



HAL
open science

Nouvelles configurations de grappes d'actionneurs gyroskopiques pour le contrôle de satellites agiles

Hélène Evain

► **To cite this version:**

Hélène Evain. Nouvelles configurations de grappes d'actionneurs gyroskopiques pour le contrôle de satellites agiles. Automatique / Robotique. INSTITUT SUPERIEUR DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE (ISAE); UNIVERSITE DE TOULOUSE, 2017. Français. NNT: . tel-01702773

HAL Id: tel-01702773

<https://hal.science/tel-01702773v1>

Submitted on 7 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)*

Présentée et soutenue le 18/12/2017 par :

HÉLÈNE EVAIN

**Nouvelles configurations de grappes d'actionneurs gyroscopiques pour
le contrôle de satellites agiles**

JURY

DANIEL ALAZARD	Université de Toulouse/ISAE	Directeur de thèse
MATHIEU ROGNANT	ONERA	Co-directeur de thèse
ALAIN PEUS	CNES	Encadrant de thèse
JUREK SASIADEK	Carleton University	Examineur
GILLES CHAMBERLAND	Thales Alenia Space	Examineur
PHILIPPE BIDAUD	Univ. Pierre-et-Marie-Curie	Examineur
DAVID HENRY	Université de Bordeaux	Rapporteur
ISABELLE	CNRS LS2N	Rapporteur
FANTONI-COICHOT		

École doctorale et spécialité :

EDSYS : Automatique 4200046

Unité de Recherche :

ONERA (DTIS)

Directeur(s) de Thèse :

Daniel ALAZARD et Mathieu ROGNANT

Rapporteurs :

Isabelle FANTONI-COICHOT et David HENRY

A Christiane

Remerciements

En premier lieu, je souhaite remercier mes encadrants de leur investissement, du partage de leurs connaissances et de leur soutien indéfectible tout au long de ce doctorat. Merci à Mathieu Rognant de m'avoir encadrée tous les jours, d'avoir passé autant de temps à m'apprendre la recherche. Merci aussi pour toutes ces discussions sur les nombreuses pistes de recherche stimulantes de la thèse, mais aussi sur des sujets non-professionnels. Je remercie également Alain Peus de m'avoir soutenue et supportée tout au long de la thèse, et même après. J'ai appris beaucoup de ta rigueur scientifique, de tes méthodes de travail et de validation de résultats, ainsi que de tes grandes connaissances des systèmes spatiaux. Merci de t'être investi autant sur la thèse et de ta relecture très sérieuse du manuscrit. Merci à Daniel Alazard d'avoir dirigé ma thèse, d'avoir toujours été présent lorsque j'avais besoin (ou SCRAT). C'est un honneur de travailler avec un chercheur aussi brillant, tu m'as beaucoup appris. Merci aussi pour les airs de guitare pour nous détendre avant les vols paraboliques. Merci aussi à Jurek Sasiadek de l'accueil à Carleton University durant ces deux mois. Je garde en particulier de très bons souvenirs de discussions autour de macchiatos.

Je remercie en outre les autres membres de mon jury de thèse : Isabelle Fantoni-Coichot, David Henry, Gilles Chamberland et Philippe Bidaud d'avoir accepté d'y participer, d'avoir relu et évalué mon manuscrit, ainsi que pour leurs remarques intéressantes sur ce sujet d'études.

Bien sûr, merci à Jean Mignot d'avoir suivi et d'avoir toujours été un soutien lors de cette thèse et du projet Fly Your Thesis.

Ensuite je souhaiterais remercier notre équipe Flying Squirrels pour cette merveilleuse expérience. Merci à Thomas S. pour son dévouement au projet et sa motivation sans failles qui ont permis que l'expérience soit réalisée avec succès. Merci à Antoine B. pour son investissement et sa participation déterminante au projet sur de nombreux sujets. Merci à Adrien D. R. pour sa contribution au projet et sa bonne humeur communicative. C'était un plaisir de développer ce projet avec vous. Merci au DCAS de l'accueil, aux équipes techniques de l'ISAE SUPAERO, à l'usinage, au DMSM de nous avoir aidé dans ce projet, ainsi qu'aux personnels de l'ONERA, CNES et ISAE SUPAERO qui nous ont apporté leur aide ou soutien quelle que soit la forme. Bien sûr, merci à Nigel, Max et Antonino de nous avoir suivi tout au long du

programme, ainsi que Novespace.

Ces trois années ont aussi été marquées par la présence de mes collègues doctorants et post-doctorants au DCSD, dont l'importance a été indéniable durant les différentes phases de la thèse. En particulier, merci à Henry S., Nicolas N., Jérémy L., Patrick B., Nicolas D., Emmanuel C., Igor P. et mon cobureau Guillaume C. pour leur accueil au sein du département. Merci à Adrien M. pour les discussions animées aux pauses cafés et repas. Je garderais un très bon souvenir des discussions sur le spatial et sujets variés avec Alvaro P. G. que je remercie pour son soutien tout au long de la thèse. Je suis reconnaissante à Mathieu B., Jorrit T. et Guillaume A. d'avoir pu partager avec eux ces trois ans. Enfin, merci à Adèle B., Marine H., Matteo G., Vincent B., Pauline K., Mehdi O., Ejagen S., Oktay K., Sébastien P., Gustav O., Valentin B. et Mario C. de ces bons moments essentiels pour passer les obstacles de la fin de thèse. Merci à Lylia S. pour son sourire et sa bonne humeur.

Merci aussi entre autres à Cédric S., Charles P.-V., Charles L., Pierre V., Cédric P., Xavier P., Lucie D. pour ces bons moments, barbecues ou sessions de football victorieuses.

Merci aux doctorants de l'ISAE SUPAERO de l'accueil, mais que je n'ai malheureusement pas eu le temps de connaître assez sur les derniers mois de la thèse.

Merci au reste de l'équipe ex-DCSD pour ces trois années. Je souhaite aussi remercier les services DSO/DV/AS et DSO/DV/IF côté CNES avec qui j'aurai le grand plaisir de poursuivre.

Finalement, j'ai une pensée pour ma famille qui m'a soutenue tout au long de mes études, ma belle-famille, mes amis, et pour en particulier Antoine qui m'a soutenue jusqu'au bout de la thèse.

Table des matières

Acronymes et Abréviations	xix
Nomenclature	xxi
I Cadre général	1
1 Introduction	3
2 Présentation des grappes d'actionneurs gyroscopiques	7
2.1 Présentation et comparaison de la technologie	8
2.2 Présentation des différentes configurations de grappe d'AGs	9
2.3 Les grappes d'AGs dans les nanosatellites	10
3 Modélisations mécaniques, explication des particularités du système et présentation du cahier des charges	13
3.1 Notations générales pour la modélisation d'un système sur-actionné mé- canique	14
3.2 Modélisation mécanique d'une grappe d'actionneurs gyroscopiques . . .	16
3.3 Présentation de notions utiles	22
3.4 Cahier des charges proposé	26
4 Bibliographie des lois de pilotage des systèmes sur-actionnés méca- niques	29

4.1	Méthodes liées à la pseudo-inverse	30
4.2	Méthodes exactes	32
4.3	Méthodes basées sur l'optimisation	33
4.4	Planification hors-ligne	34
4.5	Autres méthodes avec outils différents	35
4.6	Résumé des différentes méthodes	37
II Contributions		39
5 Choix d'une configuration de grappe d'actionneurs gyroscopiques adaptée aux nanosatellites et analyse des propriétés topologiques pour le pilotage		41
5.1	Choix d'une configuration de grappe d'AGs adaptée aux nanosatellites, robuste aux singularités et aux cas de panne	42
5.2	Analyse de la configuration de grappe choisie pour la conception de la loi de pilotage	58
6 Développement d'une structure générique de commande, convergente, embarquable à bord de satellites et applicable à différents systèmes sur-actionnés		77
6.1	Développement d'une formulation cinématique adaptée au passage de singularités traversables	78
6.2	Développement d'une structure de pilotage intégrant cette formulation et d'autres contraintes	83
6.3	Preuves de convergence de cette structure de loi de pilotage	89
6.4	Comparaison avec d'autres lois de la littérature	96
6.5	Génération d'une loi de commande adaptée à la loi de pilotage	99
6.6	Bilan de la boucle de commande	101
6.7	Application aux manipulateurs redondants à base fixe	101
7 Choix et réglages de la boucle de commande adaptée à la grappe pyramidale de six AGs et simulations		115

7.1	Proposition de contraintes à intégrer dans l'EKF - partie prédiction . . .	117
7.2	Proposition de contraintes à intégrer dans l'EKF - partie mesures	119
7.3	Description des lois de pilotage testées	127
7.4	Réglage de la loi de pilotage par optimisation génétique	130
7.5	Simulations avec le modèle Matlab	136
7.6	Simulations avec le modèle haute-fidélité	146
8	Préparation d'une expérience en microgravité	167
8.1	Présentation du projet	168
8.2	Constitution des cas tests	172
8.3	Pré-conception de la grappe d'AGs	176
8.4	Analyse de la grappe d'AGs	179
9	Application au contrôle de manipulateurs spatiaux redondants	183
9.1	Présentation du contexte	184
9.2	Modèle satellite+manipulateur	185
9.3	Analyse du système	187
9.4	Etude de lois de pilotage	191
9.5	Simulations	194
III	Conclusions	201
10	Discussion	203
10.1	Résultats sur le contrôle de systèmes mécaniques redondants	203
10.2	Résultats sur l'application aux grappes d'actionneurs gyroscopiques . .	204
11	Conclusion	207

Annexes	211
A Calcul des Trajectoires Cycliques Stables	211
B Modélisation d'un bras robotique	217
B.1 Définitions géométriques	217
B.2 Modèle cinématique	219
B.3 Modèle dynamique	220
BIBLIOGRAPHIE	221

Table des figures

2.1	Un AG du satellite Pléiades. Crédits : Airbus Defence and Space.	8
2.2	(a) Grappe de type multiple. Tiré de [Kurokawa 97]. (b) Grappe de type pyramidale. Tiré de [Kojima 14]	10
3.1	Schéma-bloc typique d'un contrôle d'un système sur-actionné	15
3.2	Modélisation géométrique d'un AG	17
3.3	Définition de la grappe pyramidale	19
3.4	Singularité traversable	23
3.5	Singularité intraversable	24
4.1	Comparaison des différentes lois de pilotage pour les actionneurs gyroscopiques issue de [Jones 12]	37
5.1	Des singularités internes pour une grappe pyramidale de six AGs, d'angle de grappe $\beta = 54.7$ degrés	44
5.2	Capacités maximales en moment cinétique pour une grappe pyramidale de six AGs . Les couleurs correspondent à la norme de moment cinétique maximal dans la direction représentée.	45
5.3	Capacités maximales en moment cinétique pour une grappe pyramidale de six AGs avec panne AG 2. Les couleurs correspondent à la norme de moment cinétique maximal dans la direction représentée.	46
5.4	Capacités maximales en moment cinétique pour une grappe pyramidale de six AGs en fonction de l'angle de grappe	47

5.5	Singularités selon h_x pour une grappe pyramidale de 4 AGs	48
5.6	VMNs et singularité traversable pendant la montée en h_x , avec $h_y = h_z = 0$ pour une grappe pyramidale à quatre AGs d'angle 50°	49
5.7	VMNs et singularité intraversable pendant la montée en h_x , avec $h_y = h_z = 0$ pour une grappe pyramidale à quatre AGs d'angle 50°	50
5.8	Comparaison des capacités réelles des grappes, réalisée par H. Kurokawa dans [Kurokawa 97] (image tirée de ce document)	52
5.9	(a) Moments cinétiques normalisés par rapport à h_t obtenus par des simulations avec la commande de Moore-Penrose pour la grappe pyramidale à six AGs. (b) Sélection des points avec un déterminant inférieur à 0.2.	54
5.10	(a) Moments cinétiques normalisés obtenus par des simulations avec la commande de Moore-Penrose pour la grappe pyramidale à quatre AGs dans un quart de l'espace en moment cinétique. (b) Sélection des points avec un déterminant de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ inférieur à 0.2.	55
5.11	Comparaison des capacités maximales des grappes	56
5.12	Comparaison du poids par rapport au nombre d'unités et la taille de l'espace sans singularités, réalisée par H. Kurokawa dans [Kurokawa 97] . Image tirée de ce papier.	56
5.13	Comparaison des performances avec ou sans cas de pannes pour les grappes à 4, 5 et 6 AGs.	57
5.14	Perte relative des maxima et minima de l'enveloppe en moment cinétique lors d'une panne pour les grappes à 4, 5 et 6 AGs.	58
5.15	TMNs et TCS pour une grappe pyramidale à quatre AGs d'angle 50°	62
5.16	Configuration de la grappe à six AGs étudiée avec deux pannes	64
5.17	Ensemble des singularités internes intraversables pour la grappe avec deux pannes	64
5.18	Projections des singularités internes intraversables selon différents plan avec symétries	65
5.19	Division de l'espace en moment cinétique en ensembles symétriques	65
5.20	Singularités internes intraversables en σ	66
5.21	Choix de points singuliers intraversables	66

5.22	Représentation des singularités intraversables (croix rouge) points 1 (a) et 2 (b) et VMNs autour. Ordonnées : norme du moment cinétique	67
5.23	Représentation des singularités intraversables (croix rouge) points 3 (a) et 4 (b) et VMNs autour.	68
5.24	(a) Comportement simplifié des lois au passage d'une singularité traversable. (b) Comportement simplifié des lois au départ d'une singularité traversable. .	70
5.25	(a) Comportement simplifié des lois au passage d'une singularité traversable. (a) Comportement simplifié des lois au départ d'une singularité intraversable.	71
5.26	Simulations avec la loi de Moore-Penrose dans la direction de la singularité 1 au départ de deux positions initiales (bleue et noire)	71
5.27	Association des différentes branches (une couleur par branche)	73
6.1	Schéma-bloc typique d'un contrôle d'un système sur-actionné	78
6.2	Schéma-bloc d'une stratégie de contrôle habituelle d'un système sur-actionné.	99
6.3	Diagramme de la procédure de génération de la boucle de commande.	102
6.4	Modélisation du manipulateur étudié	103
6.5	Schéma-bloc simplifié pour notre application	104
6.6	Diagramme de la procédure itérative de réglage.	107
6.7	Résultats de l'optimisation génétique	108
6.8	(a) Analyse des déviations (critère 1). (b) Analyse du temps moyen pour atteindre la saturation en position (critère 2).	109
6.9	Schéma-bloc du modèle d'identification	109
6.10	Identification des paramètres t_1 (gauche) et t_2 (droite) dans chaque direction pour des entrées de norme $\dot{y}_d = 1$ m/s	110
6.11	Simulation incluant la pire déviation	111
6.12	Problème H_∞ sur un seul degré de liberté $i = 1, 2$	111
6.13	Analyse des contraintes (haut : contrainte sur la fonction de sensibilité, bas : contraintes sur le couplage)	112
6.14	Schéma-bloc de la simulation dynamique	113
6.15	Simulation en boucle fermée	113

7.1	Etude de la branche numéro 14 de l'exemple	124
7.2	(a) Estimation d'un point dans l'espace en moment cinétique. (b) Estimation d'un point dans l'espace en angles de précession.	125
7.3	Schéma de calcul avec deux fois l'EKF	129
7.4	Directions de moments cinétiques étudiés	133
7.5	(a) Représentation du c_{ang} sur les \mathbf{h} demandés. (b) Représentation de c_{ang} sur les \mathbf{h} créés.	134
7.6	Représentation du temps pour atteindre la saturation dans les directions demandées	135
7.7	Résultats de l'optimisation génétique	136
7.8	Schéma-bloc simplifié du modèle de simulation	136
7.9	Résultats des simulations dans le domaine des moments cinétiques normalisés à $h_t = 1\text{Nms}$	138
7.10	Résultats dans la direction $\mathbf{h} = h_t[0 \ 0 \ 1]$ Nms	138
7.11	Résultats dans la direction $\mathbf{h} = h_t[0.707 \ 0 \ 0.707]$ Nms	139
7.12	Evolution des paramètres estimés \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 dans la direction $\mathbf{h} = h_t[0 \ 0 \ 1]$ Nms	139
7.13	Evolution des paramètres estimés \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 dans la direction $\mathbf{h} = h_t[0.707 \ 0 \ 0.707]$ Nms	140
7.14	Positions initiales pour la grappe à 6 AGs avec deux pannes avec mesure de la distance aux singularités.	141
7.15	Résultats de simulation satellite loi 1 point initial 1	142
7.16	Trajectoire de la grappe (angles σ_1 et σ_4)	143
7.17	Résultats de simulation satellite loi 1 deuxième position initiale	144
7.18	Résultats de simulation satellite loi 2 deuxième position initiale	144
7.19	Résultats de simulation satellite loi 3 deuxième position initiale	145
7.20	Exemple de comparaison des résultats issus de l'implémentation Matlab et dans le logiciel. (a) Vitesses de précession en sortie de l'EKF. (b) Erreur relative en vitesse de précession.	147
7.21	Schéma-bloc typique d'un contrôle d'un système sur-actionné	148
7.22	Suivi de consigne de la loi de pilotage de référence.	149

7.23 (a) Valeurs singulières de la matrice $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$. (b) Comparaison couples demandés et couples créés de la loi de référence.	149
7.24 Vitesses de précession normalisées pour la référence.	150
7.25 Comparaison suivi de consigne en vitesses angulaires satellites loi EKF et loi de référence.	150
7.26 Valeurs singulières de la matrice $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ pour la simulation avec panne de l'AG 1.	151
7.27 Comparaison suivi de consigne en vitesses angulaires satellites entre la loi de référence et la loi EKF avec panne de l'AG 1.	151
7.28 Valeurs singulières de la matrice $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ pour la simulation avec pannes des AGs 1 et 4.	152
7.29 Comparaison suivi de consigne en vitesses angulaires satellites entre la loi de référence et la loi EKF avec panne des AGs 1 et 4.	153
7.30 Simulation avec pannes des AGs 2 et 3 : (a) Valeurs singulières de la matrice $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$. (b) Comparaison des couples demandés aux AGs (en direction, normalisés à 1) avec la direction la plus mal engendrée.	153
7.31 Comparaison suivi de consigne en vitesses angulaires satellites de la loi EKF avec panne des AG 2 et 3.	154
7.32 Moment cinétique de la grappe avec pannes des AGs 2 et 3.	155
7.33 Simulation avec pannes des AGs 1, 2 et 4 : (a) Valeurs singulières de la matrice $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$. (b) Moment cinétique de la grappe.	155
7.34 Comparaison suivi de consigne en vitesses angulaires satellites de la loi EKF avec panne des AGs 1, 2 et 4.	156
7.35 Panne de l'AG 4 : (a) Enveloppe externe de la grappe. (b) Directions testées.	157
7.36 Résultats dans l'espace des moments cinétiques - grappe à six AGs sans pannes	158
7.37 Nombre de saturations par simulation - grappe à six AGs sans pannes	159
7.38 Résultats suivi de consignes en vitesse angulaire satellite et en quaternion - grappe à six AGs simulation 6	159
7.39 Vitesses de précession et valeurs singulières - grappe à six AGs simulation 6	160
7.40 Couples demandés/créés - grappe à six AGs simulation 6	160
7.41 Résultats suivi de consignes en vitesse angulaire satellite et en quaternion - grappe à six AGs simulation 8	161

7.42	Vitesses de précession et valeurs singulières - grappe à six AGs simulation 8	161
7.43	Résultats suivi de consignes en vitesse angulaire satellite et en quaternion - grappe à six AGs simulation 16	162
7.44	Vitesses de précession et valeurs singulières - grappe à six AGs simulation 16	162
7.45	Résultats dans l'espace des moments cinétiques, panne AG 4 : (a) Vue (h_X, h_Y) . (b) Vue (h_X, h_Z) .	163
7.46	Nombre de saturations par simulation - panne AG 4	164
7.47	Résultats suivi de consignes en vitesse angulaire satellite et en quaternion - panne AG 4 simulation 46	164
7.48	Vitesses de précession et valeurs singulières - panne AG 4 simulation 46	165
7.49	Résultats suivi de consignes en vitesse angulaire satellite et en quaternion - panne AG 4 simulation 37	165
7.50	Vitesses de précession et valeurs singulières - panne AG 4 simulation 37	166
8.1	Organisation du projet	169
8.2	Profil de gravité réalisé par l'avion autour d'une parabole. Crédits Novespace.	169
8.3	Tendance de la répartition des missions pour les satellites de 1 à 50kg. Tiré de [Doncaster 16]	170
8.4	Image du nanosat ouvert. Crédits T. Solatges	171
8.5	Numéro de la parabole (dans un vol, il y a trente paraboles) avec le "max flying time" (temps maximal sans rencontre de paroi) est donné en abscisse. Crédits A. Brunet	173
8.6	Manœuvres réalisées par le satellite Pléiades. Crédits [Gleyzes 12]	174
8.7	Manœuvre dimensionnante	178
8.8	AG conçu pour les nanosatellites. Crédits T. Solatges	180
9.1	Modélisation du système. Tiré de [Papadopoulos 93b]	186
9.2	Redondance induite par la non-holonomie. Tiré de [Nakamura 91]	188
9.3	(a) Distance aux singularités pour un manipulateur à base fixe. (b) Distance aux singularités pour un manipulateur sur un free-floating satellite, avec une attitude de 40°	189

9.4	En bleu PDW (zones avec singularités) et PIW (zones sans singularités lorsque le déterminant est toujours au-dessus de 0)	189
9.5	Espace contraint	191
9.6	(a) Espace atteignable pour un satellite avec une attitude fixe. (b) Espace libre.	191
9.7	Boucle de commande typique	192
9.8	Pose initiale du satellite+manipulateur	195
9.9	Résultats de la simulation avec la transposée de la Jacobienne	196
9.10	Résultats des simulations pour la loi de pilotage ST1	197
9.11	Mouvement du système (pilotage avec ST1)	197
9.12	Résultats de la simulation avec singularité pour la loi transposée	198
9.13	Analyse de l'espace de travail du manipulateur	198
9.14	(a) Résultats de la simulation avec singularités ST1. (b) Résultats de la simulation avec singularités ST2.	199
9.15	(a) Résultats de la simulation avec singularités ST3. (b) Analyse du mouvement du système avec la ST3.	200
B.1	Modélisation géométrique dans le plan d'un bras robotique (en bleu)	218

Liste des tableaux

2.1	Comparaison des performances des roues et des AGs sur différentes missions. Tiré de [Guay 12]	9
8.1	Capacités de la grappe en fonction de la vitesse toupie	179
8.2	Positions initiales choisies et caractéristiques associées (sphère normalisée par h_t)	181
8.3	Capacités en moment cinétique en fonction des cas de panne (normalisée par h_t)	182

Acronymes et Abréviations

AG	<i>Actionneur Gyroscopique, autrement appelé Gyrodyne. En anglais : CMG (Control Moment Gyro)</i>
EKF	<i>Extended Kalman Filter (Filtre de Kalman Etendu)</i>
EMF	<i>Electro-Motive Force (Force ElectroMotrice)</i>
GNC	<i>Guidage Navigation Contrôle</i>
IMU	<i>Inertial Measurement Unit (Centrale Inertielle)</i>
ISS	<i>International Space Station (Station Spatiale Internationale)</i>
LPV	<i>Linéaire à Paramètres Variants</i>
PD	<i>Proportionnel Dérivé</i>
PDW	<i>Path Dependent Workspace</i>
PIW	<i>Path Independent Workspace</i>
SCAO	<i>Système de Contrôle d'Attitude et d'Orbite</i>
SRI	<i>Singular Robust Inverse (Inverse Robuste Singulière)</i>
SVD	<i>Singular Values Decomposition (Décomposition en Valeurs Singulières)</i>
SSTL	<i>Surrey Satellite Technology Limited</i>
TCS	<i>Trajectoire Cyclique Stable</i>
TMN	<i>Trajectoire à Motricité Nulle</i>
TRL	<i>Technology Readiness Level (Niveau de Maturité Technologique)</i>
VMN	<i>Variété à Motricité Nulle</i>
VM	<i>Virtual Manipulator (Manipulateur Virtuel)</i>

Nomenclature

Dans ce mémoire, les vecteurs et les fonctions vectorielles sont en gras et minuscule alors que les matrices sont en gras et en majuscule. Les tenseurs sont en gras et dans ce document, les seuls auxquels il est fait référence correspondent aux matrices Hessiennes, par exemple d'une fonction \mathbf{f} . Ce tenseur est alors noté $\mathbf{D}^2\mathbf{f}$. La norme utilisée pour les vecteurs est la norme 2 euclidienne (notée $|\cdot|$). Pour les matrices et tenseurs, c'est la norme induite par cette norme 2 (la plus grande valeur singulière pour une matrice) qui est sous-entendue. Elles sont respectivement notées $\|\cdot\|$ et $\|\|\cdot\|\|$, et on rappelle que la norme 2 induite sur une matrice \mathbf{A} vaut :

$$\|\mathbf{A}\| = \sup\{|\mathbf{A}\mathbf{x}| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } |\mathbf{x}| = 1\}$$

La norme 2 induite sur la forme quadratique $\mathbf{D}^2\mathbf{f}$ vaut :

$$\|\|\mathbf{D}^2\mathbf{f}\|\| = \sup\{|\mathbf{x}^T(\mathbf{D}^2\mathbf{f})\mathbf{x}| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } |\mathbf{x}| = 1\}$$

Pour deux matrices réelles \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 d'ordre n , on définit la relation d'ordre $\mathbf{M}_1 \geq \mathbf{M}_2$ par $\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$ est semi-définie positive, autrement dit, toutes les valeurs propres de $\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$ sont strictement positives.

On notera :

$\mathbf{0}_{n \times m}$ la matrice nulle de taille $n \times m$

\mathbf{I}_n la matrice identité de taille $n \times n$

h_t le moment cinétique interne d'une toupie d'un actionneur gyroscopique

\mathbf{u} les entrées commandées d'un système dynamique

\mathbf{y} les sorties contrôlées d'un système dynamique

\mathbf{x} les variables internes d'un système dynamique

\mathbf{h} les sorties du modèle des actionneurs

σ les variables internes liées au modèle des actionneurs

\mathbf{t} les couples

Q les quaternions représentant l'attitude du satellite

ω la vitesse de rotation du satellite par rapport à un repère inertiel

s la variable de Laplace

Première partie

Cadre général

Introduction

LES véhicules orbitaux permettent de réaliser des missions variées depuis l'espace. Afin de répondre aux besoins de ces missions, diverses caractéristiques sont demandées à la plateforme spatiale. En particulier, dans les missions d'observation de la Terre telles que Pléiades, la rapide réorientation du satellite est nécessaire tout en étant précis et stable sur le pointage. En augmentant l'agilité d'un satellite, il est possible de prendre des photos à des endroits plus distants sur Terre, et de diminuer la taille des optiques. En effet, des manœuvres spécifiques de balayage permettent de créer virtuellement un champ de vue plus large d'un instrument. C'est donc une capacité recherchée pour les satellites d'observation de la Terre. Cela impose notamment d'intégrer sur la plateforme des actionneurs performants pour répondre à ces besoins. Pour contrôler l'**attitude** (orientation dans l'espace) d'un satellite, plusieurs solutions existent. Une technologie appelée **grappe d'actionneurs gyroscopiques** est utilisée dans les satellites d'observation de la Terre en particulier. Elle permet au satellite de réaliser des manœuvres rapides, efficaces et précises si elle est pilotée de manière adaptée. Pour contrôler l'attitude d'un satellite en trois dimensions, a priori trois actionneurs gyroscopiques sont nécessaires puisque chaque actionneur peut créer un couple selon un axe. Cependant, les capacités de manœuvre selon certaines directions sont alors restreintes et la présence de **singularités** diminue les capacités du système. Ce phénomène correspond à des positions du système mécanique dans lesquelles il ne peut plus créer de mouvement dans une direction. Afin de gérer le passage de ces singularités, des grappes de quatre actionneurs gyroscopiques sont le plus souvent insérées dans les satellites. Ainsi, le système devient **sur-actionné** (ou redondant).

Une des principales difficultés des systèmes sur-actionnés est leur **pilotage** (autrement appelé **allocation**) qui consiste à calculer la répartition des commandes nécessaires pour réaliser le changement d'attitude dicté par la mission sur les différents actionneurs tout en gérant les singularités et d'autres contraintes. En outre, l'environnement spatial et les radiations peuvent perturber le déroulement des programmes informatiques sur les calculateurs embarqués dans les satellites. Des calculateurs résistants ont été conçus et validés en orbite, mais les durées de ces validations créent une forte différence entre les capacités des calculateurs au sol et ceux

validés pour être embarqués dans un satellite. Ainsi, les limites des capacités de calculs à bord des satellites doivent être prises en compte dans la conception des lois de commande à calculer par l'ordinateur de bord. Les communications entre le satellite et les opérateurs sur Terre sont limitées aux passages en visibilité avec les stations sol ainsi que par le débit de données transférables au satellite durant ces périodes, ce qui amène à privilégier l'autonomie du système spatial vis-à-vis des opérations notamment pour les calculs de lois de commande. On peut donc souhaiter que ces lois de pilotage soient intégralement calculées à bord des satellites, ce qui pose cependant des fortes contraintes sur les complexités algorithmiques des lois.

Dans l'étude des systèmes sur-actionnés et de leur pilotage, des travaux ont déjà été effectués depuis de nombreuses années, notamment par B. Siciliano dans l'article [Siciliano 90] qui analyse les différentes méthodes de contrôle de robots manipulateurs, utilisables pour les systèmes sur-actionnés mécaniques en général. Cette étude a permis de faire le bilan de certaines lois de pilotage. Cependant, les méthodes proposées ne permettent pas de certifier le passage de singularités et la convergence a priori de la loi, le tout de manière embarquable dans un satellite. H. Kurokawa [Kurokawa 94] propose une loi de pilotage restreignant l'espace de travail en se basant sur l'étude de la topologie des grappes de quatre actionneurs gyroscopiques. Cette loi permet d'assurer le passage des singularités en imposant des zones où les positions des actionneurs doivent se trouver, et elle est embarquable dans un satellite. Néanmoins, limiter les évolutions des angles des actionneurs entraîne une perte de capacité dans certaines directions, et cette méthode ne se reconfigure pas facilement en cas de panne d'actionneurs. J. Paradiso dans [Paradiso 92] a développé une méthode destinée à trouver des trajectoires pour guider les actionneurs gyroscopiques par la résolution de problèmes d'optimisation. Cet algorithme permet aussi de tenir compte de contraintes désirées. Néanmoins ces travaux sont difficilement implantables en temps réel dans un véhicule spatial.

En résumé, il existe des lois de pilotage qui permettent de générer de manière optimale les trajectoires des grappes mais au prix de calculs lourds pour les calculateurs ou de réduction de capacités. Dans ce travail, un cahier des charges à vérifier par la loi de pilotage est défini, et l'analyse des lois de la littérature montre qu'elles ne répondent pas à tous les points.

On s'intéresse particulièrement au contrôle de petits satellites comme les nanosatellites ou cubesats. Les nanosatellites sont des satellites pesant habituellement moins de 50kg. Un cubesat est un satellite rentrant dans la catégorie des nanosatellites, constitué d'éléments cubiques de longueur 10cm de côté, et vérifiant des contraintes spécifiques. En effet, peu de systèmes de contrôle d'attitude performants existent alors qu'une demande grandissante d'agilité pour des nanosatellites toujours plus lourds se profile. Ainsi, même si les lois de pilotage et de commande sont développées pour être valables quelles que soient les capacités ou la configuration des grappes, l'application sur des petits satellites reste l'objectif.

Cette étude consiste tout d'abord à déterminer une configuration de grappe d'actionneurs gyroscopiques adaptée aux caractéristiques des nanosatellites. En particulier, elle doit être robuste aux cas de panne et facile à piloter. Des outils d'analyse ont été développés pour réaliser la comparaison entre différentes configurations. Des analyses des caractéristiques de la grappe d'actionneurs gyroscopiques choisie sont menées afin d'appréhender les principaux

défis et possibilités pour concevoir une loi de pilotage adaptée. Ensuite, la conception de lois de pilotage embarquables dans un satellite, reconfigurables en cas de panne et suivant un cahier des charges précis est réalisée. La loi de commande SCAO du satellite, tenant compte des spécificités de la loi de pilotage est aussi étudiée. Des simulations sont proposées afin d'analyser le comportement des lois. Dans le cadre de cette étude, un système de contrôle d'attitude de nanosatellite composé de la loi de pilotage et d'une grappe pyramidale de six actionneurs gyroscopiques a été proposé et sélectionné par l'ESA Education Office pour être testé dans le cadre d'une campagne de vols paraboliques en microgravité en décembre 2017. Finalement, l'extension de cette loi de pilotage est proposée sur le cas de bras manipulateurs spatiaux.

Les chapitres 1, 2 et 3 présentent le cadre général de l'étude, le contexte et le cahier des charges à vérifier. Le chapitre 4 présente l'étude bibliographique sur les lois de pilotage des systèmes sur-actionnés.

La démarche a consisté dans un premier temps à étudier des configurations de grappe d'actionneurs gyroscopiques et à analyser leurs spécificités pour orienter les stratégies de pilotage (chapitre 5). Pour cela, des outils d'analyse ont été conçus. Les avantages et inconvénients de différentes configurations de grappe d'actionneurs gyroscopiques sont comparées par rapport aux caractéristiques des nanosatellites. En particulier, une comparaison de la complexité du passage de singularités, de la perte de capacité en cas de panne et de la masse entre les configurations est réalisée. Cette étude est en partie résumée dans le papier [Evain 17d]. Le choix d'une configuration de grappe pyramidale à six actionneurs est ainsi motivé. Une analyse plus approfondie de la topologie de la grappe choisie et de ses cas de panne est réalisée à partir de l'étude des singularités et des variétés à motricité nulle, afin d'identifier les points clés dans le pilotage de ces systèmes.

Une fois ces analyses menées, une structure de loi de pilotage embarquable dans un satellite et générique à différents types de systèmes sur-actionnés ainsi qu'une loi de commande en amont adaptée à cette loi de pilotage sont développées (chapitre 6). Dans un premier temps, une formulation cinématique pour l'évitement de singularités est proposée. Une loi de pilotage générique et embarquable est alors recherchée suite à ces deux analyses, avec preuves de convergence associées. Cette étude a fait l'objet du papier [Evain 16] et d'un brevet déposé [Evain 15]. Une procédure de génération de loi de commande du système adaptée à la loi de pilotage est ensuite développée et présentée dans le papier [Evain 17b]. Pour montrer la généralité de la formulation des lois de pilotage et de commande, une application sur un exemple théorique de manipulateur plan redondant est alors effectuée.

L'objet du chapitre 7 est l'application de la loi de pilotage développée au chapitre 6 sur la configuration de grappe d'actionneurs gyroscopiques choisie au chapitre 5. La formulation des contraintes et des équations permettant de poser le problème d'optimisation sont implémentées, avec différentes versions possibles en fonction des choix réalisés. Puis, afin de vérifier les conditions de convergence de la loi de pilotage tout en la réglant de manière optimale, une optimisation génétique est adaptée à notre système. Une fois ces réglages effectués, la vérification en simulation de ces lois de commande est réalisée sur la grappe d'actionneurs gyroscopiques avec et sans cas de panne. Pour cela, deux simulateurs ont été développés

ou adaptés aux cas des grappes à six actionneurs gyroscopiques, puis des simulations sont réalisées. Une validation sur un simulateur satellite très représentatif permet d'analyser la faisabilité sur un système spatial et de comparer avec une loi de pilotage de référence. Cette partie fait l'objet du papier [Evain 17a].

Cette validation effectuée, la prochaine étape consiste à tester le comportement des lois de pilotage sur un support expérimental, constitué d'une grappe de nano-actionneurs gyroscopiques développée dans le cadre du projet Fly Your Thesis! 2017 de l'ESA Education Office (chapitre 8). Pour cela, le pré-dimensionnement de la grappe est réalisé pour nos besoins en vue de l'expérience en microgravité. L'analyse topologique de la grappe testée permet de choisir les manœuvres pouvant apporter le plus de données scientifiques pertinentes. Cette partie est résumée dans les papiers [Evain 17d] et [Evain 17a].

Finalement, une fois la loi en passe de validation sur des supports expérimentaux, une étude de sa pertinence sur des manipulateurs spatiaux à base non fixe est proposée, dans l'optique de missions spatiales de récupération de débris ou de service en orbite (chapitre 9). L'analyse des singularités dynamiques propres à ce système est réalisée afin de prendre en compte ces spécificités lors de l'adaptation de la loi de pilotage. Les différentes contraintes issues de l'analyse bibliographique permettent d'orienter le choix des réglages de la loi de pilotage. Une comparaison avec la loi de pilotage "transposée inverse" habituellement insérée est réalisée à travers l'étude du passage d'une singularité dynamique. Cette analyse a été menée lors d'une mobilité à l'université de Carleton, Canada.

Les dernières parties de Discussion et Conclusion résument le travail effectué, critiquent les résultats et fournissent des pistes pour de potentielles suites d'études sur le sujet. Des annexes sont aussi disponibles pour éclaircir certains points.

Chapitre 2

Présentation des grappes d'actionneurs gyroskopiques

Sommaire

2.1	Présentation et comparaison de la technologie	8
2.2	Présentation des différentes configurations de grappe d'AGs . .	9
2.3	Les grappes d'AGs dans les nanosatellites	10

L'actionneur gyroskopique est une technologie couramment utilisée dans les systèmes spatiaux demandant une certaine agilité ou des capacités de couple importantes telles que les stations spatiales. Une présentation puis une comparaison des solutions de contrôle d'attitude sont menées. Les différents agencements de grappes d'actionneurs gyroskopiques les plus communs sont présentés. Enfin, le cas des actionneurs gyroskopiques dans les nanosatellites est mis en avant.

A FIN de simplifier la lecture de ce manuscrit, on notera un actionneur gyroscopique par l'abréviation AG.

2.1 Présentation et comparaison de la technologie

Les actionneurs gyroscopiques ont été utilisés pour la première fois dans la station spatiale Skylab de la NASA en 1973. Ils sont maintenant souvent présents dans les satellites agiles d'observation de la Terre et les stations spatiales pour réaliser le contrôle d'attitude. Par exemple, une grappe est installée sur le satellite d'observation de la Terre Pléiades, situé en orbite basse. Un modèle industriel d'AG, pour le satellite Pléiades, est présenté en Fig. 2.1.

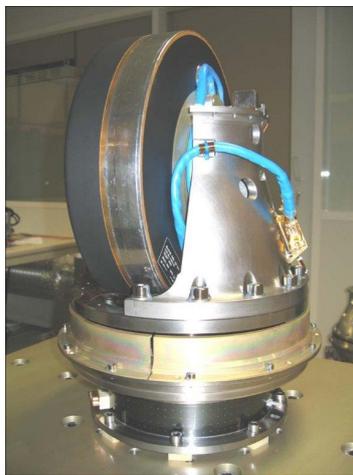


Figure 2.1 – Un AG du satellite Pléiades. Crédits : Airbus Defence and Space.

Les AGs les plus simples sont constitués d'une toupie tournant à vitesse constante et d'un moteur créant des précessions de l'axe de rotation de la toupie. Des couples gyroscopiques en résultent et, transmis au véhicule spatial, permettent de modifier son orientation dans l'espace.

Il existe plusieurs catégories différentes d'AGs :

- Les AGs simple cardan : avec un seul axe de précession possible pour l'axe de rotation toupie
- Les AGs double cardan (2-axes) : avec rotations possibles de l'axe toupie autour de deux axes de précession
- Les AGs à vitesses de toupie variables

Les AGs double cardan, de part leur construction, provoquent une perte d'efficacité et sont d'une plus grande complexité mécanique. Ainsi, comme prouvé par H. Kurokawa dans [Kurokawa 97], une simple comparaison permet de montrer que tous les autres paramètres étant égaux, un facteur 10 peut exister entre les couples créés par les AGs simple cardan et les AGs double cardan. Faire varier la vitesse de toupie des AGs est une possibilité existante dans la littérature pour éviter les singularités, mais la consommation électrique nécessaire pour faire varier les vitesses de rotation toupie diminue l'intérêt énergétique et apporte finalement peu lors du

passage des singularités. Ici, nous nous focaliserons sur les AGs simple cardan.

Les AGs utilisent l'électricité à bord du satellite pour fonctionner, et ne nécessitent donc pas de carburant contrairement aux propulseurs chimiques ou liquides. Les roues à inertie et à réaction ont un fonctionnement se rapprochant des AGs puisqu'elles fournissent du couple en faisant varier la vitesse de rotation d'une roue. Elles sont donc mécaniquement plus simples, moins onéreuses et plus faciles à contrôler, mais les couples créés par un AG à masse et consommation électrique égales sont beaucoup plus importants que ceux des roues comme montré par la comparaison effectuée par M. Llibre [Llibre 09]. Le tableau 2.1 présente différentes technologies installées dans les satellites pour comparaison. On remarque la très forte capacité en couple de l'AG de Pléiades comparée aux autres technologies ainsi que sa faible consommation électrique, rapportée à la masse ou l'encombrement des actionneurs.

Mission	Stentor	SPOT 5	Pléiades
Technologie	Roue à inertie	Roue à réaction	AG
Dimensions (mm)	Diamètre 350, hauteur 120	Diamètre 415, hauteur 135	Diamètre 270, hauteur 350
Capacité moment cinétique (Nms)	68	40	14
Couple (Nm)	0.075	0.45	32
Masse (kg)	8.8	16	18
Consommation électrique (W)	17.5 à 80	15 à 160	8 à 40 (90 en manœuvre)

Tableau 2.1 – Comparaison des performances des roues et des AGs sur différentes missions.
Tiré de [Guay 12]

Les AGs et les roues à inertie possèdent un inconvénient qui est leur saturation. Ils sont en effet limités par leurs capacités maximales en moment cinétique. Pour les désaturer dans les satellites, ils sont souvent couplés avec des magnétocoupleurs pour diminuer le moment cinétique total du satellite.

Un autre désavantage des grappes d'actionneurs gyroscopiques est la complexité à les piloter, à cause de la présence des singularités. Différentes lois de pilotage ont été proposées dans la littérature, détaillées au chapitre 4 et certaines sont déjà embarquées dans les satellites.

2.2 Présentation des différentes configurations de grappe d'AGs

Différentes configurations de grappe existent dans la littérature et dans les satellites. En particulier, des grappes de type **multiples** ont été étudiées [Defendini 98]. Dans ces grappes, il existe des groupes d'AGs situés sur les mêmes plans, partageant donc les mêmes axes de précession (voir Fig. 2.2a). Lorsque les AGs ne sont situés que sur deux plans, la grappe est appelée "roof-type" [Kurokawa 97]. Le pilotage de la grappe peut alors se faire de manière analytique [Kurokawa 07] mais les capacités en moment cinétique ne sont pas isotropes dans l'espace. D'autres géométries ont été utilisées et en particulier les grappes de type pyramidales régulières, qui permettent d'obtenir les performances souhaitées selon les différents axes en variant l'angle au sommet de la grappe (voir Fig. 2.2b). Les grappes avec quatre actionneurs sont le plus souvent intégrées dans les satellites car elles fournissent une redondance, comme dans le satellite français Pléiades. En revanche, ces grappes possèdent des singularités internes pénalisantes dans l'élaboration des lois de pilotage. De plus, le pilotage ne peut être réalisé

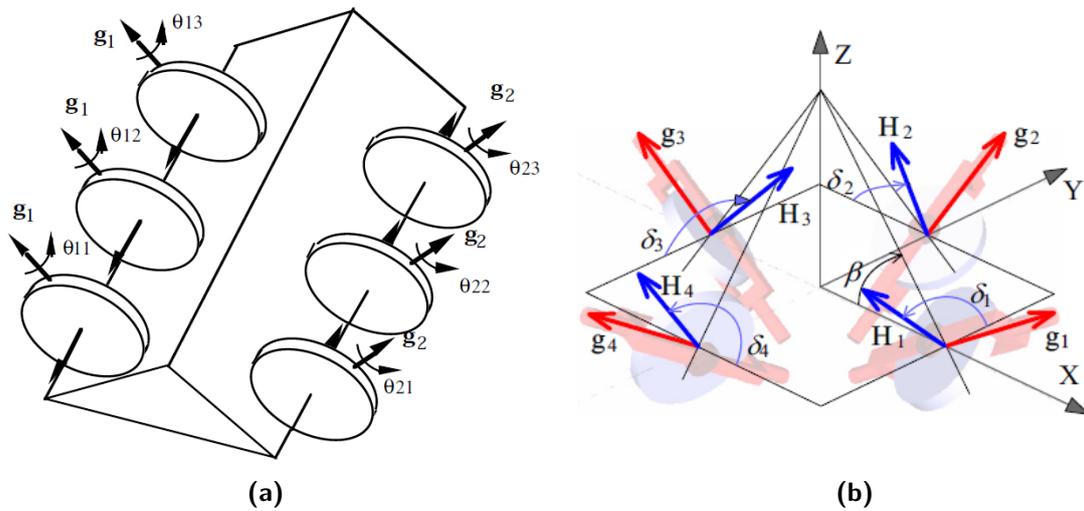


Figure 2.2 – (a) Grappe de type multiple. Tiré de [Kurokawa 97]. (b) Grappe de type pyramidale. Tiré de [Kojima 14]

de manière analytique. Une grappe pyramidale de six AGs était présente sur MIR et est actuellement installée dans l'ISS, mais les six AGs ne sont pas tous sollicités en même temps dans les lois de contrôle.

A noter aussi les "twin" systems (appariés) qui contiennent des contraintes mécaniques entre les AGs. Ceux-ci ont leurs angles de précession variant soit de manière identique soit de manière opposée, permettant de simplifier les lois de commande, mais limitant les possibilités de trajectoires. Un système double a par exemple été testé sur le micro-satellite turque BILSAT-1 d'observation de la Terre, développé par l'entreprise SSTL [Asghar 08].

2.3 Les grappes d'AGs dans les nanosatellites

Les petits satellites sont divisés en différentes catégories en fonction de leur masse, et cette classification n'est pas normalisée. Usuellement, un microsatellite correspond à un satellite de masse maximale 100kg. Un nanosatellite est un satellite plus léger dont les limites ne sont pas clairement définies. Les Cubesats sont un type spécial de nanosatellites qui respecte des formats et contraintes résumées dans le document [California Polytechnique Space Institute 15]. Ces règles assurent la sécurité pendant le lancement et de bonnes coordinations entre les universités, qui sont souvent les concepteurs de ces satellites. Les Cubesats sont composés de blocs 1U, chaque "U" étant un bloc unitaire de cubique de côté 10cm. Les complexités algorithmiques et mécaniques des AGs relevées précédemment ont jusque là repoussé leur utilisation dans de nombreux nanosatellites ou Cubesats.

Néanmoins, comme noté par R. Votel et D. Sinclair dans [Votel 12], il y a une demande croissante d'agilité pour des micro ou nanosatellites. Pour accomplir les missions associées, les AGs sont prometteurs. Par exemple, le Cubesat présenté dans le papier [Ishimaru 14]

doit suivre des météorites dans le ciel et nécessite un contrôle d'attitude efficace et précis. L'analyse du marché des petits satellites [Doncaster 16] annonce aussi que l'observation de la Terre et les missions de télédétection risquent de prédominer dans les années à venir. En parallèle, puisque les tailles des Cubesats vont probablement augmenter afin de répondre à des missions toujours plus exigeantes, de nouveaux systèmes de contrôle d'attitude capables de remplir les cahiers des charges en terme de précision de pointage et de rapidité des manœuvres seront nécessaires pour gérer les inerties grandissantes. C'est pourquoi la technologie AGs est étudiée pour les nanosatellites ici jusque 27U.

Quelques projets sont actuellement destinés à prouver la faisabilité des AGs dans les nanosatellites (**nano-AGs**, en anglais nano-CMGs, actionneurs gyroscopiques pour nanosatellites) comme SwampSat [Allgeier 10], mais les grappes sont encore considérées comme des charges utiles. Des universités telles que Surrey (UK) développent déjà en interne des grappes de nano-AGs, prévues pour voler sur un nanosatellite démonstrateur (grappe de quatre AGs). Ce nanosatellite SME-SAT est en préparation [Visagie 14]. Dans la thèse [Steyn 15], des AGs appairés à vitesse variable (où la vitesse de toupie peut varier) sont étudiés pour des petits satellites. A noter l'étude effectuée par le nanosatellite Violet [Gersh 09] qui teste des lois de pilotage dans l'espace avec un certain nombre d'AGs embarqués (permettant de tester différentes configurations de grappe). Les technologies nano-AGs de Honeybee Robotics Spacecraft Mechanism Corporation [Robotics 14] seront insérées dans un futur nanosatellite de Georgia Tech [Chait 14]. Ce nano-AG a été évalué avec un TRL (Technology Readiness Level) de 6 sur 10 dans le papier [Burton 16]. C'est aussi l'évaluation du mini-AG de Turkish Aerospace industries. Il est à noter que les AGs de l'entreprise turque ont des capacités en moment cinétique d'un ordre de grandeur supérieur par rapport à ceux d'Honeybee Robotics, et donc plutôt orientés vers les microsatsellites que les nanosatellites. A notre connaissance, les AGs d'Honeybee Robotics sont les technologies les plus avancées dans ce type d'actionneurs, mais restent moins avancés que des technologies miniaturisées de magnétocoupleurs ou roues à inerties qui obtiennent des TRL de 9 [Burton 16]. Ainsi, les nano-AGs sont étudiés mais ne sont pas encore à un stade mature.

Une comparaison des nano-AGs avec les roues à réaction est proposée dans l'article [Votel 12]. Néanmoins, la principale difficulté de cet exercice réside dans le peu de systèmes d'AGs existants et donc les limites de ces systèmes ne sont pas forcément intrinsèques aux AGs pour les nanosatellites.

Ce chapitre a permis de présenter le contexte des actionneurs gyroscopiques utilisés en particulier dans les satellites agiles d'observation de la Terre. Différentes configurations de grappes d'actionneurs gyroscopiques ont été proposées et étudiées par le passé. Néanmoins, leur application aux nanosatellites n'est pas encore commune malgré le potentiel de cette technologie vis-à-vis des enjeux et missions à venir.

Chapitre 3

Modélisations mécaniques, explication des particularités du système et présentation du cahier des charges

Sommaire

3.1	Notations générales pour la modélisation d'un système sur-actionné mécanique	14
3.2	Modélisation mécanique d'une grappe d'actionneurs gyroscopiques	16
3.3	Présentation de notions utiles	22
3.4	Cahier des charges proposé	26

Cette partie a pour but de définir les notations utilisées tout au long du mémoire et de modéliser la grappe d'actionneurs gyroscopiques, ainsi que la dynamique couplée satellite et grappe d'AGs. Les notions générales utiles sur l'analyse des grappes d'AGs sont explicitées. Enfin, le cahier des charges imposé pour la conception de la loi de pilotage est présenté.

3.1 Notations générales pour la modélisation d'un système sur-actionné mécanique

MODÉLISONS tout d'abord un système dynamique général, non-linéaire supposé contrôlable, et sans perturbation (3.1).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_c) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_c) \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans cette équation, on pose $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l$ les variables internes au système, $\mathbf{u}_c \in \mathbb{R}^m$ les entrées (commandées), $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ les sorties contrôlées. $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_c) \in \mathbb{R}^l$ et $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_c) \in \mathbb{R}^k$ sont des fonctions différentiables.

Dans tout le manuscrit, on supposera que le système étudié est linéaire en la commande. Cela ne fait pas perdre de généralité du propos car tout système de la forme (3.1) peut être mis sous forme affine en la commande, en imposant par exemple une dynamique du premier ordre sur la commande (ce qui est souvent le cas en présence de dynamiques actionneurs) : $\dot{\mathbf{u}}_c = -\frac{1}{\tau}(\mathbf{u}_c - \mathbf{u})$ avec τ une constante de temps et \mathbf{u} la nouvelle entrée du système.

Un système affine en la commande est alors décrit par une équation générale du type (3.2).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.2)$$

avec $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{l \times m}$ une matrice de fonctions. Dans un système sur-actionné, $m \geq k$, il y a donc plus d'entrées que de sorties à contrôler. A partir de ce système (3.2), dans les problèmes classiques d'inversion dynamique non-linéaire, les dérivées successives de \mathbf{y} sont calculées afin que l'entrée apparaisse explicitement, en supposant que le système a un degré relatif (ou indice caractéristique) adéquat. Cette procédure a notamment été proposée par A. Isidori [Isidori 89]. Elle permet ensuite d'imposer une dynamique désirée aux sorties. Pour un système de degré relatif 1, on peut écrire simplement la relation (3.3), avec $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{k \times l}$ la matrice jacobienne de \mathbf{g} .

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \quad (3.3)$$

Pour rappel, la **matrice jacobienne** d'un vecteur de fonctions $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ \dots \\ g_k(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$, avec

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_l \end{bmatrix}$, est la matrice de fonctions 3.4.

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial g_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial x_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial g_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_k(\mathbf{x})}{\partial x_l} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A partir des équations (3.2), on obtient alors (3.5).

$$\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

Si $\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x})$ est inversible, alors la solution au problème est (3.6).

$$\mathbf{u} = (\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x}))^{-1}(-\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \dot{\mathbf{y}}) \quad (3.6)$$

A partir de cette équation (3.6), l'inversion dynamique peut se faire en choisissant une dynamique en $\dot{\mathbf{y}}$ désirée par exemple et en imposant le membre de droite au système en entrée. Néanmoins, dans les faits, la matrice $\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x})$ de taille $k \times m$ peut être non-inversible et de rang non plein pour certaines valeurs de \mathbf{x} . Les méthodes de résolution proposées peuvent être appliquées à l'inversion de cette l'équation (3.5) (voir article [Evain 16]). Dans le cadre du manuscrit, nous resterons néanmoins au cas simplifié de l'**allocation (ou pilotage)** sans illustrer la capacité de la loi à gérer ce type d'inversion.

Ainsi dans le cas des systèmes sur-actionnés, définissons plus précisément la boucle de commande habituelle (voir figure 3.1), que l'on peut trouver par exemple aussi dans l'article [Johansen 13]. Ici on suppose que le contrôleur haut-niveau (par exemple le contrôleur d'attitude dans le cas des grappes d'actionneurs gyroscopiques) est indépendant de l'allocateur. Les implications sont expliquées dans la section 6.5. Dans le cadre de cette thèse, on cherchera à concevoir les deux blocs en bleu dans la figure 3.1.

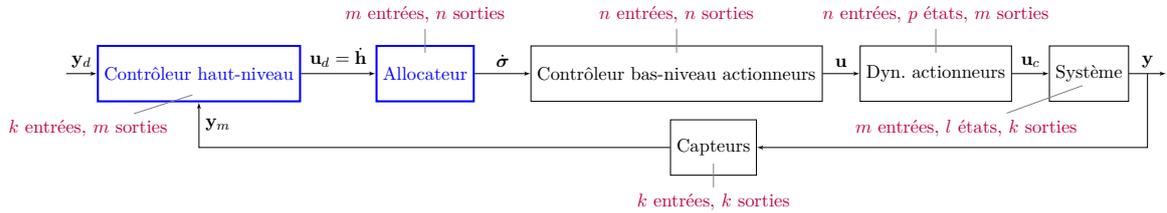


Figure 3.1 – Schéma-bloc typique d'un contrôle d'un système sur-actionné

Dans la figure 3.1, le contrôleur haut-niveau calcule la commande \mathbf{u}_d que les actionneurs doivent fournir au système pour que la consigne \mathbf{y}_d puisse être réalisée. Ainsi, l'allocateur doit répartir la commande entre les actionneurs, en tenant compte de leurs redondances et de contraintes souhaitées par l'utilisateur. Un des buts de l'allocateur et du contrôleur bas-

niveau est que la sortie des actionneurs \mathbf{u}_c soit égale à la commande demandée \mathbf{u}_d . Dans le cas des systèmes mécaniques, les relations cinématiques permettent de définir une fonction liant les variables internes des actionneurs et ses sorties notées $\dot{\mathbf{h}}$. Dans ce mémoire, on supposera que cette relation peut s'écrire de la forme (3.7) avec $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^n$ les variables internes aux actionneurs¹.

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.7}$$

avec $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice jacobienne d'une fonction \mathbf{h} . \mathbf{J} est rectangulaire dans les systèmes redondants et peut devenir de rang non-plein (inférieur à m) dans les cas de **singularités** (configurations en $\boldsymbol{\sigma}$ dans lesquelles un mouvement devient impossible selon au moins une direction).

Dans ce problème d'allocation, on s'emploiera à inverser cette équation (3.7) sous certaines contraintes précisées dans le chapitre suivant, puisque le but est donc de trouver les variables $\boldsymbol{\sigma}$ ou leurs dérivées afin que les actionneurs créent \mathbf{u}_c (demandé égal à \mathbf{u}_d). Si les variables internes $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ne sont pas égales aux entrées des actionneurs, alors un contrôleur bas-niveau dépendant de l'application est ajouté. Ces derniers contrôleurs sont souvent réglés en fonction du mode de contrôle des actionneurs (position, vitesse, couple...).

Physiquement, résoudre cette équation (3.7) revient à répartir la charge de travail (force, couple...) à effectuer entre les n actionneurs pour pouvoir créer la grandeur \mathbf{u}_c (déplacement, rotation...) qui est de dimension m inférieure au nombre d'actionneurs n , potentiellement sous différentes contraintes. C'est pourquoi ce problème est appelé allocation ou pilotage.

Cette équation est la base du travail effectué dans les chapitres suivants, et ses caractéristiques sont communes à de nombreux systèmes redondants tels que la robotique à câble [Alp 02], les bras robotiques manipulateurs [Siciliano 90] et les grappes d'actionneurs gyroscopiques [Kurokawa 94] comme présentés par la suite, ce qui permet de généraliser le propos à l'ensemble de ces systèmes.

3.2 Modélisation mécanique d'une grappe d'actionneurs gyroscopiques

Les AGs sont des actionneurs mécaniques permettant de fournir du couple à un système suivant le principe d'action/réaction. Une quantité de moment cinétique est emmagasinée dans ces actionneurs via une toupie en rotation. Ce moment cinétique peut ensuite être transmis au système par rotation de l'axe de rotation de la toupie : l'effet gyroscopique créé par ce mouvement engendre un couple qui est transmis au système via des paliers mécaniques.

1. n est le nombre d'actionneurs

3.2.1 Modélisation d'un actionneur gyroscopique (AG)

Prenons par exemple le premier AG d'une grappe. L'AG est constitué d'une toupie tournant à vitesse constante Ω_t autour d'un axe \mathbf{x}_1 et d'une fourche entraînée par un moteur de précession créant une rotation autour d'un axe \mathbf{z}_1 . Cette dernière rotation est appelée **précession**, \mathbf{z}_1 (voir figure 3.2) est appelé **l'axe de précession** et son angle σ_1 **angle de précession**.

Pour décrire le système il faut quatre repères :

- Un repère R_0 de référence, galiléen, non précisé ici mais utilisé pour dériver les équations du mouvement ;
- Le repère satellite supposé confondu avec le repère de la grappe (sinon, une matrice de transformation fixe doit être appliquée) non galiléen $R_s = (O, \mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s)$;
- Un repère associé à chaque AG numéro i de la grappe, fixe par rapport au repère grappe : $R_{agi} = (O_i, \mathbf{x}_{agi}, \mathbf{y}_{agi}, \mathbf{z}_{agi})$. Ces repères permettent de situer l'AG dans la grappe, et chacun est défini par deux rotations d'angle α_i et β_i dans le cas des grappes pyramidales² ;
- Un repère associé à chaque AG numéro i de la grappe, suivant le mouvement de précession de cet AG : $R_i = (O_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$.

Comme montré sur la figure 3.2, la précession s'effectue autour de l'axe $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_{ag1}$ fixe dans le repère satellite. \mathbf{x}_1 correspond à l'axe de rotation de la toupie et \mathbf{y}_1 à la direction du couple engendré par l'AG 1. Le **moment cinétique** \mathbf{h}_1 de la toupie numéro 1 en son centre d'inertie G_1 est donné par (3.8).

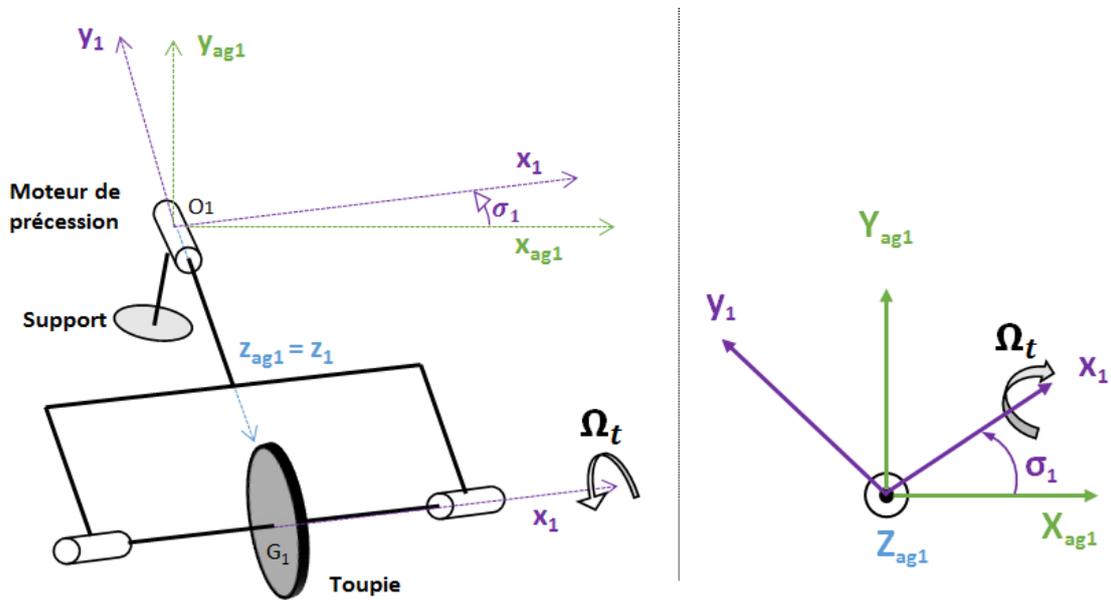


Figure 3.2 – Modélisation géométrique d'un AG

$$\mathbf{h}_1 = I_t \Omega_t \mathbf{x}_1 = h_t \mathbf{x}_1 \quad (3.8)$$

2. Voir l'explication de choix de cette géométrie en section 5.1

avec I_t l'inertie de la toupie en G_1 selon \mathbf{x}_1 et h_t le **moment cinétique interne** de la toupie.

Lorsqu'une vitesse $\dot{\sigma}_1$ est imposée sur l'axe de précession de l'AG 1, la relation suivante est obtenue (3.9) :

$$\dot{\mathbf{h}}_1 = h_t \dot{\sigma}_1 \mathbf{y}_1 \quad (3.9)$$

$\dot{\mathbf{h}}_1$ est aussi appelé le **couple gyroscopique** moteur résultant. Le modèle dynamique sera directement dérivé sur la grappe d'AGs.

3.2.2 Modélisation d'une grappe

Dans notre étude, nous allons donc nous focaliser sur les grappes de six AGs de type pyramidales et régulières. Ce choix est justifié dans le chapitre 5.

3.2.2.1 Modélisation géométrique et cinématique

Les hypothèses suivantes sont choisies pour modéliser la grappe d'AGs :

- Les vitesses de toupie Ω_t des AGs sont constantes et égales entre tous les AGs ;
- Il n'y a pas de frottement et les équilibrages des toupies sont parfaits ;

Pour localiser l'AG numéro i dans la grappe (et donc R_{agi}), on utilise deux angles :

- α_i : l'angle entre la projection de l'axe \mathbf{z}_{agi} sur le plan $(\mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s)$ et l'axe \mathbf{x}_s .
- β_i : l'angle entre l'axe de précession \mathbf{z}_{agi} et \mathbf{z}_s , aussi appelé **angle de grappe**. Les angles β_i sont tous supposés égaux à une valeur β .

Sur les figures 3.3, ces angles sont définis dans le cas de notre grappe, ainsi que les repères R_{agi} .

L'AG 1 est choisi sur l'axe \mathbf{x}_s . Les autres AGs sont alors localisés sur les faces de la pyramide à base hexaédrale régulière. Lorsque $\sigma_i = 0, i = 1 \dots 6$, le moment cinétique de grappe (somme des moments cinétiques des AGs) est nul. Cette position est alors dite initiale, et si elle est préférée (comme on le suppose ici), alors elle est nommée **position canonique**³.

Les calculs de changements de repères donnent (3.10) :

$$\mathbf{R}_{R_i \rightarrow R_s} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\sigma_i) & -\sin(\sigma_i) & 0 \\ \sin(\sigma_i) & \cos(\sigma_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

On obtient l'éq. (3.11), dans le repère R_s , pour chaque AG numéro i .

$$\mathbf{x}_i(\sigma_i) = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_i) \cos(\beta) \sin(\sigma_i) - \sin(\alpha_i) \cos(\sigma_i) \\ -\sin(\alpha_i) \cos(\beta) \sin(\sigma_i) + \cos(\alpha_i) \cos(\sigma_i) \\ \sin(\beta) \sin(\sigma_i) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3. Néanmoins, lorsqu'un AG est en panne ($\Omega_t = \dot{\sigma}_i = 0$), alors la position où les $\sigma_i = 0, i = 1 \dots 5$ n'est plus canonique car le moment cinétique de la grappe n'est plus nul.

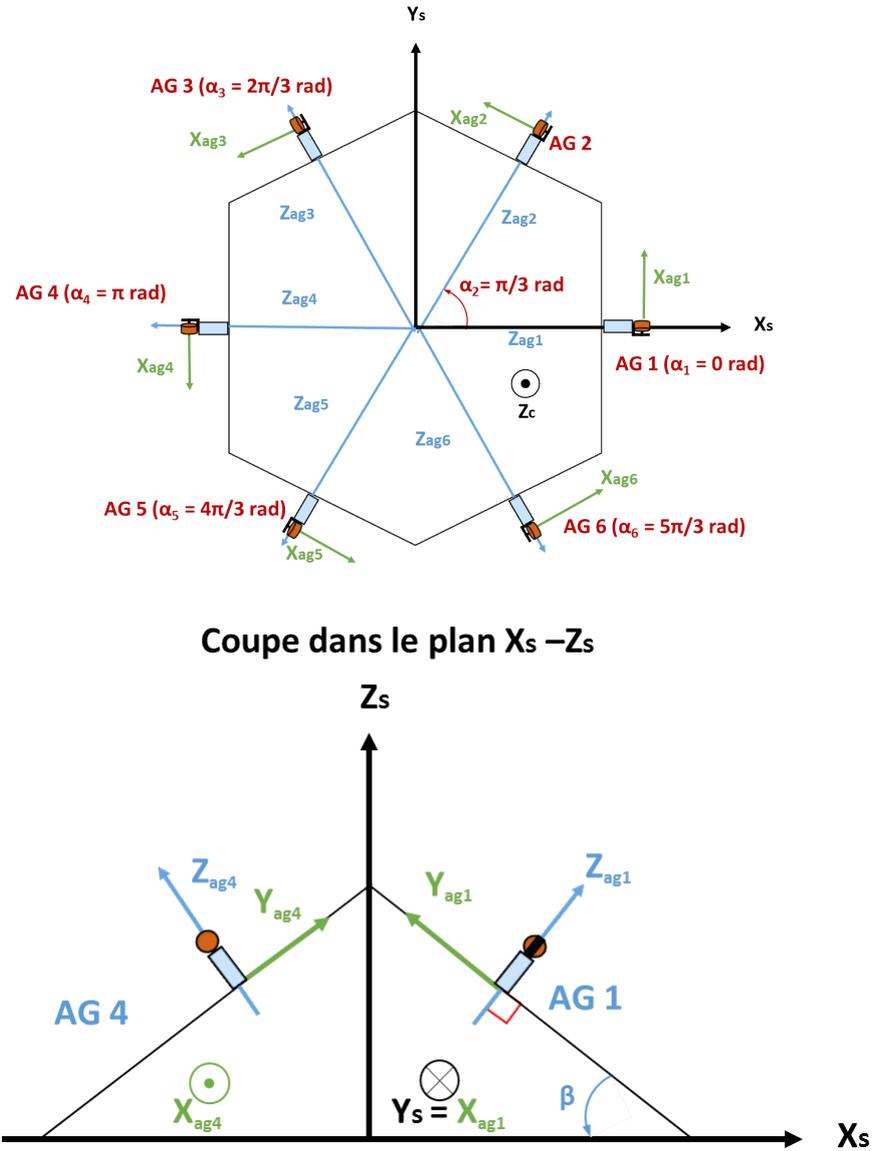


Figure 3.3 – Définition de la grappe pyramidale

Eq. (3.12) donne le vecteur portant le couple gyroscopique de l'AG i .

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_i) \cos(\beta) \cos(\sigma_i) + \sin(\alpha_i) \sin(\sigma_i) \\ -\sin(\alpha_i) \cos(\beta) \cos(\sigma_i) - \cos(\alpha_i) \sin(\sigma_i) \\ \sin(\beta) \cos(\sigma_i) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

On obtient alors les relations suivantes donnant le moment cinétique de la grappe (3.13)

et le couple gyroscopique créé par la grappe (3.14) dans le repère satellite.

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}) = h_t \mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

avec $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1(\sigma_1) \ \dots \ \mathbf{x}_6(\sigma_6)]$ la matrice contenant l'ensemble des vecteur \mathbf{x}_i (donc porteurs du moment cinétique toupie) et $\boldsymbol{\sigma}$ le vecteur 6×1 regroupant les σ_i .

$$\dot{\mathbf{h}} = h_t \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.14)$$

avec $\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial \mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = [\mathbf{y}_1(\sigma_1) \ \dots \ \mathbf{y}_6(\sigma_6)]$ la matrice contenant l'ensemble des vecteurs \mathbf{y}_i (porteurs de la direction du couple gyroscopique créé par l'AG i). \mathbf{X} et \mathbf{J} sont donc des matrices 3×6 dans notre cas.

Dans la suite du mémoire, les grappes d'AGs à six ou quatre actionneurs sont supposées régulières, avec des angles $\alpha_i = \frac{2\pi(i-1)}{n_{AG}}$.

3.2.2.2 Modèle dynamique

Pour ce modèle dynamique, prenons le système entier "satellite+grappe d'AGs" de moment cinétique noté \mathbf{h}_{total} sur lequel on applique le théorème du moment dynamique. Celui-ci dit que dans un repère galiléen R_0 , la somme couples extérieurs \mathbf{t}_{ext} appliqués sur le système est égale à la dérivée du moment cinétique (appelée moment dynamique). On trouve l'éq. (3.15) (voir [CNES 02]).

$$\sum \mathbf{t}_{ext} = \frac{d\mathbf{h}_{total}}{dt|_{R_0}} \quad (3.15)$$

Or, le moment cinétique total du système est la somme du moment cinétique de la grappe et celui de la caisse du satellite (3.16) en supposant l'absence d'autres actionneurs à moment cinétique embarqué (comme des roues).

$$\mathbf{h}_{total} = \mathbf{h}_{sat} + \mathbf{h}_{grappe} \quad (3.16)$$

Il est habituel de passer dans le repère satellite où $\mathbf{h}_{sat} = \mathbf{I}_{sat}\boldsymbol{\omega}_s$, \mathbf{I}_{sat} la matrice d'inertie du satellite étant constante et avec $\boldsymbol{\omega}_s$ la vitesse de rotation du satellite par rapport au repère inertiel R_0 .

On obtient alors la relation (3.17) en dérivant dans R_s .

$$\sum \mathbf{t}_{ext} = \frac{d\mathbf{h}_{grappe}}{dt|_{R_s}} + \frac{d\mathbf{h}_{sat}}{dt|_{R_s}} + \boldsymbol{\omega}_s \wedge \mathbf{h}_{sat} + \boldsymbol{\omega}_s \wedge \mathbf{h}_{grappe} \quad (3.17)$$

La relation $\boldsymbol{\omega}_s \wedge \mathbf{h}_{tot} = \boldsymbol{\omega}_s \wedge (\mathbf{h}_{sat} + \mathbf{h}_{grappe})$ traduit le couplage gyroscopique entre la grappe et le satellite. Elle est considérée comme un terme perturbateur et si le moment cinétique total du satellite est nul, alors ce terme peut être négligé. Le couple gyroscopique de grappe résultant est le terme principal de l'expression $\frac{d\mathbf{h}_{grappe}}{dt|_{R_s}} = \dot{\mathbf{h}}$ qui contient aussi le couple lié au déplacement de la toupie en rotation et les couples de précession sur les moteurs. Les autres termes représentent la dynamique d'un satellite sans contrôle par moment cinétique embarqué. Plus de détails sur la dynamique satellite peuvent être trouvés dans l'ouvrage [CNES 02] et dans la thèse [Asghar 08].

Si les moments des forces extérieures sont nuls, alors le moment cinétique total du satellite dans le repère inertiel est constant. Ainsi, les AGs ne peuvent pas diminuer le moment cinétique total du satellite : des magnétocoupleurs ou de la propulsion sont nécessaires.

Pour faire le parallèle avec la section 3.1 de ce chapitre, il faut noter que l'on peut écrire le système (3.17) sous la forme de l'éq. (3.2) en prenant comme vecteur d'état $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\omega}_s \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}]^T$. Ainsi, en développant la relation (3.17) on obtient le modèle linéarisé (3.18) en se basant sur la modélisation [Llibre 14] et en négligeant les termes \mathbf{p}_B et \mathbf{p}_G comme explicité ci-dessous.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{sat} & c_g \mathbf{Z} \\ c_g \mathbf{Z}^T & c_g \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \\ \ddot{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_t \chi & -h_t \mathbf{J} \\ h_t \mathbf{J}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_s \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{ext} \\ \boldsymbol{\Gamma}_P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{p}_B \\ \mathbf{p}_G \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

avec :

- c_g l'inertie radiale de la toupie équipée de la fourche
- $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1(\sigma_1) \quad \dots \quad \mathbf{z}_6(\sigma_6)]$ la matrice des axes de précession de la grappe
- χ l'opérateur antisymétrique associé à \mathbf{X} (correspond au produit vectoriel entre \mathbf{X} et le vecteur que multiplie χ) : $\chi \boldsymbol{\omega}_s = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}(:, i) \wedge \boldsymbol{\omega}_s$
- $\boldsymbol{\Gamma}_{ext}$ les couples extérieurs s'appliquant sur la plateforme
- $\boldsymbol{\Gamma}_P$ l'entrée correspondant au couple appliqué sur l'axe de précession de chaque AG.
- \mathbf{p}_B et \mathbf{p}_G sont des termes non-linéaires habituellement négligés par leurs faibles valeurs, dues à l'inertie des actionneurs gyroscopiques couplée à la vitesse satellite ou à la vitesse satellite au carré. Cette hypothèse est donc vraie si la vitesse satellite est faible, l'inertie des actionneurs gyroscopiques étant le plus souvent négligeable vis-à-vis de l'inertie satellite.

$$\mathbf{p}_B(i) = \mathbf{z}_i \cdot [\boldsymbol{\omega}_s \wedge (\mathbf{I}_{gi} \boldsymbol{\omega}_s)]$$

avec \mathbf{I}_{gi} la matrice d'inertie de l'actionneur gyroscopique, exprimée en son centre de gravité, et :

$$\mathbf{p}_G = \boldsymbol{\omega}_s \wedge \mathbf{I}_{sat} \boldsymbol{\omega}_s + \sum_{i=1}^n \dot{\sigma}_i [c_g \boldsymbol{\omega}_s \wedge \mathbf{z}_i + \mathbf{z}_i \wedge \mathbf{I}_{gi} \boldsymbol{\omega}_s - \mathbf{I}_{gi} (\mathbf{z}_i \wedge \boldsymbol{\omega}_s)]$$

La première équation de (3.18) décrit le couplage entre les mouvements du satellite et de la grappe d'AGs. La seconde équation donne la dynamique sur chaque actionneur.

L'attitude du satellite par rapport au repère inertiel est représentée par des quaternions. On rappelle que les quaternions Q s'expriment par $Q = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$, avec \mathbf{u} la direction normalisée autour de laquelle la rotation est effectuée pour passer d'un repère inertiel à un repère satellite par exemple, et θ l'angle de rotation autour de cette direction. Ces quaternions sont des nombres hypercomplexes. Ils possèdent une algèbre spécifique que l'on peut trouver dans la littérature et non rappelée ici. La dynamique du quaternion d'attitude s'exprime par :

$$\dot{Q} = \frac{1}{2}Q\Omega \tag{3.19}$$

avec Ω le quaternion pur issu de la vitesse angulaire du satellite $\boldsymbol{\omega}_s$.

Au niveau de l'allocation (appelée loi de pilotage dans le cadre des AGs), celle-ci revient à inverser l'équation (3.14) pour trouver $\boldsymbol{\sigma}$ avec un couple $\dot{\mathbf{h}}$ donné, et ainsi retrouver le même type de formulation que l'éq. (3.7).

3.3 Présentation de notions utiles

L'étude plus approfondie de la topologie et des caractéristiques des grappes d'actionneurs gyroscopiques sera développée dans le chapitre 5, ici seules les notions générales utiles pour la suite sont données.

3.3.1 Singularités

Reprenons tout d'abord l'explication des **singularités**. Lorsque les actionneurs sont dans une disposition $\boldsymbol{\sigma}^s$ telle que l'ensemble des actionneurs ne peut plus fournir de mouvement selon un axe \mathbf{v}_s , alors on dit que le système est dans une **position singulière**, et \mathbf{v}_s est une **direction singulière**. Mathématiquement, cela revient à dire que quel que soit $\boldsymbol{\sigma}$, l'effort généralisé $\dot{\mathbf{h}}$ produit par le système d'actionnement est toujours orthogonal à \mathbf{v}_s : $\mathbf{v}_s^T \dot{\mathbf{h}} = 0$. C'est équivalent à l'éq. (3.20).

$$\mathbf{v}_s^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}^s) = \mathbf{0}_{1 \times n} \tag{3.20}$$

La direction singulière \mathbf{v}_s est un vecteur singulier à gauche associé à la valeur singulière 0 contenue parmi les valeurs singulières de $\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}^s)$. On peut noter que même si une position $\boldsymbol{\sigma}$ n'est pas singulière, de par sa décomposition en valeurs singulières (SVD), on peut obtenir les directions les plus mal engendrées dans cette configuration : ce sont les vecteurs singuliers à gauche associés aux plus petites valeurs singulières.

Lorsque le système atteint le maximum du module de \mathbf{h} selon un axe, le système d'actionnement est dit **saturé**, et il ne peut plus fournir de mouvement selon cet axe. Cette position

est donc singulière. L'ensemble de ces positions singulières particulières sont nommées **externes**, par opposition aux positions singulières **internes** qui interviennent à l'intérieur du volume de travail délimité par les singularités externes.

Si une singularité peut être traversée en reconfigurant le système par le noyau de \mathbf{J} , alors elle est dite **traversable ou hyperbolique**. Si ce n'est pas le cas, alors elle est dite **intraversable ou elliptique** [Yamada 16]. Dans les figures 3.4 et 3.5, une représentation de singularités traversable et intraversable est donnée dans le cas d'une grappe de quatre actionneurs gyroscopiques pyramidale d'angle à la base $\beta = 50^\circ$.

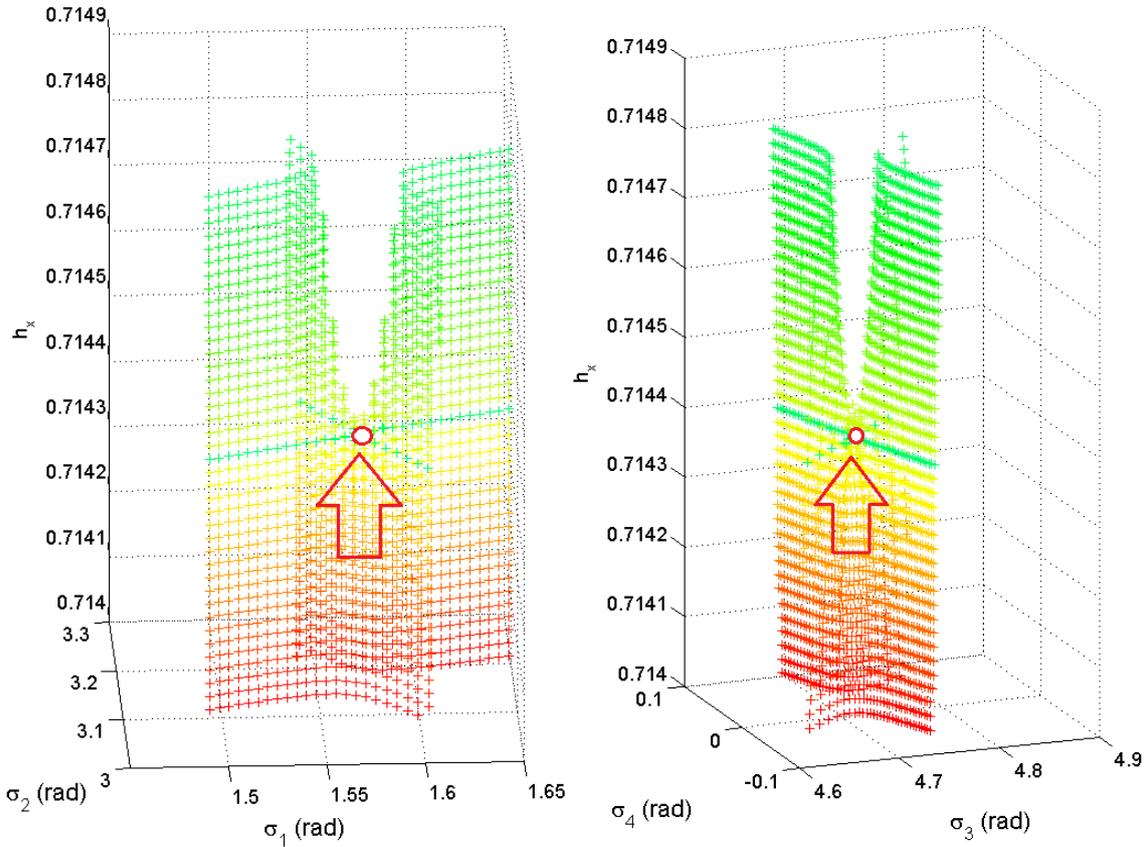


Figure 3.4 – Singularité traversable

Dans ces figures, un zoom sur toutes les positions en σ donnant des $\mathbf{h} = [h_x \ 0 \ 0]$ donnés est réalisé (avec h_t normalisé à 1). Sur les figures, en abscisse se trouve soit σ_1 l'angle de précession de l'AG 1 ou σ_3 , en ordonnées σ_2 ou σ_4 et en cote h_x . Chaque couleur représente les positions en σ pour le $\mathbf{h} = [h_x \ 0 \ 0]$ de la grappe correspondant en cote. Le rond rouge est la position de la singularité. Une discrétisation et une analyse numérique sont réalisées (d'où le caractère discret, alors que les surfaces représentées sont continues). Dans la figure 3.4, on remarque bien que cette singularité est traversable car le système peut augmenter son moment cinétique en h_x en changeant de position sur la surface en σ . En revanche, dans la

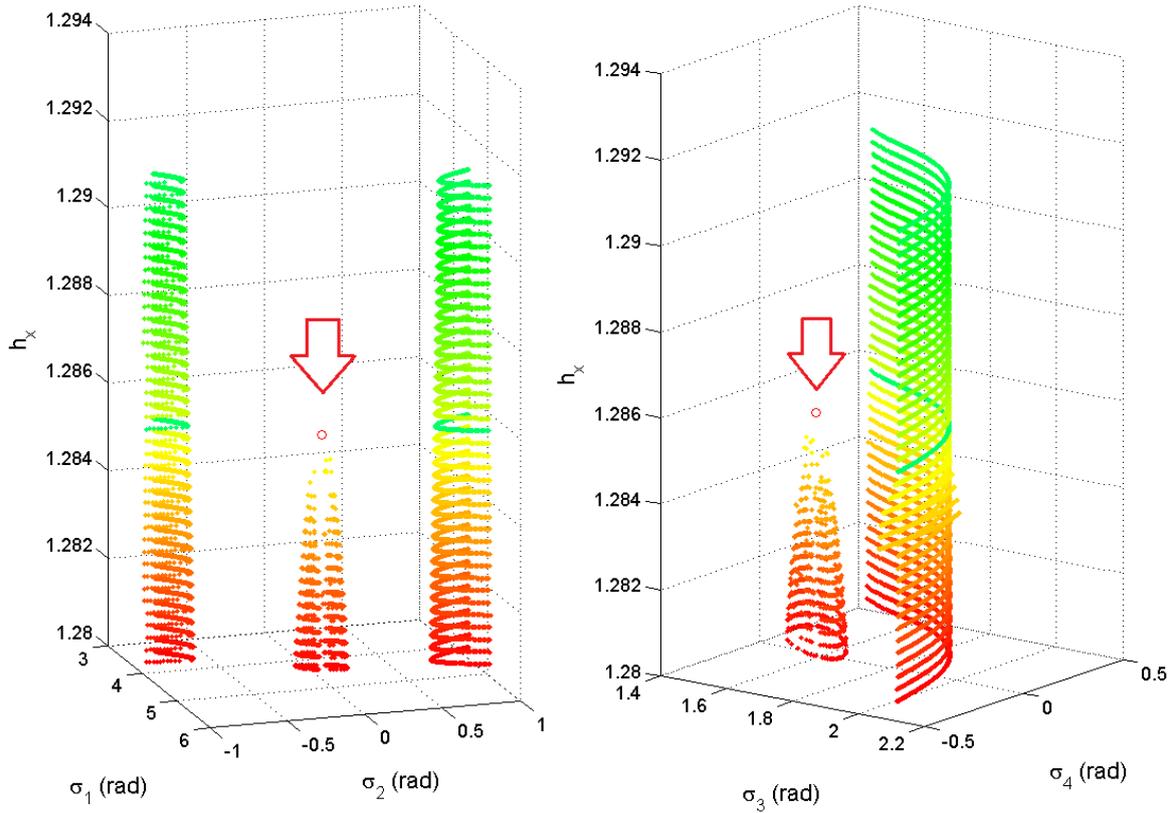


Figure 3.5 – Singularité intraversable

figure 3.5, on remarque pour monter en h_x , si le système se trouve sur le cercle rouge, il faut qu'il atteigne une autre branche distincte en passant par des configurations σ n'appartenant pas aux branches (et donc qui ne donneraient pas le moment cinétique désiré, créant ainsi des erreurs de couple).

Mathématiquement, la traversabilité s'étudie en analysant la forme quadratique issue du développement à l'ordre 2 de l'équation (3.20). Cette étude est présentée dans le chapitre 5.

Si l'on reprend l'équation (3.20), on remarque que lorsqu'il existe une direction singulière, mathématiquement, cela signifie qu'une valeur singulière de la matrice $\mathbf{J}(\sigma^s)$ est nulle, ce qui est équivalent à dire qu'une valeur propre de $\mathbf{J}(\sigma^s)\mathbf{J}(\sigma^s)^T$ est nulle. Dans ce cas, le déterminant de $\mathbf{J}(\sigma^s)\mathbf{J}(\sigma^s)^T$ est nul (car c'est le produit de ses valeurs propres). Comme le déterminant est une fonction continue, et que la fonction qui, à σ , associe $\mathbf{J}(\sigma)$ est continue aussi, alors le déterminant est continu en σ , et peut donc devenir une "mesure de la distance à une singularité" [Llibre 09]. C'est un outil largement utilisé par exemple pour des critères de contournement de singularités [Bedrossian 90].

3.3.2 Trajectoires à motricité effectives/nulles

La matrice \mathbf{J} étant rectangulaire, elle possède donc un noyau à droite de taille $n - m$ si elle est non singulière, et plus grand si elle est singulière car elle possède alors des valeurs singulières nulles supplémentaires. Dans le cas non-singulier, le noyau de \mathbf{J} est un espace vectoriel de dimension $n - m$ engendré par $n - m$ vecteurs indépendants qui sont les directions singulières à droite de \mathbf{J} . Contrairement aux directions singulières associées aux vecteur \mathbf{v}_s de taille m , les vecteurs \mathbf{p} engendrant le noyau de \mathbf{J} sont de dimension n , puisqu'ils vérifient l'équation (3.21).

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{p} = \mathbf{0}_{m \times 1} \quad (3.21)$$

Ainsi, lorsque $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ appartient au noyau de \mathbf{J} , aucun mouvement n'est créé en sortie du système, mais les variables internes aux actionneurs évoluent. Ces ensembles de position sont appelées des **variétés à motricité nulle** ou simplement **trajectoires à motricité nulle** en dimension 1 [Kurokawa 98]. Elles permettent de reconfigurer la grappe et de potentiellement passer des singularités traversables. A l'inverse les **trajectoires à motricité effectives** sont les trajectoires en $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ minimisant l'énergie dépensée pour réaliser une trajectoire en \mathbf{h} . Elles n'utilisent donc pas le noyau de \mathbf{J} . Mathématiquement, on retrouve la pseudo-inverse de Moore-Penrose \mathbf{J}^\dagger , donnée en éq. (3.22) pour engendrer ces trajectoires. Topologiquement, elles correspondent aux chemins les plus courts pour passer d'un \mathbf{h}_1 à un \mathbf{h}_2 dans l'espace des $\boldsymbol{\sigma}$, en termes de norme 2.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{J}^\dagger \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \dot{\mathbf{h}} \quad (3.22)$$

Cette minimisation est donc réalisée au sens de la norme L_2 . Des approches visant à minimiser d'autres normes L_p quel que soit p , comme L_1 ou L_∞ permettent de minimiser d'autres critères tels que le débit ou le pic de couple [Kraft 93]. Néanmoins, comme l'objectif est de minimiser l'énergie, le travail s'est concentré autour de la norme L_2 .

