HAL
open science

Instabilités dans les moteurs à propergol solide : influence de la géométrie étoilée et étude numérique de la transition laminaire-turbulent

Maxime Bouyges

To cite this version:

Maxime Bouyges. Instabilités dans les moteurs à propergol solide : influence de la géométrie étoilée et étude numérique de la transition laminaire-turbulent. Milieux fluides et réactifs. INSTITUT SUPERIEUR DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE (ISAE); UNIVERSITE DE TOULOUSE, 2017. Français. NNT : . tel-01701130

HAL Id: tel-01701130

https://hal.science/tel-01701130

Submitted on 5 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)*

Présentée et soutenue le *28 Novembre 2017* **par :**

Maxime Bouyges

Instabilités dans les moteurs à propergol solide : influence de la géométrie étoilée et étude numérique de la transition laminaire-turbulent

---

JURY

Joseph MAJDALANI	Professeur des Universités	Examinateur
Frédéric PLOURDE	Directeur de recherche	Rapporteur
Jean-Christophe ROBINET	Professeur des Universités	Rapporteur
Pierre SAGAUT	Professeur des Universités	Président
Nathalie CESCO	Docteur - Ingénieur	Examinatrice
Julien PICHILLOU	Ingénieur	Examinateur
Grégoire CASALIS	Professeur des Universités (rang équiv.)	Directeur
François CHEDEVERGNE	Docteur - Ingénieur	Co-directeur

École doctorale et spécialité :
MEGeP : Dynamique des fluides
Unité de Recherche :
EDyF – Équipe Énergétique et Dynamique des Fluides
Directeurs de Thèse :
Grégoire CASALIS et *François CHEDEVERGNE*
Rapporteurs :
Jean-Christophe ROBINET et *Frédéric PLOURDE*

ONERA, site de Toulouse
2 Av. Édouard Belin
31055 Toulouse Cedex 4

Manuscrit de thèse

Instabilités dans les moteurs à propergol solide : influence de la géométrie étoilée et étude numérique de la transition laminaire-turbulent

Directeur de thèse: Grégoire Casalis (ISAE-SUPAERO)
Co-directeur de thèse: François Chedevergne (DMPE-TACT)

Maxime Bouyges

14 janvier 2018

ONERA

La version numérique de ce document permet une navigation aussi aisée que possible dans les différentes parties: les tables des matières, références aux équations figures et tables, les références bibliographiques ainsi que les symboles du texte listés dans la nomenclature sont des liens hypertextes renvoyant à l'élément adéquat (cliquer sur un symbole dans le texte renvoie à son entrée dans la nomenclature). La plupart des logiciels de lecture proposent des raccourcis clavier pour revenir à la page courante (par exemple `Alt+`$\leftarrow$ pour Adobe Reader).

Remerciements

Je commence ces remerciements en les adressant à Pierre Millan, qui m'a d'abord accueilli au sein du DMAE pour y réaliser un stage. Pierre, tu m'as ensuite permis d'intégrer le DMAE (puis DMPE) pour réaliser ma thèse et désormais, je poursuis ma carrière au sein du département. Je reste impressionné par tes efforts pour défendre le département et t'assurer que chacun s'y sente bien.

Évidemment, cette thèse ne se serait pas faite sans Grégoire et François. Quel plaisir de travailler avec vous ! Sur le plan technique, je n'aurais pas pu rêver mieux que ce duo de choc de la stabilité linéaire appliquée au VSP. Votre expertise, vos idées, votre optimisme m'ont permis d'effectuer cette thèse en toute confiance. Vous avez su me guider sans me mettre la pression et c'est donc grâce à vous que j'ai pu travailler avec plaisir pendant trois ans. J'ai particulièrement apprécié vos efforts pour que je puisse séjourner aux États-Unis. Dans tes propres remerciements, tu souhaitais, François, que d'autres étudiants aient la chance d'être encadrés par Grégoire et de découvrir ses grandes qualités. J'ai eu cette chance et je souhaite aussi à mon tour que d'autres étudiants aient la chance de t'avoir comme directeur de thèse : Grégoire t'a passé le témoin. Merci infiniment à tous les deux.

Ce n'est un secret pour personne : la vie des doctorants au sein du DMPE est agréable. Je pense que c'est en grande partie dû à la bonne humeur et à la bonne entente qui règnent entre les doctorants. Je tiens donc tout d'abord à remercier B. Gazanion, qui m'a persuadé d'effectuer une thèse contre sa volonté. Je remercie ensuite tous ceux qui m'ont accompagné ou que j'ai accompagnés au cours de ces trois années : Gustavo PirateBay, P. Grenson le Magnifique, Steph' PetitBout, Maxime Forte Zlatan, Maxime Fiore l'Increvable (ne laisse plus ton chien monter à l'avant...), Florian Mokhtar, Loïc Jecker l'Incollable, Gaëtan Fusée ainsi que tous les prochains docteurs : Loïcs, Damien, Rémi, Jeanne, Julien, Adèle, Émilie et Sylvain. Enfin, spéciale dédicace et un grand merci à Pierre McDo (ui ui), Lorenzo Zouzos, Guillaume TEXMaster et bien sûr à Jay Partner : j'suis dans ta roue !

Pour être créatif et motivé pour sa thèse, il faut pouvoir discuter d'autre chose et s'aérer l'esprit. Pour cela, je remercie donc mes amis : Félix Lapin, Anne Marathon, Hugo Carabine, Léna Miettes, Gautier Hipster, Lucas Binôme, Adrien Génie, William Balancelle, William JavaJeux et Gueve KeepCalm. Et bien qu'à distance, ils font partie intégrante de mon parcours et j'ai toujours pu compter sur eux : merci à Clément LeGrand, Joryse, Sylvinho et à Jack, mon meilleur ami depuis toujours !

Ensuite, j'ai pu compter sur le soutien inconditionnel de ma belle famille, et ce même dans les moments les plus difficiles de ces trois dernières années. Merci donc à Patou, Julie, Nico, Murvette, Kiki, et les deux p'tits loups. Du côté des Bouyges-Grandadam-Salaun ils sont aussi nombreux à remercier, tout simplement parce qu'ils ont tous contribué à ce que je suive ce parcours. Merci à ma sœur, pour sa fierté vis-à-vis de son frère qui m'a toujours poussé à persévérer (dans les études, mais pas uniquement) ainsi que pour mon adorable nièce qu'elle a mis au monde. Enfin, je remercie mes parents. Tout comme j'ai eu des encadrants parfaits pour cette thèse, j'estime avoir eu des parents parfaits pour mon parcours scolaire et universitaire. Les maths d'un côté, le français de l'autre ; une curiosité sans limite ; une grande ouverture d'esprit et une certaine exigence sont tout autant d'éléments dont je suis fier et qui ont mené à cette thèse et à la personne que je suis. Vous restez encore aujourd'hui mes modèles. Merci papa et maman.

Enfin, bien sûr, merci à Charline. Durant cette thèse, nous aurons connu le meilleur (notre vie commune, nos voyages) et le pire. Ce manuscrit contient forcément un peu de Lilian, parce que j'ai beaucoup pensé à lui pendant ces deux dernières années. Charline, malgré ces épreuves tu as été constamment à mes côtés pendant ces trois ans et ce manuscrit est le fruit de notre travail d'équipe, de notre complicité. Avec cette thèse, une nouvelle page de notre vie se tourne et je suis persuadé que la suite sera au moins aussi belle que ces douze dernières années passées avec toi.

Je dédie ce manuscrit à mes grands-pères, qui auraient tous les deux été fiers, à leur façon, d'avoir un docteur dans leur famille.

Table (réduite) des matières

Remerciements iii

Introduction vii

I. État de l'art, matériel et méthodes 1

1. État de l'art 3
1.1. Mise en évidence des oscillations de poussée et de pression 4
1.2. La transition laminaire-turbulent dans les moteurs à propergol solide 8
1.3. Présentation des études de stabilité linéaire des moteurs à propergol solide 12
1.4. Représentation de l'écoulement moyen au sein des moteurs à propergol solide . . . 15

2. Méthodes et matériel 25
2.1. Rappels sur la stabilité linéaire 26
2.2. Présentation de la méthode de collocation spectrale 33
2.3. Présentation du montage expérimental VALDO 38
2.4. Présentation de la chaîne de calcul CEDRE 40

II. Démarche 43

3. Détermination de l'écoulement de base au sein d'un conduit à paroi débitante de section étoilée 45
3.1. Détermination et validation de l'écoulement au sein d'un conduit à paroi débitante de section étoilée 46
3.2. Compléments sur la solution analytique obtenue 72
3.3. Proposition d'extension de la solution à une géométrie quelconque périodique . . . 76

4. Étude de la stabilité linéaire de l'écoulement 79
4.1. Introduction 80
4.2. Étude de stabilité linéaire locale de l'écoulement 81
4.3. Étude de stabilité linéaire biglobale de l'écoulement 99
4.4. Étude de la stabilité linéaire de la configuration du tir LP9t48 113

5. Étude de l'influence de la condition d'impédance acoustique de sortie et du bruit d'injection sur le développement des oscillations 119
5.1. Description de la méthode et de la réalisation des simulations 120
5.2. Exploitation des résultats des simulations 129

Conclusion 139
Discussion 139
Bilan 141
Perspectives 142

A. Incidence du changement de variable sur les expressions vectorielles 147
A.1. Calcul de la divergence avec changement de variable 147
A.2. Calcul du gradient vectoriel avec changement de variable 147
A.3. Calcul du laplacien vectoriel avec changement de variable 148

B. Détermination des conditions limites sur l'axe pour la correction d'ordre deux de l'écoulement de base **151**
B.1. Conditions pour $U_{,2}^{(2)}$ 151
B.2. Conditions pour $U_{,0}^{(2)}$ 153

C. Détermination des conditions limites sur l'axe pour la perturbation de stabilité linéaire **155**
C.1. Cas de l'étude de stabilité linéaire locale 155
C.2. Cas de l'étude de stabilité linéaire biglobale 160

Table (exhaustive) des matières **163**

Table des figures **167**

Nomenclature **171**

Bibliographie **173**

Introduction

Dans le domaine de la propulsion spatiale, certains moteurs à propergol solide sont soumis à des oscillations de poussée, liées à des oscillations de la pression interne du moteur. Ces oscillations de poussée peuvent induire des vibrations susceptibles de se propager par le corps du lanceur jusqu'à la charge utile. Pour éviter ces vibrations qui peuvent nuire à la charge utile, le lanceur européen Ariane 5 protège cette dernière par un dispositif assouplisseur. Ce dispositif représente une masse supplémentaire qui diminue la masse disponible pour la charge utile embarquée. Il représente donc un coût important pour les industriels. De plus, ces oscillations, si elles ne sont pas expliquées ou quantifiées, nuisent à l'estimation de la fiabilité du lanceur et entraînent de facto une augmentation des coûts d'assurance de la charge utile.

FIGURE 1. – Le lanceur Ariane 5 au décollage lors du tir VA233, le 17 novembre 2016.

Un moteur à propergol solide tel que le P230 du lanceur Ariane 5 peut être décrit schématiquement comme un cylindre, fermé à l'une de ses deux extrémités, contenant du propergol solide entourant une cavité dans l'axe du moteur au sein de laquelle circulent les gaz produits par la combustion de la surface de propergol exposée à la cavité. La poussée produite par ces moteurs est au premier ordre proportionnelle à la pression au sein du moteur, elle-même proportionnelle à la surface de propergol en combustion. La géométrie de la cavité influe donc sur l'évolution temporelle de la poussée. Cette géométrie est définie par sa section transversale et l'évolution axiale de celle-ci. La géométrie de section circulaire est la plus courante et la plus fréquemment étudiée. Au cours d'un tir avec une telle cavité, le propergol se consume dans la direction radiale et le rayon de la cavité augmente. Ainsi la surface en combustion augmente elle aussi au cours du tir et l'évolution de la poussée au cours du tir est donc croissante. Des géométries de section différentes existent et sont utilisées par les motoristes comme les géométries finocyl, C-Slot ou Moon–Burner. Les finocyls, illustrés par deux photos sur la figure 2, permettent une évolution presque constante de la poussée au cours du tir.

FIGURE 2. – Illustration de bloc de propergol avec une géométrie finocyl.

Comme le montre l'historique de Blomshield (2001), les premières études des oscillations de pression dans les moteurs à propergol solide remontent au début des années 1960. Toutefois, dans de nombreux cas, les oscillations observées sont provoquées par des instabilités de combustion. Les oscillations de pression qui font l'objet de ce manuscrit sont celles qui affectent les moteurs suffisamment longs tels que le P230 ou les Solid Rocket Boosters de la navette spatiale américaine pour lesquels les instabilités de combustion ont été écartées de la liste des origines potentielles. Pour le lanceur Ariane 5, les oscillations de pression avaient été anticipées dès la phase de conception (Scippa *et al.*, 1994) et apparaissent dans la seconde moitié du tir. Pendant plusieurs années, le modèle de Flandro (Flandro et Jacobs, 1973; Dotson *et al.*, 1997) était utilisé pour tenter de quantifier ces oscillations de pression via un modèle de couplage entre un détachement tourbillonnaire et l'acoustique du moteur, sans toutefois pouvoir identifier précisément l'origine des tourbillons. Par la suite, trois types de détachement tourbillonnaire ont été identifiés dans les moteurs : le Vortex Shedding d'Angle, provoqué par le chambrage arrière permettant l'insertion de la tuyère ; le Vortex Shedding d'Obstacle, provoqué par des protubérances au sein du moteur, et le Vortex Shedding Parietal, provoqué par une instabilité intrinsèque de l'écoulement au sein du moteur. Le VSP, d'origine purement hydrodynamique, a été mis en évidence numériquement par Lupoglazoff et Vuillot (1996). Puis le VSP a été identifié comme étant l'origine des oscillations de pression dans le cas du moteur P230 du lanceur Ariane 5, notamment grâce aux travaux expérimentaux de Prévost *et al.* (2005). Ces travaux ont en effet montré que des oscillations de pression correspondant aux oscillations mesurées au cours d'un tir pouvaient apparaître même sans la génération des deux autres types de tourbillons.

En parallèle, des travaux théoriques ont été menés sur ces oscillations via l'étude de l'écoulement au sein des moteurs à propergol solide. La cavité du moteur est représentée par un conduit semi-fermé et les oscillations recherchées étant d'origine hydrodynamique, la combustion du propergol n'est représentée que par une paroi débitante. Le fluide est donc supposé être un gaz froid monophasique pour s'affranchir des phénomènes de combustion et de la présence de particules d'aluminium. Cette configuration présente l'avantage de pouvoir être étudiée expérimentalement par des montages dits « en gaz froid ». Les premiers travaux sur cette configuration ont été menés par Berman (1953) qui est parvenu à déterminer une unique équation régissant le champ de vitesse et la pression stationnaires au sein d'une veine à paroi débitante. En revanche, sa solution se limite aux veines de section rectangulaires. Quelques années plus tard, Taylor (1956) puis indépendamment Culick (1966) ont déterminé la solution explicite de cette équation dans le cas d'un écoulement en fluide parfait, cette fois dans le cas d'une section circulaire. Cette solution dite de Taylor–Culick est depuis lors très utilisée dans le domaine des moteurs à propergol solide car elle constitue une représentation fidèle de l'écoulement qui s'y développe. En effet, cette solution a été comparée avec succès aux mesures réalisées dans plusieurs montages en gaz froid ainsi qu'à des calculs CFD en gaz chaud. En revanche, cette solution stationnaire en fluide parfait ne s'applique que lorsque l'écoulement est laminaire. Les études de stabilité linéaire des solutions de Berman et de Taylor–Culick ont été initiées par Varapaev et Yagodkin (1969) puis menées à l'ONERA tout

d'abord par Casalis *et al.* (1998) puis au travers de plusieurs travaux de thèses (Griffond, 2001; Féraille, 2004; Chedevergne, 2007; Boyer, 2012). Ces différents travaux ont montré de manière théorique que le VSP est provoqué par une instabilité intrinsèque de l'écoulement. Que ce soit dans le cas des montages expérimentaux en gaz froid VECLA et VALDO, des moteurs à échelle réduite ou même du P230, les résultats des travaux de stabilité linéaire ont permis de reproduire avec succès l'évolution fréquentielle des phénomènes en jeu dans les différentes configurations. Toutefois tous ces travaux de stabilité utilisent la solution de Berman ou de Taylor–Culick et ne sont donc valables que pour une géométrie de section circulaire.

Cependant, aucune de ces expériences ou études de stabilité ne permettent d'expliquer le délai d'apparition des oscillations de pression. Comme évoqué plus haut, dans le cas du moteur P230 les oscillations de pression ne sont observées qu'à partir de la seconde moitié du tir. Or les calculs de stabilité prévoient une instabilité potentiellement [1] présente tout au long du tir. La recherche d'une explication de ce délai s'est portée vers la transition laminaire-turbulent. Pour ce type d'écoulement, la transition a été étudiée expérimentalement avec des montages en gaz froid dès 1967 par Yagodkin (1967), puis par de nombreuses études expérimentales et numériques. Ces différents auteurs ont montré la présence d'une transition laminaire-turbulent au sein des conduits à paroi débitante : une zone amont laminaire puis une zone présentant des structures turbulentes en aval. De plus, ils ont montré que la position de cette transition dépend du rapport d'aspect du conduit ($\mathcal{L}/R_p$) et que sa nature est différente de celle d'un simple écoulement dans un conduit (sans paroi débitante). Par exemple, l'influence de la transition laminaire-turbulent sur le profil de vitesse axiale est bien moins notable dans le cas d'une paroi débitante que dans le cas d'un simple conduit ou d'une plaque plane. À l'ONERA, le lien entre la transition laminaire-turbulent et les oscillations de pression a fait l'objet des travaux de thèse de Gazanion (2014). Ces travaux ont porté à la fois sur les données expérimentales du montage VALDO et sur des simulations numériques LES. Les travaux de Gazanion ont permis de déterminer un critère permettant d'identifier quantitativement la position de la transition au sein du conduit. Ceci a notamment permis de montrer la complexité de la frontière entre les zones laminaire et turbulente. Son étude montre aussi que les structures tourbillonnaires du VSP sont en partie dissipées au passage de la transition laminaire-turbulent. Ces résultats permettent d'envisager le scénario suivant expliquant le délai d'apparition des oscillations : au début d'un tir, le rapport d'aspect $\mathcal{L}/R_p$ du moteur est grand et la région laminaire proche du fond avant est courte. La longue zone turbulente permet alors de dissiper les tourbillons qui émergent à proximité de la paroi d'injection. Au cours du tir le propergol se consume, le rayon R_p augmente tandis que la longueur du moteur $\mathcal{L}$ est constante. Le rapport d'aspect $\mathcal{L}/R_p$ diminue donc, ce qui repousse la transition laminaire-turbulent vers la sortie du moteur. Les tourbillons qui émergent de la zone laminaire sont alors amplifiés sur une longue distance et la zone (plus courte) turbulente n'est pas suffisante pour les dissiper : à leur passage au niveau du col sonique de la tuyère, les tourbillons provoquent une fluctuation de pression qui remonte l'écoulement (celle-ci a été mesurée dans VALDO) et c'est celle-ci qui, en gaz chaud, est mesurée au fond-avant. Cependant si les spectres de fluctuations de vitesse de Gazanion obtenus numériquement étaient qualitativement proches de ceux du montage expérimental, les niveaux d'amplitude associés à ces fluctuations ont été surestimés et les fréquences des modes émergents sont très sensibles à la perturbation imposée dans la simulation. Un examen attentif de ces simulations a conduit à formuler l'hypothèse que la condition limite imposée à la sortie du domaine, à savoir une condition réfléchissante (pression imposée à la sortie du conduit) a conduit à une mauvaise représentation de l'environnement acoustique dans les simulations.

Au total, l'origine des oscillations de poussée, provoquées par des oscillations de pression, est aujourd'hui identifiée. En particulier, le rôle du VSP, provoqué par une instabilité intrinsèque de l'écoulement au sein des moteurs, a été désigné comme le moteur de ces oscillations dans le cas d'une géométrie circulaire. Les travaux de stabilité linéaire permettent de déterminer l'évolution fréquentielle de ces oscillations pour cette géométrie, sans toutefois expliquer leur délai d'appari-

1. À condition de la présence d'une excitation, comme l'acoustique du moteur par exemple.

tion, délai probablement lié à l'influence de la transition laminaire-turbulent au sein du moteur. Ainsi deux questions majeures subsistent. Tout d'abord, si les travaux de Gazanion ont permis d'avancer sur la question de la transition laminaire-turbulent et de son lien avec les oscillations de pression, il est toujours nécessaire d'obtenir numériquement une bonne représentation acoustique du conduit simulé afin d'obtenir des amplitudes proches de celles observées expérimentalement. Ce résultat est nécessaire pour valider le scénario expliquant le délai d'apparition des oscillations. Par ailleurs, comme cela a été souligné, les conclusions des études de stabilité ne concernent jusqu'à présent que la géométrie étoilée. Or ce n'est pas la seule géométrie utilisée dans le domaine de la propulsion solide. Il est nécessaire d'étudier la stabilité des écoulements dans d'autres géométries couramment utilisées et d'étudier les oscillations de pression dans ces configurations.

Ces manques justifient la présente étude. Elle consiste à poursuivre l'étude de l'influence de la transition laminaire-turbulent sur les oscillations de pression dans le montage VALDO et à étudier la stabilité des moteurs à propergol solide dans le cas d'une géométrie non-circulaire, en l'occurrence une géométrie étoilée.

Ce manuscrit est organisé de la manière suivante : le chapitre 1 propose un état de l'art sur les oscillations de pression, l'écoulement au sein des moteurs à propergol solides, les études de stabilité linéaires existantes et la transition laminaire-turbulent au sein des moteurs. Ensuite, le chapitre 2 présente l'outil de stabilité linéaire, la méthode de collocation spectrale, le montage expérimental VALDO et le code CEDRE, tous les quatre utilisés tout au long de ce manuscrit. La seconde partie présente la démarche suivie au cours de cette thèse.

La démarche a consisté dans un premier temps à déterminer le champ de vitesse et de pression au sein d'un conduit à paroi débitante de section étoilée, ce qui a fait l'objet d'une publication. Pour cela, un changement de variable a été introduit afin de se ramener à un problème où les conditions limites ne dépendent que d'une variable. Ensuite, un développement asymptotique du second ordre autour de la solution axisymétrique a été introduit. Ce développement asymptotique a conduit à plusieurs systèmes d'équations différentielles ordinaires qui ont été résolus numériquement. Enfin, la solution composite obtenue a été comparée avec la solution d'un solveur Navier–Stokes afin de la valider et d'en déterminer le domaine de validité. La détermination de cet écoulement est présentée au chapitre 3.

Après l'obtention de cette solution dans une géométrie étoilée, une étude de stabilité linéaire est appliquée à cet écoulement. Les modes de stabilité de cet écoulement ont été calculés avec les approches de stabilité linéaire locale et biglobale. Dans les deux cas, la dépendance azimutale du système a été modélisée par l'application du théorème de Floquet qui permet de décomposer la perturbation en série de Fourier. Les équations régissant la perturbation ont été déterminées en calculant les coefficients du système grâce à un logiciel de calcul formel. Le passage du logiciel de calcul formel au code de résolution du problème de stabilité est assuré par un script intermédiaire permettant la génération automatique des parties du code de résolution du problème de stabilité qui comportent les coefficients du système. Les codes de résolution du problème de stabilité linéaire locale et biglobale ont alors été développés. Dans le cas de l'analyse de stabilité linéaire locale, l'alternative de Fredholm a été appliquée afin de valider ce code, alors que dans le cas de l'analyse de stabilité biglobale, le code a été validé par comparaison aux résultats de la configuration axisymétrique. Enfin, les spectres de stabilité obtenus avec les différents codes ont été analysés et mettent en évidence l'existence de nouveaux modes, possiblement instables, dans le spectre. Cette étude de stabilité linéaire fait l'objet du chapitre 4.

Pour compléter l'étude de stabilité linéaire réalisée au cours du chapitre précédent, l'influence de la condition d'impédance acoustique de sortie du bruit d'injection sur les oscillations de pression a été étudiée numériquement dans une configuration circulaire. Pour cela, des simulations

numériques LES du montage en gaz froid VALDO ont été effectuées. Pour réaliser ces simulations, il a fallu construire un maillage, sélectionner les paramètres numériques de la simulation et mettre un place une perturbation de la condition limite d'injection en se basant sur les travaux précédents (Gazanion, 2014). La simulation réalisée, les données obtenues ont été post-traitées et comparées aux résultats expérimentaux. Cette étude fait l'objet du chapitre 5.

Ce manuscrit se termine par un bilan de cette étude ainsi que des perspectives générales pour la poursuite des travaux dans cette thématique.

Première partie

État de l'art, matériel et méthodes

Chapitre 1

État de l'art

Ce chapitre propose un état de l'art des connaissances sur les écoulements au sein des moteurs à propergol solide ainsi que leur étude par l'approche de stabilité linéaire. Il permettra notamment, dans la suite du manuscrit, de justifier les choix et les hypothèses faites pendant cette thèse. Ce chapitre débute par une brève description du thème général, à savoir les oscillations de poussée affectant certains moteurs à propergol solide comme ceux du lanceur européen Ariane 5. Sachant que ces oscillations de poussée sont provoquées par des oscillations de la pression interne du moteur, différents types de détachements tourbillonnaires générant des oscillations de pression sont analysés. Parmi ces détachements tourbillonnaires, le Vortex-Shedding Parietal (VSP) est identifié comme le phénomène essentiel des oscillations au sein des moteurs à propergol solide. Afin de faciliter l'étude du VSP, des moteurs à échelle réduite ont été conçus et ont permis d'étudier les effets d'échelle ainsi que l'influence de la géométrie interne. Finalement, il est possible de mettre en évidence le phénomène dans le cas d'un écoulement de gaz (froid) dans un conduit à paroi débitante dont l'étude, notamment expérimentale, est plus simple que celle d'un moteur à propergol solide réel. Dans un second temps, des rappels sur la transition laminaire-turbulent dans ces conduits sont effectués pour proposer un scénario d'explication du fait que les oscillations ne sont pas toujours observées tout au long du tir. Ensuite, les précédentes études de stabilité linéaire effectuées sont présentées afin de montrer la capacité de ces outils à décrire l'instabilité conduisant au VSP. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la description de l'écoulement au sein des moteurs à propergol solide via la présentation des différentes solutions analytiques existantes.

Sommaire

1.1. Mise en évidence des oscillations de poussée et de pression **4**
1.2. La transition laminaire-turbulent dans les moteurs à propergol solide **8**
1.2.1. Mise en évidence de plusieurs régimes d'écoulement 8
1.2.2. Influence de la turbulence sur les instabilités 9
1.2.3. Scénario envisagé 11
1.3. Présentation des études de stabilité linéaire des moteurs à propergol solide **12**
1.3.1. Résultats des études de stabilité linéaire locale 12
1.3.2. Résultats des études de stabilité linéaire biglobale 13
1.4. Représentation de l'écoulement moyen au sein des moteurs à propergol solide **15**
1.4.1. Description de la configuration et liste des hypothèses 15
1.4.2. La solution de Berman 17
1.4.3. La solution de Taylor–Culick 18
1.4.4. Extensions des solutions de Berman et de Taylor–Culick 20

1.1. Mise en évidence des oscillations de poussée et de pression

Le système propulsif du lanceur Ariane 5 est composé de plusieurs étages contenant des moteurs de différentes natures (propulsion liquide, propulsion solide). Ces moteurs ne fonctionnent pas tous simultanément et fournissent la poussée du lanceur à différents instants de la mission. Les deux *boosters* jouxtant le corps central forment l'Étage d'Accélération à Poudre (EAP). Ces *boosters* sont des Moteurs à Propergol Solide (MPS) appelés P230 dans le cas d'Ariane 5. Ce sont eux qui fournissent l'essentiel de la poussée au décollage. Le principe des moteurs à propergol solide est relativement simple. Il s'agit d'un cylindre, fermé à l'une de ses extrémités et terminé par une tuyère à l'autre extrémité. Au sein de ce cylindre sont coulés un ou plusieurs pains de propergol. Ces pains de propergol sont creux, c'est-à-dire que le moteur rempli de propergol comprend une cavité dont l'axe est celui du cylindre [1]. Une fois la combustion déclenchée grâce à un allumeur, le propergol se consume sur la surface intérieure de la cavité mentionnée. Se forme alors un écoulement à haute pression qui est éjecté par l'extrémité ouverte du cylindre au travers d'une tuyère. Plus de détails quantitatifs concernant le P230 sont donnés dans le tableau 1.1.

MPS P230	
Longueur	31,6 m
Diamètre extérieur	3,05 m
Masse de propergol	237,7 t
Masse inerte	39,8 t
Poussée moyenne	5000 kN
Impulsion spécifique	275 s
Pression interne max.	61 bar
Durée de combustion	129 s
Altitude de largage	60 km

Table 1.1. – Caractéristiques du moteur à propergol solide P230 d'Ariane 5, d'après Griffond (2001).

Pour des raisons techniques, le pain de propergol est composé de trois segments numérotés S1, S2 et S3. Le premier segment, S1, est relativement court par rapport aux deux autres blocs et possède une cavité dont la section est étoilée. Les deux autres segments ont une cavité de section circulaire dont l'évolution axiale est légèrement conique. Le segment S3 possède un chambrage au niveau de la tuyère afin d'insérer la partie avant de celle-ci dans le lanceur : la tuyère est dite « intégrée ». Par ailleurs, des protections thermiques de faces (PTF) séparent ces différents blocs afin d'éviter leur combustion latérale. Au cours du tir, la combustion du propergol induit la régression latérale des blocs et donc l'augmentation du rayon moyen de la cavité. Une représentation de la géométrie du P230 et de ses différents blocs est donnée en figure 1.1, avec une conicité fortement exagérée dans la direction axiale. La particularité du propergol solide est qu'il est constitué à la fois du combustible et de l'oxydant nécessaires à la combustion. Le combustible se compose de poudre d'aluminium et l'oxydant de perchlorate d'ammonium. Les particules d'aluminium permettent d'augmenter la densité du fluide et d'obtenir une meilleure distribution de température au sein de l'écoulement grâce à leur combustion. De l'HTPB [2] est également utilisé comme liant et combustible. La vitesse de régression du propergol dépend de la constitution de celui-ci, mais est de l'ordre de la dizaine de millimètres par seconde.

Le lanceur Ariane 5, et plus particulièrement ses moteurs P230, sont sujets à des oscillations de poussée. Dans la famille des gros lanceurs, il n'est pas le seul à être sujet à des oscillations de poussée : Dotson *et al.* (1997) montrent que les moteurs SRMU (Solid Rocket Motor Upgrade) du lanceur américain Titan IV y sont sujets également, tout comme les moteurs SRBs (Solid Rocket

1. Il existe des pains de propergol dont l'axe de la cavité et celui du cylindre ne sont pas identiques mais ces cas sont rares.

2. HTPB est l'acronyme de *hydroxyl-terminated polybutabiene*

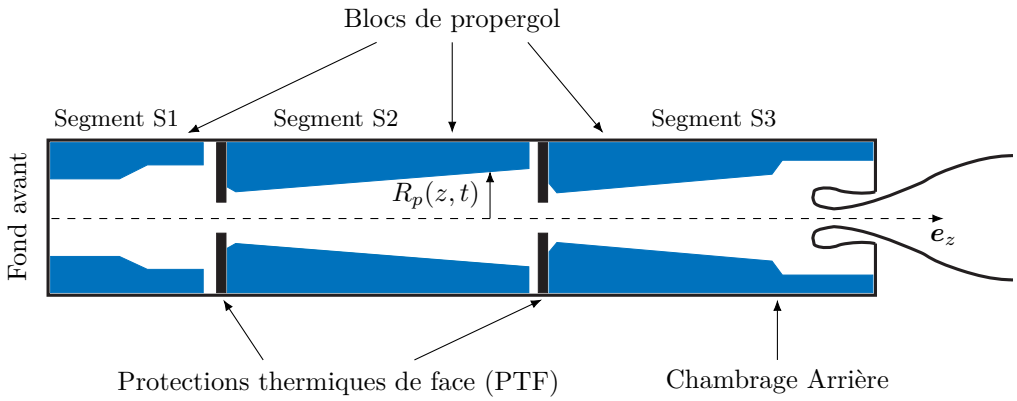


FIGURE 1.1. – Représentation schématique de la géométrie interne du P230, d'après Chedevergne (2007).

Boosters) de la navette spatiale américaine. Pour le lanceur européen, les oscillations de poussée avaient été anticipées dès la phase de conception comme l'évoquent Scippa *et al.* (1994).

Ces oscillations de poussée peuvent être mises en évidence grâce aux accéléromètres dont sont équipés les P230. Une analyse fine de ces signaux instationnaires au cours d'un tir, le tir 510, est disponible dans Chedevergne (2007). Il est possible d'appliquer à ces signaux une Transformée de Fourier à Fenêtre Glissante (TFFG) afin d'en extraire une représentation fréquentielle au cours du temps, comme l'illustre la figure 1.2. Sur cette figure, l'amplitude des fréquences associées au signal instationnaire est représentée par un code couleur, le rouge indiquant les amplitudes les plus élevées. Ceci permet d'observer quelle(s) fréquence(s) sont prédominantes en fonction du temps. On constate sur cette figure des glissements fréquentiels organisés autour des deux premiers modes acoustiques de cavité (calculés sans prendre en compte l'écoulement au sein du moteur et représentés en traits pointillés sur la figure).

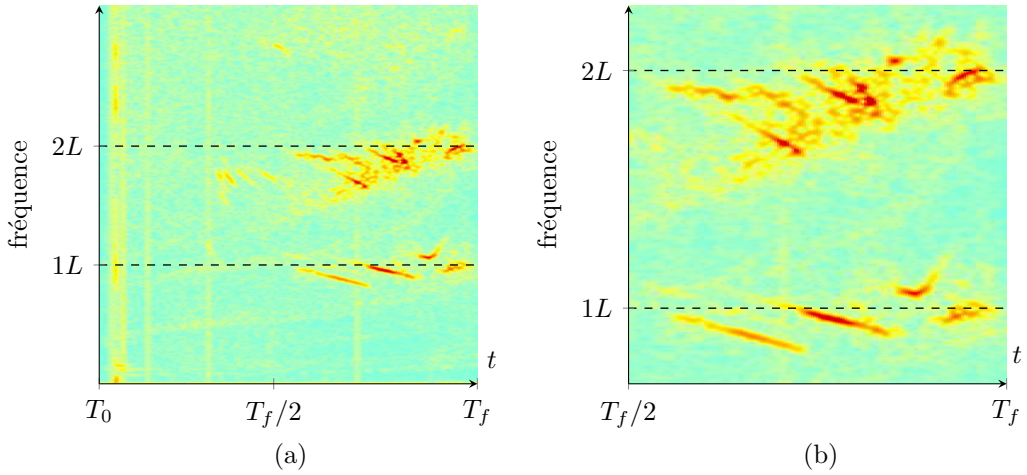


FIGURE 1.2. – Transformée de Fourier à fenêtre glissante du signal de l'accéléromètre de l'EAP 1 du tir 510 d'Ariane 5, d'après Chedevergne (2007). À gauche (a), échantillon complet ; à droite (b), zoom sur la seconde moitié du tir.

Ces oscillations de poussée sont provoquées par des oscillations de pression (ODP) au sein du moteur. Si le lien entre les amplitudes des oscillations de poussée et celles des oscillations de pression est complexe car lié à l'impédance de la tuyère, l'origine du phénomène est bien l'oscillation de la pression interne du moteur. À titre d'exemple, les fluctuations de pression représentent pour le P230 une variation de l'ordre 0,5% zéro-crête de la pression totale, tandis que les fluctuations de poussée qui en découlent sont de l'ordre de 3% zéro-crête de la poussée totale.

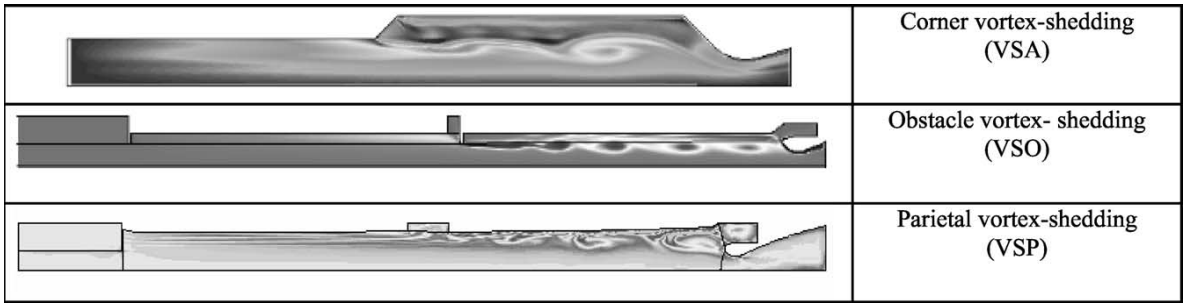


FIGURE 1.3. – Les trois types de détachements tourbillonnaires obtenus numériquement ; dans Fabignon *et al.* (2003).

Comme l'indique Griffond (2001), la bonne connaissance des instabilités liées à la combustion du propergol[3] a permis de les exclure de la liste des mécanismes possiblement responsables de ces oscillations. Toutefois, le caractère diphasique et réactif de l'écoulement a une influence certaine (positive ou négative) sur l'amplitude et la fréquence des oscillations (Féraille, 2004; Fabignon *et al.*, 2003). Très vite, l'acoustique des moteurs à propergol solide est suspectée de provoquer les oscillations de pression au sein des lanceurs mentionnés. En effet la régression des blocs de propergol et l'injection pariétale de gaz, provoquées par la combustion au cours du tir, impliquent que l'acoustique de ces moteurs est plus complexe que les modes longitudinaux d'un simple conduit semi-ouvert. Bien que parfaitement décrite analytiquement grâce aux travaux de Flandro et Majdalani (Majdalani et Flandro, 2002; Flandro et Majdalani, 2003), l'acoustique est néanmoins écartée car d'une part la fréquence des oscillations ne correspond pas exactement aux fréquences des modes acoustiques calculés (Brown *et al.*, 1981) et d'autre part elle ne permet pas d'expliquer les sauts observés entre les glissements fréquentiels.

Se développe alors l'idée que ces oscillations résultent d'un couplage (à préciser) entre l'acoustique et des détachements tourbillonnaires. C'est Flandro (Flandro et Jacobs, 1973) qui, le premier, propose un scénario et un modèle de couplage entre un détachement tourbillonnaire et une onde acoustique. Le cycle de couplage est le suivant : un tourbillon se forme au sein du moteur, par exemple au niveau d'une couche de cisaillement provoquée par une irrégularité géométrique ; puis ce tourbillon est convecté vers la sortie et passe le col sonique de la tuyère. Le passage du col génère une onde acoustique qui remonte dans la direction opposée à l'écoulement et vient exciter le détachement tourbillonnaire, créant un phénomène auto-entretenu. La répétition du passage des tourbillons par le col de la tuyère génère les oscillations de pression.

Il convient d'identifier trois sources différentes de détachements tourbillonnaires au sein d'un moteur à propergol solide : le Vortex Shedding d'Angle (VSA), le Vortex Shedding d'Obstacle (VSO) et le Vortex Shedding Pariétal (VSP). Ces trois détachements tourbillonnaires sont illustrés sur la figure 1.3. Le VSA est provoqué par le chambrage arrière qui conduit au développement d'une couche de cisaillement pouvant mener au développement de tourbillons. Le VSO est lié aux protections thermiques : au cours du tir le bloc de propergol se consume et son épaisseur diminue, contrairement aux protections thermiques de face qui forment alors un obstacle pour le fluide (comme sur la figure 1.1). Enfin le VSP est provoqué par une instabilité intrinsèque de l'écoulement au sein du moteur proche de la paroi. Il a été découvert numériquement par Lupoglazoff et Vuillot (1996). Les trois types de tourbillons peuvent être étudiés et visualisés numériquement, comme l'illustre la figure 1.3 tirée de Fabignon *et al.* (2003).

De ces trois mécanismes, il est possible de montrer que le VSP est la source essentielle des oscillations de pression. Les autres mécanismes coexistent également et participent au phénomène, mais c'est bien le VSP qui en est le moteur. Pour le démontrer, l'ONERA et plus particuliè-

3. Les instabilités liées à la combustion du propergol, souvent simplement nommées « instabilités de combustion » sont à distinguer des instabilités liées à la combustion des particules d'aluminium, instabilités découvertes très récemment et associées au phénomène d'ITHAC (Instabilité THermoACoustiques).

FIGURE 1.4. – Visualisation des structures tourbillonnaires de type VSP dans le montage VECLA avec la méthode PLIF (Planar Laser Induced Fluorescence) ; dans Ugurtas (2000).

rement l'unité LP (Laboratoire Propulsion) du DMAE [4] (Département des Modèles pour l'Aérodynamique et l'Énergétique) s'est appuyé sur des tirs de moteurs à échelle réduite au travers des programmes ASSM (Aerodynamics of Segmented Solid Motors) et POP (Pressure Oscillations Program) financés en grande partie par le CNES. Fabignon *et al.* (2003) et Prévost *et al.* (2005) proposent d'excellentes synthèses des travaux effectués sur le sujet et des conclusions de ces deux programmes. Plus particulièrement, Prévost *et al.* (2005) ont d'abord montré qu'il est possible de faire des essais à échelle réduite tout en restant représentatif du moteur P230 réel grâce aux montages aux échelles 1/15e (LP6) et 1/35e (LP10). Puis ils ont montré, notamment à l'aide du montage modulable à l'échelle 1/35e LP9, que même sans protection thermique de face ni chambrage arrière, c'est-à-dire même sans VSA ni VSO, les glissements fréquentiels sont retrouvés. Ceci permet d'identifier le VSP comme étant l'origine fondamentale des oscillations de pression. Une synthèse complète des différentes étapes depuis l'observation des oscillations de poussée jusqu'au VSP est également disponible dans Chedevergne (2007).

Les trois phénomènes de détachements tourbillonnaires (VSA, VSO, VSP) étant purement hydrodynamiques, il est possible de les étudier à l'aide de montages en gaz froid où l'écoulement issu de la combustion du propergol est représenté par une injection d'air normal à la paroi. Ces montages en gaz froid (donc sans combustion) sont souvent désignés dans la suite du document par des veines à paroi débitante ou bien des conduits à paroi débitante puisqu'ils consistent dans la plupart des cas en un canal semi-ouvert dans lequel on injecte un fluide à travers la paroi latérale.

Il existe de nombreux montages en gaz froid dont on peut trouver une liste partielle dans Gazanion (2014) (tableau 1.1 page 15). Au niveau européen, citons le montage du VKI (Anthoine, 2000), le montage MICAT (Montage d'Investigation du Couplage Acoustique-Tourbillon) de l'institut Pprime (Couton *et al.*, 1996; Vétel *et al.*, 2005), le montage VECLA (Veine d'Étude de la Couche Limite Acoustique) de l'ONERA (Ugurtas, 2000) et enfin le montage VALDO (Veine Axisymétrique pour Limiter le Développement des Oscillations), également de l'ONERA (Avalon et Lambert, 2001; Avalon *et al.*, 2005), présenté plus en détails en 2.3. Ces montages en gaz en froid permettent de reproduire à faible coût mais de manière représentative, d'un point de vue hydrodynamique, l'écoulement non réactif au sein des moteurs à propergol solide pour de nombreuses configurations géométriques et vitesses d'injection. L'utilisation d'un « gaz froid » permet également de faciliter la métrologie et l'observation, rendues délicates dans les moteurs réels en raison des conditions de pression et de température. Avec le montage VECLA, il est par exemple possible de visualiser les détachements tourbillonnaires associés au VSP comme le montre la figure 1.4.

Dans tous les données issues de tirs réels, on montre que les ODP ne se développent pas tout le long du tir : pour certains moteurs elles se développent au début du tir mais pas ensuite, pour d'autres c'est l'inverse. Pour les montages en gaz froid, qui ont un rayon interne constant, ce phénomène se traduit par le fait que les oscillations n'apparaissent que pour certaines valeurs de la vitesse d'injection. Sur la figure 1.2 correspondant au lanceur Ariane 5, on constate par exemple que les oscillations n'apparaissent que dans la deuxième moitié du tir. Pour le VSP c'est le régime de l'écoulement, laminaire ou turbulent, qui est suspecté de jouer un rôle prédominant

4. Suite à une récente réorganisation de l'ONERA, le DMAE et le DEFA (Département Énergétique Fondamentale et Appliquée) ont fusionné pour donner le DMPE (Département Multi-physique pour l'Énergétique).

dans l'explication de ce phénomène.

1.2. La transition laminaire-turbulent dans les moteurs à propergol solide

La question du régime de l'écoulement dans les moteurs à propergol solide a d'abord intéressé les chercheurs en combustion qui ont cherché à améliorer les modèles 1D d'évolution de la pression au sein du moteur en fonction de la distance au fond avant. La combustion du propergol dépend effectivement de cette pression ainsi que du régime de l'écoulement. Toutefois, aucune mesure n'a permis jusqu'à présent d'étudier ce régime d'écoulement dans le cas de moteurs réels (en gaz chaud). L'une des premières études expérimentales de la transition laminaire-turbulent dans les conduits à paroi débitante en gaz froid a été effectuée dès 1967 par Yagodkin (1967) qui a tenté de déterminer une corrélation entre le nombre de Reynolds d'injection et l'abscisse de transition, c'est-à-dire la position axiale à laquelle est identifiée la transition et au-delà de laquelle l'écoulement cesse d'être laminaire. La transition laminaire-turbulent dans le cas d'un conduit à paroi débitante est bien différente d'une transition classique de type couche limite. En particulier, l'identification de la transition ne peut pas se résumer à l'observation des profils de vitesse moyenne car ceux-ci sont très semblables en régime laminaire et en régime turbulent au contraire de la modification des profils de couches limites. Il est donc nécessaire de définir d'autres critères permettant d'identifier cette transition et sa position, en se basant par exemple sur les fluctuations de vitesse ou le coefficient de flux de quantité de mouvement.

1.2.1. Mise en évidence de plusieurs régimes d'écoulement

La mise en évidence de plusieurs régimes d'écoulement dans les conduits ou veines à paroi débitante a été effectuée indépendamment par plusieurs auteurs. Pour la clarté de l'exposé, seuls certains travaux sont présentés ici, mais d'autres auteurs ont activement étudié la question de la transition (Beddini, 1986; Dunlap *et al.*, 1990). Du côté expérimental, Traineau *et al.* (1986) ont mis en place un montage en gaz froid (veine rectangulaire) destiné à l'étude de cet écoulement. Notamment en traçant les profils longitudinaux d'intensité turbulente, ils ont montré l'existence de trois zones : une région laminaire, proche du fond avant, où les profils de vitesses sont identiques aux profils théoriques en fluide parfait incompressible [5] ; une zone de transition, caractérisée par un fort accroissement de l'intensité turbulente ; puis une zone turbulente plus en aval. Du côté numérique, Apte et Yang (2003) ont reproduit l'expérience de Traineau avec une simulation LES. Ils ont retrouvé la présence en amont d'une zone laminaire avec des structures tourbillonnaires (de type VSP, bien qu'elles ne soient pas désignées comme telles) puis la déstructuration de ces tourbillons dans une zone que les auteurs qualifient de zone de transition et enfin une zone turbulente en aval. Pour distinguer ces différentes zones, ils se sont appuyés notamment sur le coefficient de flux de quantité de mouvement, les fluctuations de vitesse ainsi que sur la densité spectrale de puissance de la pression. Dans leur simulation, tout comme dans le montage de Traineau, le débit de masse est imposé à travers la paroi débitante. Comme la densité du fluide décroît avec la distance au fond avant en raison de l'accélération du fluide, la vitesse d'injection augmente avec la distance au fond avant pour conserver le débit massique imposé. Les auteurs remarquent que cette augmentation de la vitesse d'injection permet d'empêcher la pénétration de la turbulence dans une zone très proche de la paroi, et ce jusqu'à la sortie de la veine.

Dans le cas du montage VALDO, Gazanion *et al.* (2013) déterminent la position de la transition en définissant un indicateur (noté $\mathcal{C}$) combinant trois critères :

— la densité spectrale d'énergie : en régime laminaire, les structures instationnaires observées sont celles du VSP, associées à des fréquences connues et relativement faibles. En revanche, en régime turbulent le spectre est beaucoup plus large : de petites structures se développent, associées notamment à des fréquences plus élevées. Le spectre du VSP étant connu grâce

5. Ce profil théorique est présenté au 1.4.

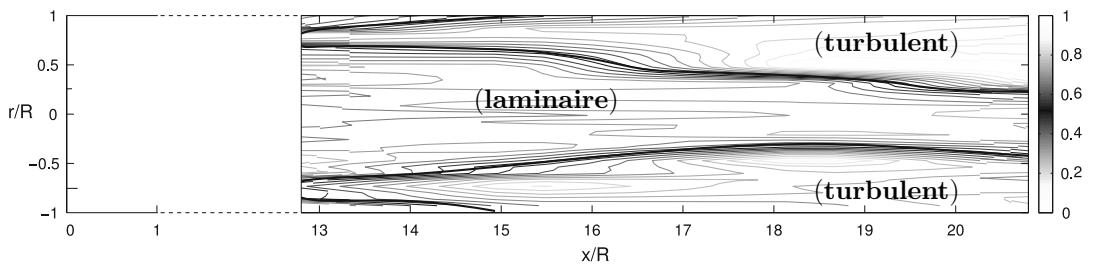


FIGURE 1.5. – Visualisation de la transition laminaire-turbulent par le tracé des iso-contours de l'indicateur $\mathcal{C}$: au cœur du conduit et sur une grande partie du fond avant l'écoulement est laminaire, il est en revanche turbulent à proximité des parois suffisamment loin du fond avant. La ligne de transition se situe au niveau du contour $\mathcal{C} = 0{,}5$; dans Gazanion *et al.* (2013).

aux résultats de stabilité[6], il est possible détecter la transition en faisant le ratio de la densité spectrale d'énergie associée au VSP (identifié par la plage en fréquences connue théoriquement) et de l'énergie totale des signaux instationnaires. Si ce ratio est proche de un, seules les structures du VSP sont présentes et le régime est laminaire, tandis que si ce ratio est proche de zéro, le régime est turbulent, la plage des fréquences instables étant très réduite par rapport à celle de la turbulence ;

— le facteur d'auto-corrélation du signal instationnaire : la turbulence est un régime se caractérisant par la perte de structures cohérentes tandis que les tourbillons liés au VSP sont des structures cohérentes. En calculant l'auto-corrélation d'un signal instationnaire de vitesse par exemple, il est possible de déterminer la nature du signal : laminaire, transitionnel ou turbulent ;

— les statistiques : il est possible de différencier le spectre caractéristique du régime laminaire, composé de raies distinctes associées au VSP, du spectre associé au régime turbulent composé d'un continuum de fréquence avec une répartition caractéristique. Ceci permet donc de déterminer si le spectre obtenu à une position donnée se rapproche plus d'un spectre associé au régime laminaire ou d'un spectre associé au régime turbulent.

À l'aide de cet indicateur $\mathcal{C}$, les auteurs montrent notamment que la « ligne » ou la « zone » de transition ne correspond pas à une position axiale donnée mais revêt une réalité plus complexe : pour une abscisse donnée, il peut coexister au sein du conduit un cœur laminaire et une zone proche paroi turbulente. Ces résultats sont illustrés par la figure 1.5 où sont tracés les iso-contours de l'indicateur $\mathcal{C}$.

1.2.2. Influence de la turbulence sur les instabilités

Dans sa thèse, Gazanion (2014) s'est intéressé à l'influence de la transition sur le VSP via des simulations URANS. Dans un premier temps, il a montré qu'une simulation URANS où le modèle de turbulence est actif dans tout le domaine de calcul, ne voit pas de structure de type VSP se développer. Tandis que pour un maillage et des paramètres numériques identiques, une simulation sans modèle de turbulence voit se développer les structures VSP. Dans un second temps, Gazanion a effectué une simulation URANS avec transition imposée selon la ligne définie par l'indicateur $\mathcal{C}$ qui active le modèle de turbulence dans une certaine région de l'écoulement. Pour déterminer cette dernière, il s'est appuyé sur ses observations du montage VALDO. Toutefois, comme la figure 1.5 le rappelle, il y a une part de subjectivité sur les frontières de cette zone de transition, comme par exemple l'appréciation de son épaisseur. Gazanion a donc fait varier plusieurs paramètres définissant sa zone de transition imposée. Dans tous les cas, il ressort que la zone de transition,

6. Les résultats de stabilité sont présentés au 1.3.

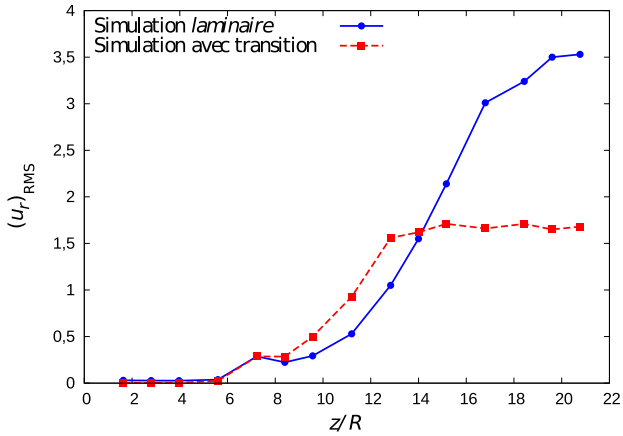


FIGURE 1.6. – Évolution axiale des fluctuations de vitesse radiale à $r/R_p = 0{,}8$; extraite de Gazanion (2014). La transition est imposée à partir de $z/R_p \approx 12$ (configuration cylindrique).

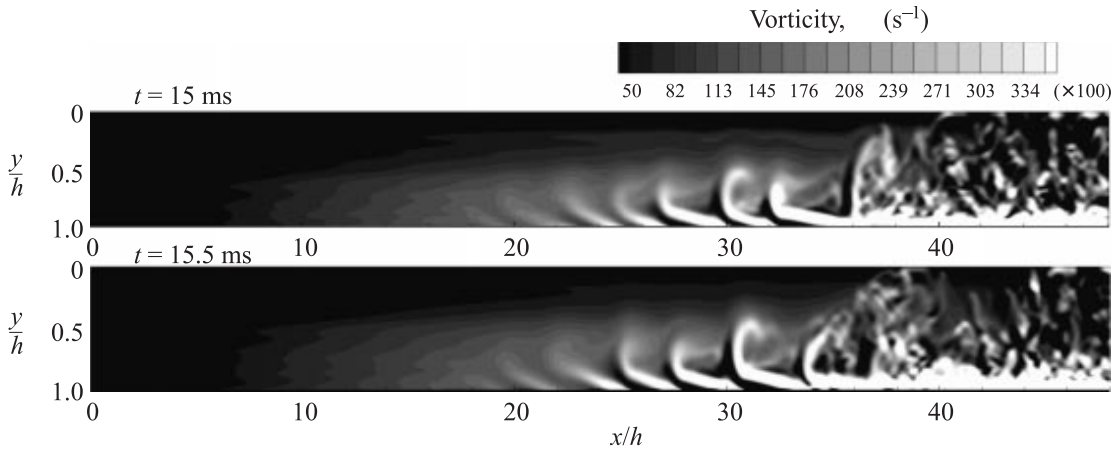
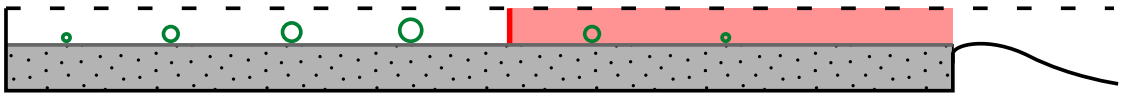


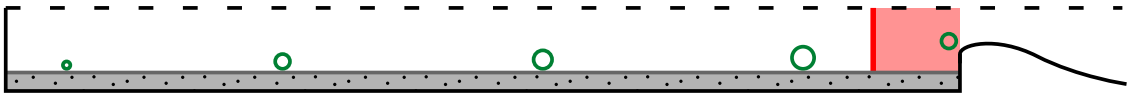
FIGURE 1.7. – Iso-contours de la composante hors-plan de la vorticité (ici Ω_z), moyennée dans la direction hors-plan (ici $\boldsymbol{e}_z$) pour deux instants ; dans Apte et Yang (2003) (configuration veine de section rectangulaire).

puis la zone turbulente ont un effet dissipatif sur les structures tourbillonnaires du VSP. Ce résultat est visible sur la figure 1.6 sur laquelle est tracée l'évolution axiale des fluctuations de vitesse radiale dans le cas d'une simulation sans modèle de turbulence et dans le cas URANS avec transition imposée. Dans le cas URANS, on observe la saturation des fluctuations de vitesse au niveau de la zone de transition ($z/R_p \approx 12$) tandis que dans le cas sans modèle de turbulence, les fluctuations croissent sur une distance beaucoup plus longue. Sur la figure 1.7 extraite de l'article de Apte et Yang (2003) sont tracés des iso-contours de la composante de la vorticité normale au plan représenté. On rappelle que cette simulation concerne une veine de section rectangulaire. On observe le développement de structures tourbillonnaires de type VSP pour $20 \leqslant x/h \leqslant 35$, puis la déstructuration progressive et importante de ces structures cohérentes à partir de $x/h \approx 35$. Le facteur d'environ 2 entre la position de transition z/R_p ou h/R_p dans le cas d'un conduit de section circulaire et celle du cas d'une veine de section rectangulaire a été régulièrement relevé dans les simulations ou les expériences, mais aussi dans les études de stabilité linéaire comme le montre par exemple Griffond (2001).

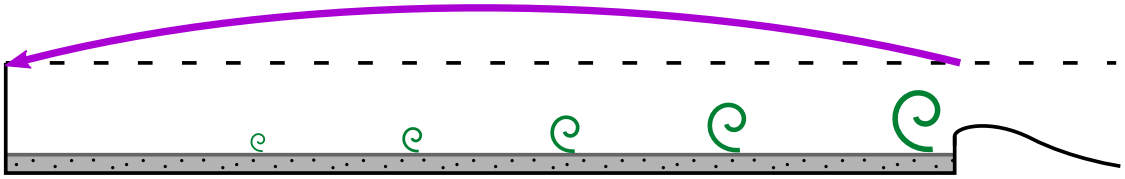
Au total, ces simulations et les deux dernières figures illustrent la dissipation du Vortex-Shedding Pariétal par la turbulence. En revanche, ces simulations URANS ne permettent pas de déterminer la position de la transition ni de calculer la zone de transition. Pour pouvoir calculer cette dernière et s'affranchir de l'imposition d'une position de transition, Gazanion a effectué des simulations LES de la configuration VALDO. Ces simulations ont permis de calculer les dif-



(a) Au début du tir, le rapport d'aspect $\mathcal{L}/R_p$ du moteur conduit à une longueur de la zone turbulente suffisamment grande pour dissiper les structures VSP qui émergent en amont.



(b) Au cours du tir, le rapport d'aspect $\mathcal{L}/R_p$ diminue, la longueur de la zone turbulente diminue et n'est plus suffisamment grande pour dissiper entièrement les structures VSP qui émergent en amont. Les tourbillons créés impactent la tuyère.



(c) Le passage des tourbillons par la tuyère génère une onde acoustique qui remonte vers l'amont du moteur et excite à son tour le VSP.

FIGURE 1.8. – Scénario d'apparition des ODP ; schémas fournis par B. Gazanion. La transition est ici représentée schématiquement à une abscisse constante pour faciliter l'explication mais revêt en réalité une plus grande complexité (voir figure 1.5).

férentes zones de l'écoulement, de montrer la dissipation des structures VSP par la turbulence, tout en les confrontant aux données expérimentales. Les limites de ces simulations se situent au niveau de la représentativité acoustique : en plus d'un décalage en fréquence du mode acoustique longitudinal d'environ 10%, les amplitudes des fluctuations obtenues sont trop élevées par rapport à celles mesurées dans montage expérimental. C'est la condition de sortie utilisée, une condition de type pression imposée à la sortie du conduit, qui est suspectée d'avoir dégradé cette représentativité acoustique.

1.2.3. Scénario envisagé

À partir de ces différents résultats et de la constatation expérimentale que la position de la transition semble varier en fonction du rapport d'aspect $\mathcal{L}/R_p$, le scénario suivant est aujourd'hui envisagé. Au début du tir, le rapport d'aspect $\mathcal{L}/R_p$ du moteur conduit à une longueur de la zone turbulente suffisamment grande pour dissiper les structures VSP qui émergent en amont (figure 1.8a). Au cours du tir, le rapport d'aspect $\mathcal{L}/R_p$ diminue avec la régression du bloc de propergol, la longueur de la zone turbulente diminue et n'est plus suffisamment grande pour dissiper complètement les structures VSP qui émergent en amont (figure 1.8b). Le passage des tourbillons par le col sonique de la tuyère génère une onde acoustique qui remonte vers l'amont du moteur et excite à son tour le VSP (figure 1.8c). Le couplage est réalisé et les oscillations de pression et de poussée sont observées.

Dans les différents montages en gaz froid, dès que la zone laminaire est suffisamment longue, les structures VSP se développent. L'étude théorique de l'instabilité conduisant au Vortex-Shedding Pariétal est décrite ci-dessous, au travers de l'étude de stabilité linéaire des moteurs à propergol solide.

1.3. Présentation des études de stabilité linéaire des moteurs à propergol solide

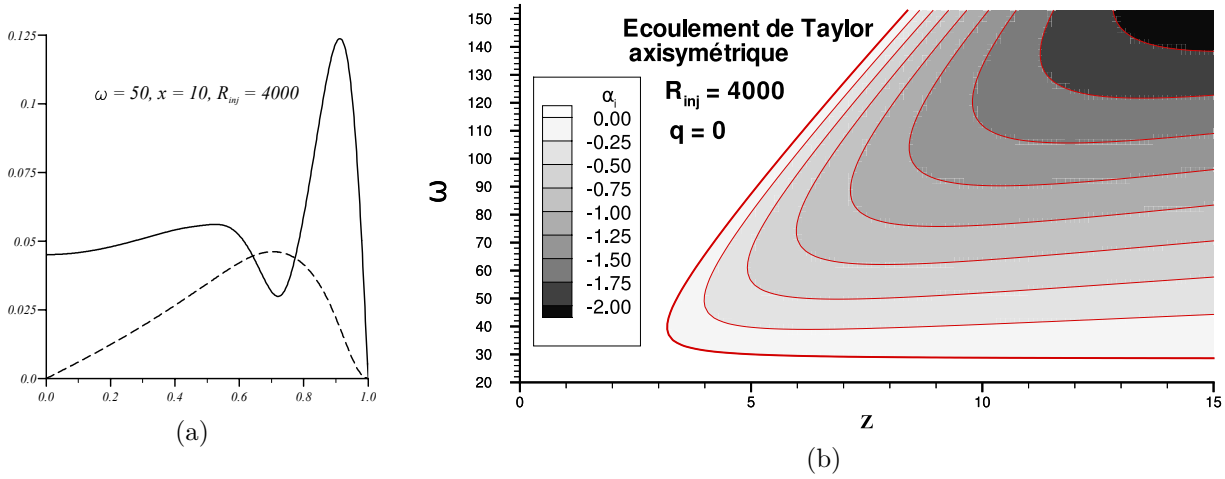
L'étude de la stabilité linéaire des moteurs à propergol solide a fait l'objet de nombreuses recherches et en particulier de plusieurs thèses réalisées à l'ONERA et soutenues par le CNES. À ce titre on peut citer chronologiquement les thèses de Griffond (2001), Féraille (2004), Chedevergne (2007), Boyer (2012) et enfin Gazanion (2014). On distingue deux approches : la stabilité linéaire dite « locale » et la stabilité linéaire dite « biglobale », plus générale mais d'une complexité supérieure. Seuls les principaux résultats obtenus jusqu'ici sont présentés ci-après, les deux approches étant détaillées au chapitre 2.1. Rappelons simplement qu'une étude de stabilité linéaire consiste à étudier l'évolution d'une perturbation surimposée à un écoulement moyen, appelé écoulement de base. Cet écoulement de base fait l'objet du paragraphe 1.4.

1.3.1. Résultats des études de stabilité linéaire locale

La stabilité linéaire locale des écoulements en configuration plane ou cylindrique a été étudiée par Griffond (2001). Précisons que l'adjectif « local » est utilisé pour spécifier que l'analyse de stabilité est réalisée à une position axiale fixée. Les travaux de Griffond ont montré l'existence de modes (c'est-à-dire une fréquence associée à des fluctuations de vitesse et de pression) dont les fluctuations de vitesse axiale possèdent un maximum proche de la paroi, ce qui est directement observé dans le montage VECLA où les tourbillons associés au VSP semblent émerger de la paroi. Un exemple de ces fluctuations de vitesse est disponible sur la figure 1.9a. Griffond a aussi mis en évidence une position axiale critique au-delà de laquelle l'écoulement est instable spatialement. Sur la figure 1.9b sont tracées les iso-valeurs du taux d'accroissement spatial α_i des modes de stabilité en fonction de la pulsation temporelle ω. Un taux d'accroissement positif signifie une croissance axiale exponentielle et donc une forte amplification de la perturbation associée : l'écoulement est instable. Ainsi sur la figure la position axiale critique pour $\omega = 40$ est 3 tandis qu'elle vaut 5 pour $\omega = 90$. Par ailleurs, il est montré que lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à 1000, celui-ci a peu d'influence sur les résultats de stabilité, ce constat permettant à nouveau de distinguer ces études de stabilité de celles d'écoulements plus classiques comme ceux de Poiseuille ou de couche limite. Enfin, la comparaison des résultats en configuration plane et cylindrique montre que le cas cylindrique est beaucoup plus instable que le cas plan et que les fréquences associées au cas cylindrique sont plus élevées que dans le cas plan : celles du cas cylindrique sont environ 2 fois plus élevées que dans le cas plan. Il est donc nécessaire d'adopter le formalisme cylindrique pour une description complète et précise du phénomène. Dans tous ces résultats, l'écoulement n'est pas réactif, c'est-à-dire que les effets de combustion ne sont pas pris en compte. Féraille (2004) a toutefois étudié la stabilité d'un écoulement plan diphasique avec des particules d'aluminium inertes au sein de l'écoulement. Ses résultats sont proches de ceux évoqués précédemment : il n'y a pas de différence qualitative (aucun nouveau mode n'est apparu) et l'augmentation de la concentration des particules peut avoir un effet stabilisant ou au contraire déstabilisant suivant les modes. Cela montre que le caractère diphasique de l'écoulement influe peu sur la stabilité de l'écoulement [7].

Cependant, effectuer une étude de stabilité locale revient à supposer l'écoulement « parallèle » ou du moins faiblement non parallèle. Or l'écoulement en configuration plane ou cylindrique n'est ni parallèle ni même faiblement non parallèle : sur l'axe $U_r \ll U_z$ tandis qu'à la paroi $U_z \ll U_r$. Il n'y a donc pas de direction privilégiée. Ces considérations ont conduit à utiliser une autre approche de stabilité linéaire : la stabilité linéaire biglobale.

7. La limite de cette conclusion est celle du caractère non réactif de l'écoulement, il n'y a pas de résultats concernant l'influence du caractère diphasique sur un écoulement réactif.



(a) (b)

FIGURE 1.9. – Illustration des résultats de stabilité linéaire locale de Griffond ; dans Griffond (2001). (a) Fonctions propres : vitesse radiale (tirets) et axiale (ligne continue). (b) Iso-valeurs du taux d'amplification spatial.

1.3.2. Résultats des études de stabilité linéaire biglobale

C'est à Chedevergne (2007) et Boyer (2012) que l'on doit les résultats de stabilité linéaire biglobale en configuration cylindrique. Il faut noter que l'obtention du spectre en stabilité biglobale est numériquement beaucoup plus délicate qu'en stabilité locale classique. Cette difficulté s'explique par deux raisons : d'une part la taille des problèmes matriciels associés est bien plus importante et nécessite une résolution numérique particulière (voir chapitre 4), et d'autre part la convergence en maillage des résultats est plus ardue. Dans sa thèse, Chedevergne montre ainsi que le maillage utilisé pour les calculs a une influence non négligeable sur le spectre obtenu, ce qui est indésirable. L'origine de cette influence est démontrée analytiquement par Boyer dans Boyer *et al.* (2013b) dans le cas mono dimensionnel. Il montre par exemple la forte sensibilité du spectre de stabilité vis-à-vis de la condition limite en entrée du domaine. Ainsi toute erreur machine, si petite soit elle, a une influence sur le spectre final. Pour pallier cette influence indésirable, Boyer effectue les calculs de stabilité sur un domaine situé à une certaine distance du fond avant, par exemple entre $[Z_{in}, Z_{out}]$, où $Z_{in} = 4R_p$ est l'entrée du domaine de calcul. Plutôt que d'imposer une vitesse nulle au fond avant, cette astuce permet de « noyer » l'erreur machine dans une vitesse beaucoup plus grande un peu plus loin du fond avant.

Le premier résultat remarquable de l'étude de stabilité linéaire biglobale fait apparaître que le spectre de stabilité est discret [8] : seul un nombre fini de modes de fréquences distinctes peut émerger dans l'écoulement perturbé. Ce résultat peut d'ailleurs être observé sur la figure 1.10 où le spectre de vitesse pour plusieurs positions de mesures dans le montage VALDO est représenté. On peut non seulement compter un nombre fini de pics mais aussi constater que les fréquences de ces pics sont en excellent accord avec la théorie.

Autre résultat important à souligner, les modes sont tous temporellement amortis mais s'amplifient fortement spatialement dans la direction axiale. Il faut donc une source constante d'excitation pour voir émerger le VSP ; mais si cette source existe, alors l'amplification spatiale conduit à faire émerger ces quelques fréquences discrètes du bruit ambiant (particulièrement important en combustion).

Grâce à ces études, les calculs de stabilité permettent d'obtenir un certain nombre de modes pour un instant du tir fixé, c'est-à-dire un couple (V_{inj}, R_p). Chaque mode de stabilité est associé à une pulsation temporelle ω, adimensionnée. Les calculs de stabilité montrent que l'influence du nombre de Reynolds d'injection, $V_{inj}R_p/\nu$, sur la partie réelle de ω, notée ω_r, est négligeable. Autrement dit le couple (V_{inj}, R_p) n'a quasiment pas d'influence sur ω_r. En revanche, la fréquence

8. Ce résultat avait déjà été démontré par Féraille (2004) en configuration plane.

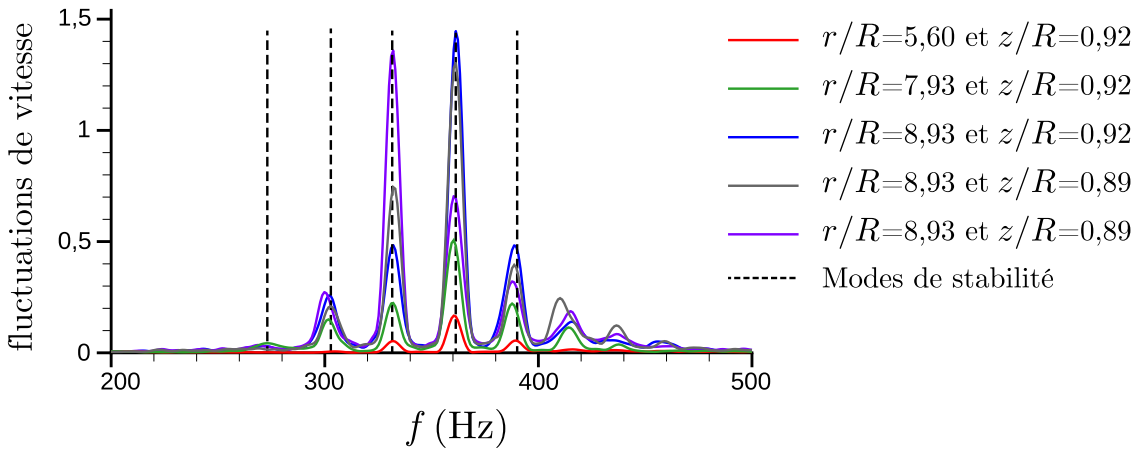


FIGURE 1.10. – Spectre de vitesse pour plusieurs positions de mesures dans le montage VALDO avec $V_{inj} = 1{,}05\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (tracés en couleurs) en comparaison avec les modes propres théoriques (tracés en pointillés) ; dans Chedevergne (2007).

dimensionnelle, f^* en Hertz, est liée à la pulsation ω de la manière suivante :

$$f^* = \frac{V_{inj}}{2\pi R_p}\omega_r \,, \tag{1.1}$$

et dépend donc du couple (V_{inj}, R_p). Comme la vitesse d'injection V_{inj} varie peu au cours du tir, on constate que la fréquence dimensionnelle f^* d'un mode de stabilité va décroître au cours de l'augmentation du rayon R_p au cours du tir (augmentation causée par la régression du bloc de propergol, voir figure 1.1).

Avec le lien entre ω et f^*, et connaissant l'évolution de R_p au cours du tir, il est possible de déterminer l'évolution des fréquences de chaque mode au cours du temps et de les comparer aux résultats disponibles. Les résultats de stabilité ont ainsi été comparés à des simulations DNS mais aussi aux résultats expérimentaux disponibles : un excellent accord est observable sur la figure 1.11. Sur cette figure, on a reproduit les graphiques temps/fréquence obtenus avec la TFFG du tir LP9t24[9] et du tir 510 d'Ariane 5. Par dessus, l'évolution temporelle d'un certain nombre de modes de stabilité est représentée en traits noirs. On constate que si tous les modes calculés ne sont pas amplifiés, les glissements en fréquence correspondent bien à des modes calculés. Les discontinuités observables sur l'évolution temporelle des modes de stabilité se justifient par l'évolution « brutale » de la géométrie. Pour calculer la fréquence f^* d'un mode, on calcule l'évolution temporelle du rayon R_p et de la vitesse d'injection V_{inj}. Dans le cas d'une géométrie avec plusieurs blocs et des intersegments, comme dans les deux cas représentés, un rayon moyen des surfaces en combustion est calculé via une procédure détaillée dans la thèse de Chedevergne (2007). Lors du découvrement d'un bloc de propergol (par exemple le chambre arrière pour le tir LP9t24), ce dernier cesse de débiter subitement et entraîne une évolution brutale du rayon moyen qui explique les discontinuités observables sur les glissements en fréquences. Il est remarquable d'observer que sur la figure 1.11b, cette discontinuité est présente à la fois sur les signaux provenant du tir 510 d'Ariane 5 et sur les résultats de stabilité.

Le scénario retenu est donc qu'à un instant donné, la fréquence d'un mode VSP croise celle d'un mode acoustique : il y a alors excitation du mode VSP qui, de par son évolution naturelle (lien entre ω et f^* via R_p et V_{inj}), s'éloigne progressivement du mode acoustique. N'étant plus excité, ce mode finit par s'amortir jusqu'à ce qu'un autre mode VSP croise la fréquence d'un nouveau mode acoustique. Toutefois Boyer (2012) montre à l'aide de simulations DNS (Direct

9. Le montage correspondant au tir LP9t24 est constitué de deux blocs de propergol cylindriques de section circulaire. Entre les deux blocs se trouve un intersegment de 5 mm mais pas de protection thermique de face. La tuyère est intégrée et il y a donc un chambrage à l'arrière. L'espace correspondant au segment S1 sur le P230 est laissé vide.

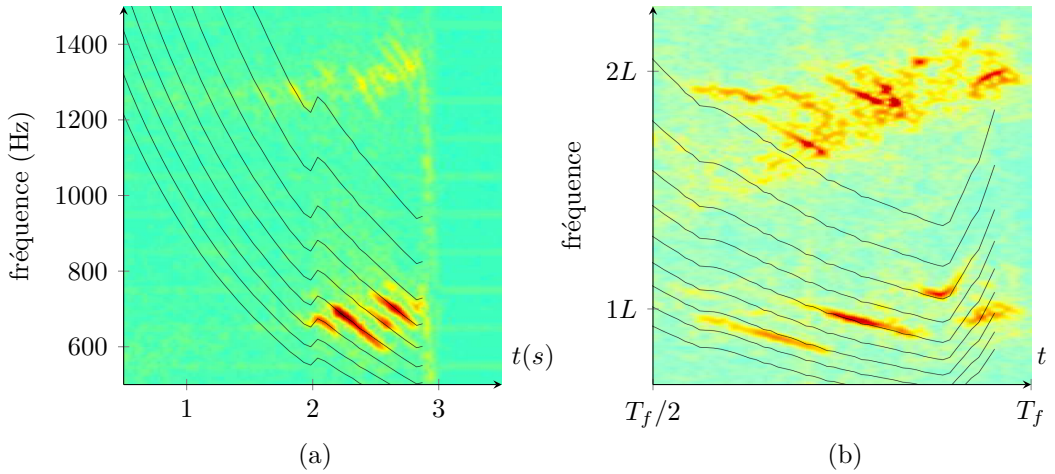


FIGURE 1.11. – Comparaison des résultats de stabilité biglobale avec (a) le signal PAV du tir LP9t24 et (b) le signal de l'accéléromètre de l'EAP 1 du tir 510 d'Ariane 5 ; dans Chedevergne (2007).

Numerical Simulation) que le seul couplage entre le VSP et l'acoustique ne suffit pas : il faut une perturbation supplémentaire et les intersegments présents entre les blocs de propergol sont d'excellents candidats.

Bien que remarquables, tous ces résultats se limitent à l'étude d'une géométrie de section circulaire. Ceci se justifiait de trois façons. Tout d'abord aux instants où sont observées les oscillations, la géométrie interne du P230 est circulaire car le seul segment étoilé, le segment S1, est entièrement brûlé. Ensuite l'hypothèse d'axisymétrie permet de simplifier le problème : problème à deux dimensions (spatiales), possibilité d'utiliser une fonction de courant, etc. Enfin, ces études de stabilité s'appuient sur un écoulement de base qui représente l'écoulement moyen au sein des moteurs à propergol solide. La section suivante détaille la représentation de cet écoulement dans la littérature.

1.4. Représentation de l'écoulement moyen au sein des moteurs à propergol solide

Dans cette partie, on se propose de présenter les principaux résultats disponibles dans la littérature concernant la détermination de l'écoulement moyen au sein des moteurs à propergol solide.

1.4.1. Description de la configuration et liste des hypothèses

La configuration géométrique

Les moteurs à propergol sont représentés par des cylindres semi-ouverts de longueur $\mathcal{L}$, l'extrémité fermée étant la paroi du fond avant. La production de gaz par la combustion du propergol est représentée par une injection de fluide normale à la paroi notée V_{inj}. Cette vitesse est supposée uniforme sur toute la surface en combustion. Dans le cas d'une propulsion spatiale hybride, la paroi du fond avant peut être remplacée par une condition d'injection. La section du cylindre la plus couramment utilisée est le disque auquel on associe un rayon noté R_p. Cette configuration est donc souvent dénommée « conduit à paroi débitante ». Dans les solutions analytiques, les éléments tels que les protections thermiques de face, les intersegments et les tuyères ne sont pas représentés, mais rappelons qu'il est possible de construire un écoulement « équivalent » prenant

en compte l'effet moyen de ces éléments géométriques, hormis celui de la tuyère (voir Chedevergne (2007)).

Utilisation d'un gaz froid monophasique

L'écoulement recherché doit correspondre à celui des moteurs à propergol solide d'un point de vue hydrodynamique, les oscillations recherchées étant d'origine hydrodynamique. Les phénomènes de combustion ne sont donc pas représentés, sauf par l'injection pariétale. De plus, les particules d'aluminium ajoutées au propergol et présentes dans l'écoulement sont ignorées [10] afin de simplifier les calculs. Le fluide est donc représenté par un gaz froid monophasique comme de l'air. Ceci permet notamment de valider l'écoulement déterminé par comparaison aux données expérimentales des montages en gaz froid où de l'air est principalement utilisé.

L'adimensionnement

Dans la plupart [11] des travaux réalisés sur l'écoulement moyen au sein de la configuration étudiée, les longueurs sont adimensionnées par le rayon moyen de la veine R_p dans le cas cylindrique ou bien par la demie hauteur h de la veine dans le cas rectangulaire. Les vitesses sont adimensionnées par la vitesse d'injection V_{inj}, le temps par R_p/V_{inj} et la pression par $\rho {V_{inj}}^2$, où ρ est la masse volumique du fluide. Cet adimensionnement permet d'introduire un nombre de Reynolds qualifié « d'injection » car il fait intervenir V_{inj}, noté $\mathcal{R}_\mathrm{e} = V_{inj} R_p/\nu$ où ν est la viscosité cinématique du fluide.

Hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement

Dans le montage VALDO, la vitesse d'injection est typiquement de l'ordre de 1 m/s et conduit à un écoulement dont la vitesse, maximale en sortie, est d'environ 70 m/s soit un nombre de Mach d'au plus 0.2. Si l'étude de l'écoulement se limite à des longueurs de l'ordre de $11R_p$, le nombre de Mach maximal est d'au plus 0.1. Ce nombre de Mach relativement faible nous conduit à rechercher des solutions sans effet de compressibilité. Sauf mention contraire, l'écoulement sera donc supposé incompressible.

Hypothèse de stationnarité de l'écoulement

Une des hypothèses majeures pour la représentation de l'écoulement moyen au sein des moteurs à propergol solide est la stationnarité de celui-ci. Pour déterminer l'écoulement au sein de la configuration et pour mener les études de stabilité, on se place à un instant fixé du tir, c'est-à-dire que le rayon de la cavité R_p et la vitesse d'injection V_{inj} sont fixés. La justification de ce choix provient de la décorrélation des échelles de temps entre la combustion du propergol et les oscillations de pression. En effet, en prenant le cas du moteur à échelle réduite LP9 comme exemple, la vitesse de régression du bloc de propergol est de l'ordre du m/s et le diamètre est de l'ordre de 40 mm. Ceci donne une fréquence caractéristique de la régression du propergol l'ordre du Hertz, tandis que les oscillations de pression dans ce montage sont associées à des fréquences proches de 700 Hz. Il y a un donc un facteur d'environ 30 entre les deux échelles de fréquence. Parmi les résultats expérimentaux disponibles, le cas du lanceur Ariane 5 est finalement le plus critique car la vitesse de régression du bloc de propergol est de l'ordre du cm/s, le diamètre de l'ordre du mètre et les oscillations de pression sont associées à des fréquences proches de celles des premiers modes acoustiques longitudinaux, c'est-à-dire autour de la vingtaine de Hertz pour le premier mode. Il y a un donc un facteur 20 entre les deux échelles de fréquence pour le lanceur Ariane 5. Nous admettrons toutefois que ce rapport est suffisant pour considérer les échelles décorrélées.

10. Féraille (2004) a déterminé un écoulement prenant partiellement en compte ces particules.
11. Dans les travaux liés à l'acoustique, comme ceux de Majdalani, la vitesse du son c est utilisée pour adimensionner les vitesses. La définition du nombre de Reynolds est alors différente de celle du nombre de Reynolds d'injection.

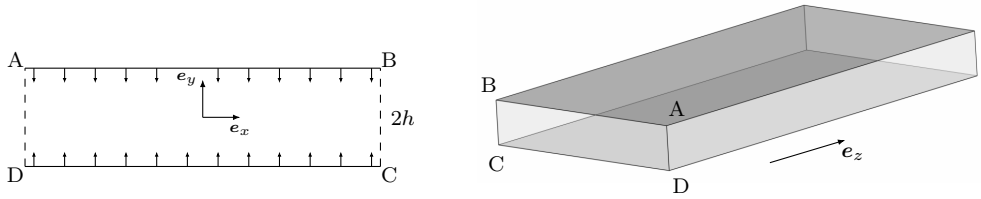


FIGURE 1.12. – Schéma de la configuration de veine rectangulaire.

