



Méthode Multi-Échelle pour la Modélisation de l'Effet d'un Générateur Solaire sur la Charge Électrostatique d'un Satellite

Antoine Brunet

► To cite this version:

Antoine Brunet. Méthode Multi-Échelle pour la Modélisation de l'Effet d'un Générateur Solaire sur la Charge Électrostatique d'un Satellite. Energie électrique. INSTITUT SUPERIEUR DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE (ISAE); UNIVERSITE DE TOULOUSE, 2017. Français. <NNT : >. <tel-01702784>

HAL Id: tel-01702784

<https://hal.science/tel-01702784v1>

Submitted on 7 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)*

Présentée et soutenue le 13/12/2017 par :

ANTOINE BRUNET

**Méthode Multi-Échelle pour la Modélisation de l'Effet d'un Générateur
Solaire sur la Charge Électrostatique d'un Satellite**

JURY

CHRISTOPHE GEUZAINÉ
FILIPPO PANTELLINI
MARIE-HÉLÈNE VIGNAL
FABRICE CIPRIANI
JEAN-FRANÇOIS ROUSSEL
PIERRE SARRAILH

Université de Liège
Observatoire de Paris - LESIA
Inst. Mathématiques de Toulouse
ESA
ONERA
ONERA

Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Directeur de thèse
Examineur

École doctorale et spécialité :

AA : Mathématiques Appliquées et Ingénierie des Plasmas

Unité de Recherche :

ONERA DPhIEE

Directeur(s) de Thèse :

Jean-François Roussel et François Rogier

Rapporteurs :

Christophe Geuzainé et Filippo Pantellini

**MÉTHODE MULTI-ÉCHELLE POUR
LA MODÉLISATION DE L'EFFET D'UN
GÉNÉRATEUR SOLAIRE SUR LA
CHARGE ÉLECTROSTATIQUE D'UN
SATELLITE**

ANTOINE BRUNET

2017

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier François Rogier et Jean-François Roussel pour avoir dirigé cette thèse. Ils ont su m'accueillir chaleureusement au sein de l'ONERA, et également partager leur expérience scientifique dans un domaine qui était pour moi étranger. Merci également au CNES, et en particulier à Denis Payan, qui m'a permis de réaliser cette thèse dans les meilleures conditions.

Je veux également remercier tout particulièrement Pierre Sarrailh, pour l'encadrement attentif dont il m'a fait profiter durant ces trois ans. Merci Pierre pour ton écoute attentive, ta disponibilité incroyable, et toute l'aide que tu m'as apporté lors de cette thèse. Merci également pour tes qualités humaines, ta bonne humeur, le fromage d'Estive, et les histoires de télésièges aux pauses café. C'était pour moi un plaisir de réaliser cette thèse dans des conditions pareilles.

Plus généralement, je souhaite remercier l'ensemble des équipes du DPhIEE, dont l'excellence scientifique n'est égalee que par la bonne ambiance qu'ils savent entretenir. Je mesure l'honneur qui m'est fait de pouvoir rester parmi vous après cette thèse. Un grand merci tout particulier à tous les doctorants que j'ai eu la chance de côtoyer durant ces trois ans, et avec qui nous avons partagé tant de bons moments. Merci Thomas, pour toutes les discussions autour d'un café ou d'une bière. Trois ans passent vite quand on est si bien entouré.

Merci également à monsieur Filippo Pantellini et au professeur Christophe Geuzaine de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse. Un grand merci à Marie-Hélène Vignal et Fabrice Cipriani pour leur participation au jury en tant qu'examineurs.

Je veux de plus remercier l'équipe Flying Squirrels : Hélène, Thomas, Adrien, Daniel, Mathieu, Jean, Etienne, Nadine. Quelle fabuleuse expérience, quelle conclusion géniale d'un an de travail. Merci à tous pour cette aventure incroyable.

Enfin, je souhaite adresser des remerciements plus personnels à Hélène, pour son soutien quotidien depuis toutes ces années, et que je félicite pour toutes les grandes réussites qu'elle a réalisé jusqu'à présent. Je remercie évidemment ma mère, qui m'a toujours inspiré, et mon père, qui m'a toujours soutenu. J'espère que, pour lui, le tout n'était pas trop confus.

Table des matières

Présentation générale	1
1. Introduction à la simulation du couplage plasma/satellite	3
1.1. Description de l'environnement spatial	4
1.1.1. Vent solaire et interaction avec la magnétosphère terrestre .	5
1.1.2. Plasma froid ionosphérique	6
1.1.3. Photo-émission et émission secondaire électronique	9
1.1.4. Propulsion spatiale électrique	10
1.2. Interactions entre un satellite et l'environnement spatial	12
1.2.1. Équilibre électrostatique d'un satellite	12
1.2.2. Description d'un générateur solaire	13
1.2.3. Interconnecteurs de cellules solaires	16
1.2.4. Décharge électrostatique et arcs électriques	18
1.2.5. Érosion des matériaux	20
1.2.6. Effet Snapover	20
1.3. Modélisation du plasma spatial	20
1.3.1. Fonction de distribution	21
1.3.2. Équations du champ électrique	22
1.3.3. Description cinétique	24
1.3.4. Description fluide	24
1.3.5. Équilibre thermodynamique	25
1.3.6. Grandeurs caractéristiques du plasma	26
1.3.7. Lois de collections	27
1.4. Panorama des méthodes numériques pour la simulation des plasmas	30
1.4.1. Discrétisation de l'équation de Vlasov	30
1.4.2. La méthode Particle-in-Cell	31
1.4.3. Les codes hybrides et le logiciel SPIS	35
1.4.4. Modèles perturbatifs	41
1.4.5. Décomposition de domaine et méthodes multi-modèles . . .	42
1.5. Présentation des objectifs de la thèse	43

2. Application de la méthode patch au problème de Poisson	47
2.1. Introduction	47
2.1.1. Méthode Patch	48
2.1.2. Problème de Poisson	52
2.1.3. Formulation variationnelle	53
2.1.4. Discrétisation du problème	53
2.2. Implantation de la méthode patch	54
2.2.1. Description de l'implantation	55
2.3. Résultats numériques	57
2.3.1. Perturbation volumique	58
2.3.2. Perturbation surfacique	63
2.4. Conclusion	70
3. Développement d'une méthode patch non-linéaire	71
3.1. Introduction	72
3.1.1. Problématique	72
3.1.2. Méthode de Newton-Raphson	73
3.1.3. Méthode de résolution couplée	74
3.2. Étude théorique du cas général	76
3.3. Application au problème de Poisson-Boltzmann	79
3.3.1. Problème de Poisson-Boltzmann	80
3.3.2. Propriétés de convergence	81
3.3.3. Traitement des conditions aux limites	83
3.4. Implantation dans le logiciel SPIS	85
3.4.1. Représentations des maillages	85
3.4.2. Solveur Poisson multigrille	86
3.4.3. Pousseur de particules	86
3.4.4. Post-traitement et visualisation des résultats	87
3.5. Application numérique à la simulation des interconnecteurs négatifs	87
3.5.1. Description de la géométrie	87
3.5.2. Convergence de l'algorithme patch non-linéaire	89
3.5.3. Résultats numériques	91
3.6. Conclusion	93
4. Développement d'un modèle perturbatif pour la prise en compte des effets de surfaces dans un plasma Maxwellien	94
4.1. Introduction	94
4.2. Problématique	96
4.2.1. Effets surfaciques dans le modèle de Maxwell-Boltzmann	96
4.2.2. Couplage Vlasov-Boltzmann	100

4.3.	Correction particulière du modèle Maxwell-Boltzmann	104
4.4.	Exemples numériques	106
4.4.1.	Sonde de Langmuir sphérique	107
4.4.2.	Interconnecteur chargé positivement	111
4.5.	Conclusion	117
5.	Simulation des interconnecteurs de générateurs solaires	119
5.1.	Simulation d'un interconnecteur négatif avec la méthode patch . . .	121
5.2.	Simulation d'un interconnecteur positif avec le modèle Maxwell-Boltzmann corrigé	127
5.3.	Développements futurs pour la simulation des interconnecteurs de panneaux solaires	130
5.3.1.	Méthodes de réduction du bruit sur les densités d'ions autour des interconnecteurs	130
5.3.2.	Amélioration des maillages utilisés	130
5.3.3.	Amélioration du modèle d'interconnecteur positif	131
	Conclusion et perspectives	132
A.	Identification des blocs diagonaux d'une matrice CSR symétrique	135
	Bibliographie	137

Physique des plasmas	
ϕ	Potentiel électrostatique
\mathbf{E}	Champ électrique
ρ	Densité de charge électrique
k	Constante de Boltzmann $k \approx 1,380\,65\,\text{J K}^{-1}$
ϵ_0	Permittivité du vide $\epsilon_0 \approx 8,854\,19\,\text{F m}^{-1}$
λ_D	Longueur de Debye
ω_{pe}	Pulsation plasma électronique
$v_{th,e}$	Vitesse thermique
Description des populations de particules	
m	Masse
q	Charge électrique
f	Fonction de distribution
\mathcal{M}	Distribution Maxwellienne
n	Densité de particules
\mathbf{u}	Vitesse moyenne
T	Température
Algèbre linéaire	
$\text{div}(\cdot)$	Opérateur divergence
$\text{rot}(\cdot)$	Opérateur rotationnel
$\nabla(\cdot)$	Opérateur gradient
$\Delta(\cdot)$	Opérateur Laplacien
$\ \cdot\ _a$	Norme relative à l'opérateur a
$\tilde{\gamma}(V_1, V_2)$	Angle abstrait entre les espaces vectoriels V_1 et V_2
$\rho(a)$	Rayon spectral de l'opérateur a

Notations utilisées dans ce manuscrit

Présentation générale

La question de l'interaction entre les véhicules spatiaux et leur environnement est une problématique majeure de la conception des satellites. En particulier, la présence d'un plasma dans l'environnement spatial implique des effets de charge électrostatique satellitaire qui sont particulièrement complexes. Ces effets de charge impactent grandement le dimensionnement des éléments externes du satellite, et en particulier la conception des générateurs solaires.

En effet, l'impact des générateurs solaires sur la charge électrostatique est déterminant, particulièrement dans le cas des satellites géostationnaires de télécommunication. Pour ces satellites, la surface des générateurs solaires est en effet très importante (de l'ordre de la centaine de mètres carrés). Ces générateurs solaires sont constitués de milliers de cellules reliées par des éléments appelés *interconnecteurs* de panneau solaire.

Un modèle de l'effet de ces générateurs solaires sur la charge est nécessaire pour la conception d'un satellite et pour éviter sa destruction pendant sa mission.

Les moyens numériques modernes, tels que le code SPIS [67, 66] permettent de réaliser des simulations de la charge d'un satellite en prenant en compte la géométrie tridimensionnelle complète du satellite. Ces codes incorporent également des modèles physiques détaillés du plasma spatial et des matériaux utilisés dans les véhicules spatiaux. En particulier, le logiciel SPIS permet de simuler l'effet d'un propulseur plasma à effet Hall. Ces simulations ont mis en évidence des gradients importants de densité de plasma au niveau des générateurs solaires. Cependant, les codes de simulations actuels ne permettent pas de représenter avec précision l'effet des interconnecteurs de générateur solaire, car ils sont géométriquement trop petits.

C'est ce qui justifie ces travaux, qui portent sur les méthodes multi-échelles pour la simulation complète de la charge d'un satellite avec la prise en compte de l'effet des interconnecteurs de panneau solaire.

Dans un premier temps, nous avons développé et validé un solveur Poisson utilisant la méthode patch linéaire. Pour cela, nous avons étudié les différentes implantations de la méthode dans d'autres domaines d'application pour sélectionner le schéma numérique le plus adapté à la simulation du plasma spatial. Nous avons ensuite développé un solveur Poisson utilisant une méthode patch à convergence rapide pour le calcul du champ électrique dont nous avons évalué le comportement numérique, en le comparant à des résultats de référence. Nous avons ainsi montré que la méthode patch permettait la résolution du problème de Poisson. Cependant, la simulation du plasma spatial fait couramment intervenir un modèle Maxwellien pour la densité d'électrons, et nécessite la résolution du problème non linéaire de Poisson-Boltzmann.

L'étape suivante a donc consisté à étendre la méthode à la résolution d'une classe de problèmes non linéaires, dont fait partie le problème de Poisson-Boltzmann. Pour cela, nous avons d'abord montré les limites de la méthode de Newton quand elle est couplée avec la méthode patch. Nous avons donc défini un schéma de linéarisation générique plus adapté à la méthode patch, que nous avons appelé Méthode Patch non linéaire. Nous avons prouvé la convergence de cette méthode et validé numériquement son application au problème de Poisson-Boltzmann. Pour permettre son utilisation dans la simulation complète d'un satellite, nous avons ensuite implanté la méthode Patch non linéaire dans le cœur numérique de SPIS. Pour cela, un solveur 3D non structuré capable de réaliser la méthode Patch non linéaire a été développé. Nous avons également modifié le code particulier de SPIS pour gérer la colocalité des maillages. Ces nouvelles capacités de SPIS ont été utilisées pour simuler l'impact d'un interconnecteur chargé négativement sur la charge d'un satellite à propulsion électrique.

Pour permettre la simulation complète d'un générateur solaire, nous avons par ailleurs développé un modèle correctif de paroi pour les populations électroniques Maxwelliennes. Pour cela, l'étude du couplage entre les équations de Vlasov et Boltzmann dans le cadre électrostatique a été réalisée. Nous avons identifié un terme correctif à apporter au modèle de Boltzmann pour permettre la stabilité de ce couplage, et qui correspond à l'effet de la paroi sur un plasma Maxwellien. Nous avons également proposé un schéma numérique particulier pour calculer ce terme correctif dans SPIS. Enfin, nous avons validé ce schéma par rapport à des références sur des cas 2D et 3D.

Chapitre 1.

Introduction à la simulation du couplage plasma/satellite

Sommaire

1.1. Description de l'environnement spatial	4
1.1.1. Vent solaire et interaction avec la magnétosphère terrestre . . .	5
1.1.2. Plasma froid ionosphérique	6
1.1.3. Photo-émission et émission secondaire électronique	9
1.1.4. Propulsion spatiale électrique	10
1.2. Interactions entre un satellite et l'environnement spatial	12
1.2.1. Équilibre électrostatique d'un satellite	12
1.2.2. Description d'un générateur solaire	13
1.2.3. Interconnecteurs de cellules solaires	16
1.2.4. Décharge électrostatique et arcs électriques	18
1.2.5. Érosion des matériaux	20
1.2.6. Effet Snapover	20
1.3. Modélisation du plasma spatial	20
1.3.1. Fonction de distribution	21
1.3.2. Équations du champ électrique	22
1.3.3. Description cinétique	24
1.3.4. Description fluide	24
1.3.5. Équilibre thermodynamique	25
1.3.6. Grandeurs caractéristiques du plasma	26
1.3.7. Lois de collections	27

1.4. Panorama des méthodes numériques pour la simulation des plas-	
mas	30
1.4.1. Discrétisation de l'équation de Vlasov	30
1.4.2. La méthode Particle-in-Cell	31
1.4.3. Les codes hybrides et le logiciel SPIS	35
1.4.4. Modèles perturbatifs	41
1.4.5. Décomposition de domaine et méthodes multi-modèles	42
1.5. Présentation des objectifs de la thèse	43

Dans ce chapitre introductif, nous présentons la problématique du couplage entre un satellite et son environnement plasma. Dans une première partie, nous décrivons l'environnement spatial naturel ainsi que celui induit par le satellite lui même. Nous détaillons ensuite les différents mécanismes de couplage entre le satellite et cet environnement.

Dans une seconde partie, nous introduisons les modèles physiques utilisés pour décrire le plasma spatial, ainsi que les méthodes numériques utilisées pour la simulation des plasmas, en particulier dans le cas de l'interaction plasma/satellite.

Enfin, nous présentons un cas de simulation de satellite illustrant les objectifs de cette thèse.

1.1. Description de l'environnement spatial

L'espace est un milieu complexe et particulièrement agressif, qui peut fortement perturber le fonctionnement des satellites en orbites. L'environnement spatial est en effet à l'origine d'un nombre croissant d'anomalies constatées sur les satellites. L'étude et la modélisation de cet environnement, entreprises dès les débuts de la conquête spatiale, ont mis en évidence une grande variété dans les phénomènes d'interaction avec les satellites.

En particulier, différents phénomènes entraînent la collection ou l'émission de courants d'ions et d'électrons par un satellite plongé dans l'environnement spatial. Ces courants impliquent la charge électrique du satellite par rapport au milieu spatial, et selon les matériaux utilisés et la géométrie du satellite, peuvent également entraîner une charge différentielle entre les différentes parties du satellite. Ce type de charge est susceptible de créer des décharges électrostatiques au sein du satellite, qui sont à l'origine d'anomalies importantes au niveau des systèmes électroniques ou électriques embarqués [3]. Ces risques ont justifié la mise en orbite d'expériences scientifiques pour l'évaluation de la charge des

satellites, tels que les capteurs d'environnement du *Defense Meteorological Satellite Program* (DMSP, [56]), et plus spécifiquement pour étudier la charge différentielle, avec notamment l'expérience SILLAGE embarquée sur le satellite SPOT-4 [12].

Dans cette section sont décrits les principaux mécanismes impactant la charge électrostatique des satellites en orbite autour de la Terre. D'une part, nous présentons rapidement l'environnement spatial électrisant naturel et les différentes composantes du plasma présent en orbite. D'autre part, nous décrivons les différentes composantes du plasma induites par le satellite lui-même.

1.1.1. Vent solaire et interaction avec la magnétosphère terrestre

L'environnement spatial dans le système solaire est largement impacté par l'activité de notre soleil. Les particules émises par notre étoile, en interaction avec le champ magnétique qu'elle génère, forment un *vent solaire* complexe, irradiant le système solaire à plusieurs centaines de kilomètres par seconde [42]. Ce système, particulièrement complexe, est largement influencé par l'activité solaire. En particulier, les phénomènes d'éruptions solaires ont un impact important jusqu'à l'environnement des satellites de la terre. Ceci amène les différents acteurs de l'industrie spatiale à s'intéresser à l'étude et à la prévision de l'activité solaire et à son impact sur l'environnement de nos satellites, dans le domaine de la météorologie spatiale [61].

La terre, comme d'autres planètes du système solaire, est protégée du vent solaire par le champ géomagnétique qui forme la magnétosphère terrestre [68]. La structure de la magnétosphère est présentée schématiquement dans la figure 1.1.

La magnétosphère terrestre, constituée par le champ magnétique de la Terre, se présente sous la forme d'un tore ceinturant la planète au niveau de l'équateur et comprimé par le vent solaire du côté exposé au soleil. Au niveau des pôles, la configuration des lignes de champ magnétique permet aux particules du vent solaire de pénétrer la magnétosphère. Ces particules se retrouvent piégées autour de la Terre dans des zones appelées ceintures de radiation, ou ceintures de Van Allen, du nom du chercheur américain qui les a découvertes. La figure 1.2 présente la topologie de ces ceintures autour de la terre.

La ceinture interne est située entre 700 km et 10 000 km d'altitude. Elle est principalement constituée de protons de haute énergie. La ceinture externe est quand à elle située entre

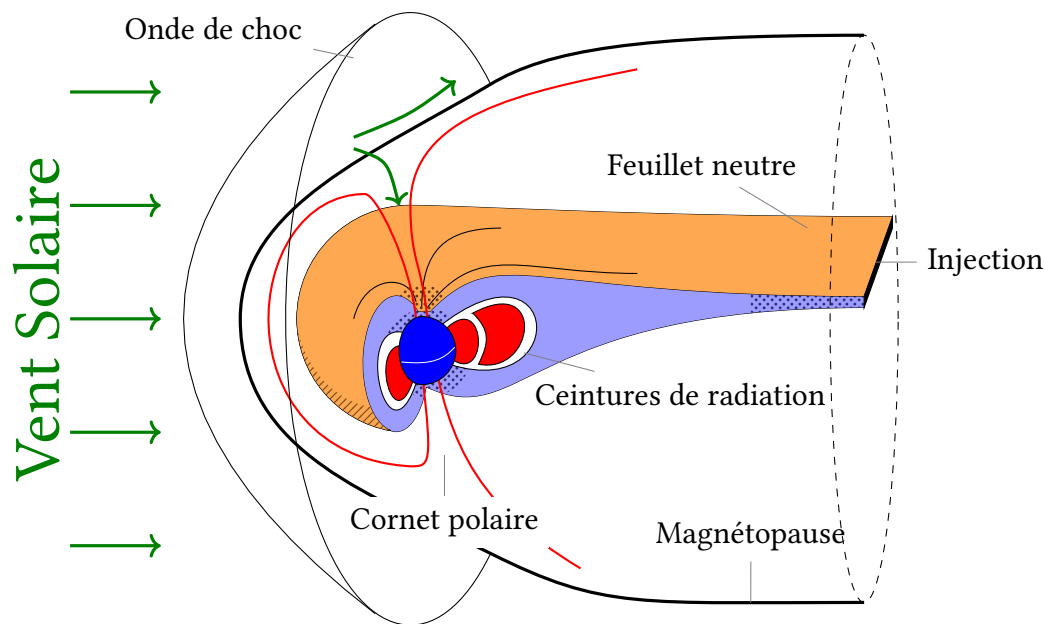


FIGURE 1.1 – Représentation schématique de la magnétosphère terrestre , tiré de [68]

13 000 km et 60 000 km d'altitude et est principalement constituée d'électrons de haute énergie.

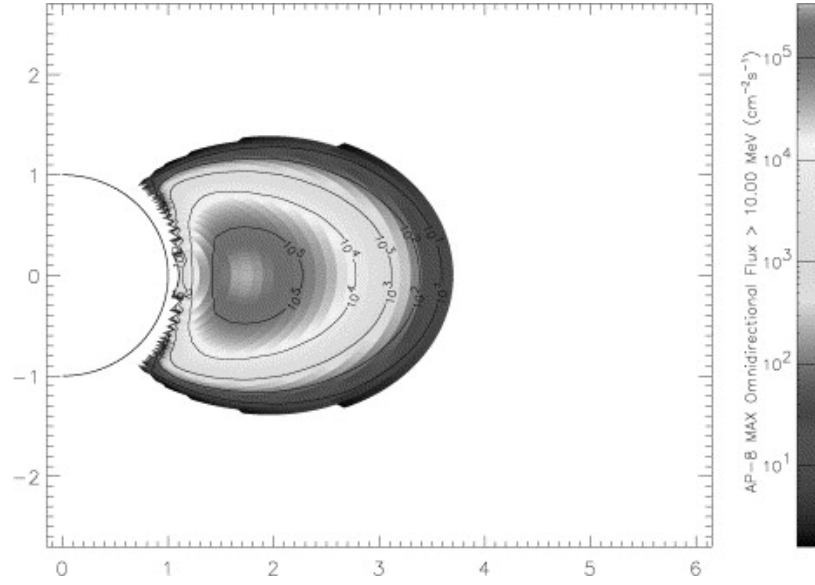
Au sein de ces ceintures, les particules se déplacent à grande vitesse le long des lignes de champ de la magnétosphère, oscillant entre les pôles nord et sud.

1.1.2. Plasma froid ionosphérique

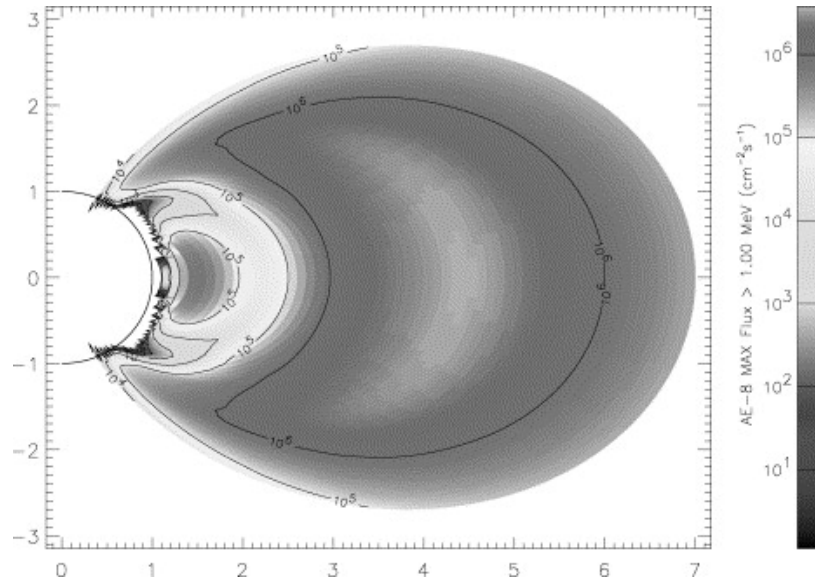
Dans les couches supérieures de l'atmosphère, entre 80 km et 100 km, les rayonnements ultraviolet et X provenant du soleil sont absorbés par les espèces neutres présentes, qui sont alors ionisées. Ce processus appelé photoionisation est la principale source d'ionisation de la haute atmosphère, générant un plasma appelé ionosphère autour de la plupart des planètes.

L'étude des propriétés physiques de l'ionosphère a été motivée dès le tout début du XX^e siècle par ses effets sur les liaisons radios. On trouvera des détails sur le comportement de l'ionosphère et les phénomènes physiques qu'elle met en jeu dans des livres dédiés [38, 69].

La figure 1.3 présente le profil typique de densité d'ions que l'on mesure dans l'ionosphère



(a) Flux de proton $> 10\text{ MeV}$, AP8 MAX



(b) Flux d'électrons $> 1\text{ MeV}$, AE8 MAX

FIGURE 1.2 – Populations piégées dans les ceintures de radiation, tiré de [30]

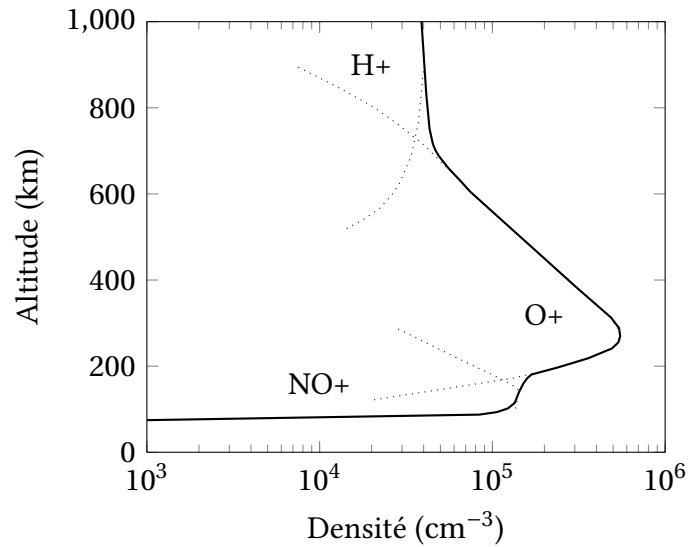


FIGURE 1.3 – Profil de densité dans l'ionosphère

ainsi que les principales espèces qui la constituent [21]. On peut noter qu'elle débute dans l'atmosphère, à partir d'environ 80 km d'altitude, et peut monter jusqu'à plusieurs centaines de kilomètres d'altitude. On distingue deux régions principales dans l'ionosphère :

- ✦ La région E, entre 80 km et 160 km d'altitude environ. Dans cette région la population d'ions est dominée par les ions moléculaires NO^+ et O_2^+ . Leur densité peut atteindre 10^5 cm^{-3} , mais reste très faible par rapport aux densités de neutres dans cette région de l'atmosphère. On a alors un plasma collisionnel à l'équilibre thermodynamique.
- ✦ La région F, au dessus de 160 km d'altitude. Jusqu'à environ 1000 km d'altitude, l'espèce dominante est l'ion O^+ , qui atteint sa densité maximale de l'ordre de 10^6 cm^{-3} à environ 300 km d'altitude. Au dessus de 1000 km, les ions H^+ deviennent progressivement dominants. Le plasma dans cette région F peut être considéré comme non-collisionnel.

Le plasma ionosphérique est relativement froid, avec une température de quelques dixièmes d'électron-volts (typiquement entre 0,1 eV et 0,3 eV). Comme nous le montrerons dans la suite, ce plasma de basse température et de relativement haute densité a un effet bénéfique sur la charge des satellites, car il limite le potentiel absolu auquel le satellite peut se charger.

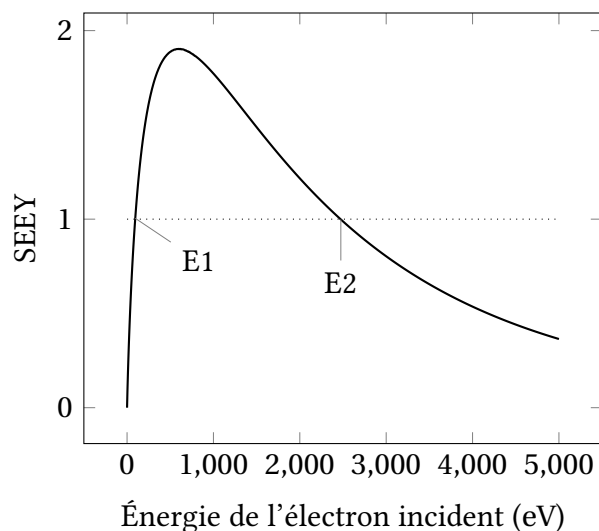


FIGURE 1.4 – Profil de rendement d'émission secondaire électronique

1.1.3. Photo-émission et émission secondaire électronique

Les rayonnements UV issus du soleil interagissent également avec les matériaux présents à la surface même des satellites. Ils sont capables d'arracher des électrons des matériaux, dans un phénomène appelé photo-émission. Le courant de ces photo-électrons, quand le satellite est exposé au soleil, dépend des matériaux utilisés, mais est typiquement de l'ordre de quelques nanoampères [20]. L'énergie des photo-électrons est typiquement de quelques électron-volts, et le phénomène de photo-émission ne peut donc induire qu'une faible charge positive sur le satellite.

De la même manière, les électrons de haute énergie piégés dans la magnétosphère, quand ils impactent les surfaces du satellite, peuvent être rétrodiffusés par le matériau, ou encore en extraire d'autres électrons. Le nombre moyen d'électrons émis par le matériau pour chaque électron incident s'appelle rendement d'émission secondaire (SEY pour Secondary Electron Emission Yield), et dépend largement de l'énergie de l'électron incident.

La figure 1.4 présente le rendement d'émission secondaire électronique typique. On note les points de cross-over E1 et E2, où le rendement vaut 1. Entre ces deux énergies, le rendement est supérieure à 1, et les électrons incidents produisent plus de secondaires, et il en résulte un courant net positif. Ainsi, seuls les électrons d'énergie supérieure au second point de cross-over E2 peuvent entraîner la charge négative du satellite.

1.1.4. Propulsion spatiale électrique

Depuis plusieurs décennies, la propulsion spatiale électrique est considérée comme une solution particulièrement intéressante pour la propulsion des engins spatiaux [13]. Aussi bien pour les sondes spatiales que pour la mise à poste et le maintien en orbite des satellites sur Terre, les propulseurs électriques permettent une réduction drastique de la masse de carburant embarquée. En particulier, la mise à poste des satellites de télécommunication géostationnaires en propulsion électrique (EOR pour Electric Orbit Raising), permettrait de réduire les quelques tonnes de carburant embarquées pour les propulseurs chimiques à seulement quelques centaines de kilogrammes.

De nombreux types de propulseurs électriques sont développés actuellement. Ils permettent, par différents moyens, d'accélérer un fluide à très grande vitesse en utilisant la puissance électrique délivrée par les générateurs à bord du satellite. On s'intéresse ici en particulier aux propulseurs à effet Hall, retenus par l'industrie Européenne pour l'EOR des satellite géostationnaires.

Malgré ses avantages en terme d'efficacité, la propulsion électrique impose de nombreuses contraintes sur la conception des satellites. En premier lieu, la très faible poussée que peuvent délivrer ces propulseurs imposent des temps de manœuvre très longs. Ainsi, alors que la mise à poste d'un satellite géostationnaire peut se faire en quelques jours avec des propulseurs chimiques, plusieurs mois sont nécessaires pour réaliser une mise à poste électrique. Durant cette mise à poste, le satellite traverse de nombreuses fois les ceintures de radiations, augmentant grandement la dose de radiations reçue par l'appareil avant même le début de sa mission [47]. De plus, ces propulseurs nécessitent d'importantes puissances électriques pour fonctionner, de l'ordre de la dizaine de kilovolts, ce qui impose des contraintes importantes sur la conception du système électrique du satellite. En particulier, pour des raisons d'efficacité, il est souhaitable que les générateurs solaires soient conçus pour générer des tensions de plusieurs centaines de volts.

D'autre part, les propulseurs plasmas fonctionnent sur le principe de l'ionisation d'un gaz neutre. Même s'il est possible d'obtenir un taux d'ionisation important, de l'ordre de 90%, une partie du gaz n'est pas ionisée. On a alors un gaz de neutres, de vitesses relativement faible par rapport aux ions accélérés, et de densité importante par rapport à ceux-ci. Par collision entre les ions rapides et les neutres, mettant en jeu un échange d'électrons entre

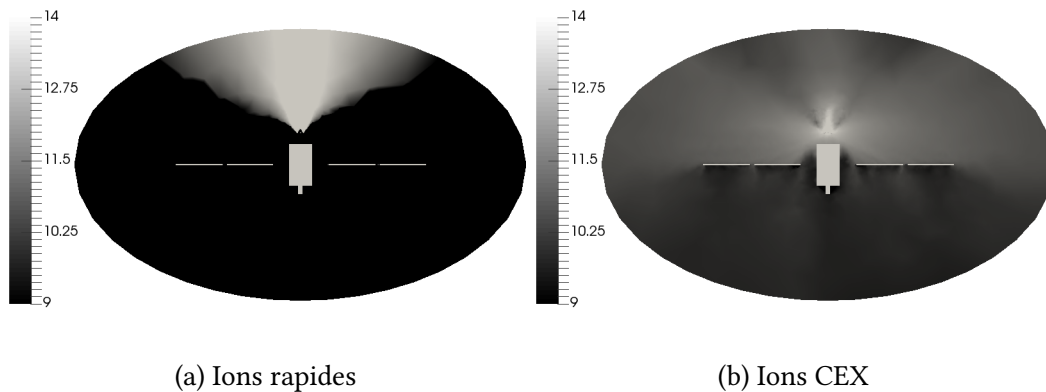


FIGURE 1.5 – Densités d’ions autour d’un satellite de télécommunication à propulsion de Hall ($\log_{10} \text{m}^{-3}$)

les deux, se forme un gaz d’ions lents appelés ions d’échange de charge (CEX, pour Charge EXchange). Ce plasma, relativement dense par rapport à l’environnement GEO, interagit de manière importante avec le satellite. L’étude de cette interaction a fait l’objet de nombreux travaux, portant aussi bien sur sa caractérisation en orbite [51, 46], que sur sa modélisation numérique [67, 83].

La figure 1.5 présente les résultats d’une simulation du plasma généré par des propulseurs de Hall sur un satellite de télécommunication GEO [50]. Sur chaque figure, le corps du satellite est situé au milieu, et des générateurs solaires sont visibles de part et d’autre du corps. Les propulseurs sont placés au dessus du corps, expulsant le plasma vers le haut de la figure. On note sur la figure 1.5.a que les ions rapides, en sortant des propulseurs, forment une plume nette qui s’éloigne du satellite. Au contraire, les ions d’échange de charge, présentés sur la figure 1.5.b forment un gaz relativement dense qui reste à proximité du satellite, en particulier autour du corps de celui-ci, ainsi qu’au niveau des faces exposées des générateurs solaires. Sur ces résultats de simulation, la densité d’ions CEX prédite au niveau des générateurs solaires varie entre 10^6cm^{-3} et 10^4cm^{-3} sur les faces exposées, et devient négligeable sur les faces arrières.

Le satellite, dans cette configuration, est donc exposé à d’importants gradients de densité de plasma de la seule présence des propulseurs. La prise en compte de l’interaction entre ce plasma et les différentes parties du satellite, en particulier les générateurs solaires [31], est nécessaire pour modéliser la charge électrostatique de ce type de satellites.

1.2. Interactions entre un satellite et l'environnement spatial

Les satellites interagissent de manière importante avec l'environnement auquel ils sont exposés. Nous décrivons ici les principaux effets de l'environnement sur les satellites, en particulier au niveau des générateurs solaires, qui représentent un système critique des satellites particulièrement exposé à l'environnement spatial. L'effet des générateurs solaires a été notamment étudié pour la station spatiale internationale [5], qui possède des panneaux solaires de surfaces importantes et de forte tension, exposés au plasma d'orbite basse (LEO, pour Low Earth Orbit).

Il est à noter que ces phénomènes sont sensibles aux paramètres de l'environnement spatial, et en particulier l'activité solaire [55].

1.2.1. Équilibre électrostatique d'un satellite

L'effet direct des différents courants collectés et émis par un satellite est le chargement de celui-ci par rapport à l'environnement [22]. En se chargeant électriquement, le satellite atteint son potentiel flottant, point d'équilibre entre la collection et l'émission de particules chargées. Ce potentiel d'équilibre dépend des différents paramètres de l'environnement local du satellite [44].

Premièrement, l'énergie des particules rencontrées dans l'environnement a un effet important sur le potentiel induit. Considérons un satellite en éclipse, exposé à un plasma Maxwellien de température T . Les électrons ayant une masse largement inférieure à celle des ions, leur vitesse est bien plus grande. Le flux d'électrons auquel est soumis le satellite est donc bien plus important que le flux d'ions, tant que le satellite n'a pas atteint une charge électrique négative suffisante pour repousser les électrons. Le potentiel flottant du satellite en volts, en l'absence de facteurs limitant comme l'émission secondaire ou la photo-émission, est donc proche de la température des électrons exprimé en électron-volts. Ce mécanisme, principal moteur de la charge des satellites, dépend donc fortement des populations de charges présentes autour du satellite, et en particulier des électrons.

Le principal mécanisme de mitigation de cette charge est la photo-émission. Lorsque le satellite est exposé au soleil, le courant de photo-émission est plusieurs fois plus intense

que le courant de charge des électrons de l'environnement. Ainsi, la charge du satellite est relativement faible lorsqu'il est exposé au soleil.

Nous avons décrit jusqu'à présent le phénomène de charge absolue du satellite par rapport au plasma ambiant. Cette charge a lieu lorsque le satellite est un conducteur électrique parfait et qu'il se charge de manière uniforme. Elle n'est que peu nuisible aux systèmes du satellite [65]. Cependant, pour des satellites réels, l'utilisation de matériaux diélectriques sur les surfaces est souvent nécessaire, pour répondre principalement aux contraintes thermiques. Les différentes expositions des surfaces à l'environnement plasma et aux UV peut alors entraîner une charge différentielle entre les différentes surfaces du satellite. Au delà d'une tension de seuil, cette charge peut initier des décharges électrostatiques à la surface du satellite. Ces décharges créent des dégradations importantes sur les revêtements de surfaces et peuvent grandement perturber les systèmes électroniques à bord. Ce phénomène est particulièrement important au niveau des générateurs solaires.

1.2.2. Description d'un générateur solaire

La plupart des satellites que nous envoyons dans l'espace utilisent des générateurs solaires pour leurs besoins énergétiques. Ce sont donc des systèmes particulièrement critiques pour le fonctionnement des satellites. Du point de vue de l'interaction avec l'environnement spatial, les générateurs solaires représentent une surface importante exposée à l'environnement, et ont un effet majeur sur le couplage entre le satellite et le milieu spatial. En particulier, les besoins énergétiques importants des satellites de télécommunication géostationnaire, de l'ordre de plusieurs dizaines de kilowatts, imposent l'utilisation de panneaux solaires de plusieurs dizaines de mètres d'envergure.

L'amélioration continue de l'efficacité des cellules solaires, ainsi que la mitigation des risques liés aux générateurs solaires, sont des enjeux industriels importants, justifiant le développement de règles de conception validées par le retour d'expérience en orbite. On trouvera dans la littérature de nombreuses ressources très détaillées sur la conception de générateurs solaires [64, 58].

Les générateurs solaires sont constitués de cellules photoélectriques individuelles, mises en circuit pour répondre aux besoins du satellite. Les cellules sont d'abord placées en série pour produire la tension requise. On place ces chaînes de cellules, appelées strings, en

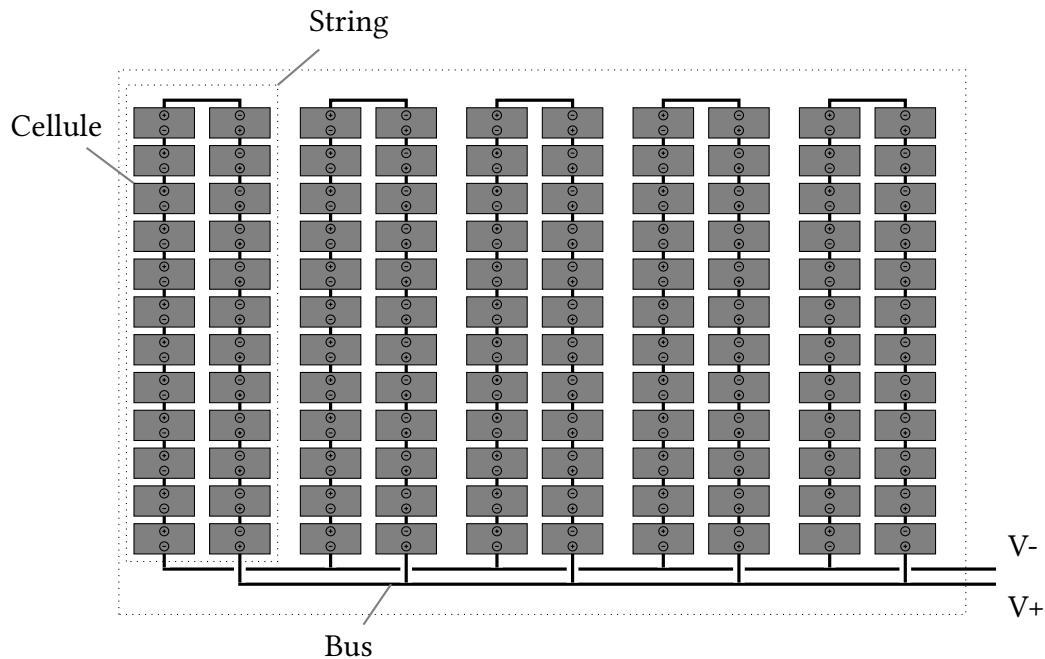


FIGURE 1.6 – Schéma simplifié d'un module de générateur solaire

parallèle les unes par rapport aux autres pour assurer le courant électrique nécessaire. La figure 1.6 présente le schéma simplifié d'un tel montage.

Le long de chaque string, le potentiel électrique augmente linéairement. Il en résulte que le générateur solaire est couvert d'éléments chargés à des potentiels très différents. Pour des raisons d'efficacité, la tendance actuelle est à l'augmentation de la tension de bus, renforçant encore les gradients de potentiels à la surface des générateurs solaires.

De plus, les panneaux solaires actuels ne sont pas totalement isolés du milieu spatial. Si les courants collectés sur les bords des cellules et les interconnecteurs entre elles n'ont normalement qu'un faible impact sur la puissance délivrée par le générateur, ils ont un rôle important sur la charge électrostatique du satellite. Pour des panneaux solaires utilisant des hautes tensions, les courants collectés peuvent également représenter une perte importante de la puissance délivrée par le générateur [16].

