



HAL
open science

Influence de la géométrie et de la rotation sur la stabilité et l'écoulement électroconvectifs d'un fluide isolant

Salvatore Oliveri

► **To cite this version:**

Salvatore Oliveri. Influence de la géométrie et de la rotation sur la stabilité et l'écoulement électroconvectifs d'un fluide isolant. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Institut National Polytechnique Grenoble (INPG), 1983. Français. ⟨NNT: ⟩. ⟨tel-01635729⟩

HAL Id: tel-01635729

<https://hal.science/tel-01635729v1>

Submitted on 15 Nov 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE ET L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

pour obtenir le grade

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

par

Salvatore OLIVERI

SUJET

Influence de la géométrie et de la rotation sur la stabilité
et l'écoulement électroconvectifs d'un fluide isolant.

Soutenue le 1^{er} Décembre 1983 devant la commission d'Examen

Monsieur Noël FELICI

Président

Monsieur Pierre ATTEN

Monsieur Antonio CASTELLANOS

Examineurs

Monsieur Emil HOPFINGER

A mes parents,

Ce travail a été réalisé au Laboratoire d'Electrostatique et de Matériaux Diélectriques de Grenoble.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Pierre ATTEN, Directeur du Laboratoire, pour m'avoir suggéré ce sujet de recherche ainsi que pour les encouragements et les précieux conseils qu'il m'a prodigués.

J'exprime mes plus vifs remerciements à Monsieur Noël FELICI, Professeur à l'I.N.P. de Grenoble, pour avoir bien voulu s'intéresser à ce travail et présider le Jury de cette thèse.

Je voudrais également exprimer ma gratitude à Monsieur Emil HOPFINGER, de l'Institut de Mécanique de Grenoble, pour les suggestions qu'il m'a faites ainsi qu'à Monsieur Antonio CASTELLANOS, Professeur à l'Université de Séville, qui ont accepté de faire partie de la commission d'examen.

Il m'est agréable de remercier Monsieur Jean-Louis BELY, pour son assistance aussi efficace que cordiale ainsi que l'ensemble du Personnel du Laboratoire qui m'a réservé un accueil amical.

Pour finir, toute mon admiration à Madame Paule FABIANO et Mademoiselle Janine INCARDONA, pour la dextérité dont elles ont fait preuve lors de la frappe souvent délicate du manuscrit.

T A B L E D E S M A T I E R E S

	Pages
INTRODUCTION	1
 CHAPITRE I - STABILITE ELECTROHYDRODYNAMIQUE (THEORIE LINEAIRE) D'UN LIQUIDE ISOLANT INCOMPRES- SIBLE COMPRIS ENTRE DEUX ELECTRODES SPHERI- QUES ET SOUMIS A UNE INJECTION UNIPOLAIRE PURE D'IONS PAR L'UNE OU L'AUTRE DES SPHERES	9
A - Introduction	11
B - Les équations du problème	12
1) Les équations générales du problème d'injec- tion unipolaire dans un liquide isolant.....	12
2) Adimensionnalisation	16
C - Solution stationnaire en l'absence de mouvement	17
D - Introduction d'une perturbation infinitésimale et linéarisation du système	19
E - Etude de la stabilité	21
1) Etude dans le cas asymptotique de l'injection très faible	23
2) Cas général	35
F - Quelques considérations sur la forme des écoulements	40

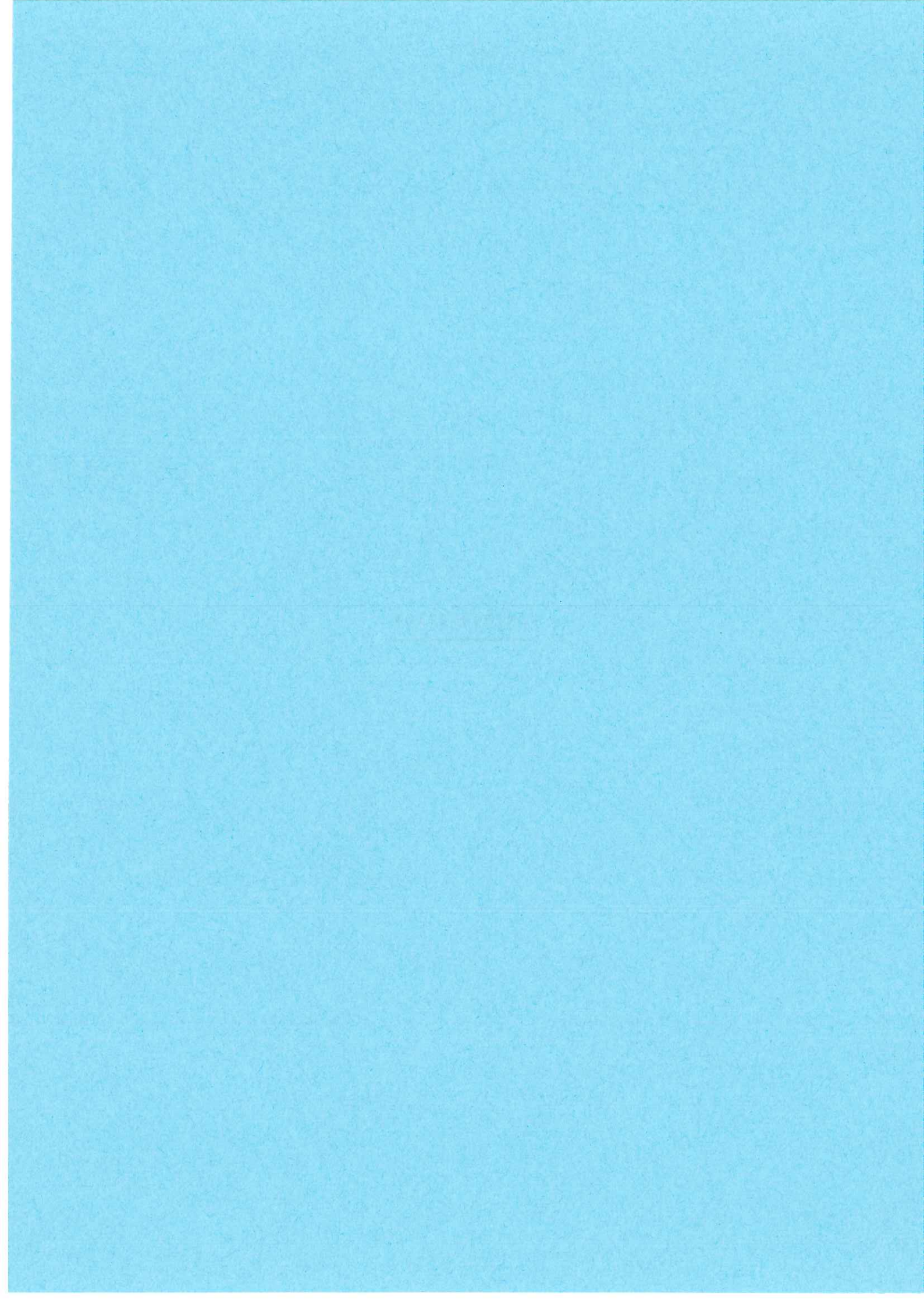
T A B L E D E S M A T I E R E S (Suite)

	Pages
CHAPITRE II - INFLUENCE DE LA ROTATION SUR LA STABILITE D'UNE COUCHE PLANE DE LIQUIDE ISOLANT SOUMIS A UNE INJECTION UNIPOLAIRE	45
A - Introduction	47
B - Les équations du problème	48
C - Solution stationnaire	50
D - Introduction d'une perturbation et linéarisation	51
E - Etude de la stabilité	54
1) Apparition de l'instabilité sous la forme d'une convection stationnaire	54
a) Etude analytique approchée dans le cas de l'injection faible	54
b) Résolution numérique pour différentes valeurs de C	61
2) Apparition de l'instabilité sous la forme d'oscillations d'amplitude croissante	64
CHAPITRE III - CIRCULATION D'UN LIQUIDE ISOLANT COMPRIS ENTRE ELECTRODES PLANES NON PARALLELES ET SOUMIS A UNE INJECTION UNIPOLAIRE FAIBLE	79
A - Introduction	81
B - Présentation du système	84
C - Calcul de l'amplitude de la vitesse	84
1) Les équations	84

T A B L E D E S M A T I E R E S (Suite)

	Pages
2) Cas de l'injecteur autonome ($q_0 = \text{constante}$)	85
a) Méthode de résolution approchée par itération	85
b) Autre méthode de résolution	90
3) Cas où l'injection dépend du champ sur l'injecteur	92
 D - Etude expérimentale	 94
1) Observation qualitative	94
2) Mesure de vitesses et analyse des résultats	94
 CONCLUSION	 105
 ANNEXE I - METHODE NUMERIQUE	 111
 BIBLIOGRAPHIE	 117
 RESUME	
 MOTS CLES	

INTRODUCTION



L'étude de l'écoulement convectif à l'intérieur d'une couche sphérique de fluide soumise à une force radiale (gravitation) et en rotation uniforme autour d'un axe est un problème majeur de l'astrophysique (magnétohydrodynamique dans les étoiles, orientation des bandes nuageuses sur Jupiter...) et de la géophysique (convection dans le manteau terrestre, circulation atmosphérique...).

Ce problème est à la fois caractérisé par la force de Coriolis dépendant de la latitude et, soit par la stratification verticale stable (cas de l'atmosphère terrestre, par exemple), soit par l'écoulement convectif du fluide (convection dans les étoiles), suivant la valeur de la différence de température ΔT entre les sphères bornant la couche. On définit un paramètre adimensionnel (nombre de Rayleigh) faisant intervenir en particulier ΔT et la viscosité ; on montre qu'il existe une valeur critique de ce paramètre en dessous de laquelle la couche fluide est stable (les échanges thermiques se faisant par conduction pure) ; pour toute valeur supérieure à ce critère, un mouvement convectif apparaît sous l'action de la poussée d'Archimède (contribuant ainsi au transfert de chaleur)[10].

Notre propos n'est pas de dresser une liste détaillée des nombreux travaux parus dans ce domaine. Nous nous bornerons à n'en citer que quelques uns qui sont en relation plus étroite avec l'étude que nous présentons dont l'objectif est la simulation d'une force de gravitation radiale en géométrie sphérique.

Le problème le plus simple en géométrie sphérique est celui de la stabilité d'une couche de fluide chauffée par l'intérieur et soumise à la force de gravitation radiale en l'absence de rotation. Chandrasekhar [10] a déterminé les conditions critiques de stabilité pour différentes lois du champ de gravitation. L'étude de la forme des écoulements au-dessus du seuil de stabilité nécessite, quant à elle,

la prise en compte du caractère non-linéaire du problème de convection. En particulier, des résultats intéressants, relatifs à la géométrie sphérique, mais en l'absence de rotation ont été donnés par R.E. Young [36] et F.H. Busse [4] ; d'autres approches dans cette géométrie, utilisant des arguments de la théorie des bifurcations sont possibles [11, 19].

En ce qui concerne l'influence de la rotation, on peut citer pour commencer l'étude de Chandrasekhar [10] qui montre l'effet stabilisant de la rotation (d'axe vertical) dans le cas d'une couche plane horizontale de fluide chauffé par dessous. Pour une couche sphérique, la rotation brise la symétrie sphérique et son effet est alors beaucoup plus complexe. Avec différentes hypothèses : rotation très rapide [5], convection axisymétrique [34], des solutions asymptotiques ont été obtenues... Dans un cas particulier (faible vitesse de rotation et rapport des rayons des sphères proche de 0,3), Chossat a effectué une étude rigoureuse de stabilité des écoulements stationnaires ou périodiques [12].

Sur le plan expérimental, l'influence du champ de gravitation de la terre sur le liquide non isotherme et surtout l'impossibilité de pouvoir créer un champ de gravitation central ne permettent pas d'opérer en géométrie réellement sphérique. Cette impossibilité expérimentale constitue la motivation majeure de notre étude.

Devant cet obstacle, les travaux expérimentaux ont dû étudier des géométries de remplacement permettant de simuler certains cas limites. Par exemple, une couche plane horizontale, chauffée par le bas et en rotation autour d'un axe vertical, où la force est parallèle à l'axe, permet de reproduire les conditions au voisinage des pôles. A l'autre extrême, si on considère une couche cylindrique, chauffée par l'extérieur et en rotation rapide autour d'un axe vertical (de façon à pouvoir négliger l'effet de la

gravitation terrestre face à la force centrifuge), la force est perpendiculaire à l'axe comme dans la situation rencontrée près de l'équateur [6]. Avec le même système (anneau tournant), mais pour des vitesses de rotation nettement plus faibles, des études ont été réalisées afin de modéliser certaines propriétés des écoulements atmosphériques aux latitudes moyennes [25, 26, 31]. On ne peut étendre la modélisation à toutes les latitudes à la fois (i.e. en géométrie sphérique) que si le système à modéliser est en rotation rapide [8].

Face à l'impossibilité expérimentale de la modélisation directe mettant en jeu les mêmes forces que dans le cas thermique, une idée intéressante est d'essayer d'utiliser les forces électriques qui peuvent s'exercer sur des liquides isolants.

D'une façon générale, le champ de force électrique qui règne dans le fluide (constante diélectrique ϵ , masse volumique ρ) s'écrit comme la somme de trois termes :

$$\vec{f} = q\vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \text{grad } \epsilon + \text{grad } \left[\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) \frac{E^2}{2} \right]$$

Le troisième terme, le terme d'électrostriction, en général très faible et dont le rotationnel est toujours nul ne peut servir à notre propos. Le second terme est la force diélectrique ; dans le cas d'une couche sphérique, si on impose une différence de température entre les sphères bornant la couche, on induit un gradient de ϵ tel que le champ de forces diélectriques qui en résulte est radial. De plus, si la tension appliquée aux électrodes est alternative et de fréquence assez élevée pour empêcher la formation de charge d'espace, on pourra négliger la force de Coulomb (premier terme). En joignant la rotation aux conditions que nous venons de décrire, il semble possible de modéliser différents types d'écoulements géophysiques ou astrophysiques [18, 24]. Cependant, la différence de température nécessaire pour mettre en jeu les

forces diélectriques entraîne une poussée d'Archimède comparable à ces forces. L'étude expérimentale devra donc se dérouler en quasi-apesanteur ; le projet, accepté par la N.A.S.A., donnera lieu à une expérience (The Atmospheric General Circulation Experiment) à bord de Spacelab I.

Le point de départ de notre travail est d'examiner si on pourrait utiliser l'autre type de force électrique : la force de Coulomb $\vec{f} = q\vec{E}$; cette force présente deux avantages sur la force diélectrique : son intensité peut être beaucoup plus forte et elle permet de travailler à température uniforme. On peut le mieux la mettre en oeuvre lorsqu'on injecte des ions dans un liquide isolant compris entre deux électrodes entre lesquelles on impose une tension continue ; si les électrodes sont des sphères, le champ de force créé est donc radial. Un problème préalable est alors celui du contrôle de l'injection ; l'utilisation de membranes échangeuses d'ions (membranes perméables aux ions d'un seul signe), bien qu'elles permettent de réaliser des injections de forte intensité, n'est pas techniquement envisageable en géométrie sphérique. Par contre, les études poursuivies ces dernières années au laboratoire sur les phénomènes d'injection par des électrodes métalliques dans les liquides isolants non-polaires ont permis de comprendre ces phénomènes et de disposer maintenant d'injecteurs d'ions relativement bien maîtrisés [13, 14, 17]. Par un choix judicieux de la nature du métal et du sel dissout ainsi que sa concentration, on peut obtenir des injections unipolaires d'ions de signe et de niveau bien définis.

Avec cette force, on peut envisager toute une classe de problèmes en géométrie sphérique pouvant donner lieu à des expérimentations en laboratoire et ayant une relation plus ou moins étroite avec certaines situations physiques.

Le premier cas se présentant est celui de l'écoulement entre deux sphères avec ou sans rotation. Un autre cas qui peut être envisagé est celui où l'on impose en plus un gradient de force entre pôles et équateur, situation qui peut présenter une certaine analogie avec la circulation atmosphérique générale. Indépendamment des implications avec des situations géophysiques ou astrophysiques, de nombreux problèmes de stabilité et de convection peuvent être abordés en utilisant la force de Coulomb. Les travaux antérieurs en électrohydrodynamique ont montré que tant du point de vue de la stabilité que du transport convectif, une grande analogie existe entre le problème de l'injection unipolaire d'ions et le problème de Rayleigh-Bénard [1 , 2 , 27]. On peut donc penser réaliser à l'aide de l'injection d'ions des expériences correspondant à diverses situations étudiées théoriquement dans le cas thermique et ne pouvant pas donner lieu à des expériences même en l'absence de gravitation terrestre. D'une manière générale, l'investigation de situations variées où l'on peut avoir un champ de gravitation radial ou axial ouvre un domaine nouveau d'un très vif intérêt pour la connaissance des propriétés des écoulements dans des domaines à symétrie sphérique ou axiale.

Le premier de ces problèmes concerne la stabilité d'une couche sphérique soumise à une injection unipolaire d'ions par l'une ou l'autre des sphères [28 , 29]. Ce problème est étudié de manière théorique dans le chapitre I où on détermine les conditions critiques de stabilité électrohydrodynamique pour un rapport quelconque des rayons des sphères et pour un paramètre d'injection quelconque. Cette première étude constitue une étape indispensable à la réalisation d'expériences ultérieures.