1.4.2. La solution de Berman

Les premiers travaux au regard des écoulements au sein des conduits à paroi débitante sont à mettre au crédit de Berman (1953). Berman se place dans le cadre d'une veine à paroi débitante de section rectangulaire de longueur $\mathcal{L}$, comme représentée sur la figure 1.12. Dans son article, il suppose les parois « aspirantes » (le fluide sort de la veine par les parois, on parle alors de « succion ») et non « injectantes », mais le traitement du problème qu'il met en place est en fait indépendant du sens de circulation du fluide à travers les parois. La longueur $2h$ qui sépare les deux parois parallèles débitantes ou aspirantes est supposée petite devant l'autre dimension de la section, ce qui lui permet de considérer l'écoulement comme bidimensionnel. Il considère alors l'écoulement comme incompressible et plan. Le système de coordonnées cartésiennes est le suivant : un repère est attaché au centre de la veine, l'axe y est perpendiculaire aux deux parois débitantes et l'axe z est celui de la veine [12]. À ces deux coordonnées (y, z) est associé le champ de vitesse (v, w). Pour simplifier les explications, on suppose que $v(z = 0) = 0$. Les différentes hypothèses lui permettent d'introduire une fonction de courant ϕ telle que

$$v(y, z) = -\partial_z \phi \quad , \quad w(y, z) = \partial_y \phi \,, \tag{1.2}$$

en notant ∂_α la dérivée partielle par rapport à la variable α. L'originalité du travail de Berman réside dans la recherche d'une fonction de courant à variables séparées et une dépendance linéaire vis-à-vis de la coordonnée axiale : $\phi\colon (y, z) \mapsto zF(y)$. L'introduction de cette fonction de courant dans les équations de Navier–Stokes permet d'obtenir une unique équation régissant la seule fonction inconnue F :

$$F^{(4)} + \mathcal{R}_\mathrm{e} \left(F'^2 - FF'' \right)' = 0 \,. \tag{1.3}$$

À cette équation non linéaire du quatrième ordre sont associées 4 conditions limites (résultant de l'injection pariétale et de la symétrie axiale du problème) :

$$F(0) = F'(1) = F''(0) = 0 \quad , \quad F(1) = 1 \,. \tag{1.4}$$

Dans la suite de son article, Berman détermine à l'aide d'un développement asymptotique une solution de cette équation dans le cas de faibles nombres de Reynolds. Aujourd'hui, pour un nombre de Reynolds donné, l'équation (1.3) associée aux conditions limites (1.4) peut être résolue numériquement sur un poste de travail quelconque en moins d'une seconde. Dans le reste du manuscrit, on utilisera le terme de « solution de Berman » pour désigner la résolution numérique de l'équation de Berman et non le développement asymptotique valable pour les faibles nombres de Reynolds. Une fois la fonction F obtenue, la détermination du champ de vitesse est immédiate :

$$v(y, z) = -F(y) \quad , \quad w(y, z) = zF'(y) \,. \tag{1.5}$$

L'écoulement est donc linéairement accéléré dans la direction axiale. Quant à la pression, elle est déterminée par intégration des équations de quantité de mouvement suivant y et z. La question

12. Dans la plupart des études sur les veines de section rectangulaire, l'axe de la veine est l'axe x et l'axe perpendiculaire aux deux parois débitantes est l'axe y. Pour rester cohérent avec les coordonnées cylindriques, on préfère conserver l'axe z comme étant celui de la veine.

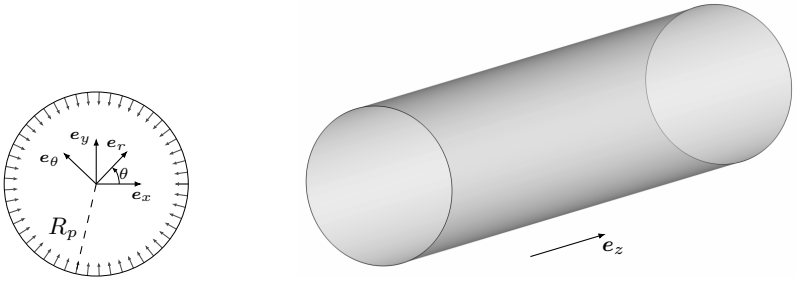


FIGURE 1.13. – Schéma de la configuration de veine cylindrique de section circulaire.

de l'existence et du nombre de solutions de l'équation de Berman a fait l'objet de nombreuses publications dans les années 1960 et 1970. Drazin (1992) fait une synthèse des différents études réalisées et résume les résultats de la façon suivante :

— lorsque l'écoulement est supposé symétrique, il existe une solution valable quel que soit le nombre de Reynolds ;
— toujours dans le cas d'un écoulement symétrique, deux solutions s'ajoutent à celle mentionnée dans le cas de l'aspiration et pour $|\mathcal{R}_\mathrm{e}| > 12$;
— dans le cas de l'injection, quel que soit $\mathcal{R}_\mathrm{e}$, il existe une unique solution et cette solution est symétrique.

C'est cette dernière conclusion qui nous intéresse particulièrement puisque les moteurs à propergol solide correspondent au cas avec injection.

Dans le cas d'un conduit cylindrique de section circulaire le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) est utilisé, comme illustré sur la figure 1.13. Dans cette configuration la fonction de courant $\phi\colon (r, z) \mapsto \phi(r, z)$ est introduite par :

$$U_r(r, z) = -\frac{1}{r}\partial_z\phi \quad , \quad U_z(r, z) = \frac{1}{r}\partial_r\phi\,. \tag{1.6}$$

De la même façon que dans le cas plan, la fonction de courant est supposée linéaire vis-à-vis de la coordonnée axiale : $\phi\colon (r, z) \mapsto zF(r)$ et l'équation de Berman et ses conditions limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \left[\left(\dfrac{F}{r}\right)\left(\dfrac{F'}{r}\right)' - \left(\dfrac{F'}{r}\right)^2\right]' - \dfrac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left[\dfrac{1}{r}\left(r\left(\dfrac{F'}{r}\right)'\right)'\right]' = 0\,, \\ \lim\limits_{r\to 0}\left(\dfrac{F'}{r}\right)' = \lim\limits_{r\to 0}\dfrac{F}{r} = F'(1) = 0,\ F(1) = 1\,. \end{cases} \tag{1.7}$$

1.4.3. La solution de Taylor–Culick

Si la solution de Berman est plus générale car elle prend en compte les effets visqueux, c'est souvent la solution en fluide parfait dite de « Taylor–Culick » qui est utilisée dans le domaine de la propulsion solide. Elle est à mettre au crédit de Taylor (1956) ainsi que de Culick (1966) qui l'a redécouverte et appliquée dans le cadre des moteurs à propergol solide. L'hypothèse supplémentaire par rapport à la solution de Berman est celle de fluide parfait, c'est-à-dire que les effets visqueux sont négligés. Avec cette hypothèse, il est possible d'écrire une unique équation faisant apparaître la vorticité dans la direction azimutale Ω_θ en appliquant le rotationnel aux équations de quantité de mouvement :

$$\partial_z\phi\partial_r\left(\Omega_\theta/r\right) - \partial_r\phi\partial_z\left(\Omega_\theta/r\right) = 0\,. \tag{1.8}$$

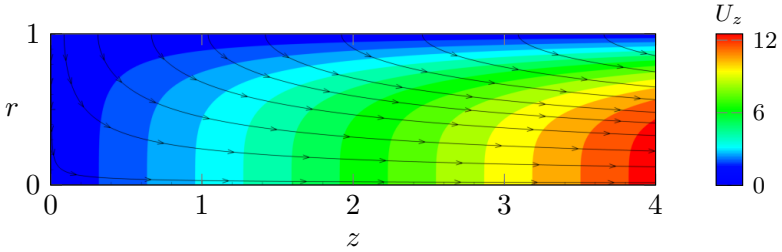


FIGURE 1.14. – Iso-contours de vitesse axiale et lignes de courant correspondant à la solution de Taylor–Culick dans une section longitudinale.

On pose alors $\Omega_\theta = r\lambda(\phi)$ où la fonction λ est choisie comme $\lambda\colon \phi \mapsto C^2\phi$, C étant une constante. On obtient alors :

$$\partial_r^2\phi - \frac{1}{r}\partial_r\phi + \partial_z^2\phi + C^2r^2\phi = 0\,, \tag{1.9}$$

les conditions limites étant toujours obtenues grâce à l'injection et à la symétrie du problème. De façon similaire à la méthode de Berman, la fonction de courant est alors recherchée avec une dépendance linéaire vis-à-vis de la coordonnée axiale. Sauf que dans ce cas, une solution explicite peut être déterminée pour ϕ, à savoir [13] $\phi\colon (r,z) \mapsto z\sin(\pi r^2/2)$. Ceci permet d'avoir une expression explicite du champ de vitesse et de pression, c'est la solution de Taylor–Culick :

$$\begin{cases} U_r = \dfrac{-1}{r}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}r^2\right)\,, \\ U_z = \pi z\cos\left(\dfrac{\pi}{2}r^2\right)\,, \\ P = P_0 - \dfrac{\pi^2}{2}z^2 - \dfrac{1}{2r^2}\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}r^2\right)\right]^2\,, \end{cases} \tag{1.10}$$

où la pression est définie à une constante près P_0. Si la solution de Taylor–Culick a rencontré tant de succès, c'est parce que celle-ci possède les particularités suivantes. Tout d'abord cette solution s'exprime avec des fonctions usuelles (c'est le caractère explicite de la solution), ce qui facilite son étude et son utilisation pour des approches de stabilité linéaire par exemple. Ensuite, bien qu'elle soit solution des équations d'Euler et non des équations de Navier–Stokes, cette solution vérifie la condition de non-glissement au niveau de la paroi d'injection, c'est-à-dire que $U_z(r=1)=0$. Par ailleurs il est possible de montrer (Griffond, 2001) que dans le cas cylindrique l'écart entre la solution de Berman (visqueuse) et la solution de Taylor–Culick pour $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 10$ est inférieur à 10% tandis que pour $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$ cet écart est inférieur à 0.1%. Autrement dit, pour des nombres de Reynolds suffisamment grands, les deux solutions sont très proches. Dès lors, comme le nombre de Reynolds typique d'un moteur à propergol solide est de l'ordre du millier, l'erreur commise en utilisant la solution de Taylor–Culick et donc en négligeant les effets visqueux est considérée comme négligeable.

Une illustration de la solution de Taylor–Culick est disponible sur la figure 1.14, sur laquelle sont représentés les iso-contours de vitesse axiale dans une coupe longitudinale ainsi que les lignes de courant. Ces lignes de courant ont une tangente normale à la paroi d'injection au niveau de la paroi puis rejoignent progressivement l'axe du cylindre sans jamais le dépasser (écoulement symétrique). Plus on s'éloigne du fond avant ($z=0$), plus les lignes de courant semblent alignées avec l'axe $\boldsymbol{e}_z$, les effets de courbure étant repoussés vers la paroi. Cette observation sera utilisée dans le cadre de la stabilité linéaire locale présentée au chapitre 2.1.

Du point de vue expérimental, si Taylor (1956) propose déjà dans son papier une validation de sa solution grâce à un montage original, on peut notamment citer les travaux de Wageman et Guevara (1960) et de Dunlap *et al.* (1974) qui ont validé expérimentalement les solutions théoriques de Berman et de Taylor–Culick grâce à des montages en gaz froid.

13. Dans le cas d'une veine de section rectangulaire, $\phi\colon (y,z) \mapsto z\sin(\pi y/2)$

1.4.4. Extensions des solutions de Berman et de Taylor–Culick

Comme évoqué précédemment, la solution des équations de Navier–Stokes dans la configuration de conduit à paroi débitante a fait l'objet de nombreuses publications : développements asymptotiques, nombre de solutions, etc. Parmi ces travaux, certains concernent des extensions de la solution de Berman ou de Taylor–Culick, dans lesquelles la configuration est un peu plus complexe qu'un « simple » conduit semi-ouvert à injection constante sur ses parois latérales. Nous nous proposons d'en évoquer certaines, une liste exhaustive de ces contributions étant évoquée dans l'introduction de Van Horn et Majdalani (2014).

Commençons par évoquer la solution de Clayton (1996) qui s'est intéressé au cas où les blocs de propergol sont coniques, comme sur la figure 1.1. Le rayon du cylindre R_p n'est donc pas constant mais évolue linéairement suivant z. Pour déterminer une solution, il a repris les équations de Culick régissant la fonction de courant et a modifié cette dernière pour qu'elle satisfasse les conditions aux limites particulières, à savoir une vitesse à la paroi avec une composante radiale mais aussi axiale.

La prise en compte de la régression des parois (liée à la combustion du propergol au cours du temps) a été effectuée par Zhou et Majdalani (2002) dans le cas d'une veine de section rectangulaire [14]. La régression des murs s'effectue à une vitesse constante $\dot{R}_p$ dans la direction normale à la paroi. La méthode employée est la suivante : de manière classique, la fonction de courant ϕ est introduite puis supposée linéaire par rapport à la coordonnée axiale : $\phi(y,z,t) \mapsto zF(y,t)$. Un nombre de Reynolds basé sur cette vitesse de régression est alors défini par $\alpha = \dot{R}_p R_p/\nu$. Les auteurs introduisent ensuite la transformation suivante : $F(y,t) \mapsto F(y,\alpha(t))$ et font l'hypothèse que α est indépendant de t. Notons que supposer $\alpha = \dot{R}_p R_p/\nu$ constant implique que lorsque le rayon augmente, la vitesse d'injection diminue d'autant. Or dans les applications de propulsion solide auxquelles on s'intéresse, le rayon augmente au cours du tir mais la vitesse d'injection est à peu près constante. Cependant cette hypothèse permet aux auteurs de supprimer la dépendance à la variable temporelle t. L'équation obtenue régissant F et les conditions limites associées sont alors

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\partial_y^4 F + \dfrac{\alpha}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(y\partial_y^3 F + 3\partial_y^2 F\right) + F\partial_y^3 F - \partial_y F - \partial_y^2 F = 0\,, \\ F(0) = \partial_y^2 F(0) = \partial_y F(1) = 0 \quad , \quad F(1) = 1\,. \end{cases} \tag{1.11}$$

Cette équation est identique à l'équation de Berman dans le cas $\alpha = 0$ et peut aisément être résolue numériquement. Les auteurs proposent tout de même un développement asymptotique de cette équation en prenant le nombre de Reynolds d'injection ($\mathcal{R}_\mathrm{e}$) comme paramètre. Ce développement asymptotique s'avère d'autant plus proche de la solution numérique que le nombre de Reynolds d'injection est grand et que le ratio $\alpha/\mathcal{R}_\mathrm{e}$ est faible.

Si les deux précédentes études s'intéressaient à une modification des parois latérales, les travaux de Saad et Majdalani (2009) concernent les conduits où le fond avant est remplacé par un profil de vitesse, comme illustré sur la figure 1.15 extraite de leur article. Ce cas d'étude est d'un grand intérêt pour la propulsion hybride. La propulsion hybride consiste à séparer l'oxydant du réducteur, tous deux réunis au sein du propergol dans le cas des moteurs à propergol solide classiques. Un système hybride est par exemple constitué d'un compartiment contenant un ergol solide et, en amont, d'un compartiment contenant un ergol liquide ou gazeux. La libération (contrôlée) de l'ergol liquide ou gazeux dans la partie où se situe l'ergol solide entraîne la combustion. Du point de vue de l'écoulement, un tel moteur hybride est donc vu comme un conduit à paroi débitante (l'ergol solide) avec également une injection de fluide au niveau du fond avant (fluide provenant du réservoir d'ergol). La méthode employée suit la démarche classique d'introduction d'une fonction de courant puis de la recherche d'une solution pour celle-ci qui soit linéaire en z et satisfasse les conditions aux limites particulières. Dans le cas d'un profil d'injection au fond avant de type cosinus, la modification du profil de Taylor–Culick est simplement un décalage axial du repère (z devient z augmenté de la vitesse d'injection au fond avant normalisée).

14. Le cas de la régression des parois dans le cas d'un conduit de section circulaire a également été traité par Majdalani *et al.*, avec une méthode quasiment identique.

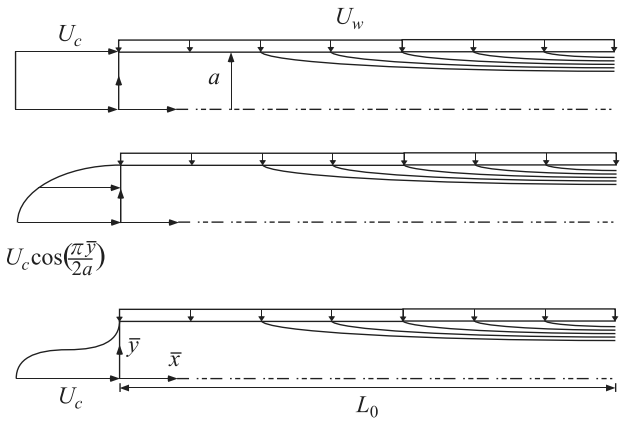


FIGURE 1.15. – Représentation schématique d'un conduit à paroi débitante avec injection au fond avant. Dans Saad et Majdalani (2009).

Dès le début des années 1990, Balakrishnan *et al.* (1991) se sont intéressés à l'influence de la compressibilité sur l'écoulement. Pour cela, ils ont commencé par simplifier les équations d'Euler en considérant les ordres de grandeur des différents termes. Ils ont ensuite proposé une méthode originale consistant à déterminer une unique équation intégrale 1D faisant intervenir la pression dans le cadre d'un écoulement compressible. Cette équation est résolue numériquement et permet de remonter au champ de vitesse total. Les auteurs affirment également que leur solution reste valable pour des sections quelconques non circulaires. On pourra tout de même douter d'une telle affirmation avec les hypothèses de départ : fluide parfait et écoulement plan bidimensionnel. De son côté, Majdalani (2007) est parvenu à déterminer une extension de la solution de Taylor–Culick pour les écoulements compressibles dans le cas d'un conduit de section circulaire. Pour ce faire, il a introduit une décomposition de Rayleigh–Jansen, à savoir un développement asymptotique particulier basé sur le nombre de Mach d'injection $M_{inj} = V_{inj}/c$. D'après Majdalani, ce nombre de Mach d'injection est au plus de 0,02 en propulsion solide, justifiant son utilisation comme un petit paramètre. Son développement asymptotique, porté jusqu'à l'ordre $O({M_{inj}}^3)$, lui a permis de dégager les solutions approchées suivantes :

$$\begin{cases} U_r = -\dfrac{M_{inj}}{r}\sin(\chi)\left\{1 - \dfrac{{M_{inj}}^2}{4}\left[\pi^2 z^2\left(1+\cos(2\chi)\right) - \dfrac{1}{r^2}\left(1-\cos(2\chi)\right) + 2\right]\right\} + O\left({M_{inj}}^5\right), \\ U_z = M_{inj}\pi z\cos(\chi)\left\{1 + \dfrac{{M_{inj}}^2}{4}\left[\pi^2 z^2\left(\dfrac{5}{3} - \cos(2\chi)\right) + \dfrac{1}{r^2}\left(1-\cos(2\chi)\right) - 2\right]\right\} + O\left({M_{inj}}^5\right), \end{cases} \tag{1.12}$$

où $\chi = \pi r^2/2$ et où les vitesses sont ici adimensionnées par la vitesse du son c. Conséquence directe de la méthode employée, les composantes radiales et axiales de la vitesse sont constituées de leurs formes correspondantes à la solution Taylor–Culick multipliées par un terme correctif. Les autres grandeurs de l'écoulement comme la pression, la densité ou la température sont disponibles dans le papier. Dans cette thèse, on s'intéresse à des conditions semblables à celles du montage en gaz froid VALDO, pour lequel $M_{inj} = 0{,}003$. Dans ces conditions, l'écart entre les solutions de Berman / Taylor–Culick et celle de Majdalani est inférieur à 0,7% pour $z/R_p \leqslant 10$, ce qui justifie notamment l'hypothèse d'incompressibilité retenue.

Ces différentes solutions concernent toutes une veine de section rectangulaire ou un conduit de section circulaire. Les premiers travaux concernant des géométries moins classiques n'apparaissent qu'à partir des années 2000 et sont présentés dans la section suivante.

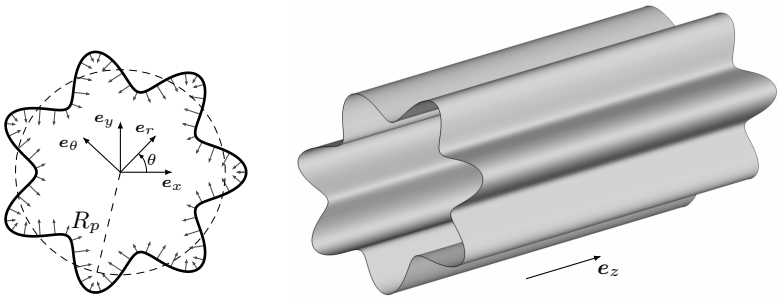


FIGURE 1.16. – Schéma de la configuration de conduit cylindrique de section étoilée.

Travaux concernant les sections étoilées

C'est à Balachandar *et al.* (2001) que l'on doit les premiers travaux sur les conduits à paroi débitante de section étoilée. Dans leur article, les auteurs ont tenté de donner une description aussi bien qualitative que quantitative de l'écoulement au sein d'un conduit à paroi débitante de section étoilée. La position de la paroi est définie par $r = R_p(1 + \varepsilon e^{im\theta})$, où $m \in \mathbb{N}$. Une représentation schématique de la configuration est disponible sur la figure 1.16. Ils commencent par démontrer la nécessité de prendre en compte les effets visqueux pour déterminer une solution viable. La preuve est faite par l'absurde : en considérant un fluide parfait, on peut écrire l'équation de transport de la vorticité axiale Ω_z dont la solution est : $\Omega_z \sin(\pi r^2/2) = const$. Pour éviter une singularité en $r = 0$, la constante doit être nulle, impliquant la nullité de Ω_z dans tout le domaine et donc un écoulement axisymétrique, ce qui est en contradiction avec une composante de l'injection azimutale non nulle. La suite de l'article consiste à distinguer trois régions : un anneau, pour $1/\sqrt{\mathcal{R}_\mathrm{e}} \ll r \leqslant 1$, où les effets visqueux sont négligeables ; un cœur visqueux, pour $r \leqslant 1/\sqrt{\mathcal{R}_\mathrm{e}}$; comportant lui-même une zone où les termes non-linéaires de l'équation de Navier–Stokes ne sont pas négligeables, pour $r \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. Pour chacune de ces régions, les auteurs proposent une solution analytique. Toutefois le raccord entre les différentes solutions n'est pas clairement indiqué, les constantes d'intégration ne sont pas toutes spécifiées et surtout les conditions limites ne sont pas toutes respectées (la nullité de U_z à la paroi n'est pas respectée par exemple). La solution est donc délicate à utiliser en pratique.

Une étude plus numérique a été réalisée par Kurdyumov (2006) dans le cadre d'une géométrie où la paroi est définie (avec une fonction réelle) par $r = R_p(1 + \varepsilon \cos(m\theta))$. Ses travaux ont démontré une influence importante de la déviation radiale sur la structure de l'écoulement, même pour de faibles valeurs de ε. Sur la figure 1.17 sont représentées les lignes de courant dans une section transversale $z = constante$ pour différents nombres de Reynolds. La géométrie étant périodique, la section se limite à une demi-période. L'amplitude de la déviation radiale utilisée dans l'article est de 10%. Kurdyumov montre qu'à partir d'une certaine valeur du nombre de Reynolds, des tourbillons d'axe $\boldsymbol{e}_z$ se créent dans les sections représentées. On rappelle que dans les conduits de section circulaire avec injection normale à la paroi [15], l'écoulement est axisymétrique et par conséquent une telle phénoménologie n'est pas observable. Dans la suite de l'article, Kurdyumov effectue une décomposition solénoïde/rotationnel du champ de vitesse. Puis il parvient à déterminer une solution pour cette décomposition à l'aide d'un développement asymptotique. Toutefois sa solution n'est valable qu'autour du centre des tourbillons évoqués précédemment. Sa solution n'est donc absolument pas utilisable en pratique mais permet une description précise de ces tourbillons.

Hormis le présent travail de thèse, les travaux les plus récents concernant la géométrie étoilée sont ceux de Van Horn et Majdalani (2014). La géométrie étoilée est identique aux précédentes,

15. Récemment, l'équipe de Majdalani est parvenue à déterminer une solution, la solution Trkalian, pour les écoulements dans les conduits de section circulaire avec une injection non normale à la paroi, plus précisément une vitesse d'injection à la paroi de type $\boldsymbol{V_{inj}} = -V_{inj}^r \boldsymbol{e}_r + V_{inj}^\theta \boldsymbol{e}_\theta$. La solution obtenue est similaire à la solution de Taylor–Culick à laquelle on superposerait une rotation solide autour de l'axe du cylindre.

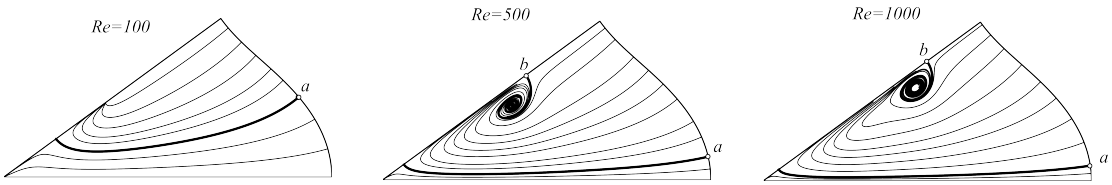


FIGURE 1.17. – Lignes de courant dans une section transversale pour différents nombres de Reynolds et pour $\varepsilon = 0{,}1$. Les lignes en gras séparent les lignes continuant jusqu'au centre des lignes aspirées par le tourbillon. Figure extraite de Kurdyumov (2006).

en revanche l'écoulement est considéré comme non visqueux, hypothèse en contradiction avec les conclusions des deux précédentes études mentionnées. La méthode employée dans ce travail consiste tout d'abord à négliger la composante azimutale de la vitesse par rapport aux deux autres composantes. La fonction de courant ϕ peut alors être introduite, comme dans le cas d'un écoulement axisymétrique. L'intervention de la géométrie étoilée se fait via les conditions limites : la vitesse est injectée normalement à la paroi, ce qui implique que la vitesse radiale au niveau de la paroi dépend de la coordonnée azimutale. Pour prendre en compte ces conditions limites particulières, un développement de Taylor de ces dernières est effectué au niveau de la paroi. Ensuite la démarche classique d'un développement asymptotique vis-à-vis de ε est adoptée. Les différents ordres sont résolus explicitement, conduisant au final à un champ de vitesse qui s'exprime, comme dans le cas de la solution de Taylor–Culick, avec des fonctions usuelles. Les limites de cette solution élégante sont les suivantes. L'utilisation d'un développement de Taylor des conditions limites conduit à un champ de vitesse qui ne respecte pas exactement les conditions d'injection à la paroi : par exemple la vitesse axiale à la paroi est non nulle avec cette solution. Ceci conduira à adopter une autre méthode de traitement des conditions limites au chapitre 3. Par ailleurs les précédents articles mentionnés (Balachandar *et al.*, 2001; Kurdyumov, 2006) ont relevé l'importance de prendre en compte les effets visqueux, et ce même pour de faibles valeurs de la déviation radiale. Ensuite, l'utilisation de la fonction de courant ϕ, seule, empêche la détermination d'une composante azimutale de la vitesse, alors que le schéma 1.16 montre que l'injection normale à la paroi dans le cas étoilé conduit à la génération d'une vitesse azimutale. Enfin, il manque à cette solution une comparaison à des résultats expérimentaux (qui, à notre connaissance, n'existent malheureusement pas) ou à des résultats numériques de type CFD.

Au total, il n'existe pas dans la littérature de solution pour l'écoulement moyen dans les conduits de section étoilée qui soit utilisable pour une étude de stabilité linéaire.

Bilan

Cet état de l'art nous a permis tout d'abord de situer le contexte dans lequel s'inscrivent ces travaux de thèse, dont le thème est celui des oscillations de poussée qui affectent certains moteurs à propergol solide. Ces oscillations de poussée sont provoquées par des oscillations de la pression interne du moteur. On a montré que ces dernières sont elles-mêmes provoquées par un couplage entre l'acoustique du moteur et des détachements tourbillonnaires. Trois types de détachements tourbillonnaires ont été identifiés, dont le Vortex-Shedding Pariétal, phénomène purement hydrodynamique lié à une instabilité propre de l'écoulement, identifié comme le moteur principal de l'ensemble du phénomène. Pour mettre en évidence et étudier ce VSP, il est possible de se restreindre à l'étude des fluides incompressibles dans les conduits à paroi débitante.

Dans le cas du lanceur Ariane 5, les oscillations de pression n'apparaissent qu'à partir de la seconde moitié du tir. Les différents régimes de l'écoulement (région laminaire au fond avant, région turbulente en aval, séparées par une zone de transition) peuvent expliquer ce délai d'apparition : au début du tir le rapport d'aspect du moteur $\mathcal{L}/R_p$ est grand et la région turbulente est vaste. Or la turbulence dissipe les structures de type VSP, ce qui expliquerait que les oscillations ne sont pas observées. Puis, avec la combustion du propergol, le rapport d'aspect diminue, la zone turbulente se restreint et les oscillations se développent. Ce scénario reste à démontrer via des simulations (à défaut de pouvoir utiliser des montages expérimentaux) capables de reproduire fidèlement les données expérimentales existantes.

Une fois que les oscillations de pression sont observées, leur évolution fréquentielle dans le temps est aujourd'hui déterminée précisément grâce aux calculs de stabilité linéaire. Les études théoriques de stabilité linéaire locale puis biglobale ont en effet permis d'obtenir, en fonction de l'instant du tir, les différentes fréquences auxquelles peuvent se développer les instabilités qui conduisent au VSP et aux ODP. Ces résultats de stabilité montrent également que l'instabilité étudiée a une forte croissance longitudinale mais est amortie en temps. Pour exister, elle nécessite donc une excitation extérieure. Cette instabilité est ainsi qualifiée d'instabilité extrinsèque. Le couplage (encore mal modélisé) avec l'acoustique du moteur, ou des irrégularités géométriques au sein du moteur sont nécessaires pour voir se développer ces oscillations.

Toutefois ces études de stabilité ont été appliquées à des moteurs à propergol solide en particulier au lanceur Ariane 5 dont les segments, à l'instant où les ODP apparaissent, sont de géométrie circulaire. Or les motoristes utilisent aussi d'autres types de géométrie pour les blocs de propergol, comme la géométrie étoilée. L'application des outils de stabilité linéaire à différentes géométries nécessite de connaître, pour chacune d'elles, l'écoulement au sein des moteurs qui les comportent. Dans le cas d'une géométrie circulaire, cet écoulement est très bien décrit analytiquement avec les solutions de Berman et de Taylor–Culick. Si de nombreuses extensions de cet écoulement existent, aucune ne concerne en pratique une géométrie étoilée. Il est donc nécessaire de déterminer cet écoulement au sein d'une géométrie étoilée pour pouvoir ensuite lui appliquer les approches de stabilité.

Chapitre 2

Méthodes et matériel

L'objectif de ce chapitre est de présenter les « matériaux » disponibles au départ des travaux de ce doctorat. Il s'agit d'une théorie, la théorie de stabilité linéaire, d'une méthode numérique, la méthode de collocation spectrale, des résultats expérimentaux obtenus avec le montage en gaz en froid VALDO et de la plateforme CEDRE.

Sommaire

2.1. Rappels sur la stabilité linéaire **26**
2.1.1. Principe général 26
2.1.2. Linéarisation des équations de Navier–Stokes 26
2.1.3. Introduction de la décomposition modale 27
2.1.4. Formulation du problème aux valeurs propres généralisé 27
2.1.5. Simplification de la dépendance azimutale avec le théorème de Floquet . 27
2.1.6. Stabilité locale, biglobale et triglobale 29
2.1.7. Présentation de l'alternative de Fredholm 31
2.2. Présentation de la méthode de collocation spectrale **33**
2.2.1. Cas 1D 33
2.2.2. Cas 2D 34
2.2.3. Compléments 34
2.2.4. Exemple de résolution d'une ODE avec la méthode de collocation spectrale 35
2.3. Présentation du montage expérimental VALDO **38**
2.3.1. Disposition des éléments 39
2.3.2. Position des mesures 39
2.3.3. Les campagnes de mesures 39
2.4. Présentation de la chaîne de calcul CEDRE **40**
2.4.1. Description générale 40
2.4.2. Justification de l'utilisation du code CEDRE 41

2.1. Rappels sur la stabilité linéaire

Cette partie présente les principes d'une étude de stabilité linéaire, et plus particulièrement les éléments utilisés lors de la démarche adoptée au chapitre 4. On commence par rappeler le principe général d'une étude de stabilité en superposant une perturbation à un écoulement de base. Puis on aborde successivement la linéarisation des équations autour de l'écoulement de base avec l'hypothèse que la perturbation est petite devant ce dernier, puis la forme modale retenue pour les perturbations. L'introduction de cette forme de perturbation permet de formuler un problème aux valeurs propres généralisé. Il est ensuite possible de préciser la forme de la perturbation et en particulier sa dépendance azimutale grâce à l'application du théorème de Floquet. Une discussion sur les différentes dénominations existantes en théorie de stabilité linéaire permet de préciser les noms adoptés par la suite. Enfin, l'alternative de Fredholm, qui permet d'étudier analytiquement la sensibilité d'un opérateur linéaire vis-à-vis d'un paramètre du système, est présentée.

2.1.1. Principe général

Le principe général d'une étude de stabilité linéaire en mécanique des fluides est de déterminer si un écoulement, perturbé par de petites fluctuations, va amortir ou au contraire amplifier ces perturbations. *In fine*, le principe est donc de déterminer si l'écoulement est stable ou instable, la notion même de stabilité étant sujette à plusieurs définitions (Casalis et Charru, 1997).

On considère donc un écoulement moyen dit « écoulement de base ». Dans le cadre de ce manuscrit, l'écoulement de base considéré est toujours stationnaire et incompressible. Celui-ci est composé d'un champ de vitesse et de pression $(\boldsymbol{U}, P)$ et est solution des équations de Navier–Stokes stationnaires écrites pour un fluide incompressible :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{U} = -\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{P} + \frac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}} \boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{U} \,. \tag{2.1}$$

On superpose une petite perturbation $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{p})$ à l'écoulement de base. Le champ total ou instantané de vitesse et de pression au sein de la configuration, noté $(\boldsymbol{u}, p)$, est la superposition de l'écoulement de base et de la perturbation :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + \tilde{\boldsymbol{u}} \quad , \quad p = P + \tilde{p} \,. \tag{2.2}$$

Ce champ total de vitesse et de pression vérifie lui aussi les équations de Navier–Stokes, mais instationnaires cette fois-ci :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \quad , \quad \partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{p} + \frac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}} \boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{u} \,. \tag{2.3}$$

Il s'agit désormais de déterminer si la perturbation $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{p})$ va s'amortir ou au contraire s'amplifier.

2.1.2. Linéarisation des équations de Navier–Stokes

Comme mentionné précédemment, la perturbation $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{p})$ est supposée petite devant l'écoulement de base : $\tilde{\boldsymbol{u}} \ll \boldsymbol{U}$ et $\tilde{p} \ll P$. En utilisant cette hypothèse, la première étape d'une étude de stabilité linéaire consiste à linéariser les équations de Navier–Stokes (2.3) écrites pour la vitesse et la pression instationnaires autour de l'écoulement de base. En utilisant le fait que l'écoulement de base vérifie déjà les équations de Navier–Stokes (équation (2.1)) et en éliminant les termes non-linéaires, les équations de Navier–Stokes linéarisées peuvent s'écrire :

$$\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} = 0 \quad , \quad \partial_t \tilde{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{\nabla} \tilde{\boldsymbol{u}} + \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{U} = -\boldsymbol{\nabla} \tilde{\boldsymbol{p}} + \frac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}} \boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{2}} \tilde{\boldsymbol{u}} \,. \tag{2.4}$$

On observe l'absence du gradient de pression de l'écoulement de base : la pression moyenne n'intervient pas directement dans la stabilité du système (dans l'hypothèse d'un fluide incompressible).

2.1.3. Introduction de la décomposition modale

L'objectif est désormais de déterminer $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{p})$ en résolvant les équations de Navier–Stokes linéarisées. Pour ce faire, nous allons rechercher cette perturbation sous forme modale en introduisant une pulsation complexe ω :

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(r,\theta,z,t) = \hat{\boldsymbol{u}}(r,\theta,z)\, e^{-i\omega t} \quad , \quad \tilde{p}(r,\theta,z,t) = \hat{u}_p(r,\theta,z)\, e^{-i\omega t}\,, \tag{2.5}$$

où l'on note $\hat{u}_r,\ \hat{u}_\theta,\ \hat{u}_z$ et $\hat{u}_p$ les amplitudes des fluctuations associées à la pulsation ω. L'utilisation de cette forme modale se justifie par le fait que l'équation (2.4) est une équation aux dérivées partielles linéaire dont les coefficients sont constants vis-à-vis de t. Du point de vue des notations, on désignera désormais indifféremment par $\hat{u}$ les quatre amplitudes des fluctuations, sauf lorsque la notation vectorielle est utilisée $(\hat{\boldsymbol{u}})$ auquel cas on désigne bien les fluctuations de vitesse uniquement $\hat{\boldsymbol{u}} = (\hat{u}_r,\ \hat{u}_\theta,\ \hat{u}_z)$.

On appellera un couple $(\omega, \hat{u})$ un « mode de stabilité » ou simplement un « mode ». La pulsation ω est complexe et s'écrit $\omega = \omega_r + i\omega_i$. La partie réelle, ω_r, est liée à une fréquence alors que la partie imaginaire, ω_i, est le taux d'amplification temporel. D'après l'expression (2.5), si $\omega_i > 0$ alors la perturbation croît exponentiellement en temps et donc l'écoulement est instable temporellement. À l'inverse, si $\omega_i < 0$, la perturbation est amortie et l'écoulement est qualifié de stable temporellement. Dans le cas où $\omega_i = 0$, on parle de stabilité marginale.

Puisque les équations de Navier–Stokes ont été linéarisées, le formalisme adopté ici ne permet pas de prendre en compte des interactions entre les modes ni l'amplitude des fluctuations. La solution instationnaire $(\boldsymbol{u}, p)$ est la combinaison linéaire de tous les modes $(\omega, \hat{u})$ qui coexistent sans influence les uns sur les autres. Pour prendre en compte des interactions entre modes, il faut adopter des approches plus complexes comme par exemple l'approche Non Linear Parabolized Stability Equations (NPSE).

2.1.4. Formulation du problème aux valeurs propres généralisé

L'introduction de la décomposition modale (2.5) dans les équations de Navier–Stokes linéarisées (2.4) permet d'écrire le problème sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé :

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{u}}\\ \hat{u}_p\end{pmatrix} = i\omega \boldsymbol{B}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{u}}\\ \hat{u}_p\end{pmatrix}\,, \tag{2.6}$$

où $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux opérateurs linéaires définis par :

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{u}}\\ \hat{u}_p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{u}}\\ \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\nabla}\hat{\boldsymbol{u}} + \hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{U} - \frac{1}{\mathcal{R}_e}\boldsymbol{\nabla^2}\hat{\boldsymbol{u}}\end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{B}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{u}}\\ \hat{u}_p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -\hat{\boldsymbol{u}}\end{pmatrix}\,. \tag{2.7}$$

Les valeurs propres sont les pulsations ω et les fonctions propres sont les fonctions d'amplitude $(\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{u}_p)$.

2.1.5. Simplification de la dépendance azimutale avec le théorème de Floquet

Énoncé du théorème de Floquet

Le théorème de Floquet (1883) s'applique dans le cas de systèmes d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont périodiques (et de même période) vis-à-vis d'une variable. Dans le cas de la configuration étoilée, on verra au chapitre 4 que tous les coefficients des équations de Navier–Stokes linéarisées sont périodiques vis-à-vis de la coordonnée azimutale.

Formellement, le théorème de Floquet s'énonce de la manière suivante. On considère le système différentiel

$$X' = \boldsymbol{D}(\theta)\, X\,, \tag{2.8}$$

où $\boldsymbol{D} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, l'ensemble des fonctions continues[1] de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est l'espace des matrices complexes de taille $n \times n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\boldsymbol{D}$ est périodique de période T, le théorème de Floquet permet d'écrire la base $\boldsymbol{X}$ des solutions de (2.8) sous la forme

$$\boldsymbol{X}(\theta) = \boldsymbol{P}(\theta)\, e^{\boldsymbol{\Omega}\theta}\,, \tag{2.9}$$

où $\boldsymbol{P} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ est T-périodique vis-à-vis de θ. De plus, $\boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice indépendante de θ appelée communément coefficient de Floquet. Ce coefficient est indéterminé. La démonstration de ce théorème est disponible dans l'ouvrage original de Floquet mais on peut également en trouver une version épurée dans Coddington et Carlson (1997).

Application du théorème de Floquet à la présente configuration

Dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire les équations de Navier–Stokes incompressibles linéarisées, il y a quatre équations et quatre inconnues $(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_z, \hat{u}_p)$, donc $n = 4$. On montre au chapitre 4 que pour la géométrie et l'écoulement de base considérés, tous les coefficients des équations de Navier–Stokes linéarisées sont périodiques vis-à-vis de θ de période $2\pi/m$ où $m \in \mathbb{N}^*$. On peut donc appliquer le théorème de Floquet à $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - i\omega\boldsymbol{B}$ et écrire chacune des fluctuations sous la forme

$$\hat{u}(r, \theta, z) = f(r, \theta, z)\, e^{\gamma\theta}\,, \tag{2.10}$$

où f est une fonction θ-périodique de même période que les coefficients du système, à savoir $2\pi/m$; et où γ est le coefficient de Floquet. Dans la pratique, on considère que $\boldsymbol{\Omega} = \gamma I_d$, $\gamma \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire que les coefficients de Floquet associés à chacune des fluctuations de vitesse et de pression sont égaux.

Puisque f est θ-périodique (d'après le théorème), il est possible de développer cette fonction en série de Fourier :

$$f(r, \theta, z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_l(r, z)\, e^{iml\theta}\,. \tag{2.11}$$

Au total, la perturbation de vitesse peut s'écrire

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(r, \theta, z, t) = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \hat{\boldsymbol{u}}_l(r, z)\, e^{iml\theta} \right) e^{\gamma\theta} e^{-i\omega t}\,, \tag{2.12}$$

la perturbation de pression s'écrivant de manière identique. Le théorème de Floquet permet donc de modéliser la dépendance azimutale des quatre fonctions d'amplitude inconnues. Du point de vue numérique, l'espace ne sera discrétisé qu'au plus suivant 2 directions (r et z) tandis que la reconstruction azimutale de la perturbation se fera grâce à la série de Fourier.

Restriction des valeurs possibles pour le coefficient de Floquet

À ce stade le coefficient de Floquet γ est une constante complexe inconnue. Dans notre cas, il est possible de réduire le champ des valeurs possibles pour cette constante. Tout d'abord, d'un point de vue physique, il ne paraît pas concevable de rencontrer une perturbation ayant une amplification ou un amortissement azimutale, le caractère périodique et « fermé » de la géométrie empêche d'envisager une telle situation. Cette observation implique que le coefficient de Floquet est un imaginaire pur : $\gamma \in i\mathbb{R}$. En effet, d'après l'expression (2.12), toute partie réelle non nulle de γ entrainerait une amplification ou un amortissement azimutale.

L'argument suivant est géométrique : l'écoulement est nécessairement 2π périodique. On a donc $\hat{\boldsymbol{u}}(\theta) = \hat{\boldsymbol{u}}(\theta + 2\pi)$ et de même pour $\tilde{p}$. Toujours d'après (2.12), le caractère 2π-périodique de la série de Fourier placée entre parenthèses implique que $\gamma \in i\mathbb{Z}$.

1. De plus, on note $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ l'ensemble des fonctions continues dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On peut enfin aussi restreindre le module du coefficient de Floquet à l'intervalle $[0, m[$. Supposons que $|\gamma| > m$; il est alors possible d'écrire $\gamma = i \times k \times m + \gamma'$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ce qui donne :

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(r, \theta, z, t) = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \hat{\boldsymbol{u}}_l(r, z)\, e^{im(l+k)\theta} \right) e^{\gamma'\theta} e^{-i\omega t}\,. \tag{2.13}$$

Or la série de Fourier entre parenthèses est identique à la précédente par réarrangement des termes (en introduisant l'indice $L = l + k$ par exemple). Ainsi dès que $|\gamma| > m$ on ne fait que décaler les termes de la série et ceci n'a pas d'influence sur la forme finale de la perturbation.

Au total, le coefficient de Floquet est un complexe imaginaire pur dont le module est un entier naturel compris entre 0 inclus et m exclu : $\gamma \in i\, [\![0, m[\![$.

2.1.6. Stabilité locale, biglobale et triglobale

Stabilité locale

Il est possible de poursuivre la simplification de la perturbation moyennant une hypothèse importante. Dans le cas d'un écoulement parallèle, c'est-à-dire un écoulement qui ne dépend que d'une des deux coordonnées r ou z, comme l'écoulement de Poiseuille par exemple, on fait l'hypothèse d'une perturbation sinusoïdale dans la direction de l'écoulement. Pour reprendre l'exemple de l'écoulement de Poiseuille, où la vitesse ne dépend que du rayon, on introduit donc un nombre d'onde spatial, noté ici k, dans l'écriture de la perturbation et plus précisément dans l'écriture de la fonction d'amplitude :

$$\hat{u}(r, z) \to \hat{u}(r)\, e^{ikz}\,. \tag{2.14}$$

Ce nombre d'onde spatial est inconnu à priori et doit être choisi avant de résoudre le problème aux valeurs propres généralisé. Il en va de même de la position axiale z à laquelle le calcul de stabilité locale est réalisé : z et k sont fixés. Notons qu'il est également possible de fixer ω et de formuler un problème aux valeurs propres généralisé dont les valeurs propres sont les valeurs de k. Toutefois dans ce dernier cas si le problème considéré est visqueux il faut utiliser des matrices compagnons (le vecteur des inconnues n'est plus $(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_z, \hat{u}_p)$ mais $(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_z, \hat{u}_p, \partial\hat{u}_r, \partial\hat{u}_\theta, \partial\hat{u}_z, \partial\hat{u}_p)$) ce qui augmente la taille du problème et complexifie sa résolution.

Cette approche locale peut aussi être appliquée avec succès à des écoulements « faiblement non parallèles », c'est-à-dire des écoulements où la dépendance de l'écoulement par rapport à r est faible devant sa dépendance par rapport à z. Enfin, bien que présentant une inconsistance mathématique, il est possible d'appliquer cette approche à des écoulements non parallèle pour avoir une première idée de la stabilité du système : la perturbation est toujours écrite sous la forme (2.14) en revanche l'écoulement de base dépend des deux coordonnées d'espace. Concrètement, les équations de Navier–Stokes linéarisées contiennent alors les gradients de l'écoulement de base par rapport aux deux variables et non plus à une seule. On qualifie cette approche de *Local Non Parallel* (LNP). L'étude de stabilité locale de l'écoulement de Taylor–Culick avec cette approche a été réalisée par Griffond (2001). Dans le cas particulier de la solution de Taylor–Culick, Casalis *et al.* (1998) ont montré que l'approche LNP donne de bien meilleurs résultats que l'approche purement parallèle. C'est donc l'approche LNP qui a été retenue dans cette thèse. L'étude de stabilité locale de l'écoulement au sein d'une géométrie étoilée a été effectuée durant cette thèse et est détaillée en 4.2.

Si l'on qualifie cette approche de « locale », c'est parce que les calculs sont réalisés à une position axiale (dans notre exemple) fixée. Pour un problème axisymétrique classique, la perturbation totale s'écrit donc

$$\tilde{u}(r, z) = \hat{u}(r)\, e^{i(kz - \omega t)}\,, \tag{2.15}$$

avec éventuellement un nombre d'onde azimutal supplémentaire. Ainsi la fonction d'amplitude $\hat{u}$ ne dépend plus que d'une variable d'espace, la résolution numérique du problème ne nécessite

donc qu'un maillage à une seule dimension, ce qui conduit à des problèmes de faible dimension facilement solubles.

Stabilité biglobale

Toujours dans le cas axisymétrique, lorsque l'écoulement n'est pas parallèle et qu'aucune des directions r ou z n'est suffisamment privilégiée pour pouvoir appliquer une approche locale, c'est la stabilité biglobale qui est appliquée. Dans ce formalisme, aucune hypothèse n'est faite sur la dépendance axiale ou radiale de la perturbation. La perturbation s'écrit donc

$$\tilde{u}(r,z) = \hat{u}(r,z)\, e^{-i\omega t}\,. \tag{2.16}$$

La fonction d'amplitude $\hat{u}$ dépend désormais de deux variables d'espace, ce qui entraîne dans la pratique l'utilisation de maillages à deux dimensions et complexifie la résolution numérique du problème. L'adjectif « biglobal » fait ici référence au fait que la fonction d'amplitude dépend des deux variables d'espace et qu'aucune hypothèse n'est prise sur ces deux variables d'espace. L'étude de stabilité biglobale de l'écoulement de Taylor–Culick dans la configuration cylindrique a été effectuée par Chedevergne (2007) puis étendue par Boyer (2012). L'étude de stabilité biglobale de l'écoulement au sein d'une géométrie étoilée a également été effectuée durant cette thèse et est détaillée en 4.3.

Stabilité triglobale ou globale

Lorsque l'on sort du cadre d'une géométrie axisymétrique, en considérant une veine de section rectangulaire par exemple, l'écoulement de base peut dépendre des trois variables d'espace : x, y et z. Si l'on ne peut pas faire d'hypothèse concernant la dépendance de la perturbation par rapport à l'une de ces variables, il faut alors adopter le formalisme de la stabilité triglobale (« tri » pour trois variables d'espace) aussi appelée stabilité globale car elle prend en compte toutes les variables d'espace. La perturbation est alors simplement écrite sous forme modale, comme dans l'équation (2.5) : $\tilde{u}(x,y,z) = \hat{u}(x,y,z)\, e^{-i\omega t}$. L'utilisation de la stabilité triglobale était auparavant hors d'atteinte numériquement, mais elle se développe ces dernières années (voir la synthèse de Theofilis (2003)).

Dénomination lorsque le théorème de Floquet est appliqué

Dans les explications qui précèdent, l'hypothèse d'une configuration axisymétrique a été employée pour simplifier les notations mais aussi pour correspondre précisément aux différentes dénominations de la littérature, en particulier des différentes thèses qui précèdent (Griffond, 2001; Féraille, 2004; Chedevergne, 2007; Boyer, 2012). Toutefois la perte d'axisymétrie et l'application du théorème de Floquet dans le cas de la configuration étoilée complexifie les dénominations. Comme expliqué au chapitre traitant de l'étude de stabilité locale (voir 4.2), la perturbation s'écrit :

$$\tilde{u}(r,\theta,z,t) = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_l(r)\, e^{iml\theta}\right) e^{\gamma\theta} e^{i(kz-\omega t)}\,. \tag{2.17}$$

Il s'agit d'une analyse locale au sens où la valeur de z est fixée. En revanche ici la fonction d'amplitude de la perturbation dépend des deux variables d'espace r et θ : à l'issue du calcul de stabilité locale, il est possible de tracer une fonction d'amplitude dans un plan (r,θ), tandis que dans les analyses locales classiques la fonction d'amplitude est monodimensionnelle.

La difficulté est plus criante pour l'application de la théorie biglobale à la configuration étoilée (voir 4.3) où la perturbation est écrite sous la forme :

$$\tilde{u}(r,\theta,z,t) = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_l(r,z)\, e^{iml\theta}\right) e^{\gamma\theta} e^{-i\omega t}\,. \tag{2.18}$$

Cette fois-ci la complexité de l'analyse a augmenté d'un niveau au sens où l'on a supprimé la modélisation affectant l'une des variables et qu'un nombre d'onde a été supprimé. Mais à l'issue de la résolution du problème, la fonction d'amplitude est tridimensionnelle et dépend des trois variables d'espace r, θ, z. De ce point de vue, l'approche adoptée pourrait donc être qualifiée de stabilité triglobale (ou globale). Toutefois, afin de conserver un lien logique avec les précédentes études réalisées sur l'écoulement de Taylor–Culick, nous conserverons la dénomination de stabilité locale pour la première approche évoquée et de stabilité biglobale pour la seconde.

2.1.7. Présentation de l'alternative de Fredholm

L'alternative de Fredholm (1903) est le nom donné à une méthode permettant d'étudier la sensibilité des valeurs propres d'un opérateur linéaire noté $\mathcal{L}$ [2] vis-à-vis d'un de ses paramètres x. On note ω une valeur propre et ϕ un vecteur propre associé :

$$\mathcal{L}\left(x, \omega\right) \phi = 0 \,. \tag{2.19}$$

On modifie le paramètre x à l'aide d'une petite quantité δ. On pose alors :

$$\begin{cases} x = x_0 + \delta x_1 + o(\delta) \,, \\ w = \omega_0 + \delta \omega_1 + o(\delta) \,, \\ \phi = \phi_0 + \delta \phi_1 + o(\delta) \,, \end{cases} \tag{2.20}$$

où ω_0 et ϕ_0 sont la valeur propre et le vecteur propre associés de l'opérateur pour $x = x_0$, c'est-à-dire qu'ils vérifient la relation $\mathcal{L}(x_0, \omega_0)\, \phi_0 = 0$. ω_0 et ϕ_0 étant connus, on cherche ω_1 et ϕ_1, les corrections à apporter à ω_0 et ϕ_0 pour tenir compte de la modification de x. En injectant (2.20) dans (2.19), on obtient :

$$\mathcal{L}(x_0 + \delta x_1, \omega_0 + \delta \omega_1)\, (\phi_0 + \delta \phi_1) = 0 \,. \tag{2.21}$$

Avant de développer cette expression on effectue un développement de Taylor de $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}(x_0 + \delta x_1, \omega_0 + \delta \omega_1) = \mathcal{L}(x_0, \omega_0) + \delta \left(x_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \left(x_0, \omega_0\right) + \omega_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \left(x_0, \omega_0\right) \right) + o\left(\delta\right) \,. \tag{2.22}$$

L'expression (2.21) est alors développée puis, en séparant les termes d'ordre 0 et d'ordre 1 en δ, le système suivant est obtenu :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x_0, \omega_0)\, \phi_0 = 0 \,, & \text{(2.23a)} \\ \mathcal{L}(x_0, \omega_0)\, \phi_1 = - \left(x_1 \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \omega_1 \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \right) \phi_0 \,. & \text{(2.23b)} \end{cases}$$

La première équation traduit que ω_0 est bien valeur propre du problème. Notons que la seconde équation fait apparaître les inconnues du problème x_1, ϕ_1 et que le membre de gauche est par définition dans l'image de $\mathcal{L}$. Donc le membre de droite doit nécessairement l'être aussi. Par conséquent on doit avoir :

$$\left(x_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \omega_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \right) \phi_0 \in \mathrm{Im}\left(\mathcal{L}(x_0, \omega_0)\right) \,. \tag{2.24}$$

L'alternative de Fredholm s'énonce de la manière suivante : ou bien $\mathcal{L}(x_0, \omega_0)$ est inversible et il existe une et une seule solution ($\phi_0 = 0$ d'après l'équation (2.23a)) ou bien l'équation homogène (2.23a) admet n solutions indépendantes et l'équation (2.23b) n'est soluble que si le second membre vérifie n relations d'orthogonalité venant du fait que $\mathrm{Im}\left(\mathcal{L}(x_0, \omega_0)\right) \subset \mathrm{Ker}\left(\mathcal{L}(x_0, \omega_0)^*\right)^\perp$ où $\mathrm{Ker}\left(\mathcal{L}(x_0, \omega_0)^*\right)$ désigne le noyau de l'opérateur adjoint. Le cas $\phi_0 = 0$ ne nous intéresse pas puisque dans le cadre d'une étude de stabilité, cela correspond à une perturbation nulle. C'est donc la seconde partie de l'alternative qui nous intéresse. Soit $\psi \in \mathrm{Ker}\left(\mathcal{L}(x_0, \omega_0)^*\right)$. L'équation

2. Pour faire le lien avec les paragraphes précédents, on peut poser $\mathcal{L}(\omega) = \boldsymbol{A} - \omega \boldsymbol{B}$.

(2.23b) est soluble si

$$\left(\psi \middle| \left(x_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \omega_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}\right) \phi_0\right) = 0\,. \tag{2.25}$$

Cette condition s'appelle la « condition de solvabilité ». Dans cette dernière relation ϕ_1 n'intervient plus. De plus ψ peut-être déterminé en utilisant $\mathcal{L}(x_0, \omega_0)^* \psi = 0$: autrement dit ψ est vecteur propre associé à la valeur propre ω_0 de l'opérateur adjoint $\mathcal{L}^*$. Ceci étant fait, ω_1 peut-être obtenu à partir de la relation suivante :

$$\omega_1 = -x_1 \frac{\left(\psi \middle| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \phi_0\right)}{\left(\psi \middle| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \phi_0\right)}\,. \tag{2.26}$$

Avec cette dernière expression, on remarque que ω_1 dépend linéairement de x_1. Il n'y a donc qu'un seul calcul à effectuer pour déterminer l'évolution de ω en fonction de x : le calcul de la pente. C'est donc en cela que l'alternative de Fredholm revêt toute son importance : on peut étudier la sensibilité d'une valeur propre à la variation d'un paramètre sans chercher à résoudre le problème $\mathcal{L}(x, \omega)\,\phi = 0$ pour chaque valeur de x.

Une mise en pratique de l'alternative de Fredholm est effectuée au paragraphe 4.2.3 du chapitre 4 traitant de l'étude de stabilité.

2.2. Présentation de la méthode de collocation spectrale

Cette partie présente la méthode de collocation spectrale, méthode régulièrement utilisée au cours de cette thèse pour résoudre des équations aux dérivées partielles (PDE). Cette méthode a été utilisée de nombreuses fois dans les thèses qui précèdent celle-ci, on trouvera donc aussi une description de la méthode dans les travaux précédents (Griffond, 2001; Féraille, 2004; Chedevergne, 2007; Boyer, 2012). Il semble toutefois nécessaire d'inclure une description succincte de la méthode mais aussi de fournir un exemple simple d'application de la méthode. Le lecteur pourra trouver une description exhaustive de la méthode et des méthodes spectrales en général dans l'ouvrage de Canuto *et al.* (1988).

2.2.1. Cas 1D

On se place dans le cas mono dimensionnel où l'équation à résoudre est donc une équation différentielle ordinaire. La variable, notée x, varie entre $[-1, 1]$ et la fonction inconnue u que l'on cherche à déterminer vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$\mathcal{F}\left(x, u, u', ..., u^{(p)}\right) = 0, \ p \in \mathbb{N}\,. \tag{2.27}$$

Le but est de discrétiser l'espace en N points notés $(x_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ et de déterminer la fonction u en ces points. On note $u(x_i) = \hat{u}_i$. Le principe de la méthode repose sur le choix des $(x_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ et sur l'interpolation utilisée. On choisit pour $(x_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ les points de Gauss–Lobatto, aussi appelés points de collocation :

$$\forall i \in [\![1, N]\!]\,, \ x_i = \cos\left(\frac{(i-1)\,\pi}{N-1}\right)\,. \tag{2.28}$$

Les points de Gauss–Lobatto ne sont pas distribués uniformément le long du segment $[-1, 1]$, mais sont plus rapprochés les uns des autres aux bords du segment, comme l'illustre la figure 2.1.

FIGURE 2.1. – Distribution des points de Gauss–Lobatto pour $N = 11$.

On introduit ensuite les polynômes interpolateurs de Lagrange $(\lambda_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ aux points de Gauss–Lobatto, pour lesquels on montre que l'on a :

$$\forall i \in [\![1, N]\!]\,, \ \lambda_i(x) = \left(\frac{1-x^2}{x-x_i}\right)(-1)^i\,\frac{T'_{N-1}\left(x\right)}{(N-1)^2\,c_i}\,, \tag{2.29}$$

où T_N est le polynôme de Tchebychev de degré N défini par $T_N(x) = \cos(N\arccos(x))$ et $(c_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ est la suite définie par :

$$c_1 = c_N = 2 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![2, N-1]\!]\,, \ c_i = 1\,. \tag{2.30}$$

Les polynômes interpolateurs de Lagrange ont été choisis de façon à assurer que $\forall (i, j) \in [1, N]^2$, $\lambda_i(x_j) = \delta_{ij}$. On projette donc la fonction inconnue u sur la base des polynômes définis pour obtenir :

$$\forall x \in [-1, 1]\,, \ u(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x)\,\hat{u}_i\,. \tag{2.31}$$

En vertu de la propriété des points de discrétisation et des polynômes choisis, la projection coïncide exactement avec la fonction u aux points de collocation.

Pour résoudre l'ODE (2.27), nous allons résoudre les N relations $\mathcal{F}\left(x_i, \hat{u}_i, \hat{u}'_i, ..., \hat{u}^p_i\right) = 0$. Décrivons maintenant comment exprimer les dérivées de u. Avec la projection (2.31), la dérivée de

la fonction u au point de collocation x_i s'exprime par

$$u'(x_i) = \sum_{j=1}^{N} \lambda'_j\Big(x_i\Big)\, \hat{u}_j\,, \tag{2.32}$$

la dérivée n^{e} s'exprimant de façon similaire. Notons tout d'abord que le calcul de la dérivée de la fonction u en un point de collocation fait intervenir tous les autres points de collocations, on parle de précision spectrale. Ensuite les termes $\lambda'_j\Big(x_i\Big)$ sont indépendants de u. Après quelques calculs, on peut introduire une matrice $\boldsymbol{D}^{(1)}$, matrice de dérivation d'ordre 1 de taille $N \times N$, telle que $\boldsymbol{D}^{(1)}_{i,j} = \lambda'_j\Big(x_i\Big)$ c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{D}^{(1)}_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{c_i\,(-1)^{i+j}}{c_j\,(x_i - x_j)}, & \text{si} \quad i \neq j\,, \\ \dfrac{-x_i}{2\,(1-x_i^2)}, & \text{si} \quad i = j \neq 1, N\,, \\ \dfrac{2\,(N-1)^2+1}{6}, & \text{si} \quad i = j = 1\,, \\ -\dfrac{2\,(N-1)^2+1}{6}, & \text{si} \quad i = j = N\,. \end{cases} \tag{2.33}$$

On exprime alors simplement la dérivée de u par

$$u'(x_i) = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{D}^{(1)}_{i,j} \hat{u}_j\,. \tag{2.34}$$

Les matrices de dérivation d'ordres supérieurs peuvent s'obtenir par multiplication matricielles $\boldsymbol{D}^{(n)} = \Big[\boldsymbol{D}^{(1)}\Big]^n$ mais il est également possible d'utiliser l'algorithme de Weidmann pour gagner en précision. Des comparaisons sur l'ordre de précision sont disponibles dans Boyer (2012).

2.2.2. Cas 2D

Dans le cas bidimensionnel la démarche est très similaire. On introduit N points de Gauss–Lobatto dans la direction x et M points de Gauss–Lobatto dans la direction y. La fonction u est alors projetée sur la base des polynômes de Lagrange λ_i et β_j dans les deux directions :

$$\forall\,(x,y) \in [-1,1]^2\,,\ u(x,y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \lambda_i(x)\,\beta_j(y)\,\hat{u}_{i,j}\,. \tag{2.35}$$

Puis la dérivée partielle p^{e} suivant x et q^{e} suivant y est exprimée par :

$$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p y^q}\,(x,y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \boldsymbol{D}^{x,p}_{k,i}\boldsymbol{D}^{y,q}_{l,j}\hat{u}_{i,j}\,, \tag{2.36}$$

où $\boldsymbol{D}^{x,1}$ est identique à la définition donnée en (2.33) et $\boldsymbol{D}^{y,1}$ est aussi identique à cette définition en substituant N par M.

2.2.3. Compléments

Jusqu'à présent le domaine était limité à l'intervalle $[-1,1]$. Il est possible d'effectuer des transformations de cet intervalle pour travailler sur $[0,1]$ ou $[Z_{in}, Z_{out}]$ par exemple. Si l'on travaille avec une coordonnée $r \in [0,1]$, le changement de variable $x \to r$ implique la modification suivante sur les dérivées : $\boldsymbol{D}^{r,p} = 2^p \boldsymbol{D}^{x,p}$. Par ailleurs si l'on travaille avec une coordonnée $z \in [Z_{in}, Z_{out}]$ alors le changement de variable $y \to z$ implique : $\boldsymbol{D}^{z,p} = [2/(Z_{out} - Z_{in})]^p \boldsymbol{D}^{y,p}$.

Une fois les équations résolues sur les points de collocation et les $(u_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ obtenus, il peut être utile de déterminer u en d'autres points que ceux de collocation. Pour cela il faut déterminer le terme T'_{N-1} qui apparaît dans l'expression (2.29) des polynômes de Lagrange. On commence par rappeler la relation vérifiée par les polynômes de Tchebychev $\forall\theta,\ T_{N-1}(\cos\theta) = \cos((N-1)\theta)$. On dérive cette relation pour obtenir :

$$\forall\theta,\ -\sin(\theta)\,T'_{N-1}(\cos(\theta)) = -(N-1)\cos((N-1)\,\theta)\ , \tag{2.37}$$

d'où finalement

$$T'_{N-1}(x) = (N-1)\,\frac{\sin((N-1)\,\theta)}{\sin(\theta)},\quad \text{avec}\quad \theta = \arccos(x)\ . \tag{2.38}$$

Conjuguée à l'expression de la projection (2.31), cette dernière relation permet d'écrire l'expression de u en tout point du domaine en fonction des $(u_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$:

$$\forall x\in[-1,1]\,,\ u(x) = \frac{1}{N-1}\frac{\sin((N-1)\,\theta)}{\sin(\theta)}\sum_{i=1}^{N}\frac{(-1)^i\,(1-x^2)}{c_i\,(x-x_i)}\hat{u}_i\,. \tag{2.39}$$

2.2.4. Exemple de résolution d'une équation différentielle ordinaire avec la méthode de collocation spectrale

Cette section a pour but d'appliquer la méthode de collocation spectrale décrite ci-dessus à un exemple simple. On se place dans le cas 1D et l'on considère une poutre simplement supportée à ses deux extrémités $x=-1$ et $x=1$. L'équation adimensionnée régissant le déplacement u de la poutre en tout point x peut s'exprimer par :

$$\partial_x^4 u - \mu^2\alpha u(x) = 0\,, \tag{2.40}$$

où α est une constante strictement positive dépendant du matériau considéré et μ une valeur propre du système. Les conditions limites associées à l'hypothèse de poutre simplement supportée sont :

$$\begin{cases} u(1) = u(-1) = 0\,, \\ \partial_x^2 u(1) = \partial_x^2 u(-1) = 0\,. \end{cases} \tag{2.41}$$

L'équation (2.40) associée aux conditions limites (2.41) admet la famille de solution suivantes :

$$u(x) = A_k\sin(k\pi x)\,,\ \text{associé à la valeur propre}\ \ \mu = \frac{k^2\pi^2}{\sqrt{\alpha}},\ k\in\mathbb{Z}\,. \tag{2.42}$$

Appliquons maintenant la méthode de collocation spectrale pour retrouver numériquement cette solution analytique. On commence par discrétiser l'espace en introduisant N points de Gauss–Lobatto comme définis en (2.28). On introduit le vecteur $\hat{\boldsymbol{u}} = {}^{\mathrm{t}}(\hat{u}_1,...,\hat{u}_N)$. L'équation (2.40) discrétisée s'écrit alors simplement ainsi :

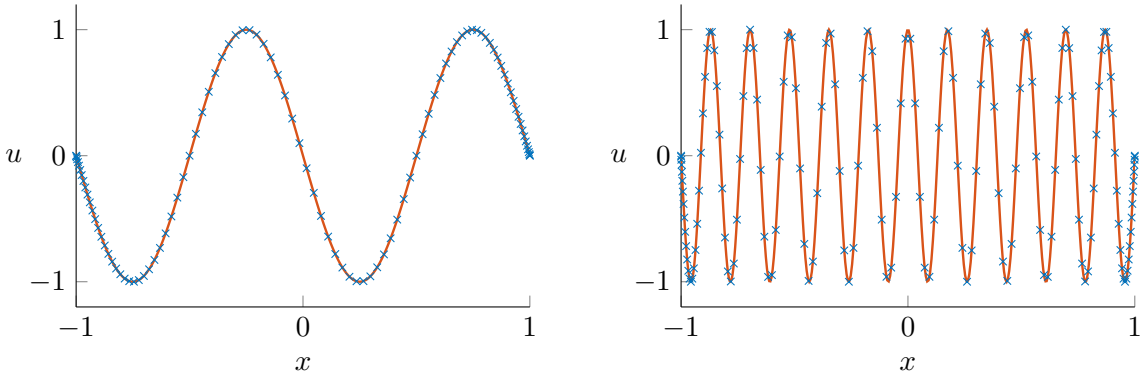
$$\boldsymbol{D}^{(4)}\hat{\boldsymbol{u}} - \mu^2\alpha\hat{\boldsymbol{u}} = 0\,, \tag{2.43}$$

avec $\boldsymbol{D}^{(4)}$ la matrice de dérivation d'ordre 4 (obtenue à partir de multiplications matricielles et de la définition (2.33)). On peut alors écrire le problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{u}} = \omega\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{u}}\,, \tag{2.44}$$

où $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}^{(4)}$, $\boldsymbol{B} = \alpha I_N$ et[3] $\omega = \mu^2$. Pour résoudre ce problème aux valeurs propres généralisé, il suffit d'utiliser un logiciel tel que Matlab®, de construire la matrice $\boldsymbol{A}$ en se servant de la

3. Cette dernière transformation est uniquement destinée à se rapprocher de l'écriture canonique d'un problème aux valeurs propres généralisé.



(a) Mode 4, $N = 100$.

(b) Mode 23, $N = 150$.

FIGURE 2.2. – Comparaison du déplacement normalisé obtenu avec la solution analytique (en trait continu rouge) et avec la méthode spectrale (en croix bleues).

définition (2.33) et de construire trivialement la matrice $\boldsymbol{B}$. Sous cette forme, la i^{e} ligne des matrices correspond à l'équation (2.40) écrite au i^{e} point de collocation tandis que la j^{e} colonne correspond au coefficient devant l'inconnue u_j. Les conditions limites du problème peuvent être appliquées de deux façons : ou bien en modifiant la matrice de dérivation pour les inclure dedans, ou bien en écrasant certaines lignes des matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$. La dernière méthode est préférable car elle permet de découpler le calcul des matrices $\boldsymbol{D}$, indépendantes du problème considéré, de la résolution de l'équation. Commençons par les conditions de Dirichlet aux bords du domaine $u(-1) = 0$ et $u(1)$. Pour les écrire on va remplacer la première et la dernière ligne de $\boldsymbol{A}$ et de $\boldsymbol{B}$ et écrire à la place :

$$\begin{aligned} &u(-1) = 0 \to u_1 = 0 \to \boldsymbol{A}(1,1) = 1 \text{ et } \boldsymbol{B}(1,1) = 0\,, \\ &u(1) = 0 \to u_N = 0 \to \boldsymbol{A}(N,N) = 1 \text{ et } \boldsymbol{B}(N,N) = 0\,. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Pour écrire l'autre jeu de conditions limites, il faut remplacer une autre paire de lignes, par exemple les lignes 2 et $N-1$. Ce choix est arbitraire : on décide d'écrire ces conditions limites plutôt que d'écrire l'équation en ces points de collocation. Ceci donne :

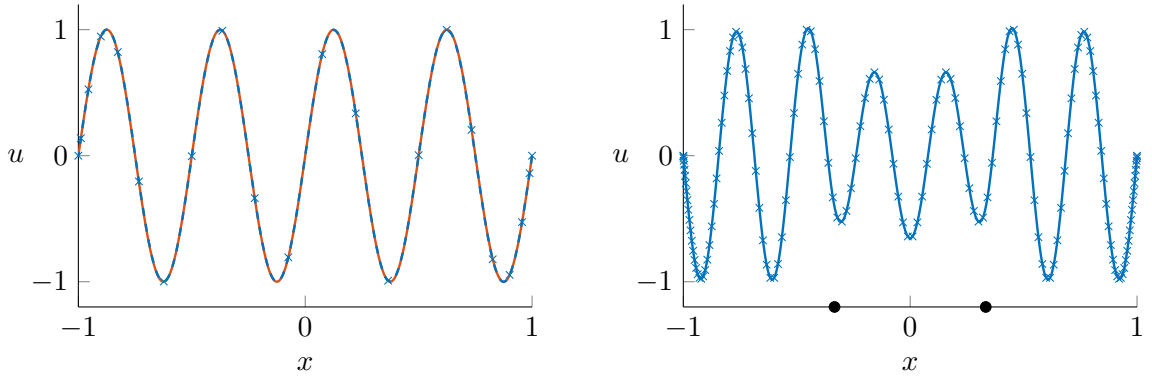
$$\begin{aligned} &\partial_x^2 u(-1) = 0 \to \boldsymbol{A}(2,:) = \boldsymbol{D}^{(2)}_{1,:} \text{ et } \boldsymbol{B}(2,:) = 0\,, \\ &\partial_x^2 u(1) = 0 \to \boldsymbol{A}(N-1,:) = \boldsymbol{D}^{(2)}_{N,:} \text{ et } \boldsymbol{B}(N-1,:) = 0\,. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Attention : ce n'est pas parce que les lignes 2 et $N-1$ sont utilisées pour écrire ces conditions limites que ces conditions limites concernent les points de collocation 2 et $N-1$. Ici il faut donc bien utiliser $\boldsymbol{D}^{(2)}_{1,:}$ et $\boldsymbol{D}^{(2)}_{N,:}$ car les conditions limites concernent les points 1 et N. Une fois les matrices complétées, il suffit d'utiliser une fonction telle que la fonction *eig* de Matlab® pour résoudre le problème aux valeurs propres généralisé.

La figure 2.2 présente des comparaisons de la solution ainsi obtenue avec la solution analytique pour deux modes distincts et pour différentes valeurs de N. Un excellent accord est obtenu entre la solution analytique et la solution dite ici « numérique », même lorsque la solution présente de nombreuses oscillations.

Par ailleurs on illustre sur la figure 2.3a le réalisme de l'interpolation de u entre deux points de collocations : même en résolvant le problème sur un nombre de points de collocation relativement faible (ici $N = 22$), il est possible d'obtenir un déplacement u avec une allure réaliste et cohérente sur tout le domaine.

Dans le cas moins trivial où l'inconnue x intervient explicitement dans l'équation régissant le système, il suffit de modifier l'expression des matrices $\boldsymbol{A}$ et/ou $\boldsymbol{B}$. Prenons le cas d'une poutre simplement supportée surchargée localement : la poutre n'est plus constituée d'un matériau uniforme mais est surchargée par des masselottes en M positions distinctes arbitraires notées $(x_m)_{1\in[\![1,M]\!]}$.



(a) Mode 8 sans surchargment, $N = 22$.

(b) Mode 13 avec surchargement, $N = 150$.

FIGURE 2.3. – (a) Illustration de l'interpolation de Tchebychev (en traits pointillés bleus) avec $N = 22$ points (en croix bleues) par rapport à la solution analytique (en trait continu rouge).
(b) Illustration du comportement d'une poutre surchargée au niveau des points symbolisés par des disques noirs.

L'équation régissant la déplacement u devient alors :

$$\partial_x^4 u - \mu^2 \alpha(x)\, u(x) = 0, \text{ avec } \alpha(x) = \begin{cases} C_1 & \text{si } \forall m \in [\![1, M]\!]\,,\ x \neq x_m\,, \\ C_1 + C_2 & \text{si } \exists m \in [\![1, M]\!]\,,\ x = x_m\,. \end{cases} \tag{2.47}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes. Il suffit alors de modifier l'expression de $\boldsymbol{B}$: on peut écrire dans un premier temps $\boldsymbol{B} = C_1 I_N$ puis sur les m lignes correspondantes aux points de collocation les plus proches des $(x_m)_{1 \in [\![1,M]\!]}$, on rajoute C_2 :

```
for i=1:N
  B(i,i) = C_1
  if( estUnPointDeSurchargement(i) )
    B(i,i) = B(i,i) + C_2
  endif
endfor
```

À titre d'illustration on représente l'effet d'une telle modification sur les fonctions propres sur la figure 2.3b. On ne dispose pas de solution analytique pour ce cas là mais la figure montre la capacité de la méthode à déterminer des solutions plus « complexes » que de simples fonctions sinusoïdales.

2.3. Présentation du montage expérimental VALDO

Cette partie présente succinctement le montage expérimental VALDO, Veine Axisymétrique pour Limiter le Développement des Oscillations, du département DEFA [4] (Département Énergétique Fondamentale et Appliquée) de l'ONERA. Les données issues de ce montage sont utilisées comme référence pour l'étude de transition laminaire-turbulent. Une description plus complète du montage est disponible dans le rapport technique de Avalon *et al.* (2000). La géométrie du montage est d'abord présentée, puis son fonctionnement est expliqué et enfin la métrologie inclue dans la campagne de mesure exploitée dans ces travaux est décrite.

Ce montage en gaz froid a été conçu à l'origine pour étudier les oscillations de pression et plus particulièrement le VSP. Il n'était pas destiné à l'étude de la transition laminaire-turbulent au sein des conduits à paroi débitante. L'étude de la transition dans ce montage effectuée par Gazanion *et al.* (2013) s'est appuyée sur une campagne de mesures existante, et non sur une campagne de mesures dédiée à la transition. Ceci explique notamment la métrologie utilisée et la position des points de mesure.

Le montage VALDO consiste en l'assemblage de cylindres de section circulaire dont la paroi latérale est un matériau poreux appelé « poral ». Chaque cylindre et sa paroi poreuse sont eux-mêmes encapsulés dans un cylindre de rayon supérieur, le tout formant un « segment ». Une photographie de l'intérieur du montage est disponible figure 2.4. L'utilisation de plusieurs segment permet de faire varier la longueur du montage. Il en existe quatre mais le montage peut évidemment fonctionner avec un seul ou plusieurs segments. À la sortie du montage, il est possible d'installer une tuyère mais cet élément est lui aussi optionnel.

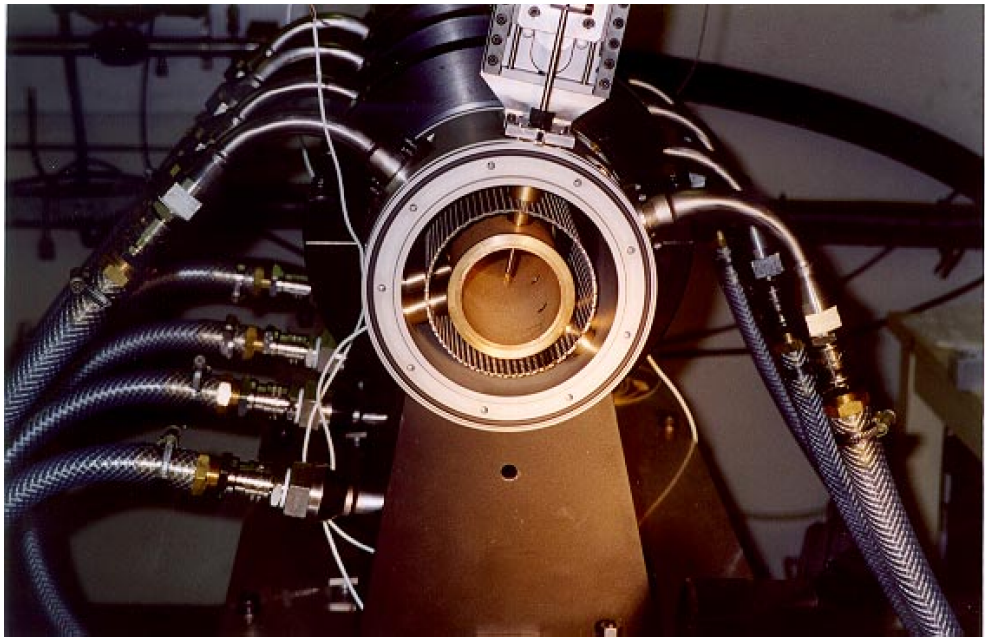


FIGURE 2.4. – Vue de l'intérieur du montage VALDO.

Chaque segment est alimenté en air pressurisé via des tubes d'alimentation. L'équilibrage des débits d'air entre les différents éléments est réalisé par l'intermédiaire de cols soniques de même diamètre placés sur les différents tube d'alimentation. L'air injecté dans le cylindre extérieur va alors traverser le poral pour pénétrer dans le cylindre intérieur, la veine d'étude. L'air circulant dans le poral et injecté dans la veine est donc vu par celle-ci comme une injection d'air normale à sa paroi latérale. La paroi poreuse a une épaisseur de 5 mm et est constitué de billes en bronze frittées avec deux porosités disponibles : 8 µm et 18 µm.

4. Ce département a désormais fusionné avec le DMAE et fait partie du DMPE (Département Multi-physique pour l'Énergétique).

z (en mm)	z/R_p	Position des mesures
49	1,63	30 positions radiales entre $-R_p$ et R_p avec un pas de 2 mm pour $\theta = 0$
119	3,97	
217	7,23	
287	9,57	
385	12,8	
455	15,2	
553	18,4	
623	20,8	

TABLE 2.1. – Position de mesure dans le montage VALDO.

2.3.1. Disposition des éléments

Les quatre éléments font 168 mm de longueur chacun et possèdent un diamètre intérieur de 60 mm. Les intersegments, qui par définition séparent les éléments, se trouvent à une distance du fond avant de 168 mm (5,6R_p), 336 mm (11,2R_p) et 504 mm (16,8R_p) lorsque les quatre éléments sont utilisés.

2.3.2. Position des mesures

Un seul des quatre éléments possèdent des ouvertures pour pouvoir effectuer des mesures à l'intérieur de la veine. Cet élément est donc mis successivement aux quatre positions du montage pour faire varier la position des mesures. Cet élément possède deux ouvertures respectivement à 49 mm et 119 mm de son extrémité. Par chacune de ses ouvertures, une sonde fil-chaud permet d'effectuer des mesures de la vitesse $U = \sqrt{U_z^2 + U_r^2}$ à différentes positions radiales. Plus précisément, la sonde peut parcourir tout le diamètre intérieur par pas de 2 mm (sauf sur l'une des parois). Il y a donc 30 mesures radiales pour chacune des 4×2 positions axiales soit 240 positions de mesure. L'ensemble des positions de mesure est résumé dans le tableau 2.1.

2.3.3. Les campagnes de mesures

Le montage VALDO a fait l'objet de différentes campagnes de mesures destinées à étudier par exemple l'influence de la vitesse d'injection, l'influence de la tuyère et d'autres phénomènes. Dans la thèse de Gazanion et dans la présente thèse, ce sont les données de la campagne de 2001 qui ont été utilisées. Cette campagne est décrite dans le rapport technique non publié de Avalon et Lambert (2001). Les données utilisées ont été générées avec la configuration suivante :

— les quatre segments en place, totalisant une longueur de 672 mm soit 22.4R_p ;
— une pression d'alimentation de 3,5 bar conduisant à une vitesse d'injection V_{inj} de 1,05 m/s ;
— pas de tuyère en sortie du montage ;
— une température ambiante de 20 °C soit 293 K.

L'acquisition des mesures a été effectuée à la cadence de 4000 points par seconde sur la durée d'une seconde, ce qui donne une fréquence d'acquisition de 4000 Hz. À titre d'information, l'absence de tuyère, la vitesse d'injection et la longueur total du conduit conduisent à l'obtention d'une vitesse maximale de l'ordre de 70 m/s à la sortie, soit un nombre de Mach d'environ 0,2. La figure 2.5 est une photographie du montage dans cette configuration. Rappelons que l'étude des résultats de cette campagne de mesures a permis à Gazanion de mettre en évidence la présence d'une transition laminaire-turbulent au sein du conduit, comme expliqué au paragraphe 1.2.1.

