



HAL
open science

Des équations de contrainte en gravité modifiée

Xavier Lachaume

► **To cite this version:**

Xavier Lachaume. Des équations de contrainte en gravité modifiée. Physique mathématique [math-ph]. Université François-Rabelais, Tours, 2017. Français. NNT: . tel-01674477

HAL Id: tel-01674477

<https://hal.science/tel-01674477>

Submitted on 2 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ FRANÇOIS-RABELAIS DE TOURS

École Doctorale MIPTIS

Laboratoire de Mathématiques et de Physique Théorique

THÈSE présentée par :

Xavier LACHAUME

soutenue le : 15 décembre 2017

pour obtenir le grade de : Docteur de l'université François-Rabelais de Tours

Discipline : Mathématiques

DES ÉQUATIONS DE CONTRAINTE

EN GRAVITÉ MODIFIÉE

Des théories de Lovelock à un nouveau problème de σ_k -Yamabe

THÈSE DIRIGÉE PAR :

HUMBERT Emmanuel
VILLAIN Loïc

Professeur, université de Tours
Maître de conférences, université de Tours

RAPPORTEURS :

LE FLOCH Philippe
NICOLAS Jean-Philippe

Directeur de recherche CNRS, université Paris 6
Professeur, université de Brest

JURY :

DEFFAYET Cédric
DELAY Erwann
HUMBERT Emmanuel
LECOUVEY Cédric
NICOLAS Jean-Philippe
VILLAIN Loïc

Directeur de recherche CNRS, IAP – Président du jury
Maître de conférences, université d'Avignon
Professeur, université de Tours
Professeur, université de Tours
Professeur, université de Brest
Maître de conférences, université de Tours

*La préoccupation de l'homme lui-même et de sa destinée
doit toujours constituer la principale motivation de tous
les efforts techniques.*

*Ne l'oubliez jamais au milieu de vos diagrammes et de
vos équations.*

Albert Einstein,
discours au California Institute of Technology,
New York Times, 17 février 1931

*Concern for the man himself and his fate must always
form the chief interest of all technical endeavors.*

*Never forget this in the midst of your diagrams and equa-
tions.*

Albert Einstein,
speech at the California Institute of Technology,
The New York Times, February 17, 1931

Remerciements

Étonnamment, les remerciements sont à la fois ce qu'on lit en premier dans une thèse, et pourtant ce qu'on écrit en dernier. Une fois le travail de recherche et la rédaction achevés, vient enfin le temps de relever la tête et de reconnaître tous ceux qui nous ont entourés et aidés à atteindre ce point. Mes premières pensées vont à ceux qui rendent la soutenance de ma thèse immédiatement possible : les rapporteurs Philippe Le Floch et Jean-Philippe Nicolas. Ils acceptèrent de se plonger dans de longs calculs austères qui leur étaient étrangers, de lire avec soin des dizaines de pages contenant soit ce qu'ils connaissaient déjà, soit ce qui demande du temps pour être compris, et d'évaluer des résultats à peine éprouvés ; que mes remerciements puissent rendre leur travail moins ingrat.

Je tiens également à remercier les membres du jury : Cédric Deffayet, Erwann Delay et Cédric Lecouvey, dont la charge et l'effort furent semblables. Leur disponibilité illustre deux belles particularités du monde de la recherche, deux piliers sur lesquels il s'appuie : la reconnaissance par les pairs et la gratuité. C'est grâce à cet engagement qu'il reste un monde vivant, exigeant, mais généreux.

Comment alors ne pas adresser un profond et sincère remerciement à mes directeurs de thèse, Emmanuel Humbert et Loïc Villain. Jamais cette thèse n'aurait pu voir le jour sans eux. Il y a bientôt cinq ans, en février 2013, j'allai vers eux avec un projet à la fois vague et précis, celui d'un doctorat qui fût le plus possible à l'interface des mathématiques et de la physique. Ce sont eux qui accueillirent favorablement ma demande et me guidèrent dès mon master 2. Eux qui m'accordèrent le loisir de choisir mon rythme ; me laissant vivre une année de césure à Paris avant de débiter ma thèse, puis une fois celle-ci commencée, se rendant disponibles chaque fois que j'en avais besoin tout en acceptant les engagements, associatifs et autres, dans lesquels je dépensai un certain temps et sans lesquels les trois années que je passai à Tours n'eussent pas été aussi riches ni fécondes.

Merci à eux de m'avoir laissé toute licence dans ma recherche ; me donnant, lorsque c'était nécessaire, d'abord des directions à suivre, puis des pistes à explorer, enfin des conseils et des remarques ; et lorsque ça ne l'était pas, me regardant de loin m'égayer dans la littérature et me frotter à des problèmes ouverts, comme l'on surveille du coin de l'œil un enfant explorer une prairie. J'espère que les découvertes et les interrogations, comme autant de bouquets de pâquerettes, que je rapportais de ces promenades au moins les amusèrent, sinon les intéressèrent.

Merci à eux pour les lacunes qu'ils comblèrent de leur science. Je pense en particulier aux techniques d'analyse sur variété, et d'étude du problème de Yamabe, dont je ne savais

REMERCIEMENTS

rien et qu'Emmanuel a mis à ma portée ; et aux enseignements de Loïc sur la relativité générale qui complétèrent ma formation initiale moins poussée en physique.

Quant à évoquer les maîtres, ils furent nombreux à m'avoir éduqué, enseigné et formé. Remontant le temps, je pense à Alexandre Zabi, qui m'accueillit six mois au Cern en 2012 et me donna la joie de découvrir la physique des particules à un moment de rare effervescence, la découverte du boson de Higgs. Merci à lui. Merci aux professeurs de l'ENS de Paris pour l'enseignement intense en mathématiques et en physique qu'ils me donnèrent entre 2008 et 2012. Merci à Philippe Espéret et Jérôme Coup pour m'avoir préparé aux concours des grandes écoles, et à Serge Francinou et Jean-Marc Drocourt avant eux ; c'est avec eux que je découvris réellement la joie et la puissance de la réflexion mathématique et physique. Ils bâtirent sur des fondations posées par tous mes professeurs de lycée et de collège, que je remercie sincèrement, les bons comme les mauvais : car tous avaient la charge de nous nourrir, et tous, chacun à sa façon, s'en acquittèrent. J'aimerais exprimer ici ma profonde reconnaissance envers Alexis Barnier, qui montrait tout autant le souci des élèves en queue qu'en tête de classe, exigeant envers ceux-ci et patient envers ceux-là.

Les maîtres précédents occupent une place étrange ; rarement nous ne passons autant de temps avec quelqu'un, à raison de plusieurs heures par jour pendant une année entière, et pourtant nous nous en souvenons à peine : ce sont les professeurs des écoles. Ce sont eux qui nous apprennent les fondamentaux, les bases sans lesquelles peu de choses peuvent pousser, et il ne reste souvent d'eux que des bribes de souvenirs, de brefs éclairs. Merci à Claude Morbelli pour la division euclidienne. Merci à Gérard Geniez pour nous avoir appris que la connaissance n'était pas un gâteau qu'on aurait un jour fini d'avalier, mais une graine qui ne cesse de croître. Merci enfin, et surtout, à Colette Pellegrin, pour m'avoir donné un épais cahier d'exercices de mathématiques en CE1 pour tromper mon ennui, le début d'une longue histoire.

Il me faut également remercier les secrétaires et assistantes de tous ces établissements : mains discrètes mais indispensables, elles permettent aux enseignants d'accomplir leur œuvre et leur mission est précieuse. Merci à Laurence Vincent, à Linda Delaneau, à Anouchka Lepine, à Elodie Demoussis, à Nathalie Duchesne, à Nathalie Doris et à Sandrine Renard-Riccetti. Toutes, elles jouèrent un rôle évident dans l'établissement de ma formation mathématique et physique dont cette thèse est l'accomplissement.

Parmi tous ces noms, plusieurs sont éteints aujourd'hui. J'ai une pensée émue pour eux ; paix à leur âme.

On sème des choses qui nous survivent.

Je remercie en particulier Ahmad El Soufi qui m'accueillit au LMPT, qu'il dirigeait alors, avec son éclatant sourire surligné par sa moustache, que tous ceux qui l'ont connu ont en tête lorsqu'ils pensent à lui. Les quelques discussions que j'eus avec lui dessinaient la silhouette d'un homme sage et bon, ouvert et cultivé, à l'écoute, l'un de ces ponts entre les cultures dont le monde aura toujours besoin. Mon doctorat s'achève presque un an après sa mort, et j'aimerais le lui dédier.

* * *

REMERCIEMENTS

Nombreux sont ceux qui m'accueillirent à Tours. Je les remercie avec émotion, car une belle tranche de ma vie se dessina ici. Le personnel d'entretien, les cuisiniers du restaurant universitaire. Les membres du laboratoire croisés à un séminaire, ou autour d'un repas ou d'un café ; Christine autour d'un piano. Merci à l'équipe de géométrie, qui se réunissait dans les torpeurs postprandiales des variétés riemanniennes, Marina, Marc, Romain, Saïd ; et en particulier Martin Traizet, qui dirigeait le département de mathématiques, et prenait grand soin de donner aux doctorants des enseignements qui leur laissaient assez de temps pour leur thèse.

Merci à l'équipe de foot, qui se réunissait dans le froid des vestiaires et la chaleur du Caméléon, Kilian, Cédric, Vincent et Vincent, Jérémie, Florent, Luc, Sten, Olivier, Alaa et tous ceux que je suis navré d'oublier.

Merci à l'équipe des physiciens, qui me permit d'enseigner dans deux matières. Merci pour leur passion pour la recherche et pour les belles discussions que nous eûmes, Stam, Pascal, Karim, Amaury, Hector, Olivier, Xavier et Xavier, Gisèle.

Merci aux doctorants ! À Gabriel Lagasque, mon jumeau de thèse, pour sa présence fraternelle et apaisante pendant ces trois ans, pour son amitié et sa disponibilité pendant les coups durs. Merci à Charles Mazuet et Clément Berthière, mes frères de thèse, pour le temps de travail et de repos passé ensemble, pour leurs questions et leurs réponses. Merci à Kevin Morand et Thomas Basile, pour les belles soirées qui en appelaient d'autres. Merci à Luc Pétiard, homme providentiel, toujours de passage, toujours retrouvé dans la joie.

Merci aux grands frères : Julien Tranchida, Youssouf Boukarabila, André Kabakouala, Rainer Stiele, prédécesseurs rassurants qui montraient la voie, prouvant qu'il était possible de faire une thèse, et parfois de la mener jusqu'au bout. Merci aux petits frères : Julien Roussillon, Amélie Trottignon, Florestan Labey, Frédéric Kuczma, qui reprennent le flambeau à leur tour, et à qui je souhaite autant de plaisir à la recherche que j'en eus.

Les bureaux des laboratoires sont des endroits de passage : on y arrive, on en repart, pour quelques mois de post-doc, pour un stage de master, pour une année de thèse ou plus. Le bureau E2 1340 dans lequel je me trouvais fut le lieu de nombreuses rencontres et d'heureux voisinages. Chacun vient avec un projet, un objectif, avance à son rythme, travaille, bute, progresse, cherche et enseigne, partage avec les autres ses joies et ses fatigues, demande et apporte de l'aide, témoin bienveillant de l'apprentissage de ceux qui l'entourent ; puis s'en va, une fois sa tâche accomplie, réalisée bien différemment de ce qu'il avait à l'esprit le premier jour, mais rarement décevante. La richesse du LMPT est de rassembler des personnages d'origines variées, de brassier les cultures et les caractères. Ce fut une vraie chance de les côtoyer, et d'avoir en commun avec eux un lieu de travail, une passion, et plusieurs mois, plusieurs années de vie.

Je remercie Thao Vu Thi et Cang The-Nguyen de m'avoir offert leur amitié, pour les invitations croisées et la foi commune. Merci à Daria Ghilli pour son sourire éblouissant qui m'accueillait chaque matin, pour ses rires et ses cheveux en éclat. Je pense aussi à Mojtaba Najafizadeh, à sa chaleureuse hospitalité, ainsi qu'à sa femme et sa fille. Merci à Shinya Gongyo, à la joyeuse compagnie et au généreux saké.

En matière d'hospitalité, je garderai longtemps le souvenir ému de l'accueil que nous réservèrent Salam Kouzayha et Abdolhakim Shouman chez eux, au Liban. La disponibilité,

REMERCIEMENTS

l'attention et le soin avec lesquels leurs familles nous reçurent nous touchèrent profondément, et parachevèrent l'amitié qui se forgeait depuis trois années à vivre ensemble.

Je remercie enfin Thomas Nussle et Thomas Raujouan, pour la complicité et l'amitié fidèle, pour les belles et longues discussions, pour les nombreux services rendus, pour la joie que j'avais à les voir si souvent et que j'aurai à les retrouver.

* * *

Sortons maintenant du laboratoire. Il est temps de remercier pour leur amitié et leur soutien des membres de groupes aux noms barbares, qui se reconnaîtront. Ils m'entourèrent pendant plusieurs années, suivant de l'extérieur l'avancée de ma thèse, m'apportant appui et réconfort, confiance et écoute.

Merci à la Cimade de Tours, et en particulier à Sophie et Clémentine, grâce à qui notre UEO vit le jour.

Merci au groupe d'Even : Ugo, Sarah, Domitille, Quentin, Valentine, Olivier, Pierre, Virginie.

Merci aux amis d'H4 et de l'ENS : en particulier Tristan, Pierre, David, Fathi, Claude et Jean-François, ainsi que tous les membres du séminaire de l'Abbé Mole.

Merci à ceux du B1 : Pierre, Hélène, Jonathan, Robert, Ségolène, Thibaut, Mathieu, Elsa, Pierre-Alain, Marine, Brice, Nelly, Ruben, Clotilde.

Merci aux Talas et autres tuteurs de Bossuet, ces frères dans la foi, trop nombreux pour être tous nommés ici, mais dont je citerai ceux qui ont une chance de comprendre une partie de cette thèse : Éric, Bruno, Margaret, Guillaume, Amaury, Joseph, Pierre-Yves, Alexandre.

Merci aux prêtres qui m'ont accompagné ces dernières années : le père Armogathe, frère Anthony-Joseph, frère Nicolas, don Maxence, les pères Guillaume et Jean-Marie.

Viennent ceux qui sont à l'origine de tout ceci. Mes grands-parents, qui toujours s'intéressèrent à ce que j'étudiais et allèrent jusqu'à relire mon manuscrit, pour qui le travail et la curiosité sont des choses de valeur et qui ont éduqué ma famille en ce sens. Merci à Hélène, André et Gabrielle, mes frère et sœurs qui grandirent avec moi dans cette famille et m'entourèrent de tendresse et de complicité.

J'aimerais ajouter une phrase qu'on a peut-être trop entendue, mais qui reste emplie de sens pour qui veut s'y arrêter : je remercie mes parents, sans qui je ne serais pas là aujourd'hui. Le don de la vie, l'éducation, sont des biens trop précieux pour qu'on puisse réaliser vraiment ce qu'ils représentent, mais je souhaite tenter de les remercier humblement, du fond du cœur, pour tout ce qu'ils m'ont donné. Merci tout particulièrement à ma mère, pour m'avoir appris à contempler et à écouter, à chercher et à donner du sens, à relier et à comprendre. Merci tout particulièrement à mon père, pour m'avoir donné le goût de la curiosité mathématique et scientifique, pour m'avoir impressionné par sa capacité de réflexion, pour les bricolages qui m'enseignaient qu'on peut agir sur le monde et concevoir son action. Leur regard bienveillant, leurs encouragements à chaque étape, la grande liberté qu'ils me laissèrent en toute décision, me permirent réellement de déployer ce qui serait resté en germe dans un autre terreau moins favorable.

REMERCIEMENTS

Anna.

Merci pour notre rencontre il y a plus de quatre ans, merci de m'accompagner chaque jour que Dieu nous donne. Merci de m'avoir soutenu de la conception à l'accomplissement de ma thèse, merci pour ton écoute, ton amour et ta douceur sincères, pour la confiance que tu me fais et qui me porte.

Merci d'être ma femme et de faire de moi ton mari.

Résumé

Cette thèse est consacrée au problème d'évolution des théories de gravité modifiée. Après avoir rappelé ce qu'il en est pour la Relativité Générale (RG), nous exposons le formalisme $n+1$ des théories $f(\mathbb{R})$, Brans-Dicke et tenseur-scalaire et redémontrons un résultat connu : le problème de Cauchy est bien posé pour ces théories, et les équations de contrainte se réduisent à celles de la RG avec un champ de matière.

Puis nous effectuons la même décomposition $n+1$ pour les théories de Lovelock et, ce qui est nouveau, $f(\text{Lovelock})$. Nous étudions ensuite les équations de contrainte des théories de Lovelock et montrons qu'elles sont, dans le cas conformément plat et symétrique en temps, la prescription d'une somme de σ_k -courbures. Afin de résoudre cette équation de prescription, nous introduisons une nouvelle famille de polynômes semi-symétriques homogènes et développons des résultats de concavité pour ces polynômes. Nous énonçons une conjecture qui, si elle était avérée, nous permettrait de résoudre l'équation de prescription dans de nombreux cas : $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$, avec $\deg P = \deg Q = n$,

$$P \text{ et } Q \text{ sont scindés} \implies \sum_{k=0}^n P^{(k)} Q^{(n-k)} \text{ est scindé.}$$

Mots clés : Relativité Générale, équations de contrainte, problème de Cauchy, $f(\mathbb{R})$, tenseur-scalaire, Lovelock, $f(\text{Lovelock})$, σ_k -Yamabe, polynômes symétriques élémentaires, concavité.

Abstract

This thesis is devoted to the evolution problem for modified gravity theories. After having explained this problem for General Relativity (GR), we present the $n + 1$ formalism for $f(\mathbb{R})$ theories, Brans-Dicke and scalar-tensor theories. We recall a known result: the Cauchy problem for these theories is well-posed, and the constraint equations are reduced to those of GR with a matter field.

Then we proceed to the same $n+1$ decomposition for Lovelock and $f(\text{Lovelock})$ theories, the latter being an original result. We show that in the locally conformally flat time-symmetric case, they can be written as the prescription of a sum of σ_k -curvatures. In order to solve the prescription equation, we introduce a new family of homogeneous semi-symmetric polynomials and prove some concavity results for those polynomials. We express the following conjecture: if this is true, we are able to solve the prescription equation in many cases. $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$, with $\deg P = \deg Q = n$,

$$P \text{ and } Q \text{ are real-rooted} \quad \implies \quad \sum_{k=0}^n P^{(k)} Q^{(n-k)} \text{ is real-rooted.}$$

Keywords: General Relativity, constraint equations, Cauchy problem, $f(\mathbb{R})$, scalar-tensor, Lovelock, $f(\text{Lovelock})$, σ_k -Yamabe, elementary symmetric polynomials, concavity.

À Ahmad El Soufi.

Table des matières

Introduction	18
Contenu de la thèse	20
1 Le formalisme $n + 1$ de la Relativité Générale	22
1.1 Les équations de champ de la Relativité Générale	23
1.1.1 Notations	23
1.1.2 Action d'Einstein-Hilbert	24
1.1.3 Matière et énergie	25
1.1.4 Champ scalaire	26
1.1.5 Constante cosmologique	26
1.2 Décomposition $n + 1$ de la Relativité Générale	26
1.2.1 Notations	27
1.2.2 Formalisme ADM	30
1.3 Le problème de Cauchy	32
1.3.1 Problème bien posé	32
1.3.2 Problème bien formulé	34
1.3.3 Dynamique de γ_{ij} et K_{ij}	35
1.4 Résolution des équations de contrainte	38
1.4.1 Formulaire et notations	39
1.4.2 Méthode conforme dans le vide	41
1.4.3 Méthode conforme avec matière	44
1.4.4 Méthode conforme avec un champ de matière scalaire	45
2 Le formalisme $n + 1$ des théories $f(R)$, Brans-Dicke, tenseur-scalaire	47
2.1 Introduction	48
2.1.1 Les théories $f(R)$	48
2.1.2 Transformée de Legendre et champ scalaire	49
2.1.3 Théories de Brans-Dicke et tenseur-scalaire	51
2.2 Les équations de champ des théories tenseur-scalaire	53

2.3	Décomposition $n + 1$ des théories tenseur-scalaire	57
2.3.1	Décomposition du tenseur effectif	57
2.3.2	Formalisme ADM des théories tenseur-scalaire	63
2.4	Le problème de Cauchy	63
2.4.1	Équations d'évolution	64
2.4.2	Problème bien formulé	70
2.4.3	Problème bien posé	71
2.5	Résolution des équations de contrainte	72
2.5.1	Recherche des facteurs conformes	72
2.5.2	Application de la méthode conforme	77
2.5.3	Repères d'Einstein et de Jordan	77
3	Les théories de Lovelock et $f(\text{Lovelock})$	81
3.1	Introduction	82
3.1.1	Notations	82
3.1.2	Les théorèmes de Lovelock	83
3.1.3	Le théorème de Gauss-Bonnet-Chern	85
3.1.4	Les théories de Lovelock	86
3.2	Sur la forme développée des produits de Lovelock	88
3.2.1	Diagrammes de Young	88
3.2.2	Pléthysmes du tenseur de Riemann	91
3.2.3	Ce que l'on sait et ce qui reste à découvrir	93
3.3	Les équations de champ des théories $f(\text{Lovelock})$	93
3.3.1	Les théories $f(\text{Lovelock})$	94
3.3.2	Notations	95
3.3.3	Dérivation des équations de champ	97
4	Le formalisme $n + 1$ des théories $f(\text{Lovelock})$	100
4.1	Décomposition $n + 1$ des théories $f(\text{Lovelock})$	101
4.1.1	Notations	101
4.1.2	Formalisme $n + 1$ des théories $f(\text{Lovelock})$	104
4.1.3	Applications	105
4.2	Décomposition $n + 1$ des théories $f(\text{Lovelock})$: calculs	107
4.2.1	Contrainte hamiltonienne	107
4.2.2	Contraintes de moment	109
4.2.3	Équations dynamiques	112
4.3	Le problème de Cauchy	117
4.3.1	Le problème de Cauchy pour les théories de Lovelock	117

4.3.2	Le problème de Cauchy pour les théories f (Lovelock)	118
4.4	Résolution des équations de contrainte	118
4.4.1	L'échec de la méthode conforme	118
4.4.2	Notations et hypothèses	119
4.4.3	Interprétation physique des coefficients	121
4.4.4	Vers un nouveau problème de σ_k -Yamabe	122
4.4.5	À la recherche de concavité	123
5	Sur la concavité d'une somme de σ_k	125
5.1	Introduction	126
5.1.1	Notations et conjectures	126
5.1.2	Lemmes de concavité	128
5.2	Polynômes réels et concavité	129
5.3	Polynômes scindés sur \mathbb{R}	132
5.3.1	Nombre de racines réelles	132
5.3.2	Caractérisations algébriques	133
5.3.3	Log-concavité	133
5.3.4	Critère de Kurtz	134
5.4	Concavité et déterminant	135
5.4.1	$p = 2$	135
5.4.2	$p = 3$	139
5.4.3	$p = n$	143
5.5	Autres arguments de concavité	145
5.5.1	σ_{k+1}/σ_k	145
5.5.2	Racines et σ_k	146
5.6	Polynômes homogènes	148
5.6.1	Polynômes hyperboliques	149
5.6.2	Polynômes semi-symétriques	152
5.6.3	Une nouvelle conjecture	154
6	Un nouveau problème de σ_k-Yamabe	157
6.1	Arguments algébriques de concavité	158
6.1.1	Lorsque $\bar{f}_{\vec{d}}$ est scindé	158
6.1.2	Interprétation physique des racines réelles	160
6.2	Arguments analytiques de concavité	162
6.2.1	Fonctions concavifiantes	162
6.2.2	$p = 2$	165
6.3	Théorème des fonctions implicites	169

TABLE DES MATIÈRES

Conclusion et principaux résultats	177
Premier chapitre	177
Deuxième chapitre	177
Troisième chapitre	178
Quatrième chapitre	179
Cinquième chapitre	180
Sixième chapitre	182
Pour aller plus loin	183

Introduction

Dès 1905, la théorie de la Relativité Restreinte (RR) apporta avec elle une idée profondément originale : faire du temps une dimension commensurable à l'espace.

Auparavant, vers 1865, les lois de Maxwell avaient fait de la lumière une onde se propageant dans l'éther à une vitesse constante c . La mécanique de Newton prédisait que lors d'un changement de référentiel inertiel, cette vitesse se transformait sous l'action du groupe de Galilée ; elle était donc variable. Cependant, les expériences de Michelson et Morley échouèrent à mettre en évidence cette variabilité. Au contraire, la vitesse de la lumière semblait constante quel que fût le référentiel dans lequel elle était observée. Afin de résoudre cette incompatibilité, la solution la plus simple était de modifier les lois de Maxwell, plus récentes et moins éprouvées que celles de Newton ; c'est ce que firent par exemple Lorentz et Poincaré.

Le saut conceptuel opéré par Einstein consista à faire l'inverse : conserver Maxwell et modifier Newton. Donner à c un caractère absolu, et en priver du même coup le temps et l'espace qui devenaient interchangeable. Une équation physique correcte ne devait donc plus faire apparaître explicitement de coordonnées spatiales ou temporelles, mais être invariante sous les changements de référentiel spatio-temporel inertiels. Ces transformations linéaires forment le groupe de Lorentz, qui joue ainsi pour la RR le rôle du groupe de Galilée pour la mécanique de Newton.

Ce qui avait été montré pour des changements de référentiel inertiels dans le cadre de la RR fut étendu à tous les changements de référentiel en 1915, par la théorie de la **Relativité Générale** (RG). L'espace-temps plat fut considéré comme une variété lorentzienne plate, l'espace de Minkowski. Le groupe de Lorentz fut remplacé par le groupe des difféomorphismes de cette variété. Mais plus encore, la RG permettait l'introduction de la gravitation dans cette théorie, en lui donnant comme effet de courber l'espace-temps. La variété plate fut remplacée par une variété lorentzienne quelconque. L'invariance requise pour les expressions ayant un sens physique devenait une propriété géométrique : la **covariance**, c'est-à-dire l'invariance sous l'action du groupe des difféomorphismes.

Les expressions covariantes rendent compte du fait qu'il n'existe pas de référentiel privilégié dans la RG. Si l'on change de référentiel, l'expression est transformée et s'adapte au nouveau référentiel. Elles sont donc la garantie d'un principe fondamental de la physique du vingtième siècle, le principe de relativité. Cependant, elles ne permettent pas de réaliser que la RG, comme la plupart des théories physiques, prescrit une évolution des quantités physiques. Pour qu'il y ait évolution, il faut en effet qu'il y ait un temps par rapport auquel évoluer.

Un référentiel temporel, c'est-à-dire une famille d'horloges en chaque point de l'espace, ne peut être choisi de façon unique. Il peut néanmoins être choisi. En gardant à l'esprit que ce choix est arbitraire, on peut feuilleter la variété spatio-temporelle en une succession de variétés spatiales, une fibration. Les équations de champ de la RG, qui sont un système d'équations aux dérivées partielles (EDP), peuvent se décomposer sur cette fibration : il s'agit du **formalisme $3 + 1$** de la RG. Dans la suite nous considérerons un espace-temps de dimension quelconque, $n + 1$.

Les équations projetées se divisent en deux parties : des **équations de contrainte**, qui sont une condition nécessaire portant sur chaque hypersurface spatiale de dimension n pour être compatible avec les équations de champ de l'espace-temps de dimension $n + 1$; et des **équations dynamiques**, qui décrivent l'évolution des quantités physiques selon le choix de référentiels temporels effectué. Deux questions se posent alors, que nous appelons **problème d'évolution**.

- ★ Peut-on résoudre les équations de contrainte ? Est-il possible d'imposer ces équations à une hypersurface spatiale ?
- ★ Ces équations, qui sont une condition nécessaire, sont-elles également suffisantes ? Autrement dit, une fois donnée une hypersurface spatiale, peut-on la prolonger vers le passé et le futur en un espace-temps vérifiant les équations de champ de la RG ? De façon unique ? Il s'agit du **problème de Cauchy**, ou problème des données initiales.

Il a été montré en 1952 par Y. Choquet-Bruhat [27] que dans le vide, le problème de Cauchy pour la RG est bien posé. Cela a ensuite été étendu à d'autres sortes de champs de matière.

Le fait d'avoir un problème de Cauchy bien posé est loin d'être la seule qualité de la RG. Depuis sa découverte, la RG a fait preuve de nombreuses qualités, de par ses propriétés théoriques comme sa cohérence avec les observations astronomiques. La détection récente d'ondes gravitationnelles scelle la concordance entre cette théorie et presque toutes les mesures qui ont pu être effectuées avec les outils dont l'humanité dispose.

Pourtant, dès ses débuts, la RG a subi de nombreuses tentatives de modifications, de généralisations, d'extensions. L'une des raisons, et non la moindre, étant sans doute la curiosité scientifique. Mais il existe des motivations plus précises, des questions qui sont encore ouvertes aujourd'hui.

Venant du monde de l'observation, il reste à expliquer la nature de ce qui a été baptisé matière noire et énergie sombre. La matière noire a été introduite pour rendre compte du décalage entre la répartition de matière et d'énergie visibles calculée à partir des observations de l'univers à grande échelle, et celle prédite par la RG. L'énergie sombre, quant à elle, est la densité d'énergie qui semble baigner l'ensemble de l'univers et provoquer une accélération de son expansion. Le modèle standard de la cosmologie, qui intègre ces obscures quantités, ne dit rien quant à leur nature.

En ce qui concerne le monde de la théorie, une théorie quantique de la gravitation qui la rende compatible avec la théorie quantique des champs est encore à écrire.

À l'heure actuelle, la RG résiste étonnamment bien à toutes les tentatives de dépasse-

ment. Dès qu'une théorie s'avère plus générale en un sens, rend compte d'une observation ou présente une propriété théorique supplémentaire, elle pêche toujours par ailleurs – la quête vaut cependant pour elle-même, car chacune de ces tentatives nous en apprend davantage sur les propriétés de la RG et sur celles que l'on attend d'une « bonne » théorie physique. Pour cette raison, la RG a succédé à la théorie de Newton et reste depuis un siècle une référence indétrônée, la théorie canonique parmi les théories de la gravitation. Les autres théories forment donc l'ensemble des **théories de gravité modifiée** par rapport à la RG.

Contenu de la thèse

Cette thèse se veut une exploration de quelques familles de gravité modifiée. Loin d'être exhaustif, j'ai observé pour chacune de ces familles sa décomposition $n + 1$, son problème de Cauchy et la résolution de ses équations de contrainte. La plupart des premiers résultats étaient déjà dans la littérature. Les résultats originaux qui seront présentés ici ont été rassemblés dans trois articles, [46], [48], [47], en cours de soumission.

Le nombre limité de lettres dans les alphabets latin et grecs, ainsi que les usages canoniques pour nommer des vecteurs, des lagrangiens, des dérivées de Lie et autre tenseurs, rendent très difficile, pour ne pas dire impossible, de n'avoir aucune ambiguïté dans les notations dès lors que l'on étudie différents aspects mathématiques de différentes théories physiques. J'ai tenté de restreindre les inévitables conflits aux variables pour lesquelles les possibilités de confusion sont faibles, et sollicite l'indulgence du lecteur pour ceux qui ont échappé à ma vigilance... Dans la mesure du possible, les variables seront introduites au fur et à mesure de leur utilisation.

La première famille de théories étudiées s'appuie sur l'écriture lagrangienne de la RG et la généralise en aveugle, en remplaçant la courbure scalaire R par une fonction arbitraire f de cette courbure, donnant naissance aux **théories $f(R)$** .

Les équations de champ de $f(R)$ peuvent être rendues équivalentes à celles d'une famille de théories plus large : **Brans-Dicke**. Dans ces théories, la constante de gravitation universelle n'est plus constante, mais devient un champ scalaire pouvant varier dans l'espace-temps.

La troisième famille est encore une extension de Brans-Dicke : la dynamique du champ scalaire et le couplage avec la courbure scalaire γ sont arbitraires. Il s'agit des **théories tenseur-scalaire (STT)**.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons les résultats présents dans la littérature sur le problème d'évolution de ces familles de théories. Nous nous appuyons en grande partie sur l'article de revue de T. Sotiriou et V. Faraoni [85] en 2010 consacré aux théories $f(R)$, lui-même reprenant les travaux de M. Salgado des années 2000 sur les STT.

À partir du troisième chapitre, nous nous concentrons sur une autre famille : celle des **théories de Lovelock**, et leur extension $f(\text{Lovelock})$. Ces théories introduites dans les années 1970 par D. Lovelock [55], [56] présentent un degré de généralité intéressant en grande dimension, ce qui est le cas par exemple pour les théories des cordes ou la correspon-

dance AdS/CFT. Par ailleurs, elles contiennent des termes aux propriétés géométriques fascinantes : les intégrales de **Gauss-Bonnet-Chern**. Elles n'ont encore été que peu étudiées mathématiquement.

Le formalisme $n + 1$ était inconnu pour les théories f (Lovelock) ; il est dérivé au quatrième chapitre, qui partage le contenu de l'article [46]. Ensuite, nous mettons de côté le problème de Cauchy et tentons la résolution mathématique des équations de contrainte des théories de Lovelock. Les deux derniers chapitres sont consacrés à cette résolution. Ces équations étaient connues depuis les années 1980, avec les articles de C. Teitelboim, J. Zanelli [87] et Y. Choquet-Bruhat [15], mais n'avaient jamais été étudiées dans leur signification géométrique.

En effet, dans la mesure où les équations de champ font intervenir la courbure de l'espace-temps, les équations de contrainte font intervenir la courbure de l'hypersurface spatiale. Plus exactement, elles sont une prescription de cette courbure, étant donnée la répartition d'énergie et de quantité de mouvement. Dans le cas de la RG, la courbure prescrite est tout simplement la courbure scalaire ; la recherche d'une solution dans une classe conforme donnée lie donc les équations de contrainte au **problème de Yamabe**. Ce problème consiste à chercher une solution conforme à une prescription de courbure. Pour les théories de Lovelock, la courbure prescrite est une combinaison linéaire de σ_k -courbures ; il s'agit donc d'une **extension du problème de σ_k -Yamabe**.

Le problème de σ_k -Yamabe n'est étudié que depuis l'article originel de J. Viaclovsky [90] dans les années 2000. Pour résoudre son extension à une combinaison linéaire, nous utilisons un théorème de A. Li et Y. Y. Li [51] qui nécessite la concavité de la fonction prescrite. Ceci nous amène, dans le cinquième chapitre, à établir un certain nombre de propriétés de concavité et de conjectures pour les polynômes symétriques élémentaires σ_k ; ces travaux sont ceux de l'article [47]. Nous appliquons au sixième chapitre ces résultats aux équations de contrainte des théories de Lovelock, puis utilisons un autre raisonnement basé sur un théorème de fonctions implicites, pour les résoudre dans certains cas. L'article [48] présente ce lien entre l'origine physique du problème de σ_k -Yamabe généralisé et sa résolution.

En guise de conclusion, nous avons rassemblé les résultats originaux et certaines des nombreuses questions encore ouvertes sur ce sujet.

Mais avant d'étudier le problème d'évolution pour les théories de gravité modifiée, commençons par l'explicitier pour la RG. Il s'agit de notre premier chapitre.

Chapitre 1

Le formalisme $n + 1$

de la Relativité Générale

1.1 Les équations de champ de la Relativité Générale

Afin d'exposer le formalisme $n + 1$ de la RG, nous reprenons en partie les termes de l'article de R. Bartnik et J. Isenberg [5], et les notations de T. Torii et H. Shinkai [88]. Les autres énoncés invoqués dans ce chapitre sont des résultats connus de géométrie.

1.1.1 Notations

Nous représentons l'espace-temps par une variété sans bord (\mathcal{V}, g) de dimension $n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ correspondant à la dimension spatiale. La métrique g est supposée lorentzienne, c'est-à-dire ayant pour signature $(-1, +n)$. Nous choisissons des coordonnées locales (ξ^μ) , et nous écrivons

$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}$	le champ de vecteurs associé à ξ^μ ,
$g_{\mu\nu}$	les coefficients de la métrique g ,
$g^{\mu\nu}$	les coefficients de son inverse g^{-1} ,
$\delta_\mu^\nu = g_\mu^\nu$	le symbole de Kronecker,
$ g = \det g_{\mu\nu}$	le déterminant de $(g_{\mu\nu})$,
\mathcal{L}	la dérivée de Lie sur \mathcal{V} ,
$D[g]$	la dérivée covariante, ou connexion de Levi-Civita de g ,
$\Gamma[g]_{\mu\nu}^\sigma$	le symbole de Christoffel de g ,
$\ \cdot\ _g$	la norme associée à g ,
$R[g]_{\mu\nu\rho\sigma}$	le tenseur de Riemann de g ,
$R[g]_{\mu\nu}$	le tenseur de Ricci de g ,
$R[g]$	la courbure scalaire de g ,
$G[g]_{\mu\nu}$	le tenseur d'Einstein de g ,
$\square[g] = D[g]_\mu D[g]^\mu$	le d'alembertien de g ,
$dv_g = \sqrt{- g } d^{n+1}\xi$	l'élément de volume de (\mathcal{V}, g) .

Nous utilisons la convention d'Einstein de sommation des indices répétés. Les coefficients des tenseurs sont écrits par rapport aux coordonnées locales (ξ^μ) . La dépendance en g est omise en l'absence d'ambiguïté. Nous choisissons pour le tenseur de Riemann la convention de signe opposée à celle de [5].

La notation $[g]$ désigne les fonctionnelles, qui peuvent dépendre de g , de ses intégrations et de ses dérivées. Les fonctions simples sont notées entre parenthèses.

À l'exception des métriques et des champs de vecteurs, un tenseur

$$T = T_{\alpha_1 \dots}^{\beta_1 \dots} d\xi^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\beta_1} \otimes \dots$$

sera préférablement désigné par ses coordonnées $T_{\alpha_1 \dots}^{\beta_1 \dots}$ lorsque les coordonnées locales (ξ^μ) sont clairement fixées. T désignera alors sa trace scalaire.

La dérivée covariante selon ξ^μ d'un tenseur $T_{\alpha_1 \dots}^{\beta_1 \dots}$ sera notée indifféremment

$$D_\mu T_{\alpha_1 \dots}^{\beta_1 \dots} =: T_{\alpha_1 \dots}^{\beta_1 \dots}{}_{|\mu}$$

La dérivée simple sera notée avec une virgule :

$$\partial_\mu T_{\alpha_1 \dots \beta_1 \dots} =: T_{\alpha_1 \dots \beta_1 \dots, \mu}.$$

La dérivée totale d'une fonctionnelle $L[g]$ par rapport à $g_{\mu\nu}$ sera écrite

$$\frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

Nous notons

c	la vitesse de la lumière dans le vide,
\mathcal{G}	la constante universelle de gravitation,
$\kappa = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4}$	la constante d'Einstein,
Λ	la constante cosmologique.

Le cas physique classique correspond à $n = 3$. Nous choisissons la convention $c = 1$, de sorte que le temps et l'espace ont la même dimension physique.

Dans la mécanique classique, un **lagrangien** a la dimension d'une énergie ; une **action** est l'intégrale le long d'un intervalle de temps d'un lagrangien. Lorsque l'on écrit une action comme une intégrale sur un espace-temps, l'intégrande est alors une **densité lagrangienne**. Le principe de moindre action appliqué à une action \mathcal{S} stipule que les trajectoires classiques minimisent \mathcal{S} , ou de façon plus générale en sont des points critiques. Cette approche faisant le lien entre les solutions d'un problème physique et les variations d'une action \mathcal{S} vue comme une fonctionnelle est dite **variationnelle**.

C'est par cette approche que nous aborderons les théories de gravitation.

1.1.2 Action d'Einstein-Hilbert

Définition 1.1.1. La RG dans le vide peut être représentée de façon concise par l'**action d'Einstein-Hilbert** :

$$\mathcal{S}_{\text{EH}}[g] := \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} \text{R}[g] dv_g. \quad (1.1)$$

Introduisons une variation infinitésimale $\delta g^{\mu\nu}$ de l'inverse de la métrique, et calculons la variation de la fonctionnelle $\delta\mathcal{S}_{\text{EH}}$ qui s'ensuit :

$$\delta\mathcal{S}_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} \delta(\text{R}[g] \sqrt{-|g|}) d^{n+1}\xi.$$

Nous devons rappeler les relations classiques suivantes :

$$g^{\mu\nu}(\delta\text{R}_{\mu\nu}) = D_\mu (g_{\rho\sigma} D^\mu (\delta g^{\rho\sigma}) - D_\nu (\delta g^{\mu\nu})), \quad (1.2)$$

$$\delta(\sqrt{-|g|}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-|g|} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{S}_{\text{EH}} &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} \delta(g^{\mu\nu} \mathbf{R}_{\mu\nu} \sqrt{-|g|}) \, d^{n+1}\xi \\
 &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} [g^{\mu\nu} (\delta \mathbf{R}_{\mu\nu}) \sqrt{-|g|} + (\delta g^{\mu\nu}) \mathbf{R}_{\mu\nu} \sqrt{-|g|} + \mathbf{R} (\delta \sqrt{-|g|})] \, d^{n+1}\xi \\
 &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} \left[D_{\mu} (g_{\rho\sigma} D^{\mu} (\delta g^{\rho\sigma}) - D_{\nu} (\delta g^{\mu\nu})) \sqrt{-|g|} \right. \\
 &\quad \left. + (\delta g^{\mu\nu}) \mathbf{R}_{\mu\nu} \sqrt{-|g|} - \frac{1}{2} \mathbf{R} \sqrt{-|g|} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right] \, d^{n+1}\xi.
 \end{aligned}$$

Le premier terme peut s'écrire

$$\int_{\mathcal{V}} D_{\mu} (g_{\rho\sigma} D^{\mu} (\delta g^{\rho\sigma}) - D_{\nu} (\delta g^{\mu\nu})) \, dv_g,$$

qui est l'intégrale d'une divergence et se réduit donc à un terme de bord. Si nous choisissons la variation $\delta g^{\mu\nu}$ à support compact, ce terme s'annule et nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{S}_{\text{EH}} &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} \left[\mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathbf{R} g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \, dv \\
 &= \left(\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} G_{\mu\nu} \, dv \right) \delta g^{\mu\nu}.
 \end{aligned}$$

Or g est un point critique, ou point stationnaire, de \mathcal{S}_{EH} si et seulement si $\delta \mathcal{S}_{\text{EH}}[g]$ s'annule pour toute variation $\delta g^{\mu\nu}$. \mathcal{S}_{EH} est une fonctionnelle ne dépendant que du germe de g en chaque point, donc on peut se restreindre aux variations à support compact. On obtient les équations de la RG dans le vide.

Proposition 1.1.2. *g est un point critique de \mathcal{S}_{EH} si et seulement si elle est solution des équations de champ d'Einstein dans le vide :*

$$G_{\mu\nu} = 0. \tag{1.4}$$

1.1.3 Matière et énergie

La matière et l'énergie peuvent être ajoutées à cette action sous la forme d'une autre fonctionnelle :

$$\mathcal{S}_{\text{mat}}[g, \Psi] = \int_{\mathcal{V}} L_{\text{mat}}[g, \Psi] \, d^{n+1}\xi,$$

où Ψ représente l'ensemble des champs de matière et d'énergie. Nous posons

$$T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-|g|}} \frac{\delta L_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{1.5}$$

Il s'agit du **tenseur d'énergie-impulsion** associé à $\mathcal{S}_{\text{mat}}[g, \Psi]$. En considérant la nouvelle action :

$$\mathcal{S}_{\text{RG}}[g, \Psi] := \mathcal{S}_{\text{EH}}[g] + \mathcal{S}_{\text{mat}}[g, \Psi], \tag{1.6}$$

nous pouvons procéder à la même dérivation que pour les équations dans le vide et trouver que :

Proposition 1.1.3. *g est un point critique de \mathcal{S}_{RG} si et seulement si elle obéit aux équations d'Einstein en présence de matière, ou équations de la Relativité Générale :*

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

1.1.4 Champ scalaire

Comme premier exemple de champ de matière, nous pouvons considérer un champ scalaire ϕ , dont la dynamique est définie par l'action

$$\mathcal{S}_{sf}[g, \phi] := \int_{\mathcal{V}} L_{sf}[g, \phi] d^{n+1}\xi = \int_{\mathcal{V}} - \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_{\mu}\phi D_{\nu}\phi + V(\phi) \right] \sqrt{-|g|} d^{n+1}\xi, \quad (1.8)$$

où $V(\phi)$ est la fonction de potentiel dont dépend la dynamique du champ scalaire en fonction des modèles : Klein-Gordon, ϕ^4 , sinus-Gordon...

Lemme 1.1.4. *Le tenseur d'énergie-impulsion associé à \mathcal{S}_{sf} est*

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= - \frac{2}{\sqrt{-|g|}} \frac{\delta L_{sf}}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{-|g|}} \left[\frac{1}{2} D_{\mu}\phi D_{\nu}\phi \sqrt{-|g|} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} D_{\alpha}\phi D_{\beta}\phi + V(\phi) \right) g_{\mu\nu} \sqrt{-|g|} \right] \\ &= D_{\mu}\phi D_{\nu}\phi - \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} D_{\alpha}\phi D_{\beta}\phi + V(\phi) \right) g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.1.5 Constante cosmologique

Un autre exemple de champ extrêmement répandu parmi les modèles cosmologiques est celui de la constante cosmologique Λ : un champ d'énergie constant en tout point.

$$\mathcal{S}_{CC}[g] := \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} (-2\Lambda) dv_g.$$

Proposition 1.1.5. *En ajoutant cette action à \mathcal{S}_{RG} , nous obtenons les équations de champ suivantes :*

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

Dans la suite nous absorberons \mathcal{S}_{CC} dans \mathcal{S}_{mat} .

1.2 Décomposition $n + 1$ de la Relativité Générale

Comme expliqué en introduction, notre objectif est maintenant de mettre ces équations de champ sous la forme d'équations d'évolution ; c'est le cas par exemple quand on passe d'une formulation lagrangienne à une formulation hamiltonienne.

1.2.1 Notations

Précisons quelques définitions.

Définition 1.2.1. Soit $m \in \mathcal{V}$. Un vecteur $v \in T_m\mathcal{V}$ tangent à \mathcal{V} en m est dit :

- ★ de genre **temps** si $g(v, v) < 0$;
- ★ de genre **lumière** si $g(v, v) = 0$;
- ★ de genre **espace** si $g(v, v) > 0$.

En chaque point m de \mathcal{V} , le cône isotrope de g est appelé cône de lumière. Il enveloppe la réunion de deux cônes convexes d'origine m . Nous supposons que l'on peut choisir l'un de ces deux cônes continûment sur \mathcal{V} : on dit alors que \mathcal{V} est **temporellement orientable**. Ce choix de cône convexe, arbitraire, partitionne les cônes convexes de g et les vecteurs de genre temps qu'ils contiennent selon deux ensembles baptisés passé et futur.

Définition 1.2.2. Une **hypersurface** de \mathcal{V} est une sous-variété $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ de codimension 1. Elle est dite de genre **espace**, ou **spatiale**, si la métrique induite $\gamma := i^*g$ (où $i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{V}$) est riemannienne, ie. définie positive.

Pour une fonction $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle hypersurfaces de niveau de f les hypersurfaces $f^{-1}(\{x\})$, $x \in \mathbb{R}$.

On peut alors montrer que

Proposition 1.2.3. $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ est de genre espace si et seulement si pour tout $m \in \mathcal{M}$, il existe un vecteur unitaire $u \in T_m\mathcal{V}$ normal à \mathcal{M} et de genre temps.

L'une des caractéristiques de la formulation lagrangienne de la RG vue précédemment est d'être $n + 1$ -covariante, ie. d'être invariante sous les difféomorphismes préservant la géométrie lorentzienne de \mathcal{V} . Ce sont les changements de référentiel spatio-temporel, sous lesquels le genre d'un vecteur est conservé.

Une formulation hamiltonienne décrit en revanche une évolution de chaque point selon un référentiel temporel fixé. Elle peut être n -covariante en espace, mais pas en temps, et nécessite le choix a priori de cette famille de référentiels temporels. Ce choix correspond à celui d'une **fonction temps** $t \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R})$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

- ★ ∂_t , le gradient de t , est en tout point de genre temps et dirigé vers le futur ;
- ★ les hypersurfaces de niveau de t forment une fibration de \mathcal{V} .

Ces hypersurfaces sont alors transverses à ∂_t , donc de genre espace. On peut les munir de coordonnées locales x^i ; en rebaptisant $x^0 := t$, on obtient des coordonnées locales pour \mathcal{V} : (x^0, x^i) .

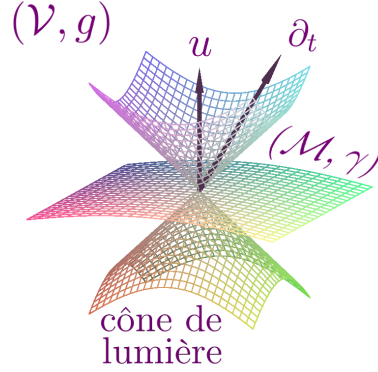


FIGURE 1.1 – Plongement de \mathcal{M} dans \mathcal{V} , transverse au cône de lumière.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ un temps fixé. Nous écrivons

$\mathcal{M} = t^{-1}(\{t_0\})$	l'hypersurface de niveau de t_0 ,
$i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{V}$	l'injection de \mathcal{M} dans \mathcal{V} ,
$\gamma = i^*g$	la métrique riemannienne induite par g sur \mathcal{M} ,
$(t =: x^0, x^i)$	les coordonnées locales sur \mathcal{V} ,
γ_{ij}	les coefficients de la métrique γ ,
$\nabla[\gamma]$	la connexion de Levi-Civita de γ ,
$\Gamma[\gamma]_{ij}^k$	le symbole de Christoffel de γ ,
$\ \cdot\ _\gamma$	la norme associée à γ ,
$R[\gamma]_{ijkl}$	le tenseur de Riemann de γ ,
$R[\gamma]_{ij}$	le tenseur de Ricci de γ ,
$R[\gamma]$	la courbure scalaire de γ ,
$\Delta[\gamma] = \nabla[\gamma]_i \nabla[\gamma]^i$	le laplacien de γ ,
$dv_\gamma = \sqrt{ \gamma } d^n x$	l'élément de volume de (\mathcal{M}, γ) .

Les indices latins parcourent 1 à n , les indices grecs 0 à n . Les coefficients des tenseurs sont écrits dans les coordonnées locales (x^i) . La dépendance en γ est omise si elle n'est pas nécessaire.

Nous écrivons

u^μ	le champ de vecteurs unitaire normal à \mathcal{M} , de genre temps, pointant vers le futur,
$u^\mu =: \frac{1}{N} (1, -X^i)$	les coordonnées de u^μ dans la base (∂_t, ∂_i) ,
N	est alors nommé le <i>lapse</i> ,
X^i	est alors nommé le <i>shift</i> .
$\varepsilon = u^\mu u_\mu = \pm 1$	Ici, u^μ est de genre temps, donc $\varepsilon = -1$. Si u^μ était de genre espace, nous aurions $\varepsilon = +1$.
$u_\mu = (\varepsilon N, 0)$	la 1-forme associée à u^μ par g .

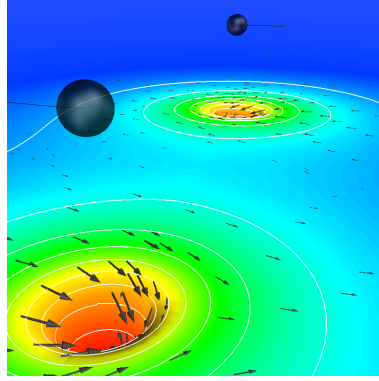


FIGURE 1.2 – Système binaire de trous noirs en rotation. La surface colorée représente le plan orbital, sa hauteur la courbure de l'espace, sa couleur la dilatation du temps (le lapse), ses flèches l'entraînement de l'espace (le shift).

Crédits : SpEC simulation, Harald Pfeiffer (CITA) et Caltech/Cornell.

L'intérêt de garder ε à la place de -1 est de garder visible l'origine géométrique des nombreux -1 qui apparaîtront dans les équations suivantes. Nous empruntons cette notation à [88].

Introduisons

$\gamma_\mu^\nu := g_\mu^\nu - \varepsilon u_\mu u^\nu$ le projecteur orthogonal de $T\mathcal{V}$ sur $T\mathcal{M}$.
En particulier,

$$\gamma_\mu^\nu u^\mu = 0, \quad \gamma_\mu^\nu \gamma_\rho^\mu = \gamma_\rho^\nu, \quad \gamma_i^\nu = g_i^\nu = \delta_i^\nu.$$

γ_μ^ν peut être utilisé pour relier $D[g]$ à $\nabla[\gamma]$: si $T_{\beta_1 \dots}^{\alpha_1 \dots}$ est un tenseur, on a

$$\nabla[\gamma]_\mu T_{\alpha_1 \dots}^{\beta_1 \dots} = \gamma_\mu^\nu \gamma_{\alpha_1}^{\mu_1} \dots \gamma_{\nu_1}^{\beta_1} \dots D[g]_\nu T_{\mu_1 \dots}^{\nu_1 \dots}.$$

$K_{\mu\nu} := \nabla_\mu u_\nu = \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha u_\beta$ la seconde forme fondamentale de \mathcal{M} .
Également appelée courbure extrinsèque, il s'agit d'une 2-forme symétrique.

Il existe d'autres définitions équivalentes pour $K_{\mu\nu}$, par exemple :

Proposition 1.2.4.

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_u \gamma_{\mu\nu}. \tag{1.11}$$

DÉMONSTRATION. La preuve est un résultat classique de géométrie différentielle. D est la connexion de Levi-Civita de g , donc pour tous champs de vecteurs $U, V, W \in T\mathcal{V}$, on a

$$(\mathcal{L}_W g)(U, V) = g(D_U W, V) + g(U, D_V W). \tag{1.12}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 2D_\mu u_\nu &= D_\mu u_\nu + D_\nu u_\mu = (\mathcal{L}_u g)(\partial_\mu, \partial_\nu) \\
 &= u \cdot g_{\mu\nu} - g([u, \partial_\mu], \partial_\nu) - g(\partial_\mu, [u, \partial_\nu]) \\
 &= \frac{1}{N} [(\partial_t - X) \cdot g_{\mu\nu} - g([\partial_t - X, \partial_\mu], \partial_\nu) - g(\partial_\mu, [\partial_t - X, \partial_\nu])] \\
 &= \frac{1}{N} [\partial_t \cdot g_{\mu\nu} - (X \cdot g_{\mu\nu} - g([X, \partial_\mu], \partial_\nu) - g(\partial_\mu, [X, \partial_\nu]))] \\
 &= \frac{1}{N} [\partial_t \cdot g_{\mu\nu} - (\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu}] \\
 &= (\mathcal{L}_u g)_{\mu\nu} \\
 &= (\mathcal{L}_u \gamma)_{\mu\nu} + \varepsilon u_\mu (\mathcal{L}_u u)_\nu + \varepsilon u_\nu (\mathcal{L}_u u)_\mu.
 \end{aligned}$$

On projette sur $T\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
 2K_{\mu\nu} &= 2\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha u_\beta \\
 &= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta [(\mathcal{L}_u \gamma)_{\alpha\beta} + \varepsilon u_\alpha (\mathcal{L}_u u)_\beta + \varepsilon u_\beta (\mathcal{L}_u u)_\alpha] \\
 &= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta (\mathcal{L}_u \gamma)_{\alpha\beta} \\
 &= (\mathcal{L}_u \gamma)_{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

car γ étant la métrique induite sur \mathcal{M} , orthogonale à u^μ , on a $\mathcal{L}_u \gamma \perp u$. □

1.2.2 Formalisme ADM

Nous pouvons maintenant écrire la décomposition $n + 1$, ou formalisme Arnowitt-Deser-Misner (ADM) de la RG. Elle consiste à projeter les équations de champ (1.7) sur \mathcal{M} et u^μ . Il nous faut encore introduire :

$E := T_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$	la densité d'énergie,
$J_\mu := \varepsilon \gamma_\mu^\alpha T_{\alpha\beta} u^\beta$	la densité de moment, ou de quantité de mouvement,
$S_{\mu\nu} := \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta T_{\alpha\beta}$	la densité du tenseur des contraintes.

De sorte que

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + J_\mu u_\nu + J_\nu u_\mu + E u_\mu u_\nu. \quad (1.13)$$

La même décomposition peut être effectuée sur $R[g]_{\mu\nu\rho\sigma}$, en utilisant :

l'équation de Gauss :	$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\gamma^\rho \gamma_\delta^\sigma R[g]_{\mu\nu\rho\sigma} = R[\gamma]_{\alpha\beta\gamma\delta} - \varepsilon (K_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} - K_{\alpha\delta} K_{\beta\gamma})$ $=: M_{\alpha\beta\gamma\delta},$	(1.14)
-----------------------	---	--------

l'identité de Codazzi :	$\varepsilon \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\gamma^\rho R[g]_{\mu\nu\rho\sigma} u^\sigma = \varepsilon (\nabla[\gamma]_\alpha K_{\beta\gamma} - \nabla[\gamma]_\beta K_{\alpha\gamma})$ $=: N_{\alpha\beta\gamma},$	(1.15)
-------------------------	---	--------

$$\begin{aligned}
 \text{l'équation de Mainardi : } \quad \gamma^\mu_\alpha \gamma^\rho_\gamma \mathbf{R}[g]_{\mu\nu\rho\sigma} u^\nu u^\sigma &= -\mathcal{L}_u K_{\alpha\gamma} + K_{\alpha\tau} K_\gamma^\tau - \varepsilon \frac{\nabla[\gamma]_\alpha \nabla[\gamma]_\gamma N}{N} \\
 &=: O_{\alpha\gamma}.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Nous reprenons pour M et N les notations de [88] et les avons étendues à O .

Remarquons que $N_{\alpha\beta\gamma}$ est antisymétrique en $\alpha \leftrightarrow \beta$, tandis que $O_{\alpha\gamma}$ est symétrique en $\alpha \leftrightarrow \gamma$.

Nous écrivons :

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} &:= M_{\alpha\beta}^{\quad\gamma\delta} = M^{\gamma\delta}_{\quad\alpha\beta}, & N_{\alpha\beta}^\gamma &:= N_{\alpha\beta}^{\quad\gamma}, \\
 O_\alpha^\beta &:= O_\alpha^{\quad\beta} = O^\beta_{\quad\alpha}, & N_\gamma^{\alpha\beta} &:= N^{\alpha\beta}_{\quad\gamma}.
 \end{aligned}$$

Enfin, nous posons :

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_{\mu\nu\rho\sigma} &:= N_{\mu\nu\rho} u_\sigma + N_{\nu\mu\sigma} u_\rho + N_{\rho\sigma\mu} u_\nu + N_{\sigma\rho\nu} u_\mu, \\
 \bar{O}_{\mu\nu\rho\sigma} &:= O_{\mu\rho} u_\nu u_\sigma - O_{\mu\sigma} u_\nu u_\rho - O_{\nu\rho} u_\mu u_\sigma + O_{\nu\sigma} u_\mu u_\rho.
 \end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$\mathbf{R}[g]_{\mu\nu\rho\sigma} = M_{\mu\nu\rho\sigma} + \bar{N}_{\mu\nu\rho\sigma} + \bar{O}_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{1.17}$$

où $M_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\bar{N}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ et $\bar{O}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ont les symétries de $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Calculons maintenant les contractions de ces tenseurs par rapport à $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
 M_{\mu\rho} &:= g^{\nu\sigma} M_{\mu\nu\rho\sigma} = \gamma^{\nu\sigma} M_{\mu\nu\rho\sigma} = \mathbf{R}[\gamma]_{\mu\rho} - \varepsilon (K K_{\mu\rho} - K_{\mu\tau} K_\rho^\tau), \\
 M &:= g^{\mu\rho} M_{\mu\rho} = \mathbf{R}[\gamma] - \varepsilon (K^2 - K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta}), \\
 N_\nu &:= g^{\mu\rho} N_{\mu\nu\rho} = \varepsilon (D_\tau K_\nu^\tau - D_\nu K), \\
 \bar{N}_{\mu\rho} &:= g^{\nu\sigma} \bar{N}_{\mu\nu\rho\sigma} = N_\mu u_\rho + N_\rho u_\mu, \\
 \bar{N} &:= g^{\mu\rho} \bar{N}_{\mu\rho} = 0, \\
 O &:= g^{\mu\rho} O_{\mu\rho} = -\mathcal{L}_u K - K_\mu^\nu K_\nu^\mu - \varepsilon \frac{\Delta N}{N}, \\
 \bar{O}_{\mu\rho} &:= g^{\nu\sigma} \bar{O}_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon O_{\mu\rho} + O u_\mu u_\rho, \\
 \bar{O} &:= g^{\mu\rho} \bar{O}_{\mu\rho} = 2\varepsilon O.
 \end{aligned}$$

Précisons pour finir les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 u^\mu \bar{N}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \varepsilon N_{\sigma\rho\nu}, \\
 u^\mu \bar{N}_{\mu\rho} &= \varepsilon N_\rho, \\
 u^\mu \bar{O}_{\mu\nu\rho\sigma} &= -\varepsilon O_{\nu\rho} u_\sigma + \varepsilon O_{\nu\sigma} u_\rho, \\
 u^\mu \bar{O}_{\mu\rho} &= \varepsilon O u_\rho.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons alors décomposer le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$ selon (1.17) :

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha\beta} &= \mathbf{R}[g]_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathbf{R}[g] g_{\alpha\beta} \\
 &= M_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} M g_{\alpha\beta} + \bar{N}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \bar{N} g_{\alpha\beta} + \bar{O}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \bar{O} g_{\alpha\beta},
 \end{aligned}$$

et calculer

$$G_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -\frac{\varepsilon}{2}M, \quad (1.18)$$

$$\varepsilon\gamma_\mu^\alpha G_{\alpha\beta}u^\beta = N_\mu, \quad (1.19)$$

$$\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta G_{\alpha\beta} = M_{\mu\nu} - \frac{1}{2}M\gamma_{\mu\nu} + \varepsilon(O_{\mu\nu} - O\gamma_{\mu\nu}). \quad (1.20)$$

Ainsi les équations de champ (1.7) sont équivalentes à

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta &= \kappa E, \\ \varepsilon\gamma_\mu^\alpha G_{\alpha\beta}u^\beta &= \kappa J_\mu, \\ \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta G_{\alpha\beta} &= \kappa S_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

ie.

$$R[\gamma] - \varepsilon(K^2 - K_{ij}K^{ij}) = -2\varepsilon\kappa E, \quad (\text{contrainte hamiltonienne}) \quad (1.21)$$

$$\varepsilon(\nabla[\gamma]_j K_i^j - \nabla[\gamma]_i K) = \kappa J_i, \quad (\text{contraintes de moment}) \quad (1.22)$$

$$G_{ij} = \kappa S_{ij}. \quad (\text{équations dynamiques}) \quad (1.23)$$

Les deux premières lignes sont appelées **équations de contrainte**. Elles sont une condition nécessaire portant sur une hypersurface spatiale munie de sa métrique et de sa courbure extrinsèque $(\mathcal{M}, \gamma_{ij}, K_{ij})$, ie. de ses deux formes fondamentales, pour être la restriction sur une tranche d'un espace-temps $(\mathcal{V}, g_{\mu\nu})$ vérifiant les équations d'Einstein (1.7).

La troisième ligne (1.23) est un système nommé **équations dynamiques**, dans la mesure où elle décrit l'évolution de (γ_{ij}, K_{ij}) selon u^μ , et donc selon ∂_t .

1.3 Le problème de Cauchy

1.3.1 Problème bien posé

Les conditions (1.21, 1.22) sont-elles également suffisantes? Cette question est appelée le **problème de Cauchy** pour la RG. Donnons-en une définition plus précise.

Définition 1.3.1 (cf. [5] et [16]). Une **donnée initiale** est un triplet $(\mathcal{M}, \gamma_{ij}, K_{ij})$ où \mathcal{M} est une variété de dimension n , γ_{ij} sa métrique riemannienne et K_{ij} un 2-tenseur symétrique sur \mathcal{M} .

Un **développement** d'une donnée initiale est un espace-temps $(\mathcal{V}, g_{\mu\nu})$ tel que

$$i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{V}, \quad \gamma = i^*g, \quad K_{ij} \text{ est la seconde forme fondamentale de } i(\mathcal{M}) \subset \mathcal{V}.$$

Le problème de Cauchy pour la RG est dit **bien posé** si pour tout choix d'une donnée initiale suffisamment régulière vérifiant les équations de contrainte (1.21, 1.22), il existe un développement qui vérifie les équations de la RG (1.7), et si l'application associant la donnée à son développement est continue.

1.3. LE PROBLÈME DE CAUCHY

REMARQUE 1. Un problème bien posé assure l'existence **locale** d'une solution autour de la donnée initiale. Montrer l'existence d'une solution **globale** est un travail autrement plus difficile, que nous n'aborderons pas ici.

Ainsi, maintenant que la décomposition $n + 1$ est faite, le problème d'évolution de la RG se divise en deux parties.

- ★ La détermination d'une donnée initiale, c'est-à-dire la résolution des équations de contrainte (1.21, 1.22). Ces équations forment un système couplé d'EDP non linéaires, que l'on tâche de mettre sous forme elliptique pour le résoudre. Ce sera l'objet de la section 1.4.
- ★ La propagation de cette donnée initiale en un espace-temps vérifiant les équations d'Einstein (1.7). L'objectif est d'écrire les équations dynamiques (1.23) sous forme hyperbolique, afin d'obtenir un problème de Cauchy bien posé. C'est ce que nous allons étudier maintenant.

Le résultat fondamental suivant a été montré en 1952 par Y. Choquet-Bruhat.

Théorème 1.3.2 ([27]). *Le problème de Cauchy pour les équations d'Einstein dans le vide (1.4) est bien posé.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION. Nous ne donnons qu'une idée rapide de la démonstration que l'on peut trouver dans [5].