3.3.3 Efficacité

Nous allons maintenant nous pencher sur l'**efficacité** d'un système d'actionnement. Comme indiqué dans le rapport [Llibre 96], le but d'un système d'actionnement est d'engendrer un effort généralisé (couple et/ou force), et l'efficacité de celui-ci dépend de la configuration des vecteurs colonnes \mathbf{j}_i de la matrice \mathbf{J} . En effet, on peut réécrire la relation (3.7) sous la forme (3.23).

$$\dot{\mathbf{h}} = \sum_{i=1}^n \dot{\sigma}_i \mathbf{y}_i \quad (3.23)$$

La direction \mathbf{v} dans laquelle il est le plus difficile de créer un mouvement est la plus mal engendrée par les \mathbf{j}_i [Llibre 96]. C'est donc celle dont la projection sur les \mathbf{j}_i est la plus faible. Cette solution minimise (3.24).

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{v}^T \mathbf{j}_i)^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{J}\mathbf{J}^T \mathbf{v} \quad (3.24)$$

La solution est la direction singulière à gauche qui correspond à la plus petite valeur singulière de \mathbf{J} . Maximiser une valeur singulière résulte en une minimisation d'une autre et l'on risque de se retrouver dans une position singulière par rapport à une autre direction. L'optimal en terme d'efficacité selon l'ensemble des axes sera donc lorsque toutes les valeurs propres de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ sont égales et que l'on peut fournir la même efficacité selon tous les axes.

Avec ces premières caractéristiques, on peut maintenant étudier les lois de pilotage.

3.4 Cahier des charges proposé

Différents critères sont à vérifier pour avoir une loi de pilotage satisfaisante. Ceux-ci sont issus de [Jones 12] qui évaluent les principales lois existantes selon ces critères et des besoins exprimés pour notre étude. Notre cahier des charges est défini ainsi (par ordre de priorité) :

1. **Etre embarquable dans un satellite** : une contrainte forte sur la loi à créer ici est qu'elle soit embarquable dans un satellite, et donc calculable en temps réel sur un calculateur typique. Certaines lois de pilotage très performantes demandant des calculs hors-ligne telles que [Paradiso 92] sont donc à écarter dans cette étude. Cependant, des calculs formels de complexité pour l'embarquabilité ne sont pas demandés, la vérification de cette contrainte est qualitative.
2. **Etre reconfigurable en cas de panne** : si des actionneurs tombent en panne (ils s'arrêtent), la loi proposée doit être reconfigurable facilement. La structure de la loi doit être utilisable même en cas de pannes et il ne doit pas y avoir de lourds rechargements de logiciel.
3. **Etre indépendante des dispositions des actionneurs** : la loi devra être aussi indépendante que possible des configurations géométriques des actionneurs pour pouvoir être utilisée dans différentes configurations (en particulier pyramidales) et nombre d'actionneurs. Cette exigence a pour implication la numéro 2 qui est moins restrictive.
4. **Evitement/passage des singularités** : on parle des singularités autres que les capacités limites propres de l'actionneur (enveloppe externe). Dans les situations de singularités, des erreurs sur la sortie contrôlée et une possible saturation des actionneurs peuvent survenir. Certaines singularités sont passables en utilisant les trajectoires à motricité nulle, celles-ci peuvent donc être passées alors que les autres doivent être évitées par la loi.
5. **Utiliser toutes les capacités des actionneurs** : certaines lois comme [Kurokawa 98] par exemple limitent les capacités des actionneurs afin de rester dans un espace où toutes les configurations sont non-singulières. La loi à utiliser dans cet espace est alors simple, mais n'utilise pas toutes les capacités intrinsèques des actionneurs.
6. **Contraintes liées à l'application** : des contraintes spécifiques aux applications doivent pouvoir être ajoutées dans cette loi, par exemple :
 - Retour à la position initiale : un des enjeux de la loi de commande peut être de retourner à la position initiale une fois l'action effectuée.
 - Saturations : gérer les saturations des actionneurs.

7. **Stabilité de la loi** : on souhaite avoir une loi stable et donc convergeant vers la solution désirée.
8. **Minimiser les erreurs de sortie** : cette contrainte intervient lorsque l'on souhaite éviter des singularités par exemple et que l'on rajoute des termes perturbateurs pour en sortir [Wie 01]. Dans le cas des AGs, cela revient à créer des couples parasites pour éviter des singularités.

Cette partie a permis de clarifier les bases de la modélisation sur lesquelles la suite du mémoire se pose. Le cahier des charges proposé pour réaliser la loi de pilotage a été clarifié, et sera comparé à la littérature ainsi que discuté dans les prochains chapitres.

Chapitre 4

Bibliographie des lois de pilotage des systèmes sur-actionnés mécaniques

Sommaire

4.1	Méthodes liées à la pseudo-inverse	30
4.2	Méthodes exactes	32
4.3	Méthodes basées sur l'optimisation	33
4.4	Planification hors-ligne	34
4.5	Autres méthodes avec outils différents	35
4.6	Résumé des différentes méthodes	37

Le pilotage de systèmes mécaniques sur-actionnés en général est un sujet très étudié avec de nombreuses propositions de résolution. Les lois de pilotage les plus reconnues sont résumées et étudiées dans cette partie, en particulier par rapport au cahier des charges imposé au chapitre précédent.

CETTE section a pour but de recenser les diverses lois de pilotage existantes pour le contrôle de systèmes redondants : robots manipulateurs sériels ou parallèles, grappes d'actionneurs gyroscopiques en lien avec celles développées dans cette thèse. Ouvrir la bibliographie à un cadre plus général permet d'analyser des outils potentiellement utiles pour notre système.

B. Siciliano donne une bibliographie complète des principales méthodes existant dans les années 1990 [Siciliano 90], reprises dans ce document. Les méthodes présentées peuvent se combiner et parfois rentrer dans plusieurs catégories. Du point de vue des AGs, H. Kurokawa notamment dans [Kurokawa 98] réalise une analyse approfondie des principales lois de pilotage. Des méthodes utilisant des outils développés plus récemment sont aussi citées. Sont décrites d'abord les méthodes liées à la pseudo-inverse, puis les méthodes exactes prenant en compte des contraintes. Ensuite, les méthodes utilisant directement des optimisations sont décrites et les méthodes de planification (hors-ligne) simplement mentionnées à cause de leur charge de calculs. Enfin, d'autres méthodes présentant des outils différents sont citées.

4.1 Méthodes liées à la pseudo-inverse

Toutes ces méthodes dérivent de la minimisation d'un critère quadratique, dépendant de l'optimisation souhaitée, pondérant souvent l'erreur en couple et la vitesse de précession afin de minimiser l'énergie dépensée. En effet, la **pseudo-inversion** de Moore-Penrose revient à minimiser $|\dot{\sigma}|$ tout en réalisant un couple demandé $\dot{\mathbf{h}}$. En posant λ un multiplicateur de Lagrange, le critère r à minimiser est donné par l'éq. (4.1) [Libre 08].

$$r = \frac{1}{2} \dot{\sigma}^T \dot{\sigma} + \lambda (\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{J}(\sigma) \dot{\sigma}) \quad (4.1)$$

La solution de norme minimale amène à la solution (4.2).

$$\dot{\sigma} = \mathbf{J}^T(\sigma) (\mathbf{J}(\sigma) \mathbf{J}(\sigma)^T)^{-1} \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{J}(\sigma)^\dagger \dot{\mathbf{h}} \quad (4.2)$$

Cette technique revient à calculer la trajectoire à motricité effective. Lorsque le déterminant de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ est faible, alors cette inversion devient mal conditionnée et les vitesses de précession saturent. Ceci se produit lorsque le système s'approche d'une singularité.

De nombreuses possibilités différentes existent pour éviter que la matrice $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ ne devienne singulière, et quelques-unes sont décrites ci-dessous.

- La transposée de la matrice jacobienne est très utilisée en robotique. Elle assure l'existence d'une solution puisqu'elle existe toujours, même en cas de singularité, mais comme l'inversion n'est pas exacte, des erreurs sont créées [Siciliano 90]. Cette méthode est la première à avoir été implémentée sur la grappe d'AGs de la station spatiale Skylab [Kurokawa 98].
- **L'inverse généralisée de Moore-Penrose** est une matrice qui possède seulement une partie des propriétés des matrices inversibles [Asghar 06]. Des singularités internes peuvent être évitées puisque les trajectoires en σ engendrées sont différentes de la pseudo-inverse mais ce n'est pas garanti et elle ne permet pas de partir d'une

configuration initiale singulière.

- La **SRI (Inverse Robuste Singulière)** est la méthode la plus utilisée, elle a été proposée au départ pour les bras manipulateurs par [Wampler 86] (aussi appelée "damped least-square solution"), [Nakamura 86] et dans les grappes d'actionneurs gyroscopiques par N. Bedrossian [Bedrossian 87].

Elle correspond théoriquement à la solution qui minimise le critère r suivant :

$$r = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{R}^{-1}(\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_d)\mathbf{P}^{-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_d) \quad (4.3)$$

avec $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_d$ une valeur souhaitée, \mathbf{P} et \mathbf{R} des matrices de pondération. La résolution de ce problème de minimisation est donné par [Libre 08] notamment, et est équivalent à la résolution par les moindres carrés pondérés. Néanmoins, dans notre application, la SRI est limitée au cas où $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_d = \mathbf{0}$, $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, ce qui donne une solution de la forme éq. (4.4) avec le choix par exemple $\mathbf{R} = \lambda^2 \mathbf{I}$.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T + \mathbf{R})^{-1}\dot{\mathbf{h}} \quad (4.4)$$

Par rapport à la formulation de Moore-Penrose, un terme est rajouté dans la pseudo-inversion (4.4) pour éviter que l'inversion ne soit impossible [Siciliano 90].

La principale difficulté de cette méthode est de régler le paramètre λ . D'après [Siciliano 90], si sa valeur est élevée, l'évitement de singularités est efficace mais les erreurs créées sont plus fortes. Un des réglages les plus efficaces est de faire varier λ en fonction de la plus petite valeur singulière de \mathbf{J} . Cette méthode est appelée SVD (Singular Value Decomposition) [Ford 00]. Cette méthode est donc plus robuste mais demande de réaliser une décomposition en valeurs singulières. De plus, lorsque le système tombe ou commence dans une configuration singulière, mathématiquement la formulation ne permet pas de sortir de la singularité à vitesse nulle.

- Oh and Vadali [Oh 91] et Wie and al. [Wie 01] ont proposé une méthode introduisant des termes perturbateurs dans la matrice \mathbf{R} (**Loi Inverse Robuste Singulière Perturbée (PSRI)**), empêchant le couple demandé d'être parallèle à la direction singulière. Ainsi, le système peut se sortir d'une configuration singulière à vitesse nulle. Néanmoins, cette méthode crée des erreurs constamment et ne peut pas non plus sortir de la singularité externe. En rajoutant des termes hors-diagonaux dans la matrice \mathbf{R} , sortir de la singularité externe devient possible [Wie 03].
- La **Blended Inverse (B-inverse)** est une méthode proposée par [Tekinalp 05] correspondant à la solution complète de la minimisation du critère (4.3). Deux matrices de pondération \mathbf{R} et \mathbf{P} sont alors à régler. La solution est donnée par l'éq. (4.5) [Tekinalp 05].

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{J}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J} + \mathbf{P}^{-1})^{-1}(\mathbf{P}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_d + \mathbf{J}^T \mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{h}}) \quad (4.5)$$

Dans le papier [Tekinalp 05], la trajectoire en moment cinétique et les angles souhaités $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_d$ sont néanmoins calculés hors-ligne.

- Les **méthodes du gradient** ont été beaucoup étudiées. Elles se basent sur la solution

générale du problème d'optimisation (4.1).

$$\dot{\sigma} = \mathbf{J}^\dagger \dot{\mathbf{h}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \dot{\sigma}_v \quad (4.6)$$

avec $\dot{\sigma}_v$ un vecteur arbitraire.

La partie $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J})$ est un projecteur dans le noyau de \mathbf{J} . Elle peut permettre de reconfigurer en interne les actionneurs afin de les éloigner de singularités par exemple, sans créer de mouvement sur la sortie. Différentes méthodes pour choisir $\dot{\sigma}_v$ existent, en particulier par l'optimisation de fonctions coûts diverses, citées par [Siciliano 90], [Yoshikawa 85]. Cette méthode peut créer des oscillations dans les articulations dans le cas des bras robotiques [Ananthanarayanan 15]. Dans le cas des AGs, les contournements "Direct" et "Indirect" sont deux choix pour la fonction objectif de l'optimisation décrits par D.E. Cornick [Cornick 79] qui indiquent les positions σ privilégiées. Une autre possibilité est de maximiser les capacités de commande localement [Hefner 83], [Kraft 93]. D'autres méthodes utilisent la mesure du déterminant [Kurokawa 85], [Bedrossian 87]. Selon M. Llibre [Llibre 09], certaines formes dans ces dernières méthodes sont très efficaces pour arriver rapidement à l'enveloppe externe, en-dehors d'une configuration initiale singulière. Cependant, ces méthodes possèdent des arbitraires qui parfois peuvent donner des résultats moins efficaces que si elles n'étaient pas utilisées. Les méthodes du gradient sont peu efficaces pour des AGs 1-axe, mais elles sont beaucoup plus efficaces pour des AGs 2-axes.

Les méthodes du gradient permettent d'éviter les singularités et de sortir des singularités traversables, et les méthodes de type Robuste Singulière peuvent permettre de passer les singularités intraversables lorsque la vitesse n'est pas nulle. La loi SRI avec termes hors diagonaux permet de créer des erreurs en vitesses, contrairement aux autres, et donc permet de sortir des singularités à vitesse nulle en créant néanmoins des couples non désirés.

4.2 Méthodes exactes

Certaines lois de pilotage ne créent pas d'erreurs de sortie :

- **Ajouts de contraintes dans la matrice \mathbf{J}** [Jones 12], [Zeledon 10] pour la rendre toujours inversible : cependant, comme expliqué dans l'article [Siciliano 90], il est difficile de prédire sur une trajectoire que les contraintes imposées seront toujours vérifiées. Cette méthode permet d'éviter les singularités, ne pas créer d'erreurs de couple, mais limite l'espace de travail en moment cinétique, ce qui peut réduire les performances de la commande. Seuls certains systèmes avec des caractéristiques spéciales peuvent profiter de cette commande. [Baillieul 85] nomme la nouvelle jacobienne obtenue la "jacobienne étendue" ("Extended Jacobian"). Dans cette méthode, un autre type de singularités peut apparaître : la singularité numérique. En effet, la nouvelle matrice \mathbf{J} modifiée n'est pas forcément de rang plein numériquement (voir [Siciliano 90]).
- **Fonction cinématique inverse** : Une possibilité générale dans les systèmes méca-

riques sur-actionnés est de définir une fonction \mathbf{g} cinématique inverse définie sur une partie de l'espace de travail et inversible telle que l'équation (4.7) soit vraie.

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma})) = \boldsymbol{\sigma} \quad (4.7)$$

A noter en particulier les développements mathématiques de C.W. Wampler dans [Wampler 88]. La définition des espaces de travail compatibles, inversibles fait notamment partie de ses recherches. Cette méthode généralise celle de la restriction de l'espace de travail décrite ci-dessous. La plus importante difficulté est alors de vérifier la propriété (4.7). Un des points forts de cette méthode est la répétabilité.

- **Restriction de l'espace de travail** : Il est possible de présenter une loi de pilotage contrainte telle que les valeurs de $\boldsymbol{\sigma}$ restent dans un espace de travail sans singularités. Cette possibilité est décrite plus précisément par H. Kurokawa dans [Kurokawa 94] pour les AGs. Par une étude géométrique, H. Kurokawa montre que pour obtenir une loi qui satisfasse toutes les contraintes habituellement demandées, il faut relaxer une des contraintes suivantes : soit la condition d'exactitude, soit la condition de temps réel (utiliser l'information sur les commandes futures à venir), soit restreindre le domaine en moment cinétique. La loi proposée se place dans la troisième possibilité, avec un domaine restreint, où il n'y a aucune singularité intraversable, mais qui permet d'avoir un couple maximal dans une direction préférée. Les avantages de cette méthode sont qu'elle est exacte et répétable (isomorphisme entre l'espace des configurations et des moments cinétiques), que l'on peut spécifier des limites d'angles sur les actionneurs, que les calculs sont simples. Néanmoins, M. Llibre [Llibre 09] annonce que cette solution réduit fortement les capacités de couple selon les directions non préférées ; ainsi cette politique est très intéressante si une seule direction est privilégiée.
- **Priorisation des tâches** : Lors de l'ajout de contraintes, la possibilité de pouvoir gérer les tâches par priorité a été proposée par [Nakamura 87]. Dans cette technique, les contraintes n'interviennent que si elles ne sont pas en conflit avec les contraintes plus prioritaires. En particulier, les tâches secondaires sont projetées dans le noyau de la matrice \mathbf{J} afin de ne pas modifier le mouvement souhaité. Dans cette solution, comme noté par [Siciliano 90], il n'y a pas de singularité numérique pour la tâche principale, mais elles peuvent intervenir dans la seconde tâche. De plus, cette méthode suppose une bonne modélisation des contraintes pour éviter les singularités.

4.3 Méthodes basées sur l'optimisation

De nombreuses méthodes existent, basées sur l'optimisation. Les articles [Johansen 13] et [Fossen 06] proposent et analysent un panel de méthodes d'allocation (ou lois de pilotage). Des méthodes reposent sur la volonté d'optimiser le problème posé en tenant compte de contraintes, possible car le système étant redondant, il y a des degrés de liberté restants. Cependant, comme dit dans l'article [Fossen 06], la plupart du temps les algorithmes de résolution d'optimisation sont très coûteux et peuvent poser des difficultés pour rendre le problème temps réel dans un satellite. [Fossen 06] fait un bilan de différentes méthodes existantes pour

l'optimisation ainsi que les méthodes de résolution associées :

- **Optimisation quadratique, avec prise en compte de contraintes** : des optimisations linéaires quadratiques sous contraintes ou non sont proposées, avec résolutions [Fossen 06]. Lorsqu'il n'y a pas de contraintes, de manière statique, la solution obtenue est la pseudo-inverse de Moore-Penrose. Lorsque l'on rajoute des contraintes, la résolution de ce problème est complexe, utilisant les résolutions d'algorithmes de résolution quadratique multi-paramétriques. D'après [Fossen 06], le problème peut être formulé comme un problème quadratique convexe mixte entier. Cependant ces calculs de résolution sont la plupart du temps réalisés hors ligne. Des méthodes itératives sont aussi possibles, plus flexibles mais qui demandent parfois plusieurs itérations avant de converger. [Sordalen 97] par exemple propose un algorithme itératif basé sur la décomposition en valeurs singulières afin d'éviter les singularités.
- **Optimisation non-linéaire** : Afin d'éviter efficacement les singularités, il peut être nécessaire de rajouter des non-linéarités au problème, en tenant compte par exemple de la valeur du déterminant. Le problème devient alors non-convexe [Fossen 06]. Des solutions utilisant des fonctions de Lyapunov, permettant de prouver la convergence et la stabilité en boucle fermée existent [Johansen 04]. Un autre algorithme de résolution peut être créé en utilisant la programmation quadratique, en approximant le problème sur un espace convexe. On retombe alors sur le problème précédent [Fossen 06].
- **Commande prédictive** : Quelques articles utilisent la commande prédictive pour piloter les AGs [Tekinalp 09]. Une étude pour l'agence spatiale coréenne [Leeghim 09] utilise aussi une prédiction sur un seul pas de temps, avec une mesure d'index de singularités. Cette méthode présente des avantages considérables si l'on connaît le profil des manœuvres à réaliser par le satellite. Néanmoins, la quantité de calculs augmente fortement avec le nombre de pas de temps sur laquelle la commande prédictive est implémentée.
- **Commande adaptative** : [Zhou 05] utilise la commande adaptative en combinaison avec la seconde méthode de Lyapunov (potentiel) et une linéarisation entrée-sortie dans le cas d'actionneurs gyroscopiques liés.

4.4 Planification hors-ligne

Des méthodes très efficaces de planification de trajectoires en angles de précession ont été développées. Néanmoins, dans la plupart des cas, elles ne seraient pas entièrement calculables en temps réel dans un véhicule spatial, et soit elles doivent être calculées au sol, soit une partie des calculs doit être fait en amont et les résultats insérés dans le satellite sous la forme de données stockées.

- **Contrôle par voie directe** : P. de Larminat a déposé un brevet [Larminat 13] pour sa méthode de commande. Dans une première étape, une cartographie des configurations angulaires les plus proches de la configuration canonique maximisant le moment cinétique est faite hors-ligne, puis interpolée à bord. Elle est utilisée pour calculer la consigne des angles de précession.

- **Parcours en profondeur** : J. Paradiso dans [Paradiso 92] propose une méthode d'optimisation globale de la configuration de la grappe avec un algorithme de parcours en profondeur, pour passer d'un état initial à un état final connu. La technique SRI est utilisée pour calculer les vitesses angulaires. Le but de la recherche dans un arbre est de trouver des vitesses à motricité nulles qui évitent les singularités et minimisent les erreurs induites par la SRI lorsque la singularité est inévitable. Malgré ce processus qui vient de l'optimisation, le but n'est pas de trouver la valeur optimale, mais une valeur qui vérifie les contraintes afin de diminuer le temps de calcul. Dans la fonction de coût, différents poids sont mis sur les critères en fonction de la vitesse angulaire par rapport à la vitesse maximale par exemple.
- **Programmation dynamique** : La programmation dynamique (commande optimale) permet d'effectuer un évitement global des singularités, c'est donc une méthode de guidage qui permet de trouver une trajectoire loin des singularités, optimisée pour certains critères. Une inversion de la matrice jacobienne (avec pseudo-inversion et terme dans le noyau) peut alors être utilisée comme commande. Dans la méthode proposée par M. Llibre et J.-P. Chrétien [Llibre 14], on suppose que l'on a en entrée une trajectoire en moment cinétique désirée. Le but est alors de trouver une trajectoire dans l'espace des configurations qui corresponde à la trajectoire en moment cinétique et qui soit optimal, en vérifiant des contraintes. Le critère retenu est de maximiser la distance aux singularités.

Les méthodes présentées dans ces deux derniers paragraphes sont performantes mais nécessitent la plupart du temps des calculs difficilement embarquables.

4.5 Autres méthodes avec outils différents

D'autres outils utiles pour réaliser des lois de pilotage performantes existent. Des méthodes spécifiques à la robotique peuvent être trouvées dans l'article [Ananthanarayanan 15], telles que la Cyclic Co-ordinate Descent, Triangulation et Neural Network non développées ici.

- **Utilisation de configurations initiales "préférées"** [Vadali 89] : si l'on suppose que les manoeuvres à venir sont connues, le principe est de placer le système dans une configuration initiale favorable prédéfinie, avant que la manoeuvre ne se soit réalisée. H. Kurokawa a analysé cette méthode [Kurokawa 98] et en conclut qu'elle est efficace pour un pilotage exact et en temps réel tant qu'aucune singularité intraversable n'est rencontrée. Néanmoins, si le moment cinétique n'est pas à zéro, [Vadali 89] ne donne pas de méthode pour trouver la configuration favorable.
- **Méthode découlant de l'étude de la topologie du noyau** : en 2014, Yamada et al. dans [Yamada 14] ont proposé une nouvelle méthode de pilotage. Avec une analyse de la topologie du noyau de la matrice \mathbf{J} , ils prouvent l'intérêt d'utiliser le développement limité à l'ordre deux de l'équation cinématique (3.14) en discret pour le passage des singularités traversables. Mais plusieurs limitations existent :

- l'utilisation d'un algorithme QSL (Quadratic Steering Logic) empêche une résolution analytique et en ligne,
- la reconfiguration en cas de panne est difficile : dans cet article seul le cas à quatre AGs est traité. Utilisant une projection dans un sous-espace de dimension trois spécifique à cette configuration, la solution proposée n'est donc pas facilement généralisable à n AGs.

A noter aussi la présence de méthodes étudiant directement la topologie spécifique de la grappe contrôlée et ses singularités [Kojima 14] et [Kojima 13].

- **Manoeuvres de basculement rapide** : Dans les brevets déposés par Matra Marconi Space France [Defendini 03] et [Defendini 98], une technique pour réaliser des manoeuvres de basculement rapides est décrite. Il faut déterminer en amont une consigne en angles de précession telle que l'état final du système soit loin d'une configuration singulière. Une réorientation simultanée des angles, en boucle ouverte, est effectuée afin de les placer dans la configuration demandée en consigne, puis le suivi du profil en moment cinétique est réalisé. Une roue à réaction est aussi utilisée dans le brevet [Defendini 98]. Les singularités sont rencontrées seulement pendant la réorientation des angles de précession, à vitesse élevée et pendant une commande directe en angle de précession.
- **Ajout du terme dérivé** : ce terme ajouté par Oh et Vadali [Oh 91] et par Ford and Hall [Ford 00] tient compte de l'accélération des angles de précession en ne considérant pas seulement les équations cinématiques pour l'allocation, mais les équations dynamiques. Dans ces papiers (le deuxième s'inspire du premier), toute la dynamique liant le satellite et les AGs est retrouvée comme présenté en section 3.2.2.2. D'après H. Kurokawa [Kurokawa 07], cet ajout ne permet pas d'éviter efficacement les singularités, car les termes ajoutés ont peu de poids dans la commande. Cette méthode utilise la théorie de la stabilité de Lyapunov pour trouver une commande stabilisante. L'utilisation de ces fonctions est commun dans le contrôle d'attitude non-linéaire pour prouver des stabilités ou stabiliser. Dans l'étude de [Skeleton II 03] qui mixte des roues à réaction et des AGs, utilise la méthode de Lyapunov pour trouver une loi de commande, de la même manière que [Oh 91].
- **Logique hybride** : F.A. Leve et al., dans [Leve 10] utilisent une loi de pilotage hybride permettant d'éviter ou de traverser les singularités en fonction des cas.
- **Synthèse LPV** : Une synthèse LPV a été étudiée par J.-P. Chrétien et al. à l'ONERA [Chrétien 02]. L'avantage des techniques LPV sur les techniques LTI est qu'elles commandent le système sur l'ensemble des points de fonctionnement. Néanmoins cette étude n'inclut pas les singularités.
- **Commande floue** : Le seul papier référencé faisant usage de la commande floue pour le contrôles des AGs est [Zhang 01], qui l'utilise avec la mesure de déterminant, dans le cadre d'une commande avec gradient.
- **Allocation Dynamique** : [Zaccarian 09] propose une méthode d'allocation dynamique d'ordre 1 avec des matrices à régler, pour les systèmes sur-actionnés. Cette allocation permet de choisir plus facilement la dynamique de la loi de pilotage.

4.6 Résumé des différentes méthodes

L'analyse réalisée par [Jones 12] permet de résumer les avantages et inconvénients des différentes lois selon les critères habituellement définis dans la littérature (tableau 4.1).

Steering law	Singularity-avoidance method	Induced torque error	Gimbal saturation possible	Full momentum workspace used	Instantaneous	Generalized for all array configurations
Ideal steering law	Unknown	No	No	Yes	Yes	Yes
Moore–Penrose pseudoinverse	None	No	Yes	Yes	Yes	Yes
Singularity-robust inverse w/torque error	Inexact mapping of command to output torque	Large near singularity, small otherwise	Yes	Yes	Yes	Yes
Offline-planning	Path planning and/or optimization	No	No	Yes	No	Yes
Preferred gimbal angle	Initial gimbal angles keep array nonsingular for specific torque commands	No	Yes	No	Yes, if properly initialized	No
Gradient/null motion	CMG null motion in nonsingular direction	No	Yes	Yes, but has finite gimbal rates only if no impassable singularities present	Yes	No
Constrained	Operating in nonsingular gimbal-angle subspace	None within workspace, but limited workspace	Dependent on array configuration	Dependent on array configuration	Yes	No

Figure 4.1 – Comparaison des différentes lois de pilotage pour les actionneurs gyroscopiques issue de [Jones 12]

Des méthodes spécifiques au contrôle des bras robotiques spatiaux à base non fixe sont explicitées au chapitre 9.

Par rapport au cahier des charges présenté à la section 3.4, notre contrainte principale d'implémentation dans un satellite empêche le choix de certaines lois notamment basées sur l'optimisation et la planification. Stocker un grand nombre de données dans les satellites peut aussi poser problème dans les calculateurs. Les méthodes exactes respectent la contrainte d'implémentation, mais nécessitent la plupart du temps de limiter l'espace de travail afin d'évoluer dans des zones sans singularités intraversables. C'est donc en particulier un inconvénient de ces lois. Les méthodes basées sur la pseudo-inverse ne présentent pas ces caractéristiques mais peuvent créer des erreurs de couple afin de passer les singularités. De plus, elles nécessitent de régler des arbitraires. Aucune loi idéale par rapport au cahier des charges n'existe donc. Dans le prochain chapitre 5, des raisons de cette situation sont explicitées, à partir de cette analyse et de celle réalisée en section 6.2, une loi sera proposée.

Cette analyse permet de vérifier que la loi idéale proche de celle recherchée n'est pas atteinte. En fonction de l'importance de certains critères, des nouvelles lois ou des améliorations peuvent être proposées. Dans la suite du mémoire on se focalisera sur la conception d'une loi de pilotage adaptée à notre cahier des charges (plus détaillé dans le chapitre suivant en fonction de notre système). On souhaite en particulier une loi de pilotage embarquable dans un satellite, reconfigurable facilement en cas de panne et évitant les singularités.

Deuxième partie

Contributions

Chapitre 5

Choix d'une configuration de grappe d'actionneurs gyroscopiques adaptée aux nanosatellites et analyse des propriétés topologiques pour le pilotage

Sommaire

5.1	Choix d'une configuration de grappe d'AGs adaptée aux nanosatellites, robuste aux singularités et aux cas de panne	42
5.2	Analyse de la configuration de grappe choisie pour la conception de la loi de pilotage	58

Dans ce chapitre, l'analyse de différentes grappes d'AGs est réalisée en se basant sur les études pré-existantes dans la littérature ainsi que via le développement d'outils. Un choix de configuration adapté aux nanosatellites est alors déterminé et utilisé comme application dans le reste du mémoire. Pour ce choix, les critères importants sont la robustesse aux pannes et la simplicité de pilotage vis-à-vis des singularités, tout en limitant l'encombrement et la masse du système.

Une fois la configuration de grappe choisie, celle-ci est étudiée pour analyser ses caractéristiques, notamment en cas de panne, afin de proposer une loi de pilotage adaptée à ce système, et répondant au cahier des charges prédéfini. Différentes stratégies pour le passage des singularités sont alors étudiées et une nouvelle est développée. Ces études orientent le choix sur la loi de pilotage réalisé dans ce mémoire.

DANS ce chapitre, on supposera le moment cinétique des toupies normalisé $h_t = 1$ sans perte de généralité du propos. On posera aussi $\mathbf{h} = [h_x \ h_y \ h_z]$ exprimé dans le repère de la grappe.

5.1 Choix d'une configuration de grappe d'AGs adaptée aux nanosatellites, robuste aux singularités et aux cas de panne

L'application finale recherchée est le contrôle d'attitude de nanosatellites. Ainsi, une première étude consiste à analyser les différentes grappes d'actionneurs gyroscopiques et à déterminer une configuration adaptée à ces systèmes.

Les nanosatellites sont souvent réalisés à bas coût avec une fiabilité plus faible au niveau des composants embarqués, puisque leur durée de vie est relativement courte et les budgets de développement bas. Ainsi, une configuration de grappe résistante aux pannes¹ est recherchée puisque ce risque est élevé. La complexité algorithmique des lois de pilotage due à l'évitement nécessaire des singularités a déjà été évoquée. Avoir une configuration de grappe peu sujette aux singularités dans le cas nominal est privilégiée afin d'implanter une loi de pilotage embarquable, simple et ne limitant pas fortement les capacités intrinsèques du système. Néanmoins, il faudra que la loi se reconfigure facilement et gère les cas de pannes.

Au vu de la taille des nanosatellites, l'encombrement et la masse de la grappe doivent rester faisables. Néanmoins, l'application vise plutôt des nanosatellites d'environ 30kg. La présentation des différentes grappes existantes a été réalisée dans le chapitre 2.

Avant d'étudier les configurations de grappes, analysons plus en détails les singularités pour comprendre ce phénomène et mieux le caractériser, puis les variétés à motricité nulle issues de la redondance. Une fois ces outils développés, la comparaison pourra être effectuée.

5.1.1 Analyse des singularités

Une caractéristique primordiale des AGs est la présence de singularités. Mathématiquement, le couple créé par une grappe d'actionneurs gyroscopiques vaut (5.1).

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})\dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.1)$$

Lorsque le système est dans une singularité, alors il existe une direction \mathbf{s} telle que quel que soit $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, $\dot{\mathbf{h}}$ sera toujours perpendiculaire à \mathbf{s} et donc le système ne pourra pas créer de couple selon \mathbf{s} .

La compréhension de ces singularités est très importante pour pouvoir définir une loi de pilotage de grappe d'actionneurs gyroscopiques performante. Les premiers travaux sur les singularités ont été réalisés par G. Margulies et J. N. Aubrun [Margulies 78] et E. N. Tokar

1. On considère les cas de panne tels que les AGs sont arrêtés : $\Omega_t = \dot{\sigma}_i = 0$.

et V. N. Platonov [Tokar 79] qui ont montré l'intérêt d'augmenter le nombre d'actionneurs dans les grappes pyramidales. Par la suite d'autres études importantes ont été menées par H. Kurokawa [Kurokawa 97], M. Llibre [Llibre 09], N. Bedrossian et al. [Bedrossian 90] et B. Wie [Wie 04] permettant de mieux comprendre les problèmes liés aux singularités.

Quand une direction \mathbf{s} est singulière, aucun actionneur ne peut créer de couple selon cet axe. C'est le cas si, **pour chaque actionneur**, une des conditions suivantes est vérifiée :

1. \mathbf{s} est parallèle à \mathbf{z}_i , car un AG ne peut créer de couple selon son axe de précession, mais seulement dans le plan perpendiculaire à cet axe de précession ;
2. La projection de \mathbf{s} sur les plans $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ des AGs est confondue avec \mathbf{x}_i , car le couple créé par un AG est selon \mathbf{y}_i . C'est équivalent à dire que \mathbf{y}_i est aligné avec le produit vectoriel de \mathbf{z}_i et de \mathbf{s} .

Si \mathbf{s} est une direction singulière et que la première condition est vérifiée pour un AG numéro i , alors il y a une infinité de positions singulières correspondant à cette singularité, puisque n'importe quelle valeur de σ_i correspond. Cependant ce cas est limité aux \mathbf{s} parallèles à un axe de précession des AGs. Quand la seconde condition est vérifiée pour un actionneur i , alors \mathbf{y}_i pouvant être dans le même sens ou dans le sens opposé au produit vectoriel mentionné, il y a donc deux possibilités de positionnement pour chaque AG. Ainsi, dans les cas où tous les AGs vérifient la condition 2 **pour une direction \mathbf{s} donnée, il y a 2^n configurations singulières associées.**

On appelle **signature d'une configuration singulière** [Llibre 09] le vecteur ϵ , où chaque ϵ_i vaut 1 si \mathbf{y}_i est dans le même sens que le produit vectoriel de \mathbf{z}_i et \mathbf{s} et -1 sinon. Mathématiquement, cela revient à écrire l'équation (5.2) [Llibre 09].

$$\epsilon_i = \text{signe}(\mathbf{s}^T \mathbf{x}_i) \quad (5.2)$$

Pour une direction et une signature données \mathbf{s} et ϵ , la position en moment cinétique de la singularité correspondante sur l'AG numéro i (unique dans l'espace des σ tant que la condition 1 n'est vérifiée par aucun AG) se calcule en projetant le vecteur \mathbf{s} sur \mathbf{x}_i . En effet, c'est quand \mathbf{x}_i est aligné avec la projection de \mathbf{s} que la création de couple selon cet axe n'est pas possible, en suivant la condition 2. Or pour connaître la position de \mathbf{x}_i dans la grappe, on peut calculer σ_i correspondant à cette singularité et le déduire à partir de l'équation (3.11). Sans passer par cette étape, on peut utiliser le vecteur \mathbf{z}_i qui ne dépend pas de σ_i en faisant le produit vectoriel de \mathbf{z}_i et \mathbf{s} (normalisé) qui donnera la valeur de projection de \mathbf{s} mais orienté selon \mathbf{y}_i ou $-\mathbf{y}_i$ selon la signature ϵ_i . Il faut donc reprendre le produit vectoriel du résultat avec \mathbf{z}_i pour l'obtenir selon le vecteur \mathbf{x}_i ainsi calculé. La position en moment cinétique de grappe de la singularité étudiée donne donc l'équation (5.3) [Wie 04].

$$\mathbf{h}_{sing} = \sum_{i=1}^{n_{AG}} \frac{\epsilon_i (\mathbf{z}_i \wedge \mathbf{s}) \wedge \mathbf{z}_i}{\|\mathbf{z}_i \wedge \mathbf{s}\|} \quad (5.3)$$

avec \wedge le produit vectoriel. Lorsque $\mathbf{z}_i \wedge \mathbf{s} = \mathbf{0}$, donc lorsque la direction singulière cherchée est la direction d'un axe de précession (condition 1), ce calcul ne fonctionne pas. C'est donc un cas particulier à traiter.

Une première méthode pour étudier les singularités est de passer par l'étude des surfaces singulières en moment cinétique. En supposant une signature de configuration singulière ϵ fixée, on peut alors calculer la relation (5.3) pour toutes les directions \mathbf{s} de l'espace. Les surfaces obtenues sont continues de par l'expression de la relation (5.3), tant que le dénominateur n'est pas nul.

La singularité externe (ou saturation en moment cinétique) correspond à une signature ne comportant que des 1 ou que des -1 . Les autres signatures de grappe correspondent à des singularités internes. Avec cette technique, on peut représenter des singularités internes. Sur la figure 5.1, l'ensemble des singularités possédant la signature $\epsilon = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1]$ est représenté. Cette figure est générée à partir de la formule (5.3) en faisant une boucle sur les directions, maillées avec un angle de 2 degrés. Représenter les singularités permet de connaître les zones où la grappe peut rencontrer des difficultés pour créer du couple, du fait de la présence de ces singularités. Pour chaque signature, on obtient la plupart du temps une ou des surfaces de singularités dans l'espace des moments cinétiques. Le nombre de trous correspond à deux fois le nombre d'AGs dans la grappe en Fig. 5.1. En effet, cela est lié à la condition 1. Pour représenter toutes les singularités, il faut donc rajouter une boucle sur les signatures afin de toutes les prendre en compte.

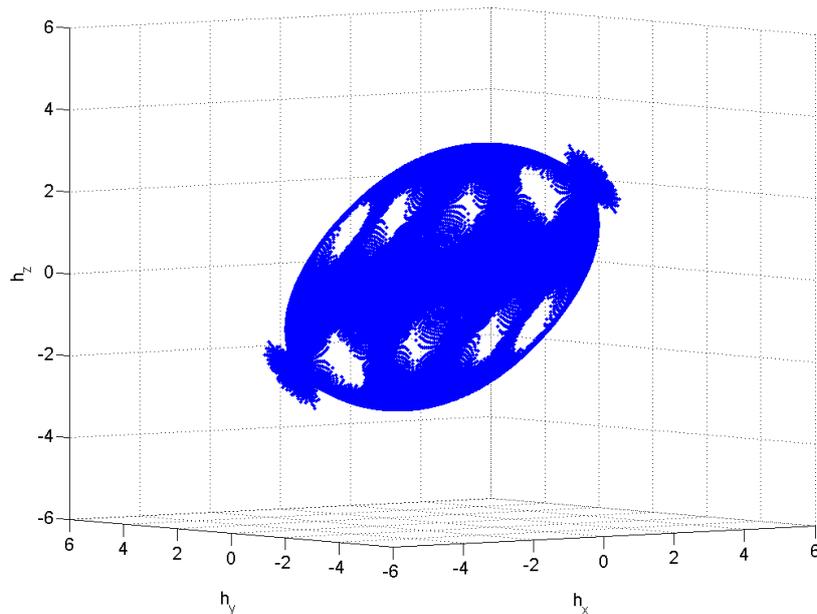


Figure 5.1 – Des singularités internes pour une grappe pyramidale de six AGs, d'angle de grappe $\beta = 54.7$ degrés

5.1.1.1 Capacités maximales en moment cinétique des grappes

Les grappes d'AGs constituent une réserve de moment cinétique qui peut être transmise au satellite via les couples gyroscopiques. Leurs capacités maximales en moment cinétique sont finies et correspondent en grande partie aux singularités externes, complétées par continuité

avec une portion de singularités internes. L'intérêt de les étudier est de pouvoir connaître les vitesses de rotation satellite maximales engendrées par une grappe. En effet, en supposant le moment cinétique total du satellite nul et sans perturbations extérieures, d'après l'équation (3.17), tout le moment cinétique grappe peut être transféré au satellite. Avec une inertie satellite constante, on peut en déduire une estimation des vitesses de rotation satellite maximales atteignables. Néanmoins, la capacité maximale d'accélération du satellite dépend non seulement du moment cinétique de chaque toupie mais aussi des vitesses de précession maximales $\dot{\sigma}_{max}$.

Dans le cas de la grappe à six AGs, avec un angle de grappe $\beta = 54^\circ$ (Fig. 5.2), on trouve un moment cinétique maximal de $\mathbf{h}_{singmax} = [0 \ 4.8541 \ 0]$ Nms (dans le repère de la grappe définie à la section 3.2). Cette figure a été obtenue en résolvant l'équation (5.3) en faisant un maillage de 2 degrés dans toutes les directions de l'espace, avec un boucle sur toutes les signatures. Néanmoins, seule la singularité la plus éloignée du moment cinétique nul dans chaque direction est représentée car représente la saturation. Les zones de moment cinétique maximal plus faible (zones en bleu) sur la figure 5.2 correspondent aux zones autour des axes de précession des AGs, ce qui est logique car un AG ne peut pas fournir de moment cinétique selon son axe de précession. Ainsi, avec cette figure, on peut déterminer les minima et maxima des capacités de la grappe en fonction de la direction de moment cinétique. Avec cet angle de grappe, les capacités en moment cinétique selon les axes h_x , h_y et h_z sont identiques, on dira que cette configuration est **isotrope**.

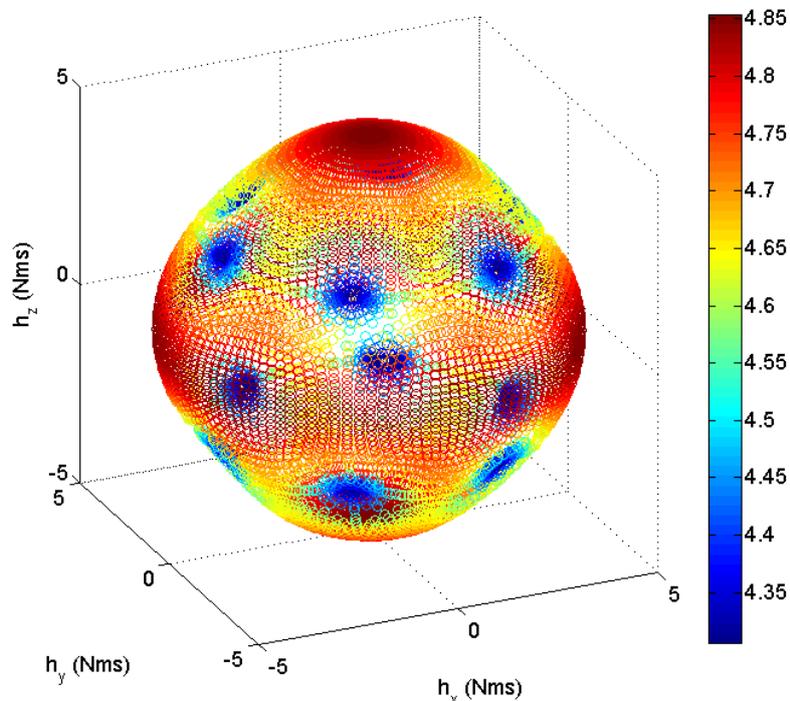


Figure 5.2 – Capacités maximales en moment cinétique pour une grappe pyramidale de six AGs . Les couleurs correspondent à la norme de moment cinétique maximal dans la direction représentée.

Supposons maintenant que l'actionneur numéro 2 soit en panne, la boule de moment cinétique maximale devient la figure (5.3) et anisotrope. Ainsi on peut estimer les pertes de capacité maximale en cas de panne. En fonction des inerties du satellite et de la mission, il peut

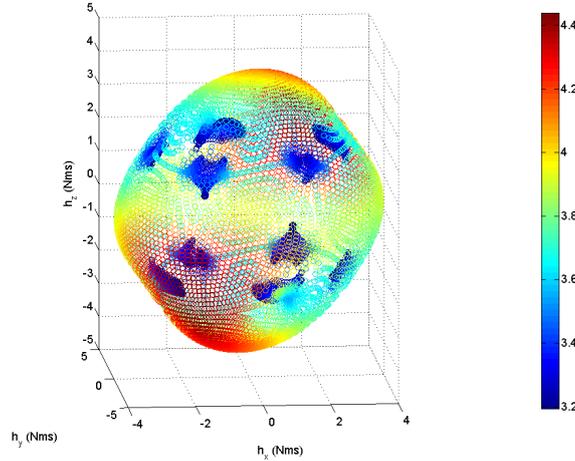


Figure 5.3 – Capacités maximales en moment cinétique pour une grappe pyramidale de six AGs avec panne AG 2. Les couleurs correspondent à la norme de moment cinétique maximal dans la direction représentée.

donc être plus ou moins intéressant de choisir un angle de grappe qui propose des capacités en moment cinétique différentes en fonction des axes satellite. Une étude des capacités de grappe en fonction de l'angle β peut alors être menée. Par exemple, l'évolution des capacités maximales selon les axes \mathbf{x}_s , \mathbf{y}_s et \mathbf{z}_s est donnée sur le graphe 5.4 pour une grappe pyramidale de six AGs en fonction de l'angle de grappe. Les variations (minimales et maximales) de capacité en moment cinétique sont aussi représentées. Ici, les capacités maximales H_{\max} sont confondues avec un des axes \mathbf{x}_s , \mathbf{y}_s ou \mathbf{z}_s de la grappe (en fonction de l'angle), et on retrouve qu'à un angle $\beta = 54.7^\circ$, la grappe a des capacités identiques selon h_x , h_y ou h_z . H_{\min} en Fig. 5.4 correspond à la distance minimale entre le centre de l'enveloppe de la grappe et sa surface externe.

5.1.1.2 Détermination de la traversabilité des singularités

La formule (5.3) ne donne pas les valeurs des angles σ correspondants aux singularités trouvées, or cette information est importante pour la détermination de la traversabilité des singularités. Une méthode pour obtenir cette information est exposée par exemple par B. Wie [Wie 04] et consiste à utiliser la formule de Binet-Cauchy à partir du calcul du déterminant de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ qui est nul en cas de singularité. Un nombre important d'équations dépendantes sont alors déduites par le calcul de chaque mineur de la matrice \mathbf{J} , plus de détails peuvent être trouvés dans l'article [Wie 04].

Une autre méthode calcule le produit scalaire entre le vecteur \mathbf{s} et $\mathbf{J}(\sigma)$, qui est nul dans le cas d'une direction singulière. Cette méthode est la plus simple pour déterminer les positions σ singulières et c'est celle qui a été utilisée dans cette thèse.

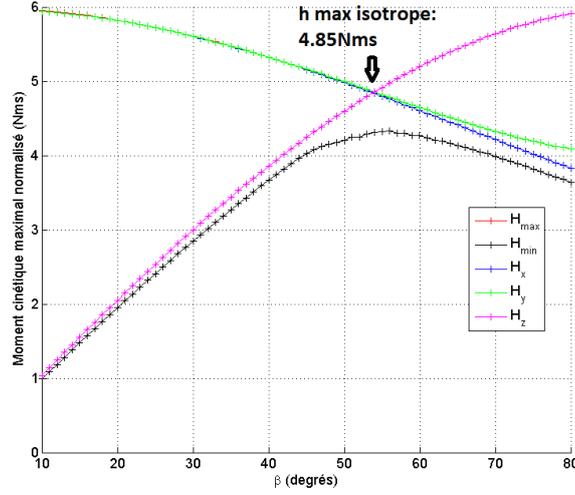


Figure 5.4 – Capacités maximales en moment cinétique pour une grappe pyramidale de six AGs en fonction de l'angle de grappe

Il est important de connaître la traversabilité des singularités. En effet, **si elles sont traversables, alors utiliser le noyau de la matrice \mathbf{J} va permettre de les passer. Si elles sont intraversables, alors il faudra soit faire marche arrière en moment cinétique, soit créer une erreur de couple afin de traverser cette singularité** selon une direction passable (voir le concept de traversabilité directionnelle de [Yamada 14] qui définit la possibilité de traverser la singularité selon une direction autre que la direction singulière, permettant donc de créer du mouvement mais avec une erreur par rapport au couple demandé à la grappe). A noter cependant que certaines trajectoires à motricité nulle, donc pour des singularités passables, ne permettent pas d'augmenter le rang de la matrice \mathbf{J} , ces solutions sont appelées **dégénérées**. Ainsi, utiliser les trajectoires à motricité nulle ne garantit pas le passage des singularités [Bedrossian 90] puisqu'il est possible de "glisser" sur ces surfaces singulières.

Bien que les développements mathématiques diffèrent en fonction des sources [Yamada 14], [Wie 04], [Llibre 09], l'étude de la traversabilité provient de la théorie des surfaces de la géométrie différentielle. Si l'on part du travail de M. Llibre [Llibre 09], alors, après des développements mathématiques non repris ici, on obtient les conditions pour qu'une singularité soit traversable. On pose déjà π_q et π_s (5.4).

$$\pi_q = \prod_{i=1}^{n_{AG}} \mathbf{s}^T \mathbf{x}_i = \prod_{i=1}^{n_{AG}} q_i \quad (5.4)$$

$$\pi_s = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{q_i} \frac{1}{q_j} \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}_j\|^2 \quad (5.5)$$

La surface singulière est traversable si et seulement si $\text{signe}(\pi_q/\pi_s) < 0$.

Ainsi, on peut déterminer la traversabilité des singularités, une fois les valeurs σ connues ou les matrices \mathbf{X} et \mathbf{J} , pour un \mathbf{s} donné. Ces formules sont classiques dans l'étude des singularités des AGs. Les singularités externes et l'utilité de leur étude ont déjà été évoquées, on va donc se concentrer sur l'étude et le passage des singularités internes.

Représentons les singularités selon la direction $\mathbf{s} = [1 \ 0 \ 0]$ (Fig. 5.5) pour une grappe pyramidale de quatre AGs d'angle 50° . Toutes ces singularités ont la particularité d'avoir $h_y = 0$.

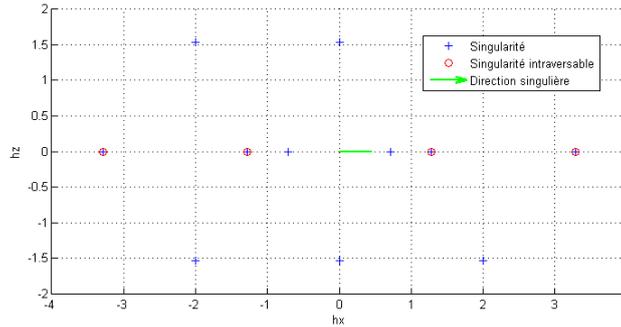


Figure 5.5 – Singularités selon h_x pour une grappe pyramidale de 4 AGs

On remarque selon h_x qu'en dehors des singularités externes situées à $h_1 = [+3.1756 \ 0 \ 0]$ et $h_2 = [-3.1756 \ 0 \ 0]$, les seules singularités intraversables dans cette direction sont les deux singularités dans le "trajet" linéaire de $h_x = 0$ à $h_x = h_{max}$. Les singularités pour $\mathbf{s} = [1 \ 0 \ 0]$ sont dans le plan (h_x, h_z) . Il est à noter que les deux extrémités sont des singularités intraversables pour la direction $\mathbf{s} = [1 \ 0 \ 0]$. Autant cela est logique pour la singularité en $h_1 = +3.1756$ Nms, autant pour la singularité $h_2 = -3.1756$ Nms, cela provient de la définition de la traversabilité : comme le moment cinétique de la grappe ne peut être supérieur à l'enveloppe extérieure, il n'est pas possible de "traverser" la singularité dans le sens $\mathbf{s} = [1 \ 0 \ 0]$, et de plus en utilisant la TMN (Trajectoire à Motricité Nulle) car elle est réduite à un point. Cependant, la singularité est bien directionnellement traversable [Yamada 14] selon $[1 \ 0 \ 0]$. Ainsi, dans cette étude, les singularités externes sont toujours représentées comme intraversables.

En couplant avec l'outil des Variétés à Motricité Nulles (expliqué section suivante), on peut visuellement retrouver ces singularités et expliquer géométriquement le principe de traversabilité. Par exemple, prenons la singularité dans la direction $\mathbf{s} = [1 \ 0 \ 0]$ traversable, située en $\mathbf{h} = [0.7144 \ 0 \ 0]$ Nms (voir Fig. 5.5). On peut représenter visuellement cette singularité en zoomant sur la zone dans l'espace des σ où se trouve cette singularité (voir Fig. 5.6). Sur cette figure, la singularité est représentée par un rond rouge. Si le système possède les angles de précession correspondant à cette singularité, alors on remarque qu'il peut monter en moment cinétique h_x s'il change d'abord de manière continue ces angles à moment cinétique constant. Cela revient à utiliser le noyau de la matrice \mathbf{J} , et donc à se reconfigurer à moment cinétique constant, sans créer de couple non désiré. On retrouve mathématiquement un point col. Prenons maintenant une singularité intraversable interne calculée et représentée Fig. 5.7,

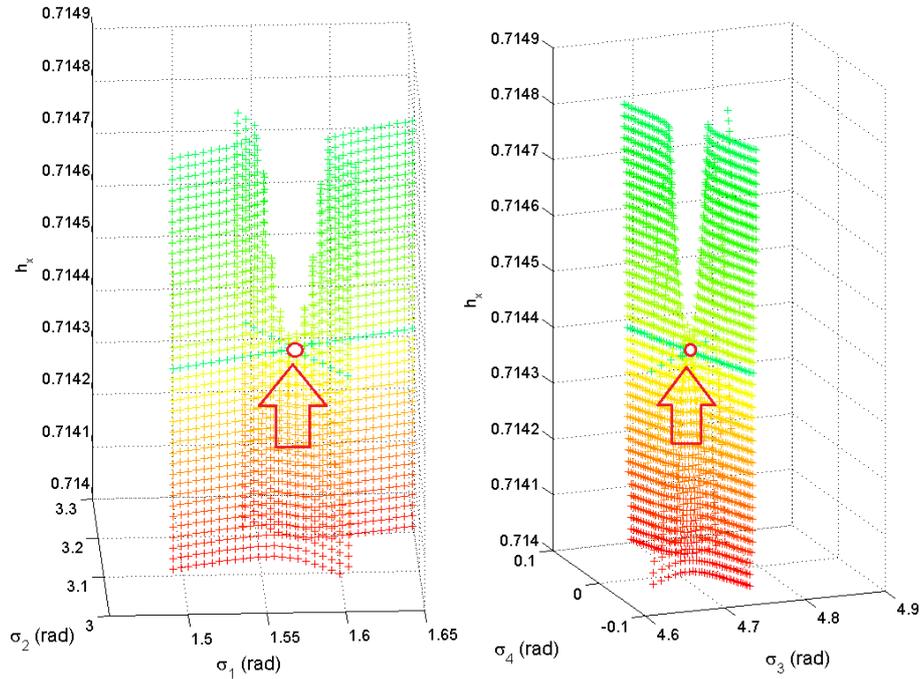


Figure 5.6 – VMNs et singularité traversable pendant la montée en h_x , avec $h_y = h_z = 0$ pour une grappe pyramidale à quatre AGs d'angle 50°

située en $\mathbf{h} = [1.2856 \ 0 \ 0]$ Nms. Sur la Fig. 5.7, on remarque bien qu'il est impossible d'augmenter h_x à partir du point singulier. Si la grappe a pris une trajectoire qui l'amène à ce point singulier, alors travailler dans le noyau ne va pas permettre de réaliser un couple selon \mathbf{x} car aucune solution en $\boldsymbol{\sigma}$ n'existe comme visible dans la Fig. 5.7. Pour monter en moment cinétique dans la direction désirée, ici h_x , il faut donc soit repartir en arrière au moment où les variétés se divisent (souvent à partir d'un point singulier col donc traversable) soit passer aux autres trajectoires au même moment cinétique proches qui elles permettent de monter en moment cinétique. Cependant, comme ce passage ne se fait pas via des points représentés sur la figure (donc des points situés dans les VMNs), alors cela signifie qu'il faut passer par des moments cinétiques non désirés, donc créer des couples parasites. Ceci explique les difficultés du pilotage de la grappe en temps réel, puisque déterminer ces trajectoires optimales en temps réel sans prédiction sur la rencontre de singularités devient complexe.

Ainsi, les singularités hyperboliques ou traversables peuvent être passées en utilisant la redondance alors qu'une fois le système dans une singularité intraversable, cela n'est plus possible. Avant de passer à l'analyse des grappes vis-à-vis des singularités, étudions la redondance via les variétés à motricité nulle.

Cette section a donc permis de présenter les outils pour calculer et caractériser les singularités. En plus de la détermination des **capacités maximales des grappes**, leur représentation amène à **comprendre les stratégies de pilotage, et à en développer**.

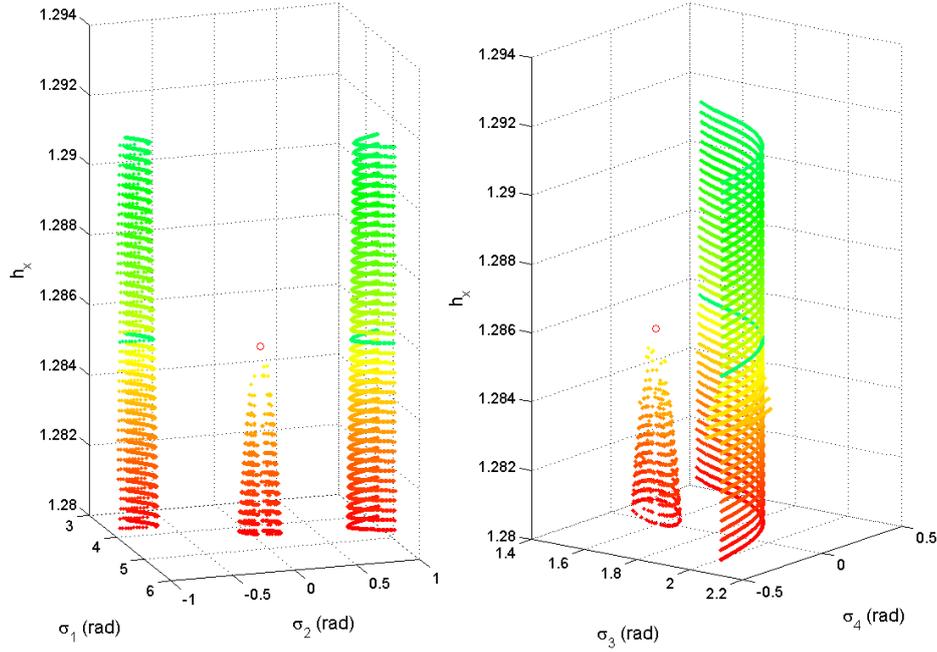


Figure 5.7 – VMNs et singularité intraversable pendant la montée en h_x , avec $h_y = h_z = 0$ pour une grappe pyramidale à quatre AGs d'angle 50°

5.1.2 Analyse des variétés à motricité nulle

Reprenons les équations (3.13) et (3.14) :

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})\dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.7)$$

Afin de trouver $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ tel que $\dot{\mathbf{h}}$ soit égal au couple désiré, il faut donc résoudre cette dernière équation, sachant que $\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})$ est de taille $3 \times n_{AG}$ avec n_{AG} le nombre d'AGs. Dans le cas pyramidal à six AGs, la matrice \mathbf{J} possède un espace noyau (dans l'espace des $\boldsymbol{\sigma}$) de dimension 3, ou 4 si \mathbf{J} est de rang deux (dans une singularité). Dans les grappes pyramidales d'angle β non nul, le rang minimum de \mathbf{J} est de deux lorsqu'il y a au moins quatre actionneurs. En effet, supposons par l'absurde que le rang minimal de \mathbf{J} puisse être de 1. Alors, cela signifie qu'il existe deux vecteurs non nuls et non colinéaires \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 , et une position $\boldsymbol{\sigma}_s$ tels que :

$$\mathbf{s}_1^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}_s) = \mathbf{s}_2^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}_s) = \mathbf{0}$$

Alors, \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 sont perpendiculaires à chaque \mathbf{y}_i , et ces deux vecteurs sont alors situés dans l'intersection des plans $(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)$, $\forall i$. Puisque tous les \mathbf{z}_i ne sont pas dans le même plan (si β est non nul), alors cette intersection est une droite, donc \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 sont alignés, donc colinéaires

et il y a une contradiction. \mathbf{J} peut donc être de rang 1 dans le cas où tous les AGs sont dans le même plan, donc potentiellement dans les grappes de type roof-type ou multiples mais pas dans les grappes pyramidales.

Grâce à la redondance des actionneurs, il est possible de faire varier les σ dans l'espace noyau tel que la grappe reste à moment cinétique constant. On appelle **variétés à motricité nulle (ou VMNs)** l'ensemble des σ donnant un même moment cinétique \mathbf{h} donné. Pour $n_{AG} = 4$, ces VMNs sont un ensemble de courbes de dimension 1, donc appelées TMNs (Trajectoires à Motricité Nulle). Pour $n_{AG} = 5$, ce sont des ensembles de dimension 2 et pour $n_{AG} = 6$, c'est une union d'ensembles de dimension 3. Une commande en $\dot{\sigma}$ dans le noyau de \mathbf{J} permet de déplacer le système sur ces VMNs. Néanmoins en pratique, le calcul du noyau est local, et donne la tangente aux VMNs en un point σ . Si les VMNs sont fortement courbes et le $\dot{\sigma}$ trop grand, alors le système peut sortir de ces VMNs et donc créer du couple. Ainsi, lors de simulations en discret, les singularités peuvent être évitées juste à cause de la discrétisation de la commande qui crée des erreurs, que ce soit sur le suivi des VMNs ou sur une commande de type Moore-Penrose (donc sur les trajectoires à motricité effective). Dans des simulations en continu, avec une modélisation du système sans bruit ni frottement, les simulations tombent dans les singularités puisqu'elles suivent exactement les topologies des surfaces.

Certaines VMNs sont droites et donc le guidage dans le noyau devient parfait, ces cas particuliers sont limités mais toutefois intéressants car ne créant pas d'erreur si le guidage discret y est réalisé. De plus, dans certaines trajectoires en σ , le noyau reste constant, c'est le cas en particulier des **trajectoires cycliques stables** pour la commande de Moore-Penrose qui peuvent donc simplifier le guidage. Une étude est proposée en section 5.2.1.2.

L'étude de la topologie des VMNs offre plusieurs intérêts et possibilités :

1. **Connaître les positions initiales (moment cinétique de grappe nul) et choisir des positions propices aux manœuvres à effectuer** si celles-ci sont connues ou simplement pour trouver des positions initiales en cas de panne ;
2. A fortiori de **connaître les positions d'actionneurs permettant de fournir un moment cinétique donné** puis utiliser des structures spécifiques des VMNs pour le guidage ;
3. **Aider au passage des singularités d'un point de vue géométrique.**

Un outil a été développé dans la thèse permettant de calculer toutes les positions σ fournissant un \mathbf{h} donné, pour des grappes pyramidales régulières de quatre à six AGs, incluant les cas d'une ou de deux pannes pour les grappes à six AGs, quel que soit l'angle de grappe β . Cette procédure a été développée indépendamment de d'autres articles traitant du même problème, par exemple [Yamada 16] qui utilise un algorithme probablement analogue basé sur la résolution d'une équation algébrique de degré huit. Cet outil des VMNs développé dans la thèse se base sur l'équation (5.6). Pour un \mathbf{h} donné, dans le cas pyramidal, il y a 3 équations et n_{AG} inconnues. En posant $n_{AG} - 3$ variables, et après des calculs, on obtient une équation polynomiale de degré 8, avec comme variable le sinus d'un σ_i . Numériquement les solutions sont calculées, mais toutes ne sont pas valides car elles doivent être comprises entre -1 et 1 et l'affectation systématique des autres variables (en sinus et cosinus) doit aussi donner des

solutions faisables. Au plus, seize solutions sont donc calculées.

Ainsi, pour une grappe pyramidale de quatre AGs, il y a donc au maximum $16 \times [0 : 2\pi]$ solutions pour un \mathbf{h} donné alors que pour une grappe à six, le nombre de solution maximal devient $16 \times [0 : 2\pi]^3$.

Passons maintenant à la comparaison des configurations de grappe d'AGs, notamment grâce à ces outils.

5.1.3 Analyse de l'impact des configurations de grappe sur la présence de singularités

Cette étude est en partie résumée dans l'article [Evain 17d]. Afin de pouvoir passer les singularités, une redondance est nécessaire donc au moins quatre AGs sont considérées dans les grappes. Pour discriminer entre les configurations, basons-nous sur le travail de H. Kurokawa dans [Kurokawa 97] qui compare les capacités de grappe en fonction de leur configuration et de leur nombre d'unités n_{AG} . Cette comparaison est résumée dans la Fig.5.8 où certaines précisions sont données ici :

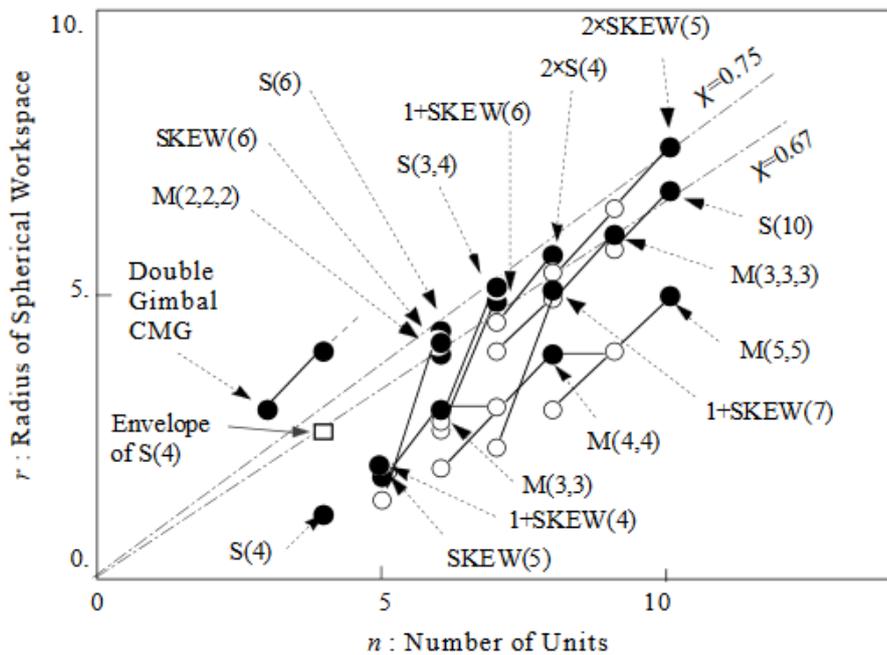


Figure 5.8 – Comparaison des capacités réelles des grappes, réalisée par H. Kurokawa dans [Kurokawa 97] (image tirée de ce document)

- " $S(n_{AG})$ " : grappe pyramidale régulière de n_{AG} unités sur un polyèdre régulier (appelé ici isotropique).
- "Skew" : grappe pyramidale avec angle à la base variable.
- "1+Skew" : grappe pyramidale avec angle à la base variable avec ajout d'un AG sur

- l'axe de symétrie de la pyramide.
- "2*Skew" : correspond à deux grappes assemblées.
- Pour les grappes asymétriques, la solution avec les meilleures performances a été choisie par H. Kurokawa dans ce graphique.
- " $M(n_{AG}, n_{AG}, n_{AG})$ " correspond aux systèmes multiples avec n_{AG} dans chaque plan. Les axes de précession sont orthogonaux entre chaque plan. Par exemple, $M(2, 2)$ correspond à une grappe avec deux AGs sur un plan et deux AGs sur un plan orthogonal.
- r : Rayon maximal d'une sphère centrée sur l'origine (en moment cinétique) ne comprenant aucune singularité intraversable.
- $\chi = r/n_{AG}$
- Les ronds noirs remplis correspondent aux systèmes indiqués alors que les ronds blancs indiquent des performances en cas d'une panne dans le système en rond noir relié.
- Une loi de pilotage de type méthode du gradient a été utilisée pour analyser ces systèmes.
- Dans ce graphe, $h_t = 1$.

Cette comparaison présente des limites car elle est réalisée avec une seule loi de pilotage, de type méthode du gradient donc cela permet d'étudier l'arrivée sur des singularités intraverables. Néanmoins, cela permet de donner une idée des capacités facilement accessibles pour les grappes.

Prenons par exemple le point S(6) qui correspond à une grappe pyramidale à six AGs. Le rayon de la sphère de moment cinétique sans rencontre de singularité intraversable vaut $r = 4.8$ d'après la figure 5.8, et donc on peut en déduire le $\chi = r/n_{AG}$. Cette valeur permet de connaître le rapport entre l'enveloppe en moment cinétique et le nombre d'AGs, et de comparer entre différentes géométries de grappe.

Dans ce graphe 5.8, les AGs double cardan donnent de larges espaces de travail sans singularités car ils y sont peu sujets. Cependant, comme mentionné dans [Kurokawa 97], leurs capacités de couple peuvent être d'un facteur 10 plus faibles que pour les simple cardan à cause de la reprise du couple entre les axes, donc cette solution est écartée.

H. Kurokawa dans [Kurokawa 97] a aussi montré que les systèmes multiples M(3, 3) et M(2, 2, 2) possèdent le nombre minimal d'unités permettant de ne pas avoir de singularités internes intraverables. Chaque grappe possède donc six unités. On remarque cependant que les performances sont plus faibles que par exemple la grappe pyramidale S(6), en particulier pour le système M(3,3). La configuration M(2, 2, 2) donne des résultats proches mais la perte d'une unité fait fortement chuter ses capacités. De plus, ces configurations sont brevetées ([Defendini 98] et [Defendini 03]).

C'est pourquoi les configurations pyramidales sont privilégiées pour l'application visée.

On remarque qu'entre l'enveloppe à quatre AGs S(4) déterminé à $3.2h_t$ et les résultats proposés pour ce système dans le graphe 5.8 où $r = 1.2h_t$, il y a une différence, alors que pour le système isotrope S(6), les capacités sont très proches de celles calculées dans le graphique 5.4 à $4.8h_t$. Une raison de cette différence s'explique suite à l'étude des sections 5.1.2 et 5.1.1. Le nombre de surfaces singulières dans une grappe pyramidale régulière est de $2^{n_{AG}-1}$, soit

8 surfaces dans le cas à quatre AGs et 32 dans le cas à six. Or, pour chaque \mathbf{h} donné, le nombre de solutions passe de $16 \times [0 : 2\pi]$ au maximum pour quatre AGs à $16 \times [0 : 2\pi]^3$ à six AGs, ainsi la probabilité de tomber dans une singularité et de plus intraversable est beaucoup plus faible à six AGs qu'à quatre. Près de l'enveloppe externe, le nombre de solutions est beaucoup plus faible que $16 \times [0 : 2\pi]^3$ et les singularités sont plus facilement rencontrées. Pour vérifier le résultat de H. Kurokawa, réalisons des simulations pour les grappes pyramidales isotropes à quatre et six AGs. En partant d'une position initiale $\sigma_i = 0$, des manœuvres à direction constante dans un quart ou un sixième de l'espace maillé en moment cinétique sont demandées, en boucle ouverte, avec la loi de pilotage de Moore-Penrose en continu, sans bruit ni frottement. Les Fig. 5.9 et 5.10 montrent les résultats obtenus.

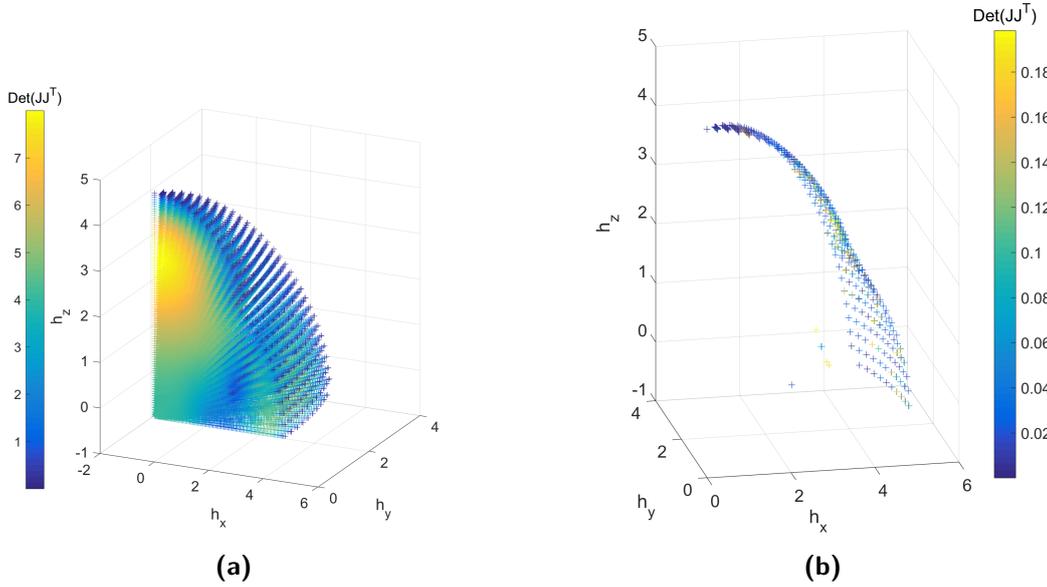


Figure 5.9 – (a) Moments cinétiques normalisés par rapport à h_t obtenus par des simulations avec la commande de Moore-Penrose pour la grappe pyramidale à six AGs. (b) Sélection des points avec un déterminant inférieur à 0.2.

Pour la grappe à six AGs, on remarque des diminutions de déterminant de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ donc des pertes d'efficacité à certaines valeurs de moment cinétique de la grappe. Néanmoins, la grappe parvient à l'enveloppe externe dans toutes les directions. Dans le cas de la grappe à quatre AGs, selon h_x notamment, la grappe rencontre une singularité (déterminant nul) qu'elle n'arrive pas à passer vers $h_x = 1.2$. En reprenant le graphique 5.5, on remarque que c'est une singularité intraversable. Or, dans le graphique 5.8, on retrouve cette même valeur de moment cinétique maximal de 1.2. Ces simulations ont été réalisées avec une position initiale donnée, mais on retrouve bien le résultat de H. Kurokawa, qui explique cette différence entre l'enveloppe sans singularités intraversables et l'enveloppe externe avec ce type de manœuvre.

Dans cette étude un espace de travail sphérique est supposé recherché. La même étude pourra être effectuée avec un espace elliptique dans le cas où des capacités différentes selon les axes satellite sont exigés, mais les principales caractéristiques resteront identiques. Les grappes avec angle à la base variables seront donc privilégiées car elles sont plus flexibles (voir les courbes 5.4).

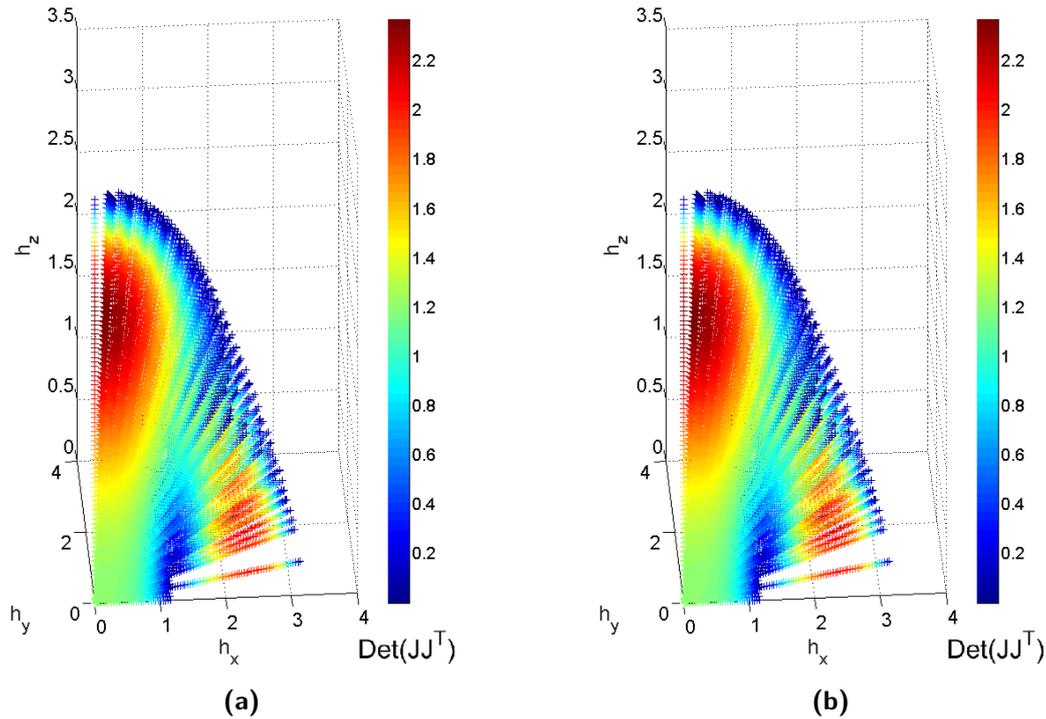


Figure 5.10 – (a) Moments cinétiques normalisés obtenus par des simulations avec la commande de Moore-Penrose pour la grappe pyramidale à quatre AGs dans un quart de l'espace en moment cinétique. (b) Sélection des points avec un déterminant de \mathbf{JJ}^T inférieur à 0.2.

On remarque donc que les grappes pyramidales, en-dessous de six AGs, sont complexes à piloter puisqu'une loi de pilotage simple ne permet pas d'atteindre l'enveloppe externe dans toutes les directions. A partir de six AGs, l'ensemble du moment cinétique est plus facilement accessible, c'est pourquoi sur cette première étude, les grappes pyramidales à six AGs sont plus intéressantes d'un point de vue pilotage.

Pour la suite de la comparaison, on gardera les grappes pyramidales d'au moins quatre unités.

5.1.4 Analyse de l'impact du nombre d'AGs dans une grappe pyramidale sur l'enveloppe en moment cinétique et la masse embarquée

Comme montré dans la section 5.1.1 et par exemple la figure 5.2, même dans la configuration isotropique, les capacités maximales des grappes varient selon les directions. Il y a donc des minima et des maxima pour ces enveloppes en moment cinétique. Pour les grappes pyramidales de quatre à dix AGs, régulières et d'angle de grappe 54.7° , les minima et maxima des enveloppes ont été calculées et sont représentés Fig. 5.11. On remarque sur ce graphe que l'augmentation de la capacité est linéaire d'un facteur égale à 1. Ainsi, l'augmentation du moment cinétique est directement proportionnel au nombre d'AGs. H. Kurokawa [Kurokawa 97] approxime la masse des grappes pyramidales proportionnellement au nombre d'AGs nécessaires

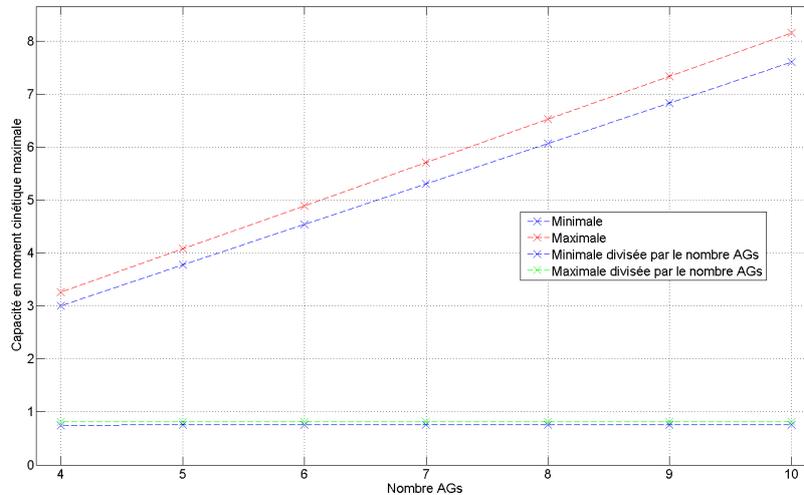


Figure 5.11 – Comparaison des capacités maximales des grappes

pour avoir une enveloppe en moment cinétique constante à $n_{AGs}^{2/5}$. Ainsi, pour une enveloppe en moment cinétique donné, il vaut mieux minimiser le nombre d'AGs. Néanmoins, à moins de six AGs on a vu que les espaces de travail sans singularités intraversables et l'enveloppe en moment cinétique ne sont pas identiques, c'est pourquoi H. Kurokawa dans [Kurokawa 97] étudie aussi la masse en fonction de cet espace de travail diminué. Il obtient une formule simplifiée : $r^3 W^5 / n_{AGs}^5 = \text{constant}$ et la Fig. 5.12. La grappe à six AGs est donc la plus légère relativement aux autres grappes pyramidales avec cette analyse, car elle se situe sur la première courbe.

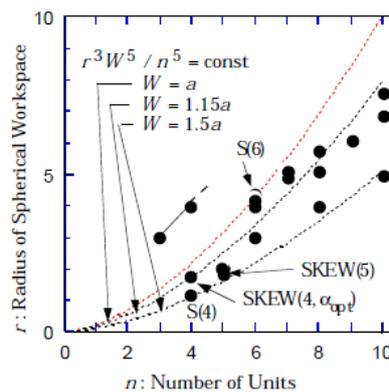


Figure 5.12 – Comparaison du poids par rapport au nombre d'unités et la taille de l'espace sans singularités, réalisée par H. Kurokawa dans [Kurokawa 97]. Image tirée de ce papier.

C'est pourquoi cette grappe pyramidale à six AGs est pour l'instant privilégiée, mais un dernier point important à évaluer est l'impact de pannes sur les capacités des grappes.

5.1.5 Analyse de l'impact de pannes sur les enveloppes en moment cinétique

Comparons les enveloppes en moment cinétique pour des cas de pannes de grappes pyramidales de quatre à six AGs en prenant encore une fois les configurations isotropiques. Dans la figure 5.13, les grappes pyramidales à quatre, cinq et six AGs sont étudiées avec leurs cas de panne, jusqu'à ce qu'il ne reste que trois AGs dans la grappe. Comme les cas de pannes multiples donnent des résultats différents en fonction des AGs en panne, tous les résultats ont été calculés et sont donnés sur ce graphe (d'où les intervalles de performance). Estimons plus précisément les résultats d'une perte d'AGs dans ces différentes grappes (Fig. 5.14). On remarque que la perte d'un AG dans la grappe à six impacte le moins les performances du système. En effet, si on suppose que les trois grappes fournissent au total le même moment cinétique maximal, alors perdre un AG dans la grappe à six fait perdre moins d'enveloppe en moment cinétique. C'est logique puisque dans le cas à quatre AGs, la grappe devient plus anisotropique.

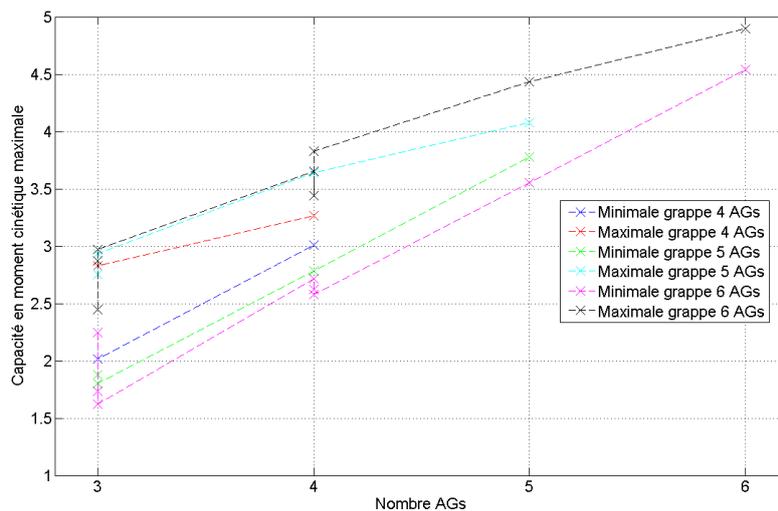


Figure 5.13 – Comparaison des performances avec ou sans cas de pannes pour les grappes à 4, 5 et 6 AGs.

On remarque que la perte d'un AG dans la grappe à six a un impact moins important sur les capacités maximales et minimales ainsi cette configuration est plus robuste aux pannes. De plus, même dans les cas où la grappe à six AGs possèdent deux ou trois pannes, en fonction des cas, l'efficacité n'est pas toujours plus faible que dans le cas de grappes à quatre AGs.

5.1.6 Choix de grappe

Suite à cette analyse, la grappe pyramidale régulière à six unités, avec un angle à la base variable afin de s'adapter à des espaces de travail elliptiques, est donc

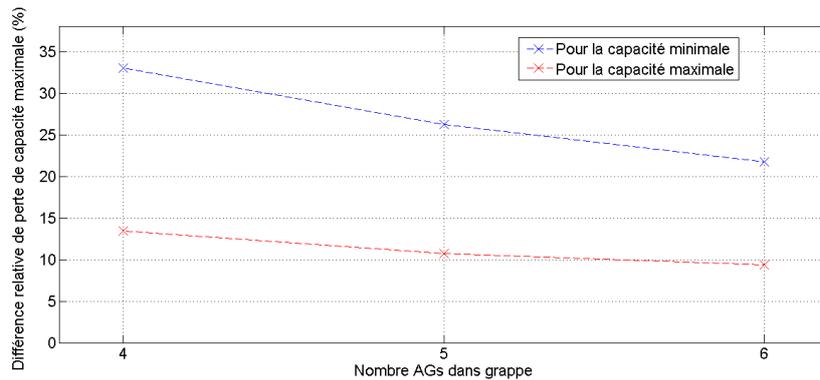


Figure 5.14 – Perte relative des maxima et minima de l'enveloppe en moment cinétique lors d'une panne pour les grappes à 4, 5 et 6 AGs.

choisie. Par rapport à des configurations multiples, elle est plus robuste aux pannes. Elle permet aussi d'utiliser quasiment toutes les capacités de la grappe sans rencontrer de singularités intraversables en nominal donc la loi de pilotage en est simplifiée. Avoir plus d'AGs dans une grappe pyramidale permettraient d'assurer la simplicité de la loi même en cas de panne mais l'augmentation du poids du système ne rend pas ce choix évident. Par rapport à des grappes pyramidales avec moins d'AGs, cette grappe est plus robuste à des pannes et semble être un bon choix en terme de rapport masse/capacités sans rencontre de singularités. L'encombrement reste certes a priori plus important que pour une grappe pyramidale à quatre AGs mais les autres critères privilégient le choix de la grappe à six AGs. Elle mérite donc d'être étudiée plus en détails car en outre peu de travaux sont présents dans la littérature. Afin d'obtenir une loi de pilotage calculable au bord des satellites, adaptée à cette grappe et à ses cas de panne, les caractéristiques de la grappe sont maintenant regardées plus précisément.

5.2 Analyse de la configuration de grappe choisie pour la conception de la loi de pilotage

Commençons par étudier le cas de la grappe à six AGs pyramidale sans cas de panne décrite dans la section 3.2.

5.2.1 Analyse de la grappe à six AGs sans cas de panne

5.2.1.1 Analyse des singularités de la grappe à six AGs sans cas de panne

Comme expliqué dans la section précédente, la rencontre de singularités internes intraversables est peu probable. Ainsi, en partant de la position initiale $\sigma_i = 0$ et en simulant des manœuvres dans l'espace de travail, a priori même avec la loi de Moore-Penrose, quasiment tout l'espace en moment cinétique est accessible (Fig. 5.9) ce qui facilite le pilotage. Néanmoins, des singularités existent, et il faut donc s'assurer que la loi ne peut y rester bloquée.