L'étude de l'influence de la rotation sur la stabilité d'une couche comprise entre deux plans parallèles et soumise à une injection unipolaire fait l'objet du chapitre II. On montre que l'analogie déjà soulignée avec le

problème de Rayleigh-Bénard se poursuit avec la mise en jeu de la rotation, on retrouve en effet le rôle stabilisant de la rotation, au moins dans le cas où l'instabilité apparaît sous forme d'une convection d'amplitude stationnaire; l'autre cas, celui où l'instabilité apparaît sous forme d'oscillations d'amplitude croissante est également abordé.

L'influence de la rotation sur un mouvement entre deux sphères qui serait méridien en l'absence de rotation définit un problème d'une grande originalité qui peut de plus présenter une certaine analogie avec la circulation atmosphérique générale de certaines planètes [20, 33]. Une première étape en direction de ce problème est abordée dans le chapitre III où l'on examine d'un point de vue beaucoup plus pratique la possibilité de réaliser un écoulement méridien à l'aide de la force de Coulomb. Des évaluations approchées de l'amplitude du mouvement et une réalisation expérimentale sont effectuées dans le cas plus simple de l'injection dans un domaine borné par deux plans faisant entre eux un petit angle [30], situation qui présente une analogie certaine avec le cas d'une couche plane allongée chauffée par dessous de manière non uniforme [23]; on observe une grande cellule convective analogue d'une cellule de Hadley en géométrie sphérique [22].

CHAPITRE I

Stabilité électrohydrodynamique (théorie linéaire) d'un liquide isolant incompressible compris entre deux électrodes sphériques et soumis à une injection unipolaire pure d'ions par l'une ou l'autre des sphères.

The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that every entry, no matter how small, should be recorded to ensure the integrity of the financial statements. This includes not only sales and purchases but also expenses and income. The document also highlights the need for regular reconciliation of bank statements and the company's records to identify any discrepancies early on.

In addition, the document provides a detailed breakdown of the accounting cycle, from identifying the accounting entity to preparing financial statements. It explains how each step contributes to the overall accuracy and reliability of the financial data. The document also includes a section on the importance of internal controls, which are designed to prevent errors and fraud within the organization.

The second part of the document focuses on the practical application of these principles. It provides a series of examples and exercises that illustrate how to record and classify transactions in the general ledger. These examples cover a wide range of business activities, from the purchase of inventory to the sale of finished goods. The document also includes a section on the preparation of the trial balance, which is a key step in the accounting process that helps to ensure that the debits and credits are in balance.

Finally, the document discusses the importance of maintaining proper documentation for all transactions. It explains that every entry should be supported by a valid receipt or invoice, and that these documents should be filed in a systematic manner. This not only helps to ensure the accuracy of the records but also provides a clear audit trail for any future inquiries.

Définition des notations les plus utilisées dans ce chapitre

R_1	rayon de la sphère intérieure
R_2	rayon de la sphère extérieure
μ	rapport R_1/R_2
r	coordonnée radiale
θ	colatitude
φ	longitude
ρ	masse volumique
ϵ	constante diélectrique
η	viscosité dynamique
K	mobilité des ions
t	temps
P	pression
\vec{V}	vecteur vitesse du liquide de composantes (u, v, w)
q	densité volumique de charge électrique dans le liquide
q_0	valeur de q sur l'injecteur
\vec{E}, \vec{D}	vecteurs champ et induction électriques
ϕ	potentiel électrique
\vec{j}	vecteur densité de courant
\vec{H}, \vec{B}	vecteurs champ et induction magnétiques

A. INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est d'étudier la stabilité électrohydrodynamique linéaire d'un liquide isolant compris entre deux sphères concentriques. C'est après le cas de l'injection unipolaire entre plans [1] et entre cylindres [3, 32] la troisième situation à haute symétrie où on peut réaliser une injection sans que le liquide soit nécessairement en mouvement. De ce point de vue, l'analyse va être analogue aux deux précédentes, bien que le détail des calculs s'apparente plutôt au problème de stabilité dans le cas de Rayleigh-Bénard entre sphères [10]. Rappelons brièvement les différentes étapes de cette étude de stabilité :

Après avoir adimensionnalisé le système d'équations régissant le problème, on étudie la stabilité des solutions stationnaires en l'absence de mouvement. Cette étude se fait en examinant l'évolution dans le temps de faibles perturbations des diverses grandeurs. En linéarisant le système d'équations liant ces perturbations et en décomposant ces dernières en harmoniques sphériques, on aboutit à un système d'équations différentielles qui caractérise l'état marginal d'une convection (on admet dans ce chapitre, comme dans [1], le principe d'échange de stabilité). Ce dernier système associé aux conditions aux limites homogènes sur les sphères se réduit à un problème de valeurs propres qui n'a de solution non triviale que pour une suite discrète de valeurs propres du paramètre de stabilité, le nombre d'onde ℓ (entier) apparaissant dans $\gamma_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ étant fixé. Les conditions critiques correspondent à la valeur de ce paramètre de plus faible module et au nombre ℓ associé.

Les résultats obtenus par intégration numérique des équations, sont présentés et analysés à la fin du chapitre.

B. LES EQUATIONS DU PROBLEME

1 - Les équations générales du problème d'injection unipolaire dans un liquide isolant sont réparties en deux catégories :

i) équations électromagnétiques :

- les équations de Maxwell :

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{Rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = q$$

- et l'équation de conservation de la charge

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

ii) équations mécaniques

- équation de Navier-Stokes

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = - \text{grad } P + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{V} + \vec{F}_e$$

(\vec{F}_e est la densité de force d'origine électrique)

- équation de conservation de la masse.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{V} = 0$$

On fait l'hypothèse, bien appuyée par l'expérience (voir [1]), que les courants sont assez faibles de façon à pouvoir négliger les grandeurs magnétiques et le dégagement de chaleur par effet Joule. Cette dernière situation permet de supposer la température uniforme. Les équations électriques se réduisent alors à l'équation de Poisson et à l'équation de conservation de la charge :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= q/\epsilon \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} &= 0 \end{aligned}$$

- L'hypothèse d'incompressibilité du liquide permet de simplifier l'équation de conservation de la masse qui peut alors s'écrire :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

- La force électrique a pour expression générale :

$$\vec{F}_e = q\vec{E} + \operatorname{grad} \left[\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) \frac{E^2}{2} \right] - \frac{E^2}{2} \operatorname{grad} \epsilon$$

Le premier terme est la force de Coulomb ; le second est le gradient de pression d'électrostriction et peut être inclus dans un terme de pression généralisée. Dans le troisième terme, on peut écrire :

$$\operatorname{grad} \epsilon = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) \operatorname{grad} \rho + \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right) \operatorname{grad} T$$

et donc, en vertu des hypothèses d'incompressibilité et d'uniformité de la température, on a :

$$\operatorname{grad} \epsilon = 0$$

compte tenu de cette remarque, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = - \text{grad } P^* + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{V} + q \vec{E}$$

où $P^* = P - \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) \frac{E^2}{T^2}$ est une pression généralisée.

Il reste à donner une équation constitutive du milieu ; en négligeant la conductivité électrique ($\sigma = 0$), l'expression de la densité de courant \vec{j} est :

$$\vec{j} = q \vec{v} - D \text{grad } q$$

\vec{v} est la vitesse totale des ions de la forme

$$\vec{v} = K\vec{E} + \vec{V}$$

Le second terme est un terme de diffusion :

D est la constante de diffusion reliée à K par la relation d'Einstein :

$$\frac{D}{K} = \frac{k_B \Theta}{e}$$

avec k_B constante de Boltzman, e charge de l'électron et Θ température.

Comme $\frac{k_B \Theta}{e} \approx \frac{1}{40}$ V à température ambiante (290 K), on

pourra négliger le terme de diffusion pour des tensions appliquées grandes comparées à $\frac{1}{40}$ V donc :

$$\vec{j} = q (K\vec{E} + \vec{V})$$

On aboutit donc au système :

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = - \frac{q}{\epsilon} \quad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \text{div } q (-K \text{ grad } \Phi + \vec{V}) = 0 \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (3)$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = - \text{grad } P^* + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{V} - q \text{ grad } \Phi \quad (4)$$

où l'on a remplacé \vec{E} par $-\text{grad } \Phi$

Conditions aux limites :

Pour que le problème soit bien défini, il faut adjoindre à ce système d'ordre 10, de six équations à six inconnues, les conditions aux limites suivantes :

- pour les grandeurs électriques :

$$\Phi (r = R_1) = \Phi_1 \quad \Phi (r = R_2) = \Phi_2$$

$q = q_0$ sur l'injecteur. On fait de plus l'hypothèse de l'injecteur autonome, c'est-à-dire que la perturbation de la valeur de q sur l'injecteur est nulle (pas de couplage avec les autres perturbations).

- pour les grandeurs mécaniques :

$$\vec{V} (r = R_1) = \vec{V} (r = R_2) = 0$$

ce qui implique, pour les électrodes rigides, que

$$\frac{\partial u}{\partial r} (r = R_1) = \frac{\partial u}{\partial r} (r = R_2) \quad \text{d'après } \text{div } \vec{V} = 0$$

Les conditions sur la pression ne sont pas explicitées

car elles n'interviendront pas dans la suite des calculs.

2 - Adimensionnalisation :

En utilisant pour longueur de référence $x_r = R_2$ et pour potentiel de référence $\Phi_r = |\Phi_2 - \Phi_1| = \Phi_0 > 0$, on peut construire toutes les autres grandeurs de référence du problème :

. champ électrique : $E_r = \frac{\Phi_0}{R_2}$

. vitesse : $v_r = KE_r = \frac{K\Phi_0}{R_2}$

. temps : $t_r = \frac{R_2}{v_r} = \frac{R_2^2}{K\Phi_0}$

. densité de charge : $q_r = \frac{\epsilon\Phi_0}{R_2^2}$

. pression : $P_r = \rho v_r^2 = \rho \frac{K^2\Phi_0^2}{R_2^2}$

ayant construit une grandeur de référence g_r pour toute grandeur g du problème, on pose $g' = g/g_r$ qui est la grandeur adimensionnelle correspondant à g ; remplaçant ensuite g par $g'g_r$ dans le système (1), (2), (3), (4) et en supprimant la notation primée on obtient le système adimensionnel :

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = - q \quad , \quad \vec{E} = - g \vec{\text{grad}} \Phi \quad (5)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \text{div } q (\vec{E} + \vec{V}) = 0 \quad (6)$$

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (7)$$

$$R \frac{d}{dt} \vec{V} = - R g \vec{\text{grad}} P^* + \vec{\nabla}^2 V + Tq\vec{E} \quad (8)$$

Les nombres adimensionnels apparaissant dans (8), caractéristiques du problème d'injection unipolaire [1] :

$$T = \varepsilon \Phi_0 / K\eta \quad R = \rho K \Phi_0 / \eta$$

sont respectivement une mesure du rapport des forces de Coulomb et visqueuse et un nombre de Reynolds construit avec la vitesse des ions. Les conditions aux limites peuvent s'écrire :

$$\vec{V}(r = \mu) = \vec{V}(r = 1) = 0 \text{ (parois rigides)}$$

pour la vitesse ; dans le cas de l'injection par la sphère intérieure (cas 1) :

$$q(r = \mu) = C > 0, \quad \Phi(r = \mu) = 1, \quad \Phi(r = 1) = 0$$

et dans le cas de l'injection par la sphère extérieure (cas 2) :

$$q(r = 1) = C > 0, \quad \Phi(r = \mu) = 0, \quad \Phi(r = 1) = 1$$

Dans ces deux cas, $C = \frac{q_0 R^2}{\varepsilon \Phi_0}$ est la valeur adimensionnelle de la densité volumique de charge sur l'injecteur.

C. SOLUTION STATIONNAIRE EN L'ABSENCE DE MOUVEMENT

Avec $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ et $\vec{V} \equiv 0$ dans (5), (6), (7), (8), on est

ramené pour les grandeurs stationnaires à :

$$\operatorname{div} \vec{E}_s = q_s \quad (9), \quad \operatorname{div} q_s \vec{E}_s = 0 \quad (10)$$

Compte tenu de la symétrie du problème, q_s ne dépend que de r et \vec{E}_s est réduit à sa composante radiale ne dépendant que de r ; il vient donc :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_s) = q_s \quad (11), \quad \frac{d}{dr} (r^2 q_s E_s) = 0 \quad (12)$$

de (12), on tire : $(r^2 q_s E_s) = a(\text{constante}) \Rightarrow r^2 E_s = \frac{a}{q_s}$

et en reportant dans (11) :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{a}{q_s} \right) = q_s \Rightarrow -a \frac{dq_s}{q_s^3} = r^2 dr$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} q_s^{-2} = \frac{1}{3} (r^3 + B) \Rightarrow q_s^2 = \frac{3a}{2} \frac{1}{r^3 + B} \quad (13)$$

expression de q_s :

Cas 1 : $q_s > 0$ et $E_s > 0 \Rightarrow r^2 q_s E_s = a > 0$; donc d'après (13), on déduit que $(r^3 + B) > 0$ et q_s se met sous la forme :

$$q_s = \left(\frac{3a}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{(r^3 + B)^{1/2}}$$

Cas 2 : $q_s > 0$ et $E_s < 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow r^3 + B < 0$

$$q_s = \left(\frac{-3a}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{(-(r^3 + B))^{1/2}}$$

si on pose $\delta = +1$ ou -1 respectivement pour les Cas 1 et 2 et $A = \left(\frac{2}{3} \frac{\delta}{a} \right)^{1/2}$ on obtient l'expression générale de q_s :

$$q_s = \frac{1}{A (\delta (r^3 + B))^{1/2}} \quad (14)$$

Expression de E_s :

$$r^2 q E = a \Rightarrow E = \frac{a}{r^2 q} = \frac{2\delta}{3A^2} \frac{1}{r^2} A (\delta (r^3 + B))^{1/2}$$

$$\text{d'où : } E_s = \frac{2\delta}{3A} \frac{1}{r^2} (\delta (r^3 + B))^{1/2} \quad (15)$$

Les constantes d'intégration A et B sont données par les conditions aux limites :

. sur le potentiel :

$$\Phi(1) - \Phi(\mu) = -\delta = - \int_{\mu}^1 E_s dr$$

$$\text{d'où } A = \frac{2}{3} \int_{\mu}^1 \frac{1}{r^2} (\delta(r^3 + B))^{1/2} dr$$

. et sur la charge :

$$\text{Cas 1 : } A = \frac{1}{C(\mu^3 + B)^{1/2}} \quad \text{et Cas 2 : } A = \frac{1}{C(-(1 + B))^{1/2}}$$

Ce qui permet de trouver une équation intégrale satisfaite par B après avoir éliminé A :

$$\text{Cas 1 : } \frac{1}{C(\mu^3 + B)^{1/2}} = \frac{2}{3} \int_{\mu}^1 \frac{1}{r^2} (r^3 + B)^{1/2} dr$$

$$\text{Cas 2 : } \frac{1}{C(-(1 + B))^{1/2}} = \frac{2}{3} \int_{\mu}^1 \frac{1}{r^2} (-(r^3 + B))^{1/2} dr$$

D. INTRODUCTION D'UNE PERTURBATION INFINITESIMALE ET LINEARISATION DU SYSTEME

Pour étudier la stabilité de la solution stationnaire, on considère chaque grandeur comme la somme de sa grandeur stationnaire (indépendante du temps) et d'une petite perturbation dépendant du temps :

$$\Phi = \Phi_s(r) + \Phi'(r, \theta, \varphi, t)$$

$$q = q_s(r) + q'(r, \theta, \varphi, t)$$

$$P^* = P_s^*(r) + P'(r, \theta, \varphi, t)$$

$$\vec{V} = 0 + \vec{V}'(r, \theta, \varphi, t) = \begin{cases} u \text{ suivant } \hat{e}_r \\ v \text{ suivant } \hat{e}_\theta \\ w \text{ suivant } \hat{e}_\varphi \end{cases}$$

En reportant dans les équations (5), (6), (7), (8) et en ne retenant que les termes du premier ordre, on obtient le système linéaire :

$$\vec{\nabla}^2 \phi' = -q' \quad (16)$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + 2q_s q' - D\phi_s \frac{\partial q'}{\partial r} + (u - \frac{\partial \phi'}{\partial r}) Dq_s = 0 \quad (17)$$