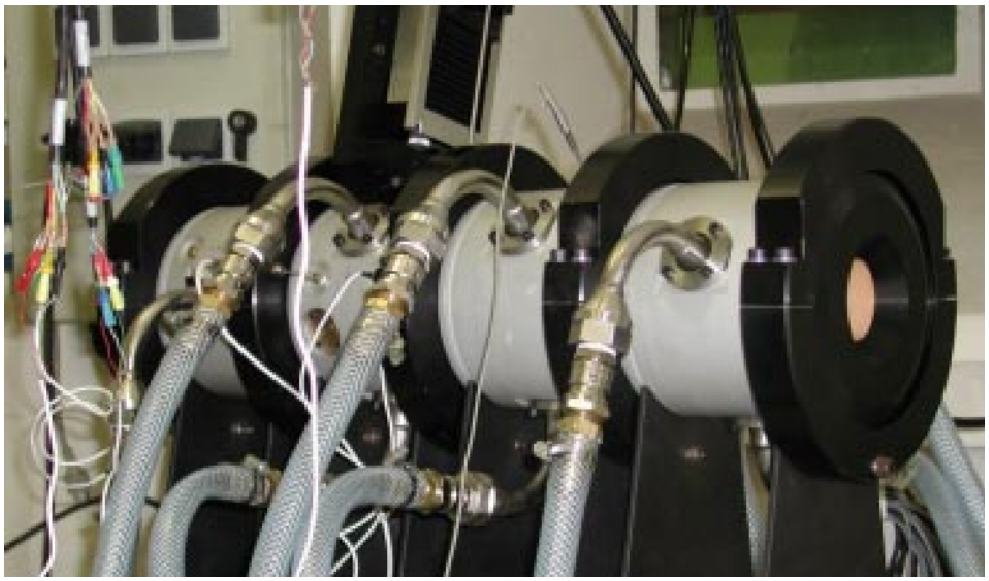


FIGURE 2.5. – Photographie du montage VALDO dans sa configuration avec quatre éléments, sans tuyère.

2.4. Présentation de la chaîne de calcul CEDRE

2.4.1. Description générale

La plateforme logicielle CEDRE est une chaîne de calcul développée à l'ONERA pour l'énergétique et la propulsion pour des applications industrielles et de recherche. Une description complète de ce code et de ses capacités peut être trouvée dans Refloch *et al.* (2011). Le code est organisé comme un ensemble de solveurs en interaction, chaque solveur traitant un sous-système physique : écoulement de fluide compressible réactif multi-espèce (CHARME), phase dispersée dans l'approche eulérienne (SPIREE) ou lagrangienne (SPARTE), rayonnement (ASTRE), films liquides (FILM), parois solides avec conduction thermique (ACACIA). Tous ces solveurs ont notamment accès à une biliothèque, THERMOLIB, permettant la gestion des propriétés thermophysiques des différentes espèces utilisées, ainsi qu'à une une base de données thermophysiques vérifiées pour 65 espèces courantes. L'ensemble des solveurs du code représente plus de 5300 sous-programmes écrits en Fortran90. En plus du code proprement dit, la chaîne contient un ensemble d'utilitaires permettant la réalisation d'un calcul : un outil de prétraitement géométrique permettant le découpage du maillage d'origine en autant de processus que souhaités (EPINETTE), un outil de mise en données permettant notamment la sélection des paramètres numériques (EPICEA) ainsi qu'un outil permettant le posttraitement des archives binaires et leur export au format souhaité (EXPLORE).

Un domaine de calcul peut-être divisé en plusieurs « domaines utilisateurs », ce qui permet par exemple à l'utilisateur de faire appel à un modèle de comportement physique (par exemple de turbulence) différent dans chacun de ces domaines ou encore d'utiliser un pas de temps différent dans chaque domaine. Le code CEDRE est destiné au calcul massivement parallèle. À cet effet, chaque domaine utilisateur est lui-même divisé en « sous-domaines », chacun étant confié à un processeur. Les maillages utilisés sont non structurés généralisés : ils sont constitués de polyèdres à n faces, l'unique contrainte étant que deux mailles ne peuvent avoir en commun qu'une seule face. Enfin, le code employé utilise l'approche volumes finis. Dans le cadre de cette thèse, seul le solveur Navier–Stokes CHARME est utilisé. Plusieurs schémas d'intégration temporelle sont disponibles dans ce solveur :

— une méthode GMRES (Généralisation de la Méthode de Minimisation du Résidu) implicite pour les simulations visant l'obtention rapide d'un état stationnaire. Une technique de pas de temps local adaptatif permet d'améliorer la robustesse des calculs ;

— un schéma de Runge–Kutta implicite d'ordre 2 ou 3 pour les applications instationnaires ;
— un schéma de Runge–Kutta explicite à n approximations pour les applications instationnaires également.

La discrétisation spatiale (Haider *et al.*, 2012) est réalisée avec une approche de type MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws). Cette méthode consiste, à partir des états interpolés sur les faces des cellules, à reconstruire les flux à droite et à gauche d'une interface de la manière suivante : si l'on considère l'équation 1D $\partial_t u + \partial_x F(u)$, on écrit :

$$\partial_t u_i + \frac{1}{\Delta x_i}\left(F(u^*_{i+\frac{1}{2}}) - F(u^*_{i-\frac{1}{2}})\right) = 0\,, \tag{2.48}$$

où $u^*_{i\pm\frac{1}{2}}$ sont deux fonctions dépendantes de $u^D_{i\pm\frac{1}{2}}$ et $u^G_{i\pm\frac{1}{2}}$, les états à droite et à gauche de l'interface. Ces états sont définis par :

$$u^G_{i+\frac{1}{2}} = u_i + 0,5\phi(r_i)(u_{i+1} - u_i) \quad , \quad u^D_{i+\frac{1}{2}} = u_{i+1} - 0,5\phi(r_{i+1})(u_{i+2} - u_{i+1})\,, \tag{2.49}$$

$$u^G_{i-\frac{1}{2}} = u_{i-1} + 0,5\phi(r_{i-1})(u_i - u_{i-1}) \quad , \quad u^D_{i-\frac{1}{2}} = u_i - 0,5\phi(r_i)(u_{i+1} - u_i)\,. \tag{2.50}$$

où ϕ est un limiteur de pente (Minmod, Superbee ou Van Leer par exemple) et $r_i = (u_i - u_{i-1})/(u_{i+1} - u_i)$. Les flux des termes visqueux, non dissipatifs, sont calculés avec un schéma centré alors qu'un grand nombre de choix pour les flux eulérien est disponible. Dans le cadre de cette thèse, on utilisera principalement un schéma de Roe ou HLLC (Harten, Lax and van Leer with Contact, Toro *et al.* (1994)).

Concernant la turbulence, le code permet d'utiliser l'approche RANS (Reynolds Averaged Navier–Stokes) avec de nombreux modèles de turbulence parmi lesquels le modèle de Spalart, le $k - \omega$ SST ; d'utiliser des modèles de turbulences hybrides comme le modèle ZDES (Deck, 2012) et il permet également d'effectuer des simulations LES (Sainte-Rose *et al.*, 2012) avec différents modèles de sous-maille.

2.4.2. Justification de l'utilisation du code CEDRE

Au-delà de la disponibilité de code au sein du laboratoire, les capacités de code à simuler l'écoulement instationnaire au sein d'un moteur à propergol et surtout des conduits à paroi débitante justifient l'utilisation de ce code dans les travaux présentés. En effet, ce code a été utilisé par Chedevergne *et al.* (2012) puis par Boyer *et al.* (2013a) pour valider les études de stabilité linéaire biglobale de la solution de Taylor–Culick. L'excellent accord constaté entre les résultats théoriques et numériques démontrent la capacité du code CEDRE a capturé les phénomènes hydrodynamiques dans une telle configuration. Par ailleurs, ce code a également servi de base aux travaux de Gazanion (2014) lors de son étude de la transition laminaire-turbulent dans le montage expérimental VALDO via des simulations LES. Ici encore, le code a démontré sa capacité à reproduire les phénomènes instationnaires observés dans l'expérience. Ces éléments justifient donc l'utilisation du code CEDRE aussi bien pour calculer l'écoulement moyen au sein d'une géométrie étoilée que pour simuler la configuration du montage expérimental VALDO.

Bilan

Ce chapitre nous a permis de présenter les outils théoriques de stabilité linéaire, la méthode de collocation spectrale, le montage expérimental et le code Navier–Stokes qui seront utilisés dans ce manuscrit.

La première partie concernant la stabilité linéaire a permis de rappeler le but d'une telle étude : déterminer si une perturbation superposée à un écoulement de base va avoir tendance à s'amortir ou au contraire à s'amplifier. Celle-ci a également permis de présenter le théorème de Floquet et son application dans le cas d'une périodicité azimutale. Enfin, des compléments techniques comme l'alternative de Fredholm ont été détaillés.

L'objectif de la seconde partie sur la collocation spectrale était non seulement de présenter cette méthode régulièrement utilisée dans cette thèse, mais aussi de fournir un exemple d'application simple. Pour cela, nous avons d'abord présenté le cas mono-dimensionnel en introduisant les points de Gauss-Lobatto ainsi que les polynômes de Lagrange. L'extension de la méthode au cas bidimensionnel se fait simplement en introduisant une discrétisation suivant la seconde coordonnée de l'espace considérée ainsi qu'un second polynôme de Lagrange suivant cette coordonnée. Ensuite la méthode a été appliquée au cas simple d'une poutre simplement supportée à ses deux extrémités. Au travers de cet exemple, nous avons pu détailler les étapes de la résolution d'un tel problème par la méthode de collocation spectrale et nous avons également mis en évidence la précision de la méthode ainsi que sa capacité à fournir des solutions viables même avec une discrétisation faible.

La troisième partie de ce chapitre était consacrée à la présentation du montage expérimental VALDO, qui fait l'objet d'une étude numérique dans le chapitre 5. Ce montage en gaz froid a été initialement mis en place pour étudier les oscillations de pression dans les conduits de section circulaire. Dans la campagne qui nous intéresse, il est composé de quatre « tronçons » et l'air est injecté radialement à travers un poral dont la porosité est de 18 µm.

Enfin, la dernière partie de ce chapitre a permis de décrire succinctement le code CEDRE et de justifier son utilisation dans les présents travaux de thèse, aussi bien pour le calcul de l'écoulement moyen que pour l'étude de la transition laminaire-turbulent.

Maintenant que le contexte général de l'étude a été décrit, que la littérature sur le sujet a été présentée et que le matériel et les méthodes utilisés durant ce travail ont été exposés, la démarche entreprise au cours de cette thèse va détaillée.

Deuxième partie

Démarche

Chapitre 3

Détermination de l'écoulement de base au sein d'un conduit à paroi débitante de section étoilée

L'objectif de ce chapitre consiste à obtenir les champs de vitesse et de pression stationnaires au sein d'un conduit à paroi débitante de section étoilée. Comme expliqué au chapitre 2.1, il est nécessaire de connaître cet écoulement pour pouvoir en étudier la stabilité. Il existe trois possibilités pour obtenir cet écoulement : la voie expérimentale, la simulation numérique ou encore l'approche analytique.

Des géométries étoilées sont utilisées dans certains montages expérimentaux, mais ceux-ci sont destinés à des études de combustion, et la métrologie associée ne permet pas une étude précise de l'écoulement qui s'y développe. Au niveau expérimental, il serait nécessaire d'utiliser un montage en gaz froid, or un tel montage permettant l'étude de l'écoulement pour des sections étoilées n'existe pas à ce jour. Par ailleurs, cette solution serait beaucoup plus coûteuse que les deux autres. Il est en effet possible d'obtenir cet écoulement numériquement via un logiciel de CFD. Toutefois la simulation numérique se prête peu à des études paramétriques ou du moins, pas sans être associée à des temps de calcul inenvisageables dans le cadre de cette thèse. Par ailleurs, une étude de stabilité linéaire fait intervenir les gradients de vitesse de l'écoulement de base et peut se révéler très sensible à la précision obtenue sur ces gradients de vitesse. Il est donc nécessaire de déterminer ces derniers avec une grande précision. Avec des maillages et des temps de calculs raisonnables, il est délicat d'obtenir ces gradients de vitesse avec précision avec une solution calculée par un solveur Navier–Stokes, en particulier sur des maillages non structurés comme en utilise le code CEDRE. Dans le cas circulaire, on dispose de la solution analytique de Taylor–Culick, ce qui facilite son étude de stabilité car on peut rapidement faire varier les paramètres et obtenir une grande précision sur les gradients de vitesse. C'est donc vers la recherche d'une solution analytique pour des sections étoilées que l'on s'oriente.

La solution analytique obtenue étant expliquée en détail dans un article que nous avons publié dans le *Journal of Fluid Mechanics*, ce chapitre est essentiellement composé de cet article. Pour obtenir la solution, l'expression des conditions limites à la paroi est d'abord simplifiée en réalisant un changement de variables. Puis un développement asymptotique du second ordre est introduit pour linéariser les équations. Les termes du premier ordre n'interviennent pas dans la conservation du débit, ce qui justifie la mise en œuvre d'un développement du second ordre pour permettre d'assurer cette conservation et pour élargir ainsi le domaine de validité de la solution. Une solution de similitude à variables séparées est alors introduite, permettant d'obtenir des systèmes d'équations différentielles ordinaires. Les différents ordres du développement asymptotique sont calculés successivement. Enfin, une comparaison de la solution analytique obtenue avec des simulations numériques effectuées avec CEDRE sont présentées. Cette comparaison permet la validation de la solution et la détermination de son domaine de validité.

Sommaire

3.1. Détermination et validation de l'écoulement au sein d'un conduit à paroi débitante de section étoilée 46

3.2. Compléments sur la solution analytique obtenue 72

3.2.1. Mise en évidence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse axiale . 72

3.2.2. Développements de Taylor pour les conditions limites sur l'axe 74

3.2.3. Détermination de la pression 76

3.3. Proposition d'extension de la solution à une géométrie quelconque périodique 76

3.1. Détermination et validation de l'écoulement au sein d'un conduit à paroi débitante de section étoilée

Ce chapitre est composé d'un article publié dans le *Journal of Fluid Mechanics* : Bouyges *et al.* (2017). Il détaille l'obtention de la solution pour un écoulement au sein d'un conduit à paroi débitante de section étoilée, puis la validation de cette solution par comparaison avec des simulations numériques. À la suite de cet article, des éléments supplémentaires sont apportés pour compléter la description de l'écoulement. Pour faciliter la lecture de l'article, certaines notations sont différentes par rapport au présent manuscrit. Les correspondances entre les différentes notations sont explicitées dans le tableau 3.1 ci-dessous.

Description	Notation article	Notation manuscrit
Rayon moyen de la paroi	a	R_p
Norme de la vitesse d'injection à la paroi	U_{wall}	V_{inj}
Définition adimensionnée de la paroi	$1+\varepsilon\cos(m\theta)$	$1+\eta$
Champ de vitesse stationnaire (écoulement de base)	$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{U}$
Pression stationnaire (écoulement de base)	p	P
Composantes de la vitesse d'ordre $O(1)$	$u_r^{(0)}$ $u_z^{(0)}$	$U_r^{(0)}$ $U_z^{(0)}$
Composantes de la vitesse d'ordre $O(\varepsilon)$	v_r v_θ v_z	$U_r^{(1)}$ $U_\theta^{(1)}$ $U_z^{(1)}$
Composantes de la vitesse d'ordre $O(\varepsilon^2)$	$u_{r,n}^{(2)}$ $u_\theta^{(2)}$ $u_{z,n}^{(2)}$	$U_{r,n}^{(2)}$ $U_\theta^{(2)}$ $U_{z,n}^{(2)}$

TABLE 3.1. – Correspondance entre les notations utilisées dans l'article et celles du manuscrit.

J. Fluid Mech. (2017), *vol.* 826, *pp.* 396–420. © Cambridge University Press 2017
doi:10.1017/jfm.2017.430

Asymptotically based self-similarity solution of the Navier–Stokes equations for a porous tube with a non-circular cross-section

M. Bouyges[1], F. Chedevergne[1,†], G. Casalis[2] and J. Majdalani[3,†]

[1]Department of Multi-Physics for Energetics, ONERA, Toulouse 31055, France

[2]ISAE-SUPAERO, Toulouse 31055, France

[3]Department of Aerospace Engineering, Auburn University, Auburn, AL 36849, USA

(Received 1 March 2017; revised 10 May 2017; accepted 16 June 2017)

This work introduces a similarity solution to the problem of a viscous, incompressible and rotational fluid in a right-cylindrical chamber with uniformly porous walls and a non-circular cross-section. The attendant idealization may be used to model the non-reactive internal flow field of a solid rocket motor with a star-shaped grain configuration. By mapping the radial domain to a circular pipe flow, the Navier–Stokes equations are converted to a fourth-order differential equation that is reminiscent of Berman's classic expression. Then assuming a small radial deviation from a fixed chamber radius, asymptotic expansions of the three-component velocity and pressure fields are systematically pursued to the second order in the radial deviation amplitude. This enables us to derive a set of ordinary differential relations that can be readily solved for the mean flow variables. In the process of characterizing the ensuing flow motion, the axial, radial and tangential velocities are compared and shown to agree favourably with the simulation results of a finite-volume Navier–Stokes solver at different cross-flow Reynolds numbers, deviation amplitudes and circular wavenumbers.

Key words: boundary layers, mathematical foundations, Navier–Stokes equations

1. Introduction

Motivated by the need to model flow filtration and isotope separation, the quest for a similarity solution in the context of viscous, rotational and incompressible motion through porous channels and tubes may be traced back to the pioneering work of Berman (1953). Following Hiemenz (1911) in the use of a linear variation of the streamfunction with respect to the axial distance from the headwall, Berman's similarity transformation of the Navier–Stokes equations led to a fourth-order ordinary differential equation that could be solved either asymptotically or numerically over different ranges of the cross-flow Reynolds number. In fact, the first explicit solution

† Email addresses for correspondence: francois.chedevergne@onera.fr, joe.majdalani@auburn.edu

presented by Berman (1953) related to the planar flow in a two-dimensional channel with porous walls and a small suction Reynolds number. The latter was based on the wall suction velocity, the kinematic viscosity and the channel's half height. Owing to its relevance to a variety of phenomenological problems, including biological flows, Berman's formulation gave rise to a plethora of complementary investigations. Two major research directions followed, and these focused either on the development of additional solutions for various flow configurations (Sellars 1955; Berman 1958; Proudman 1960; Terrill & Shrestha 1965; Terrill & Thomas 1969) or on the uniqueness or stability issues of such solutions under specific ranges of the cross-flow Reynolds number (Zaturska, Drazin & Banks 1988; Watson *et al.* 1990; Cox 1991; Lu 1994; Cox & King 1997; Lu 1997).

Independently of these studies, other relevant work in the context of membrane separation and paper manufacture may be attributed to Taylor (1956), particularly in his presentation of analytical expressions for the inviscid motion in porous channels, wedges, cones and tubes. The latter was also reconstructed by Culick (1966) as a practical, rotational model for the mean flow field in axisymmetric rocket motors, thus leading to the so-called Taylor–Culick profile. The resulting injection-based formulation compared favourably with Berman's large-Reynolds-number solution and was shown to adequately represent the non-reactive internal motion in solid rocket motors according to both laboratory experiments (Yamada, Goto & Ishikawa 1976; Dunlap *et al.* 1990; Gazanion, Chedevergne & Casalis 2014) and computations (Sabnis, Gibeling & McDonald 1989; Apte & Yang 2003; Venugopal, Moser & Najjar 2008). By forcing the flow to enter the chamber perpendicularly to the sidewall, the Taylor–Culick model exhibited a realistic axial velocity that could satisfy the no-slip requirement at the sidewall despite its strictly inviscid character. As shown by Chedevergne, Casalis & Majdalani (2012), this simple model compared very well with direct numerical simulations of a circular-port chamber except in the close vicinity of the headwall, where the inevitable development of a viscous boundary layer could not be accounted for.

The continued interest in Taylor–Culick type formulations may be attributed to its suitability as a base flow representation in modelling combustion instability phenomena and related pressure oscillations in rocket systems. In this vein, one may cite several studies that explore the linear instability behaviour of hydrodynamic perturbations (Casalis, Avalon & Pineau 1998; Griffond & Casalis 2000; Chedevergne, Casalis & Féraille 2006; Abu-Irshaid, Majdalani & Casalis 2007; Chedevergne *et al.* 2012; Boyer, Casalis & Estivalèzes 2013), acoustic energy balance formulations (Fabignon *et al.* 2003; Flandro & Majdalani 2003; Majdalani, Flandro & Fischbach 2005; Majdalani, Fischbach & Flandro 2006; Fischbach, Majdalani & Flandro 2007; Flandro, Fischbach & Majdalani 2007), vortico-acoustic wave approximations (Majdalani & Flandro 2002; Majdalani 2009), particle mean flow effects (Féraille & Casalis 2003) and rocket performance characteristics (Saad, Sams & Majdalani 2006; Sams, Majdalani & Saad 2007).

In the spirit of improving the practicality and relevance of Taylor–Culick formulations to realistic rocket systems, several extensions have been systematically pursued in the past two decades. These have been warranted by the need to incorporate the effects of grain regression (Majdalani, Vyas & Flandro 2002, 2009), port variability (Kurdyumov 2006), wall tapering (Saad *et al.* 2006; Sams *et al.* 2007), axisymmetric headwall injection (Majdalani & Saad 2007), viscosity (Majdalani & Akiki 2010) and potential flow steepening (Saad & Majdalani 2010). For the effects of compressibility, two general approaches have been successfully advanced. The first relied on a

similarity reduction of the Navier–Stokes equations into an integral formulation that could suitably account for the slow axial pressure variations that occurred in long chambers (Balakrishnan, Liñan & Williams 1992; Akiki & Majdalani 2016). Although the resulting equations had to be solved numerically along different streamlines, the integral framework enabled us to capture the effects of arbitrary sidewall mass injection. The second approach applied a Rayleigh–Janzen expansion technique while assuming a constant wall injection speed to extract closed-form analytical expressions for the compressible Taylor–Culick profiles in both axisymmetric (Majdalani 2007) and two-dimensional planar configurations (Maicke & Majdalani 2008).

Since most former studies have focused on circular grain configurations, the purpose of this study is to extend the Taylor–Culick flow description to more practical propellant grain perforations that comprise stars, multi-fins, wagon-wheels, dog-bones or dendrites. To do so requires the incorporation of a radial deviation from a fixed chamber radius. The concept of perturbing the injection velocity or the location of the injection site has, in fact, been previously explored by Balachandar, Buckmaster & Short (2001). Their work led to important physical insight into the streamwise evolution of axial vorticity along with the subdivision of the fluid domain into an inviscid annulus that extended radially inwards into a viscous core. Furthermore, for a radial deviation of ε, the analysis showed that the cross-flow Reynolds number could not exceed $1/\varepsilon$ in their linear perturbation range. A subsequent study by Kurdyumov (2006) presented a mathematical model that could be solved numerically for a variable cross-section, thus confirming the evolution of axial vorticity in the presence of viscous effects. It also helped to characterize the behaviour of the pressure distribution and its deviation from the traditional Taylor–Culick value. Along similar lines, a closed-form analytical solution was developed by Van Horn & Majdalani (2014) for a non-circular star-shaped grain under incompressible, inviscid and rotational conditions. However, the latter dismissed the effects of the tangential velocity at the basis of their analysis, thus leading to a second-order asymptotic approximation that remained limited to a modest number of lobes, m, being constrained by $\varepsilon < 1/m$.

In what follows, a similarity solution will be applied to the viscous Navier–Stokes equations, along with a judiciously constructed perturbation expansion to derive a higher-order description of the incompressible flow field in a porous tube with uniform wall injection. The first objective will be to achieve a second-order formulation that extends the range of applicability of the ensuing model to sufficiently large values of the cross-flow Reynolds number, namely, to levels that correspond to practical rocket simulations and cold flow experiments. The second objective will be to provide a solution that can be reproduced with relative ease.

The paper is organized as follows. First, the problem formulation is presented along with the governing equations, including the proposed geometric configuration, the wavy surface definition, and the mapped coordinate system that will be necessary to shift the wall boundary conditions to a virtually fixed location. Second, after recovering Berman's fourth-order differential equation at leading order, an asymptotic expansion of the asymmetric problem is pursued to the second order in ε. Third, a comparison to numerical simulations produced from a nonlinear Navier–Stokes solver is performed while varying the cross-flow Reynolds number, Re, radial deviation amplitude, ε, and number of lobes, m. Lastly, the limitations of this framework are presented and discussed along with several recommendations for future use.

2. Solution methodology

2.1. *Geometry and governing equations*

Our geometric configuration consists of a semi-infinite porous cylinder that is closed at the headwall while admitting a uniformly distributed sidewall injection. Considering any real function α with zero mean, the cross-section is determined by the tangentially evolving radius, $r_w = a(1+\varepsilon\alpha)$, where a is fixed and ε is a parameter. As shown in figure 1, the fluid is injected perpendicularly to the wavy surface at a constant speed U_w. In view of this geometry, the steady incompressible Navier–Stokes equations are considered with all spatial coordinates, time, velocity and pressure variables made dimensionless using a, a/U_w, U_w and ρU_w^2, respectively. The corresponding cross-flow Reynolds number may be written as $Re = U_w a/\nu$, where ν denotes the kinematic viscosity. Then using $\boldsymbol{u} = (u_{\bar{r}}, u_{\bar{\theta}}, u_{\bar{z}})$ and p for the velocity and pressure, our system of equations reduces to

$$\bar{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{and} \quad \boldsymbol{u}\cdot\bar{\nabla}\boldsymbol{u} = -\bar{\nabla}\boldsymbol{p} + \frac{1}{Re}\bar{\nabla}^2\boldsymbol{u}, \tag{2.1a,b}$$

where the overbar in $\bar{\nabla}$ denotes differentiation with respect to the unmodified dimensionless variables $(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z})$.

2.2. *Mapping to a circular cross-section*

To simplify the application of the boundary conditions at the sidewall, and thus avoid the need for Taylor-series expansions about a fixed radius, it is helpful to map the dimensionless spatial coordinates $(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z})$ in such a manner to relocate the wall boundary conditions to a spatially invariant point. This may be accomplished through the coordinate transformation:

$$r = \frac{\bar{r}}{1+\varepsilon\alpha(\bar{\theta})}, \quad \theta = \bar{\theta}, \quad z = \bar{z}. \tag{2.2}$$

The vector basis $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z)$ defined in figure 1 remains unchanged. Although this substitution affects the form of the radial and tangential derivatives, the wall surface can now be specified using $\mathcal{A}(r) = r - 1 = 0$. The corresponding normal unit vector, $\boldsymbol{n} = n_r\boldsymbol{e}_r + n_\theta\boldsymbol{e}_\theta$, becomes

$$\boldsymbol{n} = \left.\frac{\nabla\mathcal{A}}{\|\nabla\mathcal{A}\|}\right|_{r=1} = \frac{(1+\varepsilon\alpha)\boldsymbol{e}_r - \varepsilon\alpha'\boldsymbol{e}_\theta}{\sqrt{(1+\varepsilon\alpha)^2 + \varepsilon\alpha'^2}}, \tag{2.3}$$

and so the wall-normal injection condition simplifies to $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{n}$ at $r = 1$. Naturally, this substitution gives rise to a more complex form of the Navier–Stokes equations, which is detailed in appendix A.

2.3. *On the minimum perturbation order*

In their elegant analysis of the axisymmetric flow in a porous tube, Balachandar *et al.* (2001) establish a framework in which small perturbations of the form $\varepsilon\cos(m\theta)$ may be imposed at the sidewall. By examining the asymptotic behaviour of the ensuing solution as $r \to 0$, a viscous core is shown to be present near the centreline. Accordingly, viscous effects dominate on the scale of $r = O(1/\sqrt{Re})$ for wall perturbations of $O(\varepsilon)$. Furthermore, as we enter the viscous core region, the

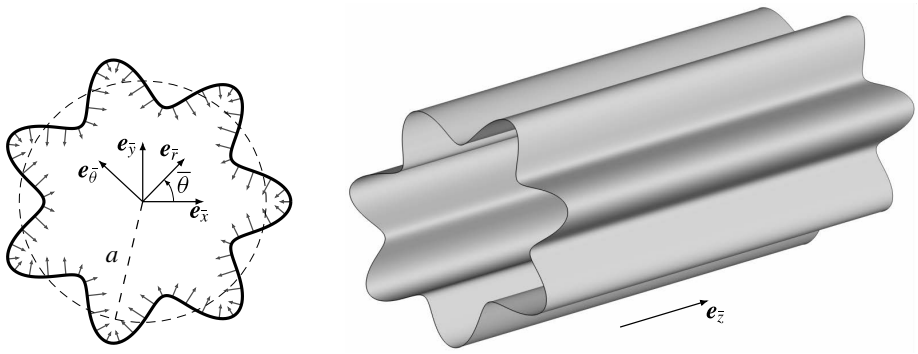


FIGURE 1. Sketch of the geometric configuration and coordinate systems corresponding to a non-circular, wavy cross-section with $\alpha = \cos(m\theta)$. The sketch corresponds to $m = 7$ lobes and a 20 % radial deviation in ε.

axial vorticity, which accompanies the evolution of a finite tangential velocity, appears at $O(\varepsilon Re)$. Consequently, the linear perturbative analysis remains valid as long as $\varepsilon Re \ll 1$. To overcome this practical limitation, Balachandar *et al.* (2001) introduce a nonlinear patch on the scale of $r = O(\sqrt{\varepsilon})$. This viscous correction leads to a solution that extends the range of applicability to $\varepsilon Re \gg 1$, where the axial vorticity increases to $O(1)$. A similar conclusion may be reached in our analysis, which requires second-order perturbations of $O(\varepsilon^2)$ to adequately capture the nonlinear interactions that evolve at previous orders. Moreover, a second-order approximation will be warranted to satisfy mass conservation requirements by virtue of the angular dependence being of the harmonic form, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}$.

The approach that we follow is therefore compatible with Balachandar's framework, as it seeks to derive a second-order viscous solution for a periodically distorted cross-section. In this process, however, an effort will be made to secure the no-slip condition in all three spatial directions, including the axial and tangential velocities at the sidewall, thus leading to a uniformly valid solution that extends from $r = 0$ to 1 inclusively.

To justify the need to carry out a second-order approximation, it may be instructive to revisit the mass flow rate evaluation at the sidewall. We start by remarking that, for an identical mean radius, the circumference of the cross-section corresponding to a wavy wall, such as a star-shaped grain configuration, will always exceed that of its counterpart with a fixed circular radius. Then, recognizing that α is a periodic function with a vanishing mean value, the mass surplus can be estimated using an asymptotic expansion of $\dot{m}_w(z)$, namely,

$$\begin{aligned} \dot{m}_w(z) &= z \int_0^{2\pi} \sqrt{\bar{r}^2 + \bar{r}'^2}\, \mathrm{d}\theta = z \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\varepsilon\alpha)^2 + \varepsilon^2 \alpha'^2}\, \mathrm{d}\theta \\ &= z \left[2\pi + \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \alpha'^2\, \mathrm{d}\theta + O(\varepsilon^3) \right]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

The resulting equality confirms that the first-order corrections have no bearing on the injected mass flow rate. In particular, the axial velocity, which contributes to the mass injection, cannot by itself secure the mass balance without taking into account its interactions at the second order. Moreover, a second-order representation will enable us to extend the validity of the model to larger deviation amplitudes with $\varepsilon^2 \ll 1$, while simultaneously aiding in improving the permissible range of Reynolds numbers to $\varepsilon Re \gg 1$, as predicted by Balachandar *et al.* (2001).

2.4. *Asymptotic expansion*

Given the above considerations, the velocity and pressure fields, $(\boldsymbol{u}, p)$, may be decomposed using

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}^{(0)} + \varepsilon \boldsymbol{u}^{(1)} + \varepsilon^2 \boldsymbol{u}^{(2)} + o(\varepsilon^2), \\ p &= p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + o(\varepsilon^2), \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

where superscripts denote successive asymptotic orders. This two-term approximation may be substituted back into the Navier–Stokes equations, expressed through (A 1), and then further linearized using binomial expansions of $(1 + \varepsilon\alpha)^{-1}$ terms. These operations enable us to identify and segregate three sets of equations that appear at $O(1)$, $O(\varepsilon)$ and $O(\varepsilon^2)$, consecutively. A similar expansion may be applied to the wall injection boundary condition (2.3), thus leading to

$$\left.\begin{aligned} u_r(1, \theta, z) &= -\frac{1 + \varepsilon\alpha}{\sqrt{1 + \varepsilon\left[2\alpha + \varepsilon\left(\alpha^2 + \alpha'^2\right)\right]}} = -1 + \frac{1}{2}\alpha'^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \\ u_\theta(1, \theta, z) &= \frac{\varepsilon\alpha'}{\sqrt{1 + \varepsilon\left[2\alpha + \varepsilon\left(\alpha^2 + \alpha'^2\right)\right]}} = \alpha'\varepsilon - \alpha\alpha'\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

When translated to the asymptotic velocity corrections, these expressions give rise to an assortment of conditions that must be imposed at successively increasing orders, namely,

$$\left.\begin{aligned} u_r^{(0)}(1, \theta, z) &= -1, & u_\theta^{(0)}(1, \theta, z) &= 0, & u_z^{(0)}(1, \theta, z) &= 0, \\ u_r^{(1)}(1, \theta, z) &= 0, & u_\theta^{(1)}(1, \theta, z) &= \alpha', & u_z^{(1)}(1, \theta, z) &= 0, \\ u_r^{(2)}(1, \theta, z) &= \alpha'^2/2, & u_\theta^{(2)}(1, \theta, z) &= -\alpha\alpha', & u_z^{(2)}(1, \theta, z) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

The solution to the three sets of equations and their associated boundary conditions will be described in §§ 2.5–2.7.

Furthermore, to justify the use of the upcoming similarity transformation, it will be helpful to examine the mass conservation requirement. By equating the radial mass flow rate $\dot{m}_w(z)$, which originates from the sidewall over a length of tubing that extends from the headwall to a point z, to the axial mass flow rate $\dot{m}_{cross}(z)$, crossing section z, one arrives at the following equality:

$$z \int_0^{2\pi} \sqrt{\bar{r}^2 + \bar{r}'^2}\, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 u_z\,(r, \theta, z)\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta. \tag{2.8}$$

A sufficient condition for u_z to satisfy the previous relation (2.8) is to assume a linear variation with respect to z, as foretold by Hiemenz (1911). To make further headway, only separable product solutions are sought, thus turning the linear dependence on z into a necessary condition. Procedurally, this enables us to specify the axial velocity corrections, $u_z^{(0)}$, $u_z^{(1)}$ and $u_z^{(2)}$, with a linear dependence on z.

2.5. *Leading-order analysis*

In the absence of angular wall deformation ($\varepsilon = 0$), the classical problem of an injection-driven motion in a circular cylinder is restored. Being independent of θ, one recovers $u_\theta^{(0)} = 0$ and $\partial_\theta f = 0$ for any scalar function f. In this situation, Berman's formulation may be employed with a streamfunction $\psi(r, z) = zF(r)$, where $F(r)$

represents the characteristic mean flow function (Berman 1953). The leading-order solution may be subsequently retrieved from Berman's fourth-order nonlinear ordinary differential equation:

$$\left.\begin{aligned}&\left[\left(\frac{F}{r}\right)\left(\frac{F'}{r}\right)'-\left(\frac{F'}{r}\right)^2\right]'-\frac{1}{Re}\left[\frac{1}{r}\left(r\left(\frac{F'}{r}\right)'\right)'\right]'=0,\\&\lim_{r\to 0}\left(\frac{F'}{r}\right)'=\lim_{r\to 0}\frac{F}{r}=F'(1)=0,\quad F(1)=1.\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

In the above, the boundary conditions may be ascribed to axisymmetry and wall-normal injection. In hindsight, the solutions obtained by Taylor (1956) and Culick (1966) correspond to Berman's formulation in the limit of $Re \to \infty$. In fact, the Taylor–Culick profile begins to resemble Berman's solution for $Re > 100$. Nonetheless, as we aim to extend the validity of the viscous model to a generic non-axisymmetric configuration, we continue to employ Berman's model and retain its dependence on the cross-flow Reynolds number. Thus, for a given Re, (2.9) may be solved numerically for $F(r)$, and so the three velocity components and pressure at order $O(1)$ may be deduced directly from

$$u_r^{(0)}=-\frac{F(r)}{r},\quad u_\theta^{(0)}=0,\quad u_z^{(0)}=z\frac{F'(r)}{r},\quad p^{(0)}=P_0-\frac{\kappa_0}{2}z^2-\frac{F^2}{2r^2},\tag{2.10a–d}$$

where both P_0 and κ_0 represent undetermined integration constants that may be obtained from Berman's expression in the modified coordinate system (r, θ, z).

2.6. *First-order analysis*

The system of linear equations (A 1) is written at the order $O(\varepsilon)$ and rearranged into (C 1). Guided by the wall-normal injection conditions requiring the appearance of α and its derivative, a solution is sought using separation of variables. Note that no additional axial pressure gradient is required for product solutions, since the mass flow surplus (2.4) is of second order. The solution then simply reads

$$\left.\begin{aligned}u_r^{(1)}&=v_r(r)\alpha(\theta),\\u_\theta^{(1)}&=v_\theta(r)\alpha'(\theta),\\u_z^{(1)}&=zv_z(r)\alpha(\theta),\\p^{(1)}&=q(r)\alpha(\theta).\end{aligned}\right\}\tag{2.11}$$

The substitution of these expressions into (C 1) gives rise to a θ-dependent system in which every equation can be collapsed into the form of $\phi(r) = -\alpha''(\theta)/\alpha(\theta)$, where ϕ denotes an operator that may be constructed from the aforementioned functions and their derivatives. Naturally, without any loss of generality in the space of real functions, harmonic variations of the form $\alpha(\theta) = \cos(m\theta)$ are retained, m being a constant. Since m represents the number of lobes along a fixed circular circumference, it will be referred to hereafter as the circular wavenumber. The underlying consequence of this choice for α is that the mass flow conservation can be expressed at the third order using

$$\dot{m}_w(z)=z\left[2\pi+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\pi m^2+o(\varepsilon^3)\right].\tag{2.12}$$

For the reader's convenience, the θ-dependent system of equations is provided in (C 2). The system consists of one first-order and three second-order ordinary differential equations. The corresponding injection conditions, which stem from (2.7), lead to $v_\theta(1) = 1$ and $v_r(1) = v_z(1) = 0$. In order to achieve closure, four additional constraints are still necessary, and these may be specified at $r = 0$ by introducing Taylor-series expansions of the different functions with respect to r in (C 3). After some effort, we arrive at $v_r'(0) = -F''(0)/2$ and $v_r(0) = v_\theta(0) = v_z(0) = 0$, with the additional realization that $m^2 \neq (0, 1)$, to avoid a mathematically incongruent outcome. In practice, we are only interested in cross-sections with $m \geqslant 3$.

With the advent of a sufficient number of boundary conditions, a collocation method, such as the one described by Canuto *et al.* (1988), may be used to discretize the system of equations and recover the first-order velocity and pressure corrections.

2.7. *Second-order analysis*

To make further headway, we proceed to decompose the second-order corrections using the following classical forms:

$$\left.\begin{aligned} u_r^{(2)}(r,\theta,z) &= u_{r,0}^{(2)}(r) + u_{r,2}^{(2)}(r)\cos(2m\theta),\\ u_\theta^{(2)}(r,\theta,z) &= -m u_{\theta,2}^{(2)}(r)\sin(2m\theta),\\ u_z^{(2)}(r,\theta,z) &= z[u_{z,0}^{(2)}(r) + u_{z,2}^{(2)}(r)\cos(2m\theta)],\\ p^{(2)}(r,\theta,z) &= -\tfrac{1}{2}\kappa z^2 + p_0^{(2)}(r) + p_2^{(2)}(r)\cos(2m\theta). \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

On the right-hand side of the resulting momentum equations at $O(\varepsilon^2)$, terms that depend on the two previous orders, which are caused by nonlinear interactions, may be explicitly seen (appendix C). Computing this second-order correction will therefore enable us to capture the nonlinearities alluded to by Balachandar *et al.* (2001) when εRe is no longer a small quantity. The resulting set of seven linear equations can be subsequently consolidated into two concise and independent systems: the first assortment consists of four linear equations that prescribe $(\boldsymbol{u}_2^{(2)}, p_2^{(2)})$, as given by (D 1), and the second entails three linear equations that control $(\boldsymbol{u}_0^{(2)}, p_0^{(2)})$, as given by (D 2). Being independent, these two systems may be solved separately. Moreover, since $u_\theta^{(2)}$ only appears in the first system, each set leads to a well-posed problem with the same number of equations and unknowns, except for the constant κ. Its determination will be described separately.

The boundary conditions associated with $\boldsymbol{u}_2^{(2)}$ may be readily obtained from (2.7), specifically at the wall and the centreline, using the $r \to 0$ Taylor-series expansions introduced previously. These produce

$$\left.\begin{aligned} u_{r,2}^{(2)}(1) = -m^2/4, \quad u_{\theta,2}^{(2)}(1) = -1/2, \quad u_{z,2}^{(2)}(1) = 0,\\ u_{r,2}^{(2)\prime}(0) = u_{r,2}^{(2)}(0) = u_{\theta,2}^{(2)}(0) = u_{z,2}^{(2)\prime}(0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

With the boundary conditions in hand, the computation of $(\boldsymbol{u}_2^{(2)}, p_2^{(2)})$ may be achieved easily using a discrete collocation, for instance.

Unlike $(\boldsymbol{u}_2^{(2)}, p_2^{(2)})$, the three linear equations for $(\boldsymbol{u}_0^{(2)}, p_0^{(2)})$ may be carefully reduced into a single third-order ordinary differential equation that depends solely on $u_{r,0}^{(2)}$. This equation is given by (D 3). The undetermined pressure constant κ, which appears on the right-hand side of (D 3), has a direct influence on $u_{z,0}^{(2)}(1)$. Since κ appears as a

m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$Re = 100$	35.4	71.1	117.0	173.0	239.4	316.0	403.0	500.0	607.2	725.0
$Re = 250$	34.9	69.9	114.8	169.7	234.6	309.5	394.2	488.9	593.4	707.8
$Re = 500$	34.7	69.5	114.1	168.7	233.2	307.6	391.8	485.9	589.8	703.4

TABLE 1. Calculated values of the pressure constant κ for different values of m and Re.

forcing term in a linear relation, the connection between $u_{z,0}^{(2)}(1)$ and κ proves to be linear. At the outset, a unique value for κ may be retrieved for a given set of input parameters in order to secure $u_{z,0}^{(2)}(1) = 0$. For the reader's convenience, its values for different ranges of Re and m are provided in table 1.

2.8. *Characterization at successive orders and wavenumbers*

In summary, the velocity and pressure fields may be expressed using

$$\left.\begin{aligned} u_r &= -\frac{F}{r} + \varepsilon v_r \cos(m\theta) + \varepsilon^2 \left[u_{r,0}^{(2)} + u_{r,2}^{(2)} \cos(2m\theta)\right], \\ u_\theta &= -m\varepsilon v_\theta \sin(m\theta) - m\varepsilon^2 u_{\theta,2}^{(2)} \sin(2m\theta), \\ u_z &= z\left\{\frac{F'}{r} + \varepsilon v_z \cos(m\theta) + \varepsilon^2 \left[u_{z,0}^{(2)} + u_{z,2}^{(2)} \cos(2m\theta)\right]\right\}, \\ p &= P_0 - \frac{\kappa_0}{2}z^2 - \frac{F^2}{2r^2} - \frac{F'}{rRe} + \varepsilon q \cos(m\theta) + \varepsilon^2 \left[p_0^{(2)} + p_2^{(2)} \cos(2m\theta) - \frac{\kappa}{2}z^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

To illustrate the behaviour of the solution, we confine our attention to a polar slice that extends between $\theta = 0$ and $2\pi/m$. In figure 2, we examine the sensitivity of the solution for u_r and u_z at increasing asymptotic orders using characteristic values of $\varepsilon = 0.1$, $Re = 100$ and $m = 7$. Only the radial variation is captured here, which may be accomplished by plotting the solution along a spoke at $\theta = 0$ and a fixed value of z. The radial velocity, which is featured on the left-hand side of the graph at three increasing orders of ε, confirms that even the first-order approximation, $u_r^{(1)}$, is considerably dissimilar from the leading-order solution. This disparity implies that the radial displacement of the sidewall leads to a significant distortion of the mean flow field compared to the circular configuration. However, these results also suggest that the second-order correction, $u_r^{(2)}$, only weakly affects the overall radial velocity. Although similar observations may be inferred for the tangential velocity, they are omitted here for the sake of brevity.

In contrast, by turning our attention to the axial velocity variation on the right-hand side, it may be seen that the second-order correction leads to a non-negligible shift in u_z, especially as the centreline is approached, where the first-order contribution is nil by virtue of $u_z^{(1)}(0) = 0$. The need for a second-order correction is therefore pivotal. In fact, the discrepancy near the centreline between Berman's leading-order solution and that at $O(\varepsilon^2)$ may be attributed to the mass flow rate increase reported in (2.4). Recalling that the mass flow rate entails an integration over θ, the contribution of the first-order correction $u_z^{(1)}$ multiplied by the periodic function $\cos(m\theta)$ vanishes identically. However, the contribution of the second-order correction $u_z^{(2)}$, which

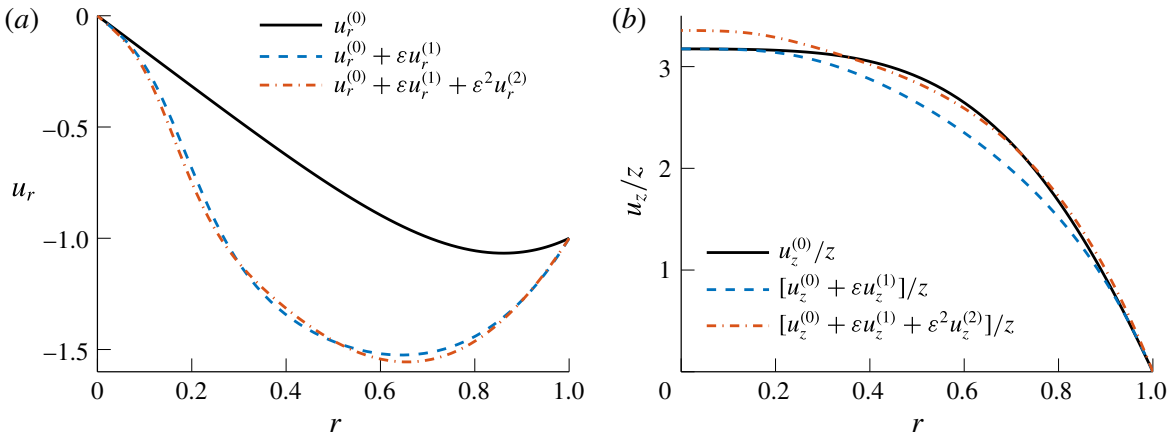


FIGURE 2. Influence of the corrections of different orders on the asymptotic approximations for (*a*) u_r and (*b*) u_z/z at $\varepsilon = 0.1$, $Re = 100$ and $m = 7$.

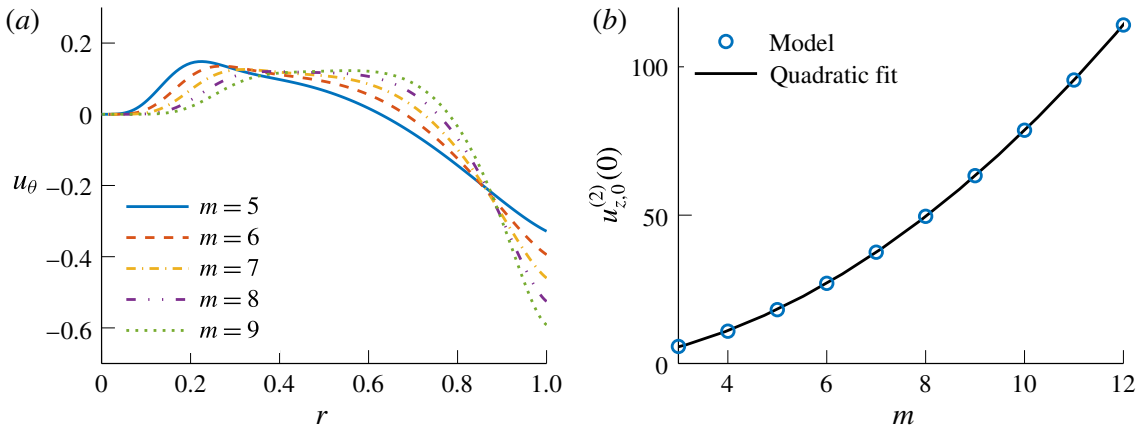


FIGURE 3. Influence of the circular wavenumber m on (*a*) u_θ along a spoke with $\theta = \pi/(4m)$ and (*b*) $u_{z,0}^{(2)}$ at the centreline with $\theta = 0$. Here $\varepsilon = 0.1$ and $Re = 100$.

involves a θ-independent term ($u_{z,0}^{(2)}$), leads to a finite contribution. Based on this simple comparison and mathematical verification, it may be concluded that the first-order correction affects all three velocity components, thus leading to marked differences from the circular configuration. As for the second-order correction, it proves to be essential to properly capture the behaviour of the axial velocity, especially near the centreline, and therefore helps to secure the principle of mass conservation.

To better understand the effect of m on the second-order approximation, both u_θ and the centreline value of u_z are depicted in figure 3 at $\varepsilon = 0.1$ and $Re = 100$. The tangential velocity is featured in figure 3(*a*) along a spoke with $\theta = \pi/(4m)$ and $m = 5$, 6, 7, 8 and 9. Interestingly, the effect of the injection condition in (2.7) on the magnitude of u_θ may be captured at the sidewall, where $|u_\theta|$ increases incrementally with m. The maximum values of u_θ also shift outwards towards the sidewall with successive increases in m.

It is also useful to explore the sensitivity of the centreline value of $u_z^{(2)}(0)$ to variations in $m \in [3, 12]$ in figure 3(*b*). Since $u_{z,2}^{(2)}(0) = 0$, it is sufficient to illustrate the behaviour of $u_{z,0}^{(2)}(0)$ in order to infer the underlying trend. Although

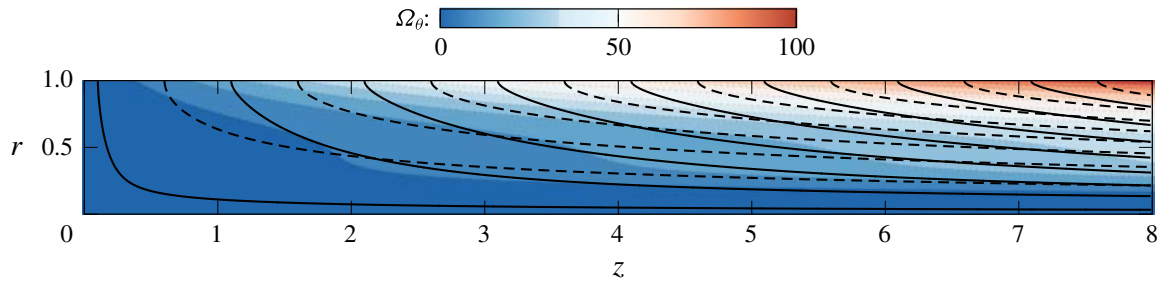


FIGURE 4. Isocontours of the tangential component of the rotational vorticity in an (r, z) plane along with the corresponding streamlines according to the present formulation (solid lines). Also shown are the streamlines obtained for Berman's model in a circular cross-section (dashed lines). Here we use $\varepsilon = 0.1$, $Re = 100$ and $m = 7$.

the relation between $u_{z,0}^{(2)}(0)$ and m remains concealed in (D 2), the corresponding curve suggests the existence of a monotonically increasing quadratic polynomial of the form $u_{z,0}^{(2)}(0) = c_0 + c_1 m + c_2 m^2$, whose coefficients in figure 3(*b*) are $c_0 = -1.242$, $c_1 = -0.1875$ and $c_2 = 0.817$. Despite the appearance of m^2 in the equations explicitly, determining the quadratic solution analytically for any Re and ε proves to be a daunting task. Nonetheless, based on this characteristic graph, it may be ascertained that the role of $u_{z,0}^{(2)}(0)$ can be significant, especially at increasing values of m. Although not shown, we also find that the effect of increasing the Reynolds number on $u_{z,0}^{(2)}(0)$ is negligible in comparison to m.

As for flow rotationality, figure 4 displays isocontours of the tangential component of the steady-state vorticity Ω_z in an arbitrary (r, z) plane; also provided is a comparison of the streamlines for the present solution side by side with Berman's. Based on this graph, it may be seen that the star-shaped configuration leads to deeper penetrating streamlines than the circular case. Specifically, the solid lines, which correspond to the present formulation, consistently approach the chamber axis more rapidly than the dashed lines of the non-wavy solution.

3. Comparison to Navier–Stokes simulations

To further illustrate the behaviour of the non-circular profile and more accurately define its domain of applicability, a comparison is now undertaken between the results obtained from the present semi-analytical formulation and those predicted by a Navier–Stokes solver. To this end, the Navier–Stokes solver is introduced first along with its computational characteristics. Second, the sensitivity of the flow computations to variations in the three main parameters, ε, Re and m, are explored and compared to our second-order approximations.

3.1. *Solver description*

Our numerical simulations are performed using a compressible Navier–Stokes solver called CHARME, which belongs to the multi-solver suite CEDRE developed by the French Aerospace Laboratory (ONERA). A detailed overview of the code's functionality is provided by Refloch *et al.* (2011), while examples of its computational capabilities, which include laminar flow simulations and verifications of linear stability analyses of rocket internal flow fields, are furnished by Chedevergne *et al.* (2012)

and Boyer *et al.* (2013). In these studies, an excellent agreement is reported between theory and computations, thus showcasing the solver's effectiveness in capturing the mean flow development as well as the unsteady hydrodynamic instabilities that evolve in a rocket chamber. As usual, the latter may be idealized as a porous tube with uniform wall injection, which is consistent with the geometric configuration used presently. As for the code, a second-order discretization stencil is implemented for spatial interpolation, while Euler's fluxes are computed using a Roe scheme. Throughout these simulations, the length and mean radius of the porous tube are kept constant at $8a$ and $a = 1$ cm, respectively. Although the value of a may be modified, the aspect ratio is held constant. Furthermore, the wall injection speed U_w is adjusted to calculate the targeted Reynolds numbers while ensuring that it remains sufficiently small to promote low compressibility levels. At the headwall, a slip condition that is compatible with our model is applied to avoid the development of an undesirable boundary layer. In the domain exit plane at $z = 8a$, a pressure outlet condition is imposed. The code is fully three-dimensional and the assumption of linear axial variation is not forced. Then, using a three-dimensional unstructured mesh with approximately four million total elements, 600 cells are selected to construct the axial grid along the sidewall, whereas 150 cells are distributed radially along the diameter. Although the mesh size can generally depend on Re, ε and m, the present discretization size is confidently chosen because of its demonstrated effectiveness in previous studies of analogous flow fields (Chedevergne *et al.* 2012; Boyer *et al.* 2013). In what follows, the term 'model' will be used to denote second-order asymptotic results obtained from the present framework, whereas 'CFD' will refer to numerical (computational fluid dynamics) simulations acquired from the nonlinear Navier–Stokes solver.

3.2. *On the linearity of the axial velocity with respect to z*

Inspired by Berman's solution and the mass conservation relation (2.8), the axial velocity component can be assumed to be linear with respect to the axial coordinate z. In order to verify that the CFD solution will indeed mimic this linear behaviour, figure 5 is used to compare our model to the computed solution for $\varepsilon = 0.1$, $Re = 100$ and $m = 7$. To magnify the possible departures from the expected linearity, the leading-order contribution of $O(1)$, i.e. Berman's solution, is subtracted from the axial velocity component u_z, thus leaving only first- and second-order corrections. Based on this comparison, it is clear that the computed axial velocity remains linear with respect to z up to approximately $z = 7$ using $r = 0.3$. Beyond this location, it is possible for the outlet pressure condition to slightly influence the axial development of the flow field. Apart from this outlet effect, it may be argued that the Navier–Stokes solver in figure 5 helps to validate the assumption of a linear variation with respect to z. Moreover, the visual agreement in the resulting slopes confirms that the simulation accurately reproduces the radial and tangential evolutions of the modelled flow. In fact, additional comparisons only reinforce this behaviour. In the interest of simplicity, subsequent results will be displayed halfway through the chamber at $z = 4$.

3.3. *Flow characterization based on both asymptotics and computations*

To take advantage of the periodicity in the angular direction, flow field comparisons are reproduced in a polar slice that extends from $\theta = 0$ to $2\pi/m$. Note that the mesh used in conjunction with the Navier–Stokes simulations does not rely on periodic conditions; the tangential coordinate θ extends over the full range of $[0, 2\pi]$. We begin

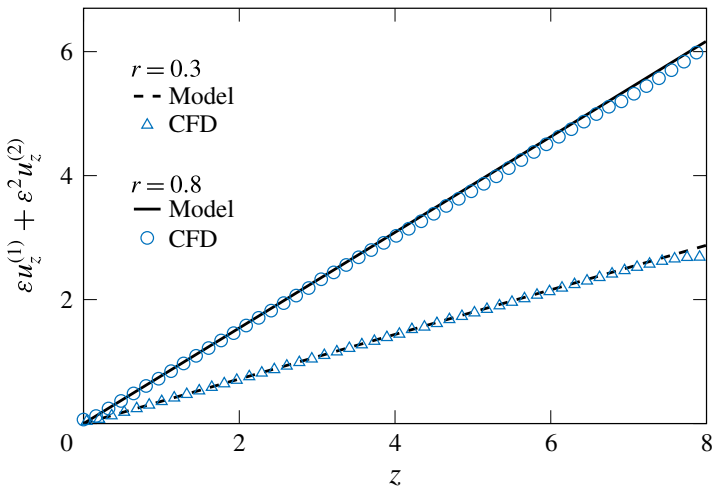


FIGURE 5. Evolution along the domain of the axial velocity $\varepsilon u_z^{(1)} + \varepsilon^2 u_z^{(2)}$ at two radial locations of $r = (0.3, 0.8)$ in the $\theta = \pi/m$ plane for $\varepsilon = 0.1$, $Re = 100$ and $m = 7$.

in figure 6 with the isocontours of the three velocity components using $\varepsilon = 0.1$, $Re = 100$, $z = 4$ and $m = 7$. Despite the linearization that affects the second-order asymptotic framework, an excellent agreement may be noted between the isocontours generated from the numerical simulations and those obtained from the asymptotic model for all three radial, tangential and axial velocity components.

By turning our attention first to the tangential velocity, it may be confirmed that its maximum absolute values occur at $\theta = \pi/(2m)$ and $3\pi/(2m)$ taken along the sidewall because of surface waviness; as for its sign, it depends on whether the flow is situated above or below the meridian line at $\theta = \pi/m$, where the tangential velocity vanishes identically. The tangential velocity also vanishes at the domain delimiting lower and upper spoke lines located at $\theta = 0$ and $2\pi/m$, where the radial velocity u_r matches the wall-normal velocity in both direction and magnitude. At those specific sites, both axial and tangential velocities vanish, thus leaving the flow to enter the chamber radially inwards towards the centreline (i.e. with no directional distortion). Naturally, $|u_\theta|$ diminishes while moving inwards away from the sidewall, or when moving tangentially towards the meridian lines as well as the upper and lower domain delimiting lines. In anticlockwise fashion, u_θ switches from negative to positive values as we cross from $0 < \theta < \pi/m$ to $\pi/m < \theta < 2\pi/m$. Moreover, given that the tangential velocity is induced by small deviations from a circular cross-section, it remains smaller than its radial and axial counterparts, being asymptotically driven by $O(\varepsilon)$ surface displacements, unlike the radial and axial velocities, which are chiefly induced by the mass injection mechanism.

At this juncture, it may be helpful to recall that, in the absence of surface waviness, the isocontours of the axisymmetric axial velocity lead to concentric circles that exhibit a maximum value along the centreline. In the present configuration, the isocontours of u_z stretch radially outwards along the meridian line of $\theta = \pi/m$, where the chamber radius happens to be the shortest. Naturally, the area contraction in flow cross-section at this angular position induces a local increase in the axial velocity. Conversely, these isocontours shift radially inwards at the upper and lower boundaries where local wall expansions lead to an increase in the flow cross-section and, therefore, a corresponding reduction in u_z.

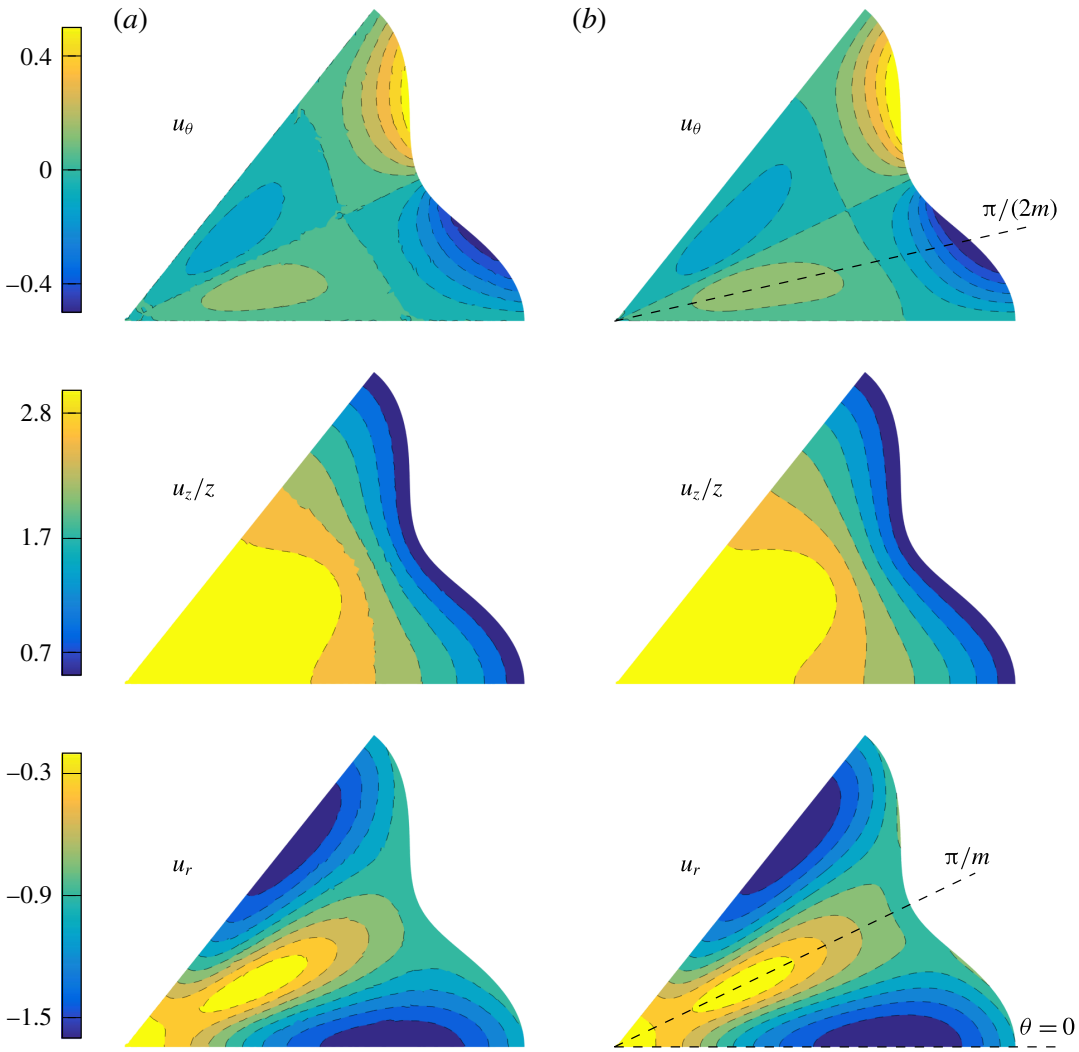


FIGURE 6. Isocontours of the radial, tangential and axial velocity components based on (*a*) nonlinear Navier–Stokes computations and (*b*) linear asymptotics at $O(\varepsilon^2)$. Using $\varepsilon = 0.1$, $Re = 100$, $z = 4$ and $m = 7$, the spokes depicting extrema are identified with dashed lines at their corresponding angular locations.

In fact, continuity may be used to partly explain the trends observed in the isocontours of the radial velocity. Upon close inspection of the corresponding graphs, it may be ascertained that u_r vanishes along the centreline, where u_z reaches its peak value, and that it increases in regions of axial velocity deficit. This behaviour may be attributed to the flow turning mechanism that affects the wall-injected stream, specifically as it negotiates a 90° turn before merging axially with the core flow. At $\theta = \pi/m$, owing to the stretched axial velocity isocontours, the radial velocity deceleration towards the centreline is more rapid than at the $\theta = 0$ and $2\pi/m$ borderlines, where the flow may be seen to be radially expanded. Another characteristic of u_r, which has been well documented in the literature, corresponds to its velocity overshoot compared to its wall value (Saad & Majdalani 2010). Despite the unitary speed of $|u_r| = 1$ at the sidewall, $|u_r|$ undergoes first an increase in absolute value due to the sudden radial pinching of the circumferential area that is normal to the injected flow, and which does not permit the flow to develop a sufficient u_z component to adequately transport the mass axially. The resulting increase in $|u_r|$

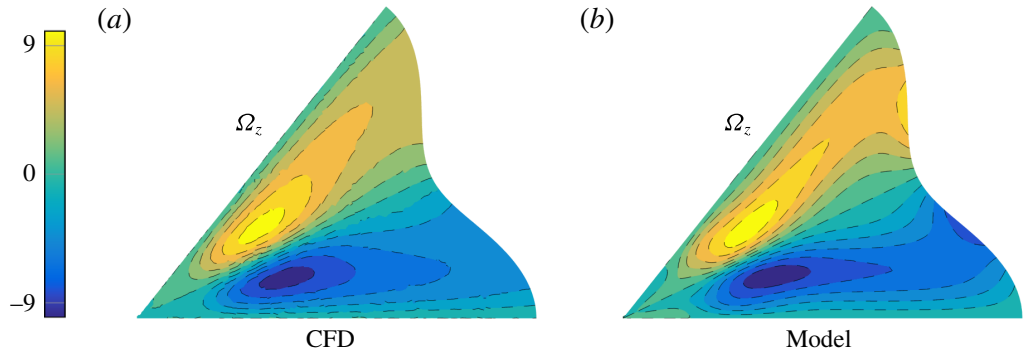


FIGURE 7. Isocontours of the axial vorticity based on (*a*) nonlinear Navier–Stokes computations and (*b*) linear asymptotics at $O(\varepsilon^2)$. Here $\varepsilon = 0.1$, $Re = 100$, $z = 4$ and $m = 7$.

may be noted in the peak contour points in figure 6, namely, those that materialize at some intermediate positions between the wall and the centreline. Naturally, when the flow is pinched, the locus of these extrema moves closer to the centreline.

As alluded to earlier, another byproduct of waviness and viscosity may be the production of axial vorticity, which is absent in the strictly axisymmetric Taylor–Culick model (Balachandar *et al.* 2001). To illustrate the corresponding behaviour, isocontours of axial vorticity, namely, Ω_z, are displayed in figure 7 for $\varepsilon = 0.1$, $Re = 100$, $z = 4$ and $m = 7$. Using the variable coordinate transformation at the wall, Ω_z may be expressed as

$$\Omega_z = \frac{1}{1 + \varepsilon \cos(m\theta)} \left[\partial_r u_\theta - \frac{\varepsilon m \sin(m\theta)}{1 + \varepsilon \cos(m\theta)} \partial_r u_r - \frac{1}{r} \partial_\theta u_r + \frac{u_\theta}{r} \right]. \tag{3.1}$$

Note that this vorticity component vanishes for the axisymmetric case. In order to improve the velocity gradients and thus the vorticity, the spatial integration scheme within the Navier–Stokes solver is increased to the third order in figure 7. Graphically, one may infer that the Navier–Stokes computations tend to agree qualitatively with the second-order asymptotic solution, especially in the two bulk regions where the axial vorticity is largest. Nonetheless, discrepancies may also be seen at the sidewall near $\theta = \pi/(2m)$ and $3\pi/(2m)$. The bulk vorticity regions that develop in this configuration are consistent with those detailed by Kurdyumov (2006). Furthermore, the dissimilarities observed near the sidewall may be attributed to the practical limitations associated with asymptotic expansions. They may also be ascribed to the compounded effects of numerical errors that accrue during the evaluation of velocity gradients within the Navier–Stokes solver.

3.4. *Sensitivity to various Reynolds numbers, radial deviations and wavenumbers*

To further explore the effects of varying the Reynolds number, radial deviation amplitude and circular wavenumber on the flow development, the sensitivity of the three velocity components to these parameters may be quantified by comparing the second-order corrections to the individual computations taken along different polar angles. Guided by the isocontours of figure 6, both u_r and u_z seem to display interesting structures along angular cuts taken at $\theta = 0$ and π/m, whereas u_θ may be best featured at $\theta = \pi/(2m)$. We therefore proceed to evaluate the three velocity

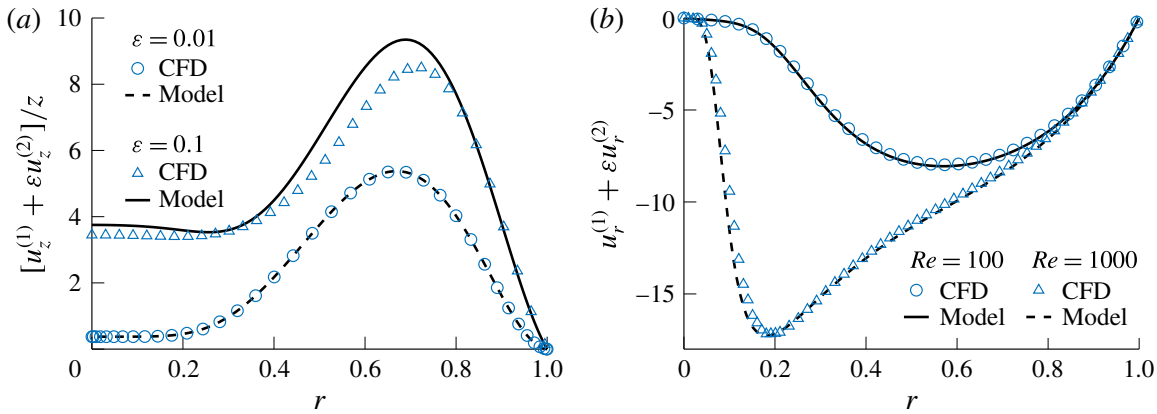


FIGURE 8. Comparison between (*a*) the axial velocity correction at $Re = 100$, $z = 4$ and $\varepsilon = (0.01, 0.1)$ along a constant $\theta = \pi/m$ spoke, and (*b*) the radial velocity correction at $\varepsilon = 0.01$, $z = 4$ and $Re = (100, 1000)$ along a constant $\theta = 0$ spoke. Here we use both Navier–Stokes computations (symbols) and second-order asymptotics (lines) for $[u_z^{(1)} + \varepsilon u_z^{(2)}]/z$ and $u_r^{(1)} + \varepsilon u_r^{(2)}$ with $m = 7$ crests.

components along their most representative inclination angles and showcase their outcomes in figures 8–10 using both asymptotics and computations.

As we seek to better understand the role of ε on the axial velocity, the second-order corrections obtained asymptotically are compared to those computed in figure 8(*a*) using $Re = 100$, $z = 4$, $m = 7$ and two values of ε that correspond to 0.01 and 0.1. Results are deliberately displayed along a constant $\theta = \pi/m$ spoke where the largest deviations from the axisymmetric motion may be realized. To further magnify differences, the exact Berman solution that is recovered at leading order is subtracted from both solutions, and the outcome is divided by ε, thus leaving us with $[u_z^{(1)} + \varepsilon u_z^{(2)}]/z$. In view of the dual magnification levels that are implemented, it may be argued that the agreement between computations and asymptotics is satisfactory, especially in the ability of the model to capture both sidewall and centreline variations with ε rather consistently. The most noticeable discrepancies remain small and mostly confined to the annular region that extends approximately between $r \approx 0.4$ and 0.7.

In fact, because of the magnification effect, these discrepancies actually fall within the numerical uncertainty that accompanies our simulations. The reasons are these. Since the mesh is uniformly discretized along the z direction, the accuracy of u_z/z directly depends on the finite gap between two axial positions. Furthermore, the disparities can stem either from higher-order terms that are not accounted for in the asymptotic formulation, or from the diffusive nature of the second-order discretization scheme that is adopted in the Navier–Stokes solver.

As for the influence of the Reynolds number on the radial velocity, it is illustrated in figure 8(*b*) using $\varepsilon = 0.01$, $m = 7$ and two values of Re that correspond to 100 and 1000, respectively. Choosing a relatively small value of ε enables us to compute the flow field with a large Reynolds number. Here, too, we display only the second-order correction in the radial velocity, $u_r^{(1)} + \varepsilon u_r^{(2)}$, by subtracting the leading-order contribution. The agreement that is achieved between the numerical simulations and the asymptotic formulation is gratifying to note, especially as the Reynolds number is set at 1000.

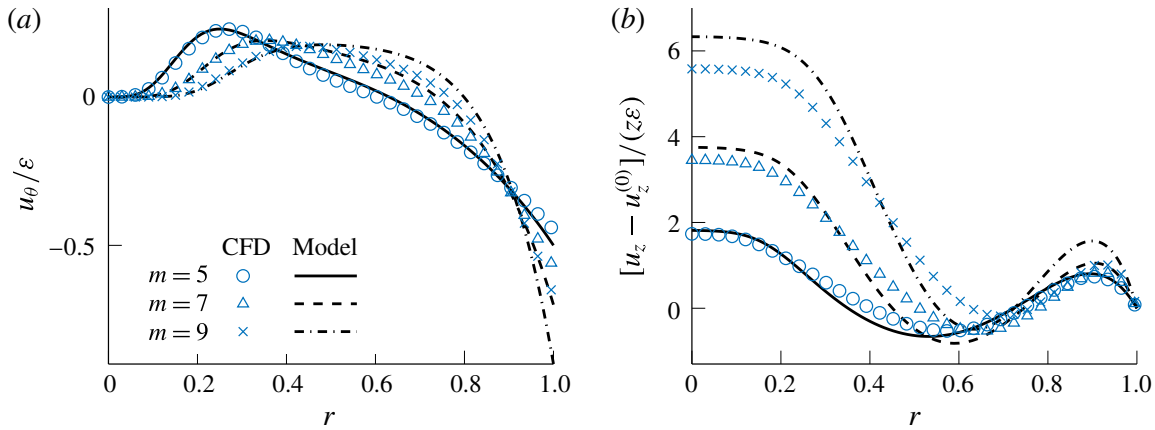


FIGURE 9. Sensitivity of the tangential and axial velocities to variations in m using both computations (symbols) and second-order asymptotics; here we take $\varepsilon = 0.1$ and $Re = 100$. Results are shown along constant angular spokes of (*a*) $\theta = \pi/(2m)$ for the tangential velocity $u_\theta/\varepsilon = u_\theta^{(1)} + \varepsilon u_\theta^{(2)}$ and (*b*) $\theta = 0$ for the axial velocity $[u_z^{(1)} + \varepsilon u_z^{(2)}]/z$.

In figure 9(*a*), the sensitivity of the tangential velocity on the circular wavenumber is characterized by showcasing $u_\theta/\varepsilon = u_\theta^{(1)} + \varepsilon u_\theta^{(2)}$ along a polar angle of $\theta = \pi/(2m)$ using $\varepsilon = 0.1$, $Re = 100$ and $m = 5$, 7 and 9. The skipping of even values of m reduces visual clutter by helping to distinguish between the remaining curves, especially since the use of $m = 4$, 6 and 8 leads to nearly identical trends. It is also guided by practical reasons, such as the preferred grain perforations in industry, which are invariably designed with an odd number of star points, crests or lobes, with the hope that such arrangements would help to mitigate the development of acoustic instabilities. Here, too, the agreement between computations and the modelled solution appears to be excellent in the core region. However, small differences begin to appear when the wavenumber is increased or when the sidewall is approached. We also remark that at $\theta = \pi/(2m)$, the contribution of second-order terms to the tangential velocity become negligible because of the $\sin(2m\theta)$ term that appears in the definition of $u_\theta^{(2)}$. As one may surmise from (2.13), the minor disparities that are detected near the sidewall may be attributed to the omission of third-order terms in the asymptotic expansion of the injection velocity. Asymptotically, one must have

$$u_\theta(1, \theta, z) = \alpha'\varepsilon + \alpha\alpha'\varepsilon^2 + \alpha'\left(\alpha^2 - \tfrac{1}{2}\alpha'^2\right)\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3), \tag{3.2}$$

where the quantity $\alpha'(\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha'^2)\varepsilon^3$ reduces to $m^3\varepsilon^3/2$ at $\theta = \pi/(2m)$; this third-order correction actually matches the gap between the computational and second-order asymptotic values at the wall, which widens with successive increases in m and ε.

The sensitivity of the axial velocity on the circular wavenumber is illustrated in figure 9(*b*) along a different polar angle, namely $\theta = 0$, at the same Reynolds number and deviation values. Here, Berman's contribution $u_z^{(0)}$ is subtracted from the total axial velocity component in order to showcase the correction only, as done previously in figure 8. Consistently with the behaviour observed in the tangential velocity comparison, the agreement between computations and the modelled solution appears to be quite satisfactory for $m = 5$, although it slowly deteriorates as m is increased. As before, the overshoot of the model near $r \approx 0.9$ may be attributed to the diffusivity of the Navier–Stokes solver; the accuracy of the simulation along the axis

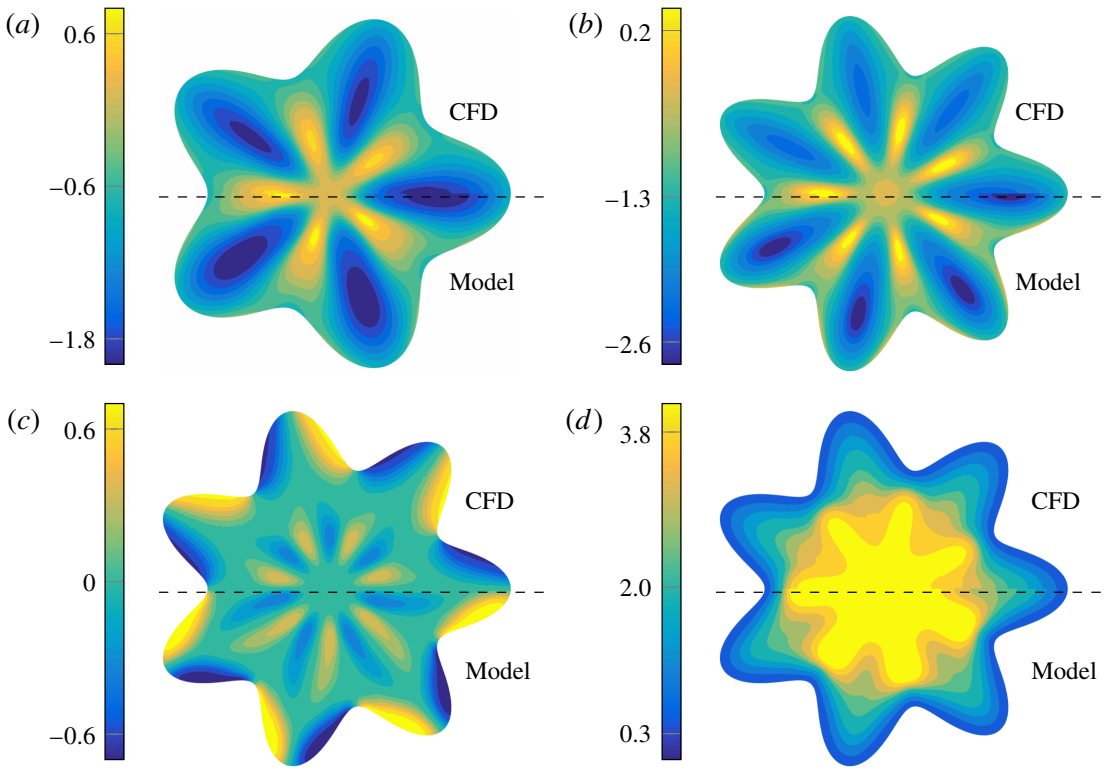


FIGURE 10. Isocontours of (*a*) the radial velocity u_r for $m = 5$, (*b*) the radial velocity u_r for $m = 7$, (*c*) the tangential velocity u_θ for $m = 7$ and (*d*) the axial velocity u_z for $m = 7$ using $\varepsilon = 0.2$ and $Re = 100$.

remains limited by the finite discretization in the axial direction. Since the absolute value of the axial velocity along the axis $|u_z^{(2)}(0)|$ increases with m, so does the uncertainty associated with the axial mesh discretization, thus leading to a growing disparity between the simulations and the modelled solution. Furthermore, it may be helpful to note that the displayed velocity components are divided by ε to better differentiate among the curves. Nonetheless, the noted discrepancies remain small compared to the total velocity magnitude $\boldsymbol{u}$.

Before leaving this discussion, it may be instructive to note that, in the foregoing work, the product εRe has been consistently smaller than 10. Nonetheless, comparisons could have been undertaken for values that reach $\varepsilon Re \approx 30$. Above this level, the Navier–Stokes solver will have difficulty converging onto a steady periodic solution. An example of the model's validity for $\varepsilon Re = 20$ is provided in figure 10, where isocontours of the velocity are displayed at two different values of m. By comparing the upper and lower sections of the graph, the ability of the model to mirror the computed solution seems gratifying, except in what concerns the negative peak magnitudes of u_r in the model, which overshoot their computed values. The axial velocity in figure 10(*d*) also exhibits different lobe shapes when comparing the modelled solution to its simulation at the same contour levels.

4. Conclusion

In this study, the Navier–Stokes equations are applied to the asymmetric problem that arises in the context of an injection-driven mean flow motion in a porous tube with a wavy non-circular cross-section. After mapping the radial coordinate to a fixed

boundary, the equations of motion are transformed and shown to recover Berman's fourth-order differential equation in the absence of surface distortion. To make further headway, an asymptotic expansion is pursued in the deviation amplitude, ε, which stands for the maximum radial displacement in a unit circle. This enables us to derive the system of equations that prescribe the stationary motion both at the first and second orders in ε. Then using judiciously imposed similarity transformations, the first-order system is reduced to four ordinary differential equations that can be solved straightforwardly. Along similar lines, the second-order system is transformed into an assortment of seven ordinary differential equations that can be solved with equal ease. The second-order formulation is subsequently shown to provide a practical similarity-based, asymptotic approximation to the problem at hand. Comparisons to nonlinear numerical simulations serve to verify the accuracy of the solution and to confirm the necessity of carrying out the analysis at least to second order. In this vein, we find that the axial velocity component is strongly affected by the second-order correction, which also plays a key role in securing mass conservation, especially in long chambers. From a fundamental standpoint, a high-order approximation not only extends our range of applicability to larger values of the Reynolds number and deviation amplitudes, it also helps to capture the axial vorticity that evolves in the chamber, as well as the viscous patch that develops along the centreline. Moreover, the semi-analytical solution enables us to assess the sensitivity of the flow field to variations in the cross-flow Reynolds number, the deviation amplitude and the circular wavenumber, which is specified by the number of lobes or crests in an actual grain perforation.

The inception of a viscous second-order mean flow model as a substitute to the Taylor–Culick profile opens up a parallel line of research inquiry into the stability and performance of rocket chambers in the presence of wall distortion. Although numerous stability investigations of the Taylor–Culick profile exist, with and without particle mean flow interactions, the corresponding problems in non-circular grain configurations remain relatively unexplored. In a circular motor, for example, the role of the tangential vorticity component on stability is relatively well understood. However, in the presence of asymmetry and surface distortions, the impact of axial vorticity on instability remains an open question. Given the deeply modified vorticity structures in a non-circular configuration, it will be interesting to explore the effects of deviation amplitudes and wavenumbers on flow instability. It is also hoped that these and other research questions will be addressed in future work.

Acknowledgements

The first three authors wish to thank CNES, the French Space Agency, Herakles, the European solid rocket manufacturer, and ONERA, the French Aerospace Laboratory. This work is based on the doctoral work of the first author, M.B., under sponsorship from both CNES and ONERA. The last author, J.M., was sponsored partly by Auburn University, through the Hugh and Loeda Francis Chair of Excellence, and partly by the National Science Foundation.

