



HAL
open science

Contribution à l'étude de la diffraction d'ondes élastiques de surface par des obstacles topographiques en milieu isotrope

Jean-Pierre Damiano

► **To cite this version:**

Jean-Pierre Damiano. Contribution à l'étude de la diffraction d'ondes élastiques de surface par des obstacles topographiques en milieu isotrope. Electronique. Université Nice Sophia Antipolis [UNS], 1979. Français. NNT: . tel-01652888

HAL Id: tel-01652888

<https://hal.science/tel-01652888>

Submitted on 30 Nov 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à la

FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE NICE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ EN ÉLECTRONIQUE

par

Jean-Pierre DAMIANO

“Contribution à l'étude de la diffraction d'ondes
élastiques de surface par des obstacles
topographiques en milieu isotrope”

Soutenue le 19 Juin 1979 devant la Commission d'examen :

MM. J. POUGET *Président*

G. ALENGRIN
R. TORGUET
J.M. MOULY
E. RIVIER
E. CAMBIAGGIO

} *Examineurs*

A mes parents

R E M E R C I E M E N T S

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Electronique de la Faculté des Sciences et des Techniques de l'Université de NICE.

Je tiens à remercier Monsieur J. POUGET, Professeur à l'Université de NICE, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury.

Je remercie également :

-Monsieur G. ALENGRIN, Maître de Conférences à l'Université de NICE, qui a accepté de faire partie du Jury;

-Monsieur R. TORGUET, Maître de Conférences à l'Université de VALENCIENNES, qui a bien voulu s'intéresser à mes recherches;

-Monsieur J.M. MOULY, Directeur du Service d'Enseignements des Techniques Avancées de la Recherche au C.N.R.S., pour l'attention qu'il a accordée à mon travail;

-Monsieur E. RIVIER, Maître-assistant à l'Université de NICE, qui m'a accueilli au Laboratoire d'Electronique et qui a permis l'exécution de ce travail ainsi que la mise en forme de ce mémoire;

-Monsieur E. CAMBIAGGIO, Maître-assistant à l'Université de NICE, qui a veillé à la bonne évolution de mes recherches en m'aidant de ses conseils.

Je remercie enfin tous les membres du Laboratoire d'Electronique qui m'ont aidé à divers titres, entre autres Monsieur J.L. LESONN, Technicien.

S O M M A I R E

INTRODUCTION	1
<u>CHAPITRE I : PRESENTATION DU PROBLEME</u>	
I-1 , GÉNÉRALITÉS	3
I-2 , DISCONTINUITÉS SIMPLES	6
I-3 , RÉSEAUX DE RAINURES	6
I-4 , EQUATIONS DU PROBLÈME	
1°. EQUATION FONDAMENTALE	8
2°. CONDITIONS AUX LIMITES	9
<u>CHAPITRE II : METHODE AUX DIFFERENCES FINIES</u>	
II-1 , CHOIX DE LA MÉTHODE	11
II-2 , RAPPELS SUR LA MÉTHODE	
1°. PRINCIPE	12
2°. CAS D'UN MAILLAGE RECTANGULAIRE	
DISSYMETRIQUE	13
3°. CAS D'UN MAILLAGE REGULIER	13
4°. DISCRETISATION DU TEMPS	14

II-3	, APPLICATION AUX ÉQUATIONS À RÉSOUDRE	
1°	. A L'INTERIEUR DU SOLIDE	14
2°	. CONDITIONS AUX LIMITES	
	A) Cas des surfaces planes	17
	B) Cas des points d'angle particuliers	19
II-4	, MISE EN OEUVRE DE LA MÉTHODE NUMÉRIQUE	
1°	. MISE EN PLACE DU PROCESSUS ITERATIF ...	21
2°	. CONDITIONS DE STABILITE DU PROCESSUS ..	24
II-5	, MISE EN PLACE DE L'ALGORITHME DE CALCUL	
1°	. GENERALITES	26
2°	. PRESENTATION DES PROGRAMMES	26
II-6	, EXPLOITATION DES RÉSULTATS	
1°	. INTRODUCTION	28
2°	. DETERMINATION DU FACTEUR DE REFLEXION .	31
3°	. DETERMINATION DU FACTEUR DE TRANSMISSION	33
4°	. DETERMINATION DU FACTEUR DE CONVERSION	
	EN VOLUME	33

CHAPITRE III : RESULTATS

III-1	, GÉNÉRALITÉS	34
III-2	, DIFFRACTION D'UNE ONDE ÉLASTIQUE DE SURFACE PAR DES ARÊTES SIMPLES À 90° ET 270°	
1°	. PREVISIONS SUR LE COMPORTEMENT DE L'ONDE DE SURFACE	35
2°	. RESULTATS	35
3°	. COMPARAISONS AVEC LES PREVISIONS ET AVEC DIVERS AUTEURS	36

III-3 . DIFFRACTION D'UNE ONDE ÉLASTIQUE DE SURFACE PAR DES MARCHES DESCENDANTES ET MONTANTES	
1°. PREVISIONS SUR LE COMPORTEMENT DE L'ONDE DE SURFACE	37
2°. RESULTATS	37
3°. COMPARAISONS AVEC LES PREVISIONS ET AVEC DIVERS AUTEURS	38

III-4 . DIFFRACTION D'UNE ONDE ÉLASTIQUE DE SURFACE PAR DES RAINURES	
1°. PREVISIONS SUR LE COMPORTEMENT DE L'ONDE DE SURFACE	40
2°. INFLUENCE DE LA GEOMETRIE	
A) Résultats	40
B) Remarques	41
3°. RAINURES DE LARGEUR $w/\lambda = 0.25$	
A) Résultats	41
B) Comparaisons avec des auteurs	41
4°. INFLUENCE DU COEFFICIENT DE POISSON	
A) Résultats	42
B) Commentaires	43
5°. AUTRES RESULTATS : CAS DES RAINURES CARREES	43

CHAPITRE IV : RESEAUX DE RAINURES

IV-1 . INTRODUCTION	69
IV-2 . RÉSULTATS	
1°. A L'AIDE DU MAILLAGE VARIABLE PAR DOMAINES	74
2°. A L'AIDE DE LA METHODE DE LA MATRICE DE REPARTITION	74

ANNEXES :

ANNEXE 1 : APPROXIMATION AUX DIFFERENCES FINIES
DES EQUATIONS DE BASE DANS LE CAS
D'UN MAILLAGE RECTANGULAIRE
DISSYMETRIQUE 77

ANNEXE 2 : APPROXIMATION AUX DIFFERENCES FINIES
DES EQUATIONS DE BASE DANS LE CAS
D'UN MAILLAGE REGULIER 86

ANNEXE 3 : EXPRESSIONS ANALYTIQUES DU DEPLACEMENT 90

ANNEXE 4 : DETERMINATION DE L'EQUIVALENT ISOTROPE
DU NIOBATE DE LITHIUM (Y - Z) 94

ANNEXE 5 : UTILISATION D'UN MAILLAGE VARIABLE
PAR DOMAINES 96

ANNEXE 6 : ENCHAINEMENT DE RAINURES : METHODE
DE LA MATRICE (S) 98

ANNEXE 7 : PROGRAMMES DE CALCUL 104

I N T R O D U C T I O N

Les micro-ondes dites "élastiques" ou "acoustiques" ont fait leur percée dans tous les secteurs avancés de l'électronique. Pour ne citer qu'un exemple, les télécommunications et le traitement de l'information ont bénéficié des progrès de l'industrie des composants à ondes élastiques de surface, capables de réaliser un grand nombre de fonctions telles que le filtrage, le retard, la compression d'impulsions, etc...

Les avantages des composants à ondes élastiques de surface sont essentiellement :

- une faible vitesse de propagation des ondes élastiques, qui permet la réalisation de composants de faibles dimensions,
- un signal accessible durant la totalité de son trajet sous forme d'ondes élastiques de surface,
- la facilité de réalisation des transducteurs émetteurs et récepteurs interdigitaux grâce aux technologies planaires.
- Le faible coût du produit obtenu, qui autorise la production de masse ; en outre, la fiabilité de ces composants est satisfaisante d'où leur utilisation dans la technique spatiale.

34,38,52

Parmi les composants les plus récents, on peut citer les résonateurs à fort coefficient de surtension, dont une application immédiate est la réalisation d'oscillateurs stables et de faible coût. Ces résonateurs fonctionnent sur le principe d'une cavité de PEROT-FABRY, et la réflexion des ondes élastiques de surface se fait généralement sur des réseaux de discontinuités disposées sur la surface.⁶⁸ Les réseaux réflecteurs les plus couramment utilisés, actuellement, sont des réseaux de rainures parallèles obtenues par usinage ionique.

Cependant, il faut noter que le mécanisme d'interaction entre l'onde élastique de surface et les diverses discontinuités qu'elle peut rencontrer lors de sa propagation, est relativement mal connu.

Pour réaliser un résonateur, on doit être capable de définir la géométrie optimale des réseaux réflecteurs, donnant la plus forte réflexion à la fréquence désirée, les plus faibles pertes en ondes volumiques et la meilleure stabilité. Ce dernier point signifie qu'une légère modification des paramètres du composant ne doit pas entraîner une modification trop importante des caractéristiques de ce corps. (Problème de reproductibilité ou de vieillissement par exemple).

C H A P I T R E 1

PRESENTATION DU PROBLEME

I-1 GÉNÉRALITÉS :

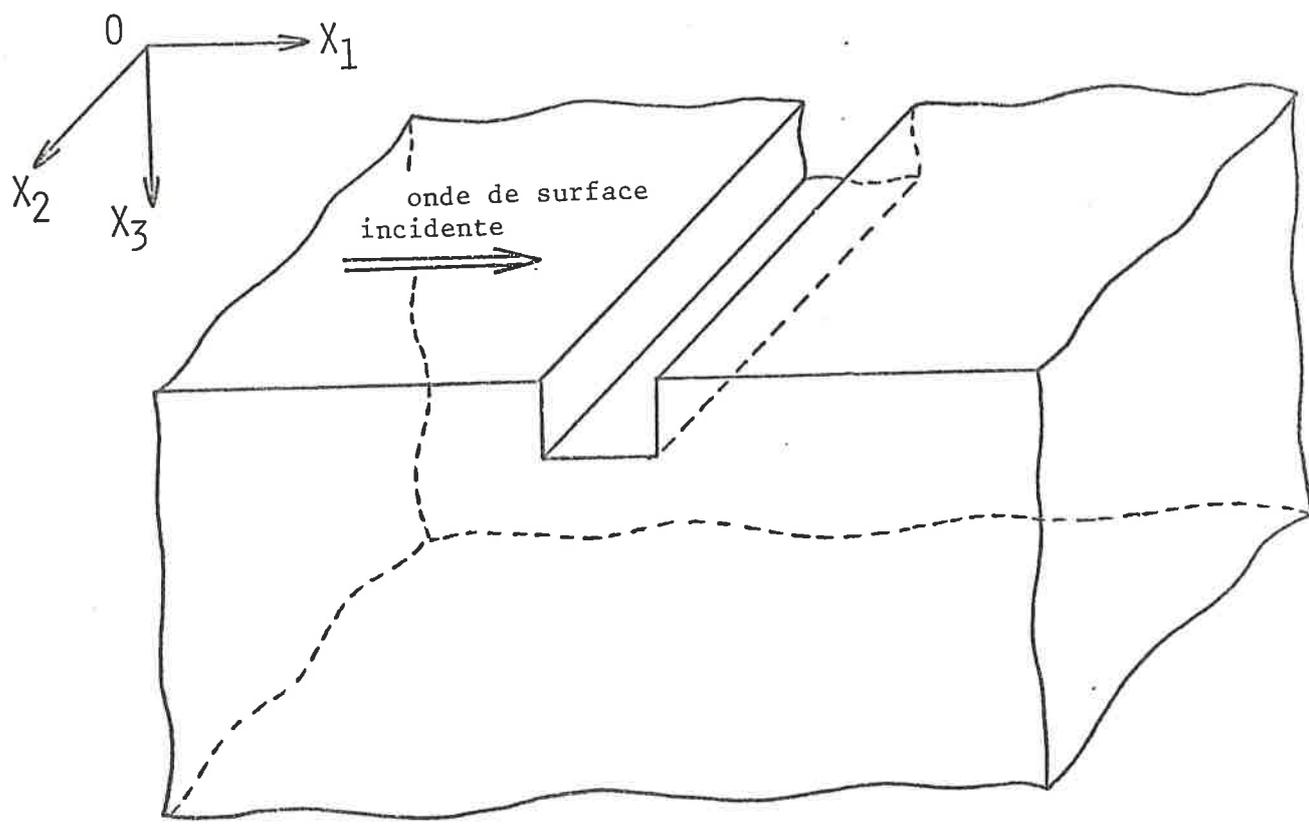
Nous nous sommes proposés d'étudier le comportement d'une onde élastique de surface arrivant sur une ou plusieurs rainures parallèles disposées perpendiculairement au vecteur d'onde, sur substrat isotrope.

Rappelons les principales propriétés d'une onde élastique de surface ou onde de RAYLEIGH.

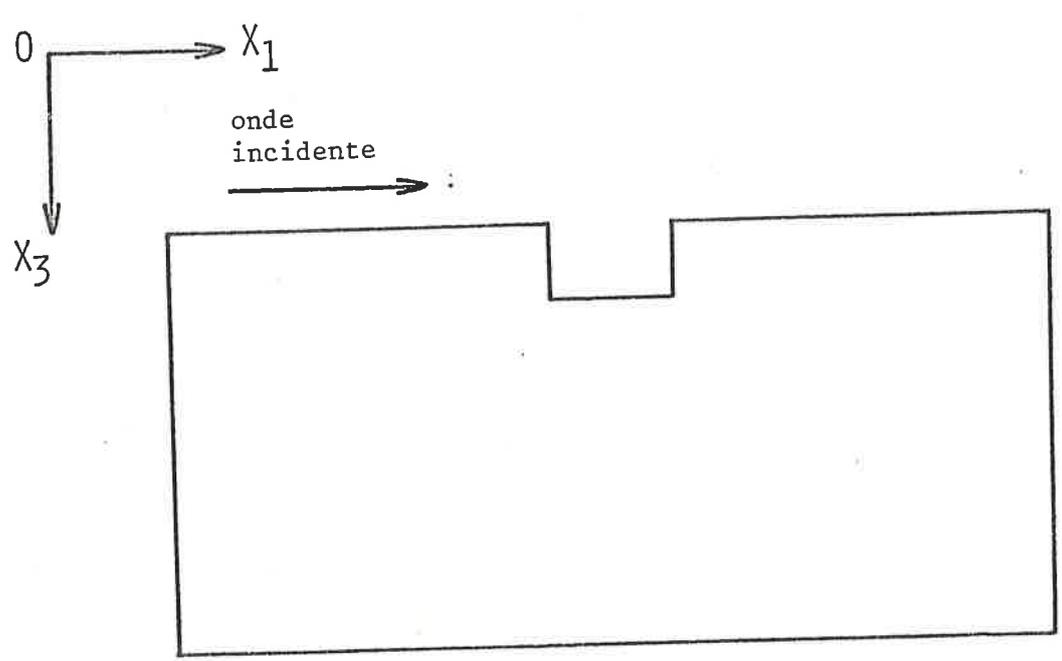
Il s'agit d'une part d'une onde de surface, c'est-à-dire un mode de vibration qui se propage parallèlement à la surface, et dont l'amplitude de vibration décroît rapidement lorsqu'on s'éloigne de la surface.

Il s'agit d'autre part d'une onde élastique, caractérisée par des déplacements locaux de la matière et une vitesse de propagation très faible par rapport à celle des ondes électro-magnétiques (10^3 à 10^4 m/s)

Dans le cas où le substrat est isotrope, la vibration s'effectue dans le plan sagittal, défini par le vecteur d'onde et la normale à la surface. On peut, afin de simplifier le problème, considérer en outre que l'onde de RAYLEIGH est invariante selon la direction transverse ("Straight-Crested Waves"), et, de ce fait, on se ramène à un problème plan, donc à deux variables d'espace x_1 et x_3 et à deux composantes de déplacement.



RAINURE SIMPLE

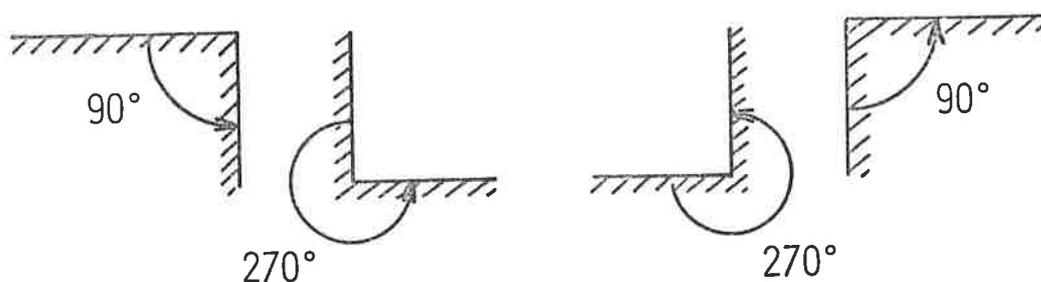


COUPE LONGITUDINALE DE LA RAINURE

FIGURE I-1.

Dans ces conditions, il sera nécessaire de considérer les rainures de longueur infinie, afin de respecter l'invariance selon la direction transverse $O X_2$. Il sera alors plus simple de représenter la coupe longitudinale de l'obstacle (Figure I-1).

On voit sur l'exemple présenté que cette rainure peut être assimilée à une succession d'obstacles qui sont les suivants :



ARETES SIMPLES A 90° ET A 270°

ou encore ceux-ci :



MARCHES DESCENDANTE ET MONTANTE

Nous commencerons, donc, par l'étude des cas les plus simples. Ceci nous a conduits à découper notre travail en plusieurs étapes.

I-2 DISCONTINUITÉS SIMPLES :

Pour étudier le comportement d'une onde élastique de surface sur les discontinuités simples représentées ci-dessus, nous avons choisi une méthode numérique basée sur l'utilisation des différences finies⁵⁷ et déjà employée au Laboratoire d'Electronique^{9,11,14} de l'Université de Nice. Nous disposions donc d'une méthode dont on connaissait les possibilités.

Nous l'avons ainsi appliquée pour des obstacles tels que les arêtes à 90° et à 270°, les marches descendantes et montantes, les rainures. Dans le cas où les obstacles étaient de trop faibles dimensions devant la longueur d'onde λ , il a été nécessaire d'introduire un maillage à incrément variable. L'utilisation d'une telle discrétisation a exigé une étude approfondie, tenant compte des problèmes de stabilité, de précision et de réflexions parasites.

I-3 RÉSEAUX DE RAINURES :

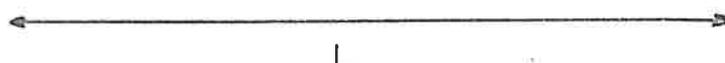
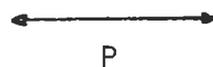
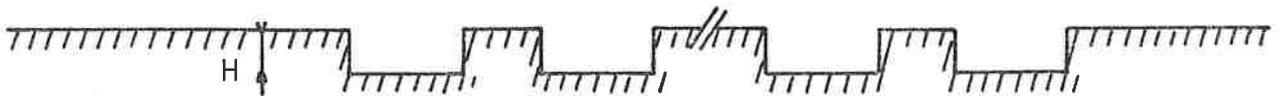
Pour résoudre le problème de la diffraction d'une onde élastique de surface par des réseaux de rainures parallèles (Figure I-2), nous avons utilisé deux méthodes^{36,37} dont voici un premier aperçu :

- une méthode basée sur les différences finies, utilisant un maillage découpé en trois zones (Figure I-3), pour lesquelles le pas du maillage est différent. Cette méthode est développée au Chapitre IV.

Une méthode d'enchaînement basée sur la théorie des matrices de répartition. Chaque rainure est caractérisée par les coefficients de réflexion R et de transmission T.

Cette méthode est aussi développée au Chapitre IV.

onde incidente



H = Profondeur de la rainure
W = Largeur de la rainure
S = Espace de glissement

P = Périodicité du réseau
L = Longueur du réseau

FIGURE I-2 RESEAU DE RAINURES

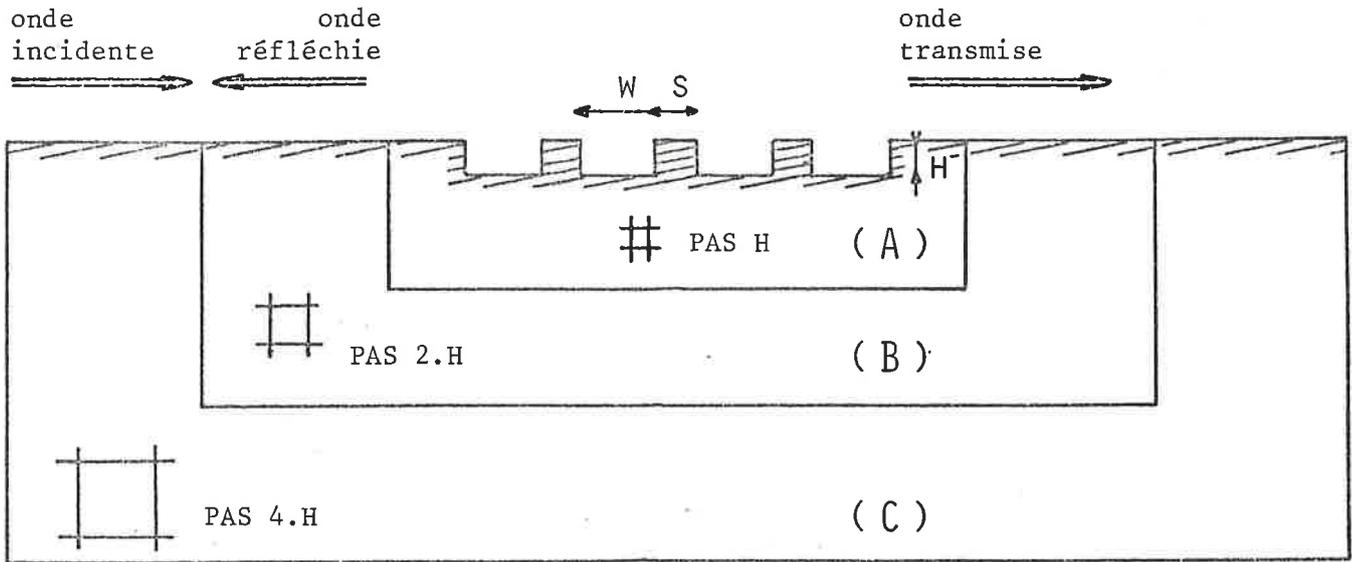


FIGURE I-3 MAILLAGE VARIABLE PAR DOMAINES

I-4 EQUATIONS DU PROBLÈME :

Dans le cas de la propagation d'une onde élastique de surface sur des surfaces planes infinies, l'expression analytique du vecteur déplacement mécanique \vec{U} est connue ; mais, dans le cas où la surface de propagation présente des discontinuités, on ne connaît que des solutions approchées.

Pour le problème que nous nous sommes proposés de résoudre, nous avons supposé que les composantes de déplacement étaient indépendantes de la direction transverse OX_2 ("Straight-Crested Waves"). De plus, nous nous sommes limités, pour l'instant, à ne considérer qu'un mode de Rayleigh pour lequel la composante transverse du déplacement mécanique, U_2 , est nulle. D'après ces deux hypothèses, \vec{U} s'écrit : $\vec{U} (U_1, 0, U_3)$ et toute dérivée par rapport à OX_2 : $\frac{\partial}{\partial x_2}$ est égale à zéro.

1°) EQUATION FONDAMENTALE :

Dans le cas d'un matériau isotrope, l'équation fondamentale de la dynamique appliquée au vecteur déplacement \vec{U} , s'écrit ²³ :

$$(1.1) \quad \rho \cdot \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = \mu \cdot \Delta \vec{U} + (\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div} \vec{U})$$

avec $\vec{U} = \vec{U} (U_1, 0, U_3)$ et $\frac{\partial}{\partial x_2} = 0$

ρ est la masse volumique du matériau considéré ; λ et μ sont les constantes de Lamé correspondantes. Ces constantes sont liées aux vitesses de cisaillement V_t , et de compression V_l par les relations :

$$V_t^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{et} \quad V_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

ou $\mu = \rho V_t^2$ et $\lambda = \rho (V_l^2 - 2V_t^2)$

Cette équation (1.1) va se décomposer en deux équations, l'une relative à U_1 et l'autre à U_3 :

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = V_l^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + V_t^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = V_l^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + V_t^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = v_\ell^2 \cdot \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i^2} + v_t^2 \cdot \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + (v_\ell^2 - v_t^2) \cdot \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \cdot \partial x_j}$$

où $i = 1 ; j = 3$ et $i = 3 ; j = 1$

2°) EQUATIONS DES CONDITIONS AUX LIMITES :

Les conditions aux limites exprimant la nullité des contraintes sur une surface plane, sont :

$$T_{3j} = 0 \quad \text{Pour une surface horizontale}$$

$$T_{1j} = 0 \quad \text{Pour une surface verticale, avec } j \in \{1,2,3\}$$

Le tenseur des contraintes T_{ij} , est lié au tenseur des déformations, S_{kl} , et par conséquent aux déplacements \vec{U} , par l'intermédiaire des modules de rigidité C_{ijkl} .

En effet, nous avons les relations suivantes :

$$(1.5) \quad T_{ij} = \sum_{k,\ell} C_{ijkl} \cdot S_{kl} \quad (k,\ell) \in \{1,2,3\}$$

avec :

$$(1.6) \quad S_{kl} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial U_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial U_\ell}{\partial x_k} \right]$$

Dans notre cas, la nullité des contraintes sur la surface considérée nous permet d'obtenir les systèmes suivants :

$$(1.7) \quad \begin{cases} \text{- Pour une surface horizontale :} \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} = 0 \\ \lambda \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

- Pour une surface verticale :

$$(1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0 \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right.$$

Dans le cas des points d'angle PA1, PA2, PA3 et PA4, (Figure I-4), l'étude du déplacement \vec{U} nous conduit à la résolution des deux systèmes (1.7) et (1.8), ce qui entraîne une indétermination des solutions. Pour laver cette indétermination, il a fallu faire des hypothèses qui seront exposées en détail dans le Chapitre II.

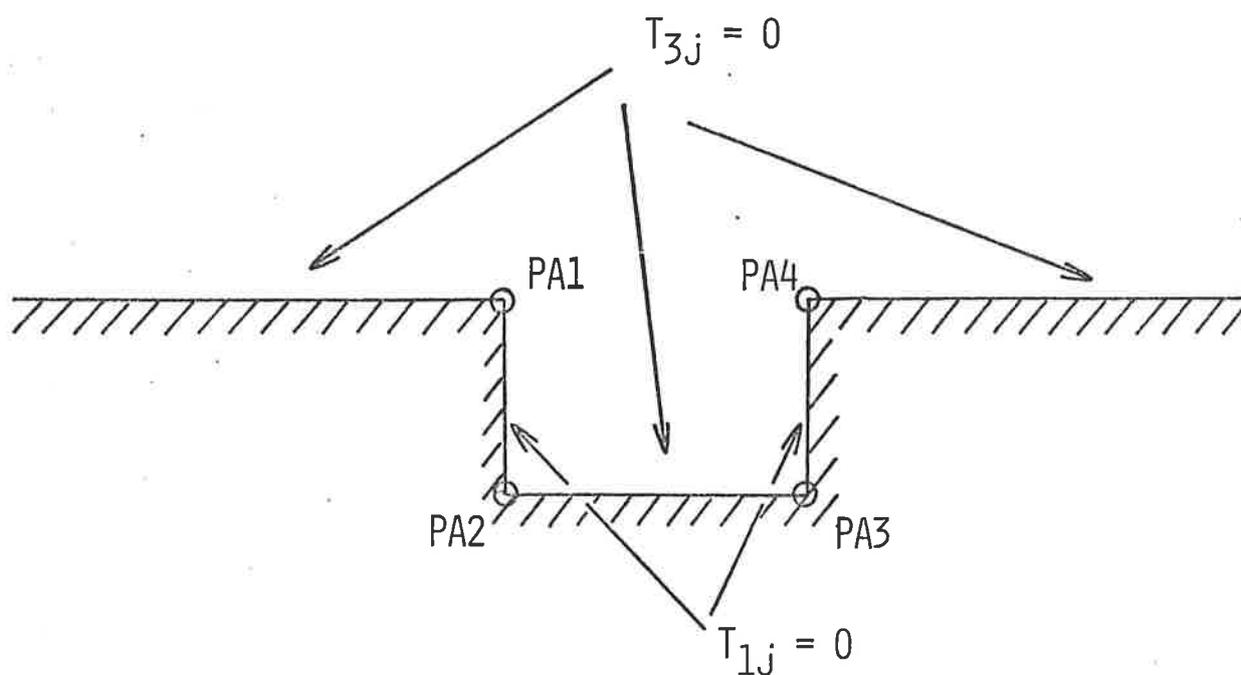


FIGURE I-4. EXAMEN DES CONDITIONS AUX LIMITES

C H A P I T R E 2

METHODE AUX DIFFERENCES FINIES

II-1 CHOIX DE LA MÉTHODE :

Nous venons de voir, au Chapitre I, que le déplacement mécanique \vec{U} vérifiait une équation hyperbolique :

$$(2.1) \quad \rho \cdot \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = \mu \cdot \Delta \vec{U} + (\lambda + \mu) \cdot \text{grad} (\text{div} \vec{U})$$

Nous avons vu également que les conditions aux limites dépendaient de la géométrie des surfaces.

De tels problèmes peuvent être résolus à l'aide de diverses méthodes. Nous avons porté notre attention sur les méthodes de type numérique permettant d'obtenir des solutions en un certain nombre de points de l'espace et du temps.

Parmi ces techniques numériques, nous pouvons citer les éléments finis et les différences finies.

Ces deux méthodes permettent l'étude de la diffraction d'une onde élastique de surface par des discontinuités.

La méthode des différences finies est bien adaptée dans les cas où les obstacles ne présentant que des géométries simples, c'est-à-dire des surfaces planes se coupant en angle droit.

La méthode des éléments finis permet d'étudier des obstacles de géométrie plus compliquée. Elle est plus lourde à mettre en oeuvre et a été

utilisée par certains auteurs.^{5,69}

Compte-tenu des travaux antérieurs⁹ et de l'acquis du Laboratoire,^{9,14} c'est la méthode des différences finies que nous avons retenue. Parmi les nombreux auteurs l'ayant utilisée dans l'étude de la diffraction d'ondes élastiques, on peut citer ALTERMAN et ROTENBERG¹, ALTERMAN et LOEWENTHAL^{2,3}, qui ont étudié la diffraction d'une onde élastique de surface par des arêtes à 90 ° et à 270 ° ; de même OTTAVIANI⁵⁰, MUNASINGHE et FARNELL⁴⁷⁻⁴⁹ ont étudié le cas de la diffraction par une marche et ont comparé leurs résultats à ceux de MAL et KNOPOFF⁴⁴. Plus récemment, ILAN, UNGAR et ALTERMAN²⁹, ILAN et LOEWENTHAL³⁰, ILAN³¹ ont également utilisé cette technique.

Cependant, compte-tenu des limites de la méthode précédente, (principalement, occupation en mémoire du calculateur), nous avons été amenés à modifier cette technique^{20,21}, en utilisant une discrétisation dont les incréments sont fonctions de la position du point considéré. Cela consiste, en grande partie, à resserrer le maillage du domaine autour de la discontinuité et à le relâcher au fur et à mesure que l'on s'en éloigne. Cette méthode nous permet de gagner près de la moitié de l'occupation en mémoire du calculateur utilisé.

Pour cela, nous avons étudié diverses possibilités de définition du maillage. Nous en avons retenu essentiellement deux, pour lesquelles nous nous sommes efforcés de résoudre les problèmes de stabilité et de réflexions parasites. Le développement de ces méthodes est présenté dans ce Chapitre et plus particulièrement en annexe 1 (cas du maillage dissymétrique) et 5 (cas du maillage variable par domaines).

II-2 RAPPELS SUR LA MÉTHODE :

1°) PRINCIPE :

Soit une fonction ψ de deux variables d'espace x et y , régulière et à dérivées régulières. Son développement de Taylor à l'ordre 2 s'écrit :

$$(2.2) \quad \psi = \psi_0 + (x - x_0) \cdot \psi_x^0 + (y - y_0) \psi_y^0 + \frac{(x - x_0)^2}{2} \cdot \psi_{xx}^0 + \frac{(y - y_0)^2}{2} \cdot \psi_{yy}^0 + (x - x_0) (y - y_0) \psi_{xy}^0$$

ψ_0 est la valeur de $\psi(x,y)$ en un point (x,y) ψ_0 celle au point (x_0, y_0) ;
 ψ_x et ψ_y , sont les valeurs des dérivées partielles du premier ordre par rapport à x et à y , ψ_{xx} , ψ_{yy} et ψ_{xy} les valeurs des dérivées partielles du second ordre par rapport à x et à y et croisée, au point (x_0, y_0) .

On ne s'intéresse qu'aux valeurs numériques de la fonction ψ et de ses dérivées partielles en un nombre fini de points discrets (x_i, y_i) . Toutefois, les valeurs retenues (x_i, y_i) obéissent à une certaine loi et, par conséquent, un maillage de points est défini. Une fois ce dernier fixé, l'expression de ψ et de ses dérivées pourra être déduite du développement de Taylor.

2°) CAS D'UN MAILLAGE RECTANGULAIRE DISSYMETRIQUE :

La Figure II-1 montre un exemple de discrétisation de l'espace par des mailles rectangulaires. On désire exprimer ψ_x^0 , ψ_y^0 , ψ_{xx}^0 , ψ_{yy}^0 , ψ_{xy}^0 en fonction des valeurs de la fonction ψ aux neuf points voisins du point $(0,0)$:

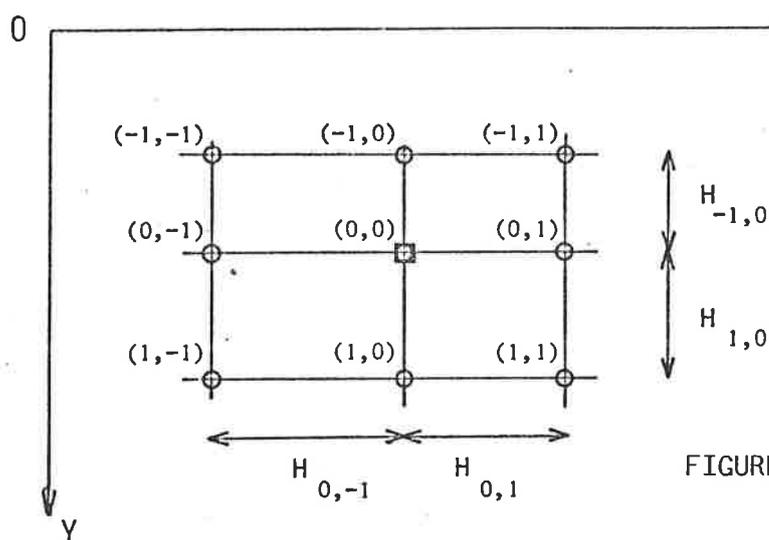


FIGURE II-1. MAILLAGE DISSYMETRIQUE

Les expressions obtenues étant compliquées, elles sont données, ainsi que leur développement, en annexe 1.

3°) CAS D'UN MAILLAGE REGULIER :

Ici, les mailles du domaine sont carrées et de côté h . De ce fait, les expressions obtenues sont plus simples. Elles sont données en annexe 2.

4°) DISCRETISATION DU TEMPS :

Dans le cas où la fonction ψ dépend aussi du temps t , on définira un incrément temporel $s = \Delta t$

L'expression de la dérivée seconde ψ_{tt}^o sera ainsi :

$$(2.3) \quad \psi_{tt}^o = \frac{1}{s^2} \left[\psi_o^{t+1} + \psi_o^{t-1} - 2\psi_o^t \right]$$

Considérons ψ comme une fonction de trois variables : x, y (variables d'espace) et t (variable de temps). A chaque instant t , on peut connaître la valeur de ψ en chacun des points (i, j, m) du maillage. Les trois entiers i, j, m repèrent la position du point $M (x_o, y_o, t_o)$ pour lequel on a :

$$\begin{aligned} x_o &= i \cdot \Delta x ; & y_o &= j \cdot \Delta x ; & t_o &= m \cdot \Delta t & \text{en maillage régulier} \\ x_o &= f(i) \cdot \Delta x ; & y_o &= f(j) \cdot \Delta x ; & t_o &= m \cdot \Delta t & \text{en maillage dissymétrique} \end{aligned}$$

Nous avons donc ramené un ensemble d'équations aux dérivées partielles à un système d'équations aux différences.

II-3 APPLICATION AUX ÉQUATIONS À RÉSOUDRE :

1°) A L'INTERIEUR DU SOLIDE :

Nous rappelons ci-dessous l'équation de la dynamique qui doit être résolue en tout point à l'intérieur du solide :

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 U_p}{\partial t^2} = v_l^2 \cdot \frac{\partial^2 U_p}{\partial x_p^2} + v_t^2 \cdot \frac{\partial^2 U_p}{\partial x_q^2} + (v_l^2 - v_t^2) \cdot \frac{\partial^2 U_q}{\partial x_p \partial x_q} \quad \begin{array}{l} p = 1 ; q = 3 \\ p = 3 ; q = 1 \end{array}$$

En remplaçant les dérivées partielles par leur approximation en différences finies, le vecteur déplacement $\vec{U} (i, j, m)$ de composante $U_1 (i, j, m)$ et $U_3 (i, j, m)$, en un point M , est calculé à l'instant $t+1$ en fonction des

déplacements de ses plus proches voisins à l'instant t , et de son déplacement aux deux instants t et $t-1$.

La Figure II-2 montre la position du point M dans le maillage.

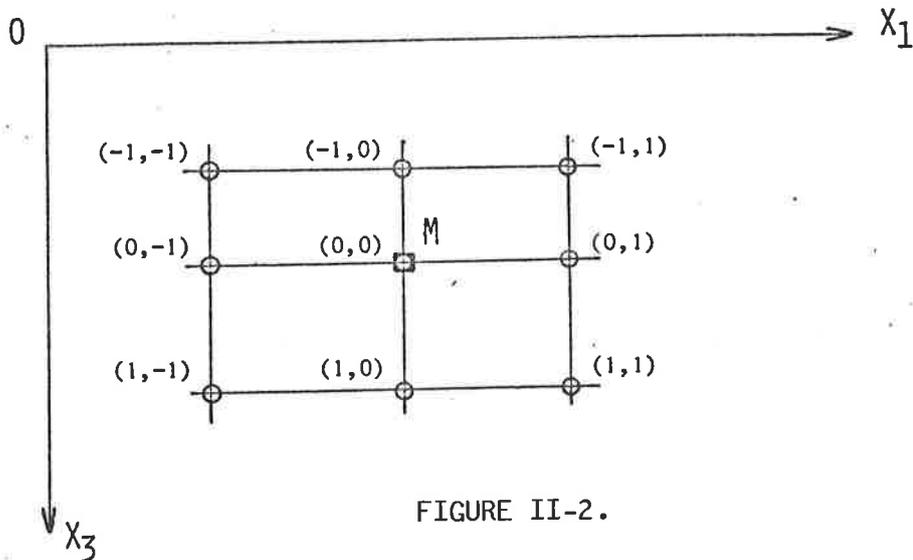


FIGURE II-2.

Nous donnons ci-dessous l'expression du vecteur déplacement \vec{U} au point M :

$$(2.5) \quad \vec{U}_M^{t+1} = -\vec{U}_M^{t-1} + 2 U_M^t + \sum_{(p,q) \in E^2} [M_{pq}] \cdot (\vec{U}_{p,q}^t - \vec{U}_M^t)$$

où $E = \{-1, 0, +1\}$

et où $[M_{pq}]$ est une matrice 2×2 de la forme :

$$[M_{pq}] = \begin{bmatrix} \beta_{pq} & \alpha_{pq} \\ \alpha_{pq} & \beta_{pq} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \alpha_{pq} &= 2 \cdot (V_\ell^2 - V_t^2) \cdot A_{pq} \\ \beta_{pq} &= 2 \cdot (V_\ell^2 \cdot \delta_{p,0} + V_t^2 \cdot \delta_{0,q}) \cdot B_{pq} \end{aligned}$$

Le développement de ces coefficients est exposé dans l'annexe 1.

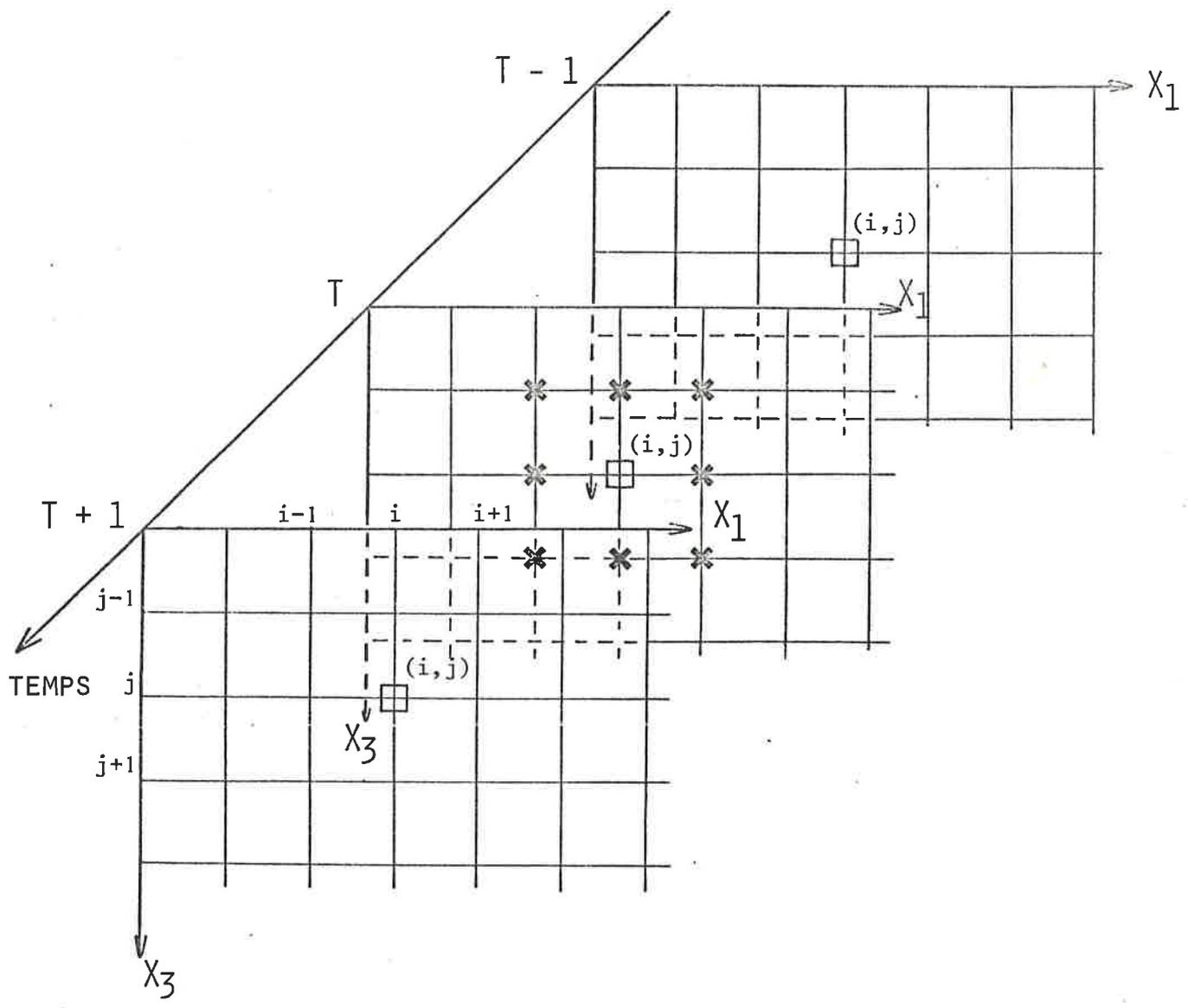


FIGURE II-3 , DISCRÉTISATION DE L'ESPACE ET DU TEMPS

Nous constatons, donc, que le déplacement en un point donné, à un instant $t + 1$, est déterminé en fonction du déplacement de ses huit plus proches voisins à l'instant antérieur t et de son déplacement aux 2 instants t et $t - 1$

Le Schéma de la Figure II-3 nous montre comment se calcule le déplacement mécanique \vec{U} à un instant $t + 1$.

2°) CONDITIONS AUX LIMITES :

Nous avons vu, au Chapitre I, que l'on va avoir affaire à deux types de conditions aux limites indépendantes du temps :

- d'une part, les conditions sur une surface plane, telle une surface verticale ou horizontale.
- d'autre part, les conditions aux points d'angle de deux surfaces planes.

a) Cas des surfaces planes :

Les conditions aux limites sont résumées par la relation :

$$T_{mj} = 0 \quad \text{avec : } m = 1 : \text{ Surface verticale} \\ m = 3 : \text{ Surface horizontale}$$

La Figure II-4 représente un schéma du maillage au voisinage de la surface plane horizontale.

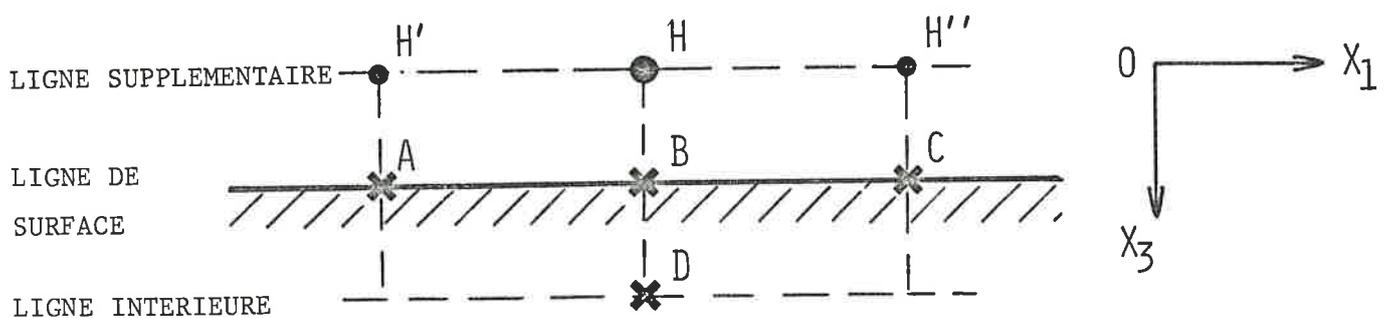


FIGURE II-4 SURFACE PLANE HORIZONTALE

Les points d'une surface plane du solide n'ont plus huit voisins, et, de ce fait, nous ne pouvons plus leur appliquer la formule (2.5). Afin d'utiliser tout de même une telle approximation, il nous a fallu introduire une ligne de noeuds supplémentaires située au-delà de la surface. Le déplacement fictif de ces noeuds doit être tel qu'il vérifie les conditions aux limites appliquées aux noeuds de la surface en supposant le milieu matériel continu.