Comme nous l'avons vu, à cause de la vitesse élevée des électrons dans l'environnement spatial, les potentiels flottants sur le panneau solaire doivent être majoritairement négatifs. Étant donné que les cellules recouvrent une plage importante de potentiels, si la tension

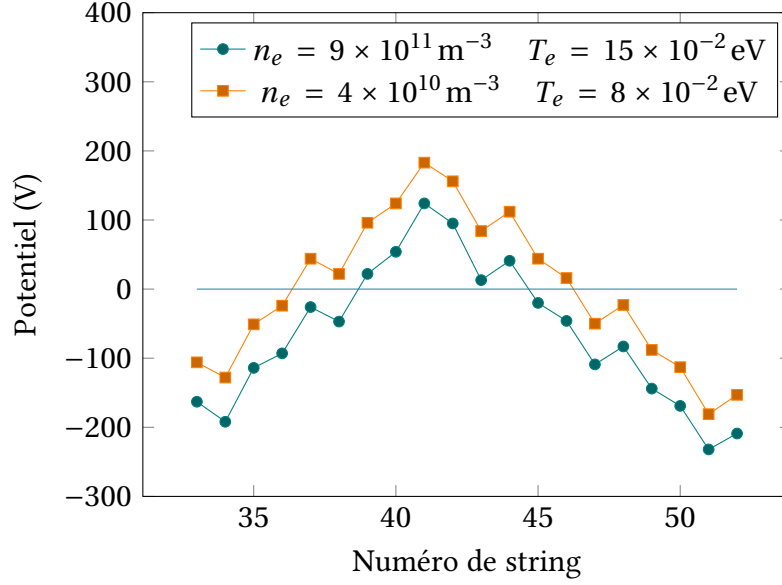


FIGURE 1.7 – Potentiel des différents strings d’un générateur solaire pour deux environnements. La tension de bus du générateur solaire est de 350 V, la température des ions est de 20 eV. Tiré de [70]

de bus est de l’ordre du potentiel flottant, certaines cellules auront un potentiel positif, et d’autres un potentiel négatif. Au début des années 2000, on estime en orbite basse que moins de 10% de la surface d’un panneau solaire flottant est positive et attractive pour les électrons du plasma spatial; le reste de la surface se chargeant négativement par rapport à l’environnement [65]. Des essais plus récents montrent que les générateurs solaires flottent plus positivement [70], avec environ 50% de leur surface qui se charge positivement, comme présenté sur la figure 1.7.

En réalité, la partie négative du générateur solaire est souvent connectée à la masse du satellite, qui elle-même interagit avec l’environnement. La structure du satellite, chargée négativement, collecte donc des ions de l’environnement, et fait donc partiellement remonter le potentiel du panneau solaire. Le calcul de l’équilibre électrostatique d’un satellite équipé de panneaux solaires nécessite donc l’estimation précise des courants collectés par les différents composants exposés au plasma, aussi bien au niveau du générateur solaire, principalement pour les électrons collectés par les surfaces positives, que sur le reste du satellite (structures exposées, tuyères, propulseurs électriques).

Un cas particulièrement symbolique démontrant la difficulté de cette estimation est celui de la station spatiale internationale (ISS). L'ISS possède de très grands panneaux solaires, avec une tension de bus de 160 V. Les études lors de sa conception avait conclu que la station atteindrait des potentiels négatifs proches de cette tension de bus, générant un risque important de décharges lié à l'accélération des ions par ce potentiel. L'ISS a donc été équipée de contacteurs plasmas permettant de limiter la charge de la structure, qui ont bien fonctionné. Cependant, lors d'une expérience, les contacteurs ont été désactivés, et la charge maximale mesurée n'a pas dépassé -20 V [5], montrant que le courant électronique collecté par les générateurs solaires avait été largement surestimé.

L'évaluation précise des courants collectés par les générateurs solaires est un enjeu important pour la conception des nouveaux satellites, en particulier pour celle des plateformes utilisant des tensions de bus importantes. Cette évaluation motive le développement de nouvelles méthodes numériques capables de simuler le phénomène de collection par les générateurs solaires avec précision.

1.2.3. Interconnecteurs de cellules solaires

Les cellules solaires à la surface des panneaux solaires ont donc un rôle important sur la charge électrostatique des satellites. En réalité, seule une petite partie de la cellule est cependant exposée au plasma. En effet, les cellules solaires sont en général recouvertes d'un diélectrique protecteur appelé *coverglass*. La figure 1.8 présente un interconnecteur reliant plusieurs cellules entre elles. Ces interconnecteurs sont présent en nombre importants à la surface des panneaux solaires, et sont souvent exposés au plasma.

Seuls les bords des cellules, ainsi que les interconnecteurs entre les cellules portent des potentiels importants exposés à l'environnement, comme présenté sur la figure 1.9. La géométrie locale autour des interconnecteurs de générateurs solaires est donc particulièrement complexe, avec des matériaux diélectriques (*coverglass*, substrat), et des conducteurs chargés à des potentiels qui peuvent être importants (interconnecteur, bords de cellules). L'interconnecteur lui-même a une longueur de l'ordre du millimètre, et une épaisseur de quelques centaines de microns. Sa forme en S est requise pour permettre la contraction et la dilatation du panneau solaire lors de cycles thermiques subis par le satellite.

Thiemann et Schunk [76, 77] ont proposé d'utiliser une méthode numérique particulière

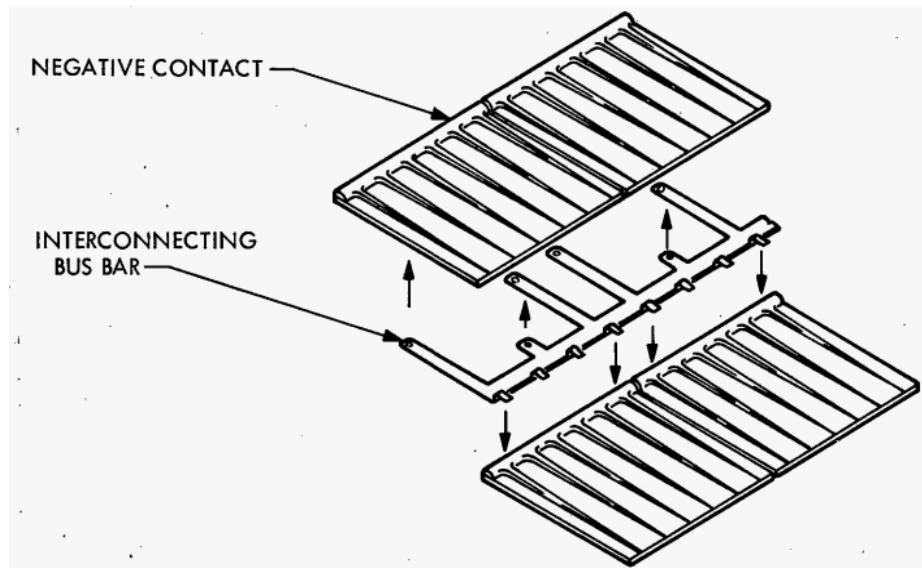


FIGURE 1.8 – Quatre cellules solaires et leur interconnecteur. L'épaisseur des contacts négatifs est exagérée. –Crédit:NASA

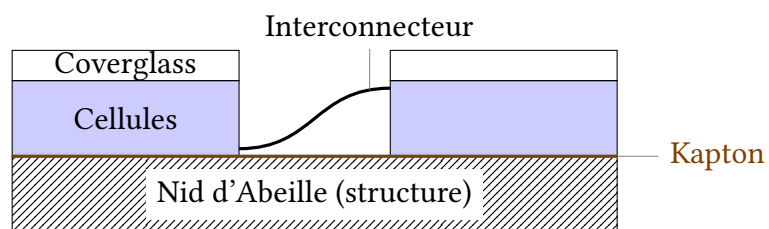


FIGURE 1.9 – Schéma en coupe d'un interconnecteur de générateur solaire

pour modéliser les effets locaux des interconnecteurs de générateur solaire sur le plasma spatial. Ils ont réalisé des simulations aux petites échelles d'un interconnecteur 2D idéalisé sur un panneau infini, en prenant en compte l'effet de l'émission secondaire électronique. Ils ont ainsi montré l'importance des propriétés des matériaux, en particulier des diélectriques, dans ces simulations. Ils ont également été capables de reproduire numériquement la collection de courants et la charge mesurée expérimentalement. Cependant, la géométrie utilisée dans leurs simulations était simplifiée, et négligeait totalement tout effet macroscopique à l'échelle du satellite. Des modèles plus détaillés, prenant en compte la géométrie locale de l'espace inter-cellulaire, ainsi que les gradients de densités de plasma vus par les panneaux solaires, sont nécessaires pour évaluer précisément l'interaction entre les satellites, en particulier les satellites à propulsion électrique, et leur environnement.

Nous décrivons dans les parties suivantes les différents phénomènes liés aux générateurs solaires et à leur couplage avec l'environnement.

1.2.4. Décharge électrostatique et arcs électriques

L'espace entre les cellules solaires est identifié comme un siège privilégié des décharges électrostatiques (ESD pour Electro-Static Discharges) [36]. Ces décharges répétées ont un impact sur les performances des cellules solaires, en particulier sur les technologies de cellule les plus récentes [45]. De plus, les arcs primaires de relativement faible puissance peuvent engendrer des arcs secondaires alimentés par le générateur lui-même, et pouvant causer des dommages permanents sur le substrat supportant les cellules, allant jusqu'au court-circuitage de strings de cellules, et la perte progressive de la puissance disponible à bord des satellites [37].

Le phénomène de décharge peut subvenir de différentes manières dans les satellites, lorsque la charge différentielle génère des champs électriques suffisamment importants [60]. On distingue deux mécanisme principaux, que sont les décharges en gradient normal et inverse.

Lors d'une décharge en gradient normal, ou décharge diélectrique, un matériau diélectrique est chargé par les électrons de l'environnement. L'accumulation de ces électrons à la surface du diélectrique engendre la formation d'un champ électrique important à l'intérieur du matériau. À partir d'une valeur de champ critique, on assiste au claquage du matériau,

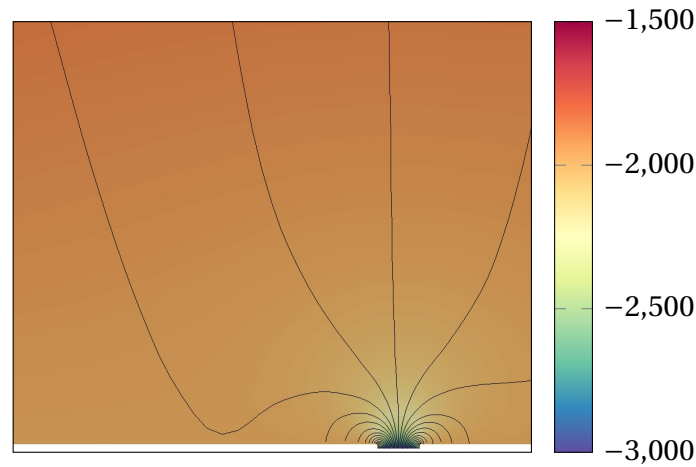


FIGURE 1.10 – Carte de potentiel (V) entre deux cellules en situation de gradient inverse, et lignes de champ électrique

délivrant une importante énergie capable de chauffer le matériau et générant localement un plasma conducteur. Ces conditions permettent la propagation de décharge en présence d'un champ électrique parallèle à la surface du matériau.

En présence de matériaux diélectriques, les métaux chargés négativement peuvent également se décharger. Ce phénomène s'appelle décharge métallique ou décharge en gradient inverse, et met en jeu les phénomènes physiques que sont l'effet de pointe et l'émission secondaire électronique. Ce type de décharge intervient en particulier au bord des cellules solaires.

Dans le cas d'un satellite chargé négativement, le courant de photo-électrons et d'électrons secondaires peut induire une charge positive au niveau des surfaces des coverglass, malgré un potentiel de surface négatif. Le potentiel local entre deux cellules, présenté en figure 1.10, permet à des électrons émis par une surface métallique largement négative d'impacter le coverglass. Par émission secondaire, la surface du coverglass est alors chargée encore plus positivement, ce qui intensifie le champ électrique et l'émission d'électrons par le métal. On a alors une avalanche électronique qui se produit.

1.2.5. Érosion des matériaux

Lorsque les ions présents dans l'environnement impactent les surfaces du satellite, il peut y avoir érosion des matériaux de surfaces. Ce phénomène est sensible à l'énergie d'incidence des ions, et donc au potentiel d'équilibre du satellite. La connaissance précise du flux d'ions permet le dimensionnement des couches protectrices en surface du satellite. D'autre part, les produits d'érosion peuvent venir contaminer les autres surfaces du satellite, réduisant en particulier les performances des surfaces d'antennes ou des optiques.

En ce qui concerne les interconnecteurs de générateur solaire, leur exposition directe aux ions les rend particulièrement sensibles au phénomène d'érosion, d'autant plus pour les plus chargés négativement. Ce phénomène dimensionne la durée de vie des interconnecteurs, et sa prise en compte est donc particulièrement importante lors de la conception des générateurs solaires.

1.2.6. Effet Snapover

L'effet Snapover décrit un phénomène de collection anormale de courant sur les interconnecteurs chargés positivement [78]. À partir de tensions d'interconnecteurs supérieures à 100 V, le courant d'électrons collecté par les interconnecteurs augmente de manière importante.

Encore une fois, cet effet résulte de l'émission secondaire d'électrons par le diélectrique. Les électrons de l'environnement, attirés par les interconnecteurs, viennent impacter les diélectriques autour de ceux-ci. Par émission secondaire, les diélectriques se chargent positivement, et deviennent attractifs pour les électrons. Il en résulte une augmentation importante de la surface collectrice. Les électrons secondaires, de faibles énergies, sont finalement collectés par l'interconnecteur.

Ce phénomène est particulièrement préjudiciable pour les performances des générateurs solaires possédant une tension de bus importante.

1.3. Modélisation du plasma spatial

Les plasmas sont des gaz de particules chargées et de neutres en interaction avec le champ électromagnétique. Cet état de la matière est très commun dans la nature, en particulier

dans l'environnement spatial.

Le domaine de la physique des plasmas a fait l'objet d'importants travaux depuis le développement au XIX^e siècle de la théorie cinétique des gaz et la découverte des équations de l'électromagnétisme. De nombreux cours sur la modélisation des plasmas existent dans la littérature [40, 10]. Dans cette section, nous décrivons rapidement les principales équations mises en jeu dans la modélisation des plasmas, ainsi que les notations utilisées dans cette thèse.

1.3.1. Fonction de distribution

En tant que gaz de particules chargées, dont nous noterons le nombre N , la description complète de l'état d'un plasma est constituée des $6N$ coordonnées des particules dans l'espace des phases. Le nombre N de particules est dans la plupart des cas d'intérêt trop grand pour que cette représentation soit raisonnablement utilisable en pratique.

En prenant l'exemple de la description de l'environnement spatial autour d'un satellite en orbite basse, on peut estimer que le nombre de particules, dans un domaine de quelques mètres cubes, est de l'ordre de 10^{12} . Dans ces conditions, la connaissance du vecteur d'état complet est irréaliste, et il convient de faire appel à une description statistique du système.

Notons respectivement \mathbf{x}_i et \mathbf{v}_i la position et la vitesse de la i^e particule, et $\chi = (\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_N)$ le vecteur d'état du plasma.

Soit Φ la densité de probabilité du système de N particules, tel que la probabilité à un temps t de trouver le système dans le voisinage $d\mathbf{x}_1 d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{x}_N d\mathbf{v}_N$ de l'état χ s'exprime :

$$\Phi(\chi, t) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{x}_N d\mathbf{v}_N \quad (1.1)$$

Cependant, cette densité de probabilité, qui décrit l'ensemble du système aux échelles microscopiques, est déjà trop précise pour la quasi totalité des problèmes physique. En intégrant cette densité, il est possible d'obtenir la probabilité réduite p_1 pour une seule particule :

$$p_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t) = \int \Phi(\chi, t) d\mathbf{x}_2 d\mathbf{v}_2 \dots d\mathbf{x}_N d\mathbf{v}_N \quad (1.2)$$

La probabilité $p_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{v}_1$ représente la probabilité que la particule 1 soit au voisinage $d\mathbf{x}_1 d\mathbf{v}_1$ de la position \mathbf{x}_1 et de la vitesse \mathbf{v}_1 . Pour une espèce α donnée, et comme il

est impossible de distinguer les particules entre elles, on définit la fonction de distribution de la population par :

$$f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = N p_{\alpha,1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (1.3)$$

Par définition, $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ est le nombre de particules de classe α au temps t dans le volume $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ centré en (\mathbf{x}, \mathbf{v}) . Cette fonction de distribution dans l'espace des phases, pour chaque population de particules, donne une description suffisamment détaillée du plasma. C'est en particulier cette fonction de distribution qui est mesurée par certains capteurs embarqués dans les missions spatiales scientifiques. Nous développeront dans les sections suivantes les équations physiques dont cette fonction est solution.

À partir de la fonction de distribution f , il est possible de définir par intégration ses différents moments :

$$n_\alpha = \int f_\alpha d\mathbf{v} \quad (1.4)$$

$$n_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \int \mathbf{v} f_\alpha d\mathbf{v} \quad (1.5)$$

$$\Pi_\alpha = m_\alpha \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha) f_\alpha d\mathbf{v} \quad (1.6)$$

où n_α est la densité particulaire, \mathbf{u}_α est la vitesse moyenne locale des particules, et Π_α est le tenseur de pression.

1.3.2. Équations du champ électrique

Les particules présentes dans un plasma sont des particules électriquement chargées (électrons et ions). Ces particules interagissent avec le champ électromagnétique qui les

entoure. Ces interactions sont, dans le cas général, régies par les équations de Maxwell :

$$\text{div}(\mathbf{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.7)$$

$$\text{rot}(\mathbf{E}) = -\partial_t \mathbf{B} \quad (1.8)$$

$$\text{div}(\mathbf{B}) = 0 \quad (1.9)$$

$$\text{rot}(\mathbf{B}) = \mu_0(\mathbf{j} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) \quad (1.10)$$

où \mathbf{E} et \mathbf{B} représentent les champs électriques et magnétiques, $\rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}$ représente la densité de charge électrique, ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide, μ_0 la perméabilité magnétique du vide, et \mathbf{j} la densité de courant.

On s'intéresse ici au cas quasi-électrostatique. On négligera donc les dérivées temporelles dans les équations de Maxwell, ainsi que le champ magnétique \mathbf{B} . Dans ce cas, on montre que le champ électrique \mathbf{E} dérive d'un potentiel électrique ϕ :

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (1.11)$$

En injectant cette définition dans l'équation 1.7, on obtient l'équation de Poisson :

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.12)$$

Dans un tel champ, une particule de charge q subie la force de Lorentz électrostatique :

$$\mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = q\mathbf{E} = -q\nabla \phi \quad (1.13)$$

On peut noter que le potentiel électrique applique sur les particules chargées une force conservative, qui induit l'existence d'une énergie potentielle électrique $q\phi$.

La simulation des plasmas électrostatiques nécessite donc d'une part la résolution de l'équation de Poisson, permettant la détermination du potentiel électrostatique, et d'autre part la résolution de la dynamique des populations de charges électriques. On note le couplage qui existe entre les densités de charges et le champ électrique.

Dans les prochaines sections, nous allons présenter les différents modèles classiquement utilisés pour décrire la dynamique des populations de charges.

1.3.3. Description cinétique

Nous cherchons à décrire la dynamique de la distribution $\Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_N, t)$ pour une population de charges dans un plasma non collisionnel. D'après le théorème de Liouville [48], le volume dans l'espace des phases est constant le long des trajectoires du système. On en déduit que la distribution complète Φ est constante le long des trajectoires des particules, et cette distribution est donc solution de l'équation de Liouville :

$$\partial_t \Phi + \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \nabla_{\mathbf{x}_i} \Phi + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_i} \Phi = 0 \quad (1.14)$$

où \mathbf{F}_i est la force appliquée à la particule i . En supposant qu'il n'y a pas de collisions entre les particules, on peut intégrer l'équation de Liouville pour obtenir l'équation de Vlasov [81] sur la distribution mono-particulaire :

$$\partial_t f_\alpha + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_\alpha + \frac{q_\alpha \mathbf{E}}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0 \quad (1.15)$$

La résolution de l'équation de Vlasov 1.15 pour chaque espèce du plasma, couplée à l'équation de Poisson 1.12, permet ainsi de calculer la dynamique d'un plasma non-collisionnel électrostatique.

1.3.4. Description fluide

La description cinétique, représentative du comportement microscopique du plasma, est cependant parfois trop précise pour être utilisable en pratique. Il est possible d'obtenir, par intégration de l'équation de Vlasov, un ensemble d'équations de conservation portant sur les moments macroscopiques de la distribution :

$$\partial_t n + \text{div}(n\mathbf{u}) = 0 \quad (1.16)$$

$$\partial_t(n\mathbf{u}) + \text{div}(n\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \frac{1}{m}\Pi) = n \frac{q}{m} \mathbf{E} \quad (1.17)$$

L'équation 1.16, appelée équation de continuité, décrit la variation de densité de particules dans le temps. L'équation de quantité de mouvement 1.17 relie la quantité de mouvement au tenseur de pression Π et au champ électrique.

Il est à noter que la résolution de ces équations nécessite l'ajout d'une relation de fermeture, et ce même si l'on choisit d'inclure les équations pour les moments d'ordre supérieurs [49]. En s'arrêtant à l'équation de quantité de mouvement 1.17, on remarque que l'évolution du tenseur de pression n'est pas décrite par le système d'équations.

1.3.5. Équilibre thermodynamique

Une solution stationnaire particulière de l'équation 1.15 est la distribution de Maxwell-Boltzmann. Cette distribution caractérise l'équilibre thermodynamique du plasma. Si l'on suppose qu'une population de charge a atteint son équilibre thermodynamique, alors son état est entièrement défini par sa densité n_α et sa température T_α , et sa distribution s'exprime :

$$f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = n_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{-\frac{1}{2}m_\alpha v^2 - q_\alpha \phi}{kT_\alpha} \right) \quad (1.18)$$

Notons qu'il est possible de décomposer cette distribution comme le produit d'une fonction de l'espace et d'une fonction des vitesses. La distribution en vitesse est une Maxwellienne de température T_α :

$$\mathcal{M}_{T_\alpha}(\mathbf{v}) = \left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_\alpha v^2}{2kT_\alpha} \right) \quad (1.19)$$

Cette définition de \mathcal{M}_{T_α} est normalisée, de sorte que l'intégration de la distribution de Maxwell-Boltzmann sur l'espace des vitesses permette d'obtenir la densité de charge suivante :

$$\rho_\alpha = q_\alpha \int f_\alpha d\mathbf{v} = q_\alpha n_\alpha \exp \left(\frac{-q_\alpha \phi}{kT_\alpha} \right) \quad (1.20)$$

Il est à noter que l'expression de la densité de charge fait donc intervenir le potentiel électrostatique selon une loi exponentielle. En injectant cette expression dans l'équation de Poisson, nous obtenons une équation non-linéaire que nous appellerons équation de Poisson-Boltzmann :

$$-\Delta\phi - \frac{q_\alpha n_\alpha}{\epsilon_0} \exp \left(\frac{-q_\alpha \phi}{kT_\alpha} \right) = \frac{\rho_{\text{reste}}}{\epsilon_0} \quad (1.21)$$

où ρ_{reste} représente la densité de charge liées aux populations non Maxwelliennes.

La distribution de Maxwell-Boltzmann est souvent justifiée en mécanique statistique par les collisions entre les particules, qui ont tendance à ramener le système vers l'équilibre

thermodynamique. Dans le cas des plasmas non-collisionnels tels que ceux présents autour des satellites, ce modèle ne se justifie donc que sous des hypothèses plus strictes. D'une part, il est nécessaire de supposer que l'environnement non perturbé par le satellite est lui-même Maxwellien. D'autre part, l'effet du satellite ne doit pas faire sortir le plasma de l'équilibre thermodynamique. Ces hypothèses et leurs limites seront discutées plus en détail dans le chapitre 4.

Notons également qu'il est possible de supposer que le plasma contient plusieurs populations de particules, chacune étant Maxwellienne, avec des densités et des températures différentes. Le modèle d'environnement bi-Maxwellien pire cas est par exemple classiquement utilisé pour la simulation de la charge des satellites GEO[75]. Il suppose la présence de deux populations d'électrons et deux populations d'ions de hautes et basses énergies.

1.3.6. Grandeurs caractéristiques du plasma

Considérons un plasma froid 1D à l'équilibre, de densité n_0 et évaluons l'effet d'une petite perturbation $d\mathbf{E}$ sur le champ électrique. On s'intéresse ici à la dynamique des électrons, et nous supposons donc que les ions restent statiques. Au premier ordre, en considérant la linéarisation des équations 1.12, 1.16 et 1.17, nous obtenons l'équation suivante sur la variation dn_e de densité d'électrons :

$$\partial_t^2 dn_e = -\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} dn_e \quad (1.22)$$

Dont la solution générale est une fluctuation non propagative faisant apparaître la pulsation plasma électronique ω_{pe} :

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} \quad (1.23)$$

On considère désormais un plasma à l'équilibre Maxwellien, défini par l'équation 1.21 pour les électrons. On supposera pour simplifier que la densité d'ions est homogène et vaut n_0 . On a donc l'équation de Poisson-Boltzmann simplifiée suivante :

$$-\Delta_x \phi + \frac{en_0}{\epsilon_0} \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) = \frac{en_0}{\epsilon_0} \quad (1.24)$$

Potentiel	$\hat{\phi} = \frac{e\phi}{kT_e}$
Longueurs	$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\lambda_D}$
Temps	$\hat{t} = \omega_{pe} t$
Vitesses	$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v_{th,e}}$

TABLE 1.1. – Définitions des grandeurs adimensionnées

Nous introduisons le potentiel adimensionné $\hat{\phi} = \frac{e\phi}{kT_e}$, qui vérifie l'équation suivante :

$$-\lambda_D^2 \Delta_x \hat{\phi} + [\exp(\hat{\phi}) - 1] = 0 \quad (1.25)$$

où λ_D est la longueur caractéristique du plasma, appelée longueur de Debye, et définie par :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT_e}{n_0 e^2}} \quad (1.26)$$

On note que cette longueur est reliée à la vitesse moyenne quadratique de la distribution Maxwellienne dans chaque direction, appelée vitesse thermique $v_{th,e}$ et définie par :

$$v_{th,e} = \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}} = \lambda_D \omega_{pe} \quad (1.27)$$

Cette vitesse thermique électronique représente la vitesse typique des électrons. Il est de même possible de définir une vitesse thermique pour les ions.

Toutes ces grandeurs caractéristiques permettent d'introduire des paramètres sans dimensions. Le tableau 1.1 présente les notations utilisées dans ce manuscrit.

1.3.7. Lois de collections

Une sonde de Langmuir, ou sonde électrostatique, est un conducteur plongé dans un plasma et dont on fait lentement varier le potentiel électrostatique. Le courant collecté par la sonde de Langmuir est mesuré en fonction du potentiel de la sonde, produisant la caractéristique courant-tension de la sonde. La forme de cette courbe permet de déduire

des informations sur l'état et la composition du plasma.

Cet outil est couramment utilisé dans les laboratoires pour l'étude des plasmas, et la modélisation de son fonctionnement a fait l'objet d'importants travaux de modélisation [57, 41]. De nombreuses lois analytiques ont été développées pour modéliser la collection des courants d'ions et d'électrons par une sonde de Langmuir, selon les différents types de plasmas et pour différentes géométries de sondes.

L'effet d'un satellite entier sur son environnement peut souvent être analysé à l'aide de ces modèles, bien que dans ce cas le potentiel du satellite soit souvent flottant par rapport à l'environnement.

Nous présentons ici les résultats classiques de la théorie des sondes de Langmuir pour une population Maxwellienne de particules de charge q , de densité n et de température T .

Collection par une sonde cylindrique

Supposons que la sonde est un cylindre infiniment long et de rayon r , et placé au potentiel normalisé $\hat{\phi}$. Si ce potentiel est positif, alors la sonde est attractive pour les particules, et dans le cas contraire la sonde est répulsive.

La théorie des sondes de Langmuir prévoit alors que le courant collecté par unité de longueur ait alors pour expression [57] :

$$i = \begin{cases} 2\pi r I_{\text{th}} \left(\frac{a}{r} (1 - \text{erfc} \sqrt{\frac{r^2 \hat{\phi}}{a^2 - r^2}}) + \exp(\hat{\phi}) \text{erfc} \sqrt{\frac{a^2 \hat{\phi}}{a^2 - r^2}} \right), & \text{pour } \hat{\phi} > 0 \\ 2\pi r I_{\text{th}} \exp(\hat{\phi}), & \text{pour } \hat{\phi} < 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

où $I_{\text{th}} = n_0 q \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$ est le courant surfacique au potentiel nul, et a le rayon de la gaine plasma. Pour des rayons de sondes r très petits par rapport à la longueur de Debye du plasma, et pour des potentiels suffisamment élevés ($\hat{\phi} > 2$), le courant collecté par unité de longueur est bien approché par la formule suivante :

$$i \approx 4\sqrt{\pi} r I \sqrt{1 + \hat{\phi}} \quad (1.29)$$

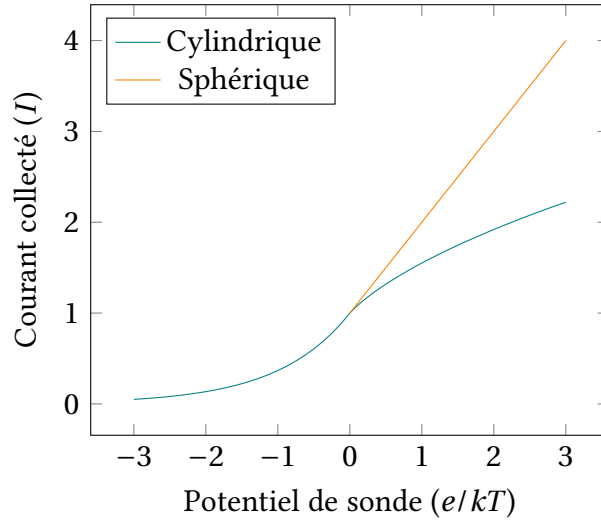


FIGURE 1.11 – Caractéristique I-V d'une sonde de Langmuir

Collection par une sonde sphérique

De même, dans le cas du collecteur sphérique plongé dans un plasma Maxwellien, il est possible d'obtenir l'expression analytique du courant collecté :

$$i = \begin{cases} 4\pi a^2 I \left(1 - \frac{a^2 - r^2}{a^2} \exp\left(-\frac{r^2 \hat{\phi}}{a^2 - r^2}\right) \right), & \text{pour } \hat{\phi} > 0 \\ 4\pi r^2 I \exp(\hat{\phi}), & \text{pour } \hat{\phi} < 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

Comme pour le collecteur cylindrique, le courant collecté par une sonde répulsive est une fonction exponentielle du potentiel de la sonde, et est indépendant de la taille de la gaine. Pour des sondes dont la taille est petite par rapport à la taille de la gaine, nous obtenons par contre une relation linéaire dans le cas attractif :

$$i \approx 4\pi r^2 I (1 + \hat{\phi}) \quad (1.31)$$

La figure 1.11 présente la collection de courant normalisée pour une sonde cylindrique et une sonde sphérique.

1.4. Panorama des méthodes numériques pour la simulation des plasmas

La simulation numérique des plasmas est un domaine actif dans les communautés scientifiques et industrielles, et trouve des applications dans l'étude de l'environnement spatial et son couplage avec les satellites et les planètes mais aussi dans de nombreux domaines de l'industrie (traitements des matériaux, conception de réacteurs à fusion nucléaire, dépollution de gaz ou de l'eau, etc.). Dans ces différentes applications, on trouve des plasmas dans des régimes variés, en terme de densité et de température, et qui ont un impact sur les méthodes numériques mises en place pour leur simulation.

Nous décrivons ici les principales méthodes numériques utilisées pour la simulation des plasmas, et en particulier des plasmas spatiaux non-collisionnels.

1.4.1. Discrétisation de l'équation de Vlasov

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, ces plasmas sont régis par le système d'équation de Vlasov-Poisson décrit par les équations 1.12 et 1.15. Dans le cas non-électrostatique, l'équation de Poisson est remplacée par l'ensemble des équations de Maxwell. Dans le cas collisionnel, ou en présence d'un gaz, l'équation de Vlasov est remplacée par d'autres équations comme l'équation de Fokker-Planck ou l'équation de Boltzmann. Cependant, on remarque dans tous les cas qu'il est nécessaire de résoudre d'une part le champ électromagnétique présent dans le domaine, et d'autre part calculer les densités de particules créant la charge d'espace.

L'équation de Vlasov (1.15) est une équation différentielle en sept dimensions (3 dimensions d'espace, 3 de vitesse et le temps). La discrétisation directe dans l'espace des phases de cette équation nécessite donc des maillages de tailles très importantes. Les codes utilisant cette méthodes, appelés codes à maillages Eulériens (Eulerian grid-based codes, [63]), ont été développés, en particulier sur des problèmes de dimensions réduites [85, 6, 4]. On peut citer en particulier la classe des méthodes semi-lagrangiennes [72, 6], qui consiste à calculer la densité en un point du maillage en remontant les caractéristiques du système et en interpolant les valeurs au pas de temps précédent, comme présenté sur la figure 1.12.

D'autre part, des méthodes spectrales ont été développées pour résoudre ce même

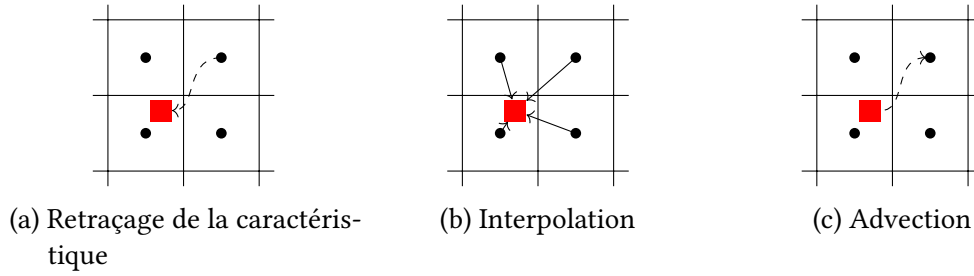


FIGURE 1.12 – Illustration de la méthode semi-lagrangienne

système [39, 19]. Ces méthodes sont basées sur la décomposition de l'espace des vitesses en une base orthogonale. En particulier, l'utilisation d'une base de polynômes d'Hermite est singulièrement adaptée [11]. D'une part, cette base contient la distribution Maxwellienne, et la représentation de l'équilibre thermodynamique y est donc particulièrement simple. D'autre part, la projection dans cette base fait intervenir les moments successifs de la distribution [26]. Ainsi, ces méthodes forment un intermédiaire entre les modèles fluides et les modèles cinétiques selon le choix de la taille de la base conservée.

Ces méthodes ont démontré leur capacité à modéliser jusqu'aux plus petites échelles du plasma. Elles sont cependant limitées, principalement pour des contraintes de coûts en mémoire, aux cas de faibles dimensions. Pour permettre la simulation du cas 3D réel, d'autres méthodes ont été développées.

1.4.2. La méthode Particle-in-Cell

Les méthodes Particle-in-Cell (PIC) forment une famille de schémas numériques largement utilisés pour la simulation des plasmas non-collisionnels [43, 7, 53]. Ces méthodes sont robustes et simple d'implémentation, en particulier dans le cas non-collisionnel. Elles consistent à décomposer les fonctions de distributions comme une somme de macro-particules dont on peut calculer les trajectoires, et dont les densités sont intégrées sur un maillage permettant le calcul du champ électrique.

Discrétisation des fonctions de distribution

Pour une population donnée, de distribution f , nous décomposons cette distribution comme la somme d'un ensemble d'éléments mobiles appelés macro-particules :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_p f_p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (1.32)$$

D'un point de vue physique, chaque élément représente un ensemble important de particules ayant des trajectoires semblables dans l'espace des phases, ce qui nous impose de choisir des distributions élémentaires f_p à support compact dans cet espace. Un choix classique de ces éléments est d'utiliser une fonction paramétrique de la position et de la vitesse de la macro-particule :

$$f_p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = k_p S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t)) S_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p(t)) \quad (1.33)$$

où k_p est appelé poids statistique de la macro-particule p et correspond au nombre de particules qu'elle représente, les distributions $S_{\mathbf{x}}$ et $S_{\mathbf{v}}$ sont les supports respectifs de la particule dans l'espace et en vitesse, et \mathbf{x}_p et \mathbf{v}_p sont les coordonnées de la macro-particule dans l'espace des phases.

Un choix classique pour les supports $S_{\mathbf{x}}$ et $S_{\mathbf{v}}$ est d'utiliser la distribution de Dirac :

$$S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (1.34)$$

$$S_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p) = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p) \quad (1.35)$$

Dans ce cas, il est facile de calculer les équations sur les coordonnées \mathbf{x}_p et \mathbf{v}_p des macro-particules, par intégration de l'équation de Vlasov. On obtient alors :

$$\partial_t k_p = 0 \quad (1.36)$$

$$\partial_t \mathbf{x}_p = \mathbf{v}_p \quad (1.37)$$

$$\partial_t \mathbf{v}_p = -\frac{q}{m} \nabla \phi(\mathbf{x}_p) \quad (1.38)$$

On remarque que la dynamique d'une macro-particule suit exactement celle des particules qui la compose : la charge de la macro-particule est constante, et ses coordonnées suivent les

lois de Newton. On obtient un résultat similaire dans le cas d'une distribution $S_{\mathbf{x}}$ différente, à condition qu'elle soit symétrique. Dans ce cas les équations sont inchangées sauf que le champ électrique qui accélère la macro-particule est le champ moyen donné par [43] :

$$\mathbf{E}_p = \int S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \mathbf{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.39)$$

Calcul du champ électrique

La méthode PIC consiste à utiliser les densités de charges représentées par les macro-particules pour calculer le champ électrique sur les nœuds d'un maillage du domaine. Par interpolation, ce champ électrique permettra alors de faire avancer les macro-particules sur le maillage en intégrant les équations précédentes.

De nombreuses méthodes existent pour la résolution de l'équation de Poisson, comme la méthode des différences finies ou celle des volumes finis. Nous présentons ici l'utilisation de la méthode des éléments finis comme implémentée dans le code de simulation SPIS développé par l'ONERA.

En supposant un ensemble de macro-particules indicées par p , de charge q_p et distribution f_p , l'équation de Poisson s'écrit :

$$\Delta\phi = \sum_p -\frac{q_p k_p}{\epsilon_0} \int f_p d\mathbf{v} \quad (1.40)$$

Supposons que la distribution élémentaire $S_{\mathbf{x}}$ des macro-particules soit la distribution de Dirac. Par multiplication de cette équation par une fonction test φ et en intégrant sur une cellule K , on obtient la formulation faible suivante :

$$\int_K \nabla\phi \cdot \nabla\varphi d\mathbf{x} = \sum_p -\frac{q_p k_p}{\epsilon_0} \varphi(\mathbf{x}_p) \quad (1.41)$$

Ainsi, la construction du terme source dans la méthode élément fini, qui correspond au terme de droite de cette équation, est particulièrement simple, car elle revient à évaluer la fonction test pour chaque particule sur son support, et à sommer les valeurs obtenues, multipliées par la charge totale de chaque macro-particule. Dans la pratique, pour des

fonctions test linéaires, cela revient à calculer les coordonnées barycentriques des macro-particules dans chaque cellule.

Schéma temporel

De nombreux schémas existent pour la discrétisation temporelle des équations présentées précédemment. Le schéma le plus couramment utilisé est appelé *schéma saute-mouton* (Leapfrog scheme). Il consiste à calculer de manière explicite les positions et le champ électrique sur des temps t_n ($n \in \mathbb{N}$), et à calculer les vitesses aux temps intermédiaires $t_{n+1/2}$. Ce schéma s'écrit donc :

$$\mathbf{x}_p^{n+1} = \mathbf{x}_p^n + \Delta t \mathbf{v}_p^{n+1/2} \quad (1.42)$$

$$\mathbf{v}_p^{n+3/2} = \mathbf{v}_p^{n+1/2} + \Delta t \frac{q}{m} \mathbf{E}^{n+1}(\mathbf{x}_p^{n+1}) \quad (1.43)$$

où \mathbf{E}^n est la solution de l'équation de Poisson discrète au temps t_n .

Cette discrétisation simple présente l'avantage d'être un schéma d'ordre 2, par rapport au schéma d'Euler qui est aussi coûteux en termes de calculs mais n'est que d'ordre 1 [7].

Dans le cas particulier d'un champ électrique constant par cellule du maillage, qui correspond à un potentiel électrostatique linéaire, il est également possible de calculer de manière exacte la trajectoire des particules dans chaque cellule. Dans ce cas, plusieurs discrétisations temporelles sont possibles pour le couplage entre l'évolution des densités de particules et le calcul du champ électrique. L'utilisation du splitting de Lie est classique et consiste à pousser toutes les particules, puis à résoudre le champ électrique à partir des positions des particules à la fin du pas de temps. Un autre schéma consiste à intégrer les densités de charge sur les nœuds du maillage le long des trajectoires des particules, permettant de limiter le bruit numérique sur les densités de charges et sur le champ électrique.

Stabilité du schéma et bruit numérique

La taille des mailles utilisées dans le maillage, le nombre de particules dans le domaine de simulation, ainsi que les pas de temps utilisés pour la discrétisation temporelle, ont un impact important sur la précision et la stabilité du code.

Des critères de stabilité analytiques existent pour le schéma classique utilisant une intégration temporelle de type saute-mouton et un maillage homogène [7]. Ils fixent une borne supérieure sur le pas d'espace Δx et pour le pas de temps Δt utilisés, par rapport aux grandeurs caractéristiques du plasma :

$$\Delta x < 3.4\lambda_D \quad (1.44)$$

$$\Delta t \leq 2\omega_{pe}^{-1} \quad (1.45)$$

De plus, des études analytiques [32] et expérimentales [80] ont observé une augmentation anormale de l'énergie cinétique dans les simulations PIC. Elles ont montré que ce *chauffage numérique* était principalement influencé par le nombre de particules par maille, et par la taille des mailles par rapport à la longueur de Debye, avec une relation de la forme suivante :

$$r \propto N_c^{-1} \left(\frac{\lambda_D}{\Delta x} \right)^{-3} \quad (1.46)$$

où r est le taux de chauffage numérique et N_c le nombre de particule par cellule.

Il en résulte que la méthode PIC est fortement contrainte par la longueur de Debye du plasma et sa pulsation plasma électronique, rendant la méthode particulièrement coûteuse dans le cas de plasmas de forte densité ou de faible température. De plus, la représentation particulière introduit du bruit numérique sur les densités et les courants représentés dans la simulation. L'amplitude du bruit numérique avec les méthodes PIC est proportionnel à $N_c^{-1/2}$ [7], et impose l'utilisation d'un nombre important de particules, ou de méthodes de filtrages, pour assurer une précision suffisante aux résultats de simulation.

1.4.3. Les codes hybrides et le logiciel SPIS

Lorsque le modèle de Maxwell-Boltzmann d'équilibre thermodynamique est valide, il est possible de résoudre directement l'équation non linéaire de Poisson-Boltzmann, évitant ainsi le calcul complet de la dynamique de la population. Cette résolution peut de plus être couplée à d'autres modèles pour le calcul de la dynamique des autres populations, dans des codes de simulations hybrides.