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (18)$$

$$R \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -R \text{grad } P' + \nabla^2 \vec{V} - T (q_s \text{grad } \phi' + q' D\phi_s \hat{e}_r) \quad (19)$$

où on a posé $D = \frac{d}{dr}$ et \hat{e}_r vecteur unitaire radial. On remarquera que seule la composante radiale u de la vitesse intervient dans l'équation de conservation de la charge (17) ce qui montre que q' n'est couplée qu'à u . C'est pourquoi, après avoir transformé (19) en prenant deux fois le rotationnel (en particulier pour éliminer le terme de pression) et en utilisant (18), nous n'allons nous intéresser qu'à la composante radiale de l'équation ainsi obtenue :

$$-R \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}^2 u) = -\vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla}^2 u) + \frac{T}{r^2} L^2 (q' D\phi_s - \phi' Dq_s) \quad (20)$$

où L^2 est l'opérateur $\frac{1}{\sin^2 \theta} \left\{ \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}$

et on a la relation $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} L^2$

Pour la suite de l'étude, étant donné la géométrie, on décompose la perturbation en harmoniques sphériques $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ qui sont les fonctions propres de l'opérateur L^2 et on examine l'évolution de chacun des modes :

$$\phi'(r, \theta, \varphi, t) = F(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{\sigma t}$$

$$q'(r, \theta, \varphi, t) = G(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{\sigma t}$$

$$u(r, \theta, \varphi, t) = U(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{\sigma t}$$

En reportant ces expressions dans les équations (16), (17), (20), en utilisant les expressions (14) et (15) de q_s et $E_s = -D\Phi_s$ et en tenant compte de

$$L^2 Y_\ell^m(\theta, \varphi) = -\ell(\ell+1) Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

et de

$$\nabla^2 [f(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{\sigma t}] = \left\{ \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] f(r) \right\} Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{\sigma t}$$

$$\text{et en posant } \mathcal{D}_\ell = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$$

On obtient le système :

$$\mathcal{D}_\ell F = -G \quad (21)$$

$$\frac{2A}{3\sigma} \frac{\sigma}{r^2} [\delta(r+B)]^{3/2} G + \frac{4}{9r^4} (r^3+B) D[(r^3+B)G] = (U - DF) \quad (22)$$

$$\mathcal{D}_\ell [\mathcal{D}_\ell - R\sigma] U = \frac{3\delta}{2A} T \ell(\ell+1) [\delta(r^3+B)]^{-3/2} \left\{ \left[\frac{2}{3r^2} (r^3+B) \right]^2 G - F \right\} \quad (23)$$

Liant les distributions suivant r des diverses perturbations. C'est un système d'ordre 7, pour lequel les conditions aux limites deviennent :

$$F(1) = F(\mu) = 0 ; U(1) = U(\mu) = 0 ; DU(1) = DU(\mu) = 0 \text{ et } G = 0 \text{ sur l'injecteur (injecteur autonome)}$$

E. ETUDE DE LA STABILITE

Le système n'est stable que si toute perturbation de mode ℓ est atténuée, c'est-à-dire si son amplitude décroît au cours du temps ; cette condition peut s'écrire :

$$\forall \ell : \operatorname{Re}(\sigma) < 0$$

Le système est instable dès qu'au moins un mode de perturbation est amplifié :

$$\exists \ell : \operatorname{Re}(\sigma) > 0$$

La frontière entre stabilité et instabilité (état marginal de stabilité) est caractérisée par l'existence d'une valeur de $\ell = \ell_0$ telle que :

$$\text{Pour } \ell = \ell_0 : \operatorname{Re}(\sigma) = 0 \text{ et } \forall \ell \neq \ell_0 : \operatorname{Re}(\sigma) \leq 0$$

A l'état marginal, deux cas se présentent suivant que la partie imaginaire de σ s'annule ou non en même temps que sa partie réelle : dans le premier cas, on parle d'état marginal stationnaire et dans le deuxième cas, d'état marginal oscillatoire. Dans le cas de l'injection entre plans parallèles, il a été démontré [1] , que l'état marginal est caractérisé par $\sigma = 0$. Nous admettrons que ce résultat s'applique dans le présent problème.

Le système (21) - (23) devient :

$$D_\ell F = - G \tag{24}$$

$$\frac{4}{9r^4} (r^3 + B) D [(r^3 + B) G] = (U - DF) \tag{25}$$

$$D_\ell^2 U = \frac{3\delta}{2A} T \ell(\ell + 1) [\delta(r^3 + B)]^{-3/2} \left\{ \left[\frac{2}{3r^2} (r^3 + B) \right]^2 G - F \right\} \tag{26}$$

Pour ℓ fixé, ce système d'équations associé aux conditions aux limites homogènes n'admet de solution non triviale que pour une suite discrète de valeurs de T . Ce problème de valeurs propres a été résolu par la méthode détaillée pour le cas de l'injection faible dans l'annexe I : ℓ étant fixé, on construit, par intégration numérique, trois solutions particulières dont une combinaison linéaire permet, en général de satisfaire deux des trois conditions $U = DU = F = 0$ sur le collecteur ; les valeurs propres T sont celles pour lesquelles les trois conditions sont simultanément satisfaites : les conditions critiques correspondent à la valeur de T de plus faible module et au nombre d'onde ℓ associé.

1 - Etude dans le cas asymptotique de l'injection très faible

L'étude de la stabilité dans le cas d'une couche plane a montré que pour des injections de niveau très faible, le système se simplifie notablement et que le critère prend la forme asymptotique :

$T_c c^2 = 220,76... [1]$. Pour la géométrie sphérique, un tel cas asymptotique peut être obtenu également.

On considère que l'injection est faible si le champ électrique dont l'expression est donnée par (15) est très proche du champ harmonique régnant en l'absence d'injection ce qui revient à dire :

$$C' = \max \left| \frac{E_s - E_{\text{harm}}}{|E_{\text{harm}}|} \right| \ll 1 \quad \text{avec } |E_{\text{harm}}| = \mu / (1-\mu) r^2 \quad (27)$$

Expression de C' dans chacun des cas :

$$\text{Cas 1 : } C = \frac{1}{A_1 (\mu^3 + B_1)^{1/2}}$$

$$E_s = \frac{2}{3A_1} \frac{1}{r^2} (r^3 + B_1)^{1/2}$$

en tirant A_1 de la première équation, en reportant dans la deuxième et en mettant E_s sous la forme :

$$E_s = \frac{2}{3} C \frac{\mu^3 + B_1}{1 - \mu^3} \frac{1 - \mu^3}{r^2} \left[1 + \frac{1 - \mu^3}{\mu^3 + B_1} \frac{r^3 - \mu^3}{1 - \mu^3} \right]^{1/2} \quad (28)$$

On constate que pour que E_s soit proche de $E_{\text{harm}} = \frac{\mu}{(1-\mu)r^2}$, il faut, d'une part, que le deuxième terme du crochet soit petit devant 1 pour toute valeur de r , ce qui est vérifié si

$$C'_1 = \frac{1}{2} \frac{1 - \mu^3}{\mu^3 + B_1} \ll 1$$

et que, d'autre part, le facteur du terme en $\frac{1}{r^2}$ vérifie la relation :

$$\frac{1}{3} \frac{C}{C'_1} (1 - \mu^3) = \frac{\mu}{(1 - \mu)}$$

d'où on tire

$$C'_1 = \frac{1}{3} \frac{(1 - \mu^3) (1 - \mu)}{\mu} C$$

En remplaçant C'_1 par son expression dans (28), il vient :

$$E = \frac{\mu}{(1 - \mu)r^2} (1 + C'_1 \frac{r^3 - \mu^3}{1 - \mu^3} + \dots)$$

En tenant compte de $C = \frac{1}{A_1 (B_1 + \mu^3)^{1/2}}$, l'expression de q_s s'écrit :

$$q_s = \frac{1}{A_1 (r^3 + B_1)^{1/2}} = \frac{C (\mu^3 + B_1)^{1/2}}{(r^2 - \mu^3 + \mu^3 + B_1)^{1/2}} = \frac{C}{\left(1 + \frac{1 - \mu^3}{\mu^3 + B_1} \frac{r^3 - \mu^3}{1 - \mu^3} \right)^{1/2}}$$

$$q_s = C \left[1 - \frac{1}{2} \frac{1 - \mu^3}{\mu^3 + B_1} \frac{r^3 - \mu^3}{1 - \mu^3} + \dots \right]$$

d'où dans le cas 1 :

$$q_s \approx C \left[1 - C'_1 \frac{r^3 - \mu^3}{1 - \mu^3} \right] \quad (29)$$

$$E_s \approx \frac{\mu}{(1-\mu)r^2} \left[1 + C'_1 \frac{r^3 - \mu^3}{1 - \mu^3} \right] \quad (30)$$

avec $C'_1 = \frac{1}{3} \frac{(1-\mu^3)(1-\mu)}{\mu} C$

Cas 2 : $C = \frac{1}{A_2 (-(1+B))^{1/2}}$

$$E_s = \frac{2}{3A_2} \frac{1}{r^2} (-(r^3+B))^{1/2}$$

une étude analogue conduit à poser $C'_2 = \frac{-(1-\mu^3)}{2(1+B_2)}$ qui a pour expression analytique $C'_2 = \frac{1}{3} \frac{(1-\mu)(1-\mu^3)}{\mu} C$ dans le cas de l'injection faible (donc la même que dans le cas 1) ; on obtient dans ce cas :

$$q_s = C \left[1 - C'_2 \frac{1-r^3}{1-\mu^3} \right] \quad (31)$$

$$E_s = - \frac{\mu}{(1-\mu)r^2} \left[1 + C'_2 \frac{1-r^3}{1-\mu^3} \right] \quad (32)$$

Remarque

On voit que le paramètre C ne caractérise pas complètement l'injection (contrairement à ce qui se passe dans le cas du plan) et il faut tenir compte du paramètre géométrique μ ; les paramètres caractéristiques de l'injection faible sont C'_1 et C'_2 .

A partir des expressions de C'_1 et de C'_2 , on peut trouver les expressions de A et $[\delta(r^3+B)]^{1/2}$ pour l'injection faible dans les cas 1 et 2 en faisant des développements limités suivant les puissances du petit paramètre C'.

En remplaçant les diverses expressions dans les équations (24), (25), (26) et en ne retenant que les termes d'ordre le plus bas, on obtient le système simplifié suivant, commun aux cas 1 et 2 :

$$\frac{4}{9r^4} \left(\frac{1-\mu^3}{2C'} \right) DG = U \quad (33)$$

$$D_{\ell}^2 U = \frac{3\delta}{2} C \left(\frac{1-\mu^3}{2C'} \right) T \ell(\ell+1) \frac{4}{9r^4} G \quad (34)$$

On néglige, dans ce cas de l'injection faible, les termes F et DF relatifs aux perturbations de potentiel et de champ électriques qui sont des corrections d'ordre supérieur.

L'équation de Poisson, découplée des autres, a été omise. Si on pose $P = TC^{*2}$ où $C^* = C(1-\mu)^2$ est la charge réduite sur l'injecteur construite en utilisant la distance entre les sphères comme longueur de références ainsi que $V = \frac{9(2C')^2}{4(1-\mu^3)^2}$, on obtient le système régissant le cas asymptotique de l'injection faible.

$$\frac{DG}{r^4} = V \quad (35)$$

$$D_{\ell}^2 V = \frac{\delta P \ell(\ell+1)}{\mu(1-\mu)^3} \frac{G}{r^4} \quad (36)$$

avec les conditions aux limites :

$$V = DV = 0 \text{ en } r = \mu, 1 ; G = 0 \text{ sur l'injecteur.}$$

Ce système associé à ces conditions aux limites constitue un problème de valeurs propres ; une valeur de ℓ étant choisie, le problème n'admet de solution non triviale que pour une suite discrète de valeurs propres P. La solution stationnaire est instable dès qu'au moins un mode de perturbation est amplifié ; les conditions critiques de stabilité correspondent, par conséquent, à la valeur propre P de plus faible module quel que soit ℓ . On notera P_c cette grandeur

	μ	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
cas 1	l_c	3	3	3	4	5	6	9	13
	P_c	97,53	166,18	243,940	277,3077	286,2932	284,6020	273,7568	261,4540
cas 2	l_c	1	2	3	4	5	6	9	12
	P_c	9,025	20,46	49,24	78,402	104,8840	129,6598	153,1146	173,1438
	μ	0,8	0,9	0,95	0,99	0,995	0,999	1*	plan
cas 1	l_c	20	43	89	454	912	4569	∞	∞
	P_c	247,5193	233,9163	227,2680	222,04983	221,40502	220,89056	220,76195	220,76214
	k_{eq}	-	-	4,474930	4,544997	4,562499	4,569500	4,571250	4,5715
cas 2	l_c	20	43	89	454	911	4569	∞	∞
	P_c	191,0863	206,95946	214,11224	219,46890	220,11787	220,63362	220,7625	220,76214
	k_{eq}	-	-	4,474930	4,544997	4,557499	4,569500	4,5725	4,5715

* Valeurs calculées en extrapolant linéairement à partir des valeurs pour $\mu = 0,995$ et $\mu = 0,999$.

TABLEAU I : Valeurs des paramètres l_c et P_c caractérisant l'instabilité d'une injection unipolaire très faible à partir de la sphère intérieure (cas 1) et extérieure (cas 2). La valeur k_{eq} du nombre d'onde équivalent est donnée pour $\mu \rightarrow 1$ (la courbure de la couche liquide $\rightarrow 0$).

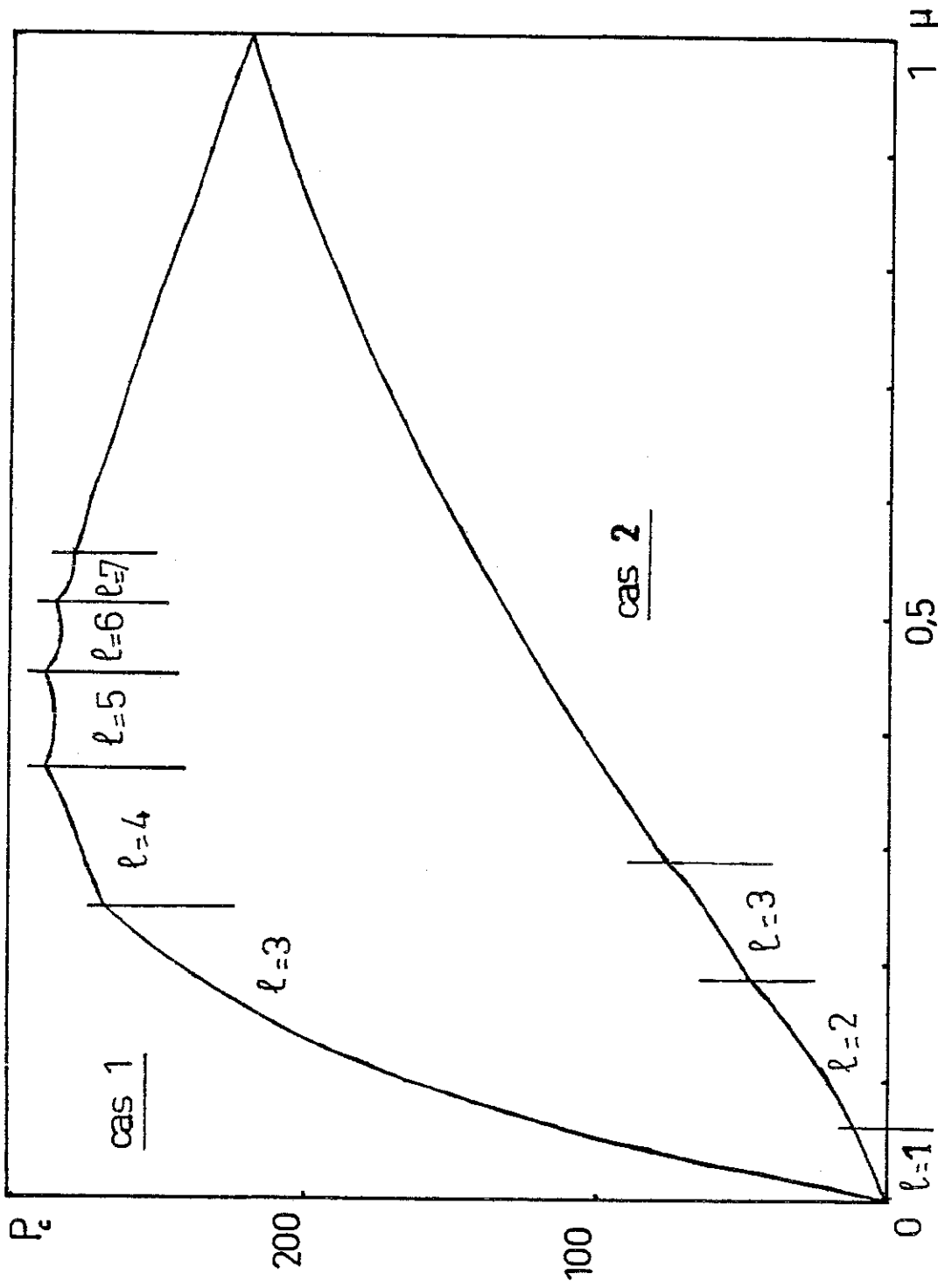


FIGURE 1 : Variations du critère d'instabilité $P = T C^{*2}$ en fonction du rapport μ des rayons des sphères intérieure et extérieure pour une injection unipolaire très faible par la sphère intérieure (cas 1) et extérieure (cas 2).

et ℓ_c la valeur de ℓ correspondante.

Les résultats, obtenus par intégration numérique (voir annexe I) et rassemblés dans le tableau I, montrent que dans les cas 1 et 2 les valeurs de P_c et de $k_{\text{éq}} = (1-\mu) (\ell_c(\ell_c+1))^{1/2}$ tendent vers celles relatives au cas du plan quand $\mu \rightarrow 1$; ceci constitue un test de la validité des calculs.