Appendix A

This appendix provides the resulting system of equations after substituting (2.2) into (2.1). When multiplied by the strictly positive quantity $(1+\varepsilon\alpha)$, one is left with

$$\left.\begin{aligned}
&u_r\partial_r u_r - \frac{\varepsilon\alpha'}{1+\varepsilon\alpha}u_\theta\partial_r u_r + \frac{u_\theta}{r}\partial_\theta u_r - \frac{u_\theta^2}{r} + (1+\varepsilon\alpha)u_z\partial_z u_r \\
&\quad = -\partial_r p + \frac{1+\varepsilon\alpha}{Re}\nabla^2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_r, \\
&u_r\partial_r u_\theta - \frac{\varepsilon\alpha'}{1+\varepsilon\alpha}u_\theta\partial_r u_\theta + \frac{u_\theta}{r}\partial_\theta u_\theta + \frac{u_\theta}{r}u_r + (1+\varepsilon\alpha)u_z\partial_z u_\theta \\
&\quad = \frac{\varepsilon\alpha'}{1+\varepsilon\alpha}\partial_r p - \frac{1}{r}\partial_\theta p + \frac{1+\varepsilon\alpha}{Re}\nabla^2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_\theta, \\
&u_r\partial_r u_z - \frac{\varepsilon\alpha'}{1+\varepsilon\alpha}u_\theta\partial_r u_z + \frac{u_\theta}{r}\partial_\theta u_z + (1+\varepsilon\alpha)u_z\partial_z u_z \\
&\quad = -(1+\varepsilon\alpha)\partial_z p + \frac{1+\varepsilon\alpha}{Re}\nabla^2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_z, \\
&\partial_r u_r + \frac{u_r}{r} - \frac{\varepsilon\alpha'}{1+\varepsilon\alpha}\partial_r u_\theta + \frac{1}{r}\partial_\theta u_\theta + (1+\varepsilon\alpha)\partial_z u_z = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{A 1}$$

where the expression for $\nabla^2\boldsymbol{u}$ is detailed in appendix B.

Appendix B

This appendix details the scalar representation of the Laplacian $\nabla^2\boldsymbol{u}$ in view of the coordinate transformation

$$r = \frac{\bar{r}}{1+\varepsilon\alpha(\bar{\theta})}, \quad \theta = \bar{\theta}, \quad z = \bar{z}. \tag{B 1}$$

This substitution entails, for any scalar function f,

$$\partial_{\bar{r}}f = \frac{1}{1+\varepsilon\alpha(\theta)}\partial_r f, \quad \partial_{\bar{\theta}}f = -\frac{\varepsilon\alpha'(\theta)}{1+\varepsilon\alpha(\theta)}r\partial_r f + \partial_\theta f, \quad \partial_{\bar{z}}f = \partial_z f. \tag{B 2a–c}$$

In cylindrical coordinates, the Laplacian of a vector $\boldsymbol{u}$ may be expanded into

$$\bar{\nabla}^2\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{r}}^2 u_r + \frac{1}{\bar{r}^2}\partial_{\bar{\theta}}^2 u_r + \partial_{\bar{z}}^2 u_r + \frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}}u_r - \frac{2}{\bar{r}^2}\partial_{\bar{\theta}}u_\theta - \frac{u_r}{\bar{r}^2} \\ \partial_{\bar{r}}^2 u_\theta + \frac{1}{\bar{r}^2}\partial_{\bar{\theta}}^2 u_\theta + \partial_{\bar{z}}^2 u_\theta + \frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}}u_\theta + \frac{2}{\bar{r}^2}\partial_{\bar{\theta}}u_r - \frac{u_\theta}{\bar{r}^2} \\ \partial_{\bar{r}}^2 u_z + \frac{1}{\bar{r}^2}\partial_{\bar{\theta}}^2 u_z + \partial_{\bar{z}}^2 u_z + \frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}}u_z \end{pmatrix}. \tag{B 3}$$

When converted into the $(r,\ \theta,\ z)$ coordinate system, the three components of $\nabla^2\boldsymbol{u}$ may be expressed in vector form using

$$\nabla^2\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{pmatrix}, \tag{B 4}$$

where

$$\begin{aligned} A_r = {} & \frac{1}{(1+\varepsilon\alpha)^2}\left[1+\frac{(\varepsilon\alpha')^2}{(1+\varepsilon\alpha)^2}\right]\partial_r^2 u_r + \frac{1}{r^2\,(1+\varepsilon\alpha)^2}\partial_\theta^2 u_r + \partial_z^2 u_r \\ & + \frac{1}{r\,(1+\varepsilon\alpha)^2}\left[1+\frac{(\varepsilon\alpha')^2}{(1+\varepsilon\alpha)^2} - \partial_\theta\frac{\varepsilon\alpha'}{1+\varepsilon\alpha}\right]\partial_r u_r + \frac{2\varepsilon\alpha'}{r\,(1+\varepsilon\alpha)^3}\partial_r u_\theta \\ & - \frac{2}{r^2\,(1+\varepsilon\alpha)^2}\partial_\theta u_\theta - \frac{u_r}{r^2\,(1+\varepsilon\alpha)^2} - \frac{2\varepsilon\alpha'}{r\,(1+\varepsilon\alpha)^3}\partial_\theta\partial_r u_r, \end{aligned} \tag{B 5a}$$

$$\begin{aligned} A_\theta = {} & \frac{1}{(1+\varepsilon\alpha)^2}\left[1+\frac{(\varepsilon\alpha')^2}{(1+\varepsilon\alpha)^2}\right]\partial_r^2 u_\theta + \frac{1}{r^2\,(1+\varepsilon\alpha)^2}\partial_\theta^2 u_\theta + \partial_z^2 u_\theta \\ & + \frac{1}{r\,(1+\varepsilon\alpha)^2}\left[1+\frac{(\varepsilon\alpha')^2}{(1+\varepsilon\alpha)^2} - \partial_\theta\frac{\varepsilon\alpha'}{1+\varepsilon\alpha}\right]\partial_r u_\theta - \frac{2\varepsilon\alpha'}{r\,(1+\varepsilon\alpha)^3}\partial_r u_r \\ & + \frac{2}{r^2\,(1+\varepsilon\alpha)^2}\partial_\theta u_r - \frac{u_\theta}{r^2\,(1+\varepsilon\alpha)^2} - \frac{2\varepsilon\alpha'}{r\,(1+\varepsilon\alpha)^3}\partial_\theta\partial_r u_\theta, \end{aligned} \tag{B 5b}$$

$$\begin{aligned} A_z = {} & \frac{1}{(1+\varepsilon\alpha)^2}\left[1+\frac{(\varepsilon\alpha')^2}{(1+\varepsilon\alpha)^2}\right]\partial_r^2 u_z + \frac{1}{r^2\,(1+\varepsilon\alpha)^2}\partial_\theta^2 u_z + \partial_z^2 u_z \\ & + \frac{1}{r\,(1+\varepsilon\alpha)^2}\left[1+\frac{(\varepsilon\alpha')^2}{(1+\varepsilon\alpha)^2} - \partial_\theta\frac{\varepsilon\alpha'}{1+\varepsilon\alpha}\right]\partial_r u_z - \frac{2\varepsilon\alpha'}{r\,(1+\varepsilon\alpha)^3}\partial_\theta\partial_r u_z. \end{aligned} \tag{B 5c}$$

Appendix C

This appendix contains the equations related to the determination of $O(\varepsilon)$ terms. The initial system at $O(\varepsilon)$ reads:

$$\left.\begin{aligned} & u_r^{(0)}\partial_r u_r^{(1)} + u_r^{(1)}\partial_r u_r^{(0)} + u_z^{(0)}\partial_z u_r^{(1)} \\ & \quad = -\partial_r p^{(1)} + \frac{1}{Re}\left[\partial_r^2 u_r^{(1)} + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 u_r^{(1)} + \partial_z^2 u_r^{(1)} + \frac{1}{r}\partial_r u_r^{(1)} - \frac{2}{r^2}\partial_\theta u_\theta^{(1)} - \frac{u_r^{(1)}}{r^2} - 2\alpha\partial_r^2 u_r^{(0)}\right. \\ & \qquad \left. - \frac{2\alpha+\alpha''}{r}\partial_r u_r^{(0)} + \frac{2\alpha}{r^2}u_r^{(0)}\right], \\ & u_r^{(0)}\partial_r u_\theta^{(1)} + \frac{1}{r}u_r^{(0)}u_\theta^{(1)} + u_z^{(0)}\partial_z u_\theta^{(1)} \\ & \quad = -\frac{1}{r}\partial_\theta p^{(1)} + \alpha'\partial_r p^{(0)} + \frac{1}{Re}\left[\partial_r^2 u_\theta^{(1)} + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 u_\theta^{(1)} + \partial_z^2 u_\theta^{(1)} + \frac{1}{r}\partial_r u_\theta^{(1)} + \frac{2}{r^2}\partial_\theta u_r^{(1)}\right. \\ & \qquad \left. - \frac{u_\theta^{(1)}}{r^2} - \frac{2\alpha'}{r}\partial_r u_r^{(0)}\right], \\ & u_r^{(0)}\partial_r u_z^{(1)} + u_r^{(1)}\partial_r u_z^{(0)} + u_z^{(0)}\partial_z u_z^{(1)} + u_z^{(1)}\partial_z u_z^{(0)} + \alpha u_z^{(0)}\partial_z u_z^{(0)} \\ & \quad = -\partial_z p^{(1)} - \alpha\partial_z p^{(0)} + \frac{1}{Re}\left[\partial_r^2 u_z^{(1)} + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 u_z^{(1)} + \partial_z^2 u_z^{(1)} + \frac{1}{r}\partial_r u_z^{(1)} - 2\alpha\partial_r^2 u_z^{(0)}\right. \\ & \qquad \left. - \frac{2\alpha+\alpha''}{r}\partial_r u_z^{(0)}\right] \\ & \partial_r u_r^{(1)} + \frac{1}{r}u_r^{(1)} + \frac{1}{r}\partial_\theta u_\theta^{(1)} + \partial_z u_z^{(1)} + \alpha\partial_z u_z^{(0)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{C 1}$$

Thus the system of equations that controls v_r, v_θ, v_z and q may be rearranged into:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{Re}v_r''-\frac{1}{r}\left(F+\frac{1}{Re}\right)v_r'+\left[\left(-\frac{F}{r}\right)'+\frac{m^2+1}{r^2Re}\right]v_r+q'-\frac{2m^2}{r^2Re}v_\theta\\
&\quad=\frac{1}{rRe}\left(2F''-\frac{m^2+2}{r}F'+\frac{m^2}{r^2}F\right),\\
&-\frac{1}{Re}v_\theta''-\frac{1}{r}\left(F+\frac{1}{Re}\right)v_\theta'+\frac{1}{r^2}\left(-F+\frac{m^2+1}{Re}\right)v_\theta+\frac{1}{r}q-\frac{2}{r^2Re}v_\theta\\
&\quad=\left(-\frac{F^2}{2r^2}\right)'+\frac{1}{rRe}\left(-F''+\frac{3}{r}F'-\frac{2}{r^2}F\right),\\
&-\frac{1}{Re}v_z''-\frac{1}{r}\left(F+\frac{1}{Re}\right)v_z'+\frac{1}{r}\left(2F'+\frac{m^2}{rRe}\right)v_z+\left(\frac{F'}{r}\right)'v_r\\
&\quad=\left(-\frac{F}{r}\right)\left(\frac{F'}{r}\right)'-\frac{1}{rRe}\left(3F'''-\frac{m^2+3}{r}F''+\frac{m^2+3}{r^2}F'\right),\\
&\qquad v_r'+\frac{1}{r}v_r-\frac{m^2}{r}v_\theta+v_z=-\frac{F'}{r},
\end{aligned}\right\}\tag{C 2}$$

with the auxiliary boundary conditions

$$v_z(1)=v_r(1)=0,\quad v_\theta(1)=1,\tag{C 3a,b}$$

$$v_z(0)=v_r(0)=v_\theta(0)=0,\quad v_r'(0)=-\tfrac{1}{2}F''(0).\tag{C 3c,d}$$

Appendix D

This appendix summarizes the equations needed to determine the $O(\varepsilon^2)$ corrections. First, the linear equations for $u_{r,2}^{(2)}$, $u_{\theta,2}^{(2)}$, $u_{z,2}^{(2)}$ and $p_2^{(2)}$ may be written as

$$u_{r,2}^{(2)\prime}+\frac{u_{r,2}^{(2)}}{r}-\frac{2m^2}{r}u_{\theta,2}^{(2)}+u_{z,2}^{(2)}=-\frac{1}{2}\left(v_z+m^2v_\theta'\right),\tag{D 1a}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{u_{r,2}^{(2)\prime\prime}}{Re}+\left(u_r^{(0)}-\frac{1}{rRe}\right)u_{r,2}^{(2)\prime}+\left(u_r^{(0)\prime}+\frac{4m^2+1}{r^2Re}\right)u_{r,2}^{(2)}-\frac{4m^2}{r^2Re}u_{\theta,2}^{(2)}+p_2^{(2)\prime}\\
&\quad=\frac{v_rv_r'}{2}-\frac{m^2}{2}v_\theta\left(u_r^{(0)\prime}-\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{2Re}\left[u_r^{(0)\prime\prime}\left(1-m^2\right)-v_r''+\frac{1-4m^2}{r}u_r^{(0)\prime}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{3m^2-1}{r}v_r'+\frac{m^2+1}{r^2}v_r-\frac{2m^2}{r}\left(v_\theta'-\frac{v_\theta}{r}\right)-\frac{u_r^{(0)}}{r^2}\right],
\end{aligned}\tag{D 1b}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{u_{\theta,2}^{(2)\prime\prime}}{Re}+\left(u_r^{(0)}-\frac{1}{rRe}\right)u_{\theta,2}^{(2)\prime}+\left(\frac{u_r^{(0)}}{r}+\frac{4m^2+1}{r^2Re}\right)u_{\theta,2}^{(2)}-\frac{4}{r^2Re}u_{r,2}^{(2)}+\frac{2}{r}p_2^{(2)}\\
&\quad=-\frac{v_rv_\theta'}{2}-\frac{1}{2r}v_\theta v_r+\frac{m^2}{2r}(v_\theta)^2+\frac{1}{2}q'-\frac{1}{2}p^{(0)\prime}+\frac{1}{2Re}\left(-v_\theta''+\frac{m^2+1}{r^2}v_\theta\right.\\
&\qquad\left.+\frac{3m^2-1}{r}v_\theta''-\frac{2}{r}v_r''-\frac{2}{r^2}v_r+\frac{4}{r}u_r^{(0)}\right),
\end{aligned}\tag{D 1c}$$

$$-\frac{u_{z,2}^{(2)\prime\prime}}{Re}+\left(u_r^{(0)}-\frac{1}{rRe}\right)u_{r,2}^{(2)\prime}+\left(2u_z^{(0)}+\frac{4m^2}{r^2Re}\right)u_{z,2}^{(2)}+u_z^{(0)\prime}u_{r,2}^{(2)}$$
$$=-\frac{v_rv_z''}{2}-\frac{(v_z)^2}{2}-u_z^{(0)}v_z-\frac{m^2}{2}v_\theta u_z^{(0)\prime}+\frac{m^2}{2r}v_\theta v_z+\frac{1}{2Re}\left[u_z^{(0)\prime\prime}\left(1-m^2\right)\right.$$
$$\left.-v_z''+\frac{1-4m^2}{r}u_z^{(0)\prime}+\frac{3m^2-1}{r}v_z'+\frac{m^2}{r^2}v_z\right]. \tag{D 1d}$$

In the above, the lower-order terms that capture nonlinear interactions are collected on the right-hand side of the momentum equations.

Second, the defining equations for $u_{r,0}^{(2)}$, $u_{z,0}^{(2)}$ and $p_0^{(2)}$ may be consolidated into

$$u_{r,0}^{(2)\prime}+\frac{u_{r,0}^{(2)}}{r}+u_{z,0}^{(2)}=-\frac{1}{2}\left(v_z-m^2v_\theta'\right), \tag{D 2a}$$

$$-\frac{1}{Re}u_{r,0}^{(2)\prime\prime}+\left(u_r^{(0)}-\frac{1}{rRe}\right)u_{r,0}^{(2)\prime}+\left(u_r^{(0)\prime}+\frac{1}{r^2Re}\right)u_{r,0}^{(2)}+p_0^{(2)\prime}$$
$$=-\frac{v_rv_r'}{2}+\frac{m^2}{2}v_\theta\left(u_r^{(0)\prime}-\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{1}{2Re}\left[u_r^{(0)\prime\prime}\left(1+m^2\right)-v_r''+\frac{u_r^{(0)\prime}}{r}\right.$$
$$\left.-\frac{m^2+1}{r}v_r'+\frac{m^2+1}{r^2}v_r+\frac{2m^2}{r}\left(v_\theta'-\frac{v_\theta}{r}\right)-\frac{u_r^{(0)}}{r^2}\right], \tag{D 2b}$$

$$-\frac{1}{Re}u_{z,0}^{(2)\prime\prime}+\left(u_r^{(0)}-\frac{1}{rRe}\right)u_{z,0}^{(2)\prime}+2u_z^{(0)}u_{z,0}^{(2)}+u_z^{(0)\prime}u_{r,0}^{(2)}$$
$$=\kappa-\frac{v_rv_z'}{2}-\frac{(v_z)^2}{2}-u_z^{(0)}v_z+\frac{m^2}{2}v_\theta u_z^{(0)\prime}-\frac{m^2}{2r}v_\theta v_z+\frac{1}{2Re}\left[u_z^{(0)\prime\prime}\left(1+m^2\right)-v_z''\right.$$
$$\left.+\frac{u_z^{(0)\prime}}{r}-\frac{m^2+1}{r}v_z'+\frac{m^2}{r^2}v_z\right]. \tag{D 2c}$$

Here, again, the continuity relation may be combined with the radial momentum equation to express $u_{z,0}^{(2)}$ and $p_0^{(2)}$ in terms of $u_{r,0}^{(2)}$ and its derivatives. This manipulation leads to a single third-order ordinary differential equation for $u_{r,0}^{(2)}$, specifically,

$$\frac{u_{r,0}^{(2)\prime\prime\prime}}{Re}+\left(\frac{2}{rRe}-u_r^{(0)}\right)u_{r,0}^{(2)\prime\prime}-\left(2u_z^{(0)}+\frac{u_r^{(0)}}{r}+\frac{1}{r^2Re}\right)u_{r,0}^{(2)\prime}+\left(\frac{u_r^{(0)}}{r^2}-\frac{2u_z^{(0)}}{r}\right.$$
$$\left.+u_z^{(0)\prime}+\frac{1}{r^3Re}\right)u_{r,0}^{(2)}$$
$$=\kappa-\frac{v_rv_z'}{2}-\frac{(v_z)^2}{2}+\frac{u_r^{(0)}v_z'}{2}+\frac{m^2}{2}\left(v_\theta u_z^{(0)\prime}-\frac{v_\theta v_z}{r}-u_r^{(0)}v_\theta''-2u_z^{(0)}v_\theta'\right)$$
$$+\frac{1}{2Re}\left[\left(1+m^2\right)u_z^{(0)\prime\prime}-2v_z''+\frac{u_z^{(0)\prime}}{r}-\frac{m^2+2}{r}v_z'+m^2\left(\frac{v_z}{r^2}+v_\theta'''+\frac{v_\theta''}{r}\right)\right]. \tag{D 3}$$

REFERENCES

ABU-IRSHAID, E. M., MAJDALANI, J. & CASALIS, G. 2007 Hydrodynamic stability of rockets with headwall injection. *Phys. Fluids* **19** (2), 024101.

AKIKI, M. & MAJDALANI, J. 2016 Compressible integral representation of rotational and axisymmetric rocket flow. *J. Fluid Mech.* **809**, 213–239.

APTE, S. V. & YANG, V. 2003 A large-eddy simulation study of transition and flow instability in a porous-walled chamber with mass injection. *J. Fluid Mech.* **477**, 215–225.

BALACHANDAR, S., BUCKMASTER, J. D. & SHORT, M. 2001 The generation of axial vorticity in solid-propellant rocket-motor flows. *J. Fluid Mech.* **429**, 283–305.

BALAKRISHNAN, G., LIÑAN, A. & WILLIAMS, F. A. 1992 Rotational inviscid flow in laterally burning solid propellant rocket motors. *J. Propul. Power* **8** (6), 1167–1176.

BERMAN, A. S. 1953 Laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.* **24** (9), 1232–1235.

BERMAN, A. S. 1958 Laminar flow in an annulus with porous walls. *J. Appl. Phys.* **29** (1), 71–75.

BOYER, G., CASALIS, G. & ESTIVALÈZES, J.-L. 2013 Stability and sensitivity analysis in a simplified solid rocket motor flow. *J. Fluid Mech.* **722**, 618–644.

CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. M. & ZANG, T. A. 1988 *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer.

CASALIS, G., AVALON, G. & PINEAU, J. P. 1998 Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls. *Phys. Fluids* **10** (10), 2558–2568.

CHEDEVERGNE, F., CASALIS, G. & FÉRAILLE, T. 2006 Biglobal linear stability analysis of the flow induced by wall injection. *Phys. Fluids* **18** (1), 014103.

CHEDEVERGNE, F., CASALIS, G. & MAJDALANI, J. 2012 Direct numerical simulation and biglobal stability investigations of the gaseous motion in solid rocket motors. *J. Fluid Mech.* **706**, 190–218.

COX, S. M. 1991 Two-dimensional flow of a viscous fluid in a channel with porous walls. *J. Fluid Mech.* **227**, 1–33.

COX, S. M. & KING, A. C. 1997 On the asymptotic solution of a high-order nonlinear ordinary differential equation. *Proc. R. Soc. Lond.* A **453** (1959), 711–728.

CULICK, F. E. C. 1966 Rotational axisymmetric mean flow and damping of acoustic waves in a solid propellant rocket. *AIAA J.* **4** (8), 1462–1464.

DUNLAP, R., BLACKNER, A. M., WAUGH, R. C., BROWN, R. S. & WILLOUGHBY, P. G. 1990 Internal flow field studies in a simulated cylindrical port rocket chamber. *J. Propul. Power* **6** (6), 690–704.

FABIGNON, Y., DUPAYS, J., AVALON, G., VUILLOT, F., LUPOGLAZOFF, N., CASALIS, G. & PRÉVOST, M. 2003 Instabilities and pressure oscillations in solid rocket motors. *J. Aerosp. Sci. Technol.* **7** (3), 191–200.

FÉRAILLE, T. & CASALIS, G. 2003 Channel flow induced by wall injection of fluid and particles. *Phys. Fluids* **15** (2), 348–360.

FISCHBACH, S. R., MAJDALANI, J. & FLANDRO, G. A. 2007 Acoustic instability of the slab rocket motor. *J. Propul. Power* **23** (1), 146–157.

FLANDRO, G. A., FISCHBACH, S. R. & MAJDALANI, J. 2007 Nonlinear rocket motor stability prediction: limit amplitude, triggering, and mean pressure shift. *Phys. Fluids* **19** (9), 094101.

FLANDRO, G. A. & MAJDALANI, J. 2003 Aeroacoustic instability in rockets. *AIAA J.* **41** (3), 485–497.

GAZANION, B., CHEDEVERGNE, F. & CASALIS, G. 2014 On the laminar–turbulent transition in injection-driven porous chambers. *Exp. Fluids* **55** (1), 1643.

GRIFFOND, J. & CASALIS, G. 2000 On the dependence on the formulation of some nonparallel stability approaches applied to the Taylor flow. *Phys. Fluids* **12** (2), 466–468.

HIEMENZ, K. 1911 Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. *Dingler's Polytechn. J.* **326** (22), 344–348.

KURDYUMOV, V. N. 2006 Steady flows in the slender, noncircular, combustion chambers of solid propellants rockets. *AIAA J.* **44** (12), 2979–2986.

LU, C. 1994 On the existence of multiple solutions of a boundary value problem arising from laminar flow through a porous pipe. *Can. Appl. Math. Q.* **2** (3), 361–393.

LU, C. 1997 On the asymptotic solution of laminar channel flow with large suction. *SIAM J. Math. Anal.* **28** (5), 1113–1134.

MAICKE, B. A. & MAJDALANI, J. 2008 On the rotational compressible Taylor flow in injection-driven porous chambers. *J. Fluid Mech.* **603**, 391–411.

MAJDALANI, J. 2007 On steady rotational high speed flows: the compressible Taylor–Culick profile. *Proc. R. Soc. Lond.* A **463** (2077), 131–162.

MAJDALANI, J. 2009 Multiple asymptotic solutions for axially travelling waves in porous channels. *J. Fluid Mech.* **636**, 59–89.

MAJDALANI, J. & AKIKI, M. 2010 Rotational and quasiviscous cold flow models for axisymmetric hybrid propellant chambers. *Trans. ASME J. Fluids Engng* **132** (10), 101202.

MAJDALANI, J., FISCHBACH, S. R. & FLANDRO, G. A. 2006 Improved energy normalization function in rocket motor stability calculations. *J. Aerosp. Sci. Technol.* **10** (6), 495–500.

MAJDALANI, J. & FLANDRO, G. A. 2002 The oscillatory pipe flow with arbitrary wall injection. *Proc. R. Soc. Lond.* A **458** (2023), 1621–1651.

MAJDALANI, J., FLANDRO, G. A. & FISCHBACH, S. R. 2005 Some rotational corrections to the acoustic energy equation in injection-driven enclosures. *Phys. Fluids* **17** (7), 0741021.

MAJDALANI, J. & SAAD, T. 2007 The Taylor–Culick profile with arbitrary headwall injection. *Phys. Fluids* **19** (9), 093601.

MAJDALANI, J., VYAS, A. B. & FLANDRO, G. A. 2002 Higher mean-flow approximation for solid rocket motors with radially regressing walls. *AIAA J.* **40** (9), 1780–1788.

MAJDALANI, J., VYAS, A. B. & FLANDRO, G. A. 2009 Erratum on 'Higher mean-flow approximation for solid rocket motors with radially regressing walls'. *AIAA J.* **47** (1), 286.

PROUDMAN, I. 1960 An example of steady laminar flow at large Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **9** (4), 593–602.

REFLOCH, A., COURBET, B., MURRONE, A., VILLEDIEU, P., LAURENT, C., GILBANK, P., TROYES, J., TESSÉ, L., CHAINERAY, G., DARGAUD, J. B. *et al.* 2011 CEDRE software. *AerospaceLab* (2), 1–10.

SAAD, T. & MAJDALANI, J. 2010 On the Lagrangian optimization of wall-injected flows: from the Hart–McClure potential to the Taylor–Culick rotational motion. *Proc. R. Soc. Lond.* A **466** (2114), 331–362.

SAAD, T., SAMS, O. C. & MAJDALANI, J. 2006 Rotational flow in tapered slab rocket motors. *Phys. Fluids* **18** (1), 103601.

SABNIS, J. S., GIBELING, H. J. & MCDONALD, H. 1989 Navier–Stokes analysis of solid propellant rocket motor internal flows. *J. Propul. Power* **5** (6), 657–664.

SAMS, O. C., MAJDALANI, J. & SAAD, T. 2007 Mean flow approximations for solid rocket motors with tapered walls. *J. Propul. Power* **23** (2), 445–456.

SELLARS, J. R. 1955 Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds numbers. *J. Appl. Phys.* **26** (4), 489–490.

TAYLOR, G. I. 1956 Fluid flow in regions bounded by porous surfaces. *Proc. R. Soc. Lond.* A **234** (1199), 456–475.

TERRILL, R. M. & SHRESTHA, G. M. 1965 Laminar flow through parallel and uniformly porous walls of different permeability. *Z. Angew. Math. Phys.* **16** (4), 470–482.

TERRILL, R. M. & THOMAS, P. W. 1969 On laminar flow through a uniformly porous pipe. *Appl. Sci. Res.* **21** (1), 37–67.

VAN HORN, E. M. & MAJDALANI, J. 2014 Extension of the Taylor–Culick profile to rockets with noncircular grain perforations. In *50th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Cleveland, OH. AIAA Paper* 2014-4018.

VENUGOPAL, P., MOSER, R. D. & NAJJAR, F. M. 2008 Direct numerical simulation of turbulence in injection-driven plane channel flows. *Phys. Fluids* **20** (10), 105103.

WATSON, E. B. B., BANKS, W. H. H., ZATURSKA, M. B. & DRAZIN, P. G. 1990 On transition to chaos in two-dimensional channel flow symmetrically driven by accelerating walls. *J. Fluid Mech.* **212** (1), 451–485.

YAMADA, K., GOTO, M. & ISHIKAWA, N. 1976 Simulative study on the erosive burning of solid rocket motors. *AIAA J.* **14** (9), 1170–1176.

ZATURSKA, M. B., DRAZIN, P. G. & BANKS, W. H. H. 1988 On the flow of a viscous fluid driven along a channel by suction at porous walls. *Fluid Dyn. Res.* **4** (3), 151–178.

3.2. Compléments sur la solution analytique obtenue

3.2.1. Mise en évidence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse axiale

L'article ne mentionne pas que plusieurs points d'inflexion apparaissent dans le profil de vitesse axiale lorsque le nombre de Reynolds et la déformation augmentent. Or les points d'inflexion dans les profils de vitesse conduisent dans de nombreux cas à des instabilités dans les écoulements qui en possèdent, ils méritent donc une certaine attention.

Étude paramétrique

La figure 3.1a montre par exemple un profil de vitesse axiale pour $\varepsilon = 0{,}2$ et $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 100$ faisant apparaître deux points d'inflexion. Ces points d'inflexion sont caractérisés par la figure 3.1b où est tracée la dérivée seconde de la vitesse axiale.

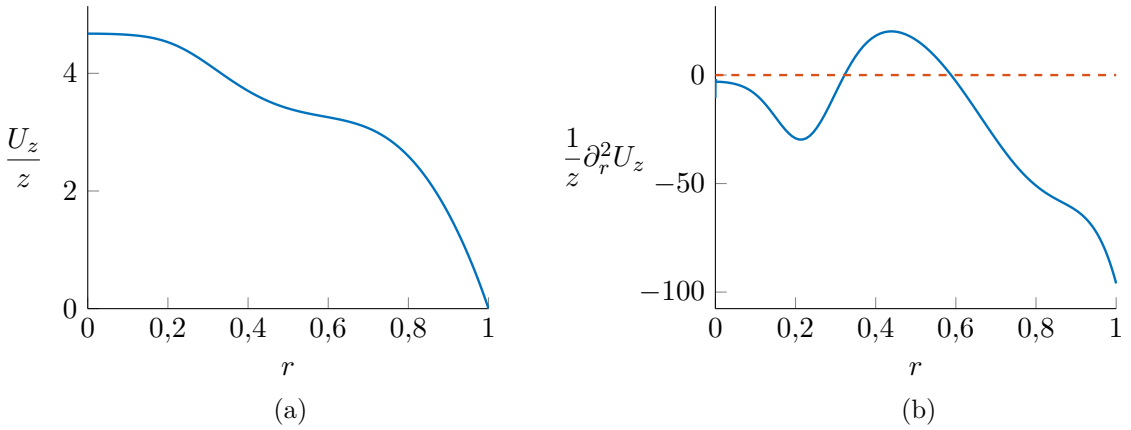
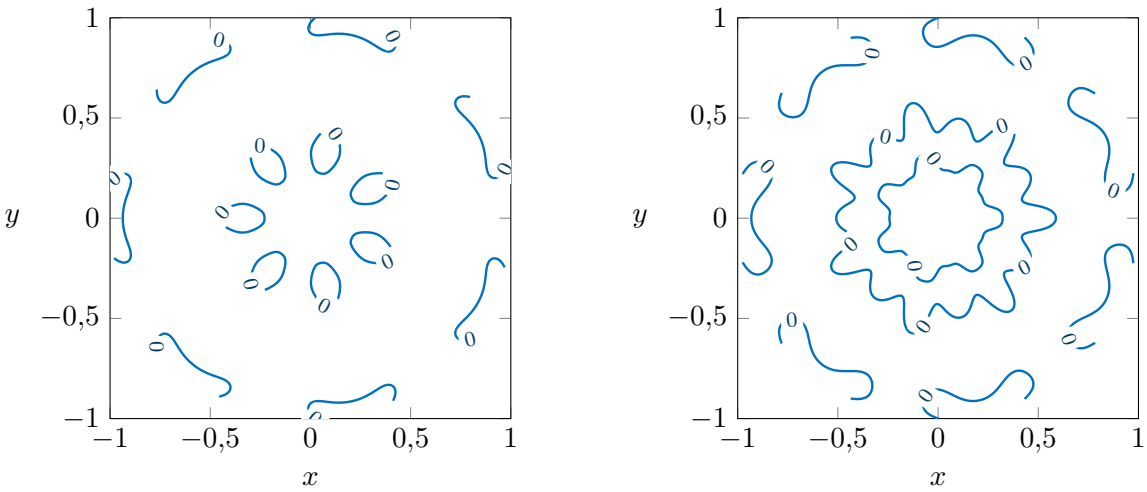


FIGURE 3.1. – Profil de (a) U_z/z et de (b) $\partial_r^2 U_z/z$ pour $\varepsilon = 0{,}2$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 100$, $m = 7$ et $\theta = 0$. La ligne en pointillé rouge sur la figure (b) permet de mettre en évidence la position des points d'inflexion.

Toutefois ces courbes sont tracées pour une certaine valeur de θ, en l'occurrence $\theta = 0$. Pour un même jeu $(\varepsilon, \mathcal{R}_\mathrm{e})$, ces points d'inflexion peuvent donc ne pas apparaître pour une autre valeur de θ en raison de la présence des cosinus dans l'expression de la solution (voir eqn 2.15). Il peut être intéressant de savoir à partir de quelles valeurs de $(\varepsilon, \mathcal{R}_\mathrm{e})$ les points d'inflexion sont « de révolution », autrement dit à partir de quelles valeurs le profil de vitesse axiale de vitesse possède un (ou plusieurs) point(s) d'inflexion, quelle que soit la valeur de la coordonnée azimutale.

Pour déterminer ces points d'inflexion de révolution, la ligne de niveau $\partial_r^2 U_z/z = 0$ est tracée dans le plan (r, θ) ou (x, y). Ceci permet d'obtenir des figures similaires à la figure 3.2 tracée pour $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 100$ et $m = 7$. À gauche de la figure, pour $\varepsilon = 0.11$, on observe la présence d'au plus trois points d'inflexion dans le profil de vitesse, mais seulement pour certaines valeurs de θ. En revanche, à droite de la figure les deux points d'inflexion les plus au centre sont obtenus pour toutes les valeurs de θ. Les couples $(\varepsilon, \mathcal{R}_\mathrm{e})$ faisant apparaître les points d'inflexion de révolution peuvent ainsi être déterminés via une étude paramétrique.

Le premier résultat de cette étude est que l'apparition de point d'inflexion de révolution est monotone vis-à-vis des deux paramètres ε et $\mathcal{R}_\mathrm{e}$: dès lors qu'un point d'inflexion apparaît pour une certaine valeur du couple $(\varepsilon, \mathcal{R}_\mathrm{e})$, toute augmentation de ε et/ou de $\mathcal{R}_\mathrm{e}$ conduit aussi à la présence d'un point d'inflexion. Le second résultat est que les points d'inflexion de révolution apparaissent par paire : soit il n'y a aucun point d'inflexion de révolution, soit il y en a deux (comme sur la figure 3.2b). Les résultats de cette étude paramétrique sont représentés sur la figure 3.3. Sur cette figure sont montrés les couples $(\varepsilon, \mathcal{R}_\mathrm{e})$ à partir desquels la paire de points d'inflexion de révolution apparaît dans le profil axial de vitesse pour différentes valeurs de m. Deux domaines peuvent donc être distingués pour chaque valeur de m : en dessous de certaines valeurs du couple $(\varepsilon, \mathcal{R}_\mathrm{e})$ il n'y a pas de points d'inflexion de révolution tandis qu'au-dessus il y



(a) $\frac{1}{z}\partial_r^2 U_z$ pour $\varepsilon = 0.11$

(b) $\frac{1}{z}\partial_r^2 U_z$ pour $\varepsilon = 0.2$

FIGURE 3.2. – Lignes de niveau $\frac{1}{z}\partial_r^2 U_z = 0$ avec $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 100$ et $m = 7$. (a) $\varepsilon = 0{,}11$ et (b) $\varepsilon = 0{,}2$.

en a. La séparation des deux domaines s'apparente à une fonction puissance du type $\varepsilon = {\mathcal{R}_\mathrm{e}}^{-\alpha}$. On constate que plus le nombre de Reynolds est grand, plus la déformation de l'étoile conduisant à l'apparition des points d'inflexion de révolution est faible. Par ailleurs on montre qu'à Reynolds fixé, plus le nombre de branches de l'étoile est élevé, plus la déformation de l'étoile doit être importante pour voir les points d'inflexion de révolution apparaître. De plus, on a rajouté sur cette figure des points représentant les simulations CEDRE effectuées. Il s'avère que lorsque ces points sont dans le domaine où des points d'inflexion existent, la simulation ne parvient pas à converger vers une solution stationnaire, tandis que lorsque les points sont dans le domaine sans point d'inflexion, la simulation converge. Ces points ne constituent évidemment pas une preuve de la présence d'une instabilité, mais témoignent tout de même d'un lien entre la convergence et la présence ou l'absence de point d'inflexion. Enfin, notons que dans le papier de Kurdyumov (2006) les valeurs de $(\varepsilon, \mathcal{R}_\mathrm{e})$ auxquels les auteurs observent un tourbillon dans le plan (r, θ) sont toutes situées dans la plage où des points d'inflexion existent d'après la solution présentée ici. Par conséquent, ces tourbillons n'ont pas pu être observés numériquement (puisque dans cette plage les calculs CEDRE ne convergent pas vers une solution stationnaire).

Incidence de la présence d'un point d'inflexion sur la stabilité de l'écoulement

Pour les écoulements parallèles en fluide parfait, le théorème de Rayleigh (1879) énonce que la présence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse est une condition nécessaire d'instabilité de l'écoulement. Même dans le cas d'un écoulement parallèle non visqueux, la présence d'un point d'inflexion n'entraîne donc pas *de facto* une instabilité de l'écoulement d'après ce théorème, puisque c'est seulement une condition nécessaire et pas suffisante. Ensuite la solution présentée dans ce chapitre n'est pas parallèle (l'écoulement est linéairement accéléré dans la direction axiale) et ne peut en aucun cas être qualifié de non visqueux comme l'a montré Balachandar *et al.* (2001). Le théorème de Rayleigh ne s'applique donc pas ici. Toutefois, de nombreux écoulements non parallèles et/ou non visqueux présentant des points d'inflexion conduisent à des instabilités : on peut citer le cas des instabilités *cross-flow*, des couches de mélanges ou des bulbes de décollement. Par ailleurs, si la solution n'a pu être validée numériquement que jusqu'à des valeurs $\varepsilon\mathcal{R}_\mathrm{e} \approx 30$, c'est notamment parce que le code CEDRE ne permet plus d'obtenir de solution stationnaire convergée pour ces valeurs-là. Dans les faits, les couples $(\varepsilon, \mathcal{R}_\mathrm{e})$ conduisant à une divergence de la simulation Navier–Stokes se situent tous dans le domaine où les deux points d'inflexion de révolution sont présents, comme cela est montré sur la figure 3.3. Cependant ces simulations numériques ayant été réalisées avant la mise en évidence de ces points d'inflexion, une mise en

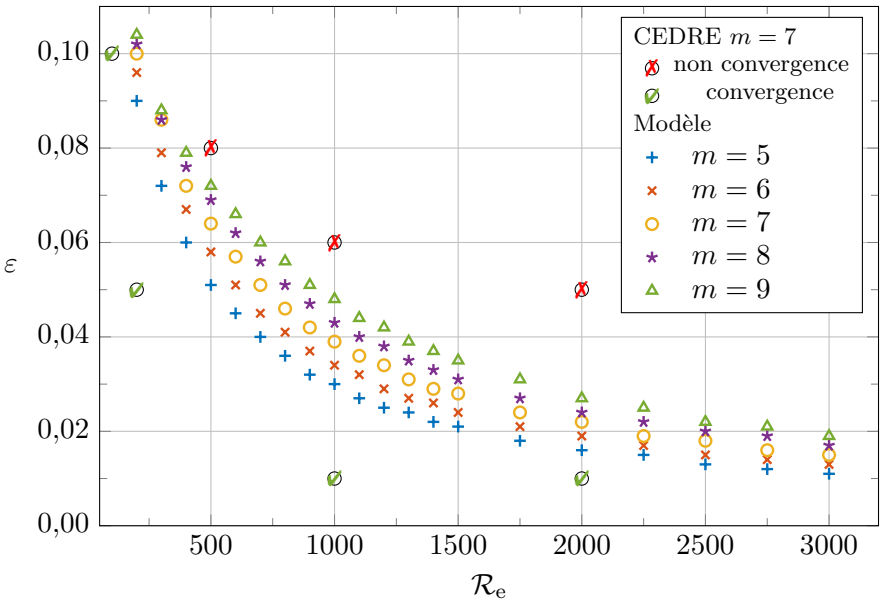


FIGURE 3.3. – Représentation des couples $(\varepsilon, \mathcal{R}_e)$ à partir desquels au moins un point d'inflexion de révolution apparaît dans le profil axial de vitesse pour différentes valeurs de m. Les cercles barrés d'une croix rouge représentent des cas où il n'a pas été possible de converger vers une solution stationnaire avec CEDRE (pour $m = 7$), tandis que les cercles « validés » représentent des cas convergés.

évidence du lien entre la non-convergence des simulations vers une solution stationnaire et la présence des points d'inflexion reste à prouver.

3.2.2. Développements de Taylor pour les conditions limites sur l'axe

Les conditions limites sur l'axe pour les systèmes d'équations régissant les corrections d'ordre $O(\varepsilon)$ et $O(\varepsilon^2)$ sont déterminées en supposant un comportement régulier des différentes fonctions sur l'axe et en utilisant un développement de Taylor. La méthode et les équations n'étant pas décrites dans l'article, cette section couvre ces aspects.

Un développement limité des différentes fonctions inconnues supposé régulier au voisinage de $r = 0$ est effectué :

$$\begin{cases} U_z^{(1)} = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + o(r^2)\,, \\ U_r^{(1)} = b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + o(r^2)\,, \\ U_\theta^{(1)} = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + o(r^2)\,, \\ q = d_0 + d_1 r + d_2 r^2 + o(r^2)\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

Concernant la solution de l'équation de Berman F (voir eqn. (2.9) de l'article), le comportement sur l'axe impose $\lim_{r\to 0} F/r = 0$. On pose donc $F(r) = \alpha_2 r^2 + o(r^2)$. Ce développement est introduit dans le système (C2) régissant la correction d'ordre $O(\varepsilon)$. On va alors pouvoir écrire une équation pour chaque ordre $O(r^n)$. L'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$ donne

$$\begin{aligned} &\frac{-1}{\mathcal{R}_e}\left(2b_2 + o(1)\right) - \left(\alpha_2 r + \frac{1}{\mathcal{R}_e r}\right)\left(b_1 + 2b_2 r + o(r)\right) + \left(-\alpha_2 + \frac{m^2+1}{\mathcal{R}_e r^2}\right)\left(b_0 + b_1 r\right) \\ &+ b_2 r^2 + o(r^2)) + (d_1 + 2d_2 r + o(r)) - \frac{2m^2}{\mathcal{R}_e r^2}\left(c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + o(r^2)\right) = \frac{-m^2\alpha_2}{\mathcal{R}_e}\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Le rassemblement des termes d'ordre $O(r^{-2})$ conduit à

$$(m^2+1)b_0 = 2m^2 c_0\,, \tag{3.3}$$

tandis que celui des termes d'ordre $O(r^{-1})$ entraine $(-b_1)+(m^2+1)\,b_1-(2m^2)\,c_1=-m^2\alpha_2$ soit, si $m\neq 0$,

$$b_1-2c_1=-\alpha_2\,. \tag{3.4}$$

L'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_\theta$ donne

$$\begin{aligned}&\frac{-1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(2c_2+o(1)\right)-\left(\alpha_2 r+\frac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e} r}\right)\left(c_1+2c_2 r+o(r)\right)+\left(-\alpha_2+\frac{m^2+1}{\mathcal{R}_\mathrm{e} r^2}\right)(c_0+c_1 r\\&+c_2 r^2+o(r^2))+\frac{1}{r}\left(d_0+d_1 r+d_2 r^2+o(r^2)\right)-\frac{2}{\mathcal{R}_\mathrm{e} r^2}\left(b_0+b_1 r+b_2 r^2+o(r^2)\right)\\&=-\alpha_2^2 r+\frac{2}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\frac{\alpha_2}{r}+o(r)\,,\end{aligned} \tag{3.5}$$

ce qui mène à

$$(m^2+1)c_0=2b_0 \qquad \text{et} \qquad m^2c_1+\mathcal{R}_\mathrm{e}d_0-2b_1=2\alpha_2\,. \tag{3.6}$$

L'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$ donne

$$\begin{aligned}&\frac{-1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(2a_2+o(1)\right)-\left(\alpha_2 r+\frac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e} r}\right)\left(a_1+2a_2 r+o(r)\right)+\left(4\alpha_2+\frac{m^2}{\mathcal{R}_\mathrm{e} r^2}\right)(a_0+a_1 r+a_2 r^2\\&\qquad\qquad +o(r^2))=o(1)\,,\end{aligned} \tag{3.7}$$

ce qui conduit à $m^2a_0=0$ soit, si $m\neq 0$,

$$a_0=0 \tag{3.8}$$

et $(m^2-1)\,a_1=0$ soit , pour $m^2\neq 1$,

$$a_1=0\,. \tag{3.9}$$

Enfin, l'équation de continuité se traduit par

$$\begin{aligned}&(b_1+2b_2 r+o(r))+\frac{1}{r}\left(b_0+b_1 r+b_2 r^2+o(r^2)\right)-\frac{m^2}{r}\left(c_0+c_1 r+c_2 r^2+o(r^2)\right)\\&+\left(a_0+a_1 r+a_2 r^2+o(r^2)\right)=-2\alpha_2\,,\end{aligned} \tag{3.10}$$

ce qui entraîne $b_0-m^2c_0=0$ et $2b_1-m^2c_1+a_0=-2\alpha_2$ or $a_0=0$ et ainsi

$$2b_1-m^2c_1=-2\alpha_2\,. \tag{3.11}$$

En combinant (3.3) et (3.6) on obtient, pour $m^2\neq 1$,

$$b_0=c_0=0\,. \tag{3.12}$$

En combinant (3.4) et (3.11) on obtient, pour $m\neq 0$ et $m^2\neq 4$,

$$b_1=-\alpha_2 \quad \text{et} \quad c_1=0\,. \tag{3.13}$$

Au total, pour $m\notin\{0,\pm1,\pm2\}$, les quatre conditions sur l'axe associées au système (C2) sont $U_z^{(1)}(0)=U_r^{(1)}(0)=U_\theta^{(1)}(0)=0$ et $U_r^{(1)'}(0)=-F''(0)/2$, conformément à ce qui est indiqué dans l'article (équation (C3b)). Notons que les cas $m\in\{0,\pm1,\pm2\}$ sont associés à d'autres conditions limites mais ces valeurs de m ne correspondent pas à la définition usuelle d'une étoile (une étoile possède au moins trois branches). La même procédure est appliquée aux corrections d'ordre $O(\varepsilon^2)$. La méthode étant la même mais les équations plus longues et plus nombreuses, la détermination

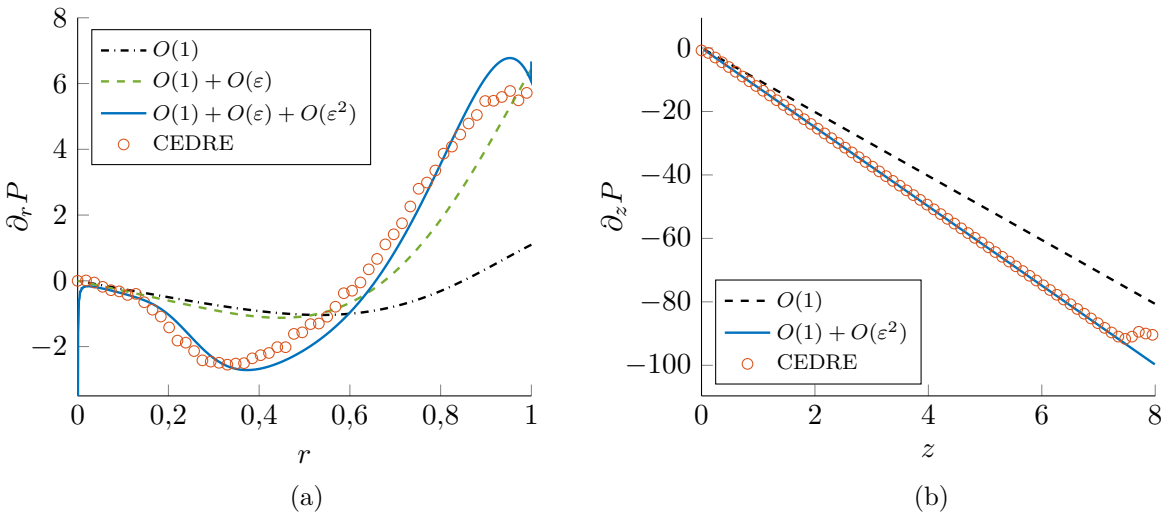


FIGURE 3.4. – Évolutions du gradient de pression pour $\varepsilon = 0{,}1$, $m = 7$ et $\mathcal{R}_e = 100$. (a) Gradient de pression radial suivant r pour $\theta = 0$. (b) Gradient de pression axial suivant z pour $r = 0{,}8$ et $\theta = \pi/m$ (valeurs sans influence dans le modèle).

de ces conditions est décrite dans l'annexe B.

3.2.3. Détermination de la pression

L'article ne montre pas d'évolution de la pression dans les directions radiales ou axiales, ni de comparaison avec les simulations numériques. Cette comparaison entre la pression obtenue analytiquement et la pression obtenue par CEDRE a été effectuée et se révèle moins bonne que pour le champ de vitesse. En effet le rapport entre la correction de pression par rapport à la solution de Berman et la pression « totale » dans une section $z = cte$ est inférieure à 10^{-5}, or il est délicat pour un code compressible comme le code CEDRE de déterminer précisément de si faibles corrections de pression.

Dans les équations aux ordres $O(1)$ et $O(\varepsilon^2)$ la pression n'apparaît que sous la forme de son gradient, il est donc plus intéressant de décrire le gradient de pression que la pression elle-même. La figure 3.4 propose une comparaison du gradient de pression entre le modèle et le calcul CEDRE. Il est tout de suite possible de constater sur la figure 3.4a que la courbe obtenue avec le code CEDRE présente des discontinuités plus importantes que celles montrées dans l'article pour le champ de vitesse, alors qu'il s'agit bien du même calcul. Toutefois sur cette figure l'accord entre le modèle et la simulation est plutôt satisfaisant : on constate que la solution à l'ordre $O(1)$ est assez éloignée de la solution mais que l'ajout des corrections d'ordre plus élevé tend à s'en rapprocher. La comparaison du gradient de pression axial de la figure 3.4b est quant à elle très satisfaisante : la correction [1] d'ordre $O(\varepsilon^2)$ via la constante κ (voir eqn. (2.13) de l'article) permet de reproduire fidèlement l'évolution du gradient axial de pression. En aval du domaine, pour $z \geq 7$, c'est la condition limite de sortie du domaine de calcul dans la simulation qui perturbe l'évolution du gradient de pression (perturbation aussi visible sur l'évolution axiale de U_z sur la figure 5 de l'article).

3.3. Proposition d'extension de la solution à une géométrie quelconque périodique

La solution proposée dans l'article n'est valable que pour une paroi définie par $\bar{r} = R_p(1 + \varepsilon\cos(m\theta))$. Sans que cela ait été réalisé dans le cadre de cette thèse, il semble qu'il soit possible

1. On rappelle que si l'ordre $O(\varepsilon)$ n'apparaît pas sur la figure c'est parce qu'il ne contribue pas au gradient axial de pression (voir conservation du débit eqn (2.4))

d'étendre la solution proposée à une géométrie quelconque. L'idée est d'utiliser des développements en série de Fourier plutôt que d'effectuer un développement asymptotique, mais en suivant une méthodologie similaire.

Supposons que la paroi soit définie par $\bar{r} = R_p(1+\phi(\theta))$ où ϕ est une fonction $2\pi/m$-périodique vis-à-vis de θ. La fonction ϕ peut donc être décomposée en série de Fourier. Le changement de variable serait donc introduit de façon identique : $r = \bar{r}/(1+\phi(\theta))$. L'introduction de ce changement de variable dans les équations de Navier–Stokes conduit à des équations similaires à celles de l'annexe (A) de l'article (en prenant $\phi = \varepsilon\alpha$). Les dénominateurs du type $(1+\phi)$ seraient éliminés en multipliant les équations par $(1+\phi)$ autant de fois que nécessaire. La solution serait alors recherchée sous la forme de séries de Fourier :

$$\begin{cases} U_r = \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} U_l^r(r)\cos(lm\theta)\ , \\ U_\theta = \displaystyle\sum_{l=1}^{+\infty} U_l^\theta(r)\sin(lm\theta)\ , \\ U_z = z\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} U_l^z(r)\cos(lm\theta)\ , \\ P = Cz^2 + \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} P_l(r)\cos(lm\theta)\ . \end{cases} \tag{3.14}$$

L'étape suivante est plus délicate. Il s'agit de déterminer les équations régissant chaque mode de Fourier du champ de vitesse et de la pression. Les équations de Navier–Stokes exprimées avec les nouvelles variables font apparaître des termes nécessitant de calculer des triples produits de série de Fourier, comme par exemple un des derniers termes de convection de l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$:

$$(1+\phi)\,U_z\partial_z U_z = z\left(1+\sum_{l=1}^{+\infty}\phi_l\cos(lm\theta)\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}U_k^z(r)\cos(km\theta)\right)^2\ . \tag{3.15}$$

Il faut alors linéariser en cosinus chacun de ces produits. Dans la pratique, on pourrait imaginer une paroi définie par un faible nombre d'harmoniques (disons 2 ou 3) et la détermination des équations pourrait se faire à l'aide d'un logiciel de calcul formel comme Maple™. Une opération similaire est décrite au chapitre 4. Une fois la linéarisation effectuée, les différents termes en $\cos(lm\theta)$ seraient isolés et les systèmes d'ODE seraient résolus successivement, comme dans l'article.

Bilan

Au final, une solution analytique permettant de décrire l'écoulement dans un conduit à paroi débitante de section étoilée a été déterminée. Pour cela, la méthode a consisté à introduire un changement de variables puis à effectuer un développement asymptotique du second ordre. Les différents ordres sont calculés successivement à l'aide de simples routines Matlab®. Une fois cette solution obtenue, celle-ci a été validée par comparaison avec des simulations Navier–Stokes complètes effectuées avec le code CEDRE. Un domaine de validité de la solution, dépendant de l'amplitude de la déformation radiale et du nombre de Reynolds d'injection, a pu être déterminé. Enfin, une étude paramétrique a mis en évidence la présence de points d'inflexion dans le profil de vitesse axiale en fonction des valeurs des paramètres intervenant dans la solution. Or les points d'inflexion dans les profils de vitesse sont souvent une source d'instabilités et pourraient à ce titre expliquer les cas de non-convergence des simulations CEDRE réalisées. On se propose maintenant d'étudier la stabilité linéaire de cette solution.

Chapitre 4

Étude de la stabilité linéaire de l'écoulement

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la stabilité linéaire de l'écoulement décrit au chapitre 3 afin d'étudier l'influence d'une déformation radiale sur la stabilité de l'écoulement. Pour cela, les outils théoriques présentés au chapitre 2 sont utilisés.

Le chapitre commence par une étude de la stabilité locale de l'écoulement de base. Pour cela, une perturbation est superposée à l'écoulement moyen. Au contraire de la configuration cylindrique, les fonctions d'amplitudes associées à la perturbation dépendent de la coordonnée azimutale. En utilisant le théorème de Floquet comme décrit au chapitre 2, cette dépendance azimutale est modélisée et la perturbation est décomposée en série de Fourier vis-à-vis de cette coordonnée. La combinaison du changement de variable décrit au chapitre précédent ainsi que la forme de la perturbation complexifie la linéarisation des équations de Navier–Stokes et le calcul des coefficients régissant les différentes équations. On présente alors la stratégie adoptée au cours de cette thèse pour déterminer ces coefficients et développer un code permettant de résoudre le problème aux valeurs propres généralisé ainsi formé. Pour valider ce code de calcul, l'alternative de Fredholm est notamment utilisée. Une analyse des spectres de stabilité permet de mettre en évidence l'existence de deux nouveaux modes par rapport au cas d'une section circulaire. Ces modes, ainsi que le mode classiquement observé dans la configuration axisymétrique, sont étudiés via une étude paramétrique.

Dans un second temps, l'étude de stabilité biglobale de l'écoulement de base est détaillée. La méthodologie de calcul des coefficients du système d'équations régissant la perturbation est semblable au cas mono-dimensionnel. En revanche, le développement du code de calcul est plus complexe. L'approche adoptée pour la résolution numérique est présentée. Les résultats de cette étude de stabilité biglobale sont analysés selon deux parties. Une partie est consacrée à l'influence des paramètres liés à la déformation étoilée sur les modes classiquement observés en configuration circulaire. Une seconde partie est dédiée à la mise en évidence de nouveaux modes liés à la configuration étoilée.

Enfin, la section de ce chapitre traite du cas d'un tir d'un montage avec une géométrie étoilée, le tir LP9t48. Le but est de tenter d'expliquer les contradictions relevées entre les données expérimentales et les résultats de simulations numériques effectuées à un instant donné du tir. Tout d'abord la configuration est présentée, puis on montre la difficulté d'obtenir un écoulement moyen permettant d'effectuer une étude de stabilité linéaire. Pour contourner ce problème, la démarche adoptée consiste à déterminer les paramètres géométriques permettant de simplifier la forme de la paroi de cette configuration pour la faire correspondre à celle utilisée au chapitre 3. Cette procédure permet alors de montrer que le profil de vitesse axiale de l'écoulement moyen correspondant à cette paroi présente plusieurs points d'inflexion. À partir de cette observation, un scénario expliquant les différences entre simulations et expérience est élaboré.

Sommaire

4.1. Introduction **80**
4.2. Étude de stabilité linéaire locale de l'écoulement **81**
4.2.1. Établissement des équations 82
4.2.2. Résolution des équations 84
4.2.3. Validation du code de résolution 88
4.2.4. Analyse des résultats de stabilité linéaire locale 90
4.2.5. Conclusions de l'étude de stabilité linéaire locale 99
4.3. Étude de stabilité linéaire biglobale de l'écoulement **99**
4.3.1. Détail de la forme de la perturbation et des équations 100
4.3.2. Description des conditions limites 100
4.3.3. Description du code de stabilité linéaire biglobale 102
4.3.4. Validation du code de résolution 104
4.3.5. Analyse des résultats de stabilité linéaire biglobale 106
4.3.6. Conclusions de l'étude de stabilité linéaire biglobale 112
4.4. Étude de la stabilité linéaire de la configuration du tir LP9t48 . . . **113**
4.4.1. Obtention de l'écoulement de base 113
4.4.2. Interpolation de la forme de la paroi 114
4.4.3. Bilan de l'étude du cas LP9t48 115

4.1. Introduction

On rappelle que la configuration étudiée est celle d'un cylindre semi-ouvert de section étoilée définie par $r_{paroi} = 1 + \eta(\theta)$ où η est une fonction $2\pi/m$ périodique de θ et que les coordonnées (r, θ, z) ont été obtenues par le changement de variable :

$$r = \frac{\bar{r}}{1 + \eta(\theta)}, \ \theta = \bar{\theta}, \ z = \bar{z}\,. \tag{4.1}$$

L'écoulement au sein de cette configuration vérifie les équations de Navier–Stokes instationnaires incompressibles. L'outil de stabilité linéaire a été présenté au chapitre 2.1. On va ici appliquer les méthodes présentées au cas de l'écoulement au sein d'une configuration étoilée. On rappelle que la première étape d'une étude de stabilité linéaire consiste à superposer une perturbation à un écoulement de base :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + \tilde{\boldsymbol{u}} \quad , \quad p = P + \tilde{p}\,. \tag{4.2}$$

Les conditions limites associées à la perturbation sont données par les conditions limites affectant le champ de vitesse et de pression instationnaires et l'écoulement de base. Concernant la direction radiale, l'écoulement de base vérifiant les mêmes conditions limites que la solution instationnaire (à l'injection par exemple), la décomposition ci-dessus impose $\tilde{\boldsymbol{u}}(r = 1) = \boldsymbol{0}$ tandis que l'obtention des conditions limites sur l'axe, fastidieuse, fait l'objet de l'annexe C.

L'étape suivante consiste à linéariser les équations de Navier–Stokes en supposant la perturbation $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{p})$ petite devant l'écoulement de base $(\boldsymbol{U}, P)$:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t \tilde{\boldsymbol{u}} + (\nabla \boldsymbol{U}) \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} + (\nabla \tilde{\boldsymbol{u}}) \cdot \boldsymbol{U} = -\boldsymbol{\nabla} \tilde{\boldsymbol{p}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{\mathrm{e}}} \Delta \tilde{\boldsymbol{u}}\,. \tag{4.3}$$

Rappelons que les composantes radiales et azimutales de la vitesse de l'écoulement de base ne dépendent pas de la coordonnée axiale z. Avec le changement de variable (4.1) ces équations

multipliées par la quantité strictement positive $(1+\eta)$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_r \tilde{u}_r + \dfrac{\tilde{u}_r}{r} + \dfrac{-\eta'}{1+\eta}\partial_r \tilde{u}_\theta + \dfrac{1}{r}\partial_\theta \tilde{u}_\theta + (1+\eta)\,\partial_z \tilde{u}_z = 0\,, & (4.4a) \\ (1+\eta)\,\partial_t \tilde{u}_r + \tilde{u}_r \partial_r U_r + U_r \partial_r \tilde{u}_r + \dfrac{-\eta'}{1+\eta}\left(\tilde{u}_\theta \partial_r U_r + U_\theta \partial_r \tilde{u}_r\right) + \dfrac{\tilde{u}_\theta}{r}\partial_\theta U_r + \dfrac{U_\theta}{r}\partial_\theta \tilde{u}_r \\ - 2\dfrac{\tilde{u}_\theta U_\theta}{r} + (1+\eta)\,U_z \partial_z \tilde{u}_r = -\partial_r \tilde{p} + \dfrac{1+\eta}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(\boldsymbol{\Delta}\tilde{\boldsymbol{u}}\right)_r\,, & (4.4b) \\ (1+\eta)\,\partial_t \tilde{u}_\theta + \tilde{u}_r \partial_r U_\theta + U_r \partial_r \tilde{u}_\theta + \dfrac{-\eta'}{1+\eta}\left(\tilde{u}_\theta \partial_r U_\theta + U_\theta \partial_r \tilde{u}_\theta\right) + \dfrac{\tilde{u}_\theta}{r}\partial_\theta U_\theta + \dfrac{U_\theta}{r}\partial_\theta \tilde{u}_\theta \\ + \dfrac{\tilde{u}_\theta}{r} U_r + \dfrac{U_\theta}{r}\tilde{u}_r + (1+\eta)\,U_z \partial_z \tilde{u}_\theta = \dfrac{\eta'}{1+\eta}\partial_r \tilde{p} - \dfrac{1}{r}\partial_\theta \tilde{p} + \dfrac{1+\eta}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(\boldsymbol{\Delta}\tilde{\boldsymbol{u}}\right)_\theta\,, & (4.4c) \\ (1+\eta)\,\partial_t \tilde{u}_z + \tilde{u}_r \partial_r U_z + U_r \partial_r \tilde{u}_z + \dfrac{-\eta'}{1+\eta}\left(\tilde{u}_\theta \partial_r U_z + U_\theta \partial_r \tilde{u}_z\right) + \dfrac{\tilde{u}_\theta}{r}\partial_\theta U_z + \dfrac{U_\theta}{r}\partial_\theta \tilde{u}_z \\ + (1+\eta)\left(\tilde{u}_z \partial_z U_z + U_z \partial_z \tilde{u}_z\right) = -\,(1+\eta)\,\partial_z \tilde{p} + \dfrac{1+\eta}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(\boldsymbol{\Delta}\tilde{\boldsymbol{u}}\right)_z\,, & (4.4d) \end{cases}$$

où l'expression du Laplacien avec le changement de variable est exprimé en annexe A.3.

4.2. Étude de stabilité linéaire locale de l'écoulement

On réalise dans un premier temps une étude de stabilité linéaire locale de l'écoulement comme décrite au paragraphe 2.1.6. La perturbation est recherchée sous la forme modale suivante :

$$\tilde{u}(r,\theta,z,t) = \hat{u}(r,\theta)\,e^{i(kz-\omega t)}\,, \tag{4.5}$$

où $k \in \mathbb{C}$ est le nombre d'onde axial et $\omega \in \mathbb{C}$ la pulsation. Comme expliqué au chapitre 2.1, on va appliquer le théorème de Floquet (1883) pour simplifier la dépendance azimutale. Pour cela, il faut remarquer que tous les coefficients des équations du système (4.1) régissant $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{p})$ sont tous $2\pi/m$ périodiques vis-à-vis de θ. En effet les grandeurs dépendantes de θ impliquent ou bien η, que l'on a supposé comme étant $2\pi/m$ périodique, ou bien l'écoulement de base. Or d'après le chapitre 3 cet écoulement est $2\pi/m$ périodique dans le cas $\eta = \varepsilon\cos(m\theta)$. Si l'on considère une autre définition pour η tout en gardant son caractère périodique, on supposera que l'écoulement de base associé est lui aussi périodique de même période.

On applique donc le théorème de Floquet, ce qui *in fine* nous amène à réécrire la perturbation sous la forme

$$\tilde{u}(r,\theta,z,t) = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_l(r)\,e^{iml\theta}\right) e^{\gamma\theta} e^{i(kz-\omega t)}\,, \tag{4.6}$$

où l'on rappelle que γ est une constante complexe indéterminée dénommée « coefficient de Floquet ». On a montré au chapitre 2.1 que ce coefficient est un nombre complexe imaginaire pur et que l'on peut se restreindre à étudier des valeurs de ce coefficient dont le module est un entier naturel compris entre 0 inclus et m exclu : $\gamma \in i\mathbb{R} \cap [\![0, m[\![$.

Pour simplifier les notations, on désigne désormais respectivement par $\hat{u}_l^r, \hat{u}_l^\theta, \hat{u}_l^z$ et $\hat{u}_l^p$ les composantes de la perturbation de vitesse et de pression du mode de Fourier $l \in \mathbb{Z}$. Il faut bien distinguer un *mode de Fourier*, toujours associé à un nombre entier relatif, d'un *mode de stabilité* qui fait référence à une pulsation ω. Ces composantes ne dépendent que de la variable, r, on note donc $\hat{u}_l^{r'}$ la dérivée première de $\hat{u}_l^r$ par rapport à r et $\hat{u}_l^{r''}$ la dérivée seconde de $\hat{u}_l^r$ par rapport à r. Il en va de même pour les autres composantes.

À ce stade, les inconnues du problème sont donc les fonctions $\hat{u}_l^r, \hat{u}_l^\theta, \hat{u}_l^z$ et $\hat{u}_l^p$ qui ne dépendent

que de la variable r ; ainsi que la pulsation[1] ω. Le nombre d'onde k, le coefficient de Floquet γ et la position axiale z sont des paramètres « libres » de l'étude, fixés avant chaque calcul de stabilité.

4.2.1. Établissement des équations

Pour établir les équations régissant $\hat{u}_l^r, \hat{u}_l^\theta, \hat{u}_l^z$ et $\hat{u}_l^p$, il faut introduire la perturbation (4.6) dans les équations de Navier–Stokes linéarisées (4.1). Cette section détaille la méthode en s'appuyant sur l'exemple de l'équation de continuité.

La perturbation (4.6) est donc substituée dans l'équation de continuité linéarisée. La première étape consiste à simplifier toute l'équation par $e^{\gamma\theta}e^{i(kz-\omega t)}$ qui apparaît dans chacun des termes :

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left[\hat{u}_l^{r\prime}+\frac{\hat{u}_l^r}{r}+\frac{-\eta'}{1+\eta}\hat{u}_l^{\theta\prime}+\frac{1}{r}\left(iml+\gamma\right)\hat{u}_l^\theta+\left(1+\eta\right)ik\hat{u}_l^z\right]e^{iml\theta}=0\,. \tag{4.7}$$

À ce stade il n'est pas possible d'écrire que tous les termes de la série sont nuls car η dépend de θ. Il faut donc décomposer tous les termes dépendant de θ en série de Fourier. Pour poursuivre l'exemple, on suppose comme dans le chapitre 3 que la fonction d'amplitude de la déviation radiale de la paroi est définie par $\eta : \theta \mapsto \varepsilon\cos(m\theta)$. Toutefois la méthode est applicable à n'importe quelle fonction $2\pi/m$ périodique. On écrit donc :

$$1+\eta=1+\frac{e^{im\theta}+e^{-im\theta}}{2}\quad\text{et}\quad\eta'=-m\frac{e^{im\theta}-e^{-im\theta}}{2i}\,. \tag{4.8}$$

S'il est facile de décomposer des termes du type $\eta'\left(1+\eta\right)$, il est plus compliqué de trouver analytiquement la série de Fourier de $-\eta'/(1+\eta)$, qui apparaît dans l'équation (4.7). Pour contourner cette difficulté, on multiplie l'équation par $(1+\eta)^n$ où n est en entier suffisamment grand pour simplifier tous les termes faisant apparaître $1+\eta$ au dénominateur. Dans le cas de l'équation de continuité (4.4a), il suffit de multiplier par $1+\eta$. Toutefois, on rappelle que l'équation de départ (4.3) avait elle-même été obtenue en multipliant l'équation de continuité originale par $1+\eta$. L'équation de continuité a finalement été multipliée par $(1+\eta)^2$ au total. Après multiplication on obtient donc :

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left[\left(1+\eta\right)\left(\hat{u}_l^{r\prime}+\frac{\hat{u}_l^r}{r}+\frac{1}{r}\left(iml+\gamma\right)\hat{u}_l^\theta\right)-\eta'\hat{u}_l^{\theta\prime}+\left(1+\eta\right)^2ik\hat{u}_l^z\right]e^{iml\theta}=0\,. \tag{4.9}$$

Tous les termes en η sont alors substitués par leur décomposition en série de Fourier. Trois types de termes différents apparaissent :

— des termes en facteur de $e^{im(l\pm2)\theta}$, dus au développement de $(1+\eta)^2$;
— des termes en facteur de $e^{im(l\pm1)\theta}$, dus aux développements de η', $1+\eta$ et $(1+\eta)^2$;
— des termes en facteur de $e^{iml\theta}$, dus aux termes indépendants de θ et aux développements en série de Fourier de chacun des termes.

Le but est désormais de se débarrasser de la dépendance en θ. Pour cela, il faut se ramener à un cas où $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l e^{iml\theta}=0$. D'un tel cas on peut déduire que $\forall l\in\mathbb{Z}$, $x_l=0$. Dans notre cas, il faut donc décaler les indices de tous les termes qui sont en facteur de $e^{im(l+q)\theta}$, $q\in\mathbb{Z}$. Par exemple un terme $x_l e^{im(l+1)}$ est écrit $x_{l-1}e^{iml}$. Cette transformation n'est qu'un simple réarrangement des termes, la somme étant "infinie" (voir définition d'une série). Prenons l'exemple du terme

1. Comme expliqué au chapitre 2.1, il est également possible de rechercher k en fixant ω.

$(1+\eta)\,\hat{u}_l^{r'}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(1+\eta)\,\hat{u}_l^{r'}e^{iml\theta} &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{e^{im\theta}+e^{-im\theta}}{2}\right)\hat{u}_l^{r'}e^{iml\theta}\\
&= \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\hat{u}_l^{r'}e^{iml\theta}+\frac{\hat{u}_l^{r'}}{2}e^{im(l+1)\theta}+\frac{\hat{u}_l^{r'}}{2}e^{im(l-1)\theta}\\
&= \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\hat{u}_l^{r'}e^{iml\theta}+\frac{\hat{u}_{l-1}^{r'}}{2}e^{iml\theta}+\frac{\hat{u}_{l+1}^{r'}}{2}e^{iml\theta}\\
&= \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(\hat{u}_l^{r'}+\frac{\hat{u}_{l-1}^{r'}}{2}+\frac{\hat{u}_{l+1}^{r'}}{2}\right)e^{iml\theta}\,.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Si on procède ainsi pour tous les membres de l'équation de continuité, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\Bigg[\frac{\varepsilon}{2}\left(\hat{u}_{l-1}^{r'}+\hat{u}_{l+1}^{r'}\right)+\hat{u}_l^{r'}+\frac{\varepsilon}{2r}\left(\hat{u}_{l-1}^{r}+\hat{u}_{l+1}^{r}\right)+\frac{\hat{u}_l^{r}}{r}+\frac{im\varepsilon}{2}\left(\hat{u}_{l-1}^{\theta'}-\hat{u}_{l+1}^{\theta'}\right)\\
&+\frac{\varepsilon}{2r}\left[\left(im\left(l-1\right)+\gamma\right)\hat{u}_{l-1}^{\theta}+\left(im\left(l+1\right)+\gamma\right)\hat{u}_{l+1}^{\theta}\right]+\frac{\gamma+iml}{r}\hat{u}_l^{\theta}+\frac{ik\varepsilon^2}{4}\left(\hat{u}_{l-2}^{z}+\hat{u}_{l+2}^{z}\right)\\
&+ik\varepsilon\left(\hat{u}_{l-1}^{z}+\hat{u}_{l+1}^{z}\right)+ik\left(\frac{\varepsilon^2}{2}+1\right)\hat{u}_l^{z}\Bigg]e^{iml\theta}=0\,.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

L'équation est maintenant écrite sous la forme $\sum_{l=-\infty}^{+\infty}x_l e^{iml\theta}=0$ où x_l ne dépend pas de θ. On en conclut finalement que $\forall l\in\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{2}\left(\hat{u}_{l-1}^{r'}+\hat{u}_{l+1}^{r'}\right)+\hat{u}_l^{r'}+\frac{\varepsilon}{2r}\left(\hat{u}_{l-1}^{r}+\hat{u}_{l+1}^{r}\right)+\frac{\hat{u}_l^{r}}{r}+\frac{im\varepsilon}{2}\left(\hat{u}_{l-1}^{\theta'}-\hat{u}_{l+1}^{\theta'}\right)\\
&+\frac{\varepsilon\left(\gamma+im\right)}{2}\left(\left(l-1\right)\hat{u}_{l-1}^{\theta}+\left(l+1\right)\hat{u}_{l+1}^{\theta}\right)+\frac{\gamma+iml}{r}\hat{u}_l^{\theta}+\frac{ik\varepsilon^2}{4}\left(\hat{u}_{l-2}^{z}+\hat{u}_{l+2}^{z}\right)\\
&+ik\varepsilon\left(\hat{u}_{l-1}^{z}+\hat{u}_{l+1}^{z}\right)+ik\left(\frac{\varepsilon^2}{2}+1\right)\hat{u}_l^{z}=0\,.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Les mêmes opérations sont effectuées sur les équations de quantité de mouvement. Contrairement à l'équation de continuité, celles-ci font intervenir l'écoulement de base, la perturbation de pression et l'ordre des dérivées est supérieur avec la présence du laplacien. Ceci implique des expressions beaucoup plus complexes et justifie l'utilisation d'un logiciel de calcul formel pour calculer ces expressions. À titre d'exemple, voici l'expression du coefficient du seul terme $\hat{u}_l^r$ dans l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$:

$$\begin{aligned}
&-\left(1+3\varepsilon^2+\frac{3}{8}\varepsilon^4\right)i\omega\\
&+\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2\right)U_r^{(0)'}+\frac{3}{2}\varepsilon^2\left(1+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)U_r^{(1)'}+\varepsilon^2\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2\right)U_{r,0}^{(2)'}+\frac{3}{4}\varepsilon^4U_{r,2}^{(2)'}\\
&izk\left[\left(1+3\varepsilon^2+\frac{3}{8}\varepsilon^4\right)U_z^{(0)}+\left(\varepsilon^2+\frac{3}{2}\varepsilon^4\right)U_z^{(1)}+\left(\varepsilon^2+3\varepsilon^4+\frac{3}{8}\varepsilon^6\right)U_{z,0}^{(2)}+\left(\frac{3}{2}\varepsilon^4+\frac{1}{4}\varepsilon^6\right)U_{z,2}^{(2)}\right]\\
&+\frac{1}{\mathcal{R}_{\mathrm{e}}r^2}\left[1-\left(\gamma+iml\right)^2\right]\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)+\frac{k^2}{\mathcal{R}_{\mathrm{e}}}\left(1+3\varepsilon^2+\frac{3}{8}\varepsilon^4\right)\,.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

L'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$ complète s'obtient en additionnant tous les termes $\hat{u}_l^r, \hat{u}_{l-1}^r, \hat{u}_{l+1}^r, \hat{u}_{l-2}^r, \hat{u}_{l+2}^r, \ldots$ et leurs coefficients associés ; et ce pour toutes les composantes de la perturbation (radiale, azimutale, axiale et de pression) et pour les trois ordres de dérivées par rapport à r qui interviennent. L'utilisation d'un logiciel de calcul formel semble donc

indispensable.

Pour une valeur de $l \in \mathbb{Z}$ fixée, les équations font intervenir plusieurs modes de Fourier simultanément en raison des décalages employés. Dans l'équation de continuité (4.12), c'est sur $\tilde{u}_z$ qu'il y a le plus grand nombre de modes : on trouve $\hat{u}_l^z$, $\hat{u}_{l\pm1}^z$ et $\hat{u}_{l\pm2}^z$. Ici le plus grand écart entre les modes est de 2. Ce plus grand écart est désormais noté el_{max}. Ce nombre sera particulièrement utile dans la partie résolution ci-après (voir 4.2.2). Si l'on considère l'ensemble des équations régissant la perturbation et la solution analytique de l'écoulement de base, on obtient $el_{max} = 6$. Ce décalage est obtenu dans les équations de quantité de mouvement qui doivent être multipliées par $(1+\eta)^4$ pour simplifier l'expression du Laplacien (voir annexe A.3). Dans les termes de convection, le produit de $(1+\eta)^4$ avec le champ de vitesse de l'écoulement de base, qui contient lui même des termes du type η^2, conduit effectivement à des décalages d'au plus 6.

Du point de vue de l'utilisation du logiciel Maple™, la détermination se fait de la façon suivante. L'écoulement de base est défini et les fonctions dépendantes de θ que celui-ci fait intervenir sont décomposées en série de Fourier. Les équations du système sont alors écrites de manière à ce qu'aucune dépendance vis-à-vis de θ n'apparaisse au dénominateur. Les dérivées azimutales de la perturbation, $\partial_\theta \tilde{u}$, sont remplacées par $(\gamma + iml)\,\tilde{u}$; les dérivées axiales, $\partial_z \tilde{u}$, sont remplacées par $ik\tilde{u}$ et les dérivées temporelles, $\partial_t \tilde{u}$, sont remplacées par $-i\omega\tilde{u}$. Il ne reste donc plus que des dérivées radiales. Le logiciel Maple™ est alors utilisé pour calculer tous les produits d'exponentielles en θ. Une fois ces produits effectués, les équations sont alors sous la forme de sommes de termes en $e^{iml\theta}$. Pour déterminer le coefficient devant l'expression $\hat{u}_{l+L}^r$ par exemple, il suffit de rechercher dans les expressions les termes $\hat{u}^r$ en facteur de $e^{im(l-L)\theta}$. On reconstitue[2] une équation sous la forme $\sum_{l=-el_{max}}^{+el_{max}} x_l e^{iml\theta} = 0$ en additionnant tous ces termes trouvés pour $L \in [\![-el_{max}, el_{max}]\!]$.

4.2.2. Résolution des équations

En partant des équations de Navier–Stokes écrites sous forme vectorielle (4.3) et de la forme modale introduite (4.6), il est ainsi possible d'écrire le problème à résoudre sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé :

$$\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{u}}) = \omega \boldsymbol{B}(\hat{\boldsymbol{u}}),\ \hat{\boldsymbol{u}} = {}^{\mathrm{t}}(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_z, \hat{u}_p)\,, \tag{4.14}$$

où $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux opérateurs linéaires dépendant de l'écoulement de base, du nombre de Reynolds, du nombre d'onde k et de la position axiale z. Les conditions limites à la paroi découlent de la condition d'injection, vérifiée également par l'écoulement de base : $\boldsymbol{u}(r=1) = \boldsymbol{U}(r=1) = -\boldsymbol{e}_r \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{u}}(r=1) = \boldsymbol{0}$. Quant aux conditions limites sur l'axe, leur expression dépend de la valeur du coefficient de Floquet. L'obtention et l'expression de ces conditions limites sur l'axe sont détaillées dans l'annexe C.

Au vu des équations présentées à la section précédente, la résolution analytique du problème (4.14) et de ses conditions limites, c'est-à-dire la détermination des valeurs propres ω et des vecteurs propres associés, est hors de portée. Cette section détaille donc la procédure de résolution numérique mise en place dans cette thèse.

Introduction d'une discrétisation spatiale et troncature des séries de Fourier

Pour effectuer une résolution numérique, nous sommes contraints non seulement d'introduire une discrétisation de l'espace mais aussi de tronquer les séries de Fourier manipulées. La discrétisation spatiale est effectuée via l'introduction de N points de collocation conformément à la méthode de collocation spectrale décrite au paragraphe 2.2. Quant aux séries de Fourier, on introduit l'entier naturel l_{max} qui définit la troncature de la série de Fourier :

$$\hat{u}(r) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_l(r)\, e^{i(\gamma+ml)\theta} \quad \longrightarrow \quad \hat{u}(r) = \sum_{l=-l_{max}}^{+l_{max}} \hat{u}_l(r)\, e^{i(\gamma+ml)\theta}\,. \tag{4.15}$$

2. Dans les faits on ne reconstitue jamais l'équation complète, on se contente d'isoler chacun des termes et de les écrire dans des fichiers.

Une fois la discrétisation introduite, les opérateurs linéaires $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ du problème aux valeurs propres généralisé sont représentés par des matrices.

Nous disposons donc désormais d'un nombre discret d'inconnues : chacune des 4 composantes de la perturbation est constituée de $2l_{max}+1$ modes de Fourier ayant chacun une valeur sur les N points $(r_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ de la discrétisation. Il est donc possible d'écrire un vecteur des inconnues sous la forme

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} s_1(\hat{u}^r) \\ s_1(\hat{u}^\theta) \\ s_1(\hat{u}^z) \\ s_1(\hat{u}^p) \\ \vdots \\ s_N(\hat{u}^r) \\ s_N(\hat{u}^\theta) \\ s_N(\hat{u}^z) \\ s_N(\hat{u}^p) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad s_i(\hat{u}^\alpha) = \begin{pmatrix} \hat{u}^\alpha_{-l_{max}}(r_i) \\ \hat{u}^\alpha_{-l_{max}+1}(r_i) \\ \vdots \\ \hat{u}^\alpha_{l_{max}}(r_i) \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

La taille de ce vecteurs des inconnues est de $4N\,(2l_{max}+1)$. Pour que le problème soit bien posé, il est nécessaire d'écrire autant d'équations que d'inconnues, les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont donc de taille $4N\,(2l_{max}+1)\times 4N\,(2l_{max}+1)$. D'une manière générale on dispose de quatre équations : l'équation de continuité et les équations de quantité de mouvement suivant les trois directions $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_z$. Ces équations peuvent être écrites en chaque point de collocation. Cela donne $4N$ équations. Pour obtenir les $4N\,(2l_{max}+1)$ équations, il faut écrire chaque équation en chaque point de collocation et pour chaque valeur de $l\in[\![-l_{max},l_{max}]\!]$.

