



**HAL**  
open science

# Étude mathématique des problèmes paraboliques fortement anisotropes

Thomas Blanc

► **To cite this version:**

Thomas Blanc. Étude mathématique des problèmes paraboliques fortement anisotropes. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université d'Aix Marseille, 2017. Français. NNT : . tel-01664720

**HAL Id: tel-01664720**

**<https://hal.science/tel-01664720>**

Submitted on 15 Dec 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ**

ECOLE DOCTORALE 184

UFR DES SCIENCES

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE MARSEILLE (I2M), UMR 7373

Thèse présentée pour obtenir le grade universitaire de docteur

Discipline : Mathématiques

**Thomas BLANC**

# **Étude mathématique des problèmes paraboliques fortement anisotropes**

Soutenue le 04/12/2017 devant le jury

|                     |                          |                      |
|---------------------|--------------------------|----------------------|
| Mihai BOSTAN        | Aix-Marseille Université | Directeur de thèse   |
| Franck BOYER        | Université Toulouse 3    | Codirecteur de thèse |
| Anaïs CRESTETTO     | Université de Nantes     | Examinatrice         |
| Thierry GOUDON      | INRIA Sophia Antipolis   | Rapporteur           |
| Olivier GUES        | Aix-Marseille Université | Examineur            |
| Frédéric LAGOUTIERE | Université Lyon 1        | Examineur            |
| Mohammed LEMOU      | Université Rennes 1      | Rapporteur           |



# Table des matières

|          |                                                                                   |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                                               | <b>1</b>  |
| 1.1      | Introduction générale et motivations . . . . .                                    | 1         |
| 1.2      | Modèles étudiés et résultats de convergence . . . . .                             | 5         |
| 1.2.1    | Analyse formelle . . . . .                                                        | 6         |
| 1.2.2    | Le moyenné d'un champ de matrices . . . . .                                       | 8         |
| 1.2.3    | Champs de vecteurs en involution . . . . .                                        | 12        |
| 1.3      | Analyse asymptotique d'un problème parabolique avec transport raide . . . . .     | 13        |
| 1.3.1    | Premier résultat de convergence . . . . .                                         | 14        |
| 1.3.2    | Second résultat de convergence . . . . .                                          | 16        |
| 1.4      | Méthode numérique pour le calcul d'un champ de matrices moyenné . . . . .         | 18        |
| 1.5      | Analyse asymptotique d'un problème de diffusion fortement anisotrope . . . . .    | 20        |
| 1.5.1    | Résultat de convergence forte . . . . .                                           | 21        |
| <b>2</b> | <b>Analyse asymptotique d'un problème parabolique avec transport raide</b>        | <b>27</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .                                                            | 27        |
| 2.2      | Présentation des résultats principaux et approche formelle . . . . .              | 29        |
| 2.3      | Le moyenné d'un champ de matrices . . . . .                                       | 41        |
| 2.3.1    | Définitions et propriétés . . . . .                                               | 41        |
| 2.3.2    | Exemples . . . . .                                                                | 46        |
| 2.3.3    | L'équation de Fokker-Planck . . . . .                                             | 48        |
| 2.4      | Caractère bien posé du problème raide et estimations uniformes . . . . .          | 50        |
| 2.5      | Analyse à deux échelles . . . . .                                                 | 54        |
| 2.6      | Preuves des Théorèmes principaux . . . . .                                        | 61        |
| <b>3</b> | <b>Méthodes numériques pour le calcul d'un champ de matrices moyenné.</b>         |           |
|          | <b>Application à l'analyse asymptotique d'un problème parabolique avec un</b>     |           |
|          | <b>terme de transport raide</b>                                                   | <b>71</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .                                                            | 71        |
| 3.2      | Analyse asymptotique, résultats théoriques . . . . .                              | 72        |
| 3.3      | Calcul du moyenné d'un champ de matrices . . . . .                                | 75        |
| 3.3.1    | Calcul du champ de matrices $G(s)D$ . . . . .                                     | 75        |
| 3.3.2    | Schéma numérique pour le calcul de $\langle D \rangle$ . . . . .                  | 76        |
| 3.3.3    | Calculs numériques et exemples . . . . .                                          | 78        |
| 3.4      | Comportement d'un problème parabolique avec un terme de transport raide . . . . . | 87        |
| <b>4</b> | <b>Analyse asymptotique d'un problème de diffusion fortement anisotrope</b>       | <b>91</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .                                                            | 91        |
| 4.2      | Le cas de la dimension finie . . . . .                                            | 93        |

|          |                                                                          |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3      | Opérateurs de moyenne . . . . .                                          | 96         |
| 4.4      | Les propriétés de l'opérateur $\mathcal{B} = -\mathcal{T}^2$ . . . . .   | 103        |
| 4.4.1    | Semi-groupe associé à l'opérateur $\mathcal{B}$ . . . . .                | 103        |
| 4.4.2    | Propriétés spectrales de l'opérateur $\mathcal{B}$ . . . . .             | 106        |
| 4.5      | Construction du problème effectif . . . . .                              | 114        |
| 4.5.1    | Outils techniques . . . . .                                              | 114        |
| 4.5.2    | Hypothèse structurelle associé à l'opérateur $\mathcal{B}$ . . . . .     | 121        |
| 4.5.3    | Définition et propriétés de la forme bilinéaire $\mathfrak{m}$ . . . . . | 123        |
| 4.6      | Estimations uniformes . . . . .                                          | 128        |
| 4.7      | Forme bilinéaire $\mathfrak{n}$ . . . . .                                | 136        |
| 4.7.1    | Hypothèses structurelles associées au champ de matrices $D$ . . . . .    | 136        |
| 4.7.2    | Définition et propriétés de la forme bilinéaire $\mathfrak{n}$ . . . . . | 136        |
| 4.8      | Comportement asymptotique . . . . .                                      | 137        |
| <b>5</b> | <b>Conclusions et perspectives</b>                                       | <b>141</b> |
| <b>A</b> | <b>Quelques rappels</b>                                                  | <b>143</b> |
| A.1      | $C^0$ -groupes d'opérateurs . . . . .                                    | 143        |
| A.2      | Solutions variationnelles pour les problèmes d'évolution . . . . .       | 148        |
| <b>B</b> | <b>Preuves</b>                                                           | <b>151</b> |
| B.1      | Preuves des Propositions 2.4.4, 2.4.5, 2.4.6 . . . . .                   | 151        |
| B.2      | Preuve de la Proposition 4.7.1 . . . . .                                 | 160        |

# Chapitre 1

## Introduction

L'objet de ce manuscrit concerne l'analyse asymptotique d'équations aux dérivées partielles possédant des termes de dérivées raides. Dans ces équations, la raideur est caractérisée par la présence d'un petit paramètre  $\varepsilon > 0$ , qui sera voué à tendre vers zéro. Plus précisément, ces équations s'écrivent sous la forme

$$\partial_t u^\varepsilon(t, y) + \mathcal{A}u^\varepsilon(t, y) + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{B}u^\varepsilon(t, y) = 0, \quad (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \quad (1.1)$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des opérateurs différentiels linéaires qui seront précisés par la suite. On cherche à décrire le comportement, lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  des solutions de (1.1).

### 1.1 Introduction générale et motivations

L'analyse asymptotique de problèmes du type (1.1) trouve ses origines dans l'étude de modèles provenant de la physique des plasmas. En effet, depuis une cinquantaine d'années l'étude des plasmas est en pleine expansion, avec pour but la maîtrise du procédé de fusion nucléaire. Le transport de particules dans un plasma peut, d'un point de vue mésoscopique et en négligeant le phénomène de collision entre les particules, être modélisé par une équation donnant l'évolution d'une densité de particules chargées de masse  $m$  et de charge  $q$ , appelée équation de Vlasov

$$\partial_t f + v(p) \cdot \nabla_x f + q(E(t, x) + v(p) \wedge B(t, x)) \cdot \nabla_p f = 0, \quad (t, x, p) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \quad (1.2)$$

La fonction  $f = f(t, x, p)$  désigne une densité de particules dépendant des variables de temps  $t$ , de position  $x$  et de quantité de mouvement  $p$ . On désigne par  $v(p)$  la fonction vitesse. Dans un cadre relativiste, la fonction vitesse peut être exprimée par  $v(p) = \frac{p}{m} \left(1 + \frac{|p|^2}{m^2 c_0^2}\right)^{-1/2}$ , où  $c_0$  est la vitesse de la lumière dans le vide. On désigne par  $(E(t, x), B(t, x))$  le champ électro-magnétique dont l'évolution est régie par les équations de Maxwell

$$\partial_t E - c_0^2 \operatorname{rot}_x B = -\frac{j}{\varepsilon_0}, \quad \partial_t B + \operatorname{rot}_x E = 0, \quad \operatorname{div}_x E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{div}_x B = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \quad (1.3)$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\rho = q \int_{\mathbb{R}^3} f dp$  la densité de charge et  $j = q \int_{\mathbb{R}^3} v(p) f dp$  la densité de courant. Le couplage formé par (1.2) et (1.3) s'appelle le problème de Vlasov-Maxwell.

### Modélisation pour les plasmas fortement magnétisés

Dans le cadre du confinement d'un plasma à l'aide d'un champ magnétique intense, certaines simplifications peuvent être apportées à ce modèle. On commence par se placer dans le cadre non relativiste, c'est-à-dire qu'on suppose que la vitesse de la lumière est grande par rapport à la vitesse des particules. On pose alors  $c_0 = +\infty$ . Dans ce cadre  $v(p) = \frac{p}{m}$  et on peut réécrire l'équation (1.2) à l'aide de la variable de vitesse  $v$ . On suppose que le champ magnétique intense est stationnaire, l'équation de Maxwell-Faraday  $\partial_t B + \text{rot}_x E = 0$  peut se réécrire  $\text{rot}_x E = 0$ , ainsi le champ électrique dérive d'un potentiel  $E = -\nabla_x \phi$ . Enfin, la loi de Gauss électrique nous donne que le potentiel  $\phi$  satisfait à l'équation de Poisson

$$-\varepsilon_0 \Delta_x \phi = \rho(t, x) \quad \text{avec} \quad \rho(t, x) = q \int_{\mathbb{R}^3} f(t, x, v) dv, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3. \quad (1.4)$$

Le nouveau problème formé par (1.2) et (1.4) s'appelle le problème de Vlasov-Poisson. Enfin une autre simplification peut être apportée au problème de Vlasov-Poisson en supposant que le potentiel électrique  $\phi$  est donné, nous amenant à l'équation de Vlasov linéaire. On décrit le champ magnétique intense de la manière suivante

$$B^\varepsilon(x) = \frac{B(x)}{\varepsilon} e(x), \quad |e(x)| = 1, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (1.5)$$

où le petit paramètre  $\varepsilon$  caractérise l'intensité du champ,  $B(x) > 0$  est l'intensité du champ adimensionné,  $e(x)$  est unitaire et donne la direction du champ magnétique. Dans ce cas, le problème de Vlasov linéaire, pour la fonction de densité  $f^\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon + \frac{q}{m} \left( -\nabla_x \phi + v \wedge \frac{B(x)}{\varepsilon} e(x) \right) \cdot \nabla_v f^\varepsilon = 0, & (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \\ f^\varepsilon(0, x, v) = f^{\text{in}}(x, v), & (x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.6)$$

La présence du champ magnétique (1.5) conduit les particules à fortement osciller autour des lignes de champ à la fréquence, dite *cyclotronique*,  $\frac{q|B^\varepsilon|}{m} = \frac{q|B|}{m\varepsilon} \sim \frac{1}{\varepsilon}$ . Cette rotation autour des lignes de champ s'effectue sur des cercles dont le rayon est appelé *rayon de Larmor*, et qui est proportionnel à l'inverse de la fréquence cyclotronique,  $\rho_L \sim \varepsilon$ . Ce phénomène explique le principe même du confinement des plasmas par le biais d'un champ magnétique intense car, lorsque  $\varepsilon$  devient petit,  $\rho_L \rightarrow 0$  et les particules vont suivre les lignes de champ. Clairement, deux échelles caractéristiques en temps se dégagent, l'une tenant compte du mouvement cyclotronique sur des cercles se trouvant dans un plan orthogonal aux lignes de champ, et l'autre tenant compte du mouvement des particules le long des lignes de champ. Le choix des grandeurs caractéristiques dans les problèmes présentés précédemment est donc déterminant du point de vue de la modélisation et amène à considérer divers régimes asymptotiques, lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, appelé dans ce cadre *modèles gyrocinétiques*. On précise les plus classiques qui sont le régime centre-guide et le régime du rayon de Larmor fini. Le régime centre-guide consiste à négliger le rayon de rotation des particules autour des lignes de champ. Au contraire, le régime du rayon de Larmor fini, plus réaliste, consiste à considérer que la longueur caractéristique dans le plan orthogonal aux lignes de champ est du même ordre que le rayon de Larmor.

### Modèles effectifs pour l'équation de Vlasov, homogénéisation

L'analyse asymptotique et la recherche de problèmes effectifs associés aux problèmes de Vlasov, pour chacun de ces régimes, est un sujet qui a été beaucoup étudié. La raison de

ce succès est que la résolution numérique de tels problèmes est particulièrement délicate. En effet, la présence d'échelles caractéristiques en temps disparates nous oblige, par exemple dans le cas de méthodes numériques explicites, à choisir un pas de temps vérifiant une condition CFL afin de s'assurer de la stabilité de la méthode, ce qui amène à des coûts de calcul prohibitifs. La recherche de problème effectif permet de répondre à cette problématique en proposant des problèmes non pénalisés par le paramètre  $\varepsilon$  et dont la solution décrit le comportement de la suite de fonctions  $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  lorsque le paramètre  $\varepsilon$  tend vers zéro. Le calcul de la solution du problème homogénéisé peut alors être réalisé par une méthode numérique classique. Des estimations entre la solution du problème de départ  $f^\varepsilon$  et la solution du problème effectif peuvent permettre de mesurer l'erreur commise pour  $\varepsilon > 0$  petit mais fixé. Le cadre de l'homogénéisation périodique semble naturel à la production de modèles effectifs, étant donné que le mouvement cyclotronique des particules est périodique et que le phénomène multi-échelle est causé par ces oscillations rapides périodiques. Les importants travaux de N'Guetseng [60] et Allaire [3], concernant le concept de convergence à deux échelles et ses applications à l'homogénéisation de problèmes elliptiques ou paraboliques possédant des termes oscillants périodiques, ont été repris et adaptés par Frénod et Sonnendrücker dans [48], [49], qui proposent une analyse asymptotique de l'équation de Vlasov linéaire et du problème de Vlasov-Poisson dans le cadre du régime centre-guide. L'étude concernant le régime du rayon de Larmor fini est réalisée par ces mêmes auteurs, toujours à l'aide des outils d'homogénéisation périodique, dans [50]. Parmi les autres études du problème de Vlasov-Poisson dans le cadre du rayon de Larmor fini, on peut citer les travaux de Frénod et Mouton [47], Ghendrih, Hauray et Nouri [53], Han-Kwan [55], [56]. Dans un récent travail [22], Bostan et Finot proposent une analyse asymptotique du problème de Vlasov-Poisson dans le cadre du régime rayon de Larmor fini; un comportement fort des solutions est mis en évidence. Parallèlement à cela, Bostan propose une analyse asymptotique de ces problèmes basée sur la notion d'opérateurs de projection [15, 16, 18]. Le problème effectif peut alors être explicité à l'aide de résultats provenant de la théorie ergodique. Les méthodes de projections et leur interprétation ergodique permettent, de surcroît, de traiter des problèmes d'homogénéisation non périodiques. Cette approche a amené Bostan à proposer dans [16] une analyse d'un problème de transport linéaire abstrait possédant des termes de dérivées raides, et l'analyse asymptotique du problème de Vlasov linéaire, pour les régimes centre-guide et rayon de Larmor fini, apparaît comme un cas particulier du résultat montré pour le problème de transport abstrait. Une amélioration des résultats de [16] est proposée dans [18] en combinant l'approche ergodique avec l'approche multi-échelle, voir la Remarque 1.5.2.

### Prise en compte des opérateurs d'ordre deux

Naturellement, la question de savoir si les outils d'homogénéisation introduits pour traiter les équations abstraites de transport raide, peuvent être utilisés pour d'autres types d'équations, se pose. En effet, les équations de type paraboliques servent également à la modélisation de nombreux phénomènes en physique des plasmas. Par exemple, partant de l'équation de Vlasov (1.6), on peut introduire un second membre de type diffusif, appelé noyau de Fokker-Planck, afin de prendre en compte les collisions entre particules. Cela nous amène à considérer le modèle linéaire suivant appelé équation de Vlasov-Fokker-Planck

$$\partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon + \frac{q}{m} \left( E + v \wedge \frac{B(x)}{\varepsilon} e(x) \right) \cdot \nabla_v f^\varepsilon = \nu \operatorname{div}_v (\Theta \nabla_v f^\varepsilon + v f^\varepsilon), \quad (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (1.7)$$

où  $\nu$  est la fréquence de collision et  $\Theta$  est la température. On cherche alors à comprendre quelle sera l'influence de l'opérateur de diffusion introduit lors du processus d'homogénéisation. On espère ainsi qu'une meilleure compréhension du comportement asymptotique du problème linéaire abstrait (1.1), lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, dans le cas où  $\mathcal{A}$  est un opérateur de diffusion et  $\mathcal{B}$  un opérateur de transport, nous permettra de traiter des problèmes tels que (1.7). On peut citer les travaux [20, 21], de Bostan et Caldini, qui traitent de l'analyse asymptotique de l'équation de Vlasov linéaire, à l'aide de méthodes de projection, pour le régime asymptotique du rayon de Larmor fini associé à deux noyaux de collision, le noyau de Boltzmann linéaire et le noyau, non linéaire, de Fokker-Planck-Landau. D'autres travaux concernant les équations de transport avec collisions peuvent être cités, comme [27] ou [71]. Des modèles macroscopiques peuvent être obtenus à partir de ces modèles mésoscopiques lorsque la fréquence de collision entre particules devient grande. Ainsi Bardos, Golse et Levermore étudient dans [8] et [9] les limites hydrodynamiques associées à l'équation de Boltzmann ; cette approche permet d'amener à des modélisations de type fluide. Outre la prise en compte des collisions dans les phénomènes de transport de particules, les opérateurs de diffusion permettent de modéliser d'autres phénomènes apparaissant dans les plasmas fortement magnétisés, comme la diffusion thermique. Il est connu que la diffusion thermique dans un plasma fortement magnétisé est prépondérante le long des lignes de champ magnétique par rapport à la diffusion dans les directions transverses à ce champ, voir [30]. Une modélisation possible de ce phénomène, dans un cadre linéaire, est donnée par l'équation parabolique

$$\partial_t u^\varepsilon - \operatorname{div}_y(D(y)\nabla_y u^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_y(b(y) \otimes b(y)\nabla_y u^\varepsilon) = 0, \quad (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \quad (1.8)$$

où  $m \in \{2, 3\}$ ,  $b$  représente le champ magnétique et  $D$  est le champ de diffusion agissant uniquement dans les directions orthogonales au champ  $b$ , on peut choisir

$$D(y) = I_m - \frac{b(y) \otimes b(y)}{|b(y)|^2}.$$

Cette remarque motive l'analyse asymptotique du problème abstrait (1.1) dans le cas où les opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont tous deux des opérateurs de diffusion. L'étude numérique de ce problème pose les mêmes difficultés que pour les problèmes de transport possédant des termes raides et impose l'utilisation de méthodes numériques implicites, voir par exemple [6, 68]. D'autres approches sont proposées dans les cadres parabolique et elliptique, on peut citer les travaux de Degond, Deluzet, Negulescu, Lozinski et Narski concernant les schémas préservant l'asymptotique [38, 39]. Une analyse théorique du problème (1.8), basée sur des méthodes de projection, a été proposée par Bostan dans [19]. Il y est montré que la famille de solutions  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge en un sens faible, lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, vers la solution d'un nouveau problème parabolique pour lequel le champ de diffusion effectif apparaît comme une projection du champ de diffusion initial sur l'ensemble des champs de matrices  $A$  tels que  $[b \cdot \nabla_y, \operatorname{div}_y(A\nabla_y)] = 0$ . De plus, un résultat de théorie ergodique nous permet d'explicitement ce champ de diffusion effectif comme la moyenne ergodique du champ initial le long d'un groupe d'opérateurs unitaires. On proposera une amélioration de ce résultat de convergence au Chapitre 4, en montrant un résultat de convergence forte avec estimation d'erreur pour toute donnée initiale, non nécessairement bien préparée. Cette amélioration repose essentiellement sur une meilleure prise en compte des oscillations rapides le long du champ  $b$  à l'aide d'une approche multi-échelle.

## 1.2 Modèles étudiés et résultats de convergence

Les motivations précédentes nous amènent à nous intéresser à deux cas particuliers du problème abstrait (1.1), et ainsi à réaliser l'analyse asymptotique de deux équations aux dérivées partielles possédant des termes de dérivées raides. Cette étude est réalisée à l'aide de méthodes d'homogénéisation. Dans chacun de ces problèmes, la raideur est caractérisée par le terme  $1/\varepsilon$ , où le paramètre  $\varepsilon > 0$  sera voué à tendre vers zéro.

- La première équation, appelée *Equation parabolique avec terme de transport raide*, s'écrit de la manière suivante

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \operatorname{div}_y(D(y)\nabla_y u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} b(y) \cdot \nabla_y u^\varepsilon = 0, & (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ u^\varepsilon(0, y) = u^{\text{in}}(y), & y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (1.9)$$

On effectue dans le Chapitre 2 l'analyse asymptotique de ce problème. L'ensemble des résultats du Chapitre 2 a fait l'objet de la publication [14]. Ici  $b : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $D : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  sont respectivement un champ de vecteurs et un champ de matrices symétriques définies positives. L'opérateur d'advection  $\frac{1}{\varepsilon} b \cdot \nabla_y$  induit la présence de fortes oscillations le long du flot associé à  $b$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. Ces fortes oscillations impliquent la présence de deux échelles caractéristiques en temps. Ainsi, l'analyse du comportement de la suite de fonctions  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, sera réalisée à l'aide d'une procédure d'homogénéisation à deux échelles en temps. Celle-ci nous amènera à la production d'un problème effectif ou homogénéisé décrivant le comportement du problème (1.9) lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. L'introduction d'un correcteur est un point crucial de notre analyse et permettra d'obtenir un ordre de convergence. Plus précisément, on montrera au Chapitre 2, sous de bonnes hypothèses sur les champs  $b$  et  $D$ , que le comportement, lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  peut être décrit en un sens fort de la manière suivante

$$u^\varepsilon(t) = v(t, Y(-t/\varepsilon; \cdot)) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{dans } L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)),$$

où  $Y(s; y)$  est le flot associé au champ de vecteurs  $b$  et  $v$  est la solution du problème effectif qui se trouvera être de nouveau un problème de diffusion. La recherche du champ de diffusion associé au problème effectif sera réalisée dans la Section 1.2.1.

- La résolution numérique des problèmes possédant plusieurs échelles reste une tâche délicate, la présence d'oscillations rapides rend difficile l'utilisation de méthodes numériques standards, celles-ci étant assujetties au choix d'un pas de temps très petit. Dans le Chapitre 3, on propose une méthode numérique pour déterminer le problème effectif associé à (1.9). Cela permettra de ramener l'étude numérique du comportement de la suite  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, à la résolution du problème effectif, non contraint par le petit paramètre  $\varepsilon$ . On vérifiera que l'ordre de convergence donné par l'étude théorique est bien retrouvé d'un point de vue numérique. L'ensemble des résultats du Chapitre 3 a fait l'objet de l'article [12], soumis dans une revue à comité de lecture.
- Enfin, dans le Chapitre 4, on effectuera l'analyse asymptotique du problème de diffusion suivant, appelé *Equation de diffusion fortement anisotrope*

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \operatorname{div}_y(D(y)\nabla_y u^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_y(b(y) \otimes b(y)\nabla_y u^\varepsilon) = 0, & (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ u^\varepsilon(0, y) = u^{\text{in}}(y), & y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (1.10)$$

Les résultats de ce chapitre sont tirés de l'article en cours de préparation [13]. L'approche choisie pour faire l'analyse asymptotique de (1.10), lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, est similaire

à celle choisie pour l'étude du problème (1.9), mais des difficultés supplémentaires apparaissent pour expliciter le problème effectif. Elles sont essentiellement dues aux faits que l'opérateur de diffusion  $-\operatorname{div}_y(b \otimes b \nabla_y)$  engendre un  $C^0$  semi-groupe d'opérateurs tandis que l'opérateur  $b \cdot \nabla_y$  engendre un  $C^0$  groupe d'opérateurs, et que la description des propriétés de commutation entre les opérateurs  $\operatorname{div}_y(b \otimes b \nabla_y)$  et  $\operatorname{div}_y(D \nabla_y)$  ne peut se caractériser aussi simplement que pour les opérateurs  $b \cdot \nabla_y$  et  $\operatorname{div}_y(D \nabla_y)$ . Cela nous obligera à travailler directement sur la formulation variationnelle associée à (1.10) et à proposer une formulation variationnelle effective. L'introduction d'un correcteur est une nouvelle fois le point clé qui nous permettra d'obtenir un ordre de convergence. Ainsi, on identifiera au Chapitre 4 des hypothèses sur  $b$  et  $D$  qui assurent que le comportement de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, peut être décrit de la manière suivante

$$u^\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon} \mathcal{B}} v(t, \cdot) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{dans } L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)),$$

où  $\mathcal{B} = -\operatorname{div}_y(b \otimes b \nabla_y)$ ,  $(e^{-\tau \mathcal{B}})_{\tau \in \mathbb{R}_+}$  est le semi-groupe associé à l'opérateur  $\mathcal{B}$  et  $v$  est la solution d'un problème effectif dont la description sera donnée en Section 1.5.1.

On commence par préciser la définition du champ de diffusion effectif, introduit la première fois dans [19], qui interviendra dans la description des problèmes effectifs associés aux problèmes (1.9) et (1.10). Ce sera l'occasion d'introduire un certain nombre d'hypothèses, nécessaires à l'existence d'un tel champ effectif, et notations qui seront d'un usage courant tout au long de ce manuscrit. Ainsi, dans la Section 1.2.1, on motive la définition du champ de matrices moyenné en effectuant une analyse asymptotique formelle du problème (1.9), on montre comment ce champ moyenné apparaît dans l'analyse. La Section 1.2.2 présente les résultats permettant de montrer l'existence d'un tel champ de matrices effectif et la Section 1.2.3 discute des hypothèses techniques nécessaires à l'existence d'un tel champ. Enfin, les Sections 1.3, 1.4 et 1.5 détaillent respectivement les résultats qui seront démontrés aux Chapitres 2, 3 et 4.

### 1.2.1 Analyse formelle

On rappelle que le problème (1.9) s'écrit, pour  $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \operatorname{div}_y(D(y) \nabla_y u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} b(y) \cdot \nabla_y u^\varepsilon = 0, & (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ u^\varepsilon(0, y) = u^{\text{in}}(y), & y \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

On suppose que le champ de vecteurs  $b$  est régulier à divergence nulle

$$b \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^m), \quad \operatorname{div}_y b = 0 \tag{1.11}$$

et

$$\exists C > 0 \text{ tel que } |b(y)| \leq C(1 + |y|), \quad y \in \mathbb{R}^m. \tag{1.12}$$

Sous les hypothèses ci-dessus, le champ de vecteurs  $b$  possède un flot global régulier  $Y(s; y) \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$

$$\frac{dY}{ds} = b(Y(s; y)), \quad (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \quad Y(0; y) = y, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Etant donné que le champ de vecteurs  $b$  est à divergence nulle, la transformation  $y \in \mathbb{R}^m \rightarrow Y(s; y) \in \mathbb{R}^m$  préserve la mesure de Lebesgue pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Le champ de matrices  $D$  est composé de matrices symétriques définies positives. On choisit une condition initiale

$u^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , non nécessairement bien préparée, c'est-à-dire  $b \cdot \nabla_y u^{\text{in}} = 0$ . Un premier cas simple dans lequel l'analyse asymptotique du problème (1.9) peut être réalisée est celui où les opérateurs  $b \cdot \nabla_y$  et  $\text{div}_y(D\nabla_y)$  commutent, i.e  $[b \cdot \nabla_y, \text{div}_y(D\nabla_y)] = 0$ . L'idée est d'effectuer le changement de variable  $z = Y(-t/\varepsilon; y)$ , et donc de remplacer la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  par la nouvelle famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  donnée par

$$u^\varepsilon(t, y) = v^\varepsilon(t, z) = v^\varepsilon(t, Y(-t/\varepsilon; y)), \quad (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m.$$

Sous les hypothèses de commutation ci-dessus, les nouvelles inconnues  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  satisfont

$$\begin{cases} \partial_t v^\varepsilon - \text{div}_z(D\nabla_z v^\varepsilon) = 0, & (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ v^\varepsilon(0, z) = u^{\text{in}}(z), & z \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Ainsi,  $v^\varepsilon$  ne dépend plus de  $\varepsilon$  et donc  $u^\varepsilon$  peut s'écrire comme la composée d'un profil  $v = v^\varepsilon$  et du flot associé au champ de vecteurs  $b/\varepsilon$ . Les champs de matrices  $D$  qui assurent la propriété de commutation sont caractérisés dans la proposition suivante

**Proposition 1.2.1.** *On considère un champ de vecteurs à divergence nulle  $c \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^m)$ , à croissance au plus linéaire à l'infini et  $A \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$  un champ de matrices.*

1. *Le commutateur entre l'opérateur de transport  $c \cdot \nabla_y$  et l'opérateur de diffusion  $\text{div}_y(A\nabla_y)$  est toujours un opérateur de diffusion, et on a*

$$[c \cdot \nabla_y, \text{div}_y(A\nabla_y)] = \text{div}_y([c, A]\nabla_y) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$$

*où le champ de diffusion associé est défini par le crochet entre le champ de vecteurs  $c$  et le champ de matrices  $A$*

$$[c, A] := (c \cdot \nabla_y)A - \partial_y c A - A^t \partial_y c \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m).$$

2. *Les points suivants sont équivalents*

(a) *On a  $[c, A] = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ .*

(b) *Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on a  $G(s)A = A$ , où la famille d'opérateurs linéaires  $(G(s))_s$ , agissant sur les champs de matrices, est définie par*

$$(G(s)A)(y) := \partial Y^{-1}(s; y)A(Y(s; y)) {}^t \partial Y^{-1}(s; y), \quad (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m. \quad (1.13)$$

Dans le cas où les opérateurs ne commutent pas, il semble préférable de ne pas réaliser l'analyse asymptotique de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , mais plutôt celle de la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  définie par

$$v^\varepsilon(t, z) = u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)), \quad (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.14)$$

Le cas commutatif nous laisse espérer que la famille des fonctions  $v^\varepsilon$  sera stable même lorsque  $\varepsilon$  tendra vers zéro. Ainsi, on fait le changement de variable  $z = Y(-t/\varepsilon; y)$  dans (1.9), pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ . Un calcul élémentaire nous amène au problème de diffusion

$$\begin{cases} \partial_t v^\varepsilon - \text{div}_z((G(t/\varepsilon)D)\nabla_z v^\varepsilon) = 0, & (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ v^\varepsilon(0, z) = u^\varepsilon(0, z) = u^{\text{in}}(z), & z \in \mathbb{R}^m, \quad \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

où  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est défini par (1.13), pour plus de détails voir (2.7) et (2.8). Le nouveau problème (1.15) est un problème à deux échelles en temps, où la variable de temps lente est  $t$  et la variable de temps rapide est  $s = t/\varepsilon$ . On effectue une approche à deux échelles afin de

déterminer le modèle effectif associé à (1.15). On pose le développement de Hilbert à deux échelles suivant

$$v^\varepsilon(t, z) = v(t, t/\varepsilon, z) + \varepsilon v^1(t, t/\varepsilon, z) + \dots \quad (1.16)$$

On insère le Ansatz (1.16) dans (1.15) et par identification, selon les puissances croissantes de  $\varepsilon$ , on déduit les équations suivantes sur les différents profils

$$\partial_s v = 0 \quad (1.17)$$

$$\partial_t v - \operatorname{div}_z(G(s)D\nabla_z v) + \partial_s v^1 = 0 \quad (1.18)$$

⋮

L'équation (1.17) nous dit que le premier profil  $v$  ne dépend pas de la variable rapide  $s$ , c'est-à-dire  $v = v(t, z)$ . On espère que le profil  $v$  est la limite de la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. L'évolution, par rapport à la variable de temps  $t$ , de  $v$  serait donnée par (1.18) à condition de faire disparaître le terme contenant le second profil  $v^1$ . En fait,  $v^1$  apparaît comme un multiplicateur de Lagrange qui assure qu'à tout temps  $t$ , le profil  $v$  vérifie la contrainte  $\partial_s v = 0$ . Dans le cas où la variable rapide serait périodique, on éliminerait le profil  $v^1$  en prenant la moyenne sur une période. Sans hypothèses de périodicité, on utilise plutôt une moyenne en temps long qui nous amène au problème

$$\begin{cases} \partial_t v - \operatorname{div}_z \left( \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s)D \, ds \nabla_z v \right) = 0, & (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ v(0, z) = u^{\text{in}}(z), & z \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (1.19)$$

et le champ de diffusion effectif est donc formellement donné par

$$\langle D \rangle := \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s)D \, ds. \quad (1.20)$$

Bien entendu, on espère pouvoir montrer que la famille de fonctions  $v^\varepsilon$  converge vers la solution  $v$  du problème (1.19). Ces résultats seront détaillés dans la Section 1.3. Mais avant toutes choses, on précise le sens à donner au champ de matrices (1.20) et les propriétés vérifiées par celui-ci. On introduit également un certain nombre d'espaces et d'hypothèses qui seront utiles à tous nos développements.

### 1.2.2 Le moyenné d'un champ de matrices

On introduit maintenant les outils qui vont nous permettre de donner un sens et une interprétation au champ de matrices moyenné (1.20). Pour cela, on utilise le Théorème ergodique de von Neumann basé sur la notion de  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires. Pour plus de détails sur les  $C^0$ -groupes, on peut se référer à l'Annexe A.1.

**Théorème 1.2.2** (Théorème ergodique de von Neumann, voir (A.1.8)). *Soit  $(\mathcal{G}(s))_{s \in \mathbb{R}}$  un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires sur un espace de Hilbert  $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$  et  $\mathcal{L}$  son générateur infinitésimal. Alors pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , on a la convergence forte dans  $\mathcal{H}$*

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \mathcal{G}(s)x \, ds = \operatorname{Proj}_{\operatorname{Ker}(\mathcal{L})} x.$$

Ce résultat nous amène à faire de nouvelles hypothèses sur le champ de vecteurs  $b$  qui assureront l'existence d'un espace de Hilbert dans lequel la famille d'opérateurs linéaires  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  sera un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires; cet espace est un espace  $L^2$  à poids. On suppose l'existence d'un champ de matrices  $P$  associé à  $b$  tel que

$${}^tP = P, \quad P(y)\xi \cdot \xi > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad P^{-1}, P \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m) \quad (1.21)$$

$$[b, P] = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m). \quad (1.22)$$

On introduit les espaces  $L^2$  et  $L^\infty$  à poids suivants

**Définition 1.2.3.** *On considère l'espace  $L^2$  à poids, où  $Q := P^{-1}$*

$$H_Q = \left\{ A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ mesurable} : Q^{1/2} A Q^{1/2} \in L^2 \right\},$$

qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(A, B)_Q := \int_{\mathbb{R}^m} (Q^{1/2} A Q^{1/2}) : (Q^{1/2} B Q^{1/2}) \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} Q A : B Q \, dy, \quad \forall A, B \in H_Q.$$

La norme associée est notée  $|A|_Q$ . De manière similaire on introduit l'espace de Banach

$$H_Q^\infty = \left\{ A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ mesurable} : Q^{1/2} A Q^{1/2} \in L^\infty \right\},$$

muni de la norme

$$|A|_{H_Q^\infty} := |Q^{1/2} A Q^{1/2}|_{L^\infty}.$$

Afin de pouvoir définir un moyenné pour des champs non nécessairement  $L^2$ , comme par exemple des champs de matrices  $L^\infty$  (on peut penser aux champs constants), on introduit également un espace type  $L^2_{\text{loc}}$ . Pour y parvenir, on fait l'hypothèse qu'il existe une fonction continue  $\psi$  laissée invariante par le flot associé à  $b$  et dont la limite est infinie quand  $|y|$  tend vers l'infini

$$\psi \in C(\mathbb{R}^m), \quad \psi \circ Y(s; \cdot) = \psi \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}, \quad \lim_{|y| \rightarrow +\infty} \psi(y) = +\infty. \quad (1.23)$$

Etant donné que les ensembles  $\{\psi \leq k\}$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ , sont des compacts invariants par le flot de  $b$ , on introduit les espaces locaux

$$H_{Q,\text{loc}} = \left\{ A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ mesurable} : \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A \in H_Q \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Il est à noter que  $H_Q^\infty \subset H_{Q,\text{loc}}$ . On définit des espaces similaires pour les champs de vecteurs.

**Définition 1.2.4.** *Sous les mêmes hypothèses que dans la définition précédente, on définit*

$$X_P := \left\{ c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mesurable} : P^{1/2} c \in L^2 \right\}$$

qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(c, d)_P := \int_{\mathbb{R}^m} P(y) : c(y) \otimes d(y) \, dy, \quad \forall c, d \in X_P,$$

et l'espace de Banach

$$X_Q^\infty = \left\{ c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mesurable} : Q^{1/2} c \in L^\infty(\mathbb{R}^m) \right\},$$

que l'on munit de la norme  $|c|_{X_Q^\infty} := |Q^{1/2} c|_{L^\infty}$ .

Le résultat suivant précise, d'une part, que  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires sur  $H_Q$  et, d'autre part, que le groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  agit également sur  $H_{Q,\text{loc}}$  et donc  $H_Q^\infty$ . Pour toute fonction  $f = f(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , on introduit la notation  $f_s = f_s(z)$  pour la composée de  $f$  avec la flot de  $b$ ,  $f_s = f \circ Y(s; \cdot)$ .

**Proposition 1.2.5.** *Supposons que les hypothèses (1.11), (1.12), (1.21), (1.22), (1.23) soient satisfaites.*

1. *La famille d'applications*

$$A \rightarrow G(s)A := \partial Y^{-1}(s; \cdot) A_s {}^t \partial Y^{-1}(s; \cdot) = \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) A_s {}^t \partial Y(-s; Y(s; \cdot))$$

*est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires sur  $H_Q$ .*

2. *Si  $A$  est un champ de matrices symétriques, alors il en est de même pour  $G(s)A$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .*
3. *Si  $A$  est un champ de matrices positives, alors il en est de même pour  $G(s)A$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .*
4. *Soit  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un sous ensemble invariant par le flot de  $b$ , c'est à dire  $Y(s; \mathcal{S}) = \mathcal{S}$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . S'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $Q^{1/2}(y)A(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m$ ,  $y \in \mathcal{S}$ , alors pour tout  $s \in \mathbb{R}$  on a  $Q^{1/2}(y)(G(s)A)(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m$ ,  $y \in \mathcal{S}$ .*
5. *La famille d'applications  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  opère sur  $H_{Q,\text{loc}}$ , ce qui signifie que, si  $A \in H_{Q,\text{loc}}$ , alors  $G(s)A \in H_{Q,\text{loc}}$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . De plus, on a*

$$\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} G(s)A = G(s)(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A), \quad A \in H_{Q,\text{loc}}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Remarque 1.2.6.** *Les applications  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  ont également un comportement remarquable dans l'espace  $H_Q^\infty$ . Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , et tout  $A \in H_Q^\infty$ , on a  $G(s)A \in H_Q^\infty$  et  $|G(s)A|_{H_Q^\infty} = |A|_{H_Q^\infty}$ , voir (2.31).*

On introduit le générateur infinitésimal associé au groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$

$$L : \text{dom}(L) \subset H_Q \rightarrow H_Q, \quad \text{dom}L = \left\{ A \in H_Q : \exists \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)A - A}{s} \text{ in } H_Q \right\} \quad (1.24)$$

et  $L(A) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)A - A}{s}$  pour tout  $A \in \text{dom}(L)$ . On peut vérifier que  $C_c^1(\mathbb{R}^m) \subset \text{dom}(L)$  et que  $L(A) = [b, A] = (b \cdot \nabla_y)A - \partial_y b A - A {}^t \partial_y b$ , pour tout  $A \in C_c^1(\mathbb{R}^m)$ . Les principales propriétés de l'opérateur  $L$  sont précisées ci-dessous et sont des conséquences directes des résultats rappelés en Annexe A.1

**Proposition 1.2.7.** *On suppose que les hypothèses (1.11), (1.21), (1.22) sont vérifiées.*

1. *Le domaine de  $L$  est dense dans  $H_Q$  et  $L$  est fermé.*
2. *Le champ de matrices  $A \in H_Q$  appartient à  $\text{dom}(L)$  si et seulement si il existe  $C > 0$  tel que*

$$|G(s)A - A|_Q \leq C|s|, \quad s \in \mathbb{R}.$$

3. *L'opérateur  $L$  est anti-adjoint dans  $H_Q$  et nous avons la décomposition suivante :  $H_Q = \ker L \overset{\perp}{\oplus} \overline{\text{Range } L}$ , où le noyau de l'opérateur  $L$  est donné par*

$$\ker(L) = \{A \in H_Q : G(s)A = A, \quad s \in \mathbb{R}\}.$$

**Remarque 1.2.8.** Lorsque l'on travaillera dans  $H_{Q,\text{loc}}$ , le générateur infinitésimal de  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$   $L$ , qu'on notera toujours  $L$ , sera défini de la manière suivante

$$A \in \text{dom}(L) \text{ ssi } \exists \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}A) - \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}A}{s} \in H_Q, \quad k \in \mathbb{N}$$

et

$$\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}L(A) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}A) - \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}A}{s}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner avec précision le sens de l'expression (1.20) obtenue lors de l'étude formelle du problème (1.9) dans le cas où le champ de matrices  $D$  appartient à  $H_Q$ , mais aussi lorsqu'il appartient à  $H_{Q,\text{loc}}$ . On précise également les différentes propriétés du champ de matrices moyenné.

**Théorème 1.2.9.** Supposons les hypothèses (1.11), (1.12), (1.21), (1.22), (1.23) vérifiées. On note  $L$  le générateur infinitésimal associé au groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ .

1. Pour tout champ de matrices  $A \in H_Q$  on a la convergence forte dans  $H_Q$

$$\langle A \rangle := \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \underbrace{\partial Y(-s; Y(s; \cdot))A(Y(s; \cdot))^t \partial Y(-s; Y(s; \cdot))}_{=(G(s)A)(y)} ds = \text{Proj}_{\ker L} A$$

uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ .

2. Si  $A \in H_Q$  est un champ de matrices symétriques positives, alors il en est de même pour  $\langle A \rangle$ .
3. Soit  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un ensemble invariant par le flot associé à  $b$ , ce qui s'écrit  $Y(s; \mathcal{S}) = \mathcal{S}$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Si  $A \in H_Q$  est tel que

$$Q^{1/2}(y)A(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathcal{S},$$

pour un certain  $\alpha > 0$ , alors on a

$$Q^{1/2}(y)\langle A \rangle(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathcal{S}$$

et en particulier,  $\langle A \rangle(y)$  est définie positive pour tout  $y \in \mathcal{S}$ .

4. Si  $A \in H_Q \cap H_Q^\infty$ , alors  $\langle A \rangle \in H_Q \cap H_Q^\infty$  et

$$|\langle A \rangle|_Q \leq |A|_Q, \quad |\langle A \rangle|_{H_Q^\infty} \leq |A|_{H_Q^\infty}.$$

5. Pour tout champ de matrices  $A \in H_{Q,\text{loc}}$ , la famille

$$\left( \frac{1}{S} \int_0^S \partial Y(-s; Y(s; \cdot))A(Y(s; \cdot))^t \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) ds \right)_{S>0}$$

converge dans  $H_{Q,\text{loc}}$  lorsque  $S$  tend vers l'infini. Sa limite, noté  $\langle A \rangle$ , satisfait

$$\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \langle A \rangle = \langle \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}A \rangle, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

où le symbole  $\langle \cdot \rangle$  à droite de l'égalité est l'opérateur de moyenne sur  $H_Q$ . En particulier, tout champ de matrices  $A \in H_Q^\infty$  possède un moyenné dans  $H_{Q,\text{loc}}$  et  $|\langle A \rangle|_{H_Q^\infty} \leq |A|_{H_Q^\infty}$ . Si  $A \in H_{Q,\text{loc}}$  est tel que

$$Q^{1/2}(y)A(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathbb{R}^m,$$

pour un certain  $\alpha > 0$ , alors on a

$$Q^{1/2}(y)\langle A \rangle(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

**Remarque 1.2.10.** La Proposition 1.2.1 et la caractérisation du noyau de l'opérateur  $L$  de la Proposition 1.2.7, nous donne une interprétation du champ de diffusion moyenné  $\langle A \rangle$  comme la projection du champ de diffusion initial  $A$  sur un ensemble de champ de matrices de  $H_Q$  qui assurent la propriété de commutation entre les opérateurs  $b \cdot \nabla_y$  et  $\operatorname{div}_y(A\nabla_y)$ .

### 1.2.3 Champs de vecteurs en involution

Dans cette partie, on revient sur les hypothèses (1.21) et (1.22) assurant l'existence d'un espace de Hilbert dans lequel la famille  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires et ainsi, l'existence du moyenné d'un champ de matrices (1.20) par le Théorème de von Neumann. On introduit une condition suffisante à l'existence d'un champ de matrices  $P$  vérifiant (1.21) et (1.22) à travers l'existence d'une base de champs de vecteurs, tels que la dérivée le long de ces champs commutent avec la dérivée le long de  $b$ . De tels champs sont appelés champs « en involution » avec  $b$ . L'intérêt de tels champs, en plus d'impliquer l'existence d'un champ  $P$  vérifiant (1.21) et (1.22), est de nous permettre d'obtenir de la régularité dans le cas de l'étude du problème parabolique avec terme de transport raide (1.9). On commence par caractériser les champs de vecteurs  $c$  qui sont en involution avec  $b$ . De manière tout à fait similaire à la Proposition 1.2.1, on a

**Proposition 1.2.11.** On considère un champ de vecteurs à divergence nulle  $b \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^m)$ , à croissance au plus linéaire à l'infini et  $c \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  un champ de vecteurs.

1. Le commutateur entre les opérateurs de transport  $b \cdot \nabla_y$  et  $c \cdot \nabla_y$  est toujours un opérateur de transport, et on a

$$[b \cdot \nabla_y, c \cdot \nabla_y] = [b, c] \cdot \nabla_y \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$$

où le champ d'advection associé est défini par le crochet entre les champs de vecteurs  $b$  et  $c$

$$[b, c] := (b \cdot \nabla_y)c - \partial_y b c \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m).$$

2. Les points suivants sont équivalents

- (a) On a  $[c, b] = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ .
- (b) Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on a  $c(Y(s; y)) = \partial Y(s; y)c(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ .

De manière plus précise, on suppose l'existence d'un champ de matrices  $R$  vérifiant

$$\begin{cases} \det R(y) \neq 0, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad R \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^m) \\ (b \cdot \nabla_y)R + R\partial_y b = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m). \end{cases} \quad (1.25)$$

Dans ce cas, les vecteurs colonnes du champ de matrices  $R^{-1}$  forment une base de champs de vecteurs en involution avec  $b$ . En effet, l'équation satisfaite par  $R$  dans (1.25) est équivalente à  $R(Y(s; y))\partial Y(s; y) = R(y)$ , pour  $(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ , qui s'écrit également

$$R^{-1}(Y(s; y)) = \partial Y(s; y)R^{-1}(y), \quad (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m. \quad (1.26)$$

D'après la Proposition 1.2.11, les vecteurs colonnes  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , sont en involution avec le champ  $b$ . De plus, ils forment en tout point,  $y \in \mathbb{R}^m$ , une base de  $\mathbb{R}^m$ . On fera les hypothèses supplémentaires suivantes concernant la régularité des champs de vecteurs  $b_i$

$$\begin{cases} b_i \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^m), \quad \operatorname{div}_y b_i \in L^\infty(\mathbb{R}^m), \quad 1 \leq i \leq m, \\ \forall i \in \{1, \dots, m\}, \exists C_i > 0 \text{ tel que } |b_i(y)| \leq C_i(1 + |y|), \quad y \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (1.27)$$

ce qui garantit l'existence d'un flot global  $Y_i(s; y) \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ . En fait, on peut montrer que l'hypothèse (1.25) implique les hypothèses (1.21), (1.22) concernant le champ de matrice  $P$ . En effet, en posant  $Q = {}^t R R$ ,  $P = Q^{-1} = R^{-1} {}^t R^{-1}$ , on peut montrer que les hypothèses (1.21), (1.22) sont vérifiées. On ne détaille ici que le second point (1.22), pour le premier on pourra se référer à la Section 2.1. Ainsi  $P(y)$  est symétrique, définie positive, de carré localement intégrable ainsi que son inverse  $Q = P^{-1}$ , et grâce à (1.26), on a

$$\begin{aligned} P(Y(s; y)) &= R^{-1}(Y(s; y)) {}^t R^{-1}(Y(s; y)) \\ &= \partial Y(s; y) R^{-1}(y) {}^t R^{-1}(y) {}^t \partial Y(s; y) \\ &= \partial Y(s; y) P(y) {}^t \partial Y(s; y) \end{aligned}$$

ce qui signifie que  $[b, P] = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  cf. Proposition 1.2.1. Sous les hypothèses (1.25), les espaces  $H_Q, H_Q^\infty$  peuvent être réécrits

$$\begin{aligned} H_Q &= \{A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ mesurable} : R A {}^t R \in L^2(\mathbb{R}^m)\}, \\ H_Q^\infty &= \{A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ mesurable} : R A {}^t R \in L^\infty(\mathbb{R}^m)\}. \end{aligned}$$

### 1.3 Analyse asymptotique d'un problème parabolique avec transport raide

Les résultats de convergence présentés dans cette section ont fait l'objet de la publication [14]. On suppose que les hypothèses (1.25) et (1.27) sont vérifiées. De plus, on suppose que les champs de vecteurs  $b$  et de matrices  $D$  vérifient les hypothèses supplémentaires

$$\begin{cases} D \in H_Q^\infty, & b \in X_Q^\infty \\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } Q^{1/2}(y)D(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, & y \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (1.28)$$

où  $Q = {}^t R R$  et les champs de vecteurs  $b_1, \dots, b_m$  sont les colonnes du champ de matrices  $R^{-1}$ . L'analyse asymptotique du problème (1.9) est décomposée en deux résultats. Le premier montre que la famille de solutions  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  du problème (1.15), converge fortement dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$  vers la solution  $v$  du problème

$$\begin{cases} \partial_t v - \text{div}_z(\langle D \rangle \nabla_z v) = 0, & (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ v(0, z) = u^{\text{in}}(z), & z \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (1.29)$$

Cela nous permet de décrire le comportement asymptotique de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  en terme de composée d'un profil fixe  $v$  et du flot associé au champ de vecteurs  $b$ . En effet, en effectuant le changement de variable (1.14) on peut écrire, grâce à la préservation de la mesure de Lebesgue par le flot  $Y(s; \cdot)$ , que

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \|u^\varepsilon(t, \cdot) - v(t, Y(-t/\varepsilon; \cdot))\|_{L^2} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \|v^\varepsilon(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{L^2} = 0, \quad (1.30)$$

uniformément par rapport à  $t \in [0, T]$ , pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$ . Le second résultat montre, à l'aide d'hypothèses supplémentaires, comment la construction d'un correcteur nous permet de préciser un ordre pour la convergence (1.30). Les solutions des problèmes (1.15) et (1.29) sont à comprendre au sens variationnel, à ce titre on introduit le cadre fonctionnel associé, pour plus de détails concernant l'existence et l'unicité de telles solutions, voir l'Annexe A.2.

On introduit l'espace de type Sobolev suivant sur  $\mathbb{R}^m$ , les champs  $b_i$  étant définis par les hypothèses (1.25) et (1.27)

$$H_R^1 := \bigcap_{i=1}^m \text{dom}(b_i \cdot \nabla_y) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^m) : b_i \cdot \nabla_y u \in L^2(\mathbb{R}^m), \forall i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_R = \int_{\mathbb{R}^m} u(y)v(y) \, dy + \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^m} (b_i \cdot \nabla_y u)(b_i \cdot \nabla_y v) \, dy, \quad u, v \in H_R^1.$$

De même, on notera

$$H_R^2 := \{u \in L^2(\mathbb{R}^m) : b_i \cdot \nabla_y (b_j \cdot \nabla_y u) \in L^2(\mathbb{R}^m), \forall (i, j) \in \{1, \dots, m\}^2\}.$$

### 1.3.1 Premier résultat de convergence

On cherche à prouver que la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  de solutions variationnelles du problème (1.15) converge en un sens fort, lorsque  $\varepsilon$ , vers la solution variationnelle du problème (1.20). La méthode consiste à effectuer le passage à la limite dans la formulation variationnelle, puis à montrer que la convergence obtenue est forte. La difficulté principale lors du passage à la limite, lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, dans la formulation variationnelle de (1.15), réside dans le terme intégral

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} G(t/\varepsilon) D \nabla_z v^\varepsilon \cdot \nabla_z \Phi \, dz \, dt \quad (1.31)$$

où  $\Phi$  est un élément de  $C_c^1(\mathbb{R}_+, H_R^1)$ . La variable rapide  $s = t/\varepsilon$  étant supposée non nécessairement périodique, ce passage à la limite nécessite un résultat de convergence à deux échelles non périodique. Le résultat général suivant (Proposition 2.5.3) est utilisé dans le cas particulier où  $w^\varepsilon = \nabla_z v^\varepsilon \in L^2([0, T]; X_P)$ , avec  $\varepsilon > 0$

**Proposition 1.3.1.** *Soit  $T$  un nombre réel positif. On considère  $D \in H_Q^\infty$  un champ de matrices symétriques et  $\mathcal{W}_\omega \subset C([0, T]; X_P)$  un sous ensemble borné de  $L^2([0, T]; X_P)$  composé de fonctions admettant le même module de continuité  $\omega : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  dans  $C([0, T]; X_P)$ , c'est à dire*

$$|w(t) - w(t')|_P \leq \omega(|t - t'|), \quad t, t' \in [0, T], \quad w \in \mathcal{W}_\omega$$

avec  $\omega$  croissante et  $\lim_{\lambda \searrow 0} \omega(\lambda) = 0$ . Alors pour toute famille  $(w^\beta)_{\beta>0} \subset \mathcal{W}_\omega$  convergeant faiblement dans  $L^2([0, T]; X_P)$  vers  $w^0$  lorsque  $\beta \searrow 0$ , on a

$$\lim_{(\beta, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} G(t/\varepsilon) D w^\beta(t) \cdot \theta(t) \, dz \, dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle w^0(t) \cdot \theta(t) \, dz \, dt \quad (1.32)$$

pour tout  $\theta \in L^2([0, T]; X_P)$ .

Les points clés de ce passage à la limite sont les suivants

1. La combinaison de la convergence forte de la famille  $\left(\frac{1}{S} \int_0^S G(s) D \, ds\right)_{S>0}$ , lorsque  $S \rightarrow +\infty$ , dans  $H_{Q, \text{loc}}$ , et de la convergence faible de la suite de  $(\nabla_z v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , lorsque  $\varepsilon \searrow 0$ , dans  $L^2([0, T]; X_P)$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ .
2. Une étude de régularité nous assurant que les éléments de la famille  $(\nabla_z v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  sont, d'une part inclus dans  $C([0, T]; X_P)$  et d'autre part possèdent un même module de continuité.

De telles estimations sont obtenues, sur les fonctions  $u^\varepsilon$  solutions de (1.9), grâce à la connaissance d'une base de champs en involution avec  $b$ , voir les hypothèses (1.25) et (1.27). On peut alors vérifier que la régularité de la condition initiale  $u^{\text{in}} \in H_R^1$  est propagée au cours du temps le long de ces champs. En prenant la dérivée de l'équation (1.9) le long d'une direction  $b_i$  en involution, on a

$$\partial_t(b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon) - \operatorname{div}_y(D(y)\nabla_y(b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon}b \cdot \nabla_y(b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon) = [b_i \cdot \nabla_y, \operatorname{div}_y(D\nabla_y)]u^\varepsilon. \quad (1.33)$$

Le point clé permettant d'obtenir cette égalité est que les champs  $b_i$  assurent l'annulation du terme instable  $\frac{1}{\varepsilon}[b \cdot \nabla_y, b_i \cdot \nabla_y]$ , pour tout  $1 \leq i \leq m$ . L'égalité d'énergie associée à (1.33) nous donnera alors des estimations sur la quantité  $b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon$ , le terme  $\frac{1}{\varepsilon}b \cdot \nabla_y(b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon)$  s'annulant par anti-symétrie de l'opérateur  $b \cdot \nabla_y$ . On peut également faire des estimations similaires sur les dérivées secondes de  $u^\varepsilon$  le long des champs  $b_i$ , en choisissant une condition initiale  $u^{\text{in}} \in H_R^2$ . L'hypothèse supplémentaire suivante est nécessaire pour estimer les terme  $[b_i \cdot \nabla_y, b_j \cdot \nabla_y]u^\varepsilon$

$$[b_i, b_j] = \sum_{k=1}^m \alpha_{ij}^k b_k, \quad \alpha_{ij}^k \in L^\infty(\mathbb{R}^m), \quad i, j, k \in \{1, \dots, m\}. \quad (1.34)$$

Toutes ces estimations sont détaillées aux Propositions 2.4.4 et 2.4.5. Pour les démonstrations associées, voir l'Annexe B. Enfin, par un changement de variable, on peut vérifier que les fonctions  $v^\varepsilon$  vérifient les mêmes estimations que les fonctions  $u^\varepsilon$ , pour plus de détails sur ce point voir la Remarque 2.4.3. On peut donc déduire de la Proposition 1.3.1 que la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  des solutions variationnelles du problème (1.15) converge faiblement  $\star$  vers  $v$  la solution variationnelle de (1.20) dans  $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. De même, la suite  $(\nabla_z v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge faiblement vers  $\nabla_z v$  dans  $L^2([0, T]; X_P)$ . On cherche maintenant à montrer des résultats de convergence forte. Le comportement, au sens fort, d'une suite d'éléments de  $L^2([0, T]; X_P)$  est décrit par la proposition suivante (Proposition 2.5.5)

**Proposition 1.3.2.** *On suppose les mêmes hypothèses qu'à la Proposition 1.3.1.*

1. *Si le champ de matrices  $D$  est positif alors*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle w^0(t) \cdot w^0(t) \, dz \, dt \leq \liminf_{(\beta, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} G(t/\varepsilon) D w^\beta(t) \cdot w^\beta(t) \, dz \, dt.$$

2. *Si  $(w^\beta)_{\beta>0}$  converge fortement dans  $L^2([0, T]; X_P)$  vers  $w^0$  lorsque  $\beta \searrow 0$  (l'existence d'un module de continuité  $\omega$  dans  $C([0, T]; X_P)$  pour la famille  $(w^\beta)_{\beta>0}$  n'est pas nécessaire) alors*

$$\lim_{(\beta, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} G(t/\varepsilon) D w^\beta(t) \cdot w^\beta(t) \, dz \, dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle w^0(t) \cdot w^0(t) \, dz \, dt.$$

3. *S'il existe un  $\alpha > 0$  tel que  $Q^{1/2} D Q^{1/2} \geq \alpha I_m$  et*

$$\limsup_{(\beta, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} G(t/\varepsilon) D w^\beta(t) \cdot w^\beta(t) \, dz \, dt \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle w^0(t) \cdot w^0(t) \, dz \, dt$$

*alors la famille  $(w^\beta)_{\beta>0}$  converge fortement dans  $L^2([0, T]; X_P)$  vers  $w^0$  quand  $\beta \searrow 0$ .*

Grâce aux l'hypothèses (1.28), on peut appliquer la Proposition 1.3.2 dans le cas particulier de la suite  $w^\varepsilon = \nabla_z v^\varepsilon$ , où  $\varepsilon > 0$ . Cela implique la convergence forte de la famille  $(\nabla_z v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  dans

$L^2([0, T]; X_P)$  vers  $\nabla_z v$ . La convergence forte de la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, est alors une simple conséquence de la convergence forte de la famille  $(\nabla_z v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . En effet, en soustrayant (1.15) et (1.29), on peut estimer la différence entre les fonctions  $v^\varepsilon$  et  $v$ . L'égalité d'énergie associée pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  est

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v^\varepsilon(t) - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} G(\tau/\varepsilon) D [\nabla_z v^\varepsilon(\tau) - \nabla_z v(\tau)] \cdot \nabla_z v^\varepsilon(\tau) \, d\tau \\ - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle [\nabla_z v^\varepsilon(\tau) - \nabla_z v(\tau)] \cdot \nabla_z v(\tau) \, d\tau = 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|(v^\varepsilon - v)(t)\|_{L^2}^2 \leq 2|D|_{H_Q^\infty} \|\nabla_z v^\varepsilon - \nabla_z v\|_{L^2([0, T]; X_P)} (\|\nabla_z v^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; X_P)} + \|\nabla_z v\|_{L^2([0, T]; X_P)}).$$

A l'aide des estimations uniformes sur la famille  $(\nabla_z v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  évoquées ci-dessus et de la convergence forte dans  $L^2([0, T]; X_P)$  de la famille  $(\nabla_z v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  vers  $\nabla_z v$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, on arrive au premier résultat (Théorème 2.2.7)

**Théorème 1.3.3.** *On suppose que les hypothèses (1.11), (1.12), (1.23), (1.27), (1.28), (1.34) sont vérifiées ainsi que toutes les hypothèses de régularité de la Proposition 2.4.5. On suppose que  $u^{\text{in}} \in H_R^2$  et on note  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  les solutions variationnelles de (1.9) et par  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  les fonctions*

$$v^\varepsilon(t, z) = u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)), \quad (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \quad \varepsilon > 0.$$

Alors la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge fortement dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$  vers l'unique solution variationnelle  $v \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$  de (1.29). De plus  $(\nabla_z v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge vers  $\nabla_z v$  dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; X_P)$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. La convergence forte de  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, reste vraie pour toute condition initiale  $u^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . On peut également exprimer ces résultats pour la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , ce qui nous donne que pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon(t, \cdot) - v(t, Y(-t/\varepsilon; \cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = 0,$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T |\nabla_y u^\varepsilon(t, \cdot) - \nabla_y v(t, Y(-t/\varepsilon; \cdot))|_P^2 \, dt = 0.$$

### 1.3.2 Second résultat de convergence

Le Théorème 1.3.3 donne une description du comportement asymptotique de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , en un sens fort, lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, comme la composée du profil  $v$  avec le flot  $Y(-t/\varepsilon; \cdot)$ . Sous des hypothèses supplémentaires, on précise un ordre de convergence pour ce résultat. En fait, l'analyse formelle réalisée sur la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , voir la Section 1.2.1 et l'Ansatz (1.16), nous laisse espérer un ordre de convergence en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ . L'introduction d'un correcteur nous permet d'y parvenir. Afin de déterminer ce correcteur, on propose de poursuivre l'analyse formelle entamée à la Section 1.2.1. On fait l'hypothèse qu'il existe un champ de matrices régulier  $C$  tel que

$$D = \langle D \rangle + L(C). \quad (1.35)$$

On rappelle que le générateur infinitésimal  $L$ , associé au  $C^0$ -groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ , est anti-adjoint sur  $H_Q$ . Cela implique que  $\overline{\text{Range}(L)} = (\ker(L))^\perp$ , et donc qu'en règle générale  $D - \langle D \rangle \in \overline{\text{Range}(L)}$  et non pas à  $\text{Range}(L)$ . L'équation (1.18) obtenue formellement s'écrit

$$\partial_t v - \text{div}_z(G(s)D\nabla_z v) + \partial_s v^1 = 0.$$

A l'aide de (1.35), on obtient

$$\partial_s v^1 = -(\partial_t v - \operatorname{div}_z(\langle D \rangle \nabla_z v)) + \operatorname{div}_z(G(s)L(C)\nabla_z v).$$

Or,  $v$  étant solution de l'équation de diffusion associée au champ de matrices  $\langle D \rangle$ , on obtient après intégration par rapport à la variable  $s$  que, pour tout  $(t, s, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$

$$v^1(t, s, y) - v^1(t, 0, y) = \operatorname{div}_z \left( \left\{ \int_0^s G(\tau)L(C) d\tau \right\} \nabla_z v \right).$$

Le choix de  $v^1$  pouvant être réalisé à une constante près par rapport à la variable  $s$ , on peut considérer sans perte de généralité que  $v^1(t, 0, y) = 0$ , pour tout  $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ . Enfin, par définition du générateur infinitésimal associé au groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ , on a

$$\int_0^s G(\tau)L(C) d\tau = \int_0^s \frac{d}{d\tau} \{G(\tau)C\} d\tau = G(s)C - C,$$

ce qui nous amène à l'expression du correcteur  $v^1(t, s, y) = \operatorname{div}_z(G(s)C\nabla_z v) - \operatorname{div}_z(C\nabla_z v)$ , pour tout  $(t, s, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ . On peut bien donner un sens à ce correcteur sous la condition que  $v$  soit suffisamment régulier. L'étude de la régularité de la fonction  $v$  est effectuée dans les Propositions 2.4.6 et 2.4.7. Enfin, une estimation de la norme  $L^2$  de la fonction  $v^\varepsilon - v - \varepsilon v^1$ , assujettie à des hypothèses de régularité sur le champ de matrices  $C$  détaillées dans le Théorème 2.2.9, nous amène au résultat de convergence suivant (Théorème 2.2.9)

**Théorème 1.3.4.** *On suppose que les hypothèses (1.11), (1.12), (1.23), (1.27), (1.28) sont vérifiées. De plus, on suppose que la solution  $v$  du modèle effectif est suffisamment régulière et qu'il existe un champ régulier de matrices  $C$ , tel qu'on ait la décomposition*

$$D = \langle D \rangle + L(C).$$

On note  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  les solutions variationnelles de (1.9). Alors pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$ , il existe une constante  $C_T$  telle que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u^\varepsilon(t, \cdot) - v(t, Y(-t/\varepsilon; \cdot)) - \varepsilon v^1(t, t/\varepsilon, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq C_T \varepsilon$$

$$\left( \int_0^T |\nabla_y u^\varepsilon(t, \cdot) - \nabla_y v(t, Y(-t/\varepsilon; \cdot)) - \varepsilon \nabla_y v^1(t, t/\varepsilon, \cdot)|_P^2 dt \right)^{1/2} \leq C_T \varepsilon.$$

**Remarque 1.3.5.** *L'hypothèse (1.35) implique que l'opérateur  $\operatorname{div}_y(D\nabla_y)$  se décompose de la manière suivante*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y(D\nabla_y) &= \operatorname{div}_y(\langle D \rangle \nabla_y) + \operatorname{div}_y(L(C)\nabla_y) \\ &= \operatorname{div}_y(\langle D \rangle \nabla_y) + [b \cdot \nabla_y, \operatorname{div}_y(C\nabla_y)]. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une décomposition de l'opérateur  $\operatorname{div}_y(D\nabla_y)$ , par rapport à l'opérateur  $b \cdot \nabla_y$ , comme la somme d'un opérateur commutant avec  $b \cdot \nabla_y$  et d'un commutateur associé à l'opérateur  $b \cdot \nabla_y$ . Cette remarque nous servira à généraliser l'approche présentée dans la partie 1.3.2 dans le cadre des équations de diffusion fortement anisotrope.

Au précisera au Chapitre 5 des perspectives à ces travaux.

## 1.4 Méthode numérique pour le calcul d'un champ de matrices moyenné

Cette section résume les résultats tirés de l'article soumis [12] et présentés en détails dans le Chapitre 3. Le but est de proposer une méthode numérique permettant de calculer le champ de matrices moyenné  $\langle D \rangle$ , associé à un champ de matrices  $D$  donné. L'intérêt d'un tel calcul sera de nous permettre d'étudier, d'un point de vue numérique, le comportement des solutions du problème (1.9), lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, en calculant directement la solution du problème homogénéisé. L'erreur commise entre la solution du problème homogénéisé composée avec le flot associé à  $b$  et une solution donnée du problème raide, pour  $\varepsilon$  petit mais fixé, est fourni par le Théorème de convergence 1.3.4. Cette approche nous permet de ne pas avoir à calculer numériquement les solutions du problème raide (1.9) qui est fortement contraint par le paramètre  $\varepsilon$ . Il existe de nombreuses autres approches permettant d'étudier numériquement les problèmes faisant intervenir des échelles disparates. On peut citer le travail de Crouseilles, Lemou et Vilmart [34], traitant les problèmes paraboliques multi-échelles. On peut également citer les travaux de Chartier, Crouseilles, Lemou et Méhats, [33] et [34], concernant l'utilisation d'une méthode numérique d'uniforme précision, pour l'étude de problèmes de type cinétique, Schrödinger ou encore Klein-Gourdon. L'ensemble de la méthode proposée ici est basé sur le fait que le champ de matrices moyenné  $\langle D \rangle$ , associé à un champ de matrices  $D$  donné, peut être explicité grâce à la moyenne ergodique le long du groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  de la manière suivante

$$\langle D \rangle = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s)D \, ds.$$

La méthode consistera à calculer numériquement le champ de matrices  $G(s)D$ , pour  $s \in \mathbb{R}$ , puis à calculer la moyenne ergodique à l'aide d'une méthode de quadrature. Le calcul des champs  $G(s)D$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , est issu du fait que le générateur infinitésimal associé au groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  peut être décrit comme un opérateur de transport agissant sur les champs de matrices. En effet, au moins pour tout champ  $D \in C_c^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$ , le générateur infinitésimal  $L$  du  $C^0$ -groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est donné par

$$L(D) = [b, D] = (b \cdot \nabla_y)D - \partial_y b D - D^t \partial_y b.$$

Or, le champ de matrices  $G(s)D$ , pour  $s \in \mathbb{R}$ , est lié au générateur infinitésimal  $L$  du  $C^0$ -groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  à travers la relation

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} G(s)D = L(G(s)D), & s \in \mathbb{R} \\ G(0)D = D. \end{cases}$$

Il suffit donc de résoudre le problème de transport sur les champs de matrices  $A(s, y) := (G(s)D)(y)$ ,  $(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} A(s, y) = (b \cdot \nabla_y)A(s, y) - \partial_y b(y) A(s, y) - A(s, y)^t \partial_y b(y), & (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \\ A(0, y) = D(y), & y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (1.36)$$

La résolution de cette équation sera effectuée à l'aide d'une méthode semi-Lagrangienne, voir [41]. Ces méthodes sont inconditionnellement stables, d'ordre arbitrairement élevé et sont

moins diffusives que les schémas Eulériens, comme par exemple le schéma upwind. L'utilisation d'une méthode numérique peu diffusive semble nécessaire au calcul en temps long de la quantité  $G(s)D$ . C'est cette remarque qui nous a incité à utiliser un schéma de type semi-Lagrangien. D'autre part, ce choix nous permet d'utiliser une méthode d'ordre élevé, quatre en pratique, ce qui nous permet de ne pas avoir à choisir une résolution trop fine en espace ou en temps. Le schéma semi-Lagrangien utilisé pour la résolution de (1.36) est détaillé à la Section 3.3.2 et il est testé sur plusieurs exemples dans la Section 3.3.3. On présente ici les résultats obtenus pour le champ de vecteurs Hamiltonien en dimension deux  $b(y_1, y_2) = (\partial_{y_2}H(y), -\partial_{y_1}H(y))$ , pour tout  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , avec

$$H(y) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_1y_2, \quad y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Le champ  $b$  vérifie bien les hypothèses (1.11) et (1.12). La fonction  $H$  est une intégrale première coercive associée à  $b$ , ainsi l'hypothèse (1.23) est également vérifiée. Les courbes caractéristiques associées au champ  $b$  sont des ellipses et le flot associé peut être facilement explicité. On considère le champ de matrices

$$D(y) = \begin{pmatrix} 3 + \cos(\kappa(y_1^2 - y_2^2)) & \cos(y_1^2 - 2y_2) \\ \sin(2y_1 - y_2) & 3 + \sin(\kappa(y_1^2 - y_2)) \end{pmatrix} \quad \text{avec } \kappa = 25.$$

On cherche à approcher numériquement le champ  $\langle D \rangle$ . Dans cet exemple, le fait que le flot puisse être explicité nous permet également d'expliciter le groupe  $G(s)D$  à travers l'expression (1.13), pour  $s \in \mathbb{R}$ , et ainsi le moyenné exact  $\langle D \rangle$ . L'erreur  $L^2$  relative commise entre la solution exacte et le moyenné approché, donné par le schéma semi-Lagrangien d'ordre quatre en temps et en espace, est précisée dans Figure 1.1. D'autres exemples de calcul de champs

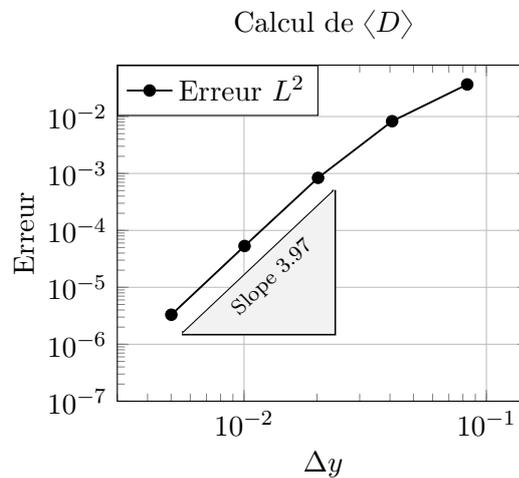


FIGURE 1.1 – Erreur  $L^2$  lors de l'approximation de  $\langle D \rangle$

de matrices moyennés sont donnés dans le Chapitre 3. En particulier, un exemple de champ de matrices moyenné par rapport à un champ de vecteurs  $b$  pour lequel le flot ne peut pas être calculé explicitement est présenté. Enfin, on étudie le comportement asymptotique de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  solutions de (1.9) à travers le calcul numérique du profil  $v$  qui est solution du problème parabolique effectif (1.29) associé au champ de diffusion  $\langle D \rangle$ . Une estimation de l'erreur commise par cette approximation est donnée par le Théorème 1.3.4. On vérifie

dans la Section 3.4 que l'ordre de convergence donné par le Théorème 1.3.4 est bien retrouvé numériquement. Pour cela, on précise une méthode permettant le calcul d'une solution de référence au problème (1.9) et une solution de référence au problème (1.29). La solution de référence au problème (1.9) est calculée à l'aide d'un schéma type splitting combinant une méthode semi-Lagrangienne, pour la résolution de l'opérateur de transport raide, et un schéma différences finies, pour l'opérateur de diffusion. L'équation de diffusion anisotrope (1.29), ayant pour solution le profil  $v$ , est résolue à l'aide d'une méthode différences finies. En perspective de ces travaux, d'autres méthodes pour le calcul numérique du champ de matrices moyenné sont présentées dans le Chapitre 5.

## 1.5 Analyse asymptotique d'un problème de diffusion fortement anisotrope

Les résultats présentés dans cette section, et qui seront détaillés au Chapitre 4, sont l'objet de l'article en cours de préparation [13]. Dans ce chapitre, on présente un résultat concernant l'analyse asymptotique de l'équation de diffusion fortement anisotrope (1.10). On choisit un champ de vecteurs  $b$  régulier à divergence nulle vérifiant (1.12) et (1.23), un champ de matrices symétriques  $D$  régulier. On considère les opérateurs  $\mathcal{B} = -\mathcal{T}^2$  et  $\mathcal{T} = \operatorname{div}_y(\cdot b)$ , de domaine respectif

$$\operatorname{dom}(\mathcal{T}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^m) : \operatorname{div}_y(ub) \in L^2(\mathbb{R}^m)\}$$

et

$$\operatorname{dom}(\mathcal{B}) = \{u \in \operatorname{dom}(\mathcal{T}) : \mathcal{T}u \in \operatorname{dom}(\mathcal{T})\} \subset L^2(\mathbb{R}^m).$$

Etant donné que le champ  $b$  est à divergence nulle, on utilisera également l'écriture  $b \cdot \nabla_y$  pour l'opérateur  $\mathcal{T}$ . On peut réécrire le problème (1.10) sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \operatorname{div}_y(D(y)\nabla_y u^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{B}u^\varepsilon = 0, & (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ u^\varepsilon(0, y) = u^{\text{in}}(y), & y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (1.37)$$

De plus, on suppose que les champs de vecteurs  $b$  et de matrices  $D$  vérifient les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} D \in H_Q^\infty, \quad b \in X_Q^\infty \\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } Q^{1/2}(y)(D(y) + b \otimes b(y))Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (1.38)$$

Tout comme dans l'étude du problème (1.9), les solutions seront à considérer au sens variationnel, on fixe le cadre fonctionnel dans lequel les résultats seront écrits. On introduit l'espace de Sobolev  $H_P^1$  construit sous l'hypothèse qu'il existe un champ de matrices  $P$  vérifiant (1.21) et (1.22), on pose

$$H_P^1 = \{u \in L^2(\mathbb{R}^m) : \nabla_y u \in X_P\}.$$

C'est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire

$$(u, v)_{H_P^1} = \int_{\mathbb{R}^m} u(y)v(y) dy + \int_{\mathbb{R}^m} P(y)\nabla_y u \cdot \nabla_y v dy, \quad u, v \in H_P^1.$$

La forme bilinéaire associée à la formulation variationnelle du problème (1.37) s'écrit de la manière suivante

$$\alpha^\varepsilon(u, v) = \int_{\mathbb{R}^m} D(y)\nabla u \cdot \nabla v dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla u)(b \cdot \nabla v) dy, \quad u, v \in H_P^1.$$

Avec cette notation, la formulation variationnelle du problème (1.37) s'écrit

$$u^\varepsilon(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} u^\varepsilon(t, y) \varphi(y) dy + \mathfrak{a}^\varepsilon(u^\varepsilon(t), \varphi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \varphi \in H_P^1.$$

Le caractère bien posé d'un tel problème est une conséquence du Théorème A.2.7 et de l'hypothèse de coercivité donnée en (1.38). Une analyse asymptotique de ce problème a été réalisée par Bostan dans [19], où il a été montré que la famille des solutions variationnelles  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  du problème (1.37) converge faiblement  $\star$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, vers la solution variationnelle d'un problème parabolique ayant pour champ de diffusion  $\langle D \rangle$  défini par (1.20). Cette convergence a lieu pour toute donnée initiale  $u^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , non nécessairement bien préparée. La condition initiale est dite bien préparée si elle est constante le long du flot associé au champ de vecteurs  $b$ , c'est-à-dire si  $\mathcal{T}u^{\text{in}} = 0$ . Précisément, le résultat montré dans [19] est le suivant

**Théorème 1.5.1.** *On suppose que (1.21) et (1.22) sont vérifiées. On suppose également que le champ de vecteurs  $b$  et le champ de matrices  $D$  vérifient les hypothèses (1.11), (1.12) et (1.38). On considère une condition initiale  $u^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . On note par  $u^\varepsilon$  la solution variationnelle du problème (1.37) et  $v$  la solution variationnelle de*

$$\partial_t v - \text{div}_y(\langle D \rangle \nabla_y v) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad (1.39)$$

$$v(0, y) = \langle u^{\text{in}} \rangle(y), \quad y \in \mathbb{R}^m. \quad (1.40)$$

où  $\langle D \rangle$  est défini par (1.20) et  $\langle u^{\text{in}} \rangle$  est la projection orthogonale de  $u^{\text{in}}$  sur  $\text{Ker}(\mathcal{T})$ , dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ . On a alors les convergences

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon = v \quad \text{faiblement } \star \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla_y u^\varepsilon = \nabla_y v \quad \text{faiblement dans } L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)).$$

Ce résultat repose sur l'introduction des hypothèses (1.21) et (1.22) permettant la définition du moyenné d'un champ de matrices, mais ne nécessite pas les hypothèses plus fortes (1.25). En effet, ces hypothèses ont été introduites dans le cadre de l'analyse asymptotique du problème (1.9) afin d'obtenir des estimations de régularité sur la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , essentiellement afin de pouvoir comprendre le comportement du terme double échelles (1.31) et de pouvoir obtenir les résultats de convergence forte avec ordre de convergence du Théorème 1.3.4. L'approche multi-échelle n'est pas présente dans la démonstration du Théorème 1.5.1, qui repose uniquement sur l'utilisation de méthodes de projection. Cela explique que les convergences obtenues soient faibles et que la recherche d'estimations de régularité ne soit pas nécessaire.