NB : C'est pour pouvoir comparer plus directement nos résultats avec ceux du cas d'injection entre électrodes planes que nous avons choisi de présenter les valeurs de TC^{*2} et non de TC^2 ou TC'^2 ou de toute autre combinaison de paramètre adimensionnels.

On constate également (voir fig. 1) une symétrie des critères trouvés par rapport à celui du cas plan :

$$\lim_{\mu \rightarrow 1} (P_{c \text{ ext}} + P_{c \text{ int}}) = 2P_{c \text{ plan}}$$

$$\mu \rightarrow 1$$

ce qui est tout à fait attendu étant donnée la faible divergence ou convergence des trajectoires ioniques quand $\mu \rightarrow 1$.

Comme dans le cas de l'injection entre cylindres [3, 32], on constate que le critère d'injection par l'extérieur est, dans le cas de l'injection faible, inférieur à celui par l'intérieur ainsi qu'à celui du plan.

Cette situation peut se comprendre en examinant le couplage entre perturbation de charge et perturbation de vitesse, couplage responsable, pour l'essentiel, de l'entretien du mouvement convectif à l'état marginal. En effet, à partir de l'équation (17), on peut écrire à l'état marginal ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) :

$$DG = -2q_s G/E_s - Dq_s (U-DF)/E_s \quad (37)$$

qui, dans le cas de l'injection faible, se réduit à :

$$DG \approx C^2 U / E_s^2 \quad (38)$$

en tenant compte de la relation :

$$Dq_s = -q_s^2 / E_s \quad (39)$$

que l'on tire de (14) et (15), ((39) est valable pour une injection quelconque). Comme le montrent les équations (30) et (32), le champ électrique sur l'injecteur (pour μ et C fixés) est plus faible dans le cas de l'injection par la sphère extérieure ; on en déduit, à l'aide de (38), que la variation de G en fonction de la distance à l'injecteur est plus rapide dans ce cas (voir fig. 2).

On peut faire apparaître le couplage entre perturbation de charge et perturbation de vitesse dans l'expression de P_c en multipliant les deux membres par $r^2 V$ et en intégrant entre μ et 1 :

$$\delta \ell(\ell+1) P_c = \mu^2 (1-\mu)^2 \int_{\mu}^1 r^2 [D_{\ell} V]^2 dr / \int_{\mu}^1 E_{\text{harm}} V G dr$$

Le profil de V étant le même en première approximation dans les cas 1 et 2, on déduit que l'intégrale du dénominateur est plus forte et donc le critère plus faible pour l'injection par l'extérieur.

Sur la figure (1), on remarque que les courbes $T_c(\mu)$ ne sont pas partout dérivables ; ceci provient du caractère discontinu de ℓ_c en fonction de μ (puisque ℓ_c est entier) ; on retrouve un comportement déjà observé dans le problème de Rayleigh-Bénard dans un domaine d'extension limitée [7, 15].

Nous nous sommes contentés ici de ne déterminer que les premiers sauts $\ell_c \longrightarrow \ell_c + 1$, les courbes au-delà de $\mu \approx 0,5$ n'étant que des représentations lissées des courbes véritables.

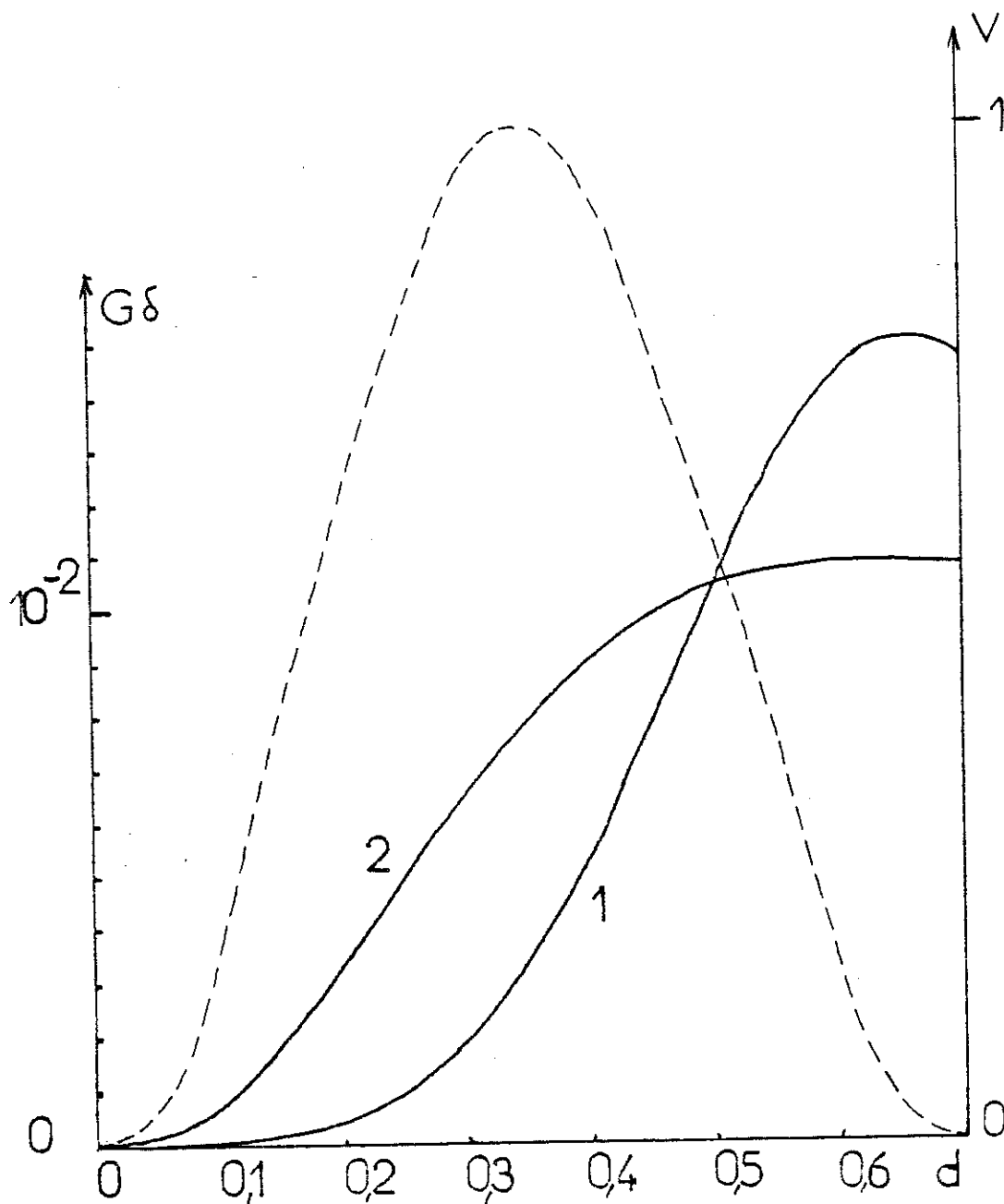


FIGURE 2 : $\mu = 0,3$; perturbation de la densité de charge G pour l'injection par l'intérieur (1) et par l'extérieur (2) en fonction de la distance à l'injecteur en injection faible ($C^* = 0,1$). On a représenté l'allure approximative de la perturbation de la vitesse radiale V en pointillés.

C^*P	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,99
0,1	$k_C = 3$	3	4	5	6	9	13	20	43	455
	$T_C = 22041$	28030	30958	31509,53	31088,624	29854,7099	28490,242	26980,0631	25534,378	24282,9504
0,25	2	3	4	5	6	9	12	20	43	455
	4553	5380	5751,8	5760,7	5638,37	5406,653	5159,054	4894,048	4645,3969	4432,488
1	2	3	4	5	6	9	13	20	44	465
	642	644,67	639,8088	619,96229	601,69665	579,341445	559,76623	541,59986	525,2148	512,3331
2	2	3	4	5	7	9	13	21	45	480
	311,01	286,493	277,194404	268,87758	265,6377	260,4538	258,4079	257,51	257,601	258,38
5	2	3	4	5	7	9	14	22	47	501
	157,6	135,6	133,556	136,287	140,935	147,323	153,71	160,74	168,16	174,95
10	2	3	4	5	7	10	14	23	48	508
	120,34	101,45	104,259	112,035	119,45	128,35	137,22	146,31	155,18	163,14

TABEAU II : Valeurs des nombres critiques k_C et T_C pour différentes valeurs de μ et de C^* .
Infection par la sphère intérieure.

$\frac{\mu}{C^*}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,99
0,1	2	3	4	5	6	9	12	20	43	454
	3363,82	6364	9367,6	12103,15	14677,82	17097,70	19182,47	21044,08	22700,5668	24011,7085
0,25	2	3	4	5	7	9	12	20	43	455
	1151,65	1521	1980,01	2415,55	2338,70	3232,435	3580,168	3888,156	4165,4711	4386,5679
1	2	3	4	5	7	9	13	21	44	465
	708,1105	518,41	455,19	438,96	445,76	454,4445	468,3428	483,033	497,2526	509,6565
2	2	3	4	5	7	9	13	21	46	480
	687,77	453,2591	363,7326	318,86	293,858	278,507	269,3565	263,743	260,386	258,6405
5	2	3	4	5	7	9	14	22	47	501
	682	439,5822	340,5539	285,842	252,3	227,33	208,61	194,8150	184,189	176,4650
10	2	3	4	5	7	9	14	22	48	508
	681,3	437,75	337,56	281,69	235,32	219,83	201,47	186,09	173,86	164,91

TABLEAU III : Valeurs des nombres critiques l_c et T_c pour différentes valeurs de μ et de C^* .
Injection par la sphère extérieure.

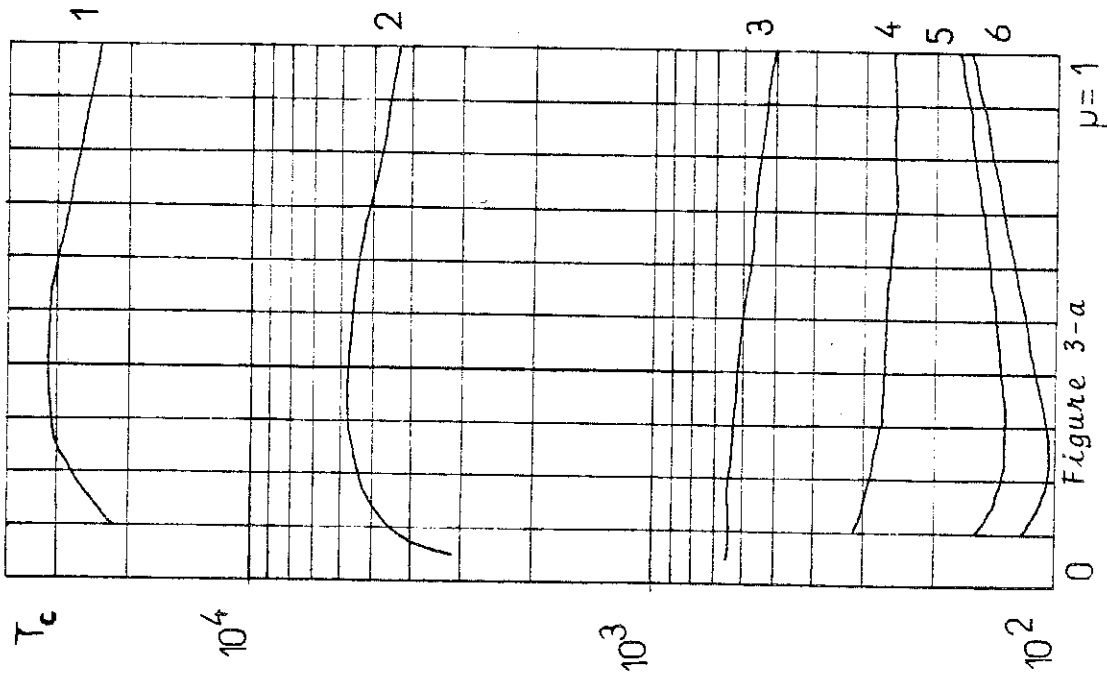


Figure 3-a

FIGURE 3 : Variations du paramètre d'instabilité T_c en fonction du rapport μ des rayons pour différentes valeurs du paramètre d'injection C^* 1) $C^* = 0,25$; 2) $C^* = 1$; 3) $C^* = 2$; 4) $C^* = 5$; 5) $C^* = 10$; 6) $C^* = 10$;

Figure 3-a : Injection par la sphère intérieure.

Figure 3-b : Injection par la sphère extérieure.

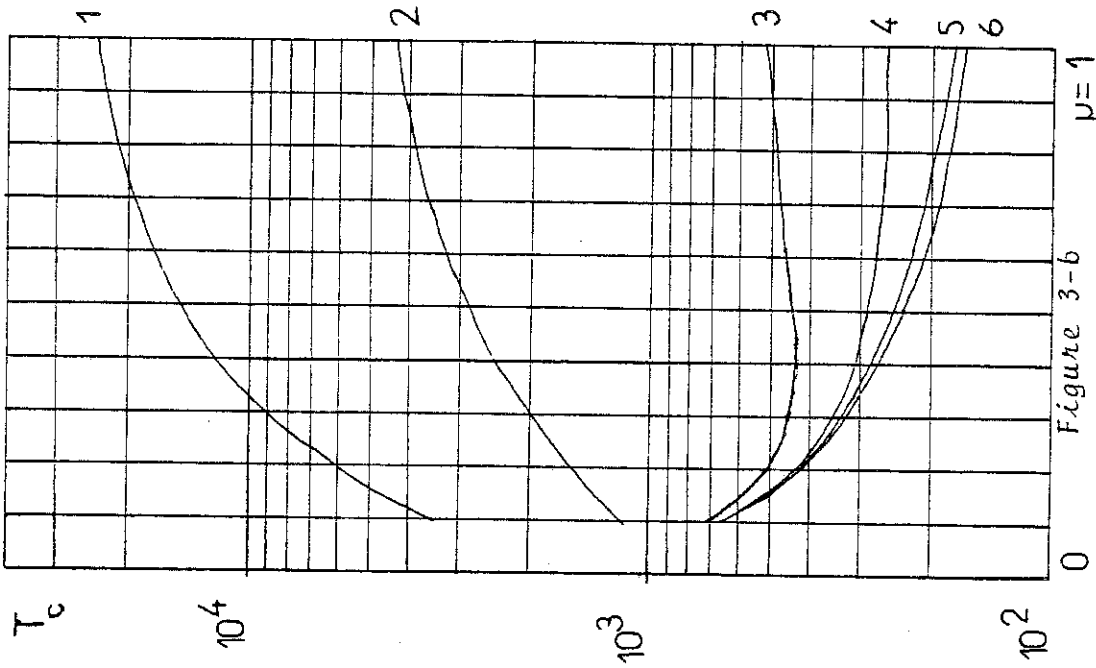


Figure 3-b

Remarque

Nos résultats diffèrent de ceux obtenus par Zhakin [37] qui n'a donné de valeurs critiques (pour une autre combinaison de paramètres adimensionnels) que pour un intervalle réduit de μ ($0,1 < \mu < 0,5$). Cette différence provient principalement d'une erreur dans son système d'équations.

2 - Cas général

Dans le cas général, le problème est régi par les équations (24), (25), (26). En suivant la méthode précédemment mentionnée, des valeurs précises de ℓ_c et T_c ont été calculées pour une série de valeurs de μ et pour différentes valeurs du paramètre C^* dans les deux cas de l'injection par la sphère intérieure et par la sphère extérieure (tableaux II et III).

L'allure des fonctions $T_c(\mu)$ à C^* fixé (et pour les différentes valeurs de C^*) est présentée sur les figures (3-a) et (3-b) correspondant aux tableaux II et III. Un tracé plus précis de ces courbes pour les faibles valeurs de μ supposerait la détermination des valeurs de μ pour lesquelles il y a changement de mode $\ell_c \rightarrow \ell_c + 1$ et discontinuité de la pente (voir figure (1)). La figure (4) représente les fonctions $T_c(C^*)$ pour les deux cas d'injection (sphère intérieure et sphère extérieure) pour une valeur donnée de μ .