C'est le cas des codes SPIS[66] et Nascap-2k [17] couramment utilisés dans le domaine de la simulation de l'interaction plasma/satellite. Nous présentons ici le fonctionnement

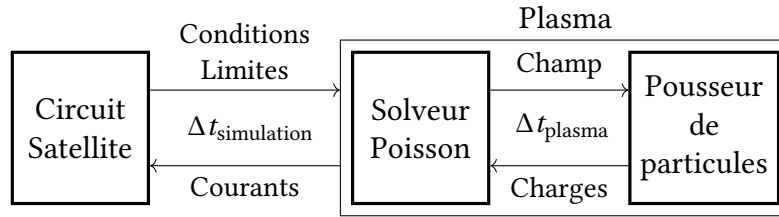


FIGURE 1.13 – Fonctionnement du cœur numérique de SPIS

détaillé du code SPIS, car c'est sur ce code qu'ont été implantés les travaux présentés dans cette thèse.

SPIS (pour Spacecraft Plasma Interaction System) est un code open-source développé par l'ONERA et la société Artenum, avec le soutien des agences spatiales française (CNES) et européenne (ESA). C'est un code Particle-in-Cell 3D utilisant des maillages éléments finis non structurés. Il intègre des modèles de photo-émission et d'émission secondaire pour différents matériaux utilisés sur les surfaces satellites, et simule également le comportement électrique interne du satellite par le biais d'un circuit équivalent.

La figure 1.13 présente le fonctionnement du cœur numérique de SPIS. Il est constitué de trois modules principaux, que sont le poussoir de particules, le solveur de champ électrique et le simulateur du circuit satellite. Le solveur Poisson et le poussoir de particules représentent le code plasma à proprement parler. Ils permettent le calcul des courants collectés par les différentes surfaces du satellite. Le simulateur du circuit satellite intègre ces courants pour calculer la charge du satellite, permettant de fournir les potentiels des différentes surfaces au code plasma.

Comme présenté sur la figure 1.13, différents pas de temps interviennent lors d'une simulation. La dynamique de charge du satellite est souvent bien plus lente que la dynamique du plasma. Le circuit électrique du satellite n'est donc mis à jour qu'à une période $\Delta t_{\text{simulation}}$ caractéristique du temps de charge. Le code plasma est exécuté sur un pas de temps plus faible Δt_{plasma} .

De plus, en présence de dynamiques ayant des temps caractéristiques différents, certaines composantes du système atteignent rapidement leur état stationnaire par rapport aux autres. SPIS est capable d'optimiser les calculs réalisés dans les cas suivants :

- ✦ Au niveau des populations de particules, les populations les plus rapides, typiquement les électrons, atteignent plus vite l'état stationnaire. Il n'est donc pas nécessaire de

pousser les particules de ces populations sur un pas de temps complet.

- ✦ Au niveau de la charge du satellite, le plasma n'est simulé que sur une partie du pas de temps suffisante pour atteindre un état stationnaire en considérant les potentiels sur les surfaces du satellite constants. Une fois l'état stationnaire atteint, les courants collectés par les surfaces sont considérés constants et intégrés sur le pas de temps complet.

Solveur de champ électrique

Le solveur Poisson intégré dans SPIS implémente une méthode éléments finis sur un maillage du domaine volumique. Il accepte en entrée les charges déposées sur les nœuds du maillage, ainsi que des conditions aux limites de types Dirichlet, Neumann ou Robin.

Les maillages utilisés sont générés à l'aide du mailleur Gmsh [23]. Les nœuds sont renumérotés par SPIS en utilisant l'algorithme de Cuthill-McKee [15], permettant de limiter la largeur de bande de la matrice de rigidité. Celle-ci est assemblée élément par élément, et stockée sous forme *Compressed sparse row* (CSR, [62]).

La résolution du système linéaire se fait à l'aide de l'algorithme du Gradient Conjugué Préconditionné (PCG, [54]). La matrice de préconditionnement est obtenue par factorisation LU des premières diagonales de la matrice de rigidité.

Le solveur Poisson intégré dans SPIS est également capable de résoudre de manière implicite le problème non linéaire de Poisson-Boltzmann pour la prise en compte des populations Maxwelliennes. La méthode de Newton [86] est utilisée pour résoudre la non linéarité.

Ce solveur permet donc le calcul du champ électrique dans le domaine, nécessaire pour l'intégration des trajectoires des macro-particules.

Code particulaire

Le *pousseur de particules* de SPIS est le module qui calcule la trajectoire des macro-particules plongées dans le champ électrique. Chaque population est représentée par une liste de particules. Pour chaque particule, sont stockés en mémoire son poids statistique, ses coordonnées dans l'espace des phases, ainsi que l'indice de l'élément du maillage contenant la particule.

Pour faire avancer une particule d'un pas de temps Δt , on se place en coordonnées barycentriques dans l'élément du maillage contenant la particule. En notant \mathbf{S}_i les coordonnées du i ème sommet de l'élément, et $\hat{\mathbf{S}}_i = \mathbf{S}_i - \mathbf{S}_0$, on résout le système linéaire suivant :

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \hat{\mathbf{S}}_1 & \hat{\mathbf{S}}_2 & \hat{\mathbf{S}}_3 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \\ \tilde{\mathbf{x}}_3 \end{array} \right] = \mathbf{x} - \mathbf{S}_0 \quad (1.47)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = 1 - \sum_{i=1}^3 \tilde{\mathbf{x}}_i \quad (1.48)$$

définissant les coordonnées barycentriques $\tilde{\mathbf{x}}$ du point \mathbf{x} dans l'élément, vérifiant les deux relations suivantes :

$$\sum_i \tilde{\mathbf{x}}_i = 1 \quad (1.49)$$

$$\sum_i \tilde{\mathbf{x}}_i \mathbf{S}_i = \mathbf{x} \quad (1.50)$$

Ces coordonnées permettent de déterminer quand une particule intersecte la frontière de l'élément de manière particulièrement simple. En effet, la particule est strictement dans le volume si chacune de ses coordonnées barycentriques sont positives. De plus, si la i ème coordonnée barycentrique s'annule, cela signifie que la particule est située sur la face opposée au sommet \mathbf{S}_i .

De même, on peut exprimer la vitesse de la particule \mathbf{v} et le champ électrique \mathbf{E} dans l'élément en coordonnées barycentriques en résolvant les systèmes suivantes :

$$\sum_i \tilde{\mathbf{v}}_i = 0 \quad (1.51)$$

$$\sum_i \tilde{\mathbf{v}}_i \mathbf{S}_i = \mathbf{v} \quad (1.52)$$

$$\sum_i \tilde{\mathbf{E}}_i = 0 \quad (1.53)$$

$$\sum_i \tilde{\mathbf{E}}_i \mathbf{S}_i = \mathbf{E} \quad (1.54)$$

Avec ces notations, il est simple de dériver l'équation différentielle vérifiée par le vecteur

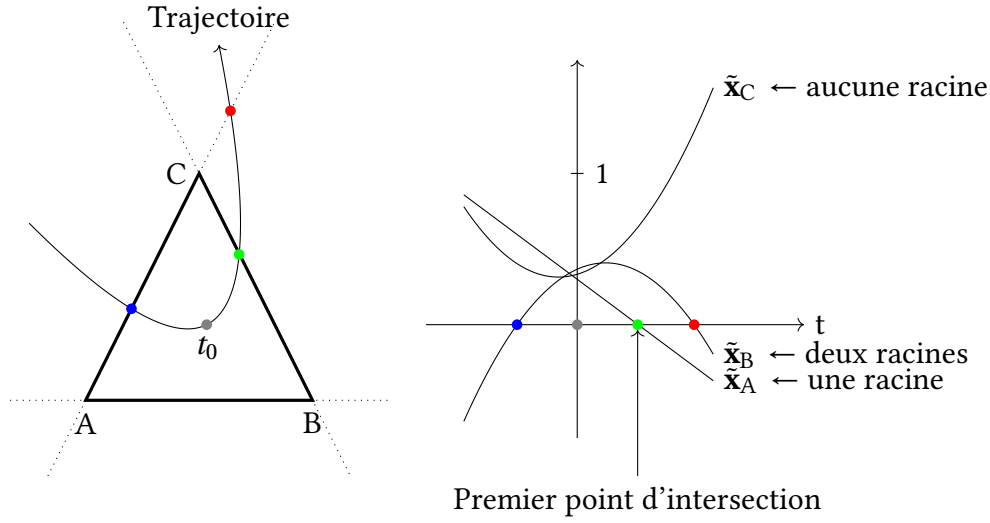


FIGURE 1.14 – Calcul de la trajectoire d'une particule

des coordonnées barycentriques d'une particule dans un champ électrique constant :

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(0) + \tilde{\mathbf{v}}(0) \cdot t + \frac{q}{2m} \tilde{\mathbf{E}} \cdot t^2 \quad (1.55)$$

Pour déterminer la trajectoire de la particule durant un pas de temps Δt et dans un élément donné, il suffit de calculer l'intersection de cette trajectoire avec chacune des faces (qui correspondent à l'annulation des coordonnées barycentriques), et de comparer l'instant de la première de ces intersections avec le pas de temps Δt . Il est donc nécessaire de résoudre une équation polynomiale de degré 2 ($\tilde{\mathbf{x}}_i(t) = 0$) pour chacune des quatre coordonnées barycentriques, pour calculer les instants d'intersection avec chaque faces. Pour chaque coordonnée, nous obtenons entre zéro et deux solutions selon le nombre d'intersections entre la trajectoire et la face correspondante. On ne conserve alors que les instants positifs et l'on compare le plus petit d'entre eux au pas de temps Δt .

Si la première intersection arrive après la fin du pas de temps, on calcule la position finale de la particule dans la cellule. Sinon, la première intersection arrive avant la fin du pas de temps, et la particule franchit la face correspondante. Si cette face est dans le domaine, la particule est transmise à l'élément voisin et l'algorithme recommence pour le reste du pas de temps. Si la face est une surface externe, la particule est supprimée et le courant associé est comptabilisé sur la surface correspondante.

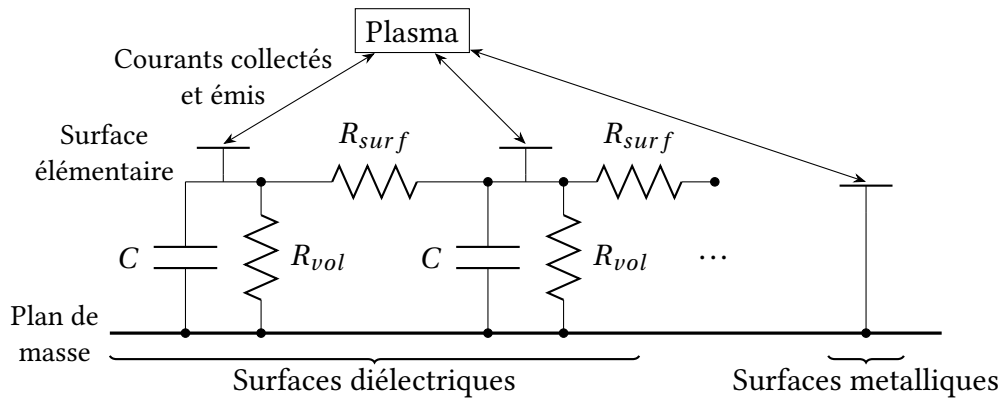


FIGURE 1.15 – Modèle électrique pour un nœud

Le pousseeur de particules de SPIS est parallélisé et est capable de traiter plusieurs particules en même temps.

Circuit satellite

Les courants collectés par les différentes surfaces du satellite sont comptabilisés pour simuler leur charge, et permettant de déterminer leur potentiel dans le solveur de champ électrique. Le simulateur du circuit satellite permet la prise en compte des différents matériaux de surface (diélectriques, métaux), ainsi que des composants électriques au sein du satellite (générateurs de tension, résistances). Dans la modélisation du circuit, la surface du satellite est décomposée en nœuds électriques discrets. Chaque élément de surface est rattaché à un de ces nœuds.

La figure 1.15 présente le modèle électrique utilisé pour chaque nœud. Pour chaque triangle élémentaire du maillage de la surface, les courants émis et collectés sont comptabilisés. Si le matériau de surface est métallique, ce courant est directement ajouté au niveau du nœud électrique. Pour les surfaces diélectriques, un circuit parallèle RC entre le point d'injection des courants et le nœud électrique permet de modéliser le matériau. Une résistance de surface est utilisée entre les surfaces élémentaires voisines.

Les nœuds eux-mêmes sont reliés entre eux par un circuit configurable, permettant de modéliser entre deux nœuds une source de tension, une résistance, un condensateur, ou une inductance. De plus, chaque nœud est relié au potentiel nul, qui est le potentiel du plasma à l'infini, par une capacité équivalente proportionnelle à la surface des éléments qui

le composent. Ceci permet de modéliser le couplage capacitif entre le satellite et le plasma.

Ce circuit est résolu à l'aide d'une méthode de Newton implicite par des estimateurs linéaires utilisant différentes lois de collection pour estimer l'effet du potentiel sur les courants. Après résolution, nous obtenons le potentiel sur chaque surface élémentaire, qui est injecté dans le solveur Poisson sous la forme de conditions de Dirichlet.

1.4.4. Modèles perturbatifs

Pour réduire le bruit numérique des méthodes particulières, des modèles perturbatifs ont été développés [18, 9, 59]. Ces modèles permettent l'utilisation de méthodes particulières pour ne résoudre qu'une partie de la fonction de distribution. Les méthodes perturbatives ont été particulièrement utilisées pour la simulation des plasmas magnétisés. Leur application aux plasmas électrostatiques est relativement restreinte.

La fonction de distribution est décomposée en une distribution f_0 correspondant à l'équilibre et une petite perturbation δf , donnant le nom de *delta-f* à ces méthodes.

$$f = f_0 + \delta f \quad (1.56)$$

De même, le champ électrique est décomposé de la manière suivante :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \delta \mathbf{E} \quad (1.57)$$

où \mathbf{E}_0 est le champ électrique correspondant à la solution à l'équilibre f_0 .

En linéarisant l'équation de Vlasov autour de (f_0, \mathbf{E}_0) , on obtient l'équation suivante sur la distribution perturbative et le champ associé :

$$\partial_t \delta f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \delta f + \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta f = -\frac{q}{m} \delta \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 \quad (1.58)$$

On note le terme source qui apparaît dans l'équation de δf par rapport à l'équation de Vlasov. On utilise une représentation particulière pour la perturbation δf , en faisant varier les poids statistiques des particules de manière à résoudre cette équation. On obtient alors

l'équation suivante sur les poids k_i :

$$\frac{dk_i}{dt} = (1 - k_i) \frac{q}{T} \mathbf{E}(\mathbf{x}_i) \quad (1.59)$$

où T est la température de f_0 .

Comparée à la méthode PIC classique, la méthode delta-f permet la réduction du bruit numérique tout en limitant le nombre de macro-particules dans la simulation. L'implantation de cette méthode dans le code de simulation de l'interaction plasma-satellite SPIS fait actuellement l'objet d'études.

1.4.5. Décomposition de domaine et méthodes multi-modèles

De nombreuses méthodes multi-échelle reposent sur le couplage de modèles différents pour les échelles microscopiques et macroscopiques.

Dans un article paru en 2006 [74], Sugiyama et al. proposent une méthode multi-échelle pour la simulation de plasma. Leur méthode consiste à réaliser une simulation en utilisant le modèle magnétohydrodynamique (MHD) dans un grand domaine, et des simulations de type PIC dans des sous-domaines raffinés de tailles relativement petites. Les deux simulations sont réalisées de manière simultanée, et des échanges aux frontières permettent d'assurer le couplage des différents domaines.

Formalisée par Hughes et al. dans [34] et [35] vers la fin des années 1990, la méthode *Variational Multiscale* propose de résoudre un problème multi-échelle en modélisant les phénomènes aux échelles plus petites que le maillage de manière analytique. Cette méthode consiste donc à diviser la solution du problème en une partie solvable sur un maillage donné et une partie analytique qui résout le problème à l'intérieur des mailles. Cette méthode a été notamment utilisée pour simuler la dynamique d'un arc électrique dans un plasma chaud dans le cas d'un couplage avec un écoulement fluide [79], et montre des résultats prometteurs dans le domaine de la simulation multi-échelle. Des publications plus récentes [84, 27] présentent des applications de cette méthode pour simuler des déplacements de particules dans des fluides.

Proposée par Steger et Benek dans les années 1980 [73], la méthode Chimère permet de résoudre des problèmes d'aérodynamique à l'aide de maillages recouvrant non conformes. C'est une méthode de Schwarz multiplicative éprouvée dans le domaine de la CFD, qui

offre l'avantage de simplifier la génération de maillages autour de géométries complexes et de permettre de modéliser le mouvement et la déformation d'un corps sans recalculer les maillages.

En 2003, Glowinski et al. proposent une adaptation de la méthode *Chimère* [25, 82] qui permet de résoudre des problèmes elliptiques multi-échelles à l'aide d'une méthode itérative qui utilise différents niveaux de grilles non nécessairement emboîtées. Cette méthode éléments finis dite *Patch*, est similaire à la méthode *Fast Adaptive Composite grid* [52], mais propose plus de flexibilité en généralisant la méthode à des maillages non-conformes.

Dans le chapitre 2, nous présentons dans le détail l'algorithme de la méthode patch ainsi que les principales propriétés de cette méthode. Une extension de cette méthode à une classe de problèmes non-linéaires est présentée au chapitre 3, en particulier pour la résolution du problème de Poisson-Boltzmann

1.5. Présentation des objectifs de la thèse

L'objectif de cette thèse est la simulation de l'effet d'un interconnecteur de panneau solaire sur la charge électrostatique d'un satellite à propulseur de Hall. Pour illustrer les limitations des méthodes existantes, nous présentons ici des résultats de simulations SPIS représentatifs du couplage entre les propulseurs électriques et les générateurs solaires. Le cas de simulation est similaire aux récents résultats présentés dans [67], en utilisant une géométrie simplifiée.

L'environnement naturel simulé est constitué d'électrons Maxwelliens et de protons à une densité $n_0 = 10^9 \text{ m}^{-3}$ et à une température de $T_e = 5 \text{ eV}$, représentatif de l'environnement plasma LEO ou d'orbite moyenne (MEO pour Medium Earth Orbit). La longueur de Debye associée est d'environ 53 cm. Le domaine de simulation est un ellipsoïde de demi-grand axe 7 m selon l'axe x , et de demi-petit axe 4 m selon les deux autres directions.

La figure 1.16 présente la géométrie de satellite utilisée. Le satellite est constitué d'un corps cubique de 1 m de côté, présenté en vert sur la figure, d'un propulseur de Hall cylindrique proche du corps et d'un générateur solaire. Le générateur solaire est de dimension $4 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ et d'épaisseur 20 cm, et orienté de manière à ce que les cellules solaires soient exposées à la plume du propulseur. Sur cette surface, présentée en jaune sur la figure 1.16,

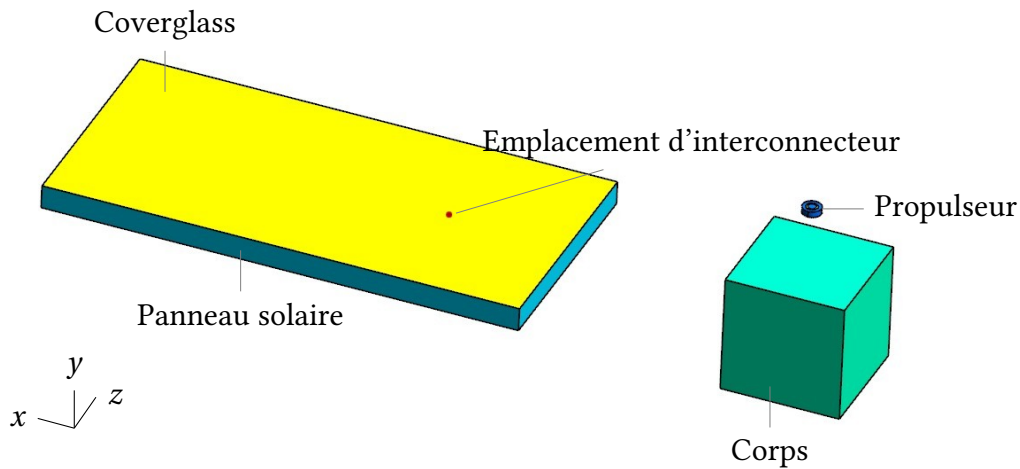


FIGURE 1.16 – Géométrie de satellite utilisée

un modèle de diélectrique est utilisé pour modéliser le coverglass des cellules solaires. L'arrière du panneau solaire est recouvert de matériaux composites conducteurs (CFRP).

L'effet du propulseur de Hall est représenté par l'injection d'une population d'ions Xenon Xe^+ rapides à la sortie du propulseur qui est polarisée à 80 V. De plus, une densité d'ions d'échange de charge (ions CEX) est injectée en volume en supposant que la densité de neutres représente une fraction de la densité des ions rapides.

Le maillage du domaine de simulation est généré à l'aide du logiciel gmsh. La taille des mailles sur la surface extérieure est de 50 cm. Sur le corps du satellite et sur son générateur solaire, la taille de maille utilisée est de 20 cm, et elle est de 1 cm sur le propulseur.

La figure 1.17 présente les résultats de simulations obtenus dans une simulation SPIS classique, sans interconnecteur. On retrouve des résultats similaires à ceux présentés dans [67]. On note l'impact important de la plume du propulseur sur la carte de potentiel. Au niveau des densités d'ions, on remarque que les ions rapides n'interagissent pas avec le corps du satellite et le panneau solaire. Au contraire, les ions d'échange de charge, moins énergétiques, ont des densités importantes autour du satellite par rapport à la densité naturelle de protons.

Un interconnecteur est modélisé sur la surface diélectrique du générateur solaire par un rectangle de taille $0,2 \text{ mm} \times 0,6 \text{ mm}$, au niveau du point rouge sur la figure 1.16, et où un modèle de type conducteur métallique est appliqué. Nous fixons la taille de maille à 0,1 mm

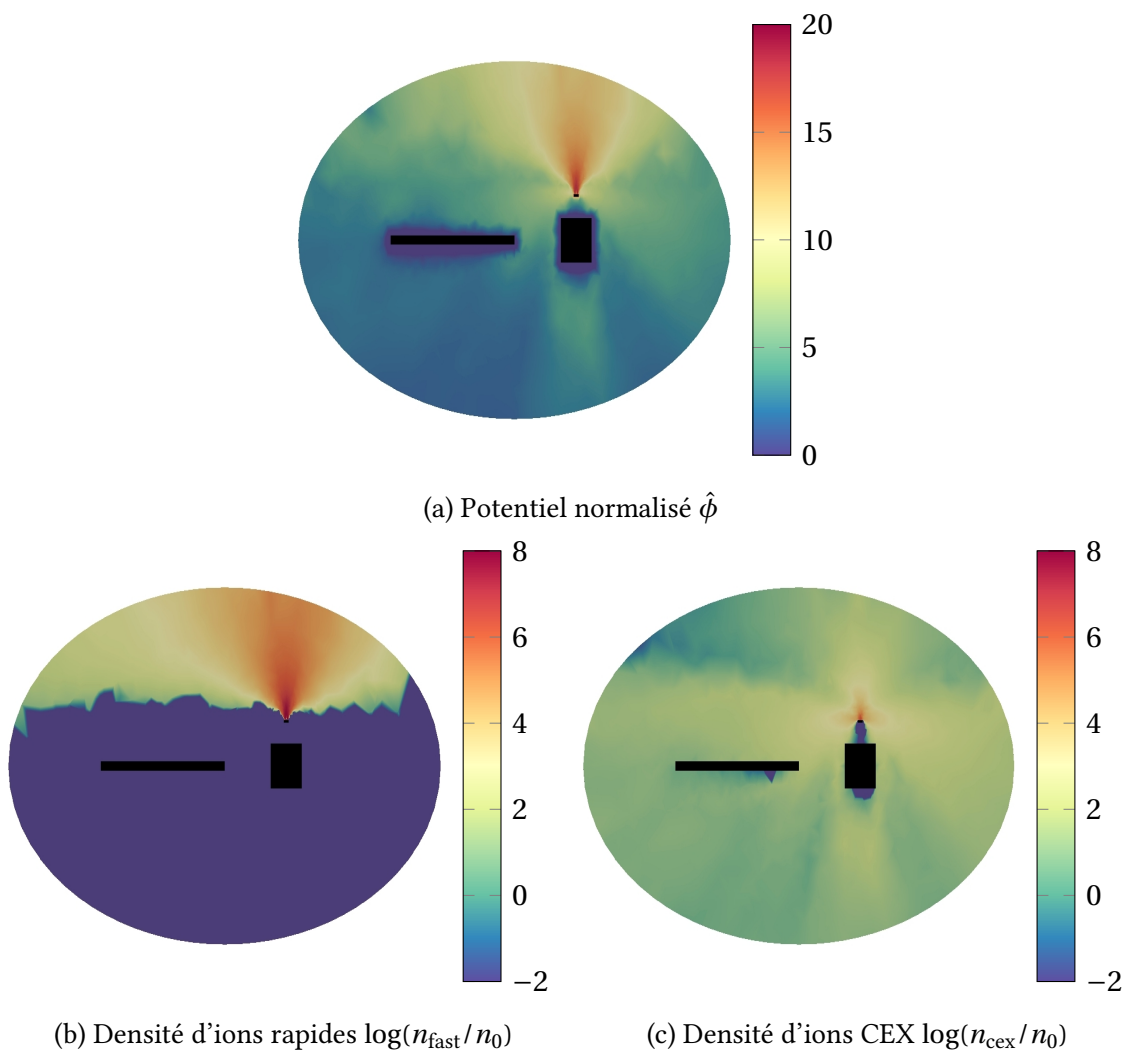


FIGURE 1.17 – Résultats de simulations sans interconnecteur modélisé

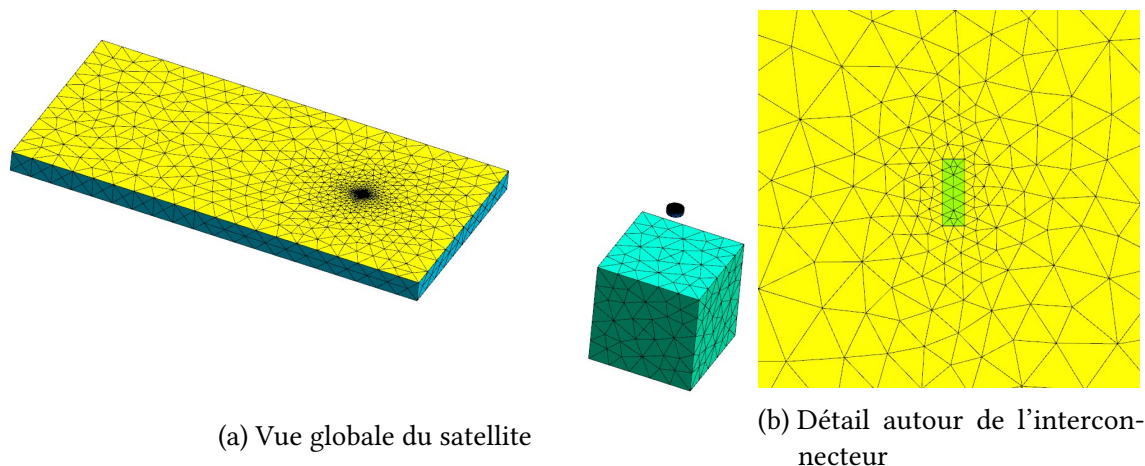


FIGURE 1.18 – Maillages de surface utilisés

sur l'interconnecteur. Le maillage surfacique généré par gmsh est présenté en figure 1.18.

En gardant les mêmes paramètres de simulation que dans le cas sans interconnecteur, et en fixant un potentiel d'interconnecteur négatif, on observe que le cœur numérique de SPIS est incapable de réaliser la simulation avec l'interconnecteur.

En effet, la différence d'échelle entre les cellules les plus petites, près de l'interconnecteur, et les cellules plus grandes loin du satellite, induit un mauvais conditionnement dans le système linéarisé. L'algorithme du gradient conjugué implémenté dans SPIS est alors incapable de résoudre le système avec précision. On observe alors une instabilité dans l'algorithme de Newton, qui empêche l'avancement de la simulation. Dans le cas de la simulation de l'interconnecteur négatif, cette instabilité apparaît à partir du moment où le potentiel devient positif près de l'interconnecteur.

Pour permettre la simulation du couplage entre le satellite et son environnement, il convient donc de limiter la différence entre les tailles des cellules du maillage. La résolution d'éléments de petite taille comme les interconnecteurs impose donc un raffinement important du maillage dans tout le domaine, ce qui rend prohibitif la simulation. Une autre possibilité est de découpler le calcul aux différentes échelles. Nous proposons dans cette thèse d'utiliser la méthode patch pour le calcul du champ électrique dans SPIS. Grâce à cette méthode, il est possible d'assurer des tailles d'éléments homogènes dans chaque maillage, tout en limitant le raffinement nécessaire dans la plupart du domaine.

Chapitre 2.

Application de la méthode patch au problème de Poisson

Sommaire

2.1. Introduction	47
2.1.1. Méthode Patch	48
2.1.2. Problème de Poisson	52
2.1.3. Formulation variationnelle	53
2.1.4. Discrétisation du problème	53
2.2. Implantation de la méthode patch	54
2.2.1. Description de l'implantation	55
2.3. Résultats numériques	57
2.3.1. Perturbation volumique	58
2.3.2. Perturbation surfacique	63
2.4. Conclusion	70

2.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'évaluer la pertinence de la méthode patch pour le calcul du potentiel électrostatique dans un plasma. Nous détaillons l'application de la méthode patch pour la résolution du problème de Poisson. Pour ce faire, nous décrivons l'implantation de la méthode patch dans un code élément fini 2D, et donnons des résultats numériques de convergences. Dans un premier temps, nous illustrons l'utilisation de la méthode patch

dans le cas simple d'une perturbation locale en volume. Nous présentons ensuite le cas plus réaliste d'une perturbation sur les conditions aux limites, nécessitant le raffinement du maillage à la frontière du domaine.

2.1.1. Méthode Patch

Supposons un polytope $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sur lequel on cherche à résoudre un problème elliptique, et que ce domaine contient un sous-domaine $\Lambda \subset \Omega$ où la solution du problème est particulièrement irrégulière. On choisit deux maillages éléments finis, \mathcal{T}_H et \mathcal{T}_h respectivement de Ω et Λ . Le maillage grossier \mathcal{T}_H , dont la taille caractéristique de maille est H , recouvre l'ensemble du domaine. Le maillage \mathcal{T}_h a des mailles très petites par rapport au maillage grossier. Soient V_h et V_H les espaces fonctionnels respectivement associés à ces maillages.

Le problème que l'on cherche à résoudre peut s'écrire sous la forme variationnelle suivante :

Problème 2.1.1 : Trouver $\mathbf{u} \in V_{Hh} = V_H + V_h$ tel que

$$\forall \varphi \in V_{Hh}, a(\mathbf{u}, \varphi) = l(\varphi) \quad (2.1)$$

où a est un opérateur bilinéaire, symétrique, continue et coercif, et l une forme linéaire.

Remarquons que le problème 2.1.1 est relativement simple à résoudre si l'on connaît une base de l'espace V_{Hh} . La construction d'une telle base est cependant difficile dans le cas général. La méthode patch résout ce problème de manière itérative, comme présenté dans l'algorithme 1.

L'algorithme commence par résoudre le problème sur le maillage grossier (étape 1). À chaque itération, l'algorithme résout le résidu du problème successivement sur le maillage patch (étape 3) et sur le maillage grossier (étape 5). La solution globale est mise à jour (étapes 4 et 6) en utilisant un coefficient de relaxation $\omega_r \in [0, 1]$. Le choix optimal de ce coefficient dépend des maillages et permet d'optimiser le taux de convergence de l'algorithme [82].

Notons B l'opérateur lié à une itération de l'algorithme 1, de sorte que l'erreur après chaque itération s'exprime :

$$\mathbf{u}_{Hh} - \mathbf{u}^n = B^n(\mathbf{u}_{Hh} - \mathbf{u}^0) \quad (2.2)$$

ALGORITHME 1 – Algorithme de la méthode patch

1 Trouver $\mathbf{u}^0 \in V_H$ tel que

$$\forall \varphi \in V_H, a(\mathbf{u}^0, \varphi) = l(\varphi)$$

2 **pour** $n = 1, 2, \dots$ **faire**

3 Trouver $\mathbf{u}_h^n \in V_h$ tel que

$$\forall \varphi \in V_h, a(\mathbf{u}_h^n, \varphi) = l(\varphi) - a(\mathbf{u}^{n-1}, \varphi)$$

4 Poser $\mathbf{u}^{n-1/2} = \mathbf{u}^{n-1} + \omega_r \mathbf{u}_h^n$

5 Trouver $\mathbf{u}_H^n \in V_H$ tel que

$$\forall \varphi \in V_H, a(\mathbf{u}_H^n, \varphi) = l(\varphi) - a(\mathbf{u}^{n-1/2}, \varphi)$$

6 Poser $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^{n-1/2} + \omega_r \mathbf{u}_H^n$

7 **fin**

Le taux de convergence de l'algorithme est donc borné par le rayon spectral $\rho(B)$ de cet opérateur. Une analyse de B détaillée dans [24] permet de montrer que le taux de convergence de l'algorithme 1 est fortement dépendant d'un angle abstrait $\tilde{\gamma}$ entre les espaces fonctionnels V_H et V_h , définit par :

$$\tilde{\gamma} = \sup_{\substack{\mathbf{u}_h \in V_h \cap V_0^\perp, \mathbf{u}_h \neq 0 \\ \mathbf{u}_H \in V_H \cap V_0^\perp, \mathbf{u}_H \neq 0}} \frac{a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_H)}{\|\mathbf{u}_h\|_a \|\mathbf{u}_H\|_a} \quad (2.3)$$

où V_0^\perp est l'orthogonal dans V_{Hh} de $V_h \cap V_H$ selon le produit scalaire a , et $\|\cdot\|_a$ désigne la norme associée à a .

La figure 2.1 représente de manière simplifiée la relation entre les espaces V_h et V_H . Par définition, la grandeur $\tilde{\gamma}$ correspond au cosinus de l'angle α présenté sur cette figure.

Comme on peut le remarquer sur la figure 2.2, qui présente le rayon spectral de l'opérateur d'itération, le coefficient optimal de relaxation ω_r^0 , correspondant au point minimum de la courbe, et le rayon spectral associé, varient en fonction de $\tilde{\gamma}$. Cette dépendance montre l'impact important de la géométrie des maillages sur les propriétés de convergence de la méthode patch.

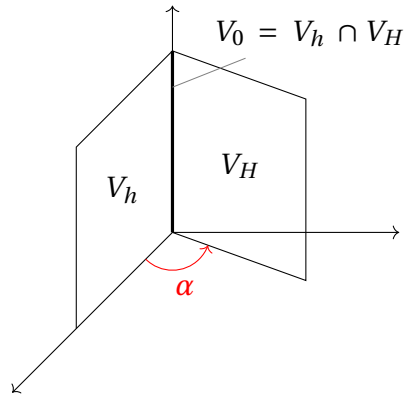


FIGURE 2.1 – Représentation de l'angle abstrait

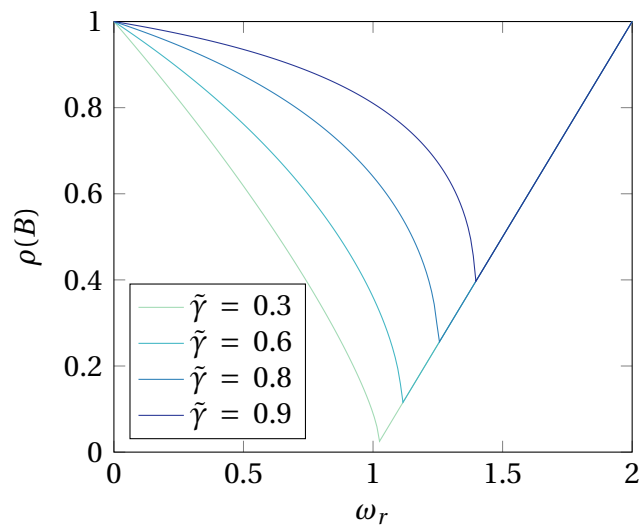


FIGURE 2.2 – Rayon spectral de l'opérateur B

On distingue trois types de configurations principales :

- ✦ Le patch totalement conforme : chaque élément du patch est totalement inscrit dans un élément du maillage grossier, et la frontière du patch est incluse dans la surface des éléments du maillage grossier. L'angle $\tilde{\gamma}$ est alors faible, et l'algorithme converge rapidement.
- ✦ Le patch conforme aux bords : la frontière du patch coïncide avec des surfaces du maillage grossier, mais les éléments du patch ne sont pas forcément inclus dans des éléments grossiers.
- ✦ Les patch totalement non-conforme : aucune contrainte n'est donnée sur le maillage. L'angle abstrait est alors grand, et la convergence de la méthode patch est lente.

Il est possible d'améliorer les propriétés de convergence de cette méthode en restreignant l'espace fonctionnel lié au maillage grossier [28]. Plus spécifiquement, on réduit l'espace V_H à son sous-ensemble des fonctions quasi-harmoniques sur le patch Λ , qui est approximativement orthogonal à l'espace V_h .

Définissons l'espace V_H^0 comme le sous-espace des fonctions grossières nulles en dehors du patch, et son complémentaire a -orthogonal \tilde{V}_H :

$$V_H^0 = \{\mathbf{u}_H \in V_H : \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Lambda, \mathbf{u}_H(\mathbf{x}) = 0\} \quad (2.4)$$

$$\tilde{V}_H = \{\mathbf{u}_H \in V_H : \forall \varphi \in V_H^0, a(\mathbf{u}_H, \varphi) = 0\} \quad (2.5)$$

Les fonctions de \tilde{V}_H sont approximativement harmoniques pour l'opérateur a , et on s'attend donc à ce que $\tilde{\gamma}(\tilde{V}_H, V_h)$ soit faible. De plus, étant donné que le maillage patch est en principe une meilleure discrétisation de Λ que le maillage grossier, la restriction à cet espace fonctionnel ne se fait pas au détriment de la qualité de la solution obtenue. Le principe de la méthode patch accélérée est donc d'appliquer la méthode patch classique à cet espace réduit.

Il est cependant difficile en pratique de résoudre directement le problème 2.1.1 sur l'espace \tilde{V}_H , à moins d'explicitier une base de cet espace. Il est cependant facile de résoudre ce système en deux étapes :

1. Soit $\lambda_H \in V_H^0$ tel que $a(\lambda_H, \mu) = l(\mu), \forall \mu \in V_H^0$
2. Soit $\mathbf{u}_H \in V_H$ tel que $a(\mathbf{u}_H, \varphi) = l(\varphi) - a(\lambda_H, \varphi), \forall \varphi \in V_H$

Chaque problème est simple à résoudre indépendamment, et la fonction \mathbf{u}_H est bien solution

du problème 2.1.1 sur \bar{V}_H d'après les définitions de ces espaces. Ainsi, l'algorithme de la méthode patch accélérée peut s'écrire explicitement comme présenté dans l'algorithme 2.

ALGORITHME 2 – Algorithme de la méthode patch accélérée	
<hr/>	
1	$\mathbf{u}^0 = 0$
2	pour $n = 1, 2, \dots$ faire
3	Trouver $\lambda^n \in V_H^0$ tel que $\forall \varphi \in V_H^0, a(\lambda^n, \varphi) = l(\varphi) - a(\mathbf{u}^{n-1}, \varphi)$
4	Trouver $\mathbf{u}_H^n \in V_H$ tel que $\forall \varphi \in V_H, a(\mathbf{u}_H^n, \varphi) = l(\varphi) - a(\mathbf{u}^{n-1} + \lambda^n, \varphi)$
5	Poser $\mathbf{u}^{n-1/2} = \mathbf{u}^{n-1} + \omega_r \mathbf{u}_H^n$
6	Trouver $\mathbf{u}_h^n \in V_h$ tel que $\forall \varphi \in V_h, a(\mathbf{u}_h^n, \varphi) = l(\varphi) - a(\mathbf{u}^{n-1/2}, \varphi)$
7	Poser $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^{n-1/2} + \omega_r \mathbf{u}_h^n$
8	fin

Il est montré numériquement dans [28] que cette méthode permet en particulier d'accélérer la convergence dans le cas du patch conforme au bord.

2.1.2. Problème de Poisson

L'équation de Poisson décrit le potentiel électrostatique dans un plasma avec une densité de charges électriques donnée. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un polytope où l'on cherche à calculer le potentiel, et $\partial\Omega$ sa frontière. Le problème de Poisson sur ce domaine s'exprime de la manière suivante :

Problème 2.1.2 : Trouver $\phi \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta\phi &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{Tr}(\phi) &= \phi_d \end{cases} \quad (2.6)$$

où $\phi_d \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ décrit le potentiel au bord, que l'on supposera donné, et $\text{Tr} : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ représente l'opérateur trace sur Ω . On note $H^1(\Omega)$ l'espace classique de Sobolev [2], et $H_0^1(\Omega)$ l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur la frontière $\partial\Omega$.

2.1.3. Formulation variationnelle

Soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ une fonction test, on pose les notations suivantes :

$$a(\phi, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \varphi \quad (2.7)$$

$$l(\varphi) = \int_{\Omega} \frac{\rho}{\epsilon_0} \varphi \quad (2.8)$$

On note que l'opérateur a est une forme bilinéaire, continue et coercive, et que l est une forme linéaire continue. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe donc une unique solution au problème de Poisson exprimé sous forme variationnelle :

Problème 2.1.3 : Trouver $\phi \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} a(\phi, \varphi) = l(\varphi) & \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \phi(\mathbf{x}) = \phi_d(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

2.1.4. Discrétisation du problème

On suppose que le domaine Ω contient un sous-domaine Λ où la solution varie rapidement. On cherche donc à résoudre le problème de Poisson sur un maillage grossier du domaine Ω , dont l'espace fonctionnel d'éléments finis associé est noté V_H , et auquel on rajoute un maillage raffiné local du sous-domaine Λ , dont on note V_h l'espace fonctionnel. Le problème discrétisé sur ces espaces s'exprime de la manière suivante :

Problème 2.1.4 : Trouver $\mathbf{u} \in V_{Hh} = V_H + V_h$ tel que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \varphi) = l(\varphi) & \forall \varphi \in V_{Hh} \\ \phi(\mathbf{x}) = \phi_d(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.10)$$

On note que l'espace V_{Hh} est un sous-espace vectoriel de $H_0^1(\Omega)$ de dimension finie, et donc que le problème 2.1.4 possède une unique solution d'après le théorème de Lax-Milgram.

On cherche à résoudre ce problème en utilisant la méthode patch décrite au chapitre précédent.

2.2. Implantation de la méthode patch

Comme décrit précédemment, la méthode patch consiste à résoudre alternativement sur chaque maillage, en introduisant un terme source en volume correspondant au couplage entre les maillages. Il est donc nécessaire pour implanter cette méthode dans un code éléments finis, d'une part de résoudre le problème linéaire sur chaque maillage indépendamment, et d'autre part de calculer les termes croisés qui interviennent dans l'algorithme.