Conséquence de la troncature des séries de Fourier sur les équations

Prenons par exemple une équation s'écrivant

$$\forall l\in\mathbb{Z},\ u_{l-2}+u_l+2u_{l+1}=0\,. \tag{4.17}$$

Si on choisit de prendre $l_{max}=2$, c'est-à-dire on choisit d'écrire $u\approx u_{-2}+u_{-1}+u_0+u_1+u_2$, alors il est possible d'écrire les $2l_{max}+1=5$ équations suivantes :

$$\begin{cases} 0+u_{-2}+2u_{-1}=0\,, \\ 0+u_{-1}+2u_0=0\,, \\ u_{-2}+u_0+2u_1=0\,, \\ u_{-1}+u_1+2u_1=0\,, \\ u_{-2}+u_2+0=0\,. \end{cases} \tag{4.18}$$

Plus formellement, l'équation (4.17) peut s'écrire

$$\forall l\in\mathbb{Z},\ \sum_{q=-el_{max}}^{el_{max}} \alpha_q(l)u_{l+q}=0\,, \tag{4.19}$$

où $\alpha_q(l)$ désignent les coefficients du système (ils dépendent de q). Dans l'exemple précédent, $el_{max}=2$. En choisissant de tronquer la série de Fourier en imposant $l\in[\![-l_{max},l_{max}]\!]$ on obtient les $2l_{max}+1$ équations suivantes :

$$\forall l\in[\![-l_{max},l_{max}]\!]\,,\ \sum_{q=q_{min}(l)}^{q_{max}(l)} \alpha_q(l)u_{l+q}=0\,, \tag{4.20}$$

avec $q_{min} = \max(-el_{max}, -l_{max} - l)$ et $l_{max} = \min(el_{max}, l_{max} - l)$. Ces bornes permettent d'assurer simultanément les conditions suivantes :

- $-el_{max} \leqslant q \leqslant el_{max}$ afin d'assurer que l'équation (4.19) est respectée ;
- $-l_{max} \leqslant l + q \leqslant l_{max}$ afin d'assurer la troncature de la série de Fourier.

En conservant cet exemple où $el_{max} = 2$, les coefficients α peuvent être représentés ainsi :

	$q=-2$	$q=-1$	$q=0$	$q=1$	$q=2$
$l=-2$	$\alpha_{-2}(-2)$	$\alpha_{-1}(-2)$	$\alpha_0(-2)$	$\alpha_1(-2)$	$\alpha_2(-2)$
$l=-1$	$\alpha_{-2}(-1)$	$\alpha_{-1}(-1)$	$\alpha_0(-1)$	$\alpha_1(-1)$	$\alpha_2(-1)$
$l=0$	$\alpha_{-2}(0)$	$\alpha_{-1}(0)$	$\alpha_0(0)$	$\alpha_1(0)$	$\alpha_2(0)$
$l=1$	$\alpha_{-2}(1)$	$\alpha_{-1}(1)$	$\alpha_0(1)$	$\alpha_1(1)$	$\alpha_2(1)$
$l=2$	$\alpha_{-2}(2)$	$\alpha_{-1}(2)$	$\alpha_0(2)$	$\alpha_1(2)$	$\alpha_2(2)$

(4.21)

Ce tableau se lit ainsi : dans l'équation écrit pour $l = -1$, le coefficient devant $u_{l-2} = u_{-3}$ est $\alpha_{-2}(-1)$, celui devant $u_{l+1} = u_0$ est $\alpha_1(-1)$ etc. En introduisant une troncature de la série de Fourier avec $l_{max} = 1$ on obtiendrait alors :

	$q=-2$	$q=-1$	$q=0$	$q=1$	$q=2$
$l=-2$	0	0	0	$\alpha_1(-2)$	$\alpha_2(-2)$
$l=-1$	0	0	$\alpha_0(-1)$	$\alpha_1(-1)$	$\alpha_2(-1)$
$l=0$	0	$\alpha_{-1}(0)$	$\alpha_0(0)$	$\alpha_1(0)$	0
$l=1$	$\alpha_{-2}(1)$	$\alpha_{-1}(1)$	$\alpha_0(1)$	0	0
$l=2$	$\alpha_{-2}(2)$	$\alpha_{-1}(2)$	0	0	0

(4.22)

Les différents coefficients $\alpha_q(l)$ sont obtenus grâce au logiciel Maple™ comme expliqué précédemment. Toutefois ce logiciel ne convient pas pour résoudre numériquement le problème aux valeurs propres généralisé. Il faut donc utiliser un autre langage ou programme pour résoudre le problème. Deux codes ont été successivement écrits, l'un avec le logiciel Matlab® et l'autre en Fortran. Le logiciel Matlab® a permis une prise en main et un développement rapide tandis que le code Fortran a été développé pour améliorer les performances de calcul. Les deux codes, très proches dans leur écriture aux différences de langage près, conduisent à des résultats identiques. Dans la suite du document, on désignera indifféremment par « code de stabilité » le code Matlab® ou Fortran utilisé pour résoudre numériquement le problème aux valeurs propres généralisé.

Le code de stabilité fonctionne de la manière suivante. Il prend en entrée un nombre de points de collocation, un nombre de mode de Fourier, un nombre d'onde spatial, un coefficient de Floquet et une position axiale. Il construit ensuite les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ à partir de ces paramètres et des coefficients fournis par le logiciel Maple™. Une fois ces matrices formées, le problème aux valeurs propres généralisé est ensuite résolu via la routine *eig* de Matlab® ou la librairie LAPACK en Fortran. La difficulté majeure qui se pose est l'interface entre le logiciel Maple™ et le code de stabilité. Les coefficients sont en effets très nombreux et ne peuvent pas être simplement recopiés à la main dans le code de stabilité. Il y a quatre équations régissant la perturbation ; dans chacune de ces équations peuvent intervenir les quatre composantes de la perturbations, et ce avec trois ordres de dérivée différents. Enfin, les décalages des séries de Fourier entraîne la multiplication du nombre de coefficients par $2el_{max} + 1$. Au total, il y a $4 \times 4 \times 3 \times (2el_{max} + 1)$ coefficients, soit 624 si $el_{max} = 6$. Bien sûr certains de ces coefficients sont nuls : par exemple les coefficients devant $\hat{u}^{p''}$ sont toujours nuls car la dérivée seconde de la pression n'intervient jamais dans les équations. Mais d'une part il est délicat de déterminer tous les coefficients nuls et d'autres part

le nombre de coefficients non nuls reste considérable. Il a donc été mis en place une procédure de passage des coefficients calculés avec le logiciel Maple™ au code de stabilité.

Interface entre le logiciel Maple et le code de stabilité

Commençons par rappeler que le logiciel Matlab® possède aussi une fonctionnalité lui permettant de faire du calcul formel. Toutefois, cette fonctionnalité [3] n'était pas disponible au laboratoire durant ces travaux de thèse. Ensuite le logiciel Maple™ dispose d'une fonction permettant de traduire une expression en code Fortran. Cette fonctionnalité ne convient pas dans notre cas pour les raisons suivantes. Tout d'abord cette fonctionnalité ne permet d'écrire correctement une dérivée. Si dans le code de stabilité la convention est d'écrire la dérivée première de la fonction de Berman comme `F_1`, le logiciel Maple™ ne sait pas comment écrire F'. Par ailleurs même avec cette fonctionnalité le problème de la génération de la routine comprenant les coefficients subsistent : il ne suffit pas d'écrire un coefficient en langage Fortran ou Matlab®, il faut aussi l'inclure dans une routine où sont réalisées des affectations par exemple. Au vu du nombre de coefficients, il est donc nécessaire de générer automatiquement ces routines. La première étape du passage du logiciel Maple™ au code de stabilité est donc l'écriture des coefficients au format MathML [4]. Le langage MathML est un langage balisé du type XML permettant d'écrire des expressions mathématiques. Prenons un court exemple. Imaginons que le logiciel Maple™ ait fourni le coefficient $1/r$. L'écriture de ce coefficient au format MathML est :

```
<math xmlns='http://www.w3.org/1998/Math/MathML'>
  <apply id='id3'>
    <divide/>
    <cn id='id1' type='integer'>1</cn>
    <ci id='id2'>r</ci>
  </apply>
</math>
```

Les coefficients déterminés par le logiciel Maple™ sont donc tous écrits dans des fichiers distincts au format MathML.

La seconde étape consiste en l'utilisation d'un programme permettant de lire les fichiers MathML et de générer des routines du code de stabilité comprenant ces coefficients. Ce programme est écrit Java. Concrètement le programme commence par lire les fichiers MathML et reconstituer les expressions de chaque coefficient. Chaque expression est « traduite » pour être compréhensible par le code cible : $\partial_r F$ devient par exemple `F_1`, $2r$ devient `2*r`, etc. Il effectue ensuite les substitutions nécessaires : par exemple dans chaque équation écrite pour $l \in [\![-el_{max}, el_{max}]\!]$ (voir par exemple les équations (4.18)), il faut remplacer tous les entiers relatifs l par leurs valeurs numériques. Enfin, il génère des routines Matlab® ou Fortran contenant ces coefficients et les affectations nécessaires. Ces routines sont intégrées dans le code de stabilité et permettant de construire les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$. Un schéma récapitulatif de ces différentes étapes et codes est présenté figure 4.1. L'utilisation des procédures du logiciel Maple™ et du code Java est théoriquement unique : pour une forme de paroi et de perturbation données les coefficients sont générés une fois pour toute : le code de stabilité peut ensuite faire des calculs pour différentes valeurs de $\mathcal{R}_\mathrm{e}$, ε, m, k, γ, l_{max} et z. Rappelons que toute cette « chaîne de calcul » est applicable à n'importe quel écoulement de base $2\pi/m$-périodique en θ. Il est par exemple possible de déterminer un écoulement de base avec un solveur Navier–Stokes (avec le code CEDRE par exemple), de constater qu'il contient un certain nombre d'harmoniques en θ, de générer les coefficients Maple™ correspondant à ce nombre d'harmoniques, puis de faire fonctionner le code de stabilité à partir de cet écoulement de base.

3. La fonctionnalité permettant au logiciel Matlab® de faire du calcul formel est la Symbolic Math Toolbox.
4. Une description complète de ce standard est disponible sur internet, par exemple sur la page suivante : `www.w3.org/Math/` (accédée le 14 janvier 2018).

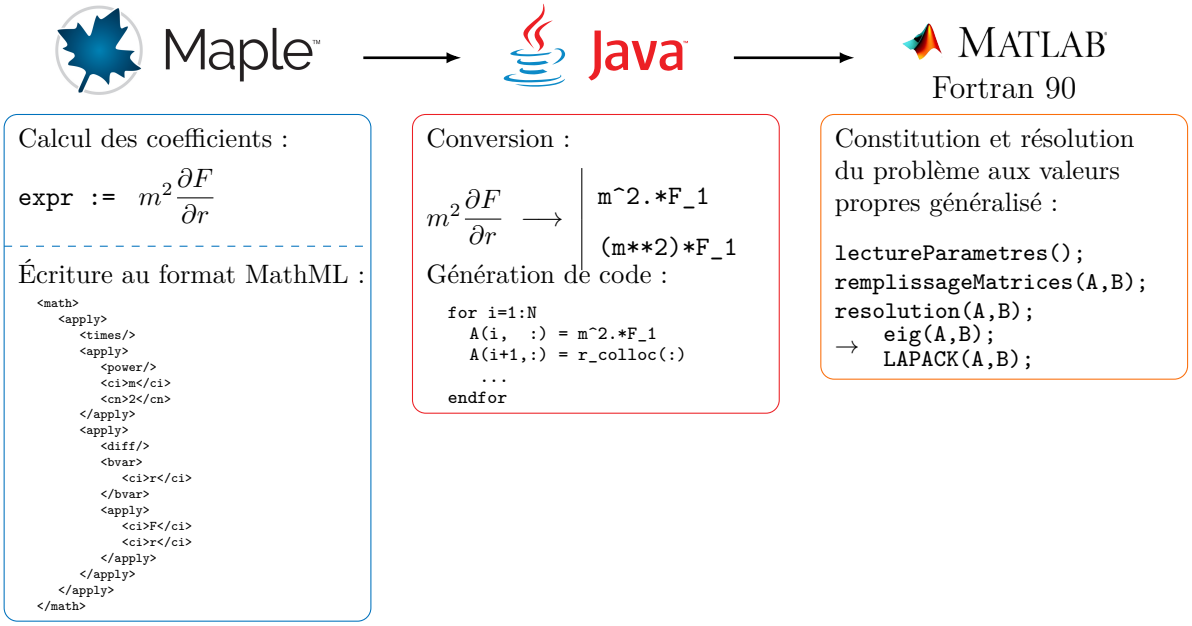


FIGURE 4.1. – Représentation schématique des différentes étapes et codes permettant la résolution du problème de stabilité.

4.2.3. Validation du code de résolution

Le code de stabilité a fait l'objet de deux validations indirectes. Si le qualificatif « indirectes » est utilisé, c'est parce qu'il n'existe à notre connaissance aucune donnée expérimentale ou numérique de cette configuration, pour pouvoir faire une validation « directe ».

Comparaison des résultats au cas axisymétrique

Les résultats disponibles les plus proches de la configuration étudiée sont ceux obtenus notamment par Griffond (2001) et Casalis et Pineau (1997) lors de l'étude de stabilité linéaire locale de l'écoulement au sein d'un conduit à paroi débitante de section circulaire (solution de Berman ou de Taylor–Culick). Une première validation est obtenue en montrant que le code de stabilité en géométrie étoilée, avec le paramètre $\varepsilon = 0$, fournit des résultats identiques à ceux du code de stabilité en géométrie circulaire. Ceci permet de montrer qu'au moins pour le cas circulaire, la chaîne de calcul incluant le logiciel le logiciel Maple™ et le script de génération automatique fonctionne de façon nominale. L'illustration graphique de cette validation n'est pas réalisée ici car d'une part les résultats du code de stabilité étoilé avec $\varepsilon = 0$ sont exactement superposés aux résultats du code de stabilité circulaire, et d'autre part parce que cette comparaison graphique est réalisée au paragraphe 4.3.4.

Application de l'alternative de Fredholm

Ce paragraphe détaille l'application de l'alternative de Fredholm présentée au chapitre 2.1 à la présente configuration. Le but est d'étudier la sensibilité des valeurs propres à la déformation radiale ε. Pour cela on supposera que ε est le « petit paramètre », on se limitera donc à des faibles valeurs de ε. Afin de rester rigoureux et cohérent avec les notations du paragraphe 2.1.7,

on introduit tout de même la perturbation δ et on pose :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon_1 + o(\delta)\,, \\ \omega = \omega_0 + \delta\omega_1 + o(\delta)\,, \\ \phi = \phi_0 + \delta\phi_1 + o(\delta)\,. \end{cases} \tag{4.23}$$

La condition de solvabilité s'exprime par :

$$\left(\psi \middle| \left[\varepsilon_1 \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \varepsilon} - \omega_0 \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \varepsilon}\right) - \omega_1 \boldsymbol{B}\right] \phi_0\right) = 0\,. \tag{4.24}$$

où ψ est un vecteur propre associé à la valeur ω_0 de l'opérateur adjoint $\mathcal{L}^*$. En dimension finie, comme c'est le cas lorsque les équations sont discrétisées aux points de collocation, la matrice de l'adjoint d'un opérateur est simplement la transposée conjuguée de la matrice de cet opérateur. Ainsi :

$$\mathcal{L}\left(\varepsilon_0, \omega_0\right)^* = {}^{\mathrm{t}}\overline{\boldsymbol{A}} - \overline{\omega_0}\,{}^{\mathrm{t}}\overline{\boldsymbol{B}}\,. \tag{4.25}$$

Connaissant ψ il ne reste plus qu'à écrire :

$$\omega_1 = \varepsilon_1 \frac{\left(\psi \middle| \left[\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \varepsilon} - \omega_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \varepsilon}\right] \phi_0\right)}{(\psi | \boldsymbol{B}\phi_0)}\,. \tag{4.26}$$

Considérons par exemple les conditions suivantes : $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 200$, $z = 5{,}8$ et $k = 3{,}108 - 0{,}050\,75\mathrm{i}$. On se propose d'étudier l'évolution de la valeur propre $\omega_0 = 40$ obtenue pour $\varepsilon_0 = 0$, en fonction de ε. Pour cela, on compare l'évolution linéaire obtenue avec l'alternative de Fredholm (4.26) avec les résultats obtenus par le calcul de stabilité en différentes valeurs de ε. On rappelle que l'application de l'alternative de Fredholm consiste en un unique calcul de pente tandis que le code de stabilité fournit une valeur de ω différente pour chaque variation des paramètres d'entrée. Les résultats sont reportés sur la figure 4.2. L'alternative de Fredholm est d'abord appliquée en $\varepsilon_0 = 0$ (trait continu rouge). On constate que le mode calculé par le code de stabilité pour la plus petite valeur de ε, ici $\varepsilon = 0{,}001$ est bien en accord avec la droite[5] calculée par l'alternative de Fredholm. Les valeurs de ω_r obtenues pour les valeurs ε suivantes s'éloignent progressivement de cette droite. Ceci s'explique par le caractère local de l'alternative de Fredholm qui n'est valable qu'au voisinage de la valeur ε_0 choisie. Deux autres comparaisons sont fournies sur cette figure, en appliquant l'alternative de Fredholm en $\varepsilon_0 = 0{,}01$ et $\varepsilon_0 = 0{,}04$. Les points auxquels est appliquée l'alternative de Fredholm sont représentés par des disques pleins sur la figure. L'accord observé sur cette figure au voisinage de $\varepsilon_0 = 0$ permet de valider le code de stabilité pour les valeurs de ε proches de $\varepsilon_0 = 0$. En effet, le calcul du mode $\omega_0 = 40$ pour $\varepsilon_0 = 0$ est obtenu avec le code en configuration circulaire et la capacité du code de stabilité en géométrie étoilé à reproduire l'évolution de ce mode vis-à-vis de ε est validée par cet accord avec l'évolution obtenue avec l'alternative de Fredholm. Cependant, l'accord observé au voisinage des autres points où l'alternative de Fredholm est appliquée ($\varepsilon \in \{0{,}01, 0{,}04\}$) ne permet pas directement de valider le calcul du code de stabilité en géométrie étoilée. En effet, en ces différents points le résultat ne peut être confronté à aucune autre donnée existante. En revanche, au-delà de la position du mode, la sensibilité de celui-ci vis-à-vis de ε obtenue par le code de stabilité en géométrie étoilée est validée par l'accord avec l'évolution déterminée par l'application de l'alternative de Fredholm. Autrement dit l'alternative de Fredholm permet d'une part de valider le code au voisinage de $\varepsilon_0 = 0$ et d'autre part de valider la capacité du code à déterminer l'évolution d'un mode en fonction de ε.

5. L'évolution obtenue par l'alternative de Fredholm est bien une droite, l'échelle semi-log de la figure entraîne une représentation exponentielle.

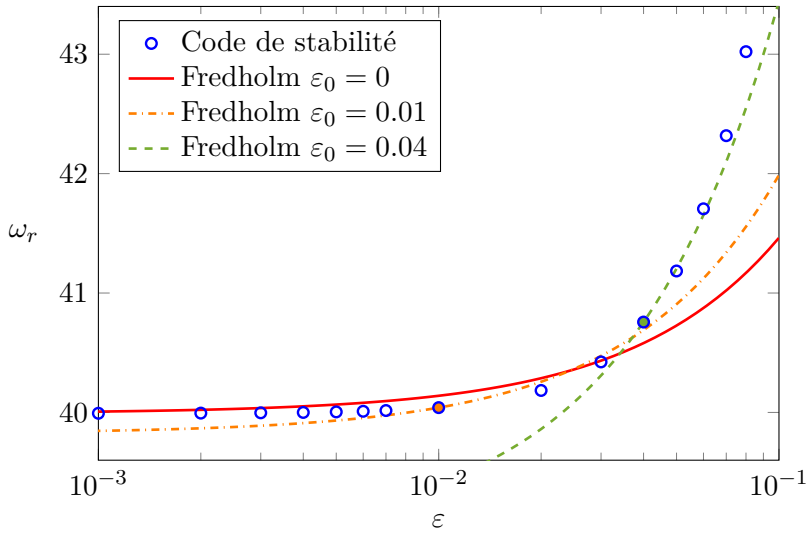


FIGURE 4.2. – Comparaison de l'évolution de la partie réelle de la valeur propre $\omega_0 = 40$ en fonction de ε avec l'alternative de Fredholm et le code de stabilité. Les symboles remplis correspondent aux valeurs de ε_0 utilisés pour appliquer l'alternative de Fredholm.

4.2.4. Analyse des résultats de stabilité linéaire locale

Les résultats fournis par le code de stabilité linéaire locale sont obtenus en utilisant la solution analytique présentée au chapitre 3 comme écoulement de base. Les paramètres d'entrée du code de stabilité sont : le nombre de points de collocation N, le nombre de modes de Fourier utilisé l_{max}, le nombre d'onde spatial k, la position axiale z, le coefficient de Floquet γ, l'amplitude de la déviation radiale ε, le nombre de branches de l'étoile m et enfin le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$. Chaque jeu de paramètres fournit un ensemble de valeurs propres notées ω associées à des vecteurs propres. On désigne par le mot « spectre » l'ensemble des valeurs propres mais aussi toute figure représentant ces dernières. Dans notre cas, le spectre est représenté dans un plan (ω_r, ω_i) où ω_r et ω_i sont respectivement la partie réelle et imaginaire d'une valeur propre ω. Pour chaque valeur propre et pour chaque composante de la perturbation $(\hat{u}_r, \hat{u}_t, \hat{u}_z, \hat{u}_p)$ il y a $2l_{max} + 1$ fonctions propres représentant chacune un mode de Fourier. Il faut donc distinguer une fonction propre, associée à un mode de Fourier l, et la fonction d'amplitude de la perturbation, qui correspond à la somme des fonctions propres associées aux modes de Fourier (voir (4.6)).

Vérification de la convergence des résultats

La convergence des résultats vis-à-vis des paramètres tels que le nombre de points de collocation ou bien le nombre de modes de Fourier utilisé dans les séries est vérifiée sur le spectre : on sélectionne un mode puis on augmente par exemple l_{max} jusqu'à ce que l'écart obtenu entre les taux d'amplification temporels du mode pour les valeurs successives de l_{max} soit inférieur à une valeur fixée arbitrairement à 1%. Les valeurs de N et l_{max} peuvent dépendre des autres paramètres. La convergence est typiquement obtenue pour $N \simeq 70$ et $l_{max} \simeq 5$.

Mise en évidence de nouveaux modes par rapport à la configuration circulaire

Comme la solution analytique est utilisée comme écoulement de base, les valeurs de ε et $\mathcal{R}_e$ sont choisies de sorte à rester dans le domaine de validité de la solution. Le premier jeu (k, z) étudié est proche des valeurs fournies dans le rapport technique de Casalis et Pineau (1997) et dans la thèse de Griffond (2001). Dans un premier temps on étudie le spectre de stabilité correspondant

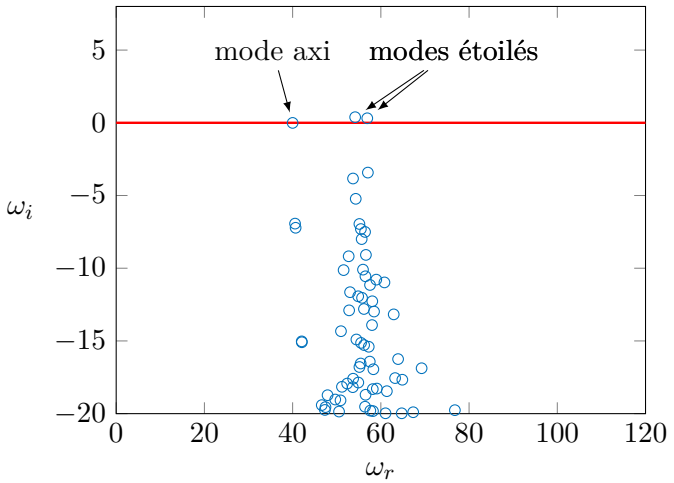


FIGURE 4.3. – Spectre obtenu par un calcul de stabilité locale pour $z = 5{,}8$, $k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i}$, $\gamma = 0$, $m = 7$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$ et $\varepsilon = 0{,}04$.

aux paramètres physiques et géométriques suivants

$$z = 5{,}8,\ k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i},\ \gamma = 0,\ m = 7,\ \mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000\ et\ \varepsilon = 0{,}04\ . \tag{4.27}$$

Le spectre obtenu est représenté sur la figure 4.3. Observons tout d'abord la présence du mode $\omega = 40 - 0{,}01\mathrm{i}$. Ce mode est proche de celui calculé pour le même jeu de paramètre mais dans la configuration axisymétrique puisqu'on trouve $\omega = 39{,}2650 - 0{,}0401\mathrm{i}$ pour $\varepsilon = 0$. Dans la suite, on qualifie ce mode d'« axisymétrique » et on le note ω_{axi}. Le qualificatif « axisymétrique » est utilisé pour rappeler que ce mode existe dans la configuration circulaire. Toutefois, on montre (voir par exemple la figure 4.4) que ce mode n'est pas axisymétrique au sens où ses fonctions d'amplitude dépendent de θ, ce qui est une conséquence du caractère non axisymétrique de la paroi. Pour ce mode, la déformation radiale liée à l'étoile a une légère influence qui tend à l'amortir temporellement et à en augmenter la pulsation lorsque ε augmente. Dans les travaux de Griffond, c'est ce mode qui est désigné comme le mode conduisant à l'instabilité provoquant le VSP. Le premier résultat de l'analyse de stabilité linéaire locale est donc que le mode conduisant au VSP dans le cas axisymétrique est également présent dans la configuration étoilée, avec une faible influence de ε sur sa pulsation et son taux d'amplification temporel.

La seconde observation à faire sur le spectre de la figure 4.3 est la présence des deux modes instables[6] dont les pulsations sont $\omega_r = 54{,}17$ et $\omega_r = 56{,}92$. On note respectivement ces modes ω_{e1} et ω_{e2}. Ces modes ne sont pas présents lorsque $\varepsilon = 0$ et sont donc propres à la configuration étoilée.

Les fonctions propres associées à ces modes diffèrent des fonctions propres associées au mode *axisymétrique* ω_{axi}. Ces dernières exhibent en effet des maxima d'amplitude proches de la paroi, comme cela est présenté sur la figure 4.4. C'est d'ailleurs ce qui caractérise ce mode et qui conduit à l'émergence de structures « pariétales » appelée VSP. Par ailleurs pour ce mode ω_{axi}, la composante azimutale est petite devant les autres composantes de vitesse. En revanche les fonctions propres associées aux deux modes étoilés ω_{e1} et ω_{e2} présentent des maxima proches de l'axe et une composante azimutale non négligeable devant les autres composantes de vitesse. Les fonctions propres associées à la valeur propre ω_{e1} sont représentées sur la figure 4.5. Seuls les modes de Fourier $l \geqslant 0$ positifs sont représentés car lorsque le coefficient de Floquet est nul, on observe que $\hat{u}_r$, $\hat{u}_z$ et $\hat{u}_p$ sont paires vis-à-vis de θ, ce qui implique que $\forall l \in [\![-l_{max}, l_{max}]\!]$, $\hat{u}_l = \hat{u}_{-l}$. Quant à $\hat{u}_\theta$, on constate que $\hat{u}_0^\theta \neq 0$ mais que $\forall l \in [\![-l_{max}, l_{max}]\!] \setminus \{0\}$, $\hat{u}_l^\theta = -\hat{u}_{-l}^\theta$ (donc $\hat{u}_\theta$ n'est pas strictement impaire vis-à-vis de θ). De plus, si les fonctions propres associées à ω_{e2} ne

6. Un mode est temporellement instable lorsque son taux d'amplification temporel, ω_i, est strictement positif. Voir eqn. (2.1.3).

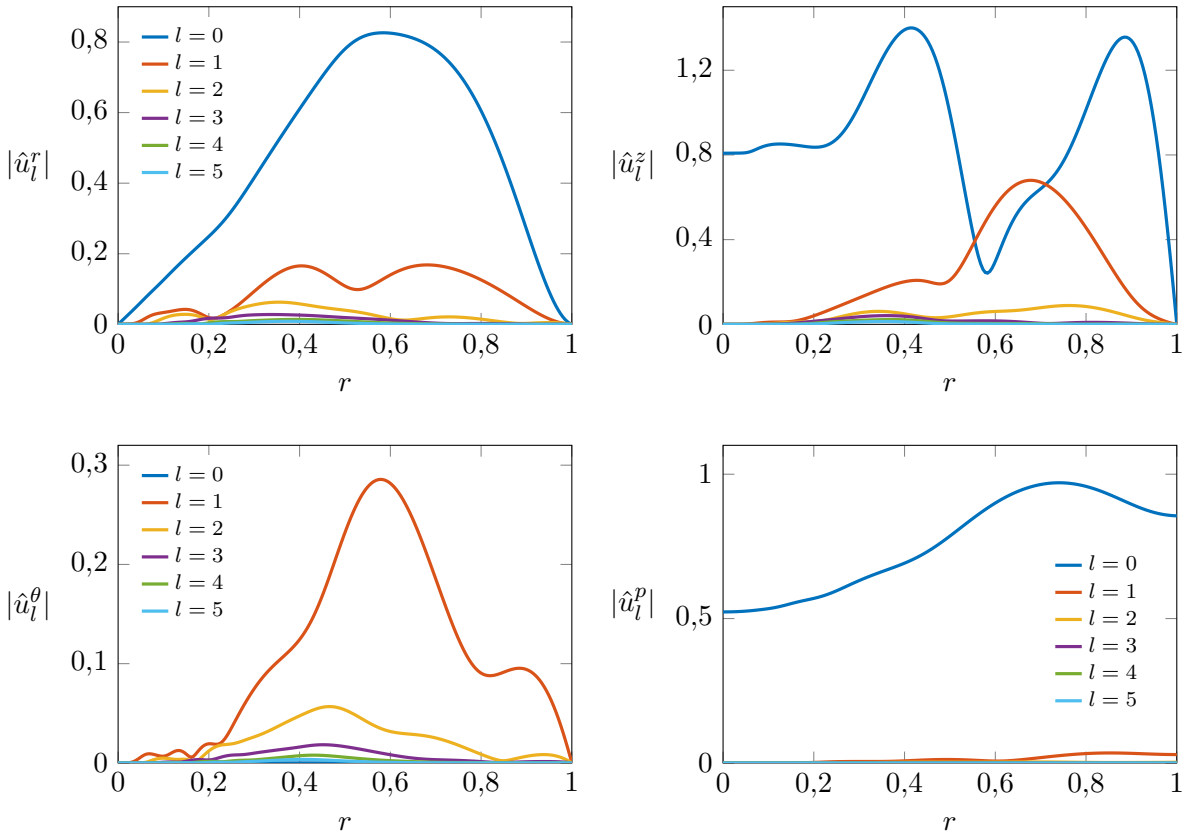


FIGURE 4.4. – Représentation de la valeur absolue des fonctions propres associées au mode $\omega = \omega_{axi} = 40 - 0{,}01\mathrm{i}$ obtenu avec $z = 5{,}8,\ k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i},\ \gamma = 0,\ m = 7,\ \mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$ et $\varepsilon = 0{,}04$. Les fluctuations de vitesse sont normalisées par $\max(|\hat{u}_r|)$, celle de pression par $\max(|\hat{u}_p|)$.

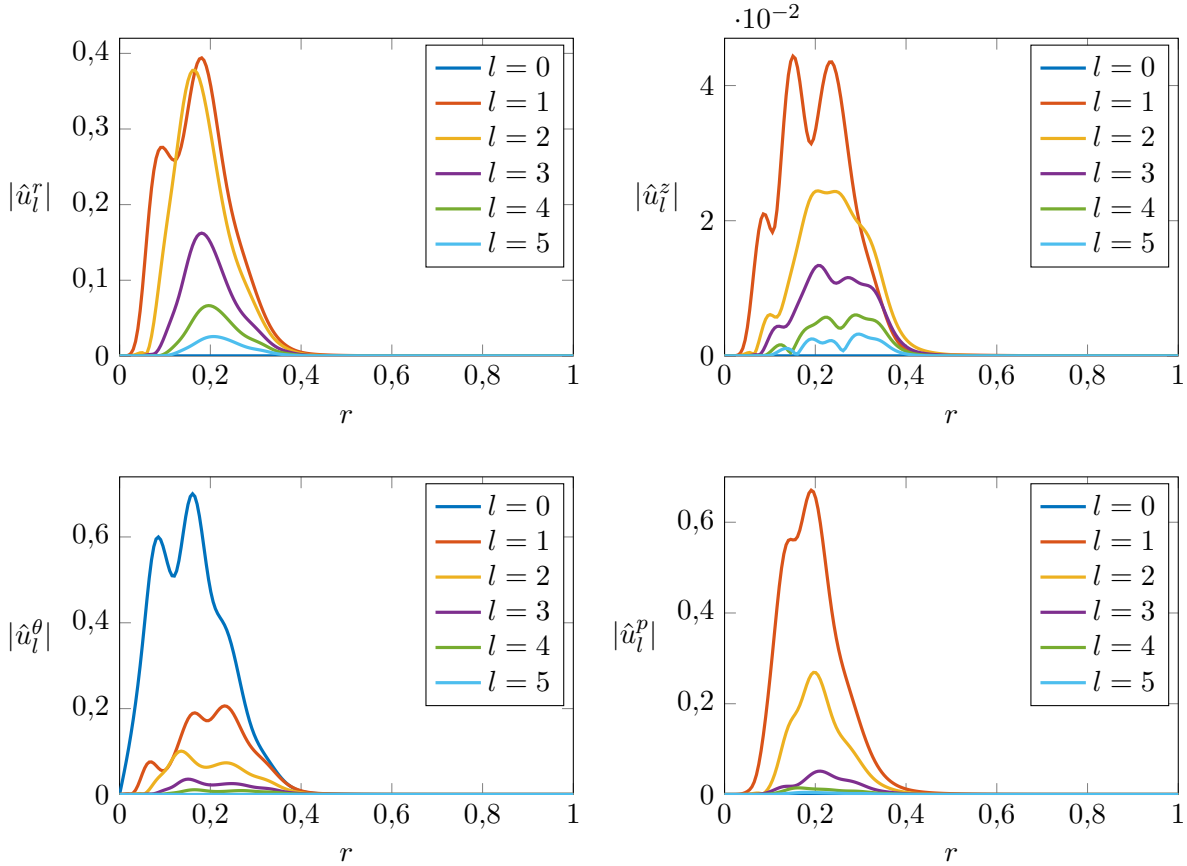


FIGURE 4.5. – Représentation de la valeur absolue des fonctions propres associées au mode $\omega = \omega_{e1} = 54{,}17 + 0{,}39\mathrm{i}$ obtenu avec $z = 5{,}8$, $k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i}$, $\gamma = 0$, $m = 7$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$ et $\varepsilon = 0{,}04$. Les fluctuations de vitesse sont normalisées par $\max(|\hat{u}_r|)$, celle de pression par $\max(|\hat{u}_p|)$.

sont pas représentées, c'est parce qu'elles sont qualitativement proches de celles de ω_{e1}. Sur cette figure 4.5, les fonctions propres sont normalisées par le maximum de $|\hat{u}_r|$. On constate d'une part que la composante azimutale est la seule à être non nulle sur le mode de Fourier $l = 0$, c'est-à-dire la composante « continue » vis-à-vis de θ. Une composante non nulle de perturbation de vitesse azimutale s'interprète par un mouvement de rotation solide au sein du cylindre. D'autre part la composante axiale de la perturbation est petite devant les composantes radiales et azimutales, ce qui diffère aussi du cas axisymétrique. Enfin, les deux figures, 4.4 et 4.5, montrent que la série de Fourier composée de tous ces modes semble converger : plus le mode de Fourier l augmente, plus l'amplitude de la fonction propre associée est faible.

Les modes ω_{e1} et ω_{e2} sont donc associés à des structures proches de l'axe. Il est possible de reconstruire les fonctions d'amplitude complètes, c'est-à-dire reconstruire la série de Fourier, pour chaque composante de la perturbation et de les représenter dans un plan (r, θ) ou (x, y). Ceci est réalisé sur la figure 4.6. Ici encore on observe que l'énergie est concentrée proche de l'axe (on représente seulement $r \leqslant 0{,}45$ car les amplitudes sont très faibles au-delà). De plus, la reconstruction permet de mieux constater que la composante axiale de la perturbation est faible devant les deux autres composantes de la vitesse. Enfin, il est intéressant de noter que l'argument du maximum de $|\hat{u}_\theta|$, à savoir $r \simeq 0{,}154$, est très proche de la position radiale de l'un des points d'inflexion du profil de vitesse axiale de la solution analytique, soit $r = 0{,}151$. Cette observation peut aussi être faite sur les autres composantes de la perturbation mais aussi sur la figure 4.5. Cela permet donc de faire l'hypothèse que ces modes étoilés sont liés au point d'inflexion présent dans le profil de vitesse axiale de l'écoulement de base.

Le spectre de l'opérateur de stabilité linéaire ayant été décrit, on s'intéresse maintenant à l'influence des différents paramètres physiques du calcul sur le mode *axisymétrique* et les deux

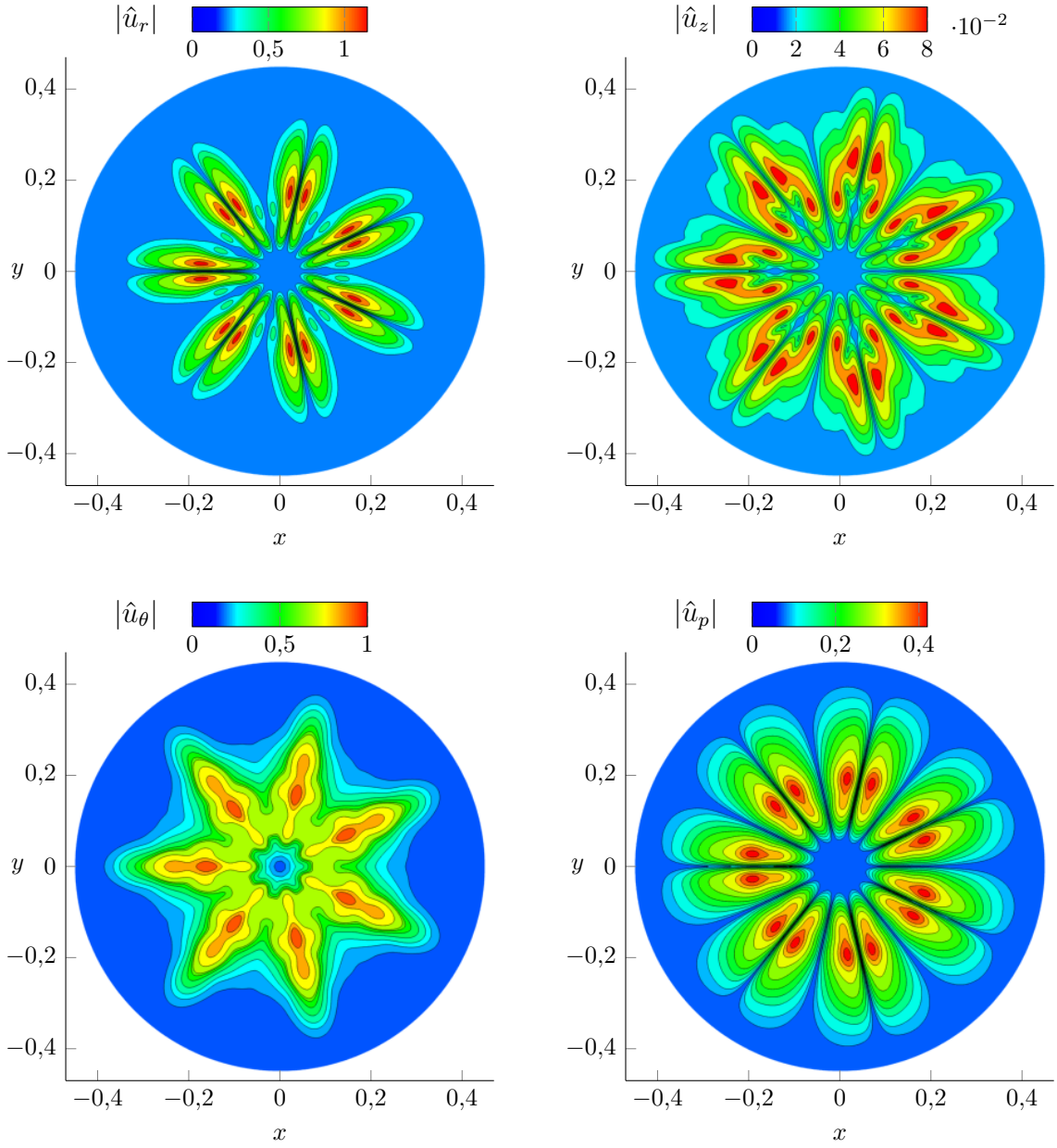
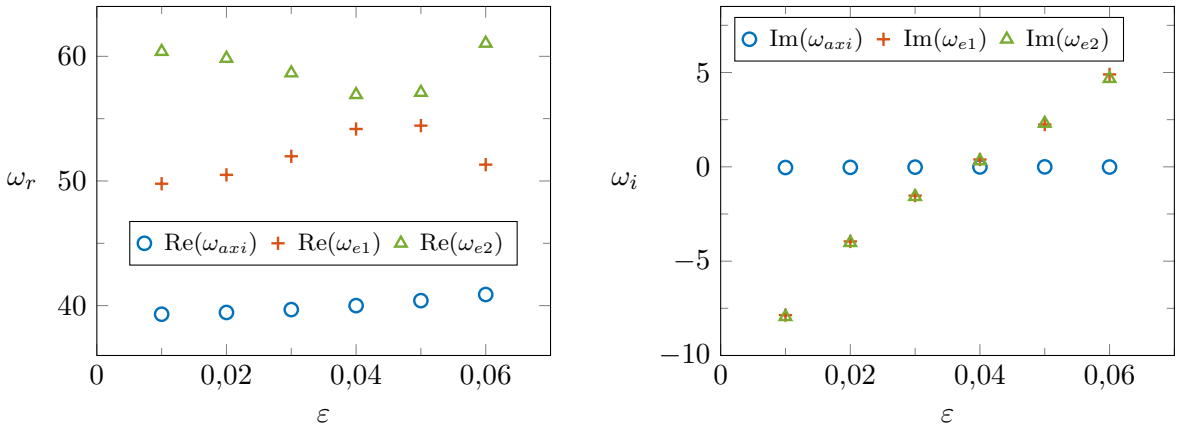


FIGURE 4.6. – Représentation de la valeur absolue des fonctions d'amplitude associées au mode $\omega = \omega_{e1} = 54{,}17 + 0{,}39\mathrm{i}$ obtenu avec $z = 5{,}8$, $k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i}$, $\gamma = 0$, $m = 7$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$ et $\varepsilon = 0{,}04$. Les fonctions sont normalisées par $\max_{r,\theta}(|\hat{u}_\theta|)$.



(a) (b)

FIGURE 4.7. – Étude de l'influence de l'amplitude de la déviation radiale, ε, sur (a) les pulsations et (b) les taux d'amplification temporels. Calculs réalisés avec $z = 5{,}8$, $k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i}$, $\gamma = 0$, $m = 7$ et $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$.

modes de stabilité. L'influence de tous les paramètres du calcul sont étudiés successivement, sauf celle du coefficient de Floquet et du nombre de branches, qui font respectivement l'objet des paragraphes 4.3.5 et 4.3.5.

Étude de l'influence de l'amplitude de la déviation radiale sur les modes de stabilité

L'influence de l'amplitude de la déviation radiale, ε, est représentée sur la figure 4.7. À gauche (figure 4.7a) sont représentées les pulsations ω_r des trois modes mentionnés jusqu'ici et à droite (figure 4.7b) sont représentés leurs taux d'amplification temporels ω_i. Commençons par le mode *axisymétrique* ω_{axi}. L'influence de ε sur ce mode est faible comparée à celle sur les deux autres modes représentés : l'augmentation de ε entraîne une légère augmentation de la pulsation. En revanche l'influence de ε sur les modes *étoilés* est plus importante : lorsque ε augmente, les taux d'amplification temporels des deux modes augmentent, et de la même manière. Quant aux pulsations, on a pris la convention de nommer ω_{e1} le mode étoilé de plus faible pulsation et le contraire pour ω_{e2} mais il semble sur la figure 4.7 que ces modes se croisent lorsque $\varepsilon \simeq 0{,}45$. Autrement dit la variation de la pulsation des modes étoilés vis-à-vis de ε est bien monotone : la pulsation du mode ω_{e1} va avoir tendance à augmenter avec l'augmentation de ε et inversement pour ω_{e2} jusqu'au moment où ils se croisent [7] et où les dénominations sont échangées. Au total on peut retenir que la déviation radiale a peu d'influence sur le mode *axisymétrique* mais qu'une augmentation de cette même déviation entraîne une forte augmentation des taux d'accroissement temporels des modes étoilés tout en augmentant ou diminuant respectivement leurs pulsations.

Étude de l'influence du nombre de Reynolds sur les modes de stabilité

On fait maintenant varier le nombre de Reynolds pour étudier son influence sur les modes de stabilité. Le plus grand nombre de Reynolds étudié est 1400 car pour la valeur de ε fixée $\varepsilon = 0{,}04$, nous nous situons aux limites du domaine de validité [8] de la solution pour l'écoulement de base. Les résultats sont représentés sur la figure 4.8. L'influence du nombre de Reynolds sur les modes de stabilité a déjà été étudiée (Griffond, 2001; Chedevergne, 2007). La partie réelle du mode *axisymétrique* est peu sensible au nombre de Reynolds tandis que son taux d'amortissement temporel

7. Lorsque les deux modes se croisent on obtient un mode double. Si les vitesses de phase de ces modes sont opposées, il est alors possible que l'instabilité soit absolue. Notons par ailleurs qu'au cours d'un tir la géométrie évolue « continûment », toutes les valeurs de ε inférieures à la valeur initiale de la déviation radiale sont donc rencontrées.

8. On entend par domaine de validité l'ensemble des couples $(\mathcal{R}_\mathrm{e}, \varepsilon)$ où la solution analytique est proche de la solution obtenue avec le code *CEDRE*.

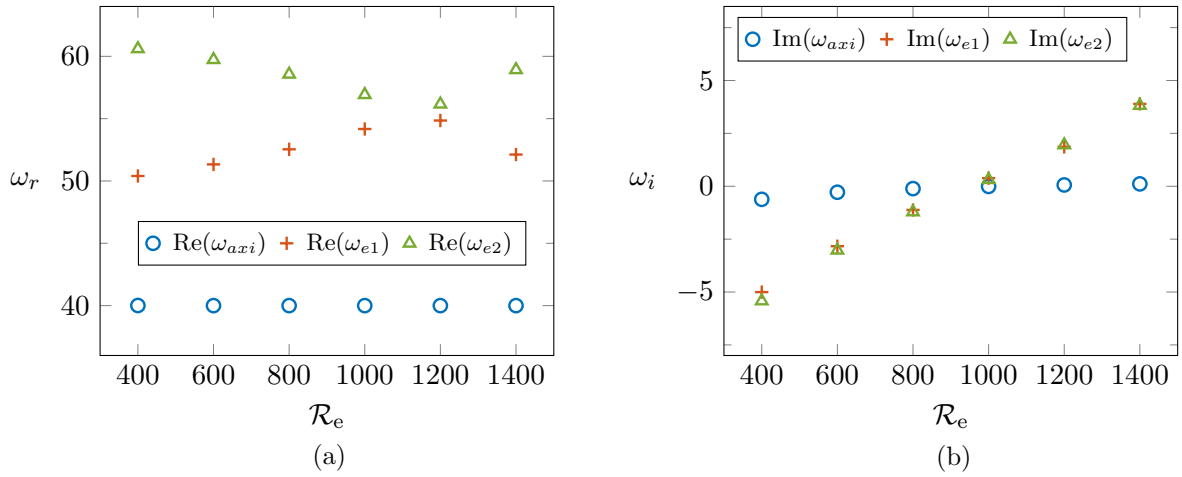


FIGURE 4.8. – Étude de l'influence du nombre de Reynolds, $\mathcal{R}_e$, sur (a) les pulsations et (b) les taux d'amplification temporels. Calculs réalisés avec $\varepsilon = 0{,}04$, $z = 5{,}8$, $m = 7$, $k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i}$ et $\gamma = 0$.

augmente en valeur absolue avec le nombre de Reynolds. Concernant les deux nouveaux modes étoilés, les résultats sont similaires à ceux du paragraphe précédent : à savoir qu'une augmentation du nombre de Reynolds entraîne une augmentation de la pulsation de l'un des deux modes et une diminution de celle de l'autre si bien que les modes finissent par se « croiser ». La partie réelle des deux modes augmente lorsque le nombre de Reynolds augmente. La sensibilité du taux d'accroissement temporel des deux modes étoilés au nombre de Reynolds est plus importante que celle du mode *axisymétrique*. Dans tous les cas le nombre de Reynolds a un effet déstabilisant sur le système, mais selon sa valeur les modes étoilés sont plus ou moins amplifiés que le mode *axisymétrique*. Dans les montages en gaz froid ou même les moteurs échelle 1, le nombre de Reynolds est de l'ordre de quelques milliers. Avec les paramètres de stabilité choisis ici (en particulier la position axiale et le nombre d'onde spatial), les modes étoilés sont donc susceptibles de dominer le mode *axisymétrique* dans ces moteurs.

Étude de l'influence de la position axiale sur les modes de stabilité

Le calcul de stabilité locale est effectué à une position axiale fixée, notée z. Dans le cas d'un conduit de section circulaire, il est connu qu'à une fréquence donnée (ω fixé) plus la position axiale est grande, plus le taux d'amplification spatial, k_i, est grand (voir figure 1.9b). Réciproquement, lorsque k est fixé une augmentation de la position axiale tend à augmenter la pulsation et le taux d'amplification temporel du mode *axisymétrique*. Ceci est visible sur la figure 4.9a. Sur cette figure le taux d'amplification temporel du mode *axisymétrique* est positif pour $z \geqslant 5{,}8$. Pourtant les études de stabilité biglobale (Chedevergne, 2007; Boyer, 2012) de la configuration circulaire montrent que ce mode est toujours temporellement stable et, en prenant un peu d'avance sur la suite de ce chapitre, l'étude de stabilité biglobale de la configuration étoilée fait le même constat. Le fait que ce taux d'amplification temporel soit positif ici illustre les limites de l'approche de stabilité locale : rien n'assure que le nombre d'onde k choisi pour ce calcul corresponde à un mode de stabilité global. Pour autant, l'influence du paramètre z sur les résultats de stabilité n'est pas nécessairement erronée, mais il est important de conserver à l'esprit que les résultats présentés ici sont uniquement qualitatif.

De même que pour le mode *axisymétrique*, une augmentation de la position axiale tend à augmenter les pulsations des deux modes étoilés. Contrairement aux influences des autres paramètres, cette fois-ci le sens de variation est le même pour les deux modes étoilés ω_{e1} et ω_{e2}.

En revanche le taux d'amplification temporel de ces deux modes décroît en fonction de la position axiale (figure 4.9b). Plus on s'éloigne du fond avant du conduit, plus ω_i décroît. Ceci conduit à une conclusion importante. Plus z est grand, plus les lignes de courant de l'écoulement

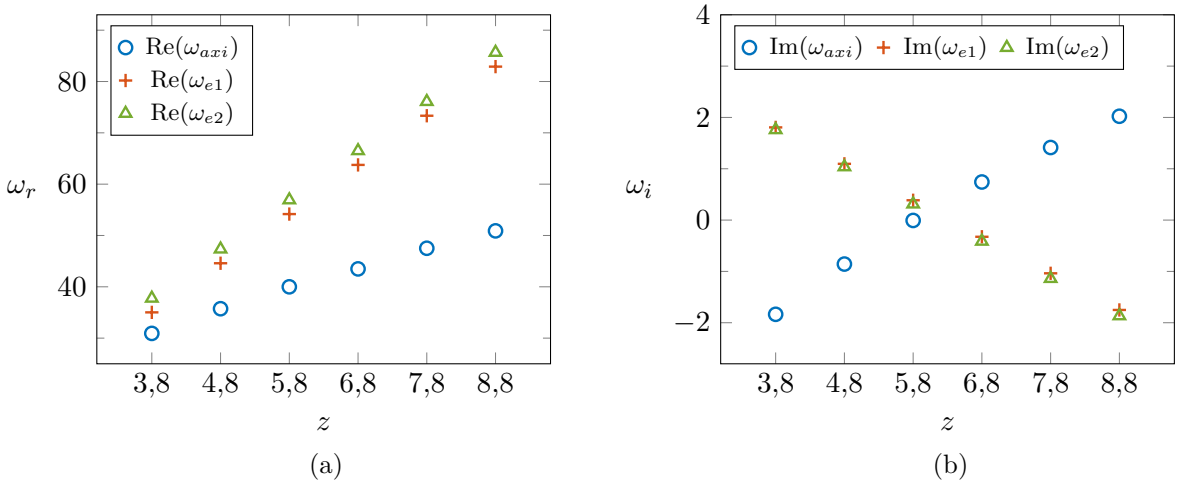


FIGURE 4.9. – Étude de l'influence de la position axiale, z, sur (a) les pulsations et (b) les taux d'amplification temporels. Calculs réalisés avec $\varepsilon = 0{,}04$, $\mathcal{R}_e = 1000$, $m = 7$, $k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i}$ et $\gamma = 0$.

de base sont parallèles. Cette figure montre que lorsque le parallélisme de l'écoulement de base est « faible », c'est-à-dire pour des z petits, les modes étoilés dominent le mode *axisymétrique*. À l'inverse plus l'écoulement est parallèle, c'est-à-dire plus z est grand, plus le mode *axisymétrique* domine les modes étoilés. On peut donc formuler l'hypothèse que à rayon égal, les modes étoilés seraient observés dans des moteurs courts tandis que dans des moteurs longs c'est le mode axisymétrique classique[9] associé au VSP qui serait observé.

Étude de l'influence du nombre d'onde spatial sur les modes de stabilité

Comme expliqué précédemment, le nombre d'onde spatial k est choisi arbitrairement. La partie imaginaire, k_i, correspond au taux d'amplification spatial et son signe détermine donc si le mode va être amorti en espace ou au contraire s'accroître exponentiellement. Mais il est délicat de choisir la valeur absolue de ce taux d'amplification. Quant à la longueur d'onde, associée à $2\pi R_p/k_r$, elle doit être de l'ordre de grandeur du rayon du conduit pour que la situation soit physiquement réaliste. La plage de variation de k_r et k_i est donc plus arbitraire que celles utilisées pour les autres paramètres dans les paragraphes précédents : les valeurs étudiées ont été sélectionnées autour du nombre d'onde $k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i}$ utilisé jusqu'ici dans les calculs.

L'influence de k_r sur la pulsation des modes de stabilité est classique : plus k_r est grand, plus la pulsation des modes est grande. Cette conclusion est valable pour les deux types de modes et est observable sur la figure 4.10a. Par ailleurs la figure 4.10b montre que plus la longueur d'onde est faible, c'est-à-dire k_r est grand, plus le taux d'accroissement temporel du mode *axisymétrique* augmente et domine celui des modes étoilés. On constate par ailleurs que l'influence de k_r sur le taux d'amplification temporel des modes étoilés est faible.

De même que pour k_r et ω_r, l'influence de ω_i vis-à-vis de k_i est habituelle : le taux d'amplification temporel ω_i est d'autant plus grand que le mode est amorti spatialement. Or plus k_i est grand, plus le mode est amorti spatialement. Ces résultats se vérifient sur la figure 4.11b. Concernant les pulsations, la figure 4.11 montrent que k_i a peu d'influence sur la pulsation des différents modes, du moins pour la plage de valeurs de k_i étudiée.

9. On rappelle que dans une configuration étoilée, le mode *axisymétrique* possède une structure tridimensionnelle, voir la figure 4.4.

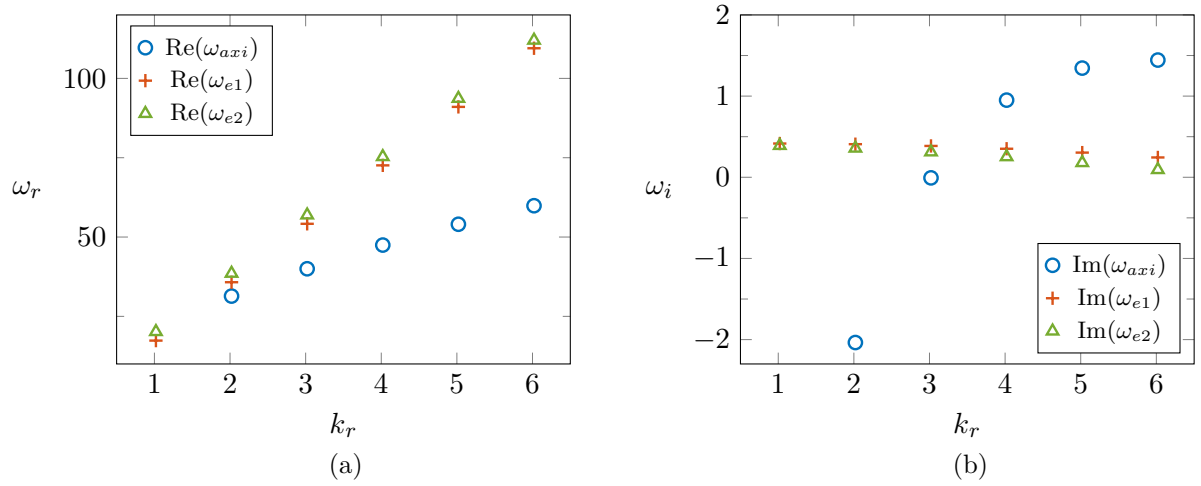


FIGURE 4.10. – Étude de l'influence de la longueur d'onde, représentée indirectement par k_r, sur (a) les pulsations et (b) les taux d'amplification temporels. Calculs réalisés avec $\varepsilon = 0{,}04$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$, $m = 7$, $z = 5{,}8$, $k_i = -0{,}2247$ et $\gamma = 0$.

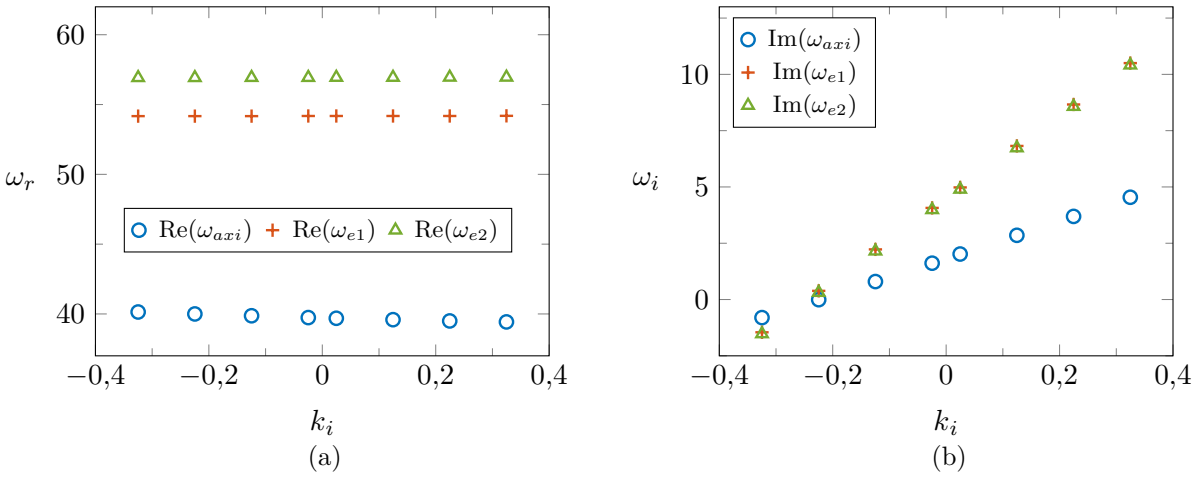


FIGURE 4.11. – Étude de l'influence du taux d'amplification spatial, k_i, sur (a) les pulsations et (b) les taux d'amplification temporels. Calculs réalisés avec $\varepsilon = 0{,}04$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$, $m = 7$, $z = 5{,}8$, $k_r = 3{,}020$ et $\gamma = 0$.

Résumé de l'étude paramétrique

Au final, il est possible de résumer les principaux éléments à retenir de cette étude paramétrique en rappelant que d'après cette étude de stabilité locale :

— la pulsation des deux modes étoilés est toujours plus grande que celle du mode *axisymétrique* pour la gamme de paramètres choisie ;
— plus l'amplitude de la déviation radiale est grande, plus les modes étoilés sont amplifiés temporellement (figure 4.7b) ;
— de même plus le nombre de Reynolds est grand, plus ces modes étoilés sont amplifiés temporellement et dominent le mode *axisymétrique* (figure 4.8b) ;
— plus les lignes de courant de l'écoulement sont parallèles, c'est-à-dire plus z est grand, plus le taux d'amplification temporel du mode *axisymétrique* est supérieur à celui des modes étoilés. Réciproquement, lorsque la longueur du conduit est faible et/ou que les lignes de courant sont faiblement parallèles, le taux d'amplification des modes étoilés est plus important que celui du mode *axisymétrique* (figure 4.9b).

4.2.5. Conclusions de l'étude de stabilité linéaire locale

L'application de l'approche de stabilité linéaire locale à l'écoulement de base décrit au chapitre précédent a mis en évidence deux nouveaux modes, propres à la configuration étoilée. Les fluctuations de vitesse associées à ces deux modes ont un maximum d'amplitude proches de l'axe, maximum dont l'argument est proche de la position d'un des points d'inflexion du profil de vitesse de l'écoulement de base, et la composante axiale de la perturbation de vitesse est négligeable devant les composantes radiales et azimutales. Le taux d'amplification temporel de ces modes croît avec l'amplitude de la déviation radiale et le nombre de Reynolds. De plus, le mode trouvé dans la configuration axisymétrique (section circulaire) est également présent dans la configuration étoilée. Il est toutefois modifié puisque la fluctuation de vitesse associée à ce mode dépend de r mais aussi θ, mais les fréquences et les taux d'amplification temporels associés à ce mode sont peu sensibles à la déformation radiale et au nombre de Reynolds comparé aux modes étoilés. Par ailleurs, l'étude de l'influence de la position axiale montre que proche du fond-avant du conduit, les modes étoilés sont associés à des taux d'amplification temporels plus élevés que le mode *axisymétrique*, tandis que l'inverse se produit lorsque l'on s'éloigne vers l'aval du conduit.

L'utilisation de cette approche de stabilité nous a permis de développer la chaîne de calcul permettant le calcul des coefficients du système et la résolution du problème aux valeurs propres, de valider facilement [10] cette chaîne, et d'obtenir une première idée de la stabilité linéaire de l'écoulement de base décrit au chapitre précédent. Toutefois, l'hypothèse requise de parallélisme de l'écoulement de base pour l'utilisation de l'approche de stabilité locale n'est pas réellement satisfaite. Il est donc nécessaire d'utiliser l'approche de stabilité linéaire biglobale pour que le problème soit mathématiquement bien posée et également pour s'affranchir du choix d'un nombre d'onde spatial.

4.3. Étude de stabilité linéaire biglobale de l'écoulement

Dans cette partie est réalisée l'étude de la stabilité biglobale de l'écoulement de base présenté au chapitre 3. Les principes de l'approche de stabilité linéaire biglobale ont été présentés au chapitre 2.1 et les équations régissant la perturbation $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{p})$ sont rappelés au début de ce chapitre (eqn. (4.1)).

10. La résolution du problème aux valeurs propres en stabilité locale est plus simple et plus rapide qu'en stabilité biglobale.

4.3.1. Détail de la forme de la perturbation et des équations

On commence par introduire une perturbation de vitesse $\tilde{\boldsymbol{u}}$ et de pression $\tilde{p}$ sous la forme

$$\tilde{u}(r,\theta,\theta) = \hat{u}(r,\theta,z)\, e^{-i\omega t}\,, \tag{4.28}$$

la perturbation de pression s'écrivant de manière analogue. Comme expliqué au chapitre 2.1, la périodicité de la géométrie nous permet d'appliquer le théorème de Floquet et d'écrire *in fine* la perturbation sous la forme suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(r,\theta,z,t) = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \hat{\boldsymbol{u}}_l(r,\theta)\, e^{iml\theta}\right) e^{\gamma\theta} e^{-i\omega t}\,. \tag{4.29}$$

Comme pour l'étude locale, les inconnues du problème sont la pulsation complexe ω ainsi que les fonctions propres $\hat{\boldsymbol{u}}_l$ à la différence qu'ici celles-ci dépendent désormais de deux variables : r et z. Le domaine géométrique de l'étude est défini par $(r,\theta) \in [0,1] \times [Z_{in}, Z_{out}]$, où Z_{in} peut correspondre au fond avant ($Z_{out} = 0$) ou bien à une position axiale plus en aval.

L'établissement des équations régissant la perturbation est similaire au cas local décrit en 4.2.1 : la perturbation (4.29) est introduite dans les équations de Navier–Stokes linéarisées, le problème aux valeurs propres est formulé et les différentes équations sont obtenues en décomposant toutes les fonctions dépendantes de θ en série de Fourier et en effectuant des décalages d'indices. En pratique, les seules différences entre les équations de stabilité locale et celles de stabilité biglobale se situent au niveau des dérivées axiales de la perturbation. En stabilité locale une dérivée axiale fait apparaître le nombre d'onde spatial alors qu'ici cette dérivée sera résolue. Il est donc possible de réutiliser la chaîne de calcul mis au point pour l'étude de stabilité local. Les procédures Maple™ sont d'abord utilisées pour calculer tous les coefficients du système, les équations étant sensiblement différentes par rapport au cas 1D en ce qui concerne les dérivées axiales. Ces coefficients sont exportés au format MathML. Puis le programme Java permet de lire ces coefficients et de générer des routines Fortran qui sont intégrées au code de stabilité décrit brièvement au 4.3.3. Jusqu'à ce stade, la complexité de l'approche de stabilité biglobale est identique à l'approche de stabilité locale.

Avant de passer à la description du code de stabilité, les conditions limites s'appliquant à la perturbation sont présentées.

4.3.2. Description des conditions limites

Dans tout ce qui suit, on simplifie les notations en omettant l'indice l faisant référence au mode de Fourier. Toutes les équations sont donc valables $\forall l \in [\![-l_{max}, l_{max}]\!]$. Il y a cinq jeux de conditions limites à imposer :

— en entrée du domaine : $z = Z_{in}$;
— en sortie du domaine : $z = Z_{out}$;
— à la paroi : $r = 1$;
— sur l'axe : $r = 0$;
— aux quatre coins du domaine.

En entrée du domaine

En entrée du domaine, on suppose qu'il n'y a pas de perturbation de vitesse et donc que la vitesse de l'écoulement $\boldsymbol{u}$ est celle de l'écoulement de base $\boldsymbol{U}$. Comme $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + \tilde{\boldsymbol{u}}$, les fluctuations de vitesse sont nulles à l'entrée du domaine :

$$\forall r \in [0,1]\,,\ \hat{u}_r(r, Z_{in}) = \hat{u}_\theta(r, Z_{in}) = \hat{u}_z(r, Z_{in}) = 0\,. \tag{4.30}$$

Ces trois égalités étant valables pour tout r, la dérivée radiale des fluctuations est aussi nulle à l'entrée du domaine. Cette observation permet de simplifier l'équation de continuité linéari-

sée (4.4a) qui entraîne $\partial_z \hat{u}_z = 0$ en $z = Z_{in}$. Finalement la nullité des fluctuations de vitesse, de leurs dérivées radiales ainsi que de la dérivée axiale de $\hat{u}_z$ permet d'obtenir, via l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$, que doit être vérifiée l'équation :

$$\partial_z \hat{u}_p = \frac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}} \partial_z^2 \hat{u}_z \tag{4.31}$$

à l'entrée du domaine.

En sortie du domaine

La condition limite à imposer en sortie du domaine en stabilité biglobale pour des domaines géométriquement ouverts fait encore l'objet de publications (Theofilis, 2017). Dans la littérature, une condition d'extrapolation linéaire ou quadratique de la pression est régulièrement imposée à la sortie du domaine. C'est ce qui a été fait lors de la première étude de stabilité biglobale de l'écoulement de Taylor–Culick cylindrique (Chedevergne, 2007). Dans leur article, Boyer *et al.* (2013b) appliquent une condition limite de sortie nommée « condition de traction nulle généralisée ». Cette condition a été initialement proposée par Pironneau (1988) et consiste à annuler les efforts de friction sur la surface de normale $\boldsymbol{n}$. Linéarisée et adaptée pour que les problèmes directs et adjoints soient bien posés, Boyer *et al.* écrivent cette condition sous la forme :

$$\frac{-1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}} \left(\boldsymbol{\nabla} \hat{\boldsymbol{u}} + \alpha_{out} \boldsymbol{\nabla} \hat{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{T}} \right) \cdot \boldsymbol{n} + \beta_{out} \left(\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \right) \hat{\boldsymbol{u}} + \hat{u}_p \boldsymbol{n} = 0 \,, \tag{4.32}$$

où α_{out} et β_{out} sont deux coefficients. Les auteurs précisent que β_{out} est compris [11] entre 0 et 1/2 tandis que l'on a $\alpha_{out} = 0$ en incompressible. Dans sa thèse, les paramètres les plus régulièrement utilisés par Boyer sont $\alpha_{out} = \beta_{out} = 0$, valeurs qui seront également utilisées dans ce manuscrit lorsque cette condition est utilisée. La condition limite obtenue avec ces deux paramètres est simplement nommée « condition de traction nulle ».

Dans le cas présent, comme $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_z$, cette condition de traction nulle (le changement de variable n'entraîne pas de modification des équations) conduit à

$$\partial_z \hat{u}_r = 0 \quad ; \quad \partial_z \hat{u}_\theta = 0 \quad ; \quad \partial_z \hat{u}_z - \mathcal{R}_\mathrm{e} \hat{u}_p = 0 \,. \tag{4.33}$$

Une autre condition limite utilisée par Boyer dans son travail de thèse consiste à annuler les fluctuations de pression à la sortie du domaine. Cette condition est en fait une conséquence de l'équation précédente lorsque le nombre de Reynolds est grand. Cette condition se traduit simplement par $\hat{u}_p = 0$ en $z = Z_{out}$. Cette équation remplace alors l'équation de continuité, tandis que les trois équations de quantité de mouvement sont conservées.

À la paroi

À la paroi, c'est-à-dire en $r = 1$, les conditions découlent des conditions limites imposées de la condition limite d'injection que vérifient la solution instationnaire et l'écoulement de base ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} = -\boldsymbol{n}$). On obtient donc la nullité des fluctuations de vitesse :

$$\forall z \in [Z_{in}, Z_{out}] \,, \; \hat{u}_r(1, z) = \hat{u}_\theta(1, z) = \hat{u}_z(1, z) = 0 \,. \tag{4.34}$$

Par le même raisonnement que pour l'entrée du domaine, la nullité des fluctuations pour tout z entraîne la nullité de leurs dérivées axiales.

Sur l'axe

Pour déterminer les conditions à imposer sur l'axe ($r = 0$) on procède de la même manière que pour l'étude de stabilité locale, c'est-à-dire qu'on effectue un développement de Taylor des

11. Les valeurs de β permettent d'obtenir un problème mathématiquement bien posé.

différentes fonctions. Le calcul est détaillé en annexe C.2. Seuls les résultats de ce calcul sont énoncés ici. Ceux-ci dépendent comme dans le cas 1D de la valeur du coefficient de Floquet.

Lorsque $\gamma = 0$, on a sur l'axe :

$$\hat{u}_r = \hat{u}_\theta = \partial_r \hat{u}_z = \partial_r \hat{u}_p = 0\,. \tag{4.35}$$

Si $\gamma \in \{i, i(m-1)\}$, les conditions limites sur l'axe sont :

$$\partial_r \hat{u}_r = \partial_r \hat{u}_\theta = \hat{u}_z = \hat{u}_p = 0\,. \tag{4.36}$$

De plus, si $\gamma \in \{2i, i(m-2)\}$, ces conditions limites sur l'axe s'écrivent :

$$\hat{u}_r = \hat{u}_\theta = \hat{u}_z = \partial_r \hat{u}_p = 0\,. \tag{4.37}$$

Enfin, si $\gamma \in [\![0, m[\![\setminus \{0, i, 2i, i(m-2), i(m-1)\}$, les conditions limites sur l'axe sont :

$$\hat{u}_r = \hat{u}_\theta = \hat{u}_z = \hat{u}_p = 0\,. \tag{4.38}$$

Aux quatre coins du domaine

Le domaine de calcul présente quatre coins où les points de collocation appartiennent à deux conditions limites : axe-entrée, axe-sortie, paroi-entrée et paroi-sortie. Au niveau des deux coins incluant l'axe, ce sont toujours les conditions limites sur l'axe détaillées au paragraphe précédent qui sont utilisées. Pour le coin entrée-paroi, on utilise la nullité des trois composantes de la fluctuation de vitesse (valable à la paroi et en entrée) et on combine la nullité des dérivées de $\hat{u}_z$ dans les deux directions pour écrire $\partial_z \partial_r \hat{u}_z = 0$. Enfin, la condition appliquée au coin paroi-sortie dépend de la condition de sortie utilisée. En effet on écrit la nullité des trois composantes de la fluctuation de vitesse et on rajoute un élément de la condition de sortie, comme la nullité de la fluctuation de pression par exemple.

4.3.3. Description du code de stabilité linéaire biglobale

Le code de résolution numérique du problème aux valeurs propres généralisé utilisé durant ces travaux est une extension du code développé par Boyer pendant sa thèse. Une description détaillée de ce code écrit en Fortran est disponible dans son manuscrit de thèse (Boyer, 2012). Dans les grandes lignes, ce code permet de paralléliser la résolution du problème $\boldsymbol{A}\hat{u} = \omega \boldsymbol{B}\hat{u}$ et surtout de paralléliser le stockage des matrices de grande dimension $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$. Tout d'abord les paramètres de résolution tels que le maillage ou le nombre de Reynolds sont lus. Ensuite une « grille » de processeurs est créée. Puis vient l'étape de remplissage des matrices durant laquelle le problème aux valeurs propres généralisé est écrit en chacun des points de collocation. Les éléments des matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont répartis sur plusieurs processeurs, c'est-à-dire que chaque processeur se voit affecter un « morceau » des matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$. C'est à cette étape de remplissage qu'intervient la modification du code écrit par Boyer. En effet, au lieu d'écrire les équations correspondant au cas axisymétrique, les routines générées par la chaîne Maple™-Java (voir 4.2.1) et contenant les coefficients du système correspondant au cas étoilé sont utilisées. Le reste du code, en particulier la résolution du problème aux valeurs propres généralisé au sens propre, reste inchangé. Cette résolution se fait à l'aide de l'algorithme itératif d'Arnoldi, qui permet de déterminer les valeurs propres les plus proches d'une cible donnée par l'utilisateur. Ceci permet d'éviter la détermination du spectre complet, qui nécessiterait un espace mémoire et un temps de résolution hors de portée. Par ailleurs rappelons que la majorité des valeurs propres correspondent à des modes *parasites* et qu'il est donc inutile de les calculer.

Une description détaillée de l'algorithme d'Arnoldi est disponible dans Lehoucq *et al.* (1997). On rappelle seulement les grands principes ci-après. Considérons un problème aux valeurs propres classique $\mathcal{L}x = \lambda x$, où $\mathcal{L}$ est une matrice « de grande dimension » $N \times N$. Le but de l'algorithme est de se ramener à un problème de plus petite dimension pour en calculer les valeurs propres.

On commence par générer le sous-espace vectoriel de Krylov $\mathbb{K}_n$ à partir de $\mathcal{L}$:

$$\mathbb{K}_n = \text{vect}\left(x_0, \mathcal{L}x_0, ..., \mathcal{L}^{n-1}x_0\right) , \tag{4.39}$$

où $n \in \mathbb{N}$ est un entier défini par l'utilisateur, largement inférieur à N, et x_0 est un vecteur quelconque [12] qualifié d'initial. On construit ensuite une base de $\mathbb{K}_n$: $(k_1, ..k_n)$. Une factorisation d'Arnoldi est alors effectuée pour obtenir

$$\mathcal{L}P_n = P_n\mathcal{H}_n + r_n\ {}^{\mathrm{t}}e_n\,, \tag{4.40}$$

où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique, P_n la matrice de passage de $(e_1, ..., e_n)$ à $(k_1, ..., k_n)$, $\mathcal{H}_n$ la matrice d'Hessenberg d'ordre n et r_n un vecteur résiduel. On peut montrer que si $r_n = 0$, alors les n valeurs propres de $\mathcal{H}_n$ sont les n valeurs propres de plus grand module de $\mathcal{L}$. Le principe de l'algorithme est donc d'itérer en modifiant x_0 pour obtenir la norme du vecteur résiduel $||r_n||$ la plus faible possible. Lehoucq *et al.* (1997) précisent comment calculer x_0 itérativement afin de converger vers $||r_n|| = 0$.

Dans le cas des équations de Navier–Stokes linéarisées, le problème s'écrit $\boldsymbol{A}\hat{u} = \omega\boldsymbol{B}\hat{u}$, ce n'est donc pas un problème aux valeurs propres canonique. Pour se ramener à un problème aux valeurs propres classique, une cible dite d'Arnoldi et notée $\omega_a = \omega_{ar} + i\omega_{ai}$ est introduite. Le choix de cette cible est libre, si ce n'est qu'elle ne doit pas être une valeur propre du problème. Le problème est alors réécrit sous la forme

$$(\boldsymbol{A} - \omega_a\boldsymbol{B})^{-1}\,\boldsymbol{B}\hat{u} = \frac{1}{\omega - \omega_a}\hat{u}\,. \tag{4.41}$$

L'application de l'algorithme d'Arnoldi à la matrice $(\boldsymbol{A} - \omega_a\boldsymbol{B})^{-1}\,\boldsymbol{B}$ permet d'en obtenir les valeurs propres de plus grand module, c'est-à-dire les valeurs propres les plus proches de la cible ω_a. En revanche, il est nécessaire de calculer $(\boldsymbol{A} - \omega_a\boldsymbol{B})^{-1}\,\boldsymbol{B}$. Pour cela, l'étape préalable à l'application de l'algorithme d'Arnoldi dans notre cas est d'opérer une factorisation LU de la matrice $\boldsymbol{A} - \omega_a\boldsymbol{B}$. C'est la librairie ScaLAPACK (Anderson *et al.*, 1999) qui est utilisée pour opérer cette factorisation en parallèle sur plusieurs processeurs. Ce calcul est l'étape la plus longue de l'exécution du code de stabilité. Une fois cette factorisation obtenue, l'algorithme d'Arnoldi est appliqué, lui aussi en parallèle, grâce à la librairie PARPACK. Dans la pratique, l'utilisateur doit donc indiquer une cible, ω_a, la dimension du sous-espace de Krylov, n et la tolérance sur la norme du vecteur résiduel r_n.

Utilisation d'une discrétisation multidomaines

Dans leur article, Boyer *et al.* (2013b) montrent que les fonctions d'amplitude des modes calculés présentent de fortes variations dans des zones très étroites proches de la sortie du domaine de calcul. Ils assimilent ce phénomène à la présence d'une « couche limite [13] » à la sortie du domaine. Pour résoudre correctement le problème dans ces zones, il est nécessaire d'y raffiner le maillage. Or l'utilisation des points de Gauss–Lobatto contraint la position des noeuds du maillage. Pour raffiner le maillage, il faut donc augmenter le nombre de points de collocation, ce qui entraîne une augmentation de la taille du problème et une augmentation du nombre de points sur tout le domaine, ou bien utiliser une discrétisation multidomaines, c'est-à-dire diviser le maillage en plusieurs domaines sur lesquels on utilise les points de Gauss–Lobatto. Cette discrétisation a été développée par Boyer dans son code et est réutilisée dans les présents travaux. Celle-ci est disponible suivant les deux directions. Pour faciliter la désignation des maillages utilisés dans la suite, on introduit la nomenclature suivante :

— cas d'une discrétisation monodomaine : [80] signifie 80 points répartis suivant la discrétisation de Gauss–Lobatto ;

12. Tout vecteur convient à l'exception des vecteurs propres de l'opérateur $\mathcal{L}$, sinon l'espace $\mathbb{K}_n$ n'est qu'une droite vectorielle.

13. L'épaisseur de cette couche limite est inversement proportionnelle au nombre de Reynolds.

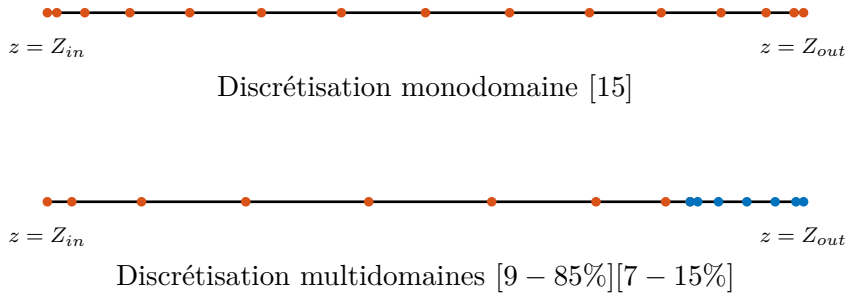


FIGURE 4.12. – Illustration des discrétisations monodomaine et multidomaine pour un même nombre de noeuds (15).

— cas d'une discrétisation multidomaines : $[60 - 90\%][20 - 10\%]$ signifie 60 points répartis sur les premiers 90% du domaine et 20 points répartis sur les derniers 10% du domaine.

Une illustration des deux types de discrétisation (monodomaine et multidomaine), pour un même nombre de points, est réalisée sur la figure 4.12.

4.3.4. Validation du code de résolution

Validation du code de résolution par comparaison au cas axisymétrique

Comme dans le cas 1D, une validation indirecte de code de stabilité consiste à comparer ses résultats au code axisymétrique en prenant $\varepsilon = 0$. On désigne par « code axisymétrique » le code écrit par Boyer traitant d'une configuration circulaire et par « code étoilé » le code rédigé lors de cette thèse traitant de la configuration étoilée. Une comparaison entre les deux codes n'est pas si évidente qu'elle n'y paraît car d'une part les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ ne sont pas construites de la même façon (procédures Maple™ puis programme Java pour le code étoilé) et d'autre part le code axisymétrique résout un système de trois équations (continuité, équations de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$ et $\boldsymbol{e}_z$) à trois inconnues $(\hat{u}_r, \hat{u}_z, \hat{u}_p)$ tandis que le code étoilé résout un système de quatre équations à quatre inconnues puisqu'il inclut la composante azimutale $\hat{u}_\theta$. Même lorsque $\varepsilon = 0$, les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont donc différentes pour les deux codes.

Pour effectuer la comparaison, on choisit $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 2000$, $Z_{in} = 4$, $Z_{out} = 8$ et un maillage monodomaine de 80 nœuds suivant $\boldsymbol{e}_r$ et de type $[60-80\%][20-20\%]$ suivant $\boldsymbol{e}_z$. La cible d'Arnoldi choisie est $\omega_a = 50 + 10i$. Les spectres calculés par les deux codes sont représentés sur la figure 4.13. Pour la branche de modes physiques, i.e. la branche supérieure, le recouvrement est quasi parfait entre les modes obtenus par les deux codes. Il est intéressant de constater qu'en dehors de cette branche, les modes ne se recouvrent pas. Ces modes sont en effet ce que l'on appelle des modes *parasites*, c'est-à-dire des modes liés à la transformation d'un problème de dimension infinie (les équations de Navier–Stokes linéarisées) à un problème de dimension finie via une discrétisation spatiale. Pour distinguer les modes *physiques* des modes *parasites*, il suffit de faire varier légèrement la discrétisation employée : les premiers seront peu ou pas impactés tandis que les seconds seront complètement différents. Dans notre cas, le fait que les modes *parasites* des deux codes ne soient pas superposés est la conséquence du fait que les deux codes ne sont pas identiques et ne résolvent pas tout à fait les mêmes systèmes d'équations.

Il est également nécessaire de s'assurer que les fonctions propres déterminées par les deux codes sont superposées. Une illustration de cette superposition est réalisée sur la figure 4.14 pour le mode $\omega = 81{,}5 - 11{,}1\mathrm{i}$. La composante $\hat{u}_\theta$, déterminée par le code de stabilité étoilé, n'est pas représentée sur la figure car elle est, comme attendu, nulle pour tout (r, z).