En effet, des manœuvres autres que linéaires, commençant dans d'autres positions initiales peuvent être réalisées et amenant à différentes positions de précession. Ainsi, il faut que la loi de pilotage soit robuste à la rencontre de singularités. Cette condition est cependant simplifiée par la forte redondance de cette grappe, qui possède des VMNs de dimension jusque trois, pour éviter ces configurations singulières. **Une méthode d'évitement de ces singularités doit donc être implémentée dans la loi de pilotage.** Comme vu dans la section 5.1.2, il est possible de piloter la grappe avec le degré de redondance en utilisant le noyau de $\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})$ pour passer ces singularités.

Eviter les saturations est aussi important pour un guidage sans erreur de la grappe. En effet, lors de perte de capacité ou de couple en entrée irréalisable, la grappe risque de saturer. Ces deux origines de saturation doivent donc être prises en compte.

Lorsqu'il n'y a pas de singularité, on souhaite que la grappe parvienne à destination en minimisant l'énergie dépensée, donc minimiser la distance en $\boldsymbol{\sigma}$. Cela revient à une commande s'approchant de celle de Moore-Penrose.

Dans la grappe pyramidale à quatre AGs, des trajectoires particulières ont été mises à jour par M. Llibre [Llibre 09] et utilisées par H. Kurokawa [Kurokawa 98] pour développer sa loi de pilotage contrainte. Ces trajectoires sont appelées cycliques stables et ont été investiguées dans la thèse pour la grappe à six AGs afin de déterminer s'il y avait des trajectoires particulières qui, notamment, garantissaient le retour à la position initiale à la fin de manœuvres.

5.2.1.2 Etude de structures particulières de la topologie de la grappe : les trajectoires cycliques stables

Les **trajectoires cycliques stables (TCS)** sont des trajectoires particulières telles qu'en traçant un cycle en $\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma})$ donné, on retrouve bien la même configuration $\boldsymbol{\sigma}$ de départ et d'arrivée. Cette partie nécessite des outils issus de l'étude des variétés mathématiques.

Ces trajectoires cycliques stables montrent des propriétés particulières des topologies en moment cinétique. Dans le cas à quatre AGs, M. Llibre a remarqué que ces trajectoires correspondent aux trajectoires de base de l'étude de H. Kurokawa [Kurokawa 98] pour la conception de lois de commande avec restriction de l'espace de travail.

Du point de vue géométrie différentielle, ces trajectoires ont lieu dans des variétés différentiables intégrales. Prenons, comme [Llibre 09], l'exemple des trajectoires à motricité effective calculées à l'aide de la pseudo-inverse de Moore-Penrose :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{J}^\dagger\dot{\mathbf{h}} \quad (5.8)$$

Supposons que $\dot{\mathbf{h}}(\boldsymbol{\sigma}) \in V \subset \mathbb{R}^3$. L'ensemble des trajectoires $\boldsymbol{\sigma}_e$ font donc partie de la distribution nommée Δ constituée des vecteurs colonne de \mathbf{J}^\dagger . Les trajectoires cycliques stables sont les trajectoires telles que le mouvement reste dans cette distribution. En effet, si la trajectoire sort de la variété différentiable, alors avec les degrés de redondance, la position finale n'a

aucune raison d'être dans la même variété que celle de départ après un cycle en partant de n'importe quel point de cette variété. L'existence d'une sous-variété intégrale tangente en tout point de Δ est nécessaire, et donc, par le théorème de Frobenius, il faut que Δ soit involutive et régulière.

L'étude des TCS permet aussi de trouver des structures particulières dans le noyau, quand le moment cinétique varie par exemple. En effet, comme $\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma})$ a une dérivée continue, son noyau va aussi évoluer de manière continue lorsque le moment cinétique varie tant que l'on ne rencontre pas de singularités.

[Llibre 09] montre que les vecteurs colonne de \mathbf{J}^\dagger sont des combinaisons linéaires des vecteurs ligne de \mathbf{J} , donc on peut réécrire plus facilement Δ comme étant le sous-espace vectoriel engendré par les lignes de \mathbf{J} . Pour que Δ soit involutive, il faut que les crochets de Lie des champs de vecteurs issus des lignes de \mathbf{J} appartiennent à Δ .

Or, lorsque l'on calcule les crochets de Lie pour une grappe isotropique à quatre AGs, les crochets de Lie sont constants quels que soient $\boldsymbol{\sigma}$ [Llibre 09]. Pour avoir l'involutivité, il faut donc que les lignes de \mathbf{J} appartiennent à l'espace vectoriel créé par ces crochets de Lie. On peut aussi poser le problème autrement : comme les combinaisons linéaires des lignes de \mathbf{J} représentent la partie motricité effective des trajectoires en $\boldsymbol{\sigma}$, elles sont donc orthogonales au noyau \mathbf{J} . Ainsi, il est équivalent de fixer l'appartenance des lignes de \mathbf{J} à une distribution et d'imposer l'orthogonalité du noyau de \mathbf{J} à cette distribution. Il n'y a pas de variété différentielle qui vérifie l'involutivité puisque les crochets de Lie sont constants. Cependant, on doit pouvoir trouver des trajectoires qui vérifient les conditions d'appartenance et d'orthogonalité, ce seront les trajectoires cycliques stables (TCS) d'après [Llibre 09].

Ainsi, puisque les crochets de Lie des lignes de \mathbf{J} donnent un espace vectoriel constant quel que soit $\boldsymbol{\sigma}$, on peut calculer son espace vectoriel orthogonal, noté \mathbb{O}_L et imposer la condition pour qu'une trajectoire soit une TCS :

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})\mathbb{O}_L = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

Dans le polycopié de M. Llibre [Llibre 09], les quatre TCS pour une grappe à quatre AGs pyramidales sont calculées.

Dans cette thèse, les calculs ont été réalisés pour une grappe de six AGs pour vérifier si ces trajectoires particulières existaient aussi. Les crochets de Lie obtenus sont constants quels que soient $\boldsymbol{\sigma}$ et on trouve que l'espace vectoriel dans lequel doivent se trouver les lignes de \mathbf{J}

est défini par la base :

$$\mathbb{A}_{\mathbb{L}} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \cos(\beta) & -\sin(\beta)/2 & -(\sqrt{3}\sin(\beta))/2 \\ \cos(\beta) & \sin(\beta)/2 & -(\sqrt{3} * \sin(\beta))/2 \\ \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ \cos(\beta) & \sin(\beta)/2 & (\sqrt{3} * \sin(\beta))/2 \\ \cos(\beta) & -\sin(\beta)/2 & (\sqrt{3} * \sin(\beta))/2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

ce qui donne l'espace vectoriel orthogonal :

$$\mathbb{O}_{\mathbb{L}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

qui ne dépend donc pas de l'angle de la grappe.

Les calculs pour donner les trajectoires cycliques stables sont donnés en annexe A. Le problème revient à trouver les angles σ tels que :

$$\mathbf{J}(\sigma)\mathbb{O}_{\mathbb{L}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Il y a alors neuf équations. On ne trouve qu'une solution physique pour la trajectoire des angles de précession (voir annexe A) : lorsque tous les σ sont égaux. C'est donc la trajectoire de Moore-Penrose en $\mathbf{h} = [0 \ 0 \ h_z]$. Ainsi, en faisant évoluer le moment cinétique, on ne trouve qu'une seule trajectoire où le noyau entier garde une structure particulière en dimension 3. Cependant, il peut arriver qu'une structure de dimension inférieure soit conservée, ici seuls les résultats pour la dimension 3 sont présentés.

Un autre point intéressant est de voir l'évolution des TMNs lorsque le moment cinétique évolue, et en particulier la TCS selon h_z dans la grappe pyramidale à quatre AGs, qui permet de comprendre que l'évolution du noyau est spéciale (noyau conservé) dans cette direction. Sur cette trajectoire, les angles valent $\sigma = [\alpha \ \alpha \ \alpha \ \alpha]$ correspondant à une droite dans l'espace des σ . Elle est représentée sur la figure 5.15 avec toutes les positions en σ_1 et σ_2 qui vérifient $\mathbf{h}(\sigma) = [0 \ 0 \ h_z]$. Dans cette figure, les points d'une même couleur appartiennent à une même valeur de h_z . Ainsi, avec cette figure, on remarque que si une manœuvre selon h_z est demandée à partir de $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, alors cette trajectoire ne rencontre pas de singularités, n'utilise pas le noyau car c'est une trajectoire de Moore-Penrose, donc c'est la plus rapide pour atteindre le moment cinétique maximal de la grappe selon h_z , à partir de la position initiale privilégiée $\sigma_{init} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$.

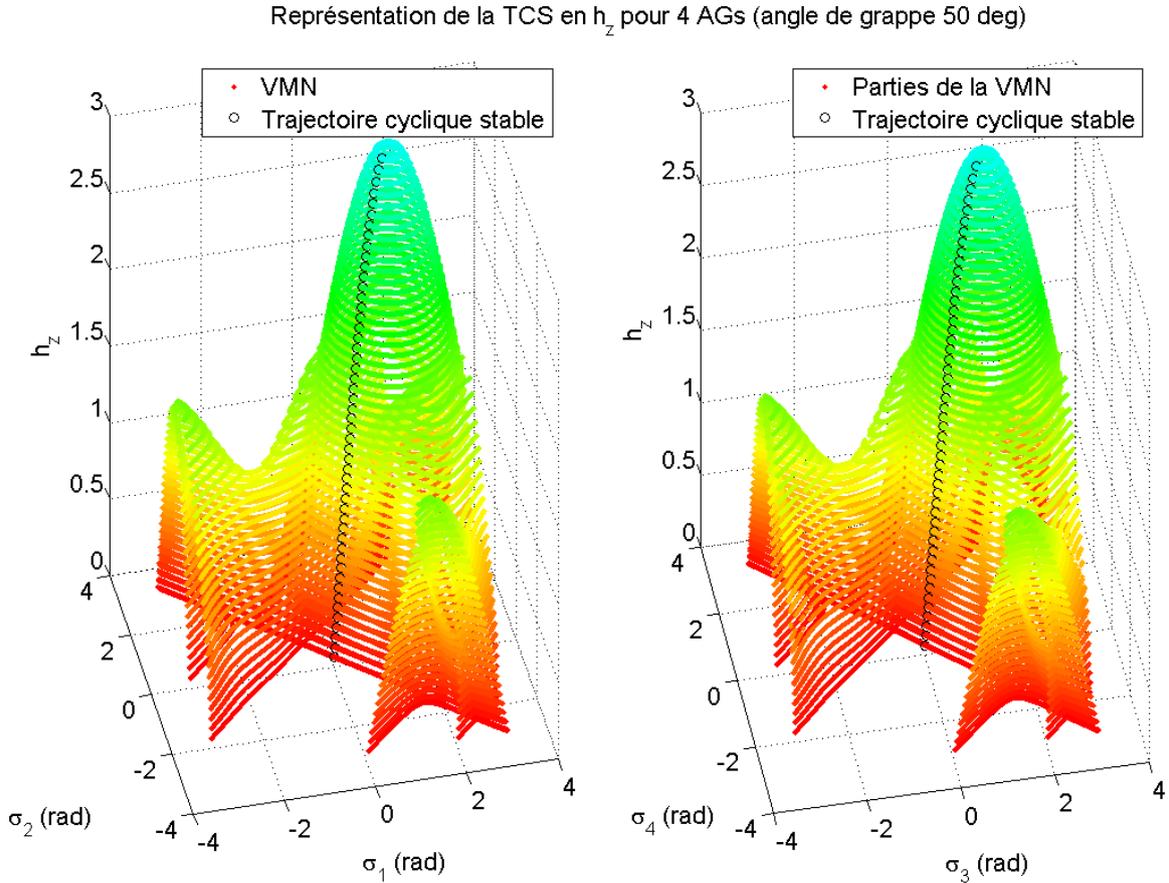


Figure 5.15 – TMNs et TCS pour une grappe pyramidale à quatre AGs d'angle 50°

Pour la grappe à six AGs, la position initiale $\sigma_{init} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ est donc aussi une position initiale privilégiée. Il était donc intéressant de se pencher sur ce problème à six AGs, cependant on remarque que ce résultat théorique n'est pas utilisable tel quel pour la conception des lois de commande, et qu'il n'y a pas spécialement de structures particulières représentées par les TCS.

5.2.1.3 Bilan pour la grappe pyramidale à six AGs sans panne

Pour être adaptée à la grappe de six AGs pyramidale, la loi de pilotage doit donc posséder la **capacité de passer les singularités en travaillant dans le noyau de \mathbf{J}** . Comme dans la plupart des cas, les manœuvres ne comportent pas de singularités, on veut **minimiser l'énergie dépensée** en ne travaillant dans le noyau de \mathbf{J} que lorsque c'est nécessaire.

De plus, on souhaite revenir à la position initiale préférentielle où les manœuvres linéaires ne rencontrent pas de singularités. Même si les résultats des TCS ne donnent pas d'informations supplémentaires sur comment piloter la grappe, ils ont montré l'intérêt de **partir de la position $\sigma_i = 0$** notamment pour les manœuvres dans la direction h_z . La gestion de la

saturation doit aussi être étudiée.

5.2.2 Analyse de la grappe en cas d'une ou deux pannes

La loi de pilotage doit pouvoir être facilement reconfigurable en cas de panne connue et isolée. Dans les cas de panne d'un ou deux AGs, la configuration de la grappe devient similaire aux pyramides à cinq et quatre AGs, donc cette grappe devient sujette aux **singularités en particulier intraversables**. De plus, si l'on souhaite minimiser les erreurs en couple en sortie de grappe, une bonne connaissance de ces singularités est nécessaire car elles sont la source principale de ces erreurs.

Pour les singularités traversables, passables en utilisant le noyau de \mathbf{J} , une solution doit déjà être proposée pour le cas sans panne comme expliqué dans la section 5.2.1. Ainsi, cette solution doit a priori pouvoir être propagée dans les cas de panne. C'est pourquoi nous allons étudier en priorité les singularités internes intraversables dans ces cas de panne.

Dans ce manuscrit, étudions par exemple le cas de deux pannes dans la grappe d'AGs, avec pannes de deux AGs côte à côte.

5.2.2.1 Exemple : analyse des singularités internes intraversables d'une grappe de six AGs avec deux pannes

Avec les outils décrits dans les sections 5.1.1 et 5.1.2, analysons par exemple le cas d'une grappe pyramidale de six AGs, d'angle de grappe isotrope 54.7 degrés, avec pannes des actionneurs 2 et 3. Pour rappel, la configuration est redonnée en Fig. 5.16 et on note $\mathbf{h} = [h_x \ h_y \ h_z]$ dans le repère de la grappe R_s . Un maillage dans toutes les directions de l'espace a été effectué, et pour chaque direction, l'ensemble des positions singulières a été calculé et réparti entre singularités traversables ou intraversables. Sur la Fig. 5.17, l'ensemble des singularités internes intraversables est représenté. On remarque des structures particulières et des symétries, plus visibles sur les projections dans les plans (h_x, h_y) , (h_x, h_z) et (h_y, h_z) (Fig. 5.18). Ainsi, analyser ces singularités peut se faire sur des espaces réduits tels que par exemple $h_x > 0$ et $h_z > 0$. En effet, diviser en quatre l'espace, grâce à l'analyse des symétries, permet de n'étudier qu'une fois les structures. La Fig. 5.19 représente ces quatre quadrans similaires par symétrie. Etudions par exemple le cadran $h_x > 0$ et $h_z > 0$. A chaque point en moment cinétique correspond un point dans l'espace des configurations σ . L'ensemble de ces σ pour ce cadran est donné en Fig. 5.20.

Ainsi, on a pu regrouper des structures de singularités elliptiques que la loi de pilotage devra éviter. Avec d'autres techniques de détermination des singularités notamment par le calcul des surfaces singulières ou l'étude du déterminant de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ présentées par Wie [Wie 04], déterminer ces différentes branches peut se réaliser autrement. Néanmoins la discrimination entre traversable et intraversable au travers du critère (5.4) ne permet pas de garder des équations simples.

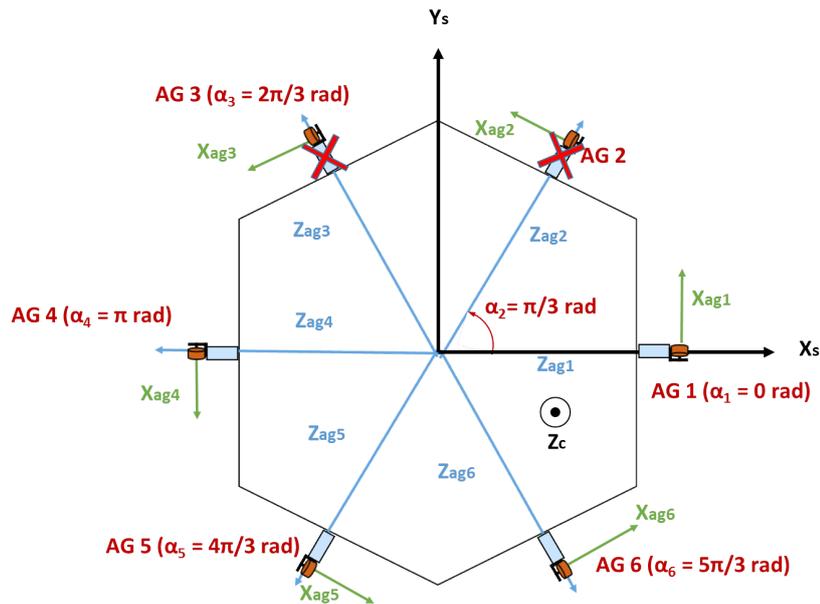


Figure 5.16 – Configuration de la grappe à six AGs étudiée avec deux pannes

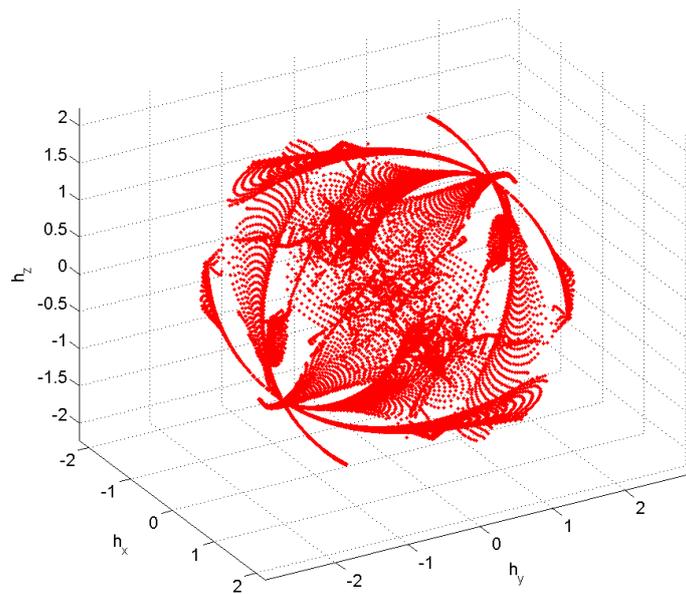


Figure 5.17 – Ensemble des singularités internes intraversables pour la grappe avec deux pannes

Le couplage entre l'outil des singularités et des VMNs (section 5.1.2) va permettre d'analyser les trajectoires suivies par le système et de visualiser ces singularités intraversables. Choisissons quatre points par exemple parmi les singularités intraversables (voir Fig. 5.21).

Représentons maintenant ces points singuliers. A chaque point singulier correspond une position en σ_s et une valeur de \mathbf{h}_s . Avec les outils, il est possible de calculer l'ensemble de

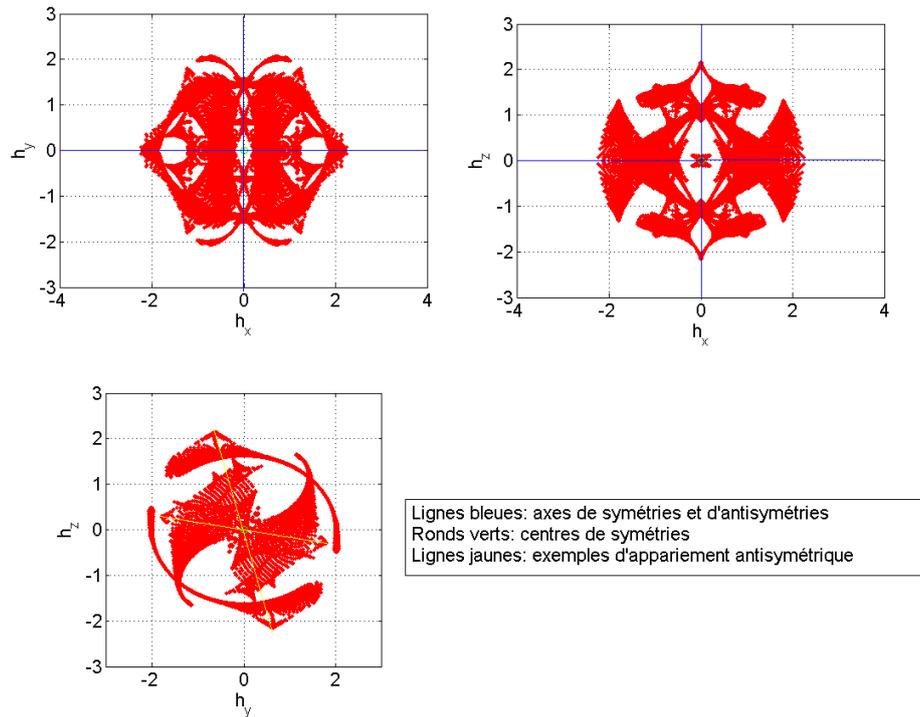


Figure 5.18 – Projections des singularités intraversables selon différents plan avec symétries

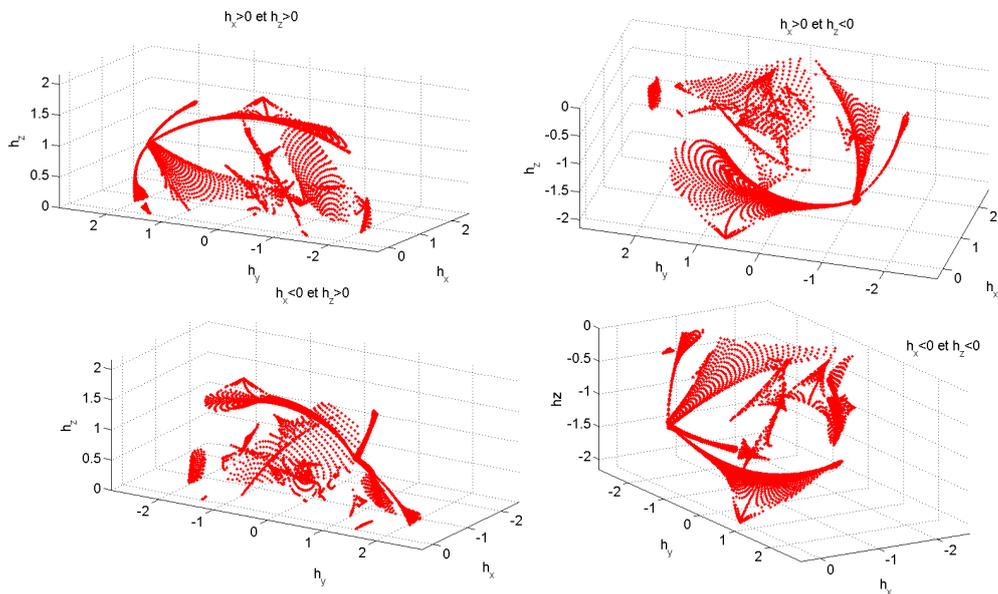


Figure 5.19 – Division de l'espace en moment cinétique en ensembles symétriques

σ correspondants à des valeurs de moment cinétique données. Pour la représentation, les variations en \mathbf{h} sont comprises entre $\mathbf{0}$ et $1.1\mathbf{h}_s$. Sur les Fig. 5.22 et 5.23 sont représentés l'ensemble des σ_1 et σ_4 pour les moments cinétiques donnés. La norme de ces moments

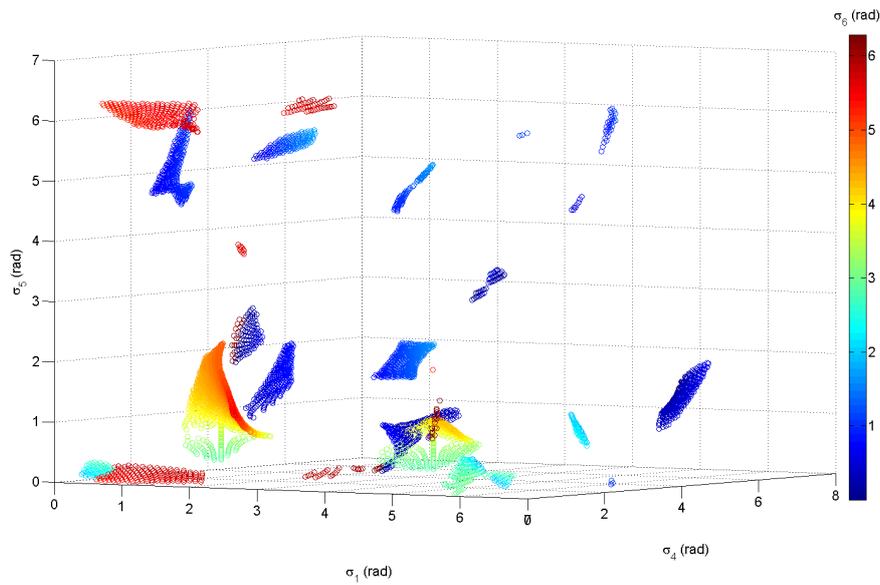


Figure 5.20 – Singularités internes intraversables en σ

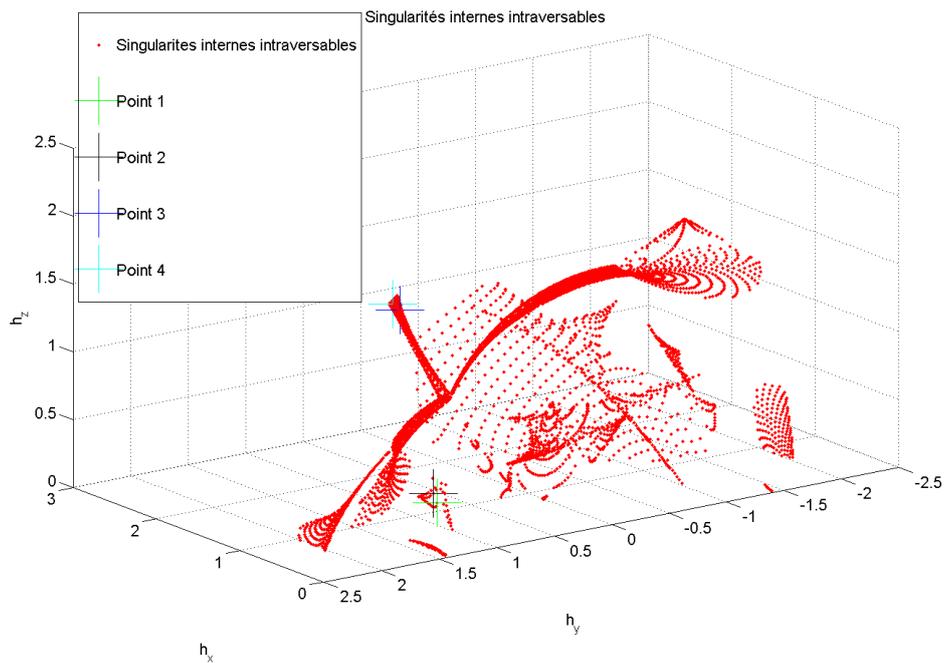


Figure 5.21 – Choix de points singuliers intraversables

cinétiques h_n est en cote.

On remarque que les topologies autour de ces points sont semblables si les points sont proches en \mathbf{h} (font partie de la même branche). Cependant, entre deux branches différentes, les topologies sont variables, et certaines singularités intraversables sont plus facilement évitables que d'autres.

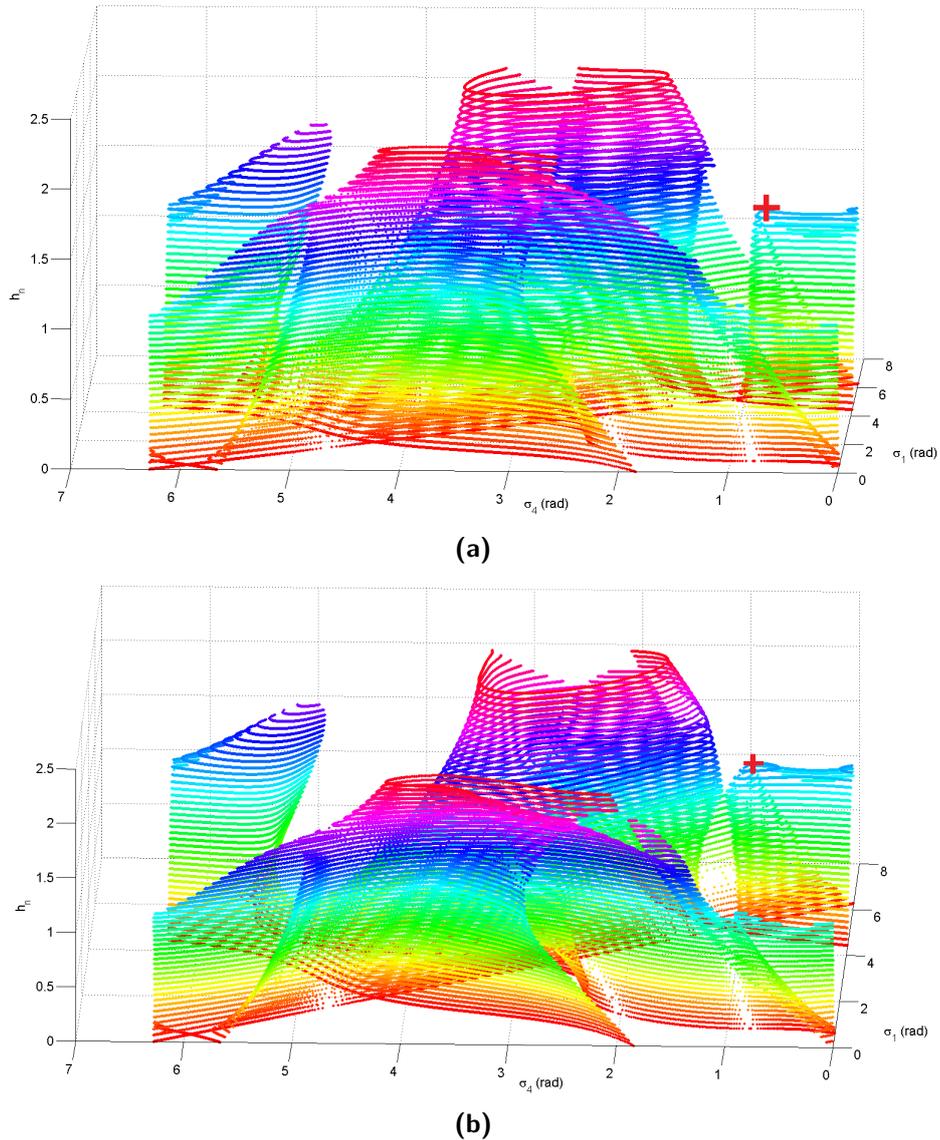


Figure 5.22 – Représentation des singularités intraversables (croix rouge) points 1 (a) et 2 (b) et VMNs autour. Ordonnées : norme du moment cinétique

5.2.2.2 Analyse des stratégies d'évitement des singularités internes intraversables dans la littérature

Grâce à l'étude de la topologie de la grappe avec deux pannes, on a pu obtenir des représentations des singularités sur les figures 5.22 et 5.23 notamment.

Suite à l'analyse bibliographique des lois de pilotage, sur la question du passage des singularités, on remarque donc que des choix doivent être réalisés lors de la conception de notre loi de pilotage :

- Soit le pilotage est **hors-ligne**, coûteux en calculs mais permet d'éviter les trajec-

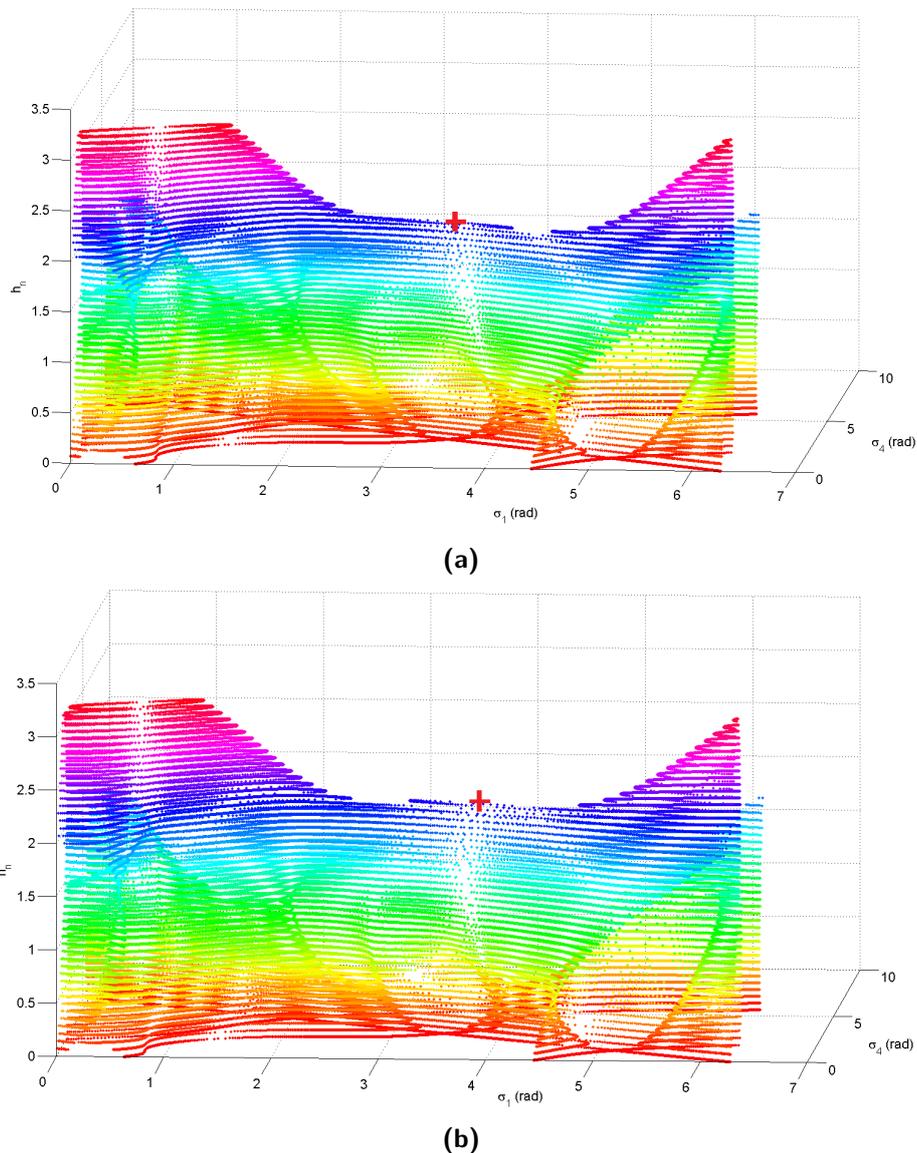


Figure 5.23 – Représentation des singularités intraversables (croix rouge) points 3 (a) et 4 (b) et VMNs autour.

- toires qui mènent à des singularités intraversables puisque l'on peut évaluer différentes possibilités et choisir l'optimale (méthodes [Paradiso 92] et [Libre 14] par exemple) ;
- Soit le pilotage est fait **en ligne** avec par exemple des méthodes basées sur la pseudo-inverse, qui vont permettre d'éviter des singularités en mesurant la distance à celles-ci, mais sans garantie de toujours éviter les singularités intraversables [Cornick 79]. C'est pourquoi des méthodes à erreurs de couple ont été développées afin de pouvoir franchir ces singularités intraversables en créant des erreurs dans les cas où elles seraient rencontrées [Ford 00] et [Oh 91] ;
 - Utiliser des positions initiales différentes en fonction des manœuvres à venir [Vadali 89] permet de se placer initialement loin des singularités intraversables, mais cela suppose

de connaître les manœuvres à venir et la topologie du système.

- Si l'on ne connaît pas la topologie des singularités de notre grappe et que l'on ne fait pas de calculs sur au moins plusieurs pas de temps en prédictif, on ne peut habituellement pas garantir de ne pas se trouver dans un cul-de-sac et d'être bloqué comme dans l'image 5.7. C'est le propos de H. Kurokawa [Kurokawa 98] qui explique qu'on ne peut pas piloter la grappe en temps réel (sur un horizon prédictif d'un seul pas de temps) sans erreur et sur tout l'espace de travail en même temps. C'est pourquoi il propose de réduire l'espace de travail à des zones sans singularités intraversables [Kurokawa 94]. On peut imaginer qu'avec une connaissance de la topologie de la grappe et donc des singularités, le pilotage puisse devenir possible, par exemple, en intégrant dans le calcul les points de divergence des variétés à motricité nulle et de guider précisément en ces points pour faire le bon choix. Une stratégie développée par [Kojima 14] est de commencer à créer des erreurs de couple lorsque le système s'approche d'une singularité intraversable pour l'éloigner vers des singularités traversables.

Visuellement, différentes stratégies en-ligne, donnant des solutions locales, peuvent se résumer sur les Fig. 5.24 et 5.25 pour le passage des singularités. Elles représentent très schématiquement les comportements de ces lois à la rencontre ou au départ de singularités. Bien entendu le passage effectif des singularités dépend aussi des réglages insérés, mais comme la plupart de ces lois ont été conçues spécifiquement pour passer les singularités, c'est leur stratégie qui est présentée ici. Une singularité traversable et une intraversable selon h_x correspondant à des certaines valeurs d'angle de précession σ ont été calculées et représentées (pour les deux premiers AGs) Fig. 5.24 et 5.25. Les lois sont plus ou moins efficaces en fonction de la topologie du système et les réglages doivent se faire en conséquence.

La méthode du gradient tente au maximum d'éviter les singularités intraversables qu'elle ne peut pas traverser mais il n'y a pas de preuve formelle de ces évitements. La loi Blended Inverse n'est pas représentée ici car dépend beaucoup des équations insérées.

Reprenons la méthode du choix de la position initiale, et supposons une manœuvre constante dans une direction \mathbf{h} donnée et une grappe démarrant par exemple d'un moment cinétique nul. Une loi de pilotage minimisant l'énergie dépensée des actionneurs (du type Moore-Penrose) va permettre d'augmenter le moment cinétique de la grappe sans utiliser le noyau et donc le plus rapidement possible. Néanmoins, en fonction de la position initiale des actionneurs, des trajectoires plus ou moins efficaces voire restant bloquées dans des configurations singulières sont générées comme on peut le voir sur la figure 5.26 dans laquelle deux simulations ont été faites avec la loi de Moore-Penrose, en continu, en boucle ouverte dans la direction de la singularité 1 déjà représentée Fig. 5.22. Sur les deux positions initiales, une permet de monter en moment cinétique sans problème dans la direction désirée alors que la deuxième amène directement le système dans la singularité identifiée.

Changer de position initiale la grappe est donc un outil très performant, mais cela suppose de bien connaître la manœuvre demandée. C'est pourquoi dans cette thèse des études reliées à la détermination et analyse des positions initiales des grappes d'AGs ont été menées. Néanmoins, si plusieurs manœuvres à la suite sont demandées, sans passer par la position initiale, ou même si des erreurs sont produites et font dévier la trajectoire, la stratégie n'est

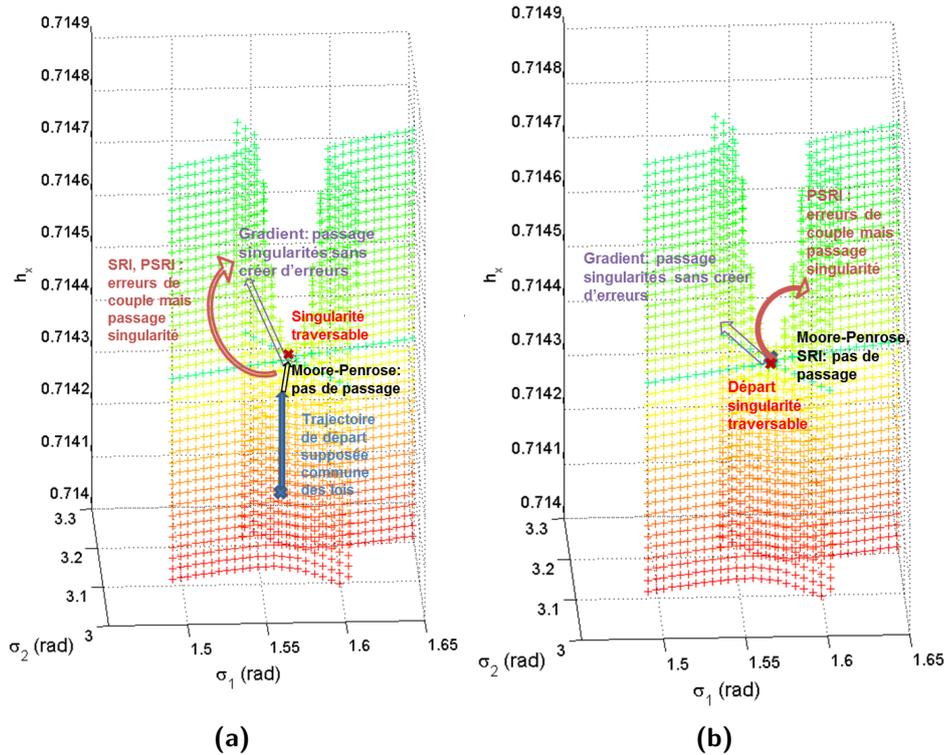


Figure 5.24 – (a) Comportement simplifié des lois au passage d'une singularité traversable. (b) Comportement simplifié des lois au départ d'une singularité traversable.

plus efficace. Donc cette stratégie est intéressante à garder mais n'est pas suffisante pour gérer le problème des singularités intraversables dans le cas général.

Les méthodes n'utilisant que le noyau ne permettent donc pas de garantir le passage des singularités intraversables, sans informations supplémentaires sur le système, et notamment lors de départ à vitesse nulle depuis des singularités intraversables (comme l'enveloppe externe). Créer des erreurs de couple est efficace pour un évitement local des singularités à partir du moment où les lois sont bien réglées. A l'approche d'une singularité, habituellement détectée par des valeurs de déterminant s'approchant de zéro [Bedrossian 87], des erreurs dans les valeurs de σ ou de couple demandé peuvent être insérées pour s'éloigner de manière efficace des singularités. Il y a néanmoins des paramètres à régler dans ces types de loi, notamment la quantité d'erreurs insérées pour assurer un passage des singularités tout en minimisant les erreurs de couple créées. La distance des singularités à laquelle cet évitement doit se faire (potentiellement de manière continue) est aussi à régler pour éviter de retomber dans ces singularités. Or, comme vu dans les figures 5.22 et 5.23, les géométries autour des singularités intraversables sont différentes en fonction des positions des singularités, des surfaces sur lesquelles elles sont contenues. **Un réglage unique pour toutes ces topologies amène donc un conservatisme et des erreurs de sortie plus grandes que nécessaires théoriquement.** Cependant, cet évitement reste local et ne demande que très peu de données embarquées. L'assurance du passage des singularités, en fonction aussi de la vitesse d'arrivée sur ces singularités est difficilement faisable théoriquement, mais peut être réalisées

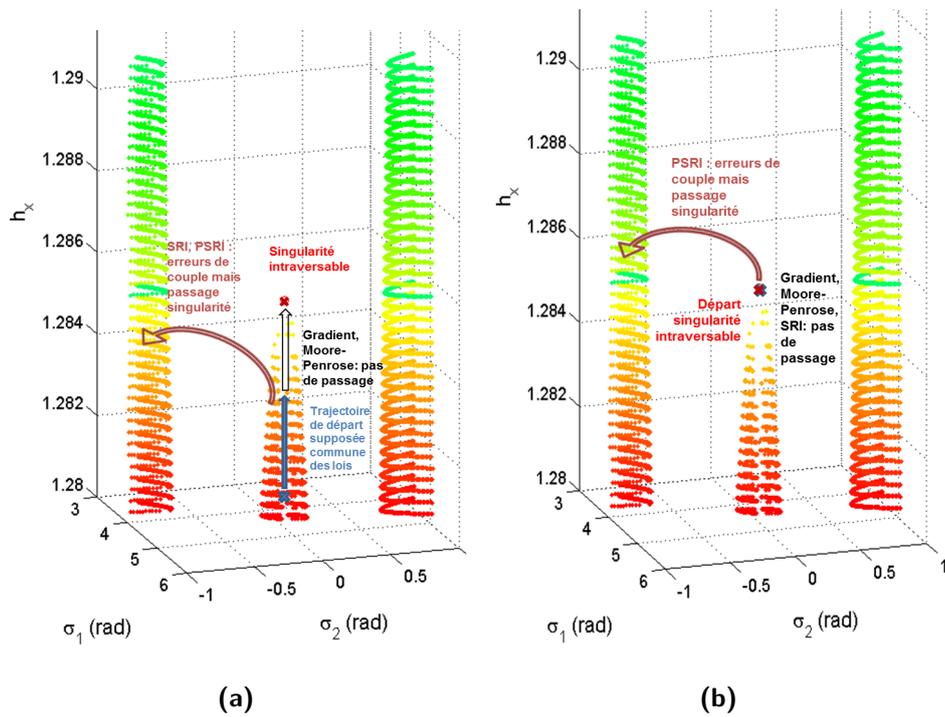


Figure 5.25 – (a) Comportement simplifié des lois au passage d’une singularité traversable. (a) Comportement simplifié des lois au départ d’une singularité intraversable.

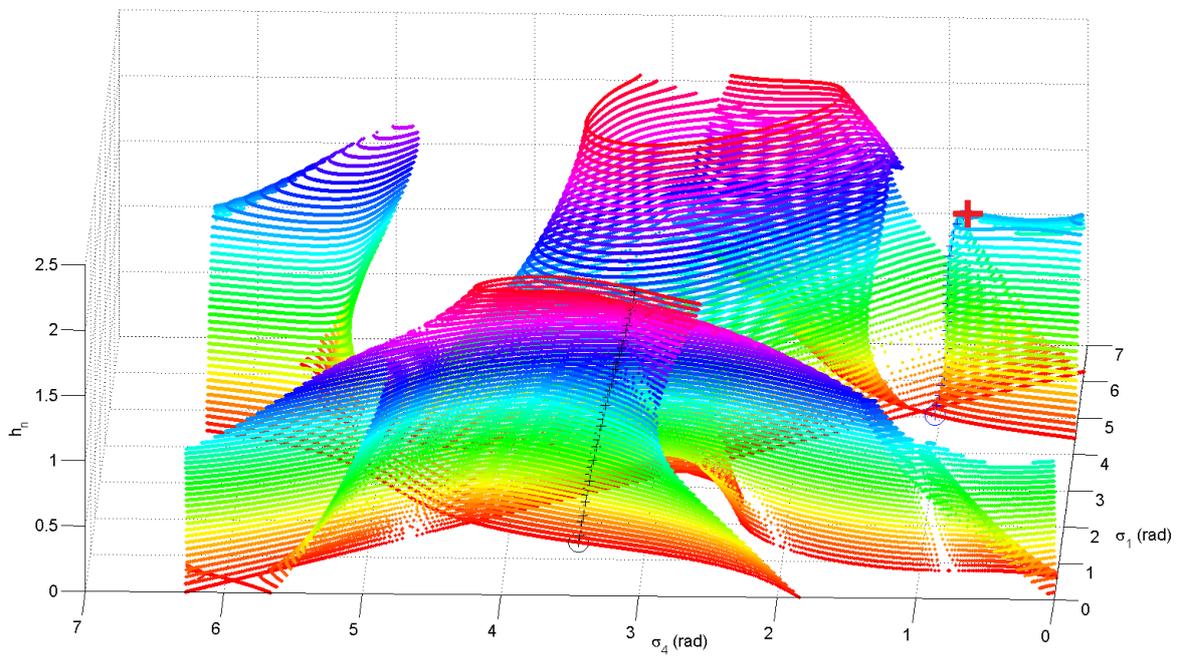


Figure 5.26 – Simulations avec la loi de Moore-Penrose dans la direction de la singularité 1 au départ de deux positions initiales (bleue et noire)

en simulation.

De plus, la **détermination de la traversabilité n'est pas effectuée et donc des erreurs sont créées dans tous les cas**. Or, dans les cas traversables, il n'y a pas besoin de créer d'erreurs pour passer les singularités.

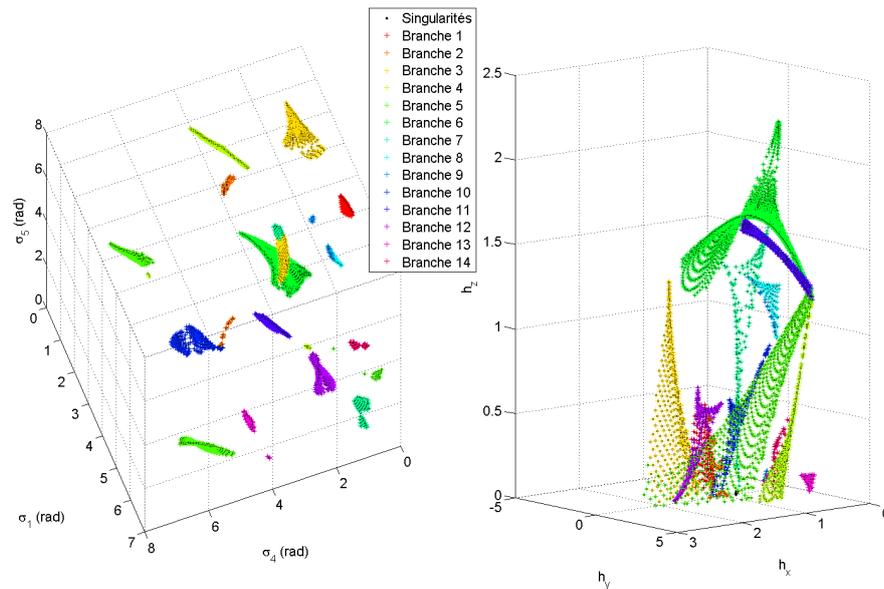
C'est pourquoi une **nouvelle stratégie de passage des singularités spécifiquement intraversables a été développée dans l'optique de pouvoir prouver à terme théoriquement que les singularités intraversables sont passées et en minimisant les erreurs de couple créées**. Des choix doivent être faits quant à l'embarquabilité des données issues de la connaissance de la topologie, et de la complexité augmentée due à l'étude spécifique des cas de panne (et donc des lois moins facilement reconfigurables).

5.2.2.3 Développement d'une méthode de passage des singularités intraversables basée sur la connaissance topologique du système

Gardons le cas des deux pannes. Comme vu sur les images 5.22 et 5.23, les topologies autour des points singuliers sont similaires lorsque ces points appartiennent à un même ensemble en σ . Au lieu de chercher des caractéristiques pour chaque point singulier pour l'éviter efficacement, il est plus économe en quantité de données de les regrouper en branches cohérentes possédant des caractéristiques proches.

Pour réaliser ce tri, l'algorithme "k-means clustering" [MacKay 03] a été utilisé. Il permet de regrouper des ensembles de points partageant des similarités. Pour cela, chaque groupe doit être initialisé avec un point lui appartenant, et l'algorithme trouve ensuite les plus proches voisins (car dans notre cas, les branches cohérentes sont constituées de points proches en σ). Ensuite, les différents groupes ont été assemblés pour donner des structures plus cohérentes. Le résultat de regroupement et identification est montré pour notre exemple en Fig. 5.27. Chaque branche correspond donc à un ensemble cohérent de points singuliers, et donc à une structure particulière dans l'espace des singularités intraversables.

Le but pour la loi de pilotage sera de détecter si les singularités seront (ou risquent d'être si les consignes futures ne sont pas connues avec certitude) rencontrées et donc de les éviter suffisamment tôt en minimisant les erreurs de couple. Pour chaque branche, on peut donc rechercher une représentation sous forme de moment cinétique. En effet, les commandes en entrée de la loi de pilotage sont en couple ou en moment cinétique, il est donc plus aisé de vérifier l'approche de ces singularités de cette manière au départ. Néanmoins, ce n'est pas parce que le système va arriver dans un certain moment cinétique qu'il va y rencontrer la singularité intraversable grâce à la redondance. Au lieu d'éviter en \mathbf{h} les zones où ces singularités existent (et donc rendre inaccessibles certaines zones en moment cinétique), il peut être plus précis aussi de vérifier si la configuration du système s'approche de configurations singulières intraversables. Nous proposons alors de réaliser des maillages (plus ou moins grossiers en fonction de la place disponible dans la mémoire ordinateur et la précision souhaitée) de ces surfaces de singularités en moment cinétique et en valeurs singulières.



Résumons cette démarche :

- Groupement des singularités en différentes branches cohérentes, présentant des caractéristiques semblables.
- Modélisation de chaque branche dans l'espace des moments cinétiques, sous forme par exemple d'un maillage.
- Modélisation de chaque branche dans l'espace des angles de précession, potentiellement liée à celle du moment cinétique.
- Identification de la distance en moment cinétique à laquelle les singularités des branches doivent être évitées, et peut dépendre de la vitesse des actionneurs. En effet, plus la vitesse est faible, plus dévier la trajectoire peut être difficile.
- Identification de la déviation en angles de précession à effectuer pour éviter la singularité.

L'implémentation de cette méthode est proposée sur un exemple dans le chapitre 7.

Cette proposition d'évitement **augmente la quantité de données insérées dans la loi de pilotage, la complexité du réglage et diminue la facilité à se reconfigurer.** Néanmoins, elle permet d'assurer le passage des singularités intraversables avec le minimum d'erreurs, et de fait d'éviter les saturations des actionneurs. Elle permet de régler les paramètres de la loi de pilotage en fonction des cas et de manière moins conservatrice qu'un critère unique pour toutes les singularités. Le point sur l'exactitude des lois de pilotage du cahier des charges est alors traité.

5.2.2.4 Bilan pour les cas de panne

Dans les cas de panne connues et isolées, les mêmes contraintes sont imposées, en ajoutant l'évitement des singularités intraversables en minimisant les erreurs en couple. Pour un pilotage sans erreur, la connaissance au moins partielle des commandes futures et de la topologie du système est nécessaire. Néanmoins, la première hypothèse n'est pas toujours vérifiée et la connaissance de la topologie amène à une loi moins facilement reconfigurable en cas de panne (car des équations spécifiques à des cas de panne dans la grappe doivent être insérées) avec des quantités de données qui augmentent.

Cependant, une flexibilité est demandée sur la loi de pilotage afin de pouvoir intégrer différentes manières d'éviter ces singularités intraversables.

5.2.3 Bilan pour le pilotage de la grappe

Du point de vue de la grappe étudiée, des **contraintes sur la structure de la loi de pilotage** sont déduites :

- Différentes contraintes telles que le **changement de position initiale ou l'évitement de singularités intraversables** doivent pouvoir être ajoutées ou non de manière **flexible** (avec la possibilité d'avoir plusieurs versions du passage des singularités) ;
- La **priorité** de ces contraintes en fonction de la configuration courante des AGs doit pouvoir être modifiable ;
- Une formulation d'**évitement des singularités traversables** doit être insérée ;
- Le système doit pouvoir **s'extraire de positions initiales singulières**.

Des contraintes sur son implémentation sont aussi résumées ci-dessous :

- Les **saturation**s doivent être prises en compte, et en particulier les causes doivent être traitées (entrée physiquement impossible et approche des singularités) ;
- Des contraintes permettant de changer de position initiale ou de revenir à la position canonique (initiale préférée) doivent être exprimées ;
- En fonction de la quantité possible de données stockées, la stratégie d'évitement spécifique aux singularités intraversables en cas de pannes doit être implémentée, ou la stratégie du déterminant peut être utilisée ;
- Quand le système est dans des positions où il ne risque pas de rencontrer les singularités, la commande doit **minimiser l'énergie dépensée**.

Puisque la loi de pilotage doit être reconfigurable facilement en cas de panne, avec le traitement des singularités intraversables, elle sera par extension applicable à toutes les configurations de grappe pyramidales. En effet, dans les grappes à plus de cinq AGs, les problématiques de guidage sont identiques à celles des grappes à six par la faible probabilité de rencontre des singularités. Dans les cas à quatre et cinq AGs, les problématiques sont similaires aux cas de panne de la grappe à six. Ainsi, la loi de pilotage pourra être utilisée dans différentes configurations de grappe. De plus, la flexibilité dans la prise en compte des contraintes peut a priori permettre d'avoir une loi de pilotage adaptée à d'autres systèmes sur-actionnés spatiaux, et

cet aspect sera étudié entre autres dans le chapitre suivant [6](#).

Dans ce chapitre, nous avons analysé et comparé différentes configurations de grappe d'AGs. Selon nos critères, la grappe pyramidale à 6 AGs est la plus adaptée pour nos applications pour le contrôle de nanosatellites agiles. Cette configuration de grappe a été étudiée plus en détails, et le cahier des charges pour la loi de pilotage a été discuté puis adapté afin de contrôler efficacement ce système et ses cas de panne. En particulier, une nouvelle stratégie d'évitement des singularités intraversables est proposée et comparée à la littérature.

Chapitre 6

Développement d'une structure générique de commande, convergente, embarquable à bord de satellites et applicable à différents systèmes sur-actionnés

Sommaire

6.1	Développement d'une formulation cinématique adaptée au passage de singularités traversables	78
6.2	Développement d'une structure de pilotage intégrant cette formulation et d'autres contraintes	83
6.3	Preuves de convergence de cette structure de loi de pilotage	89
6.4	Comparaison avec d'autres lois de la littérature	96
6.5	Génération d'une loi de commande adaptée à la loi de pilotage	99
6.6	Bilan de la boucle de commande	101
6.7	Application aux manipulateurs redondants à base fixe	101

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de la génération d'une structure de loi de pilotage adaptée aux contraintes citées précédemment ainsi qu'au cahier des charges initial. Des preuves de convergence de la loi de pilotage sont déduites et une méthode de réglage des gains tenant compte de ces preuves est présentée. Une étude est réalisée sur la génération d'une loi de commande en amont intégrant les caractéristiques de la loi de pilotage. Enfin, une application aux bras robotiques à base fixe est présentée, intégrant toutes les étapes de la réalisation de cette boucle de commande, pour montrer la généralité sur d'autres systèmes sur-actionnés.

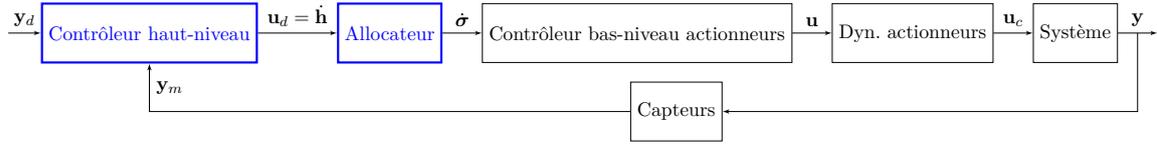


Figure 6.1 – Schéma-bloc typique d'un contrôle d'un système sur-actionné

La figure 6.1 rappelle le schéma de la boucle de contrôle utilisée pour les systèmes redondants. Mathématiquement, le problème de l'allocation est d'inverser l'équation (3.7) rappelée ci-dessous (6.1) sous contraintes.

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})\dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (6.1)$$

Cette boucle doit pouvoir être adaptée à différents cas de panne ou de configurations de grappes d'AGs, et implantée en temps réel dans un satellite. Puisque la loi doit être générique pour les AGs, il serait intéressant qu'elle puisse aussi être utilisée sur d'autres systèmes sur-actionnés spatiaux. En particulier, comme montré par N.S. Bedrossian dans [Bedrossian 87], le problème du pilotage des AGs est similaire à celui d'un bras robotique manipulateur à base fixe, en série, et donc l'application à ce système est aussi montrée. Néanmoins, l'utilité de cette loi peut être limitée sur Terre où la contrainte d'embarquabilité est moins forte. C'est pourquoi l'application aux bras spatiaux sera réalisée en chapitre 9.

Suite à l'analyse du chapitre précédent, une formulation des équations cinématiques adaptée à notre problème est proposée.

6.1 Développement d'une formulation cinématique adaptée au passage de singularités traversables

6.1.1 Présentation du principe

Comme expliqué dans le chapitre précédent 5, une formulation permettant d'éviter les singularités en utilisant le noyau de la matrice \mathbf{J} est nécessaire pour notre problème. Cette formulation doit pouvoir être générique à différents cas de panne dans les grappes d'AGs, et générique à plusieurs types de grappes. Cette étude sera présentée en temps discret dans ce mémoire dans l'optique d'implémentation dans les calculateurs, mais des développements similaires peuvent être réalisés en continu.

Le problème principal de l'équation (6.1) est la perte de rang de la matrice \mathbf{J} dans les cas de singularités. Afin d'obtenir une matrice non-singulière même en cas de singularité physique des actionneurs, reprenons l'équation (6.1), et appliquons un développement de Taylor à l'ordre 2 entre deux instants t et $t + 1$. La variation d'une grandeur entre ces instants, par exemple

σ_i , est notée $\Delta\sigma_i = \sigma_i(t+1) - \sigma_i(t)$. On note $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \dots \\ \Delta\sigma_n \end{bmatrix}$, et :

$$\Delta\mathbf{h} = \mathbf{h}(t+1) - \mathbf{h}(t) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma})$$

6.1.2 Transformations mathématiques de l'équation cinématique

L'application de la formule de Taylor, dans le cas générique multivariable, est tout d'abord rappelée. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et une fonction $\mathbf{f} : E \rightarrow F$ qui est n_d fois différentiable en un point $\mathbf{a} \in E$. \mathbf{f} admet alors en ce point un développement limité à l'ordre n_d :

$$\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + d\mathbf{f}_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{p} + \sum_{k=2}^{n_d} d^k \mathbf{f}_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{p}^k + o(\|\mathbf{p}\|^{n_d}) \quad (6.2)$$

avec \mathbf{p}^k le k -uplet $(\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}) \in E^k$ et $d^k \mathbf{f}_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{p}^k$ l'application de la fonction $d^k \mathbf{f}_{\mathbf{a}}$ en \mathbf{p}^k . $d^k \mathbf{f}_{\mathbf{a}}$ est la $k^{\text{ième}}$ dérivée totale de \mathbf{f} , appliquée en \mathbf{a} . Donnons un exemple avec une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable en un point $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2) &= f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial a_1}(a_1, a_2)\Delta a_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2}(a_1, a_2)\Delta a_2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2}(a_1, a_2)(\Delta a_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial a_2^2}(a_1, a_2)(\Delta a_2)^2 \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2}(a_1, a_2)\Delta a_1 \Delta a_2 + o((\Delta a_1)^2 + (\Delta a_2)^2) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Sous forme matricielle, l'éq. (6.3) devient :

$$\begin{aligned} f(a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2) &= f(a_1, a_2) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_1}(a_1, a_2) & \frac{\partial f}{\partial a_2}(a_1, a_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta a_1 & \Delta a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_2 \partial a_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \end{bmatrix} + o((\Delta a_1)^2 + (\Delta a_2)^2) \end{aligned} \quad (6.4)$$

En posant $\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_1}(a_1, a_2) & \frac{\partial f}{\partial a_2}(a_1, a_2) \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial a_j}$ le gradient de f et $\frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_2 \partial a_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_2^2} \end{bmatrix}$ la matrice hessienne de f , la généralisation à n variables se déduit de l'éq. (6.4).

Dans notre cas, le moment cinétique \mathbf{h} est un vecteur, regardons l'application de la formule (6.2) sur le cas où $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ f_2(\mathbf{a}) \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dépend de $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. A partir de (6.4) on

écrit le développement limité de chaque fonction f_i :

$$\begin{aligned} f_1(a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2) &= f_1(a_1, a_2) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1}(a_1, a_2) & \frac{\partial f_1}{\partial a_2}(a_1, a_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta a_1 & \Delta a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_2 \partial a_1} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_1 \partial a_2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \end{bmatrix} + o((\Delta a_1)^2 + (\Delta a_2)^2) \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} f_2(a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2) &= f_2(a_1, a_2) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial a_1}(a_1, a_2) & \frac{\partial f_2}{\partial a_2}(a_1, a_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta a_1 & \Delta a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_2}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial a_2 \partial a_1} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial a_1 \partial a_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial a_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \end{bmatrix} + o((\Delta a_1)^2 + (\Delta a_2)^2) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Regroupons éq. (6.5) et (6.6) sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2) &= \mathbf{f}(a_1, a_2) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1}(a_1, a_2) & \frac{\partial f_1}{\partial a_2}(a_1, a_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1}(a_1, a_2) & \frac{\partial f_2}{\partial a_2}(a_1, a_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \Delta a_1 \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_2 \partial a_1} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial a_2 \partial a_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \Delta a_2 \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_1 \partial a_2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_2^2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial a_1 \partial a_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial a_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \end{bmatrix} + o\left(\begin{bmatrix} (\Delta a_1)^2 + (\Delta a_2)^2 \\ (\Delta a_1)^2 + (\Delta a_2)^2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

En posant cette fois $\nabla \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1}(a_1, a_2) & \frac{\partial f_1}{\partial a_2}(a_1, a_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1}(a_1, a_2) & \frac{\partial f_2}{\partial a_2}(a_1, a_2) \end{bmatrix} = \frac{\partial f_i}{\partial a_j}$ on retrouve la matrice jacobienne de la fonction \mathbf{f} , définie auparavant en éq. (3.4). Les matrices Hessiennes

$$\mathbb{H}_1(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_2 \partial a_1} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial a_2 \partial a_1} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbb{H}_2(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_1 \partial a_2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_2^2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial a_1 \partial a_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial a_2^2} \end{bmatrix}$$

peuvent être concaténées dans une matrice de dimension 3 appelée tenseur. Ce concept ne sera pas développé, et est brièvement utilisé dans la section 6.3 sur la stabilité de la loi de pilotage. La formule (6.7) présente une structure qui nous permet de généraliser le développement de Taylor d'un vecteur de fonctions multivariées, et de l'appliquer à notre cas précis.

On obtient ainsi la formule suivante :

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{h} &= \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}) \\ &= \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})\Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\Delta \sigma_i) \frac{\partial^2 \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_i \partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta \boldsymbol{\sigma} + o(\Delta \boldsymbol{\sigma})^2\end{aligned}\quad (6.8)$$

avec n le nombre d'actionneurs. Définissons \mathbb{H}_i :

$$\mathbb{H}_i = \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial \sigma_i \partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 h_1}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_i} & \cdots & \frac{\partial^2 h_1}{\partial \sigma_n \partial \sigma_i} \\ \frac{\partial^2 h_2}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_i} & \cdots & \frac{\partial^2 h_2}{\partial \sigma_n \partial \sigma_i} \\ \frac{\partial^2 h_3}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_i} & \cdots & \frac{\partial^2 h_3}{\partial \sigma_n \partial \sigma_i} \end{bmatrix}\quad (6.9)$$

On décide d'appeler \mathbb{H} la matrice concaténant les colonnes i des matrices \mathbb{H}_i (6.10), qui sera donc de taille $m \times n$.

$$\mathbb{H} = \left[\mathbb{H}_1(:, 1) \quad \cdots \quad \mathbb{H}_i(:, i) \quad \cdots \quad \mathbb{H}_n(:, n) \right]\quad (6.10)$$

avec $\mathbb{H}_i(:, i)$ en référence à la $i^{\text{ème}}$ colonne de \mathbb{H}_i .

Ainsi on peut écrire l'éq. (6.11).

$$\Delta \mathbf{h} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})\Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \mathbb{H}(\boldsymbol{\sigma})\Delta^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\Delta \sigma_j) \mathbb{H}'_j \Delta \boldsymbol{\sigma} + o(\Delta^2 \boldsymbol{\sigma})\quad (6.11)$$

avec \mathbb{H}'_j la matrice \mathbb{H}_j dont la colonne j est remplacée par le vecteur nul, et $\Delta^2 \boldsymbol{\sigma}$ le vecteur composé des carrés $\Delta \sigma_i^2$.

Définissons maintenant \mathbf{M} en éq. (6.12), de taille $(m \times 2n)$.

$$\mathbf{M} = \left[\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \frac{1}{2} \mathbb{H}(\boldsymbol{\sigma}) \right]\quad (6.12)$$

6.1.3 Hypothèses sur la matrice \mathbf{M}

Dans cette partie, l'hypothèse principale est que **la matrice \mathbf{M} est de rang plein m quelles que soient les valeurs de $\boldsymbol{\sigma}$** . Cette hypothèse est vérifiée dans un grand nombre de systèmes dynamiques. En particulier, c'est le cas des bras robotiques manipulateurs à base fixe (preuve fournie dans l'exemple section 6.7) et les grappes pyramidales d'actionneurs gyroscopiques.

Pour vérifier cette hypothèse dans le cas des grappes d'AGs, reprenons l'expression (6.8). Elle devient alors (6.13).

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{\partial \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i \frac{\partial^2 \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_i \partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta \boldsymbol{\sigma} + o(\Delta^2 \boldsymbol{\sigma})\quad (6.13)$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = h_t \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}),$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i \frac{\partial^2 \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_i \partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta \boldsymbol{\sigma} = -h_t \mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}) \Delta^2 \boldsymbol{\sigma}$$

car chaque \mathbb{H}'_j est une matrice nulle : chaque colonne de \mathbf{J} et \mathbf{X} ne dépend que d'un σ_i comme présenté dans les équations (3.11), (3.12), (3.13) et (3.14). On peut réécrire cette expression sous la forme matricielle (6.14).

$$\Delta \mathbf{h} = h_t \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) \Delta \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2} h_t \mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}) \Delta^2 \boldsymbol{\sigma} = h_t \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) & -\frac{1}{2} \mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\sigma} \\ \Delta^2 \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Dans le cas des grappes d'AGs, la matrice \mathbf{M} est donc choisie égale à :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) & \frac{1}{2} \mathbb{H}(\boldsymbol{\sigma}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) & -\frac{1}{2} \mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}) \end{bmatrix}$$

avec h_t en facteur de l'expression. Pour qu'elle ne soit pas de rang complet¹, il faut qu'il existe une direction singulière \mathbf{s} telle que $\mathbf{s}^T \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) & -\frac{\mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma})}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$. Ceci équivaut d'après éq. (3.11) et (3.12) à ce que \mathbf{s} soit orthogonal à \mathbf{x}_i et à \mathbf{y}_i pour $i = 1 \dots n$ et donc \mathbf{s} colinéaire à \mathbf{z}_i pour $i = 1 \dots n$. Il en résulte que la matrice ne peut être de rang incomplet que pour une structure où tous les axes de précession \mathbf{z}_i sont colinéaires à une même direction, configuration géométrique roof-type ou multiple mais non pyramidale comme étudiée ici.

6.1.4 Intérêts de la matrice \mathbf{M}

Ainsi, comme \mathbf{M} est toujours de rang plein, cela signifie que la matrice \mathbf{X} engendre des trajectoires qui se trouvent dans le noyau de la matrice \mathbf{J} . En effet, comme il n'y a pas de direction singulière à \mathbf{M} , alors cela signifie que chaque direction doit au moins être engendrée par \mathbf{X} si ce n'est pas possible par \mathbf{J} . En passant ainsi dans le noyau de la matrice \mathbf{J} , on peut alors utiliser cette caractéristique pour piloter dans le noyau, passer des singularités traversables et éviter à l'avance les singularités intraversables, tout en gardant une matrice régulière.

Dans le cas des grappes à quatre AGs, K. Yamada and I. Jikuya [Yamada 14] ont aussi montré l'intérêt de cette formulation de manière théorique sur ce système, qui permet donc d'utiliser le noyau et de passer les singularités traversables. Néanmoins ils n'utilisent pas la matrice \mathbf{M} de rang toujours plein.

On obtient ainsi l'équation (6.15).

$$\Delta \mathbf{h} = h_t \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}) \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\sigma} \\ \Delta^2 \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} + o(\Delta^2 \boldsymbol{\sigma}) \quad (6.15)$$

1. C'est à dire pour qu'elle soit de rang 2, au lieu d'être de rang 3

$o(\Delta^2\sigma)$ est supposé négligeable comparé aux autres termes, ce qui est vrai si la période d'échantillonnage est assez petite. A partir de là, notre but est alors de trouver le vecteur

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta^2\sigma \end{bmatrix}$$

qui vérifie (6.15) ainsi que la relation intrinsèque évidente entre les deux composantes du vecteur :

$$\mathbf{x}(i)^2 = \mathbf{x}(i+n), i = 1 \dots n \quad (6.16)$$

Le but est maintenant de trouver une structure générique de loi de pilotage qui intègre notamment cette équation.

6.2 Développement d'une structure de pilotage intégrant cette formulation et d'autres contraintes

6.2.1 Détermination d'une structure de loi de pilotage

Suite à l'analyse des différentes lois de pilotage existantes proposées dans la bibliographie et en particulier par le tableau 4.1, nous avons pu conclure qu'aucune loi ne permettait de répondre parfaitement au cahier des charges imposé. Nous avons donc réfléchi à une nouvelle loi de pilotage qui serait en particulier embarquable et plus flexible au niveau de la gestion des contraintes et de la reconfiguration en cas de panne. Néanmoins, certaines lois de pilotage de la littérature répondent déjà à une partie du problème posé. En particulier, pouvoir intégrer des contraintes, qui ne doivent par exemple être activées qu'à l'approche de singularités ou à moment cinétique nul, avec plus ou moins de poids peut être traité avec la méthode de priorisation des contraintes [Nakamura 87]. Cependant, dans cette loi, les contraintes n'interviennent que si elles n'entrent pas en conflit avec les autres et sont projetées dans le noyau de \mathbf{J} . Si une méthode du type évitement de singularités avec le déterminant doit être implémentée, ce n'est pas possible avec cette méthode car les erreurs en couple ne sont pas compatibles. Il nous faut donc une structure plus flexible, qui permette d'intégrer des contraintes, potentiellement non modélisées parfaitement, qui ne donne pas toujours la priorité à l'exactitude du résultat (mais au passage de singularités ou saturations par exemple).

Les méthodes de résolution quadratique permettent de prendre en compte des contraintes et de résoudre parfaitement le problème, mais en échange nécessitent beaucoup de calculs [Fossen 06]. Des solutions embarquées habituellement, basées sur la Moore-Penrose, consistent à résoudre le problème quadratique sans contrainte dure mais avec des pondérations sur ces équations, qui ajustent leurs importances ou les niveaux de bruit dans le cas de mesures. Reprenons donc ces formulations qui peuvent nous être utiles pour rajouter des contraintes, à condition de les modifier car leurs formes actuelles n'intègrent pas toutes les contraintes demandées. Rappelons le critère minimisé par la SRI dans l'éq. (6.17), avec la résolution

complète utilisée par exemple par la méthode Blended-Inverse (6.18).

$$r = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})\dot{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{R}^{-1}(\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})\dot{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_d)^T \mathbf{P}^{-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_d) \quad (6.17)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{P}^{-1})^{-1} (\mathbf{P}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_d + \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{h}}) \quad (6.18)$$

Une solution équivalente peut être calculée en suivant le développement de [Llibre 09], en éq. (6.19).

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_d + \mathbf{P} \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})^T (\mathbf{R} + \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{P} \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})^T)^{-1} (\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}_d) \quad (6.19)$$

La principale différence entre les deux formes de la solution est la taille de la matrice inversée (forme du filtre d'information [Todorov 08]). Ces deux formulations correspondent aussi à la formule de correction des moindres carrés récursifs et de l'algorithme de résolution du filtre de Kalman [Llibre 09]. En effet, en posant $\mathbf{K} = \mathbf{P} \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})^T (\mathbf{R} + \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{P} \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})^T)^{-1}$, on retrouve l'expression classique de correction de l'estimée $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_d + \mathbf{K}(\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}_d)$.

Contrairement aux moindres carrés récursifs, le filtre de Kalman intègre une modélisation dynamique du système, prédisant au pas suivant la valeur des estimées, avec, associée, une matrice de covariance \mathbf{Q} . Les algorithmes de résolution des moindres carrés récursifs et du filtre de Kalman sont identiques, sauf durant la phase de prédiction, où la matrice de covariance de l'erreur d'estimation \mathbf{P} est mise à jour avec le modèle dynamique du système dans le cas du filtre de Kalman. La phase de prédiction est donc une différence par rapport à l'éq. (6.19).

De plus, a priori, aucune hypothèse n'est nécessaire dans les moindres carrés pour la matrice de pondération \mathbf{R} symétrique positive représentant les erreurs sur les mesures. Alors, \mathbf{P} n'est qu'une matrice aidant au calcul [Llibre 09]. Cependant, pour avoir une bonne estimation, il est courant de choisir \mathbf{R} comme la matrice de covariance des erreurs de mesure tel que réalisé dans l'EKF (Extended Kalman Filter, filtre de Kalman étendu). Pour avoir \mathbf{P} correspondant à la matrice de covariance des erreurs d'estimation, comme dans l'EKF, il faut que la moyenne des bruits soit nulle (non biaisée) et qu'il n'y ait pas de corrélation entre les erreurs d'un pas de temps à l'autre. Alors on a bien \mathbf{P} qui correspond à la matrice de covariance de l'erreur d'estimation. Cependant, contrairement au filtre de Kalman, il n'y a pas d'hypothèse gaussienne en jeu dans les matrices de covariance. Néanmoins, il est aussi possible d'avoir des équations déterministes dans le filtre de Kalman. Dans ce cas, le rapport entre les matrices de covariance donne l'importance des équations les unes par rapport aux autres. Une bonne modélisation du problème est nécessaire dans tous les cas pour avoir des estimées optimales.

Notre but est de réaliser une loi de pilotage vérifiant des contraintes, ainsi toutes les équations insérées seront déterministes. Les méthodes de résolution par moindres carrés récursifs [Bedrossian 87] ou filtre de Kalman permettent de trouver l'optimal entre des équations modélisant le système. Si les moindres carrés récursifs suffiraient a priori car n'ayant pas de mesures, l'hypothèse gaussienne ne s'applique pas, notre cas étant déterministe, l'ajout possible de contraintes dynamiques ou de modélisation dynamique du système nous pousse à utiliser le filtre de Kalman. Il est en outre facile d'ajouter des équations au sein de cet algorithme. L'algorithme de résolution du filtre de Kalman a déjà été testé de nombreuses fois

dans les satellites et est donc calculable en temps réel par les calculateurs embarqués. De plus, en cas de pannes, la structure du filtre de Kalman peut être conservée et seuls les coefficients voire certaines équations modifiés.

Utiliser la formulation du filtre de Kalman amène une dynamique dans la loi de pilotage avec la mise à jour de la matrice \mathbf{P} . Le processus devient donc une allocation **dynamique** (terme utilisé en robotique), contrairement à des méthodes de type Moore-Penrose qui n'ont pas de dynamique propre. Comme expliqué par L. Zaccarian dans [Zaccarian 09], avoir une allocation dynamique permet de choisir la rapidité de cette dynamique, d'être robuste aux perturbations et d'ajouter des techniques anti-windup pour contrer les saturations si nécessaires. En revanche, le réglage de la loi de pilotage devient plus complexe.

Pour rajouter la formulation présentée section 6.1.4 dans la loi de pilotage, il suffit d'ajouter $\Delta\sigma$ et $\Delta^2\sigma$ parmi les variables estimées, ainsi qu'une équation contraignant les relations entre $\Delta^2\sigma$ et $\Delta\sigma$. Néanmoins cette relation est non-linéaire, c'est pourquoi nous allons considérer le **filtre de Kalman étendu (EKF)** [Kalman 61] qui permet d'intégrer des équations non-linéaires. L'inconvénient de l'EKF par rapport au filtre de Kalman linéaire est que la convergence globale du filtre vers l'optimal n'est plus garantie sous les mêmes conditions. En effet, pour l'EKF, une linéarisation est réalisée autour de l'estimée courante et la convergence n'est assurée que dans un rayon proche de l'état initial, sous certaines conditions [Song 95] comme une bonne modélisation du système. L'étude de la convergence de l'EKF est réalisée dans la section 6.3. Dans cette partie, on s'assurera de la convergence de l'EKF, et en prenant des conditions sur les matrices de gain \mathbf{R} et \mathbf{Q} pour que le filtre reste convergent. Cette approche se retrouve dans le papier [Boutayeb 97] qui analyse et utilise les résultats de convergence de l'EKF pour les systèmes déterministes discrets. Les méthodes des moindres carrés récursifs possèdent aussi une extension non-linéaire utilisée par exemple dans le traitement d'images [Carlotto 96] avec une linéarisation, et donc des preuves de stabilité similaires.

Aussi, plusieurs minima locaux peuvent exister dans le cas d'une minimisation non-linéaire, et l'on ne peut pas garantir de converger vers le minimum global.

La dualité estimation/commande montrée par R. E. Kalman a mené à la commande LQ (Linear Quadratic Regulator) [Kalman 60], duale du filtre de Kalman. Ainsi, utiliser le filtre de Kalman avec des équations déterministes se rapproche fortement de la réalisation d'un régulateur de type LQ qui cherche à minimiser le critère :

$$r = \int_{t=0}^{\infty} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t))dt$$

à partir d'un système stabilisable $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$. E. Todorov dans l'article [Todorov 08] démontre la dualité entre des systèmes non-linéaires stochastiques ou déterministes et des processus d'estimation. La dualité est réalisée en reliant les coûts exponentiels aux probabilités, via des problèmes de décision de Markov. La conclusion de cet article est qu'il est possible d'utiliser les algorithmes d'estimation en commande et vice-versa. Néanmoins, le filtre de Kalman est privilégié dans ce manuscrit puisque le passage à la formulation non-linéaire est moins complexe que dans le cas de la commande LQ. L'algorithme d'estimation a été uti-

lisé pour la commande, tout en vérifiant les conditions de stabilité. Connaissant la dualité commande/estimation, nous sommes restés sur la formulation estimation EKF non-linéaire, n'ayant pas d'équivalence nommée en commande à notre connaissance.

Ainsi, la structure de l'**EKF** a été choisie pour son implémentation possible dans les calculateurs spatiaux et sa facilité à intégrer des contraintes et à pondérer les équations en fonction de leur importance. Différents types d'équations (dynamiques ou non) pourront être intégrées. Néanmoins, il faudra s'assurer de la convergence du filtre dans le cas non-linéaire.

6.2.2 Présentation du principe

Nous proposons donc d'utiliser la structure du filtre de Kalman étendu (EKF) pour résoudre le problème d'allocation, ce qui est novateur d'après les connaissances des auteurs. Habituellement utilisé pour estimer de manière optimale des états du système d'après des mesures et des modèles d'évolution, sous perturbations de type bruits blancs gaussiens ou d'équations déterministes [Kalman 61], il est ici intégré dans l'allicateur pour d'autres desseins. En effet, nous utilisons sa structure sous forme de modèle de prédiction - recalage des mesures afin de trouver la commande optimale qui vérifie différents critères, comme expliqué dans l'article [Evain 16] et le brevet [Evain 15].

Ici, toutes les équations sont déterministes, les matrices de covariance associées donnent donc le poids relatif des équations les unes par rapport aux autres.

Avec cette structure, rajouter une contrainte revient à rajouter une équation dans les modèles intégrés, ce qui est donc simple, à partir du moment où l'on peut la modéliser sous la forme d'une équation. Ensuite, une optimisation (via l'algorithme de résolution) permet de donner la valeur optimale de la variable recherchée, en fonction de l'importance des différentes équations insérées. De plus, cette structure est générique et donc peut être utilisée a priori pour différents types de systèmes mécaniques sur-actionnés tels que les bras robotiques manipulateurs.

6.2.3 Rappels sur le filtre de Kalman étendu

Nous nous sommes orientés vers une formulation discrète du problème afin de pouvoir dès à présent intégrer le côté discret de l'implémentation à bord. Néanmoins, une formulation en continu peut être réalisée de manière identique puisque la matrice \mathbf{M} définie précédemment est retrouvée en dérivant deux fois l'équation du moment cinétique de la grappe.

Un **filtre de Kalman** est un estimateur optimal qui tient compte d'un modèle d'évolution du système, et de mesures liées aux inconnues à estimer. Ici, nous calculons la commande qui vérifie le problème d'optimisation constitué des équations de la mécanique générale et tient compte des contraintes insérer. On doit donc créer un filtre de Kalman qui contient une représentation la plus fidèle possible des contraintes. Etant donné que des équations sont

non-linéaires, on utilise le **filtre de Kalman étendu**.

La solution du filtre de Kalman est équivalente à une résolution par moindres carrés d'une minimisation d'un critère quadratique [Kalman 61] défini dans l'équation (6.17), qui tient compte de deux "distances", l'une entre nos estimées et l'évolution du modèle, et l'autre sur nos mesures. Chacune des deux "distances" est pondérée, en fonction de la confiance que l'on donne au modèle de prédiction ou aux mesures. L'utilisateur du filtre de Kalman étendu doit donc choisir deux matrices de covariance correspondant aux erreurs de modélisation \mathbf{Q} et aux erreurs de mesure \mathbf{R} .

Comme le filtre de Kalman étendu est un estimateur local, linéarisant autour de l'estimée courante, définissons les matrices linéarisées des équations d'évolution et de mesure. Soient \mathbf{f} la fonction correspondant aux équations du modèle (6.20) et \mathbf{g} celle correspondant aux équations de mesures (6.21). On notera $\hat{\mathbf{v}}$ grandeurs estimées en interne au filtre de Kalman et \mathbf{m} aux mesures en entrées de l'EKF. On peut aussi supposer que le système est commandé via une grandeur \mathbf{u} .

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{v}}(k), \mathbf{u}(k)) + \boldsymbol{\epsilon}_v \quad (6.20)$$

$$\mathbf{m}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{v}(k)) + \boldsymbol{\epsilon}_m \quad (6.21)$$

$\boldsymbol{\epsilon}_v$ correspondent aux erreurs de prédiction et $\boldsymbol{\epsilon}_m$ aux erreurs de mesure. Les matrices linéarisées de \mathbf{f} et \mathbf{g} sont les jacobiniennes de ces fonctions par rapport à \mathbf{v} et sont nommées respectivement $\mathbf{F}(k) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(k)$ et $\mathbf{C}(k) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}(k)$.

On définit ensuite \mathbf{P} la matrice de covariance des erreurs d'estimation de l'EKF. Les équations du filtre de Kalman sont tirées de [Alazard 06] et sont composées des équations de prédiction (6.22) et des équations de recalage par rapport aux mesures (6.24). Elles fonctionnent de manière itérative.

$$\mathbf{P}(k+1|k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{F}(k)^T + \mathbf{Q}(k) \quad (6.22)$$

Le gain de Kalman \mathbf{K} vaut (6.23).

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{C}(k)^T(\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{C}(k)^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (6.23)$$

Puis la covariance \mathbf{P} est remise à jour via l'équation (6.24).

$$\mathbf{P}(k+1) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k))\mathbf{P}(k+1|k) \quad (6.24)$$

L'équation d'évolution finale de \mathbf{v} est alors donnée par (6.25).

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{v}}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{K}(k)(\mathbf{m}(k) - \mathbf{g}(\mathbf{f}(\hat{\mathbf{v}}(k), \mathbf{u}(k)))) \quad (6.25)$$

Le schéma-bloc correspondant à l'implémentation de l'EKF est montré sur l'exemple en fin de chapitre, en Fig. 6.14.

Quand \mathbf{Q} diminue, tous les autres paramètres ne variant pas, \mathbf{K} diminue et donc la cor-

rection des erreurs de mesure est moindre, ce qui est logique car si la covariance des erreurs de modèle est plus petite, cela signifie que l'on a plus confiance dans le modèle et donc qu'il doit avoir un poids plus important. De même, si \mathbf{R} diminue, \mathbf{K} augmente donc on a un effet plus important de la correction par rapport au modèle.

Ainsi, dans le cas où certaines équations représentant des contraintes doivent être mises en avant par rapport à d'autres, il suffit de diminuer leurs covariances, ce qui augmentera leur poids. Néanmoins, le filtre de Kalman étendu étant une linéarisation autour de l'estimée courante, la convergence vers l'état réel (sous réserve de bonne modélisation du système) n'est pas garantie comme elle l'est dans le cas linéaire. Il faut donc veiller à garder les matrices de covariance dans un intervalle qui sera fixé par les preuves de stabilité (voir section 6.3).

Ainsi, un utilisateur d'un filtre de Kalman doit, après avoir défini ses modèles de prédiction et de mesure, donner les valeurs des covariances \mathbf{Q} et \mathbf{R} . L'autre réglage qu'il doit apporter est l'initialisation des variables estimées avec \mathbf{v}_0 et la covariance initiale des erreurs d'estimation \mathbf{P}_0 .