### 1.5.1 Résultat de convergence forte

Dans le Chapitre 4, on présente une amélioration du Théorème 1.5.1, en décrivant le comportement de la suite  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, en un sens fort avec un ordre de convergence. Tout comme dans l'étude du problème parabolique avec termes de transport raide (1.9), on cherche à tenir compte des oscillations rapides, ici produites par l'opérateur de diffusion anisotrope  $\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{B}$ . La prise en compte du phénomène multi-échelle va nous permettre de préciser le comportement des solutions variationnelles de (1.37), lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. L'idée, tout comme pour l'étude du problème (1.9), est d'essayer de décrire le comportement des solutions de (1.37) comme la composée d'un profil fixe  $v$ , solution variationnelle d'un problème effectif à déterminer, avec le groupe d'opérateurs tenant compte

de l'échelle rapide. Dans le cas de l'équation (1.9), on a obtenu le résultat de convergence  $u^\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}\mathcal{T}}v(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$  dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ , où  $v$  solution du problème effectif (1.29). Dans le cas de l'équation (1.37), on cherche un profil  $v$ , ainsi que le problème effectif associé, tel que  $u^\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}\mathcal{B}}v(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$  dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ . Il est à noter que l'opérateur  $\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{B}$  n'engendre pas un groupe mais un semi-groupe d'opérateurs. La recherche d'un tel problème effectif est plus délicate que dans le cadre du problème (1.9). En effet, le fait que le problème effectif (1.29) associé à (1.9) apparaisse comme un nouveau problème de diffusion, dont le champ de diffusion est décrit comme la projection du champ initial  $D$  sur l'ensemble des champs  $A$  tels que  $[\mathcal{T}, \text{div}_y(A\nabla_y)] = 0$ , repose sur la Proposition 1.2.1. Cette proposition indique que le commutateur d'un opérateur de transport et d'un opérateur de diffusion est encore un opérateur de diffusion, dont le champ de diffusion peut être explicité. De plus, une caractérisation des champs de diffusion assurant l'annulation de ce commutateur est proposée à l'aide d'un groupe d'opérateurs. Le champ de diffusion effectif associé au problème (1.9) apparaît alors comme une moyenne ergodique le long de ce groupe, et son existence est assurée par l'introduction des hypothèses (1.21) et (1.22). Cette caractérisation simple en terme de groupe d'opérateurs ne se retrouve pas dans l'étude du problème (1.37). En effet, le commutateur de deux opérateurs de diffusion n'est plus un opérateur de diffusion, mais un opérateur d'ordre trois. Une caractérisation simple des champs de matrices  $A$  assurant l'annulation du commutateur  $[\mathcal{B}, \text{div}_y(A\nabla_y)]$  n'a pas pu être mise en évidence. En fait, une approche plus générale, basée sur une décomposition de l'opérateur de diffusion  $\text{div}_y(D\nabla_y)$ , permet d'obtenir directement un résultat de convergence forte avec un ordre de convergence, à condition de mettre en évidence un correcteur. L'esprit de cette méthode est à rapprocher de l'étude réalisée dans le Théorème 1.3.4 et la Remarque 1.3.5. Afin de motiver cette approche, on se propose de traiter l'analyse asymptotique d'un problème en dimension finie.

**Remarque 1.5.2.** *Il est intéressant de constater que l'approche faite pour l'analyse asymptotique du problème (1.9), peut être réalisée de manière similaire dans le cadre d'un problème de transport possédant des termes de transport raide. Un tel problème s'écrit*

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + a(t, y) \cdot \nabla_y u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{T} u^\varepsilon = 0, & (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ u^\varepsilon(0, y) = u^{\text{in}}(y), & y \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

où  $a$  est un champ de vecteurs régulier et  $u^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Le commutateur de deux opérateurs d'ordre un est encore un opérateur d'ordre un et une caractérisation des champs de vecteurs  $c$  qui annulent le commutateur  $[\mathcal{T}, c \cdot \nabla_y]$ , à l'aide d'un groupe d'opérateurs agissant sur les champs de vecteurs, est donné par la Proposition 1.2.11. On peut montrer que

$$u^\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}\mathcal{T}}v(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{dans } L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)),$$

où  $v$  est la solution d'un problème de transport effectif, dans lequel le champ de transport effectif apparaît comme la projection du champ  $a$  sur un ensemble des champs de vecteurs  $c$  assurant l'annulation du commutateur  $[\mathcal{T}, c \cdot \nabla_y]$ . Une interprétation ergodique de ce champ de vecteurs effectif est possible grâce au Théorème de von Neumann 1.2.2. Pour tous les détails concernant cette étude, voir [18].

### Cas de la dimension finie

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  deux matrices réelles, on suppose de plus que  $B$  est symétrique, positive et  $\varepsilon > 0$ . On considère le problème

$$\frac{d}{dt} u^\varepsilon + Au^\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon} Bu^\varepsilon(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (1.41)$$

$$u^\varepsilon(0) = u^{\text{in}} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.42)$$

Dans le cas où les matrices  $A$  et  $B$  commutent, c'est-à-dire  $BA - AB = 0$ , on voit facilement que  $e^{-\tau B}A = Ae^{-\tau B}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , et un calcul direct nous montre que  $t \rightarrow e^{\frac{t}{\varepsilon}B}u^\varepsilon(t)$  satisfait au problème

$$\frac{d}{dt}v + Av(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (1.43)$$

$$v(0) = u^{\text{in}} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.44)$$

On obtient une formule faisant intervenir les matrices commutantes  $e^{-tA}$  et  $e^{-\tau B}$

$$e^{-t(A+\frac{B}{\varepsilon})}u^{\text{in}} = u^\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}B}v(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}B}e^{-tA}u^{\text{in}}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon > 0,$$

ce qui nous permet de décrire le comportement de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  à l'aide de la solution du problème (1.43), (1.44), et du semi-groupe  $(e^{-\tau B})_{\tau \in \mathbb{R}_+}$ . Dans le cas où les matrices  $A$  et  $B$  ne commutent pas, on cherche à décomposer la matrice  $A$  en deux parties, l'une qui commute avec la matrice  $B$ , et l'autre s'écrivant comme un commutateur associé à la matrice  $B$ . Précisément, on cherche deux matrices  $M$  et  $N$  telles que la décomposition suivante soit vérifiée

$$A = M + [B, N] \quad \text{et} \quad [B, M] = 0. \quad (1.45)$$

Cette décomposition est motivée par l'étude réalisée dans le Théorème 1.3.4 et la Remarque 1.3.5. Une méthode pour construire les matrices  $M$  et  $N$  est proposée à la Section 4.2, celle-ci est basée sur l'introduction des sous espaces propres associés à la matrice  $B$ . On peut montrer que la décomposition (1.45) est unique, que  $M$  est une matrice symétrique et  $N$  antisymétrique, voir la Section 4.2 pour plus de détails. A l'aide de (1.45), on peut décrire le comportement asymptotique des solutions du problème (1.41), (1.42), lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. On effectue ici une analyse asymptotique formelle du problème (1.41). Tout comme pour le Théorème 1.3.4, le point clé pour obtenir un ordre de convergence est l'introduction d'un correcteur. On utilise le développement formel à deux échelles suivant

$$u^\varepsilon(t) = u(t, t/\varepsilon) + \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon) + \dots$$

En injectant cet Ansatz dans (1.41), on est amené à

$$\partial_\tau u(t, \tau) + Bu(t, \tau) = 0 \quad (1.46)$$

$$\partial_t u(t, \tau) + Au(t, \tau) + \partial_\tau u^1(t, \tau) + Bu^1(t, \tau) = 0 \quad (1.47)$$

⋮

L'équation (1.46) nous dit que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , il existe une fonction  $v(t) = u(t, 0)$  telle que  $u(t, \tau) = e^{-\tau B}v(t)$ . L'évolution en temps de  $v$  vient de (1.47), et on prend comme condition initiale  $v(0) = u(0, 0) = u^{\text{in}}$ , qui est obtenu en passant formellement à la limite lorsque  $\varepsilon \searrow 0$  dans l'égalité  $u^{\text{in}} = u^\varepsilon(0) = u(0, 0) + \varepsilon u^1(0, 0) + \dots$ . Par définition des matrices  $M$  et  $N$ , voir (1.45), on note que

$$\partial_t u(t, \tau) + Mu(t, \tau) = \partial_t e^{-\tau B}v(t) + Me^{-\tau B}v(t) = e^{-\tau B} \left( \frac{dv}{dt} + Mv(t) \right)$$

et

$$(BN - NB)u(t, \tau) + \partial_\tau u^1(t, \tau) + Bu^1(t, \tau) = e^{-\tau B} \partial_\tau \{ e^{\tau B} N e^{-\tau B} v(t) + e^{\tau B} u^1(t, \tau) \}.$$

Ainsi l'équation (1.47) devient

$$e^{-\tau B} \left( \frac{dv}{dt} + Mv(t) + \partial_\tau \{e^{\tau B} N e^{-\tau B} v(t) + e^{\tau B} u^1(t, \tau)\} \right) = 0 \quad (1.48)$$

ou de manière équivalente

$$\frac{dv}{dt} + Mv(t) + \partial_\tau \{e^{\tau B} N e^{-\tau B} v(t) + e^{\tau B} u^1(t, \tau)\} = 0. \quad (1.49)$$

On a utilisé le fait que  $(e^{-\tau B})_{\tau \in \mathbb{R}}$  est un groupe. On note que (1.48) implique toujours (1.49) lorsque  $(e^{-\tau B})_{\tau \in \mathbb{R}_+}$  est seulement un semi-groupe satisfaisant au principe de l'unicité rétrograde (comme pour l'équation de la chaleur, par exemple). En moyennant par rapport à la variable rapide en temps l'équation (1.49), on est amené à

$$\frac{dv}{dt} + Mv(t) = 0, \quad (1.50)$$

et

$$e^{\tau B} N e^{-\tau B} v(t) + e^{\tau B} u^1(t, \tau) = Nv(t) + u^1(t, 0)$$

La solution vérifiant la condition  $u^1(t, 0) = 0, t \in \mathbb{R}_+$ , correspond au choix du correcteur suivant

$$u^1(t, \tau) = e^{-\tau B} Nv(t) - N e^{-\tau B} v(t), \quad (t, \tau) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+. \quad (1.51)$$

A l'aide d'une estimation de la quantité  $u^\varepsilon(t) - e^{-\frac{t}{\varepsilon} B} v(t) - \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , basée sur un bilan d'énergie, on peut montrer le résultat de convergence suivant, voir le Théorème 4.2.1 pour plus de détails

### Proposition 1.5.3.

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  deux matrices réelles et  $u^{\text{in}} \in \mathbb{R}^n$ . On suppose que  $B$  est symétrique, positive, on considère les matrices  $M, N$  vérifiant (1.45),  $v$  est la solution du problème (1.50) et  $u^1$  est défini par (1.51). Pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$ , il existe une constante  $C_T$  telle que pour tout  $\varepsilon > 0$  on a

$$\left| u^\varepsilon(t) - e^{-\frac{t}{\varepsilon} B} e^{-tM} u^{\text{in}} - \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon) \right| \leq C_T \varepsilon, \quad t \in [0, T].$$

On note que le correcteur  $u^1$  est seulement défini grâce aux semi-groupes  $(e^{-\tau B})_{\tau \in \mathbb{R}_+}$  et  $(e^{-tM})_{t \in \mathbb{R}_+}$ , et n'utilise pas les groupes  $(e^{-\tau B})_{\tau \in \mathbb{R}}$ ,  $(e^{-tM})_{t \in \mathbb{R}}$ . Ainsi il est possible d'utiliser ce qui vient d'être fait pour l'analyse du problème (1.37), dans lequel les opérateurs sont des générateurs infinitésimaux associés à des semi-groupes.

### Système effectif variationnel et résultat de convergence

L'étude formelle précédente motive la recherche d'une décomposition de l'opérateur d'ordre deux  $\text{div}_y(D\nabla_y)$  par rapport à l'opérateur  $\mathcal{B}$ , sous la forme (1.45). On cherche deux opérateurs  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  tels que

$$\text{div}_y(D\nabla_y) = \mathcal{M} + [\mathcal{B}, \mathcal{N}] \quad \text{et} \quad [\mathcal{B}, \mathcal{M}] = 0. \quad (1.52)$$

L'opérateur  $\mathcal{M}$  jouera le rôle de l'opérateur effectif associé au problème (1.37), et l'opérateur  $\mathcal{N}$  servira à construire le correcteur qui nous permettra d'obtenir le résultat de convergence avec ordre. Suivant la méthode utilisée pour définir la matrice  $M$  lors de l'étude du cas de la dimension finie, on aimerait donner une description de l'opérateur  $\mathcal{M}$  en introduisant les sous espaces propres  $E_\lambda$  de l'opérateur  $\mathcal{B}$ . Il est montré à la Proposition 4.4.2 que l'opérateur  $\mathcal{B}$

est autoadjoint positif, et on fait l'hypothèse que  $L^2(\mathbb{R}^m)$  peut être écrit comme une somme Hilbertienne des sous espaces  $E_\lambda$ , c'est-à-dire  $\text{vect}(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_{\lambda_n})$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$

$$L^2(\mathbb{R}^m) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_{\lambda_n}, \quad E_{\lambda_n} = \ker(\mathcal{B} - \lambda_n Id), \quad \lambda_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.53)$$

ce qui implique en particulier, voir Proposition 4.5.7, que

$$H_P^1 = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (E_{\lambda_n} \cap H_P^1).$$

Dans ces conditions on peut montrer, voir la Remarque 4.6.4, que l'opérateur  $\mathcal{M}$  est la transformation linéaire

$$\mathcal{M}u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \left( -\text{div}_y(D(y) \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u) \right) \quad (1.54)$$

définie sur

$$\text{dom} \mathcal{M} = \left\{ u \in H_P^1, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \left( -\text{div}_y(D(y) \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u) \right) \right|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 < +\infty \right\}.$$

**Remarque 1.5.4.** *On peut montrer que l'hypothèse (1.53) est effectivement vérifiée lorsque le flot caractéristique associé au champ de vecteurs  $b$  est périodique ou presque périodique, voir la Section 4.6.*

Malgré une description précise des opérateurs de projections  $\text{Proj}_{E_\lambda}$  dans  $H_P^1$  donnée par les Propositions 4.4.3 et 4.4.5, l'opérateur  $\mathcal{M}$  mis sous la forme (1.54) est d'une interprétation complexe et de manipulation difficile. Afin de remédier à ce problème, on introduit la formulation variationnelle du problème effectif associé à l'équation (1.37). L'opérateur  $\mathcal{M}$  est alors interprété comme l'opérateur linéaire associé à la forme bilinéaire de la formulation variationnelle effective. La formulation variationnelle du problème effectif peut être entièrement explicitée, contrairement à l'opérateur  $\mathcal{M}$ , à l'aide de la notion de champ de matrices moyenné introduite en (1.20) et du groupe d'opérateurs linéaires  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  défini en (1.13). Précisément, on note  $\mathfrak{m}$  la forme bilinéaire suivante

$$\mathfrak{m}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^m} \left\{ \langle D \rangle(y) \nabla u + \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (G(s)D - \langle D \rangle) \nabla \{u(Y(2s; \cdot))\} ds \right\} \cdot \nabla v \, dy, \quad u, v \in H_P^1. \quad (1.55)$$

L'opérateur linéaire associé à la forme bilinéaire  $\mathfrak{m}$  est  $\mathcal{M}$ , voir Remarque 4.6.4, au sens où

$$\mathfrak{m}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{M}u v(y) \, dy, \quad u \in \text{dom} \mathcal{M}, \quad v \in H_P^1.$$

La Proposition 4.5.9 nous assure que cette forme bilinéaire est bien définie, continue, symétrique et positive. La construction du correcteur requiert la connaissance du second opérateur  $\mathcal{N}$ . Sa construction, technique, se fait par le biais d'une seconde forme bilinéaire, on renvoie à la Proposition 4.7.1 et à la Remarque 4.7.2 pour plus de détails. On peut alors citer le résultat de convergence suivant (Théorème 4.8.1)

**Théorème 1.5.5.** *On suppose  $u^{\text{in}}, b, D$  suffisamment réguliers. On suppose également l'existence d'un champ de matrices  $P$  vérifiant (1.21), (1.22) et certaines hypothèses structurelles*

qui sont précisées dans les Sections 4.5.2, 4.7.1 et 4.7.2. Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , on note l'unique solution variationnelle de (1.37) par  $u^\varepsilon \in C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1_P)$

$$u^\varepsilon(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} u^\varepsilon(t, y) \varphi(y) dy + \mathbf{a}^\varepsilon(u^\varepsilon(t), \varphi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \varphi \in H^1_P$$

et par  $v \in C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1_P)$  l'unique solution variationnelle

$$v(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} v(t, y) \varphi(y) dy + \mathbf{m}(v(t), \varphi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \varphi \in H^1_P.$$

Pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$ , il existe une constante  $C_T$  telle que, pour tout  $0 < \varepsilon \leq 1$ , on a

$$\left| u^\varepsilon - e^{-\frac{t}{\varepsilon} \mathcal{B}} v \right|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} \leq C_T \varepsilon$$

$$\left| \nabla u^\varepsilon - \nabla(e^{-\frac{t}{\varepsilon} \mathcal{B}} v) \right|_{L^2([0, T]; X_P)} \leq C_T \varepsilon.$$

Lorsque la condition initiale est bien préparée, c'est-à-dire quand  $u^{\text{in}}$  est constante le long du flot  $Y(s; \cdot)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , associé au champ de vecteurs  $b$ , on peut montrer que la solution  $v$  du problème effectif variationnel sera également constante le long de  $b$  en tout temps  $t \in \mathbb{R}_+$ . Dans ces conditions, le problème variationnel limite associé à la forme  $\mathbf{m}$  peut s'écrire

$$v(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} v(t, y) \varphi(y) dy + \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle(y) \nabla(t) \cdot \nabla \varphi dy = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \varphi \in H^1_P,$$

qui est exactement la formulation variationnelle du problème (1.39), (1.40). En fait, lorsque la condition initiale est bien préparée, on voit que la contrainte  $\mathcal{T}v(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , est satisfaite en tout temps, ce qui supprime la couche limite en  $t = 0$ .

Des perspectives à ces travaux peuvent être trouvées au Chapitre 5.

## Chapitre 2

# Analyse asymptotique d'un problème parabolique avec transport raide

### 2.1 Introduction

De nombreuses applications demandent l'étude d'équations aux dérivées partielles possédant des échelles disparates. Les solutions de ces problèmes fluctuent suivant des échelles très différentes et la résolution numérique simultanée des échelles lentes et rapides semblent hors de portée. Il semble alors intéressant d'obtenir un problème homogénéisé dans lequel seule la variable lente est présente et qui serait obtenu après un lissage des oscillations rapides. Dans ce chapitre, on se concentre sur le problème parabolique avec un terme de transport raide suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \operatorname{div}_y(D(y)\nabla_y u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} b(y) \cdot \nabla_y u^\varepsilon = 0, & (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ u^\varepsilon(0, y) = u^{\text{in}}(y), & y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ici  $b : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $D : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  sont respectivement un champ de vecteurs et un champ de matrices définies positives,  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre destiné à tendre vers 0. Dans le cas où  $b$  est à divergence nulle, l'égalité d'énergie associée s'écrit

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} (u^\varepsilon(t, y))^2 dy + \int_{\mathbb{R}^m} D(y) \nabla_y u^\varepsilon \cdot \nabla_y u^\varepsilon dy = 0.$$

Ainsi, étant donné que les matrices  $D(y)$  sont définies positives, la norme  $L^2$  des solutions  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  décroît par rapport au temps, et on espère que le modèle homogénéisé se comporte encore comme un modèle parabolique pour lequel le champ de diffusion reste à déterminer. Cette problématique est motivée par l'étude des modèles collisionnels apparaissant en théorie gyrocinétique des plasmas de tokamak. Les variations de la densité de particules sont dues aux transport suivant les variables d'espace et de vitesse (causées par l'action d'un champ électromagnétique) ainsi qu'aux effets collisionnels. Le confinement magnétique implique la présence d'un champ magnétique très intense, ce qui explique la raideur de l'opérateur de transport dû à la force de Lorentz  $qv \wedge B^\varepsilon = qv \wedge \frac{B}{\varepsilon}$ . Ici  $q$  représente la charge d'une particule et  $B^\varepsilon = \frac{B}{\varepsilon}$  représente le champ magnétique intense lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. En utilisant l'opérateur de Fokker-Planck pour tenir compte des collisions entre particules on est amené à l'équation

de Fokker-Planck :

$$\partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon + \frac{q}{m} \left( E + v \wedge \frac{B}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla_v f^\varepsilon = \nu \operatorname{div}_v (\Theta \nabla_v f^\varepsilon + v f^\varepsilon), (t, x, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad (2.2)$$

où  $E$  est le champ électrique,  $m$  est la masse d'une particule,  $\nu$  est la fréquence de collision et  $\Theta$  est la température. On note que dans l'équation de Fokker-Planck l'opérateur de diffusion n'agit que par rapport aux variables de vitesse, ainsi (2.2) diffère de (2.1). Néanmoins on espère que les arguments principaux utilisés pour traiter (2.1) seront similaires lors de l'analyse asymptotique de (2.2), à cet effet voir la Section 2.3.3. L'analyse asymptotique de (2.2) dans le cas où on néglige les collisions est bien connue, voir [16, 48, 50, 54]. Le problème homogénéisé est alors obtenu par moyennisation du problème raide suivant le flot caractéristique associé au champ d'advection dominant. Récemment des modèles incluant des phénomènes de collisions ont été analysés formellement en utilisant également des méthodes de moyennisation [20, 21]. Il en est ressorti que la moyennisation suivant le mouvement cyclotronique rapide mène à un opérateur de diffusion non seulement en vitesse mais aussi dans les directions transverses voir (2.35). Au moins au niveau formel, l'étude théorique ici présentée permet l'analyse asymptotique du système de Fokker-Planck avec champ magnétique intense, voir la Section 2.3.2. Bien entendu l'étude du champ de diffusion homogénéisé est crucial pour la détermination des équilibres du système limite associé à (2.2) lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. Des résultats numériques concernant l'étude de problème elliptique ou parabolique fortement anisotrope sont donnés dans [38, 46, 32].

Le cas des problèmes d'advection-diffusion avec opérateur de transport raide a été beaucoup étudié dans le cadre périodique [45, 44, 61, 10, 62], ainsi que l'homogénéisation du problème aux valeurs propres associé [11, 59]. L'objet de ce chapitre est d'obtenir un résultat d'homogénéisation pour le problème (2.1) sans supposer aucune hypothèse de périodicité sur le champ d'advection et pour des données initiales non nécessairement bien préparées. Le problème effectif limite est obtenu à l'aide d'un résultat de théorie ergodique. C'est un problème parabolique pour lequel la matrice de diffusion apparaît comme étant une moyenne du champ de diffusion original le long d'un groupe d'opérateurs construit à l'aide du flot associé au champ d'advection. On précisera des hypothèses suffisantes assurant l'existence d'un tel champ effectif. De plus, le comportement des solutions de (2.1) sera précisé, lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, ainsi qu'un ordre de convergence dans  $L^2$  après construction d'un correcteur adhoc. Une analyse asymptotique de (2.1) a récemment été proposé dans [58] dans le contexte nouveau de la  $\Sigma$ -convergence faible le long d'un flot. Cette approche amène au même système effectif que celui présenté dans ce manuscrit mais dont l'interprétation, différente, est basée sur la théorie des algèbres de Banach avec valeur moyenne.

Ce chapitre sera organisé de la manière suivante. Les résultats principaux sont introduits dans la Section 2.2, on y indique les grandes lignes de notre argumentation formelle. Dans la Section 2.3 on présente la construction du champ de diffusion effectif à travers des éléments de théorie ergodique. La Section 2.4 sera destinée à présenter l'obtention de divers estimés de régularité uniforme pour les solutions de (2.1), cela en vue de montrer les résultats de convergence des sections suivantes. Dans la Section 2.5, on démontre un résultat de convergence à deux échelles dans le cadre ergodique qui permettra la manipulation d'une échelle rapide non périodique. A notre connaissance l'utilisation d'un tel résultat n'a jamais été réalisé dans ce contexte. Les preuves des résultats principaux sont détaillés dans la Section 2.6. Quelques preuves techniques concernant certaines estimations ont été mises dans l'annexe B.

## 2.2 Présentation des résultats principaux et approche formelle

L'objet principal de ce chapitre est l'étude asymptotique de (2.1) lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. Evidemment, les oscillations rapides sont la conséquence du champ d'advection  $\frac{b(y)}{\varepsilon}$ . En effet, lorsqu'on néglige l'opérateur de diffusion, le problème (2.1) est juste une équation de transport dont les solutions s'écrivent

$$u^\varepsilon(t, y) = u^{\text{in}}(Y(-t/\varepsilon; y)), \quad (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m. \quad (2.3)$$

Ici  $(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow Y(s; y) \in \mathbb{R}^m$  est le flot caractéristique associé à  $b \cdot \nabla_y$

$$\frac{dY}{ds} = b(Y(s; y)), \quad (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \quad Y(0; y) = y, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Ce flot sera bien défini sous les hypothèses de régularités usuelles

$$\begin{cases} b \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^m), \\ \exists C > 0 \text{ such that } |b(y)| \leq C(1 + |y|), \quad y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (2.4)$$

Sous les hypothèses ci dessus le flot  $Y$  est régulier et global,  $Y \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ . De plus, on suppose que

$$b \text{ est à divergence nulle,} \quad (2.5)$$

ce qui assure que la transformation  $y \in \mathbb{R}^m \rightarrow Y(s; y) \in \mathbb{R}^m$  préserve la mesure de Lebesgue pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Guidé par (2.3), on introduit les nouvelles inconnues

$$v^\varepsilon(t, z) = u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)), \quad (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.6)$$

en espérant obtenir un résultat de stabilité pour la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Dans ce cas on déduira que, pour  $\varepsilon > 0$  petit,  $u^\varepsilon$  se comporte comme  $v(t, Y(-t/\varepsilon; y))$ , pour un certain profil  $v = \lim_{\varepsilon \searrow 0} v^\varepsilon$ . Il vient que le comportement de  $u^\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro peut être décrit à l'aide de la composée d'un profil stable et des oscillations rapides le long du flot  $Y(-t/\varepsilon; y)$ . On montrera principalement deux résultats de convergence forte pour des données initiales générales non nécessairement bien préparées. On précise des versions simplifiées de ces résultats ci dessous, pour des versions plus détaillées voir les Théorèmes 2.2.7, 2.2.9.

**Théorème** On note  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  les solutions variationnelles de (2.1) et par  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  les fonctions

$$v^\varepsilon(t, z) = u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)), \quad (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \quad \varepsilon > 0.$$

1. Sous de bonnes hypothèses sur le champ de vecteurs  $b$ , le champ de matrices  $D$  et la condition initiale  $u^{\text{in}}$ , la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  convergence fortement dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$  vers l'unique solution variationnelle  $v \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$  de (2.27). Le champ de matrice effectif  $\langle D \rangle$  est obtenu comme une moyenne ergodique du champ  $D$  construite à partir du flot associé  $b$  (cf. Théorème 2.2.5)

$$\langle D \rangle = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) D(Y(s; \cdot)) {}^t \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) ds.$$

2. Sous des hypothèse supplémentaires de régularité, on a l'estimation d'erreur

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u^\varepsilon(t, \cdot) - v(t, Y(-t/\varepsilon; \cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq C_T \varepsilon.$$

Le problème dont  $v^\varepsilon$  est solution est obtenu en faisant le changement de variable  $y = Y(t/\varepsilon; z)$  dans (2.1). Une série de calculs élémentaires basés sur la règle de la chaîne nous amène à

$$\partial_t v^\varepsilon(t, z) = \partial_t u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)) + \frac{1}{\varepsilon} b(Y(t/\varepsilon; z)) \cdot (\nabla_y u^\varepsilon)(t, Y(t/\varepsilon; z)).$$

La manipulation du terme de diffusion nous oblige à mieux comprendre l'action de l'opérateur  $\operatorname{div}_y(D\nabla_y \cdot)$  quand on lui applique une fonction de la forme  $v \circ Y(-s, \cdot)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Un calcul fastidieux, mais toujours élémentaire, montre que l'on peut écrire pour toute fonction intégrable  $z \mapsto w(z)$ , tout champ de matrices  $y \mapsto C(y)$ , et tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$\operatorname{div}_y\{C\nabla_y(w \circ Y(-s, \cdot))\} = (\operatorname{div}_z(G(s)C\nabla_z w)) \circ Y(-s, \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m), \quad (2.7)$$

où la famille de matrices  $(G(s)C)_s$  est définie par

$$\begin{aligned} (G(s)C)(z) &:= \partial Y^{-1}(s; z) C(Y(s; z)) {}^t \partial Y^{-1}(s; z) \\ &= \partial Y(-s; Y(s; z)) C(Y(s; z)) {}^t \partial Y(-s; Y(s; z)), \quad (s, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad (2.8)$$

En utilisant ces notations, le changement de variable  $y = Y(t/\varepsilon; z)$  dans (2.1) nous amène à

$$\begin{cases} \partial_t v^\varepsilon - \operatorname{div}_z((G(t/\varepsilon)D)\nabla_z v^\varepsilon) = 0, & (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ v^\varepsilon(0, z) = u^\varepsilon(0, z) = u^{\text{in}}(z), & z \in \mathbb{R}^m, \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Le terme singulier  $\frac{1}{\varepsilon} b \cdot \nabla_y$  n'étant plus présent, ce nouveau problème de diffusion (2.9) semble plus simple que celui d'origine (2.1). Néanmoins, le nouveau modèle dépend maintenant de la variable rapide  $s = t/\varepsilon$  à travers le terme  $G(t/\varepsilon)D$  et de la variable lente  $t$ . Ce nouveau problème est donc à deux échelles en temps. Comme il est de coutume lors de l'analyse asymptotique d'un problème à deux échelles, on cherche à comprendre le comportement de la suite  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0 et identifier le problème limite à l'aide d'un développement formel de Hilbert dont les termes dépendent à la fois des variables lente et rapide

$$v^\varepsilon(t, z) = v(t, t/\varepsilon, z) + \varepsilon v^1(t, t/\varepsilon, z) + \dots \quad (2.10)$$

Cette méthode classique est utilisée dans de nombreux contextes tels que l'homogénéisation périodique pour des systèmes elliptiques ou parabolique [3, 60], pour des phénomènes de transport [18, 36] ou dans le cadre des équations cinétiques [17]. En insérant l'Ansatz (2.10) dans (2.9) et en identifiant les termes de même ordre en  $\varepsilon$ , on est amené à la hiérarchie d'équations suivantes

$$\partial_s v = 0 \quad (2.11)$$

$$\partial_t v - \operatorname{div}_z(G(s)D\nabla_z v) + \partial_s v^1 = 0 \quad (2.12)$$

⋮

L'équation (2.11) nous dit que le premier profil  $v$  ne dépend pas de la variable rapide  $s$ , ainsi  $v = v(t, z)$ . On espère que  $v$  est la limite de la suite  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. L'équation (2.12) nous informerait sur le comportement de  $v$  par rapport à la variable lente à condition de supprimer le terme  $v^1$ . En fait on peut interpréter  $v^1$  comme un multiplicateur de Lagrange assurant que pour tout temps  $t$  le profil  $v$  satisfait la contrainte  $\partial_s v = 0$ . Dans le cas périodique on éliminerait le profil  $v^1$  en prenant la moyenne de (2.12) sur une période.

Ici, aucune hypothèse de périodicité n'est supposée, ce qui nous incite à utiliser une moyenne ergodique, ce qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t v - \operatorname{div}_z \left\{ \left( \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s) D \, ds \right) \nabla_z v \right\} = 0, & (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ v(0, z) = u^{\text{in}}(z), & z \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (2.13)$$

Le point clé est que  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires dans un espace de Hilbert à déterminer, voir Annexe A.1 pour tous les rappels sur cette notions. Le Théorème ergodique de Von-Neumann (voir également Annexe A.1) nous permet alors de donner un sens à la limite  $\langle D \rangle = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s) D \, ds$ . L'espace de Hilbert assurant que  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires est un espace  $L^2$  à poids, le poids en question étant un champ de matrices symétriques définies positives. On suppose qu'il existe un champ de matrices  $P$  tel que

$${}^t P = P, \quad P(y) \xi \cdot \xi > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad P^{-1}, P \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m) \quad (2.14)$$

$$[b, P] = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m), \quad (2.15)$$

où le crochet entre un champ de vecteurs  $c$  et un champ de matrices  $A$  est un champ de matrices défini formellement par

$$[c, A] := (c \cdot \nabla_y) A - \partial_y c A - A {}^t \partial_y c. \quad (2.16)$$

L'intérêt de la condition (2.15) apparaît naturellement dans la proposition suivante :

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $c \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$  un champ de vecteurs (non nécessairement à divergence nulle) qui croît au plus linéairement à l'infini et  $A(y) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$  un champ de matrices.*

1. *On peut exprimer le commutateur entre un opérateur d'advection  $c \cdot \nabla_y$  et un opérateur de diffusion  $\operatorname{div}_y(A(y) \nabla_y)$  de la manière suivante*

$$[c \cdot \nabla_y, \operatorname{div}_y(A(y) \nabla_y)] = \operatorname{div}_y([c, A] \nabla_y) + ({}^t A(y) \nabla_y \operatorname{div}_y c) \cdot \nabla_y. \quad (2.17)$$

*En particulier, si  $\operatorname{div}_y c = 0$ , ce commutateur est un opérateur de diffusion ayant pour champ de diffusion  $[c, A]$ .*

2. *Les points suivants sont équivalents*

(a)  $[c, A] = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$

(b) Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , on a

$$A(Y(s; y)) = \partial Y(s; y) A(y) {}^t \partial Y(s; y), \quad (2.18)$$

*où  $Y$  est le flot associé au champ de vecteurs  $c$ .*

(c) Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on a

$$G(s) A = A,$$

*où  $G$  est défini par (2.8).*

**Preuve.**

1. Un calcul direct montre que le commutateur entre  $c \cdot \nabla_y$  et  $\operatorname{div}_y$  est donné par

$$[c \cdot \nabla_y, \operatorname{div}_y]\xi = \xi \cdot \nabla_y \operatorname{div}_y c - \operatorname{div}_y(\partial_y c \xi), \quad \xi \in (C^2(\mathbb{R}^m))^m.$$

En utilisant la formule ci dessus avec  $\xi = A(y)\nabla_y u$  et  $u$  régulière, on obtient

$$\begin{aligned} c \cdot \nabla_y(\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y u)) - \operatorname{div}_y(c \cdot \nabla_y(A(y)\nabla_y u)) \\ = A(y)\nabla_y u \cdot \nabla_y \operatorname{div}_y c - \operatorname{div}_y(\partial_y c A(y)\nabla_y u). \end{aligned} \quad (2.19)$$

En tenant compte du fait que

$$\begin{aligned} c \cdot \nabla_y(A(y)\nabla_y u) &= (c \cdot \nabla_y A)\nabla_y u + A(y)(\partial^2 u)c(y) \\ &= (c \cdot \nabla_y A)\nabla_y u + A(y)\nabla_y(c \cdot \nabla_y u) - A(y)^t \partial_y c \nabla_y u \end{aligned}$$

on déduit à l'aide de (2.19) que

$$\begin{aligned} c \cdot \nabla_y(\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y u)) - \operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y(c \cdot \nabla_y u)) &= A(y)\nabla_y u \cdot \nabla_y \operatorname{div}_y c \\ &\quad + \operatorname{div}_y((c \cdot \nabla_y A - \partial_y c A(y) - A(y)^t \partial_y c)\nabla_y u), \end{aligned}$$

d'où la formule évoquée.

2. (a)  $\Rightarrow$  (b) Soit  $A(y)$  un champ de matrices satisfaisant la relation (2.18). On rappelle que le Jacobien  $J$  associé au flot du champ de vecteurs  $c(y)$ ,  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $y \mapsto Y(s; y)$  pour  $s \in \mathbb{R}$  s'écrit  $J(s, y) = \exp\left(\int_0^s \operatorname{div}_y c(Y(\tau; y)) d\tau\right)$  et vérifie la relation  $J(s, Y(-s; y))J(-s, y) = 1$ . En prenant un champ de matrices  $U \in C_c^1(\mathbb{R}^m)$  on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} A(y) : (U(Y(-s; y)) - U(y)) dy &= \int_{\mathbb{R}^m} (A(Y(s; y)) - A(y)) : U(y) J(s, y) dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^m} A(y) : U(y) (J(s, y) - 1) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} (\partial_y Y(s; y) A(y)^t \partial_y Y(s; y) - A(y)) : U(y) J(s, y) dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^m} A(y) : U(y) (J(s, y) - 1) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \{(\partial_y Y(s; y) - I) A(y)^t \partial_y Y(s; y) : U(y) + A(y)^t (\partial_y Y(s; y) - I) : U(y)\} J(s, y) dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^m} A(y) : U(y) (J(s, y) - 1) dy. \end{aligned}$$

En multipliant par  $\frac{1}{s}$  et en passant à la limite  $s \rightarrow 0$  on obtient

$$- \int_{\mathbb{R}^m} A(y) : (c \cdot \nabla_y U) dy - \int_{\mathbb{R}^m} A(y) : U \operatorname{div}_y c dy = \int_{\mathbb{R}^m} (\partial_y c A(y) + A(y)^t \partial_y c) : U(y) dy$$

ce qui signifie que  $[c, A] = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ .

Pour l'implication inverse (b)  $\Rightarrow$  (a), on définit

$$f(s, y) = (A(Y(s; y)) - \partial_y Y(s; y) A(y)^t \partial_y Y(s; y)) J(s, y), \quad s \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Pour tout  $U \in C_c^1(\mathbb{R}^m)$  on a

$$\begin{aligned} F_U(s) &:= \int_{\mathbb{R}^m} f(s, y) : U(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} A(y) : U(Y(-s; y)) \, dy - \int_{\mathbb{R}^m} \partial_y Y(s; y) A(y)^t \partial_y Y(s; y) : U(y) J(s, y) \, dy \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F_U(s) &= - \int_{\mathbb{R}^m} A(y) : ((c \cdot \nabla_y) U)_{-s} \, dy - \int_{\mathbb{R}^m} \partial_y (c(Y(s; y))) A(y)^t \partial_y Y(s; y) : U(y) J(s, y) \, dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^m} \partial_y Y(s; y) A(y)^t \partial_y (c(Y(s; y))) : U(y) J(s, y) \, dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^m} \partial_y Y(s; y) A(y)^t \partial_y Y(s; y) : U(y) \operatorname{div}_y c(Y(s; y)) J(s, y) \, dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m} A(y) : (b \cdot \nabla_y) U_{-s} \, dy - \int_{\mathbb{R}^m} \partial_y c(Y(s; y)) \partial_y Y(s; y) A(y)^t \partial_y Y(s; y) : U J(s, y) \, dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^m} \partial_y Y(s; y) A(y)^t \partial_y Y(s; y)^t \partial_y c(Y(s; y)) : U(y) J(s, y) \, dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^m} \partial_y Y(s; y) A(y)^t \partial_y Y(s; y) : U(y) \operatorname{div}_y c(Y(s; y)) J(s, y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \{ \operatorname{div}_y c(Y(s; y)) f(s, y) + \partial_y c(Y(s; y)) f(s, y) + f(s, y)^t \partial_y c(Y(s; y)) \} : U(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} f(s, y) : \{ {}^t \partial_y c(Y(s; y)) U(y) + U(y) \partial_y c(Y(s; y)) + \operatorname{div}_y c(Y(s; y)) U(y) \} \, dy. \end{aligned}$$

Dans les calculs précédents on a utilisé le fait que l'opérateur de dérivation le long de  $c$  commute avec le flot associé à  $c$

$$((c \cdot \nabla_y) U)_{-s} = (c \cdot \nabla_y) U_{-s}.$$

En intégrant par rapport à la variable  $s$  on obtient

$$F_U(s) = \int_0^s \int_{\mathbb{R}^m} f(\tau, y) : \{ {}^t \partial_y c(Y(\tau; y)) U(y) + U(y) \partial_y c(Y(\tau; y)) + \operatorname{div}_y c(Y(\tau; y)) U(y) \} \, dy \, d\tau.$$

Clairement, l'égalité ci-dessus reste vraie dans le cas où  $U \in C_c(\mathbb{R}^m)$ . Soit  $R > 0, T > 0$  et  $K = \| {}^t \partial_y c \circ Y \|_{L^\infty([-T, T] \times B_R)} + \| \partial_y c \circ Y \|_{L^\infty([-T, T] \times B_R)} + \| \operatorname{div}_y c \circ Y \|_{L^\infty([-T, T] \times B_R)}$ . Ainsi, pour tout  $s \in [-T, T]$  on a

$$\begin{aligned} \| f(s, \cdot) \|_{L^\infty(B_R)} &= \sup \{ |F_U(s)| : U \in C_c(B_R), \|U\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} \leq 1 \} \\ &\leq K \left| \int_0^s \| f(\tau, \cdot) \|_{L^\infty(B_R)} \, d\tau \right|. \end{aligned}$$

A l'aide du lemme de Gronwall on peut déduire que  $\| f(s, \cdot) \|_{L^\infty(B_R)} = 0$  pour  $-T \leq s \leq T$  ce qui signifie que  $A(Y(s; y)) - \partial_y Y(s; y) A(y)^t \partial_y Y(s; y) = 0, s \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^m$ .

Enfin l'équivalence (b)  $\Leftrightarrow$  (c) est une conséquence directe de (2.8).

□

Introduisons maintenant quelques espaces dont l'utilisation est récurrente. On rappelle que pour deux matrices de  $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ , on pose  $A : B := \operatorname{tr}({}^t AB)$ .

**Définition 2.2.2.** *Pour tout champ de matrices  $M : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$  composé de matrices symétriques définies positives, on introduit l'espace  $L^2$  à poids*

$$H_M = \left\{ A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ mesurable} : M^{1/2} A M^{1/2} \in L^2 \right\},$$

qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(A, B)_M := \int_{\mathbb{R}^m} (M^{1/2} A M^{1/2}) : (M^{1/2} B M^{1/2}) \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} M A : B M \, dy, \quad \forall A, B \in H_M.$$

La norme associée est notée  $|A|_M$ . De manière similaire on introduit l'espace de Banach

$$H_M^\infty = \left\{ A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ mesurable} : M^{1/2} A M^{1/2} \in L^\infty \right\},$$

muni de la norme

$$|A|_{H_M^\infty} := |M^{1/2} A M^{1/2}|_{L^\infty}.$$

Supposons qu'il existe une fonction continue  $\psi$  laissée invariante par le flot associé à  $b$  et dont la limite est infinie quand  $|y|$  tend vers l'infini

$$\psi \in C(\mathbb{R}^m), \quad \psi \circ Y(s; \cdot) = \psi \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}, \quad \lim_{|y| \rightarrow +\infty} \psi(y) = +\infty. \quad (2.20)$$

Etant donné que les ensembles  $\{\psi \leq k\}$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ , sont des compacts invariants par le flot de  $b$ , on introduit les espaces locaux

$$H_{M,loc} = \left\{ A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ mesurable} : \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A \in H_M \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

On dira que la famille  $(A_i)_i \subset H_{M,loc}$  converge dans  $H_{M,loc}$  vers un certain  $A \in H_{M,loc}$  si et seulement si, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la famille  $(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A_i)_i$  converge dans  $H_M$  vers  $\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A$ .

On définit des espaces similaires pour les champs de vecteurs.

**Définition 2.2.3.** *Sous les mêmes hypothèses que dans la définition précédente, on définit*

$$X_M := \left\{ c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mesurable} : M^{1/2} c \in L^2 \right\}$$

qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(c, d)_M := \int_{\mathbb{R}^m} M(y) : c(y) \otimes d(y) \, dy, \quad \forall c, d \in X_M,$$

et l'espace de Banach

$$X_M^\infty = \left\{ c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mesurable} : M^{1/2} c \in L^\infty(\mathbb{R}^m) \right\},$$

que l'on munit de la norme  $|c|_{X_M^\infty} := |M^{1/2} c|_{L^\infty}$ .

Les propriétés suivantes se déduisent immédiatement

**Proposition 2.2.4.** *En supposant les mêmes hypothèses que dans la définition ci dessus*

— *L'injection  $C_c^0(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}_m(\mathbb{R})) \subset H_M$  est continue*

- Si  $M^{-1} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^m)$  alors  $H_M \subset L_{loc}^1(\mathbb{R}^m; \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$ . De plus l'espace  $H_{M^{-1}}$  peut être identifié au dual de  $H_M$  à travers le crochet de dualité qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle_{M, M^{-1}} &:= \int_{\mathbb{R}^m} A(y) : B(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} M^{1/2} A M^{1/2} : M^{-1/2} B M^{-1/2} \, dy \\ &\leq |A|_M |B|_{M^{-1}}, \quad \forall A \in H_M, \forall B \in H_{M^{-1}}. \end{aligned}$$

Enfin, les applications  $A \in H_M \rightarrow M A M \in H_{M^{-1}}$  et  $B \in H_{M^{-1}} \rightarrow M^{-1} B M^{-1} \in H_M$  sont des isométries linéaires, dont chacune est l'inverse de l'autre.

Revenons maintenant sur le sens que l'on peut donner au procédé de moyennisation indiqué en (2.13). Etant donné un champ de matrices  $P$  satisfaisant (2.14), (2.15), on pose  $Q = P^{-1}$  et on veut montrer que la famille d'opérateurs  $G(s) : H_Q \rightarrow H_Q, s \in \mathbb{R}$ , est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires sur  $H_Q$  (voir Proposition 2.3.1). Le théorème ergodique de von Neumann (see Théorème A.1.8 et [66] pour plus de détails) nous donne que la moyenne d'un champ de matrices  $\langle A \rangle := \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s) A \, ds$  est bien définie et qu'elle coïncide avec la projection orthogonale sur le sous espace  $\{B \in H_Q : G(s)B = B \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}\}$ , voir aussi [19, 18]. Sous l'hypothèse (2.20), le groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  agit également sur  $H_{Q,loc}$ . En particulier, tout champ de matrices de  $H_Q^\infty \subset H_{Q,loc}$  possède un moyenné dans  $H_{Q,loc}$ , encore noté par  $\langle \cdot \rangle$ , tout comme pour un champ de  $H_Q$ .

**Théorème 2.2.5.** *Supposons les hypothèses (2.4), (2.5), (2.14), (2.15), (2.20) vérifiées. On note  $L$  le générateur infinitésimal associé au groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ .*

1. Pour tout champ de matrices  $A \in H_Q$  on a la convergence forte dans  $H_Q$

$$\langle A \rangle := \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \underbrace{\partial Y(-s; Y(s; \cdot)) A(Y(s; \cdot)) {}^t \partial Y(-s; Y(s; \cdot))}_{=(G(s)A)(y)} \, ds = \text{Proj}_{\ker L} A$$

uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ .

2. Si  $A \in H_Q$  est un champ de matrices symétriques positives, alors il en est de même pour  $\langle A \rangle$ .
3. Soit  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un ensemble invariant par le flot associé à  $b$ , ce qui s'écrit  $Y(s; \mathcal{S}) = \mathcal{S}$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Si  $A \in H_Q$  est tel que

$$Q^{1/2}(y) A(y) Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathcal{S},$$

pour un certain  $\alpha > 0$ , alors on a

$$Q^{1/2}(y) \langle A \rangle(y) Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathcal{S}$$

et en particulier,  $\langle A \rangle(y)$  est définie positive pour tout  $y \in \mathcal{S}$ .

4. Si  $A \in H_Q \cap H_Q^\infty$ , alors  $\langle A \rangle \in H_Q \cap H_Q^\infty$  et

$$|\langle A \rangle|_Q \leq |A|_Q, \quad |\langle A \rangle|_{H_Q^\infty} \leq |A|_{H_Q^\infty}.$$

5. Pour tout champ de matrices  $A \in H_{Q,loc}$ , la famille

$$\left( \frac{1}{S} \int_0^S \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) A(Y(s; \cdot)) {}^t \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) \, ds \right)_{S>0}$$

converge dans  $H_{Q,\text{loc}}$  lorsque  $S$  tend vers l'infini. Sa limite, noté  $\langle A \rangle$ , satisfait

$$\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \langle A \rangle = \langle \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A \rangle, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

où le symbole  $\langle \cdot \rangle$  à droite de l'égalité est l'opérateur de moyenne sur  $H_Q$ . En particulier, tout champ de matrices  $A \in H_Q^\infty$  possède un moyenné dans  $H_{Q,\text{loc}}$  et  $|\langle A \rangle|_{H_Q^\infty} \leq |A|_{H_Q^\infty}$ . Si  $A \in H_{Q,\text{loc}}$  est tel que

$$Q^{1/2}(y)A(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathbb{R}^m,$$

pour un certain  $\alpha > 0$ , alors on a

$$Q^{1/2}(y)\langle A \rangle(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

La construction d'un moyenné matriciel présenté précédemment est assujétie aux hypothèses (2.4), (2.14), (2.15). L'analyse du comportement de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 requiert des estimations sur les dérivées de  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  jusqu'à l'ordre trois, voir Propositions 2.4.4, 2.4.5. Pour obtenir ces estimations il est très pratique d'utiliser les dérivations le long de champs de vecteurs qui commutent avec la dérivation le long du champ  $b$ . Ces champs de vecteurs sont appelés champs en involution avec  $b$ . On peut alors facilement obtenir les estimations sur les dérivées de  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  en dérivant l'équation (2.1) le long de ces champs en involution par rapport à  $b$ . Plus précisément, nous supposons qu'il existe un champ de matrices  $R(y)$  tel que

$$\begin{cases} \det R(y) \neq 0, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad R \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^m) \\ (b \cdot \nabla_y)R + R\partial_y b = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m). \end{cases} \quad (2.21)$$

L'équation satisfaite pour  $R$  dans (2.21) est équivalente à  $R(Y(s; y))\partial Y(s; y) = R(y)$ , pour  $(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ , qui peut aussi s'écrire

$$\partial Y(s; y)R^{-1}(y) = R^{-1}(Y(s; y)), \quad (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \quad (2.22)$$

et enfin  $(b \cdot \nabla_y)R^{-1} = \partial_y b R^{-1}$ . Cela signifie que les colonnes de  $R^{-1}$  sont des champs de vecteurs en involution avec  $b$ , voir [19] Proposition 3.4. pour plus de détails. On notera les colonnes de  $R^{-1} : b_i, 1 \leq i \leq m$ . En tout point  $y \in \mathbb{R}^m$  ces vecteurs forment une base de  $\mathbb{R}^m$  cf. (2.21) et sont supposés réguliers et à croissance au plus linéaire à l'infini

$$\begin{cases} b_i \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^m), \quad \text{div}_y b_i \in L^\infty(\mathbb{R}^m), \quad 1 \leq i \leq m, \\ \forall i \in \{1, \dots, m\}, \exists C_i > 0 \text{ tel que } |b_i(y)| \leq C_i(1 + |y|), \quad y \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (2.23)$$

ce qui garantit l'existence d'un flot global  $Y_i(s; y) \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ . En fait, on peut montrer que l'hypothèse (2.21) implique les hypothèses (2.14), (2.15) concernant le champ de matrice  $P$ . Tout d'abord il est clair que  $R^{-1} \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^m)$ , en effet, les champs  $b_i$  sont supposés localement bornés sur  $\mathbb{R}^m$ . De plus  $y \rightarrow R^{-1}(y)$  est continue, ce qui implique que l'infimum de la fonction  $y \rightarrow |\det R^{-1}(y)|$  sur tout compact de  $\mathbb{R}^m$  est strictement positif et donc que  $R = (R^{-1})^{-1} \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^m)$ . En particulier  ${}^t R R, ({}^t R R)^{-1}$  sont localement bornés, et donc de carré localement intégrable sur  $\mathbb{R}^m$ . En posant  $Q = {}^t R R, P = Q^{-1} = R^{-1} {}^t R^{-1}$ , on vérifie que les hypothèses (2.14), (2.15) sont bien vérifiées.  $P(y)$  est symétrique, définie positive, de carré localement intégrable ainsi que son inverse  $Q = P^{-1}$ , et grâce à (2.22), on a

$$\begin{aligned} P(Y(s; y)) &= R^{-1}(Y(s; y)) {}^t R^{-1}(Y(s; y)) \\ &= \partial Y(s; y) R^{-1}(y) {}^t R^{-1}(y) {}^t \partial Y(s; y) \\ &= \partial Y(s; y) P(y) {}^t \partial Y(s; y) \end{aligned}$$

ce qui signifie que  $[b, P] = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  cf. Proposition 2.2.1. Sous les hypothèses (2.23), les espaces  $H_Q, H_Q^\infty$  peuvent être réécrits

$$H_Q = \{A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ mesurable} : R A {}^t R \in L^2(\mathbb{R}^m)\},$$

$$H_Q^\infty = \{A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ mesurable} : R A {}^t R \in L^\infty(\mathbb{R}^m)\}.$$

Si  $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$  est une famille de champs de vecteurs en involution avec  $b$ , on construit un nouvel espace de type Sobolev de la manière suivante sur  $\mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} H_R^1 &:= \bigcap_{i=1}^m \text{dom}(b_i \cdot \nabla_y) \\ &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^m) : b_i \cdot \nabla_y u \in L^2(\mathbb{R}^m), \forall i \in \{1, \dots, m\}\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

C'est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_R = \int_{\mathbb{R}^m} u(y)v(y) \, dy + \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^m} (b_i \cdot \nabla_y u)(b_i \cdot \nabla_y v) \, dy, \quad u, v \in H_R^1.$$

La norme associée sera notée  $|\cdot|_R$ . Les opérateurs  $b_i \cdot \nabla_y$  sont les générateurs infinitésimaux des  $C^0$ -groupes sur  $L^2(\mathbb{R}^m)$  donnés par

$$\tau_i(s)u := u \circ Y_i(s; \cdot), \quad u \in L^2(\mathbb{R}^m), \quad s \in \mathbb{R}, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

L'hypothèse  $\text{div}_y b_i \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$  joue un rôle crucial lors de la majoration du déterminant de  $\partial Y_i$ .

**Remarque 2.2.6.** *Tout élément de  $H_R^1$  possède un gradient au sens des distributions dans  $L_{loc}^2(\mathbb{R}^m)$ . Plus précisément, pour tout  $u \in H_R^1$ , on a*

$$\nabla_y u = {}^t R {}^t (b_1 \cdot \nabla_y u, \dots, b_m \cdot \nabla_y u),$$

et

$$|u|_R^2 = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + |\nabla u|_P^2. \quad (2.25)$$

Il sera commode d'utiliser le nouvel opérateur différentiel

$$\nabla_y^R := {}^t R^{-1} \nabla_y = {}^t (b_1 \cdot \nabla_y, \dots, b_m \cdot \nabla_y),$$

ainsi que les dérivées multiples qui lui sont associées

$$(\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R)_{ij} := b_i \cdot \nabla_y (b_j \cdot \nabla_y), \quad i, j \in \{1, \dots, m\},$$

$$(\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R \otimes \nabla_y^R)_{ijk} := b_i \cdot \nabla_y (b_j \cdot \nabla_y (b_k \cdot \nabla_y)), \quad i, j, k \in \{1, \dots, m\}.$$

Pour les résultats de la Section 2.3 seules les hypothèses (2.4), (2.14), (2.15) seront nécessaires, mais dans les Sections 2.4 et 2.6 l'hypothèse plus forte (2.21) introduite précédemment sera nécessaire pour obtenir les estimations de régularité et, par conséquent, remplacera les hypothèses (2.14), (2.15). De plus on suppose que

$$\begin{cases} {}^t D = D, \quad D \in H_Q^\infty, \quad b \in X_Q^\infty \\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } Q^{1/2}(y)D(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (2.26)$$

où  $Q = {}^tRR$  et les champs de vecteurs  $b_1, \dots, b_m$  sont les colonnes du champ de matrices  $R^{-1}$ .

Le problème limite effectif (2.13) obtenu formellement à partir du système (2.9) s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t v - \operatorname{div}_z(\langle D \rangle \nabla_z v) = 0, & (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ v(0, z) = u^{\text{in}}(z), & z \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (2.27)$$

Sous des hypothèses de régularité suffisantes (voir Section 2.6), on montre un résultat de convergence forte pour la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ , vers la solution  $v$  du problème (2.27). A l'aide du changement de variable utilisé dans (2.6), on peut également exprimer le comportement asymptotique de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ . En effet pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $Y(s; \cdot)$  préserve la mesure de Lebesgue et on peut écrire

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \|u^\varepsilon(t, \cdot) - v(t, Y(-t/\varepsilon; \cdot))\|_{L^2} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \|v^\varepsilon(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{L^2} = 0,$$

uniformément par rapport à  $t \in [0, T]$ , pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$ . Le comportement de  $u^\varepsilon(t, \cdot)$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro peut donc être exprimé à l'aide de la composition du profil  $v$  et de  $Y(-t/\varepsilon; \cdot)$ . Passer à la limite dans (2.9), quand  $\varepsilon \searrow 0$ , nécessite une analyse à deux échelles en temps qui serait standard dans le cas où la variable rapide est périodique. Ici aucune hypothèse de périodicité n'est supposée et dans ce contexte peu de résultats existent. Pour y parvenir, le point clé est l'utilisation de la notion de moyenne ergodique le long d'un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires. Précisément, le point le plus délicat est le passage à la limite dans le terme intégral

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} G(t/\varepsilon) D \nabla_z v^\varepsilon \cdot \nabla_z \Phi \, dz dt$$

qui apparaît dans la formulation variationnelle de (2.9), pour toute fonction test régulière  $\Phi$ . Pour cela on combine, d'une part la convergence faible de  $(\nabla_z v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  lorsque  $\varepsilon \searrow 0$  dans  $L^2([0, T]; X_P)$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$  et, d'autre part la convergence forte de  $\left(\frac{1}{S} \int_0^S G(s) D \, ds\right)_{S>0}$ , quand  $S \rightarrow +\infty$ , dans  $H_{Q, \text{loc}}$ . On démontre que pour toute famille de fonctions  $(w^\beta)_{\beta>0}$  admettant le même module de continuité dans  $C([0, T]; X_P)$  et convergeant faiblement dans  $L^2([0, T]; X_P)$ , lorsque  $\beta \searrow 0$  vers un certain  $w^0$ , on a

$$\lim_{(\beta, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \theta(t, y) \otimes w^\beta(t, y) : G(t/\varepsilon) D \, dy dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \theta(t, y) \otimes w^0(t, y) : \langle D \rangle \, dy dt$$

pour tout  $\theta \in L^2([0, T]; X_P)$ , voir les Propositions 2.5.1, 2.5.3. Les convergences fortes de  $(\nabla_z v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  dans  $L^2([0, T]; X_P)$  et  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  dans  $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))$  résultent de la conservation de l'énergie. C'est une conséquence d'un résultat général donné à la Proposition 2.5.5. Sous l'hypothèse de coercivité (2.26), on montre que la convergence faible de la famille  $(w^\beta)_{\beta>0}$  dans  $L^2([0, T]; X_P)$  vers  $w^0$  et l'inégalité

$$\limsup_{(\beta, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} w^\beta(t, y) \otimes w^\beta(t, y) : G(t/\varepsilon) D \, dy dt \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} w^0(t, y) \otimes w^0(t, y) : \langle D \rangle \, dy dt$$

impliquent la convergence forte de  $(w^\beta)_{\beta>0}$  dans  $L^2([0, T]; X_P)$  vers  $w^0$ .

**Théorème 2.2.7.** *On suppose que les hypothèses (2.4), (2.5) (2.20), (2.23), (2.26), (2.38) sont vérifiées ainsi que toutes les hypothèses de régularité de la Proposition 2.4.5. On suppose*

que  $u^{\text{in}} \in H_R^2$  et on note  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  les solutions variationnelles de (2.1) et par  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  les fonctions

$$v^\varepsilon(t, z) = u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)), \quad (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \quad \varepsilon > 0.$$

Alors la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge fortement dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$  vers l'unique solution variationnelle  $v \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$  de (2.27) et a la régularité suivante

$$\partial_t v, \nabla_z^R v, \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)), \quad \partial_t \nabla_z^R v \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)).$$

De plus  $(\nabla_z v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge vers  $\nabla_z v$  dans  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; X_P)$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. De plus, la convergence forte de  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, reste vraie pour toute condition initiale  $u^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ .

Il est facile de montrer que  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge faiblement dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ , quand  $\varepsilon \searrow 0$ , vers  $\langle v \rangle$ , voir également [19]. On peut aussi montrer que  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge fortement dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ , quand  $\varepsilon \searrow 0$ , vers  $v$  si et seulement si  $v = \langle v \rangle$ , ou de manière équivalente, si et seulement si la condition initiale est bien préparée, c'est à dire que  $u^{\text{in}} \in \ker \mathcal{T}$ . En effet

- La solution variationnelle  $v$  du problème (2.27) vérifie  $v \in C^0([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))$ . La fonction  $\langle v \rangle$  est définie, pour tous  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , comme la moyenne de  $v(t, \cdot)$  le long du flot  $Y(s; \cdot)$  associé au champ de vecteurs  $b$ , précisément

$$\langle v \rangle(t, y) = \langle v(t, \cdot) \rangle(y) = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S v(t, Y(s; y)) ds, \quad (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m. \quad (2.28)$$

Dans le cas où le flot  $Y(s; \cdot)$  serait  $T$ -périodique par rapport à  $s$ , on aurait

$$\langle v \rangle(t, y) = \frac{1}{T} \int_0^T v(t, Y(s; y)) ds, \quad (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m.$$

- L'opérateur  $\mathcal{T}$  est l'opérateur  $b \cdot \nabla_y$  de domaine  $\text{dom}(b \cdot \nabla_y) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^m) \mid \text{div}_y(ub) \in L^2(\mathbb{R}^m)\}$ . Le Théorème ergodique de von Neumann nous permet de donner un sens à l'expression (2.28) et une interprétation de cette expression en terme de projection orthogonale. En effet,  $\langle v \rangle$  peut être interprété comme la projection orthogonale, par rapport au produit scalaire de  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , de  $v$  sur l'ensemble des éléments constants le long du flot  $Y(s; \cdot)$ , donc comme la projection sur l'ensemble  $\ker \mathcal{T} = \ker(b \cdot \nabla_y) = \{w \in L^2(\mathbb{R}^m) \mid w(Y(s, y)) = w(y) \forall s \in \mathbb{R}, \text{ p.p } y \in \mathbb{R}^m\}$ .
- Soit  $T > 0$ , on suppose acquis le fait que  $v^\varepsilon$  converge vers  $v$  dans  $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))$  fortement (Théorème 2.2.7), lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, et on montre que  $u^\varepsilon$  converge fortement vers  $\langle v \rangle$  si et seulement si  $u_{\text{in}}$  est bien préparée.

1. En supposant la convergence forte de  $v^\varepsilon$  vers  $v$  dans  $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, on peut montrer que  $u^\varepsilon$  converge faiblement  $\star$  dans  $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))$  vers  $\langle v \rangle$ , on rappelle que  $u^\varepsilon(t, y) = v^\varepsilon(t, Y(-t/\varepsilon, y))$  avec  $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ . En effet, il suffit de montrer que pour toute fonction  $\varphi \in L^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))$ , on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} u^\varepsilon(t, y) \varphi(t, y) dy dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \langle v \rangle(t, y) \varphi(t, y) dy dt.$$

Cela revient à analyser la limite, lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, de la quantité

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} u^\varepsilon(t, y) \varphi(t, y) dy dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} v^\varepsilon(t, y) \varphi(t, Y(t/\varepsilon, y)) dy dt.$$

On utilise alors le résultat de convergence à deux échelles suivant (un résultat similaire est proposé à la Proposition 2.5.3)

**Proposition 2.2.8.** Soit  $T > 0$ . On considère  $\varphi \in L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))$  et  $\mathcal{V}_\omega \subset C^0([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))$  un sous ensemble borné de  $L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))$  composé de fonctions admettant un même module de continuité  $\omega : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  dans l'ensemble  $C^0([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))$ , c'est-à-dire

$$\|v(t) - v(t')\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \omega(|t - t'|), \quad t, t' \in [0, T], \quad v \in \mathcal{V}_\omega$$

avec  $\omega$  croissante et  $\lim_{\lambda \searrow 0} \omega(\lambda) = 0$ . Alors pour toute famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \subset \mathcal{V}_\omega$  convergeant faiblement dans  $L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))$  vers  $v$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} v^\varepsilon(t, y) \varphi(t, Y(t/\varepsilon, y)) \, dy dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} v(t, y) \langle \varphi \rangle(t, y) \, dy dt.$$

Dans notre cas, la borne sur  $(\partial_t v^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  nous assure l'existence d'un module de continuité uniforme. Ainsi en utilisant cette proposition et en remarquant que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} v(t, y) \langle \varphi \rangle(t, y) \, dy dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \langle v \rangle(t, y) \varphi(t, y) \, dy dt,$$

on obtient la convergence faible souhaitée.

2. Dans le cas où la condition initiale est bien préparée, on peut montrer que la solution  $v$  du problème effectif reste bien préparée en tout temps. En effet, le problème parabolique effectif associé au champ  $\langle D \rangle$  est laissé invariant par translation le long du flot  $Y$ , un argument d'unicité permet de conclure.

Par le point 2. si  $u_{\text{in}} \in \ker \mathcal{T}$  alors  $v(t, Y(s, y)) = v(t, y)$  pour tout  $(t, s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  (ainsi  $\langle v \rangle = v$ ) et on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} (u^\varepsilon(t, y) - v(t, y))^2 \, dy &= \int_{\mathbb{R}^m} (v^\varepsilon(t, Y(-t/\varepsilon, y)) - v(t, Y(-t/\varepsilon, y)))^2 \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} (v^\varepsilon(t, y) - v(t, y))^2 \, dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

et donc  $u^\varepsilon$  converge fortement vers  $v = \langle v \rangle$  dans  $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))$ . Inversement, si  $u^\varepsilon$  converge fortement, disons dans  $L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))$ , on peut montrer que  $u_{\text{in}} \in \ker \mathcal{T}$ . En effet, d'après le point 1.  $u^\varepsilon$  converge nécessairement vers  $\langle v \rangle$  et on a, d'une part

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} (u^\varepsilon(t, y))^2 \, dy dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} (v^\varepsilon(t, y))^2 \, dy dt$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} (u^\varepsilon(t, y))^2 \, dy dt &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} (\langle v \rangle(t, y))^2 \, dy dt \\ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} (v^\varepsilon(t, y))^2 \, dy dt &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} (v(t, y))^2 \, dy dt. \end{aligned}$$

Donc  $\|\langle v \rangle\|_{L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))} = \|v\|_{L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))}$ . En remarquant que

$$\|v\|^2 = \|\langle v \rangle + (v - \langle v \rangle)\|^2 = \|\langle v \rangle\|^2 + \|v - \langle v \rangle\|^2,$$

on obtient  $\|\langle v \rangle - v\|_{L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))} = 0$  et donc  $v = \langle v \rangle$ . Par continuité de la fonction  $v$  de  $[0, T]$  dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ ,  $v(t) = \langle v(t) \rangle$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et le cas  $t = 0$  implique que  $u_{\text{in}} = \langle u_{\text{in}} \rangle$ .

A l'aide d'hypothèses supplémentaires on justifie que  $v^\varepsilon = v + \mathcal{O}(\varepsilon)$  dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ , comme on s'y attend à partir du développement formel (2.10).

**Théorème 2.2.9.** *On suppose que les hypothèses (2.4), (2.5), (2.20), (2.23), (2.26) sont vérifiées. De plus, on suppose que la solution  $v$  du modèle effectif (2.27) est suffisamment régulière, en le sens que*

$$\begin{aligned} \nabla_z^R v &\in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)), \quad \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \\ \nabla_z^R \partial_t v &\in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)), \quad \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R \partial_t v \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \\ \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v &\in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)), \quad \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \end{aligned}$$

et qu'il existe un champ régulier de matrices  $C \in H_Q^\infty$

$$\text{div}_y(RC), \quad b_k \cdot \nabla_y \text{div}_y(RC), \quad b_l \cdot \nabla_y (b_k \cdot \nabla_y \text{div}_y(RC)) \in L^\infty(\mathbb{R}^m), \quad k, l \in \{1, \dots, m\}$$

$$RC {}^t R, \quad b_k \cdot \nabla_y (RC {}^t R), \quad b_l \cdot \nabla_y (b_k \cdot \nabla_y (RC {}^t R)) \in L^\infty(\mathbb{R}^m), \quad k, l \in \{1, \dots, m\}$$

tel qu'on ait la décomposition

$$D = \langle D \rangle + L(C), \quad \langle C \rangle = 0.$$

On note  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  les solutions variationnelles de (2.1). Alors pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$ , il existe une constante  $C_T$  telle que

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|u^\varepsilon(t, \cdot) - v(t, Y(-t/\varepsilon; \cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} &\leq C_T \varepsilon \\ \left( \int_0^T |\nabla_y u^\varepsilon(t, \cdot) - \nabla_y v(t, Y(-t/\varepsilon; \cdot))|_P^2 dt \right)^{1/2} &\leq C_T \varepsilon. \end{aligned}$$

## 2.3 Le moyenné d'un champ de matrices

### 2.3.1 Définitions et propriétés

Guidé par les différents calculs menant à (2.8), on considère la famille de transformations linéaires  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  agissant sur les champs de matrices. On montre que  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires (voir Annexe A.1) sur  $H_Q$ . Pour toute fonction  $f = f(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , on introduit la notation  $f_s = f_s(z)$  pour la composée de  $f$  avec la flot de  $b$ ,  $f_s = f \circ Y(s; \cdot)$ .

**Proposition 2.3.1.** *Supposons que les hypothèses (2.4), (2.5), (2.14), (2.15), (2.20) soient satisfaites.*

1. *La famille d'applications*

$$A \rightarrow G(s)A := \partial Y^{-1}(s; \cdot) A_s {}^t \partial Y^{-1}(s; \cdot) = \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) A_s {}^t \partial Y(-s; Y(s; \cdot))$$

*est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires sur  $H_Q$ .*

2. *Si  $A$  est un champ de matrices symétriques, alors il en est de même pour  $G(s)A$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .*

3. *Si  $A$  est un champ de matrices positives, alors il en est de même pour  $G(s)A$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .*

4. Soit  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un sous ensemble invariant par le flot de  $b$ , c'est à dire  $Y(s; \mathcal{S}) = \mathcal{S}$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . S'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $Q^{1/2}(y)A(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, y \in \mathcal{S}$ , alors pour tout  $s \in \mathbb{R}$  on a  $Q^{1/2}(y)(G(s)A)(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, y \in \mathcal{S}$ .
5. La famille d'applications  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  opère sur  $H_{Q, \text{loc}}$ , ce qui signifie que, si  $A \in H_{Q, \text{loc}}$ , alors  $G(s)A \in H_{Q, \text{loc}}$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . De plus, on a

$$\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} G(s)A = G(s)(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A), \quad A \in H_{Q, \text{loc}}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Preuve.**

1. Grâce à la caractérisation fournie à la Proposition 2.2.1, on sait que

$$P_s = \partial Y(s; \cdot) P \ ^t \partial Y(s; \cdot), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2.29)$$

Pour tout  $s \in \mathbb{R}$  on considère le champ de matrices  $\mathcal{O}(s; \cdot) = Q_s^{1/2} \partial Y(s; \cdot) Q_s^{-1/2}$ . Ce champ  $\mathcal{O}(s; \cdot)$  est composé de matrices orthogonales, pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . En effet, par (2.29) on a

$$\begin{aligned} {}^t \mathcal{O}(s; \cdot) \mathcal{O}(s; \cdot) &= Q^{-1/2} \ ^t \partial Y(s; \cdot) Q_s^{1/2} Q_s^{1/2} \partial Y(s; \cdot) Q^{-1/2} \\ &= Q^{-1/2} (\partial Y^{-1}(s; \cdot) P_s \ ^t \partial Y^{-1}(s; \cdot))^{-1} Q^{-1/2} \\ &= Q^{-1/2} P^{-1} Q^{-1/2} \\ &= I_m \end{aligned}$$

ce qui montre que pour tout champ de matrices  $A$  on a

$$\begin{aligned} Q^{1/2} G(s) A Q^{1/2} &= Q^{1/2} \partial Y^{-1}(s; \cdot) A_s \ ^t \partial Y^{-1}(s; \cdot) Q^{1/2} \\ &= {}^t \mathcal{O}(s; \cdot) Q_s^{1/2} A_s Q_s^{1/2} \mathcal{O}(s; \cdot). \end{aligned} \quad (2.30)$$

On vérifie facilement que pour tout  $A \in H_Q$  et tout  $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |G(s)A|_Q^2 &= \int_{\mathbb{R}^m} Q^{1/2} G(s) A Q^{1/2} : Q^{1/2} G(s) A Q^{1/2} \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} {}^t \mathcal{O}(s; \cdot) Q_s^{1/2} A_s Q_s^{1/2} \mathcal{O}(s; \cdot) : {}^t \mathcal{O}(s; \cdot) Q_s^{1/2} A_s Q_s^{1/2} \mathcal{O}(s; \cdot) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} Q_s^{1/2} A_s Q_s^{1/2} : Q_s^{1/2} A_s Q_s^{1/2} \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} Q^{1/2} A Q^{1/2} : Q^{1/2} A Q^{1/2} \, dy = |A|_Q^2, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $G(s)$  est une transformation unitaire pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . La propriété de groupe de la famille  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est facilement déduite de la propriété de groupe du flot  $(Y(s; \cdot))_{s \in \mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} G(s)G(t)A &= \partial Y^{-1}(s; \cdot) (G(t)A)_s \ ^t \partial Y^{-1}(s; \cdot) \\ &= \partial Y^{-1}(s; \cdot) \partial Y^{-1}(t; Y(s; \cdot)) (A_t)_s \ ^t \partial Y^{-1}(t; Y(s; \cdot)) \ ^t \partial Y^{-1}(s; \cdot) \\ &= \partial Y^{-1}(t+s; \cdot) A_{t+s} \ ^t \partial Y^{-1}(t+s; \cdot) = G(t+s)A, \quad A \in H_Q. \end{aligned}$$

La continuité du groupe, *i.e.*,  $\lim_{s \rightarrow 0} G(s)A = A$  fortement dans  $H_Q$  suit sans difficulté.

2. On note que  $G(s)$  commute avec la transposition

$$\begin{aligned} {}^t(G(s)A) &= {}^t(\partial Y^{-1}(s; \cdot) A_s \ ^t \partial Y^{-1}(s; \cdot)) \\ &= \partial Y^{-1}(s; \cdot) \ ^t A_s \ ^t \partial Y^{-1}(s; \cdot) \\ &= G(s) \ ^t A. \end{aligned}$$

En particulier, si  ${}^t A = A$ , alors  ${}^t(G(s)A) = G(s)A$ .

3. On utilise la formule (2.30). Pour tout  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^m$ , on introduit la notation  $\xi \otimes \eta$  pour la matrice dont l'entrée  $(i, j)$  est  $\xi_i \eta_j$ . Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^m$  on a

$$\begin{aligned} G(s)A : Q^{1/2}\xi \otimes Q^{1/2}\xi &= Q^{1/2}G(s)AQ^{1/2} : \xi \otimes \xi \\ &= {}^t\mathcal{O}(s; \cdot)Q_s^{1/2}A_sQ_s^{1/2}\mathcal{O}(s; \cdot) : \xi \otimes \xi \\ &= Q_s^{1/2}A_sQ_s^{1/2} : \mathcal{O}(s; \cdot)(\xi \otimes \xi) {}^t\mathcal{O}(s; \cdot) \\ &= Q_s^{1/2}A_sQ_s^{1/2} : (\mathcal{O}(s; \cdot)\xi) \otimes (\mathcal{O}(s; \cdot)\xi) \\ &= A_s : (Q_s^{1/2}\mathcal{O}(s; \cdot)\xi) \otimes (Q_s^{1/2}\mathcal{O}(s; \cdot)\xi). \end{aligned}$$

Comme  $A$  est un champ de matrices positives, il en sera de même pour  $G(s)A$ .

4. Supposons qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $Q^{1/2}AQ^{1/2} \geq \alpha I_m$  sur  $\mathcal{S}$ . Comme précédemment on peut écrire que, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^m, y \in \mathcal{S}$

$$Q^{1/2}G(s)AQ^{1/2} : \xi \otimes \xi = (Q^{1/2}AQ^{1/2})_s : (\mathcal{O}(s; \cdot)\xi) \otimes (\mathcal{O}(s; \cdot)\xi) \geq \alpha|\mathcal{O}(s; \cdot)\xi|^2 = \alpha|\xi|^2$$

ainsi  $Q^{1/2}G(s)AQ^{1/2} \geq \alpha I_m$  sur  $\mathcal{S}$ .

5. Ici  $G(s)$  sera l'application  $A \rightarrow \partial Y(-s; Y(s; \cdot))A(Y(s; \cdot))^t \partial Y(-s; Y(s; \cdot))$  indépendamment du fait que  $A$  est un élément de  $H_Q$  ou  $H_{Q, \text{loc}}$ . Comme  $\psi$  est laissé invariant par le flot de  $b$ , il en est de même pour  $\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $A$  appartient à  $H_{Q, \text{loc}}$ , on a

$$\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}G(s)A = G(s)(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}A) \in H_Q, \quad k \in \mathbb{N}, \quad s \in \mathbb{R}$$

d'où  $G(s)A \in H_{Q, \text{loc}}, s \in \mathbb{R}$ . De plus, les applications  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  préservent localement la norme de  $H_Q$

$$|\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}G(s)A|_Q = |G(s)(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}A)|_Q = |\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}A|_Q, \quad k \in \mathbb{N}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

□

On note  $L$  le générateur infinitésimal associé au groupe  $G$  dans  $H_Q$

$$L : \text{dom}(L) \subset H_Q \rightarrow H_Q, \quad \text{dom}L = \left\{ A \in H_Q : \exists \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)A - A}{s} \text{ in } H_Q \right\}$$

et  $L(A) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)A - A}{s}$  pour tout  $A \in \text{dom}(L)$ . On peut vérifier que  $C_c^1(\mathbb{R}^m) \subset \text{dom}(L)$  et que  $L(A) = [b, A] = (b \cdot \nabla_y)A - \partial_y b A - A {}^t \partial_y b$ , pour tout  $A \in C_c^1(\mathbb{R}^m)$ . En effet, pour  $A \in C_c^1(\mathbb{R}^m), s \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^m$  on a

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)A(y) - A(y)}{s} &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} G(s)A(y) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \partial Y^{-1}(s; y)A_s(y) {}^t \partial Y^{-1}(s; y) \\ &= b \cdot \nabla_y(A) - \partial_y b A - A {}^t \partial_y b \\ &= [b, A](y). \end{aligned}$$

On obtient la convergence forte dans  $H_Q$  en utilisant le fait que  $Q \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^m)$  et le théorème de convergence dominée. Les principales propriétés de l'opérateur  $L$  sont précisées ci-dessous et sont des conséquences directes des résultats rappelés en Annexe A.1

**Proposition 2.3.2.** *On suppose que les hypothèses (2.4), (2.14), (2.15) sont vérifiées.*

1. Le domaine de  $L$  est dense dans  $H_Q$  et  $L$  est fermé.
2. Le champ de matrices  $A \in H_Q$  appartient à  $\text{dom}(L)$  si et seulement si il existe  $C > 0$  tel que

$$|G(s)A - A|_Q \leq C|s|, \quad s \in \mathbb{R}.$$

3. L'opérateur  $L$  est anti-adjoint dans  $H_Q$  et nous avons la décomposition suivante :  $H_Q = \ker L \oplus \overline{\text{Range } L}$ .

**Remarque 2.3.3.** Lorsque l'on travaillera dans  $H_{Q,\text{loc}}$ , le générateur infinitésimal de  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$   $L$ , qu'on notera toujours  $L$ , sera défini de la manière suivante

$$A \in \text{dom}(L) \quad \text{ssi} \quad \exists \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}A) - \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}A}{s} \in H_Q, \quad k \in \mathbb{N}$$

et

$$\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}L(A) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}A) - \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}A}{s}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Les applications  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  ont également un comportement remarquable dans l'espace  $H_Q^\infty$ . Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , et tout  $A \in H_Q^\infty$ , on a  $G(s)A \in H_Q^\infty$  et  $|G(s)A|_{H_Q^\infty} = |A|_{H_Q^\infty}$ . En effet, grâce à (2.30) et à l'orthogonalité de  $\mathcal{O}(s; \cdot)$

$$\begin{aligned} & Q^{1/2}G(s)AQ^{1/2} : Q^{1/2}G(s)AQ^{1/2} \\ &= {}^t\mathcal{O}(s; \cdot)Q_s^{1/2}A_sQ_s^{1/2}\mathcal{O}(s; \cdot) : {}^t\mathcal{O}(s; \cdot)Q_s^{1/2}A_sQ_s^{1/2}\mathcal{O}(s; \cdot) \\ &= (Q^{1/2}AQ^{1/2} : Q^{1/2}AQ^{1/2})_s. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Nous sommes maintenant en mesure de pouvoir utiliser le théorème de von Neumann, voir Annexe A.1.