L'examen des résultats montre que pour toute valeur de C^* , les valeurs critiques tendent vers celles relatives à l'injection entre plans parallèles [1], lorsque $\mu \rightarrow 1$; ceci constitue un test de la validité des calculs. On a vérifié que, comme pour l'injection très faible, les deux branches de la figure (3) correspondant aux cas 1 et 2 présentent une symétrie par rapport à l'horizontale pour $\mu \rightarrow 1$, cela pour toute valeur de C^* . La figure (4) (et toutes celles qu'on pourrait tracer pour d'autres valeurs de μ) illustre un comportement analogue à celui déjà signalé dans le cas de l'injection entre cylindres concentriques [3], [32]: pour μ donné, le critère d'instabilité relatif à l'injection par la sphère extérieure est plus faible (respectivement plus fort)

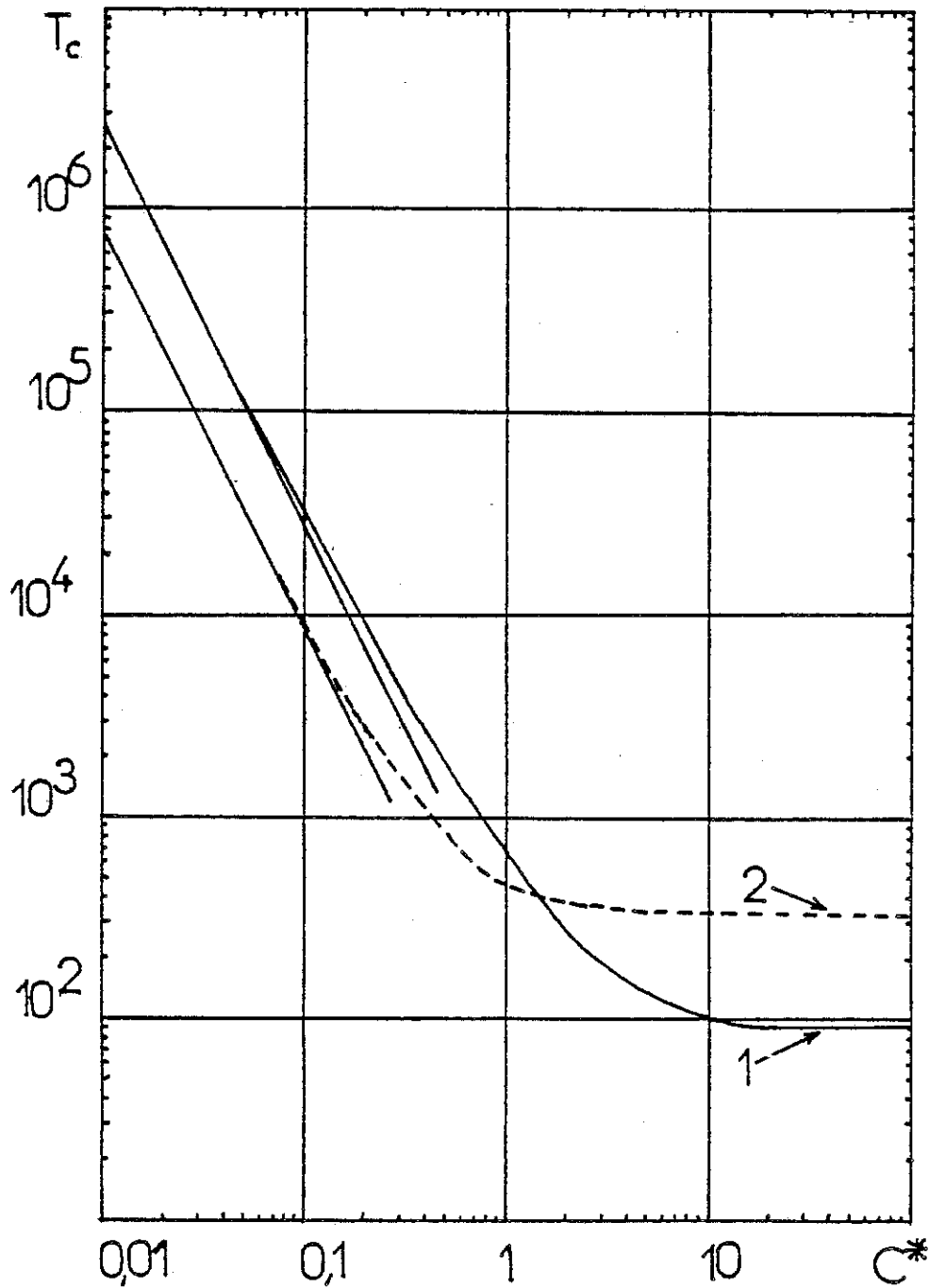


FIGURE 4 : Variations du paramètre d'instabilité T_c en fonction du paramètre d'injection C^* pour $\mu = 0,3$.
 1) Injection par la sphère intérieure.
 2) Injection par la sphère extérieure.

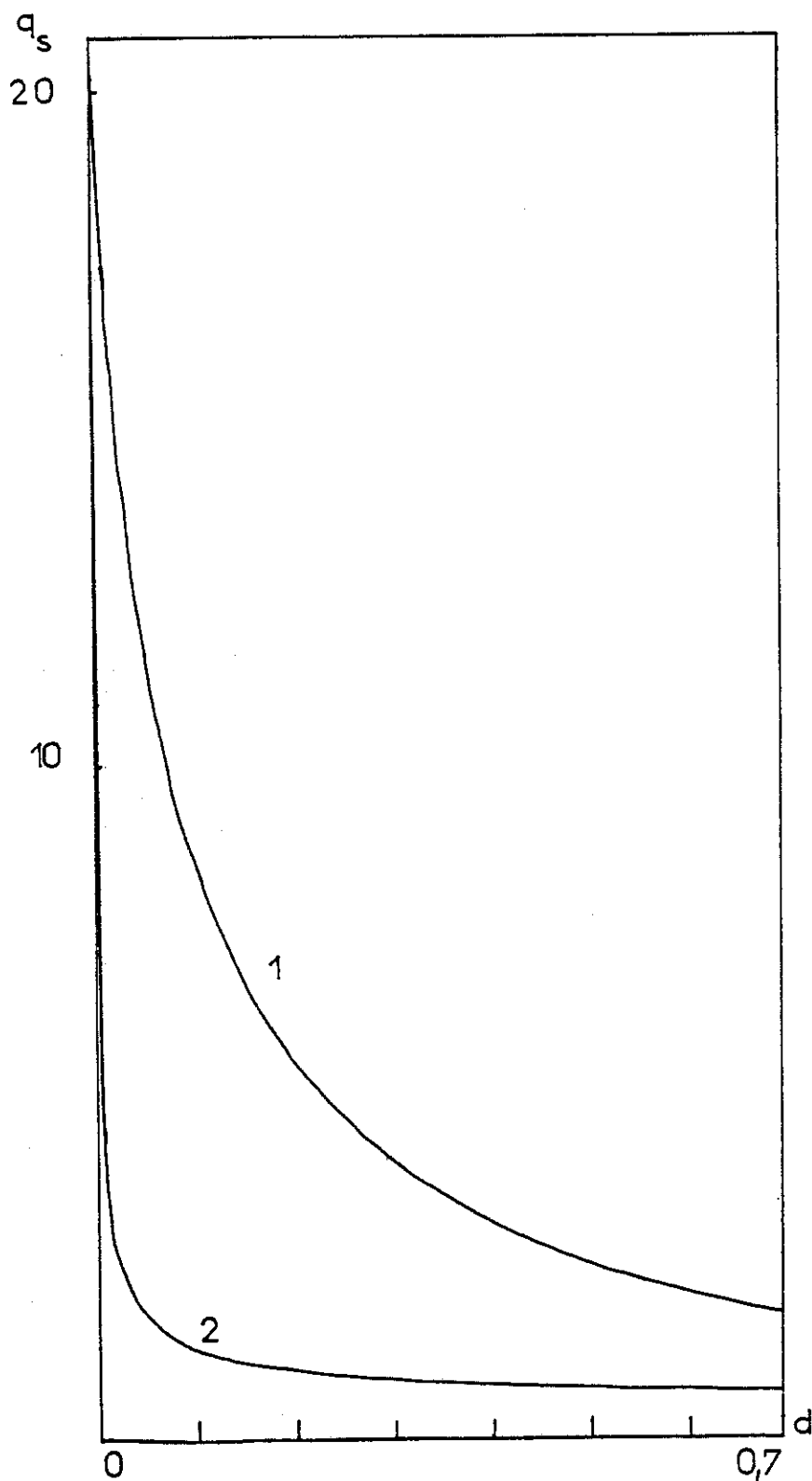


FIGURE 5 : Variations de la densité de charge au repos en fonction de la distance à l'injecteur dans le cas de l'injection forte ($C^* = 10$ et $\mu = 0,3$).
 1) Injection par la sphère intérieure.
 2) Injection par la sphère extérieure.

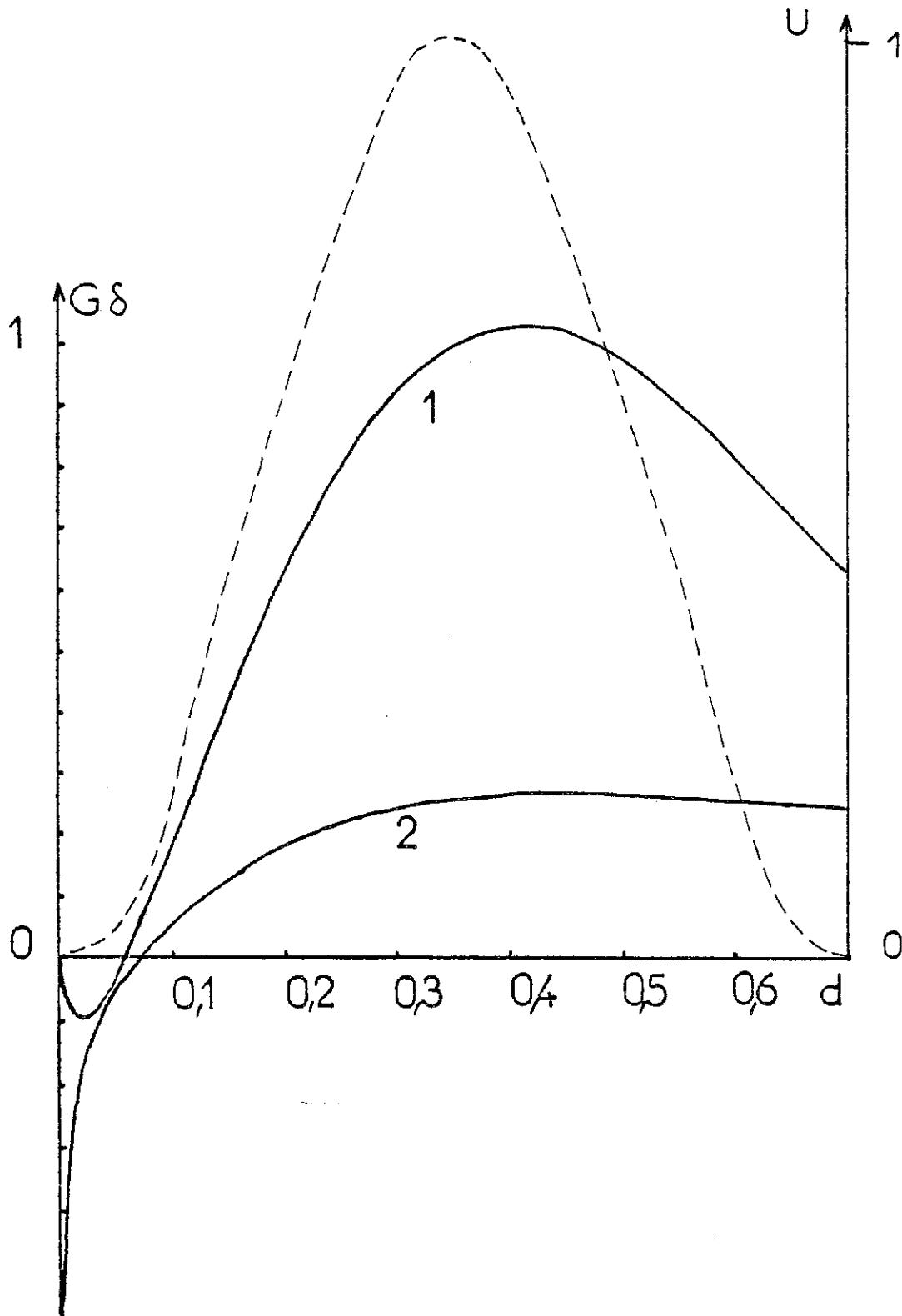


FIGURE 6 : $\mu = 0,3$; perturbation de la densité de charge G pour l'injection par l'intérieur (1) et par l'extérieur (2) en fonction de la distance à l'injecteur en injection forte ($C^* = 10$). On a représenté l'allure approximative de la perturbation de vitesse radiale U en pointillés.

que celui correspondant à l'injection par la sphère intérieure si l'injection est faible (respectivement forte) ; il existe donc une valeur de C^* (dépendant de μ) pour laquelle les deux critères sont égaux.

Ce phénomène d'inversion des critères d'instabilité relatifs aux deux cas d'injection (sphère intérieure, sphère extérieure) dans le cas des fortes injections peut s'expliquer en reprenant une argumentation analogue à celle développée dans le cas asymptotique de l'injection faible. En effet, lorsque l'injecteur est la sphère extérieure q_s décroît d'abord très rapidement (à partir de l'injecteur) puis ensuite très lentement [voir figure (5)]. La valeur de $|Dq_s|$ sera donc en moyenne plus faible que pour l'injection par la sphère intérieure et d'après (37), $|DG|$ sera plus faible (sauf près de l'injecteur) ; comme le terme essentiel du couplage est celui où figure la vitesse, on conçoit que $|G|$ sera en moyenne plus faible également, comme le confirme la figure (6). Or, pour une injection quelconque, le critère T_c peut s'écrire (en partant de l'équation (26)) :

$$\delta T_c \ell(\ell+1) = \frac{\int_{\mu}^1 r^2 [D_{\ell} U]^2 dr}{\int_{\mu}^1 E_s U G dr - A^2 \int_{\mu}^1 U F dr}$$

En injection forte, malgré la différence des profils de la fonction U dans les deux cas d'injection, on peut encore considérer que l'intégrale du numérateur est du même ordre dans les deux cas. Au dénominateur, la perturbation de potentiel F reste toujours faible et A proche de l'unité : on peut donc négliger la contribution de la deuxième intégrale si on veut seulement mettre en évidence un comportement qualitatif. Dans l'intégrale où figure G , E_s ne prend des valeurs importantes que sur le collecteur, là où U est nul ; seule comptera alors la valeur moyenne de E_s qui est la même dans les deux cas (puisque $|\int_{\mu}^1 E_s dr| = \Phi_0$). Donc le comportement de T_c est encore déterminé par le profil de G ; en vertu de ce qui a été dit à ce propos, comme $|G|$ est plus petit en injection forte pour le cas de la sphère extérieure, le critère sera plus grand.

F - QUELQUES CONSIDERATIONS SUR LA FORME DES ECOULEMENTS

La détermination de la forme de l'écoulement relève d'une analyse non linéaire de l'instabilité qui prendrait en compte des perturbations d'amplitude finie.

En effet, l'analyse par rapport aux perturbations infinitésimales présentée dans ce Chapitre ne précise que le nombre d'onde ℓ_c (du mode $Y_{\ell_c}^m$) le plus amplifié juste au-dessus du seuil d'instabilité et ne donne aucun renseignement sur l'entier m qui peut prendre toutes les valeurs comprises entre $-\ell$ et $+\ell$ ($-\ell_c \leq m \leq \ell_c$ soit $2\ell_c + 1$ valeurs) : Le problème est donc dégénéré d'ordre $2\ell_c + 1$.

Cela étant précisé, on peut néanmoins essayer de faire quelques considérations sur la forme de l'écoulement dans certaines conditions particulières. Par exemple, dans le cas d'une couche mince, i.e. μ proche de 1, on peut s'attendre à obtenir un pavage quasi-hexagonal de la couche sphérique comme dans le cas d'une couche plane.

