



**HAL**  
open science

# De fils en images l'apport des modèles pour mesurer et reconstruire le mouvement des écoulements turbulents

Dominique Heitz

► **To cite this version:**

Dominique Heitz. De fils en images l'apport des modèles pour mesurer et reconstruire le mouvement des écoulements turbulents. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Rennes 1, France, 2015. tel-01677855

**HAL Id: tel-01677855**

**<https://hal.science/tel-01677855>**

Submitted on 8 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER LES RECHERCHES

Dominique Heitz

De fils en images l'apport des modèles  
pour mesurer et reconstruire le  
mouvement des écoulements turbulents

Soutenue le 18 décembre 2015 devant le jury composé de :

M.	JEAN-PAUL BONNET	Directeur de Recherche Emérite CNRS	(Président)
M.	LAURENT JACQUIN	Professeur Ecole Polytechnique	(Rapporteur)
M.	FULVIO SCARANO	Professeur TU Delft	(Rapporteur)
M.	MICHEL STANISLAS	Professeur Emérite Ecole Centrale de Lille	(Rapporteur)
M.	MUSTAPHA HELLOU	Professeur INSA Rennes	(Examineur)
M.	ETIENNE MÉMIN	Directeur de Recherche INRIA	(Examineur)









# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	v
INTRODUCTION	1
CURRICULUM VITAE	3
<b>1 ÉCOULEMENTS CISAILLÉS COMPLEXES</b>	<b>15</b>
1.1 INTRODUCTION	15
1.1.1 Aéraulique et écoulements	15
1.1.2 Ecoulements cisailés turbulents	17
1.2 PROBLÈMES ET MÉTHODES	17
1.2.1 Reconstruction 3D des structures cohérentes	20
1.2.2 Modélisation de la dynamique d'ordre faible	23
1.2.3 Modélisation numérique d'écoulements complexes	25
1.2.4 Production d'un écoulement cisailé linéaire	28
1.3 EXPÉRIENCES ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES	32
1.3.1 Les souffleries	33
1.3.2 Le code de simulation numérique	34
1.3.3 Interaction couche de mélange sillage	35
1.3.4 Sillage de cylindre à Reynolds 3900	36
1.3.5 Sillages non canoniques	37
1.3.6 Couches de mélanges non canoniques	38
<b>2 THERMOANÉMOMÉTRIE À BASSE VITESSE</b>	<b>39</b>
2.1 PROBLÉMATIQUE	39
2.1.1 Modélisation du transfert thermique	40
2.1.2 Pilotage du thermoanémomètre	40
2.1.3 Influence de la température	41
2.1.4 Limites des basses vitesses	42
2.2 ÉTALONNAGE À BASSE VITESSE	42
2.2.1 Etat de la technique	42
2.2.2 Exposé de l'invention	44
2.2.3 Incertitudes de mesures	45
2.3 MESURE SIMULTANÉE VITESSE-TEMPÉRATURE	47
2.3.1 Quelques précurseurs/prédécesseurs	47
2.3.2 Principe de la mesure PCTA	48
2.3.3 Mise en œuvre pratique et résolution	49
2.3.4 Résultats de mesure simultanée vitesse et température	50
<b>3 MESURE DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE À PARTIR D'IMAGES</b>	<b>53</b>
3.1 POSITION DU PROBLÈME	54

3.1.1	Flot optique et écoulement : le modèle d'observation . . .	54
3.1.2	Problème de l'ouverture . . . . .	58
3.2	SCHÉMAS D'ESTIMATION DU MOUVEMENT . . . . .	58
3.2.1	Méthodes locales . . . . .	58
3.2.2	Méthodes globales . . . . .	60
3.2.3	Flot optique et corrélation . . . . .	61
3.2.4	Robustesse . . . . .	62
3.3	GESTION DES GRANDS DÉPLACEMENTS . . . . .	63
3.3.1	Multirésolution . . . . .	64
3.3.2	Combinaison corrélation-flot optique . . . . .	65
3.4	RÉGULARISATIONS . . . . .	67
3.4.1	Spatiales d'ordre deux et plus . . . . .	67
3.4.2	Spatiales basées sur les lois de la turbulence . . . . .	69
3.4.3	Spatiotemporelle basées sur les équations de Navier-Stokes	71
3.5	ESTIMATION DES INCERTITUDES DE MESURES . . . . .	74
4	RECONSTRUCTION DU MOUVEMENT À PARTIR D'IMAGES	77
4.1	POSITION DU PROBLÈME . . . . .	77
4.1.1	Assimilation variationnelle . . . . .	78
4.1.2	Filtrage stochastique . . . . .	80
4.1.3	Méthodes hybrides . . . . .	83
4.2	ASSIMILATION DE DONNÉES EN MÉCANIQUE DES FLUIDES . . .	83
4.3	RECONSTRUCTION D'UNE SURFACE LIBRE . . . . .	85
4.3.1	Problématique . . . . .	85
4.3.2	Méthode proposée . . . . .	85
4.3.3	Résultats . . . . .	86
4.4	RECONSTRUCTION D'UN SILLAGE TURBULENT . . . . .	87
4.4.1	Problématique . . . . .	87
4.4.2	Méthode proposée . . . . .	87
4.4.3	Résultats . . . . .	88
	CONCLUSION ET PERSPECTIVES	91
	A ANNEXES	97
	BIBLIOGRAPHIE	165

# INTRODUCTION

C E mémoire présente une synthèse de mes travaux de recherche effectués depuis mon recrutement en tant que Chargé de Recherche à Irstea Rennes en février 1999, pour contribuer au développement de l'activité mécanique des fluides de l'équipe AEROBIO<sup>1</sup> aujourd'hui devenue ACTA<sup>2</sup> et composée alors de 5 permanents (1 IDTE, 1 CR, 2 IE, 1 TR). L'équipe avait essentiellement une activité de diagnostique, d'expertise et d'études en aéraulique. L'introduction d'une activité de recherche en appui faisait parti des évolutions souhaitées et dont le virage n'était pas nécessairement facile à négocier. De 2000 à 2003, parallèlement aux premières thèses lancées avec l'institut Pprime sur l'étude d'écoulements cisailés turbulents, j'ai travaillé sur la conception d'une soufflerie couche de mélange à basse vitesse. Vu le peu de connaissance qu'il y avait dans le domaine des basses vitesses, la conception d'un tel outil était un objet de recherche en soit. L'enjeu était de savoir générer à basse vitesse un flux d'air homogène sans stratification thermique et avec un faible taux de turbulence. Ce travail, financé dans le cadre du CPER (2000-2004), a abouti à la réalisation de la soufflerie du Hall Aéraulique Basse Vitesse (dite soufflerie HABV) inaugurée en 2006. De 2002 à 2004, dans le cadre de la préparation du HABV, j'ai également été occupé par des activités purement techniques sur le développement d'une régulation thermique performante de la soufflerie basse vitesse en collaboration avec l'INSA de Rennes.

Dans le cadre d'un partenariat avec l'Inria de Rennes amorcé au début des années 2000, j'ai progressivement commencé à travailler sur l'analyse du mouvement fluide dans les séquences d'images. Trois projets ont permis le développement de cette activité : le projet ACI Masse de données ASSIMAGE de (2004-2006), le projet région Bretagne IMAFLUID (2004-2009) et le projet européen FLUID (2004-2007). Cette collaboration a abouti en 2009 à la création de FLUMINANCE, l'équipe projet commune entre Inria et Irstea, s'intéressant à l'analyse, à la description et au contrôle des écoulements à partir de séquences d'images. Depuis, mes recherches participent également à 100% aux activités de FLUMINANCE. Les besoins méthodologiques d'ACTA ont été inscrits dans les objectifs de FLUMINANCE. Depuis 2009, je bénéficie ainsi d'un cadre scientifique élargi et renforcé pour développer mes recherches pour ACTA-FLUMINANCE. L'équipe ACTA, que je dirige depuis 2013, est composée aujourd'hui de 9 permanents (2 CR, 2 IR, 2 IE, 2 AI). L'équipe Fluminance est composée aujourd'hui de 6 permanents (1 DR Inria, 1 CR Inria, 2 CR Irstea, 1 Pr

---

1. AEROBIO pour Aéraulique et Biocontamination

2. ACTA pour Aéraulique et Contrôle des Atmosphères Turbulentes

Univ. Rennes 1).

Dans ce contexte, mon travail a été de développer des actions de recherche sur les écoulements turbulents à basse vitesse (couche de mélange, sillage), et sur les développements méthodologiques nécessaires à ces recherches (métrologie à basses vitesses, outils de mesure et de reconstruction du mouvement des écoulements à partir d'images).

Ce manuscrit s'articule en quatre chapitres suivants la chronologie de mes activités :

1. Le *premier chapitre* concerne des travaux expérimentaux, numériques et méthodologiques autour de configurations non canoniques de sillage et de couche de mélange, afin d'extraire et de modéliser la dynamique caractérisant l'évolution spatio-temporelle des structures cohérentes responsables des transferts. Ces écoulements particuliers interviennent dans les dispositifs de confinement dynamique par flux d'air, lors de la manipulation d'un produit par un opérateur (sillages complexes), mais également dans le mélange aux interfaces entre un flux d'air propre forcé et son environnement (couches de mélange complexes).
2. Le *deuxième chapitre* présente le développement de l'anémométrie à fil chaud pour la mesure rapide et simultanée de la vitesse et de la température, ainsi que le développement d'un banc permettant d'étalonner très rapidement les capteurs à fils chauds, à basse vitesse et en température.
3. Le *troisième chapitre* est consacré aux techniques de mesures du mouvement des écoulements par flot optique. Les estimateurs du mouvement sont composés de modèles. La mesure peut être améliorée en introduisant des modèles basés sur la physique des écoulements.
4. Le *quatrième chapitre* expose les techniques d'assimilation de données pour coupler les modèles numériques de la dynamique des fluides avec des séquences d'observations image des écoulements. Les techniques permettent d'aller progressivement vers la reconstruction 3D réaliste des écoulements turbulents.

Pour chacun des chapitres une publication est intégrée en fin de ce manuscrit. Le titre de ce manuscrit, faisant référence à l'usage des modèles, prend progressivement son sens au fil des chapitres, plus particulièrement avec les deux derniers qui correspondent à mes activités de recherche de ces cinq dernières années. Mon projet de recherche s'inscrit naturellement dans le prolongement de ces récentes activités.

# CURRICULUM VITAE

## Etat Civil

Dominique Heitz  
45 ans, né le 29 mai 1970 à Sarrebourg (Moselle),  
Marié, 3 enfants,  
Nationalité française.

## Situation actuelle

Chargé de Recherche Irstea  
Recruté en février 1999.

Responsable équipe ACTA (Irstea)  
Membre équipe FLUMINANCE (Inria - Irstea)

Irstea Centre de Rennes  
17 avenue de Cucillé - CS64427  
35044 Rennes Cedex

Tel Irstea : 02 23 48 21 70  
Mel : dominique.heiz@irstea.fr  
Page web : <http://www.irisa.fr/fluminance/team/Dominique.Heitz.html>

## Formation

1995-1999 Doctorat de l'Université de Poitiers : "Etude expérimentale du sillage d'un barreau cylindrique se développant dans une couche de mélange plane turbulente" (directeur J.-P. Bonnet et Joël Delville, co-encadrant G. Arroyo), au Cemagref de Rennes et au Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques, UMR CNRS 6609, Univ. Poitiers, obtenu le 9 Janvier 1999, mention Très Honorable.

1994-1995 *Service Militaire en tant qu'Educateur du Contingent, détaché à la préfecture de Strasbourg.*

1993-1994 D.E.A. Aérodynamique et Mécanique des Fluides, Université de Poitiers, mention Bien.

## Activités de recherche

- Depuis 2015, Reconstruction 3D d'écoulements turbulents par assimilation de données images dans code LES Incompact3d avec P. Chamdramouli (Inria Rennes), E. Mémin (Inria Rennes) et S. Laizet (Imperial College).
- 2011-2015, Reconstruction 3D d'écoulements par assimilation de données stéréo PIV multiplans dans code DNS Incompact3d avec C. Robinson (Irstea Rennes) et E. Mémin (Inria Rennes).
- 2011-2012, Incertitudes de mesures PIV par flot optique avec P. Héas (Inria Rennes) et C. Herzet (Inria Rennes).
- 2011-2012, Reconstruction d'écoulements à surface libre par filtrage stochastique couplant données Kinect et équations shallow water, avec E. Mémin (Inria Rennes).
- Depuis 2010, Reconstruction 3D d'écoulement par assimilation d'images dans les équations de la dynamique des fluides avec E. Mémin (Inria Rennes) et A. Gronskis (Univ. Buenos Aires).
- Depuis 2008, Estimation du flot optique basée sur les lois de puissance de la turbulence avec P. Héas (Inria Rennes), E. Mémin (Inria Rennes) et C. Herzet (Inria Rennes).
- 2006-2008, Combinaison corrélation/flot optique pour une mesure PIV robuste et dense avec P. Héas (Inria Rennes) et E. Mémin (Inria Rennes).
- 2006-2008, Mesure PIV robuste par régularisation spatio-temporelle à partir des équations de la dynamique des fluides avec P. Héas (Inria Rennes) et E. Mémin (Inria Rennes).
- 2004-2008, Etude expérimentale et numérique de couches de mélanges non canoniques avec J. Delville (PPRIME) et E. Lamballais (PPRIME).
- 2002-2005, Application du flot optique à la PIV avec E. Mémin (Inria Rennes) et T. Corpetti (CNRS).
- Depuis 2003, Thermoanémoclinométrie à fil chaud à basse vitesse avec J. Delville (PPRIME Poitiers).
- 2001-2004, Modélisation et contrôle-commande thermique d'une soufflerie couche mélange à basse vitesse avec J.-P. Le Baron (INSA Rennes).
- 2000-2004, Simulation numérique directe et aux grandes échelles d'écoulements turbulents dans des géométries complexes avec E. Lamballais (PPRIME Poitiers) et J.H. Silvestrini (Université Pontificale Catholique de Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brésil).
- 2000-2003, Modélisation de la dynamique de l'écoulement d'interaction entre une couche de mélange et un sillage par PIV multiplans et POD avec J. Delville (PPRIME), J.-P. Bonnet (PPRIME) et G. Arroyo (Irstea Rennes).

## Projets financés

- Coordinateur projet européen FET-Open LASCAR déposé le 30/09/15, montant 733 000 €
- Projet CiDE ADEME TrackyLeaks (2014-2017), montant 87 000 €

- Projet ANR SYSCOMM GéoFluids (2010-2013), montant 110 000 €
- Projet ANR SYSCOMM MS-DAG (2009-2012), montant 100 000 €
- CPER (2008-2012), Métrologie 3D, montant 400 000 €
- Projet européen FET-Open FLUID (2005-2008), montant 180 000 €
- Coordonnateur du projet Région Bretagne IMAFLUID (2004-2008), montant 80 000 €
- Projet ACI Masse de Données ASSIMAGE (2003-2006), montant 60 000 €
- Coordonnateur du projet ACI Nouvelles Méthodologies Analytiques et Capteurs FOEHN (2002-2006), montant 48 000 €.
- Action Thématique Prioritaire Blanche du Cemagref (1999-2000), montant 90 000 €
- CPER (2000-2004), Soufflerie Basse vitesse et métrologie, montant 1 000 000 €

## Responsabilités collectives

- Responsable de l'équipe Aéraulique et Contrôle des Atmosphères Turbulentes (ACTA, Irstea Rennes) à partir du 1/02/2013
- Membre du comité directeur des systèmes d'information (CSI gouvernance du SI) d'Irstea depuis 2011
- Membre du comité technique spécial (CTS) d'Irstea centre de Rennes de 2009 à 2012
- Organisation des journées du GdR de Turbulence à Irstea Rennes du 28 au 30 janvier 2008
- Responsable animation logiciels scientifiques de l'unité de recherche TERE d'Irstea centre de Rennes (2002-2006)

## Encadrements

### Post-doctorants

- Ioana Barbu (2015-2016) - Sur l'estimation de débit de fuite de biogaz à partir d'images infrarouge (projet TrackyLeaks).
- Benoît Combès (2011-2012) - Actuellement ingénieur expert, Inria Rennes Bretagne Atlantique, France
- Alexandro Gronskis (2009-2010) - Actuellement professeur - Facultad de Ingeniera - Universidad de Buenos Aires, Argentine
- Patrick Héas (2007 - 2008) - Actuellement chargé de recherche Inria, projet Fluminance, Rennes, France
- Virginie Navazza (2005-2006) - Actuellement ingénieur hydrodynamique, Alstom Hydro Ocean Energy, France
- Thomas Corpetti (2003-2004) - Actuellement directeur de recherche CNRS, OSUR, Université de Rennes 1, France
- Alina Santa Cruz (2001-2002) - Actuellement maître de conférence,



LUSAC, Université de Caen, France

### Thèses

- Cordélia Robinson (2011-2015) co-encadrée à 50% avec E. Mémin, Inria Rennes Bretagne Atlantique.
- Toutou Ndiaye (2005-2009) co-encadrée à 40% avec J. Delville, PPRIME Poitiers et à 20% avec E. Lamballais PPRIME Poitiers, soutenue le 18 décembre 2009.
- Philippe Parnaudeau (2001-2004) co-encadré à 50% avec E. Lamballais, PPRIME Poitiers, soutenue le 14 décembre 2004. Actuellement ingénieur de recherche CNRS UMR7095 Institut d’Astrophysique de Paris (IAP), France.
- Caroline Braud (2000-2003) co-encadrée à 40% avec J. Delville, 20% avec J.-P Bonnet et 20% avec G. Arroyo, soutenue le 12 décembre 2003. Actuellement chargée de recherche CNRS, Laboratoire de Mécanique de Lille, France.

### Stages encadrés à 100%

- Cyril Orain<sup>3</sup> (3ème année ESTACA Laval, avril-juillet 2015)
- Anthony Jamelot (M1 Modélisation Univ. Rennes1, juin-août 2007)
- Julien Puill (5ème année INSA Rennes, avril-août 2005)
- Jean-Baptiste Fuselier (4ème année INSA Rennes, juin-août 2005)
- Médéric Blestel (4ème année INSA Rennes, juin-août 2005)
- Nicolas Palanque (5ème année INSA Rennes, avril-août 2004)
- Pierre Maréchal (5ème année INSA Rennes, avril-août 2004)
- Florence Lhoro (4ème année INSA Rennes, juin-août 2004)
- Nicolas Palanque (4ème année INSA Rennes, nov.-décembre 2003)
- Stéphane Brémont (5ème année INSA Rennes, avril-août 2003)
- Pierre Maréchal (4ème année INSA Rennes, juin-août 2003)
- Maxime Guyaux (4ème année INSA Rennes, juin-août 2003)
- Brice Le Guen (M2 Univ. Vannes, avril-août 2003)
- Mickael Sauvée (5ème année INSA Rennes, avril-août 2002)
- Christelle Garnier (M2 Math. appli. Univ. Rennes1, avril-août 2002)
- Sandra Boisseau et François Xavier Leguay (4ème année INSA Rennes, novembre-décembre 2001)
- Jean-Pierre Caudal (M2 Informatique Univ. Rennes1, avril-août 2001)

### Jurys de thèses

- Examineur de la thèse de Yin Yang, soutenue à l’université de Rennes 1 le 16 décembre 2014.
- Examineur de la thèse de Toutou Ndiaye, soutenue à l’université de Poitiers le 18 décembre 2008.

---

3. Encadré à 50% avec P. Georgeault (Irstea Rennes)

- Examineur de la thèse de Trong Dong Nguyen, soutenue à l'INSA de Rennes le 14 décembre 2007.
- Examineur de la thèse de Philippe Parnaudeau, soutenue à l'université de Poitiers le 14 décembre 2004.
- Examineur de la thèse de Caroline Braud, soutenue à l'université de Poitiers le 16 décembre 2003.

## Enseignements

Mes activités d'enseignement portent sur la mécanique des fluides sous forme de vacations à l'INSA de Rennes.

- Depuis 2010 en 4ème année à l'INSA de Rennes, je donne un cours magistral de 24h équivalent TD dans lequel je reprends les bases de la mécanique des fluides et propose une introduction à la turbulence.
- De 2011 à 2014 en 2ème année des classes préparatoires intégrées de l'INSA de Rennes, je donne un cours/TD de 28h, typique d'un cours de classes préparatoires (Math Spé).

## Publications

Index  $h = 12$  (c-à-d 12 publications citées au moins 12 fois), mesuré sur Google Scholar en Octobre 2015.

### Publications avec comité de lecture

1. B. Combès, D. Heitz, A. Guibert, et E. Mémin. A particle filter to reconstruct a free-surface flow from a depth camera. *Fluid Dynamics Research*, 47(5) :25, 2015.
2. Y. Yang, C. Robinson, D. Heitz, E. Mémin - Enhanced ensemble-based 4DVar scheme for data assimilation - *Computers & Fluids*, 115 :201-210, 2015.
3. A. Gronskis, D. Heitz, E. Mémin. Inflow and initial conditions for direct numerical simulation based on adjoint data assimilation. *J. Comput. Phys.* 242 :480-497, 2013.
4. P. Héas, C. Herzet, E. Mémin, D. Heitz, P.D. Mininni. Bayesian estimation of turbulent motion. *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence* 35(6) :1343 - 1356, 2013.
5. P. Héas, E. Mémin, D. Heitz, P.D. Mininni. Power laws and inverse motion modeling : application to turbulence measurements from satellite images. *Tellus Series A : Dynamic Meteorology and Oceanography*, 64, 10962, DOI : 10.3402/tellusa.v64i0.10962, 2012.
6. D. Heitz, E. Mémin, C. Schnörr. Variational fluid flow measurements from image sequences : synopsis and perspectives. *Exp. Fluids*, 48(3) :369-393, 2010.
7. M. Ndoye, J. Delville, D. Heitz, G. Arroyo. Parameterizable Constant Temperature Anemometer, a new method for the analysis of

- velocity-temperature coupling in turbulent heat transfer. *Meas. Sci. Technol.*, 21(7), 2010.
8. D. Heitz, P. Héas, E. Mémin, J. Carlier. Dynamic consistent correlation-variational approach for robust optical flow estimation. *Exp. Fluids*, 45(4) :595-608, 2008.
  9. P. Parnaudeau, J. Carlier, D. Heitz, E. Lamballais. Experimental and numerical studies of the flow over a circular cylinder at Reynolds number 3900. *Phys. Fluids*, 20(8), 2008.
  10. P. Parnaudeau, D. Heitz, E. Lamballais, J.H. Silvestrini. Direct numerical simulations of vortex shedding behind circular cylinders with spanwise linear nonuniformity. *Journal of Turbulence*, 8(13), 2007.
  11. T. Corpetti, D. Heitz, G. Arroyo, E. Mémin, A. Santa Cruz. Fluid experimental flow estimation based on an optical-flow scheme. *Exp. Fluids*, 40(1) :80-97, 2006.
  12. C. Braud, D. Heitz, G. Arroyo, L. Perret, J. Delville, J.P. Bonnet. Low-dimensional analysis, using POD, for two mixing layer-wake interactions. *International journal of heat and fluid flow*, 25 :351-363, 2004.
  13. C. Braud, D. Heitz, P. Braud, G. Arroyo, J. Delville. Analysis of the wake-mixing-layer interaction using multiple plane PIV and 3D classical POD. *Exp. in Fluids*, 37(1) :95-104, 2004.

### Articles de vulgarisation

1. P. Héas, D. Heitz, E. Mémin. La turbulence par l'image. *La Recherche*, 444, September 2010.

### Chapitres de livres

1. P. Parnaudeau, E. Lamballais, D. Heitz, J.H. Silvestrini. Combination of the immersed boundary method with compact schemes for DNS of flows in complex geometry. In *Direct and large-eddy simulation 5*, Kluwer academic publishers, 2003.
2. D. Heitz, G. Arroyo, P. Marchal, J. Delville, J.H. Garem, J.P. Bonnet. Turbulent plane mixing layer perturbed by the wake of a circular cylinder. In *Advances in Turbulence VII*, U. Frisch (ed.), pp. 309-312, Kluwer, 1997.

### Brevets

1. G. Arroyo, P. Georgeault, L. Wallian, J. Carlier, A. Guibert, D. Heitz, P. Loisel. Dispositif de protection d'une zone d'opération et procédé correspondant. Brevet INPI No FR3008782, 2015.
2. D. Heitz, J. Delville. Procédé, dispositif et installation d'étalonnage d'un capteur de mesure de données représentatives de la vitesse d'écoulement d'un flux de fluide. Brevet INPI No 11.62299, 2011.

## Conférences internationales

1. A. Gronskis, C. Robinson, D. Heitz, E. Mémin. A 4DVar PIV-data assimilation for flow spatio-temporal reconstruction. In PIV<sub>13</sub>, Delft, Netherlands, 1-3 July 2013.
2. B. Combès, A. Guibert, E. Mémin, D. Heitz. Free-surface flows from Kinect : feasibility and limits. In FVR<sub>2011</sub>, Poitiers, France, December 2011.
3. A. Gronskis, D. Heitz, E. Mémin. Inflow and initial conditions for direct numerical simulation based on adjoint data assimilation. In 7th Int. Symp. on Turbulence and Shear Flow Phenomena, TSFP-7, Ottawa, Canada, July 2011.
4. P. Héas, D. Heitz, E. Mémin. Evidence of turbulence power laws from image data. In International Conference and Advanced School "Turbulent Mixing and Beyond", The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy, 2009.
5. P. Héas, E. Mémin, D. Heitz, P.D. Mininni. Bayesian selection of scaling laws for motion modeling in images. In International Conference on Computer Vision (ICCV'09), Kyoto, Japan, October 2009.
6. P. Héas, D. Heitz, E. Mémin. Multiscale regularization based on turbulent kinetic energy decay for PIV estimations with high spatial resolution. In 8th Int. Symposium on Particle Image Velocimetry (PIV09), Melbourne, Australia, August 2009.
7. P. Héas, E. Mémin, D. Heitz. Self-similar regularization of optic-flow for turbulent motion estimation. In Proc. ECCV'08, Int Workshop on Machine Learning for Vision-based Motion Analysis, Marseille, France, 2008.
8. M. Ndoeye, D. Heitz, C. Fourment, G. Arroyo, J. Delville. Parametrizable constant temperature anemometer for simultaneous velocity and temperature measurements in turbulent flows. In 8th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows (ISAIF), Lyon, France, 2007.
9. D. Heitz, P. Héas, V. Navaza, J. Carlier, E. Mémin. Spatio-temporal correlation-variational approach for robust optical flow estimation. In Symposium on Particle Image Velocimetry (PIV'07), Pages 1-9, Roma, Italy, September 2007.
10. C. Braud, D. Heitz, G. Arroyo, Delville J.. A low dimensional analysis of a complex flow : a wake mixing layer interaction. In TSFP 4, Williamsburg Virginia, USA, 2005.
11. P. Parnaudeau, D. Heitz, E. Lamballais, J. Silvestrini. Direct numerical simulations of vortex shedding behind cylinders with spanwise linear nonuniformity. In TSFP 4, Williamsburg Virginia, USA, 2005.
12. D. Heitz, J. Carlier, E. Mémin. Fluid dedicated Optical-flow scheme. In PIVChallenge 05, Pasadena, USA, September 2005.
13. T. Corpetti, D. Heitz, G. Arroyo, E. Mémin, A. Santa Cruz. Estimation of motion using a PIV correlation-based method and an optical-flow one for two experimental flows : quantitative and qualitative

- comparison. In 12th International symposium Applications of laser techniques to fluid mechanics, Lisbon, Portugal, 2004.
14. G. Arroyo, D. Heitz, P. Georgeault, S. Tranier, S. Quastana, D. Quastana. Contamination transfer through free jets resulting from ventilation ceilings. In Food Factory of the futur, 2nd International Conference, Laval, 6-8 October, Laval, France, 2004.
  15. C. Braud, D. Heitz. Parametric analysis of a complex flow : a mixing layer-wake interaction. In 57th annual meeting of the division of fluid dynamics, APS Meeting ID : DFD04, Seattle, Washington, USA, 2004.
  16. D. Heitz, C. Braud, P. Georgeault, J. Delville, G. Arroyo. Perturbation of localised ultra-clean air delivery systems. In Food Factory of the futur, 2nd International Conference, Laval, France, 2004.
  17. P. Parnaudeau, E. Lamballais, D. Heitz, J.H. Silvestrini. Combination of the immersed boundary method with compact schemes for DNS of flows in complex geometry. In Ercoftac workshop, Direct and large eddy simulation V, Munich, Germany, 2003.
  18. C. Braud, D. Heitz, G. Arroyo, J. Delville, J.P. Bonnet. Low-dimensional galerkin model of a plane mixing layer-wake interaction. In 3rd international symposium on turbulence and shear flow phenomena, Sendai, Japan, 2003.
  19. T. Corpetti, E. Mémin, A. Santa-Cruz, D. Heitz, G. Arroyo. Optical flow estimation in experimental fluid mechanics. In Seventh Int. Symp. on Signal Processing and its Applications, ISSPA'03, Paris, France, July 2003.
  20. C. Braud, D. Heitz, P. Braud, G. Arroyo, J. Delville. Investigation of a plane mixing layer-wake interaction by means of two 2D PIV planes and of POD. In 11th international symposium on applications of laser techniques to fluid mechanics, Lisbon, Portugal, 2002.
  21. G. Arroyo, D. Heitz. Analysis and control of localised air flows to improve hygienic food manufacturing and packaging. In Food factory of the future, Gothenburg, Sweden, 2001.
  22. D. Heitz, G. Arroyo, P. Marchal, J. Delville, J.H. Garem, J.P. Bonnet. Turbulente plane mixing layer perturbed by the wake of a circular cylinder. In 7th European Turbulence Conference, Saint Jean Cap Ferrat, France, 1998.
  23. D. Heitz, G. Arroyo, J. Delville, J.H. Garem, P. Marchal, J.P. Bonnet. Interaction of the wake of a circular cylinder and a plane mixing layer. In 11th symposium on turbulent shear flows, Grenoble, France, 8-10 septembre, Grenoble, France, 1997.

### **Conférences nationales**

1. D. Heitz, P. Héas, E. Mémin. Apport des modèles de lois de puissance pour l'estimation du mouvement turbulent en PIV. In 20ème congrès français de mécanique, Besançon, France, 2011.

2. D. Heitz, P. Héas, C. Herzet. Incertitudes de mesures PIV par flot optique. In FLUVISU 11, Lille, France, November 2011.
3. D. Heitz, M. Ndoye, P. Loisel, C. Fourment, J. Delville. Développement de la thermoanémométrie à basse vitesse. In 18ème congrès français de mécanique, Grenoble, France, 2007.
4. D. Heitz, P. Héas, V. Navaza, J. Carlier, E. Mémin. Collaboration corrélation-variationnelle pour une estimation robuste du flot optique. In 18ème Congrès Français de Mécanique (CFM), Pages 1-7, Grenoble, August 2007.
5. D. Heitz, C. Braud, P. Georgeault, J. Delville, G. Arroyo. Ecoulements turbulents à basse vitesse et maîtrise d'environnements localisés. In Journées Activités Universitaires de Mécanique, La Rochelle, France, 2006.
6. J. Carlier, P. Parnaudeau, D. Heitz, Lamballais E.. Etude numérique et expérimentale de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire à  $Re_D=3900$ . In 17ème congrès français de mécanique, Troies, France, 2005.
7. D. Heitz, T. Corpetti, J. Carlier, G. Arroyo, E. Mémin. Evaluation d'un estimateur de flot optique dédié aux écoulements. In 11ème Congrès de Visualisation et de Traitement d'Images en Mécanique des Fluides - FLUVISU 11, Ecully, France, June 2005.
8. G. Arroyo, D. Heitz. Nouveaux apports de la mécanique des fluides pour la maîtrise de la propreté de l'air en IAA. In Aéronautique et industries alimentaires, Paris, France, 2001.
9. D. Heitz, G. Arroyo, J. Delville, J.H. Garem, P. Marchal, J.P. Bonnet. Ecoulement tridimensionnel dans le sillage d'un cylindre placé dans une couche de mélange plane. In 14ème congrès français de mécanique, Toulouse, France, 1999.
10. D. Heitz, G. Arroyo, P. Marchal, J. Delville, J.H. Garem, J.P. Bonnet. Modifications des caractéristiques d'un sillage par une couche de mélange plane. In 35ème colloque d'aérodynamique appliquée : aérodynamique des basses vitesses, Lille, France, 1999.
11. D. Heitz, G. Arroyo, P. Marchal, J. Delville, J.H. Garem, J.P. Bonnet. Mouvements tridimensionnels dans le sillage d'un cylindre perturbé par une couche de mélange plane. In 34ème colloque d'aérodynamique appliquée : aérodynamique des basses vitesses, Marseille, France, 1998.
12. D. Heitz, G. Arroyo, J. Delville, J.H. Garem, P. Marchal, J.P. Bonnet. Interaction entre le sillage d'un cylindre et une couche de mélange plane. In 13ème congrès français de mécanique, Poitiers Futuroscope, 1-5 septembre, 1997.
13. D. Heitz, G. Arroyo, J. Delville, J.H. Garem, P. Marchal, J.P. Bonnet. Flux localisé d'air propre avec pénétration d'obstacles. Etude en soufflerie. In Symposium national Qualité de l'air dans l'industrie agro-alimentaire, Rennes, France, 1997.
14. G. Arroyo, P. Marchal, D. Heitz. Protection localisée par flux d'air propre. L'exemple du Flux Progressif. In Symposium national Qualité de l'air dans l'industrie agro-alimentaire, Rennes, France, 1997.

15. D. Heitz, G. Arroyo, P. Marchal, J. Delville, J.H. Garem, J.P. Bonnet. Interaction entre le sillage d'un cylindre et une couche de mélange plane. In 33ème colloque d'aérodynamique appliquée : aérodynamique des basses vitesses, Poitiers, France, 1997.

## Rapports de recherche

1. P. Héas, E. Mémin, D. Heitz, P.D. Mininni. Turbulence power laws and inverse motion modeling in images. Research Report INRIA, 2009.
2. D. Heitz, J. Carlier, G. Arroyo, A. Szantai. Final report on the evaluation of the tasks of the workpackage 3 - FLUID project FET Open. Research Report Cemagref, 2008.
3. D. Heitz, J. Carlier, G. Arroyo. Final report on the evaluation of the tasks of the workpackage 2 - FLUID project FET Open. Research Report Cemagref, 2008.
4. D. Heitz, J. Carlier, G. Arroyo, A. Szantai. Final report on the evaluation of the tasks of the workpackage 4 - FLUID project FET Open. Research Report Cemagref, 2008.

## Rapporteur

Activité de *referee* pour les revues suivantes :

- J. Fluid Mech. : 2 articles
- Exp. in Fluids : 3 articles
- J. of Turbulence : 1 article
- Fluid Dynamics research : 1 article
- AIAA Journal : 1 article
- Measurement Science and Technology : 1 article
- Journal of Fluids and Structures : 1 article
- Journal of Visualization : 1 article
- IEE Trans. Pattern Analysis and Machine Learning : 1 article
- IEE Trans. on Image Processing : 2 articles

Activité de *referee* pour l'ANR :

- 2 projets jeunes chercheurs

## Séminaires Invités

1. Cathala Letort XVII "L'usine agroalimentaire du futur", Oniris, Nantes, 25 novembre 2015.
2. Workshop on data assimilation – NIOPLEX, TU Berlin, 26 février 2015.
3. Congrès Français de Mécanique, Besançon, 30 août 2011.
4. ENS Cachan antenne de Bretagne, Groupe de travail "Applications des mathématiques" 24 janvier 2007.

5. Journées Activités Universitaires de Mécanique, La Rochelle, 31 août et 1er septembre 2006, page 6, 2006.





# ÉCOULEMENTS CISAILLÉS COMPLEXES

1

Ce chapitre présente des travaux expérimentaux, numériques et méthodologiques autour de configurations non canoniques de sillage et de couche de mélange, afin d'extraire et de modéliser la dynamique caractérisant l'évolution spatio-temporelle des structures cohérentes responsables des transferts. Ces écoulements particuliers interviennent en aéraulique dans les dispositifs de confinement dynamique par flux d'air, lors de la manipulation d'un produit par un opérateur (sillages complexes), mais également dans le mélange aux interfaces entre un flux d'air propre forcé et son environnement (couches de mélange complexes).

Ces travaux ont été menés en collaboration avec Jean-Paul Bonnet, Joël Delville et Eric Lamballais de l'institut Pprime (Poitiers) dans le cadre de trois thèses de doctorat de Caroline Braud (2003), de Philippe Parnaudeau (2004) et de Toutou Ndiaye (2009).

## 1.1 INTRODUCTION

### 1.1.1 Aéraulique et écoulements

L'aéraulique se définit comme la science et la technologie du traitement, de la distribution et de la diffusion de l'air pour le confort, l'hygiène, la santé, la sécurité des travailleurs en usine, les procédés industriels et la protection de l'environnement. C'est un domaine d'ingénierie vaste mêlant science et technique, qui au niveau de la recherche reste le parent pauvre de la mécanique des fluides. La nécessité d'aborder les problématiques complexes de l'aéraulique dans un cadre global tel que celui du génie des procédés, ou encore sous l'angle de la thermique, explique largement cet état de fait. Dès lors que l'on souhaite optimiser et améliorer les technologies le besoin de comprendre finement les écoulements et les transferts associés devient incontournable. En aéraulique, la complexité des configurations d'écoulements et des phénomènes physiques mis en jeu soulèvent un grand nombre de questions ouvertes, régulièrement alimentées par la mise au point de nouvelles techniques.

Dans ce contexte mêlant science et technologie, l'équipe ACTA d'Irstea Rennes réalise une recherche spécialisée en mécanique des fluides appliquée à l'aéraulique industrielle. Son domaine central d'investigation est le contrôle des atmosphères propres et des atmosphères froides dans l'industrie alimentaire, pour l'optimisation énergétique, sanitaire et sociale

des procédés. La maîtrise localisée des atmosphères vise d'abord la protection des produits alimentaires à maintenir au froid et à l'abri des contaminations par les particules de l'air, avec la contrainte forte dans l'alimentaire, du besoin de séparation sans barrières solides. Les enjeux sont aussi de préserver la santé des consommateurs et des employés (Troubles Musculo-Squelettiques liés au froid) et de réduire la consommation énergétique pour un niveau équivalent de protection. La réponse à ce besoin définit un domaine de recherche original sur l'analyse et le contrôle des écoulements turbulents d'air de grande dimension, à basse vitesse, en situation de cisaillement libre (rideaux d'air, interfaces de type couche de mélange, sillages d'obstacles) avec transport de polluants particulaires et de chaleur.

Les techniques classiques de la salle blanche et du flux laminaire n'assurent pas toujours une protection suffisante contre les contaminations microbiennes par les particules de l'air. C'est particulièrement vrai en fin de chaîne, lorsque le produit demande des interventions à l'air libre avant d'être emballé. Il faut alors assurer une propreté absolue autour du produit, malgré la présence, dans l'atelier, de sources de contamination (personnels, machines, autres produits biologiques).

Pour répondre à cette insuffisance, il est nécessaire de créer des zones différenciées stables en propreté, température et caractéristiques physiques et dynamiques de l'air. L'équipe ACTA développe des études et des recherches sur des systèmes de protection localisée. Des dispositifs innovants comme le *Flux Progressif* et le *Froid ultra-propre localisé (Froiloc®)*, ont été mis au point (cf. Fig. 1.1). Toutes ces techniques visent –par le choix

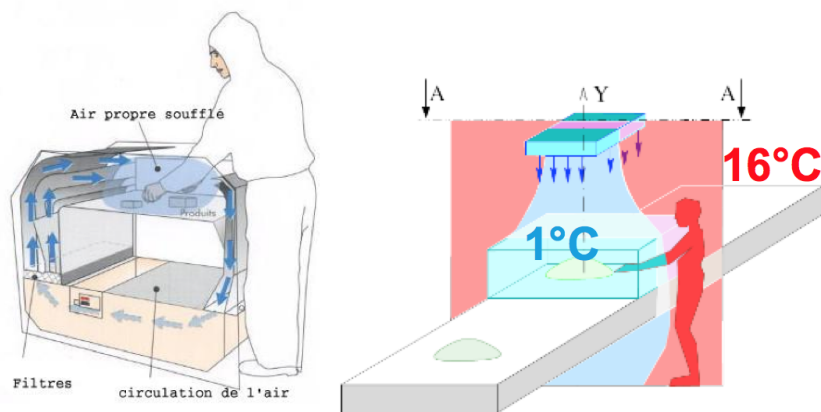


FIGURE 1.1 – Exemples de protections localisées mises au point par Irstea : A gauche, le flux Progressif, souffle horizontalement un air propre dans un air ambiant pollué ; A droite, le principe de Froiloc®, consiste à souffler verticalement et recycler un air froid/propre dans une ambiance chaude.

approprié d'une configuration d'écoulement– la maîtrise du transfert de chaleur ou de particules à travers l'interface entre l'ambiance générale et l'environnement localisé.

Les flux d'air protecteurs peuvent être perturbés par les effractions effectuées, dans les ateliers industriels, lors des inévitables interventions en amont de l'opération finale d'assemblage. Des travaux de recherche sont menés sur les effractions au niveau de l'interface entre la zone protégée et l'air ambiant pollué. Ces études sont nécessaires pour l'amélioration des

dispositifs existants et pour le développement de techniques de protection localisée encore plus génériques. Parallèlement à ces recherches, ACTA maintient une action forte de métrologie appliquée à la qualité de l'air, pour une vision globale de l'aérodynamique des salles. Cette activité nécessite la mise au point d'outils de mesure et de reconstruction grand champ des flux à basses vitesses et des transferts associés.

### 1.1.2 Écoulements cisailés turbulents

Dans le contexte des flux d'air protecteurs, la couche de mélange, le sillage et le jet sont les briques de bases des écoulements rencontrés. La couche de mélange plane turbulente constitue un excellent modèle représentatif des écoulements d'interfaces. Le sillage de cylindre reproduit bien la complexité de la perturbation d'un flux par un obstacle. Enfin, le jet plan est directement utilisé en séparation d'ambiance.

Les vitesses d'air maximales mises en jeu sont de l'ordre 0,5 m/s et vont jusqu'à 1 m/s lorsque les flux sont modifiés. Elles sont liées à la vitesse d'efficacité optimale des filtres à air, de l'ordre de 0,5 m/s. Nous parlons alors de basses vitesses en comparaison avec les vitesses d'air de l'aérodynamique du transport. Les régimes d'écoulements s'étalent sur une plage de Reynolds de 1000 à 10000, pour laquelle les modélisations classiques de la turbulence sont mises en échec.

A partir de 1999, mon travail a été de construire, des actions de recherche sur les écoulements turbulents à basses vitesses, en configuration non canoniques, et des développements méthodologiques nécessaires à ces recherches. Dans ce chapitre, nous présentons l'association de travaux expérimentaux, numériques et méthodologiques autour de configurations non canoniques de sillages et de couches de mélanges, afin d'extraire et de modéliser la dynamique caractérisant l'évolution spatio-temporelle des organisations tourbillonnaires responsables des transferts. Mis à jour au fil de l'évolution du contexte applicatif, ces travaux définissent une recherche générique, épurée d'une partie de l'objet finalisé tout en intégrant un caractère non canonique. La démarche privilégie l'étude de configurations subies (cf. §1.3.3 et §1.3.5), mais également l'étude de configurations intégrant des actions pour maîtriser le mélange (cf. §1.3.6).

Dans la suite de ce chapitre, nous présentons quelques problèmes liés à l'étude d'écoulements cisailés non canoniques et les méthodes proposées au niveau expérimental et numérique pour les étudier. Enfin, nous montrons les résultats obtenus sur ces écoulements particuliers.

## 1.2 PROBLÈMES ET MÉTHODES

Mes travaux sur les écoulements cisailés complexes ont débuté en 1996, lors de ma thèse effectuée à Irstea Rennes et à l'institut Pprime de Poitiers (Heitz 1999). L'objectif était d'apporter des connaissances sur l'interaction entre une couche de mélange plane et un sillage de barreau. Les résultats obtenus à partir de mesures de pression pariétale et d'anémométrie à fil chaud (1 fil et 4 fils) ont mis en évidence le caractère fortement tridimensionnel de l'écoulement, en particulier au culot de l'obstacle, et

ont permis de proposer un scénario d'organisation des structures tourbillonnaires et des flux associés (Heitz et al. 1997). La figure 1.2 présente cette configuration telle qu'elle a été mise en œuvre en soufflerie.

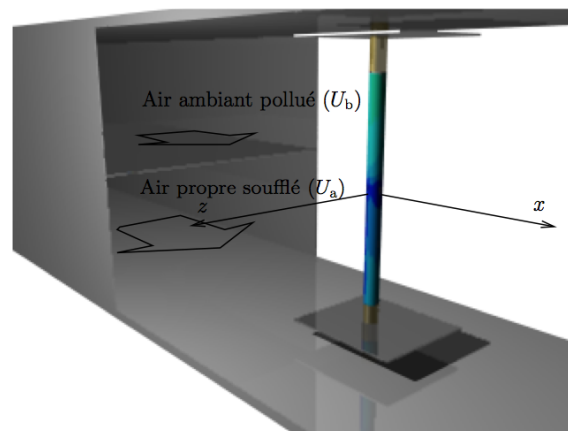


FIGURE 1.2 – Modèle d'interaction d'une couche de mélange avec un cylindre circulaire. La couche de mélange constituée d'une vitesse haute  $U_a$  et d'une vitesse basse  $U_b$  permet la modélisation de l'interface entre l'air propre soufflé et l'air ambiant pollué, tandis que le cylindre circulaire modélise l'introduction d'un objet dans cette zone protégée.

**Tridimensionalisation de l'écoulement de sillage.** De manière générale, la tridimensionalisation peut provenir de la nature intrinsèque du sillage, de la modification de l'écoulement incident, ou encore de la forme de l'obstacle (Fiedler et al. 1998). Pour un sillage classique, l'évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds est une bonne signature de la complexification de l'écoulement (Fey et al. 1998). Le rapport de forme du cylindre (longueur sur diamètre) et les conditions aux extrémités (plaques de bout) sont des paramètres pouvant conduire à la déstabilisation du sillage. Des modes de lâcher tourbillonnaire parallèle ou oblique sont observés (Ramberg 1983), avec sectionnement des tourbillons le long de l'obstacle (Gerich et Eckelmann 1982), plus couramment appelés dislocations (Williamson 1989). La transition vers la tridimensionalisation est amplifiée lorsque le sillage est perturbé suivant l'envergure de l'obstacle, soit par des variations de sa géométrie, soit par une nonuniformité de l'écoulement incident. Les phénomènes alors observés sont :

- l'existence d'un mode de lâcher incliné de tourbillons caractérisé par une bosse de fréquences plus évasée que pour un lâcher parallèle au cylindre ;
- une structuration en cellules de fréquences constantes le long de l'envergure ;
- l'apparition de dislocations entre les cellules ;
- l'appariement des tourbillons dans les zones de dislocations ;
- pour le cas d'un écoulement incident non-uniforme, la présence d'un écoulement secondaire au culot de l'obstacle, de la basse vers la haute vitesse (Woo et al. 1989, Heitz 1999, Lamballais et Silvestrini 2002).

Ces observations traduisent une certaine universalité des modes de lâcher tourbillonnaire menant à la tridimensionalisation de l'écoulement de

sillage. La figure 1.3 donne une illustration du mécanisme de dislocation forcé par un anneau, et un schéma des modes de lâcher tourbillonnaires pour un cylindre composé de la juxtaposition de deux diamètres différents.

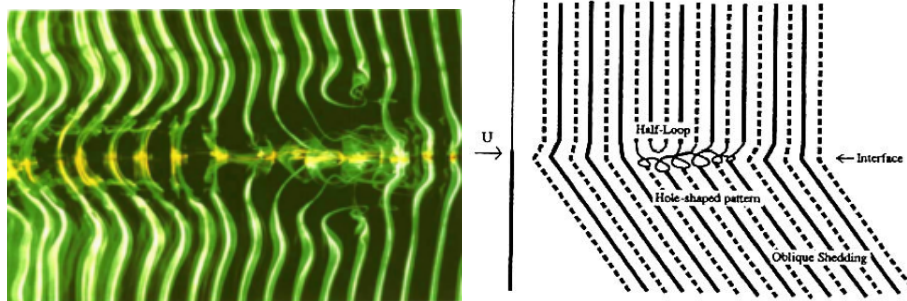


FIGURE 1.3 – A gauche : Dislocation de tourbillons forcée par la présence d'un anneau autour du cylindre, d'après Williamson (1989). A droite : schématisation des modes de déversement des tourbillons pour un obstacle composé de la juxtaposition de deux cylindres de diamètres différents, d'après Lewis et Gharib (1992).

**Nos études sur les écoulements cisailés turbulents.** La première étude sur l'écoulement d'interaction entre une couche de mélange et un sillage portait sur une configuration unique en terme de dimensions et de vitesses appliquées (Heitz 1999). Le nombre de Reynolds moyen était égal à 7500 et le barreau était positionné dans l'écoulement à l'endroit où son diamètre était égal à l'épaisseur de vorticité de la couche de mélange. En reprenant des conditions analogues, Lamballais et Silvestrini (2002) réalisent une simulation numérique directe pour un nombre de Reynolds plus faible égal à 400. Ils retrouvent les grandes tendances de cet écoulement et quantifient le mouvement de fluide descendant au culot du cylindre.

Dans la continuité de ces travaux, nous avons complété les apports en étudiant l'influence des paramètres susceptibles de faire varier la dynamique de l'écoulement (non présenté dans ce mémoire) et réalisé une étude entièrement nouvelle sur la dynamique des structures cohérentes de l'écoulement (Braud et al. 2004a;b). Parallèlement, nous avons étudié cet écoulement turbulent par simulation numérique directe et aux grandes échelles. Pour cela il a fallu améliorer et valider une méthode numérique de modélisation des géométries complexes dans le cadre d'un maillage cartésien (Parnaudeau et al. 2003). Enfin, plus récemment, nous avons pris en compte, dans l'étude du développement des couches de mélanges planes, un profil de vitesse plus représentatif des dispositifs de soufflage rencontrés en aéraulique. La couche de mélange associée ne correspondait plus à la configuration canonique bien documentée dans la littérature, c- -d se développant entre deux écoulements constants. Nous avons alors étudié des couches de mélanges se développant entre une vitesse uniforme et un gradient de vitesse, avec l'idée d'aborder des configurations subies en aéraulique mais également de proposer des actions pour m triser l'épanouissement des nappes tourbillonnaires. Ce sujet nous a conduit à d'abord étudier la modélisation et la production d'un écoulement laminaire cisailé linéaire (Ndiaye 2009).

Dans la suite de ce chapitre nous présentons une méthodologie exp -

rimentale, basée sur la vélocimétrie par image de particules doubles plans et la décomposition orthogonale aux valeurs propres, pour reconstruire en 3D les structures cohérentes de l'écoulement d'interaction (cf. §1.2.1). Dans la continuité de ce travail, nous montrons une modélisation de la dynamique d'ordre faible des structures cohérentes obtenue en aval de l'obstacle (cf. §1.2.2). Puis, nous introduisons l'amélioration d'une méthode de modélisation des obstacles complexes dans des codes de simulation haute précision (cf. §1.2.3). Au §1.2.4 nous détaillons la modélisation des profils de toiles de grilles utilisés pour produire un écoulement laminaire cisailé linéaire. Enfin, au §1.3 dans le contexte des écoulements cisailés non canoniques, nous mettons en perspectives les résultats obtenus avec ces méthodes.

### 1.2.1 Reconstruction 3D des structures cohérentes

L'approche décrite ci-après vise la reconstruction 3D des structures cohérentes. Elle a été développée pour analyser l'écoulement d'interaction entre une couche de mélange et un sillage de cylindre. Pour ce faire, nous avons menés des analyses originales mettant en œuvre des mesures PIV double-plans associées à un traitement POD (décomposition orthogonale aux valeurs propres) volumique pour deux composantes de la vitesse (3D2C).

**PIV double-plans.** Lourenco et al. (1998) puis Kähler et Kompenhans (1999) sont les premiers à effectuer des acquisitions stéréo PIV sur deux plans (appelé "dual plane"). Kähler et al. (2000) et Hu et al. (2001) utilisent cette approche pour obtenir un jeu complet de données pour analyser des écoulements complexes. Ils montrent que la combinaison de deux plans PIV peut être utilisée pour calculer les corrélations spatiotemporelles et qu'elle permet d'améliorer la mesure de la vorticité. Dans notre approche, les acquisitions PIV dual plane ont servi à construire le noyau du système POD, composé de corrélations spatiales en deux points.

**POD classique et snapshot POD.** Introduite et adaptée par Lumley (1967) pour la turbulence, la POD est une technique qui s'appuie sur un traitement statistique du signal pour en extraire une cohérence spatiale caractéristique de sa dynamique. Le signal est décomposé en une hiérarchie infinie de structure spatiales, ordonnées selon la corrélation que ces structures possèdent avec le signal. La POD fournit une représentation modale multi-échelles qui par construction est optimale pour le signal. La question est alors de savoir si l'on peut définir les fonctions déterministes  $\phi_i$  d'une base  $\phi$  aussi proche que possible du signal. Mathématiquement, cela revient à maximiser la moyenne de la projection du signal  $u$  sur les fonctions de cette base

$$\text{Max}_\phi \frac{|\langle u|\phi \rangle|}{(\phi|\phi)^{1/2}}. \quad (1.1)$$

Il s'agit d'un problème d'Euler-Lagrange de maximisation sous contrainte dont la solution est une équation intégrale de Fredholm du premier ordre

$$\int_D \langle u(x)u(x') \rangle \phi_i(x') dx' = \lambda_i \phi_i(x) \quad (1.2)$$

où le noyau du problème POD noté

$$R(x, x') = \langle u(x)u(x') \rangle \quad (1.3)$$

est le tenseur d'autocorrélation spatiale et  $\lambda_j$  représente l'énergie moyenne du système projeté sur l'axe  $\phi_j$ . Le signal  $u$  s'écrit comme la somme de fonctions spatiales dont l'amplitude est aléatoire

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(x) \quad (1.4)$$

où les coefficients de projections s'écrivent

$$a_i = \int_D u(x) \phi_i(x) dx. \quad (1.5)$$

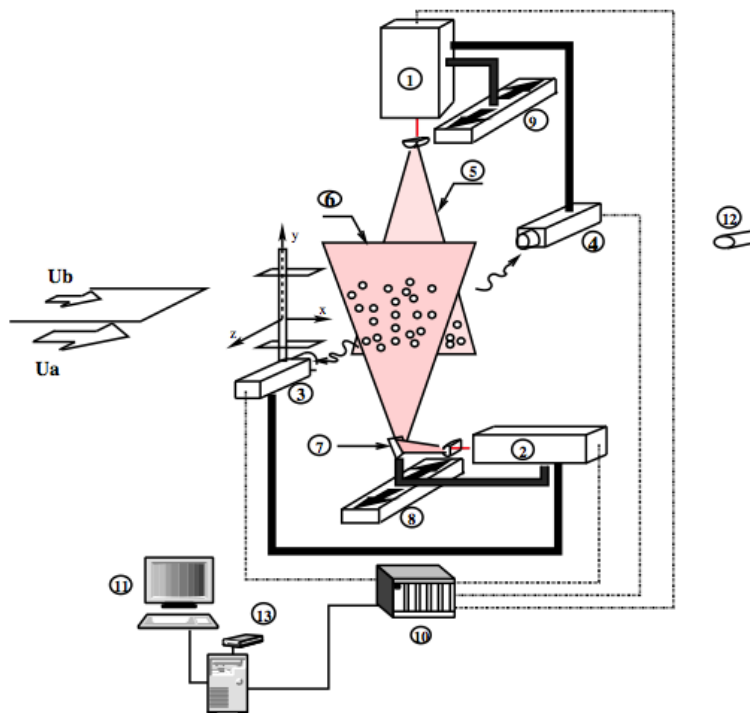
Dans cette formulation proposée par Lumley (1967) la moyenne d'ensemble est classiquement transformée en moyenne temporelle sous des conditions d'ergodicité du signal. Le noyau de la POD correspond alors à des corrélations spatiales en deux points. Pour un domaine spatiale composé de  $N_s$  points et un champ de vitesse de dimension  $d$ , la taille du problème POD est alors  $(N_s d)^2$ , c-à-d relativement importante dès que le nombre de points  $N_s$  du domaine spatial permet de rendre de compte du phénomène turbulent. La méthode des échantillons (snapshot POD en anglais) proposée par Sirovich (1987) solutionne ce problème en résolvant une version équivalente de la formulation originale. Elle consiste à résoudre le noyau par des corrélations temporelles sur  $N_t$  échantillons, la moyenne d'ensemble étant cette fois transformée en moyenne spatiale. La taille de ce problème est  $N_t^2$ , à comparer à  $(N_s d)^2$ .

**POD<sub>3D2C</sub>.** Pour étudier l'interaction couche de mélange - sillage, écoulement inhomogène dans les trois directions de l'espace, nous avons utilisé la POD classique. Pour effectuer une snapshot POD il fallait disposer de mesures instantanées et volumiques des trois composantes de la vitesse de l'écoulement, ce qui n'était pas réalisable en 2001. Par ailleurs, la snapshot POD ne permet pas de prendre en compte les corrélations entre les composantes de vitesses, témoins des mécanismes de cisaillement. Or comme l'a montré Delville (1994), la POD est d'autant plus représentative de l'écoulement que son degré de complexité est pris en compte dans le tenseur des corrélations en deux points.

La construction du noyau POD 3D a été réalisée à partir de mesures PIV double plans pour deux composantes de la vitesse (dual plane PIV 2D2C). Le montage expérimental tel qu'il a été réalisé est présenté en figure 1.4. Le tenseur de corrélation en deux points est construit pour toutes les combinaisons de positions discrètes dans le volume balayé par les deux plans de mesures. Les deux plans simultanés de mesure PIV étaient composés de  $N_x \times N_y = 47 \times 49$  vecteurs acquis pour 231 combinaisons parmi  $N_z = 21$  positions suivant la direction  $z$ . Un tenseur de corrélation 3D a ainsi été obtenu pour les deux composantes fluctuantes  $(u', v')$  de la vitesse. Le traitement POD a permis de construire les bases volumiques  $\phi_u$  et  $\phi_v$ , la base  $\phi_w$  étant calculée à partir de l'équation de continuité

$$\phi_w^i(\mathbf{x}) = - \int_0^z \left( \frac{\partial \phi_u^i(x, y, \eta)}{\partial x} + \frac{\partial \phi_v^i(x, y, \eta)}{\partial y} \right) d\eta, \quad (1.6)$$





1	Laser Quantel (20 Hz, 2 × 30 mJ)	8 9	Systèmes de déplacement
2	Laser NewWave (20 Hz, 2 × 30 mJ)	10	Processeur FlowMap
3 4	Caméras CCD (munis de filtres polarisant)	11	PC
5 6	Plans lasers	12	Ensemencement aval
7	Miroir	13	Disque dur externe

FIGURE 1.4 – Schémas du montage expérimental de l'expérience PIV dual plane de Braud et al. (2004b).

en considérant que l'écoulement est symétrique par rapport au plan  $z = 0$  et en imposant  $\phi_w^i = (x, y, 0) = 0$ .

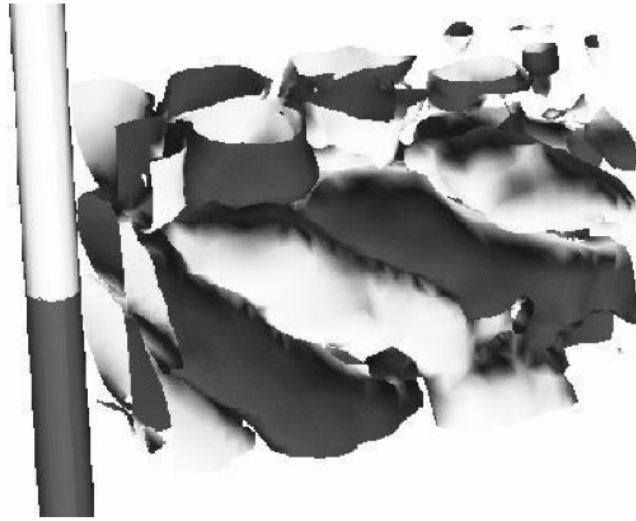


FIGURE 1.5 – Interaction couche de mélange - sillage. Isocontours positif (gris clair) et négatif (gris foncé) du vecteur propre du premier mode de la  $POD_{3D-2C}$ , c-à-d  $\sqrt{\lambda^1} \phi_u^1$ , (Braud et al. 2004b).

La méthode proposée combinant PIV dual plane et  $POD_{3D-2C}$  permet d'extraire l'organisation 3D des structures cohérentes dont l'énergie contenue dans le domaine d'étude est dominante. Les représentations spatiales des isocontours de vecteurs propres  $\sqrt{\lambda^n} \phi_u^n$ ,  $\sqrt{\lambda^n} \phi_v^n$  et du rotationnel  $\frac{\partial \phi_u^n}{\partial y} - \frac{\partial \phi_v^n}{\partial x}$  permettent d'observer la structuration de l'écoulement. La figure 1.5 illustre la topologie 3D du premier mode pour la composante de vitesse longitudinale  $u$ , en aval d'un cylindre impacté par une couche de mélange. Une analyse des résultats obtenus avec cette méthode et pour cet écoulement est présentée au §1.3.3. A ce stade, nous ne savons pas comment les structures cohérentes interagissent entre elles. Dans la section qui suit nous montrons comment nous avons construit un système dynamique afin de comprendre le cycle de vie des structures cohérentes.

### 1.2.2 Modélisation de la dynamique d'ordre faible

La POD fournit une base optimale du point de vue énergétique pour représenter l'écoulement. Un nombre de modes relativement peu élevé permet de capturer les aspects importants du signal. Nous avons utilisé les fonctions de la POD pour construire une approximation de type Galerkin des équations du mouvement. Pour un nombre de modes donné, nous avons obtenu un système dynamique d'ordre faible dont le comportement caractérise l'écoulement. Le modèle dynamique a été construit à partir d'une  $POD_{2D-2C}$  dans le plan de symétrie ( $z = 0$ ) de l'écoulement d'interaction couche de mélange - sillage (Braud et al. 2004b). La construction d'un système dynamique à partir de mesures PIV et d'une projection de Galerkin, nous a permis d'identifier les principaux mécanismes de l'organisation de l'écoulement. Ce type de modélisation a également été utilisé

pour analyser des données de simulations numériques directes (Rempfer 2000).

**Troncature.** Dans l'écoulement d'interaction couche de mélange - sillage, 12% des modes sont suffisants pour retrouver 99% de l'énergie. Cette convergence des valeurs propres permet d'obtenir une bonne représentation de la dynamique dans l'espace des phases (Berkooz et al. 1993). Cependant, dans ce cas 12% de l'énergie correspond tout de même à 269 modes ! Afin de réduire la taille du système tout en conservant l'organisation spatiale des grosses structures, nous avons vérifié que les corrélations en deux points reconstruites étaient comparables à celles mesurées. Une troncature à quinze modes, représentant 44% de l'énergie, a été retenue.

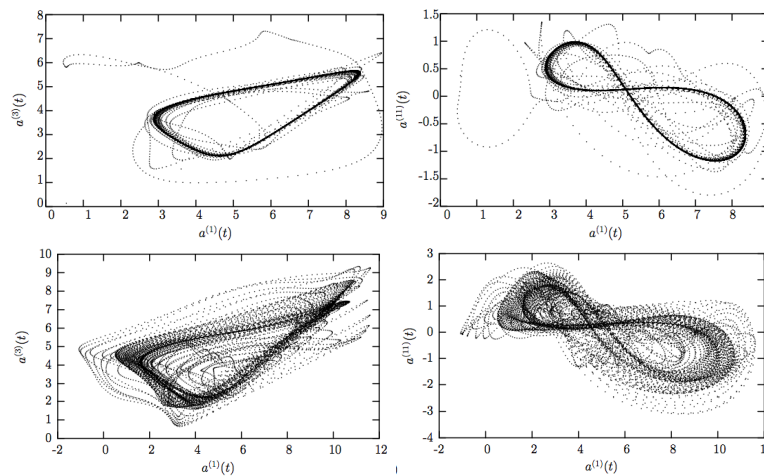


FIGURE 1.6 – Interaction couche de mélange - sillage. Portrait de phase : en haut,  $\alpha = 23$  ; en bas,  $\alpha = 20$  (Braud 2003).

**Projection.** La première application de la projection de Galerkin pour construire le système dynamique d'un écoulement a été réalisée par Aubry et al. (1988). Différentes formulations des équations de Navier-Stokes peuvent être envisagées pour la projection de Galerkin (Cordier 1996, Allery 2002, Ma et Karniadakis 2002). Dans notre étude nous avons retenu la formulation en vorticité fluctuante qui présente l'avantage de s'affranchir de la formulation du terme de pression. Le système dynamique d'ordre bas est composé des quinze équations

$$\frac{da^{(n)}}{dt} = \sum_{m=1}^{15} \left[ L + \frac{1}{Re}(1 + \alpha)L' \right] a^{(m)} + \sum_{m,k=1}^{15} Q \left( a^{(m)}a^{(k)} - \overline{a^{(m)}a^{(k)}} \right), \quad (1.7)$$

où  $\alpha$  modélise l'apport d'énergie des modes non pris en compte par la troncature. Le coefficient  $L$  correspond à l'interaction avec l'écoulement moyen,  $L'$  correspond aux contributions des effets visqueux et  $Q$  aux contributions des termes non linéaires sur les vitesses.  $L$ ,  $L'$  et  $Q$  s'expriment analytiquement sous forme d'intégrales calculées à partir des mesure PIV et des traitements POD (Braud et al. 2004b). Différentes valeurs de  $\alpha$  conduisent à différents comportements dynamiques du système : c'est le paramètre de bifurcation du modèle. Pour  $20 < \alpha < 30$  le système

dynamique est stable et possède un attracteur étrange comme illustré sur la figure 1.6.

### 1.2.3 Modélisation numérique d'écoulements complexes

Dans le cadre de la thèse de Philippe Parnaudeau (2004) nous avons développé une technique de simulation numérique haute précision de sillages complexes. L'objectif était d'utiliser le code numérique `Incompact3d` (cf. §1.3.2), basé sur des schémas de discrétisation spatiale de précision *quasi-spectrale* et largement validé pour les écoulements cisailés turbulents (Lamballais et Silvestrini 2002). Toutefois, ce type de schémas numérique impose un maillage cartésien, ne permettant pas d'épouser les contours de géométries complexes. Pour s'affranchir de cette limitation, nous avons mis en œuvre et amélioré une technique de modélisation d'un obstacle par une force.

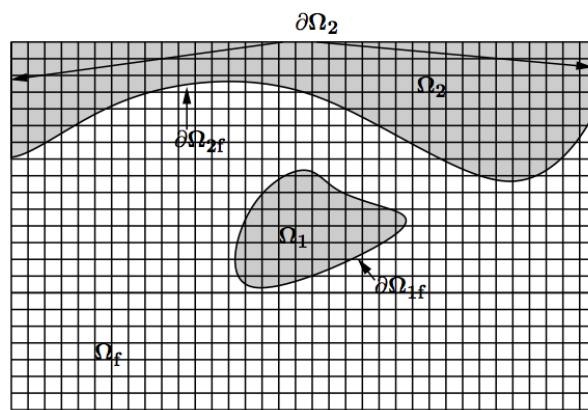


FIGURE 1.7 – Domaine de calcul  $\Omega$  composé de deux types de domaines solides  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , et d'un milieu fluide  $\Omega_f$ , d'après (Parnaudeau 2004).

**Méthodes de forçage volumique** Le principe des méthodes est d'ajouter une force volumique au second membre des équations de Navier-Stokes, pour modéliser les effets d'un obstacle solide, mobile ou inerte, au sein de l'écoulement. Dans nos travaux nous avons considéré le cas du solide inerte avec paroi fixes au sein du fluide. La figure 1.7 illustre un exemple de domaine de calcul à maillage cartésien composé de deux domaines solides et d'un milieu fluide. Pour imposer les conditions aux limites sur les parois  $\partial\Omega_{1f}$  et  $\partial\Omega_{2f}$ , un champ de force est ajouté sur la totalité des domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Plusieurs méthodes ont été proposées pour modéliser la force volumique. Peskin (1972) introduisit la méthode des *frontières immergées* pour représenter l'interaction entre un solide élastique et le fluide dans le cadre de recherches sur les écoulements sanguins au sein du cœur. Pour des configurations plus simples pour lesquelles les obstacles sont de formes connues, on distingue la méthode de *pénalisation* (Arquis et Caltagirone 1984), la méthode des *frontières virtuelles* (Goldstein et al. 1993) et la méthode de *forçage direct* (Mohd-Yusof 1997). La technique de *pénalisation* peut être vue comme une version simplifiée de la technique des *frontières virtuelles* permettant, grâce à cette simplification, une modélisation réaliste de milieux poreux. Cependant, ces deux approches présentent des désa-

vantages au niveau de leur stabilité numérique. En particulier, dans le cas d'une frontière solide avec condition d'adhérence à la paroi, ces méthodes nécessitent une forte réduction du pas de temps donc un coût de calcul important, pour obtenir des vitesses résiduelles faibles au sein de l'obstacle. Dans ce contexte, nous avons opté pour le *forçage direct* qui n'impose pas de restriction sur le pas de temps. Cette technique impose directement la vitesse à chaque pas de temps dans les régions souhaitées.

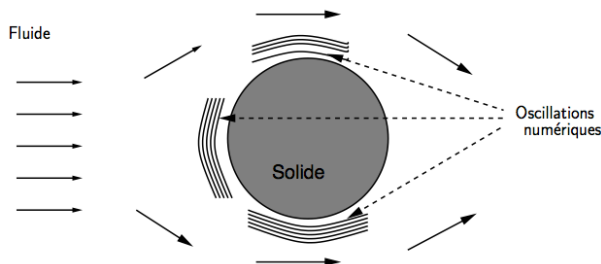


FIGURE 1.8 – Illustration des phénomènes d'oscillations numériques autour d'un obstacle, d'après (Parnaudeau 2004).

**Écoulement miroir** La méthode de forçage volumique produit des discontinuités sur les dérivées de la vitesse. Ceci pose des problèmes lorsque le forçage est combiné des schémas numériques d'ordre élevé (Kevlahan et Ghidaglia 2001). Dans notre cas, le problème est lié au comportement quasi-spectral des schémas compacts produisant des oscillations de type phénomène de Gibbs en présence de discontinuités (Lamballais et Silvestrini 2002). Ce phénomène est schématisé sur la figure 1.8 pour un écoulement autour d'obstacle modélisé par un forçage volumique. Nos travaux ont consisté à mettre au point un forçage direct mieux adaptée aux schémas compacts. Le principe général de la méthode est de créer un écoulement au sein de l'obstacle permettant de spécifier la condition de non glissement à sa surface et limitant l'effet de marche sur le profil de vitesses au passage de la frontière immergée. Fadlun et al. (2000) ont évalué la technique avec un forçage uniquement aux abords de la frontière. Mohd-Yusof (1997) a proposé un écoulement miroir pour mieux positionner la frontière. Toutefois, des actions aussi locales ne sont pas efficaces avec des schémas compacts nécessitant un voisinage étendu pour estimer une dérivée. Nous avons alors proposé d'appliquer une vitesse cible dans tout l'obstacle correspondant au miroir de l'écoulement extérieur. La vitesse cible à l'intérieur de l'obstacle  $\mathbf{u}_0$  s'écrit pour un cylindre de diamètre  $D$ ,

$$\mathbf{u}_0(r, \theta, z, t) = -f(r)\mathbf{u}(D - r, \theta, z, t), \quad (1.8)$$

où la fonction de modulation  $f(r) = \sin(2\pi r^2/D^2)$  assure une régularité de l'écoulement interne et évite la singularité au milieu du cylindre. Notons que le choix de l'expression de  $f(r)$  n'est pas unique, la fonction doit juste vérifier :  $f(0) = 0$ ,  $f(D/2) = 1$  et être strictement croissante pour  $0 \leq r \leq D/2$ . Enfin, un point important de notre approche est que l'écoulement dans le cylindre ne vérifie pas nécessairement la condition de divergence nulle.

**Validation** La méthode proposée améliore les résultats de manière significative. La figure 1.9 en donne une illustration qualitative, obtenue dans le sillage d'un cylindre à Reynolds égal à 40 pour une technique de forçage directe avec et sans écoulement miroir. L'amélioration proposée réduit nettement le bruit sur la vorticité au voisinage de l'obstacle. Ceci se traduit également par une meilleure estimation de la longueur de la zone de recirculation en aval du cylindre (surestimation de 10% sans écoulement interne). Ces bons résultats sur l'estimation de la longueur de la zone de

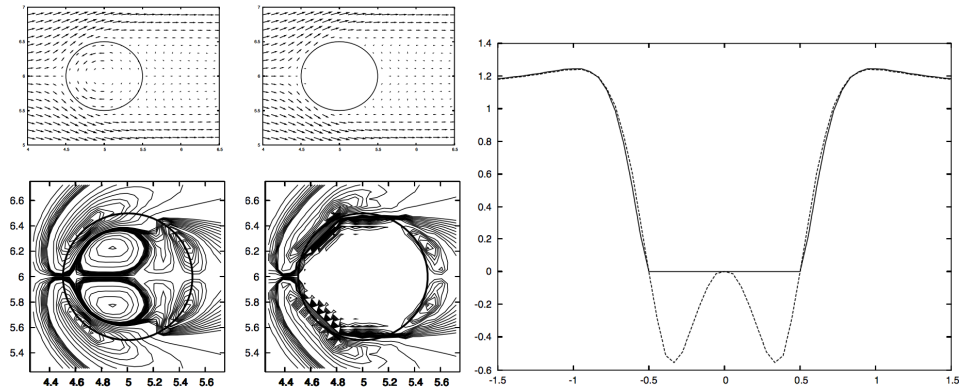


FIGURE 1.9 – Comparaison entre une méthode de forçage directe avec et sans écoulement miroir pour un sillage de cylindre à nombre de Reynolds égal à 40 (Parnaudeau et al. 2003). A gauche : champ de vitesse et de vorticité. A droite : profils de la vitesse longitudinale.

recirculation ont été confirmés à un nombre de Reynolds plus élevé égal à 300. Une amélioration de la prédiction du nombre de Strouhal a également été observée. Enfin, l'intérêt de combiner des schémas haute précision avec une technique de forçage directe avec écoulement miroir a pu être mis en évidence. La figure 1.10 présente des profils de vitesse calculés à maillage

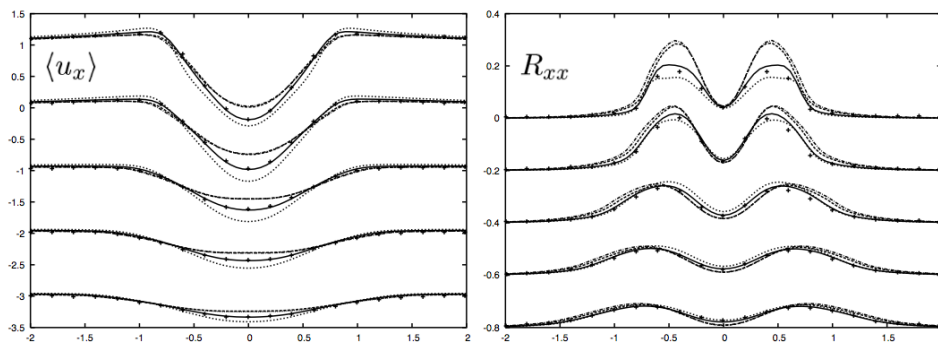


FIGURE 1.10 – Profils de vitesse longitudinale dans le sillage d'un cylindre à Reynolds 300. A gauche : vitesse moyenne. A droite : vitesse rms. — : ordre 6 avec écoulement interne; ... : ordre 6 sans écoulement interne; - - - : ordre 2 avec écoulement interne; - . - : ordre 2 sans écoulement interne; + : simulation spectrale de référence de Mittal et Balachandar (1992).

identique avec des schémas d'ordre 2 et 6, avec ou sans écoulement miroir dans le cylindre. La combinaison d'un schéma haute précision avec un forçage directe avec écoulement interne donne la meilleure précision sur l'estimation de la vitesse. Lorsque la résolution spatiale est marginale, les schémas d'ordre 2 associés à un forçage directe, inhibent le développement de mouvements tridimensionnels en aval du cylindre (cf. figure 1.11). Aux

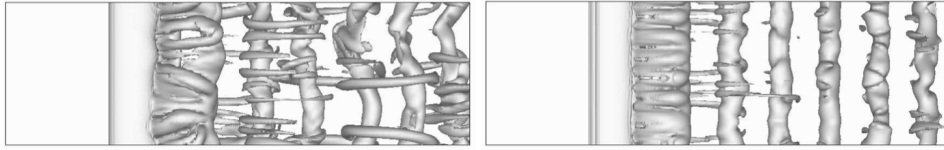


FIGURE 1.11 – Isosurface de la norme de vorticité  $\omega = 1,5 U_c / D$  dans le sillage d'un cylindre à Reynolds égal à 300. A gauche, ordre 6 avec écoulement interne ; A droite, ordre 2 avec écoulement interne (Parnaudeau 2004).

§1.3.4 et §1.3.5 nous présentons des résultats obtenus avec cette nouvelle technique de forçage volumique pour la simulation des grandes échelles d'un sillage de cylindre (Parnaudeau et al. 2008) et pour la simulation de sillages de formes complexes (Parnaudeau et al. 2007).

#### 1.2.4 Production d'un écoulement cisailé linéaire

L'utilisation d'une toile métallique incurvée est un moyen séduisant pour produire un écoulement peu turbulent et de profil de vitesse donné (Laws et Livesey 1978). Relativement simple à mettre en place expérimentalement et peu onéreuse, cette approche se prête à une analyse théorique. La modélisation de la relation entre l'écoulement en amont et en aval de ce type d'écran a été exhaustivement étudiée de la fin des années 50 au début des années 90. Dans ces études, la toile inclinée est considérée comme une surface de discontinuité en vitesse, pression et vorticité. Les effets de la viscosité sont négligés sauf au voisinage proche de la toile. La figure 1.12 schématise la configuration classique d'un profil de toile incurvée modifiant un écoulement constant en un écoulement cisailé linéaire. Toutefois,

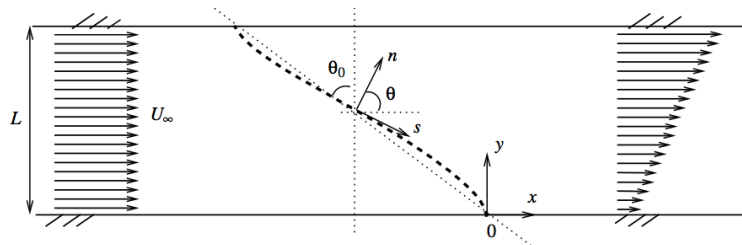


FIGURE 1.12 – Représentation schématique de l'écoulement au travers d'une toile incurvée (Ndiaye 2009).

l'examen de la littérature montre que le sujet n'est pas complètement maîtrisé au niveau théorique et d'un point de vue expérimental. Les modèles sont dérivés sous des hypothèses restrictives de faibles inclinaisons de la toile et surestiment le gradient de vitesse visé. De plus la mesure des conditions aux limites sur la vitesse de part et d'autre de la toile était imprécise avec les moyens de l'époque. Ces données conditionnent le calage des paramètres des modèles. Nous proposons ici de tirer parti de la PIV pour proposer une nouvelle modélisation semi-empirique plus fidèle.

**Paramètres aérodynamiques d'une toile** Quand un écoulement traverse une toile, il subit un saut de pression statique, caractérisé par le *coefficient de perte de charge*  $K = \Delta p / (0,5 \rho U_n^2)$ , où  $\Delta p$  est la perte de pression statique au passage de la toile,  $\rho$  est la densité du fluide et  $U_n$  est la composante de vitesse locale normale à la surface de l'écran. Vers la fin de années 40,



Taylor constate que le changement de pression s'accompagne d'une redirection de l'écoulement lorsque la toile est inclinée. Cette modification du vecteur vitesse s'opère vers la normale à l'écran. Elle est caractérisée par le *coefficient de déflexion*  $B = (V_{s1} - V_{s2})/V_{s1}$ , où  $V_s$  est la vitesse tangentielle à la toile. Les indices 1 et 2 représentent respectivement les zones amont et aval de l'écran. Basée sur l'effet de ces deux paramètres, Taylor et Batchelor (1949) développent une théorie sur le comportement d'un écoulement uniforme au passage d'une toile inclinée.

Les coefficients  $K$  et  $B$  sont liés et dépendent de la porosité de la toile  $\sigma$ , de l'angle d'inclinaison de la grille  $\theta$  et du nombre de Reynolds  $Re = U_\infty d/\nu$  basé sur le module de la vitesse de l'écoulement amont et sur le diamètre des fils de la toile. Pour caractériser l'aérodynamique de la toile, il est suffisant de déterminer  $K = h(\sigma, \theta, Re)$  et  $B = F(K)$ .