Validation des conditions limites sur l'axe

Les conditions limites du problème au niveau de l'axe, évoquées au paragraphe 4.3.2 et dont l'obtention est détaillée dans l'annexe C, dépendent de la valeur du coefficient de Floquet. Ces différents jeux de conditions limites sur l'axe ont pu être validés de la manière suivante. Dans le

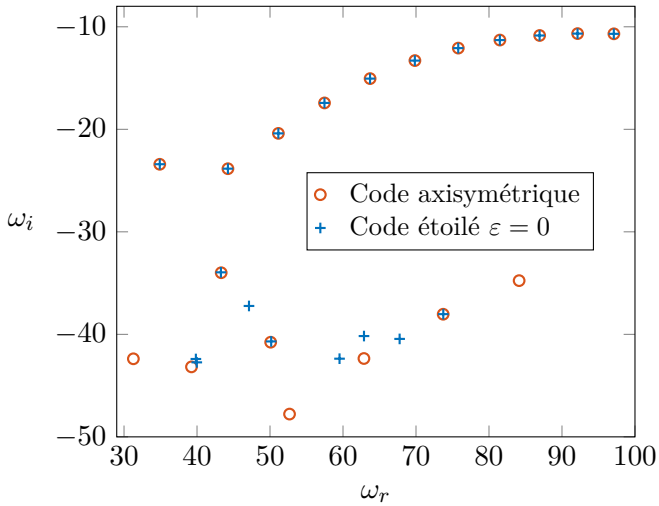


FIGURE 4.13. – Comparaison des spectres obtenus avec le code axisymétrique et le code étoilé pour des paramètres de calcul identiques.

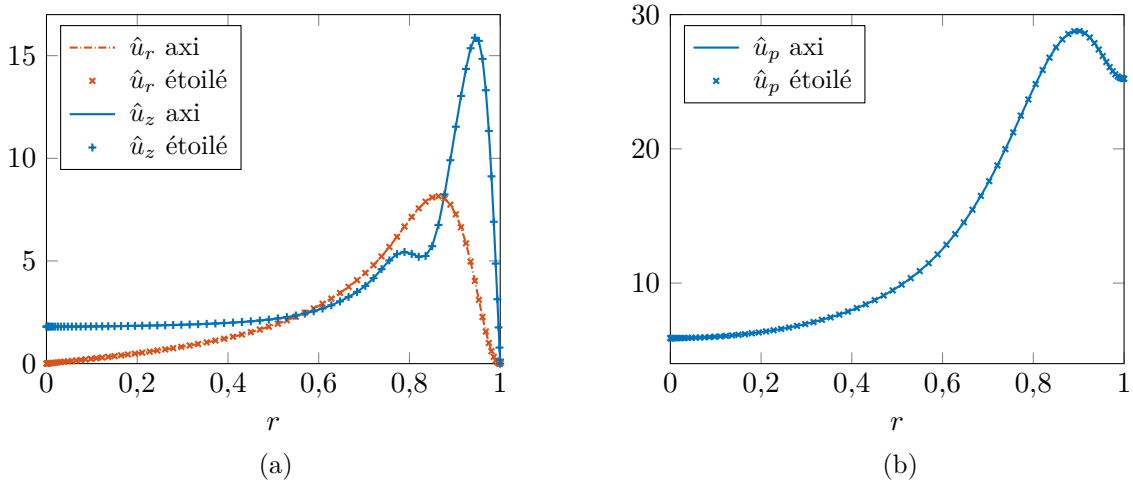


FIGURE 4.14. – Comparaison des fonctions propres obtenus avec le code axisymétrique et le code étoilé pour la valeur propre $\omega = 81{,}5 - 11{,}1\mathrm{i}$ et à la position axiale $z = 7{,}95$ avec des paramètres de calcul identiques.

code de résolution, on modifie la distribution des points de Gauss–Lobatto dans la direction radiale de manière à ce que le nœud le plus proche de l'axe ne soit pas en $r_0 = 0$ mais légèrement décalé, par exemple $r_0 = 1 \times 10^{-5}$. Au lieu d'appliquer les conditions limites évoquées précédemment, les équations du problème sont écrites comme partout ailleurs dans le domaine. Décaler ce premier point de Gauss–Lobatto n'est pas rigoureux mathématiquement, mais ne dégrade pas trop la méthode de collocation spectrale si le décalage est faible. Le spectre obtenu à partir des conditions limites théoriques et celui obtenu à partir de cette méthode de « l'axe décalé » sont alors comparés. Les deux spectres sont bien identiques, mais à la condition de raffiner suffisamment le maillage pour le cas de l'axe décalé. Autrement dit, les différents jeux de conditions limites sont validés, et on montre qu'imposer ces conditions limites nécessite des maillages beaucoup moins fins qu'utiliser la seconde méthode. Dans la suite, on garde donc la distribution de Gauss–Lobatto nominale et on applique les conditions limites sur l'axe en $r = 0$.

4.3.5. Analyse des résultats de stabilité linéaire biglobale

Par rapport au cas de la stabilité linéaire locale, les calculs de stabilité linéaire biglobale sont plus complexes à réaliser. Tout d'abord la taille des problèmes à résoudre est largement supérieure. Avec la démarche adoptée décrite au paragraphe 4.3.3, les calculs nécessitent l'utilisation de nombreux processeurs (entre 24 et 480) et surtout une grande quantité de mémoire vive (jusqu'au téra-octet). Ensuite le nombre de paramètres de calcul augmente : si le nombre d'onde spatial de l'étude local est supprimé, il faut désormais choisir un nombre de points suivant la direction axiale mais aussi un découpage du maillage suivant les deux directions permettant la convergence des calculs (voir Boyer (2012)) ainsi que l'entrée et la sortie du domaine (Z_{in} et Z_{out}). Le but de cette partie est de décrire l'influence des différents paramètres géométriques et numériques sur les modes. On ne cherche pas à déterminer précisément la valeur du taux d'amplification des modes de stabilité, mais plutôt leur sensibilité vis-à-vis des paramètres de l'étude. Pour cette raison les maillages utilisés sont moins raffinés que dans les études précédentes (Chedevergne, 2007; Boyer, 2012). Sauf mention contraire, tous les résultats présentés sont obtenus avec la condition limite de sortie de type « pression nulle » (voir 4.3.2) qui s'est avérée être la plus efficace vis-à-vis de la convergence en maillage.

Rappel des résultats de la configuration circulaire

Dans le cas d'une configuration circulaire ($\varepsilon = 0$), les calculs de stabilité biglobale permettent de montrer l'existence de modes discrets dans le spectre, comme le montre la figure 4.13. Les fonctions propres associées à ces modes, qui font l'objet de la figure 4.14, présentent comme dans le cas 1D un maximum d'amplitude proche de la paroi et possèdent une forte amplification dans la direction axiale. Ces modes sont classiquement associés au VSP et correspondent aux modes appelés « modes *axisymétriques* » dans la partie précédente. Le point de départ de cette étude est donc ce spectre, composé d'une branches de modes VSP, dont on étudie l'évolution vis-à-vis des différents paramètres géométriques et physique du problème.

Étude de l'influence du coefficient de Floquet sur les modes de stabilité

Commençons par étudier l'influence du coefficient de Floquet sur les modes de stabilité. Lorsque l'amplitude de la déviation radiale est nulle, soit $\varepsilon = 0$, le module du coefficient de Floquet joue le rôle d'un nombre d'onde azimutal. En effet, supposons que $\varepsilon = 0$, la perturbation (4.29) s'écrit alors

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(r, \theta, z, t) = \hat{\boldsymbol{u}}_l(r, z)\, e^{i(|\gamma|\theta - \omega t)}\,. \tag{4.42}$$

Dans les précédentes études, ce nombre d'onde était toujours supposé nul, ce qui permettait notamment de simplifier [14] le problème à résoudre en recherchant des perturbations axisymétriques où $\hat{u}_\theta = 0$. Le code mis en place dans cette thèse permet de considérer un nombre d'onde non

14. Le nombre d'inconnues passe alors de 4 à 3 : $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_z, \hat{u}_p \to \hat{u}_r, \hat{u}_z, \hat{u}_p$.

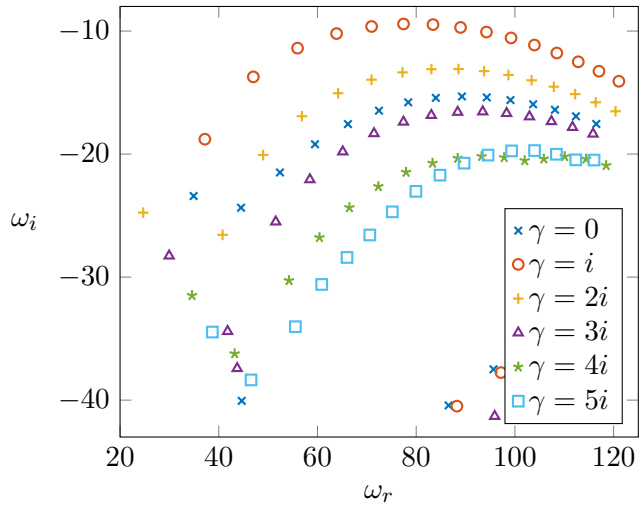


FIGURE 4.15. – Illustration de l'influence du nombre d'onde azimutal sur les modes de stabilité dans le cas circulaire ($\varepsilon = 0$). Pour ces calculs $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 2000$, $Z_{in} = 4$, $Z_{out} = 8$ et $\omega_a = 70 + 10i$.

nul. On rappelle que dans le cas axisymétrique, les conditions limites sur l'axe en fonction de γ sont identiques au cas étoilé (voir annexe C).

Les résultats montrent qu'un nombre d'onde azimutal unitaire, c'est-à-dire $\gamma = i$, conduit à des modes dont les taux d'amplification ω_i sont supérieurs à ceux des modes obtenus les autres valeurs du nombre d'onde, notamment un nombre d'onde nul. Ceci est illustré sur la figure 4.15 où sont représentés les modes en fonction de différents nombres d'onde azimutaux pour le cas étudié en détail par Boyer dans sa thèse : $\varepsilon =$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 2000$, $Z_{in} = 4$ et $Z_{out} = 8$. Le maillage comporte 100 nœuds suivant $\boldsymbol{e}_r$ et est de type $[100 - 99{,}6\%][20 - 0{,}4\%]$ suivant $\boldsymbol{e}_z$. On constate que $\gamma = 2i$ conduit également à des modes plus amplifiés que dans le cas $\gamma = 0$. De plus, on observe un certain décalage en fréquence de l'ensemble des modes en fonction du nombre azimutal. Enfin, si les fluctuations de vitesse associées aux modes obtenus avec $\gamma = 0$ sont axisymétriques, la fluctuation de vitesse azimutale est non nulle lorsque $\gamma \neq 0$. La mise en évidence de l'influence du nombre d'onde azimutal sur l'amplification des modes constitue un résultat important car il n'est pas impossible que les modes VSP observés dans certains montages expérimentaux correspondent à des nombres d'onde azimutaux non nuls et donc à des fréquences différentes de celles calculées pour un nombre d'onde nul.

Dans le cas étoilé où $\varepsilon > 0$, qui fait l'objet du paragraphe suivant, les conclusions sont identiques : le cas $\gamma = i$ conduit aux plus forts taux d'amplification pour les modes VSP.

Étude de l'influence de l'amplitude de la déviation radiale sur les modes de stabilité

Pour étudier l'influence de l'amplitude de la déviation radiale, ε, sur les modes de stabilité on se place dans le cas $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$, $m = 7$, $\gamma = 0$ et toujours avec $[Z_{in}, Z_{out}] = [4, 8]$ et la condition de pression nulle en sortie du domaine. Dans ce paragraphe, seuls les modes VSP sont étudiés. Nous verrons au paragraphe 4.3.5 que d'autres modes apparaissent dans le spectre pour les paramètres choisis lorsque $\varepsilon > 0$. La figure 4.16, qui représente une partie du spectre [15] obtenu pour les paramètres évoqués, illustre l'influence de ε sur les modes VSP. Choisir un mode et regarder son évolution avec ε plutôt que de comparer les branches de modes facilite la lecture de la figure. On constate d'une part que l'augmentation de ε tend à augmenter la fréquence des modes. D'autre part, l'augmentation de ε entraîne une diminution de ω_i pour les pulsations $\omega_r \leqslant 80$ et à l'inverse une augmentation de ω_i pour les pulsations $\omega_r \geqslant 80$. Il est délicat d'étudier des valeurs supérieures de la déviation radiale pour la valeur du nombre de Reynolds choisie ($\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$) car on rappelle

15. L'identification des modes VSP est réalisée suivant deux critères : ils constituent une ou plusieurs « branches » dans le spectre et les fonctions propres associées sont similaires à celles de la figure 4.14

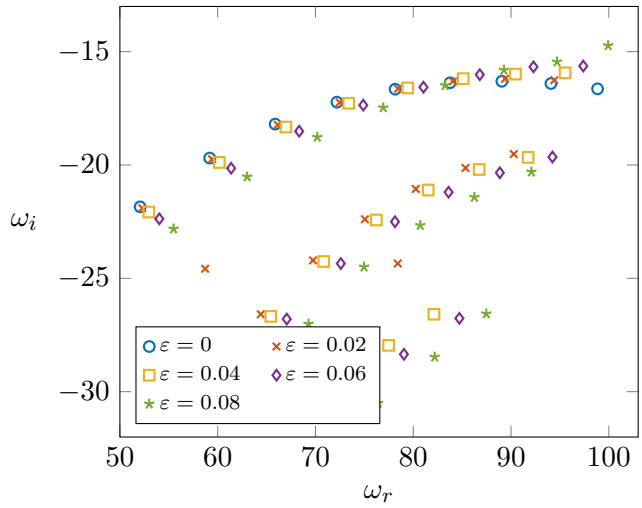


FIGURE 4.16. – Modes VSP du spectre obtenu avec $\mathcal{R}_e = 1000$, $[Z_{in}, Z_{out}] = [4, 8]$, $m = 7$, $\gamma = 0$, $l_{max} = 3$ et une discrétisation $[71 - 95\%][20 - 5\%]$ suivant $\boldsymbol{e}_z$ et monodomaine avec 100 points suivant $\boldsymbol{e}_r$.

que pour ces valeurs-là la solution analytique de l'écoulement de base n'est pas validée par la simulation Navier–Stokes (qui ne converge pas vers un état stationnaire).

Mise en évidence de nouveaux modes par rapport à la configuration circulaire

Jusqu'à présent seuls les modes associés au VSP et déjà présents dans la configuration circulaire ont été évoqués et étudiés. Or les modes *étoilés* mis en évidence par l'approche de stabilité linéaire locale existent également dans les spectres de stabilité linéaire globale sous certaines conditions. Ceux-ci peuvent être observés dans le spectre représenté dans la figure 4.17 obtenu avec $\varepsilon = 0{,}08$, $\mathcal{R}_e = 1000$, $[Z_{in}, Z_{out}] = [2, 6]$, $m = 7$, $\gamma = 0$, $l_{max} = 3$ et une discrétisation monodomaine de 100 points dans les deux directions. En outre, la condition de traction nulle est utilisée. L'utilisation d'un domaine de calcul $[2, 6]$ plus en amont que le domaine utilisé jusqu'ici permet de favoriser l'émergence des modes recherchés (voir 4.2.4). Cette figure permet de constater la présence des branches de modes VSP, déjà illustrées plusieurs fois, ainsi que l'existence de plusieurs paires de modes supplémentaires qui s'intercalent autour de la branche des modes VSP les plus amplifiés. Comme dans le cas 1D, ces paires de modes sont de nature différente des modes VSP car les fonctions propres associées ont une allure différente de celles de modes VSP.

Avant de présenter ces fonctions propres, il est important de préciser que ces modes étoilés ont pu être mis en évidence seulement dans les tous derniers mois de ces travaux de thèse. Par conséquent, l'étude de ces modes n'est pas exhaustive. Voici la liste des problèmes qui n'ont pas été résolus. Tout d'abord, seule la condition limite de traction nulle en sortie du domaine permet d'obtenir des fonctions propres convergées. Avec la condition de pression nulle, ces modes étoilés existent mais les fonctions propres associées ont une allure chaotique qui correspond à un problème de résolution numérique : potentielle erreur dans le code, mauvais conditionnement des matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, etc. Ensuite ces modes ne convergent pas vis-à-vis de la discrétisation axiale : le taux d'accroissement ω_i décroît linéairement avec le nombre de points suivant l'axe $\boldsymbol{e}_z$. La fréquence, elle, semble converger. La convergence peut possiblement s'obtenir avec un très grand nombre de points, mais elle est hors de portée de la puissance de calcul disponible. Enfin, la convergence vis-à-vis du nombre de modes dans les séries de Fourier, l_{max}, n'est pas obtenue : les modes étoilés existent quelle que soit l_{max}, mais la position des modes dans le spectre varie de manière importante, même lorsque ε est faible ($\varepsilon = 0{,}01$ par exemple). Il ressort de ces différentes observations qu'il n'est pas possible de tirer de conclusion quantitative sur ces modes, en particulier sur les taux d'amplification temporels.

Revenons maintenant sur les fonctions propres associés aux modes étoilés en se concentrant

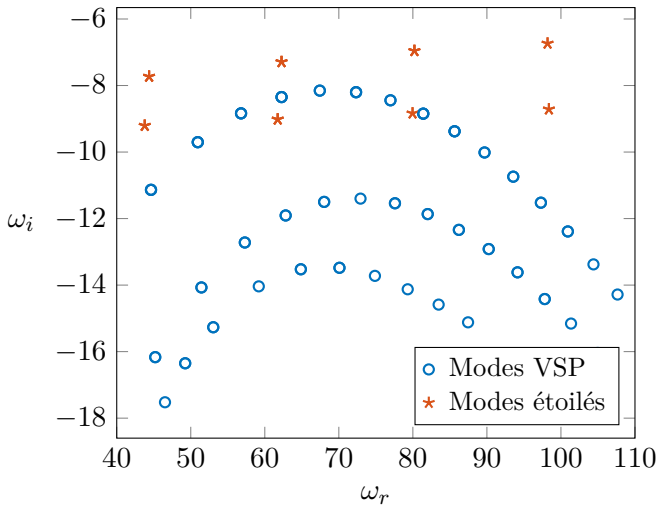


FIGURE 4.17. – Spectre obtenu pour $\varepsilon = 0{,}08$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$, $[Z_{in}, Z_{out}] = [2, 6]$, $m = 7$, $\gamma = 0$, $l_{max} = 3$ et une discrétisation monodomaine de 100 points dans les deux directions.

sur le mode $\omega = 62{,}26 - 7{,}29\mathrm{i}$ de la figure 4.17. Le profil radial des fonctions propres associées à ce mode sont tracées sur la figure 4.18. On constate la similarité de l'allure des profils avec celle obtenue dans le cas 1D (figure 4.5). Il s'agit bien du même type de mode : sur le mode de Fourier $l_{max} = 0$, seule la fluctuation de vitesse azimutale est différente de zéro et les maxima d'amplitude des fluctuations de vitesse et de pression se situent proche de l'axe. Toutefois, ici l'amplitude normalisée de la fonction propre $\hat{u}^\theta_{l=0}$ est très largement supérieure aux amplitudes des autres composantes et des autres modes de Fourier. L'étude de convergence montre que cette amplitude décroît fortement quand le nombre de point suivant $\boldsymbol{e}_z$ augmente, tandis que l'amplitude des autres fluctuations de vitesse croît quand ce nombre de points augmente. En revanche, l'allure des courbes n'est pas modifiée lorsque le maillage est raffiné dans cette direction, et la nullité de $\hat{u}^r_{l=0}$, $\hat{u}^z_{l=0}$ et $\hat{u}^p_{l=0}$ est toujours observée. De plus, on observe les mêmes symétries que dans le cas 1D lorsque le coefficient de Floquet est nul : les perturbations de vitesse radiale, de vitesse axiale et de pression sont paires vis-à-vis de θ alors que pour la perturbation azimutale, on trouve que $\hat{u}^\theta_0 \neq 0$ et $\forall l \in [\![-l_{max}, l_{max}]\!] \setminus \{0\}$, $\hat{u}^\theta_l = -\hat{u}^\theta_{-l}$.

Les fonctions propres associés aux modes *étoilés* sont, comme celles des modes VSP, fortement amplifiées dans la direction axiale. La figure 4.19 permet de constater cette amplification de type exponentielle et ce sur tous les modes de Fourier. Ici encore, le module de la fonction propre $\hat{u}^\theta_{l=3}$ est très largement supérieur aux modules des autres fonctions propres. Mais on rappelle que les modules tendent à s'équilibrer lorsque la discrétisation axiale augmente. Quoi qu'il en soit, les fonctions d'amplitude associées aux modes *étoilés*, notamment la composante azimutale, sont fortement amplifiées dans la direction axiale.

Quant à l'influence des différents paramètres sur ces modes *étoilés*, on montre qu'elle est semblable à celle obtenue avec l'approche de stabilité linéaire locale (voir 4.2.4). En effet, quel que soit le maillage ou le nombre de mode de Fourier utilisés, les taux d'amplification ω_i des modes *étoilés* croissent avec l'amplitude de la déviation radiale ε et le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_\mathrm{e}$. Concernant le coefficient de Floquet, celui-ci tend à augmenter ou diminuer l'écart vertical (sur ω_i) entre les deux branches de modes *étoilés* (en disques rouges sur la figure 4.17) dans le cas d'un maillage monodomaine de 100 points dans les deux directions et avec $l_{max} = 3$.

Étude de l'influence du nombre de branches sur les modes de stabilité

Jusqu'à présent, seuls des résultats pour $m = 7$ ont été présentés. L'influence du nombre de branches sur les modes VSP est très similaire à celle de l'influence de la déviation radiale (voir 4.3.5) : une augmentation de m tend à augmenter la fréquence de ces modes, à diminuer

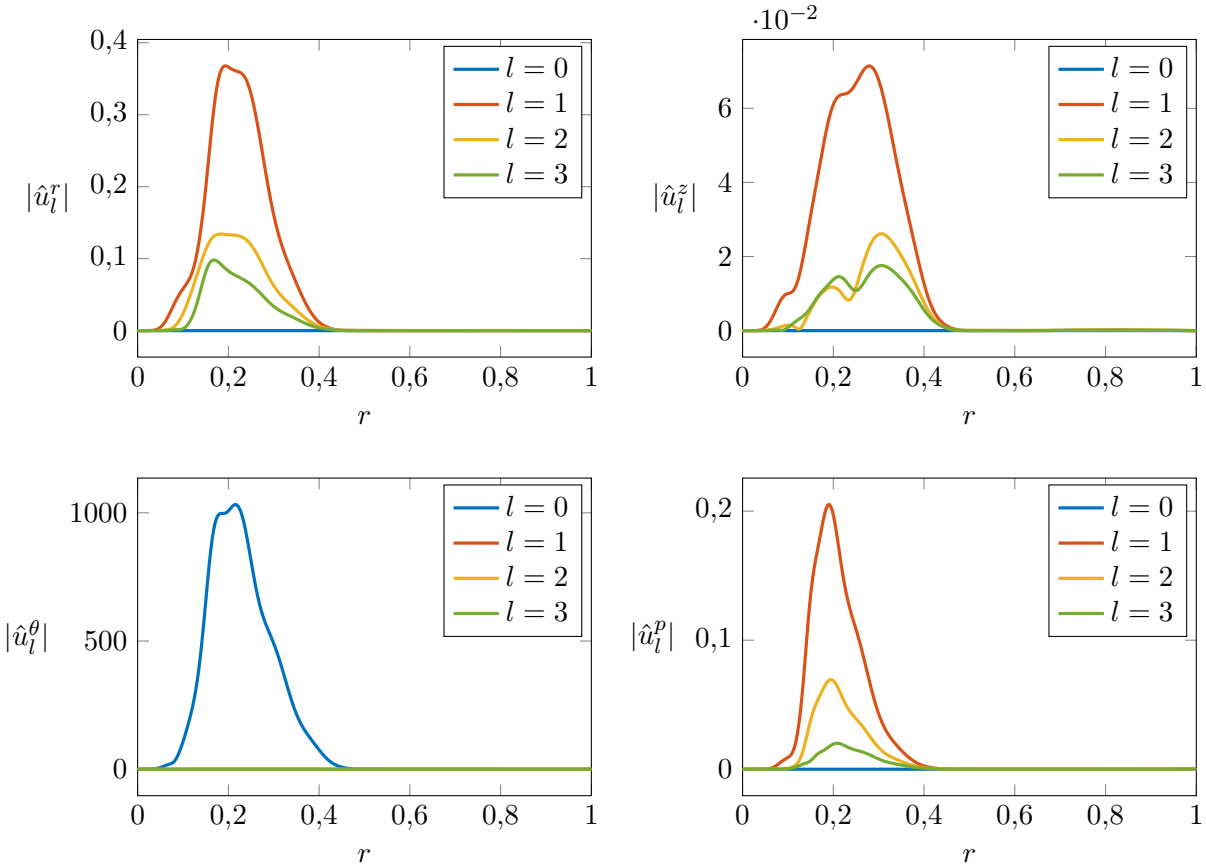


FIGURE 4.18. – Profil radial des fonctions propres associées au mode $\omega = 62{,}26 - 7{,}29\mathrm{i}$ obtenues pour $\varepsilon = 0{,}08$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$, $[Z_{in}, Z_{out}] = [2, 6]$, $m = 7$, $\gamma = 0$, $l_{max} = 3$ et une discrétisation monodomaine de 100 points dans les deux directions. Ces fonctions propres sont adimensionnées par $\max_r(|\hat{u}_r(r, z_0)|)$ pour les fluctuations de vitesse et par $\max_r(|\hat{u}_p(r, z_0)|)$ pour les fluctuations de pression. Position axiale fixée : $z_0 = 5{,}99$.

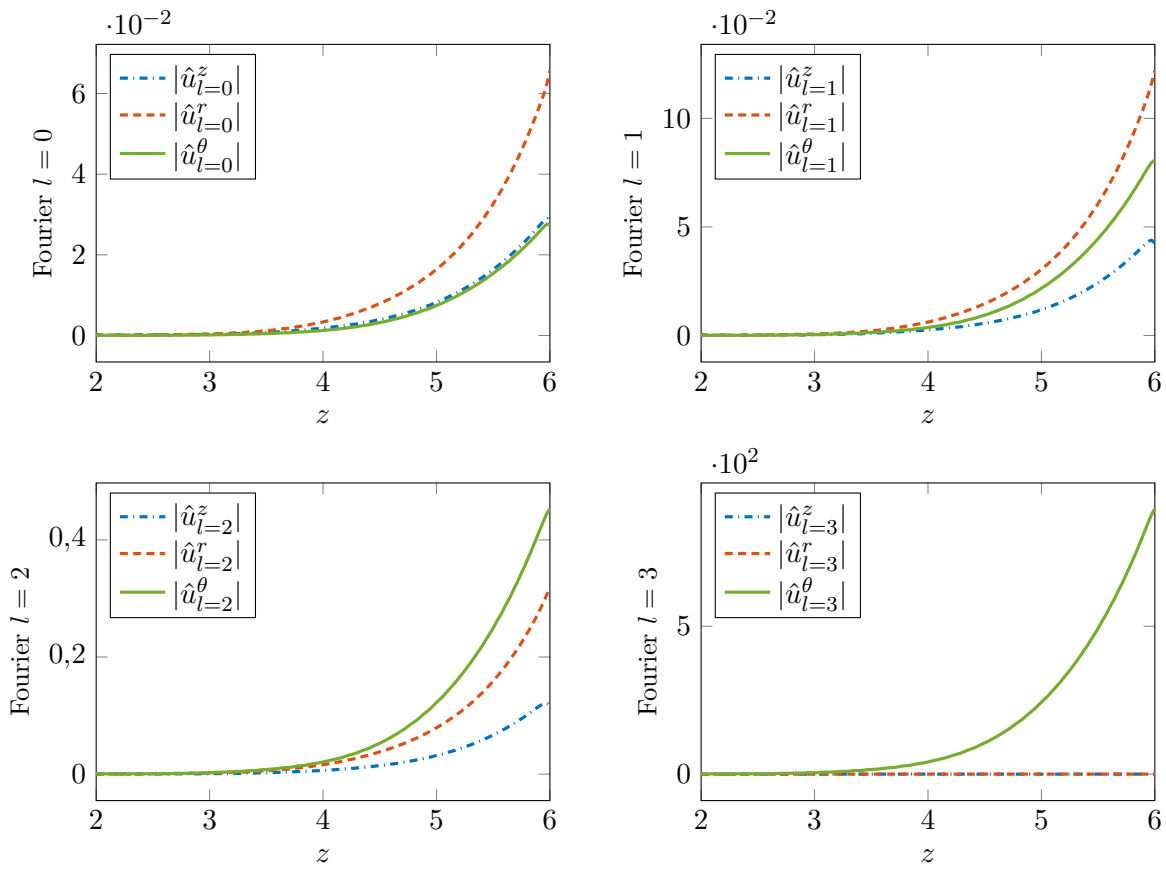


FIGURE 4.19. – Profil axial des fonctions propres associées au mode $\omega = 62{,}26 - 7{,}29\mathrm{i}$ obtenues pour $\varepsilon = 0{,}08$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$, $[Z_{in}, Z_{out}] = [2, 6]$, $m = 7$, $\gamma = 0$, $l_{max} = 3$ et une discrétisation monodomaine de 100 points dans les deux directions. Ces fonctions propres sont adimensionnées par $\max_z(|\hat{u}_r(r_0, z)|)$. Position radiale fixée : $r_0 = 0{,}29$.

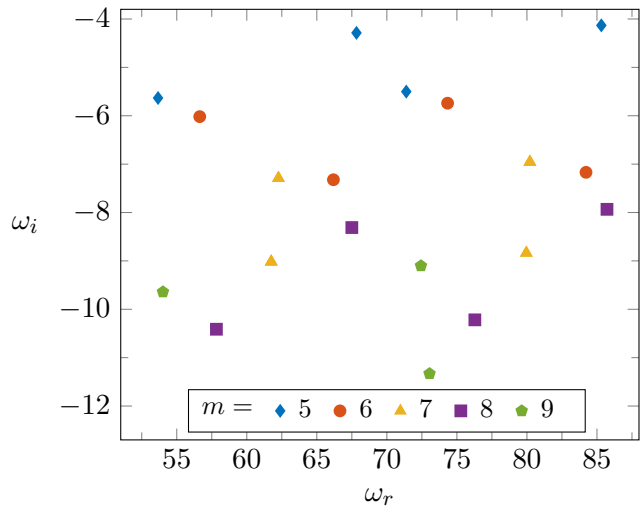


FIGURE 4.20. – Modes *étoilés* du spectre obtenu avec $\mathcal{R}_e = 1000$, $[Z_{in}, Z_{out}] = [2, 6]$, $\varepsilon = 0{,}08$, $\gamma = 0$, $l_{max} = 3$ et une discrétisation monodomaine de 100 points dans les deux directions.

la valeur de ω_i pour les pulsations $\omega_r \leqslant 80$ et à l'inverse à augmenter la valeur de ω_i pour les pulsations $\omega_r \geqslant 80$. L'influence du nombre de branches sur les modes *étoilés* est quant à elle représentée sur la figure 4.20. Ce spectre est incomplet au sens où seul un calcul pour la cible $\omega_a = 70 + 10i$ a été effectué. En décalant la cible, en diminuant ω_{ar} par exemple, il serait possible d'obtenir les modes manquants de la branche $m = 5$ (c'est-à-dire le mode $\omega \simeq 49 - 4i$) et de la branche $m = 9$ (c'est-à-dire le mode $\omega \simeq 55 - 12i$). Toutefois, on observe qu'une augmentation de m tend à diminuer la valeur du taux d'amplification temporel des modes. Précédemment, nous avons constaté sur la figure 3.3 qu'à Reynolds fixé, plus m est grand, plus le point d'inflexion du profil de vitesse axiale de l'écoulement de base apparaît pour des valeurs de ε élevées [16]. Sans que l'on ait établit de lien explicite entre ce point d'inflexion et l'existence des modes *étoilés*, il est intéressant de constater que la diminution de ω_i avec m est cohérente avec le fait que les petites valeurs de m favorisent l'apparition du point d'inflexion. Concernant l'influence de m sur les fréquences, notons que sa parité semble jouer un rôle sur l'agencement des paires de modes. De plus, on peut noter que l'écart fréquentiel entre deux modes consécutifs d'une même branche est quasi indépendant de la valeur de m : cet écart est de $\Delta\omega_r = 17{,}5$ pour $m \in \{5, 6, 7, 8\}$ et de $\Delta\omega_r = 18{,}4$ pour $m = 9$.

4.3.6. Conclusions de l'étude de stabilité linéaire biglobale

En somme, l'approche de stabilité linéaire biglobale mise en place permet de montrer deux résultats.

D'une part les modes VSP présents dans la configuration circulaire existent également dans la configuration étoilée. Leur taux d'amplification peut être modifié par l'amplitude de la déviation radiale et leur fréquence tend à augmenter avec cette déviation. Par ailleurs, un module du coefficient de Floquet unitaire, analogue au nombre d'onde azimutal dans le cas circulaire, correspond à un spectre où les modes VSP sont plus amplifiés que dans le cas où ce coefficient est nul.

D'autre part, cette approche de stabilité linéaire biglobale permet de mettre en évidence la présence dans le spectre de modes spécifiques à la configuration étoilée. Comme avec l'approche de stabilité linéaire locale, les fonctions d'amplitude associées à ces modes présentent une composante azimutale non nulle, des maxima de fluctuations proches de l'axe et une amplification dans la direction axiale. Le taux d'amplification temporel de ces modes croissent avec l'amplitude de la

16. À l'inverse, plus m est petit, plus le point d'inflexion apparaît « tôt », c'est-à-dire pour de faibles valeurs de ε.

déviation radiale et le nombre de Reynolds. En revanche, un travail reste à faire pour obtenir la convergence, notamment en maillage, de ces modes.

En comparant les résultats des approches locale et biglobale, on constate que les deux permettent de mettre en évidence la présence de modes spécifiques à la configuration étoilée. L'influence de la déviation radiale et du nombre de Reynolds sur ces modes est également la même dans les deux approches. En revanche, l'approche biglobale permet de montrer l'amplification axiale de type exponentielle des fonctions d'amplitude associées à ces modes, alors que dans l'approche locale cette évolution est imposée par la forme de la perturbation retenue (choix du nombre d'onde k et en particulier de k_i). De plus, l'approche biglobale montre que ces modes sont séparés par une certaine plage fréquentielle et sont présents sur l'ensemble de la bande spectrale étudiée.

Les deux approches ont été appliquées au cas de la géométrie définie par $\bar{r} = 1 + \varepsilon \cos(m\theta)$. Dans la suite de ce chapitre, on s'intéresse à la stabilité de l'écoulement se développant au sein d'une géométrie plus complexe.

4.4. Étude de la stabilité linéaire de la configuration du tir LP9t48

Le tir LP9t48 a été réalisé au laboratoire de propulsion du département DMPE de l'ONERA le 24 juillet 2013. Un chargement étoilé composé de deux segments occupait une virole LP9 (Godon et Prévost, 2004), avec une cavité non débitante à l'amont et une tuyère intégrée en sortie. Une vue tridimensionnelle de la configuration est disponible sur la figure 4.21, tandis qu'une coupe représentant précisément la section étoilée sera présentée plus bas. Le but de ce tir était de favoriser le déclenchement du VSP (via l'intersegment) et d'étudier son comportement dans une géométrie étoilée. Conjointement à cet essai, des simulations numériques de l'instant $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$ du tir ont été réalisées au département DEFA de l'ONERA avec le code CEDRE.

L'analyse des signaux instationnaires de pression obtenus expérimentalement montrent des niveaux d'amplitudes très différents entre la sonde placée au fond avant et celle placée au fond arrière, cette dernière enregistrant des niveaux d'amplitude plus élevés. À l'instant du tir considéré pour la simulation numérique, ces niveaux sont faibles, même pour la sonde placée à l'arrière. De plus, l'analyse fréquentielle de signaux ne montre pas d'organisation fréquentielle caractéristique du VSP. Ces différents éléments permettent de conclure que le VSP ne s'est pas développé au cours de ce tir.

Les conclusions de l'étude numérique sont différentes. Précisons tout d'abord que ces simulations sont effectuées sans modèle de turbulence et avec un maillage trop grossier pour pouvoir capter des structures turbulentes. Le but n'est pas de résoudre ou de modéliser la turbulence, il s'agit de simulations « laminaires ». Comme dans l'expérience, les amplitudes relevées au fond avant sont inférieures à celles du fond arrière. En revanche, l'amplitude des oscillations est supérieure à celles mesurées dans l'expérience de plus d'un ordre de grandeur. De plus, le spectre obtenu par transformée de Fourier des signaux instationnaires présente une certaine organisation fréquentielle avec la présence de modes élevés, mais ce spectre ne correspond pas non plus à la signature du VSP. Ajoutons que des simulations effectuées par Herakles [17] avec le solveur Navier–Stokes CPS à un autre instant du tir mais avec le même maillage partagent les conclusions des simulations effectuées avec le code CEDRE.

Au vu des différences relevées entre l'expérience (~stable) et les simulations numériques (~instables), il est apparu intéressant d'étudier la stabilité linéaire de ce tir à l'instant $t = 0{,}5\,\mathrm{s}$.

4.4.1. Obtention de l'écoulement de base

Avant d'étudier la stabilité linéaire de la configuration, il est nécessaire de déterminer l'écoulement moyen ou de base au sein de celle-ci. Rappelons à ce stade que pour pouvoir appliquer

17. Herakles fait désormais parti d'ArianeGroup.

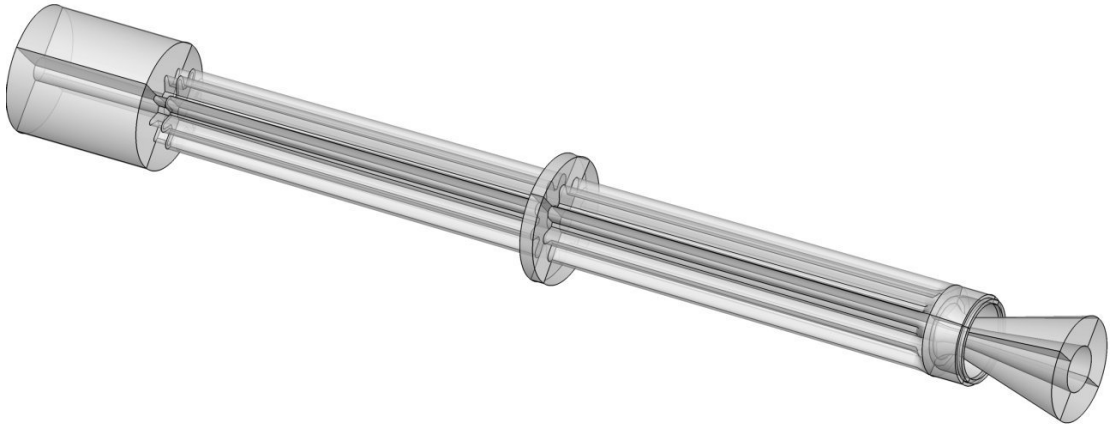


FIGURE 4.21. – Vue 3D de la configuration du tir LP9t48.

le code de stabilité linéaire (locale ou biglobale) développé dans cette thèse à un écoulement de base il est nécessaire que ce dernier soit périodique vis-à-vis de θ. En revanche l'écoulement de base peut contenir un nombre quelconque d'harmoniques et pas seulement 3 comme l'écoulement présenté au chapitre 3.

Les résultats d'une simulation Navier–Stokes instationnaire de cette configuration étant disponibles au sein du laboratoire, la démarche a d'abord consisté à exploiter cette simulation. Le calcul a donc été repris afin d'obtenir une moyenne temporelle du champ de vitesse et de la pression. Avec cette méthode, ainsi qu'en modifiant certains paramètres numériques (notamment en augmentant le pas de temps), nous ne sommes pas parvenus à obtenir un écoulement stationnaire périodique vis-à-vis de θ. Même en appliquant un post-traitement aux résultats numériques consistant à lisser les différents champs vis-à-vis de θ, l'écoulement présentait trop peu de cohérence vis-à-vis de θ. L'utilisation du code de stabilité à partir de cet écoulement n'a donc pas été possible.

4.4.2. Interpolation de la forme de la paroi

De toute évidence, l'écoulement au sein de cette configuration présentent de fortes instationnarités qui perturbent le développement d'un écoulement périodique vis-à-vis de θ. Ces instationnarités peuvent par exemple provenir de la couche de cisaillement due à l'intersegment visible sur la figure 4.21. Pour s'affranchir de ces éléments géométriques et n'étudier que l'influence de la paroi étoilée, il faudrait réaliser un calcul similaire à ceux présentés au chapitre 3, à savoir un simple cylindre semi-ouvert de géométrie étoilée. Par manque de temps, il n'a pas été possible de réaliser ce calcul dans le cadre de cette thèse.

Pour tenter de répondre au problème initialement posé, la démarche a été la suivante. Plutôt que d'étudier la stabilité linéaire d'un écoulement que nous ne parvenons pas à obtenir, on se ramène à un cas connu à savoir celui de l'écoulement au sein d'une géométrie du type $r = R_p(1+\varepsilon\cos(m\theta))$. Pour ce faire, on cherche à écrire la forme de la paroi du LP9t48 sous la forme $r = R_{LP9}(1+\varepsilon_{LP9}\cos(m_{LP9}\theta))$ et donc à déterminer R_{LP9}, ε_{LP9} et m_{LP9}. Une fois ces paramètres géométriques obtenus, il est possible de tirer des conclusions sur l'écoulement correspondant. Les paragraphes suivant détaillent la détermination de ces paramètres.

Tout d'abord les nœuds définissant la paroi sont extraits à partir du maillage disponible. Ces points sont en nombre insuffisant pour calculer une transformée de Fourier précise de la forme de paroi. Une première étape d'interpolation avec la méthode d'Akima (1970) est réalisée. Les nœuds du maillage ainsi que l'interpolation d'Akima sont représentés sur la figure 4.22a. Les longueurs sont adimensionnées par le maximum du rayon de la géométrie. Une fois la forme de la paroi récupérée, une transformée de Fourier est appliquée à la géométrie interpolée. Cette

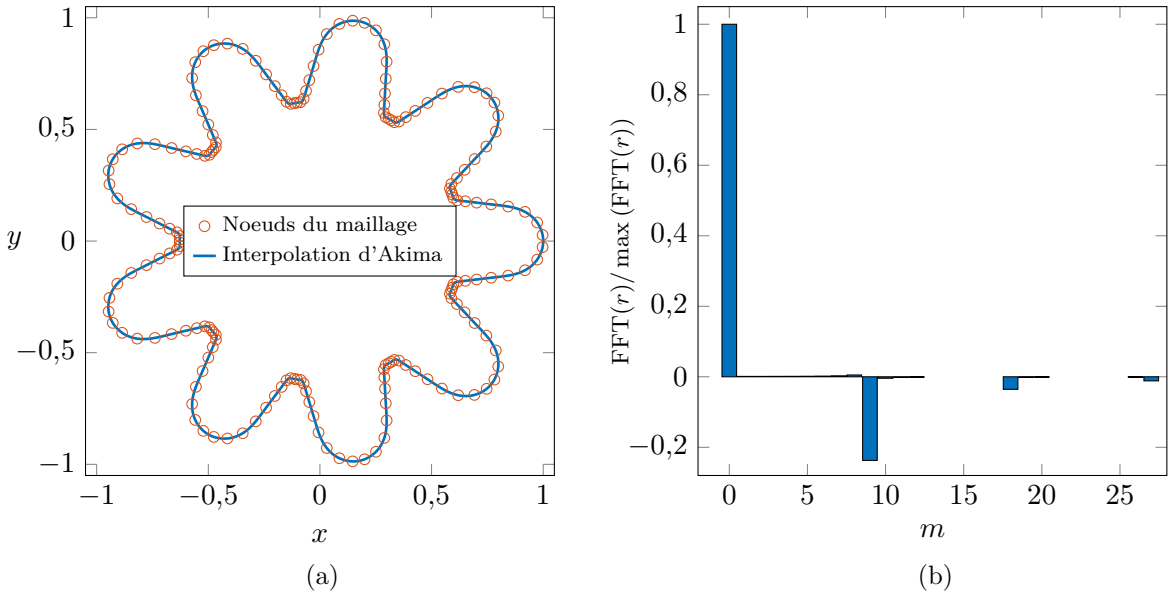


FIGURE 4.22. – (a) Forme de la paroi étoilée avec les nœuds du maillage et l'interpolation réalisée. (b) Transformée de Fourier de la paroi interpolée.

transformation est tracée sur la figure 4.22b. On constate que la paroi est constituée de plusieurs harmoniques dont la principale, hormis l'harmonique centrale correspondant au cercle moyen, est caractérisée par $m = 9$. On retrouve bien le résultat observable visuellement, à savoir que l'étoile a neuf branches, et on prendra $m_{LP9} = 9$. Avec cette donnée, il est possible de calculer les deux autres paramètres géométriques : $R_{LP9} = 2{,}29\,\text{cm}$ et $\varepsilon_{LP9} = 0{,}237$. La reconstruction de la paroi avec ces paramètres et la comparaison de cette forme avec les nœuds du maillage sont réalisées sur la figure 4.23. La reconstruction est évidemment sensiblement différente de la géométrie initiale puisque cette dernière n'est pas définie par $r = R_{LP9}\left(1 + \varepsilon_{LP9}\cos\left(m_{LP9}\theta\right)\right)$. Les différences les plus notables sont l'écart des maxima d'amplitude ainsi que l'aplatissement de la paroi non retrouvé par la reconstruction au niveau du creux de l'étoile. Pour récupérer cette évolution particulière, il faut prendre en compte toutes les contributions $m \in [\![1, 8]\!]$. Quant aux maxima d'amplitude, ils peuvent être obtenus en prenant en compte davantage de multiples de $m = 9$. Toutefois, la reconstruction obtenue a le mérite d'être associée à une solution stationnaire connu, déterminée au chapitre 3. La valeur du rayon moyen, associée à la vitesse d'injection et à la viscosité cinématique, permet de calculer le nombre de Reynolds d'injection de la configuration : $\mathcal{R}_\text{e} = 6000$. Il est possible de calculer la solution analytique déterminée au chapitre 3 correspondant au nombre de branches m_{LP9} et au nombre de Reynolds d'injection $\mathcal{R}_{\text{e}LP9}$. Pour la valeur $\varepsilon_{LP9} = 0{,}237$, le profil de vitesse axiale de la solution obtenue présente plusieurs points d'inflexion. Il est d'ailleurs possible de placer le couple $(\mathcal{R}_\text{e} = 6000, \varepsilon = 0{,}237)$ sur la figure 3.3 en extrapolant la limite entre le domaine où il n'y existe pas de point d'inflexion et son complémentaire, ce qui conduit à la figure 4.24. Cette figure permet notamment de constater que le couple se situe très largement dans un domaine il existe des points d'inflexion et n'est pas proche de la frontière.

4.4.3. Bilan de l'étude du cas LP9t48

Nous venons de montrer que l'approximation de la géométrie de la configuration du tir LP9t48 par une forme du type $r = R_{LP9}(1 + \varepsilon_{LP9}\cos(m_{LP9}\theta))$ est associée à un écoulement de base théorique présentant plusieurs points d'inflexion. Tout porte à croire qu'une simulation CEDRE d'un cylindre semi-ouvert de section $r = R_{LP9}(1 + \varepsilon_{LP9}\cos(m_{LP9}\theta))$ avec $\mathcal{R}_\text{e} = 6000$ ne convergerait vraisemblablement pas vers une solution stationnaire, au vu de ce qui a été observé au chapitre 3. Cette observation est cohérente avec les difficultés rencontrées lors de la tentative

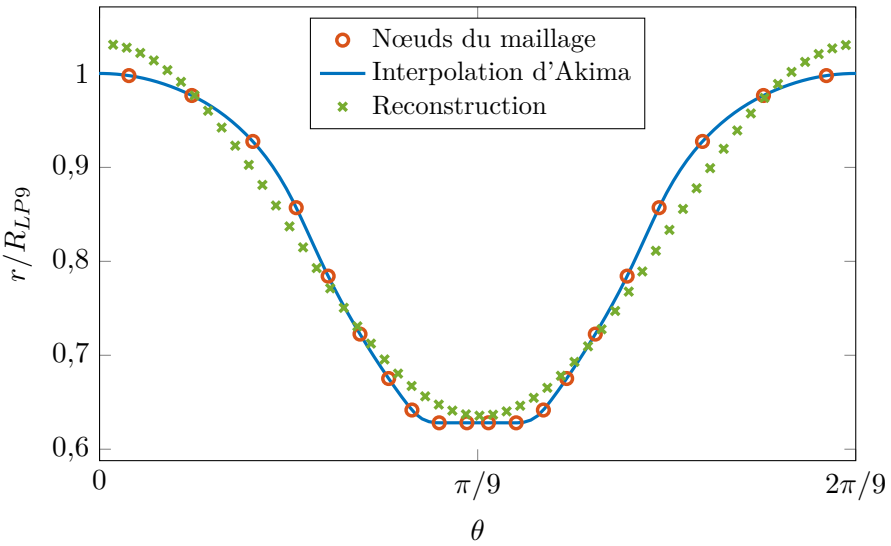


FIGURE 4.23. – Reconstruction de la forme de la paroi par une fonction du type $r = R_{LP9}\left(1 + \varepsilon_{LP9}\cos\left(m_{LP9}\theta\right)\right)$ et comparaison avec les nœuds du maillage.

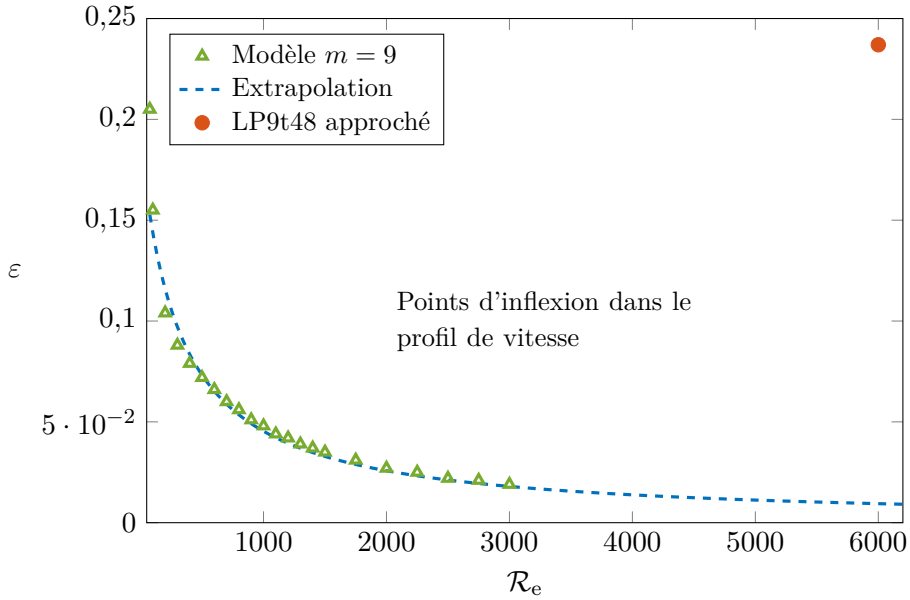


FIGURE 4.24. – Placement du couple $(\mathcal{R}_{eLP9}, \varepsilon_{LP9})$ sur le graphique délimitant l'apparition des points d'inflexion dans le profil de vitesse axiale de la solution analytique. En traits pointillés, une extrapolation de type fraction rationnelle permet de prolonger graphiquement la séparation des domaines.

d'obtention d'une solution stationnaire périodique vis-à-vis de θ de la configuration complète du tir LP9t48. On n'exclut donc pas la présence d'une instabilité dans la configuration de ce tir. En revanche, il est délicat de lier cette instabilité avec l'instabilité décrite lors des études de stabilité linéaire locale et biglobale (4.2 et 4.3), ne serait-ce que parce que les géométries sont distinctes : les études de stabilité ne prennent pas en compte d'intersegment, de chambrage arrière, de tuyère ou même de géométrie contenant plusieurs harmoniques. Néanmoins, une instabilité semblable à celle décrite dans les parties précédentes (4.2 et 4.3) permettraient de donner une explication possible aux différences constatées entre l'expérience et la simulation. En effet, l'existence dans le spectre d'un mode amplifié temporellement conduirait à une transition laminaire-turbulent et l'ensemble de l'écoulement serait turbulent. Dans cette optique, Gazanion (2014) a montré que le VSP n'est pas observé, ce qui est le cas de l'expérience. Quant à la simulation numérique, on rappelle qu'il s'agit d'une simulation « laminaire » dont le maillage n'est pas capable de simuler un écoulement turbulent. En négligeant cet aspect de l'écoulement, la simulation n'est alors pas représentative de l'expérience et permet le développement d'oscillations de forte amplitude.

Bilan

L'étude de stabilité linéaire de la solution analytique présentée au chapitre précédent a tout d'abord nécessité la mise en place d'outils permettant le calcul des coefficients des systèmes d'équations à résoudre. En effet, l'application du théorème de Floquet pour modéliser la dépendance azimutale des fonctions propres conduit à l'utilisation de séries de Fourier, ce qui complique la linéarisation des équations de Navier–Stokes et la détermination des coefficients du système. Ceux-ci sont d'abord déterminés grâce à un logiciel de calcul formel. Puis ils sont utilisés par un autre script pour générer des routines Fortran constituant le cœur du code de résolution du problème aux valeurs propres que l'on cherche à résoudre.

Dans le cas de l'analyse locale, l'alternative de Fredholm a permis de valider la sensibilité vis-à-vis de la déformation radiale des modes calculés par le code de résolution « étoilé ». Les calculs de stabilité locale, lorsque la déformation radiale est non nulle, montrent l'existence de nouveaux modes dans le spectre, en plus du mode *axisymétrique* observé dans la configuration circulaire. Ces modes sont associés à des fluctuations dont l'argument des maxima se situe proche de l'axe et, plus précisément, proche du point d'inflexion du profil de vitesse axiale de l'écoulement de base. Une étude paramétrique a permis de montrer que ces modes sont d'autant plus amplifiés temporellement que la déformation radiale est grande et que le nombre de Reynolds est grand. En revanche leurs taux d'amplification décroissent avec la position axiale à laquelle l'étude locale est menée. À l'inverse le mode *axisymétrique* se révèle peu sensible à la déformation radiale et au nombre de Reynolds et, comme dans le cas circulaire, son taux d'amplification augmente avec la position axiale. Quantitativement, il n'est pas possible de conclure sur le signe du taux d'amplification des modes car le nombre d'onde reste un paramètre libre de cette étude locale.

C'est pourquoi l'étude de stabilité biglobale revêt toute son importance. Les spécificités d'une telle étude, notamment au niveau de la résolution numérique via l'algorithme d'Arnoldi, ont été rappelées. Le code de résolution biglobale a été validé indirectement par comparaison aux résultats de la configuration axisymétrique. Une étude de l'influence des différents paramètres liés à l'étoile sur les modes déjà observés en configuration circulaire a été menée. Pour les modes associés au VSP, cette étude montre notamment qu'un coefficient de Floquet unitaire conduit à des taux d'amplification supérieurs à ceux obtenus pour un coefficient nul. Toutefois, ces modes classiquement associés au VSP restent temporellement stables quels que soient les paramètres utilisés, notamment l'amplitude de la déformation radiale et le nombre de Reynolds. Par ailleurs, l'existence de nouveaux modes spécifiques à la géométrie étoilée est confirmée par l'étude de stabilité linéaire biglobale. Leur sensibilité vis-à-vis des différents paramètres du problème est semblable à celle observée avec l'approche de stabilité linéaire locale. En revanche, des problèmes subsistent quant à la convergence de ces modes vis-à-vis de la discrétisation axiale et de la troncature des séries de Fourier qui composent les fonctions d'amplitude.

L'application des outils de stabilité linéaire au cas d'un tir de moteur à échelle réduite, le LP9t48, a été compromise par la difficulté d'obtenir un écoulement moyen périodique vis-à-vis de la coordonnée azimutale. À défaut de pouvoir réaliser l'étude de stabilité linéaire, la géométrie du montage expérimental a été approchée par une géométrie au sein de laquelle on dispose d'une solution analytique pour l'écoulement moyen. Cette opération a permis de montrer que le profil de vitesse axiale de l'écoulement moyen qui se développe dans la géométrie approchée présente plusieurs points d'inflexion. Une instabilité associée à ces points d'inflexion pourrait expliquer les écarts observés entre les simulations numériques de ce tir et les données expérimentales disponibles.

Si les modes étoilés se révélaient être temporellement amplifiés, que ce soit dans le cas du LP9t48 ou d'une autre géométrie étoilée, leur émergence conduirait possiblement à une transition laminaire-turbulent de l'écoulement porteur. Or il est connu que les structures tourbillonnaires du VSP sont en partie dissipées par la turbulence. La question du lien entre la transition laminaire-turbulent et les modes VSP est donc primordiale.

Chapitre 5

Étude de l'influence de la condition d'impédance acoustique de sortie et du bruit d'injection sur le développement des oscillations

L'objectif de ce chapitre est d'étudier numériquement l'influence de la condition d'impédance acoustique de sortie et du bruit d'injection sur le développement des oscillations de pression dans la configuration du montage VALDO. Pour cela, des simulations LES de la configuration du montage en gaz froid ont été réalisées. Le domaine de calcul de ces simulations comprend le conduit mais aussi le jet débouchant à la sortie du conduit, afin d'obtenir un environnement acoustique le plus proche possible de l'expérience. La première partie de ce chapitre est consacrée à la mise en place de ces simulations et notamment à la méthode de perturbation de la condition limite d'injection. Cette perturbation est nécessaire pour voir émerger des modes VSP et induire une transition laminaire-turbulent au sein du conduit. Dans la seconde partie de ce chapitre, les résultats des simulations sont étudiés : l'amplitude des oscillations des différents forçages est comparée à celle de l'expérience, la transition laminaire-turbulent est mise en évidence et l'accrochage aéroacoustique est examiné.

Sommaire

5.1. Description de la méthode et de la réalisation des simulations 120
5.1.1. Définition du domaine de calcul et construction du maillage 120
5.1.2. Sélection des paramètres numériques et des conditions limites 121
5.1.3. Pertinence des paramètres numériques et du maillage 123
5.1.4. Énumération des données enregistrées 123
5.1.5. Description de la méthode de perturbation de la condition limite d'injection 125
5.1.6. Réalisation des simulations 127
5.2. Exploitation des résultats des simulations 129
5.2.1. Liste succincte de l'évolution de chaque forçage 129
5.2.2. Comparaison des niveaux d'amplitude des oscillations 129
5.2.3. Transition laminaire-turbulent 130
5.2.4. Importance de l'accrochage aéroacoustique 132
5.2.5. Piste pour l'amélioration des simulations 136

Le point de départ des travaux sur la transition laminaire-turbulent réalisés au cours de cette thèse sont les simulations LES effectuées par Gazanion (2014). Comme cela est évoqué dans le chapitre 1, ces simulations ont permis de reproduire numériquement la transition laminaire-turbulent au sein du montage VALDO et de montrer que cette transition est précédée par l'amplification de modes VSP. Le spectre des signaux instationnaires issus de ces simulations, bien qu'en bon accord avec les données expérimentales d'un point de vue qualitatif, montrent un écart de l'ordre de 40 Hz avec l'expérience. Comme les fréquences des fluctuations qui se développent dans l'écoulement résultent d'un accrochage entre le VSP et l'acoustique, il s'est posé la question de la qualité de la représentation acoustique dans les simulations de Gazanion. On rappelle que dans ces simulations, une pression est imposée dans un plan transversal à la sortie du conduit tandis qu'une perturbation est appliquée au niveau de la condition d'injection sur la paroi latérale. Dans les travaux présentés dans ce manuscrit, on se propose de reprendre ces simulations en étudiant l'influence de l'impédance acoustique de la sortie du conduit et de la condition limite d'injection sur les amplitudes et les fréquences des phénomènes instationnaires.

5.1. Description de la méthode et de la réalisation des simulations

La simulation est effectuée avec la plateforme CEDRE développée à l'ONERA et présentée au chapitre 2. Ce code a été utilisé dans plusieurs thèses précédentes et en particulier dans celles de Dupuy (2012) et de Gazanion (2014) pour étudier la transition laminaire-turbulent respectivement dans les montages VECLA et VALDO. C'est donc naturellement que ce code a été sélectionné pour effectuer ces simulations. La configuration étant axisymétrique, le changement de variable utilisé au cours des chapitres précédents n'est jamais utilisé dans ce chapitre. Pour simplifier les notations et améliorer la clarté des explications, on désigne dans ce chapitre les trois coordonnées d'espace sous leur forme dimensionnelle par x, y, z et leurs équivalents cylindriques par r, θ, z. De même, le vecteur vitesse instationnaire est noté $\boldsymbol{u}$.

5.1.1. Définition du domaine de calcul et construction du maillage

Le montage expérimental VALDO a été présenté au chapitre 2. Dans la configuration qui nous intéresse ici (4 segments), le montage consiste en un conduit semi-ouvert de section circulaire de 672 mm de long et de 60 mm de diamètre. Le fond avant et la paroi latérale, constituée d'un poral, représentent deux limites géométriques du domaine de calcul. Dans sa simulation, Gazanion (2014) limite son domaine de calcul au conduit seul : son domaine est délimité par le fond avant, la paroi latérale et un plan perpendiculaire à l'axe du conduit au niveau de la sortie à 672 mm du fond avant. Comme expliqué au chapitre 1, l'utilisation d'une condition limite réfléchissante [1] de type *pression imposée* sur ce plan de sortie a conduit à une mauvaise représentation de l'environnement acoustique. Pour améliorer cette représentation, il a été choisi d'ajouter la zone du jet débouchant à la sortie du conduit au domaine de calcul. Pour cela, il a fallu reproduire le divergent présent dans l'expérience et construire un maillage comportant deux zones principales : le conduit et la zone proche de la sortie du conduit. Le domaine de calcul est représenté schématiquement sur la figure 5.1. L'extérieur du conduit est lui-même composé de deux zones concentriques : une première, proche de la sortie, permettant de correctement calculer le jet débouchant et une seconde, autour de la précédente, permettant de déraffiner progressivement le maillage jusqu'aux frontières du domaine.

Le maillage doit être raffiné dans le conduit (domaine bleu sur la figure 5.1) afin de simuler correctement la transition laminaire-turbulent, ainsi qu'au niveau des couches de mélange à la sortie du conduit (domaine rouge) et enfin plus lâche dans la zone tampon pour dissiper l'acoustique résiduelle (domaine pointillé). Le maillage a été réalisé par F. Chedevergne et présente les caractéristiques suivantes : le conduit est constitué d'environ 30 millions de cellules tandis que la sortie du conduit, avec un raffinement limité à quatre diamètres, est constituée d'environ 20

1. Rappelons qu'en l'absence de tuyère, l'écoulement au sein de la configuration étudiée est subsonique (voir paragraphe 2.3.

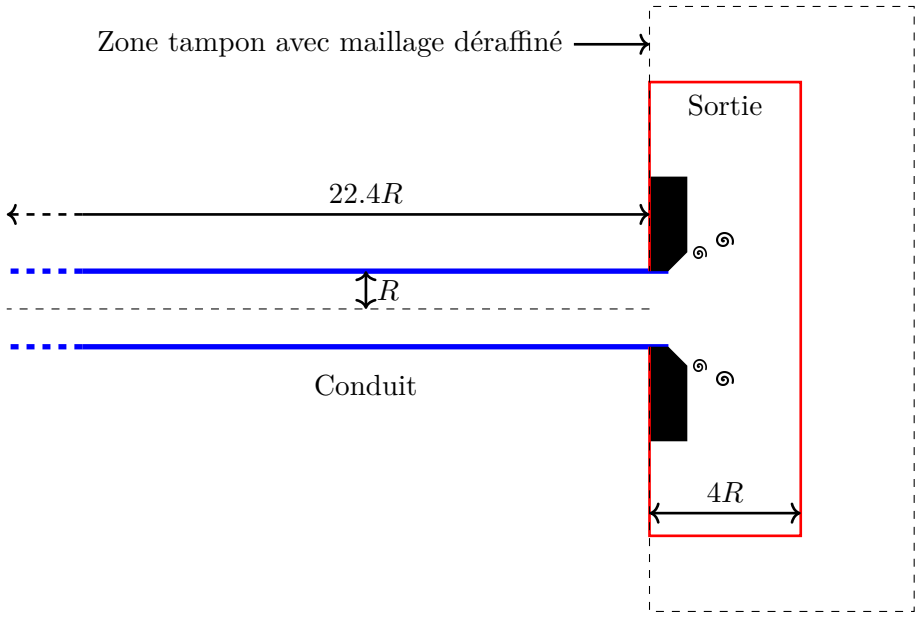


FIGURE 5.1. – Représentation du domaine de calcul.

millions de cellules. Le maillage est hybride (mélange d'hexaèdres/tétraèdres) et comporte donc au total 50 millions de cellules. Il faut rappeler ici qu'il n'y a pas de couche limite le long des parois du conduit, sauf marginalement sur la paroi au fond avant. Ceci est dû fait que la vitesse d'injection est forte comparée à la vitesse de frottement : la couche limite est en quelque sorte « soufflée » par l'injection et le maillage ne nécessite donc pas un raffinement excessif en proche paroi. En pratique, les mailles sont dimensionnées de sorte à capter les détachements tourbillonnaires le long de la paroi injectante. Or l'échelle de grandeur de ces tourbillons est de l'ordre de $R_p/10$, ce qui permet d'avoir un maillage moins raffiné que s'il avait fallu capter des phénomènes liés à la présence d'une couche limite par exemple. La discrétisation radiale au sein du conduit est représentée sur la figure 5.2. Ce motif est extrudé par couches de 1 mm d'épaisseur dans la direction axiale. À la sortie du conduit, des prismes sont utilisées pour capter la couche de mélange.

5.1.2. Sélection des paramètres numériques et des conditions limites

Calcul du pas de temps et choix du schéma d'intégration temporelle

Le calcul du pas de temps δt_c de la simulation s'est fait sur la base d'un critère CFL (Courant–Friedrichs–Lewy). On définit le CFL convectif par $U\delta t_c/\delta x$ où δx est la plus petite dimension au sein d'une maille et U la vitesse de l'écoulement moyen. Puis on définit le CFL acoustique par $(U+c)\delta t_a/\delta x$ où c est la célérité du son. Pour résoudre correctement les structures tourbillonnaires liées au VSP, il est nécessaire d'assurer que le CFL convectif soit inférieur à 1. Concernant le CFL acoustique, il doit être inférieur à 1 pour un schéma d'intégration temporelle explicite mais peut être supérieur à 1 pour une intégration implicite. Le choix entre ces deux intégrations résulte donc du pas de temps que celles-ci nécessitent et de l'adéquation avec les ressources de calcul. Après une première phase de convergence permettant d'initialiser la simulation, le pas de temps est abaissé jusqu'à obtenir un CFL acoustique unitaire. Cela correspond à un pas de temps de $\delta t_a = 1{,}5 \times 10^{-7}$ s. Une simulation avec un schéma de Runge–Kutta explicite d'ordre 2 a été essayée avec un pas de temps inférieur à cette valeur, mais il s'avère que la stabilité de ce schéma nécessite des pas de temps beaucoup trop faibles comparé aux ressources disponibles pour effectuer ces simulations. Le choix s'est donc porté vers un schéma de Runge–Kutta implicite d'ordre 2 (RKI2) avec un pas de temps de 4×10^{-7} s. Cette valeur conduit à un CFL convectif de 0,5 et un CFL acoustique de 2.7. Lorsque le CFL acoustique est inférieur à 3, le schéma RKI2 du code CEDRE permet de calculer l'acoustique précisément dans la gamme de fréquence qui nous

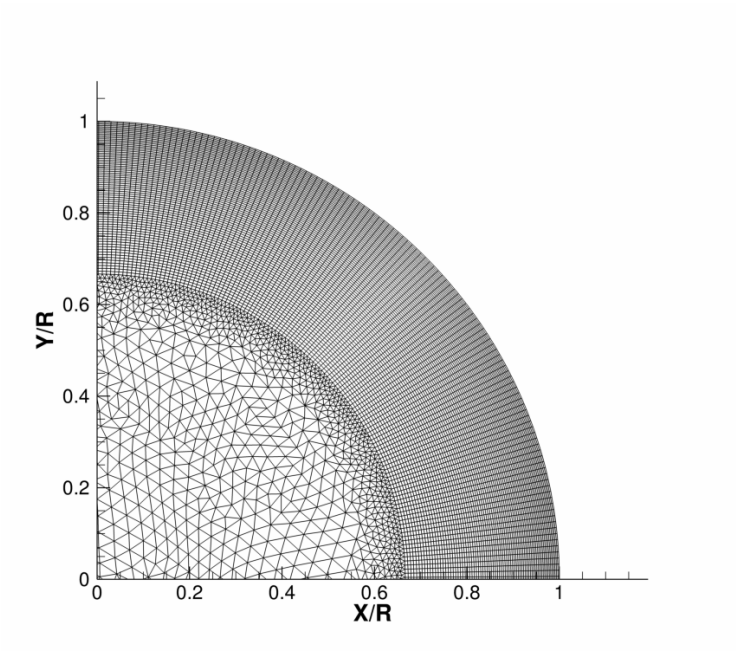


FIGURE 5.2. – Vue en coupe du maillage dans un quart de section transversale au sein du conduit.

intéresse ($f \leqslant 5\,\mathrm{kHz}$) (Vuillot *et al.*, 2003).

Schéma d'intégration spatiale

Concernant l'intégration spatiale, une interpolation d'ordre 2 associée au flux numérique HLLC (Toro *et al.*, 1994) est utilisée. Il était prévu dans un premier temps d'augmenter l'ordre de la discrétisation pour en étudier l'effet sur les oscillations de pression, en particulier sur les amplitudes. Toutefois, il a été préféré de réaliser une plus large variété de forçages (voir 5.1.6) plutôt que d'augmenter cet ordre de discrétisation.

Modèle de sous-maille

Les simulations sont effectuées sans modèle de sous-maille suivant l'approche MILES (Monotonically Integrated Large Eddy Simulation). La dissipation des plus petites échelles turbulentes est donc réalisée par le raffinement modéré du maillage. Suivre l'approche MILES plutôt que d'utiliser un modèle classique de sous-maille de type Smagorinsky est un choix qu'avait déjà réalisé Gazanion dans ses travaux de thèse. Son choix s'est révélé satisfaisant et la configuration présentée dans ce chapitre étant proche de celle de Gazanion, cette approche est adoptée.

Conditions limites

Au fond avant, une condition de glissement est imposée alors que c'est une paroi dans le montage expérimental. Utiliser une condition de paroi au fond avant impliquerait la nécessité de raffiner fortement le maillage à cet emplacement pour résoudre la couche limite et la zone de recirculation qui s'y développeraient. De plus, Apte et Yang (2003) et Gazanion (2014) choisissent une condition de glissement pour s'affranchir du calcul de cette zone de recirculation. Pour ces raisons, nous optons pour une condition de glissement pour le fond avant.

La paroi latérale du conduit (en bleu sur le schéma 5.1), constituée de poral dans l'expérience, fait l'objet d'entrée à vitesse imposée. Dans le montage VALDO et plus précisément dans la campagne expérimentale choisie, la vitesse d'injection est de $V_{inj} = 1{,}05\,\mathrm{m/s}$. Dans la présente simulation, cette condition d'injection fait l'objet d'une perturbation pour déclencher le VSP. La description de cette perturbation est réalisée au paragraphe 5.1.5.

Puisque le domaine de calcul inclut le conduit et son jet débouchant, il n'y pas de condition à imposer au niveau du plan de sortie du conduit. En revanche le divergent du montage et les éléments géométriques qui entourent ce dernier (en noir sur le schéma) sont représentés par des parois imperméables adiabatiques.

Une condition de glissement est imposée sur la limite latérale du domaine extérieur (en pointillés horizontaux sur le schéma), tandis qu'une condition de vitesse entrante est imposée à l'extérieur du conduit, au delà du divergent (ligne pointillée verticale la plus à gauche sur le schéma). Cette condition de vitesse entrante, fixée arbitrairement [2] à 1 m/s, permet de faciliter l'aspiration de l'écoulement autour du jet débouchant. Enfin, la sortie du domaine extérieur (ligne pointillée verticale la plus à droite sur le schéma) est simulée par une condition de type sortie subsonique à pression imposée (la pression choisie est de 1013 hPa).

Les conditions limites de type vitesse entrante nécessitent de choisir une valeur pour la température : nous retenons 300 K.

5.1.3. Pertinence des paramètres numériques et du maillage

Un certain de nombre de choix concernant les paramètres numériques de la simulation ont été opérés dans les paragraphes précédents. Ces choix se justifient au vu de la configuration étudiée.

L'utilisation d'un code compressible et d'un schéma d'intégration d'ordre 2 en temps et en espace pour simuler une instabilité peut paraître insuffisante. Cependant, cette instabilité est associée à des longueurs d'onde relativement grandes ($\simeq R_p/2$) ce qui permet, avec le maillage employé, de correctement simuler cette instabilité avec un schéma d'ordre 2 en espace. Par ailleurs, l'intégration temporelle implicite d'ordre 2 retenue est associée à un pas de temps (4×10^{-7} s) correspondant à un nombre CFL convectif inférieur à 1 et à un nombre CFL acoustique légèrement supérieur à 2. Ces nombres CFL permettent de calculer convenablement l'instabilité étudiée, dont la fréquence dominante est relativement faible ($\simeq 400$ Hz). La robustesse de l'instabilité conduisant au VSP qui, une fois installé, s'entretient relativement aisément, justifient les choix opérés.

Par ailleurs, il est important de distinguer la transition laminaire-turbulent étudiée ici de celle d'une couche limite par exemple. Nous cherchons à simuler l'amplification de structures tourbillonnaires de grande échelle, la saturation non-linéaire des fluctuations générées, la tridimensionnalisation de l'écoulement puis la création de structures turbulentes de plus petite taille. Avec ces différents éléments la transition laminaire-turbulent simulée est représentative de celle observée dans l'expérience, bien que toutes les échelles de dissipation de la turbulence ne soient pas captées. On ne s'intéresse pas aux caractéristiques de la turbulence générée et par conséquent l'approche MILES convient pour cette étude.

5.1.4. Énumération des données enregistrées

Les données enregistrées sont principalement des mesures du champ de vitesse et de la pression en un nombre discret de positions au sein du conduit à intervalles de temps réguliers. On peut associer ces mesures à des sondes placées dans le conduit possédant une certaine fréquence d'acquisition. Dans les données expérimentales du montage VALDO, la signature fréquentielle des oscillations de pression se situe dans la gamme de fréquence 300 Hz – 400 Hz (voir figure 5.8). Afin de pouvoir capter ces oscillations mais aussi une partie du spectre turbulent, la fréquence d'acquisition de la simulation est fixée à 10 kHz. Ceci équivaut à des mesures toutes les 250 itérations avec le pas de temps de 4×10^{-7} s. Les sondes, au nombre de 1490, sont reparties dans le conduit de sorte à reproduire les positions de mesure de l'expérience et à compléter celles-ci afin de d'augmenter la résolution spatiale des signaux. La disposition des sondes est détaillée dans le tableau 5.1 et est illustrée sur la figure 5.3.

À cet archivage des sondes s'ajoute un archivage des mêmes données sur trois nuages de point dans des plans transversaux situés respectivement 1 mm avant la sortie du conduit, au niveau de la sortie du conduit et 1 mm en aval de la sortie du conduit. Ces nuages de points ont pour but de

2. Pour comparaison, la vitesse maximale du jet à la sortie du conduit est de 70 m/s.

z (en mm)	z/R_p	Capteurs
49	1,63	31 positions radiales entre $-R_p$ et R_p avec un pas de 2 mm pour $\theta = 0$
119	3,97	
217	7,23	
252	8,4	
287	9,57	31 positions radiales entre 0 et R_p avec un pas de 1 mm pour $\theta = k\pi/4,\ k \in [\![0, 7]\!]$
336	11,2	
385	12,8	
420	14	
455	15,2	
504	16,8	31 positions radiales entre $-R$ et R_p avec un pas de 2 mm pour $\theta = 0$
553	18,4	
623	20,8	
660	22	

TABLE 5.1. – Positions des 1490 sondes dans le conduit.

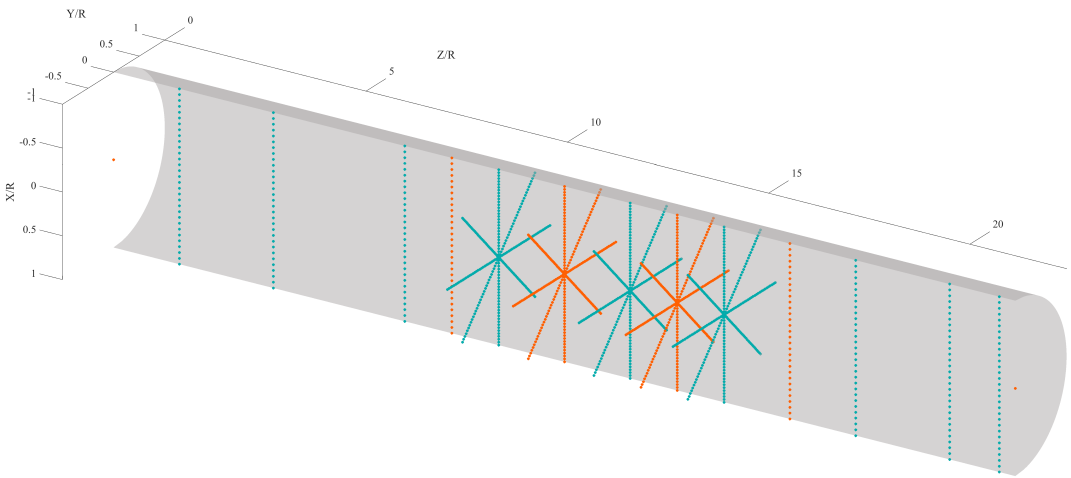


FIGURE 5.3. – Représentation de la disposition des sondes (tous les points représentés) de la simulation dans le conduit. Les positions de mesures du montage expérimental sont représentées en orange.

permettre la détermination de la condition d'impédance acoustique de la sortie du conduit. L'enjeu est de pouvoir à l'avenir simuler le conduit sans le jet, en reproduisant l'environnement acoustique de l'expérience grâce à cette condition d'impédance recherchée via l'approche numérique.

Enfin, les champs volumiques instantanés sont enregistrés à la fin de chaque passe de calcul, c'est-à-dire à une fréquence de 100 Hz (voir 5.1.6). Ces champs permettent d'observer le développement des structures tourbillonnaires associées au VSP et de veiller au bon déroulement de la simulation.

5.1.5. Description de la méthode de perturbation de la condition limite d'injection

Commençons par rappeler que le VSP est associé à une instabilité amortie dans le temps et nécessite donc une excitation continue (en espace ou en temps) pour se développer. En réalisant une simulation avec une condition d'injection uniforme le long de la paroi latérale du conduit, aucune structure tourbillonnaire ne se développerait. Il est donc nécessaire de perturber l'écoulement au sein du conduit. Dans les moteurs à propergol solide, les sources d'excitation sont multiples : irrégularité de la surface en combustion, éléments géométriques tels que les PTF, discontinuités géométriques telles que les intersegments etc. Dans le montage VALDO, il est légitime de supposer que l'excitation provient de l'injection de l'air à travers le poral et des intersegments. Concernant ces derniers, ils peuvent être simplement représentés dans les simulations par une interruption de débit au niveau de la paroi injectante sur les quelques cellules du maillage qui sont situées aux endroits correspondant.

En revanche il est nettement plus difficile de reproduire fidèlement la perturbation liée à l'injection au travers d'un matériau poreux. La solution consistant à reproduire le poral dans les simulations, c'est-à-dire à simuler une paroi latérale contenant un très grand nombre de trous d'une petite dimension au travers desquels un fluide est injecté, est hors de portée des ressources de calcul dont nous disposons. En effet, le diamètre des trous du poral est de 10 µm alors que le rayon du conduit est de l'ordre du centimètre, ce qui implique une variété d'échelles de longueur bien trop importante. Il a donc été choisi de modéliser le bruit d'injection en perturbant la condition limite d'injection. Les données expérimentales du montage VALDO ne permettent pas de connaître les fluctuations de vitesse au niveau de la paroi d'injection. En particulier, la résolution fréquentielle des signaux instationnaires est trop grossière pour pouvoir utiliser une perturbation corrélée en temps établie à partir des données expérimentales. Pour modéliser le bruit, on reprend donc la démarche effectuée par Gazanion puisqu'elle a permis d'observer les structures VSP ainsi que la transition laminaire-turbulent.

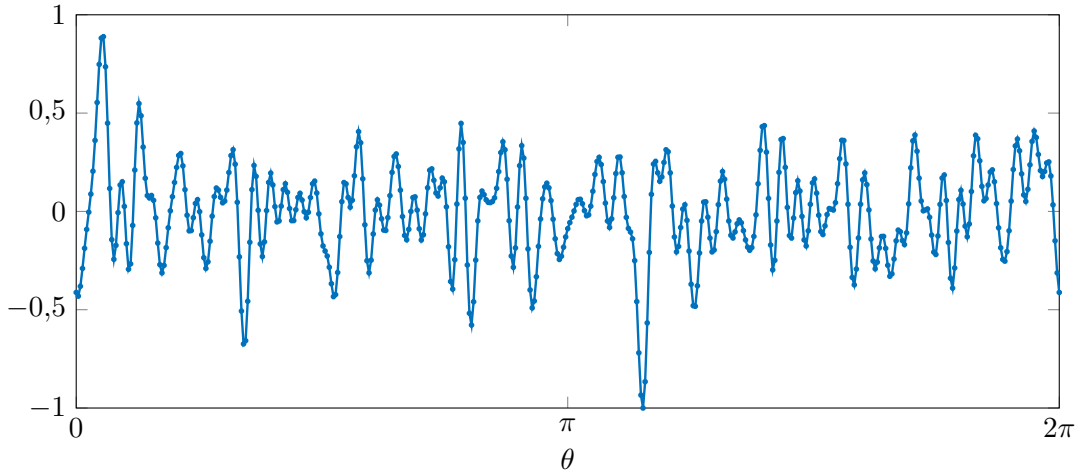
À la paroi d'injection en $r = R_p$, la condition limite nominale s'écrit $\forall(\theta, z),\ \boldsymbol{u}(r = R_p, \theta, z) = -V_{inj}\boldsymbol{e}_r$. Il faut dès lors distinguer les composantes de la vitesse que l'on perturbe, qui peuvent être la composante radiale, azimutale, axiale ou toute combinaison de celles-ci, des variables dont dépendent les fluctuations. Par exemple le bruit peut porter sur la composante azimutale de la vitesse mais ne dépendre que de la coordonnée axiale z. Dans cette étude, le bruit stationnaire mis en place dépend des deux coordonnées θ et z et porte sur les trois composantes de la vitesse.