A défaut de pouvoir indiquer quel mode m est amplifié lorsqu'on connaît ℓ_c , il est cependant possible de poser (et de résoudre analytiquement dans certains cas) les équations qui déterminent la forme de l'écoulement correspondant à chaque mode (ℓ, m). En effet, de façon générale, les lignes de courant étant tangentes au vecteur vitesse \vec{V} en tout point, leurs équations caractéristiques sont en coordonnées sphériques :

$$\frac{dr}{u} = \frac{rd\theta}{v} = \frac{r \sin\theta d\varphi}{w} \quad (40)$$

où u, v, w sont liées par la relation :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \cot\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \quad (41)$$

En considérant la décomposition des composantes (u, v, w) de \vec{V} sur les harmoniques sphériques $Y_{\ell}^m (\theta, \varphi)$, du même type que celle déjà effectuée pour u , on a (en principe) assez d'équations pour résoudre entièrement le problème

pour un mode (ℓ, m) quelconque. En fait, les équations sont assez complexes, et nous nous contenterons ici d'illustrer notre propos par le cas particulier où l'écoulement est axisymétrique ($m = 0$) avec $\ell_c = 1$, cas qui peut aisément être traité analytiquement (on rappelle que dans le cas de l'injection faible par la sphère extérieure, $\ell_c = 1$). Dans ce cas, comme $m = 0$, on a $w \equiv 0$; si de plus $\ell = 1$, u s'écrit à l'état marginal :

$$u = U(r) \cos\theta \quad (42)$$

v est donné par l'équation dérivée de (41) :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 U) \cos\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \cot\theta = 0 \quad (43)$$

dont on peut chercher une solution de la forme :

$$v = V(r) \sin\theta \quad (44)$$

et on obtient à l'aide de (43) ; la relation entre V et U :

$$V(r) = - \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (r^2 U) \quad (45)$$

Les lignes de courant s'obtiennent en intégrant (40) à l'aide des expressions de u et v obtenues :

$$\frac{dr}{U(r) \cos\theta} = \frac{rd\theta}{- \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (r^2 U) \sin\theta}$$

soit :

$$\frac{1}{2r^2 U} \frac{d(r^2 U)}{dr} dr = - \cot\theta d\theta \quad (46)$$

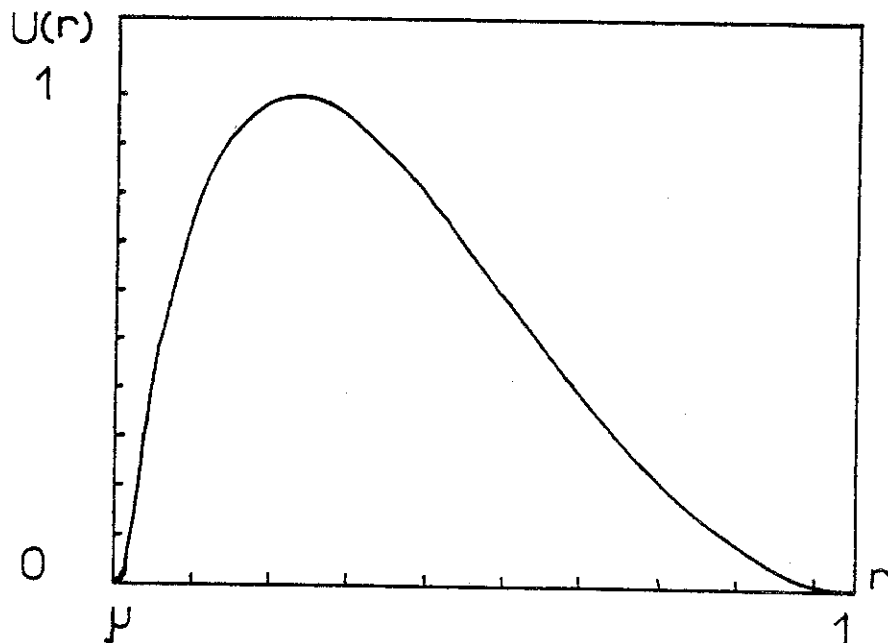


FIGURE 7 : $\mu = 0,05$; perturbation de la vitesse dans le cas d'une injection très faible par la sphère extérieure.

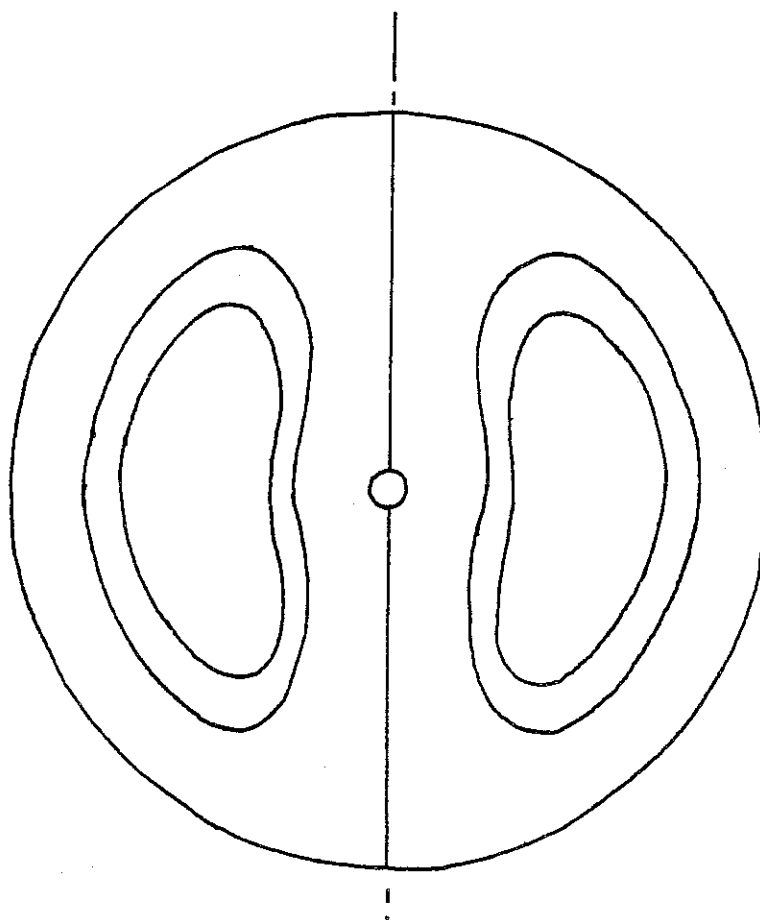


FIGURE 8 : Injection faible par la sphère extérieure avec $\mu = 0,05$ ($lc = 1$) ; allure des lignes de courant correspondant au mode axisymétrique ($l = 1$; $m = 0$).

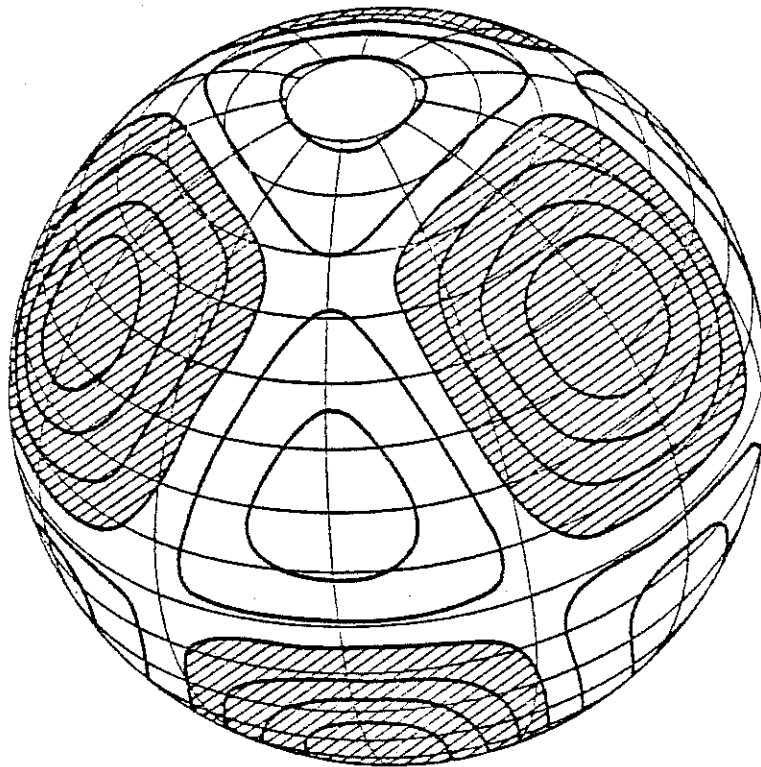


FIGURE 9 : Ecoulement convectif avec symétrie cubique dans le cas $l = 4$; on a représenté les lignes de même vitesse radiale.

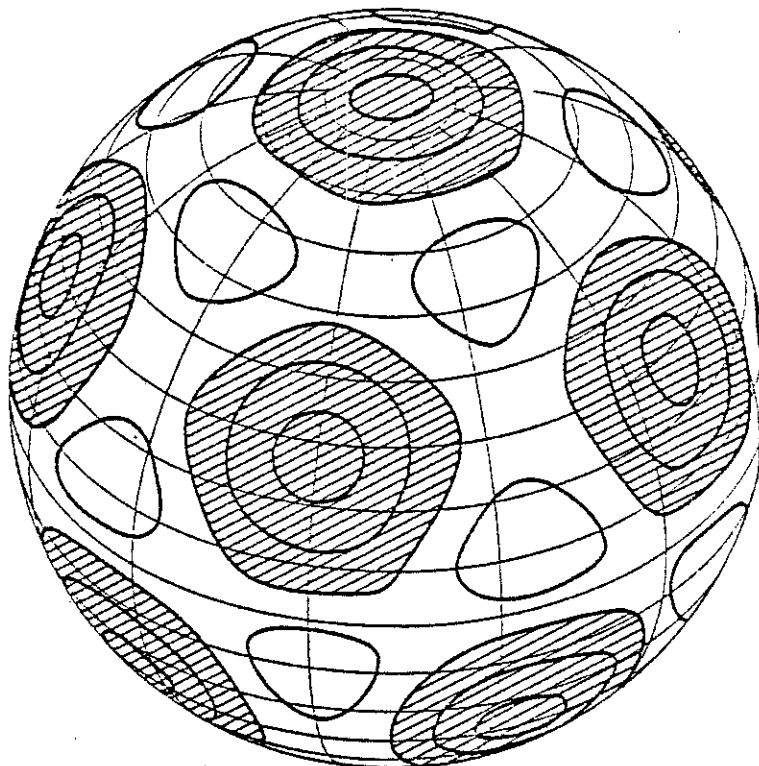


FIGURE 10 : Ecoulement convectif avec symétrie dodécahédrique dans le cas $l = 6$.

L'intégrale de cette équation est :

$$\sin\theta = \frac{\text{constante}}{r \sqrt{U(r)}} \quad (47)$$

θ est compris entre 0 et π et r entre μ et 1. La courbe $U(r)$ étant connue à partir de notre étude numérique (voir Fig. (7)), on a représenté l'allure des lignes de courant sur la Figure (8) ; on constate que dans ce cas l'analogie est manifeste avec l'écoulement correspondant étudié par CHANDRASEKHAR [10].

Lorsque ℓ est supérieur à 1, les calculs sont beaucoup plus compliqués ; en s'appuyant sur la similitude déjà constatée avec le problème thermique, nous reproduisons, en guise d'illustration, les figures obtenues par BUSSE [4] dans le problème de RAYLEIGH - BENARD sphérique pour $\ell = 4$ (Figure 9) et $\ell = 6$ (Figure 10) à l'aide d'un traitement non linéaire. Comme notre problème a les mêmes symétries, nous nous attendons également à ce type d'écoulements, malgré les différences dans les équations.

CHAPITRE II

Influence de la rotation sur la stabilité d'une couche plane de liquide isolant soumis à une injection unipolaire.

A - INTRODUCTION

Avant d'étudier l'effet de la rotation sur le système du Chapitre précédent (en géométrie sphérique), il est intéressant (et plus simple) d'examiner son influence sur une couche plane de liquide soumis à une injection unipolaire pure lorsque l'axe de rotation est perpendiculaire aux électrodes. Dans cette géométrie, en l'absence de rotation, nous savons que le problème de RAYLEIGH - BENARD et le problème d'injection unipolaire présentent une grande analogie [1, 10]. L'objectif de ce Chapitre est de vérifier que l'analogie reste toujours valable en présence de rotation. Nous allons montrer que, indépendamment de la force de l'injection, la rotation joue le même rôle stabilisant que dans le problème de RAYLEIGH - BENARD [10]. Ce rôle stabilisant de la rotation apparaît donc comme une propriété générale quand on a affaire à ce type de situation où la distribution d'une grandeur scalaire potentiellement instable, conduit à une instabilité convective (état marginal caractérisé par $\sigma = 0$).

L'étude se divise en deux parties, suivant que l'instabilité se manifeste sous forme convective ou sous forme d'oscillations d'amplitude croissante au cours du temps. Dans la première partie, on considère l'instabilité convective ; le cas asymptotique de l'injection très faible est traité analytiquement par une méthode approchée ; on résoud numériquement le problème dans le cas d'une injection quelconque. Un argument étaye les lois asymptotiques obtenues pour les nombres de TAYLOR très élevés. Dans la seconde partie, on aborde le problème beaucoup plus complexe de l'instabilité par suroscillations dans le cas asymptotique des très faibles injections qui se prête à un traitement analytique approché.

B - LES EQUATIONS DU PROBLEME

Soit Ω la vitesse de rotation ; pour déduire les équations du problème dans le référentiel en rotation avec le système, il suffit d'ajouter dans l'équation de NAVIER - STOKES I-(4) les termes correspondant à la force centrifuge et à la force de CORIOLIS [21] :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = - \text{grad } P^* + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{V} + q \vec{E} - \rho \vec{\Omega}_\Lambda (\vec{\Omega}_\Lambda \vec{r}) - 2 \rho \vec{\Omega}_\Lambda \vec{V} \quad (1)$$

Les autres équations I-(1), I-(2), I-(3) demeurant inchangées. Le terme de force centrifuge pouvant se mettre sous la forme d'un gradient :

$$\vec{\Omega}_\Lambda (\vec{\Omega}_\Lambda \vec{r}) = - \frac{1}{2} \text{grad } (\vec{\Omega}_\Lambda \vec{r})^2$$

on peut définir une nouvelle pression généralisée

$$\tilde{P} = P^* - \frac{1}{2} \rho (\vec{\Omega}_\Lambda \vec{r})^2$$

et l'équation (1) s'écrit :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = - \text{grad } \tilde{P} + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{V} + q \vec{E} - 2 \rho \vec{\Omega}_\Lambda \vec{V} \quad (2)$$

En utilisant la distance h entre les électrodes et la tension Φ_0 appliquée comme grandeurs de référence pour la longueur et le potentiel, on peut construire les autres grandeurs de référence du problème comme au Chapitre I et adimensionaliser le système ; on obtient :

$$\nabla^2 \Phi = - q \quad (3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \text{div } q (\vec{E} + \vec{V}) = 0 \quad (4)$$

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (5)$$

$$R \frac{d\vec{V}}{dt} = - R \text{grad } \tilde{P} + \vec{\nabla}^2 \vec{V} + T q \vec{E} - S \vec{e}_3 \wedge \vec{V} \quad (6)$$

où \vec{e}_3 est un vecteur unitaire normal aux électrodes ; R et T sont les nombres adimensionnels introduits au Chapitre I. Le nouveau nombre S qui apparaît :

$$S = \frac{2 \rho \Omega h^2}{\eta} \quad \text{est l'inverse du nombre d'EKMAN.}$$

S est une évaluation du rapport des forces de CORIOLIS et visqueuse. Les conditions aux limites sont :

$$\vec{V}(z=0) = \vec{V}(z=1) = 0 ; \Phi(z=0) = 1 ; \Phi(z=1) = 0 ;$$

$$q(z=0) = C .$$

C - SOLUTION STATIONNAIRE

A l'état stationnaire et en l'absence de mouvement, les diverses grandeurs ne dépendent que de z ; le champ électrique est dirigé suivant \vec{e}_3 . Les équations se réduisent à :

$$\frac{d E_s}{dz} = q \quad ; \quad \frac{d}{dz} (q_s E_s) = 0$$

la solution est obtenue comme dans [1] :

$$E_s (z) = a z' \quad ^{1/2} \quad \text{et} \quad (7-a)$$

$$q_s (z) = \frac{a}{2} z' \quad ^{-1/2} \quad (7-b)$$

avec le changement de variable :

$$z' = z + b \quad z \in [0, 1] \implies z' \in [b, b + 1]$$

a et b sont deux constantes d'intégration déterminées par les conditions aux limites:

$$a = 2 c \sqrt{b} \quad (8-a)$$

$$b^2 \left[\left(1 + \frac{1}{b} \right)^{3/2} - 1 \right] = \frac{3}{4c} \quad (8-b)$$

D - INTRODUCTION D'UNE PERTURBATION ET LINEARISATION

En adoptant la même démarche qu'au Chapitre I, on introduit des perturbations infinitésimales des diverses grandeurs par rapport à la solution stationnaire sans mouvement suivant le schéma :

$$A(x, y, z', t) = A_s(z') + A'(x, y, z', t)$$

où A est l'une quelconque des grandeurs Φ , q, P et \vec{V} . En ne gardant que les termes au premier ordre vis-à-vis des perturbations, on peut linéariser le système déduit de (3) - (6) :

$$\nabla^2 \Phi' = -q' \quad (9)$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + 2q_s q' - d\Phi_s \frac{\partial q'}{\partial z'} + (w - \frac{\partial \Phi'}{\partial z'}) dq_s = 0 \quad (10)$$

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (11)$$

$$R \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -R \text{grad } P' + \nabla^2 \vec{V} - T [d\Phi_s q' \vec{e}_3 + q_s \text{grad } \Phi'] - S \vec{e}_3 \wedge \vec{V} \quad (12)$$

où d est l'opérateur $\frac{d}{dz}$.

En appliquant l'opérateur rotationnel à (12), on obtient, compte-tenu de (11) :

$$R \frac{\partial}{\partial t} \vec{\omega} = \vec{\nabla}^2 \vec{\omega} - T \left[(d\Phi_s \frac{\partial q'}{\partial y} - dq_s \frac{\partial \Phi'}{\partial y}) \vec{e}_1 + (dq_s \frac{\partial \Phi'}{\partial x} - d\Phi_s \frac{\partial q'}{\partial x}) \vec{e}_2 \right] + S \frac{\partial}{\partial z'} \vec{V} \quad (13)$$

où \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont deux vecteurs unitaires tels que le trièdre ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) soit un trièdre orthonormé de sens direct en rotation autour de \vec{e}_3 avec les électrodes et $\vec{\omega}$ la vorticité : $\vec{\omega} = \text{Rot } \vec{V}$.