**Théorème 2.3.4** (Théorème ergodique de von Neumann). *On considère un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires  $(\mathcal{G}(s))_{s \in \mathbb{R}}$  sur un espace de Hilbert  $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$  et  $\mathcal{L}$  son générateur infinitésimal. Alors pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , on a la convergence forte dans  $\mathcal{H}$*

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \mathcal{G}(s)x \, ds = \text{Proj}_{\text{Ker } \mathcal{L}}x, \quad \text{uniformément par rapport à } r \in \mathbb{R}.$$

La preuve du Théorème 2.2.5 est une conséquence directe du Théorème A.1.8 et de la Proposition 2.3.1.

**Preuve du Théorème 2.2.5.** Les deux premiers points sont clairs.

3. Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^m$ ,  $\psi \in C_c^0(\mathcal{S})$ ,  $\psi \geq 0$  on a  $\psi(\cdot)P^{1/2}\xi \otimes P^{1/2}\xi \in H_Q$  et une nouvelle fois grâce à (2.30), on peut écrire

$$\begin{aligned} (G(s)A, \psi(\cdot)P^{1/2}\xi \otimes P^{1/2}\xi)_Q &= \int_{\mathbb{R}^m} \psi(y)Q^{1/2}G(s)AQ^{1/2} : \xi \otimes \xi \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \psi(y) {}^t\mathcal{O}(s; y)Q_s^{1/2}A_sQ_s^{1/2}\mathcal{O}(s; y)\xi \cdot \xi \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \psi(y)Q_s^{1/2}A_sQ_s^{1/2} : \mathcal{O}(s; y)\xi \otimes \mathcal{O}(s; y)\xi \, dy \\ &\geq \alpha \int_{\mathbb{R}^m} |\mathcal{O}(s; y)\xi|^2 \psi(y) \, dy \\ &= \alpha|\xi|^2 \int_{\mathbb{R}^m} \psi(y) \, dy. \end{aligned}$$

En prenant la moyenne sur  $[0, S]$  et en passant à la limite lorsque  $S \rightarrow +\infty$  on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^m} \psi(y) Q^{1/2} \langle A \rangle Q^{1/2} : \xi \otimes \xi \, dy = (\langle A \rangle, \psi P^{1/2} \xi \otimes P^{1/2} \xi)_Q \geq \int_{\mathbb{R}^m} \alpha |\xi|^2 \psi(y) \, dy$$

et donc

$$Q^{1/2}(y) \langle A \rangle (y) Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathcal{S}.$$

4. Pour tout  $A \in H_Q$ , la projection orthogonale sur  $\ker L$  vérifie  $|\langle A \rangle|_Q = |\text{Proj}_{\ker L} A|_Q \leq |A|_Q$ . Pour montrer cette dernière inégalité, on considère  $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  une matrice fixée,  $\psi \in C_c^0(\mathbb{R}^m)$ ,  $\psi \geq 0$  et, comme précédemment, on observe que  $\psi P^{1/2} M P^{1/2} \in H_Q$ , ce qui nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} (G(s)A, \psi P^{1/2} M P^{1/2})_Q &= \int_{\mathbb{R}^m} Q^{1/2} G(s) A Q^{1/2} : \psi M \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} {}^t \mathcal{O}(s; y) Q_s^{1/2} A_s Q_s^{1/2} \mathcal{O}(s; y) : \psi M \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} Q_s^{1/2} A_s Q_s^{1/2} : \mathcal{O}(s; y) M {}^t \mathcal{O}(s; y) \, dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} \sqrt{Q_s^{1/2} A_s Q_s^{1/2} : Q_s^{1/2} A_s Q_s^{1/2}} \sqrt{{}^t \mathcal{O}(s; y) M {}^t \mathcal{O}(s; y) : \mathcal{O}(s; y) M {}^t \mathcal{O}(s; y)} \psi \, dy \\ &\leq |A|_{H_Q^\infty} (M : M)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^m} \psi(y) \, dy. \end{aligned}$$

En prenant la moyenne sur l'intervalle  $[0, S]$  et en passant à la limite  $S \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} Q^{1/2} \langle A \rangle Q^{1/2} : M \psi(y) \, dy &= (\langle A \rangle, \psi P^{1/2} M P^{1/2})_Q \\ &\leq |A|_{H_Q^\infty} (M : M)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^m} \psi(y) \, dy. \end{aligned}$$

On peut en déduire que

$$Q^{1/2}(y) \langle A \rangle (y) Q^{1/2}(y) : M \leq |A|_{H_Q^\infty} (M : M)^{1/2}, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

et donc

$$|\langle A \rangle|_{H_Q^\infty} = \text{ess sup}_{y \in \mathbb{R}^m} \sqrt{Q^{1/2}(y) \langle A \rangle (y) Q^{1/2}(y) : Q^{1/2}(y) \langle A \rangle (y) Q^{1/2}(y)} \leq |A|_{H_Q^\infty}.$$

5. Soit  $A$  un champ de matrices de  $H_{Q, \text{loc}}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A$  appartient à  $H_Q$ , et par le premier point on sait que

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s) (\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A) \, ds = \langle \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A \rangle \in H_Q, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On voit facilement que pour tout  $k, l \in \mathbb{N}$  on a

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s) (\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A) \, ds = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s) (\mathbf{1}_{\{\psi \leq l\}} A) \, ds$$

presque partout sur  $\{\psi \leq \min(k, l)\}$ , et alors il existe un champ de matrices  $\langle A \rangle$  dont la restriction à  $\{\psi \leq k\}$  coïncide avec  $\langle \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A \rangle$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . De plus pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a  $\langle \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A \rangle = 0$  presque partout sur  $\{\psi > k\}$ , et donc

$$\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \langle A \rangle = \langle \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A \rangle, \quad k \in \mathbb{N}.$$

La convergence suivante est assurée dans  $H_Q$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow +\infty} \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \frac{1}{S} \int_0^S G(s)(A) ds &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s)(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A) ds \\ &= \langle \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A \rangle \\ &= \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \langle A \rangle \end{aligned}$$

ce qui signifie que  $\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s)A ds = \langle A \rangle$  dans  $H_{Q,\text{loc}}$ . Les ensembles  $\{\psi \leq k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  étant compacts, on en déduit que  $H_Q^\infty \subset H_{Q,\text{loc}}$ . Par le quatrième point nous avons

$$|\langle A \rangle|_{H_Q^\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \langle A \rangle|_{H_Q^\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\langle \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A \rangle|_{H_Q^\infty} \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A|_{H_Q^\infty} = |A|_{H_Q^\infty}.$$

Soit  $A$  un champ de matrices de  $H_{Q,\text{loc}}$ , tel que  $Q^{1/2}(y)A(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , pour un certain  $\alpha > 0$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a  $\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A \in H_Q$  et

$$Q^{1/2}(y)\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \{\psi \leq k\}.$$

Par le troisième point on obtient que pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$Q^{1/2}(y)\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \langle A \rangle(y)Q^{1/2}(y) = Q^{1/2}(y) \langle \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A \rangle(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \{\psi \leq k\}$$

et donc  $Q^{1/2}(y) \langle A \rangle(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ .  $\square$

### 2.3.2 Exemples

Dans cette partie on effectue plusieurs calculs explicites de champ de matrices moyenné dans les cadres périodique et presque périodique

#### Flot périodique

On considère le champ de vecteurs  $b(y) = (\gamma y_2, -\beta y_1)$ , pour tout  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , avec  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $\psi(y) = \beta y_1^2 + \gamma y_2^2$ ,  $y \in \mathbb{R}^2$ , est une intégrale première coercive associée au champ  $b$ . On note  $Y(s; y)$  le flot associé au champ de vecteurs  $b$ . On cherche à déterminer la moyenne le long du flot  $Y$  du champ de matrices

$$D(y) = \begin{pmatrix} \lambda_1(y) & 0 \\ 0 & \lambda_2(y) \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}^2$$

où  $\lambda_1, \lambda_2$  sont deux fonctions données. Le flot peut ici être explicité, en effet il est  $2\pi/\sqrt{\beta\gamma}$ -périodique et s'écrit  $Y(s; y) = \mathcal{R}(-s; \beta, \gamma)y$ ,  $(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ , avec

$$\mathcal{R}(s; \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\beta\gamma} s) & -\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \sin(\sqrt{\beta\gamma} s) \\ \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \sin(\sqrt{\beta\gamma} s) & \cos(\sqrt{\beta\gamma} s) \end{pmatrix}.$$

Par le Théorème 2.2.5 on peut écrire

$$\begin{aligned} \langle D \rangle &= \frac{\sqrt{\beta\gamma}}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sqrt{\beta\gamma}} \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) D(Y(s; \cdot)) {}^t \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) ds \\ &= \frac{\sqrt{\beta\gamma}}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sqrt{\beta\gamma}} \mathcal{R}(s; \beta, \gamma) D(Y(s; \cdot)) \mathcal{R}(-s; \gamma, \beta) ds \\ &= \begin{pmatrix} \langle D \rangle_{11} & \langle D \rangle_{12} \\ \langle D \rangle_{21} & \langle D \rangle_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\langle D \rangle_{11} &= \frac{1}{2} \left\langle \lambda_1 [1 + \cos(2\sqrt{\beta\gamma} \cdot)] \right\rangle + \frac{\gamma}{2\beta} \left\langle \lambda_2 [1 - \cos(2\sqrt{\beta\gamma} \cdot)] \right\rangle \\ \langle D \rangle_{12} = \langle D \rangle_{21} &= \frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{\gamma}} \left\langle \lambda_1 \sin(2\sqrt{\beta\gamma} \cdot) \right\rangle - \frac{\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{\beta}} \left\langle \lambda_2 \sin(2\sqrt{\beta\gamma} \cdot) \right\rangle \\ \langle D \rangle_{22} &= \frac{\beta}{2\gamma} \left\langle \lambda_1 [1 - \cos(2\sqrt{\beta\gamma} \cdot)] \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \lambda_2 [1 - \cos(2\sqrt{\beta\gamma} \cdot)] \right\rangle\end{aligned}$$

et pour toute fonction  $h$ , on introduit la notation  $\langle \lambda_i h(\cdot) \rangle$  pour  $\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sqrt{\beta\gamma}} \lambda_i(Y(s; y)) h(s) ds$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Dans le cas où les fonctions  $\lambda_1, \lambda_2$  sont constantes le long du flot  $Y(s; \cdot)$  (ce qui arrive lorsque  $\lambda_1, \lambda_2$  dépendent uniquement de  $\beta(y_1)^2 + \gamma(y_2)^2$ ), l'expression de  $\langle D \rangle$  se réduit à

$$\langle D \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{\gamma}{2\beta}\lambda_2 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{2\gamma}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On remarque que même dans le cas  $\lambda_2 = 0$  ( $D$  n'est donc pas défini positif), le moyenné  $\langle D \rangle$  sera tout de même défini positif.

### Flot presque périodique

On considère le champ  $b(y) = (y_2, -\omega_1^2 y_1, y_4, -\omega_2^2 y_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ , avec  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^*$  incommensurables, c'est à dire  $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$ . La fonction  $\psi(y) = \omega_1^2 y_1^2 + y_2^2 + \omega_2^2 y_3^2 + y_4^2$ , avec  $y \in \mathbb{R}^4$ , est une intégrale première cercive associée au champ  $b$ . On note  $Y(s; y)$  le flot associé au champ  $b$ . On considère le champ de matrices

$$D(y) = \begin{pmatrix} \lambda_1(y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4(y) \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}^4$$

où  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  sont quatre fonctions données, constantes le long du flot  $Y(s; \cdot)$ . Le flot peut être explicité  $Y(s; y) = \mathcal{R}(-s; \omega_1, \omega_2)y$ ,  $(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$ , avec

$$\mathcal{R}(s; \omega_1, \omega_2) = \begin{pmatrix} \cos(s\omega_1) & -\frac{1}{\omega_1} \sin(s\omega_1) & 0 & 0 \\ \omega_1 \sin(s\omega_1) & \cos(s\omega_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(s\omega_2) & -\frac{1}{\omega_2} \sin(s\omega_2) \\ 0 & 0 & \omega_2 \sin(s\omega_2) & \cos(s\omega_2) \end{pmatrix}.$$

La condition d'incommensurabilité assure que le flot n'est pas périodique en la variable  $s$ , mais presque périodique par rapport à  $s$ . Par le Théorème 2.2.5, on a

$$\begin{aligned}\langle D \rangle &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) D(Y(s; \cdot)) {}^t \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) ds \\ &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \mathcal{R}(s; \omega_1, \omega_2) D(Y(s; \cdot)) {}^t \mathcal{R}(s; \omega_1, \omega_2) ds \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1(y)}{2} + \frac{\lambda_2(y)}{2\omega_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega_1^2 \lambda_1(y)}{2} + \frac{\lambda_2(y)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3(y)}{2} + \frac{\lambda_4(y)}{2\omega_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\omega_2^2 \lambda_3(y)}{2} + \frac{\lambda_4(y)}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

### 2.3.3 L'équation de Fokker-Planck

On cherche à comprendre l'évolution d'une densité de particules dans un champ électromagnétique intense en tenant compte des effets collisionnels. On supposera que le champ magnétique est uniforme, c'est à dire  $B^\varepsilon = (0, 0, B/\varepsilon)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , et on se placera dans le régime asymptotique du rayon de Larmor fini (c'est à dire quand la longueur caractéristique dans les directions orthogonales au champ magnétique est beaucoup plus petite que la longueur caractéristique dans les directions parallèles). La fonction de densité de présence d'une particule chargée  $f^\varepsilon$  satisfera alors

$$\partial_t f^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (v_1 \partial_{x_1} + v_2 \partial_{x_2}) f^\varepsilon + v_3 \partial_{x_3} f^\varepsilon + \frac{q}{m} E \cdot \nabla_v f^\varepsilon + \frac{qB}{m\varepsilon} (v_2 \partial_{v_1} - v_1 \partial_{v_2}) f^\varepsilon = \nu \operatorname{div}_v \{ \Theta \nabla_v f^\varepsilon + v f^\varepsilon \}. \quad (2.32)$$

Ici  $m$  sera la masse d'une particule,  $q$  sa charge,  $\nu$  sera la fréquence de collision et  $\Theta$  sera la température. Dans ce cas, le flot

$$(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto Y(s; x, v) = (X(s; x, v), V(s; x, v)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

est associé au champ de vecteurs

$$b(x, v) \cdot \nabla_{x,v} = v_1 \partial_{x_1} + v_2 \partial_{x_2} + \omega_c (v_2 \partial_{v_1} - v_1 \partial_{v_2}), \quad \omega_c = \frac{qB}{m}, \quad (x, v) \in \mathbb{R}^6.$$

On introduit la notation  $c(x, v) \cdot \nabla_{x,v} = v_3 \partial_{x_3} + \frac{q}{m} E \cdot \nabla_v$ . On peut facilement voir que

$$\bar{X}(s; \bar{x}, \bar{v}) = \bar{x} + \frac{\perp \bar{v}}{\omega_c} - \frac{\mathcal{R}(-\omega_c s)}{\omega_c} \perp \bar{v}, \quad X_3(s; x_3) = x_3, \quad \bar{V}(s; \bar{v}) = \mathcal{R}(-\omega_c s) \bar{v}, \quad V_3(s; v_3) = v_3$$

où on utilise les notations  $\bar{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\bar{v} = (v_1, v_2)$ ,  $\perp \bar{v} = (v_2, -v_1)$  et  $\mathcal{R}(\theta)$  pour la matrice de la rotation d'angle  $\theta \in \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ . La matrice Jacobienne associée au flot s'écrit

$$\partial_{x,v} Y(s; x, v) = \begin{pmatrix} I_2 & 0_{2 \times 1} & \frac{I_2 - \mathcal{R}(-\omega_c s)}{\omega_c} \mathcal{E} & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & 1 & 0_{1 \times 2} & 0 \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 1} & \mathcal{R}(-\omega_c s) & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & 0 & 0_{1 \times 2} & 1 \end{pmatrix}$$

où  $0_{m \times n}$  est la matrice nulle à  $m$  lignes et  $n$  colonnes, et  $\mathcal{E} = \mathcal{R}(-\pi/2)$ . On présente les grandes lignes de l'analyse asymptotique de l'équation de Fokker-Planck (2.32). La formulation faible de (2.32) s'écrit, pour la fonction test  $(t, y) \rightarrow \varphi(t, Y(-t/\varepsilon; y))$ ,  $y = (x, v)$ ,  $Y = (X, V)$ ,  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^6)$  et la donnée initiale  $f_{\text{in}}$

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^6} f_{\text{in}}(y) \varphi(0, y) \, dy - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^6} f^\varepsilon(t, y) \left\{ \partial_t \varphi(t) - \frac{1}{\varepsilon} b \cdot (\nabla_z \varphi)(t) \right\} (Y(-t/\varepsilon; y)) \, dy dt \\ & - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^6} f^\varepsilon(t, y) c(t, y) \cdot {}^t \partial_y Y(-t/\varepsilon; y) (\nabla_z \varphi)(t, Y(-t/\varepsilon; y)) \, dy dt \\ & - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^6} f^\varepsilon(t, y) \frac{b(y)}{\varepsilon} \cdot {}^t \partial_y Y(-t/\varepsilon; y) (\nabla_z \varphi)(t, Y(-t/\varepsilon; y)) \, dy dt \\ & = -\nu \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^6} (\Theta \nabla_v f^\varepsilon + v f^\varepsilon) \cdot {}^t \partial_v Y(-t/\varepsilon; y) (\nabla_z \varphi)(t, Y(-t/\varepsilon; y)) \, dy dt. \end{aligned}$$

Comme dans l'approche présentée dans l'introduction de ce chapitre, on introduit la nouvelle fonction  $(g^\varepsilon)_\varepsilon$  donnée par

$$f^\varepsilon(t, y) = g^\varepsilon(t, Y(-t/\varepsilon; y)), \quad (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^6$$

et on utilise l'égalité

$$b(Y(-t/\varepsilon; y)) - \partial_y Y(-t/\varepsilon; y) b(y) = 0.$$

Après avoir effectué le changement de variable  $z = Y(-t/\varepsilon; y)$ , la formulation ci dessus s'écrit

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^6} f_{\text{in}}(z) \varphi(0, z) \, dz - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^6} g^\varepsilon(t, z) \partial_t \varphi(t, z) \, dz dt \\ & - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^6} g^\varepsilon \partial_y Y(-t/\varepsilon; Y(t/\varepsilon; z)) c(t, Y(t/\varepsilon; z)) \cdot \nabla_z \varphi(t, z) \, dz dt \\ & = -\nu \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^6} \Theta \partial_v Y(-t/\varepsilon; Y(t/\varepsilon; z)) {}^t \partial_v Y(-t/\varepsilon; Y(t/\varepsilon; z)) \nabla_z g^\varepsilon \cdot \nabla_z \varphi \, dz dt \\ & - \nu \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^6} g^\varepsilon(t, z) \partial_v Y(-t/\varepsilon; Y(t/\varepsilon; z)) V(t/\varepsilon; z) g^\varepsilon(t, z) \cdot \nabla_z \varphi \, dz dt. \end{aligned}$$

Tout comme dans les Théorème 2.2.7, 2.2.9, on s'attend à ce que la famille  $(g^\varepsilon)_\varepsilon$  converge dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^6))$  vers la solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t g + \mathcal{C}(t, z) \cdot \nabla_z g = \nu \operatorname{div}_z \{ \Theta \mathcal{D}(z) \nabla_z g + \mathcal{V}(z) g \}, & (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^6 \\ g(0, z) = f_{\text{in}}(z), & z \in \mathbb{R}^6 \end{cases}$$

où le champ de matrices  $\mathcal{D}$  et les champs de vecteurs  $\mathcal{C}, \mathcal{V}$  sont donnés par les moyennes ergodiques suivantes

$$\mathcal{D}(z) = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \partial_v Y(-s; Y(s; z)) {}^t \partial_v Y(-s; Y(s; z)) \, ds$$

$$\mathcal{C}(t, z) = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \partial_y Y(-s; Y(s; z)) c(t, Y(s; z)) \, ds \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(z) &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \partial_v Y(-s; Y(s; z)) V(s; z) \, ds \\ &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \partial_y Y(-s; Y(s; z)) {}^t(0, V(s; z)) \, ds. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Notons que  $\mathcal{D}$  est le moyenné du champ de matrices  $D$  de l'équation de Fokker-Planck, cf. Théorème 2.2.5

$$D = \sum_{i=1}^3 e_{v_i} \otimes e_{v_i} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_3 \end{pmatrix}.$$

En se servant du fait que le flot est périodique, un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(z) &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \partial_y Y(-s; Y(s; z)) D {}^t \partial_y Y(-s; Y(s; z)) \, ds \\ &= \frac{\omega_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_c} \partial_y Y(-s; Y(s; z)) \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_3 \end{pmatrix} {}^t \partial_y Y(-s; Y(s; z)) \, ds \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2I_2}{\omega_c^2} & 0_{2 \times 1} & -\frac{\mathcal{E}}{\omega_c} & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & 0 & 0_{1 \times 2} & 0 \\ \frac{\mathcal{E}}{\omega_c} & 0_{2 \times 1} & I_2 & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & 0 & 0_{1 \times 2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Un fait intéressant est que le champ de diffusion effectif  $\mathcal{D}$  associé à l'équation de Fokker-Planck ne contient plus seulement de la diffusion en vitesse (comme le champ initial  $D$ ) mais également de la diffusion par rapport aux variables d'espaces (orthogonales aux lignes de champ magnétique). En pratique ce gain de diffusion est observé dans les simulations numériques de phénomènes gyrocinétiques, voir [26, 27, 28, 51, 71]. Il reste à clarifier l'existence d'une moyenne ergodique associée à un champ de vecteurs. C'est une conséquence du fait que la famille d'applications

$$c \in X_Q \rightarrow \partial_y Y(-s; Y(s; \cdot))c(Y(s; \cdot)) \in X_Q, \quad s \in \mathbb{R}$$

forme un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires sur  $X_Q$ , voir aussi la Proposition 2.3.1. Tout comme pour le moyenné d'un champ de matrices on utilise le Théorème de von Neumann pour donner un sens aux champs  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{V}$  introduits en (2.33) et (2.34) (voir le Théorème 2.2.5).

## 2.4 Caractère bien posé du problème raide et estimations uniformes

La résolution de (2.1) sera à comprendre au sens variationnel, pour plus de détails se reporter à l'Annexe A.2. Étant donné que  $H_R^1$  s'injecte continûment avec image dense dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$  (car  $C_c^1(\mathbb{R}^m) \subset H_R^1$ ), on a

**Proposition 2.4.1.** *Supposons que  $b$  satisfait les hypothèses (2.4), (2.5), (2.20), que  $R$  et  $R^{-1}$  satisfont (2.21) et (2.23), et que  $D$  satisfait (2.26).*

1. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , la forme bilinéaire  $a^\varepsilon : H_R^1 \times H_R^1 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$a^\varepsilon(u, v) := \int_{\mathbb{R}^m} D(y) \nabla_y u \cdot \nabla_y v \, dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla_y u) v(y) \, dy, \quad u, v \in H_R^1,$$

est bien définie, continue et coercive sur  $H_R^1$  par rapport à  $L^2(\mathbb{R}^m)$ .

2. La forme bilinéaire  $\langle a \rangle : H_R^1 \times H_R^1 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\langle a \rangle(u, v) := \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle(y) \nabla_y u \cdot \nabla_y v \, dy, \quad u, v \in H_R^1,$$

est bien définie, continue et coercive sur  $H_R^1$  par rapport à  $L^2(\mathbb{R}^m)$ .

**Preuve.**

1. Pour tout  $u, v \in H_R^1$  on a

$$\begin{aligned} |D(y) \nabla_y u \cdot \nabla_y v| &= |Q^{1/2}(y) D(y) Q^{1/2}(y) : (P^{1/2} \nabla_y v) \otimes (P^{1/2} \nabla_y u)| \\ &\leq |D|_{H_Q^\infty} |P^{1/2}(y) \nabla_y v| |P^{1/2}(y) \nabla_y u|, \quad y \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

et

$$|b(y) \cdot \nabla_y u v(y)| = |Q^{1/2}(y) b(y) \cdot P^{1/2}(y) \nabla_y u v(y)| \leq |b|_{X_Q^\infty} |P^{1/2}(y) \nabla_y u| |v(y)|, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Donc, avec (2.25), on voit facilement que

$$\begin{aligned} |a^\varepsilon(u, v)| &\leq |D|_{H_Q^\infty} |\nabla_y u|_P |\nabla_y v|_P + \frac{1}{\varepsilon} |b|_{X_Q^\infty} |\nabla_y u|_P \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq \left( |D|_{H_Q^\infty} + \frac{1}{\varepsilon} |b|_{X_Q^\infty} \right) |u|_R |v|_R \end{aligned}$$

ce qui montre que l'application  $a^\varepsilon(\cdot, \cdot)$  est bien définie et continue. On regarde maintenant la coercivité de  $a^\varepsilon$  sur  $H_R^1$  par rapport à  $L^2(\mathbb{R}^m)$ . Pour tout  $u \in H_R^1$  on a grâce à l'anti-symétrie de  $b \cdot \nabla_y$

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(u, u) + \alpha \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^m} D(y) \nabla_y u \cdot \nabla_y u \, dy + \alpha \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} Q^{1/2}(y) D(y) Q^{1/2}(y) : (P^{1/2}(y) \nabla_y u) \otimes (P^{1/2}(y) \nabla_y u) \, dy + \alpha \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &\geq \alpha \int_{\mathbb{R}^m} |P^{1/2}(y) \nabla_y u|^2 \, dy + \alpha \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &= \alpha \left( |\nabla_y u|_P^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \right) = \alpha |u|_R^2. \end{aligned}$$

On précise l'inégalité suivante qui sera d'un usage constant dans la suite

$$D(y) \nabla_y u \cdot \nabla_y u \geq \alpha |\nabla_y^R u|^2, \quad u \in H_R^1. \quad (2.36)$$

2. Pour ce point on suit la même démarche que ci dessus en se rappelant que

$$Q^{1/2}(y) \langle D \rangle (y) Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

et que  $|\langle D \rangle|_{H_Q^\infty} \leq |D|_{H_Q^\infty}$ . □

**Proposition 2.4.2.** *Supposons que  $b$  satisfait (2.4), (2.5), (2.20), que  $R$  et  $R^{-1}$  satisfont (2.21) et (2.23), et que  $D$  satisfait (2.26). Alors il existe  $u^\varepsilon$  (resp.  $v$ ) une unique solution variationnelle de (2.1) (resp. (2.27)). De plus, on a les estimations*

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))} \leq \|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad \|\nabla_y u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_+; X_P)} \leq \frac{\|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}}{\sqrt{2\alpha}}, \quad \varepsilon > 0$$

et

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))} \leq \|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad \|\nabla_z v\|_{L^2(\mathbb{R}_+; X_P)} \leq \frac{\|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}}{\sqrt{2\alpha}}.$$

**Preuve.** Par le Théorème A.2.7 de l'Annexe A.2, on sait que pour toute condition initiale  $u^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , il existe une unique solution variationnelle  $u^\varepsilon$  au problème (2.1), que  $u^\varepsilon \in C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \cap L^2(\mathbb{R}_+; H_R^1)$ ,  $\partial_t u^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}_+; (H_R^1)')$  et

$$u^\varepsilon(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} u^\varepsilon(t, y) \varphi(y) \, dy + a^\varepsilon(u^\varepsilon(t), \varphi) = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \text{pour tout } \varphi \in H_R^1.$$

De même, il existe une unique solution variationnelle  $v$  au modèle limite (2.27) vérifiant  $v \in C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \cap L^2(\mathbb{R}_+; H_R^1)$ ,  $\partial_t v \in L^2(\mathbb{R}_+; (H_R^1)')$  et

$$v(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} v(t, z) \psi(z) \, dy + \langle a \rangle (v(t), \psi) = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \text{pour tout } \psi \in H_R^1.$$

Les estimations ci dessus sont des conséquences directes de l'égalité d'énergie suivante (voir Annexe A.2)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + a^\varepsilon(u^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{2} \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + \int_0^t a^\varepsilon(u^\varepsilon(\tau), u^\varepsilon(\tau)) \, d\tau = \frac{1}{2} \|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

En particulier, on a  $\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\varepsilon > 0$ , et

$$2\alpha \int_0^t |\nabla_y u^\varepsilon(\tau)|_P^2 d\tau \leq 2 \int_0^t a^\varepsilon(u^\varepsilon(\tau), u^\varepsilon(\tau)) d\tau \leq \|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon > 0$$

ce qui signifie que  $\|\nabla_y u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_+; X_P)} \leq \frac{\|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}}{\sqrt{2\alpha}}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . Les estimations obtenues sur  $v$  sont obtenus de manière similaire.  $\square$

**Remarque 2.4.3.** *Les fonctions de la famille  $(v^\varepsilon(t, \cdot))_{\varepsilon > 0} = (u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; \cdot)))_{\varepsilon > 0}$  satisfont les mêmes estimations que celles de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ . En effet, le changement de variable  $z \mapsto y = Y(t/\varepsilon; z)$  préservant la mesure de Lebesgue, on a*

$$\|v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 = \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \leq \|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon > 0.$$

De plus, à l'aide de (2.22), on a

$$\begin{aligned} \nabla_z^R v^\varepsilon(t, z) &= {}^t R^{-1}(z) \nabla_z v^\varepsilon(t, z) = {}^t R^{-1}(z) {}^t \partial Y(t/\varepsilon; z) \nabla_y u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)) \\ &= {}^t (\partial Y(t/\varepsilon; z) R^{-1}(z)) \nabla_y u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)) \\ &= {}^t R^{-1}(z) (Y(t/\varepsilon; z)) \nabla_y u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)) = (\nabla_y^R u^\varepsilon)(t, Y(t/\varepsilon; z)) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \|\nabla_z v^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_+; X_P)}^2 &= \int_0^{+\infty} |\nabla_z v^\varepsilon(\tau)|_P^2 d\tau = \int_0^{+\infty} \|\nabla_z^R v^\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} \|\nabla_y^R u^\varepsilon(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 d\tau = \|\nabla_y u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_+; X_P)}^2 \\ &\leq \frac{\|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2}{2\alpha}. \end{aligned}$$

En utilisant deux fois la formule

$$b_i \cdot \nabla_z v^\varepsilon(t) = b_i \cdot \nabla_z (u^\varepsilon(t) \circ Y(t/\varepsilon; \cdot)) = (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) \circ Y(t/\varepsilon; \cdot)$$

on déduit que

$$\begin{aligned} b_j \cdot \nabla_z (b_i \cdot \nabla_z v^\varepsilon(t)) &= b_j \cdot \nabla_z [(b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) \circ Y(t/\varepsilon; \cdot)] \\ &= [b_j \cdot \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t))] \circ Y(t/\varepsilon; \cdot). \end{aligned}$$

Donc  $\|b_j \cdot \nabla_z (b_i \cdot \nabla_z v^\varepsilon(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = \|b_j \cdot \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  dès que ces normes sont finies.

Jusqu'à présent on a considéré les solutions associées à des données initiales  $u^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Afin d'étudier le comportement de la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, on a besoin d'avoir des estimations sur les dérivées de  $u^\varepsilon$ . C'est l'objet des propositions qui suivent. Ces propositions précisent comment la régularité de la donnée initiale sera propagée au cours du temps. L'idée est de prendre les dérivées directionnelles  $b_i \cdot \nabla_y$  de (2.1), ce qui nous amène à

$$\partial_t (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon) - \text{div}_y (D(y) \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon} b \cdot \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon) = [b_i \cdot \nabla_y, \text{div}_y (D \nabla_y)] u^\varepsilon. \quad (2.37)$$

Le point clé dans l'utilisation des champs en involution  $b_i$  est que ces champs assurent l'annulation du commutateur des opérateurs  $b_i \cdot \nabla_y$  et  $b \cdot \nabla_y$ . En effet, si on applique l'opérateur

$c \cdot \nabla_y$  dans (2.1), le membre de droite correspondant à l'équation (2.37) contiendra le terme supplémentaire  $\frac{1}{\varepsilon}[b \cdot \nabla_y, c \cdot \nabla_y]u^\varepsilon$  qui est instable lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro sauf lorsque  $b$  et  $c$  sont en involution. L'estimation de  $b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon$  est obtenue à partir de l'égalité d'énergie (2.37), l'anti-symétrie de  $b \cdot \nabla_y$  permet l'annulation du terme d'ordre  $1/\varepsilon$ . On suppose que pour tout  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , les coordonnées du crochet de Poisson  $[b_i, b_j]$  dans la base  $(b_k)_{1 \leq k \leq m}$  sont bornées

$$[b_i, b_j] = \sum_{k=1}^m \alpha_{ij}^k b_k, \quad \alpha_{ij}^k \in L^\infty(\mathbb{R}^m), \quad i, j, k \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.38)$$

Les quatre propositions suivantes donnent des estimations uniformes par rapport à  $\varepsilon$  de la solution du problème double échelles ainsi que de sa limite.

**Proposition 2.4.4.** *Supposons que les hypothèses (2.4), (2.5), (2.23), (2.26), (2.38) soient vérifiées. On suppose également que pour tout  $i, j \in \{1, \dots, m\}$*

$$b_i \cdot \nabla_y \operatorname{div}_y b_j \in L^\infty(\mathbb{R}^m), \quad \operatorname{div}_y(RD) \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$$

$$R[b_i, D] {}^t R \in L^\infty(\mathbb{R}^m), \quad \sum_{i=1}^m b_i \cdot \nabla_y(R[b_i, D] {}^t R) \in L^\infty(\mathbb{R}^m).$$

Si la condition initiale appartient à  $H_R^1$ , alors on a pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon > 0} \|\nabla_y^R u^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} &= \sup_{\varepsilon > 0} \|\nabla_z^R v^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} < +\infty \\ \sup_{\varepsilon > 0} \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} &= \sup_{\varepsilon > 0} \|\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} < +\infty \\ \sup_{\varepsilon > 0} \|\partial_t v^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} &< +\infty. \end{aligned}$$

**Preuve.** La preuve de cette proposition est détaillée dans l'Annexe B.1.  $\square$

Une estimation uniforme importante à obtenir sera celle de  $(\partial_t \nabla_z^R v^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  dans  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ . Elle sera nécessaire lors du passage à la limite dans la formulation faible 2.5.3. En supposant que  $u^{\text{in}} \in H_R^2$  on peut y parvenir, la preuve est mise en Annexe B.1.

**Proposition 2.4.5.** *Supposons que les hypothèses (2.4), (2.5), (2.23), (2.26), (2.38) soient vérifiées. De plus on suppose que pour tout  $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$*

$$\nabla_y^R \alpha_{ij}^k \in L^\infty(\mathbb{R}^m), \quad \nabla_y^R \operatorname{div}_y b_j \in L^\infty(\mathbb{R}^m), \quad \nabla_y^R \otimes \nabla_y^R \operatorname{div}_y b_j \in L^\infty(\mathbb{R}^m),$$

$$\operatorname{div}_y(R[b_i, D]) \in L^\infty(\mathbb{R}^m), \quad R[b_i, D] {}^t R \in L^\infty(\mathbb{R}^m), \quad \sum_{i=1}^m b_i \cdot \nabla_y(R[b_i, D] {}^t R) \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$$

$$R[b_j, [b_i, D]] {}^t R \in L^\infty(\mathbb{R}^m), \quad \operatorname{div}_y(R[b_j, [b_i, D]]) \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$$

$$\nabla_y^R(RD {}^t R) \in L^\infty(\mathbb{R}^m), \quad \nabla_y^R \otimes \nabla_y^R(RD {}^t R) \in L^\infty(\mathbb{R}^m).$$

Si la condition initiale  $u^{\text{in}}$  appartient à  $H_R^2$ , alors pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$  on a

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon > 0} \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} &= \sup_{\varepsilon > 0} \|\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} < +\infty \\ \sup_{\varepsilon > 0} \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} &= \sup_{\varepsilon > 0} \|\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} < +\infty \end{aligned}$$

et

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|\partial_t \nabla_z^R v^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} < +\infty.$$

Ici la notation  $\nabla^R \otimes \nabla^R \otimes \nabla^R w$  représente le tenseur qui, pour l'entrée  $(i, j, k)$ , donne  $b_k \cdot \nabla(b_j \cdot \nabla(b_i \cdot \nabla w))$ .

Enfin on peut également obtenir des estimations sur la solution du problème limite (2.27).

**Proposition 2.4.6.** *Supposons que les hypothèses de la Proposition 2.4.4 soient vérifiées ainsi que (2.20). Alors pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$*

$$\nabla_z^R v \in L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m)), \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v \in L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m)), \partial_t v \in L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m)).$$

**Preuve.** La preuve de cette proposition est en Annexe B.1. □

**Proposition 2.4.7.** *Supposons que toutes les hypothèses de la Proposition 2.4.5 soient satisfaites ainsi que (2.20). Alors pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$ , on a*

$$\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v \in L^\infty([0, T]; L^2), \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v \in L^2([0, T]; L^2), \partial_t \nabla_z^R v \in L^2([0, T]; L^2).$$

**Preuve.** La preuve est similaire à celle de la Proposition 2.4.5, il faut utiliser le fait que le champ de matrices  $\langle D \rangle$  satisfait aux mêmes hypothèses de régularité que le champ  $D$  (pour cela voir la preuve de la Proposition 2.4.6 en Annexe B.1). □

## 2.5 Analyse à deux échelles

Dans cette partie on cherche à étudier le comportement asymptotique de (2.1) ou de manière équivalente de (2.9) lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. Pour toute fonction  $\psi(t, z)$  régulière à support compact, on veut passer à la limite quand  $\varepsilon \searrow 0$  dans la formulation

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^m} u^{\text{in}}(z) \psi(0, z) \, dz - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} v^\varepsilon(t, z) \partial_t \psi \, dz dt \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} G(t/\varepsilon) D \nabla_z v^\varepsilon \cdot \nabla_z \psi \, dz dt = 0. \end{aligned}$$

La difficulté principale réside bien sûr dans le traitement de la dernière intégrale de part la présence de deux échelles en temps, la variable lente  $t$  et rapide non nécessairement périodique  $s = t/\varepsilon$ . On présente ici un résultat général de convergence à deux échelles basé sur la notion de moyenne ergodique répondant à ce problème. A l'aide des notations introduites à la Définition 2.2.2 et à la Proposition 2.2.4, on a

**Proposition 2.5.1.** *Soit  $T$  un nombre réel positif, on considère  $C \in L^\infty(\mathbb{R}; H_Q)$ , tel que la famille des moyennes  $\left( \frac{1}{S} \int_{s_0}^{s_0+S} C(s) \, ds \right)_{S>0}$  converge fortement dans  $H_Q$  vers un champ  $\bar{C} \in H_Q$ , uniformément par rapport à  $s_0 \in \mathbb{R}$ , lorsque  $S \rightarrow +\infty$ . On considère également  $\mathcal{B}_\omega \subset C([0, T]; H_P)$  un sous ensemble borné de  $L^1([0, T]; H_P)$  de fonctions admettant un même module de continuité  $\omega : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  dans  $C([0, T]; H_P)$ , c'est à dire*

$$|B(t) - B(t')|_P \leq \omega(|t - t'|), \quad t, t' \in [0, T], \quad B \in \mathcal{B}_\omega$$

avec  $\omega$  croissante et  $\lim_{\lambda \searrow 0} \omega(\lambda) = 0$ . Dans ce cas

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^T \langle B(t), C(t/\varepsilon) \rangle_{P,Q} \, dt = \int_0^T \langle B(t), \bar{C} \rangle_{P,Q} \, dt$$

uniformément par rapport à  $B \in \mathcal{B}_\omega$ .

**Preuve.** Pour tout  $\delta > 0$ , il existe un  $S_\delta > 0$  tel que

$$\left| \frac{1}{S} \int_{s_0}^{s_0+S} C(s) ds - \overline{C} \right|_Q < \delta, \text{ pour tout } S \geq S_\delta \text{ et } s_0 \in \mathbb{R}.$$

En effectuant le changement de variable  $s = \frac{t}{\varepsilon}$  dans l'intégrale ci dessus on obtient

$$\left| \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} C(t/\varepsilon) dt - \overline{C} \right|_Q < \delta, \text{ pour tout } T \geq \varepsilon S_\delta = T_{\delta,\varepsilon} \text{ et } t_0 \in \mathbb{R}. \quad (2.39)$$

On découpe l'intervalle  $[0, T[$  en sous intervalles de longueur plus grande ou égale à  $T_{\delta,\varepsilon}$ . Par exemple, en posant  $k_{\delta,\varepsilon} = \left\lceil \frac{T}{T_{\delta,\varepsilon}} \right\rceil$ , si  $T/T_{\delta,\varepsilon}$  est un entier, c'est à dire  $T/T_{\delta,\varepsilon} = k_{\delta,\varepsilon}$ , on considère les intervalles

$$[kT_{\delta,\varepsilon}, (k+1)T_{\delta,\varepsilon}[, \quad 0 \leq k \leq k_{\delta,\varepsilon} - 1$$

et si  $T/T_{\delta,\varepsilon}$  n'est pas un entier, on considère les intervalles

$$[kT_{\delta,\varepsilon}, (k+1)T_{\delta,\varepsilon}[, \quad 0 \leq k \leq k_{\delta,\varepsilon} - 2, \quad \text{et } [(k_{\delta,\varepsilon} - 1)T_{\delta,\varepsilon}, T[.$$

Dans les deux cas on a  $k_{\delta,\varepsilon}$  intervalles dont la taille est comprise entre  $T_{\delta,\varepsilon}$  et  $2T_{\delta,\varepsilon}$ . On notera par  $(t_{k,\delta,\varepsilon})_{0 \leq k \leq k_{\delta,\varepsilon}}$  ou plus simplement par  $(t_k)_{0 \leq k \leq k_{\delta,\varepsilon}}$ , les points extrémaux de ces intervalles. Le dernier point est toujours  $t_{k_{\delta,\varepsilon}} = T$ . On peut écrire pour tout  $B \in \mathcal{B}_\omega$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \langle B(t), C(t/\varepsilon) \rangle_{P,Q} dt - \int_0^T \langle B(t), \overline{C} \rangle_{P,Q} dt \right| &= \left| \int_0^T \langle B(t), C(t/\varepsilon) - \overline{C} \rangle_{P,Q} dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_{\delta,\varepsilon}-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \langle B(t), C(t/\varepsilon) - \overline{C} \rangle_{P,Q} dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_{\delta,\varepsilon}-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \langle B(t) - B(t_k), C(t/\varepsilon) - \overline{C} \rangle_{P,Q} dt \right| \\ &\quad + \sum_{k=0}^{k_{\delta,\varepsilon}-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \langle B(t_k), C(t/\varepsilon) - \overline{C} \rangle_{P,Q} dt \right| \\ &=: \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Etant donné que la fonction  $t \in [0, T] \rightarrow B(t) \in H_P$  admet  $\omega$  comme module de continuité, on obtient l'estimation suivante pour  $\Sigma_1$

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\leq \sum_{k=0}^{k_{\delta,\varepsilon}-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega(|t - t_k|) |C(t/\varepsilon) - \overline{C}|_Q dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_{\delta,\varepsilon}-1} \omega(2T_{\delta,\varepsilon})(t_{k+1} - t_k) 2\|C\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H_Q)} \\ &= 2\|C\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H_Q)} \omega(2T_{\delta,\varepsilon})T. \end{aligned} \quad (2.41)$$

L'estimation du terme  $\Sigma_2$  est déduite de (2.39)

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &= \sum_{k=0}^{k_{\delta,\varepsilon}-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} (PB(t_k)P, C(t/\varepsilon) - \bar{C})_Q dt \right| \\
&= \sum_{k=0}^{k_{\delta,\varepsilon}-1} \left| \left( PB(t_k)P, \int_{t_k}^{t_{k+1}} (C(t/\varepsilon) - \bar{C}) dt \right)_Q \right| \\
&= \sum_{k=0}^{k_{\delta,\varepsilon}-1} \left| \left\langle B(t_k), \int_{t_k}^{t_{k+1}} (C(t/\varepsilon) - \bar{C}) dt \right\rangle_{P,Q} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{k_{\delta,\varepsilon}-1} \delta(t_{k+1} - t_k) |B(t_k)|_P \\
&\leq \delta [\|B\|_{L^1([0,T];H_P)} + \omega(2T_{\delta,\varepsilon})T],
\end{aligned} \tag{2.42}$$

et avec (2.40), (2.41), (2.42) on a

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^T \langle B(t), C(t/\varepsilon) \rangle_{P,Q} dt - \int_0^T \langle B(t), \bar{C} \rangle_{P,Q} dt \right| &\leq 2\|C\|_{L^\infty(\mathbb{R};H_Q)} \omega(2T_{\delta,\varepsilon})T \\
&\quad + \delta [\|B\|_{L^1([0,T];H_P)} + \omega(2T_{\delta,\varepsilon})T].
\end{aligned}$$

Soit  $\eta$  un nombre réel positif et  $\delta > 0$  suffisamment petit pour que  $\delta\|B\|_{L^1([0,T];H_P)} < \eta/2$  uniformément par rapport à  $B \in \mathcal{B}_\omega$  (c'est possible étant donné que  $\mathcal{B}_\omega$  est borné dans  $L^1([0,T];H_P)$ ). En remarquant que  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} T_{\delta,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon S_\delta = 0$ , et  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \omega(2T_{\delta,\varepsilon}) = 0$ , on déduit qu'il existe  $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$  tel que pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon(\eta)$

$$2\|C\|_{L^\infty(\mathbb{R};H_Q)} \omega(2T_{\delta,\varepsilon})T + \delta\omega(2T_{\delta,\varepsilon})T < \frac{\eta}{2}.$$

Enfin, on obtient

$$\left| \int_0^T \langle B(t), C(t/\varepsilon) \rangle_{P,Q} dt - \int_0^T \langle B(t), \bar{C} \rangle_{P,Q} dt \right| \leq \delta\|B\|_{L^1([0,T];H_P)} + \frac{\eta}{2} < \eta$$

pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon(\eta)$ , uniformément par rapport à  $B \in \mathcal{B}_\omega$ .  $\square$

**Remarque 2.5.2.** La conclusion de la Proposition 2.5.1 reste vraie pour tout couple  $(B, C) \in L^1([0,T];H_P) \times L^\infty(\mathbb{R};H_Q)$  tel que  $\left(\frac{1}{S} \int_{s_0}^{s_0+S} C(s) ds\right)_{S>0}$  converge fortement dans  $H_Q$  vers un certain  $\bar{C} \in H_Q$  uniformément par rapport à  $s_0 \in \mathbb{R}$ , lorsque  $S \rightarrow +\infty$ . En effet, il suffit de remarquer que

$$\left| \int_0^T \langle B(t), C(t/\varepsilon) \rangle_{P,Q} dt - \int_0^T \langle B(t), \bar{C} \rangle_{P,Q} dt \right| \leq 2\|B\|_{L^1([0,T];H_P)} \|C\|_{L^\infty(\mathbb{R};H_Q)}$$

et donc, en utilisant la densité de  $C([0,T];H_P)$  dans  $L^1([0,T];H_P)$  il suffit de considérer le cas  $B \in C([0,T];H_P)$ . Dans ce cas la continuité uniforme de  $B$  nous assure l'existence d'un module de continuité uniforme  $\omega : [0,T] \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\omega(\lambda) = \sup_{t,t' \in [0,T], |t-t'| \leq \lambda} |B(t) - B(t')|_P, \quad \lambda \in [0,T]$$

et l'ensemble des arguments de la preuve de la Proposition 2.5.1 s'applique.

On présente maintenant quelques conséquences de la Proposition 2.5.1 qui nous seront utiles pour montrer le résultat principal du Théorème 2.2.7. A chaque fois que  $y \rightarrow A(y) : B(y)$  appartient à  $L^1(\mathbb{R}^m)$ , par  $\langle A, B \rangle_{P,Q}$  on sous entendra  $\int_{\mathbb{R}^m} A(y) : B(y) dy$ .

**Proposition 2.5.3.** *Soit  $T$  un nombre réel positif. On considère  $D \in H_Q^\infty$  un champ de matrices symétriques et  $\mathcal{W}_\omega \subset C([0, T]; X_P)$  un sous ensemble borné de  $L^2([0, T]; X_P)$  composé de fonctions admettant un même module de continuité  $\omega : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  dans  $C([0, T]; X_P)$ , c'est à dire*

$$|w(t) - w(t')|_P \leq \omega(|t - t'|), \quad t, t' \in [0, T], \quad w \in \mathcal{W}_\omega$$

avec  $\omega$  croissante et  $\lim_{\lambda \searrow 0} \omega(\lambda) = 0$ . Alors pour toute famille  $(w^\beta)_{\beta > 0} \subset \mathcal{W}_\omega$  convergeant faiblement dans  $L^2([0, T]; X_P)$  vers  $w^0$  lorsque  $\beta \searrow 0$ , on a

$$\lim_{(\beta, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)} \int_0^T \langle \theta(t) \otimes w^\beta(t), G(t/\varepsilon)D \rangle_{P,Q} dt = \int_0^T \langle \theta(t) \otimes w^0(t), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} dt \quad (2.43)$$

pour tout  $\theta \in L^2([0, T]; X_P)$ .

**Preuve.** Pour tout  $\theta, w \in L^2([0, T]; X_P)$  on a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \theta(t) \otimes w(t), G(t/\varepsilon)D \rangle_{P,Q} dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \theta(t, y) \otimes w(t, y) : G(t/\varepsilon)D dy dt \\ & = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} (P^{1/2}(y)\theta(t, y)) \otimes (P^{1/2}(y)w(t, y)) : Q^{1/2}(y)G(t/\varepsilon)DQ^{1/2}(y) dy dt \\ & \leq \int_0^T |G(t/\varepsilon)D|_{H_Q^\infty} \int_{\mathbb{R}^m} |P^{1/2}(y)\theta(t, y)| |P^{1/2}(y)w(t, y)| dy dt \\ & \leq |D|_{H_Q^\infty} \left( \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} P(y)\theta(t, y) \cdot \theta(t, y) dy dt \right)^{1/2} \left( \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} P(y)w(t, y) \cdot w(t, y) dy dt \right)^{1/2} \\ & = |D|_{H_Q^\infty} \|\theta\|_{L^2([0, T]; X_P)} \|w\|_{L^2([0, T]; X_P)} \end{aligned}$$

et de même, en utilisant  $|\langle D \rangle|_{H_Q^\infty} \leq |D|_{H_Q^\infty}$

$$\int_0^T \langle \theta(t) \otimes w(t), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} dt \leq |D|_{H_Q^\infty} \|\theta\|_{L^2([0, T]; X_P)} \|w\|_{L^2([0, T]; X_P)}. \quad (2.44)$$

Comme la famille  $(w^\beta)_{\beta > 0}$  est bornée dans  $L^2([0, T]; X_P)$ , il suffit de vérifier (2.43) pour tout  $\theta$  vivant dans une partie dense de  $L^2([0, T]; X_P)$ , par exemple pour tout  $\theta$  tel que  $P^{1/2}\theta \in C_c^0([0, T] \times \mathbb{R}^m)$ . On choisit un  $k \in \mathbb{N}$  suffisamment grand pour que  $k \geq \psi(y)$ ,  $y \in \text{supp}(P^{1/2}\theta)$ . Comme  $D \in H_Q^\infty$  appartient aussi à  $H_{Q, \text{loc}}$ , le champ de matrices  $D_k = \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} D$  appartient à  $H_Q \cap H_Q^\infty$ . On utilise alors la Proposition 2.5.1 avec  $C(s) = G(s)D_k$ ,  $\overline{C} = \langle D_k \rangle = \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \langle D \rangle$ , cf. le Théorème 2.2.5, et  $\mathcal{B} = \{\theta \otimes w : w \in \mathcal{W}_\omega\}$ . On sait par la Proposition 2.3.1 que  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires sur  $H_Q$ , ce qui implique que  $C \in L^\infty(\mathbb{R}; H_Q)$ . On déduit du Théorème 2.2.5 que

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_{s_0}^{s_0+S} C(s) ds = \overline{C}, \quad \text{uniformément par rapport à } s_0 \in \mathbb{R}.$$

Pour tout  $w \in \mathcal{W}_\omega$ , on écrit

$$\begin{aligned} \|\theta \otimes w\|_{L^1([0,T];H_P)} &= \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^m} (P^{1/2}\theta) \otimes (P^{1/2}w) : (P^{1/2}\theta) \otimes (P^{1/2}w) \, dy \right)^{1/2} dt \\ &\leq \int_0^T |\theta(t)|_{X_P^\infty} |w(t)|_P \, dt \\ &\leq \|P^{1/2}\theta\|_{L^2([0,T];L^\infty(\mathbb{R}^m))} \|w\|_{L^2([0,T];X_P)} \end{aligned}$$

et donc le fait que  $\mathcal{W}_\omega$  soit borné dans  $L^2([0,T];X_P)$  implique que la famille  $\mathcal{B}$  est bornée dans  $L^1([0,T];H_P)$  (on rappelle que  $P^{1/2}\theta \in C_c^0([0,T] \times \mathbb{R}^m)$ ). Il faut maintenant déterminer un module de continuité pour  $\mathcal{B}$ . Pour tout  $w \in \mathcal{W}_\omega$ ,  $t, t' \in [0, T]$ , on a

$$\begin{aligned} |\theta(t) \otimes w(t) - \theta(t') \otimes w(t')|_P &\leq |\theta(t) - \theta(t')|_{X_P^\infty} |w(t)|_P + |\theta(t')|_{X_P^\infty} |w(t) - w(t')|_P \\ &\leq \|P^{1/2}\theta(t) - P^{1/2}\theta(t')\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} |w(t)|_P + \|P^{1/2}\theta(t')\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \omega(|t - t'|) \\ &\leq \omega_\theta(|t - t'|) \|w\|_{C([0,T];X_P)} + \omega(|t - t'|) \|P^{1/2}\theta\|_{C^0([0,T] \times \mathbb{R}^m)} \end{aligned}$$

où  $\omega_\theta$  est un module de continuité pour  $P^{1/2}\theta \in C_c^0([0, T] \times \mathbb{R}^m)$ . Il nous reste donc à vérifier que  $\mathcal{W}_\omega$  est borné dans  $C([0, T]; X_P)$ . Pour tout  $t, t' \in [0, T]$ ,  $w \in \mathcal{W}_\omega$  on a

$$|w(t)|_P^2 \leq (|w(t')|_P + \omega(|t - t'|))^2 \leq 2|w(t')|_P^2 + 2\omega^2(T),$$

et en intégrant par rapport à  $t' \in [0, T]$  on obtient pour tout  $t \in [0, T]$  que

$$|w(t)|_P^2 \leq \frac{2}{T} \|w\|_{L^2([0,T];X_P)}^2 + 2\omega^2(T).$$

Cela signifie exactement que  $\mathcal{W}_\omega$  est borné dans  $C([0, T]; X_P)$ . Par la Proposition 2.5.1, pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\varepsilon(\eta) > 0$  tel que pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon(\eta)$ ,  $\beta > 0$

$$\left| \int_0^T \left\langle \theta(t) \otimes w^\beta(t), \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} G(t/\varepsilon) D \right\rangle_{P,Q} dt - \int_0^T \left\langle \theta(t) \otimes w^\beta(t), \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \langle D \rangle \right\rangle_{P,Q} dt \right| < \frac{\eta}{2}.$$

Comme  $\text{supp}(P^{1/2}\theta) \subset \{\psi \leq k\}$ , pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon(\eta)$ ,  $\beta > 0$  l'inégalité ci dessus se réécrit

$$\left| \int_0^T \left\langle \theta(t) \otimes w^\beta(t), G(t/\varepsilon) D \right\rangle_{P,Q} dt - \int_0^T \left\langle \theta(t) \otimes w^\beta(t), \langle D \rangle \right\rangle_{P,Q} dt \right| < \frac{\eta}{2}.$$

L'inégalité (2.44) nous assure que  $w \rightarrow \int_0^T \langle \theta(t) \otimes w(t), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} dt$  est une application linéaire continue sur  $L^2([0, T]; X_P)$ , et étant donné que  $(w^\beta)_{\beta > 0}$  converge faiblement dans  $L^2([0, T]; X_P)$ , vers  $w^0$  lorsque  $\beta \searrow 0$ , il existe  $\beta(\eta) > 0$  tel que pour tout  $0 < \beta < \beta(\eta)$

$$\left| \int_0^T \left\langle \theta(t) \otimes w^\beta(t), \langle D \rangle \right\rangle_{P,Q} dt - \int_0^T \left\langle \theta(t) \otimes w^0, \langle D \rangle \right\rangle_{P,Q} dt \right| < \frac{\eta}{2}$$

Donc, pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\beta(\eta) > 0$ ,  $\varepsilon(\eta) > 0$  tels que pour tout  $0 < \beta < \beta(\eta)$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon(\eta)$

$$\left| \int_0^T \left\langle \theta(t) \otimes w^\beta(t), G(t/\varepsilon) D \right\rangle_{P,Q} dt - \int_0^T \left\langle \theta(t) \otimes w^0, \langle D \rangle \right\rangle_{P,Q} dt \right| < \eta.$$

□

**Remarque 2.5.4.** *Les arguments précédents montrent que si  $D \in H_Q^\infty$  alors*

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^T \langle w(t) \otimes w(t), G(t/\varepsilon)D \rangle_{P,Q} dt = \int_0^T \langle w(t) \otimes w(t), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} dt \quad (2.45)$$

pour tout  $w \in L^2([0, T]; X_P)$ . En effet, en tenant compte du fait que l'application bilinéaire

$$(\theta, w) \in L^2([0, T]; X_P) \times L^2([0, T]; X_P) \rightarrow \int_0^T \langle \theta(t) \otimes w(t), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} dt \in \mathbb{R}$$

est continue, il est suffisant d'établir (2.45) pour  $w$  dans  $\{\theta \in L^2([0, T]; X_P) : P^{1/2}\theta \in C_c^0([0, T] \times \mathbb{R}^m)\}$ , qui est un sous ensemble dense de  $L^2([0, T]; X_P)$ . Et c'est une conséquence directe de la Remarque 2.5.2 appliquée aux champs de matrices  $D_k = \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} D, k \geq \psi(y), y \in \text{supp}(P^{1/2}\theta)$ , car pour tout  $\theta \in L^2([0, T]; X_P)$  tel que  $P^{1/2}\theta \in C_c^0([0, T] \times \mathbb{R}^m)$ , on a

$$\begin{aligned} \|\theta \otimes \theta\|_{L^1([0, T]; H_P)} &= \int_0^T \left( \int_{\mathbb{R}^m} |P^{1/2}\theta|^4 dy \right)^{1/2} dt \\ &\leq \int_0^T \|P^{1/2}\theta(t)\|_{C^0(\mathbb{R}^m)} \|P^{1/2}\theta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} dt \\ &\leq \|\theta\|_{L^2([0, T]; X_P^{\mathcal{P}})} \|\theta\|_{L^2([0, T]; X_P)} < +\infty. \end{aligned}$$

Dans le cas où le champ de matrices  $D$  est défini positif, le comportement de la limite supérieure du terme quadratique  $\int_0^T \langle w^\beta(t) \otimes w^\beta(t), G(t/\varepsilon)D \rangle_{P,Q} dt$  par rapport à  $(\beta, \varepsilon)$  caractérise la convergence forte de la famille  $(w^\beta)_{\beta > 0}$  comme le montre le résultat suivant

**Proposition 2.5.5.** *On suppose les mêmes hypothèses qu'à la Proposition 2.5.3.*

1. *Si le champ de matrices  $D$  est positif alors*

$$\int_0^T \langle w^0(t) \otimes w^0(t), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} dt \leq \liminf_{(\beta, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)} \int_0^T \langle w^\beta(t) \otimes w^\beta(t), G(t/\varepsilon)D \rangle_{P,Q} dt.$$

2. *Si  $(w^\beta)_{\beta > 0}$  converge fortement dans  $L^2([0, T]; X_P)$  vers  $w^0$  lorsque  $\beta \searrow 0$  (l'existence d'un module de continuité  $\omega$  dans  $C([0, T]; X_P)$  pour la famille  $(w^\beta)_{\beta > 0}$  n'est pas nécessaire) alors*

$$\int_0^T \langle w^0(t) \otimes w^0(t), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} dt = \lim_{(\beta, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)} \int_0^T \langle w^\beta(t) \otimes w^\beta(t), G(t/\varepsilon)D \rangle_{P,Q} dt.$$

3. *S'il existe un  $\alpha > 0$  tel que  $Q^{1/2}DQ^{1/2} \geq \alpha I_m$  et*

$$\limsup_{(\beta, \varepsilon) \rightarrow (0, 0)} \int_0^T \langle w^\beta(t) \otimes w^\beta(t), G(t/\varepsilon)D \rangle_{P,Q} dt \leq \int_0^T \langle w^0(t) \otimes w^0(t), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} dt$$

alors la famille  $(w^\beta)_{\beta > 0}$  converge fortement dans  $L^2([0, T]; X_P)$  vers  $w^0$  quand  $\beta \searrow 0$ .

**Preuve.**

1. On sait que si le champ  $D$  est symétrique positif alors il en est de même pour le champ

$G(t/\varepsilon)D$  pour tout  $t \in [0, T]$  et  $\varepsilon > 0$ , ainsi

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle w^0(t) \otimes w^\beta(t), G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} w^0(t, y) \otimes w^\beta(t, y) : G(t/\varepsilon)D dy dt \\ & \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} (w^0(t, y) \otimes w^0(t, y) : G(t/\varepsilon)D)^{1/2} (w^\beta(t, y) \otimes w^\beta(t, y) : G(t/\varepsilon)D)^{1/2} dy dt \\ & \leq \left( \int_0^T \left\langle w^0(t) \otimes w^0(t), G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt \right)^{1/2} \left( \int_0^T \left\langle w^\beta(t) \otimes w^\beta(t), G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En passant à la limite inférieure par rapport à  $(\beta, \varepsilon)$ , on obtient grâce à la Proposition 2.5.3

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle w^0(t) \otimes w^0(t), \langle D \rangle \right\rangle_{P,Q} dt & \leq \liminf_{(\beta, \varepsilon) \rightarrow (0,0)} \left\{ \left( \int_0^T \left\langle w^0(t) \otimes w^0(t), G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt \right)^{1/2} \right. \\ & \quad \left. \times \left( \int_0^T \left\langle w^\beta(t) \otimes w^\beta(t), G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

La Remarque 2.5.4 nous assure que

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^T \left\langle w^0(t) \otimes w^0(t), G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt = \int_0^T \left\langle w^0(t) \otimes w^0(t), \langle D \rangle \right\rangle_{P,Q} dt. \quad (2.47)$$

En combinant l'égalité (2.47) avec l'inégalité (2.46) on obtient l'inégalité recherchée.

2. On choisit  $\eta$  un nombre réel positif. Par la Remarque 2.5.4, il existe  $\varepsilon(\eta)$  tel que pour tout  $0 < \varepsilon < \varepsilon(\eta)$

$$\left| \int_0^T \left\langle w^0(t) \otimes w^0(t), G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt - \int_0^T \left\langle w^0(t) \otimes w^0(t), \langle D \rangle \right\rangle_{P,Q} dt \right| < \frac{\eta}{2}.$$

Etant donné que la famille  $(w^\beta)_{\beta > 0}$  converge fortement vers  $w^0$  dans  $L^2([0, T]; X_P)$ , il existe  $\beta(\eta) > 0$  tel que pour tout  $0 < \beta < \beta(\eta)$  et tout  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \left\langle w^\beta(t) \otimes w^\beta(t), G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt - \int_0^T \left\langle w^0(t) \otimes w^0(t), G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt \right| \\ & \leq |D|_{H^\infty} \|w^\beta - w^0\|_{L^2([0, T]; X_P)} \left( \|w^\beta\|_{L^2([0, T]; X_P)} + \|w^0\|_{L^2([0, T]; X_P)} \right) < \frac{\eta}{2}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne le second point.

3. On sait par la Proposition 2.3.1 que  $Q^{1/2}G(t/\varepsilon)DQ^{1/2} \geq \alpha I_m$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\varepsilon > 0$  et donc

$$\begin{aligned} \alpha \|w^\beta - w^0\|_{L^2([0, T]; X_P)}^2 & \leq \int_0^T \left\langle [w^\beta(t) - w^0(t)] \otimes [w^\beta(t) - w^0(t)], G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt \\ & = \int_0^T \left\langle w^\beta(t) \otimes w^\beta(t), G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt + \int_0^T \left\langle w^0(t) \otimes w^0(t), G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt \\ & \quad - \int_0^T \left\langle w^\beta(t) \otimes w^0(t), G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt - \int_0^T \left\langle w^0(t) \otimes w^\beta(t), G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt. \end{aligned}$$

Par la Proposition 2.5.3 on a

$$\begin{aligned} & \lim_{(\beta, \varepsilon) \rightarrow (0,0)} \int_0^T \left\langle w^\beta(t) \otimes w^0(t), G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt \\ & = \lim_{(\beta, \varepsilon) \rightarrow (0,0)} \int_0^T \left\langle w^0(t) \otimes w^\beta(t), G(t/\varepsilon)D \right\rangle_{P,Q} dt = \int_0^T \left\langle w^0(t) \otimes w^0(t), \langle D \rangle \right\rangle_{P,Q} dt \end{aligned}$$

et par la Remarque 2.5.4

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^T \langle w^0(t) \otimes w^0(t), G(t/\varepsilon)D \rangle_{P,Q} dt = \int_0^T \langle w^0(t) \otimes w^0(t), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} dt.$$

En fin de compte on obtient

$$\begin{aligned} \alpha \limsup_{\beta \searrow 0} \|w^\beta - w^0\|_{L^2([0,T]; X_P)}^2 &\leq \limsup_{(\beta, \varepsilon) \rightarrow (0,0)} \int_0^T \langle w^\beta(t) \otimes w^\beta(t), G(t/\varepsilon)D \rangle_{P,Q} dt \\ &\quad - \int_0^T \langle w^0(t) \otimes w^0(t), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} dt \leq 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $(w^\beta)_{\beta > 0}$  converge fortement dans  $L^2([0, T]; X_P)$  vers  $w^0$  lorsque  $\beta \searrow 0$ .  $\square$

## 2.6 Preuves des Théorèmes principaux

On établit deux résultats de convergence. Celui du Théorème 2.2.7 qui précise le comportement au sens fort de  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$  et  $(\nabla_z v^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  dans  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; X_P)$ . Celui du Théorème 2.2.9 qui précise un ordre pour les convergences ci dessus à l'aide de l'introduction d'un correcteur, ce qui justifiera le développement formel introduit en (2.10).

**Preuve du Théorème 2.2.7.** Supposons que  $u^{\text{in}}$  appartient à  $H_R^2$ , dont la définition est donnée par

$$H_R^2 := \{u \in H_R^1 : \nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u \in L^2(\mathbb{R}^m)\}. \quad (2.48)$$

Du fait que  $u^\varepsilon$  soit la solution variationnelle de (2.1), on a pour tout  $\Phi \in C_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} u^\varepsilon(t, y) \partial_t \Phi dy dt - \int_{\mathbb{R}^m} u^{\text{in}}(y) \Phi(0, y) dy + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} D(y) \nabla_y u^\varepsilon \cdot \nabla_y \Phi dy dt \\ - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} u^\varepsilon(t, y) b(y) \cdot \nabla_y \Phi dy dt = 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

En fait, la formulation ci dessus est vraie pour toute fonction à support compact dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ , qui appartient à  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$ . On choisit une fonction test  $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$  et on introduit la nouvelle fonction  $\Phi^\varepsilon(t, y) = \psi(t, Y(-t/\varepsilon; y))$ ,  $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ . Grâce aux hypothèses (2.4), la fonction  $\Phi^\varepsilon$  est à support compact dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ , appartient à  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$  et ainsi satisfait (2.49). On effectue le changement de variable  $z \mapsto y = Y(t/\varepsilon; z)$ . En prenant les dérivées en temps et en espace des égalités  $\psi(t, z) = \Phi^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z))$  et  $v^\varepsilon(t, z) = u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z))$  on obtient

$$\partial_t \psi(t, z) = \partial_t \Phi^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)) + \frac{1}{\varepsilon} b(Y(t/\varepsilon; z)) \cdot \nabla_y \Phi^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z))$$

$$\nabla_z \psi(t, z) = {}^t \partial Y(t/\varepsilon; z) \nabla_y \Phi^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)), \quad \nabla_z v^\varepsilon(t, z) = {}^t \partial Y(t/\varepsilon; z) \nabla_y u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z))$$

et la formulation faible (2.49), écrite avec la fonction test  $\Phi^\varepsilon(t, y)$  devient

$$\begin{aligned} - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} v^\varepsilon(t, z) \partial_t \psi dz dt - \int_{\mathbb{R}^m} u^{\text{in}}(z) \psi(0, z) dz \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \partial Y^{-1}(t/\varepsilon; z) D(Y(t/\varepsilon; z)) {}^t \partial Y^{-1}(t/\varepsilon; z) \nabla_z v^\varepsilon \cdot \nabla_z \psi dz dt = 0. \end{aligned}$$

Donc  $v^\varepsilon$  est solution variationnelle de (2.9). Par les Propositions 2.4.4, 2.4.5 on a pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$

$$\sup_{\varepsilon > 0} \{ \|v^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))} + \|\nabla_z^R v^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} + \|\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} \} < +\infty$$

$$\sup_{\varepsilon > 0} \{ \|\partial_t v^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} + \|\partial_t \nabla_z^R v^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} \} < +\infty.$$

Après extraction de sous suites, on peut supposer qu'il existe  $(\varepsilon_k)_k$  convergeant vers 0 tel que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} v^{\varepsilon_k} = v^0 \text{ faiblement } \star \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \quad (2.50)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \nabla_z v^{\varepsilon_k} = \nabla_z v^0 \text{ faiblement } \star \text{ dans } L^\infty([0, T]; X_P), \quad T \in \mathbb{R}_+. \quad (2.51)$$

On cherche à prouver que  $v^0$  est la solution variationnelle de (2.27). Pour tout  $\eta \in C_c^1(\mathbb{R}_+)$  et  $\Phi \in H_R^1$ , la formulation variationnelle de (2.9) donne

$$\begin{aligned} - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} v^{\varepsilon_k}(t, z) \eta'(t) \Phi(z) \, dz dt - \int_{\mathbb{R}^m} u^{\text{in}}(z) \eta(0) \Phi(z) \, dz \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} G(t/\varepsilon_k) D \nabla_z v^{\varepsilon_k} \cdot \eta(t) \nabla_z \Phi \, dz dt = 0. \end{aligned}$$

Comme  $\eta' \Phi$  appartient à  $L^1(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ , la convergence faible  $\star$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$  de  $(v^{\varepsilon_k})_k$  implique que

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} v^{\varepsilon_k}(t, z) \eta'(t) \Phi(z) \, dz dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} v^0(t, z) \eta'(t) \Phi(z) \, dz dt.$$

On utilise maintenant la Proposition 2.5.3 avec  $T > 0$  tel que  $\text{supp } \eta \subset [0, T[$ , et  $\mathcal{W}_\omega = \{w^k = \nabla_z v^{\varepsilon_k}|_{[0, T] \times \mathbb{R}^m} : k \in \mathbb{N}\}$ .  $\mathcal{W}_\omega$  est bien borné dans  $L^2([0, T]; X_P)$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $t, t' \in [0, T]$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} |\nabla_z v^{\varepsilon_k}(t) - \nabla_z v^{\varepsilon_k}(t')|_P &= \|\nabla_z^R v^{\varepsilon_k}(t) - \nabla_z^R v^{\varepsilon_k}(t')\|_{L^2} \\ &\leq \sqrt{|t - t'|} \|\partial_t \nabla_z^R v^{\varepsilon_k}\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))}. \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{W}_\omega$  est inclus dans  $C([0, T]; X_P)$  et admet pour module de continuité

$$\omega(\lambda) = \sqrt{\lambda} \sup_{\varepsilon > 0} \|\partial_t \nabla_z^R v^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))}.$$

On peut appliquer la Proposition 2.5.3 avec  $\theta(t, z) = \eta(t) \nabla_z \Phi(z) \in L^2([0, T]; X_P)$  et en déduire que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} G(t/\varepsilon_k) D \nabla_z v^{\varepsilon_k} \cdot \eta(t) \nabla_z \Phi \, dz dt &= \int_0^T \langle \eta(t) \nabla_z \Phi \otimes \nabla_z v^{\varepsilon_k}(t), G(t/\varepsilon_k) D \rangle_{P, Q} \, dt \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \eta(t) \nabla_z \Phi \otimes \nabla_z v^0(t), \langle D \rangle \rangle_{P, Q} \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle \nabla_z v^0 \cdot \eta(t) \nabla_z \Phi \, dz dt. \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , dans la formulation variationnelle de  $v^{\varepsilon k}$ , implique que

$$\begin{aligned} - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} v^0(t, z) \eta'(t) \Phi(z) \, dz dt - \int_{\mathbb{R}^m} u^{\text{in}}(z) \eta(0) \Phi(z) \, dz \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle \nabla_z v^0 \cdot \eta(t) \nabla_z \Phi \, dz dt = 0 \end{aligned}$$

et donc  $v^0$  est bien solution variationnelle de (2.27) ( $v^0 = v$ ). Par unicité de la solution du problème limite (2.27), les convergences (2.50), (2.51) sont valables pour toute la famille  $(v^\varepsilon)_\varepsilon$ , et on a

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} v^\varepsilon = v \text{ faiblement } \star \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)),$$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \nabla_z v^\varepsilon = \nabla_z v \text{ faiblement } \star \text{ dans } L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; X_P).$$

La régularité de  $v$  est donnée par les Propositions 2.4.6, 2.4.7. En particulier on obtient que  $\partial_t v \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ . On peut même voir que la dérivée en temps  $\partial_t v$  appartient à  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ , cela provient de la régularité de  $\langle D \rangle$ . En effet, grâce aux preuves des Propositions 2.4.6, 2.4.7 on sait que  $\text{div}_z(R \langle D \rangle) \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$ ,  $R \langle D \rangle {}^t R \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$  et ainsi

$$\begin{aligned} \partial_t v &= \text{div}_z(\langle D \rangle \nabla_z v) = \text{div}_z(\langle D \rangle {}^t R \nabla_z^R v) = \text{div}_z(R \langle D \rangle) \cdot \nabla_z^R v + R \langle D \rangle : \partial \nabla_z^R v \\ &= \text{div}_z(R \langle D \rangle) \cdot \nabla_z^R v + R \langle D \rangle {}^t R : \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)). \end{aligned}$$

On va maintenant montrer la convergence forte des suites  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$  et  $(\nabla_z v^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  dans  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; X_P)$ . L'égalité d'énergie associée à (2.9) nous donne

$$\|v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + 2 \int_0^t \langle \nabla_z v^\varepsilon(\tau) \otimes \nabla_z v^\varepsilon(\tau), G(\tau/\varepsilon) D \rangle_{P,Q} \, d\tau = \|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2, t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.52)$$

De même, l'égalité d'énergie associée à (2.27) nous donne

$$\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + 2 \int_0^t \langle \nabla_z v(\tau) \otimes \nabla_z v(\tau), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} \, d\tau = \|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2, t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.53)$$

Le premier point de la Proposition 2.5.5 nous assure que l'inégalité suivante est vérifiée

$$\int_0^t \langle \nabla_z v(\tau) \otimes \nabla_z v(\tau), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} \, d\tau \leq \liminf_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^t \langle \nabla_z v^\varepsilon(\tau) \otimes \nabla_z v^\varepsilon(\tau), G(\tau/\varepsilon) D \rangle_{P,Q} \, d\tau. \quad (2.54)$$

En combinant (2.52), (2.53), (2.54) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \{ \|v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 - \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \} &= \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \int_0^t \langle \nabla_z v(\tau) \otimes \nabla_z v(\tau), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} \, d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \langle \nabla_z v^\varepsilon(\tau) \otimes \nabla_z v^\varepsilon(\tau), G(\tau/\varepsilon) D \rangle_{P,Q} \, d\tau \right\} \\ &= \int_0^t \langle \nabla_z v(\tau) \otimes \nabla_z v(\tau), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} \, d\tau \\ &\quad - \liminf_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^t \langle \nabla_z v^\varepsilon(\tau) \otimes \nabla_z v^\varepsilon(\tau), G(\tau/\varepsilon) D \rangle_{P,Q} \, d\tau \leq 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que pour tout temps  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \|v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \leq \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2. \quad (2.55)$$

L'application du lemme de Fatou à la famille de fonctions positives  $t \rightarrow \|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 - \|v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2$  donne

$$\int_0^T \liminf_{\varepsilon \searrow 0} \{ \|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 - \|v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \} dt \leq \liminf_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^T \{ \|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 - \|v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \} dt$$

ou de manière équivalente

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^T \|v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 dt \leq \int_0^T \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \|v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 dt.$$

L'inégalité ci-dessus combinée avec la convergence faible dans  $L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))$  de la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  vers  $v$  et (2.55) nous amène à

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^T \|v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 dt \leq \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 dt.$$

La famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  converge fortement dans  $L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))$  vers  $v$  pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^T \|v^\varepsilon(t) - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 dt = 0.$$

Par extraction, on déduit de cela l'existence d'une suite  $(\varepsilon_k)_k$  convergeant vers 0 telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|v^{\varepsilon_k}(t) - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 = 0, \quad \text{pour presque tout } t \in [0, T]. \quad (2.56)$$

En se servant du fait que  $\partial_t v \in L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))$  et  $\sup_{\varepsilon > 0} \|\partial_t v^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} < +\infty$ , on voit que (2.56) est vérifié pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ , et donc pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . En effet, si on note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points  $t$  de  $[0, T]$  en lesquels la convergence suivante est assurée

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|v^{\varepsilon_k}(t) - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = 0,$$

alors, d'après la relation (2.55), on sait que  $\text{mes}([0, T] - \mathcal{E}) = 0$ . Soient  $t \in [0, T] - \mathcal{E}$  et  $\delta > 0$ . Il existe nécessairement  $t_\delta \in ]t - \delta, t + \delta[ \cap \mathcal{E}$ , dans le cas contraire  $\text{mes}([0, T] - \mathcal{E}) > 0$  ce qui contredirait l'hypothèse. A l'aide des bornes sur  $\partial_t v$  et  $\partial_t v^\varepsilon$ , on a

$$\begin{aligned} \|v^{\varepsilon_k}(t) - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} &\leq \|v^{\varepsilon_k}(t) - v^{\varepsilon_k}(t_\delta)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} + \|v^{\varepsilon_k}(t_\delta) - v(t_\delta)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} + \|v(t_\delta) - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq \sqrt{|t - t_\delta|} \sup_{k > 0} \|\partial_t v^{\varepsilon_k}\|_{L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))} + \|v^{\varepsilon_k}(t_\delta) - v(t_\delta)\| \\ &\quad + \sqrt{|t - t_\delta|} \|\partial_t v\|_{L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))} \\ &\leq \underbrace{\sqrt{\delta} \left( \sup_{k > 0} \|\partial_t v^{\varepsilon_k}\|_{L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))} + \|\partial_t v\|_{L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^m))} \right)}_{=C} + \|v^{\varepsilon_k}(t_\delta) - v(t_\delta)\|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \|v^{\varepsilon_k}(t) - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq C\sqrt{\delta}, \quad \text{pour tout } \delta > 0.$$

On a donc

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \|v^\varepsilon(T) - v(T)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 = 0, \quad T \in \mathbb{R}_+$$

ce qui implique, grâce à (2.52), (2.53), que

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^T \langle \nabla_z v^\varepsilon(t) \otimes \nabla_z v^\varepsilon(t), G(t/\varepsilon)D \rangle_{P,Q} dt &= \frac{1}{2} \|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 - \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \|v^\varepsilon(T)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 - \frac{1}{2} \|v(T)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &= \int_0^T \langle \nabla_z v(t) \otimes \nabla_z v(t), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} dt. \end{aligned}$$

Le troisième point de la Proposition 2.5.5 nous assure que  $(\nabla_z v^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  converge fortement dans  $L^2([0, T]; X_P)$  vers  $\nabla_z v$  pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$ . Enfin, pour montrer que la convergence forte de la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  a lieu dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$  vers  $v$ , on cherche à estimer la différence entre  $v^\varepsilon$  et  $v$ . En soustrayant (2.9) et (2.27), on trouve

$$\partial_t(v^\varepsilon - v) - \text{div}_z \{G(t/\varepsilon)D \nabla_z v^\varepsilon - \langle D \rangle \nabla_z v\} = 0, \quad (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m.$$

L'égalité d'énergie associée pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  est

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v^\varepsilon(t) - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + \int_0^t \langle [\nabla_z v^\varepsilon(\tau) - \nabla_z v(\tau)] \otimes \nabla_z v^\varepsilon(\tau), G(\tau/\varepsilon)D \rangle_{P,Q} d\tau \\ - \int_0^t \langle [\nabla_z v^\varepsilon(\tau) - \nabla_z v(\tau)] \otimes \nabla_z v(\tau), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} d\tau = 0. \end{aligned}$$

Tout comme dans la preuve de la Proposition 2.5.3 on a

$$\left| \langle [\nabla_z v^\varepsilon(\tau) - \nabla_z v(\tau)] \otimes \nabla_z v^\varepsilon(\tau), G(\tau/\varepsilon)D \rangle_{P,Q} \right| \leq |D|_{H_Q^\infty} |\nabla_z v^\varepsilon(\tau) - \nabla_z v(\tau)|_P |\nabla_z v^\varepsilon(\tau)|_P$$

et

$$\left| \langle [\nabla_z v^\varepsilon(\tau) - \nabla_z v(\tau)] \otimes \nabla_z v(\tau), \langle D \rangle \rangle_{P,Q} \right| \leq |D|_{H_Q^\infty} |\nabla_z v^\varepsilon(\tau) - \nabla_z v(\tau)|_P |\nabla_z v(\tau)|_P,$$

ainsi pour tout  $t \in [0, T]$  on a

$$\|(v^\varepsilon - v)(t)\|_{L^2}^2 \leq 2|D|_{H_Q^\infty} \|\nabla_z v^\varepsilon - \nabla_z v\|_{L^2([0, T]; X_P)} (\|\nabla_z v^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; X_P)} + \|\nabla_z v\|_{L^2([0, T]; X_P)}).$$

La convergence forte de  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  dans  $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))$  vers  $v$  est donc une conséquence de la convergence forte de  $(\nabla_z v^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  vers  $\nabla_z v$  dans  $L^2([0, T]; X_P)$  lorsque  $\varepsilon \searrow 0$ . Le dernier point à vérifier est que la convergence forte de  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  dans  $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))$  reste vraie pour toute donnée initiale  $u^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . En effet, par densité de  $H_R^2$  dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , on sait que pour tout  $\delta > 0$  il existe  $u_\delta^{\text{in}} \in H_R^2$  tel que  $\|u^{\text{in}} - u_\delta^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \delta/2$ . On note  $v_\delta^\varepsilon$  (resp.  $v_\delta$ ) la solution variationnelle de (2.9) (resp. (2.27)) pour la condition initiale  $u_\delta^{\text{in}}$ . Grâce au bilan d'énergie on obtient

$$\begin{aligned} \|v^\varepsilon - v\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} &\leq \|v^\varepsilon - v_\delta^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} + \|v_\delta^\varepsilon - v_\delta\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} \\ &\quad + \|v_\delta - v\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} \\ &\leq 2\|u^{\text{in}} - u_\delta^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} + \|v_\delta^\varepsilon - v_\delta\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))}. \end{aligned}$$

Etant donné que  $u_\delta^{\text{in}} \in H_R^2$ , on sait que pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \|v_\delta^\varepsilon - v_\delta\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^m))} = 0$$

et donc

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \|v^\varepsilon - v\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^m))} \leq \delta, \quad \delta > 0,$$

ce qui donne  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \|v^\varepsilon - v\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^m))} = 0$  pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$ .  $\square$

Les considérations ci dessus nous ont amené à montrer que  $v^\varepsilon = v + o(1)$  dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$  lorsque  $\varepsilon \searrow 0$ . Comme montré dans l'analyse formelle (2.10), on est en droit d'espérer un ordre de convergence en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ . Cet ordre peut être montré si on suppose que la solution limite  $v$  est suffisamment régulière et qu'il existe un champ de matrices  $C$  tel que

$$D = \langle D \rangle + L(C) \quad (2.57)$$

et donc tel que (voir la Remarque 2.3.3)

$$\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} D - \langle \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} D \rangle = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} G(s) (\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} C), \quad k \in \mathbb{N}.$$

L'existence du champ de matrices  $C$  est essentielle pour la construction d'un terme correctif  $u^1$ , voir (2.60).

