcul de $\nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{S}(s, \boldsymbol{U})$

On a vu dans la sous-section 5.2.2 que pour le système 2D :

$$\nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{S}(s, \boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial u_{es}}{\partial s} + \frac{1}{2} {u_{es}}^2 \frac{\partial C_{fs}}{\partial U_1} & \frac{1}{2} {u_{es}}^2 \frac{\partial C_{fs}}{\partial U_2} \\ u_{es} \frac{\partial u_{es}}{\partial s} - \frac{1}{2} {u_{es}}^3 \frac{\partial C_{fs}}{\partial U_1} + 2 {u_{es}}^3 \frac{\partial C_{Ds}}{\partial U_1} & -\frac{\partial u_{es}}{\partial s} - \frac{1}{2} {u_{es}}^3 \frac{\partial C_{fs}}{\partial U_2} + 2 {u_{es}}^3 \frac{\partial C_{Ds}}{\partial U_2} \end{pmatrix}$$

On cherche maintenant à déterminer les dérivées de C_{fs} et C_{Ds}.

F.2.1. Cas d'une couche limite laminaire

Dans le cas d'une couche limite laminaire, on a :

$$\begin{aligned} C_{fs} &= \frac{2g(H)}{Re_{\theta_{ss}}} = \frac{2 u_{es} \nu_e g(H)}{U_2} \\ C_{Ds} &= \frac{f_l(H) l(H)}{2 Re_{\theta_{ss}}} = \frac{\nu_e u_{es}}{2U_2} f_l(H) l(H) \end{aligned}$$

On sait de plus que $H = \frac{\delta_{1s}}{\theta_{ss}} = \frac{u_{es} U_1}{U_2}$ d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial U_1} &= \frac{u_{es}}{U_2} \\ \frac{\partial H}{\partial U_2} &= -\frac{H}{U_2} \end{aligned}$$

Donc on peut en déduire que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{fs}}{\partial U_1} &= \frac{2 \nu_e {u_{es}}^2}{{U_2}^2} g'(H) \\ \frac{\partial C_{fs}}{\partial U_2} &= -\frac{2 \nu_e u_{es}}{{U_2}^2} (g(H) + H g'(H)) \\ \frac{\partial C_{Ds}}{\partial U_1} &= \frac{\nu_e {u_{es}}^2}{2{U_2}^2} (f_l'(H) l(H) + f_l(H) l'(H)) \\ \frac{\partial C_{Ds}}{\partial U_2} &= -\frac{\nu_e u_{es}}{2{U_2}^2} (f_l(H) l(H) + H f_l'(H) l(H) + H f_l(H) l'(H)) \end{aligned}$$

avec $f_l' = \dfrac{df_l}{dH}$, $g' = \dfrac{dg}{dH}$, $l' = \dfrac{dl}{dH}$. Les dérivées de ces fonctions valent, d'après (E.4),

$$\begin{aligned} f_l'(H) = & \frac{dA + A_s(dB + dCA_s + dDA_s^2) + dA_s(B + 2CA_s + 3DA_s^2)}{E + FA_s + GA_s^2} \\ & - \frac{\left[A + BA_s + CA_s^2 + DA_s^3\right]\left[dE + A_s(dF + dGA_s) + dA_s(F + 2GA_s)\right]}{(E + FA_s + GA_s^2)^2} \end{aligned}$$

d'après (E.5),

$$\begin{aligned} l'(H) = & -\frac{2f_l'(H)}{(f_l(H))^2}\left[E + FA_s + GA_s^2\right]\left[I + JA_s + KA_s^2\right] \\ & + \frac{2}{f_l(H)}\Big[\left(dE + A_s(dF + dGA_s) + dA_s(F + 2GA_s)\right)\left(I + JA_s + KA_s^2\right) \\ & + (E + FA_s + GA_s^2)\left(dI + A_s(dJ + dKA_s) + dA_s(J + 2KA_s)\right)\Big] \end{aligned}$$

et d'après (2.16),

$$\begin{aligned} g'(H) = & -\frac{1.7}{H^2} \times 2.99259\left(\frac{1}{H} - \frac{1}{8.05846}\right)^{0.7} && \text{si } H \leq H_{dec} \\ g'(H) = & -\frac{1}{H^{2.3}} \times 394.0732912\left(\left(\frac{1}{4.02923}\right)^{1.3} - \frac{1}{H^{1.3}}\right)^{2.35661} \\ & - 0.06815 + 46.34236\left(\frac{1}{(4.02923)^2} - \frac{1}{H^2}\right)^{2.338238} \\ & + 216.7189344\frac{H-1}{H^3}\left(\frac{1}{(4.02923)^2} - \frac{1}{H^2}\right)^{1.338238} && \text{si } H > H_{dec} \end{aligned}$$

avec

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{2}{p_s} - \frac{3}{(2p_s-1)} + \frac{1}{(3p_s-2)} \\
B &= \frac{2}{p_s(p_s+1)} - \frac{6}{(2p_s-1)2p_s} + \frac{3}{(3p_s-2)(3p_s-1)} \\
C &= \frac{-6}{(2p_s-1)2p_s(2p_s+1)} + \frac{6}{(3p_s-2)(3p_s-1)3p_s} \\
D &= \frac{6}{(3p_s-2)(3p_s-1)3p_s(3p_s+1)} \\
E &= \frac{1}{p_s} - \frac{1}{(2p_s-1)} \\
F &= \frac{1}{p_s(p_s+1)} - \frac{2}{(2p_s-1)2p_s} \\
G &= \frac{-2}{(2p_s-1)2p_s(2p_s+1)} \\
I &= \frac{(p_s-1)^2}{(2p_s-3)} \\
J &= -1 + \frac{(p_s-1)}{(2p_s-3)} \\
K &= \frac{(p_s-1)}{(2p_s-3)(2p_s-1)}
\end{aligned}
$$

La dérivée de chacun de ces coefficients par rapport à H vaut :

$$
\begin{aligned}
dA &= \frac{-2{p_s}'}{{p_s}^2} + \frac{6{p_s}'}{(2p_s-1)^2} - \frac{3{p_s}'}{(3p_s-2)^2} \\
dB &= \frac{-{p_s}'\left(20 - 220p_s + 802{p_s}^2 - 812{p_s}^3 - 1539{p_s}^4 + 4086{p_s}^5 - 2889{p_s}^6 + 540{p_s}^7\right)}{{p_s}^2(p_s+1)^2(2p_s-1)^2(3p_s-2)^2(3p_s-1)^2} \\
dC &= \frac{{p_s}'\left(-16 + 144p_s - 229{p_s}^2 - 1098{p_s}^3 + 4337{p_s}^4 - 5256{p_s}^5 + 2052{p_s}^6\right)}{{p_s}^2(2p_s-1)^2(2p_s+1)^2(3p_s-2)^2(3p_s-1)^2} \\
dD &= \frac{-4{p_s}'\left(1 - 3p_s - 27{p_s}^2 + 54{p_s}^3\right)}{(3p_s-2)^2(3p_s-1)^2{p_s}^2(3p_s+1)^2} \\
dE &= \frac{-{p_s}'}{{p_s}^2} + \frac{2{p_s}'}{(2p_s-1)^2} \\
dF &= \frac{-{p_s}'\left(2 - 4p_s - 11{p_s}^2 + 4{p_s}^3\right)}{{p_s}^2(p_s+1)^2(2p_s-1)^2} \\
dG &= \frac{{p_s}'\left(-1 + 12{p_s}^2\right)}{{p_s}^2(2p_s-1)^2(2p_s+1)^2} \\
dI &= \frac{2{p_s}'(p_s-1)(p_s-2)}{(2p_s-3)^2} \\
dJ &= \frac{-{p_s}'}{(2p_s-3)^2} \\
dK &= \frac{-{p_s}'(5 - 8p_s + 4{p_s}^2)}{(2p_s-3)^2(2p_s-1)^2}
\end{aligned}
$$

et ${p_s}' = \dfrac{\mathrm{d}p_s}{\mathrm{d}H}$. Donc, d'après (B.14) :

$$
\begin{aligned}
{p_s}'(H) &= -\frac{0.7877 \times 1.6001}{(H-1.9538)^{2.6001}} && \text{si } H \leq H_{dec} \\
{p_s}'(H) &= -\frac{2.0411 \times 10^{11} \times 7.7560}{(H+25.890)^{8.7560}} && \text{si } H > H_{dec}
\end{aligned}
$$

Enfin, d'après (B.12) :

$$
A_s = \sqrt{{p_s}^2 - p_s(p_s+1)Hg} - 1
$$

et la dérivée de A_s par rapport à H vaut :

$$
dA_s = \frac{2p_s{p_s}' - (2p_s{p_s}' + {p_s}')Hg - ({p_s}^2 + p_s)(g + Hg')}{2\sqrt{{p_s}^2 - p_s(p_s+1)Hg}}
$$

F.2.2. Cas d'une couche limite turbulente

Dans le cas d'une couche limite turbulente, on a :

$$
\begin{aligned}
C_{fs,Ludwieg} &= 0.246 \times 10^{-0.678H} {Re_{\theta_{ss}}}^{-0.268} \\
C_{fs,White} &= \frac{0.3\ \mathrm{e}^{-1.33H}}{(\log Re_{\theta_{ss}})^{1.74+0.31H}} \\
C_{Ds} &= \frac{H^*}{2}\left[\frac{C_{fs}}{6}\left(\frac{4}{H}-1\right) + 0.03\left(\frac{H-1}{H}\right)^3\right]
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
H^* &= 1.505 + \frac{4}{Re_{\theta_{ss}}} + \left(0.165 - \frac{1.6}{\sqrt{Re_{\theta_{ss}}}}\right)\frac{(H_0-H)^{1.6}}{H} && \text{si } H < H_0 \\
H^* &= 1.505 + \frac{4}{Re_{\theta_{ss}}} + (H-H_0)^2\left(\frac{0.04}{H} + 0.007\frac{\ln Re_{\theta_{ss}}}{\left(H - H_0 + \dfrac{4}{\ln Re_{\theta_{ss}}}\right)^2}\right) && \text{si } H > H_0
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
H_0 &= 4 && \text{si } Re_{\theta_{ss}} < 400 \\
H_0 &= 3 + \frac{400}{Re_{\theta_{ss}}} && \text{si } Re_{\theta_{ss}} \geq 400
\end{aligned}
$$

Sachant que $H = \dfrac{u_{es}U_1}{U_2}$ et $Re_{\theta_{ss}} = \dfrac{U_2}{\nu_e u_{es}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_{fs,Ludwieg}}{\partial U_1} &= 0.246\left(\frac{U_2}{\nu u_{es}}\right)^{-0.268} \times \left(-0.678\frac{u_{es}}{U_2}\right)\ln(10)\times 10^{-0.678H} \\
\frac{\partial C_{fs,Ludwieg}}{\partial U_2} &= \frac{0.246}{U_2}\left(\frac{U_2}{\nu u_{es}}\right)^{-0.268} \times 10^{-0.678H}\left[-0.268 + 0.678\ln(10)H\right] \\
\frac{\partial C_{fs,White}}{\partial U_1} &= -\frac{u_{es}C_{fs,White}}{U_2}\left[1.33 + 0.31\ln(\log(Re_{\theta_{ss}}))\right] \\
\frac{\partial C_{fs,White}}{\partial U_2} &= \frac{C_{fs,White}}{U_2}\left[1.33H + 0.31H\ln(\log(Re_{\theta_{ss}})) - \frac{1.74+0.31H}{\ln(Re_{\theta_{ss}})}\right] \\
\frac{\partial C_{Ds}}{\partial U_1} &= \frac{1}{2}\frac{\partial H^*}{\partial U_1}\left[\frac{C_{fs}}{6}\left(\frac{4}{H}-1\right) + 0.03\left(\frac{H-1}{H}\right)^3\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}H^*\left[\frac{1}{6}\frac{\partial C_{fs}}{\partial U_1}\left(\frac{4}{H}-1\right) + \frac{u_{es}}{U_2H^2}\left(0.09\left(\frac{H-1}{H}\right)^2 - \frac{2}{3}C_{fs}\right)\right] \\
\frac{\partial C_{Ds}}{\partial U_2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial H^*}{\partial U_2}\left[\frac{C_{fs}}{6}\left(\frac{4}{H}-1\right) + 0.03\left(\frac{H-1}{H}\right)^3\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}H^*\left[\frac{1}{6}\frac{\partial C_{fs}}{\partial U_2}\left(\frac{4}{H}-1\right) + \frac{1}{U_2H}\left(\frac{2}{3}C_{fs} - 0.09\left(\frac{H-1}{H}\right)^2\right)\right]
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H^*}{\partial U_1} &= -\left(0.165 - \frac{1.6}{\sqrt{Re_{\theta_{ss}}}}\right)\left(\frac{1.6(H_0-H)^{0.6}}{H} + \frac{(H_0-H)^{1.6}}{H^2}\right)\frac{u_{es}}{U_2} \qquad \text{si } H < H_0 \\
\frac{\partial H^*}{\partial U_1} &= 2(H-H_0)\left(\frac{0.04}{H} + 0.007\frac{\ln Re_{\theta_{ss}}}{\left(H - H_0 + \dfrac{4}{\ln Re_{\theta_{ss}}}\right)^2}\right)\frac{u_{es}}{U_2} \\
&\quad + (H-H_0)^2\left(\frac{-0.04}{H^2} - 0.014\frac{\ln Re_{\theta_{ss}}}{\left(H - H_0 + \dfrac{4}{\ln Re_{\theta_{ss}}}\right)^3}\right)\frac{u_{es}}{U_2} \qquad \text{si } H > H_0
\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial H^*}{\partial U_2} = \frac{-4}{U_2 Re_{\theta_{ss}}} + \frac{(H_0 - H)^{1.6}}{H} \frac{1.6}{2U_2\sqrt{Re_{\theta_{ss}}}} + \left(0.165 - \frac{1.6}{\sqrt{Re_{\theta_{ss}}}}\right)\left(\frac{(H_0 - H)^{1.6}}{U_2 H} + \frac{1.6(H_0 - H)^{0.6}}{H}\left(\frac{\partial H_0}{\partial U_2} + \frac{H}{U_2}\right)\right) \quad \text{si } H < H_0$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial U_2} = \frac{-4}{U_2 Re_{\theta_{ss}}} + 2(H - H_0)\left(-\frac{H}{U_2} - \frac{\partial H_0}{\partial U_2}\right)\left(\frac{0.04}{H} + 0.007\frac{\ln Re_{\theta_{ss}}}{\left(H - H_0 + \frac{4}{\ln Re_{\theta_{ss}}}\right)^2}\right) + (H - H_0)^2\left(\frac{0.04}{U_2 H} + \frac{0.007}{U_2(H - H_0 + \frac{4}{\ln Re_{\theta_{ss}}})^2} + \frac{0.014 \ln Re_{\theta_{ss}}\left(\frac{H}{U_2} + \frac{\partial H_0}{\partial U_2} + \frac{4}{U_2(\ln Re_{\theta_{ss}})^2}\right)}{\left(H - H_0 + \frac{4}{\ln Re_{\theta_{ss}}}\right)^3}\right) \quad \text{si } H > H_0$$

où

$$\frac{\partial H_0}{\partial U_2} = 0 \qquad \text{si } Re_{\theta_{ss}} < 400$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial U_2} = -\frac{400}{U_2 Re_{\theta_{ss}}} \qquad \text{si } Re_{\theta_{ss}} \geq 400$$

F.3. Calcul de $\frac{\partial S_T}{\partial U_T}$

On a vu dans la sous-section 5.2.2 que pour le système 2D :

$$\frac{\partial S_T}{\partial U_T} = \frac{\partial S_T}{\partial \delta_T}\frac{\partial \delta_T}{\partial U_T} = \frac{\partial S_T}{\partial \delta_T}\left(\frac{\partial U_T}{\partial \delta_T}\right)^{-1} \tag{F.4}$$

S_T vaut :

$$S_T = \frac{-\Phi_p}{\rho c_p} - \frac{1}{c_p} {u_{es}}^3 C_{Ds}$$

où Φ_p est donné par (3.28). Donc :

$$S_T = \frac{-k(T_e - T_p)}{\rho c_p}\frac{A_T - q + 1}{\delta_T} - \frac{1}{c_p} {u_{es}}^3 C_{Ds}$$

On peut en déduire que :

$$\frac{\partial S_T}{\partial \delta_T} = \frac{-k(T_e - T_p)}{\rho c_p}\left(\frac{q - 1 - A_T + A'_T \delta_T}{{\delta_T}^2}\right)$$

où A_T est donné par (3.23a) et, pour le système 2D :

$$A'_T = \frac{-2\rho_e|\tilde{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{e}}|^4 {C_{fs}}^2 \delta_T}{8(q-1)k\nu_e(T_e - T_p)} \tag{F.5}$$

Les coefficients de frottement et de dissipation sont des données d'entrée pour le calcul de couche limite thermique, ils ont été obtenus par la résolution de la couche limite dynamique et ne dépendent donc pas de δ_T.

D'autre part, U_T vaut :

$$U_T = (T_e - T_p)\delta_{1T} = (T_e - T_p)\delta_T \int_0^1 \widehat{\Theta}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

et $\widehat{\Theta}(\xi)$ est donnée par (3.27). Sachant que :

$$\int_0^1 \eta^N (1-\eta)^x \,\mathrm{d}\eta = \frac{N!}{\prod\limits_{j=1}^{N+1}(x+j)}$$

on a :

$$U_T = \frac{(T_e - T_p)\delta_T(q+1+A_T)}{q(q+1)}$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial U_T}{\partial \delta_T} = \frac{(T_e - T_p)(q+1+A_T+\delta_T A'_T)}{q(q+1)}$$

où A_T est donné par (3.23a) et A'_T par (F.5).

G. Analyse de stabilité d'une équation scalaire modélisant de manière simplifiée la couche limite dans les cas de forts gradients de pression adverses

On considère l'équation suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a\frac{\partial v}{\partial s} = bv$$

Elle se discrétise de la manière suivante avec le schéma numérique développé dans la sous-section 5.2.2 :

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} + a\frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{\Delta s} = bv_i^n \tag{G.1}$$

On cherche à montrer que cette équation est stable si $|1 - a\Delta t/\Delta s + b\Delta t| < 1$. Pour cela, on introduit une petite perturbation sur v_i qui s'écrit alors :

$$v_i = \overline{v_i} + \delta v_i$$

L'équation (G.1) devient :

$$\frac{\overline{v_i}^{n+1} - \overline{v_i}^n}{\Delta t} + \frac{\delta v_i^{n+1} - \delta v_i^n}{\Delta t} + a\frac{\overline{v_i}^n - \overline{v_{i-1}}^n}{\Delta s} + a\frac{\delta v_i^n - \delta v_{i-1}^n}{\Delta s} = b\overline{v_i}^n + b\delta v_i^n$$

On suppose que $\overline{v_i}$ satisfait l'équation (G.1), donc on a simplement :

$$\frac{\delta v_i^{n+1} - \delta v_i^n}{\Delta t} + a\frac{\delta v_i^n - \delta v_{i-1}^n}{\Delta s} = b\delta v_i^n$$

soit :

$$\delta v_i^{n+1} = \delta v_i^n \left[1 - a\frac{\Delta t}{\Delta s} + b\Delta t\right] + a\frac{\Delta t}{\Delta s}\delta v_{i-1}^n \tag{G.2}$$

Comme le domaine sur lequel on travaille est borné, on adopte une approche matricielle pour l'étude de stabilité. On suppose alors que la perturbation introduite est de la forme :

$$\delta v_i^n = \delta v_i e^{-j\omega n\Delta t} = \delta v_i e^{-j\omega(n-1)\Delta t} e^{-j\omega\Delta t} = \lambda \delta v_i^{n-1} \tag{G.3}$$

En substituant (G.3) dans (G.2), on obtient :

$$\delta v_i e^{-j\omega\Delta t} = \delta v_i \left[1 - a\frac{\Delta t}{\Delta s} + b\Delta t\right] + a\frac{\Delta t}{\Delta s}\delta v_{i-1}$$

d'où

$$\left[1 - a\frac{\Delta t}{\Delta s} + b\Delta t\right]\delta v_i + a\frac{\Delta t}{\Delta s}\delta v_{i-1} - \lambda\delta v_i = 0 \tag{G.4}$$

L'équation (G.4) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\overline{\overline{A}}\boldsymbol{\delta v} - \lambda\overline{\overline{I}}\boldsymbol{\delta v} = \mathbf{0} \tag{G.5}$$

où $\overline{\overline{I}}$ est la matrice identité et :

$$\boldsymbol{\delta v} = \begin{pmatrix} \delta v_2 \\ \vdots \\ \delta v_i \\ \vdots \\ \delta v_N \end{pmatrix} \qquad \overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} 1 - a\frac{\Delta t}{\Delta s} + b\Delta t & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a\frac{\Delta t}{\Delta s} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 - a\frac{\Delta t}{\Delta s} + b\Delta t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a\frac{\Delta t}{\Delta s} & 1 - a\frac{\Delta t}{\Delta s} + b\Delta t \end{pmatrix}$$

En $i = 1$, on prend $v_1 = cte$ et $\delta v_1 = 0$, d'où pour $i = 2$ on a $\left[1 - a\frac{\Delta t}{\Delta s} + b\Delta t\right]\delta v_2 - \lambda\delta v_2 = 0$.