Dans le vide, $T_{\mu\nu} = 0$, les équations de la RG se ramènent à $G_{\mu\nu} = 0$, soit

$$\mathbf{R}[g]_{\mu\nu} = 0. \quad (1.24)$$

Ce système est linéaire en les dérivées de la métrique g , mais pas hyperbolique. On peut le rendre hyperbolique en lui ajoutant la dérivée de Lie de g selon un champ de vecteurs W^μ à choisir convenablement. En posant

$$\rho[g]_{\mu\nu} := \mathbf{R}[g]_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_W g_{\mu\nu},$$

on peut choisir W de sorte que $\rho[g]_{\mu\nu} = 0$ soit hyperbolique. Cependant, les solutions de $\rho[g]_{\mu\nu} = 0$ ne sont pas celles de $\mathbf{R}[g]_{\mu\nu} = 0$. On introduit alors des coordonnées vérifiant $\square x^\mu = 0$; on les appelle **coordonnées harmoniques**. En définissant W^μ à partir de ces coordonnées, il est possible de lui imposer de valoir 0 en $t = t_0$ tout en vérifiant le système hyperbolique

$$\square W^\nu + \mathbf{R}^\nu_\mu W^\mu = 0$$

qui se déduit en quelques lignes de $\rho[g]_{\mu\nu} = 0$, et qui garantit que W^μ reste nul en tout temps. Cette valeur initiale de W^μ s'obtient par un choix judicieux de $\partial_t g_{0\nu}$ en $t = t_0$. \square

REMARQUE 2. Dans cette construction, les valeurs initiales du lapse et du shift, $g_{0\nu}(t_0)$, peuvent être choisies arbitrairement; contrairement à leurs valeurs aux temps $t \neq t_0$ qui sont déterminées par les équations d'évolution.

Il est toutefois possible de montrer que les développements issus de la même donnée initiale $(\mathcal{M}, \gamma_{ij}, K_{ij})$ pour des valeurs différentes de lapse et de shift sont isométriques dans un voisinage de \mathcal{M} , ce qui garantit l'unicité du développement.

Depuis, il a été montré que le problème de Cauchy de la RG est bien posé pour certains types de matière, en fonction de la nature de $T_{\mu\nu}$. Cela a également été prouvé pour certaines théories de gravitation autre que la RG, comme nous le verrons dans le chapitre 2.

1.3.2 Problème bien formulé

Une autre façon de montrer qu'un problème d'évolution est bien posé est de le mettre sous une forme canonique. Nous reprenons ici un vocabulaire classique d'EDP que l'on peut trouver dans [42], [82], ou encore [79].

Définition 1.3.3. Un problème est dit **bien formulé** s'il peut se mettre sous la forme d'un système d'EDP quasi-linéaire du premier ordre, ie. d'équations du premier ordre en les dérivées spatiale et temporelles des variables. Cela revient à écrire le problème sous la forme

$$\partial_t \vec{u} + M^i D_i \vec{u} = \vec{S}(\vec{u}). \quad (1.25)$$

Les M^i sont appelées **matrices caractéristiques** du système. $\vec{S}(\vec{u})$ représente les termes sources : il s'agit d'une fonction, qui ne dépend que des valeurs des variables en un point, et non d'une fonctionnelle, qui pourrait éventuellement dépendre de leurs dérivées.

Lorsque les matrices M^i vérifient :

- (i) pour tout vecteur s^i , la matrice $s_i M^i$ est à valeurs propres réelles mais n'est pas diagonalisable ;
- (ii) pour tout vecteur s^i , la matrice $s_i M^i$ est à valeurs propres réelles, diagonalisable, et respecte certaines bornes (cf. [79]) ;
- (iii) les M^i sont symétriques réelles ;

le système est alors dit

- (i) faiblement hyperbolique ;
- (ii) fortement hyperbolique ;
- (iii) symétrique hyperbolique.

Dans les deux derniers cas, on peut résoudre le problème par propagation de la donnée initiale :

Proposition 1.3.4 ([50]). *Un problème qui peut se mettre sous la forme d'un système fortement hyperbolique ou symétrique hyperbolique est bien posé.*

Mettre un problème sous forme bien posée revient surtout à éliminer les dérivées d'ordre supérieur à deux, et à choisir des variables qui vérifient un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre qui soient linéaires en ces dérivées.

Nous allons voir dans quelle mesure cette méthode s'applique à la RG.

1.3.3 Dynamique de γ_{ij} et K_{ij}

Commençons par réécrire les équations dynamiques (1.23) en des équations du premier ordre en temps sur γ_{ij} et K_{ij} .

Proposition 1.3.5. *Si $(\mathcal{M}, \gamma_{ij}, K_{ij})$ est une hypersurface de genre espace d'un espace-temps $(\mathcal{V}, g_{\mu\nu})$, on a*

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_{ij} = 2NK_{ij} + \mathcal{L}_X \gamma_{ij}, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} K_{ij} = \mathcal{L}_X K_{ij} - \varepsilon \nabla[\gamma]_{ij}^2 N - \varepsilon N \left(\mathbf{R}[g]_{ij} - \mathbf{R}[\gamma]_{ij} - 2\varepsilon K_i^k K_{kj} + \varepsilon K K_{ij} \right). \quad (1.27)$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un résultat classique, que l'on peut par exemple trouver dans [5].

La première équation est simplement une réécriture de la proposition 1.2.4 :

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_u \gamma_{\mu\nu},$$

en se rappelant que dans la base (∂x^μ) , u^μ a par définition pour coordonnées

$$u^\mu = \frac{1}{N} (1, -X^i).$$

La deuxième équation se déduit de l'équation de Mainardi (1.16) :

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\gamma^\rho \mathbf{R}[g]_{\mu\nu\rho\sigma} u^\nu u^\sigma = -\mathcal{L}_u K_{\alpha\gamma} + K_{\alpha\tau} K_\gamma^\tau - \varepsilon \frac{\nabla[\gamma]_\alpha \nabla[\gamma]_\gamma N}{N}.$$

On a en effet, en utilisant également l'équation de Gauss (1.14),

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha^\mu \gamma_\gamma^\rho \mathbf{R}[g]_{\mu\nu\rho\sigma} u^\nu u^\sigma &= \gamma_\alpha^\mu \gamma_\gamma^\rho \mathbf{R}[g]_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon (g^{\nu\sigma} - \gamma^{\nu\sigma}) \\ &= \varepsilon \gamma_\alpha^\mu \gamma_\gamma^\rho \mathbf{R}[g]_{\mu\rho} - \varepsilon \gamma_\alpha^\mu \gamma_\gamma^\rho \gamma_\beta^\nu \gamma_\delta^\sigma \mathbf{R}[g]_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^{\beta\delta} \\ &= \varepsilon \gamma_\alpha^\mu \gamma_\gamma^\rho \mathbf{R}[g]_{\mu\rho} - \varepsilon \left[\mathbf{R}[\gamma]_{\alpha\beta\gamma\delta} - \varepsilon (K_{\alpha\gamma} K_{\beta\delta} - K_{\alpha\delta} K_{\beta\gamma}) \right] \gamma^{\beta\delta} \\ &= \varepsilon \gamma_\alpha^\mu \gamma_\gamma^\rho \mathbf{R}[g]_{\mu\rho} - \varepsilon \mathbf{R}[\gamma]_{\alpha\gamma} + \left(K K_{\alpha\gamma} - K_\alpha^\beta K_{\beta\gamma} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, (1.16) devient

$$\begin{aligned} N \mathcal{L}_u K_{ij} &= -N \left[\varepsilon \mathbf{R}[g]_{ij} - \varepsilon \mathbf{R}[\gamma]_{ij} + \left(K K_{ij} - K_i^k K_{kj} \right) \right] \\ &\quad + N K_i^k K_{kj} - \varepsilon \nabla[\gamma]_{ij}^2 N \\ &= -\varepsilon \nabla[\gamma]_{ij}^2 N - \varepsilon N \left[\mathbf{R}[g]_{ij} - \mathbf{R}[\gamma]_{ij} - 2\varepsilon K_i^k K_{kj} + \varepsilon K K_{ij} \right]. \end{aligned}$$

□

Nous pouvons assez facilement aller plus loin dans cette formulation en explicitant presque toutes les dérivées premières en espace; le système obtenu s'applique alors aux variables (γ_{ij}, K_{ij}, K) .

Proposition 1.3.6.

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma_{ij} - X^l \partial_l \gamma_{ij} = \\ 2NK_{ij} + \gamma_{il} \partial_j X^l + \gamma_{lj} \partial_i X^l, \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} - X^l \partial_l K_{ij} + \varepsilon \nabla[\gamma]_{ij}^2 N - \varepsilon N R[\gamma]_{ij} = \\ K_{il} \partial_j X^l + K_{lj} \partial_i X^l \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} + N \left(2K_i^k K_{kj} - K K_{ij} \right) \\ - \varepsilon N \left(\left[\kappa S_{ij} - \frac{\kappa}{n-1} (S + \varepsilon E) \gamma_{ij} \right] \right), \\ \partial_t K - X^l \partial_l K + \varepsilon \Delta[\gamma] N + N K_{ij} K^{ij} = \\ \varepsilon N \frac{\kappa}{n-1} [S - \varepsilon(n-2)E]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

DÉMONSTRATION. Partons de la proposition 1.3.5.

★ γ_{ij} : L'équation (1.12) permet d'écrire

$$\mathcal{L}_X \gamma_{ij} = \nabla[\gamma]_i X_j + \nabla[\gamma]_j X_i, \quad (1.31)$$

donc (1.26) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_{ij} = 2NK_{ij} + \nabla[\gamma]_i X_j + \nabla[\gamma]_j X_i. \quad (1.32)$$

Cependant, cette expression utilise des dérivées covariantes $\nabla[\gamma]$ qui dépendent de γ_{ij} . Nous allons donc plutôt développer la dérivée de Lie de γ_{ij} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \gamma_{ij} &= X \cdot \gamma(\partial_i, \partial_j) - \gamma(\partial_i, \mathcal{L}_X \partial_j) - \gamma(\mathcal{L}_X \partial_i, \partial_j) \\ &= X(\gamma_{ij}) - \gamma_{il} (\mathcal{L}_X \partial_j)^l - \gamma_{lj} (\mathcal{L}_X \partial_i)^l \\ &= X^l \partial_l \gamma_{ij} + \gamma_{il} \partial_j X^l + \gamma_{lj} \partial_i X^l, \end{aligned} \quad (1.33)$$

en utilisant le fait que

$$\mathcal{L}_X \partial_k = - \left(\partial_k X^l \right) \partial_l.$$

On obtient donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_{ij} = 2NK_{ij} + X^l \partial_l \gamma_{ij} + \gamma_{il} \partial_j X^l + \gamma_{lj} \partial_i X^l. \quad (1.34)$$

★ K_{ij} : Prenons la trace des équations d'Einstein (1.7) pour calculer $R[g]_{ij}$.

$$\begin{aligned} G[g]_{\mu\nu} &= R[g]_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R[g] g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \\ &\quad - \frac{n-1}{2} R[g] = \kappa T, \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbf{R}[g]_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathbf{R}[g]g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{n-1}Tg_{\mu\nu}.$$

Projetons sur $T\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \gamma_i^\mu \gamma_j^\nu \mathbf{R}[g]_{\mu\nu} &= \kappa \gamma_i^\mu \gamma_j^\nu \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{n-1}Tg_{\mu\nu} \right) \\ &= \kappa S_{ij} - \frac{\kappa}{n-1}T\gamma_{ij}. \end{aligned}$$

Nous avons décomposé $T_{\mu\nu}$ en (1.13) selon

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + J_\mu u_\nu + J_\nu u_\mu + E u_\mu u_\nu,$$

donc

$$T = S + \varepsilon E. \quad (1.35)$$

Ainsi,

$$\gamma_i^\mu \gamma_j^\nu \mathbf{R}[g]_{\mu\nu} = \kappa S_{ij} - \frac{\kappa}{n-1}(S + \varepsilon E)\gamma_{ij}. \quad (1.36)$$

Nous pouvons utiliser le même calcul qu'en (1.33) pour développer la dérivée de Lie de K_{ij} :

$$\mathcal{L}_X K_{ij} = X^l \partial_l K_{ij} + K_{il} \partial_j X^l + K_{lj} \partial_i X^l, \quad (1.37)$$

et réécrire ensuite l'équation (1.27) de la dynamique de K_{ij} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K_{ij} &= \mathcal{L}_X K_{ij} - \varepsilon \nabla[\gamma]_{ij}^2 N - \varepsilon N \left(\mathbf{R}[g]_{ij} - \mathbf{R}[\gamma]_{ij} - 2\varepsilon K_i^k K_{kj} + \varepsilon K K_{ij} \right) \\ &= X^l \partial_l K_{ij} + K_{il} \partial_j X^l + K_{lj} \partial_i X^l - \varepsilon \nabla[\gamma]_{ij}^2 N \\ &\quad - \varepsilon N \left(\left[\kappa S_{ij} - \frac{\kappa}{n-1}(S + \varepsilon E)\gamma_{ij} \right] - \mathbf{R}[\gamma]_{ij} - 2\varepsilon K_i^k K_{kj} + \varepsilon K K_{ij} \right). \end{aligned} \quad (1.38)$$

★ K : Écrivons la dynamique de K :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K &= \frac{\partial}{\partial t} (K_{ij} \gamma^{ij}) \\ &= (\partial_t K_{ij}) \gamma^{ij} + K_{ij} (\partial_t \gamma^{ij}) \\ &= \left[\mathcal{L}_X K_{ij} - \varepsilon \nabla[\gamma]_{ij}^2 N \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon N \left(\left[\kappa S_{ij} - \frac{\kappa}{n-1}(S + \varepsilon E)\gamma_{ij} \right] - \mathbf{R}[\gamma]_{ij} - 2\varepsilon K_i^k K_{kj} + \varepsilon K K_{ij} \right) \right] \gamma^{ij} \\ &\quad - K_{ij} \gamma^{ia} \gamma^{jb} \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{ab} \\ &= \gamma^{ij} \mathcal{L}_X K_{ij} - K^{ab} (2N K_{ab} + \mathcal{L}_X \gamma_{ab}) \\ &\quad - \varepsilon \Delta[\gamma] N - \varepsilon N \left(\frac{\kappa}{n-1} [-S - \varepsilon n E] - \mathbf{R}[\gamma] - 2\varepsilon K_i^k K_k^i + \varepsilon K^2 \right) \\ &= \gamma^{ij} \mathcal{L}_X K_{ij} + K^{ij} \mathcal{L}_X \gamma_{ij} \\ &\quad - \varepsilon \Delta[\gamma] N - \varepsilon N \left(\frac{\kappa}{n-1} [-S - \varepsilon n E] - \mathbf{R}[\gamma] + \varepsilon K^2 \right). \end{aligned}$$

Or, la contrainte hamiltonienne (1.21) donne

$$R[\gamma] = \varepsilon (K^2 - K_{ij}K^{ij}) - 2\varepsilon\kappa E,$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}K &= \mathcal{L}_X K - \varepsilon\Delta[\gamma]N - \varepsilon N \left(\frac{\kappa}{n-1} [-S + \varepsilon(n-2)E] + \varepsilon K_{ij}K^{ij} \right) \\ &= X^l \partial_l K - \varepsilon\Delta[\gamma]N - NK_{ij}K^{ij} + \varepsilon \frac{\kappa}{n-1} N [S - \varepsilon(n-2)E]. \end{aligned} \quad (1.39)$$

□

Ce système contient encore des dérivées spatiales du second ordre : en $\nabla[\gamma]_{ij}^2 N$ et $R[\gamma]_{ij}$. Nous avons cependant pris la peine de l'écrire car il en sera fait usage pour l'étude des théories tenseur-scalaire dans le prochain chapitre.

Il est possible d'aller encore plus loin en introduisant de nouvelles variables correspondant aux dérivées premières de γ et d'écrire l'ensemble des équations dynamiques de la RG comme un système du premier ordre de la forme (1.25). On montre ainsi que le problème d'évolution est bien formulé en général. Selon la nature de la matière présente en S et E , on peut ensuite montrer que le problème est bien posé. Ce travail est effectué par exemple dans [42] et [82].

Bien que le caractère bien posé du problème de Cauchy de la RG ait déjà été établi depuis les années 1950, les formulations du premier ordre suscitent un intérêt nouveau depuis les années 1990-2000. Elles s'avèrent en effet bien adaptées aux schémas numériques de modélisation de la RG.

Après avoir abordé la propagation d'une donnée initiale par les équations de la RG, penchons-nous sur la construction de cette donnée initiale.

1.4 Résolution des équations de contrainte

Les équations de contrainte (1.21, 1.22) sont des conditions nécessaires que doit remplir une donnée initiale $(\mathcal{M}, \gamma_{ij}, K_{ij})$ pour pouvoir donner lieu à un développement vérifiant les équations d'Einstein. Lorsque le problème de Cauchy est bien posé, nous avons vu que ces conditions sont également suffisantes. Ainsi, la construction d'une donnée initiale compatible avec la RG est synonyme de résolution des équations de contrainte.

Ces équations sont sous-déterminées. Elles consistent en $n+1$ équations pour $n(n+1)$ inconnues : les coordonnées des tenseurs symétriques γ_{ij} et K_{ij} . L'idée alors est de séparer les variables en deux groupes : des données déterminées, et des données libres. On réécrit les équations de contrainte en un système portant sur les données déterminées ; puis on fixe arbitrairement les données libres, et on cherche à résoudre le système.

La méthode principalement utilisée pour résoudre les équations de contrainte est la **méthode conforme** : la métrique que l'on souhaite obtenir, γ , sera recherchée dans la classe conforme d'une métrique choisie arbitrairement. L'intérêt est d'obtenir une EDP elliptique sur le facteur conforme et de restreindre ainsi le problème.

Nous allons présenter cette méthode, en reprenant les notations de [5] pour la méthode conforme A, ou **semi-decoupling split**. D'autres approches existent.

1.4.1 Formulaire et notations

Commençons par introduire les notations et rappeler quelques formules classiques de changement de métrique conforme.

Définition 1.4.1. Soit $\eta \in \mathcal{S}_{++}^2(T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M})$ une métrique sur \mathcal{M} . Nous écrivons

$2^* = \frac{2n}{n-2}$	l'exposant critique dans le problème de Yamabe,
$\mathcal{C}(\eta) = \left\{ \tilde{\eta} = \Omega^2 \eta \mid \Omega \in C^\infty(\mathcal{M}), \Omega \neq 0 \right\}$	la classe conforme de η .

Nous définissons également deux opérateurs différentiels au comportement utile sous les changements conformes. Pour tout champ de vecteurs $V^i \in T\mathcal{M}$, nous écrivons

$\mathbb{L}[\eta]V_{ij} := \nabla[\eta]_i V_j + \nabla[\eta]_j V_i - \frac{2}{n} \nabla[\eta]_k V^k \eta_{ij}$	l'opérateur de Killing conforme,
$\nabla[\eta]^i \mathbb{L}[\eta]V_{ij}$	l'opérateur de Lamé de η ,
$\mathbb{Y}[\eta] := \mathbb{R}[\eta] - (2^* + 2)\Delta[\eta]$	l'opérateur de Yamabe de η .

Proposition 1.4.2. Soient γ et η deux métriques conformes, reliées par le facteur scalaire Ω^2 :

$$\gamma = \Omega^2 \eta.$$

(i) Les symboles de Christoffel se transforment alors selon

$$\Gamma[\gamma]_{ij}^h = \Gamma[\eta]_{ij}^h + \Omega^{-1} (\delta_j^h \partial_i \Omega + \delta_i^h \partial_j \Omega - \eta^{hk} \eta_{ij} \partial_k \Omega). \quad (1.40)$$

(ii) Pour tout 2-tenseur T_i^j ,

$$\nabla[\gamma]_i T_j^k = \nabla[\eta]_i T_j^k + \frac{1}{\Omega} \left[\partial_i \Omega T_j^l \delta_l^k - \partial_j \Omega T_i^k - \partial_m \Omega \left(\eta^{km} \eta_{il} T_j^l - \eta^{lm} \eta_{ij} T_l^k \right) \right]. \quad (1.41)$$

(iii) Pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathcal{M})$,

$$\Delta[\gamma]f = \Omega^{-2} \left(\Delta[\eta]f + (n-2) \eta^{ij} \frac{\partial_i \Omega}{\Omega} \partial_j f \right). \quad (1.42)$$

(iv) Enfin,

$$\Omega^2 \mathbb{R}[\gamma] - \mathbb{R}[\eta] = -2(n-1) \frac{\Delta[\eta]\Omega}{\Omega} - (n-4)(n-1) \frac{\eta^{ij} \partial_i \Omega \partial_j \Omega}{\Omega^2}. \quad (1.43)$$

Lorsque $\Omega = \varphi^{\frac{2}{n-2}}$, cette formule devient

$$\mathbb{R}[\gamma] \varphi^{\frac{n+2}{n-2}} = \mathbb{R}[\eta] \varphi - \frac{4(n-1)}{n-2} \Delta[\eta] \varphi. \quad (1.44)$$

DÉMONSTRATION. (i) Pour les symboles de Christoffel,

$$\begin{aligned}\Gamma[\gamma]_{ij}^h &= \frac{1}{2}\gamma^{hk}(\partial_i\gamma_{kj} + \partial_j\gamma_{ik} - \partial_k\gamma_{ij}) \\ &= \frac{1}{2}\Omega^{-2}\eta^{hk}[(\partial_i\eta_{kj} + \partial_j\eta_{ik} - \partial_k\eta_{ij})\Omega^2 + 2\Omega((\partial_i\Omega)\eta_{kj} + (\partial_j\Omega)\eta_{ik} - (\partial_k\Omega)\eta_{ij})] \\ &= \Gamma[\eta]_{ij}^h + \Omega^{-1}(\delta_j^h\partial_i\Omega + \delta_i^h\partial_j\Omega - \eta^{hk}\eta_{ij}\partial_k\Omega).\end{aligned}$$

(ii) On en déduit que, pour tout 2-tenseur T_i^j ,

$$\begin{aligned}\nabla[\gamma]_i T_j^k &= \partial_i T_j^k + \Gamma[\gamma]_{il}^k T_j^l - \Gamma[\gamma]_{ij}^l T_l^k \\ &= \nabla[\eta]_i T_j^k + \frac{1}{\Omega} \left[(\partial_i\Omega\delta_l^k + \partial_l\Omega\delta_i^k - \partial_m\Omega\eta^{km}\eta_{il})T_j^l \right. \\ &\quad \left. - (\partial_i\Omega\delta_j^l + \partial_j\Omega\delta_i^l - \partial_m\Omega\eta^{lm}\eta_{ij})T_l^k \right] \\ &= \nabla[\eta]_i T_j^k + \frac{1}{\Omega} \left[\partial_l\Omega T_j^l \delta_i^k - \partial_j\Omega T_i^k - \partial_m\Omega (\eta^{km}\eta_{il}T_j^l - \eta^{lm}\eta_{ij}T_l^k) \right].\end{aligned}$$

(iii) De même, pour toute fonction f ,

$$\begin{aligned}\Delta[\gamma]f &= \nabla[\gamma]_i \nabla[\gamma]^i f = \gamma^{ij} (\partial_i\partial_j f - \Gamma[\gamma]_{ij}^k \partial_k f) \\ &= \Omega^{-2}\eta^{ij} \left(\partial_i\partial_j f - \Gamma[\eta]_{ij}^k \partial_k f - \frac{1}{\Omega} \left[\partial_i\Omega\partial_j f + \partial_j\Omega\partial_i f - \eta^{kl}\eta_{ij}\partial_k\Omega\partial_l f \right] \right) \\ &= \Omega^{-2} \left(\Delta[\eta]f - \frac{1}{\Omega} \left[2\eta^{ij}\partial_i\Omega\partial_j f - n\eta^{kl}\partial_k\Omega\partial_l f \right] \right) \\ &= \Omega^{-2} \left(\Delta[\eta]f + (n-2)\eta^{ij}\frac{\partial_i\Omega}{\Omega}\partial_j f \right).\end{aligned}$$

(iv) La formule donnant la transformation de la courbure scalaire est plus calculatoire. On peut par exemple en trouver les détails dans [16], p. 188. □

Introduisons enfin les deux types de données utilisées pour la méthode conforme.

Données libres		nombres de paramètres indépendants
η_{ij}	une métrique riemannienne sur \mathcal{M} , définie à un facteur conforme près,	$\frac{n(n+1)}{2} - 1$
σ_{ij}	un 2-tenseur transverse ($\nabla[\eta]^i \sigma_{ij} = 0$) et sans trace ($\eta^{ij}\sigma_{ij} = 0$),	$\frac{n(n+1)}{2} - n - 1$
τ	un champ scalaire.	1
Données déterminées		
$\varphi > 0$	un champ scalaire,	1
W^i	un champ de vecteurs.	n

On a bien $(n + 1)(n - 1)$ paramètres libres et $n + 1$ paramètres déterminés.

Nous pouvons maintenant exposer la méthode conforme.

1.4.2 Méthode conforme dans le vide

Plaçons-nous dans le vide. Les équations de contrainte (1.21, 1.22) s'écrivent alors :

$$\mathbf{R}[\gamma] - \varepsilon (K^2 - K_{ij}K^{ij}) = 0, \quad (1.45)$$

$$\varepsilon \left(\nabla[\gamma]_j K_i^j - \nabla[\gamma]_i K \right) = 0. \quad (1.46)$$

Elles portent sur (γ_{ij}, K_{ij}) .

Théorème 1.4.3. *Redéfinissons γ_{ij} et K_{ij} à partir des données libres et déterminées définies précédemment :*

$$\gamma_{ij} = \varphi^{2^*-2} \eta_{ij}, \quad (1.47)$$

$$K_{ij} = \varphi^{-2} (\sigma_{ij} + \mathbb{L}[\eta]W_{ij}) + \frac{1}{n} \varphi^{2^*-2} \tau \eta_{ij}. \quad (1.48)$$

Alors les équations de contrainte de la RG dans le vide (1.45, 1.46) sont équivalentes à

$$\mathbb{Y}[\eta]\varphi = \varepsilon \frac{n-1}{n} \tau^2 \varphi^{2^*-1} - \varepsilon (\sigma_{ik} + \mathbb{L}[\eta]W_{ik}) (\sigma_{jl} + \mathbb{L}[\eta]W_{jl}) \eta^{ij} \eta^{kl} \varphi^{-2^*-1},$$

$$\nabla[\eta]_j \mathbb{L}[\eta]W_i^j = \frac{n-1}{n} \varphi^{2^*} \nabla[\eta]_i \tau.$$

Ce système faisant intervenir la seule métrique η , il peut être écrit de façon plus concise ainsi :

$$\mathbb{Y}\varphi = \varepsilon \varphi^{2^*-1} \frac{n-1}{n} \tau^2 - \varepsilon \varphi^{-2^*-1} \|\sigma + \mathbb{L}W\|^2, \quad (1.49)$$

$$\nabla_j \mathbb{L}W_i^j = \varphi^{2^*} \frac{n-1}{n} \partial_i \tau. \quad (1.50)$$

Ce sont les *équations de contrainte conformes dans le vide*.

DÉMONSTRATION. Il s'agit essentiellement d'un jeu d'écriture utilisant les formules de changement conforme de la proposition 1.4.2.

$$\gamma = \varphi^{2^*-2} \eta = \varphi^{\frac{4}{n-2}} \eta,$$

on pose donc

$$\Omega = \varphi^{\frac{2}{n-2}}.$$

★ Commençons par la contrainte hamiltonienne. (1.44) donne

$$\mathbf{R}[\gamma] = \varphi^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(\mathbf{R}[\eta]\varphi - \frac{4(n-1)}{n-2} \Delta[\eta]\varphi \right).$$

En outre,

$$K = \gamma^{ij} K_{ij} = \tau. \quad (1.51)$$

De plus,

$$\begin{aligned} K_{ij}K^{ij} &= \gamma^{ik}\gamma^{jl}K_{ij}K_{kl} \\ &= \gamma^{ik}\gamma^{jl} \left(\varphi^{-2} [\sigma_{ij} + \mathbb{L}[\eta]W_{ij}] + \frac{1}{n}\varphi^{2^*-2}\eta_{ij}\tau \right) \\ &\quad \times \left(\varphi^{-2} [\sigma_{kl} + \mathbb{L}[\eta]W_{kl}] + \frac{1}{n}\varphi^{2^*-2}\eta_{kl}\tau \right) \\ &= \gamma^{ik}\gamma^{jl} \left[\varphi^{-4} (\sigma_{ij} + \mathbb{L}[\eta]W_{ij}) (\sigma_{kl} + \mathbb{L}[\eta]W_{kl}) + \frac{1}{n}\varphi^{2^*-4} (\sigma_{ij} + \mathbb{L}[\eta]W_{ij}) \eta_{kl}\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n}\varphi^{2^*-4} (\sigma_{kl} + \mathbb{L}[\eta]W_{kl}) \eta_{ij}\tau + \frac{1}{n^2}\varphi^{2(2^*-2)}\eta_{ij}\eta_{kl}\tau^2 \right] \\ &= \varphi^{-2(2^*-2)-4}\eta^{ik}\eta^{jl} (\sigma_{ij} + \mathbb{L}_\eta W_{ij}) (\sigma_{kl} + \mathbb{L}_\eta W_{kl}) + \frac{1}{n}\tau^2 \\ &= \varphi^{-2 \times 2^*} \|\sigma + \mathbb{L}[\eta]W\|_\eta^2 + \frac{1}{n}\tau^2. \end{aligned}$$

En fin de compte,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[\gamma] - \varepsilon (K^2 - K_{ij}K^{ij}) &= \varphi^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(\mathbb{R}[\eta]\varphi - \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta[\eta]\varphi \right) \\ &\quad - \varepsilon \left[\tau^2 - \left(\varphi^{-2 \times 2^*} \|\sigma + \mathbb{L}[\eta]W\|_\eta^2 + \frac{1}{n}\tau^2 \right) \right] \\ &= \varphi^{-\frac{n+2}{n-2}} \left[\mathbb{R}[\eta]\varphi - \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta[\eta]\varphi \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \frac{n-1}{n}\tau^2\varphi^{\frac{n+2}{n-2}} + \varepsilon\varphi^{\frac{n+2}{n-2}-2 \times 2^*} \|\sigma + \mathbb{L}[\eta]W\|_\eta^2 \right]. \end{aligned}$$

Donc (1.45) est équivalente à

$$\mathbb{R}[\eta]\varphi - \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta[\eta]\varphi = \varepsilon \frac{n-1}{n}\tau^2\varphi^{\frac{n+2}{n-2}} - \varepsilon\varphi^{-2^*-1} \|\sigma + \mathbb{L}[\eta]W\|_\eta^2.$$

- ★ Traitons maintenant les contraintes moment. Dans (1.45), l'indice de K_i^j est monté avec la métrique γ ; dans (1.50), les indices de σ_{ij} et $\mathbb{L}[\eta]W_{ij}$ le sont avec la métrique η :

$$\begin{aligned} K_i^j &= \gamma^{jk}K_{ik} = \varphi^{-(2^*-2)}\eta^{jk}K_{ik} \\ &= \varphi^{-(2^*-2)}\eta^{jk} \left[\varphi^{-2}(\sigma_{ik} + \mathbb{L}[\eta]W_{ik}) + \frac{1}{n}\varphi^{2^*-2}\eta_{ik}\tau \right] \\ &= \varphi^{-2^*} \left(\sigma_i^j + \mathbb{L}[\eta]W_i^j \right) + \frac{1}{n}\tau\delta_i^j. \end{aligned}$$

Alors, en utilisant (1.41),

$$\begin{aligned}
 \nabla[\gamma]_j K_i^j &= \nabla[\eta]_j K_i^j + \Omega^{-1} \left[\partial_i \Omega K_i^l \delta_j^j - \partial_i \Omega K_j^j - \partial_m \Omega (\cancel{\eta^{jm} \eta_{jl} K_i^l} - \cancel{\eta^{lm} \eta_{ji} K_i^j}) \right] \\
 &= \nabla[\eta]_j K_i^j + \Omega^{-1} \left[n \partial_i \Omega K_i^l - \partial_i \Omega \tau \right] \\
 &= \nabla[\eta]_j \left[\varphi^{-2^*} \left(\sigma_i^j + \mathbb{L}[\eta] W_i^j \right) + \frac{1}{n} \tau \delta_i^j \right] \\
 &\quad + n \frac{\partial_i \Omega}{\Omega} \left[\varphi^{-2^*} \left(\sigma_i^l + \mathbb{L}[\eta] W_i^l \right) + \frac{1}{n} \tau \delta_i^l \right] - \frac{\partial_i \Omega}{\Omega} \tau \\
 &= \nabla[\eta]_j \left(\varphi^{-2^*} \right) \left[\sigma_i^j + \mathbb{L}[\eta] W_i^j \right] + \varphi^{-2^*} \nabla[\eta]_j \left(\cancel{\sigma_i^j} + \mathbb{L}[\eta] W_i^j \right) + \frac{1}{n} \nabla[\eta]_i \tau \\
 &\quad + n \frac{2}{n-2} \frac{\partial_i \varphi}{\varphi} \varphi^{-2^*} \left(\sigma_i^l + \mathbb{L}[\eta] W_i^l \right) \\
 &= - \cancel{2^* \varphi^{-2^*-1} \partial_j \varphi \left[\sigma_i^j + \mathbb{L}[\eta] W_i^j \right]} + \varphi^{-2^*} \nabla[\eta]_j \mathbb{L}[\eta] W_i^j + \frac{1}{n} \nabla[\eta]_i \tau \\
 &\quad + \cancel{2^* \varphi^{-2^*-1} \partial_i \varphi \left(\sigma_i^l + \mathbb{L}[\eta] W_i^l \right)},
 \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
 \nabla[\gamma]_j K_i^j - \nabla[\gamma]_i K &= \varphi^{-2^*} \nabla[\eta]_j \mathbb{L}[\eta] W_i^j + \frac{1}{n} \partial_i \tau - \partial_i \tau \\
 &= \varphi^{-2^*} \nabla[\eta]_j \mathbb{L}[\eta] W_i^j - \frac{n-1}{n} \partial_i \tau.
 \end{aligned}$$

□

REMARQUE 3. L'équation (1.51) montre que $\tau = K$. C'est la raison pour laquelle τ est appelée **courbure moyenne**.

La première équation (1.45) est appelée **équation de Lichnerowicz**, la seconde (1.46) **équation vecteur**. Ce système est étudié depuis les années 1950, mais est encore loin d'être entièrement compris. Par exemple, la plupart des résultats ne valent que pour une variété \mathcal{M} compacte, ce qui restreint les cas physiques auxquels ils peuvent s'appliquer. En effet, l'existence de solutions est intimement liée à la structure conforme de la variété (\mathcal{M}, η) , de par un invariant conforme très particulier, sa **constante de Yamabe** :

$$\mathcal{Y}[\eta] := \inf_{\substack{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \\ f \neq 0}} \frac{\int_{\mathcal{M}} \left(\frac{4(n-1)}{n-2} \|\nabla[\eta] f\|_\eta^2 + \mathbb{R}[\eta] f^2 \right) dv_\eta}{\|f\|_{L^{2^*}(\mathcal{M}, \eta)}^2} = \inf_{\tilde{\eta} \in \mathcal{C}(\eta)} \frac{\int_{\mathcal{M}} \mathbb{R}[\tilde{\eta}] dv_{\tilde{\eta}}}{\int_{\mathcal{M}} 1 dv_{\tilde{\eta}}}.$$

Alors, si l'on considère (1.49) indépendamment de (1.50), l'existence et l'unicité d'une solution dépendent du signe de $\mathcal{Y}(\eta)$, que l'on appelle la **classe de Yamabe** de (\mathcal{M}, η) ; et de si $\|\sigma + \mathbb{L}W\|$ et τ s'annulent ou non.

- ★ Si la courbure moyenne τ est constante, (1.49) et (1.50) sont effectivement découplées. Il s'agit du cas de **courbure moyenne constante**, ou *constant mean curvature* (CMC), largement étudié depuis les années 1970, et résolu de façon systématique par J. Isenberg en 1995 [40].

★ Le cas *near-CMC*, lorsque $d\tau/\tau$ est petit, est encore ouvert ; [41] et [61] sont des articles de références à ce sujet.

★ Le cas *far-from-CMC*, lorsqu'aucune hypothèse n'est faite sur $d\tau/\tau$, est a fortiori toujours à explorer. Aujourd'hui, deux méthodes existent pour le traiter. D'une part, l'existence d'une solution à (1.49, 1.50) a été prouvée en 2009 par D. Maxwell [62] si $\mathcal{Y}[\eta] > 0$ et σ_{ij} est suffisamment petit.

D'autre part, en 2010, il a été montré par M. Dahl, R. Gicquaud et E. Humbert [21] que l'existence de solutions est équivalente à la **non**-existence d'une solution W^i à l'équation

$$\nabla_j \mathbb{L}W_i^j = \alpha \sqrt{\frac{n-1}{n}} \|\mathbb{L}W\| \frac{\partial_i \tau}{\tau}$$

pour un certain $\alpha \in]0, 1]$. Ces résultats ont été étendus récemment par T. C. Nguyen dans [12]. [13] est consacré à des résultats de non-existence et de non-unicité de solutions.

On peut trouver en [36] une revue très complète de la question.

1.4.3 Méthode conforme avec matière

Malgré cette complexité, le système des équations de contrainte de la RG dans le vide (1.49, 1.50) correspond en fait à un modèle de gravitation simple, qui se réduit à :

$$R[g]_{\mu\nu} = 0. \quad (1.24)$$

Revenons aux équations de contrainte dans le cas général, en présence de matière :

$$R - \varepsilon (K^2 - K_{ij}K^{ij}) = -2\varepsilon\kappa E, \quad (1.21)$$

$$\varepsilon (\nabla_j K_i^j - \nabla_i K) = \kappa J_i. \quad (1.22)$$

Proposition 1.4.4. *Si l'on opère le même changement de variable conforme qu'au paragraphe 1.4.2 :*

$$\gamma_{ij} = \varphi^{2^*-2} \eta_{ij},$$

$$K_{ij} = \varphi^{-2} (\sigma_{ij} + \mathbb{L}[\eta]W_{ij}) + \frac{1}{n} \varphi^{2^*-2} \tau \eta_{ij},$$

alors le système (1.21, 1.22) est équivalent aux **équations de contrainte conformes**

$$\mathbb{Y}\varphi = \varepsilon \varphi^{2^*-1} \left(\frac{n-1}{n} \tau^2 - 2\kappa E \right) - \varepsilon \varphi^{-2^*-1} \|\sigma + \mathbb{L}W\|^2, \quad (1.52)$$

$$\nabla_j \mathbb{L}W_i^j = \varphi^{2^*} \left(\frac{n-1}{n} \partial_i \tau + \varepsilon \kappa J_i \right). \quad (1.53)$$

Dans le cas découplé, ie. si $\frac{n-1}{n} \partial_i \tau + \varepsilon \kappa J_i \equiv 0$, l'existence d'une solution à l'équation de Lichnerowicz (1.52) dépend du signe de $\varepsilon \left(\frac{n-1}{n} \tau^2 - 2\kappa E \right)$.

- ★ Lorsque $\varepsilon \left(\frac{n-1}{n} \tau^2 - 2\kappa E \right) \leq 0$, il s'agit du cas **défocalisant**, ou *defocusing*, étudié pour la première fois en 1995 par J. Isenberg [40]. Il est proche du cas du vide (1.49).
- ★ Lorsque $\varepsilon \left(\frac{n-1}{n} \tau^2 - 2\kappa E \right) > 0$, il s'agit du cas **focalisant**, ou *focusing*, plus compliqué. De très récents résultats peuvent être trouvés dans les travaux de B. Premoselli, par exemple [74].

Dans le cas couplé, une hypothèse sur la petite taille de $\frac{n-1}{n} \partial_i \tau + \varepsilon \kappa J_i$ est suffisante pour appliquer les travaux du near-CMC et obtenir de rapides résultats d'existence. Pour des résultats plus fins en revanche, ou si l'on ne suppose pas cette petitesse, la dépendance précise entre $\frac{n-1}{n} \partial_i \tau + \varepsilon \kappa J_i$ et $\varepsilon \left(\frac{n-1}{n} \tau^2 - 2\kappa E \right)$ doit être connue.

1.4.4 Méthode conforme avec un champ de matière scalaire

Comme exemple de champ de matière, nous pouvons comme dans le paragraphe 1.1.4 considérer un champ scalaire ϕ dont la dynamique est définie par l'action

$$\mathcal{S}_{\text{sf}}[g, \phi] = - \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu \phi D_\nu \phi + V(\phi) \right] \sqrt{-|g|} d^{n+1}x, \quad (1.8)$$

qui correspond au tenseur d'énergie-impulsion

$$T_{\mu\nu} = D_\mu \phi D_\nu \phi - \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} D_\alpha \phi D_\beta \phi + V(\phi) \right) g_{\mu\nu}. \quad (1.9)$$

Afin de calculer les projections de $T_{\mu\nu}$, nous devons introduire

$Q_\mu := \nabla_\mu \phi = \gamma_\mu^\alpha D_\alpha \phi$	le gradient spatial de ϕ ,
$\Pi := \mathcal{L}_u \phi = u(\phi) = u^\mu D_\mu \phi$	la quadri-impulsion de ϕ , ie. sa dérivée de Lie le long de u^μ .

On a alors

Proposition 1.4.5. *Si $T_{\mu\nu}$ est défini comme en (1.9), alors*

$$E = T_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = \frac{1}{2} \left(\Pi^2 - \varepsilon \|Q\|_\gamma^2 \right) - \varepsilon V(\phi),$$

$$J_\mu = \varepsilon \gamma_\mu^\alpha T_{\alpha\beta} u^\beta = \varepsilon \Pi Q_\mu.$$

Les équations (1.21, 1.22) deviennent les **équations de contrainte d'Einstein avec champ scalaire**, exprimées avec la métrique γ :

$$R - \varepsilon (K^2 - K_{ij} K^{ij}) = \kappa \left[-\varepsilon \Pi^2 + \partial_i \phi \partial^i \phi + 2V(\phi) \right], \quad (1.54)$$

$$\varepsilon \left(\nabla_j K_i^j - \nabla_i K \right) = \kappa \varepsilon \Pi \partial_i \phi. \quad (1.55)$$

Les équations de contrainte conformes, exprimées avec la métrique η , deviennent :

$$\mathbb{Y}\varphi = \varepsilon \varphi^{2^*-1} \left(\frac{n-1}{n} \tau^2 - \kappa \left[\Pi^2 - \varepsilon \varphi^{-2^*+2} \partial_i \phi \partial^i \phi - 2\varepsilon V(\phi) \right] \right) - \varepsilon \varphi^{-2^*-1} \|\sigma + \mathbb{L}W\|^2, \quad (1.56)$$

$$\nabla_j \mathbb{L}W_i^j = \varphi^{2^*} \left(\frac{n-1}{n} \partial_i \tau + \kappa \Pi \partial_i \phi \right). \quad (1.57)$$

1.4. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE CONTRAINTE

DÉMONSTRATION. Pour le calcul de E , il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} E = T_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta &= \Pi^2 - \varepsilon \left(\frac{1}{2} \left[\gamma^{\alpha\beta} + \varepsilon u^\alpha u^\beta \right] D_\alpha \phi D_\beta \phi + V(\phi) \right) \\ &= \Pi^2 - \varepsilon \left(\frac{1}{2} \left[\gamma^{\alpha\beta} Q_\alpha Q_\beta + \varepsilon \Pi^2 \right] + V(\phi) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\Pi^2 - \varepsilon \gamma^{\alpha\beta} Q_\alpha Q_\beta \right) - \varepsilon V(\phi). \end{aligned}$$

Le calcul de J_μ se déduit immédiatement de l'orthogonalité entre γ_μ^α et u^μ .

Les équations (1.54, 1.55) et (1.56, 1.57) s'obtiennent en injectant ces valeurs de E et J_μ dans les équations du cas général avec matière, celles du paragraphe 1.4.3, et en remplaçant Q_i par $\partial_i \phi$. \square

Si maintenant nous posons

$$\begin{array}{l} \bar{\phi} := \phi \sqrt{\kappa}, \\ \bar{\Pi} := \varphi^{2^*} \Pi \sqrt{\kappa} = \varphi^{2^*} \mathcal{L}_u \bar{\phi}, \\ \bar{V}(\bar{\phi}) := \kappa V\left(\frac{\bar{\phi}}{\sqrt{\kappa}}\right), \end{array}$$

nous obtenons une autre version des équations de contrainte conformes pour un champ scalaire, dans lesquelles la dépendance en κ a disparu, et qui nous sera utile dans le chapitre 2 :

$$(\mathbb{Y} - \partial_i \bar{\phi} \partial^i \bar{\phi}) \varphi = \varepsilon \varphi^{2^*-1} \left(\frac{n-1}{n} \tau^2 + 2\varepsilon \bar{V} \right) - \varepsilon \varphi^{-2^*-1} \left(\|\sigma + \mathbb{L}W\|^2 + \bar{\Pi}^2 \right), \quad (1.58)$$

$$\nabla_j \mathbb{L}W_i^j = \varphi^{2^*} \frac{n-1}{n} \partial_i \tau + \bar{\Pi} \partial_i \bar{\phi}. \quad (1.59)$$

Ici aussi, les travaux de B. Premoselli eg. [74], [75] et de C. T. Nguyen [31] apportent des résultats récents d'existence et d'unicité en fonction d'hypothèses sur la classe de Yamabe de \mathcal{M} , le signe $\varepsilon \frac{n-1}{n} \tau^2 + 2\bar{V}$ ou la petitesse de σ_{ij} et $\bar{\Pi}$.

Chapitre 2

Le formalisme $n + 1$

pour les théories $f(R)$, Brans-Dicke,
tenseur-scalaire

2.1 Introduction

Comme nous l'avons dit en introduction, la RG ne parvient pas à expliquer plusieurs faits astronomiques ou théoriques, et, comme toute théorie physique, a vocation à être fondue dans une théorie plus vaste et plus précise.

Nous avons choisi dans ce chapitre d'étudier trois familles d'extensions progressives de la RG : $f(\mathbf{R})$, Brans-Dicke et tenseur-scalaire. Nous répéterons la même procédure qu'au premier chapitre pour en dériver les équations de contrainte et dynamiques, afin de les comparer avec celles de la RG. Nous leur appliquerons les méthodes utilisées pour résoudre le problème d'évolution de la RG, et constaterons que leurs structures sont en fin de compte identiques.

Nous nous appuyons principalement sur [85], lui-même reprenant [79] sur certains points. Ma contribution personnelle se résume au diagramme commutatif de la dernière section.

2.1.1 Les théories $f(\mathbf{R})$

L'une des façons les plus simples de généraliser la RG est de partir de sa représentation variationnelle, l'action d'Einstein-Hilbert :

$$\mathcal{S}_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{R} \, dv, \quad (1.1)$$

et de considérer la théorie obtenue en remplaçant la courbure scalaire \mathbf{R} par une fonction arbitraire $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ de \mathbf{R} :

$$\mathcal{S}_{f_0}[g] := \int_{\mathcal{V}} f(\mathbf{R}[g]) \, dv_g. \quad (2.1)$$

Cette famille d'actions, dépendant de f , donne naissance aux **théories $f(\mathbf{R})$** . On peut rajouter une action décrivant les champs de matière et d'énergie :

$$\mathcal{S}_f[g, \Psi] := \mathcal{S}_{f_0}[g] + \mathcal{S}_{\text{mat}}[g, \Psi]. \quad (2.2)$$

La RG correspond au cas $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}/2\kappa$. Pour des fonctions f autres qu'affines, il y a au moins trois moyens de dériver des équations de champ de cette action.

- ★ Le premier est le **formalisme métrique**. De même que pour la RG, on considère qu'une seule métrique engendre la géométrie de l'espace-temps et la courbure \mathbf{R} . C'est par rapport aux variations de cette métrique que l'on calcule les variations de \mathcal{S}_f .
- ★ Le second est le **formalisme de Palatini- $f(\mathbf{R})$** , en référence au formalisme de Palatini pour la RG. Dans cette approche, la connexion D à partir de laquelle sont calculés les tenseurs de Riemann, de Ricci, et de courbure scalaire, est indépendante de la métrique g . Le tenseur de matière $\mathcal{S}_{\text{mat}}[g, \Psi]$, en revanche, dépend de g et des champs auxiliaires Ψ , mais pas de la connexion indépendante.

★ Le troisième est le **formalisme métrique-affine**. Il y est assumé que le tenseur de matière dépend également de la connexion indépendante.

Ces trois approches, présentées par ordre croissant de généralité, sont amplement décrites dans l'article de revue des théories $f(\mathbf{R})$ de T. Sotiriou et V. Faraoni [85]. Dans la suite de ce chapitre, nous ne nous pencherons que sur le cas des théories $f(\mathbf{R})$ métriques. La connexion engendrant $\mathbf{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$, $\mathbf{R}_{\mu\nu}$ et \mathbf{R} est donc la connexion de Levi-Civita associée à g , de dérivée covariante $D[g]$.

Déterminons maintenant les équations de champ de cette théorie.

Proposition 2.1.1. *g est un point critique de \mathcal{S}_f si et seulement si elle vérifie les équations de champ des théories $f(\mathbf{R})$ avec matière :*

$$f'(\mathbf{R})\mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(\mathbf{R})g_{\mu\nu} - (D_\mu D_\nu - g_{\mu\nu}\square) f'(\mathbf{R}) = 2T_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

DÉMONSTRATION. Commençons par calculer la variation de \mathcal{S}_{f_0} par rapport à $\delta g^{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}_{f_0} &= \int_{\mathcal{V}} \delta \left(f(\mathbf{R})\sqrt{-|g|} \right) d^{n+1}x \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[f'(\mathbf{R})(\delta\mathbf{R})\sqrt{-|g|} + f(\mathbf{R})\delta(\sqrt{-|g|}) \right] d^{n+1}x \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[f'(\mathbf{R}) \left(\mathbf{R}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + D_\mu [g_{\rho\sigma}D^\mu(\delta g^{\rho\sigma}) - D_\nu(\delta g^{\mu\nu})] \right) + f(\mathbf{R}) \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right) \right] dv \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[f'(\mathbf{R})\mathbf{R}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + (g_{\rho\sigma}D_\mu D^\mu f'(\mathbf{R})\delta g^{\rho\sigma} - D_\mu D_\nu f'(\mathbf{R})\delta g^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}f(\mathbf{R})g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right] dv \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[f'(\mathbf{R})\mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(\mathbf{R})g_{\mu\nu} - (D_\mu D_\nu - g_{\mu\nu}\square) f'(\mathbf{R}) \right] \delta g^{\mu\nu} dv, \end{aligned}$$

où nous avons intégré deux fois par partie et enlevé les termes de surfaces apparaissant, comme au chapitre 1. En ajoutant l'action \mathcal{S}_{mat} , nous obtenons bien l'équation (2.3). \square

2.1.2 Transformée de Legendre et champ scalaire

La différence entre ces équations de champ et celles de la RG réside seulement dans le terme $f'(\mathbf{R})$, qui n'est désormais plus constant. Nous allons nous concentrer sur ce terme, en suivant une procédure classique qui permet de réécrire les théories $f(\mathbf{R})$ sous une forme plus générale.

Introduisons la **transformée de Legendre** de f :

$$V(\phi(\mathbf{R})) := \mathbf{R}\phi(\mathbf{R}) - f(\mathbf{R}),$$

où

$$\phi := f'(\mathbf{R})$$

est la variable conjuguée de \mathbf{R} . Si f'' ne s'annule pas, alors f' est bijective, et la convexité de f est constante : la transformée de Legendre conserve l'information entre f et V . On

2.1. INTRODUCTION

peut alors exprimer l'une à partir de l'autre de façon bijective¹ par rapport aux variables \mathbf{R} et ϕ , qui sont bijectivement conjuguées par f' :

$$V(\phi) = \mathbf{R}(\phi)\phi - f(\mathbf{R}(\phi)) \iff f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}\phi(\mathbf{R}) - V(\phi(\mathbf{R})),$$

et

$$V'(\phi) = \mathbf{R}'(\phi)\phi + \mathbf{R}(\phi) - \mathbf{R}'(\phi)f'(\mathbf{R}(\phi)) = \mathbf{R}'(\phi)\phi + \mathbf{R}(\phi) - \mathbf{R}'(\phi)\phi,$$

donc

$$\phi = f'(\mathbf{R}) \iff \mathbf{R} = V'(\phi).$$

Alors l'action (2.2) devient

$$\mathcal{S}_f[g, \Psi] = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{R}\phi(\mathbf{R}) - V(\phi(\mathbf{R}))) \, dv + \mathcal{S}_{\text{mat}}[g, \Psi], \quad (2.4)$$

et les équations de champ (2.3) peuvent être réécrites en fonction de ϕ :

$$\phi \mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\mathbf{R}\phi - V(\phi)) g_{\mu\nu} - (D_\mu D_\nu - g_{\mu\nu} \square) \phi = 2T_{\mu\nu},$$

c'est-à-dire :

$$\phi G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} V(\phi) g_{\mu\nu} + (D_\mu D_\nu - g_{\mu\nu} \square) \phi + 2T_{\mu\nu}.$$

En prenant la trace de cette équation, nous obtenons

$$-\phi \frac{n-1}{2} \mathbf{R} = -\frac{n+1}{2} V + (\square - (n+1)\square)\phi + 2T,$$

où $T := T_\mu^\mu$, puis

$$\square\phi + \frac{n+1}{2n} V(\phi) - \phi \frac{n-1}{2n} V'(\phi) = \frac{2}{n} T. \quad (2.5)$$

Il s'agit d'une équation dynamique sur ϕ , où la matière, représentée par le scalaire T , joue un rôle de terme source.

Ceci conduit à l'idée d'oublier que la dépendance de ϕ en \mathbf{R} , et de le considérer comme un champ indépendant qui suit sa propre dynamique. Dans cette perspective, ϕ devient un nouveau degré de liberté, qui obéit à $\phi = f'(\mathbf{R})$ le long des trajectoires classiques (cf. [92] pour plus de détails). On rejoint ainsi la famille des théories de la gravitation qui font intervenir dans l'action d'Einstein-Hilbert, outre la métrique g et les champs de matière et d'énergie, un champ scalaire ϕ . Elles sont nommées théories tenseur-scalaire.

Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter en quelques mots les origines des théories tenseur-scalaire, en nous appuyant sur l'article historique de C. Brans [8].

1. En réalité, il est suffisant de supposer f' continue et bijective, et pas nécessairement $f'' \neq 0$, pour avoir cette équivalence, cf. [69].

2.1.3 Théories de Brans-Dicke et tenseur-scalaire

La première introduction de ces théories fut motivée dans les années 1920 par T. Kaluza et O. Klein, qui cherchaient à considérer l'espace-temps comme une sous-variété d'une variété à $n + 2$ dimensions, avec $n = 3$. La $n + 2$ -métrique générale s'écrivait alors

$$\begin{pmatrix} V^2 & V^2 A_\nu \\ V^2 A_\mu & g_{\mu\nu} + V^2 A_\mu A_\nu \end{pmatrix},$$

et faisait ainsi intervenir un champ scalaire V et un $n + 1$ -vecteur A_μ , qui rappellent le lapse et shift de la décomposition $n + 1$ de la RG vue dans le chapitre 1. Les équations de champ qui en dérivait étaient formées d'une équation sur V et ses dérivées, et des équations

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{V^2}{2}(F_{\mu\alpha}F^\alpha{}_\nu + \frac{1}{n+1}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}) - \frac{1}{V}(D_\mu D_\nu - g_{\mu\nu}\square)V,$$

où

$$F_{\mu\nu} := D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu$$

est le tenseur de Faraday dérivant du champ A_μ , vu comme un $n + 1$ -potentiel vecteur, par analogie avec le formalisme covariant de l'électromagnétisme.

Si V était un champ constant, ces équations seraient les équations d'Einstein usuelles (1.7), avec comme source un tenseur d'énergie-impulsion électromagnétique. V^2 serait alors proportionnel à \mathcal{G} . Nous trouvons ici une première raison d'imaginer que la constante de gravitation universelle puisse varier : être, en fait, un champ scalaire.

C'est ce que firent en parallèle P. Jordan, en Allemagne, et A. Einstein et P. Bergmann aux États-Unis dans les années 1930. La deuxième raison qui les animait était l'hypothèse des grands nombres de P. Dirac : celui-ci avait constaté que, bien que colossaux, les ordres de grandeurs de la constante de gravitation, et de la répartition de masse dans l'univers étaient étrangement proches :

$$\frac{1}{\kappa} \simeq \frac{M_u}{R_u}, \quad (2.6)$$

M_u étant l'échelle de masse de l'univers et $R_u = cT_u$ son échelle de taille ou d'âge. R. Dicke et C. Brans précisèrent cette idée dans les années 1960 en reformulant le principe de Mach, selon lequel l'inertie des objets matériels serait induite par l'ensemble des autres masses présentes dans l'univers. D'après Dicke, le moyen de cette influence serait alors la variation, locale, de la constante de gravitation \mathcal{G} , ou de façon équivalente, de κ .

Or (2.6) peut se lire

$$\square \frac{1}{\kappa} \simeq \rho,$$

ρ étant quelque chose comme une répartition de masse. Il devenait donc naturel d'introduire un champ scalaire, ϕ , qui jouerait le rôle de $1/\kappa$, et dont la dynamique suivrait une équation de la forme $\square\phi = \rho$. Ce champ ayant sa propre dynamique, il devait apporter avec lui dans l'action d'Einstein-Hilbert sa propre densité lagrangienne, L_ϕ .

$$\mathcal{S}[g, \Psi] = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2\kappa} R[g] dv_g + \mathcal{S}_{\text{mat}}[g, \Psi]$$

devient alors

$$\mathcal{S}[g, \phi, \Psi] = \int_{\mathcal{V}} (\phi \mathbb{R}[g] + L_\phi) dv_g \quad + \quad \mathcal{S}_{\text{mat}}[g, \Psi],$$

où ϕ remplace $1/2\kappa$.

Remarquons que cette idée de coupler la gravité à un champ massif se retrouve dès les années 1930 avec la théorie de la gravité massive de Fierz-Pauli, dans laquelle la particule portant l'interaction gravitationnelle est munie d'une masse non nulle.

L'équation souhaitée pour l'évolution dynamique de ϕ est de la forme

$$\square\phi = \text{source}[g, \Psi].$$

Le lagrangien le plus simple qui y parvient tout en n'ajoutant qu'une constante sans dimension, ω_0 , est

$$L_\phi = -\frac{\omega_0}{\phi} D_\mu \phi D^\mu \phi.$$

La division par ϕ est nécessaire pour que la constante ω_0 soit sans dimension. L'objectif de Brans et Dicke est en effet de réduire le nombre de constantes physiques fondamentales en ôtant ce statut à κ , pas pour aussitôt après en introduire une nouvelle. Pour rendre ce lagrangien plus général, il a été augmenté d'un terme de potentiel qui ne dépend que de ϕ :

$$L_\phi := -\frac{\omega_0}{\phi} D_\mu \phi D^\mu \phi - V(\phi).$$

On obtient ainsi une nouvelle famille d'actions.

Définition 2.1.2. Les théories décrites par les actions

$$\mathcal{S}_{\text{BD}} = \int_{\mathcal{V}} \left(\phi \mathbb{R} - \frac{\omega_0}{\phi} D_\mu \phi D^\mu \phi - V(\phi) \right) dv \quad + \quad \mathcal{S}_{\text{mat}}[g, \Psi], \quad (2.7)$$

indexées par le paramètre $\omega_0 \in \mathbb{R}$ et le potentiel $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$, sont appelées **théories de Brans-Dicke**.

Un rapide coup d'œil à (2.4) nous montre que les théories $f(\mathbb{R})$ métriques, lorsque f'' ne s'annule pas, sont équivalentes à la théorie Brans-Dicke pour $\omega_0 = 0$. L'information contenue dans f a été déplacée dans le potentiel, V .

Il existe une famille d'actions encore plus générale, obtenue en remplaçant ϕ et ω_0 par des fonctions arbitraires. Nous la décrirons en utilisant les notations de [79] et [85].

Définition 2.1.3. On appelle **théories tenseur-scalaire**, ou *scalar-tensor theories* (STT) les théories décrites par les actions de la forme suivante.

$$\mathcal{S}_{\text{STT}}[g, \phi, \Psi] = \int_{\mathcal{V}} \left(\psi(\phi) \mathbb{R} - \frac{\omega(\phi)}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi - V(\phi) \right) dv \quad + \quad \mathcal{S}_{\text{mat}}[g, \Psi] \quad (2.8)$$

où ψ et ω sont des fonctions arbitraires de ϕ .

Les théories de Brans-Dicke correspondent aux cas particuliers

$$\psi(\phi) = \phi, \quad \omega(\phi) = \frac{2\omega_0}{\phi}.$$

Les théories $f(\mathbf{R})$ sont représentées par

$$\psi(\phi) = \phi = f'(\mathbf{R}), \quad \omega(\phi) = 0,$$

Quant à la RG avec un champ scalaire de matière ϕ non couplé à \mathbf{R} , elle correspond à

$$\psi(\phi) = \frac{1}{2\kappa}, \quad \omega(\phi) = 1.$$

Dans la suite, nous nous concentrerons donc sur l'action \mathcal{S}_{STT} . $f(\mathbf{R})$ et Brans-Dicke seront seulement des restrictions de ce cas très général. Nous déterminerons ses équations de champ dans la section 2.2, puis dans la section 2.3 sa décomposition $n + 1$.

2.2 Les équations de champ des théories tenseur-scalaire

Partons donc de l'action \mathcal{S}_{STT} définie en (2.8).

Proposition 2.2.1. *À ϕ et Ψ fixés, g est un point critique de \mathcal{S}_{STT} si et seulement si*

$$\begin{aligned} \psi G_{\mu\nu} &= \psi'' (D_\nu \phi D_\mu \phi - D_\alpha \phi D^\alpha \phi g_{\mu\nu}) \\ &+ \psi' (D_\nu D_\mu \phi - \square \phi g_{\mu\nu}) \\ &+ \frac{1}{2} \left[\omega \left(D_\nu \phi D_\mu \phi - \frac{1}{2} D_\alpha \phi D^\alpha \phi g_{\mu\nu} \right) - V g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ce sont les premières équations de champ des théories tenseur-scalaire, dues à la dépendance de \mathcal{S}_{STT} en g .

DÉMONSTRATION. Introduisons comme d'habitude une variation à support compact de l'inverse de la métrique $\delta g^{\mu\nu}$. Le premier terme de $\delta \mathcal{S}_{\text{STT}}$ est le suivant :

$$\begin{aligned} \delta(\psi \mathbf{R} \sqrt{-|g|}) &= \psi \mathbf{R} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-|g|} \right) + \psi \delta(g^{\mu\nu} \mathbf{R}_{\mu\nu}) \sqrt{-|g|} \\ &= -\frac{1}{2} \psi \mathbf{R} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-|g|} + \psi (\delta g^{\mu\nu}) \mathbf{R}_{\mu\nu} \sqrt{-|g|} \\ &\quad - \psi D_\mu (D_\nu (\delta g^{\mu\nu}) - g_{\rho\sigma} D^\mu (\delta g^{\rho\sigma})) \sqrt{-|g|} \\ &= \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathbf{R} + \mathbf{R}_{\mu\nu} \right) \psi \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-|g|} \\ &\quad - ((D_\nu D_\mu \psi) \delta g^{\mu\nu} - (D^\mu D_\mu \psi) g_{\rho\sigma} \delta g^{\rho\sigma}) \sqrt{-|g|}, \end{aligned}$$

en utilisant deux fois la formule de Stokes et en retirant les termes de bord ; la variation étant à support compact, les termes de bord en effet s'annulent. ψ désigne $\psi(\phi)$, de sorte

que

$$\begin{aligned} D^\mu \psi &= \psi' D^\mu \phi, \\ D^\nu D^\mu \psi &= (D^\nu \psi')(D^\mu \phi) + \psi' D^\nu D^\mu \phi \\ &= \psi'' D^\nu \phi D^\mu \phi + \psi' D^\nu D^\mu \phi. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \delta(\psi R \sqrt{-g}) &= \psi G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \\ &\quad + [(\psi'' D_\alpha \phi D^\alpha \phi + \psi' \square \phi) g_{\mu\nu} - (\psi'' D_\nu \phi D_\mu \phi + \psi' D_\nu D_\mu \phi)] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-|g|}. \end{aligned}$$

Maintenant, le second terme :

$$\delta(\omega g^{\mu\nu} D_\mu \phi D_\nu \phi \sqrt{-|g|}) = -\frac{1}{2} \omega g_{\rho\sigma} (\delta g^{\rho\sigma}) g^{\mu\nu} D_\mu \phi D_\nu \phi \sqrt{-|g|} + \omega (\delta g^{\mu\nu}) D_\mu \phi D_\nu \phi \sqrt{-|g|}.$$

Quant au troisième :

$$\delta(V \sqrt{-|g|}) = V \delta(\sqrt{-|g|}) = -\frac{1}{2} V g_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) \sqrt{-|g|}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_{\text{STT}} &= \int_{\mathcal{V}} \left[\left(\psi G_{\mu\nu} + (\psi'' D_\alpha \phi D^\alpha \phi + \psi' \square \phi) g_{\mu\nu} - (\psi'' D_\nu \phi D_\mu \phi + \psi' D_\nu D_\mu \phi) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega}{2} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} D_\alpha \phi D^\alpha \phi + D_\mu \phi D_\nu \phi \right) - \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} V \right) \right] \delta g^{\mu\nu} dv \quad + \quad \delta \mathcal{S}_{\text{mat}}, \end{aligned}$$

avec

$$\delta \mathcal{S}_{\text{mat}} = \int_{\mathcal{V}} \left(-\frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} dv.$$

Imposer que $\delta \mathcal{S}_{\text{STT}} = 0$ pour tout $\delta g^{\mu\nu}$ est donc équivalent à (2.9). \square

Lorsque $\psi = 0$, ces équations dégènèrent. Dans la suite, nous supposons donc que $\psi > 0$.