Nous notons N^h et N^H les dimensions des espaces V_h et V_H , et (ψ_i^h) et (ψ_i^H) deux bases respectives de ces espaces. On note en particulier que la concaténation de ces deux bases ne forme pas une base de V_{Hh} , car les éléments de ces bases ne sont pas nécessairement linéairement indépendants.

Pour résoudre les problèmes sur les maillages grossier et patch, il suffit d'assembler de manière classique les matrices de rigidité K_h et K_H pour chaque maillage.

$$(K_*)_{i,j} = a(\psi_i^*, \psi_j^*) \quad (2.11)$$

où $*$ peut être remplacé par les indices h et H suivant le maillage considéré.

De plus, nous notons $\mathbf{l}_h \in V_h$ et $\mathbf{l}_H \in V_H$ les vecteurs duaux de la forme l , d'après le théorème de Fréchet-Riesz :

$$\forall \varphi \in V_*, \quad l(\varphi) = \int_{\Omega} \mathbf{l}_* \varphi \quad (2.12)$$

de sorte que le problème discrétisé sur chaque maillage s'écrive :

$$K_* \mathbf{u}_* = \mathbf{l}_* \quad (2.13)$$

En comparant les équations 2.8 et 2.12, il apparaît que les vecteurs \mathbf{l}_* correspondent aux approximations du terme source ρ/ϵ_0 sur chacun des maillages.

Dans le cas d'un opérateur symétrique comme l'opérateur de Poisson, les termes croisés de la méthode patch correspondent aux coefficients d'une matrice de passage entre les deux maillages que nous noterons P . La matrice P est rectangulaire de taille $N^h \times N^H$, et

ses coefficients sont définis par :

$$P_{i,j} = a(\psi_i^h, \psi_j^H) \quad (2.14)$$

Cette matrice correspond donc aux blocs antidiagonaux de la matrice de rigidité globale du problème.

Avec ces notations, il est possible de réécrire l'algorithme 1 de manière à mettre en évidence les différents calculs, comme présenté dans l'algorithme 3.

ALGORITHME 3 – Reformulation de l'algorithme de la méthode patch

```

1  $\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{0}$ 
2  $\mathbf{u}_H^0 = K_H^{-1} \mathbf{l}_H$ 
3 pour  $n = 1, 2, \dots$  faire
4    $\mathbf{u}_h^n = (1 - \omega_r) \mathbf{u}_h^{n-1} + \omega_r K_h^{-1} (\mathbf{l}_h - P \mathbf{u}_H^{n-1})$ 
5    $\mathbf{u}_H^n = (1 - \omega_r) \mathbf{u}_H^{n-1} + \omega_r K_H^{-1} (\mathbf{l}_H - P^T \mathbf{u}_h^n)$ 
6 fin
```

L'algorithme 3 fait donc intervenir à chaque itération deux multiplications matrice-vecteur et deux inversions de systèmes linéaires.

2.2.1. Description de l'implantation

Un code éléments finis 2D structuré a été développé pour étudier les propriétés de la méthode patch pour la résolution de l'équation de Poisson. Des éléments finis de type Q1 ont été choisis pour leur simplicité d'implantation.

Les vecteurs de V_{Hh} sont décomposés sur la famille de vecteurs

$$\mathcal{F} = (\psi_1^h, \dots, \psi_{N^h}^h, \psi_1^H, \dots, \psi_{N^H}^H),$$

où les N^h premiers éléments correspondent à la base du patch (ψ^h), et les N^H éléments suivants correspondent à la base grossière (ψ^H). Numériquement, les vecteurs de V_{Hh} sont donc représentés par les coefficients (k_i) dans la décomposition suivante :

$$\mathbf{u}_{Hh} = \sum_{i=1}^{N^h} k_i \psi_i^h + \sum_{i=1}^{N^H} k_{i+N^h} \psi_i^H \quad (2.15)$$

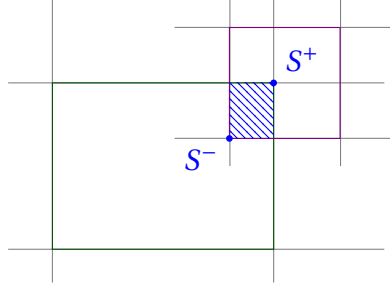


FIGURE 2.3 – Intersection entre une maille grossière et une maille patch

Il est à noter que cette décomposition n'est pas unique, car la concaténation \mathcal{F} des bases de V_h et V_H n'est pas une base de V_{Hh} . Cependant, on peut montrer simplement que la famille \mathcal{F} est génératrice sur cet espace.

Les maillages utilisés sont des maillages cartésiens rectangulaires, utilisant des éléments de types Q1. Dans chaque maille, le potentiel est donc considéré comme le produit de deux fonctions linéaires selon les axes x et y :

$$X = (x - x_0)/\Delta x \quad (2.16)$$

$$Y = (y - y_0)/\Delta y \quad (2.17)$$

$$\forall (X, Y) \in [0, 1]^2, \phi(X, Y) = \begin{matrix} \phi_{so} & (1 - X) & (1 - Y) \\ +\phi_{se} & X & (1 - Y) \\ +\phi_{ne} & X & Y \\ +\phi_{no} & (1 - X) & Y \end{matrix} \quad (2.18)$$

où X et Y sont les coordonnées locales dans une maille de domaine $[x_0, x_0 + \Delta x] \times [y_0, y_0 + \Delta y]$, et $\phi_{so}, \phi_{se}, \phi_{ne}, \phi_{no}$ sont les potentiels sur les nœuds de la maille.

La principale difficulté lors de l'implantation de la méthode consiste à calculer la matrice de passage P . De manière similaire à la construction classique des matrices de rigidités pour la méthode éléments finis, on peut assembler la matrice P pour chaque intersection entre une maille du maillage grossier et une maille du patch.

La figure 2.3 présente les notations que nous utilisons pour représenter une telle intersection. Les points $S^- = (x^-, y^-)$ et $S^+ = (x^+, y^+)$, représentent les points extrêmes de l'intersection que nous noterons K . On note que cette représentation est valable quelque

soit l'intersection, tant qu'elle existe, entre deux éléments rectangulaires alignés. On a alors :

$$\int_K \nabla \psi_i^h \cdot \nabla \psi_j^H = \Delta x \int_{y^-}^{y^+} \partial_x \psi_i^h \cdot \partial_x \psi_j^H dy \quad (2.19)$$

$$+ \Delta y \int_{x^-}^{x^+} \partial_y \psi_i^h \cdot \partial_y \psi_j^H dx \quad (2.20)$$

Or, en utilisant les éléments Q1, les fonctions qui apparaissent dans ces intégrales sont quadratiques. Il est donc simple de calculer de manière analytique ces intégrales en utilisant une quadrature sur les points S^- , S^+ et le point milieu $\frac{S^+ + S^-}{2}$. Pour une fonction affine f sur le domaine $[x_0, x_1]$, la formule de Simpson [71] donne en effet :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{x_1 - x_0}{6} \left(f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f(x_1) \right) \quad (2.21)$$

Ainsi, le calcul des termes de couplages dans le cas des éléments finis Q1 est particulièrement simple, justifiant le choix de ces maillages.

2.3. Résultats numériques

Pour illustrer le comportement numérique de la méthode patch pour la résolution du problème de Poisson multi-échelle, nous détaillons ici deux cas de tests.

Le premier cas décrit un terme source en volume comportant des variations importantes à des échelles inférieures à la taille des éléments grossiers. Ce cas est purement illustratif et ne correspond pas à celui d'un plasma réel.

Le second cas décrit une condition aux limites de type Dirichlet variant rapidement à des échelles petites par rapport au maillage grossier, et permet d'illustrer de manière simplifiée la capacité de la méthode à résoudre les plus petits éléments présents à la surface des satellite.

Pour chacun de ces cas, nous évaluons la vitesse de convergence de la méthode en fonction des maillages utilisés, et nous comparons la solution obtenue avec et sans patch.

2.3.1. Perturbation volumique

Nous cherchons dans un premier temps à évaluer les propriétés numériques de la méthode patch pour la résolution du problème de Poisson en présence d'un terme source variant fortement dans une petite partie du domaine grossier.

Le domaine de simulation est le carré $\Omega = [0, 1]^2$, et une condition de Dirichlet homogène est utilisée sur les quatre côtés du domaine. Dans la suite, nous notons H le pas d'espace du maillage grossier et h celui du patch.

Le terme source choisi et la solution analytique correspondante sont présentés en figure 2.4 et sont définis par les équations 2.22 à 2.24, avec le paramètre $\lambda = 0.1$. L'existence d'une solution analytique variant rapidement au centre du domaine justifie le choix du terme source.

$$X = \frac{x - \frac{1}{2}}{\lambda}, \quad Y = \frac{y - \frac{1}{2}}{\lambda}, \quad R^2 = X^2 + Y^2 \quad (2.22)$$

$$l(X, Y) = \frac{4}{\lambda^2} \exp(-R^2) \cdot \left(\left(\frac{5}{4} - R^2 \right) \sinh(X) + X \cosh(X) \right) \quad (2.23)$$

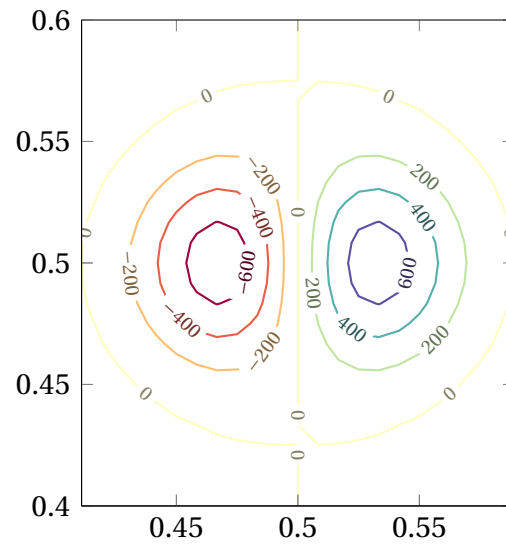
$$\mathbf{u}(x, y) = \exp(-R^2) \sinh(X) \quad (2.24)$$

Pour résoudre la perturbation volumique, on place un patch dans le domaine $\Lambda = [0.375, 0.625]^2$. Pour un maillage grossier composé de 8×8 éléments, Λ recouvre donc les 4 éléments centraux, comme présenté sur la figure 2.5.

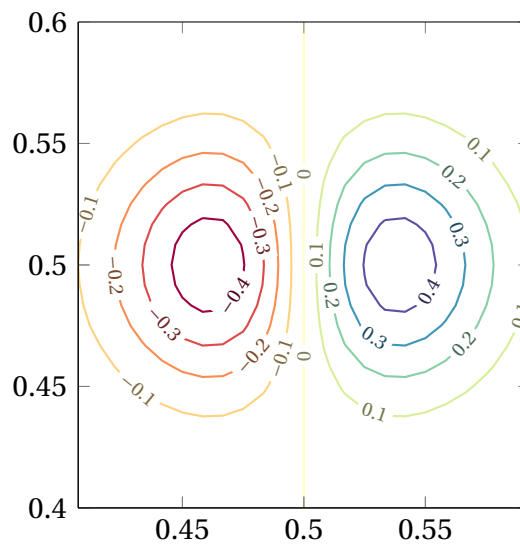
Convergence de l'algorithme

La convergence de l'algorithme a été évaluée en mesurant la norme $L^2(\Omega)$ de la correction calculée à chaque itération. La figure 2.6 présente la convergence de la méthode pour différents raffinements du patch sur un maillage grossier de taille 8×8 . On note sur cette figure que l'on retrouve bien la convergence linéaire de l'algorithme patch. On a donc :

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)} \approx \alpha \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.25)$$



(a) Terme source volumique



(b) Solution analytique

FIGURE 2.4 – Présentation du problème de perturbation volumique

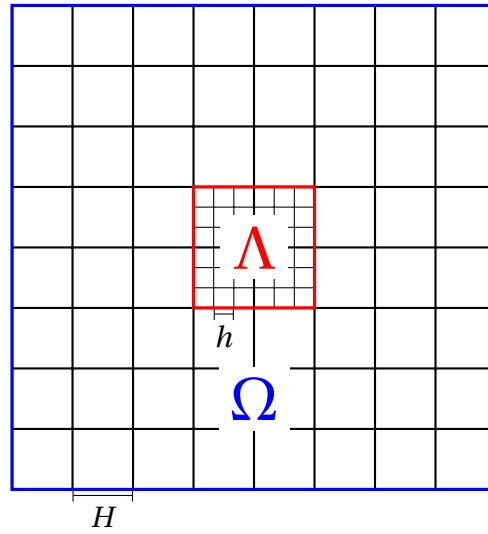


FIGURE 2.5 – Maillages utilisés

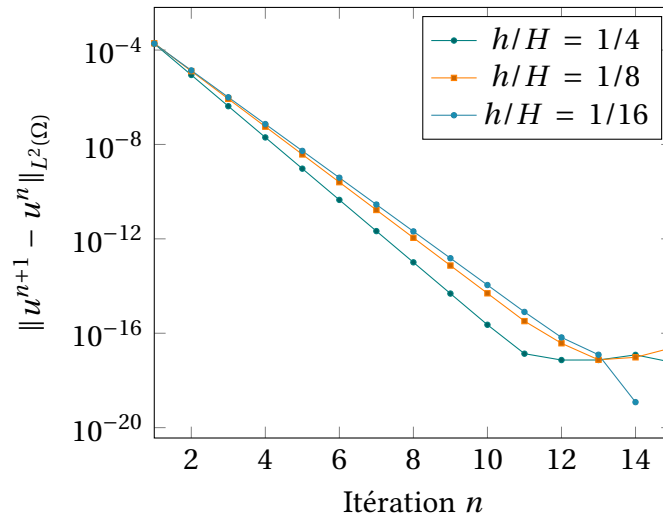


FIGURE 2.6 – Convergence de la méthode patch pour une perturbation volumique. Le maillage grossier est fixé à 8×8 mailles; le patch recouvre les quatre mailles centrales.

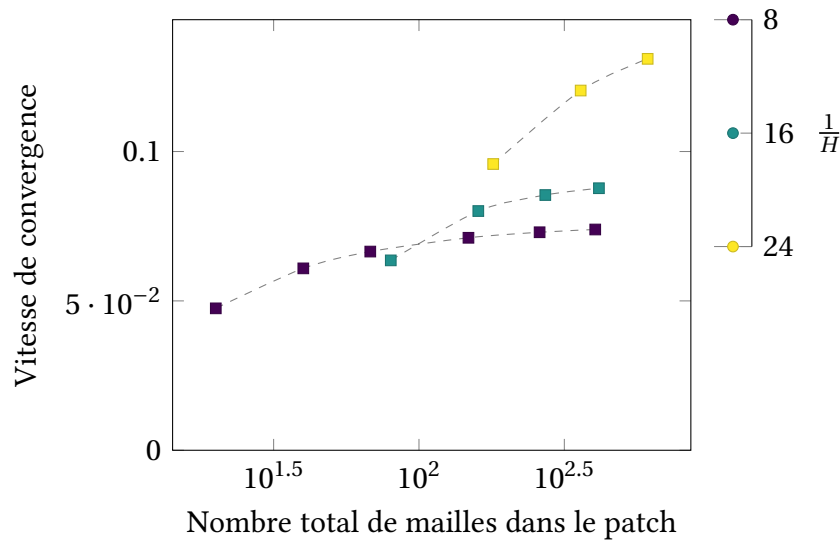


FIGURE 2.7 – Vitesse de convergence pour différents maillages

où α est la vitesse de convergence de la méthode. Une valeur faible de α correspond à une convergence rapide de l'algorithme. Ce paramètre est simple à évaluer sur les courbes présentées en figure 2.6.

La figure 2.7 présente la vitesse de convergence obtenu en fonction du maillage utilisé. On observe bien l'impact important des maillages utilisés sur le taux de convergence de la méthode. En particulier, le nombre de mailles (grossières ou raffinées) présentes dans le domaine du patch Λ a un impact important sur la convergence de la méthode.

Pour un maillage grossier donné, l'augmentation du raffinement du patch a tendance à ralentir la convergence de l'algorithme, comme représenté par les courbes en pointillés sur la figure 2.7. On note cependant que le taux de convergence se stabilise quand le nombre de mailles raffinées est grand devant le nombre de mailles grossières.

Solution obtenue après convergence

Nous présentons ici le gain en précision apporté par le patch dans la simulation. Les solutions obtenues avec et sans le patch sont comparées à la solution analytique.

La figure 2.8 présente la convergence de la solution quand on raffine le maillage dans le patch. Pour un maillage grossier donné, l'erreur diminue de manière importante en raffinant le maillage au niveau du patch, jusqu'à atteindre une erreur asymptotique dépendant du

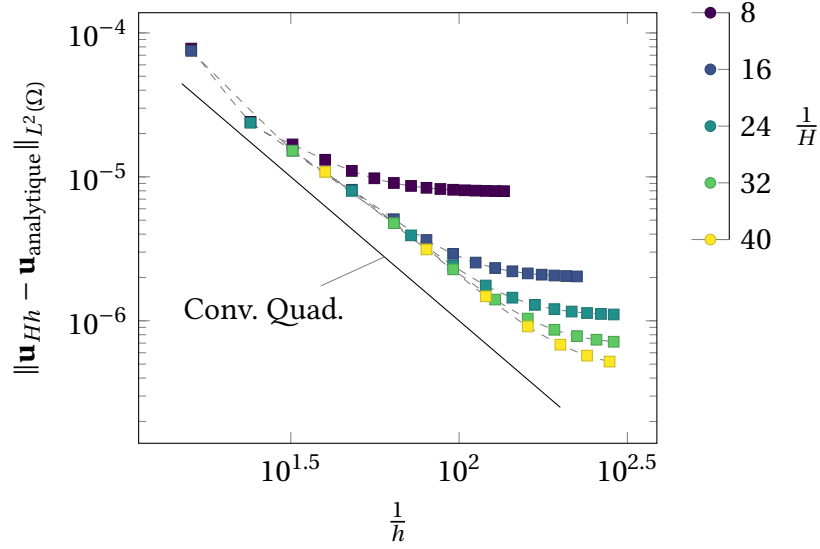


FIGURE 2.8 – Erreur finale pour différents maillages

maillage grossier. Ces résultats sont similaires aux résultats numériques sur les maillages $T1$ détaillés dans la littérature [82]. Ils correspondent également aux estimations d'erreurs théoriques [24] :

$$\|\mathbf{u}_{\text{analytique}} - \mathbf{u}_{Hh}\| \leq C \left(H^r \|\mathbf{u}_{\text{analytique}}\|_{H^1(\Omega \setminus \Lambda)} + h^r \|\mathbf{u}_{\text{analytique}}\|_{H^1(\Lambda)} \right) \quad (2.26)$$

où C est une constante et r est le degré des polynômes utilisés dans la décomposition en éléments finis.

On note que la convergence en h avant d'atteindre l'asymptote est approximativement quadratique. La figure 2.9 présente l'erreur mesurée avec et sans le patch en fonction des différents maillages grossiers. L'erreur présentée avec le patch correspond à l'erreur asymptotique obtenue en raffinant le patch de manière importante. On remarque que la convergence globale en H est super-linéaire, et que le patch permet de réduire de plus d'un ordre de grandeur l'erreur globale obtenue.

Efficacité en temps de calcul

En terme de temps de calcul, notre implantation de la méthode patch est asymptotiquement quadratique par rapport au nombre total de mailles, comme on peut le voir sur la

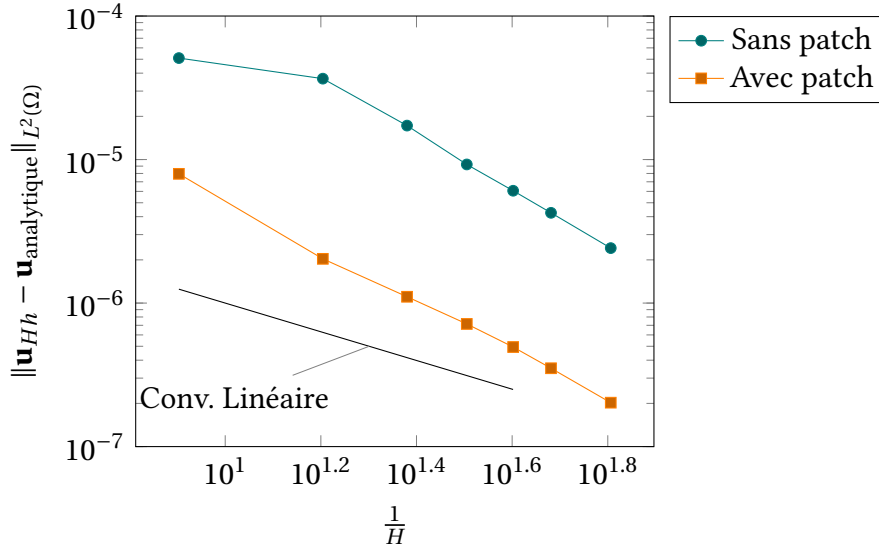


FIGURE 2.9 – Erreurs finales avec et sans patch pour différents maillages grossiers

figure 2.10.

La figure 2.11 présente l'erreur finale en fonction du temps de calcul pour la résolution du problème sur différents maillages. On note que le front de Pareto minimisant conjointement le temps d'exécution et l'erreur totale obtenue est majoritairement composé de points correspondant à des patch relativement raffinés, avec un rapport H/h supérieurs à 3.

L'utilisation du patch permet donc d'atteindre une meilleure précision dans la résolution du système, tout en assurant un temps de calcul relativement faible.

Ainsi, la méthode patch permet la résolution d'un terme source possédant des caractéristiques multi-échelles. L'inclusion d'un patch local permet de réduire de manière importante l'erreur de résolution du système. De plus, cette méthode peut être efficace du point de vue du temps de calcul, car elle permet de réaliser un compromis dans la résolution entre les différentes échelles.

2.3.2. Perturbation surfacique

Dans ce second exemple numérique, nous illustrons les performances de la méthode patch pour résoudre une condition aux limites variant fortement à des échelles inférieures à la taille des éléments grossiers. Le terme source est nul dans tout le domaine, et on impose

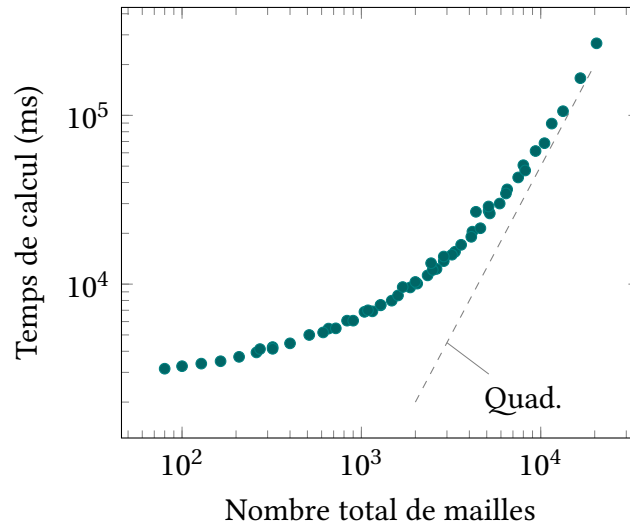


FIGURE 2.10 – Temps de calcul pour la résolution du système

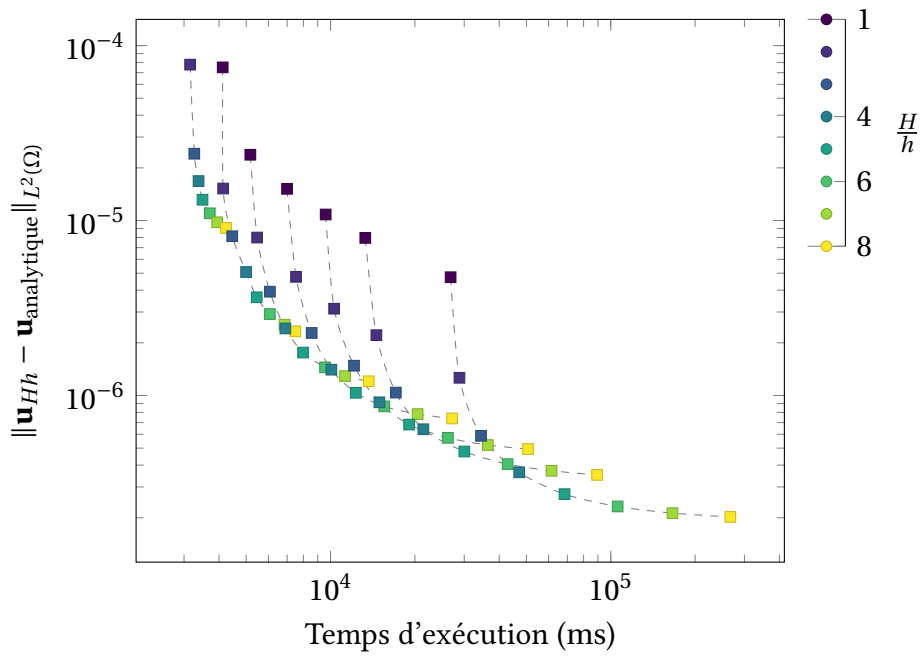


FIGURE 2.11 – Erreur totale et temps d'exécution pour différents maillages

i	a_i
0	0,0157
1	-0,0471
2	0,0785
3	-0,1097
4	0,1409
5	-0,1719
6	0,2028
7	-0,2334

TABLE 2.1. – Coefficients a_i utilisés pour la condition aux limites

une condition de Dirichlet non homogène sur un des bords. La condition de Dirichlet imposée est présentée dans l'équation 2.27 :

$$g(1, y) = \sum_{i=0}^{i_{\max}} a_i \sin((2i + 1)\pi y) \quad (2.27)$$

Par linéarité, il est simple de déduire la solution analytique du problème en résolvant le système pour chaque terme de la somme. Nous obtenons la solution donnée par l'équation 2.28 :

$$\mathbf{u}_{\text{analytique}}(x, y) = \sum_{i=0}^{i_{\max}} a_i \sin((2i + 1)\pi y) \frac{\sinh((2i + 1)\pi x)}{\sinh((2i + 1)\pi)} \quad (2.28)$$

Ce second cas de test est plus représentatif du problème de la modélisation des interconnecteurs de générateur solaire, où la condition limite présente de fortes variations très localisées. On cherche à montrer que l'application d'un patch près du bord portant le terme non homogène permet d'améliorer la précision de la solution loin de ce bord.

Les coefficients a_i utilisés sont présentés dans la table 2.1. La condition aux limites imposée correspondante est présentée en figure 2.12.a. La figure 2.12.b présente la solution analytique du problème. On note que la solution imposée au bord $x = 1$ présente des variations importantes à la fréquence spatiale $i_{\max} = 7$. On s'attend donc à ce que l'application locale d'un patch sur ce bord soit particulièrement bénéfique pour un maillage grossier dont les mailles ont des tailles caractéristiques $H > \frac{1}{8}$.

Un patch est placé sur toute la longueur du bord $x = 1$, sur une largeur de P_x mailles

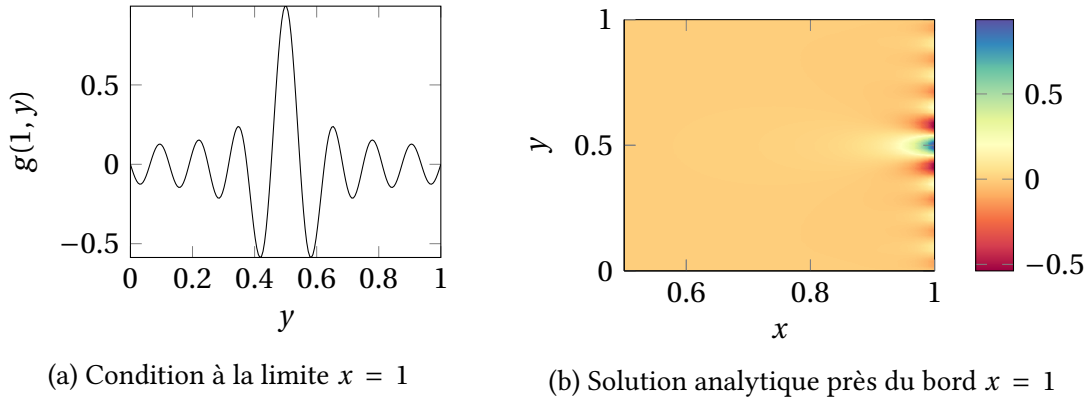


FIGURE 2.12 – Présentation du problème à perturbation surfacique

grossières. On note h_x la taille selon x des éléments du patch et h_y leur taille selon y , comme présenté sur la figure 2.13.

Convergence de l'algorithme

Comme dans le cas de la perturbation volumique, on observe une convergence linéaire de la méthode patch. La vitesse de convergence de l'algorithme pour un maillage grossier 4×4 et une largeur de patch $P_x = 2$ est présentée en figure 2.14. Comme précédemment, la convergence de la méthode est influencée par les maillages utilisés.

La convergence est légèrement plus lente pour des maillages plus raffinés. Cependant, on note que le taux de convergence reste relativement homogène pour les maillages présentés.

Solution obtenue après convergence

Comme dans le premier cas, nous présentons le gain en précision apporté par le patch dans la résolution du problème.

Notons γ le gain en erreur en dehors du patch, défini par :

$$\gamma = \frac{\|\mathbf{u}_{Hh} - \mathbf{u}_{\text{analytique}}\|_{L^2(\Omega \setminus \Lambda)}}{\|\mathbf{u}_{\text{grossier}} - \mathbf{u}_{\text{analytique}}\|_{L^2(\Omega \setminus \Lambda)}} \quad (2.29)$$

où $\mathbf{u}_{\text{grossier}}$ représente la solution obtenue sans le patch. γ représente l'amélioration de la solution en dehors du sous-domaine Λ liée à l'utilisation du patch.

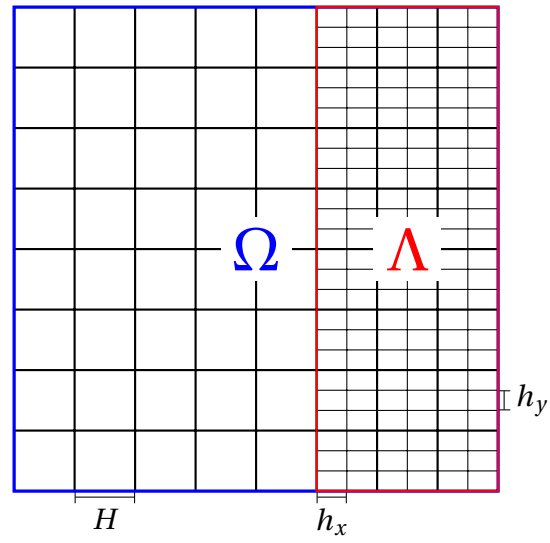


FIGURE 2.13 – Maillages utilisés

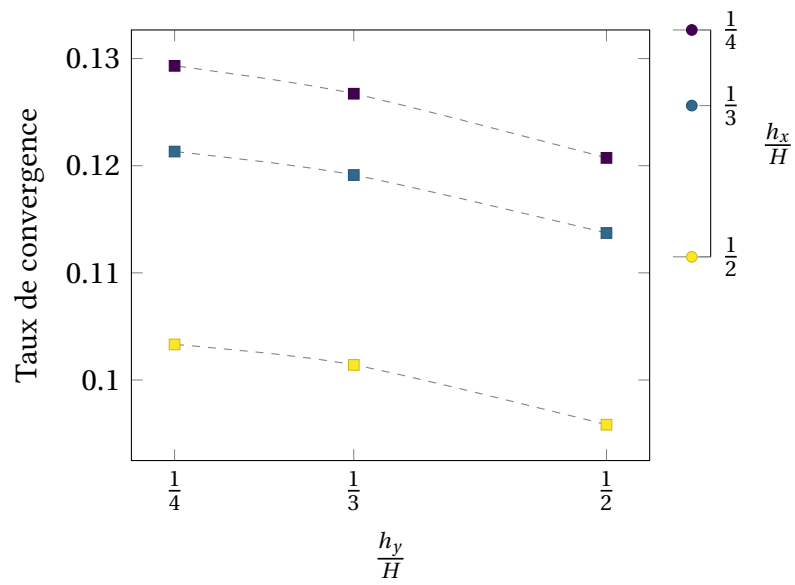


FIGURE 2.14 – Vitesse de convergence pour différents raffinements du patch

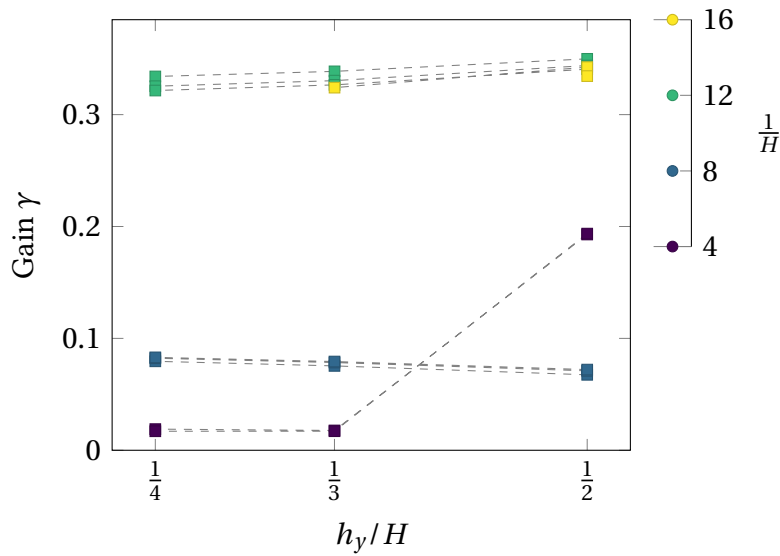


FIGURE 2.15 – Gain en erreur en dehors du patch par rapport à la solution grossière

La figure 2.15 présente ce gain pour différents maillages. Sur cette figure, sont présentés des résultats de résolution pour différents pas grossiers H , ainsi que différents pas d'espace h_x et h_y du patch. L'impact du paramètre h_x est très faible par rapport à celui des autres paramètres.

On distingue sur la figure 2.15 deux régimes distincts. D'une part, pour des maillages grossiers avec $H \geq 1/8$, le gain en erreur en dehors du patch est particulièrement important, avec des valeurs de γ inférieures à $1/10$. Pour ces maillages, le patch apporte donc une amélioration sensible à la solution du problème.

D'autre part, pour les maillages grossiers plus raffinés, le gain est nettement moins avantageux. En effet, le raffinement du maillage grossier est dans ce cas suffisant pour suivre la condition aux limites imposée. L'intérêt du patch est alors moindre.

Le temps de calcul pour la résolution du système est présenté dans la figure 2.16. On note une complexité quadratique par rapport au nombre totale de cellules dans les maillages. La figure 2.17 présente l'erreur en dehors du patch obtenue en fonction du temps de résolution du système.

On remarque encore l'intérêt important de la méthode pour les maillages grossiers avec $H > \frac{1}{10}$. En effet, les discontinuités illustrées sur les deux courbes de gauche dans la figure 2.17 correspondent à de faibles raffinements des patchs sur de tels maillages grossiers.

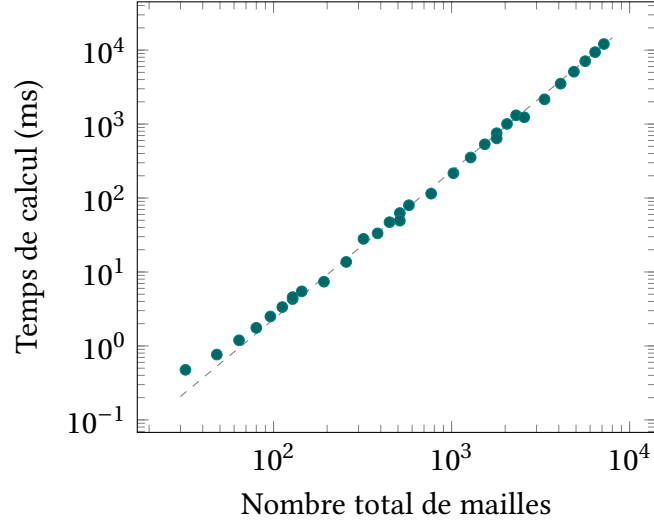


FIGURE 2.16 – Temps de calcul pour la résolution du système avec $H/h_x = 4$. La droite en pointillés correspond à une croissance quadratique.

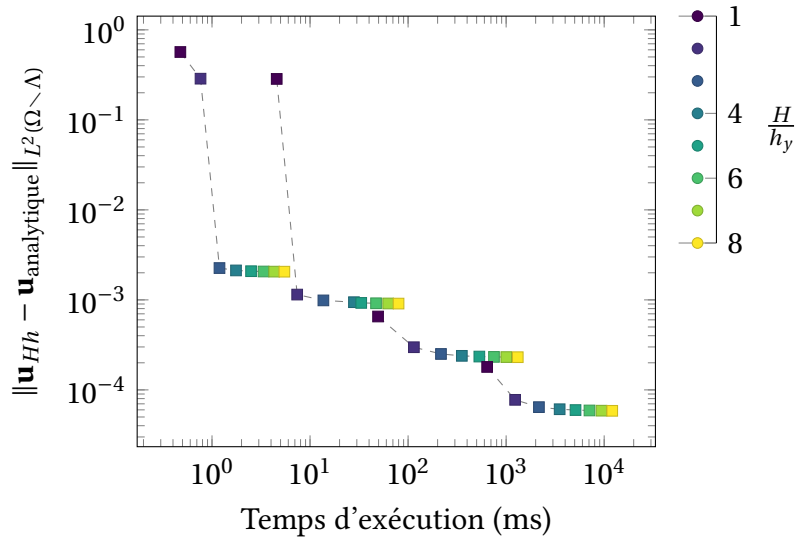


FIGURE 2.17 – Erreur totale et temps d'exécution pour différents maillages

2.4. Conclusion

Dans cette section, nous avons décrit l'implantation de cette méthode pour la résolution du problème de Poisson sur des éléments de type Q1. Les résultats numériques de convergence présentés dans le cas d'une perturbation volumique correspondent bien aux résultats sur les éléments triangulaires présents dans la littérature. De plus, nous avons montré la capacité de la méthode à résoudre de manière efficace une perturbation sur la condition aux limites aux échelles plus petites que la taille des éléments grossier. Dans les deux cas présentés, la méthode patch permet un compromis avantageux entre le temps de calcul nécessaire et l'erreur finale obtenue.

La méthode patch est donc une méthode flexible et efficace pour la résolution du problème de Poisson linéaire, en présence de paramètres variant localement sur de petites échelles. Cependant, les codes de simulation plasma utilisent couramment des modèles implicites non-linéaires pour les populations de particules les plus rapides. En particulier, le modèle de Boltzmann présenté plus haut induit une non-linéarité dans l'équation de Poisson. La résolution du système de Poisson-Boltzmann avec des termes multi-échelles nécessite donc un schéma de linéarisation de la méthode patch.

Chapitre 3.

Développement d'une méthode patch non-linéaire

Sommaire

3.1. Introduction	72
3.1.1. Problématique	72
3.1.2. Méthode de Newton-Raphson	73
3.1.3. Méthode de résolution couplée	74
3.2. Étude théorique du cas général	76
3.3. Application au problème de Poisson-Boltzmann	79
3.3.1. Problème de Poisson-Boltzmann	80
3.3.2. Propriétés de convergence	81
3.3.3. Traitement des conditions aux limites	83
3.4. Implantation dans le logiciel SPIS	85
3.4.1. Représentations des maillages	85
3.4.2. Solveur Poisson multigrille	86
3.4.3. Pousseur de particules	86
3.4.4. Post-traitement et visualisation des résultats	87
3.5. Application numérique à la simulation des interconnecteurs négatifs	87
3.5.1. Description de la géométrie	87
3.5.2. Convergence de l'algorithme patch non-linéaire	89
3.5.3. Résultats numériques	91
3.6. Conclusion	93

3.1. Introduction

Comme présenté au chapitre précédent, la méthode patch permet la résolution de l'équation de Poisson linéaire pour le calcul du champ électrique dans le cas d'une géométrie multi-échelle. Cependant, l'application du modèle de Maxwell-Boltzmann pour les populations d'électrons dans une simulation du plasma spatial induit une non-linéarité dans l'équation de Poisson.

Nous présentons dans cette section une extension de la méthode patch à une classe de problèmes non-linéaires. Un schéma de linéarisation est proposé, permettant d'appliquer la méthode patch à la résolution du problème non-linéaire de Poisson-Boltzmann. Une analyse théorique de la convergence est proposée, et nous montrons des résultats numériques obtenus sur une implantation dans le code 3D Particle-in-Cell SPIS.

3.1.1. Problématique

Soit un problème non-linéaire sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, écrit sous la forme variationnelle suivante :

Problème 3.1.1 : Trouver $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \langle a(\mathbf{u}) | \varphi \rangle = l(\varphi) \quad (3.1)$$

où $a \in \mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega))$ est un opérateur non-linéaire, et l est une forme continue sur $H_0^1(\Omega)$. Pour tout vecteur $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)$, la jacobienne $J_a(\mathbf{u})$ de a autour de \mathbf{u} est supposée uniformément continue et coercive.

Comme dans le cas linéaire présenté au chapitre précédent, on suppose que la solution du problème variationnel 3.1.1 varie lentement sur tout le domaine Ω , sauf localement dans un sous-domaine $\Lambda \subset \Omega$. Nous définissons comme précédemment un maillage grossier de Ω associé à un espace fonctionnel $V_H \subset H_0^1(\Omega)$ et un maillage raffiné de Λ associé à l'espace $V_h \subset H_0^1(\Lambda)$. On cherche à résoudre la discrétisation du problème 3.1.1 sur l'espace $V_{Hh} = V_H + V_h$:

Problème 3.1.2 : Trouver $\mathbf{u}_{Hh} \in V_{Hh}$ tel que

$$\forall \varphi \in V_{Hh}, \langle a(\mathbf{u}_{Hh}) | \varphi \rangle = l(\varphi) \quad (3.2)$$

On peut noter que l'unique différence entre le problème 3.1.2 et le problème linéaire 2.1.4 présenté au chapitre précédent est la non-linéarité de l'opérateur a .

Par la suite, nous noterons indifféremment la forme l et son vecteur dual \mathbf{l} d'après le théorème de représentation de Fréchet-Riesz :

$$l(\varphi) = \langle \mathbf{l} | \varphi \rangle \quad (3.3)$$

3.1.2. Méthode de Newton-Raphson

Une méthode classique de résolution de la non-linéarité du problème 3.1.2 est l'algorithme de Newton-Raphson. Cet algorithme calcule itérativement une solution rapprochée d'un problème non-linéaire en résolvant successivement la linéarisation du problème initial aux différents itérés obtenus, comme présenté dans l'algorithme 4.