Comme $\delta v_i^n = \lambda\delta v_i^{n-1}$, il faut que $|\lambda| < 1$ pour que l'équation (G.1) soit stable, ce qui revient à dire que le rayon spectral de la matrice $\overline{\overline{A}}$ doit être strictement inférieur à 1. La condition de stabilité est donc la suivante :

$$|1 - a\frac{\Delta t}{\Delta s} + b\Delta t| < 1$$

H. Article de conférence - "A 3D Finite-Volume Integral Boundary Layer method for icing applications"

A 3D Finite-Volume Integral Boundary Layer method for icing applications

Nikolaos Bempedelis*
Charlotte Bayeux†
Ghislain Blanchard‡
Emmanuel Radenac‡
Philippe Villedieu‡

ONERA, Toulouse, 31055, France

A three-dimensional integral boundary layer code was developed to allow fast computations of boundary layer flows for the purpose of ice accretion modelling. The model is derived in this paper. It is based on a surface Finite-Volume approach. The unsteady equations of momentum deficit and kinetic energy deficit are solved until convergence is reached, preventing from specifying explicitly the stagnation point or separation line. A validation of the code is also presented in the present article. First, the 3D solver is cross-checked against a 2D solver on test cases of self-similar flows and on a NACA0012 configuration. The modelling of the effects of three-dimensionality is also assessed on a self-similar flow test-case. Moreover, the use of unstructured grids is also validated. Finally, an example of the use of the code for the computation of ice accretion is presented.

I Introduction

Icing certification cost can be significantly reduced by developing simulation tools to evaluate the ice accretion effects for a wide range of icing conditions. 2D tools are already integrated in the process of certification. Since numerous simulations must be performed, these icing tools must have little computational cost.

The improvement of 3D tools would allow to reduce the safety margins used when performing multiple 2D simulations around 3D iced elements. But 3D icing suites are still not as efficient as 2D tools. ONERA is developing a fully 3D ice accretion suite called IGLOO3D. This tool couples codes solving the air flow, the trajectories of water droplets and the ice accretion (Messinger approach), respectively. The surface codes of IGLOO3D, such as the ice accretion solver MESSINGER3D, solve 3D systems of equation on surface grids (contrary to partially 3D icing suites solving 2D equations along streamlines).

The aerodynamic computation produces both the flowfield transporting the supercooled water droplets and the skin friction and heat transfer coefficient on the iced walls. To that end, it is possible to use a Navier-Stokes solver, which is the current option used in IGLOO3D.[1] However, this approach is time-consuming. For the 2D codes used for certification, the computational cost is far cheaper: obviously, IGLOO3D also computes an additional dimension, but more significantly, the 2D aerodynamic resolution is usually based on an inviscid (or potential) computation coupled to a boundary layer integral method, which is much cheaper than a Navier-Stokes computation.

Consequently, a 3D integral boundary layer code is being developed in order to allow a very similar approach in IGLOO3D. Currently, simplified integral boundary layer models, such as the well-known method

*PhD student, Mechanical Engineering Department, University College London, Gower St, London WC1E 6BT, UK
†PhD student, Aerodynamics and Energetic Modeling Dept., BP 4025 2 avenue Ed. Belin, Toulouse, F.
‡Research engineer, PhD, Aerodynamics and Energetic Modeling Dept., BP 4025 2 avenue Ed. Belin, Toulouse, F.

of Thwaites,[2] are commonly employed in 2D icing suites. However, the direct extension of the simplified integral method to 3D is not straightforward.

Consequently, a general Finite-Volume formulation was employed for the solution of the system of equations. As a first step, the aforementioned discretization approach was developed and implemented in a 2D prototype of the ONERA's 2D icing suite IGLOO2D.[3] The extension and validation of this integral boundary layer method in three dimensions is presented in the present article. It must be noted that it is common practice in icing codes to weakly couple the inviscid and boundary layer codes (the effect of the boundary layer on the inviscid flow is neglected). The issue of 3D viscous-inviscid interaction methods will thus not be addressed in this paper.

The derivation of the model will be presented in section II. The Finite-Volume Method used to discretize the system will be exposed in section III. Validation and cross-checking of the 3D code against the 2D code in 2D configurations will be addressed in section IV, as well as a validation on a 3D configuration. The use of the integral boundary layer code for ice accretion computation will be shown in section V.

II Derivation of the model

II.A Brief state-of-the-art of 3D integral boundary-layer methods

The integral form of the boundary layer equations is obtained by integrating their differential form along a direction normal to the surface of the body. The obtained equations, referred to as "Integral boundary layer (IBL) equations" are differential equations whose variables are integral quantities. The information that is lost upon the process of integration has to be replaced by some set of closure relations so as to make the problem determinate.

At least for usual (and simple enough) closure relations, it can be demonstrated that the IBL equations are hyperbolic.[3,4] This allows to define stable spatial discretization schemes. This also makes the Finite Volume Method a good choice for the resolution of the IBL equations. This method was first employed by Mughal.[5] Previous works on the 3D IBL equations mainly employed Finite Difference Method in curvilinear coordinates.[6,7] With such methods, it is difficult to handle surface curvature discontinuities[8] and the IBL equations become very complex due to the introduction of numerous metric coefficients and geodesic curvature terms.[9] These difficulties are eliminated by the use of the Finite Volume Method.

In his first approach, Mughal solved the steady versions of the IBL equations in their conservative form. In the present paper, the unsteady version will be solved, as was also presented in Mughal's PhD thesis[4] and used in more recent articles of Drela and co-workers.[8] In addition to the simplicity of implementation, this approach prevents the need to explicitly locate the attachment line or the stagnation point prior to the computation. The derivation of the unsteady conservative IBL equations will be presented in section II.B.

Moreover, the integral boundary layer variables are calculated by on-the-fly integration of the velocity profiles like in Mughal's PhD thesis.[4] This will allow defining closure relations for arbitrary velocity profiles if required and numerically assess some integrals for the computations of numerical fluxes for instance. The used velocity profiles will be exposed in section II.C.

Finally, it can be noticed that Lokatt and Eller recently developed a Finite-Volume scheme for unstructured grids which they applied to the 3D IBL equations.[10] The same kind of method will be used here in order to ensure conservation on arbitrarily curved surfaces, as explained in section III.

The expected outputs of the IBL method are mainly the skin friction and the heat transfer coefficients over the iced surfaces, which are major parameters for the ice accretion computation. The skin friction is linked to the boundary layer dynamics and will be computed directly from the dynamic integral equations exposed in section II.B. A similar approach could be used for solving the integral heat transfer inside the boundary layer. This topic is poorly addressed in the literature. As a first attempt, Reynolds-like analogies often used in icing codes will be employed in this work (section II.D). Consequently, only the derivation of the 3D dynamic integral boundary layer equations is addressed.

II.B 3D integral boundary layer system

The 3D unsteady incompressible differential boundary layer equations constitute the basis of the integral formulation. In a body-fitted coordinate system where z is normal to the surface, they read:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \tag{3}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \tag{4}$$

where $\boldsymbol{q} = (u_x, u_y, u_z)$ is the velocity vector, ρ is the density, τ is the shear stress vector $\tau_{:z} = \mu \frac{\partial u_:}{\partial z}$, μ is the dynamic viscosity of air and P is the pressure.

Like in the 2D code,[3] the integral system is based on the momentum equation and the kinetic energy equation. The latter equation is derived with the following procedure (where the subscript $()_e$ stands for the external flow quantities):

($u_{xe}^2\times$ (eq. (1)) - $2u_x\times$ (eq. (2)) + $u_{ye}^2\times$ (eq. (1)) - $2u_y\times$ (eq. (3)))

Assuming that the external velocity field is irrotational, the kinetic energy conservation equation may be written as follows:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x^2}{\partial t} + \frac{\partial u_x^3}{\partial x} + \frac{\partial u_x^2 u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x^2 u_z}{\partial z} &= u_x \frac{\partial |\boldsymbol{q}_e|^2}{\partial x} + \frac{2u_x}{\rho}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \\ \frac{\partial u_y^2}{\partial t} - \frac{\partial u_x u_y^2}{\partial x} - \frac{\partial u_y^3}{\partial y} - \frac{\partial u_z u_y^2}{\partial z} &+ u_y \frac{\partial |\boldsymbol{q}_e|^2}{\partial y} + \frac{2u_y}{\rho}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\end{aligned} \tag{5}$$

The 3D unsteady incompressible differential boundary layer equations are integrated in the direction normal to the wall, yielding a system of three equations involving integral quantities.

More specifically, $\int_0^\infty$ (eq. (2)) dz - $\int_0^\infty u_{xe}\times$ (eq. (1)) dz and $\int_0^\infty$ (eq. (3)) dz - $\int_0^\infty u_{ye}\times$ (eq. (1)) dz produce the transport equation (6) for the momentum deficit in the surface tangential directions.

$\int_0^\infty$ (eq. (5)) dz - $\int_0^\infty |\boldsymbol{q}_e|^2\times$ (eq. (1)) dz yields the transport equation (7) for the deficit of kinetic energy.

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} + \tilde{\nabla}\cdot\bar{\bar{\boldsymbol{T}}} = -\tilde{\nabla}\boldsymbol{q}_e\cdot\boldsymbol{M} + \frac{\boldsymbol{\tau_w}}{\rho} \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}})\right) + \tilde{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{E} - \bar{\bar{\boldsymbol{T}}}\boldsymbol{q}_e\right) = 2D - \bar{\bar{\boldsymbol{T}}} : \tilde{\nabla}\boldsymbol{q}_e + \boldsymbol{q}_e\cdot\left(\tilde{\nabla}\boldsymbol{q}_e\cdot\boldsymbol{M} - \frac{\boldsymbol{\tau_w}}{\rho}\right) \tag{7}$$

where $\tilde{\nabla}$ denotes the in-plane gradient. The involved variables are:

$$\boldsymbol{M} = \int_0^\infty (\boldsymbol{q}_e - \boldsymbol{q})\,\mathrm{d}z \qquad \text{Mass flux defect} \tag{8}$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{T}}} = \int_0^\infty ((\boldsymbol{q}_e - \boldsymbol{q})\otimes\boldsymbol{q}))\,\mathrm{d}z \qquad \text{Momentum flux defect} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{E} = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{q}\left(|\boldsymbol{q}_e|^2 - |\boldsymbol{q}|^2\right)\right)\,\mathrm{d}z \qquad \text{Kinetic energy defect} \tag{10}$$

$$D = \frac{1}{\rho}\int_0^\infty \boldsymbol{\tau_w}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial z}\,\mathrm{d}z \qquad \text{Dissipation integral} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\tau_w} = \begin{cases}\mu\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial z}\big|_{z=0}, & \text{laminar regime}\\ \mu\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial z}\big|_{z=0} - \rho\overline{\boldsymbol{q}' q'_z}, & \text{turbulent regime}\end{cases} \qquad \text{Shear stress vector} \tag{12}$$

The system is expressed in a tensorial form, making it independent of the coordinate system used. The notations are quite similar to the ones of Drela,[8] although Drela accounts for compressibility and for additional equations. The link between these notations and more usual displacement $\delta_{1.}$ and momentum $\theta_{..}$ integral boundary layer thicknesses is (expressed in a global coordinate system ($\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y}$,$\boldsymbol{Z}$)):

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{q}_e|\delta_{1X} \\ |\boldsymbol{q}_e|\delta_{1Y} \\ |\boldsymbol{q}_e|\delta_{1Z} \end{pmatrix} \qquad \bar{\bar{\boldsymbol{T}}} = |\boldsymbol{q}_e|^2 \begin{pmatrix} \theta_{XX} & \theta_{XY} & \theta_{XZ} \\ \theta_{YX} & \theta_{YY} & \theta_{YZ} \\ \theta_{ZX} & \theta_{ZY} & \theta_{ZZ} \end{pmatrix} \tag{13}$$

II.C Closure relations

Since the closure relations of the literature have initially been derived for 2D boundary layers and the effect of the transverse flow is expected to be low, closure is provided in a local coordinate system aligned with the external streamlines,

$$\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{q}_e}{|\boldsymbol{q}_e|}, \qquad \boldsymbol{c} = -\frac{\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}|}, \qquad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_w \tag{14}$$

where $\boldsymbol{n_w}$ is the vector normal to the surface. The in-plane velocity thus reads:

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(\eta) = |\boldsymbol{q}_e|(\hat{u_s}(\eta)\boldsymbol{s} + \hat{u_c}(\eta)\boldsymbol{c}) \tag{15}$$

where $\eta = z/\delta$. δ is an estimate of the boundary layer thickness.

II.C.1 Laminar regime

The closure relations used for the velocity profiles in laminar regime read:

$$\hat{u_s}(\eta) = 1 - [1 + a_s\eta]\,(1-\eta)^{p_s - 1} \tag{16}$$

$$\hat{u_c}(\eta) = a_c\eta\,(1 - \hat{u_s}(\eta)) \tag{17}$$

For the streamwise velocity $\hat{u_s}$, it is possible to express a_s and p_s as functions of the shape factor $H = \frac{\delta_{1s}}{\theta_{ss}}$.[3] For instance:

$$a_s(H) = \sqrt{p_s(H)^2 - p_s(H)(p_s(H)+1)Hg(H)} - 1 \tag{18}$$

The function $g(H)$ was derived by Cousteix[11] to fit the skin friction coefficient obtained for the Falkner-Skan solutions. $p_s(H)$ and $g(H)$ are given in appendix.

At the wall ($\eta = 0$), $\hat{u_s}$ satisfies the no-slip condition and the derivative of the velocity is consistent with the friction obtained in the self-similar Falkner-Skan solutions. At the edge of the boundary layer, $\hat{u_s}(1) = 1$ and the derivatives of the velocity are vanishing up to (p_s-2)th order. Moreover, both δ_{1s} and θ_{ss} are consistent with this velocity profile.

A 3D boundary layer is characterized by the presence of a cross-stream velocity component, due to transverse pressure gradients. For the crosswise velocity $\hat{u_c}$, the profile derived by Mughal[4] for unidirectional crossflow calculations is employed. From the calculation of $\delta_{1c} = \delta\int_0^1 -\hat{u_c}(\eta)\mathrm{d}\eta$ (since $u_{ce} = 0$ in the streamline-aligned coordinate system), a_c is linked to the solved variables through:

$$a_c = -\frac{\delta_{1c}}{\delta_{1s}}\frac{Hg(H)}{b(H)}\frac{p_s(H)\,(p_s(H)+1)}{1 + \dfrac{2a_s(H)}{p_s(H)+2}} \tag{19}$$

where $b(H)$ is given in appendix and the following relation has been used to express δ: $\delta = \delta_{1s}\frac{b(H)}{Hg(H)}$.[3] $\hat{u_c}$ then satisfies the no-slip condition at the wall and $\hat{u_c} = 0$ at the edge of the boundary layer. The derivatives of the velocity are vanishing at this location up to (p_s-2)th order. Finally, δ_{1c} and θ_{cc} are consistent with this velocity profile.

The two profiles are used to compute the dissipation integral (equation (11)) and the shear stress vector (equation (12)).

II.C.2 Turbulent regime

The streamwise velocity profile employed for the turbulent regime is based on the work of Tai,[12] whereas the crosswise component is neglected, as a first attempt:

$$\hat{u_s}(\eta) = \eta^{(H-1)/2} \tag{20}$$

$$\hat{u_c}(\eta) = 0 \tag{21}$$

It is worth mentioning that more evolved approaches have been developed to model turbulent boundary layers (velocity profiles of Swafford[13] or Drela's approach of transporting turbulent shear stress[8] for instance). In particular, the relations used for the current paper do not allow the turbulent boundary layer separation. Those approaches could be assessed in the future.

Besides, empirical relations are used for the friction and dissipation coefficients. Two options are available for the streamwise skin friction, the relation proposed by Ludwieg and Tillmann:[14]

$$C_{fs} = \frac{\tau_{ws}}{\rho|\boldsymbol{q}_e|^2/2} = 0.246 \times 10^{-0.678H} {Re_{\theta_{ss}}}^{-0.268}, \tag{22}$$

which is assumed valid for $Re_{\theta_{ss}} > 1200$, or the one proposed by White:[15]

$$C_{fs} = \frac{\tau_{ws}}{\rho|\boldsymbol{q}_e|^2/2} = \frac{0.3\ \mathrm{e}^{-1.33H}}{(\log Re_{\theta_{ss}})^{1.74+0.31H}}. \tag{23}$$

The dissipation coefficient is given by Drela's relation:[16]

$$D = |\boldsymbol{q}_e|^3 \frac{H^*}{2} \left[\frac{C_{fs}}{6} \left(\frac{4}{H} - 1 \right) + 0.03 \left(\frac{H-1}{H} \right)^3 \right], \tag{24}$$

where:

$$H^* = 1.505 + \frac{4}{Re_{\theta_{ss}}} + \left(0.165 - \frac{1.6}{\sqrt{Re_{\theta_{ss}}}} \right) \frac{(H_0 - H)^{1.6}}{H} \qquad \text{if } H < H_0 \tag{25}$$

$$H^* = 1.505 + \frac{4}{Re_{\theta_{ss}}} + (H - H_0)^2 \left(\frac{0.04}{H} + 0.007 \frac{\ln Re_{\theta_{ss}}}{\left(H - H_0 + \frac{4}{\ln Re_{\theta_{ss}}} \right)^2} \right) \qquad \text{if } H > H_0 \tag{26}$$

and

$$H_0 = 4 \qquad \text{if } Re_{\theta_{ss}} < 400 \tag{27}$$

$$H_0 = 3 + \frac{400}{Re_{\theta_{ss}}} \qquad \text{if } Re_{\theta_{ss}} \geq 400 \tag{28}$$

Again, the crosswise components are cancelled as a first approximation.

Regarding prediction of transition, the local criterion of Drela[17] was implemented for flows on smooth walls.

$$Re_{\theta_{ss}T} = 155 + 89 \left[0.25 \tanh(\frac{10}{H-1} - 5.5) + 1 \right] \widetilde{n}^{1.25} \tag{29}$$

$$\widetilde{n} = -8.43 - 2.4 \ln \left(\frac{\tau'}{100} \right) \tag{30}$$

$$\tau' = 2.7 \tanh \left(\frac{Tu}{2.7} \right), \tag{31}$$

where Tu is the turbulence rate (in %). However, the code is expected to be run mostly on rough walls. The criterion widely used in icing suites[18] is thus also proposed: transition occurs for a roughness Reynolds number $\mathrm{Re}_k = \dfrac{k_s|\boldsymbol{q}_e|}{\nu_e}$ larger than 600, where k_s is the equivalent sand grain roughness height and ν_e is the kinematic viscosity of air.

II.C.3 Rotation to the global coordinate system

Once the closure relations have been computed, the velocity profiles are rotated to the global coordinate system ($(\boldsymbol{q})_{LCS} \rightarrow (\boldsymbol{q})_{GCS}$) by using the rotation matrix $\bar{\bar{\boldsymbol{R}}}$:

$$(\boldsymbol{q})_{GCS} = \begin{pmatrix} u_X \\ u_Y \\ u_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{s} & \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{s} & \boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{s} & \boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s \\ u_c \\ u_n \end{pmatrix} = \bar{\bar{\boldsymbol{R}}}(\boldsymbol{q})_{LCS} \tag{32}$$

In a similar manner, the primary variables are transformed from the global to the local coordinate system (in order to construct the velocity profiles) as follows:

$$(\boldsymbol{M})_{LCS} = \bar{\bar{\boldsymbol{R}}}^T(\boldsymbol{M})_{GCS} \tag{33}$$

II.C.4 Calculation of the shape factor

The proposed closure of the problem requires knowledge of the following parameters: $H, \delta_{1s}, \delta_{1c}$. δ_{1s} and δ_{1c} are easily obtained from the solved variables $(\boldsymbol{M})_{GCS}$ by the rotation described earlier. However, in 3D, the shape factor $H = \frac{\delta_{1s}}{\theta_{ss}}$ is not explicitly present in the formulation since θ_{ss} is only linked to the solved variables through:

$$tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}}) = |\boldsymbol{q}_e|^2(\theta_{ss} + \theta_{cc}) \tag{34}$$

Thus, an iterative process regarding the calculation of the shape factor H has to follow. To that end, the definition of $\theta_{cc} = \delta\int_0^1 -\hat{u_c}(\eta)^2 \mathrm{d}\eta$ is used:

$$\frac{1}{H} = \frac{tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}})}{|\boldsymbol{q}_e|^2\delta_{1s}} - \frac{\theta_{cc}}{\delta_{1s}} = \frac{tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}})}{|\boldsymbol{q}_e|^2\delta_{1s}} + \frac{\delta\int_0^1 \hat{u}_c^2\,\mathrm{d}\eta}{\delta_{1s}} \tag{35}$$

Since $\hat{u}_c$ depends on H and the primary variables, it is now possible to obtain H by solving equation (35) in an iterative way. For instance, for the case of the laminar flow, equation (35) to be solved becomes:

$$\frac{1}{H} = \frac{tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}})}{|\boldsymbol{q}_e|^2\delta_{1s}} + \frac{b(H)a_c(H)^2}{Hg(H)p_s(H)(2p_s(H)-1)(2p_s(H)+1)}\left(1 + \frac{3a_s(H)}{p_s(H)+1} + \frac{6a_s(H)^2}{(p_s(H)+1)(2p_s(H)+3)}\right) \tag{36}$$

II.D Computation of heat transfer

The approach used here is commonly used in 2D ice accretion codes, as shown by Gent et al.[19] It is also the way heat transfer coefficients are inferred from dynamic data in the ONERA's 2D code IGLOO2D.[18] The heat transfer coefficient h_c is inferred from a Reynolds-like analogy:

$$h_c = \mathrm{St}\rho_e c_{p_e}|\boldsymbol{q}_e| \tag{37}$$

where ρ_e is the air density, c_{p_e} is the specific heat capacity at constant pressure for air and the Stanton number St depends on the regime.