Perturbation selon la direction azimutale

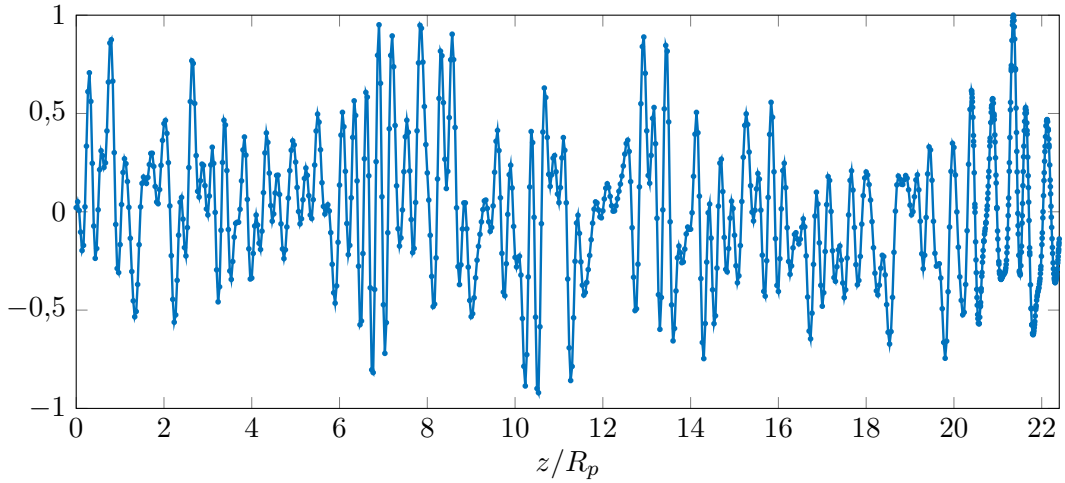
Ce paragraphe détaille la construction de la perturbation selon la direction azimutale. La valeur de z est fixée. On remplace la condition limite d'injection théorique $\boldsymbol{u}(r = R_p, \theta, z) = -V_{inj}\boldsymbol{e}_r$ par une condition limite d'injection perturbée :

$$\boldsymbol{u}(\theta) = -\left(V_{inj} + I_n(\theta)\right)\boldsymbol{e}_r + I_t(\theta)\,\boldsymbol{e}_\theta + I_a(\theta)\,\boldsymbol{e}_z\,, \tag{5.1}$$

où I_n, I_t et I_a sont les fonctions de distribution dans la direction normale, tangentielle et axiale respectivement. Afin de conserver le débit massique d'injection, I_n, I_t et I_a sont de moyenne nulle. Pour construire ces fonctions de distribution, la méthode de Gazanion est reprise : ces fonctions sont basées sur une combinaison aléatoire de modes circulaires. Cette méthode permet, une fois la perturbation projetée sur le maillage, d'éviter des discontinuités du signal. Notons I_α



(a) I_n



(b) J_n

FIGURE 5.4. – Fonctions de distributions dans les directions azimutales et axiales pour u_r. Les points représentent les nœuds du maillage.

l'une des trois distributions à construire. Cette perturbation est composée d'un certain nombre de longueurs d'onde noté l. Ces longueurs d'onde doivent décrire un spectre le plus large possible, le but étant de déclencher la transition. Il ne faut cependant pas qu'elles soient trop courtes pour éviter les discontinuités lors de la projection sur le maillage. On impose donc que la plus courte longueur d'onde, notée λ^θ_{min}, doit être discrétisée sur au moins 7 cellules du maillage. Le nombre d'onde maximal k^θ_{max}, correspondant à la plus courte longueur d'onde λ^θ_{min}, est exprimé par $k^\theta_{max} = 2\pi R_p/\lambda^\theta_{min}$. Les autres nombres d'onde k_i, $i \in [\![1, l]\!]$, sont répartis entre 1 et k^θ_{max}. La fonction de distribution est alors écrite sous la forme :

$$I_\alpha(\theta) = \sum_{i=1}^{l} a^\theta_i \sin\left(k_i\theta + 2\pi b^\theta_i\right) , \tag{5.2}$$

où a^θ_i et b^θ_i sont des coefficients aléatoires indépendant de θ. L'expression (5.2) peut être manipulée pour obtenir l'amplitude 0-crête et la moyenne nulle souhaitées. On choisit d'utiliser $l = k_{max}$ modes dans nos perturbations. Dans le maillage utilisé, la discrétisation azimutale est de 471 cellules, ce qui conduit à $\lambda^\theta_{min} = 2{,}8\,\text{mm}$ soit $k^\theta_{max} = 67$. À titre d'illustration, l'allure de la fonction de distribution I_n pour une amplitude 0-crête unitaire est représentée sur la figure 5.4a.

Perturbation selon la direction axiale

Fixons désormais θ. Comme dans le paragraphe précédent, la condition limite d'injection théorique est remplacée par une condition limite d'injection perturbée :

$$\boldsymbol{u}(z) = -\left(V_{inj} + J_n(z)\right)\boldsymbol{e}_r + J_t(z)\,\boldsymbol{e}_\theta + J_a(z)\,\boldsymbol{e}_z\,. \tag{5.3}$$

Pour construire les fonctions de distributions, la même méthode est appliquée :

$$J_\alpha(z) = \sum_{i=1}^{l} a_i^z \sin\left(k_i z + 2\pi b_i^z\right)\,, \tag{5.4}$$

où a_i^z et b_i^z sont des coefficients aléatoires indépendant de z. Contrairement à la discrétisation azimutale, la discrétisation axiale du maillage n'est pas uniforme (un raffinement est opéré proche de la sortie du conduit). On se base sur la discrétisation en amont du conduit pour obtenir $\lambda_{min}^z = 7\,\text{mm}$ ce qui entraîne dans ce cas la valeur $k_{max}^z = 897$. La fonction de distribution J_n pour une amplitude 0-crête unitaire est représentée sur la figure 5.4b.

Combinaison des perturbations suivant les deux directions

Au total, la combinaison des perturbations suivant les deux directions se fait par simple multiplications des fonctions de distributions :

$$\boldsymbol{u}(r = R_p, \theta, z) = -\left(V_{inj} + I_n(\theta)\,J_n(z)\right)\boldsymbol{e}_r + I_t(\theta)\,J_t(z)\,\boldsymbol{e}_\theta + I_a(\theta)\,J_a(z)\,\boldsymbol{e}_z\,. \tag{5.5}$$

Les jeux de coefficients aléatoires a_i^θ, b_i^θ, a_i^z et b_i^z de chaque composante dans chaque direction sont générés avec Matlab®.

5.1.6. Réalisation des simulations

Plusieurs forçages, et donc plusieurs simulations, ont été réalisés dans le cadre de cette thèse. Afin de mener à bien ces différentes simulations, ce projet a bénéficié d'une allocation GENCI (Grand Équipement National de Calcul Intensif) de 3 750 000 h CPU sur le calculateur Occigen. Les calculs se sont déroulés sur une période de sept mois à partir du mois de février 2017 jusqu'à la fin du mois d'août 2017. Les différents cas de forçage n'ont pas été simulés pendant la même durée, les forçages qui donnaient lieu à des résultats dégradés par rapport à ce qui était attendu étant arrêtés prématurément. En revanche, dans tous les cas les simulations sont effectuées sur 1024 coeurs par tranches de 25 000 itérations, soit 100 instants de mesure pour les sondes. En moyenne, le calcul de ces tranches prend 23 h sur le calculateur Occigen. La durée moyenne d'une itération est donc de 3,3 s. Les différents forçages réalisés combinent une perturbation de la vitesse d'injection, suivant plusieurs composantes et avec différentes amplitudes, et l'interruption de débit au niveau des intersegments. Notons qu'il est également possible d'imposer au niveau des intersegments une vitesse d'injection perturbée comme l'a fait Gazanion. Le tableau 5.2 présente les différents forçages réalisés au cours de cette campagne de calcul. Le forçage A2 correspond au « bruit faible » de Gazanion et le forçage B3 au « bruit fort ».

Ces différents cas de forçage ont été réalisés afin de voir comment réagissait la simulation au niveau des amplitudes des oscillations, des fréquences ou encore vis-à-vis de la transition laminaire-turbulent. Certaines simulations ont été interrompues prématurément car elles n'évoluaient pas dans le sens attendu (fréquences trop éloignées de celles observées dans l'expérience par exemple). Ceci explique le faible nombre d'instants enregistrés pour les cas A1, A2, B1 et B2. Les trois autres simulations (C1, C2 et B3) ont été poursuivies sur un plus grand laps de temps, sans pour autant atteindre le nombre d'échantillons dont disposait Gazanion par exemple (8192 instants), même pour la simulation la plus longue (C2). Les difficultés rencontrées sur le calculateur Occigen, sujet à une importante évolution lors de la réalisation de ces simulations, expliquent en partie ce faible

	Perturbation			
Nom	Paroi d'injection	Intersegments	Instants simulés	Durée simulée (s)
A1	Aucune perturbation, condition d'injection nominale	Amplitude $0{,}5V_{inj}$ sur u_r et sur u_θ	288	0,0287
A2	Amplitude $0{,}5V_{inj}$ sur u_θ	Amplitude $0{,}3V_{inj}$ sur u_r et $0{,}5V_{inj}$ sur u_θ	288	0,0287
B1	Amplitude $0{,}2V_{inj}$ sur u_r	Interruption de débit	420	0,0419
B2	Amplitude $0{,}1V_{inj}$ sur u_r	Interruption de débit	150	0,0149
B3	Amplitude $0{,}9V_{inj}$ sur u_r	Interruption de débit	2280	0,2279
C1	Amplitude $0{,}2V_{inj}$ sur u_θ	Interruption de débit	1161	0,116
C2	Aucune perturbation, condition d'injection nominale	Interruption de débit	5212	0,5211

Table 5.2. – Description des différents forçages simulés.

nombre de données. Par ailleurs, la mise en œuvre du code CEDRE dans sa dernière version sur le calculateur Occigen a souffert de quelques problèmes qui ont ralenti l'avancement de l'étude.

5.2. Exploitation des résultats des simulations

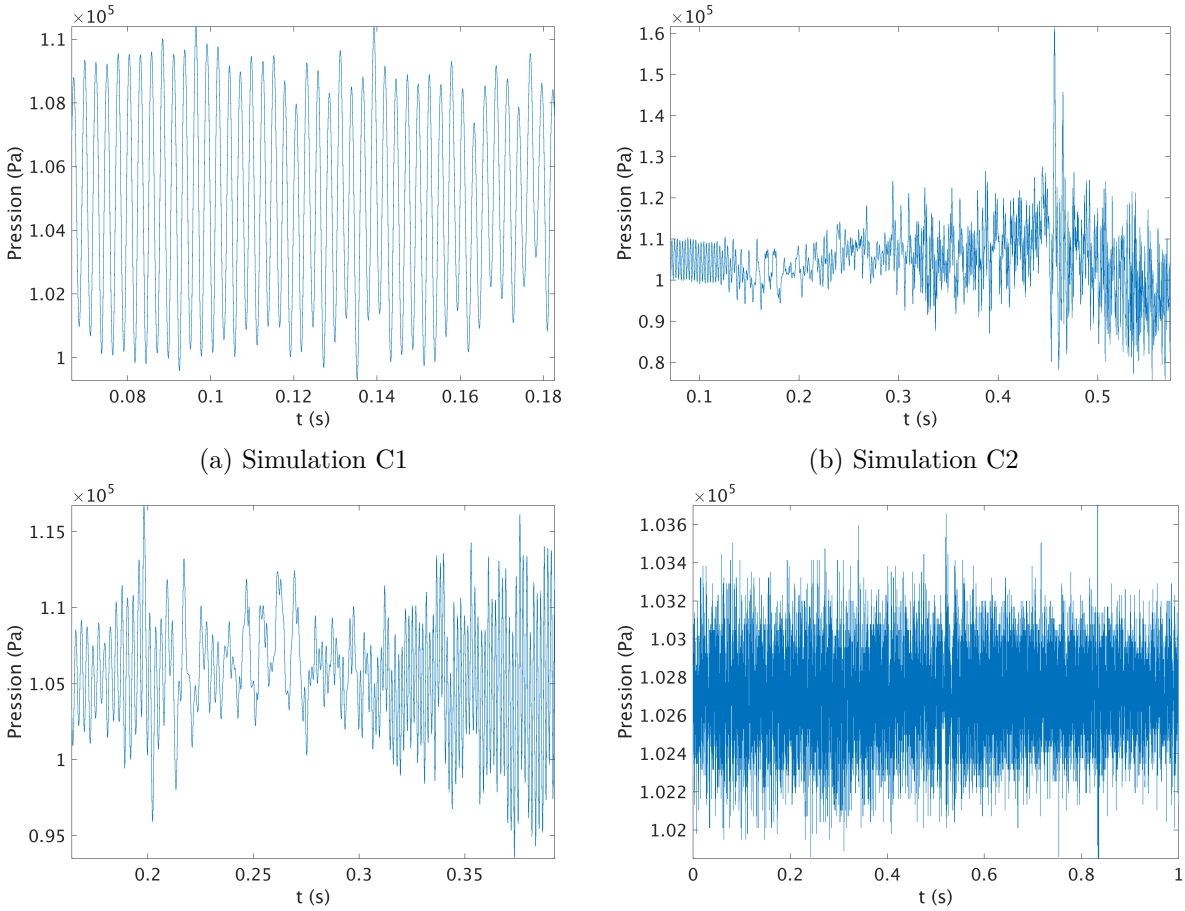
Dans cette partie on présente les résultats obtenus à partir des simulations C1, C2 et B3 et on tente de les comparer aux données issues du montage expérimental VALDO. On montre qu'aucune de ces simulations n'est probante. En effet, aucun des forçages n'a permis d'améliorer le décalage en fréquence obtenu dans les simulations de Gazanion. Quant à l'amplitude des oscillations, il s'avère qu'elle est surestimée de plus d'un ordre de grandeur dans les trois cas.

5.2.1. Liste succincte de l'évolution de chaque forçage

Sans entrer dans les détails, il est intéressant de présenter la démarche qui a conduit à chacun des forçages, ainsi que de justifier succinctement pourquoi ils n'étaient pas concluants. Les forçages A1 et A2 ont été effectués en parallèle. Le forçage A1, qui concernait uniquement les intersegments, a vu se développer des oscillations présentant des niveaux d'amplitude trop faibles. Le forçage A2, qui correspond au « bruit faible » de Gazanion, a vu se développer des structures dont les fréquences étaient largement supérieures à celles attendues, c'est-à-dire celles observées dans VALDO. Il s'avère que les modes amplifiés étaient associés à des nombres d'onde azimutaux non nuls ce qui peut expliquer ce décalage fréquentiel. La perturbation sur u_θ a donc été remplacée par une perturbation portant sur u_r, conduisant au forçage B1. Les fréquences associées aux phénomènes instationnaires, bien que réduites, étaient toujours trop élevées et l'amplitude des oscillations était trop importante. L'amplitude du bruit a donc été diminuée, pour conduire au forçage B2. Ce dernier a donné lieu à des difficultés numériques. D'une part parce qu'il a été réalisé avec un schéma d'intégration temporelle explicite et que le pas de temps nécessaire à la stabilité du schéma était trop faible (voir les explications du paragraphe 5.1.2). D'autre part les structures tourbillonnaires qui se sont développées étaient très différentes du VSP : au lieu de voir se développer des tourbillons s'amplifiant dans la direction axiale puis se dissipant en plus petites structures plus en aval, un grand nombre de tourbillons de petites tailles émergeaient proches du fond avant. Ensuite les forçages C1 et C2 ont été effectués en parallèle. L'objectif du forçage C1 était de reprendre le bruit faible de Gazanion mais en diminuant l'amplitude du bruit et en supprimant la perturbation au niveau des intersegments, ce qui est plus proche de ce qui se passe expérimentalement. Quant au forçage C2, il a été mis en place afin de pouvoir voir l'influence de la perturbation de l'injection sur les amplitudes, en le comparant au forçage C1. Enfin, le forçage B3 correspond au « bruit fort » de Gazanion. Bien que le forçage B1 ait échoué avec une perturbation similaire, nous avons voulu tenter de voir si l'augmentation du niveau d'amplitude du bruit ne permettait pas de modifier l'accrochage entre le VSP et l'acoustique et ainsi d'améliorer les résultats. Les résultats associés aux trois forçages C1, C2 et B3 sont décrits dans les paragraphes suivants.

5.2.2. Comparaison des niveaux d'amplitude des oscillations

L'objectif principal de cette campagne de simulations numériques était notamment de déterminer l'influence de l'impédance acoustique de sortie du conduit et du bruit d'injection sur l'amplitude des oscillations de pression. Pour déterminer cette amplitude, on trace l'évolution temporelle de la pression au niveau de l'axe et proche du fond avant, à la position $z/R_p = 1{,}63$. Cette évolution est tracée sur la figure 5.5 pour chacun des trois forçages et pour l'expérience. Ces figures permettent tout d'abord de constater que les simulations C2 et B3 ne sont pas dans un régime établi avec un contenu fréquentiel riche dès le début du calcul, et que les premiers instants ($t < 0{,}3$) sont donc à ignorer. Ceci diminue d'autant plus l'échantillon disponible pour l'exploitation spectrale notamment. Quant à la simulation C1, il aurait fallu poursuivre plus longtemps



(a) Simulation C1

(b) Simulation C2

(c) Simulation B3

(d) Données VALDO

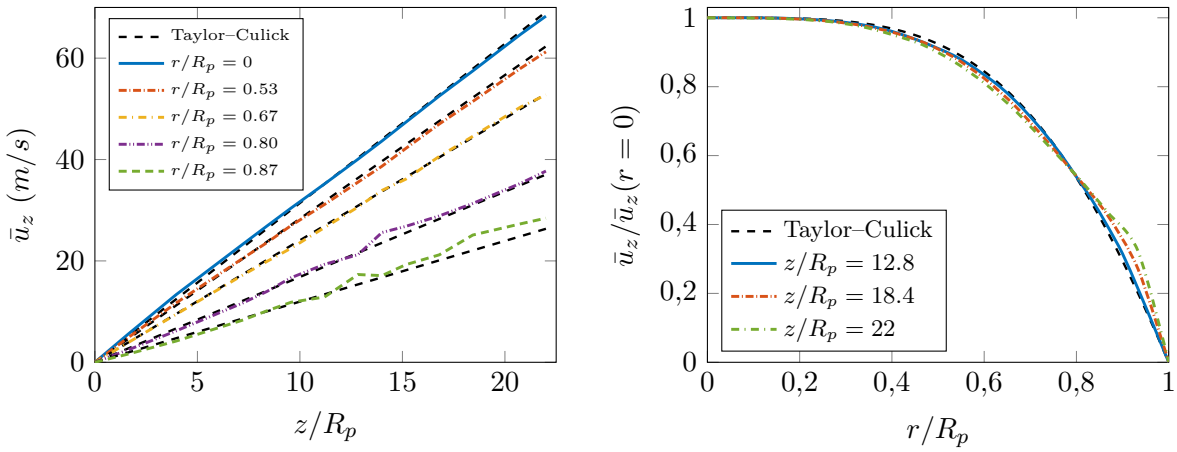
FIGURE 5.5. – Évolution temporelle de la pression sur l'axe à la position $z/R_p = 1{,}63$.

le calcul au vu des autres simulations. Ensuite ces tracés illustrent la surestimation de l'amplitude des oscillations par rapport aux données expérimentales. Dans l'expérience, l'amplitude des oscillations est de 3 mbar tandis que celle-ci est d'environ 30 mbar pour le cas C1, 80 mbar pour le cas C2 et 40 mbar pour le cas B3. Dans tous les cas, les amplitudes sont donc surestimées de plus d'un ordre de grandeur. L'explication de cette surestimation nous fait défaut. En particulier la simulation C2, qui combine le calcul du jet débouchant (et donc de la condition d'impédance de sortie) et une perturbation qui se contente d'interrompre le débit au niveau des intersements, conduit à la plus forte surestimation de l'amplitude alors que le résultat opposé était attendu.

5.2.3. Transition laminaire-turbulent

Le chapitre 1 a rappelé que la transition laminaire-turbulent influe fortement sur les oscillations de pression en dissipant les structures tourbillonnaires du VSP qui émergent en amont. Il est donc important de déterminer si les présentes simulations révèlent une transition laminaire-turbulent. Toutefois, la résolution fréquentielle de ces simulations ne permet pas de calculer l'indicateur de transition défini par Gazanion (voir paragraphe 1.2.1). Pour mettre en évidence la présence d'une transition laminaire-turbulent dans les simulations, on s'appuie à la fois sur l'écoulement moyen, et sur les fluctuations de vitesse.

Dans un premier temps, l'écoulement moyen est étudié. Rappelons que dans le cas d'un écoulement stationnaire en fluide parfait dans un conduit à paroi débitante de section circulaire, la solution analytique de Taylor–Culick s'applique. Cette solution est tout à fait représentative de l'écoulement visqueux au sein de cette configuration dès lors que le nombre de Reynolds dépasse 100 (voir 1.4.3) et on considère donc que dans la présente configuration ($\mathcal{R}_e = 2000$), cette solution s'applique pour l'écoulement moyen $\bar{u}$. La figure 5.6 propose une comparaison de la vitesse



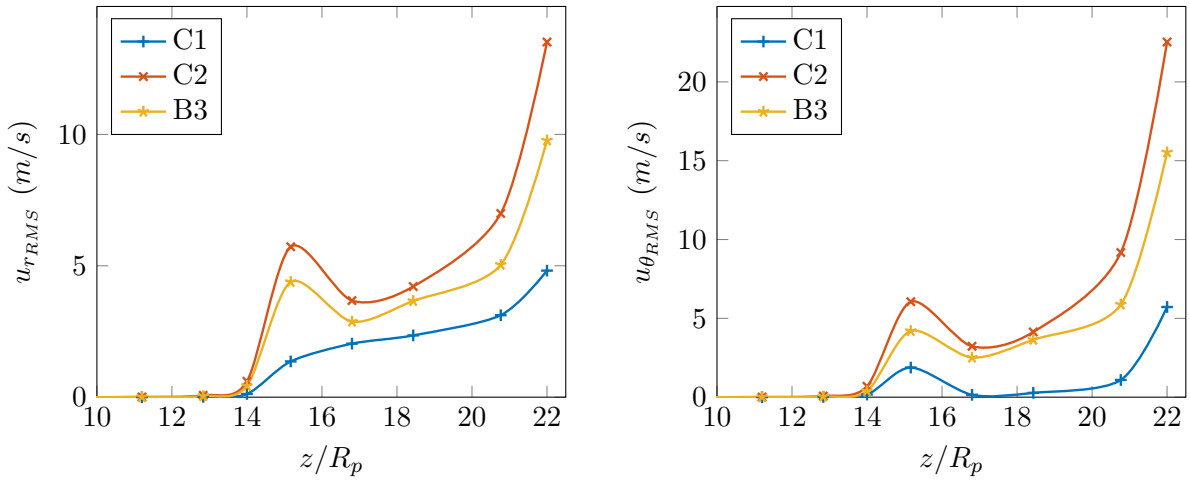
(a) Profil axial (b) Profil radial

FIGURE 5.6. – Comparaison de la vitesse moyenne axiale à la solution de Taylor–Culick pour le cas C2.

moyenne axiale de la simulation C2 avec la solution de Taylor–Culick. Sur la gauche de la figure (5.6a) on représente l'évolution axiale de $\bar{u}_z$. On constate que pour les positions radiales les plus proches de la paroi, le profil de vitesse s'écarte de la solution analytique alors qu'il en est très proche ailleurs. Cet écart est d'autant plus grand que la position axiale est grande. Ceci est la signature d'une transition laminaire-turbulent, ou au moins de phénomènes non-linéaires : en amont l'écoulement est laminaire et la solution analytique s'applique puis les profils moyens de vitesse sont altérés par la transition laminaire-turbulent. Ceci se confirme sur les profils radiaux de la figure de droite (5.6b). Le fait que l'écart par rapport à la solution de Taylor–Culick soit plus grand proche de la paroi s'explique par la particularité de la transition laminaire-turbulent dans cette configuration, illustrée par la figure 1.5 : à une position axiale donnée peuvent coexister un cœur laminaire et une zone turbulente proche de la paroi.

Dans un second temps, l'évolution axiale des fluctuations de vitesse azimutale est étudiée. L'amplitude des fluctuations est donnée par le niveau *Root-Mean-Square* (RMS) du signal instationnaire : $u_{RMS} = \sqrt{\overline{(u-\overline{u})^2}}$. La vitesse azimutale est nulle dans la solution axisymétrique de Taylor–Culick. Par conséquent l'amplitude des fluctuations de vitesse azimutale et leur amplification axiale sont des indicateurs d'une tridimensionnalisation même de l'écoulement, associée à la présence d'une transition laminaire-turbulent. L'évolution axiale des fluctuations de vitesse azimutale pour $r/R_p = 0{,}8$ est tracée sur la figure 5.7b. Sur cette figure, on constate une augmentation brutale des fluctuations de vitesse azimutale qui débute autour de $z/R_p = 12{,}8$, c'est-à-dire légèrement en aval du deuxième intersegment situé à $z/R_p = 11{,}2$. Dans le cas des forçages C2 et B3, cette amplification s'ensuit d'une saturation vers $z/R_p \simeq 15{,}2$ puis d'un amortissement jusqu'à $z/R_p = 16{,}8$, emplacement du troisième intersegment. Au-delà de cette position, on retrouve une forte croissance de la fluctuation de vitesse azimutale. Concernant le forçage C1, la tendance est la même mais l'amplitude des fluctuations est faible et il est probable que la présence de fluctuations de vitesse azimutale soit plus encouragée par le bruit d'injection lui-même (qui joue sur la composante u_θ) que par la tridimensionnalisation de l'écoulement due à une transition.

L'acoustique du conduit est essentiellement portée par des fluctuations axiales de vitesse et de pression. Les structures instationnaires liées aux VSP sont en revanche associées à des fluctuations de vitesse axiale et radiale. Pour distinguer l'acoustique des phénomènes hydrodynamiques, il est donc intéressant d'observer la vitesse radiale. L'évolution axiale de l'amplitude RMS des fluctuations de vitesse radiale est représentée sur la figure 5.7a, à propos de laquelle on tire les mêmes conclusions que pour les fluctuations de vitesse azimutale. Un ou plusieurs modes VSP conduisent à une amplification axiale des amplitudes des fluctuations de vitesse radiale. Puis cette amplification est interrompue, probablement à cause de la transition laminaire-turbulent, avant que cette amplification ne reprenne jusqu'à la sortie du conduit. Il apparaît donc que pour



(a) Vitesse radiale (b) Vitesse azimutale

FIGURE 5.7. – Évolution axiale de l'amplitude des fluctuations de vitesse à la position $r/R_p = 0{,}8$. Les valeurs enregistrées par les sondes numériques sont représentées par les symboles, les courbes découlent d'une interpolation.

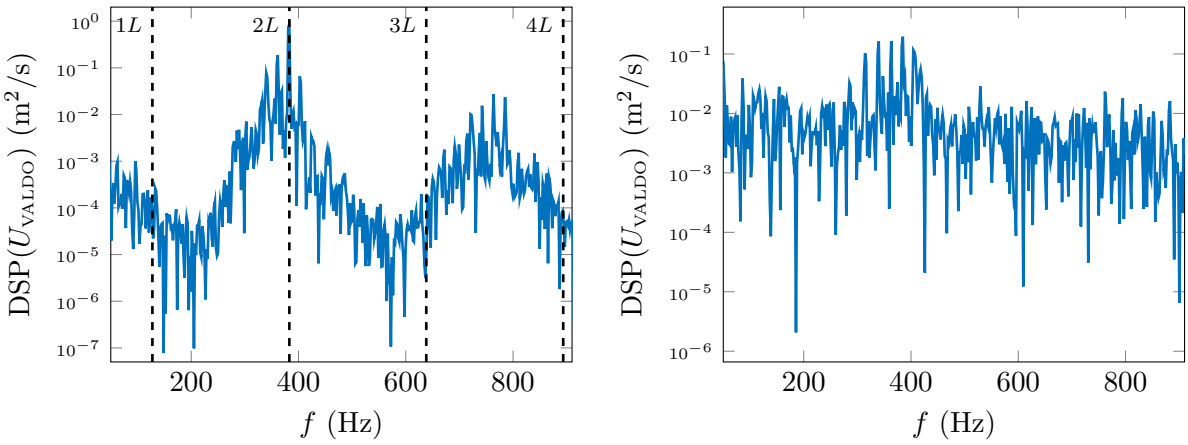
les simulations C2 et B3 une transition laminaire-turbulent se situe autour de $z/R_p \simeq 15{,}2$. Concernant la simulation C1, l'amplification est beaucoup moins importante que dans les deux autres simulations : l'existence d'une transition laminaire-turbulent est beaucoup moins évidente. Le paragraphe 5.2.4 illustre finalement cette absence de transition laminaire-turbulent.

5.2.4. Importance de l'accrochage aéroacoustique

L'examen des précédentes études de stabilité a montré que les modes conduisant au VSP sont temporellement amortis. Pour que les structures tourbillonnaires du VSP se développent, il est nécessaire que l'écoulement soit soumis à une excitation. Le couplage du VSP avec l'acoustique est souvent désigné comme étant à l'origine des oscillations de pression. Le scénario proposé (rappelé au paragraphe 1.3.2), est que lorsque l'évolution fréquentielle des modes VSP (voir figure 1.11) croise celle d'un mode acoustique [3], un couplage est réalisé et les oscillations de pression sont observées. On parle alors d'accrochage aéroacoustique. La nature exacte de cet accrochage reste encore à définir. Quoi qu'il en soit, le bruit d'injection joue un rôle important dans la réalisation de cet accrochage, comme le montrent les simulations de Gazanion et d'autres simulations de la littérature (Apte et Yang (2003) par exemple). Le but de la présente simulation est de reproduire l'accrochage réalisé dans le montage VALDO illustré sur la figure 5.8. On peut observer sur la figure de gauche, qui présente une densité spectrale de puissance de la fluctuation de vitesse [4] en $z/R_p = 12{,}8$, que le spectre présente des groupes de fréquences dominantes. Ce schéma se répète également aux plus hautes fréquences. Le premier groupe de fréquences est situé autour du deuxième mode acoustique de cavité ($f_{2L} = 382{,}9\,\mathrm{Hz}$) et est constitué de plusieurs raies, ce qui est caractéristique de la présence du VSP. Sur la figure de droite, plus en aval, il existe toujours un ensemble de raies autour du second mode acoustique mais le spectre est beaucoup plus homogène, signe que des nombreuses structures coexistent : il s'agit d'une zone où l'écoulement est turbulent ou du moins une zone de transition laminaire-turbulent. Dans ce montage, l'accrochage permet donc de faire émerger un certain nombre de modes VSP et de voir se développer une transition laminaire-turbulent. Dans cette partie, on s'intéresse au nombre et à la nature des modes excités.

Commençons par la simulation C1. Pour mettre en évidence la présence d'un ou plusieurs modes on trace sur la figure 5.9a la densité spectrale de puissance (DSP) de la fluctuation de

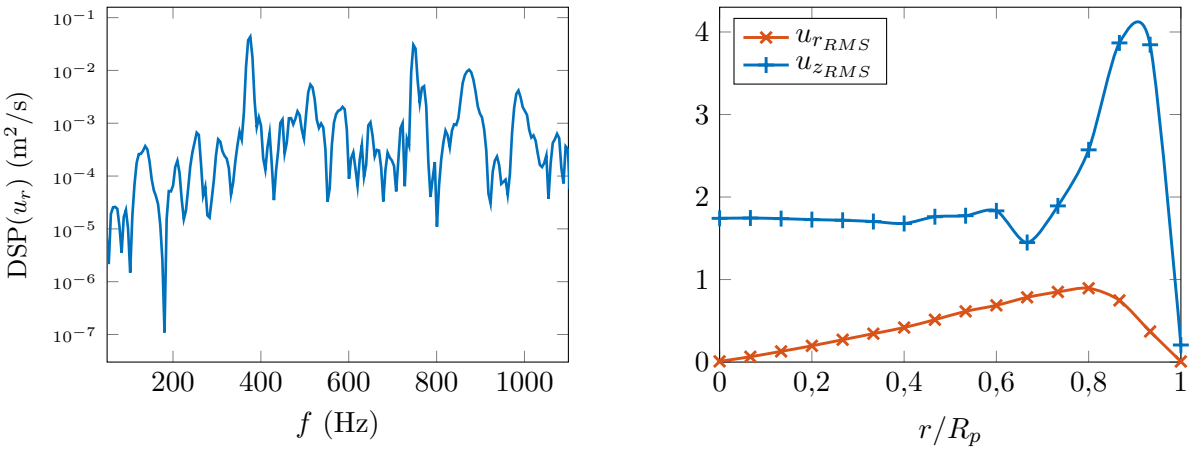
3. On rappelle que dans un cas dynamique, les fréquences dépendent du temps.
4. Comme expliqué au paragraphe 2.3, la vitesse mesurée par la sonde dans l'expérience est $U_{\mathrm{VALDO}} = \sqrt{u_r^2 + u_z^2}$



(a) $z/R_p = 12{,}8$.

(b) $z/R_p = 18{,}4$.

FIGURE 5.8. – Densité spectrale de puissance de la fluctuation de vitesse U_{VALDO} en $r/R_p = 0{,}93$ à deux positions axiales différentes.



(a) Densité spectrale de puissance de la fluctuation de vitesse radiale en $r/R_p = 0{,}93$.

(b) Profil radial de l'amplitude des fluctuations de vitesse. Les valeurs des sondes correspondent aux symboles.

FIGURE 5.9. – Spectre et profils de vitesse pour la simulation C1 à la position $z/R_p = 16{,}8$.

vitesse radiale à la position $z/R_p = 16{,}8$ et $r/R_p = 0{,}87$. Sur ce spectre, on constate la présence d'un pic à la fréquence $f_0 = 376\,\text{Hz}$ entouré de deux autres pics de plus faibles amplitudes. Ce type d'organisation, observé sur la composante radiale de la fluctuation de vitesse, est associé à un mode VSP. Il est possible de le confirmer en considérant une bande de fréquence de largeur $f_w = 40\,\text{Hz}$ centrée sur f_0 et en traçant, pour cette bande de fréquence, l'évolution radiale de l'amplitude RMS des fluctuations de vitesse. Cette amplitude RMS est ici calculée par

$$u_{RMS} = \int_{f_0 - f_w/2}^{f_0 + f_w/2} DSP(u) df \,. \tag{5.6}$$

Ce profil radial est représenté sur la figure 5.9b et est à comparer avec la figure 4.14 qui représente les fonctions propres des modes VSP calculées par le code de stabilité biglobale. L'allure caractéristique des modes VSP est retrouvée sur la figure 5.9b. Ceci confirme la présence du VSP dans cette simulation. Toutefois, l'instabilité se développe plus en aval que dans l'expérience, ce qui repousse transition laminaire-turbulent vers l'aval du conduit. Ceci se confirme sur la figure 5.10a qui représente un champ instantané de rotationnel dans la direction normale au plan $y = 0$. Sur cette figure, les bandes horizontales correspondent à la couche limite acoustique. On observe que

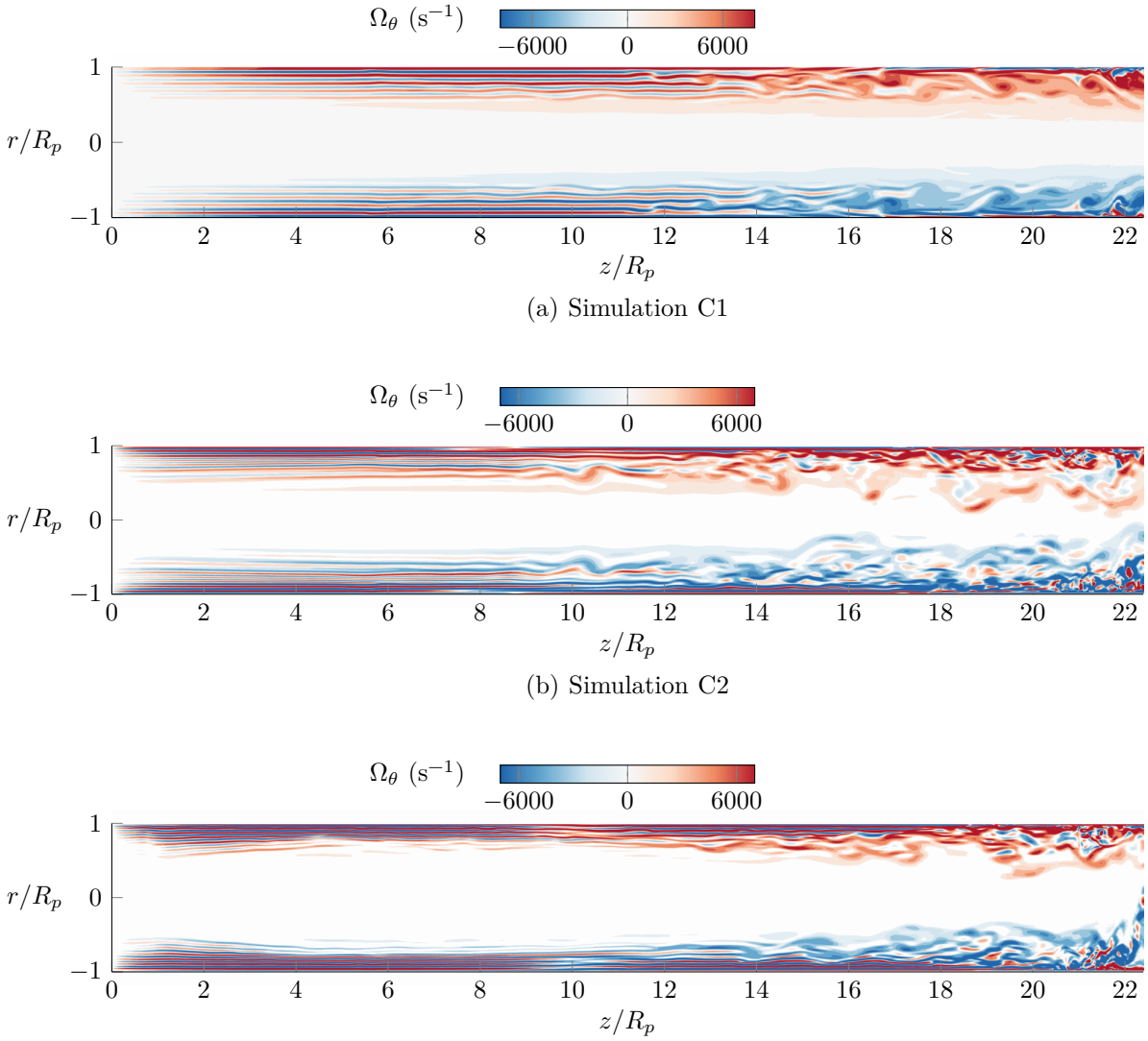
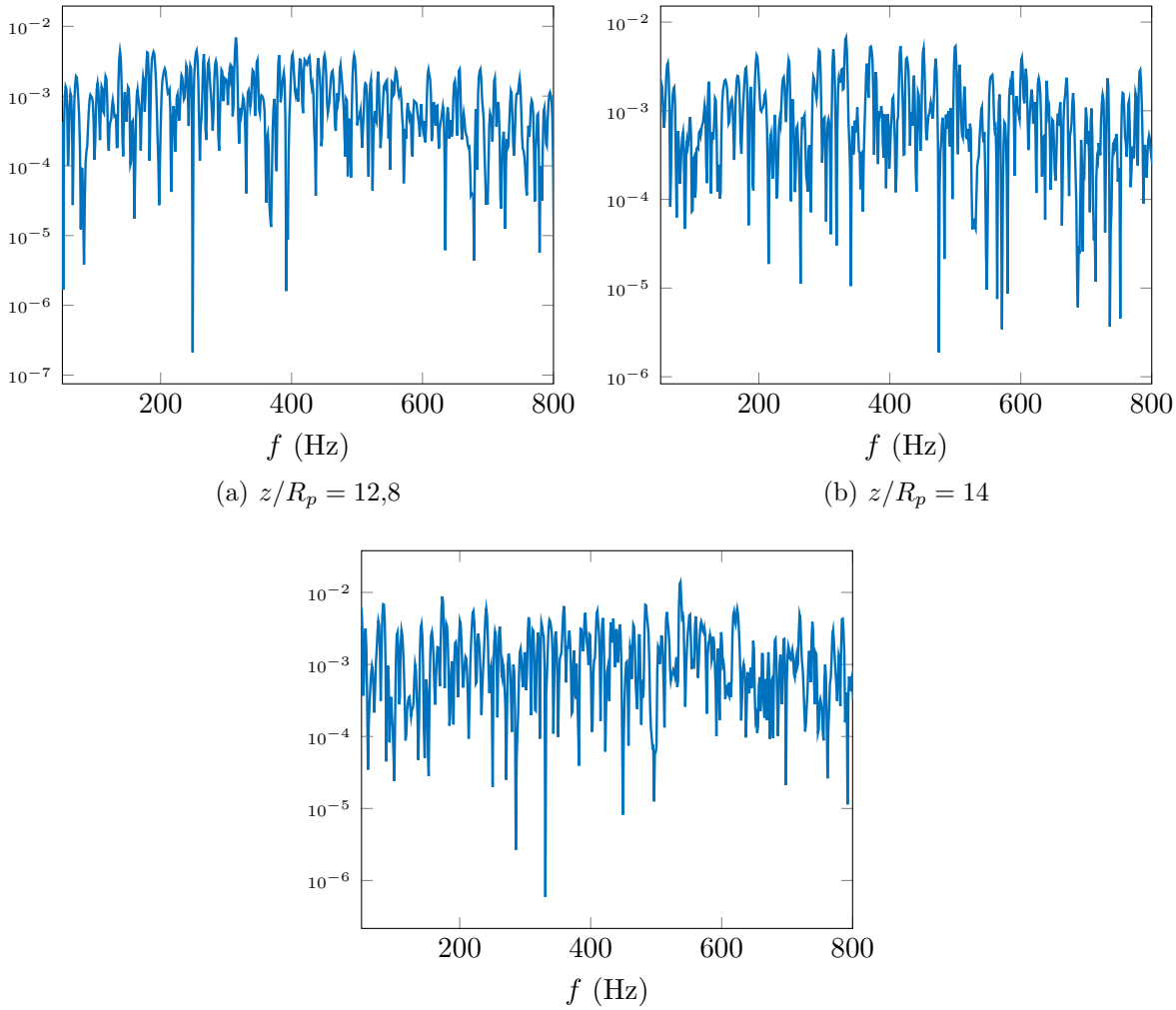


FIGURE 5.10. – Champs instantanés de la composante azimutale du rotationnel de vitesse pour les simulations (a) C1, (b) C2 et (c) B3.

celle-ci est légèrement perturbée à partir du premier intersegment ($z/R_p = 5{,}6$). À partir du second intersegment ($z/R_p = 11{,}2$), des structures tourbillonnaires apparaissent en s'amplifiant légèrement jusqu'au troisième intersegment ($z/R_p = 16{,}8$). À partir de cette position il est possible de distinguer les structures tourbillonnaires du VSP convectées vers la sortie. L'écoulement semble rester axisymétrique jusqu'à $z/R_p \simeq 21{,}5$ et ne voit pas se développer de structures turbulentes tridimensionnelles. Ces observations sont en accord avec celles réalisées par Gazanion pour sa simulation avec « bruit faible », sauf pour ce qui est de la fréquence porteuse de ce mode VSP (autour de 312 Hz dans la simulation de Gazanion). L'accrochage aéroacoustique permet ici de faire émerger des modes VSP mais ceux-ci ne sont pas suffisamment excités pour conduire à une transition laminaire-turbulent.

Le cas du forçage C2 est différent. Pour cette simulation, de nombreux modes semblent avoir été excités. Pour l'illustrer, la figure 5.11 représente la densité spectrale de puissance de la fluctuation de vitesse radiale proche de la paroi pour trois positions axiales différentes. Contrairement à la figure 5.9a, il est délicat d'identifier un mode dominant se détachant du spectre : de très nombreux modes semblent excités. Ceci se traduit par l'émergence de nombreuses structures tourbillonnaires d'échelles différentes, visibles sur la figure 5.10b. Il apparaît qu'avant même le deuxième intersegment ($z/R_p = 16{,}8$), l'écoulement a déjà perdu son axisymétrie. Pour cette

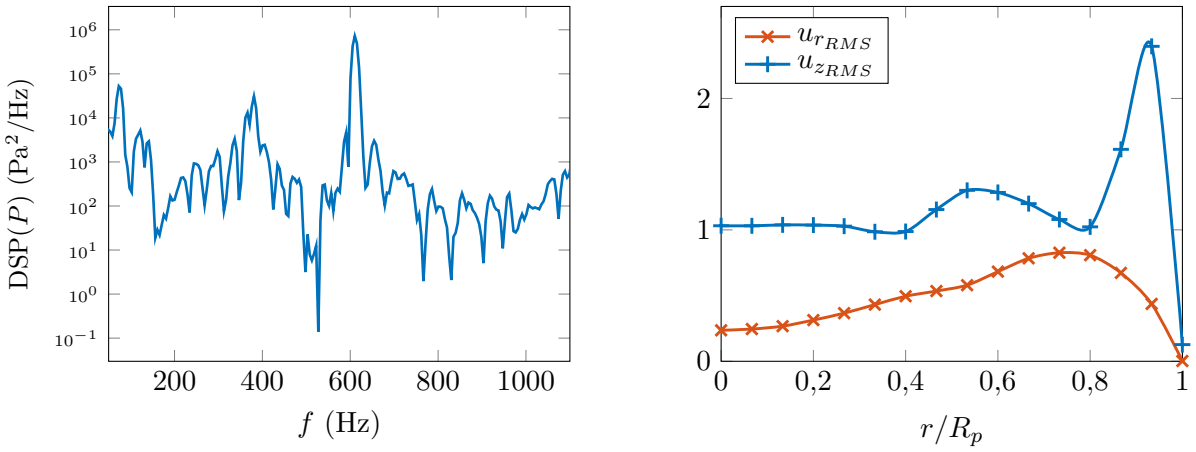


(a) $z/R_p = 12{,}8$

(b) $z/R_p = 14$

(c) $z/R_p = 15{,}2$

FIGURE 5.11. – Densité spectrale de puissance, en m^2/s, de la fluctuation de vitesse radiale pour $r/R_p = 0{,}93$ et trois positions axiales différentes pour la simulation C2.



(a) Densité spectrale de puissance de la fluctuation de pression en $r/R_p = 0{,}93$.

(b) Profil radial de l'amplitude des fluctuations de vitesse. Les valeurs des sondes correspondent aux symboles.

FIGURE 5.12. – Densité spectrale de puissance de la fluctuation de pression et profils de vitesse pour la simulation B3 à la position $z/R_p = 16{,}8$.

simulation, l'excitation appliquée et l'accrochage qui en découlent semblent trop forts.

Concernant la simulation B3, rappelons tout d'abord que l'échantillon de données exploitables est relativement faible car le début de la solution correspond à un régime transitoire (jusqu'à environ $t = 0{,}3s$ d'après la figure 5.5c). Il est toutefois possible d'identifier la présence de modes VSP, notamment sur la figure 5.12a représentant, comme pour la simulation C1, une densité spectrale de puissance (de la pression cette fois-ci) ainsi qu'un profil radial de l'amplitude RMS des fluctuations de vitesse radiale et axiale calculée sur une bande de fréquence de 40 Hz centrée sur $f_0 = 380$ Hz. Par ailleurs, de manière semblable à la simulation C2, le champ instantané de rotationnel de la figure 5.10c montre que le forçage a perturbé le développement de la couche limite acoustique. En effet, cette couche limite acoustique se caractérise notamment, en proche paroi, par des isolignes de rotationnel parallèles à l'axe du conduit. Or ici on constate que proche du fond avant, ces isolignes sont déviées. Entre $z/R_p = 12$ et $z/R_p = 18$, on peut observer l'émergence de structures tourbillonnaires de « grande » taille. Enfin, en aval de $z/R_p = 18$, des structures de plus petites tailles apparaissent jusqu'à donner, à partir de $z/R_p = 19$, un écoulement similaire à celui de la simulation C2. Cette comparaison est cohérente avec l'évolution axiale de l'amplitude des fluctuations de vitesse tracées sur la figure 5.7. Finalement, les résultats de cette simulation combinent des aspects des simulations C1 et C2 : l'accrochage permet l'amplification d'un nombre discret de modes VSP ; puis l'excitation de ces modes est suffisante pour conduire à une transition laminaire-turbulent. Cependant, la résolution fréquentielle ne permet pas de faire de plus amples comparaisons avec les données expérimentales.

5.2.5. Piste pour l'amélioration des simulations

Ces différentes simulations ont finalement permis de montrer que prendre en compte l'impédance acoustique de la sortie du conduit en simulant le jet débouchant ne permet *a priori* pas d'obtenir numériquement des oscillations dont l'amplitude est identique ou proche de celles observées dans le montage VALDO. L'une des pistes pour réduire l'amplitude des oscillations est de prendre en compte l'impédance acoustique du matériau poreux dont est constituée la paroi du montage VALDO. Dans le cas du montage expérimental VECLA, Lupoglazoff et Vuillot (1998) ont montré que la modélisation d'une impédance acoustique au niveau de la paroi d'injection dans la simulation permettait de réduire considérablement l'amplitude des oscillations, en passant par exemple d'oscillations d'une amplitude de 839 Pa sans la condition d'impédance à une amplitude de 142 Pa avec une condition d'impédance. Toutefois, leur simulation consiste en une configuration bidimensionnelle et « laminaire » au sens où aucun modèle de turbulence n'est utilisé et

que le schéma numérique et le maillage ne permettent pas de résoudre les échelles turbulentes. De plus, la condition d'impédance utilisée ne joue que sur l'amplitude des fluctuations présentes au niveau de la limite et est indépendante de la fréquence. Pour améliorer à la fois le niveau d'amplitude et les fréquences des oscillations, il faudrait pouvoir utiliser une condition d'impédance dépendante de la fréquence. De telles conditions d'impédance sont facilement utilisables dans le domaine fréquentiel, mais leur application au domaine temporel dans un code de calcul CFD est complexe et fait actuellement l'objet de travaux de recherches, notamment au sein de l'ONERA (Monteghetti *et al.*, 2016).

Bilan

Au final, des simulations LES de la configuration du montage expérimental VALDO ont été réalisées. Le but était d'améliorer les résultats obtenus par Gazanion (2014) en simulant le jet débouchant à la sortie du conduit plutôt que d'imposer une condition limite de type pression imposée. Ce faisant, le résultat attendu était une baisse de l'amplitude des oscillations de pression ainsi qu'un meilleur accord au niveau des fréquences de ces oscillations. Cependant, les simulations ne sont pas probantes. Tout d'abord des problèmes techniques ont gêné leur exécution et ont limité les échantillons de données. Ensuite les niveaux d'amplitude des oscillations sont supérieurs à ceux de l'expérience d'un ordre de grandeur. Par ailleurs, les résultats de ces simulations montrent qu'aucun des forçages simulés n'a permis de réaliser un accrochage aéroacoustique similaire à celui se déroulant dans l'expérience. Dans certaines simulations de trop nombreux modes étaient excités, tandis que dans d'autres simulations des modes VSP émergeaient mais trop en aval du conduit, gênant la formation d'une zone turbulente. Il ressort de cette étude que le calcul du jet débouchant n'a permis d'améliorer ni le niveau d'amplitude des oscillations, ni le calcul de leur fréquence. La cause de l'écart entre les simulations et les données du montage expérimental est donc à chercher ailleurs, et l'influence de l'impédance acoustique du poral est une piste envisageable.

Conclusion

Discussion

Les objectifs de ce travail de thèse étaient d'étudier la stabilité linéaire des moteurs à propergol solide de géométrie étoilée et de poursuivre l'étude de la transition laminaire-turbulent au sein des moteurs dont le chargement est à géométrie annulaire classique. Ces objectifs ont donné naissance à trois axes de recherche : la détermination de l'écoulement au sein d'un conduit à paroi débitante de section étoilée, l'étude de stabilité linéaire de cet écoulement et l'étude de l'influence de la condition d'impédance acoustique de sortie sur les oscillations de pression dans le montage en gaz froid VALDO.

Tout d'abord, une solution analytique de l'écoulement au sein d'un conduit à paroi débitante de section étoilée a été déterminée. Cette solution est une extension des solutions de Berman (1953) et de Taylor–Culick (Taylor, 1956; Culick, 1966) qui s'appliquent dans le cas d'une section circulaire. Cette solution, tridimensionnelle, permet de connaître le champ de vitesse et la pression en tout point d'une configuration étoilée où la paroi est définie par $r = 1 + \varepsilon \cos(m\theta)$. La solution déterminée a pu être validée par comparaison avec des solutions numériques obtenues avec un solveur Navier–Stokes, ce qui n'est pas le cas d'autres solutions trouvées dans la littérature. Par rapport au cas circulaire, la composante axiale du rotationnel n'est pas nulle, comme dans les travaux de Balachandar *et al.* (2001) ou Kurdyumov (2006). Par ailleurs, c'est à notre connaissance la première fois dans la littérature qu'un point d'inflexion dans le profil de vitesse axiale est mis en évidence dans le cas d'une géométrie étoilée. Ces travaux ont permis d'étudier l'existence de ce point d'inflexion en fonction de l'amplitude de déviation radiale, du nombre de Reynolds d'injection et du nombre de branches de l'étoile.

En revanche, cette solution est limitée à la géométrie étoilée sélectionnée et ne permet pas de rendre compte de toutes les géométries de moteur existantes. Il semble toutefois possible d'étendre la méthode employée à des géométries plus complexes, en modifiant le changement de variable employé (voir paragraphe 3.3). De plus, en raison du développement asymptotique employé, la solution n'est pas valable pour toutes les valeurs d'amplitude de déviation radiale, et vraisemblablement pas pour toutes les valeurs du nombre de Reynolds. En outre, il existe dans la littérature de nombreuses extensions des solutions de Berman et de Taylor–Culick qui pourraient être appliquées à cette solution : régression des parois, compressibilité, etc. Enfin, la présence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse ouvre des perspectives intéressantes vis-à-vis de la stabilité de cet écoulement.

L'étude de la stabilité linéaire de cet écoulement a été effectuée en appliquant deux approches : locale et biglobale. Ces deux approches, appliquées par Griffond (2001), Féraille (2004), Chedevergne (2007) et Boyer (2012), ont porté leurs fruits dans le cas d'une configuration circulaire puisqu'elles ont permis de mettre en évidence l'instabilité conduisant au VSP. L'étude de stabilité présentée dans ce manuscrit a permis tout d'abord de montrer que les modes de stabilité conduisant au VSP existent également dans la configuration étoilée. Ces modes sont d'ailleurs plus amplifiés lorsque le module du coefficient de Floquet est unitaire que lorsqu'il est nul. Ce résultat se vérifie aussi dans le cas circulaire, où le coefficient de Floquet joue le rôle d'un nombre d'onde azimutal : en géométrie circulaire les modes VSP les plus amplifiés (ou les moins atténués en temps) ne sont pas invariants vis-à-vis de la coordonnée azimutale, ce sont des modes tridimensionnels. La fluctuation de vitesse azimutale associée à ces modes a rarement été mesurée dans les montages en gaz froid, il n'est donc pas impossible que les modes VSP observés dans certains montages correspondent à des nombres d'onde azimutaux non nuls associés à des fluctuations de vitesse azimutale. De plus, cette étude de stabilité linéaire a mis en évidence l'existence de deux nouveaux modes, spécifiques à la configuration étoilée. À notre connaissance, ces modes

n'ont encore jamais été mis en évidence dans la littérature. Fortement dépendants de l'amplitude de la déviation radiale et du nombre de Reynolds, il n'est pas impossible que ces modes soient temporellement amplifiés, contrairement aux modes VSP. Enfin, l'étude de la configuration du tir LP9t48 montre que la géométrie du chargement à l'instant du tir étudié s'approche d'une géométrie au sein de laquelle l'écoulement présente un profil de vitesse axiale contenant au moins un point d'inflexion.

Cependant, de nombreuses questions demeurent au sujet des modes spécifiques à la configuration étoilée mis en évidence. Tout d'abord, des problèmes numériques empêchant la convergence de ces modes, notamment vis-à-vis du maillage, subsistent. Dans le cas circulaire, l'étude de cette convergence a constitué une part importante des travaux de thèse de Boyer et nécessite donc probablement un travail aussi important dans le cas étoilé. La résolution de ce problème de convergence devra permettre de conclure quant à la stabilité temporelle de ces modes propres à la configuration étoilée. L'existence d'un mode amplifié temporellement conduirait potentiellement à la modification du régime de l'écoulement (laminaire-turbulent), par exemple en rapprochant la position de la transition laminaire-turbulent du fond avant. Or la turbulence dissipe une partie des structures tourbillonnaires du VSP. Ainsi un moteur étoilé, si l'amplitude de sa déviation radiale était suffisamment importante pour voir apparaître des modes instables, pourrait être sujet à des oscillations de pression d'amplitude plus faible que dans un moteur circulaire de même rayon moyen. C'est d'ailleurs le scénario proposé pour le LP9t48 pour expliquer les différences observées entre les simulations numériques et les résultats expérimentaux : si l'écoulement est turbulent en raison de la présence de modes instables, une simulation numérique « laminaire » n'est pas en mesure de calculer correctement les phénomènes instationnaires qui se produisent à l'instant du tir étudié.

Enfin, des simulations LES de la transition laminaire-turbulent dans le montage VALDO ont été réalisées avec le code CEDRE. Le but de ces simulations était de poursuivre les travaux de Gazanion (2014) en ne simulant plus uniquement le conduit mais en tenant compte de son jet débouchant. En simulant ce jet et en s'affranchissant de la condition limite (réfléchissante) de pression imposée en sortie du conduit, l'objectif était de parvenir à améliorer la représentation de l'environnement acoustique du montage expérimental et par conséquent d'obtenir numériquement des oscillations plus proches de celles observées expérimentalement, aussi bien au niveau des amplitudes que des fréquences. Pour cela, la condition d'injection le long de la paroi d'injection a été perturbée de plusieurs façons. Comme dans les simulations de Gazanion ou celles d'Apte et Yang (2003), l'amplification des modes VSP a pu être observée et la présence de plusieurs régimes d'écoulement a pu être mise en évidence.

Toutefois, ces simulations n'ont pas permis de satisfaire l'objectif fixé. D'une part, de nombreux problèmes techniques ont gêné le bon déroulement des simulations, ce qui se traduit par des temps simulés relativement faibles limitant l'analyse spectrale. D'autre part, l'amplitude des fluctuations est surestimée de plusieurs ordres de grandeur par rapport aux données du montage expérimental et la prise en compte du jet débouchant n'a pas permis d'obtenir des spectres fréquentiels quantitativement plus proches de ceux mesurés dans l'expérience. Ceci permet finalement d'envisager deux pistes d'amélioration. Tout d'abord, si la prise en compte du jet débouchant n'a pas permis d'améliorer la qualité des simulations il est envisageable que l'impédance acoustique du poral constituant la paroi d'injection (impédance non prise en compte dans les simulations) ait une influence non négligeable sur le niveau d'amplitude et les fréquences des oscillations. Ensuite, une nouvelle campagne de mesures avec le montage VALDO, cette fois-ci dédiée à l'étude de la transition laminaire-turbulent, permettrait d'améliorer notre compréhension de la transition dans ce montage. Par exemple, pouvoir distinguer les composantes axiales et radiales de la vitesse faciliterait l'identification des modes VSP dans les signaux instationnaires mesurés.

Bilan

Cette thèse, « instabilités dans les moteurs à propergol solide : influence de la géométrie étoilée et étude numérique de la transition laminaire-turbulent », met en évidence les résultats principaux suivants.

Tout d'abord le chapitre 3 présente une solution analytique permettant de calculer le champ de vitesse et la pression en tout point d'un conduit à paroi débitante de section étoilée, configuration hydrodynamiquement représentative des moteurs à propergol solide. Cette solution, validée par des comparaisons avec des simulations numériques Navier–Stokes effectuées avec le code CEDRE, démontre la présence d'un ou plusieurs points d'inflexion dans le profil de vitesse axiale lorsque l'amplitude de la déviation radiale et le nombre de Reynolds sont suffisamment grands. On constate que les quelques simulations effectuées dans des cas où le profil théorique de vitesse axiale présente un point d'inflexion ne convergent pas vers un état stationnaire.

Ensuite, l'étude de stabilité linéaire de cet écoulement de base dans le cas étoilé montre la coexistence de modes conduisant au VSP dans le cas circulaire avec des modes spécifiques à la configuration étoilée. Le taux d'amplification temporel de ces derniers croît avec l'amplitude de la déviation radiale, ce qui implique que ces modes sont potentiellement instables. De plus, ces modes sont associés à des fluctuations dont le maximum est proche de l'axe du conduit. L'argument de ce maximum est proche de la position du point d'inflexion du profil de vitesse axiale de l'écoulement de base. La présence d'une instabilité absolue, ou même d'une instabilité associée à des fluctuations de vitesse azimutale avec une forte amplification axiale, conduirait dans les configurations étoilées qui présentent de telles instabilités à la modification du régime d'écoulement (laminaire-turbulent) par rapport au cas circulaire. Cette constatation permet de formuler un scénario expliquant les différences relevées entre l'étude expérimentale et numérique du tir étoilé LP9t48 : si l'écoulement est complètement turbulent dans l'expérience en raison de la présence d'une instabilité apparue aux premiers instants du tir, les simulations numériques « laminaires » ne peuvent pas être représentatives de l'expérience et surestiment largement le niveaux d'amplitude des oscillations. Par ailleurs, l'étude de stabilité montre que le taux d'amplification des « modes VSP » est plus important lorsque le module du coefficient de Floquet est unitaire que lorsque qu'il est nul. Autrement dit, les modes VSP associés à un nombre d'onde azimutal unitaire sont moins stables que ceux associés à un nombre d'onde azimutal nul.

Enfin, les simulations LES de la configuration du montage expérimental VALDO prenant en compte le jet débouchant n'ont pas permis d'améliorer les précédentes simulations de ce montage (Gazanion, 2014). En effet, aucune des perturbations appliquées à la condition d'injection latérale n'a permis de retrouver les niveaux d'amplitude ou les fréquences des oscillations observées dans l'expérience. Cependant, ces simulations laissent supposer que l'impédance acoustique du poral, qui constitue la paroi d'injection dans l'expérience, possède une influence plus importante sur les oscillations que l'impédance acoustique de la sortie du conduit : prendre en compte cette impédance dans les simulations permettrait peut-être d'obtenir un environnement acoustique plus proche de celui de l'expérience et donc d'améliorer les niveaux d'amplitudes et les fréquences des oscillations de pression calculées.

Au total, cette étude, consacrée à un sujet peu évoqué dans la littérature pour la partie géométrie étoilée, ouvre de nombreuses perspectives.

Perspectives

Ces perspectives se déclinent en trois groupes, bien que celles concernant l'écoulement de base et la stabilité se recoupent.

Commençons par rappeler que la méthode d'obtention de la solution de l'écoulement de base au sein d'un conduit à paroi débitante de section étoilée, décrite au chapitre 3, peut *a priori* être appliquée à des géométries périodiques quelconques (voir paragraphe 3.3). Concernant le domaine de validité de la solution, celui-ci pourrait être étendu en poursuivant le développement asymptotique à des ordres supérieurs. Toutefois, s'il s'avère que l'écoulement est déjà instable pour le domaine de validité de la solution actuelle, cette recherche est vaine. Par ailleurs, le chapitre 1 a permis de présenter des extensions de la solution de Taylor–Culick qui pourraient tout à fait être appliquées à la solution proposée. On pourrait par exemple envisager de considérer un écoulement compressible (Majdalani, 2007) ou encore étudier la solution au sein d'un conduit où les parois régressent (Zhou et Majdalani, 2002). Enfin, la prise en compte de l'effet des particules d'aluminium dans l'écoulement, réalisée par Féraille (2004) dans le cas d'une veine de section rectangulaire, pourrait être appliquée au cas d'un conduit de section circulaire puis de section étoilée. Ceci permettrait notamment d'étudier l'influence de ces particules ou de la compressibilité de l'écoulement sur les résultats de stabilité linéaire dans les cas de section circulaire et étoilée.

Ceci nous amène aux questions et aux perspectives résultant de l'étude de stabilité linéaire de l'écoulement au sein de la géométrie étoilée du chapitre 4. Il est nécessaire, pour l'approche de stabilité biglobale, de parvenir à faire converger vis-à-vis du maillage les modes spécifiques à la configuration étoilée. Ceci permettra de conclure quant à la stabilité temporelle de ces modes en fonction de l'amplitude de la déviation radiale et du nombre de Reynolds. Il semble que la condition limite de sortie joue un rôle crucial sur cette convergence, tout comme le maillage lui-même (nombre de nœuds et de sous-domaines dans la direction axiale). Par ailleurs le code de résolution utilisé et la méthode de collocation spectrale pourraient être substitués par des outils et des méthodes plus récents et plus adaptés aux problèmes rencontrés, comme par exemple la librairie SLEPc (Scalable Library for Eigenvalue Problem Computations) et l'utilisation de maillages quelconques (via une approche volumes finis ou éléments finis). Si l'utilisation de ces méthodes permet la résolution de problèmes matriciels de plus grande dimension en un temps plus réduit, il serait utile de mettre en place une approche triglobale. Ceci permettrait d'éviter l'utilisation du théorème de Floquet et donc des séries de Fourier qui en découlent et qui compliquent fortement l'écriture des équations qui régissent la perturbation. L'application de cette approche permettrait au moins de valider les résultats obtenus au chapitre 4 et de donner en outre des indications quant au nombre de mode de Fourier à utiliser dans le cas de l'approche biglobale.

Enfin, de nombreuses questions concernant la transition laminaire-turbulent dans les conduits à paroi débitante en gaz froid subsistent. Comme l'avait déjà souligné Gazanion (2014), il serait intéressant d'effectuer de nouvelles campagnes de mesures dans les montages en gaz froid comme VALDO mais dédiées à l'étude de la transition laminaire-turbulent. Ceci permettrait d'améliorer la compréhension des phénomènes qui se déroulent au sein du conduit, comme par exemple le lien entre l'amplification des modes VSP et la transition. De plus, il est possible que prendre en compte le rôle du poral via une condition d'impédance acoustique de la paroi d'injection dans les simulations permette d'obtenir un environnement acoustique plus proche de celui de l'expérience. Toutefois, s'il est aujourd'hui possible de jouer sur l'amplitude des fluctuations au niveau d'une condition limite dans un code CFD, l'utilisation d'une condition d'impédance ayant un effet sur la fréquence des fluctuations est plus complexe et n'est pas disponible dans le code CEDRE. En effet une telle condition, classiquement utilisée par les acousticiens, s'exprime facilement dans le domaine fréquentiel mais plus difficilement dans le domaine temporel. Des travaux de recherche sur ce sujet sont en cours au DMPE à l'ONERA. Quant à la transition laminaire-turbulent dans les conduits de section étoilée, son étude reste à réaliser, aussi bien sur le plan expérimental que par simulation numérique. S'il existe un mode *étoilé* temporellement amplifié, les régimes de l'écoulement sont certainement très différents du cas circulaire et les éventuelles oscillations de pression en seront impactées.

De manière générale, toute cette étude a porté sur l'écoulement au sein d'un conduit à paroi débitante en gaz froid, sans autre élément géométrique tel que des protections thermiques de face. Cette configuration est qualitativement représentative d'un moteur réel mais qu'en est-il des fréquences et des taux d'amplification fournis par l'approche de stabilité biglobale, ou de la position de la transition laminaire-turbulent par exemple ? Chedevergne (2007) est parvenu avec succès à comparer les glissements fréquentiels calculés par l'approche théorique avec les résultats du tir 510 d'Ariane 5. Cependant, aucune donnée ne permet aujourd'hui d'étudier la transition laminaire-turbulent au sein de moteurs réels. Comme celle-ci joue un rôle important sur l'amplitude des oscillations de pression, il reste encore un travail important avant d'être en mesure de calculer l'amplitude des oscillations de pression, et donc de poussée, dans les moteurs à propergol solide.

Annexes

Annexe A

Incidence du changement de variable sur les expressions vectorielles

On considère un cylindre semi-ouvert de longueur $\mathcal{L}$ et de section étoilée dont la paroi est définie par $R_{paroi}(\theta) = R_p\,(1+\eta(\theta))$. Les variables d'espace $\left(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z}\right)$ ont été adimensionnées par le rayon moyen R_p. Le changement de variable suivant est introduit :

$$\begin{cases} r = \dfrac{\bar{r}}{1+\eta(\bar{\theta})}\,, \\ \theta = \bar{\theta}\,, \\ z = \bar{z}\,. \end{cases} \tag{A.1}$$

Cela implique, pour toute fonction scalaire f, que

$$\begin{cases} \partial_r f = \dfrac{1}{1+\eta(\theta)}\partial_r f\,, \\ \partial_\theta f = \dfrac{-\eta'(\theta)}{1+\eta(\theta)} r\partial_r f + \partial_\theta f\,, \\ \partial_z f = \partial_z f\,. \end{cases} \tag{A.2}$$

A.1. Calcul de la divergence avec changement de variable

La divergence d'un vecteur $\boldsymbol{q}$ en coordonnées cylindriques (donc avant le changement de variable) s'écrit :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{q} = \partial_{\bar{r}} q_r + \frac{q_r}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{\theta}} q_\theta + \partial_{\bar{z}} q_z\,. \tag{A.3}$$

Avec le changement de variable, la divergence d'un vecteur $\boldsymbol{q}$ s'exprime par :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{q} = \frac{1}{1+\eta}\partial_r q_r + \frac{q_r}{r\,(1+\eta)} - \frac{\eta'}{(1+\eta)^2}\partial_r q_\theta + \frac{1}{r\,(1+\eta)}\partial_\theta q_\theta + \partial_z q_z\,. \tag{A.4}$$

A.2. Calcul du gradient vectoriel avec changement de variable

Le gradient d'un vecteur $\boldsymbol{q}$ en coordonnées cylindriques (donc avant le changement de variable) s'écrit :

$$\boldsymbol{\nabla q} = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{r}} q_r & \dfrac{1}{\bar{r}}\left(\partial_{\bar{\theta}} q_r - q_\theta\right) & \partial_{\bar{z}} q_r \\ \partial_{\bar{r}} q_\theta & \dfrac{1}{\bar{r}}\left(\partial_{\bar{\theta}} q_\theta + q_r\right) & \partial_{\bar{z}} q_\theta \\ \partial_{\bar{r}} q_z & \dfrac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{\theta}} q_z & \partial_{\bar{z}} q_z \end{pmatrix}\,. \tag{A.5}$$

Avec le changement de variable, le gradient d'un vecteur $\boldsymbol{q}$ s'exprime par :

$$(1+\eta)\,\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \partial_r q_r & \dfrac{-\eta'}{1+\eta}\partial_r q_r + \dfrac{1}{r}\partial_\theta q_r - \dfrac{1}{r}q_\theta & (1+\eta)\,\partial_z q_r \\ \partial_r q_\theta & \dfrac{-\eta'}{1+\eta}\partial_r q_\theta + \dfrac{1}{r}\partial_\theta q_\theta + \dfrac{1}{r}q_r & (1+\eta)\,\partial_z q_\theta \\ \partial_r q_z & \dfrac{-\eta'}{1+\eta}\partial_r q_z + \dfrac{1}{r}\partial_\theta q_z & (1+\eta)\,\partial_z q_z \end{pmatrix}. \tag{A.6}$$

Dans les équations de Navier–Stokes apparaît le terme de convection $(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{q}$. Avec le changement de variable, on écrit :

$$(1+\eta)\,(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_r\partial_r q_r + q_\theta\left(\dfrac{-\eta'}{1+\eta}\partial_r q_r + \dfrac{1}{r}\partial_\theta q_r - \dfrac{1}{r}q_\theta\right) + q_z\,(1+\eta)\,\partial_z q_r \\ q_r\partial_r q_\theta + q_\theta\left(\dfrac{-\eta'}{1+\eta}\partial_r q_\theta + \dfrac{1}{r}\partial_\theta q_\theta + \dfrac{1}{r}q_r\right) + q_z\,(1+\eta)\,\partial_z q_\theta \\ q_r\partial_r q_z + q_\theta\left(\dfrac{-\eta'}{1+\eta}\partial_r q_z + \dfrac{1}{r}\partial_\theta q_z\right) + q_z\,(1+\eta)\,\partial_z q_z \end{pmatrix}. \tag{A.7}$$

On décompose le vecteur $\boldsymbol{q}$ de la manière suivante : $\boldsymbol{q} = \bar{q} + \tilde{q}$. Dans les équations de Navier–Stokes apparaissent des termes du type : $(\bar{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\tilde{\boldsymbol{q}}$ et $(\tilde{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\bar{\boldsymbol{q}}$. Voici leurs expressions respectives :

$$(1+\eta)\,(\bar{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\tilde{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \bar{q}_r\partial_r \tilde{q}_r + \bar{q}_\theta\left(\dfrac{-\eta'}{1+\eta}\partial_r \tilde{q}_r + \dfrac{1}{r}\partial_\theta \tilde{q}_r - \dfrac{1}{r}\tilde{q}_\theta\right) + \bar{q}_z\,(1+\eta)\,\partial_z \tilde{q}_r \\ \bar{q}_r\partial_r \tilde{q}_\theta + \bar{q}_\theta\left(\dfrac{-\eta'}{1+\eta}\partial_r \tilde{q}_\theta + \dfrac{1}{r}\partial_\theta \tilde{q}_\theta + \dfrac{1}{r}\tilde{q}_r\right) + \bar{q}_z\,(1+\eta)\,\partial_z \tilde{q}_\theta \\ \bar{q}_r\partial_r \tilde{q}_z + \bar{q}_\theta\left(\dfrac{-\eta'}{1+\eta}\partial_r \tilde{q}_z + \dfrac{1}{r}\partial_\theta \tilde{q}_z\right) + \bar{q}_z\,(1+\eta)\,\partial_z \tilde{q}_z \end{pmatrix}, \tag{A.8}$$

$$(1+\eta)\,(\tilde{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\bar{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_r\partial_r \bar{q}_r + \tilde{q}_\theta\left(\dfrac{-\eta'}{1+\eta}\partial_r \bar{q}_r + \dfrac{1}{r}\partial_\theta \bar{q}_r - \dfrac{1}{r}\bar{q}_\theta\right) + \tilde{q}_z\,(1+\eta)\,\partial_z \bar{q}_r \\ \tilde{q}_r\partial_r \bar{q}_\theta + \tilde{q}_\theta\left(\dfrac{-\eta'}{1+\eta}\partial_r \bar{q}_\theta + \dfrac{1}{r}\partial_\theta \bar{q}_\theta + \dfrac{1}{r}\bar{q}_r\right) + \tilde{q}_z\,(1+\eta)\,\partial_z \bar{q}_\theta \\ \tilde{q}_r\partial_r \bar{q}_z + \tilde{q}_\theta\left(\dfrac{-\eta'}{1+\eta}\partial_r \bar{q}_z + \dfrac{1}{r}\partial_\theta \bar{q}_z\right) + \tilde{q}_z\,(1+\eta)\,\partial_z \bar{q}_z \end{pmatrix}. \tag{A.9}$$

A.3. Calcul du laplacien vectoriel avec changement de variable

Cette section détaille l'expression du Laplacien d'un vecteur $\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{q}$ avec le changement de variables. En coordonnées cylindriques, avant le changement de variable, le Laplacien d'un vecteur $\boldsymbol{q}$ s'écrit

$$\bar{\boldsymbol{\nabla}}^2\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \partial^2_{\bar{r}} q_r + \dfrac{1}{\bar{r}^2}\partial^2_{\bar{\theta}} q_r + \partial^2_{\bar{z}} q_r + \dfrac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}} q_r - \dfrac{2}{\bar{r}^2}\partial_{\bar{\theta}} q_\theta - \dfrac{q_r}{\bar{r}^2} \\ \partial^2_{\bar{r}} q_\theta + \dfrac{1}{\bar{r}^2}\partial^2_{\bar{\theta}} q_\theta + \partial^2_{\bar{z}} q_\theta + \dfrac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}} q_\theta + \dfrac{2}{\bar{r}^2}\partial_{\bar{\theta}} q_r - \dfrac{q_\theta}{\bar{r}^2} \\ \partial^2_{\bar{r}} q_z + \dfrac{1}{\bar{r}^2}\partial^2_{\bar{\theta}} q_z + \partial^2_{\bar{z}} q_z + \dfrac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}} q_z \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

Avec le changement de variables, les trois composantes du vecteur $\boldsymbol{\nabla^2 q}$ sont définies par

$$\boldsymbol{\nabla^2 q} = \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{pmatrix} , \tag{A.11}$$

où

$$\begin{aligned} A_r = {} & \frac{1}{(1+\eta)^2}\left[1+\frac{\eta'^2}{(1+\eta)^2}\right]\partial_r^2 q_r + \frac{1}{r^2(1+\eta)^2}\partial_\theta^2 q_r + \partial_z^2 q_r \\ & + \frac{1}{r(1+\eta)^2}\left[1+\frac{\eta'^2}{(1+\eta)^2} - \partial_\theta \frac{\eta'}{1+\eta}\right]\partial_r q_r + \frac{2\eta'}{r(1+\eta)^3}\partial_r q_\theta \\ & - \frac{2}{r^2(1+\eta)^2}\partial_\theta q_\theta - \frac{q_r}{r^2(1+\eta)^2} - \frac{2\eta'}{r(1+\eta)^3}\partial_\theta\partial_r q_r , \end{aligned} \tag{A.12a}$$

$$\begin{aligned} A_\theta = {} & \frac{1}{(1+\eta)^2}\left[1+\frac{\eta'^2}{(1+\eta)^2}\right]\partial_r^2 q_\theta + \frac{1}{r^2(1+\eta)^2}\partial_\theta^2 q_\theta + \partial_z^2 q_\theta \\ & + \frac{1}{r(1+\eta)^2}\left[1+\frac{\eta'^2}{(1+\eta)^2} - \partial_\theta \frac{\eta'}{1+\eta}\right]\partial_r q_\theta - \frac{2\eta'}{r(1+\eta)^3}\partial_r q_r \\ & + \frac{2}{r^2(1+\eta)^2}\partial_\theta q_r - \frac{q_\theta}{r^2(1+\eta)^2} - \frac{2\eta'}{r(1+\eta)^3}\partial_\theta\partial_r q_\theta , \end{aligned} \tag{A.12b}$$

$$\begin{aligned} A_z = {} & \frac{1}{(1+\eta)^2}\left[1+\frac{\eta'^2}{(1+\eta)^2}\right]\partial_r^2 q_z + \frac{1}{r^2(1+\eta)^2}\partial_\theta^2 q_z + \partial_z^2 q_z \\ & + \frac{1}{r(1+\eta)^2}\left[1+\frac{\eta'^2}{(1+\eta)^2} - \partial_\theta \frac{\eta'}{1+\eta}\right]\partial_r q_z - \frac{2\eta'}{r(1+\eta)^3}\partial_\theta\partial_r q_z . \end{aligned} \tag{A.12c}$$

Annexe B

Détermination des conditions limites sur l'axe pour la correction d'ordre deux de l'écoulement de base

Le but de cette annexe est de détailler la détermination des conditions limites qui s'appliquent sur l'axe ($r = 0$) pour la correction d'ordre $O(\varepsilon^2)$ de l'écoulement de base (voir chapitre 3). L'utilisation des coordonnées cylindriques fait apparaître des singularités dans les équations. Ces singularités ne correspondent pas à des singularités physiques de l'écoulement, elles sont dû au fait que le changement de variable n'est pas défini [1] en $r = 0$. C'est pourquoi il est nécessaire de déterminer ces conditions limites. La méthode est la même que celle présentée au 3.2.2, elle consiste à supposer un comportement régulier des différentes fonctions au voisinage de l'axe.

On commence par écrire le développement limité des fonctions d'ordre $O(\varepsilon^0)$ en utilisant la nullité de $U_r^{(0)}$ et de $U_z^{(0)'}$ sur l'axe. On pose donc au voisinage de l'axe $r = 0$:

$$\begin{cases} U_r^{(0)} = u_r^1 r + u_r^2 r^2 + o(r^2)\,, \\ U_z^{(0)} = u_z^0 + u_z^2 r^2 + o(r^2)\,. \end{cases} \tag{B.1}$$

On procède de même avec les fonctions d'ordre $O(\varepsilon)$ en utilisant la nullité $U_r^{(1)}, U_\theta^{(1)}, U_\theta^{(1)'}, U_z^{(1)}$ et $U_z^{(1)'}$ sur l'axe :

$$\begin{cases} U_r^{(1)} = v_r^1 r + v_r^2 r^2 + o(r^2)\,, \\ U_\theta^{(1)} = v_\theta^2 r^2 + o(r^2)\,, \\ U_z^{(1)} = v_z^2 r^2 + o(r^2)\,. \end{cases} \tag{B.2}$$

De plus, on rappelle que $U_r^{(1)'}(0) = -F''(0)/2$, soit $u_r^1 = v_r^1$. Dans un souci de concision, on omet les petits o lorsqu'il ne s'agit pas de grandeurs d'ordre $O(\varepsilon^2)$.

B.1. Conditions pour $U_{,2}^{(2)}$

De la même façon, on suppose que les fonctions $U_{r,2}^{(2)}$, $U_{\theta,2}^{(2)}$, $U_{z,2}^{(2)}$ et $P_{,2}^{(2)}$ ont un comportement régulier sur l'axe :

$$\begin{cases} U_{r,2}^{(2)} = \sigma_{r,2}^0 + \sigma_{r,2}^1 r + \sigma_{r,2}^2 r^2 + o(r^2)\,, \\ U_{\theta,2}^{(2)} = \sigma_{\theta,2}^0 + \sigma_{\theta,2}^1 r + \sigma_{\theta,2}^2 r^2 + o(r^2)\,, \\ U_{z,2}^{(2)} = \sigma_{z,2}^0 + \sigma_{z,2}^1 r + \sigma_{z,2}^2 r^2 + o(r^2)\,, \\ P_{,2}^{(2)} = \sigma_{p,2}^0 + \sigma_{p,2}^1 r + \sigma_{p,2}^2 r^2 + o(r^2)\,. \end{cases} \tag{B.3}$$

Ce développement est introduit dans les équations régissant l'ordre $O(\varepsilon^2)$ (système (D1) de l'article).