ALGORITHME 4 – Algorithme de Newton-Raphson pour résoudre $a(\mathbf{u} \in V) = \mathbf{l}$

Entrées : $\mathbf{u}_0 \in V$

1 **pour** $i \in \mathbb{N}$ **faire**

2 Calculer $R(\mathbf{u}_n) = \mathbf{l} - a(\mathbf{u}_n)$

3 Trouver \mathbf{u}_{n+1} tel que $J_a(\mathbf{u}_n) \cdot (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) = R(\mathbf{u}_n)$

4 **fin**

Il est à noter que dans le cas où l'espace V est la somme de plusieurs maillages comme dans le cas qui nous intéresse, l'étape 3 peut être réalisée par application de l'algorithme de la méthode patch sur le problème linéarisé suivant :

Problème 3.1.3 : Trouver $\delta \mathbf{u} \in V_{Hh}$ tel que

$$\forall \varphi \in V_{Hh}, \langle J_a(\mathbf{u}_n) \cdot \delta \mathbf{u} | \varphi \rangle = \langle R(\mathbf{u}_n) | \varphi \rangle \quad (3.4)$$

La méthode obtenue pour la résolution du système non-linéaire sur le domaine muni d'un patch est alors similaire à la méthode Newton-Multigrille [29], en utilisant le schéma de résolution de la méthode patch. Le problème linéarisé est résolu jusqu'à la convergence de la méthode patch, et il y a alors découplage entre les algorithmes de Newton-Raphson, résolvant la non-linéarité, et l'algorithme de la méthode patch, qui permet la résolution dans

l'espace multi-grilles. L'algorithme de Newton-Raphson est connu pour sa convergence quadratique, et on peut espérer avec cette méthode un nombre limité de linéarisations.

Un inconvénient de cette méthode est la résolution excessive de chaque problème linéarisé. En effet, il n'est pas nécessaire de résoudre avec précision le problème linéarisé tant que le point de linéarisation est loin de la solution du problème.

3.1.3. Méthode de résolution couplée

Une alternative à la méthode de Newton développée dans la section précédente, est de coupler les algorithmes de la méthode Patch et de Newton-Raphson. L'idée de cette méthode est d'utiliser une variante de la méthode Patch en linéarisant le problème à chaque itération, comme présenté dans l'algorithme 5.

ALGORITHME 5 – Algorithme de la méthode patch linéarisée	
Entrées : $\mathbf{u}^0 \in V_{Hh}$	
1	pour $i \in \mathbb{N}$ faire
2	Trouver \mathbf{u}_h^{n+1} tel que
	$\forall \varphi \in V_h, \langle J_a(\mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} \varphi \rangle = \langle \mathbf{1} - a(\mathbf{u}^n) \varphi \rangle$
3	Poser $\mathbf{u}^{n+1/2} = \mathbf{u}^n + \omega_r \mathbf{u}_h^{n+1}$
4	Trouver \mathbf{u}_H^{n+1} tel que
	$\forall \varphi \in V_H, \langle J_a(\mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{u}_H^{n+1} \varphi \rangle = \langle \mathbf{1} - a(\mathbf{u}^n) - J_a(\mathbf{u}^n) \cdot \omega_r \mathbf{u}_h^{n+1} \varphi \rangle$
5	Poser $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1/2} + \omega_r \mathbf{u}_H^{n+1}$
6	fin

L'intérêt de cet algorithme par rapport à l'algorithme précédent est qu'il utilise à chaque itération de la méthode patch une meilleure linéarisation du problème. Il est également possible d'adapter l'algorithme à convergence accélérée présenté en 2 en remplaçant l'espace V_H par l'espace \tilde{V}_H des fonctions harmoniques sur le patch, comme défini à l'équation 2.5. Comme dans le cas linéaire, la résolution de l'équation suivante :

$$\forall \varphi \in \tilde{V}_H, \langle J_a(\mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{u}_H^{n+1} | \varphi \rangle = \langle \mathbf{1} - a(\mathbf{u}^n) - J_a(\mathbf{u}^n) \cdot \omega_r \mathbf{u}_h^{n+1} | \varphi \rangle \quad (3.5)$$

peut se faire simplement par la résolution successive sur les espaces V_H^0 et V_H , d'après la définition de \bar{V}_H comme le complémentaire orthogonal de V_H^0 dans V_H .

Soit $\mathbf{u}_l \in V_{Hh}$ une estimation de la solution du problème 3.1.2, et $\delta \mathbf{u} \in V_{Hh}$ une correction à cette estimation. Notons $R_{\mathbf{u}_l}(\delta \mathbf{u})$ le résidu de $\mathbf{u}_l + \delta \mathbf{u}$ pour le problème 3.1.2 linéarisé autour de \mathbf{u}_l :

$$R_{\mathbf{u}_l}(\delta \mathbf{u}) = \mathbf{1} - a(\mathbf{u}_l) - J_a(\mathbf{u}_l) \cdot \delta \mathbf{u} \quad (3.6)$$

On peut noter que l'équation 3.2 est équivalente à $R_{\mathbf{u}_{Hh}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Les deux algorithmes 4 et 5 présentés ici peuvent être vus comme deux cas particuliers d'un algorithme général que nous appellerons *méthode patch non-linéaire*, et présenté dans l'algorithme 6.

ALGORITHME 6 – Algorithme de la méthode patch non-linéaire

Entrées : $\mathbf{u}^0 \in V_{Hh}$, $\mathbf{u}_l = \mathbf{u}^0$

1 **pour** $i \in \mathbb{N}$ **faire**

2 Trouver \mathbf{u}_h^{n+1} tel que

$$\forall \varphi \in V_h, \langle J_a(\mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} | \varphi \rangle = \langle R_{\mathbf{u}_l}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_l) | \varphi \rangle$$

3 Poser $\mathbf{u}^{n+1/2} = \mathbf{u}^n + \omega_r \mathbf{u}_h^{n+1}$

4 Trouver \mathbf{u}_H^{n+1} tel que

$$\forall \varphi \in V_H, \langle J_a(\mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{u}_H^{n+1} | \varphi \rangle = \langle R_{\mathbf{u}_l}(\mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{u}_l) | \varphi \rangle$$

5 Poser $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1/2} + \omega_r \mathbf{u}_H^{n+1}$

6 **si** $\|R_{\mathbf{u}_l}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_l)\| < \epsilon \|R_{\mathbf{u}_l}(\mathbf{0})\|$ **alors**

7 Poser $\mathbf{u}_l = \mathbf{u}^{n+1}$

8 **fin**

9 **fin**

L'algorithme 6 réalise une méthode de type patch classique sur le problème linéarisé autour d'une solution intermédiaire \mathbf{u}_l . Un critère de convergence comparant l'erreur de linéarisation et l'erreur de la résolution multi-grille permet la re-linéarisation du problème (étape 7). Un paramètre ϵ est utilisé dans le critère de convergence. On remarque que les algorithmes présentés précédemment correspondent à des valeurs particulières de ce

paramètre :

- ★ $\epsilon \ll 1$: La re-linéarisation du problème n'est faite qu'à la convergence de la méthode patch. Dans ce cas, la méthode patch non-linéaire correspond à l'algorithme de Newton-Raphson classique.
- ★ $\epsilon \gg 1$: La re-linéarisation du problème est faite à chaque itération, et la méthode est équivalente à l'algorithme patch linéarisé 5.

Qualitativement, le paramètre ϵ permet un compromis entre le nombre de linéarisations utilisées et le nombre d'itérations de la méthode patch par linéarisation.

Le paramètre de relaxation ω_r qui apparaît dans les algorithmes 5 et 6 permet l'optimisation de la vitesse de convergence. Cependant, l'évaluation de la valeur optimale de ce paramètre, présenté dans [82], est relativement coûteuse en temps de calcul, et dépend d'une part du maillage utilisé et d'autre part du problème linéaire posé. Dans le cas de maillages conformes tels que ceux que nous utilisons, la valeur optimale de ce paramètre est proche de l'unité, et nous utiliserons $\omega_r = 1$ dans la suite.

3.2. Étude théorique du cas général

Nous prouvons dans cette section la convergence de l'algorithme dans la formulation générale présentée dans l'algorithme 6. La preuve présentée ici a fait l'objet d'une publication au congrès européen de mathématiques appliquées ECCOMAS 2016 [8].

Notons \mathbf{u}_l et \mathbf{u}'_l deux points de linéarisation successifs calculés par l'algorithme 6. \mathbf{u}'_l est donc la solution obtenue après un nombre n d'itérations de la méthode patch appliquée au problème linéarisé autour de \mathbf{u}_l , avec pour solution initiale \mathbf{u}_l . D'après les résultats de convergence de la méthode patch présentés au chapitre 2, on a donc la propriété suivante :

Lemme 3.2.1 : Soit \mathbf{u}_l^* la solution du problème 3.1.2 linéarisé en \mathbf{u}_l . Il existe une constante $C \in]0, 1[$ telle que :

$$\|\mathbf{u}'_l - \mathbf{u}_l^*\| \leq C^n \|\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_l^*\| \quad (3.7)$$

De plus, notons $h_{\mathbf{u}_l}$ le résidu quadratique dans la développement de Taylor de a autour de \mathbf{u}_l :

$$a(\mathbf{u}_l + \delta \mathbf{u}) = a(\mathbf{u}_l) + J_a(\mathbf{u}_l) \cdot \delta \mathbf{u} + h_{\mathbf{u}_l}(\delta \mathbf{u}) \quad (3.8)$$

Ce résidu vérifie la propriété suivante :

Lemme 3.2.2 : Soit $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ une suite convergente et \mathbf{u}_∞ sa limite. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|h_{\mathbf{u}_n}(\mathbf{u}_\infty - \mathbf{u}_n)\|}{\|\mathbf{u}_\infty - \mathbf{u}_n\|} = 0 \quad (3.9)$$

Démonstration. Par développement de Taylor autour des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} , on a :

$$a(\mathbf{u}) - a(\mathbf{v}) = J_a(\mathbf{v})(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + h_{\mathbf{v}}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (3.10)$$

$$= J_a(\mathbf{u})(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - h_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad (3.11)$$

En réarrangeant les termes de droite, on obtient l'équation suivante :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^2, h_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = (J_a(\mathbf{u}) - J_a(\mathbf{v}))(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - h_{\mathbf{v}}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (3.12)$$

En prenant la norme de cette équation, et d'après l'inégalité triangulaire, on a donc :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^2, \|h_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} - \mathbf{u})\| \leq \|J_a(\mathbf{v}) - J_a(\mathbf{u})\| \cdot \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| + \|h_{\mathbf{v}}(\mathbf{u} - \mathbf{v})\| \quad (3.13)$$

Ainsi, pour tout élément de la suite $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\frac{\|h_{\mathbf{u}_n}(\mathbf{u}_\infty - \mathbf{u}_n)\|}{\|\mathbf{u}_\infty - \mathbf{u}_n\|} \leq \|J_a(\mathbf{u}_\infty) - J_a(\mathbf{u}_n)\| + \frac{\|h_{\mathbf{u}_\infty}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty)\|}{\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_\infty\|} \quad (3.14)$$

Par continuité de la jacobienne, et par définition du résidu $h_{\mathbf{u}}$, le terme de droite converge vers 0 quand \mathbf{u}_n converge vers \mathbf{u}_∞ . \square

À un point de linéarisation du problème donné \mathbf{u}_l , et pour une solution intermédiaire \mathbf{u} , il est possible de décomposer l'erreur totale $(\mathbf{u}_{Hh} - \mathbf{u})$ en une partie correspondante à l'erreur de linéarisation $(\mathbf{u}_{Hh} - \mathbf{u}_l^*)$, et une partie correspondante à l'erreur de résolution $(\mathbf{u}_l^* - \mathbf{u})$. En particulier, on montre la relation suivante entre l'erreur de linéarisation et l'erreur totale initiale :

Lemme 3.2.3 : Pour tout point de linéarisation $\mathbf{u}_l \in V$, en notant \mathbf{u}_{Hh} la solution du problème non-linéaire et \mathbf{u}_l^* la solution du problème linéarisé, on a :

$$J_a(\mathbf{u}_l)(\mathbf{u}_l^* - \mathbf{u}_{Hh}) = h_{\mathbf{u}_l}(\mathbf{u}_{Hh} - \mathbf{u}_l) \quad (3.15)$$

Démonstration.

$$J_a(\mathbf{u}_l)(\mathbf{u}_l^* - \mathbf{u}_{Hh}) = J_a(\mathbf{u}_l)(\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{Hh}) + J_a(\mathbf{u}_l)(\mathbf{u}_l^* - \mathbf{u}_l) \quad (3.16)$$

$$= J_a(\mathbf{u}_l)(\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{Hh}) + \mathbf{I} - a(\mathbf{u}_l) \quad (3.17)$$

$$= J_a(\mathbf{u}_l)(\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{Hh}) + a(\mathbf{u}_{Hh}) - a(\mathbf{u}_l) \quad (3.18)$$

$$= h_{\mathbf{u}_l}(\mathbf{u}_{Hh} - \mathbf{u}_l) \quad (3.19)$$

□

A partir de ces différents lemmes, on montre donc le lemme suivant, décrivant l'évolution de l'erreur globale entre deux linéarisations dans l'algorithme 6 :

Lemme 3.2.4 : Soit C^n la borne introduite dans le lemme 3.2.1. Il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$, dépendant de \mathbf{u}_l , telle que :

$$\|\mathbf{u}_l' - \mathbf{u}_{Hh}\| \leq \left(C^n + \lambda \frac{\|h_{\mathbf{u}_l}(\mathbf{u}_{Hh} - \mathbf{u}_l)\|}{\|\mathbf{u}_{Hh} - \mathbf{u}_l\|} \right) \|\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{Hh}\| \quad (3.20)$$

Démonstration. Notons \mathcal{C}_J la constante de coercivité de la jacobienne $J_a(\mathbf{u}_l)$. On a alors les inégalités suivantes :

$$\|\mathbf{u}_l' - \mathbf{u}_{Hh}\| \leq \|\mathbf{u}_l' - \mathbf{u}_l^*\| + \|\mathbf{u}_l^* - \mathbf{u}_{Hh}\| \quad (3.21)$$

$$\leq C^n \|\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_l^*\| + \|\mathbf{u}_l^* - \mathbf{u}_{Hh}\| \quad (\text{lemme 3.2.1}) \quad (3.22)$$

$$\leq C^n \|\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{Hh}\| + (1 + C^n) \|\mathbf{u}_l^* - \mathbf{u}_{Hh}\| \quad (3.23)$$

$$\leq C^n \|\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{Hh}\| + (1 + C^n) \frac{\|J_a(\mathbf{u}_l)(\mathbf{u}_l^* - \mathbf{u}_{Hh})\|}{\mathcal{C}_J} \quad (\text{par coercivité de } J_a(\mathbf{u}_l)) \quad (3.24)$$

$$= \left(C^n + \frac{C^n + 1}{\mathcal{C}_J} \frac{\|h_{\mathbf{u}_l}(\mathbf{u}_{Hh} - \mathbf{u}_l)\|}{\|\mathbf{u}_{Hh} - \mathbf{u}_l\|} \right) \|\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{Hh}\| \quad (\text{lemme 3.2.3}) \quad (3.25)$$

On a donc bien le résultat attendu en posant $\lambda = \frac{C^{n+1}}{\mathcal{C}_J}$. \square

À la lumière du lemme 3.2.2, on peut noter que ce lemme 3.2.4 décrit la convergence locale de l'algorithme 6. En effet, le lemme 3.2.2 implique l'existence d'un voisinage de \mathbf{u}_{Hh} tel que tout élément \mathbf{u} vérifie

$$\frac{\|h_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_{Hh} - \mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}_{Hh} - \mathbf{u}\|} < \frac{1 - C^n}{\lambda}. \quad (3.26)$$

où λ est choisi de manière uniforme par régularité de a . Dans ce voisinage, le lemme 3.2.4 prédit donc la convergence de l'algorithme patch non-linéaire. On a donc le théorème général suivant :

Théorème 3.2.5 : *Il existe un voisinage V de \mathbf{u}_{Hh} tel que l'algorithme 6 converge si $\mathbf{u}_0 \in V$.*

On peut également noter l'influence du paramètre ϵ qui apparaît dans l'algorithme 6. La réduction de ce paramètre entraîne une augmentation du nombre d'itérations patch entre deux linéarisation. L'impact sur la convergence est donc une augmentation de la puissance n qui apparaît dans le lemme 3.2.4. En faisant tendre ϵ vers zéro, le lemme 3.2.4 donne alors le résultat suivant :

$$\|\mathbf{u}'_l - \mathbf{u}_{Hh}\| \leq \frac{\|h_{\mathbf{u}_l}(\mathbf{u}_{Hh} - \mathbf{u}_l)\|}{\mathcal{C}_J \|\mathbf{u}_{Hh} - \mathbf{u}_l\|} \|\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{Hh}\| \quad (3.27)$$

3.3. Application au problème de Poisson-Boltzmann

Cette section présente l'application de la méthode patch non-linéaire pour la résolution de l'équation de Poisson-Boltzmann. Comme présenté à la section 1.3.5, cette équation remplace l'équation linéaire de Poisson lors de la simulation d'un plasma dont une des populations est à l'équilibre thermodynamique [33]. La dynamique des ions étant souvent beaucoup plus lente que celle des électrons, on considèrera dans cette partie que cette population à l'équilibre correspond aux électrons du plasma.

3.3.1. Problème de Poisson-Boltzmann

Nous rappelons que l'équation de Poisson-Boltzmann s'écrit :

$$-\Delta\phi - \frac{q_e n_e}{\epsilon_0} \exp\left(-\frac{q_e \phi}{kT_e}\right) = \frac{\rho_{\text{reste}}}{\epsilon_0} \quad (3.28)$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide, ϕ est le potentiel électrostatique, q_e la charge d'un électron, n_e la densité d'électrons, k la constante de Boltzmann, et T_e la température électronique. Ici, ρ_{reste} représente la densité de charge liée aux ions, supposée indépendante du potentiel lors de la résolution de cette équation.

À cette équation viennent s'ajouter des conditions aux limites. Par souci de simplification, on suppose ici que des conditions de Dirichlet sont appliquées sur l'ensemble de la frontière du domaine :

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \phi(\mathbf{x}) = \phi_d(\mathbf{x}) \quad (3.29)$$

En appliquant la formule de Green, cette équation se formule sous forme variationnelle dans l'espace V_{Hh} de la manière suivante :

$$\forall \varphi \in V_{Hh}, \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{q_e n_e}{\epsilon_0} \exp\left(-\frac{q_e \phi}{kT_e}\right) \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{\rho_{\text{reste}}}{\epsilon_0} \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \varphi \, d\mathbf{n} \quad (3.30)$$

On remarque que l'équation 3.30 est similaire à la formulation variationnelle de l'équation de Poisson présentée à l'équation 2.9, à laquelle on a ajouté un terme non-linéaire. On utilisera la notation simplifiée suivante pour ce terme :

$$B(\phi) = \frac{q_e n_e}{\epsilon_0} \exp\left(-\frac{q_e \phi}{kT_e}\right) \quad (3.31)$$

En utilisant cette notation, on peut ramener le problème de la résolution de l'équation de Poisson-Boltzmann sous la forme du problème 3.1.2, en posant :

$$a(\mathbf{u}) = K\mathbf{u} - B(\mathbf{u}) \quad (3.32)$$

$$\mathbf{l} = \frac{\rho_{\text{reste}}}{\epsilon_0} \quad (3.33)$$

où K est la matrice de rigidité introduite pour le problème de Poisson linéaire.

En particulier, la jacobienne de l'opérateur a s'exprime particulièrement simplement :

$$J_a(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} = K \delta \mathbf{u} + \frac{q_e^2 n_e}{\epsilon_0 k T_e} \exp\left(-\frac{q_e \mathbf{u}}{k T_e}\right) \delta \mathbf{u} \quad (3.34)$$

On remarque donc que la jacobienne est uniformément continue et coercive, comme supposé dans l'introduction de ce chapitre. Il est donc possible d'utiliser la méthode patch non-linéaire pour résoudre cette équation.

3.3.2. Propriétés de convergence

Comme présenté dans la section précédente, la convergence de la méthode patch non-linéaire est assurée dans un voisinage de la solution vérifiant l'équation 3.26.

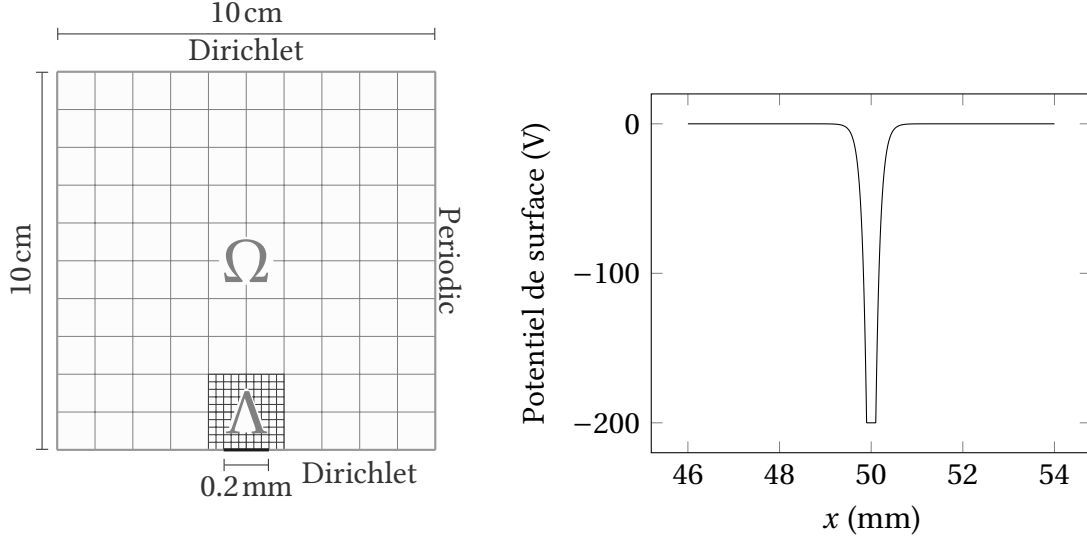
Le résidu quadratique $h_{\mathbf{u}_l}$ pour l'opérateur de Poisson-Boltzmann s'exprime de la façon suivante :

$$h_{\mathbf{u}_l}(\delta \mathbf{u}) = B(\mathbf{u}_l) \left[\exp\left(-\frac{q_e}{k T_e} \delta \mathbf{u}\right) - \left(1 - \frac{q_e}{k T_e} \delta \mathbf{u}\right) \right] \quad (3.35)$$

On note que, dans le régime de validité du modèle de Boltzmann, ce résidu reste faible. En effet, dans les régions où le potentiel est largement négatif, c'est à dire près des surfaces chargées du satellite, le terme exponentiel $B(\mathbf{u}_l)$ est très petit. Au contraire, dans les régions où le potentiel est faible, on s'attend à avoir une erreur locale faible par rapport à la température électronique. Le second terme est alors petit devant $\delta \mathbf{u}$.

Nous avons donc implanté la méthode dans un solveur 2D à maillage structuré. La méthode est appliquée sur un domaine présenté dans la figure 3.1.a. La surface du satellite est représentée à l'aide d'une condition aux limites de type Dirichlet appliquée sur la frontière sud, au centre de laquelle une discontinuité locale représente un interconnecteur, comme présenté sur la figure 3.1.b. Sur la frontière nord du domaine, une condition de type Dirichlet homogène modélise le plasma spatial. Sur les bords latéraux du domaine, une condition de périodicité est utilisée pour représenter un panneau infini. Un patch est ajouté localement près de l'interconnecteur. La densité d'ions est uniforme dans le domaine, et égale à la densité d'électrons au potentiel nul.

La méthode patch non-linéaire est implantée de manière similaire à la méthode patch classique présentée au chapitre précédent. Pour étudier la convergence numérique de la méthode nous introduisons les résidus suivants. En notant $(\varphi)_i$ et $(\psi)_i$ des bases respectives



(a) Domaine de simulation utilisé (b) Valeur du potentiel fixé sur la frontière sud

FIGURE 3.1 – Présentation de la simulation 2D réalisée

des espaces V_h et V_H , on pose :

$$\|R_{\mathbf{u}_l}(\mathbf{u})\|^2 = \sum_i \langle R_{\mathbf{u}_l}(\mathbf{u}) | \varphi_i \rangle^2 + \sum_i \langle R_{\mathbf{u}_l}(\mathbf{u}) | \psi_i \rangle^2 \quad (3.36)$$

Ainsi, à l'itération n utilisant une linéarisation autour de \mathbf{u}_l , $\|R_{\mathbf{u}_l}(\mathbf{0})\|$ représente le résidu de linéarisation et $\|R_{\mathbf{u}_l}(\mathbf{u}_n)\|$ représente le résidu dans la résolution du système linéarisé.

La figure 3.2 présente la convergence de ces deux résidus, pour un maillage grossier de 11×11 cellules, et un patch raffiné de 120×120 cellules recouvrant une surface de 3×3 cellules grossières proches de l'interconnecteur. Le critère de linéarisation est fixé à $\epsilon = 10^{-2}$.

Sur cette figure, le résidu de linéarisation $\|R_{\mathbf{u}_l}(\mathbf{0})\|$ ne change qu'aux itérations où le point de linéarisation \mathbf{u}_l est mis à jour. On remarque que cette mise à jour est systématique lors des 8 premières itérations. En effet, une seule itération de la méthode patch est suffisante au début de l'algorithme pour rendre l'erreur de résolution négligeable par rapport à l'erreur de linéarisation. Durant ces itérations, la convergence est quadratique de manière similaire à la méthode classique de Newton.

À partir de la huitième itération, l'erreur de linéarisation est du même ordre que l'erreur

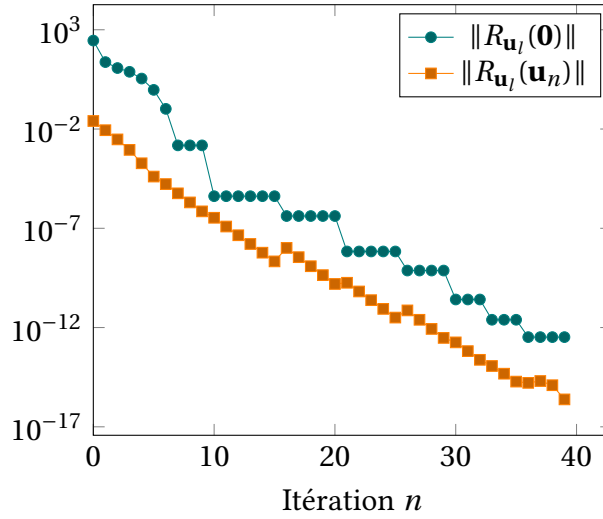


FIGURE 3.2 – Convergence de la méthode patch non-linéaire pour le problème de Poisson-Boltzmann 2D

de résolution. L'algorithme applique alors plusieurs itérations de la méthode patch entre chaque linéarisation. Sur la figure 3.2, ceci est représenté par les plateaux formés par le résidu de linéarisation aux itérations 8, 10, 16 et 21.

On remarque également que le résidu de résolution peut augmenter au moment d'une mise à jour du point de linéarisation. C'est le cas par exemple à l'itération numéro 16. Une augmentation temporaire de ce résidu correspond à une résolution trop précise au point de linéarisation précédent. Ce phénomène peut être évité en augmentant la valeur du paramètre ϵ , augmentant de fait la fréquence des linéarisations du problème. Une valeur idéale de ϵ serait la valeur minimale assurant la stricte monotonie du résidu de résolution. Comme le prévoit l'analyse théorique, le résidu de linéarisation est quant à lui décroissant de linéarisation en linéarisation, et ce indépendamment du paramètre ϵ . La convergence globale de la méthode est asymptotiquement linéaire, comme dans le cas de la méthode patch classique.

3.3.3. Traitement des conditions aux limites

Pour assurer la continuité de la solution à la frontière du patch en volume, il est nécessaire d'appliquer sur le patch une condition de Dirichlet homogène.

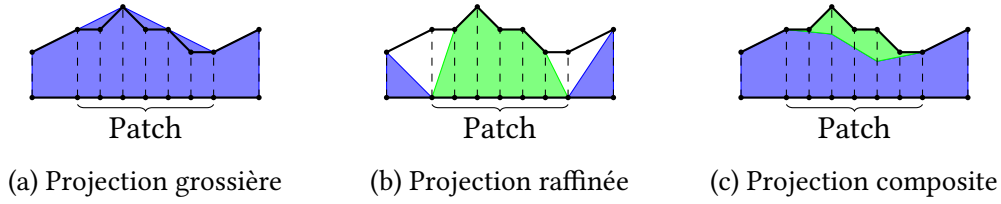


FIGURE 3.3 – Différentes projections d’une condition aux limites de type Dirichlet non homogène. En bleu est représenté la composante grossière de la solution, et en vert la composante raffinée.

Lorsque le patch est situé au niveau de la frontière du domaine, comme c’est le cas pour la simulation des interconnecteurs de générateurs solaires, la prise en compte des conditions aux limites impose un traitement particulier.

En effet, la condition de Dirichlet non homogène imposée sur ces surfaces porte sur la solution globale \mathbf{u}_{Hh} . Il convient alors de choisir pour chaque maillage des conditions aux limites permettant d’assurer cette condition globale. D’une part, il est impossible d’utiliser une condition de Dirichlet homogène sur le patch comme on le fait pour les frontières du patch contenues dans le volume de la simulation. Une telle condition limiterait grandement la résolution sur le potentiel de surface, comme présenté sur la figure 3.3.a. D’autre part, la continuité du potentiel au bord du patch empêche d’appliquer cette même condition de Dirichlet homogène sur le maillage grossier, si les surfaces voisines du patch sont chargées, comme présenté sur la figure 3.3.b.

Pour assurer cette condition aux limites sur la solution globale, on applique donc une condition de type Dirichlet sur la méthode patch, avec une valeur à chaque nœud calculée en fonction de la valeur locale de la solution grossière. Cette solution grossière est arbitraire, tant qu’elle vérifie la condition aux limites imposée en dehors du patch, et qu’elle est continue à l’intérieur du patch. En 2D, le plus simple est de choisir une solution grossière linéaire sur le patch. En 3D, l’application d’une condition aux limites de type Neumann sur le maillage grossier au niveau du patch permet d’assurer facilement la régularité de la solution. Cependant, il est alors nécessaire de mettre à jour la condition de Dirichlet sur le maillage raffiné à chaque itération sur le maillage grossier. Chaque composante de la solution globale est alors non nulle sur le bord, comme présenté dans la figure 3.3.c.

3.4. Implantation dans le logiciel SPIS

Nous présentons dans cette section l'implantation de la méthode patch non-linéaire dans le cœur numérique du code de simulation SPIS. Comme présenté dans la section 1.4.3, la simulation de l'interaction plasma-satellite est décomposée en trois modules. D'une part, un simulateur de circuit électrique modélise le comportement du satellite à proprement parler, et fournit au code plasma les potentiels de surfaces sur le satellite sous la forme de conditions aux limites. D'autre part, le solveur plasma est un code de type Particle-in-Cell, composé d'un pousseur de particules et d'un solveur de champ électrique. L'implantation de la méthode patch non-linéaire dans ce code implique une modification à la fois du solveur Poisson ; pour l'implantation à proprement parler de la méthode numérique, et du pousseur de particules ; pour l'adapter aux maillages colocalisés qui font la spécificité des méthodes de type patch.

3.4.1. Représentations des maillages

Par souci de simplicité, et pour éviter toute modification de l'interface utilisateur de SPIS, les maillages grossier et patch sont fournis au cœur numérique sous la forme d'un unique maillage, non connexe, et possédant des mailles colocalisées. Seuls les maillages conformes sont supportés par l'implantation actuelle.

La génération du maillage est réalisée en deux étapes. Dans un premier temps, le maillage grossier est généré en utilisant le mailleur Gmsh [23]. Les mailles contenant le patch sont regroupées dans un volume physique spécifique. Un code spécifique permet alors de générer le maillage du patch par subdivision des mailles de ce volume physique. Les deux maillages sont alors fusionnés par simple re-numérotation et concaténation.

Cette représentation des maillages présente l'inconvénient d'obliger la reconstruction des liens géométriques entre les différents maillages. Il est donc nécessaire lors du chargement des maillages dans SPIS de déterminer, pour chaque élément du patch, dans quel élément du maillage grossier il est contenu. De manière similaire, il est nécessaire de calculer les liens entre les surfaces des éléments à la frontière du patch.

3.4.2. Solveur Poisson multigrille

Le solveur Poisson non-linéaire de SPIS a été modifié pour permettre l'utilisation de la méthode patch non-linéaire. Cette adaptation recouvre deux principaux axes. D'une part, le solveur doit être capable de résoudre le système linéarisé indépendamment sur chaque sous-ensemble de l'espace complet. D'autre part, il est nécessaire de pouvoir calculer les termes croisés qui apparaissent dans l'algorithme de la méthode patch non-linéaire, représentant le couplage entre les différents maillages.

Par construction, le maillage global utilisé n'est pas connexe. L'application de l'algorithme de Cuthill-McKee [15] sur un tel maillage a pour conséquence de regrouper les nœuds par composantes connexes. Suite à cette renumérotation, la matrice de rigidité assemblée pour le maillage est donc diagonale par bloc. Ces blocs sont identifiés après l'assemblage de la matrice en utilisant un algorithme de complexité linéaire en la taille de la diagonale de la matrice présenté en annexe A. L'inversion d'un sous-système est relativement facile à réaliser, étant donné que l'algorithme du gradient conjugué ne fait intervenir que des opérations matricielles simples.

Après chaque résolution du système multigrille, la solution totale (décomposée sur les espaces V_H et V_h) est projetée sur chaque maillage, de manière à obtenir le potentiel réel local sur chaque nœud. Ceci évite une modification extensive du reste du code, en particulier au niveau du calcul des champs électriques locaux dans le pousseur de particules, ainsi que du calcul des courants collectés par les surfaces, qui utilisent le potentiel local sur chaque maillage.

3.4.3. Pousseur de particules

Le pousseur de particules a également été modifié pour gérer le caractère multigrille de la simulation. Les particules sont systématiquement poussées sur le maillage le plus raffiné possible, et la densité de charge est intégrée simultanément sur les deux maillages pour les particules contenues dans le patch.

A la frontière du patch, une table de correspondance entre les cellules grossières et les cellules du patch permet de déterminer efficacement dans quelle cellule entre une particule traversant la surface.

3.4.4. Post-traitement et visualisation des résultats

Pour leur visualisation, les différents résultats de simulation (densités de charge, potentiel électrostatique, courants de surface, etc.) doivent être projetés sur un maillage ne possédant pas de mailles colocalisées.

À l'aide de simples filtres, les résultats sont exportés sur chaque maillage indépendamment, ainsi que sur le maillage vu par les particules, correspondant au maillage total privé des mailles grossières au niveau du patch.

3.5. Application numérique à la simulation des interconnecteurs négatifs

Nous présentons ici un exemple d'application de la méthode patch non-linéaire réalisé avec le logiciel SPIS. En utilisant une géométrie simple, nous comparons les résultats obtenus avec la méthode patch non-linéaire à ceux obtenus à l'aide d'une méthode classique très raffinée.

3.5.1. Description de la géométrie

La simulation présentée ici correspond à un interconnecteur chargé négativement et isolé dans un domaine relativement large. La géométrie du domaine est présentée sur la figure 3.4. Le domaine est une boîte de dimensions $2\text{ m} \times 1\text{ m} \times 0,5\text{ m}$. Une des plus grandes faces représente la surface satellite, où nous appliquons une condition de Dirichlet représentative de la charge d'un matériau diélectrique. Au centre de cette face, un petit rectangle de dimensions $1\text{ mm} \times 3\text{ mm}$ est chargé négativement et représente l'interconnecteur. Sur toutes les autres faces du domaine, une condition de type Neumann homogène est utilisée.

Un patch est généré dans une boîte de $10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ autour de l'interconnecteur, où chaque maille grossière est subdivisée environ en 125 mailles raffinées. Les mailles grossières dans le maillages ont des tailles caractéristiques de 10 cm. Pour mailler l'interconnecteur de taille millimétrique, les mailles grossières sont localement dégénérées, comme illustré en figure 3.5. Dans le patch, les mailles raffinées ont des tailles caractéristiques comprises entre 2 cm et 0,1 mm.

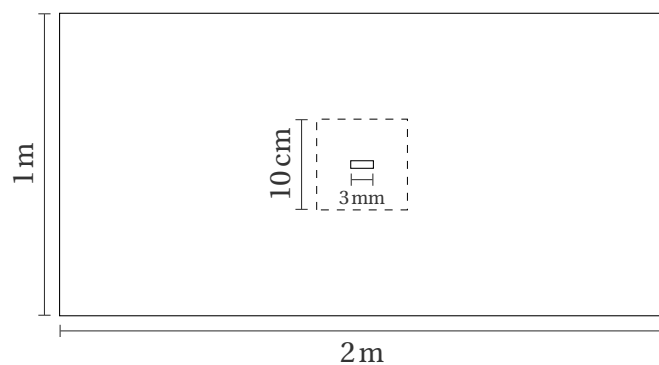


FIGURE 3.4 – Géométrie utilisée lors de la simulation. Les traits pointillés représentent la frontière du patch.

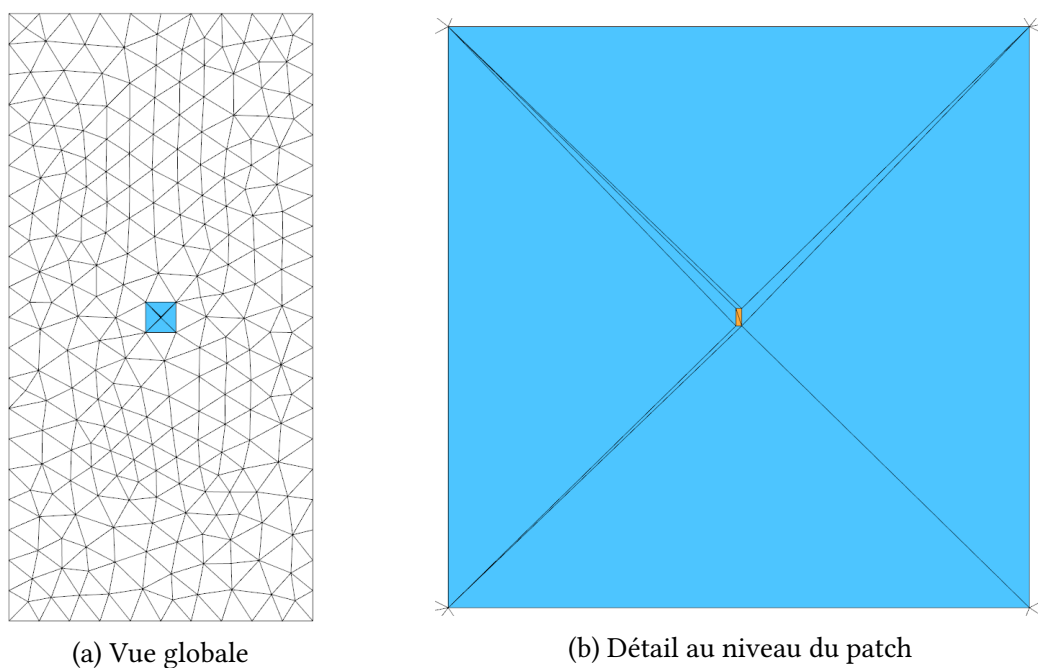


FIGURE 3.5 – Maillage grossier sur la surface contenant l'interconnecteur. Sont représentés en bleu les mailles grossières contenues dans le patch, en orange l'interconnecteur.

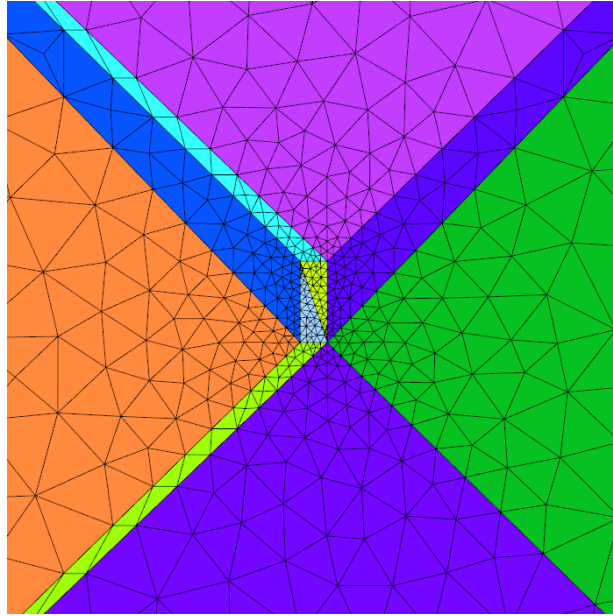


FIGURE 3.6 – Maillage raffiné surfacique autour de l'interconnecteur. Chaque couleur correspond à une maille grossière.

La densité de charge électronique à l'infini est choisie à $5,53 \times 10^9 \text{ m}^{-3}$, et la température électronique est de 1 eV, de manière à avoir une longueur de Debye de 10 cm. Les densités d'ions dans le domaine sont calculées à l'aide de la méthode Particle-in-Cell. Nous utilisons des ions Xe^+ à une température de 1 eV, avec une vitesse de dérive normale de 2 km s^{-1} en direction de la surface satellite, et une vitesse tangentielle de $2,83 \text{ km s}^{-1}$, soit un nombre de Mach de 3,14.

3.5.2. Convergence de l'algorithme patch non-linéaire

La convergence de la méthode patch non-linéaire avec une densité d'ions homogène dans le domaine est présentée en figure 3.7. Cette convergence est mesurée lors du premier pas de temps de la simulation. Les itérations suivantes montrent un comportement similaire, jusqu'à ce que l'erreur soit de l'ordre de grandeur des erreurs numériques d'arrondis. On retrouve bien numériquement les propriétés de convergence linéaire de la méthode patch.

Une coupe de potentiel dans le plan (y, z) autour de l'interconnecteur est présentée en figure 3.8. On note que la surface diélectrique du satellite est chargée environ à $-3,5 \text{ V}$ par

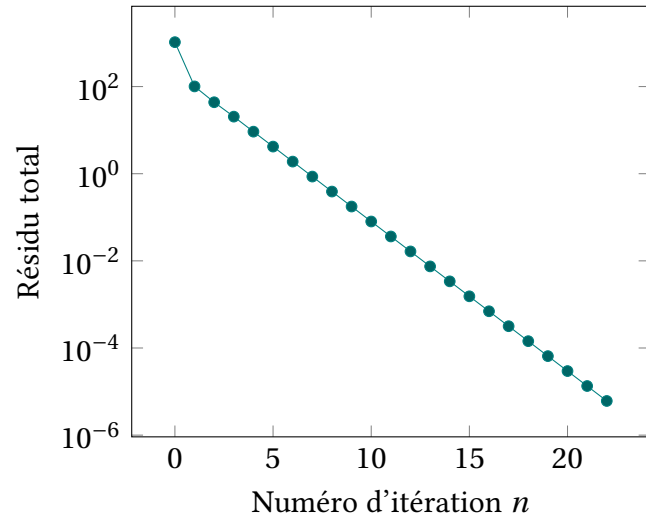


FIGURE 3.7 – Convergence de la méthode patch non-linéaire en 3D

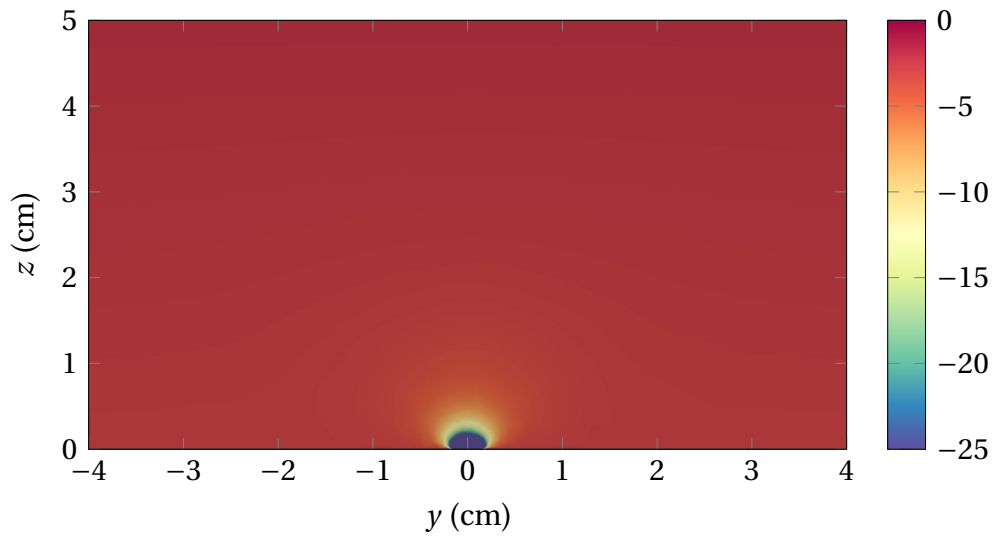


FIGURE 3.8 – Potentiel local autour d'un interconnecteur chargé négativement

TABLE 3.1. – Tailles des simulations et temps d'intégration

Simulation	Cellules	Particules	Temps total
Référence	46440	10631148	1440 s
Patch	38538	9198585	1260 s

rapport au plasma. L'effet de l'interconnecteur est extrêmement localisé dans le domaine, et induit des gradients importants sur le potentiel électrostatique.