For a laminar flow, the equation of Smith and Spalding is employed. It links the heat transfer coefficient to the evolution of the velocity at the edge of the boundary layer along a streamline (s is the wrap distance from the attachment line):

$$\mathrm{St} = \frac{0.2926\sqrt{\nu_e}}{|\boldsymbol{q}_e|\mathrm{Pr}}\sqrt{|\boldsymbol{q}_e|^{2.87}/\int_0^s |\boldsymbol{q}_e|^{1.87}ds} \tag{38}$$

where Pr is the Prandtl number.

The heat transfer coefficient in turbulent rough wall conditions is obtained with:

$$\mathrm{St} = \frac{C_{fs,r}/2}{\mathrm{Pr}_t + \sqrt{C_{fs,r}/2}/\mathrm{St}_k} \tag{39}$$

where $\mathrm{St}_k = 1.92\mathrm{Pr}^{-0.8}\mathrm{Re}_k^{-0.45}$, Pr_t is the turbulent Prandtl number and $\mathrm{Re}_k = \dfrac{k_s u_\tau}{\nu_e}$. u_τ is the friction velocity. $C_{fs,r}$ is the streamwise skin friction coefficient expected on a rough wall, which is computed from the streamwise momentum thickness computed by the integral method:

$$\frac{C_{fs,r}}{2} = \frac{0.168}{\left(\log\left(864\theta_{ss}/k_s + 2.568\right)\right)^2} \tag{40}$$

III Finite-Volume resolution

The system of equations (6), (7) can be written in the following manner:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \tilde{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}) \tag{41}$$

where the components of the flux vector $\boldsymbol{F}$ can be written:

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{\boldsymbol{T}}} \\ \left(\boldsymbol{E} - \bar{\bar{\boldsymbol{T}}}\boldsymbol{q}_e\right)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{q}_e|^2 \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}} \\ |\boldsymbol{q}_e|^3 \left(\boldsymbol{\delta_3} - \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}} \dfrac{\boldsymbol{q}_e}{|\boldsymbol{q}_e|}\right) \end{pmatrix}$$

where $\bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}$ and $\boldsymbol{\delta_3}$ are defined as follows:

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}} = \int_0^\infty \left(\left(\frac{\boldsymbol{q}_e}{|\boldsymbol{q}_e|} - \frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}_e|} \right) \otimes \frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}_e|} \right) \tag{42}$$

$$\boldsymbol{\delta_3} = \int_0^\infty \left(\frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}_e|} \left(1 - \frac{|\boldsymbol{q}|^2}{|\boldsymbol{q}_e|^2} \right) \right) \tag{43}$$

Following an unstructured-mesh Finite-Volume formulation, the system is integrated over a cell Ω_i between time t^n and t^{n+1} ($\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$):

$$\int_{\Omega_i} \boldsymbol{U}(t^{n+1}) \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_i} \boldsymbol{U}(t^n)\, \mathrm{d}\Omega = -\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_{ij}\, \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{S}\, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \tag{44}$$

where the divergence theorem has been used for the transformation of the volume integral to surface integral, Γ_{ij} is the edge shared by cell Ω_i with one of its neighbors Ω_j. The vector $\boldsymbol{n}_{ij}$ is the local unit normal to the edge Γ_{ij} in the tangent plane of cell Ω_i and pointing outward.

Equation (44) can be reshaped in the following discrete form:

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n - \frac{\Delta t^n}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \boldsymbol{F}_{ij} |\Gamma_{ij}| + \Delta t^n \boldsymbol{S}_i \tag{45}$$

where $\boldsymbol{U}_i^n$ is the discrete mean value of the unknowns in cell Ω_i at time t^n, $\boldsymbol{F}_{ij}$ is the numerical flux at the

edge Γ_{ij} and $\boldsymbol{S}_i$ is the discrete source term in cell Ω_i:

$$\boldsymbol{U}_i^n \overset{\text{def}}{\simeq} \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{U}(t^n) \mathrm{d}\Omega \tag{46}$$

$$\boldsymbol{F}_{ij} \overset{\text{def}}{\simeq} \frac{1}{\Delta t^n} \frac{1}{|\Gamma_{ij}|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_{ij} \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t \tag{47}$$

$$\boldsymbol{S}_i \overset{\text{def}}{\simeq} \frac{1}{\Delta t^n} \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{S} \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \tag{48}$$

To complete the discretization of the continuous model, the spatial and temporal schemes used to express the numerical flux $\boldsymbol{F}_{ij}$ are detailed in the following paragraphs. Regarding the source term $\boldsymbol{S}_i$, the computation of the velocity gradient is performed with a linear least-squares method (first order in space).

III.A Spatial scheme

Conservation

In the employed Finite Volume formulation, the fluxes' contribution to the residuals has to be expressed in the plane of every associated cells to obtain a conservative scheme. However, in the general case of an embedded surface, two neighboring cells may not be co-planar. Therefore, two different expressions for the flux through the shared edge are required as, in this general case, the following relationship is only true for a planar mesh:

$$\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{F}_{ij} \tag{49}$$

In the present study, the conservative character of the equations is preserved by employing a set of rotations, similarly to what is proposed by Lokatt and Eller.[10] A schematic depicting the involved variables is provided in figure 1.

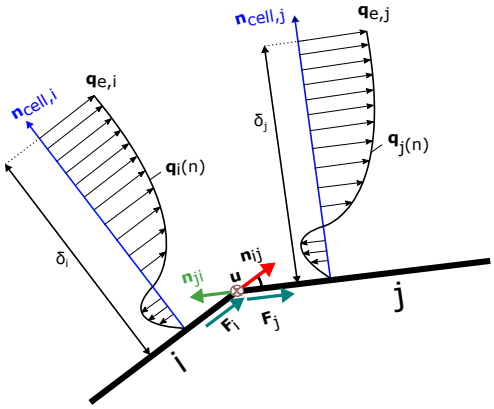


Figure 1: *Schematic of fluxes' calculation method in a 2D cut of an embedded surface.*

Therefore, we introduce the rotation matrix $\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij}$ which is used to express tensorial quantities from the plane associated to cell Ω_i in the plane associated to cell Ω_j. The process to build the matrix was adapted from the method described in Lokatt[10] (where the fluxes are expressed in the local coordinate system contrary to the present method) and consists of the following steps:

- Definition of the axis of rotation, $\boldsymbol{u}_{ij} = \dfrac{\boldsymbol{n}_{cell,i} \times \boldsymbol{n}_{cell,j}}{|\boldsymbol{n}_{cell,i} \times \boldsymbol{n}_{cell,j}|}$
- Definition of the angle of rotation, $\alpha_{ij} = \cos^{-1}\left(\boldsymbol{n}_{cell,i} \cdot \boldsymbol{n}_{cell,j}\right)$

- Definition of the rotation matrix $\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij}$ around the previously defined axis,

$$\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij} = \cos\alpha_{ij}\bar{\bar{\boldsymbol{I}}} + \sin\alpha_{ij}\left[\boldsymbol{u}_{ij}\right]_{\times} + \left(1-\cos\alpha_{ij}\right)\boldsymbol{u}_{ij}\otimes\boldsymbol{u} \tag{50}$$

where $\left[\boldsymbol{u}_{ij}\right]_{\times}$ is the cross product matrix of $\boldsymbol{u}_{ij}$, $\otimes$ is the tensor product and $\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}$ is the identity matrix.

Then, the following relation holds:

$$\boldsymbol{F}_{ji} = -\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij}\boldsymbol{F}_{ij} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{F}_{ij} = -\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ji}\boldsymbol{F}_{ji} = -\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij}^{T}\boldsymbol{F}_{ji} \tag{51}$$

Flux expression

Based on the formulation employed in the 2D version of the code,[3] a first order upwind scheme is used in order to ensure stability. The upwinding of the numerical flux is based on the edge velocity $\boldsymbol{q}_{e,ij}$ which is defined in the tangential plane associated to cell Ω_i by:

$$\boldsymbol{q}_{e,ij} = \frac{1}{\omega_i+\omega_j}\left(\omega_i\boldsymbol{q}_{e,i} + \omega_j\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ji}\boldsymbol{q}_{e,j}\right) \tag{52}$$

where ω_i and ω_j are inverse distance weighting factors that rely only on the mesh geometry:

$$\omega_i = \left|G_iG_{ij}\right|^{-1}, \quad \omega_j = \left|G_jG_{ji}\right|^{-1} \tag{53}$$

where G_i, G_j and $G_{ij}(=G_{ji})$ are the centers of gravity of cells Ω_i, Ω_j and edge Γ_{ij} respectively.

Then, the numerical flux is calculated with upstream values according to the sign of the face velocity:

- If $(\boldsymbol{q}_{e,ij}\cdot\boldsymbol{n}_{ij}) \geq 0$ then :

$$\boldsymbol{F}_{ij} = \begin{pmatrix} \left|\boldsymbol{q}_{e,ij}\right|^2\bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_i\boldsymbol{n}_{ij} \\ \left|\boldsymbol{q}_{e,ij}\right|^3\left(\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{3}i} - \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_i\dfrac{\boldsymbol{q}_{e,i}}{\left|\boldsymbol{q}_{e,i}\right|}\right)\cdot\boldsymbol{n}_{ij} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{F}_{ji} = -\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij}\boldsymbol{F}_{ij} \tag{54}$$

- else:

$$\boldsymbol{F}_{ji} = \begin{pmatrix} \left|\boldsymbol{q}_{e,ji}\right|^2\bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_j\boldsymbol{n}_{ji} \\ \left|\boldsymbol{q}_{e,ji}\right|^3\left(\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{3}j} - \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_j\dfrac{\boldsymbol{q}_{e,j}}{\left|\boldsymbol{q}_{e,j}\right|}\right)\cdot\boldsymbol{n}_{ji} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{F}_{ij} = -\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ji}\boldsymbol{F}_{ji} \tag{55}$$

where $\bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}$ and $\boldsymbol{\delta_3}$ are respectively computed by numerical integration of (42) and (43) with a Simpson method in the upwind cell.

As also mentioned in Bayeux's paper,[3] the present scheme cannot capture the separation of the boundary layer. This issue will be addressed in future works.

Treatment of the stagnation point

It must be mentioned that it was identified in the 2D code that the discretization of the equations (and more specifically the one of kinetic energy conservation) needs to be corrected[3] to have a better numerical treatment of the stagnation point. This correction consists of an additional source term aimed at recovering the consistency of the numerical method in the vicinity of the stagnation point. It was adapted as follows from the work of Bayeux:[3]

$$S_{stag} = \frac{\boldsymbol{E} - \bar{\bar{\boldsymbol{T}}}\boldsymbol{q}_e}{\left|\boldsymbol{q}_e\right|^3}\cdot\left[\tilde{\nabla}\cdot\left(\left|\boldsymbol{q}_e\right|^3\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}\right) - 3\left|\boldsymbol{q}_e\right|^2\,\tilde{\nabla}\cdot\left(\left|\boldsymbol{q}_e\right|\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}\right)\right], \tag{56}$$

which has been discretized consistently with the employed numerical flux:

$$S_{stag,i} = \frac{1}{|\Omega_i|} \frac{\boldsymbol{E}_i - \bar{\bar{\boldsymbol{T}}}_i \boldsymbol{q}_{e,i}}{|\boldsymbol{q}_{e,i}|^3} \cdot \left[\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left(|\boldsymbol{q}_{e,ij}|^3 |\Gamma_{ij}| \boldsymbol{n}_{ij} \right) - 3|\boldsymbol{q}_{e,i}|^2 \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \left(|\boldsymbol{q}_{e,ij}| |\Gamma_{ij}| \boldsymbol{n}_{ij} \right) \right] \tag{57}$$

The current formulation was derived for streamwise aligned meshes. It will be fully adapted to unstructured meshes in the future.

III.B Temporal scheme

An explicit Euler method has been employed for the discretization of the transport term while the source terms can be implicit, in an attempt to increase the stability of the method:

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n - \frac{\Delta t^n}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \boldsymbol{F}_{ij}^n |\Gamma_{ij}| + \Delta t_i^n \boldsymbol{S}_i^{n+1} \tag{58}$$

After linearization of the source term, the solution is given by:

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n + \left[\boldsymbol{I} - \Delta t_i^n \nabla_U \boldsymbol{S}_i^n \right]^{-1} \Delta t_i^n \left(-\frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \boldsymbol{F}_{ij}^n |\Gamma_{ij}| + \boldsymbol{S}_i^n \right) \tag{59}$$

where $\nabla_U \boldsymbol{S}$ is the jacobian matrix of the source term which is calculated by numerical differenciation.

In equation (59), a local time stepping approach is used to obtain a faster convergence to the steady-state solution. The timestep value Δt_i is computed in each cell Ω_i to satisfy the following empirical CFL condition based on the convective time scale:

$$\Delta t_i < CFL \, \frac{\Delta x_i}{|\boldsymbol{q}_{e,i}|} \tag{60}$$

where Δx_i is the characteristic cell length given by:

$$\Delta x_i = \frac{|\Omega_i|}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} |\Gamma_{ij}|} \tag{61}$$

IV Validation of the method

A first step towards the validation of the method is to compare it against 2D theoretical test-cases (self-similar boundary layer solutions of Falkner and Skan). The impact of the structured or unstructured grid will be evaluated on the theoretical test-case, as well as the grid refinement and the effect of rotations.

The 3D code, BLIM3D, will also be cross-checked against its already validated 2D version, BLIM2D, on a NACA0012 airfoil test-case to validate the laminar-turbulent transition. Numerical results are also compared with a reference solution given by an ONERA in-house code (CLICET) based on the full Prandtl equations.[21]

The last test case is focused on the study of a self-similar solution for a 3D boundary layer as proposed by Cooke[22] to assess the ability of the proposed method to deal with 3D flows.

It has to be noted that in all of the subsequent simulations, the CFL value was set to $CFL = 0.9$.

IV.A Falkner-Skan conditions

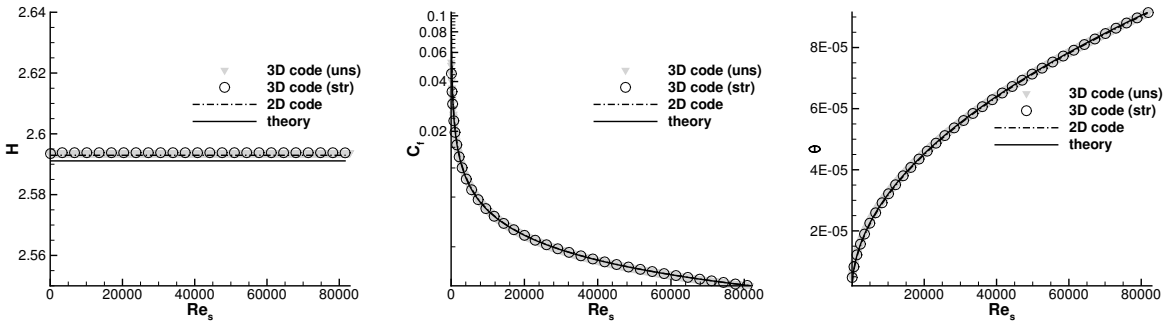
The theoretical test-cases are the self-similar boundary layer solutions of Falkner and Skan. This family of solutions corresponds to 2D laminar boundary layers developing along the x direction when the external flow velocity is $u_e(x) = cx^m$, where c and m are two constants. The pressure gradient is thus dependent on m. It is positive (adverse) for negative values of m. $m = 0$ corresponds to a flow over a flat plate (zero pressure gradient). The pressure gradient is negative (favorable) for positive values of m. One may notice that $m = 1$ represents a 2D stagnation point flow.

A very important parameter that characterizes the state of the boundary layer is the shape factor H. It can be proven that for the special cases of self-similar solutions, the shape factor is constant all along the surface. Besides, the skin friction $C_f = C_{fs}$ and $\theta = \theta_{ss}$ are major parameters for icing (since the heat transfer coefficient can be inferred from θ as seen in section II.D). The comparisons will thus focus on H, C_f and θ.

IV.A.1 Computations on structured and unstructured grids

The computations were performed with both the 2D and 3D codes. A mesh with 512 equidistant points was used in the streamwise direction. In order to properly compare the results between the two codes, the same mesh was used in 3D, with only one cell in the transverse direction for structured meshes. The results given by BLIM3D on unstructured Delaunay meshes (with the same characteristic cell size) are also presented.

Zero pressure gradient (Blasius solution) The case of a flat plate subjected to a constant external velocity field was studied. The Reynolds number of the computation is $Re = 81800$, the flow is expected to be laminar over the entire length of the plate.

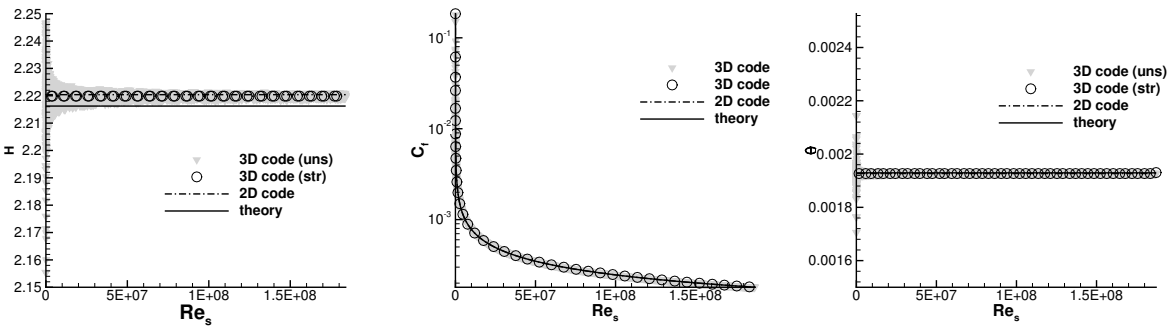


(a) *Shape factor H* **(b)** *Skin friction coefficient C_f* **(c)** *Momentum thickness θ_{ss} (m)*

Figure 2: *BLIM2D and BLIM3D results, on structured (str) and unstructured (uns) meshes, for the case $m = 0$ plotted against the local Reynolds number Re_s.*

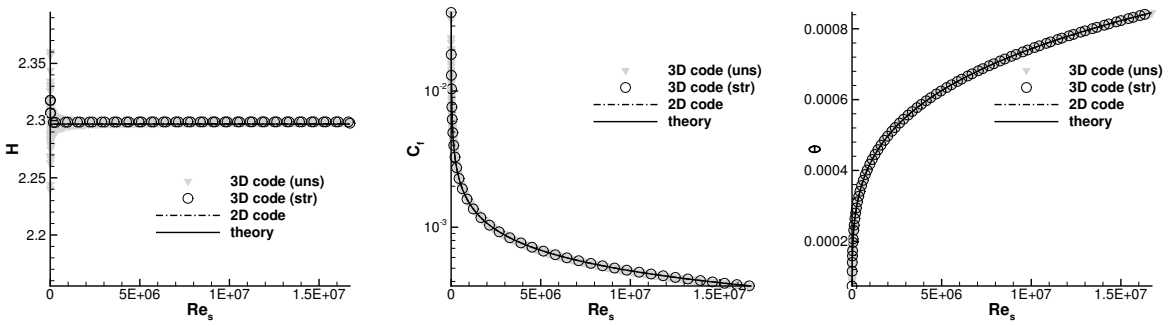
The shape factor H, the skin friction coefficient C_f and the (streamwise) momentum thickness θ obtained from the 2D and 3D versions of the code are plotted against the local Reynolds number in the direction of the external streamlines $Re_s = q_e s/\nu_e$ in figure 2. One can observe the accordance in the results between the two versions of the code. At the same time, one can see how the integral method compares against the analytical solution to the differential boundary layer equations, as proposed by Blasius (relative error on H lower than 0.1% according to values reported in table 1).

Non-zero pressure gradient Two test-cases were studied with favorable pressure gradient, for two different values of the exponent m. The first one corresponds to a 2D stagnation point flow (case $m = 1$) and the second one to an accelerated boundary layer (case $m = 1/3$). The corresponding numerical results are presented in figures 3 and 4 respectively.



(a) *Shape factor H* **(b)** *Skin friction coefficient C_f* **(c)** *Momentum thickness θ_{ss} (m)*

Figure 3: *BLIM2D and BLIM3D results, on structured (str) and unstructured (uns) meshes, for the 2D stagnation point flow (case $m = 1$) plotted against the local Reynolds number Re_s.*



(a) *Shape factor H* **(b)** *Skin friction coefficient C_f* **(c)** *Momentum thickness θ_{ss} (m)*

Figure 4: *BLIM2D and BLIM3D results, on structured (str) and unstructured (uns) meshes, for the accelerated boundary layer (case $m = 1/3$) plotted against the local Reynolds number Re_s.*

Cases	m=0	m=1/3	m=1
theory	2.59110	2.29694	2.21623
2D code	2.59294	2.29726	2.22039
3D code (str)	2.59380	2.29890	2.21986
3D code (uns)	2.59380	2.29892	2.22008

Table 1: *Results on shape factor H (asymptotic values).*

For both cases, the results obtained are almost identical for both 2D and 3D methods on structured meshes. The relative error on the shape factor is negligible (table 1). Due to the simplifications introduced in the treatment of the stagnation point (section III.A), small discrepancies can be observed for the shape factor (figure 3a) and the momentum thickness (figure 3c) for low Reynolds numbers of the 2D stagnation point flow (case $m = 1$) for the 3D results with an unstructured mesh. Nevertheless, the results produced on the structured and the unstructured meshes are in good agreement for higher local Reynolds numbers.