Une telle approximation a été utilisée par certains auteurs tels ALTERMAN^{1,2,3} et LOEWENTHAL^{2,3}, MUNASINGHE⁴⁷⁻⁴⁹. Plus récemment, ILAN et d'autres²⁹⁻³² a donné de nouveaux types d'approximations que nous n'avions pas au moment de la mise en oeuvre de notre étude.

Dans la Figure II-4, présentée ci-dessus, le déplacement fictif du noeud H ne dépend que des conditions aux limites d'une surface plane, appliquées en B. La connaissance, à un instant donné, de l'ensemble des déplacements fictifs des noeuds de la ligne supplémentaire, permet de calculer les déplacements des noeuds de la surface suivant l'équation (2.5).

Les déplacements fictifs sont obtenus par l'approximation aux différences finies de ces conditions aux limites.

Pour des raisons de stabilité du processus, la ligne supplémentaire des noeuds H est située à la même distance de la ligne de surface, que l'est la première ligne intérieure.

De plus, dans le cas des surfaces verticales présentes dans une rainure, le maillage est pris régulier (Figure II-5).

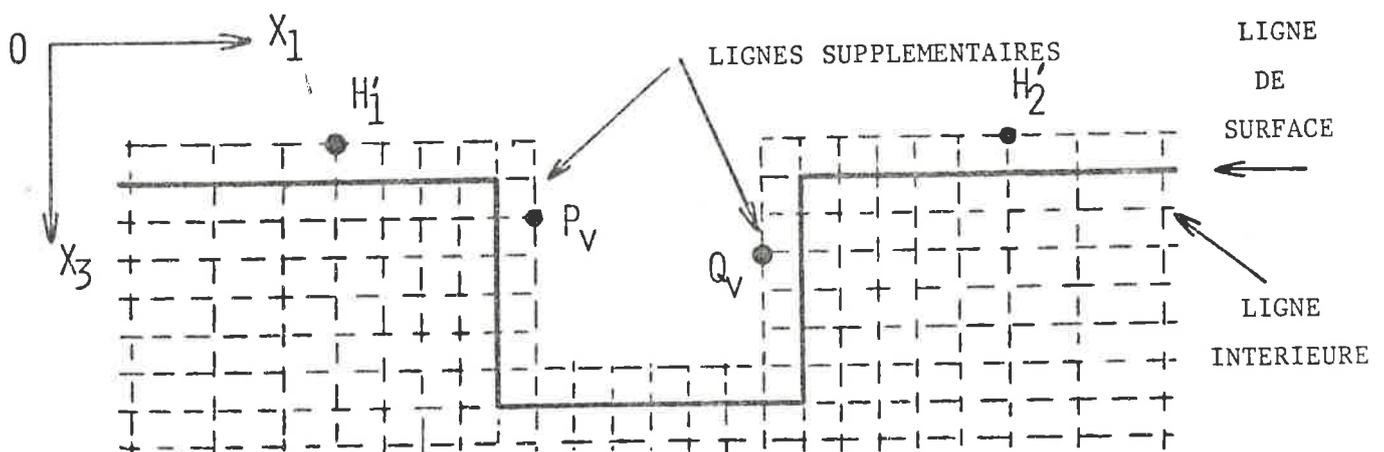


FIGURE II-5 ASPECT DU MAILLAGE
AUTOUR DE LA RAINURE

Les expressions de déplacement \vec{U} des différents noeuds des lignes horizontales (tels les points H'_1, H'_2) et verticales (tels les points P_V, Q_V) sont présentées dans l'Annexe 1 (cas des surfaces planes horizontales en maillage dissymétrique) et dans l'Annexe 2, (cas des surfaces planes horizontale et verticales en maillage régulier).

b) Cas des points d'angle particuliers :

Le calcul du déplacement \vec{U} des noeuds B_1, B'_1, C_C, C'_C présentés respectivement dans les Figures II-6 à II-9, présentent quelques difficultés. En effet, ces noeuds appartiennent à deux surfaces planes horizontales et verticales. La résolution des deux systèmes (1.7) et (1.8) conduisent à une solution indéterminée.

Pour calculer le déplacement \vec{U} au noeud B_1 , il est nécessaire de connaître les déplacements des noeuds A_G, B_G , et C_G .

Le noeud A_G appartient à la ligne supplémentaire horizontale, le calcul de son déplacement fait appel à une dérivée dissymétrique, selon la direction Ox_1 . (Il en sera de même pour le noeud A_D).

Le noeud C_G appartient à la ligne supplémentaire verticale, le calcul de son déplacement fait appel à une dérivée dissymétrique, selon la direction Ox_3 . (Il en sera de même pour le noeud C_D).

Quant au noeud B_G (respectivement B_D), on suppose que l'arête présente en ce point une surface parallèle à la ligne $A_G C_G$ (respectivement $A_D C_D$). De ce fait, on exprime la nullité des contraintes sur cette petite surface que l'on a reportée au point X_G milieu du carré $A_G B_G C_G B_1$ (respectivement au point X_D au milieu du carré $A_D B'_1 C_D B_D$). Ainsi, à l'aide des formules aux différences, finies diagonales, on exprime le déplacement du noeud B_G (respectivement B_D) en fonction du déplacement des trois noeuds : A_G, B_1, C_G . (Respectivement : A_D, B'_1, C_D).

Pour calculer le déplacement de ces noeuds C_C et C'_C , on procède de la même manière. C'est-à-dire que les noeuds B_0 et B'_0 ont trois images B_V, B_C, B_H et B'_V, B'_C, B'_H respectivement.

Le déplacement des noeuds B_V et B'_V vérifient les conditions aux limite

des surfaces verticales ; celui des noeuds B_H et B'_H vérifie les conditions aux limites des surfaces horizontales. Le déplacement des noeuds B_C et B'_C est calculé en supposant que l'arête à 270° présente une surface oblique parallèle à la ligne $C_V C_{H1}$ et à la ligne $C'_{H1} C'_{V1}$ respectivement, au point C_C et au point C'_C .

L'expression des déplacements de ces noeuds est présentée dans l'annexe 2.

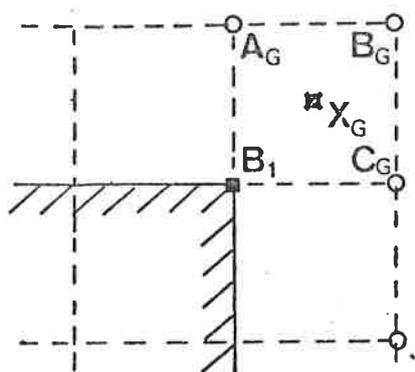


FIGURE II-6.

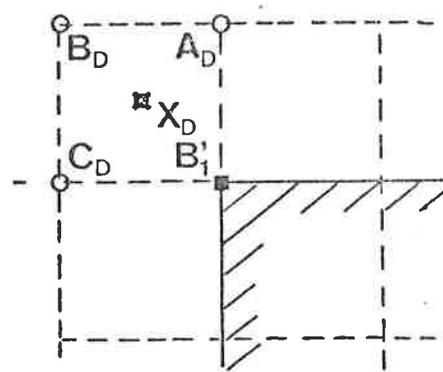
ARETES A 90° 

FIGURE II-7.

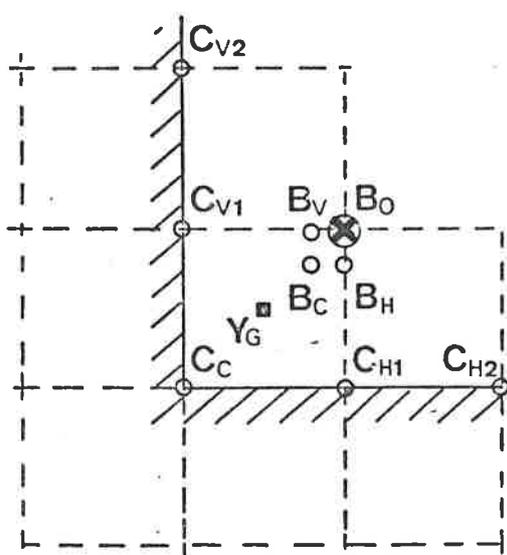


FIGURE II-8.

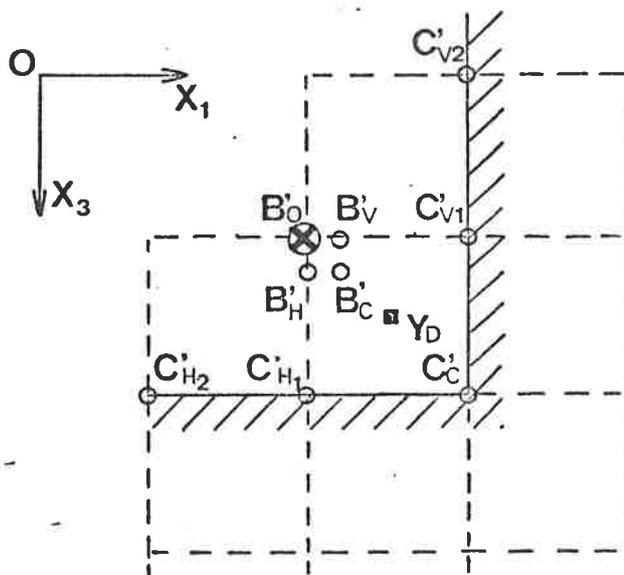
ARETES A 270° 

FIGURE II-9.

II-4. MISE EN OEUVRE DE LA MÉTHODE NUMÉRIQUE :

1°) MISE EN PLACE DU PROCESSUS ITERATIF :

Le problème à résoudre est du type différentiel "aux conditions initiales". Il est donc nécessaire d'initialiser le processus avec des solutions compatibles avec les équations fondamentales.

L'évolution de l'état du système est calculé de manière récurrente, à partir de solutions initiales. Il est par conséquent important de bien choisir celles-ci.

Certains auteurs tels ALTERMAN², MUNASINGHE⁴⁷⁻⁴⁹ ont choisi d'étudier la propagation d'impulsions de durée limitée.

D'autres auteurs^{9,14} ont utilisé un train d'onde monochromatique semi-infini, excité à partir d'un instant initial t_0 .

C'est ce type d'initialisation que nous avons choisi.

Afin de diminuer le temps de calcul, il est possible de supposer que le train d'onde s'est déjà propagé pendant une durée $\Delta T = t'_0 - t_0$ jusqu'au voisinage de la première discontinuité (sans l'avoir atteinte). En effet, nous pouvons calculer analytiquement la propagation de ce train d'onde entre les instants t_0 et t'_0 et donner les valeurs analytiques correspondantes aux noeuds du domaine aux instants $t'_0 - l$ et t'_0 (Figure II-10)

A l'instant $t'_0 + l$, nous mettons en oeuvre le processus de calcul aux différences finies qui s'effectue de la manière suivante:

- On calcule d'abord les valeurs fictives des noeuds des lignes situées au-delà des surfaces solides (Voir § II-3), à l'instant t'_0 .
- On calcule ensuite le déplacement \vec{U} à l'instant $t'_0 + l$ pour les noeuds internes et les noeuds de la surface.
- On impose analytiquement les valeurs du déplacement \vec{U} des noeuds de la ligne source AH.
- On met à zéro les déplacements des noeuds de la ligne HG, car celle-ci est située loin de la surface.

Ceci étant effectué, on a obtenu, si les conditions de stabilité sont remplies, une détermination numérique des solutions à l'instant $t'_0 + 1$.

Cette opération est répétée jusqu'à un instant t_1 de telle sorte que l'onde réfléchie n'ait pas encore atteint la ligne source, que l'onde transmise n'ait pas encore atteint la ligne FG et que l'onde de volume rayonnée par l'obstacle n'ait pas encore atteint les limites du domaine. La Figure II-11 montre l'état du domaine à l'instant t_1 .

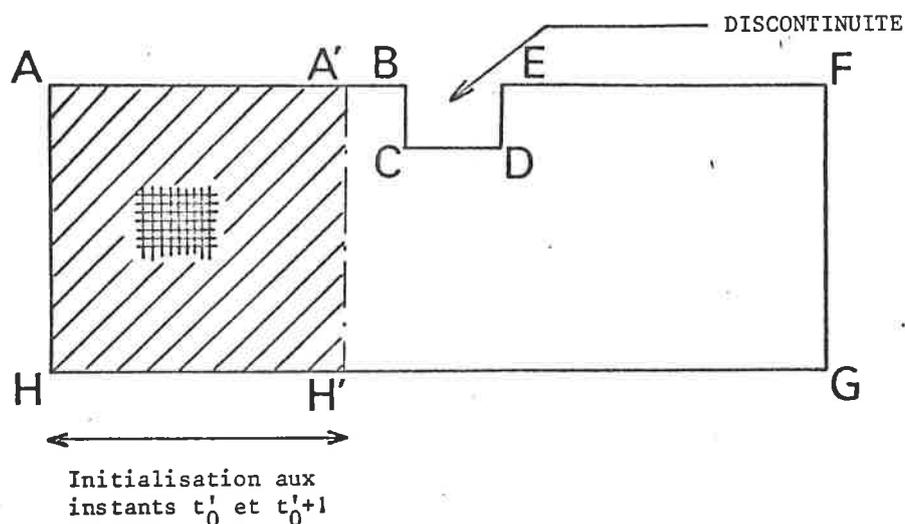


FIGURE II-10. INITIALISATION DU PROCESSUS

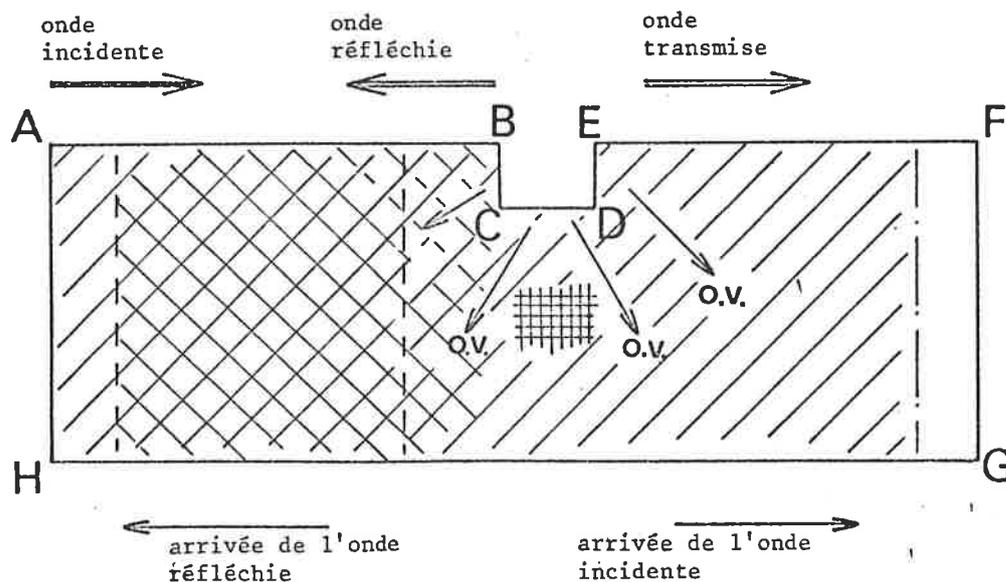
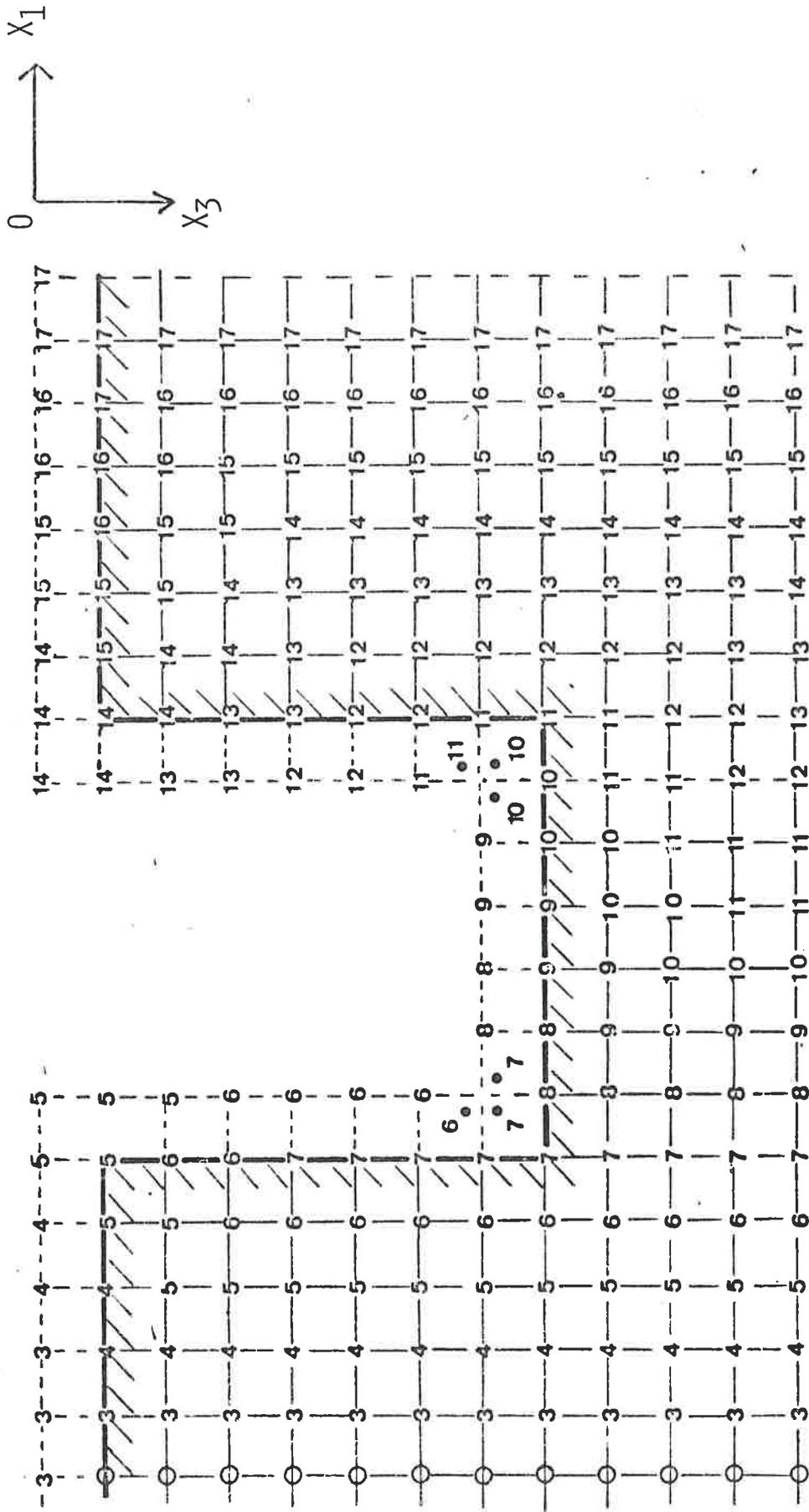


FIGURE II-11. ETAT DU SYSTEME A L'INSTANT t_1

La Figure II-12 représente le schéma synoptique du maillage montrant comment se calcule le déplacement \vec{U} en chacun des noeuds au cours du processus itératif.

Les valeurs analytiques des déplacements, imposés aux deux instants initiaux $t'_0 - 1$ et t'_0 , dans l'ensemble du domaine AA'H'H, sont présentées dans l'annexe 3.

SCHEMA SYNOPTIQUE DU REMPLISSAGE



- 0— : Initialisation
- i— : Calcul du déplacement \vec{U} en ce point à l'instant " i " du processus itératif.

FIGURE II-12 .

2°) CONDITIONS DE STABILITE DU PROCESSUS :

Elles sont liées, d'une part, aux valeurs des incréments d'espace et de temps ²⁹⁻³² et, d'autre part, à l'approximation des conditions aux limites pour les surfaces planes ^{30,31} et les points d'angle.

Les deux approximations classiques de ces conditions aux limites, utilisant des lignes de noeuds supplémentaires, sont valables, (dans le cas d'une diffraction d'une onde élastique de surface par une arête à 90° ³¹) quand le rapport V_t/V_ℓ de la vitesse de cisaillement à celle de compression est supérieur à 0.5.

Ceci explique le fait que des substrats tels le platine, l'argent, l'or, le plomb, donnent des résultats ¹⁴ oscillant autour de la vraie solution. En effet, ces corps possèdent un rapport V_t/V_ℓ inférieur à 0.5.

Afin de réduire et de supprimer ces oscillations (cas de l'utilisation de la formule centrée) et le retard de phase (cas des formules dissymétriques), ILAN ³² a introduit deux nouvelles approximations, dites "composées" ; l'une d'elles est valable pour $V_t/V_\ell > 0.575$, la deuxième l'est quel que soit V_t/V_ℓ .

Notre étude ayant débuté antérieurement à ces travaux, nous avons conservé la première approximation utilisant la formule centrée pour le calcul des déplacements des noeuds de la ligne supplémentaire.

Quant aux valeurs des incréments d'espace et de temps, ils doivent vérifier l'inégalité suivante donnée par ALTERMAN ³ et déduite du critère de VON NEUMANN :

$$(2.6) \quad V_\ell \leq \frac{\delta}{\Delta t} \cdot \left[1 + \left(\frac{V_t}{V_\ell} \right)^2 \cdot \left(\frac{\delta}{\Delta x_3} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

V_R = Vitesse de l'onde de Rayleigh

V_ℓ = Vitesse longitudinale ou de compression

V_t = Vitesse transversale ou de cisaillement

Δx_1 = Incrément spatial suivant l'axe Ox_1 .

Δx_3 = Incrément spatial suivant l'axe Ox_3 .

Δt = Incrément temporel

$\delta = \text{Inf}(\Delta x_1, \Delta x_3)$

Soit :

$$\lambda = n_1 \cdot \Delta x_1$$

avec λ la longueur d'onde de l'onde
de Rayleigh

$$\lambda = n_3 \cdot \Delta x_3$$

$$n = \max(n_1, n_3)$$

$$T = m \cdot \Delta t$$

$$\text{où } \lambda = V_R \cdot T$$

Nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{m}{n} \geq \frac{1}{V_R} \cdot \sqrt{V_\ell^2 + \left(\frac{n_3}{n}\right)^2 \cdot V_t^2}$$

avec $\Delta x_1 = \Delta x_3$ $n_1 = n_3 = n$

d'où la relation :

$$\frac{m}{n} \geq \frac{1}{V_R} \cdot \sqrt{V_\ell^2 + V_t^2}$$

A cette relation s'ajoute les conditions imposées par ILAN sur le rapport V_t/V_ℓ .

Très récemment, SCHOENBERG et NATHANIEL⁶³ ont généralisé de telles conditions de telles conditions de stabilité dans le cas tridimensionnel.

II-5 MISE EN PLACE DE L'ALGORITHME DE CALCUL :

1°) PRESENTATION DES PROGRAMMES :

- Le tableau II-13 donne les principales étapes du processus itératif qui se décompose en initialisation (calcul analytique du déplacement des noeuds) et en processus itératif temporel proprement dit (calcul en différences finies du déplacement des noeuds).

- Les programmes de calcul ont été écrits en langage FORTRAN du type IV. Nous présentons dans l'annexe 7, les deux principaux programmes, à savoir :

a) le programme "MARCHE" :

il traite la diffraction d'une onde élastique de surface par des marches descendantes ou montantes, en maillage régulier.

b) Le programme "RAYLEIGH" :

il traite la diffraction d'une onde élastique de surface par des rainures, en maillage régulier d'une part, et en maillage dissymétrique d'autre part.

- Le maillage utilisé est tel que la propagation de l'onde élastique de surface soit de 6λ de part et d'autre de la discontinuité, donc une longueur de 12λ dans le sens de la propagation et une longueur de 3λ dans le sens de la profondeur.

2°) REMARQUES :

- La mise en oeuvre de la méthode a été faite à l'aide de calculateurs situés au C.I.R.C.E. (Centre Interrégional de Calcul Electronique), qui dispose entre autres d'un ordinateur I.B.M. 370/168 que nous avons plus particulièrement utilisé.

- Il nous a été possible de connaître le temps d'exécution pris par les programmes, pour calculer le déplacement \vec{U} (U_1, U_3) en un point du domaine,

et pour une itération donnée, nous obtenons les résultats suivants :

- maillage régulier : 18 μ s /point/itération.
- maillage dissymétrique : 57 μ s /point/itération.

ORGANIGRAMME DE CALCUL

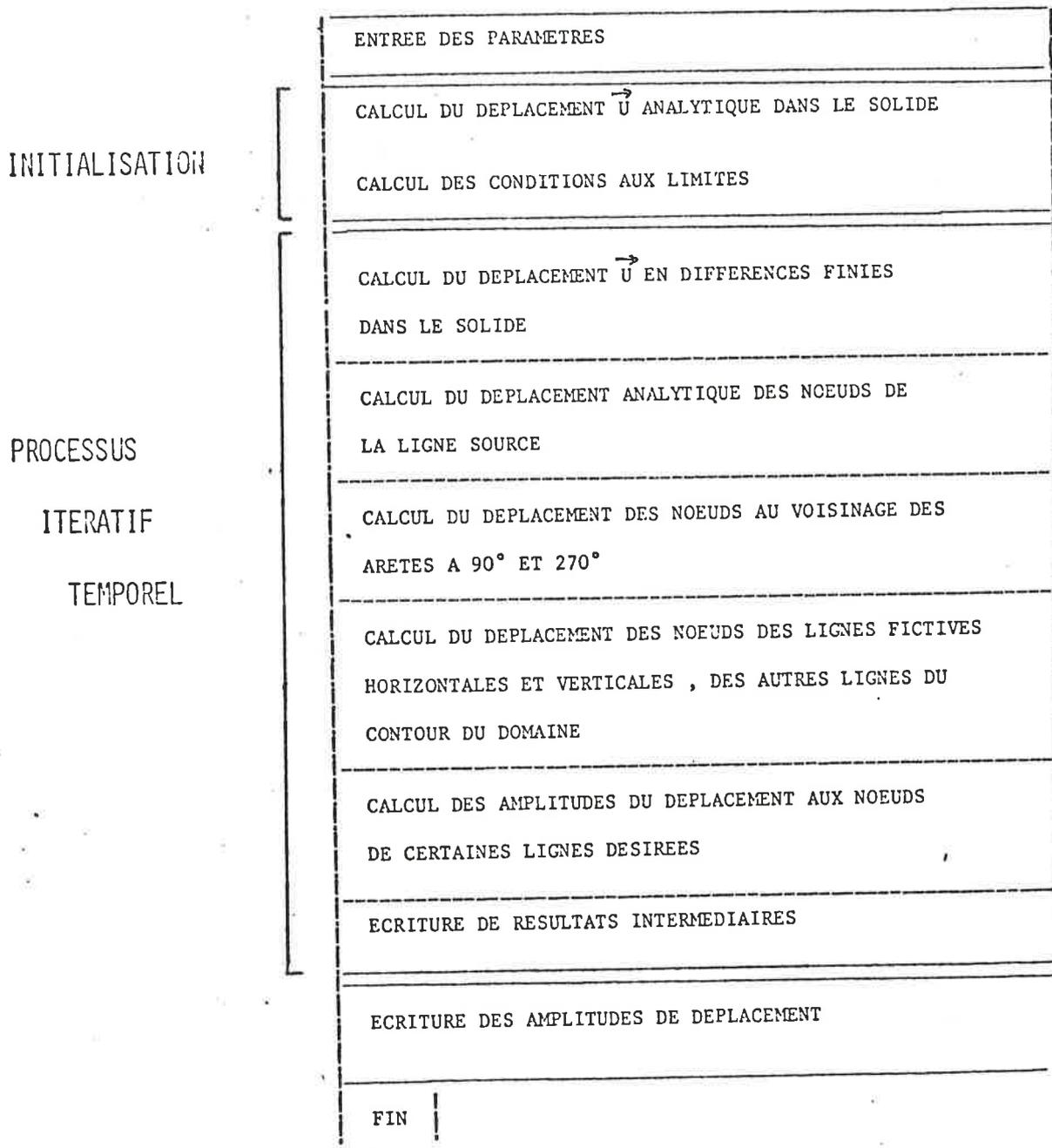


TABLEAU II-13 . ORGANIGRAMME DE CALCUL POUR LE TRAITEMENT NUMÉRIQUE
DE LA DIFFRACTION D'UNE ONDE ÉLASTIQUE DE SURFACE
PAR UN OBSTACLE À GÉOMÉTRIE RECTANGULAIRE .

II-6. EXPLOITATION DES RÉSULTATS :

1°) INTRODUCTION :

A la fin d'un cycle de simulation numérique, nous disposons des valeurs du déplacement mécanique \vec{U} en tout point du domaine, à chaque instant.

Afin de caractériser la diffraction d'une onde élastique de surface par diverses discontinuités, nous devons être capables de déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en module et phase, ainsi que le facteur de conversion en ondes volumiques.

Les valeurs obtenues pour \vec{U} vont nous permettre de connaître le comportement d'une onde élastique de surface lorsqu'elle rencontre de telles discontinuités.

Nous sommes en présence d'une onde progressive. Nous allons regarder ce qui se passe de part et d'autre de l'obstacle considéré.

L'onde élastique de surface, incidente (O.I.) sur une discontinuité telle une rainure (Figure II-14), donne naissance à une onde transmise (O.T.) et à une onde réfléchie (O.R.).

Mais d'autres ondes apparaissent telles les ondes volumiques (O.V.) se propageant à l'intérieur du solide et à sa surface, depuis la discontinuité.

On ne recherche les amplitudes des composantes U_1 , U_3 que sur la dernière période de la simulation de manière à éviter les perturbations du front d'onde lors des premières périodes de propagation.

La zone 1 située assez loin de la discontinuité (de même que la zone 2) est le siège des interférences entre les ondes de surface incidente et réfléchies et éventuellement une onde de volume.

La zone 2 est le domaine d'existence des ondes transmises.

L'étude des coefficients de réflexion et de transmission se fait en exploitant les résultats obtenus pour diverses profondeurs, de manière

à effectuer une comparaison entre les valeurs de R et de T.

Les courbes d'amplitude des ondes U_1 et U_3 sont présentées dans la Figure II-15, dans le cas d'une rainure de profondeur $H/\lambda = 0.2$ et de largeur $W/\lambda = 0.2$, à diverses profondeurs de pénétration de l'onde élastique de surface.

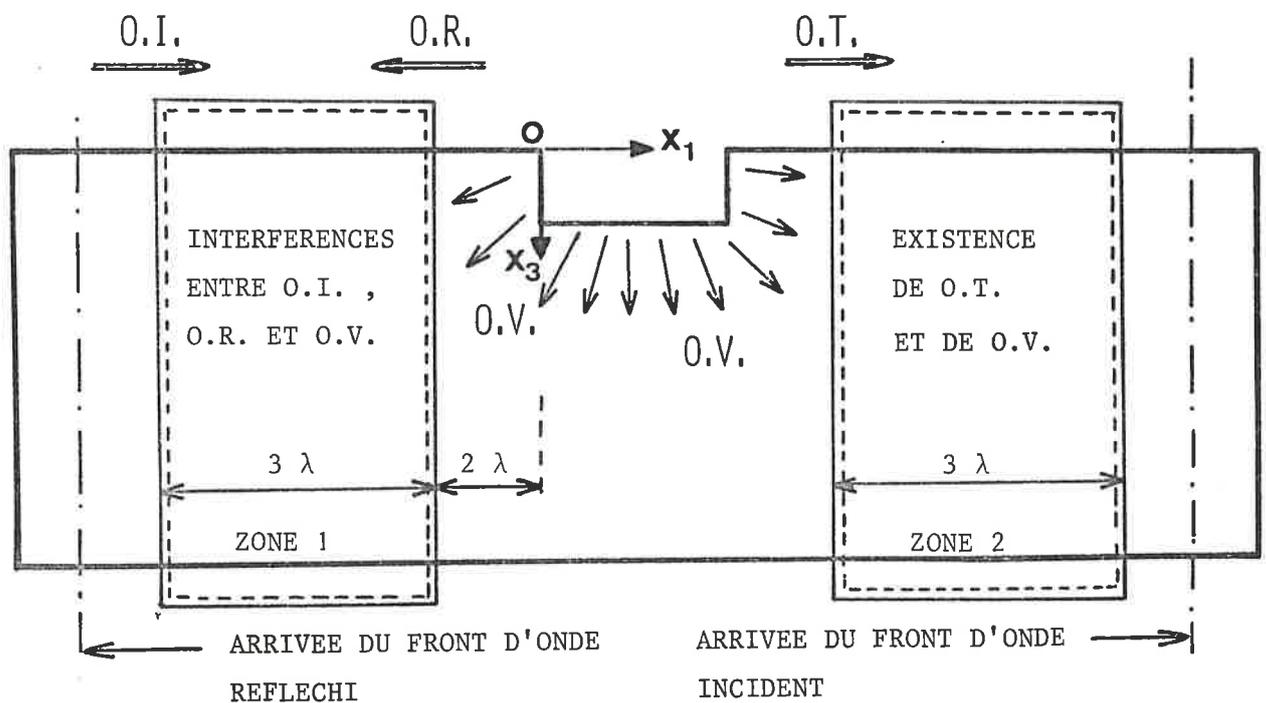


FIGURE II-14

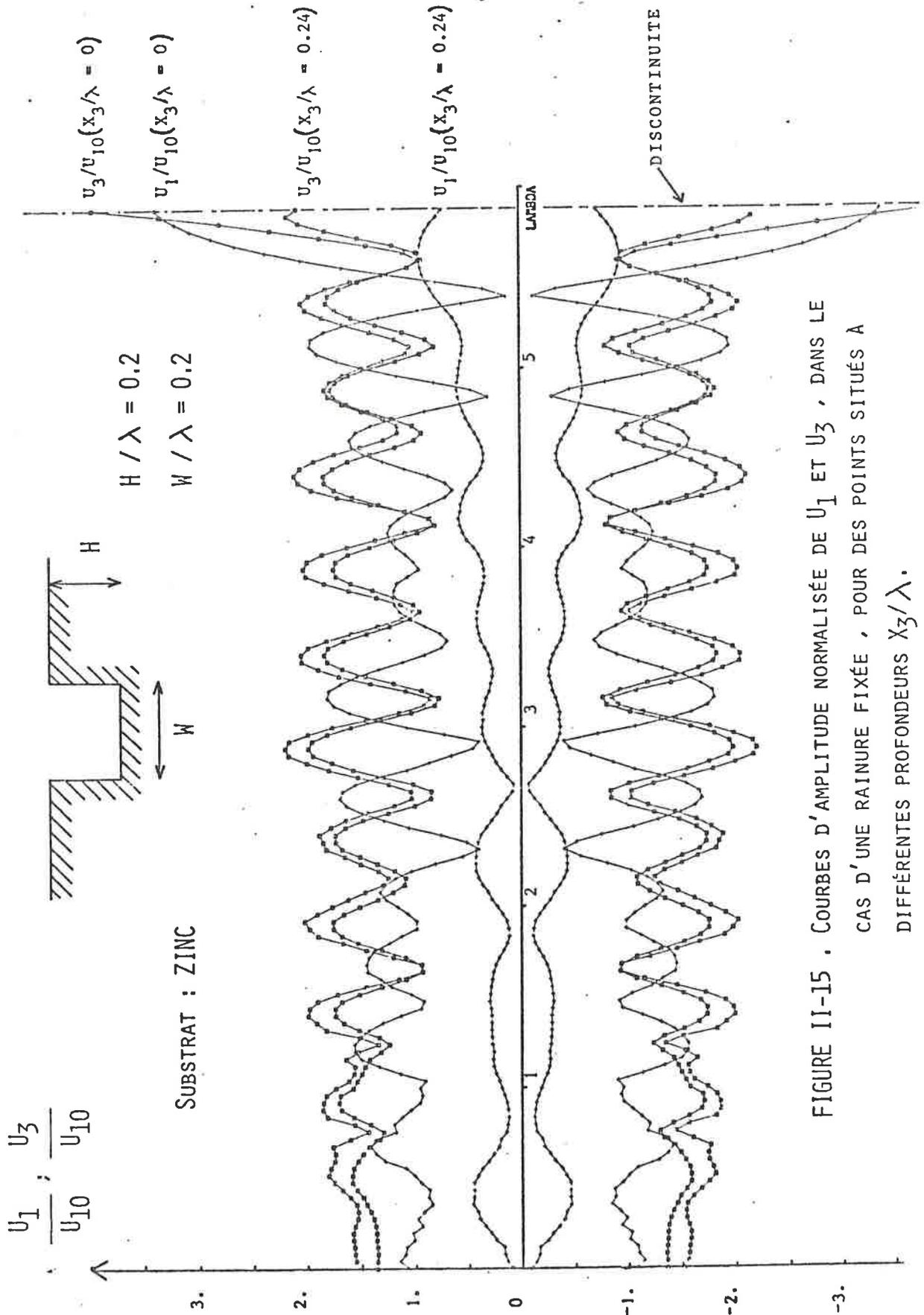


FIGURE II-15 . COURBES D'AMPLITUDE NORMALISÉE DE U_1 ET U_3 , DANS LE CAS D'UNE RAINURE FIXÉE , POUR DES POINTS SITUÉS A DIFFÉRENTES PROFONDEURS X_3/λ .

2°) DETERMINATION DU COEFFICIENT DE REFLEXION \mathcal{R} :

En adoptant les conventions de la Figure II-14, pour les axes OX_1 et OX_3 , nous pouvons donner les expressions analytiques des ondes en présence dans la zone 1^{ll} :

$$\begin{aligned} \text{Onde incidente :} \quad U_1^I &= \mathcal{U}_1(x_3) \cdot e^{j\omega \left(t - \frac{x_1}{v} \right)} \\ U_3^I &= \mathcal{U}_3(x_3) \cdot e^{j\omega \left(t - \frac{x_1}{v} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Onde réfléchie :} \quad U_1^R &= \text{Re}^{j\phi_R} \cdot \mathcal{U}_1(x_3) \cdot e^{j\omega \left(t + \frac{x_1}{v} \right)} \\ U_3^R &= \text{Re}^{j\phi_R} \cdot \mathcal{U}_3(x_3) \cdot e^{j\omega \left(t + \frac{x_1}{v} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Onde volumique de} \\ \text{compression :} \quad U_1^V &= \text{Se}^{j\psi} \cdot \mathcal{U}_1(x_3) \cdot e^{j\omega \left(t + \frac{x_1}{v_\ell} \right)} \\ U_3^V &= 0 \end{aligned}$$

On suppose que l'amplitude de l'onde volumique ne dépend pas de la profondeur.

En tout point de la zone 1, le vecteur déplacement mécanique est :

$$\vec{U} = \vec{U}^I + \vec{U}^R + \vec{U}^V, \text{ ce qui nous donne :}$$

$$U_1 = U_1^I + U_1^R + U_1^V$$

$$U_3 = U_3^I + U_3^R$$

On obtient donc :

$$U_1 = U_1(x_3) \cdot e^{j\omega t} \cdot \left[e^{-j\omega x_1/V} + R \cdot e^{j(\omega x_1/V + \phi_R)} + S \cdot e^{j(\omega x_1/V_\ell + \psi)} \right]$$

$$U_3 = U_3(x_3) \cdot e^{j\omega t} \cdot \left[e^{-j\omega x_1/V} + R \cdot e^{j(\omega x_1/V + \phi_R)} \right]$$

Soient $U_1(x_1, x_3)$ et $U_3(x_1, x_3)$ les amplitudes complexes des ondes U_1 et U_3 ; nous obtenons, ainsi, les expressions suivantes :

$$(2.8) \quad U_1(x_1, x_3) = \left| U_1(x_3) \right| \cdot \left[1 + R^2 + S^2 + 2R \cdot \cos(2\omega x_1/V + \phi_R) + 2S \cdot \cos(\omega(V+V_\ell/V \cdot V_\ell) \cdot x_1 + \psi) + 2RS \cdot \cos(\omega(V-V_\ell/V \cdot V_\ell) \cdot x_1 + \psi - \phi_R) \right]^{1/2}$$

$$(2.9) \quad U_3(x_1, x_3) = \left| U_3(x_3) \right| \cdot \left[1 + R^2 + 2R \cdot \cos(2\omega x_1/V + \phi_R) \right]^{1/2}$$

L'étude du coefficient de réflexion s'est faite essentiellement avec la composante U_3 , à cause de la bonne régularité d'espacement des maxima et des minima. Les courbes d'amplitude de U_3 présentées, en outre, dans la Figure II-14, sont donc supposées être décrites par l'expression précédente (2.9).

Les maxima ont une valeur égale à $(1 + R) \cdot U_3(x_3)$ et les minima ont une valeur égale à $(1 - R) \cdot U_3(x_3)$; on définit ainsi un taux d'ondes stationnaires (T.O.S.) donné par :

$$\rho = \frac{1 + R}{1 - R} \quad (\text{à profondeur constante})$$

et ainsi, le module R du coefficient de réflexion s'écrit de la manière suivante :

$$R = \frac{\rho - 1}{\rho + 1}$$

La position des maxima par rapport à la discontinuité permet de déterminer la phase à la réflexion ϕ_R :

$$\phi_R = 2k\pi - 4\pi \frac{x_1}{\lambda} \quad k \in \mathbb{Z}$$

3°) DETERMINATION DU COEFFICIENT DE TRANSMISSION :

On compare l'amplitude et la phase de l'onde après la discontinuité, à l'amplitude et la phase qu'elle aurait en l'absence d'obstacle.

Numériquement, on repère les maxima de U_i à l'itération 3, on calcule leur position théorique à la fin du processus itératif (soit à l'itération NT), c'est-à-dire pour une propagation de l'onde $P = \frac{NT-3}{m} \lambda$ avec m le nombre de points par période.

On repère les maxima de l'onde transmise et on compare la position de ces maxima avec ceux de l'onde incidente non perturbée, on obtient ϕ_T .

Pour le calcul du module T de T , il suffit de faire le rapport de l'amplitude transmise à l'amplitude incidente. On connaît ainsi :

$$T = T_e^{j\phi_T}$$

4°) DETERMINATION DU FACTEUR DE CONVERSION EN VOLUME :

Sachant que l'énergie transportée par une vibration est proportionnelle au carré de l'amplitude :

$$E_{\text{incidente}} \propto A^2$$

$$E_{\text{réfléchi}} \propto R \cdot A^2$$

$$E_{\text{transmise}} \propto T \cdot A^2$$

on obtient la part de l'énergie transformée en onde de volume, car on a :

$$A^2 = (R^2 + T^2 + V) \cdot A^2$$

$$\text{d'où : } V = 1 - R^2 - T^2$$

C H A P I T R E 3

RESULTATS

III-1 GÉNÉRALITÉS :

Comme nous l'avons dit, la méthode aux différences finies permet l'étude du comportement d'une onde élastique de surface, en présence de diverses discontinuités ; nous pouvons caractériser ces obstacles en calculant les coefficients de transmission et de réflexion, et le facteur de conversion en ondes volumiques.

Chaque configuration est définie par la géométrie de l'obstacle et par le coefficient de Poisson du corps considéré.

Nous nous sommes intéressés à des corps isotropes, dont les principales caractéristiques sont rappelées dans le Tableau III-1. La Figure III-2 rassemble les courbes montrant l'évolution des rapports

v_l/v_R , v_t/v_R , v_t/v_l et $\frac{1}{v_R} \cdot \sqrt{v_l^2 + v_t^2}$ en fonction de σ .

Ces courbes nous seront utiles par la suite pour comprendre certaines particularités.

Dans le tableau III-1 apparaît une ligne concernant le Niobate de Lithium équivalent (Li NbO_3 équ.). Nous savons que le Niobate de Lithium est un corps anisotrope piézoélectrique ; cependant, dans le cadre de notre étude et contrairement à d'autres travaux effectués au Laboratoire ¹¹, nous ne nous intéressons pas aux effets électriques et seuls les effets mécaniques sont retenus. Pour celà, on cherche à définir un équivalent non piézoélectrique du Li NbO_3 .

Il se trouve que LI³⁶ a proposé un tel modèle, que nous avons repris. Les propriétés de cet équivalent isotrope du Li NbO₃ sont rappelées en Annexe 4.

Pour notre étude, nous avons donc retenu deux paramètres essentiels à savoir la géométrie de l'obstacle (arêtes simples à 90° et à 270°, marches, rainures) et le coefficient de Poisson σ . Ce dernier pourra prendre des valeurs variant entre 0.123 et 0.380, suivant les cas considérés.

Pour chaque simulation, nous avons déterminé :

- Le facteur de réflexion, en module et phase, $\mathcal{R} = R e^{j\phi_R}$;
- Le facteur de transmission, en module et phase $\mathcal{T} = T e^{j\phi_T}$;
- Le facteur de conversion en ondes volumiques, V , calculé par bilan énergétique : $\mathcal{V} = 1 - |\mathcal{R}|^2 - |\mathcal{T}|^2$.

III-2. DIFFRACTION D'UNE ONDE ÉLASTIQUE DE SURFACE PAR DES ARÊTES SIMPLES A 90° ET À 270° :

1) PREVISIONS SUR LE COMPORTEMENT DE L'ONDE DE SURFACE :

On sait qu'un élément matériel situé au voisinage d'une surface n'est soumis à des contraintes que de la part du solide environnant. Par conséquent, il est évident qu'une arête à 90° sera soumise à un plus petit nombre de contraintes qu'une surface plane, alors qu'à l'opposé, une arête à 270° sera soumise à un plus grand nombre de contraintes qu'une surface plane. En conséquence, on peut s'attendre à ce que l'amplitude de vibration d'une arête à 90° soit plus grande que celle d'une arête à 270°.

2) RESULTATS :

Les études antérieures effectuées au Laboratoire^{9,14,15,17,18} ont permis de présenter l'évolution de R, T, ϕ_R, ϕ_T, V , pour les deux types d'arête, en fonction de σ , dans les planches III-3, III-4 et III-5.

3) COMPARAISON AVEC DIVERS AUTEURS :

Tout d'abord, nous constatons les faits suivants en accord avec les prévisions :

- l'arête à 90° se comporte comme un ventre de vibration. En outre, la transmission est importante (elle varie de 0.7 à 0.8) alors que la réflexion ne varie qu'entre 0.2 et 0.6. On a ainsi une conversion en ondes de volume n'excédant pas 60 %.

- L'arête à 270° se comporte comme un noeud de vibration. Les valeurs des facteurs de réflexion et de transmission, en module, restent voisines, autour de 0.15, alors que la conversion en ondes de volume est très importante, de l'ordre de 96 %.