3.5.3. Résultats numériques

Une simulation de référence a été réalisée sur un maillage classique raffiné, maillant directement l'interconnecteur à une échelle de 0,1 mm. Le tableau 3.1 présente les paramètres des deux simulations et le temps de calcul associé. On remarque que la méthode patch, pour cette configuration géométrique, permet de réduire le nombre global d'éléments nécessaire, tout en assurant la résolution des échelles les plus fines. Le coût en temps de calcul de cette méthode, à nombres de mailles et de particules donnés, est également comparable à celui de la méthode classique utilisé dans SPIS.

Les deux simulations obtiennent des solutions numériques comparables. Dans les deux cas, la surface collecte le même courant total, comme le montre le profil de charge du satellite par rapport au plasma présenté en figure 3.9.

Les courants d'ions collectés autour de l'interconnecteur sont présentés sur la figure 3.10. On note d'une part que, à cause de la vitesse de dérive des ions, le profil de collection par les surfaces autour de l'interconnecteur est particulièrement complexe. L'interconnecteur, chargé fortement négativement, attire localement les ions incidents, et limite ainsi le courant collecté par les surfaces de diélectrique autour de lui. Cependant, la vitesse de dérive des ions tend à décaler légèrement le point de collection en aval de l'interconnecteur. Ainsi, le courant collecté n'est pas uniforme sur l'interconnecteur, et certaines parties du diélectrique voient un courant d'ions plus important que les surfaces non perturbées, malgré leur potentiel plus élevé que l'interconnecteur.

D'autre part, le résultat de la simulation utilisant la méthode patch non-linéaire reproduit bien ce motif de collection. Cette méthode permet donc d'évaluer avec précision l'impact de l'interconnecteur sur le plasma, en particulier du point de vue des phénomènes d'érosion

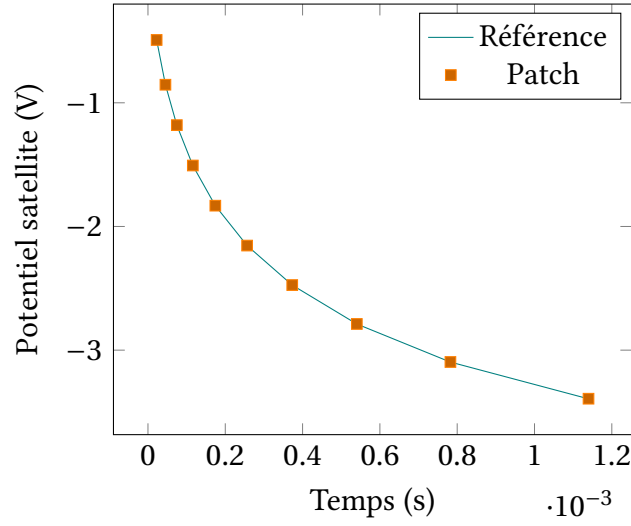


FIGURE 3.9 – Évolution du potentiel du satellite pour les deux simulations d'interconnecteurs négatifs

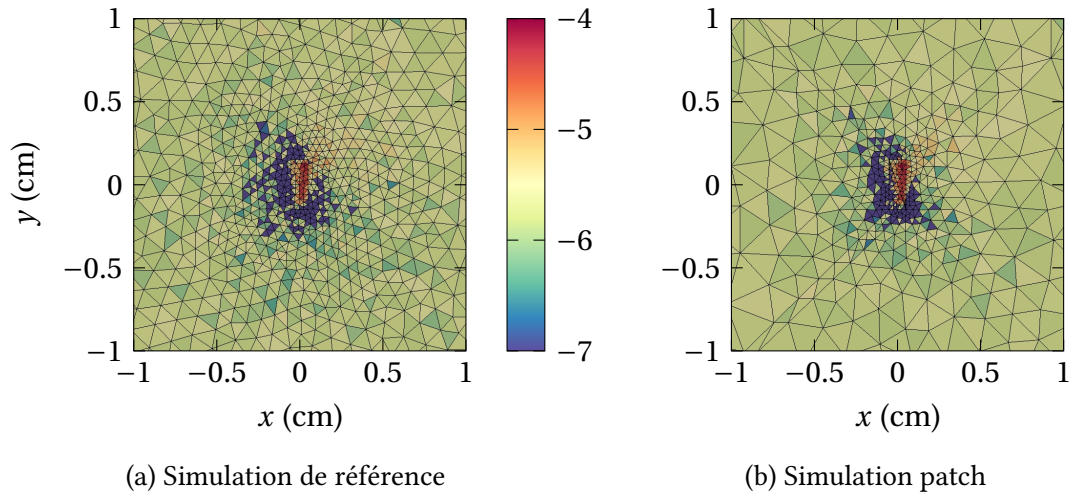


FIGURE 3.10 – Courants collectés sur la surface autour de l'interconnecteur ($\log(\text{Am}^{-2})$)

et d'émission secondaire. En effet, ces processus dépendent fortement des distributions de particules collectées localement par les surfaces.

3.6. Conclusion

La méthode patch non-linéaire présentée dans ce chapitre est une extension de la méthode patch classique à une classe de problèmes non-linéaires. Nous avons démontré la convergence théorique de cette méthode.

En particulier, cette méthode permet donc la résolution du problème de Poisson-Boltzmann pour la simulation du plasma spatial, en présence d'une condition aux limites variant fortement aux petites échelles.

Comme nous l'avons illustré sur un problème simple, la méthode permet de résoudre de manière efficace le comportement local du plasma près d'éléments de petites tailles, tels que les interconnecteurs de générateurs solaires chargés négativement.

Cependant, comme nous allons le montrer au chapitre suivant, le modèle de Maxwell-Boltzmann ne permet pas de simuler l'effet d'un interconnecteur positif. Nous proposons dans la suite un modèle perturbatif capable de modéliser avec précision cet effet, tout en limitant le coût numérique de la simulation.

Chapitre 4.

Développement d'un modèle perturbatif pour la prise en compte des effets de surfaces dans un plasma Maxwellien

Sommaire

4.1. Introduction	94
4.2. Problématique	96
4.2.1. Effets surfaciques dans le modèle de Maxwell-Boltzmann	96
4.2.2. Couplage Vlasov-Boltzmann	100
4.3. Correction particulière du modèle Maxwell-Boltzmann	104
4.4. Exemples numériques	106
4.4.1. Sonde de Langmuir sphérique	107
4.4.2. Interconnecteur chargé positivement	111
4.5. Conclusion	117

4.1. Introduction

La simulation des plasmas spatiaux par des méthodes cinétiques telles que la méthode Particle-in-Cell est souvent limitée par le coût prohibitif de ces méthodes pour des simula-

tions de grande envergure. Des modèles fluides sont couramment utilisés pour la simulation des plasmas quasi-Maxwelliens. Des modèles hybrides, utilisant à la fois une représentation cinétique et une représentation fluide ont été proposés dans la littérature [14], et en particulier la méthode δf [9, 59] a été largement utilisée pour la simulation des plasmas magnétisés.

Pour la simulation de l'interaction entre un satellite et le plasma spatial, le modèle de Maxwell-Boltzmann est classiquement utilisé pour limiter le coût en calculs. La validité de ce modèle repose sur l'hypothèse, d'une part que la distribution en vitesses des électrons de l'environnement est bien Maxwellienne, et d'autre part que le satellite est suffisamment négativement chargé par rapport au plasma pour que l'effet des parois du satellite sur les électrons soit négligeable.

Ces hypothèses sont généralement justifiables à l'échelle globale du satellite. Lorsque l'on s'intéresse aux échelles des plus petits composants, en particulier au niveau des générateurs solaires, il est possible que la surface du satellite soit localement polarisée positivement par rapport au plasma. Dans ce cas, le courant d'électrons collecté par cette surface peut être surestimé, en particulier à cause de la présence d'une barrière de potentiel devant la surface.

La figure 4.1 présente le potentiel électrostatique autour d'un interconnecteur chargé positivement. La simulation réalisée correspond à l'exemple numérique présenté à la section 3.5, en fixant le potentiel de l'interconnecteur à 100 V, pour une température électronique de 1 eV. En particulier, le modèle de Maxwell-Boltzmann est utilisé pour la densité d'électrons. On note que, malgré le potentiel fortement positif de l'interconnecteur, celui-ci est entouré d'une barrière de potentiel négative, causée par la charge négative des surfaces diélectriques l'entourant.

Le modèle de Maxwell-Boltzmann est incapable de prendre en compte l'effet de cette barrière de potentiel, à cause de son caractère local. Le courant d'électrons collecté par la surface de l'interconnecteur est donc surestimé, et les densités calculées localement sont fausses.

L'objectif de ce chapitre est de développer un modèle numérique capable de prendre en compte l'effet des surfaces positivement chargées d'un satellite sur le plasma environnant, tout en limitant le coût en calculs par rapport à la méthode Particle-in-Cell. Le couplage entre les modèles Maxwell-Boltzmann et Particle-in-Cell est d'abord présenté

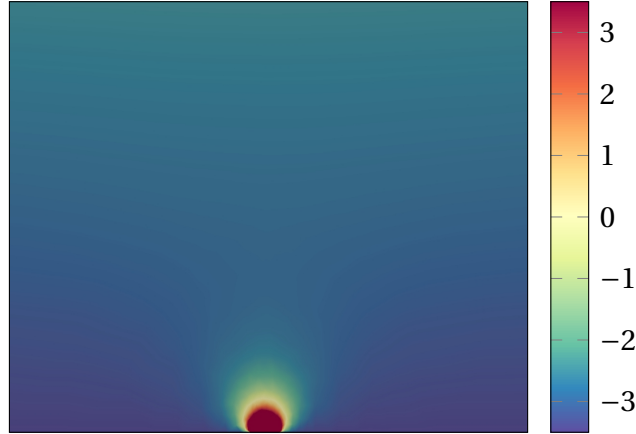


FIGURE 4.1 – Potentiel électrostatique (V, tronqué à ± 3 V) autour d'un interconnecteur chargé à 100 V, avec le modèle de Maxwell-Boltzmann

et ses limitations seront rapidement abordées. Une méthode corrective sur le modèles Maxwell-Boltzmann est proposée, et des résultats numériques sur un cas d'application sont présentés.

4.2. Problématique

4.2.1. Effets surfaciques dans le modèle de Maxwell-Boltzmann

Pour évaluer l'effet d'une surface satellite plongée dans un plasma Maxwellien, on s'intéresse ici au cas unidimensionnel. Supposons une population d'électrons dans un domaine 1D. À une extrémité du domaine, le potentiel électrique est nul, et la distributions d'électrons entrante est supposée Maxwellienne, de densité n_0 et de température T , de manière à modéliser l'environnement. À l'autre extrémité du domaine, le potentiel est fixé à une valeur ϕ_w , et la partie entrante de la distribution est nulle, modélisant ainsi la surface d'un objet plongé dans le plasma. On suppose de plus que le potentiel est monotone sur le domaine.

En appliquant le théorème de Liouville, on remarque que la distribution d'électrons en régime stationnaire ne dépend que du potentiel local et du potentiel de paroi ϕ_w . Dans la suite, nous utiliserons le potentiel sous forme adimensionnée $\hat{\phi} = \frac{e\phi}{kT}$, ainsi que la vitesse normalisée $\hat{v} = \frac{v}{v_{th,e}}$. Avec cette notation, on remarque que la densité locale d'électrons

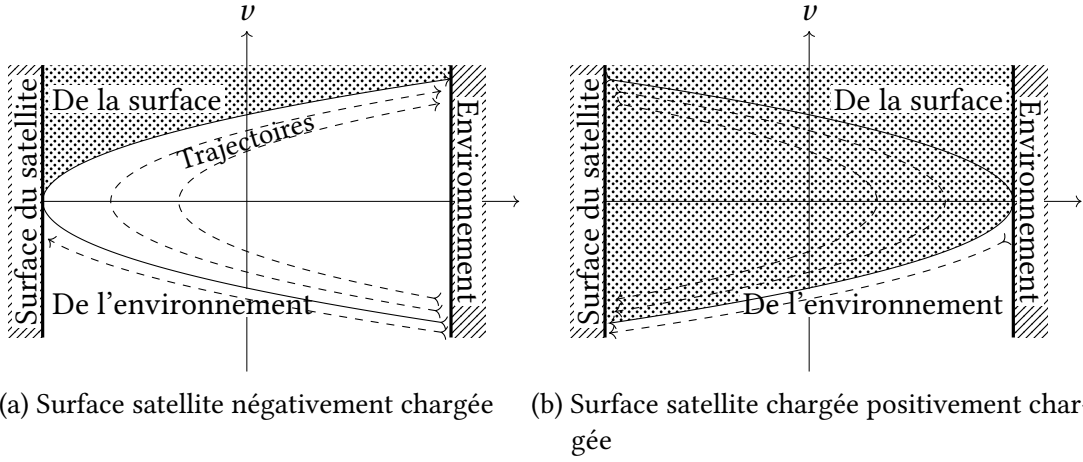


FIGURE 4.2 – Espace des phases pour une simulation unidimensionnelle du plasma entre une surface satellite et l'environnement

s'exprime de manière générale :

$$\frac{n}{n_0} = \exp(\hat{\phi}) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{T(\hat{\phi})} e^{-\hat{v}^2} d\hat{v} \quad (4.1)$$

où $T(\hat{\phi})$ représente l'ensemble des vitesses physiques au potentiel $\hat{\phi}$. Il correspond donc à l'ensemble des points de l'espace des phases dont la trajectoire est issue de l'environnement, et non de la surface. La figure 4.2 représente dans l'espace des phases l'effet d'une paroi satellite chargée sur un plasma unidimensionnel. Dans les deux cas présentés, la surface du satellite est placée à gauche de la figure, et l'environnement spatial à droite. Les trajectoires possibles des électrons sont représentées schématiquement par des flèches. Le volume dans l'espace des phases est divisé en deux parties, selon que les trajectoires des électrons ont pour origine l'environnement spatial (en blanc), ou la surface du satellite (en gris). Si l'on suppose que la surface du satellite n'émet pas d'électrons, la densité d'électrons dans la partie grise est alors nulle. On distingue donc les deux cas suivants :

- ✦ Si $\hat{\phi}_w \leq 0$, la paroi est répulsive pour les électrons. Comme illustré dans la figure 4.2.a, toutes les vitesses dirigées vers la paroi existent physiquement. Les seules trajectoires non physiques correspondent aux grandes vitesses dirigées vers l'environnement. Le

seuil de collection de la paroi est donné par

$$\hat{v}_{\text{lim}} = \sqrt{\hat{\phi} - \hat{\phi}_w}. \quad (4.2)$$

On a donc, en exprimant les vitesses de manière positive quand elles sont orientées vers la paroi, l'ensemble $T = [-\hat{v}_{\text{lim}} : \infty]$, ce qui permet d'exprimer la densité locale donnée par l'équation 4.1 :

$$\frac{n}{n_0} = \frac{1}{2} \exp(\hat{\phi}) \operatorname{erfc}(-\sqrt{\hat{\phi} - \hat{\phi}_w}) \quad (4.3)$$

On remarque que le modèle Maxwell-Boltzmann correspond à la limite $\hat{\phi}_w \rightarrow -\infty$

- ★ Si $\hat{\phi}_w \geq 0$, la paroi est attractive pour les électrons, et aucun électron ne revient de la paroi. Les électrons ont une vitesse minimale donnée par

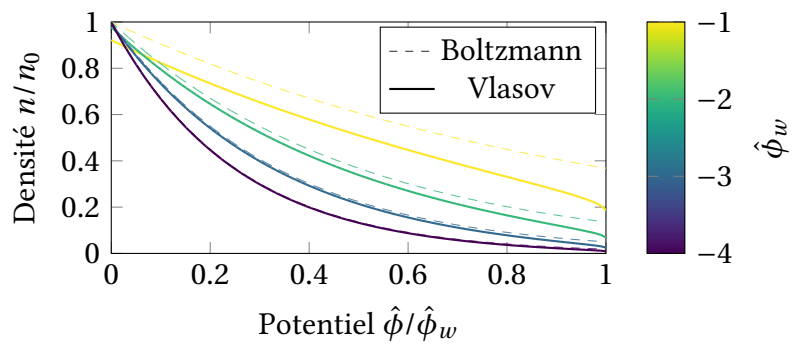
$$\hat{v}_{\text{lim}} = \sqrt{\hat{\phi}} \quad (4.4)$$

De même que dans le cas précédent, on a alors $T = [\hat{v}_{\text{lim}} : \infty]$, et la densité locale d'électrons s'exprime alors de la manière suivante :

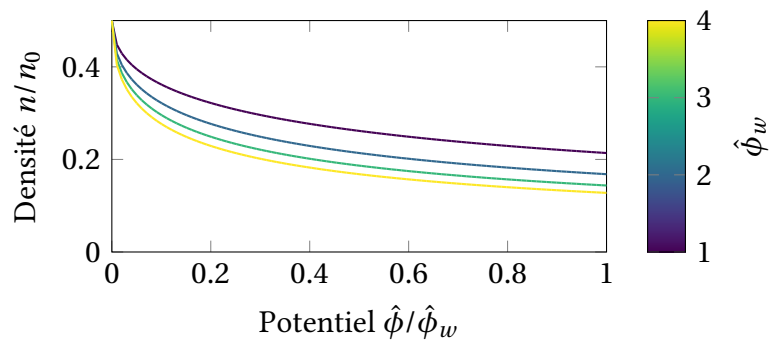
$$\frac{n}{n_0} = \frac{1}{2} \exp(\hat{\phi}) \operatorname{erfc}(\sqrt{\hat{\phi}}) \quad (4.5)$$

Contrairement au cas de la paroi chargée négativement, la densité locale est alors indépendante du potentiel de la paroi, et dépend seulement du potentiel local dans le plasma. On note également que les deux cas présentés s'accordent sur une densité $n = n_0/2$ pour le cas $\hat{\phi} = \hat{\phi}_w = 0$.

La figure 4.3 présente la densité électronique en fonction du potentiel local pour différentes valeurs du potentiel de paroi. Dans le cas des potentiels de paroi négatifs, le modèle Maxwell-Boltzmann est également tracé. On note que ce modèle est valide pour des potentiels de paroi très négatifs, mais s'éloigne de la solution tenant compte de la paroi à mesure que le potentiel de paroi augmente. Pour des potentiels de paroi positifs, le modèle de Maxwell-Boltzmann prévoit de très fortes densités, alors que l'accélération des particules attirées par la paroi induit en réalité une diminution de la densité locale. On remarque donc que ce modèle n'est pas capable de prendre en compte l'effet de parois



(a) Potentiel de paroi négatif



(b) Potentiel de paroi positif

FIGURE 4.3 – Densités électroniques en fonction du potentiel dans un plasma 1D avec une paroi absorbante

chargées positivement ou même légèrement négativement.

4.2.2. Couplage Vlasov-Boltzmann

L'objectif de ce chapitre est de permettre la simulation de surfaces chargées positivement dans un domaine plasma de grande dimension. Comme nous l'avons vu précédemment, le modèle de Maxwell-Boltzmann n'est pas capable de prendre en compte des surfaces chargées positivement, mais est parfaitement adapté à la simulation de larges domaines tant que les surfaces sont répulsives pour les électrons. À l'inverse, la résolution de l'équation de Vlasov par la méthode Particle-in-Cell est particulièrement coûteuse en temps de calcul pour un grand domaine.

C'est pourquoi il serait souhaitable de réaliser une simulation multi-modèle, en utilisant le modèle de Maxwell-Boltzmann loin des surfaces chargées, et en simulant la dynamique complète près de ces surfaces à l'aide de la méthode Particle-in-Cell.

Nous proposons d'étudier le couplage entre le modèle de Vlasov-Poisson et celui de Maxwell-Boltzmann dans le cas 1D. Nous utilisons la méthode de Schwarz avec recouvrement sur le domaine.

On rappelle que l'équation de Poisson-Boltzmann 1D pour une unique population de charges Maxwellienne de température T , de charge q et de densité n au potentiel de référence est donnée par :

$$-\partial_x^2 \phi - \frac{qn}{\epsilon_0} \exp\left(-\frac{q\phi}{kT}\right) = 0 \quad (4.6)$$

On peut normaliser les variables utilisées en posant le potentiel adimensionnel $\hat{\phi} = -\frac{q\phi}{kT}$ et la coordonnée spatiale normalisée $\hat{x} = \frac{x}{\lambda_D} = x\sqrt{\frac{q^2 n}{\epsilon_0 kT}}$. Avec ces notations, l'équation 4.6 peut se réécrire simplement :

$$\partial_{\hat{x}}^2 \hat{\phi}_B + \exp(\hat{\phi}_B) = 0 \quad (4.7)$$

où l'indice B indique que le potentiel correspond à la solution Boltzmann. On choisit de résoudre cette équation sur le domaine $\hat{x} \in [\frac{1}{2} - \delta, 1]$, où $\delta = 0,1$ est le paramètre de recouvrement entre le domaine Poisson-Boltzmann et le domaine Vlasov. On pose sur le

domaine Poisson-Boltzmann les conditions aux limites suivantes :

$$\hat{\phi}_B(\frac{1}{2} - \delta) = \hat{\phi}_V(\frac{1}{2} - \delta) \quad (4.8)$$

$$\hat{\phi}_B(1) = 0 \quad (4.9)$$

où $\hat{\phi}_V$ correspond au potentiel obtenu avec le modèle de Vlasov 1D sur le domaine $[0, \frac{1}{2} + \delta]$, défini par le système suivant :

$$\partial_{\hat{t}} f + \hat{v} \partial_{\hat{x}} f + \partial_{\hat{x}} \hat{\phi}_V \partial_{\hat{v}} f = 0 \quad (4.10)$$

$$\partial_{\hat{x}}^2 \hat{\phi}_V = \int f d\hat{v} \quad (4.11)$$

où $\hat{t} = \omega_p t$, et en utilisant les conditions aux limites suivantes :

$$\forall \hat{v} \in [0, \infty], f(0, \hat{v}) = 0 \quad (4.12)$$

$$\forall \hat{v} \in [-\infty, 0], f(\frac{1}{2} + \delta, \hat{v}) = \exp(\hat{\phi}_B) \mathcal{M}(\hat{v}) \quad (4.13)$$

$$\hat{\phi}_V(0) = -1 \quad (4.14)$$

$$\hat{\phi}_V(\frac{1}{2} + \delta) = \hat{\phi}_B(\frac{1}{2} + \delta) \quad (4.15)$$

En particulier, ces conditions aux limites impliquent qu'aucune particule n'entre dans le domaine par la frontière $\hat{x} = 0$, et que la distribution des particules entrantes par la frontière $\hat{x} = \frac{1}{2} + \delta$ correspond au modèle utilisé dans l'autre domaine. De plus, le potentiel sur cette dernière frontière correspond à celui obtenu par la résolution de l'équation de Maxwell-Boltzmann. Le système de Vlasov est calculé à l'aide d'un schéma de type volumes finis d'ordre 1.

En résolvant à chaque pas de temps sur chaque domaine, on converge vers une solution. La figure 4.4 montre la densité obtenue sur chaque domaine. On note que les deux modèles n'ont pas convergé vers la même densité de particules. La différence entre les deux densités correspond aux trajectoires des particules interceptées par la frontière en $x = 0$. En effet, une partie des particules provenant du domaine de droite est collectée par cette frontière et ne revient pas. On observe donc un déficit dans la densité de particules dans le domaine

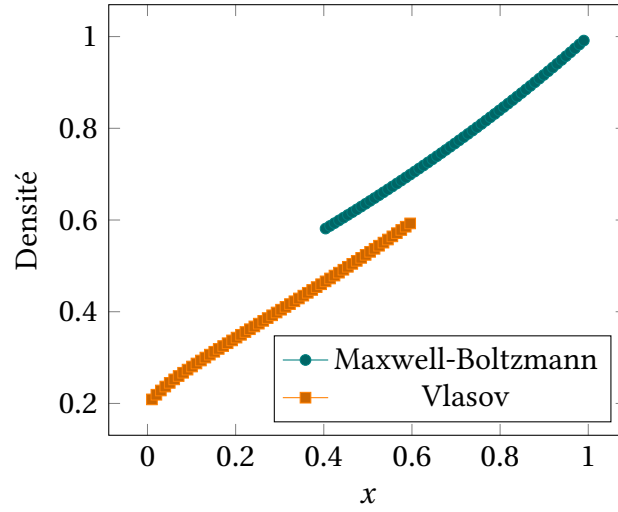


FIGURE 4.4 – Densités obtenues lors du couplage Vlasov/Maxwell-Boltzmann avec un potentiel de surface $\hat{\phi}(0) = -1$

de gauche, par rapport aux densités prévues par le modèle de Maxwell-Boltzmann.

Cette analyse est confirmée par le résultat obtenu en diminuant le potentiel au point $x = 0$. La figure 4.5 présente les densités de particules obtenues avec un potentiel $\hat{\phi}(0) = -5$. Le courant collecté par la surface est largement réduit par ce potentiel, et on note que la différence de densité entre les deux domaines est presque nulle.

On note donc que le couplage direct des deux modèles, même dans le cas de potentiels faiblement négatifs, ne permet pas la résolution du système de manière à préserver la continuité de la densité électronique.

Dans le cas unidimensionnel présenté ici, il est cependant possible de corriger le modèle Maxwell-Boltzmann de manière à assurer sa validité. Considérons le cas où le potentiel ϕ_w à la paroi $x = 0$ est légèrement négatif. Dans ce cas, en un point du domaine au potentiel ϕ , les particules dont l'énergie cinétique est supérieure à

$$E_{\text{lim}} = -q(\phi - \phi_w) \quad (4.16)$$

ont des trajectoires interceptées par la paroi. Ainsi, la présence de cette paroi a pour effet de tronquer la distribution à cette énergie.

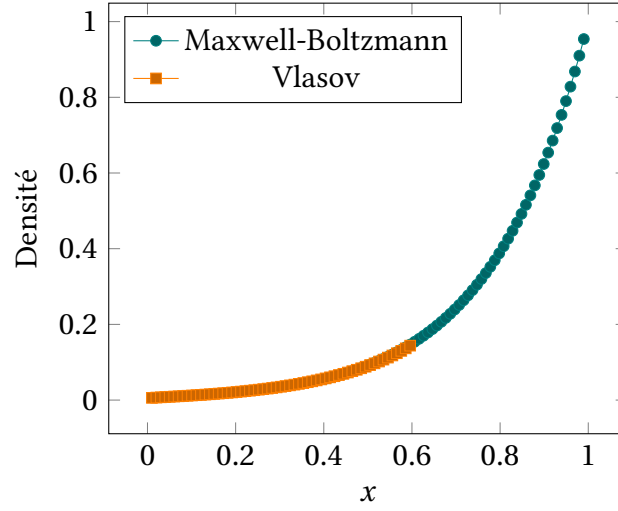


FIGURE 4.5 – Densités obtenues lors du couplage Vlasov/Maxwell-Boltzmann avec un potentiel de surface $\hat{\phi}(0) = -5$

Pour une distribution Maxwellienne, la proportion des particules restantes est donc

$$\int_{-\infty}^{\sqrt{2E_{\text{lim}}/m}} \mathcal{M}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{E_{\text{lim}}}{kT}} \right) \right) \quad (4.17)$$

Dans ce cas unidimensionnel, il est donc possible de corriger le modèle de Maxwell-Boltzmann en tronquant la fonction de distribution en fonction du potentiel local.

La figure 4.6 présente les densités obtenues en réalisant le couplage entre le modèle de Vlasov et notre modèle Maxwell-Boltzmann tronqué. On note dans ce cas que le couplage entre les deux modèles sont capables d'assurer la continuité de la solution.

Cependant, on remarque que le modèle corrigé calculé précédemment n'est valable que pour un potentiel de surface ϕ_w négatif, et une géométrie unidimensionnelle. L'objectif de ce chapitre est de généraliser cette méthode au cas tridimensionnel et pour une géométrie arbitraire. Dans ce cas, il est impossible de déterminer une expression analytique du terme de correction.

Enfin, si la mise en évidence du terme correctif a été faite sur ce problème de couplage de modèles, nous considérons dans la suite l'application seule du modèle de Maxwell-Boltzmann corrigé.

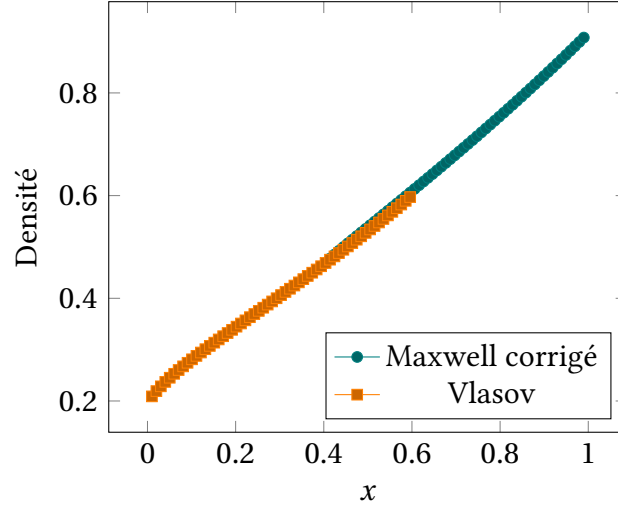


FIGURE 4.6 – Densités obtenues lors du couplage Vlasov/Maxwell-Boltzmann tronqué avec une surface à $\hat{\phi}(0) = -1$

4.3. Correction particulière du modèle Maxwell-Boltzmann

Comme présenté dans la section précédente, le calcul du terme de correction du modèle de Maxwell-Boltzmann correspond à la détermination des trajectoires électroniques issues des surfaces du satellite. Nous proposons dans cette section un schéma numérique particulièrement simple pour calculer cette correction à l'aide d'un schéma Particle-in-Cell.

La simulation du couplage entre un satellite et son environnement est schématisée sur la figure 4.7. Nous notons Γ_{ext} la partie de la frontière du domaine correspondant au plasma spatial, et Γ_{sat} la partie de la frontière sur le satellite. De plus, nous notons $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ la normale entrante au point \mathbf{x} de la frontière du domaine.

Décomposons la fonction de distribution électronique f_e en une composante Maxwellienne et sa correction :

$$f_e = f_{\text{bm}} + f_c \quad (4.18)$$

$$\text{avec } f_{\text{bm}} = n_0 \exp\left(-\frac{q_e \phi}{kT_e}\right) \mathcal{M}(\mathbf{v}) \quad (4.19)$$

En supposant que le potentiel ϕ est quasi-statique, la distribution de correction f_c est

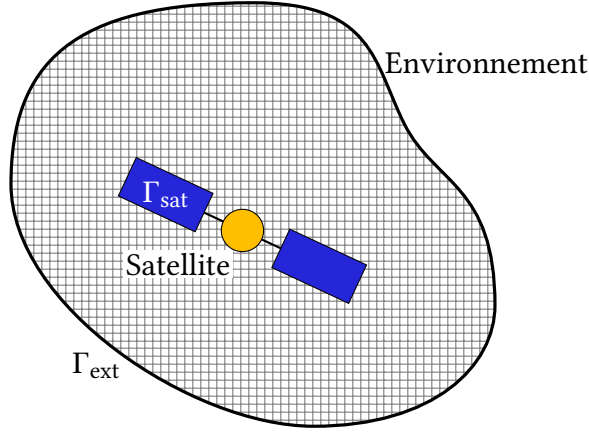


FIGURE 4.7 – Schéma simplifié d'une simulation du couplage plasma-satellite

alors solution de l'équation de Vlasov avec les conditions aux limites suivantes :

$$\partial_t f_c + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_c + \frac{q_e \mathbf{E}}{m_e} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_c = 0 \quad (4.20)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{ext}}, \forall \mathbf{v} \in \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) > 0\}, f_c(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0 \quad (4.21)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{sat}}, \forall \mathbf{v} \in \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) > 0\}, f_c(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = -f_{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (4.22)$$

Ces deux conditions aux limites assurent que la distribution totale f_e est Maxwellienne sur les surfaces externes du domaine, et qu'elle ne possède pas de composante entrante sur les surfaces satellites.

En injectant cette décomposition dans l'équation de Poisson, nous obtenons une équation de Poisson-Boltzmann corrigée :

$$-\epsilon_0 \Delta \phi + q_e n_0 \exp\left(-\frac{q_e \phi}{kT_e}\right) = \rho_{\text{ion}} + q_e \int f_c d\mathbf{v} \quad (4.23)$$

Il est à noter que la distribution de correction f_c est négative sur tout le domaine. Elle correspond donc à une population de particules qui suivent les mêmes trajectoires que les électrons, mais dont la densité de charge est intégrée négativement dans l'équation de Poisson 4.23. Le calcul de cette distribution revient donc à évaluer les trajectoires virtuelles des électrons collectés par la paroi, comme nous l'avons fait dans la section précédente de manière analytique pour le cas 1D.

Nous proposons d'utiliser une méthode Particle-in-Cell pour calculer cette densité de correction, qui peut être vue comme une population indépendante. Ceci rend l'implantation dans un code plasma moderne relativement simple. La méthode proposée est donc similaire à la méthode delta-f, dans le sens où une méthode particulière est utilisée pour modéliser une perturbation à une solution de référence. Cependant, la méthode delta-f utilise une linéarisation au premier ordre de l'équation de Vlasov, tandis que la méthode étudiée dans ce chapitre utilise une approximation quasi-statique sur le champ électrique, ce qui simplifie le traitement particulier, car cela permet de conserver les poids statistiques des particules.

La méthode a été implantée dans le logiciel SPIS. Une source d'électrons de distribution Maxwellienne et de poids statistique négatif est appliquée sur chaque surface du satellite. Les paramètres des sources sont choisis de manière à résoudre l'équation 4.22. Pour chaque surface élémentaire du satellite, la fonction de distribution Maxwellienne de la population d'électrons est échantillonnée, de manière à injecter un nombre de macro-particules de correction dans le domaine de simulation. Du point de vue du code de simulation, les macro-particules correspondent à des électrons dont le poids statistique est négatif.

En ce qui concerne l'intégration temporelle, le schéma classique Particle-in-Cell implanté dans SPIS est utilisé. Les trajectoires des macro-particules sont calculées de manière analytique tétraèdre par tétraèdre, comme décrit dans la section 1.4.3.

4.4. Exemples numériques

Nous présentons dans cette section deux applications du modèle proposé. Dans un premier temps, le modèle est appliqué au cas classique de la sonde sphérique de Langmuir [57], pour montrer numériquement la capacité du modèle à corriger la distribution de Maxwell-Boltzmann en présence d'éléments chargés positivement. Dans un second temps, nous présentons des résultats de simulation d'un interconnecteur idéalisé, chargé positivement à la surface d'un panneau solaire. Nous montrons que le modèle proposé est particulièrement adapté à cette géométrie, grâce à la barrière de potentiel qui se forme autour de l'interconnecteur, et confine la correction localement.

Température électronique T_e	1 eV
Température des ions T_i	1 eV
Densité n_0 à $\phi = 0$	$1,38 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$
Fréquence plasma électronique $f_{pe} = \frac{\omega_{pe}}{2\pi}$	3,34 MHz
Longueur de Debye λ_D	2 cm

TABLE 4.1. – Paramètres du plasma utilisés dans les exemples numériques

Rayon de sonde	1 cm
Rayon du domaine	10 cm
Taille des cellules à la surface de la sonde	0,5 mm
Taille des cellules sur la surface externe	1 cm

TABLE 4.2. – Paramètres géométriques de la simulation de la sonde de Langmuir

4.4.1. Sonde de Langmuir sphérique

Dans cette section, nous présentons une simulation de la sonde de Langmuir sphérique [57] à l'aide du modèle correctif proposé. La sonde de Langmuir est un objet métallique plongé dans un plasma, et dont on fait varier le potentiel. La mesure du courant collecté par la sonde est classiquement utilisée pour déterminer les paramètres du plasma, comme la température électronique ou la densité.

La simulation présentée dans cette section représente une sonde sphérique contenue dans un domaine de simulation également sphérique. Les paramètres du plasma utilisés dans la simulation sont présentés dans la table 4.1, et les paramètres géométriques sont décrits dans la table 4.2. La figure 4.8 présente la géométrie utilisée. Durant la simulation, le potentiel de la sonde parcourt la plage de potentiels comprise entre $-5T_e$ et $15T_e$, par incrément de 1 V. Les courants collectés par la sonde sont mesurés pour chaque potentiel de sonde, permettant de tracer la caractéristique courant-tension de la sonde. Sur toute la surface extérieure du domaine, une condition de Dirichlet homogène est appliquée pour le potentiel électrostatique, et une distribution Maxwellienne est considérée pour chaque population de particules dans le plasma.

Trois simulations ont été réalisées en utilisant différents modèles. Dans chaque simulation, la distribution des ions est calculée à l'aide de la méthode Particle-in-Cell, et un modèle différent est utilisé pour la population électronique :

- ✦ Particle-in-Cell : La dynamique complète des électrons est simulée à l'aide de la

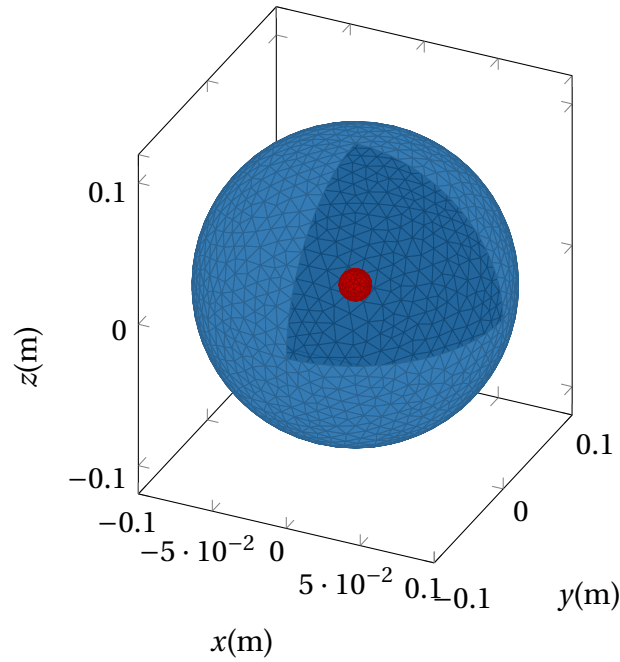


FIGURE 4.8 – Géométrie du cas sphérique. Sont représentées : en bleu la surface externe du domaine ; en rouge la surface de la sonde.

méthode Particle-in-Cell classique. Cette simulation sert de référence pour évaluer les résultats des deux autres modèles.

- ✦ Boltzmann standard : Le modèle classique de Maxwell-Boltzmann est utilisé pour calculer la distribution des électrons.
- ✦ Boltzmann corrigé : La méthode Particle-in-Cell est utilisée pour calculer le terme de correction nécessaire au modèle de Maxwell-Boltzmann, comme décrit plus haut.

La figure 4.9 représente le courant électronique collecté par la sonde en fonction du potentiel appliqué pour les différents modèles. Pour des valeurs de potentiels négatives, on remarque que les trois modèles prédisent le même courant collecté. On note cependant le bruit induit par le modèle Particle-in-Cell pour des potentiels négatifs importants. À de tels potentiels, seul un faible nombre des macro-particules les plus énergétiques est collecté par la sonde, ce qui induit un bruit statistique important sur le courant. Cependant, dans ces conditions, le courant électronique est négligeable devant le courant ionique, et le bruit statistique n'a que peu d'importance dans la simulation.

Pour des potentiels de sonde positifs, les modèles produisent au contraire des résultats

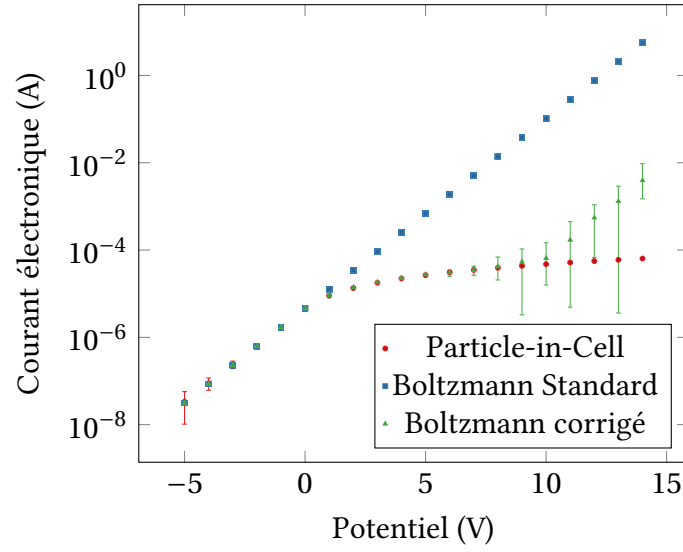


FIGURE 4.9 – Caractéristique courant-potential de la sonde de Langmuir pour différents modèles. Les barres d’erreurs représentent les valeurs minimales et maximales de courant.

largement différents. En particulier, le modèle de Maxwell-Boltzmann surestime le courant collecté de manière importante. Jusqu’à des potentiels de sonde d’environ 8 V positifs, la correction apportée par notre modèle permet de reproduire précisément les courants réels calculés par la méthode Particle-in-Cell.

À un potentiel de 10 V, correspondant à 10 fois la température électronique, la densité locale de correction au niveau de la sonde est de $n_c = n_0 \exp(10)$. La fréquence caractéristique de cette population, proportionnelle à la racine de la densité, est donc de l’ordre de $\exp(5)f_{pe} = 496 \text{ MHz}$. La température de cette population étant la même que celle des électrons, on en déduit une longueur de Debye numérique locale fortement réduite :

$$\lambda_D^{\text{num}} = \exp(-5)\lambda_D \approx 0,13 \text{ mm} \quad (4.24)$$

On remarque donc que cette longueur devient plus petite que le raffinement local des éléments (0,5 mm), ce qui explique l’instabilité que l’on observe aux forts potentiels sur la figure 4.9.