**Modélisation du coefficient de perte de charge** A partir de mesures en soufflerie Schubauer et al. (1950) constatent que le coefficient de perte de charge  $K$  est fonction du paramètre de solidité  $\sigma$  et du nombre de Reynolds basé sur la composante de vitesse normale à la toile, c-à-d  $K = h(\sigma, Re_\theta)$  où  $Re_\theta = Re \cos \theta$ . Cependant, les auteurs ne modélisent pas leurs données. Curieusement, les modèles de  $K$  proposés dans la littérature ne prennent pas en compte l'influence de l'angle d'inclinaison  $\theta$  de la grille. La figure 1.13 illustre une modélisation simple de  $K$  tenant compte du bon regroupement des données de mesures lorsque  $Re_\theta$  est introduit (Ndiaye 2009). Pour ce faire nous sommes parti du modèle proposé par Karnik et Ta-

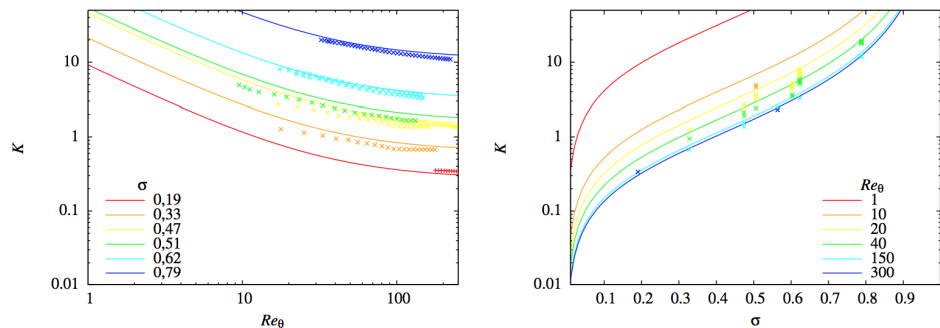


FIGURE 1.13 – Distribution du coefficient de perte de charge  $K$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re_\theta$  à gauche et du taux de solidité  $\sigma$  à droite. Comparaison entre les mesures de (Schubauer et al. 1950) représentées par les symboles et le modèle (1.9) représenté par les courbes (Ndiaye 2009).

voularis (1987), valable pour des grilles perpendiculaires à l'écoulement (c-à-d à angle nul), que nous avons modifié en considérant le nombre de Reynolds  $Re_\theta$  basé sur la vitesse normale à la grille. Ce modèle s'écrit

$$K = \left(0,52 + \frac{17}{Re_\theta}\right) \frac{\sigma(2 - \sigma)}{(1 - \sigma)^2}. \quad (1.9)$$

**Modélisation du coefficient de déflexion** Il n'existe pas dans la littérature de modélisation exprimant  $B$  en fonction des paramètres  $\sigma$ ,  $\theta$  et  $Re$ . Les mesures de  $B$  obtenues par Schubauer et al. (1950) sont présentées directement en fonction du coefficient de perte de charge  $K$ . Trois modèles



reliant  $K$  à  $B$  ont été dérivés successivement par Schubauer et al. (1950), Elder (1959) et Gibbings (1973). Ces modèles ont été construits avec des hypothèses simplificatrices comme la non prise en compte de  $\theta$  ou des valeurs de  $\theta$  et  $K$  faibles, conduisant à un domaine de validité réduit pour  $B$  et  $K$ . Dans ce contexte, notre démarche a d'abord consisté à construire une base de donnée fournissant le coefficient  $B$  en fonction des paramètres  $\sigma$ ,  $\theta$  et  $Re$ . Des mesures de champs de vitesse ont été effectuées de part et d'autre d'une toile inclinée à l'aide de la vélocimétrie par images de particules (PIV). Ces mesures originales ont été réalisées pour 180 valeurs de  $B$  combinant trois valeurs du taux de solidité, cinq angles d'inclinaison (de  $5^\circ$  à  $70^\circ$ ) et douze valeurs du nombre de Reynolds (de 3 à 660 selon les toiles et leurs inclinaisons). Le montage ainsi que les mesures PIV sont présentés en détails dans Ndiaye (2009). L'essentiel des résultats est résumé sur la figure 1.14. Ces courbes montrent que le coefficient  $B$  dépend de deux paramètres dimensionnants  $Re_\theta$  et  $\sigma$ . Elles indiquent éga-

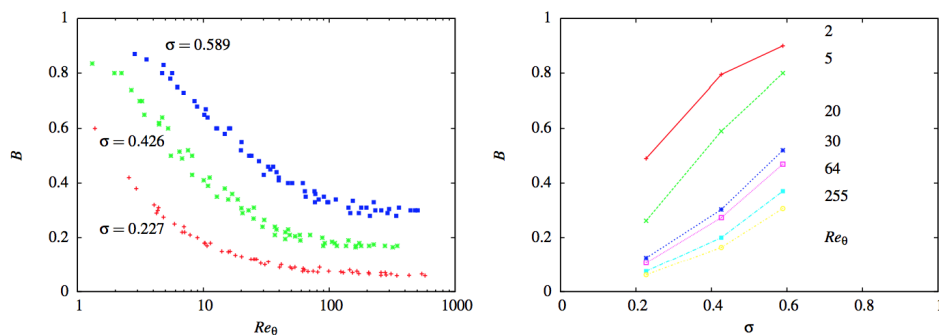


FIGURE 1.14 – Distribution du coefficient de déflexion  $B$ , à gauche en fonction de  $Re_\theta$ , à droite en fonction du taux de solidité  $\sigma$  (Ndiaye 2009).

lement qu'une toile est particulièrement efficace pour modifier un écoulement lorsqu'elle est dans un régime d'écoulement plutôt visqueux (faibles vitesses, grandes inclinaisons, petits diamètres de fils) et/ou pour des porosités faibles.

Comme illustré sur la figure 1.15 les modèles proposés dans la littérature prédisent mal nos mesures. Le modèle proposé par Gibbings semble être celui qui globalement respecte le plus le comportement aérodynamique de la toile. En particulier le coefficient de sensibilité  $\partial B / \partial K$  est le plus proche des mesures sur l'ensemble de la gamme de valeurs de  $K$ . Les modèles de Schubauer et al. et de Gibbings surestiment les valeurs de  $B$ . Ce phénomène pourrait être en partie expliqué par une légère sous-estimation de  $B$  due à la méthode de mesure PIV. Le modèle de Elder n'est valable que dans une plage restreinte de valeurs des paramètres, typiquement là où il croise les points de mesures, c-à-d pour  $4 \leq K \leq 6$ , des valeurs de  $\sigma$  moyennes (c-à-d de l'ordre de 0,5) et des valeurs de  $Re$  élevées (c-à-d supérieures à 100). Le modèle que nous avons proposé (Ndiaye 2009) est basé sur celui de Gibbings. Ce choix est justifié par le bon comportement global de ce modèle sur une large plage de valeurs des paramètres  $(\sigma, \theta, Re)$ . Le modèle proposé s'écrit

$$B = 1 + \frac{aK}{4} - \left[ \left( \frac{aK}{4} \right)^n + 1 \right]^{1/n}, \quad (1.10)$$

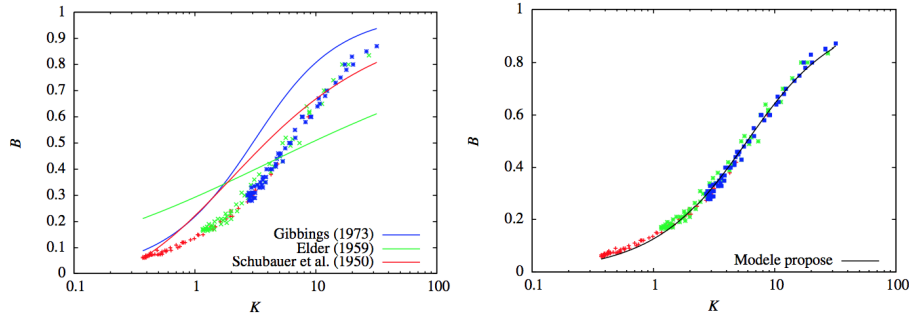


FIGURE 1.15 – Distribution en fonction du coefficient de perte de charge  $K$  (Ndiaye 2009). A gauche, comparaison avec les modèles de Schubauer et al. (1950), de Elder (1959) et de Gibbings (1973). A droite, comparaison avec le modèle proposé (1.10). Symboles rouges :  $\sigma = 0,227$  ; Symboles verts :  $\sigma = 0,426$  ; Symboles bleus :  $\sigma = 0,589$ .

avec  $a = 0,55$  et  $n = 1,89$  estimés par optimisation à partir de nos mesures de  $B$ . Notons que le modèle de Gibbings correspond à (1.10) pour  $a = 1$  et  $n = 2$ . La figure 1.15 montre la bonne adéquation entre les mesures du paramètre de déflexion  $B$  et le modèle proposé (1.10) pour l'ensemble de la gamme de valeurs du coefficient de perte de charge  $K$ .

**Modélisation du paramètre de cisaillement** Les premières équations gouvernant l'écoulement au travers d'une toile inclinée ont été dérivées par Elder (1959). Dans son approche théorique, sous des hypothèses de faible inclinaisons des toiles, il trouve une expression analytique du profil de la toile permettant de transformer un écoulement uniforme en un écoulement cisailé linéaire. Par la suite plusieurs corrections de la théorie d'Elder ont été proposées. Le modèle le plus satisfaisant est celui dérivé par Maull (1969) auquel l'auteur applique une correction empirique, récemment interpolée par Dunn et Tavoularis (2007). Dans la pratique la construction d'un profil de grille, produisant un écoulement linéaire caractérisé par le *paramètre de cisaillement*  $\lambda$ , s'obtient à partir des équations

$$\begin{cases} x/L = (\tan \theta_0 / |f(1)|) f(y/L), \\ \lambda = (EB / |f(1)|) \tan \theta_0, \end{cases} \quad (1.11)$$

où  $(x, y)$  sont les points de coordonnées du profil de la toile,  $\theta_0$  est l'angle moyen d'inclinaison de la toile,  $E$  est une constante calculée par (Elder 1959) égale à  $K \cos^2 \theta_0 / (2 + K \cos^2 \theta_0 - B)$ , et la fonction  $f(y/L)$  définit la variation du profil de la toile. Dans nos travaux nous avons retenu pour  $f$  le modèle dérivé par Maull.

Comme pour l'étude du coefficient de déflexion, nous avons effectué des mesures PIV de part et d'autre d'une toile profilée pour 180 combinaisons des paramètres  $\sigma$ ,  $\theta_0$  et  $Re$ . Le profil de vitesse en aval de la grille est directement lié à la déviation du flux. Ceci se traduit par un comportement similaire des coefficients  $\lambda$  et  $B$  en fonction du nombre de Reynolds. Le rapport des deux quantités est alors indépendant du nombre de Reynolds et uniquement fonction de l'angle moyen d'inclinaison de la toile. Globalement, les modèles proposés dans la littérature prédisent mal les mesures lorsque l'angle moyen d'inclinaison de la toile est supérieur à  $45^\circ$ . Afin d'élargir le domaine de validité des équations (1.11), définissant le profil de la toile et prédisant le paramètre de cisaillement associé,

nous avons porté notre attention sur l'expression de  $E$  déterminée par Elder à partir des conditions aux limites linéarisées au niveau de la toile. Le modèle proposé par Elder ne suit pas les mesures (cf figure 1.16).  $E$

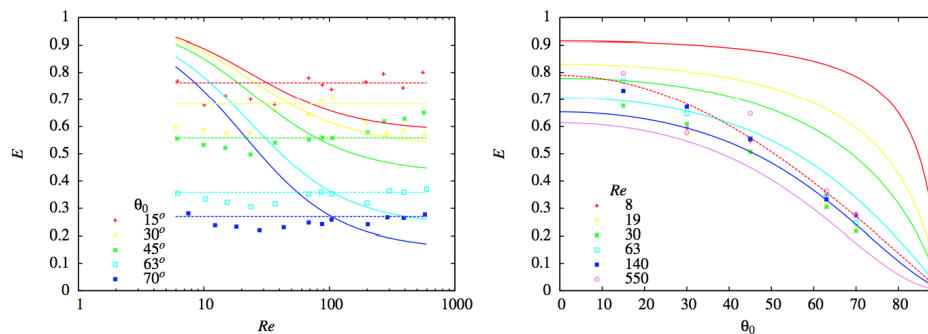


FIGURE 1.16 – Distribution du paramètre  $E$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  et de l'angle moyen d'inclinaison  $\theta_0$  de la toile : (symboles), mesures de Ndiaye (2009); (traits continus), modèle de Elder (1959); (traits en pointillés), modèle de Ndiaye (2009). Le paramètre de solidité  $\sigma$  est égal à 0,589.

est indépendant du nombre de Reynolds, décroît en  $\cos \theta_0$  et croît avec le taux de solidité  $\sigma$ . Sur la base de ces observations, nous avons proposé une modélisation empirique de  $E$  incluant l'indépendance au nombre de Reynolds et la dépendance à  $\theta_0$  et à  $\sigma$  sous la forme  $E = E_0 \sigma \cos \theta_0$ , où  $E_0 = 1,34$  a été estimé par optimisation (Ndiaye 2009). Sur la figure 1.16 on constate la bonne représentation des données par ce modèle (en traits en pointillés). En intégrant, la nouvelle modélisation de  $E$  dans l'expres-

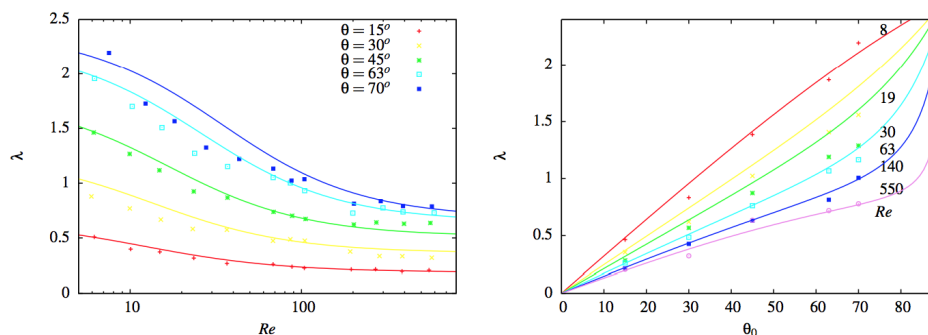


FIGURE 1.17 – Distribution du paramètre de cisaillement  $\lambda$  en fonction du nombre de Reynolds et de l'angle moyen d'inclinaison d'un toile de taux de solidité  $\sigma = 0,589$  : (symboles), mesures de Ndiaye (2009); (traits continus), modèle de Ndiaye (2009).

sion (1.11) de  $\lambda$  nous avons obtenu une modélisation du paramètre de cisaillement particulièrement fidèle aux mesures (cf. figure 1.17).

### 1.3 EXPÉRIENCES ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Les outils et méthodes décrits précédemment ont été mis en œuvre pour analyser des écoulements cisailés complexes : des sillages et des couches de mélanges non canoniques. Ces études ont été menées expérimentalement et/ou par simulation numérique.

### 1.3.1 Les souffleries

Les expériences ont été menées dans trois souffleries que nous décrivons brièvement.

**La soufflerie subsonique à recirculation R300 du CEAT** Cette soufflerie de l'université de Poitiers équipée d'un moteur continu de 7,4 kW permet de produire des vitesses d'air de 2 à 35 m/s dans une veine d'essai de section  $31,6 \times 31,6 \text{ cm}^2$  sur 2 m de long. Elle est équipée d'un convergent de rapport de contraction de 10. Afin de générer un écoulement de couche de mélange, la soufflerie a été équipée d'une plaque séparatrice dans le convergent en amont de la veine d'essai. Les hautes et basses vitesses de la couche de mélange ont été réalisés au moyen de filtre de perte de charge. Une description plus détaillée de cette soufflerie peut être trouvée dans Braud (2003).

Les expériences PIV double-plans sur le sillage d'un barreau perturbé par une couche de mélange, réalisées dans cette soufflerie, sont décrites dans Braud et al. (2004a). Une synthèse des résultats est donnée au §1.3.3. Le barreau cylindrique monté verticalement était équipé de plaques limitatives d'effets de bouts (Stansby 1974) comme illustré sur la figure 1.4.

**La petite soufflerie de Irstea Rennes** Nous avons conçu et réalisé cette première soufflerie en 2002, avec pour objectif de produire un écoulement stable, homogène et faiblement turbulent à très basse vitesse. Elle est équipée d'un ventilateur centrifuge de 1,1 kW générant des vitesses d'air de 0,2 à 5 m/s dans une veine d'essai de section  $28 \times 28 \text{ cm}^2$  sur 1 m de long. Afin d'avoir un écoulement homogène et faiblement turbulent aux plus basses vitesses, elle est équipée d'un convergent de rapport de contraction de 2,8.

Les expériences d'un sillage de barreau à Reynolds 3900 réalisées dans cette soufflerie sont décrites dans Parnaudeau et al. (2008). Une synthèse des résultats est donnée au §1.3.4. Le barreau cylindrique de diamètre  $D = 12 \text{ mm}$  était équipé de plaques limitatives d'effets de bouts (Stansby 1974). Le rapport de forme basé sur la distance  $L$  entre les plaques était égal à  $L/D = 20$ .

Dans cette soufflerie que nous avons également réalisé les mesures PIV autour des toiles inclinées (Ndiaye 2009). Pour cette étude la soufflerie était équipée d'un second convergent débouchant dans une veine d'essai de section  $10 \times 10 \text{ cm}^2$  composée de trois sections de 320 mm de long chacune, et permettant d'avoir un gamme de vitesse de 0,3 à 41,5 m/s en amont de la toile inclinée.

**La soufflerie HABV de Irstea Rennes** Le Hall Aéraulique Basse Vitesse (HABV) est une nouvelle soufflerie couche de mélange que nous avons conçue durant la période 2000-2002 et qui a été réalisée et installée à Irstea Rennes en 2005 (cf. figure 1.18). La soufflerie a été conçue pour générer des écoulements aux échelles réelles de l'aéraulique. Deux circuits aérauliques indépendants permettent de produire la couche de mélange. Chaque circuit est composé d'un ventilateur centrifuge de 7,5 kW, d'une batterie froide de 42 kW et d'un réchauffeur de 31 kW. A la sortie d'un

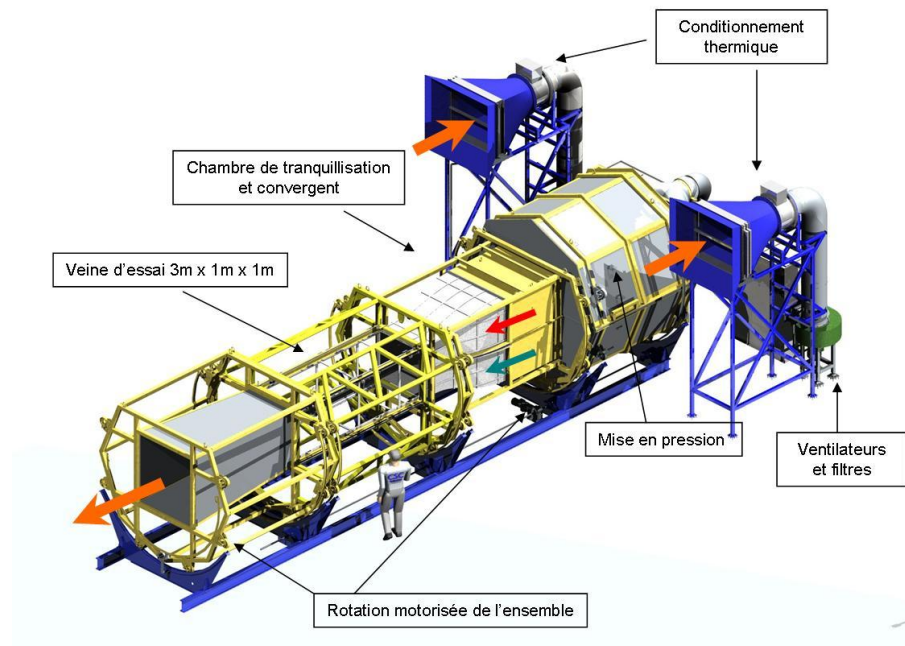


FIGURE 1.18 – Soufflerie HABV de Irstea Rennes.

convergent de rapport de contraction égal à 2,5, les deux flux d'air débouchent dans une veine d'essai de section  $1 \times 1 \text{ m}^2$  sur 3 m de long. La vitesse et la température des deux courants sont régulées respectivement entre 0,5 et 5,5 m/s et entre 5 et 35°C. Enfin cette soufflerie a la particularité de pouvoir tourner sur son axe longitudinal, de façon observer les effets de la rotation relative des efforts du à la différence de température par rapport aux efforts du à la différence de vitesse. Cette possibilité n'a pas encore été mise à profit.

Les expériences de couche de mélange non canonique réalisées dans cette soufflerie sont décrites dans Ndiaye (2009). Une synthèse des résultats est donnée au §1.3.6. Pour pouvoir produire un écoulement cisailé linéaire une toile inclinée a été placée sous la plaque séparatrice.

### 1.3.2 Le code de simulation numérique

Le code de calcul `Incompact3D` de l'institut PPRIME de Poitiers a été utilisé pour nos études. Ce code permet de simuler des écoulements turbulents incompressibles de type couche de mélange, jets. Comme expliqué au §1.2.3, nous l'avons modifié pour les études de sillages d'obstacles. Le code est conçu avec des schémas compacts de dérivation spatiale à l'ordre 6 et avec un intégration temporelle par un schéma Adams-Bashforth d'ordre 2. Les schémas compacts présentent l'avantage d'avoir un comportement quasi-spectral. L'approximation de la dérivée reste proche de la valeur exacte pour une large gamme de nombres d'ondes. `Incompact3D` permet d'effectuer des simulations DNS et LES. Ce code a depuis été parallélisé (Laizet et Lamballais 2009) et mis sous license GPL (<http://code.google.com/p/incompact3d/>).

Les simulations LES du sillage de cylindre à Reynolds 3900 réalisées avec ce code sont décrites dans Parnaudeau et al. (2008). Une synthèse

des résultats est donnée au §1.3.4. Le modèle sous-maille utilisé dans cette étude est le modèle de fonction de structure de Métais et Lesieur (1992).

### 1.3.3 Interaction couche de mélange sillage

Par analogie avec les sillages dont la tridimensionalisation est engendrée par variation des conditions suivant l'envergure du cylindre (cf. §1.2), on considère que les modes de la  $POD_{3D2C}$  peuvent être représentatifs des différentes étapes qui mènent à la tridimensionalisation de l'écoulement d'interaction entre une couche de mélange et un sillage. Comme illustré sur la figure 1.19, il apparaît des mécanismes similaires : structures inclinées, coalescence des structures de même signe, allongement longitudinal des structures, et dislocation. Un système dynamique d'ordre

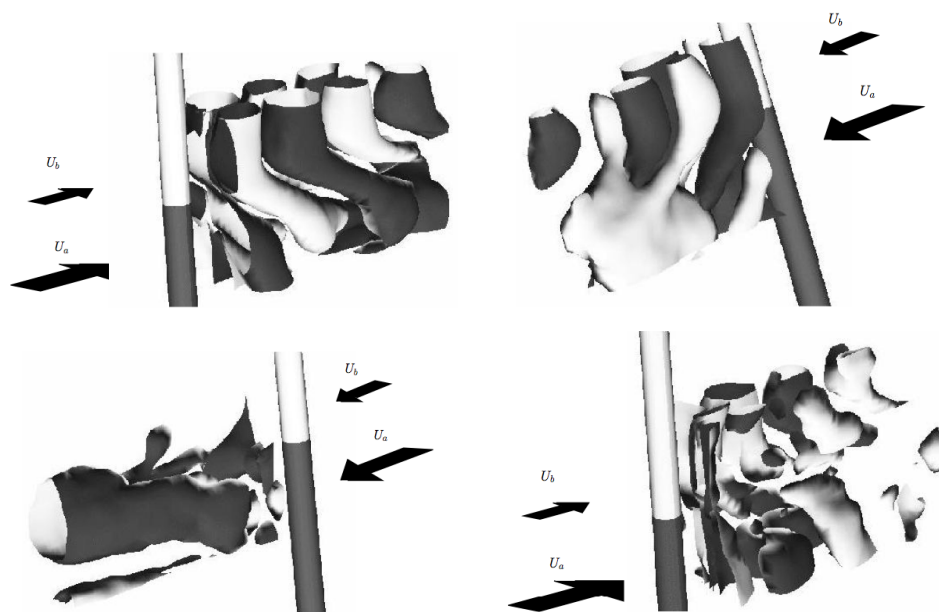


FIGURE 1.19 –  $POD_{3D2C}$  isocontours positifs (gris clair) et négatifs (gris foncé) des vecteurs propres  $\sqrt{\lambda^{(n)}}\phi_u^{(n)} = \pm 0,02$ . De gauche à droite et de haut en bas : ( $n = 1$ ), structures inclinées ; ( $n = 3$ ), coalescence ; ( $n = 7$ ), allongement ; ( $n = 8$ ), dislocation.

bas construit dans le plan de symétrie de l'écoulement met en évidence une fréquence dominante associée à une injection de fluide à la position  $y/D = -1$ , dans le sillage proche du cylindre en accord avec l'analyse de Heitz (1999) (cf. figure 1.20). Ce phénomène piloté par des différences de

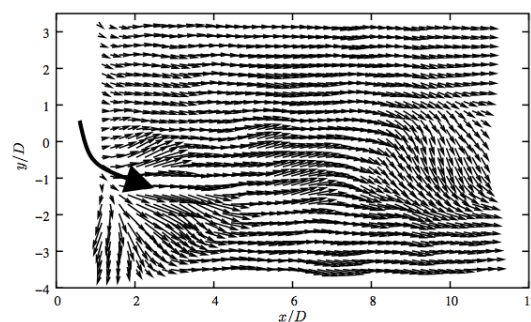


FIGURE 1.20 – Champ instantané de fluctuation de vitesse obtenu à l'aide du système dynamique réduit.

pression au culot du barreau est supposé à l'origine de la dislocation des structures de sillage côté haute vitesse.

### 1.3.4 Sillage de cylindre à Reynolds 3900

Le sillage de cylindre à Reynolds 3900 est un écoulement très documenté et utilisé comme configuration de référence pour la validation des codes de calculs (Beaudan et Moin 1994, Lourenco et Shih 1994, Ong et Wallace 1996, Kravchenko et Moin 2000). Il appartient aussi au régime d'écoulement subcritique impliqué en aéronautique. Nos travaux contribuent à la connaissance de cet écoulement en fournissant une nouvelle base de données expérimentales et numériques dans le sillage proche (Parnaudeau et al. 2008). Comme l'illustre qualitativement la figure 1.21, les mesures PIV et la simulation LES sont en bon accord. Les écarts sont inférieurs aux incertitudes estimées. Les statistiques sont consistantes avec les simu-

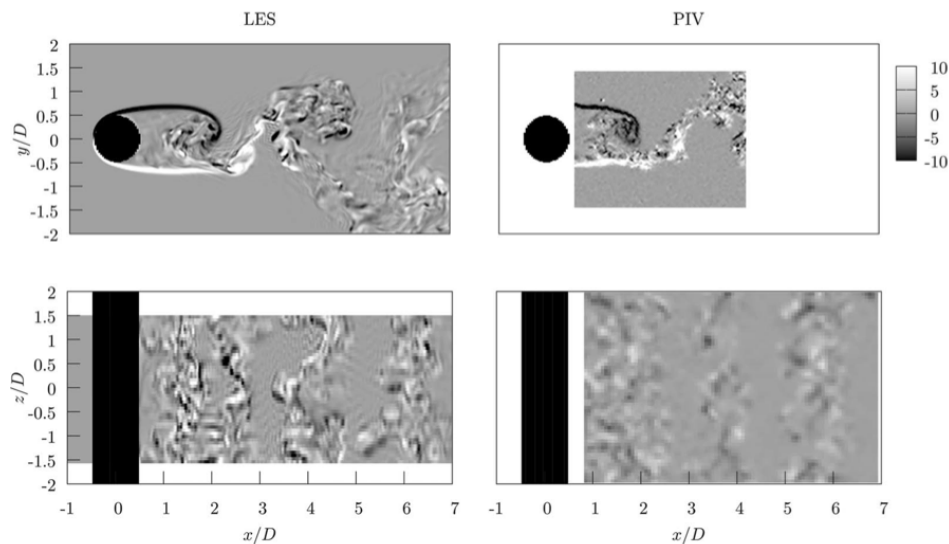


FIGURE 1.21 – Comparaison de champ instantanés des composantes de la vorticité obtenus à l'aide de simulation LES et mesures PIV (Parnaudeau et al. 2008).

lations de Beaudan et Moin (1994), Kravchenko et Moin (2000), Mahesh et al. (2004). Pour ce régime de Reynolds le raffinement de maillage n'est pas nécessaire. Les couches limites sont encore laminares et les couches cisailées décollées sont relativement épaisses. Le coût de notre LES, combinant schémas compacts et frontières immergées, est raisonnable en comparaison du nombre élevé de points de maillages. L'utilisation d'un maillage cartésien et d'une grille régulière réduit de façon significative le coût de calcul par point de maillage. La même approche numérique permettrait d'aborder des géométries plus complexes. Nos nouvelles données expérimentales (anémométrie à fil chaud, PIV) sont pour la première fois proches des résultats de simulation de la littérature. Elles permettent de clarifier les désaccords qui existaient entre les simulations et la première expérience PIV de Lourenco et Shih (1994) à Reynolds 3900.



### 1.3.5 Sillages non canoniques

Les écoulements de sillages complexes rencontrés en applications industrielles présentent souvent des non-uniformités suivant leur envergure, dues à des variations de diamètre  $D$  de l'obstacle et/ou de la vitesse amont  $U$ . Ils partagent une structuration tourbillonnaire commune composée de cellules de fréquences constantes, de lâchers tourbillonnaires obliques et de dislocations (Woo et al. 1989, Papangelou 1992, Vallès et al. 2002, parmi d'autres). Pour une variation linéaire de l'écoulement amont ou du diamètre de l'obstacle, la fréquence de déversement tourbillonnaire caractérisée par le rapport  $U/D$  et le régime d'écoulement caractérisé par le produit  $UD$ , changent suivant l'envergure. Quand il est combiné avec une variation de diamètre du cylindre, l'écoulement cisailé peut amplifier ou compenser les effets dus au diamètre variable. La figure 1.22 illustre les quatre sillages associant des non-uniformités suivant l'envergure de l'obstacle. Contrairement à ce qui était considéré jusqu'ici, nous montrons que

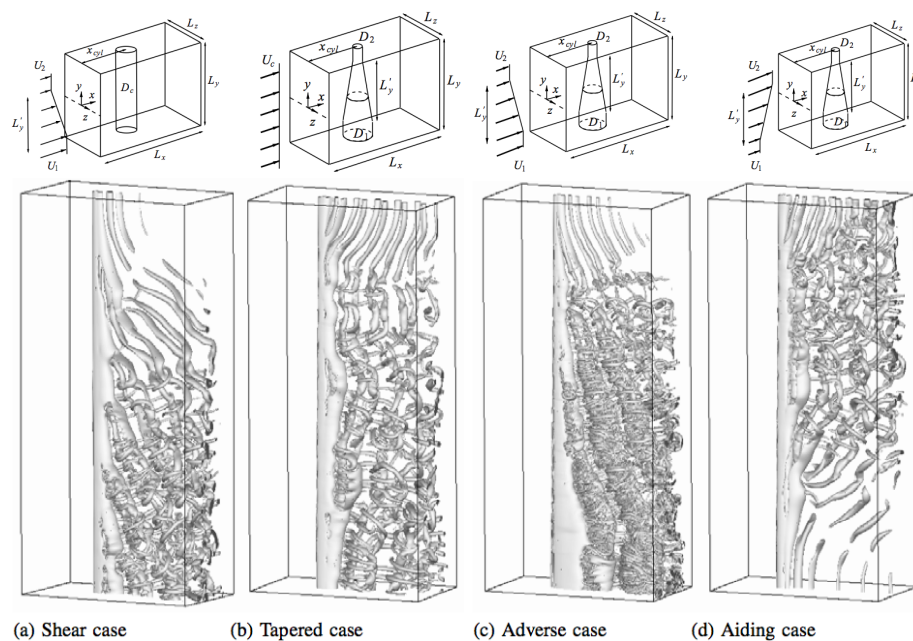


FIGURE 1.22 – Isosurface instantannée du critère  $Q = 0,2 U_c^2 / D_c^2$ , pour quatre configurations de sillages avec non-uniformités suivant l'envergure (Parnaudeau et al. 2007).

les configurations *shear* et *adverse* ont une topologie d'écoulement similaire comprenant des lâchers obliques, tandis que les cas *tapered* et *aiding* produisent des déversement tourbillonnaires moins réguliers dans l'espace et dans le temps (Parnaudeau et al. 2007). Ces "irrégularités" sont pilotées par la distribution de  $U/D$ , dont les fortes variations accélèrent la transition de l'écoulement vers la tridimensionalité, augmentent le nombre et la régularité des cellules de fréquences constantes. Des mécanismes d'adhésion et de dislocation sont observés pour toutes les configurations. Ils entraînent, plus particulièrement pour les cas *tapered* et *aiding*, une inclinaison longitudinale des tourbillons supposée responsable d'une induction instationnaire de fluide au culot et suivant l'envergure de l'obstacle.



### 1.3.6 Couches de mélanges non canoniques

La couche de mélange canonique est étudiée en laboratoire depuis de nombreuses années et une image relativement claire de son organisation existe (Fiedler et al. 1998). Pourtant, l'application directe de ces connaissances à des configurations d'ingénierie est jusqu'ici limitée. Les écoulements industriels ont lieu dans des géométries complexes et en présence de multiples influences non-canoniques, comme des cisaillements croisés, des non-uniformités de l'écoulement. Une compréhension de la dynamique de ces écoulements complexes est possible si des configurations canoniques avec l'ajout d'un niveau élémentaire de complexité sont mis en œuvre et étudiées.

Nous présentons ici une analyse cursive des couches de mélanges turbulentes non-canoniques se développant entre un écoulement uniforme et un écoulement cisailé linéaire (Ndiaye 2009). A partir de DNS bidimensionnelles, deux configurations sont retenues : l'une supposée favoriser l'épanouissement, l'autre supposée l'inhiber (cf. figure 1.23 gauche et droite respectivement). Les premières mesures de vitesses ont été ef-

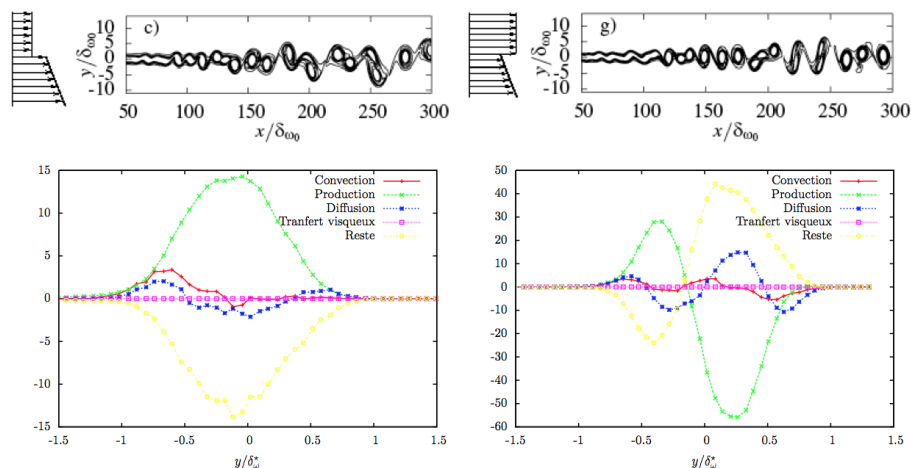


FIGURE 1.23 – Couches de mélanges entre un écoulement uniforme et un écoulement cisailé linéaire. En haut : lignes d'isovorticité obtenues par DNS. En bas : Bilan de la composante de cisaillement croisé  $\overline{u'v'}/(\delta_\omega/\Delta U_1^2)$  à la position longitudinale  $x = 1490$  mm. D'après Ndiaye (2009).

fectuées par anémométrie à fils chaud croisés dans la soufflerie HABV de Irstea Rennes (cf. §1.3.1). Le cisaillement linéaire a été réalisé à l'aide d'une toile en inox profilée (cf. §1.2.4). Les bilans d'énergie cinétique turbulente indiquent que la configuration à gauche sur la figure 1.23 se comporte comme une couche de mélange avec augmentation de son énergie cinétique turbulente à mesure que l'écoulement se développe, alors que celle à droite se comporte comme un sillage dissymétrique.

# THERMOANÉMOMÉTRIE À BASSE VITESSE

# 2

DANS ce chapitre, nous présentons le développement de l'anémométrie à fil chaud pour la mesure rapide et simultanée de la vitesse et de la température, ainsi que le développement d'un banc permettant d'étalonner très rapidement les capteurs à fils chauds, à basse vitesse et en température.

Ces travaux ont été menés en collaboration avec Joël Delville et Carine Fourment de l'institut Pprime (Poitiers) dans le cadre du projet ACI Foehn (2002-2006) puis dans le cadre de la thèse de Malick Ndoye (2008).

## 2.1 PROBLÉMATIQUE

De nombreux processus et dispositifs industriels impliquent des fluides en mouvement dont il est nécessaire de mesurer la vitesse. Les systèmes de ventilation, de climatisation, les réseaux d'air ou de liquides sont quelques exemples mettant en oeuvre des écoulements à souvent faibles vitesses. Dans le domaine général de la mécanique des fluides industrielle ou de laboratoire la mesure des vitesses de l'écoulement en différents points de l'espace et à différents instants apporte une connaissance précieuse pour l'ingénieur et le chercheur. Différentes techniques de mesure de la vitesse d'un fluide ont été mises au point.

Pour la mesure de la vitesse de l'air la thermoanémométrie est souvent utilisée. Cette technique consiste à chauffer un élément – de résistance électrique dépendante de la température – à une température élevée, à placer l'élément chauffé dans l'écoulement et à mesurer le taux d'énergie arraché par le fluide à l'élément. Quand la vitesse du fluide est une composante importante de refroidissement de l'élément chauffé, la vitesse du fluide peut être dérivée des équations de la physique dès lors que le taux de dissipation d'énergie est connu. Un modèle physique relie alors ce taux d'énergie retiré à l'élément chauffé, à la vitesse du fluide ainsi qu'à d'autres paramètres comme la température du fluide. Quand le capteur est équipé de plusieurs éléments, pour déterminer le module et la direction de l'écoulement, l'angle entre l'élément et l'écoulement intervient également dans le modèle cité plus haut. Quand la vitesse du fluide n'est plus la composante dominante du transfert de chaleur entre l'élément et le fluide, comme par exemple à faibles vitesses, un modèle polynomiale permet de relier l'énergie apportée au fluide à la vitesse du fluide ainsi qu'aux

autres paramètres impliqués (angle de la sonde, température du fluide). Dans le cas de l'anémométrie à fil chaud il existe plusieurs méthodes pour contrôler la température de l'élément chauffé (le fil) : anémomètre à courant constant, à température constante, à température constante programmable, à température différentielle constante, et enfin à tension constante.

### 2.1.1 Modélisation du transfert thermique

La thermoanémométrie est souvent utilisée pour mesurer la vitesse de l'air. Cette technique consiste à chauffer un élément – de résistance électrique dépendante de la température – à une température élevée<sup>1</sup>, à placer l'élément chauffé dans l'écoulement et à mesurer le taux d'énergie arraché par le fluide à l'élément. Quand la vitesse du fluide est une composante importante du refroidissement de l'élément chauffé, elle peut être dérivée des équations de la physique dès lors que le taux de dissipation d'énergie est connu. Un modèle physique relie le taux d'énergie retiré à l'élément chauffé, à la vitesse du fluide, ainsi qu'à d'autres paramètres comme la température du fluide. Pour une sonde à fil chaud le bilan de puissance s'écrit

$$R_w I^2 = \pi l k_f (T_w - T_a) Nu, \quad (2.1)$$

où  $R_w$  est la résistance électrique du fil,  $k_f$  est la conductivité thermique du fluide,  $l$  et  $d$  sont respectivement la longueur et le diamètre du fil,  $T_w$  et  $T_a$  sont respectivement les températures du fil et du fluide, et  $h$  est le coefficient de transfert thermique par convection. Le nombre de Nusselt  $Nu = h d / k_f = f(Re)$  mesure l'efficacité du transfert convectif par rapport au transfert conductif.  $Re$  est le nombre de Reynolds basé sur le diamètre du fil. Avec notamment les hypothèses  $l/d \gg 1$  et de régime stationnaire<sup>2</sup>, King (1914) propose d'écrire le nombre de Nusselt sous la forme  $Nu = 1 + \sqrt{2} \pi Re$  conduisant à la loi générale de type King

$$\frac{R_w I^2}{T_w - T_a} = a + b U^n, \quad (2.2)$$

où  $a$  et  $b$  peuvent dépendre de plein de paramètres ( $l/d$ , Prandtl, ...), sauf de  $U$  la vitesse du fluide. La valeur de l'exposant  $n$  proposée par King est égale à 0,5. Dans la pratique, pour compenser les limites du modèle (2.2),  $n$  doit être ajusté sur des plages de  $Re$  (cf. §2.1.4). Enfin, un point important de la thermoanémométrie, dont on tire parti pour le pilotage de l'anémomètre, est la dépendance de la résistance de l'élément chauffé  $R_w$  à sa température  $T_w$ . Pour un fil chaud cette dépendance est linéaire.

### 2.1.2 Pilotage du thermoanémomètre

Il existe plusieurs méthodes pour contrôler le fil chaud : l'anémomètre à courant constant (CCA), à température constante (CTA), à température constante programmable (PCTA) et enfin à tension constante (CVA).

1. De 100 à 2000°C au dessus de la température ambiante.

2. L'hypothèse de stationnarité signifie que le temps caractéristique des fluctuations de vitesse doit être grand comparé au temps  $d/U$  d'advection du fluide sur une distance égale au diamètre du fil.

Le principe du CCA (Constant Current Anemometer) consiste à chauffer le fil par un courant de faible intensité maintenu constant à travers un circuit électronique. Le transfert de chaleur entre le fil et le milieu ambiant est constant de sorte que la température du fil, donc sa résistance, varie avec la vitesse de l'écoulement du fluide. Cette méthode est esclave de l'inertie thermique du fil. Elle ne permet que des mesures à des fréquences modérées, typiquement inférieures au  $kHz$  pour un fil de  $2,5 \mu m$  de diamètre. Si l'intensité du courant est choisie suffisamment faible, l'échauffement par effet Joule est négligeable, et la résistance dépend plus des fluctuations de la température du fluide que de sa vitesse. C'est le principe du *fil froid*, utilisé pour mesurer la température.

Le CTA (Constant Temperature Anemometer) est le principe le plus utilisé. La température du fil est maintenue constante par un circuit électronique, conservant la résistance du fil  $R_w$  constante. La tension d'excitation du fil est constamment ajustée par le circuit à rétroaction de sorte que l'énergie fournie au fil compense l'énergie dissipée vers le fluide. La vitesse du fluide  $U$  est mesurée à travers les fluctuations de la tension  $e = R_w I$  au bornes du fil. La bande passante du capteur n'est limitée que par la rapidité de l'électronique, soit de l'ordre du  $MHz$ !

Plus récemment, Sarma (1991) a inventé le CVA (Constant Voltage Anemometer). La tension aux bornes du fil est maintenue constante par un circuit à rétroaction. L'énergie dissipée par le fil vers le fluide est obtenue à partir des variations de l'intensité du courant dans le fil. Cette méthode prometteuse offre une large bande passante, une forte sensibilité et un faible niveau de bruit de mesure (Sarma et Comte-Bellot 2002).

Récemment, Ndoye et al. (2010) ont proposé le PCTA (Programmable CTA) pour la mesure simultanée de la vitesse et de la température. Le principe est expliqué au §2.3.2.

### 2.1.3 Influence de la température

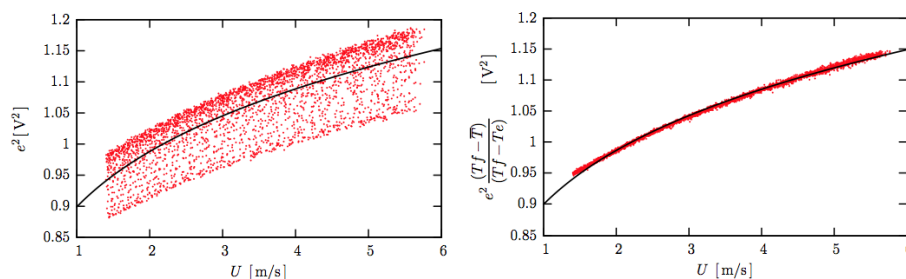


FIGURE 2.1 – Influence de la température du fluide sur la tension aux bornes du fil, pour un anémomètre à fil chaud CTA. A gauche : non prise en compte de la température variant sur une plage de  $18^{\circ}C$ . A droite : avec prise en compte de la température du fluide suivant le modèle (2.2). D'après Ndoye et al. (2010).

Comme l'indique le bilan de puissance (2.2) et l'illustre la figure 2.1, le thermoanémomètre est influencé par la température ambiante. Ce phénomène est d'autant plus important que la vitesse est faible et/ou que la température du fil est basse. La prise en compte de la température du

fluide lors de l'étalonnage<sup>3</sup> et pendant la mesure est indispensable pour obtenir des résultats précis.

### 2.1.4 Limites des basses vitesses

La situation se complique à basse vitesse typiquement en dessous de 3 m/s dans la gamme de vitesse de l'aérodynamique. En effet, comme schématisé sur la figure 2.2, en dessous de certaines valeurs du nombre de Reynolds, des modes de transfert de la chaleur deviennent dominants. Le fait que la sonde soit de dimension finie conduit la chaleur de ma-

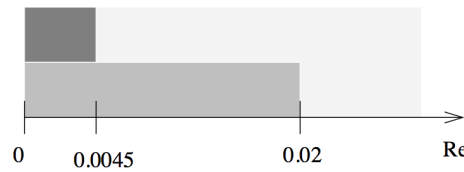


FIGURE 2.2 – Zones d'influence importante des différents modes de transfert de la chaleur au niveau du fil. Du plus clair au plus foncé : convection forcée, conduction tridimensionnelle, convection libre. D'après illustration de Heitz (1999).

nière tridimensionnelle vers les broches. Typiquement pour une sonde de diamètre de fil égal à  $2,5 \mu\text{m}$ , la conduction devient importante en dessous de 15 cm/s et l'effet de la convection naturelle rend la mesure très délicate voir impossible en dessous de 3 cm/s. Ces valeurs critiques ont été déterminées par Stengele et Rath (1994) en plaçant la sonde dans un caisson à  $10^{-3}$  bar pour déterminer les pertes de bouts, et en effectuant les expériences en microgravité pour supprimer les effets de la convection naturelle. Les limites du modèle (2.2) s'observe déjà en dessous de  $Re = 0,5$  puis de  $Re = 0,1$  si l'exposant  $n$  n'est pas réajusté.

En pratique, pour avoir un jeu de paramètres unique sur l'ensemble de la gamme de Reynolds nous considérons un modèle polynomiale. Pour un anémomètre CTA ou PCTA ce modèle s'écrit dans le cas général d'une sonde multi-fils

$$\frac{e_{kl}^2}{T_{w,kl} - T_a} = \mathcal{P}^{(4)}(a_{kl}; \alpha, U), \quad (2.3)$$

où  $a_{kl}$  sont les 25 coefficients des  $k \times l$  polynômes  $\mathcal{P}^{(4)}$  d'ordre 4 en vitesse et en angle pour chaque fil  $k$  et chaque surchauffe  $l$ .

## 2.2 ÉTALONNAGE À BASSE VITESSE

### 2.2.1 Etat de la technique

**Une phase d'étalonnage** est nécessaire pour déterminer les valeurs des constantes  $a_{kl}$  et  $T_{w,kl}$  du modèle (2.3). Cette étape s'effectue classiquement en plaçant la sonde à fil chaud statique dans un écoulement maîtrisé (soufflerie) maintenu à vitesse constante pour successivement plusieurs valeurs de la vitesse du fluide (une dizaine de valeurs de la vitesse). La vitesse du

3. Lors de l'étalonnage on estime la température du fil, notée ici  $T_w$  ou  $T_f$ , permettant de regrouper au mieux les données.

fluide est déterminée par un tube de Pitot, dont la mesure de pression différentielle devient imprécise<sup>4</sup> en dessous de 3 m/s. Les dispositifs d'étalonnage commerciaux utilisent une buse calibrée amplifiant la référence de pression différentielle par contraction du fluide dans la buse. Bien que ces systèmes permettent d'effectuer des étalonnages à plus faible vitesse (inférieures à 3 m/s), ils ne résolvent pas le problème de l'influence de la température du fluide particulièrement importante aux basses vitesses.

Dans le cas de l'anémométrie à température constante (la plus utilisée) l'influence de la température du fluide est bien prise en compte dans le modèle de comportement du capteur (2.3). Ceci nécessite de connaître la température du fil, généralement déterminée à partir du coefficient de surchauffe de l'élément et de ses caractéristiques physiques. Cette approche ne nécessite pas un étalonnage en température du capteur et permet de prendre en compte l'influence de la température du fluide lors de la mesure de la vitesse du fluide. Cependant cette méthode est imprécise en particulier lorsque l'influence de la température du fluide est importante, c-à-d à faible vitesse et/ou pour des coefficients de surchauffe modérés. En effet, la température optimale du fil déterminée par régression linéaire entre le modèle et les mesures, est différente de celle calculée à partir des caractéristiques physiques de l'élément. Pour connaître la température optimale du fil il faut effectuer un étalonnage en vitesse et en température. Cette procédure est quasiment rédhibitoire avec les techniques d'étalonnages statiques car elle prend trop de temps (plusieurs heures) et pas réaliste avec plusieurs éléments chauffant (plusieurs jours). En effet, quand le capteur est équipé de plusieurs éléments chauffant, pour déterminer le module et la direction de la vitesse du fluide, l'étalonnage doit alors être effectué en vitesse et en angle. Pour réduire la durée de l'étalonnage, on effectue un étalonnage en angle pour une vitesse fixée, en supposant que l'étalonnage en angle est indépendant de la vitesse, ce qui n'est plus vrai aux basses vitesses.

Pour s'affranchir d'une partie de ces problèmes, des techniques d'étalonnages par déplacement de sondes ont été proposées. Plusieurs auteurs ont mis en oeuvre des techniques d'étalonnages par translation de la sonde (Aydin et Leutheusser 1980, Seifert et Graichen 1982, Tsanis 1987) et par rotation de la sonde (Bruun et al. 1989, Haw et Foss 1990, Guellouz et Tavoularis 1995), dans un fluide au repos. Une limite de ces approches est son imprécision. La sonde ne peut pas acquérir beaucoup de points de mesures car elle se retrouve rapidement perturbée par son propre sillage aérodynamique. De plus, aux basses vitesses de déplacement de la sonde, le fluide ambiant doit être le moins perturbé possible, ce qui est délicat à réaliser. Enfin, ces approches peuvent difficilement être combinées avec un étalonnage en température qui est pourtant indispensable pour obtenir une mesure précise à basse vitesse.

Dans ce contexte, nous avons proposé un nouveau dispositif et procédé d'étalonnage permettant d'étalonner, de manière rapide (quelques minutes) et précise des thermoanémomètres à un ou plusieurs éléments chauffés (Heitz et Delville 2011).

4. 3 m/s correspond à une pression différentielle d'une colonne de 1 mm d'eau.

### 2.2.2 Exposé de l'invention

La présente invention répond au besoin exprimé plus haut. Plusieurs modes de réalisation de l'invention permettent de fournir un dispositif et un procédé pour étalonner des anémomètres de manière précise et rapide, en angle, en température et pour une gamme de vitesse s'étalant des très basses vitesses jusqu'aux grandes vitesses d'un fluide.

Un mode de réalisation de l'invention consiste en un dispositif et procédé d'étalonnage dynamique de capteurs à fils chauds, par translation de l'élément chauffé dans un flux d'air à vitesse fixée et à température variant au cours du temps. Le capteur étant sensible à la vitesse différentielle (entre la vitesse de la sonde et la vitesse de l'air) cette technique permet d'atteindre les très faibles vitesses d'étalonnage lorsque l'élément chauffé se déplace dans le sens du flux d'air et à une vitesse très proche de celle du flux d'air. Comme illustré sur la figure 2.3, le système de déplacement de la sonde est un axe à moteur linéaire équipé d'une règle pour connaître de manière précise la position instantanée du capteur et autorisant un pilotage précis à vitesse et accélération variables. La sonde est déplacée

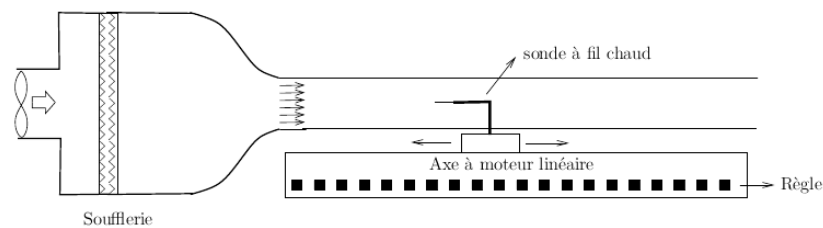


FIGURE 2.3 – Schémas du banc d'étalonnage par déplacement linéaire du capteur dans un écoulement à vitesse fixée.

en aller-retours. En un aller-retour l'ensemble de la gamme d'étalonnage est parcouru deux fois (cf. figure 2.4). Pour un étalonnage en vitesse et

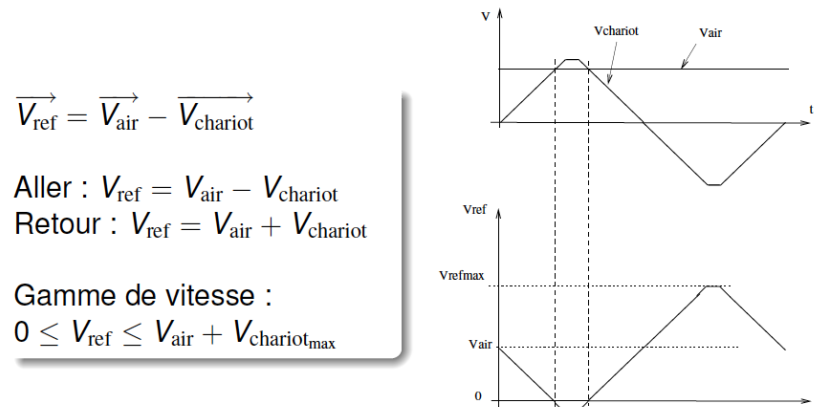


FIGURE 2.4 – Variations de la vitesse vue par la sonde ( $V_{\text{ref}}$ ) en fonction de la vitesse du chariot et de la vitesse du flux d'air.

en température, une dizaine d'aller-retours sont effectués pendant que la température du flux d'air varie progressivement de la température la plus haute à la température la plus basse (cf. figure 2.5). Ce type d'étalonnage permet d'acquérir plus de dix mille triplets de valeurs (vitesse, tension, température) en moins d'une minute.

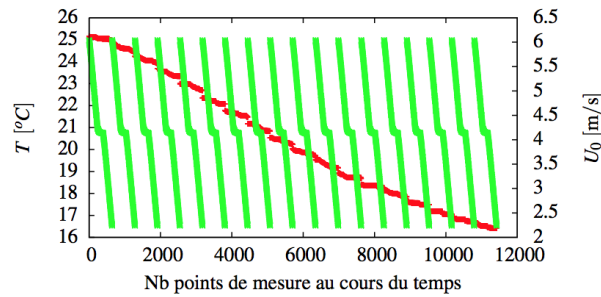


FIGURE 2.5 – Variations de la température (en rouge) et de la vitesse (en vert) de références au cours d'un étalonnage.

L'originalité du dispositif réside dans son autonomie, c-à-d sa capacité à mesurer la vitesse de flux d'air, à partir de la seule information temporelle de la position du chariot. Cette vitesse est mesurée directement par le dispositif d'étalonnage deux fois lors de chaque aller-retour. En effet, comme la vitesse maximale de déplacement de la sonde est plus grande que la vitesse du flux d'air, le signal du capteur à étalonner atteint un minimum lorsque la sonde passe au dessus ou au dessous de la vitesse du flux d'air. Comme illustré sur la figure 2.6 ceci correspond à un changement du signe du vent vu par l'élément chauffé. Au moment où le capteur

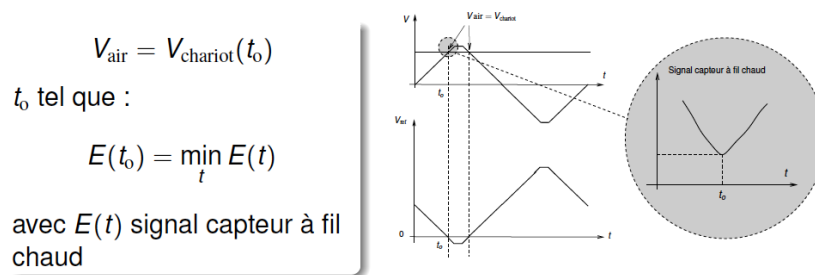


FIGURE 2.6 – Détermination de la vitesse du flux d'air au moment où la vitesse vue par la sonde ( $V_{ref}$ ) passe par un minimum.

observe ce minimum sa vitesse de déplacement est égale à la vitesse du flux d'air.

Enfin, le dispositif est équipé d'un système de rotation de la sonde permettant d'effectuer des étalonnages en angles. L'étalonnage en vitesse, en température et en angles d'une sonde à fils croisés s'effectue en moins de 20 minutes. Un tel étalonnage présenté sur la figure 2.7 comprend seize angles contenant chacun jusqu'à dix mille triplets de valeurs (vitesse, tension, température). Les résultats de la figure 2.7 indiquent clairement le changement de comportement de l'anémomètre en dessous de 2 m/s. En dessous de cette vitesse la loi de King (2.2) ne représente plus les données.

### 2.2.3 Incertitudes de mesures

Dès le début du projet de conception du banc d'étalonnage, nous avons démarré une démarche de calcul des incertitudes de mesures en collaboration avec Michèle Désenfant et Paul Louis Gazal du Laboratoire National d'Essais (LNE). Pour ce travail nous avons suivi les préconisations du GUM et de son supplément sur les simulations de Monte-carlo (ISO/IEC-



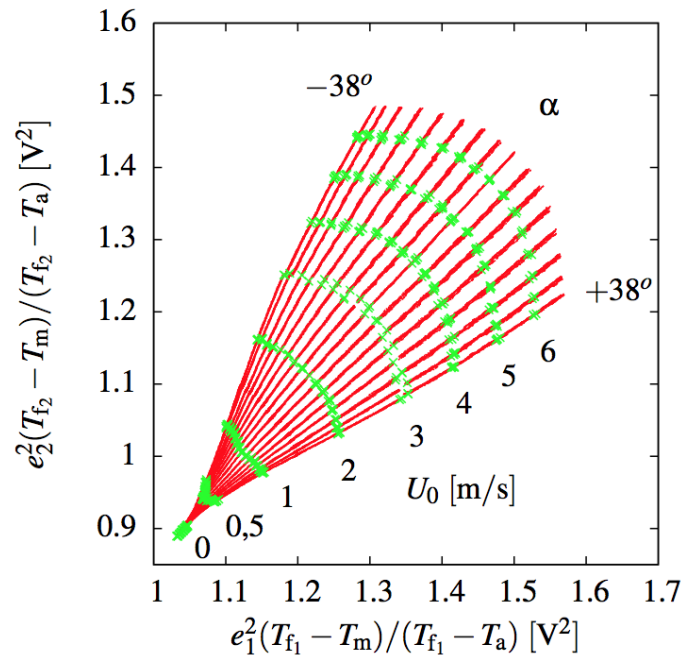


FIGURE 2.7 – Etalonnage d'une sonde à fils croisés. Variation du carré de la tension du fil 1 en fonction du carré de la tension du fil 2 avec prise en compte de la température, pour  $0 \leq U_0 \leq 6,75$  [m/s] et 16 valeurs de l'angle  $\alpha$  entre  $-38^\circ$  et  $38^\circ$ . D'après (Ndiaye 2009).

Guide98-3 :2008 E, ISO2008). L'objectif était de construire un modèle de comportement du banc et des incertitudes associées, de façon à concevoir un dispositif minimisant les incertitudes de mesures.

Dans une première étape nous avons déterminé les incertitudes sur les paramètres  $a_{ijk}$  et  $T_w$ , de la loi d'étalonnage (2.3). Pour cela, nous avons propagé les distributions des incertitudes sur la vitesse de référence, sur la température de référence et sur la tension aux bornes du fil, à l'aide de simulation de Monte Carlo et du modèle d'étalonnage (2.3). Ces simulations, associant données et modèle, montrent que pour  $3 \cdot 10^5$  triplets d'étalonnage (vitesse, température, tension), les incertitudes sur les paramètres de la loi d'étalonnage se situent entre 0,03% et 0,2%, alors que pour 50 triplets l'incertitude sur les paramètres est de 8% (Ndoye et al. 2010). L'accumulation importante de valeurs d'étalonnage, permet de réduire de manière importante les incertitudes associées aux paramètres de la loi d'étalonnage et ainsi d'avoir un dispositif capable d'effectuer des mesures plus précises qu'avec un étalonnage classique (cf. §2.3.3 figure 2.12).

Dans une deuxième étape pour estimer les incertitudes de mesure, nous avons propagé les distributions des incertitudes associées aux coefficients de la loi d'étalonnage et aux valeurs de tension de mesure. Comme l'illustre la figure 2.8 l'incertitude élargie pour un anémomètre PCTA est inférieure à  $\pm 0,01$  m/s sur la gamme 0,5 à 2 m/s. Notons que pour qualifier le confort aéroulque la norme AFNOR (2006) préconise dans ce domaine des faibles vitesses une incertitude élargie inférieure à  $\pm 0,02$  m/s.

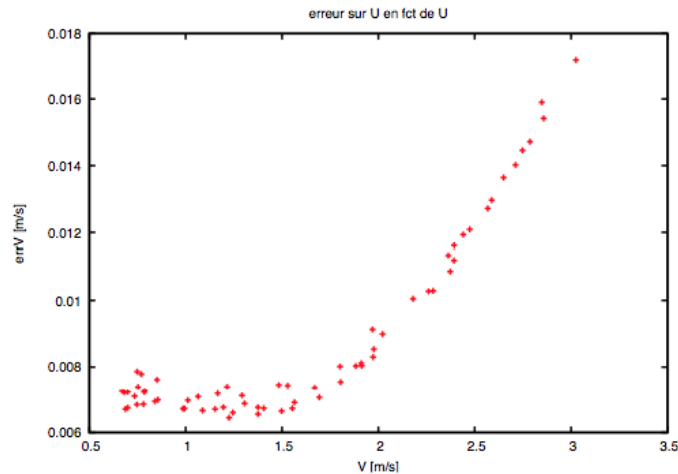


FIGURE 2.8 – Incertitude de mesure pour un capteur PCTA étalonné avec le banc dynamique, d'après Heitz et al. (2007).

## 2.3 MESURE SIMULTANÉE VITESSE-TEMPÉRATURE

### 2.3.1 Quelques précurseurs/prédécesseurs

**Les sondes multi-fils CTA et CCA en parallèles** sont classiquement utilisées pour la mesure simultanée de vitesse et de température (Chevray et Tutu 1972). Suivant le nombre de composantes de la vitesse à mesurer, un ou plusieurs fils chauds (sensibles à la vitesse) fonctionnant en mode CTA sont associés à un fil froid (sensible à la température) fonctionnant en mode CCA. Un inconvénient de ce type de technique est la bande passante limitée imposée par le fil froid utilisé pour les mesures de température. La principale conséquence est une sous estimation des fluctuations de température mesurées. Cette atténuation est d'autant plus importante que le fil est épais ou la partie sensible du fil non isolée des broches. Le fil froid doit donc être choisi très fin, ce qui pose des problèmes de fragilité. Le manque de résolution spatiale et le problème de l'interférence thermique entre les fils (chauffage du fil froid par les fils chauds, par exemple) constituent un autre inconvénient de ces sondes multi-fils.

**Les sondes multi-fils CTA en parallèles** sont une autre méthode utilisant des coefficients de surchauffe différents pour chacun des fils, plutôt qu'un fil froid supplémentaire limitant la bande passante (Corrsin et Uberoi 1949, Sakao 1973). Cependant, cette méthode a une sensibilité dynamique faible. Elle n'est pas adaptée pour les écoulements fortement (respec. faiblement) turbulents avec faible (respec. forte) fluctuation de température. Ces limitations pourraient être dues au manque de résolution spatiale et à l'interférence entre les fils (Lienhard et Helland 1989). Lienhard et Helland préconisent l'utilisation du fil froid lorsque sa fragilité ne pose pas de problème.

**Les sondes 1 fil CTA avec surchauffes multiples** soumettent séquentiellement un fil chaud à différents coefficients de surchauffes (Corrsin 1947). L'approche est basée sur la différence de sensibilité du fil à la vitesse et

à la température pour plusieurs points de fonctionnement. En répétant la mesure au même point pour chaque surchauffe, on obtient les moments d'ordres 2 de la vitesse et de la température, sans cependant avoir accès aux valeurs instantanées.

### 2.3.2 Principe de la mesure PCTA

L'anémométrie à fil chaud à surchauffe variable programmable (PCTA) permet d'accéder à la mesure simultanée de la température et de la vitesse. Cette technique proposée par Joël Delville de l'Institut Pprime de Poitiers a été développée en collaboration entre Pprime et Irstea Rennes. Plusieurs surchauffes sont appliquées successivement de telle sorte que le fil passe d'un régime CTA à un autre sur des temps assez courts.

Un circuit électronique a été conçu pour faire varier rapidement la surchauffe du fil (cf. figure 2.9). Pour modifier le coefficient de surchauffe du

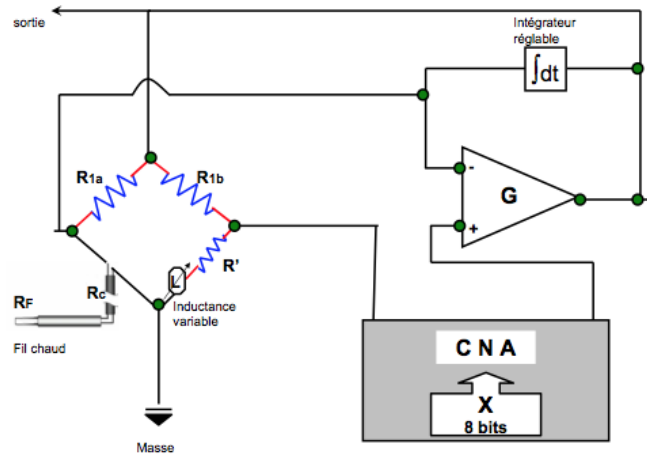


FIGURE 2.9 – Schéma du circuit électronique de la carte anémomètre PCTA.

fil, la tension à la sortie de la résistance  $R'$  est contrôlée par un convertisseur analogique numérique (CAN) dont la consigne  $X$  est codée sur 8 bits. Un intégrateur a été ajouté pour mesurer la stabilité du système. Une inductance variable est montée sur le pont pour avoir la possibilité de régler, une fois le fil en place, la réponse du circuit aux impulsions de commande.

Le fil peut être soumis à des séquences de 2 à 8 surchauffes. Chaque cycle constitue un motif composé de paliers qui peut être répété toutes les  $10 \mu\text{s}$  à  $8192 \mu\text{s}$ . La figure 2.10 illustre un exemple de signal pour un motif à 3 surchauffes. La partie utile des paliers dépend du diamètre du fil, de la durée souhaitée des paliers, de la vitesse et de la température de l'écoulement. La partie transitoire d'un palier est d'autant plus importante que la surchauffe est faible. Tout ceci conduit à une bande passante ne pouvant pas excéder 3 kHz. En effet, le passage d'une surchauffe à l'autre rend le PCTA esclave de l'inertie thermique du fil, comme cela est le cas pour le CCA. Le PCTA cumule donc les avantages et les inconvénients du CTA et du CCA.

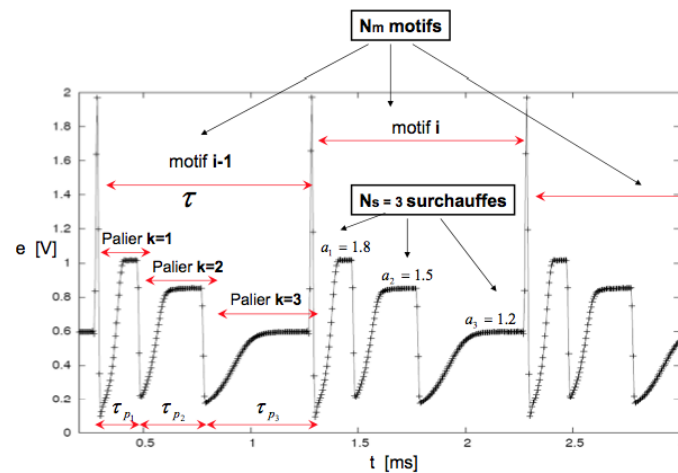


FIGURE 2.10 – Signal de sortie de l’anémomètre PCTA pour des motifs à 3 surchauffes.

### 2.3.3 Mise en œuvre pratique et résolution

**Séparation des surchauffes** Un algorithme spécial, basé sur la détection du début du premier motif et la décimation du signal anémométrique par filtrage sur les paliers de surchauffe, a été développé pour traiter les signaux bruts issus de l’anémomètre. Il permet la séparation des surchauffes et fournit ainsi des valeurs de tensions pour chaque motif et chaque surchauffe. Le résultat obtenu est un signal continu et unique pour chaque surchauffe.

**Résolution** Lors de la *phase d’étalonnage* dynamique, le système obtenu pour estimer les paramètres  $a_{kl}$  et  $T_{w,kl}$  des lois (2.3) est très largement surdéterminé. Une méthode de régression non linéaire aux moindres carrés est alors mise en œuvre. Lors de la *phase de mesure* le choix de la méthode de résolution est fonction du nombre de surchauffes considérées. A partir de 3 surchauffes, cas de nos travaux, le système est surdéterminé, justifiant l’utilisation d’une méthode de régression non linéaire aux moindres carrés.

Les erreurs les plus élevées correspondent à l’utilisation soit uniquement de surchauffes élevées (grande sensibilité à la vitesse), soit uniquement de surchauffes faibles (grande sensibilité à la température). Les erreurs les plus faibles sont obtenues pour la gamme la plus large de surchauffes. Une combinaison à trois surchauffes est un bon compromis pour minimiser l’erreur et ne pas trop réduire la réponse en fréquence du capteur. Comme l’illustre la figure 2.11, la convergence vers la solution  $(U, T)$  est très favorable avec un modèle monotone du type (2.2) et un nombre élevé de surchauffes. Pour un modèle polynomiale (2.3) et à basses vitesses des précautions doivent être prises pour bien initialiser la procédure d’optimisation et éviter de tomber dans un minimum local lors de la recherche de la solution  $(U, T)$  (Ndoye et al. 2010).

Notons que récemment, Sodjavi (2013) a amélioré la procédure de résolution pour le cas d’une sonde à fils croisés. Pour s’affranchir de l’hypothèse forte d’écoulement constant pendant la durée d’un motif, il a combiné les paliers pour diminuer l’effet de ce filtrage. Par ailleurs, pour

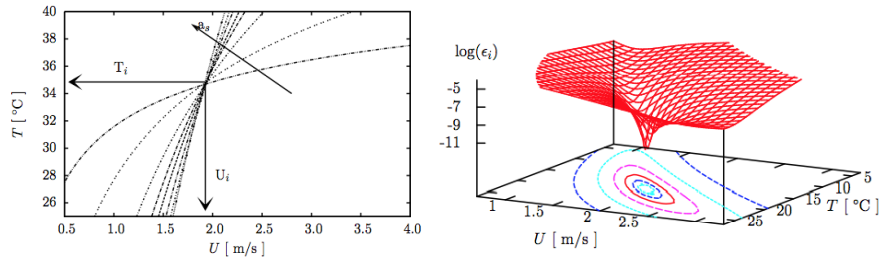


FIGURE 2.11 – Recherche d'une solution  $(U, T)$  pour le cas de 8 surchauffes (Ndoye et al. 2010).

augmenter la bande passante, il n'a utilisé que deux surchauffes qu'il a exploitées successivement (Sodjavi et Carlier 2013).

**Incertitudes de mesures** La méthode de détermination des incertitudes de mesures est explicitée au §2.2.3. Comme illustré sur la figure 2.12, un anémomètre PCTA fonctionnant avec trois surchauffes et étalonné avec  $3 \times 10^5$  triplets (vitesse, température, tension), présente une incertitude sur la mesure de la vitesse de 1%, et de  $0,15^\circ\text{C}$  sur la mesure de la température.

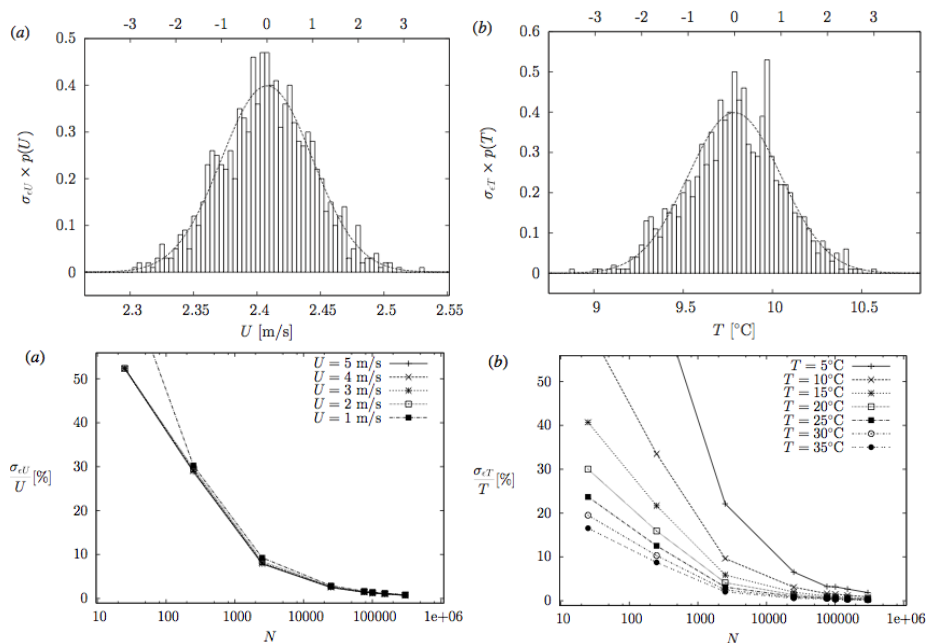


FIGURE 2.12 – Incertitudes de mesure vitesse/température avec un anémomètre PCTA. En haut : distribution d'une mesure simultanée de vitesse et de température. En bas : influence du nombre de valeurs d'étalonnages sur l'incertitude de mesure d'après Ndoye et al. (2010).

### 2.3.4 Résultats de mesure simultanée vitesse et température

La figure 2.13 montre un exemple de mesure simultanée de la vitesse et de la température. Ces données nous ont permis d'analyser les relations entre vitesse et température dans une couche de mélange anisotherme et turbulente. La figure 2.14 montre les formes que prennent les densités de probabilité de la température en fonction du signe de la vitesse.

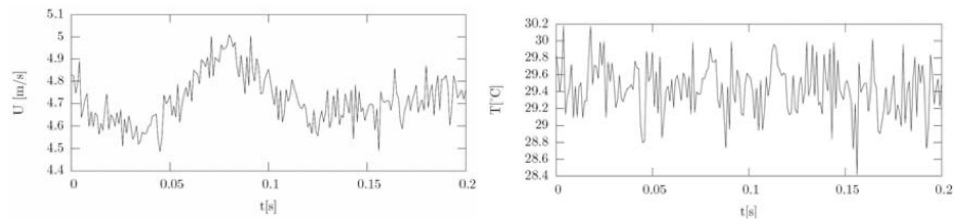


FIGURE 2.13 – Résultat de mesure vitesse/température avec un anémomètre PCTA.

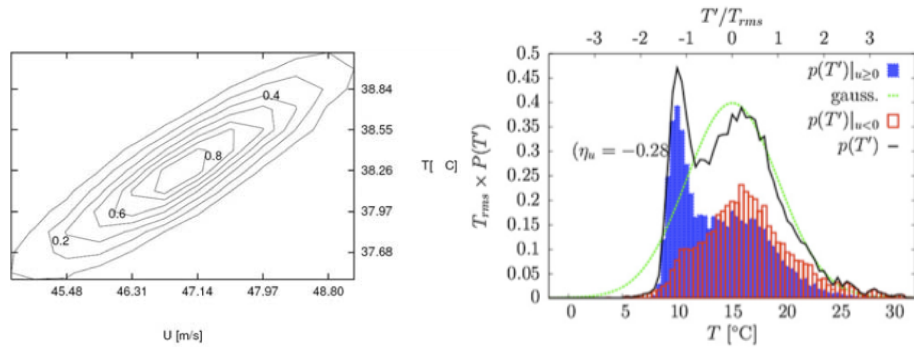


FIGURE 2.14 – A gauche : exemple de distribution jointe vitesse-température. A droite : PDFs conditionnelles de vitesse-température dans une couche de mélange anisotherme d'après Ndoye et al. (2010).

### Remarques

Pour s'affranchir des limitations en bande passante et en réelle instantanéité de la mesure vitesse/température par le PCTA, il pourrait être intéressant d'utiliser un sonde 4 fils (Jacquin et al. 1995) en mode CTA avec des surchauffes distinctes par fils. De plus, pour mieux estimer les valeurs de vitesse et de température la recherche de solution pourrait bénéficier d'une régularisation basée sur la physique des écoulements telle que proposée au §3.4.2.



# MESURE DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE À PARTIR D'IMAGES

# 3

L'OBSERVATION du mouvement d'une grandeur reliée au fluide peut donner des informations sur la dynamique du fluide. Il y a plus de vingt ans des mécaniciens des fluides ont proposés les premières techniques numériques permettant de mesurer la vitesse d'un fluide à partir de séquences d'images de particules dispersées par l'écoulement (Willert et Gharib 1991, Adrian 1991). Depuis, la vélocimétrie par images de particules (PIV) s'est progressivement imposée pour la mesure des écoulements turbulents. Des algorithmes très robustes et performants ont été proposés (Stanislas et al. 2008).

Potentiellement, les images de particules peuvent contenir suffisamment d'information spatiales et temporelles pour décrire les plus grands jusqu'aux plus petits tourbillons. Pourtant, les techniques de mesures de la vitesse à partir d'images restent limitées à une gamme réduite d'échelles. L'estimation d'une large étendue spectrale de tourbillons représente encore un défi.

Les approches de *flot optique* proposées dans la suite complètent les techniques établies de PIV basées sur la corrélation. Le flot optique est un champ de vitesse représentant le mouvement apparent dans les images. C'est une approximation du mouvement tridimensionnel de la matière transportée par le fluide (traceur), éclairée et dont la lumière réfléchi est projetée dans le plan de l'image. Dans la communauté de vision par ordinateur, l'estimation du flot optique est un sujet de recherche qui a été initié par les travaux fondateurs de Horn et Schunck (1981) et de Lucas et Kanade (1981), et qui reste très ouvert et très étudié. Plus généralement, l'omniprésence de l'image dans nos sociétés continue d'alimenter un besoin en algorithmes robustes notamment sur la question de l'estimation du mouvement.

Mes travaux dans ce domaine ont débuté en 2003, avec E. Mémin de l'Inria de Rennes, avec une première évaluation d'un algorithme de flot optique dédié au mouvement fluide réalisée grâce aux postdoctorats successifs de Alina Santa Cruz et de Thomas Corpetti. La nécessité d'améliorer les estimateurs du mouvement vers une gamme d'échelles résolues plus étendue a motivé l'introduction progressive d'une modélisation basée sur la physique des fluides. Ces travaux, réalisés lors des postdoctorats successifs de Virginie Navaza et de Patrick Héas, ont été démarrés en 2005 dans le cadre du projet européen FLUID avec E. Mémin de l'Inria de Rennes. Ils se poursuivent depuis 2009 dans le cadre de l'équipe



projet FLUMINANCE (Inria-Irstea) avec également la collaboration de C. Herzet.

Dans la première partie §3.1 de ce chapitre nous présentons brièvement le problème de l'estimation du mouvement fluide à partir d'un couple d'images. Nous montrons au §3.1.1 la relation entre le flot optique et le mouvement du fluide pour certaines conditions expérimentales. Celle-ci se modélise dans l'équation du flot optique –encore appelée terme d'attache aux données ou modèle d'observation– par dérivation des équations de transport projetées dans le plan image. La seule équation du flot optique n'est pas suffisante pour estimer le mouvement. Ce problème mal posé, appelé problème de l'ouverture, est présenté au §3.1.2. Au §3.2 nous verrons deux types de schémas d'estimation du mouvement, classés en approches *locales* ou *globales* selon l'hypothèse supplémentaire utilisée pour fermer le problème. Enfin, une analyse comparative des hypothèses faites dans les approches de flot optique et de corrélation est présentée au §3.2.3.

Dans une deuxième partie §3.3 nous présentons le principe de la multirésolution pour gérer les grands déplacements. Nous montrons ses limitations dans le cas d'images de particules, et nous proposons une solution robuste combinant corrélation et flot optique pour s'affranchir de ces difficultés.

La troisième partie §3.4 est consacrée aux termes de régularisation utilisés pour résoudre le problème de l'ouverture dans le cas du mouvement fluide. Nous évaluons la performance d'un modèle formulant un *a priori* sur la distribution spatiale des vitesses d'un ordre plus élevé que pour l'estimation classique du mouvement solide. Nous montrons que l'utilisation d'un modèle basé sur la décroissance de l'énergie cinétique turbulente permet d'améliorer de façon significative la précision et l'étendue de la gamme d'échelle des vitesses. La régularisation spatiotemporelle est une étape supplémentaire contraignant la solution à suivre les équations de la dynamique des fluides. Une première tentative est présentée dans la partie §3.4.3 à partir d'une approximation bidimensionnelle des équations aux grandes échelles. Au chapitre 4 le problème est reformulé d'une façon plus optimale dans le cadre de l'assimilation de données images.

Enfin, dans la dernière section §3.5 nous présentons une contribution à l'estimation des incertitudes de mesure du mouvement fluide à l'aide d'une formulation bayésienne du flot optique.

### 3.1 POSITION DU PROBLÈME

**Notations** Dans ce chapitre une séquence d'image est représentée par une fonction d'intensité  $I(\mathbf{x}, t)$  où  $\mathbf{x}$  est le vecteur de coordonnée spatiale  $(x, y)$  et  $t$  le temps. Par soucis de simplicité deux images séparées d'un temps  $\Delta t$  seront notées respectivement  $I_1(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}, t)$  et  $I_2(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ . Le champ de vitesse à un instant donné s'écrit  $\mathbf{v} = (u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}))^\top$  où  $^\top$  est l'opérateur transposé.

#### 3.1.1 Flot optique et écoulement : le modèle d'observation

Le flot optique est le mouvement apparent dans l'image. C'est le champ de vitesse qui pour une séquence d'images explique la transfor-

mation d'une image à la suivante. L'équation du flot optique (est la formalisation mathématique de la relation entre le mouvement apparent et la variation d'intensité entre deux images successives) –encore appelée terme d'attache aux données ou *modèle d'observation*– relie la variation d'intensité lumineuse spatiotemporelle émise par le traceur dans un volume à sa projection sur le plan des images. La relation entre le mouvement du fluide et le flot optique n'est pas immédiate et est souvent différente. Ces deux mouvements coïncident exactement si la matière observée ne change pas de luminance lors de son mouvement dans la scène. C'est l'hypothèse de base généralement faite en vision par ordinateur pour estimer le mouvement d'objets rigides ou semi-rigides. Elle s'écrit sous une forme intégrée non linéaire appelée équation DFD (pour Displaced Frame Difference)

$$I_2(\mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta t) = I_1(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

ou encore sous une forme locale linéaire appelée équation OFC (pour Optical Flow Constraint)

$$\partial_t I + \mathbf{v} \cdot \nabla I = 0, \quad (3.2)$$

reliant la variation temporelle de la luminance, aux gradients spatiaux de la luminance et à la vitesse apparente.

En pratique cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée, notamment en PIV en raison des entrées et sorties de particules du volume éclairée de façon non uniforme, du bruit du capteur image et de la variation globale d'intensité entre deux images successives. Elle n'est vérifiée que en écoulement 2D et éclairage plan ou 3D et éclairage volumique homogène.

Les premiers *modèles d'observation* dédiés à la mécanique des fluides expérimentales ont été proposés par Liu et Shen (2008). Les auteurs décrivent de manière exhaustive la relation entre le flot optique et l'écoulement pour plusieurs configurations typiques de visualisation d'un fluide, et proposent des modèles d'observation dérivant des équations du mouvement projeté. A partir des équations de transport d'un fluide, ces auteurs

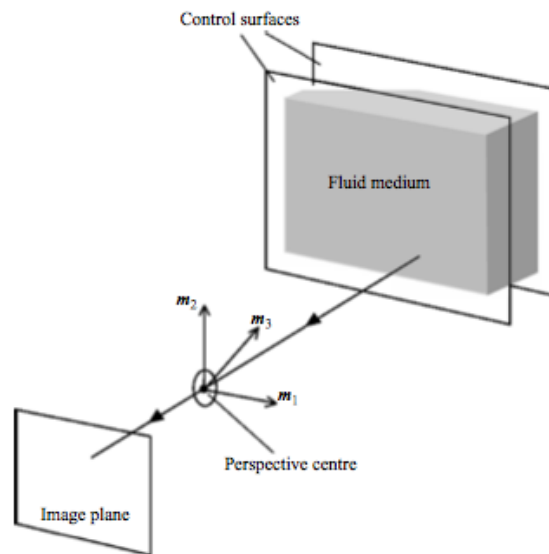


FIGURE 3.1 – Projection de l'écoulement sur le plan de l'image d'après Liu et Shen (2008).

montrent que le flot optique est proportionnel au mouvement pondéré de la matière dans la zone éclairée. Pour un écoulement 3D d'un scalaire ou de particules visualisées avec une nappe laser l'équation du flot optique s'écrit

$$\partial_t I + \nabla^\top (I\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}, I), \quad (3.3)$$

où  $f(\mathbf{x}, I) = D\nabla^2 I + DcB + c\mathbf{n} \cdot (N\mathbf{v})|_{\Gamma_-}^{\Gamma_+}$  et  $D$  est un coefficient de diffusion,  $c$  est un coefficient pour la diffusion/absorption des particules ou l'absorption d'un scalaire,  $B = -\mathbf{n} \cdot \nabla \psi|_{\Gamma_-}^{\Gamma_+} - \nabla \cdot (\psi|_{\Gamma_-} \nabla \Gamma_- + \psi|_{\Gamma_+} \nabla \Gamma_+)$  est un terme de bord lié à la quantité transportée  $\psi$ , et à ses dérivées couplées aux dérivées des surfaces de contrôle  $\Gamma_-$ ,  $\Gamma_+$  du volume éclairé par la nappe laser (cf. Fig. 3.1).