Ensuite, il est très intéressant de comparer les résultats actuels acquis ^{10,16} avec ceux obtenus par d'autres auteurs tels DE BREMAECKER ⁸, KNOPOFF et GANGI ³³, PILANT et SCHWAB ⁵⁶, MAL ⁴⁴, MUNASINGHE et FARNELL ⁴⁷⁻⁴⁹. Le tableau III-6 les résume.

Dans le cas de l'arête à 90°, des mesures expérimentales ont été effectuées au Laboratoire ¹⁴. Les points correspondants ont été reportés sur la Figure III-3.

Auteurs	σ	Arête à 90°		Arête à 270°	
		R	T	R	T
(nos résultats)	0,17	0,20 ± 0,02	0,67 ± 0,03	0,09 ± 0,01	0,16 ± 0,02
	0,25	0,27 ± 0,02	0,72 ± 0,03	0,11 ± 0,01	0,15 ± 0,02
DE BREMAECKER	0,17	0,38 ± 0,04	0,63 ± 0,06		
KNOPOFF	0,266	0,27 ± 0,04	0,72 ± 0,04	<0.1	0,26 ± 0,04
PILANT	0,25	0,25 ± 0,03	0,67 ± 0,06		
MAL	0,25	0,26 ± 0,02	0,68 ± 0,02		
MUNASINGHE	0,245	0,36 ± 0,02	0,64 ± 0,02	0,09 ± 0,01	0,28 ± 0,02

TABLEAU III-6. COMPARAISON AVEC DIVERS AUTEURS.

III-3. DIFFRACTION D'UNE ONDE ÉLASTIQUE DE SURFACE PAR DES MARCHES DESCENDANTES ET MONTANTES ;

1°) PREVISIONS SUR LE COMPORTEMENT DE L'ONDE DE SURFACE :

Dans le cas d'une marche, une première approche d'une telle discontinuité semblerait être l'association de deux arêtes élémentaires en supposant que l'onde se propage en suivant les surfaces.

A partir des résultats obtenus précédemment, un calcul, basé sur la sommation des ondes ayant subi de multiples réflexions, laisse prévoir que la marche descendante donnera un maximum de réflexion pour une hauteur $H \approx 0.20 \lambda$ alors que la marche montante le donnera pour $H \approx 0,35\lambda$, dans le cas du Li NbO_3 éq. Ces courbes de réflexion sont présentées dans la planche III-7.

Toutefois, il faut bien noter que cette approche élémentaire ne convient que pour des marches dont la hauteur est assez importante ; le problème est plus complexe pour les petites marches.

Comme nous allons le voir, les résultats obtenus ne sont pas ceux espérés, car des phénomènes de conversion : onde de volume-onde de surface et inversement existent.

2°) RESULTATS :

Ils sont donnés sous forme de courbes dans les planches III-8 à III-15, en fonction de la hauteur normalisée par rapport à la longueur d'onde λ , soit : H/λ .

Trois substrats ont été étudiés, à savoir : un verre de silice : Si O_2 ; le Fer : Fe et le Niobate de Lithium équivalent (Li NbO_3 éq.).

Les planches III-8 et III-9 montrent l'évolution de R, pour les deux types de marches et nous constatons, dans le cas du Li NbO_3 éq. un maximum de réflexion autour de $H/\lambda = 0.50$ pour la marche descendante et autour de $H/\lambda = 0.25$ pour la marche montante.

Les planches III-10 et III-11 présentent l'évolution de T pour les deux types de marches. Nous observons que la transmission est sensiblement la même dans les deux cas.

Les planches III-12 et III-13 montrent les variations de phases à la réflexion ϕ_R et à la transmission ϕ_T pour les deux types de marche, dans le cas du Li NbO_3 éq., pour des valeurs de H/λ variant de 0.05 à 1.

Les planches III-14 et III-15 présentent la conversion en ondes volumiques, V , pour les deux types de marches. Elle est plus importante dans le cas de la marche montante.

Enfin, il était intéressant de voir l'évolution de l'amplitude du déplacement mécanique aux deux arêtes à 90° et à 270° . La composante U_1 du déplacement a une amplitude U_1 ; la composante U_3 a une amplitude U_3 .

La Figure III-16 présente l'amplitude normalisée $\frac{U_1}{U_{10}}$ de la composante U_1 en fonction de H/λ , tandis que la Figure III-17 donne l'amplitude normalisée $\frac{U_3}{U_{10}}$ de la composante U_3 en fonction de H/λ .

3°) COMPARAISON AVEC LES PREVISIONS ET AVEC DIVERS AUTEURS :

- Ainsi que prévu, la réflexion sur la marche descendante est plus importante que sur la marche montante.

Toutefois, les résultats obtenus par la simulation numérique ne sont pas ceux que l'on pouvait espérer à partir de l'hypothèse simple développée au 1°). En effet, la position des maxima n'est pas du tout la même.

Nous avons trouvé que la réflexion sur la marche descendante passait par un maximum autour de $H/\lambda = 0.5$, le déphasage étant de 180° environ, et que la réflexion sur la marche montante passait par un maximum autour de $H/\lambda = 0.25$, le déphasage étant de 180° environ.

- Quant aux amplitudes des composantes U_1 et U_3 du déplacement, nous observons que c'est bien l'arête à 90° qui vibre le plus (jusqu'à quatre fois plus que dans le cas sans obstacle) que ce soit pour une marche descendante ou montante.

Ceci confirme les hypothèses que nous avons avancées.

- Nous pouvons comparer nos résultats concernant le Li NbO_3 éq. à ceux qui ont été publiés par LI et MELNGAILIS ³⁷ .

Ces auteurs qui ont étudié des réseaux de rainures du point de vue expérimental, ont proposé un schéma équivalent à une marche. Cela leur a permis de donner un ensemble de relations liant les facteurs de réflexion et de transmission pour une telle discontinuité.

En appelant Γ_m et Γ_d , les facteurs de réflexion pour des marches montantes et descendantes, ils ³⁷ ont proposé :

$$\begin{aligned}\Gamma_d &= -\Gamma_m && \text{avec} && H/\lambda \ll 1 \\ \mathcal{N} = |\Gamma_d| &= |\Gamma_m| && \approx \frac{1}{3} \cdot (H/\lambda) \\ \Gamma_d &= \mathcal{N} \cdot e^{j\phi_{R_d}} && \text{et} && \Gamma_m = \mathcal{N} \cdot e^{j\phi_{R_m}}\end{aligned}$$

Par une interpolation polynomiale de nos résultats au voisinage de l'origine en H/λ , nous obtenons $\mathcal{N} \approx 0.39 \cdot (H/\lambda)$.

Quant aux phases, elles sont présentées, pour un seul substrat, (Li NbO_3 éq.), dans les Figures III-12 et III-13, pour les deux types de marches.

Les résultats expérimentaux, publiés par MARTEL, MUNASINGHE et FARNELL ⁴⁵, ont été rapportés dans les planches III-8 à III-11, ainsi que dans les planches III-14 et III-15, pour ce qui est du facteur de conversion en ondes volumiques que nous avons déduit des valeurs des coefficients de réflexion et de transmission. Ils ont utilisé un corps de coefficient de Poisson σ égal à 0.253.

Nous pouvons constater un assez bon accord entre ces valeurs expérimentales et nos résultats théoriques.

III-4. DIFFRACTION D'UNE ONDE ÉLASTIQUE DE SURFACE PAR DES RAINURES :

1°) PREVISIONS SUR LE COMPORTEMENT DE L'ONDE DE SURFACE :

Nous avons vu que, par exemple, dans le cas du Li NbO_3 éq., la marche descendante donnait un maximum de réflexion pour $H/\lambda = 0.5$, alors que la marche montante en donnait un, pour $H/\lambda = 0.25$. De ce fait, nous pouvons penser qu'une rainure donnera un maximum de réflexion à profondeur H/λ fixée, lorsque la largeur W/λ est telle que les multiples réflexions soient en phase.

Compte-tenu du fait que les marches présentent la même transmission pour une hauteur H/λ fixée, la rainure devrait donner une transmission pratiquement constante dont la valeur est voisine de celle du produit des deux transmissions sur les marches descendante et montante.

La conversion en ondes volumiques, pour sa part, devrait dépendre davantage de la profondeur H/λ de la rainure, que de la largeur W/λ .

Les amplitudes de vibration aux deux arêtes à 90° devraient être encore plus importantes que celles des arêtes à 270° .

Par contre, il est difficile de prévoir, à priori, l'influence du coefficient de Poisson, sur la réflexion.

2°) INFLUENCE DE LA GEOMETRIE :

a) Résultats :

Nous avons étudié, pour un seul matériau, le Li NbO_3 éq., l'influence de la géométrie, à savoir, la profondeur et la largeur.

Nous présentons, dans les planches III-18, III-19 et III-20, l'évolution de R , T et V en fonction de la longueur normalisée W/λ , pour un ensemble de valeurs de la profondeur H/λ .

La Figure III-21 rassemble les courbes $R_{\max} = f(H/\lambda)$, $(W/\lambda)_{\max} = g(H/\lambda)$ et $R_{\max} = p((W/\lambda)_{\max})$ où R_{\max} représente la valeur

maximale atteinte par la réflexion, pour une profondeur donnée correspondant à la largeur $(W/\lambda)_{\max}$.

Nous avons rapporté dans les planches III-22 et III-23 les variations des amplitudes normalisées des composantes U_1 et U_3 , au niveau des arêtes, à savoir : $\frac{U_1}{U_{10}}$ et $\frac{U_3}{U_{10}}$, en fonction de W/λ pour quelques valeurs de H/λ .

b) Remarques :

- Sur les courbes de réflexion, nous observons, au fur et à mesure que W/λ croît, un déplacement du maximum vers les faibles valeurs de H/λ . En même temps, pour $H/\lambda = 0.2$ et 0.25 , un minimum apparaît vers $W/\lambda = 0.55$ et semble se déplacer vers les faibles valeurs de W/λ lorsque H/λ augmente.

- La transmission est à peu près constante et dépend surtout de la profondeur H/λ . Il en est de même de la conversion en ondes volumiques.

Nous constatons que l'amplitude de vibration aux arêtes à 90° est plus forte que celle des arêtes à 270° . Ces remarques sont en accord avec les calculs effectués par SABINA et WILLIS ⁶².

3°) RAINURES DE LARGEUR $W/\lambda = 0.25$

a) Résultats :

Les rainures de largeur $W/\lambda = 0.25$ sont très couramment utilisées dans les réseaux réflecteurs ^{40,55,67}. Ainsi, nous a-t-il semblé intéressant de s'arrêter sur de telles rainures.

Les planches III-24 à III-27 montrent l'évolution de R, T, ϕ_R, ϕ_T et V en fonction de H/λ . Nous nous sommes intéressés à des petites valeurs de H/λ . ($H/\lambda < 0.20$), plus particulièrement, en vue de comparaison avec d'autres auteurs.

b) Comparaison avec des auteurs :

- TUAN et LI ⁶⁵ montrent que pour une rainure de très petite profondeur, le maximum de réflexion est atteint pour $W/\lambda = 0.25$, dans le cas du Li NbO_3 éq. et ils donnent la relation :

$R_R \approx \frac{2}{3} (H/\lambda)$ qui relie le maximum de réflexion à la profondeur de la rainure. La méthode qu'ils ont utilisée est une méthode des perturbations dérivée de celle de GILBERT et KNOPOFF ²⁶. PAREKH et TUAN ^{53,66} ont montré,

plus généralement, que pour des largeurs de rainures : $W = \frac{1}{2} \cdot k \lambda$ la réflexion est nulle, alors que pour $W = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}$, la réflexion est maximale.

- Avec les résultats que nous avons obtenu, bien que nous n'ayons pas pu aller à des profondeurs inférieures à $H/\lambda = 0.05$, nous avons tenté de donner une approximation polynomiale du facteur de réflexion, en module, en fonction de H/λ :

$$R \approx 0.57 \cdot (H/\lambda) + 4 \cdot (H/\lambda)^2 + 10.67 \cdot (H/\lambda)^3 \quad \text{avec } H/\lambda < 0.075$$

Ceci donne une pente à l'origine, égale à 0.57 alors que LI et TUAN ont trouvé 0.666.

4°) INFLUENCE DU COEFFICIENT DE POISSON :

a) Résultats :

Nous avons retenu deux géométries, à savoir :

- rainure : $H/\lambda = 0.125$ et $W/\lambda = 0.250$

- rainure : $H/\lambda = 0.250$ et $W/\lambda = 0.250$

L'étude a porté sur des substrats isotropes tels un verre de silice (SiO_2), le Zinc (Zn), un verre B₁₆₋₆₄ le fer (Fe), le Niobate de Lithium équivalent (Li NbO_3 éq.), le chrome (Cr), le Nickel (Ni), l'Aluminium (Al), et le Platine (Pt), dont les valeurs de σ s'échelonnent assez régulièrement (Voir Tableau III-1).

Toutefois, au cours de cette étude, nous avons constaté que dans le cas de matériaux ayant un coefficient de Poisson σ supérieur à 0.38, il apparaissait des oscillations des solutions numériques, dont ne nous expliquions pas la cause. Des travaux récents d'ILAN^{31,32} ont montré que ces instabilités provenaient des conditions aux limites. Cet auteur a proposé un moyen d'éviter ces phénomènes, mais, compte-tenu de l'avancement de nos travaux, il ne nous a pas été possible de les mettre en application.

Les planches III-28 à III-33 montrent les variations de R, T, V en fonction de σ , pour les deux types de rainures considérées.

Une étude de l'amplitude du déplacement de la première arête à 90° a permis de tracer des variations de $\frac{|U_1|}{U_{10}}$ et de $\frac{|U_3|}{U_{10}}$ en fonction de σ pour les deux types de rainures.

Ceci est reporté dans les planches III -34 et III-35.

b) Commentaires :

L'influence du coefficient de Poisson se traduit par un minimum de réflexion autour de $\sigma \approx 0.25$ et un maximum de réflexion autour de $\sigma \approx 0.340$, dans le cas de la rainure de profondeur $H/\lambda \approx 0.125$ et de largeur $W/\lambda \approx 0.250$.

Le maximum se situe dans une zone où la vitesse longitudinale de l'onde de volume est deux fois la vitesse transversale, et où la vitesse longitudinale est voisine du double de celle de l'onde de Rayleigh, de ce fait, il est possible qu'un couplage de mode ait lieu, donnant une amplification du coefficient de réflexion.

Nous observons que lorsque σ augmente, la transmission est croissante, alors que la conversion en ondes volumiques est décroissante, pour les deux types de rainures.

5°) AUTRES RESULTATS : CAS DES RAINURES CARREES :

A partir des planches III-18 à III-20 concernant l'étude de la géométrie de la rainure, il nous est possible de connaître le comportement de rainures pour lesquelles les valeurs de H/λ et W/λ sont égales.

Afin de compléter les résultats concernant le Li NbO_3 éq., nous avons étudié le verre SiO_2 ^{18,19} et le zinc (Zn) de telle manière à avoir un échantillonnage des valeurs de σ .

Les planches III - 36 à III -38 présentent l'évolution de R, T et V, en fonction de H/λ , pour les trois corps retenus.

Nous remarquons que les courbes de réflexion restent groupées, il en est de même des courbes de transmission, ainsi que celles de la conversion en ondes volumiques.

Autour de $H/\lambda = 0.25$, la réflexion accuse un léger maximum, alors que la transmission passe brutalement de 0.8 à 0.2.

L'influence du coefficient de Poisson ne semble donc pas être importante, seule la largeur (ou, ici, la profondeur) est un paramètre prépondérant.

PRINCIPALES CARACTERISTIQUES DES SUBSTRATS ETUDIES

Substrats	σ	V_L	V_t	V_R	V_t/V_L	τ_v	ρ en 10^3 kg/m^3	E en 10^{10} N/m^2	λ en 10^{10} N/m^2	μ en 10^{10} N/m^2
Be	0.050	12896.085	8880.465	7831.724	0.689	1.999	1.864	30.870	1.600	14.700
SiO ₂	0.123	5730.087	3758.128	3376.261	0.656	2.030	2.202	7.000	1.010	3.110
Zr	0.210	3790.806	2296.775	2097.848	0.606	2.113	7.050	90.000	2.693	3.719
B16.64	0.213	6023.430	3637.320	3321.687	0.604	2.118	2.520	8.090	2.475	3.334
Fe	0.240	5468.878	3198.985	2937.906	0.585	2.157	7.880	20.000	7.440	8.064
LiNbO ₃ éq.	0.309	7143.450	3754.520	3488.000	0.526	2.314	4.700	17.340	10.730	6.625
Cr	0.310	8126.405	4267.498	3965.190	0.525	2.315	5.200	24.800	15.400	9.470
Ni	0.325	5988.972	3049.728	2840.275	0.509	2.366	8.925	22.000	15.410	8.301
Al	0.340	6316.351	3109.722	2902.717	0.492	2.425	2.700	7.000	5.550	2.611
Cu	0.340	4153.987	2045.174	1909.032	0.492	2.425	8.920	10.000	7.930	3.731
Pt	0.380	3951.437	1694.500	1590.865	0.440	2.645	21.450	17.000	19.500	5.159
Ag	0.390	3774.475	1602.676	1507.800	0.425	2.720	10.500	7.500	9.560	2.698
Au	0.420	3252.898	1207.918	1141.420	0.371	3.040	19.300	8.000	14.790	2.817
Pb	0.446	2224.900	719.438	681.386	0.323	3.432	11.341	1.700	4.440	0.587

$$\tau_v = \frac{1}{V_R} \sqrt{V_L^2 + V_t^2}$$

V_L : Vitesse de compression

V_t : Vitesse de cisaillement

V_R : Vitesse de RAYLEIGH

λ, μ : Constantes de LAME

σ : Coefficient de POISSON

E : Module d'YOUNG

ρ : Masse volumique

TABLEAU III-1.

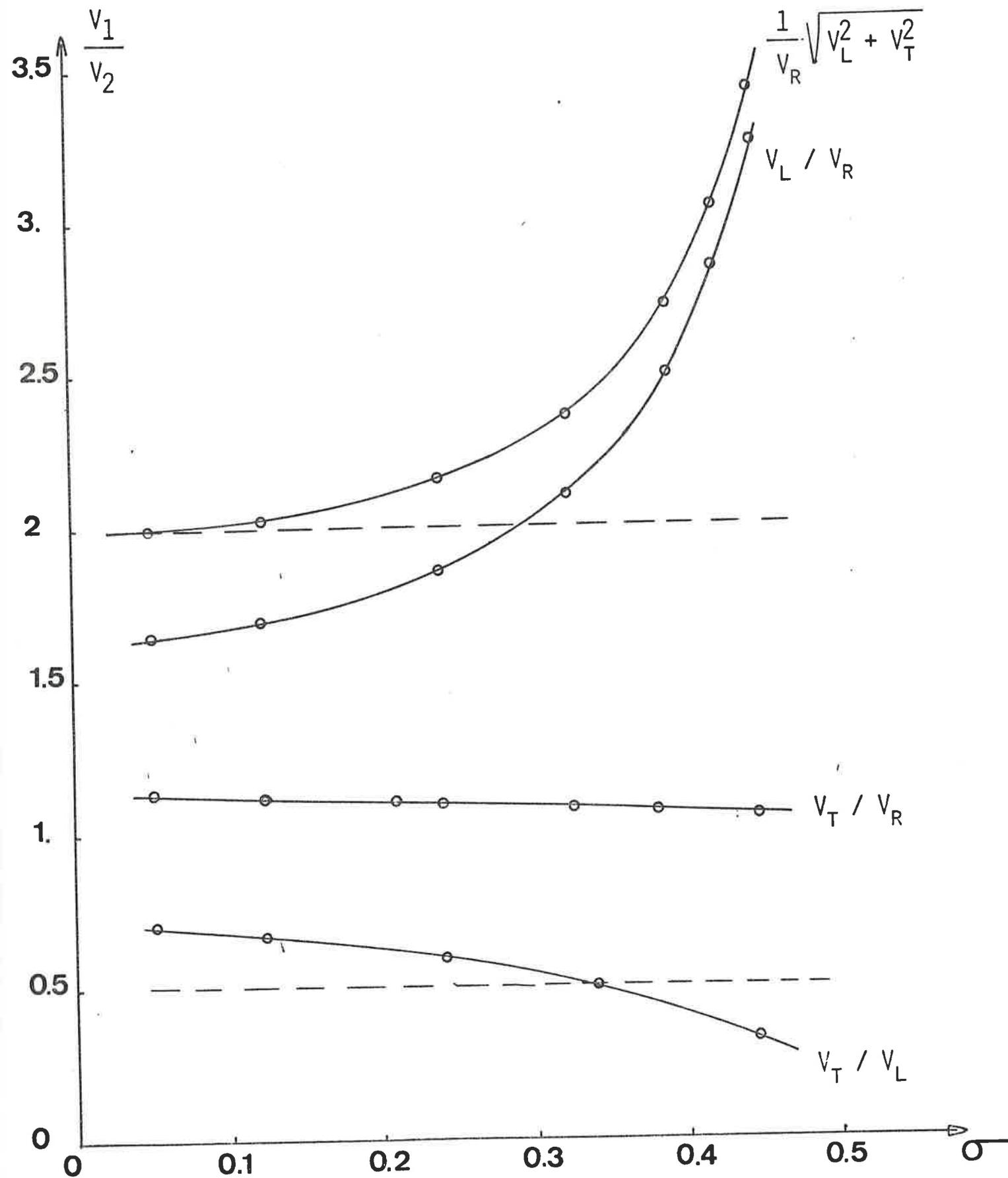


FIGURE III-2 . TABLEAU DE VITESSES RELATIVES

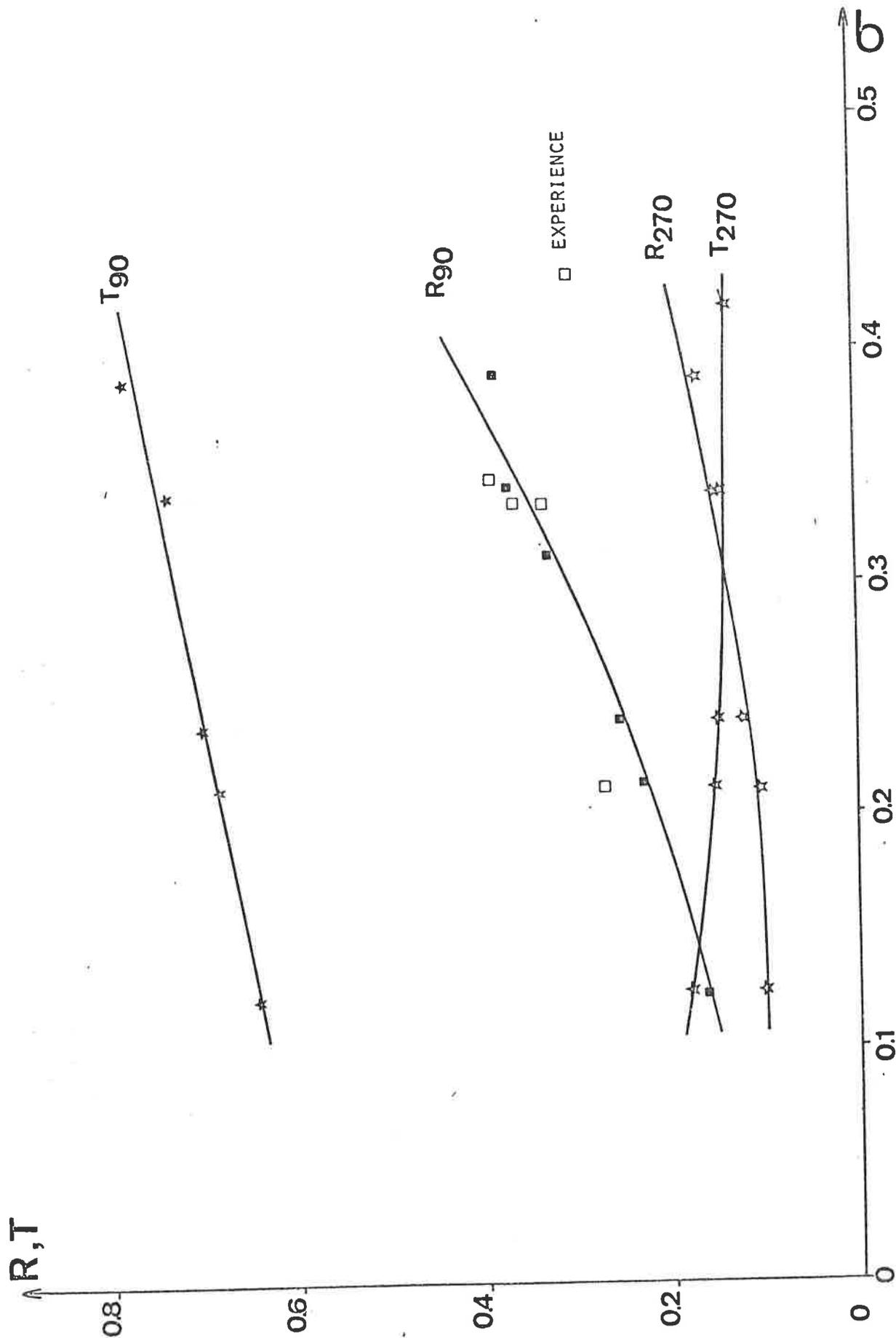


PLANCHE III-3 . MODULE DU FACTEUR DE RÉFLEXION ET DU FACTEUR DE TRANSMISSION DANS LE CAS DES ARÊTES
 A 90° ET A 270° , EN FONCTION DU COEFFICIENT DE POISSON σ .

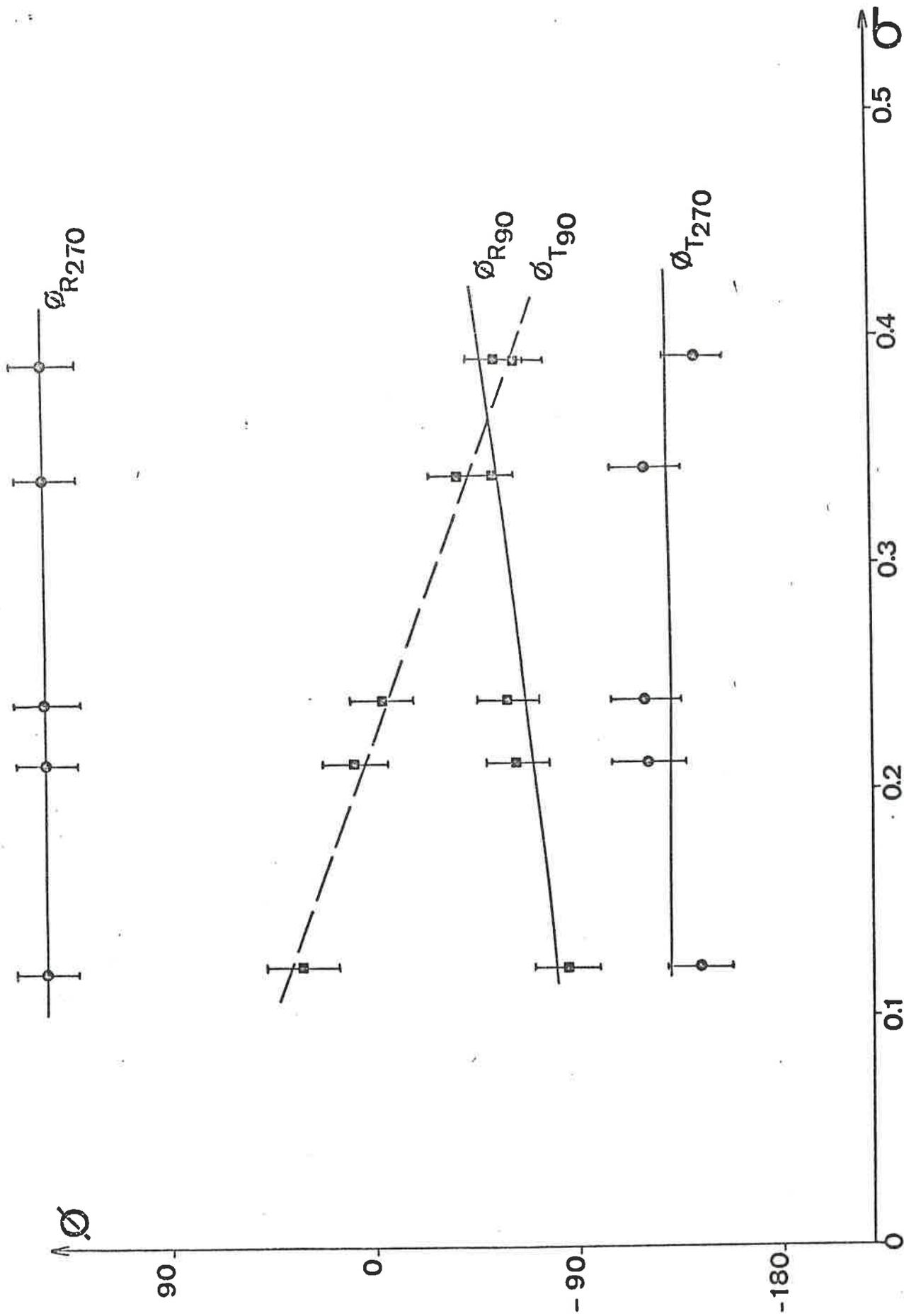


PLANCHE III-4 . PHASES À LA RÉFLEXION ET À LA TRANSMISSION DANS LE CAS DES ARÊTES À 90° ET À 270° , EN FONCTION DU COEFFICIENT DE POISSON σ . 47

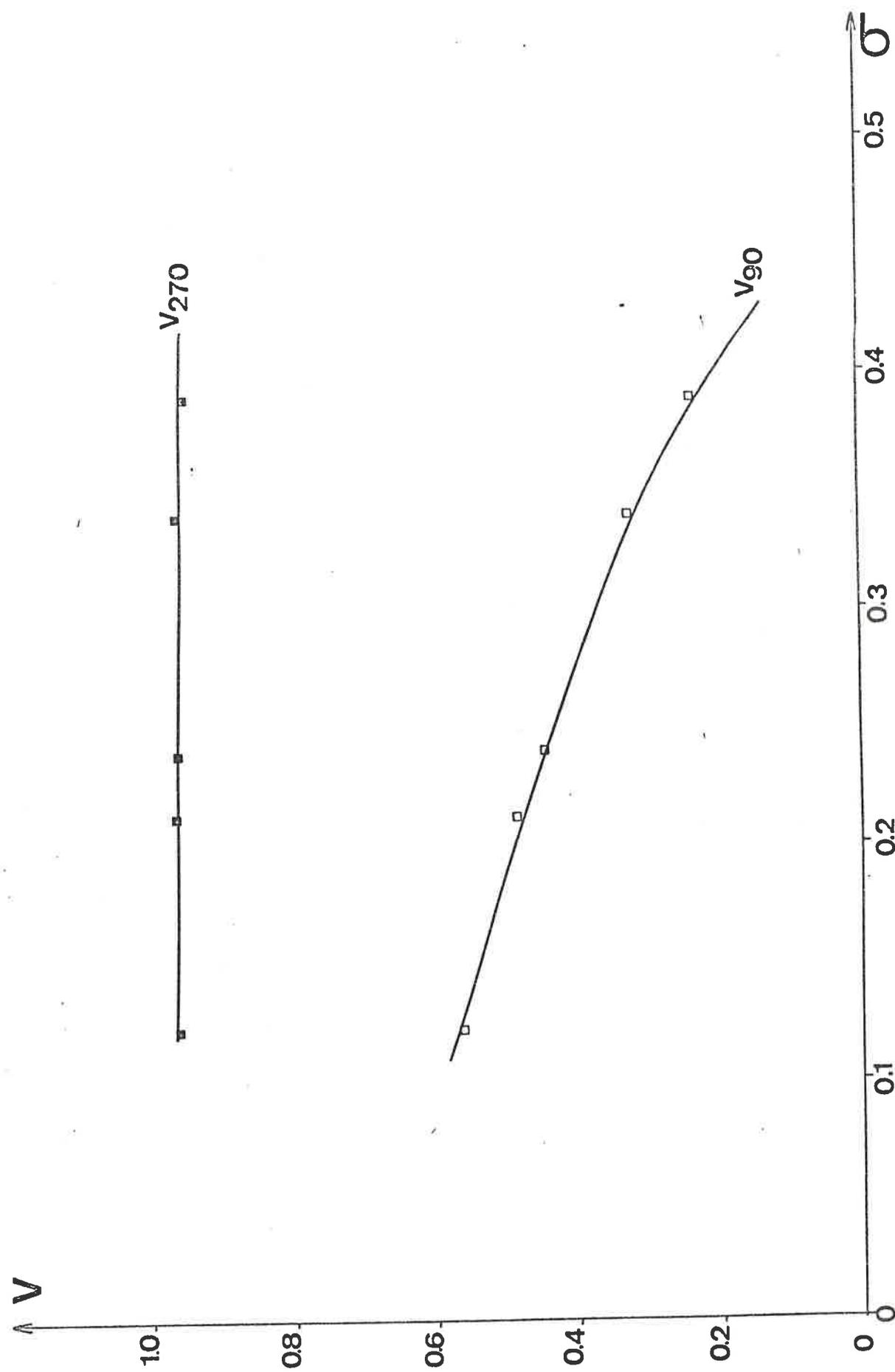


PLANCHE III-5 . FACTEUR DE CONVERSION EN ONDES VOLUMIQUES DANS LE CAS DES ARÊTES À 90° ET À 270° , EN FONCTION DU COEFFICIENT DE POISSON σ .

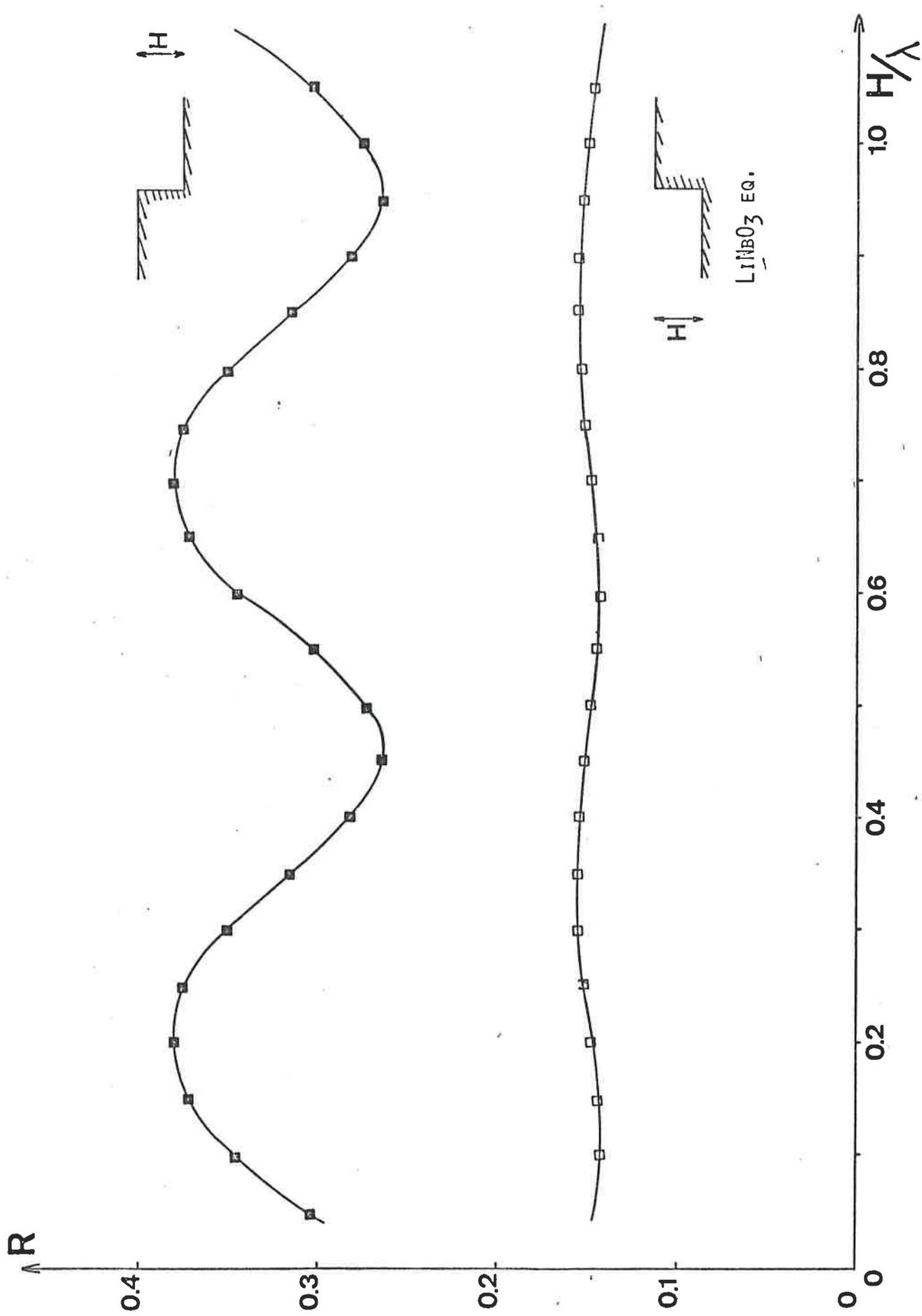


PLANCHE III-7 . MODULE DU FACTEUR DE RÉFLEXION DANS LE CAS DES MARCHES DESCENDANTES ET MONTANTES ,
 EN FONCTION DE LA HAUTEUR NORMALISÉE H/λ , OBTENU PAR SIMULATION ANALYTIQUE .

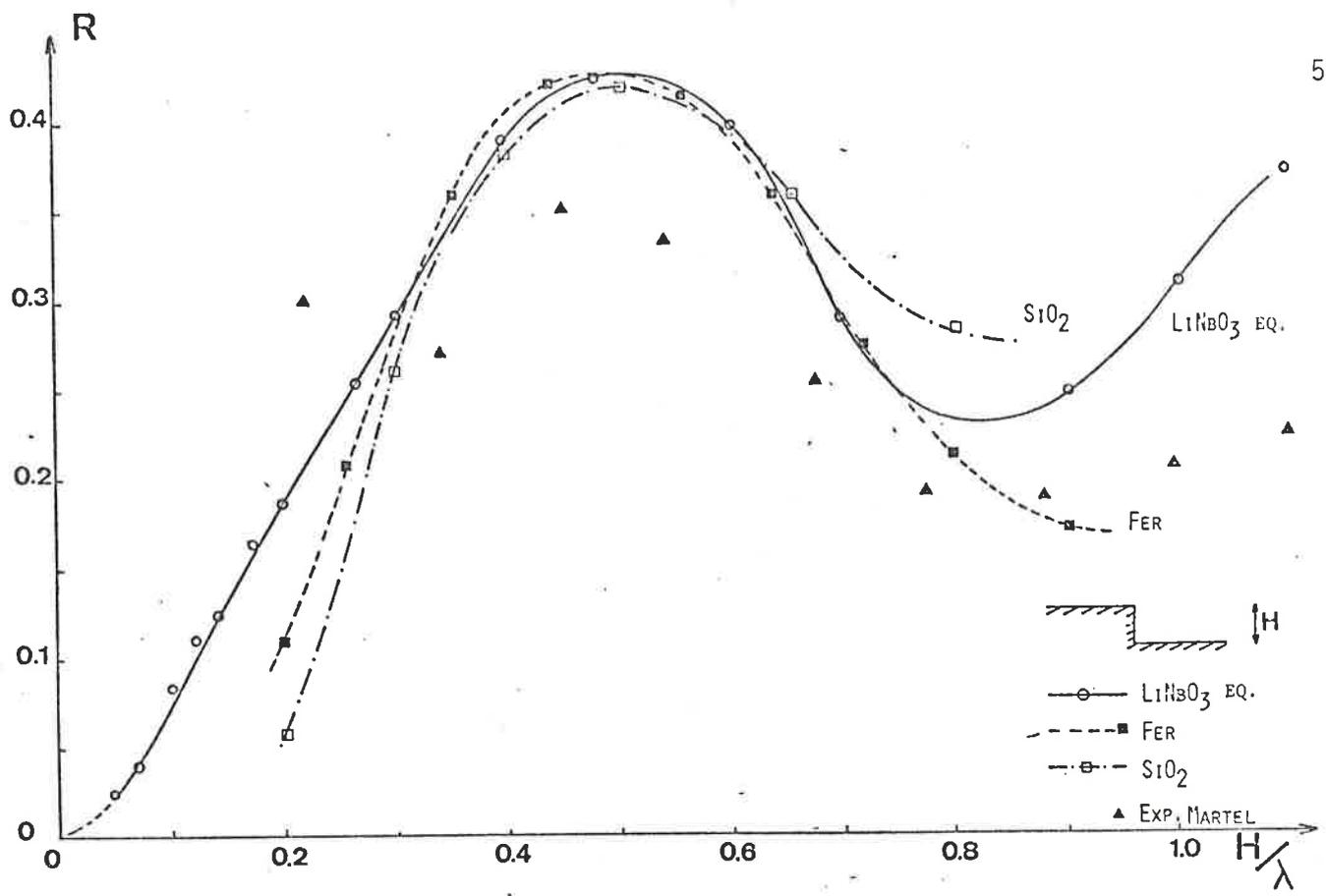


PLANCHE III-8 . MODULE DU FACTEUR DE RÉFLEXION DANS LE CAS D'UNE MARCHÉ DESCENDANTE , EN FONCTION DE LA HAUTEUR NORMALISÉE H / λ .

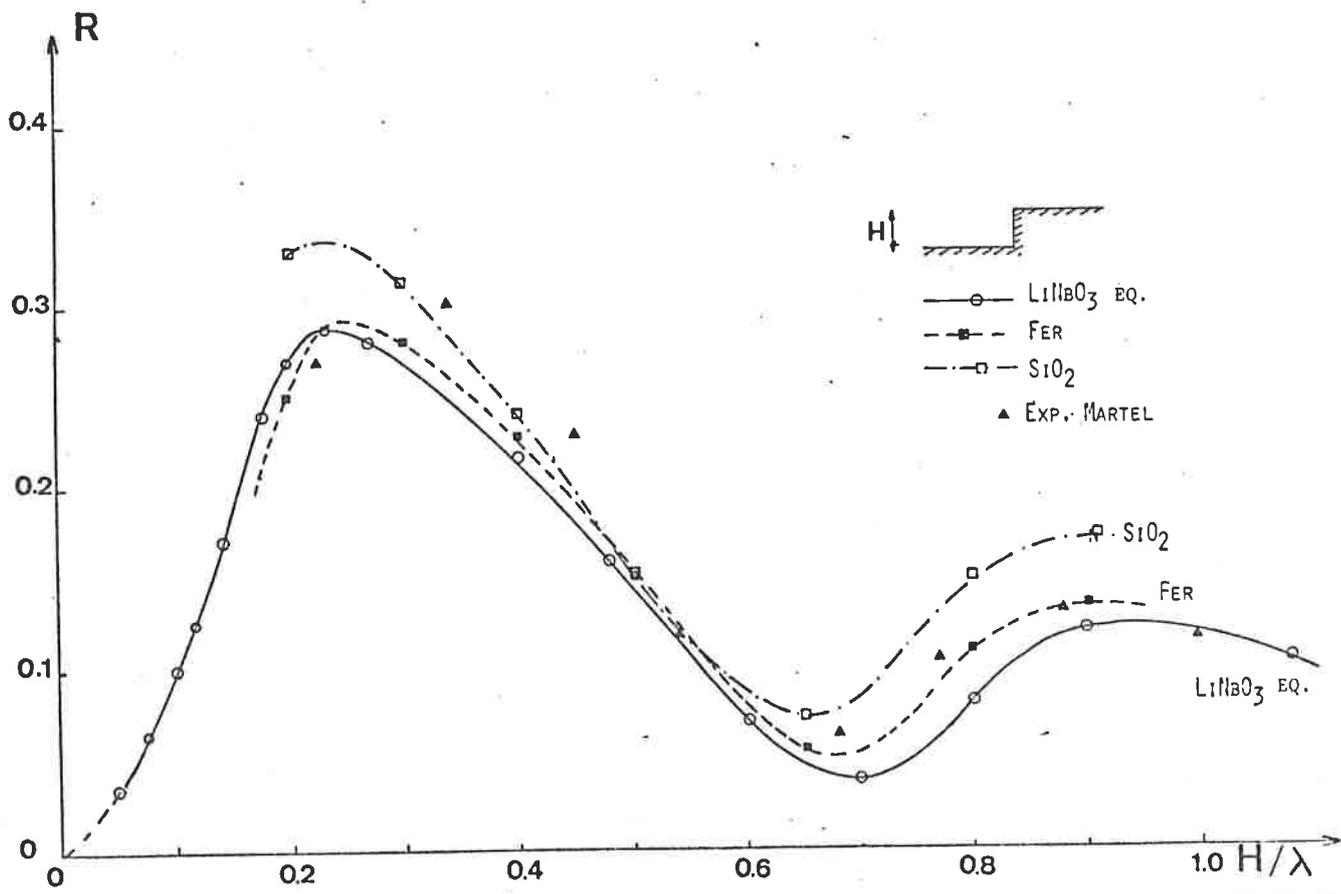


PLANCHE III-9 . MODULE DU FACTEUR DE RÉFLEXION DANS LE CAS D'UNE MARCHÉ MONTANTE , EN FONCTION DE LA HAUTEUR NORMALISÉE H / λ .