Définition 2.2.2. Les équations de champ (2.9) peuvent être mises sous une forme analogue à (1.7) :

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\text{eff})}, \quad (2.10)$$

avec

$$T_{\mu\nu}^{(\text{eff})} := \frac{1}{2\psi(\phi)} \left(T_{\mu\nu}^{(\psi)} + T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(m)} \right), \quad (2.11)$$

où

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(\psi)} &:= 2\psi''(\phi) (D_\mu \phi D_\nu \phi - D_\alpha \phi D^\alpha \phi g_{\mu\nu}) + 2\psi'(\phi) (D_\mu D_\nu \phi - \square \phi g_{\mu\nu}), \\ T_{\mu\nu}^{(\phi)} &:= \omega(\phi) \left(D_\mu \phi D_\nu \phi - \frac{1}{2} D_\alpha \phi D^\alpha \phi g_{\mu\nu} \right) - V(\phi) g_{\mu\nu}, \\ T_{\mu\nu}^{(m)} &:= T_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

$T_{\mu\nu}^{(\text{eff})}$ est le tenseur d'énergie-impulsion **effectif** des STT.

Proposition 2.2.3. *À g et Ψ fixés, ϕ est un point critique de \mathcal{S}_{STT} si et seulement si*

$$\omega \square \phi + \psi' \mathbf{R} - V' + \frac{\omega'}{2} D_\alpha \phi D^\alpha \phi = 0. \quad (2.12)$$

Ce sont les secondes équations de champ des théories tenseur-scalaire, dues à la dépendance de \mathcal{S}_{STT} en ϕ .

DÉMONSTRATION. Introduisons une petite variation de ϕ à support compact, $\delta\phi$, et observons les variations de l'action \mathcal{S}_{STT} par rapport à elle. On peut écrire \mathcal{S}_{STT} comme l'intégrale d'une densité lagrangienne :

$$\mathcal{S}_{\text{STT}}[g, \phi, \Psi] = \int_{\mathcal{V}} L_{\text{STT}}[g, \phi] dv_g + \mathcal{S}_{\text{mat}}[g, \Psi],$$

avec

$$L_{\text{STT}}[\phi] := \psi(\phi) \mathbf{R} - \frac{\omega(\phi)}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi - V(\phi).$$

Alors

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_{\text{STT}} &= \int_{\mathcal{V}} \delta L_{\text{STT}} \sqrt{-|g|} d^{n+1}x + \delta \mathcal{S}_{\text{mat}} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial L_{\text{STT}}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial L_{\text{STT}}}{\partial D_\alpha \phi} \delta (D_\alpha \phi) \right] dv \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial L_{\text{STT}}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial L_{\text{STT}}}{\partial D_\alpha \phi} D_\alpha (\delta \phi) \right] dv \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial L_{\text{STT}}}{\partial \phi} \delta \phi - D_\alpha \left(\frac{\partial L_{\text{STT}}}{\partial D_\alpha \phi} \right) \delta \phi \right] dv \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial L_{\text{STT}}}{\partial \phi} - D_\alpha \left(\frac{\partial L_{\text{STT}}}{\partial D_\alpha \phi} \right) \right] \delta \phi dv, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la formule de Stokes. Ainsi, $\delta \mathcal{S}_{\text{STT}} = 0$ pour tout $\delta\phi$ impose que

$$\frac{\partial L_{\text{STT}}}{\partial \phi} = D_\alpha \left(\frac{\partial L_{\text{STT}}}{\partial D_\alpha \phi} \right).$$

Il s'agit de l'équation d'Euler-Lagrange de L_{STT} associée à ϕ , que nous venons de redémontrer. D'une part,

$$\frac{\partial L_{\text{STT}}}{\partial \phi} = \psi'(\phi) \mathbf{R} - \frac{\omega'(\phi)}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi - V'(\phi).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{\text{STT}}}{\partial D_\alpha \phi} &= 0 - \frac{\omega(\phi)}{2} \frac{\partial (g^{\mu\nu} D_\mu \phi D_\nu \phi)}{\partial D_\alpha \phi} - 0 \\ &= -\frac{\omega(\phi)}{2} 2g^{\alpha\mu} D_\mu \phi \\ &= -\omega(\phi) D^\alpha \phi, \end{aligned}$$

d'où

$$D_\alpha \left(\frac{\partial L_{\text{STT}}}{\partial D_\alpha \phi} \right) = -\omega(\phi) D_\alpha D^\alpha \phi - \omega'(\phi) D_\alpha \phi D^\alpha \phi.$$

L'équation d'Euler-Lagrange devient donc

$$R\psi'(\phi) - \frac{\omega'(\phi)}{2} D_\mu \phi D^\mu \phi - V'(\phi) = -\omega(\phi) \square \phi - \omega'(\phi) D_\alpha \phi D^\alpha \phi,$$

soit

$$\omega \square \phi + \psi' R - V' + \frac{\omega'}{2} D_\alpha \phi D^\alpha \phi = 0.$$

□

Proposition 2.2.4. *En utilisant (2.9) et (2.12), nous pouvons exprimer $\square \phi$ en fonction de dérivées du premier ordre de ϕ :*

$$\square \phi = \frac{\frac{\psi'}{n-1} T^{(m)} - \frac{n+1}{n-1} \psi' V + \psi V' - \left(\frac{1}{2} [\omega \psi' + \psi \omega'] + \frac{2n}{n-1} \psi' \psi'' \right) D_\alpha \phi D^\alpha \phi}{\psi \left[\omega + \frac{2n}{n-1} \frac{\psi'^2}{\psi} \right]}. \quad (2.13)$$

Cette équation nous sera utile pour étudier le problème de Cauchy des STT dans la section 2.4.

DÉMONSTRATION. Prenons la trace de l'équation (2.10) :

$$-\frac{n-1}{2} R = T^{(\text{eff})},$$

où

$$\begin{aligned} T^{(\text{eff})} &= \frac{1}{2\psi} \left(T^{(\psi)} + T^{(\phi)} + T^{(m)} \right), \\ T^{(\psi)} &= 2\psi'' (D_\alpha \phi D^\alpha \phi - (n+1) D_\alpha \phi D^\alpha \phi) + 2\psi' (\square \phi - (n+1) \square \phi) \\ &= -2n (\psi'' D_\alpha \phi D^\alpha \phi + \psi' \square \phi), \\ T^{(\phi)} &= \omega \left(D_\alpha \phi D^\alpha \phi - \frac{n+1}{2} D_\alpha \phi D^\alpha \phi \right) - (n+1) V \\ &= -\omega \frac{n-1}{2} D_\alpha \phi D^\alpha \phi - (n+1) V, \\ T^{(m)} &= T. \end{aligned}$$

En injectant ceci dans (2.12), on obtient

$$\begin{aligned} \omega \square \phi + \psi' \left(-\frac{2}{n-1} \frac{1}{2\psi} \left[-2n (\psi'' D_\alpha \phi D^\alpha \phi + \psi' \square \phi) \right. \right. \\ \left. \left. - \omega \frac{n-1}{2} D_\alpha \phi D^\alpha \phi - (n+1) V + T^{(m)} \right] \right) - V' + \frac{\omega'}{2} D_\alpha \phi D^\alpha \phi = 0, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \square\phi \left(\omega + \frac{2n}{n-1} \frac{\psi'^2}{\psi} \right) + D_\alpha\phi D^\alpha\phi \left(\frac{2n}{n-1} \frac{\psi'\psi''}{\psi} + \frac{\omega}{2} \frac{\psi'}{\psi} + \frac{\omega'}{2} \right) \\ + \frac{n+1}{n-1} \frac{\psi'}{\psi} V - V' - \frac{\psi'}{(n-1)\psi} T^{(m)} = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, à condition que $\omega + \frac{2n}{n-1} \frac{\psi'^2}{\psi} \neq 0$,

$$\square\phi = \frac{\frac{\psi'}{n-1} T^{(m)} - \frac{n+1}{n-1} \psi' V + \psi V' - \left(\frac{1}{2} [\omega\psi' + \psi\omega'] + \frac{2n}{n-1} \psi'\psi'' \right) D_\alpha\phi D^\alpha\phi}{\psi \left[\omega + \frac{2n}{n-1} \frac{\psi'^2}{\psi} \right]}.$$

□

REMARQUE 4. Les équations de champ obtenues par une approche variationnelle à partir d'une action sont toujours les équations d'Euler-Lagrange du lagrangien. Cependant, ces équations ne sont pas nécessairement le moyen le plus simple de calculer les équations de champ. Dans la proposition 2.2.3, la densité lagrangienne $L_{\text{STT}}[\phi]$ ne dépend que de ϕ et $D\phi$; l'équation d'Euler-Lagrange est alors assez simple, et permet d'obtenir rapidement l'équation (2.12).

Dans la proposition 2.2.1 en revanche, la densité lagrangienne dépend de g , ∂g et $\partial^2 g$. Des dérivées simples d'ordre 2, et pas des dérivées covariantes d'ordre 1, la dérivée covariante de g étant en effet nulle. L'équation d'Euler-Lagrange est inutilisable en pratique, et il est donc nécessaire d'exprimer directement les variations de la densité lagrangienne en fonction de celles de g pour déterminer les équations (2.9).

Procédons maintenant à la décomposition $n + 1$ des équations de champ (2.9, 2.12) que nous venons d'obtenir.

2.3 Décomposition $n + 1$ des théories tenseur-scalaire

2.3.1 Décomposition du tenseur effectif

Le tenseur $T_{\mu\nu}^{(\text{eff})}$ d'énergie-impulsion effectif des STT peut être projeté de la même façon que $T_{\mu\nu}$ dans la section 1.2 :

$$\begin{aligned} \overline{E^{(\text{eff})}} &:= \overline{T_{\alpha\beta}^{(\text{eff})} u^\alpha u^\beta}, \\ \overline{J_\mu^{(\text{eff})}} &:= \overline{\varepsilon \gamma_\mu^\alpha T_{\alpha\beta}^{(\text{eff})} u^\beta}, \\ \overline{S_{\mu\nu}^{(\text{eff})}} &:= \overline{\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta T_{\alpha\beta}^{(\text{eff})}}, \end{aligned}$$

De sorte que

$$T_{\mu\nu}^{(\text{eff})} = S_{\mu\nu}^{(\text{eff})} + J_\mu^{(\text{eff})} u_\nu + J_\nu^{(\text{eff})} u_\mu + E^{(\text{eff})} u_\mu u_\nu. \quad (2.14)$$

Comme dans le paragraphe 1.4.4, nous posons

$$\begin{aligned} \overline{Q_\mu} &:= \nabla_\mu \phi = \gamma_\mu^\alpha D_\alpha \phi \quad \text{le gradient spatial de } \phi, \\ \overline{\Pi} &:= \mathcal{L}_u \phi = u^\mu D_\mu \phi \quad \text{la quadri-impulsion de } \phi. \end{aligned}$$

Il nous sera utile dans la suite d'avoir écrit les relations suivantes.

Lemme 2.3.1.

$$\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha D_\beta \phi = \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \phi_{|\alpha\beta} = \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \varepsilon \Pi K_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

$$\gamma_\mu^\alpha u^\beta D_\alpha D_\beta \phi = \gamma_\mu^\alpha u^\beta \phi_{|\alpha\beta} = \nabla_\mu \Pi - K_\mu^\lambda \nabla_\lambda \phi, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} u^\alpha u^\beta D_\alpha D_\beta \phi &= u^\alpha u^\beta \phi_{|\alpha\beta} = \varepsilon (\square \phi - \Delta \phi) - \Pi K \\ &= \partial_{tt}^2 \phi - \Pi K. \end{aligned} \quad (2.17)$$

DÉMONSTRATION. La première et la troisième identité s'obtiennent en écrivant

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi &= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha \nabla_\beta \phi \\ &= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha [\gamma_\beta^\tau D_\tau \phi] \\ &= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha [(g_\beta^\tau - \varepsilon u_\beta u^\tau) D_\tau \phi] \\ &= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha D_\beta \phi - \varepsilon \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha [u_\beta u^\tau D_\tau \phi] \\ &= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha D_\beta \phi - \varepsilon \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta [(D_\alpha u_\beta) \Pi + u_\beta (D_\alpha \Pi)] \\ &= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha D_\beta \phi - \varepsilon K_{\mu\nu} \Pi \\ &= (g_\mu^\alpha - \varepsilon u_\mu u^\alpha) (g_\nu^\beta - \varepsilon u_\nu u^\beta) D_\alpha D_\beta \phi - \varepsilon K_{\mu\nu} \Pi \\ &= D_\mu D_\nu \phi - \varepsilon u_\mu u^\alpha D_\alpha D_\nu \phi - \varepsilon u_\nu u^\beta D_\mu D_\beta \phi + u_\mu u^\alpha u_\nu u^\beta D_\alpha D_\beta \phi - \varepsilon \Pi K_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Donc

$$D_\alpha D_\beta \phi = \nabla_\alpha \nabla_\beta \phi + \varepsilon u_\alpha u^\mu D_\mu D_\beta \phi + \varepsilon u_\beta u^\nu D_\alpha D_\nu \phi - u_\alpha u^\mu u_\beta u^\nu D_\mu D_\nu \phi + \varepsilon \Pi K_{\alpha\beta}. \quad (2.18)$$

Pour obtenir la première identité, on projette deux fois (2.18) sur $T\mathcal{M}$ avec γ_μ^ν , en utilisant l'orthogonalité entre u^μ et γ_μ^ν :

$$\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha D_\beta \phi = \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \varepsilon \Pi K_{\mu\nu}.$$

Pour la troisième identité, on prend la trace de (2.18) en la multipliant par $g^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \square \phi &= \nabla^\beta \nabla_\beta \phi + \varepsilon u^\beta u^\mu D_\mu D_\beta \phi + \varepsilon u^\alpha u^\nu \overline{D_\alpha D_\nu \phi} - \varepsilon u^\mu u^\nu \overline{D_\mu D_\nu \phi} + \varepsilon \Pi K \\ &= \Delta \phi + \varepsilon u^\beta u^\mu D_\mu D_\beta \phi + \varepsilon \Pi K, \end{aligned}$$

d'où

$$u^\beta u^\mu D_\mu D_\beta \phi = \varepsilon (\square \phi - \Delta \phi) - \Pi K.$$

La deuxième identité ne peut pas s'obtenir directement en projetant (2.18) : ceci n'aboutit qu'à des tautologies. En revanche, on peut écrire directement

$$\begin{aligned}
 \gamma_\mu^\alpha u^\beta D_\alpha D_\beta \phi &= \gamma_\mu^\alpha \left[D_\alpha (u^\beta D_\beta \phi) - (D_\alpha u^\beta) D_\beta \phi \right] \\
 &= \nabla_\mu (u^\beta D_\beta \phi) - \gamma_\mu^\alpha g_\nu^\beta (D_\alpha u^\nu) D_\beta \phi \\
 &= \nabla_\mu \Pi - \gamma_\mu^\alpha (\gamma_\nu^\beta + \varepsilon u_\nu u^\beta) (D_\alpha u^\nu) D_\beta \phi \\
 &= \nabla_\mu \Pi - \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\lambda \gamma_\lambda^\beta (D_\alpha u^\nu) D_\beta \phi - \varepsilon \gamma_\mu^\alpha u^\beta u_\nu (D_\alpha u^\nu) D_\beta \phi \\
 &= \nabla_\mu \Pi - K_\mu^\lambda \nabla_\lambda \phi - \varepsilon \gamma_\mu^\alpha u^\beta (\underline{u_\nu D_\alpha u^\nu}) D_\beta \phi,
 \end{aligned}$$

car u^ν est de norme constante, donc

$$\begin{aligned}
 0 &= D_\alpha (u_\nu u^\nu) \\
 &= u_\nu D_\alpha u^\nu + u^\nu D_\alpha u_\nu \\
 &= 2u_\nu D_\alpha u^\nu.
 \end{aligned}$$

□

Il nous faut préciser encore une égalité utile.

Lemme 2.3.2.

$$D_\mu \phi D^\mu \phi = Q_\mu Q^\mu + \varepsilon \Pi^2. \quad (2.19)$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}
 Q^\mu Q_\mu &= \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\mu^\beta D^\alpha \phi D_\beta \phi \\
 &= (D^\mu \phi - \varepsilon u^\mu u_\alpha D^\alpha \phi) (D_\mu \phi - \varepsilon u_\mu u^\beta D_\beta \phi) \\
 &= D^\mu \phi D_\mu \phi - \varepsilon \mathbb{H}^2 - \varepsilon \Pi^2 + \varepsilon \mathbb{H}^2.
 \end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant écrire les décompositions de $E^{(\text{eff})}$, $J_\mu^{(\text{eff})}$ et $S_{\mu\nu}^{(\text{eff})}$ de la même façon qu'en (2.11) :

Proposition 2.3.3. *Dans les STT, la densité d'énergie se décompose selon*

$$\begin{aligned}
 E^{(\psi)} &:= u^\mu u^\nu T_{\mu\nu}^{(\psi)} \\
 &= -2\varepsilon [\psi''(\phi) Q_\mu Q^\mu + \psi'(\phi) (\nabla_\mu Q^\mu + \varepsilon K \Pi)], \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E^{(\phi)} &:= u^\mu u^\nu T_{\mu\nu}^{(\phi)} \\
 &= \frac{\omega(\phi)}{2} [\Pi^2 - \varepsilon Q_\mu Q^\mu] - \varepsilon V(\phi), \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

$$E^{(m)} := u^\mu u^\nu T_{\mu\nu}^{(m)}. \quad (2.22)$$

La densité de moment se décompose selon

$$\begin{aligned} J_\mu^{(\psi)} &:= \varepsilon \gamma_\mu^\alpha u^\beta T_{\alpha\beta}^{(\psi)} \\ &= 2\varepsilon \left[\psi''(\phi) \Pi Q_\mu + \psi'(\phi) \left(\nabla_\mu \Pi - K_\mu^\lambda Q_\lambda \right) \right], \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} J_\mu^{(\phi)} &:= \varepsilon \gamma_\mu^\alpha u^\beta T_{\alpha\beta}^{(\phi)} \\ &= \varepsilon \omega(\phi) \Pi Q_\mu, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$J_\mu^{(m)} := \varepsilon \gamma_\mu^\alpha n^\beta T_{\alpha\beta}^{(m)}. \quad (2.25)$$

Le tenseur de contrainte se décompose selon

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^{(\psi)} &:= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta T_{\alpha\beta}^{(\psi)} \\ &= 2\psi''(\phi) \left(Q_\mu Q_\nu - \left[Q_\lambda Q^\lambda + \varepsilon \Pi^2 \right] \gamma_{\mu\nu} \right) \\ &\quad + 2\psi'(\phi) \left(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \varepsilon \Pi K_{\mu\nu} - \square \phi \gamma_{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^{(\phi)} &:= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta T_{\alpha\beta}^{(\phi)} \\ &= \omega(\phi) Q_\mu Q_\nu - \left[\frac{\omega(\phi)}{2} (Q_\lambda Q^\lambda + \varepsilon \Pi^2) + V(\phi) \right] \gamma_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$S_{\mu\nu}^{(m)} := \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta T_{\alpha\beta}^{(m)}, \quad (2.28)$$

de traces

$$\begin{aligned} S^{(\psi)} &= -2\psi''(\phi) \left((n-1) Q_\mu Q^\mu + \varepsilon n \Pi^2 \right) \\ &\quad + 2\psi'(\phi) \left(\Delta \phi + \varepsilon \Pi K - n \square \phi \right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$S^{(\phi)} = -\omega(\phi) \frac{n-2}{2} Q_\mu Q^\mu - \varepsilon \omega(\phi) \frac{n}{2} \Pi^2 - nV(\phi), \quad (2.30)$$

$$S^{(m)} = T^{(m)}. \quad (2.31)$$

DÉMONSTRATION.

(ψ) : Rappelons que

$$T_{\mu\nu}^{(\psi)} = 2\psi''(\phi) (D_\mu \phi D_\nu \phi - D_\alpha \phi D^\alpha \phi g_{\mu\nu}) + 2\psi'(\phi) (D_\mu D_\nu \phi - \square \phi g_{\mu\nu})$$

et calculons ses trois projections.

$\underline{E}^{(\psi)}$: La projection de l'énergie vaut

$$\begin{aligned} E^{(\psi)} &= u^\mu u^\nu T_{\mu\nu}^{(\psi)} \\ &= 2\psi''(\phi) \left(u^\mu D_\mu \phi u^\nu D_\nu \phi - D_\alpha \phi D^\alpha \phi g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \right) \\ &\quad + 2\psi'(\phi) \left(u^\mu u^\nu D_\mu D_\nu \phi - \square \phi g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \right) \\ &= 2\psi''(\phi) \left(\Pi^2 - \varepsilon D_\alpha \phi D^\alpha \phi \right) + 2\psi'(\phi) \left(u^\mu u^\nu D_\mu D_\nu \phi - \varepsilon \square \phi \right). \end{aligned}$$

D'une part, nous savons par (2.19) que

$$\Pi^2 - \varepsilon D_\alpha \phi D^\alpha \phi = -\varepsilon Q^\mu Q_\mu.$$

D'autre part, nous avons vu en (2.15) que

$$\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha D_\beta \phi = \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \varepsilon K_{\mu\nu} \Pi,$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} u^\mu u^\nu D_\mu D_\nu \phi - \varepsilon \square \phi &= u^\mu u^\nu D_\mu D_\nu \phi - \varepsilon g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \phi \\ &= -\varepsilon \gamma^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \phi \\ &= -\varepsilon (\nabla_\mu Q^\mu + \varepsilon K \Pi), \end{aligned}$$

puis

$$E^{(\psi)} = -2\varepsilon [\psi'' Q_\mu Q^\mu + \psi' (\nabla_\mu Q^\mu + \varepsilon K \Pi)]. \quad (2.20)$$

$\underline{J_\mu^{(\psi)}}$: La projection du moment vaut

$$\begin{aligned} J_\mu^{(\psi)} &:= \varepsilon \gamma_\mu^\alpha T_{\alpha\beta}^{(\psi)} u^\beta \\ &= 2\varepsilon \psi'' \gamma_\mu^\alpha (D_\alpha \phi D_\beta \phi - D_\lambda \phi D^\lambda \phi g_{\alpha\beta}) u^\beta \\ &\quad + 2\varepsilon \psi' \gamma_\mu^\alpha (D_\alpha D_\beta \phi - \square \phi g_{\alpha\beta}) u^\beta \\ &= 2\varepsilon [\psi'' \Pi Q_\mu + \psi' \gamma_\mu^\alpha u^\beta D_\alpha D_\beta \phi]. \end{aligned}$$

Nous reconnaissons le dernier terme, déjà calculé en (2.16) :

$$\gamma_\mu^\alpha u^\beta D_\alpha D_\beta \phi = \nabla_\mu \Pi - K_\mu^\lambda Q_\lambda,$$

d'où

$$J_\mu^{(\psi)} = 2\varepsilon [\psi'' \Pi Q_\mu + \psi' (\nabla_\mu \Pi - K_\mu^\lambda Q_\lambda)]. \quad (2.23)$$

$\underline{S_{\mu\nu}^{(\psi)}}$: La projection du tenseur de contraintes vaut

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^{(\psi)} &= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta T_{\alpha\beta}^{(\psi)} \\ &= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta [2\psi'' (D_\alpha \phi D_\beta \phi - D_\lambda \phi D^\lambda \phi g_{\alpha\beta}) + 2\psi' (D_\alpha D_\beta \phi - \square \phi g_{\alpha\beta})] \\ &= 2\psi'' ((\gamma_\mu^\alpha D_\alpha \phi)(\gamma_\nu^\beta D_\beta \phi) - D_\lambda \phi D^\lambda \phi \gamma_{\mu\nu}) \\ &\quad + 2\psi' (\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha D_\beta \phi - \square \phi \gamma_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

Rappelons-nous les équations (2.19) :

$$D_\lambda \phi D^\lambda \phi = Q_\mu Q^\mu + \varepsilon \Pi^2,$$

et (2.15) :

$$\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha D_\beta \phi = \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \varepsilon K_{\mu\nu} \Pi.$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^{(\psi)} &= 2\psi'' (Q_\mu Q_\nu - [Q_\lambda Q^\lambda + \varepsilon \Pi^2] \gamma_{\mu\nu}) \\ &\quad + 2\psi' (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \varepsilon \Pi K_{\mu\nu} - \square \phi \gamma_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

(ϕ) : Recommencons ce procédé avec

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \omega(\phi) \left(D_\mu \phi D_\nu \phi - \frac{1}{2} D_\alpha \phi D^\alpha \phi g_{\mu\nu} \right) - V(\phi) g_{\mu\nu}.$$

$E^{(\phi)}$: Projetons l'énergie :

$$\begin{aligned} E^{(\phi)} &= u^\mu u^\nu T_{\mu\nu}^{(\phi)} \\ &= u^\mu u^\nu \left[\omega \left(D_\mu \phi D_\nu \phi - \frac{1}{2} D_\alpha \phi D^\alpha \phi g_{\mu\nu} \right) - V g_{\mu\nu} \right] \\ &= \omega \left((u^\mu D_\mu \phi) (u^\nu D_\nu \phi) - \frac{1}{2} \varepsilon D_\alpha \phi D^\alpha \phi \right) - \varepsilon V \\ &= \omega \left(\Pi^2 - \frac{1}{2} \varepsilon (Q_\mu Q^\mu + \varepsilon \Pi^2) \right) - \varepsilon V, \end{aligned}$$

en utilisant (2.19). On a donc

$$E^{(\phi)} = \frac{\omega}{2} (\Pi^2 - \varepsilon Q_\mu Q^\mu) - \varepsilon V. \quad (2.21)$$

$J_\mu^{(\phi)}$: Le moment :

$$\begin{aligned} J_\mu^{(\phi)} &= \varepsilon \gamma_\mu^\alpha u^\beta T_{\alpha\beta}^{(\phi)} \\ &= \varepsilon \gamma_\mu^\alpha u^\beta \left[\omega \left(D_\alpha \phi D_\beta \phi - \frac{1}{2} D_\lambda \phi D^\lambda \phi g_{\alpha\beta} \right) - V g_{\alpha\beta} \right] \\ &= \varepsilon \omega \left(\gamma_\mu^\alpha D_\alpha \phi \right) \left(u^\beta D_\beta \phi \right) \\ &= \varepsilon \omega \nabla_\mu \phi \Pi. \end{aligned}$$

On a donc

$$J_\mu^{(\phi)} = \varepsilon \omega \Pi Q_\mu. \quad (2.24)$$

$S_{\mu\nu}^{(\phi)}$: Le tenseur de contraintes :

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^{(\phi)} &= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta T_{\alpha\beta}^{(\phi)} \\ &= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \left[\omega \left(D_\alpha \phi D_\beta \phi - \frac{1}{2} D_\lambda \phi D^\lambda \phi g_{\alpha\beta} \right) - V g_{\alpha\beta} \right] \\ &= \omega \left(Q_\mu Q_\nu - \frac{1}{2} D_\lambda \phi D^\lambda \phi \gamma_{\alpha\beta} \right) - V \gamma_{\alpha\beta} \\ &= \omega \left(Q_\mu Q_\nu - \frac{1}{2} [Q_\lambda Q^\lambda + \varepsilon \Pi^2] \gamma_{\alpha\beta} \right) - V \gamma_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

soit

$$S_{\mu\nu}^{(\phi)} = \omega Q_\mu Q_\nu - \left[\frac{\omega}{2} (Q_\lambda Q^\lambda + \varepsilon \Pi^2) + V \right] \gamma_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

(m) : Les termes de matière se projettent trivialement en (2.22), (2.25) et (2.28).

□

2.3.2 Formalisme ADM des théories tenseur-scalaire

Nous pouvons maintenant réécrire les équations de champ des STT selon la même décomposition $n + 1$ que pour la RG.

Proposition 2.3.4. *Les équations de champ des STT*

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(eff)} \quad (2.10)$$

sont équivalentes au système

$$G_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = E^{(eff)} = \frac{1}{2\psi(\phi)} \left(E^{(\psi)} + E^{(\phi)} + E^{(m)} \right), \quad (2.32)$$

$$\varepsilon \gamma_\mu^\alpha G_{\alpha\beta} u^\beta = J_\mu^{(eff)} = \frac{1}{2\psi(\phi)} \left(J_\mu^{(\psi)} + J_\mu^{(\phi)} + J_\mu^{(m)} \right), \quad (2.33)$$

$$\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta G_{\alpha\beta} = S_{\mu\nu}^{(eff)} = \frac{1}{2\psi(\phi)} \left(S_{\mu\nu}^{(\psi)} + S_{\mu\nu}^{(\phi)} + S_{\mu\nu}^{(m)} \right), \quad (2.34)$$

lui-même équivalent à

$$\mathbf{R}[\gamma] - \varepsilon (K^2 - K_{ij} K^{ij}) = -2\varepsilon E^{(eff)} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\psi} [\psi'' Q_i Q^i + \psi' (\nabla_i Q^i + \varepsilon K \Pi)] \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{\psi} \left(\frac{\omega}{2} [\Pi^2 - \varepsilon Q_i Q^i] - \varepsilon V + E^{(m)} \right), \end{aligned}$$

$$\varepsilon (\nabla_j K_i^j - \nabla_i K) = J_i^{(eff)} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\varepsilon}{\psi} [\psi'' \Pi Q_i + \psi' (\nabla_i \Pi - K_i^j Q_j)] \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2\psi} \omega \Pi Q_i + \frac{1}{2\psi} J_i^{(m)}, \end{aligned}$$

$$G_{ij} = S_{ij}^{(eff)} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\psi''}{\psi} (Q_i Q_j - [Q_a Q^a + \varepsilon \Pi^2] \gamma_{ij}) \\ &\quad + \frac{\psi'}{\psi} (\nabla_i \nabla_j \phi + \varepsilon \Pi K_{ij} - \square \phi \gamma_{ij}) \\ &\quad + \frac{1}{2\psi} \left(\omega Q_i Q_j - \left[\frac{\omega}{2} (Q_a Q^a + \varepsilon \Pi^2) + V \right] \gamma_{ij} + S_{ij}^{(m)} \right) \end{aligned}$$

Les équations (2.35) et (2.36) sont les équations de contrainte des STT, les analogues de (1.21, 1.22) pour la RG.

Le système d'équations (2.37) constitue les équations dynamiques des STT, l'analogue de (1.23) pour la RG.

2.4 Le problème de Cauchy

Dans cette section, nous étudions le problème de Cauchy des STT. Il a été montré par M. Salgado en 2006 [79] que ce problème était bien formulé. Nous reprenons ici sa preuve,

résumée dans [85], en détaillant les calculs qui ne paraissent pas dans la plupart des articles traitant du sujet.

2.4.1 Équations d'évolution

Il nous faut pour commencer établir de façon plus précise la dynamique des STT, et reprendre pour cela les expressions de la proposition 1.3.6 ainsi que la formulation $n + 1$ des STT que nous venons d'obtenir dans la section 2.3.

Proposition 2.4.1.

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} - X^l \partial_l K_{ij} - K_{il} \partial_j X^l - K_{lj} \partial_i X^l \\ + \varepsilon \nabla_{ij}^2 N - \varepsilon NR[\gamma]_{ij} + NK K_{ij} - 2NK_i^k K_{kj} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} = -\varepsilon \frac{N}{\psi} \left[\psi'' \left(Q_i Q_j + \frac{1}{n-1} [Q_k Q^k + \varepsilon \Pi^2] \gamma_{ij} \right) \right. \\ \left. + \psi' \left(\nabla_i Q_j + \varepsilon \Pi K_{ij} + \frac{1}{n-1} \square \phi \gamma_{ij} \right) \right] \\ - \varepsilon \frac{N}{2\psi} \left[\omega Q_i Q_j + \frac{2}{n-1} V \gamma_{ij} \right] \\ - \varepsilon \frac{N}{2\psi} \left[S_{ij}^{(m)} - \frac{1}{n-1} \left(S^{(m)} + \varepsilon E^{(m)} \right) \gamma_{ij} \right], \end{aligned}$$

$$\partial_t K - X^l \partial_l K + \varepsilon \Delta N + NK_{ij} K^{ij} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} = \varepsilon \frac{N}{n-1} \frac{1}{\psi} \left[-\psi'' \left(Q_k Q^k + \varepsilon n \Pi^2 \right) + \psi' (n-1) \left(\nabla_k Q^k + \varepsilon \Pi K \right) - \psi' n \square \phi \right] \\ - \varepsilon \frac{N}{n-1} \frac{1}{2\psi} \left[\varepsilon \omega (n-1) \Pi^2 + 2V \right] \\ + \varepsilon \frac{N}{n-1} \frac{1}{2\psi} \left[S^{(m)} - \varepsilon (n-2) E^{(m)} \right]. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit là d'une conséquence de la nouvelle équation dynamique (2.37). Il nous suffit de reprendre l'équation (1.29) de la dynamique de K_{ij} , et de remplacer les valeurs de E et S_{ij} acquises précédemment pour les STT :

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} - X^l \partial_l K_{ij} - K_{il} \partial_j X^l - K_{lj} \partial_i X^l \\ + \varepsilon \nabla_{ij}^2 N - \varepsilon NR[\gamma]_{ij} + NK K_{ij} - 2NK_i^k K_{kj} \\ = -\varepsilon N \left[S_{ij}^{(\text{eff})} - \frac{1}{n-1} \left(S^{(\text{eff})} + \varepsilon E^{(\text{eff})} \right) \gamma_{ij} \right] \\ = -\varepsilon \frac{N}{2\psi} \left[S_{ij}^{(\psi)} - \frac{1}{n-1} \left(S^{(\psi)} + \varepsilon E^{(\psi)} \right) \gamma_{ij} \right] \\ - \varepsilon \frac{N}{2\psi} \left[S_{ij}^{(\phi)} - \frac{1}{n-1} \left(S^{(\phi)} + \varepsilon E^{(\phi)} \right) \gamma_{ij} \right] \\ - \varepsilon \frac{N}{2\psi} \left[S_{ij}^{(m)} - \frac{1}{n-1} \left(S^{(m)} + \varepsilon E^{(m)} \right) \gamma_{ij} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\varepsilon \frac{N}{2\psi} \left[\left(2\psi'' \left[Q_i Q_j - \left(Q_k Q^k + \varepsilon \Pi^2 \right) \right] \gamma_{ij} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2\psi' \left[\nabla_i Q_j + \varepsilon \Pi K_{ij} - \square \phi \gamma_{ij} \right] \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{n-1} \left(-2n\psi'' \left[Q_k Q^k + \varepsilon \Pi^2 \right] - 2n\psi' \square \phi \right) \gamma_{ij} \right] \\
 &= -\varepsilon \frac{N}{2\psi} \left[\left(\omega Q_i Q_j - \left[\frac{\omega}{2} \left(\cancel{Q_k Q^k} + \varepsilon \Pi^2 \right) + V \right] \right) \gamma_{ij} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{n-1} \left(-\omega \frac{n-1}{2} \left[\cancel{Q_k Q^k} + \varepsilon \Pi^2 \right] - (n+1)V \right) \gamma_{ij} \right] \\
 &= -\varepsilon \frac{N}{2\psi} \left[S_{ij}^{(m)} - \frac{1}{n-1} \left(S^{(m)} + \varepsilon E^{(m)} \right) \gamma_{ij} \right] \\
 &= -\varepsilon \frac{N}{\psi} \left[\psi'' Q_i Q_j + \psi' \left[\nabla_i Q_j + \varepsilon \Pi K_{ij} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{n-1} \left(\psi'' \left[Q_k Q^k + \varepsilon \Pi^2 \right] + \psi' \square \phi \right) \gamma_{ij} \right] \\
 &= -\varepsilon \frac{N}{2\psi} \left(\omega Q_i Q_j + \frac{2}{n-1} V \gamma_{ij} \right) \\
 &= -\varepsilon \frac{N}{2\psi} \left[S_{ij}^{(m)} - \frac{1}{n-1} \left(S^{(m)} + \varepsilon E^{(m)} \right) \gamma_{ij} \right].
 \end{aligned}$$

Procédons de même avec (1.30) pour la dynamique de K .

$$\begin{aligned}
 &\partial_t K - X^l \partial_l K + \varepsilon \Delta N + N K_{ij} K^{ij} \\
 &= \varepsilon \frac{N}{n-1} \left[S^{(\text{eff})} - \varepsilon(n-2) E^{(\text{eff})} \right] \\
 &= \varepsilon \frac{N}{n-1} \frac{1}{2\psi} \left[S^{(\psi)} - \varepsilon(n-2) E^{(\psi)} \right] \\
 &+ \varepsilon \frac{N}{n-1} \frac{1}{2\psi} \left[S^{(\phi)} - \varepsilon(n-2) E^{(\phi)} \right] \\
 &+ \varepsilon \frac{N}{n-1} \frac{1}{2\psi} \left[S^{(m)} - \varepsilon(n-2) E^{(m)} \right] \\
 &= \varepsilon \frac{N}{n-1} \frac{1}{2\psi} \left[-2\psi'' \left((n-1) Q_k Q^k + \varepsilon n \Pi^2 \right) + 2\psi' \left(\nabla_k Q^k + \varepsilon \Pi K - n \square \phi \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2(n-2) \left(\psi'' Q_k Q^k + \psi' \left[\nabla_k Q^k + \varepsilon \Pi K \right] \right) \right] \\
 &+ \varepsilon \frac{N}{n-1} \frac{1}{2\psi} \left[-\omega \frac{n-2}{2} \cancel{Q_k Q^k} - \varepsilon \omega \frac{n}{2} \Pi^2 - nV \right. \\
 &\quad \left. - \varepsilon(n-2) \left(\frac{\omega}{2} \left[\Pi^2 - \varepsilon \cancel{Q_k Q^k} \right] - \varepsilon V \right) \right] \\
 &+ \varepsilon \frac{N}{n-1} \frac{1}{2\psi} \left[S^{(m)} - \varepsilon(n-2) E^{(m)} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \varepsilon \frac{N}{n-1} \frac{1}{\psi} \left[-\psi'' \left(Q_k Q^k + \varepsilon n \Pi^2 \right) + \psi' (n-1) \left(\nabla_k Q^k + \varepsilon \Pi K \right) - \psi' n \square \phi \right] \\
 &+ \varepsilon \frac{N}{n-1} \frac{1}{2\psi} \left[-\varepsilon \omega (n-1) \Pi^2 - 2V \right] \\
 &+ \varepsilon \frac{N}{n-1} \frac{1}{2\psi} \left[S^{(m)} - \varepsilon (n-2) E^{(m)} \right].
 \end{aligned}$$

□

Écrivons à présent deux autres équations dynamiques qui se déduisent directement des définitions.

Proposition 2.4.2.

$$\Pi = \frac{1}{N} (\partial_t \phi - X^i Q_i), \quad (2.40)$$

$$\nabla_i (N\Pi) = \partial_t Q_i - X^j \partial_i Q_j - Q_j \partial_i X^j. \quad (2.41)$$

DÉMONSTRATION. Il n'y a qu'à écrire :

$$\begin{aligned}
 \Pi &= u^\mu D_\mu \phi = \frac{1}{N} (\partial_t \phi - X^i D_i \phi) \\
 &= \frac{1}{N} (\partial_t \phi - X^i Q_i), \\
 \nabla_i (N\Pi) &= \partial_i (N\Pi) = N \partial_i \Pi + \Pi \partial_i N \\
 &= N \frac{1}{N} \partial_i (\partial_t \phi - X^j Q_j) + N \left(-\frac{\nabla_i N}{N^2} \right) (\partial_t \phi - X^j Q_j) + \Pi \partial_i N \\
 &= \partial_i \partial_t \phi - \partial_i (X^j Q_j) - \Pi \partial_i N + \Pi \partial_i N \\
 &= \partial_t Q_i - X^j \partial_i Q_j - Q_j \partial_i X^j.
 \end{aligned}$$

□

Avant d'exprimer la dernière équation dynamique, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.4.3.

$$u^\nu D_\nu u_\mu = -\varepsilon \nabla_\mu \ln N \quad (2.42)$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'une formule classique, mais la démonstration n'en est que rarement donnée. Le fait que le lapse N apparaisse rend nécessaire d'écrire cette égalité dans les coordonnées. Rappelons que $u_\mu = (\varepsilon N, 0)$. Nous écrirons (*) pour (2.42), et reformulons cette équation ainsi :

$$\begin{aligned}
 (*) &\iff u^\nu D_\nu u_\mu = -\varepsilon \nabla_\mu \ln N \\
 &\iff u^\nu (\partial_\nu u_\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha u_\alpha) = -\frac{\varepsilon}{N} \nabla_\mu N \\
 &\iff u^\nu (\partial_\nu u_\mu - \varepsilon \Gamma_{\nu\mu}^0 N) = -\frac{\varepsilon}{N} (\partial_\mu N - \varepsilon (u^\nu \partial_\nu N) u_\mu).
 \end{aligned}$$

Distinguons maintenant les cas.

$$\boxed{\mu = 0}$$

$$\begin{aligned} (*_0) &\iff u^\nu (\partial_\nu u_0 - \varepsilon \Gamma_{\nu 0}^0 N) = -\frac{\varepsilon}{N} (\partial_0 N - \varepsilon (u^\nu \partial_\nu N) u_0) \\ &\iff u^\nu (\cancel{\partial_\nu (\varepsilon N)} - \varepsilon \Gamma_{\nu 0}^0 N) = -\frac{\varepsilon}{N} (\partial_0 N - \cancel{N (u^\nu \partial_\nu N)}) \\ &\iff \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{k0}^0 X^k = \frac{1}{N} \partial_0 N. \end{aligned}$$

Pour continuer, nous avons besoin d'explicitier les symboles de Christoffel Γ de D , et donc de revenir à la métrique g . Rappelons que

$$\partial_t = Nu + X,$$

donc

$$\begin{aligned} g_{00} &= g(\partial_t, \partial_t) = g(Nu + X, Nu + X) \\ &= N^2 g(u, u) + g(X, X) = N^2 \varepsilon + X_i X^i, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} g_{0i} &= g(\partial_t, \partial_i) = g(Nu + X, \partial_i) \\ &= g(X, \partial_i) = X_i, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g(\partial_i, \partial_j) = \gamma(\partial_i, \partial_j) \\ &= \gamma_{ij}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ainsi g se décompose de la façon suivante :

$$g = \left(\begin{array}{c|c} \varepsilon N^2 + X_l X^l & X_j \\ \hline X_i & \gamma_{ij} \end{array} \right), \quad (2.46)$$

et le calcul de l'inverse de g donne :

$$g^{-1} = \frac{\varepsilon}{N^2} \left(\begin{array}{c|c} 1 & -X^j \\ \hline -X^i & \varepsilon N^2 \gamma^{ij} + X^i X^j \end{array} \right). \quad (2.47)$$

Rappelons enfin la formule qui donne les symboles de Christoffel :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{00} + \cancel{\partial_0 g_{00}} - \cancel{\partial_0 g_{00}}) + \frac{1}{2} g^{0i} (\partial_0 g_{i0} + \partial_0 g_{i0} - \partial_i g_{00}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{N^2} \right) \partial_t g_{00} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\varepsilon}{N^2} X^i \right) (2\partial_t X_i - \partial_i g_{00}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Gamma_{k0}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0\overline{g_{0k}} + \partial_k g_{00} - \partial_0\overline{g_{k0}}) + \frac{1}{2}g^{0i}(\partial_0 g_{ik} + \partial_k g_{i0} - \partial_i g_{k0}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{N^2}\right)\partial_k g_{00} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\varepsilon}{N^2}X^i\right)(\partial_t \gamma_{ik} + \partial_k X_i - \partial_i X_k).\end{aligned}$$

Mis ensemble, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 - X^k \Gamma_{k0}^0 &= \frac{\varepsilon}{2N^2} \left[(\partial_t g_{00} - 2X^i \partial_t X_i + \overline{X^i \partial_i g_{00}}) \right. \\ &\quad \left. - X^k (\partial_k \overline{g_{00}} - X^i (\partial_t \gamma_{ik} + \partial_k X_i - \partial_i X_k)) \right] \\ &= \frac{\varepsilon}{2N^2} \left[\partial_t (\varepsilon N^2 + X_l X^l) - 2X^i \partial_t X_i + X^k X^i \partial_t \gamma_{ik} \right] \\ &= \frac{\varepsilon}{2N^2} \left[2\varepsilon N \partial_t N + \partial_t (X^k X^i \gamma_{ik}) - 2X^i \partial_t (X^k \gamma_{ik}) + X^k X^i \partial_t \gamma_{ik} \right] \\ &= \frac{\varepsilon}{2N^2} \left[2\varepsilon N \partial_t N + \overline{(X^i \partial_t (X^k \gamma_{ik}))} + X^k \gamma_{ik} \partial_t X^i \right. \\ &\quad \left. - 2X^i \partial_t (X^k \gamma_{ik}) + X^k X^i \partial_t \gamma_{ik} \right] \\ &= \frac{\varepsilon}{2N^2} \left[2\varepsilon N \partial_t N + \overline{X^k \gamma_{ik} \partial_t X^i} \right. \\ &\quad \left. - \overline{(X^i X^k \partial_t \gamma_{ik})} + \overline{X^i \gamma_{ik} \partial_t X^k} \right] + \overline{X^k X^i \partial_t \gamma_{ik}} \\ &= \frac{1}{N} \partial_t N,\end{aligned}$$

c'est-à-dire (*₀). Procédons de même pour $\mu = 1..n$:

$\mu = i$ On a cette fois-ci

$$\begin{aligned}(*_i) &\iff u^\nu (\partial_\nu 0 - \varepsilon \Gamma_{\nu i}^0 N) = -\frac{\varepsilon}{N} (\partial_i N - \varepsilon (u^\nu \partial_\nu N) \times 0) \\ &\iff u^\nu \Gamma_{\nu i}^0 N = \frac{1}{N} \partial_i N \\ &\iff \Gamma_{0i}^0 - \Gamma_{ki}^0 X^k = \frac{1}{N} \partial_i N.\end{aligned}$$

Reprenons nos symboles de Christoffel :

$$\begin{aligned}\Gamma_{ki}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_k g_{i0} + \partial_i g_{k0} - \partial_0 g_{ik}) + \frac{1}{2}g^{0j}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ik}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{N^2}\right)(\partial_k X_i + \partial_i X_k - \partial_t \gamma_{ik}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\varepsilon}{N^2}X^j\right)(\partial_k \gamma_{ij} + \partial_i \gamma_{jk} - \partial_j \gamma_{ik}).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{0i}^0 - \Gamma_{ki}^0 X^k &= \frac{\varepsilon}{2N^2} \left[\left(\partial_i g_{00} - X^l (\cancel{\partial_l \gamma_{li}} + \partial_i X_l - \cancel{\partial_l X_i}) \right) \right. \\
 &\quad \left. - X^k \left(\cancel{[\partial_k X_i + \partial_i X_k - \cancel{\partial_l \gamma_{ik}}]} - X^j \left[\cancel{\partial_k \gamma_{ij}} + \partial_i \gamma_{jk} - \cancel{\partial_j \gamma_{ik}} \right] \right) \right] \\
 &= \frac{\varepsilon}{2N^2} \left[\partial_i \left(\varepsilon N^2 + X^j X^k \gamma_{jk} \right) - 2X^k \partial_i (X^j \gamma_{jk}) + X^k X^j \partial_i \gamma_{jk} \right] \\
 &= \frac{\varepsilon}{2N^2} \left[2\varepsilon N \partial_i N + \left(\cancel{X^k X^j \partial_i \gamma_{jk}} + \cancel{X^k \gamma_{jk} \partial_i X^j} + \cancel{X^j \gamma_{jk} \partial_i X^k} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2 \left(\cancel{X^k X^j \partial_i \gamma_{jk}} + \cancel{X^k \gamma_{jk} \partial_i X^j} \right) + \cancel{X^k X^j \partial_i \gamma_{jk}} \right] \\
 &= \frac{1}{N} \partial_i N,
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire $(*_i)$.

Nous venons bien de montrer $(*)$:

$$u^\nu D_\nu u_\mu = -\varepsilon \nabla_\mu \ln N.$$

□

Nous pouvons déduire de ce lemme une expression de $\square\phi$ en fonction de dérivées du premier ordre.

Proposition 2.4.4.

$$\square\phi = \nabla_\mu Q^\mu + \varepsilon K \Pi + \varepsilon \mathcal{L}_u \Pi + Q^\mu \nabla_\mu \ln N. \quad (2.48)$$

DÉMONSTRATION. Nous utilisons le lemme 2.42, et le fait que $u^\mu D_\nu u_\mu = 0$. Calculons tout d'abord

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_u \Pi &= u^\nu D_\nu (u^\mu D_\mu \phi) \\
 &= (u^\nu D_\nu u^\mu) D_\mu \phi + u^\nu u^\mu D_\nu D_\mu \phi, \\
 \Pi K &= (u^\mu D_\mu \phi) (D_\nu u^\nu), \\
 Q^\mu \nabla_\mu \ln N &= -\varepsilon (\nabla^\mu \phi) (u^\nu D_\nu u_\mu) \\
 &= -\varepsilon (D^\mu \phi - \varepsilon u^\mu u^\alpha D_\alpha \phi) (u^\nu D_\nu u_\mu) \\
 &= -\varepsilon [(D^\mu \phi) (u^\nu D_\nu u_\mu) - \varepsilon (u^\alpha D_\alpha \phi) \cancel{u^\nu u^\mu D_\nu u_\mu}] \\
 &= -\varepsilon (D^\mu \phi) (u^\nu D_\nu u_\mu),
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 u^\nu u^\mu D_\nu D_\mu \phi &= \mathcal{L}_u \Pi - (u^\nu D_\nu u^\mu) D_\mu \phi \\
 &= \mathcal{L}_u \Pi + \varepsilon Q^\mu \nabla_\mu \ln N,
 \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu Q^\mu &= \gamma_\mu^\alpha \gamma_\beta^\mu D_\alpha Q^\beta = \gamma_\beta^\alpha D_\alpha \left(\gamma_\lambda^\beta D^\lambda \phi \right) \\
 &= (g_\beta^\alpha - \varepsilon u_\beta u^\alpha) D_\alpha \left(\left[g_\lambda^\beta - \varepsilon u_\lambda u^\beta \right] D^\lambda \phi \right) \\
 &= D_\beta D^\beta \phi - \varepsilon D_\beta \left(u_\lambda u^\beta D^\lambda \phi \right) \\
 &\quad - \varepsilon u_\beta u^\alpha D_\alpha D^\beta \phi + u_\beta u^\alpha D_\alpha \left(u_\lambda u^\beta D^\lambda \phi \right) \\
 &= \square \phi - \varepsilon \left[\left(D_\beta u^\beta \right) \left(u_\lambda D^\lambda \phi \right) + u^\beta D_\beta \left(u_\lambda D^\lambda \phi \right) \right] \\
 &\quad - \varepsilon u^\beta u^\alpha D_\alpha D_\beta \phi + u^\alpha \left(u_\beta D_\alpha u^\beta \right) \left(u_\lambda D^\lambda \phi \right) + \varepsilon u^\alpha D_\alpha \left(u_\lambda D^\lambda \phi \right) \\
 &= \square \phi - \varepsilon [K\Pi + \mathcal{L}_u \Pi] - \varepsilon u^\beta u^\alpha D_\alpha D_\beta \phi + \varepsilon \mathcal{L}_u \Pi \\
 &= \square \phi - \varepsilon K\Pi - \varepsilon \left(\mathcal{L}_u \Pi + \varepsilon Q^\mu \nabla_\mu \ln N \right).
 \end{aligned}$$

□

2.4.2 Problème bien formulé

Les propositions précédentes nous étaient nécessaires pour déduire le théorème suivant.

Théorème 2.4.5 ([79]). *Le problème de Cauchy des théories tenseur-scalaire est bien formulé.*

DÉMONSTRATION. L'objectif est d'introduire assez de variables pour que les équations de la formulation $n+1$ des STT ne contiennent que des dérivées du premier ordre. En partant des équations de la proposition 2.3.4, et en leur adjoignant celles des propositions 1.3.5, 2.2.4, 2.4.1, 2.4.2 et 2.4.4, nous venons de prouver que les équations de champ des STT sont équivalentes au système suivant, portant sur les variables $(\gamma_{ij}, K_{ij}, \phi, \Pi, Q_i)$ définies sur la variété \mathcal{M} :

★ des équations de contrainte,

$$\begin{aligned}
 R[\gamma] - \varepsilon (K^2 - K_{ij} K^{ij}) &= \frac{2}{\psi} \left[\psi'' Q_i Q^i + \psi' (\nabla_i Q^i + \varepsilon K\Pi) \right] \\
 &\quad - \frac{\varepsilon}{\psi} \left(\frac{\omega}{2} [\Pi^2 - \varepsilon Q_i Q^i] - \varepsilon V + E^{(m)} \right),
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon (\nabla_j K_i^j - \nabla_i K) &= \frac{\varepsilon}{\psi} \left[\psi'' \Pi Q_i + \psi' (\nabla_i \Pi - K_i^j Q_j) \right] \\
 &\quad + \frac{\varepsilon}{2\psi} \omega \Pi Q_i + \frac{1}{2\psi} J_i^{(m)},
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$Q_i = \nabla_i \phi, \tag{2.49}$$

$$\nabla_i Q_j = \nabla_j Q_i, \tag{2.50}$$

★ et des équations d'évolution,

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (\partial_t \gamma_{ij} - \nabla_i X_j - \nabla_j X_i), \quad (1.32)$$

$$\Pi = \frac{1}{N} (\partial_t \phi - X^i Q_i), \quad (2.40)$$

$$\nabla_i (N\Pi) = \partial_t Q_i - X^j \partial_j Q_i - Q_j \partial_i X^j, \quad (2.41)$$

$$\partial_t K_{ij} - X^l \partial_l K_{ij} - K_{il} \partial_j X^l - K_{lj} \partial_i X^l \quad (2.38)$$

$$+ \varepsilon \nabla_{ij}^2 N - \varepsilon N R[\gamma]_{ij} + N K K_{ij} - 2N K_i^k K_{kj}$$

$$= -\varepsilon \frac{N}{\psi} \left[\psi'' \left(Q_i Q_j + \frac{1}{n-1} [Q_k Q^k + \varepsilon \Pi^2] \gamma_{ij} \right) \right.$$

$$\left. + \psi' \left(\nabla_i Q_j + \varepsilon \Pi K_{ij} + \frac{1}{n-1} \square \phi \gamma_{ij} \right) \right]$$

$$- \varepsilon \frac{N}{2\psi} \left[\omega Q_i Q_j + \frac{2}{n-1} V \gamma_{ij} \right]$$

$$- \varepsilon \frac{N}{2\psi} \left[S_{ij}^{(m)} - \frac{1}{n-1} (S^{(m)} + \varepsilon E^{(m)}) \gamma_{ij} \right],$$

$$\mathcal{L}_u \Pi + \Pi K + \varepsilon Q^\mu \nabla_\mu \ln N + \varepsilon \nabla_\mu Q^\mu = \varepsilon \square \phi \quad (2.48)$$

$$= \varepsilon \left[\frac{\psi'}{n-1} T^{(m)} - \frac{n+1}{n-1} \psi' V + \psi V' \right] \quad (2.13)$$

$$- \left(\frac{1}{2} [\omega \psi' + \psi \omega'] + \frac{2n}{n-1} \psi' \psi'' \right) (Q_k Q^k + \varepsilon \Pi^2) \Bigg]$$

$$\frac{\psi \left[\omega + \frac{2n}{n-1} \frac{\psi'^2}{\psi} \right]}{\psi \left[\omega + \frac{2n}{n-1} \frac{\psi'^2}{\psi} \right]}.$$

En admettant que le problème de Cauchy de la RG est bien formulé, comme nous l'avons évoqué au paragraphe 1.3.3, nous pouvons ne pas tenir compte des dérivées secondes présentes en $\nabla_{ij}^2 N$ et R_{ij} . Le système que nous venons d'obtenir ne contient que des dérivées du premier ordre en temps et en espace, et est linéaire en ces dérivées ; le problème de Cauchy est donc bien formulé. \square

2.4.3 Problème bien posé

Dans [79], il est également montré, par une autre approche utilisant comme pour la RG des coordonnées harmoniques, que ce problème est également bien posé en absence de matière.

Il est établi dans [80] et [81] plusieurs autres cas pour lesquels les STT peuvent être mises sous la forme d'un système fortement hyperbolique, et donc pour lesquels le problème de Cauchy est bien posé.

À partir de maintenant, nous ne considérerons plus le problème de Cauchy et nous concentrerons sur les équations de contrainte des STT (2.35) et (2.36). Nous continuerons à supposer $\psi > 0$ pour éviter toute dégénérescence.

2.5 Résolution des équations de contrainte

Dans cette section, nous nous interrogerons sur la seconde partie du problème d'évolution des STT : la résolution des équations de contrainte. La méthode conforme, utilisée pour la RG, fonctionne-t-elle également dans ce cas ? Il me semble être le premier à adapter directement la méthode conforme aux équations de contrainte des STT ; les équations de cette section sont donc inédites. Cependant, leur apport physique et mathématique est très relatif, comme nous le verrons dans le paragraphe 2.5.3.

2.5.1 Recherche des facteurs conformes

Réécrivons ici les équations de contrainte (2.35, 2.36), et faisons disparaître Q_i en le remplaçant par sa valeur $\nabla_i \phi$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[\gamma] - \varepsilon (K_{ij}K_{kl} - K_{ik}K_{jl}) \gamma^{ij} \gamma^{kl} &= \frac{2}{\psi} [\psi'' \gamma^{ij} \nabla_i \phi \nabla_j \phi + \psi' (\Delta[\gamma] \phi + \varepsilon K \Pi)] \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{\psi} \left(\frac{\omega}{2} [\Pi^2 - \varepsilon \gamma^{ij} \nabla_i \phi \nabla_j \phi] - \varepsilon V + E^{(m)} \right), \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon (\nabla[\gamma]_j K_i^j - \nabla[\gamma]_i K) &= \frac{\varepsilon}{\psi} \left[\psi'' \Pi \nabla_i \phi + \psi' (\nabla_i \Pi - K_i^j \nabla_j \phi) \right] \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2\psi} \omega \Pi \nabla_i \phi + \frac{1}{2\psi} J_i^{(m)}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ces $n+1$ équations sont internes à \mathcal{M} , et ne dépendent pas du lapse N ni du shift X^i . Elles s'appliquent aux $n(n+1) + 2$ variables $(\gamma_{ij}, K_{ij}, \phi, \Pi)$, dans lesquelles nous reconnaissons la structure hamiltonienne de la décomposition ADM :

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_u \gamma_{ij}, \quad \Pi = \mathcal{L}_u \phi = \frac{1}{N} (\partial_t \phi - X^i \partial_i \phi).$$

Π dépend bien sûr de ϕ , mais nous pouvons considérer que $\phi|_{\mathcal{M}}$ et Π sont des variables indépendantes. Ce ne sera qu'une fois le système des équations de contrainte résolu que le choix arbitraire du lapse et du shift donnera $\partial_t \phi$ à partir de $\phi|_{\mathcal{M}}$ et Π .

Nous allons procéder à un changement de variables conforme semblable à ceux utilisés aux paragraphes 1.4.2, 1.4.3 et 1.4.4, afin de mettre ce système sous une forme déjà traitée.

Définition 2.5.1. Posons

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \Omega^2 \eta_{ij}, \\ K_{ij} &= \alpha (\sigma_{ij} + \mathbb{L}[\eta] W_{ij}) + \frac{1}{n} \Omega^2 \tau \eta_{ij}. \end{aligned}$$

L'enjeu est alors de choisir Ω et α convenablement pour obtenir un système conforme de la forme (1.58, 1.59).

Théorème 2.5.2. Posons

$$\Omega = \psi(\phi)^{\frac{-1}{n-1}} \varphi^{\frac{2}{n-2}}, \quad \alpha = \psi(\phi)^{\frac{-1}{n-1}} \varphi^{-2}. \quad (2.53)$$

Alors (2.51) est équivalente à

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{Y} - \left[\frac{n}{n-1} \frac{\psi'^2}{\psi^2} + \frac{\omega}{2\psi} \right] \partial_i \phi \partial^i \phi \right) \varphi \\ &= \varepsilon \varphi^{2^*-1} \psi^{\frac{-2}{n-1}} \left(\frac{n-1}{n} \tau^2 + 2\tau \frac{\psi'}{\psi} \Pi - \frac{1}{\psi} \left[\frac{\omega}{2} \Pi^2 - \varepsilon V + E^{(m)} \right] \right) \\ & \quad - \varepsilon \varphi^{-2^*-1} \|\sigma + \mathbb{L}W\|^2, \end{aligned} \quad (2.54)$$

et (2.52) est équivalente à

$$\nabla_j \mathbb{L}W_i^j = \varphi^{2^*} \psi^{\frac{-n}{n-1}} \left(\frac{n-1}{n} \psi \partial_i \tau + \partial_i (\Pi \psi') - \frac{1}{n} \psi' \tau \partial_i \phi + \frac{1}{2} \left[\omega \Pi \partial_i \phi + \varepsilon J_i^{(m)} \right] \right), \quad (2.55)$$

la seule métrique mentionnée étant η .