Dans le cas de la PIV 2D2C ou 2D3C les surfaces de contrôles sont planes, il n'y a pas de diffusion des particules par un processus moléculaire, et le taux d'accumulation des particules dans le volume éclairé peut être négligé, le terme  $f(\mathbf{x}, I) \simeq 0$  et l'équation (3.3) s'écrit

$$\partial_t I + \mathbf{v} \cdot \nabla I + I \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.4)$$

Dans les équations (3.3) et (3.4), le flot optique  $\mathbf{v}$  est proportionnel au mouvement pondéré par le champ  $\psi$  (concentration scalaire ou nombre de particules par unité de volume) sur l'épaisseur du volume observé, et défini par

$$\mathbf{v} \propto \frac{\int_{\Gamma_-}^{\Gamma_+} \psi W_{xy} dz}{\int_{\Gamma_-}^{\Gamma_+} \psi dz}, \quad (3.5)$$

où  $W_{xy}$  est la projection de la vitesse du fluide sur le plan de coordonnées  $(x, y)$ .

### Remarques

L'équation (3.4) correspond à l'équation de continuité intégrée (ICE pour integrated continuity equation) proposée par Corpetti et al. (2002) en faisant l'hypothèse que la luminance est proportionnelle à une intégration de la densité du fluide au travers du volume de mesure. Le modèle ICE s'écrit

$$I_2(\mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta t) \exp(\operatorname{div}(\mathbf{v}\Delta t)) - I_1(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.6)$$

Bien que le modèle ICE soit en théorie valable uniquement pour les images de transmittance, Corpetti et al. (2006) ont obtenus des résultats sensiblement améliorés par rapport au modèle OFC pour des expériences de PIV dans des écoulements 3D. La dérivation de l'équation projetée du mouvement proposée par Liu et Shen (2008) et conduisant à l'équation (3.4) permet de justifier rigoureusement ces améliorations. Le modèle d'observation basé sur la physique est composé d'un terme  $\partial_t I + \mathbf{v} \cdot \nabla I$  représentant la conservation de la luminance (OFC), tandis que le terme  $I \operatorname{div} \mathbf{v}$  traduit la non conservation de la luminance due aux mouvements 3D des particules.

Nous avons montré que le modèle ICE donne un bon accord avec des mesures au fil chaud dans une couche de mélange turbulente et dans

le sillage d'un cylindre (Corpetti et al. 2006). De plus la validation de ce modèle sur la base VSJ d'images synthétiques a montré qu'il permet d'obtenir les meilleurs résultats quand la composante de vitesse hors plan est importante (cf. Fig. 3.2).

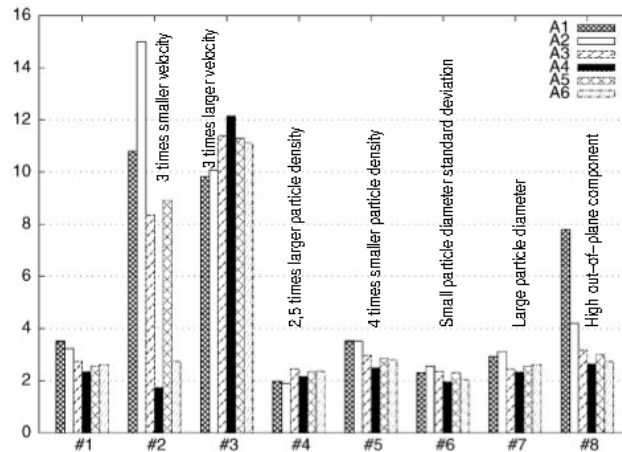


FIGURE 3.2 – Erreur moyenne relative  $L_1$  pour six estimateurs de mouvement sur la base VSJ d'images synthétiques d'après Corpetti et al. (2006).  $A_1$  = Quénot et al. (1998).  $A_2$  = Mémin et Perez (1998).  $A_3$  = OFC + 1er ordre,  $A_5$  = ICE + 1er ordre,  $A_6$  = OFC + 2nd ordre,  $A_4$  = ICE + 2nd ordre.

Le modèle d'observation (3.3) ne prend pas en compte des phénomènes spécifiques comme par exemple la variation spatiotemporelle de l'éclairage laser qui pourrait facilement être ajoutée (Haussecker et Fleet 2001).

Dans le cas d'écoulements bidimensionnels incompressibles observés dans une nappe laser, la relation entre le mouvement du fluide et le flot optique est immédiate si la nappe est alignée avec l'écoulement. Le flot optique correspond alors au mouvement du fluide et vérifie l'équation  $\partial_t I + \mathbf{v} \cdot \nabla I = D \nabla^2 I$ .

Pour des visualisations volumiques d'écoulements tridimensionnels, comme la tomographie PIV, le flot optique  $\mathbf{v}$  est une certaine moyenne du champ de vitesse en raison de la reconstruction imparfaite de l'image tridimensionnelle. Dans ce cas, la relation entre flot optique et mouvement du fluide est moins évidente que dans le cas d'écoulements bidimensionnels. Sa modélisation reste un challenge pour les prochaines années. Toutefois, en première approximation l'OFC est un bon modèle.

Enfin, les modèles d'observations écrits sous formes variationnelles ne sont valables que pour des petits déplacements, typiquement de l'ordre du pixel. Dans le cas de grands déplacements il est préférable d'utiliser leur formulation globale non linéaire comme la DFD ou l'ICE intégrée (Corpetti et al. 2002), ou plus classiquement d'intégrer la formulation variationnelle dans un schémas multirésolution constitué d'une pyramide d'images (cf. §3.3.1).

Récemment de nouveaux termes d'attache aux données ont été proposés pour la mesure du mouvement turbulent. Cassisa et al. (2011) ont construit un modèle d'observation grandes échelles<sup>1</sup>. L'image et la vitesse

1. Au sens de la simulation des grandes échelles (Large Eddy Simulation).

à estimer sont décomposés en composantes grande et petite échelles pour prendre en compte la limite de résolution spatiale de l'image. Un modèle sous maille est introduit pour représenter les contributions des petites échelles. Ce travail a été poursuivi par Zille et al. (2014) par l'intégration du modèle d'observation grandes échelles dans un contexte multi-échelles lié à la multirésolution (cf. 3.3.1). Enfin, Corpetti et Mémin (2012) ont dérivés une formulation stochastique de la conservation de la luminance prenant en compte les incertitudes sur la luminance liées à l'échelle de résolution de l'image.

### 3.1.2 Problème de l'ouverture

La construction d'un modèle d'observation décrivant au maximum les phénomènes physiques liés au contexte expérimental est une étape importante pour la précision des mesures du mouvement. Cependant le modèle d'observation n'est pas suffisant pour estimer le champ de vitesse car il ne fournit qu'une équation scalaire sur la luminance pour deux composantes de la vitesse à estimer dans le plan de l'image. Le système est donc incomplet, ou mal posé, il s'agit du *problème de l'ouverture*. Seules les composantes de la vitesse perpendiculaires aux gradients de la luminance peuvent être estimées. Elles s'écrivent à partir du modèle d'observation (3.2) de la manière suivante

$$\mathbf{v}(\mathbf{x})^\perp = -\frac{\partial_t I(\mathbf{x})}{\|\nabla I(\mathbf{x})\|} \cdot \frac{\nabla I(\mathbf{x})}{\|\nabla I(\mathbf{x})\|}. \quad (3.7)$$

La figure 3.3 illustre ce problème de l'ouverture pour la mesure de la vitesse à partir de l'observation d'un scalaire dispersé dans un écoulement turbulent.

La mesure du mouvement à partir d'images nécessite des hypothèses ou des informations supplémentaires : l'utilisation de fenêtres d'interrogation, ou l'ajout de contraintes spatiales ou spatiotemporelles, encore appelées termes de régularisation ou *a priori*. Les approches proposées sont alors considérées comme *locales* ou *globales* (cf. §3.2).

## 3.2 SCHÉMAS D'ESTIMATION DU MOUVEMENT

Les approches de vélocimétrie par images de particules ou images d'un scalaire nécessitent d'introduire un *a priori* sur la solution à estimer (cf. §3.1.2). Les méthodes *locales* imposent une certaine uniformité du champ de vitesse dans un petit voisinage. Les approches *globales* introduisent un terme de régularisation qui peut être spatial ou spatiotemporel (cf. §3.4 pour les différents modèles de régularisation).

### 3.2.1 Méthodes locales

Les méthodes *locales* considèrent un voisinage  $\mathcal{W}(\mathbf{x})$  d'un point de l'espace. Elles consistent à comparer le contenu d'une fenêtre d'observation dans la première image avec les contenus de fenêtres similaires dans la

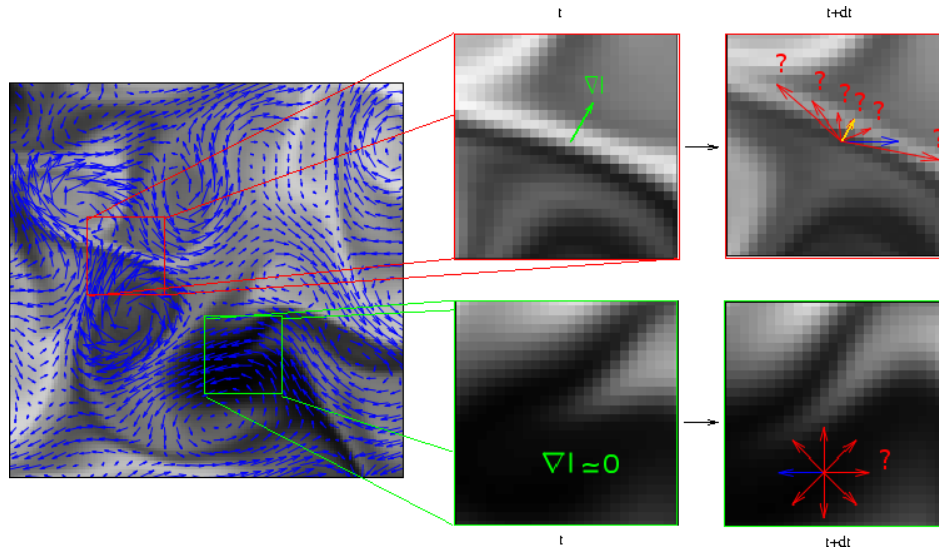


FIGURE 3.3 – Illustration du problème de l'ouverture pour la mesure de la vitesse à partir de l'observation d'un scalaire dispersé dans un écoulement turbulent. Dans les cadres rouges : une région de l'écoulement avec variation de la luminance. Dans les cadres verts : une région de l'écoulement sans grande variation de la luminance. Le vecteur vert représente le gradient de la luminance. Le vecteur jaune représente la vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x})^\perp$  obtenue avec uniquement le modèle d'observation. Les vecteurs rouges représentent une partie de l'infinité de solutions possibles. Le vecteur bleu est la solution obtenue avec une régularisation globale qui dans ce cas se confond avec la vraie vitesse.

seconde image, ceci pour un critère donné. Un champ de déplacement localement filtré ou grande échelle est calculé sur un espace discret

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{v}} \sum_{\mathbf{x}' \in \mathcal{W}(\mathbf{x})} \mathcal{C}(I_2(\mathbf{x}' + \mathbf{v} \Delta t), I_1(\mathbf{x}')), \quad (3.8)$$

où  $\mathcal{C}$  est la fonction de similarité. Les critères les plus utilisés pour  $\mathcal{C}$  sont la corrélation et le modèle de conservation de la luminance (cf. §3.1.1 DFD ou OFC).

La corrélation de fenêtres est classiquement utilisées en PIV pour mesurer la vitesse d'un fluide (Adrian 1991), tandis que la conservation de la luminance d'un voisinage a été introduite par Lucas et Kanade (1981) dans la communauté vision par ordinateur pour estimer le mouvement d'objets rigides ou semi-rigides (Baker et Matthews 2004, pour une revue sur les estimateurs de type Lucas et Kanade). Récemment, Pan et al. (2015) ont évalué la performance de l'algorithme de Lucas-Kanade lorsqu'il est utilisé en PIV.

### Remarques

En mécanique des fluides expérimentale le modèle de conservation de la luminance a été utilisé avec un schémas *local* par Gui et Merzkirch (1996) sous le nom de méthode MQD (pour minimum quadratic difference). Plus récemment Champagnat et al. (2011) ont construit FOLKI (pour Iterative Lucas-Kanade Optical Flow) un algorithme rapide (version GPU) de type Lucas et Kanade adapté pour la PIV. Un nouveau algorithme de type Lucas-Kanade stochastique a été dérivé par Corpetti et Mémin (2012). Cet estimateur prometteur utilise un schémas *local* et une

formulation stochastique de la conservation de la luminance pour prendre en compte les incertitudes sur le modèle d'observation.

L'utilisation d'une fenêtre d'observation pour estimer un déplacement lié à l'ensemble des variations de la luminance au sein de cette zone locale, permet de fermer le problème de l'ouverture en apportant une bonne robustesse à l'estimateur du mouvement. Toutefois, les différents déplacements locaux du champ estimé sur l'ensemble de la taille de l'image sont disjoints, ce qui n'est pas le cas avec les méthodes *globales*. Enfin, le champ estimé est épars pour les approches de type corrélation alors qu'il peut être dense (un vecteur par pixel) avec les approches flot optique de type Lucas et Kanade.

### 3.2.2 Méthodes globales

Les méthodes *globales* minimisent une fonctionnelle d'énergie composée d'un terme d'observation  $f_d(I, \mathbf{v})$  basé sur les modèles d'attaches aux données du §3.1.1 et d'un terme de régularisation  $f_r(\mathbf{v})$  nécessaire pour résoudre le problème de *l'ouverture* présenté au §3.1.2. L'estimation du champ de vitesse se fait par la minimisation de la fonctionnelle d'énergie

$$\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} (f_d(\mathbf{v}, I) + f_r(\mathbf{v})), \quad (3.9)$$

où la régularisation  $f_r(\mathbf{v})$  contient un paramètre de pondération  $\alpha$ , à ajuster.

A l'origine de ce type d'approche Horn et Schunck (1981) ont proposé une régularisation spatiale au premier ordre pour estimer les mouvements quasi-rigides. La fonctionnelle d'énergie associée à cette régularisation s'écrit

$$f_r(\mathbf{v}) = \alpha \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) d\mathbf{x}, \quad (3.10)$$

où  $\Omega$  correspond au domaine de l'image. La fonctionnelle d'énergie associée au terme d'attache aux données utilise le modèle de conservation de la luminance (OFCE)

$$f_d(I, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_t I + \mathbf{v} \cdot \nabla I)^2 d\mathbf{x}. \quad (3.11)$$

Les méthodes *globales* résolvent un problème d'optimisation sur un domaine  $\Omega$  de l'image, reliant chaque vecteur estimé à ces voisins selon un modèle de régularisation plus ou moins pondéré.

#### Remarques

Les méthodes globales fournissent des champs denses, c'est-à-dire avec un vecteur par pixel. En PIV cette méthode de mesure est inhabituelle dans la mesure où les images contiennent moins de particules que de pixels, de plus classiquement on s'appuie sur l'information de plusieurs particules pour estimer un vecteur. Le résultat dense serait alors le résultat d'une interpolation? En effet, les méthodes globales intègrent une forme d'interpolation optimale basée sur le modèle de régularisation. Elles estiment le champ de vitesse respectant à la fois les observations et le modèle de régularisation selon une pondération. L'interpolation est donc intégrée dans

le problème dès le départ et non pas *a posteriori*. Elle assure une cohérence spatiale de la solution.

Les méthodes globales nécessitent l'ajustement du paramètre de pondération de la régularisation. En pratique pour des images de PIV le paramètre est optimal sur une large gamme de valeurs. Une analyse dimensionnelle montre que ce paramètre est lié aux échelles caractéristiques de luminosité et de longueur suivant le modèle de régularisation adopté (Heitz et al. 2008b). Quand la régularisation est un modèle physique du type  $f_r(\mathbf{v}) = 0$  alors la contrainte est dite dure et le paramètre n'est plus à ajuster car il devient une solution du problème d'optimisation. Au §3.4.2 nous présentons un modèle de régularisation de ce type basé sur les lois de puissance de la turbulence proposées par Kolmogorov (Héas et al. 2012; 2013). Nous verrons que l'estimation du champ de vitesse est d'autant plus précise sur une gamme d'échelle étendue que le modèle de régularisation est basé sur la physique du fluide (Heitz et al. 2010).

Des approches hybrides (locales-globales) ont naturellement été proposées. Les méthodes de *Ritz* sont une extension des méthodes locales vers les méthodes globales (Heitz et al. 2010, pour plus de détails). Tokumaru et Dimotakis (1995) ont utilisé ce type d'approche –basée sur un modèle paramétrique cubique et assurant une consistance spatiale globale– pour la mesure du mouvement fluide avec des images de scalaire et de particules. Cuzol et al. (2007) ont également mis en œuvre ce type de méthode pour l'estimation du mouvement des écoulements. Bruhn et al. (2005) ont construits une méthode ayant la robustesse des approches locales et estimant des champs denses comme les méthodes globales. Enfin, plus récemment on assiste à l'émergence de méthodes semi-locales intéressantes, qui peuvent être vues comme une forme de localisation d'une approche globale (Fortun et Kervrann 2012).

### 3.2.3 Flot optique et corrélation

Nous avons comparé les modélisations associées aux méthodes *locales* de type Lucas & Kanade et de corrélation (Heitz et al. 2010). L'estimateur du mouvement (3.8) avec le modèle d'observation basé sur la DFD (3.1) se simplifie sous la forme

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{v}} \sum_{\mathbf{x}' \in \mathcal{W}(\mathbf{x})} (I_2(\mathbf{x}' + \mathbf{v}\Delta t)^2 - 2I_2(\mathbf{x}' + \mathbf{v}\Delta t)I_1(\mathbf{x}')). \quad (3.12)$$

Cette formulation montre que le modèle de conservation de la luminosité contient la corrélation. Les champs de vitesses estimés avec ces deux modèles sont égaux si  $\sum_{\mathbf{x}' \in \mathcal{W}(\mathbf{x})} I_2(\mathbf{x}' + \mathbf{v}\Delta t)^2$  ne dépend pas de  $\mathbf{v}$ , c'est-à-dire si l'énergie de la luminosité dans la fenêtre est constante quel que soit l'endroit dans l'image,  $\forall \mathbf{v}, \sum_{\mathbf{x}' \in \mathcal{W}(\mathbf{x})} I_2(\mathbf{x}' + \mathbf{v}\Delta t)^2 \approx \text{constante}$ .

Pour des images de PIV cette condition est respectée lorsque l'ensemencement en particules est homogène et lorsque les fenêtres d'interrogations sont suffisamment grandes. Étant donné que le modèle DFD est idéalement physiquement consistant –pour des écoulements 2D ou 3D observés dans un volume– la corrélation introduit un biais de mesure lorsque l'ensemencement n'est pas homogène. Ce phénomène est accentué avec de petites fenêtres d'interrogation, des zones de forts gradients de vitesse ou



des images de scalaire. Par ailleurs, le modèle de corrélation ne prend pas en compte les entrées et sorties de particules du volume de mesure ce qui limite la précision de mesure (Nobach et Bodenschatz 2009). La corrélation est donc un modèle qui simplifie la physique du contexte d'observation et procède à un filtrage passe-bas de la solution limitant la dynamique résolue aux grandes échelles de l'écoulement (Foucaut et al. 2004). Toutefois, ce schéma local d'estimation du mouvement à défaut d'être équipé d'un modèle précis présente l'avantage d'être robuste.

Les méthodes de type Lucas & Kanade s'appuient sur un modèle d'observation autorisant l'utilisation de fenêtres d'observation plus petite ne pouvant contenir qu'une particule, elles fournissent alors des mesures plus denses.

### 3.2.4 Robustesse

Lorsque le modèle d'observation (cf. §3.1) n'est pas strictement vérifié localement une solution consiste à utiliser une fonction de pénalisation pour limiter la contribution de ces données. Cela améliore significativement les estimations notamment en présence de bruit dans l'image, lors de pertes de particules en PIV ou encore pour gérer des discontinuités du mouvement dues par exemple à des parois. Dans le cas du modèle de conservation de la luminance, les écarts aux modèles sont pénalisés en chaque pixel par un potentiel d'observation  $\rho_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, I)$  défini par

$$\rho_d(\mathbf{x}, \mathbf{v}, I) = \phi(\partial_t I + \mathbf{v} \cdot \nabla I), \quad (3.13)$$

où  $\phi(\cdot)$  est la fonction de pénalisation.

L'utilisation d'une fonction de pénalisation quadratique  $\phi(z) = z^2$ , comme dans les travaux de Horn et Schunck (1981) et de Lucas et Kanade (1981), facilite l'optimisation mais suppose que le résidu du modèle d'observation suit une distribution Gaussienne. Il accorde ainsi de l'importance aux grandes déviations. Pour réduire l'impact des grands écarts au modèle d'observation il est d'usage d'avoir recours aux statistiques robustes (Huber 1981). Les alternatives robustes à la pénalisation quadratique sont la norme  $L_1$  (Brox et al. 2004), la fonction de Tukey (Odobez et Bouthemy 1995), la fonction de Leclerc (Mémin et Perez 1998) ou encore la fonction Lorentz (Black et Anadan 1996), comme illustrée sur la figure 3-4.

#### Remarques

L'utilisation de ces fonctions soit pour le modèle d'observation soit pour le terme de régularisation permet d'améliorer les performances des estimateurs dans le domaine d'application classique de la vision par ordinateur (Black et Rangarajan 1994, Mémin et Perez 1998).

Dans le cas des écoulements, les fonctions de pénalisation ont été utilisées pour le modèle d'observation (Corpetti et al. 2006, Héas et al. 2007). Elles permettent d'introduire une mesure locale de l'écart entre le modèle d'observation et les données. Aux endroits où l'écart existe, seul le terme restant (i.e. le modèle de régularisation cf. §3.4) est utilisé pour l'estimation du mouvement.

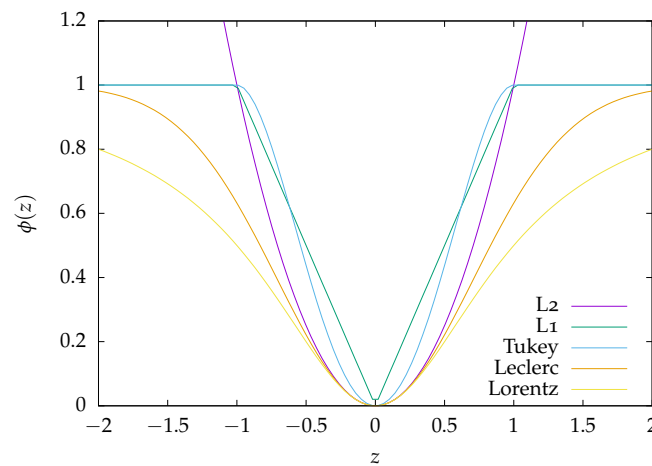


FIGURE 3.4 – Fonctions de pénalisations robustes norme  $L_1$ , de Tukey  $\phi(z) = 1 - (1 - (z/\sigma)^2)^2$  pour  $|z| \leq \sigma$  sinon 1, de Leclerc  $\phi(z) = 1 - \exp(-z^2/\sigma^2)$  et de Lorentz  $\phi(z) = 1 - 1/(1 + (z/\sigma)^2)$ , comparées à la pénalisation quadratique  $\phi(z) = z^2$  (norme  $L_2$ ).

Ces fonctions ont également été mise en œuvre avec des cartes de classification pour estimer le mouvement des couches atmosphériques. Seules les données appartenant à une couche prédéfinie est prise en compte dans l'estimation du mouvement (Héas et al. 2007). La figure 3.5 montre un champ de vitesse estimé avec pénalisation robuste et la carte des poids indiquant les endroits en noir (respec. en blanc) où le modèle d'observation n'est pas vérifié (respec. est vérifié).

Notons enfin que les fonctions de pénalisation introduisent un paramètre de seuil, ici noté  $\sigma$ , à régler.

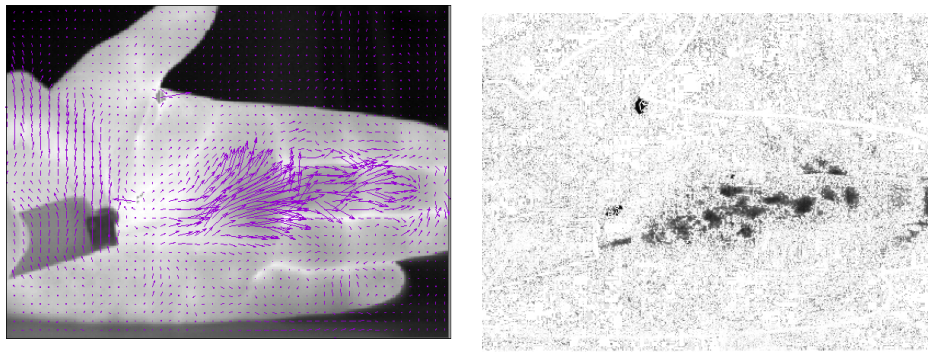


FIGURE 3.5 – Jet de gaz issu d'un briquet, visualisé par caméra infrarouge (Irstea Rennes). A gauche : mouvement d'un jet de gaz estimé par flot optique avec fonction de pénalisation de type norme  $L_1$  sur le modèle d'observation. A droite : carte de poids indiquant les endroits en noir (respec. en blanc) où le modèle de conservation de la luminance (Équation 3.2) n'est pas vérifié (respec. est vérifié).

### 3.3 GESTION DES GRANDS DÉPLACEMENTS

Les formulations variationnelles des modèles d'observations présentés au §3.1.1 ne sont valables que pour de petits déplacements typiquement inférieurs à la longueur des zones de gradients de la luminance, soit en

PIV pour des déplacements plus petits que le diamètre des particules. Pour estimer des grands déplacements ces modèles sont couramment insérés dans une approche multirésolution (cf. §3.3.1), qui peut être combinée à la corrélation lorsque les images de particules sont très bruitées (cf. §3.3.2).

### 3.3.1 Multirésolution

Les méthodes classiques de multirésolution consistent à construire une pyramide d'images obtenues par filtrage gaussien et sous échantillonnage (Bergen et al. 1992, Mémin et Perez 1998). Au niveau de résolution  $k$ , l'amplitude des déplacements est réduite d'un facteur  $2^k$ . Pour les niveaux suivants, une estimation incrémentale est effectuée, autour de la valeur déterminée au niveau précédent. La figure 3.6 illustre le principe de la multirésolution. En général, la procédure de filtrage et de sous-échantillonnage conduit à une perte d'information.

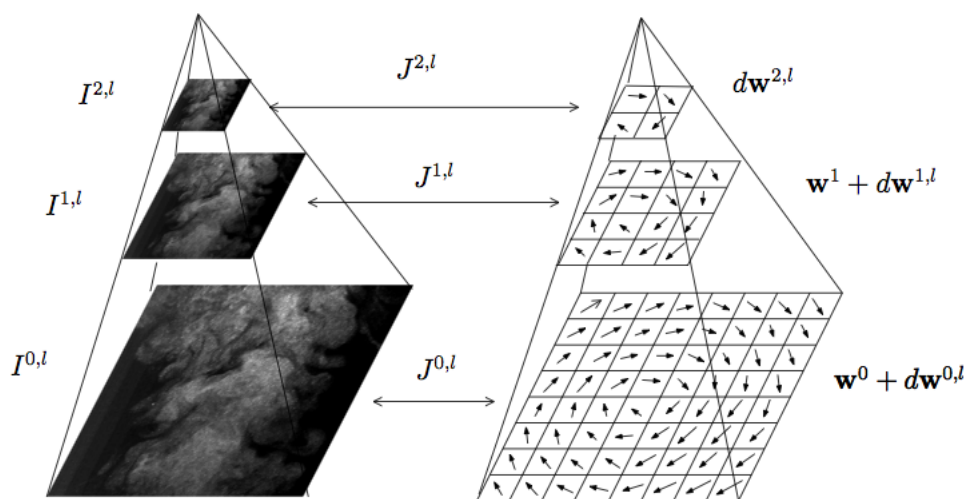


FIGURE 3.6 – Représentation multirésolution des images pour estimer les grands déplacements (Heitz et al. 2008).

#### Remarques

En PIV les particules de petites tailles (diamètre de 1 à 2 pixels) et animées de grandes vitesses (déplacements de 10 à 20 pixels) peuvent être gommées par la procédure de multirésolution. Cette perte d'information conduit à une détermination erronée du champ des vitesses. Du point de vue de la procédure de minimisation, il est difficile de trouver le minimum d'une fonction de coût si l'initialisation est fautive ou très éloignée. Dans le cas d'une estimation robuste, le problème est d'autant plus difficile que la minimisation est la plupart du temps non linéaire et en présence de nombreux minima locaux. Dans des régions de l'image à faible densité de particules, contenant un certain niveau de bruit ou avec une faible gamme de niveaux de gris, le schéma de multirésolution amplifiera l'effet du bruit sur le résultat. Au niveau de résolution le plus réduit (niveau 2 sur la figure 3.6), la procédure de sous-échantillonnage conserve statistiquement plus de bruit que d'information liée aux particules quand l'ensemencement

n'est pas dense et que les images sont bruitées. Dans la suite §3.3.2 nous proposons des solutions pour pallier cette difficulté.

### 3.3.2 Combinaison corrélation-flot optique

Pour s'affranchir des problèmes liés à l'utilisation de la multirésolution en PIV, nous avons proposé une nouvelle approche combinant la robustesse des techniques de corrélation et la densité d'information des approches variationnelles globales (Heitz et al. 2008). Ces travaux se sont inscrits dans le prolongement des recherches initiées par Héas et al. (2007) en météorologie pour l'estimation des champs de vents à partir d'images satellites. L'idée de la méthode est de remplacer l'estimation grossière de la multirésolution par une estimation dense des grands déplacements dérivés d'une collection de vecteurs  $\mathbf{u}_c$  obtenus par corrélation suivant l'approche (3.8).

Une nouvelle fonctionnelle a été définie pour estimer le champ de vitesse

$$f(\mathbf{v}) = f_d(I, \mathbf{v}) + f_r(\mathbf{v}) + f_c(\mathbf{v}, \mathbf{v}_c), \quad (3.14)$$

où  $f_c(\cdot)$  est une fonction d'énergie qui contraint les grands déplacements estimés  $\mathbf{v}$  à être proche du champ de vecteur grossier  $\mathbf{v}_c$  déterminé par corrélation. Par conséquent, la fonctionnelle  $f_c(\cdot)$  est définie comme la distance quadratique entre la solution et une collection de vecteurs déterminés à partir de corrélations  $\mathbf{v}_c^i = (u^i, v^i)$  localisés aux points  $\mathbf{x}^i = (x^i, y^i)$  et influençant leurs voisins selon une loi de distribution gaussienne bidimensionnelle  $\mathcal{N}^i(\mathbf{x}^i - \mathbf{x})$  de variance  $\sigma$ ,

$$f_c(\mathbf{v}, \mathbf{v}_c) = \gamma \int_{\Omega} \sum_{i=1}^K g^i \mathcal{N}^i(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}) \|\mathbf{v}_c^i - \mathbf{v}(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x}. \quad (3.15)$$

Dans cette expression,  $g^i$  et  $\gamma$  représentent respectivement le facteur de confiance et la fonction de poids.

L'idée consistant à tirer parti du meilleur des techniques variationnelles et de corrélations n'est pas nouvelle. Sugii et al. (2000) ont combinés successivement la corrélation et une méthode variationnelle locale de type Lucas et Kanade (cf. §3.2.1) pour obtenir une précision sous pixel et une résolution dense. De manière similaire, pour des estimations 3D3C du mouvement fluide, Alvarez et al. (2009) ont proposés une initialisation avec la corrélation puis une amélioration de l'estimation avec une approche variationnelle globale de type Horn et Schunck (cf. §3.2.2). Notre approche ne consiste pas utiliser successivement corrélation et approche variationnelle mais à les combiner ensemble dans l'estimation du mouvement. Cette méthode collaborative utilisant la corrélation comme régularisation d'une approche de flot optique est plus optimale et plus performante (Heitz et al. 2008).

La figure 3.7 montre des comparaisons entre les estimations en haut d'une méthode de flot optique soit avec multirésolution soit avec corrélation, et en bas d'une méthode de corrélation et d'une combinaison corrélation-flot optique. Pour des images de PIV avec des particules de petites tailles (1 à 2 pixels) et de grands déplacements (de l'ordre de 10

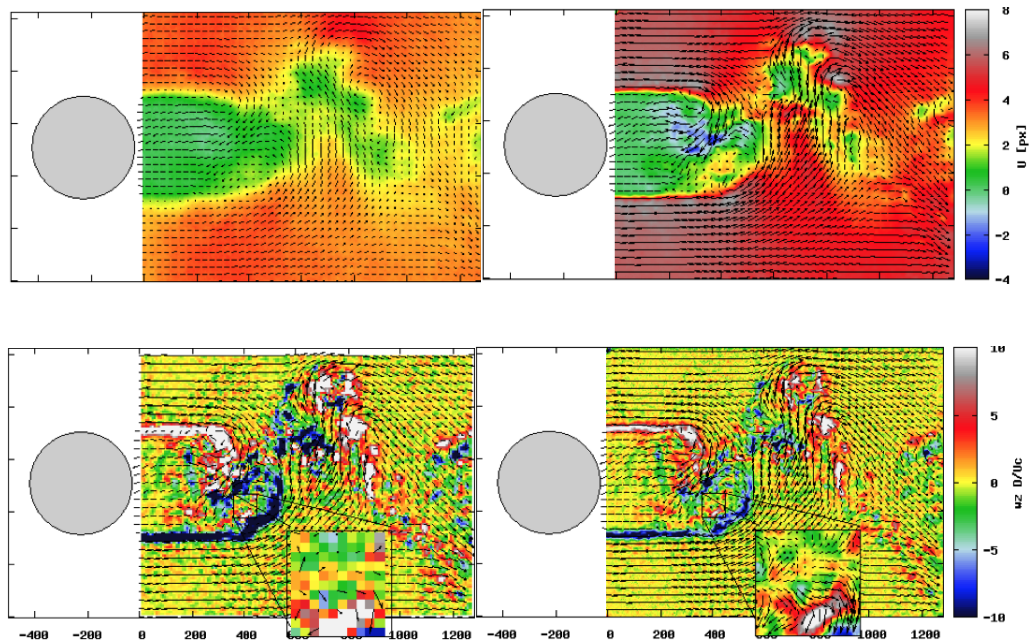


FIGURE 3.7 – Mesure PIV dans le sillage d'un cylindre à Reynolds 3900. En haut, champ de vitesse et carte de couleur de la vitesse horizontale pour à gauche le flot optique avec multirésolution et à droite l'approche corrélation-flot optique. En bas, champ de vitesse et carte de couleur de la vorticité pour à gauche la corrélation et à droite l'approche corrélation-flot optique (Heitz et al. 2008).

à 15 pixels), la combinaison corrélation-flot optique permet d'obtenir les mesures du champ de vitesse avec la meilleure précision et la meilleure résolution spatiale, comparé à la combinaison multirésolution-flot optique ou à la corrélation.

### Remarques

Les approches basées sur des stratégies d'estimations grossières à fines, comme la multirésolution en flot optique ou le multi-passes en corrélation, introduisent implicitement la notion de représentation multi-échelle. Ces techniques présentent le désavantage de propager les erreurs des échelles grossières aux échelles fines sans possibilité de correction *a posteriori*.

Pour limiter ces propagations, Zille et al. (2014) ont proposés un nouveau modèle d'observation basé sur le formalisme de la simulation des grandes échelles en mécanique des fluides. L'image et le champ de vitesse sont décomposés en composantes résolues et non-résolues, et les interactions entre échelles sont prises en compte au niveau d'un tenseur sous-maille.

Dérian et al. (2013) et Kadri Harouna et al. (2013) ont construit une procédure d'estimation du flot optique basée sur une décomposition en ondelettes du champ de vitesse. Cette décomposition espace-échelle offre un cadre mathématique pertinent pour définir des estimateurs multi-échelles, évitant les inconvénients de l'approche classique de multirésolution.

### 3.4 RÉGULARISATIONS

Le premier modèle de régularisation proposé par Horn et Schunck (1981), basé sur une régularité d'ordre un, est adapté à l'estimation de mouvements quasi-rigides comme les objets. Ruhnau et al. (2005) et Corpetti et al. (2006) sont les premiers à avoir évalué ses performances pour la mesure PIV. Dans la foulée, des régularisations plus adaptées au mouvement fluide ont été développées. Elles mettent en œuvre des régularités d'ordre deux et plus (cf. §3.4.1), des modèles statistiques de la turbulence (cf. §3.4.2), ou encore s'appuient sur les équations de Navier-Stokes (cf. §3.4.3).

#### 3.4.1 Spatiales d'ordre deux et plus

En utilisant les conditions d'optimalité d'Euler-Lagrange, on montre que sur le plan de la minimisation la régularisation d'ordre un (3.10) est équivalente à la régularisation *div-curl* suivante

$$f_r(\mathbf{v}) = \alpha \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\operatorname{div}^2 \mathbf{v} + \operatorname{curl}^2 \mathbf{v}) dx, \quad (3.16)$$

où  $\operatorname{div}$  et  $\operatorname{curl}$  sont respectivement la divergence et le rotationnel du champ de vitesse. Par conséquent, une régularisation d'ordre un pénalise les amplitudes de la divergence et de la vorticité, ce qui n'est pas adapté à l'estimation du mouvement fluide, en particulier lorsqu'il est turbulent (variations de la vorticité) et/ou lorsque l'on observe un écoulement tri-dimensionnel projeté sur un plan (variations de la divergence du champ apparent, cf. §3.1.1). Il est alors plus pertinent d'utiliser la régularisation *div-curl* d'ordre deux proposée par Suter (1994),

$$f_r(\mathbf{v}) = \alpha \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\|\nabla \operatorname{div} \mathbf{v}\|^2 + \|\nabla \operatorname{curl} \mathbf{v}\|^2) dx. \quad (3.17)$$

Cette régularisation d'ordre deux permet également de tirer parti de la décomposition de Helmholtz –séparant le champ de vitesse en une composante solénoïdale (divergence nulle), une composante irrotationnelle (avec conditions aux limites nulles à l'infini) et une composante harmonique ( coulement potentiel)– valable en dimension deux. Elle a été mise en œuvre par Corpetti et al. (2002) puis par Yuan et al. (2007) pour l'estimation du mouvement fluide.

Toutefois, l'utilisation de dérivées d'ordre deux pose des difficultés numériques. Contrairement à (3.10) qui peut se résoudre avec des schémas numériques classiques, (3.17) conduit à un système d'équations d'Euler-Lagrange complexe dont la discrétisation n'est pas triviale.

Pour s'affranchir du problème de discrétisation, Corpetti et al. (2002) ont modifié (3.17) en introduisant deux variables auxiliaires permettant une estimation directe de la divergence et de la vorticité. Nous avons effectué une évaluation exhaustive de cette méthode de flot optique pour la mesure PIV (Corpetti et al. 2006). Comme illustré sur la figure 3.2, les estimations effectuées sur la base d'images synthétiques VSJ fournissent les meilleurs résultats pour la régularisation *div-curl* du deuxième ordre combinée au modèle d'observation (3.4). Des mesures PIV réelles dans une



couche de mélange turbulente et dans le sillage d'un cylindre, comparées à des mesures fil chaud et à la corrélation, ont confirmé les bons résultats obtenus avec ce schémas flot optique.

En utilisant les différences finies mimétiques, Yuan et al. (2007) ont développé un nouveau schémas variationnel, basé sur une régularisation *div-curl* du deuxième ordre, dédié à l'estimation d'écoulements incompressible en imposant implicitement la condition de divergence nulle. Nous avons évalué cette nouvelle approche avec des images synthétiques de particules et de scalaire générées à partir d'une simulation numérique directe bidimensionnelle d'une turbulence homogène isotrope. Comparée à la technique de corrélation de LaVision (Davis 7.2) et à la méthode de Corpetti et al. (2006), l'approche de Yuan et al. (2007) fournit des mesures plus précises sur plus large gamme d'échelles (Heitz et al. 2010). Le caractère périodique de l'écoulement dans deux directions nous a permis d'effectuer une analyse spectrale fine des résultats, comme proposée par Foucaut et al. (2004) pour la PIV. La figure 3.8 montre les meilleurs spectres d'énergie et les plus petits spectres d'erreurs obtenus avec les estimations de Yuan et al. (2007). Pour les observations d'un scalaire, les différences entre l'approche de Yuan et al. (2007) et les autres est plus importantes, en particulier aux grandes échelles, pour lesquelles la méthode de corrélation est en échec.

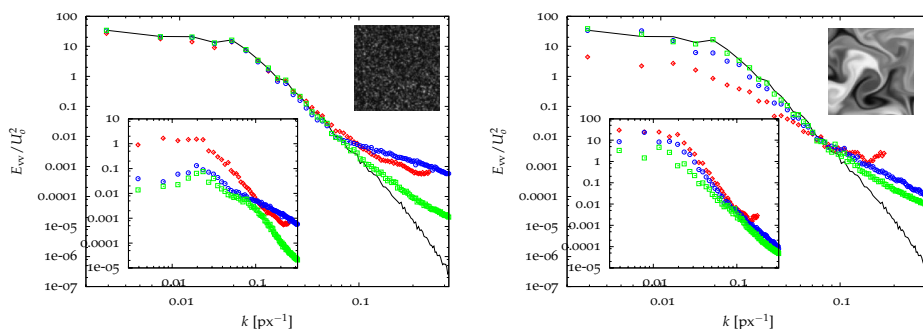


FIGURE 3.8 – Spectre de la composante de vitesse verticale dans un écoulement turbulent bi-dimensionnel. A gauche, images synthétiques de particules ; A droite, images synthétiques d'un scalaire. Ligne noire, référence DNS ; Symboles bleus, approche de Corpetti et al. (2006) ; Symboles verts, approche de Yuan et al. (2007) ; Symboles rouges, corrélation de LaVision (Davis 7.2). En insert, les spectres des erreurs.

### Remarques

Notons qu'imposer une condition de divergence nulle assurant l'incompressibilité du fluide est souvent problématique et nécessite des schémas de discrétisation avancés comme par exemple ceux utilisés par Yuan et al. (2007). Récemment, Kadri Harouna et al. (2013) ont développés un estimateur de flot optique performant imposant élégamment cette condition en utilisant des bases d'ondelettes bi-orthogonales.

Des régularisations précises d'ordre élevé basées sur des ondelettes différentiables ont été proposées par Kadri Harouna et al. (2013). L'approche permet d'imposer une régularité d'ordre  $n$  sur l'estimation du champ de vitesse, par pénalisation des dérivées de la vitesse d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les résultats obtenus sur des séquences synthétiques et réels d'images de particules ou d'un scalaire sont particulièrement précis, et plus performants

que les méthodes de Corpetti et al. (2002) et de Yuan et al. (2007). La figure 3.9 illustre le niveau de détails mesurés dans le sillage proche d'un cylindre circulaire à Reynolds 3900.

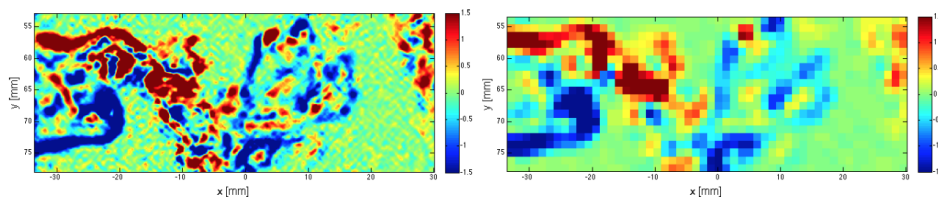


FIGURE 3.9 – Vorticité  $[\omega_z D/U]$  dans le sillage proche d'un cylindre à Reynolds 3900 obtenues par mesures PIV dans une soufflerie d'Irstea Rennes (voir Dérian (2012) pour détails expérimentaux). A gauche, estimation flot optique Kadri Harouna et al. (2013); A droite, estimation corrélation LaVision (Davis 8).

Les régularisations d'ordre élevé s'appuient sur décomposition *div-curl* de l'écoulement et permettent d'imposer implicitement l'incompressibilité, ce qui est particulièrement intéressant pour un estimateur PIV volumique. Cependant, la régularité imposée à la solution n'est pas basée sur une modélisation de la physique des fluides. Comme ces régularisations ne sont pas physiquement consistantes, elles sont pondérées par un paramètre  $\alpha$  ajusté de manière subjective (cf. §3.2.2). Dans la suite (§3.4.2) nous présentons une régularisation basée sur un modèle physique du type  $f_r(\mathbf{v}) = 0$ , c-à-d d'une contrainte dure, pour laquelle le paramètre  $\alpha$  n'a plus besoin d'être spécifié car il devient une solution du problème d'optimisation.

### 3.4.2 Spatiales basées sur les lois de la turbulence

Nous avons proposé une nouvelle régularisation multiéchelle basée sur la décroissance de l'énergie cinétique turbulente (Héas et al. 2009a;b; 2012; 2013). Contrairement aux autres approches, le modèle est physiquement consistant et à l'avantage de résoudre le problème de l'ouverture en estimant les poids affectés aux différentes échelles de régularisation. La méthode consiste à contraindre le champ de vitesse *-via* la fonction de structure d'ordre deux- à suivre les modèles statistique prédits par Kolmogorov. Cette nouvelle technique estime également les paramètres de la loi à partir des images.

A partir d'arguments simples, Kolmogorov a modélisé le spectre d'énergie cinétique d'un écoulement turbulent (Frisch 1995). Considérons la fonction de structure longitudinale  $S_p(\ell) \equiv \langle \delta v(\ell)^p \rangle$ , correspondant aux moments d'ordre  $p$  des incréments de la vitesse longitudinale  $\delta v(\mathbf{v}, \ell \mathbf{n}, t) \equiv (\mathbf{v}(\mathbf{x} + \ell \mathbf{n}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}$ , avec  $\mathbf{n}$  un vecteur unitaire dirigé suivant la séparation  $\ell$  entre deux points. Pour un écoulement homogène, stationnaire, isotrope et pour des séparations  $\ell$  dans le domaine inertiel de la cascade, Kolmogorov modélise la fonction de structure de la vitesse sous la forme d'une loi de puissance du type  $S_p(\ell) \sim \beta \ell^{\zeta_p}$ , où il suggère  $\zeta_p$  égal à  $p/3$  indiquant un comportement universel pour les fluctuations à petites échelles. La théorie de Kolmogorov s'appuie sur deux hypothèses d'auto-similarité. Pour  $\eta < \ell < L$  les fonctions de structures d'ordre 2 et 3 s'écrivent  $S_2(\ell) \sim C_2(\epsilon \ell)^{2/3}$  et  $S_3(\ell) \sim C_3 \epsilon \ell$ , où  $C_2, C_3$  sont des constantes,  $\epsilon$  est la dissipation moyenne d'énergie et  $\eta$  est l'échelle élémentaire de la



cascade d'énergie. Cependant, en raison du phénomène d'intermittence croissant avec les petites échelles, l'exposant  $\zeta_p$  a en réalité une dépendance non-linéaire avec l'ordre  $p$  et les écoulements turbulents ne sont pas strictement auto-similaires (Frisch 1995). Notons que l'exposant de la fonction de structure d'ordre 3 n'est pas affecté par cet écart à la réalité. De plus, les écoulements turbulents sont toujours réguliers dans la zone dissipative, c-à-d pour  $0 < \ell < \eta$ , et la fonction de structure d'ordre 2 s'écrit alors  $S_2(\ell) \sim \beta \ell^2$ .

Nous avons choisi comme modèle de régularisation la fonction de structure d'ordre 2 car du point de vue de l'optimisation elle constitue une contrainte quadratique pratique. Par ailleurs,  $S_2(\ell)$  peut être reliée au spectre d'énergie et à la fonction de corrélation en deux points, qui sont des quantités intéressantes pour l'analyse des écoulements. Etant donné que l'exposant de la loi de puissance est inconnu, nous prenons en compte les écarts aux lois prédites en sélectionnant la loi de puissance la plus probable définie par les paramètres  $\beta$  et  $\zeta_2$ , sachant les données images.

La nouvelle régularisation multi-échelle définie à l'échelle  $\ell$  s'écrit

$$f_{r_\ell}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(S_2(\ell) - \beta \ell^{\zeta_2}) = 0, \quad (3.18)$$

où  $S_2(\ell)$  est obtenu par intégration spatiale sur le domaine de l'image et dans toutes les directions. Le problème de minimisation associé à cette nouvelle régularisation s'écrit

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{v}} f_d(I, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}, \\ \text{sous les contraintes :} \\ f_{r_\ell}(\mathbf{v}) = 0, \quad \forall \ell \in \mathbf{I}, \end{cases} \quad (3.19)$$

où  $\mathbf{I}$  est l'intervalle d'application de la loi de puissance. Notons qu'un intervalle aussi réduit que  $\mathbf{I} = [1\text{px}, 2\text{px}]$  est suffisant pour estimer une solution précise sans imposer une véritable auto-similarité.

Cette nouvelle approche a pu être validée avec succès sur des expériences d'images synthétiques et réelles (Héas et al. 2013). Elle a également été mise en oeuvre et fournie des résultats intéressants sur des séquences d'images satellites (Héas et al. 2012).

Les résultats obtenus sur des images PIV réelles, illustrés figure 3.10, montrent clairement le bénéfice apporté par la régularisation basée sur les lois de puissance qui permettent d'estimer par exemple pour une turbulence de grille l'ensemble de la dynamique, c-à-d de l'échelle intégrale de l'ordre de 100 pixels à l'échelle de Kolmogorov de l'ordre de 3 pixels. Sur la figure 3.10 le zoom dans le champ de vecteurs superposé à l'image de particules montre que les plus petits tourbillons mesurés sont bien dûs aux mouvements de particules. Notons que dans cet écoulement peu énergétique et pour lequel l'énergie est cantonnée aux petites échelles les techniques classiques de PIV sont largement mises en défaut.

### Remarques

Dans Héas et al. (2009a) et dans Heitz et al. (2011b) nous avons pu exploiter le caractère universel de la cascade d'énergie dans la zone dissipative (i.e.  $\zeta_2 = 2$ ). En effet, pour un certain nombre d'expériences de PIV

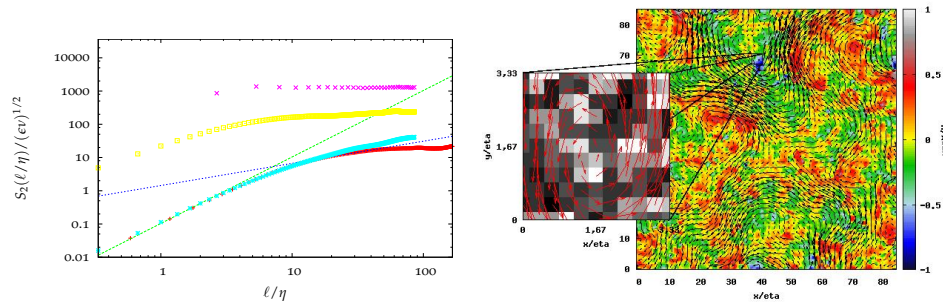


FIGURE 3.10 – Turbulence de grille à nombre de Reynolds égal à 3000. A gauche, Comparaisons de fonctions de structure d’ordre 2. Rouge, mesures fil-chaud ; Turquoise, méthode proposée ; Jaune, approche de Horn et Schunck (1981) ; Fuchsia ; corrélation ; Tiret vert,  $\sim \ell^2$  ; Tiret bleu,  $\sim \ell^{2/3}$ . A droite, champs de vecteurs avec vorticité et images de particules estimés avec la méthode proposée (Heitz et al. 2011b).

nous pouvons utiliser un modèle de régularisation basé sur  $S_2(\ell) \sim \beta \ell^2$  pour  $0 < \ell < \eta$ . Avec un facteur d’agrandissement  $M$  classique compris entre 10 et 15 pixels/mm, et pour un régime de nombre de Reynolds allant jusqu’à environ  $10^4$ , dans l’air l’échelle de Kolmogorov  $\eta$  peut être de l’ordre de 0,1 à 1 mm correspondant alors à quelques pixels dans l’espace image. Dans ce cas, la zone dissipative peut être observée dans l’image et ses caractéristiques exploitées pour la mesure du champ de vitesse. Par ailleurs, nous observons que pour estimer un champ de vecteur avec précision, il est suffisant de régulariser la solution sur une gamme d’échelle très réduite, c-à-d pour  $1 \leq \ell \leq 2$  pixels. Tout ceci présente l’avantage important de ne quasiment pas imposer d’auto-similarité à la solution, et d’avoir pour seul paramètre  $\beta$  le taux de transfert d’énergie.

L’approche proposée permet de mesurer les vitesses tout en caractérisant la turbulence par l’estimation conjointe des paramètres  $\beta$  et  $\zeta_2$ . Elle est par définition moins adaptée quand l’image contient une forte hétérogénéité de la turbulence. Dans ce cas la régularisation devrait tenir compte du fait que le taux de transfert d’énergie inter-échelles varie fortement dans l’espace. Ceci devrait pouvoir être envisagé par l’utilisation des ondelettes (Dérian et al. 2011) ou encore plus facilement par l’intégration de cette nouvelle méthode globale dans un schémas semi-local (Fortun et Kervrann 2012).

### 3.4.3 Spatiotemporelle basées sur les équations de Navier-Stokes

Le pendant naturel à la régularisation spatiale est la régularisation temporelle. Pourtant, dans la communauté vision par ordinateur, ce type de régularisation n’a été proposé que tardivement par Weickert et Schnörr (2001) et n’est pas devenu légion depuis. Ceci s’explique probablement par l’absence de modèle dynamique générique décrivant le mouvement des objets observés dans les scènes. Weickert et Schnörr (2001) ont proposés une régularisation contraignant les dérivées temporelles de la vitesse à rester faibles, ce qui n’est pas adapté au mouvement fluide. Pour les écoulements nous disposons des équations de Navier-Stokes modélisant

la dynamique du fluide dans l'espace et dans le temps. La difficulté est d'arriver à en tirer parti dans le cadre d'une méthode de mesure de type PIV. Pour les écoulements bidimensionnels, Rhunau et al. (2007) ont régularisés l'estimation de la vorticité en la contraignant à être proche d'une prévision, obtenue par simulation des équations de Navier-Stokes en formulation vitesse-vorticité. La fonctionnelle d'énergie (3.9) est alors composée du terme de régularisation spatiotemporelle plus d'un terme du second ordre pénalisant le gradient de la vorticité. Ce dernier terme reste nécessaire pour obtenir des solutions d'une certaine régularité spatiale.

Nous avons étendu cette régularisation adaptée aux écoulements 2D pour le cas des écoulements 3D turbulents observés dans des tranches éclairées, typiques de la PIV (Heitz et al. 2008). L'approche proposée est une adaptation pour la PIV du schémas de Héas et al. (2007), développée pour la mesure de la dynamique atmosphérique à partir d'images satellites. La dynamique spatiotemporelle est alors modélisée par une formulation shallow water grandes échelles des équations de Navier-Stokes intégrée sur l'épaisseur de la nappe éclairant l'écoulement.

Pour estimer le champ de mouvement  $\mathbf{v}$  on définit la fonctionnelle d'énergie

$$f(\mathbf{v}) = f_d(\mathbf{v}, I) + f_r(\mathbf{v}) + f_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}_p), \quad (3.20)$$

ou  $f_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}_p)$  est une fonctionnelle d'énergie contraignant les vitesses  $\mathbf{v}$  à être consistantes avec le mouvement prévu  $\mathbf{v}_p$  par intégration des équations de la dynamique du fluide. Cette fonctionnelle est définie comme la distance quadratique entre le champ à estimer et le champ dense propagé  $\mathbf{v}_p = (u_p, v_p)$  et s'écrit

$$f_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}_p) = \beta \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_p(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x}, \quad (3.21)$$

où  $\beta$  est un facteur de poids à ajuster.

Pour un écoulement turbulent éclairé par une nappe laser, l'épaisseur de la nappe est considérée constante dans l'espace et dans le temps. Par conséquent, les équations sont indépendante de la variable d'épaisseur. Pour les écoulements 3D la divergence du mouvement apparent dans le plan de l'image n'est pas faible en raison de la composante hors plan, et la simplification des équations shallow water en formulation vorticité-divergence conduit au système dynamique

$$\begin{cases} \zeta_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \zeta + \zeta \zeta = (\nu_s + \nu) \Delta \zeta \\ \zeta_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \zeta + \zeta^2 - 2|J| = (\nu_s + \nu) \Delta \zeta, \end{cases} \quad (3.22)$$

où  $\zeta$  est la vorticité,  $\zeta$  la divergence,  $|J|$  le déterminant de la matrice Jacobienne des vitesses  $(u, v)$ ,  $\nu_s = (C \Delta_x)^2 |\zeta|$  le modèle sous-maille basé sur l'entrophie proposé par Mansour et al. (1978), et  $C$  la constante universelle de Lilly égale à 0,17. Dans le cas 2D ce modèle se réduit à l'équation d'advection-diffusion de la vorticité.

Les résultats obtenus avec la régularisation spatiotemporelle indiquent des apports au fil du temps, dans les régions à fort gradients de la vitesse. Ces bénéfices sont d'autant plus importants que les images de particules sont très bruitées (cf. figures 3.11 et 3.12).

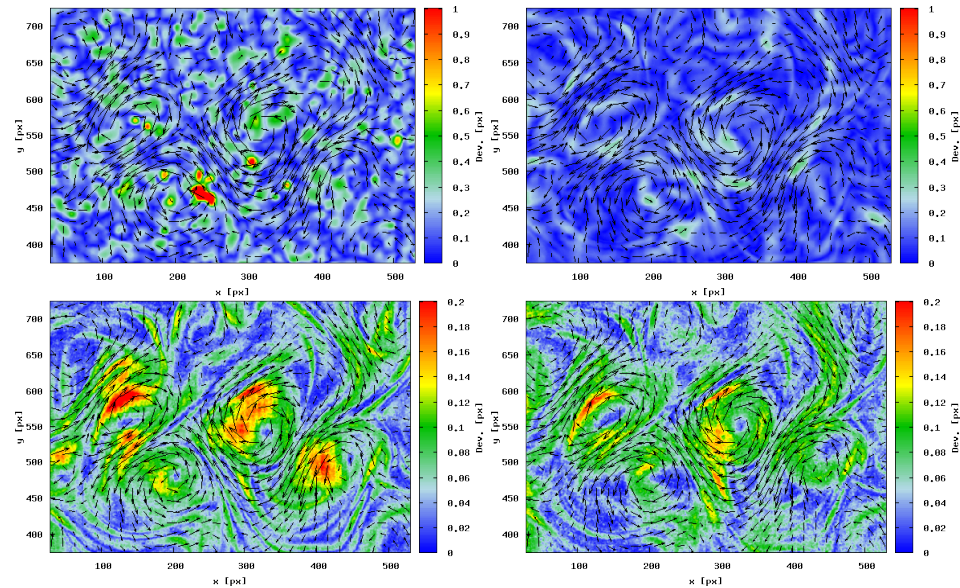


FIGURE 3.11 – Cartes d’erreurs sur le module de la vitesse et champ de vitesse estimé avec, à gauche : une régularisation spatiale ; à droite : une régularisation spatiotemporelle. En haut : images de particules peu bruitées PSNR = 36 dB ; En bas : images de particules très bruitées PSNR = 12 dB (Heitz et al. 2008).

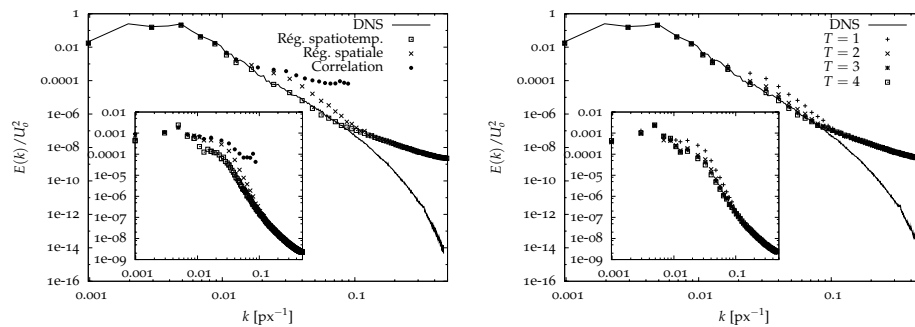


FIGURE 3.12 – Réponse spectrale des estimateurs avec des images de particules très bruitées, PSNR=12dB : A gauche, comparaisons entre trois estimateurs ; A droite, estimation spatiotemporelle au fil du temps. Les spectres des erreurs sont tracés dans les encarts (Heitz et al. 2008).

### Remarques

Parmi les premières méthodes de mesures de vitesses d’écoulements à partir d’images utilisant les équations de Navier-Stokes, on peut citer les travaux de Okuno et al. (2000) pour post-traiter des mesures par corrélation et calculer la pression. Plus récemment Rhunau et Schnörr (2007) estiment la pression et la vitesse avec une technique de flot optique basée sur du control optimal pour satisfaire les équations de Stokes stationnaires. Enfin, dans un contexte d’assimilation de données images (cf. chapitre 4) Cuzol et al. (2007), Cuzol et Mémin (2009) utilisent un filtre particulaire et Papadakis et Mémin (2008) une méthode variationnelle prometteuse pour pour estimer un champ de vitesse dynamiquement consistant. Notons que toutes ces techniques n’ont été appliquées qu’aux cas d’écoulements bidimensionnels. Le lecteur trouvera une revue sur ces méthodes dans Heitz et al. (2010). Depuis, les équations de Navier-Stokes sont de plus en plus mise en œuvre pour reconstruire les écoulements, par exemple pour les

données PIV à trous (Sciacchitano et al. 2012a), pour la mesure PIV 3D (Schneiders et al. 2014) ou encore PTV 3D (Schneiders et al. 2015).

Notons que quelques méthodes de mesures prennent en compte le temps sans modèle dynamique, soit par pyramide temporelle pour les corrélations (Sciacchitano et al. 2012b), soit par régularisation pour le flot optique global (Weickert et Schnörr 2001), soit plus récemment par une forme polynomiale en temps pour le flot optique local (Yegavian et al. 2015).

### 3.5 ESTIMATION DES INCERTITUDES DE MESURES

Les techniques de vélocimétrie par images de particules (PIV) sont désormais largement utilisées pour la mesure de la turbulence. Si l'estimation des incertitudes de mesures de ces méthodes est d'un intérêt évident, elle n'en reste pas moins un défi (Christensen et Scarano 2015).

Pour estimer les incertitudes associées à une mesure de vitesse on peut procéder par inter-comparaison en construisant un contexte expérimental (Neal et al. 2015) ou encore par le calcul. Pour cela il faut modéliser le problème en établissant la relation de dépendance entre la vitesse et les grandeurs d'entrées. L'identification des sources d'incertitudes, puis l'estimation des incertitudes associées à ces sources permet de calculer une incertitude résultante sur la mesure de la vitesse. La démarche proposée par le guide pour l'expression de l'incertitude de mesure, nommé GUM, normalise la façon de propager les incertitudes lorsque l'on dispose d'une fonctionnelle reliant la grandeur estimée aux variables contenant des incertitudes (ISO/IEC-Guide98-3 :2008 E). Le supplément du GUM élargit l'approche à la propagation des distributions à l'aide de simulations de Monte Carlo (ISO2008). Cette démarche pourrait s'appliquer aux problème inverse de l'estimation du mouvement dans les images. Toutefois, cette approche de propagation des distributions a très peu été appliquée en PIV (Wilson et Smith 2013). De plus cette approche ne détaille pas explicitement les incertitudes liées aux modèles constituant la méthode de mesure. Par exemple, dans le cas de mesures PIV s'appuyant sur des techniques de corrélation, l'incertitude serait associée à la méthode et au modèle utilisés pour estimer la position du pic de corrélation, ainsi qu'à l'*a priori* de vitesse constante dans la fenêtre d'interrogation. De manière générale dans la mesure du mouvement à partir d'image il s'agit de l'incertitude associée à la détermination d'un minimum ou d'un maximum d'une fonctionnelle composée d'un modèle d'observation et d'un modèle de régularisation, encore appelé *a priori*. Cette incertitude peut pourtant être considérable et apporter des informations précieuses sur la confiance associée à la mesure. Des estimations de cette quantité sont possibles si le problème est formulé dans un cadre probabiliste. Dans Heitz et al. (2011a), nous avons formulé le problème de l'estimation *globale* du mouvement de manière probabiliste dans un cadre bayésien, de façon à fournir pour chaque vecteur vitesse estimé son incertitude. En effet, le champ de vitesse calculé est entâché d'incertitudes liées notamment au bruit dans l'image, aux faibles gradients de luminance et aux grands gradients de vitesse, au problème de l'ouverture et aux régularisations associées.



Pour déterminer les incertitudes sur le champ de vitesse estimé, il faut calculer l'expression de la probabilité du champ de vitesse conditionnée aux images, c-à-d

$$P(\mathbf{V}|\mathbf{I}), \quad (3.23)$$

où  $\mathbf{V}$  est un grand vecteur contenant les vitesses  $\mathbf{v}$  en chaque point de l'image et  $\mathbf{I}$  est un vecteur composé des valeurs de niveaux de gris en chaque point de l'image. A l'aide de la formule de Bayes cette expression s'écrit

$$P(\mathbf{V}|\mathbf{I}) \propto P(\mathbf{I}|\mathbf{V})P(\mathbf{V}), \quad (3.24)$$

où  $P(\mathbf{I}|\mathbf{V})$  est la probabilité conditionnelle associée au modèle d'observation (3.2) et  $P(\mathbf{V})$  est la probabilité sur la vitesse associée à la régularisation. La distribution  $P(\mathbf{V}|\mathbf{I})$  résultante est gaussienne. Les covariances et les moyennes qui lui sont associées peuvent être estimés à partir de techniques classiques (Heitz et al. 2011a).

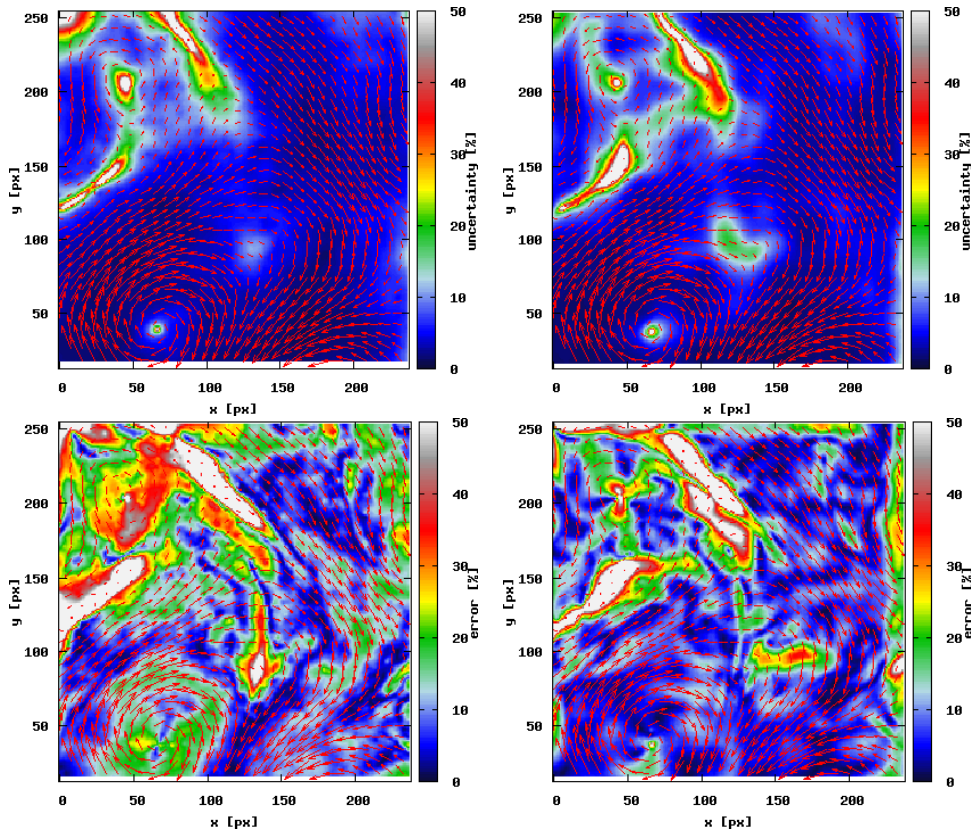


FIGURE 3.13 – Comparaisons entre (Haut) l'incertitude liée à la méthode et (Bas) l'erreur absolue sur le module de la vitesse, pour (Gauche) méthode de Horn et Schunck (1981) et (Droite) méthode de Héas et al. (2012).

La figure 3.13 illustre une comparaison de résultats obtenus avec Horn et Schunck (1981) et Héas et al. (2012). L'estimation des confiances proposée, permet d'analyser la pertinence des modèles mis en jeu. On montre en particulier que la régularisation de Héas et al. (2012) est plus adaptée aux écoulements turbulents que celle proposée par Horn et Schunck (1981). Le formalisme bayésien permet non seulement d'améliorer l'estimation des vitesses, mais également d'affiner l'estimation des incertitudes par l'introduction, dans les modèles de connaissance, d'une modélisation probabiliste des différentes sources d'incertitudes.

**Remarques**

Corpetti et Mémin (2012) ont proposé un estimateur de flot optique locale basé sur une reformulation du modèle d'observation (3.2) intégrant les incertitudes sous forme stochastique. Cette nouvelle approche fournit des estimations avec des ellipses de confiances associées à chaque vecteurs.

Mémin (2014) a généralisé cette démarche aux équations de Navier-Stokes, redéfinissant les équations de la dynamique des fluides avec modélisation des erreurs. Cette nouvelle modélisation nourrit plein d'espoir en particulier pour l'assimilation de données tenant compte des erreurs modèles.

# RECONSTRUCTION DU MOUVEMENT À PARTIR D'IMAGES

# 4

CETTE partie s'inscrit naturellement dans la continuité du chapitre 3 en abordant plus généralement la question de la mesure du mouvement des écoulements avec une séquence d'images et des modèles de la dynamique des fluides. L'assimilation de donnée fournit un bon cadre pour poser ce problème et permet d'ouvrir le sujet à la problématique générale du couplage entre EFD (pour Experimental Fluid Dynamics) et CFD (pour Computational Fluid Dynamics).

Cette partie concerne les travaux les plus récents sur lesquels j'ai travaillé, et qui nourrissent le plus de perspectives pour mes activités de recherche à moyen et long termes (cf. chapitre 4.4.3). Les travaux ont été menés en collaboration avec Etienne Mémin dans le cadre des post-doctorats d'Alejandro Gronsksis (2009-2010) et de Benoît Combès (2011-2012), et plus récemment de la thèse de doctorat de Cordelia Robinson (2011-2015).

Nous présentons les grandes méthodes d'assimilation de données avec en filigrane leurs applications à la dynamique des fluides. Nous voyons à travers deux exemples le potentiel de ces approches pour reconstruire des écoulements relativement complexes. Nous montrons que les seules équations de la dynamique des fluides ne sont pas suffisantes pour faire une simulation réaliste, et qu'il faut disposer d'une condition initiale et aux limites. Dans de nombreuses configurations, on ne connaît pas la condition d'entrée instationnaire et aucune condition initiale ne s'impose naturellement. Nous montrons que les termes de bords et initiaux peuvent être estimés à partir de données d'observation. La modélisation doit alors tenir compte des données d'observation, qui par ailleurs peuvent être à des échelles différentes de celles de la simulation de la dynamique de l'écoulement. Ce travail s'inscrit dans une démarche globale qui vise à terme la reconstruction 3D des écoulements turbulents à partir d'observations images.

## 4.1 POSITION DU PROBLÈME

Les écoulements turbulents sont décrits de façon précise par les équations de Navier-Stokes. Ce modèle peut être utilisé pour prévoir le comportement d'un écoulement, à condition de connaître parfaitement l'état initial et les conditions aux limites du système, ce qui en général n'est pas possible. En pratique pour des questions de coût de calcul, le modèle de la dynamique des fluides est une approximation des équations de



Navier-Stokes, il est donc imparfait. De plus les données pour définir les conditions initiale et aux limites d'un écoulement turbulents sont biaisées, bruitées et éparses. Tout ceci conduit à des différences significatives entre l'état du système simulé et la réalité. Toutefois, on peut tirer parti des observations temporelles en les incorporants dans le modèle dynamique et obtenir des estimations améliorées des états du système, ainsi que des informations sur les incertitudes de ces estimations.

Le problème de l'estimation d'un état est un *problème inverse* à partir d'observations et d'un modèle décrivant l'état. Quand le comportement de l'état varie également dans le temps suivant un modèle dynamique, l'estimation de l'état à partir d'observations devient un problème d'*Assimilation de Données* (AD). L'objectif de l'assimilation de données est d'utiliser des observations (mesures avec incertitudes) en les combinants à un modèle dynamique du système (équations d'évolution avec incertitudes) pour reconstruire des estimations de l'état courant et futur du système, en fournissant également les estimations des incertitudes associées à ces reconstructions.

En dynamique des fluides le problème de l'assimilation de données est caractérisé par un modèle non-linéaire, de grande taille, avec de l'ordre de  $10^7$  à  $10^8$  variables d'état pour un petit problème 3D. Le nombre de variables observées est également important, de l'ordre de  $10^5$  en PIV2D à  $10^7$  en tomoPIV pour une fraction de secondes, mais ces données restent souvent éparses au regard du problème à reconstruire. En pratique le problème d'assimilation est mal posé et les estimations sont sensibles aux erreurs.

Il existe deux grandes familles d'approches pour résoudre le problème d'assimilation de données : les méthodes *temporelles* et les méthodes *séquentielles*. Dans le premier cas on détermine une trajectoire qui suit au mieux les observations sur la fenêtre de temps, et on utilise l'état du système à la fin de la fenêtre pour calculer la prochaine prévision. Il s'agit des techniques d'*assimilation variationnelle*. Dans le second cas, les observations alimentent le modèle à chaque pas de temps d'apparition. Une estimate idéale est alors estimée et utilisée pour propager le modèle. Il s'agit des techniques de *filtrage stochastique*. Les approches temporelles et séquentielles sont illustrées respectivement sur les figures 4.1 et 4.2. Dans la suite nous présentons les techniques d'assimilation de données que nous avons mises en œuvre pour la dynamique des fluides. Le lecteur trouvera plus de détails théoriques sur l'assimilation de données appliquée à la géophysique par exemple dans le cours de Boquet (2014-2015).

#### 4.1.1 Assimilation variationnelle

Le principe général de l'assimilation variationnelle peut être décrit de la façon suivante. On considère l'état du système représenté par la variable  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$  dont l'évolution spatiotemporelle est décrite par les équations

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) + \mathbb{M}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)) &= 0 \\ \mathbf{X}(\mathbf{x}, t_0) &= \mathbf{X}_0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $\mathbb{M}$  est un modèle dynamique non-linéaire et  $\mathbf{X}_0(\mathbf{x})$  est la condition initiale inconnue. Par ailleurs, on considère que l'on dispose d'observations

$\mathcal{Y}$  de l'état inconnu du système. Ces observations sont mesurées au travers de l'opérateur non-linéaire  $\mathbb{H}$ . Les écarts entre les observations et la variable d'états sont définis au moyen de la fonction de coût

$$\mathcal{J}(\mathbf{X}_0) = \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathcal{Y}(t) - \mathbb{H}(\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, t))\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2 dt + \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}^b\|_{\mathbf{B}^{-1}}^2, \quad (4.2)$$

où  $\mathbb{H}$  est un opérateur d'observation non-linéaire qui permet de passer de l'espace d'état vers l'espace des observations, et  $\mathbf{X}^b$  est l'ébauche, c-à-d la première estimation de la condition initiale résultat par exemple d'une précédente analyse. Le second terme de la fonctionnelle est un terme de régularisation qui permet d'introduire des informations *a priori*. Les normes  $\|\cdot\|_{\mathbf{R}^{-1}}$  et  $\|\cdot\|_{\mathbf{B}^{-1}}$  dérivent d'un produit scalaire et permettent de tenir compte des statistiques d'erreurs par le biais des matrices de covariances d'erreurs tel que par exemple pour l'ébauche

$$\|\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}^b\|_{\mathbf{B}^{-1}}^2 = (\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}^b)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}^b), \quad (4.3)$$

où  $\mathbf{B}$  est la matrice de covariance d'erreurs d'ébauche. De la même manière on tient compte de la matrice de covariance d'erreurs d'observations  $\mathbf{R}$ .

La solution du problème d'assimilation est alors l'estimation de la condition initiale  $\mathbf{X}_0^a$ , encore appelée état *analysé*, qui minimise la fonction de coût (4.2), c-à-d qui annule son gradient par rapport aux variables de contrôle, soit  $\nabla \mathcal{J}(\mathbf{X}_0^a) = 0$ . En général, vu la taille des problèmes étudiés un calcul direct du gradient de la fonction n'est pas envisageable. Une solution consiste à introduire une *formulation adjointe* (Le-Dimet et Talagrand 1986, Lions 1971). Le gradient de la fonction coût est alors obtenu par une succession de boucles enchainant intégration direct du modèle dynamique (4.1), puis intégration rétrograde du modèle dynamique adjoint. Le modèle adjoint est idéalement construit à partir du modèle dynamique numérique. Le lecteur trouvera, dans Robinson (2015), plus de détails sur ce schémas d'assimilation variationnelle appelé 4DVar et sur ses variantes, ainsi que sur une façon de calculer l'adjoint du modèle numérique direct. La figure 4.1 illustre le principe de l'assimilation variationnelle comprenant l'intégration directe du modèle dynamique (en bleu) puis rétrograde de son adjoint (en orange) pour déterminer la valeur de la variable adjointe  $\lambda$  au temps initial proportionnelle au gradient de la fonction coût, c-à-d  $\lambda(0) \propto \nabla \mathcal{J}(\mathbf{X}_0^a)$ . La trajectoire recherchée (en rouge), appelée *analyse*, est obtenue après intégration direct du modèle dynamique à partir de la condition initiale  $\mathbf{X}_0^a$ .

Le calcul de l'adjoint discret du modèle dynamique numérique est le point délicat de la construction d'une méthode 4DVar. Le coût de développement peut rapidement devenir considérable voire rédhibitoire pour certains codes de calculs de simulation de la dynamique des fluides, en particulier en 3D.

En général il est nécessaire de réaliser une cinquantaine d'aller-retour pour obtenir un résultat convergé de la condition initiale  $\mathbf{X}_0^a$ , plus un dernier aller partant de cette condition initiale pour obtenir l'*analyse* convergée. A domaine géométrique identique l'assimilation coûte très grossièrement cent fois plus cher qu'une simulation ! Nous verrons dans §4.2 et

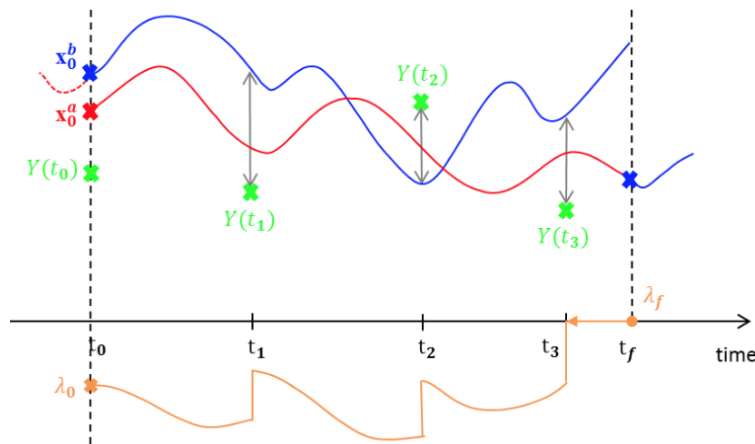


FIGURE 4.1 – Illustration du principe de l'assimilation variationnelle, d'après Robinson (2015).

dans §4.4 que ce coût peut être singulièrement réduit si l'on parvient à circonscrire le domaine d'assimilation à la seule région observée et nécessaire à l'analyse de l'écoulement.

Plus on renseigne les matrices de covariance  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{B}$ , meilleur sera le résultat. Sans sous estimer l'impact des covariances d'erreurs d'observations, le rôle de  $B$  est déterminant car il est associé à la régularisation nécessaire au bon conditionnement du problème d'assimilation variationnelle.

#### 4.1.2 Filtrage stochastique

Les méthodes de filtrage en assimilation de données sont basées sur le *filtre de Kalman* ou encore sur les méthodes de Monte-Carlo séquentielles comme le *filtre particulaire* et comme le *filtre de Kalman d'ensemble*.

**Le filtre de Kalman** peut être considéré comme une extension du BLUE (pour Best Linear Unbiased Estimator) pour les modèles dynamiques (Kalman 1960). Dans cette approche on calcule un état analysé  $\mathbf{x}_k^a$  combinaison d'une prévision  $\mathbf{x}_k^f$  (pendant de l'ébauche en assimilation variationnelle) et d'une observation  $\mathbf{y}_k$  à l'instant  $t_k$ . Le filtre de Kalman permet de résoudre le problème de filtrage de façon exacte lorsque les dynamiques de l'état et de l'observation sont linéaires et gaussiennes. Il approche la *distribution de filtrage*  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ , c-à-d la densité de probabilité conditionnelle de l'état sachant les observations passées et présente, par une densité gaussienne, caractérisée complètement par son espérance  $\mathbf{x}_k^a$  et sa matrice de covariance  $\mathbf{P}_k^a$ .

L'algorithme en temps discret du filtre de Kalman s'articule en deux étapes après une phase d'initialisation de l'espérance et des covariances au temps initial,

- Prédiction :

$$\mathbf{x}_k^f = \mathbf{M}_{k-1,k} \mathbf{x}_{k-1}^a \quad (4.4)$$

$$\mathbf{P}_k^f = \mathbf{M}_{k-1,k} \mathbf{P}_{k-1}^a \mathbf{M}_{k-1,k}^T + \mathbf{Q}_{k-1}, \quad (4.5)$$

- Analyse :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T \left( \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{x}_k^a = \mathbf{x}_k^f + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^f) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{P}_k^a = (\mathbf{Id} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^f, \quad (4.8)$$

où l'opérateur linéaire discret  $\mathbf{M}_{k,k+1}$  décrit la dynamique qui lie les évolutions temporelles des états de  $t_{k-1}$  à  $t_k$ ,  $\mathbf{H}_k$  est l'opérateur linéaire d'observation,  $\mathbf{Q}_k$  et  $\mathbf{R}_k$  sont respectivement les matrices de covariance d'erreurs de la dynamique et des observations,  $\mathbf{K}_k$  est le gain de Kalman. La figure 4.2 illustre le principe du filtre de Kalman.