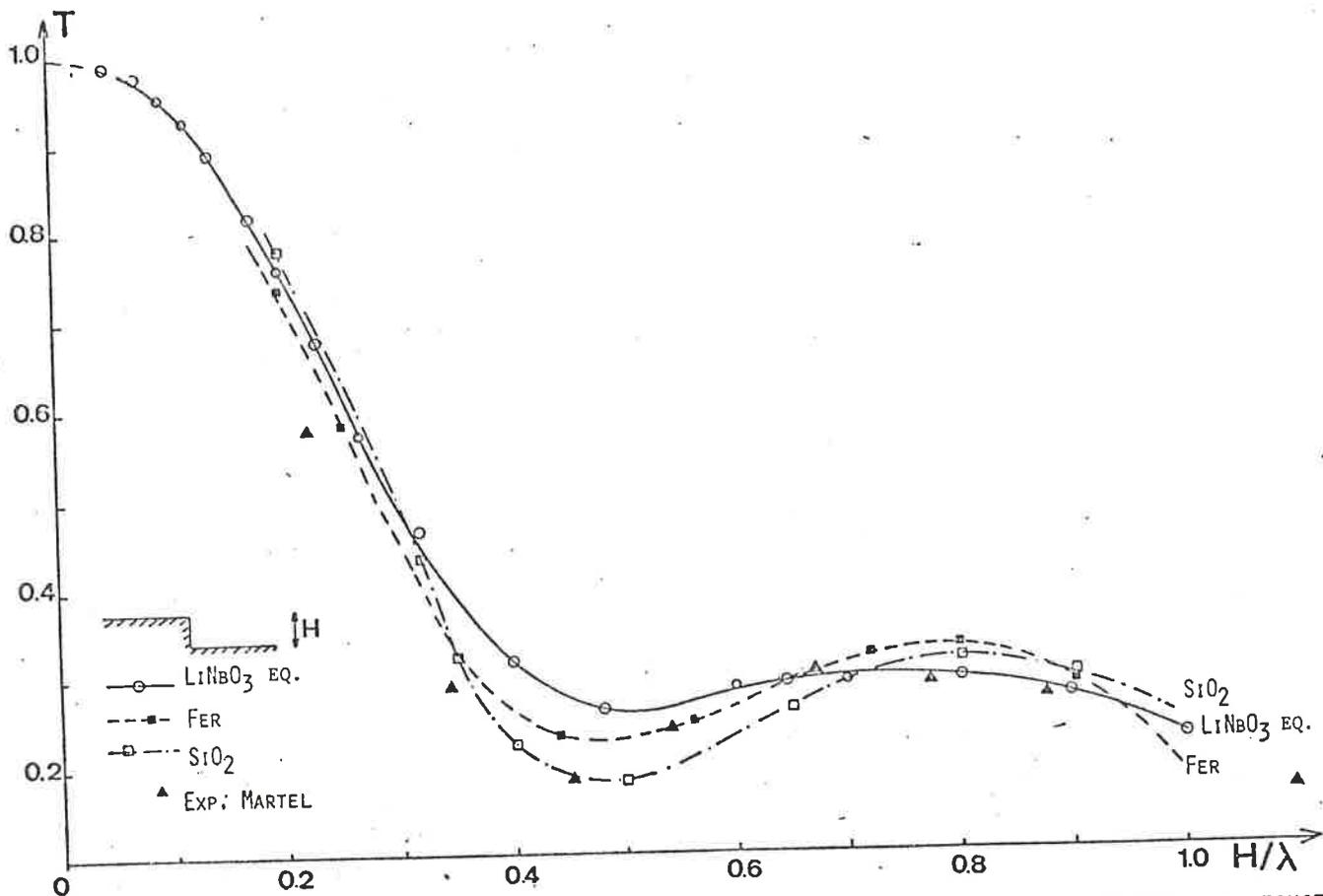


PLANCHE III-10 , MODULE DU FACTEUR DE TRANSMISSION DANS LE CAS D'UNE MARCHE DESCENDANTE , EN FONCTION DE LA HAUTEUR NORMALISÉE H / λ .

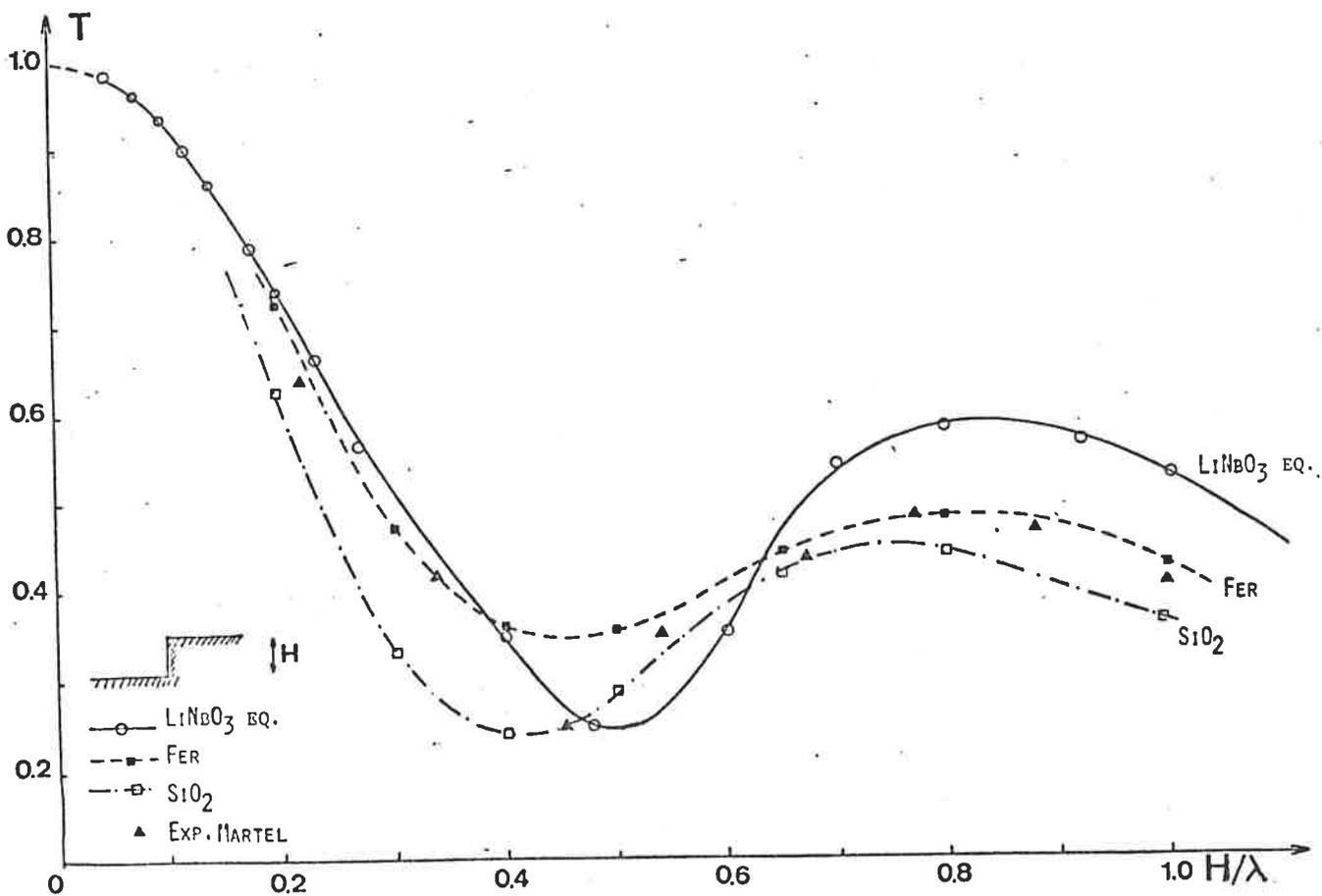


PLANCHE III-11 , MODULE DU FACTEUR DE TRANSMISSION DANS LE CAS D'UNE MARCHE MONTANTE , EN FONCTION DE LA HAUTEUR NORMALISÉE H / λ .

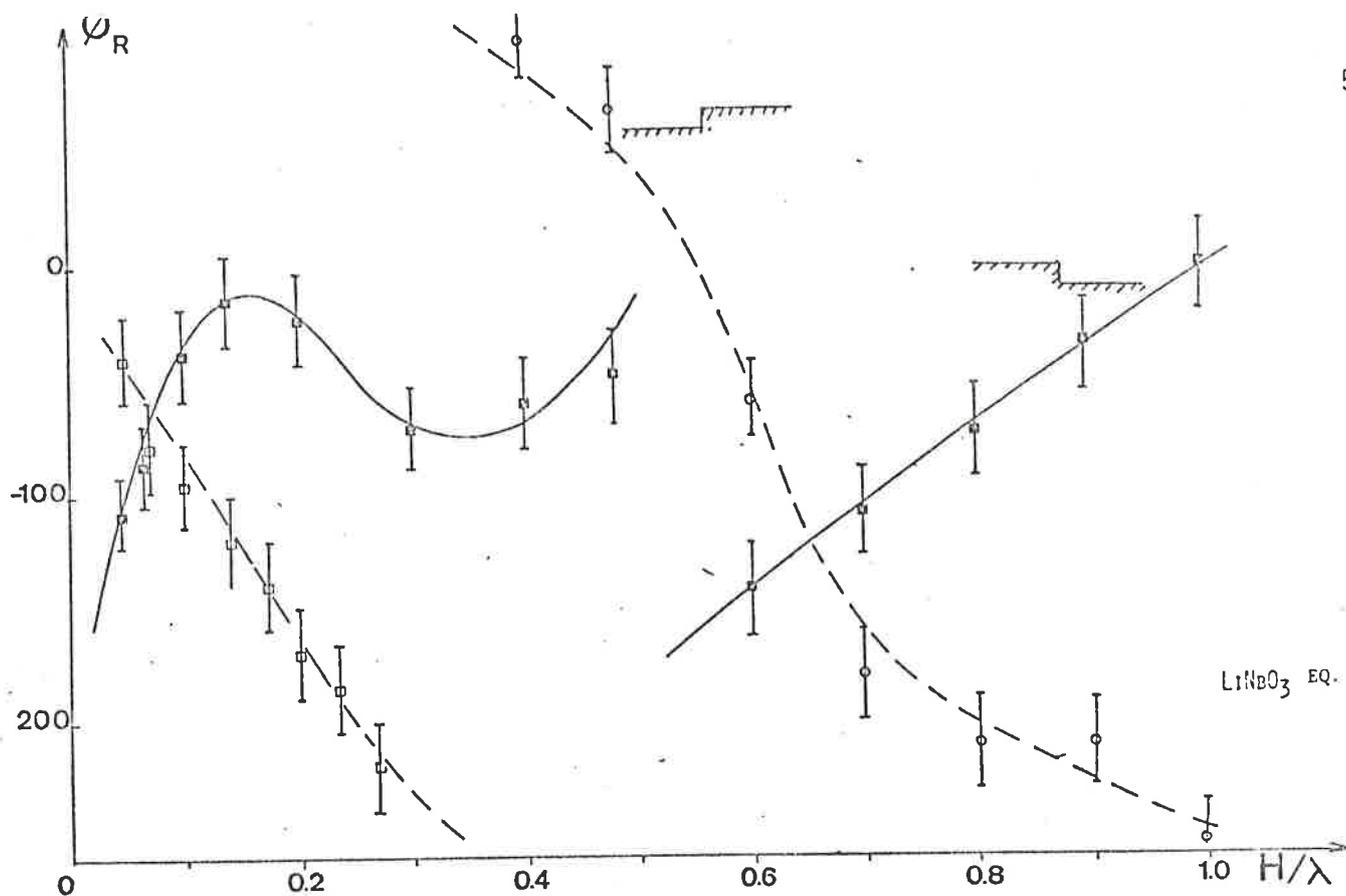


PLANCHE III-12 . PHASE À LA RÉFLEXION POUR LES DEUX TYPES DE MARCHÉ , EN FONCTION DE LA HAUTEUR NORMALISÉE H / λ .

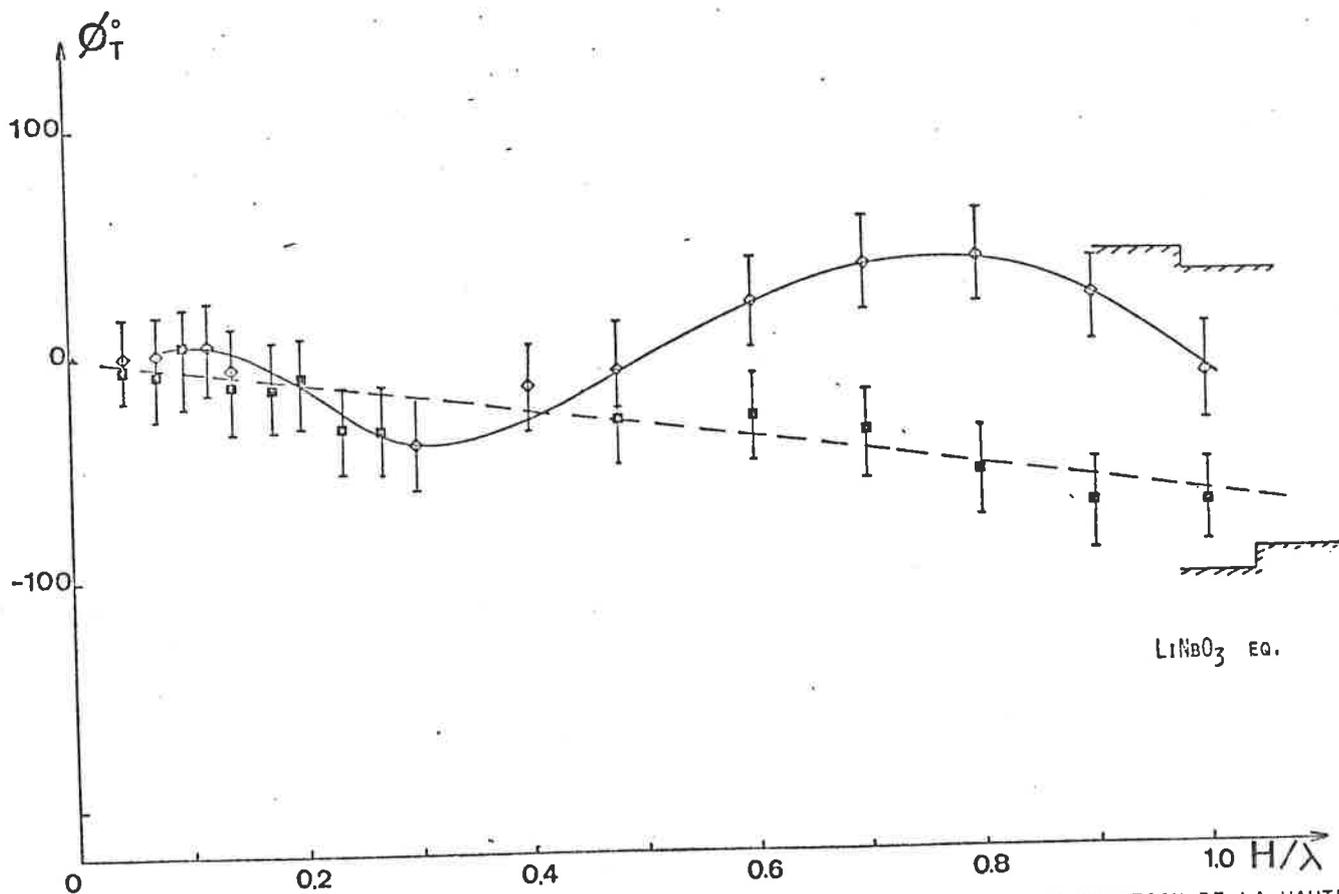


PLANCHE III-13 . PHASE À LA TRANSMISSION POUR LES DEUX TYPES DE MARCHÉ , EN FONCTION DE LA HAUTEUR NORMALISÉE H / λ .

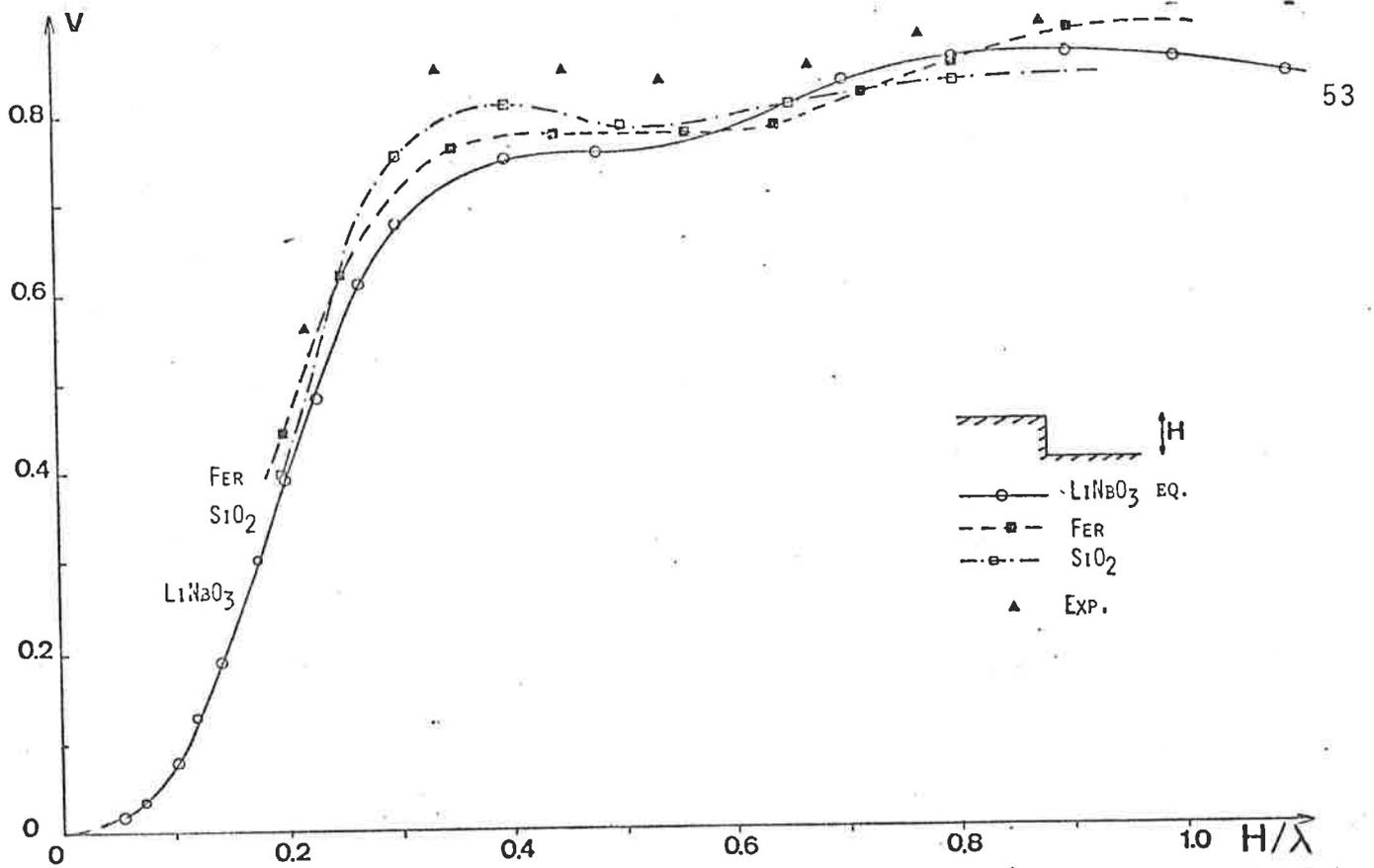


PLANCHE III-14 . FACTEUR DE CONVERSION EN ONDES VOLUMIQUES DANS LE CAS D'UNE MARCHÉ DESCENDANTE ,
EN FONCTION DE LA HAUTEUR NORMALISÉE H / λ .

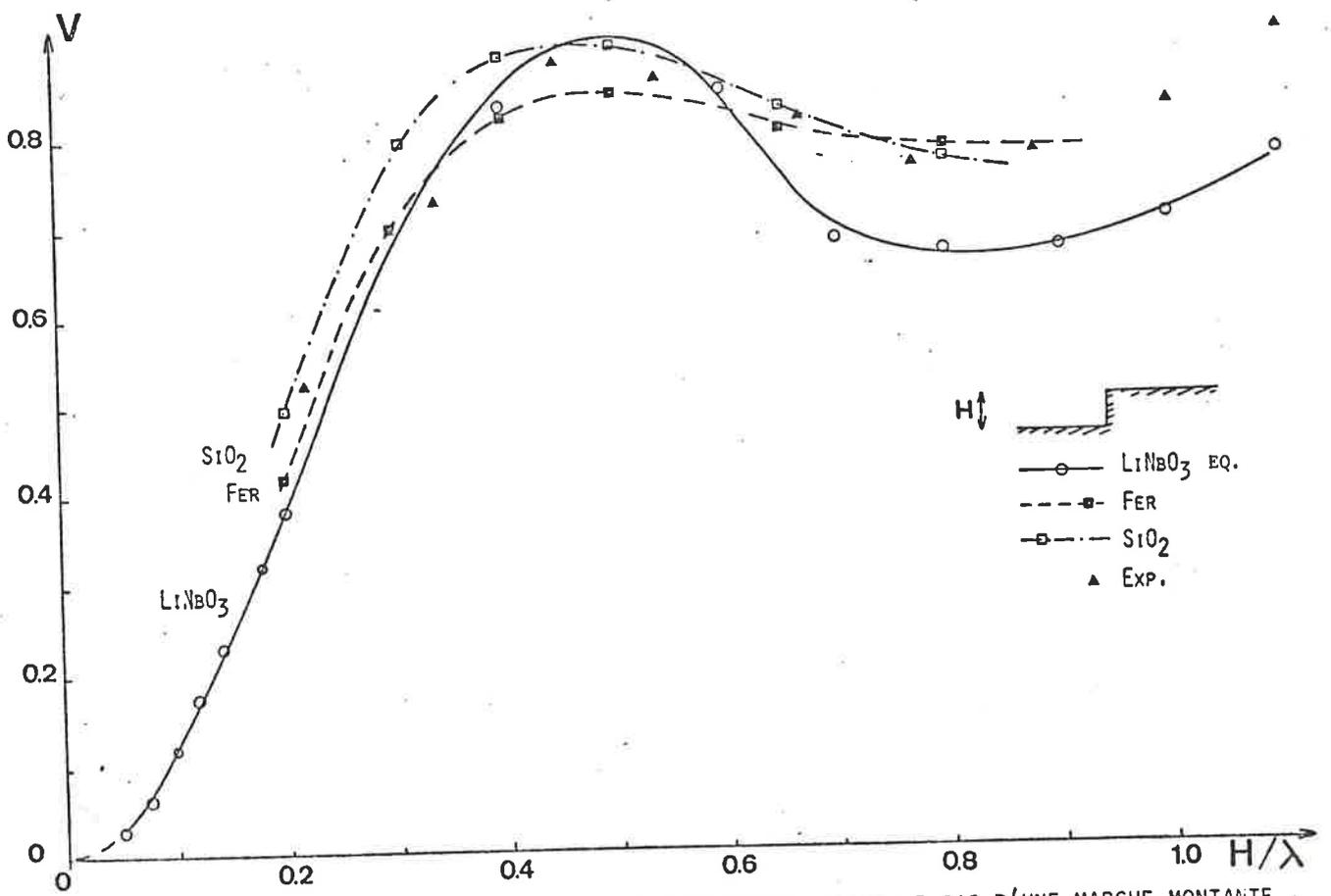


PLANCHE III-15 , FACTEUR DE CONVERSION EN ONDES VOLUMIQUES DANS LE CAS D'UNE MARCHÉ MONTANTE ,
EN FONCTION DE LA HAUTEUR NORMALISÉE H / λ .

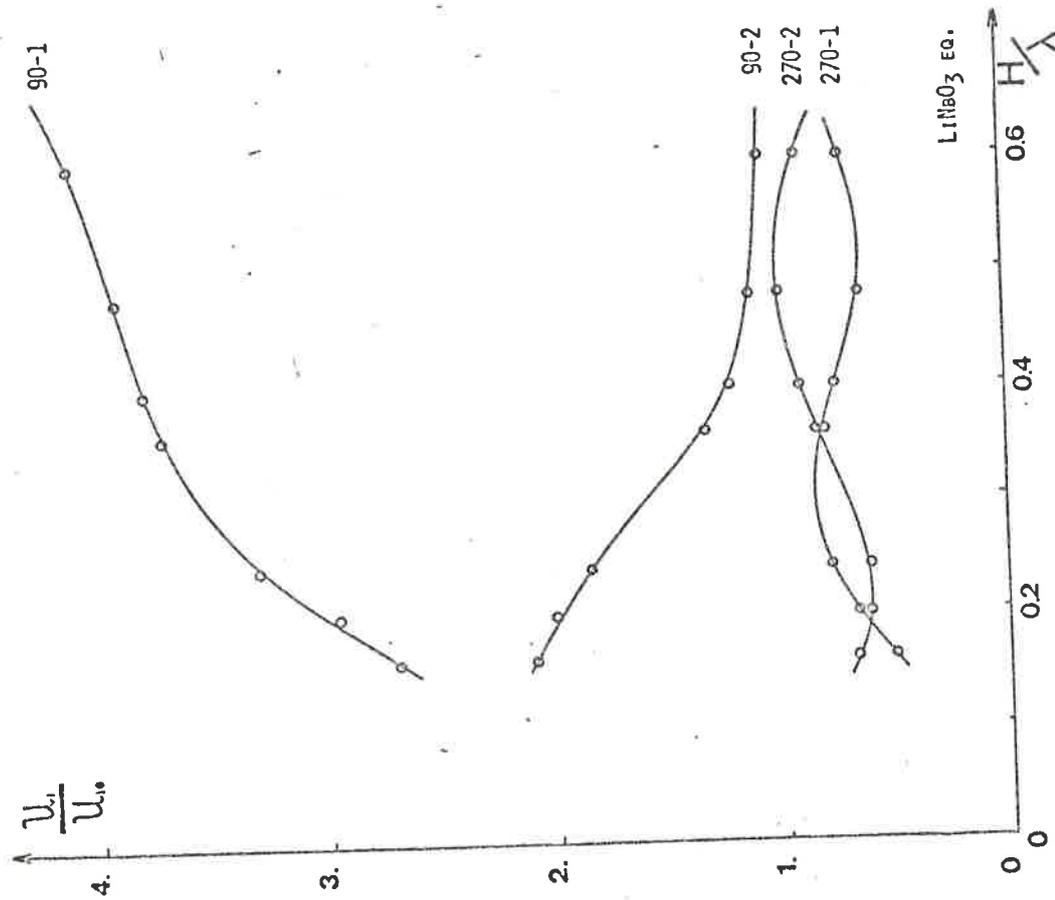


PLANCHE III-16 . COURBES D'AMPLITUDE NORMALISÉE DE U_1 POUR LES DEUX POINTS D'ANGLE DE CHAQUE TYPE DE MARCHÉ , EN FONCTION DE LA HAUTEUR NORMALISÉE H / λ .

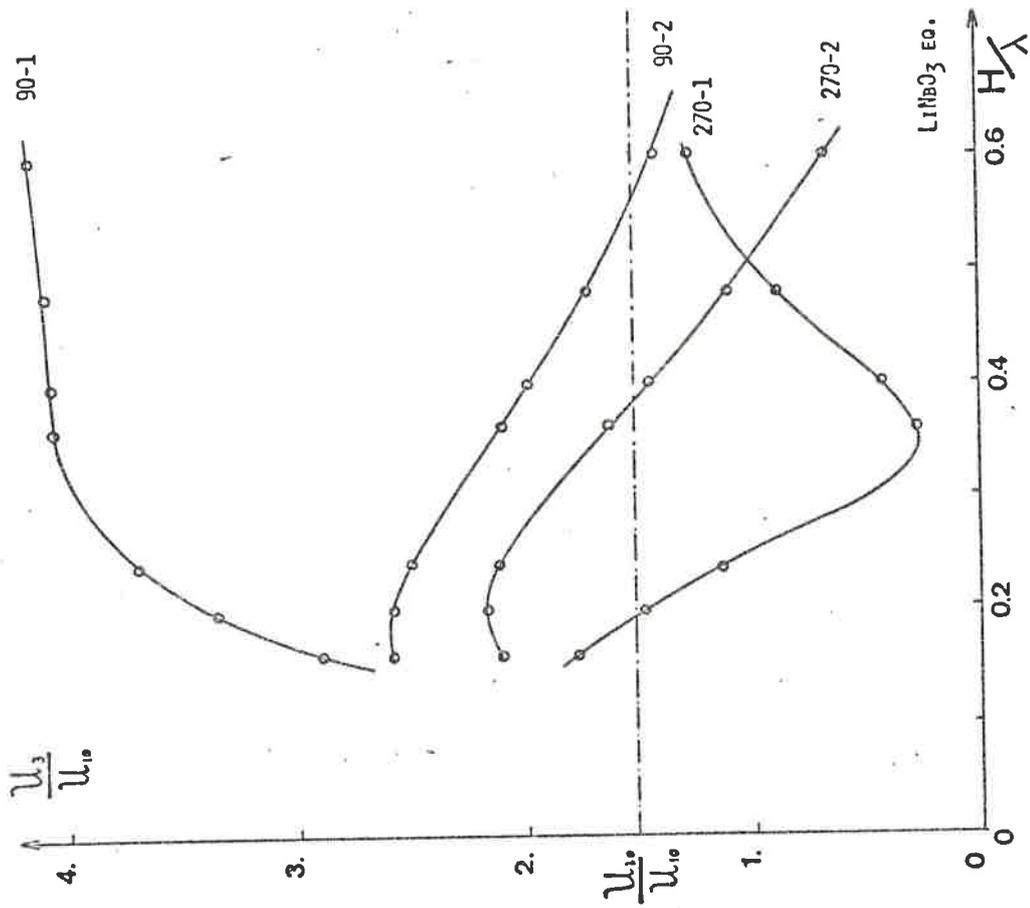


PLANCHE III-17 . COURBES D'AMPLITUDE NORMALISÉE DE U_3 POUR LES DEUX POINTS D'ANGLE DE CHAQUE TYPE DE MARCHÉ , EN FONCTION DE LA HAUTEUR NORMALISÉE H / λ .

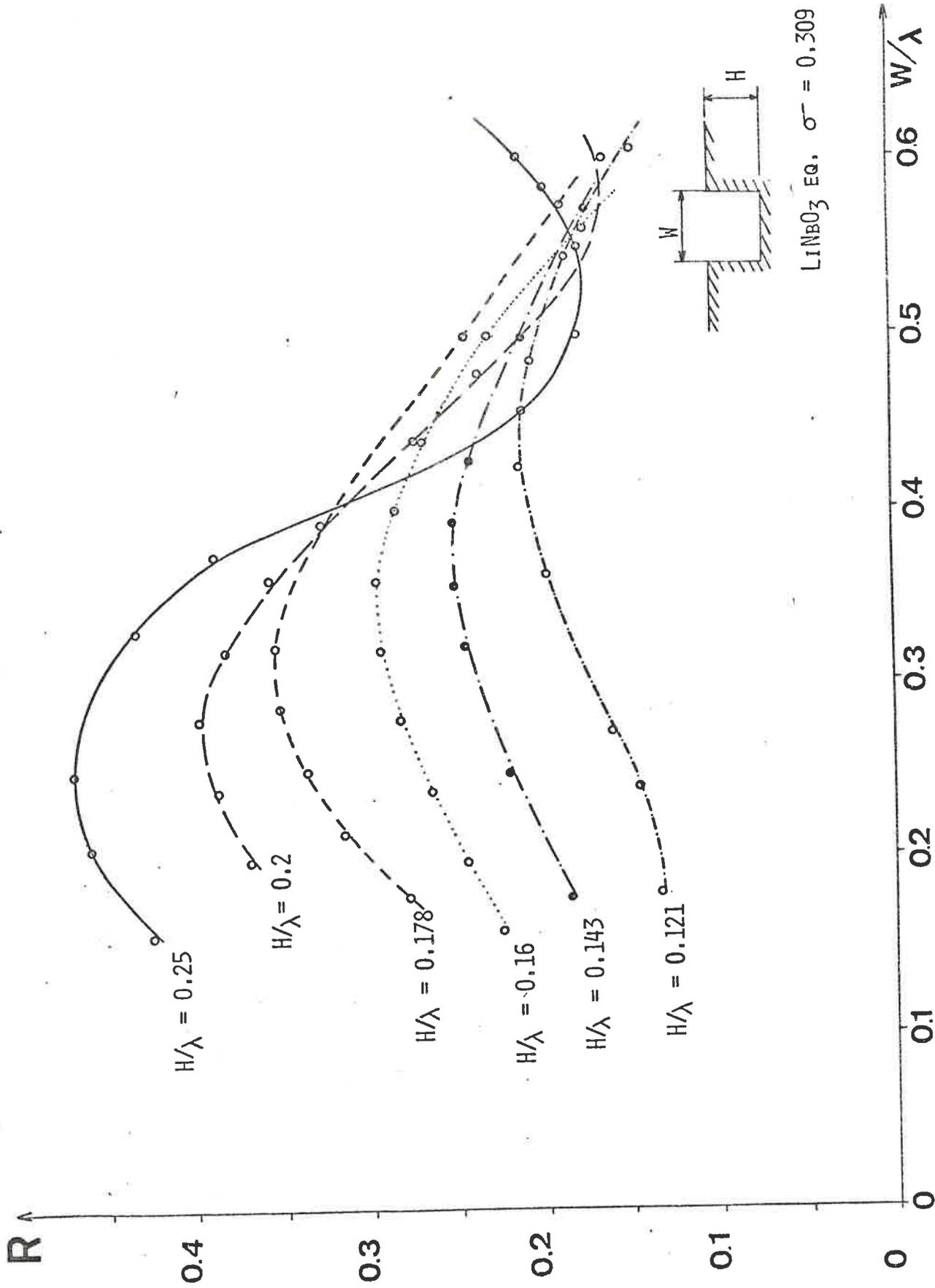


PLANCHE III-18 . MODULE DU FACTEUR DE RÉFLEXION DANS LE CAS D'UNE RAINURE , EN FONCTION DE LA LARGEUR NORMALISÉE W/λ , (H/λ FIXÉE) .

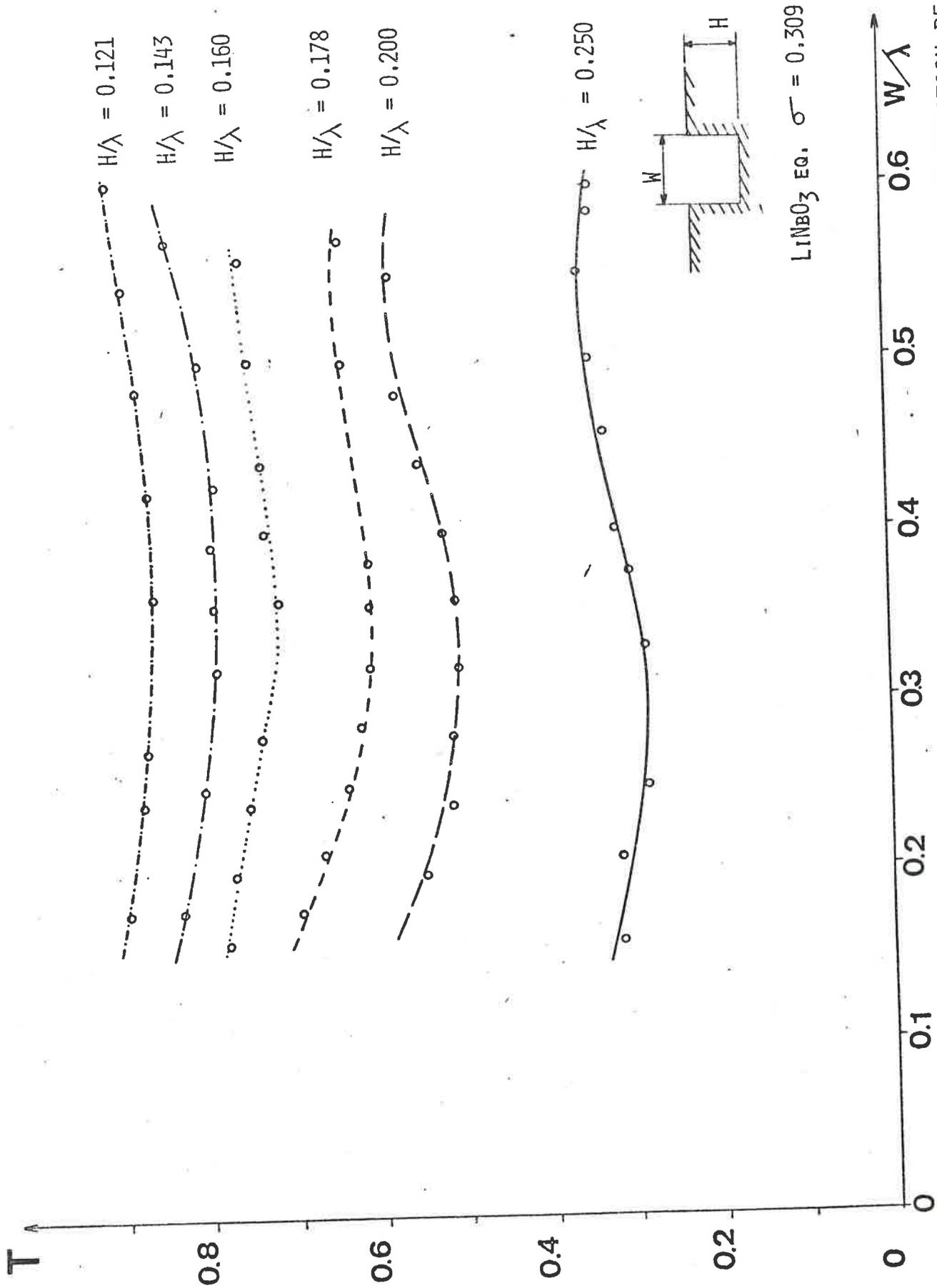


PLANCHE III-19 . MODULE DU FACTEUR DE TRANSMISSION DANS LE CAS D'UNE RAINURE , EN FONCTION DE LA LARGEUR NORMALISÉE W/λ , (H/λ FIXÉE) .

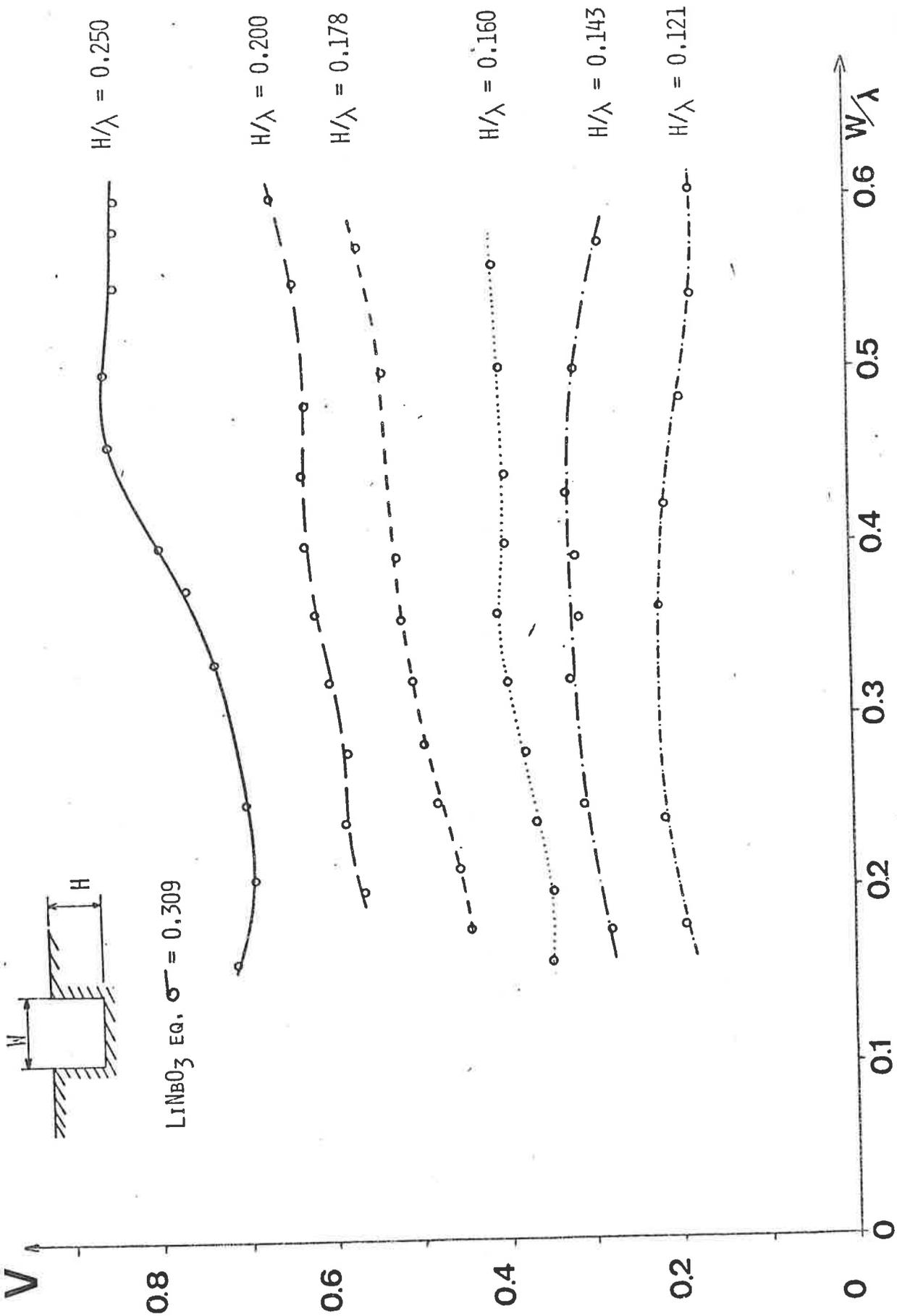


PLANCHE III-20 . FACTEUR DE CONVERSION EN ONDES VOLUMIQUES DANS LE CAS D'UNE RAINURE , EN FONCTION DE LA
 LARGEUR NORMALISÉE W/λ , (H/λ FIXÉE) .

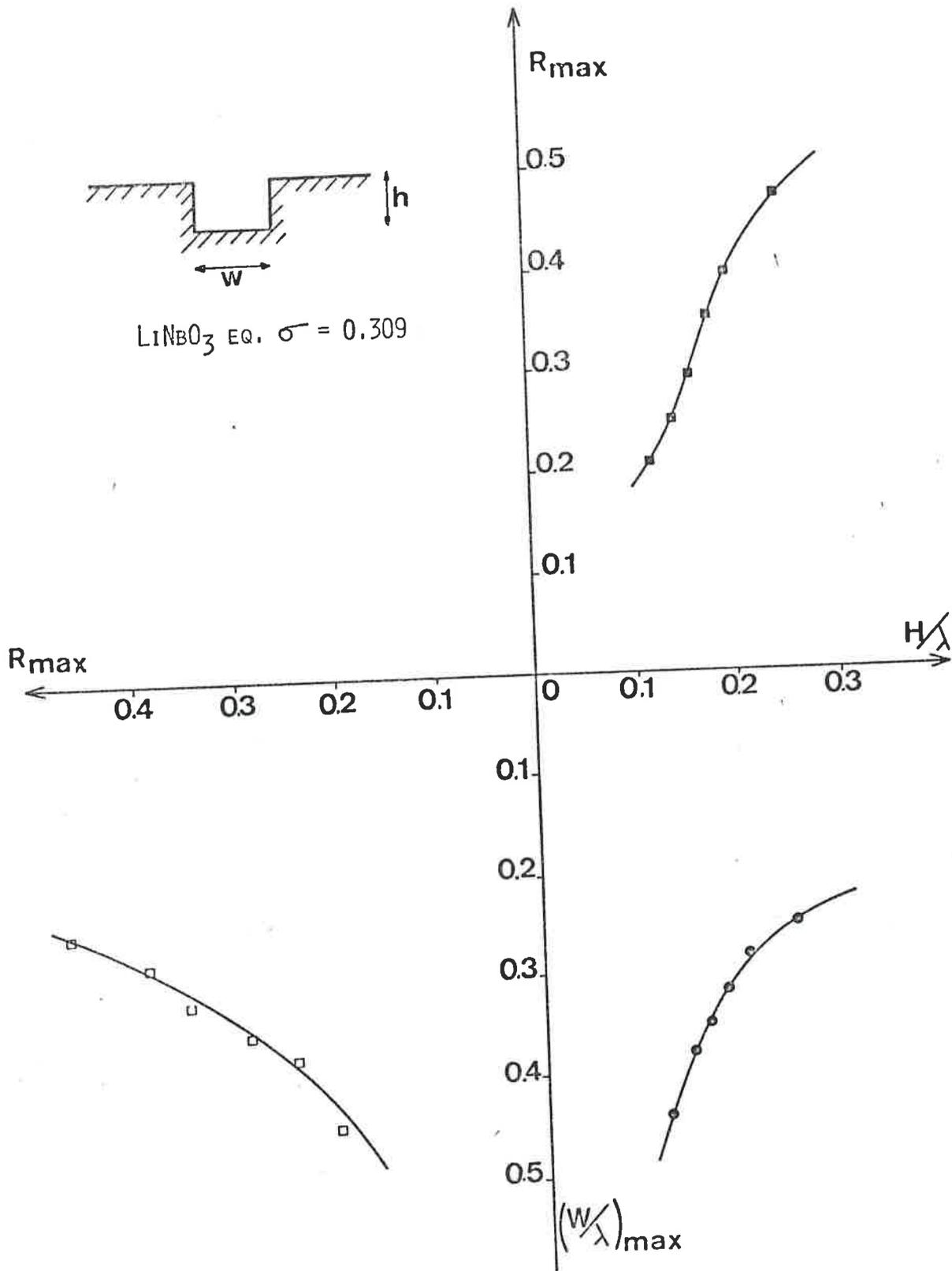


PLANCHE III-21 . CARACTÉRISTIQUES DU MODULE MAXIMAL DU FACTEUR DE RÉFLEXION R_{MAX} ET DE LA LARGEUR NORMALISÉE $(W/\lambda)_{\text{MAX}}$ CORRESPONDANTE .