6.2.4 Intégration d'équations de contraintes d'égalité et d'inégalité

Le filtre de Kalman permet d'intégrer des équations de prédiction et de mesure. Dans notre cas, nous allons majoritairement utiliser des équations déterministes qui représentent le comportement du système ainsi que des contraintes par rapport aux attentes que l'utilisateur peut avoir sur la loi de pilotage. Rajouter des contraintes d'égalité peut être réalisé en les intégrant directement dans les équations de mesure tel que dans l'article [Geeter 97]. Les principaux réglages à effectuer sont le choix de l'activation de ces contraintes et la gestion de leur importance. Diminuer leur covariance va augmenter leur impact sur le système. Dans l'article [Geeter 97], les contraintes dures sont considérées à covariance nulle mais comme annoncé dans l'article [Simon 02], cela peut poser des problèmes de singularités. Rajouter une équation par contrainte peut aussi augmenter la taille des matrices à inverser. C'est pourquoi les auteurs de l'article [Simon 02] préfèrent considérer l'ajout de contraintes comme un problème quadratique à résoudre avec projection des estimées sur ces contraintes. Cette méthode a l'inconvénient de rajouter une étape au filtre de Kalman. Dans notre cas, les équations sont donc directement ajoutées dans le filtre de Kalman. Néanmoins, afin d'assurer la propriété de non-singularité des contraintes, les résultats de stabilité sont utilisés afin de fixer les bornes des covariances des contraintes. Dans l'article [Babacan 08], les preuves de stabilité pour un EKF déterministe contraint sont présentées, et de simples modifications dans l'algorithme peuvent améliorer sa convergence. Néanmoins, la vérification de la compatibilité des contraintes est un problème important [Rubrecht 12] qui n'est pas traité en profondeur ici, de part l'utilisation de l'EKF. En effet, la compatibilité des contraintes n'est pas vérifiée en temps réel puisque certaines sont difficilement vérifiables ou modélisées non précisément, mais l'EKF va cependant donner le meilleur compromis entre toutes les contraintes en fonction des poids mis sur celles-ci via les covariances. De plus, les contraintes d'inégalité (typiquement les saturations) sont difficiles à intégrer dans les filtres de Kalman.

Ainsi, par exemple l'article [Simon 06] étudie l'ajout de contraintes inégalités dans le filtre de Kalman. Pour ce faire, le problème est transformé entre un filtre de Kalman non contraint puis un problème de minimisation quadratique utilisant les méthodes d'active-set. Cette méthode permet d'améliorer l'estimation mais augmente fortement la quantité de calculs. Ainsi, dans notre application, nous allons les transformer en contraintes égalités donc la modélisation sera dégradée, mais il est possible d'envisager de rajouter cette minimisation quadratique dans l'algorithme.

Aussi, on peut noter que faire varier les covariances en fonction de l'application de nos contraintes rapproche la loi d'un EKF adaptatif décrit par exemple dans l'article [Sasiadek 00].

La structure même du filtre de Kalman permet de pouvoir intégrer de manière flexible et rapide des équations supplémentaires intégrant des contraintes, ou pouvant modéliser tout type de système, mais si des stratégies d'évitement de singularités ne sont pas mises en place, le filtre ne pourra pas donner une sortie qui est sur une trajectoire permettant cet évitement. En effet, notre filtre de Kalman qui sera implémenté pour estimer les variables optimales ne donnera un résultat cohérent que si ces contraintes sont bien modélisées. Ainsi, les résultats de stabilité prouveront que les estimées du filtre de Kalman tendront vers une valeur optimale, mais qui ne représente ce que l'on souhaite réellement seulement si notre modélisation est correcte.

De plus, dans le cas des singularités, la section 6.3 montre que la perte de rang de la matrice \mathbf{J} peut impacter la stabilité de l'EKF, c'est aussi cohérent avec la nouvelle formulation de l'équation cinématique développée en 6.1.4.

6.3 Preuves de convergence de cette structure de loi de pilotage

Le filtre de Kalman étendu traitant les systèmes non-linéaires, mais linéarisés au point de fonctionnement, nécessite une attention particulière au niveau de sa convergence. De part sa linéarisation au point de fonctionnement, cette convergence est locale et dépend donc de la validité de cette linéarisation ainsi que la distance à l'optimum local. Des conditions de convergence ont été définies dans le papier [Song 95] et sont utilisées ici. Tout d'abord, un résumé de différents résultats de stabilité d'allocateurs sont présentés dans la prochaine sous-section, puis les résultats utilisés dans la suite du mémoire.

6.3.1 Bibliographie : résultats de stabilité dans les lois de pilotage

La stabilité du système et la convergence de l'allocation sont des critères importants afin de savoir si l'algorithme peut diverger ou non. Certaines méthodes se basent d'ailleurs principalement sur ce point pour prouver leur pertinence. Dans notre cas, une dynamique est rajoutée via la mise à jour dynamique de la matrice \mathbf{P} , ainsi il est important de s'assurer de

sa stabilité et de la convergence du filtre vers l'optimal même en cas de linéarisation.

Un premier résultat utilisant simplement la transposée de la jacobienne \mathbf{J}^T est souvent utilisé avec une boucle de retour du type : $\dot{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{y}}_d + \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}$ avec $\mathbf{\Lambda}$ une matrice de correction et $\mathbf{e} = \mathbf{y}_d - \mathbf{y}_m$ l'erreur de suivi de trajectoire, avec les notations de la Fig. 6.1.

[Siciliano 90] et [Sciavicco 88] prouvent en utilisant les théorèmes de Lyapunov la stabilité de la boucle fermée, avec une loi du type (6.26).

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{J}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} \quad (6.26)$$

Les erreurs de suivi de consigne restent limitées et il n'y a pas d'erreur en régime permanent. Dans l'article [Johansen 04], une étude théorique démontre une convergence exponentielle globale et uniforme, et uniformément bornée, d'une boucle de commande contenant un allocateur dynamique asymptotiquement optimal et un contrôleur exponentiellement stable. L'algorithme qui définit l'allocateur dynamique, valable pour une classe de systèmes non-linéaires, est présenté dans [Johansen 04].

La preuve suppose que le système ne traverse pas de singularités. Dans l'allocateur, un critère est défini, qui peut être tel que l'on maximise le déterminant de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ par exemple, ce qui minimise le risque de se retrouver dans une singularité. Un exemple de critère qui permet d'éviter les pertes de contrôlabilité est donné dans l'article [Johansen 04] qui peut cependant faire perdre de la précision au système. De plus, il n'est pas garanti que l'on puisse sortir des singularités et la formulation de l'algorithme qui permet de trouver la loi de pilotage utilise des multiplicateurs de Lagrange, donc nécessite de dériver le critère, ce qui peut devenir compliqué en présence de déterminants ou d'autres contraintes.

L'allocation [Zaccarian 09] est supposée contenir une dynamique d'ordre 1. Deux matrices de gain sont alors à définir. Selon des conditions de positivités sur les matrices, des résultats de stabilité sont trouvés. Dans cette étude [Zaccarian 09], les saturations sont ensuite ajoutées, et des techniques anti-windup aussi. Des preuves de stabilité globale sont avancées.

Ces différents résultats de stabilité sont importants pour évaluer la pertinence des méthodes proposées, cependant les deux dernières sont plus théoriques et moins orientées vers l'évitement de singularités. On peut aussi mentionner l'étude de stabilité en boucle fermée effectuée par [Sanchez 15] pour des manipulateurs aériens, utilisant la SRI et une action intégrale.

6.3.2 Définition

Définissons le principe de stabilité utilisé dans notre problème, en se basant sur le cours [Arzelier 05]. Un état d'équilibre \mathbf{x}_e est dit **stable** au sens de Lyapunov si $\forall t \geq 0$,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e| < \alpha \Rightarrow |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e| < \epsilon$$

Un point d'équilibre est dit **asymptotiquement stable** au sens de Lyapunov s'il est stable et si :

$$\exists \alpha > 0, | \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e | < \alpha \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$$

Pour obtenir la stabilité asymptotique uniforme, il faut pouvoir trouver un rayon r tel que si $| \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e | \leq r$, alors quel que soit le temps initial t_0 , le système est stable asymptotiquement. La preuve que nous allons utiliser donne un résultat de stabilité asymptotique autour du point zéro de l'EKF.

6.3.3 Hypothèses et théorème utilisé

Si l'EKF est un observateur local asymptotique uniforme, alors les valeurs estimées tendront vers les valeurs optimales et la loi de pilotage sera convergente (convergera vers la loi optimale) à condition que les équations qui décrivent l'EKF représentent bien le problème posé. En effet, comme dans notre cas seules des équations déterministes le composent, le résultat donnera la solution optimale au sens des moindres carrés pondérés par une dynamique provenant de la recherche de l'optimal. Le fait de linéariser le filtre de Kalman impose de nous pencher sur l'étude de la convergence et de ses conditions.

L'article [Song 95] donne une preuve de convergence asymptotique uniforme de l'erreur d'estimation des inconnues, que nous allons utiliser.

Différentes hypothèses sont nécessaires pour prouver cette stabilité². On pose :

$$r \leq \| \mathbf{R} \| \leq \bar{r} \quad (6.27)$$

$$q \leq \| \mathbf{Q} \| \leq \bar{q} \quad (6.28)$$

On appelle Hyp. 1 les hypothèses suivantes [Song 95] avec les notations présentées précédemment :

- a) *Le système linéarisé est uniformément observable le long de la trajectoire de l'EKF, soit $(\mathbf{F}_k, \mathbf{C}_k)$ vérifient la condition d'observabilité uniforme (voir section 6.3.4 pour plus de précisions).*
- b) *\mathbf{F} est inversible à chaque pas de temps*
- c) *Les normes suivantes sont bornées : $\mathbf{F}, \mathbf{F}^{-1}, \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}, \| \| \mathbf{D}^2 \mathbf{f} \| \|, \| \| \mathbf{D}^2 \mathbf{g} \| \|$. Voir la section Nomenclature pour la définition mathématique de $\mathbf{D}^2 \mathbf{f}$ et $\mathbf{D}^2 \mathbf{g}$.*
- d) *Définissons la fonction : $\mathbf{m}(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = \mathbf{g}(\mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{z}) - \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{v}}(\mathbf{v})(\mathbf{v} - \mathbf{z})$.
Il existe un réel m tel que*

$$| \mathbf{m}(\mathbf{v}, \mathbf{z}) | \leq m \| \| \mathbf{D}^2 \mathbf{g} \| \| | \mathbf{v} - \mathbf{z} |^2$$

L'hypothèse a) permet de borner uniformément l'erreur de covariance (donc \mathbf{P}) tant que l'erreur d'estimation reste petite [Song 95]. Dans la preuve de stabilité, la fonction \mathbf{m} et

2. Attention dans l'article [Song 95], les matrices \mathbf{R} et \mathbf{N} sont les "racines carrées" des \mathbf{R} et \mathbf{Q} présentés précédemment dans ce rapport. Ici, tout est présenté avec les notations de ce mémoire.

en particulier m borne les non-linéarités issues des équations de mesure. Pour énoncer le théorème, on pose comme dans l'article [Song 95] les fonctions suivantes :

- L'erreur d'estimation : $\mathbf{e}_k = \mathbf{v}_k - \bar{\mathbf{v}}_k$ différence entre la valeur réelle et l'estimée a priori,
- La fonction de Lyapunov utilisée pour la preuve : $V(k, e_k) = \mathbf{e}_k^T \bar{\mathbf{P}}_k^{-1} \mathbf{e}_k$ avec $\bar{\mathbf{P}}_k$ la covariance de l'erreur a priori.
- Le réel q tel que $\|\bar{\mathbf{P}}\| \leq q$
- Le réel p tel que $\|\bar{\mathbf{P}}^{-1}\| \leq p$
- Le réel δ tel que $\|\mathbf{K}\| \leq \delta$
- Le réel r tel que $\|(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{F}^T \mathbf{Q} \mathbf{F})^{-1}\| \leq r$
- la fonction ϕ définie par :

$$\phi(\|\mathbf{e}_k\|, X, Y) = \delta m Y \|\mathbf{F}\| + \frac{1}{2} X (pq + \delta m Y \|\mathbf{e}_k\|)^2 \quad (6.29)$$

- la fonction ψ définie par :

$$\psi(\|\mathbf{e}_k\|, X, Y) = -\frac{1}{r q^2} + p \|\mathbf{e}_k\| \phi(\|\mathbf{e}_k\|, X, Y) (2pq \|\mathbf{F}\| + \phi(\|\mathbf{e}_k\|, X, Y) \|\mathbf{e}_k\|) \quad (6.30)$$

Le théorème de [Song 95] indique que pour un système non-linéaire avec un filtre de Kalman étendu associé, si Hyp.1 est vérifiée et s'il existe $\|\mathbf{e}_0\|$, $\|\mathbf{D}^2 \mathbf{f}\|$ et $\|\mathbf{D}^2 \mathbf{g}\|$ et un $\gamma > 0$ tels que :

$$\psi(q^{0.5} V^{0.5}(0, \mathbf{e}_0), \|\mathbf{D}^2 \mathbf{f}\|, \|\mathbf{D}^2 \mathbf{g}\|) \leq -\gamma \quad (6.31)$$

alors le filtre de Kalman étendu pour le système réel est un observateur local, uniforme et asymptotique.

C'est ce théorème qui sert de preuve de convergence. La preuve du théorème est donnée dans l'article [Song 95]. Cependant, il n'est pas facilement utilisable tel quel car les relations sont non-linéaires. Ainsi, pour vérifier cette preuve de convergence, une optimisation génétique est utilisée pour, tout en s'assurant de la vérification de cette inégalité, optimiser certains aspects de la loi de pilotage. Ce travail est présenté dans l'article [Evain 16] présenté à l'American Control Conference en juillet 2016, et est aussi une partie du brevet déposé.

Remarque : dans l'article [Song 95], le théorème est prouvé pour un système autonome. Néanmoins, rajouter une entrée (comme mentionné dans cet article) peut être facilement intégré dans la preuve, et en particulier si l'entrée est indépendante des variables \mathbf{v} de l'EKF et parfaitement connue. La même preuve s'applique puisque dans l'erreur d'estimation (soustraction entre l'état réel et l'état estimé), les entrées du système réel et de l'estimée s'annulent donc et le déroulement de la preuve reste inchangé.

6.3.4 Observabilité uniforme de l'EKF

La condition de Kalman [Kalman 60] pour qu'un système linéaire soit observable est que le rang de la matrice $\mathbf{K}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CF} \dots \\ \mathbf{CF}^{n-1} \end{bmatrix}$ soit égal au nombre d'états N du système, avec \mathbf{F} la matrice d'état et \mathbf{C} la matrice d'observation. Cela revient à dire qu'il n'a pas de valeur singulière nulle, et donc qu'on peut l'écrire sous la forme (6.32) avec β_1 et β_2 réels positifs. On rappelle que l'inégalité matricielle est définie dans la section Nomenclature.

$$\beta_1 \mathbf{I}_{N \times N} \leq \mathbf{K}_O^T \mathbf{K}_O \leq \beta_2 \mathbf{I}_{N \times N} \quad (6.32)$$

On souhaite étendre cette condition d'observabilité à l'EKF pour en déduire des résultats sur le système non-linéaire et en particulier vérifier Hyp. 1. Considérons pour les définitions un système non-linéaire de la forme (6.33).

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{v}_k) \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{g}(\mathbf{v}_k) \end{cases} \quad (6.33)$$

Ce système satisfait la condition du rang d'observabilité en \mathbf{v}_0 si le rang de la fonction

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}) = (\mathbf{g}(\mathbf{v}), \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{v})), \mathbf{g}(\mathbf{f}^2(\mathbf{v})), \dots, \mathbf{g}(\mathbf{f}^{N-1}(\mathbf{v})))$$

est égal à N en \mathbf{v}_0 [Song 95]. Le rang de \mathbf{g} en \mathbf{v}_0 est égal au rang de sa jacobienne en \mathbf{v}_0 , donc il faut que (6.34) soit de rang N .

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}_0) \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}_1) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}_0) \\ \dots \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}_{N-1}) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}_{N-2}) \dots \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}_0) \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

De même un système peut vérifier la condition du rang d'observabilité en tout \mathbf{v} d'un domaine.

Maintenant, pour relier ceci à l'EKF, on part du même postulat que l'article [Song 95] : $\mathbf{K}_0 = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}}$ si les estimées sont égales aux valeurs réelles. Par continuité, si le système non-linéaire estimé par l'EKF vérifie la condition du rang d'observabilité, alors son EKF associé satisfait la condition (6.32) quand les estimés sont assez proches de l'état réel.

On peut alors citer la proposition suivante proposée et démontrée dans l'article [Song 95] et l'utiliser : si le système non-linéaire lié à l'EKF vérifie la condition du rang d'observabilité sur un sous-ensemble compact $K \subset R^N$ et si les estimées de l'EKF sont assez proches de l'état réel, alors le système linéarisé le long de la trajectoire est uniformément observable, i.e. il existe γ_1 et γ_2 réels, tels que $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 < \infty$ et $\delta_1 > 0$ tels que

$$\gamma_1 \mathbf{I}_{N \times N} \leq \mathbf{K}_0^T(\bar{\mathbf{v}}_{n-1}, \hat{\mathbf{v}}_{n-2}) \mathbf{K}_0(\bar{\mathbf{v}}_{n-1}, \hat{\mathbf{v}}_{n-2}) \leq \gamma_2 \mathbf{I}_{N \times N} \quad (6.35)$$

avec $\bar{\mathbf{v}}_{n-1} = (\bar{\mathbf{v}}_0, \dots, \bar{\mathbf{v}}_{n-1})$ l'ensemble des estimées a priori et $\hat{\mathbf{v}}_{n-2} = (\hat{\mathbf{v}}_0, \dots, \hat{\mathbf{v}}_{n-2})$ l'ensemble des estimées a posteriori, quel que soit $\bar{\mathbf{v}}_l \in K$ tel que $\|\bar{\mathbf{v}}_l - \mathbf{v}\| \leq \delta_1$ pour $l = 0 \dots n-1$, et de même pour $\hat{\mathbf{v}}_l$ et \mathbf{v}_0 .

En fonction de l'implémentation, la matrice \mathbf{K}_0 peut être de rang variable. **Dans les exemples présentés par la suite, elle est de rang plein, ainsi on suppose cette propriété vraie.** Il est tout à fait possible de ne pas supposer cette propriété, mais afin de simplifier le propos, cette hypothèse est faite. On peut donc relaxer la propriété précédente qui permet de déterminer δ_1 (à partir de la preuve de cette propriété) en ne tenant compte que des n_C (nombre de lignes de \mathbf{C}) premières lignes de \mathbf{K}_0 car on sait qu'elle est observable dès le pas $k = 1$ et donc que les inégalités (6.35) peuvent s'exprimer en ne tenant compte que des n_C premières lignes. On obtient alors :

$$\gamma_1 \mathbf{I}_{N \times N} \leq \mathbf{C}^T \mathbf{C} \leq \gamma_2 \mathbf{I}_{N \times N}$$

Dans la preuve de cette propriété [Song 95], comme on travaille sur un espace compact, alors la fonction $\mathbf{K}_0^T \mathbf{K}_0$ est uniformément continue. Ainsi, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|\mathbf{K}_0^T(\bar{\mathbf{v}}_{n-1}, \hat{\mathbf{v}}_{n-2}) \mathbf{K}_0(\bar{\mathbf{v}}_{n-1}, \hat{\mathbf{v}}_{n-2}) - \mathbf{K}_0^T(\mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_{n-2}) \mathbf{K}_0(\mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_{n-2})\| \leq \epsilon$$

si $\|(\bar{\mathbf{v}}_{n-1}, \hat{\mathbf{v}}_{n-2}) - (\mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_{n-2})\| \leq \delta$. Dans cette preuve, en prenant $\epsilon = \alpha_1/2$ avec $\alpha_1 = \min(\text{eig}(\mathbf{K}_0^T \mathbf{K}_0))$ (la valeur propre minimale), et δ_0 le δ correspondant par continuité, alors :

$$\frac{\alpha_1}{2} \mathbf{I}_{N \times N} \leq \mathbf{K}_0^T(\bar{\mathbf{v}}_{n-1}, \hat{\mathbf{v}}_{n-2}) \mathbf{K}_0(\bar{\mathbf{v}}_{n-1}, \hat{\mathbf{v}}_{n-2}) \leq (\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{2}) \mathbf{I}_{N \times N}$$

quand $\|(\bar{\mathbf{v}}_{n-1}, \hat{\mathbf{v}}_{n-2}) - (\mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_{n-2})\| \leq \delta_0$.

Si l'on simplifie maintenant cette preuve en considérant simplement $\mathbf{K}_0 = \mathbf{C}$, alors on peut définir le δ_1 acceptable pour considérer que l'on est "assez proche" de la valeur réelle. En cherchant à trouver à quelles conditions on a :

$$\|\mathbf{C}^T(\bar{\mathbf{v}}_{n-1}, \hat{\mathbf{v}}_{n-2}) \mathbf{C}(\bar{\mathbf{v}}_{n-1}, \hat{\mathbf{v}}_{n-2}) - \mathbf{C}^T(\mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_{n-2}) \mathbf{C}(\mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_{n-2})\| \leq \epsilon = \alpha_1/2$$

on peut trouver une condition qui permet de donner une limite sur l'erreur d'estimation sur les v_{1i} , et en supposant cette condition vérifiée, on peut utiliser les outils du linéaire. Le δ_1 correspond à l'erreur maximale estimée acceptable par l'utilisateur, et en particulier à l'erreur initiale maximale.

On a donc vu que notre système était uniformément observable, et pouvait être étudié comme un système linéaire, ainsi on va utiliser les résultats de Deyst et Price [Deyst 68]. Cet article déduit les bornes pour la covariance de l'erreur d'estimation.

$$p\mathbf{I} \leq \mathbf{P} \leq \bar{p}\mathbf{I} \tag{6.36}$$

Le théorème est le suivant [Deyst 68] : s'il existe des nombres α_1 , α_2 , β_1 et β_2 tels que les

conditions suivantes sont vérifiées pour un nombre fini $0 \leq M$ et pour tout k tel que $M \leq k$:

$$\alpha_2 \mathbf{I} \leq \sum_{i=k-M}^{k-1} \Phi(k, i+1) \mathbf{Q} \Phi^T(k, i+1) \leq \alpha_1 \mathbf{I} \quad (6.37)$$

$$\beta_1 \mathbf{I} \leq \sum_{i=k-M}^k \Phi(i, k) \mathbf{C}_i^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}_i \Phi^T(i, k) \leq \beta_2 \mathbf{I} \quad (6.38)$$

avec :

$$\Phi(k, i) = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{F}_{k-2} \dots \mathbf{F}_i \quad (6.39)$$

Alors :

$$\underline{p} = \frac{1}{\beta_2 + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (6.40)$$

$$\bar{p} = \alpha_1 + \frac{1}{\beta_1} \quad (6.41)$$

On prend $M = 1$ car on sait que notre système est observable dès le premier pas de temps. On utilise les valeurs singulières des différentes matrices afin de conclure sur les valeurs des bornes de \mathbf{P} .

Ici, si nous avons déjà considéré toutes les valeurs propres possibles de (6.37) et (6.38), en fonction des domaines de variation, alors il n'y a pas besoin de rajouter l'erreur d'estimation qui peut avoir été faite, nous sommes déjà dans le pire cas.

On a ainsi tous les outils pour utiliser la preuve. Il ne reste à définir pour l'utilisateur que les matrices \mathbf{R} , \mathbf{Q} , \mathbf{e}_0 l'erreur maximale d'initialisation de l'EKF et \mathbf{P}_0 pour ensuite s'assurer que les conditions de stabilité sont vérifiées. Des implémentations seront présentées dans les sections 6.7 et 7.4 pour montrer l'utilisation de ces conditions.

6.3.5 Réglage de l'allocateur avec ces conditions

Les conditions de convergence doivent être vérifiées, et en résumant les sous-parties précédentes, en plus des Hyp. 1, il faut que la condition (6.31) soit vérifiée. Dans notre cas, comme dans l'article [Boutayeb 97], nous allons régler les matrices de covariance associées à nos équations déterministes en s'assurant que les conditions de convergence soient vérifiées. Néanmoins, afin de s'assurer de pouvoir faire varier le poids des équations modélisant des contraintes dans une grande plage de variation (pour pouvoir les activer plus ou moins en fonction de l'état courant du système par exemple), une optimisation génétique a été implémentée. Ce choix est motivé par le fait que la relation (6.31) soit non-linéaire et d'où l'on ne peut donc pas déduire les valeurs singulières des différentes matrices de covariance directement. En outre, certaines caractéristiques pourront être évaluées durant l'optimisation, par exemple la recherche de réglages qui minimisent des erreurs de couple de la grappe (création de couples dans des directions non souhaitées) via des simulations. L'optimisation génétique

MOGA II présentée dans l'article [Fonseca 93] permet d'intégrer ces calculs.

Les algorithmes génétiques sont des méthodes qui permettent d'obtenir une solution approchée d'un problème d'optimisation, dont la théorie se base sur la sélection naturelle. Un premier "pool" (ensemble) de solutions potentielles est choisi aléatoirement, les individus de ce pool sont ensuite notés par une fonction d'évaluation. Les meilleurs individus ont une note faible. Une partie de la population est gardée (plus un individu a une note basse, plus il a une grande probabilité d'être sélectionné). On remplit le reste du nouveau pool par des croisements et des mutations au sein de la population sélectionnée afin d'ajouter de la diversité (nouvelles pistes potentielles d'amélioration) et de diminuer les notes de la fonction d'évaluation. C'est donc un algorithme récursif qui s'arrête soit à un certain nombre d'itérations, soit si un critère est vérifié et l'optimal est trouvé. Dans notre cas, on l'arrête après un certain nombre de populations évaluées. En entrée de cette optimisation, les intervalles acceptables des valeurs propres des matrices \mathbf{R} et \mathbf{Q} sont données par l'utilisateur. Le but est de trouver les plages de variation maximales notamment telles que l'erreur initiale de l'EKF puisse être la plus grande possible afin de s'assurer de la convergence de l'algorithme même dans les pires cas.

En sortie, l'algorithme propose un ensemble de solutions avec des performances associées vis-à-vis de plusieurs objectifs. Le code utilisé est issu d'un développement en interne de l'ONERA. Le paramétrage utilisé est celui qui a été conseillé par les développeurs. Dans ce code, la population initiale est tirée aléatoirement (tirage uniformément distribué) dans des intervalles de valeurs définis par l'utilisateur. On choisit aussi le nombre d'individus dans chaque population, et le nombre d'itérations (de populations créées). Plus ces nombres sont élevés, meilleures sont les probabilités d'avoir des bons résultats, mais plus les calculs sont importants. Tous ces calculs sont réalisés en amont de l'implémentation dans l'ordinateur de bord du satellite, seuls le résultat de l'optimisation y sera intégré. Le détail de ces optimisations est présenté dans le cas de notre grappe d'AGs dans le chapitre 7 et évoqué pour l'exemple des bras manipulateurs robotiques dans la section 6.7.

Néanmoins, ces résultats de stabilité restent dépendants de la modélisation du problème et en particulier des contraintes.

6.4 Comparaison avec d'autres lois de la littérature

Cette section présente de manière théorique les différences, avantages et inconvénients intrinsèques de la loi de pilotage présentée par rapport aux autres lois de la bibliographie.

6.4.1 Formulation et stabilité

Comparons tout d'abord la formulation par rapport à des lois dérivées de la pseudo-inverse. Les inconvénients par rapport aux autres formulations issues de la pseudo-inverse sont la plus grande quantité de calculs (mais toujours compatible avec l'ordinateur bord d'un

satellite), et la complexité de régler la loi de pilotage car les résultats de stabilité fournissent des expressions non-linéaires à résoudre pour les matrices de covariance. Les équations à intégrer au filtre doivent être définies aussi. En effet, une difficulté est de bien modéliser le système et obtenir autant d'équations représentant bien le système que nécessaire.

Les résultats de convergence qui existent déjà pour l'EKF peuvent être appliqués afin de régler les gains et rester optimal et convergent, ce qui existe peu parmi les méthodes proposées dans la littérature. Néanmoins, cette procédure est assez complexe et peut nécessiter d'utiliser des algorithmes de recherche. Cette procédure se fait cependant en amont de l'implémentation dans le satellite et une proposition a été effectuée en section 6.3.5. De plus, cette formulation a priori un peu plus complexe mais toujours calculable dans un ordinateur, présente certains avantages.

6.4.2 Résilience cas de panne et indépendante de la configuration de la grappe

Un autre avantage, sous réserve que les équations intégrées le vérifient aussi, est que la structure de la loi de pilotage n'est que peu modifiée en cas de panne d'actionneurs et est valable quelle que soit la configuration des actionneurs. En effet, seuls les gains ou potentiellement des équations y sont modifiés, ce qui simplifie les opérations à bord du satellite. De plus, la formulation cinématique est valable pour un grand nombre de systèmes et en particulier les manipulateurs robotiques et les grappes d'AGs pyramidales. A priori il n'y a pas de limitations intrinsèques imposées sur les capacités des actionneurs et sur la création des erreurs de sortie, ces critères devront être testés plutôt au niveau de l'implémentation car dépendants des équations insérées.

6.4.3 Gestion des contraintes

L'EKF permet plus de flexibilité que les méthodes où les contraintes sont ajoutées dans la matrice \mathbf{J} (voir section 4.2). En effet, comme la modélisation des contraintes peut être approximative, le fait de pouvoir jouer sur les poids des matrices de covariance dans le temps limite leur effet. De plus, la priorité peut être donnée à certaines contraintes plutôt qu'à d'autres dans certaines configurations. Ainsi, cette loi se rapproche des méthodes de priorisation des tâches (voir section 4.2). Néanmoins l'inconvénient principal est que les différentes contraintes ne sont a priori pas garanties théoriquement, en comparaison avec les méthodes d'optimisation sous contraintes qui permettent de les vérifier. En effet, les réglages permettent d'insister sur des contraintes et l'algorithme donne le meilleur compromis, mais sans garantie. Une manière d'en obtenir serait de réaliser un grand nombre de simulations, de type Monte-Carlo, afin de vérifier que les contraintes sont vérifiées comme désiré, par exemple lors du réglage du filtre. Cet inconvénient était prévisible car une modélisation permettant d'avoir des contraintes toujours vérifiées est parfois impossible, notamment avec les stratégies d'évitement de singularités. Ou alors, cela exigerait une planification de la trajectoire en angles de précession dans les instants suivants.

6.4.3.1 Implémentation temps réel

La formulation du problème sous forme d'optimisation sous contraintes se rapproche des formulations de la section 6.7, néanmoins la solution proposée (l'algorithme habituel de résolution d'un filtre de Kalman) peut être implémentée en temps réel dans un satellite, et donc donne une assurance sur la possible implantation dans les engins spatiaux. Il faut cependant faire attention à la taille des différentes matrices qui peut devenir élevée (typiquement, au moins de taille 12×12 si on intègre les deux variables $\Delta\sigma$ et $\Delta^2\sigma$) et plus difficilement manipulable par les processeurs spatiaux.

6.4.3.2 Passage singularités

Au niveau du passage des singularités, à notre connaissance, seul l'article [Yamada 14] utilise aussi le développement de Taylor à l'ordre deux pour concevoir une loi de pilotage des AGs. Cependant, la méthode proposée dans cet article [Yamada 14] pour estimer $\begin{bmatrix} \Delta\sigma \\ \frac{1}{2}\Delta^2\sigma \end{bmatrix}$ est coûteuse en calculs puisqu'il n'est pas analytiquement possible de la calculer. Elle demande une procédure itérative à chaque pas de temps, et est difficilement généralisable à un nombre plus important d'actionneurs ou d'autres systèmes puisque la résolution des équations peut devenir d'ordre très élevé. L'avantage est que la solution vérifie parfaitement les deux relations (6.15) et (6.16). Cependant, avec notre méthode, même si l'on obtient une solution plus approximative, les calculs sont plus rapides avec seulement une itération à chaque pas de temps (l'EKF). De plus, cette solution permet de s'assurer que les matrices de l'EKF gardent des rangs plein. Le fait de trouver une solution $\Delta\sigma$ qui vérifie la relation développée (6.15) est possible dans les cas où σ est non singulier ou quand le système est dans une singularité traversable. En effet dans le cas d'une singularité intraversable, il n'est pas possible de passer par le noyau de \mathbf{J} pour traverser cette singularité. Ainsi l'équation (6.15) n'a pas de solution physique et numériquement $\Delta^2\sigma$ peut devenir négatif. Dans ce cas, soit le système s'arrête, soit il commet une erreur pour passer cette singularité intraversable. Cette équation n'a pas intrinsèquement d'informations sur la nature des singularités à rencontrer et leur évitement peut se faire de manière plus ou moins efficace en fonction des réglages et des autres équations insérées, a priori sans preuve formelle de passage de singularités. C'est pourquoi une stratégie spécifique d'évitement pour les singularités intraversables a été développée section 5.2.2.3.

Dans la partie suivante, une procédure de génération de loi de commande en amont de cette loi de pilotage et adaptée à celle-ci en termes de temps de réponse et de découplage est présentée.

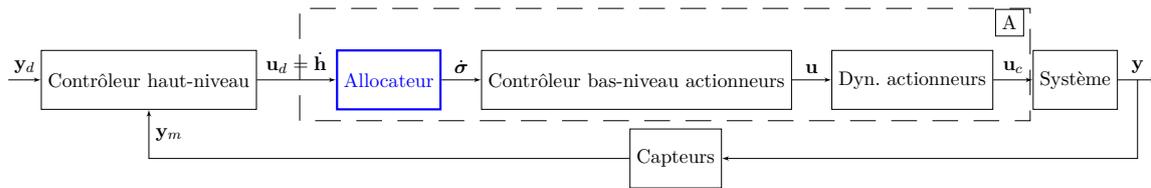


Figure 6.2 – Schéma-bloc d'une stratégie de contrôle habituelle d'un système sur-actionné.

6.5 Génération d'une loi de commande adaptée à la loi de pilotage

Un contrôleur haut-niveau est le plus souvent nécessaire pour réguler le système avec des performances désirées. Deux approches se distinguent dans la conception d'une loi de commande d'un système sur-actionné. La première consiste à considérer la dynamique boucle fermée et l'allocation en une seule étape en utilisant le contrôle optimal [Lewis 95]. Dans la seconde approche, le contrôleur haut-niveau et l'allocateur sont réglés séparément, chacun vérifiant leurs objectifs distincts. Le schéma-bloc présentant cette stratégie est donnée en fig. 6.2. Le contrôleur haut niveau (en amont de la loi de pilotage ou allocateur) impose la dynamique en boucle fermée du système et calcule la commande envoyée à l'allocateur, qui la distribue entre les actionneurs. Dans cette stratégie, comme mentionné par [Johansen 13], l'allocateur traite habituellement les problèmes de panne d'actionneurs, les saturations d'entrée et la redondance, alors que le contrôleur en amont n'a pas accès à ces informations. Néanmoins, si la commande envoyée à l'allocateur est impossible à réaliser, ou si l'allocateur a une dynamique qui interfère avec la dynamique boucle fermée désirée, alors la stabilité et/ou la performance peuvent s'en trouver dégradées. Cet aspect a été étudié dans des papiers tels que [Page 99] qui compare la performance des différents contrôleurs et allocateurs dans le cas du contrôle d'avions. [Buffington 98] présente une étude de la dynamique des zéros des allocateurs en rapport avec la stabilité dans les inversions dynamiques non-linéaires. En outre, la stabilité globale de la boucle fermée contenant le contrôleur haut-niveau et l'allocateur n'a déjà été prouvé que dans certains cas précis. Comme expliqué dans [Hu 14], la stabilité asymptotique peut être théoriquement prouvée pour l'allocateur et le contrôleur séparément (comme dans notre cas), mais rarement pour la boucle fermée. A noter l'article [Johansen 04] qui présente la convergence exponentielle globale d'une boucle fermée contenant un contrôleur exponentiellement stable globalement et un allocateur asymptotiquement optimal.

Ainsi, à cause de ces inconvénients, le choix pourrait se porter sur la première approche. Cependant, comme expliqué dans [Härkegård 05], avoir deux contrôleurs peut faciliter le réglage puisque changer un paramètre ne va pas affecter la dynamique désirée et l'allocation. Dans le cas de panne d'actionneur par exemple, seul l'allocateur doit varier a priori. On peut noter que les deux approches donnent la même performance si les paramètres des lois sont réglés de manière particulière (voir [Härkegård 05]).

Nous souhaitons garder la modularité offerte par la présence de deux contrôleurs dans la boucle, et pour ce faire, nous avons présenté une nouvelle procédure permettant de régler

l'allicateur dans un premier temps, puis un contrôleur haut-niveau robuste qui tient compte des particularités de cette loi de pilotage, afin de gérer les aspects mis en avant par les chercheurs précédemment cités. Cette procédure est présentée dans le papier [Evain 17b].

Nous estimons que le rôle de l'allicateur est de fournir une commande \mathbf{u}_c au système telle que le bloc "A = Allicateur+Contrôleur bas niveau+Dynamique actionneurs" en Fig. 6.2 soit linéarisé. Néanmoins, autour des singularités, l'allicateur peut créer des erreurs pour les éviter, ou ralentir pour utiliser le noyau de \mathbf{J} pour reconfigurer les actionneurs. Pour rester robuste aux pertes de performance autour des singularités, une loi de commande robuste en amont de la loi de pilotage est choisie.

La procédure de conception de la loi de commande en amont tenant compte des caractéristiques de la loi de pilotage se divise en plusieurs étapes qui débutent par le réglage de la loi de pilotage. Une implémentation possible de ces différentes étapes est présentée dans la section 6.7.

- **Optimisation des paramètres de la loi de pilotage** en boucle ouverte (voir section 6.3.5).
- **Analyse des performances de la loi de pilotage et des pires cas.** Les simulations choisies pour analyser les performances doivent être représentatives et peuvent être nombreuses. Des méthodes de type Monte Carlo peuvent être envisagées. C'est une limite de la méthode.
- **Identification du système** : Le bloc "A" de la Fig. 6.2 est maintenant identifié en une fonction de transfert simplifiée. Néanmoins, pour tenir compte des variations non-linéaires des performances, les paramètres de la fonction de transfert sont considérés comme incertains. De plus, les non-découplages entre axes qui peuvent se produire à l'approche d'une singularité seront aussi considérés comme des perturbations et identifiés. Dans l'exemple en section 6.7, une identification simple moindres carrés, sans modèle de bruit est présentée.
- **Synthèse du contrôleur robuste** : Une fois le bloc "A" optimisé et identifié, le contrôleur en amont peut être conçu. Pour tenir compte des incertitudes sur les paramètres de l'identification et rester robuste malgré les non-linéarités, un contrôleur H_∞ robuste non-lisse a été choisi. Une application de ces deux derniers points est présentée dans la sous-partie 6.7.
- **Analyse du système obtenu.**

Différents solveurs numériques existent pour le problème H_∞ , en particulier HIFOO décrit par [D. Arzelier 11] et les fonctions `systeme` et `hinfstruct` incluses dans la Matlab Robust Control Toolbox [Apkarian 06]. Notre algorithme utilise la Toolbox de Matlab (MathWorks). Le but de cette synthèse est de concevoir un contrôleur unique $\mathbf{K}(s)$ dont la structure est fixée, tel que la boucle fermée du système soit stable et assure dans notre cas par exemple :

- la performance par un gabarit sur la sortie de la fonction de sensibilité;
- la robustesse aux perturbations de couplage non-linéaires.
- la robustesse aux variations de paramètres.

En fonction des besoins, d'autres contraintes peuvent être ajoutées. Plus d'informations peuvent être trouvées dans le livre [Alazard 99] sur la synthèse H_∞ .

Avec cette méthode linéarisant le comportement du système, si la modélisation des effets non-linéaires autour des singularités est conservative, alors les marges de module peuvent être choisies et vérifiées au niveau du contrôleur H_∞ assurant la stabilité robuste. Pour des systèmes avec de nombreuses singularités et erreurs créées, cette technique est utile pour éviter l'instabilité. Chaque étape de cette procédure peut être réalisée par différentes méthodes indépendamment des autres, dans ce mémoire une méthode sera appliquée par étape.

Néanmoins, en fonction des résultats obtenus, la stabilité robuste peut être impossible à réaliser pour une structure fixe de contrôleur. Deux stratégies sont alors possibles, soit retravailler l'allocateur (car cela signifie qu'il crée trop de perturbations autour des singularités), soit changer la structure du contrôleur en amont afin de proposer plus de degrés de liberté dans le réglage.

Cette structure de loi de pilotage et de loi de commande en amont est généralisable à un certain nombre de systèmes mécaniques sur-actionnés. Pour montrer cette généralité, une application est présentée sur un modèle de bras robotique redondant plan, inspirée des articles [Evain 16] et [Evain 17b]. Une structure de loi de pilotage est choisie, puis réglée par l'optimisation génétique et enfin la loi de commande robuste en amont est conçue. Le détail de la génération de cette loi de commande est donnée dans la sous-partie 6.7. En particulier, un exemple d'identification simple basée sur les moindres carrés avec un modèle simple est présenté dans la sous-partie 6.7.

6.6 Bilan de la boucle de commande

Le but de cette sous-section est de résumer le processus de génération de la boucle de commande proposé dans ce manuscrit. Une application de cette méthode sera proposée dans un premier temps pour les bras robotiques terrestres afin de vérifier la généralité dans ce cas (section 6.7) puis dans le cas des grappes d'AGs (chapitre 7). La procédure est résumée dans la Fig. 6.3. Les points 1 et 2 sont explicités dans le chapitre 5, le point 3 est expliqué dans la section 6.3, et les autres dans la section 6.5.

Le chapitre 7 détaille l'application des étapes 1 à 4, et la section suivante 6.7 plutôt des points 3 à 7.

6.7 Application aux manipulateurs redondants à base fixe

Le but de cette section est de montrer la généralité de notre commande sur une application académique. Une loi de pilotage y est montrée ainsi que la génération de la loi de commande en amont selon le processus décrit dans la section précédente. Après une présentation du système étudié, la loi de pilotage et son réglage par optimisation génétique sont décrits, puis l'identification du système nécessaire à la conception du contrôleur robuste haut-niveau. Des résultats de la boucle fermée sont ensuite montrés.

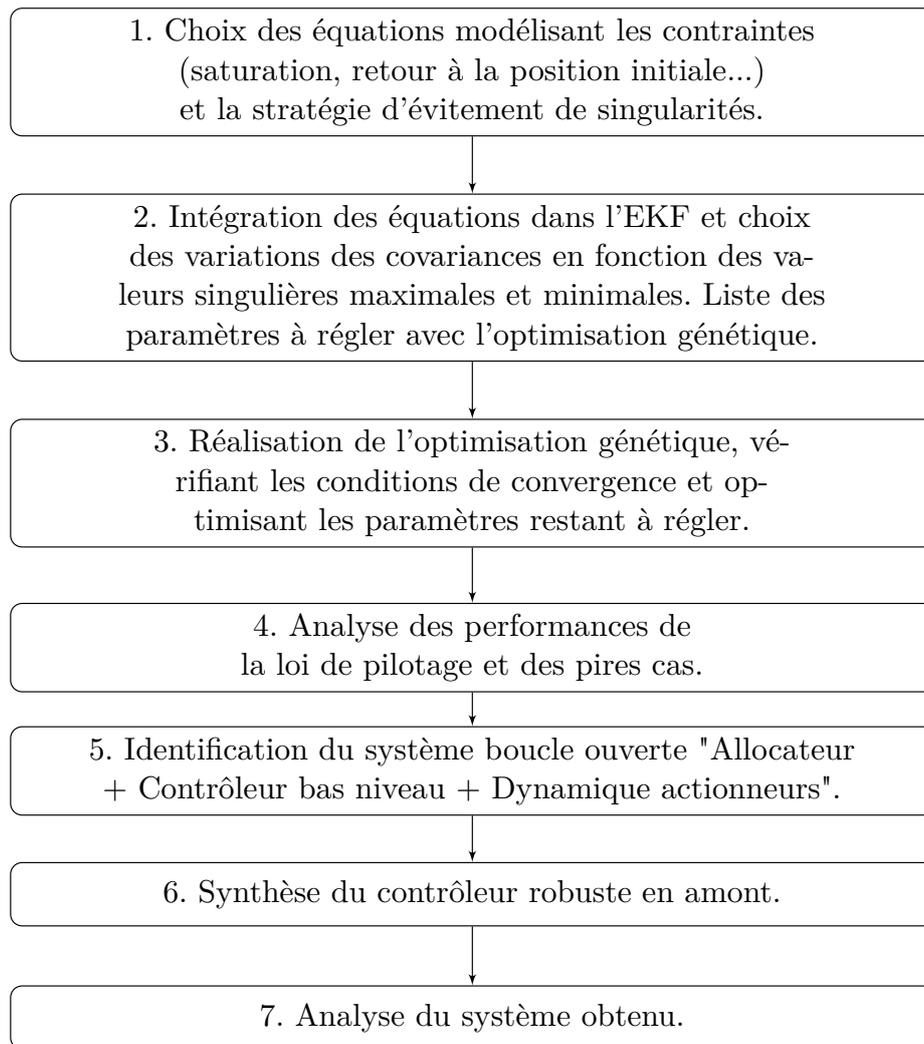


Figure 6.3 – Diagramme de la procédure de génération de la boucle de commande.

6.7.1 Modélisation d'un bras robotique manipulateur plan

La modélisation d'un bras robotique manipulateur dans le cas général est donné en annexe B, développée à partir du livre [Khalil 04]. Prenons le cas simplifié d'un manipulateur plan constitué de trois tronçons et de trois articulations rotoïdes représentés sur l'image 6.4. Notre but est de contrôler la position (y_1, y_2) de l'organe terminal du robot manipulateur dans le plan de référence fixe $(\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r)$ en utilisant les techniques de commande présentées précédemment dans ce chapitre. Le contrôle s'effectue en couple au niveau des articulations. Ces articulations sont modélisées par des angles $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]$. Les longueurs des bras sont notées l_1, l_2 et l_3 et toutes fixées à une valeur de 0.4m.

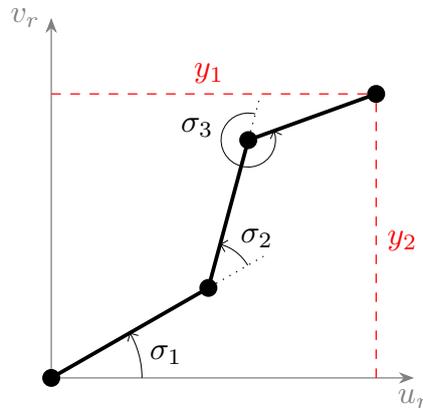


Figure 6.4 – Modélisation du manipulateur étudié

Les équations cinématiques et cinétiques sont (6.42) et (6.43) :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\sigma_1) + l_2 \cos(\sigma_1 + \sigma_2) + l_3 \cos(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ l_1 \sin(\sigma_1) + l_2 \sin(\sigma_1 + \sigma_2) + l_3 \sin(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \end{bmatrix} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (6.42)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (6.43)$$

La dynamique du système supposé rigide est donnée par l'équation (6.44) tirée du livre [Khalil 04].

$$\ddot{\boldsymbol{\sigma}} = -\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{V}_\sigma(\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{u} \quad (6.44)$$

avec \mathbf{A} la matrice de masse du système, \mathbf{V}_σ le vecteur de vitesse quadratique incluant les forces de Coriolis et centrifuges. Le système est contrôlé par des couples \mathbf{u} sur les articulations.

Un contrôleur moteur bas-niveau est aussi ajouté dans le bloc correspondant Fig. 6.2. La commande réalisée est par inversion de modèle La structure est fixée à :

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_d - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_m) + \mathbf{V}_{\sigma e}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_m, \boldsymbol{\sigma}_m) \quad (6.45)$$

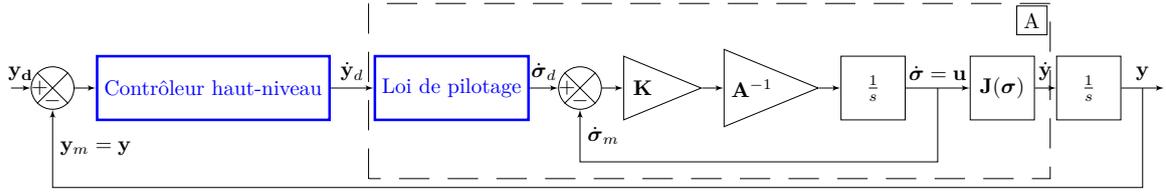


Figure 6.5 – Schéma-bloc simplifié pour notre application

avec :

- \mathbf{K} une matrice de gain choisie comme $\mathbf{K} = k_w \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}_m)$. k_w est réglé pour assurer une dynamique rapide qui n'interfère pas avec les autres dynamiques boucle fermée de l'allocateur et du contrôleur haut-niveau.
- $\mathbf{V}_{\sigma e}$ le vecteur \mathbf{V}_{σ} estimé
- $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_m$ et $\boldsymbol{\sigma}_m$ les positions et vitesses des articulations

Dans cet exemple, la base $(\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r)$ est considéré comme fixe dans le repère inertiel. Dans ce cas, et contrairement au manipulateur à base mobile présenté en chapitre 9, simplement les équations cinématiques (6.43) peuvent être utilisées pour déterminer les couples commandés sur les articulations. Rajouter le modèle dynamique dans la loi de pilotage apporte peu d'informations supplémentaires, et comme dans le cas des AGs, n'aide pas spécialement au passage des singularités [Kurokawa 07].

Ainsi, pour concevoir la boucle de commande, nous utiliserons le schéma-bloc Fig. 6.5 réalisé à partir des équations cinématiques, en supposant le feedforward du contrôleur bas-niveau compensant parfaitement les termes non-linéaires \mathbf{V}_{σ} . Ce schéma-bloc est donc composé d'une loi de pilotage dont l'optimisation des paramètres est montrée dans la section suivante, et d'une loi de commande adaptée à la loi de pilotage. Ce processus de conception est résumé dans l'article [Evain 17b].

6.7.2 Conception de la loi de pilotage

Dans cette section est présentée la conception de la loi de pilotage. Pour notre exemple, une structure de loi basée sur l'EKF et les équations de la cinématique a été fixée, et les paramètres de la loi sont ensuite optimisés par l'algorithme d'optimisation génétique. Afin de reprendre le raisonnement de ce chapitre, commençons par prouver que la formulation cinématique explicitée dans la section 6.1.4 est applicable à notre cas.

6.7.2.1 Vérification de l'hypothèse issue des équations cinématiques sur les bras manipulateurs robotiques à base fixe

Dans le cas des bras manipulateurs robotiques rotoïdes à base fixe, le modèle géométrique dépend des σ_i par rapport au temps sous la forme de sinus et de cosinus. Chaque colonne $\mathbf{J}(:, i)$ de la matrice \mathbf{J} correspond au mouvement d'un tronçon de bras (donc au mouvement d'un σ_i). Mécaniquement, chaque $\mathbf{J}(:, i)$ subit donc une rotation de $\pi/2$ en σ_i pour devenir

$\mathbf{X}(:, i)$ (par dérivation de vecteurs). Ainsi, $\mathbf{J}(:, i)$ and $\mathbf{X}(:, i)$ sont perpendiculaires entre eux pour chaque i . Un vecteur \mathbf{s} représente alors une direction singulière de \mathbf{M} (voir éq. (6.15)) si et seulement s'il est perpendiculaire à tous les vecteurs colonnes de \mathbf{M} : $\mathbf{s}^T \mathbf{M} = \mathbf{0}_{1 \times 2n}$. Cela signifie alors que tous les vecteurs de \mathbf{M} sont dans le même hyperplan et donc que le bras manipulateur est plan. Si le système est intrinsèquement 3-D alors \mathbf{M} sera toujours de rang plein quelque soit σ .

En reprenant l'expression de la formulation cinématique développée à l'ordre deux à l'éq. (6.11), contrairement aux AGs, les \mathbb{H}'_i sont en général non-nuls pour les bras manipulateurs robotiques. Ils sont estimés et compensés par un feed-forward à partir des σ et $\Delta\sigma$ calculés au pas de temps précédent, dans la loi de pilotage. Dans les cas des bras, l'étude topologique présentée chapitre 5 n'est plus valide à cause de la non-nullité de \mathbb{H}'_i , mais cette formulation nous permet néanmoins de rechercher des composantes dans le noyau de \mathbf{J} .

Ainsi, on peut utiliser la formulation (6.15) dans notre loi de pilotage [Evain 16].

6.7.2.2 Optimisation des paramètres de la loi de pilotage

Une possible implémentation de la loi de pilotage, en discret, a été choisie. La structure de l'EKF a été choisie pour trouver le $\Delta\sigma = \dot{\sigma} \times T_s$ optimal (T_s est le pas de temps discret) qui vérifie les équations cinématiques et des contraintes. Les variables estimées de l'EKF $\hat{\mathbf{v}}$ (vecteur de taille 8×1) et les équations du modèle sont données dans l'éq. (6.46).

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \Delta\sigma \\ \mathbf{v}_2 = \Delta^2\sigma \\ \mathbf{v}_3 = \Delta\mathbf{y} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{v}}_1(t + T_s) = \frac{2}{3}\hat{\mathbf{v}}_1(t) + \epsilon_{v_1} \\ \hat{\mathbf{v}}_2(t + T_s) = \frac{4}{9}\hat{\mathbf{v}}_2(t) + \epsilon_{v_2} \\ \hat{\mathbf{v}}_3(t + T_s) = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{v}}_3(t) + \frac{1}{2}\mathbf{w}(t) + \epsilon_{v_3} \end{cases} \quad (6.46)$$

avec \mathbf{w} l'entrée de référence égale à $\mathbf{u}_d = \dot{\mathbf{y}}_d T_s$ (voir Fig. 6.5) et où les erreurs de prédiction ϵ_{v_1} , ϵ_{v_2} et ϵ_{v_3} sont négligées dans le modèle de prédiction et intégrées dans la matrice de covariance associée \mathbf{Q} . Dans le système d'équations (6.46), la dynamique interne des états du modèle de référence (associé à l'EKF dans (6.20)) est $(2/3, 4/9, 1/2)$ et est choisie ainsi : les deux premières équations de l'éq. (6.46) sont utilisées pour limiter l'accélération maximale des articulations. La troisième équation de l'éq. (6.46) est utilisée pour garder la matrice \mathbf{F} définie en éq. (6.47) inversible et prendre en compte l'entrée $\mathbf{w}(t)$. A noter que la variable $\mathbf{v}_3 = \Delta\mathbf{y}$ est ajoutée pour permettre l'unicité de la solution dans la preuve de convergence. En effet, de par la redondance, différents \mathbf{v}_1 peuvent satisfaire toutes les contraintes, or \mathbf{v}_3 est unique.

La matrice jacobienne associée à ce modèle est notée \mathbf{F} , de taille 8×8 et vaut (avec \mathbf{f} la fonction du modèle de prédiction, définie éq. (6.20)) :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{4}{9}\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \frac{1}{2}\mathbf{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

Les équations de mesure de l'EKF sont données en éq. (6.48).

$$\begin{cases} \mathbf{m}_1 = \sum_{j=1}^n (\Delta\sigma_j) \frac{1}{2} \mathbb{H}'_j \Delta\sigma = -\mathbf{J}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2} \mathbb{H}\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3(t) + \boldsymbol{\epsilon}_{m_1} \\ \mathbf{m}_2 = \mathbf{0}_{3 \times 1} = -\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\epsilon}_{m_2} \\ \mathbf{m}_3 = \mathbf{k} = \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_{m_3} \end{cases} \quad (6.48)$$

avec \mathbb{H} et \mathbb{H}' les matrices hessiennes du système définies dans l'éq. (6.15). Les deux premières équations de (6.48) correspondent donc à une description de la dynamique du système. Les perturbations $\boldsymbol{\epsilon}_{m_1}$, $\boldsymbol{\epsilon}_{m_2}$ et $\boldsymbol{\epsilon}_{m_3}$ sont intégrées dans la matrice de covariance \mathbf{R} . \mathbf{k} a été choisi pour piloter le système loin des singularités avec une technique classique du déterminant (éq. (6.49)).

$$\mathbf{k} = \frac{1}{(1 + 1000 \det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T))^5} \mathbf{I}_{3 \times 1} \quad (6.49)$$

La jacobienne associée aux équations de mesure (6.48), de taille 8×8 vaut :

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) & -\frac{1}{2} \mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}) & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ -2\mathbf{v}_1 & \mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

Ainsi, dans cette application, seules les matrices de covariance des équations de mesure et du modèle de prédiction sont optimisées \mathbf{R} et \mathbf{Q} (i.e. $\mathbf{P}_{alloc} = \{\text{diag}(\mathbf{R}) \text{diag}(\mathbf{Q})\}$), mais il serait possible d'ajouter par exemple les paramètres de la troisième équation du système (6.48) comme variables à optimiser dans l'algorithme. Ainsi, cette technique permettrait de régler une loi de pilotage du type Inverse Robuste Singulière [Siciliano 90] [Bedrossian 87] où la matrice \mathbf{R} dans l'éq. 4.4 dépend couramment du déterminant de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$. \mathbf{R} et \mathbf{Q} sont choisies diagonales et positives. Notons les valeurs singulières minimales et maximales de \mathbf{R} et \mathbf{Q} : $\underline{r}\mathbf{I} \leq \mathbf{R} \leq \bar{r}\mathbf{I}$ et $\underline{q}\mathbf{I} \leq \mathbf{Q} \leq \bar{q}\mathbf{I}$. L'optimisation génétique va permettre de déterminer les valeurs de \underline{r} , \bar{r} , \underline{q} et \bar{q} optimales vérifiant les conditions de stabilité. Les matrices \mathbf{R} et \mathbf{Q} ont été fixées comme indiqué éq. (6.51).

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(\bar{q}\mathbf{I}_{6 \times 1}, \underline{q}\mathbf{I}_{2 \times 1}) \text{ and } \mathbf{R} = \text{diag}(\underline{r}\mathbf{I}_{6 \times 1}, \bar{r}\mathbf{I}_{3 \times 1}) \quad (6.51)$$

avec "diag" correspondant à une matrice diagonale. Les plus faibles covariances représentent les équations qui doivent être vérifiées en priorité et donc en particulier les équations décrivant la dynamique du système, et celles avec des valeurs plus élevées correspondent aux équations modélisant des contraintes et donc moins représentatives de la dynamique réelle. Il est cependant possible de faire varier ces matrices de covariance afin d'augmenter le poids d'une contrainte. Cet aspect sera présenté dans les simulations de grappe d'AGs chapitre 7.

Cette structure de loi de pilotage est maintenant fixée. Habituellement, si l'allicateur est correctement réglé, la réponse du système entre $\dot{\mathbf{y}}$ et $\dot{\mathbf{y}}_d$ (voir Fig. 6.5) est linéaire. Lorsque le système approche une singularité, cette linéarisation peut être dégradée et des erreurs peuvent apparaître, que ce soit à cause du retard (car le système utilise une partie de son énergie à

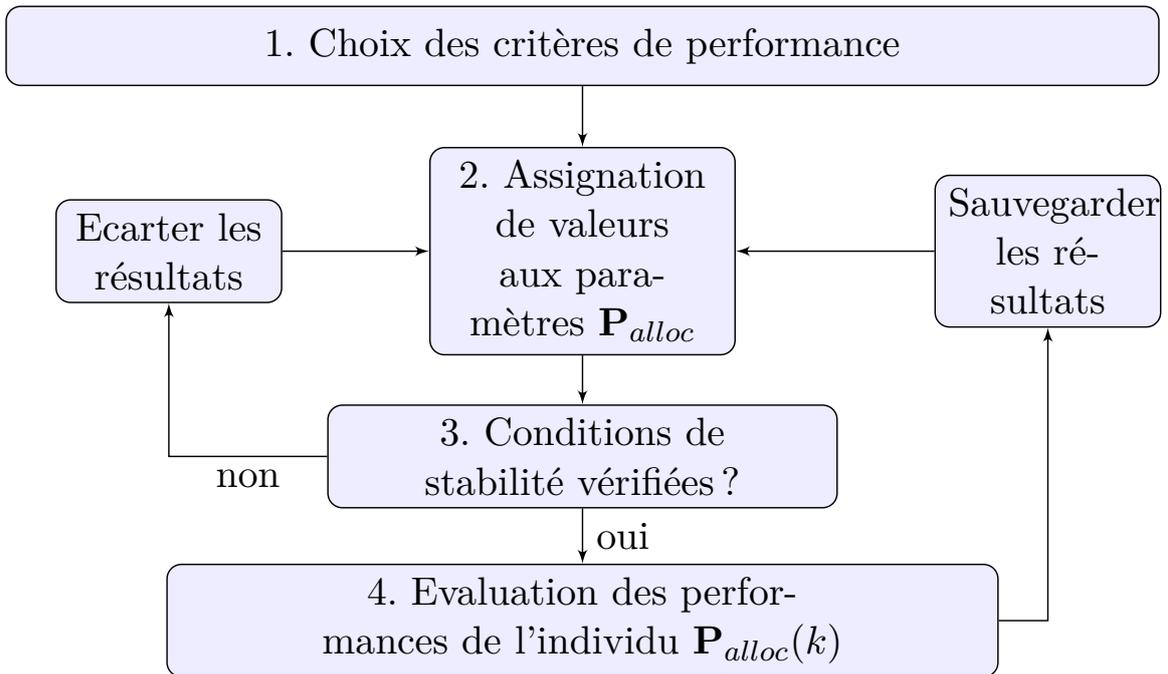


Figure 6.6 – Diagramme de la procédure itérative de réglage.

se reconfigurer, potentiellement sans créer la commande désirée) ou d'un mauvais découplage entre les axes à cause de la création d'erreurs de couple (couples selon des axes non désirés). Dans cette partie, le but est donc de trouver les paramètres $\mathbf{P}_{alloc} = [\underline{r} \quad \bar{r} \quad \underline{q} \quad \bar{q}]$ appropriés pour obtenir la meilleure linéarisation possible tout en garantissant des performances. Aussi, les erreurs et retards créés vont être quantifiés afin d'être pris en compte dans la synthèse du contrôleur haut-niveau.

Ce réglage est réalisé de manière numérique, ainsi, un ensemble de manœuvres typiques a été défini afin d'analyser les performances sur ces simulations. En effet, il est supposé que les tâches du robot sont prédéfinies. Ici, il est choisi de simuler des manœuvres d'une position initiale $\sigma_0 = \left[\frac{5\pi}{6} \quad \frac{2\pi}{3} \quad \frac{2\pi}{3} \right]$ où l'organe terminal du bras est en position $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Les simulations sont réalisées jusqu'aux saturations en position de l'organe terminal du bras : $\|\mathbf{y}_d\| = l_1 + l_2 + l_3$ dans toutes les directions θ_i du plan $(\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r)$ maillé : $\theta_i = \frac{2ki}{N}, i = 0 \dots N-1$. Les commandes sont en échelon sur $\dot{\mathbf{y}}_d$: $\dot{\mathbf{y}}_d = \left[\frac{\Delta y}{T_s} \cos(\theta_i) \quad \frac{\Delta y}{T_s} \sin(\theta_i) \right]^T$ avec $T_s = 0.01s$ la période d'échantillonnage de la loi de pilotage et Δy un incrément de consigne. A noter qu'il est aisé d'obtenir les résultats pour toute valeur initiale de σ_1 en appliquant simplement une rotation. Ainsi, les manœuvres sont valables quelles que soit la position initiale du bras.

En Fig. 6.6 est présentée la procédure itérative utilisée pour régler les paramètres \mathbf{P}_{alloc} .

Les critères de performance des individus sont :

— La déviation maximale entre la direction souhaitée du mouvement et la direction en

sortie de l'organe terminal. Le calcul est réalisé en calculant le minimum de l'inverse du cosinus de l'angle entre la direction désirée et la direction réalisée. Ce critère représente les erreurs créées par l'allicateur.

- Le temps moyen mis par le système pour atteindre la saturation en position sur les différentes directions étudiées. Si durant une simulation, cette saturation n'est pas atteinte (par exemple si le système ne passe pas une singularité), alors une valeur fortement pénalisante est imposée.

La vérification des conditions de stabilité est réalisée en utilisant l'article [Song 95] comme présenté dans la partie 6.3. L'Hyp. 1 est validée dans notre cas car (en reprenant l'ordre de 6.3.3) :

- (\mathbf{F}, \mathbf{C}) vérifient la condition d'observabilité uniforme dès les premier pas de temps car ces matrices sont de rang plein ;
- \mathbf{F} est inversible à chaque pas de temps ;
- Les normes des différentes matrices sont bornées ;
- Dans notre cas, la norme du tenseur associé à la hessienne de \mathbf{C} nous permet de choisir $m = \frac{1}{2}$.

Ensuite, il faut s'assurer qu'il existe γ donnant l'éq. (6.31). Or, pour le valider, la formule (6.31) étant non-linéaire, il faut donc poser les paramètres \mathbf{P}_{alloc} puis vérifier cette formule. Aussi, définir la valeur maximale autorisée d'erreurs initiales doit être définie. Puisque le système est déterministe et qu'à l'état initial, la commande est supposée connue et nulle, ces erreurs initiales sont faibles. Les variables \mathbf{v} sont normalisées. Dans notre application, $|\mathbf{e}_0 = 0.01|$.

Pour chaque individu, la vérification de la convergence est effectuée, puis, si elle est vérifiée alors les performances sont analysées sur les manœuvres précédemment décrites suivant les critères de performance choisis.

La Fig. 6.7 montre les résultats de l'optimisation après l'analyse de 10 générations de 40 individus. L'individu minimisant la déviation maximale est sélectionné puis analysé plus en détails.

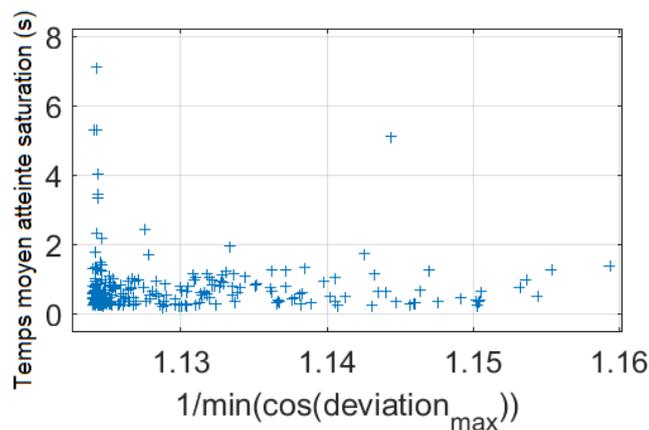


Figure 6.7 – Résultats de l'optimisation génétique

La position de l'organe terminal pendant les simulations ainsi que le temps mis pour atteindre l'extension complet du bras dans les différentes directions testées sont présentées en Fig. 6.8. L'utilisateur peut décider si les résultats sont compatibles avec son besoin. En Fig. 6.8a, on remarque que la déviation initiale la plus importante apparaît au début du mouvement de l'organe terminal. Ces simulations sont réalisées en boucle ouverte (système "A" en Fig. 6.5), sans correction sur la déviation du bras par exemple. Une fois le retour et le contrôleur haut-niveau rajoutés, les performances seront améliorées.

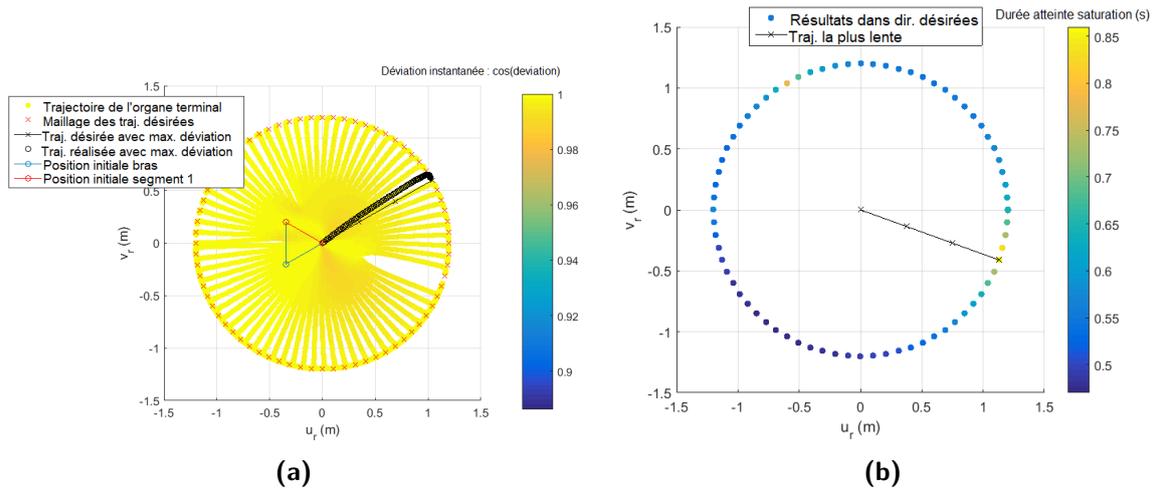


Figure 6.8 – (a) Analyse des déviations (critère 1). (b) Analyse du temps moyen pour atteindre la saturation en position (critère 2).

6.7.2.3 Identification de la loi de pilotage

Passons à l'identification du modèle cinématique "A" en Fig. 6.5. Les potentielles erreurs créées par le découplage dynamique non-linéaire du contrôleur bas-niveau ne sont pas prises en compte. Le modèle deux entrées-deux sorties entre $\dot{\mathbf{y}}_d$ et $\dot{\mathbf{y}}$ suit la structure présentée en Fig. 6.9, choisi pour sa cohérence dans la représentation de la dynamique du système et des erreurs de découplage. En effet, en l'absence de couplage ($c = 0$), le modèle se comporte comme deux premiers ordres parfaitement découplés. La présence d'un couplage ($c \neq 0$) entraîne une dynamique du second ordre sur chaque axe : la matrice de transfert du modèle d'identification s'écrit :

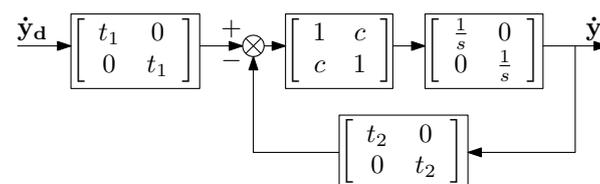


Figure 6.9 – Schéma-bloc du modèle d'identification

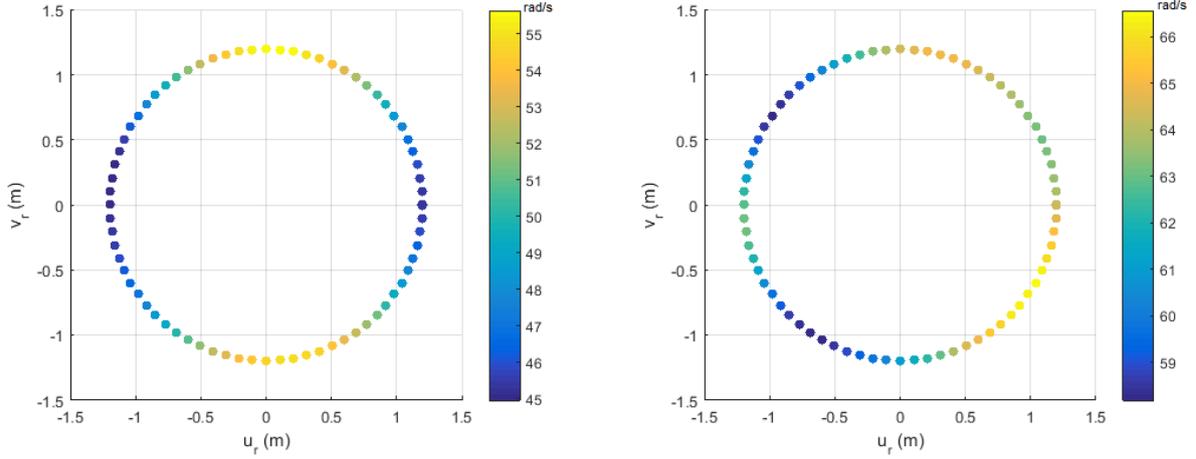


Figure 6.10 – Identification des paramètres t_1 (gauche) et t_2 (droite) dans chaque direction pour des entrées de norme $\dot{y}_d = 1$ m/s

$$\dot{\mathbf{y}}(s) = t_1 \begin{bmatrix} s + t_2(1 - c^2) & cs \\ cs & s + t_2(1 - c^2) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_d \quad (6.52)$$

avec s la variable de Laplace. $c < 1$ pour que le système soit stable. Les paramètres à estimer sont t_1 , t_2 , et c le terme de couplage entre les axes dont seule la borne supérieure est calculée. Afin de tenir compte du fait que les performances varient selon les directions simulées, les variations maximales des paramètres t_1 et t_2 sont identifiées. Dans la Fig. 6.10, l'identification de t_1 et t_2 est réalisée pour chaque direction.

Les valeurs nominales de t_1 et t_2 sont choisies comme leurs valeurs moyennes, et les valeurs minimales (\underline{t}_1 et \underline{t}_2) et maximales (\bar{t}_1 et \bar{t}_2) sont aussi calculées pour synthétiser le contrôleur robuste à ces variations de paramètres. Analyser l'impact des variations des entrées des simulations permet de s'assurer que l'hypothèse d'identification donnée en éq. (6.52) est correcte.

De plus, puisque les déviations sont présentes proches des singularités, les perturbations couplées entre les axes c doivent être étudiées. Pour la synthèse H_∞ réalisée dans la section suivante, la norme de la déviation maximale est suffisante. Sur la Fig. 6.11, la simulation intégrant la déviation maximale est présentée, et la valeur maximale de c en est déduite : $c_{max} = 0.66$ m/s.

6.7.2.4 Synthèse du contrôleur robuste

Une fois la loi de pilotage réglée et identifiée, le contrôleur haut-niveau peut être déduit. Afin de prendre en compte les incertitudes sur les paramètres de l'identification et de rester stable avec une certaine robustesse en dépit des non-linéarités, une synthèse H_∞ robuste a été choisie [Apkarian 06]. La fonction `sysstune` de la Matlab Robust Control Toolbox a été

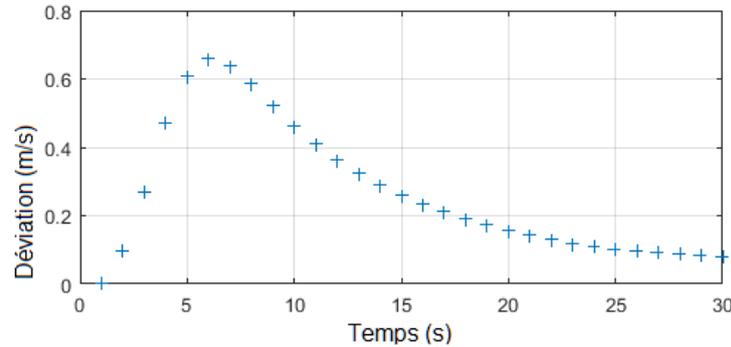
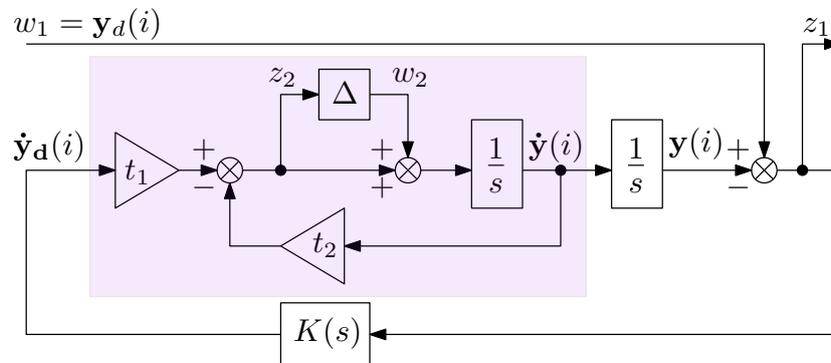


Figure 6.11 – Simulation incluant la pire déviation

utilisée.

Le but de cette synthèse est de trouver un unique contrôleur $K(s)$ appliqué aux deux variables à contrôler ($\mathbf{y}(i)$, $i = 1, 2$), qui stabilise la boucle fermée et assure :

- la performance par un gabarit $S_{des}(s)$ sur la fonction de sensibilité en sortie, i.e. le transfert de w_1 à z_1 sur le schéma-bloc présenté Fig. 6.12,
- l'insensibilité aux perturbations couplées entre axes, à travers une borne maximale sur la valeur du transfert entre w_2 et z_2 ,
- l'insensibilité aux variations des paramètres t_1 et t_2 .

Figure 6.12 – Problème H_∞ sur un seul degré de liberté $i = 1, 2$.

A cause du couplage, le système n'est plus considéré comme un double intégrateur, et pour avoir un second ordre dominant sur la fonction de sensibilité, il faut un intégrateur dans le correcteur. L'intérêt d'avoir un second ordre sur la fonction de sensibilité est de rejeter les perturbations c dues au couplage (vues comme des perturbations en entrée du système). De plus, pour satisfaire un gabarit d'ordre deux, les termes dérivateurs du correcteur sont inutiles. Le problème à résoudre se résume à : trouver un contrôleur PI (Proportionnel Intégral) $K(s)$ minimisant :

$$\left\| \frac{1}{S_{des}(s)} \frac{s^2 + t_2 s}{s^2 + t_2 s + t_1 K(s)} \right\|_\infty$$

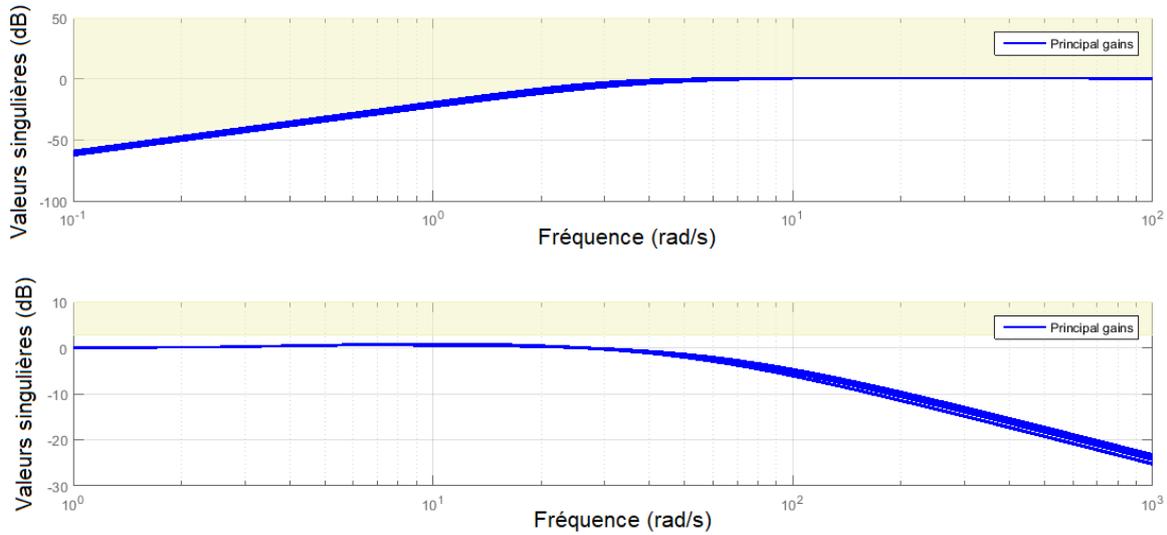


Figure 6.13 – Analyse des contraintes (haut : contrainte sur la fonction de sensibilité, bas : contraintes sur le couplage)

tel que :

$$\|c_{max}^2 T_{w_2 \rightarrow z_2}\|_{\infty} \leq 1$$

$$(\forall \omega : \Delta(\omega) \leq \left| \frac{t_2 c_{max}^2}{j\omega + t_2} \right| \leq c_{max}^2)$$

$$\forall t_1 \in [t_1 \quad \bar{t}_1], \quad t_2 \in [t_2 \quad \bar{t}_2]$$

Le gabarit $S_{des}(s)$ choisi est :

$$S_{des}(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\xi_d \omega_d s + \omega_d^2}$$

avec $\xi = 0.7$ et $\omega_d = 3$ rad/s.

La synthèse donne le contrôleur suivant :

$$K(s) = \left(6.56 + \frac{13.74}{s}\right)(\mathbf{y}_d(i) - \mathbf{y}(i)), i = 1, 2$$

Les diagrammes de Bode nous permettent de vérifier que la synthèse vérifie les contraintes imposées (Fig. 6.13). Dans cette figure, le système incertain est représenté par des réalisations des fonctions de transfert pour différentes valeurs de paramètres t_1 et t_2 compris dans les intervalles définis.

On peut noter que le système boucle fermée vérifie les contraintes imposées puisque les différents transferts sont tous situés sous les gabarits, et même avec une certaine marge au niveau de la seconde contrainte (couplage) qui était la contrainte dure.

Finalement, des simulations ont été effectuées pour vérifier le fonctionnement de la boucle fermée avec la dynamique complète du système présentée en éq. (6.44) et le contrôleur synthétisé. La simulation est réalisée sous Matlab/Simulink avec la boucle donnée en Fig. 6.14.

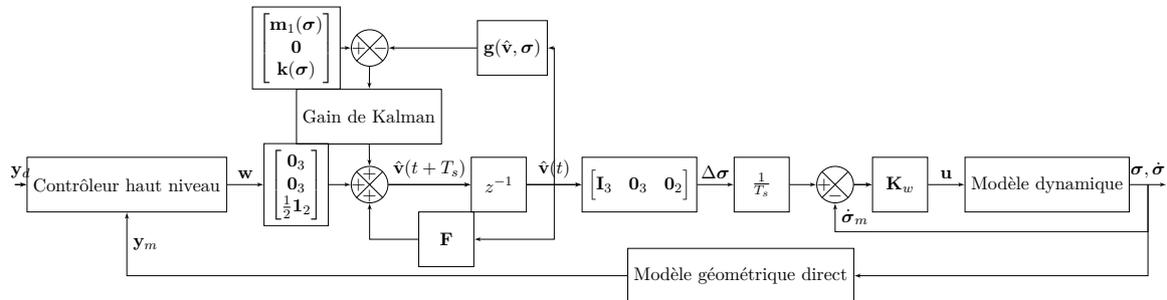


Figure 6.14 – Schéma-bloc de la simulation dynamique

Un résultat de simulation est donné en Fig. 6.15. Cette simulation a été réalisée dans la direction où la déviation était maximale (présentée Fig. 6.8), avec comme entrée une rampe de pente 1m/s afin de rester cohérent avec les simulations boucle ouverte précédentes. La déviation devient fortement limitée grâce à la loi de commande boucle fermée. Une mu-

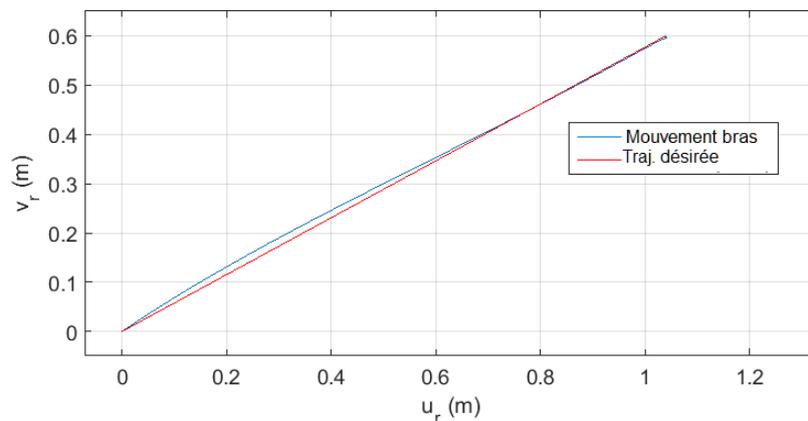


Figure 6.15 – Simulation en boucle fermée

analyse de la boucle obtenue permettrait de vérifier la robustesse du réglage obtenu mais n'a pas été effectué dans le cadre de cette thèse.

6.7.2.5 Conclusion sur l'exemple

Avec la méthode d'identification proposée, si la modélisation des effets non-linéaires autour des singularités est conservatrice, alors les marges de module du contrôleur H_∞ peuvent assurer la stabilité robuste. Pour les systèmes avec un grand nombre de singularités et d'erreur créées, cette technique est utile pour éviter les instabilités. Chaque étape de la procédure peut être améliorée indépendamment des autres.

Cette section a permis de montrer un exemple d'implémentation sur un cas simplifié académique, ainsi que de mettre en pratique la procédure proposée afin de générer un contrôleur en amont adapté à la loi de pilotage. En effet, si la sortie du contrôleur en amont est trop élevée, elle devient une source de saturation pour les actionneurs.

Cette technique est utile si on connaît à l'avance l'ensemble des manœuvres à effectuer, et peut mener à des contrôleurs conservatifs en terme de performance afin d'être robuste aux pires cas. Dans le cas où les consignes ne sont pas connues à l'avance, un contrôleur adaptatif qui évolue en fonction de l'efficacité courante du système mécanique redondant, est envisageable afin de générer des commandes compatibles. Néanmoins, obtenir des résultats de stabilité pour un contrôleur adaptatif dans le cas des systèmes redondants est complexe.

Une nouvelle structure de loi de pilotage basée sur le filtre de Kalman étendu est proposée, et associée à une nouvelle formulation des équations cinématiques. A cause de la linéarisation, il est nécessaire de s'assurer de la convergence de la loi de pilotage, et une technique basée sur l'optimisation génétique pour s'assurer de ces conditions de convergence tout en réglant la loi de pilotage a été proposée. En outre, un contrôleur robuste en amont de la loi de pilotage et adapté à celle-ci a été développé. Afin de montrer la généralité de la structure de loi, une application sur un bras manipulateur robotique à base fixe a été présentée. Ce chapitre a donc permis de proposer une nouvelle boucle de commande. Le prochain chapitre s'attachera à l'implémenter sur notre cas précis de grappes d'AGs.

Chapitre 7

Choix et réglages de la boucle de commande adaptée à la grappe pyramidale de six AGs et simulations

Sommaire

7.1	Proposition de contraintes à intégrer dans l'EKF - partie prédiction	117
7.2	Proposition de contraintes à intégrer dans l'EKF - partie mesures	119
7.3	Description des lois de pilotage testées	127
7.4	Réglage de la loi de pilotage par optimisation génétique	130
7.5	Simulations avec le modèle Matlab	136
7.6	Simulations avec le modèle haute-fidélité	146

Ce chapitre est orienté vers les choix réalisés pour le réglage des lois de pilotage. Des propositions d'équations à intégrer dans l'EKF sont d'abord réalisées afin de vérifier les contraintes, en fonction des cas de panne. Ensuite, les résultats de l'optimisation génétiques sont présentés. Des simulations, notamment avec un simulateur satellite haute fidélité, permettent de conclure sur l'intérêts et les inconvénients de la loi de pilotage et de la stratégie d'évitement de singularités.

DANS ce chapitre, les lois de pilotage proposées dans cette thèse sont explicitées, à partir de la structure de loi de pilotage présentée au chapitre 6. Cela comprend l'explication et la description des différentes contraintes pouvant être implémentées ainsi que le choix réalisé. De plus, le processus pour déterminer les bornes des matrices de covariance grâce à l'algorithme génétique est montré. Des simulations sur différents simulateurs sont réalisées afin d'analyser la boucle de commande.

On s'intéresse donc à la loi de pilotage décrite dans le chapitre 6 composée d'une structure basée sur l'EKF et de la formulation cinématique proposée. En fonction du choix des variables de l'EKF, différentes contraintes peuvent être insérées et prises en compte dans le calcul de la commande optimale. Les équations de prédiction permettent de fixer des contraintes sur la dynamique des AGs. En effet, dans le cas continu, ces équations de prédictions dynamiques sont de la forme (7.1) et dans le cas discret on rappelle l'équation (6.20) :

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (7.1)$$

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{v}(k), \mathbf{u}(k)) \quad (7.2)$$

L'équation cinématique (7.3) ci-dessous sera intégrée dans le filtre de Kalman.

$$\Delta \mathbf{h} = h_t \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) & -\frac{1}{2} \mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\sigma} \\ (\Delta \boldsymbol{\sigma})^2 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Les équations de mesure sont écrites en discret sous la forme (rappel équations (6.21)) :

$$\mathbf{m}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{v}(k)) \quad (7.4)$$

Pour résumer, la solution de commande proposée consiste à réaliser une inversion dynamique du modèle cinématique de la grappe en le décrivant comme un problème de minimisation sous contraintes d'un critère quadratique, et la solution optimale est trouvée par le calcul du gain de Kalman.

On pose dans un premier temps les deux variables suivantes dans l'EKF qui vont permettre d'intégrer l'équation (7.3) :

$$\mathbf{v}_1 = \Delta \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}_2 = (\Delta \boldsymbol{\sigma})^2$$

La première variable est la variation estimée d'angle de précession pour chaque AG (définie en priorité pour que les moteurs créent le couple souhaité en entrée tout en vérifiant les autres contraintes) pendant un pas de temps. Chaque composante du vecteur \mathbf{v}_2 correspond simplement au carré de la composante correspondante dans \mathbf{v}_1 , respectivement. Néanmoins, si l'on ne considère que les deux inconnues de l'équation (7.3), la convergence du filtre de Kalman étendu signifiera qu'il converge vers la valeur de $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ optimale qui satisfait au mieux nos contraintes. Différentes solutions pour $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ peuvent exister dans (7.3), donc il peut être impossible de lier un couple commandé avec un unique $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ et donc de conclure quant à la stabilité. On ajoute alors une autre variable d'estimation, par exemple $\Delta \mathbf{h}$, qui elle tendra vers le $\Delta \mathbf{h}$ demandé qui est unique.