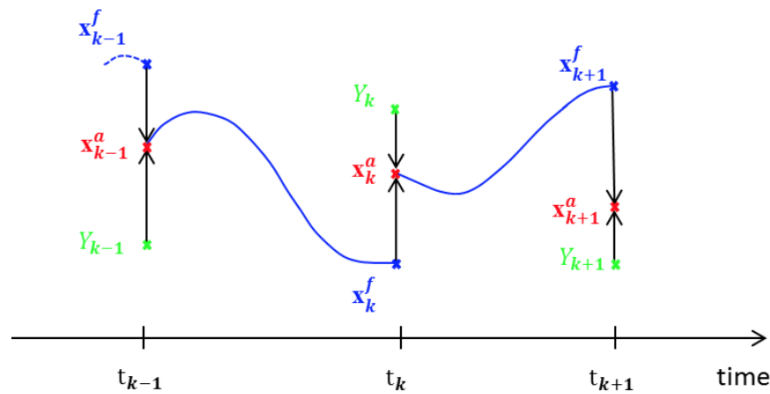


FIGURE 4.2 – Illustration des étapes du filtre de Kalman d'après Robinson (2015).

Dans la pratique les opérateurs d'observation et dynamique sont non-linéaires, ce qui nécessite une adaptation du filtre pour le rendre opérationnel. La première variante proposée a été le filtre de Kalman étendu (EKF, pour Extended Kalman Filter) valable pour des dynamiques faiblement non-linéaires. Le filtre de Kalman inodore (UKF, pour Unscented Kalman Filter) étend le domaine de validité également aux opérateurs d'observations non-linéaires.

Toutefois, dans le cas d'espaces de grandes dimensions comme en mécanique des fluides par exemple, il devient rapidement difficile de manipuler les matrices de covariances tant au niveau calculatoire qu'au niveau de la mémoire. Pour pallier tout ou partie de ces limitations (non-linéarités, non-gaussiannité, grande dimension) des filtres à bases de méthodes de Monte-Carlo séquentielles ont été proposées comme le filtre de Kalman d'ensemble et le filtre particulaire.

**Le filtre de Kalman d'ensemble** (EnKF, pour Ensemble Kalman Filter) a été proposé par Evensen (1994) pour le modèle dynamique gaussien, puis étendu au cas non-linéaire gaussien par Evensen (2003) avec des performances séduisantes. Le filtre de Kalman d'ensemble ne propage pas de matrice de covariance, mais un nuage de points, par le biais du modèle dynamique non-linéaire. Le calcul des covariances d'erreur de prévision est empirique par intégration en temps d'un ensemble dont l'état initial a été perturbé aléatoirement. L'EnKF est un filtre gaussien qui ne considère

les statistiques que jusqu'aux moments d'ordre 2. L'étape d'analyse est celle du filtre de Kalman classique (équations (4.6), (4.7) et (4.8)). La figure 4.3 illustre le principe de l'EnKF.

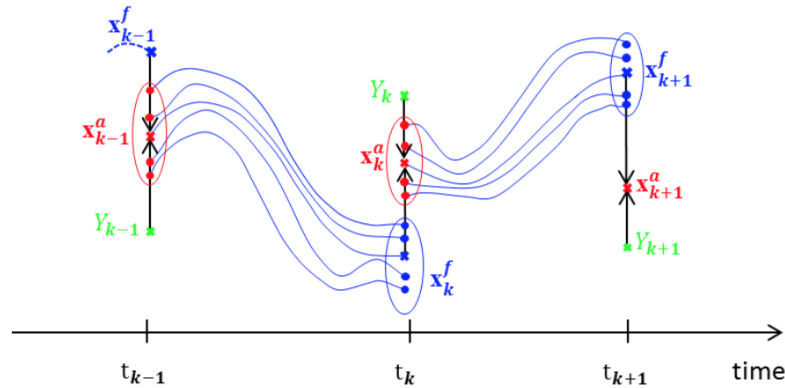


FIGURE 4.3 – Illustration des étapes du filtre particulaire d'après Robinson (2015).

L'EnKF est relativement facile à implémenter, car contrairement au 4DVar, il ne nécessite pas de calcul des opérateurs tangents linéaires et de l'adjoint du modèle dynamique. Son gros avantage par rapport au filtre particulaire est le nombre réduit d'échantillons nécessaire –de l'ordre de la cinquantaine– pour fournir une estimation garantissant une erreur quadratique moyenne proche de la borne de Cramér-Rao. De plus ce filtre est facilement parallélisable. La complexité de son coût algorithmique est de l'ordre du produit entre la dimension du vecteur d'état, le nombre de mesures et le nombre d'échantillons par itération. Soit pour un écoulement turbulent analysé en vitesse-pression dans un domaine de dimension  $100^3$ , avec 10 observations et un ensemble de 50 éléments par itération, le coût algorithmique du filtre EnKF est de l'ordre de  $1,5 \cdot 10^9$  contre  $10^{19}$  pour les filtres EKF et UKF. Enfin, l'EnKF fournit assez naturellement des estimations statistiques des erreurs de prévision et d'analyse, témoins de l'état courant du système, car améliorées au fur et à mesure de la prise en compte des observations. Toutefois, le filtre fait une approximation linéaire du modèle d'observation et gaussienne des statistiques d'erreurs.

**Le filtre particulaire** (PF, pour Particle Filter) propage, de la même manière que l'EnKF, un ensemble de "particules" qui sont des trajectoires du système. Le PF travaille naturellement avec un modèle dynamique non-linéaire et peut représenter n'importe quelle distribution de particules, tout cela en assurant la convergence vers le filtre bayésien lorsque le nombre de particules tend vers l'infini (Le Gland et al. 2009). Chaque particule a un poids qui lui est associé, et qui est utilisé pour le calcul de la moyenne et des moments d'ordre supérieurs. De plus à chaque temps d'observations, les observations sont utilisées pour mettre à jour les poids associés à chaque particule. En pratique une majorité de poids tendent vers zéro. Pour s'affranchir de ce phénomène de dégénérescence un ré-échantillonnage est effectué après l'étape de pondération. Il permet de repositionner le nuage de particules autour des particules les plus vraisemblables. Enfin, afin d'explorer l'espace d'états au delà des particules à poids fort une dernière étape de régularisation est conduite. Elle consiste

à déplacer très faiblement et de manière aléatoire chaque particule. La figure 4.4 illustre les étapes du PF.

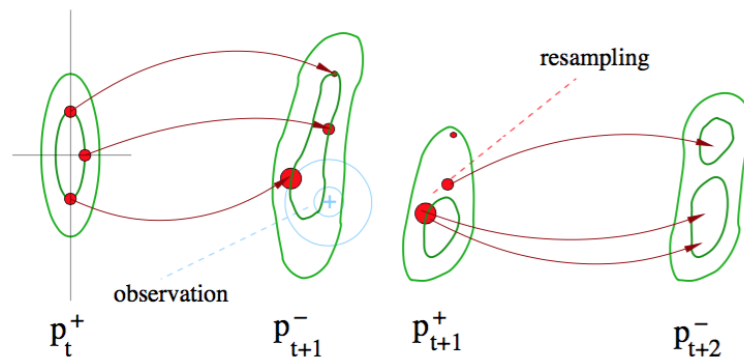


FIGURE 4.4 – Illustration des étapes du filtre particulaire d'après Boquet (2014-2015).

En mécanique des fluides le coût d'un tel filtre peut rapidement devenir rédhibitoire. C'est pour cela qu'il a d'abord été mis en œuvre pour de la reconstruction très grande échelle d'écoulements 2D turbulents (Cuzol et al. 2007, Cuzol et Mémin 2009). Papadakis et al. (2010) ont proposés une approche tirant parti du meilleur du PF et de l'EnKF, nommée WEnKF (pour Weighted Ensemble Kalman Filter). En section §4.3 nous présentons une amélioration du WEnKF pour la reconstruction de la dynamique de la surface libre d'écoulements (Combès et al. 2015).

### 4.1.3 Méthodes hybrides

Les méthodes hybrides viennent naturellement tirer parti du meilleur des méthodes temporelles et des méthodes séquentielles. Il en existe toute une zoologie combinant EnKF et 4DVar. Le lecteur trouvera dans le mémoire de thèse de Yang (2014) une revue thématique et exhaustive de ces approches hybrides. Par exemple la méthode variationnelle basée sur des ensembles (En4DVar) proposée par Liu et al. (2008) combine des covariances des erreurs d'ébauches (matrice  $\mathbf{B}$ ) empiriques et dépendantes de l'écoulement avec une analyse 4DVar. Un gros avantage de ce type d'approche est sa facilité d'implémentation car elle ne nécessite pas le calcul du tangent et de l'adjoint du modèle dynamique. Dans Yang et al. (2015), nous avons proposé une amélioration de cette approche En4DVar pour le cas de la reconstruction de la dynamique d'un écoulement à surface libre à partir d'observations images bruitées et incomplètes de la hauteur d'eau. Les résultats ont montré la supériorité de la nouvelle approche proposée tant au niveau coût de calcul qu'au niveau précision, comparés à un simple 4DVar et à l'En4DVar initialement proposé par Liu et al. (2008).

## 4.2 ASSIMILATION DE DONNÉES EN MÉCANIQUE DES FLUIDES

En dynamique des fluides les premières tentatives d'exploitation des mesures dans les simulations numériques ont été effectuées par Druault et al. (2004) pour les mesures fil chaud suivi de Perret et al. (2008) pour les mesures stéréo PIV. L'idée est de construire à partir d'observations des conditions d'entrée réalistes pour des simulations LES d'écoulements

cisaillés libres turbulents (sillage, couche de mélange). Ces interfaçages entre des mesures et une simulation numérique –ne correspondent pas à proprement parler à de l'assimilation de données– ont été effectués par la construction d'un système dynamique d'ordre réduit comme condition d'entrée du calcul. Plus récemment Scarano et Moore (2011) puis Schneiders et al. (2014; 2015) ont combinés des simulations d'abord d'un simple modèle d'advection puis des équations de Navier-Stokes avec des mesures 2D-PIV, 3D-PIV et 3D-PTV pour augmenter les résolutions temporelles et spatiales des données respectivement PIV et PTV. Dans le cadre plus optimal de l'assimilation de données, Gronsksis et al. (2013a) ont revisité la problématique de la reconstruction de la condition d'entrée d'une simulation numérique à partir d'observations PIV (cf. §4.4).

Les premiers travaux d'assimilation de données en dynamique des fluides ont été réalisés pour fournir des représentations d'ordre réduit des écoulements (D'Adamo et al. 2007, Cuzol et al. 2007). Puis, successivement Papadakis et Mémin (2008) et Cuzol et Mémin (2009) ont réalisés les premiers couplages entre des séquences d'images d'écoulements turbulents et respectivement, une simulation numérique directe et une simulation de particules de vortex, avec respectivement une approche variationnelle et un filtre particulaire. La figure 4.5 montre en rouge la résolution grande échelle obtenue avec le filtre particulaire, due au nombre limité de particules de vortex utilisées, et en vert la grande précision de la méthode variationnelle obtenue grâce à l'assimilation directe des images. On trou-

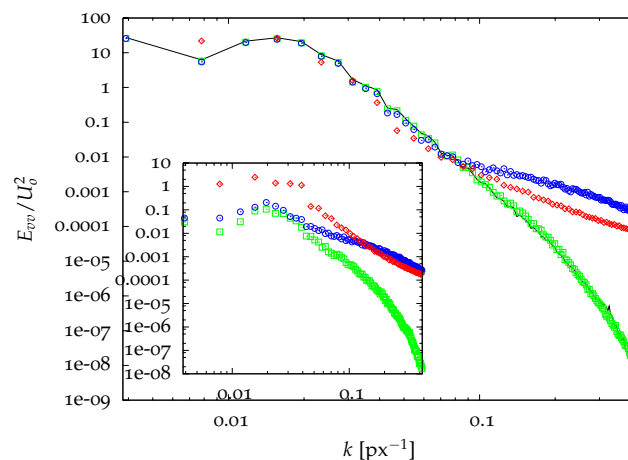


FIGURE 4.5 – Spectre de puissance de la composante verticale de la vitesse estimée à partir de séquences d'images de particules générées à partir d'une DNS de turbulence homogène isotrope bidimensionnelle. Noir, DNS ; Rouge, filtrage particulaire de Cuzol et al. (2007) ; Bleu, flot optique de Corpetti et al. (2006) ; Vert, assimilation variationnelle de Papadakis et Mémin (2008). Les spectres des erreurs sont tracés en encarts.

vera dans Heitz et al. (2010) une revue de ces travaux d'assimilation de données images en dynamique des fluides.

Depuis, de plus en plus de travaux développent et mettent en œuvre l'assimilation données pour l'étude des écoulements. Les approches utilisées sont séquentielles (Colburn et al. 2011, Suzuki 2012, Combès et al. 2015) ou variationnelles (Gronsksis et al. 2013a;b, Lemke et Sesterhenn 2013, Foures et al. 2014, Mons et al. 2014, Yegavian et al. 2015, Robinson 2015) voir même hybrides par combinaison des deux schémas (Yang

et al. 2015). Ces études utilisent pour la plupart des modèles numériques de la dynamique des fluides basés sur les équations de Navier-Stokes 2D. Seule Robinson (2015) propose une approche 4DVar pour reconstruire un écoulement turbulent en 3D à partir d'observations images.

## 4.3 RECONSTRUCTION D'UNE SURFACE LIBRE

### 4.3.1 Problématique

Nous nous sommes intéressés à la reconstruction de la géométrie d'une surface libre d'écoulement et à sa dynamique. Les applications en hydrologie sont nombreuses comme par exemple la possibilité de remonter à la mesure du débit d'un cours d'eau. Il n'est souvent pas possible d'observer totalement l'état d'un écoulement à surface libre (c-à-d la hauteur et la vitesse de la surface) et plus courant de disposer uniquement de mesures éparses fournies par exemple par des altimètres, des satellites ou encore des bouées. Bien qu'insuffisantes dans les configurations complexes, ces données peuvent être utilisées comme ingrédients de départ pour obtenir une caractérisation plus complète de l'écoulement. Nous avons proposé un système complet pour caractériser des écoulements à surface libre en eau peu profonde (Combès et al. 2015). Ce système est composé d'une caméra de mesure de distance à bas coût de type Kinect et du filtre stochastique proposé par Papadakis et al. (2010), capable de prendre en compte les erreurs du modèles dynamique numérique pour appréhender la complexité réelle des écoulements à surface libre.

### 4.3.2 Méthode proposée

L'approche consiste à reconstruire la géométrie et le mouvement d'une surface libre à partir d'un filtre stochastique, d'un modèle numérique shallow water et d'uniquement de séquences d'images de hauteur de la surface libre. La technique d'assimilation utilisée est basée sur le filtre stochastique WEnKF proposé par Papadakis et al. (2010), combinant un PF avec un EnKF et capable de prendre en compte des modèles dynamiques imparfaits. Le filtre a été amélioré pour gérer des conditions d'entrées inconnues par l'utilisation simultanée de deux observations à la place d'une classiquement : l'observation au temps courant  $\mathbf{y}_t$  et celle au temps d'après  $\mathbf{y}_{t+1}$ . L'idée est de mieux coupler la hauteur d'eau avec les composantes de vitesses en analysant, au travers des observations  $\mathbf{y}_t$  et  $\mathbf{y}_{t+1}$ , leurs effets combinés sur la durée  $[t, t + 1]$ , plutôt que de considérer les observations de manière indépendante. La méthode est détaillée dans Combès et al. (2015). La figure 4.6 illustre un exemple de mesures réelles de la hauteur d'eau délivrées par le capteur Kinect. Ce sont les uniques observations du processus d'assimilation. Ces données correspondent au mouvement d'une vague dans un bac d'eau, elles sont bruitées et contiennent des trous, en particulier aux abords des parois du bac.



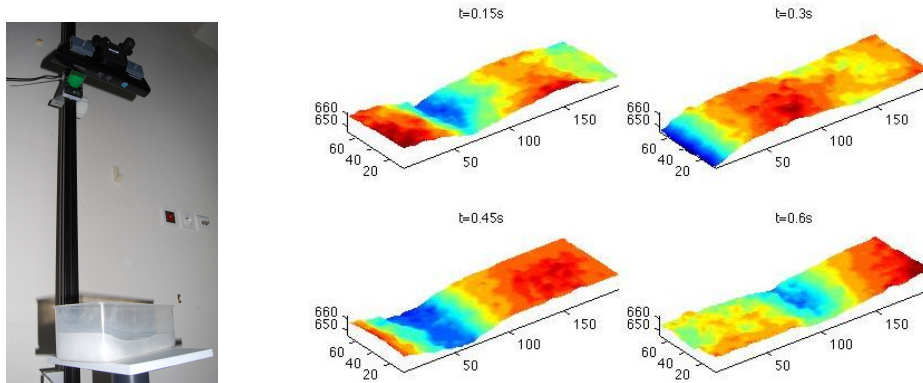


FIGURE 4.6 – Surface libre d'un écoulement observé par un capteur Kinect (Combès et al. 2015). A gauche, photo du dispositif expérimental d'observation d'une vague dans un bac se déplaçant dans un bac ; à droite, reconstruction 3D de la hauteur de vague se déplaçant dans le bac au temps  $t = 0,15; 0,3; 0,45$  et  $0,6$  en secondes. Les échelles de longueur sont en millimètres.

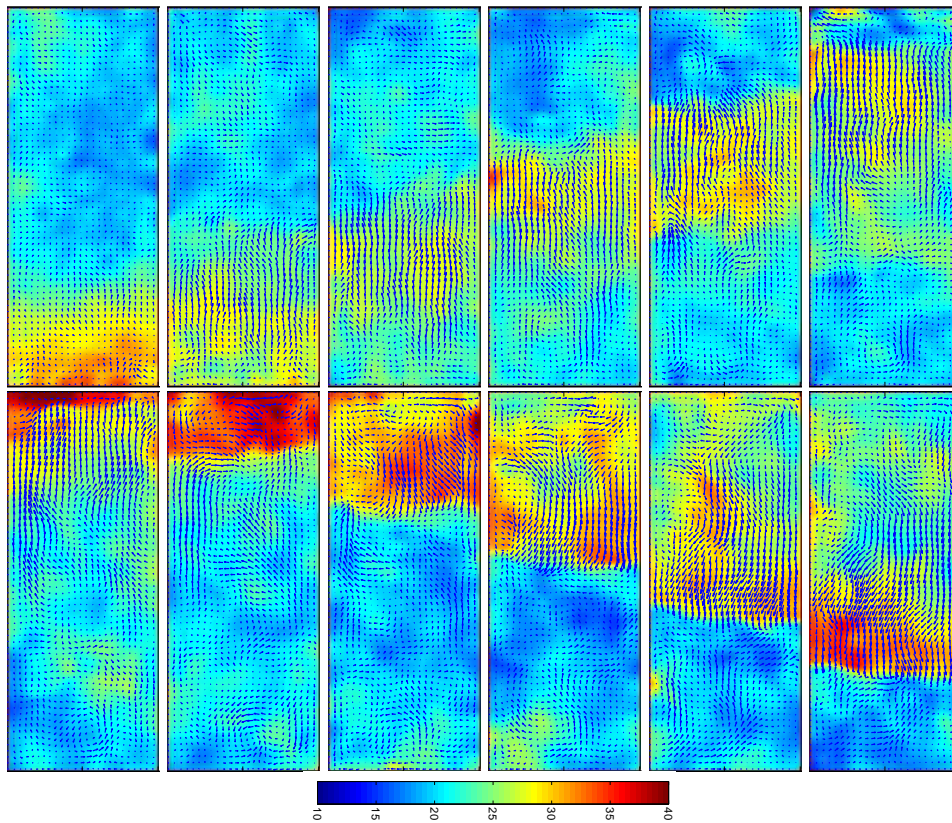


FIGURE 4.7 – Elevation colormaps in millimeters and free-surface motion vector fields for a wave in a rectangular flat bottom tank. From left to right and top to bottom, snapshots of the estimation displayed every 20 time step  $\Delta t u_0 / L_x$ .

### 4.3.3 Résultats

Les résultats montrent que la méthode permet de reconstruire de manière remarquable à la fois la hauteur et les vitesses de la surface libre des écoulements. L'approche est très robuste à des détériorations importantes de la qualité des observations. Le filtre permet de déterminer rapidement et avec précision la dynamique complète de l'écoulement en partant d'une

condition initiale avec vitesse et hauteur nulles. La prise en compte simultanée de deux observations améliore significativement les résultats. Enfin, contrairement à une approche variationnelle qui considérerait un modèle de la dynamique parfait, le filtre proposé a fourni d'excellents résultats sachant la complexité réelle des écoulements et les limites du modèle shallow water utilisé.

## 4.4 RECONSTRUCTION D'UN SILLAGE TURBULENT

### 4.4.1 Problématique

Nous nous sommes intéressés à la possibilité de reconstruire un écoulement turbulent réaliste de type sillage à partir de mesures PIV, d'un code de simulation numérique des équations de Navier-Stokes et d'une méthode d'assimilation variationnelle. L'idée est de pouvoir fournir des simulations réalistes d'écoulements turbulents complexes sans avoir à modéliser toute la complexité à l'origine des écoulements, et de par ailleurs réduire le coût de calcul en confinant le domaine de simulation à la seule région d'intérêt. Une problématique qui a rapidement émergé est celle de disposer d'une condition d'entrée spatiotemporelle complète et réaliste, ceci à partir d'observations de l'écoulement dans le domaine de simulation. Comme évoqué en section 4.2 ce problème fait échos aux travaux d'interfaçage expérience-simulation de Druault et al. (2004) et de Perret et al. (2008), et d'une certaine façon à ceux plus récents de Scarano et Moore (2011) et de Schneiders et al. (2014; 2015) pour augmenter la résolution temporelle des données PIV. Toutefois, l'approche que nous avons proposée reprend cette problématique dans le cadre plus optimal de l'assimilation de données.

### 4.4.2 Méthode proposée

L'approche a été développée en 2D (Gronskis et al. 2013a) et récemment mise en œuvre en 3D (Robinson 2015). Le modèle numérique considéré est le code `Incompact3d` utilisé en version DNS (cf. §1.3.2). Les données sont des mesures PIV2D2C dont la résolution temporelle peut atteindre la résolution temporelle de la DNS et servir de "référence". Nous les avons décimées pour simuler des observations éparses en temps. Les écoulements considérés sont des sillages d'un ou de deux barreaux cylindriques à des nombres de Reynolds inférieurs à 180 pour conserver une structuration 2D de l'écoulement en adéquation avec le modèle DNS utilisé. Cet aspect est vérifié par la faible divergence du champ apparent. La méthode d'assimilation utilisée est un schéma 4DVar (cf. §4.1.1) que nous avons amélioré pour contrôler la condition d'entrée, en plus de la condition initiale. Par rapport à la formulation (4.2), la fonctionnelle d'énergie à minimiser comprend un terme supplémentaire de régularisation de la

condition d'entrée tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\bar{\mathbf{v}}_0, \bar{\mathbf{v}}_{\text{in}}) &= \int_0^T \int_{\Omega_A} \|\bar{\omega}(\mathbf{x}, t) - \omega_{\text{obs}}(\mathbf{x}, t)\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2 d\mathbf{x} \Delta t^* dt \\ &+ \int_{\Omega_{\text{C}_{\text{obs}}}} \|\bar{\mathbf{v}}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_b(\mathbf{x}, 0)\|_{\mathbf{B}_{\text{obs}}^{-1}}^2 d\mathbf{x} \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega_{\text{C}_{\text{in}}}} \|\mathbf{v}(\mathbf{x}_{\text{in}}, t) - \bar{\mathbf{v}}_{\text{in}}(t)\|_{\mathbf{B}_{\text{in}}^{-1}}^2 d\mathbf{x} dt, \end{aligned} \quad (4.9)$$

où  $\bar{\mathbf{v}}_0$  est un lissage spatial de la condition initiale et  $\bar{\mathbf{v}}_{\text{in}}$  est un lissage temporel de la condition d'entrée, pour gérer les différences de résolution respectivement spatiale et temporelle entre les observations et la simulation numérique du modèle dynamique. Pour calculer le gradient de la fonction de coût un code numérique adjoint d'une version 2D d'`Incompact3d` a été construit (Gronskis et al. 2013a).

#### 4.4.3 Résultats

La figure 4.8 montre le type de configuration étudié avec les différences de grilles de résolutions entre les observations PIV et la DNS, et les différents domaines d'assimilation et de contrôle permettant de gérer les conditions aux limites du modèle DNS.

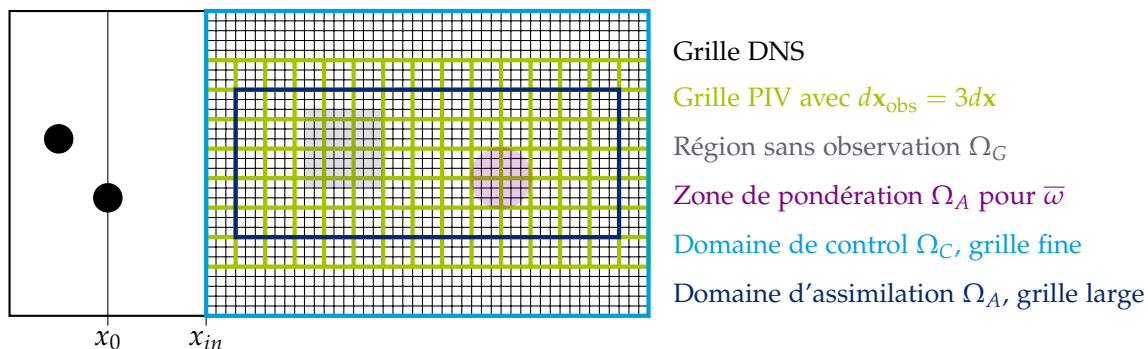


FIGURE 4.8 – Configuration pour l'assimilation de données PIV avec trous dans une DNS derrière le sillage de cylindres (Gronskis et al. 2013a;b).

La méthode proposée est fonctionnelle et fiable (Gronskis et al. 2013a). Elle permet de simuler des écoulements complexes sans avoir à modéliser des géométries compliquées, de reconstruire les champs de pression et de vitesse, y compris dans les régions non observées comme illustré sur la figure 4.9. Si le potentiel de la méthode a été démontré et nourrit plein d'espoir, le passage en 3D et pour des écoulements plus turbulents n'est bien entendu pas acquis. Il nécessite d'abord l'extension très fastidieuse de cette approche à la version 3D parallélisée d'`Incompact3d`, qui vient d'être effectuée par Robinson (2015). Il nécessitera également le contrôle de la condition de sortie voire à toutes les limites du domaine, l'introduction d'un modèle numérique LES et de ses erreurs avec possibilité de contrôler "en ligne" ses paramètres.

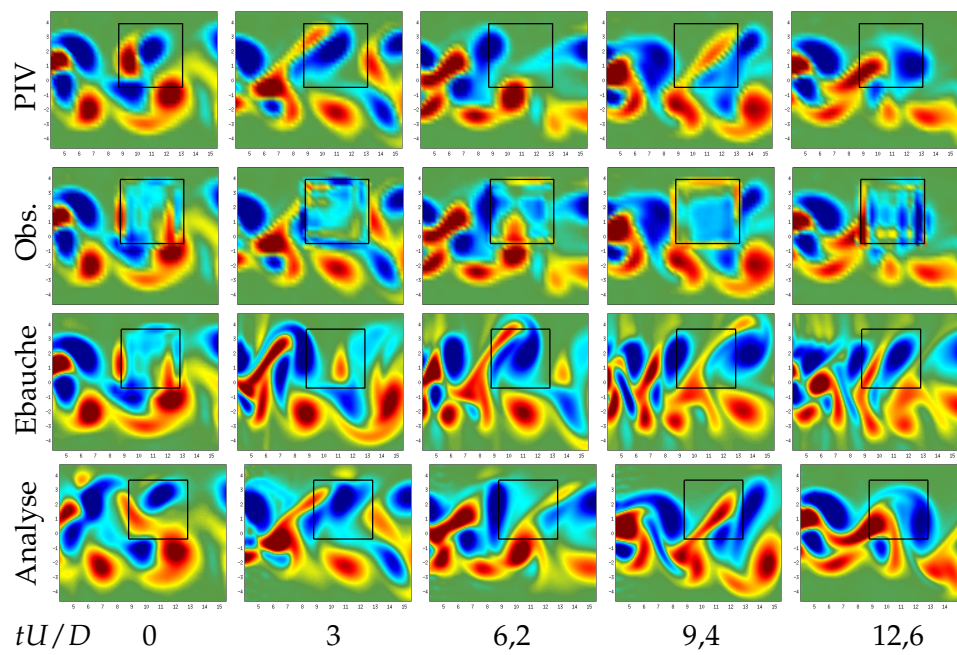


FIGURE 4.9 – Vorticité dans le sillage de deux cylindres à Reynolds égal à 112. De haut en bas : mesures PIV ; Observations PIV avec un trou ; Ebauche ; Analyse. D'après Gronsakis et al. (2013a;b).



# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

## CONCLUSION

L'aérodynamique est un domaine vaste mêlant science et technologie, qui reste le parent pauvre de la mécanique des fluides, mais dont la demande sociétale est de plus en plus importante et de mieux en mieux formulée dans le cadre générale de la maîtrise de la qualité de l'air à l'intérieur des bâtiments. Les problématiques sont tant applicatives que fondamentales. Au cours de mes travaux de recherche j'ai eu le plaisir de travailler ces deux aspects avec toujours le souci de bien lier par aller-retour l'application et la "théorie" tout comme la technologie et la science, même si au début et jusqu'à peu cela n'a pas toujours été facile, nécessitant quelques grands écarts qui ont été perçus comme paradoxal, de temps en temps. Dans ce contexte j'ai pu participer au développement de nouvelles technologies de maîtrise locale de flux propres et/ou froids et contribuer à la mise en place des recherches associées nécessaires, en mécanique des fluides.

Dans une première phase en collaboration avec Joël Delville, Eric Lamballais et Jean-Paul Bonnet de l'institut Pprime de Poitiers, nous avons développés les outils expérimentaux (anémométrie à fil chaud et soufflerie basses vitesses), numériques (frontières immergées) et les méthodes (POD et modèles réduits) pour étudier des écoulements complexes propres à l'aérodynamique. Cette collaboration a été très enrichissante et m'a permis d'aborder dès le départ les problèmes avec l'oeil de l'expérimentateur mais aussi avec le regard de l'utilisateur avancé des outils de simulation numérique.

Dans une deuxième phase, menée en collaboration avec Etienne Mémin de Inria de Rennes, j'ai pu poursuivre cette démarche de connexion entre mesure image cette fois et simulations, au travers de la modélisation et des méthodes mathématiques avancées. Ces recherches sont devenues fortement interdisciplinaires et enthousiasmantes dans le cadre de l'équipe projet Fluminance (Inria-Irstea) que nous avons construite. Nous avons notamment pu démontrer l'apport de la modélisation basée images pour la mesure et la reconstruction d'écoulements turbulents.

Cependant beaucoup de questions scientifiques et technologiques restent en suspens et d'autres nouvelles apparaissent, en vrac : peut-on proposer une méthode de mesure grand champ basée image pour le terrain ? Comment reconstruire un écoulement turbulent 3D en grande taille ? Quel ensemencement pour de la mesure grand champ terrain ? Peut-on proposer des méthodes couplant EFD-CFD pour de l'investigation rapide ou détaillée d'écoulements ? Quelle relation entre l'estimation du paramètre de régularisation et la physique de l'écoulement ? Comment tirer

parti de la modélisation de loi de puissance dans un schémas semi-local ? Quelle méthode flot optique avec estimation des incertitudes pour la PIV 3D ? Comment assimiler des observations PIV multi-plans ou Tomo dans des simulations DNS/LES 3D ? En 3D comment modéliser ou construire les matrices de covariances d'erreurs d'ébauche  $\mathbf{B}$  et d'observation  $\mathbf{R}$  ? Quels sont les limites des modèles sous-maillages pour de la résolution très grande échelle ? Peut-on estimer en ligne les paramètres des modèles sous-maillages ? Peut-on assimiler des données Tomo PTV dans un modèle particulaire type SPH ?

Pour essayer de répondre à une partie de ces questions j'ai monté un projet européen de type Futur Emerging Technologies (FET Open) avec dix partenaires, qui est brièvement décrit à la section suivante.

## PERSPECTIVES

J'expose ici mes perspectives de recherches qui s'inscrivent naturellement dans le prolongement des travaux exposés aux chapitres 3 et 4. Le besoin est celui de disposer à terme d'outils d'investigation et d'analyse des écoulements en grande taille et pour le terrain. L'assimilation de données images est une composante importante de ce projet. Cependant il est indispensable d'améliorer les données et les modèles avant de se lancer dans l'assimilation ...

### Large SCALE image based flow Reconstruction - LASCAR project

*(Projet FET Open déposé – coordinateur) En collaboration avec : E. Mémin et C. Herzet (INRIA, France); B. Leclaire, F. Champagnat, P. Cornic, D. Sipp (ONERA, France); C. Schnörr, S. Petra (Univ. Heidelberg, Germany); D. Laurence, B. Rogers (Univ. Manchester, UK); S. Laizet, P. Schmid (Imperial College, UK); G. Elsinga, J. Westerweel, F. Scarano (TU Delft, Netherlands); A. Schröder, D. Schanz (DLR Germany); M. Tuinstra (NLR, Netherlands); S. Lardeau, P. Dawson (CD-adapco, UK); D. Michaelis, B. Wieneke (LaVision, Germany).*

Despite being complementary, experimental and numerical approaches are facing strong limitations for the study of complex scenarios. In three dimensions, the former are based on image measurement techniques restricted to very small volumes or limited to poor resolution for longer measurement distances. The latter need accurate simulations that may strongly depend on complex unknown boundary conditions, and on a sensitive ad hoc tuning of turbulence model parameters. It follows that complex flows –i.e, large-scale three-dimensional turbulent flows– cannot be accurately analysed on the single basis of one of those two kinds of approaches. Alternative methodologies enabling a sound combination of numerical and experimental analyses are clearly needed for the reconstruction of large-scale experimental flows. **LASCAR aims at devising a novel methodological framework, encompassing in particular the definition of an experimental scheme, to measure and to reconstruct 3D flows involved in large-scale experiments.**



A promising approach consists in **coupling image sequences with dynamical flow models via data assimilation**. Such a strategy reveals to be a powerful methodology to resolve a complete trajectory of flow state variables from noisy and incomplete observations. Measured data guides the dynamical model, while the latter simultaneously enriches measurements by providing missing spatial scales or unobserved variables. Contrary to meteorology in which these methodologies have improved weather forecast the present project takes a whole new dimension with the incorporation of uncertainties into the dynamical turbulence flow model (Mémin, 2014, *Geo. & Astro. Fluid Dyn.*). Such advanced modeling will provide large-scale 4D (3D+Time) turbulent flows reconstruction base on the coupling of sparse data image with turbulence models. **LASCAR will open a novel way for fluid dynamics investigations and analyses, far beyond current approaches**. The project will pave the way for the design of future tools for large volumes of three-dimensional flow reconstructions, which will be viewed either as novel measurement techniques or as novel realistic computational approaches. Image data assimilation will provide us with a way to infer appropriate model parameterization, such as realistic boundary conditions, suited initial conditions or adequate tuning of non-resolved scale dissipation models, the so-called subgrid term involved in Large Eddy Simulation (LES). **The learning online of spatiotemporal model parameters taking into account data uncertainties and model error is potentially of huge interest**, as for the moment no satisfying solution exists in complex real world cases encountered in industrial realm.

With its multifaceted approach LASCAR will tackle many novel and unsolved **interdisciplinary questions** arising from such a large-scale reconstruction **perspective via image data assimilation**. This project is a prime chance for Europe to be the world leader in these fields and to not let the solutions be worked out somewhere else. Thanks to LASCAR the issues concerning the **transfer of image information** with its uncertainties **to the numerical simulation** defined on a different resolution, and **how this transfer interacts on the model error and parameterization** will be addressed. Such an understanding is crucial for the development of technical systems capable of reconstructing large volumes of complex flows, ideally providing associated heat and mass transfer, and supporting affordable computational time or even real-time implementations for reduced-order reconstructions. To achieve this **ideal goal** the project will develop **sparsity-promoting new reduced order and large-scale image-based advanced models**.

The emphasis of this project is on large-scale volumetric image data combined with large-eddy or reduced-order simulations of fluid flows. In this context, to enable accurate reconstruction of three-dimensional large-scale flows, we plan to achieve the following three specific objectives :

- **To build image-based measurements tools for large-scale three-dimensional flows**. This objective will process observation data from several camera image pairs or sequences obtained by volumetric illumination of the whole domain of study. This work relates to tomographic image velocimetry techniques. Radically extending their applications to large-scale experiments and further improving them



will require new hardware components as well novel estimation methods. Highly scattering tracers and distributed high-efficiency illumination will be needed to track flow tracers at the envisaged flow scale. Motion reconstruction method will require the combined effort from computer vision to fluid dynamics equations and invoking compressed sensing and Bayesian estimation theory. The latter will also include variational approaches, physically-consistent regularizations, uncertainty estimations, sparse modeling. Numerical approaches that rely on graphic processing unit will be developed to afford the amount of data and computations needed in the chain from seeds to imaging on the hardware side. Such new efficient tools will open the door for many new experimental opportunities to investigate 3D large-scale complex flows.

- **To develop assimilation schemes to couple sparse image-based information with numerical simulation.** The objective will be to significantly improve image-based measurement techniques proposed above, towards large-scale and dynamic consistent three-dimensional flow reconstruction, by embedding them in a data image sequence assimilation process. This sound temporal strategy will exploit the whole potential of the data sequences and of the dynamical models we have at hand. Volumetric image information will be considered. In both cases, the assimilation schemes will have to face with sparse information to reconstruct initial and boundary conditions. In addition, the important problem of coupling data image sequences and numerical dynamical models at different spatiotemporal scales and for different representations (Lagrangian or Eulerian) will have to be properly handled. Such new tools taking optimal advantages of experimental and numerical approaches via sparsity-promoting assimilation will provide either 3D physically-consistent measurements or 3D realistic simulations, unreachable so far.
- **To develop image-based dynamical models and investigate their parameters on the efficiency of the flow reconstructions.** An emphasis of this project is on developing advanced tools for reconstructing complex flows in two stages : solutions for a first inspection of an experimental flow will be proposed ; then, more accurate reconstruction methods will be designed to refine eventually the results. The former will involve simplified modelling of the dynamics like Smoothed Particle Hydrodynamic (SPH) or reduced order models, while the latter will carry out LES approaches. The objective will consist in exploring solutions for the design and parameterization of turbulence models from experimental data. This encompasses the setup of reduce order models for the unresolved small-scale dynamics, the design of stochastic large eddy models, the learning and characterization from image data of the subgrid turbulence models.

If successful, a significant direct impact should be achieved by this project since **all experimental fluid dynamics (EFD) facilities** in the world

like wind tunnels and water tanks **are directly concerned**, with potential extensions to field measurements. for the deployment of PIV within industrial processes at large scale. Simultaneously, the computational fluid dynamics (CFD) community, both academic and industrial, will benefit from derived improvements in stochastic subgrid modelling for LES, data-reduction and online learning novel techniques such as Dynamic Model Decomposition / Koopman operators to circumvent the “Big Data” barrier now hindering efficient exploitation of Petascale DNS, as well as data assimilation for boundary conditions especially in environmental flows CFD.

The **long-term vision** aims at developing **advanced fluid mechanics tools** with ability to **combine numerical dynamical models with any sensed information**, including images but also data from other sensors measuring for instance quantities like distance, temperature, pressure, particle or gas concentration. This later improvement will be useful not only for flows with passively transported quantity but also for flows closely coupled with the quantity, like for instance **in combustion and in heat transfer** for gas concentration and temperature, respectively.

Besides, the technique will provide the reconstruction of unobserved quantities from partially observed quantities, like e.g. velocity from temperature, pressure from particle images among others. The long-term impact of LASCAR shall see the realization of fluid dynamic experiments at unprecedented scale where the correlation between cause and effect (e.g. the presence of an irregular building modifying the flow in a urban canyon; a vortex trailing from a wing in high-lift that interacts with the aircraft downstream) can be more easily detected unveiled. Of no less importance is the paradigm shift for the scientific community given by the large scientific potential of merging experimental and modelling approaches. The project tackles complex turbulent flows and a range of new findings on turbulence will result from these advanced tools, which would lead to the design of the future turbulence heat and mass transfer models. **The LASCAR project will push forward conventional approaches and draw EFD and CFD into a novel dimension. It will open up the horizon not only for new questions of research but also for the deployment of novel flow reconstruction techniques within industrial processes at large scale.** On the one hand new generation of measurements techniques embedding ab ovo computational fluid dynamics models into the measure and yielding analysis will be available. On the other hand computational fluid dynamics tools will give realistic simulations with related confidences and analysis. Looking further ahead, **the proposed methods will grow beyond the laboratory domain and scales towards implementation directly in the concerned systems by field experiments.** One can already imagine derived products that will be available on tablets and smartphones and allowing engineers and technicians to make in situ diagnostics.



## Sélection d'une publication par chapitre :

1. C. Braud, D. Heitz, P. Braud, G. Arroyo, J. Delville. Analysis of the wake-mixing-layer interaction using multiple plane PIV and 3D classical POD. *Exp. in Fluids*, 37(1):95-104, 2004.
2. M. Ndoye, J. Delville, D. Heitz, G. Arroyo. Parameterizable Constant Temperature Anemometer, a new method for the analysis of velocity-temperature coupling in turbulent heat transfer. *Meas. Sci. Technol*, 21(7), 2010.
3. D. Heitz, E. Mémin, C. Schnœrr. Variational fluid flow measurements from image sequences: synopsis and perspectives. *Exp. Fluids*, 48(3):369-393, 2010.
4. A. Gronskis, D. Heitz, E. Mémin. Inflow and initial conditions for direct numerical simulation based on adjoint data assimilation. *J. Comput. Phys.* 242:480-497, 2013.



# Analysis of the wake–mixing-layer interaction using multiple plane PIV and 3D classical POD

C. Braud, D. Heitz, P. Braud, G. Arroyo, J. Delville

**Abstract** The strong interaction between turbulent structures arising from a plane mixing layer impinging on a circular cylinder is studied. This complex flow has been investigated by a set-up called “dual-plane” PIV that uses two 2D PIV (two-dimensional particle image velocimetry) planes acquired simultaneously. This approach allowed us to apply a 3D-POD (three-dimensional proper orthogonal decomposition) treatment. The first POD modes show the main footprint of the flow configuration, which comprises oblique structures associated with the action of the mixing layer on the near wake. The present study suggests, by analogy, that this phenomenon behaves like the dislocation observed in uniform wake flows.

## 1 Introduction

The interaction between a plane mixing layer and the wake of a slender body is of great interest in numerous practical configurations, e.g. heat exchangers, off-shore structures, wind turbines, smoke stacks. The motivation for the present study is directly related to an air flow control problem encountered in the food industry.

The interaction of the wake of a circular cylinder and a turbulent plane mixing layer presents a complex flow structure, which until recently has received little attention. This is partly due to the fully three-dimensional (3D) organization in the near wake where experimental and numerical investigations are difficult to carry out. Nevertheless attempts were made to understand the physical nature of the coupling between the 2D and 3D processes in the wake of a nominally 2D cylinder, see e.g. Bearman (1998). All of the 3D organization resulting from velocity shear (von Kármán and Tsien 1945; Maull and Young

1973; Tavoularis et al. 1987; Woo et al. 1989), diameter taper (Piccirillo and Atta 1993), wake of a cone (Gaster 1969), local discontinuity in cylinder diameter and end conditions (Szepessy and Bearman 1992; Lewis and Gharib 1992; Gerich and Eckelmann 1982; Norberg 1994; Williamson 1996) are similar in behaviour. In all of these flows, there is a spanwise variation of the Strouhal frequency that is tied in with the 3D vortex dynamics. For small perturbations, cells of constant frequency shedding appear. Between these regions, the neighbouring vortices are forced to find suitable termination linkages. Williamson (1989) proposed a linkage model for the spanwise dislocations. Piccirillo and Atta (1993) investigated the 3D organization of the wake caused by a local discontinuity in the cylinder diameter (stepped cylinder). They found two kinds of vortex linkage depending on the diameter ratio and on the Reynolds number. Woo et al. (1989) studied the secondary flows and vortex formation around a circular cylinder in constant shear. In this case the boundaries of the cells of constant frequency are defined by a local accumulation of the vorticity of the oncoming flow, which is rolled up around the obstacle to form a longitudinal vortex. In our study, the mixing layer not only shows this vorticity, but also introduces a significant additional parameter, namely the non-stationarity nature of the oncoming flow.

Thus in terms of stability analysis, it is considered that there can exist at least three oscillators, the mixing layer, the high velocity wake and the low velocity wake, any of which is likely to be susceptible to interaction with the other two. Understanding of the mechanisms involved, in particular in the near-wake region of the cylinder, is important in order to clarify the resulting 3D organization.

Previous studies of this flow configuration (Heitz et al. 1997, 1998; Heitz 1999) showed that strong interactions take place just behind the shedding body. In the near-wake region it was demonstrated how the influence of the local shear associated with the wake and the mixing layer produces a non-stationary secondary flow, including a fluid transfer in the spanwise direction of the cylinder, from the low to the high velocity side of the mixing layer. It was thought that the phenomena could be linked to the oncoming structures of the mixing layer and would shed structures from circular cylinder. The shedding along the span of the body breaks into cells of constant frequency caused by the high and low velocity sides of the mixing layer. At the cell boundary, there is a beating of the neighbouring cells and mixing layer frequencies. The aforementioned experiments indicated that a certain level

---

Received: 15 October 2002 / Accepted: 8 January 2004  
Published online: 30 March 2004  
© Springer-Verlag 2004

C. Braud (✉), P. Braud, J. Delville  
L.E.A. (Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques),  
UMR CNRS 6609, CEAT, 43 Route de l'Aérodrome,  
86036, Poitiers, France

C. Braud, D. Heitz, G. Arroyo  
CEMAGREF, 17 avenue de Cucillé,  
35044 cedex Rennes, France  
E-mail: caroline.braud@cemagref.fr

C.B. acknowledges support from the region of Poitou Charente, France.

of organization exists in the near-wake zone of interaction. It is our intention here to give a description of the coherent structures in that zone of interaction.

Dealing with the experimental approach of this problem, particle image velocimetry (PIV) is now a frequently used technique for analyzing complex flows. While conventional 2D PIV provides only two velocity components in a 2D plane of the flow, stereoscopic PIV can now be used to measure the third component in that plane, with, in the case of time-resolved PIV, an actual frame rate of the order of 1 KHz.

Recently Lourenco et al. (1998) and Kaehler and Kompenhans (1999) performed a multiple stereo PIV called "dual plane". Kaehler et al. (2000) and Hu et al. (2001) applied this technique to obtain a complete set of data needed for the analysis of complex flows. They showed how a combination of two PIV planes can be used to retrieve two-point spatio-temporal correlations and to improve the accuracy of vorticity measurement.

The proper orthogonal decomposition (POD) has proved to be a powerful tool for the extraction of complex information from measurement data, allowing the identification of coherent structures. POD treatment of PIV data is thus a relevant means for the analysis of complex flows (Bernero and Fiedler 2000).

In this paper the flow under investigation is a complex 3D flow, obtained by the interaction of a plane mixing layer and a wake (Fig. 1). As no experimental means is presently available to obtain a fully 3D–three-component instantaneous description of the flow used in a snapshot POD, the dual-plane technique was selected as a relevant way to acquire the two-point correlation tensor with zero time delay, necessary for a classical 3D–two-component POD. A partial 3D–three-component analysis was then carried out relying on continuity and on an assumption of symmetry in the third direction.

In the following section flow configuration is introduced. In Sect. 3 the experimental set-up is presented and in Sect. 4 classical POD is formulated. The POD kernel construction is explained in Sect. 5. Validation of the PIV measurements is provided in Sect. 6, POD results are given and discussed in Sect. 7 and conclusions are provided in Sect. 8.

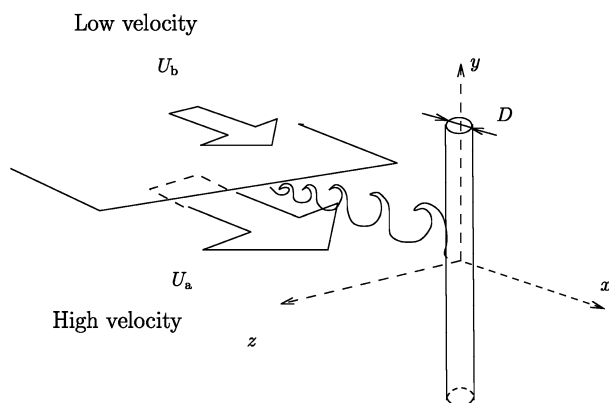


Fig. 1. Mixing layer-wake interaction

## 2 Flow configuration

Experiments were performed in the R300 closed-loop wind tunnel of the CEAT (Centre d'Etudes Aérodynamiques et Thermiques, University of Poitiers, France). This wind tunnel has a square test section of  $300 \times 300 \text{ mm}^2$  and is 2 m long, with a contraction ratio of 10. For more details about the facility, see Heitz (1999). Air flow ( $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ), generated by a fan, passes through two filters with different pressure drops, in order to generate different velocities on either side of a thin splitter plate ( $U_b = 11.7 \text{ m/s}$  and  $U_a = 18 \text{ m/s}$ ). The boundary layers on both sides of the splitter plate are turbulent. The velocity ratio between the two streams is  $r = 0.65$ , with an average convective velocity  $U_m = (U_a + U_b)/2 = 14.85 \text{ m/s}$ , giving an average Reynolds number of 7,920. The free stream turbulence levels are less than 0.3%. Preliminary hot-wire measurements showed that without the cylinder, the mean velocity profiles of the plane mixing layer attain a self-similarity state 140 mm downstream of the trailing edge of the splitter plate, with an expansion factor,  $\sigma$ , of about 48. The circular cylinder, of diameter  $D = 8 \text{ mm}$  and aspect ratio  $L/D = 34$ , is placed 159 mm downstream of the splitter plate, so that  $\delta_{\omega} = D$ , where  $\delta_{\omega}$  is the local vorticity thickness of the mixing layer. Rectangular plates ( $8D$  length and  $7D$  width) are placed near the end of the circular cylinder in order to limit end effects (Stansby 1974). High velocity flow is on the under side and low velocity on the upper side of the splitter plate. The coordinate system is  $x$  in the streamwise direction,  $y$  in the cross-stream (vertical, parallel to the axis of the cylinder) and  $z$  in the spanwise direction relative to the mixing layer spanwise structures. The origin is taken so that  $x = 0$  and  $z = 0$  on the cylinder axis and  $y = 0$  on the centreline of the trailing edge of the splitter plate (Fig. 1).

By simply stating that inhomogeneity arises in a given direction when this direction has a strong velocity gradient, one can assert that the flow under study is inhomogeneous in all three directions: in the streamwise direction  $x$  because of the continuous mixing layer expansion, which is sharply modified by the local velocity deficit in the wake; in the cross-flow direction  $y$  because of the separation in two different flows under action of the mixing layer velocity gradient and in the spanwise direction  $z$  because of the gradients associated with the wake velocity deficit. As shown by Lumley (1970), POD must be applied for directions where strong inhomogeneity exists. This implies that this particular turbulent complex flow is clearly a case where classical POD is liable to provide relevant information on the 3D flow organization.

## 3 Experimental set-up: multiple plane PIV

Data were acquired from a set of two PIV systems (Fig. 2), the two light sheets being placed parallel to each other and independently moved to obtain pairs of instantaneous velocity fields, with a varying spatial gap between the measurement planes ( $z$  direction). Parallel planes were aligned in the vertical  $x$ - $y$  direction. The study was concentrated at the beginning of the wake, immediately downstream of the cylinder, in order to capture images

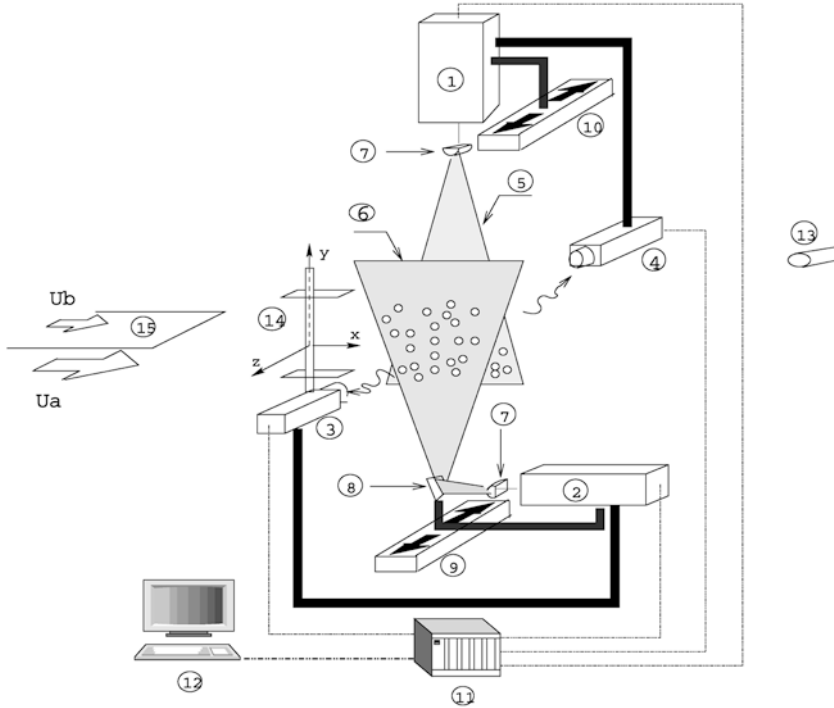


Fig. 2. Experimental set-up

including the end of the near-wake interaction zone. The illumination set-up comprised two Nd:YAG double-pulse laser systems (Quantel, Les Ulis, France and NewWave Research Inc., Fremont, Canada) (Fig. 2 (1, 2)) with an output energy of 30 mJ per pulse at a green wavelength  $\lambda=532$  nm. Each of the camera-laser pairs (2, 3) and (1, 4) were jointly displaced parallel to the  $z$  axis (9, 10) such that the focusing distance remained unchanged. It was foreseen that the velocity correlation tensor be obtained through a combination of  $N_z=21$   $x$ - $y$  plane positions (see Sect. 5). This led to 231 configurations, with a variable gap between the two light planes.

### 3.1 Polarized optical system

The smallest values of the distance between the parallel planes was found to be less than the depth of field of the optical system. The two laser systems were initially polarized in the same direction, each beam being split into a thin light sheet (Fig. 2 (5, 6)) (less than 1 mm thickness) by a semi-cylindrical lens (Fig. 2 (7)). One of the lasers was coupled with a mirror (Fig. 2 (8)) and its position was chosen in order to change the polarization of the light sheet orthogonally to that of the other. By equipping each camera with a polarizing filter corresponding to one light sheet, the system was capable of capturing independent images of the flow. In order to verify the efficiency of the polarization system, the two cameras were positioned so as to see one of the light sheet planes, the other being switched off. The flow was seeded with particles and a video monitor used to control the images recorded. The system yielded a perfect separation—one camera correctly capturing image pairs leading to valid calculations of velocity fields through a cross-correlation treatment by the Dantec Technology (Skovlunde, Denmark) FlowMap processor

(Fig. 2 (11)) and its software, FlowManager (Fig. 2 (12)), while the second camera showed black images.

### 3.2 Tracer particles

To get a correct scattering of orthogonally linearly polarized light, an olive oil generator was used. The spray was generated through a Laskin nozzle, fed with pressurized air and an impacting plate used to reduce the particle diameters  $dp$ . The particle diameter ( $dp \approx 1 \mu\text{m}$ ) was set greater than the incident light wavelength ( $0.532 \mu\text{m}$ ), in order to remain in a configuration where Mie-scattering theory applies (Raffel et al. 2000).

The spray generator was located downstream of the test section (Fig. 2 (13)) in the closed loop of the wind tunnel, to ensure good homogeneity of the seeding in the view planes.

### 3.3 Image recording system

The images were captured by two CCD cameras (type 700, Eastman Kodak Co., Rochester, NY, USA) (Fig. 2 (3),(4)), of  $768 \times 486$  pixels resolution and 8 bit dynamic range. The cameras were placed on both sides of the test section so that the upstream edge of the images corresponded to  $0.9D$  downstream of the cylinder axis, the image size in physical space being  $L_x \times L_y = 84 \times 62 \text{ mm}^2$ .

### 3.4 Synchronization and correlation

The laser pulse rate was adjustable up to 20 Hz but the acquisition frequency was limited to 15 Hz by the camera frame rate. Synchronization of the camera apertures with the laser pulses and synchronization between the two lasers was achieved using the FlowMap hardware (Fig. 2



(12)). FlowMap was also used to calculate the cross-correlation of the two pairs of grey level images acquired by the cameras. A 50% overlap of the interrogation windows was chosen for the cross-correlation calculations ( $32 \times 32$  pixels<sup>2</sup> cells).

As 231 configurations had to be treated (see Sect. 5), each one with two PIV planes, it was necessary to reduce post-processing of the calculated velocity fields. The vector maps were only submitted to a rejection of erroneous vector outside a vector modulus of range [3.7,36.0] m/s. No other validation method was applied, apart from a classical signal to noise ratio test (peaks <1.3 were rejected). The resulting validation process led to rejection of less than 1% of the vectors. No filtering was applied to the data before calculation of the correlation tensor.

#### 4 Proper orthogonal decomposition

Lumley (1967) suggests that the coherent structures within a random field can be identified with the realization of the flow that possesses the largest projection onto the flow field. This approach, the POD, is a classical tool in probability theory (Loeve 1955). This method is also called Karhunen–Loeve expansion in pattern recognition theory (Ash and Gardner 1975; Fukunaga 1972) or principal component analysis in statistical analysis (Ahmed and Goldstein 1975).

Compared to many other classical methods used for large-scale structure identification (conditional methods, VITA, pattern recognition analysis, etc.), POD is very attractive because no a priori is needed for the eduction scheme. Only a set of flow samples is necessary. From these samples a two-point correlation tensor is constructed for one or several directions (spatial or/and temporal) and for one or several flow variables. Adding directions or variables leads to more complex decompositions but generally leads to more precise description of the large-scale structure (Delville 1995).

Solving the POD problem can be reduced to determining the solutions of an integral eigenvalue problem (Fredholm equation) where the kernel is the correlation tensor. A basis of uncorrelated orthogonal functions (eigenfunctions or eigenvectors), which are characteristic of the most probable “flow realizations” is then obtained. This important property permits the decomposition of every flow realization onto the basis of eigenfunctions obtained. By definition, POD is optimal in terms of the description of the energy present within the flow.

POD consists in searching for a set of deterministic uncorrelated velocity fields, flow realizations that correspond to preferred modes  $\Phi(\mathbf{X})$  of the flow. Consider  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$  to be a set of realizations of the velocity field ( $\mathbf{X}=(x,y,z;t)$ ). To determine these modes it is simply required to search within the flow realizations  $u_i(\mathbf{X})$  for the  $\Phi_i(\mathbf{X})$  “closest” in average to this set. At this level, the average is not defined and will depend on the kind of POD used.

Mathematically this problem can be written:

$$\frac{\langle (\mathbf{u}, \Phi)^2 \rangle}{(\Phi, \Phi)} \stackrel{!}{=} \text{Max}, \quad (1)$$

where  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  corresponds to the scalar product  $\mathbf{u}$  by  $\mathbf{v}$  defined by:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_D \mathbf{u}(\mathbf{X}) \mathbf{v}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n_c} u_i \int_D u_i(\mathbf{X}) v_i(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad (2)$$

Depending on the way the ensemble average  $\langle \bullet \rangle$  is defined for calculating the kernel of the integral eigenvalue problem, different orthogonal decompositions can be obtained: classical, snapshot, extended, biorthogonal, etc. For example, the ensemble average can consist of:

- a temporal average, under the ergodicity assumption in statistically stationary flows (“classical” method, Lumley 1967); the kernel of the POD problem is then a two-point space correlation tensor (e.g. with shape  $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}') \rangle$ )
- a spatial average, estimated for  $N$  uniformly sampled discrete times for  $t_n = n\tau$  for  $n=1, \dots, N$ , for which the instantaneous flow fields  $u_i(\mathbf{x}, n\tau)$  are uncorrelated, where  $\tau$  is a time scale, characteristic of the correlation time (“snapshots” method, Sirovich 1987). The kernel is then a two points time correlation tensor (e.g. with shape  $\langle \mathbf{u}(t) \mathbf{u}(t') \rangle$ )

For the same discrete finite set of data, these two approaches can be shown to be equivalent (Sirovich 1987). Note that most of the time, both for experimental and numerical approaches, a discrete set of  $N_s$  spatial nodes obtained at  $N_t$  discrete times are available. The choice of a classical or snapshot approach is then essentially related to computational aspects. In a discrete approach of the POD, the eigenvalue problem to be solved is of rank  $N_p$ , the number of grid points. Therefore for applications of POD to computation or PIV experiments, the size of the set of samples is considerably smaller than the number of spatial nodes and the snapshot POD is generally used.

However in the present study, the three spatial directions were strongly inhomogeneous and no experimental way is presently available to get a fully 3D–three component instantaneous description of the flow, so a snapshot POD approach is not possible and a “classical” POD must be used.

This problem leads to the Fredholm integral eigenvalue problem of Eq. 3.

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Phi_j^{(n)}(\mathbf{x}') d\mathbf{X}' = \lambda^{(n)} \Phi_i^{(n)}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

Practically, we solve this problem by considering the following matrix diagonalization problem: find the eigenvectors and eigenvalues of a symmetric definite-positive matrix:

$$A\Phi = \Lambda\Phi \quad (a)$$

where  $A$  is a discrete representation of the two-point velocity cross-correlation tensor. The correlation tensor is obtained from block ensemble average, according to stationarity and ergodicity hypothesis,  $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}') \rangle$ , where  $\mathbf{x}=(x,y,z)$ . The structure of  $A$  will be discussed in

Sect. 5. The eigenvalues,  $\lambda^{(n)}$ , are representative of the integrated turbulent kinetic energy.

Note that according to the Hilbert–Schmidt theory, solutions of Eq. 3 could be expressed as:

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_n a^{(n)}(t) \Phi_i^{(n)}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

with projection coefficients,

$$a^{(n)} = \int_D u_i(\mathbf{x}, t) \Phi_i(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (5)$$

However in our case, even if the eigenvectors can be obtained this projection is not possible because only partial measurements (two slices from the full domain) are performed at the same time.

The flow studied here is a 3D complex flow with no direction of homogeneity (Sect. 2), so the two-point correlation tensor has to be supplied for all combinations of positions in the chosen mesh. This leads to a 3D correlation tensor of the two first fluctuating velocity components ( $u', v'$ ). The POD is applied to these two components only and the eigenvectors  $\Phi_u^{(n)}$  and  $\Phi_v^{(n)}$  are known in the full domain of analysis. Afterwards, the third component of eigenvector,  $\phi_w$ , is calculated from the continuity equation:

$$\Phi_w^{(n)}(\mathbf{x}) = - \int_0^z \left( \frac{\partial \Phi_u^{(n)}(x, y, \eta)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_v^{(n)}(x, y, \eta)}{\partial y} \right) d\eta \quad (6)$$

As a first approach we assume flow symmetry in the  $z$  direction, we impose  $\Phi_w^{(n)}(x, y, z=0)=0$  making it possible to use Eq. 6. Finally, a 3D–three component description of the organization of the velocity field can be obtained corresponding to the odd component of the flow realization.

## 5 Estimation of the POD kernel

This section explains how the two-point correlation tensor,  $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t=0)$  with  $\mathbf{x}=x, y, z$  and  $\mathbf{x}'=x', y', z'$  is obtained from the experiments.

### 5.1 3D-POD kernel

The two simultaneous PIV planes of  $N_x \times N_y = 47 \times 29$  vectors are acquired, in 231 combinations of the  $N_z = 21$  positions in the  $z$  direction.

From each couple of PIV planes ( $p, q$ ) (i.e. for given  $z$  and  $z'$  plane locations), a 2D two-point correlation tensor can be calculated, noted  $R_{ij}(x, y, x', y')_{pq}$  for the first two components of the velocity fluctuation 7.

For  $i, j = u, v$ :

$$R_{ij} \left( x, y, x', y' \right)_{pq} = \begin{pmatrix} R_{uu}(x, y, x', y') & R_{uv}(x, y, x', y') \\ R_{vu}(x, y, x', y') & R_{vv}(x, y, x', y') \end{pmatrix}_{pq} \quad (7)$$

Then the full 3D kernel, noted  $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t=0)$ , can be supplied by a variation of the separation between the two PIV planes in  $z$  direction 8.

For  $p, q = 1, \dots, N_z$ :

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left[ R_{ij}(x, y, x', y')_{pq} \right] \quad (8)$$

Finally, the rank of the 3D tensor, for the first two components, is  $N_{\text{tot}} = 2 \times N_x \times N_y \times N_z = 56,526$ .

Note however that, by considering the blocks ( $R_{ij}(x, y, x', y')_{pq} = R_{ij}(x, y, x', y')_{qp}$ ) and hermitian (for  $i=j$ :  $R_{ii}(x, y, x', y') = R_{ii}(x', y', x, y)$  and for  $p=q$ :  $R_{uv}(x, y, x', y') = R_{vu}(x', y', x, y)$ ) symmetries of the correlation tensor, it is not useful to estimate the  $N_{\text{tot}}$  correlation, only the upper triangular part of the 3D tensor is necessary. Therefore only  $(N_z+1) \times N_z / 2 = 231$  pairs of PIV planes are acquired.

## 5.2 2D-POD kernel

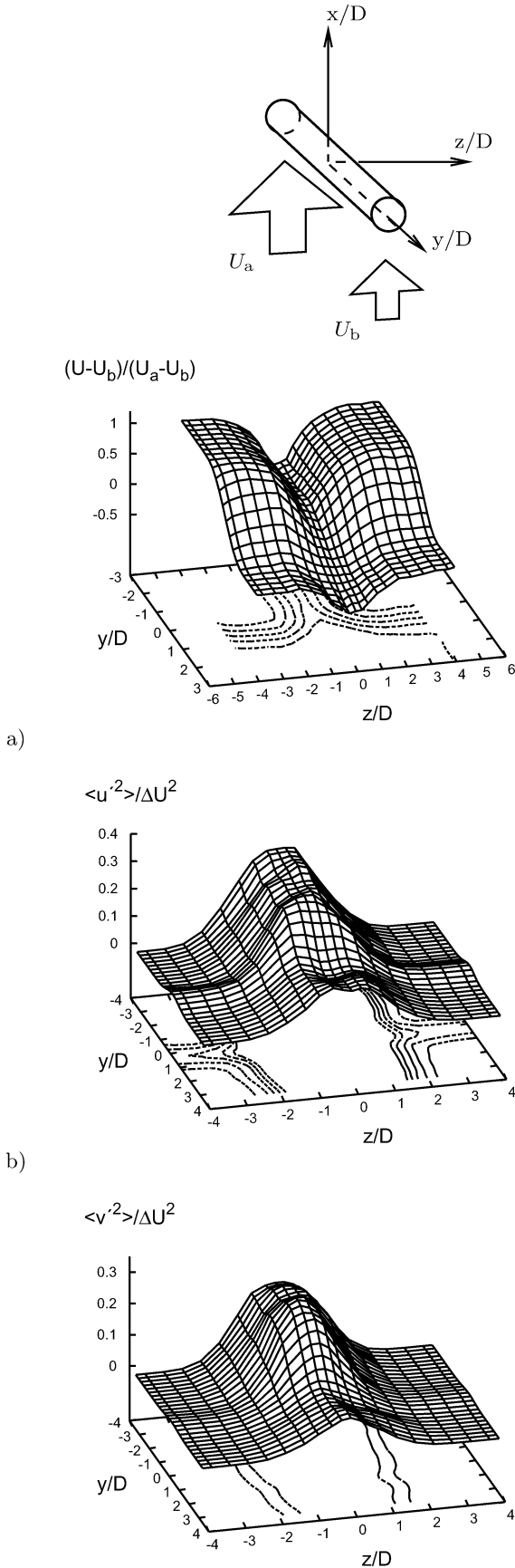
Considering only one spanwise position (i.e. given pairs of two-plane PIV for the same  $z=z'$ ), a much smaller 2D correlation tensor can be used for a first analysis (the order of magnitude of the problem to be solved being  $2 \times N_x \times N_y$ ). In this case we have to independently apply, for each  $z$  location, what we call a “slice-POD” that provides a partial description of the flow organization, not taking into account the spanwise organization. Note that this approach is a subset of the full 3D problem where only the blocks located on the diagonal (i.e.  $p=q$ ) of  $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  are considered (i.e. all the blocks involving  $p \neq q$  are put to zero).

## 6 Validation of PIV measurements

Before using the PIV measurements for a POD analysis, a preliminary comparison was made with previous hot-wire data obtained by Heitz (1999) (see Table 1), in order to verify that the main characteristics of the flow could be retrieved in the PIV measurements. From each series of single PIV  $x$ – $y$  planes, values of mean velocity and velocity fluctuations were reconstructed in  $y$ – $z$  planes, in which a coherent series of hot-wire measurements were available. Partial results for the  $x/D=5.5$  plane are given in Fig. 3 and Fig. 4. Some quantitative discrepancies appear between hot-wire and PIV results, mainly in the level of the wake velocity deficiency and of the local velocity gradient. For PIV the accuracy is 0.1 pixel ( $0.4 \text{ m s}^{-1}$ ) for the displacement calculated from the correlation peak detection. This gives a relative error on the velocity deficiency of 4.7%. For hot-wire measurements, uncertainty is estimated to be less than 1% for the mean streamwise velocity but more difficult to quantify in the near-wake zone where high 3D organization causes errors in the measurement of the  $U$  component with single wire probes. In terms of local

Table 1. Flow parameters

Parameters	Hot-wire (Heitz 1999)	PIV (dual plane)
$D$	15 (mm)	8 (mm)
$L/D$	18	34
$U_a$	9 (m/s)	18 (m/s)
$U_b$	6 (m/s)	11.7 (m/s)
$Re=U_m D/\nu$	7,500	7,920



**Fig. 3a-c.** PIV measurements at  $x/D=5.5$ . **a** mean velocity-streamwise component  $(\bar{U} - U_b)/(U_a - U_b)$ , Reynolds stresses; **b**  $\langle u'^2 \rangle / (U_a - U_b)^2$ ; **c**  $\langle v'^2 \rangle / (U_a - U_b)^2$

gradients, for the PIV measurements the characteristic length of the velocity gradient in the  $y$  direction is related to the vorticity thickness,  $\delta_w=8$  mm corresponding to 80 pixels. The velocity is imposed uniform on the interrogation window ( $32 \times 32$  pixels<sup>2</sup> with 50% overlap), then the velocity gradient of the mixing layer is derived from 5 points only. It appears then that the spatial grid is much coarser for the PIV measurements than for the hot wire.

Despite these uncertainties, the main characteristics of the flow are retrieved from the PIV measurements. The cylinder wake is markedly split into two different wakes because of the effect of the mixing layer. In the mixing layer area,  $x$ - $y$  planes for  $|z/D|=4$ , the linear evolution of the vorticity thickness  $d\delta_w/dx=0.035$  and the expansion factor,  $\sigma=47.8$ . In the wake area,  $x$ - $z$  plane for  $|y/D|>3$ , the invariant Reynolds stresses give  $\bar{u}'^2/\bar{v}'^2 = 1.5$  for the low velocity side and 1.45 for the high velocity side. The interaction zones, where the wakes and the mixing layer interact, show identical shapes and comparable levels in mean velocity and Reynolds stresses. These results are consistent with Heitz (1999) findings and were found sufficient to validate the PIV data as correctly describing the topology and dynamical behaviour of the flow.

## 7

### POD results

In this section we first analyze the truncated results obtained from the slice-POD approach and then the results obtained from the full 3D-POD approach.

#### 7.1

##### Slice-POD

The main results obtained in this truncated POD, where no spanwise correlation is taken into account, are summarized with the first POD modes in Figs. 5 and 6. Note that the interpretation of individual POD modes is very difficult, nonetheless the principal behaviour and the composition of different structures become evident.

When the slice is located out of the mixing layer-wake interaction area, the dominant organization is found to be very similar to that observed in a plane mixing layer. The vector fields and iso- $\Phi_u^{(n)}$ , plotted in Fig. 5a-c for the first three POD modes obtained at  $z/D=-4$ , clearly exhibit a flow organization where large-scale vortices appear.

Modes 1 and 2 show the same streamwise length scale and are spatially phase shifted: this result is a consequence of the convective nature Rempfer (1996) of the flow and the same behaviour is found regardless of which slice location is chosen (not shown here). The streamwise length scale  $\lambda_x$ , corresponding to the streamwise distance between two centres of iso- $\Phi$  areas with the same signs, associated with these first two POD modes is  $\lambda_x \sim 9D$ , corresponding to an equivalent Strouhal number<sup>1</sup>  $St = \delta_w / \lambda_x \sim 0.14$ . This Strouhal number is about half the conventional value found in plane mixing layers. The first two POD modes of the slice-POD thus reveal structures twice as large as those found in a conventional plane mixing layer, however modes 3 and 4 (see Fig. 5c for mode 3) exhibit a more realistic length scale. However we will see in the following that these first

<sup>1</sup> $St = (f\delta_w)/U_c$  and  $f = U_c/\lambda$  (Taylor hypothesis)

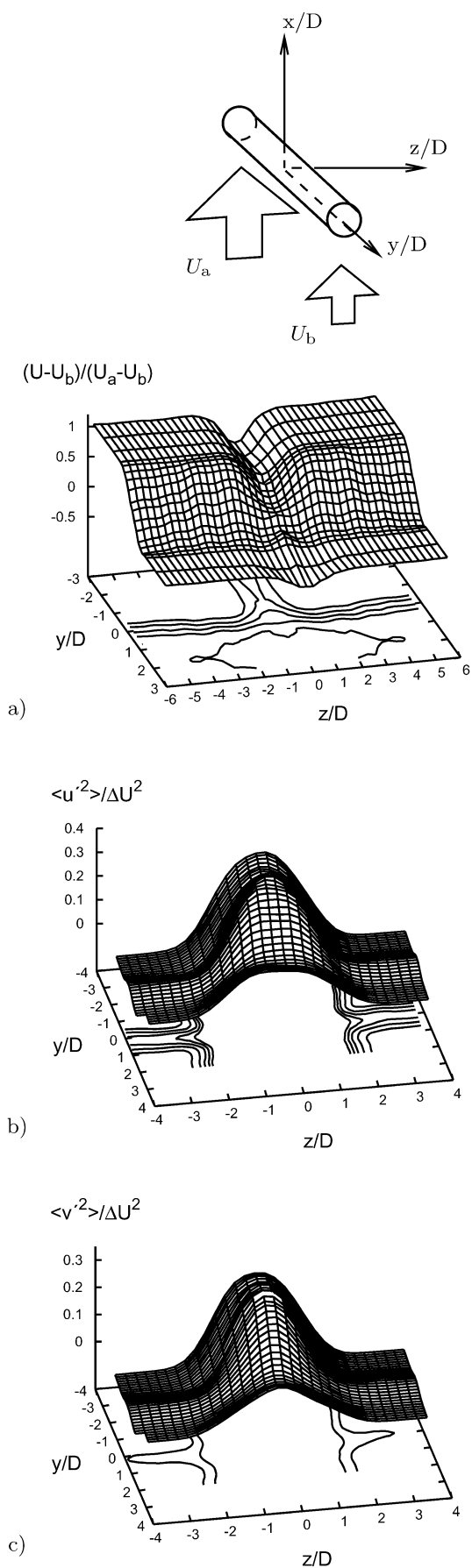


Fig. 4a-c. Hot-wire measurements (single wire probe) at  $x/D=5.5$ . a mean velocity-streamwise component  $(\bar{U} - U_b)/(U_a - U_b)$ , Reynolds stresses (four-wire probe); b  $\langle u'^2 \rangle / (U_a - U_b)^2$ ; c  $\langle v'^2 \rangle / (U_a - U_b)^2$

two modes evolve in agreement with the third 3D-POD mode and that their organization gives the footprint of the global large-scale motion induced by the wake-mixing layer interaction.

When the slice is located in the wake-mixing layer interaction area a very different behaviour is observed. The vector field and iso- $\Phi_u^{(1)}$ , plotted on Fig. 6a for the first POD mode (obtained at  $z/D=-1.25$ ), show that the spatial organization is quite different. Typical  $\Lambda$ -shape structures are then manifest. Note that the average length scale appearing is of the same order of magnitude as that of the mixing layer (mode 3 of Fig. 5c). The slant and the streamwise length scale of these structures are different on the high and low velocity sides. This last feature will be re-examined and quantified in the following of this paper, after analysis of the 3D-POD results.

## 7.2 3D-POD

For computational reasons the 3D-POD has been only solved for a coarser reduced number of mesh points. This mesh is  $N_x \times N_y \times N_z = 23 \times 14 \times 17$ , giving  $N_{\text{tot}} = 10,948$ . In this POD the spanwise correlations are taken into account and the full 3D organization of the POD modes can be retrieved. A typical example of this 3D reconstruction is illustrated in Fig. 7, where slices through a horizontal plane ( $y=0$ ) of the first three eigenvectors are plotted. Clearly modes 1 and 2 exhibit the same streamwise phase shift as seen in the slice-POD, this being a consequence of degeneration owing to the convective nature of the flow. The overall organization of the first two POD modes is very similar to that obtained in a conventional wake and corresponds to alternate vortices aligned in the streamwise direction. The spanwise distance between the centres of the counter rotating eddies is close to  $D$ , the cylinder diameter. The longitudinal length scale of these vortices seems to be of the same order of magnitude as that obtained from the slice-POD for mode 3 in the region downstream of the interaction area (Fig. 5c) and for mode 1 in the interaction region (Fig. 6a). On the other hand, mode 3 exhibits a very large-scale global motion with a streamwise length scale comparable with that of the first slice-POD mode of Fig. 5a. The topology of this organization exhibits a focus located at  $x/D \sim 6$  and is associated with very high values of vertical velocity corresponding to a rush towards the high velocity side. A more global and qualitative view of the 3D flow organization is given in Fig. 8a where iso-surfaces of the spanwise vorticity contribution of the first POD mode are shown ( $\omega_z = \partial \Phi_v^{(1)} / \partial x - \partial \Phi_u^{(1)} / \partial y$ ).

This organization can be summarized by considering the schematic view of Fig. 8b corresponding to the global shape and length scale in an  $x$ - $y$  plane, as deduced from the analysis of Figs. 6a and 8a. These structures can be modelled as two oblique cells with different angles  $\theta$  and length scales (see Table 2).

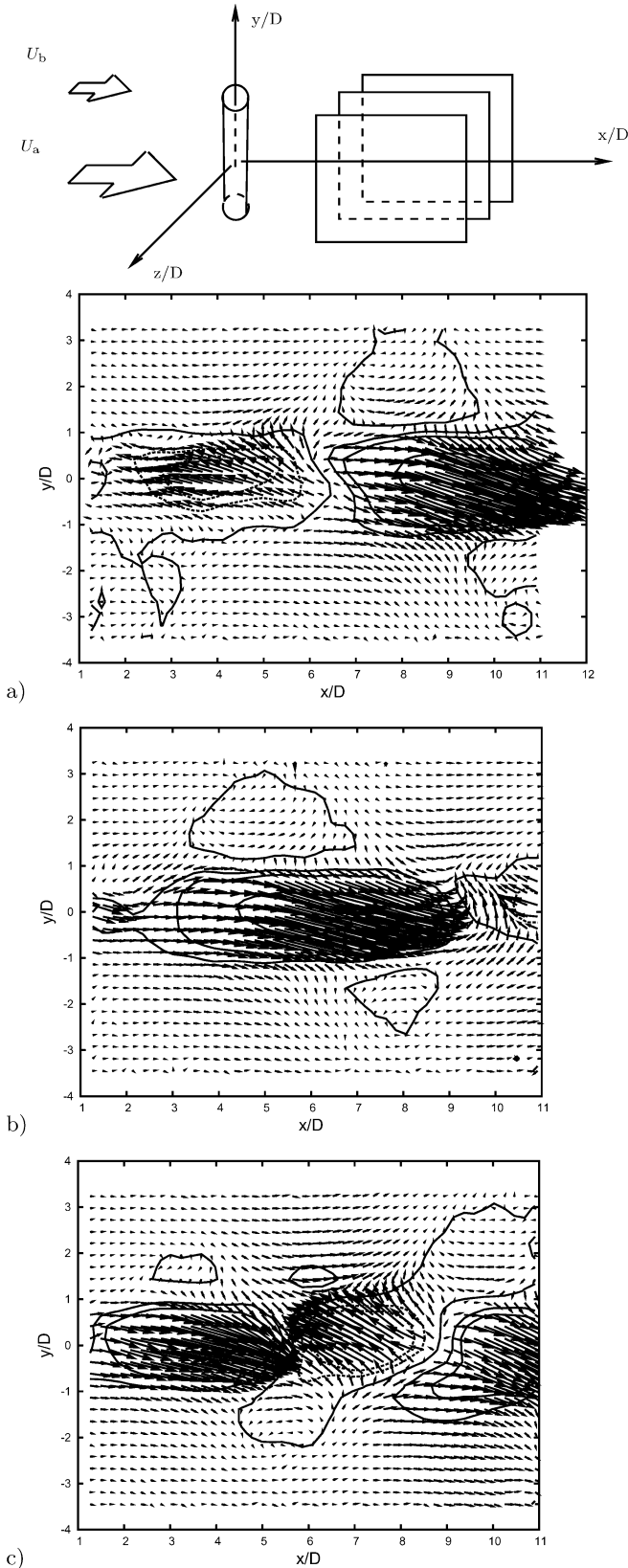


Fig. 5a-c. Eigenvector fields from a slice-POD ( $x, y, z = -4D$ ) in the pure mixing layer region. Superimposed on these plots, contours of iso-values of  $\sqrt{\lambda} \phi_u / \Delta U$  are drawn (solid line positive, dashed line negative). a-c correspond to the first, second and third POD modes respectively

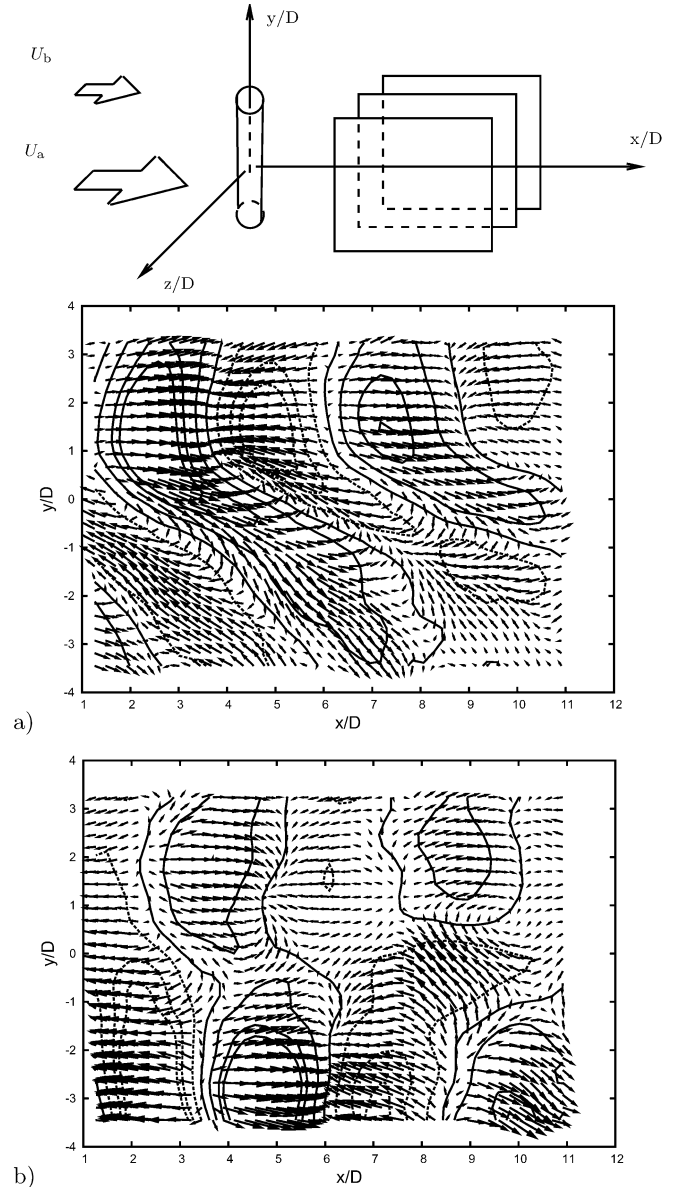


Fig. 6a, b. Eigenvector fields from a slice-POD ( $x, y, z = -1.25D$ ) in the wake shears area. Superimposed on these plots, contours of iso-values of  $\sqrt{\lambda} \phi_u / \Delta U$  are drawn (solid line positive, dashed line negative). a, b correspond to the first and third POD modes respectively

By considering that the effective length scale is the projection  $\lambda_0 = \lambda_\theta \cos(\theta)$  (Williamson 1989), we can retrieve the parallel length scale  $\lambda_0$  on each side of the mixing layer.