En appliquant à nouveau le rotationnel à (13), en faisant intervenir (11) et en ne gardant que la composante suivant \vec{e}_3 de l'équation obtenue (car la perturbation de charge n'est couplée qu'à la composante w de la vitesse), on aboutit à :

$$R \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}^2 w) = \nabla^2 (\nabla^2 w) + T \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\phi' dq_s - q' d\phi_s) - S \frac{\partial \gamma}{\partial z'} \quad (14)$$

où γ est la composante suivant \vec{e}_3 de la vorticité $\vec{\omega}$. La composante γ de $\vec{\omega}$ intervient de façon implicite dans (13) et, pour obtenir un système fermé, il suffit de prendre la projection de (13) sur \vec{e}_3 ; on obtient alors, en écrivant à nouveau (9), (10), (14), le système régissant l'évolution des perturbations des grandeurs qui nous intéressent :

$$\nabla^2 \phi' = - q' \quad (15)$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + 2 q_s q' - d \phi_s \frac{\partial q'}{\partial z'} + \left(w - \frac{\partial \phi'}{\partial z'} \right) d q_s = 0 \quad (16)$$

$$R \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \vec{\nabla}^2 \gamma + S \frac{\partial w}{\partial z'} \quad (17)$$

$$R \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}^2 w) = \nabla^2 (\nabla^2 w) + T \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\phi' d q_s - q' d \phi_s) - S \frac{\partial \gamma}{\partial z'} \quad (18)$$

Les conditions aux limites sur w , $\frac{\partial w}{\partial z'}$, γ découlent de celles sur \vec{V} :

$\vec{V} = 0$ sur les électrodes équivaut à :

$u = v = w = 0$ en $z' = b$ et $z' = 1 + b$ pour toute valeur de x et y ce qui implique $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ sur les électrodes

et comme $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z'} = 0$ et $\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ les conditions sur

w , $\frac{\partial w}{\partial z'}$, γ sont : $w = \frac{\partial w}{\partial z'} = \gamma = 0$ sur les électrodes ; de plus

$q' = 0$ sur l'injecteur et $\phi' = 0$ sur les deux électrodes.

La géométrie du problème nous suggère de décomposer les diverses perturbations en ondes planes suivant le schéma :

$$\Phi' (x, y, z', t) = F (z') e [i (k_x x + k_y y) + \sigma t]$$

$$q' (x, y, z', t) = G (z') e [i (k_x x + k_y y) + \sigma t]$$

$$w (x, y, z', t) = W (z') e [i (k_x x + k_y y) + \sigma t]$$

$$Y (x, y, z', t) = Z (z') e [i (k_x x + k_y y) + \sigma t]$$

et d'étudier l'évolution des différents modes régie par le système :

$$(d^2 - k^2) F = - G \quad (19)$$

$$\frac{4}{a} z'^{3/2} \sigma G + 4 z' d (z' G) - (W - dF) = 0 \quad (20)$$

$$(d^2 - k^2 - R\sigma) Z = - S dW \quad (21)$$

$$(d^2 - k^2) (d^2 - k^2 - R\sigma) W = T k^2 \frac{a}{4} z'^{-3/2} (4 z'^2 G - F) + S dZ \quad (22)$$

avec $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ et les conditions :

$$\begin{cases} F = W = dW = Z = 0 & \text{sur les deux électrodes} \\ G = 0 & \text{sur l'injecteur} \end{cases}$$

E - ETUDE DE LA STABILITE

1 - Apparition de l'instabilité sous la forme d'une convection stationnaire

Lorsque, à l'état marginal, la partie réelle de σ s'annule en même temps que sa partie imaginaire, l'instabilité apparaît sous la forme d'une convection ; le système d'équations qui correspond à ce cas est :

$$(d^2 - k^2) F = -G \quad (23)$$

$$4 z' d(z' G) = W - dF \quad (24)$$

$$(d^2 - k^2) Z = -S dW \quad (25)$$

$$(d^2 - k^2)^2 W = T k^2 \frac{a}{4} z'^{-3/2} (4 z'^2 G - F) + S dZ \quad (26)$$

avec les neuf conditions aux limites :

$$\begin{aligned} F = W = dW = Z = 0 & \text{ sur les électrodes} \\ G = 0 & \text{ sur l'injecteur} \end{aligned}$$

a) Etude analytique approchée dans le cas de l'injection faible

Dans le cas où C tend vers 0, il est aisé de constater grâce à (8-a) et (8-b) que les constantes a et b s'expriment :

$$a^2 \approx 2 C \left(1 - \frac{C}{2} + \dots \right) \text{ et } b \approx \frac{1}{2C} \left(1 - \frac{C}{2} + \dots \right)$$

en reprenant la variable $z = z' - b$ avec z dans $[0,1]$, les fonctions E_s et q_s peuvent s'écrire à l'aide de C uniquement :

$$E_s = 1 - c \left(\frac{1}{2} - z \right) + O(c^2)$$

$$q_s = c \left(1 - c_z \right) + O(c^3)$$

en ne gardant que les termes d'ordre le plus bas suivant c et en omettant l'équation (23) découplée des autres, un calcul analogue à celui présenté dans [1] permet de se ramener à un système à coefficients constants :

$$dG = V \tag{ 27 }$$

$$(d^2 - k^2) Z = - S dV \tag{ 28 }$$

$$(d^2 - k^2)^2 V = P k^2 G + S dZ \tag{ 29 }$$

après avoir posé $V = W c^2$ et $P = T c^2$

N.B. : Pour ce nouveau système, le nombre de conditions aux limites est réduit à 7 (les 9 précédentes moins les deux conditions sur F).

Multiplions l'équation (29) par V et intégrons entre 0 et 1 ; on peut tirer P :

$$P = \frac{\int_0^1 [V (d^2 - k^2)^2 V] dz - S \int_0^1 (V dZ) dz}{k^2 \int_0^1 V G dz} \tag{ 30 }$$

* d'après (27), $V G = G dG$ et comme $G(0) = 0$ on trouve

$$\int_0^1 V G dz = \frac{1}{2} G^2(1)$$

* en intégrant deux fois par partie $V (d^2 - k^2)^2 V$ et en tenant compte des conditions aux limites sur V on a :

$$\int_0^1 V (d^2 - k^2)^2 V dz = \int_0^1 [(d^2 - k^2) V]^2 dz$$

* en multipliant les deux membres de (28) par Z et en intégrant par parties les deux membres compte-tenu des conditions aux limites sur V et Z on trouve :

$$\int_0^1 Z (d^2 - k^2) Z dz = S \int_0^1 V dZ dz = - \int_0^1 [(dZ)^2 + k^2 Z^2] dz$$

en remplaçant dans (30) :

$$P = 2 \frac{\int_0^1 [(d^2 - k^2) V]^2 dz + \int_0^1 [(dZ)^2 + k^2 Z^2] dz}{k^2 G^2 (1)} \quad (31)$$

P apparaît comme la somme de deux intégrales définies positives ; pour avoir une évaluation de la valeur critique P_c de P, nous allons considérer une forme de vitesse proche de la bonne solution, par exemple V de la forme :

$$V = (1 - \cos 2 \pi z)$$

nous allons déduire G et Z des équations (27) et (28) et calculer P correspondant :

$$\text{de (27) , on tire } G = (z - \frac{1}{2\pi} \sin 2 \pi z)$$

$$\text{et de (28) : } Z = S \frac{2 \pi \sin 2 \pi z}{4 \pi^2 + k^2}$$

de ces expressions de V, G et Z on tire :

$$* \int_0^1 [(d^2 - k^2) V]^2 dz = \int_0^1 [(4 \pi^2 + k^2) \cos 2 \pi z - k^2]^2 dz = \frac{(k^2+4\pi^2)^2+k^4}{2}$$

$$* G (1) = 1$$

$$* \int_0^1 [(dZ)^2 + k^2 Z^2] dz = \frac{S^2}{2} \frac{4 \pi^2}{4 \pi^2 + k^2}$$

d'où :

$$P = \frac{1}{k^2} \left[(k^2 + 4 \pi^2)^2 + 2 k^4 + S^2 \frac{4 \pi^2}{4 \pi^2 + k^2} \right] \quad (32)$$

Remarque : P dépend de S^2 (donc de Ω^2) et ne dépend donc pas du sens de rotation ; $S^2 = \frac{4 p^2 \Omega^2 h^4}{\eta^2}$ est le nombre de TAYLOR.

Posons $k^2 = 4 \pi^2 x$ et $s = [S/4 \pi^2]^2$; P s'écrit alors comme une fonction de x dont nous allons chercher le minimum P_c ainsi que la valeur x_c correspondante dont nous déduirons facilement celle de k_c :

$$P(x) = \frac{4 \pi^2}{x} \left[(1+x)^2 + 2 x^2 + s \frac{1}{1+x} \right] \quad (33)$$

La dérivée s'écrit :

$$P'(x) = \frac{4 \pi^2}{x^2 (1+x)^2} [(3 x^2 - 1) (1+x)^2 - s (2 x + 1)] \quad (34)$$

* En l'absence de rotation ($s = 0$), la dérivée s'annule pour $x_c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ce qui donne :

$$k_c = 4,77 \text{ et } P_c = 215,7$$

et permet de retrouver exactement le résultat de la solution approchée de ATTEN - MOREAU et à quelques centièmes près le résultat du calcul numérique des mêmes auteurs [1].

* A la limite des rotations très fortes ($s \rightarrow \infty$), l'équation :

$$s (2 x + 1) = (3 x^2 - 1) (1+x)^2$$

prend la forme asymptotique :

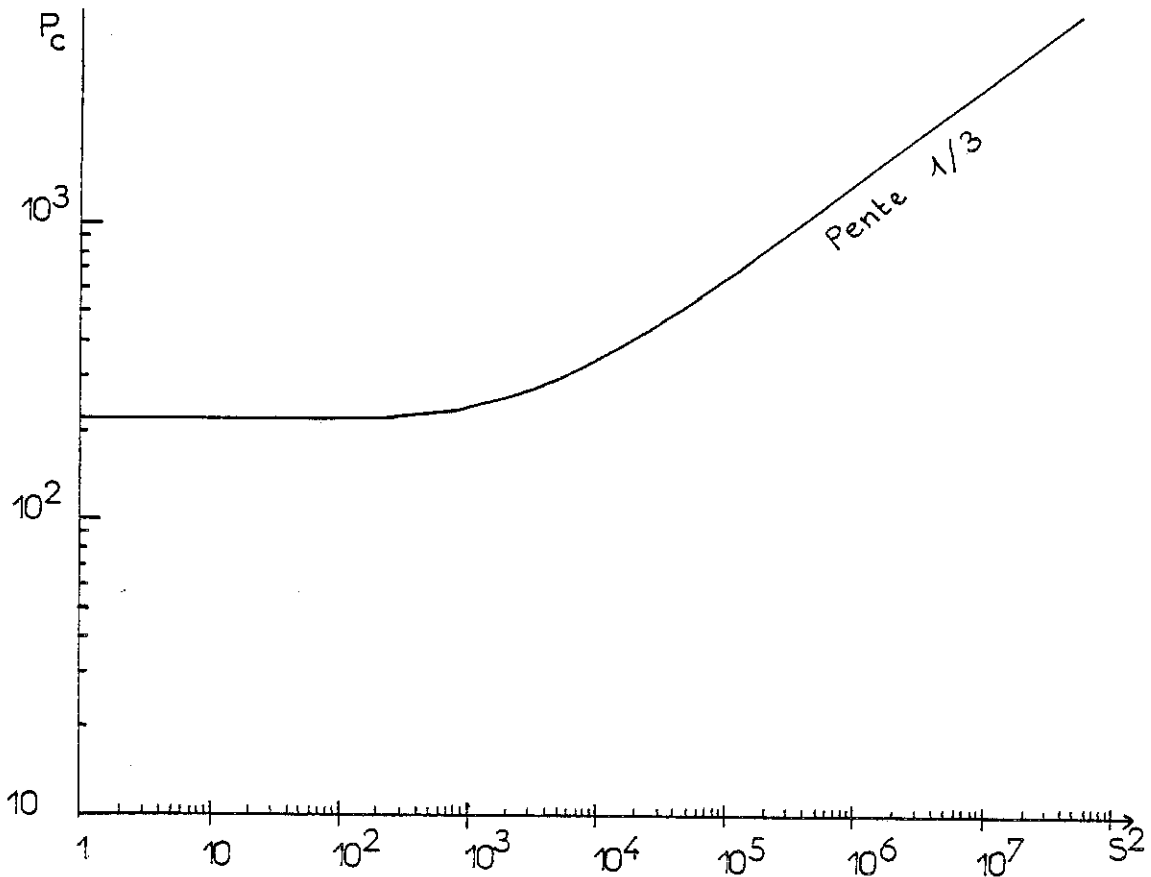


FIGURE 11 : Injection faible ; variation du critère de l'instabilité convective en fonction du nombre de TAYLOR.

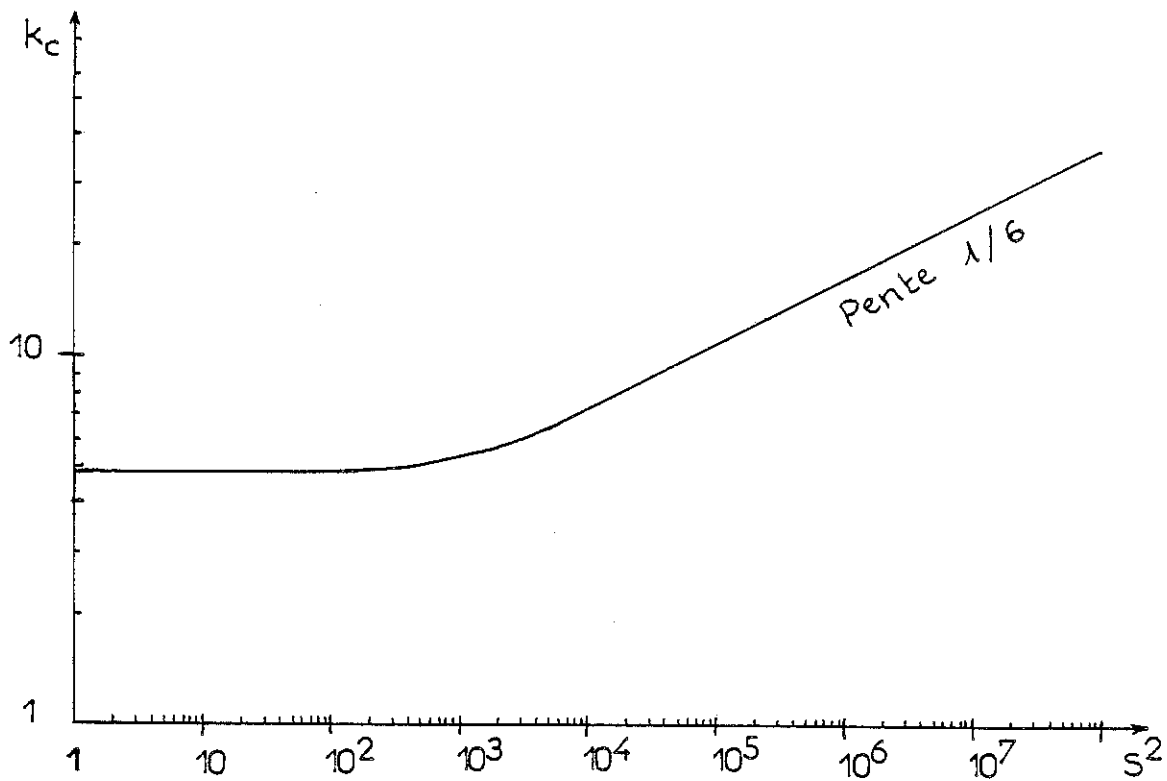


FIGURE 12 : Injection faible ; variation du nombre d'onde critique en fonction du nombre de TAYLOR.

$$2 x s = 3 x^4$$

dans ce cas on trouve :

$$x_c^3 = \frac{2}{3} s \implies x_c = \left(\frac{2}{3} s \right)^{1/3}$$

Le critère $P_c (s)$ prend la forme :

$$P_c = 4 \pi^2 \left(\frac{2}{3} s \right)^{-1/3} \left[3 \left(\frac{2}{3} s \right)^{2/3} + \left(\frac{2}{3} \right)^{-2/3} s \frac{2}{3} \right] \quad (35)$$

soit quand S^2 (nombre de TAYLOR = $4 \rho^2 \Omega^2 h^4 / \eta^2$) $\rightarrow \infty$:

$$k_c = \left(\frac{8 \pi^2}{3} \right)^{1/6} [S^2]^{1/6} = \text{constante} \times (\text{TAYLOR})^{1/6}$$

et

$$P_c = 3 \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} \right)^{1/3} \right] (4 \pi^2)^{1/3} [S^2]^{1/3} \\ = \text{constante} \times (\text{TAYLOR})^{1/3}$$

Les courbes représentatives de $P_c (S^2)$ et de $k_c (S^2)$ sont portées sur les Figures (11) et (12).