**Preuve du Théorème 2.2.9.** On introduit les fonctions  $\tilde{u}^\varepsilon(t, y) = v(t, Y(-t/\varepsilon; y))$ ,  $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ ,  $\varepsilon > 0$ . Tout comme dans la preuve du Théorème 2.2.7 on peut vérifier que  $\tilde{u}^\varepsilon$  est solution variationnelle du problème

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u}^\varepsilon - \text{div}_y \{G(t/\varepsilon) \langle D \rangle \nabla_y \tilde{u}^\varepsilon\} + \frac{1}{\varepsilon} b(y) \cdot \nabla_y \tilde{u}^\varepsilon = 0, & (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ \tilde{u}^\varepsilon(0, y) = u^{\text{in}}(y), & y \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Par construction, le moyenné  $\langle D \rangle$  appartient à  $H_Q^\infty$  et vérifie  $G(t/\varepsilon) \langle D \rangle = \langle D \rangle$ . Ainsi les fonctions  $(\tilde{u}^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  sont solutions des problèmes

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u}^\varepsilon - \text{div}_y \{\langle D \rangle \nabla_y \tilde{u}^\varepsilon\} + \frac{1}{\varepsilon} b(y) \cdot \nabla_y \tilde{u}^\varepsilon = 0, & (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ \tilde{u}^\varepsilon(0, y) = u^{\text{in}}(y), & y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (2.58)$$

On rappelle que les fonctions  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  sont solutions de

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \text{div}_y \{D \nabla_y u^\varepsilon\} + \frac{1}{\varepsilon} b(y) \cdot \nabla_y u^\varepsilon = 0, & (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ u^\varepsilon(0, y) = u^{\text{in}}(y), & y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (2.59)$$

Les deux familles  $(\tilde{u}^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  et  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  vérifient la même condition initiale. Le point clé pour obtenir un ordre de convergence est l'introduction d'un terme correcteur. Pour tout  $(t, s, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ , on considère la fonction

$$\begin{aligned} u^1(t, s, y) &= -\text{div}_z (C \nabla_z v(t))(Y(-s; y)) + \text{div}_y \{C(y) \nabla_y v(t, Y(-s; y))\} \\ &= -\tau(-s) \text{div}_z (C \nabla_z v(t)) + \text{div}_y \{C(y) \nabla_y [\tau(-s) v(t)]\}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

avec la notation  $\tau(s)f = f \circ Y(s; \cdot)$  pour toute fonction  $f$ . Par (2.7) on a

$$u^1(t, s, Y(s; z)) = \text{div}_z (G(s) C \nabla_z v(t)) - \text{div}_z (C \nabla_z v(t)) \quad (2.61)$$

et en prenant la dérivée par rapport à  $s$  (ici  $L$  est le générateur infinitésimal associé à  $G$ ) on obtient

$$\begin{aligned} \partial_s u^1(t, s, Y(s; z)) + b(Y(s; z)) \cdot \nabla_y u^1(t, s, Y(s; z)) &= \operatorname{div}_z \left\{ \frac{d}{ds} G(s) C \nabla_z v(t) \right\} \\ &= \operatorname{div}_z \{ G(s) L(C) \nabla_z v(t) \} \\ &= \{ \operatorname{div}_y [L(C) \nabla_y \tau(-s) v(t)] \} (Y(s; z)). \end{aligned}$$

La dernière égalité vient d'une nouvelle utilisation de (2.7). Ainsi le terme correcteur  $u^1$  vérifie

$$(\partial_s + b(y) \cdot \nabla_y) u^1(t, s, y) - \operatorname{div}_y \{ L(C) \nabla_y v(t, Y(-s; \cdot)) \} (y) = 0, \quad (t, s, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \quad (2.62)$$

et par définition  $u^1(t, 0, y) = 0$ ,  $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ . L'équation (2.62) est exactement celle qui apparaît lorsque l'on plonge l'Ansatz  $u^\varepsilon(t, y) = v(t, Y(-t/\varepsilon; y)) + \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon, y) + \dots$  dans (2.59). En effet, on peut réécrire cet Ansatz

$$u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)) = v(t, z) + \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon, Y(t/\varepsilon; z)) + \dots$$

et voir que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)) &= \partial_t u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)) + \frac{1}{\varepsilon} b(Y(t/\varepsilon; z)) \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)) \\ &= [\operatorname{div}_y (D \nabla_y u^\varepsilon(t))](Y(t/\varepsilon; z)) = \operatorname{div}_z [G(t/\varepsilon) D \nabla_z u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z))] \end{aligned}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \partial_t v(t, z) + \varepsilon \partial_t u^1(t, t/\varepsilon, Y(t/\varepsilon; z)) + \partial_s u^1(t, t/\varepsilon, Y(t/\varepsilon; z)) & \quad (2.63) \\ + b(Y(t/\varepsilon; z)) \cdot \nabla_y u^1(t, t/\varepsilon, Y(t/\varepsilon; z)) + \dots &= \operatorname{div}_z (G(t/\varepsilon) D \nabla_z v) \\ + \operatorname{div}_z [G(t/\varepsilon) D \nabla_z (\varepsilon u^1(t, t/\varepsilon, Y(t/\varepsilon; z)))] + \dots & \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que  $\partial_t v = \operatorname{div}_z (\langle D \rangle \nabla_z v)$ , on déduit de (2.63) et (2.7) que

$$\begin{aligned} (\partial_s + b(y) \cdot \nabla_y) u^1(t, s, y) &= \tau(-s) \operatorname{div}_z [G(s) D \nabla_z v(t)] - \tau(-s) \operatorname{div}_z [\langle D \rangle \nabla_z v(t)] \\ &= \operatorname{div}_y [(D - \langle D \rangle) \nabla_y \tau(-s) v(t)] \\ &= \operatorname{div}_y [L(C) \nabla_y \tau(-s) v(t)] \end{aligned}$$

ce qui nous donne (2.62). En particulier, en posant  $s = t/\varepsilon$ , on a

$$(\partial_s + b(y) \cdot \nabla_y) u^1(t, t/\varepsilon, y) - \operatorname{div}_y (L(C) \nabla_y \tilde{u}^\varepsilon(t))(y) = 0, \quad (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \varepsilon > 0$$

et on obtient l'équation suivante pour  $\tilde{u}_\varepsilon^1 := u^1(t, t/\varepsilon, y)$

$$\partial_t (\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon^1)(t, y) - \operatorname{div}_y (L(C) \nabla_y \tilde{u}^\varepsilon(t)) + \frac{1}{\varepsilon} b(y) \cdot \nabla_y (\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon^1)(t, y) = \varepsilon \partial_t u^1(t, t/\varepsilon, y). \quad (2.64)$$

En sommant (2.58) et (2.64) on obtient

$$\partial_t (\tilde{u}^\varepsilon + \varepsilon \tilde{u}_\varepsilon^1) - \operatorname{div}_y [(\langle D \rangle + L(C)) \nabla_y \tilde{u}^\varepsilon] + \frac{1}{\varepsilon} b(y) \cdot \nabla_y (\tilde{u}^\varepsilon + \varepsilon \tilde{u}_\varepsilon^1) = \varepsilon \partial_t u^1(t, t/\varepsilon, y) \quad (2.65)$$

qui, grâce à (2.57), se réécrit

$$\begin{aligned} \partial_t (\tilde{u}^\varepsilon + \varepsilon \tilde{u}_\varepsilon^1) - \operatorname{div}_y [D \nabla_y (\tilde{u}^\varepsilon + \varepsilon \tilde{u}_\varepsilon^1)] + \frac{1}{\varepsilon} b(y) \cdot \nabla_y (\tilde{u}^\varepsilon + \varepsilon \tilde{u}_\varepsilon^1) \\ = \varepsilon [\partial_t u^1 - \operatorname{div}_y (D \nabla_y u^1)](t, t/\varepsilon, y). \end{aligned}$$

En combinant (2.59) et (2.65), on arrive facilement à

$$\begin{aligned} \partial_t(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon - \varepsilon\tilde{u}_\varepsilon^1) - \operatorname{div}_y[D\nabla_y(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon - \varepsilon\tilde{u}_\varepsilon^1)] + \frac{1}{\varepsilon}b(y) \cdot \nabla_y(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon - \varepsilon\tilde{u}_\varepsilon^1) \\ = -\varepsilon[\partial_t u^1 - \operatorname{div}_y(D\nabla_y u^1)](t, t/\varepsilon, y). \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité d'énergie associée à l'équation ci dessus et l'hypothèse  $Q^{1/2}DQ^{1/2} \geq \alpha I_m$  on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon - \varepsilon\tilde{u}_\varepsilon^1\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + \alpha |\nabla_y(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon - \varepsilon\tilde{u}_\varepsilon^1)|_P^2 \leq \varepsilon \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon - \varepsilon\tilde{u}_\varepsilon^1\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\ \times \|\partial_t u^1(t, t/\varepsilon, \cdot) - \operatorname{div}_y(D\nabla_y u^1(t, t/\varepsilon, \cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

On note que  $(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon - \varepsilon\tilde{u}_\varepsilon^1)|_{t=0} = u^{\text{in}} - u^{\text{in}} - 0 = 0$  et donc, après intégration par rapport à  $t \in [0, T]$ , on a

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon - \varepsilon\tilde{u}_\varepsilon^1\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} \leq \varepsilon \int_0^T \|\partial_t u^1(t, t/\varepsilon, \cdot) - \operatorname{div}_y(D\nabla_y u^1(t, t/\varepsilon, \cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} dt$$

et

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^T |\nabla_y(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon - \varepsilon\tilde{u}_\varepsilon^1)|_P^2 dt \\ \leq \varepsilon \|u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon - \varepsilon\tilde{u}_\varepsilon^1\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} \int_0^T \|\partial_t u^1(t, t/\varepsilon, \cdot) - \operatorname{div}_y(D\nabla_y u^1(t, t/\varepsilon, \cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} dt \\ \leq \varepsilon^2 \left( \int_0^T \|\partial_t u^1(t, t/\varepsilon, \cdot) - \operatorname{div}_y(D\nabla_y u^1(t, t/\varepsilon, \cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} dt \right)^2. \end{aligned}$$

Le résultat sera donc démontré à condition que le correcteur  $u^1(t, s, y)$  satisfasse à des estimations de régularité uniforme par rapport à la variable  $s$

$$u^1 \in L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}_s; L^2(\mathbb{R}^m))), \quad \partial_t u^1 \in L^1([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}_s; L^2(\mathbb{R}^m)))$$

$$\operatorname{div}_y(D\nabla_y u^1) \in L^1([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}_s; L^2(\mathbb{R}^m))), \quad \nabla_y u^1 \in L^2([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}_s; X_P)).$$

On commence par estimer la norme  $L^2(\mathbb{R}^m)$  de  $u^1$ , uniformément par rapport  $(t, s) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ . Grâce à (2.61) on peut écrire que

$$\begin{aligned} \|u^1(t, s, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \|\operatorname{div}_z(G(s)C\nabla_z v(t)) - \operatorname{div}_z(C\nabla_z v(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\ \leq 2 \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\operatorname{div}_z(G(s)C\nabla_z v(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}. \end{aligned}$$

Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , la formule  $\operatorname{div}_z(X\xi) = \operatorname{div}_z {}^t X \cdot \xi + {}^t X : \partial_z \xi$  nous donne que, pour tout champ régulier de matrices  $X$  et tout champ de vecteurs  $\xi$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_z(G(s)C\nabla_z v(t)) &= \operatorname{div}_z(G(s)C {}^t R \nabla_z^R v(t)) & (2.66) \\ &= \operatorname{div}_z(RG(s)C) \cdot \nabla_z^R v(t) + RG(s)C {}^t R : \partial_z \nabla_z^R v(t) R^{-1} \\ &= \operatorname{div}_z(RG(s)C) \cdot \nabla_z^R v(t) + RG(s)C {}^t R : \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t). \end{aligned}$$

On montre également que  $\operatorname{div}_z(RG(s)C) = \tau(s)\operatorname{div}_y(RC)$ . Pour tout champ régulier de vecteurs à support compact  $\Phi = \Phi(y)$ , on a grâce à (2.22)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{div}_z(RG(s)C) \cdot \Phi(Y(s; z)) \, dz &= - \int_{\mathbb{R}^m} RG(s)C : \partial_z \{\Phi(Y(s; z))\} \, dz & (2.67) \\
&= - \int_{\mathbb{R}^m} RG(s)C^t R : (\partial_y \Phi)(Y(s; z)) \partial Y(s; z) R^{-1} \, dz \\
&= - \int_{\mathbb{R}^m} (RC^t R)(Y(s; z)) : (\partial_y \Phi R^{-1})(Y(s; z)) \, dz \\
&= - \int_{\mathbb{R}^m} RC^t R : \partial_y \Phi R^{-1} \, dy \\
&= - \int_{\mathbb{R}^m} RC : \partial_y \Phi \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{div}_y(RC) \cdot \Phi(y) \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \tau(s) [\operatorname{div}_y(RC)] \cdot \Phi(Y(s; z)) \, dz.
\end{aligned}$$

En revenant à (2.66) on obtient

$$\operatorname{div}_z(G(s)C \nabla_z v(t)) = \tau(s) [\operatorname{div}_y(RC)] \cdot \nabla_z^R v(t) + \tau(s) (RC^t R) : \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t) \quad (2.68)$$

et donc

$$\begin{aligned}
&\|\operatorname{div}_z(G(s)C \nabla_z v(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\
&\leq \|\operatorname{div}_y(RC)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \|\nabla_z^R v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} + |C|_{H_Q^\infty} \|\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}.
\end{aligned}$$

Tout cela implique que

$$\begin{aligned}
\|u^1\|_{L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}_s; L^2(\mathbb{R}^m)))} &\leq 2 \|\operatorname{div}_y(RC)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \|\nabla_z^R v\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} \\
&\quad + 2|C|_{H_Q^\infty} \|\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t)\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))}.
\end{aligned}$$

De manière similaire, prendre la dérivée de (2.61) par rapport à  $t$  nous mène à

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u^1\|_{L^1([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}_s; L^2(\mathbb{R}^m)))} &\leq 2 \|\operatorname{div}_y(RC)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \|\nabla_z^R \partial_t v\|_{L^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} \\
&\quad + 2|C|_{H_Q^\infty} \|\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R \partial_t v(t)\|_{L^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))}.
\end{aligned}$$

Il reste à estimer les dérivées en espace de  $u^1$ . Le point clé est que  $\nabla^R$  commute avec  $\tau(s)$

$$\nabla_z^R(\tau(s)f) = \nabla_z^R \{f(Y(s; \cdot))\} = (\nabla_y^R f)(Y(s; \cdot)) = \tau(s)(\nabla_y^R f)$$

pour toute fonction régulière  $f = f(y)$ . En effet, pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  on a

$$\begin{aligned}
b_i \cdot \nabla_z(\tau(s)f)(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(Y(s; Y_i(h; z))) - f(Y(s; z))}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(Y_i(h; Y(s; z))) - f(Y(s; z))}{h} \\
&= b_i(Y(s; z)) \cdot (\nabla_y f)(Y(s; z)) = \tau(s)(b_i \cdot \nabla_y f)(z).
\end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur  $\nabla^R$  à (2.61) et en utilisant (2.66) et (2.68), on obtient que

$$\begin{aligned}
(\nabla_y^R u^1(t, s, \cdot))(Y(s; \cdot)) &= \nabla_z^R u^1(t, s, Y(s; \cdot)) \\
&= \nabla_z^R [\operatorname{div}_z(G(s)C\nabla_z v(t)) - \operatorname{div}_z(C\nabla_z v(t))] \\
&= \nabla_z^R [\tau(s)(\operatorname{div}_y(RC)) \cdot \nabla_z^R v(t) + \tau(s)(RC^t R) : \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t)] \\
&\quad - \nabla_z^R [\operatorname{div}_z(RC) \cdot \nabla_z^R v(t) + (RC^t R) : \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t)]. \tag{2.70}
\end{aligned}$$

Une nouvelle utilisation du fait que  $\tau(s)$  et  $\nabla^R$  commutent implique que pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned}
&b_k \cdot \nabla_z [\tau(s)(\operatorname{div}_y(RC)) \cdot \nabla_z^R v(t) + \tau(s)(RC^t R) : \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t)] \\
&= \tau(s)(b_k \cdot \nabla_y \operatorname{div}_y(RC)) \cdot \nabla_z^R v(t) + \tau(s) \operatorname{div}_y(RC) \cdot (b_k \cdot \nabla_z \nabla_z^R v(t)) \\
&\quad + \tau(s)(b_k \cdot \nabla_y(RC^t R)) : \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t) + \tau(s)(RC^t R) : b_k \cdot \nabla_z (\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t)). \tag{2.71}
\end{aligned}$$

Donc il existe une constante  $K$  dépendant de  $\|\operatorname{div}_y(RC)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} + \|RC^t R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} + \sum_{k=1}^m \|b_k \cdot \nabla_y \operatorname{div}_y(RC)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} + \sum_{k=1}^m \|b_k \cdot \nabla_y(RC^t R)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)}$  telle que

$$\begin{aligned}
\|\nabla_y^R u^1(t, \cdot, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_s; L^2(\mathbb{R}^m))} &\leq K \{ \|\nabla_z^R v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} + \|\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\
&\quad + \|\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\|\nabla_y u^1\|_{L^2([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}_s; X_P))} &\leq K \{ \|\nabla_z^R v\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} + \|\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} \\
&\quad + \|\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} \}.
\end{aligned}$$

En ce qui concerne les dérivées d'ordre deux en espace pour  $u^1$ , on écrit comme précédemment

$$\operatorname{div}_y(D\nabla_y u^1) = \operatorname{div}_y(D^t R \nabla_y^R u^1) = \operatorname{div}_y(RD) \cdot \nabla_y^R u^1 + RD^t R : \nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^1.$$

On note que  $\operatorname{div}_y(RD) \cdot \nabla_y^R u^1$  appartient à  $L^1([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}_s; L^2(\mathbb{R}^m)))$  étant donné que  $\operatorname{div}_y(RD) \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$  et que  $\nabla_y u^1 \in L^2([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}_s; X_P))$ . Comme le champ de matrices  $RD^t R$  appartient à  $L^\infty(\mathbb{R}^m)$ , il reste à vérifier que la quantité  $\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^1$  appartient à  $L^1([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}_s; L^2(\mathbb{R}^m)))$ . Pour y arriver, on applique une nouvelle fois l'opérateur  $\nabla_z^R$  à (2.69), ou de manière équivalente l'opérateur  $b_l \cdot \nabla_z$  à (2.71). En utilisant une nouvelle fois la commutation entre  $\tau(s)$  et  $b_l \cdot \nabla_z$  on obtient

$$\begin{aligned}
&b_l \cdot \nabla_z \{ b_k \cdot \nabla_z [\tau(s)(\operatorname{div}_y(RC)) \cdot \nabla_z^R v(t) + \tau(s)(RC^t R) : \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t)] \} \\
&= [b_l \cdot \nabla_y (b_k \cdot \nabla_y (\operatorname{div}_y(RC)))]_s \cdot \nabla_z^R v(t) + [b_k \cdot \nabla_y (\operatorname{div}_y(RC))]_s \cdot [b_l \cdot \nabla_z (\nabla_z^R v(t))] \\
&\quad + [b_l \cdot \nabla_y (\operatorname{div}_y(RC))]_s \cdot (b_k \cdot \nabla_z (\nabla_z^R v(t))) + (\operatorname{div}_y(RC))_s \cdot \{ b_l \cdot \nabla_z [b_k \cdot \nabla_z (\nabla_z^R v(t))] \} \\
&\quad + [b_l \cdot \nabla_y (b_k \cdot \nabla_y (RC^t R))]_s : \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t) + [b_k \cdot \nabla_y (RC^t R)]_s : b_l \cdot \nabla_z (\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t)) \\
&\quad + [b_l \cdot \nabla_y (RC^t R)]_s : b_k \cdot \nabla_z (\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t)) + (RC^t R)_s : b_k \cdot \nabla_z (b_l \cdot \nabla_z (\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v(t)))
\end{aligned}$$

qui appartient à  $L^1([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}_s; L^2(\mathbb{R}^m)))$  grâce aux hypothèses sur le champ de matrices  $C$  et la solution  $v$ .  $\square$

## Chapitre 3

# Méthodes numériques pour le calcul d'un champ de matrices moyenné. Application à l'analyse asymptotique d'un problème parabolique avec un terme de transport raide

### 3.1 Introduction

Les équations modélisant les phénomènes multi-échelles sont couramment utilisées dans les applications : transport de particules dans un plasma fortement magnétisé avec ou sans collisions, transfert de chaleur dans un plasma, transfert de masse et de chaleur lors d'une réaction chimique. Chacun de ces problèmes font apparaître des échelles en temps ou en espace disparates. D'un point de vue numérique, l'étude de tels problèmes est fortement contrainte par la taille des petites échelles. En effet, le pas de la discrétisation doit être assez fin pour capturer les phénomènes qui se produisent aux échelles microscopiques. Dans ce cas, les méthodes numériques classiques ont un coût prohibitif et ne sont pas adaptées à la résolution de tels problèmes. Suite à l'étude théorique effectuée au Chapitre 2, on propose dans ce chapitre une méthode pour étudier numériquement le comportement asymptotique des solutions d'une équation de diffusion avec un terme de transport raide. On rappelle ce modèle parabolique

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \operatorname{div}_y(D(y)\nabla_y u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} b(y) \cdot \nabla_y u^\varepsilon = 0, & (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ u^\varepsilon(0, y) = u^{\text{in}}(y), & y \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $b : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $D : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  sont des champs de vecteurs et de matrices symétriques définies positives donnés, et  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre proche de zéro. Le transport rapide, associé à l'opérateur  $b \cdot \nabla_y$ , induit une échelle de temps rapide. En fait, ce problème peut être interprété comme un problème à deux échelles en temps après un changement de variable Lagrangien le long du flot associé au champ de vecteurs  $b/\varepsilon$ . De manière générale, les problèmes faisant intervenir des échelles disparates ont été beaucoup étudiés et il existe de

nombreuses approches pour leur étude numérique. Les problèmes paraboliques fortement anisotropes ont été analysés dans [38], les équations cinétiques [33], les problèmes paraboliques multi-échelles [34], les équations de Schrödinger et Klein-Gourdon [29] ont été traitées à l'aide de schémas d'uniforme précision. Une méthode numérique multi-échelle pour une équation d'advection-diffusion est proposée dans [1]. La stratégie choisie dans ce chapitre sera de ne pas résoudre numériquement le problème (3.1), mais plutôt un problème limite effectif non contraint par le petit paramètre  $\varepsilon$ , et pour lequel les méthodes numériques standards peuvent être appliquées. L'étude théorique des problèmes multi-échelles à l'aide des techniques d'homogénéisation a été réalisée dans de nombreux contextes : les équations de transport suivant des champs disparates [16, 18, 36], les équations de transport de particules en présence d'un champ magnétique intense [20, 21, 17, 19, 48, 50], les modèles elliptiques et paraboliques [3, 60], ou encore l'analyse asymptotique d'équations de diffusion fortement anisotropes [19]. Dans le Chapitre 2, l'analyse asymptotique du problème (3.1) a été réalisée à travers l'utilisation d'un résultat de théorie ergodique. Il a été montré que le comportement de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, peut être décrit, au sens  $L^2$ , avec un ordre de convergence, comme la composée d'un profil solution du problème homogénéisé et du flot rapide associé au champ  $b/\varepsilon$ . De plus, il a été montré que le problème homogénéisé est toujours un problème parabolique, ayant un champ de diffusion effectif obtenu en faisant une moyenne ergodique du champ initial  $D$ , le long d'un groupe d'opérateurs linéaires. Le générateur infinitésimal associé à ce groupe est un opérateur de transport agissant sur les champs de matrices. Le but principal de ce chapitre est de proposer un schéma semi-Lagrangien pour la résolution de ce groupe, et ainsi de proposer une méthode de calcul pour le champ de matrices de diffusion effectif. L'intérêt de cette méthode n'est pas restreint à l'étude de (3.1). En effet, le moyenné d'un champ de matrices se retrouve dans d'autres situations et rend possible, par exemple, la description du modèle homogénéisé associé à une équation de diffusion fortement anisotrope, voir [19] et le Chapitre 4. On illustre cette approche en observant l'erreur commise entre une solution de référence de (3.1) et la solution du problème de diffusion effectif sur plusieurs exemples.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la Section 3.2, on rappelle succinctement les résultats principaux du Chapitre 2 concernant l'analyse asymptotique de l'équation (3.1) ainsi que les notations nécessaires à la lecture de ce chapitre. Un schéma basé sur une méthode semi-Lagrangienne est présenté à la Section 3.3 pour le calcul du champ de diffusion effectif. Des tests numériques sont présentés. Dans la Section 3.4, on étudie l'erreur commise entre la solution du problème effectif et la solution du problème raide (3.1). On utilise un schéma numérique basé sur une méthode de splitting pour calculer une solution de référence au problème (3.1). Les résultats numériques confirment l'ordre de convergence théorique espéré.

## 3.2 Analyse asymptotique, résultats théoriques

Dans cette section, on introduit les notations et résultats nécessaires à la lecture de ce chapitre. Les points principaux sont la définition du champ de matrices moyenné (3.5), (3.2) et le résultat asymptotique (3.7). On donne seulement les grandes lignes amenant à ce résultat. Les preuves détaillées peuvent être trouvées au Chapitre 2. On considère  $Y : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  le flot caractéristique associé au champ de vecteurs  $b$

$$\frac{dY}{ds} = b(Y(s; y)), \quad (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \quad Y(0; y) = y, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Ce flot est bien défini sous les hypothèses standards de régularité et croissance au plus linéaire suivantes

$$\begin{cases} b \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^m), \\ \exists C > 0 \text{ such that } |b(y)| \leq C(1 + |y|), \quad y \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Sous les hypothèses ci-dessus le flot  $Y$  est global et régulier,  $Y \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ . On suppose que le champ de vecteurs  $b$  est à divergence nulle

$$\text{div}_y b = 0, \quad y \in \mathbb{R}^m,$$

ce qui garantit que la transformation  $y \in \mathbb{R}^m \rightarrow Y(s; y) \in \mathbb{R}^m$  préserve la mesure de Lebesgue pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . L'analyse asymptotique de (3.1) est immédiate lorsque les opérateurs  $b \cdot \nabla_y$  et  $\text{div}_y(D\nabla_y)$  commutent, i.e.  $[b \cdot \nabla_y, \text{div}_y(D\nabla_y)] = 0$ . L'idée est d'effectuer le changement de variable  $z = Y(-t/\varepsilon; y)$ , et donc de remplacer la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  par la nouvelle famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  donnée par

$$u^\varepsilon(t, y) = v^\varepsilon(t, z) = v^\varepsilon(t, Y(-t/\varepsilon; y)), \quad (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m.$$

Sous les hypothèses de commutation ci-dessus, les nouvelles inconnues  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  satisfont

$$\begin{cases} \partial_t v^\varepsilon - \text{div}_z(D\nabla_z v^\varepsilon) = 0, & (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ v^\varepsilon(0, z) = u^{\text{in}}(z), & z \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Ainsi,  $v^\varepsilon$  ne dépend plus de  $\varepsilon$  et donc  $u^\varepsilon$  peut s'écrire comme la composée d'un profil  $v = v^\varepsilon$  et du flot associé au champ de vecteurs  $b/\varepsilon$ . Les champs de matrices  $D$  qui assurent la propriété de commutation sont caractérisés dans la proposition suivante, voir Proposition 2.2.1 pour plus de détails.

**Proposition 3.2.1.** *On considère un champ de vecteurs à divergence nulle  $c \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^m)$ , à croissance au plus linéaire et  $A \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$  un champ de matrices.*

1. *Le commutateur entre l'opérateur de transport  $c \cdot \nabla_y$  et l'opérateur de diffusion  $\text{div}_y(A\nabla_y)$  est toujours un opérateur de diffusion, et on a*

$$[c \cdot \nabla_y, \text{div}_y(A\nabla_y)] = \text{div}_y([c, A]\nabla_y) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$$

où le champ de diffusion associé est défini par le crochet entre le champ de vecteurs  $c$  et le champ de matrices  $A$

$$[c, A] := (c \cdot \nabla_y)A - \partial_y c A - A^t \partial_y c \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m).$$

2. *Les points suivants sont équivalents*

(a) *On a  $[c, A] = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$*

(b) *Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on a  $G(s)A = A$ , où la famille d'opérateurs linéaires  $(G(s))_s$ , agissant sur les champs de matrices, est définie par*

$$(G(s)A)(y) := \partial Y^{-1}(s; y)A(Y(s; y)) {}^t \partial Y^{-1}(s; y), \quad (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m. \quad (3.2)$$

Motivé par le cas où les opérateurs commutent, on effectue l'analyse asymptotique non pas de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  mais plutôt de la famille de fonctions  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  données par

$$v^\varepsilon(t, z) = u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)), \quad (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \quad \varepsilon > 0.$$

On espère que la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  converge quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. En fait, lorsque les opérateurs  $b \cdot \nabla_y$  et  $\operatorname{div}_y(D\nabla_y)$  ne commutent pas, le comportement asymptotique de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, peut être décrit de la même façon que précédemment, c'est à dire comme la composée d'un profil  $v$  et du flot associé à  $b/\varepsilon$ . Ce profil  $v$  est la solution d'une équation de diffusion avec un nouveau champ de diffusion  $\langle D \rangle$ , qui apparaît comme la projection orthogonale de  $D$  sur le sous-espace des champs de matrices qui sont laissés invariants par la famille  $(G(s))_s$  dans (3.2), par rapport à un certain produit scalaire à préciser. La définition de  $\langle D \rangle$  est donnée par (3.5). On effectue le changement de variable  $z = Y(-t/\varepsilon; y)$  dans (3.1), pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , et en appliquant les règles de dérivation d'un produit de composition (voir (2.7)), on est amené à un problème à deux échelles en temps

$$\begin{cases} \partial_t v^\varepsilon - \operatorname{div}_z((G(t/\varepsilon)D)\nabla_z v^\varepsilon) = 0, & (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ v^\varepsilon(0, z) = u^\varepsilon(0, z) = u^{\text{in}}(z), & z \in \mathbb{R}^m, \varepsilon > 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est défini par (3.2). Une approche deux échelles, basée sur un développement de Hilbert, nous amène formellement au problème effectif suivant

$$\begin{cases} \partial_t v - \operatorname{div}_z(\langle D \rangle \nabla_z v) = 0, & (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \\ v(0, z) = u^{\text{in}}(z), & z \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (3.4)$$

où le champ de diffusion effectif  $\langle D \rangle$  est donné par la moyenne en temps long

$$\langle D \rangle = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s)D \, ds. \quad (3.5)$$

**Remarque 3.2.2.** *Le calcul d'un tel champ de matrices moyenné ne dépend pas de la condition initiale  $u^{\text{in}}$ . Ainsi, un pré-calcul du champ de matrices moyenné est possible à partir seulement de  $D$  et  $b$ .*

L'existence d'un tel champ de matrices  $\langle D \rangle$  est assurée par le théorème ergodique de von Neumann, voir Théorème 2.2.5 et Théorème A.1.8. En effet, la famille d'opérateurs linéaires  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  définie par (3.2) est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires dans un espace de Hilbert bien choisi  $H_Q$ , voir 2.3.1 et (3.19) pour un exemple. L'existence d'un tel espace de Hilbert n'est pas toujours assuré, ainsi le champ de matrices moyenné (3.5) n'est pas toujours bien défini, voir Section 3.3.3 pour un contre exemple ou le Chapitre 2 pour des conditions suffisantes à l'existence de (3.5). Le champ de matrices moyenné (3.5) peut être interprété comme la projection de  $D$  sur le noyau du générateur infinitésimal  $L$  associé à  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ . On a une description de la restriction de l'opérateur  $L$  aux champs de matrices réguliers à support compact comme l'opérateur de transport

$$L(A) = [b, A] = (b \cdot \nabla_y)A - \partial_y b A - A {}^t \partial_y b, \quad A \in C_c^1(\mathbb{R}^m). \quad (3.6)$$

Cette expression de  $L$  sera utile lors du calcul du groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ , voir Section 3.3. On peut maintenant décrire le comportement de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. Il a été montré au Chapitre 2 que, pour toute condition initiale  $u^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , la famille  $(v^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  solution de l'équation (3.3) converge fortement dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ , vers l'unique solution  $v \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$  de (3.4). En fait, si on considère  $T > 0$ , il existe une constante  $C_T > 0$  telle que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\sup_{t \in [0, T]} \|v^\varepsilon(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq C_T \varepsilon$$

et

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u^\varepsilon(t, \cdot) - v(t, Y(-t/\varepsilon; \cdot))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq C_T \varepsilon. \quad (3.7)$$

### 3.3 Calcul du moyenné d'un champ de matrices

Dans cette section, on propose une méthode numérique permettant le calcul du moyenné d'un champ de matrices (3.5). Si  $D : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  est un champ de matrices, le calcul du champ de matrices  $\langle D \rangle$  défini par (3.5) se fait en deux étapes. La première consiste en le calcul numérique du champ de matrices  $G(s)D = (G(s)D)(y)$  à l'aide de la connaissance du générateur infinitésimal associé  $L$  donné par (3.6). La seconde en le calcul de la moyenne en temps long par une méthode de quadrature. La méthode est présentée à la Section 3.3.1 et le schéma numérique associé est décrit à la Section 3.3.2. On teste l'efficacité de la méthode proposée à la Section 3.3.3 pour plusieurs champs de vecteurs  $b$ . Les cas où le flot associé au champ de vecteurs  $b$  est connu de manière explicite nous permettent, à travers la formule (3.2), d'obtenir des solutions de référence pour le calcul du groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ . Enfin, il nous a semblé intéressant de présenter un exemple de champ de vecteurs  $b$  pour lequel le champ de matrices moyenné n'est pas bien défini, on propose un tel exemple à la Section 3.3.3.

#### 3.3.1 Calcul du champ de matrices $G(s)D$

Soit  $S > 0$  fixé et  $D \in C_c^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$  un champ de matrices régulier à support compact. Le champ de matrices  $G(s)D$  où  $s \in [0, S]$ , est lié au générateur infinitésimal  $L$  du groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  par l'équation d'évolution suivante

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} G(s)D = L(G(s)D), & s \in [0, S] \\ G(0)D = D. \end{cases}$$

De plus, l'opérateur  $L$  est un opérateur de transport dont l'expression est explicitement donnée à travers l'expression du champ de vecteurs  $b$  et de ses dérivées partielles par rapport à  $y$ , voir (3.6). Cela nous amène à résoudre l'équation aux dérivées partielles sur les champs de matrices  $A(s, y) := (G(s)D)(y)$ ,  $(s, y) \in [0, S] \times \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} A(s, y) = (b \cdot \nabla_y) A(s, y) - \partial_y b(y) A(s, y) - A(s, y)^t \partial_y b(y), & (s, y) \in [0, S] \times \mathbb{R}^m \\ A(0, y) = D(y), & y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (3.8)$$

La résolution de cette équation se fera à l'aide d'un schéma de type semi-Lagrangien, voir [42]. Les avantages des méthodes semi-Lagrangiennes sont multiples : contrairement aux méthodes Eulériennes, ces méthodes ne sont pas contraintes, par construction, par une condition CFL, elles sont d'ordre arbitrairement élevé et sont connues pour être moins diffusives que les méthodes Eulériennes standards comme par exemple les schémas upwind pour le transport. Afin d'éviter d'avoir des coûts de calcul trop prohibitifs, il est préférable de ne pas travailler avec une résolution en espace trop petite. Cela nous impose l'utilisation d'une méthode d'ordre élevé (quatre en pratique) lors du calcul du champ de diffusion  $G(s)D$  pour  $s \in [0, S]$ . D'autre part le calcul numérique de la moyenne de la quantité  $G(s)D$  impose que le schéma utilisé ne soit pas trop diffusif. Toutes ces remarques nous ont amené à produire un schéma numérique basé sur une méthode semi-Lagrangienne pour la résolution de (3.8). Pour ce faire, on réécrit l'équation (3.8) à l'aide du changement de coordonnées Lagrangien  $y = Y(-s; z)$

pour  $(s, z) \in [0, S] \times \mathbb{R}^m$ . En posant  $B(s, z) := A(s, Y(-s; z))$  on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} B(s, z) = -\partial_y b(Y(-s; z)) B(s, z) - B(s, z)^t \partial_y b(Y(-s; z)), & (s, z) \in [0, S] \times \mathbb{R}^m \\ B(0, z) = D(z), & y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (3.9)$$

La résolution de l'équation différentielle ordinaire (3.9) sera réalisée à l'aide d'un schéma Runge-Kutta d'ordre quatre. Le retour aux coordonnées de départ, c'est-à-dire le calcul de  $A(s_0, y) = B(s_0, Y(s_0; y))$  pour  $s_0 \in [0, S]$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , sera réalisé par un schéma semi-Lagrangien. Le flot  $Y(s_0; y)$  sera calculé par un solveur Runge-Kutta, et l'étape d'interpolation permettant la reconstruction de  $B(s_0, Y(s_0; y))$  à partir des valeurs de  $B(s_0, \cdot)$  sera réalisée par interpolation Lagrangienne. Cette dernière étape peut s'interpréter comme la résolution de l'équation de transport

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} C(s, y) = (b \cdot \nabla_y) C(s, y), & (s, y) \in [0, S] \times \mathbb{R}^m \\ C(0, y) = B(s_0, y), & y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (3.10)$$

En effet, en appliquant la méthode des caractéristiques à (3.10), on obtient  $C(s_0, y) = B(s_0, Y(s_0; y)) = A(s_0, y)$ . On détaille la construction de l'ensemble du schéma dans la Section 3.3.2.

### 3.3.2 Schéma numérique pour le calcul de $\langle D \rangle$

Par soucis de simplicité, le schéma sera présenté dans le cadre de la dimension  $m = 2$ , mais s'applique facilement en dimension quelconque  $m \geq 3$ . Des exemples d'utilisation de ce schéma en dimension  $m = 4$  sont donnés à la Section 3.3.3. Le domaine spatial d'étude numérique sera un carré  $\mathcal{C} = [-R, R] \times [-R, R]$ , pour  $R > 0$ . Soient  $S > 0$ ,  $N_s \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{I}_s = \{0, \dots, N_s\}$ . On se donne une discrétisation régulière  $(s^k)_{k \in \mathcal{I}_s}$  de l'intervalle  $[0, S]$  de pas  $\Delta s = S/N_s$ , ainsi  $s^k = k\Delta s$  pour tout  $k \in \mathcal{I}_s$ . De même, on définit  $s^{k+1/2} = (k+1/2)\Delta s$  pour tout  $k \in \{0, \dots, N_s - 1\}$ . Soient  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{I} = \{0, \dots, N\}$ . On se donne une discrétisation cartésienne régulière  $(y_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{I}^2}$  du carré  $\mathcal{C}$ , avec  $i, j \in \mathcal{I}$ . Le pas de cette discrétisation spatiale est  $\Delta y = 2R/N$ , et  $y_{ij} = (-R + i\Delta y, -R + j\Delta y)$  pour tout  $(i, j) \in \mathcal{I}^2$ .

#### Résolution du système (3.9)

En vue de déterminer une approximation des quantités  $B(s^k, y_{ij})$ , pour  $k \in \mathcal{I}_s$  et  $(i, j) \in \mathcal{I}^2$ , on introduit les matrices  $B_{ij}^k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . La résolution approchée du système (3.9) en tout point  $y_{ij}$  fixé,  $i, j \in \mathcal{I}$ , se fait à l'aide d'un solveur Runge-Kutta 4. On définit l'application  $\mathcal{F}_{y_{ij}} : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $(s, M) \mapsto -\partial_y b(Y(-s; y_{ij})) M - M^t \partial_y b(Y(-s; y_{ij}))$ . Le schéma s'écrit

$$\begin{aligned} B_{ij}^0 &= \begin{pmatrix} D_{11}(y_{ij}) & D_{12}(y_{ij}) \\ D_{21}(y_{ij}) & D_{22}(y_{ij}) \end{pmatrix} \\ B_{ij}^{k+1} &= B_{ij}^k + \frac{\Delta s}{6} (\mathbf{k}_{1,ij} + 2\mathbf{k}_{2,ij} + 2\mathbf{k}_{3,ij} + \mathbf{k}_{4,ij}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{1,ij} &= \mathcal{F}_{y_{ij}}(s^k, B_{ij}^k) \\ \mathbf{k}_{2,ij} &= \mathcal{F}_{y_{ij}}\left(s^{k+1/2}, B_{ij}^k + \frac{\Delta s}{2} \mathbf{k}_{1,ij}\right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_{3,ij} = \mathcal{F}_{y_{ij}} \left( s^{k+1/2}, B_{ij}^k + \frac{\Delta s}{2} \mathbf{k}_{2,ij} \right)$$

$$\mathbf{k}_{4,ij} = \mathcal{F}_{y_{ij}} \left( s^{k+1}, B_{ij}^k + \Delta s \mathbf{k}_{3,ij} \right).$$

A chaque itération de ce schéma, le calcul du flot  $Y(s; \cdot)$  associé au champ de vecteurs  $b$  est nécessaire aux temps  $s = -s^k$ ,  $s = -s^{k+1/2}$  et  $s = -s^{k+1}$ .

**Reconstruction de la solution de l'équation (3.8)**

En vue de déterminer une approximation des quantités  $A(s^k, y_{ij})$  pour  $k \in \mathcal{I}_s$  et  $(i, j) \in \mathcal{I}^2$ , on introduit les matrices  $A_{ij}^k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Etant donné que  $A(s^k, y_{ij}) = B(s^k, Y(s^k; y_{ij}))$ , on commence par reconstruire les valeurs du flot  $Y(s; \cdot)$  à l'instant  $s = s^k$ , en tout point  $y_{ij}$ ,  $(i, j) \in \mathcal{I}^2$  à l'aide du solveur Runge-Kutta 4. L'idée est alors d'utiliser les approximations  $B_{lm}^k$  de  $B(s^k, y_{lm})$  pour reconstruire  $B(s^k, Y(s^k; y_{ij}))$ . Ainsi, une fois localisé le point  $Y(s^k; y_{ij})$ , on lui affecte une valeur par interpolation à partir des évaluations de  $B(s^k, \cdot)$  sur les points  $y_{lm}$  voisins de  $Y(s^k; y_{ij})$ . Plus précisément, l'interpolation choisie sera de type cubique Lagrangienne et nécessite la connaissance de 16 valeurs aux points du maillage encadrant  $Y(s^k; y_{ij})$ . On nommera  $\mathfrak{S}$  le stencil associé, voir Figure 3.1. Plus précisément, on

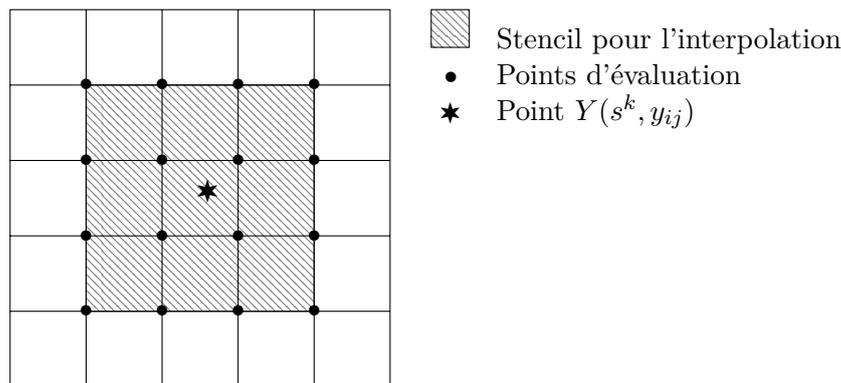


FIGURE 3.1 – Stencil  $\mathfrak{S}$

interpole la valeur de la fonction  $B(s^k, \cdot)$  au point  $Y(s^k; y_{ij})$  à l'aide d'une fonction du type  $P(y_1, y_2) = \sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq 3} a_{\alpha\beta} y_1^\alpha y_2^\beta$ . Les coefficients  $a_{\alpha\beta}$  pour  $0 \leq \alpha, \beta \leq 3$  sont calculés à l'aide des 16 valeurs  $B_{ij}^k$ , telles que  $y_{ij} \in \mathfrak{S}$ , en résolvant le système linéaire associé aux équations

$$\sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq 3} a_{\alpha\beta} (y_{ij})_1^\alpha (y_{ij})_2^\beta = B_{ij}^k, \quad y_{ij} \in \mathfrak{S}.$$

Cette interpolation Lagrangienne procure une approximation d'ordre quatre pour des données régulières.

**Calcul de  $\langle D \rangle$**

Le calcul de  $\langle D \rangle$  résultera d'une intégration numérique de  $s \mapsto G(s)D$  sur  $[0, S]$ . En pratique, on choisit une méthode de quadrature de type Newton-Cotes à quatre points, qui est d'ordre cinq en temps, pour plus de détails sur ces méthodes voir [35]. On note  $\tilde{D}_{ij}$ , pour  $i, j \in \mathcal{I}$ ,

un élément de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  approchant  $\langle D \rangle(y_{ij})$ . La méthode de quadrature prise aux valeurs approchées  $A_{ij}^k$  calculées à la 3.3.2 s'écrit

$$\tilde{D}_{ij} = \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{N_s/4-1} 4\Delta t \sum_{l=0}^4 \omega_l A_{ij}^{4k+l}$$

où les coefficients de quadrature sont donnés par  $\omega_0 = \omega_4 = \frac{7}{90}$ ,  $\omega_1 = \omega_3 = \frac{16}{45}$  et  $\omega_2 = \frac{2}{15}$ .

### 3.3.3 Calculs numériques et exemples

Dans cette section, on teste la méthode proposée pour le calcul du moyenné d'un champ de matrices. Soit  $\langle D \rangle(y)$  le moyenné exact associé à  $D(y)$  et  $\tilde{D}$  le moyenné approché par le schéma numérique. L'erreur entre ces deux quantités sera localisée à un domaine  $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$  qui est laissé stable par le flot associé au champ de vecteurs  $b$ , i.e  $Y(s; \mathcal{S}) = \mathcal{S}$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $|A| = \sqrt{A : A}$ , on définit l'erreur relative basée sur la norme  $L^2$  discrète

$$\text{Erreur } L^2 = \sqrt{\frac{\sum_{(i,j) \in \mathcal{S}} |\langle D \rangle(y_{ij}) - \tilde{D}_{ij}|^2}{\sum_{(i,j) \in \mathcal{S}} |\langle D \rangle(y_{ij})|^2}}. \quad (3.12)$$

#### Flot ellipsoïdal en dimension 2

On considère le champ de vecteurs Hamiltonien  $b(y_1, y_2) = (\partial_{y_2} H(y), -\partial_{y_1} H(y))$ , pour tout  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , avec

$$H(y) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_1y_2, \quad y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

La fonction  $H$  est une intégrale première coercive associée à  $b$ . On note  $Y$  le flot associé au champ de vecteurs  $b$ . Les courbes caractéristiques associées sont des ellipses du plan, le flot  $Y(s; y) = \mathcal{E}(s)y$  associé est  $4\pi/\sqrt{3}$ -périodique, et on a

$$\mathcal{E}(s) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) & \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) & \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \end{pmatrix}.$$

A l'aide de (3.2) on a

$$\langle D \rangle = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \int_0^{4\pi/\sqrt{3}} G(s)D \, ds = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \int_0^{4\pi/\sqrt{3}} \mathcal{E}(-s) D(Y(s; y)) {}^t\mathcal{E}(-s) \, ds = \begin{pmatrix} \langle D \rangle_{11} & \langle D \rangle_{12} \\ \langle D \rangle_{21} & \langle D \rangle_{22} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} \langle D \rangle_{11} &= \frac{1}{2} \left\langle D_{11}[1 + \cos(\sqrt{3}\cdot)] \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle (D_{11} + D_{21} + D_{12}) \sin(\sqrt{3}\cdot) \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{6} \left\langle (D_{11} + 2(D_{21} + D_{12}) + 4D_{22})[1 - \cos(\sqrt{3}\cdot)] \right\rangle \\ \langle D \rangle_{21} &= \frac{1}{2} \left\langle D_{21}[1 + \cos(\sqrt{3}\cdot)] \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle (D_{11} - D_{22}) \sin(\sqrt{3}\cdot) \right\rangle \\ &\quad - \frac{1}{6} \left\langle (2D_{11} + D_{21} + 4D_{12} + 2D_{22})[1 - \cos(\sqrt{3}\cdot)] \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle D \rangle_{12} &= \frac{1}{2} \left\langle D_{12}[1 + \cos(\sqrt{3} \cdot)] \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle (D_{11} - D_{22}) \sin(\sqrt{3} \cdot) \right\rangle \\ &\quad - \frac{1}{6} \left\langle (2D_{11} + 4D_{21} + D_{12} + 2D_{22})[1 - \cos(\sqrt{3} \cdot)] \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle D \rangle_{22} &= \frac{1}{2} \left\langle D_{22}[1 + \cos(\sqrt{3} \cdot)] \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle (D_{21} + D_{12} + D_{22}) \sin(\sqrt{3} \cdot) \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{6} \left\langle (4D_{11} + 2(D_{21} + D_{12}) + D_{22})[1 - \cos(\sqrt{3} \cdot)] \right\rangle \end{aligned}$$

et pour toute fonction  $h$ , on note  $\langle D_{ij}h(\cdot) \rangle = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \int_0^{4\pi/\sqrt{3}} D_{ij}(Y(s; y))h(s) ds$ ,  $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ . Enfin, notons que si  $D_{11}, D_{21}, D_{12}, D_{22}$  sont constantes le long du flot  $Y(s; \cdot)$  (c'est-à-dire, lorsque  $D_{11}, D_{21}, D_{12}, D_{22}$  dépendent uniquement de la quantité  $y_1^2 + y_2^2 + y_1y_2$ ), l'expression de  $\langle D \rangle$  se réduit à

$$\langle D \rangle = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(D_{11} + D_{22}) + \frac{1}{3}(D_{21} + D_{12}) & -\frac{1}{3}(D_{11} + D_{22}) + \frac{1}{3}(D_{12} - 2D_{21}) \\ -\frac{1}{3}(D_{11} + D_{22}) + \frac{1}{3}(D_{21} - 2D_{12}) & \frac{2}{3}(D_{11} + D_{22}) + \frac{1}{3}(D_{21} + D_{12}) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

On considère les deux champs de matrices suivants

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_2(y) = \begin{pmatrix} 3 + \cos(\kappa(y_1^2 - y_2^2)) & \cos(y_1^2 - 2y_2) \\ \sin(2y_1 - y_2) & 3 + \sin(\kappa(y_1^2 - y_2)) \end{pmatrix} \quad \text{avec } \kappa = 25.$$

L'expression explicite de  $\langle D_2 \rangle$  est connue à quadrature près à travers les expressions ci-dessus, et le moyenné de  $D_1$  est donné par

$$\langle D_1 \rangle = \begin{pmatrix} 11/3 & -7/3 \\ -4/3 & 11/3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que l'erreur globale temps-espace commise lors du calcul numérique de  $\langle D \rangle$  est bien de la forme  $\mathcal{O}(\Delta s^4) + \mathcal{O}(\Delta y^4)$ . On choisit  $\mathcal{C} = [-1; 1]^2$  et  $\Delta s = \Delta y$ . La Figure 3.2 représente

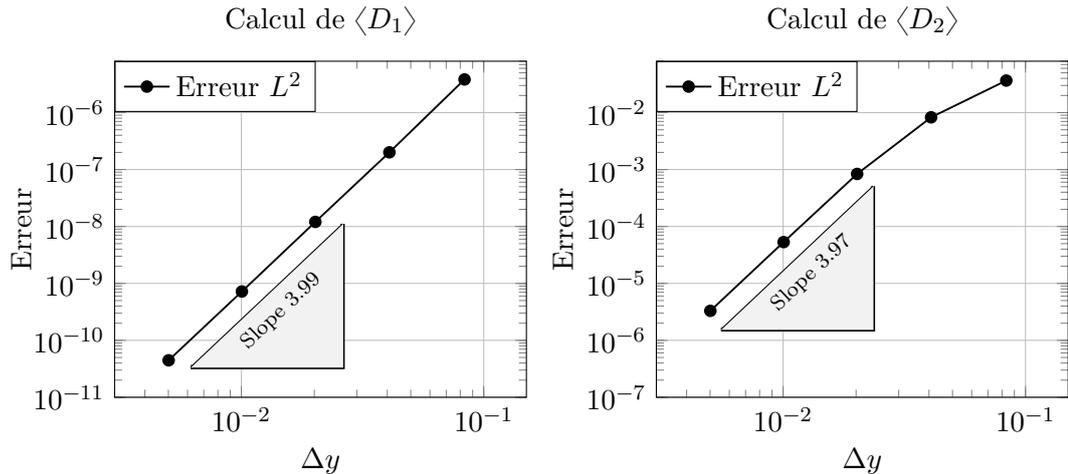


FIGURE 3.2 – A gauche : erreur  $L^2$  lors de l'approximation de  $\langle D_1 \rangle$ . A droite : erreur  $L^2$  lors de l'approximation de  $\langle D_2 \rangle$ .

les erreurs relatives commises lors de l'utilisation de la méthode présentée à la Section 3.3.2.

Le graphique de gauche fait apparaître une erreur d'ordre  $\mathcal{O}(\Delta y^4)$ . Dans cet exemple seule l'erreur en temps due à la résolution de l'équation différentielle (3.9) par le schéma Runge-Kutta 4 (3.11) apparaît. En effet, le champ  $D_1$  étant constant et la Jacobienne du champ  $b$  étant également constante, la solution du système (3.9) ne dépend pas de variable  $y$ . Dans ce cas, la phase d'interpolation présentée à la Section 3.3.2 est exacte. Le graphique de droite représente l'erreur commise pour le calcul du moyenné du champ de matrices  $D_2$  non constant, mais régulier. L'erreur d'interpolation est d'ordre  $\mathcal{O}(\Delta y^4)$  et l'erreur globale temps-espace est  $\mathcal{O}(\Delta y^4)$ .

### Flot central non explicite

On considère le champ de vecteurs Hamiltonien  $b(y_1, y_2) = (\partial_{y_2} H(y), -\partial_{y_1} H(y))$ , pour tout  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , avec pour Hamiltonien  $H$  une fonction homogène de degré deux, i.e.  $H(\lambda y_1, \lambda y_2) = \lambda^2 H(y_1, y_2)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$H(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{y_1 y_2 (y_1^2 - y_2^2)}{y_1^2 + y_2^2}, \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\}, \quad \text{et} \quad H(0, 0) = 0. \quad (3.14)$$

La fonction  $H$  est  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\}$  et est une intégrale première coercive associée à  $b$ . On note  $Y$  le flot associé au champ de vecteurs  $b$ . Les courbes caractéristiques associées sont des courbes fermées du plan et le flot  $Y(s; \cdot)$  associé est périodique. Une représentation de ces courbes est donnée par la Figure 3.3. En coordonnées polaires, la fonction  $\bar{H}$  définie par

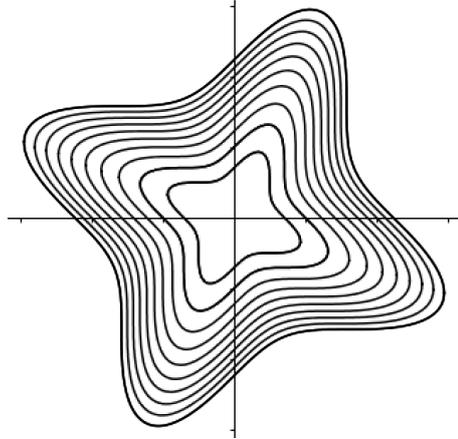


FIGURE 3.3 – Lignes de niveaux de la fonction (3.14)

$H(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \bar{H}(r, \theta)$ , pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ , s'écrit

$$\bar{H}(r, \theta) = r^2 \left( \frac{1}{2} + g(\theta) \right) \quad \text{avec} \quad g(\theta) = \frac{1}{4} \sin(4\theta).$$

La période  $T(l)$  associée à chaque courbe intégrale  $H = l$ ,  $l \geq 0$  car  $\min_{\mathbb{R}^2} H = 0$ , est constante  $T(l) = T$ . En effet, on peut calculer  $T$ , voir [52], à l'aide de la formule suivante

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + 2g(\theta)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \frac{1}{2} \sin(4\theta)} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

Le champ de matrices moyenné associé au champ de matrices  $D$  est donné, grâce à (3.2), par

$$\langle D \rangle = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \int_0^{4\pi/\sqrt{3}} G(s) D \, ds = \begin{pmatrix} \langle D \rangle_{11} & \langle D \rangle_{12} \\ \langle D \rangle_{21} & \langle D \rangle_{22} \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, l'expression explicite du flot  $Y$  n'est pas accessible et donc l'expression explicite de  $G(s)D$  n'est pas accessible non plus. Si le champ de matrices  $D$  est constant, on peut tout même espérer obtenir des informations sur le champ de matrices moyenné associé. Du fait que l'Hamiltonien (3.14) soit homogène de degré deux, on déduit que  $b(\lambda y) = \lambda b(y)$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}^2$ . Ainsi, on a

$$Y(s; \lambda y) = \lambda Y(s; y), \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2. \quad (3.15)$$

Par différentiation de l'égalité (3.15) par rapport à  $y$ , on obtient

$$\partial Y(s, \lambda y) = \partial Y(s, y), \text{ pour tout } \lambda \neq 0, y \in \mathbb{R}^2.$$

Si  $D(\lambda y) = D(y)$ , pour tout  $\lambda \neq 0$  et  $y \in \mathbb{R}^2$ , alors, la formule (3.2) implique que  $\langle D \rangle(\lambda y) = \langle D \rangle(y)$  pour tout  $\lambda \neq 0$  et  $y \in \mathbb{R}^2$ . Donc, on s'attend à ce que le moyenné suivant le champ de vecteurs  $b$  d'un champ de matrices constant, soit constant sur les droites passant par l'origine, avec une discontinuité en  $y = (0, 0)$ . En effet, l'Hamiltonien  $H$  n'étant pas  $C^2$  en l'origine, le champ moyenné  $\langle D \rangle$  n'est pas continu au point  $y = (0, 0)$ . On teste le schéma de la Section 3.3.2 pour le champ de matrices :  $D = I_2$ . On choisit  $\mathcal{C} = [-1; 1] \times [-1; 1]$  comme domaine numérique. La Figure 3.4 représente les coefficients du champ de matrices  $\langle I_2 \rangle$  localisés à

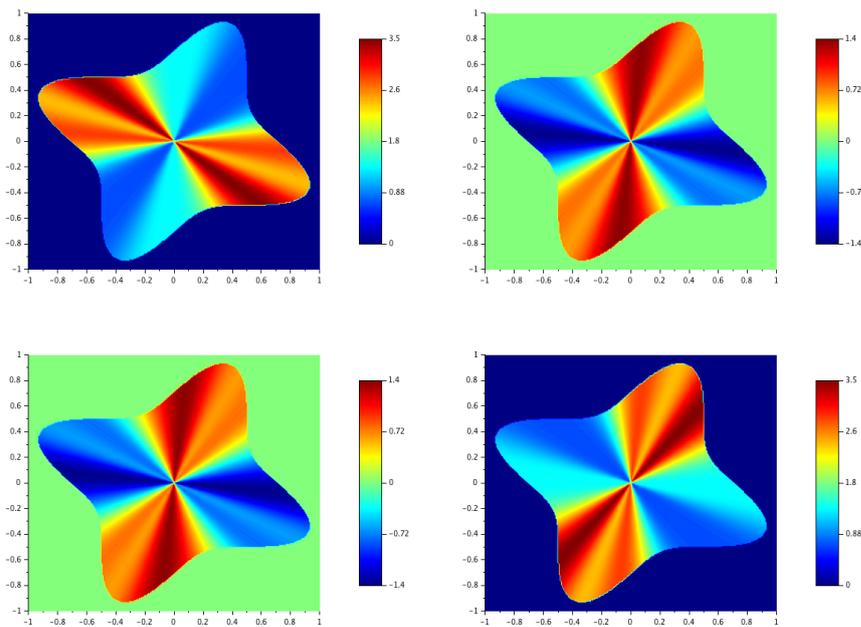
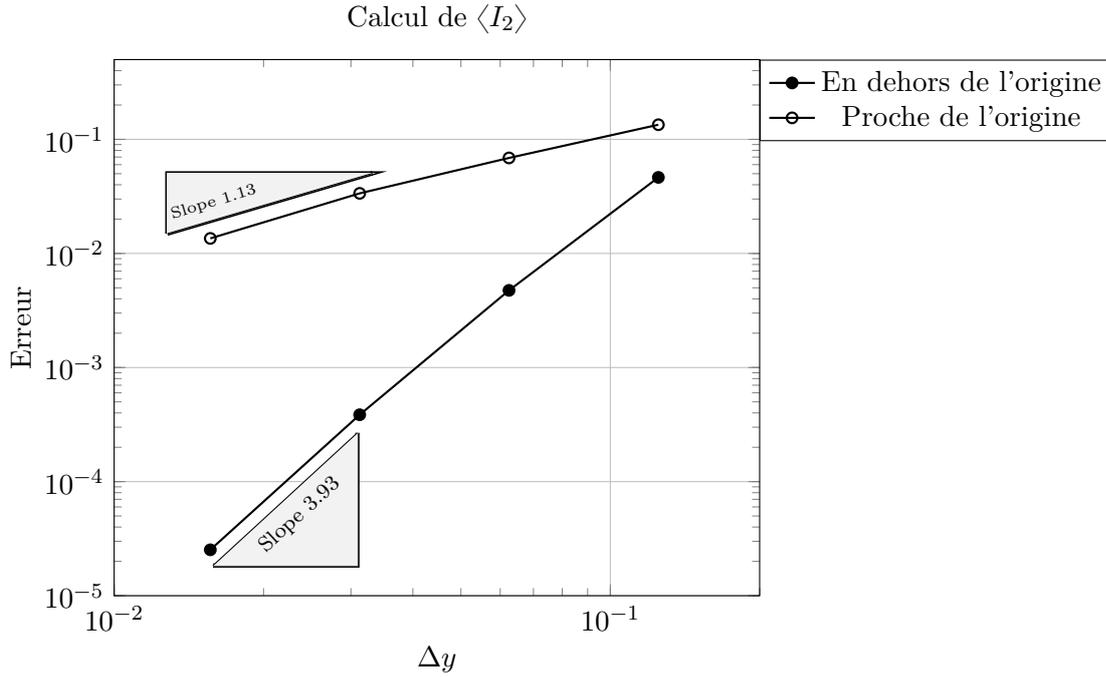


FIGURE 3.4 – Coefficients du moyenné de l'identité, de gauche à droite et haut en bas, on a  $\langle I_2 \rangle_{11}$ ,  $\langle I_2 \rangle_{12}$ ,  $\langle I_2 \rangle_{21}$  et  $\langle I_2 \rangle_{22}$ .

un domaine stable le long du flot associé à  $b$ . On remarque que chaque coefficient de  $\langle I_2 \rangle$  est bien constant le long des droites passant par l'origine du repère avec une discontinuité en  $y = (0, 0)$ . Dans la Figure 3.5, on observe l'ordre de convergence de la méthode pour  $\Delta s = \Delta y$ , la solution de référence est obtenue en utilisant le schéma avec un maillage spatial où  $N = 512$ . Le défaut de régularité de la solution en l'origine entraîne une diminution de l'ordre de convergence. Si on calcule l'erreur en dehors d'un petit boule entourant l'origine on trouve l'ordre espéré  $\mathcal{O}(\Delta s^4 + \Delta y^4)$ .

FIGURE 3.5 – Etude de l'erreur relative commise lors du calcul de  $\langle I_2 \rangle$ 

### Equation de Fokker-Planck

Dans cette exemple, on cherche à approcher le champ de diffusion effectif associé à un modèle décrivant l'évolution d'une densité de particules chargées sous l'action d'un champ magnétique intense en tenant compte des collisions. On suppose que le champ magnétique  $B^\varepsilon$  est uniforme, défini par  $B^\varepsilon = (0, 0, B/\varepsilon)$ ,  $B > 0$ , et le champ électrique est donné par  $E(t, x) = (E_1(t, x), E_2(t, x), 0)$  avec  $t > 0$  et  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . On se placera dans le régime asymptotique du rayon de Larmor fini, dans lequel la longueur caractéristique dans les directions orthogonales au champ magnétique est beaucoup plus petite que la longueur caractéristique dans les directions parallèles. La fonction de densité de présence d'une particule chargée  $f^\varepsilon$  satisfera alors l'équation de Fokker-Planck

$$\partial_t f^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(v_1 \partial_{x_1} + v_2 \partial_{x_2})f^\varepsilon + \frac{q}{m}E \cdot \nabla_v f^\varepsilon + \frac{qB}{m\varepsilon}(v_2 \partial_{v_1} - v_1 \partial_{v_2})f^\varepsilon = \nu \operatorname{div}_v \{ \Theta \nabla_v f^\varepsilon + v f^\varepsilon \}. \quad (3.16)$$

Ici  $m$  est la masse d'une particule,  $q$  sa charge,  $\nu$  est la fréquence de collision et  $\Theta$  est la température. L'opérateur de transport associé à la partie raide de l'équation (3.16) est

$$b(x, v) \cdot \nabla_{x,v} = v_1 \partial_{x_1} + v_2 \partial_{x_2} + \omega_c (v_2 \partial_{v_1} - v_1 \partial_{v_2}), \quad \text{avec } \omega_c = \frac{qB}{m}, \quad (x, v) \in \mathbb{R}^4.$$

Le flot associé au champ de vecteurs  $b$  est noté

$$(x, v) = (x_1, x_2, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto Y(s; x, v) = (X(s; x, v), V(s; x, v)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

et peut être explicité

$$X(s; x, v) = x + \frac{\perp v}{\omega_c} - \frac{\mathcal{R}(-\omega_c s)}{\omega_c} \perp v, \quad V(s; x, v) = \mathcal{R}(-\omega_c s) v$$

où  $\mathcal{R}(\theta)$  est la rotation de  $\mathbb{R}^2$  d'angle  $\theta \in \mathbb{R}$ . On cherche à calculer numériquement le champ de diffusion effectif associé à l'opérateur de diffusion  $\operatorname{div}_v(\nabla_v \cdot) = \operatorname{div}_{x,v}(D\nabla_{x,v} \cdot)$  de l'équation (3.16), où le champ de diffusion  $D$  est défini par

$$D = \sum_{i=1}^2 e_{v_i} \otimes e_{v_i} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & I_2 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Pour plus de détails sur l'analyse asymptotique et le modèle effectif associé à (3.16) voir la Section 2.3.3 et [18]. La matrice Jacobienne associée au flot s'écrit

$$\partial_{x,v} Y(s; x, v) = \begin{pmatrix} I_2 & \frac{I_2 - \mathcal{R}(-\omega_c s)}{\omega_c} \mathcal{R}(-\pi/2) \\ 0_{2 \times 2} & \mathcal{R}(-\omega_c s) \end{pmatrix}$$

où  $0_{m \times n}$  est la matrice nulle à  $m$  lignes et  $n$  colonnes. Le flot est  $\frac{2\pi}{\omega_c}$ -périodique, et un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned} \langle D \rangle(x, v) &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (G(s)D)(x, v) \, ds \\ &= \frac{\omega_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_c} \partial_y Y(-s; Y(s; x, v)) \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & I_2 \end{pmatrix} {}^t \partial_y Y(-s; Y(s; x, v)) \, ds \\ &= \frac{1}{\omega_c^2} \begin{pmatrix} 2I_2 & -\omega_c \mathcal{R}(-\pi/2) \\ \omega_c \mathcal{R}(-\pi/2) & \omega_c^2 I_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le méthode présentée à la Section 3.3.2 peut s'appliquer une fois de plus dans cette situation où la moyenne en temps long se ramène à une moyenne sur une période. Il est toutefois intéressant de comprendre sur cette exemple périodique comment l'erreur numérique se comporte lorsque l'on calcule le moyenné d'un champ de matrices à l'aide de la moyenne en temps long. Cela peut être utile dans les cas où le flot associé à  $b$  est périodique de période inconnue. Dans la suite, on supposera que  $\omega_c = 1$ . En vue de pouvoir faire une étude théorique de l'erreur, on introduit quelques notations. On introduit l'ensemble

$$H_Q = \left\{ A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \text{ mesurable} : Q^{1/2} A Q^{1/2} \in L^2(\mathbb{R}^4) \right\} \quad (3.19)$$

où  $Q := \langle D \rangle^{-1}$ ,  $\langle D \rangle$  est un champ de matrices symétriques définies positives tel que  $\langle D \rangle \in \operatorname{Ker} L$ . L'ensemble  $H_Q$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(A, B)_{H_Q} := \int_{\mathbb{R}^4} (Q^{1/2} A Q^{1/2}) : (Q^{1/2} B Q^{1/2}) \, dy = \int_{\mathbb{R}^4} Q A : B Q \, dy, \quad \forall A, B \in H_Q,$$

la norme associée est notée  $\|A\|_{H_Q}$ . Il est montré à la Proposition 2.3.1 que le groupe d'opérateurs linéaires  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires sur  $H_Q$ . Le générateur infinitésimal  $L$  associé à  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est anti-adjoint dans  $H_Q$  et son noyau coïncide avec  $\{A \in H_Q \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m) : [b, A] = 0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)\}$ , voir le Chapitre 2 ou encore [19].

**Remarque 3.3.1.** Grâce à la Proposition 3.2.1, le noyau de  $L$  peut être interprété comme l'ensemble des champs de matrices  $A$  qui assurent la propriété de commutation entre les opérateurs  $b \cdot \nabla_y$  et  $\operatorname{div}_y(A \nabla_y)$ .

De plus, on a la décomposition suivante  $H_Q = \operatorname{Ker} L \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{Range} L}$ . En fait, dans le cas où chaque trajectoire associée au flot est périodique et que l'ensemble des périodes associées est

borné, alors l'opérateur  $L$  est d'image fermée, voir [16]. Ainsi, pour tout champ de matrices  $A \in H_Q$ , il existe  $C \in H_Q$  tel que

$$A = \langle A \rangle + L(C). \quad (3.20)$$

En remplaçant  $C$  par  $C - \langle C \rangle$ , on peut supposer que  $\langle C \rangle = 0$ . On rappelle que  $G(s) \langle A \rangle = \langle A \rangle$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , et donc, du fait que le groupe  $(G(s))_s$  est unitaire dans  $H_Q$ , on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{S} \int_0^S G(s) A \, ds - \langle A \rangle \right\|_{H_Q} &= \left\| \frac{1}{S} \int_0^S G(s) (L(C)) \, ds \right\|_{H_Q} \\ &= \left\| \frac{1}{S} \int_0^S \frac{d}{ds} G(s) C \, ds \right\|_{H_Q} \\ &= \left\| \frac{G(S)C - C}{S} \right\|_{H_Q} \\ &\leq \frac{2\|C\|_{H_Q}}{S}. \end{aligned}$$

Ainsi, au moins dans le cas périodique, l'erreur  $H_Q$  théorique sur  $\langle A \rangle$  est  $\mathcal{O}(\frac{1}{S})$ . Pour les simulations numériques, on localise l'erreur à une boule  $B_r = \{(x_1, x_2, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + v_1^2 + v_2^2 \leq r^2\}$  de rayon  $r > 0$ . On introduit la notation  $\|A\|_{H_{Q,r}} := \|\mathbf{1}_{B_r} A\|_{H_Q}$  pour tout champ de matrices  $A \in L^\infty(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$ . On étudie l'erreur numérique entre les quantités  $S \mapsto \frac{1}{S} \int_0^S G(s) A \, ds$  et  $\langle A \rangle$  pour  $A = \mathbf{1}_{B_r} D$ . Dans ce cas, la constante multiplicative devant le terme  $1/S$  peut être explicitée, à condition de pouvoir calculer les champs de matrices  $C$  et  $Q$ . On a

$$Q = \langle D \rangle^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 & \mathcal{R}(-\pi/2) \\ -\mathcal{R}(-\pi/2) & 2I_2 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Pour le champ de matrices  $D$  défini par (3.17), un calcul direct mène au champ de matrices

$$C = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & I_2 \\ I_2 & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

tel que  $D = \langle D \rangle + L(C)$  et  $\langle C \rangle = 0$ . La Figure 3.6 montre les erreurs relatives  $L^2$  et  $H_{Q,r}$  commises lors du calcul de (3.18) par une moyenne en temps long du champ de matrices (3.17). La résolution spatiale choisie est  $N_s = 10^3$  avec  $S = 500$ . La partie semi-Lagrangienne du schéma est réalisée par une interpolation linéaire. Le volume de  $B_r$  est noté  $\text{mes}(B_r)$ . Dans ce cas, les expressions (3.18), (3.21) and (3.22) mènent à

$$\|C\|_{H_{Q,r}} = \sqrt{\int_{B_r} QC : CQ \, dx dv} = \sqrt{\int_{B_r} 4 \, dx dv} = 2\sqrt{\text{mes}(B_r)}$$

et

$$\|\langle D \rangle\|_{H_{Q,r}} = \sqrt{\int_{B_r} Q \langle D \rangle : \langle D \rangle Q \, dx dv} = \sqrt{\int_{B_r} 4 \, dx dv} = 2\sqrt{\text{mes}(B_r)}.$$

Donc

$$\frac{\left\| \frac{1}{S} \int_0^S G(s) D \, ds - \langle D \rangle \right\|_{H_{Q,r}}}{\|\langle D \rangle\|_{H_{Q,r}}} \leq \frac{2}{S}, \quad \text{pour tout } S > 0.$$

On retrouve l'erreur relative  $H_{Q,r}$  espérée, voir Figure 3.6.