The ratio of the parallel mode length scales is  $\lambda_{0HV} / \lambda_{0LV} \approx 1/r$ ,  $r$  being the velocity ratio  $r = U_b / U_a = 0.65$  of the mixing layer. It can then be supposed that the parallel length scales  $\lambda_0$ , representing the movement of the oblique cells, are related by the same ratio as the velocity ratio of the mixing layer. This is in good agreement with the behaviour observed by Williamson (1989) when oblique cells were generated by end effects in the wake of a cylinder. Here we can suppose that, in a similar way, the mixing layer gives rise to the simultaneous presence of two types of cell arrangements, with two different frequencies,

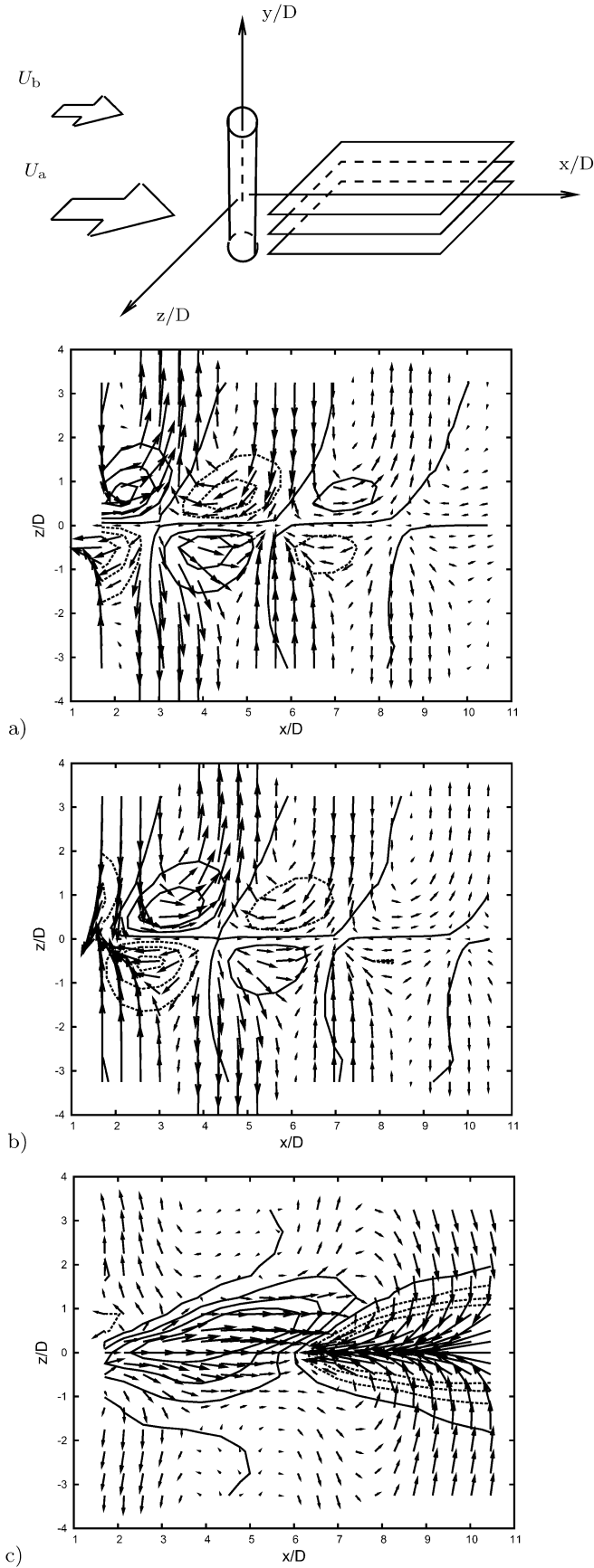


Fig. 7a-c. Eigenvector fields from a 3D-POD in the  $(x,z,y=0)$  plane. Superimposed on these plots contours of iso-values of  $\sqrt{\lambda}\phi_u/\Delta U$  are drawn (solid line, positive, dashed line negative). a-c correspond to the first, second and third POD modes respectively

which initiates the propagation of an oblique mode for the cells on both sides.

This is confirmed by the fact that such a configuration, two cells of different frequency on each side of the mixing layer, initiates “dislocations” (Williamson 1996) or “vortex splitting” (Eisenlohr and Eckelmann 1989). Heitz (1999) showed that the two frequency cells have spanwise transitions of their peaks with an increase in the spectral bandwidth in the mixing layer-wake interaction zone, which is indicative of dislocations (Prasad and Williamson 1997). This main feature is confirmed when looking at the

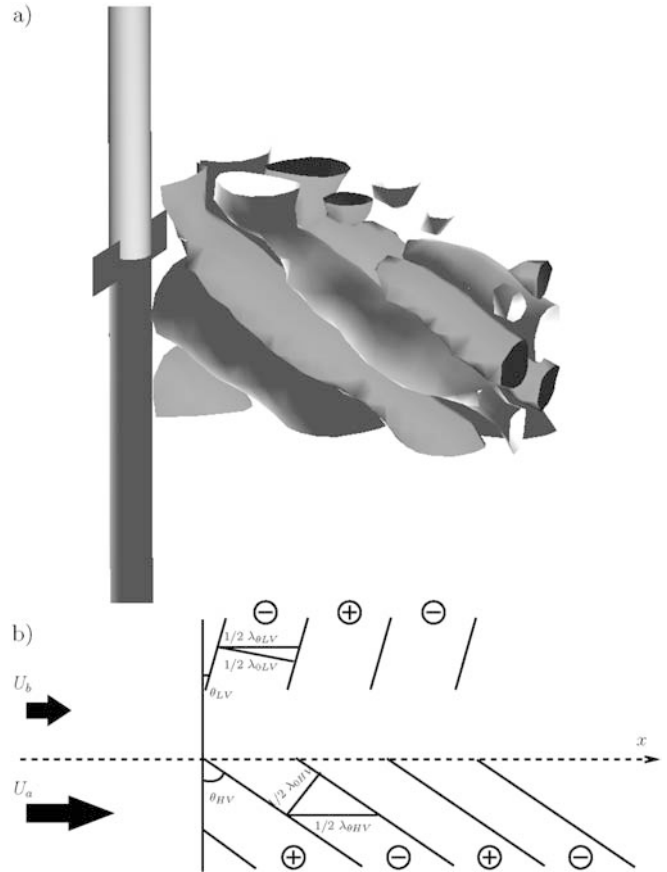


Fig. 8a, b. 3D flow organization. a Iso-surfaces of the spanwise vorticity  $\omega_z$  contribution of the first POD mode. Plotted are a positive (grey) and a negative (black) iso-surfaces; b Schematic view of this organization in a  $x-y$  plane

Table 2. Relation between the streamwise length scale  $\lambda_\theta$  and the parallel length scale  $\lambda_0$  obtained from a schematic view (Fig. 8b) of the 3D POD modes near the mixing layer-wake interaction

Mixing layer side	$\theta$ ( $^\circ$ )	$\lambda_\theta$	$\lambda_0$
LV	10	4.6D	4.5D
HV	62	6.6D	3.0D

higher POD modes (Fig. 6b). Thus the mixing layer, by generating cells of different frequencies, forces dislocation, oblique structures being the most energetic stage of the dislocation process as highlighted in this statistical analysis.

## 8

### Conclusions

Multiple plane PIV and POD have been used to underline and analyze the coherent structure organization of the strongly inhomogeneous 3D flow arising from a plane mixing layer impinging a circular cylinder. A polarization technique proved efficient for a full separation of the images captured by two synchronized PIV systems positioned parallel to each other with a varying separation between the two light sheet planes. This permitted the supply of a POD kernel, the resolution of which led to the construction of vector fields corresponding to the successive POD modes. The analysis of the respective contributions from these modes allowed the retrieval of the length scales and frequencies describing the dynamics of the mixing layer and of the two separated wakes on both sides of it. In the context of end effects, which led to dislocation in the uniform wake (Williamson 1996), the reconstructed fields from both the slice-POD and the 3D-POD underlined the presence of cells of oblique structures, forced by the action of the mixing layer on the cylinder wake. These results demonstrate the capability of the 3D-POD to extract information pertaining to the principal behaviour of such a complex flow.

### References

- Ahmed N, Goldstein M (1975) Orthogonal transforms for digital signal processing. Springer, New York Berlin Heidelberg
- Ash R, Gardner M (1975) Topics in stochastic processes. Academic Press, New York
- Bearman PW (1998) Developments in the understanding of bluff body flows. *Int J JSME B* 41:103–114
- Bernero S, Fiedler HE (2000) Application of particle image velocimetry and proper orthogonal decomposition to the study of a jet in a counterflow. *Exp. Fluids Suppl*: S274–S281
- Delville J (1995) La décomposition orthogonale aux valeurs propres et l'analyse de l'organisation tridimensionnelle des écoulements turbulents cisailés libres. PhD thesis, University of Poitiers, France
- Eisenlohr H, Eckelmann H (1989) Vortex splitting and its consequences in the vortex street wake of cylinders at low Reynolds number. *Phys Fluids A* 1:189–192
- Fukunaga K (1972) Introduction to statistical pattern recognition. Academic Press, New York
- Gaster M (1969) Vortex shedding from slender cones at low Reynolds numbers. *J Fluid Mech* 38:565–576
- Gerich D, Eckelmann H (1982) The influence of end plates and free ends on the shedding frequency of circular cylinder. *J Fluid Mech* 122:109–121
- Heitz D (1999) Etude expérimentale du sillage d'un barreau cylindrique se développant dans une couche de mélange plane turbulente. PhD thesis, University of Poitiers, France
- Heitz D, Delville J, Arroyo G, Garem J-H, Bonnet J-P, Marchal P (1997) Interaction of the wake of a circular cylinder and a plane mixing layer. In: *Proceeding of the 11th Conference on Turbulent shear flows*, Grenoble, France. vol 1. Institut National Polytechnique, Joseph Fourier University, pp 5.1–5.6
- Heitz D, Delville J, Arroyo G, Garem J-H, Bonnet JP, Marchal P (1998) Turbulent plane mixing layer perturbed by the wake of a circular cylinder. In: Frisch U (ed) *Advances in turbulence*, vol 7. Kluwer, Dordrecht, pp 309–312
- Hu H, Saga T, Kobayashi T, Taniguchi N, Yasuki M (2001) Dual-plane stereoscopic particle image velocimetry: system set-up and its application on a lobed jet mixing flow. *Exp Fluids* 31:277–293
- Kaehler C, Kompenhans J (1999) Multiple plane stereo PIV technical realization and fluid mechanical significance. In: *Proceedings of the 3rd International Workshop on PIV*, University of California, Santa Barbara, USA
- Kaehler C, Stanislas M, Dewhirst T (2000) Investigation of wall bounded flows by means of multiple plane stereo PIV. In: *Proceedings of the 10th International Symposium on Applications of laser techniques to fluid mechanics*, stereo PIV, Session 6. Calouste Gulbenkian Foundation, Lisbon, Portugal
- Lewis C, Gharib M (1992) An exploration of the wake three dimensionalities caused by a local discontinuity in cylinder diameter. *Phys Fluids A* 4:104–117
- Loeve M (1955) Probability theory. Van Nostrand, New York
- Lourenco L, Alkislar M, Sen R (1998) Measurement of the velocity field spectra by means of PIV. In: *Proceedings of the 9th International Symposium on the Applications of laser techniques to fluid mechanics*, Lisbon, Portugal
- Lumley J (1967) The structures of inhomogeneous turbulent flow. In: Yaglom AM, Tatarsky VI (eds) *Atmospheric turbulence and radio wave propagation*. Nauka, Moscow
- Lumley J (1970) *Stochastic tools in turbulence*. Academic Press, New York
- Maull D, Young R (1973) Vortex shedding from bluff bodies in a shear flow. *J Fluid Mech* 60:401–409
- Norberg C (1994) An experimental investigation of the flow around a circular cylinder: influence of aspect ratio. *J Fluid Mech* 258: 287–316
- Piccirilo P, Atta CV (1993) An experimental study of vortex shedding behind linearly tapered cylinders at low Reynolds number. *J Fluid Mech* 246:163–195
- Prasad A, Williamson CHK (1997) Three-dimensional effects in turbulent bluff-body. *J Fluid Mech* 343:235–265
- Raffel M, Willert C, Kompenhans J (2000) *Particle image velocimetry*. Springer, Berlin Heidelberg New York
- Rempfer D (1996) Investigations of boundary layer transition via Galerkin projections on empirical eigenfunction. *Phys Fluids A* 8:175–188
- Sirovich L (1987) Turbulence and the dynamics of coherent structures. 1: Coherent structures. *Q Appl Math* 45:561–571
- Stansby P (1974) The effect of end plates on the base pressure coefficient of circular cylinder. *Roy Aeronaut J* 78:36–37
- Szepessy S, Bearman PW (1992) Aspect ratio and end plate effects on vortex shedding from circular cylinder. *J Fluid Mech* 234:191–217
- Tavoularis S, Stapountzis H, Karnik U (1987) Vortex shedding from bluff cylinders in strongly sheared turbulent streams. *J Wind Eng Ind Aero* 26:166–178
- von Kármán T, Tsien H (1945) Lifting line theory for a wing in non-uniform flow. *Q Appl Math* 3:1–11
- Williamson CHK (1989) Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of circular cylinders at low Reynolds numbers. *J Fluid Mech* 206:579–627
- Williamson CHK (1996) Vortex dynamics in the cylinder wake. *Ann Rev Fluid Mech* 28:477–539
- Woo H, Cermak J, Peterka J (1989) Secondary flows and vortex formation around a circular cylinder in constant-shear flow. *J Fluid Mech* 204:523–542

# Parameterizable constant temperature anemometer: a new method for the analysis of velocity–temperature coupling in turbulent heat transfer

M Ndoye<sup>1,2,3</sup>, J Delville<sup>1</sup>, D Heitz<sup>2,3</sup> and G Arroyo<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Institut PPRIME, Département Fluide Thermique et Combustion, CNRS— Université de Poitiers—ENSMA UPR 3346, F-86036 Poitiers Cedex, France

<sup>2</sup> Cemagref, UR TERE, F-35044 Rennes, France

<sup>3</sup> Université européenne de Bretagne, France

E-mail: [malick.ndoye@lea.univ-poitiers.fr](mailto:malick.ndoye@lea.univ-poitiers.fr)

Received 1 February 2010, in final form 7 April 2010

Published 1 June 2010

Online at [stacks.iop.org/MST/21/075401](http://stacks.iop.org/MST/21/075401)

## Abstract

A novel anemometer was designed and implemented for simultaneous measurement of velocity and temperature in air flows with a single hot wire probe. The principle of periodically varying the overheat ratio of the wire was selected and applied through a parameterizable electronic chain. The specific methods developed for the calibration procedure and the signal processing are explained. The accuracy of the measurements was assessed by means of Monte Carlo simulations. Examples of the results are given for a non-isothermal low speed mixing layer. Finally, the ability to extract velocity–temperature coupling from a turbulent non-isothermal flow is highlighted through a conditional probability density function (PDF) analysis.

**Keywords:** hot wire anemometry, velocity measurements, temperature measurements, synchronic measurement, heated turbulent flow, Monte Carlo method

(Some figures in this article are in colour only in the electronic version)

## 1. Introduction

The simultaneous measurement of temperature and velocity in unsteady turbulent flow configurations at a given location remains an unresolved problem, particularly if a good frequency response range is required. Apart from its fundamental applications, the solution to this problem is important in many industrial applications. Among the methods reported in the literature for unsteady flows, the constant temperature anemometer (CTA) provides a possible approach to carrying out accurate measurements of velocity (with high overheat ratios) and temperature (with low overheat ratios) (Bruun [6], Perry [16]). Different runs, corresponding to different selected overheat ratios, provide access to statistical quantities for both variables, i.e. mean, rms, correlations and even spectra or cross-spectra. This method has been used to provide relevant comparisons with data originating

from numerical simulations based on Reynolds averaged Navier Stokes methods (RANS). However, the latter approach cannot be used as far as instantaneous velocity–temperature distributions are concerned: for example, joint velocity–temperature distributions cannot be obtained in this way. This point is crucial when unsteady situations have to be addressed, with a need to analyze the unstationary behavior of the flow through instantaneous velocity–temperature distributions and cross-correlations (coupling unsteady simulations and experimental data, control, etc). In this case, the most common approach in hot wire anemometry is either the use of one or more hot wire probes operating in constant temperature modes, combined with a cold wire operating in constant current mode, or two hot wires with two different overheat ratios placed close to each other. However, this method, used among others by Blair and Bennett [3], Lienhard and Helland [8], Vukoslavcevic and Wallace [18], Bremhorst and Graham [4],



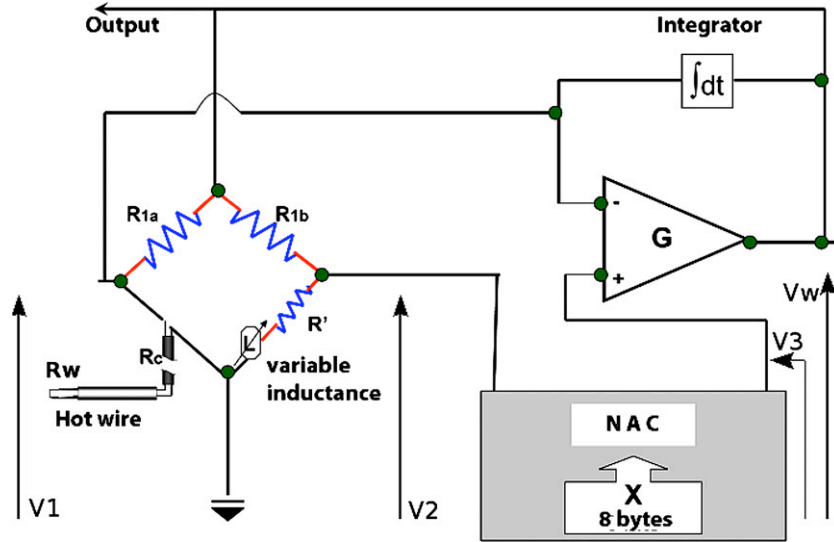


Figure 1. Simplified diagram of the PCTA anemometer card.

lacks spatial resolution, and interference from the wires is not easy to overcome.

A special thermo-anemometer has been designed to address this problem, the main characteristic of this novel approach being to make the overheat ratio of the wire continuously change in a way that constantly repeats a given pattern with a frequency  $f$ . If the period  $\tau = 1/f$  is small enough compared to the time scale of the phenomenon observed, temperature and velocity can be considered as obtained at the *same time* from the *same single sensor*, giving access for example to joint velocity–temperature probability distributions and velocity–temperature correlation. This thermo-anemometer, in which the overheat ratio can be changed in real time, is hereafter called a PCTA (parameterizable constant temperature anemometer). The method and device are based on the constant hot wire anemometry technique and apply the multiple overheat principle.

We also propose an original non-stationary velocity–temperature calibration approach. This method responds to (i) the need to calibrate the hot wire probes for velocity and temperature for use in a flow in the presence of spatio-temporal variations of the temperature due to turbulence and (ii) the need to calibrate the hot wires rapidly to avoid any variation in flow characteristics as encountered in classical calibration methods, which are relatively long and generally need to stabilize the flow in terms of velocity and temperature. Our approach allows calibration in a wide velocity–temperature range in a single run of a few minutes.

In this paper, we first present the PCTA principle and the specific electronic circuit implemented to produce variations in wire overheat in very short periods, and then the calibration procedure is described, after which we set out the specific algorithms developed to process the PCTA signal and quantify the uncertainty by Monte Carlo simulations. In the final part, some results of the validation of the PCTA in a non-isothermal mixing layer flow are detailed and discussed.

## 2. Design and principle of the PCTA

The PCTA thermo-anemometer presented here consists of a  $2.5 \mu\text{m}$  diameter and  $1.2 \text{ mm}$  long Pt-W wire connected to an anemometer. A simplified circuit diagram is shown in figure 1. This anemometer card was developed by Laboratoire d'Études Aérodynamiques in Poitiers, France. In this device, to vary the overheat ratio of the wire  $a_w$ , defined as the ratio of the operating wire resistance  $R_w$  to the wire resistance  $R_0$  at ambient temperature, the output voltage of the resistance  $R'$  is controlled by an 8 bit digital-to-analog converter whose setting  $X$  is scored between 0 and 255. At the bridge equilibrium (see figure 1), we have

$$V_1 = \frac{V_w(a_w R_0 + R_c)}{a_w R_0 + R_c + R_{1a}} \quad (1)$$

$$V_2 = \frac{V_w R'}{R' + R_{1b}} \quad (2)$$

$$V_3 = \frac{V_2 X}{256} \quad (3)$$

$$V_w = (V_3 - V_1) G. \quad (4)$$

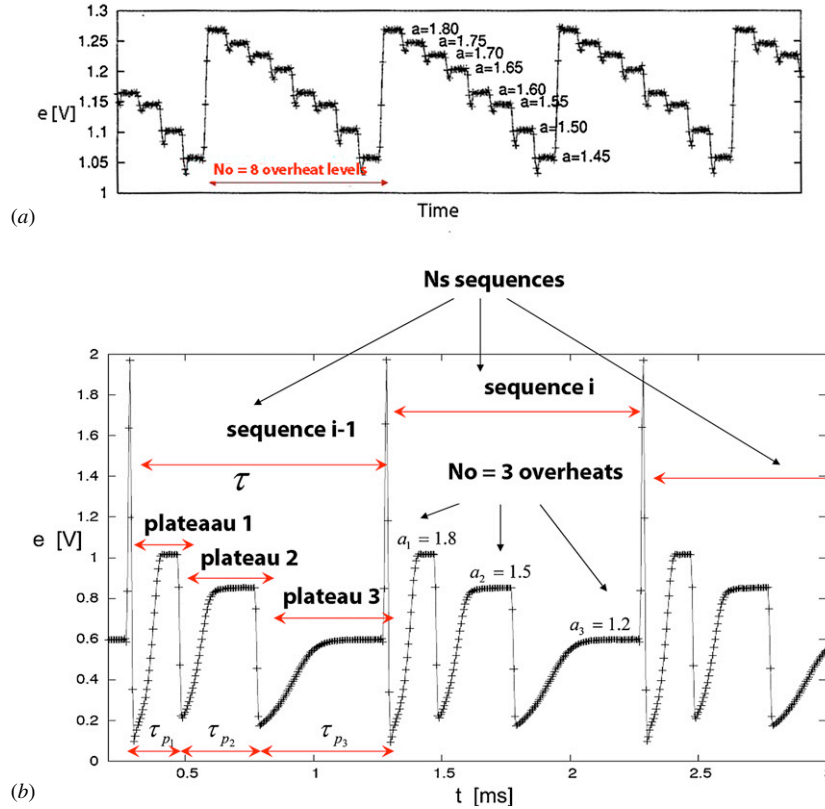
The byte value  $X$  for the digital-to-analog converter is obtained by combining equations (1)–(4):

$$X = \left( \frac{a_w R_0 + R_c}{a_w R_0 + R_c + R_{1a}} + \frac{1}{G} \right) \left( \frac{R' + R_{1b}}{R'} \right) \times 256. \quad (5)$$

This depends on the overheat ratio chosen and on the characteristics of the wire. For example, in a classical constant temperature anemometer,  $R'$  is a potentiometer able to satisfy the following condition:

$$R' \geq K(a_w R_0 + R_c), \quad (6)$$

where  $K = \frac{R_{1b}}{R_{1a}}$  is the bridge ratio. For the PCTA anemometer, the voltage across  $R'$  is varied with the digital-to-analog converter.  $R'$ , which is chosen for a maximum value of  $a_w$  of 2, must be adjustable up to values compatible with the probe characteristics  $R_0$  and  $R_c$ . Typically, wires with a diameter



**Figure 2.** Output voltage obtained from the PCTA: (a) typical time trace (obtained with  $N_0 = 8$  overheated levels and (b) notations and characteristic scales (example with  $N_0 = 3$  overheated levels).

greater than or equal to  $2.5 \mu\text{m}$  can be used for  $R_{1b} = 120 \Omega$ ,  $R_{1a} = 22 \Omega$ ,  $R_c \simeq 2 \Omega$  and  $R'_{\text{max}} = 120 \Omega$ .

The anemometer is entirely configurable through a user interface under computer control. The setting operations comprise the selection of a multiple overheated sequence pattern, measurement of the wire resistance  $R_0$  at the current ambient temperature and the classical initial adjustment to the dynamic response of the wire. The wire can be subjected to sequences of two to eight overheated, each sequence constituting a pattern that can be repeated every 100 to 1000  $\mu\text{s}$ , according to the wire diameter and flow velocity. Then, a theoretical bandwidth of up to several kHz can be obtained.

A typical plot of the output voltage signal from the anemometer is illustrated in figure 2. We have chosen to decrease the wire overheated step by step for each sequence until the required minimum level is reached. The output voltage obtained between two overheated switches, corresponding to what we call an overheated stage, comprises a non-processable transitional period, corresponding to the instantaneous response of the wire to the overheated switch, and an active period during which the overheated is actually applied with the PCTA operating in constant temperature mode. Ideally, the voltage should look like a plateau during this active period, but we considered that good repeatability of a non-horizontal pattern is sufficient to extract accurate velocity and temperature values over each sequence. Inside the repeated sequence, the duration of the overheated stages can be chosen to be identical for all the overheated levels or to vary from one to another.

The number  $N_0$  of overheated levels in each sequence remains constant during a calibration and measurement experiment. The total number of sequences in a run is denoted by  $N_s$ . We allocate the subscript  $i$  to the current sequence ( $i = 1, N_s$ ) and the subscript  $k$  to the overheated levels applied ( $k = 1, N_0$ ).

### 3. Calibration

The equations governing the response of a hot wire placed in a turbulent flow are generally derived from the energy equation of the wire. In cases of non-isothermal flow, various expressions have been used in the literature (e.g. [6, 16]). When the PCTA principle is used, the cooling equation of the wire, which relates the output voltage of the anemometer to the unknown velocity and temperature, is nonlinear. In this study, we tested the following cooling equations:

- extended King's law (with temperature correction):

$$e^2 = (a + bU^n)(T_w - T), \tag{7}$$

- the polynomial law:

$$U = \sum_{i=0}^4 \alpha_i \left( \frac{e}{\sqrt{T_w - T}} \right)^i, \tag{8}$$

where  $e$  is the anemometric voltage measured, and  $U$  and  $T$  are the unknown instantaneous velocity and temperature of the flow, respectively. The other quantities, namely the

wire temperature  $T_w$ , the coefficients  $a$ ,  $b$  (or  $\alpha_i$ ) and the exponent  $n$ , need to be determined experimentally through a calibration process. It should be noted that, due to the multiple overheat principle, these coefficients are in fact vectors the components of which are their scalar values for each overheat level. Once these vectors have been determined through the calibration process, the velocity and temperature of the flow can be deduced for each individual multiple overheat sequence (subscripted  $i = 1, N_s$ ) from a combination of the output voltages measured  $e_{i,k}$  (for  $k = 1, N_0$ ). The Levenberg–Marquardt iterative method for resolution of nonlinear equations was used to carry out the calibration.

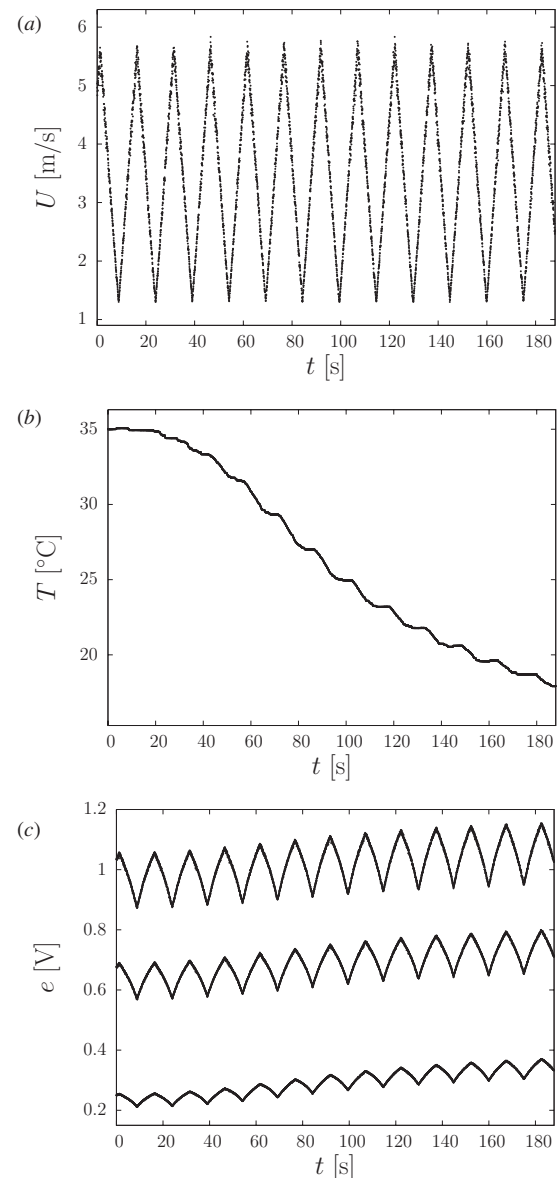
### 3.1. Strategy

Because we wished to have a very short total calibration time (a few minutes), we chose to calibrate the probe in a non-stationary process by operating with continuously varying velocity and temperature conditions in order to determine the sensitivity of the measurement system to the velocity and temperature in a single run. To do so, we permanently varied the velocity and temperature of the flow at a pace compatible with the time constants of the reference probes. To separate the influences of temperature variations and velocity fluctuations, the flow velocity was varied in a sawtooth mode, while the flow temperature was regularly decreased with a lower change rate by taking advantage of the thermal inertia of the closed circuit of the calibration. An example of the time variations applied to the velocity and temperature during calibration is shown in figure 3, with three overheat levels in a low-speed flow. It can be seen in this example that the velocity variation was nearly linear for 13 velocity cycles, applied over 3 min, thus ensuring an equally probable velocity distribution. Furthermore, the decrease in temperature obtained was globally monotonic and covered a range of about 18 K. However, there were local plateaux related to velocity minima. Indeed, the thermal exchange coefficient of the heat exchanger of the calibration facility decreases considerably for very low velocities and the temperature thus tends to remain constant for a few seconds. This suggests a degree of weakness of our velocity–temperature calibration for very low velocities.

### 3.2. Calibration procedure

The calibration procedure is based on the correspondence between the voltage response of the device under calibration and the simultaneous measurements of the velocity and temperature of a flow by two reference probes: one a Pitot dynamic pressure probe and the other a fine thermocouple providing a measurement frequency of 100 Hz. The hot wire and the reference probes are connected to the PCTA measurement chain for synchronization of the data acquisition.

For some types of flow with velocities greater than  $5 \text{ m s}^{-1}$ , the calibration can be achieved *in situ* by placing the three probes in the potential part of the flow. An example can be found in our preliminary study [11] in a coaxial jet system where the hot wire being calibrated was placed in the



**Figure 3.** Example of temporal variations imposed on (a) velocity, (b) temperature, and (c) anemometer response during calibration ( $N_0 = 3$ ).

potential core of the inner jet, which was initially heated above the ambient temperature.

Direct Pitot measurements were no longer suitable for the reference velocity measurement for lower velocities. Calibration was therefore performed in a small semi-closed loop wind tunnel (see figure 4) specially designed for this purpose. The test section (0.5 m long and  $142 \text{ mm} \times 142 \text{ mm}$  in cross section) was supplied with a uniform inlet flow profile generated by a contraction cone with an adjustable velocity ranging from  $0.5 \text{ m s}^{-1}$  to  $5.5 \text{ m s}^{-1}$ . The temperature change was controlled through an adjustable heater located upstream of the test section. A second profiled contraction cone was adapted at the downstream end of the test section to multiply the velocity by 9 at its outlet. The PCTA probe and the thermocouple were placed in the upstream part of the test section, while the Pitot tube was placed at the exit cross

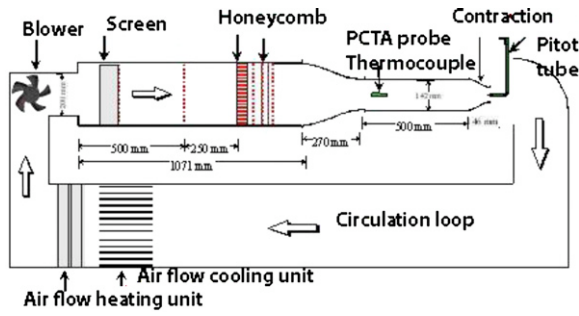


Figure 4. Diagram of calibration apparatus.

section of the downstream cone. The reference velocity in the test section was then calculated by applying the linear relation between the Pitot measurements and the actual velocity at the PCTA probe location. This relation was adjusted using PIV velocity measurements in the test section.

#### 4. Signal processing

The algorithms developed to process the PCTA signals are presented in this section. They allow adjustment to a calibration law and simultaneous computation of velocity and temperature. Given that the calibration law used is nonlinear, specific algorithms based on Levenberg–Marquardt iterative methods [17] were developed for the following situations.

- *Calibration*: adjusting the calibration coefficients according to the data of a calibration set.
- *Measurement*: determination of the velocity and temperature of the flow from a group of anemometric voltage measurements with the PCTA, once the calibration coefficients have been calculated.

From here on we used only the extended King’s law equation (which is bijective) to relate the output voltage to the unknown values of  $T$  and  $U$  in the flow. The polynomial law was used for measurements of  $U$  and  $T$  with very low velocities ( $<1 \text{ m s}^{-1}$ ), appearing in this case to account more accurately for the thermal effects of the wire. The signal processing methods used were then similar to those explained below.

Inside each overheat sequence, the output voltage delivers a stepped pattern that represents step-by-step variations in the wire temperature  $T_w$ . This signal is first processed with filtering of the separately extracted active periods of the overheat plateaux to separate the overheats and provide a value of  $e_{i,k}$  for each overheat level  $k = 1, \dots, N_0$  of each overheat sequence  $i$ .

Classically an increase in overheat leads to an increase in the anemometric voltage and in sensitivity to velocity, while the sensitivity to temperature decreases, thus making it possible to separate the velocity and temperature measurements.

##### 4.1. Evaluation of calibration coefficients

The procedure is here described for an extended King’s law.

For each overheat level, the voltage measured is assumed to be related to the velocity and the temperature in the air by the following equation:

$$e_{i,k}^2 = (a_k + b_k U_i^{n_k})(T_{w,k} - T_i). \quad (9)$$

The second subscript  $k$  is not assigned to  $U_i$  and  $T_i$ , a basic hypothesis of the method being that the fluctuations in  $U_i$  and  $T_i$  inside each sequence can be ignored in order to extract a single pair  $(U_i, T_i)$  through the processing of the  $N_0$  voltage values  $e_{i,k}$  in the  $i$ th sequence. The consequence of this hypothesis is that velocity and temperature fluctuations of frequencies higher than  $f = 1/\tau$  (see figure 2) will be filtered and the coefficients  $a$ ,  $b$ , the exponent  $n$  and the wire temperature  $T_w$  are only subscripted  $k$ .

For each overheat level  $k$ , we seek the vector of parameters  $\mathbf{A}_k = (a_k, b_k, n_k, T_{w,k})$  that best fits the calibration model predictions  $f_{i,k}$  to the measured data  $M_{i,k}$  by minimizing the squared difference between both quantities over the whole set of  $N_s$  sequences through a Levenberg–Marquardt process:

$$\arg \min_{\mathbf{A}_k} \left\{ \sum_{i=1}^{N_s} [M_{i,k} - f_{i,k}(U_i, T_i, \mathbf{A}_k)]^2 \right\}, \quad (10)$$

where

$$f_{i,k}(U_i, T_i, \mathbf{A}_k) = (a_k + b_k U_i^{n_k})(T_{w,k} - T_i)$$

is the model and  $M_{i,k} = e_{i,k}^2$  is the PCTA squared output voltage measured for the selected overheat  $k$ . The minimization is achieved by differentiating equation (10) with respect to each of the unknown parameters  $a_k, b_k, n_k, T_{w,k}$  and setting the resulting expression to zero. This yields a set of four nonlinear equations. Seeking the solution is iterative and starts with an initial guess that we obtain as follows.

First, we ignore the dependence of the calibration coefficients on the flow temperature and determine the  $\mathbf{A}_{k0} = (a_{k0}, b_{k0}, n_{k0})$  solution of the corresponding problem:

$$\arg \min_{\mathbf{A}_{k0}} \left\{ \sum_{i=1}^{N_s} [M_{i,k} - f_{i,k0}(U_i, \mathbf{A}_{k0})]^2 \right\}, \quad (11)$$

where  $f_{i,k0}(U_i, \mathbf{A}_{k0}) = a_{k0} + b_{k0} U_i^{n_{k0}}$  and  $M_{i,k} = e_{i,k}^2$ . An example of the  $f_{i,k0}$  law obtained for an overheat level  $k$  is shown in figure 5, the corresponding curve being plotted across the points corresponding to the  $e_{i,k}$  values measured. The dispersion of the measured voltage for the same velocity value shows the sensitivity to the air temperature.

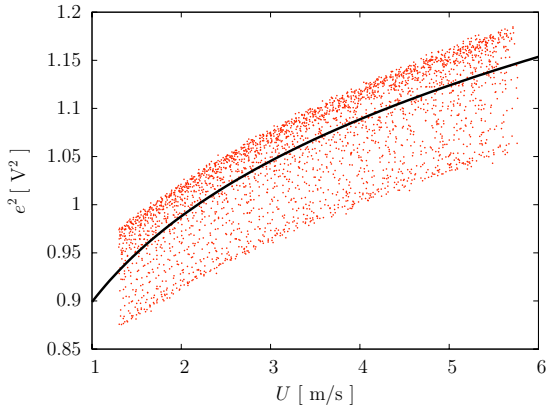
The vector  $\mathbf{A}_{k0} = (a_{k0}, b_{k0}, n_{k0})$  is then held constant, and we determine the initial guess for the wire temperature  $T_{w,k0}$  by a linear regression according to

$$\frac{e_{i,k}^2}{f_{i,k0}} = T_{w,k0} - T_i, \quad (12)$$

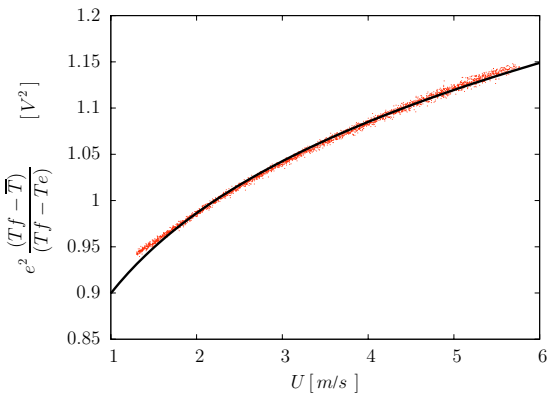
where  $\frac{e_{i,k}^2}{f_{i,k0}}$  and  $T_i$  are the variables,  $U_i$  and  $T_i$  being taken to be equal to the values given by the reference probes.

These provisional values of  $a_{k0}, b_{k0}, n_{k0}$  and  $T_{w,k0}$  are taken as the initial guess of the overall Levenberg–Marquardt optimization process where all the parameters of the problem ( $a_k, b_k, n_k$  and  $T_{w,k}$ ) are adjusted simultaneously (the variations in the flow temperature then being considered). An example





**Figure 5.** Variations in the squared anemometric voltage as a function of velocity and adjustment by a  $f_{i,k0}$  law (flow temperature is not considered).



**Figure 6.** Variations in the corrected squared anemometric voltage as a function of velocity and adjustment by a  $f_{i,k}$  law (flow temperature is considered).  $\bar{T}$  denotes the average temperature during calibration.

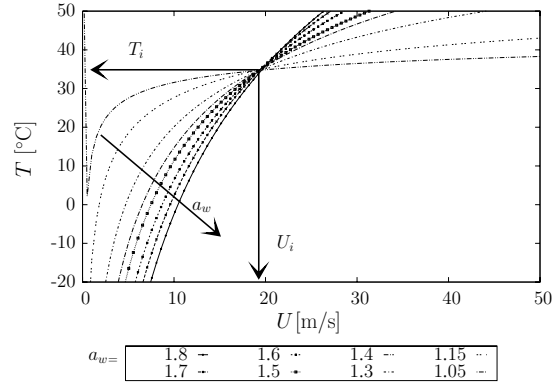
of the adjustment by a law identified by this procedure for a given overheat level is shown in figure 6 where the  $e_{i,k}$  values measured and the curve of the model  $f_{i,k}$  are represented. The reduction in the scattering of the corrected  $e_{i,k}$  values around the  $f_{i,k}$  curve, as compared with figure 5, illustrates the effectiveness of taking into account the flow temperature for the determination of a relevant calibration law.

**4.2. Computation of the instantaneous velocity–temperature pairs**

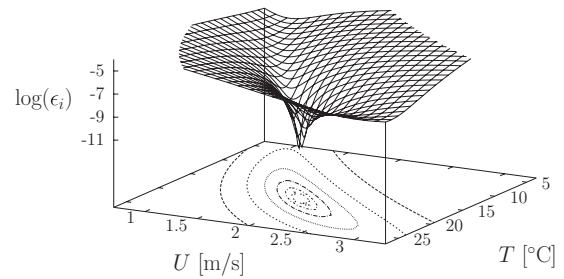
Once the calibration coefficients have been determined, we use a similar procedure to calculate the velocity and temperature  $U_i$  and  $T_i$  for each measurement point (corresponding to an overheat sequence) using equation (9).

For each overheat sequence  $i$ , we calculate the values of velocity  $U_i$  and temperature  $T_i$  that minimize (in the least-squares sense) an error averaged on the whole set of overheat levels in use,

$$\arg \min_{U_i, T_i} \left\{ \sum_{k=1}^{N_0} [M_{i,k} - f_{i,k}(U_i, T_i, \mathbf{A}_k)]^2 \right\}. \quad (13)$$



**Figure 7.** Illustration of  $(U_i, T_i)$  solution search during the optimization procedure ( $N_0 = 8$ ).



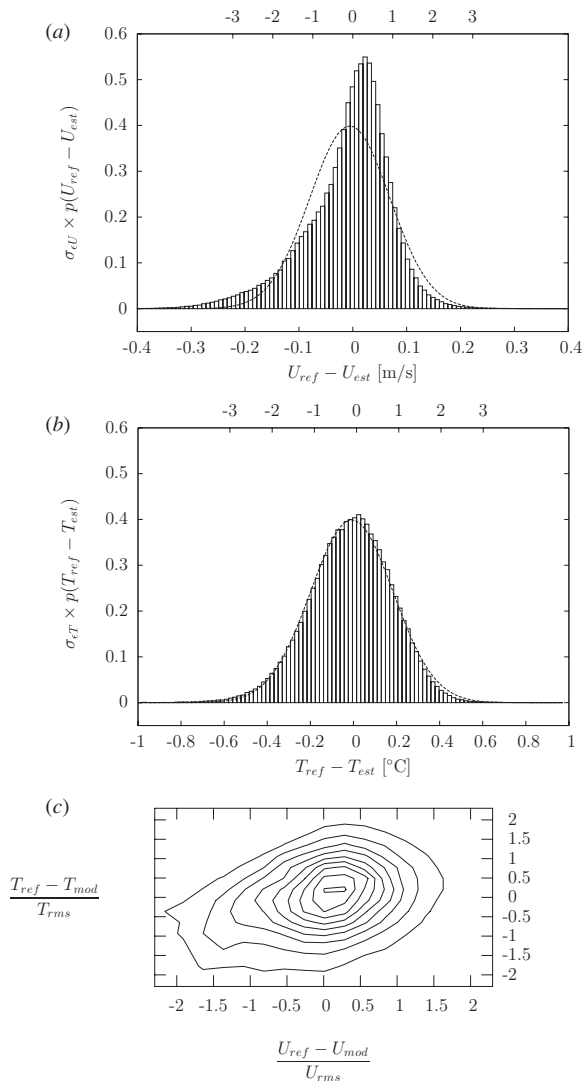
**Figure 8.** Three-dimensional illustration of  $(U_i, T_i)$  solution search.

This optimization problem is solved using the Levenberg–Marquardt algorithm, where  $U_i$  and  $T_i$  are the variables to be estimated and the calibration vector  $\mathbf{A}_k = (a_k, b_k, n_k, T_{w,k})$  is known.

To provide a readable representation of the optimization process involved, it should be noted that the voltage value,  $e_{i,k}$ , extracted from the  $k$ th overheat plateau inside the sequence, yields (through (13)) an infinity of  $(U_i, T_i)$  solutions located on a single continuous curve  $U = f(T)$ . The optimization process is then equivalent to the seeking process aimed at finding, in a  $(U, T)$  space, the  $(U_i, T_i)$  pair that minimizes an average distance to the  $k$  curves given by the whole set of  $k$  overheat levels. Figure 7 gives a graphical representation of such a process.

A typical example of the three-dimensional surface in which the error  $\epsilon_i = \sum_{k=1}^{N_0} [M_{i,k} - f_{i,k}(U_i, T_i, \mathbf{A}_k)]^2$  moves toward its minimum value to provide an optimized value for  $U_i$  and  $T_i$  is illustrated in figure 8. Such a representation illustrates our finding that the risk of a local minimum in the solution zone is generally small. Provided that the convergence criterion was chosen properly and the initial guess was reasonably close to the final solution, errors due to a local minimum did not occur in our experiments, achieved by

- treating temporal sequences  $e_{i,k}(t)$  sufficiently continuous in time to consider the solution at  $t_{n-1}$  as a good initial guess for the solution at  $t_n$ ;
- considering minimization of the error  $\epsilon_i$  as accomplished when the relative variation in  $\epsilon_i$  between two iterations was low enough and when values of  $U_i$  and  $T_i$  were stable.



**Figure 9.** Example of *errors* corresponding to the difference between calibration values and corresponding values calculated with the Levenberg–Marquardt algorithms: (a) velocity errors PDF, (b) temperature errors PDF, and (c) joint PDF of the errors.

#### 4.3. Verification of the efficiency of signal processing

The efficiency of the signal analysis technique was checked by processing the PCTA signals acquired during the calibration experiment with this iterative approach and comparing the results (calculated velocity and temperature) to the instantaneous velocities and temperatures of the flow in the calibration test section as measured by the reference probes, namely the Pitot tube probe and the reference thermocouple. It must be noted that at this stage the uncertainty associated with the reference probes was not considered for the estimation of the uncertainty. Probability density functions (PDF) of the ‘errors’ (deviations of the estimated values  $U_{est}$  and  $T_{est}$  from the reference measurements  $U_{ref}$  and  $T_{ref}$ ) are represented in figure 9 for a typical calibration run, with a velocity range from  $0.5 \text{ m s}^{-1}$  to  $5.5 \text{ m s}^{-1}$  and a temperature range from  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  to  $35 \text{ }^\circ\text{C}$ . Here the asymmetry of the PDF velocity ‘errors’ accounts for the difference between the model (9) and the data which can be seen in figure 6 for low velocities. This

bias, also observed with the joint PDF of the errors, may lead to imperfect decoupling of the lowest velocity and temperature values in the measurement process. The standard deviation of the ‘error’ is less than  $0.1 \text{ m s}^{-1}$  for velocity and  $0.2 \text{ }^\circ\text{C}$  for temperature. Ideally, i.e. for a model perfectly fitting the data, as for temperature in the present study, the PDF of the ‘error’ is symmetric and the associated standard deviation corresponds to the uncertainty of the reference probes.

The good agreement between the calculated and the reference velocities and temperatures was considered to be a good initial validation of the efficiency of our algorithms.

## 5. Measurement uncertainty

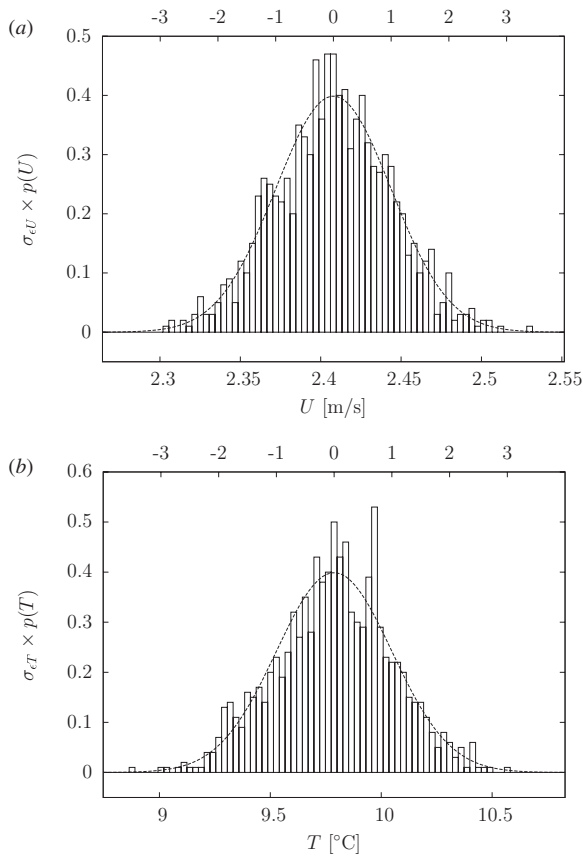
One important stage in the design of our calibration procedure and apparatus was the evaluation and minimization of the resulting measurement uncertainty. Since the velocity and temperature measured with PCTA are determined from the output voltage through a nonlinear model, we used a Monte Carlo simulation as described in [1] to evaluate the uncertainty of the PCTA velocity and temperature measurements.

Monte Carlo simulations provide an alternative approach to evaluation of uncertainty in which the propagation of uncertainties is undertaken numerically rather than analytically. This technique is able to provide much richer information by propagating the distributions rather than just the uncertainties. Confidence intervals or confidence regions can be produced from the resulting distributions.

First we estimated the uncertainty due to the calibration process. For each overheat level, we propagated the distributions of the reference velocity, the reference temperature and the PCTA voltage through the optimization solution (10) to provide distributions of the calibration vector  $\mathbf{A}_k$ . The distributions of the inputs were chosen to be normal, with standard deviations determined experimentally, and equal to  $0.1 \text{ m s}^{-1}$  for the reference velocity,  $0.2 \text{ K}$  for the reference temperature and  $0.7 \text{ mV}$  for the PCTA voltage. Based on the distribution of the inputs, 1000 random fictive values were generated centered on each triplet  $(U_i, T_i, e_i)$  recorded during the calibration stage. The procedure provided 1000  $\mathbf{A}_k$  vectors, yielding the calibration coefficients. The covariance of this output vector was fairly small, typically between  $0.03\%$  and  $0.2\%$  of its mean value. Note that this small uncertainty was mainly due to the large number of recorded triplets (around  $3 \times 10^5$ ). For a classical calibration with 50 triplets, the error is about  $8\%$ .

Next, a similar method was used to determine the uncertainty in the PCTA velocity and temperature measurements. The distributions of the calibration coefficients  $\mathbf{A}_k$  and of the PCTA voltage measurements were propagated through the optimization solution (13) to provide the distributions of velocity and temperature.

An example of the nearly Gaussian PDF built up with the values obtained by Monte Carlo simulations of the velocity and temperature at one location in a low speed mixing layer is shown in figure 10. This method was applied to calculate the uncertainty in the measurement of  $U$  and  $T$  for different calibration sample sizes from 25 to  $3 \times 10^5$  points, with

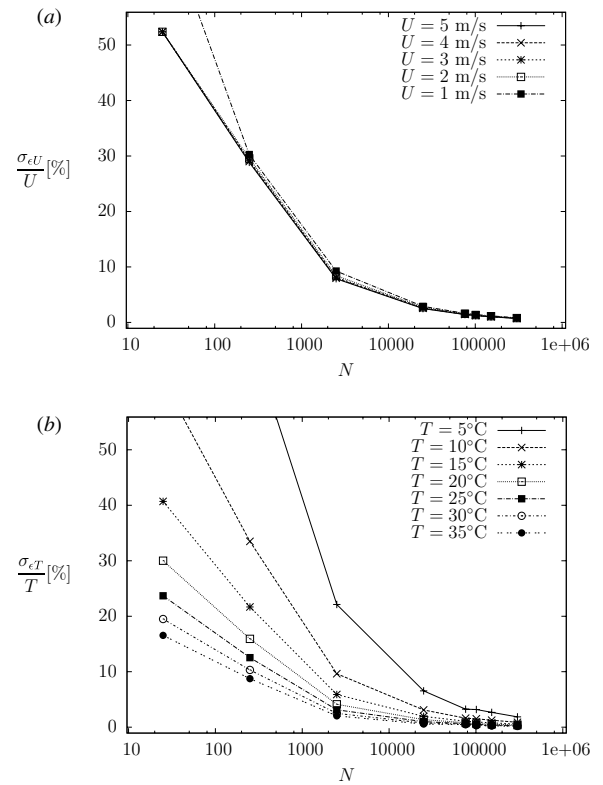


**Figure 10.** Example of Monte Carlo simulation results for (a) velocity and (b) temperature. Each PDF is centered on the mean value for all the Monte Carlo runs (typically 1000) and the standard uncertainty is taken as equal to the standard deviation over the runs.

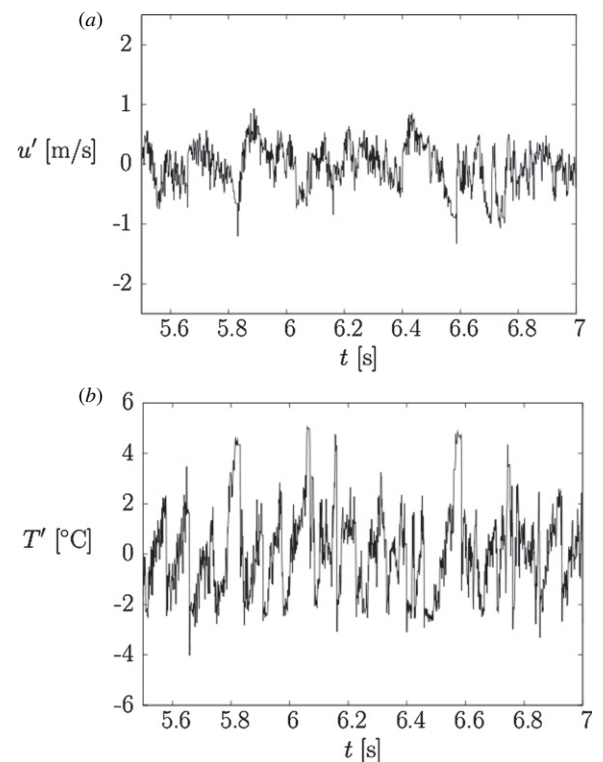
the PCTA operating in a three overheats configuration: as shown in figure 11, the greater the calibration sample size  $N$ , the more precise the  $U$  and  $T$  measurements. The errors evolve approximately as  $1/N$ . For a sample size of  $3 \times 10^5$ , the errors in  $U$  and  $T$  are 1% for velocity and 0.15 K for temperature.

### 6. Experimental results

The PCTA method was used for the characterization of a low speed non-isothermal mixing layer. In this flow, the local shear generated by two adjacent parallel flows at different velocities was associated with a temperature difference between the flows. First, measurements were carried out to compare the results obtained by the PCTA method with parallel measurements obtained with two frequently used well-established methods, namely constant temperature anemometry (CTA) and constant current anemometry (CCA). Once the measurement validity had been assessed, the synchronicity of the PCTA measurements provided a conditional analysis of the interactions between velocity and temperature fluctuations in the turbulent mixing process. Figure 12 gives an example of the simultaneous outputs



**Figure 11.** Example of Monte Carlo simulation results for the uncertainties of (a) velocity and (b) temperature.



**Figure 12.** Simultaneous outputs from the PCTA at the same point: (a) velocity fluctuations and (b) temperature fluctuations.

from the PCTA obtained at the same point in the mixing layer.

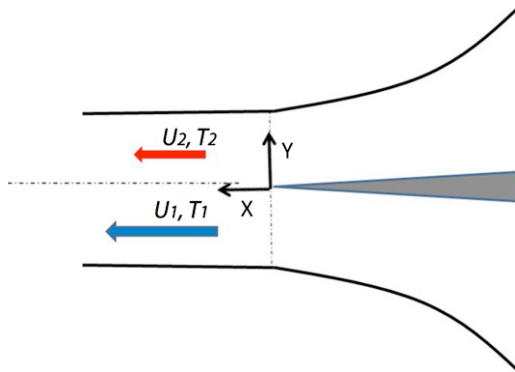


Figure 13. Diagram of flow configuration.

6.1. Experimental setup

A diagram of the flow configuration is shown in figure 13. Two parallel streams of different velocities and temperatures, generated through separate settling chambers and contraction cones, merge and initiate a mixing process behind the thin horizontal trailing edge of a 2 m long tapering separating plate. The 3 m long test section has a cross section of 1 m × 1 m. The origin of the coordinate system is at the center of the width of the trailing edge of the separating plate. The x-axis is the longitudinal streamwise direction, the y-axis is the upward transverse direction and the z-axis is the spanwise direction of the mixing layer.

The bulk velocities of the lower flow ( $U_1$ ) and upper flow ( $U_2$ ) are  $4 \text{ m s}^{-1}$  and  $2 \text{ m s}^{-1}$ , respectively. The temperatures  $T_1$  (lower flow) and  $T_2$  (upper flow) varied from  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  to  $35 \text{ }^\circ\text{C}$  to study the influence of the difference in temperature  $\Delta T = T_2 - T_1$  on measurement accuracy.

In the experiments presented here, the PCTA system had been set with a reduced number of overheat levels. Only three overheat levels were used to separate the  $U$  and  $T$  information within the sequences. This reduction made possible a higher frequency response of the probe through a reduction in the sequence duration to 1 ms. The uncertainty analysis showed that, provided that the overheat ratio range was wide enough and the lowest overheat ratio small enough (typically 1.2), the accuracy of the  $U$  and  $T$  measurements could be maintained at a high level despite the reduction in number of overheats [12]. The transverse distributions (along  $y$ ) of the instantaneous velocity and temperature were measured at different streamwise locations.

6.2. Comparison with CTA and CCA measurements

Measurements were compared using a  $2.5 \text{ }\mu\text{m}$  diameter hot wire probe operating in PCTA mode, a  $1.25 \text{ }\mu\text{m}$  diameter cold wire operating in CCA mode for temperature, and a  $2.5 \text{ }\mu\text{m}$  diameter operation in CTA mode (with a single overheat level) for velocity. The CTA calibration involved correction of the influence of temperature obtained by applying the same calibration strategy as for the PCTA (section 3.1).

The mean velocity and temperature values measured by the PCTA were in good agreement with the results obtained

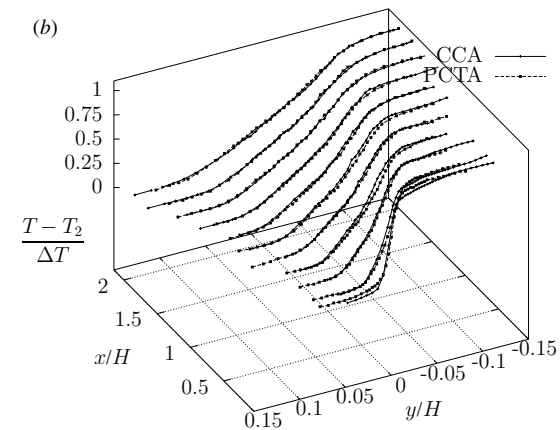
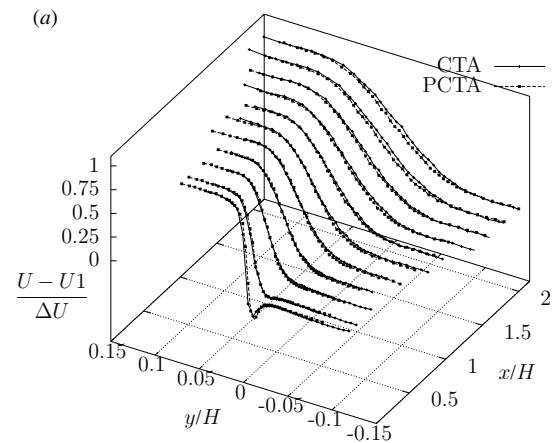


Figure 14. Mean values of (a) velocity and (b) temperature measured by PCTA, CTA and CCA.

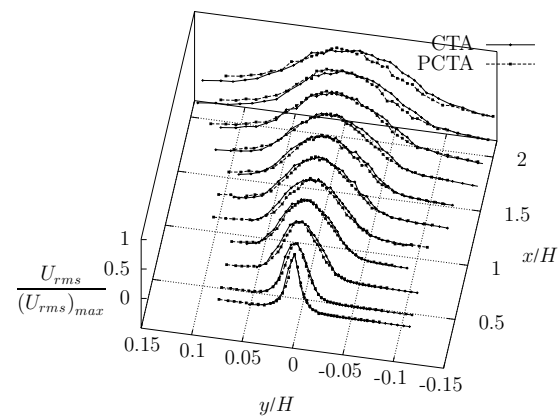
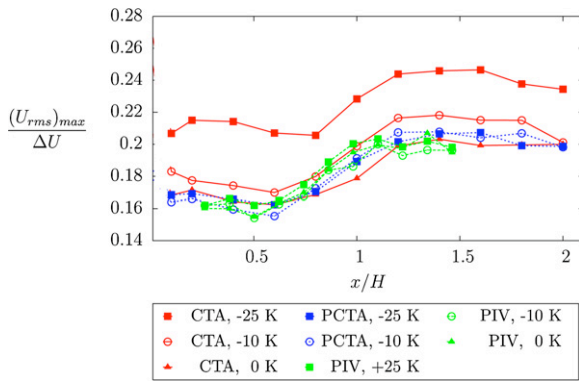


Figure 15. Normalized rms values of velocity, comparison between PCTA and CTA.

with the CTA and the CCA, respectively, as shown in figure 14. The velocity fluctuations measured by the CTA were higher than those measured by the PCTA for the same wire diameter. Nevertheless, good agreement of these values was found when normalized through division by  $(U_{rms})_{max}$ , as shown in figure 15. A comparison of the maxima of rms values measured by PCTA and CTA, with corresponding PIV measurements, is shown in figure 16 for various streamwise positions in the self-similarity region of the mixing layer.





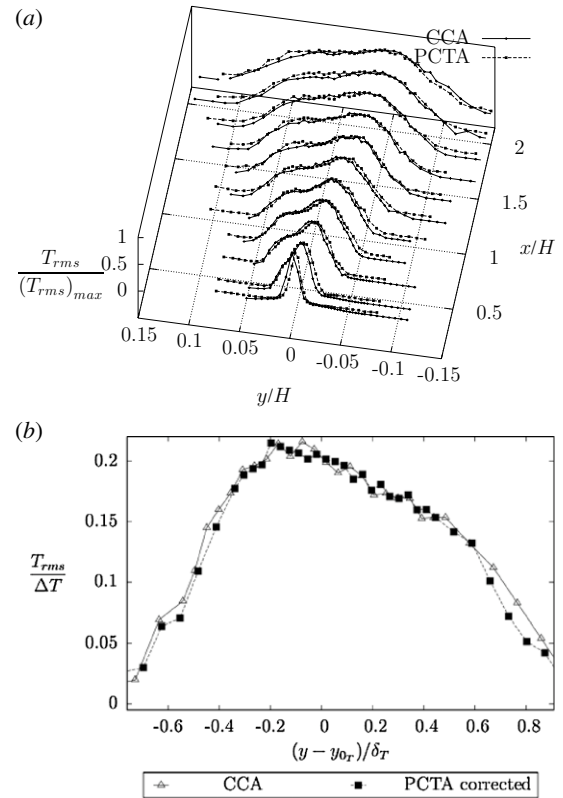
**Figure 16.** Normalized rms values of velocity: PCTA, CTA and PIV measurements for different values of  $\Delta T$  along the mixing layer axis in the central plane  $z = 0$ .

It highlights an increase in the measurement levels of CTA velocity with the temperature difference  $\Delta T$ , while the PCTA measurements converge to a single value entirely independent of  $\Delta T$  and in conformity with the values given by PIV. Thus, the PCTA provides good measurement of velocity fluctuations in non-isothermal situations compared to the CTA, the measurements of which are overestimated under the influence of temperature fluctuations, despite the correction based on the mean instantaneous temperature values and derived from the calibration strategy described in section 3.1.

When corrected for the difference between the diameters of the PCTA and CCA wires in use, measurements of the PCTA and CCA temperature fluctuations were in agreement, as shown in figure 17. This correction is based on the dependence of the probe bandwidth according to the wire diameter in cold wire anemometry and uses the average ratio of  $(T_{rms})_{PCTA}/(T_{rms})_{CCA}$  along the centerline of the flow. Analysis of a series of transverse profiles showed that the PCTA could accurately reveal typical mixing layer profiles, with evidence of greater streamwise expansion of the thermal mixing region as compared to the dynamic region [12]. A triple inflection shape was found in the mean temperature profiles, in accordance with previous scalar measurements by Fiedler [7] and Masutani and Bowman [9], while the mean and rms velocity profiles depicted classical evolutions. As expected, the transverse profiles collapsed at a large downstream distance, where the flow became self-similar. The maximum value of temperature fluctuations was  $T_{rms}/\Delta T = 0.25$ , with a development distance around  $x/\Theta_{H,V} = 300$ , where  $\Theta_{H,V}$  was the momentum thickness of the boundary layer on the high velocity side. The peak value of the velocity fluctuations  $U_{rms}/\Delta U = 0.19$  was comparable to the values obtained by Mehta [10] and Oster and Wygnanski [15], and the development distance of the flow (around  $x/\Theta_{H,V} = 500$ ) fits very well that found in the literature for similar conditions [5].

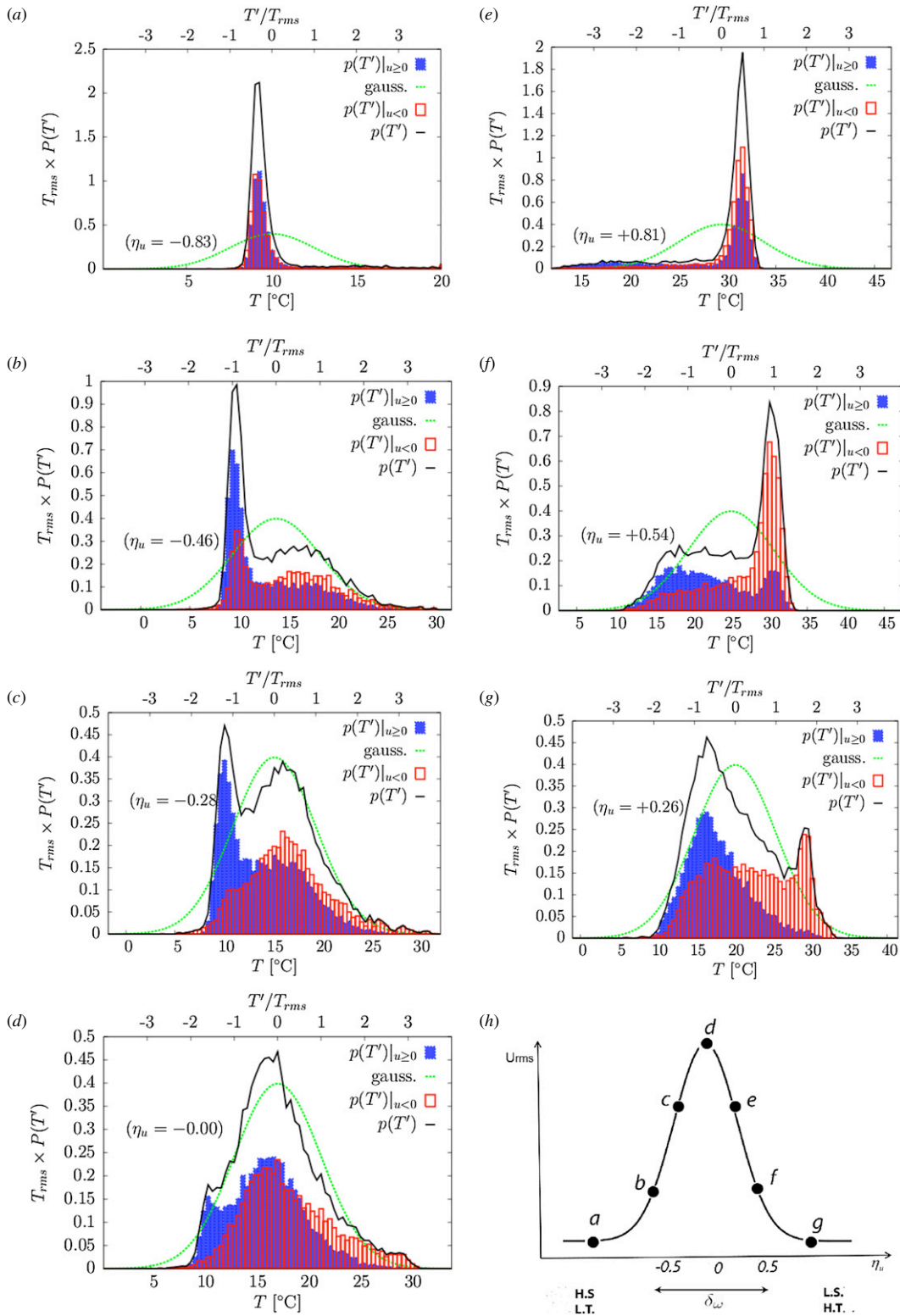
### 6.3. Conditional analysis of PDFs

In addition to the ability of the PCTA to identify the characteristic magnitudes of velocity and temperature, its main



**Figure 17.** The rms values of the temperature fluctuations measured by PCTA and CCA: (a) profiles of the normalized values and (b) values at a given position  $x$ , with a correction applied to the PCTA data.

advantage is the synchronicity of the instantaneous velocity and temperature measurements at the same point with a relatively high frequency. From the combination of the  $u'$  and  $T'$  fluctuations obtained as separate outputs, a conditional analysis based on PDFs, temporal cross-correlations and quadrant analysis could be performed to analyze the mutual interaction mechanism between these fluctuations in the mixing layer [12, 13]. As an example of the approach applied, we give here some results of a conditional PDF analysis. Figure 18 shows the conditional PDFs of temperature obtained at different positions across the layer for a given streamwise location in the self-similarity region. This figure is composed of seven graphs from (a) to (g), each corresponding to a measurement point at a given transverse position  $\eta_u$  for the streamwise position  $x/\Theta_{H,V} = 593$ .  $\eta_u$  is a normalized value along the transverse axis  $y$  ( $\eta_u = 0$  is the center of the dynamic mixing layer and the vorticity thickness expands from  $\eta_u = -0.5$  to  $\eta_u = +0.5$ ). These positions were chosen in order to scan the breadth of the mixing layer at a given position  $x$  from the cold, rapid side to the hot, slow side. In each of these graphs, four curves can be found representing the conditional PDFs  $p(T')|_{u' < 0}$  and  $p(T')|_{u' \geq 0}$  (associated with the occurrence of negative and positive velocity fluctuations, respectively), the total PDF  $p(T')$  and the corresponding Gaussian distribution. The tendencies generally observed, whatever the position of  $x$  in the developed region, are as follows.



**Figure 18.** (a)–(g) Variations across the mixing layer of temperature PDFs influenced by the sign of the velocity fluctuations for  $\frac{U_1}{U_2} = 0.50$  and  $\Delta T = 25$  K. The position of the corresponding measurement points is indicated in the bottom-right graph.

- In the uniform flow region on both sides of the mixing zone ((a) and (g)), the conditional PDF curve and the overall curve show narrow peaks resulting from the weak influence of the other side of the mixing layer on this part of the flow.
- In the proximity of the edges of the mixing layer ((b) and (f)), PDFs are still far from Gaussian curves (shown here by a dashed line) with asymmetry related to the non-equivalent contributions of temperature fluctuations associated with  $u' \geq 0$  or  $u' < 0$ . The curves show

a coexistence of blobs of barely mixed fluid with more turbulent contributions (approaching Gaussian levels).

- The further the curves from the edges in the direction of the mixing layer axis, the less the flow is influenced by the intermittency originating from the edges. The fluid originating from both sides of the mixing layer is in a situation of turbulent mixing, giving PDFs very close to Gaussian levels.

This behavior clarifies the *marching* character of temperature PDFs in the self-similarity region (variation in the mode with the transverse position in the mixing layer for a given streamwise position) [2, 12, 14]. The PCTA data made possible another type of analysis, based on quadrants, that led to description of the mechanisms associated with intermittency, with evidence of domination by saddle point ejection [12, 13].

## 7. Conclusion

The development of a new anemometer allowing multiple heat sequence repetitions, and the implementation of a dynamic calibration procedure associated with a nonlinear signal processing strategy, yielded new possibilities for simultaneous measurement of velocity and temperature at the same point in turbulent non-isothermal flows. The accuracy of the PCTA method was assessed with a range of velocities and temperatures corresponding to a classical turbulent thermal mixing process in low speed air flows (up to  $5 \text{ m s}^{-1}$  and  $35 \text{ }^\circ\text{C}$ ). The main advantage of the method, i.e. the ability to provide the analysis of mutual interactions between velocity and temperature fluctuations, was emphasized through the example of a non-isothermal mixing layer.

## Acknowledgments

The financial support by the Region Bretagne of France under grant no A3C905, the PPRIMME Institute of University of Poitiers, and the Ministry of Research under grant no 032670 (project NMAC2003-24 FOEHN) are gratefully acknowledged. The authors also acknowledge Dr Eva Doringnac (Laboratoire d'Etudes Thermiques/PPRIMME of University of Poitiers) for helpful discussions and comments.

## References

- [1] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML 2008 Supplement of ISO GUM 95, JCGM 101:2008—Evaluation of measurement data—*Supplement 1*

*to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement—Propagation of distributions using a Monte Carlo method*

- [2] Bisset D K 1998 Numerical simulation of heat transfer in turbulent mixing layers *13th Australasian Fluid Mechanics Conf.* pp 21–4
- [3] Blair M F and Bennett J C 1987 Hot-wire measurements of velocity and temperature fluctuations in a heated turbulent boundary layer *J. Phys. E. Sci. Instrum.* **20** 209–16
- [4] Bremhorst K and Graham L J W 1990 A fully compensated hot/cold wire anemometer system for unsteady flow velocity and temperature measurements *Meas. Sci. Technol.* **1** 425–30
- [5] Browand F K and Latigo B O 1983 Growth of two-dimensional mixing layer from a turbulent and nonturbulent boundary layer *Phys. Fluids* **22** 1011–9
- [6] Bruun H H 1995 *Hot-Wire Anemometry: Principles and Signal Analysis* (New York: Oxford University Press)
- [7] Fiedler H E 1974 Transport of heat across a plane turbulent mixing layer *Adv. Geophys.* **18** 93–109
- [8] Lienhard J H and Helland K N 1989 An experimental analysis of fluctuating temperature measurements using hot-wires at different overheats *Exp. Fluids* **7** 265–70
- [9] Masutani S M and Bowman C T 1986 The structure of a chemically reacting plane mixing layer *J. Fluid Mech.* **172** 93–126
- [10] Mehta R D 1991 Effect of velocity ratio on plane mixing layer development: influence of the splitter plate *Exp. Fluids* **10** 194–204
- [11] Ndoye M, Heitz D, Fourment C, Arroyo G and Delville J 2007 Parameterizable constant temperature anemometer for simultaneous velocity and temperature measurements in turbulent flows *Proc. 8th Int. Symp. on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows (Lyon)*
- [12] Ndoye M 2008 Anémométrie fil chaud à température variable: application à l'étude d'une couche de mélange anisotherme *Thèse de Doctorat Université de Poitiers*
- [13] Ndoye M, Dorignac E, Delville J and Arroyo G 2009 Analysis of the velocity and temperature coupling in a plane mixing layer using hot wire anemometry *Proc. 9th Int. Symp. on Turbulence Heat and Mass Transfer (Rome)* ed K Hanjalic, Y Nagano and K Jakirlic (New York: Begell House)
- [14] Moser R D and Rogers M M 1993 The three-dimensional evolution of a plane mixing layer: pairing and transition to turbulence *J. Fluid Mech.* **247** 275–320
- [15] Oster D and Wagnanski I 1982 The forced mixing layer between parallel streams *J. Fluid Mech.* **123** 91–130
- [16] Perry A 1982 *Hot-Wire Anemometry* (Oxford: Clarendon)
- [17] Press W H, Teutolsky S A, Vetterling W T and Flannery B P 1992 *The Art of Scientific Computing—Numerical Recipes in Fortran* 2nd edn (Cambridge: Cambridge University Press)
- [18] Vukoslavcevic P V and Wallace J M 2002 The simultaneous measurement of velocity and temperature in heated turbulent air flow using thermal anemometry *Meas. Sci. Technol.* **13** 1615–24

# Variational fluid flow measurements from image sequences: synopsis and perspectives

Dominique Heitz · Etienne Mémin ·  
Christoph Schnörr

Received: 21 November 2008 / Revised: 17 October 2009 / Accepted: 20 October 2009 / Published online: 24 November 2009  
© Springer-Verlag 2009

**Abstract** Variational approaches to image motion segmentation has been an active field of study in image processing and computer vision for two decades. We present a short overview over basic estimation schemes and report in more detail recent modifications and applications to fluid flow estimation. Key properties of these approaches are illustrated by numerical examples. We outline promising research directions and point out the potential of variational techniques in combination with correlation-based PIV methods, for improving the consistency of fluid flow estimation and simulation.

## 1 Introduction

This paper provides a synopsis of more than two decades research on image motion estimation in the field of image

processing and computer vision. It reflects recent collaborations and exchange of ideas between research groups from this field and partners in experimental fluid dynamics. Examples of corresponding projects are the European FET-project “Fluid Image analysis and Description”,<sup>1</sup> the priority programme on “Image Measurements in Experimental Fluid Dynamics” of the German Science Foundation (DFG),<sup>2</sup> and an international symposium on “Experimental Fluid Dynamics, Computer Vision and Pattern Recognition” that held at Schloß Dagstuhl<sup>3</sup> in spring 2007.

Rather than making an attempt to comprehensively review the vast literature, we focus on a concise presentation and classification of essential concepts that we regard as particularly relevant for image analysis in experimental fluid dynamics, with a high potential for future common developments. Likewise, the list of references is by no means exhaustive but includes some key papers as well as links to more recent technical works, containing details that we deliberately omit here in order not to disrupt the main thread of the paper.

The material below complements expositions of established PIV methods based on image correlation (Adrian 2005; Raffel et al. 2007), and also the recent review (Jähne et al. 2007) where variational methods are only briefly mentioned. It also indicates that image processing, visualization and computer vision has become an interdisciplinary field of scientific computing with strong links to various disciplines of applied and computational mathematics. Recent textbooks illustrate this trend (Chan and Shen 2005; Aubert and Kornprobst 2006; Paragios et al. 2005).

---

D. Heitz (✉)  
Cemagref, 17 avenue de Cucillé, CS64427,  
35044 Rennes, France  
e-mail: dominique.heitz@cemagref.fr  
URL: <http://www.irisa.fr/fluminance>

D. Heitz  
UR TERE, Université européenne de Bretagne,  
Rennes, France

E. Mémin  
INRIA, Campus Universitaire de Beaulieu,  
35042 Rennes, France  
e-mail: Etienne.Memin@inria.fr  
URL: <http://www.irisa.fr/fluminance>

C. Schnörr  
Department of Mathematics and Computer Science, University  
of Heidelberg, Speyerer Str. 4-6, 69115 Heidelberg, Germany  
e-mail: [schnoerr@math.uni-heidelberg.de](mailto:schnoerr@math.uni-heidelberg.de)

<sup>1</sup> <http://www.fluid.irisa.fr/>.

<sup>2</sup> <http://www.spp1147.tu-berlin.de/>.

<sup>3</sup> <http://www.dagstuhl.de/>.



This latter trend provides the background and underlines the main message that we intend to convey in this paper. In our opinion, *variational methods* for fluid flow estimation from image sequences provide a proper framework for consistently combining image measurements with structural constraints due to the underlying continuum mechanics, thus paving the way for bridging the gap between experiments and simulation in the future. The latter community (e.g. Berselli et al. 2006) utilizes concepts closely related to those employed in current research on mathematical image analysis.

**Organization.** We first outline in Sect. 2 the relation between fluid flow and optical flow. Optical flow models, also called data terms or observation models, are presented for three families of experimental configurations. Then an analysis of the physical assumptions underlying these model-based measurements techniques compared to classical correlation technique is proposed.

Next, we turn in Sect. 3 to basic variational schemes for motion estimation, broadly classified according to the representation of vector fields: local, parametric, non-parametric. Further issues include the underlying assumptions that justify a specific representation, discretization, existence and spatial density of estimates, and complexity of their numerical computation.

Section 4 is devoted to modifications of the basic schemes that are suitable for estimation of fluid flows. These include higher-order regularization in order not to penalize too much high spatial gradients, a basic distributed parameter control setting for directly controlling motion estimation through physical constraints, an outlier handling through using robust norms or semi-norms, a multiresolution scheme to handle large displacements, and an hybrid variational estimation scheme combining the best properties of approaches from PIV and computer vision. This section also exhibits very recent developments, exploiting temporal context in terms of fluid *dynamics*, for motion estimation. We outline both a short-time estimation scheme that iteratively alternates respective numerical computations, and a more general estimation scheme that embodies in a distributed parameter setting what is well known in engineering for the case of lumped systems. This last approach take a further major step toward an integrated fluid motion “estimation and simulation” framework.

Numerical experiments illustrating various facets of the material presented so far are presented and discussed in Sect. 5.

Finally, we conclude in Sect. 6 and indicate few research directions that show most promise in our opinion: extensions of variational approaches to three-dimensional PIV and the incorporation of turbulence models based on turbulent kinetic energy decay for motion estimation with high spatial resolution.

**Notation.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  denotes the two-dimensional image section and  $\mathbf{x} \in \Omega$  any point in it. A recorded image sequence is given in terms of an intensity function

$$I: \Omega \times [0, T] \rightarrow I(\mathbf{x}, t).$$

We denote vector fields with

$$\mathbf{w}: \Omega \rightarrow \mathbf{w}(\mathbf{x}) = (u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}))^\top = \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

where  $\cdot^\top$  indicates transposition, i.e. the conversion of row-vectors to column-vectors, and vice-versa.