DÉMONSTRATION. Réécrivons les équations de contrainte (2.51, 2.52) en fonction des variables conformes.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[\gamma] - \varepsilon \left(K_{ij} K_{kl} - K_{ik} K^{jl} \right) \gamma^{ij} \gamma^{kl} &= \\ \Omega^{-2} \left(\mathbb{R}[\eta] - 2(n-1) \frac{\Delta[\eta] \Omega}{\Omega} - (n-4)(n-1) \frac{\eta^{ij} \partial_i \Omega \partial_j \Omega}{\Omega^2} \right) \\ & \quad - \varepsilon \frac{n-1}{n} \tau^2 + \varepsilon \alpha^2 \Omega^{-4} (\sigma_{ik} + \mathbb{L}[\eta] W_{ik}) (\sigma_{jl} + \mathbb{L}[\eta] W_{jl}) \eta^{ij} \eta^{kl}, \\ \psi'' \gamma^{ij} \nabla_i \phi \nabla_j \phi + \psi' [\Delta[\gamma] \phi + \varepsilon K \Pi] &= \\ \Omega^{-2} \left(\psi'' \eta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi + \psi' \left[\Delta[\eta] \phi + (n-2) \frac{\partial_i \Omega}{\Omega} \partial_j \phi \eta^{ij} + \varepsilon \Omega^2 \tau \Pi \right] \right), \end{aligned}$$

donc (2.51) devient

$$\begin{aligned} & \Omega^{-2} \left(\mathbb{R}[\eta] - 2(n-1) \frac{\Delta[\eta] \Omega}{\Omega} - (n-4)(n-1) \frac{\eta^{ij} \partial_i \Omega \partial_j \Omega}{\Omega^2} \right) \\ & \quad - \varepsilon \frac{n-1}{n} \tau^2 + \varepsilon \alpha^2 \Omega^{-4} (\sigma_{ik} + \mathbb{L}[\eta] W_{ik}) (\sigma_{jl} + \mathbb{L}[\eta] W_{jl}) \eta^{ij} \eta^{kl} \\ &= \frac{2}{\psi} \Omega^{-2} \left(\psi'' \eta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi + \psi' \left[\Delta[\eta] \phi + (n-2) \frac{\partial_i \Omega}{\Omega} \partial_j \phi \eta^{ij} + \varepsilon \Omega^2 \tau \Pi \right] \right) \\ & \quad - \frac{\varepsilon}{\psi} \left(\frac{\omega}{2} \left[\Pi^2 - \varepsilon \Omega^{-2} \eta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \right] - \varepsilon V + E^{(m)} \right), \end{aligned} \quad (2.56)$$

puis

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[\eta] - 2(n-1) \frac{\Delta[\eta] \Omega}{\Omega} - (n-4)(n-1) \frac{\eta^{ij} \partial_i \Omega \partial_j \Omega}{\Omega^2} & - 2 \frac{\psi''}{\psi} \eta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \\ & - 2 \frac{\psi'}{\psi} \Delta[\eta] \phi - 2(n-2) \frac{\psi'}{\psi} \eta^{ij} \partial_j \phi \frac{\partial_i \Omega}{\Omega} - \frac{\omega}{2\psi} \eta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \\ &= \varepsilon \frac{n-1}{n} \Omega^2 \tau^2 - \varepsilon \alpha^2 \Omega^{-2} \|\sigma + \mathbb{L}[\eta] W\|_\eta^2 + 2\varepsilon \frac{\psi'}{\psi} \Omega^2 \tau \Pi \\ & \quad - \frac{\varepsilon}{\psi} \Omega^2 \left(\frac{\omega}{2} \Pi^2 - \varepsilon V + E^{(m)} \right). \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.5. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE CONTRAINTE

Dans la méthode conforme de la RG, l'opérateur de Yamabe $\mathbb{Y}[\eta]\varphi = \mathbb{R}[\eta]\varphi - (2^* + 2)\Delta[\eta]\varphi$ apparaît. Ceci suggère d'exprimer φ , Ω et ψ de sorte que la première ligne de l'équation (2.57) se simplifie en un seul laplacien. Imposons une expression de la forme

$$\varphi = \Omega^a \psi^b,$$

et cherchons à déterminer a et b . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \nabla_i \varphi &= a\Omega^{a-1}\psi^b \nabla_i \Omega + b\Omega^a \psi^{b-1} \nabla_i \psi, \\ \Delta \varphi &= \nabla^i \nabla_i \varphi \\ &= a(a-1)\Omega^{a-2} \nabla^i \Omega \psi^b \nabla_i \Omega + ab\Omega^{a-1} \psi^{b-1} \nabla^i \psi \nabla_i \Omega + a\Omega^{a-1} \psi^b \nabla^i \nabla_i \Omega \\ &\quad + ba\Omega^{a-1} \nabla^i \Omega \psi^{b-1} \nabla_i \psi + b(b-1)\Omega^a \psi^{b-2} \nabla^i \psi + b\Omega^a \psi^{b-1} \nabla^i \nabla_i \psi, \\ \frac{\Delta \varphi}{\varphi} &= a(a-1) \frac{\nabla^i \Omega \nabla_i \Omega}{\Omega^2} + 2ab \frac{\nabla^i \Omega \nabla_i \psi}{\Omega \psi} + b(b-1) \frac{\nabla^i \psi \nabla_i \psi}{\psi^2} \\ &\quad + a \frac{\Delta \Omega}{\Omega} + b \frac{\Delta \psi}{\psi}. \end{aligned}$$

ψ est une fonction de ϕ , donc

$$\begin{aligned} \nabla_i \psi &= \psi' \nabla_i \phi, \\ \Delta \psi &= \nabla^i (\psi' \nabla_i \phi) \\ &= \psi'' \Delta \phi + \psi'^2 \nabla^i \phi \nabla_i \phi. \end{aligned}$$

Comparons les facteurs devant $\Delta \Omega / \Omega$ et $\Delta \psi / \psi$ avec (2.57). L'analogie donne

$$\begin{aligned} a(2^* + 2) &= 2(n-1), & b(2^* + 2) &= 2, \\ a &= \frac{2(n-1)}{4(n-1)/(n-2)} & b &= \frac{2}{4(n-1)/(n-2)} \\ &= \frac{n-2}{2}, & &= \frac{n-2}{2(n-1)}. \end{aligned}$$

Avec ces valeurs,

$$\begin{aligned} (2^* + 2) \frac{\Delta \varphi}{\varphi} &= (n-1)(n-4) \frac{\nabla^i \Omega \nabla_i \Omega}{\Omega^2} + 2(n-2) \frac{\nabla^i \Omega \nabla_i \psi}{\Omega \psi} - \frac{n}{n-1} \frac{\nabla^i \psi \nabla_i \psi}{\psi^2} \\ &\quad + 2(n-1) \frac{\Delta \Omega}{\Omega} + 2 \frac{\Delta \psi}{\psi}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[\eta] - 2(n-1) \frac{\Delta[\eta]\Omega}{\Omega} - (n-4)(n-1) \frac{\eta^{ij} \partial_i \Omega \partial_j \Omega}{\Omega^2} - 2 \frac{\psi''}{\psi} \eta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \\ - 2 \frac{\psi'}{\psi} \Delta[\eta]\phi - 2(n-2) \frac{\psi'}{\psi} \eta^{ij} \partial_j \phi \frac{\partial_i \Omega}{\Omega} - \frac{\omega}{2\psi} \eta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \\ = \mathbb{R} - (2^* + 2) \frac{\Delta \varphi}{\varphi} - \frac{n}{n-1} \frac{\nabla^i \psi \nabla_i \psi}{\psi^2} - \frac{\omega}{2\psi} \eta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi. \end{aligned}$$

(2.57) devient alors

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &- (2^* + 2) \frac{\Delta\varphi}{\varphi} - \frac{n}{n-1} \frac{\nabla^i \psi \nabla_i \psi}{\psi^2} - \frac{\omega}{2\psi} \eta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \\
 &= \varepsilon \frac{n-1}{n} \Omega^2 \tau^2 - \varepsilon \alpha^2 \Omega^{-2} \|\sigma + \mathbb{L}W\|^2 + 2\varepsilon \frac{\psi'}{\psi} \Omega^2 \tau \Pi \\
 &\quad - \frac{\varepsilon}{\psi} \Omega^2 \left(\frac{\omega}{2} \Pi^2 - \varepsilon V + E^{(m)} \right),
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

soit

$$\begin{aligned}
 &\left(\mathbb{Y} - \left[\frac{n}{n-1} \frac{\psi'^2}{\psi^2} + \frac{\omega}{2\psi} \right] \partial_i \phi \partial^i \phi \right) \varphi \\
 &= \varepsilon \Omega^2 \varphi \left(\frac{n-1}{n} \tau^2 + 2\tau \frac{\psi'}{\psi} \Pi - \frac{1}{\psi} \left[\frac{\omega}{2} \Pi^2 - \varepsilon V + E^{(m)} \right] \right) \\
 &\quad - \varepsilon \varphi \alpha^2 \Omega^{-2} \|\sigma + \mathbb{L}W\|^2
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

avec

$$\Omega = \psi^{\frac{-1}{n-1}} \varphi^{\frac{2}{n-2}}.$$

De l'autre côté,

$$\begin{aligned}
 &\nabla[\gamma]_j K_i^j - \nabla[\gamma]_i K \\
 &= [\partial_j (\Omega^{-2} \alpha) + n \alpha \Omega^{-3} \partial_j \Omega] \left[\sigma_i^j + \mathbb{L}[\eta] W_i^j \right] \\
 &\quad + \Omega^{-2} \alpha \nabla[\eta]_j \mathbb{L}[\eta] W_i^j - \frac{n-1}{n} \partial_i \tau, \\
 &\psi'' \Pi \nabla_i \phi + \psi' \left(\nabla_i \Pi - K_i^j \nabla_j \phi \right) \\
 &= \psi'' \Pi \partial_i \phi + \psi' \left(\partial_i \Pi - \Omega^{-2} \alpha \left[\sigma_i^j + \mathbb{L}[\eta] W_i^j \right] \partial_j \phi - \frac{1}{n} \tau \partial_i \phi \right),
 \end{aligned}$$

donc (2.52) devient

$$\begin{aligned}
 &\varepsilon \left[\partial_j (\Omega^{-2} \alpha) + n \alpha \Omega^{-3} \partial_j \Omega \right] \left[\sigma_i^j + \mathbb{L}[\eta] W_i^j \right] \\
 &\quad + \varepsilon \Omega^{-2} \alpha \nabla[\eta]_j \mathbb{L}[\eta] W_i^j - \varepsilon \frac{n-1}{n} \partial_i \tau \\
 &= \frac{\varepsilon}{\psi} \left[\psi'' \Pi \partial_i \phi + \psi' \left(\partial_i \Pi - \Omega^{-2} \alpha \left[\sigma_i^j + \mathbb{L}[\eta] W_i^j \right] \partial_j \phi - \frac{1}{n} \tau \partial_i \phi \right) \right] \\
 &\quad + \frac{\varepsilon}{2\psi} \omega \Pi \partial_i \phi + \frac{1}{2\psi} J_i^{(m)},
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

puis

$$\begin{aligned}
 & \left[\partial_j (\Omega^{-2}\alpha) + n\alpha\Omega^{-3}\partial_j\Omega + \Omega^{-2}\alpha\frac{\psi'}{\psi}\partial_j\phi \right] \left[\sigma_i^j + \mathbb{L}[\eta]W_i^j \right] \\
 & \quad + \Omega^{-2}\alpha\nabla[\eta]_j\mathbb{L}[\eta]W_i^j \\
 & = \frac{n-1}{n}\partial_i\tau + \frac{1}{\psi} \left[\psi''\Pi\partial_i\phi + \psi'\partial_i\Pi - \frac{1}{n}\tau\psi'\partial_i\phi \right] \\
 & \quad + \frac{1}{2\psi}\omega\Pi\partial_i\phi + \frac{\varepsilon}{2\psi}J_i^{(m)}.
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Il serait judicieux de choisir Ω et α tels que

$$\partial_j (\Omega^{-2}\alpha) + n\alpha\Omega^{-3}\partial_j\Omega + \Omega^{-2}\alpha\frac{\psi'}{\psi}\partial_j\phi = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 0 & = \frac{\partial_j (\Omega^{-2}\alpha)}{\Omega^{-2}\alpha} + n\frac{\partial_j\Omega}{\Omega} + \frac{\partial_j\psi}{\psi} \\
 & = \partial_j [\ln (\Omega^{-2}\alpha) + n \ln (\Omega) + \ln (\psi)] \\
 & = \partial_j \ln (\Omega^{n-2}\alpha\psi),
 \end{aligned}$$

ie. $\Omega^{n-2}\alpha\psi$ est constante. Nous choisissons cette constante égale à 1, de sorte que

$$\Omega^{n-2}\alpha\psi = 1,$$

et

$$\alpha = \Omega^{-(n-2)}\psi^{-1} = \psi^{\frac{-1}{n-1}}\varphi^{-2}.$$

Pour cette valeur de α , (2.61) s'écrit alors

$$\psi\Omega^{-2}\alpha\nabla_j\mathbb{L}W_i^j = \frac{n-1}{n}\psi\partial_i\tau + \partial_i (\Pi\psi') - \frac{1}{n}\tau\psi'\partial_i\phi + \frac{1}{2} \left[\omega\Pi\partial_i\phi + \varepsilon J_i^{(m)} \right], \tag{2.62}$$

qui est équivalente à (2.55). Quant à (2.59), cette valeur de α la rend bien équivalente à (2.54). \square

Comme dans le paragraphe 1.4.2, le facteur conforme φ est devenu l'une des inconnues du nouveau système d'équations de contrainte.

2.5.2 Application de la méthode conforme

Écrivons maintenant

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}(\phi) &:= \int \sqrt{\frac{n}{n-1} \frac{\psi'^2(\phi)}{\psi^2(\phi)} + \frac{\omega(\phi)}{2\psi(\phi)}} d\phi, \\
 \bar{\Pi} &:= \psi^{\frac{-1}{n-1}} \varphi^{2*} \Pi \sqrt{\frac{n}{n-1} \frac{\psi'^2}{\psi^2} + \frac{\omega}{2\psi}} \\
 &= \psi^{\frac{-1}{n-1}} \varphi^{2*} \mathcal{L}_u \bar{\psi}, \\
 \bar{\tau} &:= \psi^{\frac{-1}{n-1}} \tau + \frac{n}{n-1} \psi^{\frac{-n}{n-1}} \psi' \Pi, \\
 \bar{V}(\bar{\psi}(\phi)) &:= \psi(\phi)^{\frac{-2}{n-1}} \left(\frac{1}{2\psi(\phi)} V(\phi) \right), \\
 \bar{E}^{(m)} &:= \psi^{\frac{-2}{n-1}} \left(\frac{1}{2\psi} E^{(m)} \right), \\
 \bar{J}_i^{(m)} &:= \psi^{\frac{-1}{n-1}} \left(\frac{1}{2\psi} J_i^{(m)} \right),
 \end{aligned}$$

Proposition 2.5.3. *Le système (2.54, 2.55) est équivalent à*

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{Y} - \partial_i \bar{\psi} \partial^i \bar{\psi}) \varphi &= \varepsilon \varphi^{2* - 1} \left(\frac{n-1}{n} \bar{\tau}^2 + 2 \left[\varepsilon \bar{V} - \bar{E}^{(m)} \right] \right) \\
 &\quad - \varepsilon \varphi^{-2* - 1} \left(\|\sigma + \mathbb{L}W\|^2 + \bar{\Pi}^2 \right),
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\nabla_j \mathbb{L}W_i^j = \varphi^{2*} \left(\frac{n-1}{n} \partial_i \bar{\tau} + \varepsilon \bar{J}_i^{(m)} \right) + \bar{\Pi} \partial_i \bar{\psi}. \tag{2.64}$$

Ces équations rappellent (1.52) et (1.53), ou encore (1.58) et (1.59). En réalité, il ne s'agit pas seulement d'une ressemblance : ce système est **précisément** le système de contrainte conforme de la RG avec deux champs de matière, un champ de matière scalaire $(\bar{\psi}, \bar{\Pi})$ et un champ de matière quelconque $(\varepsilon \bar{V} - \bar{E}^{(m)}, \bar{J}_i^{(m)})$, auxquels s'ajoutent des contraintes supplémentaires. Ainsi, tous les résultats évoqués aux paragraphes 1.4.3 et 1.4.4 sont valables.

2.5.3 Repères d'Einstein et de Jordan

Même si l'approche que nous venons de voir est inédite, sa contribution aux études des théories tenseur-scalaire est faible. En effet, l'équivalence entre les théories STT et la RG avec certains champs de matière est connue depuis longtemps : il n'est donc pas étonnant de retrouver cette équivalence dans les équations de contrainte qui sont une restriction de ces théories.

Il existe en fait deux repères dans lesquels écrire l'action des STT.

- ★ Le premier est le **repère de Jordan**, ou *Jordan frame*. C'est celui que nous avons obtenu à partir des théories $f(\mathbb{R})$ et Brans-Dicke, et que nous avons utilisé jusqu'à

présent :

$$\mathcal{S}_{\text{STT, J}}[g, \phi, \Psi] = \int_{\mathcal{V}} \left(\psi(\phi) \mathbf{R} - \frac{\omega(\phi)}{2} D_{\mu} \phi D^{\mu} \phi - V(\phi) \right) d\mathbf{v} + \mathcal{S}_{\text{mat}}[g, \Psi]. \quad (2.8)$$

★ Le second est le **repère d'Einstein**, ou *Einstein frame*. Il est dérivé du repère de Jordan par le changement de métrique conforme

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \psi^{\frac{2}{n-1}} g_{\mu\nu}.$$

Pour $n = 3$, cela correspond à $\tilde{g} = \psi g$. En adaptant (1.44) à une variété de dimension $n + 1$, ce changement de métrique conduit à

$$\begin{aligned} \sqrt{-|\tilde{g}|} &= \psi^{\frac{n+1}{n-1}} \sqrt{-|g|}, \\ \psi^{\frac{2}{n-1}} \mathbf{R}[\tilde{g}] &= \mathbf{R}[g] - 2 \frac{n}{n-1} \frac{\square[g]\psi}{\psi} + \frac{n}{n-1} g^{\mu\nu} \frac{D[g]_{\mu}\psi D[g]_{\nu}\psi}{\psi^2}, \end{aligned}$$

soit

$$\mathbf{R}[\tilde{g}] \sqrt{-|\tilde{g}|} = \left(\psi \mathbf{R}[g] - 2 \frac{n}{n-1} \square[g]\psi + \frac{n}{n-1} g^{\mu\nu} \frac{D[g]_{\mu}\psi D[g]_{\nu}\psi}{\psi} \right) \sqrt{-|g|}.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{R}[\tilde{g}] - \left[\frac{n}{n-1} \frac{\psi'^2}{\psi^2} + \frac{\omega}{2\psi} \right] \tilde{g}^{\mu\nu} D[\tilde{g}]_{\mu}\phi D[\tilde{g}]_{\nu}\phi \right) \sqrt{-|\tilde{g}|} \\ &= \left(\psi \mathbf{R}[g] - 2 \frac{n}{n-1} \square[g]\psi - \frac{\omega}{2} g^{\mu\nu} D[g]_{\mu}\phi D[g]_{\nu}\phi \right) \sqrt{-|g|}. \end{aligned}$$

Le $\square\psi\sqrt{-|g|}$ est une divergence et n'intervient donc pas dans les équations de champ. Posons donc

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\phi) &:= \int \sqrt{\frac{n}{n-1} \frac{\psi'^2(\phi)}{\psi^2(\phi)} + \frac{\omega(\phi)}{2\psi(\phi)}} d\phi, \\ \tilde{V}(\tilde{\psi}(\phi)) &:= \psi(\phi)^{\frac{-2}{n-1}} \left(\frac{1}{2\psi(\phi)} V(\phi) \right), \end{aligned}$$

qui coïncident avec $\tilde{\psi}$ and \tilde{V} du paragraphe précédent. C'est ainsi que nous obtenons l'action des STT écrite dans le repère d'Einstein :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{STT, E}}[\tilde{g}, \tilde{\psi}(\phi), \Psi] &:= \mathcal{S}_{\text{STT, J}}\left[\psi^{\frac{-2}{n-1}} \tilde{g}, \phi, \Psi\right] \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left(\mathbf{R}[\tilde{g}] - \tilde{g}^{\mu\nu} D_{\mu} \tilde{\psi} D_{\nu} \tilde{\psi} - 2\tilde{V} \right) d\tilde{\mathbf{v}} + \mathcal{S}_{\text{mat}}\left[\psi^{\frac{-2}{n-1}} \tilde{g}, \Psi\right] \\ &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{R}[\tilde{g}] d\tilde{\mathbf{v}} + 2\mathcal{S}_{\text{sf}}[\tilde{g}, \tilde{\psi}] + \mathcal{S}_{\text{mat}}\left[\psi^{\frac{-2}{n-1}} \tilde{g}, \Psi\right]. \quad (2.65) \end{aligned}$$

Ainsi $\tilde{\psi}$ joue le rôle d'un champ scalaire dans la RG (le 2 en facteur est dû au choix de normalisation de \mathcal{S}_{EH} avec 2κ). Sa dynamique est celle d'un champ scalaire ; toutefois, il est couplé à la matière par \mathcal{S}_{mat} . La détermination des équations de contrainte de cette action peut se faire de la même façon qu'au paragraphe 1.4.4, et conduit à (2.54) et (2.55).

2.5. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE CONTRAINTE

Le changement de repère entre Jordan et Einstein est connu depuis les années 1930 et les travaux de ces deux auteurs sur les théories de gravitation faisant intervenir un champ scalaire. Les deux repères peuvent être vus comme deux représentations particulières, parmi d'autres, de la même théorie physique. Dans le repère de Jordan (2.8), le champ scalaire ϕ est couplé de façon minimale avec la matière \mathcal{S}_{mat} , mais pas avec la courbure scalaire R , ni donc avec la métrique. Dans le repère d'Einstein (2.65), ϕ est couplé de façon minimale avec la métrique, et non plus avec la matière.

On trouve un autre point de vue dans cet article [86] de N. Straumann :

- ★ Dans le repère d'Einstein, la matière subit une « cinquième force » fondamentale due au gradient de ϕ . La physique des particules varie localement à cause de cette force, alors que la constante de Newton \mathcal{G} (ou ϕ) est réellement constante et uniforme.
- ★ Dans le repère de Jordan, les lois de la physique dans un référentiel inertiel sont partout identiques, mais la constante de Newton \mathcal{G} (ou ϕ) devient dépendante de l'espace et du temps.

En réalité, la question de l'équivalence entre les deux repères est débattue depuis longtemps et l'est encore aujourd'hui. L'une des difficultés consiste à définir proprement ce que l'on entend par « équivalent ». Dans [24], N. Deruelle, Y. Sendouda et A. Youssef montrent que les formulations hamiltoniennes des deux repères ont leur variables liées par des transformations canoniques : ceci implique que les théories sont **classiquement** équivalentes. En revanche, elles ne le sont probablement pas au point de vue quantique.

Ainsi, un changement conforme de repère, suivi de la décomposition ADM, puis d'un autre changement conforme, met en évidence le fait que les équations de contrainte conformes des STT sont les mêmes que celles de la RG avec un champ scalaire. Dans le paragraphe précédent cependant, nous avons obtenu le même résultat plus directement en effectuant d'abord la décomposition ADM, puis un changement conforme. En effet, nous pouvons remarquer que le changement $\eta \rightarrow \gamma = \Omega^2 \eta$ de (2.53) avec

$$\Omega = \psi(\phi)^{\frac{-1}{n-1}} \varphi^{\frac{2}{n-2}}$$

est la combinaison du changement Einstein \rightarrow Jordan, $\tilde{g} \rightarrow g = \psi^{\frac{-2}{n-1}} \tilde{g}$, suivi du changement conforme de la méthode conforme classique vue au paragraphe 1.4.2.

Somme toute, le travail de la présente section a consisté à montrer que la nature conforme du changement de repère Einstein-Jordan est agréablement compatible avec la méthode conforme (MC) de résolution des équations de contrainte, et avec la nature linéaire de la projection ADM.

Pour le résumer en un diagramme, nous venons d'effectuer les deux chemins de

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\text{ADM}} & \gamma \\ \psi^{\frac{2}{n-1}} \downarrow \text{J} \rightarrow \text{E} & & \psi^{\frac{2}{n-1}} \downarrow \text{J} \rightarrow \text{E} \\ \tilde{g} & \xrightarrow{\text{ADM}} & \tilde{\gamma} \xrightarrow[\varphi^{\frac{-4}{n-2}}]{\text{MC}} \eta \end{array}$$

2.5. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE CONTRAINTE

qui commutent. Nous avons désigné par « $J \rightarrow E$ » pour la variété spatiale \mathcal{M} la projection de la transformation $J \rightarrow E$ de \mathcal{V} , et non l'équivalent en dimension n de la transformation $J \rightarrow E$, qui consisterait à multiplier par un facteur conforme $\psi^{\frac{2}{n-2}}$.

Nous pourrions également définir η comme une métrique intermédiaire issue de la méthode conforme appliquée à γ , avant le changement de repère Einstein-Jordan ; ce qui mènerait au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 g & \xrightarrow{\text{ADM}} & \gamma & \xrightarrow{\varphi^{\frac{-4}{n-2}}} & \eta \\
 \psi^{\frac{2}{n-1}} \downarrow J \rightarrow E & & \psi^{\frac{2}{n-1}} \downarrow J \rightarrow E & & J \rightarrow E \downarrow \psi^{\frac{2}{n-1}} \\
 \tilde{g} & \xrightarrow{\text{ADM}} & \tilde{\gamma} & \xrightarrow[\varphi^{\frac{-4}{n-2}}]{\text{MC}} & \tilde{\eta}
 \end{array}$$

Toutes ces transformations commutent.

Chapitre 3

Les théories de Lovelock et $f(\text{Lovelock})$

3.1 Introduction

Après avoir étudié les théories $f(\mathbf{R})$, Brans-Dicke, et leur généralisation tenseur-scalaire, penchons-nous désormais sur une autre famille de théories de gravité modifiée : les théories de Lovelock. Elles trouvent leur origine en deux théorèmes démontrés au début des années 1970 par D. Lovelock (cf. [55], [56], [57]). Dans ce chapitre, nous présenterons ces théories, et dériverons les équations de champ d'une de leurs généralisations : les théories $f(\text{Lovelock})$.

Nous aurons besoin d'un certain nombre de nouvelles notations.

3.1.1 Notations

Reprenons notre espace-temps (\mathcal{V}, g) de dimension $n + 1$, muni de sa métrique lorentzienne. La seule métrique utilisée dans ce chapitre sera g , aussi omettrons-nous de préciser la dépendance $[g]$.

Remarquons que dans sa forme deux fois covariante et deux fois contravariante, les symétries du tenseur de Riemann permettent d'écrire

$$\mathbf{R}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = \mathbf{R}_{\gamma\delta}{}^{\alpha\beta} = \mathbf{R}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}.$$

Définition 3.1.1. Nous notons $p_n = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, $[\cdot]$ désignant la partie entière, et

$$\delta_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}^{\nu_1\nu_2\dots\nu_k} := \det \begin{pmatrix} \delta_{\mu_1}^{\nu_1} & \dots & \delta_{\mu_1}^{\nu_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{\mu_k}^{\nu_1} & \dots & \delta_{\mu_k}^{\nu_k} \end{pmatrix}$$

le symbole de Kronecker généralisé. Nous écrivons

\mathbb{R}_p	$= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\dots\alpha_p\beta_p}^{\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_2\dots\gamma_p\delta_p} \mathbf{R}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \mathbf{R}_{\gamma_2\delta_2}^{\alpha_2\beta_2} \dots \mathbf{R}_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p}$	le p -ième produit de Lovelock,
\mathbb{R}_0	$= 1,$	
\mathbb{R}_1	$= \mathbf{R}$	la courbure scalaire,
\mathbb{R}_2	$= \mathbf{R}^2 - 4\mathbf{R}_{\alpha}^{\gamma} \mathbf{R}_{\gamma}^{\alpha} + \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \mathbf{R}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$	le terme de Gauss-Bonnet en dimension 4,
\mathbb{R}_3	$= \mathbf{R}^3 + 2\mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \mathbf{R}_{\gamma\delta}^{\epsilon\eta} \mathbf{R}_{\epsilon\eta}^{\alpha\beta} + 3\mathbf{R} \mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \mathbf{R}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} + 8\mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\gamma\eta} \mathbf{R}_{\gamma\delta}^{\epsilon\beta} \mathbf{R}_{\epsilon\eta}^{\alpha\delta} - 12\mathbf{R} \mathbf{R}_{\alpha}^{\beta} \mathbf{R}_{\beta}^{\alpha} + 16\mathbf{R}_{\alpha}^{\beta} \mathbf{R}_{\beta}^{\gamma} \mathbf{R}_{\gamma}^{\alpha} - 24\mathbf{R}_{\alpha}^{\beta} \mathbf{R}_{\gamma\delta}^{\alpha\epsilon} \mathbf{R}_{\beta\epsilon}^{\gamma\delta} + 24\mathbf{R}_{\alpha}^{\beta} \mathbf{R}_{\gamma}^{\delta} \mathbf{R}_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}$	
\mathbb{R}_p	$= 0$ pour $p > p_n,$	à cause des antisymétries de $\mathbf{R}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}.$

Introduisons de la même façon des tenseurs d'ordre 2 et 4 :

3.1. INTRODUCTION

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbb{R}}_{(p)\mu}^{\nu} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\mu\alpha_1\beta_1\dots\alpha_p\beta_p}^{\nu\gamma_1\delta_1\dots\gamma_p\delta_p} \mathbb{R}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{R}_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p}, \\
 \dot{\mathbb{R}}_{(0)\mu}^{\nu} &= \delta_{\mu}^{\nu}, \\
 \dot{\mathbb{R}}_{(1)\mu}^{\nu} &= \mathbb{R}\delta_{\mu}^{\nu} - 2\mathbb{R}_{\mu}^{\nu}, \\
 \dot{\mathbb{R}}_{(2)\mu}^{\nu} &= \left(\mathbb{R}^2 - 4\mathbb{R}_{\alpha}^{\gamma}\mathbb{R}_{\gamma}^{\alpha} + \mathbb{R}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}\mathbb{R}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \right) \delta_{\mu}^{\nu} \\
 &\quad - 4 \left(\mathbb{R}\mathbb{R}_{\mu}^{\nu} - 2\mathbb{R}_{\mu}^{\alpha}\mathbb{R}_{\alpha}^{\nu} - 2\mathbb{R}_{\alpha}^{\beta}\mathbb{R}_{\mu\beta}^{\nu\alpha} + \mathbb{R}_{\mu\alpha}^{\beta\gamma}\mathbb{R}_{\beta\gamma}^{\nu\alpha} \right),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbb{R}}_{(p)\alpha\beta}^{\gamma\delta} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha\beta\alpha_1\beta_1\dots\alpha_p\beta_p}^{\gamma\delta\gamma_1\delta_1\dots\gamma_p\delta_p} \mathbb{R}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{R}_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p}, \\
 \ddot{\mathbb{R}}_{(0)\alpha\beta}^{\gamma\delta} &= \delta_{\alpha}^{\gamma}\delta_{\beta}^{\delta} - \delta_{\alpha}^{\delta}\delta_{\beta}^{\gamma}, \\
 \ddot{\mathbb{R}}_{(1)\alpha\beta}^{\gamma\delta} &= 2\mathbb{R} \left(\delta_{\alpha}^{\gamma}\delta_{\beta}^{\delta} - \delta_{\alpha}^{\delta}\delta_{\beta}^{\gamma} \right) - 4 \left(\mathbb{R}_{\alpha}^{\gamma}\delta_{\beta}^{\delta} + \mathbb{R}_{\beta}^{\delta}\delta_{\alpha}^{\gamma} - \mathbb{R}_{\alpha}^{\delta}\delta_{\beta}^{\gamma} - \mathbb{R}_{\beta}^{\gamma}\delta_{\alpha}^{\delta} \right) + 4\mathbb{R}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}.
 \end{aligned}$$

3.1.2 Les théorèmes de Lovelock

La question à l'origine de la réflexion de Lovelock était simple : pourquoi les équations d'Einstein pour la Relativité Générale (RG) ont-elles cette forme ?

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

Le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ provient des propriétés de la matière, mais pourquoi la structure de l'espace-temps apparaît-elle à travers le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu} = \mathbb{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathbb{R}g_{\mu\nu}$? Y aurait-il d'autres façons de coder les propriétés géométriques de l'espace-temps en un 2-tenseur ? Nous verrons qu'en dimension $n + 1 = 4$, sous des hypothèses physiques raisonnables, la réponse est simple : non. Le tenseur d'Einstein, à une constante cosmologique près, est le tenseur géométrique le plus général pouvant apparaître dans une formule comme (1.7). En dimension supérieure cependant, ce tenseur général a une forme plus compliquée.

Afin de préciser cet énoncé, nous devons définir les propriétés requises par un tenseur $A_{\mu\nu}$, représentant la géométrie de l'espace-temps, pour pouvoir apparaître dans une formule de la forme

$$A_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu},$$

\propto désignant la proportionnalité.

Définition 3.1.2. Voici les hypothèses physiques les plus raisonnables.

(i) $A_{\mu\nu}$ est symétrique :

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}.$$

Ceci est une conséquence de $T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-|g|}} \frac{\delta L_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}}$, g étant symétrique. C'est également dû au fait que la connexion D de l'espace-temps à partir de laquelle sont construites les courbures est la connexion de Levi-Civita de g .

Cette hypothèse peut être levée si l'on autorise la connexion à avoir une torsion, comme dans la théorie d'Einstein-Cartan.

3.1. INTRODUCTION

(ii) La divergence de $A_{\mu\nu}$ est nulle :

$$D^\mu A_{\mu\nu} = 0.$$

Ceci rend compte de la conservation de l'énergie.

(iii) $A_{\mu\nu}$ est une fonction de la métrique g et de ses deux premières dérivées :

$$A_{\mu\nu}(g, \partial g, \partial^2 g).$$

Le fait que $A_{\mu\nu}[g]$ soit une fonctionnelle de g est naturel, dans la mesure où l'on souhaite que $A_{\mu\nu}$ représente la géométrie de l'espace-temps. La **concomitance**, c'est-à-dire le fait que la valeur de $A_{\mu\nu}$ en un point ne dépende que des valeurs de g et de ses dérivées en ce point, vient de ce que la théorie souhaitée est locale.

La limite dans l'ordre des dérivées est un moyen d'obtenir une dynamique du second ordre en temps; la théorie souhaitée est $n + 1$ -covariante, donc l'ordre maximal des dérivées de la métrique doit être le même que celui des dérivées en temps, comme en espace.

Si la dynamique doit être du second ordre en temps, c'est essentiellement à cause de l'instabilité d'Ostrogradski qui apparaît dans les équations différentielles d'ordre en temps strictement supérieur à 2. Cette instabilité est la raison principale pour laquelle la mécanique classique obéit à des équations de mouvement de second ordre en temps. À l'échelle quantique, elle empêche les théories d'ordre supérieur d'être renormalisables, violant ainsi l'unitarité de ces théories, et mène à des ghosts qui ne peuvent être enlevés dans la seconde quantification de la théorie.

Nous pouvons à présent énoncer le premier théorème de Lovelock.

Théorème 3.1.3 (Lovelock, [55]). *Dans un espace-temps de dimension $n + 1$, si un tenseur $A_{\mu\nu}$ vérifie (i,) (ii) et (iii), il existe des constantes $\lambda_p \in \mathbb{R}$ telles que*

$$A_\mu^\nu = \sum_{p=0}^{+\infty} \lambda_p \mathring{\mathbb{R}}_{(p)\mu}^\nu. \quad (3.1)$$

La seconde question dérive naturellement de la première : de quelle densité lagrangienne peut dériver un tel $A_{\mu\nu}$?

La réponse n'est pas unique, mais le second théorème de Lovelock apporte un candidat qui convient.

Théorème 3.1.4 (Lovelock, [56]).

$$\mathring{\mathbb{R}}_{(p)\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-|g|}} \frac{\delta \left(\mathbb{R}_p \sqrt{-|g|} \right)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.2)$$

Dit autrement, l'équation $A_{\mu\nu} = 0$ est l'équation d'Euler-Lagrange de la densité lagrangienne

$$L_{Lov} := (-2) \sum_{p=0}^{+\infty} \lambda_p \mathbb{R}_p \sqrt{-|g|}.$$

3.1. INTRODUCTION

Relevons quelques particularités de L_{Lov} .

Premièrement, la somme est finie. En effet, les symétries de δ impliquent que

$$k > n + 1 \quad \implies \quad \delta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k} = 0,$$

donc

$$L_{\text{Lov}} = (-2) \sum_{p=0}^{p_n} \lambda_p \mathbb{R}_p \sqrt{-|g|}.$$

Deuxièmement, L_{Lov} est une fonction de g , ∂g et $\partial^2 g$. Ce point n'est pas surprenant, dans la mesure où ce terme a été obtenu en intégrant deux fois A_μ^ν , qui est lui-même un concomitant de g , ∂g et $\partial^2 g$. En revanche, la particularité de L_{Lov} apparaît lorsqu'il est comparé à d'autres densités lagrangiennes de la forme :

$$L(g, \partial g, \partial^2 g).$$

En effet, le tenseur dérivant d'une telle densité,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\rho \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu, \rho}} + \partial_\sigma \partial_\rho \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu, \rho\sigma}},$$

satisfait évidemment (i). H. Rund a montré en [78] que (ii) est de même automatiquement vérifiée. Mais rien ne garantit que (iii) le soit : le tenseur pourrait dépendre des dérivées de g jusqu'à l'ordre 4. Ainsi la propriété remarquable des L_p , bien qu'ils ne soient pas les seuls à l'avoir, est d'être du second ordre en g et d'avoir une dérivée totale $A_{(p)\mu\nu}$ par rapport à g qui le soit également.

La troisième remarque que nous formulerons à propos de L_{Lov} relie les théorèmes de Lovelock à un résultat fondamental de géométrie, le théorème de Gauss-Bonnet-Chern.

3.1.3 Le théorème de Gauss-Bonnet-Chern

Lorsque $n + 1$ est pair, nous pouvons constater que

$$\dot{\mathbb{R}}_{(p_n)\mu}^\nu = 0. \quad (3.3)$$

En effet, le symbole de Kronecker est de taille $2p + 1$ dans $\dot{\mathbb{R}}_{(p)\mu}^\nu$, et s'annule pour $p = p_n$.

Cela signifie que $\frac{\delta(\mathbb{R}_{p_n} \sqrt{-|g|})}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$ pour toute métrique g , ie.

$$\delta \left(\int_{\mathcal{V}} \mathbb{R}_{p_n} \, dv \right) = 0.$$

En d'autres termes, \mathbb{R}_{p_n} est un **invariant topologique**, et ne contribue pas à l'action que l'on pourrait réécrire

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{Lov}} &= \int_{\mathcal{V}} L_{\text{Lov}} \, d^{n+1}x \\ &:= \sum_{p=0}^{p_n-1} (-2\lambda_p) \int_{\mathcal{V}} \mathbb{R}_p \, dv. \end{aligned}$$

3.1. INTRODUCTION

Nous aurions pu déduire ce résultat du théorème de Gauss-Bonnet-Chern. Il s'agit d'une généralisation pour toute dimension du théorème de Gauss-Bonnet, valable pour \mathbb{R}_2 . Cette généralisation s'énonce ainsi :

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbb{R}_{p_n} dv = (\pi^{p_n} 2^{2p_n} p_n!) \chi(\mathcal{V}),$$

où $\chi(\mathcal{V})$ est la caractéristique d'Euler de \mathcal{V} . En effet, \mathbb{R}_{p_n} n'est rien d'autre que le scalaire de Gauss-Bonnet en dimension $n + 1$. Cependant, l'équation (3.3) n'est pas une preuve de ce théorème fondamental de géométrie. La part la plus difficile dans le théorème de Gauss-Bonnet-Chern est de prouver que \mathbb{R}_{p_n} est l'intégrand de la caractéristique d'Euler, et pas seulement un invariant topologique.

Jusqu'à présent, la nature du lien profond entre les hypothèses physiques sur A_μ^ν (symétrique, de divergence nulle, dérivées de second ordre en la métrique) et le résultat géométrique (théorème de Gauss-Bonnet-Chern) reste inconnue. Selon D. Lovelock, que j'ai contacté à ce sujet, S. S. Chern lui-même n'avait pas la réponse à cette question. Ce problème encore ouvert serait sans doute intéressant à explorer.

Lorsque $n + 1$ est impair, $\mathring{\mathbb{R}}_{(p_n)\mu}^\nu$ ne s'annule pas trivialement, et l'action \mathcal{S}_{Lov} reste inchangée. Nous garderons donc pour la suite sa forme générale, c'est-à-dire une somme allant de 0 à p_n .

En dimension $1 + 1$, il n'y a pas de terme non trivial, et donc pas de RG. Pour les cas $2 + 1$ et $3 + 1$, la densité lagrangienne peut se réduire à

$$L_{\text{Lov}} = -2(\lambda_0 + \lambda_1 R) \sqrt{-|g|}.$$

C'est la RG avec une constante cosmologique, avec $\lambda_0 = \Lambda/2\kappa$ et $\lambda_1 = -1/4\kappa$. Les théorèmes de Lovelock prouvent donc qu'en dimension 4, la RG est unique parmi les théories vérifiant les hypothèses physiques (*i, ii, iii*).

3.1.4 Les théories de Lovelock

À partir des années 2000, les produits de Lovelock ont suscité un intérêt nouveau et donné naissance à une littérature florissante. Les théories des cordes et M , ainsi que la correspondance AdS/CFT, décrivent un espace-temps de grande dimension. Elles rappellent la question originelle posée par D. Lovelock et les généralisations du tenseur d'Einstein pour $n > 3$. Dans ces théories, des termes de courbure de degré supérieur apparaissent naturellement (cf. [88]), comme le terme de Gauss-Bonnet-Chern pour la dimension 4, c'est-à-dire le terme de Gauss-Bonnet \mathbb{R}_2 . Comme nous l'avons dit ce terme n'est plus un invariant topologique pour $n + 1 > 4$, et joue donc un rôle non trivial dans les équations de champ. Dans ce cadre, les produits de Lovelock pourraient avoir des implications cosmologiques et être liés au problème de l'énergie sombre : l'expansion de l'univers pourrait en effet être expliquée par la présence d'un terme de Gauss-Bonnet dans l'action (cf. [68], [66], [67], [17]).

Les théories engendrées par une telle action, contenant les produits de Lovelock de degré $p \leq 2$, sont appelées gravité de Gauss-Bonnet. Leur généralisation qui contient une

3.1. INTRODUCTION

combinaison linéaire arbitraire de produits de Lovelock forme la famille des théories de Lovelock.

Définition 3.1.5. On appelle **théories de Lovelock** les théories dérivant de la famille d'actions

$$\mathcal{S}_{\text{Lov}_0} := \sum_{p=0}^{p_n} \alpha_p \int_{\mathcal{V}} \mathbb{R}_p \, dv, \quad (3.4)$$

où les $\alpha_p \in \mathbb{R}$ sont des constantes. Dans le cas particulier où $\alpha_p = 0$ pour $p > 2$, les théories sont appelées **gravité de Gauss-Bonnet** :

$$\mathcal{S}_{\text{GB}_0} := \int_{\mathcal{V}} (\alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{R}) \, dv. \quad (3.5)$$

REMARQUE 5. Les α_p sont liés aux λ_p des théorèmes de Lovelock par

$$\alpha_p = -2\lambda_p.$$

Nous connaissons déjà les équations de champ de cette action, qui étaient en fait notre point de départ :

$$A_{\mu\nu} = \sum_{p=0}^{p_n} -\frac{\alpha_p}{2} \dot{\mathbb{R}}_{(p)\mu\nu} = 0. \quad (3.6)$$

Définition 3.1.6. En ajoutant un terme de matière dans l'action, nous obtenons les **théories de Lovelock avec matière** :

$$\mathcal{S}_{\text{Lov}}[g, \Psi] := \mathcal{S}_{\text{Lov}_0}[g] + \mathcal{S}_{\text{mat}}[g, \Psi]. \quad (3.7)$$

Proposition 3.1.7. *En écrivant comme d'habitude*

$$T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-|g|}} \frac{\delta L_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.5)$$

nous trouvons les équations de champ de Lovelock avec matière :

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

La RG correspond alors à

$$\alpha_0 = \frac{-2\Lambda}{2\kappa}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2\kappa}, \quad \alpha_p = 0 \quad \text{pour } p \geq 2.$$

Avant de poursuivre notre étude des théories de Lovelock, penchons-nous sur chacun des produits \mathbb{R}_p .

3.2 Sur la forme développée des produits de Lovelock

Rappelons les valeurs des premiers produits de Lovelock :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}_p &= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots \alpha_p \beta_p}^{\gamma_1 \delta_1 \gamma_2 \delta_2 \dots \gamma_p \delta_p} R_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} R_{\gamma_2 \delta_2}^{\alpha_2 \beta_2} \dots R_{\gamma_p \delta_p}^{\alpha_p \beta_p} \\
 \mathbb{R}_0 &= 1, \\
 \mathbb{R}_1 &= R, \\
 \mathbb{R}_2 &= R^2 - 4R_{\alpha}^{\gamma} R_{\gamma}^{\alpha} + R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}, \\
 \mathbb{R}_3 &= R^3 + 2R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}^{\varepsilon\eta} R_{\varepsilon\eta}^{\alpha\beta} + 3R R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \\
 &\quad + 8R_{\alpha\beta}^{\gamma\eta} R_{\gamma\delta}^{\varepsilon\beta} R_{\varepsilon\eta}^{\alpha\delta} - 12R R_{\alpha}^{\beta} R_{\beta}^{\alpha} + 16R_{\alpha}^{\beta} R_{\beta}^{\gamma} R_{\gamma}^{\alpha} \\
 &\quad - 24R_{\alpha}^{\beta} R_{\gamma\delta}^{\alpha\varepsilon} R_{\beta\varepsilon}^{\gamma\delta} + 24R_{\alpha}^{\beta} R_{\gamma}^{\delta} R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}, \\
 \mathbb{R}_p &= 0 \quad \text{pour } p > p_n.
 \end{aligned}$$

Habituellement, les produits de Lovelock sont écrits sous forme de produit, et sont manipulés sous cette forme. Le produit n'est développé que pour les petits degrés, comme ici pour $p = 1, 2$ voire 3. La complexité surprenante du développement pour $p = 3$, comparé à $p = 1$ et 2, décourage de poursuivre le développement pour les degrés supérieurs. Pourtant, la question mérite d'être posée : quelle est la formule explicite du développement du produit Lovelock de degré général p ? Les seuls tenseurs apparaissant dans ce développement sont le tenseur de Riemann, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire de l'espace-temps. Mais en combien d'exemplaires sont-ils présents ? Comment sont-ils combinés ?

C'est l'objet de cette section. Nous ne résolvons pas entièrement le problème, mais donnons un élément de réponse à l'une des questions : le nombre de scalaires indépendants qui apparaissent dans le développement du p -ième produit de Lovelock.

La réponse que nous apportons est en fait déduite d'un article vieux de vingt-cinq ans de S. A. Fulling, R. C. King, B. G. Wybourne et C. J. Cummins [28]. Le champ de recherche correspondant ne porte pas a priori sur les théories de gravité modifiée ; mais il trouve ses origines dans les aspects calculatoires du noyau de la chaleur, dans le contexte de la théorie quantique des champs et de la gravitation. Des algorithmes pour simplifier le calcul tensoriel étaient développés, comme le Computer Algebra System (CAS) **REDUCE** (cf. [6]) ou des extensions de **Mathematica** (cf. [7]).

À ce qu'il me semble, je suis le premier à utiliser ces résultats pour les théories de Lovelock.

3.2.1 Diagrammes de Young

Avant tout, quels sont les termes qui apparaissent dans le développement d'un produit de Lovelock ? Si l'on écrit \mathcal{S}_k le groupe symétrique d'un ensemble à k éléments, nous avons

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}_p &= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_p \beta_p}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_p \delta_p} R_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots R_{\gamma_p \delta_p}^{\alpha_p \beta_p} \\
 &= \frac{1}{2^p} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2p}} \varepsilon(\sigma) R_{\mu_1}^{\mu_{\sigma(1)}} R_{\mu_2}^{\mu_{\sigma(2)}} \dots R_{\mu_{2p-1}}^{\mu_{\sigma(2p-1)}} R_{\mu_{2p}}^{\mu_{\sigma(2p)}}.
 \end{aligned}$$

3.2. SUR LA FORME DÉVELOPPÉE DES PRODUITS DE LOVELOCK

Il s'agit d'une somme de $(2p)!$ termes, qui ne sont pas linéairement indépendants. L'extraction d'une base parmi ces termes est un problème qui a été résolu dans [28], en utilisant des outils de la théorie des représentations de groupe que nous allons maintenant présenter brièvement.

Pour tout $k \geq 1$, à chaque k -tenseur $T_{a_1 \dots a_k}$ on peut associer une représentation de \mathcal{S}_k . De même que cette représentation peut être décomposée en représentations irréductibles de \mathcal{S}_k , encodées par des diagrammes de Young de taille k , de même le tenseur $T_{a_1 \dots a_k}$ peut être décomposé sur une base \mathcal{T}_k de k -tenseurs correspondant aux diagrammes de Young de taille k . Plus précisément, les tenseurs de \mathcal{T}_k ont des symétries particulières qui sont représentées par les tableaux de Young standards de taille k . Nous écrivons \longleftrightarrow cette correspondance.

Voici comment procéder à cette décomposition : pour chaque tableau standard de taille k , prenez $T_{a_1 \dots a_k}$, symétrisez sur les indices se trouvant dans chaque ligne du tableau, puis antisymétrisez sur les indices se trouvant dans chaque colonne. Par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \cdot T_{abc} &:= \frac{1}{3} ([T_{abc} + T_{cba}] - [T_{bac} + T_{cab}]), \\ \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \cdot T_{abc} &:= \frac{1}{6} (T_{abc} + T_{bca} + T_{cab} - T_{bac} - T_{acb} - T_{cba}), \end{aligned}$$

où les facteurs combinatoires $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ et $\frac{1}{6}$ sont les nombres, normalisés, de tableaux de Young standards différents pour un diagramme de Young donné. La constante de normalisation est la somme, pour un diagramme, des carrés du nombre de tableaux standards correspondant à ce diagramme, qui se trouve être $k!$.

Ainsi, pour $k = 4$, nous avons cinq diagrammes de Young et dix tableaux standards :

Diagrammes	Tableaux	
$\square \square \square \square$	$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$	
$\begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \end{array} \quad \begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \end{array}$	
$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$	
$\begin{array}{ c } \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{ c } \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$	
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$	$1^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 = 4!$

3.2. SUR LA FORME DÉVELOPPÉE DES PRODUITS DE LOVELOCK

Pour $k = 3$, trois diagrammes de Young et quatre tableaux standards :

Diagrammes	Tableaux	
□□□	□1□2□3	$1^2 + 2^2 + 1^2 = 3!$
□□ □	□1□2 □3 □1□3 □2	
□ □ □	□1 □2 □3	

Ainsi, tout 3-tenseur peut être décomposé selon

$$T_{abc} = \left(\square\square\square + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \cdot T_{abc} = \left(\square1\square2\square3 + \begin{array}{|c|c|} \hline \square1 & \square2 \\ \hline \square3 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square1 & \square3 \\ \hline \square2 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square1 \\ \hline \square2 \\ \hline \square3 \\ \hline \end{array} \right) \cdot T_{abc}.$$

Le produit de deux tenseurs $U_{a_1 \dots a_k} \in \mathcal{T}_k$ et $U'_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}_l$, dont les symétries correspondent à des tableaux de diagrammes \mathfrak{U} et \mathfrak{U}' , correspond lui-même au produit extérieur de \mathfrak{U} et \mathfrak{U}' , que nous écrivons $\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{U}'$. Ce produit peut à son tour être décomposé sur les représentations irréductibles de \mathcal{S}_{k+l} , en suivant la règle de Littlewood-Richardson. Par exemple, si U_{abc} et U'_{abc} sont des 3-tenseurs représentés par

$$U_{abc} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square1 & \square3 \\ \hline \square2 & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad U'_{abc} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square1 & \square2 \\ \hline \square3 & \\ \hline \end{array},$$

alors $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}' = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$, et

$$\begin{aligned} U_{abc}U'_{def} &= \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \right) \cdot U_{abc}U'_{def} \\ &= \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \cdot U_{abc}U'_{def}. \end{aligned}$$

Un théorème prouvé dans [28] établit que parmi ces représentations irréductibles de \mathcal{S}_{k+l} , celles dont toutes les lignes ont une longueur paire sont invariantes sous l'action du groupe orthogonal $O(k+l)$. De plus, elles forment une base de ces représentations invariantes. En termes de tenseurs sur une variété, les représentations invariantes sous l'action de $O(k+l)$ correspondent aux scalaires construits à partir des contractions de $U_{a_1 \dots a_k}$ et $U'_{b_1 \dots b_l}$. Ainsi, l'espace des scalaires construits à partir des contractions de $U_{a_1 \dots a_k}$ et $U'_{b_1 \dots b_l}$ a la même dimension que l'espace des représentations irréductibles de \mathcal{S}_{k+l} qui sont invariantes sous l'action de $O(k+l)$ et qui apparaissent dans la décomposition de $\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{U}'$. Et donc, une base de scalaires indépendants aura le même cardinal que le nombre de diagrammes à longueurs de ligne paires dans la décomposition de $\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{U}'$.

Intuitivement, contracter une paire d'indices sur les tenseurs peut être considéré comme retirer une paire de cellules du diagramme de Young. Si les deux cellules se trouvent dans des lignes différentes, le résultat s'annule à cause de l'antisymétrisation entre les lignes. Si les deux cellules se trouvent dans la même ligne, la contraction n'est pas triviale. Ainsi, toutes les lignes doivent être de longueur paire pour que le diagramme vide qui en résulte corresponde à un scalaire non trivial.

Cependant, l'égalité entre les dimensions n'implique pas une bijection canonique entre les diagrammes à longueurs de ligne paires et les scalaires indépendants : la plupart du temps, une telle correspondance n'existe pas. En gardant notre exemple, nous avons deux représentations à longueurs de ligne paires :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array},$$

et deux scalaires indépendants construits à partir des contractions de $U_{a_1 \dots a_k}$ et $U'_{b_1 \dots b_l}$:

$$U_{ab}{}^a U'_c{}^{cb} \quad \text{et} \quad U_{abc} U'^{cab},$$

mais pas de bijection simple entre les uns et les autres.

Dans le cas où $U_{a_1 \dots a_k} = U'_{b_1 \dots b_l}$, la liste de représentations irréductibles est restreinte par les symétries sous l'échange entre les deux tenseurs : ce n'est plus un produit extérieur, mais une nouvelle opération \otimes , appelée **pléthysme**. Il s'agit du cas qui nous intéresse.

3.2.2 Pléthysmes du tenseur de Riemann

En effet, notre but est de déterminer une base de scalaires sur laquelle les \mathbb{R}_p peuvent être décomposés. Toutefois, chaque \mathbb{R}_p est une somme sur toutes les contractions possibles de p tenseurs de Riemann. Nous pouvons remarquer que les symétries du tenseur de Riemann vérifient

$$R_{\mu_1 \mu_2}^{\mu_3 \mu_4} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array},$$

et en conclure qu'il nous faut étudier la décomposition de

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \dots \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} =: \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}^{\otimes p}$$

sur les représentations irréductibles. Dans cette décomposition, le nombre de diagrammes aux longueurs de ligne paires sera le nombre de scalaires indépendants que l'on peut obtenir par des contractions de p copies de $R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$. Par exemple, en ne gardant que les diagrammes à

3.2. SUR LA FORME DÉVELOPPÉE DES PRODUITS DE LOVELOCK

longueurs de ligne paires, nous avons

$\mathbb{R}_1 \longleftrightarrow$		$\otimes 1 =$		$=$		\downarrow	R
$\mathbb{R}_2 \longleftrightarrow$		$\otimes 2 =$		$+$		$+$	
			\downarrow		\downarrow		\downarrow
			R^2		$R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$		$R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$
$\mathbb{R}_3 \longleftrightarrow$		$\otimes 3 =$		$+$		$+$	
			\downarrow	\downarrow		\downarrow	\downarrow
			R^3	$RR_{\alpha}^{\beta}R_{\beta}^{\alpha}$	$R_{\alpha}^{\beta}R_{\beta}^{\gamma}R_{\gamma}^{\alpha}$	$R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}R_{\gamma\delta}^{\epsilon\eta}R_{\epsilon\eta}^{\alpha\beta}$	$RR_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}R_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$
				$R_{\alpha}^{\beta}R_{\beta}^{\gamma}R_{\gamma}^{\alpha}$	$R_{\alpha\beta}^{\gamma\eta}R_{\gamma\delta}^{\epsilon\beta}R_{\epsilon\eta}^{\alpha\delta}$	$R_{\alpha}^{\beta}R_{\gamma\delta}^{\alpha\epsilon}R_{\beta\epsilon}^{\gamma\delta}$	$R_{\alpha}^{\beta}R_{\gamma}^{\delta}R_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}$

Comme nous l'avons expliqué, il n'y a pas de correspondance bijective entre les diagrammes et les scalaires. Cependant, il est possible de les ranger en trois ensembles qui sont, eux, en bijection, comme nous venons de le faire dans le tableau ci-dessus. Si le diagramme contient

- ★ deux lignes, il représente un scalaire n'impliquant que la courbure scalaire R ;
- ★ trois lignes, il représente un scalaire impliquant R et le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$;
- ★ quatre lignes ou plus, il représente un scalaire impliquant R , $R_{\mu\nu}$ et le tenseur de Riemann $R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$.

Certaines tables, calculées dans [28], nous permettent de compter le nombre de scalaires intervenant dans les premiers \mathbb{R}_p :

Degré	Nombre de lignes			Total
	2	3	≥ 4	
\mathbb{R}_1	1	0	0	1
\mathbb{R}_2	1	1	1	3
\mathbb{R}_3	1	2	5	8
\mathbb{R}_4	1	3	22	26
\mathbb{R}_5	1	4	85	90
\mathbb{R}_6	1	6	402	409

3.3. LES ÉQUATIONS DE CHAMP DES THÉORIES $F(\text{LOVELOCK})$

Malheureusement, ces nombres ont été calculés par un ordinateur : il n'y a pas de formule explicite pour les déterminer. De même pour la forme explicite des scalaires.

A fortiori pour le calcul de \mathbb{R}_p . Après avoir sommé sur toutes les permutations de \mathcal{S}_{2p} :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2p}} \varepsilon(\sigma) R_{\mu_1}^{\mu_{\sigma(1)}} R_{\mu_2}^{\mu_{\sigma(2)}} \dots R_{\mu_{2p-1}}^{\mu_{\sigma(2p-1)}} R_{\mu_{2p}}^{\mu_{\sigma(2p)}},$$

il n'existe actuellement pas de formule explicite pour les facteurs devant chacun de ces scalaires. Tout ce que nous savons est que leur somme est $(2p)!$, et que les symétries garantissent que chaque préfacteur peut être divisé par 2^p .

Pour le reste, il n'y a pas de formule. Mais il existe des algorithmes capables d'effectuer le calcul. On peut trouver de tels algorithmes et des applications pour `Maple` dans [71], [72], [73], [58]. Des algorithmes existent également pour le langage `REDUCE`, [39], ou `Java`, [38]. Des algorithmes pour la simplification de tenseurs par `Mathematica` (package `Tools of Tensor Calculus`) peuvent être trouvés dans [2], [3]. Le programme `Cadabra` peut également être utilisé.

Je remercie le professeur Stephen Fulling pour sa disponibilité et pour les références précieuses qu'il m'a données.

3.2.3 Ce que l'on sait et ce qui reste à découvrir

En somme, nous venons d'établir le résultat suivant.

Théorème 3.2.1 ([28]). *Le nombre de scalaires indépendants dans le développement du p -ième produit de Lovelock est égal au nombre de diagrammes de Young dont toutes les lignes ont une longueur paire dans la décomposition du p -ième pléthysme du diagramme de Young $(2, 2)$:*

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes p.$$

Ce pléthysme encode en effet les symétries du tenseur de Riemann.

Les questions suivantes sont encore ouvertes : peut-on trouver une formule explicite pour ce nombre ? Ensuite, combien de ces scalaires apparaissent dans le développement

$$\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_p \beta_p}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_p \delta_p} R_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots R_{\gamma_p \delta_p}^{\alpha_p \beta_p} ?$$

Nous savons seulement que leur somme est $(2p)!$, et que chacun est divisible par 2^p . En petite dimension, ce n'est pas vraiment un problème. Pour les théories de dimension supérieure, en revanche, eg. une théorie des cordes avec $n + 1 = 26$, le nombre de scalaires indépendants ainsi que leurs préfacteurs explosent.

3.3 Les équations de champ des théories $f(\text{Lovelock})$

Les résultats de cette section et du chapitre 4 sont ceux de [46].

3.3. LES ÉQUATIONS DE CHAMP DES THÉORIES $F(\text{LOVELOCK})$

Après ces considérations sur l'origine et certaines propriétés des \mathbb{R}_p , revenons aux théories de gravité de Lovelock :

$$\mathcal{S}_{\text{Lov}_0}[g] = \sum_{p=0}^{p_n} \alpha_p \int_{\mathcal{V}} \mathbb{R}_p \, dv,$$

avec $\alpha_p = -2\lambda_p$.

Nous pouvons généraliser facilement cette action.

3.3.1 Les théories $f(\text{Lovelock})$

Deux raisons suggèrent cette généralisation. La première est géométrique : comme nous l'avons vu dans le paragraphe 3.1.3, les produits de Lovelock ont par le théorème de Gauss-Bonnet-Chern un étonnant écho en géométrie, et méritent donc d'être étudiés pour eux-mêmes.

La deuxième raison provient de la physique. Même pour $n+1 = 4$, bien que le terme de Gauss-Bonnet soit l'intégrand d'un invariant topologique, ce n'est plus le cas lorsqu'il est couplé avec un champ scalaire : l'application d'une approche tenseur-scalaire à la Brans-Dicke aux théories de Gauss-Bonnet donne des résultats physiquement différents (cf. [93]).

De ce fait, les termes de courbure de degré supérieur ainsi que les degrés de liberté supplémentaires venant des champs scalaires d'une théorie de Lovelock-tenseur-scalaire donnent d'intéressants résultats lorsqu'elle est prise comme modèle réduit dans le contexte de l'holographie de la théorie conforme des champs, ou conformal field theory (CFT) (cf. [9]). Ceci donne l'idée de généraliser encore davantage les théories de Lovelock, en appliquant la même procédure que pour construire les théories $f(\mathbb{R})$ à partir de la RG : en écrivant les produits de Lovelock comme arguments d'une fonction arbitraire f . La famille de théories obtenue s'appelle $f(\text{Lovelock})$. En réalité, elles sont un cas particulier de ce qui peut être nommé les théories de Lovelock-tenseur-scalaire, de même que les $f(\mathbb{R})$ sont un cas particulier des STT. En effet, comme nous le verrons dans la suite, une transformée de Legendre peut rendre les $f(\text{Lovelock})$ équivalentes au couplage, dans l'action, de chaque produit de Lovelock avec un champ scalaire.

En faisant ainsi, nous gagnons d'un côté en généralité, mais y perdons d'un autre : les équations de champ des théories $f(\text{Lovelock})$ vérifient (i) et (ii), mais sont du quatrième ordre en les dérivées de g .

En effet, la remarquable propriété des \mathbb{R}_p – être du second ordre en les dérivées de g et avoir une dérivée totale du second ordre – est perdue lorsqu'ils sont couplés à des champs scalaires. La densité lagrangienne obtenue est d'ordre 2 en g , donc sa dérivée totale est d'ordre 4. De même pour les équations de champ qu'elle engendre ; et nous avons déjà expliqué plus haut en quoi des équations de champ du second ordre sont intéressantes.

Le tenseur le plus général qui soit concomitant de $(g, \partial g, \partial^2 g)$, de champs scalaires et de leurs dérivées $(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi, \dots)$ est décrit par les théories de Horndeski (cf. l'article fondateur [37]). Elles sont plus complexes et contiennent davantage de termes de couplage

entre la courbure et le champ scalaire. Si l'on lève la limite sur l'ordre des dérivées de g , tout en continuant à se prémunir contre l'instabilité d'Ostrograski, on peut trouver une famille plus large encore de théories, appelées *beyond Horndeski*. L'article [49] présente par exemple une méthode de construction et une classification de certaines de ces théories.

J'ai choisi de ne pas étudier les théories de Horndeski, mais de me concentrer sur l'action de $f(\text{Lovelock})$, déjà intéressante en elle-même : c'est l'action la plus générale que l'on puisse construire à partir des produits de Lovelock, dont le lien avec le théorème de Gauss-Bonnet-Chern promet des implications géométriques intéressantes.

Dans la suite de cette section, nous allons dériver les équations de champ de ces théories après avoir précisé nos notations.

3.3.2 Notations

Définition 3.3.1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{p_n+1} \rightarrow \mathbb{R})$. Nous écrivons

$$\mathcal{S}_{f(\text{Lov})_0} = \int_{\mathcal{V}} f(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_1, \dots, \mathbb{R}_{p_n}) dv. \quad (3.9)$$

La famille de théories résultant de cette action est appelée **théories $f(\text{Lovelock})$** dans le vide.

Pour en dériver les équations de champ, nous allons suivre la même procédure qu'au paragraphe 2.1.2, où nous avons considéré les théories $f(\mathbb{R})$: nous avons introduit la transformée de Legendre de f pour écrire leur action \mathcal{S}_f comme l'action d'une théorie tenseur-scalaire. De même, nous allons introduire des champs auxiliaires correspondant aux $\frac{\partial f}{\partial \mathbb{R}_p}$. Les dérivées de g d'ordre supérieur à 2 seront portées par ces champs.

Sous l'hypothèse que chaque $\mathbb{R}_p \mapsto \frac{\partial f}{\partial \mathbb{R}_p}$ est bijective¹, nous posons :

$$\begin{aligned} \phi_p &:= \frac{\partial f(\mathbb{R}_0, \dots, \mathbb{R}_{p_n})}{\partial \mathbb{R}_p}, \\ V(\phi_0, \dots, \phi_{p_n}) &:= \sum_{p=0}^{p_n} \phi_p \mathbb{R}_p(\phi_p) - f(\mathbb{R}_0(\phi_0), \dots, \mathbb{R}_{p_n}(\phi_{p_n})), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathcal{S}_{f(\text{Lov})_0}[g] = \int_{\mathcal{V}} \left[\sum_{p=0}^{p_n} \phi_p(\mathbb{R}_p) \mathbb{R}_p - V(\phi_0(\mathbb{R}_0), \dots, \phi_{p_n}(\mathbb{R}_{p_n})) \right] dv.$$

Notre objectif dans le chapitre suivant sera d'effectuer la décomposition ADM des équations de champ de cette action. Pour cela, nous pouvons comme pour le cas $f(\mathbb{R})$ considérer les ϕ_p comme des champs indépendants. Ces nouveaux degrés de liberté plongent l'espace-temps \mathcal{V} dans un espace des phases plus vaste, et les trajectoires classiques correspondent aux $p_n + 1$ équations : $\phi_p = \frac{\partial f}{\partial \mathbb{R}_p}$. Ainsi, l'action devient

1. Ce qui peut être exprimé en terme d'inversibilité de la hessienne $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbb{R}_p \partial \mathbb{R}_q} \right)_{0 \leq p, q \leq p_n}$, cf. [9].

Définition 3.3.2.

$$\mathcal{S}_{f(\text{Lov})_0}[g, \phi_0, \dots, \phi_{p_n}] := \int_{\mathcal{V}} \left[\sum_{p=0}^{p_n} \phi_p \mathbb{R}_p - V(\phi_0, \dots, \phi_{p_n}) \right] dv. \quad (3.10)$$

REMARQUE 6. Le cas des théories de Lovelock correspond à $\phi_p = \alpha_p = -2\lambda_p$ constants et $V = 0$.

Définition 3.3.3. Nous posons

$\mathcal{L}_p := \phi_p \mathbb{R}_p \sqrt{- g },$	$L_p := \mathbb{R}_p \sqrt{- g },$
$\mathcal{E}_{(p)}^{\mu\nu} := \frac{\delta \mathcal{L}_p}{\delta g_{\mu\nu}},$	$E_{(p)}^{\mu\nu} := \frac{\delta L_p}{\delta g_{\mu\nu}},$
$\Lambda_{(p)}^{\alpha\beta, \gamma\delta} := \frac{\partial L_p}{\partial g_{\alpha\beta, \gamma\delta}},$	

Rappelons que

$$\ddot{\mathbb{R}}_{(p)\alpha\beta}^{\gamma\delta} := \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha\beta\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_p\beta_p}^{\gamma\delta\gamma_1\delta_1 \dots \gamma_p\delta_p} \mathbb{R}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{R}_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p}.$$

Nous définissons alors

$$\begin{aligned} P_{(p)}^{\alpha\beta\gamma\delta} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_{p-1}\beta_{p-1} \alpha\beta}^{\gamma_1\delta_1 \dots \gamma_{p-1}\delta_{p-1} \alpha\beta} \mathbb{R}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{R}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \\ &= \frac{1}{2} \ddot{\mathbb{R}}_{(p-1)\mu\nu}^{\alpha\beta} g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

qui est tel que

$$\mathbb{R}_p = P_{(p)}^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbb{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Par homogénéité (cf. [70]), $P_{(p)}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ aurait également pu être défini par

$$P_{(p)}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{p} \frac{\partial \mathbb{R}_p}{\partial \mathbb{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}}.$$

REMARQUE 7. Les égalités entre tenseurs covariants et contravariants peuvent se déduire les unes des autres à partir de

$$\frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\delta L}{\delta g^{\alpha\beta}}.$$

Définition 3.3.4. Ajoutons enfin un terme de matière à l'action :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{f(\text{Lov})}[g, \phi_0, \dots, \phi_{p_n}, \Psi] &:= \mathcal{S}_{f(\text{Lov})_0}[g, \phi_0, \dots, \phi_{p_n}] + \mathcal{S}_{\text{mat}}[g, \Psi] \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\sum_{p=0}^{p_n} \mathcal{L}_p - V \sqrt{-|g|} + L_{\text{mat}} \right] d^{n+1}x. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nous définissons comme d'habitude

$$T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-|g|}} \frac{\delta L_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

le tenseur d'énergie-impulsion associé à $L_{\text{mat}}[g, \Psi]$.

Pour finir, nous aurons besoin du théorème suivant démontré par H. Rund dans [78].

Théorème 3.3.5 ([78]). *Soit $L[g] = L(g, \partial g, \partial^2 g)$ une densité lagrangienne. On définit sa dérivée totale par rapport à $g_{\mu\nu}$ par*

$$\begin{aligned} E^{\mu\nu} &:= \frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}} \\ &= \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\rho \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho}} + \partial_\sigma \partial_\rho \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu,\rho\sigma}}. \end{aligned}$$

Alors cette dérivée est donnée par

$$E^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu\nu,\rho\sigma}{}_{|\rho\sigma} + \frac{1}{2} L g^{\mu\nu} - \frac{2}{3} R_\sigma{}^\nu{}_{\tau\rho} \Lambda^{\rho\sigma,\mu\tau},$$

à des dérivées totales près, avec

$$\Lambda^{\alpha\beta,\gamma\delta} := \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\gamma\delta}}.$$

Nous sommes maintenant prêts à calculer les équations de champ.