For the case of an accelerated boundary layer ($m = 1/3$), a small error is observed for both the 2D and the 3D method at low Reynolds numbers, which is consistent with the fact that the stagnation point correction is active in this region and it was developed to correctly handle the $m = 1$ case. The evolution of this error against the mesh size is detailed in the next paragraph.

IV.A.2 Mesh convergence

The ability of the method to converge when the mesh size decreases is now presented. To that end, the rate of convergence of the method was assessed in the case of an external velocity field belonging in the Falkner-Skan family with an exponent equal to $m = 1/3$. Uniform structured grids were used with different refinements in the streamwise direction and one cell in the transverse direction.

For a constant grid refinement ratio r, the expression of the convergence rate p may be written as follows:[20]

$$p = \frac{\log\left(\frac{f_3 - f_2}{f_2 - f_1}\right)}{\log r} \tag{62}$$

where f_i is the average of the shape factor H over the grid i and r is the characteristic cell size ratio between two meshes (i.e. in our case $r = 0.5$). Figure (5) shows that the numerical solution for the shape factor converges as expected to a constant value when the mesh is refined. Quantitative results are also reported in table 2. The convergence rate is close to 1, which is in good agreement with the fact that a first order scheme is used for the spatial discretization.

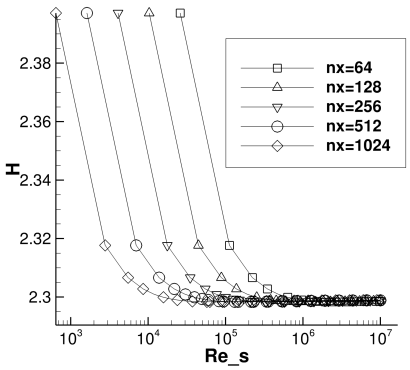


Figure 5: *BLIM3D convergence assessed on the shape factor*

Mesh size	$< H >$	p
64	2.30050	-
128	2.29965	-
256	2.29925	1.09
512	2.29907	1.16
1024	2.29899	1.22

Table 2: *BLIM3D convergence rate (based on the average shape factor $< H >$).*

IV.A.3 Coordinate system transformation

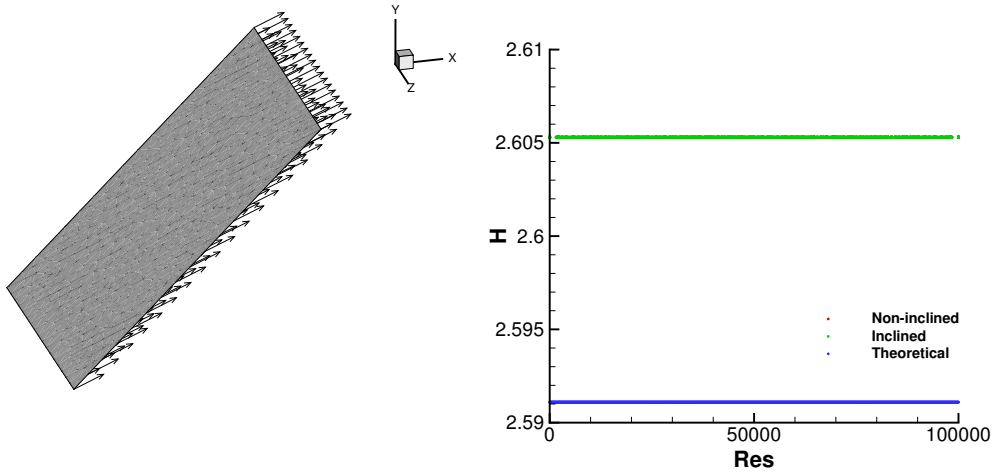
Another interesting test case to be studied before proceeding with more complex geometries and external velocity fields was to re-run the previous simulations with the flat plate being arbitrarily placed in the 3D space. Additionally, the velocity vector was not aligned to the flat plate but the incoming flow was creating an angle of 45 degrees with it. The goal of this test case was to verify that the process of rotation between the local and global coordinate systems was properly performed (since the global and the local coordinate systems were no more the same). In the aforementioned simulation, the velocity vector was $\boldsymbol{q}_e = \left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right) m/s$ and was tangential to the plane of the flat plate.

The geometry of the problem along with the external velocity field are presented in figure 6a. As observed in figure 6b, the results obtained for the inclined and non-inclined cases are identical and therefore the coordinate system transformations are deemed to be properly executed.

IV.B NACA0012 case

The goal of this test case is to assess the ability of the 3D method to correctly compute the laminar-turbulent transition over a NACA0012 profile. The numerical results of BLIM3D are compared against BLIM2D and the code CLICET which is considered as the reference.

A 2D mesh of 512 cells, with a more refined region close to the leading edge, was used for the 2D computations with BLIM2D and CLICET. The 3D mesh was generated from the 2D mesh thanks to an extrusion in the



(a) *Problem's geometry* **(b)** *Shape factor H*

Figure 6: *(a) Problem's geometry and (b) shape factor H plotted against the local Reynolds number Re_s for the inclined and non-inclined test cases.*

transverse direction over 3 cells. In this way, both meshes have the same refinement along the streamwise direction in order to have comparable results.

The data set for this test case is given in table 3. The wall is assumed to be smooth. The local criterion proposed by Drela (equation (29)) was thus used for this test case. Besides, Ludwieg-Tillmann relation (equation (22)) was employed for the turbulent skin friction closure. An arbitrary initial condition was imposed at the beginning of the calculation. It is important to notice that the position of the stagnation point and the position of the transition are automatically determined during the 3D code calculation.

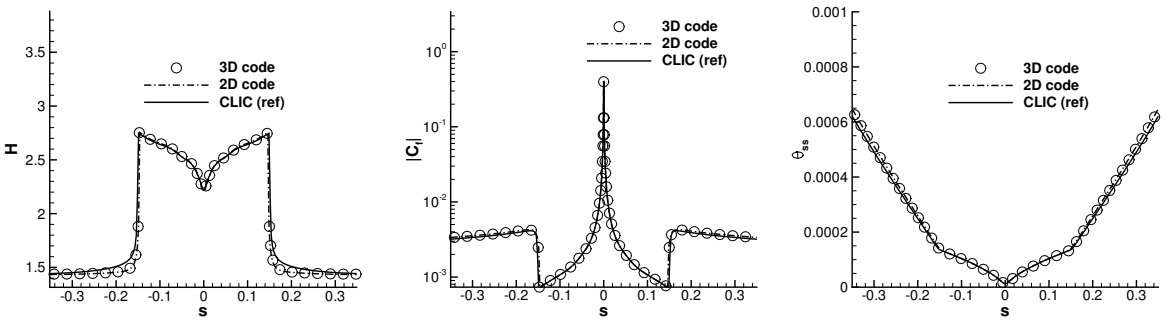
Profile	NACA0012
chord length (m)	0.5
AoA ()	0
M_∞	0.15
T_∞ (K)	263
P_∞ (Pa)	80000

Table 3: *Operating conditions for the NACA0012 test case*

Figure 7 shows that the results produced by BLIM3D are in very good agreement with BLIM2D and CLICET. The location of the laminar-turbulent transition, where the skin friction abruptly increases and the shape factor decreases, is well predicted. The laminar regime is very well captured, whereas the turbulent region is correctly reproduced despite small discrepancies which were often observed with BLIM2D. The use of more evolved closure relations should improve these results.

IV.C Falkner-Skan-Cooke conditions

The validation of the 3D character of the method was carried out against an extension of the self-similar solutions to 3D as proposed by Cooke,[22] which essentially represents the solution for a laminar boundary layer flow over an infinite swept wing. According to their work, an analytical solution is obtained in 3D when the streamwise component of the external velocity field is following the 2D Falkner-Skan family of velocity profiles, while the crosswise velocity is constant, i.e. $\boldsymbol{q}_e = ((X/L)^m, cst, 0)$.



(a) *Shape factor H*

(b) *Magnitude of the skin friction coefficient* $|C_f|$

(c) *Momentum thickness* θ_{ss} *(m)*

Figure 7: *Comparisons of the numerical results with respect to the curvilinear abscissa of the NACA0012 profile.*

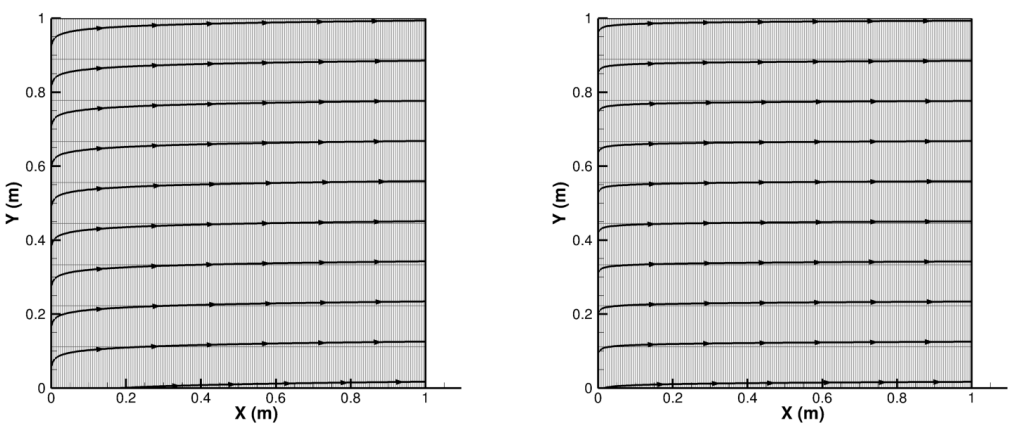
In such cases, it can be shown after the work of Cooke[22] that the shape factors defined as

$$H_{XX} = \frac{u_{Xe}\delta_{1X}}{|\boldsymbol{q}_e|\theta_{XX}}\ , \qquad H_{YY} = \frac{u_{Ye}\delta_{1Y}}{|\boldsymbol{q}_e|\theta_{YY}} \tag{63}$$

are expected to remain constant along the surface of the body.

A square flat grid was used for the test case (figure 8). In order to simulate the infinite conditions of the flow, periodicity boundary conditions were applied at the boundaries $Y_{\min}$, $Y_{\max}$. The velocity profile was set to : $\boldsymbol{q}_e = (100x, 1, 0)$.

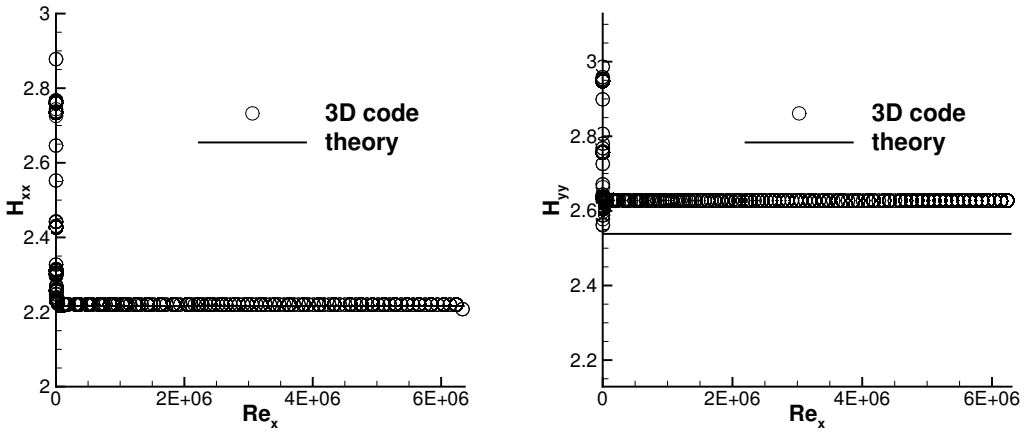
As it can be observed in figure 8, BLIM3D is able to calculate the expected skewing between the external and the wall limiting streamlines. The calculated values for the shape factor are well calculated when compared to the theoretical ones (figure 9). However, and possibly connected to the discretization error appearing in the region of the leading edge, the boundary layer requires a certain length to fully develop and reach its self-similar state as it was already discussed in section IV.A.1. The stagnation point correction does not act properly here, which could be due to the fact that it was developed for a real stagnation point and not for a separation line as is computed here.



(a) *External streamlines*

(b) *Wall limiting streamlines*

Figure 8: *External and wall limiting (skin friction) streamlines,* $\boldsymbol{q}_e = (100x, 1, 0)$.



(a) *Shape factor H_{XX}* **(b)** *Shape factor H_{YY}*

Figure 9: *Shape factor H_{XX} and H_{YY} plotted against the local Reynolds number Re_x, $\boldsymbol{q}_e = (100x, 1, 0)$.*

V Ice accretion computation using the 3D Integral Boundary Layer code

The 3D integral boundary layer code, BLIM3D, was included in ONERA's 3D icing suite, IGLOO3D. This means that BLIM3D is fed by an inviscid code compatible with IGLOO3D structure, here elsA. Then it provides the heat transfer coefficient and skin friction to the 3D Messinger code MESSINGER3D.

A NACA0012 glaze ice case was used to demonstrate the capabilities of BLIM3D to be used for ice accretion computation. A glaze ice case was used because the shape of this kind of rather warm ice depends greatly on the computation of the heat transfer in the boundary layer. The conditions of the case are given in table 4. The flow is 2D but a 3D unstructured grid was generated as shown in figure 10. It is composed of 39940 triangles, and a local refinement is used in the vicinity of the stagnation point.

	AOA (^{o})	**Chord** (m)	$\mathbf{P_\infty}$ (Pa)	$\mathbf{T_\infty}$ (K)	$\mathbf{M_\infty}$	**LWC** (g/m^3)	**MVD)** (μm)	Δt (s)
NACA0012 airfoil	0	0.533	95937	264.82	0.2056	0.61	40	672

Table 4: *Conditions of the test-case, AOA: angle of attack; P_∞, T_∞, M_∞: static pressure, static temperature and Mach number of incoming airflow; LWC: Liquid Water Content of incoming flow; MVD: Median Volume Diameter of supercooled water droplets; Δt: accretion time.*

The rough models of BLIM3D were used for laminar-turbulent transition and heat transfer (the roughness height is 0.533 mm) and, as shown in table 5, the two closure relations for skin friction were assessed (Ludwieg-Tillmann, equation (22), and White, equation (23)).

Table 5 shows that several computations were performed on the NACA0012 case. The ONERA's 2D icing code IGLOO2D was run with both predictor (a single aerodynamics - droplet - accretion loop is made) and predictor-corrector approach (two loops are made and the grid is updated to account for the effect of the ice shape on the airflow and the droplet trajectories). The in-house solvers STRMESH2D, EULER2D, SIM2D, TRAJL2D and MESSINGER2D[18] were used for the structured mesh, the inviscid flow, the simplified integral boundary layer, the Lagrangian trajectography and the ice acrretion computations, respectively.

In addition, the same test-case was also run with the usual approach of IGLOO3D, consisting of computing the airflow with elsA code (RANS approach on a structured grid), and the droplet trajectories with the Eulerian code SPIREE (monodisperse approach here). For this approach, several methods are available to compute the heat transfer coefficient. For this paper, the relations of section II.D, fed by the smooth-wall momentum thickness provided by elsA, were used. This approach is very similar to IGLOO2D and thus

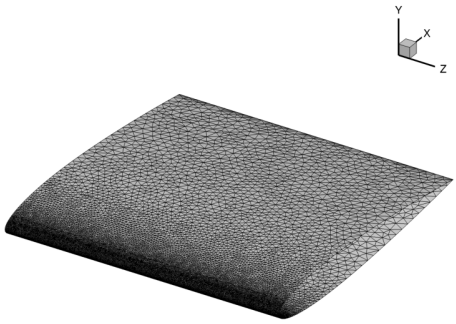


Figure 10: *NACA0012 surface mesh for BLIM3D*

Code	**Gas flow**	**Droplet trajectories**	**Friction closure**	h_c **closure**	**Grid**	**Predictor-corrector**	**Output**
IGLOO3D	elsA RANS	SPIREE		section II.D	3D structured 1312 elements	Predictor	Boundary layer, ice
IGLOO3D	elsA Euler BLIM3D	SPIREE	Ludwieg-Tillmann	section II.D	3D unstructured 39940 elements	Predictor	Boundary layer, ice
IGLOO3D	elsA Euler BLIM3D	SPIREE	White	section II.D	3D unstructured 39940 elements	Predictor	Boundary layer, ice
IGLOO2D	EULER2D SIM2D	TRAJL2D		section II.D	2D structured 128 elements	Predictor-Corrector	Boundary layer, ice
IGLOO2D	EULER2D BLIM2D		Ludwieg-Tillmann		2D structured 128 elements		Boundary layer
IGLOO2D	EULER2D BLIM2D		White		2D structured 128 elements		Boundary layer

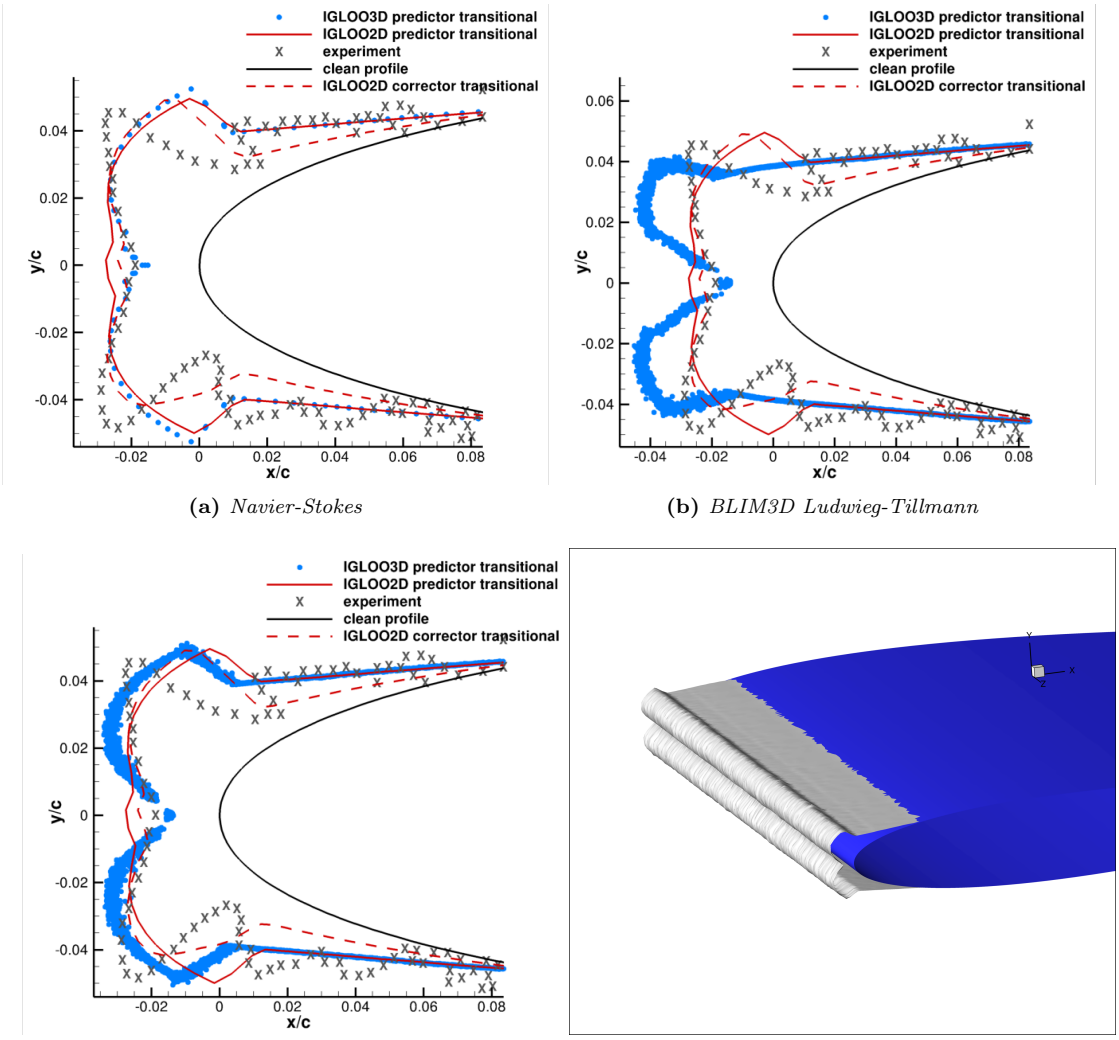
Table 5: *Various computations performed on the NACA0012 glaze ice case.*

often produces satisfactory results on 2D configurations. For both the RANS and BLIM3D approaches, IGLOO3D was used in predictor mode.

Figure 11 gathers the results produced by the various approaches. The horns are globally well captured with IGLOO2D, although they are a little too large because too much water runback occurs. Moreover, the corrector phase does not bring a major improvement for this test-case compared to the predictor step. This justifies the use of a single predictor step with IGLOO3D.

Regarding the IGLOO3D computations, the usual Navier-Stokes approach produces an ice shape which is very similar to IGLOO2D, despite small discrepancies in the vicinity of the stagnation point (figure 11a). This can be explained by the smaller heat transfer coefficient obtained with IGLOO3D compared to IGLOO2D (figure 12). Consequently, the ice is less cooled, the runback is thus enhanced and the solidification lessened.