This notation reflects the continuous physical origin of the quantities involved and deliberately ignores the fact that  $I$  is given by samples at discrete locations in  $\sigma$  as well as along the time axis  $t \in 0, 1, \dots, T$ . Bridging this gap between numerical computations and the physical world amounts to devise proper discretization schemes that usually do not emerge from signal sampling itself.

## 2 Optical flow representation

In computer vision, rigid or quasi-rigid body motion estimation methods usually rely on the assumption of the temporal conservation of an invariant derived from the data. These common *photometric* invariants used for motion estimation are described in Sect. 2.1.2. *Geometric* invariance deals with particular geometric configurations of the image function such as corners, contours, etc. They define local features that are usually stable over time, but provide only sparse information for motion estimation in sufficiently structured images. For fluid images, however, these features are difficult to define and to extract. Photometric quantities, on the other hand, are more easy to define and to compute, but are not always invariants. This raises the problem of the connection between optical flow and fluid flow. This problem is addressed in Sect. 2.1. The physics-based optical flow equation is given based on the derivation of the projected motion equations. An analysis of the physical assumptions underlying these model-based measurements techniques compared to classical correlation technique is proposed in Sect. 2.2. Optical flow equations alone do not suffice to compute image motion. This badly posed motion estimation problems, called aperture problem, is defined in Sect. 2.3.

### 2.1 Optical flow and fluid flow

Optical flow is the apparent velocity vector field corresponding to the observed motion of photometric patterns in successive image sequences. This motion is described by the optical flow equation also called observation term or data term. The optical flow equation establishes precisely

the link between the spatiotemporal radiance variation from an emitting object in three-dimensional space and its projection onto the image plane. For laser sheet flow visualization, the optical flow equation is the projection of the equation of motion onto the image plane (see Sect. 2.1.1). For volumic flow visualization of three-dimensional flows or for visualization of two-dimensional flows, the optical flow equation has the classical form of the transport equation (see Sect. 2.1.2). Finally, for three-dimensional flow with altimetric or transmittance imagery, the optical flow is derived from the integration of the continuity equation (see Sect. 2.1.3).

### 2.1.1 3D flow with laser sheet visualization

The relation between fluid flow and optical flow has been described exhaustively by Liu and Shen (2008). The projected motion equations for eleven typical flow visualizations have been carefully derived. Using the underlying governing equation of flow (phase number equation for particulate flow or scalar transport equation), they have shown that the optical flow  $w$  is proportional to the path-averaged velocity of particles or scalar across the laser sheet and have proposed the following physics-based optical flow equation,

$$\partial_t I + \nabla^T(Iw) = f(x, I), \tag{1}$$

where  $f(x, I) = D\nabla^2 I + DcB + c\mathbf{n} \cdot (N\mathbf{u})|_{\Gamma_-}^{\Gamma_+}$  and  $D$  is a diffusion coefficient,  $c$  is a coefficient for particle scattering/absorption or scalar absorption,  $B = -\mathbf{n} \cdot \nabla \psi|_{\Gamma_-}^{\Gamma_+} - \nabla \cdot (\psi|_{\Gamma_-} \nabla \Gamma_- + \psi|_{\Gamma_+} \nabla \Gamma_+)$  is a boundary term that is related to the considered transported quantity  $\psi$ , and its derivatives coupled with the derivatives of the control surfaces  $\Gamma_-$ ,  $\Gamma_+$  of the laser sheet illuminated volume. Since the control surfaces are planar, there is no particle diffusion by molecular process, and the rate of accumulation of the particle in laser sheet illuminated volume is neglected, the term  $f(x, I) \simeq 0$  and Eq. 1 reads  $\partial_t I + w \cdot \nabla I + I \operatorname{div} w = 0$ .

In Eqs. 1 and 2, the optical flow  $w$  is proportional to the path-averaged velocity weighted with a field  $\psi$  (scalar concentration or particle number per unit total volume) which is defined as

$$w \propto \frac{\int_{\Gamma_-}^{\Gamma_+} \psi W_{xy} dz}{\int_{\Gamma_-}^{\Gamma_+} \psi dz}, \tag{3}$$

where  $W_{xy}$  is the projection of the fluid or particle velocity onto the coordinate plane  $(x, y)$ .

It should be noted that Eq. 2 corresponds to the integrated continuity equation (ICE) originally proposed by Corpetti et al. (2002) under the assumption that the

radiance is proportional to an integral of the fluid density across the measurement volume (see Sect. 2.1.3 for details). Although the ICE model proposed by Corpetti et al. (2006) is theoretically valid only for transmittance imagery, the authors have obtained accurate results for PIV measurements, which are now rigorously justified by the recent derivation of the projected motion equation by Liu and Shen (2008) leading to Eq. 2. The experimental evaluation of this method has shown good agreement with hot-wire measurements for a mixing layer and the wake of a circular cylinder. The numerical examination of the technique with the VSJ standard base image has indicated that the ICE equation provides the best results especially in case of out of plane component (see Sect. 5.1). Close examination of Eq. 2 shows that the physics-based optical flow model is composed of a term  $\partial_t I + w \cdot \nabla I$  representing brightness constancy, while the term  $I \operatorname{div} w$  accounts for the non-conservation of the brightness function due to loss of particles caused by non-null out of plane component.

Note that the above physics-based optical flow equations do not take into account specific phenomenon like for instance spatiotemporal varying illumination of the laser that can easily be included with additional models of brightness variation (Haussecker and Fleet 2001). This issue can also be tackled with robust cost functions presented in Sect. 4.3.

Finally, we point out that the data models described by Eqs. 1 and 2, or 6 and 9 in the following sections, constitute variational models. Their validity cease to hold for long-range displacements. In this case, it is more reliable to use an integrated data model. Assuming a constant velocity of a point between two successive frames, the model defines a first-order differential equation that can be straightforwardly integrated:

$$\frac{dI(\mathbf{x}(t), t)}{dt} \Big|_{t=u} = -I(\mathbf{x}(u), u) \operatorname{div} w(\mathbf{x}(u), u) \quad \forall u \in [t, t + 1],$$

leading to the non-linear data model

$$\forall \mathbf{x}, I_2(\mathbf{x} + \mathbf{d}(\mathbf{x})) \exp(\operatorname{div} \mathbf{d}(\mathbf{x})) - I_1(\mathbf{x}) = 0, \tag{4}$$

where  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$  denotes the displacement fields between images  $I_1(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}, t)$  and  $I_2(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = I(\mathbf{x} + \mathbf{d}, t + 1)$ . These models are usually linearized around current estimates and embedded into a multiresolution pyramidal image structure (see Sect. 4.4.1).

### 2.1.2 3D flow with volumic visualization or 2D flow

For laser sheet visualization of two-dimensional incompressible flows, the connection between fluid flow and optical flow is straightforward under the assumption that the laser sheet is perfectly aligned with the flow and/or

under the assumption that the field  $\Psi$  related to the visualizing medium is constant across the laser sheet. In this context, the out of plane component is zero, the optical flow is proportional to the velocity  $\mathbf{w} \propto \mathbf{W}_{xy}$ , hence is divergence free  $\text{div } \mathbf{w} = 0$  and satisfies the scalar advection-diffusion equation

$$\partial_t I + \mathbf{w} \cdot \nabla I = D \nabla^2 I. \tag{5}$$

For volumic visualization of three-dimensional flows, like tomographic reconstruction, the optical flow  $\mathbf{w}$  is a certain average of the velocity field due to the imperfect reconstruction of the three-dimensional image. As a consequence, the connection between fluid flow and optical flow is less straightforward than for the two-dimensional case and is a promising direction for further research (see Sect. 6.2). With a three-dimensional perfect visualization of the flow, the estimated three-dimensional optical flow should obviously obey to the full Navier–Stokes equations, and the evolution of the three-dimensional images should follow a transport equation related to the physical transport law of the observed quantity (e.g. particle, concentration, density, temperature,...). To a first approximation, we will consider in the following that the optical flow  $\mathbf{w}$ , associated with three-dimensional flow or two-dimensional flow visualized respectively through volumic data or two-dimensional sheets, satisfies Eq. 5.

For PIV measurements, the diffusion coefficient  $D = 0$ , and the physics-based optical flow equation corresponds to well known optical flow constraint equation (OFC) accounting for the brightness constancy assumption,

$$\partial_t I + \mathbf{w} \cdot \nabla I = 0. \tag{6}$$

Equation 6 is the linear differential formulation of the matching formulation between two consecutive images also known as the *Displaced Frame Difference* (DFD):

$$\forall \mathbf{x}, I_2(\mathbf{x} + \mathbf{d}(\mathbf{x})) - I_1(\mathbf{x}) = 0. \tag{7}$$

The expression 7 leads to non-linear equations which are always valid irrespective of the displacement range, whereas Eq. 6 is locally valid where the linearization of the intensity function provides a good approximation. This is only the case for small displacements and smooth photometric gradients. Furthermore, the resulting systems are not solvable in photometrically uniform image regions.

In computer vision, for the estimation of rigid or quasi-rigid body motion, other photometric invariants, than the intensity itself, have been proposed like the conservation of the luminance gradient  $\nabla I_2(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \nabla I_1(\mathbf{x})$  (Tretiak and Pastor 1984; Brox et al. 2004), or from successive gaussian filtering  $g_{\sigma_j} * I_2(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = g_{\sigma_j} * I_1(\mathbf{x})$  (Weber and Malik 1995), where  $*$  stands for the convolution product.

### 2.1.3 3D flow with altimetric or transmittance imagery

When the observed luminance function relates to the fluid density, one can rely on the corresponding continuity equation to obtain a meaningful brightness variation model. Neglecting mass exchanges via vertical motions at surface boundaries, we consider the following ICE model (Integrated Continuity Equation):

$$\partial_t \left( \int \rho dz \right) + \mathbf{w} \cdot \nabla \left( \int \rho dz \right) + \left( \int \rho dz \right) \text{div } \mathbf{w} = 0, \tag{8}$$

where  $\mathbf{w}$  stands now for a density weighted average of the general 3D motion field along the vertical axis.

This model provides a valid invariance condition for altimetric imagery of compressible flows (Héas et al. 2007a) or for transmittance imagery of compressible fluids (Fitzpatrick 1988). In cases where the assumption  $I \propto \int \rho dz$  holds, the ICE data model provides a way to take into account mass changes observed in the image plan by associating two-dimensional divergence to brightness variations and reads like Eq. 2. For long-range displacements, integration of Eq. 2 gives Eq. 4. This model has been applied to water-vapor and infrared atmospheric satellite images (Corpetti et al. 2002) and to particle images (Corpetti et al. 2006). A similar model has also been defined for Schlieren images (Arnaud et al. 2006). This technique allows to visualize the variation of the fluid density through refraction of a light beam.

Recently, for atmospheric wind measurement applications, this model has been justified—under the assumption of negligible vertical velocities at surface boundaries—through pressure difference image maps (Héas et al. 2007a). The model has been extended to recover the vertical component of velocities,  $w$ , at the surface boundaries of altimetric atmospheric pressure layers (Héas and Mémin 2008)

$$\frac{dh}{dt} + h \text{div } \mathbf{w} = g[\rho w]_{s^-}^{s^+}, \tag{9}$$

where  $h$  corresponds to observed differences of pressure and the lower and upper surface boundaries are denoted by  $s^-$  and  $s^+$ . For long-range displacements, integration of Eq. 9 yields

$$\begin{aligned} h_2(\mathbf{x} + \mathbf{d}) - h_1(\mathbf{x}) \exp(-\text{div } \mathbf{d}) \\ = g \frac{[\rho w]_{s^-}^{s^+}}{\text{div } \mathbf{d}} (\exp(\text{div } \mathbf{d}) - 1), \end{aligned} \tag{10}$$

which for vanishing divergence of the horizontal motion fields becomes

$$h_2(\mathbf{x} + \mathbf{d}(\mathbf{x})) - h_1(\mathbf{x}) = g[\rho w]_{s^-}^{s^+}. \tag{11}$$

### 2.2 Optical flow and correlation

In this section, we analyse the physical assumptions underlying model-based measurements techniques described above and classical correlation technique. We indicate that the correlation technique involves intrinsic assumptions giving rise to accuracy limits of the method for motion estimation. To provide a simple explanation of this behavior, we shall consider, for simplicity, the DFD model embedded in a local estimation scheme described in Sect. 3.1 and 3.2.

The displacement field between two consecutive images can be determined by minimizing the square of the DFD model

$$d(x) = \arg \min_d \sum_{r \in \mathcal{W}(x)} (I_2(r + d) - I_1(r))^2 \tag{12}$$

where  $\mathcal{W}(x)$  is the interrogation window. Since  $I_1$  does not depend on  $d$ , the displacement field reads

$$d(x) = \arg \min_d \sum_{r \in \mathcal{W}(x)} (I_2(r + d)^2 - 2I_2(r + d)I_1(r)). \tag{13}$$

Examination of this equation indicates that the minimization of the square of the DFD model includes the correlation between the displaced image  $I_2$  and the image  $I_1$ . The displacement field estimated with the DFD is thus equivalent to the displacement field obtained through a correlation maximization when the quantity  $\sum_{r \in \mathcal{W}(x)} I_2(r + d)^2$  does not depend on  $d$ . This condition assumes a constant brightness energy contained in the displaced interrogation window whatever the displacement and the point location, i.e.

$$\forall d, \sum_{r \in \mathcal{W}(x)} I_2(r + d)^2 \approx \text{constant}. \tag{14}$$

For PIV images, this condition is clearly met for homogeneous particle seeding and sufficiently large interrogation window. Based on a mathematical analysis of the correlation, this conclusion has also been drawn by Gui and Merzkirch (2000) when comparing the square of the DFD, therein called MQD method, with several correlation-based algorithms.

Since Eq. 12 is the ideal physics-consistent measure of fit of the displacement field to the data image—for two-dimensional flow or volumic imagery of three-dimensional flows—the classical correlation provides biased estimations for non-homogeneous particle seeding. The occurrence of this critical phenomenon is locally strengthened when considering small interrogation windows, region with large velocity gradients or scalar image. On the contrary, the square of the DFD intrinsically allows to cope with smaller interrogations areas, high particle density and scalar images. This simple analysis clearly shows that the

classical correlation behaves as a poor model which does not take into account the particle image pattern. As a consequence, a correlation goodness of fit exhibits accuracy limits. Furthermore, for laser sheet three-dimensional flows visualization, the correlation “model” hides the effect of intensity variations due to the out of plane component leading to limited achievable accuracy (Nobach and Bodenschatz 2009), whereas the physics-based model 4 take into account this phenomenon.

### 2.3 Aperture problem

Unlike the non-linear Eqs. 4 and 7, the variational linear Eqs. 2 and 6 do not suffice to compute image motion. For instance, the formulation 6 merely links the temporal variation of the luminance function to the component of the velocity vector normal to the iso-intensity curves (level lines of the image function)

$$w(x)^\perp = - \frac{\partial_t I(x)}{\|\nabla I(x)\|} \cdot \frac{\nabla I(x)}{\|\nabla I(x)\|}.$$

As a consequence, motion estimation of linear moving structures is ill-posed (see Fig. 1). Motion estimation is thus intrinsically linked in a way or another to the definition of windowing functions or to the adjunction of additional spatial constraints or regularization terms. This is referred to in the literature as the *aperture problem*. Furthermore, we point out that non-linear Eqs. 4 and 7, and the variational Eqs. 2 and 6 do not allow to estimate motion in homogeneous image regions, and are sensitive to noise.

### 3 Basic motion estimation schemes

Optical flow equations alone do not suffice to compute image motion. Additional constraints have to be used in order to define well-posed motion estimation problems. The type of these constraints depends on the way motion is

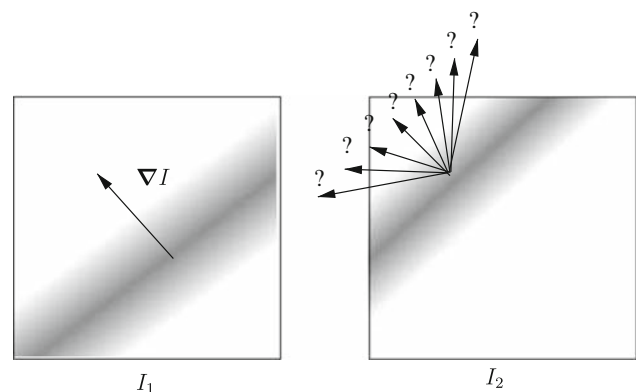


Fig. 1 Schematic illustration of the aperture problem



represented, parametric or non-parametric, leading to different families of approaches. They include correlation methods and the Lucas Kanade estimator, and optical flow methods. Both families of approaches are described in Sect. 3.1 and 3.2.

### 3.1 Parametric representation and local or semi-local estimation

Parametric motion representations allow to consider additional relations linking the luminance function to the parameters. These relations are required to hold either on disjoint local spatial supports, or globally on the whole image domain.

#### 3.1.1 Local disjoint spatial supports: correlation, “block matching” and “Lucas and Kanade”

These methods belong to region-based techniques. Their general principle consists in considering a set of windows  $\mathcal{W}(\mathbf{x})$  centered on different points of the image grid. A parametric motion field is then estimated on each of these windows on the basis of a criteria defined classically as the minimization of the negative cross-correlation or as the minimization of a metric like the absolute and the squared differences. A locally constant displacement field is sought over a discrete state space,

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{d}} \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{W}(\mathbf{x})} \mathcal{C}(I_2(\mathbf{r} + \mathbf{d}), I_1(\mathbf{r})).$$

The similarity functions,  $\mathcal{C}$ , used usually are the absolute value or the square of the DFD, or correlation functions. The squared differences is commonly used in computer vision for the motion estimation of rigid or quasi-rigid body. It has been suggested by Gui and Merzkirch (1996) for PIV measurements and named minimum quadratic difference (MQD) method. However, as discussed in Sect. 2.1.1, the DFD model, which relies on the brightness constancy assumption, is valid either for three-dimensional flows visualized through volumic data or for two-dimensional flow. For laser sheet three-dimensional flow visualization, this model has to be replaced by the model 4 accounting for particle loss and three-dimensional effects.

**3.1.1.1 Correlation** Efficient implementations of the correlation functions are based on the Fast Fourier transform (FFT) and rely on the property that the transform of the correlation of two signals

$$I_1 \circ I_2 \equiv \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{W}(\mathbf{x})} I_1(\mathbf{r}) I_2(\mathbf{r} + \mathbf{d})$$

is given by the product of transform of the first signal with the conjugate transform of the second signal

$$\mathcal{F}(I_1 \circ I_2) = \mathcal{F}(I_1) \mathcal{F}^*(I_2).$$

The correlation function is then computed in the Fourier domain over local windows centered in the same point in both images. Strictly speaking, this approach is only defined for periodic signals. For non-periodic signals, these methods may be sensitive to long-range displacements.

Another correlation method, defined in the phase space, relies on the shift invariance property of the Fourier transform

$$\mathcal{F}(I(\mathbf{x} + \mathbf{w}, t)) = \mathcal{F}(I(\mathbf{x} + \mathbf{w}, 0)) \delta(\mathbf{k}^T \mathbf{w} + \phi),$$

where  $\delta$  denotes the Dirac mass and  $\mathbf{k}$  and  $\phi$  designate respectively the spatial and temporal frequencies. This equation shows that a feature moving with a velocity  $\mathbf{w}$  belongs to a subspace of the Fourier domain. For  $2D + t$  image sequences, this is a plane through the origin of the 3D Fourier domain, given by the argument of the  $\delta$  function

$$\phi = -\mathbf{k}^T \mathbf{w}.$$

The slope of the plane defines the velocity vector:  $\mathbf{w} = -\nabla_{\mathbf{k}} \phi$ . Let us note that the determination of this vector is ambiguous when the signal spectrum does not sufficiently cover the corresponding plane. This is the case when the image signal in the spatial domain is either homogeneous or has a single dominant direction. We retrieve then the aperture problem in the frequency domain.

When both images  $I_1$  and  $I_2$  are linked by a global translation and a photometric invariance assumption (i.e.,  $I_1(\mathbf{x} - \mathbf{w}_0) = I_2(\mathbf{x})$ ), the Fourier transform of image  $I_2$  is given by:  $\mathcal{F}I_2 = \hat{I}_2(\mathbf{k}) = \hat{I}_1(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{w}_0)$  and therefore:

$$\frac{\hat{I}_2(\mathbf{k}) \hat{I}_1^*(\mathbf{k})}{|\hat{I}_1|^2} = \exp(-i\mathbf{k}^T \mathbf{w}_0).$$

The spatial representation of this normalized spectral correlation coefficient (obtained through inverse Fourier transform) is characterized by a displaced dirac mass  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{w}_0)$ , which allows to determine the displacement  $\mathbf{w}_0$  (Foroosh et al. 2002; Jähne 1993).

Methods based on these principles are largely used for their rapidity and their simplicity. Applications include image indexing, video compression, velocity measurement in experimental fluid mechanics (PIV methods; Adrian 1991), and atmospheric wind field estimation in meteorology. In experimental fluid mechanics, different challenges from 2001 to 2005 have led to very efficient and reliable variations of the technique. The main variations concern Gaussian correlation peak approximation for sub-pixel accuracy, and refined multipass correlation (Adrian 2005; Raffel et al. 2007).

**3.1.1.2 Block matching** A second family methods is based on mean squares brightness conservation 6 and a local parametric motion model of  $p$  degrees of freedom defined over a spatial domain. In the case of a linear motion representation defined as  $w(x) = P(x)\theta$ , where  $P(x)$  is a  $2 \times p$  matrix which depends on the chosen parameterization<sup>4</sup>, motion estimation amounts to determine the vector  $\hat{\theta}$  such that:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \int_{W(x)} g(x-r) [\partial_t I(r) + \nabla I(r)^T P(r)\theta]^2 dr \quad (15)$$

where  $g(x)$  is a windowing function, typically a Gaussian, which gives more weight to the window center. This expression may be written as a convolution product in the spatiotemporal domain:

$$\min_v v^T \left[ \underbrace{g_{\sigma} * (P^T \nabla_3 I \nabla_3 I^T P)}_{\mathcal{T}} \right] v, \quad (16)$$

with  $v = (u, v, 1)^T$  and where  $g_{\sigma}$  stands here for a  $(2D + t)$  kernel, and  $\nabla_3 I$  denotes the spatiotemporal gradients of the luminance function ( $\nabla_3 I \equiv (\partial_x I, \partial_y I, \partial_t I)^T$ ).

**3.1.1.3 Lucas and Kanade** For a discrete 2D case and a constant motion model, the least squares solution of the expression 15 constitutes the estimator proposed by Lucas and Kanade (1981):

$$w(x) = -T^{-1} \int_{W(x)} g_{\sigma}(x-r) \partial_t I(r) \nabla I(r) dr \quad (17)$$

$$\text{with } T = \int_{W(x)} g(x-r) \nabla I(r) \nabla I^T(r) dr.$$

It is easy to see that matrix  $T$  is ill conditioned for small photometric gradients (uniform image regions) or when the photometric contours are structured along a single direction in  $W(x)$  ( $\forall r \in W(x), \nabla I(r) \simeq c$ ). We retrieve here again the aperture problem (see Sect. 2.3).

This local scheme 17 has been applied to flow field measurements by Okuno and Nakaoka (1991), Sugii et al. (2000) and Yamamoto and Uemura (2009), and called either gradient method or spatiotemporal derivative method. The technique has been extended for the recovery of the velocity fields and its derivative and has been assessed on PIV images by Alvarez et al. (2008).

Solutions to this least squares estimation problem through an eigenvalue analysis (Eq. 16) comprises the

<sup>4</sup>  $P(s) = Id$  for a constant model;  $P(s) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}$  for

an affine model and  $P(s) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & x^2 & xy \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & y^2 \end{bmatrix}$  for a quadratic model.

so-called *structure tensor* approaches (Bigün et al. 1991; Jähne 1993). The matrix  $T$  being symmetric, there exists an orthogonal matrix  $Q$  such that

$$\min_v v^T T v = \min_y y^T Q^T T Q y = \min_y y^T \Lambda y, \quad (18)$$

with  $y = Q^T v$  and  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , the diagonal matrix containing the eigenvalues. The solution of Eq. 18 subject to the constraint  $\|v\| = 1$  is given by the eigenvector  $e^{(\lambda_3)} \equiv (e_x^{(\lambda_3)} e_y^{(\lambda_3)} e_t^{(\lambda_3)})^T$  corresponding to the smallest eigenvalue  $\lambda_3^5$ . When the matrix has full rank and is well conditioned, both components of the velocity vector are given by:

$$w(x) = (u(x), v(x)) = \frac{e_x^{(\lambda_3)}}{e_t^{(\lambda_3)}}.$$

The eigenvalues enable further analysis. For instance, if all three eigenvalues are close to zero, no motion can be estimated. This happens if the spatial support underlying the least squares estimation corresponds to a homogeneous image region. A single eigenvalue different from zero indicates that the luminance gradient has a single dominant spatial direction, and again only the normal velocity vector can be estimated (aperture problem):

$$w^{\perp} = e_t^{(\lambda_1)} \frac{e_x^{(\lambda_1)}}{\|e_x^{(\lambda_1)}\|}.$$

Finally, if three eigenvalues are different from zero, there is no coherent apparent motion on the considered support due to a motion discontinuity.

The formulation of the approaches Eqs. 15 and 17 in the Fourier domain leads to a plane regression problem. A set of spatiotemporal directional filters, for instance Gabor filters, enables a direct estimation of the plane parameters (Fleet and Jepson 1990; Heeger 1988; Jähne 1993; Simoncelli 1993; Yuille and Grzywacz 1988).

**3.1.2 Globalized local smoothing: Ritz method**

The previous techniques comprise local independent motion estimators. While this locality favorably limits error propagation, it prevents taking into account global physical constraints. One way to extend the previous approaches consists in seeking for a solution of the form

$$w_{\phi}(x) \equiv \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x),$$

<sup>5</sup> This corresponds to the total least squares solution. Given a  $(m \times p)$  homogeneous linear system  $Mx = 0$ , a total least squares solution minimizes  $\|Mx\|^2$  subject to the constraint  $\|x\| = 1$  in order to avoid the trivial solution.

where the coefficients  $c_i$  are unknown and the *shape functions*,  $\phi_i(\mathbf{x})$ , are fixed. These functions have compact spatial support and are chosen on a priori grounds of requirements of given application area. The shape function basis should be complete, that is the approximation error  $\|\mathbf{w}_\phi - \mathbf{w}\|$  converges toward zero for  $N \rightarrow \infty$ .

The method consists in estimating the coefficients  $c_i$  by minimizing

$$J(\mathbf{w}_\phi) = \int_{\Omega} F\left(\mathbf{x}, \mathbf{w}_\phi, \frac{\partial \mathbf{w}_\phi}{\partial \mathbf{x}}, \dots\right) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} G(s, \mathbf{w}_\phi, \dots) ds, \quad (19)$$

where  $\Omega$  define the spatial domain with boundary  $\Gamma = \partial\Omega$ , in which one seeks for the solution. In the case of a quadratic functional, the minimizer of  $J$  with respect to  $\mathbf{c}$  is determined by the following conditions:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial c_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial c_N} \end{bmatrix} = K\mathbf{c} + \mathbf{f} = 0.$$

If the functional degree with respect to  $\mathbf{w}_\theta$  and its derivative is not larger than 2, the so-called *stiffness matrix*  $K$  is symmetric:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial c_1^2} \dots & \frac{\partial^2 J}{\partial c_N \partial c_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial c_1 \partial c_N} \dots & \frac{\partial^2 J}{\partial c_N^2} \end{bmatrix}$$

This method has been applied for functions  $F$  defined either from the OFC (Srinivasan and Chellappa 1998; Wu et al. 2000) or from the DFD (Musse et al. 1999; Szeliski and Shum 1996). In the former case, the system to be solved is linear, and the shape functions are “cosine window” functions (Srinivasan and Chellappa 1998) and a particular wavelet function basis (Cai-Wang waveletts) defined from B-splines of order 4 (Wu et al. 2000). In the latter case, both methods make use of hierarchical B-splines. As numerical iterative methods were used a Gauss–Newton solver (Musse et al. 1999), a Conjugate Gradient technique (Srinivasan and Chellappa 1998) and the Levenberg–Marquardt method (Szeliski and Shum 1996; Wu et al. 2000). Standard boundary conditions (Dirichlet or Neumann) were associated with those different approaches. Basis functions defined on thin-plate splines (Duchon 1977; Wahba 1990) have been also intensively used in computer vision registration application (Arad et al. 1994; Bookstein 1989) or for medical image applications (Rohr et al. 1999). The main problem of these methods consists to determine an adequate spatial subdivision of the image domain in terms of the basis functions, and to allow for strong discontinuities of the solution that are important in some applications of image sequence processing.

For fluid flow image analysis, an estimator of this kind, relying on the Helmholtz decomposition, has been proposed in Cuzol and Mémin (2005, 2008). An example of the results obtained by the latter estimator is shown in Figs. 12 and 13. The representation on which it relies is further described in Sect. 4.5.2. Let us recall that the Helmholtz decomposition separates the velocity field into a divergent-free and a curl-free component (assuming null boundary conditions at infinity), the *solenoidal* and *irrotational* motion components

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\text{irr}} + \mathbf{w}_{\text{sol}}, \quad (20)$$

where  $\text{div } \mathbf{w} = \text{div } \mathbf{w}_{\text{irr}}$  and  $\text{curl } \mathbf{w} = \text{curl } \mathbf{w}_{\text{sol}}$ . It is well known that these two fields can be represented by two potential functions, the stream function and the velocity potential

$$\mathbf{w} = \nabla\psi + \nabla^\perp\phi. \quad (21)$$

These potential functions are solutions of two Poisson equations (known for the divergent-free component as the Biot-Savart integral):

$$\Delta\psi = -\text{curl } \mathbf{w}, \quad \Delta\phi = \text{div } \mathbf{w}. \quad (22)$$

As a consequence, they may be expressed by the convolution with the corresponding Green functions. Taking gradients of these convolution products and slightly mollifying the associated singular kernels with Gaussian convolution gives rise to appropriate basis functions for the curl and the divergence, known in the computational fluid dynamics community as *vortex particles* (Chorin 1973; Cottet and Koumoutsakos 2000; Leonard 1980). The resulting irrotational and solenoidal motion fields are a linear combination of these basis functions. The solenoidal components, for instance, reads

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\text{sol}}(\mathbf{x}) &\approx \sum_{i=0}^p \gamma_i K^\perp * g_{\mathbf{z}_i}(\mathbf{z}_i - \mathbf{x}) \\ &\approx \sum_{i=0}^p \gamma_i K_{\mathbf{z}_i}^\perp(\mathbf{z}_i - \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (23)$$

where  $K_{\mathbf{z}_i}^\perp$  is the kernel function obtained by convolving the orthogonal gradient of the Green kernel,  $K^\perp$ , with a Gaussian function,  $g_{\mathbf{z}_i}$ . The coordinates,  $\mathbf{z}_i$ , denotes the location of the  $i$ th basis functions. A similar representation of the irrotational component using likewise, source particles and the Biot-Savart integral associated with the divergence map (Eq. 24) can be readily obtained. Using this parameterization together with a photometric model enables to define a least squares estimation problem for the unknown coefficients. The estimation of the basis function parameters, on the other hand, i.e. standard deviation of the gaussian kernel and location of the basis function, is more involved and leads to a non-linear system to be solved

numerically. A solution based on a two-stage process is proposed in Cuzol et al. (2007). Code corresponding to this estimator is freely available and can be downloaded on the Web site of the FLUID project (<http://www.fluid.irisa.fr>).

For fluid flows analysis and fluid motion estimation from image sequences spline basis functions minimizing a second order div–curl constraint (see Eq. 25 Sect. 1) have been proposed (Amodei and Benbourhim 1991; Suter 1994; Isambert et al. 2008). Compared to vortex particles, these basis functions have the drawback to impose strictly an empirical kinematics constraint that is not built from physical considerations.

### 3.2 Non-parametric representation and non-local estimation

A third basic class of motion estimation schemes considers velocity fields  $\mathbf{w} = (u, v)^T$  as general *functions*, rather than as individual velocity estimates at discrete locations (Sect. 2.1.2), or as polynomial vector fields defined in a local region (Sect. 3.1). These methods are classically called optical flow or global approaches.

Given an image function  $I(\mathbf{x}, t)$ , we estimate  $\mathbf{w}$  for an arbitrary but fixed point of time  $t$  by minimizing the functional

$$E(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \left\{ (\nabla I \cdot \mathbf{w} + \partial_t I)^2 + \lambda (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) \right\} d\mathbf{x}. \tag{24}$$

The variational approach Eq. 24 has been introduced by Horn and Schunck (1981) in the field of computer vision. The objective criterion combines two terms: A so-called *data term* that enforces the conservation assumption by minimizing the squared norm of the linearized DFD (see Sect. 2.1.2), and a so-called *smoothness term* or *regularizer* that enforces spatial smoothness of the minimizing velocity field  $\mathbf{w}$ , to a degree as specified by the *regularization parameter*  $\lambda$  weighting the two terms.

Specific properties of the basic variational approach (Eq. 24) include:

- Under weak conditions, namely,  $L^2$ -independence of the two component functions of the spatial image gradient  $\nabla I(\mathbf{x})$ , the functional Eq. 24 is strictly *convex* (Schnörr 1991). Because the functional additionally is *quadratic* in  $\mathbf{w}$ , discretizing the variational equation

$$\frac{d}{d\tau} E(\mathbf{w} + \tau \tilde{\mathbf{w}})|_{\tau=0} = 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{w}},$$

with piecewise linear finite elements, or the corresponding Euler-Lagrange system of equations with finite differences, yields a sparse linear system that is positive definite. It can be conveniently and efficiently solved using standard iterative numerical techniques.

- The resulting velocity estimate  $\mathbf{w}$  is *dense* even if the image function  $I$  is homogeneous, i.e.  $\nabla I \approx 0$ , in some image regions. As before in the two previous subsections, imposing smoothness on the solution is necessary here, too, to obtain a well-defined estimation approach. The non-parametric approach (Eq. 24) is *less restrictive*, however, than assuming locally constant velocity fields (Sect. 2.1.2), or than prescribing a polynomial form within local regions (Sect. 3.1).

The application of the basic variational approach (Eq. 24) to PIV has been studied in Ruhnau et al. (2005) where more details on the discretization are given. Moreover, in this paper, a multiscale representation of the input image data  $I$  obtained by low-pass filtering and subsampling was used to compute *long-range* motions up to 15 pixels per frame, which is not possible when working with Eq. 24 on the finest sampling grid only (see Sect. 4.4.1 for details on this multiscale representation).

Although providing good results with PIV data, the basic variational approach of Horn and Schunck (1981) was originally proposed for rigid or quasi-rigid motion. Therefore some knowledge of the physics of fluid need to be used to improve the measurement accuracy. For laser sheet visualization of three-dimensional flow, Eq. 2 must be used as a data term. Modifications of the regularization term are addressed in Sect. 4 (higher-order and physics-based regularization) and in Sect. 4.3 robust norms are described for removing outliers and for preserving discontinuities of the velocity fields. Concerning numerical approaches relevant to Eq. 24, we refer to Bruhn et al. (2006) and references therein.

## 4 Specific motion estimation schemes

The motion estimators presented so far combine a physics-based model of brightness variation related to the observed flow with additional spatial constraints expressed through parametric motion models or smoothness functionals. This last ingredient was mainly designed in the context of rigid luminance patterns that are typical for image sequences of natural scenes.

Regarding fluid flow velocity fields, it is natural to ask for dedicated approaches taking into account physically more plausible smoothing functionals, to provide more accurate velocity measurements. This section addresses these issues.

### 4.1 Higher-order regularization

Regarding the estimation of fluid flows with spatially varying, strong gradients, an apparent weak point of the



basic variational approach (Eq. 24) is the use of *first-order* derivatives in the regularization term. As a consequence, the value for the parameter  $\lambda$  has to be chosen quite small in order not to underestimate gradients of the flow. On the other hand, this means that data noise influencing the first term in Eq. 24 cannot be effectively suppressed through regularization.

As a remedy, numerous researchers studied *higher-order* regularizers, in particular terms involving second-order spatial derivatives of the flow, of the form

$$\int_{\Omega} \left\{ \|\nabla \operatorname{div} \mathbf{w}\|^2 + \|\nabla \operatorname{curl} \mathbf{w}\|^2 \right\} \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{25}$$

We refer to Corpetti et al. (2002), Yuan et al. (2007) and references to earlier work therein. Further motivation of Eq. 25 is given by the generalized Helmholtz decomposition of the space of square integrable vector fields into gradients and curls (Girault and Raviart, 1986)

$$L^2(\Omega)^2 = \nabla H^1(\Omega) \oplus \nabla^\perp H_0^1(\Omega), \tag{26}$$

that is valid in *two* dimensions  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  if the domain  $\Omega$  is simply connected. In Eq. 26, the symbol  $\nabla^\perp$  denotes the vector-valued curl-operator  $(\partial_{x_2}, -\partial_{x_1})^\top$  for two-dimensional scalar fields, and  $H^1(\Omega)$  denotes the Sobolev space of square integrable functions whose gradients are square integrable as well.  $H_0^1(\Omega)$  denotes the subspace of those functions of  $H^1(\Omega)$  that vanish on the boundary  $\partial\Omega$ .

Using higher-order derivatives has consequences for discretization. Unlike the approach (Eq. 24) where standard textbook schemes apply and lead to numerically stable computations, the regularizer Eq. 25 yields a complex Euler-Lagrange system of equations and natural boundary conditions whose proper discretization is far from being trivial. The decomposition of vector fields  $\mathbf{w} \in L^2(\Omega)^2$

into an irrotational and a solenoidal component due to Eq. 26 highlights this issue as well. For example, it is well known from computational fluid dynamics that imposing the incompressibility constraint  $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$  in connection with standard discretization schemes may result in  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ , due to the so-called locking effect (cf., e.g., Brezzi and Fortin 1991).

As a consequence, more sophisticated discretization schemes have to be applied. Examples include the Mimetic Finite Differences framework developed by Hyman and Shashkov (1997a, 1997b) or alternatively the construction of adequate Finite Element spaces, see Hiptmair (1999) and references therein to earlier work. The primary objective of this line of research is to make hold true orthogonal decompositions of spaces of vector fields and the basic integral identities of vector analysis *after* discretization. This is an essential prerequisite for stable numerical computations.

Furthermore, vector field decompositions help to analyze variational approaches. For example, it is shown in Yuan et al. (2007) that when using the regularizer (Eq. 25) together with the data term in Eq. 24, one should include an additional boundary term in order to remove an inherent sensitivity against noise in the image data that cannot be regularized by increasing the weight of Eq. 25.

Comparisons of the approaches of Corpetti et al. (2002) and Yuan et al. (2007) with correlation technique are discussed in Sect. 5.1. Results obtained with these higher-order regularization techniques are displayed in Figs. 4, 5, 6 and 7 for particle and scalar images.

#### 4.2 Physical constraints and controlled estimation

The variational approaches Eqs. 24 and 25 are *unconstrained*. In experimental fluid dynamics, this appears to be unnatural because the flow to be estimated is governed by the Navier–Stokes equation. Consequently, one may ask for approaches that combine flow measurements from image sequences with the constitutive equations of fluid dynamics. This basic problem opens a line of long-term research at the end of which one may expect computational schemes to be available that consistently combine the evaluation of experimental data and simulations.

The reader may argue that physical constraints are less useful in the prevailing two-dimensional measurement scenarios. For example, even the incompressibility condition  $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$  does not strictly hold for flows observed in a planar section through a volume, due to out of plane particle movements. While this is true, it should not hamper to clarify this basic problem that is becoming more and more relevant as soon as novel measurement techniques delivering three-dimensional flow measurements become available.

A basic approach that in some sense provides the simplest setting for a meaningful combination of flow measurements with physical constraints has been recently proposed in Ruhnau And Schnörr (2007). The variational approach comprises the objective functional

$$E(\mathbf{w}, p, \mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_{\Omega} \left\{ (\nabla I \cdot \mathbf{w} + \partial_t I)^2 + \alpha \|\mathbf{f}\|^2 \right\} \mathrm{d}\mathbf{x} + \gamma \int_{\partial\Omega} \|\partial_t \mathbf{g}\|^2 \mathrm{d}s, \tag{27}$$

and the constraint system

$$-\mu \Delta \mathbf{w} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \tag{28a}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{28b}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{28c}$$

Estimated flows  $w$  have to satisfy the Stokes system Eq. 28 and to fit the observed image motion by minimizing the data term (i.e. the first term) in Eq. 27. The connection between the physical constraints and the objective function is established by virtue of distributed vector fields  $f, g$  inside  $\Omega$  and on the boundary  $\partial\Omega$ , respectively, that control the estimated flow  $w$  through the right-hand side of Eq. 28 so as to minimize Eq. 27. Regularization terms of the control variables are included into the objective function, with small weights  $\alpha$  and  $\gamma$ , in order to render the whole approach mathematically well posed.  $\partial_{tg}$  denotes the componentwise tangential derivative of  $g$  along the boundary  $\partial\Omega$ .

The following basic observations can be made:

- The approach, Eqs. 27 and 28, is more specific than Eq. 25 (complemented with the same data term), due to the constraint system Eq. 28. This is an advantage if the physical constraints hold true. In fact, if  $w$  is actually governed by the Stokes equation, the variables  $p, f$  become *physically significant*: Pressure and forces can be directly estimated from the image data  $I(x, t)$  (Ruhnau and Schnörr, 2007)
- Using the data term Eq. 6, the approach Eq. 27 was originally devised for two-dimensional flows but may also hold in a physical sense for three-dimensional flow with volumic visualization. In these cases, under the assumptions described in Sect. 2.1.2, the optical flow  $w$  can satisfy the Stokes Eq. 28;
- In the case of turbulent flow  $w$  where the Stokes equation is inadequate but the constraint Eq. 28b still holds true, the approach Eqs. 27 and 28 still makes sense. This is because the control variables  $f, g$  are *free*. While they are no longer physically significant, they still control the flow  $w$  so as to fit the turbulent measurements observed through the image data, by minimizing Eq. 27. In this connection, we point out that  $f \propto \Delta w$  in Eq. 28a is proportional to second-order derivatives of  $w$ . As a result, inclusion of  $\|f\|^2$  into Eq. 27 leads to higher-order flow regularization as in Eq. 25, but in a physically more plausible way;
- Finally, observe that the Eq. 28 have the common form used in numerical simulations, and are kept separate from the functional Eq. 27 involving the data. This helps to rely on established numerical schemes developed in both communities.

In Ruhnau and Schnörr (2007), the authors develop a gradient descent scheme for minimizing Eq. 27 subject to the constraints Eq. 28. To compute the gradient, the dependency of the variables  $w, p$  on the controls  $f, g$  has to be taken into account. This can be done by additionally solving an auxiliary system of the same form as Eq. 28. A second major issue is to employ proper discretizations for

$w$  and  $p$ . We refer to Ruhnau and Schnörr (2007), Gunzburger (2003) and Brezzi and Fortin (1991) for details.

### 4.3 Robust measures

Models of motion estimation described in Sect. 2.1 rely on assumptions that do not *strictly* hold true. Non-Gaussian noise, changes of illumination, and many other local situations that do not fit well the underlying model provide examples. To handle such deviations in the different energy terms of the functional, it is common to replace the  $L^2$  norm by a so-called *robust* norm

$$\int_{\Omega} \rho(g(w)) dx. \tag{29}$$

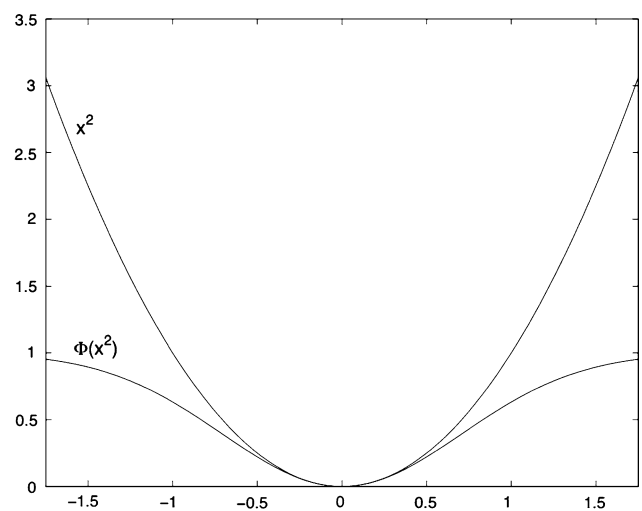
Such cost functions, originally introduced in the context of robust statistics (Huber 1981), penalize large residual values less than quadratic functions do (Fig. 2). Under suitable conditions (mainly concavity of  $\Phi \equiv \rho(\sqrt{x})$ ), it can be shown that any multidimensional minimization problem of the form

$$\arg \min_w \int \rho[g(w)] dx, \tag{30}$$

can be turned into a corresponding dual minimization problem (Huber 1981; Geman and Reynolds 1992)

$$\arg \min_{w,z} \int [Mzg(w)^2 + \psi(z)] dx. \tag{31}$$

This new optimization problem involves additional *auxiliary variables* acting as *weight functions*  $z(x)$  with value in the range  $[0, 1]$ . Function  $\psi$  is a continuously differentiable function, depending on  $\rho$ , and  $M \equiv \lim_{v \rightarrow 0^+} \Phi'(v)$ .



**Fig. 2** Graph of a robust cost function  $(\rho(x) = 1 - \exp(-\frac{x^2}{\sigma^2}))$  compared to a quadratic function

Optimization is carried out alternating minimizations with respect to  $\mathbf{w}$  and  $z$ . If the function  $g$  is affine, minimization with respect to  $\mathbf{w}$  becomes a standard *weighted least squares* problem. For  $\mathbf{w}$  being fixed, the best weights have the following closed form (Geman and Reynolds 1992):

$$\hat{z}(\mathbf{x}) = \frac{\rho'[g(\mathbf{w})]}{2Mg(\mathbf{w})} = \frac{1}{M} \Phi' [g(\mathbf{w})^2]. \quad (32)$$

Experimentally, the use of these functions either for the data model or for the regularization term has led to better performance in a range of computer vision application (Black and Rangarajan 1996; Mémin and Pérez 2002). For fluid flows, such functions have been mainly used for the data term (Corpetti et al. 2006; Héas et al. 2007a). They allow to introduce a localized discrepancy measure between the data model and the actual measurements. At points where such a deviation occurs, only the remaining terms of the functional (i.e. regularization) are involved. These functions have been also used together with a classification map to enable the estimation of atmospheric layered data (Héas et al. 2007a). In that case, only data belonging to a predefined layer are taken into account for motion estimation.

#### 4.4 Multiscale estimation

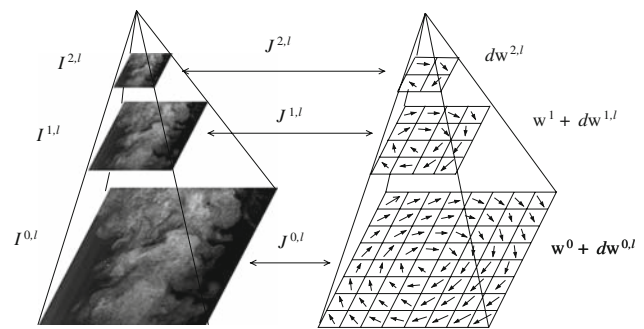
##### 4.4.1 Multiresolution scheme

Velocity measurements from particle image sequence present inherent difficulties for variational methods. The variational formulation is limited to small displacements (smaller than the shortest wavelength present in the image), and therefore is typically embedded into a multiresolution scheme to handle large displacements.

These models are usually linearized around current estimates and embedded into a multiresolution pyramidal image structure obtained from successive low-pass filtering and subsampling of the image sequence (Fig. 3). The estimation process is then incrementally conducted from “coarse to fine” along the multiresolution structure (Bergen et al. 1992; Enkelmann 1988; Mémin and Pérez 1998; Papenberg et al. 2006).

##### 4.4.2 Correlation-based variational scheme

As mentioned above, the estimation of long-range displacements with optical flow techniques is usually embedded into multiresolution data structures and successive linearizations around the current estimate. These incremental schemes allow to tackle in a Gauss–Newton type manner the non-linear optimization associated with the non-linear integrated brightness constancy assumption, such as the DFD data model. In this scheme, major



**Fig. 3** Coarse-to-fine resolution with multiresolution representation of the images (Heitz et al. 2008)

components of the displacements are computed at coarse resolution levels corresponding to low-pass filtered and subsampled versions of the original images. However, when the motion of thin or small structures differs significantly from the motion of larger regions in their neighborhood, the estimator most likely fails to correctly determine the motion of these high frequency photometric structures. This is particularly true for meteorological images, where for instance mesoscale structures such as cirrus filaments may exhibit large displacements that are completely different from the atmospheric layer motion at a lower altitude. The same problem appears with particle images. Due to the successive down sampling of the image, small particles with large velocities are smoothed out, thus leading to a loss of information and erroneous velocity measurements. *As a result, these problems lead to poor performance of traditional multiresolution dense motion estimator.*

Correlation techniques have proven to be more robust with respect to the estimation of long-range displacements. Nevertheless, as they rely on parametric spatial motion models, these techniques tend to larger estimation errors in regions with a high motion variability. Furthermore, they provide sparser motion fields that must be interpolated and post-processed in order to compute dense vorticity maps or related differential motion quantities.

In order to benefit from the best properties of both variational dense estimators and correlation techniques, an immediate idea is to combine these two methods. Sugii et al. (2000) combined sequentially cross-correlation technique and local variational approach (Lucas and Kanade method see Sect. 3.1) to achieve high subpixel accuracy with higher spatial resolution. Seemingly, for three-dimensional motion estimation, Alvarez et al. (2009) initialized the estimation with cross-correlation and improved the results with a global variational approach (Horn and Schunck method see Sect. 3.2).

To cope with the multiresolution issue, Héas et al. (2007a) for meteorological satellite images and Heitz et al.

(2008) for fluid mechanics particle images, proposed a collaborative correlation-variational approach combining the robustness of correlation techniques with the high spatial density of global variational methods. Both techniques can be formalized as the minimization of the following functional:

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}(I, \bar{\mathbf{w}} + \check{\mathbf{w}}) + \beta \int_{\Omega} \sum_{i=1}^p h^i g_{\sigma}(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}) \|\mathbf{w}_c(\mathbf{x}^i) - \bar{\mathbf{w}}\|^2 d\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \|\nabla \text{curl}(\bar{\mathbf{w}} + \check{\mathbf{w}})\|^2 + \|\nabla \text{div}(\bar{\mathbf{w}} + \check{\mathbf{w}})\|^2 d\mathbf{x}, \quad (33)$$

where  $\bar{\mathbf{w}}$  denotes the large scale components of the motion, whereas  $\check{\mathbf{w}}$  represents finer scales. Function  $\mathcal{F}$  stands for any chosen photometric data model, and  $\mathbf{w}_c$  denotes a finite set of  $p$  correlation vectors located at points  $\mathbf{x}^i$ . Optimization is carried out in two separate steps. Setting initially to zero the finer motion component, the large-scale components are obtained on the basis of (1) a photometric data model, (2) a goodness of fit term including the correlation vectors that is weighted both by a Gaussian function to spatially enlarge the correlation vector’s influence and a correlation confidence factor, and (3) a second-order div–curl regularizer. Then, in turn, by freezing the large-scale components, the finer scales are estimated on the basis of the div–curl regularizer and the photometric data model. In this second step, the correlations vectors are not anymore involved. Unlike the multiresolution approach, this scheme relies on a single representation of the full resolution data and avoids the use of successive low-pass filtering of the image data.

This technique has been evaluated with synthetic images of particles dispersed in a two-dimensional turbulent flow, and with real-world turbulent wake flow experiments (see Sect. 5.2).

#### 4.5 Utilizing temporal context

The motion estimation techniques described so far only rely on kinematic constraints and provide independent instantaneous motion field measurements for each frame. All these estimates along the time axis are independent from each other, hence consistency of spatiotemporal motion field trajectories cannot be enforced. To do this in a physically plausible way, it is essential to consider motion estimation as a dynamical process along the time-resolved image sequence and to impose corresponding constraints.

Such a process can be set up in two distinct ways. The first approach extends the traditional dense estimation method by adding to the objective functional an additional

goodness of fit term comparing the current estimate by the predicted motion based on previous estimates and a specified evolution law. The second approach implements the motion estimation issue as a tracking problem. In this case a sequence of motion fields is estimated using the complete set of image data available. The estimation is formulated as a dynamical filtering problem in order to recover complete velocity field trajectories on the basis of a dynamical law and noisy incomplete image measurements. This strategy can be implemented through a recursive stochastic technique or in terms of a global variational formulation.

In the following sections we explore these two alternatives in some more details and give pros and cons of each of them.

##### 4.5.1 Local temporal context and iterative estimation

A variational approach realizing the first option discussed above has been recently worked out in Ruhnau et al. (2007) for three-dimensional flow with volumic visualization or for the two-dimensional case, in Héas et al. (2007a) for altimetric imagery of three-dimensional flows and in Heitz et al. (2008) for laser sheet three-dimensional flow visualization of particles or scalar.

###### 4.5.1.1 3D flow with volumic visualization or 2D flow

Let  $[0, T]$  denote the local time interval between two subsequent frames of the image sequence  $I(\mathbf{x}, t)$ . The evolution of the flow  $\mathbf{w}$  to be estimated from  $I(\mathbf{x}, t)$  is given by the vorticity transport equation

$$\frac{D}{Dt} v = \partial_t v + \mathbf{w} \cdot \nabla v = v \Delta v, \quad v(\mathbf{x}, 0) = v_0, \quad (34)$$

where  $v_0 = \text{curl } \mathbf{w}|_{t=0}$  denotes the vorticity of the flow estimated for the first image frame. Solving this equation numerically in the time interval  $[0, T]$ , that is performing *simulation*, we compute  $v_T = v(\mathbf{x}, T)$  and interpret this as an *prediction* of the vorticity of the flow observed through the second frame of the image sequence  $I(\mathbf{x}, t)$  at time  $t = T$ .

At time  $t = T$ , we have again access to image sequence data. Hence we minimize a motion estimation functional that takes into account the observed data in terms of Eq. 6 and regularizes the flow by comparison with the predicted vorticity  $v_T$ .

$$E(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \left\{ (\partial_t I + \nabla I \cdot \mathbf{w})^2 + \lambda (v - v_T)^2 + \kappa \|\nabla v\|^2 \right\} d\mathbf{x}, \quad (35a)$$

$$\text{subject to} \quad \text{div } \mathbf{w} = 0, \quad \text{curl } \mathbf{w} = v. \quad (35b)$$

Computing the minimizer  $\mathbf{w}$ , we obtain the initialization  $v = \text{curl } \mathbf{w}$  for Eq. 34, to be solved for the subsequent time



interval. For details of the non-trivial discretization of both Eqs. 34 and 35, we refer to Ruhnau et al. (2007).

The following observations can be made:

- Originally proposed for the two-dimensional case, this approach may also hold for volumic three-dimensional flow visualization. In these configurations, under the assumptions described in Sect. 2.1.2, the optical flow  $w$  estimated with Eq. 35 satisfies the vorticity transport Eq. 34;
- Besides enforcing similarity of  $v = \text{curl } w$  and the prediction  $v_T$  in Eq. 35, the flow  $w$  is only regularized through first-order spatial derivatives of vorticity. As a consequence, the variational approach Eq. 35 again generalizes the higher-order regularization approach Eq. 25 in a physically meaningful way;
- Additionally, the iterative interplay between prediction (Eq. 34) and estimation (Eq. 35) utilizes spatiotemporal context in an online manner, because for each computation just two frames of the sequence are used. The “memory” of the overall approach depends on the value of the parameter  $\lambda$  in Eq. 35. This online property is in sharp contrast to the commonly employed way in image processing to exploit spatiotemporal context in a batch-processing mode by treating the time axis as a third spatial variable (Weickert and Schnörr 2001);
- Finally, we point out that the simulation (Eq. 34) and estimation (Eq. 35) are separate processes from the viewpoint of numerical analysis. This keeps the overall design modular and avoids reinventing the wheel.

**4.5.1.2 3D flow with laser sheet visualization or altimetric imagery** A different but related technique has been proposed for the recovery of atmospheric motion layer by Héas et al. (2007a) and extended by Heitz et al. (2008) for 2D image sequences of particles dispersed in 3D turbulent flows. In these works, the predicted vorticity is replaced by a predicted velocity,  $w_p$ , obtained from the numerical integration of a filtered simplified vorticity-divergence formulation of shallow water models. For laser sheet three-dimensional flow visualization, the simplified vorticity-divergence transport equations reads

$$\begin{cases} v_t + w \cdot \nabla v + v\zeta = (v_s + v)\Delta v \\ \zeta_t + w \cdot \nabla \zeta + \zeta^2 - 2|J| = (v_s + v)\Delta \zeta, \end{cases} \quad (36)$$

where  $\zeta = \text{div } w$ ,  $|J|$  is the determinant of the Jacobian matrix of variables  $(u, v)$ ,  $v_s = (C\Delta_x)^2|x_i|$  is the enstrophy-based subgrid scale model proposed by Mansour et al. (1978), and  $C$  the Lilly’s universal constant equal to 0.17.

Here, we minimize a motion estimation functional that takes into account the observed data in terms of Eq. 2 and regularizes the flow by comparison with the predicted velocity  $w_p$ ,

$$E(w) = \int_{\Omega} \left\{ (\partial_t I + \nabla I \cdot w + I \text{div } w)^2 + \lambda \|w - w_p\|^2 + \kappa (\|\nabla v\|^2 + \|\nabla \zeta\|^2) \right\} dx. \quad (37)$$

The prediction term applies here only at a large scale, and the quadratic goodness of fit term only involves a large-scale component of the unknown velocity field. The small-scale unknown components are computed in an incremental setup and depends only on the data model and the smoothing term used in the estimator. This term plays the role of a predictor of a large-scale motion component and thus avoids the use of a multiresolution scheme in order to cope with long-range displacements. Interested readers will find the implementation details and experimental comparison results in Héas et al. (2007a) and in Heitz et al. (2008). The improvements brought by this spatiotemporal regularization are discussed in Sect. 5.3 and shown in Figs. 10 and 11.

Note that as indicated in Sect. 2.1.1, the optical flow  $w$  estimated with Eq. 37 is proportional to the path-averaged velocity of fluid across the laser sheet and hence does not satisfy exactly the full Navier–Stokes equations. However, in the present approach, since the Navier–Stokes equations have been simplified with shallow flow assumption across the laser sheet, the optical flow  $w$  satisfies Eq. 36.

**4.5.2 Non-local temporal context**

In the following sections, we briefly present the two dynamic filtering alternatives that implement a global dynamical consistency of the estimated velocity fields sequences. The first one relies on a stochastic methodology whereas the second one ensues from optimal control theory.

**4.5.2.1 Recursive estimation through stochastic filtering**

In order to estimate optimally the complete trajectory of an unknown state variable from a sequence of past image frames, we formulate the problem as a stochastic filtering problem. Resorting to stochastic filters consists in modeling the dynamic system to be tracked as an hidden Markov state process. The goal is to estimate the value of the random Markovian process—also called *state process* and denoted  $\mathbf{x}_{0:n} = \{\mathbf{x}_t\}_{t \in [0,n]}$ —from realizations of the observation process. The set of measurements operated at discrete instants are denoted  $\mathbf{z}_{1:n} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$ . The system is described by (a) the distribution of the state process at initial time  $p(\mathbf{x}_0)$ , (b) a probability distribution modeling the evolution (i.e. the dynamics) of the state process  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{t < k})$  and (c) a likelihood (representing the *measurement equation*)  $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)$  that links the observation to the state. In this framework, the *posterior* distribution, i.e. the law of the state process knowing the set of

observations, carries the whole information on the process to be estimated. More precisely, as tracking is a causal problem, the distribution of interest is the law of the state given the set of past and present observations  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k})$ , known as *filtering distribution*. The problem of recursively estimating this distribution may be solved exactly through a Bayesian recursive solution, named the optimal filter (Gordon et al. 1993). This solution requires to compute integrals of huge dimension. In the case of linear Gaussian models, the Kalman filter (Anderson and Moore 1979) gives the optimal solution since the distribution of interest  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k})$  is Gaussian. In the non-linear case, an efficient approximation consists in resorting to sequential Monte Carlo techniques (Arulampalam et al. 2002; Doucet et al. 2000; Gordon et al. 1993). These methods consist in approximating  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k})$  in terms of a finite weighted sum of Dirac masses centered in elements of the state space, named particles. At each discrete instant, the particles are displaced according to a probability density function named *importance function*, and the corresponding weights are updated using the system’s equations. A relevant expression of this function for a given problem is essential to achieve an efficient and robust particle filter. Interested readers may find different possible choices in Arnaud and Mémín (2007) and Doucet et al. (2000).

Such a technique has been applied to the tracking of a solenoidal field described as a combination of vortex particles (Cuzol and Mémín 2005, 2008). The motion field in that work is described through a set of random variables  $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, p$ :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=0}^p \gamma_i K_{\epsilon_i}^{\perp}(\mathbf{x}_i^{sol} - \mathbf{x}), \tag{38}$$

where  $K_{\epsilon_i}^{\perp}$  is a smoothed Biot-Savart kernel obtained by convolving the orthogonal gradient of the Green kernel associated with the Laplacian operator with a smoothing radial function. The vector  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, p)^T$  represents the set of vortex particle locations and the coefficient,  $\gamma_i$ , their strength. The dynamics of these random variables is defined through a stochastic interpretation of the vorticity transport equation Chorin (1973):

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{w}(\mathbf{x}_t)dt + \sigma dB_t, \tag{39}$$

where  $B$  stands for a  $2p$ -dimensional Brownian motion with independent components, and associated with the diffusion coefficient  $\sigma = \sqrt{2\nu}$ . The evolution of the vortex set,  $\mathbf{x}$ , between two frame instants  $k$  and  $k + 1$  and for a discretization step  $\Delta t$ , is represented by the following Markov transition equation:

$$p(\mathbf{x}_j^k|\mathbf{x}_{j-\Delta t}^k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_{j-\Delta t}^k + \mathbf{w}(\mathbf{x}_{j-\Delta t}^k)\Delta t, 2\nu\Delta t\mathbb{I}_{2p}), \tag{40}$$

where  $\mathbb{I}_{2p}$  denotes the  $2p \times 2p$  identity matrix.

A sample of the trajectories generated between two frames are then weighted according to the likelihood  $p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$ . In this work, this density has been defined in terms of a reconstruction error measurement,  $\mathbf{z}_k$ , computed from the pair of images  $(I_k, I_{k+1})$ .

The results obtained with this technique for a two-dimensional turbulent flow are discussed in Sect. 5.3 and plotted in Figs. 12 and 13.

**4.5.2.2 Global estimation control approach** In this section, we present the second alternative for a dynamical filtering of noisy and incomplete data. This framework ensues from control theories and has been popularized in geophysical sciences where it is known as *variational assimilation* (Le-Dimet and Talagrand 1986; Lions 1971). Opposite to particle filtering, variational assimilation techniques have the advantage to enable a natural handling of high-dimensional state spaces. Before presenting further the adaptation of such a framework to motion estimation, let us describe the general notions involved.

As previously, the problem we are dealing with consists in recovering a system’s state  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$  obeying a dynamical law, given some noisy and possibly incomplete measurements of the state. The measurements, in this context also called observations, are assumed to be available only at discrete points in time. This is formalized, for any location,  $\mathbf{x}$ , at time  $t \in [t_0, t_f]$ , by the system

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbb{M}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), c(t)) = 0 \tag{41}$$

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{X}_0(\mathbf{x}) + \epsilon_n(\mathbf{x}), \tag{42}$$

where  $\mathbb{M}$  is a non-linear dynamical operator depending on a control parameter  $c(t)$ . We assume here that  $c(t) \in C$  and  $\mathbf{X}(t) \in \mathcal{V}$  are square integrable functions. The term  $\mathbf{X}_0$  is the initial vector at time  $t_0$ , and  $\epsilon_n$  is an (unknown) additive control variable of the initial condition. Furthermore, we assume that the measurements of the unknown state,  $\mathcal{Y} \in \mathcal{O}$ , are available. These observations are measured through the non-linear operator,  $\mathbb{H} : C \rightarrow \mathcal{O}$ . The objective consists then to find an optimal control of low energy that leads to the lowest discrepancy between the measurements and the state variable. This leads to the minimization problem

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(c, \epsilon_n) = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathcal{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X}(c(t), \epsilon_n, t))\|_{R^{-1}}^2 dt \\ & + \frac{1}{2} \|\epsilon_n\|_{B^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|c(t) - c_0\|_{F^{-1}}^2 dt, \end{aligned} \tag{43}$$

where  $c_0$  is some expected value of the parameter. The norms  $\|\cdot\|_{R^{-1}}$ ,  $\|\cdot\|_{B^{-1}}$  and  $\|\cdot\|_{F^{-1}}$  are induced by the inner products  $\langle R^{-1}\cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{O}}$ ,  $\langle B^{-1}\cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$  and  $\langle F^{-1}\cdot, \cdot \rangle_{C, R}$ ,

$B$  and  $F$  are covariances matrices of the observation space and state space. They are respectively related to the observations, the initial condition of the state variable and to the expected value of the control variable.

Regarding the minimization of the objective function, a direct numerical evaluation of the functional gradient computationally infeasible, because this would require to compute perturbations of the state variables along all the components of the control variables  $(\delta c, \delta \epsilon_n)$ —i.e. to integrate the dynamical model for all perturbed components of the control variable, which is obviously not possible in practice.

A solution to this problem consists to rely on an *adjoint formulation* (Le-Dimet and Talagrand 1986; Lions 1971). Within this formalism, the gradient functional is obtained by a forward integration of the dynamical system followed by a backward integration of an adjoint dynamical model. This adjoint model is defined by the adjoint of the discrete scheme associated with the dynamical system.

This technique has been recently applied to the estimation of fluid motion fields (Corpetti et al. 2008; Héas et al. 2007b; Papadakis and Mémin 2008a, 2008b; Papadakis et al. 2007) and to the tracking of closed curves (Papadakis and Mémin 2008b). These works rely either on shallow water dynamical model or on a vorticity–velocity formulation. They associate motion measurements given by external motion estimators (Papadakis and Mémin 2008b) or incorporates directly luminance data (Papadakis et al. 2007; Papadakis and Mémin 2008a). The first case provides a filtering technique that allows improving significantly the observed motion fields. The second technique constitutes a complete autonomous motion estimator that enforces dynamical coherence and a temporal continuous trajectory of the solution. Results obtained with this technique for two-dimensional turbulent flow are shown in Figs. 12 and 13. These approaches, compared to traditional motion estimator, enable to recover accurately a broad range of motion scales.

This technique has been also used recently to recover the parameters of a reduced dynamical system obtained from a POD-Galerkin techniques (D’Adamo et al. 2007). Compared to traditional approaches, this technique allows an improved accuracy and stability of the estimated reduced system. For a flow showing periodic behavior this method allows to denoise experimental velocity fields provided by standard PIV techniques and to reconstruct a continuous trajectory of motion fields from discrete and unstable measurements.

## 5 Experimental results

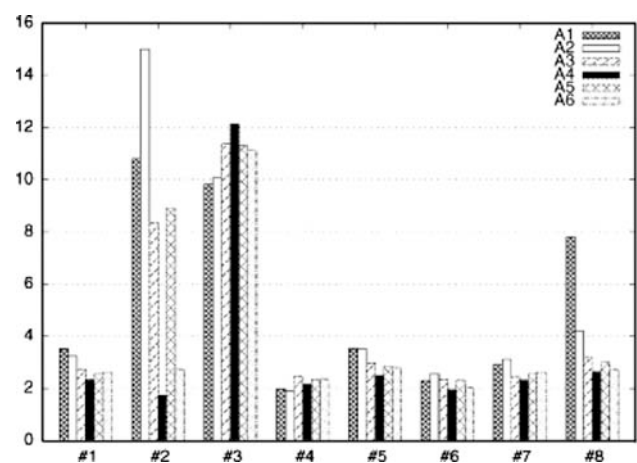
In this section, we illustrate various aspects discussed in previous sections by experimental results, obtained for both

computer-generated and real datasets. First, in Sect. 5.1, we focus on the effect of using higher-order regularization and robust norms. Next, in Sect. 5.2, we present first results of a variational approach that combines correlation measurements and regularization, as outlined below in Sect. 4.4.2. Finally, in Sect. 5.3, we present results of the currently most advances estimation schemes utilizing temporal context. For further experimental results and their discussion, we refer to the original papers cited in the respective Sects. 4.5 and 4.4.2.

### 5.1 First- and second-order regularization, robust norms

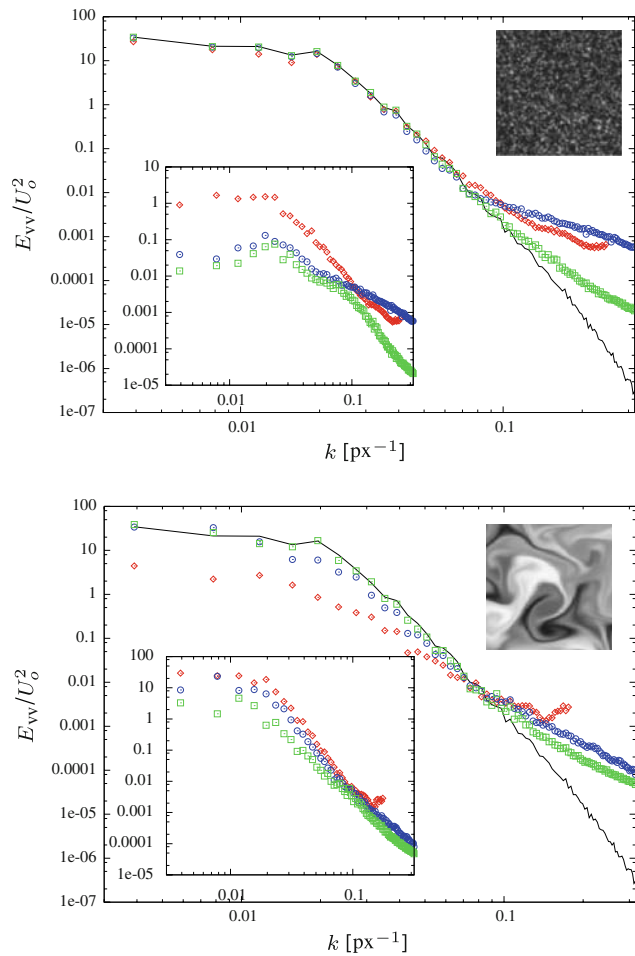
Throughout this section, we refer the reader to Sects. 2 and 4 for descriptions of the approaches evaluated below.

When the first efforts in correlation technique were proposed for PIV, different approaches based on image analysis were also developed to estimate fluid motion. Among those attempts, Tokumaru and Dimotakis (1995) proposed a semi-local approach (Ritz method see Sect. 3.1.2)—involving a parametric cubic model and insuring a global spatial consistency—appropriate for both scalar and particle images. The integral form (Eq. 7) of the equation of motion (Eq. 6) is employed in this method. Using



**Fig. 4** Results from a validation experiment, based on VSJ synthetic images, comparing different combinations of data terms (OFC and ICE) associated with regularization term (1st order or 2nd order), and the influence of using a robust norm. The figure shows the relative  $L_1$  norm error obtained for eight standard configurations: compared to case 1, cases 2 and 3 yield large and small displacements respectively; cases 4 and 5 have dense and sparse particle concentration respectively; cases 6 and 7 contain constant and large particle size respectively; case 8 exhibits high out of plane velocities. Six algorithms are compared: **A1** approach of Quénot et al. (1998); **A2** approach of Ruhnau et al. (2005); **A3** robust multiresolution-multi-grid Horn and Schunck approach of Mémin and Pérez (1998); **A4** approach of Corpetti et al. (2006); **A5** ICE + 1st order; **A6** OFC + 2nd order. The best results are obtained with the ICE data term together with 2nd order div–curl regularization (Corpetti et al. 2006)

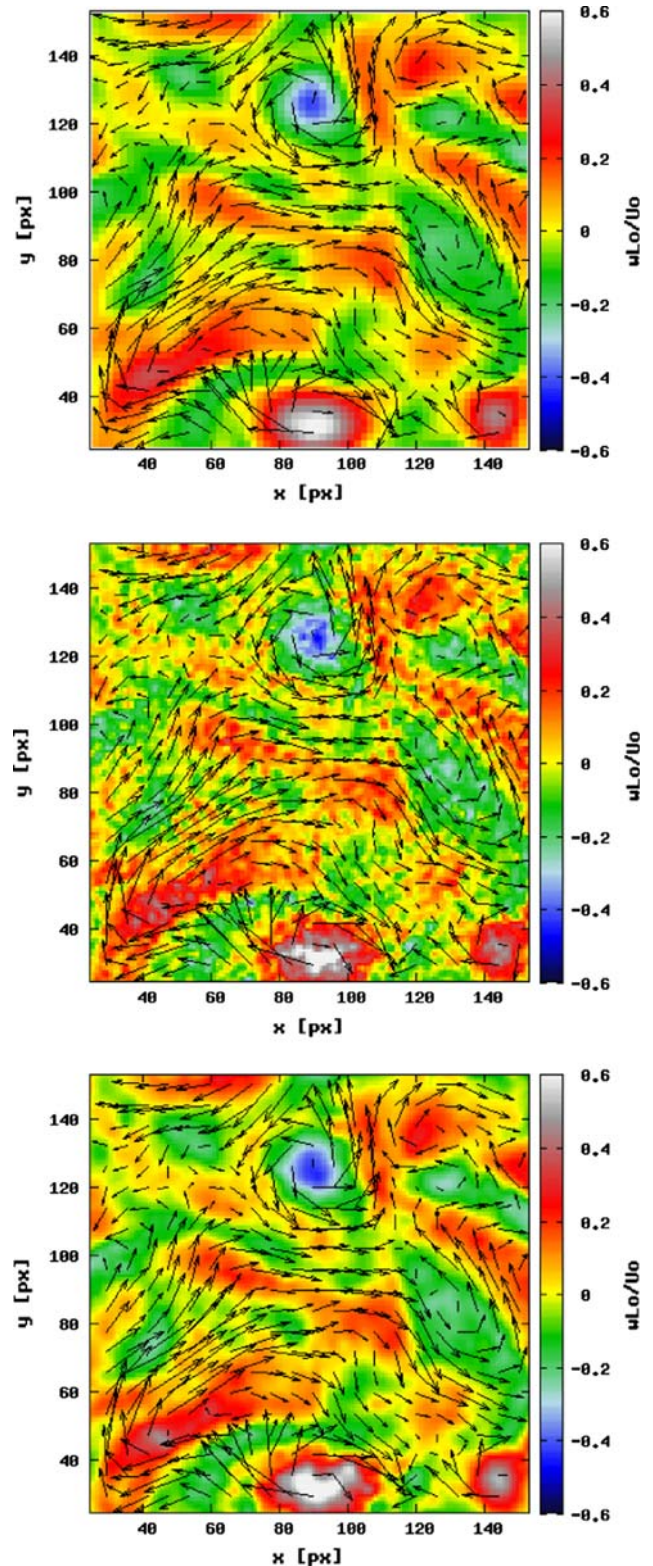




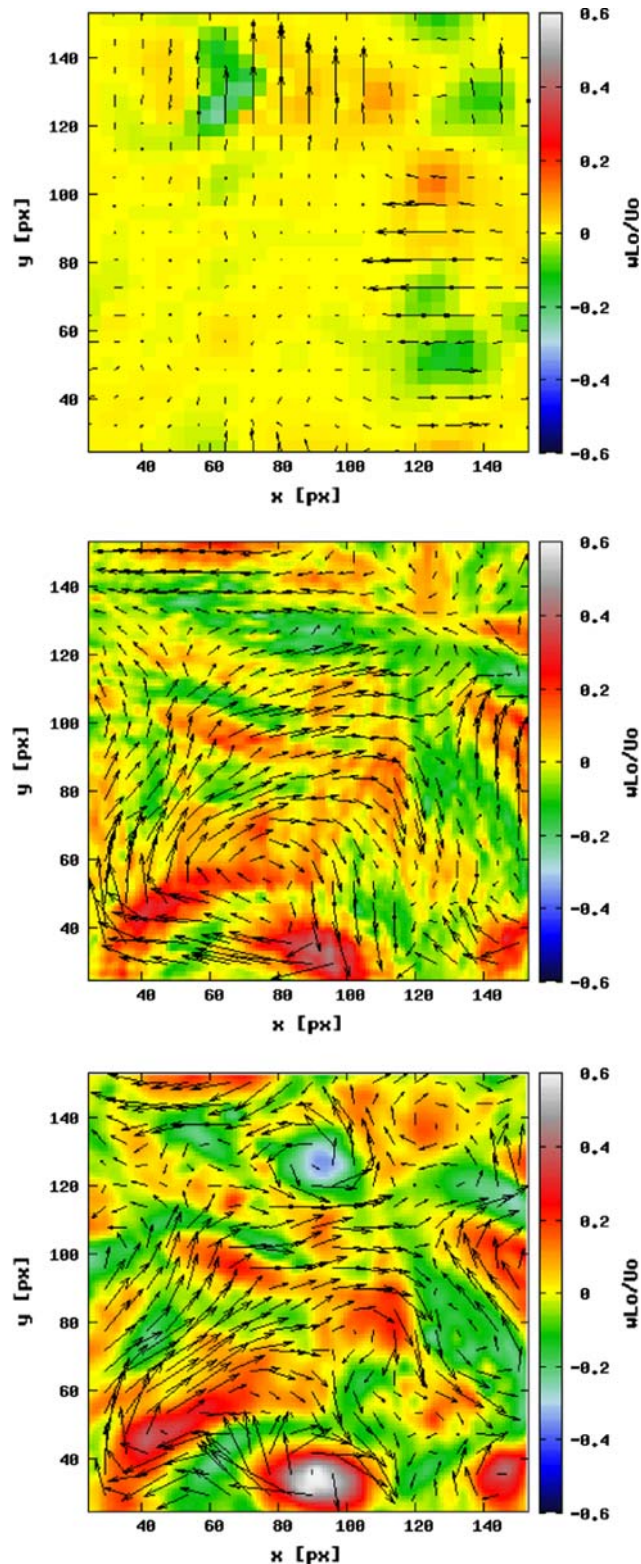
**Fig. 5** Spectrum of the vertical velocity component in a two-dimensional turbulent flow. *Top* synthetic particle image sequence; *Bottom* synthetic scalar image sequence. *Black line* DNS reference; *Red symbols* correlation approach; *Blue symbols* Corpetti et al. (2006) approach; *Green symbols* Yuan et al. (2007) approach. Spectra of the error for the same data are shown in *inset*

dynamic programming, Quénot et al. (1998) devised a global approach assuming the conservation of the luminance, with the dense displacement fields estimated being small, rectilinear, uniform, and continuous. The proposed global approach uses the brightness constancy (Eq. 6) as a data term. Dahm et al. (1992) introduced the concept of three-dimensional flow fields measurements based on scalar imaging measurements. The proposed technique based on the direct inversion of the scalar transport equation was later refined in Su and Dahm (1996) with an integral minimization formulation including the scalar transport equation, the continuity equation and a first-order regularization (global approach see Sect. 3.2).

More recently, Ruhnau et al. (2005) evaluated the prototypical variational approach of Horn and Schunck (1981) (see Sect. 3.2) with particle image pairs commonly used in



**Fig. 6** Vorticity maps and vector fields in a two-dimensional turbulent flow obtained with a synthetic particle image sequence. From *top* to *bottom*, correlation approach, Corpetti et al. (2006) approach and Yuan et al. (2007) approach



**Fig. 7** Vorticity maps and vector fields in a two-dimensional turbulent flow obtained with a synthetic scalar image sequence. From *top to bottom*, correlation approach, Corpetti et al. (2006) approach and Yuan et al. (2007) approach

PIV. To estimate long-range motion, they carefully designed a coarse-to-fine implementation. Their experimental evaluation showed that the prototypical approach performs well in noisy real-world applications. Corpetti et al. (2002, 2006) improved this approach by taking into account the features of fluid flows. A data term based on the continuity Eq. 2 was used for estimating the apparent 2D motion of 3D flows, and second-order regularization (see Sect. 4.1) was proposed to enable the estimation of vector fields with pronounced divergent and rotational structures.

Figure 4 presents a comparison of the error for different combinations of data terms (OFC or ICE) and regularization terms (1st order or 2nd order). Corpetti et al. (2006) showed that using the ICE model (2) as a more physically grounded alternative to OFC leads to better results for the case of large out of plane motions. As for the regularization, only the 2nd order div–curl scheme is able to preserve the level of vorticity and divergence. Figure 4 also indicates that a robust norm applied to the data term significantly improves the results (compare approach A2 with approach A3).

### 5.1.1 Influence of discretization

Using the mimetic finite difference method, Yuan et al. (2007) proposed a novel variational scheme based on a second-order div–curl regularizer that includes the estimation of incompressible flows as a special case. This new scheme has been assessed both for particle and for scalar synthetic image sequences, generated from direct numerical simulations (DNS) of two-dimensional turbulence. Compared to the correlation technique of Lavisson (Davis 7.2) and the second-order method of Corpetti et al. (2006), the higher-order approach of Yuan et al. (2007) yields an enlarged dynamic range with accurate measurements at small and large scales. This behaviour is displayed in Fig. 5 showing the better estimated spectrum and the lowest spectrum of the error obtained with the technique of Yuan et al. (2007). This higher accuracy is also observed in Fig. 6 with vorticity maps and vector fields. With scalar image sequences, the differences between the approach of Yuan et al. (2007) and the others is more pronounced, especially at large scales, where as expected the correlation technique completely failed (see Fig. 7).