Les autres variables pouvant être intégrées sont :

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{h}/h_t, \mathbf{v}_3 = \Delta\mathbf{h}/h_t, \mathbf{v}_3 = \Delta\mathbf{t}/h_t$$

La première variable correspondant à l'estimation du moment cinétique de grappe normalisé pendant un pas de temps, la seconde à l'estimation de variation de moment cinétique normalisé que la commande va générer (et que l'on souhaite donc égale au couple demandé divisée par le pas de temps en première approximation) et la troisième variable à l'estimation de la variation de couple normalisé engendrée lors de cette commande. La normalisation de ces variables par rapport au moment cinétique toupie permet de garder des ordres de grandeur similaires entre les variables et améliore le conditionnement des matrices.

Cependant, des problèmes de conditionnement peuvent aussi survenir en fonction du pas de temps, et les variables doivent donc être normalisées par rapport au temps. En particulier, $\Delta^2\boldsymbol{\sigma}$ peut devenir très petit en fonction du pas de temps voire prendre des valeurs négligeables par rapport aux autres \mathbf{v} . Pour l'éviter, les variables sont normalisées par un temps caractéristique nommé T_c et par le pas de temps ΔT pour que les variables restent du même ordre de grandeur et indépendants du pas de temps. Les variables deviennent :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{T_c}{\Delta T} \Delta\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}_2 = \frac{T_c^2}{\Delta T^2} \Delta^2\boldsymbol{\sigma}$$

et par exemple :

$$\mathbf{v}_3 = \frac{T_c}{\Delta T} \frac{\Delta\mathbf{h}}{h_t}$$

Les différentes équations qui peuvent être insérées dans le modèle (6.20) sont maintenant décrites, et le bilan des formulations des EKF testés sont donnés dans la section 7.3. Un point important est que la matrice \mathbf{F} qui linéarise ces équations doit rester de rang plein au mieux ou que du moins elle vérifie la condition d'observabilité avec la matrice \mathbf{C} (voir section 6.3). Ici, on cherchera par simplicité à garder les matrices \mathbf{F} et \mathbf{C} toujours de rang plein afin de vérifier les conditions de stabilité à chaque pas de temps.

Deux types d'équations peuvent être insérées, celles dynamiques dans le modèle de prédiction, et celles statiques montrant les relations au temps présent. Commençons par les relations dynamiques.

7.1 Proposition de contraintes à intégrer dans l'EKF - partie prédiction

7.1.1 Prise en compte de la dynamique actionneur - compatibilité

En fonction de la technologie, la dynamique des moteurs de précession peut impacter les performances de la commande. Si elle est très rapide vis-à-vis de la période de commande, elle

doit pouvoir être négligée à notre niveau, mais dans le cas contraire, on peut rajouter cette connaissance de la dynamique dans la partie prédiction et en tenir compte. En particulier, une contrainte à vérifier est la saturation en accélération $\ddot{\sigma}_{max}$ du moteur qui peut être intégrée dans cette phase. En prenant une approximation du premier ordre en $\ddot{\sigma}$ on obtient en effet l'équation (7.5).

$$\ddot{\sigma}(k) = \frac{\Delta\sigma(k+1) - \Delta\sigma(k)}{(\Delta T)^2} \quad (7.5)$$

Elle peut être réécrite sous la forme (7.6).

$$\Delta\sigma(k+1) = \Delta\sigma(k) + (\Delta t)^2 \ddot{\sigma}(k) = \Delta\sigma(k) + \mathbf{u}(k) \quad (7.6)$$

Ainsi on pourrait limiter l'accélération des angles de précession entre deux pas de temps avec cette stratégie. Les contraintes de saturation sont discutées plus précisément dans le paragraphe 7.2.2. Pour $(\Delta\sigma)^2$, il suffit de prendre la relation précédente (7.6) au carré. De plus, en intégrant par exemple une dynamique du premier ordre des actionneurs, on peut rajouter un lien entre $\ddot{\sigma}$ et $\dot{\sigma}$. Néanmoins, cela suppose que la fréquence à laquelle l'EKF est calculée est assez élevée pour pouvoir représenter la dynamique actionneur. Si ce n'est pas le cas, le plus adapté est alors de calculer l'intégrale du couple qui n'est pas réalisé dans le pas de temps à cause de la dynamique supposée lente de l'actionneur, et d'intégrer cette connaissance dans l'allocateur. Ainsi, on augmenterait la commande en $\Delta\sigma$ et cela permettrait de créer la quantité de couple nécessaire au total. Dans notre application, la dynamique actionneur est supposée négligeable au vu des fréquences des calculateurs embarqués.

7.1.2 Dynamique en couple

Si la grandeur $\mathbf{v}_3 = \mathbf{h}/h_t$ est ajoutée dans les variables de l'EKF, alors la relation (7.3) sera intégrée dans les équations de prédiction, sous la forme suivante (7.8) et la commande en entrée de l'EKF ne sera pas en couple, mais en moment cinétique dans les équations de recalage : $\mathbf{v}_3 = \mathbf{h}_{com} = \mathbf{m}_1$.

$$\frac{\mathbf{h}}{h_t}(k+1) = \frac{\mathbf{h}}{h_t}(k) + \mathbf{J}(\sigma)\Delta\sigma(k) - \frac{1}{2}\mathbf{X}(\sigma)(\Delta\sigma(k))^2 \quad (7.7)$$

$$\mathbf{v}_3(k+1) = \mathbf{v}_3(k) + \mathbf{J}(\sigma)\mathbf{v}_1(k) - \frac{1}{2}\mathbf{X}(\sigma)\mathbf{v}_2(k) \quad (7.8)$$

Néanmoins, dans les simulations réalisées, utiliser $\mathbf{v}_3 = \mathbf{h}/h_t$ mène à une erreur statique en \mathbf{h} car l'EKF tombe dans un point optimal local en fonction de ses paramètres qui n'est pas tout le temps $\mathbf{h} = \mathbf{h}_d$. Ainsi il faut sortir de ce point d'équilibre avant de pouvoir converger. Il est plus précis d'utiliser la variable $\mathbf{v}_k = \Delta\mathbf{h}/h_t$. Cette équation (7.8) ne peut plus dans ce cas être insérée dans les équations de prédiction. Il faut donc trouver une équation qui décrit la dynamique en $\Delta\mathbf{h}$.

Une possibilité pour limiter la saturation des actionneurs est de lisser la commande en

couple $\Delta \mathbf{t}_{dem}$ en entrée de la loi de pilotage en proposant une équation de la forme (7.9).

$$\mathbf{v}_3(k+1) = \gamma \mathbf{v}_3(k) + (1 - \gamma) \Delta \mathbf{t}_{dem} \quad (7.9)$$

Suivant la position $\boldsymbol{\sigma}$ des actionneurs, l'efficacité (voir section 3.3) de la grappe évolue et donc sa capacité à créer du couple selon toutes les directions. Cette connaissance peut être utilisée pour éviter de saturer des actionneurs qui ont peu de capacités selon la direction désirée. De même, la demande en couple peut être modulée via γ pour éviter de proposer des commandes infaisables par le système.

7.1.3 Ajout de contraintes fréquentielles

Si le satellite possède des modes flexibles, la commande peut les exciter et en particulier les AGs. Des filtres numériques coupe-bande peuvent être introduits dès la phase de la loi de pilotage. La dynamique supplémentaire nécessaire nous fait donc rajouter comme variable de l'EKF : $\mathbf{v}_3 = \Delta \mathbf{t}/h_t$. Une commande en variation de couple devra nécessairement être rajoutée dans les équations de recalage. Néanmoins l'applicabilité de tels filtres dépend de la fréquence de calculs de l'EKF.

7.2 Proposition de contraintes à intégrer dans l'EKF - partie mesures

En choisissant les trois variables suivantes par exemple :

$$\mathbf{v}_1 = \Delta \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}_2 = (\Delta \boldsymbol{\sigma})^2, \mathbf{v}_3 = \Delta \mathbf{h}/h_t$$

Les deux premières équations de mesure sont alors choisies comme éq. (7.10), que l'on cherchera donc à minimiser.

$$\begin{cases} \mathbf{m}_1(k) = \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{v}_1(k) - \frac{1}{2} \mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{v}_2(k) + \mathbf{v}_3(k) \\ \mathbf{m}_2(k) = \mathbf{v}_1(k)^2 - \mathbf{v}_2(k) \end{cases} \quad (7.10)$$

Afin de garder une matrice \mathbf{C} inversible pour l'observabilité du filtre et donc pour assurer la stabilité, une équation de mesure sur \mathbf{v}_1 va être ajoutée. En effet, on a vu que la matrice \mathbf{J} peut être de rang non-plein, et la linéarisation de la deuxième équation de mesure peut mener à un coefficient nul devant $\mathbf{v}_1(k)$, ainsi une équation du type $\mathbf{m}_3 = \mathbf{v}_1$ est ajoutée pour assurer l'observabilité. C'est dans cette équation que les contraintes suivantes vont être insérées. En effet, avec ce choix de variables, les deux premières équations modélisent la dynamique désirée et vont permettre de trouver les $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ qui créent le couple demandé, en gardant une matrice \mathbf{M} (voir section 6.1.4) de rang plein, et ainsi va permettre d'utiliser le noyau pour passer les singularités traversables.

7.2.1 Retour à la position initiale

Une demande des utilisateurs peut être de ramener le système en une position initiale σ_{init} fixée une fois la manœuvre accomplie et la grappe de retour à un moment cinétique nul. En outre, si les directions des manœuvres sont fixes et connues à l'avance, partir de positions initiales favorables comme proposé par [Vadali 89] peut faciliter fortement le guidage de la grappe. Ainsi, on peut vouloir modifier les angles de précession des AGs, facilement réalisable grâce à la variable $\mathbf{v}_1 = \Delta\sigma$. Une contrainte du type éq. (7.11) peut être insérée.

$$\mathbf{m}_3 = G(\sigma_{init} - \sigma_c) = \mathbf{v}_1 \quad (7.11)$$

avec :

- G un coefficient qui vaut 0 si la contrainte n'est pas activée, sinon qui dépend de la vitesse à laquelle on souhaite atteindre la position désirée. Typiquement, G peut être choisi comme $G = b * \frac{\Delta T}{\delta t}$ avec b un booléen qui active ou non cette contrainte, ΔT la période d'échantillonnage et δt la durée au bout de laquelle on souhaite converger vers la position désirée ;
- σ_{init} la position initiale désirée ;
- σ_c la position courante.

Cette contrainte doit pouvoir être activée directement via un flag tout ou rien si elle est demandée, pour ne pas perturber le système en particulier à bas moment cinétique si elle n'est pas nécessaire. Insister sur cette équation via une faible covariance peut aussi permettre au système de converger plus vite vers la position désirée avec peu d'oscillations.

7.2.2 Contrainte de saturation

Un problème typique des lois d'allocation correspond à la saturation des entrées, due aux limites physiques des actionneurs. Si cet aspect n'est pas étudié, de l'instabilité peut survenir. Comme mentionné dans le livre [Hu 01], deux principales stratégies existent dans la littérature pour gérer ce problème. La première consiste à utiliser des techniques d'anti-windup telles que dans le papier [Morabito 03]. Ces techniques consistent à rajouter des boucles de régulation, une fois les lois de commande fixées, pour empêcher les saturations. La seconde stratégie consiste à tenir compte de ces contraintes dès la phase de conception de la loi de pilotage par l'étude des régions à contrôlabilité nulle ("null controllable region") [Hu 01]. Ces régions correspondent aux états accessibles du système en tenant compte de ses capacités physiques.

Ainsi, en rajoutant des contraintes dans le filtre de Kalman, le but est de gérer ces saturations dès la phase de conception. Plusieurs saturations s'appliquent sur notre système. En particulier, on peut citer les contraintes de saturation en vitesse et accélération de précession pour chaque actionneur. Suite au choix expliqué à la section 6.2.4, une modélisation sous forme d'égalité est insérée. La contrainte en accélération peut être prise en compte dans les équations de prédiction comme dit précédemment. Pour limiter la vitesse, il est plus aisé d'intégrer cette contrainte dans les équations de mesure. Physiquement, la saturation en vitesse peut provenir principalement de deux causes :

- Une entrée en couple au-delà des capacités locales des actionneurs : elle se manifeste par un couple en-dehors de l'ellipse des capacités maximales ;
- La présence de singularités qui affaiblit fortement les capacités de la grappe dans une direction et qui l'oblige à saturer pour passer cette singularité.

Ces deux raisons peuvent être traitées différemment. Par exemple, éviter les singularités tôt va prévenir la grappe d'une reconfiguration tardive et donc à fortes vitesses de précession. Loin des singularités, la prévention de saturations peut être réalisée en étudiant les capacités locales de la grappe et saturer l'entrée en couple de l'EKF en fonction de ces résultats. Ainsi, cette approche revient à étudier les capacités réelles de la grappe autour du point de fonctionnement.

On peut néanmoins ajouter une contrainte spécifique sur les vitesses de précession des AGs. La plus simple revient à minimiser les vitesses et à pondérer cette contrainte via la matrice de covariance (équations (7.12) et (7.13)) :

$$\mathbf{m}_3 = \Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{v}_1 \quad (7.12)$$

$$\mathbf{R}_3(i) = 10^{\max_{\mathbf{R}} - \frac{\dot{\sigma}_i}{\dot{\sigma}_{max}}(\max_{\mathbf{R}} - \min_{\mathbf{R}})} \quad (7.13)$$

avec dans l'équation 7.13 :

- $\mathbf{R}_3(i)$ la covariance associée à l'équation (7.12) pour l'AG numéro i .
- $\max_{\mathbf{R}}$ et $\min_{\mathbf{R}}$ respectivement les valeurs singulières logarithmiques minimales et maximales acceptables de \mathbf{R} calculées par l'optimisation génétique.
- $\dot{\sigma}_{max}$ la vitesse de précession maximale autorisée.

Cette équation sur la covariance est logarithmique pour augmenter l'influence de cette équation à l'approche de la saturation. On remarque bien que cette équation ne va pas donner une solution qui permette de vérifier les autres équations, mais en garantir une faible influence par la matrice de covariance tant qu'elle n'a pas besoin d'être activée, ce qui va fortement limiter les erreurs.

Tant que l'accélération et la vitesse de précession ne sont pas au-dessus de la limite physique, alors la sortie de l'EKF pourra être utilisée pour une commande directe en vitesse de précession. Néanmoins, a priori, aucune garantie n'est donnée pour la gestion de la saturation donc des techniques d'anti-windup peuvent être ajoutées si besoin [Zaccarian 09].

Le réglage des variations de covariance proposés dans ce mémoire se basent sur les fonctions de potentiel, restant dans des limites imposées [Rubrecht 12]. Le réglage des covariances les unes par rapport aux autres, en fonction de l'importance de la contrainte, est critique et proposée de cette manière ici. Néanmoins, le réglage précis des paramètres est à effectuer avec des simulations représentatives pour éviter notamment les oscillations pouvant intervenir avec des covariances variables.

7.2.3 Passage singularités- technique du déterminant

L'utilisation de la formulation (7.10), comme décrit dans la section 6.1.4, permet de rechercher des composantes $\dot{\sigma}$ dans le noyau de \mathbf{J} et donc de passer les singularités traversables si son poids est suffisant (si l'utilisation du noyau est bien mis en priorité). Néanmoins, dans les cas des singularités intraversables, la formulation ne pouvant pas fournir de composantes dans le noyau (car elles n'existent pas) fournit des solutions impossibles ou nulles ($\mathbf{v}_2 = (\Delta\sigma)^2 \leq \mathbf{0}$). Dans ce cas, les erreurs créées peuvent éventuellement permettre de passer les singularités intraversables mais sans garanties, en particulier si une solution nulle est calculée et donc où le système reste bloqué dans la singularité.

Dans ces cas, une autre équation pour assurer le passage des singularités est nécessaire. Suite à l'analyse bibliographique, on rajoute une contrainte simple dépendante de la distance aux singularités via le calcul du déterminant [Bedrossian 87]. Cette équation crée une perturbation en σ à l'approche de la singularité qui crée des erreurs et évite au système de tomber dans la singularité.

Une équation du type (7.14) est par exemple testée dans cette thèse.

$$\mathbf{m}_3 = f \times c \times \Delta\sigma_{sat} = \mathbf{v}_1 \quad (7.14)$$

avec :

- f un coefficient dépendant du déterminant de la grappe : $f = \frac{1}{1+100\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)}$. D'autres réglages peuvent être envisagés.
- c qui indique les signes des vitesses courantes : $c = \text{sign}(\dot{\sigma})$, afin de solliciter les grappes dans leur sens de parcours.
- $\Delta\sigma_{sat}$ correspond à la variation maximale d'angles de précession pendant un pas de temps : $\Delta\sigma_{sat} = \Delta t \dot{\sigma}_{max}$

Lorsque le déterminant est grand, alors f tend vers 0 (d'où l'intérêt du coefficient 100 qui doit être choisi en fonction de la distance aux singularités d'où l'on souhaite activer la contrainte). Lorsque le déterminant est faible, le but est de solliciter tous les actionneurs, et en particulier ceux qui ne l'étaient pas au cours de la manœuvre pour sortir de la singularité. En effet, les singularités interviennent le plus souvent lorsqu'il y a une dissymétrie entre un certain nombre d'AGs très sollicités et d'autres à l'arrêt. Cette technique simple et efficace permet de passer une singularité mais risque de causer des erreurs et des saturations.

7.2.4 Passage singularités intraversables par analyse topologique

L'analyse topologique réalisée dans le chapitre 5 va pouvoir être insérée dans la loi de pilotage. L'utilisation de la formulation cinématique (7.3) permet de fournir des composantes dans le noyau de \mathbf{J} pour passer les singularités traversables en particulier. Rajouter une mesure de la distance aux singularités (par le déterminant de la matrice $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$) via la matrice de covariance influence l'utilisation du noyau afin de s'éloigner des singularités. C'est le même principe, plus efficace, lorsqu'une équation de contrainte tenant compte de cette valeur de

déterminant éloigne les angles de précession de valeurs singulières. Néanmoins, avec cette dernière méthode, des erreurs sont créées que ce soit dans les cas des singularités traversables ou intraversables. Or, la formulation cinématique (s'apparentant à une méthode du gradient utilisant le noyau de la matrice \mathbf{J}) permet de passer les singularités traversables sans erreurs. Ainsi, rajouter un critère seulement sur les singularités intraversables rend plus précise la loi de pilotage et donc minimise les erreurs dans les cas passables. Le but de cette version de la loi de pilotage est d'**utiliser la connaissance de la topologie de la grappe pour éviter les singularités internes intraversables**.

Suite à la section 5.2.2.3 décrivant l'exemple d'une grappe de six AGs avec pannes des AGs numéros 2 et 3, l'algorithme présenté jusque là permet de calculer toutes les singularités et de les discriminer entre traversables, intraversables, internes et externes (de manière numérique). Une fois l'ensemble des singularités intraversables internes défini sur un espace restreint, les différentes branches (chacune correspondant à une structure continue) ont été identifiées dans l'espace des moments cinétiques et des angles de précession correspondants. On dispose ainsi d'un ensemble de structures distinctes. L'idée de l'algorithme développé dans cette thèse est alors de **détecter si la grappe se dirige vers une singularité interne intraversable (va croiser une des structures définies) et si c'est le cas, de l'en éloigner assez tôt**.

Les différentes branches sont constituées d'un ensemble de points, mais il faut pouvoir les décrire par un nombre réduit de paramètres utilisables par la loi de pilotage. Il a été choisi de mailler ces surfaces dans l'espace des moments cinétiques, justifié par la suite de l'algorithme. Des maillages surfaciques triangulaires ont été considérés (mais d'autres possibilités existent). Par exemple prenons le cas de la branche numérotée 14 et mise en évidence dans la Fig. 7.1. La direction singulière pour chaque point est représentée sur cette branche et varie peu en fonction des points.

La forme de cette branche est propice à un maillage triangulaire très simple qui peut être effectué avec la triangulation de B. Delaunay [Lee 80]. Prenons par exemple un seul triangle pour modéliser la surface afin d'expliquer simplement la procédure du maillage. Les trois points T_1 , T_2 et T_3 englobant le plus de données à l'intérieur de la surface du triangle sont choisis. Ensuite, la méthode typique d'interpolation des éléments finis est utilisée [Allaire 07]. Prenons un point P dans le triangle créé en moment cinétique. Pour déterminer ses caractéristiques, le processus suivant est effectué :

- Les coordonnées barycentriques λ de P sont calculées à partir de la distance entre les points T_1 , T_2 et T_3 et le points P , avec la contrainte : $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. On obtient alors des coordonnées $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que P s'exprime sous la forme : $P = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 T_3$.
- La position de P en angles de précession est alors déduite par :

$$\sigma_P = \lambda_1 \sigma_{T_1} + \lambda_2 \sigma_{T_2} + \lambda_3 \sigma_{T_3}$$

Appliquons cette procédure avec un point P choisi dans la surface comme montré en Fig. 7.2.

La norme de la différence de σ entre les angles de précession estimés et réels de P vaut 0.0162 rad et la norme de la différence entre le moment cinétique de P et le moment cinétique du point correspondant estimé est 0.0137 donc très faible. Tant que les points sont bien

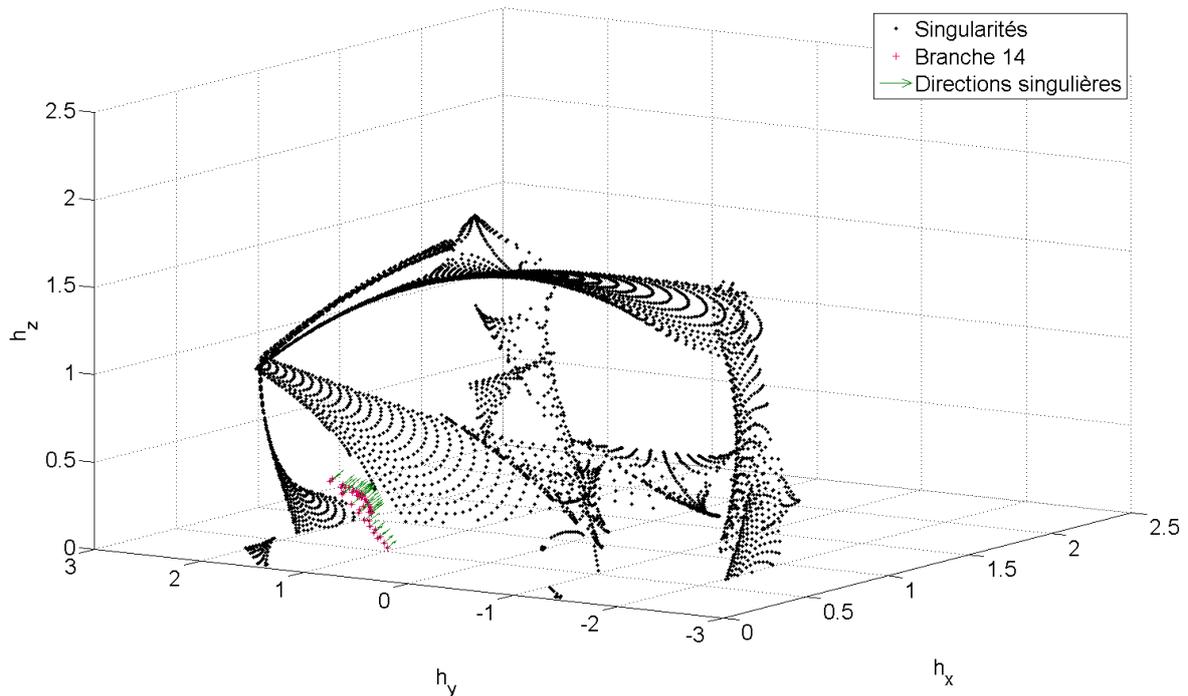


Figure 7.1 – Etude de la branche numéro 14 de l'exemple

situés dans le triangle, l'approximation est satisfaisante, mais lorsque ce n'est pas le cas, l'approximation devient éloignée de la réalité. Un raffinement du maillage est nécessaire pour mieux prendre en compte la topologie des singularités, mais pour présenter le concept, ce maillage est suffisant.

La phase de maillage de l'ensemble des surfaces singulières intraversables peut être complexe, cependant le niveau de précision souhaité n'est pas forcément élevé puisque les caractéristiques les plus importantes sont simplement de détecter le passage dans ces surfaces et de pouvoir en éloigner la grappe efficacement. Avec les incertitudes sur la consigne à venir et la dynamique du système, une grande précision sur la position des singularités intraversables n'est pas nécessaire en ligne. Supposons donc les différentes branches maillées hors-ligne avec une précision acceptable pour l'application. Dans le logiciel, les informations sur les points du maillage sont entrés : moments cinétiques, angles de précession et potentiellement directions singulières.

L'étape suivante de détection réalisée en ligne cette fois se fait en plusieurs temps :

- **Détection d'un moment cinétique futur singulier** : on suppose que l'on connaît la direction du couple de grappe demandé à un temps t . Si les consignes futures sont aussi connues, alors on en tient compte et cela améliorera l'estimation mais on suppose que ce n'est pas le cas. Pour réaliser cette détection :
 - on simule la demi-droite partant du moment cinétique de grappe courant et allant dans la direction du couple demandé.
 - on calcule les éventuelles intersections entre cette droite et les maillages des singu-

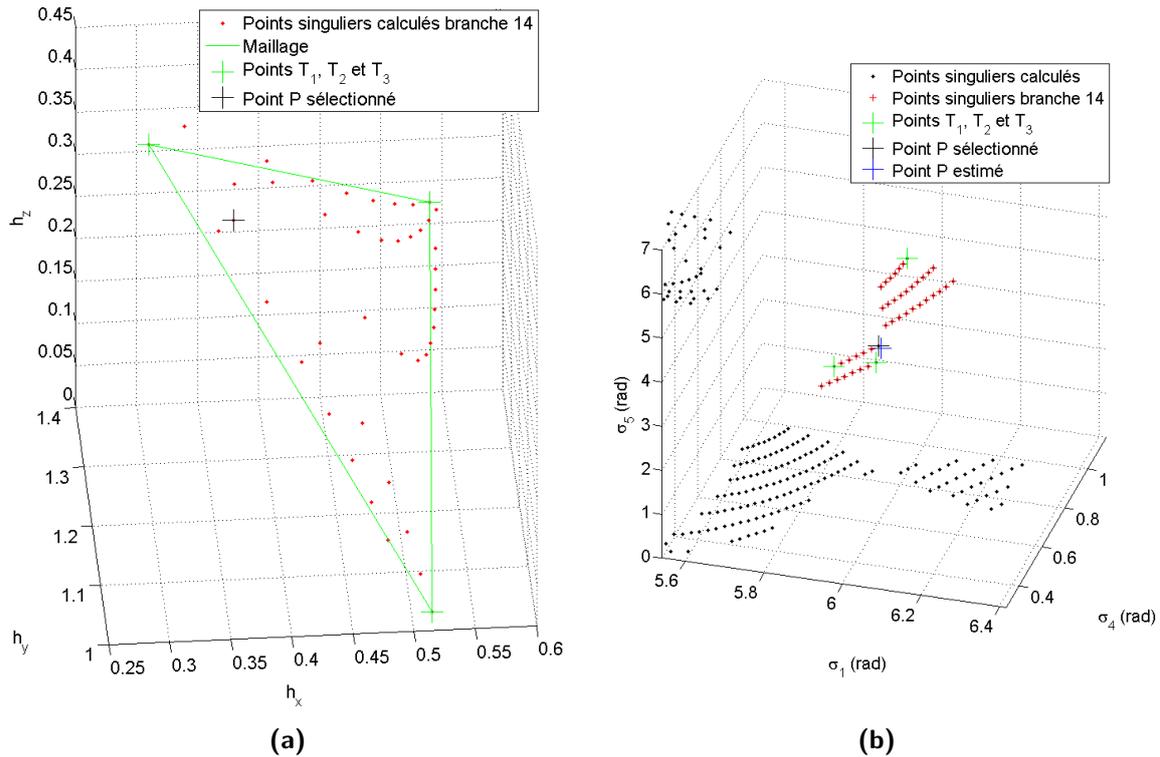


Figure 7.2 – (a) Estimation d'un point dans l'espace en moment cinétique. (b) Estimation d'un point dans l'espace en angles de précession.

larités internes intraversables.

- on vérifie si les points d'intersection sont bien situés dans les maillages et donc si la grappe est susceptible de rencontrer une singularité.
- **Calcul de la distance à cette singularité** : un seuil est inséré et pour chaque intersection valide trouvée avec les maillages des singularités, on compare ce seuil avec la distance entre le moment cinétique actuel et le futur moment cinétique singulier. Ce seuil peut dépendre de la topologie du système (quand faut-il commencer à s'éloigner de cette singularité?) et de la vitesse de précession actuelle (difficulté à dévier la trajectoire) et être choisi pour chaque branche.
- **Détection d'un futur σ singulier** : Pour les points singuliers détectés jugés proches en moment cinétique, on estime grâce à la méthode présentée ci-dessus les σ singuliers correspondants, et l'on regarde la distance en angles de précession. En effet, ce n'est pas parce qu'une singularité se trouve en un moment cinétique \mathbf{h} que le système va la rencontrer dans l'espace des σ . Sans ce critère, le système créerait une erreur alors que ce n'est pas nécessaire si sa configuration σ est suffisamment éloignée de la singularité.
- Il est aussi possible d'ajouter un critère pour vérifier que la direction du couple demandé est dans la direction singulière des singularités calculées, mais cela n'a pas été implémenté pour limiter les calculs et la quantité de données stockée et car les trajectoires les plus rapides que le système cherche à réaliser dans les cas de consignes constantes ont tendance à mener vers des singularités (trajectoires de Moore-Penrose).

La probabilité que le système soit dans une singularité bloquante est donc forte. Cela rend le système plus robuste mais risque de mener à des erreurs en couple dans des situations non nécessaires.

Une autre possibilité d'implémentation serait de travailler seulement en angles de précession. En fonction des topologies, ce maillage pourrait être plus simple, mais dans les applications visées de grappes à six AGs avec une ou deux pannes, rester en dimension 3 en moment cinétique est un plus au niveau de la visualisation. Aussi, une détection dans l'espace des configurations suppose que la vitesse de précession soit propagée pour tester si une singularité sera rencontrée. Or, on a vu dans la section sur les trajectoires cycliques stables 5.2.1.2 que très peu de trajectoires en σ avaient des structures particulières. Prédire les trajectoires futures en σ à partir des données passées engendrera dans la plupart des cas des erreurs plus fortes sans connaissance des topologies que les futures consignes en couple qui sont principalement dépendantes des opérations souhaitées du satellite et donc plus prévisibles. De plus, on connaît le couple à l'instant t donc on a un pas d'avance en moment cinétique par rapport aux $\dot{\sigma}$ au niveau de la prédiction.

Ensuite, une fois le σ_s singulier menaçant la grappe identifié, il suffit de rentrer dans la loi de pilotage un critère répulsif semblable à une fonction de potentiel pour éloigner le système de cet "obstacle". Ce critère est du type (7.15) avec σ la position actionneur courante, σ_s la position singulière à éviter et k_{rep} un gain qui caractérise la force de répulsion vis-à-vis de la singularité. Plus il est élevé, plus l'évitement est efficace mais l'erreur de couple risque d'être forte (à moins de le projeter sur le noyau de \mathbf{J}). Ainsi, ce coefficient pourrait être réglé en fonction de la distance à la singularité et de la vitesse des actionneurs afin de s'assurer de s'éloigner de la singularité. Lorsque la grappe est considérée comme éloignée des singularités, $k_{rep} = 0$.

$$\mathbf{m}_3 = \mathbf{v}_1 = k_{rep} \frac{\text{Proj}_{N\mathbf{J}} \mathbf{u}}{\|\sigma_s - \sigma\|^2} \quad (7.15)$$

avec $\text{Proj}_{N\mathbf{J}}$ la projection sur l'espace noyau de \mathbf{J} pour éviter de créer des erreurs et \mathbf{u} la direction d'évitement. Pour s'assurer que le dénominateur ne devient pas nul dans les cas où l'on démarre par exemple d'une singularité intraversable, un nombre ϵ peut être ajouté.

Des méthodes se basant sur l'analyse topologique avaient déjà été proposées dans la littérature. En particulier, la proposition de H. Kurokawa [Kurokawa 97] provient d'une étude approfondie de la topologie et des singularités pour délimiter les zones où les angles de précession de la grappe pyramidale à quatre AGs doivent se trouver pour réaliser les manœuvres demandées sans rencontrer de singularités. Le principal problème est la limitation de l'espace de travail et donc des capacités de la grappe. Une étude menée par H. Kojima dans [Kojima 14], classe les singularités entre traversables et intraversables. Les frontières entre ces types de singularités sont identifiées puis la perturbation à effectuer pour s'éloigner d'une singularité intraversable et pour se diriger vers la frontière avec les singularités traversables se fait en minimisant la norme L_2 de la perturbation en σ ou en rendant la perturbation parallèle au gradient local. Ainsi, la perturbation prédite va empêcher le système de tomber dans une singularité intraversable. A noter aussi le travail [K.Takada 10] qui propose de modifier la consigne en couple en amont de la loi de pilotage pour éviter qu'elle ne rencontre les surfaces singulières internes (passables et non passables) ce qui peut limiter les valeurs de

moment cinétique atteignables autour de ces surfaces singulières. Tous ces travaux ont été réalisés pour une grappe de quatre AGs.

7.2.5 Regroupement en une contrainte

Afin de garder un EKF avec autant d'équations que de mesure, la dernière équation de mesure peut comporter toutes les contraintes listées ci-dessus, activées ou non en fonction des demandes utilisateurs et des comportements de la grappe. Ainsi, cette approche s'apparente aux techniques de priorisation des tâches [Nakamura 87], intéressantes pour gérer les différentes contraintes que l'on peut souhaiter. Un exemple d'une seule contrainte regroupant la contrainte de retour à la position initiale et la saturation est donnée dans la loi de pilotage test à quatre AGs section 7.3. Néanmoins, la compatibilité entre les contraintes reste un problème, et l'avantage de regrouper en une contrainte est de vérifier les combinaisons de contraintes possibles. Néanmoins, il reste possible et plus simple de rajouter des équations de mesure \mathbf{m}_k , $k \geq 4$ pour chaque contrainte ajoutée, et de faire varier leur importance dans les covariances. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle augmente la taille des matrices et donc la quantité de calculs dans l'EKF.

7.3 Description des lois de pilotage testées

Différentes versions de la loi de pilotage peuvent ainsi être implémentée en fonction des besoins et de la quantité de calculs/données stockées acceptables. Dans les prochaines simulations, plusieurs versions seront testées, avec des légères variations entre elles. Deux simulateurs ont été utilisés pour tester les lois de pilotage. Le premier est un simulateur réalisé sous Matlab/Simulink tenant compte de la dynamique des AGs de manière précise. Les principales caractéristiques sont :

- Seul le mouvement en attitude est calculé ;
- Le couplage dynamique avec le satellite est modélisé (éq. (3.18)) ;
- Le satellite est modélisé par son inertie et sa masse simplement ;
- La géométrie de l'AG est modélisée avec plus de précisions : masse, inertie et position relatives des différents éléments constitutants (toupie, fourche, axe précession et centre de masse)
- Des couples perturbateurs peuvent intervenir sur le satellite ;
- Les toupies ont des vitesses constantes et égales ;
- Les frottements sont négligés ;
- Des bruits de capteurs ou des retards peuvent être ajoutés.

Le second simulateur est très représentatif de la dynamique satellite et intègre des modèles précis de capteurs avec les bruits, de mécanique, dynamique orbitale et de contrôle des actionneurs. Des manoeuvres typiques de satellite peuvent être calculées. Le but des simulations dans ce second simulateur est de montrer la faisabilité de notre commande même dans sa version la plus simple, et de comparer avec une loi de pilotage de Moore-Penrose.

Dans les simulations, les propriétés suivantes sont communes :

- Les résultats sont montrés avec un moment cinétique normalisé afin de mieux étudier les trajectoires des angles de précession grappes.
- La saturation en vitesse de précession est normalisée à 1 rad/s, et la saturation en accélération de précession à 1 rad/s².

Tout d'abord, la loi sélectionnée pour la grappe à six AGs est présentée, puis celles testées dans les cas de panne.

7.3.1 Lois de pilotage pour la grappe à six AGs

Les variables sélectionnées pour implémenter l'EKF sont données en éq. (7.16) avec les équations de prédiction associées.

Le modèle de prédiction est choisi comme suit (éq. (7.16)) avec la matrice \mathbf{F} linéarisée correspondante (7.18) et la matrice de covariance associée \mathbf{Q} en éq. (7.19).

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \mathbf{v}_1 = \frac{T_c}{\Delta T} \Delta \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{v}_2 = \frac{T_c^2}{\Delta T^2} \Delta^2 \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{v}_3 = \frac{T_c}{\Delta T} \frac{\Delta \mathbf{h}}{h t} \end{cases} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{v}}(t + \Delta T) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{v}}) = \begin{cases} \hat{\mathbf{v}}_1(t + \Delta T) = \hat{\mathbf{v}}_1(t) \\ \hat{\mathbf{v}}_2(t + \Delta T) = \hat{\mathbf{v}}_2(t) \\ \hat{\mathbf{v}}_3(t + \Delta T) = 0.1\hat{\mathbf{v}}_3(t) + 0.9\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (7.16)$$

avec $\mathbf{u}(t) = \mathbf{t}_{dem} \frac{T_c}{h t}$ et où les erreurs d'évolution $\boldsymbol{\epsilon}$ sont négligés dans le modèle de prédiction et dimensionnés par la matrice de covariance \mathbf{Q} . Les deux premières équations imposent donc une limitation sur l'accélération de précession. Les coefficients ont été calculés pour limiter l'accélération de précession et pondérer l'entrée de commande afin d'éviter les consignes en couple impossibles. Le choix de ces coefficients est donc fait a priori à partir de simulations, et tels qu'ils répartissent le poids entre l'entrée en commande et l'accélération de précession. Ils peuvent être raffinés avec un modèle d'actionneur (voir section 7.1.1).

$$\mathbf{m} = \mathbf{g}(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{m}_1 = -\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{v}_1(t) + \frac{1}{2}\mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{v}_2(t) \frac{\Delta T}{T_c} + \mathbf{v}_3(t) + \boldsymbol{\epsilon}_{m_1} \\ \mathbf{m}_2 = -\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\epsilon}_{m_2} \\ \mathbf{m}_3 = \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_{m_3} \end{cases} \quad (7.17)$$

Puisque l'on cherche à minimiser m_1 et m_2 , dans l'implémentation pratique ce sont des vecteurs nuls. Les perturbations $\boldsymbol{\epsilon}_m$ sont dimensionnées par la matrice de covariance \mathbf{R} . Les deux premières lignes de l'éq. (7.17) sont imposées par la dynamique du problème et la troisième permet d'appliquer différentes contraintes. Plusieurs sont testées dans les simulations à venir. Ainsi on vérifie bien les conditions d'observabilité supposées dans la section (6.3), puisque le système est observable dès le premier pas de temps (matrice de rang plein). La matrice

jacobienne associée à l'éq. (7.17) est définie dans l'éq. (7.18).

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 3} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times n} & \mathbf{0}_{3 \times n} & 0.1 \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) & \frac{1}{2} \mathbf{X}(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\Delta T}{T_c} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ -2\mathbf{v}_1 & \mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 3} \\ \mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 3} \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Les deux matrices de covariance \mathbf{Q} et \mathbf{R} sont données en éq. (7.19) avec \underline{r} et \bar{r} les valeurs singulières minimales et maximales de \mathbf{R} ($\underline{r}\mathbf{I} \leq \mathbf{R} \leq \bar{r}\mathbf{I}_n$), qui seront calculées avec l'algorithme génétique développé dans la section suivante. On définit aussi les valeurs singulières minimales et maximales logarithmiques : $\underline{q}_l = \log_{10}(\underline{q})$ pour la matrice \mathbf{Q} par exemple.

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(q\mathbf{I}_{2n \times 1}, \underline{q}\mathbf{I}_{3 \times 1}) \text{ et } \mathbf{R} = \text{diag}(\underline{r}\mathbf{I}_{2n \times 1}, p\mathbf{I}_{3 \times 1}) \quad (7.19)$$

avec "diag" définissant une matrice diagonale. p et q seront données en fonction des cas. Les valeurs de covariance les plus faibles sont positionnées sur les équations qui doivent être vérifiées en priorité.

Pour améliorer l'estimation de la variable \mathbf{v}_2 qui est par définition toujours positive ou nulle, il est apparu lors des simulations que calculer deux fois l'EKF dans un pas de temps permettait de converger vers une solution vérifiant plus précisément les équations physiques du problème. Cette procédure n'est pas nécessaire pour faire fonctionner la loi de pilotage, mais elle présente des résultats plus précis comme présentés dans les Fig. 7.12 et 7.13. C'est donc une possibilité d'amélioration testée dans ce mémoire, qui augmente néanmoins la quantité de calculs à effectuer. Dans l'algorithme, seule l'estimation finale de \mathbf{v}_1 est alors envoyée au contrôleur de l'actionneur dans ce cas. Le calcul est alors effectué selon le schéma suivant (Fig. 7.3).

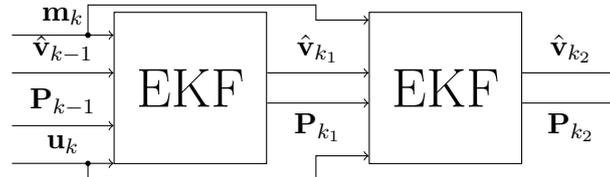


Figure 7.3 – Schéma de calcul avec deux fois l'EKF

Dans le cas de la grappe pyramidale à six AGs, dans les simulations Matlab, on choisit $\mathbf{m}_3 = \mathbf{0} + k(\boldsymbol{\sigma}_{init} - \boldsymbol{\sigma}_c)$. Lorsque le système doit retourner à la position initiale : $k = 0.5$, et sinon $k = 0$ et la contrainte de saturation s'applique. Dans les simulations présentées dans les sections suivantes, la contrainte de retour à la position initiale est activée à la moitié de la manœuvre et si $\|\mathbf{h}\| \leq 1, 5h_t$. Les matrices de covariance sont réglées avec $p = 10^{\bar{r}_l - \frac{|\max(\dot{\boldsymbol{\sigma}})|}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{max}}(\bar{r}_l - \underline{r}_l)}$ (voir notation à l'éq. (7.19)), et $q = 10^{\bar{q}_l - \frac{|\max(\dot{\boldsymbol{\sigma}})|}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{max}}(\bar{q}_l - \underline{q}_l)}$ pour s'assurer que les contraintes de saturation sont respectées. L'EKF est calculé deux fois en un pas de temps.

Dans le cas du simulateur haute-fidélité, une version simplifiée est implémentée avec $\mathbf{m}_3 = \mathbf{0}$, $p = 10^{\underline{r}_l}$ et $q = 10^{\underline{q}_l}$. Cette version est aussi implémentée dans les autres cas de panne par simplicité, et l'EKF n'est calculé qu'une seule fois par pas de temps.

7.3.2 Loi de pilotage pour la grappe pyramidale à quatre AGs - tests sous Matlab

Les buts des simulations des cas de panne est de comparer les avantages et inconvénients de différentes stratégies d'évitement de singularités intraversables. C'est pourquoi des simulations sur la grappe à quatre AGs avec deux pannes sont réalisées. Des simulations sur la grappe de cinq AGs seront présentées sur le simulateur haute fidélité. La loi de pilotage définie précédemment en éq. (7.17), (7.16) et (7.19) a été implémentée. Cependant, dans le cas de pannes, l'EKF n'est calculé qu'une seule fois par pas de temps. Trois versions de la loi ont été testées pour différencier les techniques d'évitement de singularités dans le cas de deux pannes :

- Loi 1 : $\mathbf{m}_3 = \mathbf{0} + k(\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma})$ avec $p = 10^{\bar{r}_l - \frac{|\max(\dot{\boldsymbol{\sigma}})|}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{max}}(\bar{r}_l - r_l)}$ pour intégrer la contrainte de saturation et le retour à la position initiale.
- Loi 2 : évitement basé sur mesure de la distance aux singularités par le déterminant de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$. $\mathbf{m}_3 = 10^{-15\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)}\text{sign}(\dot{\boldsymbol{\sigma}})\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{max} + k(\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma})$ avec $p = \bar{r}$. En imposant $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{max}$, tous les AGs seront sollicités.
- Loi 3 : $\mathbf{v}_1 = k_{rep} \frac{\text{Proj}_{N_J} \mathbf{u}}{\|\boldsymbol{\sigma}_s - \boldsymbol{\sigma}\|^2}$ est imposée avec $p = \bar{r}$ (voir section 7.2.4). Le retour à la position initiale n'est pas demandée ici puisque le système parcourt un espace en angle de précessions plus grand pour éviter les singularités, et peut a priori démarrer de n'importe quelle condition initiale.

7.4 Réglage de la loi de pilotage par optimisation génétique

Dans nos simulations, les seuls paramètres que nous avons généré grâce à l'algorithme génétique issu de [Fonseca 93] et développé en interne à l'ONERA sont les valeurs maximales et minimales des matrices de covariance \mathbf{R} et \mathbf{Q} . Il faut noter que l'utilisation de l'algorithme génétique est utile pour trouver des paramètres optimaux lorsque les critères sont non-linéaires ou ne peuvent pas être exprimés simplement. Par exemple, on pourrait l'utiliser pour optimiser les paramètres dans la loi utilisant le déterminant, développée dans la section 7.3.

La première phase de cette optimisation consiste à donner des intervalles dans lesquels les valeurs singulières de matrices \mathbf{R} et \mathbf{Q} peuvent se trouver pour assurer que la loi de pilotage soit convergente. Dans cette première partie, on va choisir des valeurs singulières de \mathbf{R} et \mathbf{Q} avec une plage de variation aussi grande que possible afin de laisser la plus grande marge de manœuvre pour régler l'importance des différentes équations de l'EKF.

7.4.1 Erreur initiale maximale

La loi de pilotage développée possède des preuves de convergence à vérifier comme explicité dans la section 6.3. Un jeu de paramètres (\mathbf{R} , \mathbf{Q} et \mathbf{e}_0) est valide si les conditions de stabilité décrites dans l'article [Song 95] sont vérifiées.

De plus, on souhaite que l'erreur d'estimées initiale (erreur d'initialisation) e_0 maximale acceptable soit la plus grande possible. A un jeu de paramètres (\mathbf{R}, \mathbf{Q}) correspond un \mathbf{e}_0 maximal avec la preuve, ayant choisi un \mathbf{P}_0 compatible avec l'intervalle des valeurs propres de \mathbf{P} calculé à l'aide de (\mathbf{R}, \mathbf{Q}) . La norme des erreurs initiales sur \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 et \mathbf{v}_3 doit donc être estimée. Calculons maintenant la norme \mathbf{e}_0 du vecteur d'erreur d'initialisation auquel on souhaiterait pouvoir être robuste (7.20).

$$\begin{cases} |e_{0v1}|^2 = n_{AGS}(\Delta\sigma_{err0} \frac{T_c}{T_s})^2 \\ |e_{0v2}|^2 = n_{AGS}(\Delta\sigma_{err0} \frac{T_c}{T_s})^4 \\ |e_{0v3}|^2 = n_{AGS}(\Delta\sigma_{err0} \frac{T_c}{T_s})^2 \end{cases} \quad (7.20)$$

Pour être robuste à des erreurs initiales assez élevées, on choisit une erreur maximal de 10% par rapport aux capacités maximales des actionneurs : $\Delta\sigma_{err0} \frac{T_c}{T_s} = 0.1\dot{\sigma}_{sat}T_c$. Dans ce mémoire on choisit $\dot{\sigma}_{sat} = 1\text{rad/s}$ et $T_c = 1$. La valeur de $|e_{0v3}|^2$ provient du fait que la trace (donc la somme des valeurs propres) de la matrice $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ est égale à n_{AGS} , donc dans le pas de temps T_s on a (7.21).

$$\left\| \frac{\Delta\mathbf{h}}{h_t} \right\|^2 = \Delta\sigma^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} \Delta\sigma \quad (7.21)$$

Une simple application numérique donne $e_{0min} = 0.35$. On a donc obtenu un minimum de la norme de e_0 que les paramètres (\mathbf{R}, \mathbf{Q}) doivent permettre d'atteindre.

7.4.2 Critère sur (\mathbf{R}, \mathbf{Q})

(\mathbf{R}, \mathbf{Q}) sont des matrices diagonales. La preuve de stabilité [Song 95] utilise les normes 2 induites sur les matrices, c'est donc sur les valeurs singulières minimales et maximales de ces matrices que l'on va se pencher. Afin de pouvoir régler notre EKF comme une loi qui donne la priorité à certaines équations sur d'autres en fonction de l'état de la grappe (e.g. proche d'une singularité ou d'une saturation), un critère sur le rapport entre les valeurs singulières maximales et minimales de \mathbf{R} a été choisi. Il consiste à maximiser ce rapport. Cependant, afin de simplifier le réglage des covariances déjà complexe à cause de l'utilisation de l'algorithme génétique, on choisit d'avoir les mêmes limites sur les valeurs propres minimales et maximales de \mathbf{R} et \mathbf{Q} , ce qui imposera une contrainte supplémentaire dans l'optimisation.

Ainsi on va chercher les plus grands intervalles dans lesquels les valeurs singulières peuvent se trouver, tout en restant stable et avec une valeur d'erreur d'initialisation compatible. Cet algorithme est similaire au papier [Boutayeb 97], néanmoins dans cet article, les covariances \mathbf{Q} sont choisies à 0 et seules les valeurs singulières de \mathbf{R} sont déduites.

7.4.3 Paramétrage de l'optimisation génétique

Dans notre cas, nous avons choisi comme intervalles les puissances de 10 des valeurs singulières min et max pour \mathbf{R} et \mathbf{Q} . Plus les valeurs singulières sont faibles, plus la preuve

de stabilité a des chances d'être vérifiée, mais des valeurs trop faibles peuvent impliquer des difficultés de calcul des simulateurs. Ainsi, les valeurs singulières choisies doivent rester entre 10^{-2} et 10^{-7} . Néanmoins, avec les mutations et croisements, ces intervalles peuvent être dépassés par les solutions finales donc il faudra s'assurer que les solutions restent dans les intervalles demandés. Trente générations de cent individus ont été testées.

Pour les simulations présentées dans les sections suivantes, la fonction évaluant chaque individu réalise ces différentes étapes, prenant en entrée les paramètres $(\bar{r}, \underline{r}, \bar{q}, \underline{q})$:

- Les bornes des valeurs propres des matrices de linéarisation \mathbf{F} et \mathbf{C} connues, et e_{0min} choisi grâce à l'éq. (7.20), l'expression (6.31) est calculée. Pour vérifier les conditions de stabilité, elle doit être négative.
- Si l'expression calculée est négative et si $(\bar{r}, \underline{r}, \bar{q}, \underline{q})$ sont bien dans les bornes spécifiées, alors trois critères de performance sont calculés sur l'individu. Plus ils sont faibles, plus l'individu est performant.
- Sinon, une performance pénalisante de $\begin{bmatrix} 1000 & 1000 & 1000 \end{bmatrix}$ empêchant ce réglage d'être gardé par la suite.

7.4.4 Critères de performance

Pour chaque individu, trois critères de performances sont évalués. Comme explicité précédemment, l'intervalle entre les valeurs singulières minimales et maximales de \mathbf{R} est le premier critère pour garder de la flexibilité sur le réglage : $c_1 = 1/(\log(\max(\mathbf{R})) - \log(\min(\mathbf{R})))$.

Pour analyser les performances d'un réglage, des simulations sont effectuées dans $1/6^e$ de boule de l'espace 3D pour la grappe à six AGs sans pannes. En effet, partant d'une position initiale symétrique, avec une grappe de 6 AGs, représenter les moments cinétiques obtenus dans toutes les directions d'un sixième de boule nous permet de voir les principales caractéristiques de la loi. Dans la figure 7.4, chaque point correspond à une direction en moment cinétique que la loi de pilotage doit suivre jusqu'à la saturation de la grappe. Tout au long de chaque simulation, différentes données vont être sauvegardées afin d'étudier les singularités rencontrées sur le chemin, la rapidité de la loi, l'atteinte ou non de la saturation ; le tout donc sur un nombre de directions représentatives des capacités de la loi. En entrée de la loi de pilotage est imposée $\mathbf{t} = k\mathbf{u}$ avec \mathbf{u} direction choisie pour la simulation et k un coefficient identique et constant. Le modèle de simulation de la grappe est cinématique et non dynamique, très simplifié pour ces calculs. C'est pourquoi le critère principal sera le premier, car il permet de garder de la marge pour régler la loi en tenant compte des effets dynamiques non modélisés ici.

Le deuxième critère correspond au découplage. Il consiste à analyser le cosinus de l'angle entre le moment cinétique demandé et celui créé tout au long des simulations, défini dans l'éq. (7.22) par la variable c_{ang} .

$$c_{ang}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\mathbf{h}_{dem} \cdot \mathbf{h}_{cree}}{\|\mathbf{h}_{dem}\| \|\mathbf{h}_{cree}\|} \quad (7.22)$$

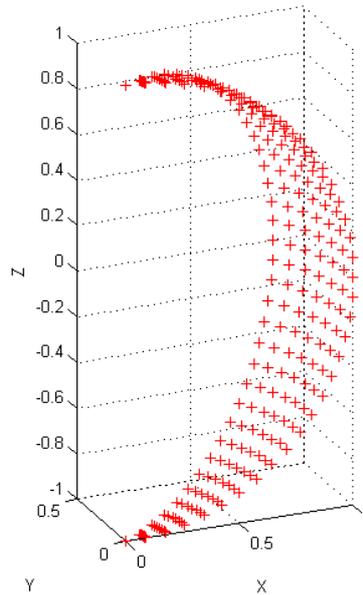


Figure 7.4 – Directions de moments cinétiques étudiés

avec \mathbf{h}_{dem} le moment cinétique pris, à chaque simulation, comme $\mathbf{h}_{dem} = h_{sat}\mathbf{u}$ avec h_{sat} la valeur du moment cinétique maximal atteignable par la grappe, et \mathbf{u} la direction que la loi de pilotage doit suivre. A chaque pas de temps où le moment cinétique est donné par la simulation, on calcule donc c_{ang} .

Si la loi suit parfaitement la consigne en direction, alors c_{ang} sur toute la simulation vaudra de 1. Sinon il sera inférieur à 1. Un c_{ang} faible provient de l'évitement de singularités en créant une erreur de couple, ou de la mauvaise gestion de la saturation extérieure de la grappe (le système ne s'y arrête pas et essaye de la contourner).

Ci-dessous sont données deux représentations du c_{ang} pour un certain jeu de paramètres de la loi de pilotage. Dans la figure 7.5a sont représentés les valeurs de c_{ang} (en couleur) aux \mathbf{h} demandés correspondants, alors que dans la figure 7.5b, les valeurs de c_{ang} en couleur sont représentés aux \mathbf{h} produits par la grappe. L'angle de déviation maximal est $\arccos(0.92) = 23$ degrés, bien visibles sur la figure 7.5. On remarque aussi que les déviations sont au niveau des singularités, puis qu'une fois contournées, on retourne aux \mathbf{h} demandés.

Le critère numéro 2 est alors : $c_2 = 1/\min_t(c_{ang})$, dont la valeur minimale vaut 1.

Pour chaque jeu de paramètres testés, le minimum, le maximum et le c_2 moyen sont calculés.

Lorsque le système passe par une singularité, afin de pouvoir s'en extraire, il peut être amené à utiliser le noyau. Le mouvement risque donc d'être moins efficace et ralenti. Il est aussi possible que les singularités soient contournées et donc que le moment cinétique final désiré soit atteint plus tard. Lorsqu'il n'y a pas de singularités, le système va à une vitesse

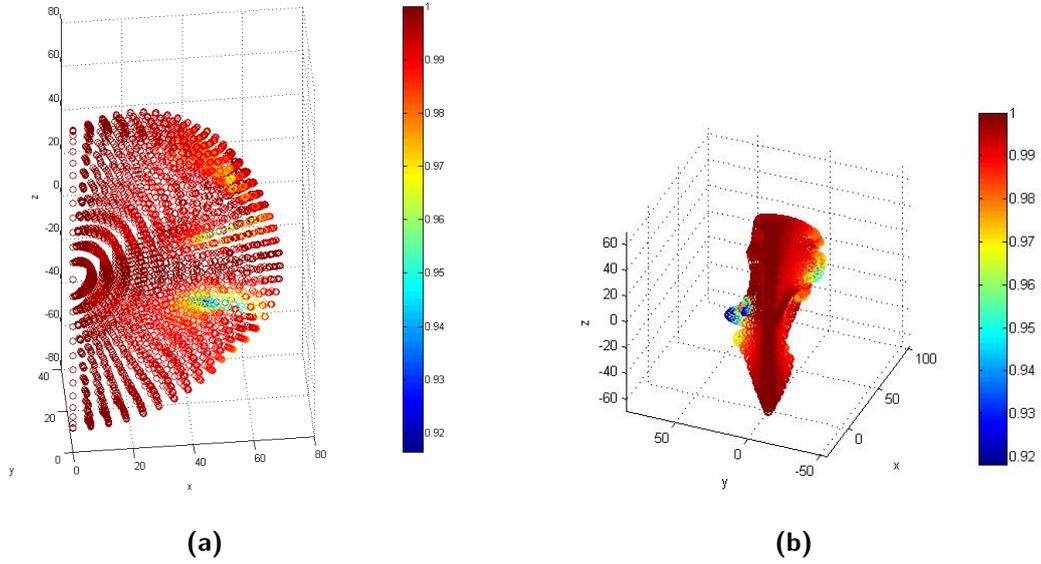


Figure 7.5 – (a) Représentation de c_{ang} sur les \mathbf{h} demandés. (b) Représentation de c_{ang} sur les \mathbf{h} créés.

presque constante vers sa destination finale en moment cinétique. Ainsi, caractériser le temps mis pour atteindre la saturation permet d’avoir une information sur le passage de singularités. Ce temps a été défini par l’éq. (7.23).

$$\tau = \min_t \|\mathbf{h}_{cree}(t)\| \geq kh_{sat} \quad (7.23)$$

avec h_{sat} la norme maximale de moment cinétique atteignable par la grappe (pour six AGs isotrope, $h_{sat} = 4.8h_t$) et k un coefficient ici pris à 0.9. Si la valeur n’est pas atteinte, alors $\tau = 0$.

Voici un exemple de résultats (Fig. 7.6) du temps calculé pour chaque simulation avec les mêmes caractéristiques que pour c_{ang} . Dans cette image, les valeurs des temps de réponse sont affichées sur les directions demandées. Le problème des variations de direction au cours du temps est abordé dans le découplage, ici c’est simplement la norme maximale en \mathbf{h} atteinte. On retrouve bien les zones avec des singularités où le système est ralenti, voire empêché de continuer.

De même que précédemment, pour chaque individu, les valeurs minimales, maximales et moyennes sont calculées. Le troisième critère est donc le temps moyen mis par la grappe pour atteindre la saturation, sachant que si elle n’est pas atteinte dans une simulation, alors une valeur pénalisante 100 fois plus élevée que la moyenne est insérée pour cette simulation : $c_3 = \underline{\tau}$.

Les résultats précédents donnent des valeurs pour une certaine entrée. Il peut être intéressant de faire varier cette entrée pour voir l’effet sur le passage de singularités. Le fait d’avoir plus ou moins de vitesse en approche d’une singularité peut aider à la passer en créant une

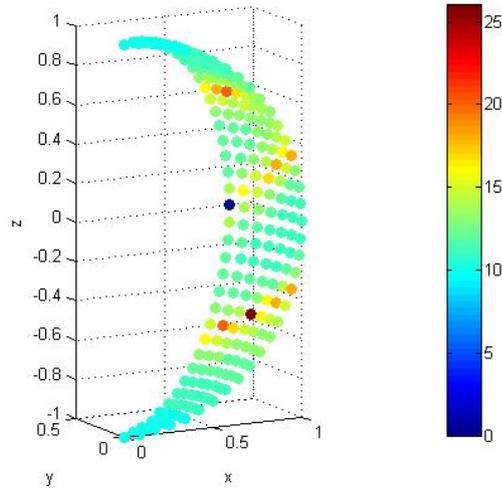


Figure 7.6 – Représentation du temps pour atteindre la saturation dans les directions demandées

légère erreur, mais arriver plus doucement peut permettre de se reconfigurer dans le noyau pour l'éviter.

On résume donc les trois critères de performance étudiés dans l'éq. (7.24).

$$\begin{cases} c_1 = 1/(\log(\max(\mathbf{R})) - \log(\min(\mathbf{R}))) \\ c_2 = 1/\min_t(c_{ang}) \\ c_3 = \underline{\tau} \end{cases} \quad (7.24)$$

7.4.5 Sélection de l'individu

Suite à ces analyses, les résultats des individus peuvent être affichés. Dans notre cas, l'image 7.7 est obtenue.

L'analyse multi-critère a été simplifiée puisqu'un individu optimal selon tous les critères sortait de l'analyse. Sinon, un ensemble de valeurs acceptables dans chaque critère aurait été sélectionné et l'individu optimal selon un critère dans cette sous-sélection aurait été choisi. L'individu choisi présente ces caractéristiques :

- $p_0 = 1.383e - 5$
- $\underline{r} = \underline{q} = 1.0955e - 07$
- $\bar{r} = \bar{q} = 1.6504e - 06$

C'est donc avec ces valeurs que les simulations suivantes sont réalisées. Les analyses des résultats du réglage issu de l'optimisation génétique suivi de la génération de loi de commande en amont, similaires à la section 6.7 ont aussi été réalisées, dans le cas de la grappe à 6 AGs sans ou avec panne mais non présentés ici pour cause de redondance avec l'exemple du bras section 6.7.

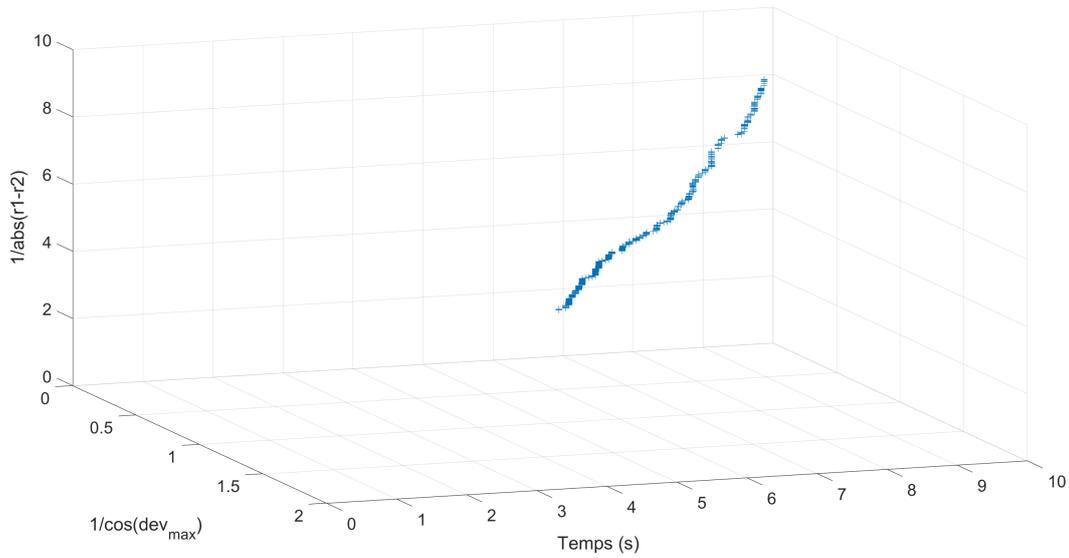


Figure 7.7 – Résultats de l'optimisation génétique

7.5 Simulations avec le modèle Matlab

7.5.1 Simulations avec la grappe pyramidale de six AGs

Le but de cette partie est de montrer le comportement de la loi de pilotage sur des simulations représentatives, intégrant les contraintes de saturation de précession, comme défini dans la section 7.3. Ces résultats ont été présentés à l'ESAGNC Conference et dans le papier [Evain 17a]. Les simulations sont effectuées sur Matlab/Simulink avec un modèle décrivant la dynamique non-linéaire couplée entre la grappe d'AGs et le satellite (voir section 7.3). Il n'y a cependant ni frottements ni bruits. La boucle de simulation et de commande est présentée sur le schéma 7.8.

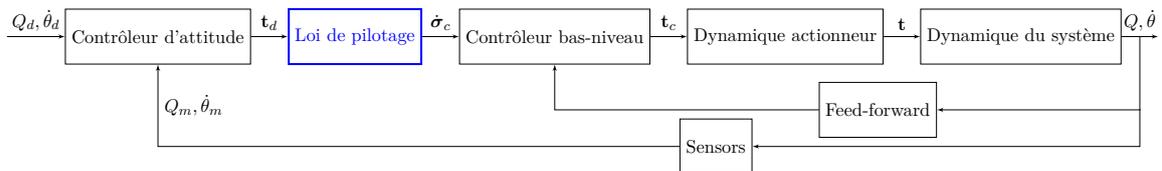


Figure 7.8 – Schéma-bloc simplifié du modèle de simulation

Les actionneurs sont modélisés avec un temps de réponse de 1ms (premier ordre). Le terme de feed-forward permet de linéariser les équations non-linéaires (3.18) déjà présentées, et en particulier ce feed-forward est le couple valant : $\mathbf{t}_{ff} = h_t \chi \omega$ dominant sur le terme $c_g \mathbf{Z} \dot{\sigma}$. Le contrôleur bas-niveau est aussi issu des équations (3.18). Ce contrôleur est synthétisé comme valant : $\mathbf{C}_{bn} = k_{bn}(\dot{\sigma}_c - \dot{\sigma}_m) - h_t \mathbf{J}^T \omega + c_g \mathbf{Z}^T \dot{\omega}$. avec $\dot{\sigma}_c$ la consigne en sortie de la loi de pilotage et $\dot{\sigma}_m$ les vitesses de précession mesurées.

L'inertie du satellite est choisie égale à $700\text{kg}\cdot\text{m}^2$ selon les axes principaux d'inertie (confondus avec le repère de la grappe) et les inerties transverses sont choisies à 1% des moment d'inertie principaux donc à $7\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Les lois de commande attitude et loi de pilotage tournent à 8 Hz alors que les autres blocs sont simulés en continu.

La grappe étudiée possède un moment cinétique interne de 14Nms et un angle de grappe isotrope de 54.7 degrés. Dans les simulations présentées ci-dessous, l'intérêt recherché est d'étudier comment la grappe contrôle l'attitude du satellite selon des directions variées dans le repère satellite (simulant des manœuvres de réorientation dans le repère satellite) et si elle parvient à atteindre les capacités maximales en moment cinétique. Ces manœuvres démarrent d'une position initiale fixée à $\sigma_0 = \left[-\frac{\pi}{3} \quad \pi \quad \frac{\pi}{3} \quad -\frac{\pi}{3} \quad \pi \quad \frac{\pi}{3}\right]$ rad choisie car maximisant le déterminant de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ et la grappe doit retourner à cette position initiale à la fin de cette manœuvre. Au vu des symétries de la grappe, les manœuvres à réaliser sont réparties sur un douzième de la boule de moment cinétique. On souhaite créer des manœuvres telles que le moment cinétique de grappe atteigne l'enveloppe en moment cinétique. Pour que cela soit plus aisé, il est préférable de guider le satellite en vitesse angulaire. Ce processus a été suivi pour générer les manœuvres à réaliser par la grappe :

- Calcul de l'enveloppe externe de la grappe sur $1/12^e$ de l'espace en moment cinétique (maillage fin, voir image 7.9) sur le domaine $h_z \geq 0$, $h_y \geq 0$ et $h_x \tan(\frac{\pi}{6}) \geq h_y$;
- Maillage des directions à simuler dans l'espace des moments cinétiques correspondant au nombre de manœuvres à tester souhaitées. Dans les simulations suivantes, on en considère 21 ;
- Récupération du moment cinétique de grappe maximal correspondant à la direction maillée ;
- Calcul de la vitesse satellite maximale ω_{max} à atteindre suite au moment cinétique maximal de grappe par la formule simplifiée : $\omega_{max} = \mathbf{J}_{sat}^{-1} h_{max}$ avec \mathbf{J}_{sat}^{-1} l'inverse de la matrice d'inertie du satellite ;
- Génération de la consigne en vitesse satellite suivant le gabarit montré par exemple dans la Fig. 7.10 en haut à gauche.

De fait, puisque le contrôle se fait en vitesse satellite, le contrôleur d'attitude inséré n'est qu'un simple proportionnel. Les simulations représentant les manœuvres réalisées par le satellite sont montrées en Fig. 7.9. Les points colorés correspondent à l'enveloppe externe théorique de la grappe. Les lignes noires indiquent les directions maillées lors du processus de génération des consignes, et les lignes bleues les résultats des simulations en boucle fermée. On remarque que dans toutes les directions simulées, l'enveloppe externe est atteinte. Selon certaines directions, des déviations en moment cinétiques peuvent être notées dues au passage de singularités à forte vitesse de précession, créant des couples dans les directions non souhaitées lors de l'évitement de singularités. Dans les figures suivantes sont montrés plus en détails les résultats de simulation dans la direction avec le moins de déviation (Fig. 7.10), et la plus déviée (Fig. 7.11). Les oscillations visibles sur la Fig. 7.11 au niveau des vitesses de précession sont dues aux variations des matrices de covariance qui augmentent le poids des équations de saturation lorsque les vitesses ou accélérations de précession sont proches de la saturation. La contrainte de saturation aide néanmoins à limiter efficacement les vitesses de précession sous la limite de 1rad/s. La contrainte de retour à la position initiale crée une forte

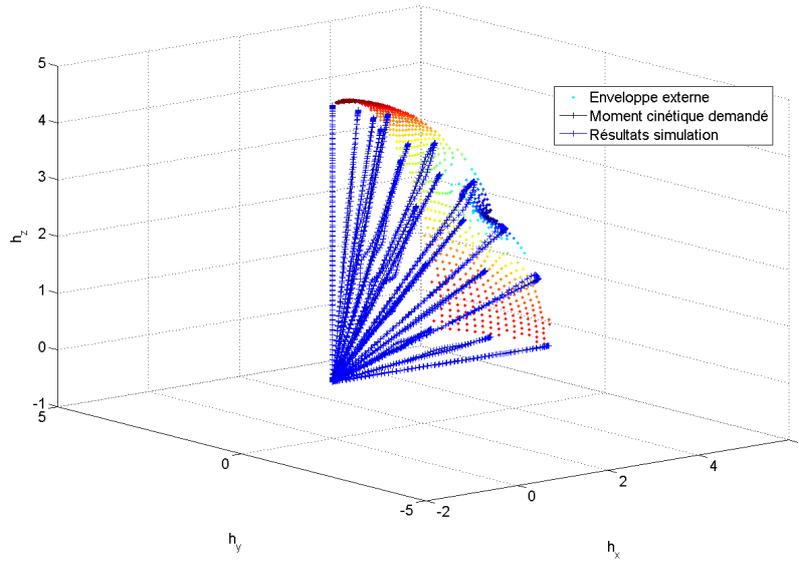


Figure 7.9 – Résultats des simulations dans le domaine des moments cinétiques normalisés à $h_t = 1\text{Nm}$

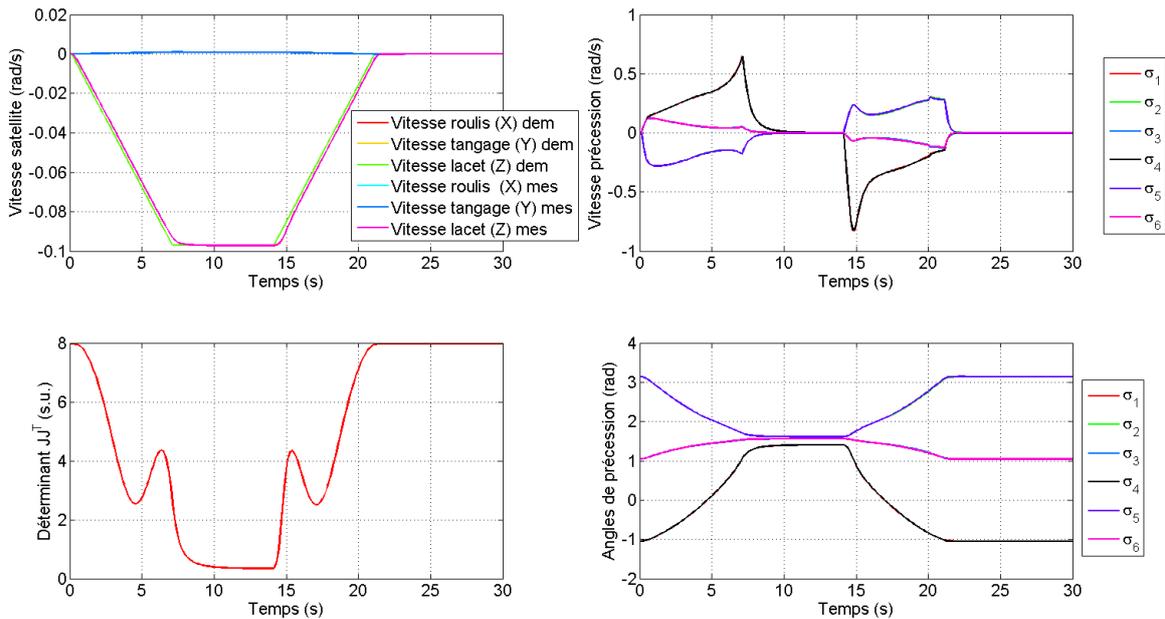


Figure 7.10 – Résultats dans la direction $\mathbf{h} = h_t[0 \ 0 \ 1]$ Nms

accélération de précession si les angles de précession sont loin des valeurs finales demandées, créant la saturation à 20 secondes dans la simulation 7.11. Cependant, le retour à la position initiale des angles de précession est vérifié même dans le pire cas.

Sur les Fig. 7.12 et 7.13 ci-dessous sont données les valeurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 de l'EKF dans les deux simulations déjà présentées 7.10 et 7.11.

On rappelle que $\mathbf{v}_1 = \frac{T_c}{\Delta T} \Delta \boldsymbol{\sigma}$ et $\mathbf{v}_2 = \frac{T_c^2}{\Delta T^2} \Delta^2 \boldsymbol{\sigma}$. Ainsi, on doit vérifier que $\mathbf{v}_1^2 = \mathbf{v}_2$.

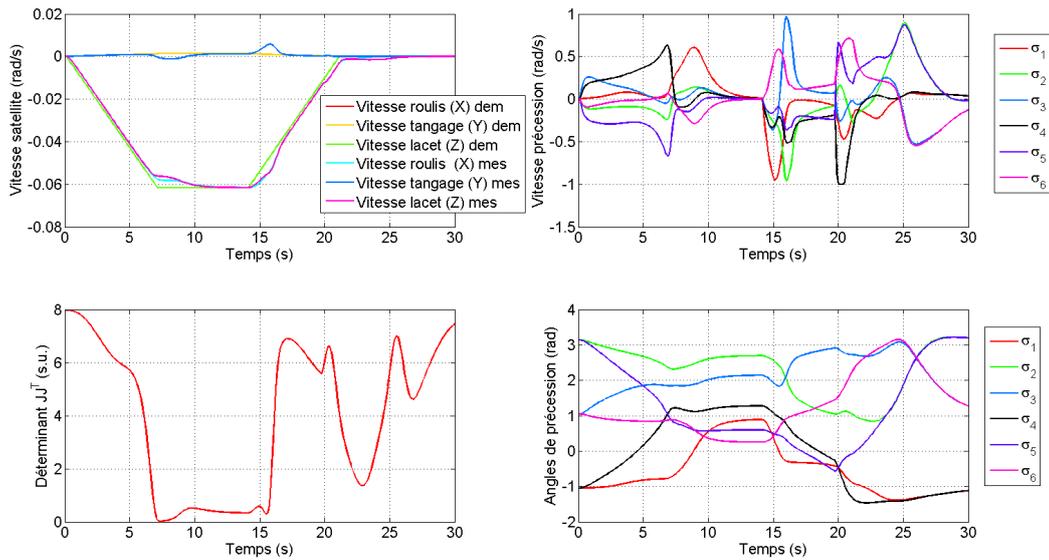


Figure 7.11 – Résultats dans la direction $\mathbf{h} = h_t[0.707 \ 0 \ 0.707]Nms$

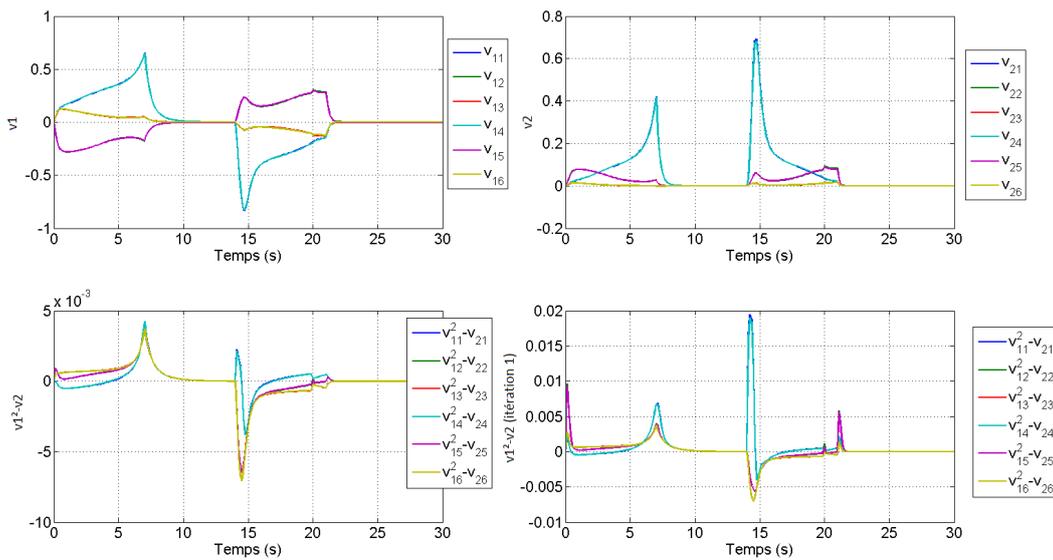


Figure 7.12 – Evolution des paramètres estimés \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 dans la direction $\mathbf{h} = h_t[0 \ 0 \ 1] Nms$

Cependant, quelques erreurs peuvent subsister, en particulier lorsque toutes les contraintes insérées dans l'EKF sont difficiles à vérifier en même temps (saturation, passage de singularité) comme montré dans la Fig. 7.13 en bas à gauche. Les graphiques en bas à droite montrent les valeurs de $\mathbf{v}_1^2 - \mathbf{v}_2$ lors de la première itération de l'EKF dans le pas de temps, alors que les graphiques en bas à gauche montrent cette même $\mathbf{v}_1^2 - \mathbf{v}_2$ après la seconde itération dans le pas de temps. Ainsi, on remarque bien l'intérêt d'itérer dans un pas de temps afin de trouver des solutions physiquement acceptables : \mathbf{v}_2 positives et vérifiant $\mathbf{v}_1^2 - \mathbf{v}_2 = 0$ avec une certaine précision. Augmenter le nombre d'itération de l'EKF dans le temps permet d'améliorer la précision. De plus, on retrouve bien le fait que \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont du même ordre de grandeur. Les

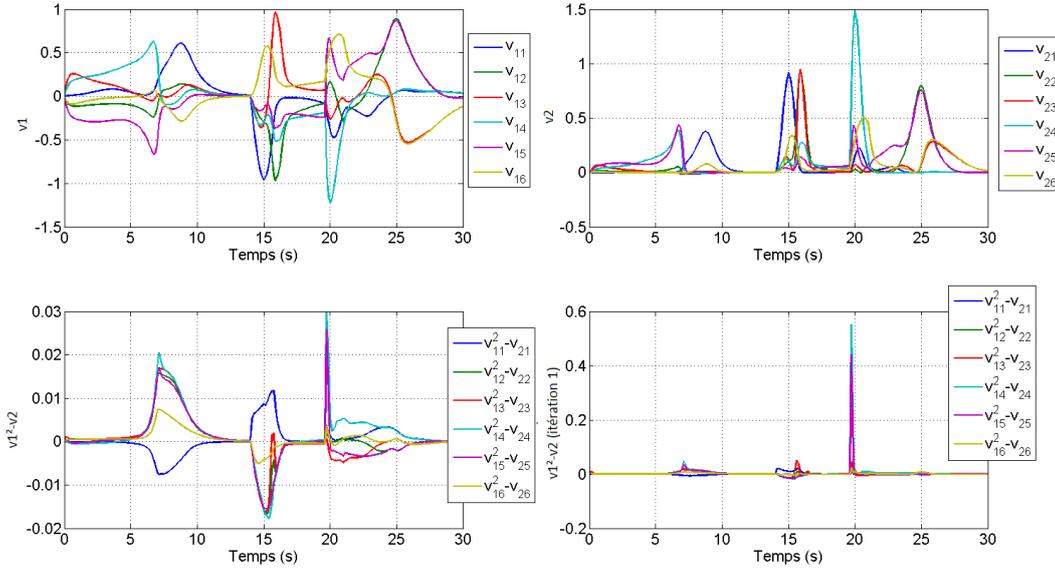


Figure 7.13 – Evolution des paramètres estimés v_1 et v_2 dans la direction $\mathbf{h} = h_t[0.707 \ 0 \ 0.707]Nms$

contraintes physiques sont donc bien respectées.

Les simulations sur le modèle dynamique complet montrent que la loi de pilotage permet à la grappe d'atteindre l'enveloppe de moment cinétique, et de la quitter, parfois en créant des erreurs car lorsque le système se trouve sur l'enveloppe de moment cinétique (ou proche), il est dans une singularité. Quitter la singularité externe n'est pas une caractéristique intrinsèque de toutes les lois de pilotage, en effet par exemple les lois de type SRI, PSRI ne permettent pas de quitter l'enveloppe externe et des termes hors-diagonaux doivent être rajoutés [Wie 03]. C'était donc une caractéristique à vérifier pour notre loi. De plus, les singularités traversables sont aussi traversées. La prochaine section étudie maintenant différentes stratégies d'évitement de singularité intraversable, difficilement testable sur la grappe pyramidale à six AGs. Ainsi, la loi est testée sur la même grappe avec deux pannes, montrant l'adaptabilité de la loi aux cas de panne.

7.5.2 Simulations avec deux pannes d'AGs - analyse de passage d'une singularité intraversable

Reprenons l'exemple d'une grappe à six AGs avec pannes des AGs deux et trois. Pour ces simulations, un test d'évitement de singularité intraversable est mis en avant. Ces simulations sont en partie présentées dans l'article [Evain 17a]. Trois versions de la loi sont alors comparées (seule la dernière équation de mesure est changée entre ces versions et la covariance associée, comme expliqué dans la section 7.3) :

1. La loi avec simple contrainte sur la saturation en vitesses de précession ;
2. Loi avec utilisation du déterminant ;

3. Loi avec contrainte issue de l'analyse topologique.

Le choix de la direction de manœuvre a été décidé par rapport à la position d'une singularité intraversable. Le barycentre P de la surface maillée Fig. 7.2 a été choisi comme singularité intraversable à éviter, pour continuer l'exemple développé dans la section 7.2.4. Ainsi, la manœuvre satellite a été prévue pour que la grappe passe par le moment cinétique singulier décidé. La manœuvre demandée consiste en une rotation de 30 degrés en 30 secondes autour de la direction fixe dans le repère satellite, telle que dans le cas où aucune erreur n'est créée et le terme non-linéaire négligeable, alors le moment cinétique de grappe va dans la direction du point P . Néanmoins, en boucle fermée, tester la loi de pilotage dans des directions précises est moins aisé. La consigne en quaternion d'attitude suit une courbe polynomiale lissée d'ordre trois. Un contrôleur proportionnel dérivé en attitude tel que le système réponde comme un second ordre bien amorti a été choisi. Les conditions de simulation sont par ailleurs identiques au cas à six AGs.

Ensuite choisissons une position initiale de grappe telle que son moment cinétique soit nul. Par exemple, on peut choisir une position initiale favorable, qui maximise le déterminant de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ et donc qui est éloignée des singularités. La Fig. 7.14 montre l'ensemble des positions initiales de la grappe et les deux points qui seront choisis sur les TMN_0 . Le point 1 est favorable car loin des singularités, alors que commencer du point 2 va permettre d'étudier l'évitement de singularités.

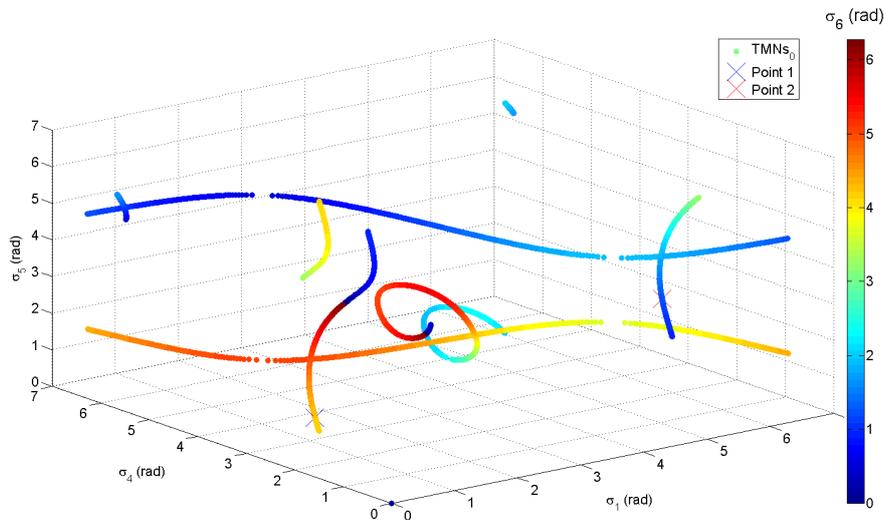


Figure 7.14 – Positions initiales pour la grappe à 6 AGs avec deux panes avec mesure de la distance aux singularités.

Simulons donc cette manœuvre avec la loi 1 (simple contrainte sur la saturation) pour le point 1. Les résultats sur la dynamique satellite sont donnés en Fig. 7.15. On remarque un bon suivi de consigne et la facile réalisation de la manœuvre sans saturation ou passage de singularités. Les consignes en quaternion sont bien suivies avec une erreur qui s'annule dès la fin de la manœuvre. On remarque simplement une rapide montée des vitesses de précession à

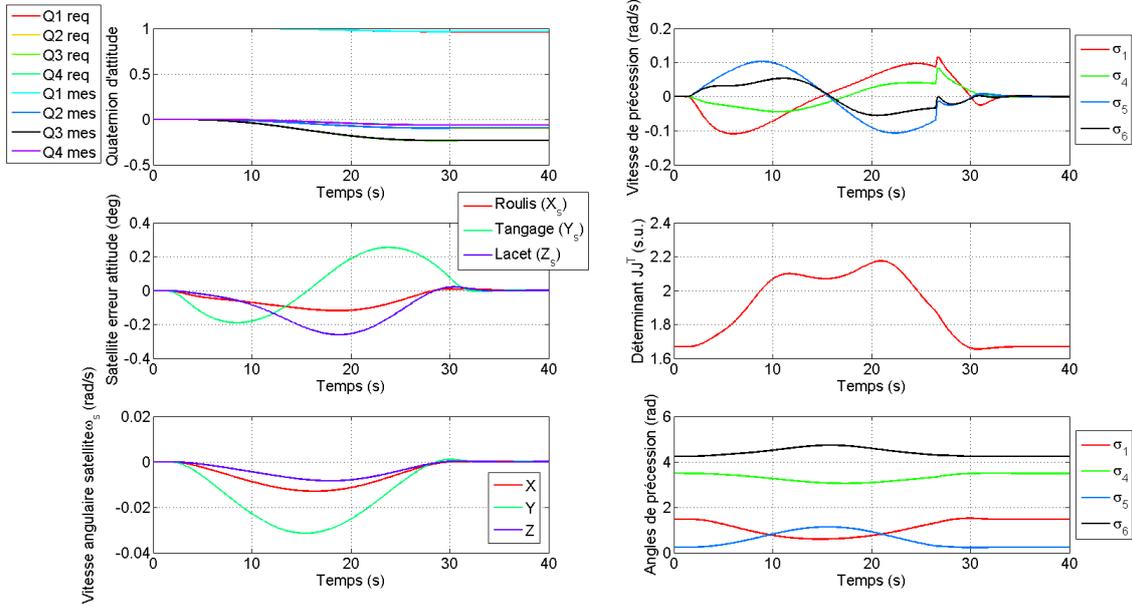


Figure 7.15 – Résultats de simulation satellite loi 1 point initial 1

$t = 27s$ quand la contrainte de retour à la position initiale s'active de manière soudaine. Cette contrainte est activée à ce moment de la simulation car les conditions présentées en section 7.3.2 sont vérifiées. Néanmoins, les saturations ne sont pas atteintes, et le déterminant de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ permet de confirmer que la manœuvre est réalisée loin des singularités. L'analyse des angles de précession montre que la grappe retourne à la position initiale à la fin de la manœuvre.