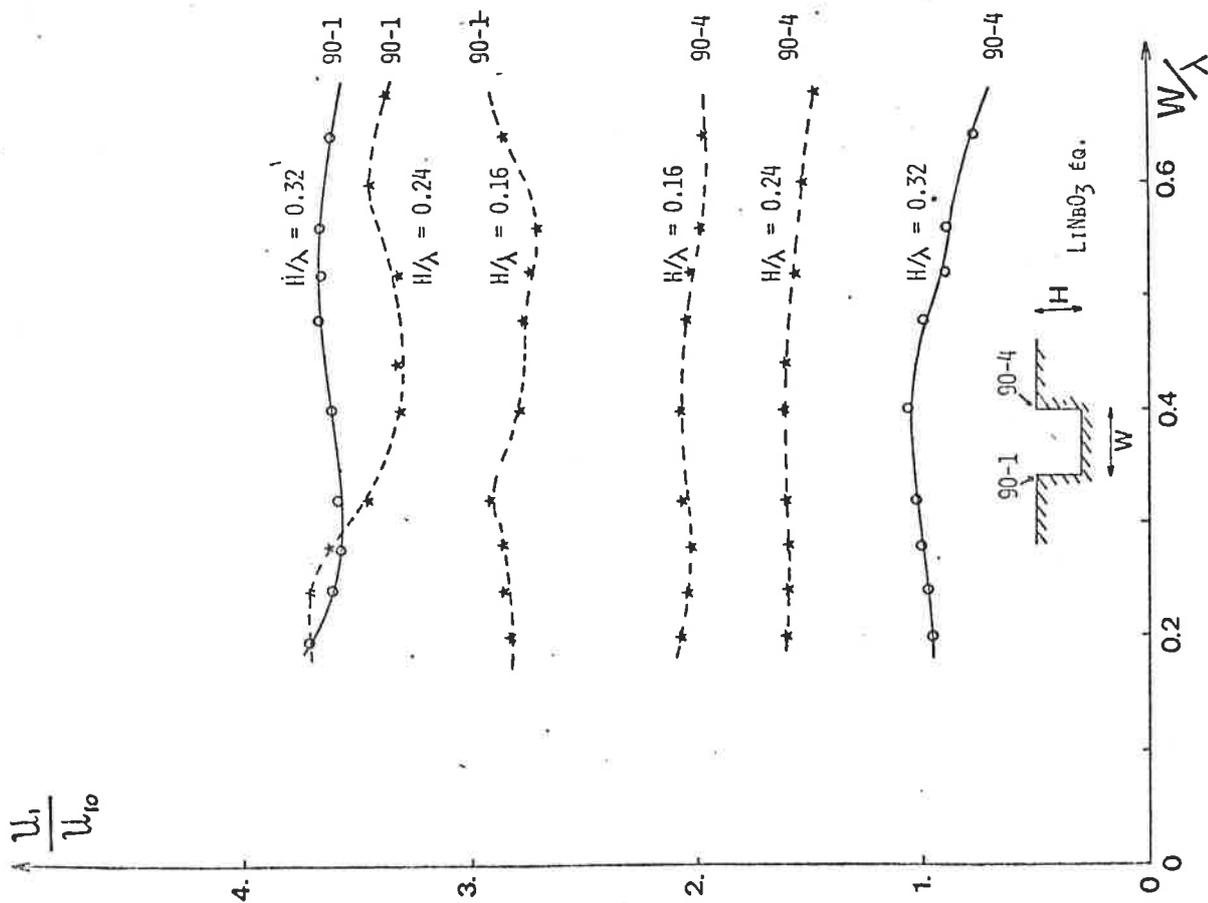


PLANCHE III-22 . COURBES D'AMPLITUDE NORMALISÉE DE U_1 DANS LE CAS D'UNE RAINURE , POUR LES DEUX POINTS D'ANGLE À 90° , EN FONCTION DE LA LARGEUR NORMALISÉE W/λ .

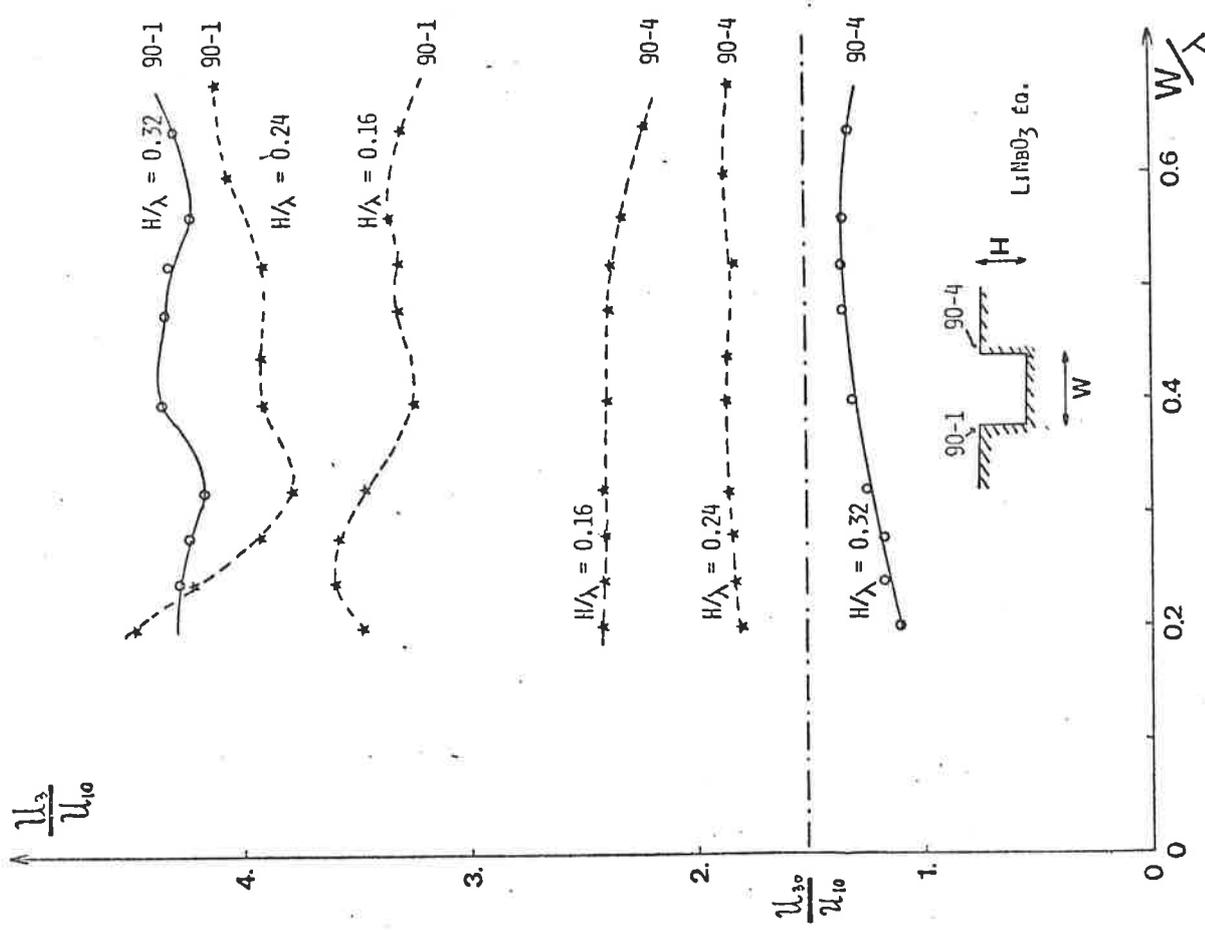


PLANCHE III-23 . COURBES D'AMPLITUDE NORMALISÉE DE U_3 DANS LE CAS D'UNE RAINURE , POUR LES DEUX POINTS D'ANGLE À 90° , EN FONCTION DE LA LARGEUR NORMALISÉE W/λ .

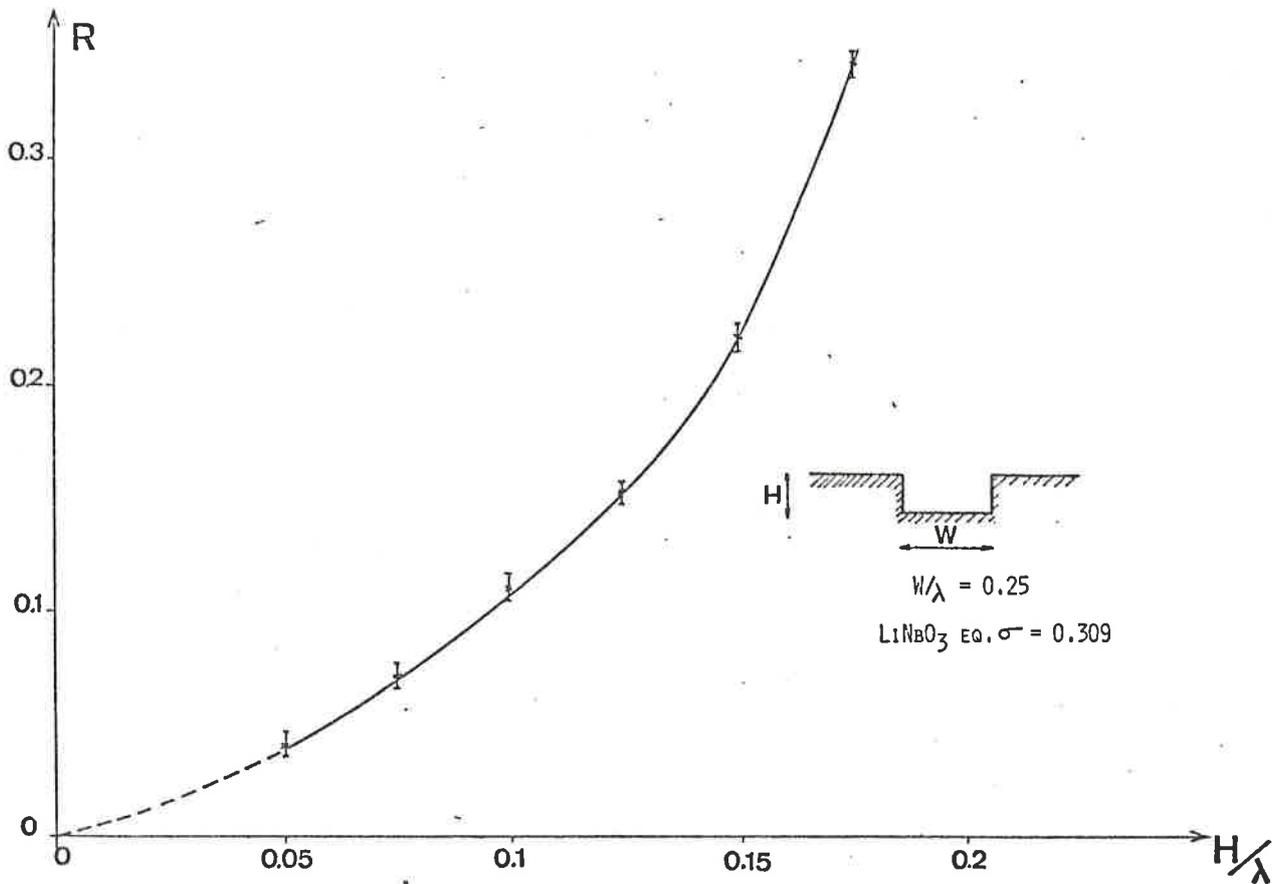


PLANCHE III-24 . MODULE DU FACTEUR DE RÉFLEXION DANS LE CAS D'UNE RAINURE , SUR LiNbO_3 ÉQ. , EN FONCTION DE LA PROFONDEUR NORMALISÉE H/λ .

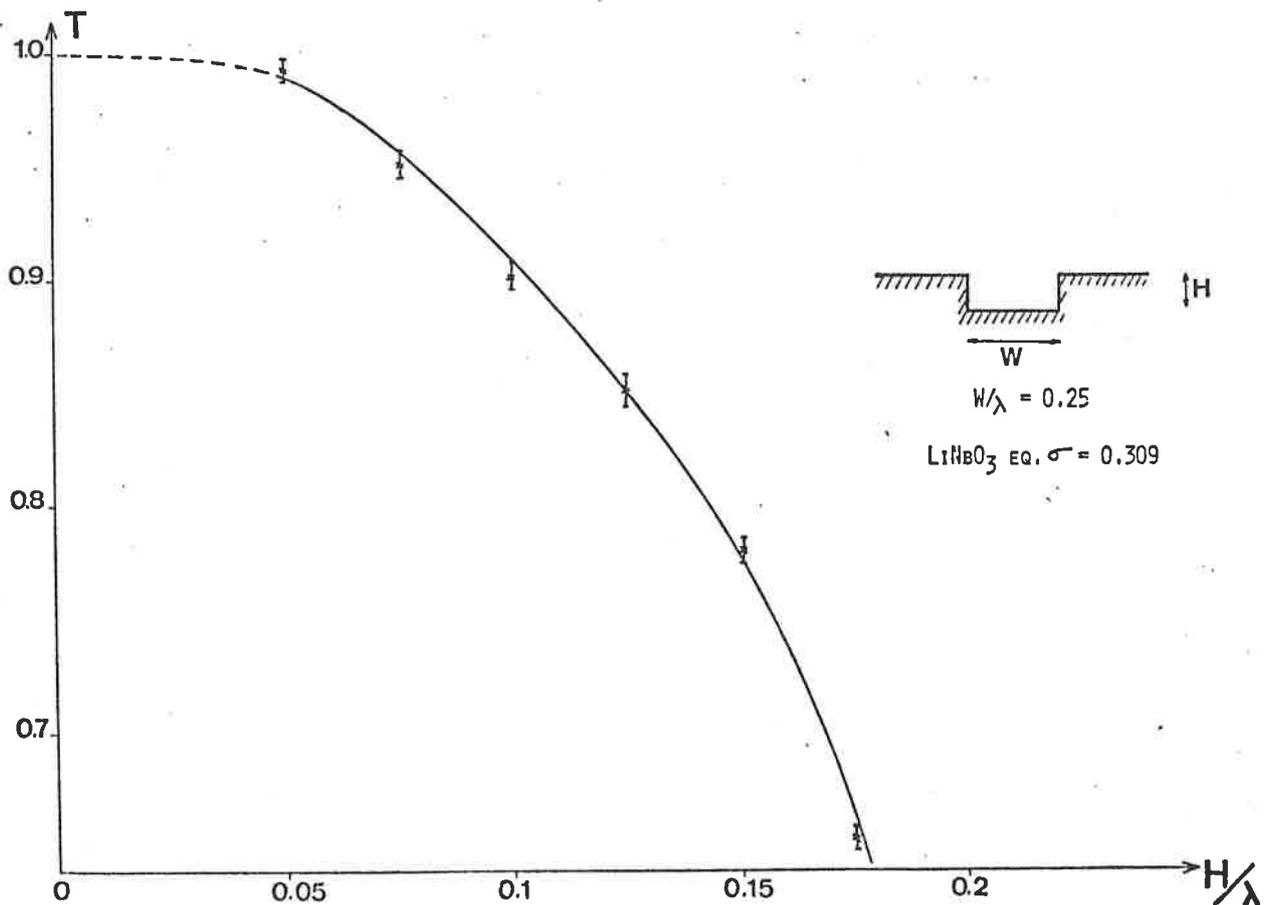


PLANCHE III-25 . MODULE DU FACTEUR DE TRANSMISSION DANS LE CAS D'UNE RAINURE , SUR LiNbO_3 ÉQ. , EN FONCTION DE LA PROFONDEUR NORMALISÉE H/λ .

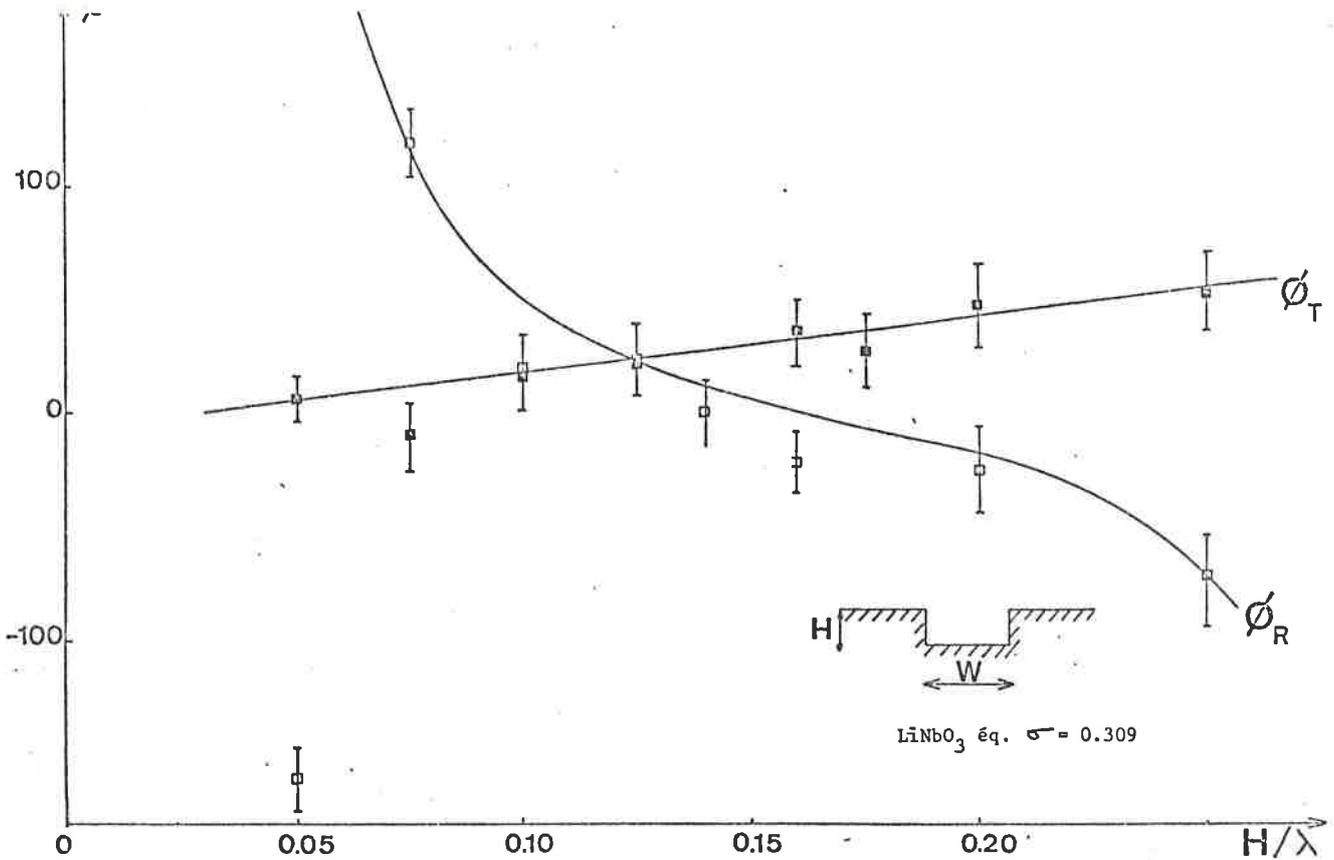


PLANCHE III-26 . PHASES À LA RÉFLEXION ET À LA TRANSMISSION DANS LE CAS D'UNE RAINURE , SUR LiNbO₃ ÉQ. , EN FONCTION DE LA PROFONDEUR NORMALISÉE H/λ .

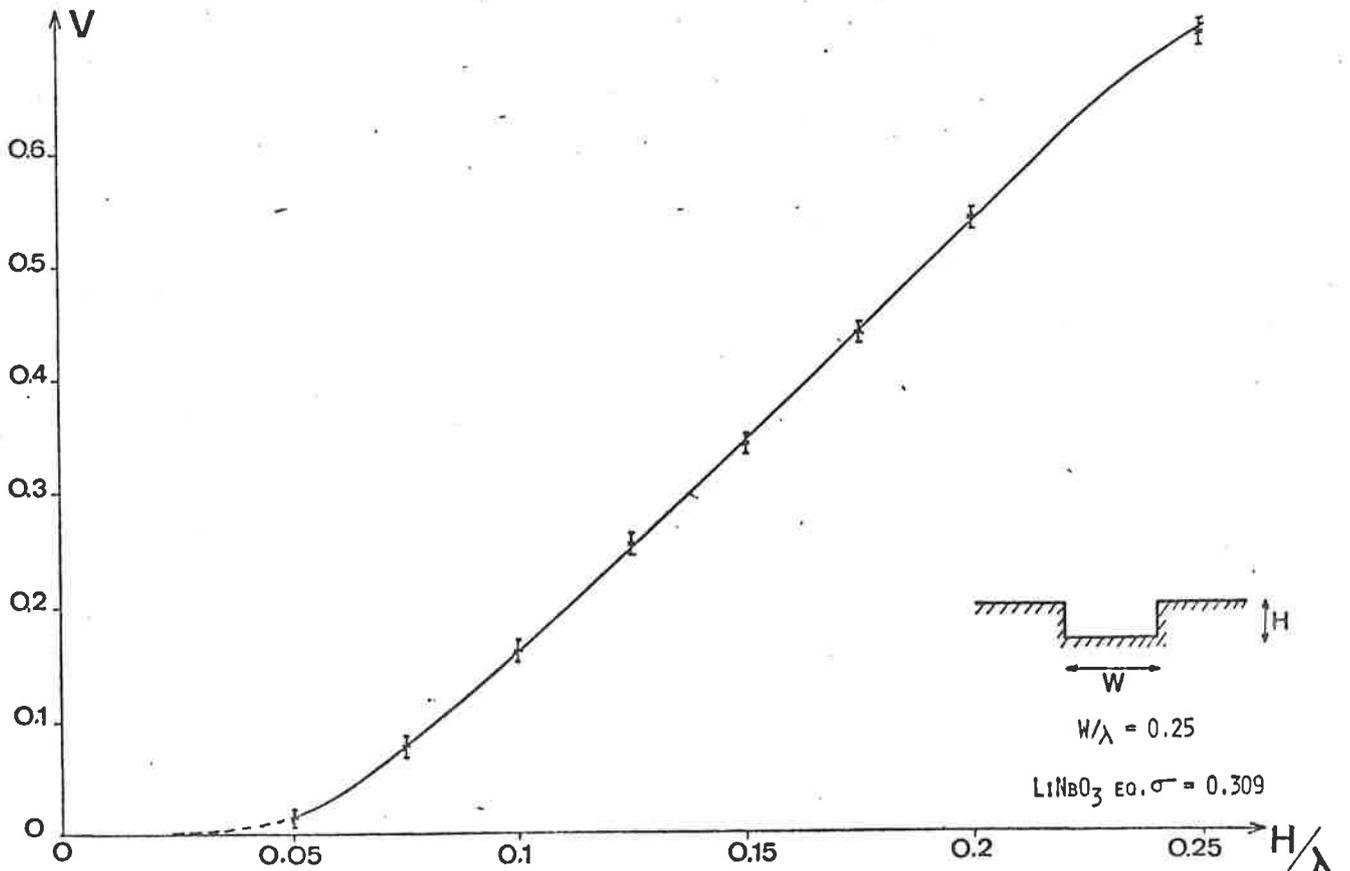


PLANCHE III-27 , FACTEUR DE CONVERSION EN ONDES VOLUMIQUES DANS LE CAS D'UNE RAINURE , SUR LiNbO₃ ÉQ. , EN FONCTION DE LA PROFONDEUR NORMALISÉE H/λ .

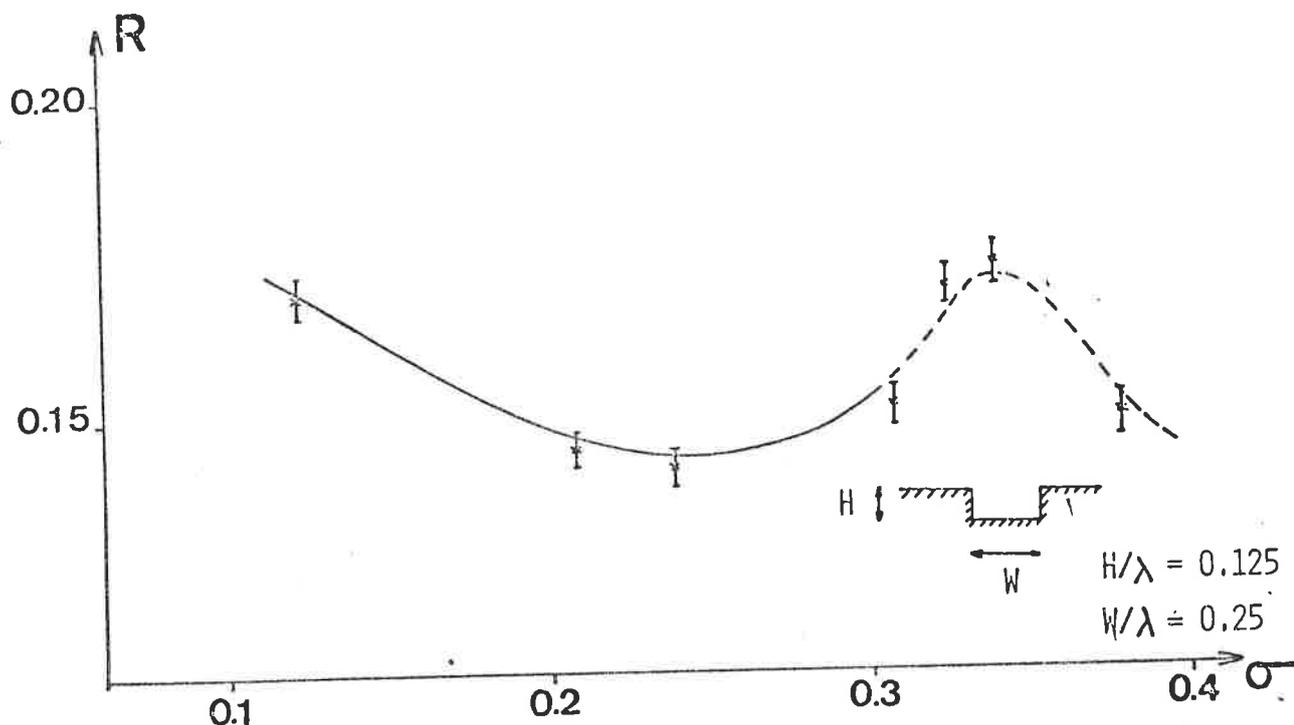


PLANCHE III-28 . MODULE DU FACTEUR DE RÉFLEXION DANS LE CAS D'UNE RAINURE DONNÉE , EN FONCTION DU COEFFICIENT DE POISSON σ .

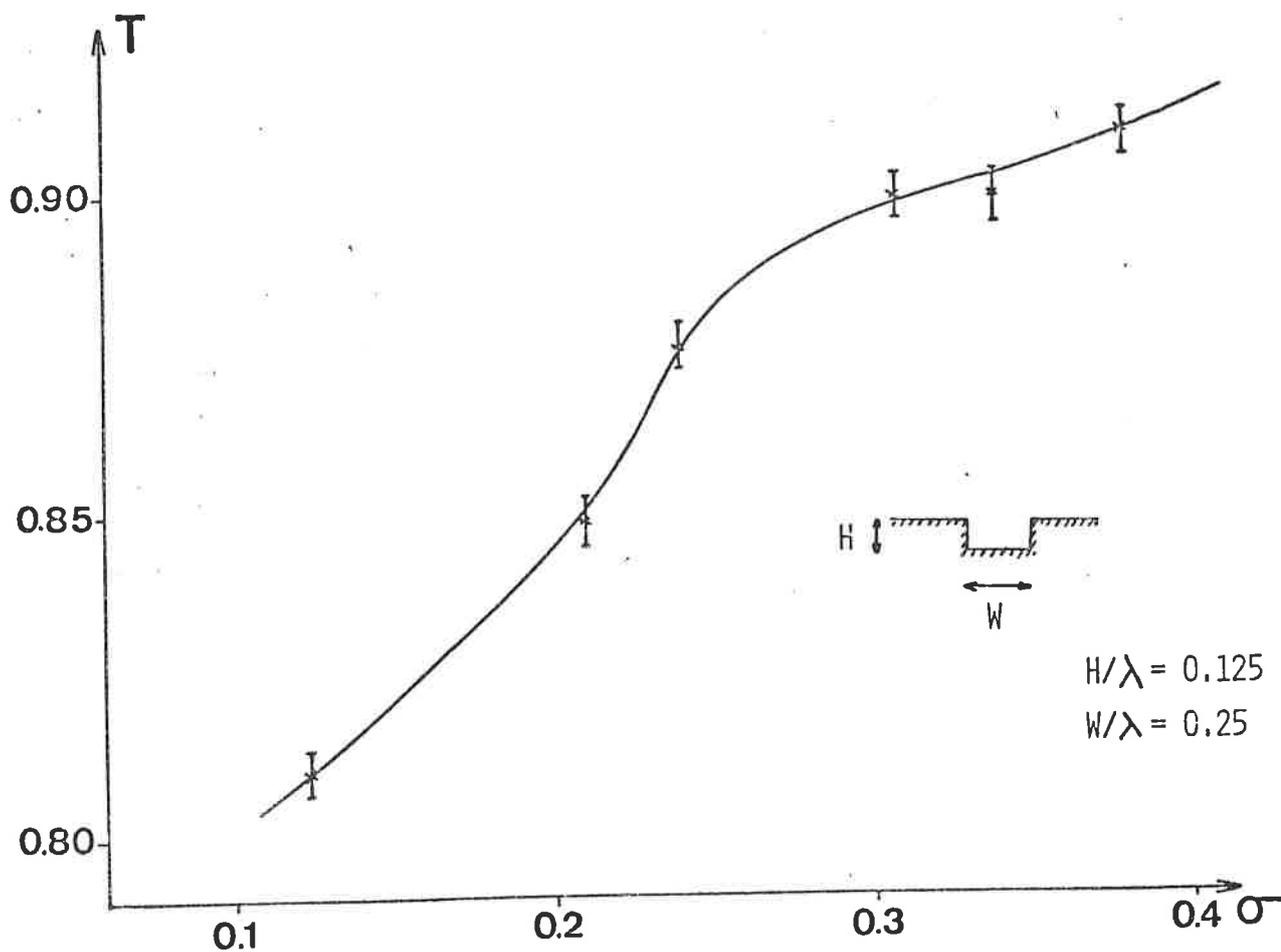


PLANCHE III-29 . MODULE DU FACTEUR DE TRANSMISSION DANS LE CAS D'UNE RAINURE DONNÉE , EN FONCTION DU COEFFICIENT DE POISSON σ .

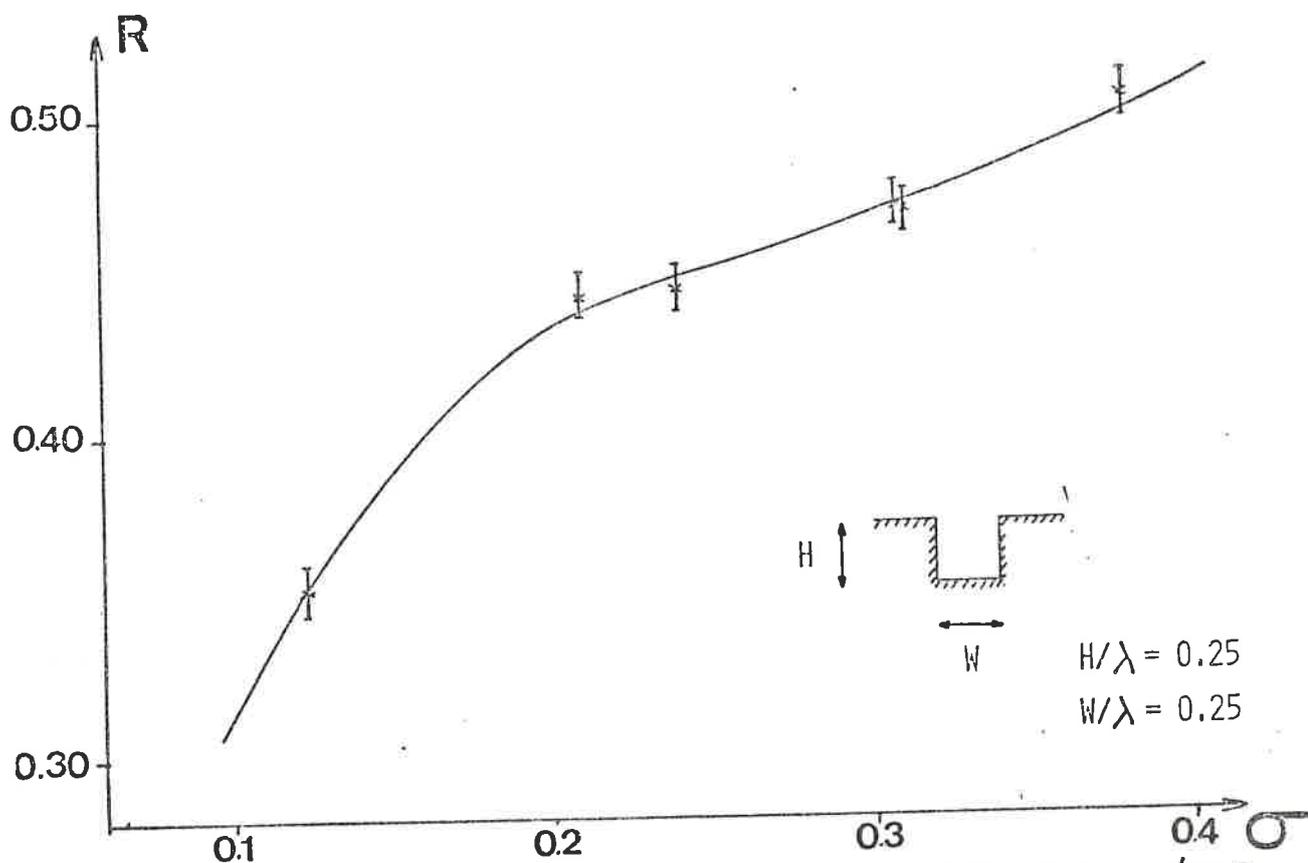


PLANCHE III-30 . MODULE DU FACTEUR DE RÉFLEXION DANS LE CAS D'UNE RAINURE DONNÉE , EN FONCTION DU COEFFICIENT DE POISSON σ .

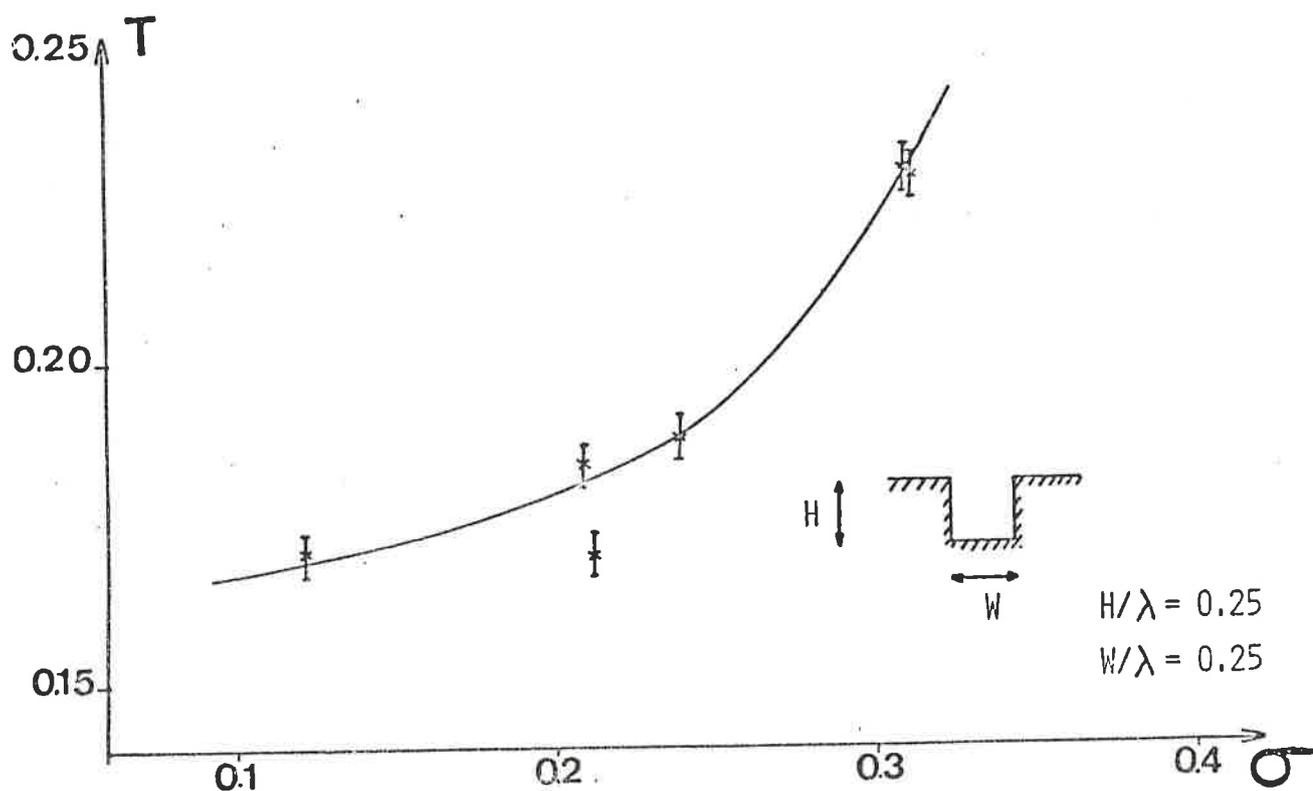


PLANCHE III-31 . MODULE DU FACTEUR DE TRANSMISSION DANS LE CAS D'UNE RAINURE DONNÉE , EN FONCTION DU COEFFICIENT DE POISSON σ .

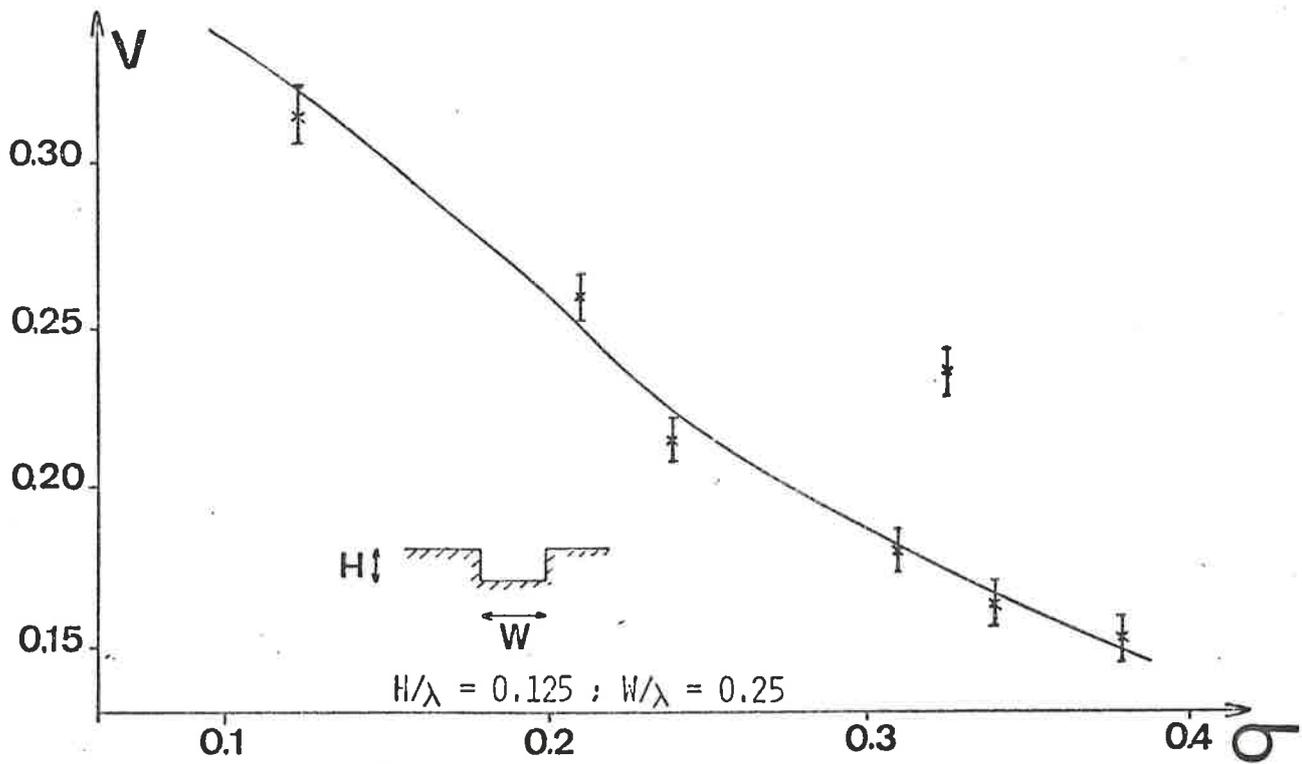


PLANCHE III-32 . FACTEUR DE CONVERSION EN ONDES VOLUMIQUES DANS LE CAS D'UNE RAINURE DONNÉE , EN FONCTION DU COEFFICIENT DE POISSON σ .

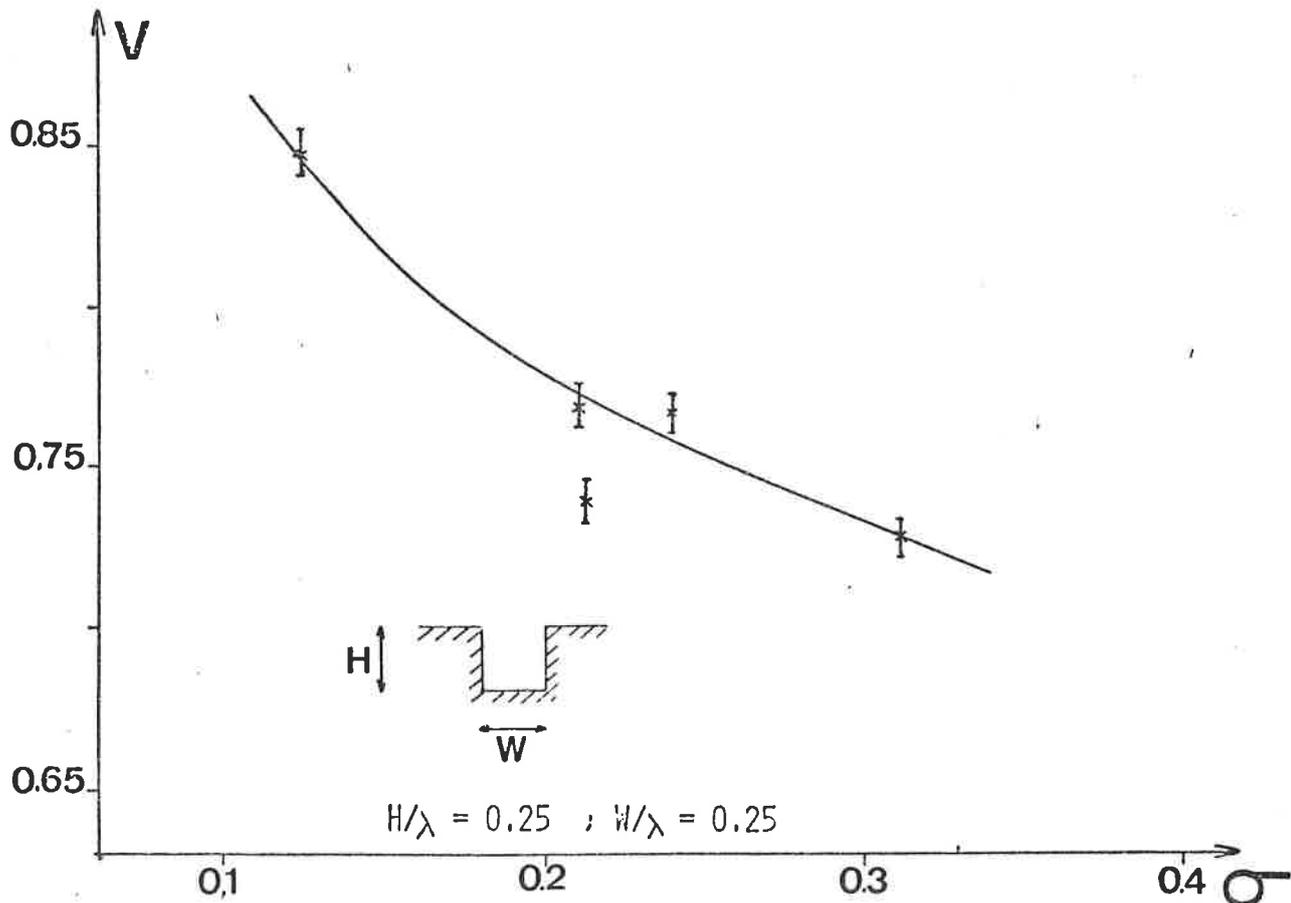


PLANCHE III-33 . FACTEUR DE CONVERSION EN ONDES VOLUMIQUES DANS LE CAS D'UNE RAINURE DONNÉE , EN FONCTION DU COEFFICIENT DE POISSON σ .

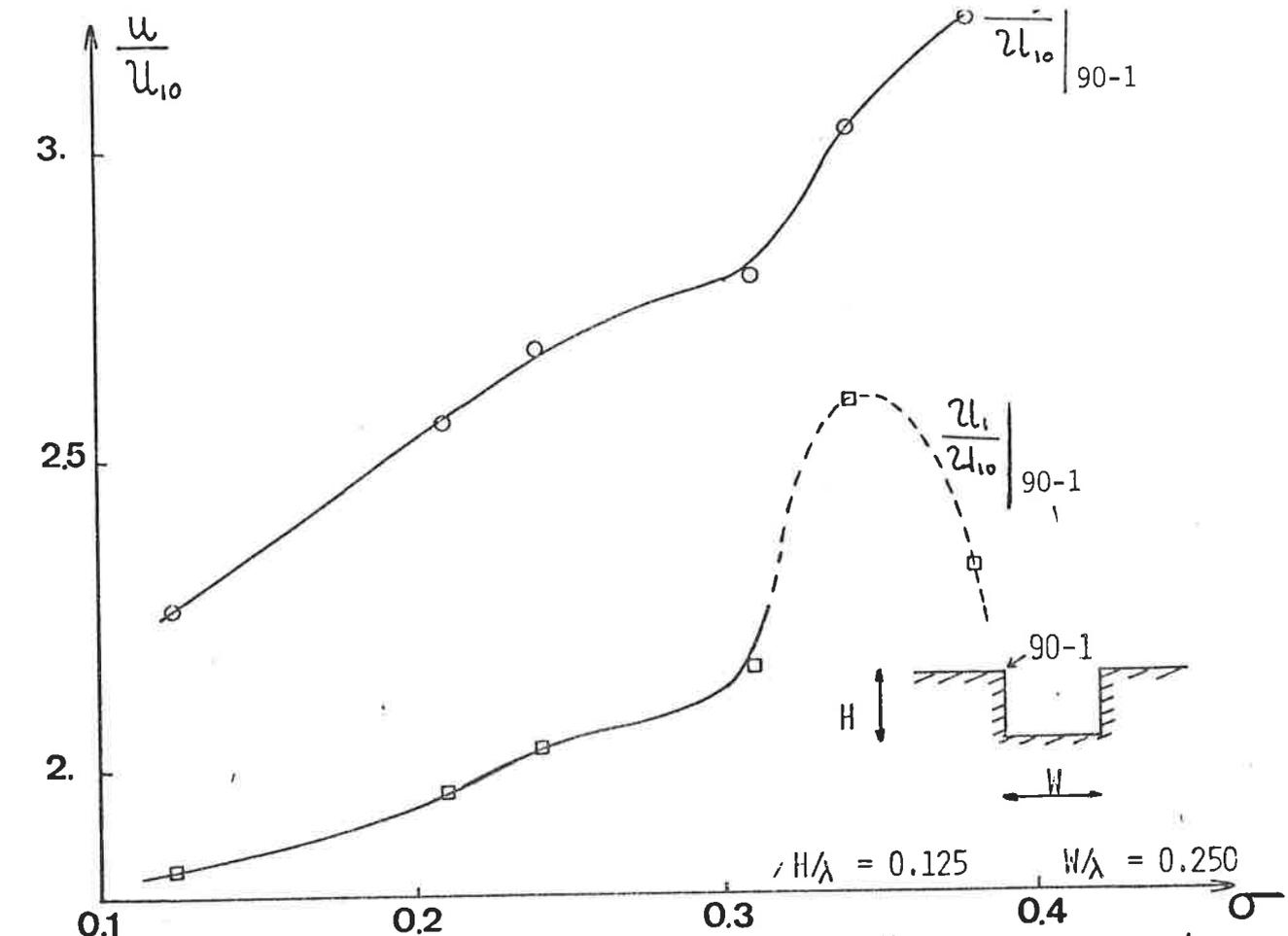


PLANCHE III-34 , COURBES D'AMPLITUDE DE U_1 ET U_3 DANS LE CAS D'UNE RAINURE DONNÉE , AU PREMIER POINT D'ANGLE À 90° , EN FONCTION DU COEFFICIENT DE POISSON σ .