When BLIM3D is used, the ice shapes given by IGLOO3D are very dependent on the closure model retained for the skin friction (figures 11b and 11c). Ludwieg-Tillmann model fails to capture the correct location of the horns, whereas White model is much more satisfactory. This can be linked to the fact that the latter is not valid for low $Re_{\theta_{ss}}$. Indeed, the transition on rough walls forces the transition to occur very rapidly, and the order of magnitude of $Re_{\theta_{ss}}$ is only a few tens. As a consequence, figure 12a shows that the heat transfer coefficient given by Ludwieg-Tillmann model is largely overestimated over the horns (see figure 13 to identify the location of the horns in terms of the wrap distance s from the stagnation point). Although it



(a) *Navier-Stokes*

(b) *BLIM3D Ludwieg-Tillmann*

(c) *BLIM3D White*

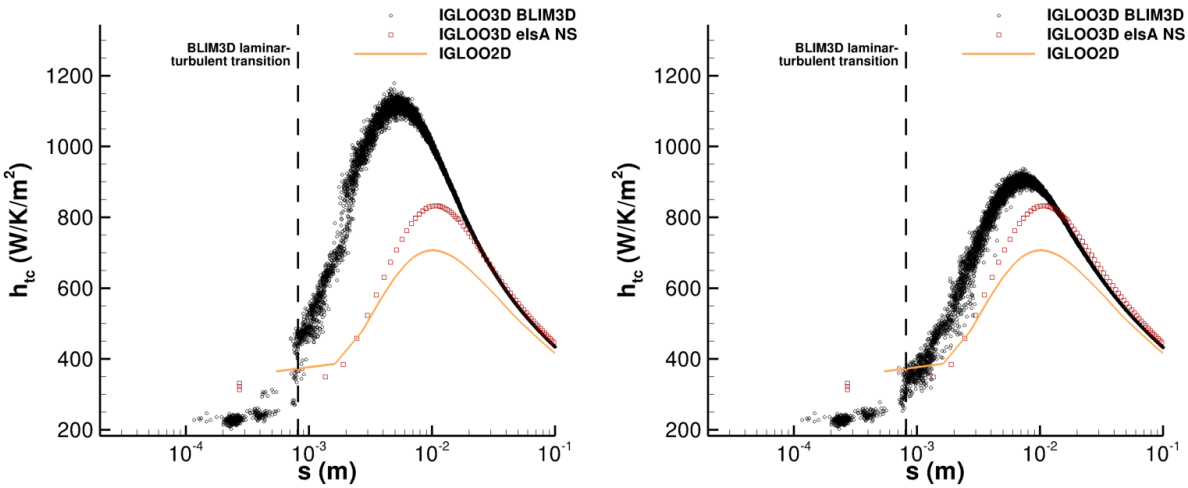
(d) *BLIM3D White*

Figure 11: *IGLOO3D computations with Navier-Stokes or BLIM3D approach and two different closure relations*

is still overestimated with White model (figure 12b), the agreement becomes much better between BLIM3D, IGLOO2D (SIM2D) and IGLOO3D used along with elsA.

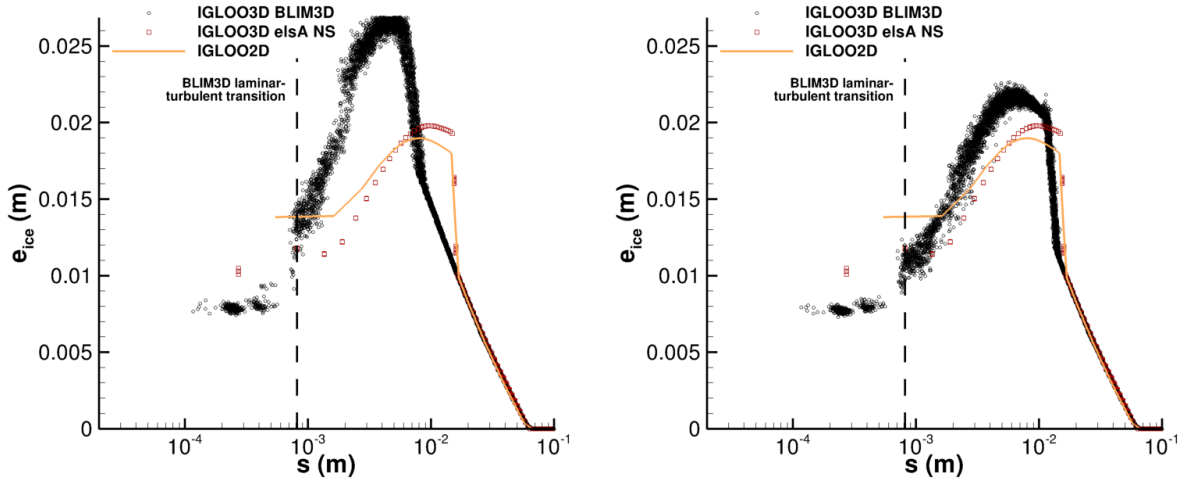
It is worth recalling that the heat transfer coefficient is dependent on the momentum thickness calculated by the boundary layer code. Figure 14 shows that BLIM3D and its 2D counterpart BLIM2D (run on the same mesh as IGLOO2D SIM2D with the same inviscid data) produce very similar results, although the BLIM3D results are a little noisy due to the unstructured grid. However, the momentum thickness given by SIM2D and elsA are larger. Small discrepancies are often observed in turbulent regime between BLIM2D and SIM2D.[3] However, close to the stagnation point, this discrepancy becomes significant because the momentum thickness is small. This is again a consequence of the acceleration of transition due to roughness.

BLIM3D was thus included successfully in IGLOO3D. But a proper choice of the turbulent closure relations had to be made and more work is necessary on the turbulent regime to further improve the results.



(a) *BLIM3D Ludwieg-Tillmann* (b) *BLIM3D White*

Figure 12: *Heat transfer computed with the different approaches employed for the computation of the NACA0012 glaze case*



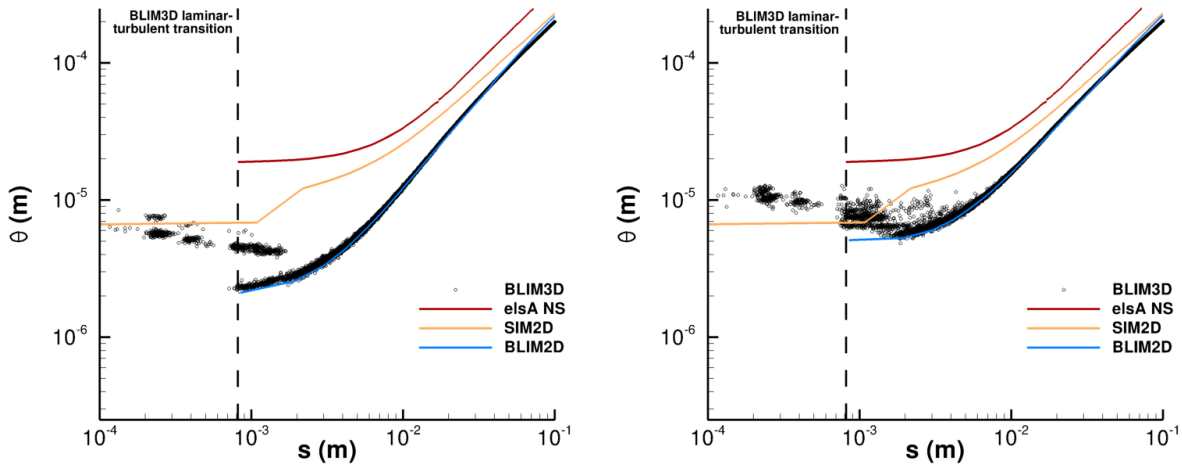
(a) *BLIM3D Ludwieg-Tillmann* (b) *BLIM3D White*

Figure 13: *Ice thickness computed with the different approaches employed for the computation of the NACA0012 glaze case*

VI Conclusion

The present article described a 3D integral boundary layer method and its application to icing problems. A 3D code was developed and included in the ONERA's 3D icing suite, IGLOO3D in order to reduce the computational cost of the airflow during the process of ice accretion computations.

The solved equations which were presented are an extension of the 2D system of equations of Bayeux et al.[3] The unsteady momentum and kinetic energy equations are written in conservation form. Regarding heat transfer, a 2D-like approach is used to infer the heat transfer coefficient from the dynamics of the boundary



(a) *BLIM3D Ludwieg-Tillmann* **(b)** *BLIM3D White*

Figure 14: *Streamwise momentum thickness computed with the different approaches employed for the computation of the NACA0012 glaze case*

layer.

The solver is based on the Finite Volume method, using an upwind scheme, which was presented in the present paper. It is worth mentioning that the equations are solved over the whole iced surface.

Several validation cases were presented to ensure that the code properly catches the boundary layer characteristics. Moreover, an unstructured NACA0012 test-case was presented to demonstrate the ability of the method to be efficiently included in ice accretion computations. The results show a great sensitivity of the heat transfer coefficient and thus of the glaze ice shapes to the momentum thickness produced by the code. Since laminar-turbulent transition occurs very rapidly on ice, it has been shown that proper turbulent closure relations have to be employed.

Appendix

The functions used in this paper for the laminar velocity profile exponent $p_s(H)$, the streamwise skin friction coefficient $g(H) = \frac{C_{fs}}{2} Re_{\theta_{ss}}$ and $b(H)$ are:

$$p_s(H) = \begin{cases} 2.4834 + \dfrac{0.7877}{(H - 1.9538)^{1.6001}} & \text{if } H \leq H_{crit} \\ 2 + \dfrac{2.0411 \times 10^{11}}{(H + 25.89)^{7.7560}} & \text{if } H > H_{crit} \end{cases} \tag{64}$$

$$g(H) = \begin{cases} 2.99259 \left[\left(\dfrac{1}{H} - \dfrac{1}{2H_{crit}} \right)^{1.7} - \left(\dfrac{1}{2H_{crit}} \right)^{1.7} \right], & \text{for } H \leq H_{crit} \\ 0.20644 - 90.30936 \left(\left(\dfrac{1}{H_{crit}} \right)^{1.3} - \dfrac{1}{H^{1.3}} \right)^{3.35661} + & \\ (H-1) \left[-0.06815 + 46.34236 \left(\dfrac{1}{H_{crit}^2} - \dfrac{1}{H^2} \right)^{2.338238} \right], & \text{for } H > H_{crit} \end{cases} \tag{65}$$

$$b(H) = p_s(H) - \sqrt{p_s(H)^2 - p_s(H)\left(p_s(H) + 1\right) H g(H)} \tag{66}$$

$H_c = 4.02923$ is the value of the shape factor at separation of the boundary layer.

References

[1] Radenac, E., *Validation of a 3D ice accretion tool on swept wings of the SUNSET2 program*, 8th AIAA Atmospheric and Space Environments Conference - AVIATION 2016 WASHINGTON D.C., USA, 2016.

[2] Kays W.M. and Crawford M.E., *Convective heat and mass transfer*, McGraw-Hill, 1993.

[3] Bayeux, C., Radenac, E. and Villedieu, P., *Theory and Validation of a 2D Finite-Volume integral boundary layer method intended for icing applications*, 9th AIAA Atmospheric and Space Environments Conference - AVIATION 2017 DENVER, USA, 2017.

[4] Mughal B.H., *Integral methods for three-dimensional boundary layers*, PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1998.

[5] Mughal B.H, *A calculation method for the three-dimensional boundary layer equations in integral form*, Master thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1992.

[6] Myring D.F., *An integral prediction method for three dimensional turbulent boundary layers in incompressible flow*, Technical Report 70147, RAE, 1970.

[7] Cousteix, J., *Three-dimensional Boundary Layers. Introduction to calculation methods*, AGARD R-741, paper 1, 1986.

[8] Drela M., *Three-dimensional integral boundary layer formulation for general configurations*, 21st AIAA computational fluid dynamics conference, 2013.

[9] Van Garrel A., *Integral boundary layer method for wind turbine aerodynamics*, Technical report ECN-C–04-004, 2003.

[10] Lokkat M. and Eller D., *Finite-volume scheme for the solution of integral boundary layer equations*, Computer and fluids, 132 (2016) 62-71, 2016.

[11] Cousteix J., *Couche Limite Laminaire*, Cepadues Editions, 1989.

[12] Tai T. C., *An integral prediction method for three-dimensional flow separation*, 22nd AIAA Aerospace Sciences Meeting, 1984.

[13] Swafford, T., *Analytical approximation of two-dimensional separated turbulent boundary layer velocity profiles*, AIAA Journal, 21(6), 1983.

[14] Ludwieg, H., Tillmann, W., *Investigations of the wall-shearing stress in turbulent Boundary layers.*, NACA-TM-1285, 1950.

[15] White, F. M., *Viscous fluid flow.*, McGraw-Hill 2nd Edition, 1974.

[16] Drela, M., *Two-dimensional transonic aerodynamic design and analysis using the Euler equations.*, PhD Massachusetts Institute of Technology, 1985.

[17] Drela, M., *MISES Implementation of Modified Abu-Ghannam/Shaw Transition Criterion.*, online database, 1998.

[18] Trontin, P., Blanchard, G., Kontogiannis, A., Villedieu, P. *Description and assessment of the new ONERA 2D icing suite IGLOO2D*, 9th AIAA Atmospheric and Space Environments Conference - AVIATION 2017 DENVER, USA, 2017.

[19] Gent R.W., Dart N.P. and Cansdale J.T., *Aircraft icing*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 358, 2000.

[20] Schwer L.E., *Is your mesh refined enough? Estimating discretization error using GCI*, LS-DYNA Anwenderforum, Bamberg, 2008.

[21] Aupoix B., *Couches Limites Bidimensionnelles Compressibles. Descriptif et mode d'emploi du code CLICET - Version 2015*, Technical report, 2015.

[22] Cooke J.C., *The boundary layer of a class of infinite yawed cylinders*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 46(4), 1950.

I. Article de conférence - "3D ice accretion modeling using an integral boundary layer method"

DOI: ADD DOINUMBER HERE

3D ice accretion modeling using an integral boundary layer method

G. Blanchard[⋆†], *E. Radenac*[⋆], *N. Bempedelis*[‡], *C. Bayeux*[⋆], *P. Villedieu*[⋆]
[⋆]*Onera - The French Aerospace Lab, 2 Avenue Edouard Belin, 31055 Toulouse, France*
[‡]*Mechanical Engineering Department, University College London, Gower St, London WC1E 6BT, UK*
ghislain.blanchard@onera.fr and emmanuel.radenac@onera.fr
[†]Corresponding author

Abstract

A three-dimensional integral boundary layer code was developed to allow fast computations of boundary layer flows for 3D ice accretion modeling. The model and its numerical discretization based on a surface Finite-Volume approach are derived in the present paper. The unsteady equations of momentum deficit and kinetic energy deficit are solved until convergence is reached, preventing from specifying explicitly the stagnation point or separation line. This approach was integrated in IGLOO3D, which is the fully 3D ice accretion suite developped at ONERA, and the code was used to demonstrate the ability of the present method to predict the heat exchange and the ice accretion for a NACA0012 glaze ice configuration.

1. Introduction

Icing certification cost can be significantly reduced by developing simulation tools to evaluate the ice accretion effects for a wide range of icing conditions. 2D tools are already integrated in the process of certification. Since numerous simulations must be performed, these icing tools must have little computational cost.

The improvement of 3D tools would allow to reduce the safety margins used when performing multiple 2D simulations around 3D iced elements. But 3D icing suites are still not as efficient as 2D tools. ONERA is developing a fully 3D ice accretion suite called IGLOO3D. This tool couples codes solving the air flow, the trajectories of water droplets and the ice accretion (Messinger approach), respectively. The surface codes of IGLOO3D, such as the ice accretion solver MESSINGER3D, solve 3D systems of equation on surface grids (contrary to partially 3D icing suites solving 2D equations along streamlines).

The aerodynamic computation produces both the flowfield transporting the supercooled water droplets and the skin friction and heat transfer coefficient on the iced walls. To that end, it is possible to use a Navier-Stokes solver, which is the current option used in IGLOO3D[15] . However, this approach is time-consuming. For the 2D codes used for certification, the computational cost is far cheaper: obviously, IGLOO3D also computes an additional dimension, but more significantly, the 2D aerodynamic resolution is usually based on an inviscid (or potential) computation coupled to a boundary layer integral method, which is much cheaper than a Navier-Stokes computation.

Consequently, a 3D integral boundary layer code is being developed in order to allow a very similar approach in IGLOO3D. Currently, simplified integral boundary layer models, such as the well-known method of Thwaites,[9] are commonly employed in 2D icing suites. However, the direct extension of the simplified integral method to 3D is not straightforward.

Consequently, a general Finite-Volume formulation was employed for the solution of the system of equations. As a first step, the aforementioned discretization approach was developed and implemented in a 2D prototype of the ONERA's 2D icing suite IGLOO2D[1] . The extension and validation of this integral boundary layer method in three dimensions is presented in the present article. It must be noted that it is common practice in icing codes to weakly couple the inviscid and boundary layer codes (the effect of the boundary layer on the inviscid flow is neglected). The issue of 3D viscous-inviscid interaction methods will thus not be addressed in this paper.

The derivation of the model is presented in section 2. The Finite-Volume Method used to discretize the system will be exposed in section 3. Validation and cross-checking of the 3D code against the 2D code in 2D configurations and in 3D configurations is not addressed in this paper but interested readers can refer to the following one[2] . The use of the integral boundary layer code for ice accretion computation will be shown in section 4.

Copyright © 2017 by Ghislain Blanchard. Published by the EUCASS association with permission.

2. Derivation of the model

2.1 Brief state-of-the-art of 3D integral boundary-layer methods

The integral form of the boundary layer equations is obtained by integrating their differential form along a direction normal to the surface of the body. The obtained equations, referred to as “Integral boundary layer (IBL) equations" are differential equations whose variables are integral quantities. The information that is lost upon the process of integration has to be replaced by some set of closure relations so as to make the problem determinate.

At least for usual (and simple enough) closure relations, it can be demonstrated that the IBL equations are hyperbolic[1,13] . This allows to define stable spatial discretization schemes. This also makes the Finite Volume Method a good choice for the resolution of the IBL equations. This method was first employed by Mughal[12] . Previous works on the 3D IBL equations mainly employed Finite Difference Method in curvilinear coordinates[3,14] . With such methods, it is difficult to handle surface curvature discontinuities[7] and the IBL equations become very complex due to the introduction of numerous metric coefficients and geodesic curvature terms[19] . These difficulties are eliminated by the use of the Finite Volume Method.

In his first approach, Mughal solved the steady versions of the IBL equations in their conservative form. In the present paper, the unsteady version will be solved, as was also presented in Mughal’s PhD thesis[13] and used in more recent articles of Drela and co-workers[7] . In addition to the simplicity of implementation, this approach prevents the need to explicitly locate the attachment line or the stagnation point prior to the computation. The derivation of the unsteady conservative IBL equations will be presented in section 2.2.

Moreover, the integral boundary layer variables are calculated by on-the-fly integration of the velocity profiles like in Mughal’s PhD thesis[13] . This will allow defining closure relations for arbitrary velocity profiles if required and numerically assess some integrals for the computations of numerical fluxes for instance. The used velocity profiles will be exposed in section 2.3.

Finally, it can be noticed that Lokatt and Eller recently developed a Finite-Volume scheme for unstructured grids which they applied to the 3D IBL equations[10] . The same kind of method will be used here in order to ensure conservation on arbitrarily curved surfaces, as explained in section 3.

The expected outputs of the IBL method are mainly the skin friction and the heat transfer coefficients over the iced surfaces, which are major parameters for the ice accretion computation. The skin friction is linked to the boundary layer dynamics and will be computed directly from the dynamic integral equations exposed in section 2.2. A similar approach could be used for solving the integral heat transfer inside the boundary layer. This topic is poorly addressed in the literature. As a first attempt, Reynolds-like analogies often used in icing codes will be employed in this work (section 2.4). Consequently, only the derivation of the 3D dynamic integral boundary layer equations is addressed.

2.2 3D integral boundary layer system

The 3D unsteady incompressible differential boundary layer equations constitute the basis of the integral formulation. In a body-fitted coordinate system where z is normal to the surface, they read:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \tag{3}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \tag{4}$$

where $\boldsymbol{q} = \left(u_x, u_y, u_z\right)$ is the velocity vector, ρ is the density, τ is the shear stress vector $\tau_{\cdot z} = \mu\frac{\partial u_\cdot}{\partial z}$, μ is the dynamic viscosity of air and P is the pressure.

Like in the 2D code,[1] the integral system is based on the momentum equation and the kinetic energy equation. The latter equation is derived with the following procedure (where the subscript $()_e$ stands for the external flow quantities):

$$(\ u_{xe}^2\times \text{(eq. (1))} - 2u_x\times \text{(eq. (2))} + u_{ye}^2\times \text{(eq. (1))} - 2u_y\times \text{(eq. (3))}\ )$$

Assuming that the external velocity field is irrotational, the kinetic energy conservation equation may be written as follows:

$$\frac{\partial u_x^2}{\partial t} + \frac{\partial u_x^3}{\partial x} + \frac{\partial u_x^2 u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x^2 u_z}{\partial z} = u_x \frac{\partial |\boldsymbol{q}_e|^2}{\partial x} + \frac{2u_x}{\rho}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} -$$
$$\frac{\partial u_y^2}{\partial t} - \frac{\partial u_x u_y^2}{\partial x} - \frac{\partial u_y^3}{\partial y} - \frac{\partial u_z u_y^2}{\partial z} + u_y \frac{\partial |\boldsymbol{q}_e|^2}{\partial y} + \frac{2u_y}{\rho}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \tag{5}$$

The 3D unsteady incompressible differential boundary layer equations are integrated in the direction normal to the wall, yielding a system of three equations involving integral quantities.