De manière plus générale, pour résoudre un potentiel de sonde positif ϕ , il convient donc de raffiner localement le maillage de manière à assurer des tailles caractéristiques de mailles

de l'ordre de $\lambda_D \exp(-\phi/2kT_e)$. Cette limitation devient particulièrement importante pour des potentiels très grands par rapport à la température électronique.

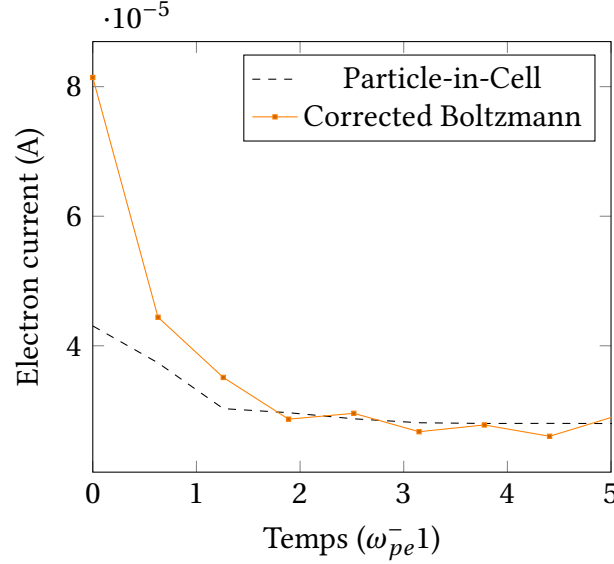


FIGURE 4.10 – Courant collecté après un saut de potentiel de la sonde entre 0 V et 5 V

La convergence temporelle du schéma proposé est comparée à celle de la méthode classique Particle-in-Cell sur la figure 4.10. Cette figure montre la réponse temporelle de la collection d'électrons par la sonde à un saut du potentiel de la sonde entre 0 V et 5 V. Puisque la composante Maxwellienne du modèle a un temps de réponse nul, le courant initial après le saut de potentiel est largement surestimé, jusqu'à ce que la correction apportée converge. On note sur la figure 4.10 que le taux de convergence est similaire à celui de la méthode Particle-in-Cell.

Nous avons donc montré la validité du modèle pour la prise en compte des potentiels positifs dans la simulation d'un plasma. Cependant, le schéma numérique est relativement contraint pour des potentiels importants par rapport à la température électronique. Un raffinement important est nécessaire autour des surfaces chargées positivement, de manière à assurer la stabilité du code particulière. L'utilisation d'un modèle différent que le modèle de Boltzmann comme distribution de base permettrait de limiter cette contrainte, en assurant des densités de correction de l'ordre de la densité électronique n_0 .

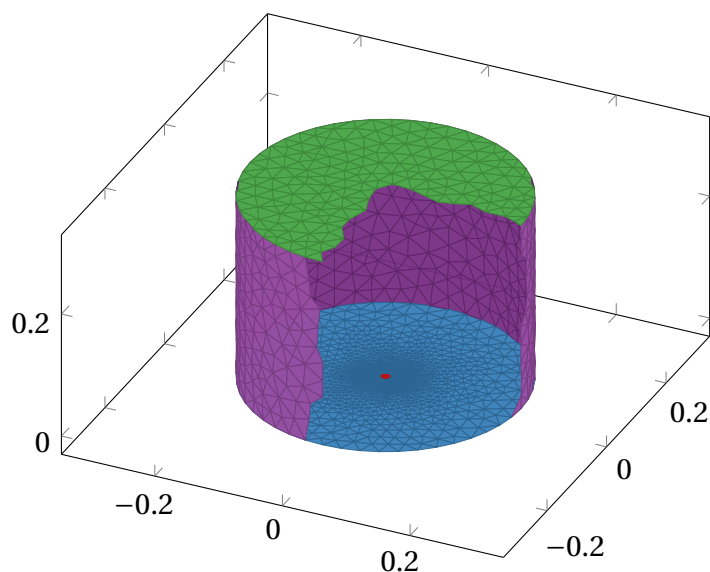


FIGURE 4.11 – Géométrie du cas cylindrique

Hauteur du domaine	15 cm
Rayon du domaine	10,6 cm
Rayon de l'interconnecteur	1 cm
Taille des cellules proches de l'interconnecteur	1 mm
Taille des cellules sur la surface externe	1 cm
Nombre de cellules	54873

TABLE 4.3. – Paramètres géométriques de la simulation d'un interconnecteur

4.4.2. Interconnecteur chargé positivement

Nous proposons dans cette section d'utiliser le modèle correctif proposé pour simuler l'effet d'un interconnecteur chargé positivement à la surface d'un satellite. La géométrie utilisée est présentée dans la figure 4.11.

Le domaine de simulation est un cylindre, dont la base représente la surface du satellite. Au centre de cette surface, un disque de petite dimension représente l'interconnecteur, qui est chargé à 5 V par rapport au reste de la surface, qui est au potentiel de masse du satellite. Les dimensions utilisées sont présentées dans la table 4.3. Les autres surfaces du domaine modélisent l'environnement spatial à l'aide d'une condition aux limites de Robin sur le potentiel électrique, et une densité Maxwellienne pour les ions.

Contrairement à la simulation précédente, le potentiel de masse du satellite est flottant par rapport au plasma. La figure 4.12 présente le circuit électrique équivalent résolu par le simulateur pour calculer ce potentiel. Sur ce circuit, les sources de courant I_{interco} et I_{gnd} correspondent respectivement aux courants collectés par l'interconnecteur et par le reste de la surface.

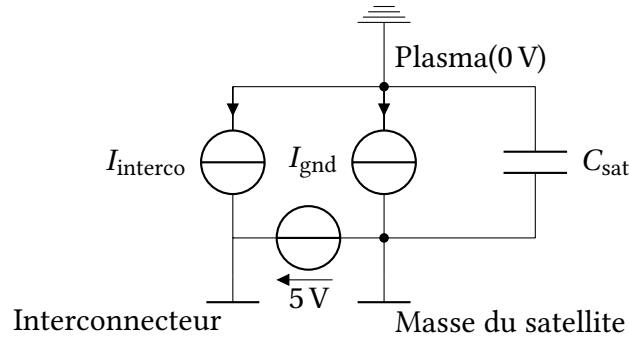


FIGURE 4.12 – Circuit électrique du satellite

Les paramètres du plasma utilisés sont les mêmes que pour la simulation précédente, et sont présentés dans la table 4.1. De même, nous utilisons la méthode Particle-in-Cell pour calculer la distribution des ions dans le plasma, et les trois différents modèles (Particle-in-Cell, Maxwell-Boltzmann standard, et Maxwell-Boltzmann corrigé) pour la population électronique.

La charge du satellite pour chaque modèle est présentée sur la figure 4.13. On note que le modèle de Maxwell-Boltzmann non corrigé surestime la charge de manière importante. La correction apportée par notre modèle permet de réduire significativement cet écart. De plus, on remarque que la masse du satellite se charge dans chaque cas autour de -3 V. Le potentiel de l'interconnecteur par rapport au plasma est donc d'environ 2 V. Ainsi, ce cas de simulation est représentative d'un satellite réel qui se charge globalement négativement par rapport à l'environnement, mais qui possède des éléments chargés fortement positivement, par exemple au niveau des générateurs solaires.

La figure 4.14 présente le profil de correction selon la normale à l'interconnecteur. On remarque que la densité de correction est largement confinée au niveau de l'interconnecteur. Comparée à la densité à l'infini n_0 , la densité de correction est négligeable dans presque tout le domaine.

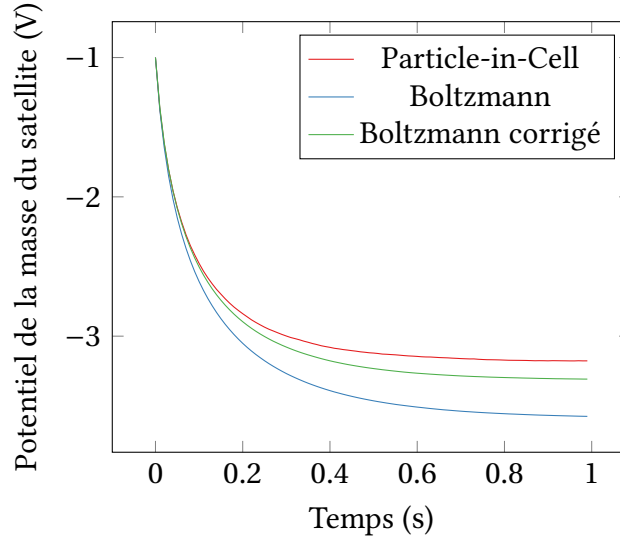


FIGURE 4.13 – Charge du satellite

Les figures 4.15 et 4.16 représentent le potentiel le long de la normale à l'interconnecteur et le courant d'ions collecté par le satellite, pour les trois modèles utilisés. On note dans les deux cas que le modèle corrigé permet de réduire de manière importante l'erreur induite par le modèle de Maxwell-Boltzmann.

En particulier, la figure 4.15 présente la barrière de potentiel autour de l'interconnecteur, qui atteint environ $-2,2$ V à une longueur de Debye de l'interconnecteur. On remarque d'une part que le modèle de Boltzmann sans correction ne permet pas de prédire le potentiel de cette barrière. D'autre part, remarquons que la barrière de potentiel est largement bénéfique pour notre modèle. En effet, à cause de la différence de potentiel entre l'interconnecteur et la barrière, seules les particules de correction ayant une énergie supérieure à 4 eV peuvent franchir la barrière de potentiel. Étant donné la température électronique de 1 eV, on en déduit que la fraction de particules correctives incapables de traverser la barrière est donné par :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{q_e \phi_{\text{barrière}}}{kT_e}\right) \approx 95.4\%, \quad (4.25)$$

où $\gamma(s, x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt$ est la fonction gamma incomplète inférieure, et $\phi_{\text{barrière}}$ est la différence de potentiel entre la barrière de potentiel et l'interconnecteur.

Ainsi, la présence d'une barrière de potentiel autour de l'interconnecteur a un effet de

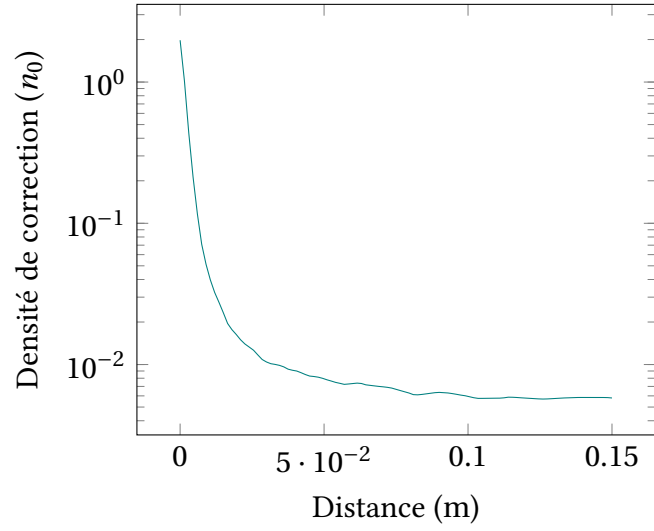


FIGURE 4.14 – Profil de la densité de correction selon la normale à l'interconnecteur

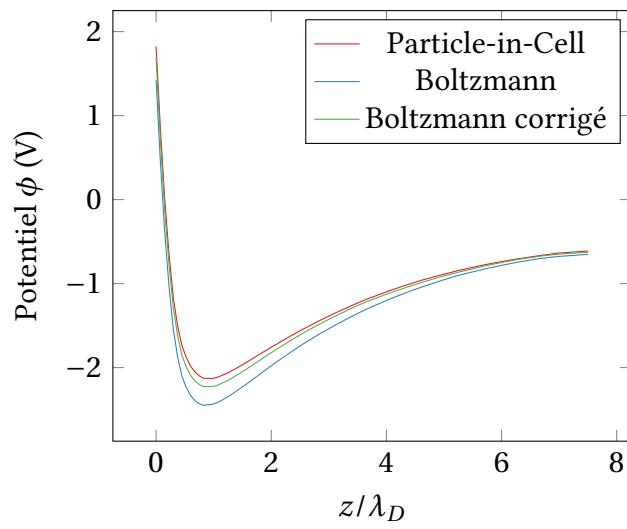


FIGURE 4.15 – Profil de potentiel le long de la normale à l'interconnecteur

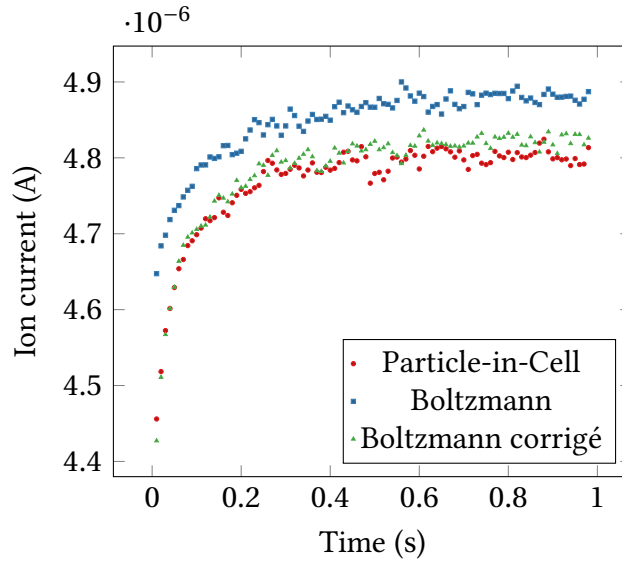


FIGURE 4.16 – Courant d’ions collecté par le satellite

confinement sur le terme correctif, comme illustré dans la figure 4.17. Sur cette figure, on remarque que la densité de correction devient rapidement négligeable face aux autres densités de charges quand on s’éloigne de la surface du satellite.

Le coût numérique du modèle Boltzmann corrigé est directement lié au nombre de macro-particules utilisées pour représenter le terme correctif. Étant donné le confinement de ces particules autour de l’interconnecteur, un nombre limité de macro-particules est suffisant, comme le montre la figure 4.18. Cette figure présente une comparaison du nombre de macro-particules dans la simulation Particle-in-Cell et dans la simulation avec le modèle correctif. Puisque le terme de correction est très largement localisé dans des régions relativement petites par rapport au domaine total, on s’attend à ce que le nombre de macro-particules nécessaire pour modéliser cette correction soit faible par rapport au nombre de particules dans une simulation Particle-in-Cell classique. Pour ce domaine, on mesure sur la figure 4.18 un gain d’un ordre de grandeur. Pour des volumes de domaines plus larges, par exemple pour la simulation d’un satellite complet, le gain en est d’autant plus grand.

De plus, même si le domaine doit être suffisamment raffiné autour de l’interconnecteur, la très faible densité de correction loin de celui-ci permet de relaxer les contraintes de stabilité dans la plupart du domaine, par rapport à une simulation Particle-in-Cell. Ainsi, le modèle permet, tout en limitant le coût numérique, d’agrandir de manière importante

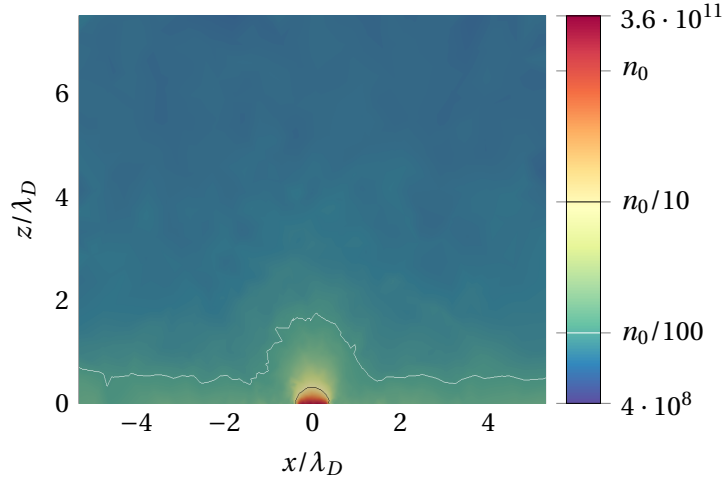


FIGURE 4.17 – Densité de charge du terme correctif (e/m^3). Les lignes noire et blanche correspondent respectivement à $1/10$ et $1/100$ de la densité n_0 .

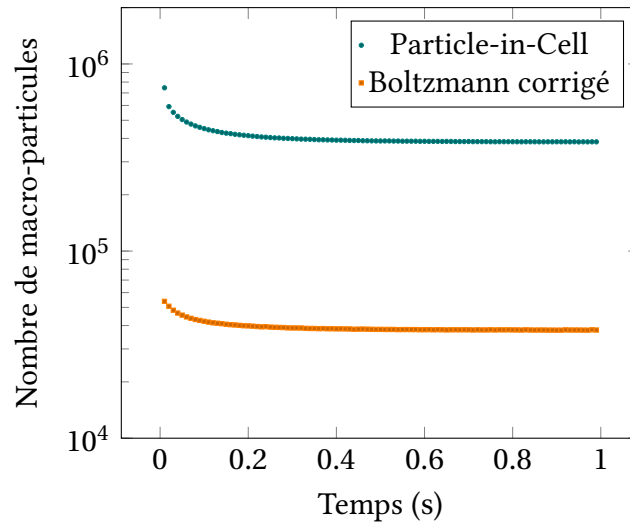


FIGURE 4.18 – Nombre de particules pour le modèle électronique

la taille du domaine de simulation, en permettant l'utilisation de maillages bien moins raffinés.

4.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un nouveau modèle pour une population d'électrons dans un plasma. Dans ce modèle, une correction locale au modèle de Maxwell-Boltzmann est calculée à l'aide d'une méthode particulière. Particulièrement simple à implanter dans un code plasma hybride tel que SPIS, cette méthode permet une meilleure prise en compte de l'effet des surfaces du satellite, en particulier de celles qui sont chargées positivement par rapport au plasma.

Ce modèle est particulièrement efficace pour la simulation des interconnecteurs de panneaux solaires, dans la mesure où la correction calculée est confinée dans un faible volume autour de l'interconnecteur. Ceci assure un coût relativement faible en temps de calcul par rapport à une simulation Particle-in-Cell classique, en particulier si le domaine de calcul est large par rapport au volume où la correction est nécessaire.

L'inconvénient majeur de la méthode proposée est induit par la nature de la distribution de base considérée. L'erreur induite par le modèle de Maxwell-Boltzmann au niveau des surfaces chargées positivement est exponentielle en fonction du potentiel de la surface. Ainsi, pour des surfaces de potentiels importants par rapport à la température électronique, la densité du terme correctif explose.

D'une part, le bruit numérique associé à la méthode Particle-in-Cell devient alors problématique. En effet, le bruit numérique présent dans le terme correctif se retrouve directement dans la distribution d'électrons calculée. Or, dans le cas d'une surface chargée très positivement, le terme correctif peut être plusieurs ordres de grandeurs plus grand que la distribution totale. Ainsi, il est nécessaire d'améliorer de manière importante la statistique de la correction en injectant un nombre important de macro-particules.

D'autre part, les caractéristiques locales de la population corrective induisent des contraintes fortes sur le maillage. Comme nous l'avons vu dans le cas de la sonde de Langmuir, la taille locale des éléments dans les régions chargées très positivement sont très petites par rapport à la longueur de Debye réelle du plasma. Étant donné la forte localité de ces régions, il est possible d'envisager l'utilisation de la méthode patch pour atteindre des

raffinements permettant la simulations de petites surfaces chargées à quelques dizaines de fois la température électronique.

Pour permettre la simulation de surfaces chargées à de plus forts potentiels, il est nécessaire de remplacer le modèle de Maxwell-Boltzmann par un modèle qui n'explose pas pour des potentiels positifs. Par exemple, le modèle de Maxwell-Boltzmann tronqué, qui utilise un comportement linéaire pour ces potentiels, permettrait de limiter la densité de correction.

Chapitre 5.

Simulation des interconnecteurs de générateurs solaires

Sommaire

5.1. Simulation d'un interconnecteur négatif avec la méthode patch .	121
5.2. Simulation d'un interconnecteur positif avec le modèle Maxwell-Boltzmann corrigé	127
5.3. Développements futurs pour la simulation des interconnecteurs de panneaux solaires	130
5.3.1. Méthodes de réduction du bruit sur les densités d'ions autour des interconnecteurs	130
5.3.2. Amélioration des maillages utilisés	130
5.3.3. Amélioration du modèle d'interconnecteur positif	131

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats de simulations obtenus avec les modèles décrits aux chapitres précédents. Nous reprenons le cas de simulation d'un satellite à propulsion électrique présenté dans la section 1.5 du chapitre introductif. La figure 5.1 présente la géométrie considérée pour le satellite.

Le satellite est constitué d'un corps cubique de 1 m de côté, d'un propulseur plasma cylindrique, et d'un panneau solaire. Les dimensions des différentes parties du satellite sont présentées en figure 5.2. Les différents paramètres de la simulation sont résumés dans le tableau 5.1.

Comme nous l'avons montré au premier chapitre, le code SPIS classique est incapable de simuler l'effet d'un interconnecteur à la surface du générateur solaire du satellite à cause

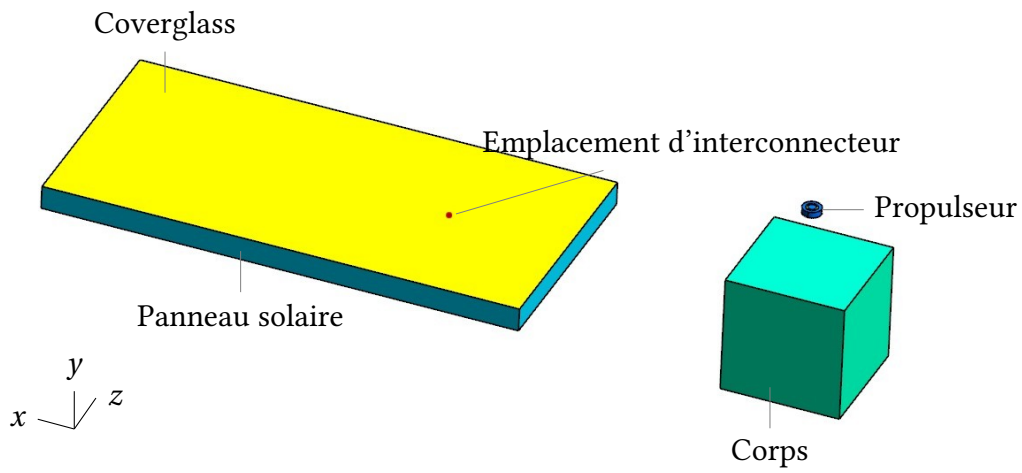


FIGURE 5.1 – Géométrie du satellite simulé

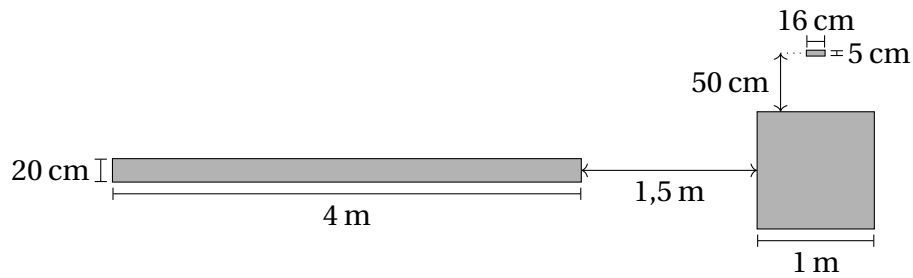


FIGURE 5.2 – Dimensions générales du satellite

Densité de l'environnement	$n_0 = 10^9 \text{ m}^{-3}$
Température électronique	$T_e = 5 \text{ eV}$
Longueur de Debye	$\lambda_D = 53 \text{ cm}$
Potentiel du propulseur	$\phi_p = 80 \text{ V}$
Courant de sortie du propulseur	$I_p = 1,6 \text{ A}$
Mach de sortie du propulseur	$M_p = 40$

TABLE 5.1. – Paramètres de simulation utilisés

de la taille relative de celui-ci par rapport au domaine de simulation.

Dans un premier temps, nous montrons que la méthode patch non-linéaire, présentée au chapitre 3 permet la prise en compte d'éléments de petites tailles tels que les interconnecteurs négatifs.

Dans un second temps, nous présentons des résultats de simulations obtenus avec le modèle Boltzmann corrigé, qui permet la prise en compte des interconnecteurs positifs à la surface du générateur solaire.

5.1. Simulation d'un interconnecteur négatif avec la méthode patch

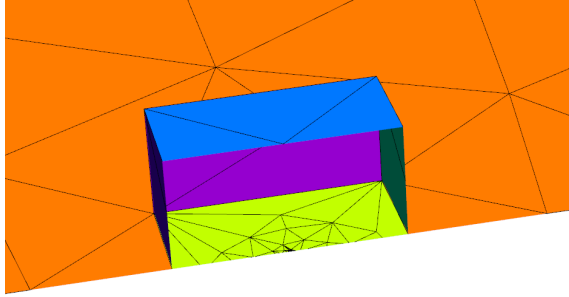
L'intérêt principal de la simulation d'un interconnecteur négatif est de déterminer l'érosion due aux ions collectés par l'interconnecteur. Il est donc important de simuler avec précision le courant collecté par les différentes surfaces du satellite. Dans le cas de simulation présenté, représentatif d'une configuration de satellite à propulsion électrique, les ions d'échange de charge (ions CEX) sont prépondérants autour des panneaux solaires, en particulier proche du corps du satellite. L'impact de la collection de ces ions est donc majeur sur le phénomène d'érosion.

Dans cette section, nous utilisons la méthode patch non-linéaire pour simuler l'effet d'un interconnecteur négatif à la surface du panneau solaire. L'interconnecteur est modélisé par un rectangle métallique de $0,2 \text{ mm} \times 0,6 \text{ mm}$ chargé à -50 V par rapport au corps du satellite.

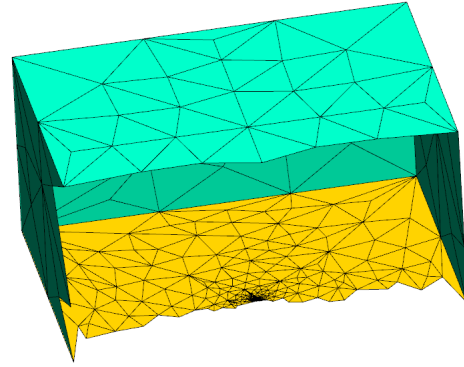
Un patch est inséré autour de l'interconnecteur, de manière similaire à la simulation réalisée au chapitre 3. Le domaine du patch représente un parallélépipède de $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 0,5 \text{ cm}$ centré sur l'interconnecteur. La figure 5.3 présente les maillages utilisés. Le raffinement local du patch au niveau de l'interconnecteur atteint $50 \mu\text{m}$.

La figure 5.4 présente les résultats de simulation obtenus à l'échelle macroscopique. On retrouve des résultats globalement similaires à ceux obtenus sans l'interconnecteur présenté en section 1.5.

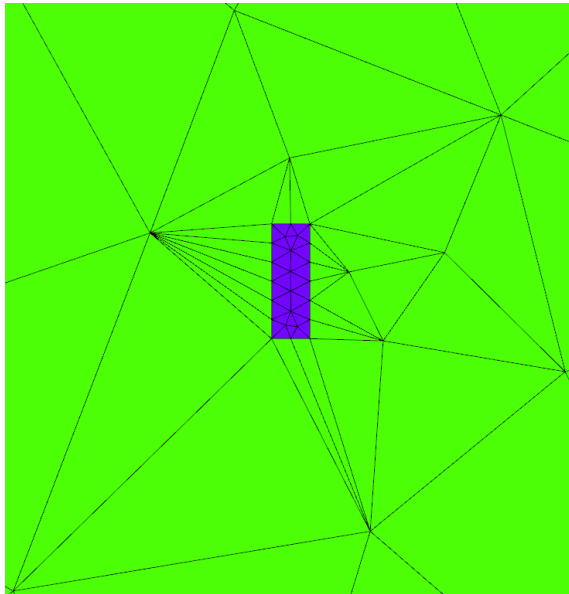
Contrairement à la simulation présentée en introduction, le potentiel électrostatique est ici calculé jusqu'à l'échelle de l'interconnecteur, comme le montre la figure 5.5. On note les



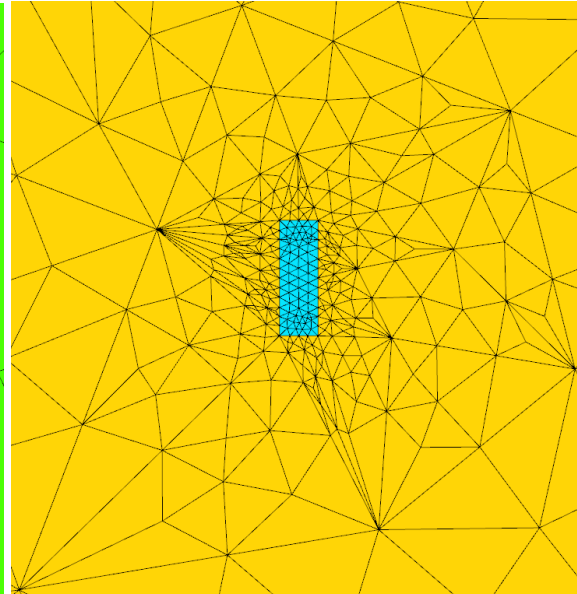
(a) Maillage grossier



(b) Maillage raffiné



(c) Maille surfacique grossier



(d) Maillage surfacique raffiné

FIGURE 5.3 – Maillages utilisés autour de l'interconnecteur

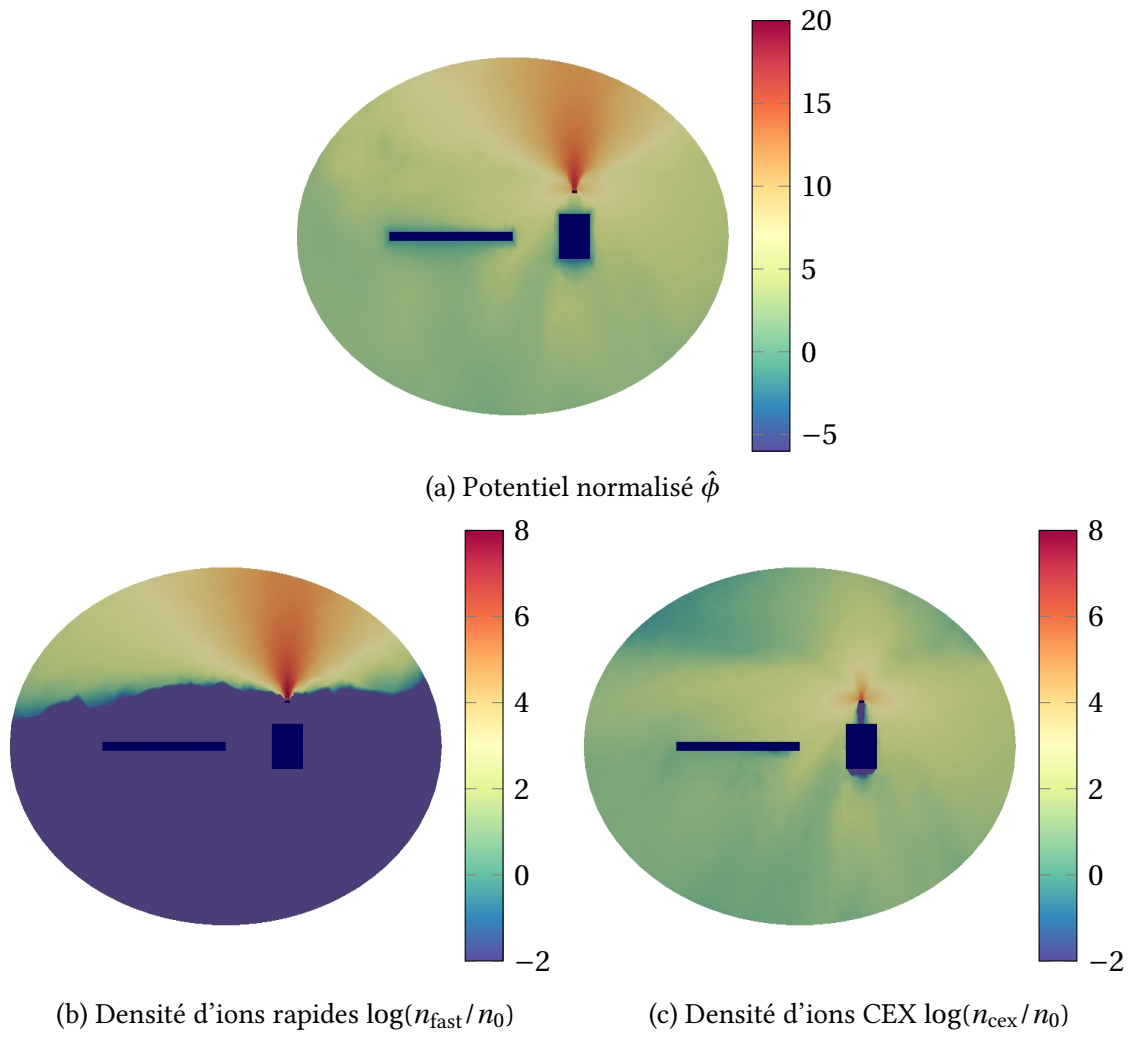


FIGURE 5.4 – Résultats macroscopiques de simulations patch avec un interconnecteur négatif

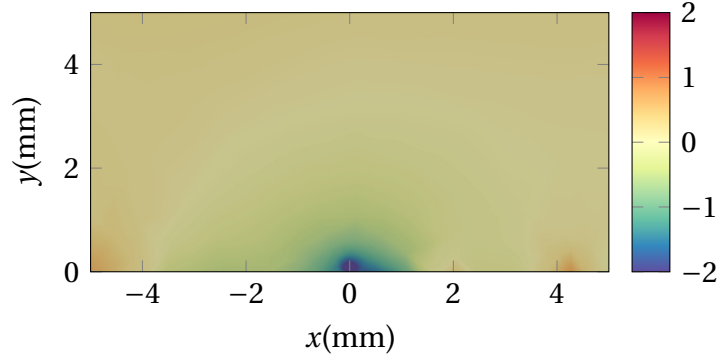


FIGURE 5.5 – Potentiel électrostatique normalisé $\hat{\phi}$ dans le patch (tronqué à ± 2)

champs électriques importants qui apparaissent localement autour de l'interconnecteur à cause du fort potentiel de celui-ci.

La figure 5.6 présente la densité d'ions CEX autour de l'interconnecteur. On remarque d'une part l'effet local de l'interconnecteur sur ces ions. D'autre part, on note le bruit numérique important, en particulier dans les cellules les plus proches de l'interconnecteur. La taille locale des mailles proche de l'interconnecteur induit en effet une faible statistique sur les densités de charge calculées à l'aide de méthodes particulières. On peut noter que le schéma d'intégration des densités de SPIS, qui intègre la densité de charge le long de la trajectoire des macro-particules, permet de limiter le bruit numérique dans ces régions contenant des petites mailles. En effet, avec une méthode d'intégration classique, l'amplitude du bruit est déterminée par le nombre de particules dans chaque maille à la fin d'un pas de temps. En supposant une densité homogène de particules, ce nombre est proportionnel au volume des cellules. Grâce à la méthode d'intégration avancée de SPIS, l'amplitude du bruit est déterminée par le nombre de particules traversant une maille durant le pas de temps, qui est proportionnel à la section des mailles vues par les particules. Cependant, ce gain n'est pas suffisant pour assurer un faible bruit pour les mailles utilisées dans le patch, et il est donc nécessaire d'augmenter le nombre de particules dans la simulation. De plus, une partie des mailles utilisées dans le patch sont dégénérées, et peuvent présenter des section très différentes en fonction de l'angle d'incidence des ions, accentuant le bruit numérique dans certaines mailles.

La figure 5.7 présente les courants surfaciques d'électrons et d'ions CEX, normalisés par

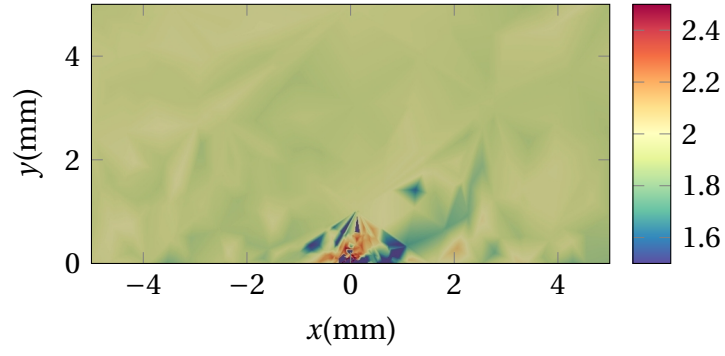


FIGURE 5.6 – Densité de charge des ions CEX $\log(n_{\text{cex}}/n_0)$ dans le patch

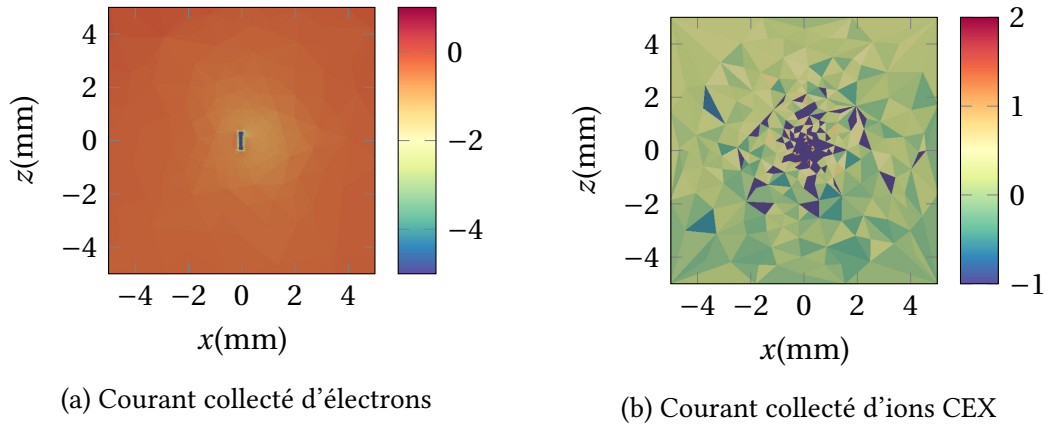


FIGURE 5.7 – Courants surfaciques autour de l'interconnecteur ($\log(I/I_{\text{th},e})$)

le courant thermique des électrons :

$$I_{th,e} = n_0 e \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} \quad (5.1)$$

On note également, sur la figure 5.7.b, le bruit numérique important dans les courants collectés pour les ions CEX. Dans la figure 5.7.a, on observe une légère diminution du courant d'électrons collecté par le diélectrique en amont de l'interconnecteur, causée par des potentiels de surface localement plus négatifs. Ces surfaces diélectriques se chargent de manière à équilibrer les courants d'ions et d'électrons incidents. La carte des courants d'électrons surfaciques donnent donc une estimation non bruitée du courant d'ions collecté par les surfaces de diélectrique.

Ainsi, la méthode patch non-linéaire permet la simulation d'éléments de très petite taille par rapport au satellite. Cependant, il est à noter que le très fin raffinement local induit la nécessité d'introduire un grand nombre de macro-particules dans la simulation pour limiter le bruit numérique lié à la méthode Particle-in-Cell dans le patch. On peut tout de même remarquer que la connaissance détaillée du potentiel électrique donnée par l'introduction du patch permet le calcul précis des trajectoires particulières. En particulier, il est possible de remonter les trajectoires des particules à partir de la surface de l'interconnecteur pour déterminer de manière précise la distribution impactant l'interconnecteur. Cette méthode, appelée Backtracking, est couramment utilisée dans les codes Particle-in-Cell tels que SPIS. L'utilisation de cette méthode dans le cas de l'interconnecteur permettrait en particulier de déterminer avec précision les courants collectés ainsi que les angles d'impact des ions, et ainsi simuler de manière détaillée le phénomène d'érosion de l'interconnecteur, qui est dimensionnant dans la conception des générateurs solaires. Une méthode similaire développée à l'Onera consiste à optimiser la distribution des macro-particules au point d'injection, de manière à assurer une bonne statistique dans une zone d'intérêt. Cette méthode permet d'augmenter le nombre de particules dans une zone donnée tout en limitant le nombre de macro-particules dans le reste du domaine. Alternativement, des modèles fluides ou perturbatifs pourraient être utilisés pour les densités d'ions, permettant de limiter le bruit numérique dans le patch.

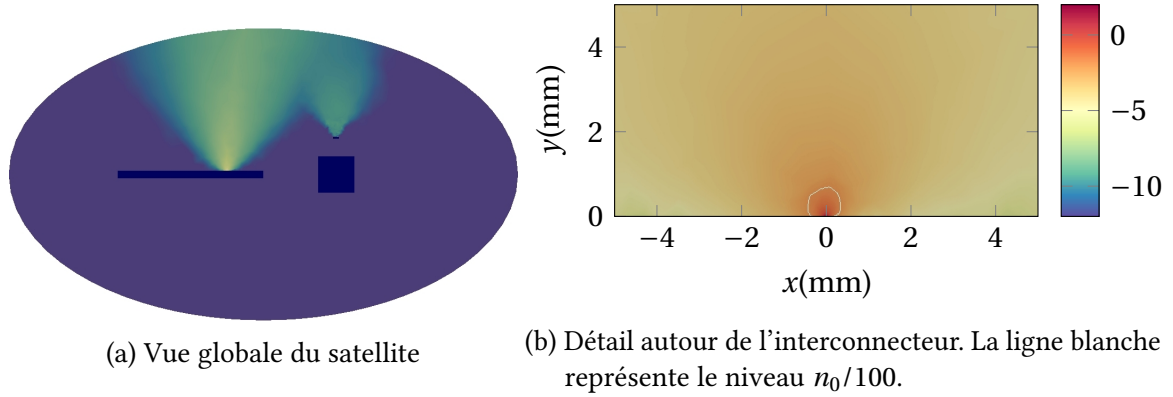


FIGURE 5.8 – Densité de correction $\log(n_c/n_0)$ dans le volume

5.2. Simulation d'un interconnecteur positif avec le modèle Maxwell-Boltzmann corrigé

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, la simulation des interconnecteurs positifs nécessite l'utilisation d'un modèle capable de prendre en compte les surfaces chargées positivement. Nous proposons dans cette section d'utiliser le modèle de Maxwell-Boltzmann corrigé, développé dans cette thèse, pour simuler un interconnecteur positif à la surface du générateur solaire de notre satellite. La détermination du courant électronique collecté par les interconnecteurs positifs à la surface du panneau est de première importance dans le calcul du potentiel flottant du satellite. De plus, les électrons déposés sur les surfaces diélectriques autour des interconnecteurs ont un impact important sur le phénomène de Snapover et sur la génération de décharges en situation de gradient inverse.

Le cas de simulation est identique au cas précédent, à l'exception du potentiel de l'interconnecteur, qui est maintenant chargé à un potentiel positif de 25 V. On a donc un potentiel réduit d'interconnecteur $\hat{\phi}_{itc} = 5$. Une source corrective est ajoutée au niveau de l'interconnecteur, comme présenté au chapitre 4.

Une fois de plus, aux échelles macroscopiques, nous obtenons des résultats similaires à ceux présentés en figure 5.4. L'effet d'un unique interconnecteur est très localisé, et le diélectrique environnant est capable d'écranter le potentiel positif de l'interconnecteur.