3.3.3 Dérivation des équations de champ

Ces équations étaient déjà présentes dans l'article [9] de P. Bueno et al., mais sans démonstration. Nous expliquons ici comment les obtenir.

Proposition 3.3.6.

$$\mathcal{E}_{(p)}{}^{\mu\nu} = \frac{\phi_p}{2} \mathring{\mathbb{R}}_{(p)}^{\mu\nu} \sqrt{-|g|} + p \left(P_{(p)}^{\mu\rho\sigma\nu} + P_{(p)}^{\mu\sigma\rho\nu} \right) \phi_{p|\rho\sigma} \sqrt{-|g|}. \quad (3.13)$$

DÉMONSTRATION. En appliquant le théorème 3.3.5 de Rund à \mathcal{L}_p , nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(p)}{}^{\mu\nu} &= \frac{\delta \mathcal{L}_p}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta (\phi_p L_p)}{\delta g_{\mu\nu}} \\ &= \left(\phi_p \Lambda_{(p)}^{\mu\nu,\rho\sigma} \right)_{|\rho\sigma} + \frac{1}{2} \phi_p L_p g^{\mu\nu} - \frac{2}{3} R_\sigma{}^\nu{}_{\tau\rho} \phi_p \Lambda_{(p)}^{\rho\sigma,\mu\tau} \\ &= \phi_p E_{(p)}{}^{\mu\nu} + \Lambda_{(p)}^{\mu\nu,\rho\sigma}{}_{|\rho\sigma} \phi_p + \Lambda_{(p)}^{\mu\nu,\rho\sigma}{}_{|\sigma} \phi_{p|\rho} + \Lambda_{(p)}^{\mu\nu,\rho\sigma}{}_{|\rho} \phi_{p|\sigma}. \end{aligned}$$

Or, il est montré dans [56], avec les identités de Bianchi, que

$$\Lambda_{(p)}^{\mu\nu,\rho\sigma}{}_{|\sigma} = \Lambda_{(p)}^{\mu\nu,\rho\sigma}{}_{|\rho} = 0.$$

De plus, le second théorème 3.1.4 de Lovelock établit que

$$E_{(p)\mu}{}^\nu = \frac{1}{2} \mathring{\mathbb{R}}_{(p)\mu}{}^\nu \sqrt{-|g|}.$$

3.3. LES ÉQUATIONS DE CHAMP DES THÉORIES $F(\text{LOVELOCK})$

Ensuite, en prenant la valeur de $\Lambda_{(p)}^{\mu\nu,\rho\sigma}$ donnée en [56], nous pouvons montrer que

$$\begin{aligned}\Lambda_{(p)}^{\mu\nu,\rho\sigma} &= \frac{1}{2}p\sqrt{-|g|} \left(P_{(p)}^{\mu\rho\sigma\nu} + P_{(p)}^{\mu\sigma\rho\nu} + P_{(p)}^{\nu\rho\sigma\mu} + P_{(p)}^{\nu\sigma\rho\mu} \right) \\ &= p\sqrt{-|g|} \left(P_{(p)}^{\mu\rho\sigma\nu} + P_{(p)}^{\mu\sigma\rho\nu} \right).\end{aligned}$$

Nous obtenons bien (3.13). \square

Théorème 3.3.7. *Posons*

$$\mathcal{A}^{\mu\nu} := \sum_{p=0}^{p_n} \mathcal{A}_{(p)}^{\mu\nu}, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{A}_{(p)}^{\mu\nu} := \phi_p \mathbb{R}_{(p)}^{\mu\nu} + 2p \left(P_{(p)}^{\mu\rho\sigma\nu} + P_{(p)}^{\mu\sigma\rho\nu} \right) \phi_{p|\rho\sigma}. \quad (3.15)$$

Alors les équations de champ engendrées par $\mathcal{S}_{f(\text{Lov})}$ pour g sont

$$\mathcal{A}^{\mu\nu} = Vg^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}. \quad (3.16)$$

Les équations de champ pour chaque ϕ_p sont

$$\mathbb{R}_p = \frac{\partial}{\partial \phi_p} V(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{p_n}). \quad (3.17)$$

DÉMONSTRATION. Considérons une petite variation de la métrique, $\delta g_{\mu\nu}$. Alors

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{S}_{f(\text{Lov})}[g, \phi_0, \dots, \phi_{p_n}, \Psi] &= \delta \int_{\mathcal{V}} \left[\sum_{p=0}^{p_n} \mathcal{L}_p - V\sqrt{-|g|} + L_{\text{mat}} \right] d^{n+1}x \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\sum_{p=0}^{p_n} \left(\frac{\phi_p}{2} \mathbb{R}_{(p)}^{\mu\nu} + p \left(P_{(p)}^{\mu\rho\sigma\nu} + P_{(p)}^{\mu\sigma\rho\nu} \right) \phi_{p|\rho\sigma} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}Vg^{\mu\nu} + \frac{1}{2}T^{\mu\nu} \right] \sqrt{-|g|} \delta g_{\mu\nu} d^{n+1}x \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} [\mathcal{A}^{\mu\nu} - Vg^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}] \sqrt{-|g|} \delta g_{\mu\nu} d^{n+1}x.\end{aligned}$$

Donc $g_{\mu\nu}$ est un point critique de $\mathcal{S}_{f(\text{Lov})}$ si et seulement si

$$\mathcal{A}^{\mu\nu} = Vg^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}. \quad (3.16)$$

Pour compléter le système d'équations, nous devons encore calculer les équations d'Euler-Lagrange par rapport aux ϕ_p :

$$\frac{\partial}{\partial \phi_p} \left[\sum_{p=0}^{p_n} \mathcal{L}_p - V\sqrt{-|g|} + L_{\text{mat}} \right] = D_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial D_\alpha \phi_p} \left[\sum_{p=0}^{p_n} \mathcal{L}_p - V\sqrt{-|g|} + L_{\text{mat}} \right] \right), \quad (3.18)$$

3.3. LES ÉQUATIONS DE CHAMP DES THÉORIES F (LOVELOCK)

ie.

$$\mathbb{R}_p = \frac{\partial}{\partial \phi_p} V(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{p_n}). \quad (3.17)$$

□

Maintenant que nous sommes en possession de ces équations de champ, nous pouvons aborder le chapitre suivant, consacré à leur formalisme $n + 1$.

Chapitre 4

Le formalisme $n + 1$

des théories $f(\text{Lovelock})$

Dans ce chapitre, nous calculerons la décomposition $n + 1$ des théories $f(\text{Lovelock})$. Ces théories étant encore jeunes, leur décomposition hamiltonienne n'était pas encore connue, et je suis le premier à l'établir.

Le formalisme hamiltonien des théories de Lovelock était déjà établi depuis le travail de C. Teitelboim et J. Zanelli en 1987 [87], mais ce résultat n'avait pas encore été étendu à la gravité $f(\text{Lovelock})$. En effet, seules les équations de champ de $f(\text{Lovelock})$ ont été calculées en 2016 par P. Bueno et al. [9], mais sans décomposition ADM.

Nous nous intéresserons au cas non-dégénéré, lorsque la hessienne de f est inversible. Nous pouvons donc utiliser la transformée de Legendre du chapitre précédent, identifier les dérivées partielles de f à des champs scalaires indépendants, et considérer les théories $f(\text{Lovelock})$ comme des théories de Lovelock-tenseur-scalaire. Les équations de champ ont été dérivées au chapitre précédent :

$$\mathcal{A}^{\mu\nu} = Vg^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

$$\mathbb{R}_p = \frac{\partial}{\partial\phi_p} V(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{p_n}). \quad (3.17)$$

Seules les premières équations de champ (3.16) sont concernées par la formulation hamiltonienne ; les secondes équations (3.17) ne font que rappeler la dépendance réelle des ϕ_p en \mathbb{R}_p . Il s'agira donc de projeter (3.16) selon une décomposition $n + 1$. Nous obtiendrons un système original d'équations de contrainte et d'équations dynamiques pour les théories $f(\text{Lovelock})$, avec des formules explicites pour le cas $f(\mathbb{R}, \text{Gauss-Bonnet})$.

4.1 Décomposition $n + 1$ des théories $f(\text{Lovelock})$

4.1.1 Notations

Reprenons le formalisme $n + 1$ de la RG défini dans la section 1.2. Ce formalisme requerra d'introduire pour chaque p un nouveau champ scalaire correspondant à la dérivée de Lie selon u^μ de ϕ_p . Il s'agit d'une généralisation des notations du paragraphe 1.4.4 :

$$\underline{\underline{\Pi_p := \mathcal{L}_u\phi_p = u(\phi_p) = u^\mu D_\mu\phi_p \text{ la quadri-impulsion de } \phi_p.}}$$

Nous pouvons alors appliquer le lemme 2.3.1 et écrire

$$\gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta D_\alpha D_\beta \phi_p = \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta \phi_{p|\alpha\beta} = \nabla_\mu \nabla_\nu \phi_p + \varepsilon \Pi_p K_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

$$\gamma_\mu^\alpha u^\beta D_\alpha D_\beta \phi_p = \gamma_\mu^\alpha u^\beta \phi_{p|\alpha\beta} = \nabla_\mu \Pi_p - K_\mu^\lambda \nabla_\lambda \phi_p, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} u^\alpha u^\beta D_\alpha D_\beta \phi_p &= u^\alpha u^\beta \phi_{p|\alpha\beta} = \varepsilon (\square\phi_p - \Delta\phi_p) - \Pi_p K \\ &= \partial_{tt}^2 \phi_p - \Pi_p K. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Nous pouvons maintenant écrire les trois projections de (3.16) sur $\mathcal{M} \oplus u$:

$$\mathcal{A}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = \varepsilon V - E, \quad (\text{contrainte hamiltonienne}) \quad (4.4)$$

$$\mathcal{A}^{\mu\nu} \gamma_{i\mu} u_\nu = -\varepsilon J_i, \quad (\text{contraintes de moment}) \quad (4.5)$$

$$\mathcal{A}^{\mu\nu} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} = V \gamma_{ij} - S_{ij}. \quad (\text{équations dynamiques}) \quad (4.6)$$

Comme pour la RG, les deux premières lignes sont des conditions nécessaires pour une hypersurface $(\mathcal{M}, \gamma_{ij})$, sa courbure extrinsèque K_{ij} , et des champs scalaires $\phi_p|_{\mathcal{M}}$, pour être une sous-variété de codimension 1 d'un espace-temps $(\mathcal{V}, g_{\mu\nu})$ muni de champs scalaires ϕ_p vérifiant les équations de champ de $f(\text{Lovelock})$ (3.16, 3.17). Elles ne font pas apparaître explicitement le lapse N ni le shift X^i , mais seulement des quantités restreintes à \mathcal{M} : $(\gamma_{ij}, K_{ij}, \phi_p, \Pi_p)$. De même qu'au paragraphe 2.5.1, le mouvement « sortant », c'est-à-dire la dépendance en temps, est contenue dans

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_u \gamma_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad \Pi_p = \mathcal{L}_u \phi_p.$$

$(\gamma_{ij}, K_{ij}, \phi_p, \Pi_p)$ sont donc des variables hamiltoniennes canoniques (q, p) sur \mathcal{M} .

La troisième ligne, l'ensemble des équations dynamiques, décrit l'évolution de $(\gamma_{ij}, K_{ij}, \phi_p, \Pi_p)$ le long de u^μ , donc le long de ∂_t . Elles contiennent nécessairement une mention explicite du lapse N . Elles peuvent être vues comme des équations du premier ordre en temps sur $(\gamma_{ij}, K_{ij}, \phi_p, \Pi_p)$, ou bien du second ordre en temps sur (γ_{ij}, ϕ_p) , par la présence de $\square \phi_p$ pour ϕ_p et $\mathcal{L}_u K_{\mu\nu}$ pour $\gamma_{\mu\nu}$.

La décomposition ADM consiste à mettre en évidence ces dépendances. Nous devons réécrire (4.4) et (4.5) sans mention explicite du temps, et donc faire disparaître tous les u^μ . De même, les dépendances en temps dans (4.6) doivent être confinées à $\square \phi_p$ (ou $\partial_{tt}^2 \phi_p$) et $\mathcal{L}_u K_{\mu\nu}$. Pour ce faire, nous introduisons :

Définition 4.1.1.

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbb{M}}_{(p)\alpha\beta}^{\gamma\delta} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_p\beta_p}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p}, \\
 \dot{\mathbb{M}}_{(p)\alpha}^{\gamma} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_p\beta_p}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p}, \\
 \mathbb{M}_{(p)} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_p\beta_p}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p}, \\
 \mathbb{M}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} &= \mathbb{R}[\gamma]_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} - \varepsilon \left(K_{\gamma}^{\alpha} K_{\delta}^{\beta} - K_{\delta}^{\alpha} K_{\gamma}^{\beta} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbb{N}}_{(p)\mu\alpha\beta}^{\gamma\delta} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_p\mu}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} N_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p}, \\
 \dot{\mathbb{N}}_{(p)\mu\alpha}^{\gamma} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_p\mu}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} N_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p}, \\
 \mathbb{N}_{(p)\mu} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_p\mu}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} N_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p}, \\
 \mathbb{N}_{\gamma\delta}^{\alpha} &= \varepsilon \left(\nabla_{\gamma} K_{\delta}^{\alpha} - \nabla_{\delta} K_{\gamma}^{\alpha} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbb{N}}_{(p)\alpha\beta}^{\nu\gamma\delta} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_p\beta_p}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} N_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p}, \\
 \dot{\mathbb{N}}_{(p)\alpha}^{\nu\gamma} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_p\beta_p}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} N_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p}, \\
 \mathbb{N}_{(p)}^{\nu} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_p\beta_p}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} N_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p}, \\
 \mathbb{N}_{\gamma}^{\alpha\beta} &= \varepsilon \left(\nabla^{\alpha} K_{\gamma}^{\beta} - \nabla^{\beta} K_{\gamma}^{\alpha} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbb{N}\mathbb{N}}_{(p)\alpha\beta}^{\gamma\delta} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_p\alpha_{p+1}\beta_{p+1}}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} N_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p} N_{\gamma_{p+1}}^{\alpha_{p+1}\beta_{p+1}}, \\
 \dot{\mathbb{N}\mathbb{N}}_{(p)\alpha}^{\gamma} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_p\alpha_{p+1}\beta_{p+1}}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} N_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p} N_{\gamma_{p+1}}^{\alpha_{p+1}\beta_{p+1}}, \\
 \mathbb{N}\mathbb{N}_{(p)} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_p\alpha_{p+1}\beta_{p+1}}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} N_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p} N_{\gamma_{p+1}}^{\alpha_{p+1}\beta_{p+1}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbb{O}}_{(p)\alpha\beta}^{\gamma\delta} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_p\beta_p}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} \mathbb{O}_{\gamma_{p+1}}^{\alpha_{p+1}}, \\
 \dot{\mathbb{O}}_{(p)\alpha}^{\gamma} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_p\beta_p}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} \mathbb{O}_{\gamma_{p+1}}^{\alpha_{p+1}}, \\
 \mathbb{O}_{(p)} &:= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_p\beta_p}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} \mathbb{O}_{\gamma_{p+1}}^{\alpha_{p+1}}, \\
 \mathbb{O}_{\alpha}^{\gamma} &= -\mathcal{L}_u K_{\alpha}^{\gamma} - K_{\alpha\tau} K^{\tau\gamma} - \varepsilon \frac{\nabla_{\alpha} \nabla^{\gamma} N}{N}.
 \end{aligned}$$

Tous ces tenseurs sont définis sur \mathcal{M} , donc invariants sous l'action de γ_{μ}^{ν} , et s'annulent sous le produit avec u^{μ} . Lorsque g_{μ}^{ν} agit sur \mathcal{M} , ie. lorsque les indices sont latins, nous écrirons indifféremment $\delta_i^j = \gamma_i^j = g_i^j$.

Déterminons maintenant les diverses projections de

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}^{\mu\nu} &= \sum_{p=0}^{p_n} \mathcal{A}_{(p)}^{\mu\nu} \\
 &= \sum_{p=0}^{p_n} \left(\phi_p \dot{\mathbb{R}}_{(p)}^{\mu\nu} + 2p \left(P_{(p)}^{\mu\rho\sigma\nu} + P_{(p)}^{\mu\sigma\rho\nu} \right) \phi_{p|\rho\sigma} \right).
 \end{aligned}$$

4.1.2 Formalisme $n + 1$ des théories $f(\text{Lovelock})$

Nous avons préféré exposer directement ici les résultats, et rassembler les calculs dans la section suivante. Comme nous l'avons dit plus haut, ces formules sont inédites.

Théorème 4.1.2. *Voici le formalisme $n + 1$ des théories $f(\text{Lovelock})$.*

La contrainte hamiltonienne (4.4) s'écrit

$$\begin{aligned} \varepsilon V - E &= \sum_{p=0}^{p_n} \mathcal{A}_{(p)}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu \\ &= \sum_{p=0}^{p_n} \varepsilon \left[\phi_p \mathbb{M}_{(p)} - 2p \left(\mathbb{M}_{(p-1)} \gamma_b^a - (p-1) \dot{\mathbb{M}}_{(p-2)kb}^{ij} M_{ij}^{ka} \right) \left(\nabla_a \nabla^b \phi_p + \varepsilon \Pi_p K_a^b \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Les contraintes de moment (4.5) sont

$$\begin{aligned} -\varepsilon J^i &= \sum_{p=0}^{p_n} \mathcal{A}_{(p)}^{\mu\nu} \gamma_\mu^i u_\nu \\ &= \sum_{p=0}^{p_n} \phi_p \left(-\varepsilon 2p \mathbb{N}_{(p)}^i \right) \\ &\quad + 2\varepsilon p^2 \left[2\mathbb{N}_{(p-1)}^i \gamma_b^a - 2\mathbb{N}_{(p-1)}^a \gamma_b^i \right. \\ &\quad \quad \left. + \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)kl}^{ia} \mathbb{N}_b^{kl} - 2(p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)kl}^{ija} M_{jb}^{kl} \right] \left(\nabla_a \nabla^b \phi_p + \varepsilon \Pi_p K_a^b \right) \\ &\quad + 2p \dot{\mathbb{M}}_{(p-1)b}^i \left(\nabla^b \Pi_p - K^{ab} \nabla_a \phi_p \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Quant aux équations dynamiques (4.6),

$$\begin{aligned} V \gamma_j^i - S_j^i &= \sum_{p=0}^{p_n} \mathcal{A}_{(p)}^{\mu\nu} \gamma_\mu^i \gamma_{j\nu} \\ &= \sum_{p=0}^{p_n} \left[\dot{\mathbb{M}}_{(p)j}^i + \varepsilon 2p(p-1) \dot{\mathbb{N}}_{(p-1)j}^i + \varepsilon 2p \dot{\mathbb{O}}_{(p-1)j}^i \right] \phi_p \\ &\quad - p \left[\ddot{\mathbb{M}}_{(p-1)bj}^{ai} + 2\varepsilon(p-1)(p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)bj}^{ai} + 2\varepsilon(p-1) \ddot{\mathbb{O}}_{(p-2)bj}^{ai} \right] \left(\nabla_a \nabla^b \phi_p + \varepsilon \Pi_p K_a^b \right) \\ &\quad + 2p(p-1) \left[-\mathbb{N}_{(p-1)}^i \delta_j^a + \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)lj}^{ki} \mathbb{N}_k^a + (p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)kj}^{icd} M_{cd}^{ka} \right] \left(\nabla_a \Pi_p - K_a^b \nabla_b \phi_p \right) \\ &\quad + 2p(p-1) \left[-\mathbb{N}_{(p-1)j} \delta_b^i + \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)lj}^{ki} \mathbb{N}_{kb}^l + (p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)jcd}^{ki} M_{kb}^{cd} \right] \left(\nabla^b \Pi_p - K_a^b \nabla^a \phi_p \right) \\ &\quad - \varepsilon p \dot{\mathbb{M}}_{(p-1)j}^i \left(\varepsilon (\square \phi_p - \Delta \phi_p) - \Pi_p K \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

La preuve se trouve dans la section 4.2.

4.1.3 Applications

Considérons les petites valeurs de p , afin de retrouver les cas connus.

Corollaire 4.1.3.

$\mathbb{M}_{(-1)} = 0$	$\mathbb{N}_{(-1)i} = 0$
$\mathbb{M}_{(0)} = 1$	$\mathbb{N}_{(0)i} = 0$
$\mathbb{M}_{(1)} = M$	$\mathbb{N}_{(1)i} = N_i$
$\mathbb{M}_{(2)} = M^2 - 4M_{ij}M^{ij} + M_{ij}^{kl}M_{kl}^{ij}$	$\mathbb{N}_{(2)i} = MN_i - 2M_i^j N_j$ $- 2M_j^k N_{ki}^j + M_{li}^{jk} N_{jk}^l$
$\dot{\mathbb{M}}_{(-1)j}^i = 0$	$\dot{\mathbb{M}}_{(1)j}^i = M\delta_j^i - 2M_j^i$
$\dot{\mathbb{M}}_{(0)j}^i = \delta_j^i$	$\dot{\mathbb{M}}_{(2)j}^i = \mathbb{M}_{(2)}\delta_j^i$ $- 8\left(\mathbb{M}M_j^i - 2M_k^l M_{lj}^{ki}\right)$
$\ddot{\mathbb{M}}_{(-2)ab}^{cd} = 0$	$\ddot{\mathbb{N}}_{(-2)iab}^{cd} = 0$
$\ddot{\mathbb{M}}_{(-1)ab}^{cd} = 0$	$\ddot{\mathbb{N}}_{(-1)iab}^{cd} = 0$
$\ddot{\mathbb{M}}_{(0)ab}^{cd} = \delta_a^c \delta_b^d - \delta_a^d \delta_b^c$	$\ddot{\mathbb{N}}_{(0)iab}^{cd} = 0$
$\ddot{\mathbb{M}}_{(1)ab}^{cd} = M\left(\delta_a^c \delta_b^d - \delta_a^d \delta_b^c\right)$ $+ 2M_{ab}^{cd}$ $- 2\left(M_a^c \delta_b^d + M_b^d \delta_a^c\right)$ $+ 2\left(M_a^d \delta_b^c + M_b^c \delta_a^d\right)$	$\ddot{\mathbb{N}}_{(1)iab}^{cd} = N_i\left(\delta_a^c \delta_b^d - \delta_a^d \delta_b^c\right)$ $- N_a\left(\delta_i^c \delta_b^d - \delta_i^d \delta_b^c\right)$ $+ N_b\left(\delta_i^c \delta_a^d - \delta_i^d \delta_a^c\right)$ $+ N_{ab}^c \delta_i^d - N_{ab}^d \delta_i^c$ $- \left(N_{ai}^c \delta_b^d + N_{bi}^d \delta_a^c\right)$ $+ \left(N_{ai}^d \delta_b^c + N_{bi}^c \delta_a^d\right)$
$\dot{\mathbb{O}}_{(-1)j}^i = 0$	$\dot{\mathbb{N}\mathbb{N}}_{(-1)j}^i = 0$
$\dot{\mathbb{O}}_{(0)j}^i = O\delta_j^i - O_j^i$	$\dot{\mathbb{N}\mathbb{N}}_{(0)j}^i = 0$
$\dot{\mathbb{O}}_{(1)j}^i = \left(MO - 2M_k^l O_l^k\right)\delta_j^i$ $- \left(MO_j^i - 2M_j^i O\right)$ $+ 2\left(M_k^i O_j^k + M_j^k O_k^i + M_{kj}^{li} O_l^k\right)$	$\dot{\mathbb{N}\mathbb{N}}_{(1)j}^i = -\left(N_{ab}^c N_c^{ab} + 2N_a N^a\right)\delta_j^i$ $+ N_a N_j^{ia} + 2N_{ab}^i N_j^{ab}$ $+ 2\left(N_j N^i - N_{aj}^c N_c^{ai} + N_{ja}^i N^a\right)$
$\ddot{\mathbb{O}}_{(-2)ab}^{cd} = 0$	$\ddot{\mathbb{N}\mathbb{N}}_{(-2)ab}^{cd} = 0$
$\ddot{\mathbb{O}}_{(-1)ab}^{cd} = 0$	$\ddot{\mathbb{N}\mathbb{N}}_{(-1)ab}^{cd} = 0$
$\ddot{\mathbb{O}}_{(0)ab}^{cd} = O\left(\delta_a^c \delta_b^d - \delta_a^d \delta_b^c\right)$ $- \left(O_a^c \delta_b^d + O_b^d \delta_a^c - O_b^c \delta_a^d - O_a^d \delta_b^c\right)$	$\ddot{\mathbb{N}\mathbb{N}}_{(0)ab}^{cd} = 0$

Pour obtenir ces expressions, nous avons utilisé des formules comme

$$\ddot{\mathbb{M}}_{(p)ab}^{cd} = \left(\dot{\mathbb{M}}_{(p)a}^c \delta_b^d - \dot{\mathbb{M}}_{(p)a}^d \delta_b^c\right) + p\left(\dot{\mathbb{M}}_{(p-1)ij}^{kc} M_{kb}^{ij} \delta_a^d - 2p\dot{\mathbb{M}}_{(p-1)ia}^{kc} M_{kb}^{id}\right), \quad (4.10)$$

qui se déduisent de développements successifs le long de lignes ou de colonnes.

Alors pour $p = 0$, nous avons

$$\mathcal{A}_{(0)}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = \varepsilon \phi_0, \quad (4.11)$$

$$\mathcal{A}_{(0)}^{\mu\nu} \gamma_\mu^i u_\nu = 0, \quad (4.12)$$

$$\mathcal{A}_{(0)}^{\mu\nu} \gamma_\mu^i \gamma_{j\nu} = \phi_0 \delta_j^i. \quad (4.13)$$

Pour $p = 1$, nous obtenons

$$\mathcal{A}_{(1)}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = \varepsilon [\phi_1 M - 2(\Delta \phi_1 + \varepsilon \Pi_1 K)], \quad (4.14)$$

$$\mathcal{A}_{(1)}^{\mu\nu} \gamma_\mu^i u_\nu = -2\varepsilon \phi_1 N^i, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(1)}^{\mu\nu} \gamma_\mu^i \gamma_{j\nu} &= \phi_1 [(M \delta_j^i - 2M_j^i) + 2\varepsilon (O \delta_j^i - O_j^i)] \\ &\quad - \delta_j^i \square \phi_1 + \nabla_j \nabla^i \phi_1 + \varepsilon \Pi_1 K_j^i. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Cela correspond aux théories $f(R)$ sous leur forme tenseur-scalaire, vues dans la section 2.3 (on pourra aussi se référer à [85]). Si $\phi_1 \equiv 1$, ce n'est rien d'autre que la RG.

Pour $p = 2$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(2)}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu &= \varepsilon \phi_2 (M^2 - 4M_{ij} M^{ij} + M_{ij}^{kl} M_{kl}^{ij}) \\ &\quad - 4\varepsilon (M \delta_b^a - 2M_b^a) (\nabla_a \nabla^b \phi_2 + \varepsilon \Pi_2 K_a^b), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(2)}^{\mu\nu} \gamma_\mu^i u_\nu &= -4\varepsilon \phi_2 (MN^i - 2M_j^i N^j - 2M_j^k N_k^i + M_{jk}^{li} N_l^{jk}) \\ &\quad + 16\varepsilon (N^i \delta_b^a - N^a \delta_b^i - N_b^{ai}) (\nabla_a \nabla^b \phi_2 + \varepsilon \Pi_2 K_a^b) \\ &\quad + 4(M \delta_b^i - 2M_b^i) (\nabla^b \Pi_2 - K^{ab} \nabla_a \phi_2), \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(2)}^{\mu\nu} \gamma_\mu^i \gamma_{j\nu} &= \phi_2 \left[\left((M^2 - 4M_{ij} M^{ij} + M_{ij}^{kl} M_{kl}^{ij}) \delta_j^i - 8(M M_j^i - 2M_k^l M_l^{ki}) \right) \right. \\ &\quad + 4\varepsilon \left(- (N_{ab}^c N_c^{ab} + 2N_a N^a) \delta_j^i + N_a N_j^{ia} + 2N_{ab}^i N_j^{ab} \right. \\ &\quad \quad \left. \left. + 2(N_j N^i - N_{aj}^c N_c^{ai} + N_{ja}^i N^a) \right) \right. \\ &\quad \left. + 4\varepsilon \left((MO - 2M_k^l O_l^k) \delta_j^i - (MO_j^i - 2M_j^i O) + 2(M_k^i O_j^k + M_j^k O_k^i + M_{kj}^{li} O_l^k) \right) \right] \\ &\quad - 2[M \delta_j^i - 2M_j^i] \square \phi_2 \\ &\quad + 2 \left[M \delta_j^a \delta_b^i - 2M_j^a \delta_b^i - 2M_b^i \delta_j^a + 2M_b^a \delta_j^i - 2M_{jb}^{ia} \right. \\ &\quad \left. - 2\varepsilon (O(\delta_b^a \delta_j^i - \delta_b^i \delta_j^a) - (O_b^a \delta_j^i + O_j^a \delta_b^i - O_b^i \delta_j^a - O_j^a \delta_b^i)) \right] (\nabla_a \nabla^b \phi_2 + \varepsilon \Pi_2 K_a^b) \\ &\quad + 4[-N^i \delta_j^a + N^a \delta_j^i - N_j^{ia}] (\nabla_a \Pi_2 - K_a^b \nabla_b \phi_2) \\ &\quad + 4[-N_j \delta_b^i + N_b \delta_j^i - N_{jb}^i] (\nabla^b \Pi_2 - K_a^b \nabla^a \phi_2). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Lorsque ϕ_2 est constant, nous retrouvons la gravité de Gauss-Bonnet, déjà explicitée sous cette forme en [88]. Les équations pour un ϕ_2 non constant ne me semblaient pas connues auparavant.

Plus généralement, les cas $p \leq 1$ et $\forall p, \phi_p = \text{cst.}$ étaient déjà traités, par exemple dans [87] et [15], mais pas le cas général (4.7, 4.8, 4.9).

4.2 Décomposition $n + 1$ des théories $f(\text{Lovelock})$: calculs

Nous détaillons ici les calculs aboutissant au théorème 4.1.2.

4.2.1 Contrainte hamiltonienne

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{R}}_{(p)}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu &= \dot{\mathbb{R}}_{(p)\mu}{}^\nu u^\mu u_\nu = \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_p\beta_p}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_p\delta_p} R_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} R_{\gamma_2\delta_2}^{\alpha_2\beta_2} \dots R_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} u^\mu u_\nu \\ &= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_p\beta_p}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_p\delta_p} \left(M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} + \bar{N}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} + \bar{O}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \right) \\ &\quad \dots \\ &\quad \left(M_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} + \bar{N}_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} + \bar{O}_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} \right) u^\mu u_\nu. \end{aligned}$$

Lorsque nous développons ce produit, nous trouvons des termes contenant un nombre arbitraire de $M_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$, $N_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} u^\beta$, $N_\gamma^\alpha u_\delta$, et $O_\gamma^\alpha u^\beta u_\delta$. Mais deux phénomènes majeurs se produisent alors, qui en annulent la plupart :

- ★ quand un terme contient strictement plus d'un u^α ou u_α , à cause des antisymétries du déterminant ;
- ★ quand un terme contient une contraction de u_α ou u^γ avec $M_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$, $N_{\gamma\delta}^\alpha$, O_γ^α , qui sont par définition orthogonaux à u_α et u^γ .

En fin de compte, nous nous retrouvons avec le seul terme dans lequel u^μ rencontre u_ν , c'est-à-dire

$$\dot{\mathbb{R}}_{(p)}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_p\beta_p}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} M_{\gamma_2\delta_2}^{\alpha_2\beta_2} \dots M_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} u^\mu u_\nu.$$

Développons ce déterminant le long de la dernière colonne. Tous les termes s'annulent, excepté

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{R}}_{(p)}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu &= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_p\beta_p}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_p\delta_p} \delta_\mu^\nu M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} M_{\gamma_2\delta_2}^{\alpha_2\beta_2} \dots M_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} u^\mu u_\nu \\ &= \varepsilon \left[\frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_p\beta_p}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_p\delta_p} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} M_{\gamma_2\delta_2}^{\alpha_2\beta_2} \dots M_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} \right] \\ &= \varepsilon \mathbb{M}_{(p)}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

La seconde projection à calculer est, d'après la définition (3.11),

$$\begin{aligned} P_{(p)}^{\mu\alpha\beta\nu} \phi_{p|\alpha\beta} u_\mu u_\nu &= \frac{1}{2} \ddot{\mathbb{R}}_{(p-1)\sigma\tau}{}^{\mu\alpha} g^{\sigma\beta} g^{\tau\nu} \phi_{p|\alpha\beta} u_\mu u_\nu \\ &= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\sigma\tau}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\mu\alpha} R_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots R_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} g^{\sigma\beta} g^{\tau\nu} \phi_{p|\alpha\beta} u_\mu u_\nu \\ &= -\frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta\nu}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\alpha\mu} R_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots R_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \phi_{p|\alpha}{}^\beta u_\mu u^\nu. \end{aligned}$$

Comme précédemment, la présence de u_μ et de u^ν annule tous les termes contenant au moins un terme parmi $N_{\gamma\delta}^\alpha u^\beta$, $N_\gamma^{\alpha\beta} u_\delta$, ou $O_\gamma^\alpha u^\beta u_\delta$. Ainsi,

$$P_{(p)}^{\mu\alpha\beta\nu} \phi_{p|\alpha\beta} u_\mu u_\nu = -\frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta\nu}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\alpha\mu} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \phi_{p|\alpha}^{|\beta} u_\mu u^\nu. \quad (4.21)$$

Nous développons ensuite par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{aligned} & P_{(p)}^{\mu\alpha\beta\nu} \phi_{p|\alpha\beta} u_\mu u_\nu \\ &= -\frac{1}{2^p} \left[\delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\alpha} \delta_\nu^\mu M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u_\mu u^\nu \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\mu} \delta_\nu^\alpha M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u_\mu u^\nu \right] \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \\ &= -\frac{1}{2^p} \left[\varepsilon \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\alpha} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \right. \\ &\quad \left. - \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\mu} \delta_\beta^\mu M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u_\mu u^\alpha \right] \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \\ &= -\frac{1}{2^p} \left[\delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} (\varepsilon \delta_\beta^\alpha - u_\beta u^\alpha) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon 2(p-1) \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}} \delta_{\beta_{p-1}}^\alpha M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \right] \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \\ &= \left[-\frac{\varepsilon}{2} \mathbb{M}_{(p-1)} \gamma_\beta^\alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon(p-1)}{2} \left(\frac{1}{2^{p-2}} \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-2}\beta_{p-2}k\beta}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-2}\delta_{p-2}ij} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} \right) M_{ij}^{k\alpha} \right] \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \\ &= \left[-\frac{\varepsilon}{2} \mathbb{M}_{(p-1)} \gamma_\beta^\alpha + \frac{\varepsilon(p-1)}{2} \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)k\beta}^{ij} M_{ij}^{k\alpha} \right] \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \\ &= \left[-\frac{\varepsilon}{2} \mathbb{M}_{(p-1)} \gamma_b^a + \frac{\varepsilon(p-1)}{2} \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)kb}^{ij} M_{ij}^{ka} \right] \left(\gamma_a^\alpha \gamma_\beta^b \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(p)}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu &= \left[\phi_p \dot{\mathbb{R}}_{(p)}^{\mu\nu} + 2p \left(P_{(p)}^{\mu\rho\sigma\nu} + P_{(p)}^{\mu\sigma\rho\nu} \right) \phi_{p|\rho\sigma} \right] u_\mu u_\nu \\ &= \varepsilon \left[\phi_p \mathbb{M}_{(p)} - 2p \left(\mathbb{M}_{(p-1)} \gamma_b^a - (p-1) \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)kb}^{ij} M_{ij}^{km} \right) \left(\gamma_a^\alpha \gamma_\beta^b \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \right) \right] \\ &= \varepsilon \left[\phi_p \mathbb{M}_{(p)} - 2p \left(\mathbb{M}_{(p-1)} \gamma_b^a - (p-1) \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)kb}^{ij} M_{ij}^{ka} \right) \left(\nabla_a \nabla^b \phi_p + \varepsilon \Pi_p K_a^b \right) \right], \end{aligned} \quad (4.23)$$

en utilisant (2.15).

4.2.2 Contraintes de moment

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbb{R}}_{(p)}^{\mu\nu} \gamma_{i\mu} u_\nu &= \dot{\mathbb{R}}_{(p)\mu}^\nu \gamma_i^\mu u_\nu \\
 &= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_p \beta_p}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_p \delta_p} \mathbb{R}_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \mathbb{R}_{\gamma_2 \delta_2}^{\alpha_2 \beta_2} \dots \mathbb{R}_{\gamma_p \delta_p}^{\alpha_p \beta_p} \gamma_i^\mu u_\nu \\
 &= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_p \beta_p}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_p \delta_p} \left(\mathbb{M}_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} + \bar{\mathbb{N}}_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} + \bar{\mathbb{O}}_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \right) \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \left(\mathbb{M}_{\gamma_p \delta_p}^{\alpha_p \beta_p} + \bar{\mathbb{N}}_{\gamma_p \delta_p}^{\alpha_p \beta_p} + \bar{\mathbb{O}}_{\gamma_p \delta_p}^{\alpha_p \beta_p} \right) \gamma_i^\mu u_\nu.
 \end{aligned}$$

Dans le développement de ce produit, les termes contenant au moins un $\mathbb{O}_\gamma^\alpha u_\delta u^\beta$ ou un $\mathbb{N}_\gamma^{\alpha\beta} u_\delta$ disparaissent, à cause de la présence de u_ν . La même antisymétrie annule les termes contenant strictement plus d'un $\mathbb{N}_{\gamma\delta}^\alpha u^\beta$, et l'orthogonalité de u_ν avec γ_i^μ et $\mathbb{M}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$ annule le terme qui ne contient que des $\mathbb{M}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$. Nous pouvons donc ne garder que

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbb{R}}_{(p)}^{\mu\nu} \gamma_{i\mu} u_\nu &= \frac{2p}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_p \beta_p}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_p \delta_p} \mathbb{M}_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \mathbb{M}_{\gamma_2 \delta_2}^{\alpha_2 \beta_2} \dots \mathbb{N}_{\gamma_p \delta_p}^{\alpha_p} u^{\beta_p} \gamma_i^\mu u_\nu \\
 &= -\frac{2p}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_p \mu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_p \delta_p} \delta_{\beta_p}^\nu \mathbb{M}_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \mathbb{M}_{\gamma_2 \delta_2}^{\alpha_2 \beta_2} \dots \mathbb{N}_{\gamma_p \delta_p}^{\alpha_p} u^{\beta_p} \gamma_i^\mu u_\nu \\
 &= -\varepsilon \frac{2p}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_p \mu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_p \delta_p} \mathbb{M}_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \mathbb{M}_{\gamma_2 \delta_2}^{\alpha_2 \beta_2} \dots \mathbb{N}_{\gamma_p \delta_p}^{\alpha_p} \gamma_i^\mu \\
 &= -\varepsilon 2p \mathbb{N}_{(p)i}. \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

Maintenant la seconde projection :

$$\begin{aligned}
 P_{(p)}^{\mu\alpha\beta\nu} \phi_{p|\alpha\beta} \gamma_{i\mu} u_\nu &= \frac{1}{2} \ddot{\mathbb{R}}_{(p-1)\sigma\tau}^{\mu\alpha} g^{\sigma\beta} g^{\tau\nu} \phi_{p|\alpha\beta} \gamma_{i\mu} u_\nu \\
 &= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1}}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1}} \mu^\alpha \mathbb{R}_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots \mathbb{R}_{\gamma_{p-1} \delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} g^{\sigma\beta} g^{\tau\nu} \phi_{p|\alpha\beta} \gamma_{i\mu} u_\nu \\
 &= -\frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \beta\nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \alpha\mu} \mathbb{R}_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots \mathbb{R}_{\gamma_{p-1} \delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} \phi_{p|\alpha}^{\beta} \gamma_{i\mu} u^\nu \\
 &= -\frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \beta\nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \alpha\mu} \left(\mathbb{M}_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} + \bar{\mathbb{N}}_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} + \bar{\mathbb{O}}_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \right) \\
 &\quad \dots \left(\mathbb{M}_{\gamma_{p-1} \delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} + \bar{\mathbb{N}}_{\gamma_{p-1} \delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} + \bar{\mathbb{O}}_{\gamma_{p-1} \delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} \right) \phi_{p|\alpha}^{\beta} \gamma_{i\mu} u^\nu. \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

Les seuls termes restants sont ceux avec un seul $\mathbb{N}_\gamma^{\alpha\beta} u_\delta$, pour les mêmes raisons que ci-dessus ; plus le terme contenant seulement des $\mathbb{M}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$, qui ne disparaît pas ici :

$$\begin{aligned}
 P_{(p)}^{\mu\alpha\beta\nu} \phi_{p|\alpha\beta} \gamma_{i\mu} u_\nu &= -\frac{1}{2^p} \left[2p \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \beta\nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \alpha\mu} \mathbb{M}_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} \mathbb{N}_{\gamma_{p-1} \delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \gamma_{i\mu} u^\nu \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \beta\nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \alpha\mu} \mathbb{M}_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} \mathbb{M}_{\gamma_{p-1} \delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} \gamma_{i\mu} u^\nu \right] \phi_{p|\alpha}^{\beta} \\
 &\tag{4.26}
 \end{aligned}$$

En développant le long de la dernière ligne, le premier terme devient

$$\begin{aligned}
 & \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta\nu}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\alpha\mu} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \gamma_{i\mu} u^\nu \\
 &= \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\alpha} \delta_\nu^\mu M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \gamma_{i\mu} u^\nu \\
 &\quad - \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\mu} \delta_\nu^\alpha M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \gamma_{i\mu} u^\nu \\
 &\quad + \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\alpha} \delta_\nu^\mu M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \gamma_{i\mu} u^\nu \\
 &\quad - \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\alpha} \delta_\nu^\mu M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \gamma_{i\mu} u^\nu \\
 &\quad + \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-2}\beta_{p-2}\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-2}\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\alpha} \delta_\nu^\mu M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \gamma_{i\mu} u^\nu \\
 &\quad - \dots
 \end{aligned}$$

Toutes les lignes sauf la deuxième et la troisième s'annulent. Nous permutons deux indices dans le second déterminant et le développons le long de sa dernière ligne :

$$\begin{aligned}
 & \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta\nu}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\delta_{p-1}\alpha\mu} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \gamma_{i\mu} u^\nu \\
 &= \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\mu} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \gamma_{i\mu} u^\alpha \\
 &\quad + \varepsilon \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\alpha} \delta_\nu^\mu M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \gamma_{i\mu} \\
 &= \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\mu} \delta_\beta^{\delta_{p-1}} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \gamma_{i\mu} u^\alpha \\
 &\quad - \varepsilon \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\beta}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\mu} \delta_\beta^\alpha M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \gamma_{i\mu} \\
 &= \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\mu} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \gamma_{i\mu} u^\alpha u_\beta \\
 &\quad - \varepsilon \left[\delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\mu} \delta_\beta^\alpha M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \right. \\
 &\quad \quad - \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\alpha} \delta_\beta^\mu M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \\
 &\quad \quad + \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}}^{\gamma_1\delta_1\dots\mu} \delta_\beta^\alpha \delta^{\gamma_{p-1}} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \\
 &\quad \quad \left. - 2(p-2) \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-2}\beta_{p-2}\alpha_{p-1}\beta_{p-1}}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-2}\gamma_{p-1}\mu} \delta_\beta^\alpha M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \right] \gamma_{i\mu} \\
 &= \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\mu} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \gamma_{i\mu} (u^\alpha u_\beta - \varepsilon \delta_\beta^\alpha) \\
 &\quad + \varepsilon \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\alpha} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \gamma_{i\beta} \\
 &\quad - \varepsilon \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}}^{\gamma_1\delta_1\dots\mu} \delta_\beta^\alpha M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \gamma_{i\mu} \\
 &\quad + 2\varepsilon(p-2) \delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_{p-1}\beta_{p-1}\alpha_{p-2}\beta_{p-2}}^{\gamma_1\delta_1\dots\gamma_{p-1}\mu} \delta_\beta^{\gamma_{p-2}\alpha} M_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} M_{\gamma_{p-2}\beta}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} \gamma_{i\mu} \\
 &= 2^{p-1} \mathbb{N}_{(p-1)}^\mu \gamma_{i\mu} (-\varepsilon \gamma_\beta^\alpha) + \varepsilon 2^{p-1} \mathbb{N}_{(p-1)}^\alpha \gamma_{i\beta} \\
 &\quad - \varepsilon 2^{p-2} \mathring{\mathbb{M}}_{(p-2)kl}^{\mu\alpha} \mathbb{N}_\beta^{kl} \gamma_{i\mu} + \varepsilon (p-2) 2^{p-1} \mathring{\mathbb{N}}_{(p-2)}^{\mu j\alpha} \mathbb{M}_{j\beta}^{kl} \gamma_{i\mu}. \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

Pendant ce temps, le second terme est

$$\begin{aligned}
 & \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \beta \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \alpha \mu} M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} M_{\gamma_{p-1} \delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} \gamma_{i\mu} u^\nu \\
 &= -\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \beta}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \mu} \delta_\nu^\alpha M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1} \delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} \gamma_{i\mu} u^\nu \\
 &= -\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \beta}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \mu} M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\gamma_{p-1} \delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} \gamma_{i\mu} u^\alpha \\
 &= -2^{p-1} \dot{\mathbb{M}}_{(p-1)\beta}^\mu \gamma_{i\mu} u^\alpha. \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

En rassemblant (4.27) et (4.28), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 P_{(p)}^{\mu\alpha\beta\nu} \phi_{p|\alpha\beta} \gamma_{i\mu} u_\nu &= \frac{1}{2} \left[\varepsilon p \left(2\mathbb{N}_{(p-1)i} \gamma_\beta^\alpha - 2\mathbb{N}_{(p-1)}^\alpha \gamma_{i\beta} + \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)kl}^{\mu\alpha} \mathbb{N}_\beta^{kl} \gamma_{i\mu} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2(p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)}^{\mu j \alpha} M_{kl}^{j\alpha} \gamma_{i\mu} \right) + \dot{\mathbb{M}}_{(p-1)\beta}^\mu \gamma_{i\mu} u^\alpha \right] \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\varepsilon p \left(2\mathbb{N}_{(p-1)i} \gamma_b^a - 2\mathbb{N}_{(p-1)}^a \gamma_{ib} + \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)kl}^{ma} \mathbb{N}_b^{kl} \gamma_{im} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2(p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)}^{mja} M_{kl}^{j\alpha} \gamma_{im} \right) \left(\gamma_a^\alpha \gamma_\beta^b \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \dot{\mathbb{M}}_{(p-1)b}^m \gamma_{im} \left(\gamma_\beta^b u^\alpha \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Avec (2.15) et (2.16), nous pouvons réécrire

$$\begin{aligned}
 P_{(p)}^{\mu\alpha\beta\nu} \phi_{p|\alpha\beta} \gamma_{i\mu} u_\nu &= \frac{1}{2} \left[\varepsilon p \left(2\mathbb{N}_{(p-1)}^m \gamma_b^a - 2\mathbb{N}_{(p-1)}^a \gamma_b^m + \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)kl}^{ma} \mathbb{N}_b^{kl} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2(p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)}^{mja} M_{kl}^{j\alpha} \right) \left(\nabla_a \nabla^b \phi_p + \varepsilon \Pi_p K_a^b \right) \right. \\
 &\quad \left. + \dot{\mathbb{M}}_{(p-1)b}^m \left(\nabla^b \Pi_p - K^{ab} \nabla_a \phi_p \right) \right] \gamma_{im}. \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{(p)}^{\mu\nu} \gamma_{i\mu} u_\nu &= \left[\phi_p \dot{\mathbb{R}}_{(p)}^{\mu\nu} + 2p \left(P_{(p)}^{\mu\rho\sigma\nu} + P_{(p)}^{\mu\sigma\rho\nu} \right) \phi_{p|\rho\sigma} \right] \gamma_{i\mu} u_\nu \\
 &= \phi_p \left(-\varepsilon 2p \mathbb{N}_{(p)i} \right) \\
 &\quad + 2\varepsilon p^2 \left(2\mathbb{N}_{(p-1)}^m \gamma_b^a - 2\mathbb{N}_{(p-1)}^a \gamma_b^m \right. \\
 &\quad \left. + \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)kl}^{ma} \mathbb{N}_b^{kl} - 2(p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)}^{mja} M_{kl}^{j\alpha} \right) \left(\nabla_a \nabla^b \phi_p + \varepsilon \Pi_p K_a^b \right) \gamma_{im} \\
 &\quad + 2p \dot{\mathbb{M}}_{(p-1)b}^m \left(\nabla^b \Pi_p - K^{ab} \nabla_a \phi_p \right) \gamma_{im}. \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

4.2.3 Équations dynamiques

De semblables arguments d'orthogonalité aboutissent à

$$\begin{aligned}
 \mathring{\mathbb{R}}_{(p)}^{\mu\nu} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} &= \mathring{\mathbb{R}}_{(p)\mu}^{\nu} \gamma_i^{\mu} \gamma_{j\nu} \\
 &= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_p\beta_p\mu}^{\gamma_1\delta_1 \dots \gamma_p\delta_p\nu} \mathbb{R}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \mathbb{R}_{\gamma_2\delta_2}^{\alpha_2\beta_2} \dots \mathbb{R}_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} \gamma_i^{\mu} \gamma_{j\nu} \\
 &= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_p\beta_p\mu}^{\gamma_1\delta_1 \dots \gamma_p\delta_p\nu} \left(\mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} + \overline{\mathbb{N}}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} + \overline{\mathbb{O}}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \right) \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \left(\mathbb{M}_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} + \overline{\mathbb{N}}_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} + \overline{\mathbb{O}}_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} \right) \gamma_i^{\mu} \gamma_{j\nu} \\
 &= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_p\beta_p\mu}^{\gamma_1\delta_1 \dots \gamma_p\delta_p\nu} \left(\mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} \right. \\
 &\quad \left. + 4p(p-1) \mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} \mathbb{N}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}} u^{\beta_{p-1}} \mathbb{N}_{\gamma_p}^{\alpha_p\beta_p} u_{\delta_p} \right. \\
 &\quad \left. + 4p \mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \mathbb{O}_{\gamma_p}^{\alpha_p} u^{\beta_p} u_{\delta_p} \right) \gamma_i^{\mu} \gamma_{j\nu}. \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

Le premier terme est égal à

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_p\beta_p\mu}^{\gamma_1\delta_1 \dots \gamma_p\delta_p\nu} \mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_p\delta_p}^{\alpha_p\beta_p} \gamma_i^{\mu} \gamma_{j\nu} &= \mathring{\mathbb{M}}_{(p)\mu}^{\nu} \gamma_i^{\mu} \gamma_{j\nu} \\
 &= \mathring{\mathbb{M}}_{(p)ij}. \tag{4.32}
 \end{aligned}$$

Le second terme, en développant le long d'une ligne, est égal à

$$\begin{aligned}
 &\frac{4p(p-1)}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_p\beta_p\mu}^{\gamma_1\delta_1 \dots \gamma_p\delta_p\nu} \mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} \mathbb{N}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}} u^{\beta_{p-1}} \mathbb{N}_{\gamma_p}^{\alpha_p\beta_p} u_{\delta_p} \gamma_i^{\mu} \gamma_{j\nu} \\
 &= \frac{4p(p-1)}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_{p-1}\alpha_p}^{\gamma_1\delta_1 \dots \gamma_{p-1}\delta_{p-1}\gamma_p\nu} \delta_{\beta_p\mu}^{\delta_p} \delta_{\beta_{p-1}}^{\delta_p} \mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \\
 &\quad \dots \mathbb{M}_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} \mathbb{N}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}} u^{\beta_{p-1}} \mathbb{N}_{\gamma_p}^{\alpha_p\beta_p} u_{\delta_p} \gamma_i^{\mu} \gamma_{j\nu} \\
 &= \varepsilon \frac{4p(p-1)}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_{p-1}\alpha_p}^{\gamma_1\delta_1 \dots \gamma_{p-1}\delta_{p-1}\gamma_p\nu} \delta_{\beta_p\mu}^{\delta_p} \mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} \mathbb{N}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}} \mathbb{N}_{\gamma_p}^{\alpha_p\beta_p} \gamma_i^{\mu} \gamma_{j\nu} \\
 &= \varepsilon \frac{4p(p-1)}{2} \mathring{\mathbb{N}}_{(p-1)\mu}^{\nu} \gamma_i^{\mu} \gamma_{j\nu} \\
 &= \varepsilon 2p(p-1) \mathring{\mathbb{N}}_{(p-1)ij}. \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

Finalement, le troisième terme est égal à

$$\begin{aligned}
 &\frac{4p}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_p\beta_p\mu}^{\gamma_1\delta_1 \dots \gamma_p\delta_p\nu} \mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \mathbb{O}_{\gamma_p}^{\alpha_p} u^{\beta_p} u_{\delta_p} \gamma_i^{\mu} \gamma_{j\nu} \\
 &= \frac{4p}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_p\mu}^{\gamma_1\delta_1 \dots \gamma_p\nu} \delta_{\beta_p}^{\delta_p} \mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \mathbb{O}_{\gamma_p}^{\alpha_p} u^{\beta_p} u_{\delta_p} \gamma_i^{\mu} \gamma_{j\nu} \\
 &= \varepsilon \frac{2p}{2^{p-1}} \delta_{\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_p\mu}^{\gamma_1\delta_1 \dots \gamma_p\nu} \mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \mathbb{O}_{\gamma_p}^{\alpha_p} \gamma_i^{\mu} \gamma_{j\nu} \\
 &= \varepsilon 2p \mathring{\mathbb{O}}_{(p-1)\mu}^{\nu} \gamma_i^{\mu} \gamma_{j\nu} \\
 &= \varepsilon 2p \mathring{\mathbb{O}}_{(p-1)ij}. \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

Donc (4.31) peut s'écrire comme la somme de (4.32), (4.33) et (4.34) :

$$\mathring{\mathbb{R}}_{(p)}^{\mu\nu} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} = \mathring{\mathbb{M}}_{(p)ij} + \varepsilon 2p(p-1) \mathring{\mathbb{N}}_{(p-1)ij} + \varepsilon 2p \mathring{\mathbb{O}}_{(p-1)ij}. \quad (4.35)$$

Maintenant, la seconde projection :

$$\begin{aligned} P_{(p)}^{\mu\alpha\beta\nu} \phi_{p|\alpha\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} &= \frac{1}{2} \mathring{\mathbb{R}}_{(p-1)\sigma\tau}^{\mu\alpha} g^{\sigma\beta} g^{\tau\nu} \phi_{p|\alpha\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} \\ &= \frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_{p-1}\beta_{p-1}\sigma\tau}^{\gamma_1\delta_1 \dots \gamma_{p-1}\delta_{p-1}\mu\alpha} \mathbb{R}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{R}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} g^{\sigma\beta} g^{\tau\nu} \phi_{p|\alpha\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} \\ &= -\frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_{p-1}\beta_{p-1}\nu\beta}^{\gamma_1\delta_1 \dots \gamma_{p-1}\delta_{p-1}\mu\alpha} \left(\mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} + \overline{\mathbb{N}}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} + \overline{\mathbb{O}}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \right) \\ &\quad \dots \left(\mathbb{M}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} + \overline{\mathbb{N}}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} + \overline{\mathbb{O}}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \right) \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \end{aligned} \quad (4.36)$$

qui peut s'écrire, après suppression des termes orthogonaux,

$$P_{(p)}^{\mu\alpha\beta\nu} \phi_{p|\alpha\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} = -\frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_{p-1}\beta_{p-1}\nu\beta}^{\gamma_1\delta_1 \dots \gamma_{p-1}\delta_{p-1}\mu\alpha} \left(\mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} \mathbb{M}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} \right. \quad (4.37)$$

$$\left. + 2(p-1) \mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} \mathbb{N}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \right) \quad (4.38)$$

$$\left. + 2(p-1) \mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} \mathbb{N}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u^{\beta_{p-1}} \right) \quad (4.39)$$

$$\left. + 4(p-1) \mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} \mathbb{O}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u^{\beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \right) \quad (4.40)$$

$$\left. + 4(p-1)(p-2) \mathbb{M}_{\gamma_1\delta_1}^{\alpha_1\beta_1} \dots \mathbb{M}_{\gamma_{p-3}\delta_{p-3}}^{\alpha_{p-3}\beta_{p-3}} \mathbb{N}_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\beta_{p-2}} u^{\beta_{p-2}} \mathbb{N}_{\gamma_{p-1}\delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \right) \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu. \quad (4.41)$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^\beta &= \gamma_\alpha^\beta + \varepsilon u_\alpha u^\beta \\ &= \gamma_\alpha^a \gamma_b^\beta \delta_a^b + \varepsilon u_\alpha u^\beta, \end{aligned} \quad (4.42)$$

nous obtenons pour la première ligne (4.37)

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \mu \alpha} M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} M_{\gamma_{p-1} \delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 = & -\frac{1}{2^p} \left(+\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \mu} \delta_\beta^\alpha \right. \\
 & \quad \left. -\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \alpha} \delta_\beta^\mu \right) \\
 & + 2(p-1) \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \mu} \delta_\beta^\alpha \delta_{p-1}^\mu \left) M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} M_{\gamma_{p-1} \delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 = & -\frac{1}{2^p} \left(+\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \mu} \left(\delta_b^a \gamma_a^\alpha \gamma_\beta^b + \varepsilon u_\beta u^\alpha \right) \right. \\
 & \quad \left. -\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \alpha} \delta_b^\mu \gamma_a^\alpha \gamma_\beta^b \right) \\
 & + 2(p-1) \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \mu} \delta_b^a \delta_{p-1}^\mu \gamma_a^\alpha \gamma_\beta^b \left) M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} M_{\gamma_{p-1} \delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 = & -\frac{1}{2^p} \left(+\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \mu} \gamma_a^\alpha \gamma_\beta^b \right. \\
 & \quad \left. + \varepsilon \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \mu} u_\beta u^\alpha \right) M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} M_{\gamma_{p-1} \delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 = & -\frac{1}{2} \left(+\ddot{\mathbb{M}}_{(p-1)nb}^{ma} \left(\phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_a^\alpha \gamma_\beta^b \right) + \varepsilon \ddot{\mathbb{M}}_{(p-1)n}^m \left(\phi_{p|\alpha}^{|\beta} u_\beta u^\alpha \right) \right) \gamma_{im} \gamma_j^n. \tag{4.43}
 \end{aligned}$$

La seconde ligne (4.38) est

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2(p-1)}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \alpha \mu} M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 = & -\frac{2(p-1)}{2^p} \left(+\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \mu} \delta_\beta^{\delta_{p-1}} \delta_\nu^\alpha \right. \\
 & \quad -\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \mu} \delta_\beta^{\delta_{p-1}} \delta_{\beta_{p-1}}^\alpha \\
 & \quad \left. +\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \beta_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \mu} \delta_\beta^{\delta_{p-1}} \delta_{\alpha_{p-1}}^\alpha \right) \\
 & - 2(p-2) \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-2} \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-2} \delta_{p-2} \gamma_{p-1} \mu} \delta_\beta^{\delta_{p-1}} \delta_{\beta_{p-2}}^\alpha \left) M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots \right. \\
 & \quad \left. \dots M_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \right) \\
 = & -\frac{2(p-1)}{2^p} \left(+2^{p-1} \mathbb{N}_{(p-1)}^\mu \delta_\nu^\alpha \right. \\
 & \quad - 2^{p-2} \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)\alpha_{p-1}\nu}^{\gamma_{p-1}\mu} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}\alpha} \\
 & \quad \left. + 2^{p-2} \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)\beta_{p-1}\nu}^{\gamma_{p-1}\mu} N_{\gamma_{p-1}}^{\beta_{p-1}\alpha} \right) \\
 & - 2(p-2) \times 2^{p-2} \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)\alpha_{p-2}\nu}^{\mu\gamma_{p-2}\delta_{p-2}} M_{\gamma_{p-2}\delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}\alpha} \left) u_\beta \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 = & (p-1) \left(-\mathbb{N}_{(p-1)}^m \delta_n^a + \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)ln}^{km} N_k^{la} + (p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)\quad kn}^{mcd} M_{kn}^{ka} \right) \left(\gamma_a^\alpha u_\beta \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \right) \gamma_{im} \gamma_j^n. \tag{4.44}
 \end{aligned}$$

4.2. DÉCOMPOSITION $N + 1$ DES THÉORIES $F(\text{LOVELOCK})$: CALCULS

La troisième ligne (4.39) lui est semblable :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2(p-1)}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \beta \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \alpha \mu} M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1} \delta_{p-1}}^{\alpha_{p-1}} u^{\beta_{p-1}} \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 &= (p-1) \left(-N_{(p-1)n} \delta_b^m + \ddot{M}_{(p-2)ln}^{km} N_{kb}^l + (p-2) \ddot{N}_{(p-2)n cd}^{km} M_{kb}^{cd} \right) \left(\gamma_\beta^b u^\alpha \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \right) \gamma_{im} \gamma_j^n.
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

La quatrième ligne (4.40), quant à elle, vaut

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4(p-1)}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \beta \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \alpha \mu} M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} O_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}} u^{\beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 &= -\frac{4(p-1)}{2^p} \left(+\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \alpha \mu} \delta_{\beta_{p-1}}^{\delta_{p-1}} \right. \\
 & \quad \left. -\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \mu} \delta_{\beta_{p-1}}^\alpha \delta_\beta^{\delta_{p-1}} \right) M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} O_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}} u^{\beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 &= -\frac{4(p-1)}{2^p} \left(+\varepsilon 2^{p-2} \ddot{O}_{(p-2)\beta\nu}^{\alpha\mu} - 2^{p-2} \dot{O}_{(p-2)\nu}^\mu u^\alpha u_\beta \right) \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser à nouveau l'astuce (4.42) :

$$\begin{aligned}
 2^{p-2} \ddot{O}_{(p-2)\beta\nu}^{\alpha\mu} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu &= \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \nu \beta}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \mu \alpha} M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} O_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 &= +\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \mu} \delta_\beta^\alpha M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} O_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 &+ \dots \\
 &= +\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \mu} \left(\gamma_a^\alpha \gamma_\beta^b \delta_b^a + \varepsilon u_\beta u^\alpha \right) M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} O_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 &+ \dots \\
 &= 2^{p-2} \left(\ddot{O}_{(p-2)\nu b}^{\mu a} \gamma_a^\alpha \gamma_\beta^b + \varepsilon \dot{O}_{(p-2)\nu}^\mu u_\beta u^\alpha \right) \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu,
 \end{aligned}$$

et la quatrième ligne (4.40) devient

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4(p-1)}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \beta \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \alpha \mu} M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots M_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2} \beta_{p-2}} O_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1}} u^{\beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 &= -\varepsilon (p-1) \ddot{O}_{(p-2)bn}^{am} \left(\phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_a^\alpha \gamma_\beta^b \right) \gamma_{im} \gamma_j^n.
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Pour finir, on peut appliquer à la cinquième ligne (4.41) le même calcul :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4(p-1)(p-2)}{2^p} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \beta \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-1} \delta_{p-1} \alpha \mu} M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots \\
 & \quad \dots M_{\gamma_{p-3} \delta_{p-3}}^{\alpha_{p-3} \beta_{p-3}} N_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}} u^{\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 = & -\frac{4(p-1)(p-2)}{2^p} \left(+\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-2} \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \beta \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-2} \delta_{p-2} \gamma_{p-1} \alpha \mu} \delta_{\beta_{p-2}}^{\delta_{p-1}} \right. \\
 & \quad \left. -\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{p-2} \alpha_{p-1} \beta_{p-1} \nu}^{\gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{p-2} \delta_{p-2} \gamma_{p-1} \mu} \delta_{\beta}^{\delta_{p-1}} \delta_{\beta_{p-2}}^{\alpha} \right) M_{\gamma_1 \delta_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots \\
 & \quad \dots M_{\gamma_{p-3} \delta_{p-3}}^{\alpha_{p-3} \beta_{p-3}} N_{\gamma_{p-2} \delta_{p-2}}^{\alpha_{p-2}} u^{\beta_{p-2}} N_{\gamma_{p-1}}^{\alpha_{p-1} \beta_{p-1}} u_{\delta_{p-1}} \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 = & -\frac{4(p-1)(p-2)}{2^p} \left(+\varepsilon 2^{p-2} \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)\beta\nu}^{\alpha\mu} - 2^{p-2} \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)\nu}^{\mu} u_\beta u^\alpha \right) \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_j^\nu \\
 = & -\varepsilon(p-1)(p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)bn}^{am} \left(\phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_a^\alpha \gamma_\beta^b \right) \gamma_{im} \gamma_j^n. \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

Nous rassemblons (4.43), (4.44), (4.45), (4.46) et (4.47), et obtenons

$$\begin{aligned}
 & P_{(p)}^{\mu\alpha\beta\nu} \phi_{p|\alpha\beta} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} \\
 = & -\frac{1}{2} \left(+\ddot{\mathbb{M}}_{(p-1)nb}^{ma} \left(\phi_{p|\alpha}^{|\beta} \gamma_a^\alpha \gamma_\beta^b \right) + \varepsilon \ddot{\mathbb{M}}_{(p-1)n}^m \left(\phi_{p|\alpha}^{|\beta} u_\beta u^\alpha \right) \right) \gamma_{im} \gamma_j^n \tag{4.48} \\
 + & (p-1) \left(-\mathbb{N}_{(p-1)}^m \delta_n^a + \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)ln}^{km} \mathbb{N}_k^{la} + (p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)}^{mcd} \mathbb{M}_{kn}^{ka} \right) \left(\gamma_a^\alpha u_\beta \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \right) \gamma_{im} \gamma_j^n \\
 + & (p-1) \left(-\mathbb{N}_{(p-1)n} \delta_b^m + \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)ln}^{km} \mathbb{N}_{kb}^l + (p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)ncd}^{km} \mathbb{M}_{kb}^{cd} \right) \left(\gamma_\beta^b u^\alpha \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \right) \gamma_{im} \gamma_j^n \\
 - & \varepsilon(p-1) \left(\ddot{\mathbb{O}}_{(p-2)bn}^{am} + (p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)bn}^{am} \right) \left(\gamma_a^\alpha \gamma_\beta^b \phi_{p|\alpha}^{|\beta} \right) \gamma_{im} \gamma_j^n \\
 = & -\frac{1}{2} \left(+\ddot{\mathbb{M}}_{(p-1)bn}^{am} + 2\varepsilon(p-1) \left[\ddot{\mathbb{O}}_{(p-2)bn}^{am} + (p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)bn}^{am} \right] \right) \\
 & \quad \left(\nabla_a \nabla^b \phi_p + \varepsilon \Pi_p K_a^b \right) \gamma_{im} \gamma_j^n \tag{4.49} \\
 + & (p-1) \left(-\mathbb{N}_{(p-1)}^m \delta_n^a + \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)ln}^{km} \mathbb{N}_k^{la} + (p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)}^{mcd} \mathbb{M}_{kn}^{ka} \right) \\
 & \quad \left(\nabla_a \Pi_p - K_a^b \nabla_b \phi_p \right) \gamma_{im} \gamma_j^n \\
 + & (p-1) \left(-\mathbb{N}_{(p-1)n} \delta_b^m + \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)ln}^{km} \mathbb{N}_{kb}^l + (p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)ncd}^{km} \mathbb{M}_{kb}^{cd} \right) \\
 & \quad \left(\nabla^b \Pi_p - K_a^b \nabla^a \phi_p \right) \gamma_{im} \gamma_j^n \\
 - & \frac{1}{2} \varepsilon \ddot{\mathbb{M}}_{(p-1)n}^m \left(\varepsilon (\square \phi_p - \Delta \phi_p) - \Pi_p K \right) \gamma_{im} \gamma_j^n.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{(p)}^{\mu\nu} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} &= \left[\phi_p \dot{\mathbb{R}}_{(p)}^{\mu\nu} + 2p \left(P_{(p)}^{\mu\rho\sigma\nu} + P_{(p)}^{\mu\sigma\rho\nu} \right) \phi_{p|\rho\sigma} \right] \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} \\
 &= \left(\dot{\mathbb{M}}_{(p)ij} + \varepsilon 2p(p-1) \dot{\mathbb{N}}_{(p-1)ij} + \varepsilon 2p \dot{\mathbb{O}}_{(p-1)ij} \right) \phi_p \\
 &\quad - p \left(\ddot{\mathbb{M}}_{(p-1)bn}^{am} + 2\varepsilon(p-1)(p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)bn}^{am} + 2\varepsilon(p-1) \ddot{\mathbb{O}}_{(p-2)bn}^{am} \right) \\
 &\quad \quad \left(\nabla_a \nabla^b \phi_p + \varepsilon \Pi_p K_a^b \right) \gamma_{im} \gamma_j^n \\
 &+ 2p(p-1) \left(-\mathbb{N}_{(p-1)}^m \delta_n^a + \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)ln}^{km} \mathbb{N}_k^{la} + (p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)}^{mcd} \mathbb{M}_{kn}^{ka} \right) \\
 &\quad \quad \left(\nabla_a \Pi_p - K_a^b \nabla_b \phi_p \right) \gamma_{im} \gamma_j^n \\
 &+ 2p(p-1) \left(-\mathbb{N}_{(p-1)n} \delta_b^m + \ddot{\mathbb{M}}_{(p-2)ln}^{km} \mathbb{N}_{kb}^l + (p-2) \ddot{\mathbb{N}}_{(p-2)ncd}^{km} \mathbb{M}_{kb}^{cd} \right) \\
 &\quad \quad \left(\nabla^b \Pi_p - K_a^b \nabla^a \phi_p \right) \gamma_{im} \gamma_j^n \\
 &\quad - \varepsilon p \dot{\mathbb{M}}_{(p-1)n}^m \left(\varepsilon (\square \phi_p - \Delta \phi_p) - \Pi_p K \right) \gamma_{im} \gamma_j^n. \tag{4.50}
 \end{aligned}$$

4.3 Le problème de Cauchy

Comme pour la Relativité Générale (RG), le problème d'évolution des théories f (Love-lock) se divise en deux parties. La détermination d'une donnée initiale, c'est-à-dire la résolution des équations de contrainte (4.7, 4.8) ; puis la propagation de cette donnée initiale selon les équations dynamiques (4.9), c'est-à-dire l'étude du problème de Cauchy.