More specifically, $\int_0^\infty$ (eq. (2)) dz - $\int_0^\infty u_{xe}\times$ (eq. (1)) dz and $\int_0^\infty$ (eq. (3)) dz - $\int_0^\infty u_{ye}\times$ (eq. (1)) dz produce the transport equation (6) for the momentum deficit in the surface tangential directions.

$\int_0^\infty$ (eq. (5)) dz - $\int_0^\infty |\boldsymbol{q}_e|^2\times$ (eq. (1)) dz yields the transport equation (7) for the deficit of kinetic energy.

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} + \tilde{\nabla}\cdot\bar{\bar{\boldsymbol{T}}} = -\tilde{\nabla}\boldsymbol{q}_e\cdot\boldsymbol{M} + \frac{\boldsymbol{\tau_w}}{\rho} \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}})\right) + \tilde{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{E} - \bar{\bar{\boldsymbol{T}}}\boldsymbol{q}_e\right) = 2D - \bar{\bar{\boldsymbol{T}}} : \tilde{\nabla}\boldsymbol{q}_e + \boldsymbol{q}_e\cdot\left(\tilde{\nabla}\boldsymbol{q}_e\cdot\boldsymbol{M} - \frac{\boldsymbol{\tau_w}}{\rho}\right) \tag{7}$$

where $\tilde{\nabla}$ denotes the in-plane gradient. The involved variables are:

$$\boldsymbol{M} = \int_0^\infty (\boldsymbol{q}_e - \boldsymbol{q})\,\mathrm{d}z \qquad \text{Mass flux defect} \tag{8}$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{T}}} = \int_0^\infty ((\boldsymbol{q}_e - \boldsymbol{q})\otimes\boldsymbol{q}))\,\mathrm{d}z \qquad \text{Momentum flux defect} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{E} = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{q}\left(|\boldsymbol{q}_e|^2 - |\boldsymbol{q}|^2\right)\right)\,\mathrm{d}z \qquad \text{Kinetic energy defect} \tag{10}$$

$$D = \frac{1}{\rho}\int_0^\infty \boldsymbol{\tau_w}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial z}\,\mathrm{d}z \qquad \text{Dissipation integral} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\tau_w} = \begin{cases} \mu\left.\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial z}\right|_{z=0}, & \text{laminar regime} \\ \mu\left.\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial z}\right|_{z=0} - \rho\overline{\boldsymbol{q}' q'_z}, & \text{turbulent regime} \end{cases} \qquad \text{Shear stress vector} \tag{12}$$

The system is expressed in a tensorial form, making it independent of the coordinate system used. The notations are quite similar to the ones of Drela,[7] although Drela accounts for compressibility and for additional equations. The link between these notations and more usual displacement $\delta_{1.}$ and momentum $\theta_{..}$ integral boundary layer thicknesses is (expressed in a global coordinate system ($\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y}$,$\boldsymbol{Z}$)):

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{q}_e|\delta_{1X} \\ |\boldsymbol{q}_e|\delta_{1Y} \\ |\boldsymbol{q}_e|\delta_{1Z} \end{pmatrix} \qquad \bar{\bar{\boldsymbol{T}}} = |\boldsymbol{q}_e|^2 \begin{pmatrix} \theta_{XX} & \theta_{XY} & \theta_{XZ} \\ \theta_{YX} & \theta_{YY} & \theta_{YZ} \\ \theta_{ZX} & \theta_{ZY} & \theta_{ZZ} \end{pmatrix} \tag{13}$$

2.3 Closure relations

Since the closure relations of the literature have initially been derived for 2D boundary layers and the effect of the transverse flow is expected to be low, closure is provided in a local coordinate system aligned with the external streamlines,

$$\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{q}_e}{|\boldsymbol{q}_e|}, \qquad \boldsymbol{c} = -\frac{\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}|}, \qquad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_w \tag{14}$$

where $\boldsymbol{n_w}$ is the vector normal to the surface. The in-plane velocity thus reads:

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(\eta) = |\boldsymbol{q}_e|(\hat{u_s}(\eta)\boldsymbol{s} + \hat{u_c}(\eta)\boldsymbol{c}) \tag{15}$$

where $\eta = z/\delta$. δ is an estimate of the boundary layer thickness.

2.3.1 Laminar regime

The closure relations used for the velocity profiles in laminar regime read:

$$\hat{u_s}(\eta) = 1 - [1 + a_s\eta]\,(1-\eta)^{p_s-1} \tag{16}$$

$$\hat{u_c}(\eta) = a_c\eta\,(1 - \hat{u_s}(\eta)) \tag{17}$$

For the streamwise velocity $\hat{u_s}$, it is possible to express a_s and p_s as functions of the shape factor $H = \frac{\delta_{1s}}{\theta_{ss}}$.[1] For instance:

$$a_s(H) = \sqrt{p_s(H)^2 - p_s(H)(p_s(H)+1)Hg(H)} - 1 \tag{18}$$

The function $g(H)$ was derived by Cousteix[4] to fit the skin friction coefficient obtained for the Falkner-Skan solutions. $p_s(H)$ and $g(H)$ are given in appendix.

At the wall ($\eta = 0$), $\hat{u_s}$ satisfies the no-slip condition and the derivative of the velocity is consistent with the friction obtained in the self-similar Falkner-Skan solutions. At the edge of the boundary layer, $\hat{u_s}(1) = 1$ and the derivatives of the velocity are vanishing up to (p_s-2)th order. Moreover, both δ_{1s} and θ_{ss} are consistent with this velocity profile.

A 3D boundary layer is characterized by the presence of a cross-stream velocity component, due to transverse pressure gradients. For the crosswise velocity $\hat{u_c}$, the profile derived by Mughal[13] for unidirectional crossflow calculations is employed. From the calculation of $\delta_{1c} = \delta\int_0^1 -\hat{u_c}(\eta)\mathrm{d}\eta$ (since $u_{ce} = 0$ in the streamline-aligned coordinate system), a_c is linked to the solved variables through:

$$a_c = -\frac{\delta_{1c}}{\delta_{1s}}\frac{Hg(H)}{b(H)}\frac{p_s(H)\,(p_s(H)+1)}{1 + \dfrac{2a_s(H)}{p_s(H)+2}} \tag{19}$$

where $b(H)$ is given in appendix and the following relation has been used to express δ: $\delta = \delta_{1s}\frac{b(H)}{Hg(H)}$.[1] $\hat{u_c}$ then satisfies the no-slip condition at the wall and $\hat{u_c} = 0$ at the edge of the boundary layer. The derivatives of the velocity are vanishing at this location up to (p_s-2)th order. Finally, δ_{1c} and θ_{cc} are consistent with this velocity profile.

The two profiles are used to compute the dissipation integral (equation (11)) and the shear stress vector (equation (12)).

2.3.2 Turbulent regime

The streamwise velocity profile employed for the turbulent regime is based on the work of Tai,[17] whereas the crosswise component is neglected, as a first attempt:

$$\hat{u_s}(\eta) = \eta^{(H-1)/2} \tag{20}$$

$$\hat{u_c}(\eta) = 0 \tag{21}$$

It is worth mentioning that more evolved approaches have been developed to model turbulent boundary layers (velocity profiles of Swafford[16] or Drela's approach of transporting turbulent shear stress[7] for instance). In particular, the relations used for the current paper do not allow the turbulent boundary layer separation. Those approaches could be assessed in the future.

Besides, empirical relations are used for the friction and dissipation coefficients. Two options are available for the streamwise skin friction, the relation proposed by Ludwieg and Tillmann:[11]

$$C_{fs} = \frac{\tau_{ws}}{\rho|\boldsymbol{q}_e|^2/2} = 0.246\times 10^{-0.678H}{Re_{\theta_{ss}}}^{-0.268}, \tag{22}$$

which is assumed valid for $Re_{\theta_{ss}} > 1200$, or the one proposed by White:[20]

$$C_{fs} = \frac{\tau_{ws}}{\rho|\boldsymbol{q}_e|^2/2} = \frac{0.3\,\mathrm{e}^{-1.33H}}{(\log Re_{\theta_{ss}})^{1.74+0.31H}}. \tag{23}$$

The dissipation coefficient is given by Drela's relation:[5]

$$D = |\boldsymbol{q}_e|^3\frac{H^*}{2}\left[\frac{C_{fs}}{6}\left(\frac{4}{H}-1\right) + 0.03\left(\frac{H-1}{H}\right)^3\right], \tag{24}$$

where:

$$H^* = 1.505 + \frac{4}{Re_{\theta_{ss}}} + \left(0.165 - \frac{1.6}{\sqrt{Re_{\theta_{ss}}}}\right)\frac{(H_0 - H)^{1.6}}{H} \qquad \text{if } H < H_0 \tag{25}$$

$$H^* = 1.505 + \frac{4}{Re_{\theta_{ss}}} + (H - H_0)^2\left(\frac{0.04}{H} + 0.007\frac{\ln Re_{\theta_{ss}}}{\left(H - H_0 + \frac{4}{\ln Re_{\theta_{ss}}}\right)^2}\right) \qquad \text{if } H > H_0 \tag{26}$$

and

$$H_0 = 4 \qquad \text{if } Re_{\theta_{ss}} < 400 \tag{27}$$

$$H_0 = 3 + \frac{400}{Re_{\theta_{ss}}} \qquad \text{if } Re_{\theta_{ss}} \geq 400 \tag{28}$$

Again, the crosswise components are cancelled as a first approximation.

Regarding prediction of transition, the local criterion of Drela[6] was implemented for flows on smooth walls.

$$Re_{\theta_{ss}T} = 155 + 89\left[0.25\tanh(\frac{10}{H-1} - 5.5) + 1\right]\widetilde{n}^{1.25} \tag{29}$$

$$\widetilde{n} = -8.43 - 2.4\ln\left(\frac{\tau'}{100}\right) \tag{30}$$

$$\tau' = 2.7\tanh\left(\frac{Tu}{2.7}\right), \tag{31}$$

where Tu is the turbulence rate (in %). However, the code is expected to be run mostly on rough walls. The criterion widely used in icing suites[18] is thus also proposed: transition occurs for a roughness Reynolds number $\mathrm{Re}_k = \frac{k_s|\boldsymbol{q}_e|}{\nu_e}$ larger than 600, where k_s is the equivalent sand grain roughness height and ν_e is the kinematic viscosity of air.

2.3.3 Rotation to the global coordinate system

Once the closure relations have been computed, the velocity profiles are rotated to the global coordinate system ($(\boldsymbol{q})_{LCS} \rightarrow (\boldsymbol{q})_{GCS}$) by using the rotation matrix $\bar{\bar{\boldsymbol{R}}}$:

$$(\boldsymbol{q})_{GCS} = \begin{pmatrix} u_X \\ u_Y \\ u_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{s} & \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{s} & \boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{s} & \boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_s \\ u_c \\ u_n \end{pmatrix} = \bar{\bar{\boldsymbol{R}}}(\boldsymbol{q})_{LCS} \tag{32}$$

In a similar manner, the primary variables are transformed from the global to the local coordinate system (in order to construct the velocity profiles) as follows:

$$(\boldsymbol{M})_{LCS} = \bar{\bar{\boldsymbol{R}}}^T(\boldsymbol{M})_{GCS} \tag{33}$$

2.3.4 Calculation of the shape factor

The proposed closure of the problem requires knowledge of the following parameters: $H, \delta_{1s}, \delta_{1c}$. δ_{1s} and δ_{1c} are easily obtained from the solved variables $(\boldsymbol{M})_{GCS}$ by the rotation described earlier. However, in 3D, the shape factor $H = \frac{\delta_{1s}}{\theta_{ss}}$ is not explicitly present in the formulation since θ_{ss} is only linked to the solved variables through:

$$tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}}) = |\boldsymbol{q}_e|^2(\theta_{ss} + \theta_{cc}) \tag{34}$$

Thus, an iterative process regarding the calculation of the shape factor H has to follow. To that end, the definition of $\theta_{cc} = \delta\int_0^1 -\hat{u}_c(\eta)^2 \mathrm{d}\eta$ is used:

$$\frac{1}{H} = \frac{tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}})}{|\boldsymbol{q}_e|^2\delta_{1s}} - \frac{\theta_{cc}}{\delta_{1s}} = \frac{tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}})}{|\boldsymbol{q}_e|^2\delta_{1s}} + \frac{\delta\int_0^1 \hat{u}_c^2\,\mathrm{d}\eta}{\delta_{1s}} \tag{35}$$

Since $\hat{u}_c$ depends on H and the primary variables, it is now possible to obtain H by solving equation (35) in an iterative way. For instance, for the case of the laminar flow, equation (35) to be solved becomes:

$$\frac{1}{H} = \frac{tr(\bar{\bar{\boldsymbol{T}}})}{|\boldsymbol{q}_e|^2\delta_{1s}} + \frac{b(H)a_c(H)^2}{Hg(H)p_s(H)(2p_s(H)-1)(2p_s(H)+1)}\left(1 + \frac{3a_s(H)}{p_s(H)+1} + \frac{6a_s(H)^2}{(p_s(H)+1)(2p_s(H)+3)}\right) \tag{36}$$

2.4 Computation of heat transfer

The approach used here is commonly used in 2D ice accretion codes, as shown by Gent et al.[8] It is also the way heat transfer coefficients are inferred from dynamic data in the ONERA's 2D code IGLOO2D.[18] The heat transfer coefficient h_c is inferred from a Reynolds-like analogy:

$$h_c = \mathrm{St}\rho_e c_{p_e}|\boldsymbol{q}_e| \tag{37}$$

where ρ_e is the air density, c_{p_e} is the specific heat capacity at constant pressure for air and the Stanton number St depends on the regime.

For a laminar flow, the equation of Smith and Spalding is employed. It links the heat transfer coefficient to the evolution of the velocity at the edge of the boundary layer along a streamline (s is the wrap distance from the attachment line):

$$\mathrm{St} = \frac{0.2926\sqrt{\nu_e}}{|\boldsymbol{q}_e|\mathrm{Pr}}\sqrt{|\boldsymbol{q}_e|^{2.87}/\int_0^s |\boldsymbol{q}_e|^{1.87}ds} \tag{38}$$

where Pr is the Prandtl number.

The heat transfer coefficient in turbulent rough wall conditions is obtained with:

$$\mathrm{St} = \frac{C_{fs,r}/2}{\mathrm{Pr}_t + \sqrt{C_{fs,r}/2}/\mathrm{St}_k} \tag{39}$$

where $\mathrm{St}_k = 1.92\mathrm{Pr}^{-0.8}\mathrm{Re}_k^{-0.45}$, Pr_t is the turbulent Prandtl number and $\mathrm{Re}_k = \frac{k_s u_\tau}{\nu_e}$. u_τ is the friction velocity. $C_{fs,r}$ is the streamwise skin friction coefficient expected on a rough wall, which is computed from the streamwise momentum thickness computed by the integral method:

$$\frac{C_{fs,r}}{2} = \frac{0.168}{\left(\log\left(864\theta_{ss}/k_s + 2.568\right)\right)^2} \tag{40}$$

3. Finite-Volume resolution

The system of equations (6), (7) can be written in the following manner:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}) \tag{41}$$

where the components of the flux vector $\boldsymbol{F}$ can be written:

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{\boldsymbol{T}}} \\ \left(\boldsymbol{E} - \bar{\bar{\boldsymbol{T}}}\boldsymbol{q}_e\right)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{q}_e|^2\bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}} \\ |\boldsymbol{q}_e|^3\left(\boldsymbol{\delta_3} - \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}\frac{\boldsymbol{q}_e}{|\boldsymbol{q}_e|}\right) \end{pmatrix}$$

where $\bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}$ and $\boldsymbol{\delta_3}$ are defined as follows:

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}} = \int_0^\infty \left(\left(\frac{\boldsymbol{q}_e}{|\boldsymbol{q}_e|} - \frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}_e|}\right)\otimes\frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}_e|}\right) \tag{42}$$

$$\boldsymbol{\delta_3} = \int_0^\infty \left(\frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}_e|}\left(1 - \frac{|\boldsymbol{q}|^2}{|\boldsymbol{q}_e|^2}\right)\right) \tag{43}$$

Following an unstructured-mesh Finite-Volume formulation, the system is integrated over a cell Ω_i between time t^n and t^{n+1} ($\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$):

$$\int_{\Omega_i} \boldsymbol{U}(t^{n+1})\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_i} \boldsymbol{U}(t^n)\,\mathrm{d}\Omega = -\sum_{j\in\mathcal{N}(i)}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_{ij}\,\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t + \int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\Omega_i}\boldsymbol{S}\,\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \tag{44}$$

where the divergence theorem has been used for the transformation of the volume integral to surface integral, Γ_{ij} is the edge shared by cell Ω_i with one of its neighbors Ω_j. The vector $\boldsymbol{n}_{ij}$ is the local unit normal to the edge Γ_{ij} in the tangent plane of cell Ω_i and pointing outward.

Equation (44) can be reshaped in the following discrete form:

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n - \frac{\Delta t^n}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \boldsymbol{F}_{ij} |\Gamma_{ij}| + \Delta t^n \boldsymbol{S}_i \tag{45}$$

where $\boldsymbol{U}_i^n$ is the discrete mean value of the unknowns in cell Ω_i at time t^n, $\boldsymbol{F}_{ij}$ is the numerical flux at the edge Γ_{ij} and $\boldsymbol{S}_i$ is the discrete source term in cell Ω_i:

$$\boldsymbol{U}_i^n \overset{\text{def}}{\simeq} \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{U}(t^n) \mathrm{d}\Omega \tag{46}$$

$$\boldsymbol{F}_{ij} \overset{\text{def}}{\simeq} \frac{1}{\Delta t^n} \frac{1}{|\Gamma_{ij}|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_{ij} \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}t \tag{47}$$

$$\boldsymbol{S}_i \overset{\text{def}}{\simeq} \frac{1}{\Delta t^n} \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{S} \, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \tag{48}$$

To complete the discretization of the continuous model, the spatial and temporal schemes used to express the numerical flux $\boldsymbol{F}_{ij}$ are detailed in the following paragraphs. Regarding the source term $\boldsymbol{S}_i$, the computation of the velocity gradient is performed with a linear least-squares method (first order in space).

3.1 Spatial scheme

Conservation In the employed Finite Volume formulation, the fluxes' contribution to the residuals has to be expressed in the plane of every associated cells to obtain a conservative scheme. However, in the general case of an embedded surface, two neighboring cells may not be co-planar. Therefore, two different expressions for the flux through the shared edge are required as, in this general case, the following relationship is only true for a planar mesh:

$$\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{F}_{ij} \tag{49}$$

In the present study, the conservative character of the equations is preserved by employing a set of rotations, similarly to what is proposed by Lokatt and Eller.[10] A schematic depicting the involved variables is provided in figure 1.

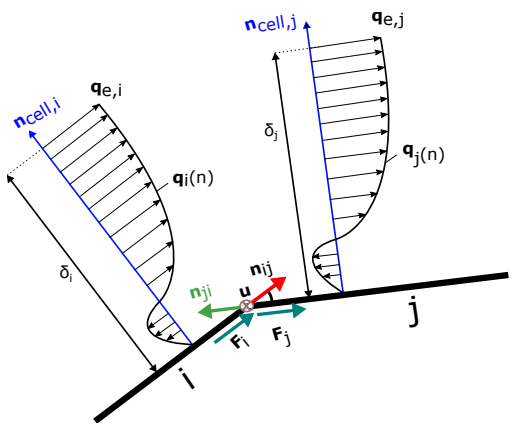


Figure 1: Schematic of fluxes' calculation method in a 2D cut of an embedded surface.

Therefore, we introduce the rotation matrix $\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij}$ which is used to express tensorial quantities from the plane associated to cell Ω_i in the plane associated to cell Ω_j. The process to build the matrix was adapted from the method described in Lokatt[10] (where the fluxes are expressed in the local coordinate system contrary to the present method) and consists of the following steps:

- Definition of the axis of rotation, $\boldsymbol{u}_{ij} = \dfrac{\boldsymbol{n}_{cell,i} \times \boldsymbol{n}_{cell,j}}{|\boldsymbol{n}_{cell,i} \times \boldsymbol{n}_{cell,j}|}$

- Definition of the angle of rotation, $\alpha_{ij} = \cos^{-1}\left(\boldsymbol{n}_{cell,i} \cdot \boldsymbol{n}_{cell,j}\right)$
- Definition of the rotation matrix $\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij}$ around the previously defined axis,

$$\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij} = \cos\alpha_{ij}\bar{\bar{\boldsymbol{I}}} + \sin\alpha_{ij}\left[\boldsymbol{u}_{ij}\right]_{\times} + \left(1 - \cos\alpha_{ij}\right)\boldsymbol{u}_{ij} \otimes \boldsymbol{u} \tag{50}$$

where $\left[\boldsymbol{u}_{ij}\right]_{\times}$ is the cross product matrix of $\boldsymbol{u}_{ij}$, $\otimes$ is the tensor product and $\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}$ is the identity matrix.

Then, the following relation holds:

$$\boldsymbol{F}_{ji} = -\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij}\boldsymbol{F}_{ij} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{F}_{ij} = -\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ji}\boldsymbol{F}_{ji} = -\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij}^{T}\boldsymbol{F}_{ji} \tag{51}$$

Flux expression Based on the formulation employed in the 2D version of the code,[1] a first order upwind scheme is used in order to ensure stability. The upwinding of the numerical flux is based on the edge velocity $\boldsymbol{q}_{e,ij}$ which is defined in the tangential plane associated to cell Ω_i by:

$$\boldsymbol{q}_{e,ij} = \frac{1}{\omega_i + \omega_j}\left(\omega_i\boldsymbol{q}_{e,i} + \omega_j\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ji}\boldsymbol{q}_{e,j}\right) \tag{52}$$

where ω_i and ω_j are inverse distance weighting factors that rely only on the mesh geometry:

$$\omega_i = |G_iG_{ij}|^{-1}, \quad \omega_j = |G_jG_{ji}|^{-1} \tag{53}$$

where G_i, G_j and $G_{ij}(= G_{ji})$ are the centers of gravity of cells Ω_i, Ω_j and edge Γ_{ij} respectively.