Pour mieux appréhender la trajectoire prise par le système, représentons-la dans un graphique qui montre l'évolution des angles de précession et des moments cinétiques lors de la manœuvre. L'explication de cette représentation est détaillée ici et est valable pour les autres images présentées par la suite :

- Deux angles de précession sont en abscisse et en ordonnée. En cote se trouve la norme du moment cinétique selon une direction fixe. Cette direction est celle initialement décidée pour la manœuvre, c'est donc celle que la grappe devrait suivre si le système était en boucle ouverte (consigne constante en direction). Ce graphique permet de comprendre la stratégie d'évitement de manière imagée.
- Le moment cinétique est normalisé à $h_t = 1$ sur cette représentation.
- Les lignes colorées correspondent à l'ensemble des solutions en σ telles que $\mathbf{h}(\sigma) = \mathbf{h}_c$ avec \mathbf{h}_c le moment cinétique en cote (ce sont donc des TMNs). Une couleur correspond à un \mathbf{h}_c donné, celui en cote du graphique.
- La croix rouge correspond à une singularité.
- Le cercle bleu correspond à la position initiale de la grappe.
- Les '+' noirs donnent la trajectoire de la grappe lors de la manœuvre, ces données sont issues du simulateur.
- Seuls les angles σ_1 et σ_4 sont représentés mais la même figure peut être obtenue avec

les angles σ_5 et σ_6 , qui n'est pas représentée ici pour éviter la redondance du propos. En effet ces images permettent surtout de visualiser et comprendre les stratégies d'évitement de singularités dans ces trajectoires.

Ainsi, sur la Fig. 7.16, on remarque en effet que la grappe ne rencontre pas la singularité. Avec la position initiale choisie, la montée en moment cinétique peut être réalisée avec des faibles variations d'angles de précession, comme vu sur la Fig. 7.15. Sur la Fig. 7.16, cette caractéristique se modélise par une forte pente par rapport à la montée en moment cinétique (ici par rapport aux deux angles σ_1 et σ_4) qui permet d'augmenter la norme du moment cinétique en faisant peu varier les angles de précession.

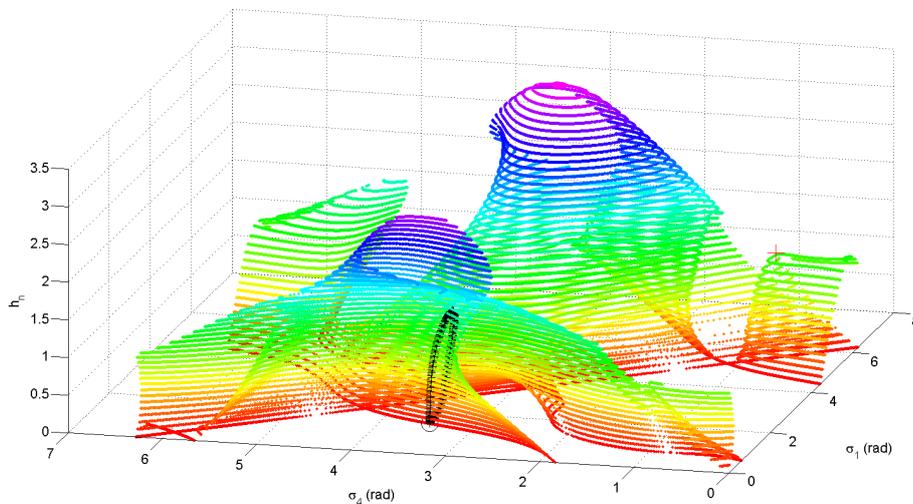


Figure 7.16 – Trajectoire de la grappe (angles σ_1 et σ_4)

Ainsi, même si une manœuvre est simulée dans la direction du moment cinétique où l'on avait identifié la singularité, pour étudier ce passage de singularité il faut aussi que la grappe parte d'une position initiale défavorable. Au vu de la topologie de la structure des TMNs (Fig. 7.16 et 7.14), la position initiale 2 a été choisie car elle est proche de la singularité étudiée.

Reprenons les simulations avec cette nouvelle position initiale.

On remarque sur les Fig. 7.17 que la singularité intraversable est rencontrée, notamment le déterminant de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ devient proche de 0, mais la structure de l'EKF et les contraintes de saturations lissant les commande permettent de passer cette singularité en créant momentanément des erreurs de couple dans des directions non souhaitées. Néanmoins, à la fin de la manœuvre, les angles de précession reviennent à leur position initiale et les erreurs d'attitude sont annulées. Ainsi, dans ce cas, cette singularité est passée mais dans la formulation, rien ne garantit que les erreurs créées soient toujours suffisantes et ne créent pas d'oscillations ou de saturation par exemple. C'est pourquoi un critère permettant de s'extraire de ces singularités est ajouté. Il n'y a pas non plus de preuve d'évitement de la singularité avec la loi 2 mais son efficacité a été prouvée [Bedrossian 87]. Les Fig. 7.18 montrent les résultats de la simulation

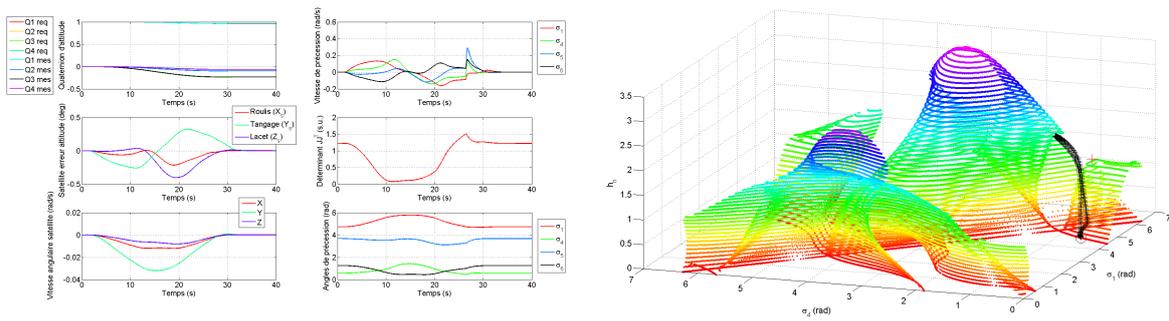


Figure 7.17 – Résultats de simulation satellite loi 1 deuxième position initiale

avec la loi 2.

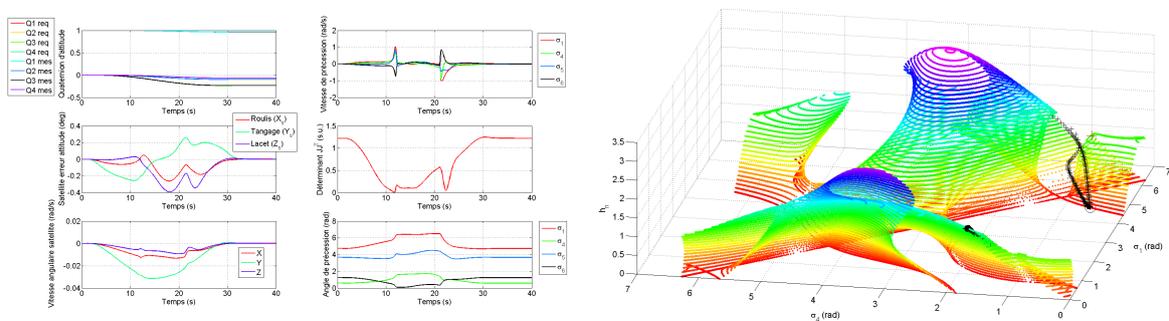


Figure 7.18 – Résultats de simulation satellite loi 2 deuxième position initiale

Lors de l'activation de la contrainte du passage de singularité à $t = 10s$, une forte augmentation de la vitesse de précession est notée pouvant aller jusqu'à la saturation, et créant des erreurs dans le suivi de consigne en attitude. Ces erreurs sont néanmoins résorbées à la fin de la manœuvre et les angles de précession reviennent à leur position initiale, au prix d'une nouvelle saturation en vitesse de précession puisque la contrainte d'évitement de singularité a emmené les angles de précession loin de leur position initiale. En effet, sur la Fig. 7.18 de droite, on remarque que les angles de précession atteignent des surfaces plus lointaines que dans la simulation 7.17.

Comparons maintenant avec la loi de pilotage numéro 3 contenant des informations sur la topologie en moment cinétique de la grappe (Fig. 7.19).

Avec cette approche, on remarque que la singularité étudiée est évitée tôt, et les angles de précession prennent des trajectoires très différents des simulations 7.17 et 7.18, suivant la topologie en moment cinétique de la grappe et ainsi minimisant les erreurs d'attitude créées dans les directions autres que celles demandée, contrairement aux autres méthodes d'évitement. Néanmoins, la trajectoire est plus longue et donc la manœuvre est réalisée dans un temps supérieur aux autres stratégies.

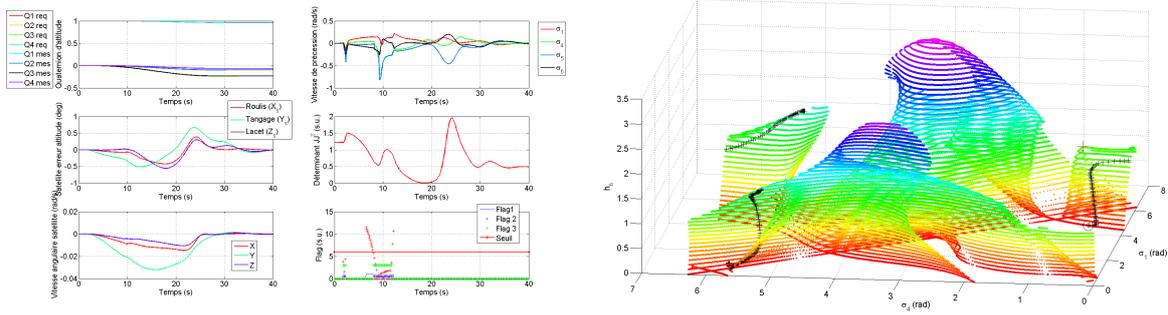


Figure 7.19 – Résultats de simulation satellite loi 3 deuxième position initiale

7.5.3 Conclusion sur les versions des lois de pilotage

Si l'on suppose qu'une manœuvre dans une direction fixe est demandée, l'avantage principal de la méthode de réglage avec connaissance de la topologie est de pouvoir éviter les singularités intraversables assez tôt et donc éviter les saturations d'actionneurs. En réglant correctement les zones de répulsion des positions singulières intraversables, les directions d'évitement, le système n'y restera pas bloqué. Néanmoins, il n'y a pas de garanties de ne pas créer d'erreurs de couple, et en particulier avec le formalisme EKF, des erreurs risquent d'y être créées, mais moindres par rapport à un changement de trajectoire tardif suite à la rencontre avec une singularité intraversable. En effet, en fonction des trajectoires, il peut être déjà trop tard pour changer de branche sans créer d'erreurs si la consigne varie. Néanmoins, comme la formulation cinématique permet de passer les singularités traversables, l'ajout de l'algorithme présenté ici permet de ne traiter que les cas intraversables et donc, en comparaison avec un critère qui maximise le déterminant du système par exemple et ne discrimine pas les types de singularités, il n'y a pas d'erreurs créées dans les cas traversables puisque cette équation n'est pas activée. Un autre inconvénient est l'augmentation de la quantité de calculs et de données insérées dans le logiciel de vol, qui dépendront de la précision désirée dans les maillages. L'utilisation des symétries permettent néanmoins de diminuer les tailles de ces données. De plus, cet algorithme est plutôt adapté pour les cas de grappes de six AGs avec une ou deux pannes, et pas en configuration nominale à six AGs à cause du peu de singularités rencontrées. Un inconvénient est la nécessité de devoir refaire ces analyses topologiques pour chaque cas de panne. Néanmoins comme elles sont réalisés hors-ligne, le code à bord du satellite est inchangé, seuls les paramètres varient. Rajouter les connaissances de la topologie de grappe est une piste pour s'assurer du passage des singularités. En reprenant l'analyse de H. Kurokawa [Kurokawa 98] cela revient à prédire les difficultés de la direction prise par la grappe et les probables rencontres de singularités pour s'en éloigner.

La loi numéro 1, même à six AGs, permet d'insérer simplement les contraintes de saturation des vitesses de précession et de retour à la position initiale. Par les variations de covariance de ces équations, la priorisation des contraintes peut être effective même si la preuve de vérification de ces contraintes n'est pas prouvée (puisque les valeurs des covariances sont limitées ; si elles tendaient vers zéro alors on pourrait prouver leur vérification). De plus, faire varier

les covariances peuvent amener à des oscillations notamment lorsque la commande demandée en entrée de la loi de pilotage n'est pas faisable sans saturer. Ainsi, les vitesses de covariance sont diminuées mais la commande en entrée risque d'augmenter et d'amener des oscillations. C'est pourquoi un contrôleur haut-niveau adapté à ces phases où l'efficacité de la grappe est diminuée est nécessaire, comme présenté dans la section 6.5.

La loi numéro 2 permet un évitement efficace de la singularité, mais sa formulation intrinsèque ne prend pas en compte les caractéristiques des singularités (du moins dans cette formulation), ainsi pour pouvoir éviter tous les types, il faut dévier la trajectoire dans le pire cas ce qui peut mener à des erreurs significatives dans les autres cas. Néanmoins, sa formulation est beaucoup plus simple à exprimer, coder et régler notamment avec la méthode d'optimisation génétique. On pourrait lisser la contrainte d'évitement de singularités présentée dans la section 7.3 afin de ne plus saturer les actionneurs. Cependant obtenir des paramètres évitant la saturation dans tous les cas de passage de singularités, à différentes vitesses et directions d'approche de la singularité n'est pas forcément un problème résoluble, et en particulier sans des simulations de type Monte-Carlo. L'étude des singularités peut permettre de trouver les paramètres optimaux, mais cette approche reste très conservatrice puisque qu'il faudra prendre le pire cas d'évitement entre les singularités traversables et non traversables (ce critère ne les discrimine pas).

Ces simulations ont permis de montrer la **flexibilité** de la structure de l'EKF pour insérer différentes équations de contrainte. Quand il n'y a pas de singularité, la commande la plus rapide et efficace est celle de Moore-Penrose, ainsi la loi de pilotage est réglée pour s'approcher de ces trajectoires dans ces cas-là. Les **contraintes de saturations** insérées permettent de diminuer l'effort des actionneurs dans les périodes de perte d'efficacité. **Différentes stratégies d'évitement de singularités sont testées** avec des avantages et inconvénients, en particulier une nouvelle proposée dans ce manuscrit, qui permet d'**insérer de la connaissance de la topologie du système pour guider de manière adaptée en fonction des singularités intraversables**. Nécessitant des calculs et une quantité de données supérieure embarquée par rapport à un critère de type déterminant, le développement de cette stratégie est une étape du point de vue des auteurs nécessaire pour arriver à une formulation dont on peut prouver qu'elle passe toutes les singularités intraversables sans créer d'erreurs (quand c'est encore possible), démarrant de n'importe quelle position initiale et avec des trajectoires en moment cinétique non prédéfinies. Si ce n'est pas le souhait des personnes appliquant les résultats de cette thèse, d'autres contraintes basées sur le déterminant par exemple peuvent être utilisées grâce à la flexibilité de la structure.

7.6 Simulations avec le modèle haute-fidélité

La loi développée n'a été testée jusque là que sur des modèles simplifiés de dynamique satellite, ne prenant pas en compte les bruits des capteurs et des modélisations précises des dynamiques des actionneurs par exemple. Afin de pouvoir vérifier la fonctionnalité de la loi de commande sur des modèles très représentatifs, l'implémentation de la loi de pilotage sur

un simulateur de satellite haute fidélité a été réalisée dans le logiciel BASILES, les modèles de satellite étant développés au CNES. Le but est de tester la robustesse de la loi aux cas de panne, aux singularités en comparaison avec une loi de référence statique : la loi de Moore-Penrose. Les détails des modèles du satellite testé ne sont pas donnés dans ce document. Néanmoins, la grappe pyramidale est composée de six actionneurs gyroscopiques identiques. La loi de pilotage a été implémentée et la partie guidage a été créée afin de tester des manœuvres spécifiques, mais les autres blocs du simulateur sont restés identiques. Le code du simulateur a été conçu pour supporter la panne d'un, de deux voire de trois AGs.

Dans les cas de panne, seules les lignes et colonnes correspondants aux AGs en fonctionnement sont gardées dans l'algorithme de pilotage. Les résultats en vitesse satellite, couples et moments cinétiques ont été normalisés par rapport à leur valeur maximale.

7.6.1 Validation code haute fidélité

Tout d'abord, afin de valider le code d'implémentation de la loi de pilotage qui est en Fortran dans le simulateur haute fidélité, une comparaison des sorties de cette loi lorsque l'on insère les mêmes entrées a été effectuée. Les résultats sur la figure 7.20 de gauche sont normalisés par rapport à la plus grande vitesse de précession de la simulation, sur 100 secondes. Sur la figure de droite, l'erreur relative entre les résultats du logiciel et les résultats Matlab est donnée. On remarque que les différences en relatif sont très faibles (de l'ordre de 10^{-7}), ce qui valide l'implémentation de notre loi dans ce logiciel. Les erreurs relatives observées proviennent de la différence des coeurs de simulation n'utilisant pas le même schéma numérique de résolution, et donc donnant des précisions différentes, mais suffisamment proches pour notre application.

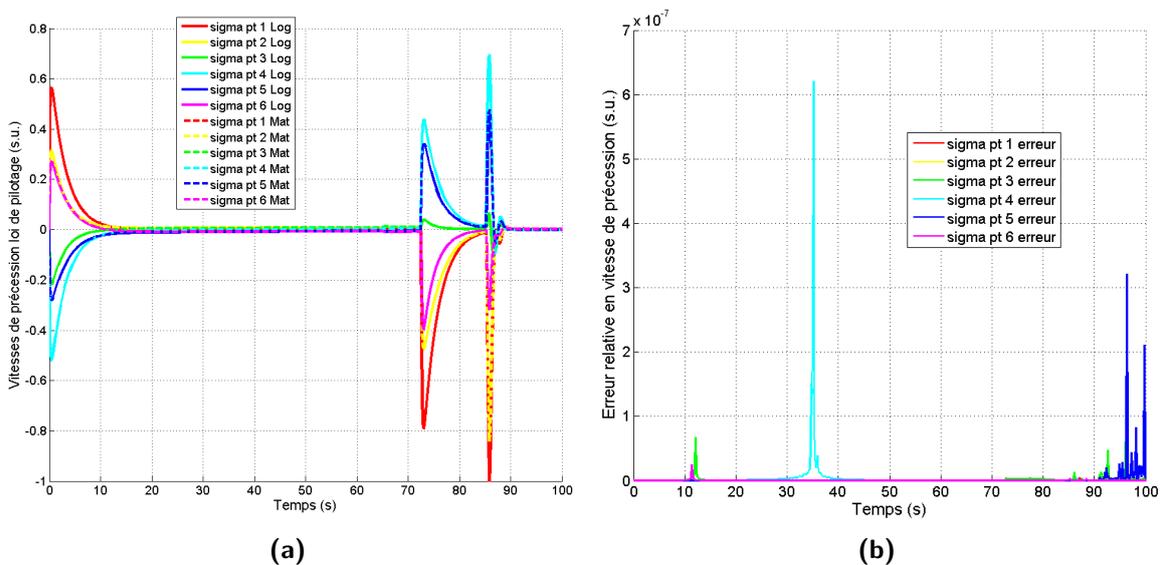


Figure 7.20 – Exemple de comparaison des résultats issus de l'implémentation Matlab et dans le logiciel. (a) Vitesses de précession en sortie de l'EKF. (b) Erreur relative en vitesse de précession.

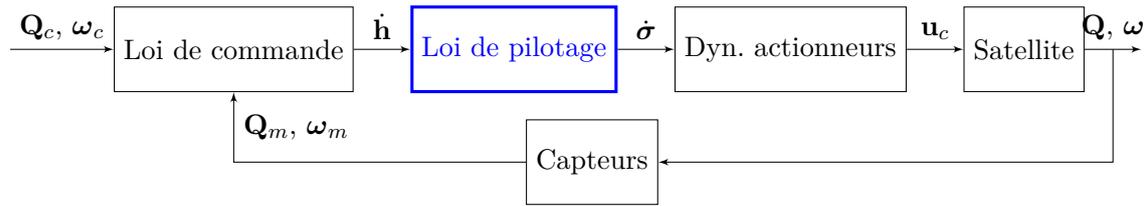


Figure 7.21 – Schéma-bloc typique d'un contrôle d'un système sur-actionné

Dans le simulateur haute fidélité, pour la partie sur laquelle nous nous concentrons, nous imposons en entrée des consignes en quaternions et en vitesses angulaires satellite. Ensuite, comme montré sur la Fig. 7.21, une loi de commande en déduit le couple total que les AGs doivent fournir. Notre loi de pilotage est alors insérée et la dynamique des AGs va permettre de contrôler le satellite.

7.6.2 Comparaison des performances sur une même manœuvre, avec et sans cas de panne

Dans cette partie, la vérification de la fonctionnalité de la loi se fait en comparant la loi de pilotage de référence avec notre loi de pilotage présentée auparavant. La loi de commande en amont (contrôleur d'attitude) est identique dans les deux cas. Une manœuvre typique est proposée en entrée du simulateur, identique pour tous les cas, et les résultats normalisés pour la référence sont donnés dans la figure 7.22 pour le suivi de consigne du satellite sans panne dans la grappe. La vitesse satellite maximale demandée est normalisée à 1. En figure 7.23a sont données les valeurs singulières de la matrice $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ qui permettent de vérifier la distance aux singularités de la grappe d'actionneurs gyroscopiques.

On remarque que le suivi de consigne en vitesse angulaire satellite est lent et donc se retrouve sur le suivi de consigne en quaternion. Afin d'en trouver la cause, regardons les performances de la loi de pilotage de référence (Fig. 7.23b), en comparant les couples commandés en entrée et les couples réellement effectués par l'ensemble des AGs.

On voit sur la figure 7.23 qu'au début de la manœuvre, les forts couples demandés ne sont pas créés. Lorsqu'ils sont plus faibles, ils sont cependant réalisés par les AGs. Dans la figure 7.24, on comprend que les AGs ont saturé (leur vitesse de précession maximale est normalisée à 1), ce qui explique les performances diminuées lors des fortes demandes de couple.

Insérons maintenant notre loi de pilotage à base de EKF et de la nouvelle formulation cinématique afin de comparer avec la loi de référence. Par exemple, dans la figure 7.25, les courbes sont normalisées par rapport au couple maximal de consigne. On remarque donc que les résultats sont similaires, avec des performances variant de 6%, légèrement dégradées. Notre loi de pilotage est donc fonctionnelle et permet au système d'effectuer la manœuvre

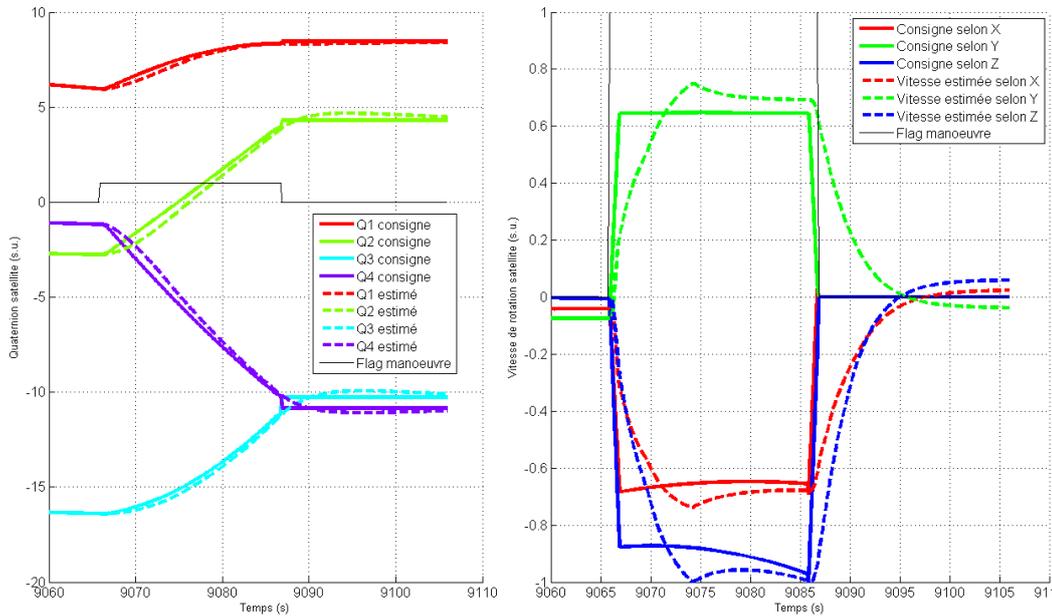


Figure 7.22 – Suivi de consigne de la loi de pilotage de référence.

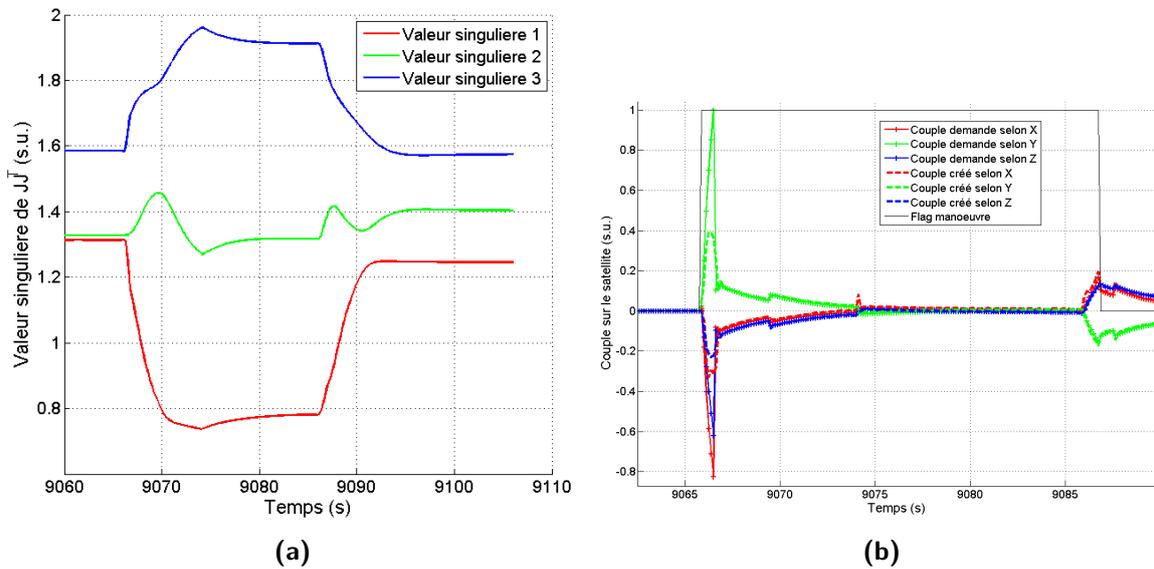


Figure 7.23 – (a) Valeurs singulières de la matrice JJ^T . (b) Comparaison couples demandés et couples créés de la loi de référence.

demandée.

Mettons maintenant en panne l'AG numéro 1. Avec la même simulation, on remarque que les valeurs singulières de la matrice JJ^T sont plus impactées (figure 7.26), on se rapproche des singularités, ce qui est normal car les capacités de la grappe sont diminuées donc les forts

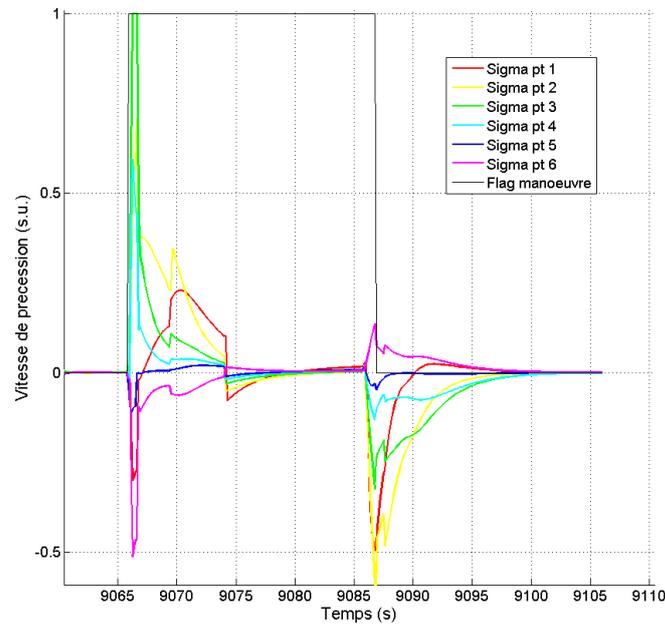


Figure 7.24 – Vitesses de précession normalisées pour la référence.

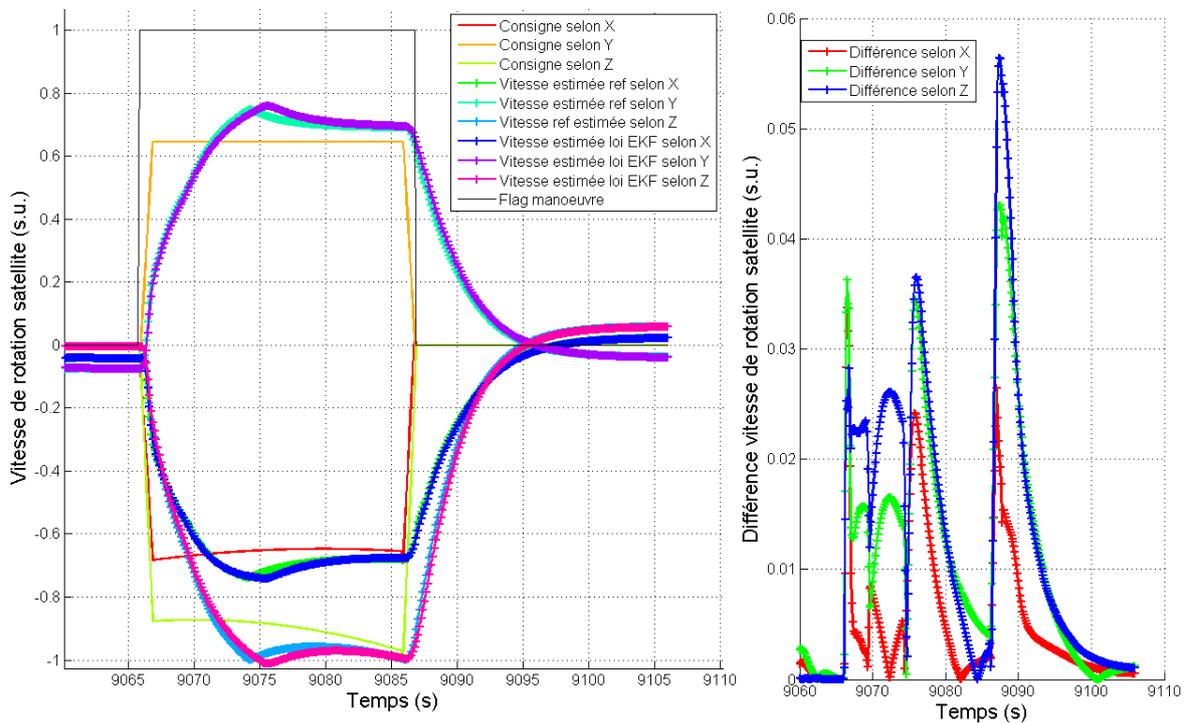


Figure 7.25 – Comparaison suivi de consigne en vitesses angulaires satellites loi EKF et loi de référence.

moments cinétiques demandés vont se rapprocher de l'enveloppe externe et des singularités.

Regardons maintenant les performances en terme de suivi de la vitesse de consigne (figure

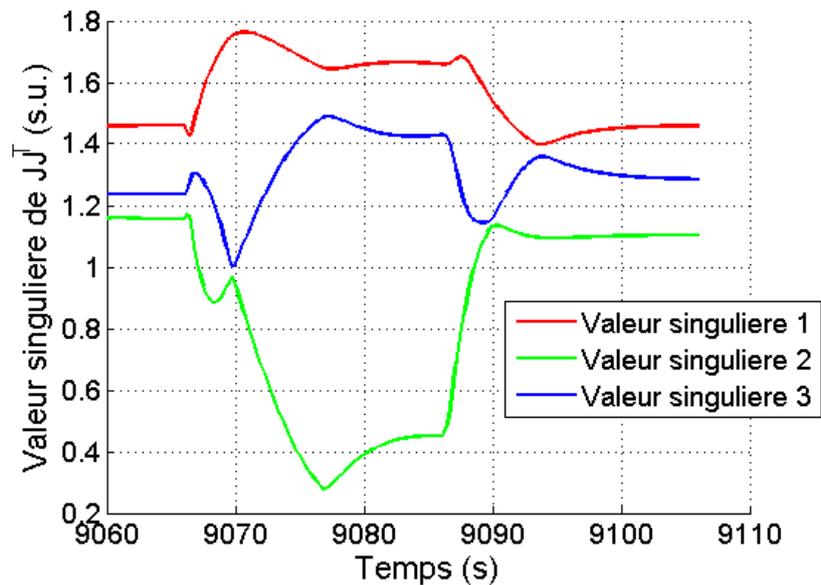


Figure 7.26 – Valeurs singulières de la matrice JJ^T pour la simulation avec panne de l'AG 1.

7.27). Les performances sont légèrement impactées, jusqu'à 9% de performance diminuée.

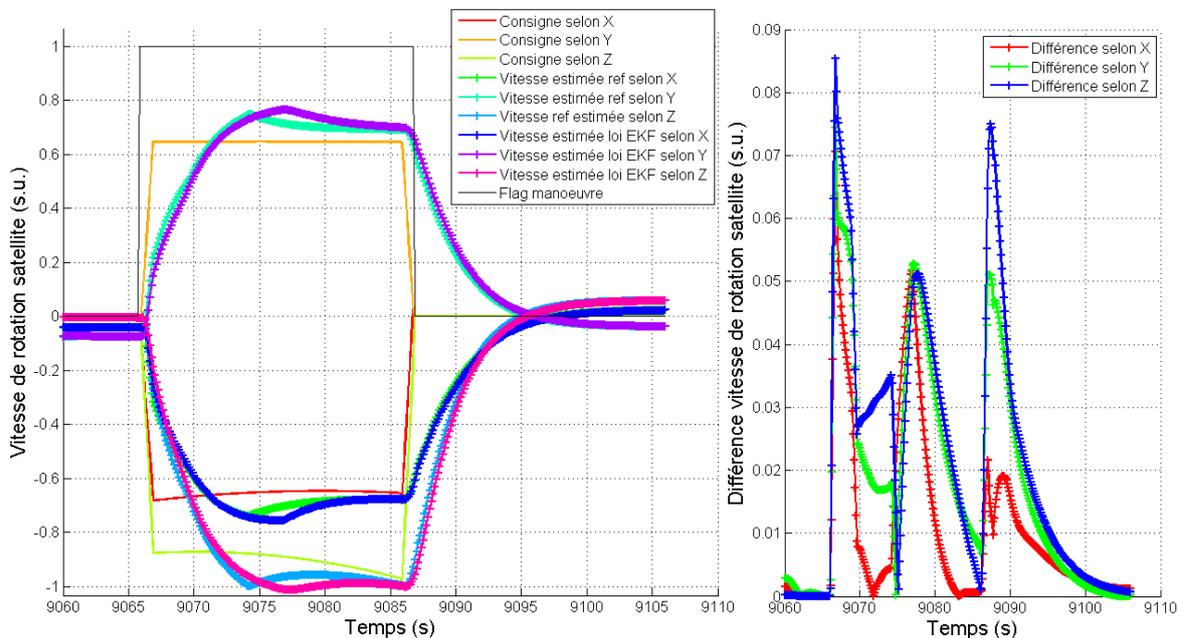


Figure 7.27 – Comparaison suivi de consigne en vitesses angulaires satellites entre la loi de référence et la loi EKF avec panne de l'AG 1.

Cependant, en comparaison avec la loi de référence, le suivi de consigne est similaire.

Testons maintenant les résultats avec le cas de deux pannes actionneurs, par exemple les AGs 1 et 4. La grappe reste donc plutôt équilibrée au niveau des capacités en moment cinétique. On remarque tout d'abord sur la figure 7.28 que la singularité est proche à cause des faibles valeurs prises par une valeur singulière. Son minimum est alors de 0.013, donc la singularité n'est pas atteinte. On peut en déduire les performances dégradées par rapport à

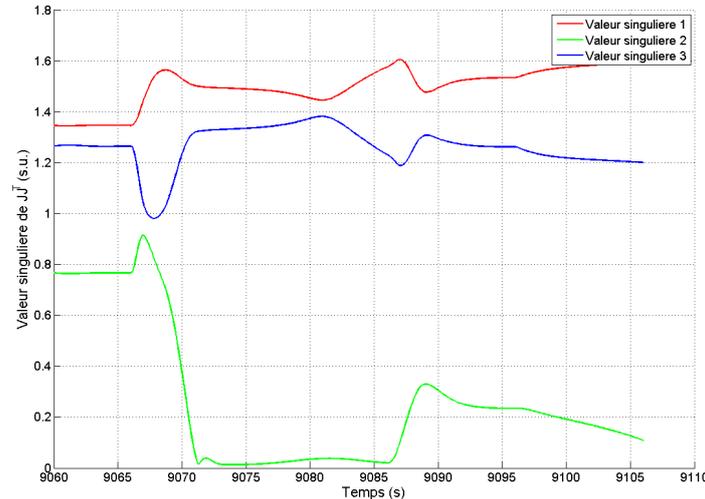


Figure 7.28 – Valeurs singulières de la matrice $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ pour la simulation avec pannes des AGs 1 et 4.

la simulation de référence en suivi de consigne, ce qui est logique au vu de la dégradation des performances induites par la perte des AGs (figure 7.29).

Comparons maintenant avec le cas de deux pannes situées sur des AGs consécutifs, par exemple sur les AGs 2 et 3, créant une forte anisotropie de la grappe en moment cinétique. Au niveau des valeurs singulières, on remarque que la grappe tombe à 4.237×10^{-4} donc dans une singularité (voir Fig. 7.30a). La Fig. 7.31 montre le suivi de consigne en quaternions et vitesses angulaires, et l'on remarque que le système ne parvient pas à suivre la consigne.

La fig. 7.30 de droite éclaire les raisons de l'écart dans le suivi de consigne. Dans cette figure, la direction du couple demandé (normalisé à 1) est tracée, ainsi que la direction la plus mal engendrée mathématiquement par la grappe. Cela revient au vecteur singulier à gauche lié à la plus petite valeur singulière de \mathbf{J} , et quand celle-ci est nulle, ce vecteur porte la direction singulière. Sur cette figure, la composante selon \mathbf{x} de la direction la plus mal engendrée par la grappe a une couleur qui varie en fonction du déterminant de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$. Ainsi, la direction la plus mal engendrée devient singulière, et c'est la direction demandée par les consignes. Le système tombe donc dans une singularité. Avec la figure 7.31, on peut confirmer que le système ne parvient pas à traverser cette singularité.

Or, avec cette configuration de grappe, en tenant compte des pannes, l'enveloppe externe devient anisotrope, variant entre 2.14 et $3.86h_t$ en moment cinétique. Ainsi, il est possible que cette manœuvre amène la grappe à la limite de capacité. Pour le vérifier, utilisons les outils d'analyse de la grappe. On peut zoomer dans la direction en moment cinétique désirée afin

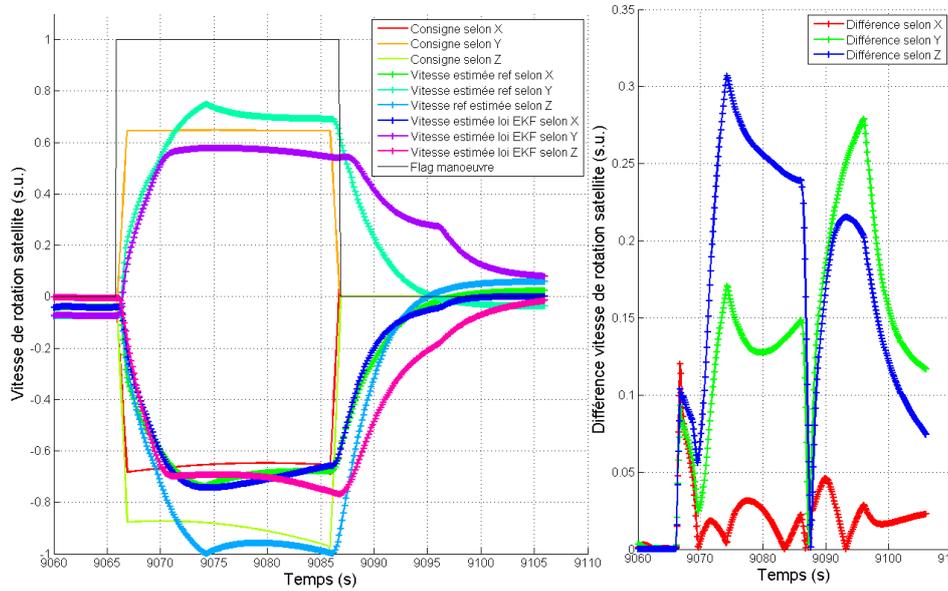


Figure 7.29 – Comparaison suivi de consigne en vitesses angulaires satellites entre la loi de référence et la loi EKF avec panne des AGs 1 et 4.

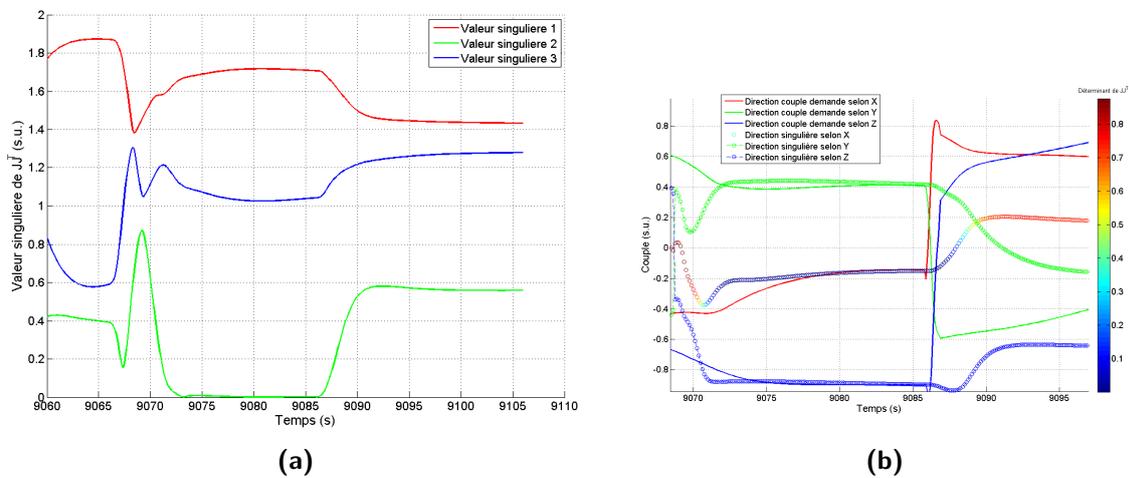


Figure 7.30 – Simulation avec pannes des AGs 2 et 3 : (a) Valeurs singulières de la matrice JJ^T . (b) Comparaison des couples demandés aux AGs (en direction, normalisés à 1) avec la direction la plus mal engendrée.

d'étudier si la grappe est dans une singularité externe (maximum des capacités) ou si elle est bloquée dans une singularité interne. Dans la Fig. 7.32, le bout de la flèche montre la valeur du moment cinétique à 9080s qui vaut en norme autour de $2.5 h_t$.

Ainsi, le système est très proche de la saturation à ce moment cinétique, ce qui explique qu'il ne parvient pas à augmenter la vitesse du satellite. L'enveloppe externe est donc atteinte.

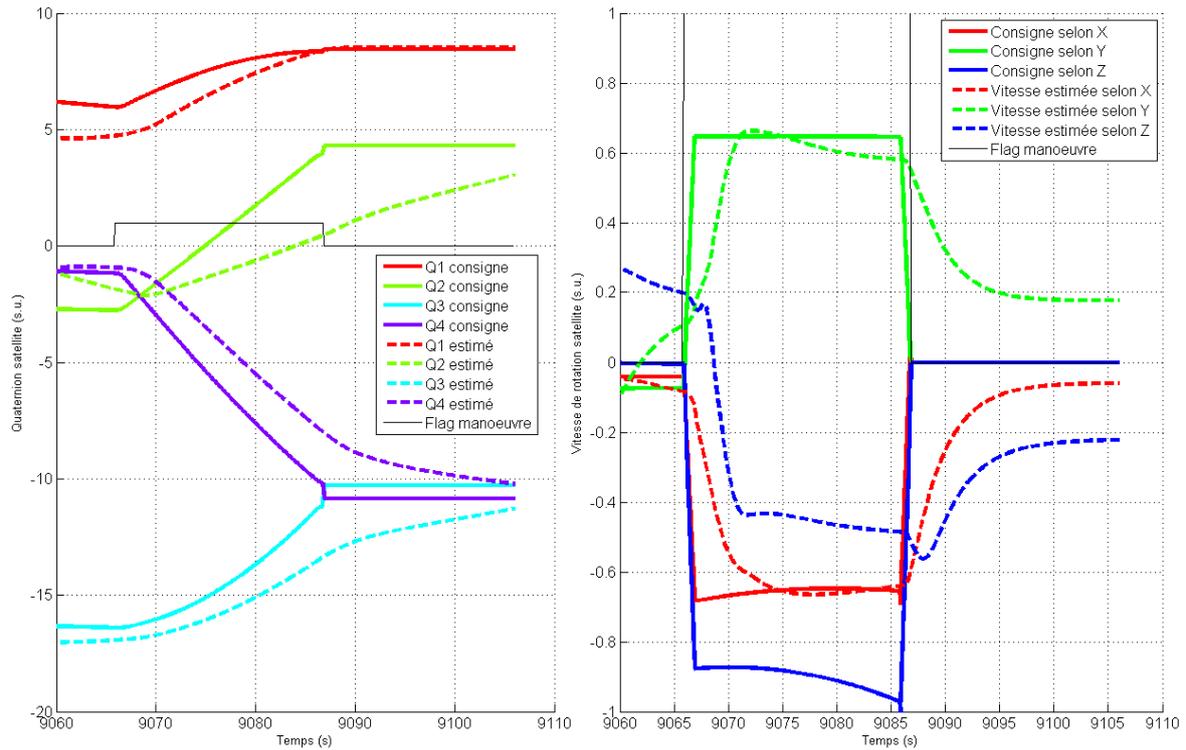


Figure 7.31 – Comparaison suivi de consigne en vitesses angulaires satellites de la loi EKF avec panne des AG 2 et 3.

Pour finir, avec trois pannes (AGs 1, 2 et 4 par exemple), on trouve une valeur singulière minimale de 9.63×10^{-5} donc le système fait aussi face à une singularité (Fig. 7.33 et 7.34), ce qui est logique car ses capacités ont encore baissé.

Ainsi, nous avons pu implémenter la loi de pilotage et prouver qu'elle est opérationnelle dans les cas de panne, même en gardant des covariances identiques. Dans les simulations précédentes, le guidage n'était pas adapté aux capacités des actionneurs en cas de panne mais l'algorithme de pilotage était fonctionnel. Pour vérifier que la loi de pilotage permet à la grappe d'atteindre l'enveloppe externe, réalisons comme dans le simulateur Matlab des simulations dans différentes directions de l'espace en moment cinétique, adaptées à la géométrie de la grappe étudiée.

7.6.3 Génération de manœuvres

La section précédente a permis de montrer la faisabilité de la loi sur une manœuvre prédéfinie. L'intégration d'une manœuvre désirée dans le simulateur haute fidélité est plus complexe que sur le simulateur Matlab. En effet, ce mouvement du satellite doit être intégré dans un scénario réaliste que le satellite pourrait avoir à réaliser en vol. Dans cette section, on s'intéressera plus précisément à la réalisation de manœuvres de grande amplitude (jusqu'aux limites de l'enveloppe en moment cinétique). Pour des raisons d'intégration des manœuvres

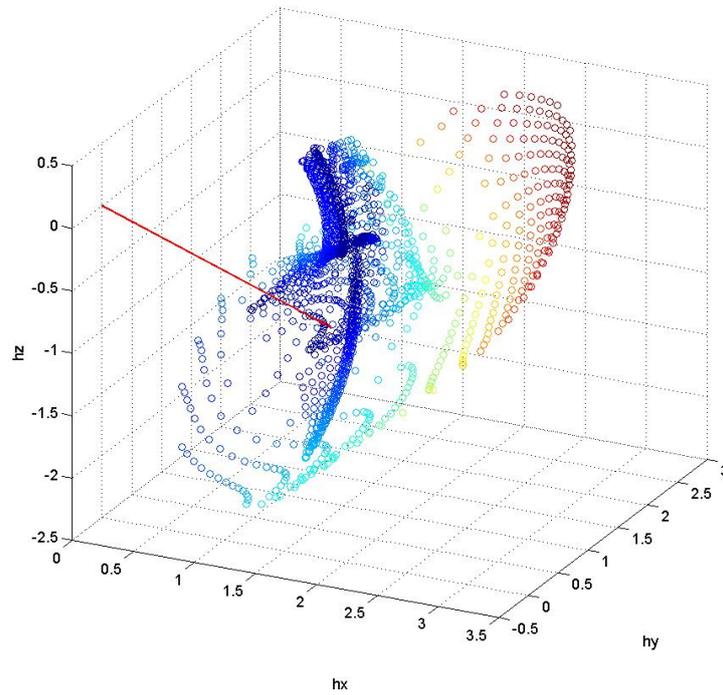
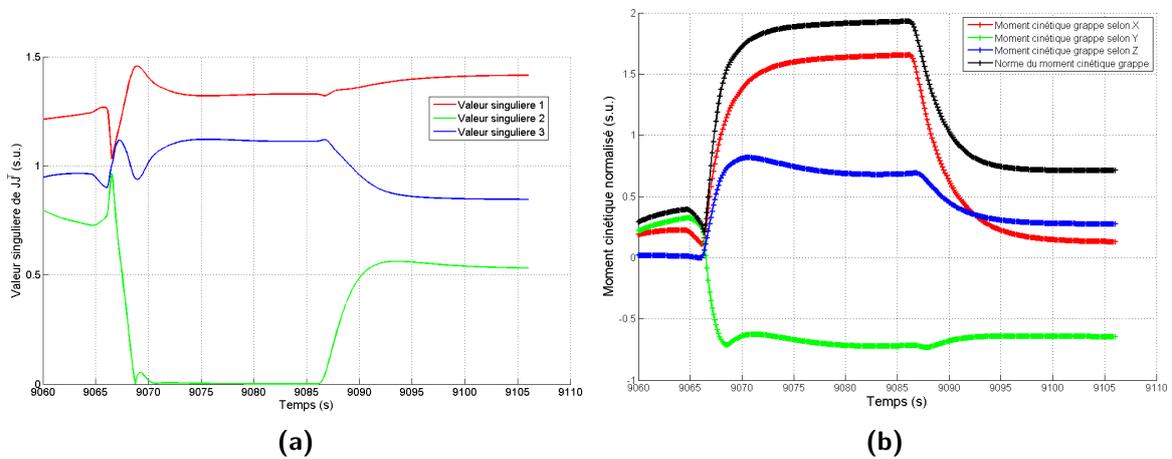


Figure 7.32 – Moment cinétique de la grappe avec pannes des AGs 2 et 3.

Figure 7.33 – Simulation avec pannes des AGs 1, 2 et 4 : (a) Valeurs singulières de la matrice JJ^T . (b) Moment cinétique de la grappe.

dans le simulateur, elles sont insérées dans un fichier de scénario et remplacent la manœuvre testée dans la section précédente. Elles sont alors toutes de la même durée. Les conditions initiales du satellite sont identiques entre les manœuvres, mais en raison des rotations créées dans différentes directions dans le repère satellite, les quaternions d'attitude sont différents à la fin des manœuvres. Pour poursuivre le scénario de la mission qui avait été généré avec une manœuvre particulière, la continuité ne peut donc être assurée que sur les vitesses de

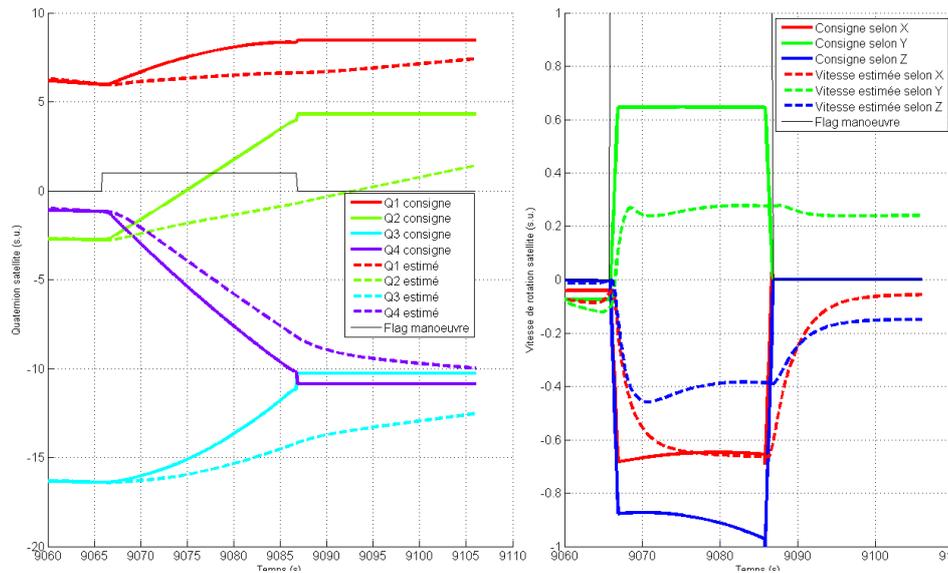


Figure 7.34 – Comparaison suivi de consigne en vitesses angulaires satellites de la loi EKF avec panne des AGs 1, 2 et 4.

rotation satellite et non sur les quaternions d'attitude. C'est pourquoi une discontinuité sur les quaternions de consigne apparaît à la fin de la manoeuvre et le moment cinétique de grappe ne s'annule pas. La suite du scénario après la manoeuvre n'est donc pas étudiée : le satellite se met dans un mode tel qu'il retrouve d'abord des conditions acceptables d'orientation avant de continuer le scénario. Aussi, pour cette raison, la contrainte de retour à la position initiale n'est pas insérée sur ces manoeuvres.

Le guidage du satellite doit se faire avec des profils de quaternions et de vitesses angulaires cohérents entre eux. Un outil disponible au CNES permet de créer des polynômes de différents ordres pour assurer la continuité du guidage et a donc été utilisé pour générer ces profils. Les résultats sur la grappe à six AGs entière et avec une panne (de l'AG numéro 4) sont présentés ici. La processus de génération des manoeuvres est le suivant :

1. Définition de l'enveloppe externe de la grappe d'AGs (avec ou sans pannes) ;
2. Analyse des symétries et réduction de l'espace de travail en moment cinétique ;
3. Maillage des directions en moment cinétique correspondant au nombre de simulations à réaliser ;
4. Acquisition de la norme du moment cinétique maximal correspondant à chaque direction testée ;
5. Il faut ensuite transformer cette consigne en vitesse satellite maximale désirée en utilisant la formule simplifiée : $\omega_{max} = -\mathbf{J}_{sat}^{-1} \mathbf{h}_{max}$ avec \mathbf{J}_{sat} l'inertie satellite. Néanmoins, contrairement au simulateur Matlab, pour construire le profil de quaternion et vitesse angulaire satellite, il faut donner au logiciel les quaternions et vitesses angulaires satellite initiaux et finaux. Les conditions initiales sont issues du scénario par continuité, et la vitesse angulaire finale est choisie comme le vecteur nul, mais il faut donc :
6. Déterminer le quaternion final qui permette au satellite de s'approcher des valeurs de

vitesses angulaires maximales dans la direction souhaitée. Comme on souhaite simplement une rotation autour d'un axe constant dans le repère satellite, il suffit de trouver l'angle de rotation. La durée de la manœuvre est fixée à 21 secondes, et en considérant deux secondes de montée et de descente en vitesse satellite, l'angle de rotation est alors calculé comme le produit de la norme de la vitesse maximale désirée par 17 secondes. Le quaternion de cette rotation est alors calculé et multiplié par le quaternion initial pour obtenir le quaternion final de consigne.

7. Les quaternions et vitesses angulaires de satellite initiaux et finaux sont insérés dans le logiciel qui, en fonction des données satellites et couples maximaux autorisés, divise la consigne en segments représentés par des polynômes.
8. Cette manœuvre est ensuite codée dans l'algorithme de guidage du satellite.

Pour la grappe à six AGs, comme dans la section précédente, un douzième de l'enveloppe en moment cinétique est étudiée, divisée 19 simulations. Pour le cas avec la panne de l'AG 4, l'enveloppe en moment cinétique est présentée en Fig. 7.35. On remarque qu'il y a des symétries, en particulier par rapport au plan $h_x = 0$ et une symétrie centrale au point $\mathbf{0}$. Ainsi, un quart de l'espace en moment cinétique sera parcouru, avec un maillage de 20 degrés en azimut et en élévation. Le maillage obtenu est donné en Fig. 7.35, avec 51 directions à tester.

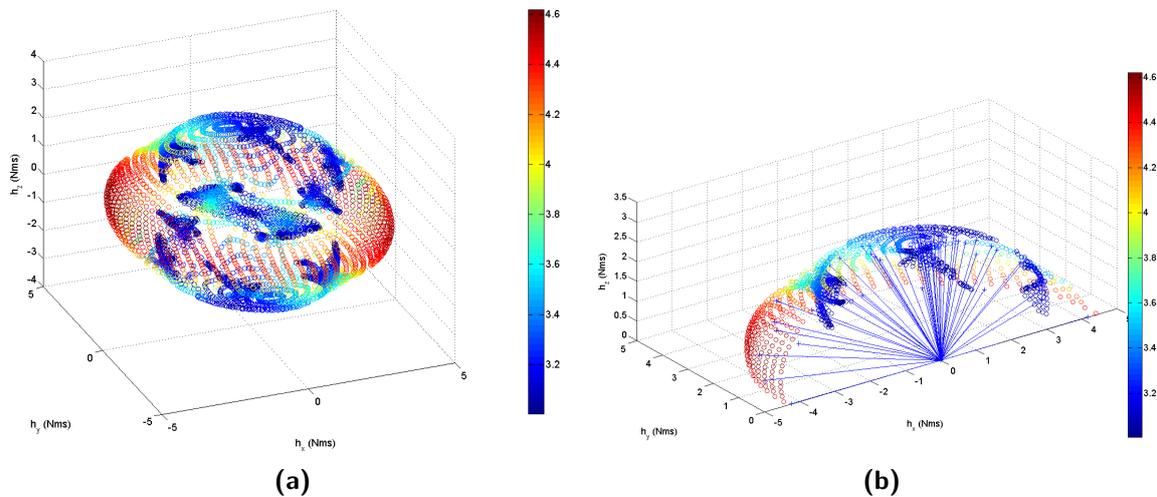


Figure 7.35 – Panne de l'AG 4 : (a) Enveloppe externe de la grappe. (b) Directions testées.

Ainsi, on obtient des ensembles de simulations physiquement réalisables par la grappe mais jusqu'aux limites de ses capacités et dans un simulateur représentatif.

7.6.4 Résultats des simulations pour la grappe à six AGs

Détaillons l'analyse des manœuvres testées, en comparaison avec la loi de pilotage de référence. Les lois de commande en amont sont toujours identiques (mais dépendant du cas de panne). Au début de la manœuvre, le satellite n'est pas à l'arrêt et la grappe n'est pas à

moment cinétique nul. Comme expliqué précédemment, la fin de la manœuvre n'implique pas non plus la recherche d'un moment cinétique de grappe nul. Les résultats des simulations dans l'espace des moments cinétiques sont montrés sur la Fig. 7.36. Les droites vertes correspondent à la direction de moment cinétique testée a priori. Les résultats avec la loi EKF sont en bleu et les résultats avec la loi de référence en rouge.

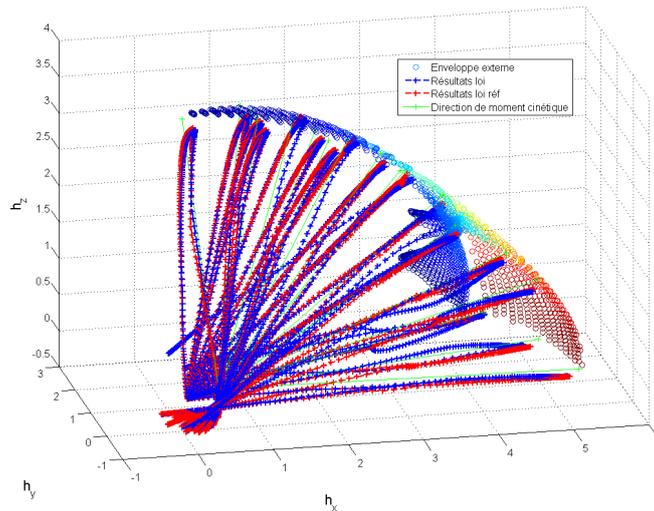


Figure 7.36 – Résultats dans l'espace des moments cinétiques - grappe à six AGs sans pannes

On remarque que dans toutes les directions, le moment cinétique de grappe est proche de l'enveloppe externe et donc du moment cinétique maximal.

Une autre comparaison à réaliser concerne les saturations en vitesse des actionneurs. Pour s'assurer de la non-saturation des actionneurs, il faudrait concevoir les manœuvres de telle sorte que la perte d'efficacité des AGs n'amène pas une saturation. Ici, ce n'était pas le cas, néanmoins, on peut comparer le nombre de fois où la saturation est activée sur ces mêmes manœuvres, entre la loi de référence et l'EKF. La Fig. 7.37 indique la somme sur les AGs du nombre de fois où la valeur absolue de la vitesse de précession était supérieure à 0.98% de $\dot{\sigma}_{\max}$ (saturation normalisée à 1). Ainsi, on remarque que la loi de référence amène plus souvent à une saturation, sauf pour certaines simulations que nous allons étudier. Afin de comprendre le comportement temporel des lois, regardons plus précisément trois simulations pertinentes au vu de la Fig. 7.37 : la simulation 6 où les saturations ne sont pas atteintes, la simulation 8 où la loi de référence sature mais pas l'EKF et la simulation 16 où l'EKF sature plus que la loi de référence.

La Fig. 7.38 présente les résultats de simulation la manœuvre numérotée 6 conçue pour être réalisée dans la direction $\begin{bmatrix} 0.2589 & 0 & 0.9659 \end{bmatrix}$ en couple. Un "flag" manœuvre égal à 1 signifie que les consignes en quaternions et vitesse de précession relatives à la manœuvre testée sont insérées dans le simulateur. Ainsi, les manœuvres sont réalisées entre les secondes 9066 et 9087. Les vitesses de rotation satellite ont été normalisées telles que la valeur maximale des composantes de la vitesse de consigne selon les axes \mathbf{x}_s , \mathbf{y}_s ou \mathbf{z}_s dans le repère satellite soit

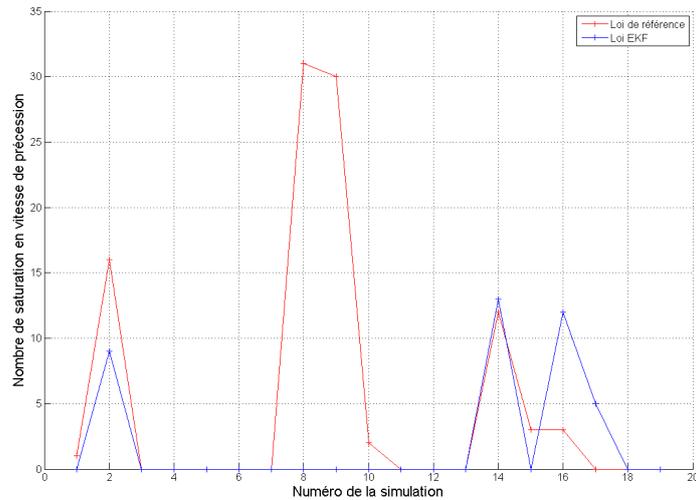


Figure 7.37 – Nombre de saturations par simulation - grappe à six AGs sans pannes

égale à 1. Sur la figure de droite, les valeurs de quaternions de consigne et mesurés, avec la loi de référence et la loi à base d'EKF, sont présentées. On retrouve bien le saut de consigne à la fin de la manœuvre à 9087s. La Fig. 7.39 présente les vitesses de précession calculées à la sortie des deux lois de pilotage, saturées à une valeur de 1 dans ces graphiques normalisés. Elle montre aussi l'évolution des valeurs singulières de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ représentant la distance aux singularités, avec le temps.

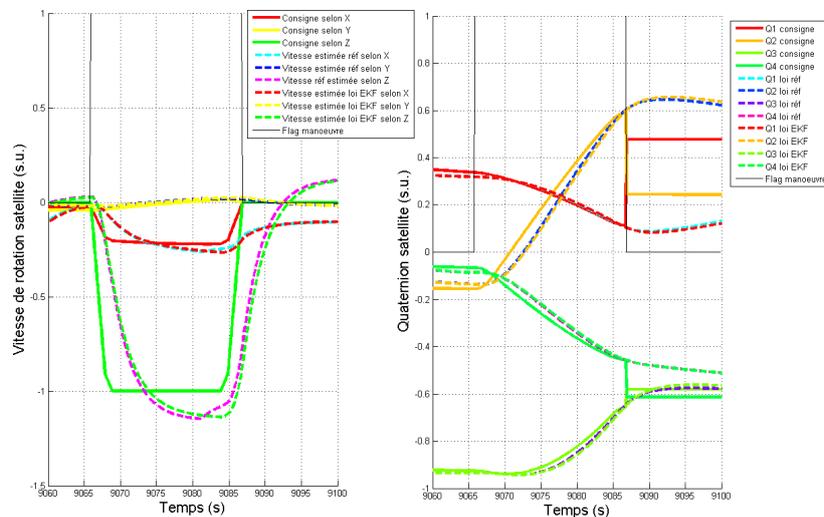


Figure 7.38 – Résultats suivi de consignes en vitesse angulaire satellite et en quaternion - grappe à six AGs simulation 6

Cette simulation numéro 6 montre une manœuvre réalisée sans saturation et loin des singularités pour la grappe. Comme vu précédemment, la dynamique du suivi de consigne est plutôt lente. Sur la Fig. 7.40, les couples ont été normalisés de la même manière que les consignes de vitesse angulaire. Les courbes de droite présentent la valeur absolue de la différence entre les consignes en couple et le couple réalisé par l'ensemble des AGs. L'erreur

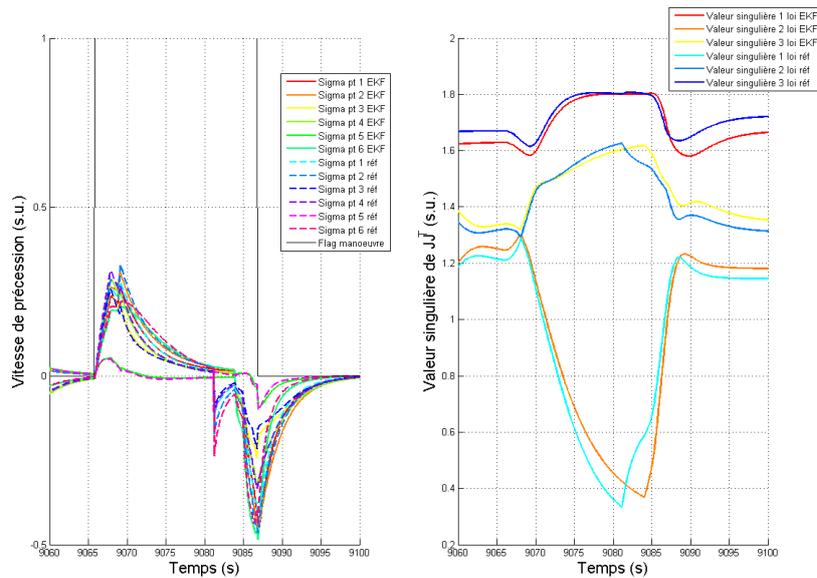


Figure 7.39 – Vitesses de précession et valeurs singulières - grappe à six AGs simulation 6

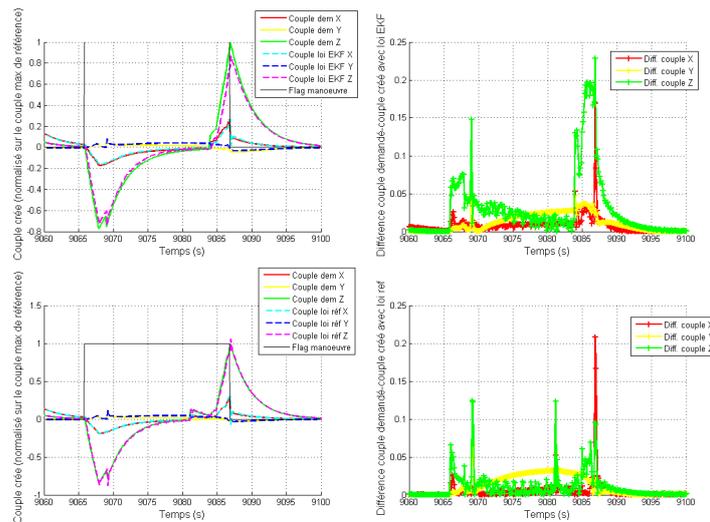


Figure 7.40 – Couples demandés/créés - grappe à six AGs simulation 6

de suivi de couple monte jusqu'à 23% dans le cas de la loi avec EKF et 20% avec loi de référence. Le suivi de consigne est donc légèrement plus lent. On remarque que les contraintes de saturation en accélération sont bien présentes et en particulier sur la loi EKF développée, moins réactive avec les réglages testés que la loi de référence. Néanmoins, cela apporte de la robustesse, que l'on peut vérifier sur les simulations suivantes.

Les résultats pour la simulation 8, générée pour créer une manœuvre dans la direction $\begin{bmatrix} 0.9507 & 0.3101 & 0 \end{bmatrix}$ sont présentés en Fig. 7.41, et 7.42.

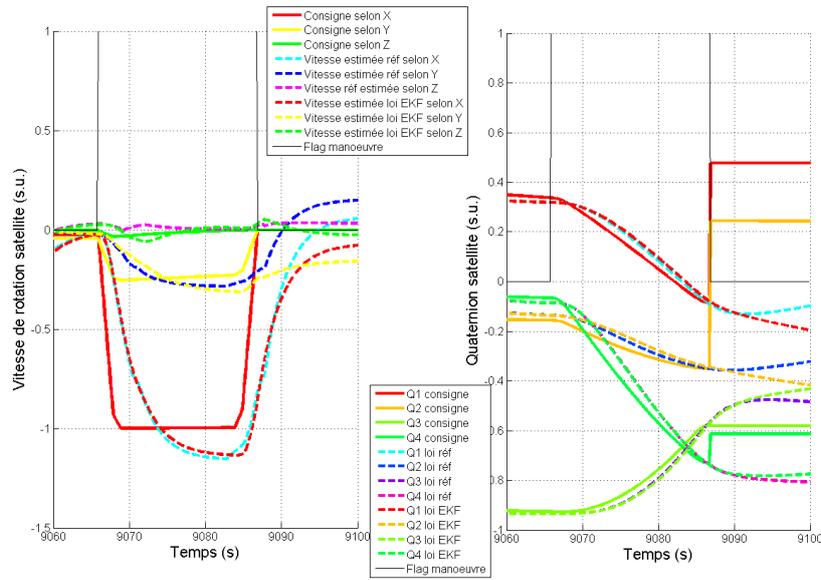


Figure 7.41 – Résultats suivi de consignes en vitesse angulaire satellite et en quaternion - grappe à six AGs simulation 8

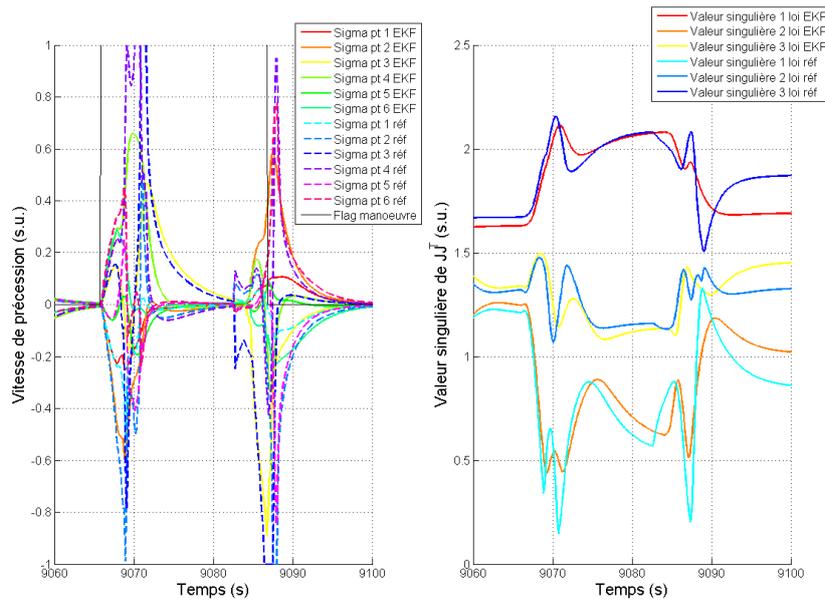


Figure 7.42 – Vitesses de précession et valeurs singulières - grappe à six AGs simulation 8

Etudions maintenant la simulation 16 (de direction initiale $\begin{bmatrix} 0.75 & 0.43 & 0.5 \end{bmatrix}$ en couple demandé), on remarque que la loi de pilotage reste bloquée dans la singularité (Fig. 7.43) avant les discontinuités en quaternions, lorsque le déterminant de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ devient trop faible (Fig. 7.44), c'est pourquoi la saturation était plus activée pour notre loi EKF.

Analysons maintenant les résultats pour le cas de la grappe avec une panne d'AGs.

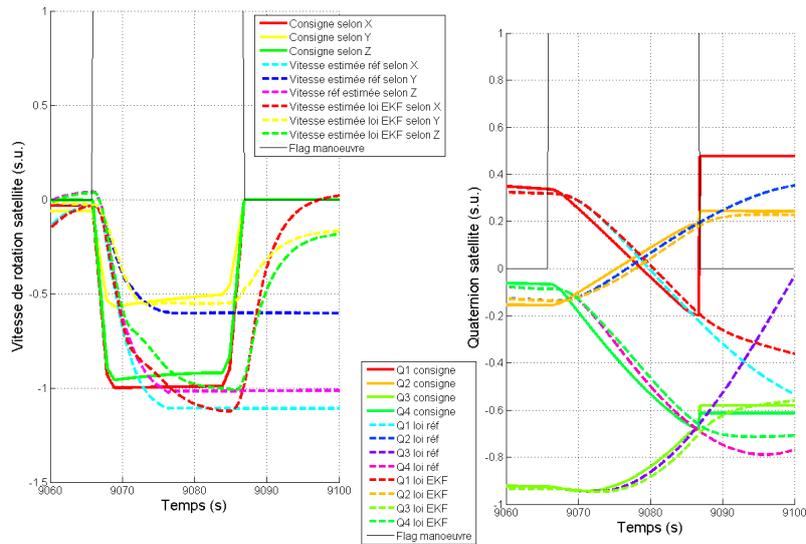


Figure 7.43 – Résultats suivis de consignes en vitesse angulaire satellite et en quaternion - grappe à six AGs simulation 16

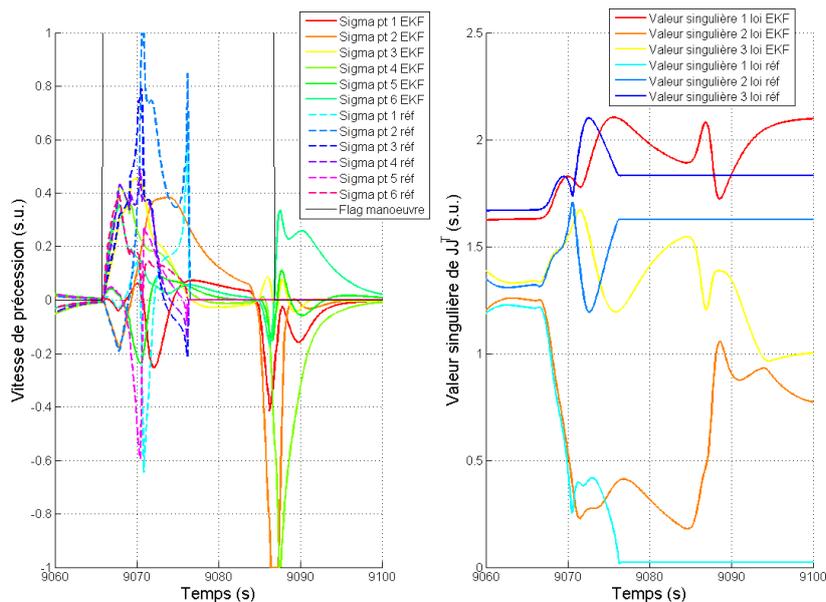


Figure 7.44 – Vitesses de précession et valeurs singulières - grappe à six AGs simulation 16

7.6.5 Résultats des simulations pour la grappe à cinq AGs

Une panne de l'AG numéro 4 a été simulée dans le logiciel, et les manoeuvres présentées précédemment ont été réalisées, avec la loi de pilotage de référence et celle développée dans cette thèse.

Les résultats 7.45 montrent que la grappe parvient à l'enveloppe externe, mais dans certains cas des déviations en moment cinétique sont observées en particulier avec la loi EKF.

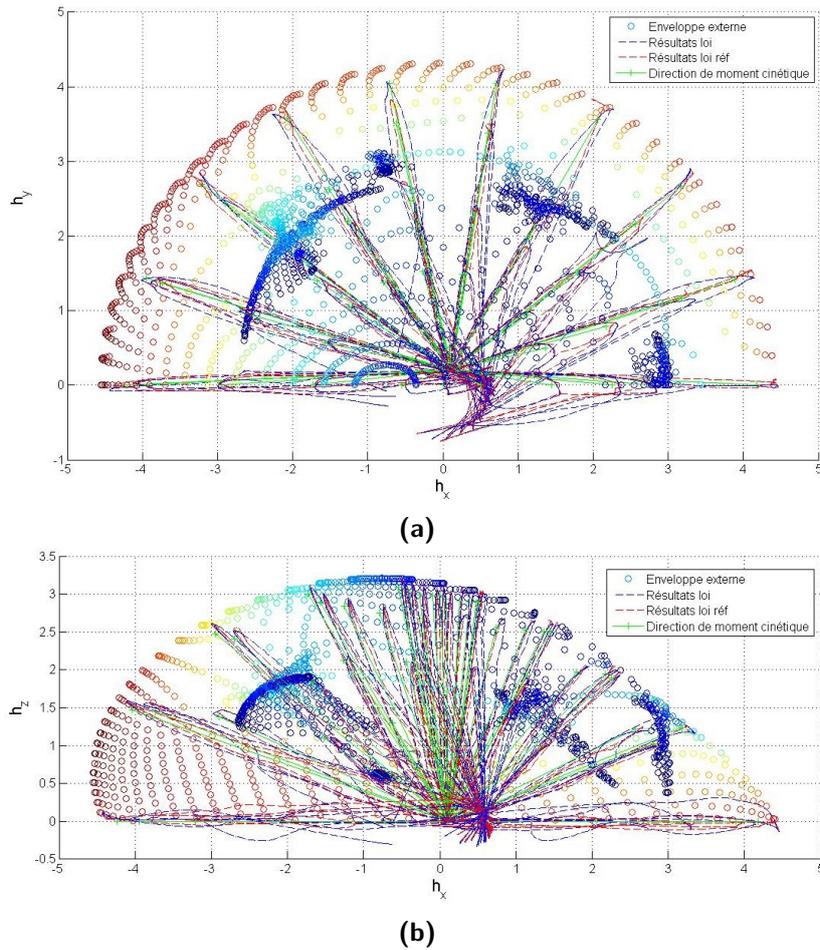


Figure 7.45 – Résultats dans l'espace des moments cinétiques, panne AG 4 : (a) Vue (h_x, h_y) . (b) Vue (h_x, h_z) .

De même que précédemment, regardons le nombre de fois où les vitesses de précession sont saturées dans les simulations (Fig. 7.46).

Dans la majorité des cas, la loi de référence amène le système à saturer deux fois plus que la loi EKF.

Étudions plus précisément deux simulations. La simulation 46 dans la direction $[-1 \ 0 \ 0]$, qui est celle où la loi de référence sature le plus. On remarque sur le suivi de consigne Fig. 7.47 que la loi EKF crée une erreur à 9070s pour passer la singularité (voir Fig. 7.48), contrairement à la loi de référence qui passe la singularité en saturant les actionneurs.

La loi EKF sature les actionneurs avant l'arrivée de la singularité, c'est donc dû au guidage en amont.

Finalement, la robustesse de la loi au passage de singularités est à nouveau montrée par exemple dans la simulation 37 (seule simulation où la loi EKF saturait plus que la référence) dans la direction $[-0.7201 \ 0.6034 \ 0.3427]$.

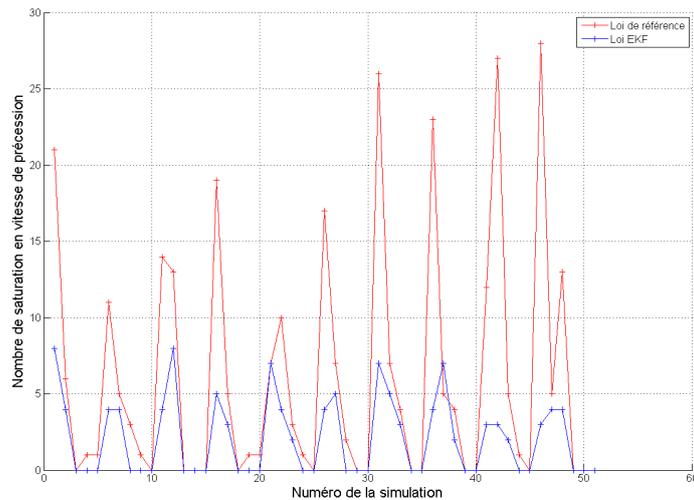


Figure 7.46 – Nombre de saturations par simulation - panne AG 4

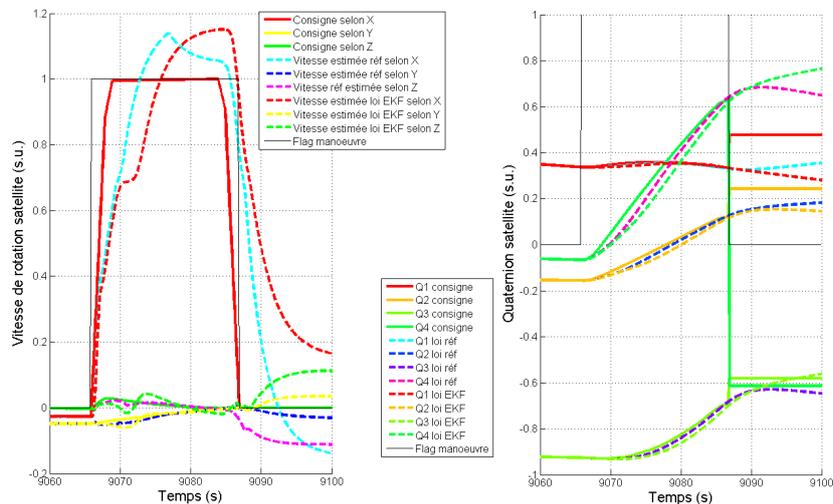


Figure 7.47 – Résultats suivi de consignes en vitesse angulaire satellite et en quaternion - panne AG 4 simulation 46

Une nouvelle fois, la loi de pilotage de référence reste dans la singularité (Fig. 7.49), alors que la loi EKF ne rentre pas dans la singularité (voir Fig. 7.50) et parvient à réaliser la manoeuvre demandée.

7.6.6 Conclusion sur les simulations

Suite à cette étude, l'implémentation de la loi de pilotage pour réaliser des manoeuvres de réorientation rapide dans différentes directions de l'espace a permis de montrer sa faisabilité, ses avantages en termes de passage de singularités, robustesse aux cas de panne et sa facilité d'intégration. En comparaison avec une loi de pilotage simple, la gestion des saturations peut

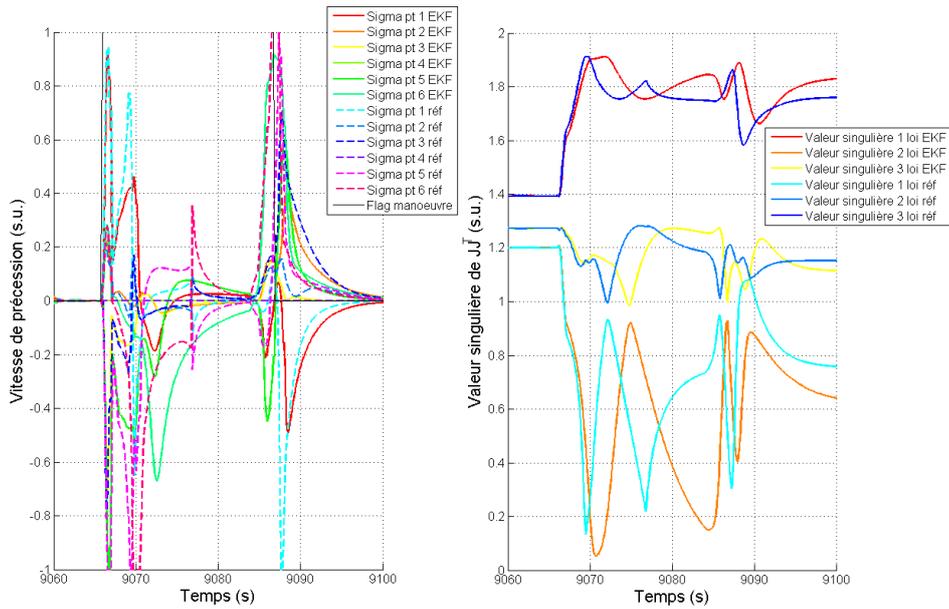


Figure 7.48 – Vitesses de précession et valeurs singulières - panne AG 4 simulation 46

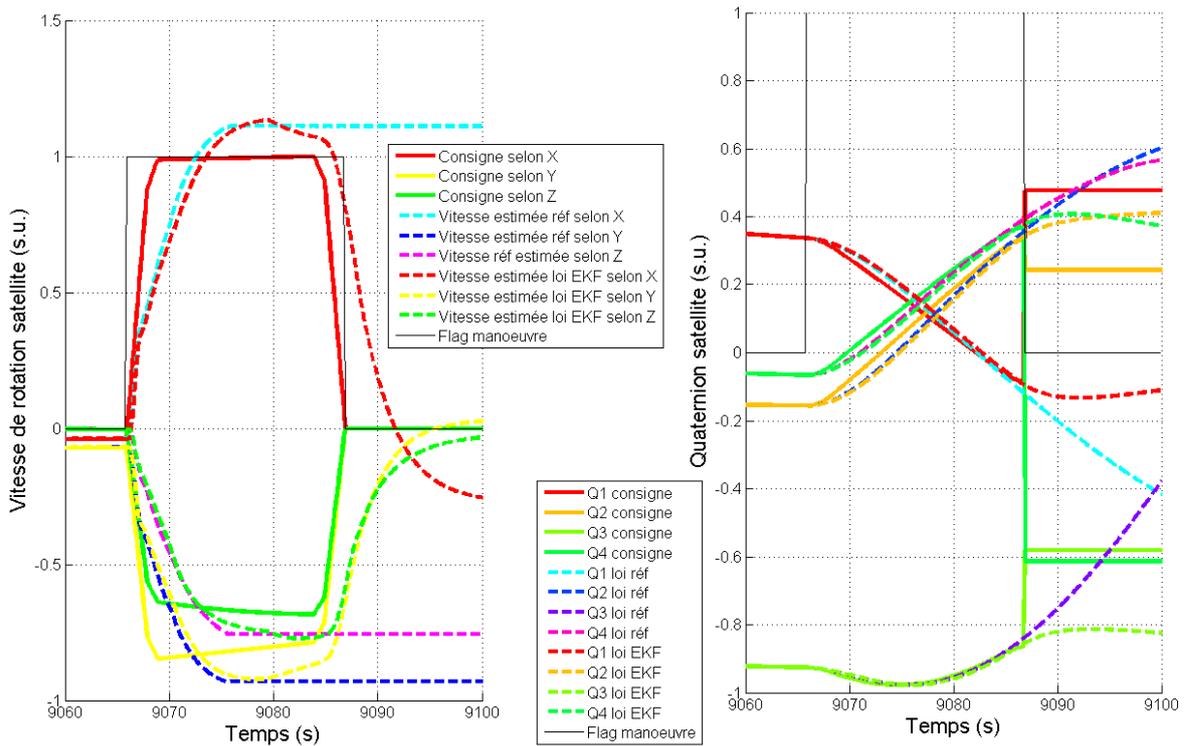


Figure 7.49 – Résultats suivi de consignes en vitesse angulaire satellite et en quaternion - panne AG 4 simulation 37

être réalisée via les matrices de covariance, et via sa dynamique interne. Notre loi de pilotage est robuste aux singularités, et permet de s’extraire des singularités externes. Néanmoins,

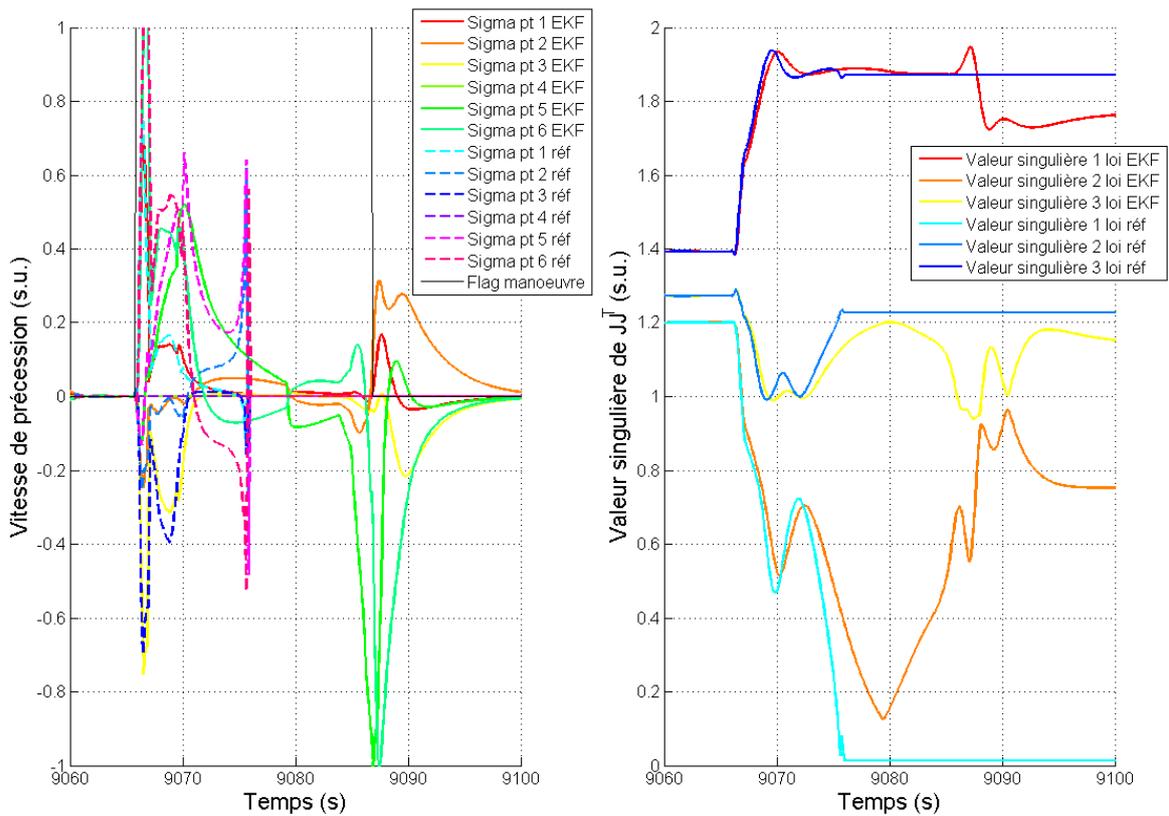


Figure 7.50 – Vitesses de précession et valeurs singulières - panne AG 4 simulation 37

si sa plus faible rapidité permet d'être robuste aux saturations, elle en devient plus lente sur les trajectoires sans singularités rencontrées. C'est donc, comme attendu, aux dépens des performances.