Commençons par quelques mots sur ce problème.

4.3.1 Le problème de Cauchy pour les théories de Lovelock

Comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, le premier article consacré à la formulation hamiltonienne des théories de Lovelock est écrit en 1987 par C. Teitelboim et J. Zanelli [87]. Mais il n'indique pas si le problème de Cauchy est bien posé ou non. Sur ce point, le travail originel date de 1988, par Y. Choquet-Bruhat [15] (repris en [16], aux pages 692-693). Le théorème de Cauchy-Kowalewski y est utilisé pour montrer que le problème de Cauchy est bien posé pour des données analytiques suffisamment petites, à lapse et shift arbitrairement donnés. Une différence de taille apparaît toutefois par rapport à la RG, en ce qui concerne les surfaces caractéristiques : ce sont des cônes, mais pas de genre lumière, contrairement à ceux de la RG. Ainsi, la gravité peut se propager plus vite ou plus lentement que la lumière.

Dans [22], N. Deruelle et L. Fariña-Busto ont montré que les modèles cosmologiques de gravité de Lovelock peuvent présenter des comportements problématiques, comme un univers provenant de nulle part ou disparaissant en un temps fini sans explosion de la courbure. Ces résultats ont été rassemblés sous un point de vue plus général en [23]. Il

y est établi que la quasi-linéarité en $\partial^2 g$ des équations dynamiques est à l'origine de la pathologie.

Les recherches actuelles sont consacrées, d'une part, à l'hyperbolicité globale des théories de Lovelock. H. S. Reall, N. Tanahashi et B. Way ont étudié dans le détail la nature des hypersurfaces caractéristiques ; ils prouvent dans [76] que chaque horizon de Killing est caractéristique, et se prononcent sur l'hyperbolicité de certains cas de théorie de Lovelock. Dans [77], ils établissent que l'équation de transport le long des hypersurfaces caractéristiques est non linéaire, contrairement à celle de la RG, et que cette non linéarité peut former des chocs. Enfin, la question de la stabilité non linéaire de l'espace-temps de Minkowski semble trouver une réponse positive, mais ceci n'est pas encore prouvé.

D'autre part, S. Willison exprime dans [94] et [95] une reformulation quasi-linéaire des théories de Lovelock pour étudier le caractère localement bien posé du problème de Cauchy par rapport à des métriques de trous noirs.

4.3.2 Le problème de Cauchy pour les théories $f(\text{Lovelock})$

Quant au problème de Cauchy pour les théories $f(\text{Lovelock})$, tout est encore à faire. Nous venons d'effectuer la première étape, la décomposition des équations de champ en un formalisme hamiltonien. Mais le caractère bien posé du problème de Cauchy dépendra d'une étude approfondie des équations dynamiques et du terme $\mathcal{A}_{\mu\nu}\gamma_i^\mu\gamma_j^\nu$; la question est donc entièrement ouverte.

Penchons-nous maintenant sur l'autre partie du problème d'évolution.

4.4 Résolution des équations de contrainte

4.4.1 L'échec de la méthode conforme

Les équations de contrainte de la RG constituent un champ fertile de recherche mathématique, et il est légitime de se demander si les résultats qui s'appliquent à elles valent aussi bien pour les théories $f(\text{Lovelock})$. À l'heure actuelle, les équations de contrainte des théories $f(\text{Lovelock})$ viennent d'être rendues explicites, et n'ont donc pas encore été étudiées. Leur résolution mathématique est entièrement ouverte.

Étonnamment, il en était de même pour les équations de contrainte des théories de Lovelock, jusqu'à présent. Les travaux menés par mes directeurs de thèse et moi-même semblent novateurs sur ce sujet. La suite de cette thèse est le compte-rendu de ces travaux.

Nous allons donc laisser de côté les équations dynamiques (4.9) et étudier le système des équations de contrainte (4.7, 4.8). Nous nous restreindrons au cas de Lovelock, c'est-à-dire

$$\forall p, \phi_p = \alpha_p = \text{cst.}, \quad \text{donc} \quad \Pi_p = 0.$$

4.4. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE CONTRAINTE

Les équations de contrainte deviennent alors

$$\sum_{k=0}^{p_n} \alpha_k \mathbb{M}_{(k)} = V - \varepsilon E, \quad (\text{contrainte hamiltonienne}) \quad (4.51)$$

$$\sum_{k=0}^{p_n} 2k\alpha_k \mathbb{N}_{(k)}^i = J^i. \quad (\text{contraintes de moment}) \quad (4.52)$$

Les équations de contrainte (4.51, 4.52) sont tout aussi sous-déterminées que celles de la RG. Il est naturel de tenter de leur appliquer la même méthode conforme, exposée dans la section 1.4. C'est-à-dire de lever la sous-détermination en imposant une classe conforme arbitraire et d'y chercher une métrique solution. Cependant, le bon exposant qui apparaît sur le facteur conforme dépend de k (cf. [88]) : il n'existe pas d'exposant universel qui puisse transformer tous les $\mathbb{M}_{(k)}$ et les $\mathbb{N}_{(k)}$ d'une façon semblable à celle de la méthode conforme.

Pour traiter ce problème, nous serons malheureusement amenés à faire trois hypothèses restrictives.

4.4.2 Notations et hypothèses

Commençons par introduire de nouvelles notations.

Définition 4.4.1.

Pour $0 \leq k \leq n$, $\sigma_k(\lambda) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$	le k -ième polynôme symétrique élémentaire de $\lambda \in \mathbb{R}^n$,
$\Gamma_k = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid \forall 0 \leq j \leq k, \sigma_j(\lambda) > 0\}$	le k -ième cône de Gårding,
$S[\gamma]_{ij} = \frac{1}{n-2} \left[R[\gamma]_{ij} - \frac{R[\gamma]}{2(n-1)} \gamma_{ij} \right]$	le tenseur de Schouten de γ ,
$S[\gamma] = \frac{R[\gamma]}{2(n-1)}$	la trace de $S[\gamma]_j^i$,
$\lambda(\gamma)$	les valeurs propres de $S[\gamma]_j^i$,
$\sigma_k(\lambda(\gamma))$	la σ_k -courbure de γ , ie. le k -ième polynôme symétrique élémentaire des valeurs propres de $S[\gamma]_j^i$,
$W[\gamma]_{ijkl}$	le tenseur de Weyl de γ ,
$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$	l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n .

Pour $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, nous écrirons

$$\begin{aligned} \overline{f_{\vec{a}}} &= a_0 + a_1 \sigma_1 + \dots + a_p \sigma_p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n], \\ \overline{P_{\vec{a}}} &= a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p \in \mathbb{R}[X]. \end{aligned}$$

4.4. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE CONTRAINTE

REMARQUE 8. Les cônes Γ_k furent introduits par L. Gårding dans sa recherche sur les polynômes hyperboliques. On peut sur ce sujet se référer à [29]. Ils satisfont les inclusions suivantes :

$$\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \dots \supset \Gamma_{n-1} \supset \Gamma_n = (\mathbb{R}_+^*)^n.$$

Une métrique γ dont le spectre $\lambda(\gamma) \in \Gamma_k$ est nommée k -admissible.

Restreignons maintenant le problème qui nous intéresse.

1. Nous étudierons le cas **symétrique en temps**, ou *time-symmetric*, c'est-à-dire que nous supposons que $K_{ij} = 0$. Ceci correspondrait, par exemple, dans un univers s'étendant puis se contractant, à l'instant de basculement entre les deux régimes. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{(k)} &= \frac{1}{2^k} \delta_{c_1 d_1 \dots c_k d_k}^{a_1 b_1 \dots a_k b_k} \mathbb{R}[\gamma]_{a_1 b_1}^{c_1 d_1} \dots \mathbb{R}[\gamma]_{a_k b_k}^{c_k d_k} = \mathbb{R}[\gamma]_k, \\ \mathbb{N}_{(k)}^i &= \frac{1}{2^k} \delta_{c_1 d_1 \dots c_k d_k}^{a_1 b_1 \dots a_k i} \mathbb{R}[\gamma]_{a_1 b_1}^{c_1 d_1} \dots \mathbb{R}[\gamma]_{a_{k-1} b_{k-1}}^{c_{k-1} d_{k-1}} \mathbb{N}_{a_k}^{c_k d_k} = 0. \end{aligned}$$

Les équations de contrainte deviennent alors

$$\sum_{k=0}^{p_n} \alpha_k \mathbb{R}_k = V - \varepsilon E, \quad (4.53)$$

$$0 = J^i, \quad (4.54)$$

(4.54) est une condition physique nécessaire, portant sur le tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$, pour qu'une décomposition symétrique en temps puisse exister. En revanche, (4.53) est une nouvelle équation géométrique.

Nous appellerons **polynôme de Lovelock** l'expression $\sum_k \alpha_k \mathbb{R}_k$. Il s'agit d'un polynôme en les produits de Lovelock, donc en des courbures de degrés croissants.

2. Nous supposons que \mathcal{M} est **localement conformément plate**. En effet, en général, le tenseur de Riemann peut se décomposer selon

$$\mathbb{R}[\gamma]_{ab}^{cd} = \mathbb{W}[\gamma]_{ab}^{cd} + \left(\mathbb{S}[\gamma]_a^c \delta_b^d + \mathbb{S}[\gamma]_b^d \delta_a^c - \mathbb{S}[\gamma]_a^d \delta_b^c - \mathbb{S}[\gamma]_b^c \delta_a^d \right)$$

Le fait que \mathcal{M} soit localement conformément plate est équivalent à ce que son tenseur de Weyl s'annule. Et lorsque $\mathbb{W}_{ab}^{cd} = 0$, il peut être montré (par exemple dans [30]) que pour tout $0 \leq k \leq p_n$,

$$\mathbb{R}_k = 2^k k! \frac{(n-k)!}{(n-2k)!} \sigma_k(\lambda(\gamma)).$$

Dans ce cas, (4.53) devient

$$\sum_{k=0}^{p_n} \alpha_k 2^k k! \frac{(n-k)!}{(n-2k)!} \sigma_k(\lambda(\gamma)) = V - \varepsilon E. \quad (4.55)$$

Nous posons donc

$$\mathcal{E} := V - \varepsilon E, \quad (4.56)$$

$$a_k := \alpha_k 2^k k! \frac{(n-k)!}{(n-2k)!}, \quad (4.57)$$

qui a le même signe que α_k .

3. Nous considérerons que l'hypersurface spatiale \mathcal{M} est compacte. Une variété de volume fini est en effet une hypothèse nécessaire dans l'ensemble des travaux que nous invoquerons.

REMARQUE 9. Une petite mise en garde s'impose : la nouvelle équation hamiltonienne (4.53) ne concerne pas le polynôme de Lovelock présent dans l'action (3.4) des théories de Lovelock, mais la **projection** de ce polynôme sur une hypersurface spatiale \mathcal{M} . Le polynôme de Lovelock est construit sur les courbures de la métrique spatio-temporelle de \mathcal{V} , lorentzienne, g , tandis que (4.53) est construite à partir de la métrique spatiale de \mathcal{M} , riemannienne, γ . Le fait que cette projection en ait la même structure est dû à la forme de M_{ab}^{cd} et à l'hypothèse de symétrie en temps.

4.4.3 Interprétation physique des coefficients

Dans l'équation (4.53), les α_k sont des coefficients réels qui portent une dimension physique. Chaque \mathbb{R}_k a la dimension d'une longueur^{-2k}, et les produits $\alpha_k \mathbb{R}_k$ ont tous la dimension d'une énergie. La RG correspond à

$$\begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{-2\Lambda}{2\kappa}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2\kappa}, \\ n = 3, \quad \alpha_k = 0 \quad \text{for } k \geq 2. \end{array}$$

Nous avons déjà choisi la convention $c = 1$. Dans la suite nous éliminerons la dimension physique restante en prenant $\kappa = 1/2$, afin que la RG devienne

$$\begin{array}{l} \alpha_0 = -2\Lambda, \quad \alpha_1 = 1, \\ \alpha_k = 0 \quad \text{for } k \geq 2. \end{array} \quad (4.58)$$

La forme générale des théories de Lovelock ne contient pas de restriction sur Λ , ni sur aucun α_k . Toutefois – bien qu'il existe des recherches sur une constante cosmologique strictement négative – la plupart des modèles cosmologiques considèrent Λ petite, mais strictement positive :

$$0 < \Lambda \ll 1.$$

Nous garderons cette hypothèse sur Λ . Dans les deux prochains chapitres, nous ferons successivement deux hypothèses sur les autres coefficients.

Dans le chapitre 5 et les sections 6.1 et 6.2, nous supposerons que $\alpha_k \geq 0$ pour $k \geq 1$. Ceci nous permet, dans certains cas, d'obtenir un système elliptique en restreignant les valeurs propres du tenseur de Ricci au cône positif, ce qui implique une courbure scalaire de \mathcal{M} strictement positive. De plus, cette hypothèse est courante dans les travaux de

physique. Il y a certes des exceptions : dans [20] par exemple, la thermodynamique des trous noirs est étudiée avec $\alpha_2 < 0$; et dans [43] ou [65], l'existence d'un trou de ver traversable implique le même $\alpha_2 < 0$.

Dans la section 6.3, nous supposons l'opposé : que la courbure scalaire de la variété spatiale est strictement négative. Nous ferons en outre l'hypothèse que $|\alpha_k| \ll 1$ pour $k \geq 2$. Ceci correspond à la RG vue comme limite des théories de Lovelock et rend possible l'usage d'un théorème des fonctions implicites.

4.4.4 Vers un nouveau problème de σ_k -Yamabe

Récapitulons notre problème : nous supposons que $(\mathcal{M}, \gamma_{ij})$ est une variété spatiale localement conformément plate et compacte, plongée de façon symétrique en temps dans un espace-temps ; ceci implique que (4.54) est vraie. Alors les équations de contrainte des théories de Lovelock se réduisent à

$$\sum_{k=0}^{p_n} a_k \sigma_k(\lambda(\gamma)) = \mathcal{E}, \quad (4.59)$$

qui peut encore s'écrire

$$f_{\vec{a}}(\lambda(\gamma)) = \mathcal{E}.$$

Lorsque tous les α_k sauf un sont nuls, (4.53) est une équation de prescription d'une σ_k -courbure. Même si la méthode conforme de la RG ne s'applique pas telle quelle, ce problème est largement sous-déterminé, et la recherche d'une solution dans une classe conforme donnée s'avère fructueuse. Il s'agit du **problème de σ_k -Yamabe**, une généralisation du problème de Yamabe qui commença à être étudié à l'aube du siècle présent.

Pour $k = 1$, $\sigma_1(\lambda(\gamma))$ est la courbure scalaire de γ , donc nous retrouvons le célèbre problème de Yamabe.

Pour $k = n$, bien que nous ne soyons pas concernés par ce cas, $\sigma_n(\lambda(\gamma))$ est le déterminant du tenseur de Schouten, donc nous obtenons une équation à la Monge-Ampère, qui a donné naissance à une littérature abondante.

Les autres cas sont une interpolation entre ces deux extrêmes. Nous reprendrons ici un récapitulatif de M. L. Labbi [45] de cas pour lesquels une solution au problème de σ_k -Yamabe a été trouvée ces dernières années.

- ★ 2000, travail originel de J. A. Viaclovsky [90], [91];
- ★ 2003, pour une variété localement conformément plate, P. Guan et G. Wang [33];
- ★ 2003, pour une variété localement conformément plate, A. Li et Y. Li [52], [53], étendu dans [51];
- ★ 2007, pour une variété avec une frontière non vide, B. Guan [32];
- ★ 2007, $n/2 < k$, pour une métrique admissible, M. Gursky et J. Viaclovsky [34];
- ★ 2007, $2 \leq k \leq n/2$, pour une métrique admissible et un problème variationnel, W. Sheng, N. Trudinger et X. Wang [83].

Depuis la revue de [45], on peut relever les résultats suivants.

- ★ 2010, $1 \leq k < n/2$, pour une σ_k -courbure égale à $\binom{n}{k}/2^k$ avec des techniques de somme connexe, L. Mazziéri, G. Catino et A. Segatti, [14], [63].

Le lien entre les théories de Lovelock et les σ_k -courbures semble avoir été fait pour la première fois dans [45], sans recherche cependant sur les équations de contrainte.

Cela dit, l'équation (4.59) n'est pas la prescription d'une seule σ_k -courbure, mais d'une combinaison linéaire arbitraire de différentes σ_k -courbures. Il s'agit d'un nouveau problème de σ_k -Yamabe, et c'est ce problème que nous allons étudier.

Dans la suite nous lèverons la contrainte sur p_n , et considérerons (4.59) comme un cas particulier de l'équation de prescription suivante.

Définition 4.4.2. Pour $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, on appelle (4.60, \vec{a}, \mathcal{E}) le problème suivant : trouver $\hat{\gamma} \in \mathcal{C}[\gamma]$ une solution conforme de

$$f_{\vec{a}}(\lambda(\hat{\gamma})) = \mathcal{E}. \quad (4.60)$$

4.4.5 À la recherche de concavité

La plupart des solutions existantes au problème de σ_k -Yamabe utilisent le fait que dans le cas localement conformément plat, ce problème est variationnel, de même que le problème de Yamabe classique. Cette propriété est définie dans le théorème suivant, démontré par J. Viaclovsky.

Théorème 4.4.3 ([90]). *Soit $\hat{\gamma} \in \mathcal{C}[\gamma]$, tel que $\text{vol}(\hat{\gamma}) = 1$. Alors pour tout $k \neq n/2$, $\hat{\gamma}$ satisfait*

$$\sigma_k(\lambda(\hat{\gamma})) = \text{constant} \quad (4.61)$$

si et seulement si $\hat{\gamma}$ est un point critique de la fonctionnelle

$$g \longmapsto \int_{\mathcal{M}} \sigma_k(\lambda(g)) \, dv_g.$$

Cependant, notre nouveau problème (4.60, \vec{a}, \mathcal{E}) n'est plus variationnel. Nous devons donc utiliser un résultat plus général, comme le théorème de A. Li et Y. Y. Li.

Théorème 4.4.4 ([51]). *Soient $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Gamma})$ tels que*

1. (a) Γ est un cône convexe ouvert dont le sommet est à l'origine,
 (b) $\Gamma_n \subset \Gamma \subset \Gamma_1$,
 (c) Γ est symétrique en les λ_i ;
2. (a) f est concave et symétrique en les λ_i ,
 (b) $f = 0$ sur $\partial\Gamma$,
 (c) $\forall 1 \leq i \leq n$, $\partial_i f > 0$ dans Γ ,

4.4. RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DE CONTRAINTE

$$(d) \forall \lambda \in \Gamma, \lim_{s \rightarrow \infty} f(s\lambda) = \infty.$$

Puis, soit (\mathcal{M}, γ) une variété compacte, localement conformément plate, sans frontière, telle que

$$\lambda(\gamma) \in \Gamma \quad \text{sur } \mathcal{M}.$$

Alors il existe $u \in C^\infty(\mathcal{M})$, $u > 0$, tel que $\hat{\gamma} := u^{\frac{4}{n-2}}\gamma \in \mathcal{C}[\gamma]$ satisfait

$$f(\lambda(\hat{\gamma})) = 1 \quad \text{et} \tag{4.62}$$

$$\lambda(\hat{\gamma}) \in \Gamma \quad \text{sur } \mathcal{M}. \tag{4.63}$$

REMARQUE 10. L'hypothèse sur les cônes de Gårding (1b) est un critère d'admissibilité qui garantit l'ellipticité de l'équation (4.62). Elle impose que $\sigma_1(\lambda(\gamma)) > 0$, ie. que la courbure scalaire de \mathcal{M} soit strictement positive.

REMARQUE 11. Pour la prescription d'une σ_k -courbure **arbitraire**, les résultats actuels se servent de la nature variationnelle du problème de σ_k -Yamabe. Le théorème de A. Li et Y. Y. Li, plus général, ne requiert pas de problème variationnel, mais perd l'opportunité d'une prescription arbitraire. Il permet seulement de contraindre f à être constante.

REMARQUE 12. L'hypothèse la plus lourde de ce théorème est (2a), la concavité de f . Elle trouve son origine dans l'étonnante propriété de concavité de $\sigma_k^{1/k}$; une preuve de cette propriété peut être trouvée dans [59] avec des arguments algébriques, ou dans [11] avec les outils de la théorie des polynômes hyperboliques de L. Gårding.

Théorème 4.4.5 (1957, [59], 1985, [11]). *Soient $\lambda, \mu \in \Gamma_k$, $1 \leq k \leq n$. Alors*

$$\sigma_k^{1/k}(\lambda + \mu) \geq \sigma_k^{1/k}(\lambda) + \sigma_k^{1/k}(\mu),$$

avec égalité si et seulement si $\lambda // \mu$ (ou $k = 1$).

L'homogénéité de $\sigma_k^{1/k}$ mène ensuite à la concavité sur Γ_k , et autorise à prendre $f = \sigma_k^{1/k}$ dans le théorème 4.4.4.

En est-il de même pour $f_{\vec{a}}$? La réponse, bien sûr, dépend des coefficients a_k .

Chapitre 5

Sur la concavité

d'une somme de σ_k

Ce chapitre reprend le contenu de [47]; il est consacré à la concavité de $f_{\vec{d}}$.

Quand une combinaison linéaire de σ_k est-elle concave? Cette question ne porte que sur les coefficients de cette combinaison linéaire. Ce n'est pas une question de gravitation, de physique théorique, de géométrie ou d'EDP, mais uniquement d'algèbre. Nous lui chercherons donc des réponses algébriques.

5.1 Introduction

5.1.1 Notations et conjectures

Lorsque nous considérerons des quantités vivant dans \mathbb{R}^n , qui est un espace plat, nous écrirons indifféremment les coordonnées en indice ou en exposant. Dans ce cas, nous utiliserons les notations suivantes.

Définition 5.1.1. Soient $n \geq 1$, et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Pour $f, g \in \mathcal{C}^2(\Omega \rightarrow \mathbb{R})$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq k \leq n$, nous écrivons

$f_i = \partial_{x_i} f,$	
$f_{ij} = \partial_{x_i} \partial_{x_j} f,$	
$D(f) = (f_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{C}^1(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n)$	le gradient de f ,
$H(f) = (f_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{C}^0(\Omega \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$	la hessienne de f ,
$g \equiv f \iff$	si f et g ont le même signe sur Ω ,
$A \equiv B \iff$	s'il existe $\lambda > 0$ tel que $A = \lambda B$.

Nous assimilons les polynômes réels à leur fonction polynomiale sur \mathbb{R} .

Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, nous écrivons

${}^t x$	le vecteur transposé de x ,
$(x y) = {}^t x y = {}^t y x = \sum_i x_i y_i$	le produit scalaire de x et y ,
$x \otimes y = (x_i y_j)_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	le produit tensoriel de x et y ,
$x'_i = (x_1, \dots, \cancel{x_i}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$	le vecteur x privé de sa i -ième coordonnée,
$(e_i)_{1 \leq i \leq n}$	la base canonique de \mathbb{R}^n .
$\mathbb{I} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n,$	
$\text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$	

En l'absence d'ambiguïté, \mathbb{I} désignera toujours $(1, \dots, 1)$ quelle que soit la dimension. Nous notons Δ_+^* et appelons **diagonale** le demi-axe diagonal ouvert positif :

$$\Delta_+^* = \mathbb{R}_+^* \cdot \mathbb{I} = \{(t, \dots, t) \in \mathbb{R}^n \mid t > 0\} \subset \Gamma_n.$$

5.1. INTRODUCTION

Nous écrivons, en reprenant les notations du paragraphe 4.4.2,

$$\begin{array}{rcl}
 f_{\vec{a}} & = a_0 + a_1\sigma_1 + \dots + a_p\sigma_p & \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n], \\
 P_{\vec{a}} & = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p & \in \mathbb{R}[X], \\
 \hline
 \bar{f}_{\vec{a}} & = f_{\vec{a}}(X, \dots, X) = a_0 \binom{n}{0} + a_1 \binom{n}{1}X + \dots + a_p \binom{n}{p}X^p & \in \mathbb{R}[X], \\
 \tilde{P}_{\vec{a}} & = X^p P_{\vec{a}} \left(\frac{1}{X} \right) = a_p + a_{p-1}X + \dots + a_0X^p & \in \mathbb{R}[X]. \\
 \hline
 \end{array}$$

Nous omettons l'indice \vec{a} en l'absence d'ambiguïté.

Enfin, introduisons les trois ensembles que nous tâcherons de déterminer.

$$\begin{array}{rcl}
 \mathcal{K}_n^p & = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{R}^{p+1} \mid f_{\vec{a}}^{1/p} \text{ est concave sur } \Gamma_n \right\} \\
 \mathcal{X}_n^p & = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{R}^{p+1} \mid \bar{f}_{\vec{a}}^{1/p} \text{ est concave sur } \mathbb{R}_+^* \right\} \\
 \Xi_n^p & = \left\{ \vec{a} \in \mathbb{R}^{p+1} \mid \bar{f}_{\vec{a}} \text{ est scindé} \right\} \\
 \hline
 \end{array}$$

Définition 5.1.2. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , u une fonction $\mathcal{C}^0(\Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*)$, et $\mu > 0$. Nous disons que u est μ -concave lorsque u^μ est concave.

Évidemment, $\mathcal{K}_n^p \subset \mathcal{X}_n^p$. L'autre inclusion est-elle vraie? Il s'agit de notre première conjecture : la $\frac{1}{p}$ -concavité de $f_{\vec{a}}$ sur la diagonale est une condition nécessaire et suffisante à sa $\frac{1}{p}$ -concavité dans tout Γ_n .

Conjecture 1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in (\mathbb{R}_+)^{p+1}$. Alors

$$\begin{aligned}
 f_{\vec{a}} \text{ est } \frac{1}{p}\text{-concave sur } \Gamma_n & \iff f_{\vec{a}} \text{ est } \frac{1}{p}\text{-concave sur } \Delta_+^* \\
 & \iff \bar{f}_{\vec{a}} \text{ est } \frac{1}{p}\text{-concave sur } \mathbb{R}_+^*.
 \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\mathcal{K}_n^p = \mathcal{X}_n^p.$$

Nous n'avons pas encore de preuve de cette conjecture, mais pouvons démontrer cette équivalence pour quelques cas qui seront présentés dans la section 5.4.

Une version plus faible de cette conjecture peut être exprimée en fonction des racines de $\bar{f}_{\vec{a}}$.

Conjecture 2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in (\mathbb{R}_+)^{p+1}$. Alors

$$f_{\vec{a}} \text{ est } \frac{1}{p}\text{-concave sur } \Gamma_n \iff \bar{f}_{\vec{a}} \text{ est scindé sur } \mathbb{R}.$$

C'est-à-dire,

$$\Xi_n^p \subset \mathcal{K}_n^p.$$

En effet, comme le montrera la proposition 5.2.2, $\Xi_n^p \subset \mathcal{X}_n^p$.

5.1.2 Lemmes de concavité

Présentons ici deux lemmes.

Lemme 5.1.3. *Soient Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^n , u une fonction de $\mathcal{C}^2(\Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*)$, et $\mu > 0$. Alors*

$$H(u^\mu) \equiv uH(u) + (\mu - 1)D(u) \otimes D(u).$$

u étant de classe \mathcal{C}^2 , nous obtenons l'équivalence suivante :

$$u \text{ est } \mu\text{-concave sur } \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad uH(u) + (\mu - 1)D(u) \otimes D(u) \text{ est négative sur } \Omega.$$

DÉMONSTRATION. Cela vient directement du calcul de la hessienne :

$$H(u^\mu) = \mu u^{\mu-2} [uH(u) + (\mu - 1)D(u) \otimes D(u)]. \quad (5.1)$$

□

Lemme 5.1.4. *Soient Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^n , $a, b \in \mathcal{C}^2(\Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*)$, et $\alpha, \beta > 0$ tels que a est α -concave et b est β -concave.*

Alors (ab) est γ -concave, avec

$$\frac{1}{\gamma} := \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

DÉMONSTRATION. Les fonctions sont \mathcal{C}^2 , donc elles sont concaves si et seulement si leur hessienne est négative. En utilisant le lemme 5.1.3, nous pouvons calculer la hessienne de $(ab)^\gamma$:

$$\begin{aligned} H((ab)^\gamma) &\equiv abH(ab) + (\gamma - 1)D(ab) \otimes D(ab) \\ &= ab [H(a)b + D(a) \otimes D(b) + D(b) \otimes D(a) + aH(b)] \\ &\quad + (\gamma - 1) (aD(b) + D(a)b) \otimes (aD(b) + D(a)b) \\ &= b^2 [aH(a) + (\alpha - 1)D(a) \otimes D(a)] + (\gamma - \alpha)b^2 D(a) \otimes D(a) \\ &\quad + a^2 [bH(b) + (\beta - 1)D(b) \otimes D(b)] + (\gamma - \beta)a^2 D(b) \otimes D(b) \\ &\quad + ab\gamma [D(a) \otimes D(b) + D(b) \otimes D(a)] \\ &= b^2 [aH(a) + (\alpha - 1)D(a) \otimes D(a)] + a^2 [bH(b) + (\beta - 1)D(b) \otimes D(b)] \\ &\quad - \frac{1}{\alpha + \beta} (b\alpha D(a) - a\beta D(b)) \otimes (b\alpha D(a) - a\beta D(b)) \end{aligned}$$

qui est la somme de trois matrices négatives. □

REMARQUE 13. Ce lemme bref, qui ne me semble pas formulé de cette façon dans la littérature, est analogue à l'inégalité de Hölder. Il permet parfois de se passer de l'inégalité de Hölder, comme dans la preuve du théorème 5.5.2 dans la section 5.5.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous devons présenter certaines propriétés des polynômes réels qui nous seront utiles par la suite. Mis à part la proposition 5.2.3 et le théorème 5.2.4, ce sont des résultats déjà connus.

5.2 Polynômes réels et concavité

Définition 5.2.1. Soit $P \in \mathbb{R}_+[X]$ un polynôme à coefficients positifs, de degré $\deg P = n$.

Nous disons que P vérifie

(P1) lorsque P est scindé sur \mathbb{R} (et donc à racines négatives) ;

(P2) lorsque $PP'' + \left(\frac{1}{n} - 1\right) P'^2 \leq 0$ sur \mathbb{R} ;

(P3) lorsque P est $\frac{1}{n}$ -concave sur \mathbb{R}_+^* .

Proposition 5.2.2.

$$(P1) \quad \implies \quad (P2) \quad \implies \quad (P3).$$

DÉMONSTRATION. La seconde implication provient directement du lemme 5.1.3.

Quant à la première, nous présentons ici une preuve classique s'appuyant sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Supposons que $P = c(X + \mu_1) \dots (X + \mu_n)$. Dans un premier temps, nous calculons que

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X + \mu_k},$$

et

$$\left(\frac{P'}{P}\right)' = \frac{PP'' - P'^2}{P^2} = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{(X + \mu_k)^2}.$$

Puis,

$$\begin{aligned} PP'' + \left(\frac{1}{n} - 1\right) P'^2 &\equiv n \frac{PP'' - P'^2}{P^2} + \left(\frac{P'}{P}\right)^2 \\ &= -n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(X + \mu_k)^2} + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{X + \mu_k}\right)^2 \\ &\leq 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et donc (P2). □

DÉMONSTRATION. Voici une autre façon de prouver directement $(P1) \implies (P3)$, en utilisant notre lemme 5.1.4.

Il existe $c, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$P = c(X + \mu_1) \dots (X + \mu_n).$$

Nous raisonnons par récurrence sur le degré de P .

★ Pour $n = 1$, $P = c(X + \mu_1)$ est une fonction affine, donc concave sur \mathbb{R}_+^* .

★ Pour $n \geq 2$, le polynôme $c(X + \mu_1) \dots (X + \mu_{n-1})$ est scindé sur \mathbb{R} , donc par hypothèse de récurrence

$$[c(X + \mu_1) \dots (X + \mu_{n-1})]^{1/n-1} \text{ est concave sur } \mathbb{R}_+^*.$$

La fonction $X + \mu_n$ est concave sur \mathbb{R}_+^* , donc nous pouvons appliquer le lemme 5.1.4 et

$$(c(X + \mu_1) \dots (X + \mu_{n-1})(X + \mu_n))^\gamma \text{ est concave,}$$

$$\text{avec } \gamma = \frac{1}{\frac{1}{1/(n-1)} + 1} = \frac{1}{n}.$$

□

Il me semble que $(P2) \implies (P1)$, mais je n'ai pas réussi à la prouver. Il s'agit donc d'une conjecture.

Conjecture 3. Soit $P \in \mathbb{R}_+[X]$ un polynôme à coefficients positifs, $\deg P = n$. Alors

$$P \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \iff PP'' + \left(\frac{1}{n} - 1\right) P'^2 \leq 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

L'un des indices pour cette conjecture est l'énoncé suivant.

Proposition 5.2.3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg P = n$, et soit $\tilde{P} := X^n P \left(\frac{1}{X}\right)$. Alors

$$(P^{1/n})'' \equiv (\tilde{P}^{1/n})''.$$

Cela implique que P est $\frac{1}{n}$ -concave sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si \tilde{P} l'est.

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un simple calcul :

$$\begin{aligned} \tilde{P}' &= nX^{n-1}P\left(\frac{1}{X}\right) - X^{n-2}P'\left(\frac{1}{X}\right), \\ \tilde{P}'' &= n(n-1)X^{n-2}P\left(\frac{1}{X}\right) - 2(n-1)X^{n-3}P'\left(\frac{1}{X}\right) + X^{n-4}P''\left(\frac{1}{X}\right), \end{aligned}$$

donc

$$\tilde{P}\tilde{P}'' + \left(\frac{1}{n} - 1\right)\tilde{P}'^2 = X^{2(n-2)} \left[PP'' + \left(\frac{1}{n} - 1\right) P'^2 \right].$$

□

Nous savons que P est scindé sur \mathbb{R} si et seulement si \tilde{P} l'est, donc il ne serait pas surprenant que les deux équivalences, entre la $\frac{1}{n}$ -concavité des polynômes et la réalité de leurs racines, soient liées l'une à l'autre.

Malgré tout, nous sommes capables de prouver cette conjecture pour $\deg P \leq 3$.

Théorème 5.2.4. *Soit $P \in \mathbb{R}_+[X]$, $\deg P \leq 2$. Alors*

$$(P1) \iff (P2) \iff (P3).$$

Soit $P \in \mathbb{R}_+[X]$, $\deg P = 3$. Alors

$$(P1) \iff (P2).$$

DÉMONSTRATION. \star Pour $n = 1$, (P1), (P2) et (P3) sont toujours vrais.

\star Pour $n = 2$, soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$, et $\Delta_P := a_1^2 - 4a_0a_2$ son discriminant. Alors

$$\begin{aligned} P' &= a_1 + 2a_2X, \\ P'' &= 2a_2, \\ PP'' + \left(\frac{1}{2} - 1\right)P'^2 &= -\frac{\Delta_P}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(P1) \iff \Delta_P \geq 0 \iff (P2) \iff (P3).$$

\star Pour $n = 3$, soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. Nous appliquons la méthode de Cardan, en posant

$$\begin{aligned} Y &:= X + \frac{a_2}{3a_3}, \\ Q &:= Y^3 + pY + q, \end{aligned}$$

avec

$$p := \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2^2}{3a_3^2}, \quad q := \frac{a_0}{a_3} - \frac{a_1a_2}{3a_3^2} + \frac{2a_2^3}{27a_3^3},$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_Q &:= -(4p^3 + 27q^2) \\ &= a_1^2a_2^2 + 18a_0a_1a_2a_3 - 27a_0^2a_3^2 - 4a_1^3a_3 - 4a_2^3a_0 \end{aligned}$$

le discriminant de Q .

Alors $P(X) = a_3Q\left(X + \frac{a_2}{3a_3}\right)$, donc P est scindé sur \mathbb{R} si et seulement si Q l'est.

Donc

$$(P1) \iff (Q1) \iff \Delta_Q \geq 0.$$

De plus,

$$\left[PP'' + \left(\frac{1}{3} - 1\right)P'^2\right](X) = a_3^2 \left[QQ'' + \left(\frac{1}{3} - 1\right)Q'^2\right]\left(X + \frac{a_2}{3a_3}\right),$$

d'où

$$(P2) \iff (Q2).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} Q' &= 3Y^2 + p, \\ Q'' &= 6Y, \\ QQ'' + \left(\frac{1}{3} - 1\right) Q'^2 &= 2pY^2 + 6qY - \frac{2}{3}p^2. \end{aligned}$$

Calculons le discriminant de ce polynôme de degré 2 :

$$\delta_Q = 36q^2 + \frac{16}{3}p^3 = -\frac{4}{3}\Delta_Q.$$

Supposons que (Q2) est vraie, ie. $2pY^2 + 6qY - \frac{2}{3}p^2 \leq 0$ sur \mathbb{R} . Nécessairement, $p \leq 0$ et $\delta_Q \leq 0$, donc $\Delta_Q \geq 0$, et (Q1). □

REMARQUE 14. La réciproque (P3) \implies (P2) n'est plus vraie à partir de $\deg P = 3$. En effet, soit

$$P = X^3 + X^2 + \frac{1}{3}X.$$

Alors $P = X \left(X^2 + X + \frac{1}{3} \right)$ n'est pas scindé. Or,

$$PP'' + \left(\frac{1}{3} - 1\right) P'^2 = -\frac{2}{27}(3X + 1).$$

Donc $(P^{1/3})'' \equiv -\frac{2}{27}(3X + 1) < 0$ sur \mathbb{R}_+^* .

5.3 Polynômes scindés sur \mathbb{R}

5.3.1 Nombre de racines réelles

Pour prouver que P est scindé sur \mathbb{R} , nous avons utilisé la propriété très pratique des polynômes de petit degré : le fait qu'ils soient scindés sur \mathbb{R} est équivalent à la positivité d'une seule quantité, le discriminant. Cet outil, simple, ne peut plus être utilisé pour $\deg P \geq 4$. Il est toujours possible de définir un discriminant, et sa positivité reste une condition nécessaire, mais non plus suffisante. Le discriminant est une expression algébrique en les coefficients du polynôme, qui est strictement positive lorsque le polynôme est scindé sur \mathbb{R} à racines simples, s'annule quand deux racines au moins sont égales, et change de signe quand une paire de racines réelles devient strictement complexe ou inversement. Ainsi, le signe du discriminant ne donne qu'une information sur le nombre de racines réelles modulo 4.

La détermination complète du nombre de racines réelles nécessite un système de discrimination plus complexe ; on peut en trouver dans [96], [97], [54] par exemple.

Avant ces résultats plus calculatoires, il existait des théorèmes classiques pour déterminer le nombre de racines réelles d'un polynôme. Le théorème de Sturm (1829), l'un des plus

anciens, donne le nombre de racines dans un intervalle donné, à partir d'arguments analytiques. J'ai choisi de présenter ici deux autres théorèmes, sans restriction à un intervalle, qui s'appuient sur des arguments algébriques.

5.3.2 Caractérisations algébriques

Théorème 5.3.1 (1968, [19], [25]). Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg P = n$, et

$$L(P, X, Y) := \frac{P(X)P'(Y) - P(Y)P'(X)}{X - Y} \in \mathbb{R}[X, Y].$$

Ce polynôme est symétrique en (X, Y) , de coefficients

$$L(P, X, Y) =: \sum_{i,j=1}^n l_{ij} X^{i-1} Y^{j-1}.$$

Introduisons la forme quadratique suivante, appliquée au vecteur $v = (v_1, \dots, v_n)$,

$$Q(P, v) := \sum_{i,j=1}^n l_{ij} v_i v_j.$$

Soit (s, t) la signature de Q . Alors le nombre de racines réelles distinctes de P est $s - t$, et le nombre de racines complexes distinctes $s + t$.

Ainsi, P est scindé sur \mathbb{R} si et seulement si la signature de Q est $(s, 0)$.

Dans le cas que nous étudierons, tous les coefficients de P sont supposés positifs, donc toutes les racines réelles devront être négatives. Avec cette restriction, un autre théorème s'applique.

Définition 5.3.2. Une suite $(a_0, a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite **totale-ment positive**, ou une *suite de fréquence de Pólya*, si et seulement si tous les mineurs de la matrice infinie

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

sont positifs.

Théorème 5.3.3 (1951, [1]). Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{R}_+[X]$, avec $a_0 \neq 0$. Alors P est scindé sur \mathbb{R} si et seulement si la suite $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ est totale-ment positive.

5.3.3 Log-concavité

Nous évoquons ici un critère nécessaire pour qu'un polynôme soit scindé sur \mathbb{R} . Il est basé sur les inégalités de Newton.

Définition 5.3.4. Une suite $(a_0, a_1, a_2 \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite **log-concave** lorsque, pour tout $1 \leq k$,

$$a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2.$$

Un polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$ est dit log-concave lorsque la suite $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ est log-concave.

Théorème 5.3.5 (1707, Newton). Soient $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^n$, et $\sigma_k := \sigma_k(\mu)$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Alors pour tout $1 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{\sigma_{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{\sigma_{k+1}}{\binom{n}{k+1}} \leq \left(\frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}} \right)^2.$$

Ceci implique une inégalité plus faible :

$$\sigma_{k-1}\sigma_{k+1} \leq (\sigma_k)^2.$$

Corollaire 5.3.6. Soit $P \in \mathbb{R}_+[X]$. Si P est scindé, alors P est log-concave.

5.3.4 Critère de Kurtz

La log-concavité, toutefois, n'est pas suffisante pour qu'un polynôme soit scindé. Mais il existe des conditions suffisantes, telles que le critère de Kurtz, qui est une sorte de log-concavité plus forte.

Théorème 5.3.7 (1992, [44]). Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{R}_+[X]$. Si pour tout $1 \leq k \leq n-1$

$$4a_{k-1}a_{k+1} < a_k^2,$$

alors toutes les racines de P sont réelles et distinctes.

D'un autre côté il n'existe pas de condition plus faible, de la forme d'un log-concavité, qui fonctionne.

Théorème 5.3.8 (1992, [44]). Pour tout $\varepsilon > 0$, et $n \leq 2$, il existe un polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{R}_+[X]$ qui vérifie

$$(4 - \varepsilon)a_{k-1}a_{k+1} < a_k^2$$

pour tout $1 \leq k \leq n-1$ et qui a pourtant des racines strictement complexes.

Nous pouvons maintenant revenir à notre problème principal, à savoir la concavité des $f_{\vec{a}}$.

5.4 Concavité et déterminant

L'exemple d'un seul $\sigma_k^\alpha, \alpha > 0$, nous enseigne que la fonction est « moins concave » sur la diagonale Δ_+^* . Pour être plus précis, rappelons le théorème 4.4.5 de M. Marcus et L. Lopes :

$$\sigma_k \text{ est } \frac{1}{k}\text{-concave sur } \Gamma_k.$$

D'après le lemme 5.1.3,

$$H(\sigma_k^\alpha) \equiv \sigma_k^{1/k} H(\sigma_k^{1/k}) + (k\alpha - 1) D(\sigma_k^{1/k}) \otimes D(\sigma_k^{1/k}),$$

qui est négative lorsque $\alpha < 1/k$. Réciproquement, si $\alpha > 1/k$, σ_k^α ne peut être concave sur Δ_+^* où il se réduit à $t \mapsto \binom{n}{k}^\alpha t^{k\alpha}$.

Je pense que ce résultat vaut aussi bien en général pour $f_{\vec{a}}$.

Conjecture 1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in (\mathbb{R}_+)^{p+1}$. Alors

$$\begin{aligned} f_{\vec{a}} \text{ est } \frac{1}{p}\text{-concave sur } \Gamma_n &\iff f_{\vec{a}} \text{ est } \frac{1}{p}\text{-concave sur } \Delta_+^* \\ &\iff \bar{f}_{\vec{a}} \text{ est } \frac{1}{p}\text{-concave sur } \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\mathcal{K}_n^p = \mathcal{X}_n^p.$$

À l'heure actuelle, je n'ai pu prouver cette conjecture que pour certains cas particuliers. Une première façon d'étudier la concavité de $f_{\vec{a}}^{1/p}$ est de calculer le déterminant de sa hessienne.

5.4.1 $p = 2$

Dans ce paragraphe, nous le ferons pour $p = 2$ et prouverons la conjecture 1 dans ce cas.

Nous aurons besoin d'un lemme calculatoire.

Lemme 5.4.1. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $f \in \mathcal{C}^2(\Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*)$, $\alpha > 0$. Alors

$$\det H(f^\alpha) \equiv f \det H + (\alpha - 1)^t D(\text{com } H) D. \quad (5.2)$$

DÉMONSTRATION. Nous savons que

$$H(f^\alpha) \equiv f H(f) + (\alpha - 1) D(f) \otimes D(f).$$

Nous posons

$$H := H(f) = \left(H_1 \mid \dots \mid H_n \right), \quad H_j := \begin{pmatrix} f_{1j} \\ \vdots \\ f_{nj} \end{pmatrix}, \quad D := D(f) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \det H(f^\alpha) &\equiv \det [fH + (\alpha - 1)D \otimes D] \\ &= \det [fH_1 + (\alpha - 1)f_1D \mid \dots \mid fH_n + (\alpha - 1)f_nD] \\ &= f^n \det H + f^{n-1}(\alpha - 1) \sum_{j=1}^n \det [H_1 \mid \dots \mid f_jD \mid \dots \mid H_n]. \end{aligned}$$

Déterminons chacun des n termes de cette somme, en développant le long de la j -ième ligne :

$$\begin{aligned} \det [H_1 \mid \dots \mid f_jD \mid \dots \mid H_n] &= f_j \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} f_i \det \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & \cancel{f_{1j}} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cancel{f_{i1}} & \dots & \cancel{f_{ij}} & \dots & \cancel{f_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & \cancel{f_{nj}} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \\ &= f_j \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} f_i \bar{H}_{ij}, \end{aligned}$$

où \bar{H}_{ij} est le mineur de H . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \det [H_1 \mid \dots \mid f_jD \mid \dots \mid H_n] &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_j f_i (-1)^{i+j} \bar{H}_{ij} \\ &= {}^t D (\text{com } H) D, \end{aligned}$$

ce qui donne l'expression attendue. □

Cette formule engendre le résultat suivant.

Théorème 5.4.2. *Soit $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+)^3$. On pose*

$$f_{\vec{a}} := a_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_n],$$

et

$$\bar{f}_{\vec{a}}(X) := f_{\vec{a}}(X, \dots, X) = a_0 \binom{n}{0} + a_1 \binom{n}{1} X + a_2 \binom{n}{2} X^2 \in \mathbb{R}_+[X].$$

Alors

$$\vec{a} \in \mathcal{K}_n^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{f}_{\vec{a}} \text{ est scindé sur } \mathbb{R}.$$

En d'autres termes,

$$\sqrt{a_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2} \text{ est concave sur } \Gamma_n \quad \Longleftrightarrow \quad na_1^2 - 2(n-1)a_0a_2 \geq 0.$$

REMARQUE 15. À cause du théorème 5.2.4, ceci montre la conjecture 1 pour $p = 2$.

5.4. CONCAVITÉ ET DÉTERMINANT

DÉMONSTRATION. Si $a_2 = 0$, $f_{\vec{a}}$ est affine et toutes les assertions sont vraies.

Supposons que $a_2 > 0$. En utilisant le lemme 5.4.1 et en prenant $f = f_{\vec{a}}$, $\Omega = \Gamma_n$, nous obtenons

$$D(x) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2(\sigma_1(x) - x_1) \\ \vdots \\ a_1 + a_2(\sigma_1(x) - x_n) \end{pmatrix} = (a_1 + a_2\sigma_1(x))\mathbb{I} - a_2x,$$

$$H(x) = a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\det H(f^\alpha) \equiv f \det H + (\alpha - 1)^t D(\text{com } H)D.$$

Il s'agit d'un résultat classique que $H(x)$ peut être diagonalisée dans une base ortho-normée en

$$a_2 \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\det H(x) = a_2^n (-1)^{n-1} (n-1)$. De plus, on peut vérifier que

$$H(x)^{-1} = \frac{1}{(n-1)a_2} (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - (n-1)\text{Id}).$$

Donc

$$\begin{aligned} {}^t D(\text{com } H)D &= {}^t D({}^t \text{com } H)D \\ &= {}^t D(\det H)H^{-1}D \\ &= {}^t D[(-a_2)^{n-1} (\mathbb{I}^t \mathbb{I} - (n-1)\text{Id})] D \\ &= (-a_2)^{n-1} \left[({}^t \mathbb{I}D)^2 - (n-1){}^t DD \right] \\ &= (-a_2)^{n-1} \left[\left(\sum_{i=1}^n f_i \right)^2 - (n-1) \sum_{i=1}^n f_i^2 \right]. \end{aligned}$$

Alors,

$$\det H(f^\alpha) \equiv (-a_2)^{n-1} \left((n-1)a_2 f + (\alpha - 1) \left[\left(\sum_{i=1}^n f_i \right)^2 - (n-1) \sum_{i=1}^n f_i^2 \right] \right).$$

Or $f_i(x) = a_1 + a_2\sigma_1(x) - a_2x_i$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_i(x)^2 &= a_1^2 + (n-1)(a_1 + a_2\sigma_1(x))^2 - 2a_2^2\sigma_2(x), \\ \left(\sum_{i=1}^n f_i(x)\right)^2 &= (na_1 + (n-1)a_2\sigma_1(x))^2 \\ &= n^2a_1^2 + 2n(n-1)a_1a_2\sigma_1(x) + (n-1)^2a_2^2\sigma_1(x)^2, \\ \left(\sum_{i=1}^n f_i(x)\right)^2 - (n-1)\sum_{i=1}^n f_i(x)^2 &= na_1^2 + 2(n-1)a_1a_2\sigma_1(x) + 2(n-1)a_2^2\sigma_2(x). \end{aligned}$$

Finalement, si nous prenons $\alpha = 1/2$,

$$\begin{aligned} \det H(f^{1/2})(x) &\equiv (-a_2)^{n-1} \left((n-1)a_2(a_0 + a_1\sigma_1(x) + a_2\sigma_2(x)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [na_1^2 + 2(n-1)a_1a_2\sigma_1(x) + 2(n-1)a_2^2\sigma_2(x)] \right) \\ &= \frac{1}{2}(-a_2)^{n-1} [2(n-1)a_0a_2 - na_1^2]. \end{aligned}$$

Ainsi, si $na_1^2 - 2(n-1)a_0a_2 > 0$, $\det H(f^{1/2})$ a un signe strict constant, qui est la parité de n . Ses valeurs propres ne s'annulent pas sur Γ_n , qui est un ensemble connexe, donc la concavité stricte de $f^{1/2}$ est constante. Pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} H(f^{1/2})(t \cdot \mathbb{I}) &\equiv f(t)H(f)(t) - \frac{1}{2}D(f)(t) \otimes D(f)(t) \\ &= \left(a_0 + a_1nt + a_2 \frac{n(n-1)}{2}t^2 \right) a_2H(t \cdot \mathbb{I}) - \frac{1}{2}(a_1 + a_2(n-1)t)^2 \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \\ &\underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a_2^2}{2}(n-1) [n(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - \text{Id}) - (n-1)\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}] t^2 \\ &\equiv \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - n\text{Id}. \end{aligned}$$

Soit $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculons

$$\begin{aligned} {}^t u(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - n\text{Id})u &= (u|\mathbb{I})^2 - (\mathbb{I}|\mathbb{I})(u|u) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi $H(f^{1/2})$ est une matrice négative en $t \cdot \mathbb{I}$ pour t suffisamment grand; et donc négative partout sur Γ_n .

À l'inverse, si $na_1^2 - 2(n-1)a_0a_2 < 0$, $\det H(f^{1/2})$ a un signe strict constant, qui est l'opposé de la parité de n . Les valeurs propres de $H(f^{1/2})$ ne peuvent être toutes négatives, et $f^{1/2}$ ne peut pas être concave sur Γ_n .

Le cas $na_1^2 - 2(n-1)a_0a_2 = 0$ s'obtient par passage à la limite, les fonctions concaves formant un ensemble fermé. \square

5.4. CONCAVITÉ ET DÉTERMINANT

Il n'existe pas encore de formule utilisable pour le déterminant de la hessienne du cas général $f_{\vec{a}}^{1/p}$. Je suis parvenu à calculer ce déterminant pour deux autres cas. Dans le premier cas, $p = 3$, la complexité du résultat obtenu ne permet pas de conclure sur la concavité de $f_{\vec{a}}^{1/3}$.

5.4.2 $p = 3$

Nous suivons le même raisonnement que celui du théorème 5.4.2 et calculons le déterminant de la hessienne pour $p = 3$.

Proposition 5.4.3. *Soit $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in (\mathbb{R}_+)^4$. Posons*

$$f := f_{\vec{a}} = a_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_n].$$

Alors

$$\det H(f^{1/3})(x) \equiv -\frac{1}{6}(-2f(x))^{n-1} \left[\frac{\sigma_n(y)}{\sigma_1(y)} \left(\sigma_1(y) \sum_i \frac{f_i(x)}{y_i} - (n-2)\sigma_1(D(f)(x)) \right)^2 + ((n-2)^2\sigma_n(y) - \sigma_1(y)\sigma_{n-1}(y)) \left(\sum_i \frac{f_i(x)^2}{y_i} - \frac{\sigma_1(D(f)(x))}{\sigma_1(y)} + 3f(x) \right) \right],$$

où

$$y = \frac{a_2 + a_3\sigma_1(x)}{2}\mathbb{I} - a_3x,$$

DÉMONSTRATION. Nous reprenons les notations du lemme 5.4.1. Nous avons

$$H_{ii}(x) = 0, \quad H_{i \neq j}(x) = a_2 + a_3(\sigma_1(x) - x_i - x_j).$$

Nous posons $y_i = \frac{a_2 + a_3\sigma_1(x)}{2} - a_3x_i$, de sorte que $H_{i \neq j}(x) = y_i + y_j$, ie.

$$H(x) = \begin{pmatrix} 0 & y_1 + y_2 & \dots & y_1 + y_n \\ y_2 + y_1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & y_{n-1} + y_n \\ y_n + y_1 & \dots & y_n + y_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = y \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes y - 2 \text{Diag}(y_1, \dots, y_n).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \det H(x) &= \det[y_1\mathbb{I} + y - 2y_1e_1 \mid \dots \mid y_n\mathbb{I} + y - 2y_ne_n] \\ &= \det[-2y_1e_1 \mid \dots \mid -2y_ne_n] \\ &\quad + \sum_j \det[-2y_1e_1 \mid \dots \mid y \mid \dots \mid -2y_ne_n] \\ &\quad + \sum_j \det[-2y_1e_1 \mid \dots \mid y_j\mathbb{I} \mid \dots \mid -2y_ne_n] \\ &\quad + \sum_{i \neq j} \det[-2y_1e_1 \mid \dots \mid y_i\mathbb{I} \mid \dots \mid y \mid \dots \mid -2y_ne_n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \det H(x) &= (-2)^n y_1 \dots y_n + 2 \sum_j (-2)^{n-1} y_1 \dots y_n \\
 &\quad + \sum_{i \neq j} (-2)^{n-2} y_1 \dots y_{i-1} (y_i y_j - y_i^2) y_{i+1} \dots y_{j-1} y_{j+1} \dots y_n \\
 &= y_1 \dots y_n \left[(-2)^n + 2n(-2)^{n-1} + n(n-1)(-2)^{n-2} - (-2)^{n-2} \sum_{i \neq j} \frac{y_i}{y_j} \right] \\
 &= (-2)^{n-2} [(n-2)^2 \sigma_n(y) - \sigma_1(y) \sigma_{n-1}(y)].
 \end{aligned}$$

Nous avons à calculer la comatrice de $H(x)$. Commençons par $i = 1, j = n$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \bar{H}_{1n}(x) &= \det \begin{pmatrix} y_2 + y_1 & 0 & y_2 + y_3 & \dots & y_2 + y_{n-1} \\ y_3 + y_1 & y_3 + y_2 & 0 & \dots & \vdots \\ & & y_4 + y_3 & \ddots & y_{n-2} + y_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ y_n + y_1 & y_n + y_2 & \dots & y_n + y_{n-2} & y_n + y_{n-1} \end{pmatrix} \\
 &= \det[y'_1 + y_1 \mathbb{I} \mid y'_1 + y_2 \mathbb{I} - 2y_2 e_1 \mid \dots \mid y'_1 + y_{n-1} \mathbb{I} - 2y_{n-1} e_{n-2}] \\
 &= \det[y'_1 \mid -2y_2 e_1 \mid \dots \mid -2y_{n-1} e_{n-2}] \\
 &\quad + \sum_{j=2}^{n-1} \det[y'_1 \mid -2y_2 e_1 \mid \dots \mid y_j \mathbb{I} \mid \dots \mid -2y_{n-1} e_{n-2}] \\
 &\quad + \sum_{j=2}^{n-1} \det[y_1 \mathbb{I} \mid -2y_2 e_1 \mid \dots \mid y'_1 \mid \dots \mid -2y_{n-1} e_{n-2}] \\
 &\quad + \det[y_1 \mathbb{I} \mid -2y_2 e_1 \mid \dots \mid -2y_{n-1} e_{n-2}] \\
 &= (-1)^n y_n (-2y_1) \dots (-2y_{n-1}) \\
 &\quad + \sum_{j=2}^{n-1} (-2y_2) (-1)^{1+2} (-2y_3) (-1)^{1+2} \dots (y_j^2 - y_n y_j) \dots (-2y_{n-1}) (-1)^{1+2} \\
 &\quad + (-1) \sum_{j=2}^{n-1} (-2y_2) (-1)^{1+2} (-2y_3) (-1)^{1+2} \dots (y_j y_1 - y_n y_1) \dots (-2y_{n-1}) (-1)^{1+2} \\
 &\quad + (-1)^n y_1 (-2y_2) \dots (-2y_{n-1}) \\
 &= 2^{n-2} y_2 \dots y_n + 2^{n-2} y_1 \dots y_{n-1} \\
 &\quad + 2^{n-3} \sum_{j=2}^{n-1} y_2 \dots y_{n-1} (y_j - y_n) \left(1 - \frac{y_1}{y_j} \right) \\
 &= 2^{n-3} y_2 \dots y_{n-1} \left[2y_n + 2y_1 + \sum_{j=2}^{n-1} \left(y_j - y_n - y_1 + \frac{y_1 y_n}{y_j} \right) \right] \\
 &= 2^{n-3} \left[\frac{\sigma_n(y) \sigma_1(y)}{y_1 y_n} - (n-2) \sigma_n(y) \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_n} \right) + \sigma_{n-1}(y) \right].
 \end{aligned}$$

Des calculs semblables valent pour tous $i \neq j$:

$$\bar{H}_{ij}(x) = (-1)^{i+j}(-2)^{n-3} \left[\frac{\sigma_n(y)\sigma_1(y)}{y_i y_j} - (n-2)\sigma_n(y) \left(\frac{1}{y_i} + \frac{1}{y_j} \right) + \sigma_{n-1}(y) \right],$$

alors que pour $i = j$ nous retrouvons la même forme que pour le déterminant de H :

$$\bar{H}_{ii}(x) = (-2)^{n-3} [(n-3)^2\sigma_{n-1}(y'_i) - \sigma_1(y'_i)\sigma_{n-2}(y'_i)].$$

Nous avons vu en (5.2) que

$$\det H(f^\alpha) \equiv f \det H + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i f_j (-1)^{i+j} \bar{H}_{ij}.$$

Nous calculons donc

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i(x) f_j(x) (-1)^{i+j} \bar{H}_{ij}(x) \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(x) \left[\sum_{j \neq i} (-1)^{i+j} \left(f_j(x) (-1)^{i+j} (-2)^{n-3} \right. \right. \\ & \quad \times \left. \left[\frac{\sigma_n(y)\sigma_1(y)}{y_i y_j} - (n-2)\sigma_n(y) \left(\frac{1}{y_i} + \frac{1}{y_j} \right) + \sigma_{n-1}(y) \right] \right) \\ & \quad \left. + (-1)^{i+i} f_i(x) (-1)^{i+i} (-2)^{n-3} [(n-3)^2\sigma_{n-1}(y'_i) - \sigma_1(y'_i)\sigma_{n-2}(y'_i)] \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (-2)^{n-3} f_i(x) \left[\left(\sum_{j \neq i} \frac{f_j(x)}{y_j} \right) \left(\frac{\sigma_n(y)\sigma_1(y)}{y_i} - (n-2)\sigma_n(y) \right) \right. \\ & \quad + \left(\sum_{j \neq i} f_j(x) \right) \left(\sigma_{n-1}(y) - (n-2) \frac{\sigma_n(y)}{y_i} \right) \\ & \quad \left. + f_i(x) [(n-3)^2\sigma_{n-1}(y'_i) - \sigma_1(y'_i)\sigma_{n-2}(y'_i)] \right] \\ &= (-2)^{n-3} \sum_{i=1}^n f_i(x) \left[\left(\sum_j \frac{f_j(x)}{y_j} - \frac{f_i(x)}{y_i} \right) \left(\frac{\sigma_n(y)\sigma_1(y)}{y_i} - (n-2)\sigma_n(y) \right) \right. \\ & \quad + (\sigma_1(D(f)(x)) - f_i(x)) \left(\sigma_{n-1}(y) - (n-2) \frac{\sigma_n(y)}{y_i} \right) \\ & \quad \left. + f_i(x) \left[(n-3)^2\sigma_{n-1}(y'_i) - (\sigma_1(y) - y_i) \frac{\sigma_{n-1}(y) - \sigma_{n-1}(y'_i)}{y_i} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-2)^{n-3} \left(\sigma_n(y) \sigma_1(y) \left[\left(\sum_i \frac{f_i(x)}{y_i} \right)^2 - \sum_i \frac{f_i(x)^2}{y_i^2} \right] \right. \\
 &\quad - (n-2) \sigma_1(D(f)(x)) \sigma_n(y) \sum_j \frac{f_j(x)}{y_j} \\
 &\quad + (n-2) \sigma_n(y) \sum_i \frac{f_i(x)^2}{y_i} - (n-2) \sigma_n(y) \left(\sigma_1(D(f)(x)) \sum_i \frac{f_i(x)}{y_i} - \sum_i \frac{f_i(x)^2}{y_i} \right) \\
 &\quad + \sigma_1(D(f)(x))^2 \sigma_{n-1}(y) - \sigma_{n-1}(y) \sum_i \frac{f_i(x)^2}{y_i} + (n-3)^2 \sigma_n(y) \sum_i \frac{f_i(x)^2}{y_i} \\
 &\quad - \left(\sigma_1(y) \sigma_{n-1}(y) \sum_i \frac{f_i(x)^2}{y_i} - \sigma_1(y) \sigma_n(y) \sum_i \frac{f_i(x)^2}{y_i^2} \right. \\
 &\quad \quad \left. - \sigma_{n-1}(y) \sum_i \frac{f_i(x)^2}{y_i} + \sigma_n(y) \sum_i \frac{f_i(x)^2}{y_i} \right) \\
 &= (-2)^{n-3} \left[\sigma_n(y) \sigma_1(y) \left(\sum_i \frac{f_i(x)}{y_i} \right)^2 \right. \\
 &\quad - 2(n-2) \left(\sum_i \frac{f_i(x)}{y_i} \right) \sigma_n(y) \sigma_1(D(f)(x)) + \sigma_{n-1}(y) \sigma_1(D(f)(x))^2 \\
 &\quad \left. + ((n-2)^2 \sigma_n(y) - \sigma_1(y) \sigma_{n-1}(y)) \sum_i \frac{f_i(x)^2}{y_i} \right] \\
 &= (-2)^{n-3} \left[\frac{\sigma_n(y)}{\sigma_1(y)} \left(\sigma_1(y) \sum_i \frac{f_i(x)}{y_i} - (n-2) \sigma_1(D(f)(x)) \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + ((n-2)^2 \sigma_n(y) - \sigma_1(y) \sigma_{n-1}(y)) \left[\sum_i \frac{f_i^2}{y_i} - \frac{\sigma_1(D(f)(x))^2}{\sigma_1(y)} \right] \right].
 \end{aligned}$$

En ajoutant $\det H$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \det H(f^\alpha)(x) &\equiv f(x)^n \det H(x) + (\alpha - 1)f(x)^{n-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i(x) f_j(x) (-1)^{i+j} \bar{H}_{ij}(x) \\
 &= f(x)^n (-2)^{n-2} [(n-2)^2 \sigma_n(y) - \sigma_1(y) \sigma_{n-1}(y)] \\
 &\quad + (\alpha - 1) f(x)^{n-1} (-2)^{n-3} \left[\frac{\sigma_n(y)}{\sigma_1(y)} \left(\sigma_1(y) \sum_i \frac{f_i(x)}{y_i} - (n-2) \sigma_1(D(f)(x)) \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + ((n-2)^2 \sigma_n(y) - \sigma_1(y) \sigma_{n-1}(y)) \left[\sum_i \frac{f_i(x)^2}{y_i} - \frac{\sigma_1(D(f)(x))^2}{\sigma_1(y)} \right] \right] \\
 &= (-2f(x))^{n-1} \frac{\alpha-1}{4} \left[\frac{\sigma_n(y)}{\sigma_1(y)} \left(\sigma_1(y) \sum_i \frac{f_i(x)}{y_i} - (n-2) \sigma_1(D(f)(x)) \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + ((n-2)^2 \sigma_n(y) - \sigma_1(y) \sigma_{n-1}(y)) \left[\sum_i \frac{f_i(x)^2}{y_i} - \frac{\sigma_1(D(f)(x))^2}{\sigma_1(y)} - \frac{2}{\alpha-1} f(x) \right] \right],
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \det H(f^{1/3})(x) &\equiv -\frac{1}{6} (-2f(x))^{n-1} \left[\frac{\sigma_n(y)}{\sigma_1(y)} \left(\sum_j y_j \sum_i \frac{f_i(x)}{y_i} - (n-2) \sum_i f_i(x) \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + ((n-2)^2 \sigma_n(y) - \sigma_1(y) \sigma_{n-1}(y)) \left[\sum_i \frac{f_i(x)^2}{y_i} - \frac{(\sum_j f_j(x))^2}{\sum_i y_i} + 3f(x) \right] \right].
 \end{aligned}$$

□

5.4.3 $p = n$

Un autre déterminant calculable est celui du cas $p = n$, et $a_k = 0$ pour $1 < k < n$.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 5.4.4. *Soient $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, et*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \det [\Lambda + \mu U \otimes U + \nu V \otimes V] &= (\det \Lambda) \left[1 + \mu {}^t U \Lambda^{-1} U + \nu {}^t V \Lambda^{-1} V \right. \\
 &\quad \left. + \mu \nu \left(({}^t U \Lambda^{-1} U) ({}^t V \Lambda^{-1} V) - ({}^t U \Lambda^{-1} V)^2 \right) \right].
 \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de développer le déterminant :

$$\begin{aligned}
 \det(\Lambda + \mu U \otimes U + \nu V \otimes V) &= \det[\lambda_1 e_1 + \mu u_1 U + \nu v_1 V \mid \dots \mid \lambda_n e_n + \mu u_n U + \nu v_n V] \\
 &= \det[\lambda_1 e_1 \mid \dots \mid \lambda_n e_n] \\
 &\quad + \mu \sum_{j=1}^n \det[\lambda_1 e_1 \mid \dots \mid u_j U \mid \dots \mid \lambda_n e_n] \\
 &\quad + \nu \sum_{j=1}^n \det[\lambda_1 e_1 \mid \dots \mid v_j V \mid \dots \mid \lambda_n e_n] \\
 &\quad + \mu\nu \sum_{i \neq j} \det[\lambda_1 e_1 \mid \dots \mid u_i U \mid \dots \mid v_j V \mid \dots \mid \lambda_n e_n] \\
 &= \lambda_1 \dots \lambda_n \left[1 + \mu \sum_j \frac{u_j^2}{\lambda_j} + \nu \sum_j \frac{v_j^2}{\lambda_j} + \mu\nu \sum_{i \neq j} \frac{u_i^2 v_j^2 - u_i u_j v_i v_j}{\lambda_i \lambda_j} \right].
 \end{aligned}$$

□

Proposition 5.4.5. Soient $n \geq 3$ et $\vec{a} = (a_0, a_1, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^3$. On pose

$$f := f_{\vec{a}} = a_0 + a_1 \sigma_1 + a_n \sigma_n \in \mathbb{R}_+[X_1, \dots, X_n].$$

Alors

$$\det H(f^{1/n})(x) \equiv \frac{(-1)^n}{\sigma_n(x)^2} \left[\left(\left(\sum_i z_i \right)^2 - (n-1) \sum_i z_i^2 \right) - n f(x) a_n \sigma_n(x) \right],$$

avec

$$z_i = a_1 x_i + a_n \sigma_n.$$

DÉMONSTRATION. Nous avons

$$\det H(f^{1/n}) \equiv \det \left[fH + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) D \otimes D \right]$$

avec

$$H(x) := H(f)(x) = a_n \sigma_n(x) \begin{pmatrix} 0 & 1/x_1 x_2 & \dots & 1/x_1 x_n \\ 1/x_2 x_1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1/x_{n-1} x_n \\ 1/x_n x_1 & \dots & 1/x_n x_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a_n \sigma_n(x) [V \otimes V - T],$$

$$V := \begin{pmatrix} 1/x_1 \\ \vdots \\ 1/x_n \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1/x_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/x_n^2 \end{pmatrix},$$

$$D(x) := D(f)(x) = \begin{pmatrix} a_1 + a_n \sigma_n(x)/x_1 \\ \vdots \\ a_1 + a_n \sigma_n(x)/x_n \end{pmatrix} = a_1 \mathbb{I} + a_n \sigma_n(x) V.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \det H(f^{1/n})(x) &\equiv \det \left[f(x)a_n\sigma_n(x) (V \otimes V - T) + \left(\frac{1}{n} - 1\right) D \otimes D \right] \\ &\equiv (-1)^n \det [T + \mu D \otimes D - V \otimes V] \end{aligned}$$

où $\mu = \frac{1-1/n}{f(x)a_n\sigma_n(x)}$. En utilisant le lemme 5.4.4, nous avons

$$\begin{aligned} \det [T + \mu D \otimes D - V \otimes V] &= \det T \left[1 + \mu {}^t D T^{-1} D - {}^t V T^{-1} V \right. \\ &\quad \left. - \mu \left(({}^t D T^{-1} D) ({}^t V \Lambda^{-1} V) - ({}^t D T^{-1} V)^2 \right) \right] \\ &= \det T \left[1 + \mu \sum_i z_i^2 - n - \mu \left(n \sum_i z_i^2 - \left(\sum_i z_i \right)^2 \right) \right] \\ &= (n-1) \det T \left[\frac{1}{nf(x)a_n\sigma_n(x)} \left(\left(\sum_i z_i \right)^2 - (n-1) \sum_i z_i^2 \right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

□

REMARQUE 16. En fait, nous n'avons pas besoin de ce déterminant pour apprendre quelque chose sur la concavité $f_{\vec{a}}^{1/n}$. En effet, sa restriction à Δ_+^* n'est jamais concave, a fortiori $f_{\vec{a}}^{1/n}$ sur Γ_n non plus :

$$\bar{f}_{\vec{a}} = a_0 + na_1X + a_nX^n,$$

donc

$$\left(\bar{f}_{\vec{a}}^{1/n} \right)'' \equiv n(n-1) \left[-a_1^2 + a_0a_2X^{n-2} + (n-1)a_1a_2X^{n-1} \right],$$

qui change de signe entre 0 et $+\infty$.