### 5.1.2 Vector field density

It is interesting to mention that the global variational approaches (see Sect. 3.2) return dense vector fields, i.e. one vector per pixel. From the metrological point of view, this behaviour is expected with scalar images since each



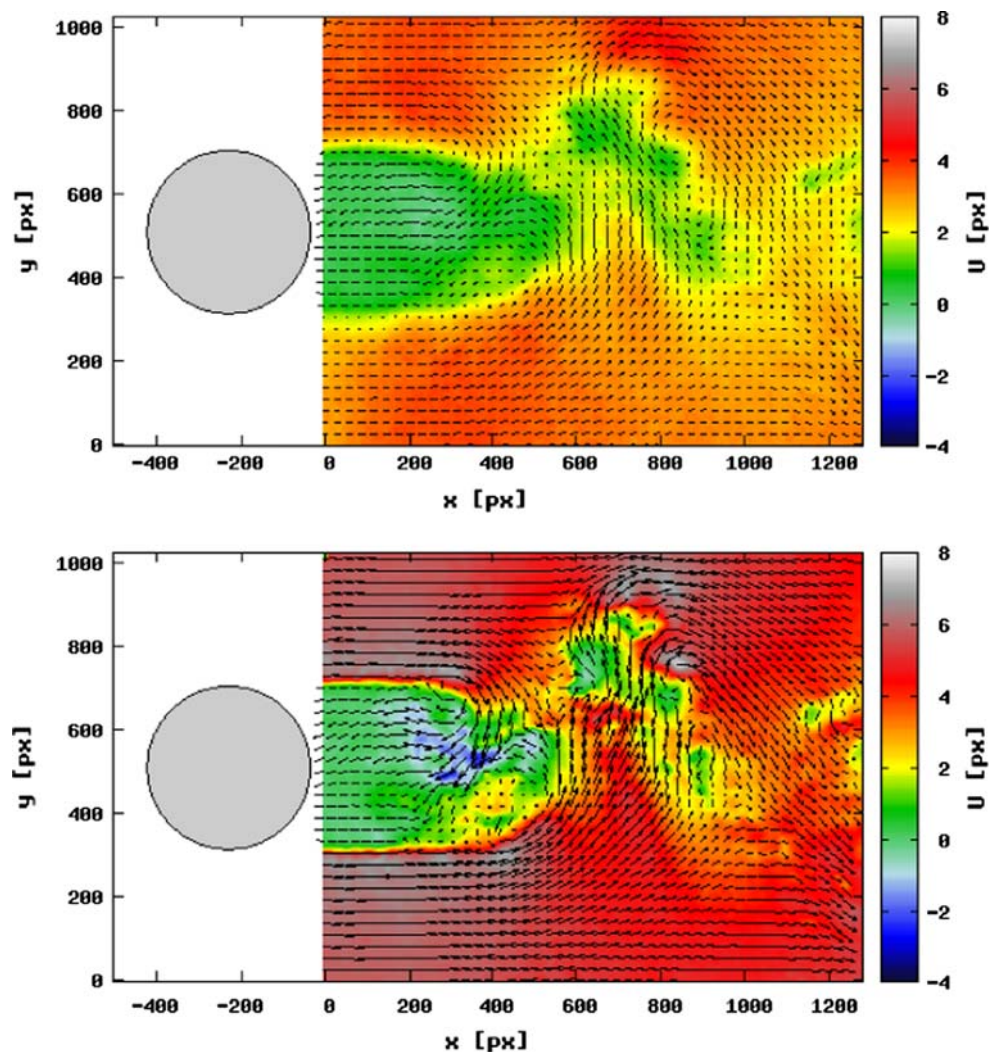
pixel exhibits an information of motion; however, it may be surprising for particle-based optical measurements in which the particle image density is roughly of the order of 0.01 particles per pixel. The fact that the global variational techniques provide information of motion beyond the spatial scale associated with the particle density is obtained thanks to the regularization operator involved to tackle the aperture problem. Note that the regularization is conducted from the beginning of the minimization process—on the contrary to the post-processing used with correlation approaches—and complement the information of the data term with spatial or spatiotemporal coherence. In this context, the use of physical models as regularization operators can improve the estimations of the velocity fields down to the smallest scales. In addition, when the regularizer is physically sound, the adjustment of the weighting parameter is inferred with the minimization process (Héas et al. 2009a). The monotonically vanishing error spectra (difference between the estimation and the DNS solution) shown in inset of the Fig. 5 indicate that the dense

information is consistent with the reference down to the smallest scales. This behaviour can also be observed in Stanislas et al. (2008) with the results of the third PIV challenge for the global approach of Corpetti et al. (2006). In the following (see Sect. 5.3) it is shown that the use of spatiotemporal regularizer like the Navier–Stokes equations can significantly improve the accuracy on the whole dynamic range.

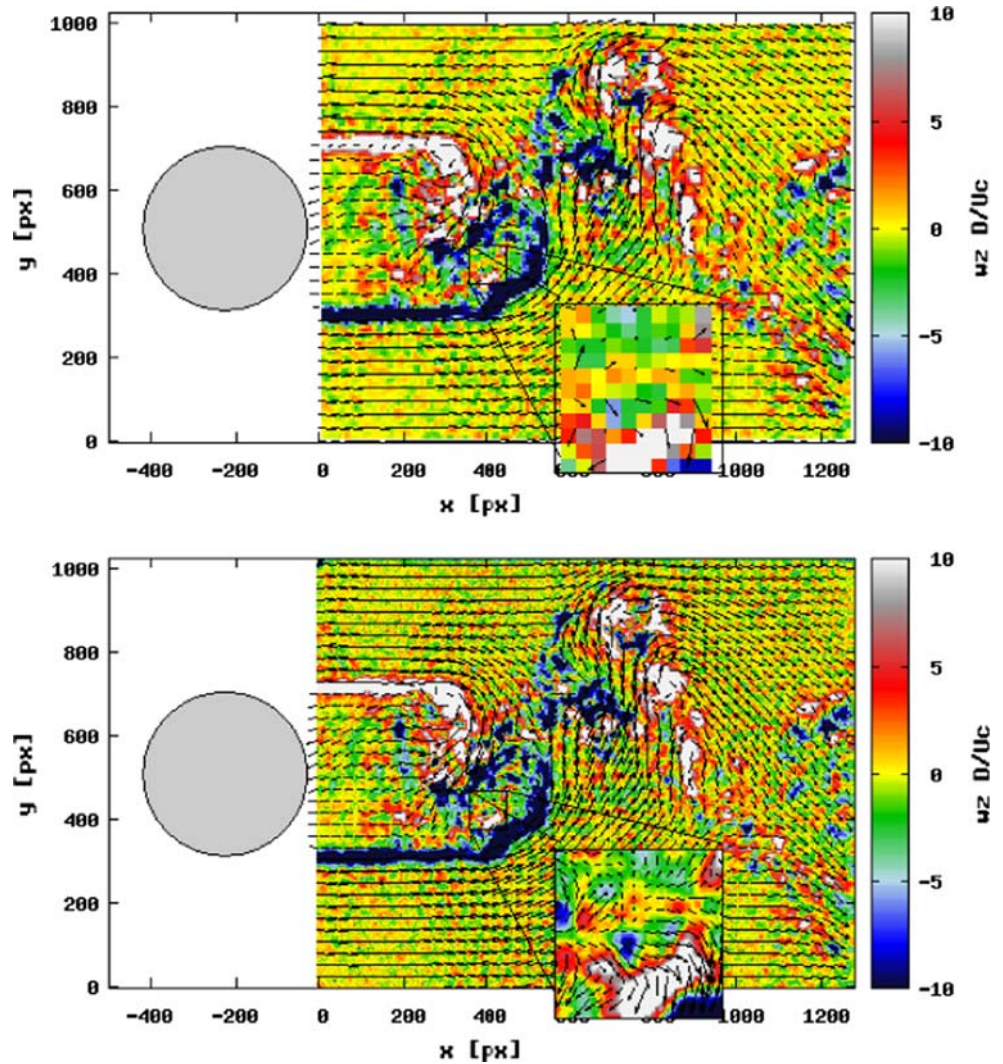
## 5.2 Correlation-based variational scheme

The combined correlation-variational scheme proposed by (Heitz et al. 2008) for laser sheet three-dimensional flow visualization, described in Sect. 4.4.2, was evaluated with synthetic images of particles dispersed in a two-dimensional turbulent flow and with real-world turbulent wake flow experiments. Figure 8 shows for particles images, the comparison of results obtained with a multiresolution technique and the collaborative approach. One advantage of the latter method is that, due to the global scheme

**Fig. 8** Instantaneous vector field with horizontal velocity color map measured with real images of particles in near the wake of a circular cylinder at  $Re = 3,900$ . *Top* optical-flow approach (Corpetti et al. 2006); *Bottom* combined correlation-variational approach (Heitz et al. 2008)



**Fig. 9** Instantaneous vector field with vorticity colormap measured with real images of particles in the near wake of a circular cylinder at  $Re = 3,900$ . *Top* correlation approach; *Bottom* combined correlation-variational approach (Heitz et al. 2008)

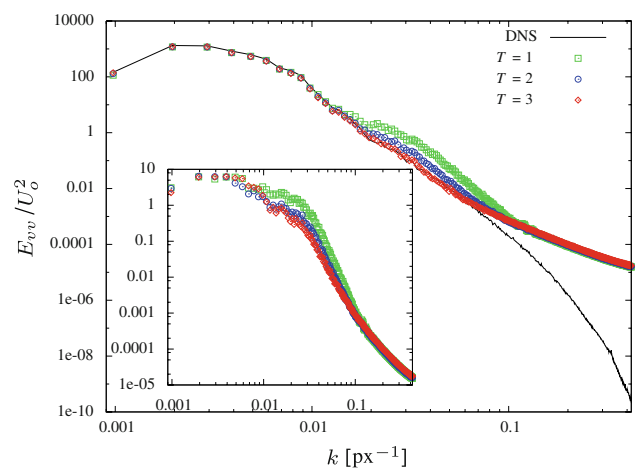


including regularization, ‘basic’ correlation estimations are sufficient. Furthermore, compared to correlation technique, the combined correlation variational scheme yields dense information as observed in Fig. 9.

### 5.3 Spatiotemporal regularization

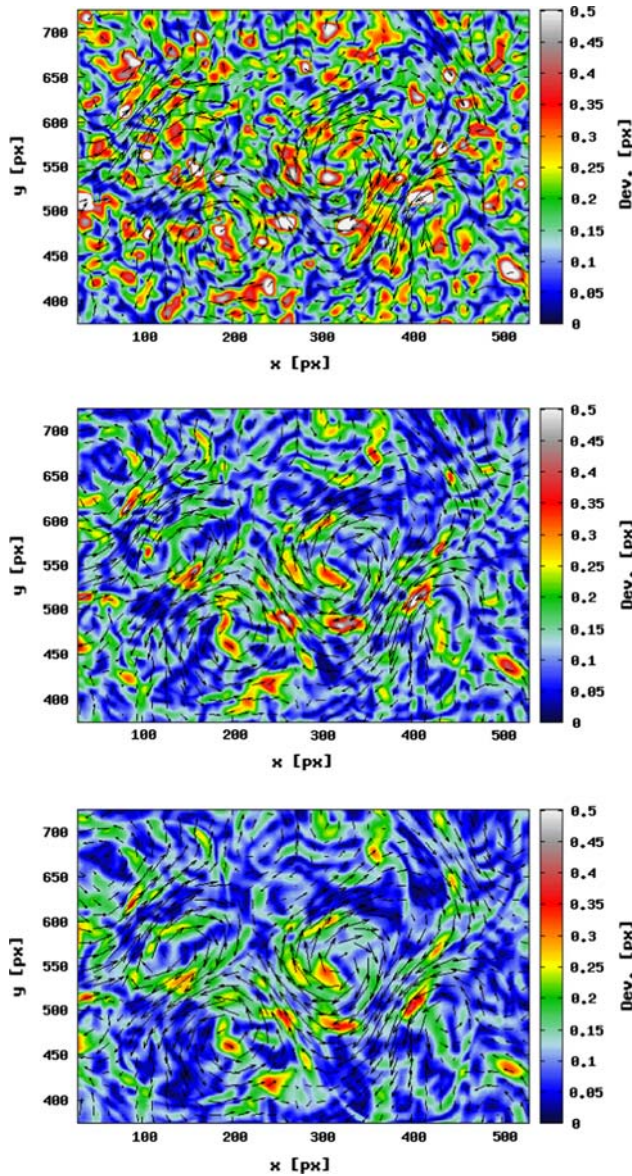
Following the route to incorporate explicit physical prior knowledge into variational motion estimation schemes, that was suggested by Ruhnau et al. (2007) in connection with PIV and by Héas et al. (2007a) for satellite imagery, Heitz et al. (2008) adapted and evaluated the latter technique to estimate dynamically consistent large eddy apparent motion of laser sheet 3D turbulent flow visualization (see Sect. 4.5.1 for details of the methods).

Applied on synthetic particle images generated with DNS of two-dimensional turbulent flows, this method enlarges the dynamic range resolved as a function of the time (see in Fig.10 the estimated spectrum). The use of spatiotemporal regularization enhances the accuracy,



**Fig. 10** Energy spectra showing the enlargement of the dynamic range as a function of the time when using spatiotemporal regularization (Heitz et al. 2008). Spectra of the error for the same data are shown in *inset*. Measurements obtained with synthetic particle images generated from DNS of two-dimensional turbulent flows





**Fig. 11** Results of velocity estimation with spatiotemporal regularization. The analyzed synthetic image sequence is based on a two-dimensional turbulent flow with additive noise simulating the reduction of the power of a virtual laser. From *top to bottom*: Map of the deviation from the exact velocity modulus for time 1, 2 and 3 (Heitz et al. 2008)

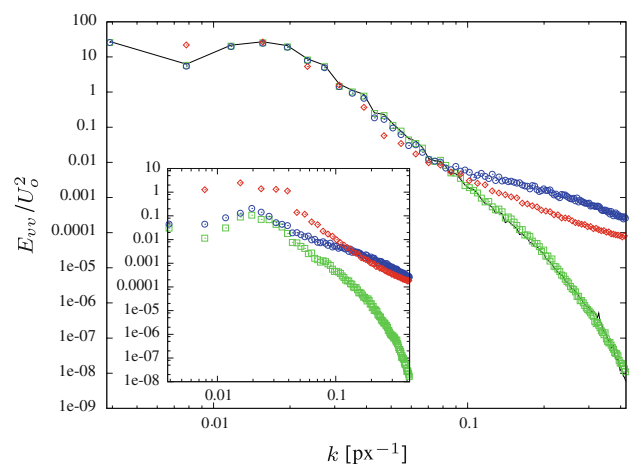
particularly for noisy image sequences. As observed in Fig. 11, through the map of the deviation from the exact velocity modulus, the technique improves the estimation of the main vortices as a function of the time. As a consequence, this approach is especially well suited for analyzing time-resolved particle image sequences which exhibit noise due to CMOS sensors. Regarding the implementation of this iterative scheme, we point out that the computational costs of the simulation of the dynamic Eq. 34 are negligible in comparison to the variational estimation (Eq. 35).

Spatiotemporal consistency of the measurements can be improved with non-local context approaches taking into account the whole image sequence with recursive estimations (see Sect. 4.5.2.).

Cuzol et al. (2007) proposed a non-linear stochastic filter for the tracking of fluid motion. The tracking is based on a low-dimensional representation of the velocity field obtained through a discretization of the vorticity and divergence maps. Beyond the tracking, this method allows to recover a set of consistent velocity fields for a whole sequence and provides an accurate low order representation of the dynamic of fluid flows. The order of the simplified motion estimation is related to the number of vortex particles involved in the estimation.

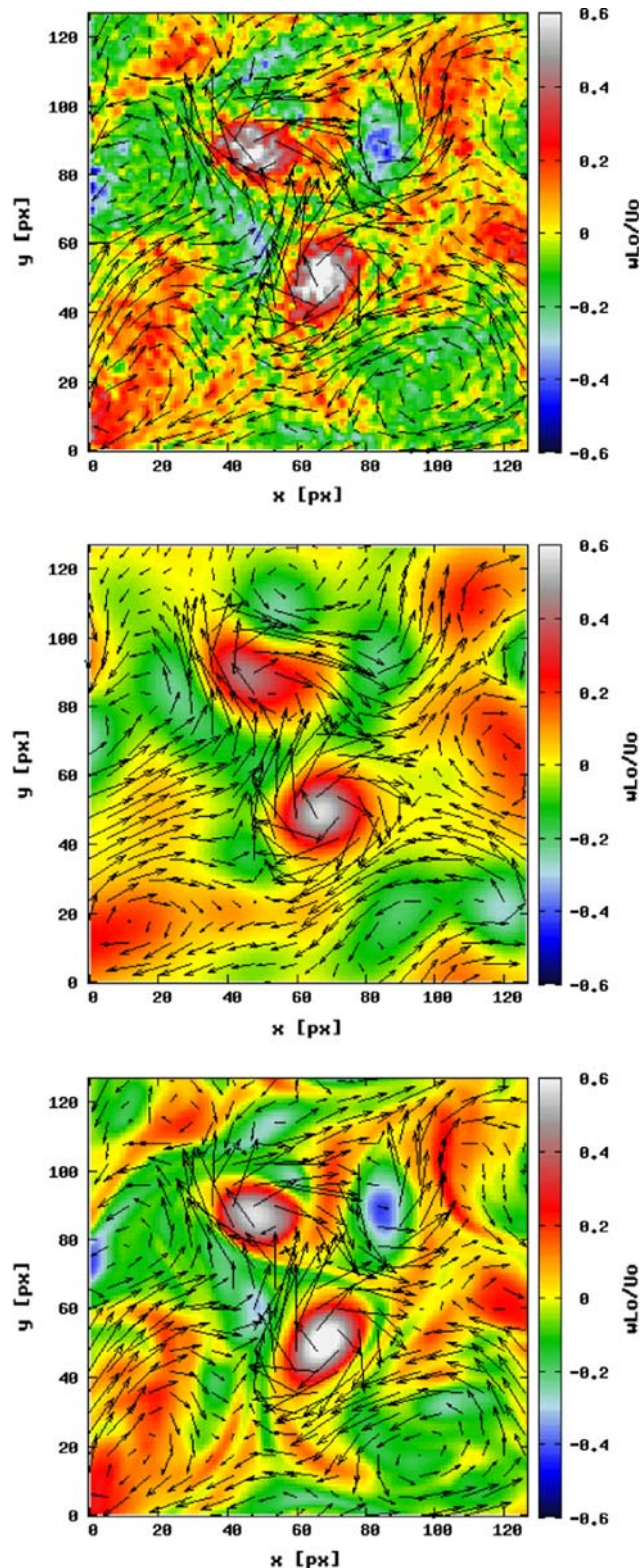
Papadakis and Mémin (2008b) described a global spatiotemporal variational formulation in order to optimally fuse the information obtained from the data images and the dynamic model. The technique relies on an optimal control approach and consists in a forward integration of the Navier–Stokes equations, followed by a backward integration of an adjoint evolution model. Results obtained with an image sequence of particles dispersed by a turbulent 2D flows are quite impressive. As observed in Figs. 12 and 13, Papadakis and Mémin (2008b) approach outperform other techniques since the whole dynamic range is recovered with this approach. The best results are provided when the image luminance is directly assimilated in the dynamic model, instead of assimilating vector fields previously estimated from image sequences.

Note that the evaluation of the above spatiotemporal regularization techniques have been conducted with image sequences for which the time resolution was ten times the time step of the DNS used to generate the sequence.



**Fig. 12** Spectrum of the vertical velocity component measured in particle image sequences generated with DNS of two-dimensional turbulent flow. *Black* DNS; *Red* approach of Cuzol et al. (2007); *Blue* approach of Corpetti et al. (2006); *Green*, approach of Papadakis and Mémin (2008b). Spectra of the error for the same data are shown in *inset*





**Fig. 13** Vorticity maps and vector fields in a turbulent flow. From *top to bottom*, Corpetti et al. (2006) approach, Cuzol et al. (2007) approach and Papadakis and Mémin (2008b) approach

## 6 Conclusion and perspectives

After a brief conclusion, we indicate some promising directions for further research.

### 6.1 Conclusion

This paper is an attempt to provide an abridged report on variational motion estimation techniques, focusing on techniques that we deem especially relevant for experimental fluid mechanics. After sketching representatives of established basic schemes, we presented modifications that have been developed for the specific case of fluid motion estimation. This latter work indicates the emerging collaboration between two communities, image processing and computer vision, and experimental fluid mechanics.

Yet, in our opinion, this is just the tip of the iceberg regarding the potential for further research. In the following subsections, we indicate few promising research directions. We hope that this paper will stimulate further cooperation along these lines.

### 6.2 3D-PIV

Recently, *Tomographic Particle Image Velocimetry (Tomographic PIV)* (Elsinga et al. 2006) has attracted a lot of interest. Observing projections of particles in a volume of interest with 4–6 cameras, the three-dimensional volume function  $I(x, t)$ ,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ , can be reconstructed with high spatial resolution. A closer look to the currently employed standard algebraic reconstruction techniques shows that there is a potential for improving the trade-off between function reconstruction from a limited amount of noisy data, and increasing the particle density to facilitate subsequent motion estimation (Petra et al. 2009; Petra and Schnörr 2009).

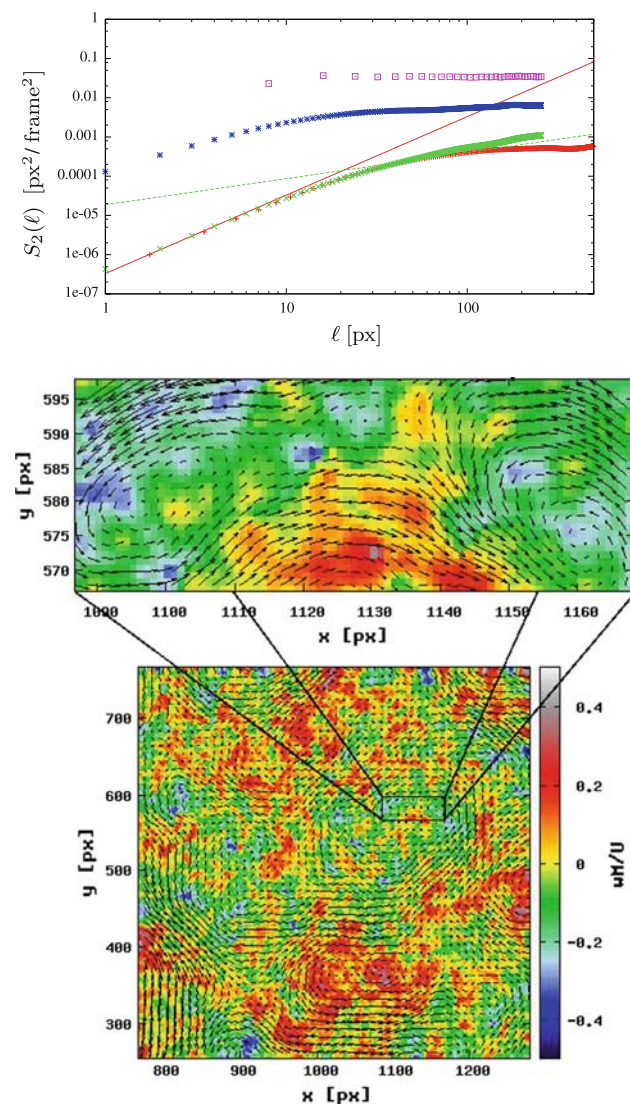
This move to three dimensions plus eventually time will likely enable physics-based models and methods to provide accurate inspection tools for experimental fluid mechanics.

### 6.3 Turbulence models

Taking seriously the ultimate goal of synergy between experiments and simulation, the question of how to utilize turbulence models in connection with motion estimation naturally appears. To the best of our knowledge, models combining these two worlds in order to improve estimation from real data have not been devised so far.

A promising direction of research concerns ways to incorporate invariants and laws governing the turbulence

statistics into a variational estimation scheme. A reasonable approach is to include a regularizing term into the energy functional that enforces quantities derived from the velocity gradient tensor to be smooth. The objective is to preserve the salient enstrophy and dissipation structures that are relevant for characterizing the topology of turbulent regions, like vortex tubes, vortex sheets, and pure straining (Perry and Chong 1987; Chong et al. 1998). Likewise Kolmogorov's law, describing the statistical structure of turbulence in the inertial range, Héas et al. (2009a) proposed a multiscale estimator based on scaling power laws accounting for the turbulent kinetic energy decay. A spatial



**Fig. 14** Second-order longitudinal velocity structure functions in the streamwise direction, velocity field and vorticity map estimated for real particle images in grid turbulence with the self-similar regularization method proposed by Héas et al. (2009b). *Red* HWA measurements; *Green* proposed method; *Blue* Horn and Schunck (1981); *Purple* correlation method; *Solid line* is  $\sim \ell^2$ ; *Dash line* is  $\sim \ell^{(2/3)}$

regularization properly constraints the solution to behave through scales as a self-similar process via second-order structure function. This enlarges further the dynamic range of the estimates. In contrast to standard approaches, this multiscale regularization presents the valuable advantage of solving the aperture problem while fixing regularizers' weights at the different scales. Figure 14 shows estimations obtained for real particle images in grid turbulence. In this case, the method is combined with a simple hot-wire measurement providing the real parameters of the power law (Héas et al. 2009b). Results exhibit the ability of this technique to estimate large dynamic ranges and better accuracy than other PIV methods. Note that instead of measuring the parameters with hot-wire anemometry, a promising extension of this approach consists in selecting by Bayesian evidence the most likely scaling law given the image data (Héas et al. 2009c).

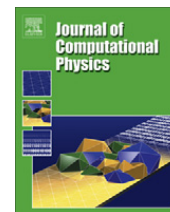
## References

- Adrian R (1991) Particle imaging techniques for experimental fluid mechanics. *Ann Rev Fluid Mech* 23:261–304
- Adrian R (2005) Twenty years of particle velocimetry. *Exp Fluids* 39(2):159–169
- Alvarez L, Castaño CA, García M, Krissian K, Mazorra L, Salgado A, Sánchez J (2008) Variational second order flow estimation for PIV sequences. *Exp Fluids* 44(2):291–304
- Alvarez L, Castaño CA, García M, Krissian K, Mazorra L, Salgado A, Sánchez J (2009) A new energy-based method for 3d motion estimation of incompressible PIV flows. *Comput Vis Image Underst* 113(7):802–810
- Amodei L, Benbourhim MN (1991) A vector spline approximation. *J. Approx Theory* 67:51–79
- Anderson B, Moore J (1979) *Optimal filtering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ
- Arad N, Dyn N, Reinfeld D, Yeshurun Y (1994) Image warping by radial basis functions application to facial expressions. *Comput Vis Graph Image Process* 56(2):161–172
- Arnaud E, Mémin E (2007) Partial linear Gaussian model for tracking in image sequences using sequential Monte Carlo methods. *IJCV* 74(1):75–102
- Arnaud E, Mémin E, Sosa R, Artana G (2006) A fluid motion estimator for schlieren image velocimetry. In: *European conference on computer vision, ECCV'06, Vol 3951*. Graz. LNCS, Austria
- Arulampalam M, Maskell S, Gordon N, Clapp T (2002) A tutorial on particle filters for online non-linear/non-Gaussian Bayesian tracking. *IEEE Trans Signal Process* 50(2):174–188
- Aubert G, Kornprobst P (2006) *Mathematical problems in image processing*, 2nd edn. Springer, New York
- Bergen J, Burt P, Hingorani R, Peleg S (1992) A three-frame algorithm for estimating two-component image motion. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell* 14(9):886–895
- Berselli L, Iliescu T, Layton W (2006) *Mathematics of large Eddy simulation of turbulent flows*. Springer, New York
- Bigün J, Grandlund G, Wiklund J (1991) Multidimensional orientation estimation with application to texture analysis and optical flow. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell* 13:775–790
- Black M, Rangarajan A (1996) On the unification of line processes, outlier rejection, and robust statistics with applications in early vision. *Int J Comput Vis* 19(1):75–104

- Bookstein F (1989) Principal warps: thin-plate splines and the decomposition of deformations. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell* 11(6):567–585
- Brezzi F, Fortin M (1991) Mixed and hybrid finite element methods. Springer, New York
- Brox T, Bruhn A, Papenberg N, Weickert J (2004) High accuracy optical flow estimation based on a theory for warping. In: European conference on computer vision, ECCV'04. Prague, Czech Republic, pp 25–36
- Bruhn A, Weickert J, Kohlberger T, Schnörr C (2006) A multigrid platform for real-time motion computation with discontinuity-preserving variational methods. *Int J Comput Vis* 70(3):257–277
- Chan T, Shen J (2005) Image processing and analysis. Cambridge University Press, Cambridge
- Chong M, Soria J, Perry A, Chacin J, Cantwell B, Na Y (1998) Turbulence structures of wall-bounded shear flows found using DNS data. *J Fluid Mech* 357:225
- Chorin A (1973) Numerical study of slightly viscous flow. *J Fluid Mech* 57:785–796
- Corpetti T, Heitz D, Arroyo G, Mémin E, Santa-Cruz A (2006) Fluid experimental flow estimation based on an optical-flow scheme. *Exp Fluids* 40(1):80–97
- Corpetti T, Héas P, Mémin E, Papadakis N (2008) Pressure image assimilation for atmospheric motion estimation. *Tellus series A: dynamic meteorology and oceanography* (in press)
- Corpetti T, Mémin E, Pérez P (2002) Dense estimation of fluid flows. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell* 24(3):365–380
- Cottet G-H, Koumoutsakos P (2000) Vortex methods: theory and practice. Cambridge University Press, Cambridge
- Cuzol A, Mémin E (2005) A stochastic filter for fluid motion tracking. In: Proceedings of international conference on computer vision (ICCV'05). Beijing, China
- Cuzol A, Hellier P, Mémin E (2007) A low dimensional fluid motion estimator. *Int J Comput Vis* 75(3):329–349
- Cuzol A, Mémin E (2008) A stochastic filter technique for fluid flows velocity fields tracking. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell* (in press)
- D'Adamo J, Papadakis N, Mémin E, G A (2007) Variational assimilation of POD low-order dynamical systems. *J Turbul* 8(9):1–22
- Dahm WJA, Su LK, Southerland KB (1992) A scalar imaging velocimetry technique for fully resolved four-dimensional vector velocity field measurements in turbulent flows. *Phys Fluids* 4(10):2191–2206
- Doucet A, Godsill S, Andrieu C (2000) On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. *Stat Comput* 10(3):197–208
- Duchon J (1977) Splines minimizing rotation invariant seminorms in sobolev spaces. In: Schempp W, Zeller K (eds) *Constructive Theory of Functions of several Variables*, Vol 1. Berlin, Springer, pp 85–100
- Elsinga G, Scarano F, Wieneke B, van Oudheusden B (2006) Tomographic particle image velocimetry. *Exp Fluids* 41(6):933–947
- Enkelmann W (1988) Investigation of multigrid algorithms for the estimation of optical flow fields in image sequences. *Comput Vis Graph Image Process* 43:150–177
- Fitzpatrick J (1988) The existence of geometrical density-image transformations corresponding to object motion. *Comput Vis. Graph. Image Process* 44(2):155–174
- Fleet D, Jepson A (1990) Computation of component image velocity from local phase information. *Int J Comput Vis* 5:77–104
- Foroosh H, Zerubia J, Berthod M (2002) Extension of phase correlation to subpixel registration. *IEEE Trans Image Process* 11(3):188–200
- Geman D, Reynolds G (1992) Constrained restoration and the recovery of discontinuities. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell* 14(3):367–383
- Girault V, Raviart P-A (1986) Finite element methods for Navier–Stokes equations. Springer, Berlin
- Gordon N, Salmund D, Smith A (1993) Novel approach to non-linear/non-Gaussian Bayesian state estimation. *IEEE Process-F* 140(2):107–113
- Gui L, Merzkirch W (1996) A method of tracking ensemble of particle images. *Exp Fluids* 21:465–468
- Gui L, Merzkirch W (2000) A comparative study of the MQD method and the several correlation-based PIV evaluation algorithms. *Exp Fluids* 28:36–44
- Gunzburger M (2003) Perspectives in flow control and optimization. SIAM
- Haussecker H, Fleet D (2001) Computing optical flow with physical models of brightness variations. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell* 23:661–673
- Héas P, Mémin (2008) 3D motion estimation of atmospheric layers from image sequences. *IEEE Trans Geosci Remote Sensing* 46(8):385–2396
- Héas P, Mémin E, Papadakis N, Szantai A (2007a) Layered estimation of atmospheric mesoscale dynamics from satellite imagery. *IEEE Trans Geosci Remote Sensing* 45(12):4087–4104
- Héas P, Papadakis N, Mémin E (2007b) Time-consistent estimator of 2d/3d motion of atmospheric layers from pressure image. Technical Report 6292. INRIA
- Héas P, Mémin E, Heitz D, Mininni P (2009a) Bayesian selection of scaling laws for motion modeling in images. In: International conference on computer vision (ICCV). Kyoto, Japan
- Héas P, Heitz D, Mémin E (2009b) Multiscale regularization based on turbulent kinetic energy decay for PIV estimations with high spatial regularization. In: 8TH International symposium on particle image velocimetry-PIV09. Melbourne, Victoria, Australia
- Héas P, Mémin E, Heitz D, Mininni P (2009c) Evidence of turbulence power laws from image data. In: Turbulent mixing and beyond (TMB). Trieste, Italy
- Heeger D (1988) Optical flow using spatiotemporal filters. *Int J Comput Vis* 1(4):279–302
- Heitz D, Héas P, Mémin E, Carlier J (2008) Dynamic consistent correlation-variational approach for robust optical flow estimation. *Exp Fluids* 45(4):595–608
- Hiptmair R (1999) Canonical construction of finite elements. *Math Comput* 68(228):1325–1346
- Horn B, Schunck B (1981) Determining optical flow. *Artif Intell* 17:185–203
- Huber P (1981) Robust statistics. John Wiley, London
- Hyman J, Shashkov M (1997a) Adjoint operators for the natural discretizations of the divergence, gradient and curl on logically rectangular grids. *Appl Numer Math* 25(4):413–442
- Hyman J, Shashkov M (1997b) Natural discretizations for the divergence, gradient, and curl on logically rectangular grids. *Comput Math Appl* 33(4):81–104
- Isambert T, Berroir J, Herlin I (2008) A multiscale vector spline method for estimating the fluids motion on satellite images. In: ECCV'08: European conference on computer vision. Marseille. Springer, France
- Jähne B (1993) Spatio-temporal image processing. Lecture notes in computer science, Vol 751. Springer, New York
- Jähne B, Klar M, Jehle M (2007) Motion analysis. In: Tropea C, Yarin A, Foss J (eds) *Springer handbook of experimental fluid mechanics* Chap. 25.2. Springer, New York, pp 1464–1491
- Le-Dimet F-X, Talagrand O (1986) Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects. *Tellus* 38(A):97–110



- Leonard A (1980) Vortex methods for flow simulation. *J Comput Phys* 37:2385–2396
- Lions J (1971) Optimal control of systems governed by partial differential equations. Springer, New York
- Liu T, Shen L (2008) Fluid flow and optical flow. *J Fluid Mech* 614:253–291
- Lucas B, Kanade T (1981) An iterative image registration technique with an application to stereovision. In: International joint conference on artificial intelligence (IJCAI), pp 674–679
- Mansour NN, Ferziger JH, Reynolds WC (1978) Large-eddy simulation of a turbulent mixing layer. Technical Report TF-11, Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University
- Mémin E, Pérez P (1998) Dense estimation and object-based segmentation of the optical flow with robust techniques. *IEEE Trans Image Process* 7(5):703–719
- Mémin E, Pérez P (2002) Hierarchical estimation and segmentation of dense motion fields. *Int J Comput Vis* 46(2):129–155
- Musse O, Heitz F, Armspach J (1999) 3D deformable image matching using multiscale minimization of global energy functions. In: Proceedings of conference on computer vision pattern rec., vol 2. Fort Collins, Colorado, pp 478–485
- Nobach H, Bodenschatz E (2009) Limitations of accuracy in PIV due to individual variations of particle image intensities. *Exp Fluids* 47:27–38
- Okuno T, Nakaoka J (1991) Velocity field measurement by spatio-temporal derivative method. *J Kansai Soc Naval Archit* 215:69–74
- Papadakis N, Corpetti T, Mémin E (2007) Dynamically consistent optical flow estimation. In: International conference on computer vision (ICCV'07). Rio de Janeiro, Brazil
- Papadakis N, Mémin E (2008a) An optimal control technique for fluid motion estimation. *SIAM J Imag Sci* (in press)
- Papadakis N, Mémin E (2008b) A variational technique for time consistent tracking of curves and motion. *J Math Imag Vis* 31(1):81–103
- Papenberg N, Bruhn A, Brox T, Didas S, Weickert J (2006) Highly accurate optic flow computation with theoretically justified warping. *IJCV* 67(2):141–158
- Paragios N, Chen Y, Faugeras O (eds) (2005) The handbook of mathematical models in computer vision. Springer, New York
- Perry A, Chong M (1987) A description of eddy motions and flow patterns using critical-point concepts. *Ann Rev Fluid Mech* 19:125
- Petra S, Schnörr C (2009) Tomopiv meets compressed sensing. Technical report. IWR, University of Heidelberg
- Petra S, Schröder A, Schnörr C (2009) 3D Tomography from few projections in experimental fluid mechanics. In: Nitsche W, Dobriloff C (eds) Imaging Measurement methods for flow analysis notes on numerical fluid mechanics and multidisciplinary design, vol. 106. Springer, New York, pp 63–72
- Quénou G, Pakleza J, Kowalewski T (1998) Particle image velocimetry with optical flow. *Exp Fluids* 25:177–189
- Raffel M, Willert C, Wereley S, Kompenhans J (2007) Particle image velocimetry—a practical guide. Springer, New York
- Rohr K, Fornefett M, Stiehl H (1999) Approximating thin plate splines for elastic registration: integration of landmark errors and orientation attributes. In: 16th International conference on information processing in medical imaging. LNCS 1613, Hungary, pp 252–265
- Ruhnau P, Schnörr C (2007) Optical stokes flow estimation: an imaging-based control approach. *Exp Fluids* 42:61–78
- Ruhnau P, Kohlberger T, Nobach H, Schnörr C (2005) Variational optical flow estimation for particle image velocimetry. *Exp Fluids* 38:21–32
- Ruhnau P, Stahl A, Schnörr C (2007) Variational estimation of experimental fluid flows with physics-based spatio-temporal regularization. *Meas Sci Technol* 18:755–763
- Schnörr C (1991) Determining optical flow for irregular domains by minimizing quadratic functionals of a certain class. *Int J Comput Vis* 6(1):25–38
- Simoncelli E (1993) Distributed representation and analysis of visual motion. PhD thesis, MIT
- Srinivasan S, Chellappa R (1998) Optical flow using overlapped basis functions for solving global motion problems. In: Proceedings of European conference on computer vision. Freiburg, Germany, pp 288–304
- Stanislas M, Okamoto K, KShler CJ, Westerweel J, Scarano F (2008) Main results of the third international PIV challenge. *Exp Fluids* 45(1):27–71
- Su LK, Dahm WJA (1996) Scalar imaging velocimetry measurements of the velocity gradient tensor field in turbulent flows. I. Assessment of errors. *Phys Fluids* 8(7):1869–1882
- Sugii Y, Nishio S, Okuno T, Okamoto K (2000) A highly accurate iterative PIV technique using a gradient method. *Meas Sci Technol* 11:1666–1673
- Suter D (1994) Motion estimation and vector splines. In: Conference on computer vision and pattern recognition. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA, pp 939–942
- Szeliski R, Shum H-Y (1996) Motion estimation with quadtree splines. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell* 18(12):1199–1210
- Tokumaru PT, Dimotakis PE (1995) Image correlation velocimetry. *Exp Fluids* 19:1–15
- Tretiak O, Pastor L (1984) Velocity estimation from image sequences with second order differential operators. In: Proceedings of 7th international conference on pattern recognition. Montreal, pp 16–19
- Wahba G (1990) Spline models for observational data. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia
- Weber J, Malik J (1995) Robust computation of optical flow in a multiscale differential framework. *Int J Comput Vis* 14(1):67–81
- Weickert J, Schnörr C (2001) Variational optic flow computation with a spatio-temporal smoothness constraint. *J Math Imag Vis* 14(3):245–255
- Wu Y, Kanade T, Li C, Cohn J (2000) Image registration using wavelet-based motion model. *Int J Comput Vis* 38(2):129–152
- Yamamoto Y, Uemura T (2009) Robust particle image velocimetry using gradient method with upstream difference and downstream difference. *Exp Fluids* 46(4):659–670
- Yuan J, Schnörr C, Mémin E (2007) Discrete orthogonal decomposition and variational fluid flow estimation. *J Math Imag Vis* 28:67–80
- Yuille A, Grzywacz N (1988) The motion coherence theory. In: Proceedings of international conference on computer vision. Tarpon Springs, Florida, pp 344–353



# Inflow and initial conditions for direct numerical simulation based on adjoint data assimilation



A. Gronskis<sup>a,\*</sup>, D. Heitz<sup>b,c</sup>, E. Mémin<sup>a</sup>

<sup>a</sup>INRIA Rennes - Bretagne Atlantique, Campus universitaire de Beaulieu, F-35042 Rennes, France

<sup>b</sup>Irstea, UR TERE, F-35044 Rennes, France

<sup>c</sup>Université européenne de Bretagne, Rennes, France

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 7 September 2012

Received in revised form 27 January 2013

Accepted 29 January 2013

Available online 27 February 2013

### Keywords:

Data driven simulation

Variational assimilation

Automatic differentiation

Adjoint equations

Inlet condition specification

PIV

Wake flow

## ABSTRACT

A method for generating inflow conditions for direct numerical simulations (DNS) of spatially-developing flows is presented. The proposed method is based on variational data assimilation and adjoint-based optimization. The estimation is conducted through an iterative process involving a forward integration of a given dynamical model followed by a backward integration of an adjoint system defined by the adjoint of the discrete scheme associated to the dynamical system. The approach's robustness is evaluated on two synthetic velocity field sequences provided by numerical simulation of a mixing layer and a wake flow behind a cylinder. The performance of the technique is also illustrated in a real world application by using noisy large scale PIV measurements. This method denoises experimental velocity fields and reconstructs a continuous trajectory of motion fields from discrete and unstable measurements.

© 2013 Elsevier Inc. All rights reserved.

## 1. Introduction

In spite of significant developments in computational methods over the past few decades, a number of real flows with moderate Reynolds number are still very difficult to simulate accurately due to complex and unknown boundary conditions. Such boundary conditions arising for instance in real world turbulent boundary layer flows require to be properly formalized and taken into account in order to faithfully reproduce the main flow features. Besides, such flows require a high computational effort as they are characterized by unsteady mixing due to eddies at many scales. To overcome these issues and limit the computational cost, new strategies that aim at simulating only a region of interest in the flow have recently been developed. A critical issue that arises as a direct consequence is the imperative need for the correct specification on this simulation region of all the boundary conditions, which become unsteady. Generating proper inlet conditions for unsteady simulations of spatially developing flows requires the generation of vector fields evolving in time in agreement with the spatiotemporal dynamics of the flow.

Usually, turbulent mean velocity profiles can be used and some random noise superimposed in order to start some artificial perturbation supposed to mimic the real instantaneous behavior of the turbulent flow. In this case, a lack of realistic turbulent structures induces a transient region near the inlet. This development region has no physical significance in general and is of no practical interest. Another solution consists in using an auxiliary (temporal or spatial) simulation where velocity data are stored at a given section corresponding to the inlet boundary of the main simulation [10]. Such a technique

\* Corresponding author. Present address: LFD, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Argentina.

E-mail addresses: [aleg@fi.uba.ar](mailto:aleg@fi.uba.ar) (A. Gronskis), [dominique.heitz@irstea.fr](mailto:dominique.heitz@irstea.fr) (D. Heitz), [etienne.memin@inria.fr](mailto:etienne.memin@inria.fr) (E. Mémin).

provides satisfactory results for specific studies, but its application remains difficult for complex flow configurations. Moreover, such calculations are expensive in time and/or storage capacities. Procedures based on low order dynamical models and proper orthogonal decomposition (POD) [1; 12] are probably less expensive for the generation of inflow data than the above method. However, such a procedure requires that direct numerical simulation (DNS), large-eddy simulation (LES) or experimental datasets are available to compute the most energetic modes, with an appropriate set of time dependent projection coefficients providing phase information. The reconstructed inflow data are more realistic, however the experimental databases usually suffer from either low spatial resolution, common with hot-wire anemometry measurements or limited temporal resolution, when using Particle Image Velocimetry (PIV) measurements. Special treatment must then be applied to alleviate the low resolution issues. Alternative methods rely on synthetic turbulence generation [4]. This is of particular interest when only limited turbulence statistics data are available for the procedure. The usual approach consists in generating a velocity signal that exhibits some statistical profiles learned from experimental data or empirical correlations.

So far, the proposed strategies proceed hence in two separate stages. In a first step, the inflow condition is built from numerical or experimental data. Then the simulation of the downstream development of the flow is conducted from this information. As a consequence, this second step highly depends on the first one. Noisy or incomplete inlet conditions (with no or erroneous small scales information) may lead to numerical catastrophe or to unrealistic oversmoothed velocity fields. To alleviate such problematic issue, an attractive solution consists in gradually modifying the inflow condition in such a way to enforce the simulation to remain the closest as possible to the data with respect to a given criterion. This is in essence an optimal control strategy to learn the inlet conditions from measurements.

With this state of mind, we propose here to explore an optimal control approach -referred in the litterature as variational data assimilation (VDA)- allowing generating simultaneous transitional initial and inflow boundary conditions and reproducing the spatiotemporal dynamics of an experimentally observed flow. VDA [7] is a technique derived from optimal control theory [8]. It is expressed as the minimization with respect to a control variable of an objective function that measures a discrepancy between a state variable and noisy measurements, subject to a constraint given by the state variable dynamics [11]. The control variable may be for instance a parameter of the dynamics or the initial condition. Assuming that both the model and the objective function are differentiable, VDA proposes to solve this inverse problem looking for a control that cancels out the gradient of this cost function through the use of adjoint minimization techniques. Such techniques enable to compute the functional gradient by means of the adjoint of the tangent linear dynamics. The tangent linear dynamics and its adjoint are provided by automatic differentiation (AD) tools. In the present study, the gradient descent minimization is coupled with a limited memory BFGS deterministic gradient based optimization algorithm [9].

Coupled with this dynamics we consider available noisy measurements of the velocity at discrete instants separated by a given latency (much larger than the DNS time step). By modifying the initial and inflow condition of the system, the proposed method provides the state of an unknown function on the basis of a DNS model and noisy measurements.

It should be emphasized that such an experiment/simulation association can be considered as a procedure for generating realistic inflow conditions for a numerical simulation, but also as a procedure for a dynamical data postprocessing, where the DNS is used to improve experimental data by restoring the part of the information that has been missed or deteriorated during the measurement step.

It is important to outline, that this study aims at constituting only a first proof of concept of the methodology capabilities. We will hence consider only the case of 2D flows. The extension to 3D though computationally much more intensive could be devised on the same basis.

## 2. Data assimilation

Variational data assimilation allows estimating over time state variables trajectory of a system of interest. It can be seen as a procedure in which noisy and eventually incomplete data are filtered out by a dynamical system with hidden parameters. This framework allows to handle in a natural way high-dimensional state spaces and is thus intensively used in environmental sciences [7] for the analysis of atmospheric or oceanic flows in view of their forecast. More precisely, the problem we are dealing with consists in recovering a system's state  $X(\mathbf{x}, t)$  obeying a dynamical law, given some noisy and possibly incomplete measurements  $\mathcal{Y}$  of the state. The measurements, in this context also called observations, are assumed to be available only at discrete points in time  $t^*$  separated by a given latency  $\Delta t_{obs}$ . This is formalized, for any location,  $\mathbf{x}$ , at time  $t \in [t_0, t_f]$ , by the system

$$\partial_t X(\mathbf{x}, t) + \mathbb{M}(X(\mathbf{x}, t), \eta(t)) = 0, \quad (1)$$

$$X(\mathbf{x}, t_0) = X_0(\mathbf{x}) + \epsilon(\mathbf{x}), \quad (2)$$

where  $\mathbb{M}$  is a nonlinear dynamical operator depending on a control parameter  $\eta$ . The term  $X_0$  is the initial vector at time  $t_0$ , and  $\epsilon$  is an (unknown) additive control variable on the initial condition.

### 2.1. Dynamical model

In this study the dynamics of interest consists of the *pressure-velocity* formulation of *Navier-Stokes* equations. Those equations and the numerical implementation we consider in this study are briefly described hereafter.

### 2.1.1. Governing equations

Mass and momentum conservation principles are represented by the Navier–Stokes equations, which have the following form for an incompressible fluid

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (4)$$

where  $\nu$  is the kinematic viscosity,  $p(\mathbf{x}, t)$  the dynamic pressure field ( $P + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2$ ),  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  the velocity field, and  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$  the vorticity field ( $\nabla \times \mathbf{u}$ ).

### 2.1.2. Numerical method

In this study we will rely on the numerical code *Incompact3d*, based on sixth-order compact finite difference schemes and a Cartesian grid to solve the incompressible Navier–Stokes equations [5]. The incompressibility condition is ensured via a fractional step method introducing a Poisson equation for the pressure. An original characteristic of *Incompact3d* is that this equation is directly solved in the framework of the modified spectral formalism. More precisely, the Poisson solver is only based on Fast Fourier Transforms (FFT) despite the use of inflow/outflow boundary conditions [6]. The time advancement is performed using a second-order Adams–Bashforth scheme. Free-slip boundary conditions are applied at  $y = \pm L_y/2$ , whereas outflow boundary conditions at  $x = L_x$  are determined through the resolution of a simplified convection equation

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + U_{conv} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

where  $U_{conv}$  is a mean convection velocity of the main structures in the outflow region calculated at each time step.

## 2.2. Cost functional

Basically, data assimilation is formulated as a goodness of fit problem under a particular additional constraint: the state dynamics 1,2, which expresses the dependence of the system's state variable  $X \equiv \mathbf{u}(\gamma)$  on the control variable  $\gamma = \{\epsilon(\mathbf{x}), \eta(t)\} \equiv \{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x}_{in}, t) - \mathbf{u}_{in}(t)\}$ . These control variables correspond to deviations between, on the one hand, the initial condition  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$  and a reference initial state  $\mathbf{u}_0$  and, on the other hand, between the flow in the inlet section,  $\mathbf{x}_{in}$ , and a reference time varying inlet condition  $\mathbf{u}_{in}$ . The initial and inlet references will be further precised later on. The optimal control objective consists then to find a control (or error) of lower magnitude (with respect to an appropriate norm) that leads to the lowest discrepancy between the measurements and the flow velocity. Formally, this is expressed as the minimization of the following cost function

$$\begin{aligned} J(\gamma) = & \int_{t_1}^{t_N} \int_{\Omega_A} \|\overline{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\omega}^{obs}(\mathbf{x}, t)\|_R^2 d\mathbf{x} \Delta t + \int_{\Omega_{C_{ob}}} \|\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0) - \mathbf{u}_b(\mathbf{x}, t_0)\|_{Q_{ob}}^2 d\mathbf{x} \\ & + \int_{t_0}^{t_N} \int_{\Omega_{C_{in}}} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}_{in}, t) - \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_{in}, t)\|_{Q_{in}}^2 d\mathbf{x} dt, \end{aligned} \quad (6)$$

where  $t_1 \in [t_0, t_N]$  denotes the initial time of the assimilation window,  $\overline{\boldsymbol{\omega}}$  indicates a spatial average of the vorticity field generated from the model output,  $\boldsymbol{\omega}^{obs}$  stands for the vorticity field associated to the PIV observations,  $\mathbf{u}_b(\mathbf{x}, t_0)$  designates the observed initial velocity field (referred as the background state) and  $\overline{\mathbf{u}} = \{\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0), \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_{in}, t)\}$  is a smoothed version of the control variable. Here,  $\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0)$  denotes a spatial average of the initial condition whereas  $\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_{in}, t)$  corresponds to a temporal average of the inflow condition. The times  $t^*$  denote the set of measurements instants and  $\Delta t^*$  represents a Dirac comb:  $\Delta t^* = \sum_k \delta(t - k\Delta t_{obs})$ , indicating formally that observation are available with a periodicity  $\Delta t_{obs}$ . The norms  $\|\cdot\|_R, \|\cdot\|_{Q_{ob}}$  and  $\|\cdot\|_{Q_{in}}$  are induced norms of the inner products  $\langle R^{-1} \cdot, \cdot \rangle, \langle Q_{ob}^{-1} \cdot, \cdot \rangle$  and  $\langle Q_{in}^{-1} \cdot, \cdot \rangle$ ;  $R, Q_{ob}$  and  $Q_{in}$  are covariance matrices of the assimilation space (spatial domain  $\Omega_A$ ), initial control space (spatial domain  $\Omega_{C_{ob}}$ ) and inlet control space (spatial domain  $\Omega_{C_{in}}$ ). Few remarks can be done here. First of all, we choose in this study to express the data discrepancy with respect to vorticity in order to strengthen the noise measurement. Concerning this, previous experimental data assimilation tests were performed by using a control law based on flow measurements relying on velocity, showing that this strategy, in spite of its straightforward implementation, has the following disadvantages:

- (i) It increases dramatically the assimilation domain size to take into account the velocity components and as such, we reduce the performance of the minimization algorithm regarding its convergence properties, i.e. by enhancing the interval of uncertainty for a minimizer of the functional.
- (ii) It introduces ambiguity in the criterion used to identify the location of the spatial assimilation errors, due to strong differences observed between both velocity components.

Otherwise, for numerical stability reasons, the spatial resolution ( $dx$ ) used in our simulation code is generally much higher than that of the observations ( $dx_g$ ) supplied by large scale Particle Image Velocimetry (PIV) measurements. The spatial averaging filter applied to the DNS vorticity field allows comparing the flow velocity with the coarse grid vorticity field



associated to the observations. The spatial averaging is here defined through a discrete Gaussian filter with support:  $\Lambda = \{(x, y) \in \Omega_c | (x^2 + y^2) \leq (dx_g/dx)^2\}$ . This filtering is reminiscent of the usual weighting function defined over the span of the interrogation window in conventional correlation PIV implementations.

The observation model relating the measurements and the state variables can be formally written as:

$$\underbrace{g_{\sigma_b} * \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^*)}_{\mathbb{H}} = \omega^{obs}(\mathbf{x}, t^*) + \zeta, \tag{7}$$

where  $g_{\sigma_b}$  is a Gaussian kernel with  $3\sigma_b = dx_g/dx$ . Here the operator ‘\*’ denotes the convolution product and the variable  $\zeta$  is a Gaussian noise.

Previous assimilation experiments show that as a consequence of neglecting the third term of the functional, the optimization process generates peak shape patterns on velocity profiles of the inflow estimated condition. Those peaks occur at instants  $t^*$  corresponding to the observations, revealing that the cause of this pattern is based on the response of the optimization algorithm to the first term of the functional, which only takes into account the model solution  $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t^*)$  evaluated at discrete points in time  $t^*$  but ignores what happens during the intermediate temporal states. In order to reduce the magnitude of those peaks, the strategy involved in the third term of the functional consists in comparing the current inflow condition,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_{in}, t)$ , with a weighted temporal average  $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_{in}, t)$  obtained by means of a Gaussian function over the interval  $[t^* - \Delta t_{obs}, t^* + \Delta t_{obs}]$ . This averaging time is chosen to preserve the global accuracy of temporal discretization and to affect only a time interval between the nearest observations of the flow. We consider that the present smoothing procedure applied to the expected value of the inflow condition is very soft in the sense that when a coarse temporal resolution is used, no significant reduction of spurious patterns can be obtained. In contrast, when the inflow solution is directly smoothed at every iteration, we have observed that a strong reduction of those peaks is often possible, even at very low resolution, but with a simultaneous artificial smoothing of the overall flow not fully compatible with the purpose of a VDA.

This approach allows the inflow condition to change gradually over the whole sequence time range  $[t_0, t_f]$ . The role of the third term of the functional is thus to enforce a temporal continuous trajectory of the solution but also to impose a base flow corresponding to the flow harmonic component absent from the vorticity observation. The control variables are assumed to be related to a filtered version of the velocity component up to a Gaussian noise. This is formalized through relations:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = g_{\sigma_b}(\cdot, t_0) * \mathbf{u}_b(\mathbf{x}, t_0) + \epsilon \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{C_{ob}} \tag{8}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_{in}, t) = g_{\sigma_{in}}(\mathbf{x}_{in}, \cdot) * \mathbf{u}(\mathbf{x}_{in}, t) + \eta \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{C_{in}}, \quad \forall t \in [t_0, t_N], \tag{9}$$

where  $\epsilon$  and  $\eta$  are Gaussian variables encoding respectively the noise on the initial condition and on the inlet condition. The value of the considered standard deviation for the inlet condition have been set in practice in order to allow a smoothing on  $n$  consecutive image frames ( $n\sigma_{in} = \Delta t_{obs}/dt$ ).

### 2.3. Adjoint model

Regarding the minimization of the objective function, a direct numerical evaluation of the functional gradient is computationally infeasible, because this would require to compute perturbations of the state variables along all the components of the control variables ( $\delta\epsilon, \delta\eta$ ) - i.e. to integrate the dynamical model for all perturbed components of the control variables, which is obviously not possible in practice. As described in A a solution to this problem consists in relying on an adjoint formulation [7]. Within this formalism, the gradient functional is obtained by a forward integration of the dynamical system 1 and 2 followed by a backward integration of an adjoint variable,  $\lambda$ , which is driven by a dynamics defined from the adjoint of the tangent linear dynamical operator,  $\partial_X \mathbb{M}$ , and the tangent linear observation operator,  $\partial_X \mathbb{H}$ . This reverse dynamics, referred as the adjoint dynamics, is defined as:

$$-\partial_t \lambda(\mathbf{x}, t) + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda(\mathbf{x}, t) = (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1}(\mathcal{Y} - \mathbb{H}(X(\mathbf{x}, t))), \tag{10}$$

$$\lambda(\mathbf{x}, t_f) = \mathbf{0}, \tag{11}$$

allows expressing the functional gradient with respect to the control variables. This gradient whose expressions are derived in Appendix A reads:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon} &= -\lambda(t_0) + I_c^{-1}(X(t_0) - C_b X_b), \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}} &= (\partial_u C_u)^* F^{-1}(C_u \mathbf{u} - u_0) + (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda. \end{aligned} \tag{12}$$

These cost functional derivatives, involve the linear tangent expression of several operators. Although only their numerical expression will be needed, we detail further their analytic expression in the following. As can be noted from (7) the observation operator  $\mathbb{H}$  is linear. Its linear tangent expression is itself, so we have in 2D (as the smoothing filter is symmetric):

$$\langle \omega^{obs}, g * \nabla \times \mathbf{u} \rangle = \langle g_{\sigma} * \omega^{obs}, \partial_x v - \partial_y u \rangle = \langle \nabla^\perp g_{\sigma} * \omega^{obs}, \mathbf{u} \rangle, \tag{13}$$

with the orthogonal gradient defined as  $\nabla^\perp = (\partial_y, -\partial_x)$ . We have hence immediately:

$$(\partial_X \mathbb{H})^* = g_\sigma * \nabla^\perp. \quad (14)$$

Let us also remark that in 3D, this expression would further simplify to  $\mathbb{H}$  as the curl operator is auto-adjoint.

As for the control variables, they involve general linear relations 8 and 9 of the form

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = g_\sigma * \mathbf{u}_b(\mathbf{x}, t_0) + \epsilon, \quad (15)$$

$$\mathbb{C}_u \mathbf{u}(\mathbf{x}_{in}, t_0) = \boldsymbol{\eta}, \quad (16)$$

with  $\mathbb{C}_u = (\delta - g_\sigma)^*$  and where  $\delta$  is the Dirac mass and  $g_\sigma$  a spatial or temporal filtering. The adjoint linear tangent operator of  $\mathbb{C}_u$  is hence itself.

Concerning the dynamics, the exact adjoint of the discrete scheme associated to the dynamical system is needed for an accurate implementation of the adjoint dynamics. It is thus necessary to construct a numerical procedure that corresponds to the adjoint of the tangent linear expression of the discrete scheme used to implement the dynamics. To this end, we will rely on an automatic differentiation tool, called *Tapenade* [3]. This systematic approach leads however to massive use of storage, requiring code transformation by hand to reduce memory usage as explained in the next section.

#### 2.4. Building adjoint algorithms through AD

Automatic Differentiation (AD) is a technique to evaluate derivatives of a function  $F : X \in \mathbb{R}^m \mapsto Y \in \mathbb{R}^n$  defined by a computer program  $\mathbb{P}$ . In AD, the original program is automatically transformed or extended to a new program  $\mathbb{P}'$  that computes the derivatives analytically [2]. It can be used to build a program encoding the tangent linear numerical expression of the discrete implementation of a given operator or its adjoint. Such automatic derivation, guarantees thus to compute the exact numerical adjoint. In our case, we set the input  $X \equiv \gamma$  and function  $F$  has a single real output (the cost).

##### 2.4.1. Application of AD

An AD tool uses the source of the program that computes the state dynamics (1 and 2), and identifies this program with a composition of mathematical functions, one per run-time instruction. Denoting  $\{I_k\}_{k=1 \rightarrow p}$  the sequence of instructions executed at run-time, each of them implementing an elementary function  $f_k$ , the function  $F$  computed by  $\mathbb{P}$  is:

$$F = f_p \circ f_{p-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1. \quad (17)$$

Setting  $W_0 = X$  and  $W_k = f_k(W_{k-1})$ , the chain rule gives us the Jacobian of  $F$ :

$$F'(X) = f'_p(W_{p-1}) \cdot f'_{p-1}(W_{p-2}) \cdot \dots \cdot f'_1(W_0). \quad (18)$$

The so-called *adjoint* (or *reverse*) mode of AD aims at computing the product of the transposition of  $F'$  by a given weight vector  $\bar{Y}$  to get:

$$\bar{X} = F^t(X) \cdot \bar{Y} = f_1^t(W_0) \cdot f_2^t(W_1) \cdot \dots \cdot f_p^t(W_{p-1}) \cdot \bar{Y}. \quad (19)$$

In this way, the adjoint mode of AD builds a new code  $\bar{\mathbb{P}}$  that computes  $\{\bar{W}_{k-1} = f_k^t(W_{k-1}) \cdot \bar{W}_k\}_{k=p \rightarrow 1}$ , by using values from  $\mathbb{P}$  in the reverse of their computation order. The stack needed to store  $W_k$  is the bottleneck of reverse AD. In order to keep it small enough, we applied a storage/recomputation strategy described as follows:

- (i) During the computation of the cost function  $J$ , we store in memory only  $W_k$  at instants  $t^*$ .
- (ii) During the computation of the adjoint variable  $\bar{X} \equiv \lambda$ , we restart the program on snapshot  $W_k$  until  $W_{k+1}$  in the forward sweep of  $\mathbb{P}$ , storing in memory all the intermediate values  $W_{itime}$  at each DNS time step. Later, in the backward sweep, each  $W_{itime}$  is restored from the stack to be used by  $\bar{\mathbb{P}}$ .

In our case, by setting the weight vector  $\bar{Y} \equiv Y$ , the code  $\bar{\mathbb{P}}$  enables to get the gradient functional  $\bar{X} = F^t(X) \cdot Y \equiv \nabla Y$ . Concerning this issue, one can think of  $\bar{Y}$  as a weighting vector on  $Y$ , the results of a function  $F : X \in \mathbb{R}^m \mapsto Y \in \mathbb{R}^n$ , that defines a scalar composite result, of which we compute the gradient. Alternatively, given a program  $\mathbb{P}$  that discretizes and computes the function  $F$ , AD in the reverse mode creates a new program  $\bar{\mathbb{P}}$  that computes the transposed Jacobian of  $F$  multiplied by a given vector. In our optimization context,  $F$  has a single output (the cost) and therefore the program  $\bar{\mathbb{P}}$  computes exactly the gradient of  $F$  by considering  $\bar{Y} \equiv Y$ . Thus, the reverse mode of AD takes as input a single vector  $\bar{Y}$  that defines the composite optimization criterion for which the gradient must be computed.

##### 2.4.2. Validation checks

The usual process to validate the AD generated codes consists in validating the tangent derivatives with respect to finite differences, and to validate the reverse derivatives with respect to the tangent derivatives using the *dot-product* test. More precisely, choosing an arbitrary state  $X$  (initial and inflow condition in our case) and an arbitrary direction  $\dot{X}$ , we compute the finite difference  $FD = [F(X + \epsilon X) - F(X)]/\epsilon$ . Using the tangent differentiated program, we compute  $\dot{Y} = F'(X) \cdot \dot{X}$ . Using the adjoint differentiated program, we compute  $\bar{X} = F^t(X) \cdot \dot{Y}$ . The dot-product test just checks that

$$\langle \bar{X}, \dot{X} \rangle = \langle F^t(X) \cdot \dot{Y}, \dot{X} \rangle = \langle \dot{Y}, F'(X) \cdot \dot{X} \rangle = \langle \dot{Y}, \dot{Y} \rangle, \quad (20)$$

up to an admissible error.

### 2.5. Optimization with gradient descent

In our optimization problem, Hessian matrix of the cost function is too dense if we take into account the large number of variables involved, i.e.  $(2 \cdot n_x \cdot n_y + 2 \cdot n_y \cdot \Delta \text{time})$ , where  $n_x, n_y$  is the number of grid points in control space domain  $\Omega_c$ , and  $\Delta \text{time}$  the number of DNS time steps in  $[t_0, t_f]$ . So, in order to reduce the cost of storing and manipulating it, we have chosen a limited-memory quasi-Newton method which maintains simple and compact approximations of Hessian matrices [9]. We have used an algorithm known as L-BFGS, which is based on the BFGS updating formula

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k + \alpha_k p_k, \quad (21)$$

where  $\alpha_k$  is the step length,  $p_k = -H_k \nabla Y_k$  is the search direction, and  $H_k$  denotes a first order approximation of the Hessian in the direction of the previous increment. This approximation is updated at every iteration by storing the vector pairs

$$s_k = \gamma_{k+1} - \gamma_k, \quad y_k = \nabla Y_{k+1} - \nabla Y_k. \quad (22)$$

The step length is computed from a line search procedure to satisfy the Wolfe conditions.

We have chosen a stop criterion for the L-BFGS algorithm based on gradient reduction from its initial value, i.e.  $\|\nabla F(X_k)\|/\|\nabla F(X_0)\| < 1 \cdot 10^{-5}$ .

## 3. Results

First, the correctness and the computational cost of the AD is checked. Subsequently, the values we chose for the different parameters of the method are described. Then, validations of the control on initial and inflow conditions are carried out using three different setups: a synthetic image setup based on a mixing layer and synthetic/experimental setups based on a circular cylinder wake.

### 3.1. Correctness of AD codes

In order to assess the validity of the differentiated codes, we performed validation experiments (dot-product test) by running the generated tangent (forward mode AD) and adjoint (reverse mode AD) codes many times, with the same value of  $X$  (independent state introduced by the initial and inflow condition) but with different values of  $\dot{X}$  (direction in the input space along which the derivatives are computed), where the directional variables are assumed to be composed by the application of a Gaussian noise (with zero mean and unit variance) to the independent ones. This can be formally written as:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) + \tau \cdot \epsilon \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{c_{ob}}, \quad (23)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_{in}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_{in}, t) + \tau \cdot \eta \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{c_{in}}, \quad \forall t \in [t_0, t_N], \quad (24)$$

where  $\epsilon$  and  $\eta$  are gaussian variable encoding respectively the noise on the initial condition and on the inlet condition, and  $\tau$  is a scalar noise amplitude parameter. Results shown in Table 1 for each arbitrary direction obtained by varying  $\tau$  with random draws of  $(\epsilon, \eta)$ , indicate that the tangent norm and the adjoint norm match very well, up to the last few digits. This shows that the tangent and adjoint codes really compute the same derivatives independently of the arbitrary direction of choice. The norm obtained with Finite Differences (FD) matches only to half the machine precision, because of the inaccuracy of FD approximation. This validity test enables us to ascertain that the program doing  $F^t(X)$  is indeed adjoint to the program doing  $F(X)$ , and thus the proposed code for the adjoint operator is precisely consistent with the operator itself.

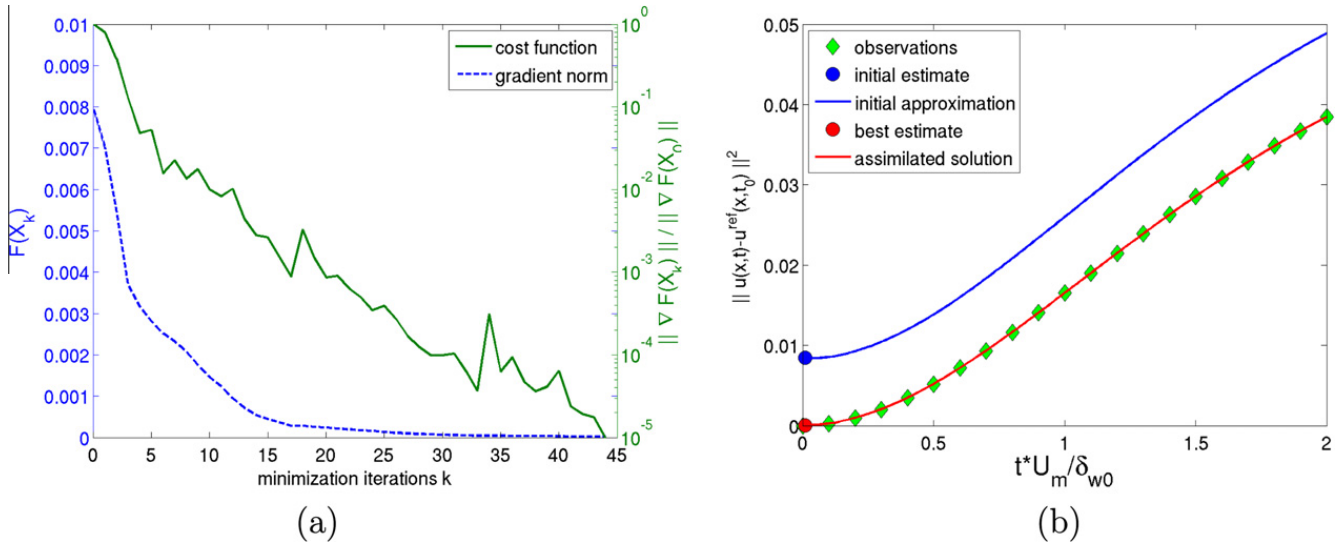
**Table 1**  
Validity test of the AD technique as the noise on the directional variables is increased ( $\epsilon = 10^{-7}$ ).

$\tau$	0.01	0.1
$\langle FD, FD \rangle$	5.94345959284251984E-006	6.05599345995614287E-006
$\langle \dot{Y}, \dot{Y} \rangle$	5.94345528277551301E-006	6.05598865931465216E-006
$\langle \bar{X}, \dot{X} \rangle$	5.94345528277551301E-006	6.05598865931465470E-006
$\tau$	1.0	10.0
$\langle FD, FD \rangle$	7.23940570717684538E-006	2.48837235816609840E-005
$\langle \dot{Y}, \dot{Y} \rangle$	7.23936862789542849E-006	2.48777886326398566E-005
$\langle \bar{X}, \dot{X} \rangle$	7.23936862789542849E-006	2.48777886326398194E-005

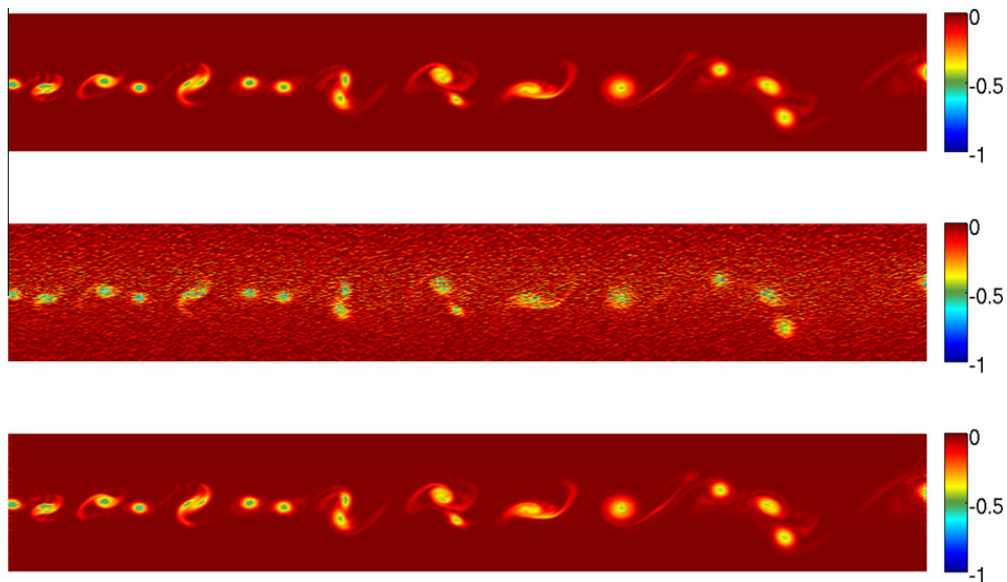
**Table 2**

Computational cost of the AD generated code. Times are normalized to the total computational cost of the flow solution (i.e. the time needed to complete a trajectory of the dynamic model), which takes 91.3 s in the case of VDA cylinder wake experimental test A.

Computation of the cost function	1.08
Computation of the adjoint variable	2.98
Forward sweep	1.38
Backward sweep	1.31



**Fig. 1.** (a) Reduction of the cost function and the gradient norm versus the number of minimization iterations with the L-BFGS algorithm. (b) Temporal evolution of the squared norm of the discrepancy between each velocity field generated from the model output  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  and the reference value  $\mathbf{u}^{ref}(\mathbf{x}, t)$ .



**Fig. 2.** Vorticity fields at the start of the assimilation window. True field (top), initial perturbed field (middle) and retrieved optimal initial condition (bottom).

3.2. Computational cost

To assess the computational cost of the method, the AD generated code was run on a desktop machine with a 3.40 GHz Intel Core i7–2600 CPU with 8 GB of RAM. Performance results are shown in Table 2 corresponding to VDA Test A for a DNS mesh size of  $109 \times 339$  grid points in control space domain. Table 2 shows that the forward and backward implementations

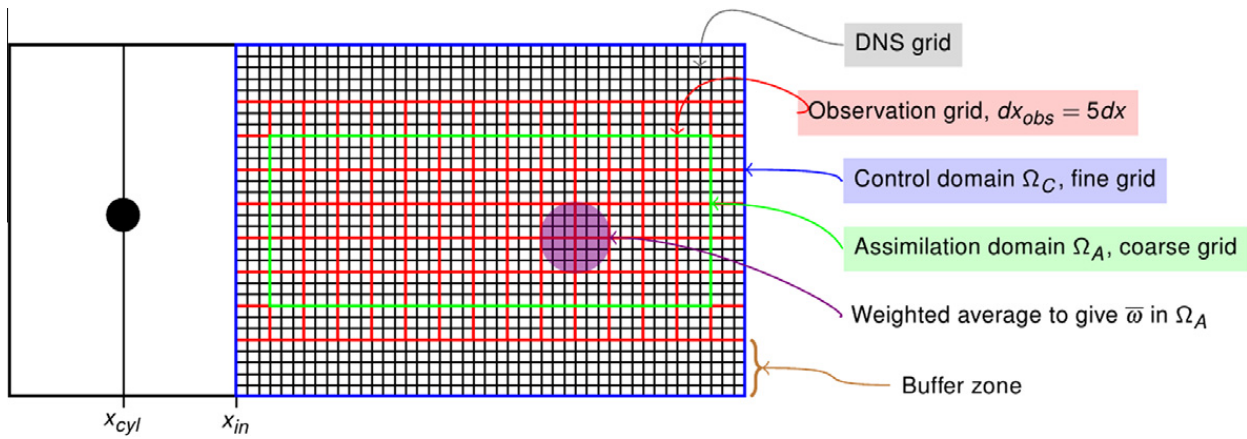


Fig. 3. Computational flow configuration of VDA cylinder wake tests.

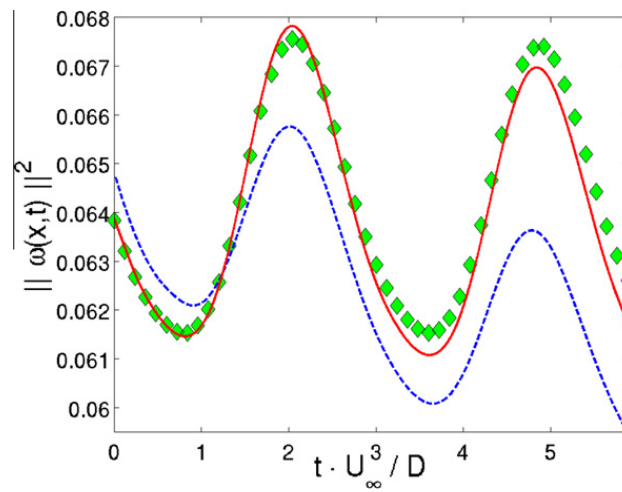


Fig. 4. VDA cylinder wake twin test. Temporal evolution of the squared norm of the vorticity field; diamonds: observations; dashed line: initial approximation; solid line: assimilated solution.

Table 3

VDA cylinder wake experimental tests from PIV velocity fields. Characteristics of the spatial domain.  $\Omega_C$  denotes the control space and  $\Omega_A$  the assimilation space.

Test	$(x_{in} - x_{cyl})$	$(L_x \times L_y)_{\Omega_C}$	$(n_x \times n_y)_{\Omega_C}$	$(L_x \times L_y)_{\Omega_A}$	$(n_x \times n_y)_{\Omega_A}$
A	10D	7.7D × 24.2D	109 × 339	6D × 8D	29 × 39
B	3D	14.2D × 24.2D	199 × 339	12D × 8D	59 × 39

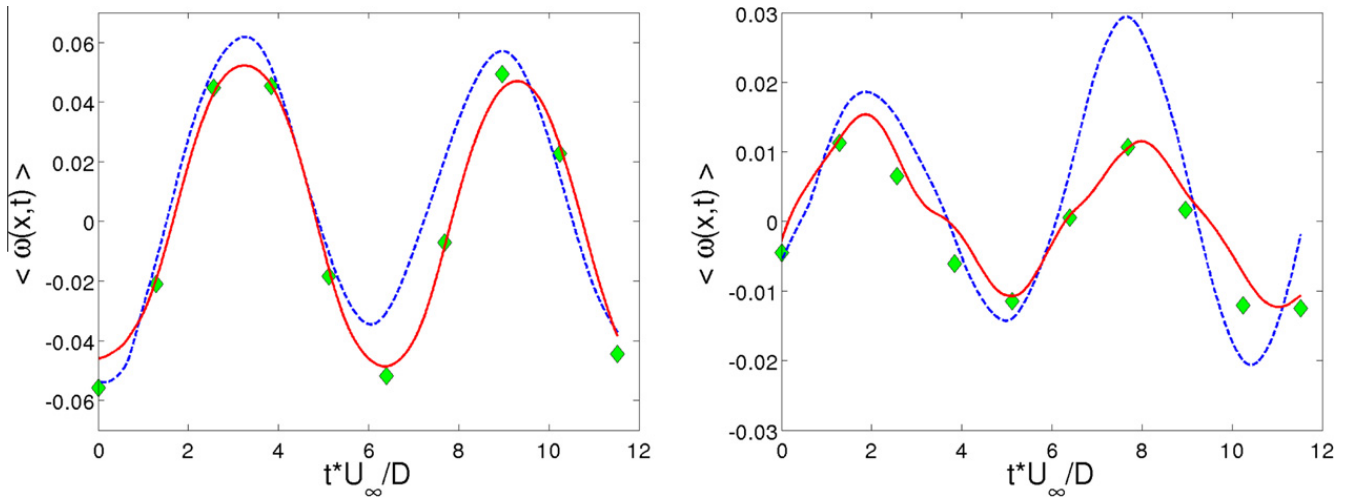
are cost competitive. Further, this gives a ratio of 2.7 between the run-times of the gradient and function evaluations, indicating that the overall cost of the adjoint method is reasonable. The generated code required 33.5 MB of tape size and 15 h to reach the assimilated trajectory, showing that:

- (i) The proposed storage/recomputation strategy, based on storing an appropriate number of intermediate states during the forward path of differentiation and then recalling them in the reverse computation, is effective in terms of memory consumption.
- (ii) While this is not a trivial computational cost for a 2D test case, it does bring the optimization of unsteady problems into the realm of possibility.

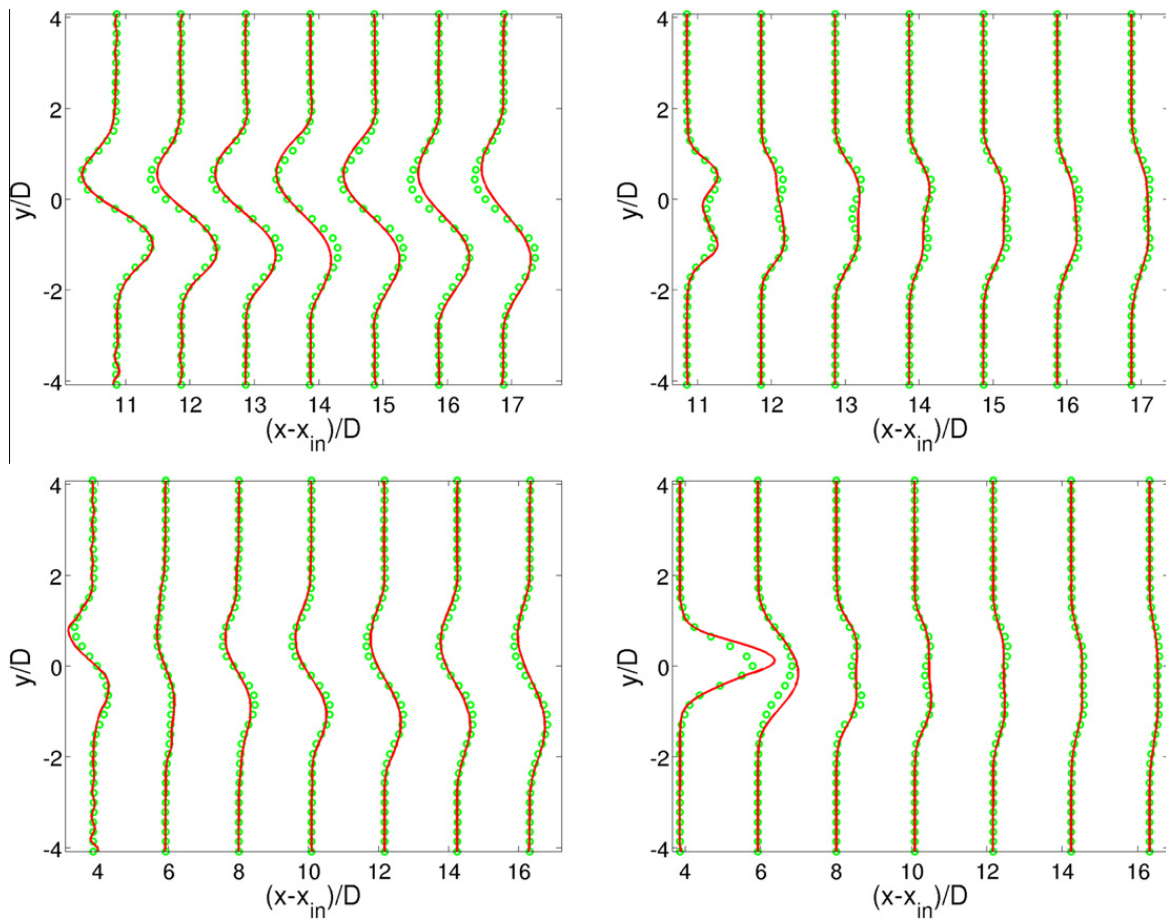
### 3.3. Parameter estimation

The only parameters of the method are constituted by the covariance matrices associated to the observations  $R$ , the initialization  $Q_{ob}$  and the dynamical model  $Q_{in}$ . For the observation, we systematically imposed  $R = 1$ . The initialization covari-



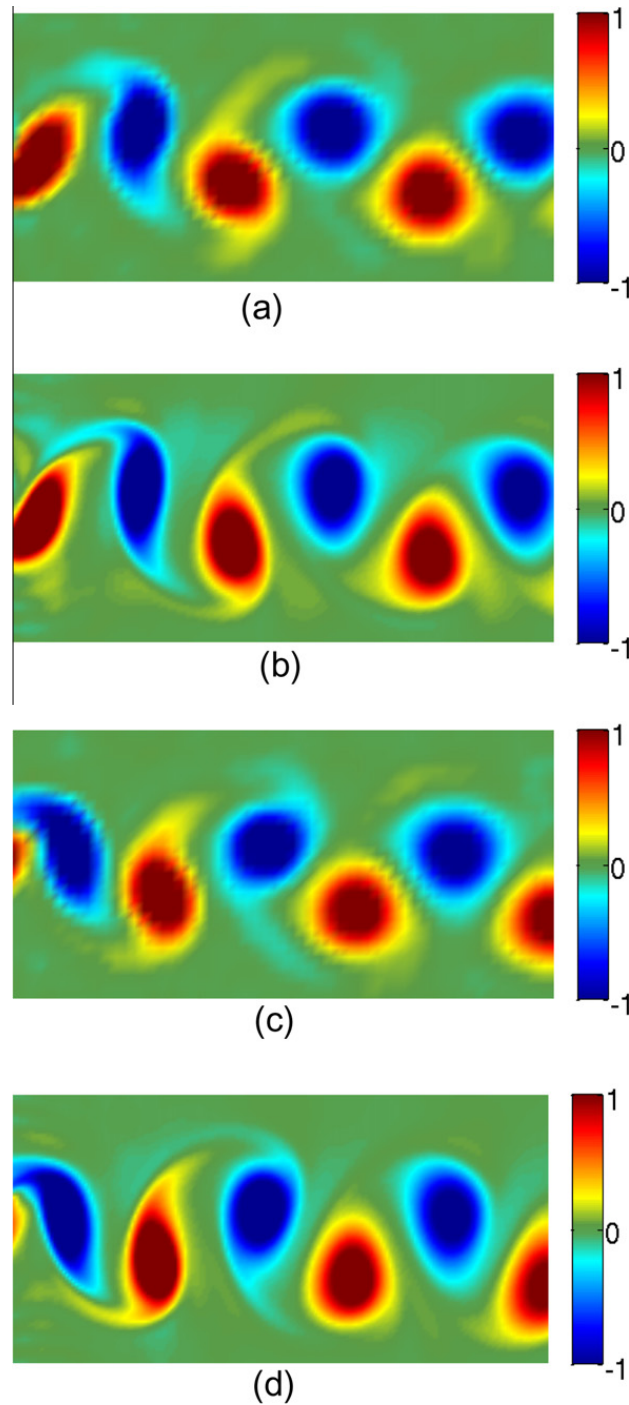


**Fig. 5.** Temporal evolution of the spatial mean of the vorticity field for (left) VDA cylinder wake experimental test A and (right) test B; diamonds: observations; dashed line: initial approximation; solid line: assimilated solution.