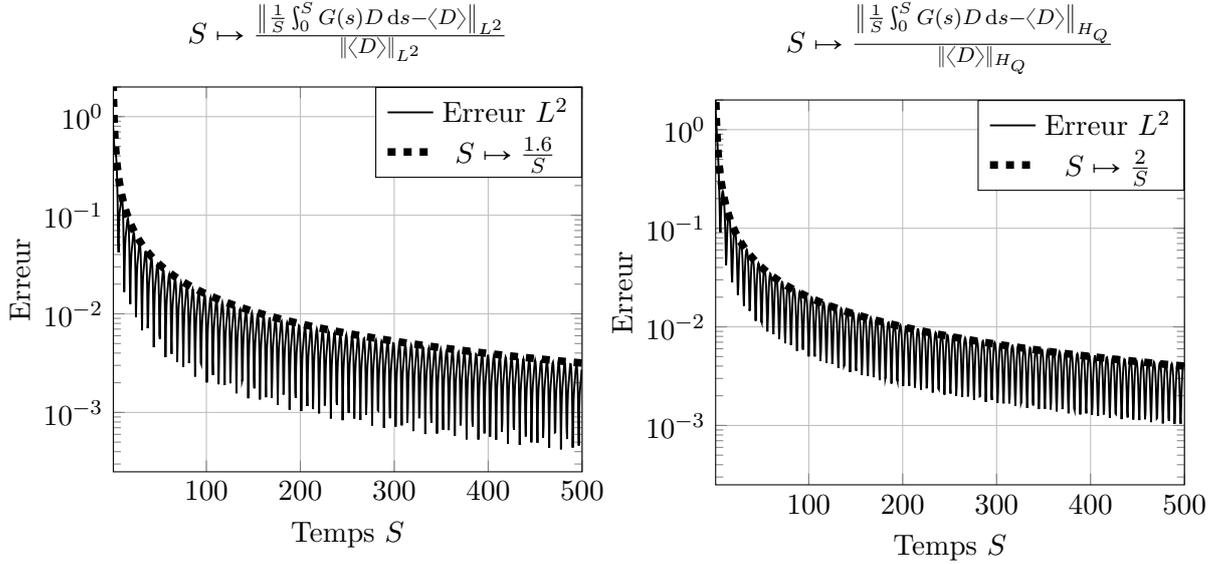


FIGURE 3.6 – Etude de l'évolution de l'erreur relative en temps long

### Flot presque périodique

On considère le champ de vecteurs  $b(y) = (y_2, -\omega_1^2 y_1, y_4, -\omega_2^2 y_3)$ , défini pour tout  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ , avec  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$  vérifiant la condition d'incommensurabilité  $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$ . La fonction  $\psi(y) = \omega_1^2 y_1^2 + y_2^2 + \omega_2^2 y_3^2 + y_4^2$ , avec  $y \in \mathbb{R}^4$ , est une intégrale première coercive associée au champ  $b$ . On note  $Y(s; y)$  le flot associé au champ  $b$ . On considère le champ de matrices constant  $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ . Le flot  $Y$  peut être explicité  $Y(s; y) = \mathcal{R}(-s; \omega_1, \omega_2)y$ ,  $(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$ , avec

$$\mathcal{R}(s; \omega_1, \omega_2) = \begin{pmatrix} \cos(s\omega_1) & -\frac{1}{\omega_1} \sin(s\omega_1) & 0 & 0 \\ \omega_1 \sin(s\omega_1) & \cos(s\omega_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(s\omega_2) & -\frac{1}{\omega_2} \sin(s\omega_2) \\ 0 & 0 & \omega_2 \sin(s\omega_2) & \cos(s\omega_2) \end{pmatrix}.$$

La condition d'incommensurabilité assure que le flot  $Y(s; \cdot)$  n'est pas périodique en la variable  $s$ , mais presque périodique. Pour plus d'informations sur les fonctions presque périodiques voir [31]. On a

$$\begin{aligned} \langle D \rangle &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) D(Y(s; \cdot))^t \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) ds \\ &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \mathcal{R}(s; \omega_1, \omega_2) D(Y(s; \cdot))^t \mathcal{R}(s; \omega_1, \omega_2) ds \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} D_{11} + \frac{1}{2\omega_1^2} D_{22} & \frac{1}{2} D_{12} - \frac{1}{2} D_{21} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} D_{21} - \frac{1}{2} D_{12} & \frac{\omega_1^2}{2} D_{11} + \frac{1}{2} D_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} D_{33} + \frac{1}{2\omega_2^2} D_{44} & \frac{1}{2} D_{34} - \frac{1}{2} D_{43} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} D_{43} - \frac{1}{2} D_{34} & \frac{\omega_2^2}{2} D_{33} + \frac{1}{2} D_{44} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour un tel flot  $Y$ , la moyenne ergodique ne se limite plus à la moyenne sur une période comme dans le cas périodique mais bien à une moyenne en temps long. On étudie l'erreur

en temps long commise lorsqu'on applique la méthode présentée à la Section 3.3.2 pour le champ de matrices  $D$  défini par

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la figure 3.7, on observe que l'erreur est en  $\mathcal{O}(\frac{1}{S})$  comme dans le cas périodique. En effet, le champ de matrices  $D$  est constant et le calcul d'un champ de matrices  $C$  qui satisfait à l'égalité (3.20) peut être réalisé en résolvant le système linéaire  $L(C) = D - \langle D \rangle$ .

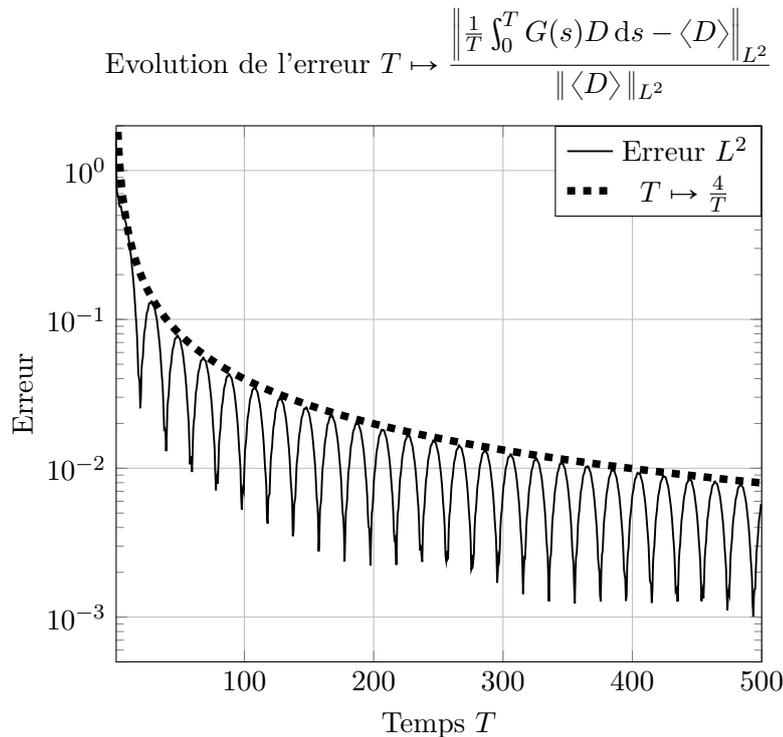


FIGURE 3.7 – Evolution de l'erreur relative en temps long

### Flot de cisaillement

Dans cet exemple, on propose un champ de vecteurs en dimension deux tel que le moyenné matriciel associé n'existe pas. En fait des hypothèses suffisantes à l'existence du moyenné d'un champ de matrices sont précisées dans le Chapitre 2. Elles reposent essentiellement sur l'existence d'une base de champs de vecteurs  $(b_i)_{1 \leq i \leq 2}$  en involution avec le champ  $b(y)$ , c'est-à-dire des champs assurant la commutation des opérateurs  $b(y) \cdot \nabla_y$  et  $b_i(y) \cdot \nabla_y$  pour tout  $1 \leq i \leq 2$ . On définit le champ de vecteurs  $b(y) = (y_2, -y_1)$  pour tout  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ . Dans ce cas le flot  $Y$  associé au champ de vecteurs  $b$  est donné par  $Y(s; y) = \mathcal{R}(-s)y$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ . De plus, on considère une fonction régulière paire  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $f(0) = 1$ ,  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in [1; +\infty[$  et strictement décroissante sur  $[0, 1]$ . Enfin, on introduit la fonction radiale  $T(y) = f(|y|)$  pour  $y \in \mathbb{R}^2$ . On note  $Z$  le flot associé au champ de vecteurs  $Tb$ . On a  $Z(s; y) = \mathcal{R}(-sT(y))y$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ . La fonction

$T$  est constante le long des flots  $Y$  et  $Z$ . On montre que le moyenné du champ  $D(y) = I_2$  suivant le champ de vecteurs  $Tb$  n'est pas bien défini, au sens de (3.5), sur  $B(0, 1)/\{(0, 0)\}$  où  $B(0, 1)$  est la boule unité ouverte de  $\mathbb{R}^2$ . En effet, en partant de l'expression du groupe (3.2) associé au champ de vecteurs  $Tb$  on obtient pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et tout  $y \in \mathbb{R}^2$

$$G(s)I_2 = \partial Z^{-1}(s; y)^t \partial Z^{-1}(s; y). \quad (3.23)$$

Un calcul direct montre que, pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et tout  $y \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\partial Z(s; y) = -s \mathcal{R}(\pi/2) Z(s; y) \otimes \nabla_y T(y) + \mathcal{R}(-sT(y)).$$

D'autre part, grâce à la relation  $\partial Z^{-1}(s; y) = \partial Z(-s; Z(s; y))$  valable pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , tout  $y \in \mathbb{R}^2$ , on obtient

$$\partial Z^{-1}(s; y) = s \mathcal{R}(\pi/2) y \otimes \nabla_y T(Z(s; y)) + \mathcal{R}(sT(y)). \quad (3.24)$$

Etant donné que  $\nabla_y T(y) = \frac{f'(|y|)}{|y|} y$ , on peut réécrire (3.24) de la manière suivante

$$\partial Z^{-1}(s; y) = \frac{s f'(|y|)}{|y|} \mathcal{R}(\pi/2) y \otimes Z(s; y) + \mathcal{R}(sT(y)). \quad (3.25)$$

En fin de compte, en combinant (3.23) et (3.25), un calcul direct nous mène à

$$G(s)I_2 = s^2 f'(|y|)^2 (b \otimes b)(y) + s f'(|y|) \begin{pmatrix} \frac{-2y_1 y_2}{|y|} & \frac{y_1^2 - y_2^2}{|y|} \\ \frac{y_1^2 - y_2^2}{|y|} & \frac{2y_1 y_2}{|y|} \end{pmatrix} + I_2. \quad (3.26)$$

En intégrant l'expression (3.26) par rapport à la variable  $s$  sur l'intervalle  $[0, S]$  avec  $S > 0$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}^2$ , on obtient

$$\frac{1}{S} \int_0^S (G(s)I_2)(y) ds = \frac{S^2}{3} f'(|y|)^2 (b \otimes b)(y) + \frac{S}{2} f'(|y|) \begin{pmatrix} \frac{-2y_1 y_2}{|y|} & \frac{y_1^2 - y_2^2}{|y|} \\ \frac{y_1^2 - y_2^2}{|y|} & \frac{2y_1 y_2}{|y|} \end{pmatrix} + I_2. \quad (3.27)$$

Ainsi  $\langle I_2 \rangle(0, 0) = I_2$  et  $\langle I_2 \rangle(y) = I_2$  pour tout  $y \in B(0, 1)^c$ . Mais, pour tout  $y \in B(0, 1)/\{(0, 0)\}$ , l'expression (3.27) n'a pas de limite quand  $S \rightarrow +\infty$ . Le moyenné du champ  $D = I_2$  selon le champ de vecteurs  $Tb$  n'est donc pas bien défini.

### 3.4 Comportement d'un problème parabolique avec un terme de transport raide

Dans cette section on étudie numériquement le comportement asymptotique de la famille de fonctions  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ , solutions de (3.1), lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, dans le cas de la dimension  $m = 2$ . Le comportement de  $u^\varepsilon$  peut être décrit, quand  $\varepsilon$  tend vers 0, comme la composée d'un profil  $v$  ne dépendant pas de  $\varepsilon$  et du flot associé au champ de vecteurs  $-b/\varepsilon$ . De plus, le profil  $v$  est solution du problème de diffusion (3.4) dont le champ de diffusion est  $\langle D \rangle$  cf. (3.5). A l'aide de la méthode de calcul d'un champ de matrices moyenné proposée dans la Section 3.3, on résout le système (3.4) puis on étudie l'erreur commise entre une solution de référence  $u^\varepsilon(t, \cdot)$  et  $v(t, Y(-t/\varepsilon; \cdot))$ . L'équation de diffusion anisotrope, avec  $T > 0$  et  $y \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{cases} \partial_t v - \operatorname{div}_y(\langle D \rangle \nabla_y v) = 0, & (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2 \\ v(0, y) = u^{\text{in}}(y), & y \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

sera résolue par une méthode implicite en temps et différences finies en espace, voir [69]. Tout comme précisé dans la Section 3.3.2, on introduit une discrétisation temporelle ( $t^k$ ) de  $[0, T]$ , avec  $k \in \mathcal{I}_t = \{0, \dots, N_t\}$  et  $\Delta t = T/N_t$ . Puis une discrétisation spatiale ( $y_{ij}$ ) de pas  $\Delta y$  du carré  $\mathcal{C} = [-R, R] \times [-R, R]$ , avec  $R > 0$ , à laquelle on ajoute les points de calcul des flux  $y_{i+1/2,j}$  et  $y_{i,j+1/2}$  pour tout  $i, j \in \mathcal{I} = \{0, \dots, N-1\}$ . En notant  $\mathbf{W} = -\langle D \rangle \nabla_y v$ , l'opérateur  $\text{div}_y(\mathbf{W})$  au point  $y_{ij}$  est approché par

$$(\text{div}_y(\mathbf{W}))_{ij} \approx \frac{\mathbf{W}_{i+1/2,j}^1 - \mathbf{W}_{i-1/2,j}^1}{\Delta y} + \frac{\mathbf{W}_{i,j+1/2}^2 - \mathbf{W}_{i,j-1/2}^2}{\Delta y} \quad (3.28)$$

où

$$\mathbf{W}_{i+1/2,j}^1 = -(\langle D \rangle_{11})_{i+1/2,j} \frac{\partial v}{\partial y_1} \Big|_{i+1/2,j} - (\langle D \rangle_{12})_{i+1/2,j} \frac{\partial v}{\partial y_2} \Big|_{i+1/2,j} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{W}_{i,j+1/2}^2 = -(\langle D \rangle_{21})_{i,j+1/2} \frac{\partial v}{\partial y_1} \Big|_{i,j+1/2} - (\langle D \rangle_{22})_{i,j+1/2} \frac{\partial v}{\partial y_2} \Big|_{i,j+1/2}.$$

On approche les différentes dérivées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y_1} \Big|_{i+1/2,j} &\approx \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta y} \\ \frac{\partial v}{\partial y_2} \Big|_{i,j+1/2} &\approx \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} \\ \frac{\partial v}{\partial y_2} \Big|_{i+1/2,j} &\approx \frac{v_{i+1/2,j+1} - v_{i+1/2,j-1}}{2\Delta y} = \frac{v_{i+1,j+1} + v_{i,j+1} - v_{i+1,j-1} - v_{i,j-1}}{4\Delta y} \\ \frac{\partial v}{\partial y_1} \Big|_{i,j+1/2} &\approx \frac{v_{i+1,j+1/2} - v_{i-1,j+1/2}}{2\Delta y} = \frac{v_{i+1,j+1} + v_{i+1,j} - v_{i-1,j+1} - v_{i-1,j}}{4\Delta y} \end{aligned} \quad (3.30)$$

et les coefficients de diffusion  $\langle D \rangle_{i+1/2,j}, \langle D \rangle_{i,j+1/2}$  par

$$\begin{aligned} \langle D \rangle_{i+1/2,j} &= \frac{\langle D \rangle_{i+1,j} + \langle D \rangle_{i,j}}{2} \\ \langle D \rangle_{i,j+1/2} &= \frac{\langle D \rangle_{i,j+1} + \langle D \rangle_{i,j}}{2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Tout cela nous amène au schéma semi-discrétisé en espace, où on note  $v_{ij}(t)$  les variables approchant les inconnues  $v(t, y_{ij})$  pour tout  $(i, j) \in \mathcal{I}^2$

$$\partial_t v_{ij}(t) + \frac{\mathbf{W}_{i+1/2,j}^1(t) - \mathbf{W}_{i-1/2,j}^1(t)}{\Delta y} + \frac{\mathbf{W}_{i,j+1/2}^2(t) - \mathbf{W}_{i,j-1/2}^2(t)}{\Delta y} = 0.$$

La résolution en temps se fera à l'aide d'un schéma implicite de type Crank-Nicholson, voir [42] pour plus de détails. En notant  $V^k$  le vecteur des variables discrètes  $v_{ij}^k$  approchant  $v(t^k, y_{ij})$  pour tout  $k \in \mathcal{I}_t$  et tout  $(i, j) \in \mathcal{I}^2$ , le schéma de Crank-Nicolson s'écrit

$$V^{k+1} = \left( I - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{W} \right)^{-1} \left( I + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{W} \right) V^k$$

où  $\mathcal{W}$  est la matrice de discrétisation associée à l'opérateur (3.28) et est obtenue en combinant (3.29), (3.30) et (3.31). Ce schéma est d'ordre deux en temps et en espace pour des données régulières. La solution de référence pour le problème de convection-diffusion (3.1)

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \text{div}_y(D(y)\nabla_y u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} b(y) \cdot \nabla_y u^\varepsilon = 0, & (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2 \\ u^\varepsilon(0, y) = u^{\text{in}}(y), & y \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

sera déterminée à l'aide d'un schéma type splitting d'opérateurs. On introduit les notations suivantes

$$\mathcal{D} = -\operatorname{div}_y(D(y)\nabla_y(\cdot)) \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = b(y) \cdot \nabla_y.$$

La solution  $u^\varepsilon$  du système (3.1) peut s'écrire en terme de semi-groupe d'opérateur :  $u^\varepsilon(t, \cdot) = e^{-t(\mathcal{D} + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{T})}u^{\text{in}}$  pour tout  $t \in [0, T]$ . On approche alors cette solution au temps  $t^k$ , pour  $k \in N_t$ , à l'aide d'un splitting de Strang, voir [57]

$$u^\varepsilon(t^k, \cdot) = \left[ e^{-\frac{\Delta t}{2}\mathcal{D}} e^{-\frac{\Delta t}{\varepsilon}\mathcal{T}} e^{-\frac{\Delta t}{2}\mathcal{D}} \right]^k u^{\text{in}}$$

Cette méthode donne une approximation d'ordre deux en temps de la solution à condition que les données soient régulières. Le semi-groupe associé à l'opérateur de diffusion  $\mathcal{D}$  sera approché en résolvant l'équation de diffusion associée, par le schéma différences finies présenté précédemment. La résolution numérique du groupe associé à l'opérateur de transport  $\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{T}$  sera réalisée par un schéma semi-Lagrangien, qui consistera en une résolution du flot  $Y(t/\varepsilon, \cdot)$  puis d'une interpolation, voir Section 3.3.2. L'utilisation d'une méthode de splitting associé à une méthode semi-Lagrangienne pour le transport, nous amène à résoudre séparément le groupe associé à l'opérateur raide et à choisir une discrétisation en temps adaptée  $(\tilde{t}_\varepsilon^k)_{k \in \mathcal{I}_t^\varepsilon}$  de l'intervalle  $[0, \frac{\Delta t}{\varepsilon}]$  avec  $\mathcal{I}_t^\varepsilon = \{0, \dots, N_t^\varepsilon\}$  pour résoudre le flot  $Y(\Delta t/\varepsilon; \cdot)$ , même lorsque  $\varepsilon$  est petit. En pratique, on choisit  $N_t^\varepsilon = 200 \lfloor \frac{\Delta t}{\varepsilon} \rfloor$ .

### Exemples

On étudie numériquement l'erreur commise lors de l'approximation de la fonction  $u^\varepsilon$  du système (3.1) par la quantité  $v(t, Y(-t/\varepsilon; \cdot))$ , où  $v$  est la solution de (3.4). Le champ de matrices moyenné sera calculé à l'aide de la méthode présentée dans la Section 3.3. Pour tout  $k \in \mathcal{I}_t$  et  $(i, j) \in \mathcal{C}$ , on note  $v_{ij}^k$  une valeur numérique approchant la quantité  $v(t^k, y_{ij})$ . Tout comme dans la Section 3.3.3, l'erreur en espace sera localisée à un domaine  $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$  invariant par le flot de  $b$ . L'erreur  $L^\infty([0, T], L^2)$  sera calculée à l'aide de la norme discrète

$$\|v\|_{L^\infty([0, T], L^2)} = \max_{k \in \mathcal{I}_t} \sqrt{\sum_{(i, j) \in \mathcal{S}^2} \Delta y^2 |v_{ij}^k|^2}.$$

Pour les tests numériques, on suppose que  $\mathcal{C} = [-2, 2] \times [-2, 2]$ ,  $T = 0.01$  et

$$u^{\text{in}}(y) = 10 \exp\left(-\frac{y_1^2 + (y_2 - 0.5)^2}{0.02}\right), \quad y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Les solutions des problèmes (3.1) et (3.4) sont calculées avec une résolution de maillage spatial  $N = 512$  et temporel  $N_t = 100N$ . On suppose que le champ de vecteurs  $b$  est le champ de vecteurs ellipsoïdal, et on choisit un champ de matrices

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le champ de matrices moyenné associé à  $D$  est également symétrique défini positif, voir Proposition 2.2.5. Par la formule (3.13), on a

$$\langle D \rangle = \begin{pmatrix} 10/3 & -5/3 \\ -5/3 & 10/3 \end{pmatrix}.$$

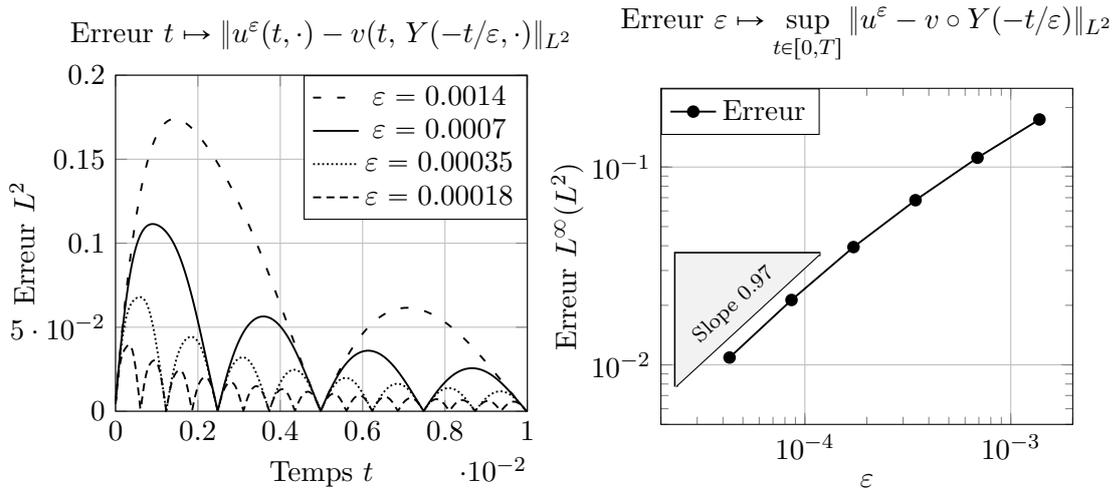


FIGURE 3.8 – Comportement asymptotique de  $u^\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.

La Figure 3.8 représente l'évolution au cours du temps de la norme  $L^2 : t \mapsto \|u^\varepsilon(t, \cdot) - v(t, Y(-t/\varepsilon, \cdot))\|_{L^2}$ , et l'erreur  $L^\infty([0, T], L^2)$  en fonction de  $\varepsilon$ . La Figure 3.8 confirme numériquement l'ordre de convergence espéré donné par (3.7). Dans la Figure 3.9, on se place dans le cas du flot central non explicite, voir Section 3.3.3, avec pour champ de diffusion  $D = I_2$ . Les coefficients du champ de matrices moyenné associé sont représentés à la Figure 3.4. Dans

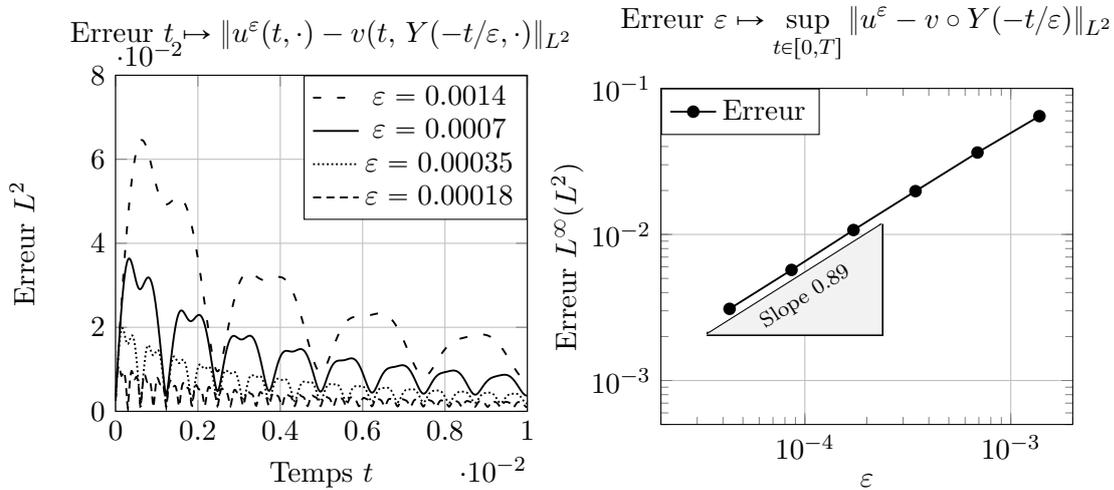


FIGURE 3.9 – Comportement asymptotique de  $u^\varepsilon$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.

ce cas, l'ordre de convergence espéré n'est pas atteint, cela est dû au défaut de régularité du champ de matrices moyenné  $\langle I_2 \rangle$  en l'origine. Les résultats des Figures 3.8 et 3.9 confirment le résultat théorique (3.7) et, au moins dans le cas où le champ de vecteurs  $b$  et le champ de matrices  $D$  sont réguliers, l'ordre de convergence espéré est obtenu. Donc, au moins dans le cas de données régulières, nous avons mis en place une méthode numérique consistant en le calcul du champ de matrices effectif (3.5) et de la fonction  $v$  solution du système (3.4), permettant d'obtenir  $v(t, Y(-t/\varepsilon, \cdot))$  qui est une approximation d'ordre un, par rapport à  $\varepsilon$ , de la solution  $u^\varepsilon$  du système raide (3.1).

## Chapitre 4

# Analyse asymptotique d'un problème de diffusion fortement anisotrope

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie le comportement d'une équation parabolique dans laquelle la diffusion est très grande le long d'une direction privilégiée. Cette étude est motivée par de nombreuses applications comme la physique des plasmas [23], le traitement d'image [64, 70], ou encore les propriétés thermiques des cristaux [40, 65]. On considère le problème parabolique

$$\partial_t u^\varepsilon - \operatorname{div}_y(D(y)\nabla_y u^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_y(b(y) \otimes b(y)\nabla_y u^\varepsilon) = 0, \quad (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \quad (4.1)$$

$$u^\varepsilon(0, y) = u^{\text{in}}(y), \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (4.2)$$

où  $y \mapsto D(y) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  est un champ de matrices sur  $\mathbb{R}^m$  et  $y \mapsto b(y) \in \mathbb{R}^m$  est un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^m$ . Pour tout couple de vecteurs  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^m$ , la notation  $\xi \otimes \eta$  représente la matrice dont le coefficient  $(i, j)$  est  $\xi_i \eta_j$ , et pour toutes matrices  $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ , on utilise la notation  $A : B = \operatorname{trace}({}^t AB) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A_{ji} B_{ji}$ . Le champ de matrices  $D$  est supposé symétrique, tel que  $D + b \otimes b$  est défini positif. On analyse le comportement de la famille  $(u^\varepsilon)_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  est petit, disons  $0 < \varepsilon \leq 1$ , dans ce cas  $(D + \frac{1}{\varepsilon} b \otimes b)_{0 < \varepsilon \leq 1}$  reste défini positif. L'analyse asymptotique d'un tel problème est également motivée par la recherche de méthode numérique pour la résolution de problèmes paraboliques fortement anisotropes. En effet, les méthodes explicites sont contraintes par la petitesse du paramètre, ce qui oblige à choisir un pas de temps également très petit afin que la condition de stabilité  $\Delta t \sim \varepsilon |\Delta y|^2$  soit satisfaite. Ainsi, des méthodes implicites ont été proposées dans [7, 67, 68], des méthodes volumes finis dans [43, 2] et des schémas préservant l'asymptotique ont été étudiés dans [38, 46]. Une étude théorique du système (4.1), (4.2) est réalisée dans [19]. Il a été montré que pour toute condition initiale  $u^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^m)$  bien préparée, c'est-à-dire  $b \cdot \nabla_y u^{\text{in}} = 0$ , la famille  $(u^\varepsilon)_\varepsilon$  converge faiblement  $\star$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$  vers la solution d'un autre problème parabolique, pour lequel le champ de diffusion apparaît comme une moyenne du champ de matrices  $D$ . Le but de ce chapitre est de proposer une étude plus complète de ce problème. On propose une description complète du comportement de  $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ , en prouvant un résultat de convergence forte vers un profil et en analysant le modèle limite correspondant, et cela pour toute donnée initiale.

On considèrera les solutions du système (4.1), (4.2) au sens variationnel. Pour cela, on introduit l'espace de Sobolev à poids  $H_P^1$ , voir (4.18), et on définit la forme bilinéaire symétrique bornée suivante

$$\mathfrak{a}^\varepsilon(u, v) = \int_{\mathbb{R}^m} D(y) \nabla u \cdot \nabla v \, dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla u)(b \cdot \nabla v) \, dy, \quad u, v \in H_P^1.$$

La formulation variationnelle de (4.1), (4.2) s'écrit

$$u^\varepsilon(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} u^\varepsilon(t, y) \varphi(y) \, dy + \mathfrak{a}^\varepsilon(u^\varepsilon(t), \varphi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \varphi \in H_P^1.$$

Le caractère bien posé du problème ci-dessus résulte du Théorème A.2.7. Sous des hypothèses de coercivité, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , il existe une unique solution  $u^\varepsilon \in C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H_P^1)$ ,  $\varepsilon \in ]0, 1]$ . On considère l'opérateur du second ordre  $\mathcal{B} = -\mathcal{T}^2$ ,  $\mathcal{T} = \text{div}_y(\cdot b)$  et le semi-groupe  $(e^{-\tau \mathcal{B}})_{\tau \in \mathbb{R}_+}$ . L'idée est de chercher la solution  $v = v(t)$  d'un autre problème variationnel tel que

$$u^\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon} \mathcal{B}} v(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{dans } L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)). \quad (4.3)$$

La difficulté principale réside dans l'identification du problème limite dont  $v(t)$  est solution, et de construire un correcteur qui nous permette de justifier (4.3). Le problème limite sera défini à l'aide de sa formulation variationnelle. La forme bilinéaire associée, notée  $\mathfrak{m}$ , est définie dans la Proposition 4.5.9. Cette forme bilinéaire est exprimée à l'aide de deux  $C^0$ -groupes d'opérateurs unitaires, l'un opérant sur les fonctions, l'autre sur les champs de matrices. On note  $Y(s; y)$  le flot caractéristique associé au champ de vecteurs  $b$ , par  $(\zeta(s))_{s \in \mathbb{R}}$  le groupe des translations le long de  $Y$

$$\zeta(s)u = u \circ Y(s; \cdot), \quad u \in L^2(\mathbb{R}^m), \quad s \in \mathbb{R}$$

et par  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  le groupe, agissant sur l'espace  $L^2$  à poids  $H_Q$  composé de champ de matrices, donné par

$$G(s)A = \partial Y^{-1}(s; \cdot) A \circ Y(s; \cdot)^t \partial Y^{-1}(s; \cdot), \quad A \in H_Q, \quad s \in \mathbb{R},$$

voir Proposition 4.3.5. Avec ces notations, la forme bilinéaire  $\mathfrak{m}$  s'écrit, voir la Proposition 4.5.9 :

$$\mathfrak{m}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^m} \left\{ \langle D \rangle(y) \nabla u + \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (G(s)D - \langle D \rangle) \nabla \{ \zeta(2s)u \} \, ds \right\} \cdot \nabla v \, dy$$

pour tout  $u, v \in H_P^1$ , où  $\langle D \rangle$  est le moyenné du champ de matrices  $D$  le long du  $C^0$ -groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ , voir la Proposition 4.3.8

$$\langle D \rangle = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s)D \, ds \quad \text{dans } H_Q.$$

La construction du correcteur requiert l'introduction d'une seconde forme bilinéaire, voir la Proposition 4.7.1 pour plus de détails. On établit le résultat de convergence suivant, voir la Section 4.8 pour tous les détails, à condition de supposer  $u^{\text{in}}$ ,  $b$  et  $D$  suffisamment réguliers, de supposer l'existence d'un champ de matrices  $P$  vérifiant (4.15), (4.16), et enfin de supposer certaines hypothèses structurelles liées aux champs  $b$  et  $D$  qui seront précisées dans les Sections 4.5.2, 4.7.1 et 4.7.2.

**Théorème**

On suppose  $u^{\text{in}}, b, D$  suffisamment réguliers. On suppose également les hypothèses (4.15), (4.16) vérifiées, ainsi que des hypothèses structurelles qui sont données dans les Sections 4.5.2, 4.7.1 et 4.7.2. Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , on note l'unique solution variationnelle de (4.1), (4.2) par  $u^\varepsilon \in C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1_P)$

$$u^\varepsilon(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} u^\varepsilon(t, y) \varphi(y) dy + \mathfrak{a}^\varepsilon(u^\varepsilon(t), \varphi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \varphi \in H^1_P$$

et par  $v \in C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1_P)$  l'unique solution variationnelle

$$v(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} v(t, y) \varphi(y) dy + \mathfrak{m}(v(t), \varphi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \varphi \in H^1_P.$$

Pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$  il existe une constante  $C_T$  telle que

$$\left| u^\varepsilon - e^{-\frac{t}{\varepsilon} \mathcal{B}} v \right|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} + \left| \nabla u^\varepsilon - \nabla(e^{-\frac{t}{\varepsilon} \mathcal{B}} v) \right|_{L^2([0, T]; X_P)} \leq C_T \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Lorsque la condition initiale est bien préparée, c'est-à-dire lorsque  $\mathcal{T}u^{\text{in}} = 0$ , il n'y a pas de couche limite en  $t = 0$  et le problème limite est donné par le problème parabolique associé au champ de matrices  $\langle D \rangle$ , voir la Remarque 4.8.2

$$v(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} v(t, y) \varphi(y) dy + \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle(y) \nabla v(t) \cdot \nabla \varphi dy = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \varphi \in H^1_P.$$

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Les arguments principaux de cette analyse asymptotique sont présentés en dimension finie dans la Section 4.2. Le cas de la dimension infinie requiert des outils et des hypothèses supplémentaires, nécessaires à l'existence de la forme bilinéaire  $\mathfrak{m}$  et du correcteur. Ainsi, on commence par rappeler les propriétés du moyenné d'un champ de matrices, et de la moyenne d'une fonction le long d'un flot dans la Section 4.3. Dans la Section 4.4, on décrit les propriétés spectrales de l'opérateur  $\mathcal{B}$ . Les sous espaces propres de  $\mathcal{B}$  joueront un rôle important, on en donne une caractérisation et on décrit les projections associées. La construction à proprement parler de la forme bilinéaire  $\mathfrak{m}$  est réalisée à la Section 4.5, les propriétés de cette forme sont également présentées. Le caractère bien posé des formulations variationnelles associées aux formes bilinéaires  $\mathfrak{a}^\varepsilon$  et  $\mathfrak{m}$  est étudié dans la Section 4.6. Des estimations uniformes sur les solutions associées à ces problèmes sont mises en évidence. Dans la Section 4.7, on introduit une seconde forme bilinéaire  $\mathfrak{n}$ , nécessaire à la construction du correcteur. Enfin dans la Section 4.8, on établit le comportement asymptotique de (4.1), (4.2), voir le Théorème 4.8.1.

## 4.2 Le cas de la dimension finie

On cherche à étudier le comportement de la famille  $(u^\varepsilon)_\varepsilon$  des solutions du système parabolique (4.1), (4.2). Il est intéressant de commencer par étudier le cas de la dimension finie. Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  deux matrices réelles et  $\varepsilon > 0$ , on considère le problème

$$\frac{d}{dt} u^\varepsilon + A u^\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon} B u^\varepsilon(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{4.4}$$

$$u^\varepsilon(0) = u^{\text{in}} \in \mathbb{R}^n. \tag{4.5}$$

Dans le cas où les matrices  $A$  et  $B$  commutent, c'est-à-dire  $BA - AB = 0$ , on voit facilement que  $e^{-\tau B}A = Ae^{-\tau B}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , et un calcul direct nous montre que  $t \rightarrow e^{\frac{t}{\varepsilon}B}u^\varepsilon(t)$  satisfait au problème

$$\frac{d}{dt}v + Av(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (4.6)$$

$$v(0) = u^{\text{in}} \in \mathbb{R}^n. \quad (4.7)$$

On obtient une formule faisant intervenir les matrices commutantes  $e^{-tA}$  et  $e^{-\tau B}$

$$e^{-t(A+\frac{B}{\varepsilon})}u^{\text{in}} = u^\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}B}v(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}B}e^{-tA}u^{\text{in}}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon > 0,$$

ce qui nous permet de décrire le comportement de la famille  $(u^\varepsilon)_\varepsilon$  à l'aide de la solution du problème (4.6), (4.7), et du semi-groupe  $(e^{-\tau B})_{\tau \in \mathbb{R}_+}$ . Pour l'étude du cas général on supposera que  $B$  est symétrique, on décompose alors l'espace  $\mathbb{R}^n$  à l'aide des sous espaces propres associés à  $B$ . Notons  $E_1, \dots, E_r$  les sous espaces propres associés à  $B$  et correspondant aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$

$$E_i = \ker(B - \lambda_i I_n), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq r, \quad E_1 \oplus \dots \oplus E_r = \mathbb{R}^n.$$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , l'application réciproque associée à l'isomorphisme  $(B - \lambda_i I_n)|_{E_i^\perp} : E_i^\perp \rightarrow \text{Range}(B - \lambda_i I_n) = E_i^\perp$  sera notée  $(B - \lambda_i I_n)^{-1}$ . On considère les applications linéaires

$$m_i(u) = \text{Proj}_{E_i} Au, \quad n_i(u) = (B - \lambda_i I_n)^{-1}(Au - \text{Proj}_{E_i} Au), \quad u \in E_i, \quad i \in \{1, \dots, r\} \quad (4.8)$$

et on note  $M, N$  les matrices associées aux applications linéaires

$$m = m_1 \oplus \dots \oplus m_r, \quad n = n_1 \oplus \dots \oplus n_r$$

c'est-à-dire

$$Mu = m(u) = m_i(u), \quad Nu = n(u) = n_i(u), \quad u \in E_i, \quad i \in \{1, \dots, r\}.$$

Les décompositions suivantes sont vérifiées

$$A = M + BN - NB, \quad BM - MB = 0. \quad (4.9)$$

En effet, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$  et  $u \in E_i$ , on a

$$\begin{aligned} (BN - NB)u &= BNu - \lambda_i Nu = (B - \lambda_i I_n)|_{E_i^\perp} n_i(u) \\ &= Au - \text{Proj}_{E_i} Au = Au - m_i(u) = Au - Mu \end{aligned}$$

et  $(BM - MB)u = BMu - \lambda_i Mu = 0$  étant donné que  $Mu = m_i(u) = \text{Proj}_{E_i} Au \in E_i$ . A l'aide de la décomposition (4.9), on peut décrire le comportement asymptotique des solutions du système (4.4), (4.5), lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

### Proposition 4.2.1.

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  deux matrices réelles et  $u^{\text{in}} \in \mathbb{R}^n$ . On suppose que  $B$  est symétrique, positive et on considère les matrices  $M, N$  vérifiant (4.9). Pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$ , il existe une constante  $C_T$  telle que pour tout  $\varepsilon > 0$  on a

$$|u^\varepsilon(t) - e^{-\frac{t}{\varepsilon}B}e^{-tM}u^{\text{in}}| \leq C_T \varepsilon, \quad t \in [0, T].$$

**Preuve.** L'idée est d'introduire un correcteur adapté. Considérons la fonction  $u^1 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  donnée par

$$u^1(t, \tau) = e^{-\tau B} N e^{-tM} u^{\text{in}} - N e^{-\tau B} e^{-tM} u^{\text{in}}, \quad (t, \tau) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+. \quad (4.10)$$

Notons que  $u^1(t, 0) = 0, t \in \mathbb{R}_+$  et

$$\begin{aligned} \partial_\tau u^1 &= -B e^{-\tau B} N e^{-tM} u^{\text{in}} + N B e^{-\tau B} e^{-tM} u^{\text{in}} \\ &= -B (e^{-\tau B} N e^{-tM} u^{\text{in}} - N e^{-\tau B} e^{-tM} u^{\text{in}}) - (BN - NB) e^{-\tau B} e^{-tM} u^{\text{in}} \\ &= -B u^1(t, \tau) - (BN - NB) e^{-\tau B} e^{-tM} u^{\text{in}}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la notation  $\tilde{u}^\varepsilon = e^{-\frac{t}{\varepsilon} B} e^{-tM} u^{\text{in}}$ , on obtient

$$\frac{d}{dt} \{ \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon) \} + (BN - NB) \tilde{u}^\varepsilon(t) + \frac{B}{\varepsilon} \{ \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon) \} = \varepsilon \partial_t u^1(t, t/\varepsilon). \quad (4.11)$$

En tenant compte du fait que  $B$  et  $M$  commutent, on observe que

$$\frac{d\tilde{u}^\varepsilon}{dt} + M \tilde{u}^\varepsilon(t) + \frac{B}{\varepsilon} \tilde{u}^\varepsilon(t) = 0,$$

qui combiné avec (4.11) donne

$$\frac{d}{dt} \{ \tilde{u}^\varepsilon(t) + \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon) \} + \left( A + \frac{B}{\varepsilon} \right) \{ \tilde{u}^\varepsilon(t) + \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon) \} = \varepsilon \partial_t u^1(t, t/\varepsilon) + \varepsilon A u^1(t, t/\varepsilon).$$

Enfin, la fonction  $t \rightarrow r^\varepsilon(t) := u^\varepsilon(t) - \tilde{u}^\varepsilon(t) - \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon)$  satisfait au problème

$$\begin{aligned} \frac{dr^\varepsilon}{dt} + A r^\varepsilon(t) + \frac{B}{\varepsilon} r^\varepsilon(t) &= -\varepsilon (\partial_t u^1 + A u^1)(t, t/\varepsilon), \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ r^\varepsilon(0) &= u^\varepsilon(0) - \tilde{u}^\varepsilon(0) - \varepsilon u^1(0, 0) = u^{\text{in}} - u^{\text{in}} = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

En appliquant le produit scalaire à chaque membre de l'égalité (4.12) par  $r^\varepsilon(t)$ , et en utilisant la positivité de  $B$ , on obtient

$$|r^\varepsilon(t)| \leq \varepsilon \int_0^T \{ |\partial_t u^1(t', t'/\varepsilon)| + |A| |u^1(t', t'/\varepsilon)| \} dt' + |A| \int_0^t |r^\varepsilon(t')| dt', \quad t \in [0, T], \quad \varepsilon > 0.$$

Ici, pour toute matrice  $C$ , la notation  $|C|$  représente la norme subordonnée à la norme euclidienne

$$|C| = \sup_{\xi \neq 0} \frac{|C\xi|}{|\xi|} \leq (C : C)^{1/2}.$$

Par le Lemme de Gronwall, on a

$$|r^\varepsilon(t)| \leq \varepsilon \int_0^T \{ |\partial_t u^1(t', t'/\varepsilon)| + |A| |u^1(t', t'/\varepsilon)| \} dt' e^{T|A|}, \quad t \in [0, T], \quad \varepsilon > 0,$$

et le résultat sera démontré à condition qu'il existe une constante  $\tilde{C}_T$  telle que

$$|u^1(t, \tau)| + |\partial_t u^1(t, \tau)| \leq \tilde{C}_T, \quad t \in [0, T], \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Mais grâce à la positivité de  $B$ , on vérifie facilement que

$$|u^1(t, \tau)| \leq 2|N| |e^{-tM} u^{\text{in}}| \leq 2|N| |u^{\text{in}}| e^{T|M|}, \quad t \in [0, T], \quad \tau \in \mathbb{R}_+$$

et

$$|\partial_t u^1(t, \tau)| \leq 2|N| |M| |u^{\text{in}}| e^{T|M|}, \quad t \in [0, T], \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

□

**Remarque 4.2.2.**

1. La décomposition (4.9), avec  $B$  symétrique, est unique. Plus exactement, si

$$A = \tilde{M} + B\tilde{N} - \tilde{N}B, \quad B\tilde{M} - \tilde{M}B = 0, \quad \tilde{N}E_i \subset E_i^\perp, \quad i \in \{1, \dots, r\}$$

alors  $\tilde{M} = M$  et  $\tilde{N} = N$ . En effet, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$  et tout  $u \in E_i$ , on a

$$Au = \tilde{M}u + (B - \lambda_i I_n)\tilde{N}u, \quad B\tilde{M}u = \tilde{M}Bu = \lambda_i \tilde{M}u$$

ce qui implique que  $Au - \tilde{M}u \in \text{Range}(B - \lambda_i I_n) = E_i^\perp$ ,  $\tilde{M}u \in E_i$ . Ainsi on obtient

$$\tilde{M}u = \text{Proj}_{E_i} Au = Mu, \quad i \in \{1, \dots, r\}, \quad u \in E_i$$

et

$$(B - \lambda_i I_n)\tilde{N}u = Au - \tilde{M}u = Au - Mu = (B - \lambda_i I_n)Nu.$$

Etant donné que  $\tilde{N}u, Nu \in E_i^\perp$ , on obtient que  $\tilde{N}u = Nu$  pour tout  $u \in E_i$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

2. En particulier, si  $A$  et  $B$  sont symétriques, la matrice  $M$  est symétrique et la matrice  $N$  est anti-symétrique.

Avant de terminer cette partie, on observe que la convergence de la famille  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, n'est pas uniforme sur  $[0, T]$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ , sauf dans le cas où la donnée initiale est bien préparée,  $u^{\text{in}} \in \ker B$ . En effet, si  $u^{\text{in}} \in \ker B$ , alors la propriété de commutation entre  $B$  et  $M$  nous permet d'écrire que

$$e^{-\frac{t}{\varepsilon}B} e^{-tM} u^{\text{in}} = e^{-tM} e^{-\frac{t}{\varepsilon}B} u^{\text{in}} = e^{-tM} u^{\text{in}}$$

et donc  $(u^\varepsilon)_\varepsilon$  converge uniformément sur  $[0, T]$  vers  $e^{-tM} u^{\text{in}}$ , lorsque  $\varepsilon \searrow 0$ . Si la condition initiale n'est pas bien préparée, c'est-à-dire si  $u^{\text{in}} \notin \ker B$ , la fonction limite  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} u^\varepsilon$  n'est pas continue en  $t = 0$ , et donc la convergence n'est pas uniforme sur  $[0, T]$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ . Pour vérifier cela, on regarde le comportement en temps long de  $(e^{-\tau B})_{\tau \in \mathbb{R}_+}$

$$|e^{-\tau B} v - \text{Proj}_{\ker B} v| \leq e^{-\tau c} |v - \text{Proj}_{\ker B} v|, \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad \tau \in \mathbb{R}_+$$

avec  $c := \inf_{|v|=1, v \perp \ker B} Bv \cdot v > 0$ . Grâce à la Proposition 4.2.1, on obtient par convergence ponctuelle que

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} u^\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} e^{-tM} e^{-\frac{t}{\varepsilon}B} u^{\text{in}} = e^{-tM} \lim_{\varepsilon \searrow 0} e^{-\frac{t}{\varepsilon}B} u^{\text{in}} = \begin{cases} u^{\text{in}} & , t = 0 \\ e^{-tM} \text{Proj}_{\ker B} u^{\text{in}} & , t > 0 \end{cases}$$

et qui n'est pas continue en  $t = 0$  lorsque  $u^{\text{in}} \notin \ker B$ . Une couche limite en temps  $[0, T_\varepsilon]$ , de taille  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , apparaît en  $t = 0$ . Durant cette couche limite toute courbe  $u^\varepsilon$  relie la condition initiale  $u^{\text{in}}$  à  $e^{-T_\varepsilon M} e^{-\frac{T_\varepsilon}{\varepsilon}B} u^{\text{in}} \approx \text{Proj}_{\ker B} u^{\text{in}}$ .

### 4.3 Opérateurs de moyenne

Notre but est de généraliser la Proposition 4.2.1 au cas du système parabolique (4.1), (4.2). Dans cette section, on précise la définition et les propriétés des champs de matrices moyennés, et du moyenné d'une fonction le long d'un flot. Les propriétés concernant le moyenné d'un champ de matrices ne seront pas démontré ici, pour plus de détails voir la Section 2.3. On introduit l'opérateur de transport  $\mathcal{T} = \text{div}_y(\cdot b)$ , défini sur

$$\text{dom} \mathcal{T} = \{u \in L^2(\mathbb{R}^m) : \text{div}_y(ub) \in L^2(\mathbb{R}^m)\}.$$

On fait les hypothèses standards suivantes sur le champ de vecteurs  $b$

$$b \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^m), \quad \text{div}_y b = 0 \quad (4.13)$$

et

$$\exists C > 0 \text{ tel que } |b(y)| \leq C(1 + |y|), \quad y \in \mathbb{R}^m. \quad (4.14)$$

Motivé par le fait que le champ de vecteurs  $b$  est à divergence nulle, on utilisera parfois la notation  $\mathcal{T} = b(y) \cdot \nabla_y$ . Sous les hypothèses ci-dessus, le champ de vecteurs  $b$  possède un flot global régulier  $Y \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$

$$\frac{dY}{ds} = b(Y(s; y)), \quad (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \quad Y(0; y) = y, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Etant donné que le champ de vecteurs  $b$  est à divergence nulle, la transformation  $y \in \mathbb{R}^m \rightarrow Y(s; y) \in \mathbb{R}^m$  préserve la mesure de Lebesgue pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . On introduit le  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires sur  $L^2(\mathbb{R}^m)$   $(\zeta(s))_{s \in \mathbb{R}}$ , donné par

$$\zeta(s)u = u \circ Y(s; \cdot), \quad u \in L^2(\mathbb{R}^m), \quad s \in \mathbb{R}.$$

L'opérateur de transport  $\mathcal{T}$  apparaît comme le générateur infinitésimal associé au  $C^0$ -groupe  $(\zeta(s))_{s \in \mathbb{R}}$ . Etant donnée une fonction  $f = f(y)$ , on utilisera parfois la notation  $f_s(z) = f(Y(s; z))$ .

Lorsqu'un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires agit sur un espace de Hilbert, la projection orthogonale sur le noyau du générateur infinitésimal associé coïncide avec la moyenne ergodique le long du groupe, voir l'Annexe A pour plus de détails.

**Théorème 4.3.1.** (*Théorème ergodique de von Neumann*)

Soit  $(\mathcal{G}(s))_{s \in \mathbb{R}}$  un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires sur un Hilbert  $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$  et  $\mathcal{L}$  son générateur infinitésimal. Alors pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , on a la convergence forte dans  $\mathcal{H}$

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \mathcal{G}(s)x \, ds = \text{Proj}_{\ker \mathcal{L}} x, \quad \text{uniformément par rapport à } r \in \mathbb{R}.$$

Comme conséquence directe de ce Théorème, on peut expliciter la projection orthogonale sur  $\ker \mathcal{T} = \{u \in L^2(\mathbb{R}^m) : u(Y(s; \cdot)) = u, \forall s \in \mathbb{R}\}$ .

**Proposition 4.3.2** (Moyenné d'une fonction de  $L^2(\mathbb{R}^m)$ ).

Supposons que les hypothèses (4.13), (4.14) soient vraies. Alors pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$  on a la convergence forte dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} u(Y(s; \cdot)) \, ds = \text{Proj}_{\ker \mathcal{T}} u \quad \text{uniformément par rapport à } r \in \mathbb{R}.$$

On introduit l'opérateur de moyenne  $\langle u \rangle = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} u(Y(s; \cdot)) \, ds, u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . Le résultat précédent nous dit que l'opérateur de moyenne coïncide avec la projection orthogonale sur  $\ker \mathcal{T}$ . Dans l'optique de travailler avec des opérateurs paraboliques, on souhaite pouvoir moyennner également des champs de matrices appartenant à un espace  $L^2$  à poids et  $L^\infty$  à poids. On suppose qu'il existe un champ de matrices  $P$  tel que

$${}^t P = P, \quad P(y)\xi \cdot \xi > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad P^{-1}, P \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^m) \quad (4.15)$$

$$[b, P] := (b \cdot \nabla_y)P - \partial_y b P - P {}^t \partial_y b = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m). \quad (4.16)$$

On donne la caractérisation suivante (pour plus de détails voir la Proposition 2.2.1)

**Proposition 4.3.3.**

On considère  $b \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^m)$  (non nécessairement à divergence nulle) à croissance au plus linéaire et  $A(y) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^m)$ . Alors  $[b, A] = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  si et seulement si

$$A(Y(s; y)) = \partial Y(s; y) A(y) {}^t \partial Y(s; y), \quad s \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

On précise les espaces qui seront d'une utilisation courante dans ce chapitre.

**Définition 4.3.4.** On introduit l'espace vectoriel

$$H_Q = \left\{ A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ mesurable} : Q^{1/2} A Q^{1/2} \in L^2 \right\},$$

où  $Q = P^{-1}$ , qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(A, B)_{H_Q} = \int_{\mathbb{R}^m} Q^{1/2} A Q^{1/2} : Q^{1/2} B Q^{1/2} \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} Q A : B Q \, dy, \quad \forall A, B \in H_Q.$$

La norme associée sera notée  $|A|_{H_Q}$ .

On introduit également l'espace de Banach

$$H_Q^\infty = \left\{ A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ mesurable} : Q^{1/2} A Q^{1/2} \in L^\infty \right\},$$

que l'on munit de la norme

$$|A|_{H_Q^\infty} := |Q^{1/2} A Q^{1/2}|_{L^\infty}.$$

On suppose qu'il existe une fonction continue  $\psi$ , constante le long du flot associé à  $b$  et dont la limite est infinie quand  $|y|$  tend vers l'infini

$$\psi \in C(\mathbb{R}^m), \quad \psi \circ Y(s; \cdot) = \psi \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}, \quad \lim_{|y| \rightarrow +\infty} \psi(y) = +\infty. \quad (4.17)$$

Etant donné que les compacts  $\{\psi \leq k\}$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ , sont laissés invariants par le flot de  $b$ , on introduit l'espace local

$$H_{Q,\text{loc}} = \left\{ A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ mesurable} : \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A \in H_Q \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

On dira que la famille  $(A_i)_i \subset H_{Q,\text{loc}}$  converge dans  $H_{Q,\text{loc}}$  vers  $A \in H_{Q,\text{loc}}$  si et seulement si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la famille  $(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A_i)_i$  converge dans  $H_Q$  vers  $\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A$ . On note qu'on a l'inclusion continue  $H_Q \subset H_{Q,\text{loc}}$ . Comme suggéré par la caractérisation de la Proposition 4.3.3, on introduit la famille d'opérateurs linéaires  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ , agissant sur  $H_Q$ , voir la Proposition 2.3.1 pour plus de détails. De plus, sous les hypothèses (4.17), le groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  agit également sur  $H_{Q,\text{loc}}$ .

**Proposition 4.3.5.** Supposons que les hypothèses (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), (4.17) soient satisfaites.

1. La famille d'applications

$$A \rightarrow G(s)A := \partial Y^{-1}(s; \cdot) A_s {}^t \partial Y^{-1}(s; \cdot) = \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) A_s {}^t \partial Y(-s; Y(s; \cdot))$$

est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires sur  $H_Q$ .

2. Si  $A$  est un champ de matrices symétriques, alors il en est de même pour  $G(s)A$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .

3. Si  $A$  est un champ de matrices positives, alors il en est de même pour  $G(s)A$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .
4. Soit  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un sous ensemble invariant par le flot de  $b$ , c'est à dire  $Y(s; \mathcal{S}) = \mathcal{S}$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . S'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $Q^{1/2}(y)A(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, y \in \mathcal{S}$ , alors pour tout  $s \in \mathbb{R}$  on a  $Q^{1/2}(y)(G(s)A)(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, y \in \mathcal{S}$ .
5. La famille d'applications  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  opère sur  $H_{Q, \text{loc}}$ , ce qui signifie que, si  $A \in H_{Q, \text{loc}}$ , alors  $G(s)A \in H_{Q, \text{loc}}$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . De plus, on a

$$\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} G(s)A = G(s)(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A), \quad A \in H_{Q, \text{loc}}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On introduit le générateur infinitésimal associé au groupe  $G$

$$L : \text{dom}L \subset H_Q \rightarrow H_Q, \quad \text{dom}L = \left\{ A \in H_Q : \exists \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)A - A}{s} \text{ dans } H_Q \right\}$$

et  $LA = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)A - A}{s}$  pour tout  $A \in \text{dom}L$ . On note que  $C_c^1(\mathbb{R}^m) \subset \text{dom}L$  et  $LA = (b \cdot \nabla_y)A - \partial_y b A - A {}^t \partial_y b, A \in C_c^1(\mathbb{R}^m)$ . Les propriétés principales de  $L$  sont rappelées ci-dessous (voir Proposition 2.3.2 pour plus de détails).

**Proposition 4.3.6.**

On suppose que les hypothèses (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) sont vérifiées.

1. Le domaine de  $L$  est dense dans  $H_Q$  et  $L$  est fermé.
2. Le champ de matrices  $A \in H_Q$  appartient à  $\text{dom}L$  ssi il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|G(s)A - A|_{H_Q} \leq C|s|, \quad s \in \mathbb{R}.$$

3. L'opérateur  $L$  est anti-adjoint et on a la décomposition orthogonale  $H_Q = \ker L \oplus \overline{\text{Range } L}$ .

**Remarque 4.3.7.** Lorsque l'on travaillera dans  $H_{Q, \text{loc}}$ , le générateur infinitésimal de  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$   $L$ , qu'on notera toujours  $L$ , sera défini de la manière suivante

$$A \in \text{dom}(L) \quad \text{ssi} \quad \exists \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A) - \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A}{s} \in H_Q, \quad k \in \mathbb{N}$$

et

$$\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} L(A) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A) - \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A}{s}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Clairement, le générateur dans  $H_{Q, \text{loc}}$  prolonge le générateur dans  $H_Q$ .

Les applications  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  ont également un comportement remarquable dans l'espace  $H_Q^\infty$ . Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , et tout  $A \in H_Q^\infty$ , on a  $G(s)A \in H_Q^\infty$  et  $|G(s)A|_{H_Q^\infty} = |A|_{H_Q^\infty}$ , pour plus de détails voir les égalités (2.31). En appliquant le Théorème 4.3.1 au groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ , on déduit que le moyenné d'un champ de matrices  $\langle A \rangle := \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)A \, ds$  est bien défini et coïncide avec la projection sur  $\ker L$ . De plus, par la Proposition 4.3.5,  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  agit également sur  $H_{Q, \text{loc}}$ , et tout champ de matrices de  $H_Q^\infty \subset H_{Q, \text{loc}}$  possède un moyenné dans  $H_{Q, \text{loc}}$ , qu'on notera  $\langle \cdot \rangle$  tout comme pour les champs de matrices de  $H_Q$ , voir Théorème 2.2.5 pour plus de détails.

**Théorème 4.3.8.** Supposons les hypothèses (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), (4.17) vérifiées. On note  $L$  le générateur infinitésimal associé au groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ .

1. Pour tout champ de matrices  $A \in H_Q$  on a la convergence forte dans  $H_Q$

$$\langle A \rangle := \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \underbrace{\partial Y(-s; Y(s; \cdot)) A(Y(s; \cdot)) {}^t \partial Y(-s; Y(s; \cdot))}_{=(G(s)A)(y)} ds = \text{Proj}_{\ker L} A$$

uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ .

2. Si  $A \in H_Q$  est un champ de matrices symétriques positives, alors il en est de même pour  $\langle A \rangle$ .

3. Soit  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^m$  un ensemble invariant par le flot associé à  $b$ , ce qui s'écrit  $Y(s; \mathcal{S}) = \mathcal{S}$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Si  $A \in H_Q$  est tel que

$$Q^{1/2}(y)A(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathcal{S},$$

pour un certain  $\alpha > 0$ , alors on a

$$Q^{1/2}(y)\langle A \rangle(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathcal{S}$$

et en particulier,  $\langle A \rangle(y)$  est définie positive pour tout  $y \in \mathcal{S}$ .

4. Si  $A \in H_Q \cap H_Q^\infty$ , alors  $\langle A \rangle \in H_Q \cap H_Q^\infty$  et

$$|\langle A \rangle|_Q \leq |A|_Q, \quad |\langle A \rangle|_{H_Q^\infty} \leq |A|_{H_Q^\infty}.$$

5. Pour tout champ de matrices  $A \in H_{Q,\text{loc}}$ , la famille

$$\left( \frac{1}{S} \int_r^{S+r} \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) A(Y(s; \cdot)) {}^t \partial Y(-s; Y(s; \cdot)) ds \right)_{S>0}$$

converge dans  $H_{Q,\text{loc}}$  lorsque  $S$  tend vers l'infini uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Sa limite, notée  $\langle A \rangle$ , satisfait

$$\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \langle A \rangle = \langle \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A \rangle, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

où le symbole  $\langle \cdot \rangle$  à droite de l'égalité est l'opérateur de moyenne sur  $H_Q$ . En particulier, tout champ de matrices  $A \in H_Q^\infty$  possède un moyenné dans  $H_{Q,\text{loc}}$  et  $|\langle A \rangle|_{H_Q^\infty} \leq |A|_{H_Q^\infty}$ . Si  $A \in H_{Q,\text{loc}}$  est tel que

$$Q^{1/2}(y)A(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathbb{R}^m,$$

pour un certain  $\alpha > 0$ , alors on a

$$Q^{1/2}(y)\langle A \rangle(y)Q^{1/2}(y) \geq \alpha I_m, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

#### Remarque 4.3.9.

1. On a la caractérisation variationnelle suivante de l'opérateur de moyenne sur  $H_{Q,\text{loc}}$  : pour tout champ de matrices  $A \in H_{Q,\text{loc}}$ , le champ de matrices moyenné  $\langle A \rangle$  est l'unique champ de matrices de  $H_{Q,\text{loc}}$  vérifiant

$$(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}(A - \langle A \rangle), M)_{H_Q} = 0, \quad \text{pour tout } M \in H_Q.$$

2. On voit facilement que l'opérateur de moyenne sur  $H_{Q,\text{loc}}$  prolonge l'opérateur de moyenne sur  $H_Q$ .

3. Soit  $A$  un champ de matrices de  $H_{Q,\text{loc}}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\frac{G(s)(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \langle A \rangle) - \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \langle A \rangle}{s} = \frac{G(s) \langle \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A \rangle - \langle \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A \rangle}{s} = 0,$$

ce qui signifie que  $\langle A \rangle \in \text{dom}(L)$  et  $\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} L \langle A \rangle = 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , voir la Remarque 4.3.7. Ainsi  $L \langle A \rangle = 0$ , pour tout  $A \in H_{Q,\text{loc}}$ .

On précise également des espaces de champs de vecteurs utiles pour la suite

$$X_Q = \{c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mesurable} : \int_{\mathbb{R}^m} Q(y) : c(y) \otimes c(y) dy < +\infty\}$$

$$X_Q^\infty = \{c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mesurable} : |Q^{1/2}c| \in L^\infty(\mathbb{R}^m)\}.$$

L'espace vectoriel  $X_Q$  que l'on munit du produit scalaire

$$(\cdot, \cdot)_{X_Q} : X_Q \times X_Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad (c, d)_{X_Q} = \int_{\mathbb{R}^m} Q(y) : c(y) \otimes d(y) dy, \quad c, d \in X_Q$$

devient un espace de Hilbert, dont la norme sera notée  $|c|_{X_Q} = (c, c)_{X_Q}^{1/2}$ ,  $c \in X_Q$ .

L'espace vectoriel  $X_Q^\infty$  est un espace de Banach par rapport à la norme

$$|c|_{X_Q^\infty} = \text{ess sup}_{y \in \mathbb{R}^m} |Q^{1/2}(y)c(y)|, \quad c \in X_Q^\infty.$$

On note que pour tout  $c \in X_Q \cap X_Q^\infty$ , on a  $c \otimes c \in H_Q \cap H_Q^\infty$  et

$$|c \otimes c|_{H_Q^\infty} = \text{ess sup}_{y \in \mathbb{R}^m} |Q^{1/2}(y)c(y)|^2 = |c|_{X_Q^\infty}^2$$

$$|c \otimes c|_{H_Q} = \left( \int_{\mathbb{R}^m} |Q^{1/2}(y)c(y)|^4 dy \right)^{1/2} \leq |c|_{X_Q} |c|_{X_Q^\infty}.$$

En remplaçant le champ de matrices  $Q$  par le champ de matrices  $P$ , on obtient les espaces linéaires  $X_P, X_P^\infty$ .

On résout le problème parabolique (4.1), (4.2) à l'aide de méthode variationnelle. On considère le sous espace suivant de  $L^2(\mathbb{R}^m)$

$$H_P^1 = \{u \in L^2(\mathbb{R}^m) : \nabla_y u \in X_P\}. \quad (4.18)$$

Muni du produit scalaire suivant

$$(u, v)_{H_P^1} = \int_{\mathbb{R}^m} u(y)v(y) dy + \int_{\mathbb{R}^m} P(y) : \nabla_y u \otimes \nabla_y v dy, \quad u, v \in H_P^1,$$

c'est un espace de Hilbert. Le choix de cet espace  $H^1$  à poids est motivé par le fait que le  $C^0$ -groupe  $(\zeta(s))_{s \in \mathbb{R}}$  agit sur  $H_P^1$ .

**Proposition 4.3.10** (Moyenné d'une fonction de  $H_P^1$ ).

Supposons que les hypothèses (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) soient satisfaites. Pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et  $u \in H_P^1$ , on a  $u_s \in H_P^1$  et  $|u_s|_{H_P^1} = |u|_{H_P^1}$ . La famille d'applications  $u \in H_P^1 \rightarrow \zeta^1(s)u = u \circ Y(s; \cdot) \in H_P^1$  est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires sur  $H_P^1$ . En particulier, pour tout  $u \in H_P^1$ , on a  $\langle u \rangle \in H_P^1$

$$\nabla_y \langle u \rangle = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \nabla_y u_s ds, \quad \text{fortement dans } X_P, \quad \text{uniformément par rapport à } r \in \mathbb{R}$$

$$u - \langle u \rangle \perp \ker \mathcal{T} \cap H_P^1 \quad \text{dans } H_P^1, \quad |\nabla_y \langle u \rangle|_{X_P} \leq |\nabla_y u|_{X_P}.$$

**Preuve.** Soit  $u = u(y)$  un élément de  $H_P^1$ . Etant donné que le flot satisfait  $Y \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ , on a  $\nabla u_s = {}^t \partial Y(s; \cdot)(\nabla u)_s$ . Par la Proposition 4.3.3, on sait que  $P_s = \partial Y(s; \cdot) P {}^t \partial Y(s; \cdot)$ , on peut donc écrire

$$\begin{aligned} |u_s|_{H_P^1}^2 &= \int_{\mathbb{R}^m} (u_s(y))^2 dy + \int_{\mathbb{R}^m} P(y) \nabla u_s \cdot \nabla u_s dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} (u(y))^2 dy + \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\partial Y(s; y) P(y) {}^t \partial Y(s; y)}_{P_s} : (\nabla u)_s \otimes (\nabla u)_s dy \\ &= |u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + |\nabla u|_{X_P}^2 = |u|_{H_P^1}^2. \end{aligned}$$

Le fait que  $(\zeta^1(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est un groupe vient du fait que  $(\zeta(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est un groupe. Le groupe  $(\zeta^1(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est continu. En effet pour tout  $u \in H_P^1$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} |\zeta^1(s)u - u|_{H_P^1}^2 - |\zeta(s)u - u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 &= |\nabla u_s - \nabla u|_{X_P}^2 \\ &= 2|\nabla u|_{X_P}^2 - 2(\nabla u_s, \nabla u)_{X_P} \\ &= 2|\nabla u|_{X_P}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{P^{1/2}(y) {}^t \partial Y(s; y)}_{{}^t \mathcal{O}(s; y) P_s^{1/2}} (\nabla u)_s \cdot P^{1/2}(y) \nabla u dy \\ &= 2|\nabla u|_{X_P}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^m} {}^t \mathcal{O}(s; y) (P^{1/2} \nabla u)_s \cdot P^{1/2} \nabla u dy \\ &= |(P^{1/2} \nabla u)_s - P^{1/2} \nabla u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^m} (P^{1/2} \nabla u)_s \cdot (\mathcal{O} - I_m) P^{1/2} \nabla u dy. \end{aligned}$$

La continuité du groupe  $(\zeta(s))_{s \in \mathbb{R}}$  nous assure que le terme intégral converge vers 0, lorsque  $s \rightarrow 0$ . La convergence  $\lim_{s \rightarrow 0} \partial Y(s; y) = I_m, y \in \mathbb{R}^m$ , implique les convergences

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} P(Y(s; y)) &= \lim_{s \rightarrow 0} \partial Y(s; y) P(y) {}^t \partial Y(s; y) = P(y), \quad \lim_{s \rightarrow 0} P^{1/2}(Y(s; y)) = P^{1/2}(y) \\ \lim_{s \rightarrow 0} Q(Y(s; y)) &= \lim_{s \rightarrow 0} {}^t \partial Y^{-1}(s; y) Q(y) \partial Y^{-1}(s; y) = Q(y), \quad \lim_{s \rightarrow 0} Q^{1/2}(Y(s; y)) = Q^{1/2}(y) \\ \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{O}(s; y) &= \lim_{s \rightarrow 0} Q^{1/2}(Y(s; y)) \partial Y(s; y) Q^{-1/2}(y) = I_m, \quad y \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

La matrice  $\mathcal{O}(s; y)$  étant orthogonale, on a  $|\mathcal{O}(s; y)| = 1$  pour tout  $s \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^m$ , et par le théorème de convergence dominé on a

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} P^{1/2} \nabla u \cdot (\mathcal{O}(s; y) - I_m) P^{1/2} \nabla u dy = 0,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} (P^{1/2} \nabla u)_s \cdot (\mathcal{O}(s; y) - I_m) P^{1/2} \nabla u dy \\ = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \left[ (P^{1/2} \nabla u)_s - P^{1/2} \nabla u \right] \cdot (\mathcal{O}(s; y) - I_m) P^{1/2} \nabla u dy = 0. \end{aligned}$$

Pour la dernière limite, on a utilisé la convergence  $\lim_{s \rightarrow 0} (P^{1/2} \nabla u)_s = P^{1/2} \nabla u$  dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , et l'inégalité  $|\mathcal{O}(s; y) - I_m| \leq 2, s \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^m$ . Finalement, du Théorème 4.3.1 on déduit la convergence forte dans  $H_P^1$

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \zeta^1(s)u ds = \text{Proj}_{\ker \mathcal{T} \cap H_P^1} u,$$

ce qui implique que  $\langle u \rangle = \text{Proj}_{\ker \mathcal{T}} u = \text{Proj}_{\ker \mathcal{T} \cap H_P^1} u \in H_P^1$ ,  $(\nabla u - \nabla \langle u \rangle, \nabla v)_{X_P} = 0$  pour tout  $v \in \ker \mathcal{T} \cap H_P^1$ , et la convergence forte dans  $X_P$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \nabla u_s \, ds = \nabla \langle u \rangle.$$

Pour le dernier point du théorème, on utilise le fait que  $|\nabla u_s|_{X_P} = |\nabla u|_{X_P}$ ,  $s \in \mathbb{R}$  et la convergence ci-dessus.  $\square$

## 4.4 Les propriétés de l'opérateur $\mathcal{B} = -\mathcal{T}^2$

On introduit l'opérateur  $\mathcal{B} = -\mathcal{T}^2 = -\text{div}_y(\text{div}_y(\cdot b)b)$  défini pour toute fonction appartenant au domaine

$$\text{dom} \mathcal{B} = \{u \in \text{dom} \mathcal{T} : \text{div}_y(ub) \in \text{dom} \mathcal{T}\} \subset L^2(\mathbb{R}^m).$$

Clairement cet opérateur jouera un rôle prépondérant lorsque l'on étudiera le comportement asymptotique des solutions de (4.1), (4.2) pour  $\varepsilon > 0$  petit. Dans cette section, on décrit le semi-groupe associé à l'opérateur  $\mathcal{B}$ , puis on précise les propriétés spectrales de cet opérateur. Précisément, une caractérisation des sous espaces propres associés à l'opérateur  $\mathcal{B}$ , ainsi qu'une description en terme de moyenne ergodique des projections associées à ces sous espaces sont données.

### 4.4.1 Semi-groupe associé à l'opérateur $\mathcal{B}$

Pour tout  $\theta > 0$ , on notera  $M_\theta$  la Maxwellienne en dimension un, associée à une température  $\theta$

$$M_\theta(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{s^2}{2\theta}}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Le semi-groupe  $(e^{-\tau \mathcal{B}})_{\tau \in \mathbb{R}_+}$  est donné par

**Proposition 4.4.1** (Semi-groupe associé à  $\mathcal{B}$ ).

*Considérons la famille d'applications*

$$\varphi_\tau u = \int_{\mathbb{R}} u_s M_{2\tau}(s) \, ds = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\mathbb{R}} u(Y(s; \cdot)) e^{-\frac{s^2}{4\tau}} \, ds, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^m), \quad \tau > 0$$

et  $\varphi_0 u = u$ ,  $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . La famille  $(\varphi_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}_+}$  est un  $C^0$  semi-groupe de contractions sur  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , dont le générateur infinitésimal est  $-\mathcal{B}$ , c'est-à-dire  $\varphi_\tau = e^{-\tau \mathcal{B}}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}_+$ .

**Preuve.** Il est clair que pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ ,  $\tau > 0$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^m} (\varphi_\tau u)^2 \, dy \leq \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}} u_s^2 M_{2\tau}(s) \, ds \, dy = \int_{\mathbb{R}} M_{2\tau}(s) \int_{\mathbb{R}^m} u_s^2 \, dy \, ds = \int_{\mathbb{R}^m} u^2(y) \, dy,$$

ce qui signifie que  $\varphi_\tau$  est contractante sur  $L^2(\mathbb{R}^m)$ . La propriété de semi-groupe est une conséquence immédiate de la formule  $M_{\theta_1} * M_{\theta_2} = M_{\theta_1 + \theta_2}$ ,  $\theta_1, \theta_2 > 0$ . En effet, pour tout  $\tau, h > 0$ ,  $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$  on a

$$\begin{aligned} \varphi_\tau \varphi_h u &= \int_{\mathbb{R}} M_{2\tau}(s) (\varphi_h u)_s \, ds = \int_{\mathbb{R}} M_{2\tau}(s) \int_{\mathbb{R}} M_{2h}(s') u_{s+s'} \, ds' \, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} u_s (M_{2\tau} * M_{2h})(s) \, ds = \int_{\mathbb{R}} u_s M_{2(\tau+h)}(s) \, ds = \varphi_{\tau+h} u. \end{aligned}$$

La continuité du semi-groupe est une conséquence de la densité de  $C_c(\mathbb{R}^m)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$  et de la propriété de contraction, en notant que  $\varphi_\tau u = \int_{\mathbb{R}} M_1(r) u_{\sqrt{2\tau}r} dr$ . Il reste à vérifier que le générateur infinitésimal de  $(\varphi_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}_+}$  est  $-\mathcal{B}$ . On considère  $u \in \text{dom}\mathcal{B}$ , c'est-à-dire  $u, \mathcal{T}u = \text{div}_y(ub), \mathcal{T}^2u = \text{div}_y(\text{div}_y(ub)b) \in L^2(\mathbb{R}^m)$  et établissons que  $\frac{d}{d\tau}|_{\tau=0}\varphi_\tau u = -\mathcal{B}u$  dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ . Grâce à l'égalité

$$u_h = u + h \text{div}_y(ub) + h^2 \int_0^1 (1-s)(\mathcal{T}^2u)_{hs} ds \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^m),$$

on peut écrire, pour tout  $\tau > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_\tau u - u}{\tau} &= \int_{\mathbb{R}} M_1(r) \frac{u_{\sqrt{2\tau}r} - u}{\tau} dr \\ &= \int_{\mathbb{R}} M_1(r) \frac{u_{\sqrt{2\tau}r} - u - \sqrt{2\tau}r \text{div}_y(ub)}{\tau} dr \\ &= \int_{\mathbb{R}} M_1(r) 2r^2 \int_0^1 (1-s)(\mathcal{T}^2u)_{\sqrt{2\tau}rs} ds dr \\ &\xrightarrow{\tau \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} M_1(r) r^2 \mathcal{T}^2u dr = \mathcal{T}^2u = -\mathcal{B}u \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^m). \end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose que  $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$  et que la limite suivante existe dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$

$$\lim_{\tau \searrow 0} \frac{\varphi_\tau u - u}{\tau} = w \in L^2(\mathbb{R}^m).$$

Un calcul direct montre que, pour tout  $\tau > 0$ , on a

$$|(\varphi_\tau u)_h - \varphi_\tau u|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \frac{|h||u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}}{\sqrt{\pi\tau}}, \quad h \in \mathbb{R}$$

$$|(\varphi_\tau u)_h + (\varphi_\tau u)_{-h} - 2\varphi_\tau u|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \frac{2h^2|u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}}{\tau}, \quad h \in \mathbb{R},$$

ce qui signifie que  $\varphi_\tau u \in \text{dom}\mathcal{B}$ , pour tout  $\tau > 0$ , et

$$|\mathcal{T}\varphi_\tau u|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \frac{|u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}}{\sqrt{\pi\tau}}, \quad |\mathcal{T}^2\varphi_\tau u|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \frac{2|u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}}{\tau}, \quad \tau > 0.$$

La propriété de semi-groupe garantit que

$$\left| \frac{d}{d\tau} \varphi_\tau u \right|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = |\varphi_\tau w|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |w|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad \tau > 0,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}\varphi_\tau u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 &= - \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_\tau u \mathcal{T}^2\varphi_\tau u dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_\tau u \frac{d}{d\tau} \varphi_\tau u dy \\ &\leq |\varphi_\tau u|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \left| \frac{d}{d\tau} \varphi_\tau u \right|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq |u|_{L^2(\mathbb{R}^m)} |w|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad \tau > 0. \end{aligned}$$

Pour tout  $h \in \mathbb{R}$ , on peut écrire

$$|\varphi_\tau(u_h - u)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = |(\varphi_\tau u)_h - \varphi_\tau u|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |h| |\mathcal{T} \varphi_\tau u|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |h| |u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^{1/2} |w|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^{1/2}, \quad \tau > 0$$

et grâce à la propriété de continuité du groupe, on déduit que

$$|u_h - u|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |h| |u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^{1/2} |w|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^{1/2}, \quad h \in \mathbb{R}$$

ce qui signifie que  $u \in \text{dom} \mathcal{T}$ . Pour toute fonction régulière  $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$  on a (en utilisant la symétrie de la Maxwellienne  $M_{2\tau}(-s) = M_{2\tau}(s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\tau > 0$ )

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_\tau u v \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} u \varphi_\tau v \, dy, \quad \tau \in \mathbb{R}_+,$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} w v \, dy &= \int_{\mathbb{R}^m} \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \varphi_\tau u v \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} u \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \varphi_\tau v \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} u \mathcal{T}^2 v \, dy = - \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{T} u \mathcal{T} v \, dy. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\mathcal{T} u \in \text{dom} \mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}^2 u = w \in L^2(\mathbb{R}^m)$ . □

### Quelques propriétés du semi-groupe $(\varphi_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}_+}$

On précise ici certaines propriétés concernant la propagation de la régularité suivant le semi-groupe  $(\varphi_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}_+}$ . Ces propriétés nous seront utiles pour justifier la régularité de la solution au problème effectif ainsi que la régularité du correcteur, voir le Théorème 4.8.1.

1. Le semi-groupe  $(\varphi_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}_+}$  agit également sur  $H_P^1$ . En effet, pour toute fonction  $u \in H_P^1$  et tout  $s \in \mathbb{R}$ , on a

$$P^{1/2}(y) \nabla u_s = P^{1/2}(y) {}^t \partial Y(s; y) (\nabla u)_s = {}^t \mathcal{O}(s; y) P_s^{1/2} (\nabla u)_s.$$

Etant donné que les matrices  $\mathcal{O}(s; y)$  sont orthogonales, on a

$$P^{1/2}(y) \nabla(\varphi_\tau u) = \int_{\mathbb{R}} P^{1/2}(y) \nabla u_s M_{2\tau}(s) \, ds = \int_{\mathbb{R}} {}^t \mathcal{O}(s; y) (P^{1/2} \nabla u)_s M_{2\tau}(s) \, ds,$$

ce qui implique que

$$|\nabla(\varphi_\tau u)|_{X_P} = |P^{1/2} \nabla(\varphi_\tau u)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \int_{\mathbb{R}} |(P^{1/2} \nabla u)_s|_{L^2(\mathbb{R}^m)} M_{2\tau}(s) \, ds = |\nabla u|_{X_P}.$$

Ainsi la famille  $(\varphi_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}_+}$  est composée d'opérateurs contractants sur  $H_P^1$

$$|\varphi_\tau u|_{H_P^1}^2 = |\varphi_\tau u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + |\nabla(\varphi_\tau u)|_{X_P}^2 \leq |u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + |\nabla u|_{X_P}^2 = |u|_{H_P^1}^2, \quad u \in H_P^1, \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

2. Si  $u \in H_P^1$  tel que  $\text{div}_y(P \nabla u) \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , alors  $\text{div}_y(P \nabla \varphi_\tau u) \in L^2(\mathbb{R}^m)$  pour tout  $\tau \in \mathbb{R}_+$ , et

$$|\text{div}_y(P \nabla \varphi_\tau u)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |\text{div}_y(P \nabla u)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

En effet, pour tout  $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^m)$  on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} P \nabla \varphi_\tau u \cdot \nabla \psi \, dy &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^m} P \nabla u_s \cdot \nabla \psi \, dy M_{2\tau}(s) \, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^m} P \nabla u \cdot \nabla \psi_{-s} \, dy M_{2\tau}(s) \, ds \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{div}_y(P \nabla u) \psi_{-s}(y) \, dy M_{2\tau}(s) \, ds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{div}_y(P \nabla u)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} |\psi_{-s}|_{L^2(\mathbb{R}^m)} M_{2\tau}(s) \, ds \\ &= |\operatorname{div}_y(P \nabla u)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} |\psi|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\operatorname{div}_y(P \nabla \varphi_\tau u) \in L^2(\mathbb{R}^m)$ ,  $|\operatorname{div}_y(P \nabla \varphi_\tau u)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |\operatorname{div}_y(P \nabla u)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}$  pour tout  $\tau \in \mathbb{R}_+$ .