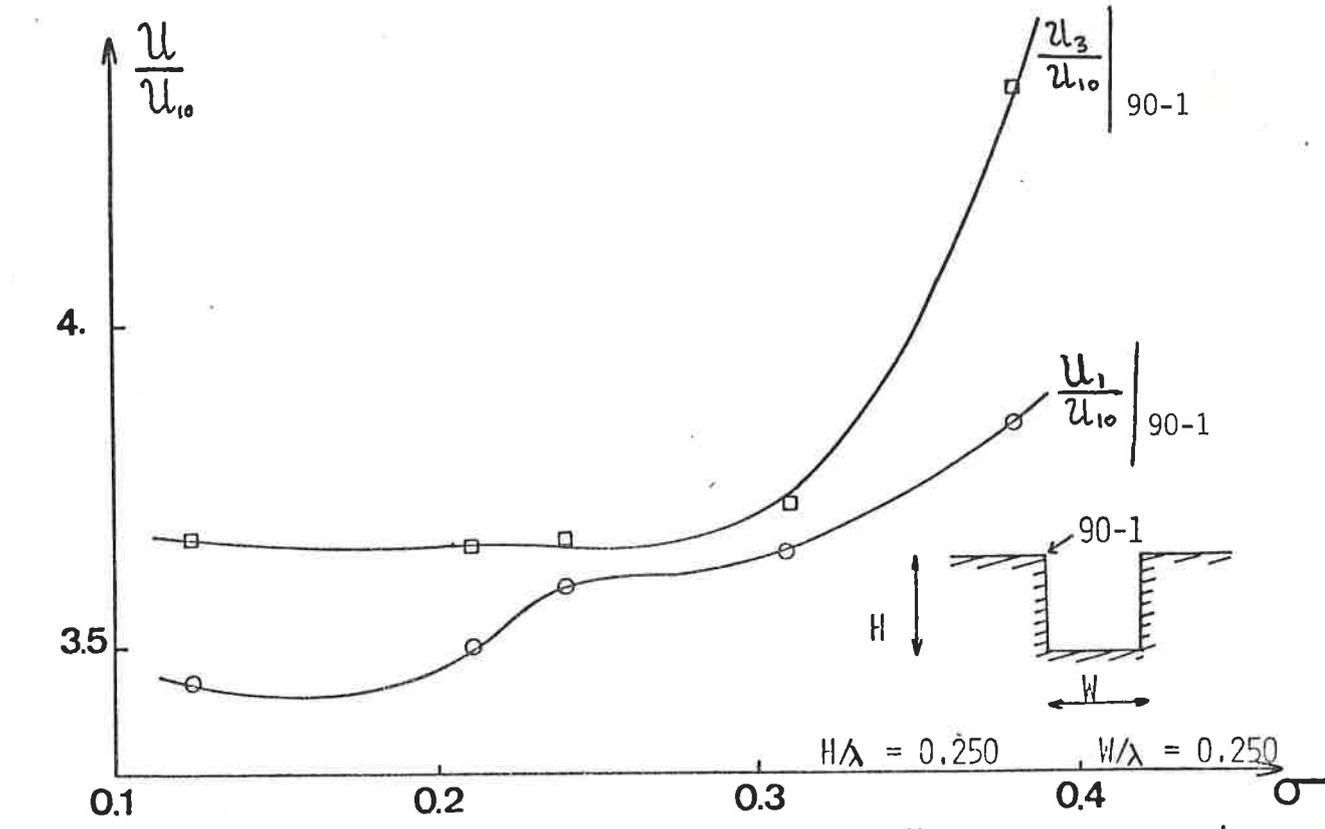


PLANCHE III-35 , COURBES D'AMPLITUDE DE U_1 ET U_3 DANS LE CAS D'UNE RAINURE DONNÉE , AU PREMIER POINT D'ANGLE À 90° , EN FONCTION DU COEFFICIENT DE POISSON σ .

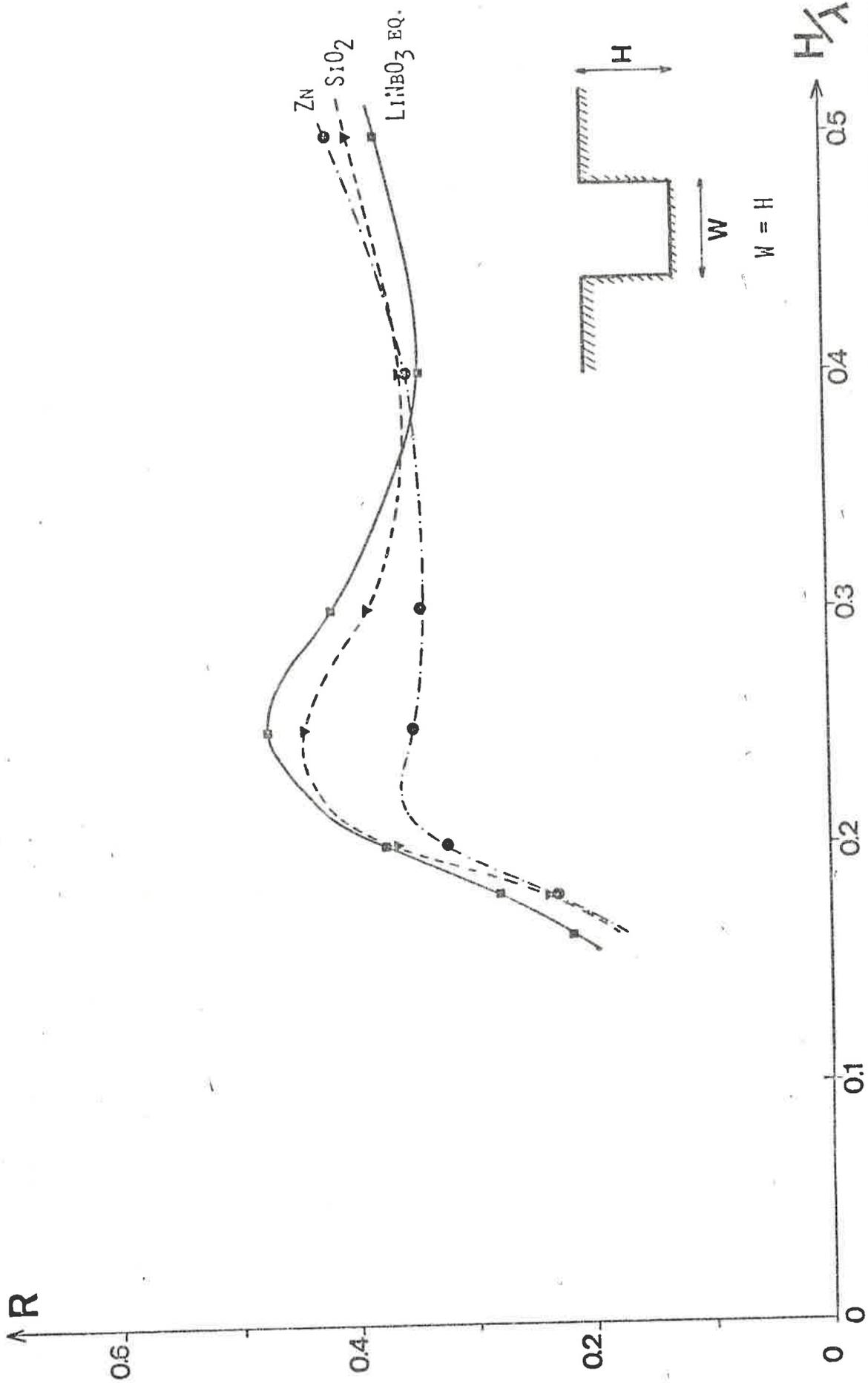


PLANCHE III-36 . MODULE DU FACTEUR DE RÉFLEXION DANS LE CAS D'UNE RAINURE À SECTION CARRÉE , EN FONCTION DE LA PROFONDEUR NORMALISÉE H / λ .

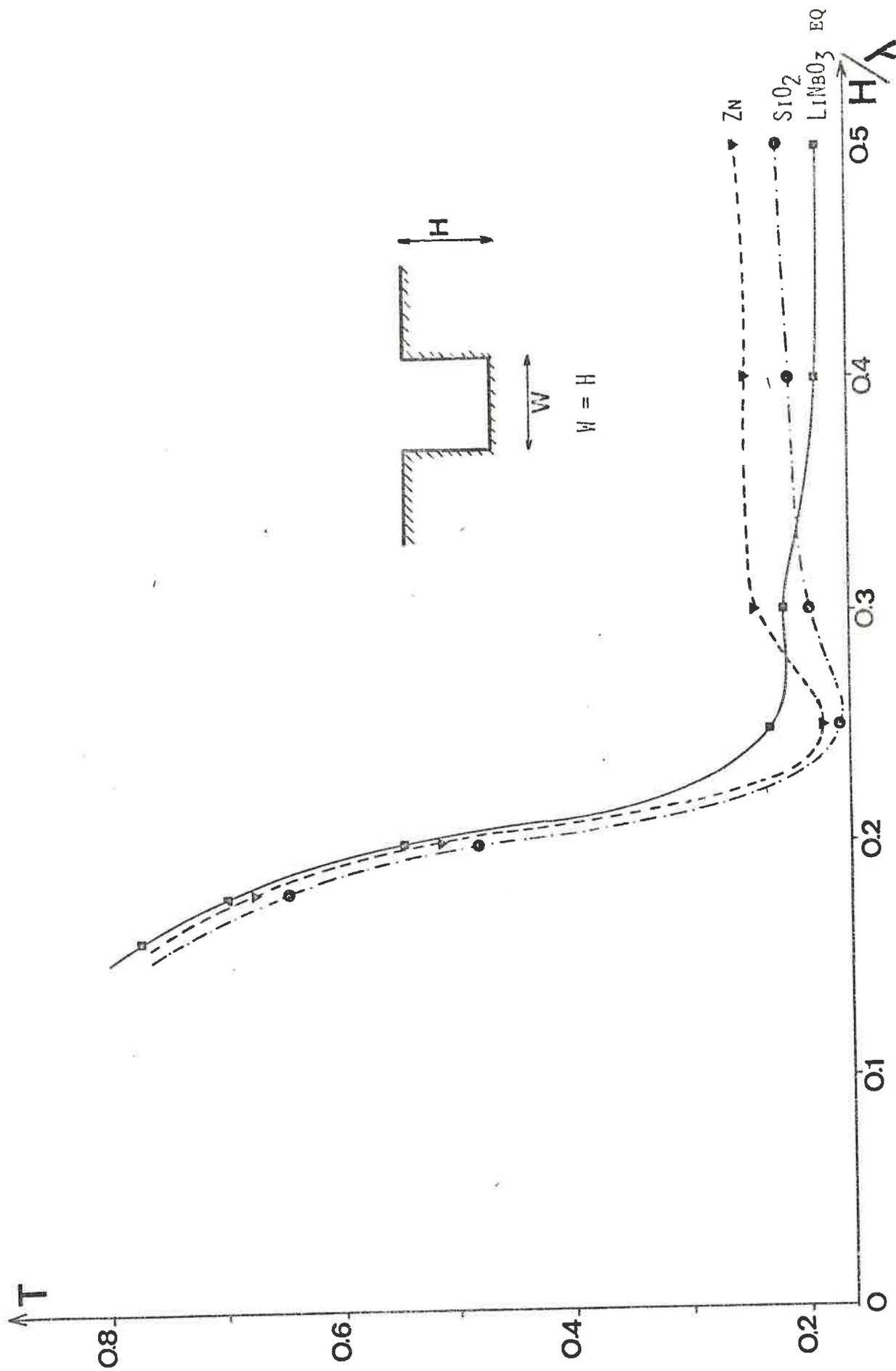


PLANCHE III-37 . MODULE DU FACTEUR DE TRANSMISSION DANS LE CAS D'UNE RAINURE À SECTION CARRÉE , EN FONCTION DE LA PROFONDEUR NORMALISÉE H / λ ,

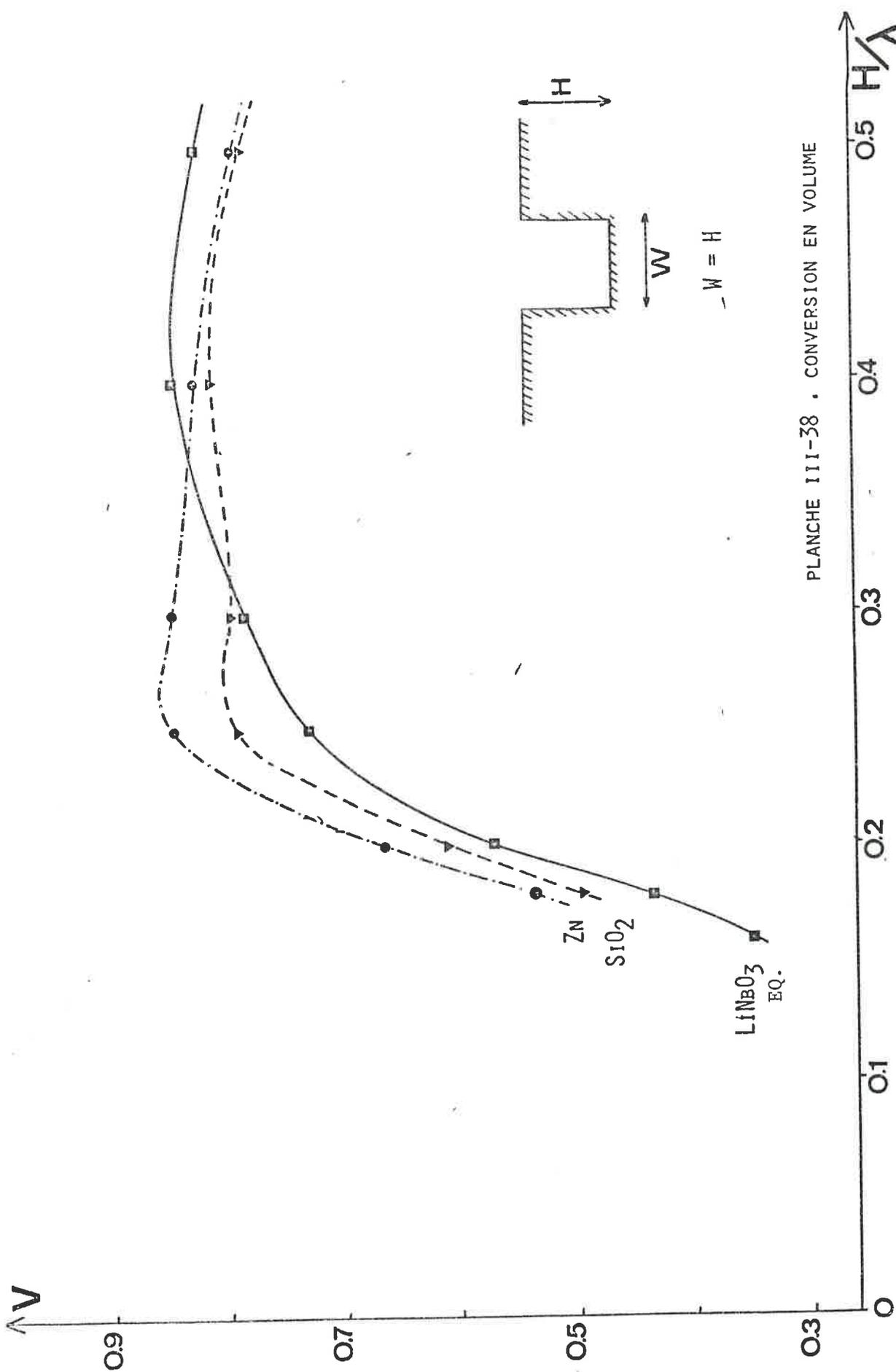


PLANCHE III-38 . CONVERSION EN VOLUME

PLANCHE III-38 . FACTEUR DE CONVERSION EN ONDES VOLUMIQUES DANS LE CAS D'UNE RAINURE À SECTION CARRÉE , EN FONCTION DE LA PROFONDEUR NORMALISÉE H / λ .

C H A P I T R E 4

RESEAUX DE RAINURES

IV-1 INTRODUCTION :

La réflexion des ondes élastiques de surface par des réseaux réflecteurs trouve un vaste domaine d'application dans la réalisation de résonateurs à ondes acoustiques de surface présentant un fort coefficient de surtension Q .

De tels résonateurs sont largement utilisés pour la mise en oeuvre d'oscillateurs, notamment en télécommunications et en technologie spatiale.

Une bonne connaissance des caractéristiques d'un réseau réflecteur est donc nécessaire. Divers types de réseaux peuvent être utilisés, parmi lesquels, on peut citer :

- les réseaux de rubans conducteurs déposés sur un substrat piézoélectrique.
- Les réseaux de rubans pesants déposés sur la surface.
- Les réseaux à implantation ionique, où une modification périodique des propriétés du cristal est obtenue par bombardement ionique.
- Les réseaux de rainures obtenues par usinage ionique de la surface.

Dans ce Chapitre, et comme suite des travaux exposés précédemment, nous nous attacherons à l'étude de réseaux réflecteurs composés de rainures.

Afin d'utiliser le formalisme défini par OLINER, LI et BERTONI⁵¹, LI³⁶ et LI et MELNGAILIS³⁷ proposent un équivalent isotrope du Niobate de

Lithium (Li NbO_3), en vue de caractériser les propriétés de réflexion d'un sillon par un modèle équivalent.

Ce dernier était à l'origine un simple transformateur, (Figure IV-1), placé sur une ligne électrique. Un enchaînement de ces transformateurs permettait la simulation d'un réseau ; la meilleure simulation obtenue, en accord avec l'expérience, a permis de définir les caractéristiques de l'équivalent isotrope.

En outre, LI et MELNGAILIS³⁷ ont mis en évidence un stockage d'énergie réactive aux bords des sillons, ce qui introduisait à la fois un déphasage et une diminution de la vitesse, jamais pris en compte auparavant. Ils ont donc proposé un nouveau schéma (Figure IV-2). L'introduction de l'admittance shunt permet de prendre en compte la présence de l'énergie stockée, le décalage en fréquence du maximum de réflexion du réseau, et la réponse aux harmoniques paires, vérifiés par l'expérience (en contradiction avec les théories antérieures). D'abord, sans tenir compte de l'admittance jB , ces auteurs calculent $\frac{Y'_0}{Y_0}$ pour que l'accord théorie-expérience soit

correct pour la réflexion sur une marche. Ensuite, en introduisant l'admittance, ils calculent B/Y_0 à partir du décalage en fréquence, observé.

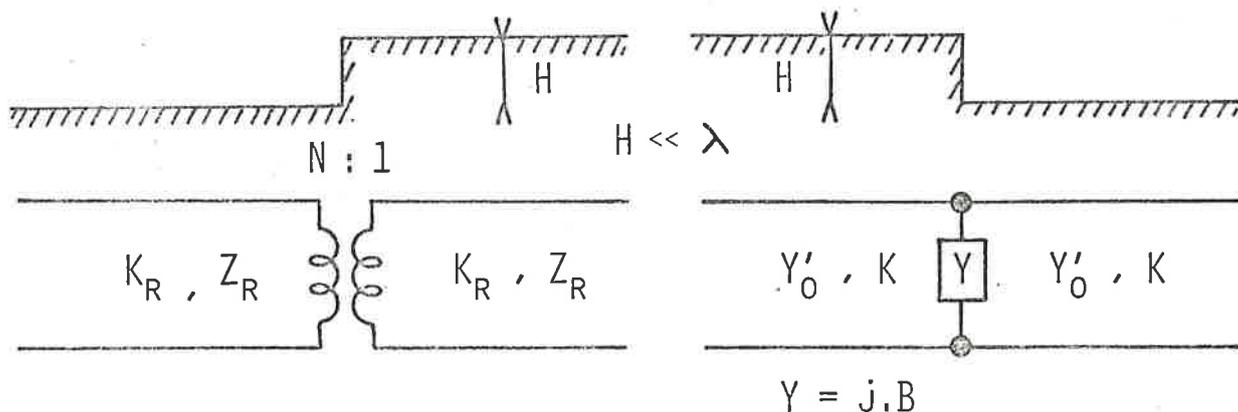


FIGURE IV-1

FIGURE IV-2

En 1974, LI, WILLIAMSON, FLANDERS et ALUSOW³⁸ étudient des résonateurs à sillons de faible profondeur et proposent à partir du modèle équivalent,

un calcul du coefficient de surtension Q qui tient compte, en outre des pertes de propagation, par diffraction, par réflexion et par ondes volumiques. Ils effectuent des mesures expérimentales pour deux largeurs de sillons ($W/S = 1$ et $1,20$), et ce pour diverses profondeurs H/λ . Les réseaux comportent 200, 300 et 400 rainures (Figure VI-3).

En extrapolant les résultats obtenus ainsi sur des réseaux réflecteurs LI et MELNGAILIS^{39,46} ont déduit un facteur de réflexion pour une marche élémentaire et ont développé un modèle pour les effets du second ordre dans les réseaux de rainures de très petites profondeurs, tels la génération d'ondes de volume évanescents aux arêtes du sillon. L'énergie stockée au voisinage de la discontinuité introduit un déphasage à la réflexion et à la transmission. Pour des largeurs $W/\lambda = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$, la contribution de cette énergie est très faible, d'où un maximum de réflexion, tandis que pour $W/\lambda = k \lambda/2$, la contribution est grande et on obtient un minimum de réflexion.

Une série d'expériences réalisées par LI, ALUSOW, WILLIAMSON^{40,41} ont permis à ces auteurs de définir le domaine des profondeurs H pour lesquelles les résonateurs avaient un bon comportement. Pour des valeurs de H/λ supérieures à 0.025 les pertes en ondes volumiques ont été jugées trop importantes ; il s'ensuit une dégradation de la résonance .

CLARKE¹² étudie, en 1976, des réseaux réflecteurs dont ceux à sillons et confirme les résultats de LI.

HAUS²⁷ étudiant les résonateurs sur Li NbO_3 , observe que le coefficient de surtension Q du réseau est limité à cause de la génération d'ondes de volume par les arêtes élémentaires du sillon comme l'ont montré RONNEKLEIV et SOUQUET⁶⁰, TUAN et LI⁶⁵. Il met alors en évidence l'importance de profondeur H/λ et du coefficient de Poisson σ . Si ce dernier est proche de 0.5, l'accord théorie-expérience est meilleur.

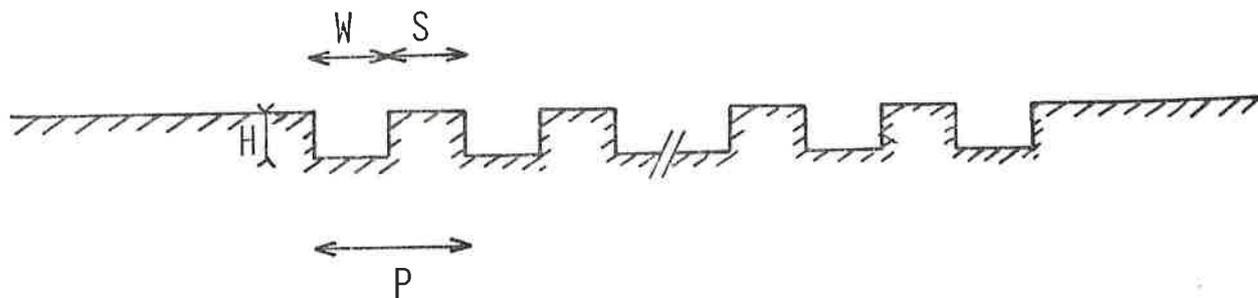


FIGURE IV-3.

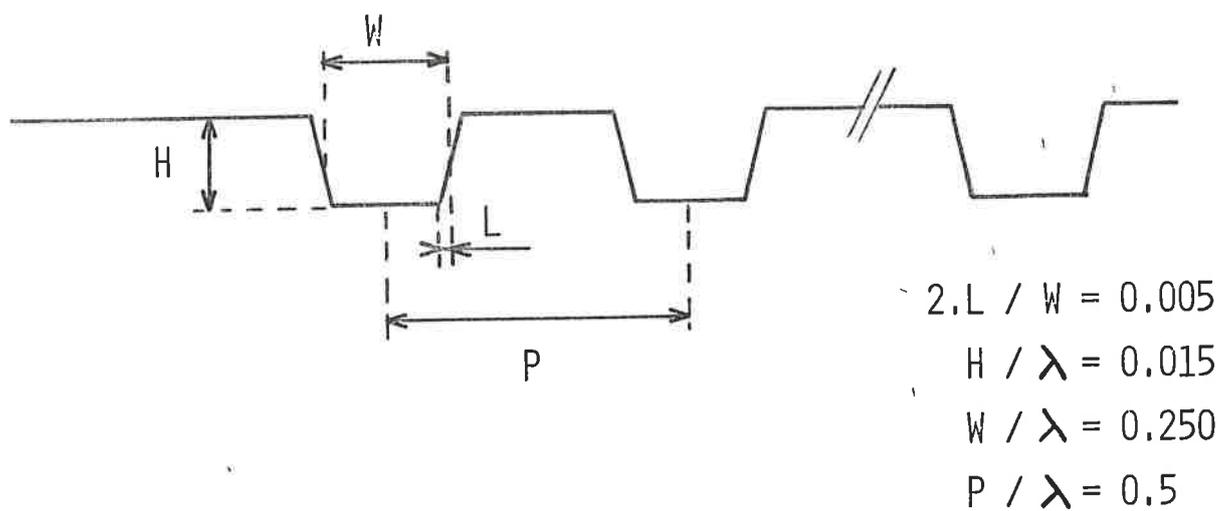


FIGURE IV-4.



RÉSONATEUR DONT LES SILLONS SONT À PROFONDEUR VARIABLE.

FIGURE IV-5.

LARDAT ³⁵ étudia des résonateurs à sillon sur du quartz - S T et met en évidence l'importance de la profondeur de ces rainures.

En 1976, TUAN et PAREKH ⁶⁷ considèrent des réseaux de N Sillons de profondeur $H/\lambda = 0.015$ et de largeur $W/\lambda = 0.250$. Faisant varier P et N, ils constatent que $p = \frac{\lambda}{2}$ donne un maximum de réflexion pour le réseau. Leurs calculs tiennent compte de la perte en volume.

HAUS ²⁸ effectue une comparaison entre un modèle à sillons et un modèle à "mass loading" sur un substrat quasi-isotrope équivalent au LiNbO_3 . Les rainures retenues ont une profondeur $H/\lambda = 0.01$, elles donnent davantage de réflexion que le modèle à "mass loading" pour des valeurs de σ voisines de 0,5, la vitesse transversale V_t de l'onde de surface est à peu près égale à la vitesse de Rayleigh V_R , et ainsi un assez bon accord existe entre le calcul du coefficient de surtension Q et l'expérience.

La minimisation des pertes en volume est nécessaire au fonctionnement d'un résonateur; c'est pour cette raison que divers auteurs tels LI ⁴², RONNEKLEIV ⁶¹ introduisent des résonateurs à réflecteurs à sillons de profondeur variable (figure VI - 5) LI ⁴⁴ préfère utiliser des réseaux très longs, jusqu'à 1000 sillons de profondeur $H/\lambda = 0.01$, de période $P = \frac{\lambda}{2}$, pour permettre une reproductibilité des phénomènes entrant en jeu. Ceci est repris récemment par PAREKH et TUAN ^{54,55} dans une étude des réflecteurs à N rainures. La largeur de rainures est fixée à 0.25λ , la périodicité du réseau à $\frac{\lambda}{2}$. A chaque valeur du nombre de rainures N, il correspond une profondeur $(H/\lambda)_N$ pour laquelle la réflexion du réseau est maximale. Ils mettent en évidence le rapport de la puissance dissipée en volume, à la puissance incidente comme suivant une loi quadratique:

$$\frac{P_{\text{vol}}}{P_{\text{inc}}} \approx 8,7 \cdot (H/\lambda)_N \text{ d'autant meilleur que N est grand.}$$

Ils constatent aussi qu'une utilisation d'un très grand nombre de rainures (800 à 1000) de très petite profondeur (H/λ variant de 0,001 à 0,0052) permet de diminuer de manière très efficace les pertes par transmission et les pertes en volume.

IV - 2 RESULTATS :

1°) A l'aide du maillage variable par domaine :

L'utilisation d'un tel maillage est développée en annexe 5. Ceci nous a conduit à des résultats inexploitable, car les réflexions parasites apparaissant lors du changement du pas du maillage, perturbent de manière très marquée la propagation de l'onde élastique de surface.

2°) A l'aide de la méthode de la matrice de répartition :

Cette méthode permet l'enchaînement d'un grand nombre de rainures, à condition que les pertes en ondes volumiques soient les plus faibles possible. Cette technique est développée en annexe 6.

- Néanmoins, nous pouvons donner à titre indicatif seulement, le module du coefficient de réflexion, pour un petit nombre N de rainures (ici $N = 5, 15, 25$). Celles-ci sont caractérisées par $H/\lambda = 0.12$, et $\sigma = 0.309$ (cas du LINBO 3 éq). La périodicité du réseau est P/λ , la largeur de rainure est W/λ , elle varie entre 0.16 et 0.6.

Les courbes présentées dans la planche IV-6, sont données pour un rapport $\frac{W}{P} = 0.5$.

Nous observons deux maxima, l'un au voisinage de $W/\lambda = 0.21$ et l'autre au voisinage de $W/\lambda = 0.47$.

Le premier maximum varie nettement avec le nombre de rainures considérée, alors que le deuxième maximum est sensiblement le même.

- N'ayant pu obtenir des résultats concernant des rainures de très faible profondeur, et ce pour un certain nombre de valeurs de la largeur W/λ , nous nous sommes limités à des réseaux de rainure de plus grande profondeur.

- La méthode utilisée n'est valable que si les pertes en ondes volumiques étaient nulles ou très faibles; en effet, elle ne tient pas compte de la conversion onde de surface - onde de volume et réciproquement.

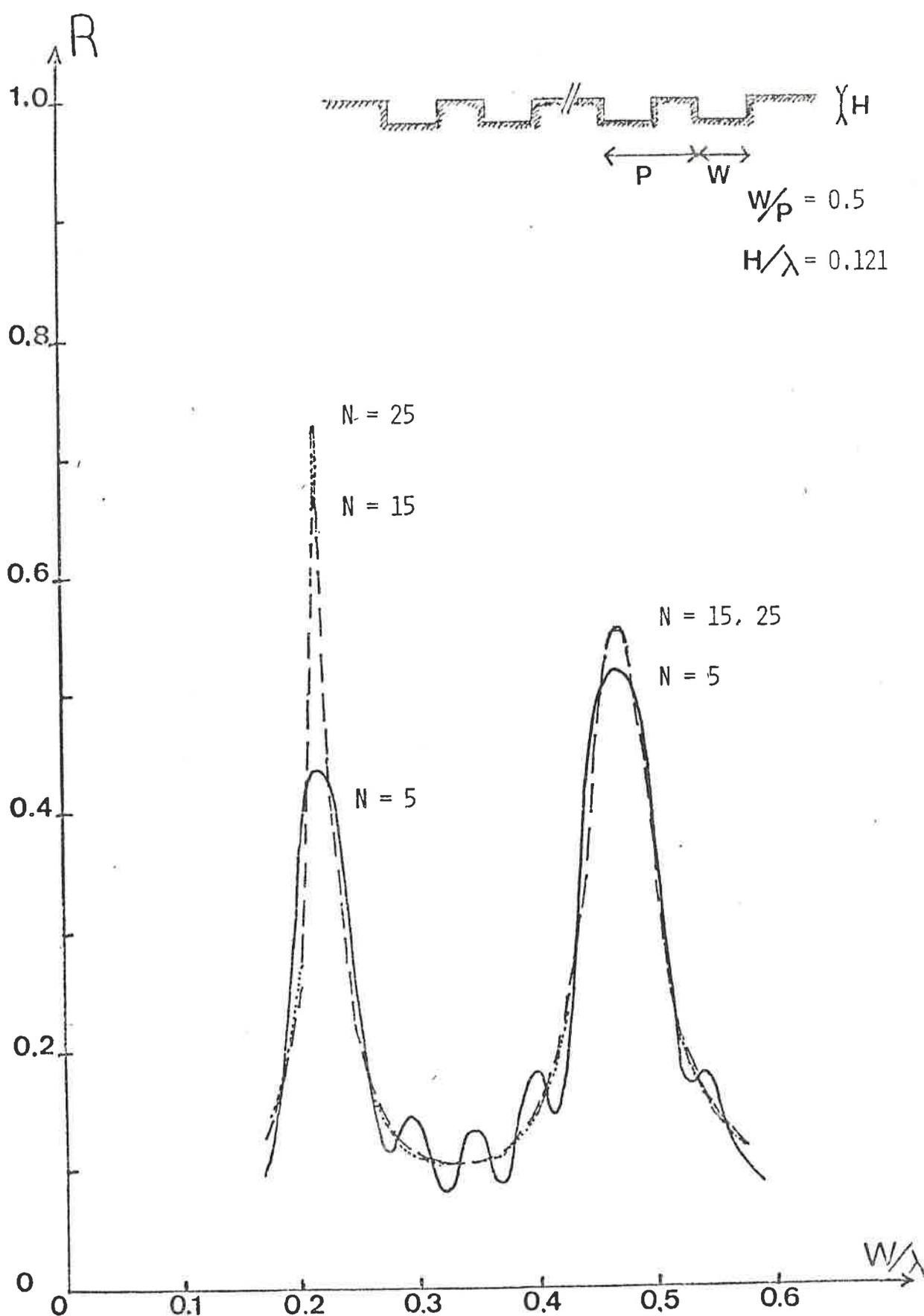


PLANCHE IV-6 . MODULE DU FACTEUR DE RÉFLEXION POUR UN RÉSEAU DE N
 RAINURES DE PROFONDEUR FIXÉE.

CHAPITRE 5

CONCLUSION

Les résultats exposés dans ce mémoire ont été obtenus à l'aide d'une méthode numérique aux différences finies.

L'étude a porté essentiellement sur le comportement d'une onde élastique de surface en présence de divers obstacles, tels des arêtes simples, des marches, des rainures, en milieu isotrope.

La méthode utilisée, ainsi que les résultats sont susceptibles d'être développée ultérieurement dans deux directions : - la réalisation de réseaux réflecteurs à sillons gravés, dont le nombre et la forme permettraient de réduire les pertes en volume.

- La caractérisation des matériaux et la recherche de défauts dans leur structure (test non destructif).

En effet, les travaux récents de plusieurs chercheurs^{4,6,7,22,24,58,64} s'orientent vers l'étude des défauts (fissures par exemple) dans un substrat, le comportement de l'onde élastique de surface devant permettre de connaître avec une marge d'erreur minimale la géométrie du défaut.

Toutefois, dans notre étude, nous nous sommes limités aux ondes de surface. Un intéressant développement consisterait à déterminer la conversion de modes (par exemple, la conversion onde de volume - onde de surface, ou réciproquement) provoquée par les obstacles.

ANNEXE 1

APPROXIMATION AUX DIFFERENCES FINIES DES EQUATIONS DE BASE DANS LE CAS D'UN MAILLAGE RECTANGULAIRE DISSYMETRIQUE

Dans le cas d'un maillage rectangulaire dissymétrique, chaque maille est un rectangle dont les dimensions varient suivant la position qu'elle occupe (figure A1 - 1).

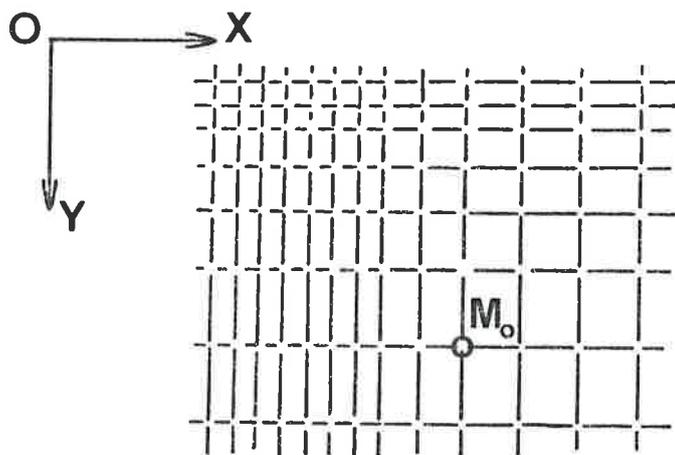


Figure A1 - 1 - Exemple de maillage rectangulaire dissymétrique.

La figure A1 - 2 montre la situation d'un noeud M_o par rapport à ses plus proches voisins, dans le maillage.

Nous adoptons les notations suivantes :

Ψ est une fonction des deux variables x et y . Ψ_{00} désigne la valeur de $\Psi(x,y)$ au noeud $(0,0)$ du domaine donné. $\partial_x^{00} \Psi$ et $\partial_y^{00} \Psi$ sont les dérivées partielles du premier ordre de Ψ par rapport à x et y .

$\partial_{xx}^{00}\Psi$, $\partial_{yy}^{00}\Psi$ et $\partial_{xy}^{00}\Psi$ sont les valeurs des dérivés partiels du second ordre par rapport à x , par rapport à y et croisée, au noeud $(0,0)$.

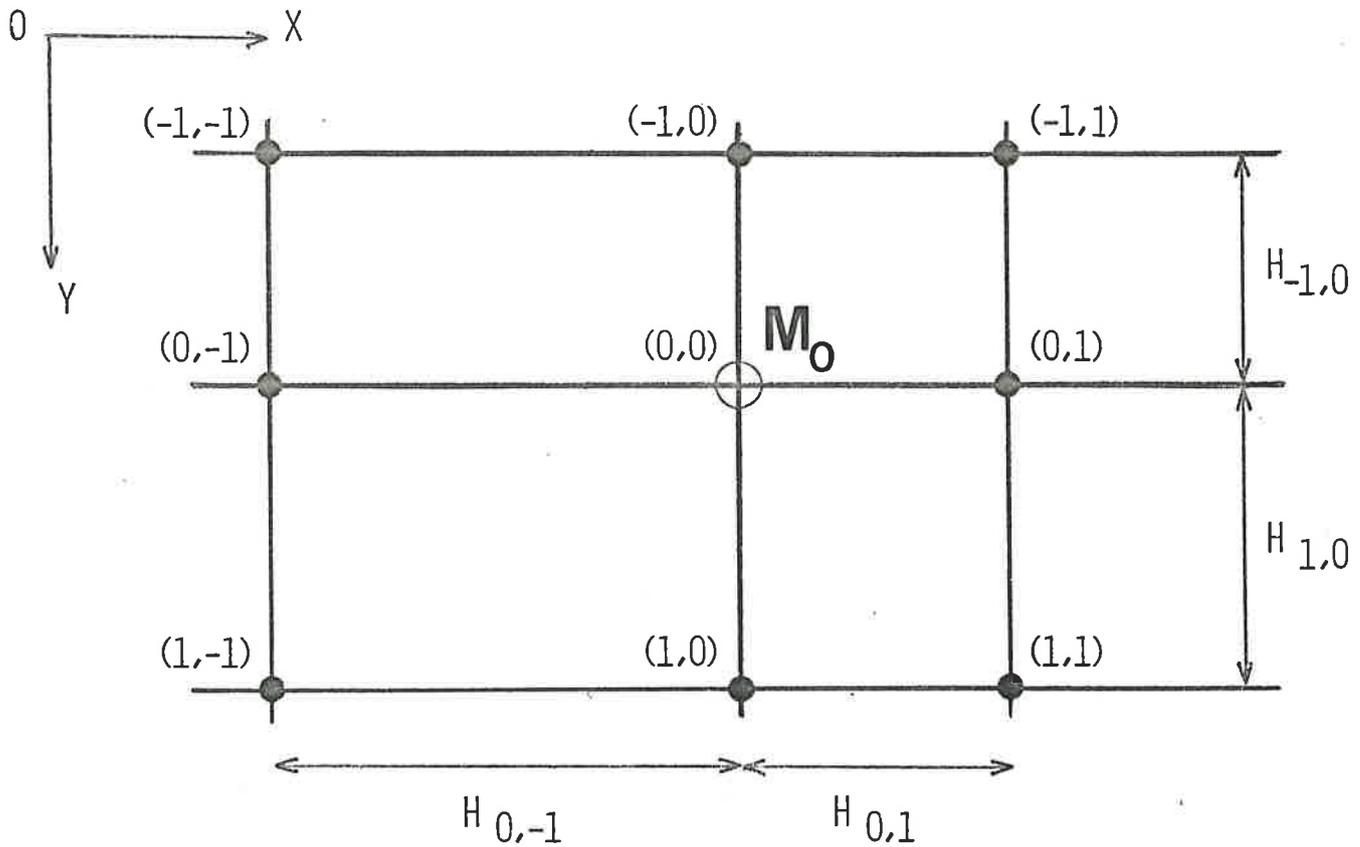


Figure A1-2 - Situation du noeud $(0,0)$

Nous écrivons le développement de Taylor à l'ordre 2, de la fonction Ψ en chacun des huit plus proches voisins du noeud $(0,0)$.

Nous obtenons ainsi l'expression générale de $\Psi_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \Psi_{i,j} &= \Psi_{0,0} + j \cdot h_{0,j} \cdot \partial_{x^j}^{00}\Psi + \frac{1}{2} \cdot h_{0,j}^2 \cdot \partial_{xx}^{00}\Psi \\
 &+ i \cdot h_{i,0} \cdot \partial_{y^i}^{00}\Psi + \frac{1}{2} \cdot h_{i,0}^2 \cdot \partial_{yy}^{00}\Psi \\
 &+ i \cdot j \cdot h_{i,0} \cdot h_{0,j} \cdot \partial_{xy}^{00}\Psi \quad \text{avec : } (i, j) \in E^2
 \end{aligned}$$

on désigne par E l'ensemble $\{-1, 0, +1\}$

Par combinaisons linéaires des expressions présentées ci-dessus, nous pouvons donner une expression des dérivées partielles de Ψ , au noeud $(0,0)$.

-le calcul de $h_{0,1} \cdot \Psi_{0,-1} + h_{0,-1} \cdot \Psi_{0,1}$ donne :

$$(2) \quad \partial_{xx}^{00} \Psi = \frac{2}{h_{0,1} + h_{0,-1}} \cdot \left[\frac{\Psi_{0,1} - \Psi_{0,0}}{h_{0,1}} + \frac{\Psi_{0,-1} - \Psi_{0,0}}{h_{0,-1}} \right]$$

-le calcul de $h_{1,0} \cdot \Psi_{-1,0} + h_{-1,0} \cdot \Psi_{1,0}$ donne :

$$(3) \quad \partial_{yy}^{00} \Psi = \frac{2}{h_{1,0} + h_{-1,0}} \cdot \left[\frac{\Psi_{1,0} - \Psi_{0,0}}{h_{1,0}} + \frac{\Psi_{-1,0} - \Psi_{0,0}}{h_{-1,0}} \right]$$

-le calcul de $h_{0,-1}^2 \cdot \Psi_{0,1} - h_{0,1}^2 \cdot \Psi_{0,-1}$ donne :

$$(4) \quad \partial_x^{00} \Psi = \frac{1}{h_{0,1} + h_{0,-1}} \cdot \left[\frac{h_{0,-1}}{h_{0,1}} \cdot (\Psi_{0,1} - \Psi_{0,0}) - \frac{h_{0,1}}{h_{0,-1}} \cdot (\Psi_{0,-1} - \Psi_{0,0}) \right]$$

-le calcul de $h_{-1,0}^2 \cdot \Psi_{1,0} - h_{1,0}^2 \cdot \Psi_{-1,0}$ donne :

$$(5) \quad \partial_y^{00} \Psi = \frac{1}{h_{1,0} + h_{-1,0}} \cdot \left[\frac{h_{-1,0}}{h_{1,0}} \cdot (\Psi_{1,0} - \Psi_{0,0}) - \frac{h_{1,0}}{h_{-1,0}} \cdot (\Psi_{-1,0} - \Psi_{0,0}) \right]$$

-le calcul de $h_{1,0} \cdot h_{0,1} \cdot \Psi_{-1,-1} + h_{-1,0} \cdot h_{0,-1} \cdot \Psi_{1,1} - h_{0,-1} \cdot h_{1,0} \cdot \Psi_{-1,1}$
 $- h_{0,1} \cdot h_{-1,0} \cdot \Psi_{1,-1}$ donne :

$$(6) \quad \partial_{xy}^{00} \Psi = \sum_{i,j} A_{ij} \cdot (\Psi_{i,j} - \Psi_{0,0}) \quad (i,j) \in E^2$$

Les coefficients A_{ij} sont donnés par la formule (11).

Nous pouvons écrire $\partial_{xx}^{00}\Psi$ et $\partial_{yy}^{00}\Psi$ sous la forme suivante :

$$(7) \quad \partial_{xx}^{00}\Psi = B_{0,1} \cdot (\Psi_{0,1} - \Psi_{0,0}) + B_{0,-1} \cdot (\Psi_{0,-1} - \Psi_{0,0})$$

$$(8) \quad \partial_{yy}^{00}\Psi = B_{1,0} \cdot (\Psi_{1,0} - \Psi_{0,0}) + B_{-1,0} \cdot (\Psi_{-1,0} - \Psi_{0,0})$$

Nous aurons de la même manière $\partial_x^{00}\Psi$ et $\partial_y^{00}\Psi$:

$$(9) \quad \partial_x^{00}\Psi = C_{0,1} \cdot (\Psi_{0,1} - \Psi_{0,0}) + C_{0,-1} \cdot (\Psi_{0,-1} - \Psi_{0,0})$$

$$(10) \quad \partial_y^{00}\Psi = C_{1,0} \cdot (\Psi_{1,0} - \Psi_{0,0}) + C_{-1,0} \cdot (\Psi_{-1,0} - \Psi_{0,0})$$

Nous sommes donc amenés à définir trois tableaux de coefficients, à savoir les tableaux (A_{ij}) , (B_{ij}) , (C_{ij}) .