La figure 5.8 présente la densité de correction dans le domaine de simulation. On note que la correction émise depuis l'interconnecteur se propage dans le domaine de manière limitée.

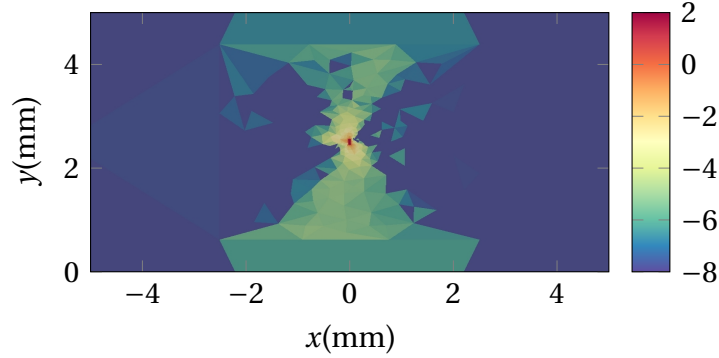


FIGURE 5.9 – Courant surfacique de correction ($\log(I_c/I_{th})$)

En effet, la densité de correction visible à l'échelle du satellite sont très largement inférieures à la densité du terme Maxwellien n_0 . Autour de l'interconnecteur, on remarque que cette correction devient importante, mais reste confinée par le champ électrique. Comme on s'y attend, le maximum de correction est situé au niveau de la surface de l'interconnecteur, où le potentiel largement positif rend le modèle de Maxwell-Boltzmann particulièrement faux. À seulement quelques dixièmes de millimètres de l'interconnecteur, cependant, la correction devient négligeable par rapport à la densité des électrons.

Ainsi, on peut remarquer que la densité de correction, comme dans le cas bidimensionnel présenté au chapitre 4, est largement confinée aux petites échelles par le champ électrique, ce qui limite grandement le nombre de particules dans le domaine de simulation. Dans la simulation réalisée, seulement 32 000 particules sont utilisées pour le calcul de la densité de correction dans tout le domaine. Par comparaison, environ un million de particules sont utilisées pour représenter la population d'ions CEX.

De plus, comme on peut le voir en figure 5.9, le motif de collection en surface pour cette population est particulièrement complexe. On note en particulier l'anisotropie particulièrement visible induite par le propulseur. Cependant, on remarque que les courants mesurés en dehors de l'interconnecteur sont très faibles par rapport aux autres courants collectés à la surface du panneau. Le courant total électronique collecté par l'interconnecteur, présenté en figure 5.10 est plus de trois fois inférieur au courant prévu par le modèle de Maxwell-Boltzmann. Étant donné que la correction n'est injecté qu'au niveau de l'interconnecteur et non pas sur l'intégralité des surfaces, le courant électronique est toujours surestimé par le modèle. Pour obtenir une estimation plus précise du courant

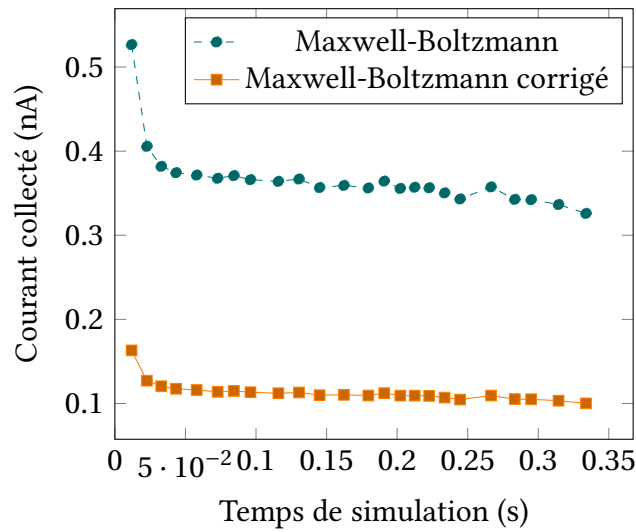


FIGURE 5.10 – Courant collecté sur l'interconnecteur

électronique collecté par l'interconnecteur, il conviendrait donc d'ajouter le terme correctif sur les surfaces diélectriques du panneau solaire, en particulier sur les surfaces les plus proches de l'interconnecteur.

En conclusion, le modèle correctif de population électronique développé dans cette thèse permet donc la prise en compte des interconnecteurs positifs sur les panneaux solaires de satellite. En particulier, l'écrantage du potentiel positif de l'interconnecteur par les diélectriques avoisinants permet le confinement de la densité de correction à une région très petite par rapport à la taille du satellite. Pour des potentiels modérés par rapport à la température électronique considérée, les instabilités mises en évidence au chapitre 4 ne posent pas de problème pour les maillages capables de raffiner un interconnecteur, et le nombre de particules correctives requises reste faible. De plus, le modèle est particulièrement simple à implanter dans un code Particle-in-Cell.

5.3. Développements futurs pour la simulation des interconnecteurs de panneaux solaires

5.3.1. Méthodes de réduction du bruit sur les densités d'ions autour des interconnecteurs

Des travaux supplémentaires sont nécessaires pour permettre l'évaluation précise de l'impact de l'interconnecteur sur la trajectoire des ions. En particulier, la méthode du Back-tracking pourrait être employée pour déterminer les courants ioniques ainsi que les angles d'impact des ions sur les différentes surfaces, ce qui permettrait d'évaluer l'érosion locale des matériaux. L'implantation dans SPIS de cette méthode pour une population générée en volume, comme dans le cas des ions CEX, nécessite cependant des développements spécifiques. En effet, il est dans ce cas nécessaire d'intégrer un terme de génération le long de la trajectoire calculée, contrairement au cas classique où la distribution est simplement évaluée au pied de la trajectoire. De plus, si la principale région du domaine où la population est générée est petite, il peut être nécessaire d'optimiser le choix des trajectoires à retracer de manière à obtenir une bonne statistique sur le courant mesuré tout en limitant la quantité de calculs.

D'autres méthodes, telles que les méthodes Particle-in-Cell perturbatives, et en particulier la méthode delta-f, sont actuellement développées à l'Onera pour limiter le bruit numérique sur la densité et les courants d'ions. Ces méthodes, développées en particulier pour la simulation de capteurs pour des missions spatiales scientifiques, pourraient grandement bénéficier à la simulation des interconnecteurs en réduisant de manière importante le bruit numérique sur les densités et les courants d'ions.

5.3.2. Amélioration des maillages utilisés

De plus, l'implantation actuelle de la méthode patch non-linéaire est limitée à des maillages dits conformes. Pour limiter le nombre de mailles grossières dans le patch, on s'autorise à utiliser des mailles grossières localement dégénérées, ce qui induit une mauvaise qualité de mailles dans le patch dans le cas d'un maillage conforme. Il serait possible de générer de meilleurs maillages dans le patch si celui-ci n'était que conforme au bord, voire

totalelement non conforme. La mise en place de tels maillages nécessite des développements supplémentaires du point de vue de la génération du maillage ainsi que pour le calcul des intersections entre les éléments qui apparaît dans l'algorithme sous la forme des termes croisés. Dans un code Particle-in-Cell tel que SPIS, le cas le plus général des maillages totalement non conforme, où la limite du patch ne se confond pas avec la frontière des éléments grossiers, pose des difficultés quant au calcul de la trajectoire des particules, en particulier pour détecter l'entrée ou la sortie des particules du patch.

5.3.3. Amélioration du modèle d'interconnecteur positif

L'implémentation dans le code SPIS a permis de mettre évidence l'intérêt du modèle de Maxwell-Boltzmann corrigé pour la prise en compte des effets de parois. Cependant, le schéma numérique proposé reste limité par des contraintes de stabilité rendant impossible la simulation des surfaces largement positives, de l'ordre de plusieurs dizaines de fois la température électronique. Si la nécessité de telles simulations devait apparaître, des pistes d'amélioration du modèles ont été proposées. En particulier, l'utilisation d'un modèle de référence différent du modèle de Boltzmann permettrait de limiter la densité locale de correction nécessaire autour des surfaces les plus positives. De plus, il serait particulièrement intéressant d'intégrer un modèle de l'émission secondaire électronique dans la simulation des interconnecteurs chargés positivement, car ce phénomène a un impact majeur sur le courant réel collecté, par le biais du processus de Snapover, ainsi que sur le processus de décharge électrostatique entre les cellules solaires.

Conclusion et perspectives

Durant cette thèse, nous avons développé différents outils numériques pour la prise en compte des effets des générateurs solaires dans la simulation de l'interaction plasma-satellite.

D'une part, une méthode multigrille pour la résolution du problème non-linéaire de Poisson-Boltzmann a été développée. Comme nous l'avons montré cette méthode patch non-linéaire permet la prise en compte des interconnecteurs de panneaux solaires, auparavant impossible à réaliser à cause du raffinement trop important du maillage requis autour des interconnecteurs.

D'autre part, un modèle correctif de la distribution Maxwellienne a été proposé pour permettre la prise en compte des surfaces du satellite chargées positivement. L'intérêt principal du modèle développé est de déterminer la collection des électrons par les interconnecteurs chargés positivement. En effet, cette collection a un impact majeur sur le potentiel flottant d'un satellite. Un schéma particulier a été développé pour calculer la correction nécessaire due à l'effet des parois du satellite sur la distribution des électrons.

L'utilisation des méthodes présentées dans cette thèse pour la simulation complète d'un panneau solaire nécessite la prise en compte d'un nombre important d'interconnecteurs. Typiquement, un satellite géostationnaire de télécommunication possède à la surface de ses générateurs plusieurs milliers d'interconnecteurs. Il est attendu que la répartition des interconnecteurs à la surface du panneau solaire ait un impact important sur l'interaction entre le satellite et le plasma. En particulier, les forts gradients de densités d'ions CEX observés dans le cas d'un propulseur électrique entraîne une réponse très différente des interconnecteurs d'un bout à l'autre du panneau. Pour concevoir une disposition optimale des strings de cellules, il serait intéressant de modéliser l'intégralité des interconnecteurs aux différents potentiels. Il est à noter que l'algorithme de la méthode patch est facilement parallélisable si de nombreux patches sont insérés dans le domaine, car la résolution dans

chaque patch peut être réalisée de manière indépendante. Même si la méthode patch non-linéaire permet la résolution parallèle de plusieurs patch, il est difficilement envisageable de mailler directement l'intégralité des interconnecteurs pour un satellite complet. Pour répondre à cette problématique, il serait cependant possible d'adapter des méthodes numériques de réduction de modèles, actuellement activement développées dans le domaine de la mécanique [1]. Ces méthodes, couplées à la méthode patch étudiée dans cette thèse, pourrait permettre le calcul d'un modèle réduit du problème autour d'un interconnecteur à la surface du panneau, et de l'appliquer à un grand nombre d'interconnecteurs, réduisant de manière importante le coût numérique de leur simulation. Alternativement, ou de manière conjointe, il est envisageable d'utiliser la méthode patch pour calculer l'impact d'un faible nombre d'interconnecteurs répartis sur la surface du panneau, et d'interpoler cet effet pour les interconnecteurs non simulés.

Dans le cas particulier de la simulation des panneaux solaires, les méthodes présentées peuvent être utilisées pour la simulation de la géométrie réelle d'un interconnecteur. Une telle simulation permettrait d'évaluer l'impact de la géométrie de l'interconnecteur et du gap entre les cellules sur les phénomènes de collection, de décharges et d'érosion, même dans le cas complexe des satellites à propulsion électrique. La prise en compte de tels effets participe ainsi aux études liées au développement et à la conception de panneaux solaires plus efficaces et plus robustes, en particulier dans le cadre des nouvelles missions liées à l'utilisation des propulseurs électriques.

L'application des méthodes numériques multi-échelles à la simulation du couplage plasma-satellite ouvre la voie à de nombreuses applications scientifiques et industrielles. D'une part, la simulation d'éléments de très petite taille par rapport au satellite, peut être d'un intérêt particulier. Outre l'impact des interconnecteurs de générateurs solaires, la simulation précise des capteurs scientifiques embarqués sur les satellites peut nécessiter de telles méthodes. En effet, la simulation de ces capteurs représente une problématique similaire à celle des interconnecteurs de panneau solaire, dans le sens où ils sont constitués d'éléments de petites tailles par rapport au satellite, et que leur simulation nécessite le calcul précis des trajectoires des particules d'intérêt. D'autre part, une large gamme d'applications est envisageable aux grandes échelles. En particulier, la simulation de l'effet réel de la plume du propulseur pourrait nécessiter des domaines longs de plusieurs centaines de mètres. Dans ce cas, on peut envisager de considérer le maillage aux échelles du satellite comme

un patch dans un domaine de simulation bien plus large. De plus, il est possible d'utiliser des éléments finis structurés ou en dimension réduite, plus efficaces en terme de temps de calcul, pour un tel domaine de grande dimension. D'autre part, la flexibilité de la méthode patch est classiquement utilisée en mécanique des fluides pour la simulation d'écoulements autour de pièces mobiles. Dans ce cas, chaque pièce est maillée séparément, et le couplage en volume réalisé par la méthode patch permet le calcul de l'interaction entre les différents éléments. Cette méthode semble particulièrement adaptée pour permettre la simulation d'éléments mobiles dans un satellite. En particulier, elle pourrait permettre la simulation de la rotation des panneaux solaires par rapport au corps d'un satellite. L'étude de l'effet du vol de plusieurs satellites en formation pourrait également être facilité par cette méthode, qui permettrait la prise en compte du mouvement des satellites les uns par rapport aux autres. De tels résultats présentent notamment un intérêt pour le développement de missions utilisant le propulseur d'un satellite pour la désorbitation de débris spatiaux.

Annexe A.

Identification des blocs diagonaux d'une matrice CSR symétrique

Lors de l'implantation de la méthode patch non-linéaire dans le logiciel SPIS, nous avons choisi d'utiliser un unique maillage non connexe de manière à prévenir toute modification de l'interface existante.

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, la matrice de rigidité obtenue, après l'application de l'algorithme de Cuthill-McKee [15], est donc diagonale par blocs. Chaque bloc de la diagonale correspond à une composante connexe du maillage. Pour permettre l'application de la méthode patch, il est donc nécessaire d'identifier ces différents blocs diagonaux.

La représentation des matrices creuses utilisée dans SPIS est appelée *Compressed Sparse Row* (CSR). Elle consiste à représenter la matrices en utilisant trois tableaux v , c et r . Les tableaux v et c , contiennent respectivement la valeur et l'indice de la colonne de chaque élément non nul, rangés ligne par ligne. Le tableau r contient, pour chaque ligne de la matrice, l'indice dans les tableaux v et c du premier élément positionné après le début de cette ligne. De plus, dans le cas de matrices symétriques, seule la partie triangulaire supérieure est représentée. Pour simplifier certains algorithmes, la taille des tableaux v et c est classiquement ajoutée en queue du tableau r .

La figure A.1 présente un exemple de représentation CSR sur une matrice creuse symétrique diagonale par bloc. On note en particulier que le dernier élément non-nul de la ligne i est indicé dans les tableaux v et c par $r[i + 1] - 1$. Ainsi, on peut facilement déterminer la colonne de cet élément en accédant à la valeur $c[r[i + 1] - 1]$.

On peut remarquer que la détermination des blocs diagonaux d'une telle matrice revient à

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} v &= [1; 2; 1; 3; 2] \\ c &= [0; 1; 2; 3; 3] \\ r &= [0; 2; 2; 4; 5] \\ c[r[i+1]-1] &= [1; 1; 3; 3] \end{aligned}$$

FIGURE A.1 – Exemple de représentation CSR

calculer, pour chaque ligne i , la colonne j_{\max} maximale des éléments des lignes précédentes. En effet, si cette valeur est strictement inférieure à l'indice de la ligne courante, cela signifie que la matrice est nulle dans le bloc constitué des lignes strictement inférieures à i et des colonnes supérieures ou égales à i . Le i ème élément diagonale est alors situé au début d'un bloc diagonal. On peut voir ce cas apparaître dans la figure A.1, avec $i = 2$. On a $j_{\max} = 1 < i$, et la matrice contient bien un bloc diagonal débutant à cette ligne.

ALGORITHME 7 – Détection des blocs diagonaux dans une matrice symétrique

Entrées : v, c, r une matrice symétrique de diagonale de taille n sous format CSR

Sorties : B l'ensemble des indices débutant un bloc diagonal

```

1 Poser  $j_{\max} = -1$ 
2 Poser  $B = \emptyset$ 
3 pour  $i \in [0 : n]$  faire
4   | si  $j_{\max} < i$  alors
5   |   Ajouter  $i$  dans  $B$ 
6   | fin
7   | si  $j_{\max} < c[r[i+1]-1]$  alors
8   |   Poser  $j_{\max} = c[r[i+1]-1]$ 
9   | fin
10 fin
```

L'algorithme 7 représente l'algorithme final utilisé dans SPIS pour identifier les blocs diagonaux dans les matrices symétriques. On note que cet algorithme est particulièrement efficace puisqu'il est linéaire en la taille de la diagonale de la matrice.

Bibliographie

- [1] A. ABDULLE, Y. BAI et G. VILMART. “Reduced basis finite element heterogeneous multiscale method for quasilinear elliptic homogenization problems”. In : *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S* 8.1 (juil. 2014), p. 91–118. ISSN : 1937-1632. DOI : [10.3934/dcdss.2015.8.91](https://doi.org/10.3934/dcdss.2015.8.91).
- [2] G. ALLAIRE. *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Google-Books-ID : vReEuE4margC. Editions Ecole Polytechnique, 2005. 482 p. ISBN : 978-2-7302-1255-7.
- [3] P. C. ANDERSON et H. C. KOONS. “Spacecraft charging anomaly on a low-altitude satellite in an aurora”. In : *Journal of Spacecraft and Rockets* 33.5 (1996), p. 734–738. ISSN : 0022-4650. DOI : [10.2514/3.26828](https://doi.org/10.2514/3.26828).
- [4] J. W. BANKS et J. A. F. HITTER. “A New Class of Nonlinear Finite-Volume Methods for Vlasov Simulation”. In : *IEEE Transactions on Plasma Science* 38.9 (sept. 2010), p. 2198–2207. ISSN : 0093-3813. DOI : [10.1109/TPS.2010.2056937](https://doi.org/10.1109/TPS.2010.2056937).
- [5] H. BARSAMIAN. *ISS Plasma Interaction : Measurements and Modeling - 8th SCTC*. 2004.
- [6] N. BESSE et E. SONNENDRÜCKER. “Semi-Lagrangian schemes for the Vlasov equation on an unstructured mesh of phase space”. In : *Journal of Computational Physics* 191.2 (1^{er} nov. 2003), p. 341–376. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/S0021-9991\(03\)00318-8](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00318-8).
- [7] C. K. BIRDSALL et A. B. LANGDON. *Plasma Physics via Computer Simulation*. Google-Books-ID : S2lqgDTm6a4C. CRC Press, 1991. 506 p. ISBN : 978-0-7503-1025-3.

- [8] A. BRUNET, P. SARRAILH, F. ROGIER, J.-F. ROUSSEL et D. PAYAN. “Nonlinear patch method and application”. In : ECCOMAS Congress 2016 - Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. T. 4. 2016, p. 7895–7904. ISBN : 978-618-82844-0-1.
- [9] S. BRUNNER, E. VALEO et J. A. KROMMES. “Collisional delta-f scheme with evolving background for transport time scale simulations”. In : *Physics of Plasmas* 6.12 (15 nov. 1999), p. 4504–4521. ISSN : 1070-664X. DOI : [10.1063/1.873738](https://doi.org/10.1063/1.873738).
- [10] J. D. CALLEN. *Fundamentals of Plasma Physics*. 2006.
- [11] E. CAMPOREALE, G. L. DELZANNO, B. K. BERGEN et J. D. MOULTON. “On the velocity space discretization for the Vlasov–Poisson system : Comparison between implicit Hermite spectral and Particle-in-Cell methods”. In : *Computer Physics Communications* 198 (jan. 2016), p. 47–58. ISSN : 0010-4655. DOI : [10.1016/j.cpc.2015.09.002](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2015.09.002).
- [12] J.-P. CATANI et D. PAYAN. “First results of the SILLAGE flight experiment aboard SPOT-4”. In : *Space Safety, Rescue and Quality 2001*. 2003, p. 155.
- [13] E. Y. CHOUERI, A. J. KELLY et R. G. JAHN. “Mass savings domain of plasma propulsion for LEO to GEO transfer”. In : *Journal of Spacecraft and Rockets* 30.6 (1993), p. 749–754. ISSN : 0022-4650. DOI : [10.2514/3.26381](https://doi.org/10.2514/3.26381).
- [14] N. CROUSEILLES, P. DEGOND et M. LEMOU. “A Hybrid Kinetic/Fluid Model for Solving the Gas Dynamics Boltzmann-BGK Equation”. In : *J. Comput. Phys.* 199.2 (sept. 2004), p. 776–808. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/j.jcp.2004.03.007](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.03.007).
- [15] E. CUTHILL et J. MCKEE. “Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices”. In : *Proceedings of the 1969 24th National Conference*. ACM ’69. New York, NY, USA : ACM, 1969, p. 157–172. DOI : [10.1145/800195.805928](https://doi.org/10.1145/800195.805928).
- [16] V. DAVIS et B. GARDNER. “Parasitic current collection by solar arrays in LEO”. In : American Institute of Aeronautics et Astronautics, 9 jan. 1995. DOI : [10.2514/6.1995-594](https://doi.org/10.2514/6.1995-594).
- [17] V. DAVIS, M. MANDELL et al. “Comparison of Low Earth Orbit Wake Current Collection Simulations Using Nascap-2k, SPIS, and MUSCAT Computer Codes”. In : *IEEE Transactions on Plasma Science* 41.12 (2013), p. 3303–3309. ISSN : 0093-3813. DOI : [10.1109/TPS.2013.2247424](https://doi.org/10.1109/TPS.2013.2247424).

- [18] R. E. DENTON et M. KOTSCHENREUTHER. “ δf Algorithm”. In : *Journal of Computational Physics* 119.2 (1^{er} juil. 1995), p. 283–294. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1006/jcph.1995.1136](https://doi.org/10.1006/jcph.1995.1136).
- [19] B. ELIASSON. “Numerical modelling of the two-dimensional Fourier transformed Vlasov–Maxwell system”. In : *Journal of Computational Physics* 190.2 (20 sept. 2003), p. 501–522. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/S0021-9991\(03\)00295-X](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00295-X).
- [20] B. FEUERBACHER et B. FITTON. “Experimental Investigation of Photoemission from Satellite Surface Materials”. In : *Journal of Applied Physics* 43.4 (1^{er} avr. 1972), p. 1563–1572. ISSN : 0021-8979. DOI : [10.1063/1.1661362](https://doi.org/10.1063/1.1661362).
- [21] D. FONTAINE. “Introduction to the Terrestrial Ionosphere”. In : *Cours de technologie spatiale : "Environnement spatial : Prévention des risques liés aux phénomènes de charge."*. Cépaduès-Éditions, 2002, p. 195.
- [22] H. B. GARRETT. “The charging of spacecraft surfaces”. In : *Reviews of Geophysics* 19.4 (1981), p. 577–616.
- [23] C. GEUZAIN et J.-F. REMACLE. “Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities”. In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79.11 (10 sept. 2009), p. 1309–1331. ISSN : 1097-0207. DOI : [10.1002/nme.2579](https://doi.org/10.1002/nme.2579).
- [24] R. GLOWINSKI, J. HE, A. LOZINSKI, J. RAPPAZ et J. WAGNER. “Finite element approximation of multi-scale elliptic problems using patches of elements”. In : *Numerische Mathematik* 101.4 (2005), p. 663–687.
- [25] R. GLOWINSKI, J. HE, J. RAPPAZ et J. WAGNER. “Approximation of multi-scale elliptic problems using patches of finite elements”. In : *Comptes Rendus Mathématique* 337.10 (15 nov. 2003), p. 679–684. ISSN : 1631-073X. DOI : [10.1016/j.crma.2003.09.029](https://doi.org/10.1016/j.crma.2003.09.029).
- [26] H. GRAD. “On the kinetic theory of rarefied gases”. In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 2.4 (1^{er} déc. 1949), p. 331–407. ISSN : 1097-0312. DOI : [10.1002/cpa.3160020403](https://doi.org/10.1002/cpa.3160020403).

- [27] G. M. GUERRA, S. ZIO, J. J. CAMATA, F. A. ROCHINHA, R. N. ELIAS, P. L. PARAIZO et A. L. COUTINHO. “Numerical simulation of particle-laden flows by the residual-based variational multiscale method”. In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 73.8 (20 nov. 2013), p. 729–749. ISSN : 1097-0363. DOI : [10.1002/flid.3820](https://doi.org/10.1002/flid.3820).
- [28] J. HE, A. LOZINSKI et J. RAPPAZ. “Accelerating the method of finite element patches using approximately harmonic functions”. In : *Comptes Rendus Mathematique* 345.2 (2007), p. 107–112. ISSN : 1631-073X. DOI : [10.1016/j.crma.2007.06.006](https://doi.org/10.1016/j.crma.2007.06.006).
- [29] V. E. HENSON. “Multigrid methods nonlinear problems : an overview”. In : t. 5016. 2003, p. 36–48. DOI : [10.1117/12.499473](https://doi.org/10.1117/12.499473).
- [30] D. HEYNDERICKX. “Radiation belt modelling in the framework of space weather effects and forecasting”. In : *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. Space Weather Effects on Technological Systems* 64.16 (1^{er} nov. 2002), p. 1687–1700. ISSN : 1364-6826. DOI : [10.1016/S1364-6826\(02\)00119-0](https://doi.org/10.1016/S1364-6826(02)00119-0).
- [31] A. HILGERS, B. THIEBAULT et al. “A Simple Model of the Effect of Solar Array Orientation on SMART-1 Floating Potential”. In : *IEEE Transactions on Plasma Science* 34.5 (oct. 2006), p. 2159–2165. ISSN : 0093-3813. DOI : [10.1109/TPS.2006.883405](https://doi.org/10.1109/TPS.2006.883405).
- [32] R. W. HOCKNEY et J. W. EASTWOOD. *Computer Simulation Using Particles*. Google-Books-ID : nTOFkmnCQuIC. CRC Press, 1^{er} jan. 1988. 566 p. ISBN : 978-1-4398-2205-0.
- [33] M. J. HOLST. “The Poisson-Boltzmann Equation”. In : *An analysis and multilevel numerical solution* (1994).
- [34] T. J. R. HUGHES. “Multiscale phenomena : Green’s functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 127.1 (nov. 1995), p. 387–401. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/0045-7825\(95\)00844-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(95)00844-9).
- [35] T. J. R. HUGHES, G. R. FEIJÓO, L. MAZZEI et J.-B. QUINCY. “The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics”. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Advances in Stabilized Methods in Computational Mechanics* 166.1 (13 nov. 1998), p. 3–24. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/S0045-7825\(98\)00079-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00079-6).

- [36] I. KATZ, V. A. DAVIS, D. B. SNYDER et E. A. ROBERTSON. “ESD triggered solar array failure mechanism”. In : *6th Spacecraft Charging Technology*. 1998, p. 39–42.
- [37] I. KATZ, V. DAVIS et D. SNYDER. “Mechanism for spacecraft charging initiated destruction of solar arrays in GEO”. In : *36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. DOI : 10.2514/6.1998-1002. American Institute of Aeronautics et Astronautics, 1997.
- [38] M. C. KELLEY. “The Earth Ionosphere”. In : *Academic, San Diego, Calif* (1989).
- [39] A. J. KLIMAS. “A numerical method based on the Fourier-Fourier transform approach for modeling 1-D electron plasma evolution”. In : *Journal of Computational Physics* 50.2 (1^{er} mai 1983), p. 270–306. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/0021-9991\(83\)90067-0](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90067-0).
- [40] N. A. KRALL et A. W. TRIVELPIECE. *Principles of plasma physics*. 1973.
- [41] J. G. LAFRAMBOISE. *Theory of spherical and cylindrical Langmuir probes in a collisionless, Maxwellian plasma at rest*. DTIC Document, 1966.
- [42] P. LANTOS. “The sun, the solar wind and their effects on the earth’s environment”. In : *Cours de technologie spatiale : ”Environnement spatial : Prévention des risques liés aux phénomènes de charge.”*. Cépaduès-Éditions, 2002, p. 37.
- [43] G. LAPENTA et C. V. P. ASTROFYSICA. *Particle In Cell Methods With Application to Simulations in Space Weather*.
- [44] L. LEVY. “Material Charging”. In : *Cours de technologie spatiale : ”Environnement spatial : Prévention des risques liés aux phénomènes de charge.”*. Cépaduès-Éditions, 2002, p. 241.
- [45] J. LIKAR, T. OKUMURA et al. “Initial results from Primary Arc effects on solar cells at LEO (PASCAL) flight experiment”. In : *Photovoltaic Specialists Conference (PVSC), 2013 IEEE 39th*. Photovoltaic Specialists Conference (PVSC), 2013 IEEE 39th. Juin 2013, p. 3112–3114. DOI : [10.1109/PVSC.2013.6745118](https://doi.org/10.1109/PVSC.2013.6745118).
- [46] J. LIKAR, A. BOGORAD, T. MALKO, N. GOODZEIT, J. GALOFARO et M. MANDELL. “Interaction of Charged Spacecraft with Electric Propulsion Plume : On Orbit Data and Ground Test Results”. In : *IEEE Transactions on Nuclear Science* 53.6 (2006), p. 3602–3606. ISSN : 0018-9499. DOI : [10.1109/TNS.2006.885107](https://doi.org/10.1109/TNS.2006.885107).

- [47] J. J. LIKAR, A. BOGORAD, K. A. AUGUST, R. E. LOMBARDI, K. KANNENBERG et R. HERSCHITZ. "Spacecraft Charging, Plume Interactions, and Space Radiation Design Considerations for All-Electric GEO Satellite Missions". In : *IEEE Transactions on Plasma Science* (2015), p. 1–1. ISSN : 0093-3813, 1939-9375. DOI : [10.1109/TPS.2015.2403272](https://doi.org/10.1109/TPS.2015.2403272).
- [48] J. LIOUVILLE. "Note sur la Théorie de la Variation des constantes arbitraires." In : *Journal de mathématiques pures et appliquées* (1838), p. 342–349.
- [49] P. LOUARN. "Elements of plasma physics". In : *Cours de technologie spatiale : "Environnement spatial : Prévention des risques liés aux phénomènes de charge"*. Cépaduès-Éditions, 2002, p. 165.
- [50] J.-C. MATEO-VELEZ, P. SARRAILH, S. HESS et J.-F. ROUSSEL. "Simulations of plasma thruster and large antenna effects on the electrostatic behavior of spacecraft in GEO". In : Spacecraft Charging Technology Conference. Noordwijk (The Netherland), avr. 2016.
- [51] G. MATTICARI, A. MATUCCI, G. NOCI, M. MATTAVELLI et D. BORIE. "Electric Propulsion Diagnostic Packages for the Characterization of Thruster Plume-Spacecraft Interactions". In : European Spacecraft Propulsion Conference. T. 398. 1997, p. 511. ISBN : 1609-042X.
- [52] S. MCCORMICK et J. THOMAS. "The fast adaptive composite grid (FAC) method for elliptic equations". In : *Mathematics of Computation* 46.174 (1986), p. 439–456. ISSN : 0025-5718, 1088-6842. DOI : [10.1090/S0025-5718-1986-0829618-X](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1986-0829618-X).
- [53] C. S. MEIERBACHTOL, A. D. GREENWOOD, J. P. VERBONCOEUR et B. SHANKER. "Conformal Electromagnetic Particle in Cell : A Review". In : *IEEE Transactions on Plasma Science* 43.11 (nov. 2015), p. 3778–3793. ISSN : 0093-3813. DOI : [10.1109/TPS.2015.2487522](https://doi.org/10.1109/TPS.2015.2487522).
- [54] G. MEURANT. *Computer Solution of Large Linear Systems*. Google-Books-ID : fSqfb5a3WrwC. Elsevier, 16 juin 1999. 777 p. ISBN : 978-0-08-052951-6.
- [55] R. MIKATARIAN. *Electrical Charging of the International Space Station (AIAA)*. 2003.
- [56] J. I. MINOW et L. N. PARKER. "DUAL-SPACECRAFT OBSERVATIONS OF AURORAL CHARGING". In : (2016).

- [57] H. M. MOTT-SMITH et I. LANGMUIR. “The Theory of Collectors in Gaseous Discharges”. In : *Physical Review* 28.4 (1^{er} oct. 1926), p. 727–763. DOI : [10.1103/PhysRev.28.727](https://doi.org/10.1103/PhysRev.28.727).
- [58] NASA. *Spacecraft solar cell arrays*. 1^{er} mai 1971.
- [59] S. E. PARKER et W. W. LEE. “A fully nonlinear characteristic method for gyrokinetic simulation”. In : *Physics of Fluids B : Plasma Physics* 5.1 (1^{er} jan. 1993), p. 77–86. ISSN : 0899-8221. DOI : [10.1063/1.860870](https://doi.org/10.1063/1.860870).
- [60] D. PAYAN. “Vacuum electrostatic discharges”. In : *Cours de technologie spatiale : ”Environnement spatial : Prévention des risques liés aux phénomènes de charge.”*. Cépaduès-Éditions, 2002, p. 317.
- [61] A. PEDERSEN. “Solar wind and magnetosphere plasma diagnostics by spacecraft electrostatic potential measurements”. In : *Annales Geophysicae* 13.2 (1^{er} fév. 1995), p. 118–129. ISSN : 0992-7689, 1432-0576. DOI : [10.1007/s00585-995-0118-8](https://doi.org/10.1007/s00585-995-0118-8).
- [62] S. PISSANETZKY. *Sparse matrix technology*. Google-Books-ID : 7PruAAAAMAAJ. Academic Press, 1984. 344 p. ISBN : 978-0-12-557580-5.
- [63] E. POHN, M. SHOUCRI et G. KAMELANDER. “Eulerian Vlasov codes”. In : *Computer Physics Communications* 166.2 (1^{er} mar. 2005), p. 81–93. ISSN : 0010-4655. DOI : [10.1016/j.cpc.2004.10.009](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2004.10.009).
- [64] H. S. RAUSCHENBACH. *Solar cell array design handbook : the principles and technology of photovoltaic energy conversion*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [65] J.-F. ROUSSEL. “Charging model in low earth orbits”. In : *Cours de technologie spatiale : ”Environnement spatial : Prévention des risques liés aux phénomènes de charge.”*. Cépaduès-Éditions, 2002, p. 209.
- [66] J.-F. ROUSSEL, F. ROGIER et al. “SPIS Open-Source Code : Methods, Capabilities, Achievements, and Prospects”. In : *IEEE Transactions on Plasma Science* 36.5 (oct. 2008), p. 2360–2368. ISSN : 0093-3813. DOI : [10.1109/TPS.2008.2002327](https://doi.org/10.1109/TPS.2008.2002327).
- [67] P. SARRAILH, S. L. HESS et J.-C. MATEO-VELEZ. “Simulations of plasma thruster effect on the electrostatic behavior of spacecrafts in GEO”. In : American Institute of Aeronautics et Astronautics, 31 août 2015. ISBN : 978-1-62410-334-6. DOI : [10.2514/6.2015-4640](https://doi.org/10.2514/6.2015-4640).

- [68] J.-A. SAUVAUD. "Earth Magnetosphere". In : *Cours de technologie spatiale : "Environnement spatial : Prévention des risques liés aux phénomènes de charge."*. Cépaduès-Éditions, 2002, p. 81.
- [69] R. SCHUNK et A. NAGY. *Ionospheres : physics, plasma physics, and chemistry*. Cambridge university press, 2009.
- [70] J. M. SIGUIER, V. INGUIMBERT, G. MURAT, S. HESS et D. PAYAN. "Plasma current collection of high voltage solar array : experimental results". In : *Spacecraft Charging Technology Conference SCTC 2016*. 2016.
- [71] T. SIMPSON. *Miscellaneous Tracts on Some Curious and Very Interesting Subjects in Mechanics, Physical-astronomy, and Speculative Mathematics : Wherein, the Precession of the Equinox, the Nutation of the Earth's Axis And, the Motion of the Moon in Her Orbit, are Determined*. Google-Books-ID : wxVF_7rIXlsC. J. Nourse over-against Katherine-street in the strand, 1757. 202 p.
- [72] E. SONNENDRÜCKER, J. ROCHE, P. BERTRAND et A. GHIZZO. "The Semi-Lagrangian Method for the Numerical Resolution of the Vlasov Equation". In : *Journal of Computational Physics* 149.2 (1^{er} mar. 1999), p. 201–220. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1006/jcph.1998.6148](https://doi.org/10.1006/jcph.1998.6148).
- [73] J. L. STEGER et J. A. BENEK. "On the use of composite grid schemes in computational aerodynamics". In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 64.1 (oct. 1987), p. 301–320. ISSN : 0045-7825. DOI : [10.1016/0045-7825\(87\)90045-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(87)90045-4).
- [74] T. SUGIYAMA et K. KUSANO. "Multi-scale plasma simulation by the interlocking of magnetohydrodynamic model and particle-in-cell kinetic model". In : *Journal of Computational Physics* 227.2 (2007), p. 1340–1352. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/j.jcp.2007.09.011](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.09.011).
- [75] B. THEILLAUMAS, M. SÉVOZ et al. "Simulation and analysis of spacecraft charging using SPIS-GEO and NASCAP-GEO". In : *Spacecraft Charging Technology Conference 2014 (13th SCTC)*. PASADENA, United States, juin 2014.
- [76] H. THIEMANN et R. W. SCHUNK. "Field formation around negatively biased solar arrays in the LEO-plasma". In : *Advances in Space Research* 12.12 (1992), p. 143–146. ISSN : 0273-1177. DOI : [10.1016/0273-1177\(92\)90364-4](https://doi.org/10.1016/0273-1177(92)90364-4).

- [77] H. THIEMANN et R. W. SCHUNK. “Particle-in-cell simulations of sheath formation around biased interconnectors in a low-earth-orbit plasma”. In : *Journal of Spacecraft and Rockets* 27.5 (1990), p. 554–562. ISSN : 0022-4650. DOI : [10.2514/3.26179](https://doi.org/10.2514/3.26179).
- [78] C. THOMSON et J. R. DENNISON. “Snapover : Anomalous Plasma Current Collection by Positively Biased Conductors when Surrounded by a Dielectric”. In : (2000).
- [79] J. P. TRELLES, E. PFENDER et J. HEBERLEIN. “Multiscale Finite Element Modeling of Arc Dynamics in a DC Plasma Torch”. In : *Plasma Chemistry and Plasma Processing* 26.6 (1^{er} déc. 2006), p. 557–575. ISSN : 0272-4324, 1572-8986. DOI : [10.1007/s11090-006-9023-5](https://doi.org/10.1007/s11090-006-9023-5).
- [80] H. UEDA, Y. OMURA, H. MATSUMOTO et T. OKUZAWA. “A study of the numerical heating in electrostatic particle simulations”. In : *Computer Physics Communications* 79.2 (1^{er} avr. 1994), p. 249–259. ISSN : 0010-4655. DOI : [10.1016/0010-4655\(94\)90071-X](https://doi.org/10.1016/0010-4655(94)90071-X).
- [81] A. A. VLASOV. “The Vibrational Properties of an Electron Gas”. In : *Soviet Physics Uspekhi* 10.6 (1968), p. 721. ISSN : 0038-5670. DOI : [10.1070/PU1968v01n06ABEH003709](https://doi.org/10.1070/PU1968v01n06ABEH003709).
- [82] J. WAGNER. “Finite element methods with patches and applications”. Thèse de doct. Lausanne, Swiss Confederation : EPF, 2006.
- [83] M. WARTELSKI et C. ARDURA. “The Assessment of Interactions between Spacecraft and Electric Propulsion Systems Project”. In : 32nd International Electric Propulsion Conference. 2011.
- [84] G.-W. WEI, Q. ZHENG, Z. CHEN et K. XIA. “Variational Multiscale Models for Charge Transport”. In : (2012).
- [85] J. H. WHEALTON, R. W. MCGAFFEY et P. S. MESZAROS. “A finite difference 3-D Poisson-Vlasov algorithm for ions extracted from a plasma”. In : *Journal of Computational Physics* 63.1 (1^{er} mar. 1986), p. 20–32. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/0021-9991\(86\)90082-3](https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90082-3).
- [86] T. YPMA. “Historical Development of the Newton–Raphson Method”. In : *SIAM Review* 37.4 (1^{er} déc. 1995), p. 531–551. ISSN : 0036-1445. DOI : [10.1137/1037125](https://doi.org/10.1137/1037125).

Résumé

Modélisation multi-échelle de l'effet d'un générateur solaire sur la charge électrostatique d'un satellite

L'estimation de la charge d'un satellite et du risque de décharge nécessite dans certains cas la prise en compte dans les modèles numériques d'échelles spatiales très différentes. En particulier, les interconnecteurs présents à la surface des générateurs solaires d'un satellite sont susceptibles de modifier son équilibre électrostatique lors de missions spatiales rencontrant un environnement plasma dense. Une modélisation classique de cet effet nécessiterait le maillage d'éléments à des échelles submillimétriques, sur un satellite de plusieurs dizaines de mètres d'envergure, ce qui rendrait la simulation extrêmement onéreuse en temps de calcul. De plus, ces interconnecteurs sont parfois fortement chargés positivement par rapport à l'environnement, ce qui empêche l'application du modèle de Maxwell-Boltzmann classiquement utilisé pour les populations d'électrons. Dans une première partie, nous avons développé une méthode itérative de type Patch adaptée à la résolution du problème non-linéaire de Poisson-Boltzmann pour la simulation du plasma spatial. Cette méthode numérique multigrille permet la simulation de l'impact d'éléments de petite taille à la surface d'un satellite complet. Dans une seconde partie, nous avons développé un schéma correctif permettant d'utiliser le modèle de Maxwell-Boltzmann pour la population d'électrons, malgré la présence de surfaces satellites chargées positivement, en y ajoutant un terme de correction calculé à l'aide de la méthode Particle-in-Cell. Nous avons montré que ce schéma permet, tout en limitant le coût en calculs, de déterminer avec précision les courants collectés par les surfaces du satellites, qu'elles soient chargées négativement ou positivement.

Multiscale modelling of the impact of solar arrays on a spacecraft electrostatic charging

The numerical simulation of spacecraft charging can require to resolve widely different geometrical scales. In particular, solar array interconnects on the surface of solar panels have a major impact on a satellite electrostatic equilibrium. A classical model of this effect would require a mesh refined to sub-millimetre scales, on a spacecraft spanning several dozen metres, which would make the simulation computationally expensive. Moreover, the solar array interconnects can have a large positive potential relative to the space plasma, preventing the use of the classical Maxwell-Boltzmann model for the electrons in the plasma. In a first part, we have developed an iterative patch method to solve the nonlinear Poisson-Boltzmann equation used in plasma simulations. This multigrid numerical scheme allows to resolve the impact of small-scale components on the surface of a complete spacecraft. In a second part, we have developed a corrective scheme for the Maxwell-Boltzmann model to account for the presence of charged surfaces in the simulation. We have shown that this simple model is able to precisely compute the currents collected by the spacecraft surfaces.

Mots clefs : méthodes numériques, multi-échelle, patch, non-linéaire, particle-in-cell, Maxwell-Boltzmann, plasma, panneaux solaires, satellite

Keywords : numerical methods, multiscale, patch, multigrid, nonlinear, particle-in-cell, Maxwell-Boltzmann, plasma, solar arrays, spacecraft