Toutefois on peut constater que $\bar{f}_{\vec{a}}$ est compatible avec la conjecture 3 : $\left(\bar{f}_{\vec{a}}^{1/n} \right)' = na_1 + na_nX^{n-1}$ n'est jamais scindé pour $n \geq 3$, et d'après le lemme de Rolle $\bar{f}_{\vec{a}}^{1/n}$ non plus.

5.5 Autres arguments de concavité

5.5.1 σ_{k+1}/σ_k

Dans ce paragraphe, nous expliciterons un cas particulier de \vec{a} appartenant à \mathcal{K}_n^p , en utilisant un autre résultat de concavité de M. Marcus et L. Lopes :

Théorème 5.5.1 (1957, [59]). *Soit $0 \leq k \leq n-1$. Alors $\frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k}$ est concave sur Γ_n .*

Ce résultat a été étendu aux couples $(k, k+l)$ par J. B. MacLeod puis P. Bullen, M. Marcus :

Théorème 5.5.2 (1959, [64], 1961, [10]). *Soit $0 \leq l \leq n$, $0 \leq k \leq n-l$. Alors $\frac{\sigma_{k+l}}{\sigma_k}$ est $\frac{1}{l}$ -concave sur Γ_n .*

DÉMONSTRATION. La preuve originale de [64] est assez compliquée. La preuve de [10] est plus courte, et invoque l'inégalité de Hölder. Je présente ici une preuve encore plus courte qui utilise le lemme 5.1.4 :

$$\frac{\sigma_{k+l}}{\sigma_k} = \frac{\sigma_{k+l}}{\sigma_{k+l-1}} \frac{\sigma_{k+l-1}}{\sigma_{k+l-2}} \cdots \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k},$$

et chacun des l facteurs de ce produit est 1-concave, donc le produit est $\frac{1}{l}$ -concave. \square

Nous n'utiliserons cependant que le premier théorème, pour déduire :

Théorème 5.5.3. *Soient $0 \leq k \leq n-1$, $a_k, a_{k+1} \in \mathbb{R}_+^*$. Alors*

$$a_k \sigma_k + a_{k+1} \sigma_{k+1} \text{ est } \frac{1}{k+1}\text{-concave sur } \Gamma_n.$$

REMARQUE 17. $\bar{f}_{\vec{a}} = a_k \binom{n}{k} X^k + a_{k+1} \binom{n}{k+1} X^{k+1}$ est toujours scindé, donc ceci est compatible avec les conjectures 1 et 2.

DÉMONSTRATION. Nous écrivons

$$a_k \sigma_k + a_{k+1} \sigma_{k+1} = a_k \sigma_k \left(1 + \frac{a_{k+1}}{a_k} \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} \right).$$

Or σ_k est $\frac{1}{k}$ -concave sur Γ_n d'après le théorème 4.4.5, et σ_{k+1}/σ_k est 1-concave d'après le théorème 5.5.1 ; de même pour $1 + a_{k+1}\sigma_{k+1}/a_k\sigma_k$.

Ainsi, avec le lemme 5.1.4, nous en déduisons que $a_k \sigma_k (1 + a_{k+1}\sigma_{k+1}/a_k\sigma_k)$ est $\frac{1}{k+1}$ -concave. \square

5.5.2 Racines et σ_k

Nous utilisons maintenant le lien entre les racines d'un polynôme et les polynômes symétriques élémentaires. Nous avons besoin d'une formule :

Lemme 5.5.4. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}^l$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\sigma_k(\lambda, \mu) = \sigma_k(\lambda)\sigma_0(\mu) + \sigma_{k-1}(\lambda)\sigma_1(\mu) + \cdots + \sigma_1(\lambda)\sigma_{k-1}(\mu) + \sigma_0(\lambda)\sigma_k(\mu). \quad (5.3)$$

DÉMONSTRATION. La preuve est immédiate, par double récurrence sur k et l par exemple, ou par un argument combinatoire. \square

Théorème 5.5.5. *Soit $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in (\mathbb{R}_+)^{p+1}$. S'il existe $m \in \mathbb{N}$, $R \in \mathbb{R}_+[X] \cap \mathbb{R}_{m-1}[X]$ tels que*

$$Q := X^m P_{\vec{a}} + R$$

est scindé sur \mathbb{R} , alors $f_{\vec{a}}^{1/p}$ est concave sur Γ_n .

De façon équivalente : s'il existe $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in (\mathbb{R}_+)^{m+p}$ tels que

$$\frac{a_k}{a_p} = \sigma_{p-k}(\lambda), \quad 0 \leq k \leq p,$$

alors $a_0 + a_1\sigma_1 + \cdots + a_p\sigma_p$ est $\frac{1}{p}$ -concave sur Γ_n .

5.5. AUTRES ARGUMENTS DE CONCAVITÉ

REMARQUE 18. Ce théorème implique le théorème 5.5.3.

DÉMONSTRATION. En fait nous pouvons montrer quelque chose de plus fort. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+p}) \in \mathbb{R}_+^{m+p}$ tel que $-\lambda$ est l'ensemble des racines de Q . Alors

$$\begin{aligned} Q &= a_p(X + \lambda_1) \dots (X + \lambda_{m+p}) \\ &= a_p [\sigma_0(\lambda)X^{m+p} + \sigma_1(\lambda)X^{m+p-1} + \dots + \sigma_p(\lambda)X^m + \dots + \sigma_{m+p}(\lambda)X^0]. \end{aligned}$$

Or,

$$Q = X^m P_{\vec{a}} + R = a_p X^{m+p} + a_{p-1} X^{m+p-1} + \dots + a_0 X^m + R,$$

d'où

$$a_p \sigma_k(\lambda) = a_{p-k}, \quad 0 \leq k \leq p.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_{\vec{a}}(x) &= a_0 \sigma_0(x) + a_1 \sigma_1(x) + \dots + a_p \sigma_p(x) \\ &= a_p [\sigma_p(\lambda) \sigma_0(x) + \sigma_{p-1}(\lambda) \sigma_1(x) + \dots + \sigma_0(\lambda) \sigma_p(x)] \\ &= a_p \sigma_p(\lambda, x) \end{aligned}$$

d'après (5.3). Nous savons par le théorème 4.4.5 que $(\mu, x) \in (\mathbb{R}_+^*)^{m+p+n} \mapsto \sigma_p(\mu, x)$ est une fonction $\frac{1}{p}$ -concave sur $(\mathbb{R}_+^*)^{m+p+n}$, a fortiori sa restriction : $x \in \Gamma_n \mapsto \sigma_p(\lambda, x)$, qui est proportionnelle à $f_{\vec{a}}$. \square

Ainsi, étant donné $\vec{a} \in \mathbb{R}_+^{p+1}$, nous pouvons utiliser les critères pour qu'un polynôme soit scindé de la section 5.3 pour étudier $P_{\vec{a}}$, et conclure sur la concavité de $f_{\vec{a}}^{1/p}$. Par exemple, la log-concavité de la suite (a_0, a_1, \dots, a_p) est une condition nécessaire sur tout polynôme de la forme $X^m P_{\vec{a}} + R$ pour être scindé.

REMARQUE 19. Néanmoins, l'existence d'un polynôme scindé de la forme $X^m P_{\vec{a}} + R$ est trop forte pour être une condition nécessaire à la concavité de $f_{\vec{a}}^{1/p}$. Par exemple, prenons $n = 2$, $\vec{a} = (1, p, q) \in \mathbb{R}_+^3$. Alors

$$\begin{aligned} f_{\vec{a}}(x_1, x_2) &= 1 + p(x_1 + x_2) + qx_1x_2, \\ H \left(f_{\vec{a}}^{1/2} \right) (x) &\equiv -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (p + qx_2)^2 & (p + qx_1)(p + qx_2) - 2qf_{\vec{a}}(x) \\ (p + qx_1)(p + qx_2) - 2qf_{\vec{a}}(x) & (p + qx_1)^2 \end{pmatrix}, \\ \det H \left(f_{\vec{a}}^{1/2} \right) &\equiv p^2 - q, \\ P_{\vec{a}} &= 1 + pX + qX^2, \\ (X^m P_{\vec{a}})^{(m)} &= m! \left(\binom{m}{0} + p \binom{m+1}{1} X + q \binom{m+2}{2} X^2 \right). \end{aligned}$$

Donc le discriminant de $(X^m P_{\vec{a}})^{(m)}$ est proportionnel à $p^2 - 2q \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)$, qui est inférieur à $p^2 - 2q$.

Choisissons $p = 2$ et $q = 3$. Alors $f_{\vec{a}}^{1/2}$ est concave. Cependant $(X^m P_{\vec{a}})^{(m)}$ n'est pas scindé, donc aucun polynôme de la forme $X^m P_{\vec{a}} + R$ ne peut être scindé non plus, d'après le lemme de Rolle.

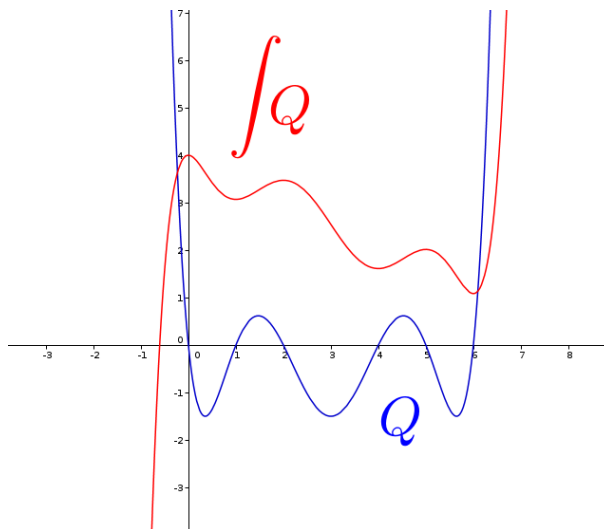


FIGURE 5.1 – $Q = X(X - 1)(X - 2)(X - 4)(X - 5)(X - 6)$ et l'une de ses primitives.

REMARQUE 20. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $m \in \mathbb{N}$. Le lemme de Rolle garantit l'assertion suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Il existe un certain } R \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \text{ tel que } X^m P + R \text{ est scindé.} \\ \implies &(X^m P)^{(m)} \text{ est scindé.} \end{aligned}$$

Mais la réciproque n'est pas vraie. Prenons $Q = X(X - 1)(X - 2)(X - 4)(X - 5)(X - 6)$. Comme on peut le voir sur la figure 5.1, Q est scindé, mais aucune de ses primitives ne l'est. Posons $S = \int_0^X Q$. S est un polynôme qui s'annule en 0, donc il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $S = XP$. Alors $(XP)' = Q$ est scindé, mais il n'existe pas de $r \in \mathbb{R}$ tel que $XP + r = r + \int_0^X Q$ soit scindé.

L'hypothèse du théorème 5.5.5 est forte : elle revient à supposer que $f_{\vec{a}}$ est la restriction d'un certain σ_p . En réalité, ce n'est pas la seule façon d'être $\frac{1}{p}$ -concave. Dans la section suivante, nous développerons une nouvelle conjecture basée sur la proposition 5.2.2. Cette conjecture est plus faible que la conjecture 1.

5.6 Polynômes homogènes

Conjecture 2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in (\mathbb{R}_+)^{p+1}$. Alors

$$f_{\vec{a}} \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \implies f_{\vec{a}} \text{ est } \frac{1}{p}\text{-concave sur } \Gamma_n.$$

Autrement dit,

$$\Xi_n^p \subset \mathcal{K}_n^p.$$

Ou encore : s'il existe $\lambda \in (\mathbb{R}_+)^p$ tel que

$$\frac{a_k}{a_p} = \frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{k}} \sigma_{p-k}(\lambda), \quad 0 \leq k \leq p,$$

alors $a_0 + a_1\sigma_1 + \dots + a_p\sigma_p$ est $\frac{1}{p}$ -concave sur Γ_n .

Je n'ai réussi à montrer cette conjecture que pour $p = 2$, cas pour lequel le théorème 5.2.4 la rend équivalente à la conjecture 1. Cependant, les outils sont différents et prometteurs pour une résolution complète de la conjecture.

Nous devons tout d'abord introduire des éléments de la théorie des polynômes hyperboliques, inaugurée par L. Gårding.

5.6.1 Polynômes hyperboliques

Nous reprenons ici des résultats qui peuvent se trouver dans l'article original [29], ou dans des résumés comme [11] ou [35].

Définition 5.6.1. Soient $v \in \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. P est dit **v -hyperbolique** si

- (i) P est homogène,
- (ii) $P(v) > 0$,
- (iii) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, le polynôme $P(x + X \cdot v) \in \mathbb{R}[X]$ est scindé.

Nous écrivons $\Gamma_v := \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) > 0\}$. Γ_v est appelé le **cône de Gårding** de P .

Proposition 5.6.2 (1959, [29]). *Soit P un polynôme v -hyperbolique. Alors Γ_v est un cône convexe dont le sommet est l'origine, et P est w -hyperbolique pour tout $w \in \Gamma_v$.*

De plus, P est $\frac{1}{\deg P}$ -concave sur Γ_v .

Ceci est indirectement montré dans [29], et une formulation explicite se trouve dans [11] et [35].

Établissons maintenant cette propriété pour les fonctions σ_k .

Lemme 5.6.3. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}^l$, $k \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\sigma_k(\lambda + X \cdot \mathbb{I}) = \frac{1}{(l-k)!} \sigma_l(\lambda + X \cdot \mathbb{I})^{(l-k)} \quad (5.4)$$

$$= \binom{l-k}{0} \sigma_k(\lambda) X^0 + \binom{l-k+1}{1} \sigma_{k-1}(\lambda) X^1 + \dots \quad (5.5)$$

$$\dots + \binom{l-1}{k-1} \sigma_1(\lambda) X^{k-1} + \binom{l}{k} \sigma_0(\lambda) X^k.$$

DÉMONSTRATION. (5.4) vient du fait que pour tout $x \in \mathbb{R}^l$,

$$\partial_{x_i} \sigma_{k+1}(x) = \sigma_k(x'_i).$$

Or, un comptage de chaque terme mène à

$$\sum_{i=1}^l \sigma_k(x'_i) = (l-k) \sigma_k(x),$$

d'où

$$\begin{aligned}\sigma_{k+1}(\lambda + X \cdot \mathbb{I})' &= \sum_{i=1}^l \partial_{x_i} \sigma_{k+1}(\lambda + X \cdot \mathbb{I}) \\ &= (l - k) \sigma_k(\lambda + X \cdot \mathbb{I}).\end{aligned}$$

(5.5) quant à lui peut se démontrer par double récurrence sur k et l :

$$\begin{aligned}\sigma_k(\lambda + X \cdot \mathbb{I}) &= (\lambda_1 + X) \sigma_{k-1}(\lambda'_1 + X \cdot \mathbb{I}'_1) + \sigma_k(\lambda'_1 + X \cdot \mathbb{I}'_1) \\ &= (\lambda_1 + X) \sum_{i=0}^{k-1} \binom{(l-1) - (k-1) + i}{i} \sigma_{k-1-i}(\lambda'_1) X^i \\ &\quad + \sum_{j=0}^k \binom{(l-1) - k + j}{j} \sigma_{k-j}(\lambda'_1) X^j \quad \text{par hypothèse de récurrence,} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \left[\binom{l-k+i}{i} \sigma_{k-1-i}(\lambda'_1) \lambda_1 + \binom{l-1-k+i}{i} \sigma_{k-i}(\lambda'_1) \right] X^i \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{l-k+i}{i} \sigma_{k-1-i}(\lambda'_1) X^{i+1} + \binom{l-1-k+k}{k} \sigma_{k-k}(\lambda'_1) X^k \\ &= \left[\binom{l-k+0}{0} \sigma_{k-1-0}(\lambda'_1) \lambda_1 + \binom{l-1-k+0}{0} \sigma_{k-0}(\lambda'_1) \right] X^0 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \left[\binom{l-k+i}{i} \sigma_{k-1-i}(\lambda'_1) \lambda_1 + \binom{l-1-k+i}{i} \sigma_{k-i}(\lambda'_1) \right. \\ &\quad \left. + \binom{l-k+i-1}{i-1} \sigma_{k-i}(\lambda'_1) \right] X^i \\ &\quad + \binom{l-k+k-1}{k-1} \sigma_{k-k}(\lambda'_1) X^k + \binom{l-1-k+k}{k} \sigma_{k-k}(\lambda'_1) X^k \\ &= \sigma_k(\lambda) X^0 + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{l-k+i}{i} \sigma_{k-i}(\lambda) X^i + \binom{l}{k} X^k \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{l-k+i}{i} \sigma_{k-i}(\lambda) X^i.\end{aligned}$$

Nous aurions aussi pu le dériver directement de (5.4) : soit $0 \leq p \leq l$.

$$\begin{aligned}\sigma_l(\lambda + X \cdot \mathbb{I})^{(p)} &= [(X + \lambda_1) \dots (X + \lambda_l)]^{(p)} \\ &= \left[\sigma_l(\lambda) X^0 + \sigma_{l-1}(\lambda) X^1 + \dots + \sigma_0(\lambda) X^l \right]^{(p)} \\ &= 0 + 0 + \dots + p(p-1) \dots 2.1 \sigma_{l-p}(\lambda) X^0 + \dots \\ &\quad \dots + l(l-1) \dots (l-p+1) \sigma_0(\lambda) X^{l-p} \\ &= p! \left[\binom{p}{0} \sigma_{l-p}(\lambda) X^0 + \dots + \binom{l}{l-p} \sigma_0(\lambda) X^{l-p} \right].\end{aligned}$$

□

Nous pouvons déduire de ce lemme le théorème suivant.

Théorème 5.6.4 (1959, [29]). *Pour $0 \leq k \leq n$, σ_k est \mathbb{I} -hyperbolique.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit tout simplement de (5.4) avec le lemme de Rolle. □

REMARQUE 21. Le même raisonnement peut être tenu pour un polynôme hyperbolique général : pour $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ et P un polynôme v -hyperbolique, $Q = \sum_i v_i \partial_{x_i} P$ est également v -hyperbolique.

Corollaire 5.6.5. *Pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq k \leq n$, il existe $\mu \in \mathbb{R}^k$ tel que pour tout $0 \leq l \leq k$,*

$$\sigma_l(x) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-l}{k-l}} \sigma_l(\mu).$$

DÉMONSTRATION. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $0 \leq k \leq n$. D'après le théorème 5.6.4, $\sigma_k(x + X \cdot \mathbb{I})$ est scindé, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\begin{aligned} \sigma_k(x + X \cdot \mathbb{I}) &= \alpha (X + \mu_1) \dots (X + \mu_k) \\ &= \alpha \left[\sigma_k(\mu) X^0 + \dots + \sigma_0(\mu) X^k \right]. \end{aligned}$$

Par ailleurs, (5.5) donne

$$\begin{aligned} \sigma_k(x + X \cdot \mathbb{I}) &= \binom{n-k}{k-k} \sigma_k(x) X^0 + \binom{n-k+1}{k-k+1} \sigma_{k-1}(x) X^1 + \dots \\ &\quad \dots + \binom{n-1}{k-1} \sigma_1(x) X^{k-1} + \binom{n}{k} \sigma_0(x) X^k. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, nous obtenons que $\alpha = \binom{n}{k}$, et pour tout $0 \leq l \leq k$,

$$\binom{n-l}{k-l} \sigma_l(x) = \binom{n}{k} \sigma_l(\mu).$$

□

Revenons maintenant à notre problème principal. Une façon de montrer que $f_{\vec{a}}$ est $\frac{1}{p}$ -concave serait de prouver que c'est un polynôme hyperbolique. Cependant, $f_{\vec{a}}$ ne satisfait pas la première propriété, essentielle, des polynômes hyperboliques : il n'est pas homogène. Dans le théorème 5.5.5, nous avons introduit de nouvelles variables qui rendaient $f_{\vec{a}}$ homogène en supposant que $P_{\vec{a}}$ était scindé. Dans le paragraphe suivant, nous supposons quelque chose de plus faible : que c'est $\tilde{f}_{\vec{a}}$ qui est scindé.

5.6.2 Polynômes semi-symétriques

Lemme 5.6.6. Soit $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}_+^{p+1}$. Supposons que

$$f_{\vec{a}} = \binom{n}{0} a_0 + \binom{n}{1} a_1 X + \dots + \binom{n}{p} a_p X^p$$

est scindé. Alors il existe $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p$ tel que

$$\frac{\binom{n}{k} a_k}{\binom{n}{p} a_p} = \sigma_{p-k}(\lambda), \quad 0 \leq k \leq p.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_{\vec{a}}(x) &= a_0 + a_1 \sigma_1(x) + \dots + a_p \sigma_p(x) \\ &= \binom{n}{p} a_p \left[\frac{\sigma_0(x) \sigma_{p-0}(\lambda)}{\binom{n}{0}} + \frac{\sigma_1(x) \sigma_{p-1}(\lambda)}{\binom{n}{1}} + \dots + \frac{\sigma_p(x) \sigma_{p-p}(\lambda)}{\binom{n}{p}} \right]. \end{aligned}$$

Nous introduisons de nouvelles fonctions.

Définition 5.6.7. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Nous appelons **polynômes semi-symétriques** les polynômes

$$s_{n,p} : (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto \sum_{k=0}^p \frac{\sigma_k(x) \sigma_{p-k}(\lambda)}{\binom{n}{k}}.$$

$s_{n,p} \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+p}]$ est p -homogène, symétrique en les coefficients de x et ceux de λ , mais pas entre eux.

Pour $\mu, \lambda \in \mathbb{R}^p$, nous définissons

$$\pi_p(\mu, \lambda) = s_{p,p}(\mu + X \cdot \mathbb{I}, \lambda + X \cdot \mathbb{I}) \in \mathbb{R}[X].$$

Alors la conjecture 2 est un cas particulier de l'affirmation suivante, plus large :

Conjecture 4. $s_{n,p}$ est un polynôme \mathbb{I} -hyperbolique.

Avec un tel résultat, $s_{n,p}$ serait $\frac{1}{p}$ -concave, ainsi que sa restriction à Γ_n , ie. $f_{\vec{a}}$.

Théorème 5.6.8. La conjecture 4 est équivalente à montrer que $s_{p,p}$ est un polynôme \mathbb{I} -hyperbolique, ou encore que $\pi_p(\mu, \lambda)$ est scindé pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^p$.

De plus,

$$\pi_p(\mu, \lambda) = \sum_{l=0}^p \left(\sum_{i=0}^{p-l} \frac{(p-i)!(l+i)!}{p!l!} \sigma_{p-l-i}(\mu) \sigma_i(\lambda) \right) (2X)^l.$$

5.6. POLYNÔMES HOMOGENES

DÉMONSTRATION. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^p$. Alors

$$\begin{aligned}
 s_{n,p}(x + X \cdot \mathbb{I}, \lambda + X \cdot \mathbb{I}) &= \sum_{k=0}^p \frac{\sigma_k(x + X \cdot \mathbb{I}) \sigma_{p-k}(\lambda + X \cdot \mathbb{I})}{\binom{n}{k}} \\
 &= \sum_{k=0}^p \binom{n}{k}^{-1} \left(\sum_{i=0}^k \binom{n-k+i}{i} \sigma_{k-i}(x) X^i \right) \\
 &\quad \times \left(\sum_{j=0}^{p-k} \binom{p-(p-k)+j}{j} \sigma_{(p-k)-j}(\lambda) X^j \right) \\
 &= \sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{p-k} \frac{(n-k+i)!(k+j)!}{n!i!j!} \sigma_{k-i}(x) \sigma_{(p-k)-j}(\lambda) X^{i+j}.
 \end{aligned}$$

Nous avons fait usage de (5.5). Nous faisons le changement de variable $l = i + j$ et utilisons le fait que $\sigma_{k-i}(x) = 0$ quand $i > k$:

$$\begin{aligned}
 s_{n,p}(x + X \cdot \mathbb{I}, \lambda + X \cdot \mathbb{I}) &= \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^p \sum_{i=0}^{\min(k,l)} \frac{(n-k+i)!(k+l-i)!}{n!i!(l-i)!} \sigma_{k-i}(x) \sigma_{p-k-l+i}(\lambda) X^l \\
 &= \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^p \sum_{i=0}^l \frac{(n-k+i)!(k+l-i)!}{n!i!(l-i)!} \sigma_{k-i}(x) \sigma_{p-k-l+i}(\lambda) X^l.
 \end{aligned}$$

En posant $m = p - k - l + i$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 s_{n,p}(x + X \cdot \mathbb{I}, \lambda + X \cdot \mathbb{I}) &= \sum_{l=0}^p \sum_{i=0}^l \sum_{m=-l+i}^{p-l+i} \frac{(n+m-p+l)!(p-m)!}{n!i!(l-i)!} \sigma_{p-l-m}(x) \sigma_m(\lambda) X^l \\
 &= \sum_{l=0}^p \sum_{i=0}^l \sum_{m=0}^{p-l} \frac{(n+m-p+l)!(p-m)!}{n!i!(l-i)!} \sigma_{p-l-m}(x) \sigma_m(\lambda) X^l \\
 &= \sum_{l=0}^p \sum_{m=0}^{p-l} \left(\sum_{i=0}^l \frac{1}{i!(l-i)!} \right) \frac{(n+m-p+l)!(p-m)!}{n!} \sigma_{p-l-m}(x) \sigma_m(\lambda) X^l \\
 &= \sum_{l=0}^p \sum_{m=0}^{p-l} \left(\frac{2^l}{l!} \right) \frac{(n+m-p+l)!(p-m)!}{n!} \sigma_{p-l-m}(x) \sigma_m(\lambda) X^l \\
 &= \sum_{l=0}^p \sum_{m=0}^{p-l} \frac{(n+m-p+l)!(p-m)!}{n!l!} \sigma_{p-l-m}(x) \sigma_m(\lambda) (2X)^l.
 \end{aligned}$$

En appliquant le corollaire 5.6.5, nous trouvons qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}^p$ tel que pour tout $0 \leq i \leq p$,

$$\sigma_i(x) = \frac{\binom{n}{p}}{\binom{n-i}{p-i}} \sigma_i(\mu).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 s_{n,p}(x + X \cdot \mathbb{I}, \lambda + X \cdot \mathbb{I}) &= \sum_{l=0}^p \sum_{m=0}^{p-l} \frac{(n+m-p+l)!(p-m)!}{n!l!} \frac{\binom{n}{p}}{\binom{n-(p-l-m)}{p-(p-l-m)}} \sigma_{p-l-m}(\mu) \sigma_m(\lambda) (2X)^l \\
 &= \sum_{l=0}^p \sum_{m=0}^{p-l} \frac{(p-m)!(m+l)!}{l!p!} \sigma_{p-l-m}(\mu) \sigma_m(\lambda) (2X)^l \\
 &= s_{p,p}(\mu + X \cdot \mathbb{I}, \lambda + X \cdot \mathbb{I}).
 \end{aligned}$$

Si $s_{p,p}$ est un polynôme hyperbolique, alors $s_{p,p}(\mu + X \cdot \mathbb{I}, \lambda + X \cdot \mathbb{I}) = \pi_p(\mu, \lambda) = s_{n,p}(x + X \cdot \mathbb{I}, \lambda + X \cdot \mathbb{I})$ est scindé, et $s_{n,p}$ est également hyperbolique. \square

REMARQUE 22. En invoquant le corollaire 5.6.5, nous aurions pu remplacer $x \in \mathbb{R}^n$ par $\mu \in \mathbb{R}^p$ depuis la définition de $s_{n,p}$: étant donné $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $\mu \in \mathbb{R}^p$ tel que pour tout $0 \leq k \leq p$, $\sigma_k(x) = \frac{\binom{n}{p}}{\binom{n-k}{p-k}} \sigma_k(\mu)$. Alors

$$s_{n,p}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^p \frac{\sigma_k(x) \sigma_{p-k}(\lambda)}{\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^p \frac{\sigma_k(\mu) \sigma_{p-k}(\lambda)}{\binom{p}{k}}.$$

Toutefois, cela ne nous aurait pas donné l'équivalence entre l'hyperbolicité de $s_{n,p}$ et celle de $s_{p,p}$.

5.6.3 Une nouvelle conjecture

J'ai trouvé une autre formulation, équivalente, à la conjecture 4.

Théorème 5.6.9. *La conjecture 4 est équivalente à l'assertion suivante.*

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg P = \deg Q = p$, si P et Q sont scindés, alors

$$\sum_{k=0}^p P^{(k)} Q^{(p-k)}$$

est également scindé.

DÉMONSTRATION. Nous savons par le théorème 5.6.8 que la conjecture 4 est équivalente au fait que $\pi_p(\mu, \lambda)$ soit scindé pour tous $\mu, \lambda \in \mathbb{R}^p$. Or, par (5.4),

$$\begin{aligned}
 \pi_p(\mu, \lambda) &= s_{p,p}(\mu + X \cdot \mathbb{I}, \lambda + X \cdot \mathbb{I}) \\
 &= \sum_{k=0}^p \frac{\sigma_k(\mu + X \cdot \mathbb{I}) \sigma_{p-k}(\lambda + X \cdot \mathbb{I})}{\binom{p}{k}} \\
 &= \sum_{k=0}^p \frac{\sigma_p(\mu + X \cdot \mathbb{I})^{(p-k)} \sigma_p(\lambda + X \cdot \mathbb{I})^{(k)}}{(p-k)! \binom{p}{k} k!} \\
 &= \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p [(X + \mu_1) \dots (X + \mu_p)]^{(p-k)} [(X + \lambda_1) \dots (X + \lambda_p)]^{(k)},
 \end{aligned}$$

et $(X + \mu_1) \dots (X + \mu_p)$ et $(X + \lambda_1) \dots (X + \lambda_p)$ sont la forme la plus générale de polynômes scindés sur \mathbb{R} de degré p . \square

Cette assertion ressemble au lemme de Rolle, et est susceptible d'avoir une généralisation à la Gauss-Lucas, comme

Conjecture 5. *Pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg P = \deg Q = p$, les racines de*

$$\sum_{k=0}^p P^{(k)} Q^{(p-k)}$$

se trouvent dans l'enveloppe convexe de celles de P et Q .

Proposition 5.6.10. *La conjecture 4 est vraie pour $p = 2$.*

DÉMONSTRATION. Soient $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $P = (X + \lambda_1)(X + \lambda_2)$, $Q = (X + \mu_1)(X + \mu_2)$. Alors

$$\begin{aligned} P' &= 2X + \lambda_1 + \lambda_2, \\ Q' &= 2X + \mu_1 + \mu_2, \\ P'' &= Q'' = 2, \\ PQ'' + P'Q' + P''Q &= 8X^2 + 4(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)X \\ &\quad + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\mu_1\mu_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2). \end{aligned}$$

Le discriminant de $PQ'' + P'Q' + P''Q$ est

$$\Delta_{PQ''+P'Q'+P''Q} = 16 [(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2] \geq 0,$$

donc $PQ'' + P'Q' + P''Q$ est scindé sur \mathbb{R} . De plus, ses racines sont

$$x_{\pm} = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2}{4} \pm \frac{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}}{4}.$$

\square

REMARQUE 23. Il s'agit d'une autre façon de montrer la conjecture 2 pour $p = 2$.

Pour le dire rapidement, le corollaire 5.3.6 signifie que « plus » un polynôme est log-concave, plus il est susceptible d'être scindé. Un exemple immédiat de suite log-concave est la suite des coefficients binomiaux : $\binom{n}{k}$ est log-concave, et

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}X + \dots + \binom{n}{n-1}X^{n-1} + \binom{n}{n}X^n = (1 + X)^n$$

est scindé. De plus, multiplier par la suite binomiale préserve le fait d'être scindé : cela rend le polynôme « plus » log-concave. Il s'agit d'un résultat classique de la théorie des polynômes réels scindés, que l'on peut par exemple trouver au chapitre 7 de [26].

Théorème 5.6.11 ([26]). *Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p \in \mathbb{R}_+[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Si P est scindé sur \mathbb{R} , alors*

$$\binom{n}{0}a_0 + \binom{n}{p}a_1X + \dots + \binom{n}{p}a_pX^p \quad \text{est également scindé sur } \mathbb{R}.$$

Ici, nous faisons le contraire : nous **divisons** par la suite binomiale, donc rendons le polynôme « moins » log-concave, et moins susceptible d'être scindé. Nous avons déjà vu que

$$\sum_{k=0}^p \sigma_k(\mu)\sigma_{p-k}(\lambda) = \sigma_p(\mu, \lambda)$$

est hyperbolique, et donc $\sum_{k=0}^p \sigma_k(\mu + X \cdot \mathbb{I})\sigma_{p-k}(\lambda + X \cdot \mathbb{I})$ est scindé. En termes des polynômes P et Q du théorème 5.6.9, cela s'écrit simplement

$$\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} Q^{(p-k)} P^{(k)} = (QP)^{(p)},$$

dont on prouve qu'il est scindé en appliquant p fois le lemme de Rolle. Si notre conjecture est vraie et

$$\sum_{k=0}^p \frac{\sigma_k(\mu + X \cdot \mathbb{I})\sigma_{p-k}(\lambda + X \cdot \mathbb{I})}{\binom{p}{k}} = \sum_{k=0}^p Q^{(p-k)} P^{(k)}$$

est scindé, cela impliquera que les polynômes semi-symétriques sont scindés bien que « peu » log-concaves. La proposition 5.6.10 suggère même qu'ils pourraient être optimaux, en un sens à préciser, parmi les polynômes scindés sur \mathbb{R} .

Forts de ces résultats, revenons à l'équation de contrainte de Lovelock (4.59) et au problème (4.60, \vec{a}, \mathcal{E}).

Chapitre 6

Un nouveau problème de σ_k -Yamabe

Ce chapitre contient l'application du chapitre 5 au nouveau problème de σ_k -Yamabe, ainsi que la suite de la résolution de ce problème. Les résultats sont issus de [48].

6.1 Arguments algébriques de concavité

6.1.1 Lorsque $\vec{f}_{\vec{a}}$ est scindé

Notre objectif, dans cette section, sera d'utiliser les résultats du chapitre précédent sur \mathcal{K}_n^p afin d'appliquer le théorème 4.4.4 à

$$(\Gamma, f) = \left(\Gamma_n, (f_{\vec{a}})^{1/p} \right).$$

Deux remarques préliminaires s'imposent.

- ★ Premièrement, les résultats de concavité du chapitre précédent s'appliquent à des polynômes aux coefficients positifs. Or, comme nous l'avons vu, le cas physique le plus répandu correspond à

$$\alpha_0 = a_0 = -2\Lambda < 0.$$

Nous effectuerons donc le changement de variable

$$a_0 \longrightarrow a_0 + 2\Lambda, \tag{6.1}$$

et étudierons le problème (4.60, $\vec{a}, \mathcal{E} + 2\Lambda$).

Nous laisserons le nouveau a_0 varier, afin de présenter des résultats plus généraux ; ceci permet par exemple de considérer une constante cosmologique négative.

- ★ Le théorème 4.4.4 ne permet que de prescrire une courbure constante. Nous supposons donc que $\mathcal{E} \geq 0$ est constante – ce qui est par exemple le cas dans le vide où $\mathcal{E} = 0$ – et changerons la normalisation des coefficients : pour tout $0 \leq k \leq p$,

$$a_k \longrightarrow \frac{a_k}{\mathcal{E} + 2\Lambda}. \tag{6.2}$$

Nous nous ramenons ainsi au problème (4.60, $\vec{a}, 1$).

Théorème 6.1.1. (4.60, $\vec{a}, 1$) est équivalent à

$$(f_{\vec{a}}(\lambda(\gamma)))^{1/p} = 1. \tag{6.3}$$

Par la suite, si

$$\star \vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{K}_n^p \text{ et}$$

$$\star \lambda(\gamma) \in \Gamma_n,$$

alors il existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, $u > 0$, tel que $\hat{\gamma} := u^{\frac{4}{n-2}}\gamma \in \mathcal{C}[\gamma]$ vérifie

$$\left(\sum_{k=0}^p a_k \sigma_k(\lambda(\hat{\gamma})) \right)^{1/p} = 1 \quad \text{et} \tag{6.4}$$

$$\lambda(\hat{\gamma}) \in \Gamma_n \quad \text{sur } \mathcal{M}, \tag{6.5}$$

en somme (4.60, $\vec{a}, 1$) est résolu.

Corollaire 6.1.2. *Si*

- ★ $(0, a_1, \dots, a_{p_n}) \in \mathcal{K}_n^{p_n}$ et
- ★ $\lambda(\gamma) \in \Gamma_n$,

alors l'équation de contrainte hamiltonienne de la théorie de Lovelock dans la vide (4.59) a une solution.

Les différents résultats du chapitre précédent peuvent être rassemblés dans ce théorème.

Théorème 6.1.3 (chapitre 5). *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

a) *Pour $a_0, a_1, a_2 \geq 0$,*

$$\begin{aligned} (a_0, a_1, a_2) \in \mathcal{K}_n^2 &\iff a_0 + a_1 \binom{n}{1} X + a_2 \binom{n}{2} X^2 \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \\ &\iff na_1^2 - 2(n-1)a_0a_2 \geq 0. \end{aligned}$$

b) *Pour $a_0, a_1, \dots, a_p \geq 0$,*

$$\begin{aligned} a_0, a_1, \dots, a_p \text{ sont les coefficients de plus haut degré d'un polynôme scindé sur } \mathbb{R} \\ \implies (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{K}_n^p. \end{aligned}$$

c) *(Critère de Kurtz) Pour $a_0, a_1, \dots, a_p \geq 0$,*

$$4a_{k-1}a_{k+1} < a_k^2 \quad \forall 1 \leq k \leq p-1 \implies (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{K}_n^p.$$

Corollaire 6.1.4. *Soit $\vec{a} = (0, a_1, \dots, a_{p_n}) \in (\mathbb{R}_+)^{p_n+1}$.*

a) *Supposons que $a_k = 0$ pour $3 \leq k \leq p_n$. Cela correspond aux théories de gravité de Gauss-Bonnet. Alors*

$$(0, a_1, a_2) \in \mathcal{K}_n^2,$$

donc le théorème 4.4.4 s'applique à

$$(\Gamma, f) = (\Gamma_n, \sqrt{a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2})$$

et il existe une solution à (4.60, $\vec{a}, 1$).

b) *Supposons qu'il existe $m \geq 0$ et $R \in \mathbb{R}_+[X]$, $\deg R \leq m-1$, tels que $R + a_1X^{m+1} + \dots + a_{p_n}X^{m+p_n}$ soit scindé sur \mathbb{R} . Autrement dit, supposons que (a_1, \dots, a_{p_n}) soient les coefficients de plus haut degré d'un polynôme scindé sur \mathbb{R} . Alors le théorème 4.4.4 s'applique à*

$$(\Gamma, f) = \left(\Gamma_n, (a_1\sigma_1 + \dots + a_{p_n}\sigma_{p_n})^{1/p_n} \right)$$

et il existe une solution à (4.60, $\vec{a}, 1$).

c) Supposons que pour tout $1 \leq k \leq p_n - 1$, $4a_{k-1}a_{k+1} < a_k^2$. Alors le théorème 4.4.4 s'applique à

$$(\Gamma, f) = \left(\Gamma_n, (a_1\sigma_1 + \dots + a_{p_n}\sigma_{p_n})^{1/p_n} \right)$$

et il existe une solution à (4.60, $\vec{a}, 1$).

Dans tous ces cas, l'équation de contrainte hamiltonienne dans le vide (4.59) a une solution.

Dans le chapitre précédent, nous avons émis la conjecture suivante.

Conjecture 2. Pour $a_0, a_1, \dots, a_p \geq 0$,

$$\bar{f}_{\vec{a}} = a_0 \binom{n}{0} + a_1 \binom{n}{1} X + \dots + a_p \binom{n}{p} X^p \text{ est scindé} \implies (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{K}_n^p.$$

Si cette conjecture est vraie, elle peut encore élargir l'ensemble des coefficients pour lesquels le théorème 4.4.4 s'applique.

6.1.2 Interprétation physique des racines réelles

J'ai mis en évidence un lien surprenant entre cette conjecture et l'origine physique de l'équation de contrainte hamiltonienne (4.59).

Théorème 6.1.5. Soient $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et α_k, \mathbb{R}_k définis comme en (4.53), (4.57). Alors

$$\bar{f}_{\vec{a}} = a_0 \binom{n}{0} + a_1 \binom{n}{1} X + \dots + a_p \binom{n}{p} X^p$$

est scindé si et seulement si le polynôme de Lovelock projeté peut être factorisé en un produit réel, ie. si et seulement s'il existe $\nu \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$\sum_{k=0}^p \alpha_k \mathbb{R}_k \propto \frac{1}{2^p} \delta_{a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_p b_p}^{c_1 d_1 c_2 d_2 \dots c_p d_p} \left(\mathbb{R}_{c_1 d_1}^{a_1 b_1} + \nu_1 \delta_{c_1 d_1}^{a_1 b_1} \right) \left(\mathbb{R}_{c_2 d_2}^{a_2 b_2} + \nu_2 \delta_{c_2 d_2}^{a_2 b_2} \right) \dots \left(\mathbb{R}_{c_p d_p}^{a_p b_p} + \nu_p \delta_{c_p d_p}^{a_p b_p} \right).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$. $\bar{f}_{\vec{a}} \in \mathbb{C}[X]$ peut toujours être factorisé dans \mathbb{C} : soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{C}^p$ tel que

$$\bar{f}_{\vec{a}} = a_0 \binom{n}{0} + a_1 \binom{n}{1} X + \dots + a_p \binom{n}{p} X^p = a_p \binom{n}{p} (X + \mu_1) \dots (X + \mu_p).$$

Alors pour $0 \leq k \leq p$,

$$a_k \binom{n}{k} = a_p \binom{n}{p} \sigma_{p-k}(\mu),$$

ie.

$$a_k = a_p \frac{k!(n-k)!}{p!(n-p)!} \sigma_{p-k}(\mu). \quad (6.6)$$

Or, rappelons (4.57) :

$$\begin{aligned}
 \alpha_k &= a_k \frac{(n-2k)!}{2^k k! (n-k)!} \\
 &= a_p \frac{k!(n-k)!}{p!(n-p)!} \sigma_{p-k}(\mu) \frac{(n-2k)!}{2^k k! (n-k)!} \\
 &= \frac{a_p}{p!(n-p)!} \sigma_{p-k}(\mu) \frac{(n-2k)!}{2^k} \\
 &= \frac{a_p}{p!(n-p)!} \sigma_{p-k}(2\mu) \frac{(n-2k)!}{2^p}.
 \end{aligned}$$

En parallèle, prenons $\nu \in \mathbb{C}^p$. Il peut être montré par des développements consécutifs le long de lignes que pour $1 \leq k \leq p$,

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2^p} \delta_{a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_p b_p}^{c_1 d_1 c_2 d_2 \dots c_p d_p} \mathbf{R}_{c_1 d_1}^{a_1 b_1} \mathbf{R}_{c_2 d_2}^{a_2 b_2} \dots \mathbf{R}_{c_k d_k}^{a_k b_k} \delta_{c_{k+1} d_{k+1}}^{a_{k+1} b_{k+1}} \dots \delta_{c_p d_p}^{a_p b_p} \\
 &= (n-2k)(n-2k-1) \dots (n-2p+2)(n-2p+1) \mathbb{R}_k. \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

Ainsi, si nous développons le produit suivant, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2^p} \delta_{a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_p b_p}^{c_1 d_1 c_2 d_2 \dots c_p d_p} \left(\mathbf{R}_{c_1 d_1}^{a_1 b_1} + \nu_1 \delta_{c_1 d_1}^{a_1 b_1} \right) \left(\mathbf{R}_{c_2 d_2}^{a_2 b_2} + \nu_2 \delta_{c_2 d_2}^{a_2 b_2} \right) \dots \left(\mathbf{R}_{c_p d_p}^{a_p b_p} + \nu_p \delta_{c_p d_p}^{a_p b_p} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^p \sigma_{p-k}(\nu) (n-2k)(n-2k-1) \dots (n-2p+2)(n-2p+1) \mathbb{R}_k \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(n-2p)!} \sum_{k=0}^p \sigma_{p-k}(\nu) (n-2k)! \mathbb{R}_k. \quad (6.9)$$

Donc,

$$f_{\vec{a}}(\lambda(\gamma)) = \sum_{k=0}^p a_k \sigma_k(\lambda(\gamma)) \quad (6.10)$$

$$= \sum_{k=0}^p \alpha_k \mathbb{R}_k \quad (6.11)$$

$$= \frac{a_p}{2^p p! (n-p)!} \sum_{k=0}^p \sigma_{p-k}(2\mu) (n-2k)! \mathbb{R}_k \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a_p (n-2p)!}{2^p p! (n-p)!} \times \frac{1}{2^p} \delta_{a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_p b_p}^{c_1 d_1 c_2 d_2 \dots c_p d_p} \left(\mathbf{R}_{c_1 d_1}^{a_1 b_1} + 2\mu_1 \delta_{c_1 d_1}^{a_1 b_1} \right) \dots \\
 &\quad \dots \left(\mathbf{R}_{c_p d_p}^{a_p b_p} + 2\mu_p \delta_{c_p d_p}^{a_p b_p} \right). \quad (6.13)
 \end{aligned}$$

En somme, les racines de la forme factorisée du polynôme de Lovelock projeté sont le double des racines de $f_{\vec{a}}$. \square

REMARQUE 24. La forme factorisée du polynôme de Lovelock fut introduite dans les années 1990 dans [60], où elle est considérée comme un produit de **tenseurs de courbure**

concirculaires. Il s'agit des tenseurs de la forme

$$R_{ab}^{cd} + \rho \delta_{ab}^{cd},$$

ρ étant une échelle de courbure, donc de longueur carrée inverse. On peut trouver des références sur les courbures concirculaires en [4], [98] et [99] par exemple. Chaque $R_{c_k d_k}^{a_k b_k} + 2\mu_k \delta_{c_k d_k}^{a_k b_k}$ est de cette forme, et les μ_k représentent p différentes échelles de courbure. Les μ_k sont tous réels et positifs si et seulement si les échelles de longueur qui leur sont associées sont réelles.

Si la conjecture 2 est vraie, il en découlera que

$$\begin{aligned} & \text{toutes les échelles de longueur concirculaires} \\ & \text{du polynôme de Lovelock projeté sont réelles} \\ \implies & \text{l'équation de contrainte hamiltonienne (4.59) a une solution.} \end{aligned} \tag{6.14}$$

Il serait intéressant de chercher ce que cela signifie, géométriquement et physiquement, pour une variété \mathcal{M} , d'avoir des échelles de longueur concirculaires réelles.

REMARQUE 25. Dans le cas où n est impair, $p = p_n$ et toutes les racines sont égales, avec

$$\rho := 2\mu_1 = \dots = 2\mu_{p_n}$$

leur valeur commune, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p_n} \alpha_k \mathbb{R}_k & \propto \frac{1}{2^{p_n}} \delta_{a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_{p_n} b_{p_n}}^{c_1 d_1 c_2 d_2 \dots c_{p_n} d_{p_n}} \left(R_{c_1 d_1}^{a_1 b_1} + \rho \delta_{c_1 d_1}^{a_1 b_1} \right) \left(R_{c_2 d_2}^{a_2 b_2} + \rho \delta_{c_2 d_2}^{a_2 b_2} \right) \dots \left(R_{c_{p_n} d_{p_n}}^{a_{p_n} b_{p_n}} + \rho \delta_{c_{p_n} d_{p_n}}^{a_{p_n} b_{p_n}} \right) \\ & \propto \text{Pf} \left(\Omega^{ab} + \frac{1}{l^2} e^a e^b \right), \end{aligned}$$

où Ω^{ab} est la 2-forme de courbure, e^a la 1-forme de vielbein de (\mathcal{M}, γ) dans le formalisme de la tétrade, et $l^2 = \rho^{-1}$ le carré d'une longueur. Cette écriture, en utilisant le pfaffien d'une forme de courbure modifiée, rappelle le **lagrangien de Born-Infeld**, qui est une source d'intérêt physique et mathématique très importante (cf. par exemple [60], [4], [89], [18], [100]).

Une fois encore, nous devons rester prudents : le lagrangien de Born-Infeld vit normalement dans un espace-temps lorentzien de dimension $n + 1$. Ici, nous avons projeté les équations de champ de Lovelock sur un espace riemannien de dimension n et considéré uniquement la contrainte hamiltonienne. Les situations sont semblables, mais pas égales à proprement parler.

6.2 Arguments analytiques de concavité

6.2.1 Fonctions concavifiantes

Demander que $(\sum_{k=0}^p a_k \sigma_k)^{1/p}$ soit concave est en fait la plus forte hypothèse de concavité qui puisse être faite. En effet, si $a_p \neq 0$, nous avons pour $z \rightarrow +\infty$

$$\left(\sum_{k=0}^p a_k \sigma_k(z, \dots, z) \right)^\alpha = \left(\sum_{k=0}^p a_k \binom{n}{k} z^k \right)^\alpha \sim \left(a_p \binom{n}{p} \right)^\alpha z^{\alpha p}$$

qui ne peut être concave si $\alpha > 1/p$. Pour le dire grossièrement : en partant de $1/p$, plus α est petit, plus $(\sum_{k=0}^p a_k \sigma_k)^\alpha$ est susceptible d'être concave.

Précisons ce point. Considérons une application $P \in \mathcal{C}^2(\Gamma_n \rightarrow \mathbb{R}_+^*)$ et une fonction strictement croissante $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R})$. Alors

$$H(F \circ P) = \frac{F' \circ P}{P} \left[PH(P) + \left(\frac{F'' \circ P}{F' \circ P} P \right) D(P) \otimes D(P) \right]. \quad (6.15)$$

$F \circ P$ est concave sur Γ_n si et seulement si $H(F \circ P)$ est négative en tout point.

Définition 6.2.1. On dit que F est une fonction **concavifiante** de P lorsque $F \circ P$ est concave.

Par exemple, l'exponentiation à un petit nombre revient à prendre $F(u) = u^\alpha$, $\alpha > 0$, et donc

$$H(P^\alpha) = \alpha P^{\alpha-2} [PH(P) + (\alpha - 1)D(P) \otimes D(P)]. \quad (6.16)$$

$D(P) \otimes D(P)$ étant positive, $u \mapsto u^\alpha$ est plus susceptible de concavifier P si α est petit. La limite $\alpha \rightarrow 0$ correspond à $\ln P$. Mais ce n'est qu'une façon parmi d'autres de concavifier une fonction. En ce qui nous concerne, toute fonction concavifiante conviendra.

Lemme 6.2.2. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$. Supposons qu'il existe une fonction $F : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (i) $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R})$;
- (ii) F est strictement croissante;
- (iii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = +\infty$;
- (iv) $\lim_{t \rightarrow a_0} F(t) = 0$;
- (v) $x \in \Gamma_n \mapsto F(a_0 + a_1 \sigma_1(x) + \dots + a_p \sigma_p(x))$ est concave.

Alors le théorème 4.4.4 s'applique à

$$(\Gamma, f) = (\Gamma_n, F \circ (a_0 + a_1 \sigma_1 + \dots + a_p \sigma_p)).$$

DÉMONSTRATION. Il est facile de vérifier que toutes les hypothèses du théorème 4.4.4 sont remplies. □

REMARQUE 26. En particulier, si $(0, a_1, a_2, \dots, a_{p_n})$ est tel qu'une fonction F remplissant $(i - v)$ existe, alors (4.59) a une solution.

En observant (6.16), l'on pourrait croire qu'il suffit de prendre $\alpha \ll 0$ pour finalement avoir $H(P^\alpha)$ négative. Cependant, cette façon de procéder ne fonctionne pas. En effet, être « trop » concave empêche de remplir la condition (iii) :

Proposition 6.2.3. *Soient $P \in \mathcal{C}^2(\Gamma_n \rightarrow \mathbb{R}_+^*)$ avec $P(\infty) = \infty$, et une fonction strictement croissante $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R})$ telles que*

$$H(F \circ P) \equiv PH(P) + \left(\frac{F'' \circ P}{F' \circ P} P \right) D(P) \otimes D(P)$$

est négative. S'il existe un certain $\tau > 1$ tel que, uniformément,

$$\frac{F'' \circ P}{F' \circ P} P \leq -\tau, \quad (6.17)$$

alors F est majorée.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'intégrer deux fois.

$$\begin{aligned} (6.17) &\implies \frac{F''(t)}{F'(t)} t \leq -\tau \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ &\iff \frac{F''(t)}{F'(t)} \leq -\frac{\tau}{t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ &\iff \ln(F'(t)) - \ln(F'(1)) \leq -\tau \ln t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ &\iff F'(t) \leq \frac{F'(1)}{t^\tau} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ &\iff F(t) \leq F(1) + \frac{F'(1)}{\tau-1} \left(1 - \frac{1}{t^{\tau-1}} \right) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ &\implies F(t) \leq F(1) + \frac{F'(1)}{\tau-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

□

Ainsi une fonction F qui soit à la fois concavifiante tout en laissant $F \circ P$ diverger à l'infini doit avoir $-F''(t)t/F'(t)$ proche de 1 à un endroit. Lorsqu'un logarithme ne suffit pas, il est naturel de penser à plusieurs itérations successives du logarithme.

Définition 6.2.4. Pour $k \in \mathbb{N}$, nous écrivons

$$\begin{aligned} \ln[0] &= \text{Id}, \\ \ln[k] &= \overbrace{\ln \circ \dots \circ \ln}^k. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Proposition 6.2.5. *Pour $x \in \mathbb{R}$ suffisamment grand, on peut montrer par récurrence que*

$$\ln[k]' = \frac{1}{\ln[k-1] \times \dots \times \ln[2] \times \ln[1] \times \ln[0]}, \quad (6.19)$$

$$\ln[k]'' = -\frac{1 + \ln[k-1](1 + \dots (1 + \ln[3](1 + \ln[2](1 + \ln[1]))) \dots)}{(\ln[k-1] \times \dots \times \ln[2] \times \ln[1] \times \ln[0])^2}, \quad (6.20)$$

$$-\frac{\ln[k]''(x)}{\ln[k]'(x)} = 1 + \frac{1 + \ln[k-1](1 + \dots (1 + \ln[3](1 + \ln[2]))) \dots}{\ln[k-1] \times \dots \times \ln[2] \times \ln[1]}(x). \quad (6.21)$$

À des constantes additives près qui permettent à toutes ces fonctions d'être bien définies, ces $\ln[k]$ pourraient constituer une famille de fonctions fortement concavifiantes.

J'ai utilisé l'une d'entre elles pour résoudre entièrement le cas $p = 2$.

6.2.2 $p = 2$

Soit $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+)^3$. Si $(a_0, a_1, a_2) \notin \mathcal{K}_n^2$, nous ne pouvons pas utiliser le corollaire 6.1.4 pour résoudre (4.60, $\vec{a}, 1$). Toutefois, il existe dans tous les cas une fonction concavifiante de $f_{\vec{a}}$.

Théorème 6.2.6. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, $s \in \mathbb{R}$, tels que $a > 0$ et $s + \ln a > 0$. Alors*

$$x \in \Gamma_n \mapsto \ln(s + \ln(a + b\sigma_1(x) + c\sigma_2(x))) \quad \text{est concave.}$$

DÉMONSTRATION. Si $c = 0$, $a + b\sigma_1$ est une fonction affine, donc concave. (6.15) montre que le logarithme d'une fonction concave est également concave, donc cette propriété est héritée par $\ln \circ (a + b\sigma_1)$ puis par $\ln \circ (s + \ln \circ (a + b\sigma_1))$.