3. Plus généralement, le semi-groupe  $(\varphi_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}_+}$  préserve les dérivations  $c \cdot \nabla_y$  le long d'un champ de vecteurs  $c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  en involution par rapport à  $b$ , c'est-à-dire  $[b, c] = 0$ . Plus précisément, soit  $c$  un champ de vecteurs régulier en involution par rapport à  $b$ , à croissance au plus linéaire et à divergence bornée

$$c \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^m), \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \frac{|c(y)|}{1 + |y|} < +\infty, \quad [b, c] = 0, \quad \operatorname{div}_y c \in L^\infty(\mathbb{R}^m),$$

et notons  $Z(h; y)$  le flot caractéristique associé à  $c$ . Pour toute fonction  $u \in \operatorname{dom}(c \cdot \nabla_y)$  on a

$$\begin{aligned} |(\varphi_\tau u) \circ Z(h; \cdot) - \varphi_\tau u|_{L^2(\mathbb{R}^m)} &= |\varphi_\tau(u \circ Z(h; \cdot) - u)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq |u \circ Z(h; \cdot) - u|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |h| e^{\frac{|h|}{2} |\operatorname{div}_y c|_{L^\infty}} |c \cdot \nabla u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad \tau \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\varphi_\tau u \in \operatorname{dom}(c \cdot \nabla_y)$  et  $|c \cdot \nabla(\varphi_\tau u)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |c \cdot \nabla u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}_+$ . En faisant tendre  $h \rightarrow 0$  dans l'égalité

$$\frac{(\varphi_\tau u) \circ Z(h; \cdot) - \varphi_\tau u}{h} = \varphi_\tau \frac{u \circ Z(h; \cdot) - u}{h}$$

on obtient la commutation de  $\varphi_\tau$  et  $c \cdot \nabla_y$ , c'est-à-dire

$$c \cdot \nabla(\varphi_\tau u) = \varphi_\tau(c \cdot \nabla u), \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

De plus, si  $c_1, c_2$  sont deux champs de vecteurs en involution par rapport  $b$  et  $c_1 \cdot \nabla_y(c_2 \cdot \nabla_y u) \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , alors  $c_1 \cdot \nabla_y(c_2 \cdot \nabla_y \varphi_\tau u) \in L^2(\mathbb{R}^m)$  et

$$|c_1 \cdot \nabla_y(c_2 \cdot \nabla_y \varphi_\tau u)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |c_1 \cdot \nabla_y(c_2 \cdot \nabla_y u)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Les arguments ci-dessus nous permettent de propager la régularité le long des champs de vecteurs en involution avec  $b$ , à tout ordre, uniformément par rapport à  $\tau \in \mathbb{R}_+$ .

#### 4.4.2 Propriétés spectrales de l'opérateur $\mathcal{B}$

On se concentre maintenant sur les propriétés spectrales de  $\mathcal{B}$ .

##### Proposition 4.4.2.

*L'opérateur  $\mathcal{B}$  est auto-adjoint et positif. En particulier, les sous espaces propres sont orthogonaux et pour tout  $\lambda$  on a  $\ker(\mathcal{B} - \lambda Id)^\perp = \overline{\operatorname{Range}(\mathcal{B} - \lambda Id)}$ .*

**Preuve.** Pour tout  $u, v \in \text{dom}\mathcal{B}$  et  $\tau \in \mathbb{R}_+$  on a

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_\tau u v \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} u \varphi_\tau v \, dy,$$

ce qui implique que  $\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{B}u v \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} u \mathcal{B}v \, dy$ . Ainsi  $\text{dom}\mathcal{B} \subset \text{dom}\mathcal{B}^*$  et  $\mathcal{B}^*v = \mathcal{B}v$  pour tout  $v \in \text{dom}\mathcal{B}$ . Réciproquement, supposons que  $v \in \text{dom}\mathcal{B}^*$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{B}u v \, dy \leq C|u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad \text{pour tout } u \in \text{dom}\mathcal{B}.$$

Pour tout  $u \in \text{dom}\mathcal{B}$  et  $h \in \mathbb{R}$ , on a

$$u_h = u + h\mathcal{T}u + h^2 \int_0^1 (1-s)(\mathcal{T}^2u)_{hs} \, ds, \quad u_{-h} = u - h\mathcal{T}u + h^2 \int_0^1 (1-s)(\mathcal{T}^2u)_{-hs} \, ds,$$

on obtient ainsi que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} (v_h + v_{-h} - 2v)u \, dy &= \int_{\mathbb{R}^m} v(u_h + u_{-h} - 2u) \, dy \\ &= h^2 \int_{\mathbb{R}^m} v \left[ \int_0^1 (1-s)(\mathcal{T}^2u)_{hs} \, ds + \int_0^1 (1-s)(\mathcal{T}^2u)_{-hs} \, ds \right] \, dy \\ &= h^2 \int_0^1 (1-s) \int_{\mathbb{R}^m} v(\mathcal{T}^2u_{hs} + \mathcal{T}^2u_{-hs}) \, dy \, ds \leq C|h|^2|u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}. \end{aligned}$$

Etant donné que le domaine de  $\mathcal{B}$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , il vient facilement que

$$\int_{\mathbb{R}^m} (v_h + v_{-h} - 2v)u \, dy \leq Ch^2|u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^m) \quad (4.19)$$

et donc

$$|v_h + v_{-h} - 2v|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq Ch^2, \quad h \in \mathbb{R}. \quad (4.20)$$

En particulier, en choisissant  $u = -v \in L^2(\mathbb{R}^m)$  dans (4.19), on obtient que

$$|v_h - v|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 = - \int_{\mathbb{R}^m} (v_h + v_{-h} - 2v)v \, dy \leq Ch^2|v|_{L^2(\mathbb{R}^m)}. \quad (4.21)$$

Les estimés (4.21), (4.20) garantissent que  $v \in \text{dom}\mathcal{B}$  et donc  $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$ . Clairement, pour tout  $u \in \text{dom}\mathcal{B}$ , on a  $\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{B}u u \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} (\mathcal{T}u)^2 \, dy \geq 0$ , et donc les valeurs propres appartiennent à  $\mathbb{R}_+$ .  $\square$

### Caractérisation des sous espaces propres et description des projections associés

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , on note  $E_\lambda$  le sous espace  $E_\lambda = \ker(\mathcal{B} - \lambda Id)$ . Grâce à l'égalité  $\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{B}u u \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} (\mathcal{T}u)^2 \, dy$ ,  $u \in \text{dom}\mathcal{B}$ , on voit facilement que

$$E_0 = \ker \mathcal{B} = \ker \mathcal{T} = \{u \in L^2(\mathbb{R}^m) : u_s = u, s \in \mathbb{R}\}.$$

Par la Proposition 4.3.2, on sait que

$$\text{Proj}_{E_0} u = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} u_s \, ds, \quad \text{fortement dans } L^2(\mathbb{R}^m), \quad \text{uniformément par rapport à } r \in \mathbb{R}.$$

Nous allons voir que les projections orthogonales sur les sous espaces  $E_\lambda$  sont également données par des opérateurs de moyenne. Pour tout  $\lambda > 0$ , on introduit la famille de transformation sur  $L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m)$

$$\zeta_\lambda(s)(u, v) = {}^t \left( \mathcal{R}(\sqrt{\lambda}s) {}^t(u_s, v_s) \right) = (u_s, v_s) \mathcal{R}(-\sqrt{\lambda}s), \quad (u, v) \in L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m), \quad s \in \mathbb{R}$$

où  $\mathcal{R}$  est la rotation plane d'angle  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 4.4.3.**

Pour tout  $\lambda > 0$ , la famille  $(\zeta_\lambda(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires sur  $L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m)$ . Le sous espace  $E_\lambda$  s'écrit

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \left\{ u \in \text{dom } \mathcal{T} : u_s = \cos(\sqrt{\lambda}s)u + \sin(\sqrt{\lambda}s) \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u, \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ u \in \text{dom } \mathcal{T} : \left( u + i \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right)_s = e^{-i\sqrt{\lambda}s} \left( u + i \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right), \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

et pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$  on a

$$\text{Proj}_{E_\lambda} u = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \cos(\sqrt{\lambda}s) u_s \, ds, \quad \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{E_\lambda} u = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \sin(\sqrt{\lambda}s) u_s \, ds$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ . Si  $u \in \text{dom } \mathcal{T}$ , la projection orthogonale sur  $E_\lambda$  s'écrit également

$$\text{Proj}_{E_\lambda} u = - \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \sin(\sqrt{\lambda}s) \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u_s \, ds$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ .

**Preuve.** Il est clair que pour tout  $(u, v) \in L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m)$ ,  $s, h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \zeta_\lambda(s) \zeta_\lambda(h)(u, v) &= (\zeta_\lambda(h)(u, v))_s \mathcal{R}(-\sqrt{\lambda}s) \\ &= (u_h, v_h)_s \mathcal{R}(-\sqrt{\lambda}h) \mathcal{R}(-\sqrt{\lambda}s) \\ &= \zeta_\lambda(s+h)(u, v) \end{aligned}$$

et

$$|\zeta_\lambda(s)(u, v)|_{L^2 \times L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^m} \{(u_s)^2 + (v_s)^2\} \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \{u^2 + v^2\} \, dy.$$

La continuité du groupe  $(\zeta(s))_{s \in \mathbb{R}}$  garantit la continuité du groupe  $(\zeta_\lambda(s))_{s \in \mathbb{R}}$ . On note par  $T_\lambda$  le générateur infinitésimal associé à  $(\zeta_\lambda(s))_{s \in \mathbb{R}}$ . Son domaine est donné par les couples  $(u, v) \in L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m)$  tels que la quantité suivante existe

$$T_\lambda(u, v) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_\lambda(s)(u, v) \in L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m).$$

Ainsi, le domaine de l'opérateur  $T_\lambda$  coïncide avec l'ensemble des paires  $(u, v) \in L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m)$  telles qu'on ait l'égalité

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \{ \zeta_\lambda(s)(u, v) \mathcal{R}(\sqrt{\lambda}s) \} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (u_s, v_s) \in L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m).$$

Ainsi  $\text{dom}T_\lambda = \text{dom}\mathcal{T} \times \text{dom}\mathcal{T}$ , et pour tout  $(u, v) \in \text{dom}T_\lambda$ , on a

$$T_\lambda(u, v) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta_\lambda(s)(u, v) = \sqrt{\lambda}(u, v)\mathcal{R}(-\pi/2) + (\mathcal{T}u, \mathcal{T}v) = (\mathcal{T}u - \sqrt{\lambda}v, \mathcal{T}v + \sqrt{\lambda}u).$$

Le noyau de  $T_\lambda$  est donné par  $F_\lambda = \{(u, \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}u), u \in E_\lambda\}$ . On note que  $u \in E_\lambda$  si et seulement si  $(u, \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}u) \in F_\lambda$ , ou de manière équivalente si et seulement si

$$u \in \text{dom}\mathcal{T}, \quad \left(u_s, \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}u_s\right) \mathcal{R}(-\sqrt{\lambda}s) = \left(u, \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}u\right), \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que  $u \in E_\lambda$  si et seulement si  $u \in \text{dom}\mathcal{T}$  et

$$u_s = \cos(\sqrt{\lambda}s)u + \sin(\sqrt{\lambda}s)\frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}u, \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R} \quad (4.22)$$

$$\frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}u_s = -\sin(\sqrt{\lambda}s)u + \cos(\sqrt{\lambda}s)\frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}u, \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}. \quad (4.23)$$

La relation (4.23) est obtenue en prenant la dérivée de la relation (4.22) par rapport à  $s$ . On obtient la caractérisation suivante du sous espace  $E_\lambda$

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \left\{ u \in \text{dom}\mathcal{T} : u_s = \cos(\sqrt{\lambda}s)u + \sin(\sqrt{\lambda}s)\frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}u \text{ pour tout } s \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ u \in \text{dom}\mathcal{T} : \left(u + i\frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}u\right)_s = e^{-i\sqrt{\lambda}s} \left(u + i\frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}u\right) \text{ pour tout } s \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Par le Théorème 4.3.1, on sait que pour tout  $(u, v) \in L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m)$ , on a

$$\text{Proj}_{F_\lambda}(u, v) = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \zeta_\lambda(s)(u, v) ds$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m)$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ . En particulier, on en déduit que

$$\text{Proj}_{F_\lambda}(u, 0) = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \zeta_\lambda(s)(u, 0) ds = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} (\cos(\sqrt{\lambda}s)u_s, \sin(\sqrt{\lambda}s)u_s) ds$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m)$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ . Il existe un élément  $U \in E_\lambda$  tel que  $\text{Proj}_{F_\lambda}(u, 0) = (U, \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}U)$ , c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left\{ (u - U)V - \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}U \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}V \right\} dy = 0, \quad V \in E_\lambda$$

ce qui implique que

$$\int_{\mathbb{R}^m} (u - 2U)V dy = 0, \quad V \in E_\lambda.$$

Cela signifie exactement que

$$\text{Proj}_{E_\lambda} u = 2U = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \cos(\sqrt{\lambda}s)u_s ds$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ . On note également que

$$\frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}\text{Proj}_{E_\lambda} u = 2\frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}U = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \sin(\sqrt{\lambda}s)u_s ds$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ . Si  $u \in \text{dom}\mathcal{T}$  on a

$$\frac{d}{ds} \left\{ \sin(\sqrt{\lambda}s) \frac{u_s}{\sqrt{\lambda}} \right\} = \cos(\sqrt{\lambda}s) u_s + \sin(\sqrt{\lambda}s) \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u_s \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^m)$$

et ainsi, on en déduit que

$$\begin{aligned} \text{Proj}_{E_\lambda} u &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \left\{ \frac{d}{ds} \left[ \sin(\sqrt{\lambda}s) \frac{u_s}{\sqrt{\lambda}} \right] - \sin(\sqrt{\lambda}s) \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u_s \right\} ds \\ &= - \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \sin(\sqrt{\lambda}s) \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u_s ds \end{aligned}$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ .  $\square$

#### Remarque 4.4.4.

1. On voit facilement que  $E_0 = \ker \mathcal{T} = \ker \mathcal{B}$  est laissé invariant par le groupe  $(\zeta(s))_{s \in \mathbb{R}}$  et que  $\text{Proj}_{E_0} = \langle \cdot \rangle$  commute avec  $(\zeta(s))_{s \in \mathbb{R}}$  et  $\mathcal{T}$

$$\text{Proj}_{E_0} u_s = \text{Proj}_{E_0} u = (\text{Proj}_{E_0} u)_s, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^m), \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\text{Proj}_{E_0} \mathcal{T} u = 0 = \mathcal{T} \text{Proj}_{E_0} u, \quad u \in \text{dom}\mathcal{T}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

2. Les sous espaces  $E_\lambda = \ker(\mathcal{B} - \lambda Id)$ ,  $\lambda > 0$  sont laissés invariants par le groupe  $(\zeta(s))_{s \in \mathbb{R}}$ . En effet, pour tout  $u \in \text{dom}\mathcal{T}$  tel que

$$\left( u + i \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right)_s = e^{-i\sqrt{\lambda}s} \left( u + i \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right), \quad s \in \mathbb{R}$$

on a

$$u_h \in \text{dom}\mathcal{T}, \quad \left( u_h + i \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u_h \right)_s = e^{-i\sqrt{\lambda}s} \left( u_h + i \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u_h \right), \quad s \in \mathbb{R}$$

ce qui signifie que  $u_h \in E_\lambda$ ,  $h \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ . En particulier les sous espaces  $E_\lambda \cap H_P^1$ ,  $\lambda > 0$  sont laissés invariants par  $(\zeta^1(s))_{s \in \mathbb{R}}$ .

3. L'application  $u \in E_\lambda \cap H_P^1 \rightarrow \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u$  est une isométrie de  $H_P^1$ . En effet, pour tout  $u \in E_\lambda \cap H_P^1$ , on a

$$u_s = \cos(\sqrt{\lambda}s) u + \sin(\sqrt{\lambda}s) \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u, \quad s \in \mathbb{R}.$$

On sait déjà que  $u, u_s \in E_\lambda \cap H_P^1$ , on en déduit que  $\frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \in E_\lambda \cap H_P^1$  et ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} P \nabla u \cdot \nabla u \, dy &= \int_{\mathbb{R}^m} P \nabla u_s \cdot \nabla u_s \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left| \cos(\sqrt{\lambda}s) P^{1/2} \nabla u + \sin(\sqrt{\lambda}s) P^{1/2} \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right|^2 dy \\ &= \cos(\sqrt{\lambda}s)^2 \int_{\mathbb{R}^m} P \nabla u \cdot \nabla u \, dy + \sin(\sqrt{\lambda}s)^2 \int_{\mathbb{R}^m} P \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \cdot \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \, dy \\ &\quad + \sin(2\sqrt{\lambda}s) \int_{\mathbb{R}^m} P \nabla u \cdot \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \, dy. \end{aligned}$$

En prenant la dérivée par rapport à la variable  $s$  en  $s = 0$ , on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^m} P \nabla u \cdot \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \, dy = 0$$

ce qui implique que

$$\int_{\mathbb{R}^m} P \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \cdot \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} P \nabla u \cdot \nabla u \, dy.$$

On note que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left( \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right)^2 \, dy = - \int_{\mathbb{R}^m} u \frac{\mathcal{T}^2}{\lambda} u \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} u^2 \, dy$$

et donc que  $\left| \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right|_{H_P^1} = |u|_{H_P^1}$  pour tout  $u \in E_\lambda \cap H_P^1$ , et  $\left( \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u, \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} v \right)_{H_P^1} = (u, v)_{H_P^1}$  pour tout  $u, v \in E_\lambda \cap H_P^1$ . L'application réciproque associée à  $\left. \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} \right|_{E_\lambda \cap H_P^1}$  est  $-\left. \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} \right|_{E_\lambda \cap H_P^1}$ .

4. Les projections orthogonales sur  $E_\lambda, \lambda > 0$  commutent avec  $(\zeta(s))_{s \in \mathbb{R}}$

$$\text{Proj}_{E_\lambda} u_s = (\text{Proj}_{E_\lambda} u)_s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

En particulier  $\text{Proj}_{E_\lambda}, \lambda > 0$  commute avec  $\mathcal{T}$ , c'est-à-dire que, pour tout  $u \in \text{dom} \mathcal{T}, \lambda > 0$ , les égalités suivantes sont vérifiées dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} \text{Proj}_{E_\lambda} \mathcal{T} u &= \text{Proj}_{E_\lambda} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u_s - u}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\text{Proj}_{E_\lambda} u_s - \text{Proj}_{E_\lambda} u}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\text{Proj}_{E_\lambda} u)_s - \text{Proj}_{E_\lambda} u}{s} = \mathcal{T} \text{Proj}_{E_\lambda} u. \end{aligned}$$

5. De nombreuses autres propriétés de commutation sont vraies, par exemple entre  $(\zeta_\lambda(s))_{s \in \mathbb{R}}$  et  $(\zeta_\mu(s))_{s \in \mathbb{R}}$ , et cela grâce aux égalités

$$\mathcal{R}(\sqrt{\lambda} s) \mathcal{R}(\sqrt{\mu} h) = \mathcal{R}(\sqrt{\mu} h) \mathcal{R}(\sqrt{\lambda} s), \quad \lambda, \mu > 0, \quad s, h \in \mathbb{R}.$$

On étudie maintenant l'action de  $(\zeta_\lambda(s))_{s \in \mathbb{R}}$  sur  $H_P^1 \times H_P^1$ , pour tout  $\lambda > 0$ . Tout comme dans la Proposition 4.3.10, on prouve

**Proposition 4.4.5.**

On suppose les hypothèses (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) vérifiées. Pour tout  $(u, v) \in H_P^1 \times H_P^1$ , on a  $\zeta_\lambda(s)(u, v) \in H_P^1 \times H_P^1$  et  $|\zeta_\lambda(s)(u, v)|_{H_P^1 \times H_P^1} = |(u, v)|_{H_P^1 \times H_P^1}$ . La famille d'applications  $(\zeta_\lambda^1(s))_{s \in \mathbb{R}} = (\zeta_\lambda(s)|_{H_P^1 \times H_P^1})_{s \in \mathbb{R}}$  est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires sur  $H_P^1 \times H_P^1$ . En particulier, pour tout  $u \in H_P^1$ , on a  $\text{Proj}_{E_\lambda} u \in H_P^1$

$$\nabla \text{Proj}_{E_\lambda} u = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \cos(\sqrt{\lambda} s) \nabla u_s \, ds, \quad \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{E_\lambda} u = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \sin(\sqrt{\lambda} s) \nabla u_s \, ds \quad (4.24)$$

fortement dans  $X_P$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$  et

$$u - \text{Proj}_{E_\lambda} u \perp E_\lambda \cap H_P^1 \quad \text{dans } H_P^1, \quad |\nabla \text{Proj}_{E_\lambda} u|_{X_P}^2 \leq 2 |\nabla u|_{X_P}^2.$$

**Preuve.** Soit  $(u, v)$  un élément de  $H_P^1 \times H_P^1$ . Par la Proposition 4.3.10, on sait que

$$(u_s, v_s) \in H_P^1 \times H_P^1, \quad |u_s|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = |u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad |v_s|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = |v|_{L^2(\mathbb{R}^m)}$$

$$|\nabla u_s|_{X_P} = |\nabla u|_{X_P}, \quad |\nabla v_s|_{X_P} = |\nabla v|_{X_P}$$

et ainsi on en déduit que

$$\begin{aligned} |\zeta_\lambda^1(s)(u, v)|_{H_P^1 \times H_P^1}^2 &= |\zeta_\lambda(s)(u, v)|_{L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + |\cos(\sqrt{\lambda}s)\nabla u_s - \sin(\sqrt{\lambda}s)\nabla v_s|_{X_P}^2 \\ &\quad + |\sin(\sqrt{\lambda}s)\nabla u_s + \cos(\sqrt{\lambda}s)\nabla v_s|_{X_P}^2 \\ &= |(u, v)|_{L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + |\nabla u_s|_{X_P}^2 + |\nabla v_s|_{X_P}^2 \\ &= |(u, v)|_{H_P^1 \times H_P^1}^2. \end{aligned}$$

Le fait que  $(\zeta_\lambda^1(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est un groupe vient du fait que  $(\zeta_\lambda(s))_{s \in \mathbb{R}}$  en est un, voir la Proposition 4.4.3. On note que

$$\begin{aligned} |\zeta_\lambda^1(s)(u, v) - (u, v)|_{H_P^1 \times H_P^1}^2 &= |\zeta_\lambda(s)(u, v) - (u, v)|_{L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &\quad + |\cos(\sqrt{\lambda}s)\nabla u_s - \sin(\sqrt{\lambda}s)\nabla v_s - \nabla u|_{X_P}^2 \\ &\quad + |\sin(\sqrt{\lambda}s)\nabla u_s + \cos(\sqrt{\lambda}s)\nabla v_s - \nabla v|_{X_P}^2 \end{aligned}$$

et ainsi, la continuité de  $(\zeta_\lambda^1(s))_{s \in \mathbb{R}}$  sur  $H_P^1 \times H_P^1$  est une conséquence de la continuité de  $(\zeta_\lambda(s))_{s \in \mathbb{R}}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m)$  et de la continuité de  $(\zeta^1(s))_{s \in \mathbb{R}}$  sur  $H_P^1$ , grâce aux inégalités

$$\begin{aligned} |\cos(\sqrt{\lambda}s)\nabla u_s - \sin(\sqrt{\lambda}s)\nabla v_s - \nabla u|_{X_P} &\leq (1 - \cos(\sqrt{\lambda}s))|\nabla u_s|_{X_P} + |\nabla u_s - \nabla u|_{X_P} \\ &\quad + |\sin(\sqrt{\lambda}s)| |\nabla v_s|_{X_P} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\sin(\sqrt{\lambda}s)\nabla u_s + \cos(\sqrt{\lambda}s)\nabla v_s - \nabla v|_{X_P} &\leq |\sin(\sqrt{\lambda}s)| |\nabla u_s|_{X_P} + |\nabla v_s - \nabla v|_{X_P} \\ &\quad + (1 - \cos(\sqrt{\lambda}s)) |\nabla v_s|_{X_P} \end{aligned}$$

et aux égalités  $|\nabla u_s|_{X_P} = |\nabla u|_{X_P}$ ,  $|\nabla v_s|_{X_P} = |\nabla v|_{X_P}$ . On note que l'ensemble des éléments de  $H_P^1 \times H_P^1$  qui sont laissés invariants par  $(\zeta_\lambda^1(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est donné par

$$\begin{aligned} \{(u, v) \in H_P^1 \times H_P^1 : \zeta_\lambda^1(s)(u, v) &= (u, v), s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(u, v) \in L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m) : \zeta_\lambda(s)(u, v) = (u, v), s \in \mathbb{R}\} \cap (H_P^1 \times H_P^1) \\ &= F_\lambda \cap (H_P^1 \times H_P^1) = \left\{ \left( u, \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right) : u \in E_\lambda \right\} \cap (H_P^1 \times H_P^1) \\ &= \left\{ \left( u, \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right) : u \in E_\lambda \cap H_P^1 \right\}. \end{aligned}$$

Pour le dernier point de la proposition, on utilise le troisième point de la Remarque 4.4.4. En appliquant le Théorème 4.3.1, on déduit pour tout  $u \in H_P^1$ , la convergence forte dans  $H_P^1 \times H_P^1$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \zeta_\lambda^1(s)(u, 0) ds = \text{Proj}_{F_\lambda \cap (H_P^1 \times H_P^1)}(u, 0) = \left( U, \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} U \right)$$

pour un certain  $U \in E_\lambda \cap H_P^1$ . Ce qui implique la convergence forte suivante dans  $L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m)$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} (\cos(\sqrt{\lambda}s), \sin(\sqrt{\lambda}s)) u_s \, ds = \left( U, \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} U \right)$$

et dans  $X_P \times X_P$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} (\cos(\sqrt{\lambda}s), \sin(\sqrt{\lambda}s)) \nabla u_s \, ds = \left( \nabla U, \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} U \right). \quad (4.25)$$

Par la Proposition 4.4.3 on a la convergence forte dans  $L^2 \times L^2$

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} (\cos(\sqrt{\lambda}s), \sin(\sqrt{\lambda}s)) u_s \, ds &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \zeta_\lambda(s)(u, 0) \, ds \\ &= \frac{1}{2} \left( \text{Proj}_{E_\lambda} u, \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{E_\lambda} u \right) \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\text{Proj}_{E_\lambda} u = 2U \in E_\lambda \cap H_P^1$  et (4.24) est une conséquence de (4.25). Comme  $(u, 0) - \frac{1}{2}(\text{Proj}_{E_\lambda} u, \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{E_\lambda} u)$  est orthogonal à  $F_\lambda$  par rapport au produit scalaire de  $L^2(\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathbb{R}^m)$ , et également à  $F_\lambda \cap (H_P^1 \times H_P^1)$  par rapport au produit scalaire de  $H_P^1 \times H_P^1$ , on en déduit que pour tout  $V \in E_\lambda \cap H_P^1$  on a

$$\left( \nabla u - \frac{1}{2} \nabla \text{Proj}_{E_\lambda} u, \nabla V \right)_{X_P} + \left( 0 - \frac{1}{2} \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{E_\lambda} u, \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} V \right)_{X_P} = 0.$$

Par le troisième point de la Remarque 4.4.4, on déduit que

$$(\nabla u - \nabla \text{Proj}_{E_\lambda} u, \nabla V)_{X_P} = 0, \quad V \in E_\lambda \cap H_P^1$$

ce qui, avec l'orthogonalité de  $u - \text{Proj}_{E_\lambda} u$  sur  $E_\lambda$  dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , donne l'orthogonalité de  $u - \text{Proj}_{E_\lambda} u$  sur  $E_\lambda \cap H_P^1$  dans  $H_P^1$ . La dernière conclusion est une conséquence de la Proposition 4.3.10, en notant que

$$\begin{aligned} |\nabla \text{Proj}_{E_\lambda} u|_{X_P} &\leq \left( \liminf_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} |\cos(\sqrt{\lambda}s)| \, ds \right) |\nabla u|_{X_P} \\ &\leq \liminf_{S \rightarrow +\infty} 2 \left( \frac{1}{S} \int_r^{r+S} (\cos(\sqrt{\lambda}s))^2 \, ds \right)^{1/2} |\nabla u|_{X_P} \\ &= \sqrt{2} |\nabla u|_{X_P}. \end{aligned}$$

□

#### Remarque 4.4.6.

La convergence dans la Proposition 4.4.5 est uniforme par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ , ce qui nous permet d'obtenir, après avoir changé  $s$  par  $-s$

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} (\cos(\sqrt{\lambda}s) \nabla u_{-s}, -\sin(\sqrt{\lambda}s) \nabla u_{-s}) \, ds = \left( \nabla \text{Proj}_{E_\lambda} u, \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{E_\lambda} u \right)$$

fortement dans  $X_P \times X_P$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ .

## 4.5 Construction du problème effectif

Le but de cette section est d'introduire et de justifier le caractère bien défini de la forme bilinéaire effective, voir la Proposition 4.5.9. Afin d'y parvenir, on introduit dans la Section 4.5.1 des lemmes techniques qui permettront de justifier la convergence forte dans  $X_Q$  de la limite suivante, pour tout  $u \in E_\lambda \cap H_P^1$ ,  $\lambda > 0$  et  $D \in H_Q^\infty$

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s) D \nabla \{u(Y(2s; \cdot))\} ds. \quad (4.26)$$

De plus, la quantité (4.26) est explicitée à l'aide d'une nouvelle famille de projections associées aux sous espaces propres de l'opérateur  $-L^2$ , où  $L$  est le générateur infinitésimal associé au groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  dans  $H_Q$ . Ces projections sont définies dans la Proposition 4.5.2. Dans la Section 4.5.2, une hypothèse structurelle est faite permettant de prolonger le caractère bien défini de la quantité (4.26) à toutes les fonctions  $u \in H_P^1$ .

### 4.5.1 Outils techniques

Pour les développements qui vont suivre, on aura besoin du lemme suivant.

#### Lemme 4.5.1.

1. Pour tout champ de matrices  $D \in H_Q \cap H_Q^\infty$  et tout champ de vecteurs  $c \in X_P$ , on a la convergence

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D c ds = \langle D \rangle c, \text{ fortement dans } X_Q, \text{ uniformément par rapport à } r \in \mathbb{R}.$$

2. La convergence ci-dessus reste vraie pour tout champ de matrices  $D \in H_Q^\infty$ , et tout champ de vecteurs  $c \in X_P$ , le moyenné de  $D$  est alors à considérer dans  $H_{Q,\text{loc}}$ , voir le Théorème 4.3.8.

#### Preuve.

1. On sait par le Théorème 4.3.8 que

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D ds = \langle D \rangle, \text{ fortement dans } H_Q, \text{ uniformément par rapport à } r \in \mathbb{R}.$$

On définit la suite  $c_k = \mathbf{1}_{\{|P^{1/2}c| \leq k\}} c$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Les champs de vecteurs  $c_k$  appartiennent à  $X_P^\infty$  et on a la convergence  $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k = c$  dans  $X_P$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a la convergence

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D c_k ds = \langle D \rangle c_k, \text{ fortement dans } X_Q, \text{ uniformément par rapport à } r \in \mathbb{R},$$

et cela grâce à l'inégalité

$$\left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D c_k ds - \langle D \rangle c_k \right|_{X_Q} \leq \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D ds - \langle D \rangle \right|_{H_Q} |c_k|_{X_P^\infty}.$$

On observe que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D c \, ds - \langle D \rangle c \right|_{X_Q} &\leq \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D (c - c_k) \, ds \right|_{X_Q} \\
&\quad + \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D c_k \, ds - \langle D \rangle c_k \right|_{X_Q} + |\langle D \rangle (c_k - c)|_{X_Q} \\
&\leq \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D \, ds \right|_{H_Q^\infty} |c - c_k|_{X_P} \\
&\quad + \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D c_k \, ds - \langle D \rangle c_k \right|_{X_Q} + |\langle D \rangle|_{H_Q^\infty} |c_k - c|_{X_P} \\
&\leq 2|D|_{H_Q^\infty} |c_k - c|_{X_P} + \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D c_k \, ds - \langle D \rangle c_k \right|_{X_Q}
\end{aligned}$$

ce qui implique que pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{S \rightarrow +\infty} \sup_{r \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D c \, ds - \langle D \rangle c \right|_{X_Q} \leq 2|D|_{H_Q^\infty} |c_k - c|_{X_P}.$$

La conclusion suit en prenant la limite quand  $k \rightarrow +\infty$ .

2. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on considère la suite  $D_k = \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} D$ . Etant donné que  $D \in H_Q^\infty \subset H_{Q,\text{loc}}$ , on déduit que  $D_k \in H_Q \cap H_Q^\infty$ , et par le point précédent, on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \sup_{r \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D_k c \, ds - \langle D_k \rangle c \right|_{X_Q} = 0.$$

On note que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D c \, ds - \langle D \rangle c \right|_{X_Q} &- \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D_k c \, ds - \langle D_k \rangle c \right|_{X_Q} \leq \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) (D - D_k) c \, ds \right|_{X_Q} \\
&\quad + |\langle D_k - D \rangle c|_{X_Q} \\
&= \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D \mathbf{1}_{\{\psi > k\}} c \, ds \right|_{X_Q} + |\langle D \rangle \mathbf{1}_{\{\psi > k\}} c|_{X_Q} \\
&\leq \frac{1}{S} \int_r^{r+S} |G(s) D|_{H_Q^\infty} |\mathbf{1}_{\{\psi > k\}} c|_{X_P} \, ds + |\langle D \rangle|_{H_Q^\infty} |\mathbf{1}_{\{\psi > k\}} c|_{X_P} \\
&\leq 2|\langle D \rangle|_{H_Q^\infty} |\mathbf{1}_{\{\psi > k\}} c|_{X_P}
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\limsup_{S \rightarrow +\infty} \sup_{r \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D c \, ds - \langle D \rangle c \right|_{X_Q} \leq 2|\langle D \rangle|_{H_Q^\infty} |\mathbf{1}_{\{\psi > k\}} c|_{X_P}.$$

La conclusion suit en prenant la limite quand  $k \rightarrow +\infty$ . □

La proposition qui suit a pour objet la définition et l'explicitation d'une nouvelle famille de projections sur les sous espaces propres associés à l'opérateur  $-L^2$ . L'introduction de nouveaux groupes d'opérateurs nous permet d'exprimer ces projections en terme de moyenne ergodique le long de ces groupes. Ces nouvelles projections nous permettront de justifier et

d'expliciter la limite (4.26). Comme suggéré par la Proposition 4.4.3, pour tout  $\lambda > 0$ , on introduit la famille de transformations de  $H_Q \times H_Q$

$$G_\lambda(s)(A, B) = (\cos(\sqrt{\lambda}s)G(s)A - \sin(\sqrt{\lambda}s)G(s)B, \sin(\sqrt{\lambda}s)G(s)A + \cos(\sqrt{\lambda}s)G(s)B)$$

pour tout  $(A, B) \in H_Q \times H_Q, s \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 4.5.2.**

Pour tout  $\lambda > 0$ , la famille  $(G_\lambda(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est un  $C^0$ -groupe de transformations unitaires sur  $H_Q \times H_Q$ , son générateur infinitésimal  $L_\lambda$  est donné par

$$\text{dom}L_\lambda = \text{dom}L \times \text{dom}L, \quad L_\lambda(A, B) = (LA - \sqrt{\lambda}B, LB + \sqrt{\lambda}A), \quad (A, B) \in \text{dom}L \times \text{dom}L$$

où  $L$  est le générateur infinitésimal associé au groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ . Pour tout  $A \in H_Q$  on a, avec la notation  $\mathcal{E}_\lambda = \ker(-L^2 - \lambda Id)$

$$\left( \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A, \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A \right) = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} (\cos(\sqrt{\lambda}s)G(s)A, \sin(\sqrt{\lambda}s)G(s)A) ds$$

fortement dans  $H_Q \times H_Q$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ , et

$$|\text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A|_{H_Q} = \left| \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A \right|_{H_Q} \leq |A|_{H_Q}.$$

De plus, si  $A \in H_Q \cap H_Q^\infty$ , alors  $\text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A, \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A \in H_Q^\infty$  et

$$|\text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A|_{H_Q^\infty} \leq 2|A|_{H_Q^\infty}, \quad \left| \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A \right|_{H_Q^\infty} \leq 2|A|_{H_Q^\infty}.$$

**Preuve.** On voit facilement que  $(G_\lambda(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est un  $C^0$ -groupe. Pour tout  $(A, B) \in H_Q \times H_Q$  un calcul direct nous mène à

$$|G_\lambda(s)(A, B)|_{H_Q \times H_Q}^2 = |(A, B)|_{H_Q \times H_Q}^2$$

ce qui signifie que la famille  $(G_\lambda(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est composée de transformations unitaires sur  $H_Q \times H_Q$ . Comme précédemment, on vérifie que  $\text{dom}L_\lambda = \text{dom}L \times \text{dom}L$  et

$$L_\lambda(A, B) = (LA - \sqrt{\lambda}B, LB + \sqrt{\lambda}A), \quad (A, B) \in \text{dom}L \times \text{dom}L.$$

Le noyau de  $L_\lambda$  est donné par

$$\ker L_\lambda = \left\{ \left( A, \frac{L}{\sqrt{\lambda}} A \right) : A \in \mathcal{E}_\lambda \right\}.$$

On note que  $A \in \mathcal{E}_\lambda$  si et seulement si  $\left( A, \frac{L}{\sqrt{\lambda}} A \right) \in \ker L_\lambda$ , ou de manière équivalente si et seulement si  $A \in \text{dom}L$  et  $G_\lambda(s) \left( A, \frac{L}{\sqrt{\lambda}} A \right) = \left( A, \frac{L}{\sqrt{\lambda}} A \right)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire

$$G(s)A = \cos(\sqrt{\lambda}s)A + \sin(\sqrt{\lambda}s) \frac{L}{\sqrt{\lambda}} A, \quad s \in \mathbb{R} \quad (4.27)$$

$$\frac{L}{\sqrt{\lambda}} G(s)A = -\sin(\sqrt{\lambda}s)A + \cos(\sqrt{\lambda}s) \frac{L}{\sqrt{\lambda}} A, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (4.28)$$

On remarque que (4.28) est une conséquence de (4.27) en prenant la dérivée par rapport à la variable  $s$  et donc, on obtient la caractérisation

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda &= \left\{ A \in \text{dom}L : G(s)A = \cos(\sqrt{\lambda}s)A + \sin(\sqrt{\lambda}s)\frac{L}{\sqrt{\lambda}}A, \quad s \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ A \in \text{dom}L : G(s) \left( A + i\frac{L}{\sqrt{\lambda}}A \right) = e^{-i\sqrt{\lambda}s} \left( A + i\frac{L}{\sqrt{\lambda}}A \right), \quad s \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

En appliquant le Théorème 4.3.1, on sait que pour tout  $(A, B) \in H_Q \times H_Q$  on a

$$\text{Proj}_{\ker L_\lambda}(A, B) = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G_\lambda(s)(A, B) \, ds$$

fortement dans  $H_Q \times H_Q$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ . En particulier, on a la convergence uniforme dans  $H_Q \times H_Q$  par rapport à  $r \in \mathbb{R}$

$$\text{Proj}_{\ker L_\lambda}(A, 0) = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} (\cos(\sqrt{\lambda}s)G(s)A, \sin(\sqrt{\lambda}s)G(s)A) \, ds = \left( Z, \frac{L}{\sqrt{\lambda}}Z \right), \quad (4.29)$$

pour un certain  $Z \in \mathcal{E}_\lambda$ . Ainsi, pour tout  $W \in \mathcal{E}_\lambda$ , on a

$$(A - Z, W)_{H_Q} + \left( 0 - \frac{L}{\sqrt{\lambda}}Z, \frac{L}{\sqrt{\lambda}}W \right)_{H_Q} = 0.$$

Comme  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est un groupe unitaire, son générateur infinitésimal  $L$  est anti-adjoint, et ainsi

$$(A - 2Z, W)_{H_Q} = 0, \quad W \in \mathcal{E}_\lambda$$

signifiant que  $\text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A = 2Z$ . Grâce à (4.29), on obtient la convergence uniforme dans  $H_Q \times H_Q$  par rapport à  $r \in \mathbb{R}$

$$\left( \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A, \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A \right) = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} (\cos(\sqrt{\lambda}s)G(s)A, \sin(\sqrt{\lambda}s)G(s)A) \, ds.$$

Supposons maintenant que  $A \in H_Q \cap H_Q^\infty$ . La convergence ci-dessus dans  $H_Q \times H_Q$  garantit l'existence d'une suite  $(S_n)_n$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{S_n} \int_0^{S_n} \cos(\sqrt{\lambda}s)G(s)A \, ds = \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A, \quad \text{pour presque tout } y \in \mathbb{R}^m$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{S_n} \int_0^{S_n} \sin(\sqrt{\lambda}s)G(s)A \, ds = \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A, \quad \text{pour presque tout } y \in \mathbb{R}^m.$$

De plus, la suite  $\left( \frac{2}{S_n} \int_0^{S_n} (\cos(\sqrt{\lambda}s)G(s)A, \sin(\sqrt{\lambda}s)G(s)A) \, ds \right)_n$  est bornée dans  $H_Q^\infty \times H_Q^\infty$

$$\left| \frac{2}{S_n} \int_0^{S_n} \cos(\sqrt{\lambda}s)G(s)A \, ds \right|_{H_Q^\infty} \leq 2|A|_{H_Q^\infty}, \quad \left| \frac{2}{S_n} \int_0^{S_n} \sin(\sqrt{\lambda}s)G(s)A \, ds \right|_{H_Q^\infty} \leq 2|A|_{H_Q^\infty},$$

ce qui implique que  $\text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A, \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A \in H_Q^\infty$  et

$$|\text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A|_{H_Q^\infty} \leq 2|A|_{H_Q^\infty}, \quad \left| \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A \right|_{H_Q^\infty} \leq 2|A|_{H_Q^\infty}.$$

□

**Remarque 4.5.3.**

On voit facilement grâce à l'anti-symétrie de  $L$  que  $\mathcal{E}_0 := \ker(-L^2) = \ker L$  et ainsi  $\text{Proj}_{\mathcal{E}_0} A = \text{Proj}_{\ker L} A = \langle A \rangle$ , pour tout champ de matrices  $A \in H_Q$ .

**Remarque 4.5.4.**

1. Tout comme pour le dernier point du Théorème 4.3.8, l'opérateur  $\text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda}$  peut être prolongé de  $H_Q$  à  $H_{Q,\text{loc}}$ . En effet, soit  $A$  un champ de matrices de  $H_{Q,\text{loc}}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k := \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A$  appartient à  $H_Q$ , et par la Proposition 4.5.2 on sait que

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} (\cos(\sqrt{\lambda}s)G(s)A_k, \sin(\sqrt{\lambda}s)G(s)A_k) ds = \left( \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A_k, \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A_k \right)$$

fortement dans  $H_Q \times H_Q$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ . On a

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} (\cos(\sqrt{\lambda}s), \sin(\sqrt{\lambda}s))G(s)A_k ds = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} (\cos(\sqrt{\lambda}s), \sin(\sqrt{\lambda}s))G(s)A_l ds$$

presque partout sur  $\{\psi \leq \min(k, l)\}$ , et ainsi il existe deux champs de matrices  $B, C \in H_{Q,\text{loc}}$  tels que

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} (\cos(\sqrt{\lambda}s)G(s)A_k, \sin(\sqrt{\lambda}s)G(s)A_k) ds &= \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}(B, C) \\ &= \left( \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A_k, \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A_k \right) \end{aligned}$$

fortement dans  $H_Q \times H_Q$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$  fixé. On montre que  $B \in \text{dom}(L^2)$ , et  $L^2 B + \lambda B = 0$ , c'est-à-dire  $B \in \ker(-L^2 - \lambda Id)$ , où  $L$  est considéré comme agissant sur  $H_{Q,\text{loc}}$ . En effet, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a

$$\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} B = \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A_k \in \text{dom}(L|_{H_Q})$$

ce qui signifie que  $B \in \text{dom}(L)$ . De plus

$$\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} LB = L(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} B) = L(\text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A_k) \in \text{dom}(L|_{H_Q})$$

ce qui implique que  $LB \in \text{dom}(L)$  et

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} L^2 B &= \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} L(LB) = L(\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} LB) = L(L(\text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A_k)) \\ &= -\lambda \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A_k = -\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \lambda B, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

On en déduit que  $B \in \text{dom}(L^2)$  et  $L^2 B + \lambda B = 0$ . On note que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} C = \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A_k = \frac{L}{\sqrt{\lambda}} (\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} B) = \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \frac{L}{\sqrt{\lambda}} B \in \text{dom}(L|_{H_Q})$$

ce qui signifie que  $C = \frac{L}{\sqrt{\lambda}} B \in \text{dom}(L)$ . On voit facilement que le champ de matrices  $B \in H_{Q,\text{loc}}$  satisfait

$$B \in \ker(-L^2 - \lambda Id), \quad (\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}}(A - B), M)_{H_Q} = 0, \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{E}_\lambda, k \in \mathbb{N}$$

et que  $B$  est déterminé de manière unique par la formulation variationnelle ci-dessus. De plus, si  $A \in H_Q$ , alors  $B$  coïncide avec  $\text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A \subset \mathcal{E}_\lambda \subset H_Q$ . Ainsi, pour tout  $A \in H_{Q,\text{loc}}$ , la famille

$$\left( \frac{2}{S} \int_r^{r+S} (\cos(\sqrt{\lambda}s)G(s)A, \sin(\sqrt{\lambda}s)G(s)A) ds \right)_{S>0}$$

converge dans  $H_{Q,\text{loc}} \times H_{Q,\text{loc}}$ , lorsque  $S \rightarrow +\infty$ , vers  $(B, \frac{L}{\sqrt{\lambda}}B)$ , où l'application  $A \in H_{Q,\text{loc}} \rightarrow B \in H_{Q,\text{loc}}$  prolonge la projection  $\text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} : H_Q \rightarrow H_Q$ . Par la suite, on utilisera la même notation  $B = \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A$  indépendamment du fait que  $A$  est dans  $H_Q$  ou dans  $H_{Q,\text{loc}}$ .

2. Pour tout champ de matrices  $A \in H_Q^\infty \subset H_{Q,\text{loc}}$  et tout  $k \in \mathbb{N}$ , le champ de matrices  $A_k = \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} A$  appartient à  $H_Q \cap H_Q^\infty$ , et par le Théorème 4.5.2 on a

$$|\text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A_k|_{H_Q^\infty} \leq 2|A_k|_{H_Q^\infty} \leq 2|A|_{H_Q^\infty}$$

$$\left| \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A_k \right|_{H_Q^\infty} \leq 2|A_k|_{H_Q^\infty} \leq 2|A|_{H_Q^\infty}.$$

On en déduit que

$$|\text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A|_{H_Q^\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A|_{H_Q^\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A_k|_{H_Q^\infty} \leq 2|A|_{H_Q^\infty}$$

et

$$\left| \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A \right|_{H_Q^\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A \right|_{H_Q^\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{L}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_\lambda} A_k \right|_{H_Q^\infty} \leq 2|A|_{H_Q^\infty}.$$

Les  $C^0$ -groupes d'opérateurs unitaires  $(G_\lambda(s))_{s \in \mathbb{R}}$ ,  $\lambda > 0$ , introduits dans la Proposition 4.5.2, nous permettent de justifier la convergence suivante

**Lemme 4.5.5.**

1. Pour tout champ de matrices  $D \in H_Q \cap H_Q^\infty$  et toute fonction  $u \in E_\lambda \cap H_P^1$ ,  $\lambda > 0$ , on a la convergence

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D \nabla u_{2s} \, ds = \frac{1}{2} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D \nabla u + \frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{4\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u$$

fortement dans  $X_Q$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ .

2. La convergence ci-dessus est conservée pour tout champ de matrices  $D \in H_Q^\infty$  et toute fonction  $u \in E_\lambda \cap H_P^1$ ,  $\lambda > 0$ , où les opérateurs  $\text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}}$ ,  $L$  sont considérés comme agissant dans  $H_{Q,\text{loc}}$ , voir les Remarques 4.5.4, 4.3.7.

**Preuve.**

1. Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on a  $u_{2s} = \cos(\sqrt{4\lambda}s)u + \sin(\sqrt{4\lambda}s)\frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}u$ . Par le troisième point de la Remarque 4.4.4, on sait que  $\frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}}u \in E_\lambda \cap H_P^1$ , on a donc l'égalité suivante dans  $X_P$

$$\nabla u_{2s} = \cos(\sqrt{4\lambda}s) \nabla u + \sin(\sqrt{4\lambda}s) \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u. \quad (4.30)$$

On va montrer que

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \cos(\sqrt{4\lambda}s) G(s) D \nabla u \, ds = \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D \nabla u \quad (4.31)$$

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \sin(\sqrt{4\lambda}s) G(s) D \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \, ds = \frac{L}{\sqrt{4\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \quad (4.32)$$

fortement dans  $X_Q$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ . On introduit la suite de champs de vecteurs  $c_k = \mathbf{1}_{\{|P^{1/2}\nabla u| \leq k\}} \nabla u$ . Les éléments  $c_k$  de la suite appartiennent à  $X_P^\infty$  et on a la convergence  $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k = \nabla u$  dans  $X_P$ . Par la Proposition 4.5.2, on a

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \cos(\sqrt{4\lambda}s) G(s) D \, ds = \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D$$

fortement dans  $H_Q$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ . Tout comme dans la preuve du Lemme 4.5.1, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \cos(\sqrt{4\lambda}s) G(s) D \nabla u \, ds - \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D \nabla u \right|_{X_Q} &\leq 4 |D|_{H_Q^\infty} |\nabla u - c_k|_{X_P} \\ &+ \left| \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \cos(\sqrt{4\lambda}s) G(s) D \, ds - \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D \right|_{H_Q} |c_k|_{X_P^\infty} \end{aligned}$$

ce qui implique que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{S \rightarrow +\infty} \sup_{r \in \mathbb{R}} \left| \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \cos(\sqrt{4\lambda}s) G(s) D \nabla u \, ds - \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D \nabla u \right|_{X_Q} \leq 4 |D|_{H_Q^\infty} |\nabla u - c_k|_{X_P}.$$

En passant à la limite lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , on obtient la formule (4.31). Pour la formule (4.32), on utilise le champ de vecteurs  $\nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \in X_P$  et la convergence

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \sin(\sqrt{4\lambda}s) G(s) D \, ds = \frac{L}{\sqrt{4\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D$$

forte dans  $H_Q$  et uniforme par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ . En combinant (4.31), (4.32), (4.30) on obtient que

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D \nabla u_{2s} \, ds = \frac{1}{2} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D \nabla u + \frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{4\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u$$

fortement dans  $X_Q$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ .

2. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , considérons la suite  $D_k = \mathbf{1}_{\{\psi \leq k\}} D \in H_Q \cap H_Q^\infty$ . Par le point précédent, on sait que

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \sup_{r \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D_k \nabla u_{2s} \, ds - \frac{1}{2} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D_k \nabla u - \frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{4\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D_k \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right|_{X_Q} = 0. \quad (4.33)$$

On note également que

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D \nabla u_{2s} \, ds - \frac{1}{2} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D \nabla u - \frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{4\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right|_{X_Q} \\ &- \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D_k \nabla u_{2s} \, ds - \frac{1}{2} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D_k \nabla u - \frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{4\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D_k \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right|_{X_Q} \\ &\leq \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) (D - D_k) \nabla u_{2s} \, ds \right|_{X_Q} + \frac{1}{2} |\text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} (D_k - D) \nabla u|_{X_Q} \\ &+ \frac{1}{2} \left| \frac{L}{\sqrt{4\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} (D_k - D) \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right|_{X_Q}. \end{aligned}$$

Il est facile de constater que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)(D - D_k) \nabla u_{2s} \, ds \right|_{X_Q} &= \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D \mathbf{1}_{\{\psi > k\}} \left( \cos(\sqrt{4\lambda}s) \nabla u + \sin(\sqrt{4\lambda}s) \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right) \right|_{X_Q} \\ &\leq |D|_{H_Q^\infty} \left( \left| \mathbf{1}_{\{\psi > k\}} \nabla u \right|_{X_P} + \left| \mathbf{1}_{\{\psi > k\}} \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right|_{X_P} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left| \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} (D_k - D) \nabla u \right|_{X_Q} + \frac{1}{2} \left| \frac{L}{\sqrt{4\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} (D_k - D) \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right|_{X_Q} \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D \right|_{H_Q^\infty} \left| \mathbf{1}_{\{\psi > k\}} \nabla u \right|_{X_P} + \frac{1}{2} \left| \frac{L}{\sqrt{4\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D \right|_{H_Q^\infty} \left| \mathbf{1}_{\{\psi > k\}} \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right|_{X_P} \\ &\leq |D|_{H_Q^\infty} \left( \left| \mathbf{1}_{\{\psi > k\}} \nabla u \right|_{X_P} + \left| \mathbf{1}_{\{\psi > k\}} \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right|_{X_P} \right). \end{aligned}$$

En combinant la convergence (4.33) avec les estimés précédents, on obtient

$$\begin{aligned} &\limsup_{S \rightarrow +\infty} \sup_{r \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D \nabla u_{2s} \, ds - \frac{1}{2} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D \nabla u - \frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{4\lambda}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda}} D \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right|_{X_Q} \\ &\leq 2 |D|_{H_Q^\infty} \left( \left| \mathbf{1}_{\{\psi > k\}} \nabla u \right|_{X_P} + \left| \mathbf{1}_{\{\psi > k\}} \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right|_{X_P} \right). \end{aligned}$$

La conclusion suit en prenant la limite lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . □

### 4.5.2 Hypothèse structurelle associée à l'opérateur $\mathcal{B}$

On note que tout  $E_\lambda$  est fermé et, grâce à la symétrie de  $\mathcal{B}$ ,  $E_\lambda \perp E_\mu$  pour tout  $\lambda \neq \mu$ . En vue de pouvoir prolonger l'existence de la quantité (4.26) à toutes les fonctions  $u \in H_P^1$ , on cherche à décomposer l'espace  $H_P^1$  suivant les sous espaces propres  $(E_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ . Pour y arriver, on fait l'hypothèse que  $L^2(\mathbb{R}^m)$  est la somme Hilbertienne d'une famille dénombrable de sous espaces  $E_\lambda$ , c'est-à-dire  $\text{vect}(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_{\lambda_n})$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$

$$L^2(\mathbb{R}^m) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_{\lambda_n}, \quad E_{\lambda_n} = \ker(\mathcal{B} - \lambda_n Id), \quad \lambda_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.34)$$

Sans perte de généralité, on suppose que  $\lambda_0 = 0$  (indépendamment du fait que 0 est une valeur propre ou non de  $\mathcal{B}$ ) et  $\lambda_n > 0$ ,  $E_{\lambda_n} = \ker(\mathcal{B} - \lambda_n Id) \neq \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exemple 4.5.1.** (*Cas périodique*)

Supposons que le flot caractéristique  $Y(s; y)$  est  $S_0$ -périodique, c'est-à-dire

$$\exists S_0 > 0 \text{ tel que } Y(s + S_0; y) = Y(s; y), \quad s \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

On montre que les valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{B} = -\mathcal{T}^2$  s'écrivent  $\sqrt{\lambda_n} = n\omega_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_0 = 2\pi/S_0$ . En effet, si  $\lambda_0 = 0$  est une valeur propre de  $\mathcal{B}$ , elle correspond au cas  $n = 0$ . Soit  $\lambda > 0$  une valeur propre positive de  $\mathcal{B}$ . Cela signifie qu'il existe  $u \in \text{dom } \mathcal{T}$ ,  $u \neq 0$  tel que

$$u_s + i \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u_s = e^{-i\sqrt{\lambda}s} \left( u + i \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u \right), \quad s \in \mathbb{R}.$$

En prenant  $s = S_0$ , on obtient

$$\left(u + i \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} u\right) \left(1 - e^{-i\sqrt{\lambda}S_0}\right) = 0$$

ce qui implique que  $\sqrt{\lambda}S_0 = 2\pi n, n \in \mathbb{N}^*$ . Dans ce cas l'hypothèse (4.34) est vraie. En effet, si  $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$  est tel que  $\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} = 0$  pour toute valeur propre  $\lambda_n$ , alors on a

$$\text{Proj}_{E_0} = \frac{1}{S_0} \int_0^{S_0} u_s \, ds = 0$$

et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Proj}_{E_{n^2\omega_0^2}} u = \frac{2}{S_0} \int_0^{S_0} \cos(n\omega_0 s) u_s \, ds = 0, \quad \frac{\mathcal{T}}{n\omega_0} \text{Proj}_{E_{n^2\omega_0^2}} u = \frac{2}{S_0} \int_0^{S_0} \sin(n\omega_0 s) u_s \, ds = 0.$$

Ainsi, tous les coefficients de Fourier de la fonction  $S_0$ -périodique  $s \rightarrow u(Y(s; \cdot)) \in L^2(\mathbb{R}^m)$  s'annulent, et donc  $u(Y(s; \cdot)) = 0$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , ce qui signifie que  $u = 0$ .

**Exemple 4.5.2.** (Cas presque périodique)

On étudie maintenant un cas particulièrement important : celui pour lequel le  $C^0$ -groupe  $(\zeta(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est presque périodique. On suppose que pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , la fonction  $s \in \mathbb{R} \rightarrow \zeta(s)u \in L^2(\mathbb{R}^m)$  est presque périodique, ce qui signifie que la trajectoire  $s \rightarrow \zeta(s)u \in L^2(\mathbb{R}^m)$  est la limite dans  $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^m))$  d'une suite de polynômes trigonométriques à coefficients dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$  (voir [31] pour une étude détaillée des fonctions presque périodiques à valeurs dans un espace de Banach).

**Proposition 4.5.6.**

Supposons que les hypothèses (4.13), (4.14) sont vérifiées et que le  $C^0$ -groupe  $(\zeta(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est presque périodique. Alors la famille de sous espaces non triviaux  $E_\lambda = \ker(\mathcal{B} - \lambda Id), \lambda \in \mathbb{R}_+$  est dénombrable et  $L^2(\mathbb{R}^m) = \bigoplus_n E_{\lambda_n}, E_{\lambda_n} = \ker(\mathcal{B} - \lambda_n Id) \neq \{0\}$ .

**Preuve.** Soit  $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$  une fonction orthogonale à  $E_\lambda = \ker(\mathcal{B} - \lambda Id)$  pour toute valeur propre  $\lambda$ . Ainsi  $u$  est orthogonal à  $E_\lambda = \ker(\mathcal{B} - \lambda Id)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$\text{Proj}_{E_0} u = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \zeta(s)u \, ds = 0, \quad \text{Proj}_{E_\lambda} u = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_0^S \cos(\sqrt{\lambda}s) \zeta(s)u \, ds = 0, \quad \lambda > 0.$$

On note également que

$$\frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda}} \text{Proj}_{E_\lambda} u = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_0^S \sin(\sqrt{\lambda}s) \zeta(s)u \, ds = 0, \quad \lambda > 0.$$

Ainsi tous les coefficients de Fourier  $s \rightarrow \zeta(s)u$  s'annulent, ce qui implique que  $u = 0$  in  $L^2(\mathbb{R}^m)$  et donc que  $\text{vect}(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} E_\lambda) = L^2(\mathbb{R}^m)$ . Comme  $L^2(\mathbb{R}^m)$  est séparable et que les sous espaces  $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$  sont orthogonaux, on en déduit que  $E_\lambda \neq \{0\}$  seulement pour une sous famille dénombrable de  $\{\lambda_n\}$ , cela signifie que (4.34) est vérifié.  $\square$

Une conséquence directe de (4.34) est donné par

**Proposition 4.5.7.**

L'espace  $H_P^1$  est la somme Hilbertienne des sous espaces  $(E_{\lambda_n} \cap H_P^1)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Preuve.** Les espaces  $(E_{\lambda_n} \cap H_P^1)_{n \in \mathbb{N}}$  sont fermés dans  $H_P^1$  étant donné que les espaces  $(E_{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$  le sont dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ . Par les Propositions 4.3.10, 4.4.5 on a

$$u - \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u \perp E_{\lambda_n} \cap H_P^1 \text{ dans } H_P^1, \quad u \in H_P^1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Donc, pour tout  $u \in E_{\lambda_k} \cap H_P^1, k \neq n$  on a

$$u - 0 \perp E_{\lambda_n} \cap H_P^1 \text{ dans } H_P^1$$

ce qui signifie que  $E_{\lambda_k} \cap H_P^1 \perp E_{\lambda_n} \cap H_P^1$  dans  $H_P^1$ , pour tout  $k \neq n$ . Soit  $u$  un élément de  $H_P^1$ . Comme  $L^2(\mathbb{R}^m)$  est la somme Hilbertienne des  $(E_{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , on a  $u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u$  dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u = \text{Proj}_{E_{\lambda_n} \cap H_P^1} u$  et l'inégalité de Bessel

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u|_{H_P^1}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n} \cap H_P^1} u|_{H_P^1}^2 \leq |u|_{H_P^1}^2$$

nous garantit que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u$  converge dans  $H_P^1$ . Sa somme dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$  étant  $u$ , on en déduit que  $u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u$  dans  $H_P^1$ , ce qui signifie que  $H_P^1 = \overline{\text{vect}(\cup_{n \in \mathbb{N}} (E_{\lambda_n} \cap H_P^1))}$ .  $\square$

A l'aide des Lemmes 4.5.1 et 4.5.5, on sait que  $\left(\frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D \nabla u_{2s} \, ds\right)_{S>0}$  converge fortement dans  $X_Q$ , lorsque  $S \rightarrow +\infty$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ , vers une certaine limite ne dépendant pas de  $r$ , pour tout  $u \in \text{vect} \{ \cup_{n \in \mathbb{N}} (E_{\lambda_n} \cap H_P^1) \}$ . Grâce à l'inégalité

$$\left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D \nabla u_{2s} \, ds \right|_{X_Q} \leq |D|_{H_Q^\infty} |\nabla u|_{X_P}$$

on en déduit que la convergence ci-dessus est toujours vraie dans  $X_Q$ , uniformément par rapport à  $r$ , vers une certaine limite ne dépendant pas de  $r$ , pour tout  $u \in \oplus_{n \in \mathbb{N}} (E_{\lambda_n} \cap H_P^1) = H_P^1$ . Cela nous amène à la proposition suivante

**Proposition 4.5.8.** *Pour tout champ de matrices  $D \in H_Q^\infty$  et toute fonction  $u \in H_P^1$ , la quantité*

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D \nabla u_{2s} \, ds,$$

*converge fortement dans  $X_Q$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ .*

### 4.5.3 Définition et propriétés de la forme bilinéaire $m$

On cherche maintenant à appliquer les méthodes variationnelles présentées en Annexe A pour résoudre (4.1), (4.2). Pour cela, on a besoin de construire la forme bilinéaire correspondant au problème limite. On fait cette construction pour tout champ de matrices symétriques positives  $D$  satisfaisant

$$Q^{1/2}(y)(D(y) + b(y) \otimes b(y))Q^{1/2}(y) \geq dI_m, \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (4.35)$$

pour une certaine constante  $d > 0$ . On suppose également que

$$D \in H_Q^\infty, \quad b \in X_Q^\infty. \quad (4.36)$$

Aux hypothèses ci-dessus, on ajoute les autres hypothèses faites précédemment (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), (4.34). On introduit les formes bilinéaires suivantes

**Proposition 4.5.9.**

1. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , considérons l'application  $\mathfrak{a}^\varepsilon : H_P^1 \times H_P^1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathfrak{a}^\varepsilon(u, v) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} D(y) \nabla u \cdot \nabla v \, dy}_{\mathfrak{a}(u, v)} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla u)(b \cdot \nabla v) \, dy, \quad u, v \in H_P^1.$$

La forme bilinéaire  $\mathfrak{a}^\varepsilon$  est bien définie, continue, symétrique et positive. Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , elle est coercive dans  $H_P^1$  par rapport à  $L^2(\mathbb{R}^m)$ .

2. Pour tout  $r \in \mathbb{R}$ , considérons l'application  $\mathfrak{m} : H_P^1 \times H_P^1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathfrak{m}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^m} \left\{ \langle D \rangle(y) \nabla u + \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} (G(s)D - \langle D \rangle) \nabla u_{2s} \, ds \right\} \cdot \nabla v \, dy$$

La forme bilinéaire  $\mathfrak{m}$  est bien définie, continue, symétrique, positive, ne dépend pas de  $r \in \mathbb{R}$  et s'écrit

$$\mathfrak{m}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle(y) \nabla u \cdot \nabla v \, dy + \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_{-S/2}^{S/2} \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla u_s \cdot \nabla v_{-s} \, dy ds, \quad u, v \in H_P^1. \quad (4.37)$$

La forme bilinéaire  $\mathfrak{m}$  vérifie également

$$\mathfrak{m}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^m} D \nabla u \cdot \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} v \, dy, \quad u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad v \in H_P^1. \quad (4.38)$$

3. La forme bilinéaire  $\mathfrak{m}$  vérifie la relation

$$\mathfrak{m}(u, \mathcal{B}v) = \mathfrak{m}(\mathcal{B}u, v) \quad \text{pour tout } u, v \in H_P^1 \text{ tels que } \mathcal{T}u, \mathcal{T}v, \mathcal{B}u, \mathcal{B}v \in H_P^1.$$

De plus, la forme bilinéaire  $(u, v) \rightarrow \mathfrak{m}(u, v) + \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla u)(b \cdot \nabla v) \, dy$  est coercive sur  $H_P^1$  par rapport à  $L^2(\mathbb{R}^m)$ .

**Preuve.**

1. Pour tout  $u, v \in H_P^1$ , on a

$$|D \nabla u \cdot \nabla v| = |Q^{1/2} D Q^{1/2} : (P^{1/2} \nabla v) \otimes (P^{1/2} \nabla u)| \leq |D|_{H_Q^\infty} |P^{1/2} \nabla v| |P^{1/2} \nabla u|$$

et

$$\begin{aligned} |(b \cdot \nabla u)(b \cdot \nabla v)| &= |Q^{1/2} b \otimes b Q^{1/2} : (P^{1/2} \nabla v) \otimes (P^{1/2} \nabla u)| \\ &\leq |b \otimes b|_{H_Q^\infty} |P^{1/2} \nabla v| |P^{1/2} \nabla u| = |b|_{X_Q^\infty}^2 |P^{1/2} \nabla v| |P^{1/2} \nabla u|. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|\mathfrak{a}^\varepsilon(u, v)| \leq \left( |D|_{H_Q^\infty} + \frac{|b|_{X_Q^\infty}^2}{\varepsilon} \right) |u|_{H_P^1} |v|_{H_P^1}$$

ce qui signifie que  $\mathfrak{a}^\varepsilon$  est bien définie et continue sur  $H_P^1$ . Elle est également symétrique et positive, grâce à la symétrie et à la positivité de  $D(y), y \in \mathbb{R}^m$ . La coercivité est une conséquence de (4.35), en observant que pour tout  $u \in H_P^1, 0 < \varepsilon \leq 1$  on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^\varepsilon(u, u) + d|u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^m} Q^{1/2} \left( D + \frac{b \otimes b}{\varepsilon} \right) Q^{1/2} : (P^{1/2} \nabla u) \otimes (P^{1/2} \nabla u) \, dy + d|u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &\geq d|u|_{H_P^1}^2. \end{aligned}$$

2. On justifie que  $\mathbf{m}$  est bien définie et ne dépend pas de  $r \in \mathbb{R}$ . Par la Proposition 4.5.8 et les Lemmes 4.5.1, 4.5.5, on sait que pour tout  $u \in H_P^1$ , la famille

$$\left( \frac{1}{S} \int_r^{r+S} (G(s)D - \langle D \rangle) \nabla u_{2s} \, ds \right)_{S>0} = \left( \frac{1}{S} \int_r^{r+S} (G(s)(D - \langle D \rangle)) \nabla u_{2s} \, ds \right)_{S>0}$$

converge fortement dans  $X_Q$ , lorsque  $S \rightarrow +\infty$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ , vers une certaine limite ne dépendant pas de  $r \in \mathbb{R}$ . Ainsi  $\mathbf{m}(u, v)$  est bien définie pour tout  $u, v \in H_P^1$ . Clairement  $\mathbf{m}$  est bilinéaire. On établit la symétrie en remarquant que

$$\begin{aligned} & G(s)(D - \langle D \rangle) \nabla u_{2s} \cdot \nabla v \\ &= G(s)(D - \langle D \rangle) \, {}^t \partial Y(s; y) (\nabla u_s) (Y(s; y)) \cdot {}^t \partial Y(s; y) (\nabla v_{-s}) (Y(s; y)) \\ &= ((D - \langle D \rangle) \nabla u_s \cdot \nabla v_{-s})_s \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\mathbf{m}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle \nabla u \cdot \nabla v \, dy + \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_{-S/2}^{S/2} \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla u_s \cdot \nabla v_{-s} \, dy \, ds.$$

La forme bilinéaire  $\mathbf{m}$  est continue sur  $H_P^1 \times H_P^1$

$$|\mathbf{m}(u, v)| \leq 3|D|_{H_Q^\infty} |\nabla u|_{X_P} |\nabla v|_{X_P} \leq 3|D|_{H_Q^\infty} |u|_{H_P^1} |v|_{H_P^1}, \quad u, v \in H_P^1.$$

La symétrie de  $\mathbf{m}$  vient de la symétrie de  $D(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , après avoir effectué le changement de variable  $s \rightarrow -s$ .

On montre maintenant que  $\mathbf{m}$  vérifie (4.38) en observant que pour tout  $u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$u_{2s} + u = 2 \cos(\sqrt{\lambda_n} s) u_s, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (4.39)$$

La formule ci-dessus est triviale dans le cas  $n = 0$ . Lorsque  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note que

$$u_{2s} + i \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u_{2s} = e^{-i\sqrt{\lambda_n} s} \left( u_s + i \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u_s \right), \quad u + i \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u = e^{i\sqrt{\lambda_n} s} \left( u_s + i \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u_s \right)$$

ce qui implique que  $u_{2s} + u = \Re\{2 \cos(\sqrt{\lambda_n} s)(u_s + i \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u_s)\} = 2 \cos(\sqrt{\lambda_n} s) u_s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Grâce à (4.39), le terme moyenné apparaissant dans  $\mathbf{m}$  s'écrit, pour tout  $u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v \in H_P^1$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} (G(s)D - \langle D \rangle) \nabla u_{2s} \, ds \cdot \nabla v \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \cos(\sqrt{\lambda_n} s) G(s) D \nabla u_s \, ds \cdot \nabla v \, dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D \nabla u \, ds \cdot \nabla v \, dy - \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \nabla u_{2s} \, ds \cdot \langle D \rangle \nabla v \, dy. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Par le Lemme 4.5.1, on a

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D \nabla u = \langle D \rangle \nabla u$$

fortement dans  $X_Q$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$  et donc

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s) D \nabla u \, ds \cdot \nabla v \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle \nabla u \cdot \nabla v \, dy. \quad (4.41)$$

Par la Proposition 4.3.10, on déduit grâce aux relations d'orthogonalité  $E_{\lambda_n} \perp E_0, n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \nabla u_{2s} \, ds = \nabla \text{Proj}_{E_0} u = 0$$

fortement dans  $X_P$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$  et ainsi

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \nabla u_{2s} \, ds \cdot \langle D \rangle \nabla v \, dy = 0. \quad (4.42)$$

Pour le terme restant dans le membre de droite de l'équation (4.40), on note que

$$G(s)D\nabla u_s \cdot \nabla v = \partial Y(s; y)G(s)D^t \partial Y(s; y)(\nabla u)_s \cdot (\nabla v_{-s})_s = (D\nabla u \cdot \nabla v_{-s})_s$$

et donc on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \cos(\sqrt{\lambda_n} s) G(s)D\nabla u_s \, ds \cdot \nabla v \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} D\nabla u \cdot \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \cos(\sqrt{\lambda_n} s) \nabla v_{-s} \, ds \, dy.$$

Par la Remarque 4.4.6, on sait que

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \cos(\sqrt{\lambda_n} s) \nabla v_{-s} \, ds = \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} v$$

fortement dans  $X_P$ , uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ , ce qui implique que

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} \cos(\sqrt{\lambda_n} s) G(s)D\nabla u_s \, ds \cdot \nabla v \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} D\nabla u \cdot \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} v \, dy \quad (4.43)$$

uniformément par rapport à  $r \in \mathbb{R}$ . En combinant (4.40), (4.41), (4.42), (4.43) on est amené à l'expression suivante pour le terme moyenné de  $\mathbf{m}$

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} (G(s)D - \langle D \rangle) \nabla u_{2s} \, ds \cdot \nabla v \, dy &= \int_{\mathbb{R}^m} D\nabla u \cdot \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} v \, dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle \nabla u \cdot \nabla v \, dy, \quad u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1, n \in \mathbb{N}^*, v \in H_P^1 \end{aligned}$$

et donc

$$\mathbf{m}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^m} D\nabla u \cdot \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} v \, dy, \quad u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1, n \in \mathbb{N}^*, v \in H_P^1. \quad (4.44)$$

En fait, la formule ci-dessus reste vraie pour  $u \in E_0 \cap H_P^1, v \in H_P^1$ . En effet, en remarquant que  $u = u_{2s} = u_s(Y(s; \cdot)), v = v_{-s}(Y(s; \cdot))$ , on obtient que

$$\begin{aligned} G(s)D\nabla u_{2s} \cdot \nabla v &= G(s)D^t \partial Y(s; \cdot)(\nabla u)_s \cdot {}^t \partial Y(s; \cdot)(\nabla v_{-s})_s \\ &= (D\nabla u_s \cdot \nabla v_{-s})_s = (D\nabla u \cdot \nabla v_{-s})_s. \end{aligned}$$

Par la Proposition 4.3.10, on déduit que

$$\mathbf{m}(u, v) = \lim_{S \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} D\nabla u \cdot \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \nabla v_{-s} \, ds \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} D\nabla u \cdot \nabla \text{Proj}_{E_0} v \, dy.$$

Par (4.44) et l'hypothèse  $D \geq 0$ , on a

$$\mathbf{m}(u, v) = 0, \quad u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1, v \in E_{\lambda_k} \cap H_P^1, n \neq k$$

et

$$\mathbf{m}(u, u) = \int_{\mathbb{R}^m} D(y) \nabla u \cdot \nabla u \, dy \geq 0, \quad u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Comme  $\mathbf{m}$  est bornée dans  $H_P^1 \times H_P^1$ , on voit facilement que pour tout  $u \in H_P^1$  on a

$$\mathbf{m}(u, u) = \mathbf{m} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u, \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{Proj}_{E_{\lambda_k}} u \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{m}(\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u, \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u) \geq 0$$

ce qui signifie que la forme quadratique  $u \rightarrow \mathbf{m}(u, u)$  est positive sur  $H_P^1$ . On note également que pour tout  $u, v \in H_P^1$  on a

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(u, v) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{m}(\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u, \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} v) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m} D \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u \cdot \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} v \, dy \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |D|_{H_Q^\infty} |\nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u|_{X_P} |\nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} v|_{X_P} \\ &\leq |D|_{H_Q^\infty} |\nabla u|_{X_P} |\nabla v|_{X_P} \leq |D|_{H_Q^\infty} |u|_{H_P^1} |v|_{H_P^1}. \end{aligned}$$

3. On se concentre sur l'égalité  $\mathbf{m}(u, \mathcal{B}v) = \mathbf{m}(\mathcal{B}u, v)$ , avec  $u, v \in H_P^1$ , tels que  $\mathcal{T}u, \mathcal{T}v, \mathcal{B}u, \mathcal{B}v \in H_P^1$ . On observe que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle \nabla u \cdot \nabla \mathcal{T}v \, dy &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle \nabla u \cdot \nabla (v_h - v) \, dy \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_{\mathbb{R}^m} G(h) \langle D \rangle \nabla u \cdot \nabla v_h \, dy - \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle \nabla u \cdot \nabla v \, dy \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^m} (\langle D \rangle \nabla u_{-h} - \langle D \rangle \nabla u) \cdot \nabla v \, dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle \nabla \mathcal{T}u \cdot \nabla v \, dy \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle \nabla u \cdot \nabla \mathcal{B}v \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle \nabla \mathcal{T}u \cdot \nabla \mathcal{T}v \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle \nabla \mathcal{B}u \cdot \nabla v \, dy. \quad (4.45)$$

Pour le second terme du membre de droite de (4.37), on note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\{ \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla u_s \cdot \nabla \mathcal{T}v_{-s} \, dy + \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla \mathcal{T}u_s \cdot \nabla v_{-s} \, dy \right\} \\ = \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla u_s \cdot \nabla \mathcal{B}v_{-s} \, dy - \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla \mathcal{B}u_s \cdot \nabla v_{-s} \, dy \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_{-S/2}^{S/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla u_s \cdot \nabla \mathcal{B}v_{-s} \, dy - \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla \mathcal{B}u_s \cdot \nabla v_{-s} \, dy \right\} ds \\ = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \left[ \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla u_s \cdot \nabla \mathcal{T}v_{-s} \, dy + \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla \mathcal{T}u_s \cdot \nabla v_{-s} \, dy \right]_{-S/2}^{S/2} \\ = 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

En combinant (4.45), (4.46), on déduit que  $\mathbf{m}(u, \mathcal{B}v) = \mathbf{m}(\mathcal{B}u, v)$ .

Il reste à justifier la coercivité. Pour tout  $u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1, v \in E_{\lambda_k} \cap H_P^1$ , on a

$$\begin{aligned} (u, v)_{H_P^1} &= \delta_{nk}(u, v)_{H_P^1}, \quad \mathbf{m}(u, v) = \delta_{nk} \int_{\mathbb{R}^m} D(y) \nabla u \cdot \nabla v \, dy \\ \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla u)(b \cdot \nabla v) \, dy &= - \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{T}^2 u v \, dy = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^m} u(y)v(y) \, dy \\ &= \lambda_n \delta_{nk} \int_{\mathbb{R}^m} u(y)v(y) \, dy = \delta_{nk} \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla u)(b \cdot \nabla v) \, dy. \end{aligned}$$

On voit facilement, grâce à (4.35), que pour tout  $u \in \text{vect} \cup_{n \in \mathbb{N}} (E_{\lambda_n} \cap H_P^1)$  on a

$$\mathbf{m}(u, u) + \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla u)^2 \, dy + d \int_{\mathbb{R}^m} u^2(y) \, dy \geq d|u|_{H_P^1}^2.$$

Etant donné que les formes bilinéaires  $(u, v) \rightarrow \mathbf{m}(u, v), (u, v) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla u)(b \cdot \nabla v) \, dy$  sont bornées sur  $H_P^1 \times H_P^1$  (utiliser l'hypothèse  $b \in X_Q^\infty$  pour la seconde forme), l'inégalité ci-dessus reste vraie pour tout  $u \in \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (E_{\lambda_n} \cap H_P^1) = H_P^1$ , ce qui signifie que  $(u, v) \rightarrow \mathbf{m}(u, v) + \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla u)(b \cdot \nabla v) \, dy$  est coercive sur  $H_P^1$  par rapport à  $L^2(\mathbb{R}^m)$ .  $\square$

#### Remarque 4.5.10.

Si  $u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$  est tel que  $\text{div}_y(D(y)\nabla u) \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , on déduit par (4.38) que

$$\mathbf{m}(u, v) = - \int_{\mathbb{R}^m} \text{div}_y(D\nabla u) \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} v \, dy = - \int_{\mathbb{R}^m} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \text{div}_y(D\nabla u) v(y) \, dy, \quad v \in H_P^1$$

ce qui signifie que la restriction  $E_{\lambda_n} \cap H_P^1$  de l'opérateur linéaire associé à la forme bilinéaire  $\mathbf{m}$  est  $\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D(y)\nabla u))$ , pour tout  $u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$  tel que  $\text{div}_y(D(y)\nabla u) \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , voir également (4.8).