Nous donnons ci-dessous les expressions générales des éléments de ces tableaux :

$$(11) \quad A_{ij} = \frac{i \cdot j}{4 \cdot h_{i,0} \cdot h_{0,j}} + \frac{1}{4 \cdot h_{i,j}} \cdot \left[\frac{1}{h_{-j,-i}} - \frac{1}{h_{j,i}} \right]$$

$$(12) \quad B_{ij} = \frac{2(1 - \delta_{|i|,|j|})}{h_{i,j} \cdot (h_{i,j} + h_{-i,-j})} \quad \delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

$$(13) \quad C_{ij} = (i + j) \cdot h_{-i,-j} \cdot B_{i,j} \quad \forall (i,j) \in E^2$$

Les expressions détaillées de ces coefficients sont données dans le tableau A1-3.

$$A_{-1,-1} = \frac{1}{4 \cdot h_{-1,0} \cdot h_{0,-1}}$$

$$A_{-1,1} = \frac{-1}{4 \cdot h_{-1,0} \cdot h_{0,1}}$$

$$A_{1,-1} = \frac{-1}{4 \cdot h_{1,0} \cdot h_{0,-1}}$$

$$A_{1,1} = \frac{1}{4 \cdot h_{1,0} \cdot h_{0,1}}$$

$$A_{-1,0} = \frac{1}{4 \cdot h_{-1,0}} \cdot \left[\frac{1}{h_{0,1}} - \frac{1}{h_{0,-1}} \right]$$

$$A_{0,-1} = \frac{1}{4 \cdot h_{0,-1}} \cdot \left[\frac{1}{h_{1,0}} - \frac{1}{h_{-1,0}} \right]$$

$$A_{1,0} = \frac{1}{4 \cdot h_{1,0}} \cdot \left[\frac{1}{h_{0,-1}} - \frac{1}{h_{0,1}} \right]$$

$$A_{0,1} = \frac{1}{4 \cdot h_{0,1}} \cdot \left[\frac{1}{h_{-1,0}} - \frac{1}{h_{1,0}} \right]$$

$$B_{-1,0} = \frac{2}{h_{-1,0} \cdot (h_{-1,0} + h_{1,0})}$$

$$B_{1,0} = \frac{2}{h_{1,0} \cdot (h_{1,0} + h_{-1,0})}$$

$$B_{0,-1} = \frac{2}{h_{0,-1} \cdot (h_{0,-1} + h_{0,1})}$$

$$B_{0,1} = \frac{2}{h_{0,1} \cdot (h_{0,1} + h_{0,-1})}$$

$$C_{-1,0} = -\frac{h_{1,0} \cdot B_{-1,0}}{2}$$

$$C_{1,0} = \frac{h_{-1,0} \cdot B_{1,0}}{2}$$

$$C_{0,-1} = -\frac{h_{0,1} \cdot B_{0,-1}}{2}$$

$$C_{0,1} = \frac{h_{-1,0} \cdot B_{0,1}}{2}$$

TABLEAU A1-3.

Si la fonction ψ était aussi une fonction du temps t , l'expression de la dérivée partielle d'ordre 2 de ψ par rapport au temps t , au noeud $(0,0)$, serait :

$$(14) \quad \psi_{tt}^{00} = \frac{1}{s^2} \cdot (\psi_{00}^{t+1} + \psi_{00}^{t-1} - 2\psi_{00}^t) \quad \text{où } s = \Delta t.$$

L'équation fondamentale de la dynamique que doit vérifier le vecteur déplacement mécanique \vec{U} , est celle-ci : (Voir Chapitre I)

$$(15) \quad \rho \cdot \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = \mu \cdot \Delta \vec{U} + (\lambda + \mu) \cdot \text{grad} (\text{div} \vec{U})$$

avec $\vec{U} (U_1, 0, U_3)$

et $\frac{\partial}{\partial x_2} = 0.$

Cette équation, décomposée, donne :

$$(16) \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = v_\ell^2 \cdot \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + v_t^2 \cdot \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} + (v_\ell^2 - v_t^2) \cdot \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$(17) \quad \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = v_\ell^2 \cdot \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_3^2} + v_t^2 \cdot \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} + (v_\ell^2 - v_t^2) \cdot \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_3}$$

En notant $\vec{U}_{i,j}^t$ la valeur du vecteur déplacement \vec{U} au noeud (i,j) au temps t , il est possible de déterminer $\vec{U}_{0,0}^{t+1}$:

$$(18) \quad \vec{U}_{0,0}^{t+1} = -\vec{U}_{0,0}^{t-1} + 2 \cdot \vec{U}_{0,0}^t + \sum_{(i,j) \in E^2} [M_{ij}] \cdot (\vec{U}_{i,j}^t - \vec{U}_{0,0}^t)$$

avec
$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} \beta_{i,j} & \alpha_{i,j} \\ \alpha_{i,j} & \beta_{i,j} \end{bmatrix}$$

où $\alpha_{i,j} = s^2 \cdot (v_\ell^2 - v_t^2) \cdot A_{i,j}$ et $\beta_{i,j} = s^2 \cdot (v_\ell^2 \cdot \delta_{i,0} + v_t^2 \cdot \delta_{0,j}) \cdot B_{i,j}$

CONDITIONS AUX LIMITES :

Nous n'étudierons ci-dessous que le cas d'une surface plane horizontale (Figure A1-4). Les surfaces planes verticales sont traitées en maillage carré, car elles n'interviennent que dans la discontinuité autour de laquelle le maillage doit être régulier pour des raisons de stabilité (Voir Annexe 2).

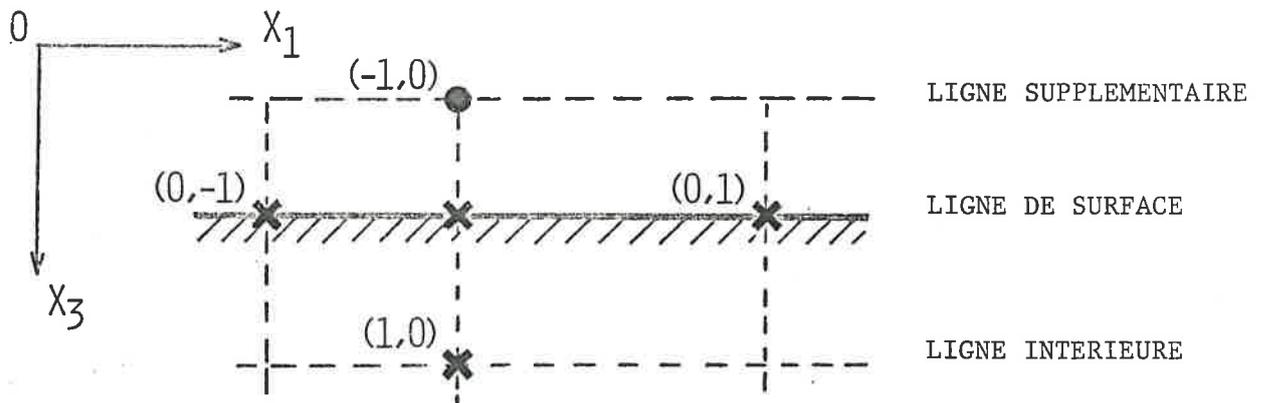


FIGURE A1-4. SURFACE PLANE HORIZONTALE

Le vecteur déplacement $\vec{U}_{-1,0}^t$ est l'inconnue et pour le calculer, nous devons résoudre le système suivant (Voir Chapitre I) :

$$(19) \quad \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\lambda \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0$$

Pour des commodités de calcul, nous proposons :

$$\gamma = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{v_t}{v_l} \right)^2$$

Nous obtenons ainsi :

$$(20) \quad \vec{U}_{-1,0}^t = \vec{U}_{0,0}^t + D_{0,-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \cdot (\vec{U}_{0,-1}^t - \vec{U}_{0,0}^t) + D_{0,1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \cdot (\vec{U}_{0,1}^t - \vec{U}_{0,0}^t) + D_{1,0} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (\vec{U}_{1,0}^t - \vec{U}_{0,0}^t)$$

$$\text{avec : } D_{0,-1} = -\frac{h_{-1,0} \cdot h_{0,1}}{h_{0,-1} \cdot h_{1,0}} \cdot \frac{h_{-1,0} + h_{1,0}}{h_{0,-1} + h_{0,1}}$$

$$D_{0,1} = -\frac{h_{0,-1}^2}{h_{0,1}^2} \cdot D_{0,-1} \quad \text{et} \quad D_{1,0} = \frac{h_{-1,0}^2}{h_{1,0}^2}$$

CONDITIONS D'UTILISATION D'UNE TELLE DISCRETISATION :

Deux caractéristiques sont à donner pour l'étude d'une configuration, à savoir : le nombre de points en lesquels on calcule le déplacement \vec{U} et le temps de calcul de ce déplacement.

Une comparaison est menée entre le maillage dissymétrique et le maillage régulier :

- Temps de calcul par point, par itération : 18 μs en maillage régulier
(calculateur : IBM 370/168) 57 μs en maillage variable
- Pour une configuration donnée, le temps de calcul, total, en maillage variable, est trois fois celui en maillage régulier, tandis que le nombre de points utilisés ne représente que les 44 % de celui utilisé en maillage régulier.

En outre, des problèmes d'instabilité ont été rencontrés. Afin de diminuer l'importance de ces phénomènes, il a fallu constituer un domaine, autour de la discontinuité, dans lequel le pas du maillage était constant (Voir Figure A1-5).

Les dimensions de ce domaine sont de 1λ suivant l'axe OX_1 et de $0,5 \lambda$ suivant l'axe OX_3 . Dans le cas contraire, des oscillations des solutions numériques apparaissent et perturbent donc la simulation.

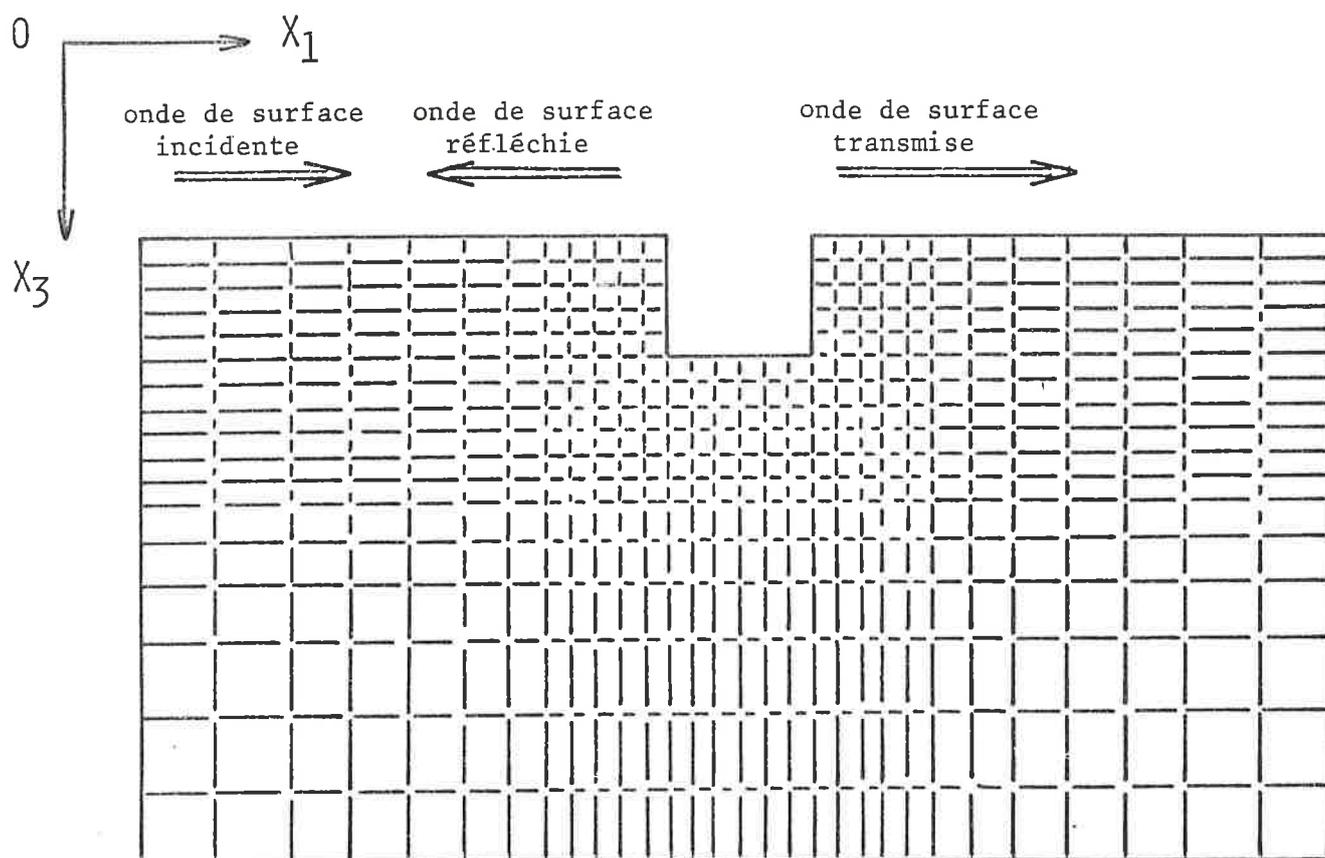


FIGURE A1-5. EXEMPLE DE STRUCTURE EN MAILLAGE DISSYMETRIQUE

ANNEXE 2

APPROXIMATION AUX DIFFERENCES FINIES DES EQUATIONS DE BASE DANS LE CAS D'UN MAILLAGE REGULIER

L'utilisation d'un maillage régulier conduit à poser les conditions suivantes :

- la discrétisation de l'espace donne : $\Delta x_1 = \Delta x_3 = h$
- la discrétisation du temps donne : $\Delta t = \delta$

La Figure A2-1 donne un exemple du maillage autour d'un point M_0 .

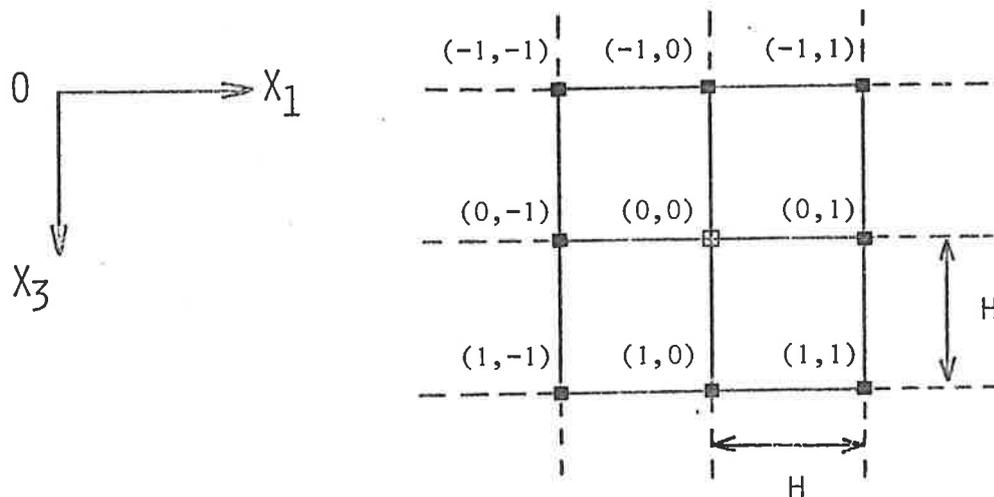


FIGURE A2-1. MAILLAGE REGULIER

Dans ce cas, le vecteur déplacement $\vec{U}_{0,0}^{t+1}$ au point (0,0) du domaine a la forme suivante :

$$(1) \quad \vec{U}_{0,0}^{t+1} = -\vec{U}_{0,0}^{t-1} + 2 \cdot \vec{U}_{0,0}^t + \sum_{(i,j) \in E^2} [M_{ij}] \cdot (\vec{U}_{i,j}^t - \vec{U}_{0,0}^t)$$

avec : $[M_{ij}] = \begin{bmatrix} \beta_{ij} & \alpha_{ij} \\ \alpha_{ij} & \beta_{ij} \end{bmatrix}$

où : $\alpha_{ij} = s^2 \cdot (V_\ell^2 - V_t^2) \cdot A_{ij} = s^2 \cdot (V_\ell^2 - V_t^2) \cdot \frac{i \cdot j}{4h^2}$

$$\beta_{ij} = s^2 \cdot (V_\ell^2 \cdot \delta_{i,0} + V_t^2 \cdot \delta_{0,j}) \cdot B_{ij} = s^2 \cdot (V_\ell^2 \cdot \delta_{i,0} + V_t^2 \cdot \delta_{0,j}) \cdot \frac{1 - \delta_{|i|,|j|}}{h^2}$$

CONDITIONS AUX LIMITES :

- cas des surfaces planes horizontales (Figure A2-2) :

le vecteur déplacement $U_{-1,0}^t$ s'écrit :

$$(2) \quad \vec{U}_{-1,0}^t = \vec{U}_{1,0}^t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} (\vec{U}_{0,1}^t - \vec{U}_{0,-1}^t)$$

- cas des surfaces planes verticales :

$$(3) \quad \text{Figure A2-3 : } \vec{U}_{0,1}^t = \vec{U}_{0,-1}^t + \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\vec{U}_{-1,0}^t - \vec{U}_{1,0}^t)$$

$$(4) \quad \text{Figure A2-4 : } \vec{U}_{0,-1}^t = \vec{U}_{0,1}^t + \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\vec{U}_{1,0}^t - \vec{U}_{-1,0}^t)$$

- Cas des points d'angle particuliers :

La Figure A2-5 montre les différents points d'angle pour lesquels nous devons calculer le vecteur déplacement \vec{U} .

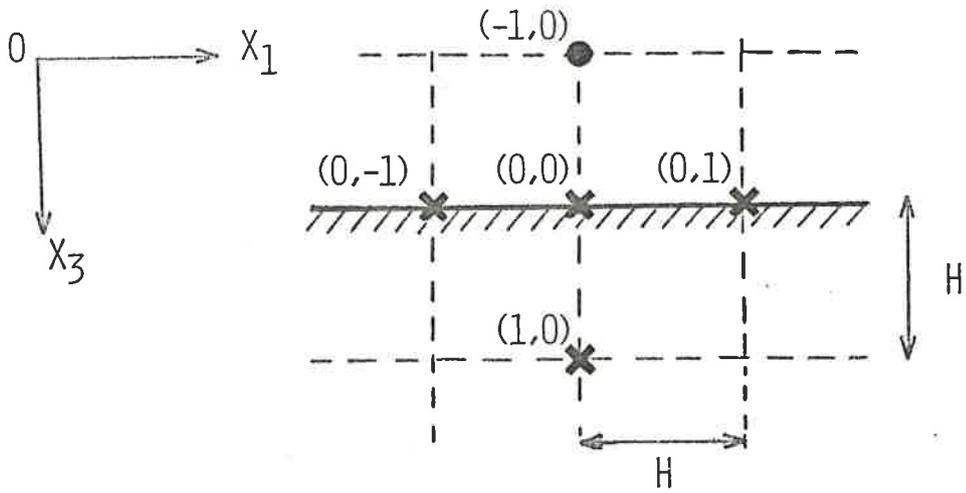


FIGURE A2-2 . Surface plane horizontale

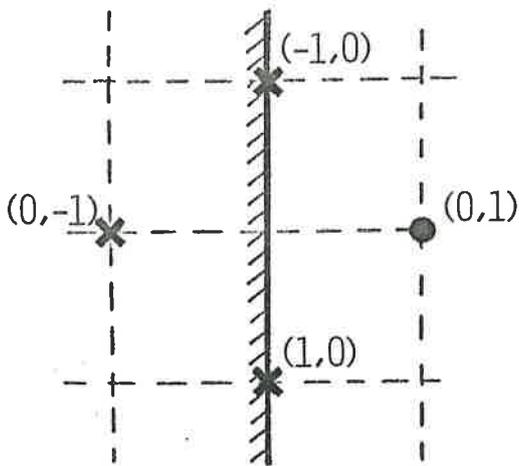


FIGURE A2-3 .

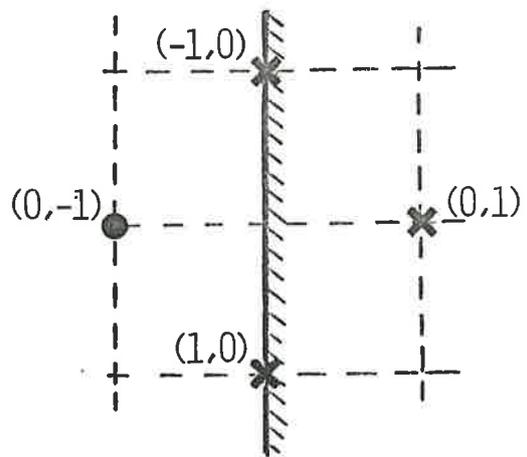


FIGURE A2-4 .

SURFACES PLANES VERTICALES

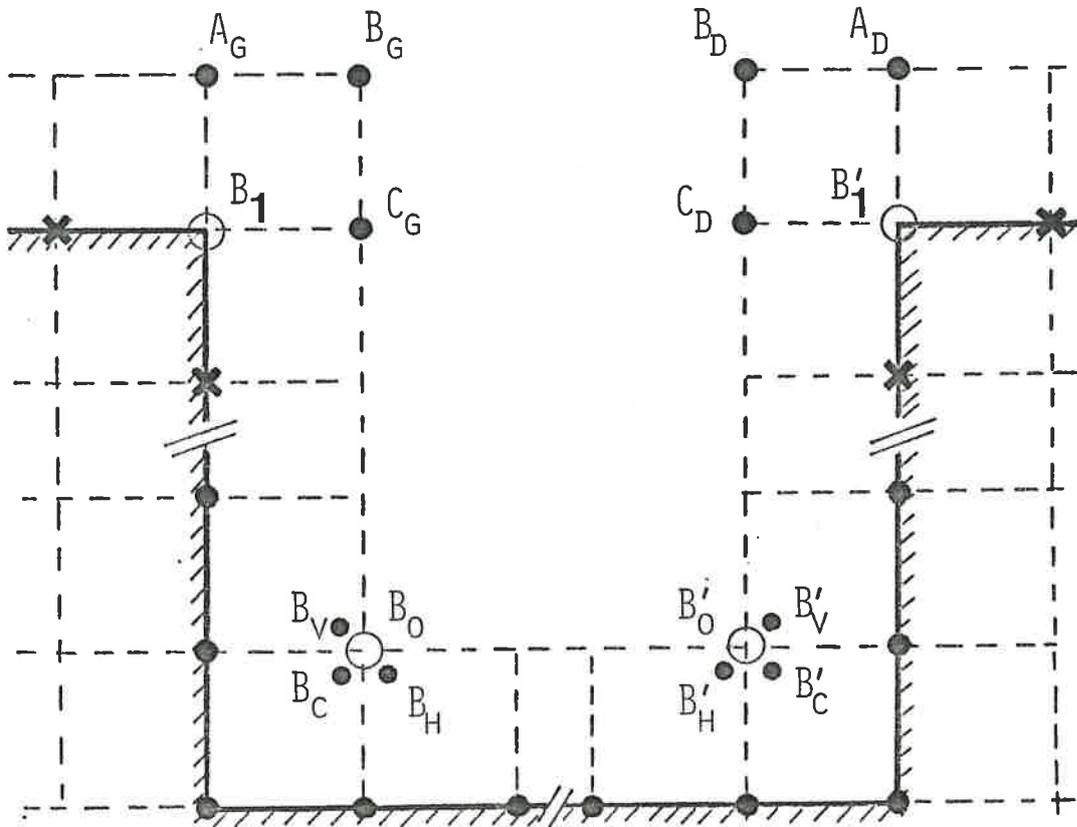


FIGURE A2-5 .
Points d'angle
particuliers

Cas des arêtes à 90° :

noeud B_1 : $\vec{U}_{0,0}^t$ vérifie l'équation (1)

$$(5) \text{ noeud } A_G : \vec{U}_{-1,0}^t = H_{0,0} \cdot \vec{U}_{0,0}^t + H_{1,0} \cdot \vec{U}_{1,0}^t + H_{0,-1} \cdot (\vec{U}_{0,0}^t - \vec{U}_{0,-1}^t)$$

$$(6) \text{ noeud } C_G : \vec{U}_{0,1}^t = H_{0,0}^\Gamma \cdot \vec{U}_{0,0}^t + H_{1,0}^\Gamma \cdot \vec{U}_{0,-1}^t + H_{0,-1}^\Gamma \cdot (\vec{U}_{0,0}^t - \vec{U}_{1,0}^t)$$

$$(7) \text{ noeud } B_G : \vec{U}_{-1,1}^t = \vec{U}_{0,0}^t + H' \cdot (\vec{U}_{-1,0}^t - \vec{U}_{0,1}^t)$$

noeud B_1' : $\vec{U}_{0,0}^t$ vérifie l'équation (1)

$$(8) \text{ noeud } A_D : \vec{U}_{-1,0}^t = H_{0,0} \cdot \vec{U}_{0,0}^t + H_{1,0} \cdot \vec{U}_{1,0}^t + H_{0,-1} \cdot (\vec{U}_{0,1}^t - \vec{U}_{0,0}^t)$$

$$(9) \text{ noeud } C_D : \vec{U}_{0,-1}^t = H_{0,0}^\Gamma \cdot \vec{U}_{0,0}^t + H_{1,0}^\Gamma \cdot \vec{U}_{0,1}^t + H_{0,-1}^\Gamma \cdot (\vec{U}_{1,0}^t - \vec{U}_{0,0}^t)$$

$$(10) \text{ noeud } B_D : \vec{U}_{-1,-1}^t = \vec{U}_{0,0}^t + H'' \cdot (\vec{U}_{-1,0}^t - \vec{U}_{0,-1}^t)$$

avec :

$$H_{0,0} = \begin{bmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 4/(4-\gamma^2) \end{bmatrix} ; \quad H_{1,0} = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & -\gamma^2/(4-\gamma^2) \end{bmatrix}$$

$$H_{0,-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 \\ 2\gamma/(4-\gamma^2) & 0 \end{bmatrix} ; \quad H_{pq}^\Gamma \text{ désigne la matrice adjointe de } H_{pq}$$

$$H' = \begin{bmatrix} (1+\gamma)/2\gamma & (1-\gamma)/2\gamma \\ -(1-\gamma)/2\gamma & -(1+\gamma)/2\gamma \end{bmatrix} ; \quad H'' = \begin{bmatrix} (1+\gamma)/2 & (1-\gamma)/2 \\ (1-\gamma)/2 & -(1+\gamma)/2 \end{bmatrix}$$

Cas des arêtes à 270° :

A chaque noeud considéré , on associe l'équation que doit vérifier le vecteur déplacement \vec{U} . Nous avons ainsi les relations suivantes :

$$\text{noeud } B_V \text{ -- (3) ; noeud } B_H \text{ -- (2) ; noeud } B_C \text{ -- (7)}$$

$$\text{noeud } B_V' \text{ -- (4) ; noeud } B_H' \text{ -- (2) ; noeud } B_C' \text{ -- (10)}$$

ANNEXE 3

EXPRESSIONS ANALYTIQUES DU DEPLACEMENT \vec{U}

Il nous faut connaître les expressions des amplitudes des deux composantes U_1 et U_3 du déplacement mécanique \vec{U} .

Pour cela, considérons une coupe longitudinale d'un solide, avec les axes de référence OX_1 et OX_3 (la direction OX_2 étant choisie infinie), présentée dans la figure A3-1.

Les ondes élastiques de surface sont du type de Rayleigh. Nous cherchons à exprimer leurs amplitudes en fonction de la position du point considéré .

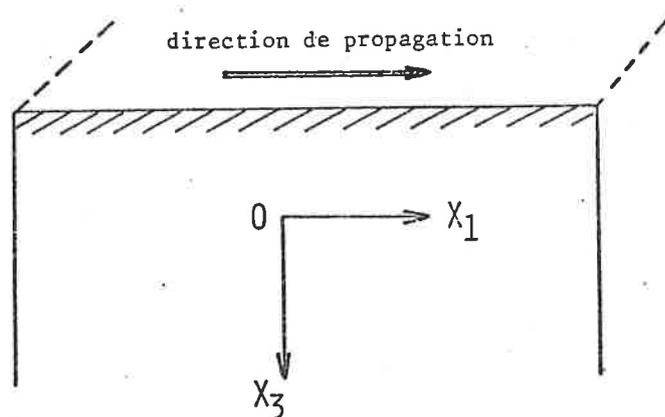


FIGURE A3-1 . Coupe longitudinale d'un solide.

Pour connaître les expressions des amplitudes des vibrations U_1 et U_3 , il nous a été nécessaire de résoudre un déterminant de Christoffel nous permettant de déterminer les coefficients $C_n, \alpha_i^{(n)}, \ell_3^{(n)}$ pour une solution générale du type suivant²³ :

$$U_i = \sum_{n=1}^3 C_n \cdot \alpha_i^{(n)} \cdot \exp(jk \ell_3^{(n)} \cdot x_3) \cdot \exp(jk(\ell_1 x_1 - v \cdot t))$$

La propagation se faisant suivant OX_1 , le cosinus directeur l_1 est égal à 1. La direction OX_2 n'intervient pas, car le mouvement d'un élément de volume est contenu dans le plan sagittal formé par le vecteur d'onde k et la normale à la surface sur laquelle se propage l'onde de Rayleigh.

On sait que l'amplitude U_i du mouvement doit vérifier :

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad T_{ij} = C_{ijkl} \cdot \frac{\partial U_k}{\partial x_l}$$

$$\text{d'où la relation :} \quad \rho \cdot \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = C_{ijk1} \cdot \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j \partial x_l}$$

L'expression précédente de U_i nous donne :

$$(\Gamma_{ik} - \rho V^2 \delta_{ik}) \cdot \alpha_i = 0 \quad \text{où} \quad \Gamma_{ik} = l_j l_1 \cdot C_{ijkl} \quad \text{et} \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

La recherche de solutions non triviales nous conduit à avoir la condition suivante appelée équation de Christoffel :

$$\det (\Gamma_{ik} - \rho V^2 \delta_{ik}) = 0$$

Le substrat est isotrope, ceci conduit aux expressions suivantes des Γ_{ik} :

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = 0 & \quad \Gamma_{11} = \mu l_3^2 + (\lambda + 2\mu) & \quad \Gamma_{22} = \mu(1 + l_3^2) \\ \Gamma_{23} = \Gamma_{32} = 0 & \quad \Gamma_{13} = l_3(\lambda + \mu) & \quad \Gamma_{33} = \mu + l_3^2(\lambda + 2\mu) \end{aligned}$$

En posant : $a = \mu + \mu l_3^2 - \theta$ avec $\theta = \rho V^2$ (valeur propre du système)
l'équation de Christoffel devient :

$$a \left[(\lambda + \mu + a)(l_3^2(\lambda + \mu) + a) - l_3^2(\lambda + \mu)^2 \right] = 0$$

soit, encore :

$$a^2 \left[(\lambda + \mu) \cdot (1 + l_3^2) + a \right] = 0$$

Connaissant l'expression de a en fonction de θ , on obtient :

$$\left[\mu(1 + l_3^2) - \theta \right]^2 \cdot \left[(\lambda + \mu) \cdot (1 + l_3^2) + \mu(1 + l_3^2) - \theta \right] = 0$$

soient les valeurs propres θ_i :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \mu(1 + l_3^2) \quad \text{dégénérée deux fois} \\ \theta_3 &= (2\mu + \lambda) \cdot (1 + l_3^2) \quad \text{simple} \end{aligned}$$

On cherche maintenant les vecteurs propres associés à ces valeurs propres réelles .

- pour la valeur propre double θ_1 :

On aboutit au système :

$$\begin{aligned} \alpha_1 + l_3 \alpha_3 &= 0 \\ l_3 \alpha_1 + l_3^2 \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} -l_3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- pour la solution simple θ_3 :

On aboutit à la condition : $\alpha_2 = 0$ et au système :

$$\begin{aligned} -l_3^2 \alpha_1 + l_3 \alpha_3 &= 0 \\ -l_3 \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

on obtient : $\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ l_3 \end{pmatrix}$

Les trois vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ forment une base de l'espace (\vec{V}_1 est pris arbitraire). Nous connaissons les valeurs de $\alpha_i^{(j)}$ pour les vecteurs de base \vec{V}_i de composantes $(\alpha_i^1, \alpha_i^2, \alpha_i^3)$. Nous calculons maintenant les valeurs de $l_3^{(i)}$:

$$l_3^{(1)} = l_3^{(2)} = i \sqrt{1 - (v/v_t)^2} \quad \text{et} \quad l_3^{(3)} = i \sqrt{1 - (v/v_\ell)^2}$$

avec $v_t^2 = \mu/\rho$; $v_\ell^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ $v < v_t < v_\ell$

En normalisant les vecteurs de base $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$, nous obtenons le déplacement U_i qui est une combinaison linéaire des solutions construites à partir des $\alpha_i^{(j)}$ et des $l_3^{(j)}$ trouvés :

$$U_i = \sum_{n=1}^3 C_n \cdot \alpha_i^{(n)} \cdot \exp(jk \cdot (l_1 x_1 + l_3^{(n)} \cdot x_3 - v \cdot t) \quad \begin{matrix} l_1 = 1 \\ l_0 = 0 \end{matrix}$$

Les coefficients C_n sont déterminés par les conditions aux limites.

On a une contrainte nulle sur la surface horizontale :

$$T_{3j} = 0 = C_{3jkl} \cdot \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \quad ; \quad \text{on est conduit à remplacer tous les}$$

termes en fonction de v_t^2 et de v_ℓ^2 ; on se place à $t=0, x_1=0$ et $x_3=0$ (conditions initiales : ligne source confondue avec l'axe OX_3 et ligne de surface avec l'axe OX_1).

On obtient ainsi :

$$U_1^0 = C_2 \cdot \frac{-i}{y} (1-y^2)^{1/2} + \frac{C_3}{x} \quad x = v/v_\ell$$

$$U_3^0 = \frac{C_2}{y} + C_3 \cdot \frac{i}{x} (1-x^2)^{1/2} \quad y = v/v_t$$

On a utilisé dans le traitement numérique les expressions analytiques suivantes :

$$U_1 = -\frac{1}{y} \cdot (1-y^2)^{1/2} \cdot \left[\frac{2}{2-y^2} \cdot \exp(-k(1-x^2)^{1/2} \cdot x_3) - \exp(-k(1-y^2)^{1/2} \cdot x_3) \right]$$

$$U_3 = \frac{1}{y} \left[\frac{y^2-2}{2} \cdot \exp(-k(1-x^2)^{1/2} \cdot x_3) + \exp(-k(1-y^2)^{1/2} \cdot x_3) \right]$$

Le terme dépendant du temps à savoir : $\exp(jk(\ell_1 x_1 - V \cdot t))$ doit multiplier les deux expressions précédentes pour qu'elles dépendent du temps.

A N N E X E 4

DETERMINATION DE L'EQUIVALENT ISOTROPE DU LiNbO_3

Etant donné que le niobate de Lithium LiNbO_3 est un substrat anisotrope et piézoélectrique, il nous a fallu chercher un équivalent isotrope de ce corps afin d'effectuer des comparaisons avec d'autres auteurs.

Il se trouve que Li^{36} avait proposé un équivalent isotrope. Nous avons repris ce modèle qui donnait les trois indications suivantes (étant entendu que le substrat est le LiNbO_3 coupe Y - propagation Z) :

- La densité du substrat est celle du LiNbO_3 soit $\rho = 4\,700 \text{ Kg/m}^3$;
 - La vitesse de Rayleigh est celle correspondant à la direction Z pour une coupe selon Y, soit $V_R = 3488 \text{ m/s}$;
 - Le coefficient de Poisson σ est tel que la réflexion d'une onde de Rayleigh, sous incidence normale, pour un réseau de 100 rainures de forme donnée, à la fréquence centrale est en accord avec les résultats expérimentaux .
- La valeur de σ est donc : $\sigma \approx 0.309$.

Soient V_ℓ et V_t les vitesses de compression et de cisaillement, et soient λ et μ les coefficients de Lamé, on sait que :

$$V_\ell^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad \text{et} \quad V_t^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

Nous connaissons aussi les relations suivantes :

$$\frac{V_R}{V_t} \approx \frac{0,87 + 1,12\sigma}{1 + \sigma} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{1 - 2(V_t/V_\ell)^2}{2 \cdot (1 - (V_t/V_\ell)^2)}$$

D'autre part , nous savons que la relation de Victorov doit être aussi vérifiée, de ce fait nous allons pouvoir donner les valeurs des vitesses.

La relation de Victorov est celle-ci :

$$\left[2 - \left(\frac{v_R}{v_t} \right)^2 \right]^2 = 4 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v_R}{v_\ell} \right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v_R}{v_t} \right)^2}$$

On obtient :

$$- v_\ell \approx 7143,45 \text{ m/s}$$

$$v_R/v_\ell \approx 0,488$$

$$- v_t \approx 3754,52 \text{ m/s}$$

$$v_R/v_t \approx 0,929$$

$$- \lambda \approx 10,733 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$C_{11} \approx 23,983 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$- \mu \approx 6,625 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$C_{12} \approx 10,733 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Nous possédons maintenant un équivalent isotrope du LiNbO_3 que nous pouvons étudier à l'aide de notre méthode numérique.

ANNEXE 5

UTILISATION D'UN MAILLAGE VARIABLE PAR DOMAINES

La méthode des différences finies utilisant un maillage régulier ne nous permettait pas d'étudier le diffraction d'une onde élastique de surface par des rainures de faibles profondeur, car cela aurait nécessité de grands temps de calcul et une grande place en mémoire centrale du ordinateur.

Nous avons donc tenté dans un premier temps d'utiliser un maillage dont les mailles seraient de petites dimensions au voisinage des discontinuités, (figure A5-1), puis de dimensions plus grandes dans des domaines plus éloignés de l'obstacle.

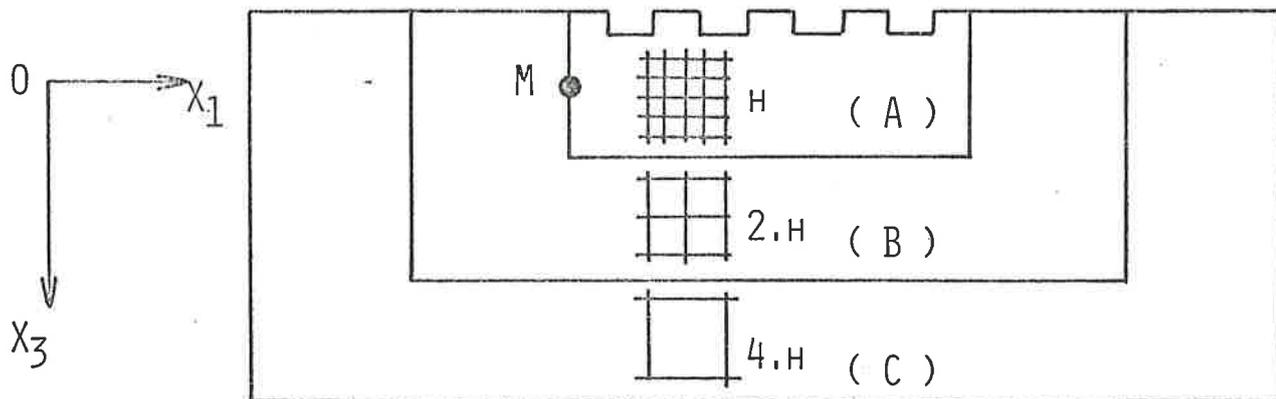


FIGURE A5-1 . Maillage variable par domaines.

Le maillage présenté a été divisé en trois zones A, B, C. Dans la zone A, les mailles sont carrées et de côté h ; dans la zone B, elles sont encore carrées, mais de côté $2h$ et enfin dans la zone C, elles sont aussi carrées, mais de côté $4h$.

L'utilisation d'un tel maillage a été surtout employée dans le cas de la résolution d'équations de type elliptique ou parabolique, mais non à notre connaissance dans le cas d'équations de type hyperbolique.

Les difficultés rencontrées dans l'établissement de cette méthode, pour résoudre notre problème de diffraction, sont présentées ci-après :

a) Conditions de stabilité:

Elles sont données par ALTERMAN³ dans le cas d'un maillage régulier. Elles doivent être vérifiées en chacun des points des différentes zones. Ces conditions se traduisent par une inégalité entre les incréments de la discrétisation de l'espace et du temps. Elles seront satisfaites en tout point des domaines si elles le sont dans le domaine dont les mailles sont les plus petites.

b) Choix des incréments spatiaux Δx_1 et Δx_3 :

Dans le domaine A la valeur de h doit être au moins égale à $\frac{\lambda}{60}$, de telle sorte que la maille du domaine C soit au moins égale à $\frac{\lambda}{15}$, ce qui permet d'obtenir des solutions non erronées à notre problème.

c) Etude des points appartenant à la jonction de deux domaines :

Les principales difficultés apparaissent dans le calcul du déplacement U aux points de la jonction de deux zones (Figure A5-2).

Considérons le point M appartenant au domaine A. Si le calcul du déplacement \vec{U} aux points cerclés est facile^{3,9,16,49}, la détermination de \vec{U} aux points d'interface tel ce point M demande une attention particulière.

Plusieurs approximations ont été essayées:

- Combinaisons linéaires des approximations aux différences finies des déplacements \vec{U} aux points 1 à 6.

- Interpolation polynomiale

- Interpolation linéaire. C'est cette dernière qui donne les résultats les plus satisfaisants; cependant les réflexions parasites apparaissant lors du franchissement de deux zones est de l'ordre de 2% et de ce fait nous ne pouvons utiliser une telle approximation pour nos calculs.

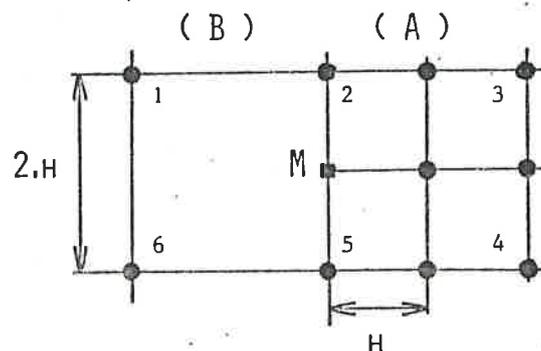


FIGURE A5-2 . Exemple d'interface de deux domaines.

ANNEXE 6

ENCHAINEMENT DE RAINURES :

METHODE DE LA MATRICE [S]

L'étude d'un réseau de N rainures de profondeur H et de largeur W, doit nous permettre de connaître les coefficients de réflexion \mathcal{R}_N et de transmission \mathcal{T}_N , en module et en phase, ainsi que le facteur de conversion en ondes volumiques \mathcal{V}_N . Dans un système sans pertes, il va de soi que \mathcal{V}_N doit être nul, c'est-à-dire que : $|\mathcal{R}_N|^2 + |\mathcal{T}_N|^2 = 1$.

1) Mise en place des principes de base :

Considérons l'analogie entre une rainure élémentaire et un quadripôle électrique Q. Ce dernier peut être caractérisé par sa matrice chaîne notée (T_Q) telle que les grandeurs d'entrée (V_1 pour la tension et I_1 pour le courant) soient des fonctions linéaires des grandeurs de sortie (V_2 pour la tension et I_2 pour le courant); sous forme matricielle, nous avons ainsi :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = (T_Q) \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad (T_Q) = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$$

Le sens des courants est indiquée sur la figure A6-1.

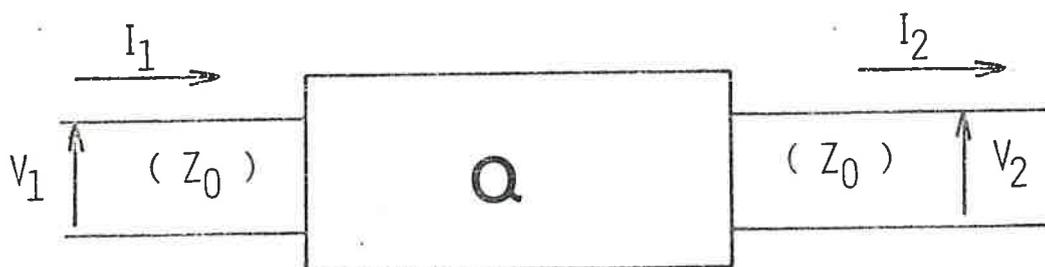


FIGURE A6-1. Quadripôle Q

Les éléments de la matrice (T_0) sont des fonctions des coefficients de réflexion \mathcal{R} et de transmission \mathcal{T} pour la rainure élémentaire .

Le quadripôle considéré étant réciproque et symétrique, nous avons les relations suivantes :

$$A = D \quad \text{et} \quad A.D - B.C = 1$$

La matrice impédance va donc s'écrire :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = (Z) \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (Z) = \begin{bmatrix} Z_{11} & -Z_{12} \\ Z_{21} & -Z_{22} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons en déduire les expressions des éléments de (Z) :

$$Z_{11} = Z_{22} = A_1 / C_1 \quad Z_{12} = Z_{21} = 1 / C_1$$

et celles des éléments de (T_0) :

$$A_1 = D_1 = Z_{11} / Z_{12} \quad B_1 = (Z_{11}^2 - Z_{12}^2) / Z_{12} \quad C_1 = 1 / Z_{12}$$

Considérons maintenant la matrice de répartition (S) pour la rainure étudiée :

$$(S) = \begin{bmatrix} \mathcal{R} & \mathcal{T} \\ \mathcal{T} & \mathcal{R} \end{bmatrix}$$

Il nous faut relier les matrices (S) et (T_0) , en utilisant la matrice (Z) . Pour cela considérons l'état du système présenté dans la figure A6-2 qui tient compte des ondes entrantes et sortantes .