On supposera donc que $c > 0$. Soient

$$\begin{aligned} g &: x \in \Gamma_n \mapsto a + b\sigma_1(x) + c\sigma_2(x), \\ F &: t \in]a, +\infty[\mapsto \ln(s + \ln t), \\ \tau &: t \in]a, +\infty[\mapsto -\frac{F''(t)}{F'(t)}t, \\ f &:= F \circ g. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{F' \circ g}{g} \left[gH(g) + \left(\frac{F'' \circ g}{F' \circ g} g \right) D(g) \otimes D(g) \right] \\ &\equiv gH(g) - (\tau \circ g) D(g) \otimes D(g). \end{aligned}$$

Calculons le déterminant de cette matrice. Pour $x \in \Gamma_n$, nous avons

$$\begin{aligned} H &= \left(\begin{array}{c|ccc} H_1 & & & \\ \hline & \dots & & \\ \hline & & H_n & \end{array} \right) := H(g)(x) = c \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = c(\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - \text{Id}), \\ D &:= D(g)(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + c(\sigma_1(x) - x_1) \\ \vdots \\ b + c(\sigma_1(x) - x_n) \end{pmatrix} = (b + c\sigma_1(x))\mathbb{I} - cx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'(t) &:= \frac{1/t}{s + \ln t}, \\ F''(t) &= -\frac{1}{t^2} \times \frac{s + \ln t + 1}{(s + \ln t)^2}, \\ \tau(t) &:= -\frac{F''(t)}{F'(t)}t = 1 + \frac{1}{s + \ln t}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \det H(f)(x) &\equiv \det [g(x)H(g)(x) - \tau(g(x))D(g)(x) \otimes D(g)(x)] \\ &= \det [g(x)H_1 - \tau(g(x))g_1(x)D \mid \dots \mid g(x)H_n - \tau(g(x))g_n(x)D]. \end{aligned}$$

Faisons le même raisonnement que lors de la preuve du lemme 5.4.1. En utilisant la multilinéarité du déterminant, nous avons

$$\det H(f)(x) \equiv g(x)^n \det H - \tau(g(x))g(x)^{n-1} \sum_{j=1}^n \det [H_1 \mid \dots \mid g_j(x)D \mid \dots \mid H_n].$$

Puis nous développons le long de la j -ième colonne, et écrivons \bar{H}_{ij} les mineurs de H . Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \det [H_1 \mid \dots \mid g_j(x)D \mid \dots \mid H_n] &= \sum_{j=1}^n g_j(x) \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} g_i(x) \bar{H}_{ij}, \\ &= {}^t D \operatorname{com} H D \\ &= {}^t D {}^t \operatorname{com} H D \\ &= {}^t D (\det H) H^{-1} D. \end{aligned}$$

Nous avons déjà vu dans la preuve du théorème 5.4.2 que

$$\det H = (n-1)(-1)^{n-1} c^n,$$

et

$$H^{-1} = \frac{1}{(n-1)c} (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - (n-1)\operatorname{Id}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} {}^t D (\det H) H^{-1} D &= {}^t D [(-c)^{n-1} (\mathbb{I}^t \mathbb{I} - (n-1)\operatorname{Id})] D \\ &= (-c)^{n-1} \left[({}^t \mathbb{I} D)^2 - (n-1) {}^t D D \right]. \end{aligned}$$

Déterminons chacun des termes :

$$\begin{aligned} ({}^t \mathbb{I} D)^2 &= (nb + (n-1)c\sigma_1(x))^2 \\ &= n^2 b^2 + 2n(n-1)bc\sigma_1(x) + (n-1)^2 c^2 \sigma_1(x)^2, \\ {}^t D D &= (b + c\sigma_1(x))^2 {}^t \mathbb{I} \mathbb{I} - 2(b + c\sigma_1(x))c {}^t \mathbb{I} x + c^2 {}^t x x \\ &= nb^2 + 2(n-1)bc\sigma_1(x) + (n-2)c^2 \sigma_1(x)^2 + c^2 (\sigma_1(x)^2 - 2\sigma_2(x)). \end{aligned}$$

En les regroupant,

$$\begin{aligned} {}^t D (\det H) H^{-1} D &= (-c)^{n-1} [nb^2 + 2(n-1)bc\sigma_1(x) + 2(n-1)c^2 \sigma_2(x)] \\ &= (-c)^{n-1} [nb^2 + 2(n-1)c(g(x) - a)]. \end{aligned}$$

Et finalement,

$$\begin{aligned}
 \det H(f)(x) &\equiv \det [g(x)H(g)(x) - \tau(g(x))D(g)(x) \otimes D(g)(x)] \\
 &\equiv g(x) \det H - \tau(g(x))^t D(\det H) H^{-1} D \\
 &= (-c)^{n-1} [(n-1)cg(x) - \tau(g(x)) (nb^2 + 2(n-1)c(g(x) - a))] \\
 &= (-c)^{n-1} [(n-1)cg(x) (1 - 2\tau(g(x))) - \tau(g(x)) (nb^2 - 2(n-1)ac)].
 \end{aligned}$$

La dernière expression n'est pas sans signification : elle représente le discriminant de la restriction de g à Δ_+^* , vue comme un polynôme, ie.

$$\bar{g} = g(X, \dots, X) = a + nbX + \frac{n(n-1)}{2}cX^2.$$

Nous avons en effet déjà vu cette quantité dans la preuve du théorème 5.4.2. Pour cette raison, nous posons

$$\Delta_{\bar{g}} := nb^2 - 2(n-1)ac,$$

et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 \det H(f)(x) &\equiv (-c)^{n-1} \left[(n-1)cg(x) \left(-1 - \frac{2}{s + \ln(g(x))} \right) - \left(1 + \frac{1}{s + \ln(g(x))} \right) \Delta_{\bar{g}} \right] \\
 &\equiv -(-c)^{n-1} [(n-1)cg(x) (s + 2 + \ln(g(x))) + (s + 1 + \ln(g(x))) \Delta_{\bar{g}}] \\
 &= -(-c)^{n-1} \varphi(g(x)),
 \end{aligned}$$

avec

$$\varphi : t \in]a, +\infty[\mapsto (n-1)ct(s + 2 + \ln t) + (s + 1 + \ln t)\Delta_{\bar{g}}.$$

Nous voulons maintenant montrer que $\varphi > 0$. Ceci prouvera que le signe de $\det H(f)$ est constant et vaut la parité de n , donc que la concavité de f est constante sur Γ_n .

Supposons que $\Delta_{\bar{g}} \geq 0$. Nous avons choisi s tel que $s + \ln a > 0$, donc $\varphi > 0$ sur $]a, +\infty[$.

Supposons que $\Delta_{\bar{g}} < 0$. Déterminons le signe du maximum de φ . Soit $t \in]a, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 \varphi'(t) &= (n-1)c(s + 3 + \ln t) + \frac{\Delta_{\bar{g}}}{t}, \\
 \varphi'(t) > 0 &\iff t(s + 3 + \ln t) > -\frac{\Delta_{\bar{g}}}{(n-1)c} > 0.
 \end{aligned}$$

Or $t \mapsto t(s + 3 + \ln t)$ est strictement croissante, avec

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} t(s + 3 + \ln t) &= 0, \\
 \lim_{t \rightarrow +\infty} t(s + 3 + \ln t) &= +\infty.
 \end{aligned}$$

Il existe donc un unique $t^* \in]0, +\infty[$ tel que

$$t^*(s + 3 + \ln t^*) = -\frac{\Delta_{\bar{g}}}{(n-1)c}.$$

Du côté droit,

$$-\frac{\Delta_{\bar{g}}}{(n-1)c} = 2a - \frac{nb^2}{(n-1)c} < 2a.$$

Du côté gauche, en $t = a$,

$$a(s + 3 + \ln a) > 3a.$$

Ainsi $t^* < a$. Donc $\varphi'(t) > 0$ pour tout $t \in]a, +\infty[$, et φ atteint un minimum global en $t = a$. Déterminons la valeur de ce minimum.

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (n-1)ac(s+2+\ln a) + (s+1+\ln a)\Delta_{\bar{g}} \\ &> 2(n-1)ac + \Delta_{\bar{g}} = b^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Donc $\varphi > 0$ sur $]a, +\infty[$, et $\det H(f)$ a un signe constant sur Γ_n . Ceci entraîne que les valeurs propres de $H(f)$ ne s'annulent nulle part dans Γ_n , qui est un ensemble connexe. La concavité stricte de f est donc constante sur Γ_n : si l'on parvient à montrer que f est concave en un point, alors elle le sera partout. Faisons-le sur la diagonale.

Rappelons l'équation (6.15) :

$$H(f) \equiv gH(g) - \tau(g)D(g) \otimes D(g).$$

Soient $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{R}_+^*$. Nous avons

$$\begin{aligned} {}^t u H(f)(z \cdot \mathbb{I}) u &\equiv g(z \cdot \mathbb{I}) {}^t u H(g)(z \cdot \mathbb{I}) u - \tau(g(z \cdot \mathbb{I})) ({}^t u D(g)(z \cdot \mathbb{I}))^2 \\ &= \left(a + nbz + \frac{n(n-1)}{2} cz^2 \right) {}^t u c (\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - \text{Id}) u \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{s + \ln \left(a + nbz + \frac{n(n-1)}{2} cz^2 \right)} \right) ({}^t u [(b + c(n-1)z)\mathbb{I}])^2 \\ &\underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} c^2 z^2 \left(\frac{n(n-1)}{2} [(u|\mathbb{I})^2 - (u|u)] - (n-1)^2 (u|\mathbb{I})^2 \right) \\ &= c^2 z^2 \frac{(n-1)}{2} (-(n-2)(u|\mathbb{I})^2 - n(u|u)) \\ &< 0 \quad \text{pour } n \geq 2. \end{aligned}$$

Ainsi $H(f)(z \cdot \mathbb{I})$ est une matrice négative pour z suffisamment grand ; et f est partout concave. \square

Corollaire 6.2.7. *Pour tout $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+)^3$, il existe une solution à (4.60, \vec{a} , 1).*

DÉMONSTRATION. Les cas $a_0 = 0$ et $a_2 = 0$ ont déjà été traités dans les paragraphes a) et b) du corollaire 6.1.4.

Supposons que $a_0 > 0$. On pose $s = 1 - \ln a_0$. Alors le théorème 6.2.6 entraîne que $\ln \circ (s + \ln \circ (a_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2))$ est concave. Ainsi le théorème 4.4.4 s'applique à

$$(\Gamma, f) = ((\Gamma_n, \ln \circ (s + \ln \circ (a_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2))).$$

\square

6.3. THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

REMARQUE 27. Nous avons établi la concavité de f en la montrant sur la diagonale Δ_+^* , après avoir prouvé que c'était suffisant. Nous avons tenu le même raisonnement avec le même succès dans le chapitre 5. Ceci m'incite à formuler la conjecture suivante.

Conjecture 6. Soient $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in (\mathbb{R}_+)^{p+1}$, et $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R})$. Posons

$$f := F \circ (a_0 + a_1\sigma_1 + \dots + a_p\sigma_p).$$

Alors

$$f \text{ est concave sur } \Gamma_n \iff f \text{ est concave sur la diagonale } \Delta_+^*.$$

Il me semble qu'il est toujours possible de trouver des fonctions suffisamment concavifiantes, comme la famille (6.18), et donc d'étendre le théorème 6.2.6, mais je n'ai pas été capable de le prouver.

Conjecture 7. Pour tout $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_p) \in (\mathbb{R}_+)^{p+1}$, il existe $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R})$ tel que

$$F \circ f_{\vec{a}} \text{ est concave sur } \Gamma_n.$$

6.3 Théorème des fonctions implicites

Dans cette section, nous ne supposons plus que les coefficients a_k sont positifs. Nous supposons seulement que pour $k \geq 2$, les a_k sont négligeables devant 1 : c'est la limite des théories de Lovelock vers la RG. Plus précisément, nous allons appliquer un théorème des fonctions implicites. Dans ce but, nous allons considérer l'équation de contrainte hamiltonienne (4.60) dans les espaces de Sobolev.

Toujours dans l'optique des problèmes de Yamabe et σ_k -Yamabe, et de la méthode conforme pour les équations de contrainte de la RG, nous chercherons une solution de (4.60) dans une classe conforme donnée.

Rappelons que

$$2^* = \frac{2n}{n-2}, \quad 2^* - 1 = \frac{n+2}{n-2}, \quad 2^* - 2 = \frac{4}{n-2}, \quad 2^* + 2 = \frac{4(n-1)}{n-2}, \quad (6.22)$$

et

$$S[\gamma]_{ij} = \frac{1}{n-2} \left[R[\gamma]_{ij} - \frac{R[\gamma]}{2(n-1)} \gamma_{ij} \right], \quad S[\gamma] = \frac{R[\gamma]}{2(n-1)}. \quad (6.23)$$

Les formules suivantes proviennent du calcul conforme classique. On peut par exemple les trouver dans [84] :

Lemme 6.3.1. Soient $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, $u > 0$, et $\tilde{\gamma} = u^{\frac{4}{n-2}} \gamma$. Alors

$$S[\tilde{\gamma}]_{ij} = S[\gamma]_{ij} + \frac{2}{(n-2)u} \left(-\nabla[\gamma]_i \nabla[\gamma]_j u \right. \\ \left. + \frac{n}{n-2} \frac{\nabla[\gamma]_i u \nabla[\gamma]_j u}{u} - \frac{\nabla[\gamma]_k u \nabla[\gamma]_{lu} \gamma^{kl}}{u} \frac{\gamma_{ij}}{n-2} \right), \quad (6.24)$$

donc

$$\begin{aligned}
 \sigma_1(\lambda(\tilde{\gamma})) &= S[\tilde{\gamma}] \\
 &= S[\tilde{\gamma}]_{ij} \tilde{\gamma}^{ij} \\
 &= S[\tilde{\gamma}]_{ij} u^{-2^*+2} \gamma^{ij} \\
 &= \frac{2u^{-2^*+1}}{n-2} (-\Delta[\gamma]u) + S[\gamma]u^{-2^*+2},
 \end{aligned}$$

et

$$S[\tilde{\gamma}]u^{2^*-1} = -\frac{2}{n-2}\Delta[\gamma]u + S[\gamma]u. \quad (6.25)$$

En termes de courbure scalaire, cela s'écrit

$$R[u^{2^*-2}\gamma]u^{2^*-1} = -(2^*+2)\Delta[\gamma]u + R[\gamma]u. \quad (6.26)$$

Corollaire 6.3.2. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{R}^{p+1}$, $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$,

$$u \in W^{2+\varepsilon,2}(\mathcal{M}) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^p a_k \sigma_k \left(\lambda \left(u^{\frac{4}{n-2}} \gamma \right) \right) \in W^{\varepsilon,2}(\mathcal{M}).$$

DÉMONSTRATION. Soit $u \in W^{2+\varepsilon,2}(\mathcal{M})$. À cause de (6.24), $S[\tilde{\gamma}]_{ij} \in W^{\varepsilon,2}(\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.

Soit $0 \leq k \leq p$. Pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, si $\lambda(M)$ dénote l'ensemble des valeurs propres de M , alors $\sigma_k(\lambda(M))$ coïncide avec le k -ième coefficient du polynôme caractéristique de M , en partant du plus haut degré. Ainsi $\sigma_k(\lambda(M))$ est un polynôme en les coefficients de M , et

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \sigma_k(\lambda(M)) \end{array} \right) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}).$$

Par composition, on en déduit la régularité de $\sum_k a_k \sigma_k$. □

Ainsi, nous pouvons définir l'application suivante.

Définition 6.3.3. Soit $\varepsilon > 0$. Introduisons

$$T[\gamma] : \begin{array}{ccc} W^{2+\varepsilon,2}(\mathcal{M}) \times \mathbb{R}^{p+1} & \longrightarrow & W^{\varepsilon,2}(\mathcal{M}) \\ (u, \vec{a}) & \longmapsto & \sum_{k=0}^p a_k \sigma_k \left(\lambda \left(u^{\frac{4}{n-2}} \gamma \right) \right). \end{array}$$

Nous sommes désormais prêts à énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 6.3.4. Supposons que $R[\gamma] < 0$.

Soient $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 \neq 0$; écrivons $\vec{a} = (a_0, a_1, 0, \dots, 0)$. Prenons $u = 1$. Alors $T[\gamma]$ est \mathcal{C}^1 et

$$\frac{\partial T[\gamma]}{\partial u}(1, \vec{a}) \quad \text{est inversible.}$$

DÉMONSTRATION. La preuve s'inspire de celle du problème de Yamabe.

Soient $u \in W^{2+\varepsilon,2}(\mathcal{M})$, $u > 0$, et $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 \neq 0$. Nous pouvons par exemple supposer que $a_1 > 0$ sans perte de généralité. Soit $h \in W^{2+\varepsilon,2}(\mathcal{M})$. Alors

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T[\gamma]}{\partial u}(u, a_0, a_1, 0, \dots, 0)(h) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} T[\gamma](u + th, a_0, a_1, 0, \dots, 0) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(a_0 + a_1 S \left[(u + th)^{\frac{4}{n-2}} \gamma \right] + 0 + \dots + 0 \right) \\
 &= a_1 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(\frac{-\frac{2}{n-2} \Delta[\gamma](u + th) + S[\gamma](u + th)}{(u + th)^{2^*-1}} \right) \\
 &\equiv \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{2}{n-2} \Delta[\gamma](u + th) + S[\gamma](u + th) \right) (u + th)^{2^*-1} \right. \\
 &\quad \left. - \left(-\frac{2}{n-2} \Delta[\gamma](u + th) + S[\gamma](u + th) \right) \frac{\partial}{\partial t} (u + th)^{2^*-1} \right] \Big|_{t=0} \\
 &= \left(-\frac{2}{n-2} \Delta[\gamma]h + S[\gamma]h \right) u^{2^*-1} - \left(-\frac{2}{n-2} \Delta[\gamma]u + S[\gamma]u \right) (2^* - 1) h u^{2^*-2} \\
 &\equiv \left(-\frac{2}{n-2} \Delta[\gamma]h + S[\gamma]h \right) u - \left(-\frac{2}{n-2} \Delta[\gamma]u + S[\gamma]u \right) (2^* - 1) h.
 \end{aligned}$$

Prenons maintenant u constant, égal à 1. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T[\gamma]}{\partial u}(1, \vec{\alpha})(h) &\equiv -\frac{2}{n-2} \Delta[\gamma]h + S[\gamma]h - (2^* - 1) S[\gamma]h \\
 &= -\frac{2}{n-2} \Delta[\gamma]h - (2^* - 2) S[\gamma]h \\
 &\equiv -(\Delta[\gamma]h + 2S[\gamma]h).
 \end{aligned}$$

Fixons la métrique γ . On pose

$$c := -2S[\gamma]. \quad (6.27)$$

$R[\gamma] < 0$ par hypothèse, donc $c > 0$ d'après (6.23). Nous définissons alors

$$L : \begin{array}{ccc} W^{2+\varepsilon,2}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & W^{\varepsilon,2}(\mathcal{M}) \\ h & \longmapsto & -\Delta h + ch, \end{array} \quad (6.28)$$

et nous allons prouver que cet opérateur est inversible.

★ **Injectivité** : Soit $h \in W^{2+\varepsilon,2}(\mathcal{M})$ tel que $L(h) = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\mathcal{M}} hL(h) \, dv \\
 &= \int_{\mathcal{M}} (|\nabla h|^2 + ch^2) \, dv.
 \end{aligned}$$

$c > 0$, donc

$$|\nabla h|^2 + ch^2 = 0$$

partout sur \mathcal{M} , et $h = 0$.

★ **Surjectivité** : Soit $w \in W^{\varepsilon,2}(\mathcal{M})$. Définissons

$$I : \begin{array}{ccc} W^{1,2}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & \int_{\mathcal{M}} (|\nabla h|^2 + ch^2) \, dv \end{array} , \quad (6.29)$$

$$\nu := \inf_{\substack{h \in W^{1,2}(\mathcal{M}) \\ \int wh \neq 0}} \frac{I(h)}{\left(\int_{\mathcal{M}} wh \, dv\right)^2} = \inf_{\substack{h \in W^{1,2}(\mathcal{M}) \\ \int wh = 1}} I(h). \quad (6.30)$$

Nous allons montrer que cet infimum est atteint en un point h , et que ce point a pour image w .

Il existe une suite minimisante (h_n) dans $W^{1,2}(\mathcal{M})$ telle que

$$\int_{\mathcal{M}} wh_n \, dv = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{M}} (|\nabla h_n|^2 + ch_n^2) \, dv \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu.$$

(h_n) est bornée dans $W^{1,2}(\mathcal{M})$, qui est un espace réflexif, donc (h_n) est faiblement compacte dans $W^{1,2}(\mathcal{M})$. Quitte à en extraire une sous-suite, il existe un $h_\infty \in W^{1,2}(\mathcal{M})$ tel que

$$h_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{W^{1,2}} h_\infty.$$

Or l'injection de Sobolev

$$W^{1,2}(\mathcal{M}) \hookrightarrow L^q(\mathcal{M})$$

est compacte pour $q < 2^*$, et en particulier pour $q = 2$. Il existe donc $h'_\infty \in L^2(\mathcal{M})$ tel que, à une sous-suite près,

$$h_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} h'_\infty.$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$,

$$0 = \int_{\mathcal{M}} (h_n - h_\infty) \varphi \, dv \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} h_\infty \varphi \, dv - \int_{\mathcal{M}} h'_\infty \varphi \, dv,$$

la première convergence ayant lieu dans L^2 et la seconde dans $W^{1,2}$ -faible. Ainsi $h_\infty = h'_\infty$.

★ $h_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} h_\infty$, donc

$$1 = \int_{\mathcal{M}} wh_n \, dv \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} wh_\infty \, dv. \quad (6.31)$$

★ $h_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} h_\infty$, donc

$$\int_{\mathcal{M}} h_n^2 \, dv \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} h_\infty^2 \, dv. \quad (6.32)$$

★ Par ailleurs,

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla(h_n - h_\infty)|^2 dv = \int_{\mathcal{M}} |\nabla h_n|^2 dv - 2 \int_{\mathcal{M}} \nabla_i h_n \nabla^i h_\infty dv + \int_{\mathcal{M}} |\nabla h_\infty|^2 dv \geq 0.$$

Or

$$\int_{\mathcal{M}} \nabla_i h_n \nabla^i h_\infty dv \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} \nabla_i h_\infty \nabla^i h_\infty dv$$

à cause de la convergence faible de h_n dans $W^{1,2}$. Donc

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla h_\infty|^2 dv \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} |\nabla h_n|^2 dv. \quad (6.33)$$

En assemblant (6.32) et (6.33), nous obtenons

$$\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} (|\nabla h_n|^2 + ch_n^2) dv \geq \int_{\mathcal{M}} (|\nabla h_\infty|^2 + ch_\infty^2) dv = I(h_\infty). \quad (6.34)$$

Autrement dit, h_∞ minimise I dans $W^{1,2}(\mathcal{M})$. En utilisant (6.31), nous avons

$$1 = \int_{\mathcal{M}} wh_\infty dv, \quad (6.35)$$

donc $\nu \leq I(h_\infty)$. Ainsi

$$\nu = I(h_\infty). \quad (6.36)$$

$\int wh_\infty = 1$, donc $h_\infty \neq 0$ et $\nu > 0$.

Maintenant, plaçons-nous en h_∞ et étudions les variations de I : soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \subset W^{1,2}(\mathcal{M})$. Puisque h_∞ minimise $I(h)/(\int wh)^2$ et à cause de (6.35), nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{t=0} \frac{I(h_\infty + t\varphi)}{(\int_{\mathcal{M}} w(h_\infty + t\varphi) dv)^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{t=0} \frac{\int_{\mathcal{M}} (|\nabla h_\infty + t\nabla\varphi|^2 + c|h_\infty + t\varphi|^2) dv}{\left(\int_{\mathcal{M}} w(h_\infty + t\varphi) dv\right)^2} \\ &= \frac{\left(\int_{\mathcal{M}} 2[\nabla_i h_\infty \nabla^i \varphi + ch_\infty \varphi] dv\right) \left(\int_{\mathcal{M}} wh_\infty dv\right)}{\left(\int_{\mathcal{M}} wh_\infty dv\right)^4} \\ &\quad - \frac{\left(\int_{\mathcal{M}} [|\nabla h_\infty|^2 + c|h_\infty|^2] dv\right) 2 \left(\int_{\mathcal{M}} wh_\infty dv\right) \left(\int_{\mathcal{M}} w\varphi dv\right)}{\left(\int_{\mathcal{M}} wh_\infty dv\right)^4} \\ &= 2 \int_{\mathcal{M}} [\nabla_i h_\infty \nabla^i \varphi + ch_\infty \varphi] dv - 2I(h_\infty) \int_{\mathcal{M}} w\varphi dv \\ &= 2 \int_{\mathcal{M}} [\nabla_i h_\infty \nabla^i \varphi + ch_\infty \varphi] dv - 2\nu \int_{\mathcal{M}} w\varphi dv. \end{aligned}$$

On pose

$$\tilde{h}_\infty := \frac{h_\infty}{\nu}.$$

Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$,

$$\int_{\mathcal{M}} \left[\nabla_i \tilde{h}_\infty \nabla^i \varphi + c \tilde{h}_\infty \varphi \right] dv = \int_{\mathcal{M}} w \varphi dv.$$

C'est-à-dire,

$$-\Delta \tilde{h}_\infty + c \tilde{h}_\infty = w \quad \text{au sens d'Aubin.}$$

Il nous faut ici invoquer le résultat suivant, dû à T. Aubin :

Théorème 6.3.5 (Aubin). *Soient $c > 0$, $\eta \geq 0$, $q \geq 1$.*

Soient h, w tels que

$$-\Delta h + ch = w \quad \text{au sens d'Aubin.}$$

Alors

$$w \in W^{\eta, q} \implies h \in W^{2+\eta, q}.$$

Ainsi $\tilde{h}_\infty \in W^{2+\varepsilon, 2}(\mathcal{M})$ et

$$L(\tilde{h}_\infty) = -\Delta \tilde{h}_\infty + c \tilde{h}_\infty = w \quad \text{sur } \mathcal{M},$$

donc L est surjective.

Nous venons de prouver que $L = \frac{\partial T[\gamma]}{\partial u}(1, \vec{\alpha})$ est inversible. □

REMARQUE 28. La stricte négativité de $R[\gamma]$ est nécessaire pour que $\frac{\partial T[\gamma]}{\partial u}(1, \vec{\alpha})$ soit inversible : si $R[\gamma] \geq 0$, nous perdons l'injectivité, et $T[\gamma]$ peut avoir un noyau.

Théorème 6.3.6. *Soient $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tels que $a_1(a_0 - 1) > 0$.*

Soient $\varepsilon > 0$ et γ tels que $R[\gamma] < 0$. On pose

$$\vec{\alpha} = (a_0, a_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{p+1}.$$

Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$,

$$\begin{aligned} \|\vec{a} - \vec{\alpha}\| < \eta \quad \implies \quad & \text{il existe } u_{\vec{a}} \in W^{2+\varepsilon, 2}(\mathcal{M}) \text{ tel que} \\ & \sum_{k=0}^p a_k \sigma_k \left(\lambda \left(u_{\vec{a}}^{\frac{4}{n-2}} \gamma \right) \right) = 1. \end{aligned}$$

De plus, $\vec{a} \mapsto u_{\vec{a}}$ est de classe \mathcal{C}^1 .

6.3. THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

DÉMONSTRATION. Soient $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ vérifiant $a_1(a_0 - 1) > 0$, et $\varepsilon > 0$.

Nous supposons que $R[\gamma] < 0$. D'après le théorème de Yamabe, il existe $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, $v > 0$, tel que $R\left[v^{\frac{4}{n-2}}\gamma\right]$ est constante et strictement négative. $S\left[v^{\frac{4}{n-2}}\gamma\right]$ est de même constante et négative, à cause de (6.23). Pour tout $k > 0$, (6.25) implique que

$$S\left[kv^{\frac{4}{n-2}}\gamma\right]k = S\left[v^{\frac{4}{n-2}}\gamma\right].$$

Fixons la valeur de k à

$$k := \frac{a_1}{1 - a_0} S\left[v^{\frac{4}{n-2}}\gamma\right] > 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 S\left[kv^{\frac{4}{n-2}}\gamma\right] &= a_0 + \frac{a_1}{k} S\left[v^{\frac{4}{n-2}}\gamma\right] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Posons

$$\tilde{\gamma} := kv^{\frac{4}{n-2}}\gamma, \quad \vec{\alpha} := (a_0, a_1, 0, \dots, 0).$$

En appliquant le théorème 6.3.4 à $T[\tilde{\gamma}]$, nous déduisons que $\frac{\partial T[\tilde{\gamma}]}{\partial u}(1, \vec{\alpha})$ est inversible. Il est alors possible d'utiliser le théorème des fonctions implicites sur $T[\tilde{\gamma}] : W^{2+\varepsilon, 2}(\mathcal{M}) \times \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow W^{\varepsilon, 2}(\mathcal{M})$. Nous obtenons l'existence de $\eta > 0$ tel que pour tout $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$,

$$\|\vec{a} - \vec{\alpha}\| < \eta \quad \implies \quad \text{il existe } w_{\vec{a}} \in W^{2+\varepsilon, 2}(\mathcal{M}) \text{ tel que} \quad (6.37)$$

$$T[\tilde{\gamma}](w_{\vec{a}}, \vec{a}) = T[\tilde{\gamma}](1, \vec{\alpha}).$$

De plus, $\vec{a} \mapsto w_{\vec{a}}$ est \mathcal{C}^1 .

(6.37) signifie que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p a_k \sigma_k \left(\lambda \left(w_{\vec{a}}^{\frac{4}{n-2}} \tilde{\gamma} \right) \right) &= T[\tilde{\gamma}](w_{\vec{a}}, \vec{a}) \\ &= T[\tilde{\gamma}](1, \vec{\alpha}) \\ &= a_0 + a_1 S[\tilde{\gamma}] \\ &= 1. \end{aligned} \quad (6.38)$$

On pose alors

$$u_{\vec{a}} := k^{\frac{n-2}{4}} v w_{\vec{a}}.$$

$u_{\vec{a}} \in W^{2+\varepsilon, 2}(\mathcal{M})$, $u_{\vec{a}} > 0$, et

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p a_k \sigma_k \left(\lambda \left(u_{\vec{a}}^{\frac{4}{n-2}} \gamma \right) \right) &= \sum_{k=0}^p a_k \sigma_k \left(\lambda \left(w_{\vec{a}}^{\frac{4}{n-2}} \tilde{\gamma} \right) \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Avec, en prime, $\vec{a} \mapsto u_{\vec{a}}$ de classe \mathcal{C}^1 : c'est bien l'énoncé du théorème 6.3.6. \square

6.3. THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

REMARQUE 29. Si $a_1(a_0 - 1) < 0$, il n'existe pas de solution conforme égale à 1 pour une courbure scalaire strictement négative.

L'hypothèse sur la stricte négativité de R nous éloigne malheureusement du cas physique classique : si $a_1 \approx 1$, l'hypothèse $a_1(a_0 - 1) > 0$ implique que $a_0 > 1$. Il s'agit donc d'une constante cosmologique strictement négative, ce qui ne correspond pas aux observations actuelles de l'univers qui indiquent une accélération de son expansion.

Le théorème 6.3.6 peut être directement interprété dans les termes de l'équation (4.60) :

Corollaire 6.3.7. *Soient $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tels que $a_1(a_0 - 1) > 0$.*

Soient $\varepsilon > 0$ et γ tels que $R[\gamma] < 0$. On pose

$$\vec{\alpha} = (a_0, a_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{p+1}.$$

Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$,

$$\|\vec{a} - \vec{\alpha}\| < \eta \quad \implies \quad \text{il existe } u_{\vec{a}} \in W^{2+\varepsilon, 2}(\mathcal{M}) \text{ tel que}$$

$$f_{\vec{a}} \left(\lambda \left(u_{\vec{a}}^{\frac{4}{n-2}} \gamma \right) \right) = 1.$$

Autrement dit, (4.60, \vec{a} , 1) est résolu dans $W^{2+\varepsilon, 2}(\mathcal{M})$.

Conclusion et principaux résultats

Nous rassemblons ici les résultats originaux de cette thèse, marqués par un astérisque \star , et les questions encore ouvertes, marquées par un cercle \circ . Les conjectures, relevant à la fois du résultat et de la question ouverte, seront signifiées par les deux symboles $\star\circ$.

Au long de ces pages, nous avons exploré quelques aspects des équations de contrainte. Ces équations sont la conséquence géométrique de la rupture de covariance entre une formulation lagrangienne d'une théorie physique, d'une part ; et une formulation hamiltonienne, qui implique une évolution et donc un choix de temps, d'autre part. Elles sont les contraintes que doit respecter la construction d'une donnée initiale, et en ce sens constituent la première partie du problème d'évolution.

La deuxième partie du problème d'évolution correspond au problème de Cauchy : une fois la donnée initiale fixée, existe-t-il, de façon unique, un développement de cette donnée dans le temps ?

Nous étudions des problèmes d'évolution qui reposent sur une structure $n + 1$: l'espace-temps est feuilleté selon une fibration d'hypersurfaces spatiales, transverse aux gradients d'une fonction temps.

Premier chapitre

Le problème de Cauchy et les équations de contrainte de la Relativité Générale (RG) ont été étudiés en profondeur depuis les années 1950, en particulier par Y. Choquet-Bruhat. Dans notre premier chapitre, nous rappelons que ce problème est bien posé dans le vide et pour des champs de matière raisonnables. Puis nous exposons la méthode la plus utilisée pour résoudre les équations de contrainte, la méthode conforme.

Deuxième chapitre

Dans le deuxième chapitre, nous étendons ces résultats à des familles de théories modifiées de la gravitation : en partant des théories $f(R)$, nous montrons qu'elles se fondent dans les cadres plus généraux des théories de Brans-Dicke, puis tenseur-scalaire (STT). En détaillant la preuve de M. Salgado datant des années 2000, nous montrons que le problème de Cauchy de ces théories est bien formulé, ce dont découle, dans certains cas, qu'il est également bien posé. Puis nous étudions la méthode conforme pour les équations de

contrainte des STT et expliquons en quoi elle peut se réduire, à travers le changement de repère Einstein-Jordan, à la méthode conforme de la RG avec matière.

- ★ Si l'équivalence des propriétés classiques – à l'inverse des propriétés quantiques – entre les repères de Jordan et d'Einstein est déjà connue et étudiée par les physiciens depuis des décennies, elle n'est que rarement évoquée par les mathématiciens qui étudient les équations de contrainte ; il m'a donc semblé important de détailler au paragraphe 2.5.3 comment cette équivalence se traduit dans le formalisme des équations de contrainte, ce qui n'avait pas été fait auparavant.

$$\begin{array}{ccccc}
 g & \xrightarrow{\text{ADM}} & \gamma & & \\
 \psi^{\frac{2}{n-1}} \downarrow \text{J} \rightarrow \text{E} & & \psi^{\frac{2}{n-1}} \downarrow \text{J} \rightarrow \text{E} & & \\
 \tilde{g} & \xrightarrow{\text{ADM}} & \tilde{\gamma} & \xrightarrow[\varphi^{\frac{-4}{n-2}}]{\text{MC}} & \eta
 \end{array}$$

On peut donc dire que la structure du problème de Cauchy et des équations de contrainte de $f(\text{R})$, Brans-Dicke et STT est essentiellement la même que celle de la RG. Mathématiquement, il n'y a rien de plus à dire.

Troisième chapitre

La suite de cette thèse est consacrée à une autre famille de théories de gravitation : les théories de Lovelock, issues des théorèmes de D. Lovelock datant des années 1970, et leur extension $f(\text{Lovelock})$. Dans le troisième chapitre, nous exposons l'origine et le détail de ces théories. Nous soulevons une question toujours irrésolue depuis les années 1970 :

- Quelle est la nature du lien entre les hypothèses physiques (symétrie, divergence nulle, dérivées du second ordre) sur le tenseur de Lovelock, et la forme si spécifique (théorème géométrique fondamental de Gauss-Bonnet-Chern) de la densité lagrangienne qui lui est associée ?

Nous rappelons ensuite deux questions encore ouvertes quant à la forme développée des produits de Lovelock \mathbb{R}_p :

- De combien de scalaires indépendants les produits de Lovelock sont-ils la somme ?
- Quels sont les facteurs devant chacun de ces scalaires ?

En utilisant un article de S. A. Fulling et al. datant de 1992 [28], nous donnons une réponse théorique – une réponse explicite étant toujours à trouver – à la première question :

- ★ Il y a autant de scalaires indépendants dans la forme développée du p -ième produit de Lovelock que de diagrammes de Young dont toutes les lignes ont une longueur paire, apparaissant dans la décomposition du pléthysme $\square \otimes p$.

Ensuite, nous démontrons comment obtenir les équations de champ des théories f (Lovelock). Ces équations étaient déjà données dans l'article de P. Bueno et al. [9], mais sans les détails de la preuve. Il s'agit d'écrire l'action sous une forme tenseur-scalaire grâce à une transformée de Legendre, dans le cas où la hessienne de f est inversible ; on introduit alors des champs scalaires ϕ_p correspondant aux dérivées partielles de f par rapport aux \mathbb{R}_p . Puis d'utiliser un théorème de H. Rund qui donne la dérivée totale d'une densité lagrangienne en fonction de la métrique.

Quatrième chapitre

Une fois ces équations obtenues, nous les projetons sur une décomposition $n + 1$ de l'espace-temps et obtenons comme pour la RG une contrainte hamiltonienne, des contraintes de moment et des équations dynamiques. C'est l'objet du quatrième chapitre. Les équations de champ contiennent des termes de degrés arbitrairement élevés, mais les propriétés du déterminant nous permettent de les développer le long de lignes ou de colonnes. La plupart des termes, issus de la décomposition $n + 1$ du tenseur de Riemann, s'annulent alors pour des raisons d'antisymétrie ou d'orthogonalité.

- ★ Ceci nous permet de donner la décomposition $n + 1$ des équations de champ de f (Lovelock) uniquement en termes de données sur l'hypersurface spatiale et de leurs dérivées. C'est le système (4.7, 4.8, 4.9).

Il fait intervenir $(\mathbb{M}, \dot{\mathbb{M}}, \ddot{\mathbb{M}}, \mathbb{N}, \dot{\mathbb{N}}, \ddot{\mathbb{N}}, \mathbb{NN}, \dot{\mathbb{N}}, \ddot{\mathbb{N}}, \mathbb{O}, \dot{\mathbb{O}})$, qui sont seulement des produits des projections $(\mathbb{M}_{ij}^{kl}, \mathbb{N}_{ij}^{kl}, \mathbb{O}_{ij}^{kl})$ du tenseur de Riemann, qui s'expriment à partir de la métrique γ_{ij} et de sa dérivée temporelle K_{ij} ; avec les champs scalaires ϕ_p et leurs dérivées temporelles Π_p . On retrouve ainsi la même structure hamiltonienne de variables que pour la RG.

Nous testons nos formules pour $p \leq 1$ et retrouvons le cas connu de la décomposition $n + 1$ de la gravité $f(\mathbb{R})$. Pour $p = 2$ et ϕ_2 constant, nous récupérons les résultats explicites de [88]. Pour un p arbitraire et ϕ_p constant, nous retrouvons les résultats des années 1980 de [87] et [15].

Tous les autres cas, en revanche, semblaient inconnus auparavant, et les expressions présentées sont donc originales. Une première application, pour $p = 2$, donne la décomposition $n + 1$ explicite de la gravité $f(\mathbb{R}, \text{Gauss-Bonnet})$, à savoir : (4.17, 4.18, 4.19).

À partir de cette décomposition, les deux aspects du problème d'évolution peuvent être étudiés. Contrairement aux théories $f(\mathbb{R})$, Brans-Dicke et STT, leur structure est radicalement différente de celle de la RG.

- Le problème de Cauchy pour les théories f (Lovelock) générales est entièrement ouvert.
- La résolution mathématique des équations de contrainte pour les théories f (Lovelock) générales est entièrement ouverte.

Nous nous sommes plutôt concentrés sur les équations de contrainte des théories de Lovelock. Dans le cas d'une variété localement conformément plate, il est connu depuis le

milieu des années 2000 (cf. [45] et [30]) que les produits de Lovelock sont proportionnels aux σ_k -courbures de la variété : $\mathbb{R}_k \propto \sigma_k$.

- ★ Nous nous sommes restreints au cas d'une décomposition $n + 1$ symétrique en temps, ie. $K_{ij} = 0$, et d'une variété spatiale localement conformément plate. Les contraintes de moment perdent alors leur signification géométrique, et la contrainte hamiltonienne devient la prescription d'une somme de σ_k -courbures (4.59).

Pour résoudre cette contrainte hamiltonienne, nous avons utilisé les travaux consacrés à la prescription d'un seul σ_k , ie. le problème de σ_k -Yamabe, datant des années 2000. Nous avons en particulier appliqué un théorème d'A. Li et Y. Y. Li [51] qui nécessite que la somme de σ_k -courbures soit rendue concave.

Cinquième chapitre

Dans la mesure où σ_k est $\frac{1}{k}$ -concave, nous nous demandons pour quels coefficients la fonction

$$f_{\vec{a}} : x \in \Gamma_n \mapsto \sum_{k=0}^p a_k \sigma_k(x),$$

est $\frac{1}{p}$ -concave. Nous écrivons \mathcal{K}_n^p l'ensemble de ces coefficients. Le cinquième chapitre est consacré à l'étude de \mathcal{K}_n^p .

Nous émettons les deux conjectures suivantes.

- ★◦ **Conjecture 1.**

$$\begin{aligned} f_{\vec{a}} \text{ est } \frac{1}{p}\text{-concave sur } \Gamma_n &\iff f_{\vec{a}} \text{ est } \frac{1}{p}\text{-concave sur } \Delta_+^* \\ &\iff \bar{f}_{\vec{a}} \text{ est } \frac{1}{p}\text{-concave sur } \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

- ★◦ **Conjecture 2.**

$$f_{\vec{a}} \text{ est } \frac{1}{p}\text{-concave sur } \Gamma_n \iff \bar{f}_{\vec{a}} \text{ est scindé sur } \mathbb{R}.$$

La théorie des polynômes hyperboliques développée par L. Gårding dans les années 1950 nous a donné l'idée d'introduire une famille de polynômes homogènes, les polynômes semi-symétriques :

$$s_{n,p} : (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto \sum_{k=0}^p \frac{\sigma_k(x) \sigma_{p-k}(\lambda)}{\binom{n}{k}}.$$

Nous conjecturons alors que

- ★◦ **Conjecture 4.** $s_{n,p}$ est un polynôme \mathbb{I} -hyperbolique.

Ou, de façon équivalente,

★◦ **Conjecture 4.** $s_{p,p}$ est un polynôme \mathbb{I} -hyperbolique.

Ou encore, de façon équivalente,

★◦ **Conjecture 4.** Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg P = \deg Q = p$, si P et Q sont scindés sur \mathbb{R} , alors

$$\sum_{k=0}^p P^{(k)} Q^{(p-k)}$$

l'est également.

C'est la conjecture principale de cette thèse. On peut en formuler une généralisation naturelle, semblable au théorème de Gauss-Lucas :

★◦ **Conjecture 5.** Pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg P = \deg Q = p$, les racines de $\sum_{k=0}^p P^{(k)} Q^{(p-k)}$ se trouvent dans l'enveloppe convexe de celles de P et de Q .

★ Nous montrons que

$$5 \implies 4 \implies 2 \implies 1,$$

★ et nous prouvons les conjectures 4, 2 et 1 pour $p = 2$, ie.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n^2 &= \{ \vec{a} = (a_0, a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid \bar{f}_{\vec{a}} \text{ est scindé} \} \\ &= \{ \vec{a} = (a_0, a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid na_1^2 - 2(n-1)a_0a_2 \geq 0 \}. \end{aligned}$$

Ainsi la nature des coefficients pour lesquels $f_{\vec{a}}^{1/p}$ est concave dépend du caractère scindé de certains polynômes. Nous avons donc rappelé certains critères algébriques indiquant lorsque des polynômes réels sont scindés sur \mathbb{R} , et avons émis à ce sujet une nouvelle conjecture.

★◦ **Conjecture 3.** Soit $P \in \mathbb{R}_+[X]$, $\deg P = n$. Alors

$$P \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \iff PP'' + \left(\frac{1}{n} - 1\right) P'^2 \leq 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

★ La conjecture 3 est vraie pour $\deg P = 2$ ou 3.

Pour $p \geq 3$, nous ne sommes pas parvenus à une description complète de \mathcal{K}_n^p , mais en avons déterminé des sous-ensembles assez vastes.

★ Par exemple,

$$\left\{ \vec{a} \in (\mathbb{R}_+)^{p+1} \mid \begin{array}{l} (a_0, a_1, \dots, a_p) \\ \text{sont les premiers coefficients} \\ \text{d'un polynôme dont toutes les} \\ \text{racines sont réelles et négatives} \end{array} \right\} \subset \mathcal{K}_n^p.$$

★ En utilisant le critère de Kurtz,

$$\{ \vec{a} \in (\mathbb{R}_+)^{p+1} \mid \forall 1 \leq k \leq n-1, \quad 4a_{k-1}a_{k+1} < a_k^2 \} \subset \mathcal{K}_n^p.$$

Ces cinq conjectures mettent à la lumière de nouvelles propriétés des polynômes symétriques élémentaires, et promettent d'intéressantes recherches à venir.

Sixième chapitre

Dans le sixième et dernier chapitre, nous revenons à la résolution de l'équation de contrainte hamiltonienne et utilisons les résultats du cinquième chapitre sur \mathcal{K}_n^p . Nous y montrons que :

- ★ Lorsque $\vec{a} \in \mathcal{K}_n^p$, il existe une solution conforme à l'équation de contrainte hamiltonienne de la théorie de Lovelock, pour une énergie prescrite constante – par exemple dans le vide.
- ★ C'est le cas pour toutes les théories de Gauss-Bonnet dans le vide avec une constante cosmologique positive.

Nous mettons en évidence un lien surprenant entre le fait que $\bar{f}_{\vec{a}}$ soit scindé et la physique du problème.

- ★ $\bar{f}_{\vec{a}}$ est scindé sur \mathbb{R} si et seulement si le polynôme de Lovelock projeté sur l'hyper-surface spatiale peut être factorisé en un produit de courbures concirculaires dont les longueurs sont réelles.

Si la conjecture 2 est vraie, cela impliquerait le critère suivant.

- ★○ Si le polynôme de Lovelock projeté peut être factorisé en un produit de courbures concirculaires dont les longueurs sont réelles, alors l'équation de contrainte dans le vide a une solution conforme.
- Quelles sont les significations géométrique et physique du fait que les échelles de longueur concirculaires soient réelles ?

Nous étendons ensuite ces résultats en cherchant des fonctions concavifiantes plus générales que la racine p -ième.

- ★ Pour $p = 2$, nous montrons que pour tout ensemble de coefficients $a_0, a_1, a_2 \geq 0$, il existe une fonction suffisamment concavifiante qui permet de résoudre l'équation de contrainte hamiltonienne.
- ★○ **Conjecture 6.** Pour toute application F , la concavité de $F \circ f_{\vec{a}}$ dans le cône de Gårding Γ_n est équivalente à sa concavité sur la diagonale Δ_+^* .
- ★○ **Conjecture 7.** Pour tout $\vec{a} \in (\mathbb{R}_+)^{p+1}$, une fonction concavifiante existe.

Ces critères ne valent que pour des coefficients a_k positifs, et se restreignent au cône de Gårding : ils impliquent que la courbure scalaire de la variété soit strictement positive. Dans le cas où la courbure scalaire est strictement négative, nous avons utilisé les outils du problème de Yamabe et montré que :

- ★ Le théorème des fonctions implicites s'applique à $f_{\vec{a}}$ pris en une métrique – de facteur conforme u – de courbure scalaire constante. Ceci nous donne, dans un voisinage de u , une famille de solutions conformes pour la prescription de $f_{\vec{a}}$.

Pour aller plus loin

Enfin, il y aurait de nombreuses façons de poursuivre ce travail.

- Peut-on relâcher l'une des nombreuses hypothèses faites sur la variété spatiale \mathcal{M} : dans le vide, compacte, localement conformément plate, sans frontière, symétrique en temps ?
- Peut-on appliquer la méthode conforme à d'autres théories de gravité modifiée, comme la gravité massive, ou les théories de Horndeski ?

Bibliographie

- [1] M. Aissen, A. Schoenberg I. J. Edrei, and A. Whitney. On the Generating Functions of Totally Positive Sequences. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 37(5):303–307, 1951.
- [2] A. Balfagon and X. Jaen. Simplifying Tensor Polynomials with Indices. *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints*, September 1998, 9809022.
- [3] A. Balfagon and X. Jaen. Nondimensional Simplification of Tensor Polynomials with Indices. *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints*, December 1999, 9912062.
- [4] M. Bañados, C. Teitelboim, and J. Zanelli. Lovelock–Born–Infeld theory of gravity. In *J. J. Giambiagi Festschrift*. World Scientific, 1990.
- [5] R. Bartnik and J. Isenberg. The constraint equations. In *50 Years of the Cauchy Problem, in honour of Y. Choquet-Bruhat*, 2003, 0405092.
- [6] A. A. Bel'kov, A. V. Lanyov, and A. Schaale. Calculation of heat-kernel coefficients and usage of computer algebra. *Computer Physics Communications*, 95(2):123–130, 1996.
- [7] M. J. Booth. HeatK: A Mathematica program for computing heat kernel coefficients. *ArXiv High Energy Physics - Theory e-prints*, 1998, hep-th/9803113.
- [8] C. H. Brans. The roots of scalar-tensor theory: an approximate history, June 2005.
- [9] P. Bueno, P. A. Cano, A. Óscar Lasso, and P. F. Ramírez. f (Lovelock) theories of gravity. *Journal of High Energy Physics*, 4:28, April 2016, 1602.07310.
- [10] P. Bullen and M. Marcus. Symmetric Means and Matrix Inequalities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 12(2):285–290, 1961.
- [11] L. Caffarelli, L. Nirenberg, and J. Spruck. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian. *Acta Math.*, 155:261–301, 1985.
- [12] N. T. Cang. Applications of Fixed Point Theorems to the Vacuum Einstein Constraint Equations with Non-Constant Mean Curvature. *ArXiv Analysis of PDEs e-prints*, 2014, 1405.7731.

- [13] N. T. Cang. Nonexistence and Nonuniqueness Results for Solutions to the Vacuum Einstein Conformal Constraint Equations. *ArXiv Analysis of PDEs e-prints*, 2015, 1507.01081.
- [14] G. Catino and L. Mazziere. Connected sum construction for σ_k -yamabe metrics. *Journal of Geometric Analysis*, 23(2):812–854, Apr 2013.
- [15] Y. Choquet-Bruhat. The Cauchy Problem for Stringy Gravity. *J. Math. Phys.*, 29:1891–1895, 1988.
- [16] Y. Choquet-Bruhat. *General Relativity and the Einstein equations*. Oxford University Press, 2009.
- [17] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, and S. Zerbini. Dark energy in modified Gauss-Bonnet gravity: Late-time acceleration and the hierarchy problem. *Phys. Rev.*, D73(8):084007, April 2006, hep-th/0601008.
- [18] P. K. Concha, N. Merino, and E. K. Rodríguez. Lovelock gravities from Born-Infeld gravity theory. *Physics Letters B*, 765:395–401, February 2017, 1606.07083.
- [19] M. Coste. Comptage de racines et signature de formes quadratiques. www.math.univ-paris13.fr/~boyer/enseignement/agreg/racsign.pdf, 2003.
- [20] Zou D.-C., Yue R.-H., and Yang Z.-Y. Thermodynamics of Third Order Lovelock Anti-de Sitter Black Holes Revisited. *Communications in Theoretical Physics*, 55(3):449, 2011.
- [21] M. Dahl, R. Gicquaud, and E. Humbert. A limit equation associated to the solvability of the vacuum Einstein constraint equations using the conformal method. *Duke Math. J.*, 161(14):2669–2697, December 2012.
- [22] N. Deruelle and L. Fariña-Busto. The Lovelock Gravitational Field Equations in Cosmology. *Phys. Rev.*, D41:3696, 1990.
- [23] N. Deruelle and J. Madore. On the quasilinearity of the Einstein-‘Gauss-Bonnet’ gravity field equations. In *Cargese Conference held in Aug 2002 in honor of Yvonne Choquet-Bruhat*, 2003, 0305004.
- [24] N. Deruelle, Y. Sendouda, and A. Youssef. Various Hamiltonian formulations of $f(R)$ gravity and their canonical relationships. *Phys. Rev. D*, 80(8):084032, 11, 2009.
- [25] J. Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Hermann, 1968.
- [26] S. Fisk. Polynomials, roots, and interlacing. <https://arxiv.org/abs/math/0612833>, 2008, 0612833v2.
- [27] Y. Fourès(Choquet)-Bruhat. Théorème d’existence pour certains systèmes d’équations aux dérivées partielles non linéaires. *Acta Mathematica*, 88:141–225, 1952.
- [28] S. A. Fulling, R. C. King, B. G. Wybourne, and C. J. Cummins. Normal forms for tensor polynomials. I. The Riemann tensor. *Classical and Quantum Gravity*, 9(5):1151, 1992.

- [29] L. Gårding. An inequality for hyperbolic polynomials. *J. Math. Mech.*, 8:957–965, 1959.
- [30] Y. Ge, G. Wang, and J. Wu. The Gauss–Bonnet–Chern Mass of Conformally Flat Manifolds. *International Mathematics Research Notices*, 2014(17):4855–4878, 2014.
- [31] R. Gicquaud and T. C. Nguyen. Solutions to the Einstein-scalar field constraint equations with a small TT-tensor. *ArXiv Analysis of PDEs e-prints*, 2015, 1502.05164.
- [32] B. Guan. Conformal Metrics with Prescribed Curvature Functions on Manifolds with Boundary. *American Journal of Mathematics*, 129(4):915–942, 2007.
- [33] P. Guan and G. Wang. A fully nonlinear conformal flow on locally conformally flat manifolds. *J. reine angew. Math.*, 557:219–238, 2003.
- [34] M. J. Gursky and J. A. Viaclovsky. Prescribing symmetric functions of the eigenvalues of the Ricci tensor. *Ann. of Math.*, 166(2):475–531, 2007.
- [35] F. R. Harvey and H. B. Jr. Lawson. Hyperbolic polynomials and the Dirichlet problem. *ArXiv e-prints*, December 2009, 0912.5220.
- [36] M. Holst. Overview of the Non-CMC Analysis Frameworks for the Conformal Method. *Fields Institute Lecture*, 2015.
- [37] G. W. Horndeski. Second-Order Scalar-Tensor Field Equations in a Four-Dimensional Space. *International Journal of Theoretical Physics*, 10:363–384, September 1974.
- [38] V. Ilyin, A. Kryukov, A. Rodionov, and G. Shpiz. The use of group and algebraic properties of tensor expressions in an object-oriented CA system. *Programming and Computer Software*, 26(1):39–41, Jan 2000.
- [39] V. A. Ilyin and A. P. Kryukov. ATENSOR – REDUCE program for tensor simplification. *Computer Physics Communications*, 96:36–52, July 1996.
- [40] J. Isenberg. Constant mean curvature solutions of the Einstein constraint equations on closed manifolds. *Classical and Quantum Gravity*, 12(9):2249, 1995.
- [41] J. Isenberg and V. Moncrief. *Physics on Manifolds: Proceedings of the International Colloquium in honour of Yvonne Choquet-Bruhat, Paris, June 3–5, 1992*, chapter Some Results on Non Constant Mean Curvature Solutions of the Einstein Constraint Equations, pages 295–302. Springer Netherlands, Dordrecht, 1994.
- [42] L. E. Kidder, M. A. Scheel, and S. A. Teukolsky. Extending the lifetime of 3D black hole computations with a new hyperbolic system of evolution equations. *Phys. Rev. D*, 64:064017, Aug 2001.
- [43] M. Kord Zangeneh, F. S. N. Lobo, and M. H. Dehghani. Traversable wormholes satisfying the weak energy condition in third-order Lovelock gravity. *ArXiv e-prints*, October 2015, 1510.07089.

- [44] D. C. Kurtz. A Sufficient Condition for All the Roots of a Polynomial To Be Real. *The American Mathematical Monthly*, 99(3):259–263, 1992.
- [45] M.-L. Labbi. *Riemannian curvature: variations on different notions of positivity*. Habilitation à diriger des recherches, Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, July 2006.
- [46] X. Lachaume. $n + 1$ formalism of f (Lovelock) gravity. *ArXiv e-prints*, 2017, 1712.03435.
- [47] X. Lachaume. On the concavity of a sum of elementary symmetric polynomials. *ArXiv e-prints*, 2017, 1712.10327.
- [48] X. Lachaume. The constraint equations of Lovelock gravity theories: a new σ_k -Yamabe problem. *ArXiv e-prints*, 2017, 1712.04528.
- [49] D. Langlois and K. Noui. Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(02):034, 2016.
- [50] P. Laurent-Gengoux. Analyse des équations aux dérivées partielles. <http://perso.ecp.fr/~laurent/Modif/Documents/CoursEDP.pdf>, 2006.
- [51] A. Li and Y. Y. Li. A fully nonlinear version of the Yamabe problem and a Harnack type inequality. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 336(4):319–324, 2003.
- [52] A. Li and Y. Y. Li. On some conformally invariant fully nonlinear equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 56(10):1416–1464, 2003.
- [53] A. Li and Y. Y. Li. On some conformally invariant fully nonlinear equations, II. Liouville, Harnack and Yamabe. *Acta Mathematica*, 195(1):117–154, 2005.
- [54] S. Liang and J. Zhang. A complete discrimination system for polynomials with complex coefficients and its automatic generation. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 42(2):113–128, 1999.
- [55] D. Lovelock. Divergence-free tensorial concomitants. *Aequationes Math.*, 4:127–138, 1970.
- [56] D. Lovelock. The Einstein Tensor and Its Generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3):498–501, March 1971.
- [57] D. Lovelock. The Four-Dimensionality of Space and the Einstein Tensor. *Journal of Mathematical Physics*, 13(6):874–876, June 1972.
- [58] L. R. U. Manssur, R. Portugal, and B. F. Svaiter. Group-theoretic approach for symbolic tensor manipulation: II. Dummy Indices. *International Journal of Modern Physics C*, 13(07):859–879, 2002.
- [59] M. Marcus and L. Lopes. Inequalities for symmetric functions and Hermitian matrices. *Canad. J. Math.*, 9:305–312, 1957.

- [60] A. Mardones and J. Zanelli. Lovelock-Cartan theory of gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 8(8):1545, 1991.
- [61] D. Maxwell. Rough solutions of the Einstein constraint equations on compact manifolds. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 02(02):521–546, 2005, <http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S021989160500049X>.
- [62] D. Maxwell. A class of solutions of the vacuum Einstein constraint equations with freely specified mean curvature. *Math. Res. Lett.*, 16(4):627–645, 2009.
- [63] L. Mazzieri and A. Segatti. Constant σ_k -curvature metrics with delaunay type ends. *Advances in Mathematics*, 229(6):3147–3191, 2012.
- [64] J. B. McLeod. On four Inequalities in Symmetric Functions. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 11(4):211–219, 1959.
- [65] M. R. Mehdizadeh, M. K. Zangeneh, and F. S. N. Lobo. Higher-dimensional thin-shell wormholes in third-order Lovelock gravity. *Phys. Rev.*, D92(4):044022, August 2015, 1506.03427.
- [66] S. Nojiri and S. D. Odintsov. Modified Gauss Bonnet theory as gravitational alternative for dark energy. *Physics Letters B*, 631:1–6, December 2005, hep-th/0508049.
- [67] S. Nojiri and S. D. Odintsov. Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy. *eConf*, C0602061:06, 2006, hep-th/0601213. [Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.4,115(2007)].
- [68] S. Nojiri, S. D. Odintsov, and M. Sasaki. Gauss-Bonnet dark energy. *Phys. Rev.*, D71(12):123509, 2005, hep-th/0504052.
- [69] G. J. Olmo. Limit to General Relativity in $f(R)$ theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 75:023511, Jan 2007.
- [70] T. Padmanabhan and D. Kothawala. Lanczos-Lovelock models of gravity. *Phys. Rept.*, 531:115–171, 2013, 1302.2151.
- [71] R. Portugal. An algorithm to simplify tensor expressions. *Computer Physics Communications*, 115(2):215–230, 1998. Computer Algebra in Physics Research.
- [72] R. Portugal. Algorithmic simplification of tensor expressions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32(44):7779, 1999.
- [73] R. Portugal and B. F. Svaiter. Group-theoretic Approach for Symbolic Tensor Manipulation: I. Free Indices. *ArXiv Mathematical Physics e-prints*, July 2001, math-ph/0107031.
- [74] B. Premoselli. The Einstein-scalar field constraint system in the positive case. *Comm. Math. Phys.*, 326(2):543–557, 2014.
- [75] B. Premoselli. Effective multiplicity for the Einstein-scalar field Lichnerowicz equation. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 53(1-2):29–64, 2015.

- [76] H. S. Reall, N. Tanahashi, and B. Way. Causality and Hyperbolicity of Lovelock Theories. *Class. Quant. Grav.*, 31:205005, 2014, 1406.3379.
- [77] H. S. Reall, N. Tanahashi, and B. Way. Shock Formation in Lovelock Theories. *Phys. Rev.*, D91(4):044013, 2015, 1409.3874.
- [78] H. Rund. Variational problems involving combined tensor fields. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 29(3):243–262, 1966.
- [79] M. Salgado. The Cauchy problem of scalar-tensor theories of gravity. *Class. Quant. Grav.*, 23:4719–4742, 2006.
- [80] M. Salgado and D. Martínez-del Río. The initial value problem of scalar-tensor theories of gravity. *Journal of Physics: Conference Series*, 91(1):012004, 2007.
- [81] M. Salgado, D. Martínez-del Río, M. Alcubierre, and D. Núñez. Hyperbolicity of scalar-tensor theories of gravity. *Phys.Rev.D*, 77:104010, 2008.
- [82] O. Sarbach, G. Calabrese, J. Pullin, and M. Tiglio. Hyperbolicity of the Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura system of Einstein evolution equations. *Phys. Rev. D*, 66:064002, Sep 2002.
- [83] W.-M. Sheng, N. S. Trudinger, and X.-J. Wang. The Yamabe problem for higher order curvatures. *J. Differential Geom.*, 77(3):515–553, 11 2007.
- [84] W.-M. Sheng, N. S. Trudinger, and X.-J. Wang. The k -Yamabe problem. *Surveys in Differential Geometry*, 17, 2012.
- [85] T. P. Sotiriou and V. Faraoni. $f(R)$ theories of gravity. *Rev. Mod. Phys.*, 82:451–497, Mar 2010.
- [86] N. Straumann. Problems with Modified Theories of Gravity, as Alternatives to Dark Energy, September 2008.
- [87] C. Teitelboim and J. Zanelli. Dimensionally continued topological gravitation theory in Hamiltonian form. *Classical and Quantum Gravity*, 4(4):L125, 1987.
- [88] T. Torii and H. Shinkai. $N+1$ formalism in Einstein-Gauss-Bonnet gravity. *Phys. Rev.*, D78:084037, 2008, 0810.1790.
- [89] R. Troncoso and J. Zanelli. Higher-dimensional gravity, propagating torsion and AdS gauge invariance. *Classical and Quantum Gravity*, 17(21):4451, 2000.
- [90] J. A. Viaclovsky. Conformal geometry, contact geometry, and the calculus of variations. *Duke Math. J.*, 101(2):283–316, 02 2000.
- [91] J. A. Viaclovsky. Estimates and existence results for some fully nonlinear elliptic equations on Riemannian manifolds. *Comm. Anal. Geom.*, 10(4):815–846, 2002.
- [92] D. Wands. Extended gravity theories and the Einstein–Hilbert action. *Classical and Quantum Gravity*, 11(1):269, 1994.

BIBLIOGRAPHIE

- [93] D. Wenjie Tian and I. Booth. Lovelock-Brans-Dicke gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 33(4):045001, February 2016, 1502.05695.
- [94] S. Willison. Local well-posedness in Lovelock gravity. *Class. Quant. Grav.*, 32(2):022001, 2015, 1409.6656.
- [95] S. Willison. Quasilinear reformulation of Lovelock gravity. *Int. J. Mod. Phys.*, D24(09):1542010, 2015, 1504.08208.
- [96] L. Yang, X. Hou, and Z. Zeng. A complete discrimination system for polynomials. *Science in China Series E-Technological Sciences*, 39(6):628–646, 1996.
- [97] L. Yang and B. Xia. An explicit criterion to determine the number of roots of a polynomial on an interval. In *Progress in Natural Science*, page 910, 2000.
- [98] K. Yano. *Integral Formulas in Riemannian Geometry*. Dekker, 1970.
- [99] K. Yano and M. Kon. *Structures on Manifolds*. World Scientific, 1984.
- [100] J. Zanelli. Chern–Simons forms in gravitation theories. *Classical and Quantum Gravity*, 29(13):133001, 2012.

Résumé : Cette thèse est consacrée au problème d'évolution des théories de gravité modifiée. Après avoir rappelé ce qu'il en est pour la Relativité Générale (RG), nous exposons le formalisme $n + 1$ des théories $f(R)$, Brans-Dicke et tenseur-scalaire et redémontrons un résultat connu : le problème de Cauchy est bien posé pour ces théories, et les équations de contrainte se réduisent à celles de la RG avec un champ de matière.

Puis nous effectuons la même décomposition $n + 1$ pour les théories de Lovelock et, ce qui est nouveau, $f(\text{Lovelock})$. Nous étudions ensuite les équations de contrainte des théories de Lovelock et montrons qu'elles sont, dans le cas conformément plat et symétrique en temps, la prescription d'une somme de σ_k -courbures. Afin de résoudre cette équation de prescription, nous introduisons une nouvelle famille de polynômes semi-symétriques homogènes et développons des résultats de concavité pour ces polynômes. Nous énonçons une conjecture qui, si elle était avérée, nous permettrait de résoudre l'équation de prescription dans de nombreux cas : $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$, avec $\deg P = \deg Q = n$,

$$P \text{ et } Q \text{ sont scindés} \implies \sum_{k=0}^n P^{(k)} Q^{(n-k)} \text{ est scindé.}$$

Mots clés : Relativité Générale, équations de contrainte, problème de Cauchy, $f(R)$, tenseur-scalaire, Lovelock, $f(\text{Lovelock})$, σ_k -Yamabe, polynômes symétriques élémentaires, concavité.



Abstract: This thesis is devoted to the evolution problem for modified gravity theories. After having explained this problem for General Relativity (GR), we present the $n + 1$ formalism for $f(R)$ theories, Brans-Dicke and scalar-tensor theories. We recall a known result: the Cauchy problem for these theories is well-posed, and the constraint equations are reduced to those of GR with a matter field.

Then we proceed to the same $n+1$ decomposition for Lovelock and $f(\text{Lovelock})$ theories, the latter being an original result. We show that in the locally conformally flat time-symmetric case, they can be written as the prescription of a sum of σ_k -curvatures. In order to solve the prescription equation, we introduce a new family of homogeneous semi-symmetric polynomials and prove some concavity results for those polynomials. We express the following conjecture: if this is true, we are able to solve the prescription equation in many cases. $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$, with $\deg P = \deg Q = n$,

$$P \text{ and } Q \text{ are real-rooted} \implies \sum_{k=0}^n P^{(k)} Q^{(n-k)} \text{ is real-rooted.}$$

Keywords: General Relativity, constraint equations, Cauchy problem, $f(R)$, scalar-tensor, Lovelock, $f(\text{Lovelock})$, σ_k -Yamabe, elementary symmetric polynomials, concavity.