## 4.6 Estimations uniformes

Dans cette section, on justifie le caractère bien posé du problème (4.1), (4.2) et du problème effectif associé à la forme bilinéaire  $\mathbf{m}$ , et on met en évidence certaines estimations sur les solutions associées à ces problèmes. On considère l'inclusion continue  $H_P^1 \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^m)$ , avec image dense (étant donné que  $C_c^1(\mathbb{R}^m) \subset H_P^1$ ). La proposition suivante traite du problème variationnel associé à (4.1), (4.2).

#### Proposition 4.6.1.

Soit  $u^{\text{in}}$  un élément de  $L^2(\mathbb{R}^m)$ . Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , il existe une unique solution variationnelle au problème (4.1), (4.2). De plus on a

$$|u^\varepsilon|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))} \leq |u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\mathbb{R}_+; X_P)} \leq \frac{|u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}}{\sqrt{2d}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

**Preuve.** Par la Proposition 4.5.9 on sait que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , la forme bilinéaire  $\alpha^\varepsilon$  est coercive sur  $H_P^1$  par rapport à  $L^2(\mathbb{R}^m)$ . On en déduit que, pour tout  $u^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^m)$ , il existe une unique solution variationnelle  $u^\varepsilon$  pour (4.1), (4.2), qui vérifie  $u^\varepsilon \in C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H_P^1)$  et

$$u^\varepsilon(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} u^\varepsilon(t, y) \varphi(y) \, dy + \alpha^\varepsilon(u^\varepsilon(t), \varphi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+) \quad \text{pour tout } \varphi \in H_P^1.$$

Pour  $t \in \mathbb{R}_+, \varepsilon \in ]0, 1]$ , une estimation d'énergie nous donne que

$$\frac{1}{2}|u^\varepsilon(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + d \int_0^t |\nabla u^\varepsilon(s)|_{X_P}^2 ds \leq \frac{1}{2}|u^\varepsilon(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + \int_0^t \mathbf{a}^\varepsilon(u^\varepsilon(s), u^\varepsilon(s)) ds = \frac{1}{2}|u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2$$

ce qui implique que

$$|u^\varepsilon(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad \int_0^{+\infty} |\nabla u^\varepsilon(s)|_{X_P}^2 ds \leq \frac{|u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2}{2d}.$$

□

On cherche à procéder de manière similaire pour résoudre le problème variationnel associé à la forme bilinéaire  $\mathbf{m}$ . Comme on a l'a montré dans la Proposition 4.5.9, on sait seulement que  $(u, v) \rightarrow \mathbf{m}(u, v) + \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla u)(b \cdot \nabla v) dy$  est coercive sur  $H_P^1$  par rapport à  $L^2(\mathbb{R}^m)$ . Néanmoins  $\mathbf{m}$  est coercive sur  $E_{\lambda_n} \cap H_P^1$  par rapport à  $E_{\lambda_n}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}, u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$ , on a grâce à (4.35)

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(u, u) + (\lambda_n + d)|u|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^m} D\nabla u \cdot \nabla u dy + \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla u)^2 dy + d \int_{\mathbb{R}^m} u^2(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} Q^{1/2}(D + b \otimes b)Q^{1/2} : (P^{1/2}\nabla u) \otimes (P^{1/2}\nabla u) dy + d \int_{\mathbb{R}^m} u^2(y) dy \geq d|u|_{H_P^1}^2. \end{aligned}$$

**Proposition 4.6.2.**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère un élément  $u_n^{\text{in}}$  de  $E_{\lambda_n}$ . Il existe une unique fonction  $v_n \in C_b(\mathbb{R}_+; E_{\lambda_n}) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; E_{\lambda_n} \cap H_P^1)$  telle que

$$v_n(0) = u_n^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} v_n(t, y) \varphi(y) dy + \mathbf{m}(v_n(t), \varphi) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \text{pour tout } \varphi \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1.$$

De plus on a

$$\begin{aligned} |v_n|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))} &\leq |u_n^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad |\mathcal{T}v_n|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))} \leq |\mathcal{T}u_n^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\ |\nabla v_n|_{L^2([0, t]; X_P)} &\leq \frac{|u_n^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}}{\sqrt{2d}} + \sqrt{\frac{t}{d}} |\mathcal{T}u_n^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Si  $u_n^{\text{in}} \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$  et si il existe une fonction  $f_n \in E_{\lambda_n}$  (la fonction  $f_n$  sera également notée  $\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D\nabla u_n^{\text{in}}))$ ) telle que

$$\int_{\mathbb{R}^m} D(y)\nabla u_n^{\text{in}} \cdot \nabla \varphi dy = \int_{\mathbb{R}^m} f_n(y)\varphi(y) dy, \quad \text{pour tout } \varphi \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$$

alors

$$|\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D\nabla v_n(t)))|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D\nabla u_n^{\text{in}}))|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

et

$$\partial_t v_n + \text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D\nabla v_n(t))) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

**Preuve.** On utilise l'inclusion  $E_{\lambda_n} \cap H_P^1 \hookrightarrow E_{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}$ . L'existence et l'unicité des solutions variationnelles  $(v_n)_n$  est une conséquence des résultats présentés en Annexe A. L'égalité d'énergie associée à ce problème s'écrit

$$\frac{1}{2}|v_n(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} D(y)\nabla v_n \cdot \nabla v_n dy ds = \frac{1}{2}|u_n^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2$$

ce qui implique que

$$|v_n(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |u_n^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad |\mathcal{T}v_n(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |\mathcal{T}u_n^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad t \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}.$$

Pour la dernière estimation, on a utilisé l'égalité  $\int_{\mathbb{R}^m} (\mathcal{T}v)^2 dy = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^m} v^2(y) dy$ ,  $v \in E_{\lambda_n}$ . On observe également que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $n \in \mathbb{N}$  on a

$$\begin{aligned} d \int_0^t |\nabla v_n(s)|_{X_P}^2 ds &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \{D\nabla v_n(s) \cdot \nabla v_n(s) + (b \cdot \nabla v_n(s))^2\} dy ds \\ &\leq \frac{1}{2} |u_n^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + t |\mathcal{T}u_n^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2. \end{aligned}$$

On suppose maintenant que  $u_n^{\text{in}} \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$  tel que  $\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D\nabla u_n^{\text{in}}))$  existe. Pour tout  $h \in \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} (v_n(t+h, y) - v_n(t, y)) \varphi(y) dy + \mathbf{m}(v_n(t+h) - v_n(t), \varphi) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \varphi \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} (v_n(t+h, y) - v_n(t, y))^2 dy = -\mathbf{m}(v_n(t+h) - v_n(t), v_n(t+h) - v_n(t)) \leq 0.$$

On déduit que

$$|v_n(t+h) - v_n(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |v_n(h) - v_n(0)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad t, h \in \mathbb{R}_+. \quad (4.47)$$

On note également que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dh} |v_n(h) - v_n(0)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 &+ \int_{\mathbb{R}^m} D(y) \nabla(v_n(h) - v_n(0)) \cdot \nabla(v_n(h) - v_n(0)) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m} D(y) \nabla v_n(0) \cdot \nabla(v_n(h) - v_n(0)) dy \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |v_n(h) - v_n(0)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 &\leq - \int_0^h \int_{\mathbb{R}^m} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D(y) \nabla u_n^{\text{in}}))(v_n(s, y) - v_n(0, y)) dy ds \\ &\leq |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D(y) \nabla u_n^{\text{in}}))|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \int_0^h |v_n(s) - v_n(0)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} ds. \end{aligned}$$

Grâce au Lemme de Bellman, voir [24] pour plus de détails, on obtient

$$|v_n(h) - v_n(0)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq h |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D(y) \nabla u_n^{\text{in}}))|_{L^2(\mathbb{R}^m)}. \quad (4.48)$$

En combinant (4.47) et (4.48), on déduit que

$$|v_n(t+h) - v_n(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |v_n(h) - v_n(0)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq h |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D(y) \nabla u_n^{\text{in}}))|_{L^2(\mathbb{R}^m)}$$

ce qui signifie que

$$|\partial_t v_n|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D(y) \nabla u_n^{\text{in}}))|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

La formulation variationnelle s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^m} \partial_t v_n \varphi \, dy + \int_{\mathbb{R}^m} D(y) \nabla v_n(t) \cdot \nabla \varphi \, dy = 0, \quad \varphi \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$$

ce qui implique

$$\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} (-\text{div}_y(D(y) \nabla v_n(t))) = -\partial_t v_n \in E_{\lambda_n}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

et ainsi

$$|\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} (-\text{div}_y(D(y) \nabla v_n(t)))|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = |\partial_t v_n(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} (-\text{div}_y(D(y) \nabla u_n^{\text{in}}))|_{L^2}.$$

□

### Corollaire 4.6.3.

Supposons que  $(\lambda_n)_n$  est croissante et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$ . Sous les hypothèses de la Proposition 4.6.2, pour tout  $u^{\text{in}} \in \text{dom} \mathcal{T}$ , il existe une unique fonction  $v \in C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H_P^1)$ ,  $\mathcal{T}v \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$  telle que

$$v(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} v(t, y) \varphi(y) \, dy + \mathbf{m}(v(t), \varphi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \text{pour tout } \varphi \in H_P^1. \quad (4.49)$$

De plus on a

$$|v|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))} \leq |u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad |\mathcal{T}v|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))} \leq |\mathcal{T}u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}$$

$$|\nabla v|_{L^2([0, t]; X_P)} \leq \frac{|u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}}{\sqrt{2d}} + \sqrt{\frac{t}{d}} |\mathcal{T}u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}.$$

Si  $u^{\text{in}} \in H_P^1$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} (-\text{div}_y(D \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u^{\text{in}}))|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 < +\infty$ , alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} (-\text{div}_y(D \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} v(t)))|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 < +\infty$$

et

$$\partial_t v + \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} (-\text{div}_y(D \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} v(t))) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

**Preuve.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note par  $v_n$  la solution donnée par la Proposition 4.6.2, correspondant à  $u_n^{\text{in}} = \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u^{\text{in}}$ . Par la Remarque 4.4.4, on sait que  $\mathcal{T} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u^{\text{in}} = \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \mathcal{T}u^{\text{in}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui implique que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |v_n(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 = |u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathcal{T}v_n(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \mathcal{T}u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 = |\mathcal{T}u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Ainsi  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n(t)$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}v_n(t)$  convergent dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . On introduit  $v(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n(t)$ ,  $w(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}v_n(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Pour tout  $\varphi \in \text{dom} \mathcal{T}$  et tout  $N \in \mathbb{N}$ , on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^m} \sum_{n=0}^N v_n(t, y) \mathcal{T}\varphi \, dy + \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{n=0}^N \mathcal{T}v_n(t) \varphi(y) \, dy = 0$$

ce qui implique, en passant à la limite  $N \rightarrow +\infty$

$$\int_{\mathbb{R}^m} v(t, y) \mathcal{T} \varphi \, dy + \int_{\mathbb{R}^m} w(t, y) \varphi(y) \, dy = 0.$$

Ainsi  $v(t) \in \text{dom} \mathcal{T}$  et  $w(t) = \mathcal{T} v(t)$ . En particulier

$$|\mathcal{T} v(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathcal{T} v_n|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \mathcal{T} u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 = |\mathcal{T} u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2.$$

En fait la convergence  $v = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  est uniforme par rapport à  $t \in \mathbb{R}_+$ , grâce à

$$\left| v(t) - \sum_{n=0}^N v_n(t) \right|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_N} \sum_{n > N} \lambda_n |v_n(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 = \frac{1}{\lambda_N} \sum_{n > N} |\mathcal{T} v_n(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \leq \frac{1}{\lambda_N} |\mathcal{T} u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2$$

et donc  $v \in C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ . Par la Proposition 4.5.7, on sait que les espaces  $(E_{\lambda_n} \cap H_P^1)_{n \in \mathbb{N}}$  sont orthogonaux dans  $H_P^1$  et donc

$$\int_0^t (v_n(s), v_k(s))_{H_P^1} \, ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad n \neq k.$$

De plus, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} |v_n|_{L^2([0, t]; H_P^1)}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \{ |v_n|_{L^2([0, t]; L^2(\mathbb{R}^m))}^2 + |\nabla v_n|_{L^2([0, t]; X_P)}^2 \} \\ &\leq t \sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + \frac{1}{2d} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + \frac{t}{d} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \mathcal{T} u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &= \left( t + \frac{1}{2d} \right) |u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + \frac{t}{d} |\mathcal{T} u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 < +\infty \end{aligned}$$

ce qui implique qu'il existe  $z \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H_P^1)$  tel que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n = z$  dans  $L^2([0, t]; H_P^1)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . En particulier  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n = z$  dans  $L^2([0, t]; L^2(\mathbb{R}^m))$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et donc  $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n(t) = z(t)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$  pour presque tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . On en déduit que  $v = z \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H_P^1)$ ,  $v = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$  dans  $L^2([0, t]; H_P^1)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et

$$|\nabla v|_{L^2([0, t]; X_P)} \leq \frac{|u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}}{\sqrt{2d}} + \sqrt{\frac{t}{d}} |\mathcal{T} u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Pour tout  $\eta \in C_c^1(\mathbb{R}_+)$ ,  $\varphi \in H_P^1$  et  $N \in \mathbb{N}$  on a

$$\begin{aligned} -\eta(0) \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{n=0}^N \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u^{\text{in}} \varphi(y) \, dy - \int_0^{+\infty} \eta'(t) \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{n=0}^N v_n(t, y) \varphi(y) \, dy dt \\ + \int_0^{+\infty} \eta(t) \mathbf{m} \left( \sum_{n=0}^N v_n(t), \varphi \right) dt = 0. \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , on voit facilement, grâce au fait que  $\mathbf{m}$  est bornée sur  $H_P^1$ , que

$$-\eta(0) \int_{\mathbb{R}^m} u^{\text{in}}(y) \varphi(y) \, dy - \int_0^{+\infty} \eta'(t) \int_{\mathbb{R}^m} v(t, y) \varphi(y) \, dy dt + \int_0^{+\infty} \eta(t) \mathbf{m}(v(t), \varphi) \, dt = 0$$

ce qui signifie que

$$v(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} v(t, y) \varphi(y) dy + \mathbf{m}(v(t), \varphi) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+) \quad \text{pour tout } \varphi \in H_P^1.$$

L'unicité est une conséquence de l'égalité d'énergie associée à la forme quadratique positive  $u \in H_P^1 \rightarrow \mathbf{m}(u, u)$ .

On suppose maintenant que  $u^{\text{in}} \in H_P^1$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D \nabla u_n^{\text{in}}))|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 < +\infty$  avec  $u_n^{\text{in}} = \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u^{\text{in}} \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Par la Proposition 4.6.2, on sait que

$$\partial_t v_n + \text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D(y) \nabla v_n(t))) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$|\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D(y) \nabla v_n(t)))|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D(y) \nabla u_n^{\text{in}}))|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Ainsi on obtient que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D(y) \nabla v_n(t)))|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D(y) \nabla u_n^{\text{in}}))|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 < +\infty.$$

On montre que  $t \rightarrow v(t)$  est différentiable dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$  et que  $\partial_t v = \sum_{n \in \mathbb{N}} \partial_t v_n$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} |v(t+h) - v(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |v_n(t+h) - v_n(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |v_n(h) - v_n(0)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \leq h^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-D(y) \nabla u_n^{\text{in}})|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \end{aligned}$$

ce qui signifie que  $\partial_t v \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ . Pour tout  $\eta \in C_c^1(\mathbb{R}_+)$ ,  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^m)$  on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \eta(t) \int_{\mathbb{R}^m} \partial_t v \varphi(y) dy dt &= -\eta(0) \int_{\mathbb{R}^m} u^{\text{in}}(y) \varphi(y) dy - \int_0^{+\infty} \eta'(t) \int_{\mathbb{R}^m} v(t, y) \varphi(y) dy dt \\ &= -\sum_{n \in \mathbb{N}} \eta(0) \int_{\mathbb{R}^m} u_n^{\text{in}}(y) \varphi(y) dy - \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{+\infty} \eta'(t) \int_{\mathbb{R}^m} v_n(t, y) \varphi(y) dy dt \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{+\infty} \eta(t) \int_{\mathbb{R}^m} \partial_t v_n \varphi(y) dy dt. \end{aligned}$$

Mais pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\partial_t v_n(t)|_{L^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D \nabla v_n(t)))|_{L^2}^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D \nabla u_n^{\text{in}}))|_{L^2}^2$$

ce qui implique que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \partial_t v_n(t)$  converge dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . On déduit du théorème de convergence dominée que

$$\int_0^{+\infty} \eta(t) \int_{\mathbb{R}^m} \partial_t v \varphi(y) dy dt = \int_0^{+\infty} \eta(t) \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{n \in \mathbb{N}} \partial_t v_n \varphi(y) dy dt$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \partial_t v &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \partial_t v_n = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}}(-\text{div}_y(D(y) \nabla v_n(t))) \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \left( -\text{div}_y(D(y) \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} v(t)) \right), \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

□

**Remarque 4.6.4.** *Les conditions suivantes sont équivalentes*

1.  $u \in H_P^1$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \left( -\text{div}_y(D(y)\nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u) \right) \right|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 < +\infty$ .
2.  $u \in H_P^1$  et il existe une constante  $C \in \mathbb{R}_+$  telle que

$$\mathbf{m}(u, \varphi) \leq C |\varphi|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad \varphi \in H_P^1.$$

Pour tout  $u$  satisfaisant 1. ou 2. on a

$$\mathbf{m}(u, \varphi) = - \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \text{div}_y(D(y)\nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u) \, dy, \quad \varphi \in H_P^1.$$

En effet, si 1. est vrai, alors pour tout  $u \in H_P^1$  on a  $u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u$  dans  $H_P^1$ , et par la continuité de  $\mathbf{m}$ , on en déduit, grâce à (4.38), que

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(u, \varphi) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{m}(\text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m} D(y)\nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u \cdot \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \varphi \, dy \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^m} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \left( -\text{div}_y(D(y)\nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u) \right) \varphi(y) \, dy \\ &\leq \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \left( -\text{div}_y(D(y)\nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u) \right) \right|_{L^2(\mathbb{R}^m)} |\varphi|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\ &= \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \left( -\text{div}_y(D(y)\nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u) \right) \right|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \right)^{1/2} |\varphi|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad \varphi \in H_P^1. \end{aligned}$$

Réciproquement si 2. est vrai, il existe une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$  telle que

$$\mathbf{m}(u, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\varphi(y) \, dy, \quad \varphi \in H_P^1.$$

En particulier, pour tout  $\varphi \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$ , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^m} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} f \varphi(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\varphi(y) \, dy = \mathbf{m}(u, \varphi) = \mathbf{m}(\varphi, u) = \int_{\mathbb{R}^m} D\nabla \varphi \cdot \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u \, dy$$

et donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \left( -\text{div}_y(D(y)\nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u) \right) \right|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} f \right|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 = |f|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 < +\infty.$$

La transformation linéaire

$$\mathcal{M}u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \left( -\text{div}_y(D(y)\nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u) \right)$$

définie sur

$$\text{dom} \mathcal{M} = \left\{ u \in H_P^1, \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \left( -\text{div}_y(D(y)\nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u) \right) \right|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 < +\infty \right\}$$

est l'opérateur associé à la forme bilinéaire  $\mathbf{m} : H_P^1 \times H_P^1$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{m}(u, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{M}u \varphi(y) \, dy, \quad u \in \text{dom} \mathcal{M}, \quad \varphi \in H_P^1.$$

Ainsi le dernier point du Corollaire 4.6.3 dit que si  $u^{\text{in}} \in \text{dom} \mathcal{M}$ , alors

$$v(t) \in \text{dom} \mathcal{M} \quad \text{et} \quad \partial_t v + \mathcal{M}v(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

**Remarque 4.6.5.**

1. Le Corollaire 4.6.3 définit un  $C^0$  semi-groupe de contractions par rapport à la norme  $L^2$

$$\psi_t u^{\text{in}} = v(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad u^{\text{in}} \in \text{dom} \mathcal{T}$$

où  $v$  est l'unique solution de (4.49). Ce semi-groupe s'étend par continuité à un semi-groupe de contractions sur  $L^2(\mathbb{R}^m)$  tout entier, qu'on notera toujours  $(\psi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  (utiliser la densité de  $\text{dom} \mathcal{T}$  dans  $L^2(\mathbb{R}^m)$ ).

2. On montre que les  $C^0$  semi-groupes  $(e^{-\tau \mathcal{B}})_{\tau \in \mathbb{R}_+}$  et  $(\psi_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  commutent. En effet, pour tout  $u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , il existe, voir la Proposition 4.6.2, une unique fonction  $v \in C_b(\mathbb{R}_+; E_{\lambda_n}) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; E_{\lambda_n} \cap H_P^1)$  telle que

$$v(0) = u, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} v(t, y) \varphi(y) dy + \mathbf{m}(v(t), \varphi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \varphi \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1. \quad (4.50)$$

On note que pour tout  $\varphi \in E_{\lambda_k} \cap H_P^1$ ,  $k \neq n$  on a

$$\int_{\mathbb{R}^m} v(t, y) \varphi(y) dy = 0, \quad \mathbf{m}(v(t), \varphi) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

et ainsi (4.50) est vrai pour tout  $\varphi \in \overline{\text{vect}\{\cup_{k \in \mathbb{N}} (E_{\lambda_k} \cap H_P^1)\}} = H_P^1$ . On a donc  $\psi_t u = v(t) \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . On obtient

$$e^{-\tau \mathcal{B}} \psi_t u = e^{-\tau \lambda_n} \psi_t u = \psi_t (e^{-\tau \lambda_n} u) = \psi_t e^{-\tau \mathcal{B}} u, \quad t, \tau \in \mathbb{R}_+, u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1, n \in \mathbb{N}.$$

Cette dernière relation s'étend par densité pour tout  $u \in L^2(\mathbb{R}^m)$ .

3. Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , on sait par le second point de la Proposition 4.5.9 que  $(u, v) \rightarrow \mathbf{m}(u, v) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla u)(b \cdot \nabla v) dy$  est coercive sur  $H_P^1$  par rapport à  $L^2(\mathbb{R}^m)$ . Ainsi, pour tout  $u^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^m)$  il existe une unique fonction  $\tilde{u}^\varepsilon \in C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H_P^1)$  telle que  $\tilde{u}^\varepsilon(0) = u^{\text{in}}$  et vérifiant pour tout  $\varphi \in H_P^1$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{u}^\varepsilon(t, y) \varphi(y) dy + \mathbf{m}(\tilde{u}^\varepsilon(t), \varphi) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla \tilde{u}^\varepsilon(t))(b \cdot \nabla \varphi) dy = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+).$$

On montre que  $\tilde{u}^\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon} \mathcal{B}} \psi_t u^{\text{in}} = \psi_t e^{-\frac{t}{\varepsilon} \mathcal{B}} u^{\text{in}}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Il suffit de le montrer dans le cas où  $u^{\text{in}} \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire

$$\tilde{u}^\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon} \lambda_n} \psi_t u^{\text{in}}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

En effet, pour tout  $\varphi \in H_P^1$ , on a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{t}{\varepsilon} \lambda_n} \psi_t u^{\text{in}} \varphi(y) dy + \mathbf{m}(e^{-\frac{t}{\varepsilon} \lambda_n} \psi_t u^{\text{in}}, \varphi) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^m} b \cdot \nabla (e^{-\frac{t}{\varepsilon} \lambda_n} \psi_t u^{\text{in}}) b \cdot \nabla \varphi dy \\ &= e^{-\frac{t}{\varepsilon} \lambda_n} \left\{ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} \psi_t u^{\text{in}} \varphi(y) dy + \mathbf{m}(\psi_t u^{\text{in}}, \varphi) \right\} = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Donc  $\tilde{u}^\varepsilon, e^{-\frac{t}{\varepsilon} \lambda_n} \psi_t u^{\text{in}}$  satisfont la même formulation variationnelle, avec la même condition initiale  $u^{\text{in}}$ . Par unicité de la solution, on en déduit que  $\tilde{u}^\varepsilon = e^{-\frac{t}{\varepsilon} \lambda_n} \psi_t u^{\text{in}}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .

## 4.7 Forme bilinéaire n

Comme suggéré dans la Proposition 4.2.1, on cherche à établir que  $u^\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}\mathcal{B}}v(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$  dans  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))$ , lorsque  $\varepsilon \searrow 0$ , où  $v(t) = \psi_t u^{\text{in}}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ . Le point clé est l'introduction d'un correcteur similaire à (4.10). Cela requiert la construction d'un second opérateur  $\mathcal{N}$  qui assurera la validité de la décomposition (4.9) de l'opérateur  $\mathcal{A} = -\text{div}_y(D(y)\nabla_y)$  par rapport à l'opérateur  $\mathcal{B} = -\mathcal{T}^2$ . Plus exactement on s'intéresse à la résolution de  $(\mathcal{B} - \lambda_n \text{Id})u = \mathcal{A}u - \mathcal{M}u = \mathcal{A}u - \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} \mathcal{A}u$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , voir (4.8). Bien entendu, cela n'est pas toujours possible étant donné que  $\mathcal{A}u - \mathcal{M}u$  appartient à  $E_{\lambda_n}^\perp = \overline{\text{Range}(\mathcal{B} - \lambda_n \text{Id})}$  qui contient strictement  $\text{Range}(\mathcal{B} - \lambda_n \text{Id})$ , lorsque l'image de  $\mathcal{B} - \lambda_n \text{Id}$  n'est pas fermée. On est amené à faire de nouvelles hypothèses concernant le champ de matrices  $D$ .

### 4.7.1 Hypothèses structurelles associées au champ de matrices $D$

On rappelle que la générateur infinitésimal  $L$  associé au groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est anti-adjoint sur  $H_Q$  et ainsi  $\overline{\text{Range } L} = (\ker L)^\perp$ , implique que  $D - \langle D \rangle \in \overline{\text{Range } L}$ . On suppose que  $D$  un champ de matrices de  $H_Q^\infty$  tel que  $D - \langle D \rangle \in \text{Range } L$ , c'est-à-dire

$$\exists C \in \text{dom } L \cap H_Q^\infty \text{ tel que } D = \langle D \rangle + LC, \quad (4.51)$$

où les opérateurs  $\langle \cdot \rangle$ ,  $L$  sont considérés comme agissant dans  $H_{Q,\text{loc}}$ , voir la Proposition 4.3.8 et la Remarque 4.3.7. En remplaçant  $C$  par  $C - \langle C \rangle$ , on peut supposer que  $C \in \ker \langle \cdot \rangle \cap H_Q^\infty$ . Grâce à la symétrie de  $D, \langle D \rangle$ , on a

$$L(C - {}^t C) = LC - {}^t(LC) = D - \langle D \rangle - {}^t(D - \langle D \rangle) = 0$$

ce qui implique que  $C - {}^t C \in \ker L \cap \ker \langle \cdot \rangle = \{0\}$  et ainsi  $C$  est également symétrique. De plus, on suppose que

$$\exists C_0 \in \ker \langle \cdot \rangle \cap H_Q^\infty \text{ tel que } C_0 = {}^t C_0, LC_0 = -C. \quad (4.52)$$

On note que (4.51), (4.52) impliquent qu'il existe  $C_0 \in \ker \langle \cdot \rangle \cap H_Q^\infty$  tel que  $C_0 = {}^t C_0$ ,  $LC_0 \in \text{dom } L \cap H_Q^\infty$  et  $D - \langle D \rangle = -L^2 C_0$ . On fait aussi les hypothèses suivantes, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$C - \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C = (-L^2 - 4\lambda_n \text{Id})C_n, \quad C_n \in \ker \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} \cap H_Q^\infty, \quad LC_n \in H_Q^\infty, \quad C_n = {}^t C_n \quad (4.53)$$

où les opérateurs  $\text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  sont considérés comme agissant dans  $H_{Q,\text{loc}}$ , voir la Remarque 4.5.4. Dans la suite on travaille sous les hypothèses (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), (4.35), (4.36), (4.34), auxquelles on ajoute (4.51), (4.52), (4.53).

### 4.7.2 Définition et propriétés de la forme bilinéaire n

On introduit une seconde forme bilinéaire bornée sur  $H_P^1 \times H_P^1$ . Le correcteur est construit à partir de l'opérateur associé à cette forme.

#### Proposition 4.7.1.

*Supposons que les conditions suivantes soient vraies*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty, \quad \sum_{n \geq 1} \lambda_n \left( |C_n|_{H_Q^\infty} + \left| \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right|_{H_Q^\infty} \right)^2 < +\infty. \quad (4.54)$$

On considère l'application  $\mathbf{n} : H_P^1 \times H_P^1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbf{n}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \left[ G(s) C \nabla u_{2s} - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} G(s') C \nabla u_{2s'} ds' \right] ds \cdot \nabla v \, dy$$

pour tout  $u, v \in H_P^1$ . La forme bilinéaire  $\mathbf{n}$  est bien définie, bornée sur  $H_P^1 \times H_P^1$ , antisymétrique et vérifie

$$\mathbf{a}(u, v) = \mathbf{m}(u, v) + \mathbf{n}(u, \mathcal{B}v) - \mathbf{n}(\mathcal{B}u, v), \quad (4.55)$$

pour tout  $u, v \in H_P^1$  tel que  $\mathcal{T}u, \mathcal{T}v, \mathcal{B}u, \mathcal{B}v \in H_P^1$ . Ici, par  $\mathcal{T}u \in H_P^1$  on entend que  $u$  appartient au domaine du générateur infinitésimal associé au  $C^0$ -groupe  $(\zeta^1(s))_{s \in \mathbb{R}}$  et  $\mathbf{a}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^m} D(y) \nabla u \cdot \nabla v \, dy$ ,  $u, v \in H_P^1$ . De plus, on a  $\mathbf{n}(u, v) = 0$  pour tout  $u, v \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

La preuve de la Proposition 4.7.1 est très technique et a été mise en Annexe B.

### Remarque 4.7.2.

On note par  $\mathcal{N}$  l'opérateur associé à la forme bilinéaire  $\mathbf{n}$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \left[ G(s) C \nabla u_{2s} - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} G(s') C \nabla u_{2s'} ds' \right] ds \cdot \nabla v \, dy \\ &= \mathbf{n}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{N}u v \, dy, \quad u \in \text{dom} \mathcal{N}, v \in H_P^1. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}u &= -\text{div}_y \left\{ \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \left[ G(s) C \nabla u_{2s} - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} G(s') C \nabla u_{2s'} ds' \right] ds \right\} \\ &= -\text{div}_y \left\{ C_0 \nabla \text{Proj}_{E_0} u + \sum_{n \geq 1} \left[ \frac{1}{8\sqrt{\lambda_n}} \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C + LC_n \right] \nabla \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \geq 1} \left[ \frac{1}{8\sqrt{\lambda_n}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C - \sqrt{4\lambda_n} C_n \right] \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} \text{Proj}_{E_{\lambda_n}} u \right\} \end{aligned}$$

à condition que  $b, D, u$  soient suffisamment réguliers.

## 4.8 Comportement asymptotique

Nous sommes prêts à faire l'analyse asymptotique de la famille de solutions variationnelles  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  du problème (4.1), (4.2). On suit les arguments de la preuve de la Proposition 4.2.1.

### Théorème 4.8.1.

Soit  $u^{\text{in}} \in \text{dom} \mathcal{T}$ . On suppose que les champs de vecteurs  $b$  et de matrices  $D$  vérifient les hypothèses (4.13), (4.14), (4.35) et (4.36). On suppose également vraies les hypothèses (4.15), (4.16) et les hypothèses structurelles (4.34), (4.51), (4.52), (4.53), (4.54). Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , on note  $u^\varepsilon \in C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H_P^1)$  l'unique solution variationnelle de (4.1), (4.2)

$$u^\varepsilon(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} u^\varepsilon(t, y) \varphi(y) \, dy + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} D(y) \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dy}_{\mathbf{a}(u^\varepsilon, \varphi)} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla u^\varepsilon) (b \cdot \nabla \varphi) \, dy = 0$$

dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ , pour tout  $\varphi \in H_P^1$ , voir la Proposition 4.6.1, et par  $v \in C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H_P^1)$  l'unique solution variationnelle (voir la Proposition 4.5.9 pour la définition de la forme bilinéaire  $\mathbf{m}$ )

$$v(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} v(t, y) \varphi(y) dy + \mathbf{m}(v(t), \varphi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \quad \varphi \in H_P^1$$

voir le Corollaire 4.6.3. Alors, à condition que  $u^{\text{in}}, v, b, D, P$  soient suffisamment réguliers, pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$ , il existe une constante  $C_T$  telle que

$$\left| u^\varepsilon - e^{-\frac{t}{\varepsilon} \mathcal{B}} v \right|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} + \left| \nabla u^\varepsilon - \nabla(e^{-\frac{t}{\varepsilon} \mathcal{B}} v) \right|_{L^2([0, T]; X_P)} \leq C_T \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

**Preuve.** Par la Proposition 4.6.1 et le Corollaire 4.6.3, on sait que

$$|u^\varepsilon|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))} \leq |u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\mathbb{R}_+; X_P)} \leq \frac{|u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}}{\sqrt{2d}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1$$

et

$$\begin{aligned} |v|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))} &\leq |u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad |\mathcal{T}v|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))} \leq |\mathcal{T}u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\ |\nabla v|_{L^2([0, t]; X_P)} &\leq \frac{|u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}}{\sqrt{2d}} + \sqrt{\frac{t}{d}} |\mathcal{T}u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)}. \end{aligned}$$

On considère la fonction

$$u^1(t, \tau, \cdot) = e^{-\tau \mathcal{B}} \mathcal{N}v(t, \cdot) - \mathcal{N}e^{-\tau \mathcal{B}} v(t, \cdot), \quad (t, \tau) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$$

On suppose que  $v$  possède une régularité suffisante pour assurer que  $\mathcal{N}v(t, \cdot)$  est bien défini, voir la Remarque 4.7.2. De plus, comme le semi-groupe  $(e^{-\tau \mathcal{B}})_{\tau \in \mathbb{R}_+}$  preserve la régularité, voir les propriétés de la Section 4.4.1, on déduit que  $\mathcal{N}e^{-\tau \mathcal{B}} v(t, \cdot)$  est également bien défini, uniformément par rapport à  $\tau \in \mathbb{R}_+$ , ce qui implique que

$$|u^1(t, \tau, \cdot)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq \tilde{C}_T, \quad t \in [0, T], \quad \tau \in \mathbb{R}_+$$

pour une certaine constante  $\tilde{C}_T$ . On a également l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \int_0^T \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} |\partial_t u^1(t, \tau, \cdot)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} dt + \int_0^T \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} |\text{div}_y(D \nabla u^1(t, \tau, \cdot))|_{L^2(\mathbb{R}^m)} dt \\ + \left( \int_0^T \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} |\nabla u^1(t, \tau, \cdot)|_{X_P}^2 dt \right)^{1/2} \leq \tilde{\tilde{C}}_T \end{aligned}$$

à condition que  $u^{\text{in}}, v, b, D, P$  soient suffisamment réguliers. Afin de garantir que la régularité est conservée suivant le semi-groupe  $(e^{-\tau \mathcal{B}})_{\tau \in \mathbb{R}_+}$ , on suppose l'existence de champ de vecteurs réguliers en involution avec  $b$ . La dérivée de  $u^1$  par rapport à la variable  $\tau$  s'écrit (en supposant que la fonction  $v$  est suffisamment régulière)

$$\begin{aligned} \partial_\tau u^1 &= -\mathcal{B}e^{-\tau \mathcal{B}} \mathcal{N}v(t) + \mathcal{N}\mathcal{B}e^{-\tau \mathcal{B}} v(t) \\ &= -\mathcal{B}(e^{-\tau \mathcal{B}} \mathcal{N}v(t) - \mathcal{N}e^{-\tau \mathcal{B}} v(t)) + \mathcal{N}\mathcal{B}e^{-\tau \mathcal{B}} v(t) - \mathcal{B}\mathcal{N}e^{-\tau \mathcal{B}} v(t) \\ &= -\mathcal{B}u^1 - (\mathcal{B}\mathcal{N} - \mathcal{N}\mathcal{B})e^{-\tau \mathcal{B}} v(t) \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \{ \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon) \} + (\mathcal{BN} - \mathcal{NB}) e^{-\frac{t}{\varepsilon} \mathcal{B}} v(t) + \frac{\mathcal{B}}{\varepsilon} \{ \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon) \} = \varepsilon \partial_t u^1(t, t/\varepsilon). \quad (4.56)$$

Par le troisième point de la Remarque 4.6.5, on sait que  $\tilde{u}^\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon} \mathcal{B}} v(t) \in C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1_P)$  satisfait

$$\tilde{u}^\varepsilon(0) = u^{\text{in}}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{u}^\varepsilon(t, y) \varphi(y) dy + \mathbf{m}(\tilde{u}^\varepsilon(t), \varphi) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla \tilde{u}^\varepsilon(t)) (b \cdot \nabla \varphi) dy = 0 \quad (4.57)$$

dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ , pour tout  $\varphi \in H^1_P$ . En combinant (4.56) et (4.57), on obtient que  $\tilde{u}^\varepsilon(0) + \varepsilon u^1(0, 0) = v(0) = u^{\text{in}}$  et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} \{ \tilde{u}^\varepsilon(t, y) + \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon, y) \} \varphi(y) dy + \mathbf{m}(\tilde{u}^\varepsilon(t), \varphi) + \mathbf{n}(\tilde{u}^\varepsilon(t), \mathcal{B}\varphi) - \mathbf{n}(\mathcal{B}\tilde{u}^\varepsilon(t), \varphi) \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla [\tilde{u}^\varepsilon(t) + \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon)]) (b \cdot \nabla \varphi) dy = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^m} \partial_t u^1(t, t/\varepsilon, y) \varphi(y) dy \end{aligned} \quad (4.58)$$

dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ , pour tout  $\varphi \in H^1_P$  tel que  $\mathcal{T}\varphi, \mathcal{B}\varphi \in H^1_P$ . Par la Proposition 4.7.1, on sait que

$$\mathbf{m}(\tilde{u}^\varepsilon(t), \varphi) + \mathbf{n}(\tilde{u}^\varepsilon(t), \mathcal{B}\varphi) - \mathbf{n}(\mathcal{B}\tilde{u}^\varepsilon(t), \varphi) = \mathbf{a}(\tilde{u}^\varepsilon(t), \varphi)$$

et donc (4.58) devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} \{ \tilde{u}^\varepsilon(t, y) + \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon, y) \} \varphi dy + \mathbf{a}(\tilde{u}^\varepsilon(t), \varphi) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla [\tilde{u}^\varepsilon(t) + \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon)]) (b \cdot \nabla \varphi) dy \\ = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^m} \partial_t u^1(t, t/\varepsilon, y) \varphi(y) dy \end{aligned}$$

dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ , pour tout  $\varphi \in H^1_P$ . Enfin, la fonction  $r^\varepsilon(t, y) = u^\varepsilon(t, y) - \tilde{u}^\varepsilon(t, y) - \varepsilon u^1(t, t/\varepsilon, y)$  est solution du problème variationnelle

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} r^\varepsilon(t, y) \varphi dy + \mathbf{a}(r^\varepsilon(t), \varphi) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^m} (b \cdot \nabla r^\varepsilon(t)) (b \cdot \nabla \varphi) dy \\ = -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^m} [\partial_t u^1(t, t/\varepsilon, y) - \text{div}_y(D\nabla u^1(t, t/\varepsilon, y))] \varphi dy \end{aligned}$$

dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ , pour tout  $\varphi \in H^1_P$  et avec pour condition initiale  $r^\varepsilon(0) = 0$ . Grâce à la condition de coercivité (4.35), on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |r^\varepsilon(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + d |\nabla r^\varepsilon(t)|_{X_P}^2 \leq \varepsilon |r^\varepsilon(t)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\ \times \left[ \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} |\partial_t u^1(t, \tau)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} + \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} |\text{div}_y(D\nabla u^1(t, \tau))|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \right], \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \end{aligned}$$

On obtient les estimations

$$\begin{aligned} |r^\varepsilon|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} \leq \varepsilon \int_0^T \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} |\partial_t u^1(t, \tau)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} dt \\ + \varepsilon \int_0^T \sup_{\tau \in \mathbb{R}_+} |\text{div}_y(D\nabla u^1(t, \tau))|_{L^2(\mathbb{R}^m)} dt \leq \varepsilon \tilde{C}_T, \quad 0 < \varepsilon \leq 1 \end{aligned}$$

et

$$|\nabla r^\varepsilon|_{L^2([0,T];X_P)} \leq \varepsilon \frac{\tilde{C}_T}{\sqrt{d}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1$$

ce qui implique immédiatement que

$$\begin{aligned} \left| u^\varepsilon(t) - e^{-\frac{t}{\varepsilon}\mathcal{B}}v(t) \right|_{L^2(\mathbb{R}^m)} &\leq \varepsilon \sup_{(t',\tau) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+} |u^1(t',\tau)|_{L^2(\mathbb{R}^m)} + \varepsilon \tilde{C}_T \leq \varepsilon(\tilde{C}_T + \tilde{C}_T), \quad t \in [0,T] \\ \left| \nabla u^\varepsilon(t) - \nabla e^{-\frac{t}{\varepsilon}\mathcal{B}}v(t) \right|_{L^2([0,T];X_P)} &\leq \varepsilon \tilde{C}_T \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{d}} \right) \end{aligned}$$

pour tout  $0 < \varepsilon \leq 1$ . □

**Remarque 4.8.2.**

1. Pour tout  $\varphi \in H_P^1$ , la Proposition 4.5.9 et le Lemme 4.5.1 implique que

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(v(t), \langle \varphi \rangle) &= \mathbf{m}(\langle v(t) \rangle, \langle \varphi \rangle) = \mathbf{m}(\langle v(t) \rangle, \varphi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle \nabla \langle v(t) \rangle \cdot \nabla \varphi \, dy + \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s)(D - \langle D \rangle) \langle v(t) \rangle \, ds \cdot \nabla \varphi \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle \nabla \langle v(t) \rangle \cdot \nabla \varphi \, dy \end{aligned}$$

et ainsi, on a les égalités dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} \langle v(t) \rangle(y) \varphi(y) \, dy &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} v(t,y) \langle \varphi \rangle(y) \, dy = -\mathbf{m}(v(t), \langle \varphi \rangle) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle(y) \nabla \langle v(t) \rangle \cdot \nabla \varphi \, dy. \end{aligned}$$

La fonction  $\langle v \rangle \in C_b(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m)) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H_P^1)$  est solution du problème variationnelle

$$\langle v(0) \rangle = \langle u^{\text{in}} \rangle, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} \langle v(t) \rangle(y) \varphi(y) \, dy + \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle(y) \nabla \langle v(t) \rangle \cdot \nabla \varphi \, dy = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$$

pour tout  $\varphi \in H_P^1$ .

2. Si la condition initiale est bien préparée, c'est-à-dire si  $\mathcal{T}u^{\text{in}} = 0$ , on en déduit, grâce à l'inégalité  $|\mathcal{T}v|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^m))} \leq |\mathcal{T}u^{\text{in}}|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = 0$ , que  $\mathcal{T}v = 0$ . Dans ce cas,  $v = \langle v \rangle$  est solution du problème parabolique associé au champ de matrices moyenné  $\langle D \rangle$

$$v(0) = u^{\text{in}} \in \ker \mathcal{T}, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} v(t,y) \varphi(y) \, dy + \int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle(y) \nabla v(t) \cdot \nabla \varphi \, dy = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$$

pour tout  $\varphi \in H_P^1$ .

## Chapitre 5

# Conclusions et perspectives

Dans ce manuscrit, on a réalisé l'analyse asymptotique de deux équations paraboliques, l'une avec un terme de transport raide dans le Chapitre 2, l'autre avec un terme de diffusion raide dans le Chapitre 4. Dans les deux cas, on met en évidence un problème effectif et une analyse, en un sens fort, du comportement des solutions. La mise en évidence d'un correcteur permet de préciser un ordre de convergence. Les travaux à la base des résultats de ce manuscrit sont [19], qui introduit la notion de moyenné d'un champ de matrices suivant un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires, utile à la mise en évidence des problèmes effectifs associés aux deux équations avec terme raide, et [18] qui propose l'analyse asymptotique d'une équation de transport avec un terme de transport raide, à travers une approche à deux échelles en temps. Cette méthode est à l'origine des deux analyses proposées. Une méthode numérique a été proposée dans le Chapitre 3, afin de déterminer le moyenné d'un champ de matrices et ainsi d'approcher numériquement les solutions du problème parabolique avec un terme de transport raide.

Plusieurs perspectives sont envisageables afin de poursuivre ce travail :

1. L'existence du moyenné d'un champ de matrices, ou d'un champ de vecteurs (voir [18]), est acquise sous l'existence d'un champ de matrices  $P$  satisfaisant aux hypothèses (1.21) et (1.22). On peut remarquer que le moyenné d'une fonction le long d'un champ de vecteurs à divergence nulle, peut être défini sans hypothèses supplémentaires pour toute fonction  $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$ ,  $p \in [1, +\infty]$ , pour plus de détails voir [16]. En fait, on a vu au Paragraphe 3.3.3 qu'il était illusoire de chercher à définir le moyenné d'un champ de matrices suivant n'importe quel champ de vecteurs à divergence nulle. Les hypothèses (1.21) et (1.22) étant contraignantes, il serait donc intéressant de déterminer les hypothèses minimales nécessaires à l'existence du moyenné d'un champ de matrices.
2. Une méthode pour le calcul numérique du champ de matrices moyenné a été proposée dans le Chapitre 3. Cette méthode est basée sur l'expression explicite du champ de matrices moyenné, à travers la moyenne ergodique (1.20). D'autres approches sont envisageables. En effet, il est montré dans [19] que le moyenné d'un champ de matrices peut également être interprété comme la limite en temps long de la solution d'un problème parabolique. Soit  $D \in H_Q$  un champ de matrices, alors le champ de matrices  $\langle D \rangle$  apparaît comme la limite en temps long du problème parabolique suivant

$$\partial_t A - L(L(A)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (5.1)$$

$$A(0) = D, \quad (5.2)$$

où l'opérateur  $L$  est le générateur infinitésimal associé au groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ . Précisément, la solution  $A(t)$  converge faiblement dans  $H_Q$ , lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , vers  $\langle D \rangle$ . De plus,

lorsque l'opérateur  $L$  est à image fermée dans  $H_Q$ , ce qui est équivalent à l'inégalité de Poincaré, voir [25]

$$\exists C_P > 0 \text{ tel que } |D - \langle D \rangle|_{H_Q} \leq C_P |L(D)|_{H_Q}, \quad D \in \text{dom}(L),$$

la convergence ci-dessus est forte et on a un ordre de convergence exponentiel. On peut montrer que

$$|A(t) - \langle D \rangle|_{H_Q} \leq e^{-t/C_P^2} |D - \langle D \rangle|_{H_Q}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Une condition suffisante, assurant que l'image de l'opérateur  $L$  est fermée dans  $H_Q$ , est que toutes les trajectoires associées au champ de vecteurs  $b$  soient fermées, uniformément en temps, c'est-à-dire

$$\exists 0 < T_\infty < +\infty : \forall y \in \mathbb{R}^m, \exists T_y \in ]0, T_\infty] \text{ tel que } Y(T_y; y) = y.$$

Dans ce cas, l'inégalité de Poincaré est vraie en prenant  $C_P = T_\infty$ . Ainsi, pour calculer le moyenné d'un champ de matrices, on pourra chercher à résoudre numériquement (5.1), (5.2).

3. La connaissance du champ de matrices moyenné (1.20), obtenu numériquement au Chapitre 3, nous permet d'approcher numériquement, pour  $\varepsilon$  petit mais fixé, la solution du problème parabolique avec terme de transport raide par le Théorème 2.2.9, voir le Paragraphe 3.4, et la solution du problème parabolique fortement anisotrope, par le Théorème 4.8.1 dans le cas où la donnée initiale est bien préparée. Aucune méthode numérique n'a été proposée afin de résoudre la formulation effective variationnelle associée au problème de diffusion anisotrope, dans le cas générale d'une donnée initiale non nécessairement bien préparée. La recherche de telles méthodes semble être une suite logique au travail présenté dans ce manuscrit.
4. Les problèmes qui ont été étudiés dans ce manuscrit sont de nature linéaire. Il serait intéressant d'essayer d'appliquer les arguments et techniques utilisées pour traiter des problèmes de nature non linéaire. En effet, les équations apparaissant en physique des plasmas fortement magnétisés, comme par exemple l'équation de Vlasov-Poisson avec un champ magnétique intense, ou encore une équation de Vlasov tenant compte des phénomènes de collisions, en introduisant le noyau Fokker-Planck-Landau, sont des problèmes non linéaires. On pourra tenter d'appliquer les méthodes présentées dans ce manuscrit pour étudier ces problèmes.

# Annexe A

## Quelques rappels

### A.1 $C^0$ -groupes d'opérateurs

Dans toute cette section  $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}})$  désignera un espace de Hilbert, on notera  $|\cdot|_{\mathcal{H}}$  la norme associée au produit scalaire. On désignera par  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  la norme sur l'ensemble des applications linéaires continues de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$ , subordonnée à la norme  $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ . Etant donné que l'on sera amené à travailler avec des fonctions  $C^0([a, b], \mathcal{H})$  où  $a, b \in \mathbb{R}$ , la théorie de l'intégration choisie sera celle de l'intégrale de Riemann. L'ensemble des résultats présentés dans cette Section peuvent être trouvés dans [63].

**Définition A.1.1.** *La famille d'opérateurs linéaires bornés de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$ ,  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est un  $C^0$ -groupe d'opérateurs si (propriétés de groupe)*

1.  $G(0) = Id$ , où  $Id$  est l'opérateur identité sur  $\mathcal{H}$
2.  $G(s+t) = G(s)G(t) = G(t)G(s)$  pour tout  $s, t \in \mathbb{R}$

et si (propriété de forte continuité)

$$\lim_{s \rightarrow 0} |G(s)x - x|_{\mathcal{H}} = 0, \text{ pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

**Remarque A.1.2.** *On voit à l'aide des points 1. et 2. que tous les éléments de la famille  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  sont inversibles, avec  $G^{-1}(s) = G(-s)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .*

**Définition A.1.3.** *On appelle générateur infinitésimal associé au  $C^0$ -groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ , l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}$  défini par*

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ x \in \mathcal{H} : \exists \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)x - x}{s} \text{ dans } \mathcal{H} \right\}$$

et

$$\mathcal{L}x = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)x - x}{s} \text{ pour } x \in D(\mathcal{L}).$$

On considère maintenant  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires, i.e

$$(G(s)x, G(s)y)_{\mathcal{H}} = (x, y)_{\mathcal{H}} \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}, x, y \in \mathcal{H}. \quad (\text{A.1})$$

On en déduit que  $|G(s)x|_{\mathcal{H}} = |x|_{\mathcal{H}}$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , tout  $x \in \mathcal{H}$  et  $\|G(s)\|_{\mathcal{H}} = 1$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .

Soit  $\mathcal{L}$  son générateur infinitésimal, on a le théorème suivant

**Théorème A.1.4.** 1.  $\mathcal{L}$  est un opérateur à domaine dense dans  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{L}$  est fermé.

2. Un élément  $x \in \mathcal{H}$  appartient à  $D(\mathcal{L})$  si et seulement si il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|G(s)x - x|_{\mathcal{H}} \leq C|s|, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.2})$$

On peut prendre  $C = |\mathcal{L}x|_{\mathcal{H}}$ .

3. L'opérateur  $\mathcal{L}$  est anti-adjoint.

**Preuve.** 1. On commence par montrer que  $D(\mathcal{L})$  est dense dans  $\mathcal{H}$ . Soit  $x \in \mathcal{H}$ , par continuité de  $s \mapsto G(s)x$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_0^s G(\tau)x \, d\tau = x$  dans  $\mathcal{H}$ . Il suffit donc de montrer que  $\int_0^s G(\tau)x \, d\tau \in D(\mathcal{L})$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . On choisit  $s, t \in \mathbb{R}$ , par les propriétés de groupe on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \left[ G(t) \int_0^s G(\tau)x \, d\tau - \int_0^s G(\tau)x \, d\tau \right] &= \frac{1}{t} \left[ \int_t^{s+t} G(\tau)x \, d\tau - \int_0^s G(\tau)x \, d\tau \right] \\ &= (G(s) - Id) \left[ \frac{1}{t} \int_0^t G(\tau)x \, d\tau \right] \end{aligned}$$

En passant à la limite quand  $t$  tend vers 0, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[ G(t) \int_0^s G(\tau)x \, d\tau - \int_0^s G(\tau)x \, d\tau \right] = G(s)x - x \in \mathcal{H}$$

donc  $\int_0^s G(\tau)x \, d\tau \in D(\mathcal{L})$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et  $\mathcal{L} \left( \int_0^s G(\tau)x \, d\tau \right) = G(s)x - x$ .

On montre que  $\mathcal{L}$  est fermé. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(\mathcal{L})^{\mathbb{N}}$  tel que :  $x_n \xrightarrow{\mathcal{H}} x$  et  $\mathcal{L}x_n \xrightarrow{\mathcal{H}} y$ . Il faut montrer que  $x \in D(\mathcal{L})$  et  $\mathcal{L}x = y$ . Pour cela on montre que  $G(s)x - x = \int_0^s G(\tau)y \, d\tau$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) à l'aide du lemme suivant, dont une démonstration peut être trouvée dans [63]

**Lemme A.1.5.** Si  $x \in D(\mathcal{L})$  alors

1.  $G(t)x \in D(\mathcal{L})$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

2.  $G(t)x - x = \mathcal{L} \left( \int_0^t G(\tau)x \, d\tau \right) = \int_0^t \mathcal{L}(G(\tau)x) \, d\tau = \int_0^t G(\tau)\mathcal{L}x \, d\tau$ .

3.  $\frac{d}{dt}G(t)x = \mathcal{L}(G(t)x) = G(t)(\mathcal{L}x)$ .

Soit  $s \in \mathbb{R}$ , par le Lemme A.1.5 on a

$$G(s)x_n - x_n = \mathcal{L} \left( \int_0^s G(\tau)x_n \, d\tau \right) = \int_0^s \mathcal{L}(G(\tau)x_n) \, d\tau = \int_0^s G(\tau)\mathcal{L}x_n \, d\tau. \quad (\text{A.3})$$

On déduit du fait que le  $C^0$ -groupe est unitaire que  $G(\cdot)\mathcal{L}x_n$  converge uniformément vers  $G(\cdot)y$  sur  $\mathbb{R}$ . En effet, pour  $\tau \in \mathbb{R}$  on a

$$|G(\tau)(\mathcal{L}x_n - y)|_{\mathcal{H}} \leq \|G(\tau)\|_{\mathcal{H}} |\mathcal{L}x_n - y|_{\mathcal{H}} = |\mathcal{L}x_n - y|_{\mathcal{H}}$$

et notre conclusion suit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\mathcal{L}x_n - y|_{\mathcal{H}} = 0$  par l'hypothèse.

On peut donc passer à la limite dans (A.3) quand  $n \rightarrow +\infty$  pour obtenir

$$G(s)x - x = \int_0^s G(\tau)y \, d\tau.$$

En conclusion

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)x - x}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_0^s G(\tau)y \, d\tau = y,$$

ainsi  $x \in D(\mathcal{L})$ ,  $\mathcal{L}x = y$  et  $\mathcal{L}$  est un opérateur fermé.

2. Supposons que  $x \in D(\mathcal{L})$ . Par le Lemme A.1.5

$$|G(s)x - x|_{\mathcal{H}} = \left| \int_0^s G(\tau)\mathcal{L}x \, d\tau \right|_{\mathcal{H}} \leq \left| \int_0^s |G(\tau)\mathcal{L}x|_{\mathcal{H}} \, d\tau \right| = |\mathcal{L}x|_{\mathcal{H}}|s|, \text{ pour } s \in \mathbb{R}.$$

Inversement, supposons (A.2) vérifié. La famille  $\left(\frac{G(s)x-x}{s}\right)_{s \in \mathbb{R}}$  est bornée dans  $\mathcal{H}$ , donc pour toute suite  $(s_k)$  convergeant vers 0, la suite  $\left(\frac{G(s_k)x-x}{s_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $\mathcal{H}$ . On peut donc en extraire une sous suite faiblement convergente. Ainsi il existe  $(s_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  convergeant vers 0 (où  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  fonction strictement croissante) telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{G(s_{\phi(k)})x - x}{s_{\phi(k)}} = y \text{ faiblement dans } \mathcal{H}. \quad (\text{A.4})$$

Pour tout  $z$  dans  $D(\mathcal{L})$ , on obtient en utilisant (A.1)

$$\left(\frac{G(s_{\phi(k)})x - x}{s_{\phi(k)}}, z\right)_{\mathcal{H}} = \left(x, \frac{G(-s_{\phi(k)})z - z}{s_{\phi(k)}}\right)_{\mathcal{H}}. \quad (\text{A.5})$$

En combinant la convergence faible (A.4) et la convergence forte  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{G(-s_{\phi(k)})z - z}{-s_{\phi(k)}} = \mathcal{L}z$  dans  $\mathcal{H}$  (car  $z \in D(\mathcal{L})$ ), le passage à la limite quand  $k \rightarrow +\infty$  dans (A.5) nous donne

$$(y, z)_{\mathcal{H}} = -(x, \mathcal{L}z)_{\mathcal{H}}. \quad (\text{A.6})$$

D'autre part, en utilisant de nouveau (A.1) et le Lemme A.1.5

$$\begin{aligned} (G(s_{\phi(k)})x - x, z)_{\mathcal{H}} &= \left(x, \int_0^{-s_{\phi(k)}} \mathcal{L}(G(\tau)z) \, d\tau\right) \\ &= \int_0^{-s_{\phi(k)}} (x, \mathcal{L}(G(\tau)z))_{\mathcal{H}} \, d\tau \\ &= - \int_0^{-s_{\phi(k)}} (y, G(\tau)z)_{\mathcal{H}} \, d\tau \\ &= - \left(y, \int_0^{-s_{\phi(k)}} G(\tau)z \, d\tau\right)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que  $\left|\int_0^{-s_{\phi(k)}} G(\tau)z \, d\tau\right|_{\mathcal{H}} \leq \left|\int_0^{-s_{\phi(k)}} |G(\tau)z|_{\mathcal{H}} \, d\tau\right| = |s_{\phi(k)}||z|_{\mathcal{H}}$ , on obtient

$$\left|\left(\frac{G(s_{\phi(k)})x - x}{s_{\phi(k)}}, z\right)_{\mathcal{H}}\right| \leq |y|_{\mathcal{H}}|z|_{\mathcal{H}}, \quad z \in D(\mathcal{L})$$

et par densité de  $D(\mathcal{L})$  dans  $\mathcal{H}$

$$\left|\frac{G(s_{\phi(k)})x - x}{s_{\phi(k)}}\right|_{\mathcal{H}} \leq |y|_{\mathcal{H}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

En fin de compte  $\frac{G(s_{\phi(k)})x-x}{s_{\phi(k)}}$  converge faiblement dans  $\mathcal{H}$  vers  $y$  et  $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{G(s_{\phi(k)})x-x}{s_{\phi(k)}} \right|_{\mathcal{H}} \leq |y|_{\mathcal{H}}$ . Par uniforme convexité de  $\mathcal{H}$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{G(s_{\phi(k)})x-x}{s_{\phi(k)}} = y$  (voir [25]). Quitte à extraire une autre sous suite  $(s_{\psi(k)})$  de  $(s_k)$ , on voit à l'aide de (A.6) que la suite  $\left( \frac{G(s_{\psi(k)})x-x}{s_{\psi(k)}} \right)$  convergera également vers  $y$  (la différence entre les deux limites sera orthogonale à une partie dense de  $\mathcal{H}$ ). Par unicité de la valeur d'adhérence toute la suite  $\left( \frac{G(s_k)x-x}{s_k} \right)_{k \in \mathbb{N}}$  convergera vers  $y$  dans  $\mathcal{H}$ , ainsi toute la famille  $\left( \frac{G(s)x-x}{s} \right)_{s \in \mathbb{R}}$  convergera vers  $y$  dans  $\mathcal{H}$  quand  $s$  tendra vers 0. On en conclut que  $x \in D(\mathcal{L})$ .

3. Montrons que  $\mathcal{L}$  est anti-adjoint.

On rappelle que  $D(\mathcal{L}^*) = \{x \in \mathcal{H} : \exists C > 0, |(x, \mathcal{L}y)_{\mathcal{H}}| \leq C|y|_{\mathcal{H}} \text{ pour tout } y \in D(\mathcal{L})\}$ .

Pour tout  $x, y \in D(\mathcal{L})$ , on a par (A.1)

$$(G(s)x - x, y)_{\mathcal{H}} + (x, y - G(-s)y)_{\mathcal{H}} = 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Par définition de  $D(\mathcal{L})$  on a

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)x - x}{s} = \mathcal{L}x, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{y - G(-s)y}{s} = \mathcal{L}y, \quad \text{fortement dans } \mathcal{H}.$$

On obtient  $(\mathcal{L}x, y)_{\mathcal{H}} = (x, -\mathcal{L}y)_{\mathcal{H}}$ , cela implique clairement que  $x \in D(\mathcal{L}^*)$  et que  $\mathcal{L}^*x = -\mathcal{L}x$ . Donc  $\mathcal{L}$  est anti-symétrique, c'est à dire  $\mathcal{L} \subset (-\mathcal{L}^*)$ . On montre maintenant l'inclusion inverse. Soit  $x \in D(\mathcal{L}^*)$ , i.e

$$\exists C > 0 \text{ tel que } |(x, \mathcal{L}y)_{\mathcal{H}}| \leq C|y|_{\mathcal{H}} \text{ pour tout } y \in D(\mathcal{L}). \quad (\text{A.7})$$

Pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et  $y \in D(\mathcal{L})$  on a

$$(G(s)x - x, y)_{\mathcal{H}} = (x, G(-s)y - y)_{\mathcal{H}} = \left( x, \int_0^{-s} \mathcal{L}(G(\tau)y) \, d\tau \right)_{\mathcal{H}} = \int_0^{-s} (x, \mathcal{L}(G(\tau)y))_{\mathcal{H}} \, d\tau$$

ce qui implique avec (A.7) et (A.1)

$$|(G(s)x - x, y)_{\mathcal{H}}| \leq \left| \int_0^{-s} |(x, \mathcal{L}(G(\tau)y))_{\mathcal{H}}| \, d\tau \right| \leq \left| \int_0^{-s} C|G(\tau)y|_{\mathcal{H}} \, d\tau \right| \leq C|s||y|_{\mathcal{H}}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Par densité de  $D(\mathcal{L})$  dans  $\mathcal{H}$ , on en déduit que  $|G(s)x - x|_{\mathcal{H}} \leq C|s|$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et par la caractérisation de  $D(\mathcal{L})$  précédemment démontrée on obtient que  $x \in D(\mathcal{L})$ . En conclusion,  $D(\mathcal{L}) = D(\mathcal{L}^*)$  et  $\mathcal{L}^*x = -\mathcal{L}x$  pour tout  $x \in D(\mathcal{L}) = D(\mathcal{L}^*)$ .  $\mathcal{L}$  est donc anti-adjoint.  $\square$

En fait, la troisième propriété caractérise le générateur infinitésimal d'un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires. Précisément on a le Théorème de Stone suivant (voir [63])

**Théorème A.1.6** (Stone). *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. Alors  $\mathcal{L}$  est générateur infinitésimal d'un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires sur  $\mathcal{H}$  si et seulement si  $\mathcal{L}$  est anti-adjoint.*

On précise ici le noyau du générateur infinitésimal associé à un  $C^0$ -groupe. La propriété qui suit est une conséquence directe du Lemme A.1.5 et du Théorème de Stone A.1.6

**Proposition A.1.7.** *Soit  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires et  $\mathcal{L}$  le générateur infinitésimal associé, alors*

1.  $\text{Ker}(\mathcal{L}) = \{x \in D(\mathcal{L}) : G(s)x = x, \forall s \in \mathbb{R}\}$ .
2. On a la décomposition suivante  $\mathcal{H} = \text{Ker}(\mathcal{L}) \oplus \overline{\text{Range}(\mathcal{L})}$ .

**Preuve.** 1. L'inclusion  $\supset$  est évidente. On montre l'inclusion  $\subset$  à l'aide de la propriété 2. du Lemme A.1.5. Pour  $x \in \text{Ker}(\mathcal{L})$  et  $s \in \mathbb{R}$  on a

$$G(s)x - x = \int_0^s G(\tau)\mathcal{L}x \, d\tau = 0.$$

d'où le résultat.

2. C'est une conséquence directe du fait que  $\mathcal{L}$  est anti-adjoint et du Théorème de Stone A.1.6. □

On termine cette Annexe B.1 par le résultat fondamental suivant qui sera la base de notre définition de la notion de moyenné pour les fonctions, champs de vecteurs ou champs de matrices.

**Théorème A.1.8** (Théorème ergodique de von Neumann). *On considère un  $C^0$ -groupe d'opérateurs unitaires  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  sur un espace de Hilbert  $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}})$  et  $\mathcal{L}$  son générateur infinitésimal. Alors pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , on a la convergence forte dans  $\mathcal{H}$*

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)x \, ds = \text{Proj}_{\text{Ker}(\mathcal{L})}x, \quad \text{uniformément par rapport à } r \in \mathbb{R}.$$

**Preuve.** Le groupe  $C^0$ -groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  étant unitaire sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , la Proposition A.1.7 nous assure que la décomposition  $\mathcal{H} = \text{Ker}(\mathcal{L}) \oplus \overline{\text{Range}(\mathcal{L})}$  est vérifiée. Soit  $x \in \mathcal{H}$ , on écrit la décomposition  $x = \text{Proj}_{\text{Ker}(\mathcal{L})}x + (x - \text{Proj}_{\text{Ker}(\mathcal{L})}x)$ , et  $x - \text{Proj}_{\text{Ker}(\mathcal{L})}x \in \text{Ker}(\mathcal{L})^{\perp} = \overline{\text{Range}(\mathcal{L})}$ . On étudie les cas où  $x \in \text{Ker}(\mathcal{L})$  et  $x \in \overline{\text{Range}(\mathcal{L})}$ .

- Si  $x \in \text{Ker}(\mathcal{L})$ , alors par la Proposition A.1.7 on a  $G(s)x = x$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Ainsi, pour tout  $S > 0$  et  $r \in \mathbb{R}$  on a

$$\frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)x \, ds = \frac{1}{S} \int_r^{r+S} x \, ds = x,$$

et

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)x \, ds = x \quad \text{dans } \mathcal{H}.$$

- Si  $x \in \overline{\text{Range}(\mathcal{L})}$ , alors il existe  $y \in D(\mathcal{L})$  tel que  $x = \mathcal{L}(y)$ . De plus par le Lemme A.1.5, on peut écrire que, pour tout  $S > 0$  et  $r \in \mathbb{R}$ , on a

$$\frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)x \, ds = \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)(\mathcal{L}(y)) \, ds = \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \frac{d}{ds} G(s)y \, ds = \frac{G(r+S)y - G(r)y}{S}.$$

Enfin, étant donné que le groupe  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est unitaire sur  $\mathcal{H}$ , on a

$$\left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)x \, ds \right|_{\mathcal{H}} = \left| \frac{G(r+S)y - G(r)y}{S} \right|_{\mathcal{H}} \leq \frac{2\|y\|_{\mathcal{H}}}{S} \xrightarrow{S \rightarrow +\infty} 0.$$

- Soit  $x \in \overline{\text{Range}(\mathcal{L})}$  et  $\eta > 0$ . Alors il existe un élément  $\tilde{x}_\eta \in \text{Range}(\mathcal{L})$  dépendant de  $\eta$  tel que  $|\tilde{x}_\eta - x|_{\mathcal{H}} < \eta$  et  $\tilde{y}_\eta \in D(\mathcal{L})$  tel que  $\tilde{x}_\eta = \mathcal{L}(\tilde{y}_\eta)$ . On écrit pour tout  $S > 0$  et  $r \in \mathbb{R}$  que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)x \, ds \right|_{\mathcal{H}} &\leq \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)\tilde{x}_\eta \, ds \right|_{\mathcal{H}} + \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)(x - \tilde{x}_\eta) \, ds \right|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \frac{2|\tilde{y}_\eta|_{\mathcal{H}}}{S} + \frac{1}{S} \int_r^{r+S} |G(s)(x - \tilde{x}_\eta)|_{\mathcal{H}} \, ds \\
&\leq \frac{2|\tilde{y}_\eta|_{\mathcal{H}}}{S} + \frac{1}{S} \int_r^{r+S} |x - \tilde{x}_\eta|_{\mathcal{H}} \, ds \\
&\leq \frac{2|\tilde{y}_\eta|_{\mathcal{H}}}{S} + |x - \tilde{x}_\eta|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \frac{2|\tilde{y}_\eta|_{\mathcal{H}}}{S} + \eta.
\end{aligned}$$

En passant à la limite supérieure lorsque  $S$  tend vers  $+\infty$ , on obtient que pour tout  $\eta > 0$

$$\limsup_{S \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)x \, ds \right|_{\mathcal{H}} \leq \eta,$$

et en faisant tendre  $\eta$  vers 0

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)x \, ds = 0.$$

En fin de compte, pour tout  $x \in \mathcal{H}$ ,  $r \in \mathbb{R}$  et  $S > 0$  on a

$$\frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)x \, ds = \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)(\text{Proj}_{\text{Ker}(\mathcal{L})}(x)) \, ds + \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)(x - \text{Proj}_{\text{Ker}(\mathcal{L})}(x)) \, ds,$$

et en passant à la limite lorsque  $S$  tend vers  $+\infty$  à l'aide de l'analyse ci-dessus, on obtient pour tout  $x \in \mathcal{H}$  que

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G(s)x \, ds = \text{Proj}_{\text{Ker}(\mathcal{L})}(x).$$

□

## A.2 Solutions variationnelles pour les problèmes d'évolution

L'objectif de cette annexe est d'énoncer une formulation variationnelle pour des problèmes d'évolution dans un cadre fonctionnel adhoc, puis de donner un théorème nous assurant l'existence et l'unicité de solution dans ce cadre. Ce théorème sera le pendant du théorème de Lax-Milgram utilisé par exemple pour l'existence unicité de solution variationnelle pour les problèmes elliptiques.

On se donne un couple d'espaces de Hilbert réels  $\mathcal{V}$ ,  $H$  séparables ; on note

$$\left\{ \begin{array}{l} ((\cdot, \cdot)) \text{ le produit scalaire, } \|\cdot\| \text{ la norme dans } \mathcal{V} \\ (\cdot, \cdot) \text{ le produit scalaire, } |\cdot| \text{ la norme dans } \mathcal{H}. \end{array} \right.$$

On suppose que  $\mathcal{V}$  s'injecte de façon dense et continue dans  $\mathcal{H}$  et l'on identifie  $\mathcal{H}$  et son dual  $\mathcal{H}'$ . Si  $\mathcal{V}'$  désigne le dual de  $\mathcal{V}$  (de norme  $\|\cdot\|_*$ ), on a

$$\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}'$$

chaque espace étant dense dans le suivant,  $\hookrightarrow$  désignant l'injection continue (pour plus de détails voir [25]).

On cherche à résoudre une équation du type

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), & \text{pour } t \in [0, T[, 0 < T \leq +\infty \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

A priori le cadre dans lequel est posé cette équation n'est pas bien défini, tentons de clarifier tout cela. Partons du Théorème de Lax-Milgram; ce dernier nous dit que si  $a(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire, continue, coercive sur  $\mathcal{V}$ , alors pour tout  $f \in \mathcal{V}'$ , il existe un unique  $u \in \mathcal{V}$  tel que

$$a(u, v) = f(v) \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}.$$

On peut réécrire cette formulation variationnelle à l'aide d'un opérateur  $O \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$  (et ce, grâce au théorème de Riesz-Fréchet, voir [25]), ce qui implique qu'il existe un unique  $u \in \mathcal{V}$  tel que  $Ou = f$ , l'égalité étant ici à prendre dans  $\mathcal{V}'$ . En suivant cette idée on pose  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$  un opérateur que l'on qualifiera de *variationnel* dans (A.8). Ainsi, pour que  $Au$  ait un sens, on choisira  $u$  à valeurs dans  $\mathcal{V}$ , disons

$$u \in L^2([0, T]; \mathcal{V}).$$

L'espace  $L^2$  étant choisi pour garder un cadre Hilbertien. Alors en choisissant  $f \in L^2([0, T]; \mathcal{V}')$ , on a  $u' = -Au + f \in L^2([0, T]; \mathcal{V}')$ . Tout cela nous amène donc à considérer les espaces de solutions *variationnelles* suivants

**Définition A.2.1.** Soient  $0 < T \leq +\infty$ .

On désigne par  $W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$  l'espace :

$$W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}') := \{u; u \in L^2([0, T]; \mathcal{V}), u' \in L^2([0, T]; \mathcal{V}')\}.$$

On doit tout de même préciser la définition de  $u'$ . Pour  $u \in L^2([0, T]; \mathcal{V})$ , on pose pour tout  $\phi \in \mathcal{D}([0, T])$

$$u'(\phi) = - \int_0^T u(t)\phi'(t) dt.$$

On dira que  $u' \in L^2([0, T]; \mathcal{V}')$  s'il existe  $v \in L^2([0, T]; \mathcal{V}')$  tel que :

$$\int_0^T v(t)\phi(t) dt = - \int_0^T u(t)\phi'(t) dt, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}([0, T]).$$

Un point qui a été passé sous silence lors de l'analyse du système (A.8) est la condition initiale. Pour que le choix des espaces de solutions soit parfaitement satisfaisant il faudrait que pour toute fonction  $u \in W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$  la quantité  $u(0)$  ait un sens. Heureusement pour nous, chaque élément de  $W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$  possède un représentant continu borné, précisément  $W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}') \hookrightarrow C_b^0([0, T]; \mathcal{H})$ , où  $C_b^0([0, T]; \mathcal{H})$  est l'ensemble des fonctions continues bornées sur  $[0, T[$  à valeurs dans  $\mathcal{H}$ . Cela confirme le choix des espaces  $W$ . On donne maintenant sans démonstration quelques propriétés utiles de ces espaces. Elles peuvent être trouvées dans [37].

**Proposition A.2.2.** L'espace  $W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$  muni de la norme

$$\|u\|_W = (\|u\|_{L^2([0, T]; \mathcal{V})}^2 + \|u'\|_{L^2([0, T]; \mathcal{V}')})^{1/2} = \left( \int_0^T [\|u(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|u'(t)\|_{\mathcal{V}'}^2] dt \right)^{1/2}$$

est un espace de Hilbert.

**Théorème A.2.3.** Soit  $0 < T \leq +\infty$ . Tout  $u \in W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$  est presque partout égal à une fonction continue bornée de  $[0, T[$  dans  $\mathcal{H}$ . De plus, on a :

$$W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}') \hookrightarrow C_b^0([0, T[; \mathcal{H})$$

l'espace  $C_b^0([0, T[; \mathcal{H})$  étant munit de la norme de la convergence uniforme.

**Remarque A.2.4.** Pour  $a, b$  tels que  $[a, b] \subset [0, T[$ , on peut parler des traces  $u(a), u(b) \in \mathcal{H}$  d'un élément  $u \in W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$ .

Une conséquence importante de ce théorème et de l'existence des traces est la formule d'intégration par parties relative aux espaces  $W$ .

**Théorème A.2.5.** On suppose  $[a, b] \subset [0, T[$ . Soit  $u, v \in W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$ . Alors

$$\int_a^b \langle u'(t), v(t) \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} dt + \int_a^b \langle v'(t), u(t) \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} dt = (u(b), v(b)) - (u(a), v(a)).$$

**Proposition A.2.6.** Pour  $u, v \in W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$ ,  $v \in \mathcal{V}$ , on a

$$\langle u'(t), v \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = \frac{d}{dt}(u(\cdot), v), \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0, T[).$$

Le Théorème de Lions permet d'établir dans un cadre abstrait général, l'existence et l'unicité de solution variationnelle pour des problèmes d'évolution paraboliques. On commence par préciser la formulation variationnelle du problème (A.8). Pour presque tout  $t \in [0, T[$  on se donne une forme bilinéaire  $a(t; u, v) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les propriétés :

1. la fonction  $t \mapsto a(t; u, v)$  est mesurable  $\forall u, v \in \mathcal{V}$ ,
2. il existe  $M > 0$  tel que  $|a(t; u, v)| \leq M \|u\| \|v\|$  pour presque tout  $t \in [0, T[$ ,  $\forall u, v \in \mathcal{V}$ ,
3. il existe  $\alpha > 0$  et  $C > 0$  tels que  $a(t; v, v) \geq \alpha \|v\|^2 - C|v|^2$  pour presque tout  $t \in [0, T[$ ,  $\forall v \in \mathcal{V}$ .

La démonstration du théorème qui suit peut être trouvée dans [37].

**Théorème A.2.7** (J-L. Lions). Etant donnés  $f \in L^2([0, T[; \mathcal{V}')$  et  $u_0 \in \mathcal{H}$ , il existe une unique fonction  $u \in W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$  telle que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(\cdot), v) + a(\cdot; u(\cdot), v) = (f(\cdot), v), & \text{au sens de } \mathcal{D}'(]0, T[) \text{ pour tout } v \in \mathcal{V} \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

**Remarque A.2.8.** Remarquons qu'à l'aide de la Proposition A.2.6, on peut réécrire (A.9) sous la forme  $\frac{d}{dt}u(\cdot) + A(\cdot)u(\cdot) = f(\cdot)$  au sens  $L^2([0, T], \mathcal{V}')$ . Ce qui montre que le Théorème de Lions permet de résoudre dans un cadre général le système (A.8).