Then, the numerical flux is calculated with upstream values according to the sign of the face velocity:

- If $(\boldsymbol{q}_{e,ij} \cdot \boldsymbol{n}_{ij}) \geq 0$ then :

$$\boldsymbol{F}_{ij} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{q}_{e,ij}|^2\bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_i\boldsymbol{n}_{ij} \\ |\boldsymbol{q}_{e,ij}|^3\left(\boldsymbol{\delta}_{3i} - \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_i\dfrac{\boldsymbol{q}_{e,i}}{|\boldsymbol{q}_{e,i}|}\right)\cdot\boldsymbol{n}_{ij} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{F}_{ji} = -\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ij}\boldsymbol{F}_{ij} \tag{54}$$

- else:

$$\boldsymbol{F}_{ji} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{q}_{e,ji}|^2\bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_j\boldsymbol{n}_{ji} \\ |\boldsymbol{q}_{e,ji}|^3\left(\boldsymbol{\delta}_{3j} - \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}_j\dfrac{\boldsymbol{q}_{e,j}}{|\boldsymbol{q}_{e,j}|}\right)\cdot\boldsymbol{n}_{ji} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{F}_{ij} = -\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{ji}\boldsymbol{F}_{ji} \tag{55}$$

where $\bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}$ and $\boldsymbol{\delta}_3$ are respectively computed by numerical integration of (42) and (43) with a Simpson method in the upwind cell.

As also mentioned in Bayeux's paper,[1] the present scheme cannot capture the separation of the boundary layer. This issue will be addressed in future works.

Treatment of the stagnation point It must be mentioned that it was identified in the 2D code that the discretization of the equations (and more specifically the one of kinetic energy conservation) needs to be corrected[1] to have a better numerical treatment of the stagnation point. This correction consists of an additional source term aimed at recovering the consistency of the numerical method in the vicinity of the stagnation point. It was adapted as follows from the work of Bayeux:[1]

$$S_{stag} = \frac{\boldsymbol{E} - \bar{\bar{\boldsymbol{T}}}\boldsymbol{q}_e}{|\boldsymbol{q}_e|^3} \cdot \left[\tilde{\nabla}\cdot\left(|\boldsymbol{q}_e|^3\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}\right) - 3|\boldsymbol{q}_e|^2\,\tilde{\nabla}\cdot\left(|\boldsymbol{q}_e|\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}\right)\right], \tag{56}$$

which has been discretized consistently with the employed numerical flux:

$$S_{stag,i} = \frac{1}{|\Omega_i|}\frac{\boldsymbol{E}_i - \bar{\bar{\boldsymbol{T}}}_i\boldsymbol{q}_{e,i}}{|\boldsymbol{q}_{e,i}|^3} \cdot \left[\sum_{j\in\mathcal{N}(i)}\left(|\boldsymbol{q}_{e,ij}|^3|\Gamma_{ij}|\boldsymbol{n}_{ij}\right) - 3|\boldsymbol{q}_{e,i}|^2\sum_{j\in\mathcal{N}(i)}\left(|\boldsymbol{q}_{e,ij}||\Gamma_{ij}|\boldsymbol{n}_{ij}\right)\right] \tag{57}$$

The current formulation was derived for streamwise aligned meshes. It will be fully adapted to unstructured meshes in the future.

3.2 Temporal scheme

An explicit Euler method has been employed for the discretization of the transport term while the source terms can be implicit, in an attempt to increase the stability of the method:

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n - \frac{\Delta t^n}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \boldsymbol{F}_{ij}^n |\Gamma_{ij}| + \Delta t_i^n \boldsymbol{S}_i^{n+1} \tag{58}$$

After linearization of the source term, the solution is given by:

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n + [\boldsymbol{I} - \Delta t_i^n \nabla_U \boldsymbol{S}_i^n]^{-1} \Delta t_i^n \left(-\frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \boldsymbol{F}_{ij}^n |\Gamma_{ij}| + \boldsymbol{S}_i^n \right) \tag{59}$$

where $\nabla_U \boldsymbol{S}$ is the jacobian matrix of the source term which is calculated by numerical differenciation.

In equation (59), a local time stepping approach is used to obtain a faster convergence to the steady-state solution. The timestep value Δt_i is computed in each cell Ω_i to satisfy the following empirical CFL condition based on the convective time scale:

$$\Delta t_i < CFL \, \frac{\Delta x_i}{|\boldsymbol{q}_{e,i}|} \tag{60}$$

where Δx_i is the characteristic cell length given by:

$$\Delta x_i = \frac{|\Omega_i|}{\sum\limits_{j \in \mathcal{N}_i} |\Gamma_{ij}|} \tag{61}$$

4. Ice accretion computation using the 3D Integral Boundary Layer code

The 3D integral boundary layer code, BLIM3D, was included in ONERA's 3D icing suite, IGLOO3D. This means that BLIM3D is fed by an inviscid code compatible with IGLOO3D structure, here elsA. Then it provides the heat transfer coefficient and skin friction to the 3D Messinger code MESSINGER3D.

A NACA0012 glaze ice case was used to demonstrate the capabilities of BLIM3D to be used for ice accretion computation. A glaze ice case was used because the shape of this kind of rather warm ice depends greatly on the computation of the heat transfer in the boundary layer. The conditions of the case are given in table 1. Contrary to a previous study,[2] the 2D flow has a positive angle of attack and it is a good test case to assess the code to predict automatically the separation line position. The flow is 2D but a 3D unstructured grid was generated as shown in figure 2. The mesh is composed of 69452 triangles, and a local refinement is used in the vicinity of the leading edge.

	AOA (^{o})	**Chord** **(m)**	**P_∞** **(Pa)**	**T_∞** **(K)**	**M_∞**	**LWC** **(g/m^3)**	**MVD)** **(μm)**	Δt (s)
NACA0012 airfoil	4	0.53	95610	266.45	0.1770	1.3	20	480

Table 1: Conditions of the test-case, AOA: angle of attack; P_∞, T_∞, M_∞: static pressure, static temperature and Mach number of incoming airflow; LWC: Liquid Water Content of incoming flow; MVD: Median Volume Diameter of supercooled water droplets; Δt: accretion time.

The rough models of BLIM3D were used for laminar-turbulent transition and heat transfer (the roughness height is 0.53 mm) and, as shown in table 2, the closure relation proposed by White (equation 23) for skin friction was assessed.

Table 2 shows that several computations were performed on the NACA0012 case. The ONERA's 2D icing code IGLOO2D was run with both predictor (a single aerodynamics - droplet - accretion loop is made) and predictor-corrector approach (two loops are made and the grid is updated to account for the effect of the ice shape on the airflow and the droplet trajectories). The in-house solvers STRMESH2D, EULER2D, TRAJL2D and MESSINGER2D[18] were used for the structured mesh, the inviscid flow, the Lagrangian trajectography and the ice acrretion computations, respectively. Two methods were assessed for the boundary layer simulation. First, the usual approach was employed.

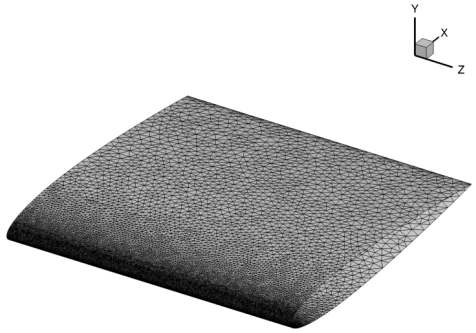


Figure 2: NACA0012 surface mesh for BLIM3D

Code	**Gas flow**	**Droplet trajectories**	**Friction closure**	h_c **closure**	**Grid**	**Predictor-corrector**	**Output**
IGLOO3D	elsA RANS	SPIREE		section 2.4	3D structured 1312 elements	Predictor	Boundary layer, ice
IGLOO3D	elsA Euler +BLIM3D	SPIREE	White	section 2.4	3D unstructured 69452 elements	Predictor	Boundary layer, ice
IGLOO2D	EULER2D +SIM2D	TRAJL2D		section 2.4	2D structured 128 elements	Predictor-Corrector	Boundary layer, ice
IGLOO2D	EULER2D +BLIM2D	TRAJL2D	Ludwieg-Tillmann	section 2.4	2D structured 128 elements	Predictor-Corrector	Boundary layer, ice
IGLOO2D	EULER2D +BLIM2D	T RAJL2D	White	section 2.4	2D structured 128 elements	Predictor-Corrector	Boundary layer, ice

Table 2: Various computations performed on the NACA0012 glaze ice case.

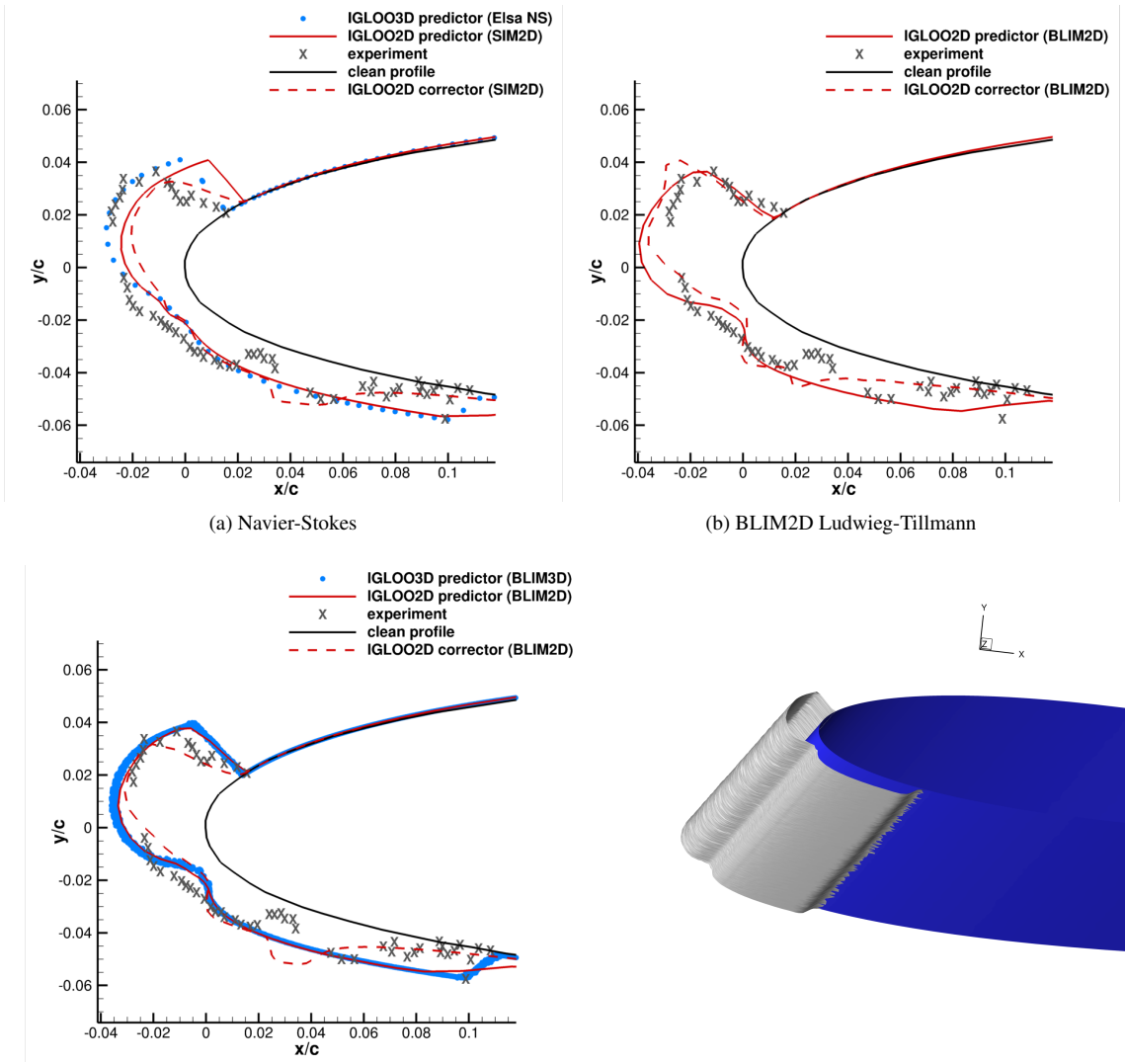
It consists of a simplified integral metod (code SIM2D). Second, the 2D version of the method presented here[1] was tested. Both the closure relations of White (equation 23) and Ludwieg-Tillman (equation 22) were assessed in 2D.

In addition, the same test-case was also run with the usual approach of IGLOO3D, consisting of computing the airflow with elsA code (RANS approach on a structured grid), and the droplet trajectories with the Eulerian code SPIREE (monodisperse approach here). For this approach, several methods are available to compute the heat transfer coefficient. For this paper, the relations of section 2.4, fed by the smooth-wall momentum thickness provided by elsA, were used. This approach is very similar to IGLOO2D and thus often produces satisfactory results on 2D configurations. For both the RANS and BLIM3D approaches, IGLOO3D was used in predictor mode. Finally, computations with the ONERA's 2D Prandtl boundary layer solver CLICET were also performed as a basis for the validation of the boundary layer results.

Figure 3 gathers the results produced by the various approaches. The horns are globally well captured with IGLOO2D and IGLOO3D for this test case. The corrector phase does not bring a major improvement for this test-case compared to the predictor step. This justifies the use of a single predictor step with IGLOO3D.

Regarding the IGLOO3D computations, the usual Navier-Stokes approach produces an ice shape which is very similar to IGLOO2D (SIM2D), despite a small underestimation of the horn close to the leading edge with the 2D approach (figure 3a). This can be explained by the smaller heat transfer coefficient obtained in 2D (see figure 4a, comparison between "IGLOO2D SIM2D" and "IGLOO3D elsa NS"). Consequently, the ice is less cooled, the runback is thus enhanced and the solidification lessened.

The influence of the closure model retained for the skin friction was studied with BLIM2D. For this icing condition, White model (figure 3c) gives an iced shape which is a little bit closer to the experimental data than the one given by the Ludwieg-Tillmann model (figure 3b). Nevertheless, the superiority of the White model is not as noticeable as it was observed in an other configuration[2] . Figure 4a shows that Ludwieg-Tillman model leads to an over-estimated heat transfer coefficient compared with the elsA result close to the stagnation point. This can be explained by the fact that this model is not valid for low $Re_{\theta_{ss}}$ and, close to the stagnation point, the rough walls model forces the transition



(a) Navier-Stokes

(b) BLIM2D Ludwieg-Tillmann

(c) BLIM3D White

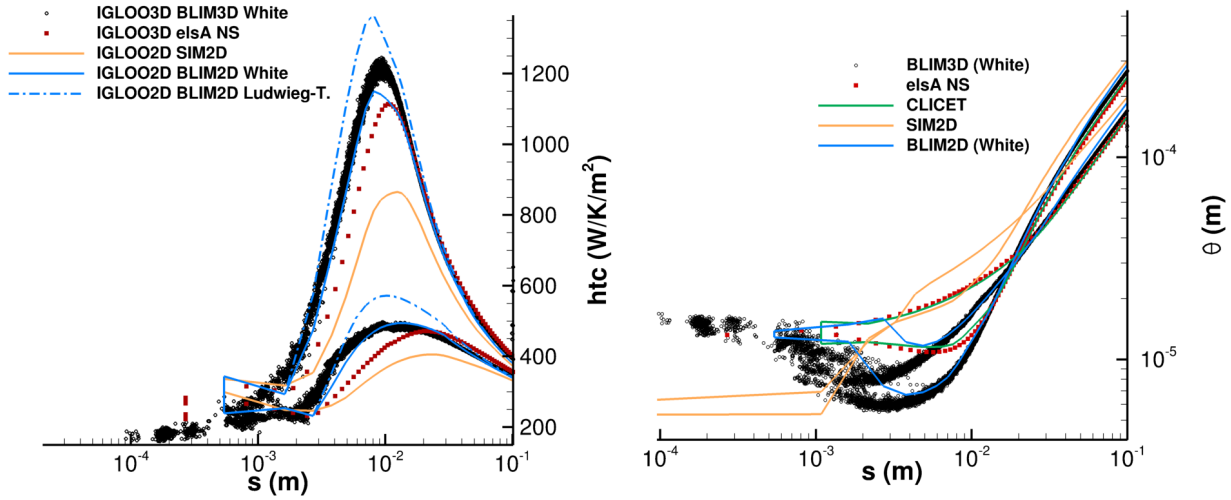
(d) BLIM3D White

Figure 3: IGLOO3D computations of the ice shape with Navier-Stokes or BLIM3D approaches

to occur very rapidly in a region where the order of magnitude of $Re_{\theta_{ss}}$ is only a few tens. With White model, the agreement becomes much better between BLIM3D and IGLOO3D used along with elsA.

It is worth recalling that the heat transfer coefficient is dependent on the momentum thickness calculated by the boundary layer code. Figure 4b shows that BLIM3D and its 2D counterpart BLIM2D produce very similar results, although the BLIM3D results are a little noisy due to the unstructured grid and BLIM2D results are less resolved due to the coarser grid. The agreement between BLIM2D, BLIM3D, elsA and CLICET is rather satisfactory for low wrap distance s and for $s > 2 \times 10^{-2} m$ but it is worse for intermediate values of s, which remains to be investigated. SIM2D produces larger momentum thickness values in a large range of s and a value which is too low at the stagnation point. Small discrepancies are often observed in turbulent regime between BLIM2D and SIM2D[1] . However, close to the stagnation point, this discrepancy becomes significant because the momentum thickness is small. This is again a consequence of the acceleration of transition due to roughness.

BLIM3D was thus included successfully in IGLOO3D and gave promising result in the present test case. But a proper choice of the turbulent closure relations had to be made and more work is necessary on the turbulent regime to further improve the results.



(a) Heat transfert coefficient

(b) Momentum thickness

Figure 4: Heat transfer and momentum thickness computed with the different approaches employed for the computation of the NACA0012 glaze case

5. Conclusion

The present article described a 3D integral boundary layer method and its application to icing problems. A 3D code was developed and included in the ONERA's 3D icing suite, IGLOO3D in order to reduce the computational cost of the airflow during the process of ice accretion computations.

The solved equations which were presented are an extension of the 2D system of equations of Bayeux et al.[1] The unsteady momentum and kinetic energy equations are written in conservation form. Regarding heat transfer, a 2D-like approach is used to infer the heat transfer coefficient from the dynamics of the boundary layer.

The solver is based on the Finite Volume method, using an upwind scheme, which was presented in the present paper. It is worth mentioning that the equations are solved over the whole iced surface.

An unstructured NACA0012 test-case was presented to demonstrate the ability of the method to be efficiently included in ice accretion computations. The results show a sensitivity of the heat transfer coefficient and thus of the glaze ice shapes to the momentum thickness produced by the code. Since laminar-turbulent transition occurs very rapidly on ice, it has been shown that proper turbulent closure relations have to be employed.

References

[1] C. Bayeux, E. Radenac, and P. Villedieu. *Theory and validation of a 2D Finite-Volume integral boundary layer method intended for icing applications*. AIAA AVIATION Forum. American Institute of Aeronautics and Astronautics, June 2017.

[2] N. Bempedelis, C. Bayeux, G. Blanchard, E. Radenac, and P. Villedieu. *A 3D Finite-Volume Integral Boundary Layer method for icing applications*. AIAA AVIATION Forum. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jun 2017.

[3] J. Cousteix. Three-dimensional boundary layers: Introduction to calculation methods. In *AGARD Computation of Three-Dimensional Boundary Layers Including Separation 49 p (SEE N87-22145 15-34)*, February 1987.

[4] J. Cousteix. *Couche Limite Laminaire*. Cepadues Editions, 1989.

[5] M. Drela. Two-dimensional transonic aerodynamic design and analysis using the euler equations. PhD Massachusetts Institute of Technology, 1985.

[6] M. Drela. MISES implementation of modified Abu-Ghannam/Shaw transition criterion. online database, 1998.

[7] M. Drela. *Three-Dimensional Integral Boundary Layer Formulation for General Configurations*. Fluid Dynamics and Co-located Conferences. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jun 2013.

[8] R. W. Gent, N. P. Dart, and J. T. Cansdale. Aircraft icing. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 358(1776):2873–2911, 2000.

[9] W.M. Kays and M.E. Crawford. *Convective Heat and Mass Transfer*. McGraw Hill, New York, 1993.

[10] M. Lokatt and D. Eller. Finite-volume scheme for the solution of integral boundary layer equations. *Computers & Fluids*, 132:62 – 71, 2016.

[11] H. Ludwieg and W. Tillmann. Investigations of the wall-shearing stress in turbulent boundary layers. Technical Report NACA-TM-1285, National Advisory Committee for Aeronautics; Washington, DC, United States, May 1950.

[12] B.H. Mughal. A calculation method for the three-dimensional boundary layer equations in integral form. Master Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1992.

[13] B.H. Mughal. Integral methods for three-dimensional boundary layers. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1998.

[14] D.F. Myring. An integral prediction method for three dimensional turbulent boundary layers in incompressible flow. Technical Report 70147, 1970.