1. La matrice jacobienne correspondant au changement de variable n'est pas inversible en $r = 0$.

L'équation de continuité donne :

$$\left(\sigma_{r,2}^1 + 2\sigma_{r,2}^2 r + o(r)\right) + \left(\frac{\sigma_{r,2}^0}{r} + \sigma_{r,2}^1 + \sigma_{r,2}^2 r + o(r)\right) - 2m^2\left(\frac{\sigma_{\theta,2}^0}{r} + \sigma_{\theta,2}^1 + \sigma_{\theta,2}^2 r + o(r)\right),$$
$$+ \left(\sigma_{z,2}^0 + \sigma_{z,2}^1 r + \sigma_{z,2}^2 r^2 + o(r^2)\right) = -\frac{1}{2}\left(v_z^2\right) - \frac{m^2}{2}\left(2v_\theta^2\right). \tag{B.4}$$

Le rassemblement des termes d'ordre $O(r^{-1})$ conduit à

$$\sigma_{r,2}^0 - 2m^2\sigma_{\theta,2}^0 = 0\,. \tag{B.5}$$

De plus le rassemblement des termes d'ordre $O(1)$ permet d'obtenir

$$2\sigma_{r,2}^1 - 2m^2\sigma_{\theta,2}^1 + \sigma_{z,2}^0 = 0\,. \tag{B.6}$$

Ensuite l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$ s'écrit

$$\frac{-1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(2\sigma_{r,2}^2 + o(1)\right) + \left(u_r^1 + u_r^2 - \frac{1}{r\mathcal{R}_\mathrm{e}}\right)\left(\sigma_{r,2}^1 + 2\sigma_{r,2}^2 r + o(r)\right)$$
$$+ \left(u_r^1 + 2u_r^2 r + \frac{4m^2+1}{r^2\mathcal{R}_\mathrm{e}}\right)\left(\sigma_{r,2}^0 + \sigma_{r,2}^1 r + \sigma_{r,2}^2 r^2 + o(r^2)\right) - \frac{4m^2}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(\frac{\sigma_{\theta,2}^0}{r^2} + \frac{\sigma_{\theta,2}^1}{r} + \sigma_{\theta,2}^2 + o(1)\right)$$
$$+ \left(\sigma_{p,2}^1 + 2\sigma_{p,2}^2 r + o(r)\right) = \frac{1}{2}\left(v_r^1 + 2v_r^2 r\right)\left(v_r^1 r + v_r^2 r^2\right) - \frac{m^2}{2}\left(v_\theta^2\right)\left(u_r^1 + 2u_r^2 r - v_r^1 - v_r^2 r + v_\theta^2 r\right)$$
$$+ \frac{1}{2\mathcal{R}_\mathrm{e}}\Bigg[\left(2u_r^2\right)\left(1-m^2\right) - 2v_r^2 + \left(1-4m^2\right)\left(\frac{u_r^1}{r} + 2u_r^2\right) + \left(3m^2-1\right)\left(\frac{v_r^1}{r} + 2v_r^2\right) +$$
$$\left(m^2+1\right)\left(\frac{v_r^1}{r} + v_r^2\right) - 2m^2\left(v_\theta^2\right) - \left(\frac{u_r^1}{r} + u_r^2\right)\Bigg]. \tag{B.7}$$

Le rassemblement des termes d'ordre $O(r^{-2})$ mène à $(4m^2+1)\sigma_{r,2}^0 - 4m^2\sigma_{\theta,2}^0 = 0$. Combiné à l'équation (B.5), ceci permet d'obtenir $2m^2(2m^2+1)\sigma_{\theta,2}^0 = 0$ soit, pour $m \neq 0$:

$$\sigma_{\theta,2}^0 = 0 \quad \text{et donc} \quad \sigma_{r,2}^0 = 0\,. \tag{B.8}$$

Après simplification par $\mathcal{R}_\mathrm{e}$, le rassemblement des termes d'ordre $O(r^{-1})$ mène à $8m^2(\sigma_{r,2}^1 - \sigma_{\theta,2}^1) = 4m^2(v_r^1 - u_r^1)$. Comme $u_r^1 = v_r^1$, on obtient finalement, pour $m \neq 0$,

$$\sigma_{r,2}^1 = \sigma_{\theta,2}^1\,. \tag{B.9}$$

Enfin l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$ s'écrit

$$\frac{-1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(2\sigma_{z,2}^2 + o(1)\right) + \left(u_r^1 r + u_r^2 r^2 - \frac{1}{r\mathcal{R}_\mathrm{e}}\right)\left(\sigma_{z,2}^1 + 2\sigma_{z,2}^2 r + o(r)\right)$$
$$+ \left(2u_z^0 + 2u_z^2 r^2 + \frac{4m^2}{r^2\mathcal{R}_\mathrm{e}}\right)\left(\sigma_{z,2}^0 + \sigma_{z,2}^1 r + \sigma_{z,2}^2 r^2 + o(r^2)\right) + \left(2u_z^2\right)\left(\sigma_{r,2}^0 + \sigma_{r,2}^1 r + \sigma_{r,2}^2 r^2 + o(r^2)\right)$$
$$= \frac{-1}{2}\left(v_r^1 r + v_r^2 r^2\right)\left(2v_z^2\right) - \frac{1}{2}\left(v_z^2 r^2\right)^2 - \left(u_z^0 + u_z^2 r^2\right)\left(v_z^2 r^2\right) - \frac{m^2}{2}\left(v_\theta^2 r^2\right)\left(2u_z^2 r\right)$$
$$+ \frac{m^2}{2}\left(v_\theta^2 r\right)\left(v_z^2 r^2\right) + \frac{1}{2\mathcal{R}_\mathrm{e}}\Bigg[\left(2u_z^2\right)\left(1-m^2\right) - \left(2v_z^2\right) + \left(1-4m^2\right)\left(2u_z^2\right) + \left(3m^2-1\right)\left(2v_z^2\right)$$
$$+ m^2\left(v_z^2\right)\Bigg]. \tag{B.10}$$

Le rassemblement des termes d'ordre $O(r^{-2})$ donne $4m^2/\mathcal{R}_\mathrm{e}\sigma_{z,2}^0 = 0$ soit, si $m \neq 0$,

$$\sigma_{z,2}^0 = 0\,. \tag{B.11}$$

Cette précédente équation permet de simplifier l'équation (B.6) en $\sigma_{r,2}^1 - m^2\sigma_{\theta,2}^2 = 0$. Combinée à l'équation (B.9), ces équations permettent de déduire que si $m \neq \pm 1$ on

$$\sigma_{r,2}^1 = 0 \quad \text{et donc} \quad \sigma_{\theta,2}^1 = 0\,. \tag{B.12}$$

Après simplification par $\mathcal{R}_\mathrm{e}$, le rassemblement des termes d'ordre $O(r^{-1})$ dans l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$ conduit à $(4m^2-1)\sigma_{z,2}^1 = 0$ soit, si $m \neq \pm 1/2$,

$$\sigma_{z,2}^1 = 0\,. \tag{B.13}$$

Ces différentes équations suffisent pour résoudre le système d'ODE régissant $U_{,2}$. Les conditions utilisées sont : $\sigma_{r,2}^0 = \sigma_{\theta,2}^0 = \sigma_{r,2}^1 = \sigma_{z,2}^1 = 0$ soit

$$U_{r,2}^{(2)}(0) = U_{\theta,2}^{(2)}(0) = U_{r,2}^{(2)\prime}(0) = U_{z,2}^{(2)\prime} = 0\,. \tag{B.14}$$

B.2. Conditions pour $U_{,0}^{(2)}$

On effectue un développement de Taylor de $U_{r,2}^{(2)}$, $U_{\theta,2}^{(2)}$, $U_{z,2}^{(2)}$ et $P_{,2}^{(2)}$ sur l'axe :

$$\begin{cases} U_{r,0}^{(2)}(r=0) = \sigma_{r,0}^0 + \sigma_{r,0}^1 r + \sigma_{r,0}^2 r^2 + o(r^2)\,, \\ U_{z,0}^{(2)}(r=0) = \sigma_{z,0}^0 + \sigma_{z,0}^1 r + \sigma_{z,0}^2 r^2 + o(r^2)\,, \\ P_{,0}^{(2)}(r=0) = \sigma_{p,0}^0 + \sigma_{p,0}^1 r + \sigma_{p,0}^2 r^2 + o(r^2)\,. \end{cases} \tag{B.15}$$

Ce développement est introduit dans les équations régissant l'ordre $O(\varepsilon^2)$ (système (D2) et équation (D3) de l'article Bouyges *et al.* (2017) du chapitre 3). On rappelle que numériquement c'est une ODE d'ordre 3 en $U_{r,0}^{(2)}$ qui est résolue et on sait déjà que $U_{r,0}^{(2)}(r=1) = m^2/4$. Nous recherchons donc deux conditions limites sur l'axe pour $U_{r,0}^{(2)}$.

On commence par l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} &\left(\sigma_{r,0}^1 + 2\sigma_{r,0}^2 r + o(r)\right) + \left(\frac{\sigma_{r,0}^0}{r} + \sigma_{r,0}^1 + \sigma_{r,0}^2 r + o(r)\right) + \left(\sigma_{z,0}^0 + \sigma_{z,0}^1 r + \sigma_{z,0}^2 r^2 + o(r^2)\right) \\ &= \frac{-1}{2}\left(v_z^2 r^2\right) + \frac{m^2}{2}\left(2v_\theta^2 r\right)\,. \end{aligned} \tag{B.16}$$

Le rassemblement des termes d'ordre $O(r^{-1})$ conduit à

$$\sigma_{r,0}^0 = 0\,, \tag{B.17}$$

tandis que celui des termes d'ordre $O(1)$ permet d'obtenir

$$2\sigma_{r,0}^1 + \sigma_{z,0}^0 = 0\,. \tag{B.18}$$

À ce stade il est possible d'utiliser l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$, qui donne $\sigma_{r,0}^0 = 0$ et $\sigma_{r,0}^1 = 0$. Toutefois la condition $\sigma_{r,0}^1 = 0$ ne permet pas de résoudre numériquement le problème et ce n'est donc pas la condition utilisée. L'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$ ne donne pas d'informations supplémentaire sur $U_{r,0}^{(2)}(0)$. On choisit donc d'utiliser directement l'équation (D3) de l'article Bouyges *et al.* (2017) du chapitre 3 qui régit $U_{r,0}^{(2)}$. L'introduction du

développement de Taylor dans cette équation donne :

$$
\begin{aligned}
&(0+o(1)) + \left(-u_r^1 r - u_r^2 r^2 + \frac{2}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\right)\left(2\sigma_{r,0}^2 + o(1)\right) - \left(2u_z^2 + u_r^1 + u_r^2 r + \frac{1}{r^2\mathcal{R}_\mathrm{e}}\right)\left(\sigma_{r,0}^1 + 2\sigma_{r,0}^2 r\right) \\
&+ \left(\frac{u_r^1}{r} + u_r^2 - 2u_r^2 r - 2u_z^2 r + \frac{1}{r^3\mathcal{R}_\mathrm{e}}\right)\left(\sigma_{r,0}^0 + \sigma_{r,0}^1 r + \sigma_{r,0}^2 r^2 + o(r^2)\right) = \kappa - \left(v_r^1 r + v_r^2 r^2\right)\left(v_z^2 r\right) \\
&- \frac{1}{2}\left(v_z^2 r^2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(u_r^1 r + u_r^2 r^2\right)\left(v_z^1 + 2v_z^2 r\right) + \frac{m^2}{2}\Bigg[\left(v_\theta^2 r^2\right)\left(2u_z^2 r\right) - \left(v_\theta^2 r\right)\left(v_z^2 r^2\right) \\
&- \left(u_r^1 r + u_r^2 r^2\right)\left(2v_\theta^2\right) - 2\left(u_z^2 r^2\right)\left(2v_\theta^2 r\right)\Bigg] + \frac{1}{2\mathcal{R}_\mathrm{e}}\Bigg[\left(1+m^2\right)\left(2u_z^2\right) - 2\left(2v_z^2\right) + \left(2u_z^2\right) \\
&- \left(m^2+2\right)\left(2v_z^2\right) + m^2\left(v_z^2 + 0 + 2v_\theta^2\right)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{B.19}
$$

Dans cette équation, le rassemblement des termes d'ordre $O(r^{-1})$ et la simplification par $\mathcal{R}_\mathrm{e}$ conduit à

$$\sigma_{r,0}^2 = \frac{1}{3} m^2 v_\theta^2 \,. \tag{B.20}$$

Au total les deux conditions limites sur l'axe retenue pour la résolution du système (D3) de l'article Bouyges *et al.* (2017) du chapitre 3 régissant $U_{,0}$ sont $\sigma_{r,0}^0 = 0$ et $\sigma_{r,0}^2 = m^2 v_\theta^2/3$ soit :

$$U_{r,0}^{(2)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad U_{r,0}^{(2)''}(0) = \frac{m^2}{3} U_\theta^{(1)''}(0) \,. \tag{B.21}$$

Annexe C

Détermination des conditions limites sur l'axe pour la perturbation de stabilité linéaire

La méthode d'obtention des conditions limites sur l'axe pour la perturbation de stabilité linéaire, que ce soit en 1D ou en 2D, est similaire à celle utilisée dans l'annexe B. Il s'agit d'effectuer un développement de Taylor des différentes fonctions au voisinage de $r = 0$, d'introduire ce développement dans les équations de Navier–Stokes linéarisées puis d'en déduire des relations entre les différents ordres des différentes composantes. Dans la suite, on présente d'abord de manière détaillée l'obtention des conditions limites sur l'axe dans le cas de l'étude de stabilité linéaire locale puis on explique plus succinctement l'obtention des conditions limites dans le cas de l'analyse de stabilité biglobale. Sauf mention contraire, on considère dans toute la suite de cette annexe que $\varepsilon > 0$. Toutefois, on traite à la fin le cas particulier $\varepsilon = 0$.

C.1. Cas de l'étude de stabilité linéaire locale

Dans le cas de l'approche de stabilité linéaire locale, la perturbation $\hat{u}$ s'écrit :

$$\tilde{u}(r,\theta,z,t) = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_l(r)\, e^{iml\theta} \right) e^{\gamma\theta} e^{i(kz-\omega t)} \,. \tag{C.1}$$

Un développement de Taylor de tous les modes de Fourier des différentes composantes de la perturbation est effectué sur l'axe. Ainsi on pose, $\forall l \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \hat{u}_l^z = a_0^l + a_1^l r + a_2^l r^2 + o(r^2)\,, \\ \hat{u}_l^r = b_0^l + b_1^l r + b_2^l r^2 + o(r^2)\,, \\ \hat{u}_l^\theta = c_0^l + c_1^l r + c_2^l r^2 + o(r^2)\,, \\ \hat{u}_l^p = d_0^l + d_1^l r + d_2^l r^2 + o(r^2)\,. \end{cases} \tag{C.2}$$

Les exposants « l » désignent l'exposant de la série de Fourier et pas une puissance. Les équations étant linéaires, il n'y aura pas de « puissances » et donc pas d'ambiguïté. Ce développement est introduit dans les équations obtenues au 4.2.1, c'est-à-dire les équations de Navier–Stokes linéarisées et rendues indépendantes de θ. L'introduction du développement de Taylor dans ces équations est réalisé avec le logiciel Maple™, qui permet d'isoler les différents ordres ($O(1/r)$, $O(1)$, $O(r)$ etc). Voici deux équations [1] qui vont servir dans la suite de l'explication, chacune étant valable pour tout $l \in \mathbb{Z}$.

1. Ces équations étant obtenues avec le logiciel de calcul formel Maple™, il se peut qu'elles ne soient pas simplifiées au maximum : par exemple Maple™ peut écrire $x + x$ au lieu de $2x$.

Les termes en $O(1/r^2)$ dans l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(-\frac{1}{4}\gamma^2\varepsilon^2+\frac{1}{4}m^2(l-2)^2\varepsilon^2-\frac{1}{2}im(l-2)\gamma\varepsilon^2\right)a_0^{l-2}\\
&+\frac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(-\gamma^2\varepsilon+m^2(l-1)^2\varepsilon-2im(l-1)\gamma\varepsilon\right)a_0^{l-1}\\
&+\frac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(-2iml\gamma-iml\gamma\varepsilon^2-\frac{1}{2}\gamma^2\varepsilon^2-\gamma^2+\frac{1}{2}m^2l^2\varepsilon^2+m^2l^2\right)a_0^{l}\\
&+\frac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(-\gamma^2\varepsilon+m^2(l+1)^2\varepsilon-2im(l+1)\gamma\varepsilon\right)a_0^{l+1}\\
&+\frac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(-\frac{1}{4}\gamma^2\varepsilon^2+\frac{1}{4}m^2(l+2)^2\varepsilon^2-\frac{1}{2}im(l+2)\gamma\varepsilon^2\right)a_0^{l+2}=0\,.
\end{aligned}\tag{C.3}$$

Les termes en $O(1/r)$ dans l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon^2}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}m^2(l-2)+\frac{1}{2}im\gamma-\frac{1}{4}\gamma^2+\frac{1}{4}m^2(l-2)^2-\frac{1}{2}im(l-2)\gamma\right)a_1^{l-2}\\
&+\frac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(-\varepsilon m^2(l-1)-\frac{1}{2}\varepsilon m^2-\varepsilon+i\varepsilon m\gamma-\gamma^2\varepsilon+m^2(l-1)^2\varepsilon-2im(l-1)\gamma\varepsilon\right)a_1^{l-1}\\
&+\frac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(-\frac{3}{2}\varepsilon^2m^2-1-\frac{1}{2}\varepsilon^2-2iml\gamma-iml\gamma\varepsilon^2-\frac{1}{2}\gamma^2\varepsilon^2-\gamma^2+\frac{1}{2}m^2l^2\varepsilon^2+m^2l^2\right)a_1^{l}\\
&+\frac{1}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(\varepsilon m^2(l+1)-\frac{1}{2}\varepsilon m^2-\varepsilon-i\varepsilon m\gamma+-\gamma^2\varepsilon+m^2(l+1)^2\varepsilon-2im(l+1)\gamma\varepsilon\right)a_1^{l+1}\\
&+\frac{\varepsilon^2}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\left(\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}m^2(l+2)-\frac{1}{2}im\gamma-\frac{1}{4}\gamma^2+\frac{1}{4}m^2(l+2)^2-\frac{1}{2}im(l+2)\gamma\right)a_1^{l+2}\\
&=0\,.
\end{aligned}\tag{C.4}$$

La technique de résolution est la suivante : toutes ces équations peuvent s'écrire sous la forme $\boldsymbol{M}x=0$, où $x={}^{\mathrm{t}}(a_0^{l-2},a_0^{l-1},a_0^{l},a_0^{l+1},a_0^{l+2})$ par exemple. On en déduit que $x=0$ sauf si $det(\boldsymbol{M})=0$. Le but est donc de trouver $\boldsymbol{M}$ et x tels que $det(\boldsymbol{M})\neq 0$. Pour calculer numériquement le déterminant de $\boldsymbol{M}$ il faut, comme pour la résolution du problème aux valeurs propres généralisé, tronquer les séries de Fourier et considérer un certain nombre de modes de Fourier $((2l_{max}+1))$.

On écrit alors, pour chaque « famille » d'équations comme celle formée par les termes en $O(1/r^2)$ dans l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$ (C.3), les $(2l_{max}+1)$ équations obtenues en prenant chaque valeur de l dans $[\![-l_{max},l_{max}]\!]$. Ces systèmes d'équations peuvent être assemblés entre eux pour former de plus grands systèmes : par exemple le système formé par les termes en $O(r)$ dans l'équation de continuité et les termes en $O(1/r^2)$ dans l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$.

Traitons un exemple : celui de la condition limite à appliquer à $\hat{u}_z$. On considère la famille d'équations formée par les termes en $O(1/r^2)$ dans l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$, c'est-à-dire l'équation (C.3). Les inconnues du problèmes sont $a_0^{l_{max}}$, $a_0^{l_{max}-1}$, ..., $a_0^{-l_{max}}$. Pour $l_{max}=0$, le système $\boldsymbol{M}x=0$ formé est simplement

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{\gamma^2\left(\varepsilon^2+2\right)}{\mathcal{R}_\mathrm{e}}\right)(a_0)=0\,.\tag{C.5}$$

L'obtention de son déterminant est immédiat. On retrouve le résultat du cas cylindrique : si $\gamma=0$, ce déterminant est nul et on obtient que a_0^l est quelconque (puis on montre que a_1^l, soit la dérivée de $\hat{u}_z$, est nul). En revanche si $\gamma\neq 0$, ce déterminant n'est pas nul ce qui implique que $a_0^l=0$. On vérifie que ce résultat est toujours valable lorsque qu'on augmente l_{max}. Voici l'expression du déterminant pour $l_{max}=3$, où les inconnues sont $(a_0^{l-3},a_0^{l-2},a_0^{l-1},a_0^{l},a_0^{l+1},a_0^{l+2},a_0^{l+3})$ et les

équations sont toujours formées à partir de l'équation (C.3) :

$$
\begin{aligned}
det(l_{max}=3) = -\frac{\gamma^2}{4096\,\mathcal{R}_e{}^7}\Big(&14450688\,m^{10}\gamma^2 - 4736\,\gamma^{12}\varepsilon^6 + 5308416\,m^{12}\\
&- 36126720\,m^{10}\gamma^2\varepsilon^2 - 16708608\,\varepsilon^6 m^{10}\gamma^2 - 173280\,\varepsilon^{10}m^6\gamma^6 + 2935296\varepsilon^4 m^4\gamma^8\\
&+ 14416896\,\varepsilon^4 m^6\gamma^6 + 34035456\,\varepsilon^4 m^8\gamma^4 + 35223552\varepsilon^4 m^{10}\gamma^2 - 286720\,\varepsilon^2 m^2\gamma^{10}\\
&- 3360\,\varepsilon^{10}m^2\gamma^{10} + 280\,\varepsilon^{12}m^2\gamma^{10} + 279552\,\varepsilon^4 m^2\gamma^{10} - 132608\varepsilon^6 m^2\gamma^{10} + 140\,\varepsilon^{14}m^2\gamma^{10}\\
&+ 31808\,\varepsilon^8 m^2\gamma^{10} - 3010560\,\varepsilon^2 m^4\gamma^8 - 14786560\,\varepsilon^2 m^6\gamma^6 - 34908160\,\varepsilon^2 m^8\gamma^4 + 3872624\,\gamma^4 m^8\varepsilon^8\\
&- 409080\,\gamma^4 m^8\varepsilon^{10} - 16145024\,\gamma^4 m^8\varepsilon^6 + 34090\,\gamma^4 m^8\varepsilon^{12} + 17045\,\gamma^4 m^8\varepsilon^{14} - 6838784\,\gamma^6 m^6\varepsilon^6\\
&+ 1640384\,\gamma^6 m^6\varepsilon^8 + 14440\,\gamma^6 m^6\varepsilon^{12} + 7220\,\gamma^6 m^6\varepsilon^{14} - 35280\,\gamma^8 m^4\varepsilon^{10} + 2940\,\gamma^8 m^4\varepsilon^{12}\\
&- 1392384\,\gamma^8 m^4\varepsilon^6 + 333984\,\gamma^8 m^4\varepsilon^8 + 1470\,\gamma^8 m^4\varepsilon^{14} - 423360\,\varepsilon^{10}m^{10}\gamma^2 + 35280\,\varepsilon^{12}m^{10}\gamma^2\\
&+ 17640\,\varepsilon^{14}m^{10}\gamma^2 + 4007808\,\varepsilon^8 m^{10}\gamma^2 + 5914624\,\gamma^6 m^6 + 1204224\,\gamma^8 m^4 + 114688\,\gamma^{10}m^2\\
&+ 1136\,\gamma^{12}\varepsilon^8 - 120\,\gamma^{12}\varepsilon^{10} - 10240\,\gamma^{12}\varepsilon^2 + 9984\,\gamma^{12}\varepsilon^4 + 10\,\gamma^{12}\varepsilon^{12} + 5\,\gamma^{12}\varepsilon^{14} + 13963264\,m^8\gamma^4\\
&+ 4096\,\gamma^{12} - 6137856\,\varepsilon^6 m^{12} + 1472256\,\varepsilon^8 m^{12} + 6480\varepsilon^{14}m^{12} - 155520\,\varepsilon^{10}m^{12}\\
&+ 12939264\,\varepsilon^4 m^{12} - 13271040\,\varepsilon^2 m^{12} + 12960\,m^{12}\varepsilon^{12}\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{C.6}
$$

Tout d'abord on constate que la complexité du déterminant grandit rapidement quand l_{max} augmente. Ensuite on retrouve, avec la présence de γ en facteur de l'expression, que le déterminant est nul quand $\gamma = 0$. En revanche si $\gamma \neq 0$, il faut une relation très particulière entre ε, m et γ pour que le déterminant soit nul. En fixant γ et m, il possible de tracer le polynôme en ε et de déterminer graphiquement ses racines. Ou, de manière équivalente, on peut fixer [2] γ et tracer dans un plan (m, ε) la surface dont la hauteur est définie par la valeur du déterminant. Dans notre cas, où seules quelques valeurs de $\varepsilon \in [0, 0.2]$ sont étudiées, il est peu probable de tomber sur une racine du polynôme. On admet donc que si $\gamma \neq 0$, le déterminant est non nul et $\hat{u}_l^z(r=0) = a_0^l = 0$.

Si $\gamma = 0$ et que ce déterminant est nul, il faut chercher une condition à imposer sur $\partial_r \hat{u}^z$, c'est-à-dire sur les a_1^l. Pour cela la famille d'équations obtenue avec les termes en $O(1/r)$ dans l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$ (équation (C.4)) est utilisée. Les $(2l_{max}+1)$ inconnues sont désormais a_1^{lmax}, a_1^{lmax-1}, ..., a_1^{-lmax}. La même procédure est appliquée : une matrice composée des équations écrites pour les différentes valeurs de l est formée et son déterminant est calculé. Dans le cas axisymétrique, $\partial_r \hat{u}^z$ est nul sur l'axe quand le nombre d'onde azimutal est nul, c'est-à-dire quand $\gamma = 0$. Voici ce que donne le déterminant pour $l_{max} = 0$, qui prouve entre autres le résultat du cas axisymétrique :

$$
det(l_{max}=0) = -\frac{1}{2\mathcal{R}_e}\left(2 + \gamma^2\left(2+\varepsilon^2\right) + \varepsilon^2\left(1+3m^2\right)\right)\,. \tag{C.7}
$$

Quand $\gamma = \varepsilon = 0$, c'est-à-dire lorsque la configuration est axisymétrique, ce déterminant est différent de 0 et donc $\partial_r \hat{u}_z = 0$ sur l'axe. Toujours avec $\varepsilon = 0$, le déterminant s'annule lorsque $\gamma = i$ (c'est-à-dire un nombre d'onde azimutal de 1).

Reprenons l'étude de la configuration étoilée : comme dans le cas précédent, lorsque l_{max} augmente la complexité du déterminant augmente rapidement. Voici le déterminant en prenant

2. On rappelle que $\gamma \in i\,[\![0, m[\![$.

$l_{max} = 2$:

$$
\begin{aligned}
det(l_{max}=2) = -\frac{1}{256}\frac{1}{\mathcal{R}_e{}^5}\Big(&256 + 4096\,m^8 - 5120\,m^2\gamma^2 + 240\,\varepsilon^6\gamma^2m^6 - 9560\,\gamma^4m^4\varepsilon^6 \\
&+ 34400\,\gamma^4m^4\varepsilon^4 + 6272\,\gamma^6m^2\varepsilon^4 - 1280\,\gamma^6m^2\varepsilon^6 + 384\,\gamma^6m^2\varepsilon^8 \\
&+ 2268\,\gamma^4m^4\varepsilon^8 - 384\,\gamma^2m^6\varepsilon^4 + 120\,\gamma^2m^6\varepsilon^8 + 1227\,\gamma^4m^4\varepsilon^{10} + 138\,\gamma^2m^6\varepsilon^{10} - 32640\,\gamma^4m^4\varepsilon^2 \\
&+ 768\,\gamma^2m^6\varepsilon^2 + 288\,\gamma^6m^2\varepsilon^{10} - 9216\,\gamma^6\varepsilon^2m^2 + 63\,\varepsilon^{10}m^2 + 15\,\varepsilon^{10}\gamma^2 + 1280\,\gamma^8 - 40\,\gamma^{10}\varepsilon^6 \\
&- 4992\,\varepsilon^2m^2\gamma^8 + 29824\,\varepsilon^4m^6\gamma^4 - 5160\,\varepsilon^6m^4\gamma^6 + 996\,\varepsilon^8m^4\gamma^6 + 501\,\varepsilon^{10}m^4\gamma^6 + 750\,\varepsilon^8m^8\gamma^2 \\
&- 3760\,\varepsilon^6m^8\gamma^2 - 8200\,\varepsilon^6m^6\gamma^4 + 1620\,\varepsilon^8m^6\gamma^4 + 789\,\varepsilon^{10}m^6\gamma^4 + 360\,\varepsilon^{10}m^8\gamma^2 + 19488\,\varepsilon^4m^4\gamma^6 \\
&- 22656\,\varepsilon^2m^4\gamma^6 - 13824\,\varepsilon^2m^8\gamma^2 - 31872\,\varepsilon^2m^6\gamma^4 - 760\,\varepsilon^6m^2\gamma^8 + 132\,\varepsilon^8m^2\gamma^8 + 75\,\varepsilon^{10}m^2\gamma^8 \\
&+ 3328\,\varepsilon^4m^2\gamma^8 + 13456\,\gamma^2m^8\varepsilon^4 - 40\,\varepsilon^6 + 6\,\varepsilon^8 - 13824\,m^8\varepsilon^2 + 13456\,m^8\varepsilon^4 - 3760\,m^8\varepsilon^6 \\
&+ 750\,m^8\varepsilon^8 + 360\,m^8\varepsilon^{10} + 5120\,m^2\gamma^6 + 8960\,m^4\gamma^4 + 1040\,\gamma^8\varepsilon^4 - 200\,\gamma^8\varepsilon^6 + 30\,\gamma^8\varepsilon^8 + 15\,\gamma^8\varepsilon^{10} \\
&- 1920\,\varepsilon^2\gamma^8 + 2560\,\gamma^6 + 256\,\gamma^{10} + 12288\,m^2\varepsilon^2\gamma^2 - 7808\,\varepsilon^4m^2\gamma^2 + 2240\,\varepsilon^6m^2\gamma^2 + 8448\,m^4 \\
&+ 2560\,\gamma^4 + 8960\,m^4\gamma^2 + 2080\,\gamma^6\varepsilon^4 - 400\,\gamma^6\varepsilon^6 + 60\,\gamma^6\varepsilon^8 + 30\,\varepsilon^{10}\gamma^6 + 1000\,\varepsilon^6m^2 - 12\,\varepsilon^8m^2 \\
&- 384\,\varepsilon^2 - 3712\,\varepsilon^4m^2 + 208\,\varepsilon^4 - 2560\,m^2 + 5760\,\varepsilon^2m^2 + 1280\,\gamma^2 - 1920\,\gamma^2\varepsilon^2 - 24192\,m^4\varepsilon^2 \\
&+ 20256\,\varepsilon^4m^4 - 5640\,\varepsilon^6m^4 + 3\,\varepsilon^{10} - 3840\,\gamma^4\varepsilon^2 + 2080\,\varepsilon^4\gamma^4 - 400\,\varepsilon^6\gamma^4 - 10240\,m^6 \\
&+ 35168\,m^4\gamma^2\varepsilon^4 - 1152\,m^2\gamma^4\varepsilon^4 + 360\,m^2\gamma^4\varepsilon^8 + 2028\,m^4\gamma^2\varepsilon^8 + 951\,\varepsilon^{10}m^4\gamma^2 + 414\,\varepsilon^10m^2\gamma^4 \\
&- 34176\,\varepsilon^2m^4\gamma^2 + 2304\,\varepsilon^2m^2\gamma^4 - 10040\,m^4\gamma^2\varepsilon^6 + 720\,m^2\gamma^4\varepsilon^6 - 3840\,\gamma^6\varepsilon^2 + 8448\,\gamma^6m^4 \\
&+ 208\,\gamma^{10}\varepsilon^4 + 6\,\gamma^{10}\varepsilon^8 + 3\,\gamma^{10}\varepsilon^{10} - 384\,\gamma^{10}\varepsilon^2 + 4096\,m^8\gamma^2 + 2560\,\gamma^8m^2 + 10240\,\gamma^4m^6 + 60\,\varepsilon^8\gamma^4 \\
&+ 30\,\varepsilon^{10}\gamma^4 + 32640\,\varepsilon^2m^6 - 30208\,\varepsilon^4m^6 + 8440\,\varepsilon^6m^6 - 1500\,\varepsilon^8m^6 - 651\,\varepsilon^{10}m^6 + 756\,\varepsilon^8m^4 \\
&+ 225\,\varepsilon^{10}m^4 + 96\,\varepsilon^8m^2\gamma^2 + 264\,\varepsilon^{10}m^2\gamma^2 + 1040\,\varepsilon^4\gamma^2 - 200\,\varepsilon^6\gamma^2 + 30\,\varepsilon^8\gamma^2\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{C.8}
$$

Une observation attentive de cette expression permet de noter qu'un coefficient de Floquet nul n'entraîne pas nécessairement la nullité de ce déterminant. Comme dans le cas précédent, ce dernier s'annule à condition d'avoir une relation spécifique entre m et ε. Si cette relation spécifique n'est pas vérifiée, ce que l'on admettra, le déterminant n'est pas nul et $a_1^{lmax} = a_1^{lmax-1} = ... = a_1^{lmax} = 0$ et donc $\partial_r \hat{u}_z$ est nul sur l'axe.

Cette méthode est employée pour toutes les composantes de la perturbation. Dans la pratique, la valeur de l_{max} utilisée pour étudier les déterminants est trois. Au-delà de cette valeur, les calculs de déterminant sont difficilement réalisables (en temps et en mémoire) car la taille des systèmes est importante. De plus, les termes supplémentaires qui apparaissent lorsque l_{max} augmente sont associés à de grandes puissances de ε et sont donc très faibles en valeur absolue. Dans la suite, plutôt que d'écrire les déterminants associés à chaque système, on se contente d'indiquer quelles équations ont été utilisées pour obtenir des déterminants non nuls et donc des vecteurs d'inconnues associés nuls. Avant cela, voici une synthèse des conditions limites qui s'appliquent sur l'axe en fonction de la valeur du coefficient de Floquet, $\forall l \in \mathbb{Z}$:

$$\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_l^r = \hat{u}_l^\theta = \partial_r \hat{u}_l^z = \partial_r \hat{u}_l^p = 0\,, \tag{C.9a}$$

$$\gamma \in \{i, i(m-1)\} \quad \Rightarrow \quad \partial_r \hat{u}_l^r = \partial_r \hat{u}_l^\theta = \hat{u}_l^z = \hat{u}_l^p = 0\,, \tag{C.9b}$$

$$\gamma \in \{2i, i(m-2)\} \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_l^r = \hat{u}^\theta = \hat{u}_l^z = \partial_r \hat{u}_l^p = 0\,, \tag{C.9c}$$

$$\gamma \in [\![0, m[\![\setminus \{0, i, 2i, i(m-2), i(m-1)\} \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_l^r = \hat{u}_l^\theta = \hat{u}_l^z = \hat{u}_l^p = 0\,. \tag{C.9d}$$

C.1.1. Conditions sur l'axe limites lorsque $\gamma = 0$

Dans le cas où $\gamma = 0$, on a déjà montré que $\partial_r \hat{u}_z = 0$. On peut montrer que $\hat{u}_r(r=0) = \hat{u}_\theta(r=0) = 0$ en formant le système de $2(2l_{max}+1)$ équations obtenu avec les termes en $O(1/r^2)$ des équations de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$ et $\boldsymbol{e}_\theta$. Les inconnues sont alors b_0^{lmax}, b_0^{lmax-1}, ...,

b_0^{lmax} et c_0^{lmax}, c_0^{lmax-1}, ..., c_0^{lmax}. On constate, comme dans les cas précédents, que le déterminant n'est nul dans le cas $\gamma = 0$ que si m et ε vérifient une certaine relation. Si cette relation n'est pas vérifiée, le déterminant est différent de 0 et on obtient bien $\hat{u}_r(r = 0) = \hat{u}_\theta(r = 0) = 0$. Ensuite, il est possible d'obtenir la nullité de $\partial_r \hat{u}_p$ en $r = 0$ quand $\gamma = 0$. Pour cela, on utilise que $a_1^l = b_0^l = c_0^l = 0$ et on considère le système formé :

— des équations obtenues avec les termes en $O(r)$ de l'équation de continuité ;
— des équations obtenues avec les termes en $O(1)$ de l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$;
— des équations obtenues avec les termes en $O(1)$ de l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_\theta$;

les inconnues étant b_2^l, c_2^l et d_1^l. Le déterminant de ce système est non nul pour $l_{max} = 3$ on en déduit [3] que $\partial_r \hat{u}_p = 0$ sur l'axe quand $\gamma = 0$. Au total les conditions limites en $r = 0$ quand $\gamma = 0$ s'écrivent comme dans le cas axisymétrique :

$$\partial_r \hat{u}_z = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_r = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_\theta = 0 \;\; ; \;\; \partial_r \hat{u}_p = 0 \,. \tag{C.10}$$

C.1.2. Conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma \in \{i, i(m-1)\}$

Dans ce paragraphe, on suppose que $\gamma \in \{i, im - i\}$. La même méthodologie de calcul du déterminant est reprise. En considérant les termes en $O(1/r^2)$ dans l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$ on trouve que $\forall l,\ a_0^l = 0$, quelle que soit la valeur de γ. En revanche le déterminant du système formé des termes en $O(1/r^2)$ dans les équations de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$ et $\boldsymbol{e}_\theta$ est nul quand $\gamma \in \{i, im - i\}$, signe que b_0^l et c_0^l sont quelconques. Il faut donc chercher du côté de b_1^l et c_1^l. En utilisant le fait que $a_0^l = 0$ et en formant le système :

— des termes en $O(1)$ dans l'équation de continuité ;
— des termes en $O(1/r)$ dans l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$;
— des termes en $O(1/r)$ dans l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_\theta$;

où les inconnues sont b_1^l, c_1^l et d_0^l, on obtient un déterminant non nul. Ceci implique que $\forall l,\ b_1^l = c_1^l = d_0^l = 0$. Conclusion, les conditions limites en $r = 0$ pour le cas $\gamma \in \{i, im - i\}$ sont :

$$\hat{u}_z = 0 \;\; ; \;\; \partial_r \hat{u}_r = 0 \;\; ; \;\; \partial_r \hat{u}_\theta = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_p = 0 \,. \tag{C.11}$$

C.1.3. Conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma =\in \{2i, i(m-2)\}$

Dans ce paragraphe, on suppose que $\gamma = 2i$. Comme dans le paragraphe précédent, on a $\hat{u}_z = 0$. En revanche le système formé des termes en $O(1/r^2)$ dans les équations de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$ et $\boldsymbol{e}_\theta$ permet d'obtenir que $\hat{u}_r = \hat{u}_\theta = 0$. Ensuite il est possible de montrer que d_0^l est quelconque et il faut donc se concentrer sur d_1^l. Pour cela, on montre d'abord que $a_1^l = 0$ grâce au système formé des termes en $O(1/r)$ dans l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$. Puis on considère le système formé par les termes en $O(r)$ dans l'équation de continuité et les termes en $O(1)$ dans les équations de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$ et $\boldsymbol{e}_\theta$. Ceci permet de prouver que $d_1^l = 0$. Au total, les conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma =\in \{2i, i(m-2)\}$ sont :

$$\hat{u}_z = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_r = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_\theta = 0 \;\; ; \;\; \partial_r \hat{u}_p = 0 \,. \tag{C.12}$$

C.1.4. Conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma \in [\![0, m[\![\setminus \{0, i, 2i, i(m-2), i(m-1)\}$

Les cas précédents étaient des cas particuliers car ils correspondaient à des racines des différents déterminants utilisés. On se place ici dans le cas où $\gamma \in [0, m[\setminus \{0, i, 2i, i(m-2), i(m-1)\}$. Dans ce cas, on obtient directement toujours $\hat{u}_z = \hat{u}_r = \hat{u}_\theta = 0$ grâce aux termes d'ordre $O(1/r^2)$ dans les trois équations de quantité de mouvement. Enfin, le système formé par les termes en $O(1)$ dans l'équation de continuité et les termes en $O(1/r)$ dans les équations de quantité de mouvement

3. On peut également en déduire que $\partial_r^2 \hat{u}_r = \partial_r^2 \hat{u}_\theta = 0$ en $r = 0$ quand $\gamma = 0$.

suivant $\boldsymbol{e}_r$ et $\boldsymbol{e}_\theta$ conduit à $\hat{u}_p = 0$. Au total, lorsque $\gamma \in [\![0, m[\![\setminus \{0, i, 2i, i(m-2), i(m-1)\}$, les conditions limites sur l'axe s'écrivent :

$$\hat{u}_z = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_r = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_\theta = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_p = 0\,. \tag{C.13}$$

C.2. Cas de l'étude de stabilité linéaire biglobale

Évidemment, les conditions limites sur l'axe s'appliquant à la perturbation dans le cadre de l'approche de stabilité linéaire biglobale sont déterminées grâce à la même méthode. Cependant cette fois-ci le développement de Taylor des différentes composantes dépend de z, par exemple :

$$\hat{u}_z^l = a_0^l(z) + a_1^l(z)r + a_2^l(z)r^2 + o(r^2)\,. \tag{C.14}$$

Les notations a, b, c, d sont les mêmes que celles introduites au début de cette annexe (équation (C.2)). Nous allons montrer que les conditions limites sur l'axe dans le cas 2D sont identiques à celles du cas 1D. Dans la suite, seules les combinaisons et les étapes à effectuer pour arriver aux résultats sont indiquées. De plus, lorsqu'on écrit $\alpha^l = 0$, on sous-entend que l'égalité est valable $\forall l \in \mathbb{Z}$.

C.2.1. Conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma = 0$

Supposons que $\gamma = 0$. Les termes en $O(1/r)$ de l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$ donne $a_1^l = 0$. Ce résultat étant valable pour tout z, la dérivée axiale de ce terme est également nulle : $\partial_z a_1^l = 0$. Ensuite les termes d'ordre $O(1/r^2)$ des équations de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$ et $\boldsymbol{e}_\theta$ sont utilisés pour montrer que $b_0^l = c_0^l = 0$. De même, ces égalités étant valables pour tout z, on a $\partial_z b_0^l = \partial_z c_0^l = 0$ et puis finalement $\partial_z^2 b_0^l = \partial_z^2 c_0^l = 0$. Grâce à ce résultat intermédiaire, on montre que $d_1^l = 0$ en considérant les termes d'ordre $O(r)$ de l'équation de continuité et les termes d'ordre $O(1)$ des équations de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$ et $\boldsymbol{e}_\theta$. Au total les conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma = 0$ sont identiques au cas 1D :

$$\partial_r \hat{u}_z = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_r = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_\theta = 0 \;\; ; \;\; \partial_r \hat{u}_p = 0\,. \tag{C.15}$$

C.2.2. Conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma \in \{i, i(m-1)\}$

Comme dans le cas axisymétrique et le cas 1D, $\gamma \in \{i, i(m-1)\}$ est un cas particulier car il n'est pas possible d'écrire $b_0^l = c_0^l = 0$. Voici les étapes de la détermination des conditions limites. Les termes en $O(1/r^2)$ de l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$ donne $a_0^l = 0$. Ce résultat étant valable pour tout z, la dérivée axiale de ce terme est également nulle : $\partial_z a_0^l = 0$. Ensuite les termes d'ordre $O(1)$ de l'équation de continuité et les termes d'ordre $O(1/r)$ des équations de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$ et $\boldsymbol{e}_\theta$ conduisent à $b_1^l = c_1^l = d_0^l = 0$. Au total les conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma \in \{i, i(m-1)\}$ sont identiques au cas 1D :

$$\hat{u}_z = 0 \;\; ; \;\; \partial_r \hat{u}_r = 0 \;\; ; \;\; \partial_r \hat{u}_\theta = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_p = 0\,. \tag{C.16}$$

C.2.3. Conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma \in \{2i, i(m-2)\}$

Supposons que $\gamma =\in \{2i, i(m-2)\}$. On commence par utiliser le système formé des termes en $O(1/r^2)$ dans les trois équations de quantité de mouvement pour montrer que $a_0^l = b_0^l = c_0^l = 0$. Comme le résultat est valable pour tout z, on a aussi $\partial_z a_0^l = \partial_z b_0^l = \partial_z c_0^l = 0$ puis $\partial_z^2 a_0^l = \partial_z^2 b_0^l = \partial_z^2 c_0^l = 0$. Il faut ensuite établir que $a_1^l = 0$ grâce aux termes d'ordre $O(1/r)$ dans l'équation de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_z$. Par conséquent $\partial_z a_1^l = 0$. On considère alors le système formé par les termes en $O(r)$ dans l'équation de continuité et les termes en $O(1)$ dans les équations de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$ et $\boldsymbol{e}_\theta$ pour prouver que $d_1^l = 0$. Au total, les conditions limites

sur l'axe lorsque $\gamma =\in \{2i, i(m-2)\}$ sont :

$$\hat{u}_z = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_r = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_\theta = 0 \;\; ; \;\; \partial_r \hat{u}_p = 0\,. \tag{C.17}$$

C.2.4. Conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma \in [\![0, m[\![\setminus \{0, i, 2i, i(m-2), i(m-1)\}$

Pour terminer, voici comment déterminer les conditions limites qui s'appliquent sur l'axe lorsque $\gamma \in [0, m[\setminus \{0, i, 2i, i(m-2), i(m-1)\}$. Comme dans les deux cas précédents, les termes d'ordre $O(1/r^2)$ dans les trois équations de quantité de mouvement conduisent à $a_0^l = b_0^l = c_0^l = 0$. Le résultat étant valable pour tout z, il s'ensuit que $\partial_z a_0^l = \partial_z b_0^l = \partial_z c_0^l = 0$ puis que $\partial_z^2 a_0^l = \partial_z^2 b_0^l = \partial_z^2 c_0^l = 0$. On obtient alors $\hat{u}_p = 0$ en considérant les termes d'ordre $O(1)$ dans l'équation de continuité ainsi que les termes d'ordre $O(1/r)$ dans les équations de quantité de mouvement suivant $\boldsymbol{e}_r$ et $\boldsymbol{e}_\theta$. Au total, les conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma \in [0, m[\setminus \{0, i, 2i, i(m-2), i(m-1)\}$ sont aussi identiques au cas 1D :

$$\hat{u}^z(r=0) = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}^r(r=0) = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_\theta = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_p = 0\,. \tag{C.18}$$

C.2.5. Cas d'une déformation radiale nulle

Dans tout ce qui précède, on supposait que $\varepsilon > 0$. Toutefois, des conditions semblables s'appliquent lorsque $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire dans la configuration axisymétrique (conduit de section circulaire). Pour le montrer, il suffit de reprendre les différentes étapes décrites précédemment. Les seules différences avec le cas $\varepsilon = 0$ sont que les cas particuliers $\gamma = i(m-1)$ et $\gamma = i(m-2)$ n'ont plus lieu d'être car m n'a aucune signification quand $\varepsilon = 0$. Finalement, voici les conditions limites qui s'appliquent lorsque $\varepsilon = 0$:

$$\text{si } \gamma = 0, \;\; \partial_r \hat{u}_z = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_r = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_\theta = 0 \;\; ; \;\; \partial_r \hat{u}_p = 0\,, \tag{C.19a}$$

$$\text{si } \gamma = i, \;\; \hat{u}_z = 0 \;\; ; \;\; \partial_r \hat{u}_r = 0 \;\; ; \;\; \partial_r \hat{u}_\theta = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_p = 0\,, \tag{C.19b}$$

$$\text{si } \gamma = 2i, \;\; \hat{u}_z = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_r = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_\theta = 0 \;\; ; \;\; \partial_r \hat{u}_p = 0\,, \tag{C.19c}$$

$$\text{si } |\gamma| > 2, \;\; \hat{u}^z(r=0) = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}^r(r=0) = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_\theta = 0 \;\; ; \;\; \hat{u}_p = 0\,. \tag{C.19d}$$

Table (exhaustive) des matières

Remerciements iii

Introduction vii

I. État de l'art, matériel et méthodes 1

1. État de l'art 3
1.1. Mise en évidence des oscillations de poussée et de pression 4
1.2. La transition laminaire-turbulent dans les moteurs à propergol solide 8
1.2.1. Mise en évidence de plusieurs régimes d'écoulement 8
1.2.2. Influence de la turbulence sur les instabilités 9
1.2.3. Scénario envisagé 11
1.3. Présentation des études de stabilité linéaire des moteurs à propergol solide 12
1.3.1. Résultats des études de stabilité linéaire locale 12
1.3.2. Résultats des études de stabilité linéaire biglobale 13
1.4. Représentation de l'écoulement moyen au sein des moteurs à propergol solide . . . 15
1.4.1. Description de la configuration et liste des hypothèses 15
La configuration géométrique 15
Utilisation d'un gaz froid monophasique 16
L'adimensionnement 16
Hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement 16
Hypothèse de stationnarité de l'écoulement 16
1.4.2. La solution de Berman 17
1.4.3. La solution de Taylor–Culick 18
1.4.4. Extensions des solutions de Berman et de Taylor–Culick 20
Travaux concernant les sections étoilées 22

2. Méthodes et matériel 25
2.1. Rappels sur la stabilité linéaire 26
2.1.1. Principe général 26
2.1.2. Linéarisation des équations de Navier–Stokes 26
2.1.3. Introduction de la décomposition modale 27
2.1.4. Formulation du problème aux valeurs propres généralisé 27
2.1.5. Simplification de la dépendance azimutale avec le théorème de Floquet . . . 27
Énoncé du théorème de Floquet 27
Application du théorème de Floquet à la présente configuration 28
Restriction des valeurs possibles pour le coefficient de Floquet 28
2.1.6. Stabilité locale, biglobale et triglobale 29
Stabilité locale 29
Stabilité biglobale 30
Stabilité triglobale ou globale 30
Dénomination lorsque le théorème de Floquet est appliqué 30
2.1.7. Présentation de l'alternative de Fredholm 31
2.2. Présentation de la méthode de collocation spectrale 33
2.2.1. Cas 1D 33
2.2.2. Cas 2D 34
2.2.3. Compléments 34
2.2.4. Exemple de résolution d'une ODE avec la méthode de collocation spectrale 35

2.3. Présentation du montage expérimental VALDO . . . 38
2.3.1. Disposition des éléments . . . 39
2.3.2. Position des mesures . . . 39
2.3.3. Les campagnes de mesures . . . 39
2.4. Présentation de la chaîne de calcul CEDRE . . . 40
2.4.1. Description générale . . . 40
2.4.2. Justification de l'utilisation du code CEDRE . . . 41

II. Démarche **43**

3. Détermination de l'écoulement de base au sein d'un conduit à paroi débitante de section étoilée **45**
3.1. Détermination et validation de l'écoulement au sein d'un conduit à paroi débitante de section étoilée . . . 46
3.2. Compléments sur la solution analytique obtenue . . . 72
3.2.1. Mise en évidence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse axiale . . . 72
Étude paramétrique . . . 72
Incidence de la présence d'un point d'inflexion sur la stabilité de l'écoulement 73
3.2.2. Développements de Taylor pour les conditions limites sur l'axe . . . 74
3.2.3. Détermination de la pression . . . 76
3.3. Proposition d'extension de la solution à une géométrie quelconque périodique . . . 76

4. Étude de la stabilité linéaire de l'écoulement **79**
4.1. Introduction . . . 80
4.2. Étude de stabilité linéaire locale de l'écoulement . . . 81
4.2.1. Établissement des équations . . . 82
4.2.2. Résolution des équations . . . 84
Introduction d'une discrétisation spatiale et troncature des séries de Fourier 84
Conséquence de la troncature des séries de Fourier sur les équations . . . 85
Interface entre le logiciel Maple et le code de stabilité . . . 87
4.2.3. Validation du code de résolution . . . 88
Comparaison des résultats au cas axisymétrique . . . 88
Application de l'alternative de Fredholm . . . 88
4.2.4. Analyse des résultats de stabilité linéaire locale . . . 90
Vérification de la convergence des résultats . . . 90
Mise en évidence de nouveaux modes par rapport à la configuration circulaire 90
Étude de l'influence de la déviation radiale sur les modes de stabilité . . . 95
Étude de l'influence du nombre de Reynolds sur les modes de stabilité . . . 95
Étude de l'influence de la position axiale sur les modes de stabilité . . . 96
Étude de l'influence du nombre d'onde spatial sur les modes de stabilité . . . 97
Résumé de l'étude paramétrique . . . 99
4.2.5. Conclusions de l'étude de stabilité linéaire locale . . . 99
4.3. Étude de stabilité linéaire biglobale de l'écoulement . . . 99
4.3.1. Détail de la forme de la perturbation et des équations . . . 100
4.3.2. Description des conditions limites . . . 100
En entrée du domaine . . . 100
En sortie du domaine . . . 101
À la paroi . . . 101
Sur l'axe . . . 101
Aux quatre coins du domaine . . . 102
4.3.3. Description du code de stabilité linéaire biglobale . . . 102
Utilisation d'une discrétisation multidomaines . . . 103

4.3.4. Validation du code de résolution . . . 104
Validation du code de résolution par comparaison au cas axisymétrique . . 104
Validation des conditions limites sur l'axe . . . 104
4.3.5. Analyse des résultats de stabilité linéaire biglobale . . . 106
Rappel des résultats de la configuration circulaire . . . 106
Étude de l'influence du coefficient de Floquet sur les modes de stabilité . . 106
Étude de l'influence de la déviation radiale sur les modes de stabilité . . . 107
Mise en évidence de nouveaux modes par rapport à la configuration circulaire 108
Étude de l'influence du nombre de branches sur les modes de stabilité . . . 109
4.3.6. Conclusions de l'étude de stabilité linéaire biglobale . . . 112
4.4. Étude de la stabilité linéaire de la configuration du tir LP9t48 . . . 113
4.4.1. Obtention de l'écoulement de base . . . 113
4.4.2. Interpolation de la forme de la paroi . . . 114
4.4.3. Bilan de l'étude du cas LP9t48 . . . 115

5. Étude de l'influence de la condition d'impédance acoustique de sortie et du bruit d'injection sur le développement des oscillations 119
5.1. Description de la méthode et de la réalisation des simulations . . . 120
5.1.1. Définition du domaine de calcul et construction du maillage . . . 120
5.1.2. Sélection des paramètres numériques et des conditions limites . . . 121
Calcul du pas de temps et choix du schéma d'intégration temporelle . . . 121
Schéma d'intégration spatiale . . . 122
Modèle de sous-maille . . . 122
Conditions limites . . . 122
5.1.3. Pertinence des paramètres numériques et du maillage . . . 123
5.1.4. Énumération des données enregistrées . . . 123
5.1.5. Description de la méthode de perturbation de la condition limite d'injection 125
Perturbation selon la direction azimutale . . . 125
Perturbation selon la direction axiale . . . 127
Combinaison des perturbations suivant les deux directions . . . 127
5.1.6. Réalisation des simulations . . . 127
5.2. Exploitation des résultats des simulations . . . 129
5.2.1. Liste succincte de l'évolution de chaque forçage . . . 129
5.2.2. Comparaison des niveaux d'amplitude des oscillations . . . 129
5.2.3. Transition laminaire-turbulent . . . 130
5.2.4. Importance de l'accrochage aéroacoustique . . . 132
5.2.5. Piste pour l'amélioration des simulations . . . 136

Conclusion 139
Discussion . . . 139
Bilan . . . 141
Perspectives . . . 142

A. Incidence du changement de variable sur les expressions vectorielles 147
A.1. Calcul de la divergence avec changement de variable . . . 147
A.2. Calcul du gradient vectoriel avec changement de variable . . . 147
A.3. Calcul du laplacien vectoriel avec changement de variable . . . 148

B. Détermination des conditions limites sur l'axe pour la correction d'ordre deux de l'écoulement de base 151
B.1. Conditions pour $U^{(2)}_{,2}$ . . . 151
B.2. Conditions pour $U^{(2)}_{,0}$ . . . 153

C. Détermination des conditions limites sur l'axe pour la perturbation de stabilité linéaire 155
C.1. Cas de l'étude de stabilité linéaire locale 155
C.1.1. Conditions sur l'axe limites lorsque $\gamma = 0$ 158
C.1.2. Conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma \in \{i, i(m-1)\}$ 159
C.1.3. Conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma =\in \{2i, i(m-2)\}$ 159
C.1.4. Conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma \in [\![0, m[\![\setminus \{0, i, 2i, i(m-2), i(m-1)\}$ 159
C.2. Cas de l'étude de stabilité linéaire biglobale 160
C.2.1. Conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma = 0$ 160
C.2.2. Conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma \in \{i, i(m-1)\}$ 160
C.2.3. Conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma \in \{2i, i(m-2)\}$ 160
C.2.4. Conditions limites sur l'axe lorsque $\gamma \in [\![0, m[\![\setminus \{0, i, 2i, i(m-2), i(m-1)\}$ 161
C.2.5. Cas d'une déformation radiale nulle 161

Table (exhaustive) des matières 163

Table des figures 167

Nomenclature 171

Bibliographie 173

Table des figures

1. Le lanceur Ariane 5 au décollage lors du tir VA233, le 17 novembre 2016. vii
2. Illustration de bloc de propergol avec une géométrie finocyl. viii

1.1. Représentation schématique de la géométrie interne du P230, d'après Chedevergne (2007). 5
1.2. Transformée de Fourier à fenêtre glissante du signal de l'accéléromètre de l'EAP 1 du tir 510 d'Ariane 5, d'après Chedevergne (2007). À gauche (a), échantillon complet ; à droite (b), zoom sur la seconde moitié du tir. 5
1.3. Les trois types de détachements tourbillonnaires obtenus numériquement ; dans Fabignon *et al.* (2003). 6
1.4. Visualisation des structures tourbillonnaires de type VSP dans le montage VECLA avec la méthode PLIF (Planar Laser Induced Fluorescence) ; dans Ugurtas (2000). 7
1.5. Visualisation de la transition laminaire-turbulent par le tracé des iso-contours de l'indicateur $\mathcal{C}$: au cœur du conduit et sur une grande partie du fond avant l'écoulement est laminaire, il est en revanche turbulent à proximité des parois suffisamment loin du fond avant. La ligne de transition se situe au niveau du contour $\mathcal{C} = 0{,}5$; dans Gazanion *et al.* (2013). 9
1.6. Évolution axiale des fluctuations de vitesse radiale à $r/R_p = 0{,}8$; extraite de Gazanion (2014). La transition est imposée à partir de $z/R_p \approx 12$ (configuration cylindrique). 10
1.7. Iso-contours de la composante hors-plan de la vorticité (ici Ω_z), moyennée dans la direction hors-plan (ici $\boldsymbol{e}_z$) pour deux instants ; dans Apte et Yang (2003) (configuration veine de section rectangulaire). 10
1.8. Scénario d'apparition des ODP ; schémas fournis par B. Gazanion. La transition est ici représentée schématiquement à une abscisse constante pour faciliter l'explication mais revêt en réalité une plus grande complexité (voir figure 1.5). 11
1.9. Illustration des résultats de stabilité linéaire locale de Griffond ; dans Griffond (2001). (a) Fonctions propres : vitesse radiale (tirets) et axiale (ligne continue). (b) Iso-valeurs du taux d'amplification spatial. 13
1.10. Spectre de vitesse pour plusieurs positions de mesures dans le montage VALDO avec $V_{inj} = 1{,}05\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (tracés en couleurs) en comparaison avec les modes propres théoriques (tracés en pointillés) ; dans Chedevergne (2007). 14
1.11. Comparaison des résultats de stabilité biglobale avec (a) le signal PAV du tir LP9t24 et (b) le signal de l'accéléromètre de l'EAP 1 du tir 510 d'Ariane 5 ; dans Chedevergne (2007). 15
1.12. Schéma de la configuration de veine rectangulaire. 17
1.13. Schéma de la configuration de veine cylindrique de section circulaire. 18
1.14. Iso-contours de vitesse axiale et lignes de courant correspondant à la solution de Taylor–Culick dans une section longitudinale. 19
1.15. Représentation schématique d'un conduit à paroi débitante avec injection au fond avant. Dans Saad et Majdalani (2009). 21
1.16. Schéma de la configuration de conduit cylindrique de section étoilée. 22
1.17. Lignes de courant dans une section transversale pour différents nombres de Reynolds et pour $\varepsilon = 0{,}1$. Les lignes en gras séparent les lignes continuant jusqu'au centre des lignes aspirées par le tourbillon. Figure extraite de Kurdyumov (2006). . 23

2.1. Distribution des points de Gauss–Lobatto pour $N = 11$. 33
2.2. Comparaison du déplacement normalisé obtenu avec la solution analytique (en trait continu rouge) et avec la méthode spectrale (en croix bleues). 36

2.3. (a) Illustration de l'interpolation de Tchebychev (en traits pointillés bleus) avec $N = 22$ points (en croix bleues) par rapport à la solution analytique (en trait continu rouge). (b) Illustration du comportement d'une poutre surchargée au niveau des points symbolisés par des disques noirs. 37
2.4. Vue de l'intérieur du montage VALDO. 38
2.5. Photographie du montage VALDO dans sa configuration avec quatre éléments, sans tuyère. 40

3.1. Profil de (a) U_z/z et de (b) $\partial_r^2 U_z/z$ pour $\varepsilon = 0{,}2$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 100$, $m = 7$ et $\theta = 0$. La ligne en pointillé rouge sur la figure (b) permet de mettre en évidence la position des points d'inflexion. 72
3.2. Lignes de niveau $\frac{1}{z}\partial_r^2 U_z = 0$ avec $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 100$ et $m = 7$. (a) $\varepsilon = 0{,}11$ et (b) $\varepsilon = 0{,}2$. . 73
3.3. Représentation des couples $(\varepsilon, \mathcal{R}_\mathrm{e})$ à partir desquels au moins un point d'inflexion de révolution apparaît dans le profil axial de vitesse pour différentes valeurs de m. Les cercles barrés d'une croix rouge représentent des cas où il n'a pas été possible de converger vers une solution stationnaire avec CEDRE (pour $m = 7$), tandis que les cercles « validés » représentent des cas convergés. 74
3.4. Évolutions du gradient de pression pour $\varepsilon = 0{,}1$, $m = 7$ et $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 100$. (a) Gradient de pression radial suivant r pour $\theta = 0$. (b) Gradient de pression axial suivant z pour $r = 0{,}8$ et $\theta = \pi/m$ (valeurs sans influence dans le modèle). 76

4.1. Représentation schématique des différentes étapes et codes permettant la résolution du problème de stabilité. 88
4.2. Comparaison de l'évolution de la partie réelle de la valeur propre $\omega_0 = 40$ en fonction de ε avec l'alternative de Fredholm et le code de stabilité. Les symboles remplis correspondent aux valeurs de ε_0 utilisés pour appliquer l'alternative de Fredholm. 90
4.3. Spectre obtenu par un calcul de stabilité locale pour $z = 5{,}8$, $k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i}$, $\gamma = 0$, $m = 7$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$ et $\varepsilon = 0{,}04$. 91
4.4. Représentation de la valeur absolue des fonctions propres associées au mode $\omega = \omega_{axi} = 40 - 0{,}01\mathrm{i}$ obtenu avec $z = 5{,}8$, $k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i}$, $\gamma = 0$, $m = 7$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$ et $\varepsilon = 0{,}04$. Les fluctuations de vitesse sont normalisées par $\max(|\hat{u}_r|)$, celle de pression par $\max(|\hat{u}_p|)$. 92
4.5. Représentation de la valeur absolue des fonctions propres associées au mode $\omega = \omega_{e1} = 54{,}17 + 0{,}39\mathrm{i}$ obtenu avec $z = 5{,}8$, $k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i}$, $\gamma = 0$, $m = 7$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$ et $\varepsilon = 0{,}04$. Les fluctuations de vitesse sont normalisées par $\max(|\hat{u}_r|)$, celle de pression par $\max(|\hat{u}_p|)$. 93
4.6. Représentation de la valeur absolue des fonctions d'amplitude associées au mode $\omega = \omega_{e1} = 54{,}17 + 0{,}39\mathrm{i}$ obtenu avec $z = 5{,}8$, $k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i}$, $\gamma = 0$, $m = 7$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$ et $\varepsilon = 0{,}04$. Les fonctions sont normalisées par $\max_{r,\theta}(|\hat{u}_\theta|)$. 94
4.7. Étude de l'influence de l'amplitude de la déviation radiale, ε, sur (a) les pulsations et (b) les taux d'amplification temporels. Calculs réalisés avec $z = 5{,}8$, $k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i}$, $\gamma = 0$, $m = 7$ et $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$. 95
4.8. Étude de l'influence du nombre de Reynolds, $\mathcal{R}_\mathrm{e}$, sur (a) les pulsations et (b) les taux d'amplification temporels. Calculs réalisés avec $\varepsilon = 0{,}04$, $z = 5{,}8$, $m = 7$, $k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i}$ et $\gamma = 0$. 96
4.9. Étude de l'influence de la position axiale, z, sur (a) les pulsations et (b) les taux d'amplification temporels. Calculs réalisés avec $\varepsilon = 0{,}04$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$, $m = 7$, $k = 3{,}020 - 0{,}2247\mathrm{i}$ et $\gamma = 0$. 97
4.10. Étude de l'influence de la longueur d'onde, représentée indirectement par k_r, sur (a) les pulsations et (b) les taux d'amplification temporels. Calculs réalisés avec $\varepsilon = 0{,}04$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$, $m = 7$, $z = 5{,}8$, $k_i = -0{,}2247$ et $\gamma = 0$. 98

4.11. Étude de l'influence du taux d'amplification spatial, k_i, sur (a) les pulsations et (b) les taux d'amplification temporels. Calculs réalisés avec $\varepsilon = 0{,}04$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$, $m = 7$, $z = 5{,}8$, $k_r = 3{,}020$ et $\gamma = 0$. 98
4.12. Illustration des discrétisations monodomaine et multidomaine pour un même nombre de noeuds (15). 104
4.13. Comparaison des spectres obtenus avec le code axisymétrique et le code étoilé pour des paramètres de calcul identiques. 105
4.14. Comparaison des fonctions propres obtenus avec le code axisymétrique et le code étoilé pour la valeur propre $\omega = 81{,}5 - 11{,}1\mathrm{i}$ et à la position axiale $z = 7{,}95$ avec des paramètres de calcul identiques. 105
4.15. Illustration de l'influence du nombre d'onde azimutal sur les modes de stabilité dans le cas circulaire ($\varepsilon = 0$). Pour ces calculs $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 2000$, $Z_{in} = 4$, $Z_{out} = 8$ et $\omega_a = 70 + 10i$. 107
4.16. Modes VSP du spectre obtenu avec $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$, $[Z_{in}, Z_{out}] = [4, 8]$, $m = 7$, $\gamma = 0$, $l_{max} = 3$ et une discrétisation $[71 - 95\%][20 - 5\%]$ suivant $\boldsymbol{e}_z$ et monodomaine avec 100 points suivant $\boldsymbol{e}_r$. 108
4.17. Spectre obtenu pour $\varepsilon = 0{,}08$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$, $[Z_{in}, Z_{out}] = [2, 6]$, $m = 7$, $\gamma = 0$, $l_{max} = 3$ et une discrétisation monodomaine de 100 points dans les deux directions. 109
4.18. Profil radial des fonctions propres associées au mode $\omega = 62{,}26 - 7{,}29\mathrm{i}$ obtenues pour $\varepsilon = 0{,}08$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$, $[Z_{in}, Z_{out}] = [2, 6]$, $m = 7$, $\gamma = 0$, $l_{max} = 3$ et une discrétisation monodomaine de 100 points dans les deux directions. Ces fonctions propres sont adimensionnées par $\max_r(|\hat{u}_r(r, z_0)|)$ pour les fluctuations de vitesse et par $\max_r(|\hat{u}_p(r, z_0)|)$ pour les fluctuations de pression. Position axiale fixée : $z_0 = 5{,}99$. 110
4.19. Profil axial des fonctions propres associées au mode $\omega = 62{,}26 - 7{,}29\mathrm{i}$ obtenues pour $\varepsilon = 0{,}08$, $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$, $[Z_{in}, Z_{out}] = [2, 6]$, $m = 7$, $\gamma = 0$, $l_{max} = 3$ et une discrétisation monodomaine de 100 points dans les deux directions. Ces fonctions propres sont adimensionnées par $\max_z(|\hat{u}_r(r_0, z)|)$. Position radiale fixée : $r_0 = 0{,}29$. 111
4.20. Modes *étoilés* du spectre obtenu avec $\mathcal{R}_\mathrm{e} = 1000$, $[Z_{in}, Z_{out}] = [2, 6]$, $\varepsilon = 0{,}08$, $\gamma = 0$, $l_{max} = 3$ et une discrétisation monodomaine de 100 points dans les deux directions. 112
4.21. Vue 3D de la configuration du tir LP9t48. 114
4.22. (a) Forme de la paroi étoilée avec les nœuds du maillage et l'interpolation réalisée. (b) Transformée de Fourier de la paroi interpolée. 115
4.23. Reconstruction de la forme de la paroi et comparaison avec les nœuds du maillage. 116
4.24. Placement du couple $(\mathcal{R}_{\mathrm{e}LP9}, \varepsilon_{LP9})$ sur le graphique délimitant l'apparition des points d'inflexion dans le profil de vitesse axiale de la solution analytique. En traits pointillés, une extrapolation de type fraction rationnelle permet de prolonger graphiquement la séparation des domaines. 116

5.1. Représentation du domaine de calcul. 121
5.2. Vue en coupe du maillage dans un quart de section transversale au sein du conduit. 122
5.3. Représentation de la disposition des sondes (tous les points représentés) de la simulation dans le conduit. Les positions de mesures du montage expérimental sont représentées en orange. 124
5.4. Fonctions de distributions dans les directions azimutales et axiales pour u_r. Les points représentent les nœuds du maillage. 126
5.5. Évolution temporelle de la pression sur l'axe à la position $z/R_p = 1{,}63$. 130
5.6. Comparaison de la vitesse moyenne axiale à la solution de Taylor–Culick pour le cas C2. 131
5.7. Évolution axiale de l'amplitude des fluctuations de vitesse à la position $r/R_p = 0{,}8$. Les valeurs enregistrées par les sondes numériques sont représentées par les symboles, les courbes découlent d'une interpolation. 132

5.8. Densité spectrale de puissance de la fluctuation de vitesse U_{VALDO} en $r/R_p = 0{,}93$ à deux positions axiales différentes. 133
5.9. Spectre et profils de vitesse pour la simulation C1 à la position $z/R_p = 16{,}8$. . . . 133
5.10. Champs instantanés de la composante azimutale du rotationnel de vitesse pour les simulations (a) C1, (b) C2 et (c) B3. 134
5.11. Densité spectrale de puissance, en m^2/s, de la fluctuation de vitesse radiale pour $r/R_p = 0{,}93$ et trois positions axiales différentes pour la simulation C2. 135
5.12. Densité spectrale de puissance de la fluctuation de pression et profils de vitesse pour la simulation B3 à la position $z/R_p = 16{,}8$. 136

Nomenclature

Grandeurs géométriques ou physiques

η	Fonction de déviation radiale de la paroi par rapport à une géométrie circulaire 46
ε	Amplitude de la déviation radiale de la paroi 21
$\boldsymbol{e}_r$	Vecteur unitaire dans la direction radiale 18
$\boldsymbol{e}_\theta$	Vecteur unitaire dans la direction orthoradiale 18
$\boldsymbol{e}_z$	Vecteur unitaire dans la direction axiale 4
$\mathcal{L}$	Longueur totale du moteur ou du conduit, en m ix
M_{inj}	Nombre de Mach d'injection 20
m	Nombre de branches de l'étoile 21
$\bar{r}$	Coordonnée radiale adimensionnée par le rayon R_p 76
r	Coordonnée radiale après le changement de variable : $r = \bar{r}/(1+\eta)$ 72
$\mathcal{R}_\mathrm{e}$	Nombre de Reynolds d'injection 16
R_p	Rayon moyen des conduits cylindriques, en m ix
$\bar{\theta}$	Coordonnée azimutale 80
θ	Coordonnée azimutale après le changement de variable : $\theta = \bar{\theta}$ 46
V_{inj}	Vitesse d'injection, en m/s 13
c	Vitesse du son, en m/s 16
$\bar{z}$	Coordonnée axiale adimensionnée par le rayon R_p 80
z	Coordonnée axiale après le changement de variable $z = \bar{z}$ 72

Grandeurs liées à l'écoulement de base

P	Pression, adimensionnée, de l'écoulement de base 18
$\boldsymbol{U}$	Vecteur vitesse, adimensionné, de l'écoulement de base 26
κ	Constante de pression relative à la correction d'ordre $O(\varepsilon^2)$ 76
F	Fonction solution de l'équation de Berman 17

Grandeurs liées à l'étude de stabilité linéaire

$\hat{\boldsymbol{u}}$	Amplitude de la perturbation 27
ω_a	Cible pour l'algorithme d'Arnoldi 105
γ	Coefficient de Floquet 28
l_{max}	Entier indiquant le nombre de modes pris en compte dans les séries de Fourier 84
k	Nombre d'onde spatial 29
p	Pression instationnaire adimensionnée 26
$\tilde{p}$	Perturbation de pression adimensionnée 26
$\boldsymbol{u}$	Vitesse instationnaire adimensionnée 26
$\tilde{\boldsymbol{u}}$	Perturbation de vitesse adimensionnée 26
Z_{in}	Position axiale de l'entrée du domaine de calcul de stabilité 34
Z_{out}	Position axiale de la sortie du domaine de calcul de stabilité 34

Grandeurs liées à la transition laminaire-turbulent

$\mathcal{C}$	Indicateur de transition 8

Acronymes et sigles

CEDRE	Calcul des Écoulements Diphasiques Réactifs pour l'Énergétique x
CFD	Computational Fluid Dynamics viii
CFL	Courant–Friedrichs–Lewy 123
CNES	Centre National d'Études Spatiales 6
DSP	Densité Spectrale de Puissance 135

EAP	Étage d'Accélération à Poudre 4
GENCI	Grand Équipement National de Calcul Intensif 129
HLLC	Harten, Lax and van Leer with Contact 41
LES	Large Eddy Simulation 8
LNP	Local Non Parallel 29
MILES	Monotonically Integrated Larged Eddy Simulation 124
MPS	Moteur à Propergol Solide 4
ODP	Oscillations De Pression 5
ONERA	Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales viii
PTF	Protection Thermique de Face 4
RMS	Root-Mean-Square 133
TFFG	Transformée de Fourier à Fenêtre Glissante 5
URANS	Unsteady Reynolds Averaged Navier–Stokes 9
VALDO	Veine Axisymétrique pour Limiter le Développement des Oscillations viii
VECLA	Veine d'Étude de la Couche Limite Acoustique viii
VKI	von Karman Institute 7
VSA	Vortex Shedding d'Angle 6
VSO	Vortex Shedding d'Obstacle 6
VSP	Vortex Shedding Pariétal vii

Bibliographie

Akima, H., 1970
A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures. *J. ACM*, Volume 17 Numéro 4 pages 589–602.

Anderson, E. *et al.*, 1999
LAPACK Users's Guide, Third Edition. SIAM.

Anthoine, J., 2000
Experimental and Numerical Study of Aeroacoustic Phenomena in Large Solid Propellant Boosters. Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles.

Apte, S. V. et Yang, V., 2003
A large-eddy simulation study of transition and flow instability in a porous-walled chamber with mass injection. *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 477 pages 215–225.

Avalon, G., D., L. et Josset, T., 2005
Synthèse des activités effectuées sur le montage en gaz froid VALDO de 2000 à 2001. Rapport Technique RT 1/09787 DEFA, ONERA.

Avalon, G. et Lambert, D., 2001
Campagne d'essais VALDO. période 2001/2001. Rapport Technique RT 2/05424 DEFA, ONERA.

Avalon, G., Ugurtas, B., Grisch, F. et Bresson, A., 2000
Numerical Computations and Vizualisation Tests of the Flow Inside a Cold Gas Simulation with Characterization of a Parietal Vortex Shedding. Issu de : *36th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, Hunstville, AL, 2000. AIAA.

Balachandar, S., Buckmaster, J. D. et Short, M., 2001
The generation of axial vorticity in solid-propellant rocket-motor flows. *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 429 pages 283–305.

Balakrishnan, G., Liñán, A. et Williams, F. A., 1991
Compressibility Effects in Thin Channels with Injection. *AIAA Journal*, Volume 29 Numéro 12 pages 2149–2154.

Beddini, R. A., 1986
Injection-Induced Flow in Porous-Walled Ducts. *AIAA Journal*, Volume 24 Numéro 11 pages 1766–1773.

Berman, A. S., 1953
Laminar Flow in Channels with Porous Walls. *Journal of Applied Physics*, Volume 24 Numéro 9 pages 1232–1235.

Blomshield, D. F. S., 2001
Historical Perspective of Combustion Instability in Motors : Case Studies. Issu de : *American Institute of Aeronautics & Astronautics.*

Bouyges, M., Chedevergne, F., Casalis, G. et Majdalani, J., 2017
Asymptotically based self-similarity solution of the Navier–Stokes equations for a porous tube with a non-circular cross-section. *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 826 pages 396–420.

Boyer, G., 2012
Étude de stabilité et simulation numérique de l'écoulement interne des moteurs à propergol solide simplifiés. Thèse de doctorat, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE).

Boyer, G., Casalis, G. et Estivalèzes, J.-L., 2013a
Stability analysis and numerical simulation of simplified solid rocket motors. *Physics of Fluids*, Volume 25.

Boyer, G., Casalis, G. et Estivalèzes, J.-L., 2013b
Stability and sensitivity analysis in a simplified solid rocket motor flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 722 pages 618–644.

Brown, R. S., Dunlap, R., Young, S. W. et Waugh, R. C., 1981
Vortex Shedding as a Source of Acoustic Energy in Segmented Solid Motor Rockets. *J. Spacecraft*, Volume 18 pages 312–319.

Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. et Zang Jr., T. A., 1988
Spectral Methods in Fluid Dynamics. Springer Series in Computational Physics. Springer Berlin Heidelberg.

Casalis, G. et Pineau, J.-P., 1997
Étude de la stablité d'un écoulement dans un conduit à parois débitantes. cas des géométries plane et cylindrique. Rapport Technique RF 94/5005 92 DERAT, ONERA.

Casalis, G., Avalon, G. et Pineau, J.-P., 1998
Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls. *Physics of Fluids*, Volume 10 Numéro 10 pages 2558–2568.

Casalis, G. et Charru, F., 1997
Instabilités hydrodynamiques. DEA de Mécaniques des fluides de Toulouse.

Chedevergne, F., 2007
Instabilités intrinsèques des moteurs à propergol solide. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (ENSAE).

Chedevergne, F., Casalis, G. et Majdalani, J., 2012
Direct numerical simulation and biglobal stability investigations of the gaseous motion in solid rocket motors. *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 706 pages 190–218.

Clayton, C. D., 1996
Flow fields in solid rocket motors with tapered bores. Issu de : *32nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, Lake Buena Vista, FL, 1996.

Coddington, E. A. et Carlson, R., 1997
Linear Ordinary Differential Equations. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Couton, D., Plourde, F. et Doan-Kim, S., 1996
Cold Gas Simulation of a Solid Propellant Rocket Motor. *AIAA Journal*, Volume 34 Numéro 12 pages 2514–2522.

Culick, F. E. C., 1966
Rotationnal Axisymmetric Mean Flow and Damping of Acoustic Waves in a Solid Propellant Rocket. *AIAA Journal*, Volume 4 pages 1462–1464.

Deck, S., 2012
Recent improvements in the Zonal Detached Eddy Simulation (ZDES) formulation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Volume 26 Numéro 6 pages 523–550.

Dotson, K. W., Koshigoe, S. et Pace, K. K., 1997
Vortex Shedding in a Large Solid Rocket Motor Without Inhibitors at the Segment Interfaces. *Journal of Propulsion and Power*, Volume 13 Numéro 2 pages 197–206.

Drazin, P. G., 1992
Stability of non-parallel flow in a channel. *Le Matematiche*, Volume 46 Numéro 1 pages 137–146.

Dunlap, R., Blackner, A. M., Waugh, R. C., Brown, R. S. et Willoughby, P. G., 1990
Internal Flow Field Studies in a Cylindrical Port Rocket Chamber. *J. Propulsion*, Volume 6 Numéro 6 pages 290–704.

Dunlap, R., Willouchby, P. et Hermsen, R. W., 1974
Flowfield in the Combustion Chamber of a Solid Propellant Rocket Motor. *AIAA Journal*, Volume 12 Numéro 10 pages 1440–1442.

Dupuy, M., 2012
Étude par simulations numériques instationnaires de l'écoulement dans les moteurs à propergol solide. Thèse de doctorat, ISAE-ENSMA École Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, Poitiers.

Fabignon, Y. *et al.*, 2003
Instabilities and pressure oscillations in solid rocket motors. *Aerospace Science and Technology*, Volume 7 pages 191–200.

Féraille, T., 2004
Instabilités de l'écoulement interne des moteurs à propergol solide. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (ENSAE).

Flandro, G. A. et Jacobs, H. R., 1973
Vortex Generated Sound in Cavities. Issu de : *AIAA Aero-Acoustics Conference*, numéro 73, Seattle, Washington, 1973.

Flandro, G. A. et Majdalani, J., 2003
Aeroacoustic Instability in Rockets. *AIAA Journal*, Volume 41 Numéro 3 pages 485–497.

Floquet, G., 1883
Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Volume 2 Numéro 12 pages 48–88.

Fredholm, I., 1903
Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Mathematica*, Volume 27 Numéro 1 pages 365–390.

Gazanion, B., 2014
Transition laminaire–turbulent dans un conduit à paroi débitante. Thèse de doctorat, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE).

Gazanion, B., Chedevergne, F. et Casalis, G., 2013
On the laminar-turbulent transition in injection-driven porous chambers. *Experiments in Fluids*, Volume 55 Numéro 1 pages 1643.

Godon, J. C. et Prévost, M., 2004
Restitutions et analyses des instabilités des essais n°10 à 15 du montage LP9. Démonstrateur de VSP. Rapport Technique RT 2/08692 DEFA/DMAE, ONERA.

Griffond, J., 2001
Instabilité pariétale et accrochage aéroacoustique dans les conduits à parois débitantes simulant les moteurs à propergol solide d'Ariane 5. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (ENSAE).

Haider, F., Brenner, P., Courbet, B. et Croisille, J.-P., 2012
An efficient algorithm for parallel k–exact finite volume reconstruction on unstructured grids. Issu de : *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering.*

Kurdyumov, V. N., 2006
Steady Flows in the Slender, Noncircular, Combustion Chambers of Solid Propellant Rockets. *AIAA Journal*, Volume 44 Numéro 12 pages 2979–2986.

Lehoucq, R. B., Sorensen, D. C. et Yang, C., 1997
ARPACK Users's Guide : Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods. SIAM.

Lupoglazoff, N. et Vuillot, F., 1996
Parietal Vortex Shedding as a Cause of Instability for Long Solid Propellant Motors - Numerical Simulations and Comparisons with Firing Tests. *AIAA Journal*, Numéro 96-0761.

Lupoglazoff, N. et Vuillot, F., 1998
Numerical simulations of parietal vortex-shedding phenomenon in a cold flow set-up. Issu de : *34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, Cleveland, 1998.

Majdalani, J., 2007
On steady rotational high speed flows : the compressible Taylor-Culick profile. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Volume 463 Numéro 2077 pages 131–162.

Majdalani, J. et Flandro, G. A., 2002
The oscillatory pipe flow with arbitrary wall injection. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Volume 458 Numéro 2023 pages 1621–1651.

Monteghetti, F., Matignon, D., Piot, E. et Pascal, L., 2016
Design of broadband time-domain impedance boundary conditions using the oscillatory-diffusive representation of acoustical models. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Volume 140 Numéro 3 pages 1663–1674.

Pironneau, O., 1988
Méthodes des éléments finis pour les fluides. Masson.

Prévost, M., Godon, J. C. et Innegrave, O., 2005
Thrust Oscillations in Reduced Scale Solid Rocket Motors, part 1 : Experimental Investigations. Issu de : *41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, Tucson, Arizona, 2005.

Rayleigh, L., 1879
On the Stability, or Instability, of certain Fluid Motions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Volume s1-11 Numéro 1 pages 57–72.

Refloch, A. *et al.*, 2011
CEDRE software. *AerospaceLab*, Numéro 2 pages 1–10.

Saad, T. et Majdalani, J., 2009
Rotational Flowfields in Porous Channels with Arbitrary Headwall Injection. *Journal of Propulsion and Power*, Volume 25 Numéro 4 pages 921–929.

Sainte-Rose, B., Bertier, N., Deck, S. et Dupoirieux, F., 2012
Numerical simulations and physical analysis of an over-expanded reactive gas flow in a planar nozzle. *Combustion and Flame*, Numéro 129 pages 2856–2871.

Scippa, S., Pascal, P. et Zanier, F., 1994
Ariane 5 - MPS - Chamber Pressure Oscillations Full Scale Firing Results Analysis and Further Studies. Issu de : *30th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, Indianapolis, IN, 1994.

Taylor, G., 1956
Fluid Flow in Regions Bounded by Porous Surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, Volume 234 Numéro 1199 pages 456–475.

Theofilis, V., 2003
Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows. *Progress in Aerospace Sciences*, Volume 39 Numéro 4 pages 249–315.

Theofilis, V., 2017
The linearized pressure Poisson equation for global instability analysis of incompressible flows. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*.

Toro, E. F., Spruce, M. et Speares, W., 1994
Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock Waves*, Volume 4 Numéro 1 pages 25–34.

Traineau, J.-C., Hervat, P. et Kuentzmann, P., 1986
Cold-Flow Simulation of a Two-Dimensional Nozzleless Solid Rocket Motor. Issu de : *22nd Joint Propulsion Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.

Ugurtas, B., 2000
Étude numérique et expérimentale des instabilités hydrodynamiques et du couplage aéro-acoustique dans un écoulement de Taylor. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

Van Horn, E. M. et Majdalani, J., 2014
Extension of the Taylor–Culick Profile to Rockets with Noncircular Grain Perforations. Issu de : *50th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, Cleveland, OH, 2014.

Varapaev, V. N. et Yagodkin, V. I., 1969
Flow Stability in a Channel with Porous Walls. *Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, Volume 4 Numéro 5 pages 91–95.

Vétel, J., Plourde, F., Doan-Kim, S. et Prévost, M., 2005
Cold Gas Simulations of the Influence of Inhibitor Shape in Combustor Combustion. *Journal of Propulsion and Power*, Volume 21 Numéro 6 pages 1098–1106.

Vuillot, F., Scherrer, D. et Habiballah, M., 2003
CFD code validation for space propulsion applications. Issu de : *5th Symposium on Liquid Space Propulsion*, Chattanooga, Tennessee, 2003.

Wageman, W. E. et Guevara, F. A., 1960
Fluid Flow through a Porous Channel. *Physics of Fluids*, Volume 3 Numéro 6 pages 878–881.

Yagodkin, V. I., 1967
Use of Channels with Porous Walls for Studying Flows Which Occur during Combustion of Solid Propellants. Issu de : *18th International Astronautical Congress AGARD*.

Zhou, C. et Majdalani, J., 2002
Improved Mean-Flow Solution for Slab Rocket Motors with Regressing Walls. *Journal of Propulsion and Power*, Volume 18 Numéro 3 pages 703–711.