Ainsi, ces résultats sur le simulateur haute fidélité ont permis de démontrer sa faisabilité et ses principales caractéristiques.

Une implémentation possible de la loi de pilotage a été montrée dans ce chapitre, sur le cas nominal de la grappe à six AGs comme dans les cas de pannes. Différentes contraintes ont pu être ajoutées, notamment de saturation ou de passage de singularités. Les simulations ont montré sa flexibilité dans l'addition de contraintes et le principe de réglages par optimisation génétique.

Chapitre 8

Préparation d'une expérience en microgravité

Sommaire

8.1	Présentation du projet	168
8.2	Constitution des cas tests	172
8.3	Pré-conception de la grappe d'AGs	176
8.4	Analyse de la grappe d'AGs	179

Le but de ce chapitre est de présenter le contexte, les objectifs et la réalisation de l'expérience sélectionnée pour participer à une campagne de vols paraboliques avec Novespace, via le programme Fly Your Thesis! 2017 de l'ESA Education Office. La conception de la grappe est présentée, ainsi que son analyse pour le choix des manœuvres à réaliser.

DANS ce chapitre est présenté le projet de conception et test d'une grappe pyramidale de six AGs pour des nanosatellites. Cette expérience a été présentée à l'ESA GNC en juin 2017 [Evain 17a] et à l'IFAC World Congress en juillet 2017 [Evain 17d].

8.1 Présentation du projet

8.1.1 Contexte du projet

Suite à l'appel à candidature de l'ESA Education Office pour le programme Fly Your Thesis! 2017¹, notre équipe Flying Squirrels a été sélectionnée pour son projet : "A Nano-Control Moment Gyro in Microgravity" en novembre 2016. L'équipe officielle initiale était constituée de six membres² et de D. Alazard comme professeur référent. Les étudiants de l'équipe réalisant le projet sont :

- Thomas Solatges (doctorant SITIA - ONERA DTIS) : responsable technique du projet, mécatronique, configuration.
- Antoine Brunet (doctorant ONERA DPhIEE - CNES) : responsable du logiciel embarqué, procédures.
- Adrien Dias Ribeiro (Master en apprentissage ONERA DPhIEE - EI CESI) : électronique.
- Hélène Evain : chef de projet, lois de commande.

Les encadrants de cette thèse (M. Rognant, A. Peus et J. Mignot) ont aussi contribué activement au projet et y sont ici remerciés.

Ce projet est donc réalisé en partenariat avec plusieurs instituts comme montré sur la Fig. 8.1.

L'expérience sera testée lors de la campagne de vols paraboliques réalisée par Novespace, entre le 27 novembre et le 8 décembre 2017. La première semaine consistera à installer l'expérience dans l'avion A310, et lors de la seconde semaine, trois vols sont planifiés où deux expérimentateurs membres de l'équipe pourront participer, pour chaque vol. Lors d'un vol, l'avion réalise 31 paraboles, et pendant chaque parabole, environ 20 secondes de microgravité (proche de zéro gravité) sont disponibles pour mener à bien les expériences. Entre chaque passage en microgravité, deux périodes d'hypergravité (autour de 2g) d'une vingtaine de secondes sont présentes (voir Fig. 8.2), et peuvent être utilisés pour réaliser les expériences. Ce n'est cependant pas notre cas. Il y a trois minutes entre deux paraboles successives. Les procédures pour réaliser notre expérience doivent donc prendre en compte ces contraintes pratiques, et notamment le fait que les expérimentateurs évolueront dans des conditions inhabituelles. Les procédures doivent donc être simples et maîtrisées à l'avance.

1. Le programme Fly Your Thesis! de l'ESA Education consiste à donner l'opportunité à des équipes étudiantes européennes de masters/thésards de concevoir, construire puis tester une expérience en vols paraboliques (voir www.esa.int/Education/Fly_Your_Thesis)

2. L. Sipile (doctorante ONERA DCSD) et P.-L. Chiambaretto (doctorant ISAE SUPAERO) ont dû quitter l'équipe, et L. Daudin a rejoint l'équipe pour la durée de son stage à l'ISAE SUPAERO.

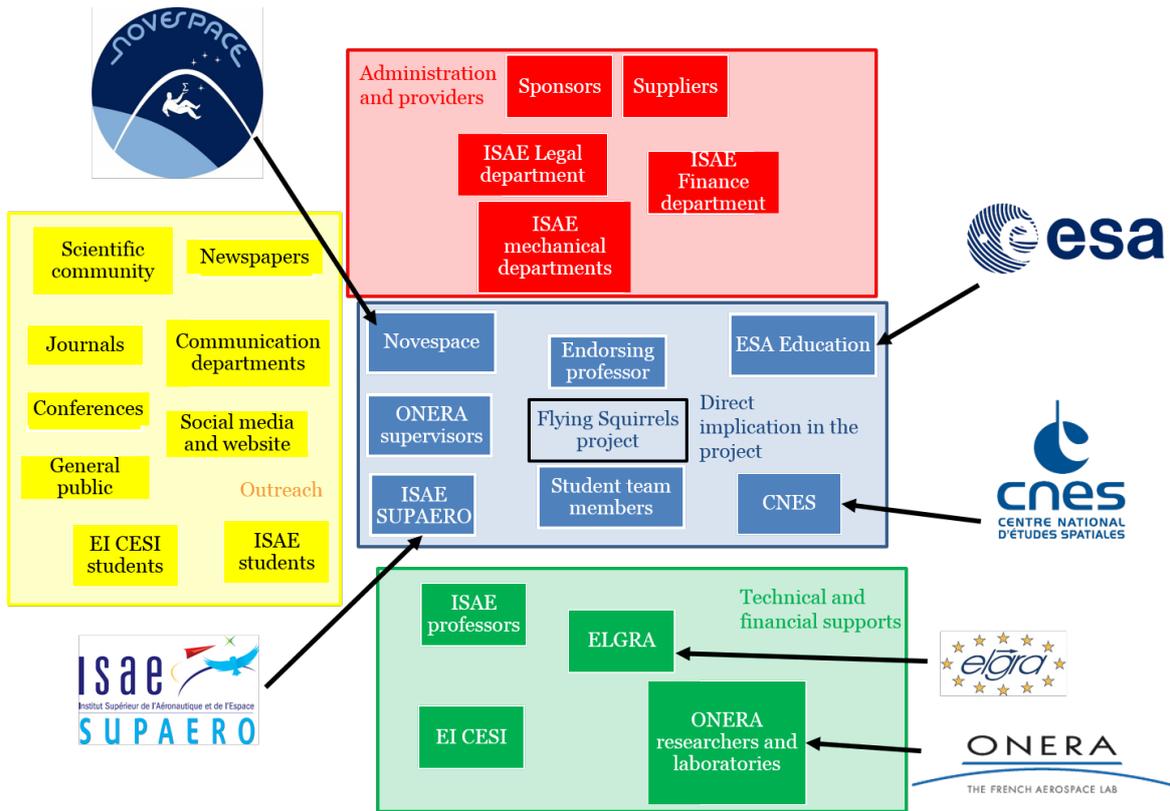


Figure 8.1 – Organisation du projet

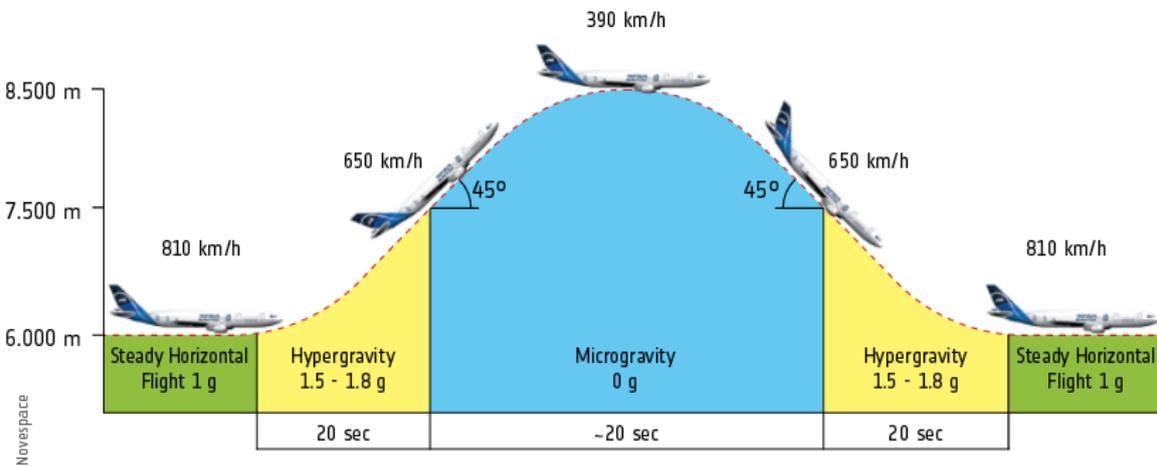


Figure 8.2 – Profil de gravité réalisé par l'avion autour d'une parabole. Crédits Novespace.

8.1.2 Objectifs du projet

L'objectif principal de notre projet est de démontrer la faisabilité d'un nouveau système de contrôle d'attitude développé en interne, comprenant six AGs et la

loi de pilotage développée dans ce doctorat, avec ou sans cas de panne d'AGs. Le but à long terme est de fournir un système contrôlant des cubesats jusqu'à une taille autour de 27U³ avec des performances comparables à celles du satellite Pléiades, référence en termes d'agilité pour les satellites d'observation de la Terre et possédant des AGs. Les résultats seront comparés avec les systèmes d'actionnement de nanosatellites actuellement développés.

Le choix des AGs pour les nanosatellites a été expliqué dans la section 2.3. En particulier, des missions d'observation de la Terre exigeantes en termes d'agilité sont à prévoir comme montré dans le graphique 8.3.

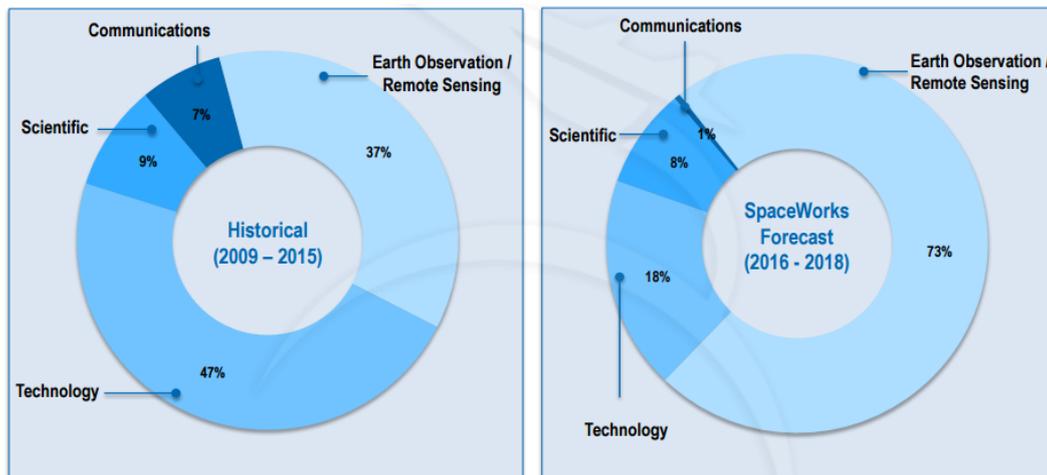


Figure 8.3 – Tendence de la répartition des missions pour les satellites de 1 à 50kg. Tiré de [Doncaster 16]

De plus, les actionneurs gyroscopiques sont des technologies permettant a priori de fournir des couples plus importants à énergie égale par rapport à des roues à inertie : voir tableau 2.1 pour les satellites. Suite à l'étude proposée par exemple par [Votel 12] et la section 2.3, on remarque qu'il est intéressant de proposer de nouveaux concepts de nano-AGs notamment pour évaluer et donner de nouveaux points de comparaison avec d'autres actionneurs pour les nanosatellites.

Néanmoins, un des points qui ressort de [Votel 12] est l'intérêt particulier des AGs pour des nanosatellites de taille assez importante, c'est pourquoi les 27U sont visés dans notre concept.

Un objectif sera de comparer les vraies capacités du système avec les solutions de contrôle d'attitude sur le marché, en particulier [Robotics 14] et [Burton 16] en termes de masse, taille, puissance consommée, couple et moment cinétique (notamment en cas de pannes). Pour compléter cet aspect, des comparaisons avec des roues à réaction et magnétocoupleurs pour nanosatellites seront effectuées suite aux expérimentations. La comparaison pourra être faite avec les systèmes de Blue Canyon Technology [Blue Canyon Technology 16] ou Hyperion Technologies [Hyperion Technologies 16] sachant que la boucle de détermination d'attitude

3. 27U correspond à un cube de 30cm de côté et de 40kg [California Polytechnique Space Institute 15]

n'est pas testée ici. En particulier, les vitesses nanosatellites annoncées dans ces systèmes seront comparées avec les capacités de nos actionneurs.

Ensuite, la configuration de grappe choisie est celle expliquée dans le chapitre 5 : la grappe pyramidale à six AGs.

Notre but est de miniaturiser des AGs en utilisant des composants sur étagère. L'idée à terme est de pouvoir contenir les six AGs dans un U (un cube de 10cm de côté). En effet, cela fournirait une unité de base facilement intégrable dans les Cubesats. Le test de cette faisabilité intervient dès la phase de conception. Néanmoins, étant donné le temps et le budget alloués au projet, la contrainte de faire tenir l'expérience dans 1U est relâchée pour notre expérience. Aussi, prouver la fonctionnalité du système est un objectif en soi pour améliorer le TRL du système. Les AGs sont conçus par l'équipe aussi compacts que possible, mais une traçabilité sur les moyens pour améliorer la miniaturisation est réalisée. Par exemple, les moteurs de précession ont été choisis pour vérifier nos besoins, mais dans la limite de budget imposée qui n'est pas représentative des budgets de développement d'équipements de nanosatellites.

La loi de pilotage sera aussi testée en termes d'implémentation temps réel.

Le système de test conçu pour faire fonctionner la grappe en vols paraboliques est ici appelé **nanosat** (voir Fig. 8.4).



Figure 8.4 – Image du nanosat ouvert. Crédits T. Solatges

8.2 Constitution des cas tests

Afin d'obtenir des données scientifiques pertinentes, différentes opérations seront demandées au nanosatellite. En particulier, le nanosat réalisera trois types de manœuvres :

- Pointage fixe
- Manœuvre importante de réorientation en attitude
- Suivi de cible

Chaque type de manœuvre sera aussi testé dans les cas de panne suivants⁴ (voir Fig. 3.3 pour les références des AGs) :

- grappe sans pannes
- panne AG 2
- pannes AGs 2 et 3
- pannes AGs 3 et 5
- pannes AGs 2 et 5 (optionnel)

Ainsi, tous les cas de pannes à 1 ou 2 AGs seront représentés. Le dernier cas est optionnel, car la perte d'isotropie est intermédiaire par rapport aux deux autres cas de deux pannes, et sera réalisé si les autres cas ont déjà pu être testés.

Avant de décrire plus en détails les types de manœuvres, le contexte de réalisation est spécifié afin d'expliquer des choix pratiques de réalisation.

8.2.1 Contexte pratique de réalisation d'une manœuvre

Pendant les paraboles, le nanosat sera pour une durée d'environ **22 secondes en microgravité**. Ainsi, pour chaque parabole, un cas de panne avec un type de manœuvre sera testé. Néanmoins, différents points pratiques contraignent la conception des manœuvres :

- au début de la parabole, le nanosat doit être relâché dans sa zone d'évolution et le début de la manœuvre doit être lancé en Wifi → **diminution du temps effectif pour la science**
- d'après la Fig. 8.2, et après discussion avec les experts de Novespace, nous savons que l'avion sera en rotation d'environ $5^\circ/\text{s}$ au moment du lâcher du nanosat. Ainsi, même si le nanosat est lâché sans vitesse angulaire par rapport à l'avion, il aura tout de même ce mouvement de l'avion. De plus, le lâcher n'étant pas reproductible, une résistance à la variation des conditions initiales est nécessaire. A noter que la mesure de l'attitude et de la vitesse angulaire du nanosat se faisant par une IMU (gyroscope), l'information à bord est donc donnée par rapport à un repère inertiel. En outre, aucun moyen de désaturation n'est présent dans le nanosat, donc la grappe devra compenser ce moment cinétique total → **le nanosat doit pouvoir absorber ce moment cinétique initial total du nanosat tout en garantissant la réalisation de ses manœuvres, donc avoir des capacités adaptées.**

4. Le choix des numéros des AGs en panne est réalisé par simplicité par rapport aux codes développés, mais n'a pas d'impact sur les résultats scientifiques. Les capacités se retrouvent par permutation circulaire des AGs.

- La microgravité effective dans l'avion est en moyenne autour de $10^{-2}g$, et sa variation n'est pas centrée sur toutes les paraboles, ni reproductible. Nous disposons d'une zone d'évolution presque équivalente à un cube de 2m de côté. Des calculs effectués à partir de données de vol montrent, en Fig. 8.5, que dans notre cas le nanosat risque de rencontrer une paroi (un filet) au bout d'environ 8 secondes en moyenne → **le nanosat doit être capable de récupérer la manœuvre en cas de rebond sur le filet et donc posséder des réserves de moment cinétique.**
- On souhaite pouvoir récupérer le nanosat à la fin de la parabole afin d'éviter qu'il ne chute de 2m à 2g → **quelques secondes à la fin de la paraboles doivent être gardées pour récupérer le nanosat.**

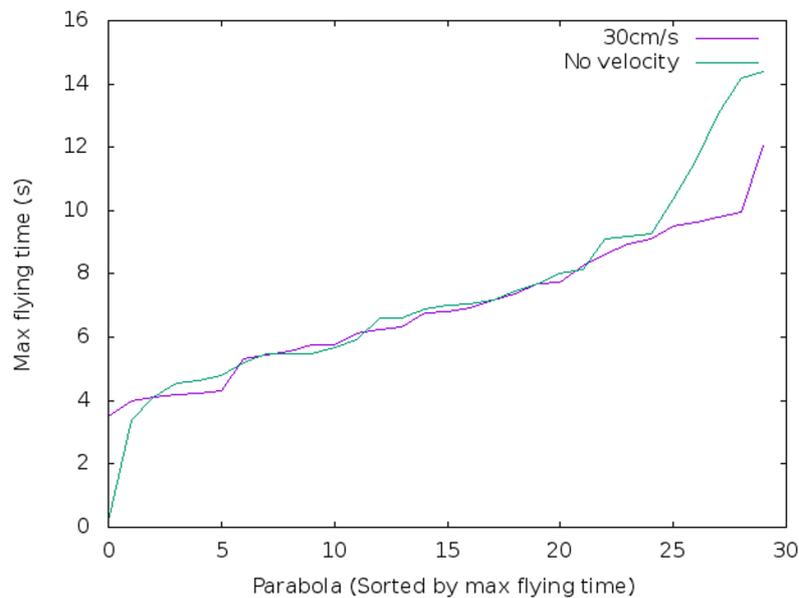


Figure 8.5 – Numéro de la parabole (dans un vol, il y a trente paraboles) avec le "max flying time" (temps maximal sans rencontre de paroi) est donné en abscisse. Crédits A. Brunet

C'est pourquoi le temps effectif de manœuvres est fixé à **11 secondes** et le nanosat aura automatiquement la consigne de retourner en position canonique au bout de 15 secondes.

Ces durées sont représentatives de manœuvres de satellites, par exemple on voit sur la Fig. 8.6 tirée de [Gleyzes 12] des manœuvres typiquement demandées au satellite Pléiades. On voit qu'en effet, l'ordre de grandeur de 10 secondes pour une manœuvre est cohérent avec les opérations spatiales. Suite à ces précisions, les types de manœuvre sont maintenant décrites.

8.2.2 Pointage fixe

Le mode de pointage fixe simule le cas où un nanosatellite doit pointer de manière fixe un objet dans le repère inertiel, par exemple ses panneaux solaires vers le Soleil pour recharger ses batteries. D'un point de vue pratique, les AGs seront en position canonique au début de la manœuvre donc la grappe n'aura pas créé de moment cinétique. Néanmoins le moment

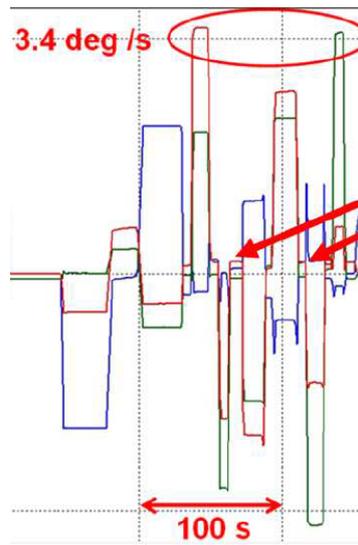


Figure 8.6 – Manœuvres réalisées par le satellite Pléiades. Crédits [Gleyzes 12]

cinétique total ne sera pas nul donc cette manœuvre consistera à compenser le mouvement du satellite pour l'arrêter dans une attitude donnée dans le repère inertiel.

L'objectif est dans un premier temps de vérifier le bon fonctionnement de la boucle de commande, nécessaire avant de lancer des manœuvres de plus grande amplitude. Ensuite, la performance des AGs à faible vitesse, la précision de pointage, le temps de réaction et les oscillations seront testés, connaissant en amont les limites intrinsèques de notre système. En particulier, les AGs ont été dimensionnés pour l'agilité, et les précisions à faibles vitesses nécessitent des moteurs à fort taux de réduction potentiellement trop chers pour notre expérience.

Pour ces manœuvres, le but n'est pas de tester le passage de singularités. Un fonctionnement nominal de la boucle de commande est recherché. C'est pourquoi la grappe sera dans une position initiale favorable, loin des singularités (voir section 8.4) avant le début de ces paraboles. En fonction des vitesses initiales satellite, il est possible que des singularités soient rencontrées, mais ce n'est pas le but recherché.

Dans les premières paraboles, le but sera simplement d'annuler la vitesse du nanosat. Ensuite, une attitude désirée proche de l'attitude actuelle sera imposée. Le choix de cette attitude peut être :

- Aléatoire : par exemple retrouver l'attitude initiale quand la manœuvre a été lancée. Cela simplifie le guidage et permet de vérifier la robustesse de la loi à tous les cas, sans s'inquiéter des singularités ;
- Calculée pour que la grappe reste dans une zone sans singularité rencontrée a priori. Le module de guidage sera plus complexe mais cela permettra d'assurer que les seules performances des AGs à basse vitesse et du nanosat seront testées, avec un changement d'attitude décidé à l'avance.

On montrera aussi les performances nominales en réjection de perturbations. Un effort pon-

tuel appliqué par l'opérateur loin du centre de gravité devra mener à une simple translation après correction de la boucle de commande.

8.2.3 Manœuvre importante de réorientation en attitude

Une direction dans le repère satellite et une durée de manœuvre seront demandées pour réaliser une réorientation rapide, par exemple pour simuler un repositionnement angulaire du satellite. Un des buts sera de montrer que le nanosat peut atteindre son enveloppe de moment cinétique et atteindre une attitude désirée. La rencontre de singularités internes sera alors testée en particulier dans les cas de pannes, ainsi que la sortie de la singularité externe. En effet, à six AGs en fonctionnement, trouver des singularités n'est pas aisé.

Nominalement, la manœuvre débute une fois le nanosat stabilisé à vitesse nulle. Le module de guidage doit alors calculer quelle attitude finale le nanosat doit atteindre tout en restant compatible avec les capacités restantes en moment cinétique de la grappe.

Néanmoins, il n'est pas nécessaire d'atteindre l'enveloppe en moment cinétique dans toutes les directions afin de montrer qu'elle est accessible : dans les cas de panne, on pourra choisir des manœuvres où des singularités traversables et intraversables sont rencontrées pour vérifier le comportement de la loi dans ces cas critiques. Même si des simulations numériques sont réalisées en amont, être dans un environnement représentatif va permettre de tester la robustesse de la loi de pilotage à des incertitudes.

Des vitesses de rotation maximales atteignables par la grappe seront recherchées dans un premier temps pour caractériser notre technologie. Ensuite, ces données seront analysées dans les cas de rencontre de singularités (cas de panne) suivant :

- les erreurs de couple (sortie par rapport à l'entrée de la loi de pilotage)
- les erreurs de suivi de consigne en attitude (lié à l'erreur de couple)
- la rapidité du suivi de consigne
- les saturations
- l'optimalité de la trajectoire suivie en moment cinétique

Voici un résumé des manœuvres décidées suite à ces attentes :

A **six AGs**, le premier but sera de démontrer la vitesse maximale atteignable par le nanosat. Comme montré en section 5.2.1.2, la trajectoire montant en moment cinétique h_z (avec $h_x = h_y = 0$), à partir de $\sigma_i = 0, i = 1 \dots 6$ et vérifiant $\sigma_i = \alpha, i = 1 \dots 6, \alpha = 0 \dots \frac{\pi}{2}$, sur son parcours, est une trajectoire cyclique stable. C'est une trajectoire simple en angles de précession, sans rencontres de singularités et permettant de monter facilement à moment cinétique maximal sans créer de moment cinétique en h_x et h_y parasites. Ainsi **la TCS sera la première testée pour caractériser la vitesse nanosat maximale atteignable.**

Ensuite, des moments cinétiques maximaux recherchés sont déterminés, en particulier quand le déterminant baisse sur le trajet en moment cinétique dans leur direction. Les singularités ne sont pas recherchées car peu probables avec la grappe à six AGs. Le côté aléatoire des conditions initiales risque fortement de dévier des trajectoires déterminées à l'avance pour

rencontrer des singularités.

A **cinq AGs**, des trajectoires sans rencontre de singularités et avec sont prévues. Pour ces premières, une position initiale favorable sera déterminée. Pour la rencontre de singularités internes traversables et intraversables, une position initiale défavorable sera implémentée.

A **quatre AGs**, les mêmes types de trajectoires que pour cinq AGs seront insérées. Néanmoins, le cas des pannes de AGs 2 et 3 est particulièrement étudié puisque la méthode d'évitement de singularités avec maillage des singularités intraversables sera implémentée. Afin de s'assurer de la rencontre de singularités particulières avec cette méthode, et pour comparer avec la méthode du déterminant, la possibilité de commencer la manœuvre sans arrêter le nanosat au départ est étudiée. Ainsi, le nanosat commencerait la manœuvre depuis la position initiale calculée et cela permettrait de s'assurer des capacités en moment cinétiques. Ces singularités étudiées seront proches de la position initiale. Des positions initiales singulières sont aussi testées dans la direction de singularité.

Ces manœuvres permettent d'étudier comment l'espace en moment cinétique est parcouru par la loi de pilotage.

8.2.4 Suivi de cible

Ces manœuvres simulent des missions d'inspection de débris par exemple. Une caméra est embarquée sur le nanosat. Pour ces manœuvres, une balle de couleur sera lâchée proche du nanosat et celui-ci devra la suivre (en attitude). La balle devra toujours rester au milieu du champ de vue de la caméra. Un algorithme de détection de couleur est implémenté dans le nanosat. L'intérêt réside dans le fait que des manœuvres vraiment imprédictibles seront testées. La rapidité et la précision de notre boucle de commande, avec des dynamiques différentes entre les objets, seront analysées suite à ces opérations.

8.3 Pré-conception de la grappe d'AGs

Dans ce paragraphe, la préconception des AGs et de la grappe est présentée, base à partir de laquelle les AGs ont été conçus.

Nous avons choisi d'avoir des AGs simple cardans, tournant à vitesses toupie constantes et égales entre les actionneurs. Faire varier les vitesses toupie dans les manœuvres peut être envisagé en fonction des moteurs insérés mais n'est pas étudié ici.

Au niveau des performances, nous avons spécifié notre système pour qu'il puisse contrôler un 27U avec une agilité similaire à celle de Pléiades, ce qui a mené à la conception de la toupie. Cependant, pour rester adapté à des plus petits satellites, l'idée est de pouvoir adapter les capacités des actionneurs, le plus simple étant avec la vitesse de rotation des toupies. Celle-ci a été spécifiée pour être entre 4000tr/min et 16000tr/min, donc on souhaite obtenir les

capacités maximales pour un 27U à 16000tr/min.

8.3.1 Détermination des caractéristiques de la toupie - cas 27U

Les cubesats 27U ont ces caractéristiques :

- Masse : autour de $m_{27U} = 40\text{kg}$.
- Taille : un cube de 30cm de côté ($l_{27U} = 0.3\text{ m}$).
- Une estimation de l'inertie du cubesat est : $I_{27U} = m_{27U}l_{27U}^2/6 = 0.6\text{ kg.m}^2$.

Le satellite Pléiades est annoncé avec un agilité maximale de $3.4^\circ/s$ [Gleyzes 12]. En faisant l'approximation valable en préconception que la vitesse maximale du satellite provient exclusivement du transfert du moment cinétique de la grappe d'AGs au satellite, le cubesat aura donc une agilité comparable à celle de Pléiades si $\omega_{27Um} = \frac{h_{max}}{I_{27U}} = 3.4^\circ/s$ avec ω_{27Um} la vitesse angulaire maximale. Ainsi, cela contraint le moment cinétique maximal de la grappe. Pour le dimensionnement, prenons une grappe isotropique de six AGs. Nous savons que le moment cinétique maximal de la grappe est $4.8h_t$ (Nms) avec h_t le moment cinétique interne de la toupie. Néanmoins, $h_t = I_t\Omega_t$ avec I_t l'inertie de la toupie selon son axe de rotation et Ω_t la vitesse de rotation constante de la toupie. On choisit donc, comme expliqué plus haut, $\Omega_t = 16000\text{tr/min}$ afin que l'inertie toupie reste faible et donc la toupie soit peu encombrante.

On obtient alors les propriétés suivantes :

- Inertie : $I_t = 4.5256 \cdot 10^{-6}\text{ kg.m}^2$
- Moment cinétique toupie avec une vitesse de rotation de 16000tr/min : 0.0076Nms .

Avec ce design, la vitesse angulaire maximale du 27U est $\omega_{27Umax} = 3.48^\circ/s$ donc vérifiant l'agilité attendue.

8.3.2 Détermination des capacités des moteurs de précession - cas 27U

Pour définir les exigences maximales en termes de moteurs de précession, les performances de Pléiades ont aussi été analysées. [Gleyzes 12] indique Pléiades est capable de réaliser une manœuvre de 60° en 25s. Si l'on suppose que la manœuvre est composée de trois phases, une première approximation des besoins peut être calculé : d'abord une augmentation constante en vitesse angulaire du satellite jusqu'à la vitesse maximale, puis le satellite reste à cette vitesse, décélère puis s'arrête. Cette manœuvre est donnée en Fig. 8.7.

A partir de là, les couples maximaux qui doivent être fournis au satellite sont calculés : $C_{max} = I_{27U}\omega_{27Umax}/T = 10\text{mNm}$ avec $T = 3.8\text{s}$. En supposant qu'un seul AG doive fournir ce couple, on obtient une vitesse de précession maximale de $\dot{\sigma}_{max} = \frac{C_{max}}{h_t} = 1.26\text{rad/s} = 72.4^\circ/s$. Le couple maximal créé par un AG est alors de : $h_t\dot{\sigma}_{max} = 0.01\text{Nm}$.

Afin d'atteindre rapidement ces vitesses de précession, le moteur de précession doit être réactif. On souhaite qu'il puisse monter à la vitesse maximale en 0.1s, alors le couple maximal que les moteurs de précession doivent fournir est $I_{27Ut}\frac{\dot{\sigma}_{max}}{0.1} = 0.03\text{mNm}$, une valeur très faible. I_{27Ut} est l'inertie toupie transverse, supposée 20% plus grande que selon son axe de rotation.

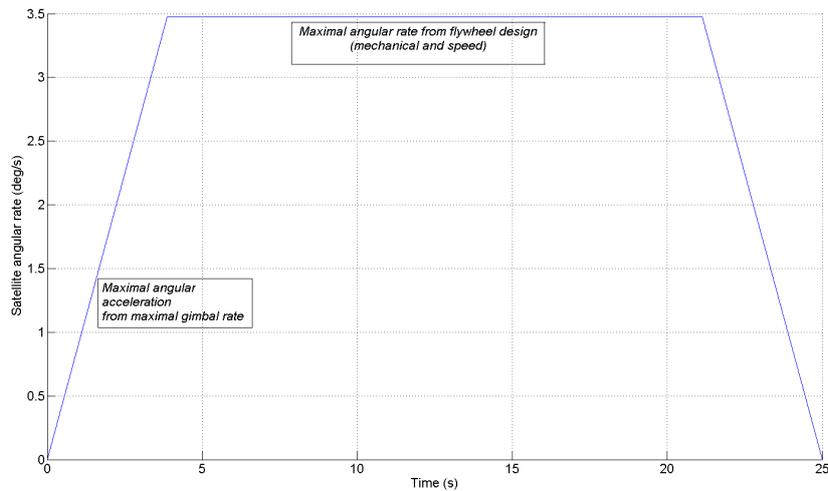


Figure 8.7 – Manœuvre dimensionnante

Cette manœuvre dimensionnante donne un ordre de grandeur des exigences sur les AGs. Cependant, dans notre expérience, le nanosat aura une inertie beaucoup plus faible qu'un 27U. Comme présenté dans la section précédente, il faudra que la grappe réalise des manœuvres rapides et possède une réserve de moment cinétique pour contrer les conditions initiales et les rebonds sur le filet.

Dans la section suivante, la conception réalisée pour un 27U est adaptée à notre expérience.

8.3.3 Adaptation des caractéristiques de la toupie - notre nanosat

L'inertie de la toupie n'est pas changée, seule la vitesse de rotation. Après estimation des perturbations et des pertes de capacité en cas de panne d'actionneur, nous souhaitons avoir des capacités de manœuvres autour de $40^\circ/\text{s}$.

Une première estimation de l'inertie du nanosat propose la valeur de $I_{nano} = 0.02\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Avec une vitesse de toupie de 6000tr/min, on obtient les caractéristiques suivantes :

- Moment cinétique toupie : $\mathbf{h_t = 0.0028\ Nms}$.
- Moment cinétique maximal de la grappe : 0.0136 Nms.
- Vitesse de rotation satellite maximale : **$39.1^\circ/\text{s}$** .

Avec une vitesse de rotation de 8000tr/min, les capacités du nanosat montent à $52^\circ/\text{s}$.

8.3.4 Adaptation des caractéristiques de la précession - notre nanosat

Une manœuvre différente, beaucoup plus exigeante a été choisie comme dimensionnante. Elle consiste à faire une rotation du satellite de 180° en 5 secondes. Le couple maximal qui doit être fourni au satellite est $C_{max} = 4D_\theta * I_{nano}/T^2 = 10\text{mNm}$ avec $D_\theta = \pi$ la variation

angulaire et $T = 5s$ la durée de la manœuvre. Ainsi, on obtient une vitesse de précession maximale de $\dot{\sigma}_{max} = \frac{C_{max}}{h_t} = 3.54\text{rad/s} = 203^\circ/s$.

L'angle de précession maximal atteint est alors autour de 500° , nécessitant que l'AG puisse réaliser au moins deux tours sur lui-même. Ainsi, on pourra aussi initialiser les AGs dans des positions plus arbitraires. A cette vitesse de précession, l'AG pourra alors créer un couple gyroscopique de $h_t\dot{\sigma}_{max} = 0.01\text{Nm}$ maximal.

On trouve alors un couple de précession maximal de $I_{nano}\frac{\dot{\sigma}_{max}}{0.1} = 0.1\text{mNm}$.

8.3.5 Résumé de la conception de la grappe

Résumé des capacités dans le cas d'une grappe isotropique :

- Inertie toupie (autour de son axe de rotation) : $I_t = 4.53.10^{-6}\text{kg.m}^2$.
- Vitesse de rotation toupie : 6000tr/min.
- Moment cinétique toupie : $h_t = 0.0028\text{ Nms}$.
- Moment cinétique maximal de grappe : 0.0136 Nms.
- Vitesse angulaire satellite maximale : $39.1^\circ/s$.
- Vitesse de précession maximale : $\dot{\sigma}_{max} = 3.54\text{ rad/s}$.
- Couple gyroscopique maximal (un AG) : 0.01 Nm.
- Couple gyroscopique maximal de la grappe : 0.06 Nm.
- Au moins deux tours doivent pouvoir être réalisés par les moteurs de précession.

En tableau 8.1 les caractéristiques lorsque la vitesse de rotation de la toupie augmente, en supposant que la vitesse de précession maximale vaut 3.54 rad/s.

Vit. Toupie (tr/min)	h_t (Nms)	Vit. ang. max (deg/s)	Couple max AG (Nm)
6000	0.0028	39.1	0.0101
8000	0.0038	52.1	0.0134
10000	0.0047	65	0.0168

Tableau 8.1 – Capacités de la grappe en fonction de la vitesse toupie

8.4 Analyse de la grappe d'AGs

Suite à ce predesign, la conception des AGs a été réalisée par T. Solatges, aidé de M. Rognant. De plus, suite à la conception du nanosat test, les valeurs d'inertie du nanosat ont pu être déterminées avec assez de précision pour choisir l'angle de grappe. Dans cette section, on parlera tout d'abord des capacités pratiques de nos AGs réalisés, puis une analyse topologique de la grappe est réalisée afin de choisir les manœuvres à tester en vols paraboliques.

8.4.1 Caractéristiques techniques

L'AG développé par T. Solatges est montré en Fig. 8.8. Chaque AG comprend un petit

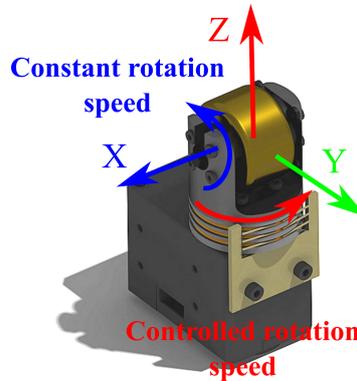


Figure 8.8 – AG conçu pour les nanosatellites. Crédits T. Solatges

moteur brushless sans capteur, régulé à vitesse constante grâce à un retour EMF⁵. Le moteur de précession possède une boucle interne de régulation en position, vitesse et couple, basée sur un codeur absolu. Pour limiter la vitesse du moteur toupie, un régulateur de tension à 5V en amont du moteur est inséré, limitant la vitesse de rotation entre 6000 tr/min et 16000 tr/min. Le collecteur tournant permet de ne pas limiter le nombre de tours. La toupie a une inertie de $4.5 \cdot 10^{-6} \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Le moment cinétique toupie sera cependant augmenté de la partie tournante du moteur.

Le pas minimum du moteur de précession est 0.088 degrés, le rapport de réduction est de 212 :1. La vitesse maximale à 12V est de 5.2 rad/s donc dans les spécifications. La vitesse minimale de précession est de 0.229 tr/min soit 0.024 rad/s. Le couple minimal engendré par l'AG est donc de $6.7 \cdot 10^{-5} \text{Nm}$ ⁶ Enfin, le gyroscope utilisé a une précision de $0.02^\circ/\text{s}$ ⁷.

L'estimation de l'inertie du nanosat donne : $I_{\text{nanosat}} = \begin{bmatrix} 0.017 & 0 & 0 \\ 0 & 0.017 & 0 \\ 0 & 0 & 0.021 \end{bmatrix} \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Afin

d'obtenir des capacités de manœuvres similaires sur les différents axes du nanosat, un angle de grappe de 65° est choisi d'après la Fig. 5.4. Avec cet angle, on obtient des performances autour de $42^\circ/\text{s}$ sur les axes \mathbf{x}_s , \mathbf{y}_s et \mathbf{z}_s validant la conception. Avec deux cas de panne, dans le pire cas, les capacités de rotation baissent à $19^\circ/\text{s}$.

Le modèle d'expérience (le nanosat) est une structure cylindrique de 23 cm de diamètre et 14 cm de haut. Il inclut tous les sous-systèmes d'un satellite⁸. Tout d'abord, le nanosat contient la grappe de six AGs et leur électronique de contrôle, des batteries afin que le nanosat

5. Electro-Motive Force, générée par la rotation du moteur

6. Caractéristiques issues du fabricant : <http://www.francerobotique.com/dynamixel-s%C3%A9rie-x/520-dynamixel-xh430-w210-r.html>

7. Caractéristiques issues du fabricant : <https://www.phidgets.com/?tier=3&catid=10&pcid=8&prodid=32>

8. A noter que les éléments choisis ne sont pas spatialisés

soit autonome sont insérées, avec des convertisseurs 5V/12V. L'ordinateur de bord est une Raspberry Pi 3, et une caméra Pi 3 est ajoutée pour le suivi de cible. La Fig. 8.4 montre la réalisation de l'expérience. Dans l'avion, le nanosat sera dans une zone entourée de filets et sera relâché à la main.

Suite à ces descriptions techniques, passons à l'analyse topologique de la grappe étudiée avec l'angle $\beta = 65^\circ$ avec les outils développés au chapitre 5.

8.4.2 Analyse topologique

Afin de déterminer les manœuvres à effectuer, analysons la grappe étudiée. Grâce à l'outil des VMNs développé en section 5.1.2, toutes les positions initiales de la grappe sont calculables. Pour chaque cas de panne sont indiquées dans le tableau 8.2 ci-dessous les positions initiales sélectionnées des AGs, avec la valeur du déterminant de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ associée. Plus le déterminant est élevé, plus la grappe est éloignée d'une singularité. S'il est égal à 0 alors le système est dans une singularité. La dernière colonne indique le rayon de la sphère, en partant d'un moment cinétique nul dans la position initiale décrite, dans laquelle aucune singularité n'est rencontrée avec la loi de pilotage de Moore-Penrose. C'est cette loi qui a été choisie afin d'estimer les singularités les plus proches en angles de précession. Pour chaque cas de panne, deux positions sont calculées : celle maximisant le déterminant et celle le minimisant. Pour le cas à six AGs, la position canonique $\sigma_i = 0, i = 1 \dots 6$ est aussi ajoutée, notamment pour tester la TCS.

N° AG(s) en panne	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	Dét.	Sphère
	rad	rad	rad	rad	rad	rad		Nms
N/A	2.72	-2.42	-1.84	2.17	-2.14	1.85	8.0	2.95
	0	0	0	0	0	0	1.41	2.48
	0.64	-3.14	-0.64	0.62c	-3.14	-0.62	0.001	0
2	-0.68	N/A	-0.34	1.17	-1.14	1.26	4.54	1.77
	2.70	N/A	2.26	4.60	-2.44	0.45	0.062	1.87
2 et 5	-0.56	N/A	0.56	1.82	N/A	4.46	2.36	0.93
	0.64	N/A	-0.64	0.62	N/A	-0.62	0.00058	0
3 et 5	3.71	-1.54	N/A	2.16	N/A	2.36	2.06	0.80
	1.81	-1.34	N/A	1.81	N/A	4.46	0.32	0.050
2 et 3	1.69	N/A	N/A	4.59	-0.84	0.84	1.87	0.96
	3.67	N/A	N/A	2.61	2.06	4.24	0.00015	0

Tableau 8.2 – Positions initiales choisies et caractéristiques associées (sphère normalisée par h_t)

Ainsi, dans toutes les configurations de grappe, sauf pour les pannes 3 et 5, il y a une configuration initiale singulière à partir de laquelle la grappe peut démarrer, même à six AGs. Pour tester le passage de singularités à vitesse nulle, il suffit alors de commencer dans ces configurations.

Ensuite, la deuxième étape consiste à identifier les capacités maximales en moment ciné-

tique en fonction des cas de panne et des axes. Les capacités maximales sont données dans le tableau 8.3.

N° AG(s) en panne	Min. enveloppe moment cinétique	Max. enveloppe moment cinétique
N/A	4.3667	5.4378
2	3.4264	4.6042
2 et 5	2.4786	3.6252
3 et 5	2.5160	3.6682
2 et 3	2.6006	3.8655

Tableau 8.3 – Capacités en moment cinétique en fonction des cas de panne (normalisée par h_t)

Les capacités varient selon la direction du moment cinétique. Connaissant sa valeur dans une direction demandée, on a alors l'information nécessaire pour construire les manœuvres jusqu'à l'enveloppe (ou s'assurer qu'elles y restent). Dans chaque cas de panne, des directions avec ou sans rencontre de singularités seront testées.

En particulier, dans le cas des pannes 2 et 3, l'analyse de la section 5.2.2.3 sur les singularités intraversables a été adaptée à notre cas et sert au choix des manœuvres ayant une singularité intraversable à passer. Les versions de loi de pilotage testées sont celles présentées dans ce manuscrit, section 7.3. Avec l'application des outils présentés dans ce manuscrit, les manœuvres sont donc conçues pour maximiser la science pouvant être acquise lors de ces expérimentations en vol parabolique.

Les expérimentations en microgravité seront réalisées début décembre 2017. Néanmoins le dimensionnement de la grappe et les résultats de simulation permettent de confronter la théorie aux problèmes d'implémentation pratique. Le système est prometteur pour de futures missions spatiales de nano/microsatellites agiles.

Chapitre 9

Application au contrôle de manipulateurs spatiaux redondants

Sommaire

9.1	Présentation du contexte	184
9.2	Modèle satellite+manipulateur	185
9.3	Analyse du système	187
9.4	Etude de lois de pilotage	191
9.5	Simulations	194

Dans ce chapitre, l'application de la loi de pilotage est réalisée sur des modèles simplifiés de manipulateurs sur des véhicules spatiaux à base non-fixe. Les caractéristiques spécifiques de ce problème sont mises en avant et des premières simulations sont présentées.

DANS ce chapitre, une application au contrôle de bras manipulateurs spatiaux est mise en avant pour montrer la généralité de la loi et ses limites. Ce travail a été réalisé avec l'encadrement de Jurek Sasiadek, enseignant chercheur à Carleton University, Ottawa, spécialisé notamment dans la robotique spatiale et le GNC. Le problème du contrôle des manipulateurs spatiaux est différent de l'application théorique effectuée en section 6.7 car le véhicule sur lequel se trouve le manipulateur n'est plus supposé fixe. Ainsi, la principale différence dans la conception de la loi de pilotage est qu'on ne peut plus se baser uniquement sur l'équation cinématique. La formulation dérivée section 6.1.4 n'est donc plus applicable. En outre, l'application proposée est intéressante car les singularités deviennent dynamiques et sont différentes de celles étudiées précédemment. Dans cette partie, on s'attachera dans un premier temps à décrire le nouveau système étudié, puis une analyse plus spécifique des singularités dynamiques sera menée. Enfin, la loi de pilotage sera adaptée et des premières simulations réalisées pour contrôler l'organe terminal de ce bras.

9.1 Présentation du contexte

Le service en orbite des satellites et la gestion des débris spatiaux de plus en plus nombreux et donc dangereux à certaines orbites terrestres sont des sujets qui seront amenés à être traités par les futures missions spatiales. Différentes technologies sont envisagées pour récupérer les débris, par exemple des câbles électrodynamiques [Pardini 15], des lasers pulsés depuis la Terre [Phipps 14], des harpons ou filets [Bonnal 13]. Utiliser des bras robotiques pour ces applications est envisagé (voir par exemple [Dubanchet 15]) notamment car leur niveau de TRL est plus élevé, puisqu'il y a déjà des bras robotiques dans l'espace (tel que le SRMS Shuttle Remote Manipulator System). Néanmoins, ces technologies sont téléopérées à cause de la complexité de les piloter sur des plateformes en microgravité.

Le but de ce travail est de tester la loi de pilotage pour contrôler la position de l'organe terminal d'un manipulateur spatial autonome jusqu'à la phase d'accroche de la cible. Le premier cas testé sera celui où la plateforme est libre et n'est contrôlée ni en attitude, ni en translation, puis le contrôle en attitude de la plateforme sera assuré. Les hypothèses pour la modélisation du problème se résument à :

- Aucun effort extérieur n'est considéré ;
- Le mouvement du centre de gravité du véhicule chasseur est considéré comme galiléen pour la phase d'accroche (application des principes fondamentaux de la dynamique dans un repère inertiel situé au centre de gravité du système satellite+manipulateur) ;
- Un seul manipulateur rotoïde série sur le chasseur est considéré ;
- Le débris étudié est non-coopératif

Pour le système satellite+manipulateur, différentes stratégies d'actionnement existent [Dubowski 93] :

- **Free-flying manipulateur** : l'attitude et la position du chasseur sont contrôlés indépendamment du manipulateur. Dans ce type de problèmes de commande, de nombreuses redondances existent et l'espace de travail est quasiment illimité [Dubowski 93].

Néanmoins, l'utilisation de carburant peut considérablement diminuer la durée de vie du satellite.

- **Free-floating manipulateur** : la position et l'attitude du satellite chasseur ne sont pas contrôlées, elles varient notamment en fonction du mouvement du manipulateur suivant les principes physiques. L'étude de l'espace de travail de l'organe terminal devient complexe [Dubowski 93].
- Des stratégies intermédiaires sont aussi envisageables.

Dans notre cas, nous étudierons le free-floating manipulateur.

9.2 Modèle satellite+manipulateur

Connaître la dynamique du système (satellite+manipulateur) est un prérequis pour obtenir une loi de contrôle performante avec la technique développée. Des techniques de modélisation variées existent pour décrire la géométrie et les équations dynamiques du mouvement du système, par exemple la technique du Manipulateur Virtuel [Vafa 90] qui sera détaillée et utilisée dans l'analyse de l'espace de travail du manipulateur. Cette technique est particulièrement utile lorsque seule l'attitude du satellite est contrôlée. D'autres techniques basées sur le calcul du Lagrangien ont été développées. La modélisation de Khalil et Dombre [Khalil 04] d'un bras robotique à base fixe est donnée en annexe 9.

Basons-nous sur le travail de E. Papadopoulos et S. Dubowsky [Papadopoulos 93b] pour définir le modèle géométrique. On rappelle que l'origine du repère inertiel est confondu avec le centre de masse du système. Il est à noter que la position de chaque corps dépend de la position de tous les autres corps, et pas seulement les corps précédents (corps situés entre le satellite et le corps étudié) si la base est non fixe.

Dans ce chapitre, on notera \mathbf{q} l'angle entre deux tronçons. Cette variable est similaire au σ de la section 6.7. La Fig. 9.1 montre une modélisation d'un ensemble satellite+bras robotique, avec les notations tirées de [Papadopoulos 93b]. CM correspond au centre de masse de l'ensemble. l_k est la distance entre l'accroche du tronçon k sur le tronçon k_1 et le centre de masse du tronçon k , et r_k la distance entre le centre de masse du tronçon k et l'attache au tronçon $k + 1$. Pour avoir la relation entre la dérivée temporelle de la pose de l'organe terminal \mathbf{x}_E (attitude et position) et les vitesses angulaires des articulations $\dot{\mathbf{q}}$, écrivons la conservation du moment cinétique :

$$\sum_{i=0}^N (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i + m_i \boldsymbol{\rho}_i \wedge \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) = \text{const} \quad (9.1)$$

avec \mathbf{I}_i la matrice d'inertie liée au corps i exprimée dans le repère inertiel lié au centre de masse du système, $\boldsymbol{\omega}_i$ la vitesse angulaire du corps i , m_i sa masse, $\boldsymbol{\rho}_i$ est défini dans la Fig. 9.1 comme la distance entre le centre de masse du système et le milieu de chaque tronçon, et N le nombre de corps. Le corps 0 est le satellite.

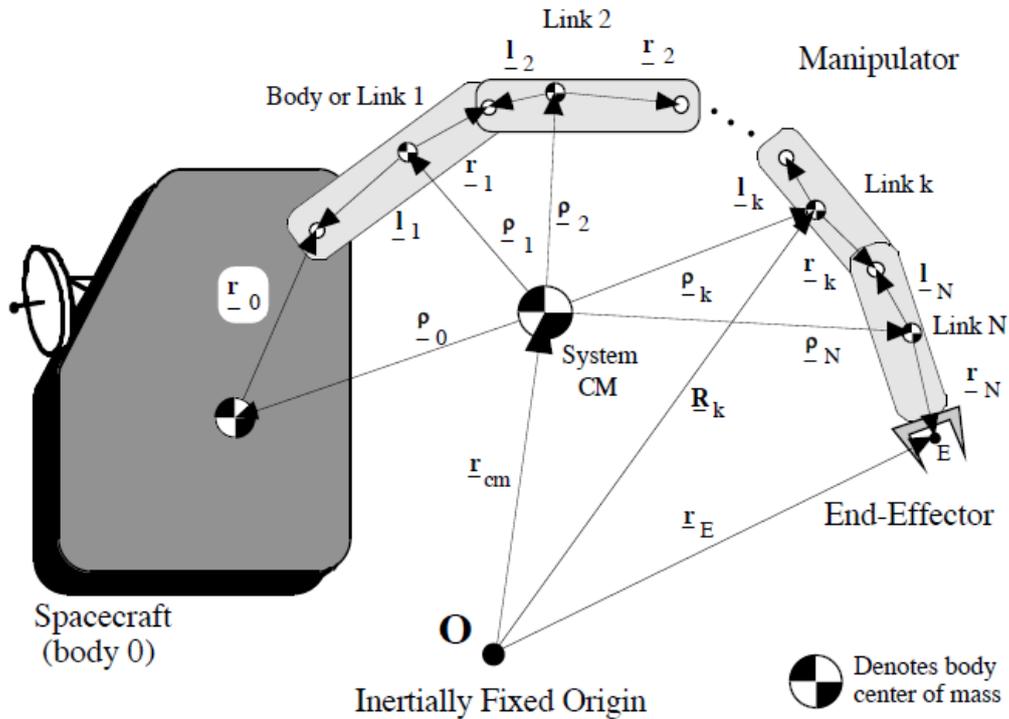


Figure 9.1 – Modélisation du système. Tiré de [Papadopoulos 93b]

L'éq. (9.1) peut être réécrite comme [Nenchev 92] :

$$\mathbf{I}_s \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{I}_M \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{L}_0 \quad (9.2)$$

où \mathbf{L}_0 est le moment cinétique total, constant, \mathbf{I}_s la matrice d'inertie du satellite, \mathbf{I}_M la matrice d'inertie regroupant les matrices des corps du manipulateur et $\boldsymbol{\theta}$ l'attitude du satellite. Des manœuvres de désaturation sont habituellement réalisées pour avoir $\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$. Cette équation (9.2) est **non-intégrable** comme prouvé par [Nakamura 91], et c'est la raison de la non-holonomie du système, expliqué dans la section étudiant les redondances.

La relation cinématique est donnée par :

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{J}_s \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{J}_M \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (9.3)$$

où, d'après [Nenchev 92] $\dot{\mathbf{x}}_e$ est le vecteur vitesse de pose de l'organe terminal, composé des m variables de tâches (variables que l'on souhaite contrôler), \mathbf{J}_s la matrice jacobienne associée au satellite (qui ne contient que des variables liées au satellite), \mathbf{J}_M la matrice jacobienne associée au manipulateur. $\dot{\mathbf{x}}_0$ est la vitesse initiale du système. Le détail du calcul de ces matrices est fourni dans [Papadopoulos 93b] et [Umetani 89].

A partir de ces équations, la **Matrice Jacobienne Généralisée** \mathbf{J}_G , introduite par [Umetani 89] est calculée. Elle relie les variables de tâches (coordonnées opérationnelles) à

contrôler de l'organe terminal avec les vitesses angulaires des articulations :

$$\dot{\mathbf{x}}_e = (\mathbf{J}_M - \mathbf{J}_s \mathbf{I}_s^{-1} \mathbf{I}_M) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{J}_G \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (9.4)$$

où $\dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{J}_s \mathbf{I}_s^{-1} \mathbf{L}_0$. Ainsi, de manière similaire au problème du pilotage des actionneurs gyroscopiques ou d'un manipulateur à base fixe, le pilotage de ce système revient à inverser la matrice \mathbf{J}_G pour obtenir $\dot{\mathbf{q}}$. La matrice \mathbf{J}_G dépend de la configuration \mathbf{q} et de l'attitude du satellite. [Papadopoulos 93b] note que cette matrice jacobienne est le produit de deux matrices :

$$\mathbf{J}_G = \text{diag}(\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_0) \mathbf{J}_G^*(\mathbf{q}) \quad (9.5)$$

où $\mathbf{J}_G^*(\mathbf{q})$ est la matrice jacobienne exprimée dans le repère local associé au mouvement du satellite (à considérer si la manipulateur est contrôlé relativement à la base) et $\text{diag}(\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_0)$ est une matrice de transformation qui varie en fonction de l'attitude du satellite, et qui est toujours inversible. Ainsi, l'étude des singularités de la Matrice Jacobienne Généralisée revient à étudier la matrice $\mathbf{J}_G^*(\mathbf{q})$. Ces singularités sont appelées **dynamiques** puisqu'elles dépendent des propriétés de masse et d'inertie du système.

Lorsque seul le manipulateur est contrôlé, et que les moments initiaux sont nuls, le modèle dynamique issu des équations de Lagrange s'écrit :

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{t} \quad (9.6)$$

avec $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ la matrice d'inertie du système, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ le terme non-linéaire regroupant les forces de Coriolis et centrifuges, et \mathbf{t} le vecteur de couple appliqué aux articulations.

Etudions maintenant quelques caractéristiques de ce système.

9.3 Analyse du système

Dans cette section nous analyserons tout d'abord les redondances, complexifiées par la non-holonomie du système, puis les caractéristiques des singularités dynamiques notamment dans le cas simple d'un bras plan composé de deux corps (et donc deux articulations à contrôler) sur un satellite et enfin l'espace de travail associé à ce système.

9.3.1 Redondances

Analyser les redondances et leur type est nécessaire pour connaître le nombre de contraintes qui peuvent être satisfaites dans la loi de pilotage. Eq. (9.2) est non-holome, et cette non-holonomie fournit un degré de liberté supplémentaire [Nakamura 91]. En effet, comme montré dans l'illustration 9.2, pour une pose de l'organe terminal, plusieurs solutions existent puisque la base est mobile. Néanmoins, contrairement aux autres redondances par exemple sur le nombre d'actionneurs dans la grappe d'AGs ou d'articulations sur le manipulateur, l'expression de cette redondance n'est pas directe puisque l'éq. (9.2) est non-intégrable. Ainsi,

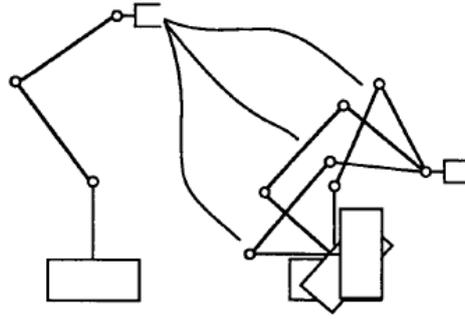


Figure 9.2 – Redondance induite par la non-holonomie. Tiré de [Nakamura 91]

cette redondance peut être utilisée sur la génération de trajectoire globale du système, et non via les trajectoires à motricité nulle calculées à partir du noyau de la matrice Jacobienne Généralisée \mathbf{J}_G .

En fonction du nombre de redondances qui peuvent être utilisées avec la motricité nulle, un certain nombre de variables et de contraintes seront vérifiées [Nenchev 92].

9.3.2 Singularités dynamiques

Dans le cas des manipulateurs à base fixe, les singularités dépendent des longueurs des bras et des angles des articulations, elles sont donc cinématiques. Dans le cas free-floating, les singularités dépendent des masses et inerties, elle sont donc dites **dynamiques**. L'étude [Papadopoulos 93b] explique ce concept et ses propriétés. Le système est dans une telle singularité lorsque :

$$\det(\mathbf{J}_G^*(\mathbf{q})\mathbf{J}_G^{*t}(\mathbf{q})) = 0 \quad (9.7)$$

A partir de l'éq. (9.7), les valeurs \mathbf{q} correspondant à une singularité peuvent être calculées comme réalisé précédemment sur la grappe d'AGs. Cependant, un point singulier dans l'espace des angles \mathbf{q} ne donne pas une position unique de l'organe terminal (l'application est surjective) puisque la pose du satellite n'est pas fixée. Pour les manipulateurs à base fixe, une valeur de \mathbf{q} définit une position unique de l'organe terminal dans l'espace 3D et la génération de trajectoire en est simplifié. Dans notre cas, la position de l'organe terminal peut être singulière ou non en fonction de la configuration dans laquelle le manipulateur atteint ce point (même si le manipulateur ne possède pas intrinsèquement de redondance) et donc de la trajectoire prise par le système [Papadopoulos 93b].

Calculons comme dans le papier [Papadopoulos 93b] les singularités dynamiques pour un manipulateur planaire spatial à deux corps, et comparons avec le cas à base fixe. Les valeurs des paramètres du modèle sont identiques à [Papadopoulos 93b]. Pour une attitude du satellite donnée, le déterminant de $\mathbf{J}_G(\mathbf{q})\mathbf{J}_G^t(\mathbf{q})$ peut être calculé pour différentes valeurs de q_1 et q_2 . La Fig. 9.3 montre les résultats obtenus.

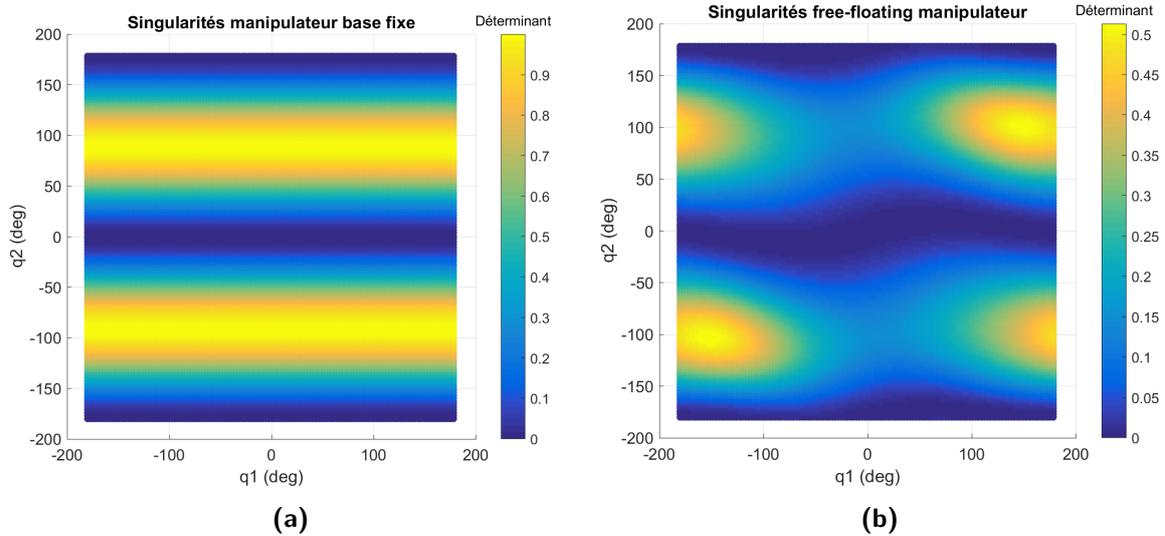


Figure 9.3 – (a) Distance aux singularités pour un manipulateur à base fixe. (b) Distance aux singularités pour un manipulateur sur un free-floating satellite, avec une attitude de 40°

Même si le nombre de singularités pour une configuration \mathbf{q} est infini, [Papadopoulos 93b] propose de trouver les zones dans l'espace de travail où ces singularités peuvent se trouver. À partir de l'éq. (9.7), des hypersurfaces de singularités peuvent être calculées.

La distance des singularités au centre de masse est indépendante de la matrice de transformation $\text{diag}(\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_0)$, donc les singularités sont situées dans des sphères centrées sur le centre de masse dans le repère inertiel. Ces volumes dans lesquels les singularités peuvent se trouver sont nommés "Path Dependent Workspace (PDW)" (espaces dépendants des trajectoires) alors que le reste de l'espace atteignable est appelé "Path Independent Workspace (PIW)" où il n'y a aucune singularité dynamique. Quelle que soit la trajectoire empruntée, l'espace est atteignable par l'organe terminal. Un critère pour concevoir le manipulateur peut être de maximiser le PIW. Pour l'exemple décrit précédemment, les PDW et PIW sont calculés soient analytiquement [Papadopoulos 93b] ou numériquement en Fig. 9.4.

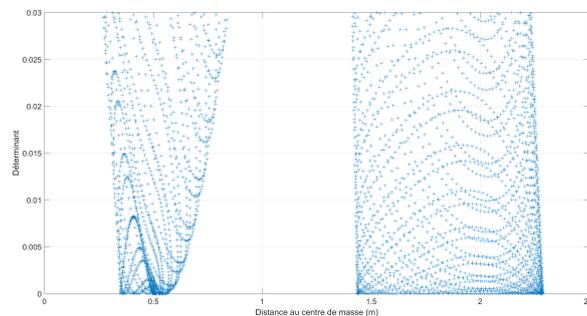


Figure 9.4 – En bleu PDW (zones avec singularités) et PIW (zones sans singularités lorsque le déterminant est toujours au-dessus de 0)

Des techniques de pilotage sont basées sur l'étude de ces espaces [Papadopoulos 93a].

9.3.3 Analyse de l'espace de travail

Afin de mieux comprendre les zones atteignables par le manipulateur et les singularités, une étude sur l'espace de travail atteignable par le bras peut être réalisée. Utilisons les outils développés par Z. Vafa et S. Dubowsky dans [Vafa 90] appelé le **manipulateur virtuel (VM)**. Un manipulateur virtuel équivalent du système est créé, et dont les propriétés sont plus simples à analyser. Ici, considérons toujours le même cas d'un manipulateur constitué de deux corps. La création de manipulateur virtuel peut être réalisé pour représenter le mouvement de n'importe quel point du système, mais dans notre étude, nous nous concentrons sur la position de l'organe terminal. Ainsi, comme dans [Vafa 90], le manipulateur virtuel équivalent conçu aura la même pose que l'organe terminal du système étudié. Ce VM a le même nombre de corps que le système (en incluant le satellite) et est fixé au centre de masse du système. Alors, les outils habituels pour analyser l'espace de travail pour les manipulateurs à base fixe sont utilisables. L'obtention du manipulateur virtuel a été effectuée en suivant le papier [Vafa 90]. Toujours en suivant cet article, différents espaces de travail peuvent être analysés, mais nous nous concentrons sur les espaces primaires (les positions atteignables par l'organe terminal). Ils contiennent trois types d'espace [Vafa 90] :

- Si la position du satellite est maintenue fixe avec des propulseurs par exemple. Ce cas n'est pas considéré ici.
- L'espace contraint (ou atteignable) : si l'attitude du satellite et le manipulateur peuvent être contrôlés indépendamment mais que la translation est libre. Une analyse comme sur les manipulateurs à base fixe peut être réalisée.
- L'espace libre : si le satellite n'est pas contrôlé. C'est la zone que le manipulateur peut atteindre quelle que soit l'attitude du satellite. C'est donc l'intersection de tous les espaces contraints pour toutes les orientations possibles du premier corps du VM [Vafa 90].

Néanmoins, comme mentionné par [Dubowski 93], tous les points des espaces contraints peuvent être atteints par un satellite non contrôlé + manipulateur avec une loi de commande appropriée.

Analysons les deux derniers espaces décrits sur l'exemple précédent. L'espace contraint est donné en Fig. 9.5. Une limite basse de l'accessibilité est parfois présente en fonction des conceptions des manipulateurs. La zone maximale atteignable est donc cohérente avec les résultats de [Papadopoulos 93b] comme montré en Fig. 9.4.

La fig. 9.6 montre les limites de l'espace atteignable lorsque l'attitude du satellite est fixe. L'intersection de tous ces espaces, lorsque l'attitude du satellite varie, est donnée en Fig. 9.6. L'espace libre correspond aux zones en noir et rouge. Ses limites sont identiques à celles du PIW calculées dans [Papadopoulos 93b] et représentées en Fig. 9.4. Donc, dans notre exemple, le PIW est égal à l'espace libre. En général, comme dit par [Papadopoulos 93b], le PIW est un sous-ensemble de l'espace libre.

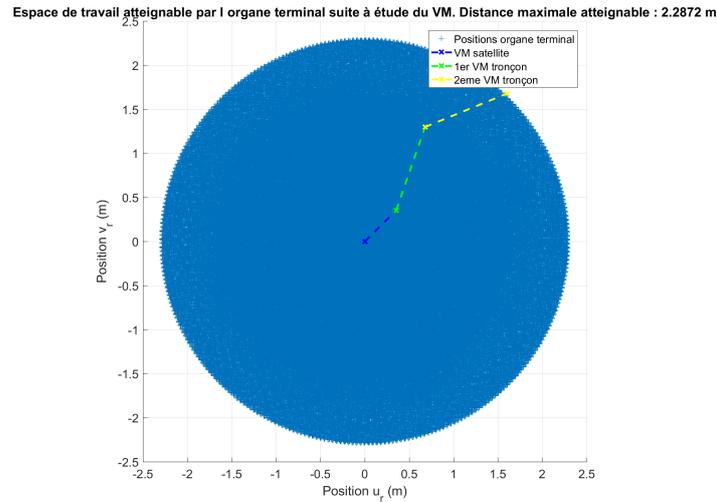


Figure 9.5 – Espace contraint

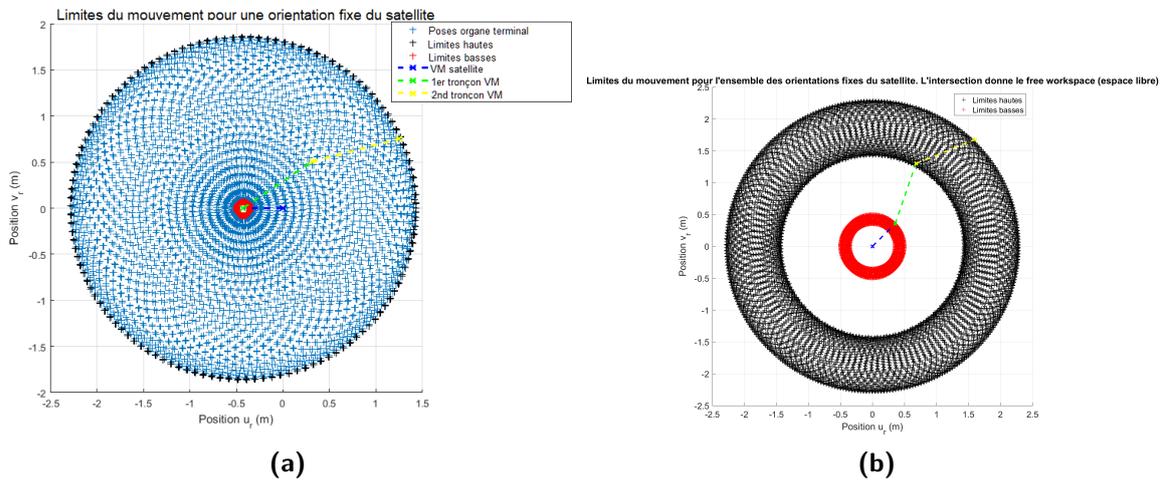


Figure 9.6 – (a) Espace atteignable pour un satellite avec une attitude fixe. (b) Espace libre.

9.4 Etude de lois de pilotage

9.4.1 Analyse de la bibliographie existante

Cette partie résume les différentes contraintes que la loi de commande doit gérer et des solutions présentées par les chercheurs. Les actionneurs se trouvent dans les articulations, la boucle de commande doit transformer les consignes sur la pose de l'organe terminal en commandes sur les variables de configuration, sous contraintes quand il y a des redondances. On rappelle la boucle de commande simplifiée en Fig. 9.7.

La dynamique actionneur est supposée parfaite. Une stratégie de contrôle doit être choisie avant de concevoir les contrôleurs. Quatre grandes stratégies ressortent (mais peuvent être combinées en fonction de la mission) [Dubowski 93] :

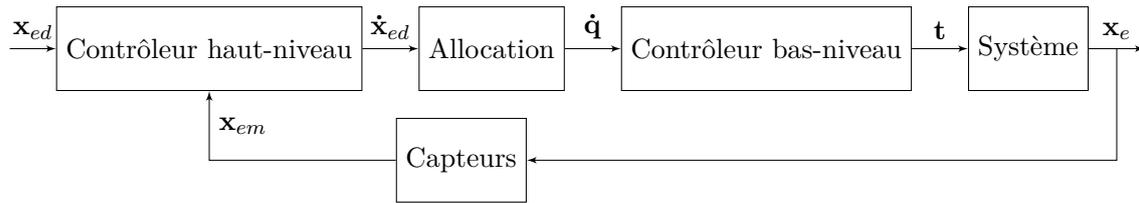


Figure 9.7 – Boucle de commande typique

1. L'attitude et la position du satellite sont fixes donc les techniques d'allocation habituelles sont utilisables. La consommation en carburant peut devenir élevée, mais des techniques décrites par [Torres 92] permettent de générer des mouvements du manipulateur minimisant les perturbations sur la base.
2. Seule l'attitude du satellite est contrôlée [Walker 91].
3. L'attitude et la position du satellite ne sont pas contrôlées.
4. L'attitude et la position sont contrôlées. L'espace atteignable est alors très large [Dubowski 93].

Papadopoulos et Dubowsky [Papadopoulos 91] ont montré que les algorithmes de contrôle utilisés sur les manipulateurs à base fixe sur Terre peuvent être utilisés à condition que les modèles de dynamique corrects soient insérés, les singularités dynamiques évitées et qu'une estimation ou mesure de l'attitude du satellite soit accessible. A cause de la non-intégrabilité de l'équation de conservation du moment cinétique, il n'est donc pas possible de relier directement les positions de l'organe terminal avec un ensemble d'angles \mathbf{q} du manipulateur. Il n'est donc pas possible de piloter en angles le manipulateur sans avoir auparavant simulé la dynamique [Papadopoulos 91].

Considérons le free-floating cas. Les méthodes de pilotage décrites dans la bibliographie sont donc toujours pertinentes et ont été adaptées, par exemple la transposée de la Jacobienne [Ulrich 12]. Mentionnons quelques lois développées spécifiquement pour ce système :

- I. Duleba et J.Z. Sasiadek ont proposé une méthode basée sur l'algorithme de Newton, avec un seuil sur la valeur du déterminant $\mathbf{J}_G \mathbf{J}_G^t$ qui permet de changer de contrôleur à l'approche d'une singularité. Dans l'article [Duleba 03], la non-holonomie du système est prise en compte pour le pilotage.
- [Cocuzza 12] propose de contrôler l'accélération des articulations en dérivant l'équation (9.5) et en ajoutant des contraintes pour limiter la perturbation sur la base. Une méthode moindre-carré est employée lorsque toutes les contraintes ne peuvent pas être vérifiées à la fois, se rapprochant de la loi de pilotage que nous avons développée.
- [Papadopoulos 93a] propose une procédure pour les manipulateurs téléopérés, en calculant des points dans le PDW et PIW par lesquels le manipulateur doit passer. Néanmoins, l'attitude finale du satellite diffère en général de l'attitude désirée, donc des manœuvres complémentaires doivent être réalisées.
- [Vafa 90] propose une méthode basée sur des déplacements cycliques qui ne créent pas de perturbations sur la pose de l'organe terminal. Ces mouvements doivent être de faibles amplitudes et ne permettent pas d'atteindre toutes les attitudes.

- A l'inverse, la minimisation du mouvement du satellite dû au mouvement du manipulateur est proposée à travers la "Enhanced Disturbance Map" [Dubowski 93].
- Nakamura et al. [Nakamura 91] ont proposé "l'approche bidirectionnelle" tenant compte de la non-holonomie du système et permettant de créer des trajectoires à suivre pour le système.

Des méthodes proposant des stratégies pour gérer les vibrations, les flexibilités du manipulateur [Nenchev 99] [Green 06] ainsi que la phase d'accroche de la cible [Moosavian 05] existent dans la littérature. L'étude de ces méthodes est donc intéressante car elles proposent des outils parfois différents.

9.4.2 Loi de pilotage testée

Sur l'exemple étudié du bras avec deux corps, sur le satellite, une implémentation du filtre de Kalman en continu est proposée. Ainsi, cette commande devient équivalente à une commande LQ [Kalman 60]. Seule la position de l'organe terminale est recherchée, néanmoins, avec un manipulateur à deux tronçons sur une plateforme libre dans l'espace, la seule redondance présente est la non-holonomie de l'équation de conservation du moment cinétique, donc peu de contraintes insérées en plus du contrôle peuvent être vérifiées. Les covariances donneront les importances des contraintes les unes par rapport aux autres. Une première loi de pilotage appelée ST1 est proposée. Les variables estimées sont simplement :

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$$

Les équations du modèle de l'EKF sont (9.8). Le coefficient α est choisi pour limiter les accélérations des articulations.

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \alpha \mathbf{v}(t) \quad (9.8)$$

Les équations de mesure sont :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{m}_1 = \mathbf{J}_G(q)\mathbf{v} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{m}_2 = -\mathbf{I}_S^{-1}\mathbf{I}_M\mathbf{v} \end{cases} \quad (9.9)$$

La première équation provient de l'éq. (9.4) et donc correspond au pilotage de l'organe terminal dans le repère inertiel. La seconde équation provient de (9.10) et permet de contrôler l'attitude du satellite.

$$\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{I}_M^\dagger \mathbf{I}_S \dot{\boldsymbol{\theta}} + (\mathbf{I} - \mathbf{I}_M^\dagger \mathbf{I}_M) \boldsymbol{\Phi}_{MI} \quad (9.10)$$

avec $\boldsymbol{\Phi}_{MI}$ un vecteur arbitraire. Le fait que l'espace noyau de \mathbf{I}_M ne soit pas nul est une caractéristique des manipulateurs spatiaux [Nenchev 92].

Les deux équations de (9.9) ne peuvent pas être exactement vérifiées à cause du manque de redondance, même si avec la non-holonomie c'est théoriquement possible. A partir de l'étude des espaces contraints dans la section 9.3.3, on sait que les espaces atteignables varient avec l'attitude du satellite, ainsi changer l'attitude peut permettre de piloter la position de l'organe terminal dans des positions plus favorables. Le poids de cette équation est choisi comme

dépendant de la distance aux singularités ($\det(\mathbf{J}_G \mathbf{J}_G^T)$). Les covariances ont donc été choisies comme ceci : $\mathbf{Q} = \text{diag}(1, 1)$ et $\mathbf{R} = \text{diag}(10^{(-\frac{2}{0.2} \det(\mathbf{J}_G \mathbf{J}_G^T))}, 10^{(-\frac{2}{0.2} \det(\mathbf{J}_G \mathbf{J}_G^T))}, 10^{(\frac{1}{0.2} \det(\mathbf{J}_G \mathbf{J}_G^T) - 2)})$.

$$\mathbf{P}_0 = \text{diag}(0.1, 0.1).$$

Dans une deuxième version de la loi ST2, une réorientation du satellite est imposée si le déterminant de $\mathbf{J}_G \mathbf{J}_G^T$ est plus faible que 10^{-3} afin de s'extraire de la singularité via : $\dot{\boldsymbol{\theta}} + k_s(\boldsymbol{\theta}_d - \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{m}_2$ avec $k_s = 2\text{rad/s}$ un paramètre réglant la vitesse, et $\boldsymbol{\theta}_d = \text{atan2}(\mathbf{x}_{ed}(2), \mathbf{x}_{ed}(1))$ avec \mathbf{x}_{ed} la position finale désirée de l'organe terminal. Finalement, une troisième loi de pilotage ST3 est aussi testée, dans laquelle l'attitude du satellite est aussi contrôlée. Dans ce cas : $\mathbf{v} = (\boldsymbol{\theta}, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$.

9.5 Simulations

Un simulateur du manipulateur et du satellite a été implémenté, grâce au code et à l'article de A. Crain et S. Ulrich [Crain 16], avec les caractéristiques suivantes (voir Fig. 9.8) :

- $r_0 = r_1 = r_2 = l_0 = l_1 = l_2 = 0.5\text{m}$
- Masse du satellite 40kg
- Masse du tronçon 1 : 4kg, tronçon 2 : 3kg
- Inertie du satellite autour de l'axe z_s : 6.667kg.m²
- Inertie du tronçon 1 : 0.333kg.m², et tronçon 2 : 0.250kg.m²

La loi de commande est issue de [Papadopoulos 93b] et consiste en un proportionnel-dérivé $\mathbf{t} = \mathbf{K}_p(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_m) + \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{x}}_m - \dot{\mathbf{x}})$ avec $\mathbf{K}_p = \text{diag}(5, 5)$, $\mathbf{K}_d = \text{diag}(15, 15)$. Une transposée de la jacobienne comme loi de pilotage a aussi été implémentée afin de comparer avec les EKF. Avec cette loi de pilotage, l'inverse de \mathbf{J}_G n'est pas calculée directement, diminuant la quantité de calculs mais créant des erreurs.

Le contrôleur bas-niveau est réglé à : $\mathbf{t} = \mathbf{K}_w(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_m)$. Si l'attitude de la caisse n'est pas contrôlée, alors $\mathbf{K}_w = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, si elle est contrôlée (ST3) alors $\mathbf{K}_w = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$.

Considérons une configuration initiale de $\mathbf{q}_0 = [21 \quad -55 \quad 60]$ degrés comme dans [Papadopoulos 93b]. On obtient une position de l'organe terminal de $\mathbf{x}_{e0} = [2.01 \quad 0.08]$ m dans la PDW région (voir Fig. 9.4). Ainsi, le système risque de rencontrer une singularité dans ses déplacements. La pose initiale du satellite est donnée en Fig. 9.8. La première consigne consiste à demander à l'organe terminal d'atteindre la position $\mathbf{x}_{ed} = [0.4 \quad 1.0]$ située dans le PIW. Les résultats avec la transposée de la jacobienne et la loi ST1 sont données Fig. 9.9 et 9.10. On remarque qu'aucune singularité n'est rencontrée et dans ce cas, la loi ST1 est plus précise en termes d'erreurs de suivi. Fig. 9.11 montre le mouvement du système durant cette manœuvre. Des caractéristiques intéressantes apparaissent lorsque l'on choisit comme consigne $\mathbf{x}_{ed} = [1.5 \quad 1.5]$ m comme proposé par [Papadopoulos 93b]. En effet, une singularité est rencontrée. La même simulation que dans [Papadopoulos 93b] avec la loi de pilotage jacobienne

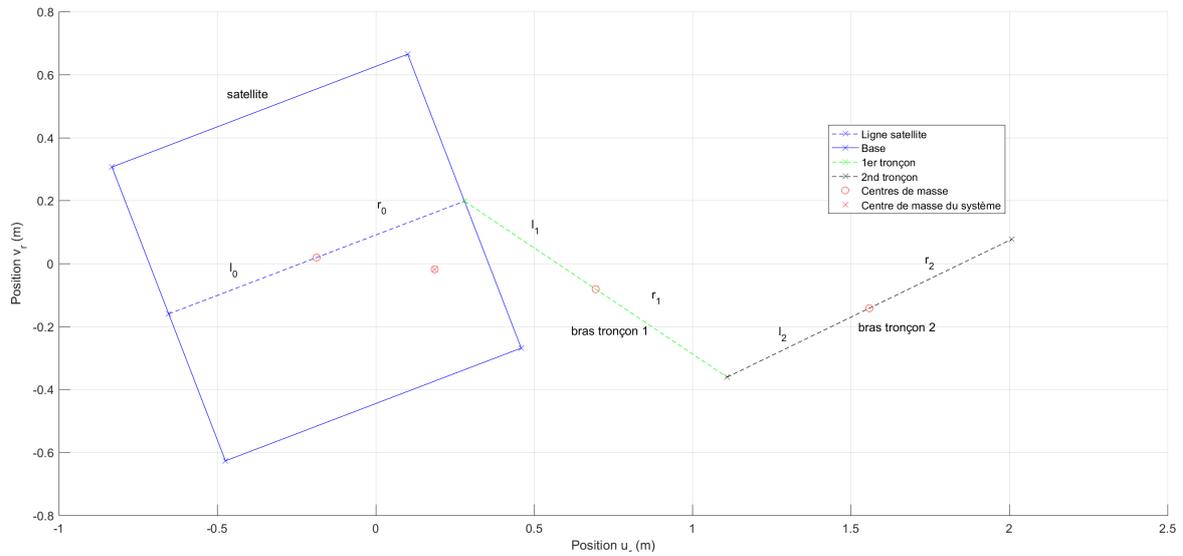


Figure 9.8 – Pose initiale du satellite+manipulateur

transposée montre la déviation du système vers une singularité attractive en Fig. 9.12. La loi de pilotage ne parvient pas à passer la singularité. Pour comprendre l'origine du blocage, dessinons l'espace contraint du manipulateur virtuel pour une attitude satellite fixée à 0.588rad, celle que le satellite atteint lors de la seconde singularité en Fig. 9.12. L'espace est représenté en Fig. 9.13.

Le manipulateur a en effet atteint les limites de l'espace de travail pour cette attitude fixe. On sait que la position finale demandée est atteignable théoriquement, cependant il faut une réorientation assez importante de plusieurs degrés pour agrandir l'espace de travail.