[15] E. Radenac. *Validation of a 3D ice accretion tool on swept wings of the SUNSET2 program*. AIAA AVIATION Forum. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jun 2016.

[16] T. W. Swafford. Analytical approximation of two-dimensional separated turbulent boundary-layer velocity profiles. *AIAA Journal*, 21(6):923–926, Jun 1983.

[17] T. Tai. *An integral prediction method for three-dimensional flow separation*. Aerospace Sciences Meetings. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jan 1984.

[18] P. Trontin, G. Blanchard, A. Kontogiannis, and P. Villedieu. *Description and assessment of the new ONERA 2D icing suite IGLOO2D*. AIAA AVIATION Forum. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jun 2017.

[19] A. Van Garrel. Integral boundary layer method for wind turbine aerodynamics,. Technical Report ECN-C–04-004, Decmber 2003.

[20] F. M. White. *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill 2nd Edition, 1974.

Bibliographie

[1] G. S. Ambrok : Approximate solutions of equations for the thermal boundary layer with variations in the boundary layer structure. *Soviet Phys. -Tech. Phys.*, 2:1979–1986, 1957.

[2] D. N. Anderson : Manual of scaling methods. Rap. tech. NASA/CR-2004-212875, NASA, 2004.

[3] D. Arnal, R. Houdeville et B. Aupoix : Laminar-turbulent transition on a heated wall. Rap. tech. RF 1/16456, ONERA, 2010.

[4] B. Aupoix : Projet PHYSICE - D1.3 - Modélisation des effets thermiques des rugosités. Rap. tech. RT 7/21242 DMAE, 2014.

[5] B. Aupoix : Couches limites bidimensionnelles compressibles. Descriptif et mode d'emploi du code CLICET - version 2015. Rap. tech., 2015.

[6] B. Aupoix et J. Cousteix : Etude et développement d'une méthode intégrale de calcul de couche limite tridimensionnelle (laminaire-turbulent) adaptée aux compresseurs. Rap. tech. 8/3327 EY, ONERA, 1980.

[7] J. L. Balleur : Couplage visqueux-non visqueux : méthode numérique et applications aux écoulements bidimensionnels transsoniques. *La Recherche Aérospatiale*, (183):65–76, 1978.

[8] H. Beaugendre, F. Morency et W. Habashi : Development of a second generation in-flight icing simulation code. *Journal of Fluids Engineering, American Society of Mechanical Engineers*, 128(2):378–387, 2006.

[9] N. Bempedelis, C. Bayeux, G. Blanchard, E. Radenac et P. Villdieu : A 3D Finite-Volume integral boundary layer method for icing applications. *the 9th AIAA Atmospheric and Space Environments Conference - AVIATION 2017 DENVER, USA, 2017.*

[10] G. Blanchard, E. Radenac, N. Bempedelis, C. Bayeux et P. Villedieu : 3D ice accretion modeling using an integral boundary layer method. *the 7th European Conference for Aeronautics and Space Sciences - EUCASS Milan, Italy, 2017.*

[11] H. Blasius : The boundary layers in fluids with little friction, traduction de "Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung" Zeitschrift für Mathematik und Physik, band 56, heft 1, 1908. Rap. tech. 1256, NACA, 1950.

[12] S. Brown et K. Stewartson : Laminar separation. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1:45–72, 1969.

[13] J. Carter : A new boundary-layer inviscid iteration technique for separated flow. *AIAA paper, 79-1450*, 1979.

[14] J. Carter : Viscous-inviscid interaction analysis of turbulent seperated flow. *In : AIAA paper 81-1241, Palo Alto, CA*, 1981.

[15] D. Catherall et K. Mangler : An indirect method for the solution of the Navier-Stokes equations for laminar incompressible flow at large Reynolds numbers. Rap. tech. 2683, RAE, 1963.

[16] T. Cebeci et J. Cousteix : *Modeling and Computation of Boundary-Layer Flows.* Horizon Publishing, 2005.

[17] R. Chauvin : *Un modèle unifié pour les phénomènes de givrage en aéronautique et les systèmes de protection thermiques.* Thèse de doctorat, ISAE, 2015.

[18] F. Clauser : Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients. *Journal of Aeronautical Sciences*, 21(2):91–108, 1954.

[19] E. Coenen : *Viscous-Inviscid Interaction with the Quasi-Simultaneous Method for 2D and 3D Aerodynamic Flow.* Thèse de doctorat, Rijksuniversiteit Groningen, 2001.

[20] E. Coenen, A. Veldman et G. Patrianakos : Quasi-simultaneous viscous-inviscid interaction for three-dimensional turbulent wing flow. *ICAS 2000 Congress*, 2000.

[21] D. Coles : Turbulent boundary layers in pressure gradients : A survey lecture prepared for the 1968 AFOSR-IFP-Stanford Conference on computation of turbulent boundary layers. Rap. tech. RM-6142-PR, 1969.

[22] J. Cooke : The boundary layer of a class of infinite yawed cylinders. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 4(46), 1950.

[23] J. Cousteix : Integral method and turbulence models applied to three-dimensional boundary layers. *IUTAM Symposium on "Three-dimensional turbulent boundary layers"*, 1982.

[24] J. Cousteix : Three-dimensional and unsteady boundary-layer computations. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, (18):173–196, 1986.

[25] J. Cousteix : *Couche limite laminaire.* Cepadues, 1989.

[26] J. Cousteix : *Turbulence et couche limite.* Cepadues, 1989.

[27] J. Cousteix, J. L. Balleur et R. Houdeville : Calcul des couches limites turbulentes instationnaires en mode direct ou inverse, écoulements de retour inclus. Analyse des singularités. *la Recherche Aérospatiale*, (3):147–157, 1980.

[28] J. Cousteix et R. Houdeville : Singularities in three-dimensional turbulent boundary layer calculations and separation phenomena. *AIAA Journal*, 19(8):976–985, August 1981.

[29] G. da Silva, O. Silvares, E. Zerbini, H. Hefazi, H.-H. Chen et K. Kaups : Differential boundary-layer analysis and runback water flow model applied to flow around airfoils with thermal anti-ice. *1st AIAA Atmospheric and Space Environments Conference*, (AIAA 2009-3967), 2009.

[30] M. Drela : *Two-dimensional transonic aerodynamic design and analysis using the Euler equations.* Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1985.

[31] M. Drela : Mises implementation of modified Abu-Ghannam/Shaw transition criterion. online database, July 1998.

[32] M. Drela : Three-dimensional integral boundary layer formulation for general configurations. *21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, (2013-2437), 2013.

[33] M. Drela et M. Giles : Ises : a two-dimensional viscous aerodynamic design and analysis code. *In : AIAA paper 87–1118*, 1987.

[34] M. Drela et M. Giles : Viscous-inviscid analysis of transonic and low reynolds number airfoils. *AIIAA Journal*, 25(10):1347–1355, 1987.

[35] R. Gent : TRAJICE2 - A combined water droplet trajectory and ice accretion prediction program for aerofoils. Rap. tech. 90054, Royal Aerospace Establishment, Farnborough, 1990.

[36] R. W. Gent, N. Dart et J. T. Cansdale : Aircraft icing. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 358, 2000.

[37] S. Goldstein : On laminar boundary-layer flow near a position of separation. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1(1):43–69, 1948.

[38] J. Green : Application of Head's entrainment method to the prediction of turbulent boundary layers and wakes in compressible flow. Rap. tech. R&M 3788, Aeronautical Research Council, 1976.

[39] J. Green, D. Weeks et J. Brooman : Prediction of turbulent boundary layers and wakes in compressible flow by a lag-entrainement method. Rap. tech. R&M 3791, Aeronautical Research Council, 1977.

[40] D. Guffond et L. Brunet : Validation du programme bidimensionnel de captation. Office National D'Etudes et de Recherches Aerospatiales, Chatillon Cedex, France, 1988, (Rapport Technique, RP 20/5146 SY).

[41] D. Hartree : On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 33(2):223–239, 1937.

[42] K. Hasanzadeh, D. Pena, Y. Hoarau et E. Laurendeau : Multi-time step icing calculations using a 3D multi-block structured mesh generation procedure. *SAE TSAE Technical Paper-01-2161*, 2015.

[43] R. Hayashi et M. Yamamoto : Two- and three-dimensional validation of icing model. *APCOM & ISCM, Singapore*, 11-14th December, 2013.

[44] M. Head : Entrainment in the turbulent boundary layer. Rap. tech. R.M. 3152, Aeronautical Research Council, 1958.

[45] T. Hedde : *Modélisation tridimensionnelle des dépôts de givre sur les voilures d'aéronefs.* Thèse de doctorat, Université Blaise Pascale, Clermont Ferrand, 1992.

[46] K. Hiemenz : Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. *Dinglers Polytechnisches J.*, p. 321–410, 1911.

[47] H. Holstein et T. Bohlen : Ein einfaches Verfahren zur Berechnung laminarer Reibungsschicht, die dem Näherungsansatz von K. Pohlhausen genügen. *Lilienthal Bericht*, (10):5–16, 1940.

[48] J. Johnston : *Three dimensional turbulent boundary layer.* Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1957.

[49] W. Kays et M. Crawford : *Convective heat and mass transfer.* McGraw-Hill, 1993.

[50] L. Leibenson : The energy form of the integral condition in the theory of the boundary layer. *Doklady Academiyi Nauk SSSR*, 2:22–24, 1935.

[51] M. Lokatt et D. Eller : Finite-Volume scheme for the solution of integral boundary layer equations. *Computers and Fluids*, (132 (2016)):62–71, 2016.

[52] H. Ludwieg et W. Tillmann : Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten. *Archive of Applied Mechanics*, 17(4):288–299, 1949.

[53] H. Ludwieg et W. Tillmann : Investigations of the wall-shearing stress in turbulent boundary layers. Rap. tech. NACA-TM-1285, 1950.

[54] A. Mager : Generalization of boundary layer momentum integral equation to three-dimensional flows including those of rotating system. Rap. tech. 1067, NACA, 1952.

[55] L. Makkonen : Heat transfer and icing of a rough cylinder. *Cold Regions Science and Technology*, 1985.

[56] W. Mangler : Das Impulsverfahren zur näherungsweisen Berechnung der laminaren Reibungsschicht. *Z. angew. Math. Mech.*, 24(251-6), 1944.

[57] T. Marchal : Validation et amélioration d'un code de couche limite intégrale 3D. Rapport de stage, ONERA, 2017.

[58] M. Matsushita et T. Akamatsu : Numerical computation of unsteady laminar boundary layers with separation using one-parameter integral method. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 26(219):1502–1508, 1983.

[59] M. Matsushita et T. Akamatsu : Numerical computation of unsteady laminar boundary layers with separation using one-parameter integral method. *JSME*, 28(240):1044–1049, June 1985.

[60] M. Matsushita, S. Murata et T. Akamatsu : Numerical computation of unsteady laminar boundary layers with separation using two-parameter integral method. *JSME*, 28(245):2630–2638, November 1985.

[61] R. Michel, C. Quemard et R. Durand : Application d'un schéma de longueur de mélange à l'étude des couches limites d'équilibre. Rap. tech. 154, ONERA, 1969.

[62] W. Milewski : *Three-dimensional viscous flow computations using the integral boundary layer equations simultaneously coupled with a low order panel method.* Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1997.

[63] M. Mochizuki : Smoke observations on boundary layer transition caused by a spherical rough element. *Journal of Physical Society of Japan*, 16(5):995–1008, 1961.

[64] E. Montreuil, A. Chazottes, D. Guffond, A. Murrone, F. Caminade et S. Catris : Enhancement of prediction capability in icing accretion and related performance penalties part I : Three-dimensional CFD prediction of the ice accretion. *1st AIAA Atmospheric and Space Environments Conference, San Antonio, Texas*, 22-25 June 2009.

[65] B. Mughal : A calculation method for the three-dimensional boundary-layer equations in integral form. Mémoire de D.E.A., Massachusetts Institute of Technology, September 1992.

[66] B. Mughal : *Integral Method for Three-Dimensional Boundary-Layers.* Thèse de doctorat, Massachussetts Institute of Technology, 1998.

[67] D. Myring : An integral prediction method for three-dimensional turbulent boundary layers. Rap. tech. RAE TR 70147, 1970.

[68] J. Nikuradse : Strömungsgesetze in rauhen Rohren (Laws of flow in rough pipes - NACA TM 1292). *Forsch. Arb. Ing. Wes.*, (361), 1933.

[69] B. Nishida : *Fully simultaneous coupling of the full potential equation and the integral boundary layer equations in three dimensions.* Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1996.

[70] E. Radenac : IGLOO3D Theoretical Manual, Version 1.1. Rap. tech., ONERA, 2017.

[71] C. F. Rafael, D. M. Pio et G. A. L. da Silva : CFD and boundary layer models with laminar-turbulent transition around airfoils and a rough cylinder : Results validation. *SAE Technical Paper*, 2015.

[72] A. Refloch, B. Courbet, A. Murrone, P.Villedieu, C. Laurent, P. Gilbank, J. Troyes, L. Tessé, G. Chaineray, J. Dargaud, E. Quémerais et F. Vuillot : CEDRE Software. *AerospaceLab Journal*, (2), 2011.

[73] L. Rosenhead : *Laminar Boundary Layers.* Oxford University Press, 1963.

[74] A. Smith et N. Gamberoni : Transition, pressure gradient and stability theory. Rap. tech. ES 26388, Douglas Aircraft Company, 1956.

[75] A. G. Smith et D. B. Spalding : Heat transfer in a laminar boundary layer with constant fluid properties and constant wall temperature. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 62(565):60–64, 1958.

[76] L. Smith : An interactive boundary layer modelling method for aerodynamic flows. Mémoire de D.E.A., University of Pretoria, 2011.

[77] P. Smith : An integral prediction method for three-dimensional compressible turbulent boundary layers. Rap. tech. R&M 3739, Aeronautical Research Council, 1972.

[78] L. Stefanini, O. Silvares, G. da Silva et E. Zerbini : Boundary-layers integral analysis - airfoil icing. *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, (AIAA 2008-474), 2008.

[79] K. Stewartson : Further solutions of the Falkner-Skan equation. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 50(3):454–465, 1954.

[80] H. Stock : Calculation of three-dimensional boundary layers on wings and bodies of revolution. *Proceedings DEA Meeting "Viscous and interacting flow field effects" - MEERSBURG*, 1979.

[81] T. Swafford : Analytical approximation of two-dimensional separated turbulent boundary layer velocity profiles. *AIAA Journal*, 21(6):923–926, 1983.

[82] T. Swafford : Three-dimensional, time-dependent, compressible, turbulent integral boundary layer equations in general curvilinear coordinates and their numerical solution. Rap. tech. AEDC-TR-83-37, Arnold Engineering Development Center/DOT, 1983.

[83] T. Swafford et D. Whitfield : Time-dependent solution of three-dimensional compressible turbulent integral boundary-layer equations. *AIAA Journal*, 23(7):1005–1013, 1985.

[84] T. Tai : An integral prediction method for three-dimensional flow separation. *AIAA Journal*, 1984.

[85] I. Tani : On the approximate solution of the laminar boundary-layer equations. *Journal of Aeronautical Sciences*, 21:487–495, 504, 1954.

[86] I. Tani : History of boundary-layer theory. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 9:87–111, 1977.

[87] B. Thwaites : Approximate calculation of the laminar boundray layer. Aero. Quarterly I, pp. 245-280, 1949.

[88] P. Trontin, A. Kontogiannis, G. Blanchard et P. Villedieu : Description and assessment of the new ONERA 2D icing suite IGLOO2D. the 9th AIAA Atmospheric and Space Environments Conference - AVIATION 2017 DENVER, USA, 2017.

[89] B. van Es : Comparison and application of unsteady integral boundary layer methods using various numerical schemes. Rap. tech., Faculty of Aerospace Engineering, Delft University of Technology, 2009.

[90] A. van Garrel : Integral boundary-layer method for wind turbine aerodynamics. A literature survey. Rap. tech. ECN-C–04-004, 2003.

[91] J. van Ingen : A suggested semi-empirical method for the calculation of the boundary layer transition region. Rap. tech. V.T.H 74, Delft University of Technology, 1956.

[92] A. Veldman : A simple interaction law for viscous-inviscid interaction. *Journal of Engineering Mathematics*, (65):367–383, 2009.

[93] A. E. P. Veldman : New quasi-simultaneous method to calculate interacting boundary layers. *AIAA Journal*, 19(1):79–85, 1981.

[94] F. M. White : *Viscous fluid flow*, vol. 1. McGraw-Hill, 2 édn, 1974.

[95] D. Whitfield : Analytical description of the complete turbulent boundary layer velocity profile. *AIAA Paper 78-1158*, 1978.

[96] K. Wieghardt et W. Tillmann : On the turbulent friction layer for rising pressure. Rap. tech. NACA TM 1314, National Advisory Committee for Aeronautics, 1951.

[97] W. Wright : User Manual for the Improved NASA Lewis Ice Accretion Code LEWICE 1.6. National Aeronautics and Space Administration, Cleveland, May 1995 (Contractor Report, 198355).

[98] W. Wright : User's manual for lewice version 3.2. Rap. tech. NASA/CR-2008-214255, NASA, 2008.

[99] W. Wright : A revised validation process for ice accretion codes. *AIAA 2017-3415, AIAA Aviation ; 9th AIAA Atmospheric and Space Environments Conference ; Denver, CO ; United States*, 5-9 Jun. 2017.

[100] W. Wright, R. Gent et D. Guffond : DRA/NASA/ONERA Collaboration on Icing Research : Part II - Prediction of Accretion. Rap. tech. NASA - CR - 202349, 1997.

[101] B. Ye : The modeling of laminar-to-turbulent transition for unsteady integral boundary layer equations with high-order discontinuous Galerkin method. Mémoire de D.E.A., Delft University of technology, 2015.

[102] H. Özdemir et E. V. den Boogaard : Solving the integral boundary layer equations with a discontinuous Galerkin method. *EWEA 2011 Brussels*, 2011.

Résumé

Depuis de nombreuses années, le givrage a été identifié comme un danger dans le domaine de l'aéronautique. L'accrétion de givre se produit lorsque des gouttelettes d'eau surfondue se déposent sur une surface, en particulier le bord d'attaque d'une aile ou la lèvre d'entrée d'air moteur, et gèlent après l'impact. Ceci peut ensuite engendrer une dégradation des performances aérodynamiques, un dysfonctionnement des sondes ou encore un endommagement du moteur. C'est pourquoi cette problématique est étudiée avec attention. Les essais en vol et en soufflerie étant longs et coûteux, la simulation numérique de l'accrétion de givre est devenue un outil nécessaire dans le processus de conception et de certification des avions.

Cette thèse s'inscrit dans le contexte de la modélisation 3D de l'accrétion de givre, et plus particulièrement des couches limites dynamique et thermique qui se développent autour du corps givré. Les outils numériques devant être rapides et robustes, l'approche proposée dans cette thèse pour le calcul aérodynamique est une méthode couplée Euler/couche limite intégrale. Ainsi, un modèle intégral est développé pour représenter le développement de la couche limite dynamique. La partie thermique est modélisée soit par une méthode simplifiée basée sur des approches algébriques, soit par une méthode intégrale. Cette modélisation des couches limites dynamique et thermique est valable sur paroi lisse ou rugueuse et permet de fournir notamment le coefficient de frottement et le coefficient d'échange thermique qui sont nécessaires pour un calcul d'accrétion de givre. Les équations intégrales de couche limite, associées à leurs relations de fermeture, sont ensuite résolues par une méthode Volumes-Finis sur maillage surfacique non structuré, qui est bien adaptée pour les géométries complexes. De plus, des traitements numériques spécifiques sont mis en œuvre pour améliorer la précision de la méthode au voisinage du point d'arrêt et pour rendre le code robuste au passage du décollement.

Après la validation de la méthode de couche limite, le code est utilisé dans les chaînes de givrage 2D et 3D de l'ONERA pour des applications d'accrétion de givre. Ceci permet de montrer l'intérêt de la méthode en termes de robustesse et de précision par rapport aux codes de couche limite habituellement utilisés dans les codes de givrage actuels.

Abstract

Icing has since long been identified as a serious issue in the aeronautical world. Ice accretion occurs when supercooled water droplets impinge on a surface, particularly the leading edge of a wing or an engine inlet, and freeze after the impingement. This can lead to degradation of aerodynamic performances, sensor malfunction or engine damage. This is why this issue is being carefully studied. The lengthy and costly flight and wind tunnel tests have made numerical simulation of ice accretion a necessary tool in the aircraft design and certification process.

The present work deals with the 3D numerical modeling of ice accretion, and more particularly the modeling of the dynamic and thermal boundary layers that develop around an iced body. Since numerical tools must be fast and robust, the approach proposed in this thesis for aerodynamic computation is a coupled Euler/integral boundary layer method. Thus, an integral model is developed to represent the development of the dynamic boundary layer. The thermal part is modeled either by a simplified method based on algebraic approaches, or by an integral method. This modeling of the dynamic and thermal boundary layers is valid on smooth or rough walls and provides the friction coefficient and heat exchange coefficient that are necessary for the calculation of ice accretion. The integral boundary layer equations, associated with their closure relations, are then solved by a Finite-Volume method on unstructured surface mesh, that is well suited for complex geometries. In addition, specific numerical treatments are implemented to improve the accuracy of the method in the vicinity of the stagnation point and to make the code robust to separated boundary layers.

After validation of the boundary layer method, the code is used in ONERA's 2D and 3D icing tools for icing applications. This demonstrates the value of the method in terms of robustness and accuracy compared to the boundary layer codes more commonly used in current icing tools.