# Annexe B

## Preuves

### B.1 Preuves des Propositions 2.4.4, 2.4.5, 2.4.6

**Preuve de la Proposition 2.4.4.** On cherche à estimer la norme  $L^2$  de  $b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\varepsilon > 0$ . On cherche à utiliser les translations le long du flot  $Y_i$  et d'estimer la norme  $L^2$  de  $(u^\varepsilon(t, Y_i(h; y)) - u^\varepsilon(t, y))/h$  uniformément par rapport à  $h \in \mathbb{R}^*$  et  $\varepsilon > 0$ . Par soucis de simplicité, ces estimations seront justifiées uniquement pour des fonctions et coefficients réguliers. On utilise (2.17) pour écrire le commutateur du membre de droite de (2.37) et on multiplie de chaque côté de l'égalité par  $b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon$ . En intégrant par rapport à  $y$  sur  $\mathbb{R}^m$  et en remarquant que la contribution du terme singulier  $\frac{1}{\varepsilon} b \cdot \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon)$  s'annule par l'antisymétrie de l'opérateur  $b \cdot \nabla_y$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t))^2 dy + \int_{\mathbb{R}^m} D(y) \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) \cdot \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) dy & \quad (\text{B.1}) \\ = - \int_{\mathbb{R}^m} [b_i, D] \nabla_y u^\varepsilon(t) \cdot \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) dy \\ + \int_{\mathbb{R}^m} D(y) \nabla_y u^\varepsilon(t) \cdot \nabla_y \operatorname{div}_y b_i (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) dy. \end{aligned}$$

Les hypothèses (2.26) nous donnent

$$\begin{aligned} D \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) \cdot \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) &= Q^{1/2} D Q^{1/2} & (\text{B.2}) \\ &: P^{1/2} \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) \otimes P^{1/2} \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) \\ &\geq \alpha |P^{1/2} \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t))|^2 = \alpha |\nabla_y^R (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t))|^2 \\ &= \alpha \sum_{j=1}^m (b_j \cdot \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)))^2. \end{aligned}$$

En combinant (B.1) et (B.2), on est amené à

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + \alpha \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \\
& \leq - \sum_{i=1}^m \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} [b_i, D] \nabla_y u^\varepsilon(t) \cdot \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) \, dy}_{:=I_i^1} \\
& \quad + \sum_{i=1}^m \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} D \nabla_y u^\varepsilon(t) \cdot \nabla_y (\operatorname{div}_y b_i) (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) \, dy}_{:=I_i^2}.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

On cherche à borner le terme  $I_i^1$  du membre de droite de (B.3) et on écrit

$$\begin{aligned}
I_i^1 &= \int_{\mathbb{R}^m} R [b_i, D]^t R : {}^t R^{-1} \nabla_y u^\varepsilon(t) \otimes {}^t R^{-1} \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} R [b_i, D]^t R : \nabla_y^R u^\varepsilon(t) \otimes \nabla_y^R (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) \, dy.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

On note que pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$  on a

$$\begin{aligned}
b_j \cdot \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) &= b_i \cdot \nabla_y (b_j \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) - [b_i, b_j] \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t) \\
&= b_i \cdot \nabla_y (b_j \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) - \sum_{k=1}^m \alpha_{ij}^k b_k \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)
\end{aligned}$$

et on obtient ainsi

$$\nabla_y^R (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) = b_i \cdot \nabla_y (\nabla_y^R u^\varepsilon(t)) - \mathcal{A}_i \nabla_y^R u^\varepsilon(t) \tag{B.5}$$

où  $\mathcal{A}_i$  est la matrice qui à l'entrée  $(j, k)$  donne  $\alpha_{ij}^k$ . Donc (B.4), (B.5) donnent

$$\begin{aligned}
I_i^1 &= \int_{\mathbb{R}^m} R [b_i, D]^t R : \nabla_y^R u^\varepsilon(t) \otimes b_i \cdot \nabla_y (\nabla_y^R u^\varepsilon(t)) \, dy \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^m} R [b_i, D]^t R : \nabla_y^R u^\varepsilon(t) \otimes \mathcal{A}_i \nabla_y^R u^\varepsilon(t) \, dy \\
&=: J_i^1 + J_i^2.
\end{aligned}$$

Pour estimer le terme  $J_i^1$ , on utilise la symétrie du champ de matrices  $D$  et la formule

$$\begin{aligned}
b_i \cdot \nabla_y (R [b_i, D]^t R : \nabla_y^R u^\varepsilon(t) \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t)) &= b_i \cdot \nabla_y (R [b_i, D]^t R) : \nabla_y^R u^\varepsilon(t) \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t) \\
&\quad + 2R [b_i, D]^t R : \nabla_y^R u^\varepsilon(t) \otimes b_i \cdot \nabla_y (\nabla_y^R u^\varepsilon(t)).
\end{aligned}$$

Une intégration par parties nous donne que

$$\begin{aligned}
2 \left| \sum_{i=1}^m J_i^1 \right| &= \left| - \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{div}_y b_i R [b_i, D]^t R : \nabla_y^R u^\varepsilon(t) \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t) \, dy \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^m b_i \cdot \nabla_y (R [b_i, D]^t R) : \nabla_y^R u^\varepsilon(t) \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t) \, dy \right| \\
&\leq \left( \sum_{i=1}^m \|\operatorname{div}_y b_i\|_{L^\infty} \|R [b_i, D]^t R\|_{L^\infty} + \left\| \sum_{i=1}^m b_i \cdot \nabla_y (R [b_i, D]^t R) \right\|_{L^\infty} \right) \\
&\quad \times \|\nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2.
\end{aligned}$$

L'estimation du terme  $J_i^2$  est obtenue grâce à l'hypothèse (2.38)

$$|J_i^2| \leq \|R[b_i, D]^t R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \|\mathcal{A}_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \|\nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2$$

et en fin de compte il existe une constante  $C_1$  dépendant des quantités  $\max_{1 \leq i \leq m} \|\operatorname{div}_y b_i\|_{L^\infty}$ ,  $\max_{1 \leq i \leq m} \|\mathcal{A}_i\|_{L^\infty}$ ,  $\max_{1 \leq i \leq m} \|R[b_i, D]^t R\|_{L^\infty}$ ,  $\|\sum_{i=1}^m b_i \cdot \nabla_y (R[b_i, D]^t R)\|_{L^\infty}$  telle que

$$\left| \sum_{i=1}^m I_i^1 \right| \leq C_1 \|\nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon > 0. \quad (\text{B.6})$$

Pour le terme  $I_i^2$  on écrit, en utilisant l'inégalité  $(R(y)D(y)^t R(y) : R(y)D(y)^t R(y))^{1/2} \leq |D|_{H_Q^\infty}$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} |I_i^2| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} R D^t R^t R^{-1} \nabla_y u^\varepsilon(t) \cdot {}^t R^{-1} \nabla_y (\operatorname{div}_y b_i) (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)) \, dy \right| \\ &\leq |D|_{H_Q^\infty} \|\nabla_y^R \operatorname{div}_y b_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla_y^R u^\varepsilon(t)| |b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t)| \, dy \\ &\leq |D|_{H_Q^\infty} \|\nabla_y^R \operatorname{div}_y b_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \|\nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \end{aligned}$$

ce qui implique l'existence d'une constante  $C_2$  dépendant de  $\max_{1 \leq i \leq m} \|\nabla_y^R \operatorname{div}_y b_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)}$  et  $|D|_{H_Q^\infty}$  telle que

$$\left| \sum_{i=1}^m I_i^2 \right| \leq C_2 \|\nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon > 0. \quad (\text{B.7})$$

En combinant (B.3), (B.6), (B.7) et en utilisant le Lemme de Gronwall on obtient

$$\|\nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \leq e^{(C_1+C_2)t} \|\nabla_y^R u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon > 0$$

et

$$\|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon\|_{L^2([0,T];L^2(\mathbb{R}^m))} \leq \frac{e^{(C_1+C_2)t}}{\sqrt{2\alpha}} \|\nabla_y^R u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}, \quad \varepsilon > 0.$$

La Remarque 2.4.3 nous donne donc les deux premiers points de la conclusion. Pour le dernier on observe que

$$\begin{aligned} \partial_t v^\varepsilon(t, z) &= \partial_t u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)) + \frac{1}{\varepsilon} b(Y(t/\varepsilon; z)) \cdot \nabla_y u^\varepsilon(t, Y(t/\varepsilon; z)) \\ &= \operatorname{div}_y (D \nabla_y u^\varepsilon(t))(Y(t/\varepsilon; z)) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

qui implique que

$$\|\partial_t v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} = \|\operatorname{div}_y (D \nabla_y u^\varepsilon(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}.$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y (D \nabla_y u^\varepsilon) &= \operatorname{div}_y (D^t R \nabla_y^R u^\varepsilon) = \operatorname{div}_y (RD) \cdot \nabla_y^R u^\varepsilon + RD^t R : \partial_y (\nabla_y^R u^\varepsilon) R^{-1} \\ &= \operatorname{div}_y (RD) \cdot \nabla_y^R u^\varepsilon + RD^t R : \nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon > 0} \|\partial_t v^\varepsilon\|_{L^2([0,T];L^2(\mathbb{R}^m))} &= \sup_{\varepsilon > 0} \|\operatorname{div}_y (D \nabla_y u^\varepsilon)\|_{L^2([0,T];L^2(\mathbb{R}^m))} \\ &\leq \sqrt{T} \|\operatorname{div}_y (RD)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \sup_{\varepsilon > 0} \|\nabla_y^R u^\varepsilon\|_{L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^m))} \\ &\quad + |D|_{H_Q^\infty} \sup_{\varepsilon > 0} \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon\|_{L^2([0,T];L^2(\mathbb{R}^m))}, \quad T \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

□

**Preuve de la Proposition 2.4.5.** Pour tout  $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$  on introduit les notations  $u_i^\varepsilon = b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon$ ,  $v_i^\varepsilon = b_i \cdot \nabla_z v^\varepsilon$ ,  $u_{ij}^\varepsilon = b_j \cdot \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon)$ ,  $v_{ij}^\varepsilon = b_j \cdot \nabla_z (b_i \cdot \nabla_z v^\varepsilon)$ ,  $u_{ijk}^\varepsilon = b_k \cdot \nabla_y (b_j \cdot \nabla_y (b_i \cdot \nabla_y u^\varepsilon))$  et  $v_{ijk}^\varepsilon = b_k \cdot \nabla_z (b_j \cdot \nabla_z (b_i \cdot \nabla_z v^\varepsilon))$ . Avec ces notations, l'équation (2.37) devient

$$\partial_t u_i^\varepsilon - \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_y u_i^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} b \cdot \nabla_y u_i^\varepsilon = \operatorname{div}_y ([b_i, D]^t R \nabla_y^R u^\varepsilon) + D^t R \nabla_y^R u^\varepsilon \cdot \nabla_y \operatorname{div}_y b_i.$$

En prenant la dérivée  $b_j \cdot \nabla_y$  on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t u_{ij}^\varepsilon - \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_y u_{ij}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} b \cdot \nabla_y u_{ij}^\varepsilon &= \operatorname{div}_y ([b_j, D]^t R \nabla_y^R u_i^\varepsilon) + R D^t R \nabla_y^R u_i^\varepsilon \cdot \nabla_y^R \operatorname{div}_y b_j \\ &\quad + b_j \cdot \nabla_y \operatorname{div}_y ([b_i, D] \nabla_y u^\varepsilon) + b_j \cdot \nabla_y (D^t R \nabla_y^R u^\varepsilon \cdot \nabla_y \operatorname{div}_y b_i). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Grâce à la formule de commutation (2.17), on a

$$\begin{aligned} b_j \cdot \nabla_y \operatorname{div}_y ([b_i, D] \nabla_y u^\varepsilon) &= [b_j \cdot \nabla_y, \operatorname{div}_y ([b_i, D] \nabla_y)] u^\varepsilon + \operatorname{div}_y ([b_i, D] \nabla_y (b_j \cdot \nabla_y u^\varepsilon)) \\ &= \operatorname{div}_y ([b_j, [b_i, D]] \nabla_y u^\varepsilon) + [b_i, D] \nabla_y u^\varepsilon \cdot \nabla_y \operatorname{div}_y b_j + \operatorname{div}_y ([b_i, D] \nabla_y (b_j \cdot \nabla_y u^\varepsilon)) \\ &= \operatorname{div}_y ([b_j, [b_i, D]]^t R \nabla_y^R u^\varepsilon) + R [b_i, D]^t R \nabla_y^R u^\varepsilon \cdot \nabla_y^R \operatorname{div}_y b_j + \operatorname{div}_y ([b_i, D]^t R \nabla_y^R u_j^\varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

En combinant (B.9) et (B.10) on a

$$\begin{aligned} \partial_t u_{ij}^\varepsilon - \operatorname{div}_y (D(y) \nabla_y u_{ij}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} b \cdot \nabla_y u_{ij}^\varepsilon &= \operatorname{div}_y ([b_j, D]^t R \nabla_y^R u_i^\varepsilon) + R D^t R \nabla_y^R u_i^\varepsilon \cdot \nabla_y^R \operatorname{div}_y b_j \\ &\quad + \operatorname{div}_y ([b_j, [b_i, D]]^t R \nabla_y^R u^\varepsilon) + R [b_i, D]^t R \nabla_y^R u^\varepsilon \cdot \nabla_y^R \operatorname{div}_y b_j \\ &\quad + \operatorname{div}_y ([b_i, D]^t R \nabla_y^R u_j^\varepsilon) + b_j \cdot \nabla_y (D^t R \nabla_y^R u^\varepsilon \cdot \nabla_y \operatorname{div}_y b_i). \end{aligned}$$

En multipliant par  $u_{ij}^\varepsilon$  et en intégrant sur  $\mathbb{R}^m$  on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} (u_{ij}^\varepsilon)^2 dy + \int_{\mathbb{R}^m} D \nabla_y u_{ij}^\varepsilon \cdot \nabla_y u_{ij}^\varepsilon dy &= - \int_{\mathbb{R}^m} R [b_j, D]^t R \nabla_y^R u_i^\varepsilon \cdot \nabla_y^R u_{ij}^\varepsilon dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^m} R D^t R \nabla_y^R u_i^\varepsilon \cdot \nabla_y^R \operatorname{div}_y b_j u_{ij}^\varepsilon dy + \int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{div}_y ([b_j, [b_i, D]]^t R \nabla_y^R u^\varepsilon) u_{ij}^\varepsilon dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^m} R [b_i, D]^t R \nabla_y^R u^\varepsilon \cdot \nabla_y^R (\operatorname{div}_y b_j) u_{ij}^\varepsilon dy + \int_{\mathbb{R}^m} u_{ij}^\varepsilon \operatorname{div}_y ([b_i, D]^t R \nabla_y^R u_j^\varepsilon) dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^m} u_{ij}^\varepsilon b_j \cdot \nabla_y (D^t R \nabla_y^R u^\varepsilon \cdot \nabla_y (\operatorname{div}_y b_i)) dy \\ &=: K_{ij}^1 + K_{ij}^2 + K_{ij}^3 + K_{ij}^4 + K_{ij}^5 + K_{ij}^6. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Les hypothèses (2.26) nous assurent que, cf. (2.36)

$$D \nabla_y u_{ij}^\varepsilon \cdot \nabla_y u_{ij}^\varepsilon \geq \alpha |P^{1/2} \nabla_y u_{ij}^\varepsilon|^2 = \alpha |\nabla_y^R u_{ij}^\varepsilon|^2. \quad (\text{B.12})$$

De manière similaire on obtient

$$\nabla_y^R (u_{ij}^\varepsilon) = b_j \cdot \nabla_y (\nabla_y^R u_i^\varepsilon) - \mathcal{A}_j \nabla_y^R u_i^\varepsilon$$

ce qui nous autorise à remplacer  $K_{ij}^1$  par

$$\begin{aligned} K_{ij}^1 &= \int_{\mathbb{R}^m} R [b_j, D]^t R \nabla_y^R u_i^\varepsilon(t) \cdot \mathcal{A}_j \nabla_y^R u_i^\varepsilon(t) dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^m} b_j \cdot \nabla_y (R [b_j, D]^t R) : \nabla_y^R u_i^\varepsilon(t) \otimes \nabla_y^R u_i^\varepsilon(t) dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^m} (\operatorname{div}_y b_j) R [b_j, D]^t R : \nabla_y^R u_i^\varepsilon(t) \otimes \nabla_y^R u_i^\varepsilon(t) dy. \end{aligned}$$

Grâce aux différentes hypothèses faites on sait qu'il existe  $C_3$  (ne dépendant pas de  $\varepsilon$  ou  $t$ ) telle que

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m |K_{ij}^1| \leq C_3 \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon > 0.$$

De même il existe une constante  $C_4$  (ne dépendant pas de  $\varepsilon$  ou  $t$ ) telle que

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m |K_{ij}^2| \leq C_4 \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon > 0.$$

On travaille maintenant sur le terme  $K_{ij}^3$ , qui s'écrit

$$\begin{aligned} K_{ij}^3 &= \int_{\mathbb{R}^m} u_{ij}^\varepsilon(t) \operatorname{div}_y (R[b_j, [b_i, D]]) \cdot \nabla_y^R u^\varepsilon(t) \, dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^m} u_{ij}^\varepsilon(t) R[b_j, [b_i, D]] {}^t R : \nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t) \, dy. \end{aligned}$$

Il est facile de constater qu'il existe  $C_5$  (ne dépendant ni de  $\varepsilon$  ni de  $t$ ) telle que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m (|K_{ij}^3| + |K_{ij}^4| + |K_{ij}^6|) &\leq C_5 (\|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \|\nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\ &\quad + \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

On estime  $K_{ij}^5$ . Pour tout  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  on a

$$u_{ij}^\varepsilon(t) = u_{ji}^\varepsilon(t) - \sum_{k=1}^m \alpha_{ij}^k u_k^\varepsilon(t)$$

et donc  $K_{ij}^5$  s'écrit

$$\begin{aligned} K_{ij}^5 &= - \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^m} \alpha_{ij}^k u_k^\varepsilon(t) \operatorname{div}_y ([b_i, D] {}^t R \nabla_y^R u_j^\varepsilon(t)) \, dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^m} u_{ji}^\varepsilon(t) \operatorname{div}_y ([b_i, D] {}^t R \nabla_y^R u_j^\varepsilon(t)) \, dy \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^m} \nabla_y^R (\alpha_{ij}^k u_k^\varepsilon(t)) \cdot R[b_i, D] {}^t R \nabla_y^R u_j^\varepsilon(t) \, dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^m} \nabla_y^R (b_i \cdot \nabla_y u_j^\varepsilon(t)) \cdot R[b_i, D] {}^t R \nabla_y^R u_j^\varepsilon(t) \, dy =: K_{ij}^7 + K_{ij}^8. \end{aligned}$$

Clairement, il existe une constante  $C_6$  (ne dépendant ni de  $\varepsilon$  ni de  $t$ ) tel que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m |K_{ij}^7| &\leq C_6 (\|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \|\nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\ &\quad + \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Pour le dernier terme  $K_{ij}^8$  on utilise (B.5) et on obtient comme précédemment

$$\begin{aligned}
K_{ij}^8 &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{A}_i \nabla_y^R u_j^\varepsilon(t) \cdot R[b_i, D]^t R \nabla_y^R u_j^\varepsilon(t) \, dy \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^m} b_i \cdot \nabla_y (\nabla_y^R u_j^\varepsilon(t)) \cdot R[b_i, D]^t R \nabla_y^R u_j^\varepsilon(t) \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{A}_i \nabla_y^R u_j^\varepsilon(t) \cdot R[b_i, D]^t R \nabla_y^R u_j^\varepsilon(t) \, dy \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^m} (\operatorname{div}_y b_i) R[b_i, D]^t R : \nabla_y^R u_j^\varepsilon(t) \otimes \nabla_y^R u_j^\varepsilon(t) \, dy \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^m} b_i \cdot \nabla_y (R[b_i, D]^t R) : \nabla_y^R u_j^\varepsilon(t) \otimes \nabla_y^R u_j^\varepsilon(t) \, dy
\end{aligned}$$

ce qui implique qu'il existe une constante  $C_7$  (ne dépendant ni de  $\varepsilon$  ni de  $t$ ) telle que

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m |K_{ij}^8| \leq C_7 \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon > 0.$$

En assemblant (B.11), (B.12) et toutes les estimations  $K_{ij}^r, i, j \in \{1, \dots, m\}, r \in \{1, \dots, 8\}$  on déduit que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 + \alpha \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \leq C \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\
&\quad \times (\|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} + \|\nabla_y^R u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}), \quad C = \sum_{r=3}^7 C_r.
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall on obtient, pour une certaine constante  $C_T$  dépendant de  $T$  des coefficients  $\alpha_{ij}^k$ , des champs de vecteurs  $b_i$  et du champ de matrices  $D$

$$\begin{aligned}
\|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} &= \|\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} \\
&\leq C_T (\|\nabla_y^R u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} + \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}), \quad \varepsilon > 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} &= \|\nabla_z^R \otimes \nabla_z^R \otimes \nabla_z^R v^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} \\
&\leq C_T (\|\nabla_y^R u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} + \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}), \quad \varepsilon > 0.
\end{aligned}$$

Pour estimer  $\partial_t \nabla_z^R v^\varepsilon$  on prend la dérivée directionnelle  $b_i \cdot \nabla_z$  de (B.8). Etant donné que les champs de vecteurs  $b_i, b$  sont en involution, c'est à dire  $[b_i, b] = 0$ , les flots  $Y_i, Y$  commutent [5, 4], et donc la dérivée le long de  $b_i$  commute avec la translatée le long du flot de  $b$  (on prend la dérivée par rapport à  $h$ , en  $h = 0$ , de l'égalité  $f(Y(s; Y_i(h; \cdot))) = f(Y_i(h; Y(s; \cdot)))$ ). On déduit que

$$\partial_t (b_i \cdot \nabla_z v^\varepsilon)(t, z) = [b_i \cdot \nabla_y \operatorname{div}_y (D \nabla_y u^\varepsilon)](Y(t/\varepsilon; z))$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\|\partial_t \nabla_z^R v^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} &= \|\nabla_y^R \operatorname{div}_y (D \nabla_y u^\varepsilon(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\
&= \|\nabla_y^R \operatorname{div}_y (D^t R \nabla_y^R u^\varepsilon(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\
&= \|\nabla_y^R (\operatorname{div}_y (RD)) \cdot \nabla_y^R u^\varepsilon(t) + \nabla_y^R (RD^t R : \nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t))\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  on a l'égalité

$$\operatorname{div}_y(RD)_i = \sum_{j=1}^m b_j \cdot \nabla_y(RD^t R)_{ij} + \sum_{j=1}^m (RD^t R)_{ij} \operatorname{div}_y b_j. \quad (\text{B.13})$$

En effet, pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  on peut écrire (ici  $(e_k)_{1 \leq k \leq m}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ )

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}_y RD)_i &= \operatorname{div}_y(RD^t R^t R^{-1})_i = \sum_{k=1}^m \partial_{y_k} \sum_{j=1}^m (RD^t R)_{ij} R_{kj}^{-1} \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \partial_{y_k} [(RD^t R)_{ij} (b_j \cdot e_k)] \\ &= \sum_{j=1}^m \operatorname{div}_y [(RD^t R)_{ij} b_j]. \end{aligned}$$

Grâce aux hypothèses et à (B.13), il est facile de voir qu'il existe une constante ne dépendant que des  $\alpha_{ij}^k$ , des champs de vecteurs  $b_i$  et du champ de matrices  $D$  telle que

$$\begin{aligned} \|\partial_t \nabla_z^R v^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} &\leq C(\|\nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} + \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \\ &\quad + \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}). \end{aligned}$$

Etant donné que  $\nabla_y^R u^\varepsilon, \nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon$  satisfont des estimations de régularité uniformes dans  $L^\infty([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))$ , et  $\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^\varepsilon$  dans  $L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))$ , on obtient que pour tout  $T \in \mathbb{R}_+$ , il existe une constante  $\tilde{C}_T$  (dépendant uniquement de  $T, \alpha, \alpha_{ij}^k, b_i$  et  $D$ ) telle que

$$\|\partial_t \nabla_z^R v^\varepsilon\|_{L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^m))} \leq \tilde{C}_T (\|\nabla_y^R u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} + \|\nabla_y^R \otimes \nabla_y^R u^{\text{in}}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}), \quad \varepsilon > 0.$$

□

**Preuve de la Proposition 2.4.6.** On réalise exactement les mêmes calculs que pour la preuve de la Proposition 2.4.4 (l'absence du terme  $\frac{1}{\varepsilon} b \cdot \nabla_z v$  dans (2.27) ne change rien). Néanmoins, il nous faut tout de même vérifier que l'ensemble des hypothèses faites sur le champ de matrices  $D$  dans la Proposition 2.4.4 sont également vérifiées par le champ de matrices  $\langle D \rangle$ . Par le Théorème 2.2.5 on a que  ${}^t \langle D \rangle = \langle D \rangle$ ,  $\langle D \rangle \in H_Q^\infty$ ,  $|\langle D \rangle|_{H_Q^\infty} \leq |D|_{H_Q^\infty}$ ,  $Q^{1/2} \langle D \rangle Q^{1/2} \geq \alpha I_m$ , et donc les hypothèses (2.26) sont vérifiées pour le champ de matrices  $\langle D \rangle$ . Nous avons également à montrer que  $R[b_i, \langle D \rangle]^t R \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$ ,  $\operatorname{div}_y(R \langle D \rangle) \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$ ,  $\sum_{i=1}^m b_i \cdot \nabla_y(R[b_i, \langle D \rangle]^t R) \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$ , à partir du fait que cela est vérifié pour le champ de matrices  $D$ . Le point clé est que pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , les groupes  $(G_i(h))_{h \in \mathbb{R}}$ ,  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  commutent, avec  $G_i(h)$  étant défini par

$$G_i(h)A = \partial Y_i^{-1}(h; \cdot)A(Y_i(h; \cdot)) {}^t \partial Y_i^{-1}(h; \cdot).$$

On voit facilement que pour tout  $s, h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (G(s) \circ G_i(h))A &= G(s)(G_i(h)A) = \partial Y^{-1}(s; \cdot)(G_i(h)A)(Y(s; \cdot)) {}^t \partial Y^{-1}(s; \cdot) \\ &= \partial Y^{-1}(s; \cdot) \partial Y_i^{-1}(h; Y(s; \cdot))A(Y_i(h; Y(s; \cdot))) {}^t \partial Y_i^{-1}(h; Y(s; \cdot)) {}^t \partial Y^{-1}(s; \cdot) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

et

$$\begin{aligned} (G_i(h) \circ G(s))A &= G_i(h)(G(s)A) = \partial Y_i^{-1}(h; \cdot)(G(s)A)(Y_i(h; \cdot)) {}^t \partial Y_i^{-1}(h; \cdot) \\ &= \partial Y_i^{-1}(h; \cdot) \partial Y^{-1}(s; Y_i(h; \cdot))A(Y(s; Y_i(h; \cdot))) {}^t \partial Y^{-1}(s; Y_i(h; \cdot)) {}^t \partial Y_i^{-1}(h; \cdot). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Du fait que les champs  $b$  et  $b_i$  soient en involution, on a

$$Y_i(h; Y(s; \cdot)) = Y(s; Y_i(h; \cdot)) \quad (\text{B.16})$$

et par différentiation

$$\partial Y_i(h; Y(s; \cdot)) \partial Y(s; \cdot) = \partial Y(s; Y_i(h; \cdot)) \partial Y_i(h; \cdot)$$

ce qui s'écrit

$$\partial Y^{-1}(s; \cdot) \partial Y_i^{-1}(h; Y(s; \cdot)) = \partial Y_i^{-1}(h; \cdot) \partial Y^{-1}(s; Y_i(h; \cdot)). \quad (\text{B.17})$$

En combinant (B.14), (B.15), (B.16), (B.17) on obtient la propriété de commutation entre les groupes  $(G_i(h))_{h \in \mathbb{R}}$ ,  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . L'hypothèse  $R[b_i, D]^t R \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$ , ou de manière équivalente  $[b_i, D] \in H_Q^\infty$ , peut être comprise au sens  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ , c'est-à-dire, qu'il existe un champ de matrice, noté  $[b_i, D]$ , qui appartient à  $H_Q^\infty$ , tel que pour tout  $A \in C_c^1(\mathbb{R}^m)$  on a

$$\int_{\mathbb{R}^m} D : (-b_i \cdot \nabla_y A - (\text{div}_y b_i) A - {}^t \partial b_i A - A \partial b_i) dy = \int_{\mathbb{R}^m} [b_i, D] : A dy. \quad (\text{B.18})$$

On introduit l'opérateur  $L_i(D) = [b_i, D]$  et son adjoint formel

$$L_i^*(A) = -b_i \cdot \nabla_y A - (\text{div}_y b_i) A - {}^t \partial b_i A - A \partial b_i, \quad A \in C_c^1(\mathbb{R}^m).$$

En utilisant ces notations, (B.18) devient

$$\int_{\mathbb{R}^m} D : L_i^*(A) dy = \int_{\mathbb{R}^m} L_i(D) : A dy, \quad A \in C_c^1(\mathbb{R}^m).$$

On remarque que  $H_Q^\infty$  est le dual topologique de l'espace

$$H_P^1 = \left\{ A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \text{ mesurable} : \int_{\mathbb{R}^m} (P(y)A(y) : A(y)P(y))^{1/2} dy < +\infty \right\}$$

et donc  $[b_i, D] \in H_Q^\infty$  ssi il existe une constante  $C_i$  telle que  $\int_{\mathbb{R}^m} D : L_i^*(A) dy \leq C_i |A|_{H_P^1}$  pour tout  $A \in C_c^1(\mathbb{R}^m)$ . Un calcul direct montre que si  $B \in H_Q^\infty$  est tel que  $G_i(h)B \in H_Q^\infty$  pour tout  $h \in \mathbb{R}$  and  $h \in \mathbb{R}^* \rightarrow (G_i(h)B - B)/h$  est borné dans  $H_Q^\infty$ , alors  $(G_i(h)B - B)/h$  converge vers  $L_i(B)$  faiblement  $\star$  dans  $H_Q^\infty$ , lorsque  $h \rightarrow 0$ . En effet, pour tout  $A \in C_c^1(\mathbb{R}^m) \subset H_P^1$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{G_i(h)B - B}{h} : A dy &= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial Y_i^{-1}(h; y) B(Y_i(h; y)) {}^t \partial Y_i^{-1}(h; y) - B(y)}{h} : A(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial Y_i(-h; Y_i(h; y)) B(Y_i(h; y)) {}^t \partial Y_i(-h; Y_i(h; y)) - B(y)}{h} : A(y) dy \\ &= \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^m} \{ \det(\partial Y_i(-h; z)) \partial Y_i(-h; z) B(z) {}^t \partial Y_i(-h; z) : A(Y_i(-h; z)) - B(z) : A(z) \} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\det(\partial Y_i(-h; z)) - 1}{h} \partial Y_i(-h; z) B(z) {}^t \partial Y_i(-h; z) : A(Y_i(-h; z)) dz \\ &+ \int_{\mathbb{R}^m} B(z) : \frac{{}^t \partial Y_i(-h; z) A(Y_i(-h; z)) \partial Y_i(-h; z) - A(z)}{h} dz \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} - \int_{\mathbb{R}^m} \text{div}_z b_i B(z) : A(z) dz - \int_{\mathbb{R}^m} B(z) : (b_i \cdot \nabla_z A + {}^t \partial b_i A + A \partial b_i) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} B(z) : L_i^*(A) dz. \end{aligned}$$

On déduit que toute limite faible  $\star$  dans  $H_Q^\infty$  vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^m} \text{w} \star \lim_{h_k \rightarrow 0} \frac{G_i(h_k)B - B}{h_k} : A \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} B : L_i^\star(A) \, dy$$

pour tout  $A \in C_c^1(\mathbb{R}^m)$ . Ainsi, toute la famille  $(G_i(h)B - B)/h$  converge  $\star$  faiblement dans  $H_Q^\infty$ , lorsque  $h \rightarrow 0$ , et  $L_i(B) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G_i(h)B - B}{h}$ ,  $\star$  faiblement dans  $H_Q^\infty$ .

On cherche à montrer que pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on a  $L_i(G(s)D) = G(s)(L_i(D))$ , et donc

$$\int_{\mathbb{R}^m} G(s)D : L_i^\star(A) \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} G(s)L_i(D) : A \, dy, \quad A \in C_c^1(\mathbb{R}^m). \quad (\text{B.19})$$

Par un argument de densité (noter que  $B_n \rightarrow B$  converge  $\star$  faiblement dans  $H_Q^\infty$ , implique que  $G(s)B_n \rightarrow G(s)B$  converge  $\star$  faiblement dans  $H_Q^\infty$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ) il est suffisant de montrer que  $L_i(G(s)B) = G(s)L_i(B)$  pour tout champ de matrices  $B$ , régulier à support compact. Considérons un champ de matrices  $B$  régulier à support compact. Evidemment, pour tout  $h \in \mathbb{R}^\star$  on a  $G_i(h)B \in H_Q^\infty$  et  $\frac{G_i(h)B - B}{h} \rightarrow L_i(B)$   $\star$  faiblement dans  $H_Q^\infty$ , lorsque  $h \rightarrow 0$ . On en déduit que  $G_i(h)G(s)B = G(s)G_i(h)B \in H_Q^\infty$  pour tout  $h \in \mathbb{R}$  et

$$\frac{G_i(h)G(s)B - G(s)B}{h} = \frac{G(s)G_i(h)B - G(s)B}{h} = G(s) \frac{G_i(h)B - B}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} G(s)L_i(B)$$

$\star$  faiblement dans  $H_Q^\infty$ . Par la remarque précédente, on obtient que  $L_i(G(s)B) = G(s)L_i(B)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Il est maintenant facile de voir que  $L_i(\langle D \rangle) = [b_i, \langle D \rangle] \in H_Q^\infty$ , si  $L_i(D) = [b_i, D] \in H_Q^\infty$ . En effet, en moyennant (B.19) par rapport à  $s$  on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{S} \int_0^S G(s)D \, ds : L_i^\star(A) \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{S} \int_0^S G(s)L_i(D) \, ds : A \, dy, \quad A \in C_c^1(\mathbb{R}^m).$$

En tenant compte du fait que  $\frac{1}{S} \int_0^S G(s)D \, ds \rightarrow \langle D \rangle$  dans  $H_{Q,\text{loc}}$ , lorsque  $S \rightarrow +\infty$ , que  $PL_i^\star(A)P \in H_Q$  et en notant également que

$$\left| \frac{1}{S} \int_0^S G(s)L_i(D) \, ds \right|_{H_Q^\infty} \leq \frac{1}{S} \int_0^S |G(s)L_i(D)|_{H_Q^\infty} \, ds = |L_i(D)|_{H_Q^\infty}.$$

On en déduit que la limite faible  $\star$  de  $\left( \frac{1}{S} \int_0^S G(s)L_i(D) \, ds \right)_S$  dans  $H_Q^\infty$  satisfait

$$\int_{\mathbb{R}^m} \langle D \rangle : L_i^\star(A) \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} \text{w} \star \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s)L_i(D) \, ds : A \, dy$$

pour tout  $A \in C_c^1(\mathbb{R}^m) \subset H_P^1$ , ce qui signifie que  $L_i(\langle D \rangle) = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s)L_i(D) \, ds$ ,  $\star$  faiblement dans  $H_Q^\infty$ . En particulier  $|L_i(\langle D \rangle)|_{H_Q^\infty} \leq |L_i(D)|_{H_Q^\infty}$ .

On se concentre maintenant sur l'hypothèse  $\sum_{i=1}^m b_i \cdot \nabla_y (R[b_i, D]^t R) \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$ . Pour tout  $s \in \mathbb{R}$  on a

$$RG(s)[b_i, D]^t R = R \partial Y^{-1}(s; \cdot) [b_i, D] (Y(s; \cdot))^t \partial Y^{-1}(s; \cdot)^t R = (R[b_i, D]^t R) (Y(s; \cdot))$$

et étant donné que  $[b_i, b] = 0$ , on obtient que

$$b_i \cdot \nabla_z (RG(s)[b_i, D]^t R) = b_i \cdot \nabla_z ((R[b_i, D]^t R) \circ Y(s; \cdot)) = (b_i \cdot \nabla_y (R[b_i, D]^t R)) \circ Y(s; \cdot).$$

En multipliant par un champ de matrices régulier à support compact  $A \in C_c^1(\mathbb{R}^m)$  et en moyennant par rapport à  $s$ , on obtient

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\operatorname{div}_z b_i}{S} \int_0^S G(s) L_i(D) \, ds : {}^t R A R \, dz - \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{S} \int_0^S G(s) L_i(D) \, ds : {}^t R (b_i \cdot \nabla_z A) R \, dz \\ = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{S} \int_0^S (b_i \cdot \nabla_y (R L_i(D) {}^t R))(Y(s; z)) \, ds : A(z) \, dz. \end{aligned}$$

On utilise maintenant la convergence  $\star$  faible dans  $H_Q^\infty$

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G(s) L_i(D) \, ds = L_i(\langle D \rangle)$$

et le fait que  ${}^t R A R \in H_P^1$ ,  $\operatorname{div}_y b_i \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$  implique que

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^m \operatorname{div}_z b_i R L_i(\langle D \rangle) {}^t R : A \, dz - \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^m R L_i(\langle D \rangle) {}^t R : b_i \cdot \nabla_z A \, dz \quad (\text{B.20}) \\ = \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \sum_{i=1}^m (b_i \cdot \nabla_y (R L_i(D) {}^t R))(Y(s; z)) \, ds : A(z) \, dz. \end{aligned}$$

Pour passer à la limite dans le dernier terme intégral, on utilise la convergence  $\star$  faible dans  $L^\infty(\mathbb{R}^m)$ , étant donné que la famille  $(\sum_{i=1}^m (b_i \cdot \nabla_y (R L_i(D) {}^t R)) \circ Y(s; \cdot))_{s \in \mathbb{R}}$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^m)$ . On déduit que

$$\sum_{i=1}^m b_i \cdot \nabla_y (R L_i(\langle D \rangle) {}^t R) = w \star \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \sum_{i=1}^m (b_i \cdot \nabla_y (R L_i(D) {}^t R)) \circ Y(s; \cdot) \, ds \in L^\infty(\mathbb{R}^m).$$

Il reste à observer que pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{div}_z (R G(s) D) = \operatorname{div}_y (R D) \circ Y(s; \cdot)$  (voir (2.67) pour les détails), ce qui implique

$$\operatorname{div}_z (R \langle D \rangle) = w \star \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S \operatorname{div}_y (R D) \circ Y(s; \cdot) \, ds \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$$

où, comme précédemment, la dernière limite peut être comprise au sens faible  $\star L^\infty(\mathbb{R}^m)$ .  
□

## B.2 Preuve de la Proposition 4.7.1

**Preuve.** (de la Proposition 4.7.1)

Continuité de  $\mathfrak{n}$

On montre que  $\frac{1}{S} \int_0^S (S - s) \left[ G(s) C \nabla u_{2s} - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} G(s') C \nabla u_{2s'} \, ds' \right] \, ds$  converge, lorsque  $S \rightarrow +\infty$ , fortement dans  $X_Q$ , pour tout  $u \in H_P^1$ . Ce qui impliquera que  $\mathfrak{n}(u, v)$  est bien défini pour tout  $(u, v) \in H_P^1 \times H_P^1$ . On utilise la décomposition de l'espace  $H_P^1$  suivante  $H_P^1 = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (E_{\lambda_n} \cap H_P^1)$ . Si  $u \in E_0 \cap H_P^1$ , on sait par le Lemme 4.5.1 que

$$\lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} G(s') C \nabla u_{2s'} \, ds' = \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} G(s') C \nabla u \, ds' = \langle C \rangle \nabla u = 0$$

fortement dans  $X_Q$  et donc, par (4.52), on obtient que

$$\begin{aligned}
& \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \left[ G(s) C \nabla u_{2s} - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} G(s') C \nabla u_{2s'} ds' \right] ds \quad (\text{B.21}) \\
&= -\frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \left\{ \frac{d}{ds} G(s) C_0 \right\} \nabla u ds \\
&= -\frac{1}{S} [(S-s) G(s) C_0 \nabla u]_0^S - \frac{1}{S} \int_0^S G(s) C_0 \nabla u ds \xrightarrow{S \rightarrow +\infty} C_0 \nabla u - \langle C_0 \rangle \nabla u = C_0 \nabla u
\end{aligned}$$

fortement dans  $X_Q$ . Supposons maintenant que  $u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . On sait par le Lemme 4.5.5 que

$$\lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} G(s') C \nabla u_{2s'} ds' = \frac{1}{2} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C \nabla u + \frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u$$

fortement dans  $X_Q$  et donc

$$f_u(s) := G(s) C \nabla u_{2s} - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} G(s') C \nabla u_{2s'} ds' = U(s) \nabla u + V(s) \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u$$

avec

$$U(s) = \cos(\sqrt{4\lambda_n} s) G(s) C - \frac{1}{2} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C, \quad V(s) = \sin(\sqrt{4\lambda_n} s) G(s) C - \frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C.$$

On note que l'hypothèse (4.53) implique que

$$-L_{4\lambda_n} \left( C_n, \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right) = \left( 0, \frac{C - \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C}{\sqrt{4\lambda_n}} \right),$$

où les opérateurs  $L, L_{4\lambda_n}$  sont considérés comme agissant dans  $H_{Q,\text{loc}}$ ,  $H_{Q,\text{loc}} \times H_{Q,\text{loc}}$  respectivement, voir la Remarque 4.3.7. On a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} G_{4\lambda_n}(s) \left( C_n, \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right) &= -G_{4\lambda_n}(s) \left( 0, \frac{C - \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C}{\sqrt{4\lambda_n}} \right) \\
&= (\sin(\sqrt{4\lambda_n} s), -\cos(\sqrt{4\lambda_n} s)) \frac{G(s) C - G(s) \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C}{\sqrt{4\lambda_n}}.
\end{aligned}$$

On obtient que

$$\begin{aligned}
\sin(\sqrt{4\lambda_n} s) G(s) C &= \sin(\sqrt{4\lambda_n} s) \underbrace{\left[ \cos(\sqrt{4\lambda_n} s) \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C + \sin(\sqrt{4\lambda_n} s) \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C \right]}_{G(s) \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C} \\
&\quad + \sqrt{4\lambda_n} \frac{d}{ds} \left[ \cos(\sqrt{4\lambda_n} s) G(s) C_n - \sin(\sqrt{4\lambda_n} s) G(s) \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\cos(\sqrt{4\lambda_n} s) G(s) C &= \cos(\sqrt{4\lambda_n} s) \underbrace{\left[ \cos(\sqrt{4\lambda_n} s) \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C + \sin(\sqrt{4\lambda_n} s) \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C \right]}_{G(s) \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C} \\
&\quad - \sqrt{4\lambda_n} \frac{d}{ds} \left[ \sin(\sqrt{4\lambda_n} s) G(s) C_n + \cos(\sqrt{4\lambda_n} s) G(s) \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right].
\end{aligned}$$

Ainsi, les champs de matrices  $U(s), V(s)$  s'écrivent

$$U(s) = \frac{1}{2} \cos(4\sqrt{\lambda_n s}) \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C + \frac{1}{2} \sin(4\sqrt{\lambda_n s}) \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C - \sqrt{4\lambda_n} \frac{d}{ds} \left[ \sin(\sqrt{4\lambda_n s}) G(s) C_n + \cos(\sqrt{4\lambda_n s}) G(s) \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right] \quad (\text{B.22})$$

$$V(s) = \frac{1}{2} \sin(4\sqrt{\lambda_n s}) \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C - \frac{1}{2} \cos(4\sqrt{\lambda_n s}) \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C + \sqrt{4\lambda_n} \frac{d}{ds} \left[ \cos(\sqrt{4\lambda_n s}) G(s) C_n - \sin(\sqrt{4\lambda_n s}) G(s) \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right]. \quad (\text{B.23})$$

On rappelle qu'on cherche à établir la convergence, lorsque  $S \rightarrow +\infty$ , de la quantité

$$\frac{1}{S} \int_0^S (S-s) f_u(s) ds = \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \left\{ U(s) \nabla u + V(s) \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u \right\} ds$$

dans  $X_Q$ . On observe que

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \cos(4\sqrt{\lambda_n s}) ds = 0, \quad \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \sin(4\sqrt{\lambda_n s}) ds = \frac{1}{4\sqrt{\lambda_n}}. \quad (\text{B.24})$$

Après une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \sqrt{4\lambda_n} \frac{d}{ds} \left[ \sin(\sqrt{4\lambda_n s}) G(s) C_n + \cos(\sqrt{4\lambda_n s}) G(s) \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right] ds \nabla u \\ & + \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \sqrt{4\lambda_n} \frac{d}{ds} \left[ \cos(\sqrt{4\lambda_n s}) G(s) C_n - \sin(\sqrt{4\lambda_n s}) G(s) \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right] ds \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u \\ & = LC_n \nabla u - \sqrt{4\lambda_n} C_n \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u + \frac{\sqrt{4\lambda_n}}{S} \int_0^S G_{4\lambda_n}(s) \left( C_n, \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right) ds \left( \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u, -\nabla u \right). \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Comme  $\text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C_n = 0$ , on sait, voir Remarque 4.5.4, que

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{2}{S} \int_r^{r+S} (\cos(\sqrt{4\lambda_n s}) G(s) C_n, \sin(\sqrt{4\lambda_n s}) G(s) C_n) ds = (0, 0)$$

dans  $H_{Q,\text{loc}} \times H_{Q,\text{loc}}$ . Cela implique que

$$\begin{aligned} \text{Proj}_{\ker L_{4\lambda_n}} \left( C_n, \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right) &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} G_{4\lambda_n}(s) \left( C_n, \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right) ds \\ &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_r^{r+S} \left( \cos(\sqrt{4\lambda_n s}) G(s) C_n - \sin(\sqrt{4\lambda_n s}) G(s) \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n, \right. \\ & \quad \left. \sin(\sqrt{4\lambda_n s}) G(s) C_n + \cos(\sqrt{4\lambda_n s}) G(s) \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right) ds \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

dans  $H_{Q,\text{loc}} \times H_{Q,\text{loc}}$ . Comme  $C_n, \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}}C_n$  appartiennent à  $H_Q^\infty$  et  $\nabla u, \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}}u$  appartiennent à  $X_P$ , on montre, en adaptant les arguments de la preuve du Lemme 4.5.1, la convergence forte dans  $X_Q$

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S G_{4\lambda_n}(s) \left( C_n, \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right) ds \left( \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u, -\nabla u \right) = 0. \quad (\text{B.26})$$

Enfin (B.22), (B.23), (B.24), (B.25), (B.26) nous amène à la convergence dans  $X_Q$  de la quantité

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) f_u(s) ds &= \left[ \frac{1}{8\sqrt{\lambda_n}} \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C + LC_n \right] \nabla u \\ &\quad + \left[ \frac{1}{8\sqrt{\lambda_n}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C - \sqrt{4\lambda_n} C_n \right] \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

On a donc montré que  $\left( \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) f_u(s) ds \right)_{S>0}$  converge dans  $X_Q$ , lorsque  $S \rightarrow +\infty$ , pour tout  $u \in \text{vect} \cup_{n \in \mathbb{N}} (E_{\lambda_n} \cap H_P^1)$ . En vue de justifier l'existence de la limite précédente pour tout  $u \in H_P^1$ , on va donner une majoration de la quantité  $\left( \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) f_u(s) ds \right)_{S>0}$  dans  $X_Q$  uniformément par rapport à  $S > 0$  et pour  $u \in \text{vect} \cup_{n \in \mathbb{N}} (E_{\lambda_n} \cap H_P^1), |u|_{H_P^1} \leq 1$ . En effet, par (B.21) on a

$$\left| \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) f_u(s) ds \right|_{X_Q} \leq 2|C_0|_{H_Q^\infty} |\nabla u|_{X_P}, \quad u \in E_0 \cap H_P^1$$

et par les calculs précédents, la Remarque 4.5.4 et quatrième point de la Remarque 4.4.4, on obtient que pour tout  $u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1, n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) f_u(s) ds \right|_{X_Q} &\leq \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}} \left[ \left| \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C \right|_{H_Q^\infty} + |\text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C|_{H_Q^\infty} \right] |\nabla u|_{X_P} \\ &\quad + 3\sqrt{4\lambda_n} \left[ \left| \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right|_{H_Q^\infty} + |C_n|_{H_Q^\infty} \right] |\nabla u|_{X_P} \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{\lambda_n}} |C|_{H_Q^\infty} |\nabla u|_{X_P} + 6\sqrt{\lambda_n} \left[ |C_n|_{H_Q^\infty} + \left| \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right|_{H_Q^\infty} \right] |\nabla u|_{X_P}. \end{aligned}$$

Soit  $u \in \text{vect} \cup_{n \in \mathbb{N}} (E_{\lambda_n} \cap H_P^1)$ , c'est-à-dire  $u = \sum_{n=0}^N u_n, u_n \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$  pour tout  $n \in \{0, \dots, N\}$ , et introduisons les quantités  $c_n = |C_n|_{H_Q^\infty} + \left| \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right|_{H_Q^\infty}, n \in \mathbb{N}^*$ . En utilisant l'orthogonalité des  $(\nabla u_n)_{0 \leq n \leq N}$  dans  $X_P$ , on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \left| \int_0^S (S-s) f_u(s) ds \right|_{X_Q} &\leq 2|C_0|_{H_Q^\infty} |\nabla u|_{X_P} + \sum_{n=1}^N \left[ \frac{2}{\sqrt{\lambda_n}} |C|_{H_Q^\infty} + 6\sqrt{\lambda_n} c_n \right] |\nabla u_n|_{X_P} \\ &\leq 2|C_0|_{H_Q^\infty} |\nabla u|_{X_P} + 2|C|_{H_Q^\infty} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \right)^{1/2} |\nabla u|_{X_P} + 6 \left( \sum_{n=1}^N \lambda_n c_n^2 \right)^{1/2} |\nabla u|_{X_P} \\ &\leq \left[ 2|C_0|_{H_Q^\infty} + 2|C|_{H_Q^\infty} \left( \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} \right)^{1/2} + 6 \left( \sum_{n \geq 1} \lambda_n c_n^2 \right)^{1/2} \right] |u|_{H_P^1} \end{aligned}$$

ce qui signifie que  $\mathbf{n}$  est bien définie et bornée dans  $H_P^1 \times H_P^1$ .

#### Anti-symétrie de $\mathbf{n}$

Montrons maintenant que  $\mathbf{n}$  est anti-symétrique. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout  $u \in H_P^1$  on a la convergence dans  $X_Q$

$$\begin{aligned} & \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \left\{ G(s) C \nabla u_{2s} - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} G(s') C \nabla u_{2s'} ds' \right\} ds \\ &= - \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_{-S}^0 (S+s) \left\{ G(s) C \nabla u_{2s} - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_{-S'}^0 G(s') C \nabla u_{2s'} ds' \right\} ds. \quad (\text{B.28}) \end{aligned}$$

En effet, supposons pour l'instant que (B.28) est vrai. Comme le champ de matrices symétriques  $C$  appartient à  $\ker \langle \cdot \rangle \cap H_Q^\infty$ , on sait par la Proposition 4.5.9 que

$$\mathbf{m}_C(u, v) := \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_{-S'}^0 G(s') C \nabla u_{2s'} ds' \cdot \nabla v dy$$

défini une forme bilinéaire symétrique bornée sur  $H_P^1 \times H_P^1$ . On obtient, grâce à la symétrie de  $C$  et  $\mathbf{m}_C$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(u, v) &= \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \left\{ G(s) C \nabla u_{2s} - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} G(s') C \nabla u_{2s'} ds' \right\} ds \cdot \nabla v dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_{-S}^0 (S+s) \left\{ G(s) C \nabla u_{2s} - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_{-S'}^0 G(s') C \nabla u_{2s'} ds' \right\} ds \cdot \nabla v dy \\ &= - \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_{-S}^0 (S+s) \left[ \int_{\mathbb{R}^m} C \nabla u_s \cdot \nabla v_{-s} dy - \mathbf{m}_C(u, v) \right] ds \\ &= - \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \left[ \int_{\mathbb{R}^m} C \nabla u_{-s} \cdot \nabla v_s dy - \mathbf{m}_C(u, v) \right] ds \\ &= - \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \left[ \int_{\mathbb{R}^m} C \nabla v_s \cdot \nabla u_{-s} dy - \mathbf{m}_C(v, u) \right] ds \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \left\{ G(s) C \nabla v_{2s} - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} G(s') C \nabla v_{2s'} ds' \right\} ds \cdot \nabla u dy \\ &= -\mathbf{n}(v, u). \end{aligned}$$

Le point clé pour justifier (B.28) est que  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}, (G_{4\lambda_n}(s))_{s \in \mathbb{R}}, n \in \mathbb{N}^*$  sont des groupes, et donc que l'argument précédent est également vrai avec  $s \in \mathbb{R}_-$ . Il est suffisant de vérifier (B.28) pour  $u \in \text{vect} \cup_{n \in \mathbb{N}} (E_{\lambda_n} \cap H_P^1)$ . Si  $u \in E_0 \cap H_P^1$ , on sait par le Lemme 4.5.1 que

$$\lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_{-S'}^0 G(s') C \nabla u_{2s'} ds' = \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_{-S'}^0 G(s') C \nabla u ds' = \langle C \rangle \nabla u = 0$$

fortement dans  $X_Q$ , et par (4.52) on obtient que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{S} \int_{-S}^0 (S+s)G(s)C\nabla u_{2s} \, ds &= \frac{1}{S} \int_{-S}^0 (S+s) \frac{d}{ds} G(s)C_0 \nabla u \, ds \\
&= \frac{1}{S} [(S+s)G(s)C_0 \nabla u]_{-S}^0 - \frac{1}{S} \int_{-S}^0 G(s)C_0 \nabla u \, ds \\
&\xrightarrow{S \rightarrow +\infty} C_0 \nabla u - \langle C_0 \rangle \nabla u = C_0 \nabla u \\
&= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \left\{ G(s)C\nabla u_{2s} - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} G(s')C\nabla u_{2s'} \, ds' \right\} ds
\end{aligned}$$

voir (B.21). Supposons maintenant que  $u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par le Lemme 4.5.5, on sait que

$$\lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_{-S'}^0 G(s')C\nabla u_{2s'} \, ds' = \frac{1}{2} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C\nabla u + \frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C\nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u$$

fortement dans  $X_Q$  et donc

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{S} \int_{-S}^0 (S+s) \left\{ G(s)C\nabla u_{2s} - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_{-S'}^0 G(s')C\nabla u_{2s'} \, ds' \right\} ds \\
= -\frac{1}{S} \int_{-S}^0 (S+s) \left\{ U(s)\nabla u + V(s)\nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u \right\} ds
\end{aligned}$$

où les champs de matrices  $U(s), V(s)$  sont définis par (B.22), (B.23). En suivant les mêmes arguments que précédemment, on a

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_{-S}^0 (S+s) \cos(4\sqrt{\lambda_n}s) \, ds = 0, \quad \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_{-S}^0 (S+s) \sin(4\sqrt{\lambda_n}s) \, ds = -\frac{1}{4\sqrt{\lambda_n}}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_{-S}^0 (S+s) \frac{d}{ds} \left[ \sin(\sqrt{4\lambda_n}s)G(s)C_n + \cos(\sqrt{4\lambda_n}s)G(s) \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right] ds \nabla u \\
= \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \nabla u \quad \text{dans } X_Q
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_{-S}^0 (S+s) \frac{d}{ds} \left[ \cos(\sqrt{4\lambda_n}s)G(s)C_n - \sin(\sqrt{4\lambda_n}s)G(s) \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} C_n \right] ds \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u \\
= C_n \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u \quad \text{dans } X_Q.
\end{aligned}$$

Enfin on obtient, voir (B.27), que

$$\begin{aligned}
\lim_{S \rightarrow +\infty} -\frac{1}{S} \int_{-S}^0 (S+s) \left\{ G(s)C\nabla u_{2s} - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_{-S'}^0 G(s')C\nabla u_{2s'} \, ds' \right\} ds \\
= \left[ \frac{1}{8\sqrt{\lambda_n}} \frac{L}{\sqrt{4\lambda_n}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C + LC_n \right] \nabla u + \left[ \frac{1}{8\sqrt{\lambda_n}} \text{Proj}_{\mathcal{E}_{4\lambda_n}} C - \sqrt{4\lambda_n} C_n \right] \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u \\
= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \left\{ G(s)C\nabla u_{2s} - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} G(s')C\nabla u_{2s'} \, ds' \right\} ds.
\end{aligned}$$

Formule de décomposition

Vérifions (4.55). On suppose que  $u, v, \mathcal{T}u, \mathcal{T}v, \mathcal{B}u, \mathcal{B}v \in H_P^1$ . Ainsi on a

$$\begin{aligned} & \mathfrak{n}(u, \mathcal{B}v) - \mathfrak{n}(\mathcal{B}u, v) \\ &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \left\{ \int_{\mathbb{R}^m} G(s) C \nabla u_{2s} \cdot \nabla \mathcal{B}v - G(s) C \nabla \mathcal{B}u_{2s} \cdot \nabla v \, dy \right. \\ & \quad \left. - \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} \int_{\mathbb{R}^m} G(s') C \nabla u_{2s'} \cdot \nabla \mathcal{B}v - G(s') C \nabla \mathcal{B}u_{2s'} \cdot \nabla v \, dy \, ds' \right\} ds. \end{aligned}$$

On voit facilement que pour tout  $h \in \mathbb{R}$  on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} G(s) C \nabla u_{2s} \cdot \nabla v_h \, dy &= \int_{\mathbb{R}^m} G(h) G(s-h) C \nabla (u_{2s-h})_h \cdot \nabla v_h \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} G(s-h) C \nabla u_{2s-h} \cdot \nabla v \, dy \end{aligned}$$

ce qui implique, grâce aux hypothèses  $u, \mathcal{T}u, v, \mathcal{T}v \in H_P^1, C \in H_Q^\infty$  que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} G(s) C \nabla u_{2s} \cdot \nabla \mathcal{T}v \, dy &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} G(s) C \nabla u_{2s} \cdot \nabla \frac{v_h - v}{h} \, dy \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^m} [G(s-h) C \nabla u_{2s-h} - G(s) C \nabla u_{2s}] \cdot \nabla v \, dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m} [G(s)(D - \langle D \rangle) \nabla u_{2s} + G(s) C \nabla \mathcal{T}u_{2s}] \cdot \nabla v \, dy. \end{aligned}$$

En appliquant deux fois la formule ci-dessus et en tenant compte du fait que  $u, \mathcal{T}u, \mathcal{B}u, v, \mathcal{T}v, \mathcal{B}v \in H_P^1$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^m} G(s') C \nabla u_{2s'} \cdot \nabla \mathcal{B}v - G(s') C \nabla \mathcal{B}u_{2s'} \cdot \nabla v \, dy = - \int_{\mathbb{R}^m} G(s') C \nabla \mathcal{B}u_{2s'} \cdot \nabla v \, dy \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^m} [G(s')(D - \langle D \rangle) \nabla u_{2s'} + G(s') C \nabla \mathcal{T}u_{2s'}] \cdot \nabla \mathcal{T}v \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} G(s')(D - \langle D \rangle) \nabla u_{2s'} \cdot \nabla \mathcal{T}v \, dy - \int_{\mathbb{R}^m} G(s')(D - \langle D \rangle) \nabla \mathcal{T}u_{2s'} \cdot \nabla v \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla u_{s'} \cdot \nabla \mathcal{T}v_{-s'} \, dy - \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla \mathcal{T}u_{s'} \cdot \nabla v_{-s'} \, dy \\ &= - \frac{d}{ds'} \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla u_{s'} \cdot \nabla v_{-s'} \, dy \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} & \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} \int_{\mathbb{R}^m} G(s') C \nabla u_{2s'} \cdot \nabla \mathcal{B}v - G(s') C \nabla \mathcal{B}u_{2s'} \cdot \nabla v \, dy \, ds' \\ &= \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) : [\nabla v \otimes \nabla u - \nabla v_{-s'} \otimes \nabla u_{s'}] \, dy = 0. \end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \int_{\mathbb{R}^m} G(s) C \nabla u_{2s} \cdot \nabla \mathcal{B}v - G(s) C \nabla \mathcal{B}u_{2s} \cdot \nabla v \, dy ds \\
&= -\frac{1}{S} \int_0^S (S-s) \frac{d}{ds} \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla u_s \cdot \nabla v_{-s} \, dy ds \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla u \cdot \nabla v \, dy - \frac{1}{S} \int_0^S \int_{\mathbb{R}^m} (D - \langle D \rangle) \nabla u_s \cdot \nabla v_{-s} \, dy ds \\
&\xrightarrow{S \rightarrow +\infty} \mathbf{a}(u, v) - \mathbf{m}(u, v).
\end{aligned}$$

Condition d'orthogonalité

Vérifions que  $\mathbf{n}(u, v) = 0$  pour tout  $u, v \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1, n \in \mathbb{N}$ . On note que pour tout  $u, v \in H_P^1$  on a

$$\begin{aligned}
G(s)[P(\nabla v \otimes \nabla u)P] &= \partial Y^{-1}(s; \cdot) P_s [(\nabla v)_s \otimes (\nabla u)_s] P_s {}^t \partial Y^{-1}(s; \cdot) \\
&= \underbrace{\partial Y^{-1}(s; \cdot) P_s {}^t \partial Y^{-1}(s; \cdot)}_{G(s)P=P} [(\nabla v)_s \otimes (\nabla u)_s] \underbrace{\partial Y(s; \cdot) P_s {}^t \partial Y^{-1}(s; \cdot)}_{{}^t G(s)P={}^t P=P} \\
&= P(\nabla v_s \otimes \nabla u_s)P.
\end{aligned} \tag{B.29}$$

En particulier, lorsque  $u, v \in E_0 \cap H_P^1$ , le champ de matrices  $P(\nabla v \otimes \nabla u)P$  est laissé invariant par  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  et donc, par le Lemme 4.5.1, on obtient, voir (B.21)

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(u, v) &= \int_{\mathbb{R}^m} C_0 \nabla u \cdot \nabla v \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} Q C_0 : P(\nabla v \otimes \nabla u)P Q \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} Q G(s) C_0 : P(\nabla v \otimes \nabla u)P Q \, dy = \int_{\mathbb{R}^m} G(s) C_0 \nabla u \cdot \nabla v \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{S} \int_0^S G(s) C_0 \nabla u \, ds \cdot \nabla v \, dy \xrightarrow{S \rightarrow +\infty} 0.
\end{aligned}$$

On considère maintenant que  $u, v \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1, n \in \mathbb{N}^*$ . On montre que le champ de matrices

$$P \left( \nabla v \otimes \nabla \frac{\mathcal{T}u}{\sqrt{\lambda_n}} - \nabla \frac{\mathcal{T}v}{\sqrt{\lambda_n}} \otimes \nabla u \right) P$$

est laissé invariant par  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$ . En effet, par la formule (B.29) on a

$$\begin{aligned}
G(s)P \left( \nabla v \otimes \nabla \frac{\mathcal{T}u}{\sqrt{\lambda_n}} - \nabla \frac{\mathcal{T}v}{\sqrt{\lambda_n}} \otimes \nabla u \right) P &= P \left( \nabla v_s \otimes \nabla \frac{\mathcal{T}u_s}{\sqrt{\lambda_n}} - \nabla \frac{\mathcal{T}v_s}{\sqrt{\lambda_n}} \otimes \nabla u_s \right) P \\
&= P \left[ \cos(\sqrt{\lambda_n} s) \nabla v + \sin(\sqrt{\lambda_n} s) \nabla \frac{\mathcal{T}v}{\sqrt{\lambda_n}} \right] \otimes \left[ \cos(\sqrt{\lambda_n} s) \nabla \frac{\mathcal{T}u}{\sqrt{\lambda_n}} - \sin(\sqrt{\lambda_n} s) \nabla u \right] P \\
&\quad - P \left[ \cos(\sqrt{\lambda_n} s) \nabla \frac{\mathcal{T}v}{\sqrt{\lambda_n}} - \sin(\sqrt{\lambda_n} s) \nabla v \right] \otimes \left[ \cos(\sqrt{\lambda_n} s) \nabla u + \sin(\sqrt{\lambda_n} s) \nabla \frac{\mathcal{T}u}{\sqrt{\lambda_n}} \right] P \\
&= P \left( \nabla v \otimes \nabla \frac{\mathcal{T}u}{\sqrt{\lambda_n}} - \nabla \frac{\mathcal{T}v}{\sqrt{\lambda_n}} \otimes \nabla u \right) P.
\end{aligned}$$

On déduit, grâce au Lemme 4.5.1, que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^m} C(y) : \left( \nabla v \otimes \nabla \frac{\mathcal{T}u}{\sqrt{\lambda_n}} - \nabla \frac{\mathcal{T}v}{\sqrt{\lambda_n}} \otimes \nabla u \right) \, dy \\
&= \lim_{S \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{S} \int_0^S G(s) C \, ds : \left( \nabla v \otimes \nabla \frac{\mathcal{T}u}{\sqrt{\lambda_n}} - \nabla \frac{\mathcal{T}v}{\sqrt{\lambda_n}} \otimes \nabla u \right) \, dy = 0.
\end{aligned}$$

Un autre champ laissé invariant par  $(G(s))_{s \in \mathbb{R}}$  est donné par  $P \left( \nabla v \otimes \nabla u + \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} v \otimes \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u \right) P$ .

Pour le voir, appliquer l'invariance précédente avec  $v, -\frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1$ . Nous sommes maintenant en mesure de montrer que  $\mathbf{n}(u, v) = 0, u, v \in E_{\lambda_n} \cap H_P^1, n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $s \in \mathbb{R}$  on obtient, grâce aux égalités  $u_{2s'} = u_{s'}(Y(s'; \cdot)), v = v_{-s'}(Y(s'; \cdot))$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} G(s') C \nabla u_{2s'} \cdot \nabla v \, dy &= \int_{\mathbb{R}^m} C(y) \nabla u_{s'} \cdot \nabla v_{-s'} \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} C \left[ \cos(\sqrt{\lambda_n s'}) \nabla u + \sin(\sqrt{\lambda_n s'}) \nabla \frac{\mathcal{T}u}{\sqrt{\lambda_n}} \right] \cdot \left[ \cos(\sqrt{\lambda_n s'}) \nabla v - \sin(\sqrt{\lambda_n s'}) \nabla \frac{\mathcal{T}v}{\sqrt{\lambda_n}} \right] \, dy \\ &= \cos^2(\sqrt{\lambda_n s'}) \int_{\mathbb{R}^m} C(y) : \nabla v \otimes \nabla u \, dy - \sin^2(\sqrt{\lambda_n s'}) \int_{\mathbb{R}^m} C(y) : \nabla \frac{\mathcal{T}v}{\sqrt{\lambda_n}} \otimes \nabla \frac{\mathcal{T}u}{\sqrt{\lambda_n}} \, dy \\ &\quad + \sin(\sqrt{\lambda_n s'}) \cos(\sqrt{\lambda_n s'}) \int_{\mathbb{R}^m} C(y) : \left( \nabla v \otimes \nabla \frac{\mathcal{T}u}{\sqrt{\lambda_n}} - \nabla \frac{\mathcal{T}v}{\sqrt{\lambda_n}} \otimes \nabla u \right) \, dy \\ &= \cos^2(\sqrt{\lambda_n s'}) \int_{\mathbb{R}^m} C(y) : \nabla v \otimes \nabla u \, dy - \sin^2(\sqrt{\lambda_n s'}) \int_{\mathbb{R}^m} C(y) : \nabla \frac{\mathcal{T}v}{\sqrt{\lambda_n}} \otimes \nabla \frac{\mathcal{T}u}{\sqrt{\lambda_n}} \, dy. \end{aligned}$$

En moyennant sur  $[0, S']$  et en passant à la limite  $S' \rightarrow +\infty$ , on est amené à

$$\int_{\mathbb{R}^m} \lim_{S' \rightarrow +\infty} \frac{1}{S'} \int_0^{S'} G(s') C \nabla u_{2s'} \, ds' \cdot \nabla v \, dy = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^m} C : \left( \nabla v \otimes \nabla u - \nabla \frac{\mathcal{T}v}{\sqrt{\lambda_n}} \otimes \nabla \frac{\mathcal{T}u}{\sqrt{\lambda_n}} \right) \, dy$$

et enfin, grâce à (B.24), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(u, v) &= \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \int_0^S (S - s) \left\{ \left[ \cos^2(\sqrt{\lambda_n s}) - \frac{1}{2} \right] \int_{\mathbb{R}^m} C : \nabla v \otimes \nabla u \, dy \right. \\ &\quad \left. - \left[ \sin^2(\sqrt{\lambda_n s}) - \frac{1}{2} \right] \int_{\mathbb{R}^m} C : \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} v \otimes \nabla \frac{\mathcal{T}}{\sqrt{\lambda_n}} u \, dy \right\} \, ds = 0. \end{aligned}$$

□

# Bibliographie

- [1] A. Abdulle. Multiple scales methods for advection-diffusion problems. *DCDS Supplement Volume*, pages 11–21, 2005.
- [2] L. Agelas and R. Masson. Convergence of the finite volume mpfa o scheme for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 346 :1007–1012, 2008.
- [3] G. Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23 :1482–1518, 1992.
- [4] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 1989.
- [5] V. I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2<sup>nd</sup> edition edition, 2006.
- [6] D. Balsana, D. Tilley, and C. Howk. Simulating anisotropic thermal conduction in supernova remnants i : Numerical methods. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 386 :627–641, 2008.
- [7] D. Balsana, D. Tilley, and C. Howk. Simulating anisotropic thermal conduction in supernova remnants-i., numerical methods. *Monthly notices of royal astronomical society*, 386 :627–641, 2008.
- [8] C. Bardos, F. Golse, and D. Levermore. Fluid dynamic limits of kinetic equations. i. formal derivations. *J. Stat. Phys.*, 63 :323–344, 1991.
- [9] C. Bardos, F. Golse, and D. Levermore. Fluid dynamic limits of kinetic equations. ii. convergence proofs for the boltzmann equations. *Comm. on Pure and Appl. Math*, XLVI :667–753, 1993.
- [10] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.
- [11] H. Berestycki, F. Hamel, and N. Nadirashvili. Elliptic eigenvalue problems with large drift and applications to non linear propagation phenomena. *Comm. Math. Phys.*, 253 :451–480, 2005.
- [12] T. Blanc. Numerical methods for computing an averaged matrix field. application to the asymptotic analysis of a parabolic problem with stiff transport terms. *Soumis*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01599005>, 2017.
- [13] T. Blanc and M. Bostan. Multi-scale analysis for highly anisotropic parabolic problems. *En préparation*.
- [14] T. Blanc, M. Bostan, and F. Boyer. Asymptotic analysis of parabolic equations with stiff transport terms by a multi-scale approach. *DCDS-A*, 37(9) :4637 – 4676, 2017.
- [15] M. Bostan. The vlasov-poisson system with strong external magnetic field. finite larmor radius regime. *Asymptot. Anal.*, 61 :91–123, 2009.

- [16] M. Bostan. Transport equations with disparate advection fields. application to the gyrokinetic models in plasma physics. *J. Differential Equations*, 249 :1620–1663, 2010.
- [17] M. Bostan. Transport of charged particles under fast oscillating magnetic fields. *SIAM J. Math. Anal.*, 44 :1415–1447, 2012.
- [18] M. Bostan. Multi-scale analysis for linear first order pdes. the finite larmor radius regime. *SIAM J. Math. Anal.*, 48 :2133–2188, 2016.
- [19] M. Bostan. Strongly anisotropic diffusion problems ; asymptotic analysis. *J. Differential Equations*, 256 :1043–1092, 2016.
- [20] M. Bostan and C. Caldini-Queiros. Finite larmor radius approximation for collisional magnetic confinement. part i : the linear boltzmann equation. *Quart. Appl. Math.*, LXXII :323–345, 2014.
- [21] M. Bostan and C. Caldini-Queiros. Finite larmor radius approximation for collisional magnetic confinement. part ii : the fokker-planck-landau equation. *Quart. Appl. Math.*, LXXII :513–548, 2014.
- [22] M. Bostan and A. Finot. The effective vlasov-poisson system for the finite larmor radius regime. *J. Multiscale Modeling and Simulation*, 14 :1238–1275, 2016.
- [23] S. Braginskii. *Transport processes in a plasma*. M.A. Leontovich Reviews of Plasma Physics, Consultants Bureau, New York, 1965.
- [24] H. Brézis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland / American Elsevier, 1973.
- [25] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [26] A. Brizard. Variational principle for non linear gyrokinetic vlasov-maxwell equations. *Phys. Plasmas*, 7 :4816–4822, 2000.
- [27] A. Brizard. A guiding-center fokker-planck collision operator for nonuniform magnetic fields. *Phys. Plasmas*, 11 :4429–4438, 2004.
- [28] A. Brizard and T. Hahm. Foundations of nonlinear gyrokinetic theory. *Rev. Modern Phys.*, 79 :421–468, 2007.
- [29] P. Chartier, N. Crouseilles, M. Lemou, and F. Méhats. Uniformly accurate numerical schemes for highly oscillatory klein-gordon and nonlinear schrödinger equations. *Numer. Math.*, 128 :211–250, 2015.
- [30] W. Choe, C. Chang, and M. Ono. Temperature anisotropy in a cyclotron resonance heated tokamak plasma and the generation of poloidal electric field. *Phys. Plasmas* 2, page 2044, 1995.
- [31] C. Corduneanu. *Almost Periodic Oscillations and Waves*. Springer, 2009.
- [32] N. Crouseilles, M. Kuhn, and G. Latu. Comparison of numerical solvers for anisotropic diffusion equations arising in plasma physics. *J. Sc. Comput.*, 65 :1091–1128, 2015.
- [33] N. Crouseilles, M. Lemou, and F. Méhats. Asymptotic preserving schemes for highly oscillatory kinetic equations. *J. Comput. Phys.*, 248 :287–308, 2013.
- [34] N. Crouseilles, M. Lemou, and G. Vilmart. Asymptotic preserving numerical scheme for multiscale parabolic problem. *J. Comput. Phys.*, 248 :287–308, 2013.
- [35] G. Dahlquist and A. Björck. *Numerical Methods in Scientific Computing*, volume 1. SIAM, 2008.

- [36] A.-L. Dalibard. Homogenization of linear transport equations in a stationary ergodic setting. *Comm. Partial Differential Equations*, 33 :881–921, 2008.
- [37] R. Dautray and J.-L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*, volume 5 : Evolution problems 1. Springer, 2000.
- [38] P. Degond, F. Deluzet, and C. Negulescu. An asymptotic preserving scheme for strongly anisotropic elliptic problems. *Multiscale Model. Simul.*, 8 :645–666, 2009.
- [39] P. Degond, A. Lozinski, J. Narski, and C. Negulescu. An asymptotic-preserving method for highly anisotropic elliptic equations based on a micro-macro decomposition. *J. Comput. Phys.*, 231 :2724–2740, 2012.
- [40] Z. Dian-Lin, C. Shao-Chun, W. Yun-Ping, L. Li, X. M. W. Wue-Mei, and K. Kuo. Anisotropic thermal conductivity of the 2d single quasicrystals :  $\text{Al}_{65}\text{Ni}_{20}\text{Co}_{15}$  and  $\text{Al}_{62}\text{Si}_3\text{Cu}_{20}\text{Co}_{15}$ . *Physical Review Letters*, 66 :2778–2781, 1991.
- [41] D. R. Durran. *Numerical Methods for Fluid Dynamics, with Applications to Geophysics*. Springer, 2010.
- [42] D. R. Durran. *Numerical Methods for Fluid Dynamics, with Applications to Geophysics*, volume 32 of *Text in Applied Mathematics*. Springer, 2010.
- [43] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. Discretization of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general nonconforming meshes sushi : a scheme using stabilization and hybrid interfaces. *IMA J. Numer. Anal.*, 30 :1009–1043, 2010.
- [44] A. Fannjiang, A. Kiselev, and L. Ryzhik. Quenching of reaction by cellular flows. *Geom. Funct. Anal.*, 16 :40–69, 2006.
- [45] A. Fannjiang and G. Papanicolaou. Convection enhanced diffusion for periodic flows. *SIAM J. Appl. Math.*, 54 :333–408, 1994.
- [46] F. Filbet, C. Negulescu, and C. Yang. Numerical study of a nonlinear heat equation for plasma physics. *Int. J. Comput. Math.*, 89 :1060–1082, 2012.
- [47] E. Frénod and A. Mouton. Two-dimensional finite larmor radius approximation in canonical gyrokinetic coordinates. *Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4 :135–166, 2010.
- [48] E. Frénod and E. Sonnendrücker. Homogenization of the vlasov equation and of the vlasov-poisson system with strong external magnetic field. *Asymptotic Anal.*, 18 :193–213, 1998.
- [49] E. Frénod and E. Sonnendrücker. Long time behavior of the vlasov equation with strong external magnetic field. *Math. Mod. Meth. Appl. Sciences*, 10 :539–553, 2000.
- [50] E. Frénod and E. Sonnendrücker. The finite larmor radius approximation. *SIAM J. Math. Anal.*, 32 :1227–1247, 2001.
- [51] X. Garbet, G. Dif-Pradalier, C. Nguyen, Y. Sarazin, V. Grandgirard, and P. Ghendrih. Neoclassical equilibrium in gyrokinetic simulations. *Phys. Plasmas*, 16, 2009.
- [52] A. Gasull, A. Guillamon, V. Manosa, and F. Manosas. The period function for hamiltonian systems with homogeneous nonlinearities. *J. Diff. Equ.*, 139 :237–260, 1997.
- [53] P. Ghendrih, M. Hauray, and A. Nouri. Derivation of a gyrokinetic model. existence and uniqueness of a specific stationary solution. *Kinet. Relat. Models 2*, pages 707–725, 2009.
- [54] F. Golse and L. Saint-Raymond. The vlasov-poisson system with strong magnetic field. *J. Math. Pures Appl.*, 78 :791–817, 1999.

- [55] D. Han-Kwan. The three-dimensional finite larmor radius approximation. *Asymptot. Anal.*, 66 :9–33, 2010.
- [56] D. Han-Kwan. Effect of the polarization drift in a strongly magnetized plasma. *ESAIM : Math. Model. Numer. Anal.*, 46 :1929–1947, 2012.
- [57] H. Holden, K. Karlsen, K.-A. Lie, and N. Risebro. *Splitting Methods for Partial Differential Equations with Rough Solutions*. Series of Lectures in Mathematics. EMS, 2010.
- [58] T. Holding, H. Hutridurga, and J. Rauch. Convergence along mean flows. *SIAM J. Math. Anal.*, 159 :285–297, 2017.
- [59] G. Iyer, T. Komorowski, A. Novikow, and L. Ryzhik. From homogenization to averaging in cellular flows. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 31 :957–983, 2014.
- [60] G. NGuetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20 :608–623, 1989.
- [61] A. Novikov, G. Papanicolaou, and L. Ryzhik. Boundary layers for cellular flows at high péclet numbers. *Comm. Pure Appl. Math.*, 58 :867–922, 2005.
- [62] G. Pavliotis and A. Stuart. *Multiscale methods : averaging and homogenization*, volume 53 of *Texts in applied mathematics*. Springer, 2008.
- [63] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, 1983.
- [64] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 12 :629–639, 1990.
- [65] J. Quah and D. Margetis. Anisotropic diffusion in continuum relaxation of stepped crystal surfaces. *J. Phys. A*, 41(23), 2008.
- [66] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume 1, Functional Analysis. Academic Press, 1980.
- [67] P. Sharma and G. Hammett. Preserving monotonicity in anisotropic diffusion. *J. Comput. Phys.*, 227 :123–142, 2007.
- [68] P. Sharma and G. Hammett. A fast semi-implicit method for anisotropic diffusion. *J. Comput. Phys.*, 230 :4899–4909, 2011.
- [69] B. van Es, B. Koren, and H. J. de Blank. Finite-difference schemes for anisotropic diffusion. *J. Comput. Phys.*, 272 :526–549, 2014.
- [70] J. Weickert. *Anisotropic diffusion in image processing*. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [71] X. Xu and M. Rosenbluth. Numerical simulation of ion-temperature-gradient-driven modes. *Phys. Fluids B*, 3 :627–643, 1991.

# Étude mathématique des problèmes paraboliques fortement anisotropes

**Résumé :** Ce manuscrit de thèse traite de l'analyse asymptotique de problèmes paraboliques possédant des termes raides. Dans un premier temps, on fait l'analyse asymptotique d'un système parabolique possédant des termes de transport raide. Une analyse à deux échelles, basée sur des résultats de théorie ergodique, nous permet de dériver un système limite effectif. Ce système effectif se trouve être, de nouveau, un système parabolique dont le champ de diffusion peut être explicité par une moyenne du champ de diffusion initial le long d'un groupe d'opérateurs unitaires. L'introduction d'un correcteur nous permet d'obtenir un résultat de convergence forte, avec un ordre de convergence, pour des données initiales non nécessairement bien préparées. On propose dans un second temps une méthode numérique permettant de calculer le champ de diffusion effectif. Celle-ci est basée sur la combinaison d'un schéma Runge-Kutta et d'un schéma de type semi-Lagrangien. L'ordre de convergence obtenu théoriquement est mis en évidence de manière numérique. On propose une méthode numérique basée sur un splitting d'opérateur pour la résolution du système parabolique avec termes de transport raide. Enfin, on effectue l'analyse asymptotique d'un système parabolique fortement anisotrope. Sous de bonnes hypothèses de régularité, un système variationnel effectif est proposé et l'introduction d'un correcteur adapté permet d'obtenir un résultat de convergence forte avec un ordre de convergence. Les arguments utilisés relèvent une nouvelle fois de l'analyse à deux échelles et de la théorie ergodique.

**Mots-clés :** Analyse asymptotique, analyse multi-échelle, homogénéisation, théorie ergodique, opérateurs de moyenne, schémas semi-Lagrangien.

---

**Abstract :** This manuscript is devoted to the asymptotic analysis of parabolic equations with stiff terms. First, we perform the asymptotic analysis of a parabolic equation with stiff transport terms. An effective limit model is obtained by a two-scale analysis based on ergodic theory results. This effective system is again a parabolic system whose diffusion field is an average of the initial diffusion field along a group of unitary operators. The introduction of a corrector allows us to obtain a strong convergence result, with an order of convergence, for initial data not necessarily well prepared. We propose a numerical method to compute the effective diffusion field. This method is based on a Runge-Kutta scheme and a semi-Lagrangian scheme. The theoretically order of convergence is obtained numerically. We propose a numerical method based on operator splitting for the resolution of the parabolic system with stiff transport terms. Finally, we perform the asymptotic analysis of a strongly anisotropic parabolic problem. Under suitable smoothness hypotheses, an effective variational system is proposed. By using a suitable corrector, we obtain a strong convergence result and we are able to perform the error analysis. The arguments relate again to the two-scale analysis and the ergodic theory.

**Keywords :** Asymptotic analysis, multi-scale analysis, homogenization, ergodic theory, average operators, semi-Lagrangian schemes.