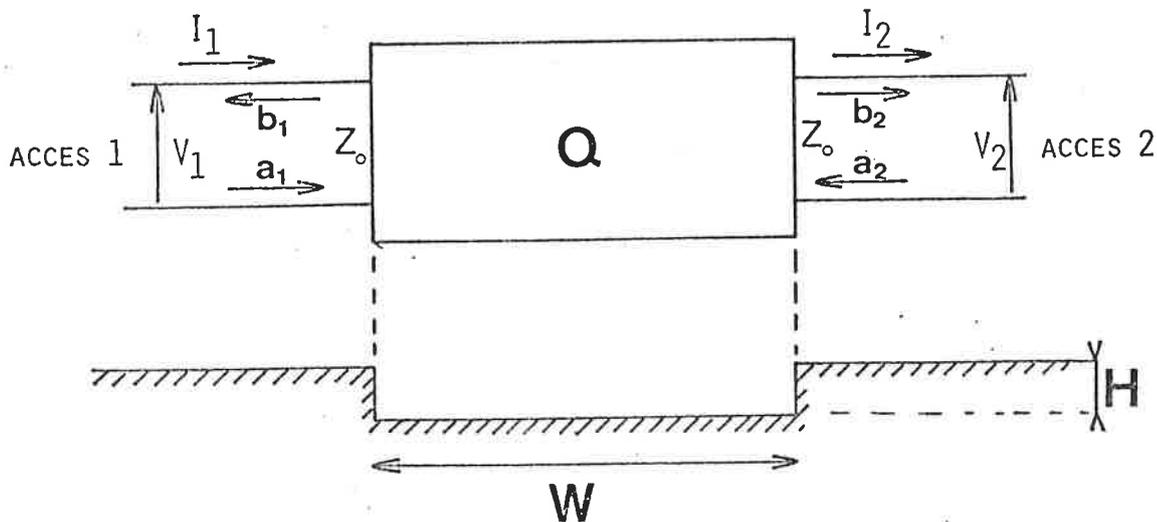


FIGURE A6-2. Quadripôle Q

En théorie des ondes ^{13,59}, en appelant Z_0 l'impédance caractéristique des accès 1 et 2, a_1 et a_2 désignant les amplitudes des ondes entrantes b_1 et b_2 désignant les ondes sortantes, nous pouvons écrire :

$$(V) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad (V) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$(I) = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad (I) = \begin{pmatrix} (a_1 - b_1) / Z_0 \\ (a_2 - b_2) / Z_0 \end{pmatrix}$$

Soient les matrices $(W) = \begin{pmatrix} Z_0 & 0 \\ 0 & Z_0 \end{pmatrix}$ et $(J) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; d'où : $(W) = Z_0 \cdot (J)$

Nous connaissons la relation : $(V) = (Z) \cdot (I)$; nous cherchons la relation entre les quantités (B) et (A) qui sont à la matrice :

$$(B) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad (A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec :} \quad (B) = (S) \cdot (A)$$

Nous obtenons ainsi :

$$(B) = ((W) \cdot (Z) \cdot (W)^{-1} + (W))^{-1} \cdot ((W) \cdot (Z) \cdot (W)^{-1} - (W)) \cdot (A)$$

Par conséquent :

$$(S) = ((J) \cdot (Z) \cdot (J)^{-1} + Z_0 \cdot (J))^{-1} \cdot ((J) \cdot (Z) \cdot (J)^{-1} - Z_0 \cdot (J))$$

(S) peut se mettre sous la forme :

$$(S) = ((Z) \cdot (J) + Z_0 \cdot (1))^{-1} \cdot ((Z) \cdot (J) - Z_0 \cdot (1))$$

avec la convention des courants entrants nous aurions obtenu :

$$(S) = ((Z) + Z_0 \cdot (1))^{-1} \cdot ((Z) - Z_0 \cdot (1)) \quad (1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et ainsi nous avons :

$$(Z) = -Z_0 \cdot ((S) + (1)) \cdot ((S) - (1))^{-1} \cdot (J)$$

et plus en détail :

$$Z_{11} = Z_{22} = \frac{1 + \mathcal{C}^2 - \mathcal{R}^2}{(\mathcal{R} - 1)^2 - \mathcal{C}^2} \cdot Z_0 \quad ; \quad Z_{12} = Z_{21} = \frac{2 \cdot \mathcal{C}}{(\mathcal{R} - 1)^2 - \mathcal{C}^2} \cdot Z_0$$

$$A_1 = D_1 = \frac{1 + \rho^2 - R^2}{2 \cdot \rho}$$

$$B_1 = \frac{(1 + \rho^2 - R^2)^2 - 4 \rho^2}{2 \cdot \rho \cdot [(R-1)^2 - \rho^2]} \cdot Z_0 ; C_1 = \frac{(R-1)^2 - \rho^2}{2 \cdot \rho \cdot Z_0}$$

2) Calcul des coefficients R_N et ρ_N :

Le réseau de rainures identiques nous permet de dire que le système ainsi constitué est symétrique et réciproque.

Soit le schéma suivant d'une partie du réseau (Figure A6-3) :

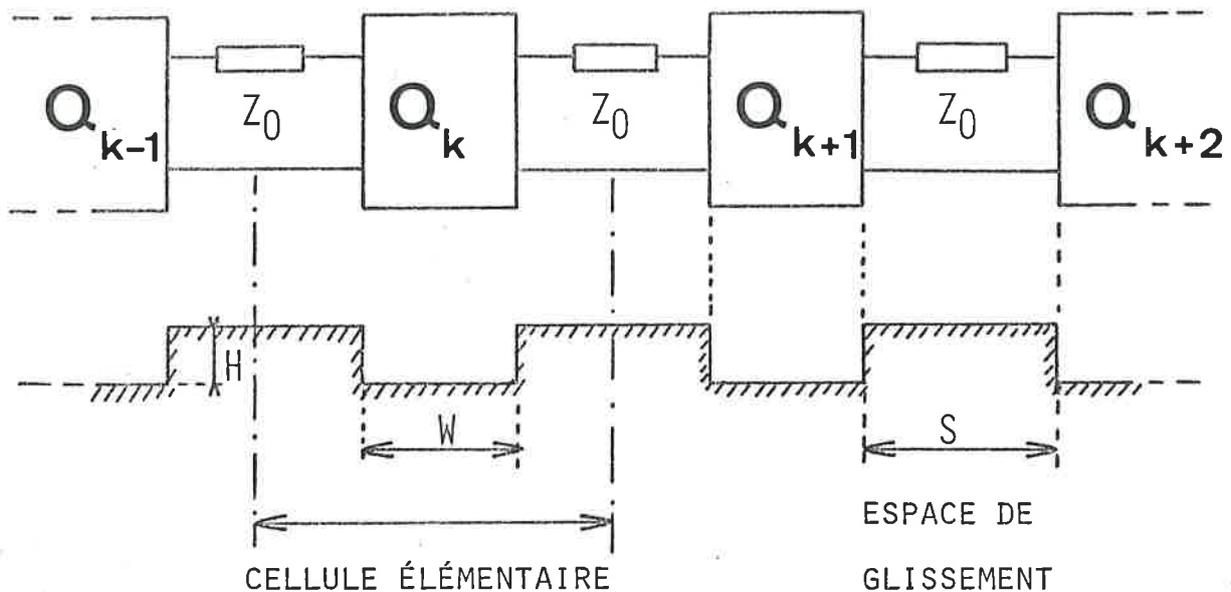


FIGURE A6-3 . Exemple de structure pour un réseau.

La matrice de transfert d'un tronçon de longueur $\frac{S}{2}$ est celle-ci:

$$(T_{\frac{S}{2}}) = \begin{bmatrix} \text{ch}(u) & Z_0 \cdot \text{sh}(u) \\ Z_0^{-1} \cdot \text{sh}(u) & \text{ch}(u) \end{bmatrix} \quad \text{avec } u = \alpha + j\beta \quad \text{ici } \alpha = 0 \text{ et } \beta = 2\pi s / 2\lambda$$

La cellule élémentaire est constituée par un enchainement d'un tronçon de longueur $\frac{S}{2}$, d'un quadripôle Q équivalent à la rainure et d'un deuxième tronçon de longueur $\frac{S}{2}$. Sa matrice de transfert est donc :

$$(T_C) = (T_{\frac{S}{2}}) \cdot (T_Q) \cdot (T_{\frac{S}{2}}) \quad (T_C) = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

Les expressions des éléments de cette matrice sont :

$$A' = A_1 \cdot \text{ch}(u)^2 + \frac{1}{2} \cdot \text{sh}(2u) \cdot (C_1 Z_0 + B_1 \cdot Z_0^{-1}) + D_1 \cdot \text{sh}(u)^2$$

$$B' = \frac{1}{2} \cdot (A_1 + D_1) \cdot Z_0 \cdot \text{sh}(2u) + B_1 \cdot \text{ch}(u)^2 + C_1 \cdot Z_0^2 \cdot \text{sh}(u)^2$$

$$C' = \frac{1}{2} \cdot (A_1 + D_1) \cdot Z_0^{-1} \cdot \text{sh}(2u) + B_1 \cdot Z_0^{-2} \cdot \text{sh}(u)^2 + C_1 \cdot \text{ch}(u)^2$$

$$D' = A_1 \cdot \text{sh}(u)^2 + \frac{1}{2} \cdot \text{sh}(2u) \cdot (C_1 Z_0 + B_1 \cdot Z_0^{-1}) + D_1 \cdot \text{ch}(u)^2$$

Avec $A_1 = D_1$ et $A_1 \cdot D_1 - B_1 \cdot C_1 = 1$, nous obtenons aussi :

$$A' = D' \quad \text{et} \quad A' \cdot D' - B' \cdot C' = 1.$$

La matrice de transfert du système à N sillons est celle-ci :

$$(T_N) = (T_C)^N \quad \det(T_N) = [\det(T_C)]^N = 1$$

Le fait de compter un tronçon de longueur $\frac{S}{2}$ en plus de chaque côté du réseau n'affecte en rien l'amplitude du coefficient de réflexion, mais ne provoque qu'un décalage de la phase.

Le calcul de (T_N) se fait aisément grâce au théorème de Cayleigh-Hamilton :

l'équation caractéristique de la matrice (T_C) est :

$$\lambda^2 - 2A' \cdot \lambda + 1 = 0$$

$$(T_N) = P_N(2A') \cdot (T_C) - Q_N(2A') \cdot (1) \quad \text{avec} \quad (T_C)^N = (T_N)$$

Les polynômes $P_N(z)$ et $Q_N(z)$ sont dérivés des polynômes de Tchebycheff, de ce fait nous allons pouvoir donner une relation de récurrence liant les matrices de transfert d'une rainure et celle d'un réseau de rainures :

$$A' \text{ réel} : \quad \theta = \arccos(A') \quad , \quad P_N(2A') = \frac{\sin(N\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$(T_C)^N = \frac{\sin(N\theta)}{\sin(\theta)} \cdot (T_C) - \frac{\sin(N-1)\theta}{\sin(\theta)} \cdot (1) \quad (1)$$

$$A' \text{ complexe : } \theta = \arccos(A') \quad , \quad P_N(2A') = \frac{\text{sh}(N\theta)}{\text{sh}(\theta)}$$

$$(T_C)^N = \frac{\text{sh}(N\theta)}{\text{sh}(\theta)} \cdot (T_C) - \frac{\text{sh}(N-1)\theta}{\text{sh}(\theta)} \cdot (1) \quad (1)$$

On peut démontrer que l'on a aussi : $A'_N = D'_N$ (on a posé $(T_N) = \begin{bmatrix} A'_N & B'_N \\ C'_N & D'_N \end{bmatrix}$)

Nous sommes maintenant capables de donner les expressions des coefficients de réflexion et de transmission pour un réseau fixé :

$$\mathcal{R}_N = \frac{\left(\frac{A'_N}{C'_N}\right)^2 - \left(\frac{1}{C'_N}\right)^2 - Z_0^2}{\left(\frac{A'_N}{C'_N} + Z_0\right)^2 - \left(\frac{1}{C'_N}\right)^2}$$

$$\mathcal{G}_N = \frac{\left(\frac{2}{C'_N}\right) \cdot Z_0}{\left(\frac{A'_N}{C'_N} + Z_0\right)^2 - \left(\frac{1}{C'_N}\right)^2}$$

De manière plus simple, nous avons :

$$\mathcal{R}_N = (B'_N \cdot Z_0^{-1} - C'_N \cdot Z_0) / (B'_N \cdot Z_0^{-1} + C'_N \cdot Z_0 + 2 \cdot A'_N)$$

$$\mathcal{G}_N = 2 / (B'_N \cdot Z_0^{-1} + C'_N \cdot Z_0 + 2 \cdot A'_N)$$

ANNEXE 7

PROGRAMMES DE CALCUL

Nous présentons dans les pages suivantes les deux principaux programmes de calcul que nous avons faits et utilisé pour notre simulation numérique de la diffraction d'une onde élastique de surface par des obstacles en milieu isotrope.

Ces deux programmes se nomment :

- Programme "MARCHE" pour la diffraction par des marches descendantes et montantes.
- Programme "RAYLEIGH" pour la diffraction par des rainures.

Dans les deux cas, le langage de codification a été celui du FORTRAN IV .

PROGRAMME " M A R C H E "

```

JOB MARCHE,AN:U404,PN:L MARCHE,CLS:31,REX
**PARCHE JOB EUN2661,MARCHE,TIME=(25*00)
**MAIN HOHG=01,LINES=9
**CIRCE HACC=U315C1CN
** EXEC FTX,REGION,GO=440K
**FUKI,SYSIN DD *
C
C PROGRAMME DE CALCUL RELATIF A LA DIFFRACTION D'UNE ONDE ELASTIQUE
C DE SURFACE PAR DES MARCHES DESCENDANTES OU MONTANTES
C
REAL KN,LN
DIMENSION U1(240*80*2),U3(240*80*2)
DIMENSION A1(275*4),X3(275*4),LIG(4)
DIMENSION A11(275),XJ3(275)
DIMENSION U1BV(2),U3BV(2),U1BH(2),U3BH(2),U1BC(2),U3BC(2)
DIMENSION AMPU1(150),AMPU3(150)
C
LECC=
IMP=B
C
99000 HEAD(LECC,19*END=99999)VL,VT,VR,M,N,IKN,ILN,J1,NSH,NT,IFD,LIG
19 FURFAT(3F4.3*1214)
C
KN=1./FLOAT(IKN)
LN=1./FLOAT(ILN)
MSV=M/2
MS=MSV**5
MSL=FLOAT(NSH-2)/FLOAT(IKN)
IF (J1.GT.NSH) MSL=FLOAT(J1-2)/FLOAT(IKN)
PI=3.1415926
X=VP/VL
Y=VR/VT
SKL=SQRT(1.-X**2)
SKT=SQRT(1.-Y**2)
CTL=1.-2.*(VI/VL)**2
F=SQRT(1.-Y**2)/Y
G=2./(2.-Y**2)
H=1./Y
A=((LN*VL)/(KN*VR))**2
B=((LN*VT)/(KN*VR))**2
DCIL=4.*CTL/(CTL-1.)
PILN=2.*PI*LN
MSM1=MS-1
MSM2=MS+1
MSVM1=MSV-1
MSVM2=MSV+2
MSVP1=MSV*1
MSVP2=MSV*2
NSMP1=NSH*1
NSMP2=NSH-1
NSM1=NSH-1
NSM2=NSH+2
NM1=M-1
NM2=N-1
J1M2=J1-2
C
J1M1=J1-1
J1P1=J1+1
DO 100 J=J1,N
EX=EXP(-2.*PI*SRL*(J-J1)*KN)
EY=EXP(-2.*PI*SRT*(J-J1)*KN)
AMPU1(J)=F*(G*EX-EY)
AMPU3(J)=H*(-1./G*EX+EY)
100 CONTINUE
C
DO 159 KL=1,4
IF(LIG(KL).EQ.0) GO TO 159
DO 158 I=1,MSV
X1(I,KN)=0.
XJ(I,KL)=0.
158 CONTINUE
159 CONTINUE
XA1=0.
XA3=0.
XB1=0.
XB3=0.
DO 1588 I=MSV,M
II=I-MSV+1
X1(II)=0.
XJ(II)=0.
1588 CONTINUE
DO 160 KI=1,2
DO 160 I=1,M
DO 160 J=1,N
U1(I,J,KT)=0.
U3(I,J,KT)=0.
160 CONTINUE
C
INITIALISATION DU PROCESSUS ITERATIF
C
DO 1100 JT=1,2
DO 400 J=J1,N
DO 200 I=1,MS
X3=2.*PI*(I-1)*KN*LN*JT)
U1(I,J,JT)=AMPU1(J)*SIN(X3)
U3(I,J,JT)=AMPU3(J)*COS(X3)
200 CONTINUE
400 CONTINUE
U31=-AMPU1(J1)*SIN(2.*PI*(KN*LN*JT))
U33=AMPU3(J1)*COS(2.*PI*(KN*LN*JT))
U1(1,J1M1,JT)=U1(1,J1P1,JT)*U3(2,J1,JT)-U33
U3(1,J1M1,JT)=U3(1,J1P1,JT)*CTL*(U1(2,J1,JT)-U31)
DO 500 I=2,MSM1
U1(I,J1M1,JT)=U1(I,J1P1,JT)*U3(I+1,J1,JT)-U3(I-1,J1,JT)
U3(I,J1M1,JT)=U3(I,J1P1,JT)*CTL*(U1(I+1,J1,JT)-U1(I-1,J1,JT))
500 CONTINUE
U1BC(JT)=0.
U3BC(JT)=0.
U1BH(JT)=0.
U3BH(JT)=0.

```



```

DU 1752 I=C*MSVM1
U1(I,J,IPT)=U1(I,J,2,IPT)+U3(I+1,J+1,IPT)-U3(I-1,J-1,IPT)
U3(I,J,IPT)=U3(I,J,2,IPT)+CTL*(U1(I+1,J+1,IPT)-U1(I-1,J-1,IPT))
1752 CONTINUE
J=NSH-1
DU 1753 I=MSVP2,MM1
U1(I,J,IPT)=U1(I,J,2,IPT)+U3(I+1,J+1,IPT)-U3(I-1,J-1,IPT)
U3(I,J,IPT)=U3(I,J,2,IPT)+CTL*(U1(I+1,J+1,IPT)-U1(I-1,J-1,IPT))
1753 CONTINUE
11111 CONTINUE
C
LIGNE DU FOND
IF (IFD.EQ.0) GO TO 1803
DU 1801 I=1,M
XS=2.*PI*(I-1)*KN-LN*JT
U1(I,N,IPT)=AMP*U1(N)*SIN(XS)
U3(I,N,IPT)=AMP*U3(N)*COS(XS)
1801 CONTINUE
GO TO 1805
1803 CONTINUE
DU 1804 I=1,M
U1(I,N,IPT)=0.
U3(I,N,IPT)=0.
1804 CONTINUE
1805 CALCUL DES AMPLITUDES DU DEPLACEMENT
NTE*V=NT-ILN
IF (J.LI.NTE*V) GO TO 1600
IF (X*3.LI.U1(MSV,J,I,IPT)) X*3=U3(MSV,J,I,IPT)
IF (X*3.LI.U3(MSV,N,SH,IPT)) X*3=U1(MSV,N,SH,IPT)
IF (X*3.LI.U1(MSV,N,SH,IPT)) X*3=U3(MSV,N,SH,IPT)
IF (X*3.LI.U3(MSV,N,SH,IPT)) X*3=U1(MSV,N,SH,IPT)
DU 1590 J=1,4
IF (LIG(J).EQ.0) GO TO 1590
JL=LIG(J)
DU 1589 I=1,MSV
IF (X1(I,J).LT.U1(I,JL,IPT)) X1(I,J)=U1(I,JL,IPT)
IF (X3(I,J).LT.U3(I,JL,IPT)) X3(I,J)=U3(I,JL,IPT)
1589 CONTINUE
1590 CONTINUE
DU 1591 I=MSV,M
II=I-MSV+1
IF (X1(II).LT.U1(I,NSH,IPT)) X1(II)=U1(I,NSH,IPT)
IF (X3(II).LT.U3(I,NSH,IPT)) X3(II)=U3(I,NSH,IPT)
1591 CONTINUE
1600 CONTINUE
C
ECRITURE DES RESULTATS
IF (JT.EQ.3) GO TO 2325
IF (JT.EQ.NT) GO TO 2325
GO TO 2900
2325 WRITE (IMP,103) JT,M,N,KN,ILN,J1,NSH,HSL,VL,VT,VR,NT,IFD
103 FORMAT(1H1//20X,ITERATION NO : ,I5/20X,21(1H:)//, M=,I5,
1 N=,I5, PTS/LAMBDA =,I4, PTS/PERIODE =,I4, SURF 1
2 ,I4, SURF 2 : ,I4// H / LAMBDA = ,F7.4, VL = ,F8.

```

```

J=NSH
U1(I,J,IPT)=U1(I,J,IPT)+((A-B)/4.)*(U3BH(I,T0)-U3(I-1,J-1,I,T0))
U3(I,J,IPT)=U3(I,J,IPT)+((A-B)/4.)*(U1BH(I,T0)-U1(I-1,J-1,I,T0))
I=MSVP1
J=NSH
U1(I,J,IPT)=U1(I,J,IPT)+B*(U1BH(I,T0)-U1(I,J-1,I,T0))
U3(I,J,IPT)=U3(I,J,IPT)+A*(U3BH(I,T0)-U3(I,J-1,I,T0))
I=MSV
J=NSH
U1(I,J,IPT)=U1(I,J,IPT)+((A-B)/4.)*(U3(I+1,J-1,I,T0)-U3BC(I,T0))
U3(I,J,IPT)=U3(I,J,IPT)+((A-B)/4.)*(U1(I+1,J-1,I,T0)-U1BC(I,T0))
I=MSV
J=NSHM1
U1(I,J,IPT)=U1(I,J,IPT)+A*(U1BV(I,T0)-U1(I+1,J,I,T0))
U3(I,J,IPT)=U3(I,J,IPT)+B*(U3BV(I,T0)-U3(I+1,J,I,T0))
I=MSV
J=NSHM2
U1(I,J,IPT)=U1(I,J,IPT)+((A-B)/4.)*(U3BV(I,T0)-U3(I+1,J+1,I,T0))
U3(I,J,IPT)=U3(I,J,IPT)+((A-B)/4.)*(U1BV(I,T0)-U1(I+1,J+1,I,T0))
U1(MSV,1,IPT)=4./3.*U1(MSV,2,IPT)-1./3.*U1(MSV,3,IPT)+2./3.*(U3(MS
1V,2,IPT)-U3(MSVH1,2,IPT))
U1(MSV,1,IPT)=4./3.*U3(MSV,2,IPT)-((CTL**2)/(4.-CTL**2))*
U3(MSV,3,IPT)+12.*CTL/(4.-CTL**2)*U1(MSV,2,IPT)-U1(MSVH1,2,IPT)**
U1(MSV,1,IPT)=4./3.*U1(MSV,2,IPT)-((CTL**2)/(4.-CTL**2))*
U3(MSV,3,IPT)+12.*CTL/(4.-CTL**2)*U3(MSV,2,IPT)-U3(MSV,3,IPT))
U1(MSV,1,2,IPT)=4./3.*U3(MSV,2,IPT)-1./3.*U3(MSV,1,2,IPT)+2./3.*(U
1(MSV,2,IPT)-U1(MSV,3,IPT))
A1=(1.-CTL)/(2.*CTL)
U1(MSV,1,I,IPT)=U1(MSV,2,IPT)+ A1*(U1(MSV,1,I,IPT)-U1(MSV,1,
1,2,IPT))+((1.-CTL)/(2.*CTL))*U3(MSV,1,I,IPT)-U3(MSV,1,I,IPT)-U
U3(MSV,1,I,IPT)=U3(MSV,2,IPT)+((CTL-1.)/(2.*CTL))*U1(MSV,1,I,IPT)-U
11(MSV,1,2,IPT)- A1*(U3(MSV,1,I,IPT)-U3(MSV,1,2,IPT))
U1(MSV,1,I,IPT)=U1(MSV,1,NSHM1,IPT)+CTL*(U3(MSV,NSHM2,IPT)-U3(MSV,NSH,I
IPT))
U3V(IPT)=U3(MSV,1,NSHM1,IPT)+U1(MSV,NSHM2,IPT)-U1(MSV,NSH,IPT)
U1BH(IPT)=U1(MSV,1,NSHM1,IPT)+U3(MSV,2,NSH,IPT)-U3(MSV,NSH,IPT)
U3H(IPT)=U3(MSV,1,NSHM1,IPT)+CTL*(U1(MSV,2,NSH,IPT)-U1(MSV,NSH,I
IPT))
U1C(IPT)=U1(MSV,NSH,IPT)+ A1*(U1(MSV,NSHM1,IPT)-U1(MSV,1
1,NSH,IPT))+((1.-CTL)/(2.*CTL))*U3(MSV,NSHM1,IPT)-U3(MSV,1,NSH,IPT
2))
U3C(IPT)=U3(MSV,NSH,IPT)-((1.-CTL)/(2.*CTL))*U1(MSV,NSHM1,IPT)-U
11(MSV,1,NSH,IPT)- A1*(U3(MSV,NSHM1,IPT)-U3(MSV,1,NSH,
2,IPT))
DU 2100 J=J,NSHM2
U1(MSV,1,J,IPT)=U1(MSV,1,J,IPT)+CTL*(U3(MSV,J-1,IPT)-U3(MSV,J+1,I
1))
U3(MSV,1,J,IPT)=U3(MSV,1,J,IPT)+U1(MSV,J-1,IPT)-U1(MSV,J+1,IPT)
C
SURFACES PLANES
U1L=AMP*U1(J)*SIN(2.*PI*(KN*LN*JT))
U3J=AMP*U3(J)*COS(2.*PI*(KN*LN*JT))
U1(I,J,1,IPT)=U1(I,J,1,IPT)+U3(2,J,I,IPT)-U3
U3(I,J,1,IPT)=U3(I,J,1,IPT)+CTL*(U1(2,J,I,IPT)-U31)
J=J1-1

```

PROGRAMME " RAYLEIGH "

```

* JOB RAYLEIGH,AN:UK04,PN:LRAYLEIG,CLS:31,REX
**RAYLEIGH JOB EUN2661,RAYLEIGH,TIME=(5,00)
**MAIN HORG=01,LINES=5
**CIRCL HACC=U315CICN
** EXEC FTX,PARM,FORT='NUSOURCE',MEGLUN,60=620K
**FORT,SYSDO *
C
C PROGRAMME DE CALCUL RELATIF A LA DIFFRACTION D'UNE ONDE ELASTIQUE
C DE SURFACE PAR UNE RAINURE EN MAILLAGE REGULIER ET EN MAILLAGE VARI
C DISSYMETRIQUE *
C
REAL KN,LN
DIMENSION U1(260,80,2),U3(260,80,2)
DIMENSION VU1(400,4),VU3(400,4)
DIMENSION TEXTE(20),LIGNE(4)
DIMENSION AMPUI(200),AMPV3(200),R1(600),R2(600),R3(200),R4(200)
DIMENSION U1BVI(2),U3BVI(2),U1BHI(2),U3BHI(2),U1BVCJ(2),U3BVCJ(2)
1 U3BHI(2),U1BHI(2),U3BVCJ(2)
2 U1BVCJ(2),U3BVCJ(2)
DIMENSION T1(1000),T2(1000),TRACE(2000)
DATA U1BVI,U3BVI,U1BHI,U3BHI,U1BVCJ,U3BVCJ,U1BHI,U3BHI,U1BVCJ,U3BVCJ
1U3BVCJ,U1BVCJ,U3BVCJ/24*0.7
LEC=5
IMP=6
C
HEAD(LEC,1)TEXTE
1 FORMAT(20A4)
2 HEAD(LEC,3)M,N,KN,ILN,NTR,L,IFD,M1,M,H3,JS1,JS2,JS3,MSV1,MSV3
3 FORMAT(7I4,3F6.3,S14)
4 HEAD(LEC,4)ISA,ISB,ISC,ISD,XI,PASK1,ISA,JSB,XJ,PASK3
4 FORMAT(4I4,F10.7,F6.3,2I4,F10.7,F6.3)
9 FORMAT(4I4)
C
11 CONTINUE
2 HEAD(LEC,2,END=11)VL,VT,VR
2 FORMAT(3F9.3)
C
PI=3.1415926
KN=1./FLOAT(IKN)
LN=1./FLOAT(ILN)
X=VR/VL
Y=VR/VT
SHL=SQRT(1.-X*X)
SRT=SQRT(1.-Y*Y)
CTL=1.-2.*(VT/VL)*Y
F=SQRT(1.-Y*Y)/Y
G=C/(2.-Y*Y)
H=1./Y
A=((LN*VL)/(KN*VR))*2
B=((LN*VT)/(KN*VR))*2
PILN=2.*PI*LN

```

```

3* VT = ,F8.3, VR = ,F8.3, NT = ,I5, IFD = *
4,IC////
WRITE(IMP,1329)XA1,XA3,XB1,XB3
1329 FORMAT(///10X,4F12.4)
DU 2888 KL=1,4
IF(LIG(KL),EQ.0) GO TO 2900
JJ=LIG(KL)
WRITE(IMP,133)JJ
133 FORMAT(///20X,'LIGNE ETUDIEE ',I5,/)
WRITE(IMP,134)(U1(I,JJ,ITP),I=1,MSV)
WRITE(IMP,134)(U3(I,JJ,ITP),I=1,MSV)
IF(JJ,EQ.3) GO TO 2888
WRITE(IMP,134)(X1(I,KL),I=1,MSV)
WRITE(IMP,134)(X3(I,KL),I=1,MSV)
134 FORMAT(5X,12F10.4)
2888 CONTINUE
IF(JJ,EQ.3) GO TO 2900
WRITE(IMP,1357)
1357 FORMAT(1H1,/)
WRITE(IMP,134)(U1(I,NSH,ITP),I=MSV,M)
WRITE(IMP,134)(U3(I,NSH,ITP),I=MSV,M)
MSVV=M-MSV*1
WRITE(IMP,134)(X1(I),I=1,MSVV)
WRITE(IMP,134)(X3(I),I=1,MSVV)
2900 CONTINUE
3000 CONTINUE
C
GO TO 99000
C
9999 STOP
END
//GU,SYSDO *
5468.878 3198.985 2937.906 240 80 20 60 20 60 8
5468.878 3198.985 2937.906 240 80 20 60 10 2 363 0 8 11 15 20
5468.878 3198.985 2937.906 240 80 20 60 10 2 363 0 10 13 17 22
5468.878 3198.985 2937.906 240 80 20 60 12 2 363 0 12 15 19 24
5468.878 3198.985 2937.906 240 80 20 60 15 2 363 0 15 18 22 27
5468.878 3198.985 2937.906 240 80 20 60 18 2 363 0 18 21 25 30
/0
//

```



```

53 FORMAT(/12X,'ETUDE DE LA REFLEXION ET DE LA TRANSMISSION',LIGNE
1',I4//)
WRITE(IMP,531)(U1(I,J,IIP),I=1,MSV1)
WRITE(IMP,531)(U3(I,J,IIP),I=1,MSV1)
531 FORMAT(6X,'REF',I2F8.4)
IF(JI.EQ.J) GO TO 1211
WRITE(IMP,881)(U1(I,J,IIP),I=MSV3,M)
WRITE(IMP,881)(U3(I,J,IIP),I=MSV3,M)
881 FORMAT(6X,'TRA',I2F8.4)
WRITE(IMP,101)(VU1(K,KL),K=1,MSV1)
WRITE(IMP,101)(VU3(K,KL),K=1,MSV1)
101 FORMAT(6X,'ENV',I2F8.4)
120 CONTINUE
1211 CONTINUE
200 CONTINUE
C GO TO 11
C 111 STOP
END
//GO.SYSIN DU *
ETUDE DE LA DIFFRACTION D UNE ONDE DE SURFACE PAR UNE RAINURE
260 80 20 60 363 2 1 0.500 0.500 0.500 2 12 2 125 135
0 0 0 0 0.0000000 1.000 0 0 0.0000000 1.000
2 5 8 12
3790.806 2296.775 2097.848.
/*
//

```

B I B L I O G R A P H I E

A

- 1 Z.S. ALTERMAN , A. ROTENBERG.
"Seismic waves in a quarter plane"
 Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 59, No. 1, February 1969, pp. 347-368

- 2 Z.S. ALTERMAN , D. LOEWENTHAL.
"Algebraic expressions for the impulsive motion of an elastic half space".
 Israël J. Tech., Vol. 7, No. 6, 1969, pp. 495-504

- 3 Z.S. ALTERMAN , D. LOEWENTHAL.
"Seismic waves in a quarter and three-quarter plane".
 Geophys. J. R. Astr. Soc., Vol. 20, 1970, pp. 101-126

- 4 B.A. AULD , S. AYTER , M. TAN.
"Theory of scattering of Rayleigh waves by surface breaking cracks".
 1978 Ultrasonics Symposium Proceedings, Cherry Hill (U.S.A.), Sept. 25-27
 I.E.E.E. Cat. No. 78 CH 1344-1SU, pp.384-390

B

- 5 P. BETTESS , O.C. ZIENKIEWICZ.
"Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements".
 Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 11, 1977, pp. 1271-1290

- 6 L.J. BOND , A. ILAN.
"Target characterization : an experimental and numerical study".
 Ninth World conference on Non-Destructive-Testing, 1978, (sous presse)

- 7 L.J. BOND.
"A computer model of the interaction of acoustic surface waves with discontinuities".
 Ultrasonics, March 1979, pp.71-77

- 8 J.C. de BREMAECKER.
"Transmission and reflection of Rayleigh waves at corners".
 Geophys., Vol. 23, No. 2, April 1958, pp. 253-266

C

- 9 E. CAMBIAGGIO , F. CUOZZO , E. RIVIER.
"Reflection and transmission of surface acoustic microwave on a discontinuity".
 Fifth Colloquium on Microwave Communication
 Budapest, 24-30 Juin 1974, Vol. 3, pp. ET11-ET21
- 10 E. CAMBIAGGIO , F. CUOZZO , J.P. DAMIANO , E. RIVIER.
"Influence of solid elastic properties on the scattering of a Rayleigh wave by discontinuities".
 1975 International Microwave Symposium, Palo Alto (U.S.A.), May 12-14
 I.E.E.E. Cat. No. 75 CH0 955-5MTT, pp. 362-364
- 11 E. CAMBIAGGIO.
"Contribution à l'étude de la réflexion d'ondes acoustiques de surface sur des discontinuités métalliques en milieu piézoélectrique à fort coefficient de couplage".
 Thèse de Doctorat d'Etat, 24 Nov. 1978, Université de NICE
- 12 S.F. CLARKE.
"A weighting method for SAW reflective arrays".
 Marconi Rev., Tome 39, No. 202, 1975, pp. 155-170
- 13 R.E. COLLIN.
"Foundations for microwave engineering".
 Mac Graw Hill Book, New-York, 1966
- 14 F. CUOZZO.
"Etude de la réflexion d'une onde acoustique de surface par simulation dynamique".
 Thèse de 3^{ème} cycle, Juin 1974, Université de NICE
- 15 F. CUOZZO , E. CAMBIAGGIO , E. RIVIER.
"Résultats théoriques et expérimentaux caractérisant la diffraction d'une onde acoustique de surface sur une arête".
 C.R.A.S., Tome 280, 24 Mars 1975, pp. 361-363

"Influence of elastic properties on Rayleigh wave scattering by normal discontinuities".

I.E.E.E. Trans. on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU-24, No. 4, July 1977, pp. 280-289

D

17 J.P. DAMIANO.

"Diffraction d'une onde acoustique de surface par une arête à 270°".

D.E.A. d'Electronique, Juin 1975, Université de NICE

18 J.P. DAMIANO.

"Rapports D.R.M.E.", Contrat jeune chercheur No. 75/1015

Rapports No. 1 à 3, Rapport final, 1975-1976

19 J.P. DAMIANO , E. RIVIER.

"A powerful method to obtain a general analysis of lossy grooves".

1976 Ultrasonics Symposium Proceedings, Annapolis (U.S.A.), Sept.29-Oct.1

I.E.E.E. Cat No. 76 CH 1120-5SU, pp. 498-500

20 J.P. DAMIANO , E. RIVIER.

"Reflective arrays of grooves : simulation with variable mesh".

1977 Ultrasonics Symposium Proceedings, Phoenix (U.S.A.), Oct. 26-28

I.E.E.E. Cat. No. 77 CH 1264-1SU

21 J.P. DAMIANO , E. CAMBIAGGIO , E. RIVIER.

"Computations of surface acoustic microwave reflection from array of grooves".

Sixth Microwave Colloquium, Budapest, 1978, Aug.30 - Sept.1

Vol. 1, pp. III4/26-1 à III4/26-5

22 S.K. DATTA.

"Diffraction of SH-waves in a half-space".

1978 Ultrasonics Symposium Proceedings, Cherry Hill (U.S.A.), Sept. 25-27

I.E.E.E. Cat. No. 78 CH 1344-1SU, pp. 391-394

23 E. DIEULESAINT , R. ROYER.

"Ondes élastiques dans les solides".

Masson Ed., 1974

- 24 V. DOMARKAS , B.T. KHURI-YAKUB , G.S. KINO.
"Length and depth resonances of surface cracks and their use for crack size estimation".
 Appl. Phys. Letters, Vol. 33, No. 7, 1 October 1978, pp. 557-559

F

- 25 G.E. FORSYTHE , W.R. WASOW.
"Finite-Difference Methods for partial differential equations".
 John Wiley and Sons, Inc., New-York, 1960

G

- 26 J.F. GILBERT , L. KNOPOFF.
"Seismic scattering from topographic irregularities".
 J. Geophys. Res., Vol. 65, 1960, pp. 3437-3444

H

- 27 H.A. HAUS.
"Scattering loss of SAW resonators".
 Electronics Letters, Vol. 12, No. 9, April 29, 1976, pp.214-215
- 28 H.A. HAUS.
"Bulk scattering loss of SAW grating cascades".
 I.E.E.E. Trans. on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU-24, No. 4, July 1977,
 pp. 259-267

I

- 29 A. ILAN , A. UNGAR , Z.S. ALTERMAN.
"An improved representation of boundary conditions in finite difference schemes for seismological problems".
 Geophys. J. Roy. Astr. Soc., Vol. 34, 1975, pp. 727-734

- 30 A. ILAN , D. LOEWENTHAL.
"Instability of finite difference schemes due to boundary conditions in elastic media".
 Geophys. Prop., Vol. 24, No. 3, 1976, pp. 431-453
- 31 A. ILAN.
"Stability of finite difference schemes for the problem of elastic wave propagation in a quarter plane".
 J. Comp. Phys., Vol. 29, No. 3, 1978, pp. 389-403
- 32 A. ILAN , L.J. BOND , M. SPIVACK.
"Interaction of a compressional impulse with a slot normal to the surface of an elastic half space".
 Geophys. J. Roy. Astr. Soc., Vol. 57, May 1979

K

- 33 L. KNOPOFF , A.F. GANGI.
"Transmission and reflection of Rayleigh waves by wedges".
 Geophys., Vol. 25, No. 6, Dec 1960, pp. 1203-1214

L

- 34 K.M. LAKIN , T.R. JOSEPH.
"Surface wave resonators".
 1975 Ultrasonocs Symposium Proceedings, Los Angeles (U.S.A.), Sept. 22-24
 I.E.E.E. Cat. No. 75 CHO 994-4SU, pp. 269-278
- 35 C. LARDAT.
"Experimental performance of grooved reflective array compressors and resonators".
 1976 Ultrasonics Symposium Proceedings, Annapolis (U.S.A.), Sept.29-Oct.1
 I.E.E.E. Cat. No. 76 CH 1120-5SU, pp 272-276
- 36 R.C.M. LI.
"Analysis of surface-wave reflection from array of grooves".
 1972 Ultrasonics Symposium Proceedings, Boston (U.S.A.), Oct. 4-7
 I.E.E.E. Cat No. 72 CHO 708-8SU, pp. 263-266

- 37 R.C.M. LI , J. MELNGAILIS.
"Second-order effect in surface-wave devices due to stored energy at step discontinuities".
1973 Ultrasonics Symposium Proceedings, Monterey (U.S.A.), Nov. 5-7
I.E.E.E. Cat. No. 73 CHO 807-8SU, pp. 503-505
- 38 R.C.M. LI , R.C. WILLIAMSON , D.C. FLANDERS , J.A. ALUSOW.
"On the performance and limitations of surface-wave resonators using grooved reflectors".
1974 Ultrasonics Symposium Proceedings, Milwaukee (U.S.A.), Nov. 11-14
I.E.E.E. Cat. No. 74 CHO 861-1SU, pp. 257-262
- 39 R.C.M. LI , J. MELNGAILIS.
"The influence of stored energy at step discontinuities on the behavior of surface-wave gratings".
I.E.E.E. Trans. on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU-22, No. 3, May 1975,
pp. 189-198
- 40 R.C.M. LI , J.A. ALUSOW , R.C. WILLIAMSON.
"Surface-wave resonators using grooved reflectors".
Proc. 29th Annual Frequency Control Symp. (U.S. Army Electronics Command,
It., Monmouth, NJ), May 1975, pp. 167-176
- 41 R.C.M. LI , J.A. ALUSOW , R.C. WILLIAMSON.
"Experimental exploration of the limit of achievable Q of grooves surface-wave resonators".
1975 Ultrasonics Symposium Proceedings, Los Angeles (U.S.A.), Sept. 22-24
I.E.E.E. Cat. No. 75 CHO 994-4SU, pp. 279-283
- 42 R.C.M. LI , J.A. ALUSOW.
"Suppression of bulk-scattering loss at SAW resonators reflectors".
Electronics Letters, Vol. 13, No. 19, Sept. 15, 1977, pp. 580-581
- 43 R.C.M. LI.
"310-Mhz SAW resonators with Q at the material limit".
Appl. Phys. Letters, Vol. 31, No. 7, 1 Oct 1977, pp. 407-409

M

- 44 A.K. MAL , L. KNOPOFF.
"Transmission of Rayleigh waves at a corner".
 Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 56, No. 2, April 1966, pp. 455-466
- 45 L. MARTEL , M. MUNASINGHE , G.W. FARNELL.
"Transmission and reflection of Rayleigh wave through a step".
 Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 67, No. 5, 1977, pp. 1277-1290
- 46 J. MELNGAILIS , R.C.M. LI.
"Measurement of impedance mismatch and stored energy for right-angle reflection of Rayleigh waves from grooves on Y-cut LiNbO₃".
 1975 Ultrasonics Symposium Proceedings, Los Angeles (U.S.A.), Sept. 22-24
 I.E.E.E. Cat. No. 75 CHO 994-4SU, pp. 426-429
- 47 M. MUNASINGHE , G.W. FARNELL.
"Surface-wave scattering at vertical discontinuities".
 1972 Ultrasonics Symposium Proceedings, Boston (U.S.A.), Oct. 4-7
 I.E.E.E. Cat. No. 72 CHO 708-8SU, pp. 267-270
- 48 M. MUNASINGHE , G.W. FARNELL.
"Acoustic surface-wave scattering on a homogeneous three-quarter space".
 J. Appl. Phys., Vol. 44, No. 5, May 1973, pp.2025-2031
- 49 M. MUNASINGHE , G.W. FARNELL.
"Finite difference analysis of Rayleigh waves scattering at vertical discontinuities".
 J. Geophys. Res., Vol. 78, No. 14, May 10, 1973, pp. 2454-2466

O

- 50 M. OTTAVIANI.
"Elastic-wave propagation in two evenly-welded quarter-spaces".
 Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 61, No. 5, Oct. 1971, pp. 1119-1152
- 51 A.A. OLINER , R.C.M. LI , H.L. BERTONI.
"Catalog of acoustic equivalent networks for planar interfaces".
 Proceedings of the I.E.E.E., Vol. 60, No. 12, 1972, pp. 1513-1518

52 O.W. OTTO , R.D. WEGLEIN.

"Surface acoustic wave oscillator using reflective gratings".

1975 Ultrasonics Symposium Proceedings, Los Angeles (U.S.A.), Sept. 22-24
I.E.E.E. Cat. No. 75 CHO 994-4SU, pp. 255-260

P

53 J.P. PAREKH , H.S. TUAN.

"Reflection and bulk-wave conversion of Rayleigh wave at a single shallow groove".

J. Appl. Phys., Vol. 48, No. 3, March 1977, pp. 994-1003

54 J.P. PAREKH , H.S. TUAN.

"Effect of groove-depth on the performance of uniform SAW grooved reflectors arrays".

Appl. Phys. Letters, Vol. 32, June 15, 1978, pp. 787-789

55 J.P. PAREKH , H.S. TUAN.

"SAW grooved gratings at off-resonance and odd harmonic frequencies".

1978 Ultrasonics Symposium Proceedings, Cherry Hill (U.S.A.), Sept. 25-27
I.E.E.E. Cat. No. 78 CH 1344-1SU, pp. 630-633

56 W.L. PILANT , L. KNOPOFF , F. SCHWAB.

"Transmission and reflection of surface waves at a corner".

J. Geophys. Res., Vol. 69, No. 2, Jan. 15, 1964, pp. 291-297

R

57 R.D. RICHTMEYER , K.W. MORTON.

"Difference methods for initial-value problems".

Interscience publishers, New-York, 1967

58 J.M. RICHARDSON.

"The inverse problem in elastic wave scattering at long wavelengths".

1978 Ultrasonics Symposium Proceedings, Cherry Hill (U.S.A.), Sept. 25-27
I.E.E.E. Cat. No. 78 CH 1344-1SU, pp. 759-766

- 59 E. RIVIER.
 "Matrice S. Réseau à N accès".
 Séminaire interne du 16 Juin 1976 (non publié)
- 60 A. RONNEKLEIV , J. SOUQUET.
 "Surface-wave to bulk-wave scattering from grooves".
 1975 Ultrasonics Symposium Proceedings, Los Angeles (U.S.A.), Sept. 22-24
 I.E.E.E. Cat. No. CHO 994-4SU, pp. 434-437
- 61 A. RONNEKLEIV , J. SOUQUET.
 "On the theory of acoustic surface-wave to bulk-wave scattering by grooves".
 J. Appl. Phys., Vol. 47, 1976, pp. 4422-4425

S

- 62 F.J. SABINA , J.P. WILLIS.
 "Scattering of Rayleigh waves by a ridge".
 J. Geophys., Vol. 43, 1977, pp. 401-419
- 63 M. SCHOENBERG , R. NATHANIEL.
 "Stability of centred finite difference scheme for the three-dimensional
 equations of elastodynamics".
 Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 12, 1978, pp. 1049-1053

T

- 64 B.R. TITTMAN , F. COHEN-TENOUDJI , M. De BILLY , A. JUNGMAN.
 "A simple approach to estimate the size of small surface cracks with the
 use of acoustic surface waves".
 Appl. Phys. Letters, Vol. 31, No. 1, 1 July 1978, pp. 6-8
- 65 H.S. TUAN , R.C.M. LI.
 "Rayleigh-wave reflection from groove and step discontinuities".
 J. Acoust. Soc. Am., Vol. 55, No. 6, June 1974, pp. 1212-1217

66 H.S. TUAN , J.P. PAREKH.

"Influence of groove profile on surface-to-bulk wave conversions of Rayleigh waves at shallow grooves".

1975 Ultrasonics Symposium Proceedings, Los Angeles (U.S.A.), Sept. 22-24
I.E.E.E. Cat. No. 75 CHO 994-4SU, pp. 438-440A

67 H.S. TUAN , J.P. PAREKH.

"SAW reflection and bulk-wave loss characteristics of a groove reflector grating".

Appl. Phys. Letters, Vol. 30, No. 5, March 1, 1977, pp. 220-222

W

68 R.C. WILLIAMSON.

"Properties and applications of reflective-array devices".

Proceedings of I.E.E.E., Vol. 64, No. 5, May 1976, pp. 702-710

Z

69 O.C. ZIENKIEWICZ , Y.K. CHEUNG.

"The finite element method in Structural and Continuum Mechanics".

Mac Graw Hill, 1967