**Fig. 6.** Longitudinal evolution of (left) the mean vorticity and (right) the vorticity fluctuation  $\langle \omega' \omega' \rangle$  for (top) VDA cylinder wake experimental test A and (bottom) test B; solid lines: assimilated solution; symbols: observations.

ance matrices are defined with respect to the initialization model. In the case of synthetic model (given through velocity fields provided by a combination of DNS and filtering techniques), we fixed the covariance matrix to  $Q_{ob}=10$ . When initializing from the first PIV field of the sequence, the value  $Q_{ob}=100$  is introduced. Concerning the dynamical model covariance matrix, we fixed it to  $Q_{in}=1$  for the synthetic sequences, as in this case the dynamic is quasi respected and to  $Q_{in}=10$  for real world applications with larger dynamical uncertainty.



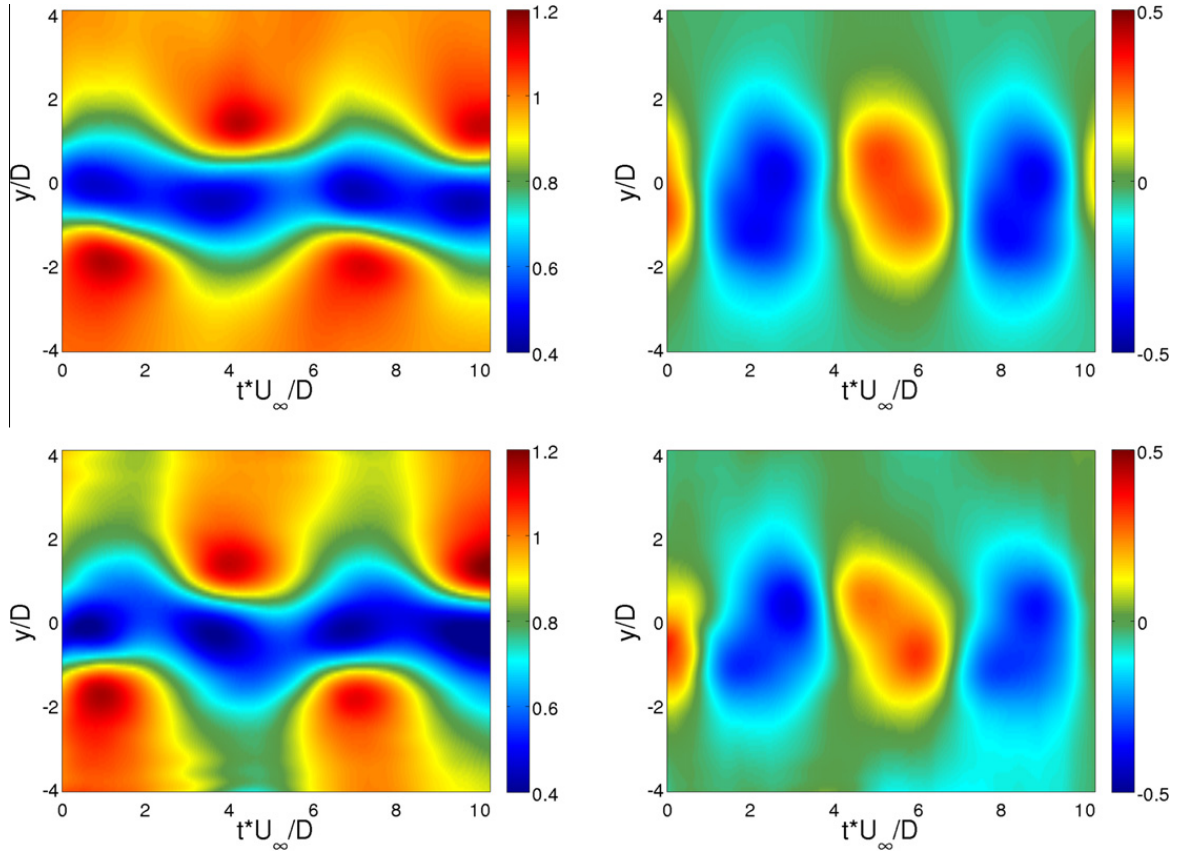
**Fig. 7.** VDA cylinder wake experimental test B. Vorticity fields at two discrete instants in the assimilation window. (a) Experimental observation at  $t \cdot U_\infty / D = 6.4$ ; (b) Assimilated state at  $t \cdot U_\infty / D = 6.4$ ; (c) Experimental observation at  $t \cdot U_\infty / D = 10.2$ ; (d) Assimilated state at  $t \cdot U_\infty / D = 10.2$ .

### 3.4. Control on the initial condition

In order to assess the benefits of our technique, we carried out a VDA experiment applied to the identification of the initial condition from a spatially evolving 2D mixing layer flow by using numerical data. The velocity ratio between low and high speed is 0.66 and the Reynolds number based on the velocity difference of two streams and the inflow vorticity thickness  $\delta_{\omega 0}$  is  $Re = 400$ . The governing equations are directly solved using  $401 \times$  grid points in  $x$  and  $y$  directions respectively. The assimilation domain size was  $L_x = 200\delta_{\omega 0}$ ,  $L_y = 512\delta_{\omega 0}$ , and the grid resolution in  $x$  direction was  $\Delta x = 0.5\delta_{\omega 0}$ . The stretching of the grid in  $y$  direction leads to a minimal mesh size of  $\Delta y_{min} = 0.15\delta_{\omega 0}$ .

As a first step, a precursor simulation was run to provide artificial inflow conditions for the assimilation experiment. The spanwise section retained and fixed subsequently to the inlet section of the assimilation domain is located at the beginning of the convection region of vortical structures. This VDA experiment was done in a so-called twin experiment framework





**Fig. 8.** VDA cylinder wake experimental test A. Temporal evolution of the inflow condition in the assimilation domain. Longitudinal velocity component (Left); Vertical velocity component (Right); Initial estimate (Top); Best estimate (Bottom).

whereby the direct model trajectory is used to generate synthetic observations. The initial velocity field has been then perturbed using zero mean Gaussian noise and an additional spatial filtering is applied to this vector velocity field in order to provide the noisy field at the start of the assimilation process. Synthetic observations are given by a sequence of 20 velocity fields generated from the model's original outputs starting from the unperturbed field.

In this experiment the functional  $J(\gamma)$  considered depends only on the initial condition, and comes to an initial value control problem. Fig. 1(a) illustrates the performance of the optimization loop for an integration period of  $2\delta_{\omega 0}/U_m$  (with a DNS time step of  $0.01\delta_{\omega 0}/U_m$ ) and an observation frequency equal to  $0.1\delta_{\omega 0}/U_m$ , where  $U_m$  is the mean convective velocity at the inlet. After 44 iterations the cost function decreases by 99.8% from  $8 \cdot 10^{-3}$  to  $1.6 \cdot 10^{-5}$ . Fig. 1(b) shows the temporal evolution of the assimilation error with respect to the initial unperturbed observation (our reference or true state). The initial trajectory is generated from the model output starting from the perturbed observation at  $t = t_0$  (initial estimate for L-BFGS algorithm), and the assimilated one is obtained from the best estimate for the initial state found by L-BFGS.

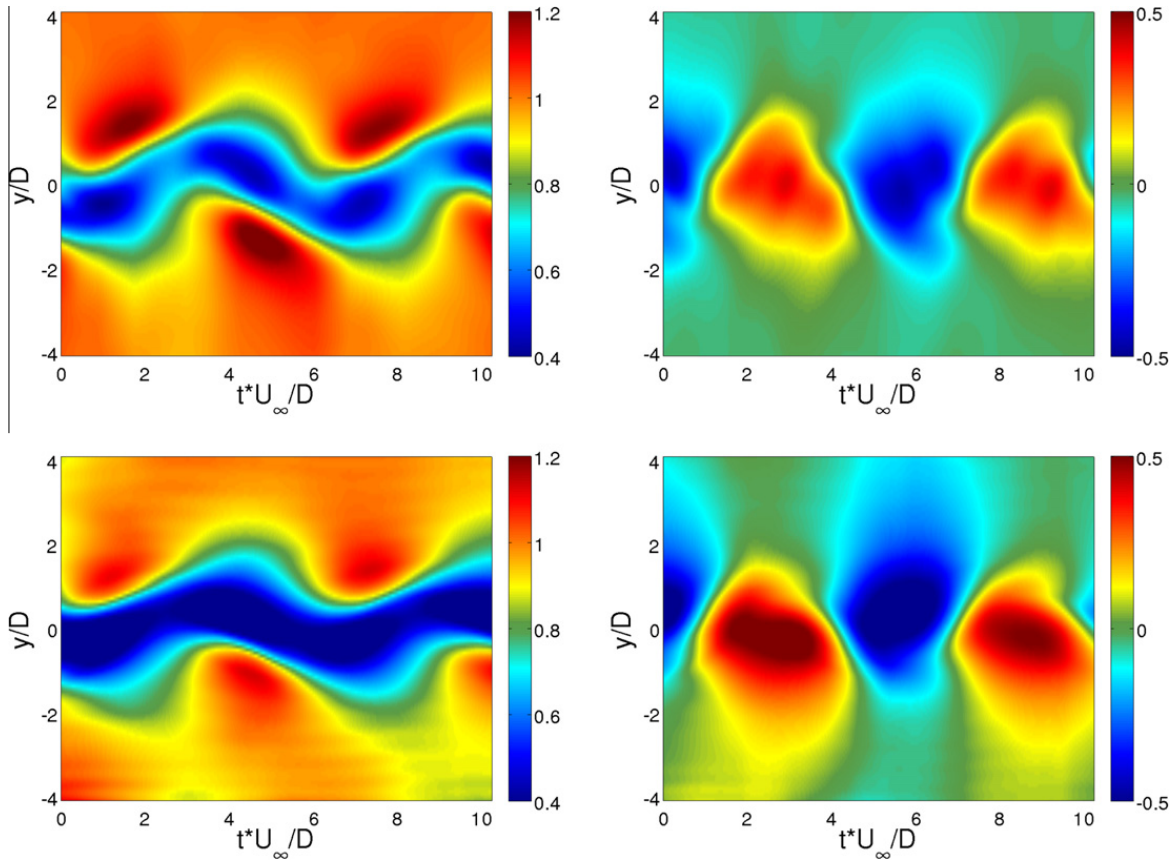
As can be seen, the minimization algorithm corrects the error of the initial guess and converges to a global minimum point that is close to the true state point. The initial condition of the model is retrieved, yielding a very good agreement with the unperturbed velocity fields. Fig. 2 indicates that the true state at the start of the assimilation window (top panel) is recovered with a very good accuracy (bottom panel) from the perturbed one (middle panel), showing the quality of the derivatives obtained.

### 3.5. Control on the initial and inflow condition

In the previous assimilation experiment, an artificial inlet condition obtained from the reference DNS trajectory was used as a fixed parameter in our optimization system, and then  $\gamma = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)\}$ . From now on, in addition to the flow initial condition we will incorporate inflow condition as a supplementary control parameter. In order to make it possible, we need to provide an initial estimate for the inflow condition, i.e.  $\mathbf{u}_{k=0}(\mathbf{x}_{in}, t)$  and the initial condition. Similarly to the previous experiment, we initialized the initial condition to the observed data at the initial time:

$$\mathbf{u}_{k=0}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}^{obs}(\mathbf{x}, t_0). \quad (25)$$

A natural choice to provide an initial value of the inflow condition consists in using the complete sequence of observations together with a “frozen” turbulence Taylor's hypothesis. From Taylor's hypothesis, the spatial changes caused by advection between two contiguous observations are set to  $\Delta x_{obs} = U_m \Delta t_{obs}$ , where  $U_m$  is the mean convection velocity at the inlet section. One solution for the initial estimate of the inflow condition emerges immediately as



**Fig. 9.** VDA cylinder wake experimental test B. Temporal evolution of the inflow condition in the assimilation domain. Longitudinal velocity component (Left); Vertical velocity component (Right); Initial estimate (Top); Best estimate (Bottom).

$$\mathbf{u}_{k=0}(\mathbf{x}_{in}, t_\sigma) = \mathbf{u}^{obs}(\mathbf{x}_\sigma, t^*), \quad (26)$$

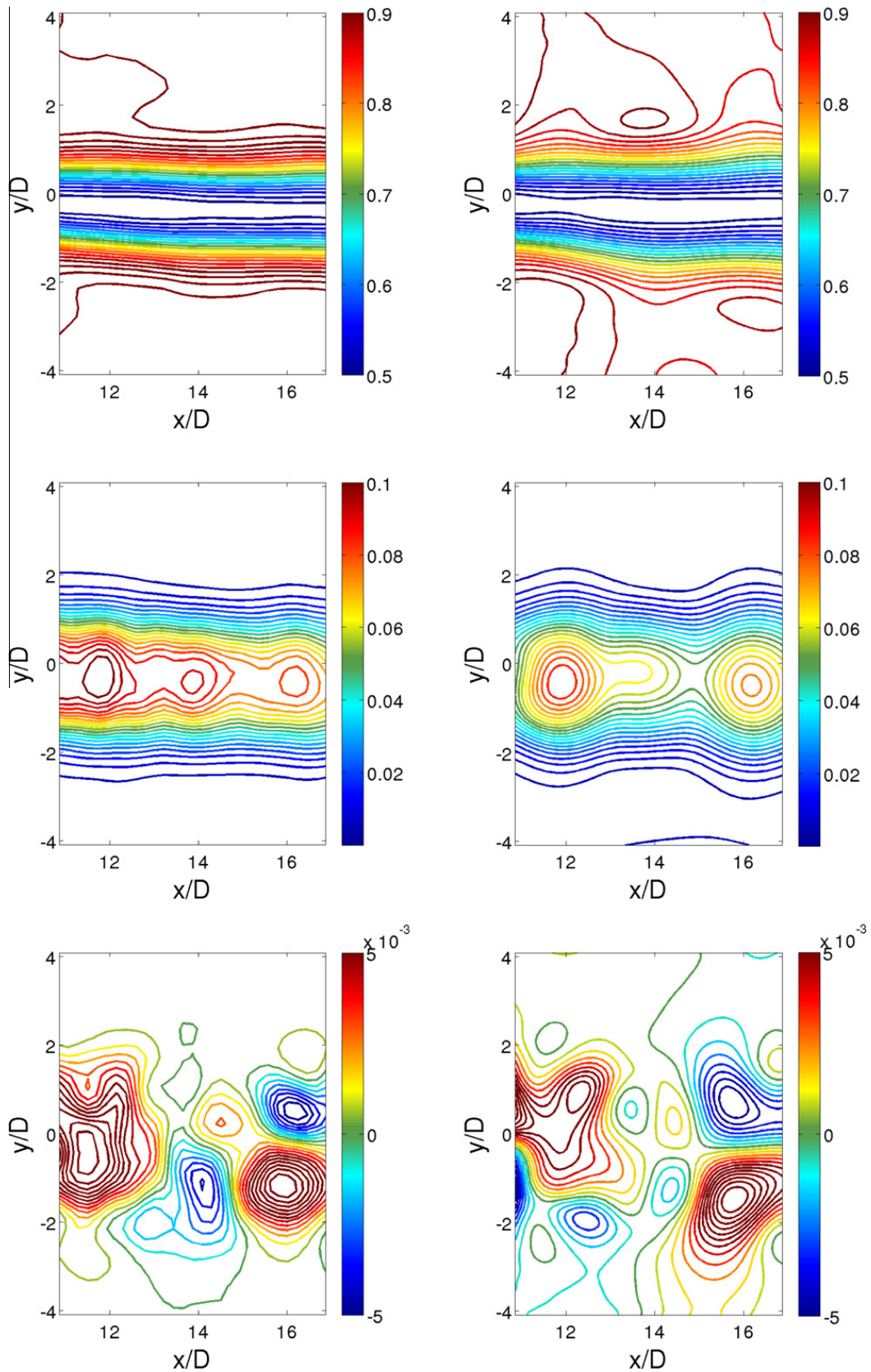
where  $\mathbf{x}_\sigma = \mathbf{x}_\sigma(\Delta X_{obs}, dx)$ ,  $t_\sigma = t_\sigma(t^*, \Delta t_{obs}, dt)$ . Despite this solution is strongly based on the Taylor's assumption of frozen turbulence, we will see that such hypothesis imposed only on the initial run allows us to face situations for which this hypothesis is not valid. This ability will be nevertheless paid by an increase of the number of iterations to reach convergence.

In order to assess the performance of the VDA method for the specification of inflow condition we have constituted a benchmark composed of DNS results and experimental PIV data. The numerical simulation and the experimental data concerns both a wake behind a circular cylinder at Reynolds 125 and 170 respectively (Reynolds number based on the free stream velocity  $U_\infty$ , the kinematic viscosity  $\nu$  and the diameter of the circular cylinder  $D$ ). For these Reynolds numbers, the transition to turbulence takes place in the wake. This regime is identified with the Bénard-von Karman vortex street and the largest scales remain bidimensional [13].

### 3.5.1. Numerical data assimilation

The VDA approach is now validated through a twin experiment in which the observation data are built from a numerical simulation of reference, a circular cylinder wake at Reynolds 125. Our computational domain size is  $L_x \times L_y = 20D \times 20D$  and the corresponding number of points is  $n_x \times n_y = 1801 \times 721$ . A constant flow is imposed at the entrance of this reference (ground truth state) domain, and the center of the cylinder is located at  $x_{cyl} = 8D$  downstream of the inflow. The simulation was carried out with a time step  $\Delta t = 0.012D/U_\infty$ . A sequence of 50 velocity fields with  $10\Delta t$  time steps between them has been kept to build a discrete sequence of flow motion snapshots. The spatial domain size has been reduced from the computational domain size to  $9D \times 9D$ . The inlet section of the assimilation domain has been chosen at  $22D$  from the center of the cylinder, i.e.  $(x_{in} - x_{cyl}) = 14D$ , in a way to satisfy Taylor's hypothesis by verifying  $\langle u'_y u'_y \rangle_{max} / U_m \approx 0.1$  at the inlet. To mimic a typical experimental situation, the spatial resolution has been reduced by a factor 5, yielding  $65 \times 64$  points for the assimilation domain in the streamwise and normal directions. In Fig. 3 is depicted the geometry of the two-dimensional problem considered. In order to properly adjust the observation data to the numerical grid, a buffer zone has been created to verify the specific lateral boundary conditions required by DNS by means of a ramp interpolation function introduced only at the beginning of each optimization iteration.

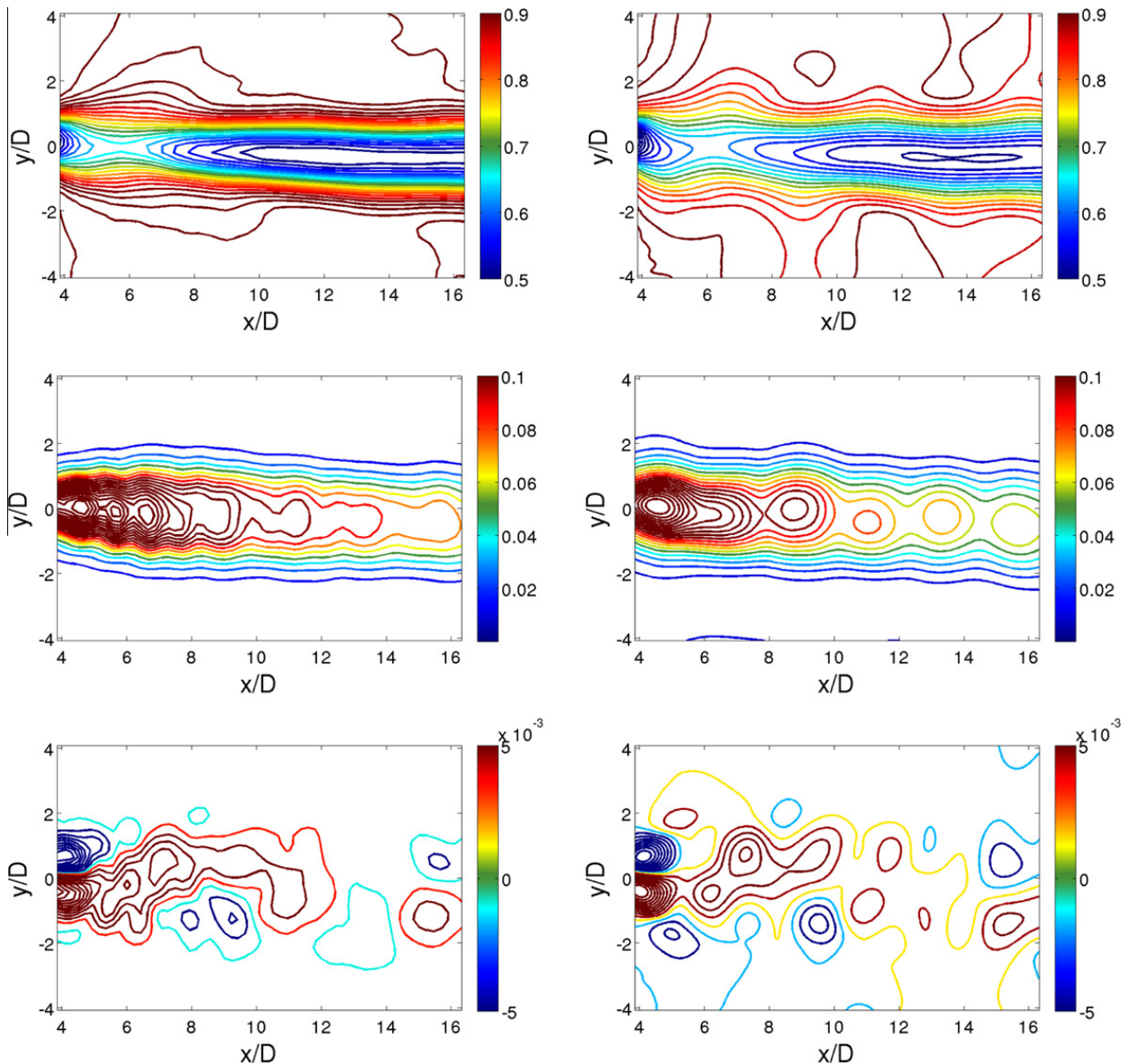
Fig. 4 presents the observation and model dynamics trajectories at two different stages of the assimilation process. The initial trajectory is generated from the model output by starting from the spatially interpolated observation at  $t = t_0$ , and using a temporally smoothed inflow condition constructed from the observations by applying Taylor's hypothesis.



**Fig. 10.** VDA cylinder wake experimental test A. Mean and fluctuating velocity field contours in the assimilation domain. Experimental observations (Left); Assimilated state (Right); Velocity modulus  $\langle u \rangle / U_\infty$  (Top); Transverse Reynolds normal stress  $\langle u'_y u'_y \rangle / U_\infty^2$  (Middle); Reynolds shear stress  $\langle u'_x u'_y \rangle / U_\infty^2$  (Bottom).

The assimilated trajectory is obtained from the best estimate for the initial and inflow condition found by L-BFGS algorithm. As it can be observed from these results, this trajectory fits almost perfectly the observation data. The inflow control





**Fig. 11.** VDA cylinder wake experimental test B. Mean and fluctuating velocity field contours in the assimilation domain. Experimental observations (Left); Assimilated state (Right); Velocity modulus  $\langle u \rangle / U_\infty$  (Top); Transverse Reynolds normal stress  $\langle u'_y u'_y \rangle / U_\infty^2$  (Middle); Reynolds shear stress  $\langle u'_x u'_y \rangle / U_\infty^2$  (Bottom).

variable enables to complete the missing elements of the initial DNS dynamics trajectory to explain the data. The good results obtained in this case were expected since the approach assimilate enough observations to describe the time evolution of physical phenomenon. Indeed,  $\Delta t_{obs}$  was equal to  $10\Delta t$  thus providing more than 25 observations during one vortex shedding. However in real world applications the constitution of a noise-free velocity field PIV sequence at high temporal resolution is completely unrealistic. We show in the following section results obtained with real world PIV measurements.

### 3.5.2. Experimental data assimilation

Time-resolved 2D PIV measurements, in the wake of circular cylinder at Reynolds 170, were carried out in one of the wind tunnels at Rennes research centre of Irstea. A sequence of 10 velocity fields with a temporal resolution of  $\Delta t_{obs} = 1.2D/U_\infty$  and with a temporal length of approximately 4 vortex shedding has been kept for building the snapshots sequence of the flow motion. Two assimilation tests were performed by changing the inlet location of the assimilation domain. During these tests the simulations were carried out with a time step equal to  $\Delta t = 0.01D/U_\infty$ . Table 3 summarizes the main spatial domain characteristics of these velocity fields. Fig. 5 presents the observation and DNS trajectories for both VDA tests at two different stages of the optimization cycle.

As it can be observed from these curves, the assimilation technique enables to modify inflow condition to recover with quite a good accuracy the trajectory corresponding to the observations. When the inlet of the assimilation domain is located downstream of the vortex formation region (VDA test A), initial guess stay close to the observation data and the optimization

algorithm requires 150 iterations to reach the assimilated trajectory. On the other hand, if the inlet belongs to the vortex formation region (VDA test *B*), Taylor's hypothesis does not hold anymore (the relative turbulence intensity is high) and the initial approximation is far from the data. This leads to an increase of the number of iterations required (400) to get the assimilated solution. To characterize the assimilation results further and more quantitatively, mean flow characteristics are compared. Fig. 6 presents the downstream evolution of the profiles of both the mean and fluctuating vorticity for VDA tests *A* and *B*.

It reveals that temporal mean properties of assimilated vorticity are in good agreement with experimental ones. To illustrate the vorticity fields estimated through the assimilation procedure, we plot in Fig. 7 two pairs of consecutive snapshots of the vorticity corresponding to the DNS and the PIV sequence for VDA test *B*.

Results indicate that despite observations with low spatial and temporal resolutions, the assimilated state exhibits fine scale details revealing vortex filaments. Furthermore, it should be noted that the proposed method provides a means to simulate a wake flow without simulating the flow around the obstacle.

To investigate the spatial structure of the flow simulated by DNS, mean and fluctuating velocity field contours are computed and compared to experimental results in Figs. 10 and 11. In spite of the low statistical convergence (only 1152 time steps are retained for the statistics computation in the case of the DNS, which corresponds to the time required for the flow to shed 4 vortices), a good agreement is obtained for velocity field level sets as well as velocity field shapes. Thus, even in the vortex formation region of the assimilation domain, characteristics of the spatial structure of wake flows, such as wake length and location of recirculation, are accurately reproduced by the simulation.

Temporal evolution of the initial (based on the Taylor's assumption) and optimal estimated velocity fields at the inlet section (Figs. 8 and 9) exhibits well organized regions both in the longitudinal and vertical components. The noisy character and low temporal resolution of the experimental data leads to high gradients in the generated velocity fields at the inlet section. Taking account of the fact that the covariance parameters involved in the functional (6) ensue from the assumption of an inexact dynamical law together with noisy measurements and inaccurate initial conditions, and considering the large uncertainty in the initial estimate for the inflow condition built from the PIV sequence, one finds that the increase in the model covariance associated to the inlet control space produces a solution closer to the expected value, by giving a smoothed representation of the inflow condition.

#### 4. Conclusions

In this work, a new method for generating inflow boundary conditions for DNS has been introduced. This approach relies on variational data assimilation principles and adjoint-based optimization. By modifying the initial and inflow condition of the system, the proposed method allows us to recover the state of an unknown function on the basis of a DNS model and noisy measurements.

In the proposed method, attention has been paid not only to the correct modeling of the spatiotemporal dynamics but also to the proper spatial adjustment of the experimental data to the numerical grid. In particular, a combination of interpolation and domain reconstruction techniques has been employed to deal with the specific lateral boundary conditions required by DNS. We described a number of improvements to reduce the memory needed by reverse-differentiated programs. In order to test this new approach, DNS of a 2D mixing layer flow and a wake flow behind a circular cylinder have been performed to provide a synthetic database. Both twin experiments allowed the validation of the solution methodology in a controlled scenario and demonstrated the feasibility and the reliability of the proposed method. The potential of the assimilation technique was also illustrated in a real world application. For this purpose, the database consisted of a sequence of noisy large scale PIV vorticity measurements. This first proof of concept shows that the approach might be of particular interest to perform computation of highly complex external flows, by considering inlet boundary conditions taken far downstream from the body in order to avoid the expensive computation of the near wall region.

To go further, it could be interesting to introduce dynamical laws related to the observed phenomenon at higher Reynolds numbers; in this sense, an attempt at combining an experimental database to a LES code is now being considered.

Even if free-slip lateral and convective outflow boundary conditions were considered in all the tests in this work, the proposed methodology could be extended to periodic, no-slip or open conditions depending on the flow configuration considered. Periodic lateral boundary conditions can be imposed directly via the spatial differentiation (derivative and interpolation) without specific care in the time advancement. In contrary, the use of Dirichlet conditions on the velocity (for no-slip or open conditions) needs to be defined according to the time advancement procedure. In practice, the explicit nature of the time discretization does not lead to particular problems for the adaptation to the adjoint equations generated by automatic differentiation in reverse mode. Furthermore, considering the outflow condition, the actual configuration using a purely convective flow assumption could likely be well improved by introducing the outflow boundary condition as a control parameter of the optimization problem.

Future works will also include extending the adjoint code capabilities to include three-dimensional effects in data assimilation system. As far as this is concerned, the DNS code (called *Incompact3d*) selected in this work has been recently adapted to massive parallel processing [5]. The benefit of computing the adjoint of the new parallel code is that the parallelisation strategy adopted maintains the original structure of the code since no changes are made in the computation of the spatial differentiations and in the Poisson solver. On the contrary, we note two important issues in the AD of message-passing par-

allel programs. The first issue is preserving the association between variables and their derivative vectors not only during memory allocation and floating-point operations, but also when data are sent via messages. If the variable and its associated derivative object are to be communicated using a single message, they must be packed together. If they are to be communicated via separate messages, an association between these messages must be maintained by using tags. The benefit of using packing is that it is simple to maintain the association, while one disadvantage is the overhead of packing and unpacking the data. Another disadvantage of packing is that it may be necessary to allocate space for the packed data, especially if the packing is explicit. The second issue is the differentiation of parallel reduction operations. A reduction operation is an operation that reduces  $N$  values residing on up to  $N$  processors to a single value using an associative operator. These reduction operations are elementary operations and as such, we cannot apply AD directly to the reduction operation, but instead must provide a rule for computing the partial derivatives and a mechanism for applying the chain rule.

The tuning and the balance of the corresponding covariance matrices are also intricate issues and we wished in this work to focus explicitly on the methodology.

## Acknowledgements

We wish to thank, Anthony Guibert, technical personnel of Irstea, for his excellent work in PIV experiments.

## Appendix A. Variational data assimilation

Variational data assimilation aims at recovering the values of control parameters leading to the lowest discrepancy between the measurements and the system's state variable. This objective can be formalized as the minimization of a cost functional,  $\mathcal{J} : U \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , defined as:

$$\mathcal{J}(u, \epsilon) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathcal{Y}(t) - \mathbb{H}(X(u(t), \epsilon, t))\|_R^2 dt + \frac{1}{2} \|\epsilon\|_{I_c}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbb{C}_u(u(t)) - u_0(t)\|_F^2 dt, \quad (\text{A.1})$$

where the control variables consists of an unknown perturbation of the initial condition around a known background state  $X_b$ :

$$X(x, 0) = \mathbb{C}_b X_b(x) + \epsilon(x)$$

and a dynamics parameter  $u(t)$  with an assumed value  $u_0(t)$ . This functional which can be interpreted as the energy function associated to the a posteriori distribution  $p(X|\mathcal{Y})$  in a Bayesian setup gathers three terms. The first term comes directly from the measurement equation:

$$\mathcal{Y}(x, t) = \mathbb{H}X(x, t) + \eta(x), \quad (\text{A.2})$$

with  $\eta$  a zero mean Gaussian random field. It is a quadratic best fit term between the observation and the state variable provided by the dynamics integration:

$$\partial_t X(x, t) + \mathbb{M}(X(x, t), u(t)) = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$X(x, t_0) = \mathbb{C}_b X_b(x) + \epsilon(x). \quad (\text{A.4})$$

The second term aims at specifying a low error on the initial condition whereas the third term enforces the control variable to be close to a given *a priori* value  $u_0$  of the control parameter. It is least squares best fit term similar to the observation model. It involves eventually a nonlinear/linear operator  $\mathbb{C}_u$ . This operator plays the same role as the background operator  $\mathbb{C}_b$  involved in the initial condition Eq. (A.4). Both of them encodes eventually an incomplete observability situation of the initial condition and the dynamics parameter control variable. The problem consists then to seek deviations of the lowest magnitude both between the *a priori* dynamic parameter value,  $u_0$ , and its current value and between the initial state and a given - or observed - initial condition. For a null *a priori* control value a control of lowest norm is sought. Formally it is assumed that  $u(t) \in U$ ,  $X(t) \in \mathcal{V}$  and  $\mathcal{Y}(t) \in \mathcal{O}$  are square integrable functions in Hilbert spaces identified to their dual. The norms correspond to the Mahalanobis distance defined from the inner products  $\langle R^{-1} \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{O}}$ ,  $\langle I_c^{-1} \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$  and  $\langle F^{-1} \cdot, \cdot \rangle_U$  of the measurements, the state variable and the control variable spaces respectively. They involve covariance tensors  $R$ ,  $I_c$  and  $F$  related to the measurement error, the error on the initial condition and the deviation between the control and its *a priori* value. In our applications, these covariance tensors have been defined as diagonal tensors (i.e. the noise is assumed to be uncorrelated in time and space). For example the observation covariance tensor has been set to a covariance tensor of the form:

$$R(x, t, x', t') = \sigma \delta(x - x') \delta(t - t') \quad (\text{A.5})$$

and similar expressions hold for  $F$  and  $I_c$ . In order to compute the gradient of this functional we assume that  $X(u(t), \epsilon; t)$  depends continuously on  $(u(t), \epsilon)$  and is differentiable with respect to the control variables  $u(t)$  and  $\epsilon$ , on the whole time range.

### A.1. Differentiation

Noting first that  $dX = (\partial X / \partial u) \delta u(t) + (\partial X / \partial \epsilon) \delta \epsilon$ , the differentiation of equations A.3 and A.4 in the direction  $(\delta u, \delta \epsilon)$  reads:

$$\partial_t dX + \partial_X \mathbb{M}(X, u(t)) dX + \partial_u \mathbb{M}(X, u(t)) \delta u(t) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.6})$$

$$dX(x, t_0) = \delta \epsilon(x), \quad (\text{A.7})$$

where  $\partial_X \mathbb{M}$  denotes the *linear tangent operators* defined by:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{M}(X + \beta X, u(t)) - \mathbb{M}(X, u(t))}{\beta} = \partial_X \mathbb{M}(X) dX. \quad (\text{A.8})$$

We can check immediately that for a linear operator the linear tangent operator is itself. The differentiation of the cost function (A.1) in the direction  $(\delta u, \delta \epsilon)$  (denoting  $U_T$  as the space of square integrable function on a spatio-temporal domain) reads then:

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}, \delta u \right\rangle_{U_T} = \int_{t_0}^{t_f} \langle C_u u(t) - u_0(t), (\partial_u C_u) \delta u(t) \rangle_F dt - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle \mathcal{Y}(t) - \mathbb{H}(X(t)), (\partial_X \mathbb{H}) \left( \frac{\partial X}{\partial u} \delta u(t) \right) \right\rangle_O dt, \quad (\text{A.9})$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon}, \delta \epsilon \right\rangle_V = \langle (X(x, t_0) - C_b X_b(x)), \delta \epsilon \rangle_{I_c} - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle \mathcal{Y}(t) - \mathbb{H}(X(t)), (\partial_X \mathbb{H}) \left( \frac{\partial X}{\partial \epsilon} \delta \epsilon \right) \right\rangle_O dt. \quad (\text{A.10})$$

Introducing the adjoint of the linear tangent operator  $(\partial_X \mathbb{H})^*$ , defined as:

$$\forall (x, y) \in (V, O), \langle (\partial_X \mathbb{H}) x, y \rangle_O = \langle x, (\partial_X \mathbb{H})^* y \rangle_V \quad (\text{A.11})$$

and similarly the adjoint  $(\partial_u C_u)^*$ , these two relations can be reformulated as:

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}, \delta u \right\rangle_{U_T} = \int_{t_0}^{t_f} \left\langle (\partial_u C_u)^* F^{-1} (C_u u(t) - u_0(t)), \delta u(t) \right\rangle_U dt - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1} \mathcal{Y}(t) - \mathbb{H}(X(t)), \frac{\partial X}{\partial u} \delta u(t) \right\rangle_V dt \quad (\text{A.12})$$

and

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon}, \delta \epsilon \right\rangle_V = \langle I_c^{-1} (X(x, t_0) - C_b X_b(x)), \delta \epsilon \rangle_V - \int_{t_0}^{t_f} \left\langle (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1} \mathcal{Y}(t) - \mathbb{H}(X(t)), \frac{\partial X}{\partial \epsilon} \delta \epsilon \right\rangle_V dt. \quad (\text{A.13})$$

Expressions A.12, A.13 provide the functional gradients in the directions  $(\delta u, \delta \epsilon_m)$ . We can remark from these expressions that a direct numerical evaluation of these gradients is in practice completely unfeasible. As a matter of fact, such an evaluation would require to compute perturbations of the state variable along all the components of the control variables  $(\delta u, \delta \epsilon)$  – i.e. integrate the dynamical model for all perturbed components of the control variables, which is computationally completely unrealistic.

## A.2. Adjoint model

An elegant solution of this problem consists in relying on an adjoint formulation. To that end, the integration over the range  $[t_0, t_f]$  of the inner product between an adjoint variable  $\lambda \in V_T$  and relation (A.6) is performed:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\langle \frac{\partial dX}{\partial t}(t), \lambda(t) \right\rangle_V dt + \int_{t_0}^{t_f} \langle (\partial_X \mathbb{M}) dX(t), \lambda(t) \rangle_V dt + \int_{t_0}^{t_f} \langle (\partial_u \mathbb{M}) \delta u(t), \lambda(t) \rangle_V dt = 0. \quad (\text{A.14})$$

An integration by parts of the first term yields:

$$- \int_{t_0}^{t_f} \left\langle - \frac{\partial \lambda}{\partial t}(t) + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda(t), dX(t) \right\rangle_V dt = \langle \lambda(t_f), dX(t_f) \rangle_V - \langle \lambda(t_0), dX(t_0) \rangle_V + \int_{t_0}^{t_f} \langle \delta u(t), (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda(t) \rangle_U dt, \quad (\text{A.15})$$

where the adjoint of the tangent linear operators  $(\partial_X \mathbb{M})^* : V \rightarrow V$  and  $(\partial_u \mathbb{M})^* : V \rightarrow U$  have been introduced. At this point no particular assumptions nor constraints have been imposed on the adjoint variable. However, we are free to particularize the set of adjoint variables of interest in setting a particular evolution equation or a given set of boundary conditions allowing simplifying the computation of the functional gradient. As we will see it, imposing that the adjoint variable  $\lambda$  is solution of the system:

$$\begin{cases} -\partial_t \lambda(t) + (\partial_X \mathbb{M})^* \lambda(t) = (\partial_X \mathbb{H})^* R^{-1} (\mathcal{Y} - \mathbb{H}(X(t))), \\ \lambda(t_f) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

will provide us a simple and accessible solution for the functional gradient.

As a matter of fact, injecting this relation into Eq. (A.15) with  $dX(t_0) = \delta \epsilon$  and  $dX = (\partial X / \partial u) \delta u(t) + (\partial X / \partial \epsilon) \delta \epsilon$  allows identifying the right hand second terms of the functional gradients A.12, A.13 and we get



- |  |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Set an initial condition: <math>X(t_0) = X_0</math></li> <li>2. From <math>X(t_0)</math>, compute <math>X(t)</math> with the forward integration of relation (A.3)</li> <li>3. Compute the adjoint variable <math>\lambda(t)</math> with the backward integration of relation (A.16)</li> <li>4. Update the initial value <math>X(t_0)</math> and the parameter model <math>u</math> with (A.18)</li> <li>5. Loop to step 2 until convergence</li> </ol> |
|--|

Fig. A.12. Schematic representation of the variational data-assimilation algorithm.

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon}, \delta \epsilon \right\rangle_{\mathcal{V}} = -\langle \lambda(t_0), \delta \epsilon \rangle_{\mathcal{V}} + \left\langle I_c^{-1}(X(t_0) - C_b X_b), \delta \epsilon \right\rangle_{\mathcal{V}},$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}, \delta u \right\rangle_{U_T} = \int_{t_0}^{t_f} \left\langle \delta u(t), (\partial_u C_u)^* F^{-1}(C_u u(t) - u_0) + (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda(t) \right\rangle_U dt = \left\langle (\partial_u C_u)^* F^{-1}(C_u u - u_0) + (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda, \delta u \right\rangle_{U_T}.$$

From these relations, one can now readily identify the two components of the cost function derivatives with respect to the control variables:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \epsilon} &= -\lambda(t_0) + I_c^{-1}(X(t_0) - C_b X_b), \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u} &= (\partial_u C_u)^* F^{-1}(C_u u - u_0) + (\partial_u \mathbb{M})^* \lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

The partial derivatives of  $\mathcal{J}$  are now simple to compute when the adjoint variable  $\lambda$  is available. The knowledge of the functional gradient enables then to define updating rules for the control variables from iterative optimization procedures. A quasi-Newton minimization process consists for instance of:

$$\begin{aligned} X_{n+1}(t_0) &= X_n(t_0) - \alpha_n \tilde{H}_{X_n(t_0)}^{-1} (I_c^{-1}(X_n(t_0) - C_b X_b) - \lambda(t_0)), \\ u_{n+1} &= u_n - \alpha_n \tilde{H}_{u_n}^{-1} ((\partial_{u_n} \mathbb{M})^* \lambda + (\partial_u C_u)^* F^{-1}(C_u u_n - u_0)), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

where  $\tilde{H}_{x_n}^{-1}$  denotes an approximation of the Hessian inverse computed from the functional gradient with respect to variable  $x_n$ ; the constant  $\alpha_n$  is chosen so that to respect Wolfe conditions. The adjoint variable is accessible through a forward integration of the state dynamics Appendices A.3 and A.4 and a backward integration of the adjoint variable dynamics (A.16). Let us point out that considering a final condition for the state variable (through a similar cost function term as for the initial condition) would change the null initial condition of the adjoint dynamics into a term similar to the one involved in the derivative with respect to the initial condition control variable. The overall optimal control process is schematically summarized in Fig. A.12.

## References

- [1] P. Druault, S. Lardeau, J.P. Bonnet, F. Coiffet, J. Delville, E. Lamballais, J.F. Largeau, L. Perret, Generation of three-dimensional turbulent inlet conditions for large-eddy simulation, *AIAA J.* 42 (2004) 447.
- [2] A. Griewank, *Evaluating Derivatives: Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*, Frontiers in Applied Mathematics, SIAM, 2000.
- [3] L. Hascoet, R. Greborio, V. Pascual, Computing adjoints by automatic differentiation with tapenade, Research report, INRIA, 2003.
- [4] A. Keating, U. Piomelli, E. Balaras, H.J. Kaltenbach, A priori and a posteriori tests of inflow conditions for large eddy simulation, *Phys. Fluids* 16 (2004) 4696.
- [5] S. Laizet, N. Li, Incompact3d: a powerful tool to tackle turbulence problems with up to  $O(10^5)$  computational cores, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 67 (11) (2011) 1735–1757.
- [6] S. Laizet, E. Lamballais, High-order compact schemes for incompressible flows: a simple and efficient method with the quasi-spectral accuracy, *J. Comput. Phys.* 228 (16) (2009) 5989–6015.
- [7] F.X. Le-Dimet, O. Talagrand, Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects, *Tellus* 38 (A) (1986) 97–110.
- [8] J.L. Lions, *Optimal Control of Systems Governed by PDEs*, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [9] D. Liu, J. Nocedal, On the limited memory BFGS method for large scale optimization, *Math. Program., Ser. B* 45 (3) (1989) 503–528.
- [10] T.S. Lund, X. Wu, K.D. Squires, Generation of inflow data for spatially-developing boundary layer simulations, *J. Comput. Phys.* 140 (1998) 233.
- [11] N. Papadakis, E. Memin, Variational assimilation of fluid motion from image sequences, *SIAM J. Imaging Sci.* 1 (4) (2008) 343–363.
- [12] L. Perret, J. Delville, R. Manceau, J.P. Bonnet, Turbulent inflow conditions for large-eddy simulation based on low-order empirical model, *Phys. Fluids* 20 (2008) 075107.
- [13] M. Zdravkovich, *Flow Around Circular Cylinder - Volume 1: Fundamentals*, Oxford University Press Inc, New York, United States, 1997.



# BIBLIOGRAPHIE

- R.J. Adrian. Particle-image techniques for experimental fluid mechanics. *Annu. Rev. Fluid mech.*, 23 :261–304, 1991. (Cité pages 53 et 59.)
- AFNOR. *Ergonomie des ambiances thermiques - Détermination analytique et interprétation du confort thermique par le calcul des indices PMV et PPD et par des critères de confort thermique local*. NF EN ISO 7730, mars 2006. (Cité page 46.)
- C. Allery. *Contribution à l'identification des bifurcations et à l'étude des écoulements fluides par des systèmes dynamiques d'ordre faible (POD)*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2002. (Cité page 24.)
- L. Alvarez, C. A. Castaño, M. García, K. Krissian, L. Mazorra, A. Salgado, et J. Sánchez. A new energy-based method for 3d motion estimation of incompressible piv flows. *Computer Vision and Image Understanding*, 113 (7) :802–810, 2009. (Cité page 65.)
- E. Arquis et J.P. Caltagirone. Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d'une interface milieu fluide-milieu poreux : application à la convection naturelle. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 299(II) :1–4, 1984. (Cité page 25.)
- N. Aubry, P. Holmes, J. Lumley, et E. Stone. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 192 :115–173, 1988. (Cité page 24.)
- M. Aydin et H.J. Leutheusser. Very low velocity calibration and application of hot-wire probes. *DISA Information*, 25 :17–18, 1980. (Cité page 43.)
- S. Baker et I. Matthews. Lucas-Kanade 20 years on : a unifying framework. *Int J Comput Vis*, 56(3) :221–255, 2004. (Cité page 59.)
- P. Beaudan et P. Moin. Numerical experiments on the flow past a circular cylinder at sub-critical Reynolds number. Ctr annual research briefs, NASA Ames, Stanford University, 1994. (Cité page 36.)
- J. Bergen, P. Anadan, K. Anna, et R. Hingorani. Hierarchical model-based motion estimation. Dans G. Sandini, éditeur, *Proc. Europ. conf. Computer Vision*, pages 237–252. Springer-Verlag, 1992. (Cité page 64.)
- G. Berkooz, P. Holmes, et J. Lumley. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 25 :539–575, 1993. (Cité page 24.)

- M. Black et P. Anadan. The robust estimation of multiple motions : parametric and piecewise-smooth flow fields. *Comput. Vis. Image Underst.*, 63 (1) :75–104, 1996. (Cité page 62.)
- M. Black et A. Rangarajan. On the unification of line processes, outlier rejection, and robust statistics with applications in early vision. *Int. J. Computer Vision*, 19(1) :75–104, 1994. (Cité page 62.)
- M. Boquet. Introduction to the principles and methods of data assimilation. M2 OACOS/WAPE/ParisTech lecture notes, 2014-2015. (Cité pages 78 et 83.)
- C. Braud. *Etude de la dynamique d'un écoulement à cisaillements croisés : interaction couche de mélange - sillage*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2003. (Cité pages 15, 24 et 33.)
- C. Braud, D. Heitz, G. Arroyo, L. Perret, J. Delville, et J.P. Bonnet. Low-dimensional analysis, using pod, for two mixing layer-wake interactions. *International journal of heat and fluid flow*, 25 :351–363, 2004a. (Cité pages 19 et 33.)
- C. Braud, D. Heitz, P. Braud, G. Arroyo, et J. Delville. Analysis of the wake-mixing-layer interaction using multiple plane PIV and 3D classical POD. *Exp. Fluids*, 37(1) :95–104, 2004b. (Cité pages 19, 22, 23 et 24.)
- T. Brox, A. Bruhn, N. Papenbergh, et J. Weickert. High accuracy optical flow estimation based on a theory for warping. Dans G. Sandini, éditeur, *European Conference on Computer Vision (ECCV)*, pages 25–36, Prague, Czech Republic, May 2004. (Cité page 62.)
- A. Bruhn, J. Weickert, et C. Schnörr. Lucas/Kanade Meets Horn/Schunck : Combining Local and Global Optic Flow Methods. *International Journal of Computer Vision*, 61(3) :211–231, 2005. (Cité page 61.)
- H.H. Bruun, B. Fanar, et I. Watson. A swinging arm calibration method for low velocity hot-wire probe calibration. *Exp. Fluids*, 7 :400–404, 1989. (Cité page 43.)
- C. Cassisa, S. Simoens, V. Prinnet, et L. Shao. Subgrid scale formulation of optical flow for the study of turbulent flow. *Exp Fluids*, 51 :739–1754, 2011. (Cité page 57.)
- F. Champagnat, A. Plyer, G. Le Besnerais, B. Leclaire, S. Davoust, et Y. Le Sant. Fast and accurate piv computation using highly parallel iterative correlation maximization. *Exp Fluids*, 50 :1169–1182, 2011. (Cité page 59.)
- R. Chevray et N.K. Tutu. Simultaneous measurements of temperature and velocity in heated flows. *Review of Scientific Instruments*, 43 :1417–1421, 1972. (Cité page 47.)
- KT Christensen et F. Scarano. Uncertainty quantification in particle image velocimetry. *Meas. Sci. Technol.*, 26(7) :070201, 2015. (Cité page 74.)
- C.H. Colburn, J.B. Cessna, et T.R. Bewley. State estimation in wall-bounded flow systems. Part 3. The ensemble Kalman filter. *J. Fluid Mech.*, 682 : 289–303, 2011. (Cité page 84.)

- B. Combès, D. Heitz, A. Guibert, et E. Mémin. A particle filter to reconstruct a free-surface flow from a depth camera. *Fluid Dynamics Research*, 47(5) :25, 2015. (Cité pages 83, 84, 85 et 86.)
- L. Cordier. *Etude des systèmes dynamiques basés sur la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). Application à la couche de mélange turbulente et à l'écoulement entre deux disques contra-rotatifs*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1996. (Cité page 24.)
- T. Corpetti, D. Heitz, G. Arroyo, E. Mémin, et A. Santa Cruz. Fluid experimental flow estimation based on an optical-flow scheme. *Exp. Fluids*, 40(1) :80–97, 2006. (Cité pages 56, 57, 62, 67, 68 et 84.)
- T. Corpetti et E. Mémin. Stochastic uncertainty models for the luminance consistency assumption. *IEEE Transaction on Image Processing*, 21(2) : 481–493, January 2012. (Cité pages 58, 59 et 76.)
- T. Corpetti, E. Mémin, et P. Pérez. Dense estimation of fluid flows. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(3) :365–380, March 2002. (Cité pages 56, 57, 67 et 69.)
- S. Corrsin. Extended applications of hot-wire anemometer. *Rev. Sci. Instrum.*, 18(7) :469–471, 1947. (Cité page 47.)
- S. Corrsin et M.S. Uberoi. Further experiments on the flow and heat transfer in a heated turbulent air jet. Rapport technique, NACA Technical Notes, 1949. (Cité page 47.)
- A. Cuzol, P. Hellier, et E. Mémin. A low dimensional fluid motion estimator. *International Journal of Computer Vision*, 75(3) :329–349, 2007. (Cité pages 61, 73, 83 et 84.)
- A. Cuzol et E. Mémin. A stochastic filtering technique for fluid flows velocity fields tracking. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 31(7) :1278–1293, 2009. (Cité pages 73, 83 et 84.)
- J. D'Adamo, N. Papadakis, E. Mémin, et G. Artana. Variational assimilation of POD low-order dynamical systems. *J. Turb.*, 8(9) :1–22, 2007. (Cité page 84.)
- J. Delville. Characterization of the organization in shear layers via the proper orthogonal decomposition. *App. Scient. Research*, 53 :263–281, 1994. (Cité page 21.)
- P. Dérian. *Wavelets Fluid Motion Estimation*. PhD thesis, November 2012. (Cité page 69.)
- P. Dérian, P. Héas, C. Herzet, et E. Mémin. Wavelets to reconstruct turbulence multifractals from experimental image sequences. Dans *7th Int. Symp. on Turbulence and Shear Flow Phenomena, TSFP-7*, Ottawa, Canada, July 2011. (Cité page 71.)
- P. Dérian, P. Héas, C. Herzet, et E. Mémin. Wavelets and optical flow motion estimation. *Numerical Mathematics : Theory, Methods and Applications*, 6(1) :116–137, January 2013. (Cité page 66.)

- P. Druault, S. Lardeau, J.-P. Bonnet, F. Coiffet, J. Delville, E. Lamballais, J.-F. Largeau, et L. Perret. Generation of three-dimensional turbulent inlet conditions for Large-Eddy Simulation. *AIAA J.*, 42 :447, 2004. (Cité pages 83 et 87.)
- W. Dunn et S. Tavoularis. The use of curved screens for generating uniform shear at low reynolds numbers. *Exp. Fluids*, 42 :281–290, 2007. (Cité page 31.)
- J.W. Elder. Steady flow through non uniform gauzes of arbitrary shape. *J. Fluid Mech.*, 5 :355–368, 1959. (Cité pages 30, 31 et 32.)
- G. Evensen. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. 1994. (Cité page 81.)
- G. Evensen. The ensemble kalman filter : Theoretical formulation and practical implementation. *Ocean dynamics*, 53(4) :343–367, 2003. (Cité page 81.)
- E.A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi, et J. Mohd-Yosuf. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *J. Comp. Phys.*, 161 :35–60, 2000. (Cité page 26.)
- U. Fey, M. König, et H. Eckelmann. A new Strouhal-Reynolds-number relationship for the circular cylinder in the range  $47 < Re < 2 \times 10^5$ . *Phys. Fluids*, 1 :189–192, 1998. (Cité page 18.)
- H.E. Fiedler, C. Nayeri, R. Spieweg, et C.O. Paschereit. Three-dimensional mixing layers and their relatives. *Exp. Thermal and Fluid Science*, 16 :3–21, 1998. (Cité pages 18 et 38.)
- D. Fortun et C. Kervrann. Semi-local variational optical flow estimation. Dans *IEEE International Conference on Image Processing, ICIP 2012, Orlando, FL, United States*, 2012. (Cité pages 61 et 71.)
- J.-M. Foucaut, J. Carlier, et M. Stanislas. PIV optimization for the study of turbulent flow using spectral analysis. *Meas. Sci. Technol*, 15 :1046–1058, 2004. (Cité pages 62 et 68.)
- D.P.G. Foures, N. Dovetta, D. Sipp, et P.J. Schmid. A data-assimilation method for Reynolds-averaged Navier–Stokes-driven mean flow reconstruction. *J. Fluid Mech.*, 759 :404–431, 2014. (Cité page 84.)
- U. Frisch. *Turbulence : the legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995. (Cité pages 69 et 70.)
- D. Gerich et H. Eckelmann. The influence of end plates and free ends on the shedding frequency of circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 122 :109–121, 1982. (Cité page 18.)
- J.C. Gibbings. The pyramid gauze diffuser. *Ingenieur-Archiv*, 42 :225–233, 1973. (Cité pages 30 et 31.)

- D. Goldstein, R. Handler, et L. Sirovich. Modeling a no-slip flow boundary with an external force field. *J. Comp. Phys.*, 105 :354–366, 1993. (Cité page 25.)
- A. Gronskis, D. Heitz, et E. Mémin. Inflow and initial conditions for direct numerical simulation based on adjoint data assimilation. *J. Comp. Phys.*, 242(6) :480–497, 2013a. (Cité pages 84, 87, 88 et 89.)
- A. Gronskis, C. Robinson, D. Heitz, et E. Mémin. A 4DVar PIV-data assimilation for flow spatio-temporal reconstruction. Dans *10th International Symposium on Particle Image Velocimetry - PIV13*, Delft, The Netherlands, July 2013b. (Cité pages 84, 88 et 89.)
- M.Z. Guellouz et S. Tavoularis. A simple pendulum technique for the calibration of hot-wire anemometers over low-velocity ranges. *Exp. Fluids*, 18 :199–203, 1995. (Cité page 43.)
- L. Gui et W. Merzkirch. A method of tracking ensemble of particle images. *Exp Fluids*, 21 :465–468, 1996. (Cité page 59.)
- H.W. Haussecker et D.J. Fleet. Computing optical flow with physical models of brightness variations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23 :661–673, 2001. (Cité page 57.)
- R.C. Haw et J.F. Foss. A facility for low speed calibrations. Dans ASME-FED, éditeur, *Symposium on the heuristics of thermal anemometry*, volume 97, pages 25–33, 1990. (Cité page 43.)
- P. Héas, D. Heitz, et E. Mémin. Multiscale regularization based on turbulent kinetic energy decay for piv estimations with high spatial resolution. Dans *8th Int. Symposium on Particle Image Velocimetry (PIV09)*, Melbourne, Australia, August 2009a. (Cité pages 69 et 70.)
- P. Héas, C. Herzet, E. Mémin, D. Heitz, et P.D. Mininni. Bayesian estimation of turbulent motion. *IEEE transactions on Pattern Analysis And Machine Learning*, 35(6) :1343–1356, 2013. (Cité pages 61, 69 et 70.)
- P. Héas, E. Mémin, D. Heitz, et P. Mininni. Bayesian selection of scaling laws for motion modeling in images. Dans *International Conference on Computer Vision (ICCV)*, Kyoto, Japan, 2009b. (Cité page 69.)
- P. Héas, E. Mémin, D. Heitz, et P. Mininni. Power laws and inverse motion modeling : application to turbulence measurements from satellite images. *Tellus Series A : Dynamic Meteorology and Oceanography*, 64 (10962), 2012. (Cité pages 61, 69, 70 et 75.)
- P. Héas, E. Mémin, N. Papadakis, et A. Szantai. Layered estimation of atmospheric mesoscale dynamics from satellite imagery. *IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing*, 45(12) :4087–4104, 2007. (Cité pages 62, 63, 65 et 72.)
- D. Heitz. *Etude expérimentale du sillage d'un barreau cylindrique se développant dans une couche de mélange plane turbulente*. PhD thesis, Université de Poitiers, Janvier 1999. (Cité pages 17, 18, 19, 35 et 42.)



- D. Heitz, G. Arroyo, P. Marchal, J. Delville, J.H. Garem, et J.P. Bonnet. Advances in Turbulence VII. Chapitre Turbulent plane mixing layer perturbed by the wake of a circular cylinder, pages 309–312. Kluwer, 1997. (Cité page 18.)
- D. Heitz, J. Carlier, et G. Arroyo. Final report on the evaluation of the tasks of the workpackage 2 - FLUID project FET Open. Rapport technique, Cemagref, 2008b. (Cité page 61.)
- D. Heitz et J. Delville. Procédé, dispositif et installation d'étalonnage d'un capteur de mesures de données représentatives de la vitesse d'écoulement d'un flux de fluide. Brevet FR 2 985 030 - A1, 2011. (Cité page 43.)
- D. Heitz, P. Héas, et C. Herzet. Incertitudes de mesures PIV par flot optique. Dans *FLUVISU 11*, Lille, France, November 2011a. (Cité pages 74 et 75.)
- D. Heitz, P. Héas, et E. Mémin. Apport des modèles de lois de puissance pour l'estimation du mouvement turbulent en piv. Dans *20ème congrès français de mécanique*, Besançon, France, 2011b. (Cité pages 70 et 71.)
- D. Heitz, P. Héas, E. Mémin, et J. Carlier. Dynamic consistent correlation-variational approach for robust optical flow estimation. *Exp. Fluids*, 45 (4) :595–608, 2008. (Cité pages 64, 65, 66, 72 et 73.)
- D. Heitz, E. Mémin, et C. Schnörr. Variational fluid flow measurements from image sequences : synopsis and perspectives. *Exp. Fluids*, 48(3) : 369–393, 2010. (Cité pages 61, 68, 73 et 84.)
- D. Heitz, M. Ndoye, P. Loisel, C. Fourment, et J. Delville. Développement de la thermoanémométrie à basse vitesse. Dans *18<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*, Grenoble, 27-31 Août 2007. (Cité page 47.)
- B.K.P. Horn et B.G. Schunck. Determining optical flow. *Artif. Intell.*, 17 : 185–203, 1981. (Cité pages 53, 60, 62, 67, 71 et 75.)
- H. Hu, T. Saga, T. Kobayashi, N. Taniguchi, et M. Yasuki. Dual-plane stereoscopic particle image velocimetry : system set-up and its application on a lobed jet mixing flow. *Exp. Fluids*, 31 :277–293, 2001. (Cité page 20.)
- P. Huber. *Robust Statistics*. John Wiley & Sons, 1981. (Cité page 62.)
- ISO2008. *Evaluation of Measurement Data-Supplement 1 to the 'Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement' -Propagation of distributions using a MC method*. International Organization for Standardization, Switzerland. (Cité pages 46 et 74.)
- ISO/IEC-Guide98-3 :2008(E). *Guide 98-3 Uncertainty of Measurement-Part 3. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM :1995)*. International Organization for Standardization, Switzerland. (Cité pages 45 et 74.)
- L. Jacquin, O. Leuchter, et P. Geffroy. Use of quadripole hot-wire probes for studying turbulent flows. *La Recherche Aérospatiale*, 6 :427–444, 1995. (Cité page 51.)

- S. Kadri Harouna, P. Dérian, P. Héas, et E. Mémin. Divergence-free wavelets and high order regularization. *International Journal of Computer Vision*, 103(1) :80–99, May 2013. (Cité pages 66, 68 et 69.)
- C. Kähler et J. Kompenhans. Multiple plane stereo PIV, technical realization and fluid-mechanical significance. Dans *3<sup>rd</sup> Int. Workshop on PIV*, Santa Barbara - USA, 1999. (Cité page 20.)
- C. Kähler, M. Stanislas, et T. Dewhurst. Investigation of wall bounded flows by means of multiple plane stereo PIV. Dans *10<sup>th</sup> Int. Symp. on appl. of laser tech. to fluid mech.*, Lisbon - Portugal, 2000. (Cité page 20.)
- R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82(1) :35–45, 1960. (Cité page 80.)
- U. Karnik et S. Tavoularis. Generation and manipulation of uniform shear with use of screens. *Exp. Fluids*, 5 :247–254, 1987. (Cité page 29.)
- N.K-R. Kevlahan et J-M. Ghidaglia. Computation of turbulent flow past an array of cylinders using a spectral method with Brinkman penalization. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 20 :330–350, 2001. (Cité page 26.)
- L.V. King. On the convection of heat small cylinders in a stream of fluid : determination of the convection constants of small platinum wires, with applications to hot-wire anemometry. *Proc. R. Soc. Lond.*, 214A(14) :373–432, 1914. (Cité page 40.)
- A. G. Kravchenko et P. Moin. Numerical studies of flow over a circular cylinder at  $Re=3900$ . *Phys. Fluids*, 12 :403, 2000. (Cité page 36.)
- S. Laizet et E. Lamballais. High-order compact schemes for incompressible flows : a simple and efficient method with the quasi-spectral accuracy. *J. Comp. Phys.*, 228-15 :5989–6015, 2009. (Cité page 34.)
- E. Lamballais et J. Silvestrini. Direct numerical simulation of interactions between a mixing layer and a wake around a cylinder. *J. of Turb.*, 3 :1–21, 2002. (Cité pages 18, 19, 25 et 26.)
- E.M. Laws et J.L. Livesey. Flow through screens. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 10 :247–66, 1978. (Cité page 28.)
- F.-X. Le-Dimet et O. Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus*, 38(A) :97–110, 1986. (Cité page 79.)
- F. Le Gland, V. Monbet, et V.-D. Tran. Large Sample Asymptotics for the Ensemble Kalman Filter. Research Report RR-7014, INRIA, August 2009. (Cité page 82.)
- M. Lemke et J. Sesterhenn. Adjoint based pressure determination from piv-data - validation with synthetic piv measurements. Dans *10th International Symposium On Particle Image Velocimetry - PIV13*, Delft, The Netherlands, July 2013. (Cité page 84.)

- C. Lewis et M. Gharib. An exploration of the wake three dimensionalities caused by a local discontinuity in cylinder diameter. *Phys. Fluids*, 4(1) : 104–117, 1992. (Cité page 19.)
- J.H. Lienhard et K.N. Helland. An experimental analysis of fluctuating temperature measurements using hot-wires at different overheats. *Exp. Fluids*, 7 :265–270, 1989. (Cité page 47.)
- J.L. Lions. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1971. (Cité page 79.)
- C. Liu, Q. Xiao, et B. Wang. An Ensemble-Based Four-Dimensional Variational Data Assimilation Scheme. Part I : Technical Formulation and Preliminary Test. *Mon. Wea. Rev.*, 136(9) :3363–3373, 2008. (Cité page 83.)
- T. Liu et L. Shen. Fluid flow and optical flow. *J. Fluid Mech.*, 614 :253–291, 2008. (Cité pages 55 et 56.)
- L. Lourenco, M. Alkisar, et R. Sen. Measurement of the velocity field spectra by means of PIV. Dans *9<sup>th</sup> Int. Symp. on the Appl. of laser tech. to Fluid Mech.*, Lisbon - Portugal, 1998. (Cité page 20.)
- L. M. Lourenco et C. Shih. Characteristics of the plane turbulent near wake of a circular cylinder, a particle image velocimetry study. published in Beaudan and Moin (1994), 1994. (Cité page 36.)
- B. Lucas et T. Kanade. An iterative image registration technique with an application to stereovision. Dans *Int. Joint Conf. on Artificial Intel. (IJCAI)*, pages 674–679, 1981. (Cité pages 53, 59 et 62.)
- J. Lumley. The structures of inhomogeneous turbulent flow. Dans A.M. Yaglom et V.I Tatarski, éditeurs, *Atmospheric turbulence and radio wave propagation*, pages 221–227. Nauka, Moscow, 1967. (Cité pages 20 et 21.)
- X. Ma et G. Karniadakis. A low-dimensional model for simulating three-dimensional cylinder flow. *J. Fluid Mech.*, 458 :181–190, 2002. (Cité page 24.)
- K. Mahesh, G. Constantinescu, et P. Moin. A numerical method for large-eddy simulation in complex geometries. *J. Comp. Phys.*, 197 :215, 2004. (Cité page 36.)
- N. N. Mansour, J. H. Ferziger, et W. C. Reynolds. Large-eddy simulation of a turbulent mixing layer. Rapport technique, Report TF-11, Thermosciences Div., Dept. of Mech. Eng., Stanford University, 1978. (Cité page 72.)
- D.J. Maull. The wake characteristics of a bluff body in a shear flow. Dans *AGARD-CP-48 The aerodynamics of atmospheric shear flow Conference proceedings*, numéro 16, pages 1–13, Munich, Germany, 15-17 Septembre 1969. NATO Science and Technology Organization. (Cité page 31.)
- E. Mémin. Fluid flow dynamics under location uncertainty. *Geophysical Astrophysical Fluid Dynamics*, 108(2) :119–146, 2014. (Cité page 76.)

- E. Mémin et P. Perez. Dense estimation and object-based segmentation of the optical flow with robust techniques. *IEEE Trans. Image Process.*, 7(5) : 703–719, 1998. (Cité pages 57, 62 et 64.)
- O. Métais et M. Lesieur. Spectral large-eddy simulation of isotropic and stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, 239 :157, 1992. (Cité page 35.)
- R. Mittal et S. Balachandar. On the inclusion of three-dimensional effects in simulations of two-dimensional bluff-body wake flows. Dans *Proc. of ASME Fluids engineering division summer meeting*, Vancouver, British Columbia, Canada, 1992. (Cité page 27.)
- J. Mohd-Yusof. Development of immersed boundary methods for complex geometries. Rapport technique, CTR Annual Research Briefs, NASA Ames/Stanford University, 1997. (Cité pages 25 et 26.)
- V. Mons, J.-C. Chassaing, T. Gomez, et P. Sagaut. Is isotropic turbulence decay governed by asymptotic behavior of large scales? An eddy-damped quasi-normal Markovian-based data assimilation study. *Phys. Fluids*, 26 (11) :115105, 2014. (Cité page 84.)
- T. Ndiaye. *Couches de mélange entre une vitesse uniforme et un gradient de vitesse*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2009. (Cité pages 15, 19, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 38 et 46.)
- M. Ndoye. *Anémométrie fil chaud à température variable : application à l'étude d'une couche de mélange anisotherme*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2008. (Cité page 39.)
- M. Ndoye, J. Delville, D. Heitz, et G. Arroyo. Parameterizable constant temperature anemometer : a new method for the analysis of velocity-temperature coupling in turbulent heat transfer. *Meas. Sci. Technol.*, 21 : 12, 2010. (Cité pages 41, 46, 49, 50 et 51.)
- D.R. Neal, A. Sciacchitano, B.L. Smith, et F. Scarano. Collaborative framework for PIV uncertainty quantification : the experimental database. *Meas. Sci. Technol.*, 26 :074003, 2015. (Cité page 74.)
- H. Nobach et E. Bodenschatz. Limitations of accuracy in PIV due to individual variations of particle image intensities. *Exp. in Fluids*, 47 :27–38, 2009. (Cité page 62.)
- J.M. Odobez et P. Bouthemy. Robust multiresolution estimation of parametric motion models. *J. Visual Commun. Image Represent*, 6(4) :348–365, 1995. (Cité page 62.)
- T. Okuno, Y. Sugii, et S. Nishio. Image measurement of flow field using physics-based dynamic model. *Meas. Sci. Technol.*, 11 :667–676, 2000. (Cité page 73.)
- J. Ong et L. Wallace. The velocity field of the turbulent very near wake of a circular cylinder. *Exp. Fluids*, 20 :441, 1996. (Cité page 36.)

- C. Pan, D. Xue, Y. Xu, J. J. Wang, et R. J. Wei. Evaluating the accuracy performance of Lucas-Kanade algorithm in the circumstance of PIV application. *Sci China-Phys Mech Astron*, 58(10) :15p, October 2015. (Cité page 59.)
- N. Papadakis et E. Mémin. Variational assimilation of fluid motion from image sequences. *SIAM Journal on Imaging Science*, 1(4) :343–363, 2008. (Cité pages 73 et 84.)
- N. Papadakis, E. Mémin, A. Cuzol, et N. Gengembre. Data assimilation with the weighted ensemble kalman filter. *Tellus-A*, 62(5) :673–697, 2010. (Cité pages 83 et 85.)
- A. Papangelou. Vortex shedding from slender cones at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 242 :299–321, 1992. (Cité page 37.)
- P. Parnaudeau. *Etude numérique d'un écoulement cisailé turbulent complexe à basse vitesse : application à la protection rapprochée*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2004. (Cité pages 15, 25, 26 et 28.)
- P. Parnaudeau, J. Carlier, D. Heitz, et E. Lamballais. Experimental and numerical studies of the flow over a circular cylinder at Reynolds number 3900. *Phys. Fluids*, 20(8), 2008. (Cité pages 28, 33, 34 et 36.)
- P. Parnaudeau, D. Heitz, E. Lamballais, et J.H. Silvestrini. Direct numerical simulations of vortex shedding behind circular cylinders with spanwise linear nonuniformity. *Journal of Turbulence*, 8(13), 2007. (Cité pages 28 et 37.)
- P. Parnaudeau, E. Lamballais, D. Heitz, et J.H. Silvestrini. Combination of the immersed boundary method with compact schemes for DNS of flows in complex geometry. Dans *Direct and large-eddy simulation 5*. Kluwer academic publishers, 2003. (Cité pages 19 et 27.)
- L. Perret, J. Delville, R. Manceau, et J. P. Bonnet. Turbulent inflow conditions for large-eddy simulation based on low-order empirical model. *Phys. Fluids*, 20 :075107, 2008. (Cité pages 83 et 87.)
- C.S. Peskin. Flow patterns around heart valves : a numerical method. *J. Comp. Phys.*, 10 :252–271, 1972. (Cité page 25.)
- G.M. Quénot, J. Pakleza, et T.A. Kowalewski. Particle image velocimetry with optical flow. *Exp Fluids*, 25 :177–189, 1998. (Cité page 57.)
- S.E. Ramberg. The effects of yaw and finite length upon the vortex wakes of stationary and vibrating circular cylinders. *J. Fluid Mech.*, 128 :81–107, 1983. (Cité page 18.)
- D. Rempfer. On low-dimensional galerkin models for fluid flow. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 14 :75–88, 2000. (Cité page 24.)
- P. Rhunau et C. Schnörr. Optical Stokes flow estimation : an imaging based control approach. *Exp. in Fluids*, 42 :61–78, 2007. (Cité page 73.)

- P. Rhunau, A. Stahl, et C. Schnörr. Variational estimation of experimental fluid flows with physics-based spatio-temporal regularization. *Meas. Sci. Technol.*, 18 :755–763, 2007. (Cité page 72.)
- C. Robinson. *Image data assimilation with fluid dynamics models : Application to 3D flow reconstruction*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2015. (Cité pages 79, 80, 81, 82, 84, 85, 87 et 88.)
- P. Ruhnau, T. Kohlberger, C Schnörr, et H. Nobach. Variational optical flow estimation for particle image velocimetry. *Exp. in Fluids*, 38 :21–32, 2005. (Cité page 67.)
- F. Sakao. Constant temperature hot-wires for determining velocity fluctuation in air flow accompanied by temperature fluctuations. *J. Phys. E : Sci. Instrum.*, 6 :913–916, 1973. (Cité page 47.)
- G.R. Sarma et G. Comte-Bellot. Automated constant voltage anemometer for measurements with fluid temperature drifts. *Review of Scientific Instruments*, 73 :1313–1317, 2002. (Cité page 41.)
- S.R. Sarma. *Flow measuring apparatus*. US Patent 5074147, 1991. (Cité page 41.)
- F. Scarano et P. Moore. An advection-based model to increase the temporal resolution of PIV time series. *Exp. Fluids*, 52 :919–933, 2011. (Cité pages 84 et 87.)
- J.F.G. Schneiders, I. Azijli, F. Scarano, et R.P. Dwight. Pouring time into space. Dans *11th International Symposium on Particle Image Velocimetry, PIV15*, Santa Barbara, CA, United States, 2015. (Cité pages 74, 84 et 87.)
- J.F.G. Schneiders, R.P. Dwight, et F. Scarano. Time-supersampling of 3D-PIV measurements with vortex-in-cell simulation. *Exp. Fluids*, 55(3) : 1–15, 2014. (Cité pages 74, 84 et 87.)
- G.B. Schubauer, W.G. Spangenberg, et P.S. Klebanoff. Aerodynamic characteristics of damping screens. Technical Note 2001, National Advisory Committee for Aeronautics, 1950. (Cité pages 29, 30 et 31.)
- A. Sciacchitano, R.P. Dwight, et F. Scarano. Navier-Stokes simulations in gappy PIV data. *Exp. Fluids*, 53(5) :1421–1435, 2012a. (Cité page 74.)
- A. Sciacchitano, F. Scarano, et B. Wieneke. Multi-frame pyramid correlation for time-resolved piv. *Exp. Fluids*, 53(4) :1087–1105, 2012b. (Cité page 74.)
- G. Seifert et K. Graichen. A calibration method for hot-wire probes including the low velocity range. *DISA Information*, 1982. (Cité page 43.)
- L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part 1 : Coherent structures. *Q. Appl. Math.*, 45 :561–571, 1987. (Cité page 21.)
- K. Sodjavi. *Etude expérimentale de la turbulence dans une couche de mélange anisotherme*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2013. (Cité page 49.)

- K. Sodjavi et J. Carlier. Experimental study of thermal mixing layer using variable temperature hot-wire anemometry. *Exp. Fluids*, 54 :1599, 2013. (Cité page 50.)
- M. Stanislas, K. Okamoto, C.J. Kähler, J. Westerweel, et F. Scarano. Main results of the third international piv challenge. *Exp. Fluids*, 45 :27–71, 2008. (Cité page 53.)
- P. Stansby. The effect of end plates on the base pressure coefficient of circular cylinder. *Roy. Aeronaut. J.*, 78 :36–37, 1974. (Cité page 33.)
- F.R. Stengele et H.J. Rath. Influence of free convection on the heat transfer from hot-wire probes. *Warme und Stoffübertragung*, 29 :299–307, 1994. (Cité page 42.)
- Y. Sugii, S. Nishio, T. Okuno, et K. Okamoto. A highly accurate iterative PIV technique using a gradient method. *Meas. Sci. Technol.*, 11 :1666–1673, 2000. (Cité page 65.)
- D. Suter. Motion estimation and vector splines. Dans *Proc. Conf. Comp. Vision Pattern Rec.*, pages 939–942, Seattle, USA, 1994. (Cité page 67.)
- T. Suzuki. Reduced-order Kalman-filtered hybrid simulation combining particle tracking velocimetry and direct numerical simulation. *J. Fluid Mech.*, 709 :249–288, 2012. (Cité page 84.)
- G.I. Taylor et G.K. Batchelor. The effect of wire gauze on small disturbances in a uniform stream. *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, 2(1) : 1–29, 1949. (Cité page 29.)
- P. T. Tokumaru et P. E. Dimotakis. Image correlation velocimetry. *Exp Fluids*, 19 :1–15, 1995. (Cité page 61.)
- I.K. Tsanis. Calibration of hot-wire anemometers at very low velocities. *DANTEC Information*, 4 :13–14, 1987. (Cité page 43.)
- B. Vallès, H.I. Andersson, et C.B. Jensen. Direct-mode interactions in the wake behind a stepped cylinder. *Phys. Fluids*, 14(4) :1548–1551, 2002. (Cité page 37.)
- J. Weickert et C. Schnörr. Variational optic flow computation with a spatio-temporal smoothness constraint. *Journ. of Mathematical Imaging and Vision*, 14(3) :245–255, 2001. (Cité pages 71 et 74.)
- C.E. Willert et M. Gharib. Digital particle image velocimetry. *Exp. Fluids*, 10 :181–193, 1991. (Cité page 53.)
- C.H.K. Williamson. Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of circular cylinders at low reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 206 : 579, 1989. (Cité pages 18 et 19.)
- B. Wilson et B. Smith. Taylor-series and monte-carlo-method uncertainty estimation of the width of a probability distribution based on varying bias and random error. *Meas. Sci. Technol.*, 24 :035301, 2013. (Cité page 74.)



- H. Woo, J. Cermak, et J. Peterka. Secondary flows and vortex formation around a circular cylinder in constant–shear flow. *J. Fluid Mech.*, 204 : 523–542, 1989. (Cité pages 18 et 37.)
- Y. Yang. *Study of Variational Ensemble Methods for Image Assimilation*. PhD thesis, Université de Rennes 1, December 2014. (Cité page 83.)
- Y. Yang, C. Robinson, D. Heitz, et E. Mémin. Enhanced ensemble-based 4dvar scheme for data assimilation. *Computers & Fluids*, pages 201–210, 2015. (Cité pages 83 et 84.)
- R. Yegavian, B. Leclaire, et F. Champagnat. Lucas-Kanade fluid trajectories for time-resolved PIV. Dans *11th International Symposium on Particle Image Velocimetry, PIV15*, Santa Barbara, CA, United States, 2015. (Cité pages 74 et 84.)
- J. Yuan, C. Schnörr, et E. Mémin. Discrete orthogonal decomposition and variational fluid flow estimation. *J. Math. Imag. Vision*, 28 :67–80, 2007. (Cité pages 67, 68 et 69.)
- P. Zille, T. Corpetti, L. Shao, et C. Xu. Observation models based on scale interactions for optical flow estimation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 23(8) :3281–3293, 2014. (Cité pages 58 et 66.)

**Titre** De fils en images l'apport des modèles pour mesurer et reconstruire le mouvement des écoulements turbulents

**Résumé** Ce mémoire présente une synthèse de mes travaux de recherche effectués depuis mon recrutement à Irstea. Il retrace quinze années de travaux visant à saisir la dynamique turbulente dans les fluides en combinant métrologies, simulations et méthodes de traitement du signal avancées. Un premier chapitre présente les actions de recherche et les développements méthodologiques visant à discriminer à partir de champs PIV et DNS les structures énergétiquement dominantes dans une série d'écoulements turbulents non-canoniques que l'on trouve dans les applications aérauliques. Le second chapitre présente le développement d'une technique d'anémométrie permettant la mesure simultanée de la vitesse et de la température. Le troisième chapitre détaille l'exploitation du paradigme du flot optique pour la mesure du mouvement fluide en lieu et place des techniques de corrélation classiquement utilisées en PIV. Les différentes classes de problèmes à résoudre pour déterminer le champ vectoriel de la vitesse d'un écoulement turbulent à partir de l'analyse d'une séquence d'images d'un scalaire sont explicitées. Enfin le quatrième chapitre, expose le potentiel offert par l'assimilation de données pour développer les futures techniques de mesures et de simulations. Deux premières applications sont présentées pour aller progressivement vers la reconstruction 3D réaliste des écoulements turbulents.

**Mots-clés** Turbulence, Sillage, Couche de mélange, Aéraulique, Anémométrie à fil chaud, PIV, Flot Optique, Assimilation de données

**Title** Using models to measure and reconstruct turbulent fluid flows

**Abstract** This manuscript presents a synthesis of my research activities since I have been recruited at Irstea. It outlines fifteen years of work to catch the dynamics of turbulent flows by combining metrology, simulations and advanced signal processing methodologies. The first chapter presents, the research and the methodological developments to discriminate the most energetic structures from PIV and DNS fields into non-canonical turbulent flows that can be found in air conditioning. In a second chapter a hot-wire anemometry technique giving simultaneous velocity and temperature measurements is presented. The third chapter details how the optical flow paradigm can be exploited to fluid flow measurements instead of correlation techniques classically used in PIV. To estimate the motion vector fields from image sequences, the different classes of problems to be solved are explained. The last chapter exhibits the potential given by image data assimilation for the development of the future measurement and simulation techniques. To progressively reconstruct 3D realistic turbulent flows, two first applications are presented and perspectives are proposed.

**Keywords** Turbulence, Wake flow, Mixing layer, Air conditioning, Hot-wire anemometry, PIV, Optical flow, Data assimilation