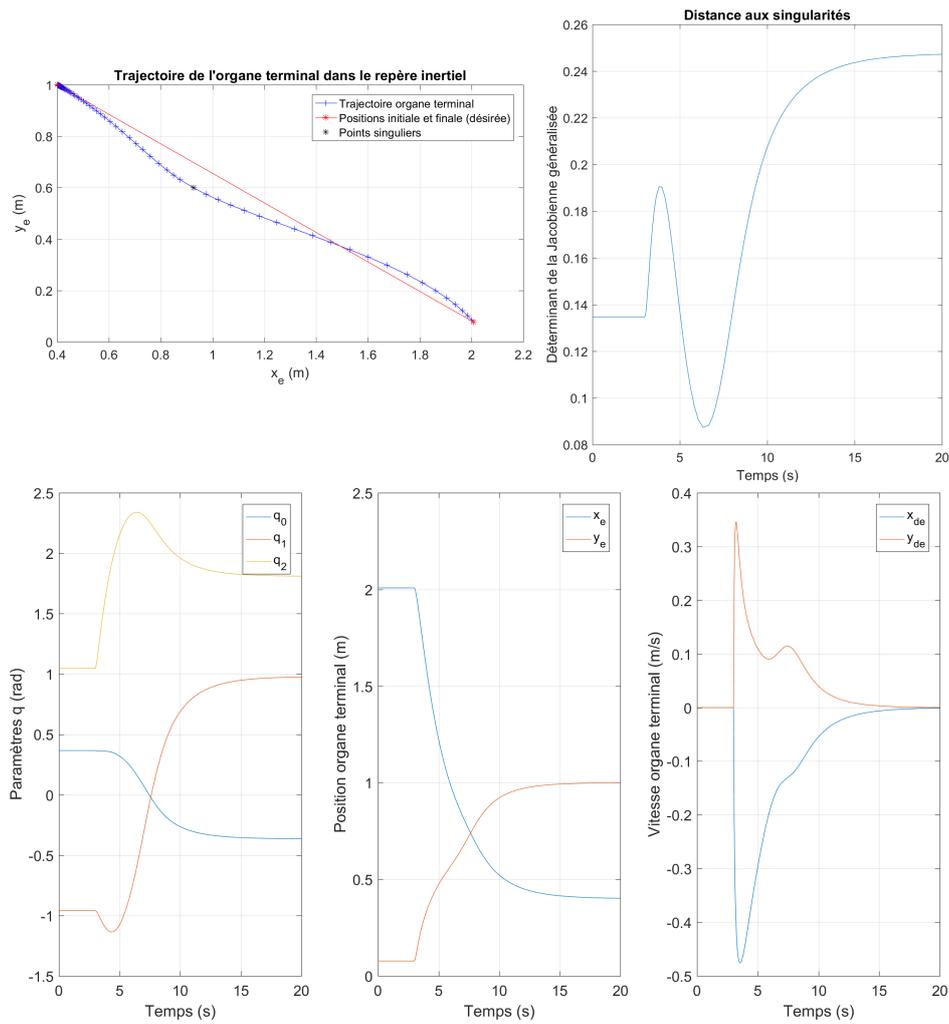


Figure 9.9 – Résultats de la simulation avec la transposée de la Jacobienne

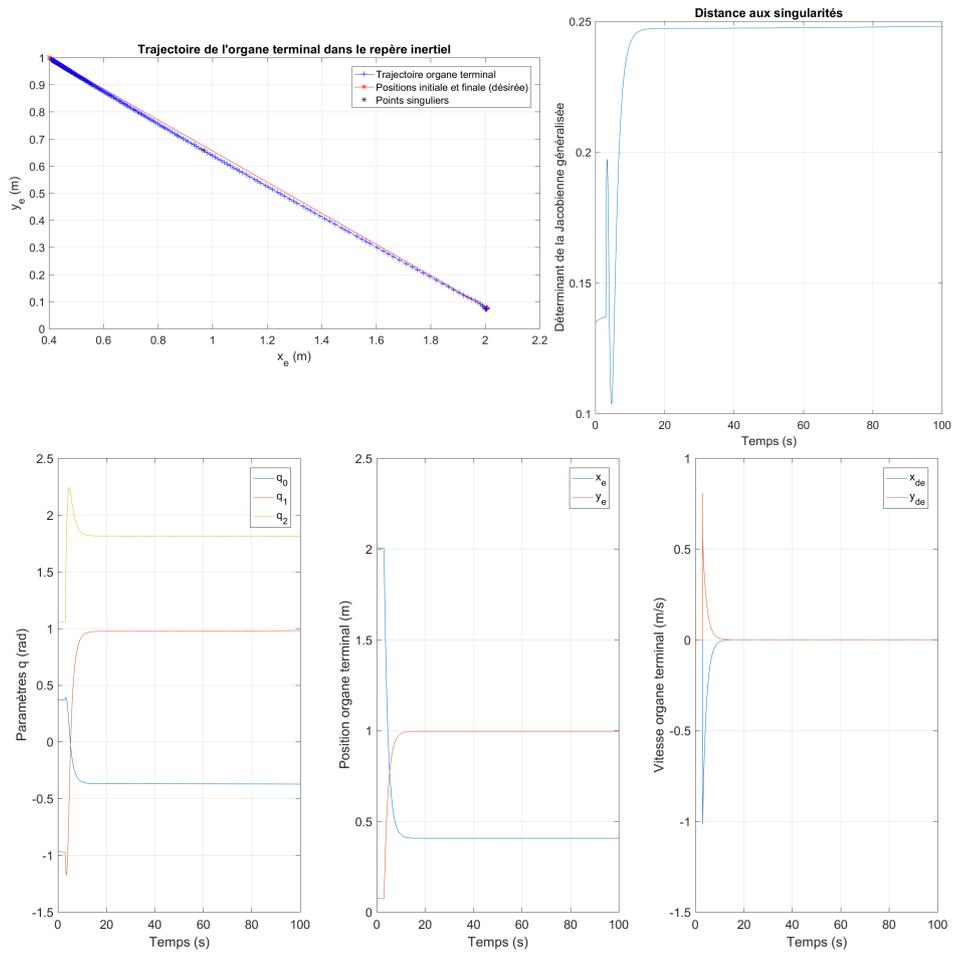


Figure 9.10 – Résultats des simulations pour la loi de pilotage ST1

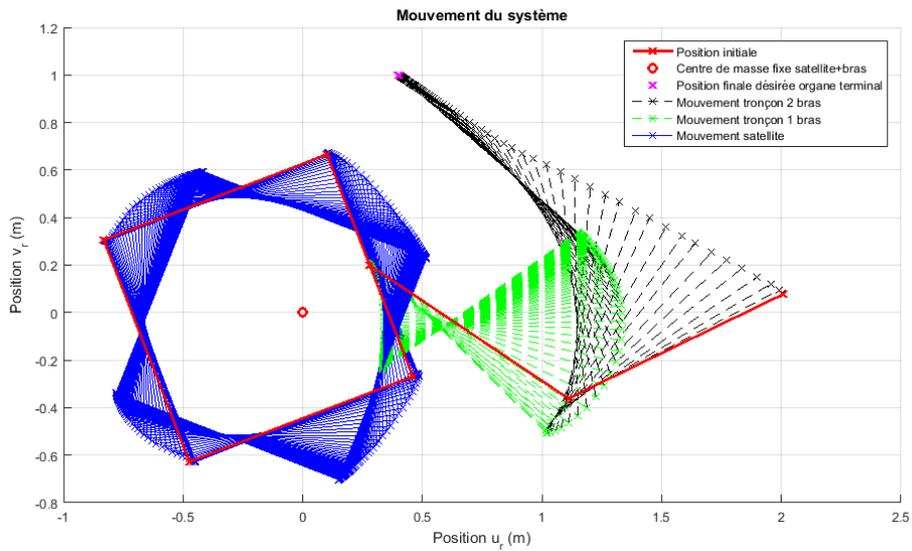


Figure 9.11 – Mouvement du système (pilote avec ST1)

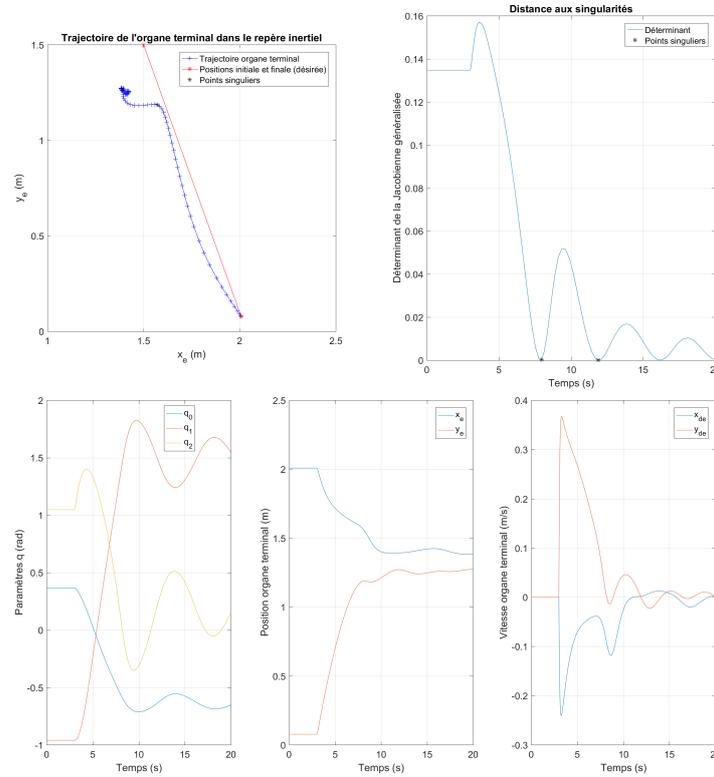


Figure 9.12 – Résultats de la simulation avec singularité pour la loi transposée

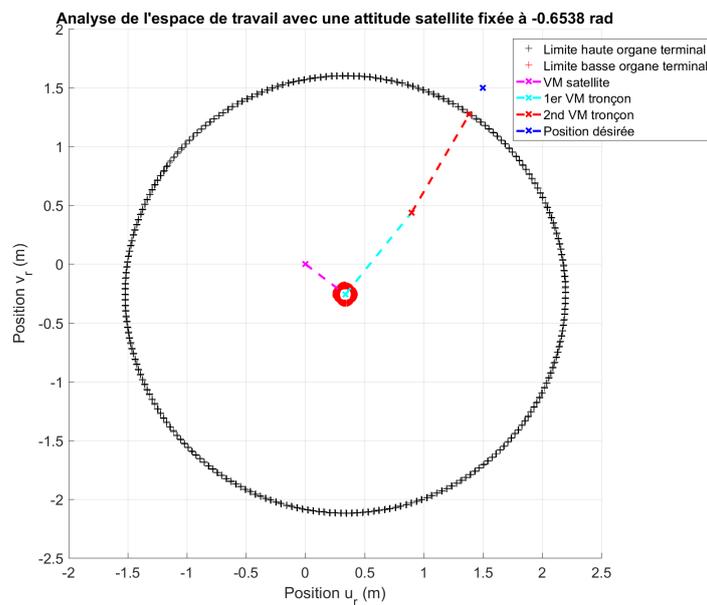


Figure 9.13 – Analyse de l'espace de travail du manipulateur

C'est pourquoi dans la loi de pilotage ST1, il a été proposé de faire varier le réglage des matrices de covariance en fonction de la distance aux singularités. Quand celui-ci baisse, la priorité est donnée au changement d'attitude pour reconfigurer le système. Néanmoins, avoir des réglages robustes dans tous les cas est complexe. En Fig. 9.14a et 9.14b sont données deux résultats pour les lois ST1 et ST2. Dans la simulation 9.14a, les petits mouvements créés ne permettent pas de reconfigurer la base d'un angle assez important.

À l'opposé, la Fig. 9.14b montre les résultats lorsqu'une large réorientation de la base est demandée avec la loi ST2. La manœuvre est longue et d'une large amplitude, créant de fortes perturbations sur la base, et potentiellement avec des mouvements impossibles physiquement à réaliser. Dans la simulation, la position finale de l'organe terminal est atteinte. Cependant, des contraintes sur les angles du manipulateur doivent être insérées. Mettre une priorité sur la contrainte en attitude avant la contrainte de l'organe terminal ne permet pas non plus de converger.

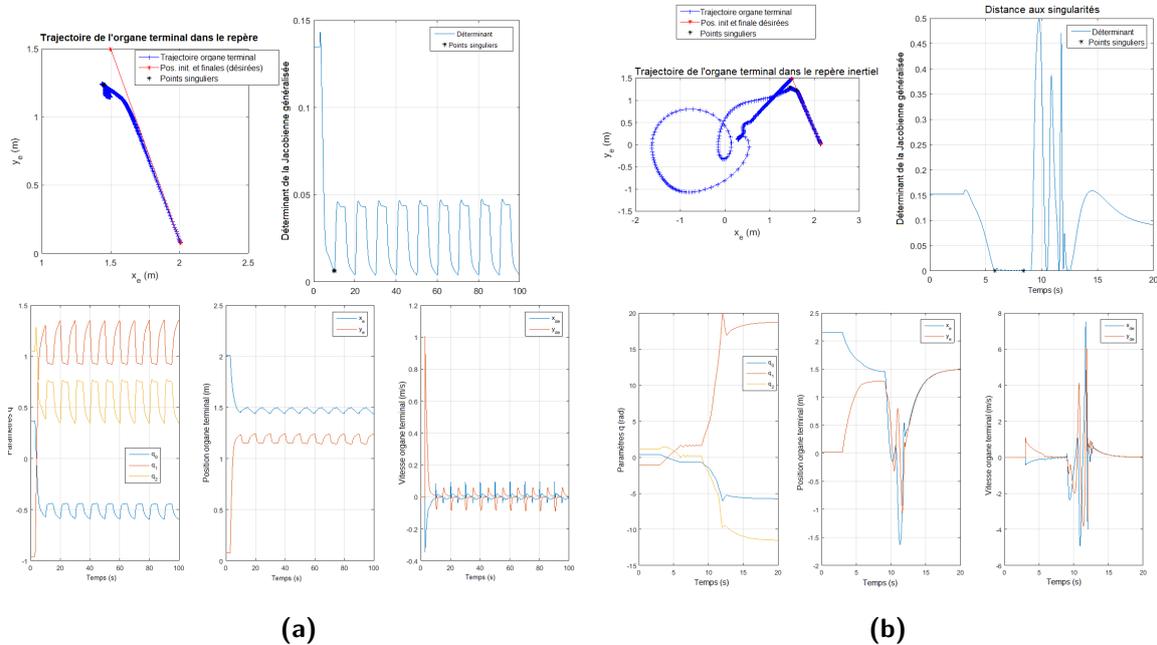


Figure 9.14 – (a) Résultats de la simulation avec singularités ST1. (b) Résultats de la simulation avec singularités ST2.

Ainsi, avec ces premiers résultats, on remarque le fort couplage entre le satellite et le manipulateur, et la difficulté de devoir faire une réorientation importante du satellite sans calculer au préalable la trajectoire, ni contrôler l'attitude du satellite et le manipulateur avec seulement deux tronçons dans le manipulateur. En effet, en passant sur une loi de pilotage qui permet aussi de contrôler l'attitude du satellite (ST3), on arrive à guider le système à la position désirée (Fig. 9.15a et 9.15b). Rajouter ce degré de liberté permet de guider le système vers les solutions désirées.

Différentes possibilités d'amélioration existent :

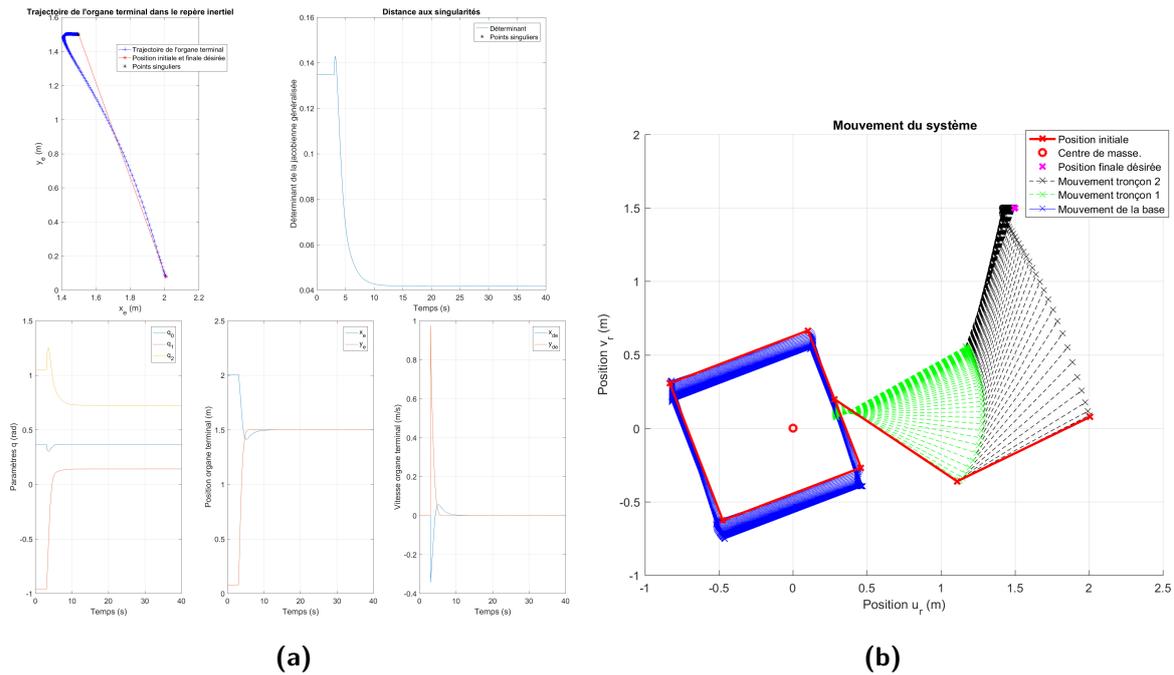


Figure 9.15 – (a) Résultats de la simulation avec singularités ST3. (b) Analyse du mouvement du système avec la ST3.

- Inclure la connaissance des structures de singularité dans la loi de pilotage ;
- Accepter les erreurs de sortie. Durant la reconfiguration de la base, avec ST2, elles peuvent être diminuées avec des choix de paramètres. Une autre possibilité pour rester loin des singularités est d'ajouter artificiellement des erreurs dans le vecteur de commande ;
- Rajouter des contraintes sur les angles du manipulateur pour être physiquement faisables ;
- Améliorer le contrôleur haut-niveau, via la proposition faite dans ce manuscrit ou la commande adaptative comme proposé par [Walker 91] ou [Ulrich 14]. Dans ce dernier article, les gains du proportionnel-dérivé sont modifiés via la procédure "Simple Adaptive Control (SAC)".

Ce chapitre a permis d'ouvrir le mémoire à l'étude des bras manipulateurs spatiaux à base non fixe et à l'application de la loi de pilotage pour ces systèmes. Ses caractéristiques spécifiques obligent à adapter la loi de pilotage, et à l'étendre pour d'autres systèmes spatiaux, afin d'en voir les limites.

Troisième partie

Conclusions

Chapitre 10

Discussion

TOUT au long de l'étude, la majorité des résultats a été analysée et positionnée par rapport à la littérature. Néanmoins, ce chapitre résume les principaux résultats, leurs avantages et inconvénients. Les contributions sont divisées en deux parties. La première concerne le développement de la boucle de commande, structure de loi de pilotage et loi de commande en amont. La seconde partie s'attache à l'application aux grappes d'actionneurs gyroscopiques via leur étude topologique, la proposition d'une technique d'évitement de singularités et l'implémentation dans un nanosatellite.

10.1 Résultats sur le contrôle de systèmes mécaniques redondants

La principale contribution au niveau de la commande des systèmes redondants est la proposition de boucle de commande (sans la partie estimation) faite dans ce mémoire. En particulier, la loi de pilotage basée sur l'EKF est calculable en temps réel dans un satellite, elle peut être utilisée pour différents systèmes sur-actionnés : il suffit de rajouter des équations représentant des contraintes dans l'algorithme pour les prendre en compte. Leur importance peut être variée en fonction des covariances insérées. Ainsi, cette structure est générique à différents systèmes. La nouvelle formulation cinématique s'applique pour les grappes d'AGs et les bras manipulateurs à base fixe. Donc par rapport au cahier des charges imposé en section 3.4, les trois premiers points et le 6 sont déjà vérifiés (pour les grappes pyramidales) de par la structure de l'EKF. Le point 7 sur la stabilité de la loi est vérifié par l'étude des conditions de convergence de l'EKF, et la procédure qui permet de choisir des réglages compatibles avec les conditions de convergence. Les autres points du cahier des charges sont spécifiques aux équations insérées et sont discutés dans la section suivante.

L'inconvénient de cette loi de pilotage est principalement la difficulté de la régler. Actuellement, le processus est réalisé par un algorithme génétique. Néanmoins, le pilotage avec

une commande de type SRI [Bedrossian 87] possède aussi des arbitraires dont le réglage est effectué à partir de simulations. Vérifier la compatibilité des contraintes entre elles, assurant la convergence vers la solution optimale par rapport à notre problème, est complexe avec notamment seulement des égalités (et non des inégalités) dans l'EKF [Rubrecht 12]. Proposer des étapes intermédiaires dans l'algorithme de l'EKF pour vérifier les inégalités pourraient améliorer la vérification des contraintes [Simon 02]. Des techniques anti-windup peuvent aussi être intégrées [Zaccarian 09]. Dans ce mémoire, il a été proposé de réaliser plusieurs itérations de l'EKF pendant un pas de temps. Les simulations ont montré que les résultats obtenus s'approchaient d'une solution optimale vérifiant les équations physiques. La quantité de calculs augmentée est donc compensée par une amélioration de la précision de la solution. C'est un compromis à réaliser en fonction de l'application.

L'avantage de cette loi de pilotage par rapport aux autres méthodes d'optimisation [Fossen 06] est sa faible quantité de calculs, sa flexibilité et la possibilité d'ajouter différentes équations. La généralité de cette loi est d'ailleurs démontrée sur les bras robotiques.

La synthèse de la loi de commande en amont de la loi de pilotage permet d'être robuste aux pertes locales de performances de la loi de pilotage. Elle suppose cependant connue les mouvements à effectuer afin de caractériser la loi de pilotage. Chaque étape du processus de génération de la boucle de commande peut être améliorée indépendamment des autres.

Le processus proposé pour régler la boucle est intéressant car il permet d'ajuster la structure de loi à la stratégie de pilotage dépendant du système étudié. Il fait suite à une discussion sur les possibilités de commande : avoir un seul contrôleur qui réalise la commande du système et le pilotage, ou diviser entre deux contrôleurs comme proposé ici [Johansen 13]. Ce choix a été réalisé pour être plus flexible en cas de panne d'AGs, et pour pouvoir régler indépendamment et de manière plus physique les paramètres des contrôleurs.

La boucle de commande et le positionnement par rapport à la littérature ont été présentés dans les articles [Evain 16], [Evain 17b] et dans le brevet déposé [Evain 15].

10.2 Résultats sur l'application aux grappes d'actionneurs gyroscopiques

Le premier résultat sur ce thème est la justification du choix de la grappe pyramidale à six actionneurs gyroscopiques pour le contrôle de nanosatellites agiles. Déjà, utiliser des AGs pour les nanosatellites n'est pas commun de par leurs complexités mécanique et informatique qui posent un problème d'encombrement et de masse par rapport à des roues à réaction ou des magnétocoupleurs. Néanmoins, ces technologies sont intéressantes à étudier dans ce cas car elles fournissent un couple plus important pour une consommation électrique équivalente (voir le tableau 2.1). Peu de systèmes d'AGs ont été miniaturisés et proposer de nouveaux points de comparaison permettra d'estimer sur quelle gamme de nanosatellites les AGs sont les plus pertinents, même si nous penchons pour les nanosatellites autour de 27U. Cette étude mène donc à un nouveau système de contrôle d'attitude pour nanosatellites, composé d'une

géométrie de grappe et d'une stratégie de commande adaptée.

La configuration à six actionneurs est motivée par la possibilité de continuer la mission même en cas de pannes d'AGs. Or, dans les nanosatellites, les équipements sont peu robustes et donc sujets aux pannes. De plus, des études ont montré l'optimalité de la configuration en termes de moment cinétique facilement atteignable par une simple loi de pilotage par rapport à sa masse [Kurokawa 97]. L'encombrement est certes plus important par rapport à une grappe de quatre AGs, mais nous travaillons actuellement sur une miniaturisation pour limiter cet inconvénient.

D'un point de vue topologique, les études menées dans ce doctorat ont permis de fournir des outils d'analyse de grappe pour déterminer des angles de précession correspondant à des caractéristiques précises, ou pour la détermination de la traversabilité des singularités.

L'idée sous-jacente sur l'étude des singularités est que, pour la grappe à six AGs, un évitement de singularités suffit et permet d'utiliser tout l'espace en moment cinétique grâce à la redondance apportée par le nombre d'AGs. C'est pourquoi la formulation de la section 6.1.4 utilisant le noyau de la matrice \mathbf{J} a été proposée pour intégration dans la loi de pilotage. Néanmoins, en cas de pannes, la probabilité de rencontrer des singularités augmente. La formulation permet de passer les singularités traversables par l'utilisation du noyau, mais ne garantit pas le passage des singularités internes intraversables. Une nouvelle stratégie spécialement dédiée à ce cas dans la loi de pilotage est donc développée.

Cette nouvelle stratégie d'évitement consiste à décrire par un nombre limité de paramètres les singularités internes intraversables afin de pouvoir insérer cette connaissance dans le pilotage. En temps réel, la loi vérifie alors si la grappe risque de rencontrer une de ces singularités, et si c'est le cas, alors un évitement adapté à la singularité rencontrée est proposé. L'intérêt de cette stratégie est qu'elle ne traite que les singularités intraversables et donc ne crée pas d'erreurs quand la singularité est traversable, comme cela peut être le cas dans diverses lois [Bedrossian 87]. Le maillage des singularités intraversables peut mener à une quantité de données importante mais guider la grappe sans connaissance de la topologie l'oblige à créer des erreurs pour être robuste aux pires cas de singularités. S'éloigner des singularités intraversables est une idée partagée par l'article [Kojima 14]. La différence est que dans notre stratégie, l'évitement se fait sans erreurs quand la singularité peut encore être évitée de cette manière, alors que dans l'article, un couple non demandé est créé pour rapprocher la grappe des singularités traversables. La technique [Kurokawa 94] permet d'assurer qu'aucune singularité intraversable ne sera rencontrée, mais limite les capacités en moment cinétique. Avec la stratégie d'évitement proposée, a priori les moments cinétiques sont tous accessibles dans l'enveloppe de moment cinétique. L'implémentation de la méthode a été réalisée avec une projection dans le noyau de $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$, mais en fonction de la distance à la singularité, si cette singularité n'est plus évitable avec le noyau (et cette connaissance peut être insérée dans la loi de pilotage), alors créer des couples non demandés pour l'éviter devient nécessaire. La principale idée est donc d'utiliser la connaissance de la topologie de la grappe de manière condensée et efficace pour aider le pilotage. La stratégie est plus efficace si les couples demandés dans les prochaines consignes sont dans une direction constante, ou connus. Ainsi, cette stratégie et la formulation cinématique permettent de vérifier les points 4, 5 et 8 du cahier des charges.

Éviter les singularités intraversables est nécessaire à partir d'une panne d'AG.

Les simulations réalisées montrent que la loi est fonctionnelle, reconfigurable en cas de panne et permet d'éviter les singularités en suivant les surfaces topologiques avec la nouvelle stratégie. Elle peut en particulier sortir de la singularité externe.

Ces résultats ont été présentés dans l'article [Evain 17a] pour les simulations et la stratégie d'évitement des singularités intraversables, et dans [Evain 17d] et [Evain 17c] pour l'expérience en microgravité.

Conclusion

CETTE étude s'est intéressée à l'analyse et au pilotage de grappes d'actionneurs gyroscopiques pour des applications temps réel, avec gestion de cas de pannes d'actionneurs, et conception d'une boucle de commande. Des outils d'analyse ainsi que des procédures de réglages non seulement pour les grappes d'actionneurs gyroscopiques, mais aussi pour les bras robotiques à base fixe et non-fixe ont été développés. Ce travail a mené à la préparation d'une expérience en microgravité pour tester le système de contrôle d'attitude proposé dans ce doctorat.

En résumé, la démarche a d'abord consisté à rechercher la configuration de grappe d'actionneurs gyroscopiques la plus adaptée aux nanosatellites. Avec les critères de résistance aux pannes, simplicité de pilotage et de masse, la grappe pyramidale à six AGs a été privilégiée. L'analyse des caractéristiques de la grappe et de ses cas de panne a mené à l'analyse des besoins pour la loi de pilotage : passage de singularités traversables et intraversables, gestion des saturations et de retour à la position initiale et reconfiguration facile en cas de panne. Suite à l'étude de la topologie des grappes, une stratégie de prévision et d'évitement des singularités internes intraversables a été développée et testée pour le cas de deux pannes d'actionneurs.

Une formulation pour l'évitement des singularités en utilisant le noyau de la matrice \mathbf{J} a été proposée pour intégration dans la loi de pilotage. Elle présente l'avantage de ne pas avoir de perte de rang. Suite à l'analyse topologique de la grappe et du cahier des charges décrit au début du mémoire, une structure de loi de pilotage basée sur l'algorithme du filtre de Kalman étendu a été choisie. Ainsi, les contraintes peuvent être insérées de manière flexible comme équations déterministes, et leur importance variée avec les matrices de covariance, en fonction de leur priorité. En outre, l'EKF est calculable en temps réel dans les satellites. Des preuves de convergence ont été utilisées lors du réglage de l'EKF. Par la suite, une loi de commande en amont robuste, basée sur la synthèse H_∞ a été développée. Elle permet de tenir compte des caractéristiques de la loi de pilotage, en particulier de certifier la stabilité de la boucle fermée même en cas de pertes de performance autour d'une singularité.

L'étude a ensuite consisté à appliquer ces méthodes, d'abord sur un bras robotique ma-

nipulateur fixe pour montrer la généricité, puis sur la grappe d'AGs choisie. Des simulations sur un simulateur très représentatif ont été effectuées pour prouver la faisabilité de la loi, même en cas de panne. Les buts étaient aussi de vérifier son comportement et comparer avec d'autres lois de pilotage ou stratégies d'évitement de singularités. Ainsi, une procédure pour créer une boucle de commande a été proposée.

Enfin, l'étude s'est portée vers des tests en environnement représentatif (microgravité) du système de contrôle d'attitude proposé. Une solution technologique composée d'une grappe pyramidale de six AGs et de la loi de pilotage proposée ici pour les nanosatellites sera testée en vols paraboliques sur des manœuvres représentatives. Finalement, le mémoire s'est ouvert aux bras manipulateurs spatiaux. Les singularités liées à ces systèmes sont différentes, et cette étude a permis de montrer que l'adaptation de la loi de pilotage était possible mais, pour être efficace, doit suivre les caractéristiques du système contrôlé.

Les travaux futurs sur cette loi de pilotage seraient l'amélioration de l'intégration des contraintes dans l'EKF, et la simplification du mode de réglage des covariances. En particulier, le but de la nouvelle stratégie d'évitement de singularités est de pouvoir, à terme, prouver théoriquement que toutes les singularités sont passées ou évitées par l'allocation. Et ainsi, on devrait pouvoir régler la loi de pilotage de manière analytique. Il restera cependant les conditions de stabilité à vérifier. De plus, une analyse plus précise de la quantité de données stockées à bord du satellite pour la stratégie d'évitement est à réaliser et comparer avec les articles présentant des méthodes comparables. Des comparaisons plus poussées de la loi de pilotage avec d'autres lois de la littérature pourront être effectuées.

Affiner l'analyse des bras robotiques spatiaux via les singularités dynamiques est intéressant car la problématique de la récupération de débris spatiaux ou de service en orbite est porteuse. Or, actuellement, peu de solutions existent pour opérer de manière autonome les bras robotiques évitant les singularités, et une loi le proposant apporterait beaucoup au domaine.

Enfin, l'expérience en microgravité devra être analysée, les résultats comparés avec d'autres technologies de contrôle d'attitude de nanosatellite, et la loi de pilotage évaluée. Le but à long terme est d'améliorer le TRL de cette technologie afin de pouvoir l'intégrer dans des futurs nanosatellites dans l'espace.

Annexes

Annexe **A**

Calcul des Trajectoires Cycliques Stables

On rappelle que l'on cherche à résoudre (5.12) avec (5.11) :

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})\mathbb{O}_{\mathbb{L}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}) \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

On pose ici $\phi = \beta$ l'angle à la base de la pyramide, et pour chaque σ_i , $c_i = \cos(\sigma_i)$ et $s_i = \sin(\sigma_i)$. De même, $\cos(\phi) = c_\phi$ et $\sin(\phi) = s_\phi$. Pour le premier vecteur de $\mathbb{O}_{\mathbb{L}}$, on obtient 3 équations :

$$\begin{cases} c_\phi s_4 = -c_\phi s_1 + c_\phi s_2 + 2\sqrt{3}c_2 + c_\phi s_3 - \sqrt{3}c_3 \\ c_4 = -c_1 - \sqrt{3}c_\phi s_2 + c_2 + \sqrt{3}c_\phi s_3 + c_3 \\ s_4 = s_1 - 2s_2 + 2s_3 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

On choisit de résoudre le problème avec les sinus, et d'exprimer σ_4 , σ_5 et σ_6 en fonction de σ_1 , σ_2 et σ_3 , ce qui est simple au vu de (A.2). Ensuite, on égalise deux équations en sinus sur les 3 dans (A.2) afin d'avoir une équation ne dépendant que de σ_1 , σ_2 et σ_3 . On obtient l'équation suivante (en faisant A.2c-A.2a/ c_ϕ) :

$$2s_1 - 3s_2 + s_3 - \frac{\sqrt{3}}{c_\phi}c_2 + \frac{\sqrt{3}}{c_\phi}c_3 = 0 \quad (\text{A.3})$$

On effectue la même procédure pour le deuxième vecteur de (5.11) :

$$\begin{cases} \frac{c_\phi}{2}s_5 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_5 = -2c_\phi s_1 + \frac{3}{2}c_\phi s_2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}c_2 + c_\phi s_3 - \sqrt{3}c_3 \\ \frac{\sqrt{3}c_\phi}{2}s_5 - \frac{1}{2}c_5 = 2c_1 + \frac{3\sqrt{3}c_\phi}{2}s_2 - \frac{3}{2}c_2 - \sqrt{3}c_\phi s_3 - c_3 \\ s_5 = 2s_1 - 3s_2 + 2s_3 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

En modifiant la première équation en (A.4a+ $\sqrt{3}$ A.4b), on obtient :

$$\begin{cases} s_5 = -s_1 + \frac{\sqrt{3}}{c_\phi}c_1 + 3s_2 - s_3 - \frac{\sqrt{3}}{c_\phi}c_3 \\ \frac{\sqrt{3}c_\phi}{2}s_5 - \frac{1}{2}c_5 = 2c_1 + \frac{3\sqrt{3}c_\phi}{2}s_2 - \frac{3}{2}c_2 - \sqrt{3}c_\phi s_3 - c_3 \\ s_5 = 2s_1 - 3s_2 + 2s_3 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Ensuite, on réalise la même opération que précédemment et on obtient :

$$3s_1 - \frac{\sqrt{3}}{c_\phi}c_1 - 6s_2 + 3s_3 + \frac{\sqrt{3}}{c_\phi}c_3 = 0 \quad (\text{A.6})$$

Finalement, on réalise une dernière fois la procédure avec le dernier vecteur de (5.11).

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}c_\phi s_6 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_6 = -2c_\phi s_1 + c_\phi s_2 + \sqrt{3}c_2 + \frac{c_\phi}{2}s_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_3 \\ \frac{\sqrt{3}c_\phi}{2}s_6 + \frac{1}{2}c_6 = 2c_1 + \sqrt{3}c_\phi s_2 - c_2 - \frac{\sqrt{3}c_\phi}{2}s_3 - \frac{1}{2}c_3 \\ s_6 = 2s_1 - 2s_2 + s_3 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Avec l'opération (A.7a- $\sqrt{3}$ A.7c) pour la première équation, on a :

$$\begin{cases} s_6 = s_1 + \frac{\sqrt{3}}{c_\phi}c_1 + s_2 - \sqrt{3}c_2 - s_3 \\ \frac{\sqrt{3}c_\phi}{2}s_6 + \frac{1}{2}c_6 = 2c_1 + \sqrt{3}c_\phi s_2 - c_2 - \frac{\sqrt{3}c_\phi}{2}s_3 - \frac{1}{2}c_3 \\ s_6 = 2s_1 - 2s_2 + s_3 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Puis on obtient la dernière équation :

$$s_1 - \frac{\sqrt{3}}{c_\phi}c_1 - 3s_2 + \frac{\sqrt{3}}{c_\phi}c_2 + 2s_3 = 0 \quad (\text{A.9})$$

En combinant les équations précédentes, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} s_1 - \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_1 - 3s_2 + \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_2 + 2s_3 = 0 \\ 2s_1 - 3s_2 + s_3 - \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_2 + \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_3 = 0 \\ 3s_1 - \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_1 - 6s_2 + 3s_3 + \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Or, on remarque que (A.10a + A.10 = A.10c) donc le système (A.10) est équivalent à :

$$\begin{cases} s_1 - \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_1 - 3s_2 + \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_2 + 2s_3 = 0 \\ 2s_1 - 3s_2 + s_3 - \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_2 + \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

A partir de ces deux équations, on va chercher les possibilités de solutions en σ_1 , σ_2 et σ_3 . Tout d'abord, supposons σ_2 fixé, et réécrivons (A.11) :

$$\begin{cases} s_1 - \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_1 + \alpha + 2s_3 = 0 \\ 2s_1 + \beta + s_3 + \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

avec $\alpha = -3s_2 + \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_2$ et $\beta = -3s_2 - \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_2$. Puis :

$$\begin{cases} s_3 = -\frac{1}{2}(s_1 - \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_1 + \alpha) \\ 2s_1 + \beta + s_3 + \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

On remplace s_3 dans la deuxième équation de (A.13) :

$$\begin{cases} s_3 = -\frac{1}{2}(s_1 - \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_1 + \alpha) \\ \frac{3}{2}s_1 + \frac{\sqrt{3}}{2c_\phi} c_1 + (\beta - \frac{\alpha}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{cases} s_3 = -\frac{1}{2}(s_1 - \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_1 + \alpha) \\ \frac{3}{2}s_1 + \frac{\sqrt{3}}{2c_\phi} c_1 + (\beta - \frac{\alpha}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} \sqrt{1 - s_3^2} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Maintenant, concentrons-nous sur la dernière équation de (A.15), que l'on passe au carré afin d'enlever la racine carrée :

$$\left(\frac{3}{2}s_1 + \frac{\sqrt{3}}{2c_\phi} c_1 + \left(\beta - \frac{\alpha}{2} \right) \right)^2 = \frac{3}{c_\phi^2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \left(s_1 - \frac{\sqrt{3}}{c_\phi} c_1 + \alpha \right) \right)^2 \right) \quad (\text{A.16})$$

Après développements, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{9}{4} + \frac{3}{4c_\phi^2}\right) s_1^2 + \left(\frac{3}{4c_\phi^2} + \frac{9}{4c_\phi^4}\right) c_1^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2c_\phi} - \frac{3\sqrt{3}}{2c_\phi^3}\right) c_1 s_1 + \left(3\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3\alpha}{2c_\phi^2}\right) s_1 \\ + \left(\frac{\sqrt{3}}{c_\phi} \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{3\sqrt{3}\alpha}{2c_\phi^3}\right) c_1 + \left(\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{3\alpha}{c_\phi^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

que l'on réécrit sous la forme :

$$as_1^2 + bc_1^2 + dc_1s_1 + es_1 + fc_1 + g = 0 \quad (\text{A.18})$$

On utilise ensuite la relation $s_1^2 + c_1^2 = 1$:

$$(a - b)s_1^2 + dc_1s_1 + es_1 + fc_1 + (g + b) = hs_1^2 + dc_1s_1 + es_1 + fc_1 + j = 0 \quad (\text{A.19})$$

On veut ensuite éliminer le dernier terme en c_1 :

$$hs_1^2 + es_1 + j = -(ds_1 - f)c_1 \quad (\text{A.20})$$

que l'on met à nouveau au carré pour retrouver s_1 :

$$(hs_1^2 + es_1 + j)^2 = (ds_1 - f)^2(1 - s_1^2) \quad (\text{A.21})$$

En développant, on trouve un polynôme de degré 4 en s_1 :

$$(h^2 + d^2)s_1^4 + (2he + 2df)s_1^3 + (e^2 + 2hj + f^2 - d^2)s_1^2 + (2ej - 2df)s_1 + (j^2 - f^2) = 0 \quad (\text{A.22})$$

que l'on réécrit sous la forme :

$$a_4s_1^4 + b_4s_1^3 + d_4s_1^2 + e_4s_1 + f_4 = 0 \quad (\text{A.23})$$

Les solutions d'un polynôme du type :

$$X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0 \quad (\text{A.24})$$

sont les valeurs propres de la matrice compagnon :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Les solutions donnent des expressions très complexes non détaillées ici, mais analytiques. Une fois les 4 solutions trouvées, il faut maintenant éliminer les solutions non physiques, non compatibles avec les autres équations, puis retrouver les autres angles correspondants.

Voici le processus de résolution suivi :

- On commence par éliminer les solutions non purement réelles. Il y a toujours deux solutions réelles et telles que leur valeur absolue soit inférieure à 1 (observation suite à des boucles de calcul). Comme les solutions sont $X_i = \sin(\sigma_{1i})$, on a alors 4 possibilités pour σ_1 : $\text{asin}(\sigma_{1i})$ et $\pi - \text{asin}(\sigma_{1i})$. C'est donc le nombre maximal de solutions possibles.
- Pour éliminer les premières solutions, on vérifie pour chaque σ_{1i} la relation (A.19), ce qui va éliminer les solutions où les cosinus n'ont pas la bonne valeur.
- Ensuite, on déduit les valeurs de s_3 associées aux solutions en σ_1 de la relation (A.15a). Ainsi, pour chaque solution en σ_1 , on trouve deux solutions en σ_3 , cependant les deux solutions ne sont pas forcément valides, il faut vérifier la valeur du cosinus des angles trouvés. Ceci est effectué en vérifiant la relation (A.13b) pour chaque angle σ_3 déduit de σ_1 .
- Une fois les σ_1 et σ_3 associés trouvés, on en déduit les valeurs de σ_4 , en utilisant la relation (A.2c) pour trouver s_4 . De même que précédemment, on trouve deux angles σ_4 potentiels à chaque fois, que l'on vérifie grâce à la relation (A.2b) en cosinus. On peut noter que l'on a donc utilisé toutes les équations de (A.2) pour résoudre le système.
- En procédant de même que le point précédent, on déduit les σ_5 grâce à la relation (A.4c). On vérifie les solutions obtenues en faisant une combinaison linéaire des équations (A.4a) et (A.4b) : $(\sqrt{3}\text{A.4a}-\text{A.4b})$ qui donne :

$$c_5 = -\sqrt{3}c_\phi s_1 - c_1 + 3c_2 + \sqrt{3}c_\phi s_3 - c_3 \quad (\text{A.26})$$

- Finalement on fait pareil pour σ_6 . On utilise la relation (A.7c) puis on vérifie en faisant la combinaison linéaire $(\sqrt{3}\text{A.7a}+\text{A.7b})$:

$$c_6 = -\sqrt{3}c_\phi s_1 + c_1 + \sqrt{3}c_\phi s_2 + c_2 - c_3 \quad (\text{A.27})$$

Toutes les équations issues de (A.1) ont bien été utilisées.

Quelles que soient les valeurs de σ_2 choisies, on trouve qu'il n'y a qu'une solution, celle dénotée $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_\alpha, \sigma_\alpha, \sigma_\alpha, \sigma_\alpha, \sigma_\alpha, \sigma_\alpha)$. Il n'y a donc qu'une TCS, qui se trouve être la trajectoire de Moore-Penrose en \mathbf{z} . Néanmoins, on pourrait prolonger le calcul en ne considérant qu'une partie du noyau fixé.

Modélisation d'un bras robotique

Commençons par la modélisation générale d'un bras manipulateur robotique, habituellement plus simple à représenter qu'une grappe d'actionneurs gyroscopiques. Nous considérons uniquement un bras rigide composé de n articulations rotoïdes (de type pivot) et de n éléments (corps), de type sériel, ouvert. On suppose que le robot est sans frottement, et qu'aucun effort extérieur n'agit sur lui. Le but est de contrôler la position de l'organe terminal du robot. Dans cette annexe, nous considérons une base fixe.

B.1 Définitions géométriques

Tout d'abord, modélisons géométriquement le bras sur une base fixe. L'ouvrage de W. Khalil and E. Dombre [Khalil 04] décrit précisément la méthodologie de modélisation d'un manipulateur. Notons C_i chaque corps, avec comme repère associé $R_i = (O_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ [Khalil 04] :

- O_i le centre de l'articulation i ;
- \mathbf{z}_i porté par l'axe de cette articulation ;
- \mathbf{x}_i sur la perpendiculaire commune aux axes \mathbf{z}_i et \mathbf{z}_{i+1} ;
- α_i l'angle de rotation entre \mathbf{z}_{i-1} et \mathbf{z}_i autour de \mathbf{x}_{i-1} ;
- d_i la distance entre \mathbf{z}_{i-1} et \mathbf{z}_i selon \mathbf{x}_{i-1} ;
- σ_i l'angle de rotation entre \mathbf{x}_{i-1} et \mathbf{x}_i autour de \mathbf{z}_i ;
- r_i la distance entre \mathbf{x}_{i-1} et \mathbf{x}_i selon \mathbf{z}_i ;

Le repère de référence, fixe, R_0 est confondu avec le repère R_1 lorsque $\sigma_1 = 0$. Il n'est pas forcément galiléen (il peut être lié au satellite par exemple). Le schéma B.1 montre un bras plan. C'est principalement sur des systèmes plans que l'étude se fera pour leur simplicité.

Dans le cas des articulations rotoïdes, les **variables articulaires** (variables qui permettent de reconstruire la configuration du système au cours du temps) sont les σ_i . Si nous considérons des liaisons prismatiques (de type glissière ou pivot glissant) alors les r_i serait aussi des variables articulaires. Les variables articulaires sont habituellement notées q_i , donc ici $q_i = \sigma_i$.

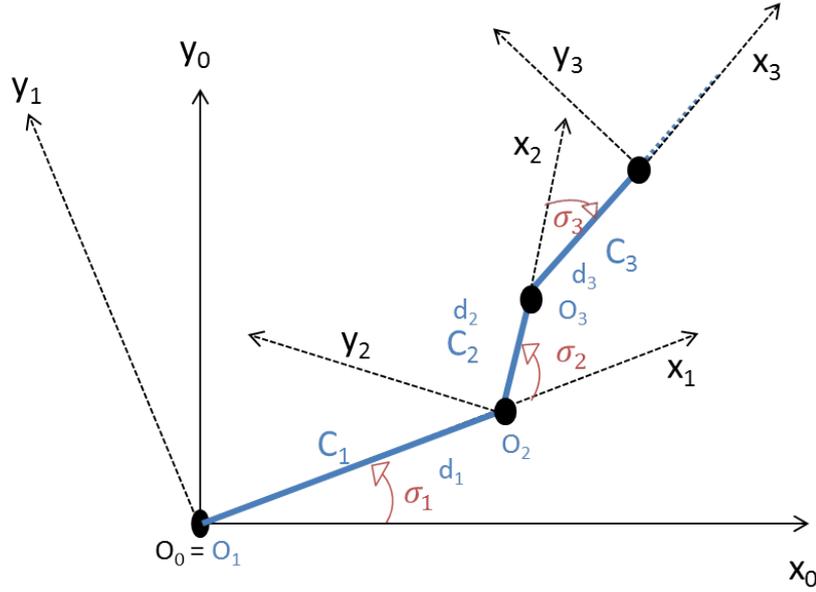


Figure B.1 – Modélisation géométrique dans le plan d'un bras robotique (en bleu)

Pour définir un repère R_i dans le repère R_{i-1} , d'après [Khalil 04], il suffit de faire le produit de matrices de transformation homogène de taille (4×4) qui permet de trouver la matrice de transformation notée ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$. On rappelle qu'une matrice de transformation homogène \mathbf{T} est composée d'une matrice de rotation \mathbf{R} et d'un vecteur déplacement entre les origines des deux repères \mathbf{p} (B.1), le tout exprimé dans un repère adapté.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Ainsi, pour trouver la matrice de transformation ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$ avec ces notations, il suffit de calculer (B.2).

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \mathbf{Rot}(\mathbf{x}_{i-1}, \alpha_i) \mathbf{Trans}(\mathbf{x}_{i-1}, d_i) \mathbf{Rot}(\mathbf{z}_i, \sigma_i) \mathbf{Trans}(\mathbf{z}_i, r_i) \quad (\text{B.2})$$

avec $\mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \beta)$ la matrice de transformation homogène correspondant à une rotation pure autour de l'axe \mathbf{u} et d'angle β , et $\mathbf{Trans}(\mathbf{u}, d)$ la matrice de transformation homogène correspondant à une translation de d selon l'axe \mathbf{u} .

B.1.1 Modèle géométrique

Le **modèle géométrique direct** permet de trouver les configurations du robot en fonction des variables articulaires. Si l'on cherche par exemple à retrouver les positions de l'organe terminal par rapport au repère de référence, ${}^0\mathbf{T}_n$ est le résultat de la multiplication des matrices de transformation (B.3).

$${}^0\mathbf{T}_n(\boldsymbol{\sigma}) = {}^0\mathbf{T}_1(\sigma_1) {}^1\mathbf{T}_2(\sigma_2) \dots {}^{n-1}\mathbf{T}_n(\sigma_n) \quad (\text{B.3})$$

avec $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_n]^T$ le vecteur des variables articulaires.

On écrit habituellement le modèle géométrique (B.4).

$$\mathbf{h} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (\text{B.4})$$

\mathbf{h} contient les **coordonnées opérationnelles** ([Khalil 04]), qui peuvent être les variables que l'on cherche à contrôler ; si l'on souhaite contrôler la position de l'organe terminal, alors \mathbf{h} sera composé des éléments de ${}^0\mathbf{T}_n(\boldsymbol{\sigma})$ correspondant à la partie translation. Ils décrivent la relation entre la position de l'organe terminal et les variables articulaires du système.

Les moteurs sont usuellement situés au niveau des articulations dans les robots sériels ainsi on peut souhaiter avoir plutôt les variables articulaires en fonction des coordonnées opérationnelles, que l'opérateur choisira en fonction de l'application. Cette relation s'appelle le **modèle géométrique inverse**. Lorsqu'il y a plus de variables articulaires que de coordonnées opérationnelles, alors le robot est redondant et il peut y avoir plusieurs solutions, voire une infinité si le robot est dans une position singulière. Une forme explicite de modèle géométrique inverse n'est pas toujours possible. D'après [Khalil 04], trois méthodes prédominent pour trouver analytiquement les modèles inverses, celles de Paul [Paul 81] pour les robots industriels, de Pieper [Pieper 68] pour les robots à 6 degrés de libertés avec trois articulations rotoïdes concourantes et de Raghavan et Roth [Raghavan 90]. Cependant il n'est pas toujours possible de déterminer ce modèle inverse. Des méthodes numériques existent pour trouver des solutions, comme celle de L. Sciavicco et B. Siciliano [Sciavicco 86]. La bibliographie sur les modèles inverses n'est pas étendue ici puisque pour trouver les variables articulaires en fonction des coordonnées opérationnelles, on utilisera le modèle cinématique inverse au lieu du modèle géométrique. En effet, il permet d'étudier les singularités et la dimension de l'espace opérationnel.

B.2 Modèle cinématique

Le **modèle cinématique direct** fournit les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires [Khalil 04] (B.5).

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})\dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{B.5})$$

avec $\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma})$ la matrice jacobienne de taille $m \times n$ du modèle géométrique direct (donc de \mathbf{g}). On rappelle que : $J_{ij} = \frac{\partial \mathbf{g}_i(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_j}$ avec J_{ij} l'élément à la ligne i et à la colonne j de \mathbf{J} . Dans le cas des robots redondants, on a $n \geq m$ et donc la matrice \mathbf{J} n'est pas carrée. Or, dans notre problème d'allocation, nous cherchons à trouver les vitesses articulaires $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ en fonction de vitesses opérationnelles $\dot{\mathbf{h}}$ imposées. Ainsi, pour trouver le **modèle cinématique inverse**, il faut résoudre le système d'équations linéaires. Dans certains cas, des solutions analytiques existent. Cependant, à cause des singularités dans la matrice \mathbf{J} et le fait qu'une solution analytique n'existe pas toujours, des méthodes numériques sont habituellement utilisées.

B.3 Modèle dynamique

Finalement, pour compléter la modélisation mécanique du robot manipulateur, le **modèle dynamique (direct)** est rappelé. Il relie les couples/forces appliqués aux actionneurs avec les accélérations articulaires. D'après [Khalil 04], on peut le représenter par la formule (B.6) d'après les théorèmes généraux de la mécanique du solide.

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \ddot{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{f}_e) \quad (\text{B.6})$$

avec \mathbf{u} les couples appliqués aux actionneurs, \mathbf{f}_e les efforts extérieurs effectués par le robot sur l'environnement extérieur.

On peut montrer que l'équation (B.6) peut se mettre sous la forme (B.7). Les développements mathématiques pour obtenir cette forme ne sont pas donnés ici mais peuvent être trouvés dans le livre de Khalil et Dombre [Khalil 04] dans le cas d'un robot à base fixe.

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma})\ddot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}) + \mathbf{Q}(\boldsymbol{\sigma})} \quad (\text{B.7})$$

avec :

- \mathbf{A} la matrice d'inertie du système, définie symétrique et positive ;
- $\mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}})$ le vecteur des couples/forces de Coriolis et centrifuge ;
- $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\sigma})$ le vecteur des couples/forces dues à la gravité, supposé nul dans nos applications à vocation spatiale.

On ne considère donc pas d'autres couples extérieurs dans cette équation, mais ils peuvent être ajoutés simplement si besoin. Avec ce modèle dynamique, on peut donc simuler un bras robotique, et proposer une commande linéarisante avec le modèle dynamique inverse comme [Khalil 04].

La procédure suivie dans cette thèse pour contrôler un bras manipulateur robotique est la suivante :

- **Loi de commande** pour déterminer par exemple les vitesses opérationnelles désirées $\dot{\mathbf{h}}_d$ ou autres variables nécessaires au contrôle ;
- **Allocation** (inversion du modèle cinématique direct) pour obtenir les vitesses articulaires imposées $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$;
- Loi de commande pour passer des vitesses articulaires imposées aux couples articulaires imposés au robot \mathbf{u} .

Ainsi, on note bien que ce système est une application directe du cas général présenté dans le chapitre 3.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_1)\mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_1) \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Bibliographie

- [Alazard 99] D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gaurvit & G. Ferreres. Robustesse et commande optimale. Cépaduès Editions, Toulouse, 1999. [100](#)
- [Alazard 06] D. Alazard. *Introduction au Filtre de Kalman - Notes de cours*. Technical Report Version 0.2, ISAE, October 2006. [87](#)
- [Allaire 07] G. Allaire & A. Craig. Numerical analysis and optimization : An introduction to mathematical modelling and numerical simulation. Oxford University Press, Oxford, 2007. [123](#)
- [Allgeier 10] S. Allgeier, V. Nagabhushan, F. Leve & N. FitzCoy. *SwampSat - A Technology Demonstrator for Operational Responsive Space*. Proceedings of ASTRO 2010, 15th CASI (Canadian Aeronautics and Space Institute) Conference, 2010. [11](#)
- [Alp 02] A.B. Alp & S. K. Agrawal. *Cable suspended robots : design, planning and control*. IEEE International Conference on Robotics and Automation, vol. 4, pages 4275–4280, 2002. [16](#)
- [Ananthanarayanan 15] H. Ananthanarayanan & R. Ordonez. *Real-time Inverse Kinematics of $(2n+1)$ DOF hyper-redundant manipulator arm via a combined numerical and analytical approach*. Mechanism and Machine Theory, vol. 91, pages 209–226, 2015. [32](#), [35](#)
- [Apkarian 06] P. Apkarian & D. Noll. *Nonsmooth H -infinity Synthesis*. IEEE Transactions on Automatic

- Control, vol. 51, no. 1, pages 71–86, 2006. [100](#), [110](#)
- [Arzelier 05] D. Arzelier. *Représentation et Analyse des Systèmes - Notes de cours*. Technical Report Version 6.2, ISAE, 2005. [90](#)
- [Asghar 06] S. Asghar, P.L. Palmer & M. Roberts. *Exact steering law for pyramid-type four control moment gyro systems*. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Keystone, Colorado, August 2006. [30](#)
- [Asghar 08] S. Asghar. *Exact Steering in Control Moment Gyroscope Systems*. PhD thesis, University of Surrey, 2008. [10](#), [21](#)
- [Babacan 08] E. K. Babacan, L. Ozbek & M. Efe. *Stability of the Extended Kalman Filter When the States are Constrained*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, no. 11, pages 2707–2711, Dec 2008. [88](#)
- [Baillieul 85] J. Baillieul. *Kinematic programming alternatives for redundant manipulators*. Proceedings of the 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 722–728, 1985. [32](#)
- [Bedrossian 87] N.S. Bedrossian. *Steering Law Design for Redundant Single Gimbal Control Moment Gyro Systems*. Master's thesis, MIT Charles Stark Draper Laboratory Inc, Cambridge, Massachusetts, 1987. [31](#), [32](#), [70](#), [78](#), [84](#), [106](#), [122](#), [143](#), [204](#), [205](#)
- [Bedrossian 90] N.S. Bedrossian, J. Paradiso, E.V. Bergmann & D. Rowell. *Redundant Single-Gimbal Control Moment Gyroscope Singularity Analysis*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 13, no. 6, pages 1096–1101, 1990. [24](#), [43](#), [47](#)
- [Blue Canyon Technology 16] Blue Canyon Technology. *Attitude Determination Control System*. <http://bluecanyontech.com/microwheel/>, 2016. [Online; accessed 12-August-2016]. [170](#)
- [Bonnal 13] Christophe Bonnal, Jean-Marc Ruault & Marie-Christine Desjean. *Active debris removal : Recent progress and current trends*. Acta Astronautica, vol. 85, pages 51–60, 2013. [184](#)

- [Boutayeb 97] M. Boutayeb, H. Rafaralahy & M. Darouach. *Convergence Analysis of the Extended Kalman Filter Used as an Observer for Nonlinear Deterministic Discrete-Time Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 42, no. 4, Apr 1997. 85, 95, 131
- [Buffington 98] J.M. Buffington, D.F. Enns & A.R. Teel. *Control Allocation and Zero Dynamics*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 21, no. 3, pages 458–464, June 1998. 99
- [Burton 16] R. Burton, S. Weston & E. Agasid. *State of the art in Guidance Navigation and Control : a Survey of Small Satellite GNC Components*. AIAA/AAS Guidance, Navigation and Control Conference, 2016. 11, 170
- [California Polytechnique Space Institute 15] The CubeSat Program California Polytechnique Space Institute. *CubeSat Design Specification Rev.13*. <http://www.cubesat.org/resources>, 2015. [Online; accessed 19-July-2015]. 10, 170
- [Carlotto 96] M.J. Carlotto. *Nonlinear Mean-Square Estimation with Applications in Remote Sensing*. Proceedings of SPIE, Algorithms for Multispectral and Hyperspectral Imagery, vol. 2, no. 206, 1996. 85
- [Chait 14] S. Chait & D.A. Spencer. *PROX-1 : Automated Trajectory Control for On-Orbit Inspection*. Advances in the Astronautical Sciences Guidance, Navigation and Control, vol. 151, 2014. 11
- [Chrétien 02] J.-P. Chrétien, M. Llibre, A. Théron & P. Apkarian. *Etude du contrôle d'un satellite piloté par gyrodynes*. Technical report, Rapport interne RF 5/06447 DCSD, ONERA, 2002. 36
- [CNES 02] CNES. *Cours de technologie spatiale : Techniques et technologies des véhicules spatiaux, volume 3 : Plateformes*. Cepadues, Toulouse, 2002. 20, 21
- [Cocuzza 12] S. Cocuzza, I. Pretto & S. Debei. *Least-Squares-Based Reaction Control of Space Manipulators*. Journal of Guidance, Navigation and Control, vol. 35, no. 3, pages 976–986, 2012. 192

- [Cornick 79] D.E. Cornick. *Singularity Avoidance Control Laws for Single Gimbal Control Moment Gyros*. AIAA Guidance and Control Conference, pages 20–33, 1979. [32](#), [68](#)
- [Crain 16] A. Crain & S. Ulrich. *Nonlinear Optimal Trajectory Planning for Free-Floating Space Manipulators using a Gauss Pseudospectral Method*. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Long Beach, 2016. [194](#)
- [D. Arzelier 11] S. Gumussoy D. Arzelier G. Deaconu & D. Henrion. *H2 for HIFOO*. International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Bilkent University, Ankara, Turkey, 2011. [100](#)
- [Defendini 98] A. Defendini & K. Lagadec. *Procédé et Dispositif de Pilotage de l'Attitude d'un Satellite*. (EADS Astrium) FR Patent, no. 3786283 (A1), 1998. [9](#), [36](#), [53](#)
- [Defendini 03] A. Defendini & M. Ghezal. *Contrôle d'attitude de satellites en particulier agiles à nombre réduit de gyrodynes*. (EADS Astrium) FR Patent, no. 2861690(B1), 2003. [36](#), [53](#)
- [Deyst 68] J.J. Deyst & C.F. Price. *Conditions for asymptotic stability of the discrete minimum-variance linear estimator*. IEEE trans. on Automatic Control, vol. 13, no. 6, pages 702–705, 1968. [94](#)
- [Doncaster 16] B. Doncaster & J. Shulman. *2016 Nano/Microsatellite Market Assessment*. Technical report, SpaceWorks Entreprises, Inc. (SEI), 2016. [xiv](#), [11](#), [170](#)
- [Dubanchet 15] V. Dubanchet, D. Saussié, D. Alazard, C. Bérard & C. Le Peuedic. *Motion Planning and Control of a Space Robot to Capture a Tumbling Debris*. Advances in Aerospace Guidance, Navigation and Control, pages 699–717, 2015. [184](#)
- [Dubowski 93] S. Dubowski & E. Papadopoulos. *The Kinematics, Dynamics, and Control of Free-Flying and Free-Floating Space Robotic Systems*. IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 9, no. 5, pages 531–542, 1993. [184](#), [185](#), [190](#), [191](#), [192](#), [193](#)

- [Duleba 03] I. Duleba & J.Z. Sasiadek. *Nonholonomic motion planning based on Newton algorithm with energy optimization*. IEEE Trans. on Control Systems Technology, vol. 2, no. 3, 2003. [192](#)
- [Evain 15] H. Evain, M. Rognant, A. Peus & J. Mignot. *Procédé de commande d'un système redondant*. FR Patent (demande de dépôt), no. 1562701, 2015. [5](#), [86](#), [204](#)
- [Evain 16] H. Evain, M. Rognant, D. Alazard & J. Mignot. *Nonlinear Dynamic Inversion for Redundant Systems Using the EKF Formalism*. Proceedings of the 2016 American Control Conference, pages 348–353, 2016. [5](#), [15](#), [86](#), [92](#), [101](#), [105](#), [204](#)
- [Evain 17a] H. Evain, M. Rognant, D. Alazard & J. Mignot. *Design of a new real-time steering law for control moment gyro clusters*. 10th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems, Salzburg, 2017. [6](#), [136](#), [140](#), [168](#), [206](#)
- [Evain 17b] H. Evain, M. Rognant, D. Alazard & J. Mignot. *A New Procedure for Tuning an Allocator and Designing a Robust High-Level Control Law for Over-Actuated Systems*. IFAC World Congress, 2017. [5](#), [100](#), [101](#), [104](#), [204](#)
- [Evain 17c] H. Evain, T. Solatges, A. Brunet, A. Dias Ribeiro, M. Rognant, D. Alazard & J. Mignot. *A nano-control moment gyro cluster in microgravity*. 10th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems, Salzburg, 2017. [206](#)
- [Evain 17d] H. Evain, T. Solatges, A. Brunet, A. Dias Ribeiro, L. Sipile, M. Rognant, D. Alazard & J. Mignot. *Design and Control of a Nano-Control Moment Gyro Cluster for Experiments in a Parabolic Flight Campaign*. IFAC World Congress session GDR MACS, 2017. [5](#), [6](#), [52](#), [168](#), [206](#)
- [Fonseca 93] C. M. Fonseca & P. J. Fleming. *Genetic algorithms for multiobjective optimization : Formulation, discussion and generalization*. Genetic Algorithms : Proceedings of the Fifth Interna-

- tional Conference (S. Forrest, ed.), pages 416–423, Jul 1993. [96](#), [130](#)
- [Ford 00] K.A. Ford & C.D. Hall. *Singular Direction Avoidance Steering for Control Moment Gyros*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 3, no. 4, pages 648–656, 2000. [31](#), [36](#), [68](#)
- [Fossen 06] T.I. Fossen & T.A. Johansen. *A Survey of Control Allocation Methods for Ships and Underwater Vehicles*. In 14th Mediterranean Conference on Control and Automation, pages 1–6, June 2006. [33](#), [34](#), [83](#), [204](#)
- [Geeter 97] J. De Geeter, H. Van Brussel, J. De Schutter & M. Decréton. *A Smoothly Constrained Kalman Filter*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 19, no. 10, pages 489–494, October 1997. [88](#)
- [Gersh 09] J. Gersh & M. Peck. *Violet : A High-Agility Nanosatellite for Demonstrating Small Control-Moment Gyroscope Prototypes and Steering Laws*. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2009. [11](#)
- [Gleyzes 12] A. Gleyzes, L. Perret & P. Kubik. *Pleiades System Architecture and Main Performances*. International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, XXII ISPRS Congress, Melbourne, Australia, vol. XXXIX-B1, pages 348–353, Jul 2012. [xiv](#), [173](#), [174](#), [177](#)
- [Green 06] A. Green & J.Z. Sasiadek. *Heuristic Design of a Fuzzy Controller for a Flexible Robot*. IEEE Trans. on Control Systems Technology, vol. 14, no. 2, pages 293–300, 2006. [193](#)
- [Guay 12] P. Guay & A. Peus. *AOCS Design principles and Technologies*. TTVS Spacecraft Techniques and Technology, vol. Module 12, 2012. [xvii](#), [9](#)
- [Härkegård 05] O. Härkegård & T. Glad. *Resolving actuator redundancy : optimal control vs. control allocation*. Automatica, vol. 41, pages 137–144, 2005. [99](#)
- [Hefner 83] R.D. Hefner & C.H. McKenzie. *A Technique for Maximizing the Torque Capability of Control*

- [Hu 01] *Moment Gyro Systems*. *Astrodynamics*, vol. 54, no. 83-387, pages 905–920, 1983. 32
- [Hu 14] T. Hu & Z. Lin. *Control systems with actuator saturation : Analysis and design*. Birkhäuser, Boston, 2001. 120
- [Hu 14] Q. Hu, B. Li & Y. Zhang. *Nonlinear Proportional-Derivative Control Incorporating Closed-Loop Control Allocation for Spacecraft*. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 27, no. 3, pages 799–812, June 2014. 99
- [Hyperion Technologies 16] Hyperion Technologies. *iADCS400 Attitude Determination And Control System*. <http://bluecanyontech.com/microwheel/>, 2016. [Online ; accessed 15-August-2016]. 170
- [Ishimaru 14] R. Ishimaru, Y. Sakamoto, M. Kobayashi & T. Matsui. *Cubesat Mission for UV-Visible Observations of Meteors from Space : S3 (Shooting Star Sensing Satellite)*. 45th Lunar and Planetary Science Conference, 2014. 10
- [Isidori 89] A. Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer Verlag, London, 2nd edition, 1989. 14
- [Johansen 04] T.A. Johansen. *Optimizing Nonlinear Control Allocation*. *EEE Conference on Decision and Control*, vol. 4, pages 403–410, December 2004. 34, 90, 99
- [Johansen 13] T.A. Johansen & T.I. Fossen. *Control allocation - a survey*. *Automatica*, vol. 49, no. 5, pages 1087–1103, 2013. 15, 33, 99, 204
- [Jones 12] L. L. Jones, R. A. Zeledon & M. A. Peck. *Generalized Framework for Linearly Constrained Control Moment Gyro Steering*. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 35, no. 4, pages 1094–1103, July-August 2012. ix, 26, 32, 37
- [Kalman 60] R. E. Kalman. *Contributions to the Theory of Optimal Control*. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, vol. 5, pages 102–119, 1960. 85, 93, 193
- [Kalman 61] R.E. Kalman & R.S. Bucy. *New Results in Linear Filtering and Prediction Theory*. *Journal of Basic Engineering*, pages 95–108, 1961. 85, 86, 87

- [Khalil 04] W. Khalil & E. Dombre. Modeling, identification and control of robots. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2004. [103](#), [185](#), [217](#), [218](#), [219](#), [220](#)
- [Kojima 13] H. Kojima. *Singularity analysis and steering control laws for adaptive-skew pyramid-type control moment gyros*. Acta Astronautica, vol. 85, pages 120–137, 2013. [36](#)
- [Kojima 14] H. Kojima. *Calculation and fitting of boundaries between elliptic and hyperbolic singularities of pyramid-type control moment gyros*. Acta Astronautica, vol. 104, pages 33–44, 2014. [ix](#), [10](#), [36](#), [69](#), [126](#), [205](#)
- [Kraft 93] R.H. Kraft. *CMG Singularity Avoidance in Attitude Control of a Flexible Spacecraft*. Proceedings of the American Control Conference, pages 56–58, June 1993. [25](#), [32](#)
- [K.Takada 10] K.Takada, H.Kojima & N.Matsuda. *Control moment gyro singularity-avoidance steering control based on singular-surface cost function*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 33, no. 5, pages 1442–1450, 2010. [126](#)
- [Kurokawa 85] H. Kurokawa, N. Yajima & S. Usui. *CMG Singularity Avoidance in Attitude Control of a Flexible Spacecraft*. Proceedings of 10th IFAC Symposium, pages 251–257, 1985. [32](#)
- [Kurokawa 94] H. Kurokawa. *Exact Singularity Avoidance Control of the Pyramid Type CMG System*. AIAA Guidance and Control Conference, pages 170–180, 1994. [4](#), [16](#), [33](#), [69](#), [205](#)
- [Kurokawa 97] H. Kurokawa. *Constrained steering law of pyramid-type control moment gyros and ground tests*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 20, no. 3, pages 445–449, 1997. [ix](#), [x](#), [8](#), [9](#), [10](#), [43](#), [52](#), [53](#), [55](#), [56](#), [126](#), [205](#)
- [Kurokawa 98] H. Kurokawa. *A geometric study of single gimballed control moment gyros-singularity problems and steering law*. Technical Report 75, National Institute of Advanced Industrial Science and Technology (AIST), 1998. [25](#), [26](#), [30](#), [35](#), [59](#), [69](#), [145](#)
- [Kurokawa 07] H. Kurokawa. *Survey of Theory and Steering Laws of Single-Gimbal Control Moment Gyros*.

- [Larminat 13] P. De Larminat. *Commande d'actionneur gyroscopique par formulation directe, pour pilotage d'attitude de satellite agile*. FR Patent, no. 2981050(A1), 2013. [9](#), [36](#), [104](#)
- [Lee 80] D. T. Lee & B. J. Schachter. *Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation*. International Journal of Computer and Information Sciences, vol. 9, no. 3, pages 219–242, 1980. [123](#)
- [Leeghim 09] H. Leeghim, I.-H. Lee, H. Bang & J.-O. Park. *Singularity Avoidance of Control Moment Gyros by Predicted Singularity Robustness : Ground Experiment*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 17, no. 4, pages 884–891, 2009. [34](#)
- [Leve 10] A.F. Leve & N.G. Fitz-Coy. *Hybrid Steering Logic for Single-Gimbal Control Moment Gyroscopes*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 33, no. 4, pages 1202–1212, 2010. [36](#)
- [Lewis 95] F.L. Lewis & V.L. Syrmos. *Optimal control*. Wiley, New York, 1995. [99](#)
- [Llibre 96] M. Llibre & Jean-Pierre Chrétien. *Développement de lois de commande adaptées au contrôle d'attitude des satellites par gyrodynes*. Technical Report Ref. 2/7964.00, CNES/Onera, Février 1996. [25](#)
- [Llibre 08] M. Llibre. *Résolution de systèmes linéaires Moindres carrés récursifs et Filtre de Kalman discret*. Technical Report Ref. DCSD-2008_0069-NOT-001-1.0, Onera, Décembre 2008. [30](#), [31](#)
- [Llibre 09] M. Llibre. *Actionneurs gyroscopiques pour la commande d'attitude des satellites*. Technical Report Ref. DCSD-2009_008-NOT-005-1.0, Onera, Février 2009. [9](#), [24](#), [32](#), [33](#), [43](#), [47](#), [59](#), [60](#), [84](#)
- [Llibre 14] M. Llibre & J.P. Chrétien. *Guidage d'une grappe de gyrodynes par programmation dynamique*. Séminaire CCT SCA "Le contrôle des actionneurs gyroscopiques", 2014. [21](#), [35](#), [68](#)

- [MacKay 03] D. MacKay. Information theory, inference and learning algorithms. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. [72](#)
- [Margulies 78] G. Margulies & J. N. Aubrun. *Geometric theory of single-gimbal control moment gyro system*. J. Astronaut. Sci., vol. 26, no. 2, pages 159–191, 1978. [42](#)
- [Moosavian 05] S.A. Moosavian, R. Rastegari & E. Papadopoulos. *Multiple Impedance Control for Space Free-Flying Robots*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 28, no. 5, pages 939–947, 2005. [193](#)
- [Morabito 03] F. Morabito, A. R. Teel & L. Zaccarian. *High performance anti-windup for robot manipulators*. European Control Conference (ECC), pages 489–494, 2003. [120](#)
- [Nakamura 86] Y. Nakamura & H. Hanafusa. *Inverse kinematic solutions with singularity robustness for robot manipulator control*. Transactions of ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 108, pages 163–171, 1986. [31](#)
- [Nakamura 87] Y. Nakamura, H. Hanafusa & T. Yoshikawa. *Task-priority based redundancy control of robot manipulators*. Transactions of ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 6, no. 2, pages 3–15, 1987. [33](#), [83](#), [127](#)
- [Nakamura 91] Y. Nakamura & R. Mukherjee. *Nonholonomic Path Planning of Space Robots via a Bidirectional Approach*. IEEE Transaction on Robotics and Automation, vol. 7, no. 4, pages 500–514, 1991. [xiv](#), [186](#), [187](#), [188](#), [193](#)
- [Nenchev 92] D. Nenchev, Y. Umetani & K. Yoshida. *Analysis of a Redundant Free-Flying Spacecraft/Manipulator System*. IEEE Transaction on Robotics and Automation, vol. 8, no. 1, pages 1–6, 1992. [186](#), [188](#), [193](#)
- [Nenchev 99] D. Nenchev, K. Yoshida, P. Vichitkulsawat & M. Uchiyama. *Reaction Null-Space Control of Flexible Structure Mounted Manipulator Systems*. IEEE Transactions on Robotics and Au-

- tomation, vol. 15, no. 6, pages 1011–1023, 1999. [193](#)
- [Oh 91] H.-S. Oh & S.R. Vadali. *Feedback Control and Steering Law for Spacecraft Using Single Gimbal Control Moment Gyros*. Journal of the Astronautical Sciences, vol. 39, no. 2, pages 183–203, 1991. [31](#), [36](#), [68](#)
- [Page 99] A.B. Page & M.L. Steinberg. *Effects of Control Allocation Algorithms on a Nonlinear Adaptive Design*. Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. Portland,OR,U.S.A., pages 1664–1674, 1999. [99](#)
- [Papadopoulos 91] E. Papadopoulos & S. Dubowski. *On the Nature of Control Algorithms for Free-Floating Space Manipulators*. IEEE Transaction on Robotics and Automation, vol. 7, no. 6, pages 750–758, 1991. [192](#)
- [Papadopoulos 93a] E. Papadopoulos. *Teleoperation of Free-floating Space Manipulator Systems*. SPIE Telemanipulator Technology, vol. 1833, pages 122–133, 1993. [189](#), [192](#)
- [Papadopoulos 93b] E. Papadopoulos & S. Dubowski. *Dynamic Singularities in Free-floating Space Manipulators*. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 115, no. 1, pages 44–52, 1993. [xiv](#), [185](#), [186](#), [187](#), [188](#), [189](#), [190](#), [194](#)
- [Paradiso 92] J.A. Paradiso. *Global Steering of Single Gimballed Control Moment Gyroscopes Using a Directed Search*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 15, no. 5, pages 1236–1244, 1992. [4](#), [26](#), [35](#), [68](#)
- [Pardini 15] Carmen Pardini, Toshiya Hanada & P. H. Krisko. *Benefits and risks of using electrodynamic tethers to de-orbit spacecraft*. Acta Astronautica, vol. 64, no. 5-6, page 571–588, 2015. [184](#)
- [Paul 81] R.C.P. Paul. Robot manipulators : mathematics, programming and control. MIT Press, Cambridge, 1981. [219](#)
- [Phipps 14] C. R. Phipps. *A laser-optical system to re-enter or lower low Earth orbit space debris*. Acta Astronautica, vol. 93, page 418–429, 2014. [184](#)

- [Pieper 68] D.L. Pieper. *The kinematics of manipulators under computer control*. PhD thesis, Stanford University, 1968. [219](#)
- [Raghavan 90] M. Raghavan & B. Roth. *Inverse kinematics of the general 6R manipulator and related linkages*. Trans. of the ASME, J. of Mechanical Design, vol. 115, pages 502–508, 1990. [219](#)
- [Robotics 14] Honeybee Robotics. *Microsat CMG Attitude Control Array*. Technical report, Honeybee Robotics Spacecraft Mechanism Corporation, 2014. [11](#), [170](#)
- [Rubrecht 12] S. Rubrecht, V. Padois, P. Bidaud, M. de Broissia & M. Da Silva Simoes. *Motion safety and constraints compatibility for multibody robots*. Autonomous Robots, vol. 32, no. 3, pages 333–349, April 2012. [88](#), [121](#), [204](#)
- [Sanchez 15] M.I. Sanchez, J.A. Acosta & A. Ollero. *Integral Action in First-Order Closed-Loop inverse Kinematics. Application to Aerial Manipulators*. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), pages 5297–5302, 2015. [90](#)
- [Sasiadek 00] J. Z. Sasiadek, Q. Wang & M. B. Zeremba. *Fuzzy adaptive Kalman filtering for INS/GPS data fusion*. IEEE International Symposium on Intelligent Control, 2000. [89](#)
- [Sciavicco 86] L. Sciavicco & B. Siciliano. *Coordinate transformation ; a solution algorithm for one class of robots*. IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, vol. SMC-16, no. 4, pages 550–559, 1986. [219](#)
- [Sciavicco 88] L. Sciavicco & B. Siciliano. *Solution Algorithm to the Inverse Kinematic Problem for Redundant Manipulators*. IEEE Journal of Robotics and Automation, vol. 4, no. 4, pages 403–410, August 1988. [90](#)
- [Siciliano 90] B. Siciliano. *Kinematic Control of Redundant Robot Manipulators*. Journal of Intelligent and Robotic Systems, vol. 3, pages 201–212, 1990. [4](#), [16](#), [30](#), [31](#), [32](#), [33](#), [90](#), [106](#)
- [Simon 02] D. Simon & T. Li Chia. *Kalman Filtering with State Equality Constraints*. IEEE Transactions

- on Aerospace and Electronic Systems, vol. 38, no. 1, pages 128–136, January 2002. [88](#), [204](#)
- [Simon 06] D. Simon & D.L. Simon. *Kalman filtering with inequality constraints for turbofan engine health estimation*. IEE Proceedings - Control Theory and Applications, vol. 153, no. 3, pages 371–378, 2006. [89](#)
- [Skeleton II 03] C.E. Skeleton II. *Mixed Control Moment Gyro and Momentum Wheel Attitude Control Strategies*. Master's thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, USA, 2003. [36](#)
- [Song 95] Y. Song & J.W. Grizzle. *The Extended Kalman Filter as a Local Asymptotic Observer for Discrete-Time Nonlinear Systems*. Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control, vol. 5, no. 1, pages 59–78, 1995. [85](#), [89](#), [91](#), [92](#), [93](#), [94](#), [108](#), [130](#), [131](#)
- [Sordalen 97] O.J. Sordalen. *Optimal Thrust Allocation for Marine Vessels*. Control Engineering Practice, vol. CEP-5, no. 9, pages 1223–1231, 1997. [34](#)
- [Steyn 15] D. Steyn. *Variable Speed Scissored Pair Dual Gimbal Control Moment Gyro for Nano-Satellites*. PhD thesis, Stellenbosch University, Afrique du Sud, 2015. [11](#)
- [Tekinalp 05] O. Tekinalp & E. Yavuzoglu. *A new steering law for redundant control moment gyroscope clusters*. Aerospace Science and Technology, vol. 9, pages 626–634, 2005. [31](#)
- [Tekinalp 09] O. Tekinalp & E. Yavuzoglu. *A new steering law for redundant control moment gyroscope clusters*. Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, vol. 52, no. 175, pages 1–10, 2009. [34](#)
- [Todorov 08] E. Todorov. *General duality between optimal control and estimation*. Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, pages 4286–4292, 2008. [84](#), [85](#)
- [Tokar 79] E. N. Tokar & V. N. Platonov. *Singular surfaces in unsupported gyrodyne systems*. Cosmic Research, vol. 16, no. 5, pages 547–555, 1979. [43](#)

- [Torres 92] M.A. Torres & S. Dubowski. *Minimizing Spacecraft Attitude Disturbances in Space Manipulator Systems*. Journal of Guidance, Navigation and Control, vol. 15, no. 4, pages 1010–1017, 1992. [192](#)
- [Ulrich 12] S. Ulrich & J.Z. Sasiadek. *Trajectory tracking control of flexible-joint space manipulators*. Canadian Aeronautical Space Journal, vol. 58, no. 1, pages 47–59, 2012. [192](#)
- [Ulrich 14] S. Ulrich & J.Z. Sasiadek. *Decentralized simple adaptive control of nonlinear systems*. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol. 28, pages 750–763, 2014. [200](#)
- [Umetani 89] Y. Umetani & K. Yoshida. *Resolved Motion Rate Control of Space Manipulators with Generalized Jacobian Matrix*. IEEE Transaction on Robotics and Automation, vol. 5, no. 3, pages 303–314, 1989. [186](#)
- [Vadali 89] S.R. Vadali, H.-S. Oh & S.R. Walker. *Preferred Gimbal Angles for Single Gimbal Control Moment Gyros*. AIAA Guidance and Control Conference, no. 89-3477, pages 443–451, 1989. [35](#), [68](#), [120](#)
- [Vafa 90] Z. Vafa & S. Dubowsky. *The Kinematics and Dynamics of Space Manipulators : The Virtual Manipulator Approach*. The International Journal of Robotics Research, vol. 9, no. 4, pages 3–21, 1990. [185](#), [190](#), [192](#)
- [Visagie 14] L. Visagie, J. L. Forshaw, T.E. Frame, V.J. Lappas & W.H. Steyn. *A miniaturised attitude control and determination system for the QB50 and SME-SAT missions*. ESA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2014. [11](#)
- [Votel 12] R. Votel & D. Sinclair. *Comparison of Control Moment Gyros and Reaction Wheels for Small Earth-Observing Satellites*. 26th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites, 2012. [10](#), [11](#), [170](#)
- [Walker 91] M.W. Walker & L.B. Wee. *An Adaptive Control Strategy for Space Based Robot Manipulators*. Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 1673–1680, 1991. [192](#), [200](#)

- [Wampler 86] C.W. Wampler. *Manipulator Inverse Kinematic Solutions Based on Damped Least-Squares Methods*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, vol. 16, pages 93–101, 1986. [31](#)
- [Wampler 88] C.W. Wampler. *Winding number analysis of invertible workspaces for redundant manipulators*. International Journal of Robotic Research, vol. 7, no. 5, pages 22–31, 1988. [33](#)
- [Wie 01] B. Wie, D. Bailey & C.J. Heiberg. *Singularity Robust Steering Logic for redundant Single-Gimbal Control Moment Gyros*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 24, no. 5, pages 865–872, 2001. [27](#), [31](#)
- [Wie 03] B. Wie. *New Singularity Escape and avoidance Steering Logic for Control Moment Gyro Systems*. AIAA Paper, vol. 3, no. 2003-5659, pages 2191–2201, 2003. [31](#), [140](#)
- [Wie 04] B. Wie. *Singularity Analysis and Visualization for Single-Gimbal Control Moment Gyro Systems*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 27, no. 2, pages 271–282, 2004. [43](#), [46](#), [47](#), [63](#)
- [Yamada 14] K. Yamada & I. Jikuya. *Directional passability and quadratic steering logic for pyramid-type single gimbal control moment gyros*. Acta Astronautica, vol. 102, pages 103–123, 2014. [35](#), [47](#), [48](#), [82](#), [98](#)
- [Yamada 16] K. Yamada, T. Asai & I. Jikuya. *Inverse Kinematics in Pyramid-Type Single-Gimbal Control Moment Gyro System*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 39, no. 8, pages 1897–1907, 2016. [23](#), [51](#)
- [Yoshikawa 85] T. Yoshikawa. *Manipulability of robotic mechanisms*. International Journal of Robotic Research, vol. 4, no. 2, pages 3–9, 1985. [32](#)
- [Zaccarian 09] L. Zaccarian. *Dynamic allocation for input redundant systems*. Automatica, vol. 45, pages 1431–1438, 2009. [36](#), [85](#), [90](#), [121](#), [204](#)
- [Zeledon 10] R.A. Zeledon & M.A. Peck. *Singularity-Free Constrained Steering Law for Triplet Control Moment Gyros*. AIAA Guidance, Naviga-

- [Zhang 01] tion, and Control Conference, Toronto, Canada, 2010. [32](#)
- [Zhang 01] J.-J. Zhang & J.-S. Li. *Study on Steering Law of Large Spacecraft SGCMG System Based on Fuzzy Decision*. Chinese Journal of Aeronautics, vol. 14, pages 100–105, 2001. [36](#)
- [Zhou 05] D. Zhou, T. Shen & K. Tamura. *Adaptive Non-linear Synchronization Control of Twin-Gyro Precession*. Transactions of the Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 128, no. 3, pages 592–599, 2005. [34](#)

Résumé — Dans cette thèse, le problème du contrôle d'attitude de satellites agiles à l'aide de grappes d'actionneurs gyroscopiques (AGs) est considéré et plus particulièrement son application au contrôle de micro/nanosatellites (10-100 kg). Afin d'analyser les configurations de grappe les plus pertinentes pour les nanosatellites, des outils d'analyse topologique sont développés. Après une comparaison des différentes configurations, le choix se porte sur une grappe pyramidale de six actionneurs gyroscopiques. Des analyses plus approfondies de cette grappe (avec et sans cas de panne d'actionneurs gyroscopiques) permettent de déduire des contraintes que la loi de pilotage doit vérifier pour être adaptée à ce système, en particulier pour le passage de singularités. Le cahier des charges initialement défini pour la thèse est alors étoffé et précisé. Pour y répondre, après analyse de la littérature, une nouvelle structure de loi de pilotage ainsi qu'une formulation différente des équations cinématiques sont développées. Cette structure est basée sur l'algorithme du filtre de Kalman étendu. Elle a pour avantages de répondre aux exigences en termes de calcul temps réel au bord des satellites, de flexibilité sur la gestion des contraintes et de facilité d'adaptation en cas de pannes. En outre, une procédure de génération de boucle de commande, englobant la loi de pilotage et un contrôleur robuste du système, est proposée. La généralisation de cette boucle de commande est illustrée sur des bras manipulateurs à base fixe et spatiaux.

En parallèle, l'étude du passage des singularités internes intraversables dans les grappes d'actionneurs gyroscopiques mène à une nouvelle stratégie d'évitement de ces singularités. Elle consiste à insérer une connaissance de la topologie du système pour améliorer la précision dans le pilotage. Des simulations sur des modèles de satellites représentatifs illustrent les résultats de la loi de pilotage dans différents cas de panne. La grappe d'actionneurs et la boucle de commande développées seront testées dans le cadre d'une expérimentation en microgravité, et les objectifs de cette expérience sont détaillés dans ce mémoire.

Mots clés : Actionneur gyroscopique, allocation, SCAO, singularité, filtre de Kalman, nanosatellites.

Abstract — In this thesis, the attitude control problem for agile satellites with control moment gyro (CMG) clusters is studied. In particular, the problem applies to micro/nanosatellites (10-100kg). First, numerical tools are developed to analyse the compatibility of various cluster configurations with the nanosatellite constraints. After comparison of the configurations, the pyramidal six-CMG cluster is selected. This cluster topology is analysed in depth, with and without actuator failures. Constraints on the development of a steering law adapted to our system are deduced. Among them, the singularity avoidance issue is emphasised. The requirements initially defined in the thesis are therefore expanded. To meet the requirements, an analysis of the literature is carried out. Then, a new steering law structure and a different formulation of the kinematic equations are developed. This structure is based on the extended Kalman filter algorithm. It meets the requirements because it can be calculated in real-time onboard satellites, constraints imposed on the system are handled with flexibility and it is easily adaptable in case of actuator failures. In addition, a procedure to generate the control loop is proposed. It contains the steering law and a robust system controller. The generalisation of this control loop is shown on space and fixed-base manipulator arms.

Furthermore, the study of the internal elliptic singularities in CMG clusters leads to a new singularity-avoidance strategy. It consists in adding the knowledge of the system topology in the steering law to enhance the precision of the maneuvers. Software simulations on highly representative simulators show the results of the steering law in various actuator failure cases. The CMG cluster and the control loop will be tested in a parabolic flight campaign, and the development of this experiment is detailed in this thesis.

Keywords : Control Moment Gyro, allocation, AOCS, singularity, Kalman filter, nanosatellite.