Ces premiers résultats que nous venons de présenter montrent le rôle stabilisant de la rotation, le nombre d'onde k_c et le critère P_c croissant avec le nombre de TAYLOR. L'allure des courbes obtenues dans le cas de l'injection faible est qualitativement la même que celle qu'on obtient dans le problème de RAYLEIGH - BENARD [10] ; une différence existe néanmoins, avec le problème thermique puisque, si on a bien :

$$k_c \rightarrow \text{constante} \times (\text{TAYLOR})^{1/6}$$

par contre :

$$Ra_c \rightarrow \text{constante} \times (\text{TAYLOR})^{2/3}$$

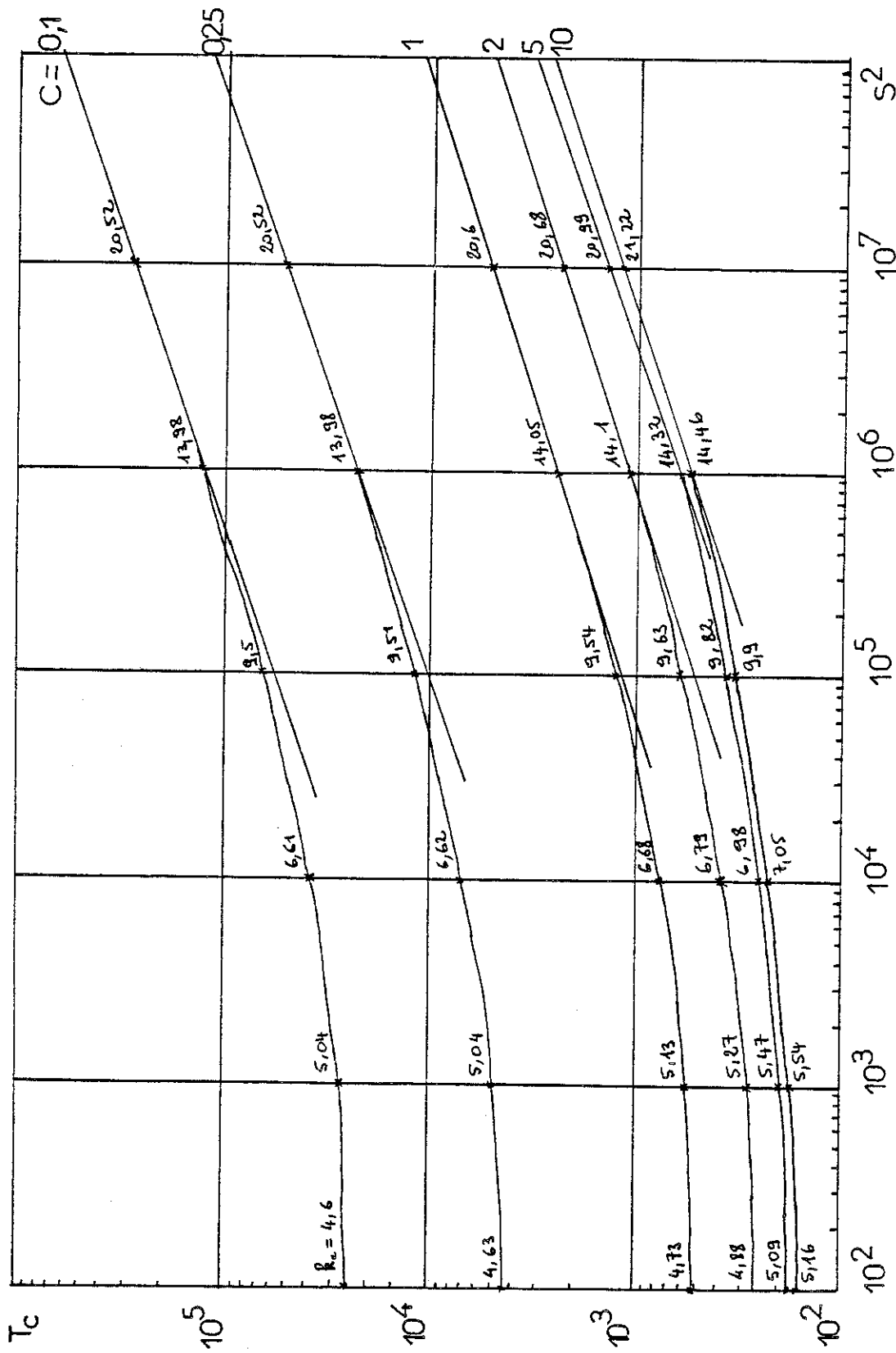


FIGURE 13 : Injection pour différentes valeurs de C ; valeurs du critère de l'instabilité convective et du nombre d'onde critique en fonction du nombre de TAYLOR.

b) Résolution numérique pour différentes valeurs de C

Nous avons calculé, par la méthode présentée dans l'Annexe I, les fonctions $k_c (S^2)$ et $T_c (S^2)$ pour différentes valeurs de C.

Les résultats obtenus sont portés en échelle logarithmique sur la Figure (13). On vérifie que, en extrapolant les différentes courbes vers $S^2 \rightarrow 0$, on retrouve les valeurs connues de k_c et de T_c du cas plan [1]. Quant au comportement quand $S^2 \rightarrow \infty$, on constate que les pentes pour $k_c (S^2)$ et $T_c (S^2)$ sont respectivement $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}$ (on peut vérifier la première assertion grâce aux valeurs de k_c portées sur la Figure) ; ces valeurs des pentes, les mêmes que pour le cas de l'injection faible, semblent donc indépendantes du niveau d'injection C, la variation suivant C se traduisant donc en gros comme une simple translation des courbes.

Ce phénomène peut se comprendre par un examen très grossier du système asymptotique d'équations que l'on peut tirer de (23), (26) lorsque $S^2 \rightarrow \infty$; en effet, en appliquant $d (d^2 - k^2)$ à l'équation (26) et en utilisant (25) on obtient :

$$d (d^2 - k^2)^3 W = \frac{a}{4} T k^2 (d^2 - k^2) d [z^{-3/2} (4 z'^2 G - F)] - S^2 d^3 W \quad (36)$$

quand $S^2 \rightarrow \infty$, on peut s'attendre à ce que k tende également vers l'infini ; comme rien ne devrait se produire de particulier sur les dérivées selon z des diverses fonctions asymptotiquement, on pourra remplacer l'action de l'opérateur $(d^2 - k^2)$ par une simple multiplication par $(- k^2)$. Dans ces conditions, l'équation (23) donne :

$$F \approx G / k^2 \ll G$$

ce qui nous permet de négliger F dans (36).

Pour $z \in [b, b + 1]$, le terme $d(z^{1/2} G)$ est du même ordre que $(b + \frac{1}{2})^{1/2} dG$; avec les mêmes approximations l'équation (24) nous donne $4(b + \frac{1}{2})^2 dG \sim W$ d'où :

$$d(z^{1/2} G) \sim \frac{W}{4} (b + \frac{1}{2})^{-3/2}$$

De l'équation (36) on déduit :

$$k^6 dW \sim \frac{a}{4} (b + \frac{1}{2})^{-3/2} \tau k^4 W + s^2 d^3 W \quad (37)$$

en dérivant l'expression $(7-b)$ de la densité stationnaire de charge, le coefficient devant τ :

$$\frac{a}{4} (b + \frac{1}{2})^{-3/2} = - \left[\frac{dq_s}{dz'} \right]_{z' = b + \frac{1}{2}} > 0$$

est une fonction croissante de C uniquement et on peut écrire :

$$k^6 dW \sim f(C) \tau k^4 W + s^2 d^3 W \quad (38)$$

On peut rapprocher cette équation de celle qu'a obtenue CHANDRASEKHAR dans le problème de RAYLEIGH - BENARD avec rotation dans les mêmes conditions asymptotiques [10] :

$$k^6 W = Ra k^2 W + s^2 d^2 W \quad (39)$$

Ra est le nombre de RAYLEIGH. Une différence importante entre les équations (38) et (39) réside dans le fait que la première est d'ordre impair, la deuxième d'ordre pair et qu'il est facile de trouver dans ce dernier cas une solution exacte ; malgré cette différence, la signification physique des deux équations est la même : toutes deux expriment l'équilibre entre le terme visqueux (membre de gauche), le terme moteur (force électrique ou poussée d'ARCHIMEDE pour le premier terme du membre de droite) et le terme de CORIOLIS.

La démonstration exacte qu'on peut faire dans le cas thermique permet d'aboutir à la relation :

$$Ra = \frac{1}{k^2} [k^6 + \pi^2 S^2] \quad (40)$$

Etant donnée la similitude des phénomènes physiques en jeu dans les deux problèmes, il est naturel d'associer à l'équation (38) la relation suivante analogue à (40) :

$$T = \frac{1}{k^4} [\alpha (C) k^6 + \beta (C) S^2] \quad (41)$$

Les termes entre crochets des équations (40) et (41) sont les mêmes, ce qui va expliquer la même dépendance de k_c en fonction de S^2 dans les deux cas ; en effet, les conditions critiques sont définies par le minimum de la courbe $T (k)$:

$$\frac{dT}{dk^2} = 0 \implies \alpha - \frac{2 \beta S^2}{k^6} = 0$$

et le comportement asymptotique de k_c quand $S^2 \rightarrow \infty$ est donné par :

$$k_c \sim (\text{fonction de } C) \times (\text{TAYLOR})^{1/6}$$

En reportant dans (41), puisque maintenant le coefficient du crochet est $\frac{1}{k^4}$ (au lieu de $1/k^2$ dans l'équation (40)), on aboutit à :

$$T_c \sim (\text{fonction de } C) \times (\text{TAYLOR})^{1/3}$$

2 - Apparition de l'instabilité sous la forme d'oscillations d'amplitude croissante
(Etude analytique approchée dans le cas asymptotique de l'injection faible)

Dans certaines conditions que nous allons préciser, il est possible qu'à l'état marginal, la partie imaginaire de σ ne soit pas nulle : on pose $\sigma = i\beta$; l'instabilité se déclenche alors sous forme d'oscillations d'amplitude croissante avec le temps (dans la suite on utilisera le terme suroscillations). Le traitement de ce problème étant assez complexe, nous bornerons notre travail à une étude analytique approchée dans le cas asymptotique de l'injection faible. La méthode que nous allons employer suit dans ses grandes lignes celle utilisée dans le cas d'une convection stationnaire traité au Paragraphe E-1-a de ce Chapitre. Les expressions des grandeurs stationnaires s'expriment comme auparavant en fonction de C et de z :

$$E_s = 1 - C \left(\frac{1}{2} - z \right) \quad \text{et} \quad q_s = C (1 - Cz)$$

et le système d'équations du problème s'écrit :

$$(d + i\beta) G = V \quad \text{avec} \quad \beta \neq 0 \quad (42)$$

$$(d^2 - k^2 - i\beta R) Z = - S dV \quad (43)$$

$$(d^2 - k^2) (d^2 - k^2 - i\beta R) V = P k^2 G + S dZ \quad (44)$$

En s'appuyant sur le cas analogue du problème de RAYLEIGH - BENARD on peut, sans perte de généralité supposer $V (z)$ réelle. Comme dans l'étude précédente, on prend V de la forme :

$$V = 1 - \cos az$$

avec $a = 2 \pi$ jusqu'à la fin du Chapitre.

L'équation (43) permet de trouver la fonction Z satisfaisant les conditions aux limites :

$$Z = \frac{S a \sin az}{a^2 + k^2 + i\beta R}$$

et on tire G de l'équation (42) par la méthode suivante : la solution générale de l'équation $(d + i\beta) G = 0$ étant de la forme $G = \alpha \exp(-i\beta z)$, on cherche une solution particulière G_0 de l'équation (42) par la méthode de variation de la constante ; on est alors conduit à trouver une solution de l'équation différentielle :

$$\alpha' (z) = e^{i\beta z} - \frac{1}{2} (e^{i(\beta + a)z} + e^{i(\beta - a)z})$$

par exemple :

$$\alpha_0 (z) = \frac{e^{i\beta z}}{i\beta} - \frac{e^{i(\beta + a)z}}{2i(\beta + a)} - \frac{e^{i(\beta - a)z}}{2i(\beta - a)} \quad (45)$$

alors $G_0 (z) = \alpha_0 (z) \exp(-i\beta z)$ est une solution particulière de (42) dont la solution générale s'écrit :

$$G (z) = G_0 (z) + \alpha \exp(-i\beta z)$$

Compte-tenu de la condition $G(0) = 0$, la solution de notre problème est :

$$G (z) = [\alpha_0 (z) - \alpha_0 (0)] e^{-i\beta z}$$

soit :

$$G (z) = \frac{1 - e^{-i\beta z}}{i\beta} - \frac{e^{iaz} - e^{-i\beta z}}{2i(\beta + a)} - \frac{e^{-iaz} - e^{-i\beta z}}{2i(\beta - a)} \quad (46)$$

En multipliant les deux membres de l'équation (44) par V et en intégrant les deux membres de l'équation ainsi obtenue entre 0 et 1, on peut tirer l'expression de P :

$$P = \frac{\int_0^1 [V (d^2 - k^2) (d^2 - k^2 - i\beta R) V] dz - S \int_0^1 [V dZ] dz}{k^2 \int_0^1 V G dz} = \frac{I_1 - S I_2}{k^2 I_3} \quad (47)$$

on calcule les intégrales I_1, I_2, I_3 en se servant des expressions de V, Z et G :

i) Calcul de I_3

$$I_3 = \int_0^1 V G dz$$

Pour calculer cette intégrale, on peut écrire V sous la forme :

$$V = \frac{1}{2} (2 - e^{i az} - e^{-i az})$$

ce qui permet de calculer $V G$:

$$V G = \frac{1}{2i} (2 - e^{i az} - e^{-i az}) \left[\frac{1}{\beta} - \frac{e^{i az}}{2(\beta+a)} - \frac{e^{-i az}}{2(\beta-a)} + \frac{a^2 e^{-i\beta z}}{\beta(\beta^2 - a^2)} \right]$$

En effectuant le produit, on peut mettre $V G$ sous la forme de la somme de six termes :

$$V G = \frac{1}{2i} \left[\frac{2}{\beta} + \frac{1}{2(\beta-a)} + \frac{1}{2(\beta+a)} \right] + \frac{a^2}{\beta(\beta^2 - a^2)} \left[2 e^{-i\beta z} - e^{-i(\beta-a)z} - e^{-i(\beta+a)z} \right]$$

+ facteur $\times e^{i az}$ + facteur $\times e^{-i az}$ + facteur $\times e^{2 i az}$
 + facteur $\times e^{-2 i az}$

et comme $a = 2 \pi$, l'intégrale entre 0 et 1 des quatre derniers termes est nulle ce qui permet de trouver :

$$I_3 = 2 A (\beta) \sin^2 \frac{\beta}{2} + i [A (\beta) \sin \beta - B (\beta)]$$

avec $A (\beta) = \frac{a^4}{\beta^2 (\beta^2 - a^2)^2}$ et $B (\beta) = \frac{3 \beta^2 - 2 a^2}{2 \beta (\beta^2 - a^2)}$

ii) Calcul de I_1

$$I_1 = \int_0^1 V (d^2 - k^2)^2 V dz - i \beta R \int_0^1 V (d^2 - k^2) V dz$$

La première intégrale est une intégrale définie positive qui a déjà été calculée. La deuxième intégrale donne :

$$\int_0^1 V (d^2 - k^2) V dz = -k^2 - \frac{k^2 + a^2}{2}$$

d'où :

$$I_1 = \frac{3 k^4 + 2 k^2 a^2 + a^4}{2} + i \beta R \frac{3 k^2 + a^2}{2}$$

iii) Calcul de I_2

$$I_2 = \int_0^1 (V dZ) dz$$

En intégrant par parties et en utilisant (43), on obtient :

$$S I_2 = -S \int_0^1 Z dV dz = - \int_0^1 [(dZ)^2 + (k^2 + i \beta R) Z^2] dz$$

d'où :

$$-S I_2 = \frac{S^2 a^2}{2} \frac{a^2 + k^2 - i \beta R}{(a^2 + k^2)^2 + \beta^2 R^2}$$

En tenant compte des expressions de I_1 , I_2 , I_3 ; l'expression (47) de P peut s'écrire :

$$2 k^2 \left\{ 2 A(\beta) \sin^2 \frac{\beta}{2} + i [A(\beta) \sin \beta - B(\beta)] \right\} P =$$

$$\left[2 k^4 + (k^2 + a^2)^2 + S^2 a^2 \frac{(a^2 + k^2)}{(a^2 + k^2)^2 + \beta^2 R^2} \right] + i R \beta \left[3 k^2 + a^2 - \frac{S^2 a^2}{(a^2 + k^2)^2 + \beta^2 R^2} \right]$$

P étant réel, les rapports formés à l'aide des parties imaginaire et réelle de chaque membre de cette équation sont égaux d'où :

$$\frac{A(\beta) \sin \beta - B(\beta)}{2 R \beta A(\beta) \sin^2 \frac{\beta}{2}} = \frac{(3 k^2 + a^2) [(a^2 + k^2) + \beta^2 R^2] - S^2 a^2}{(3 k^4 + 2 a^2 k^2 + a^4) [(a^2 + k^2)^2 + \beta^2 R^2] + S^2 a^2 (a^2 + k^2)} \quad (48)$$

Une autre égalité est obtenue en égalant les parties réelles des deux membres :

$$4 k^2 A(\beta) \sin^2 \frac{\beta}{2} P = 2 k^4 + (k^2 + a^2)^2 + S^2 a^2 \frac{a^2 + k^2}{(a^2 + k^2)^2 + \beta^2 R^2} \quad (49)$$

Afin de simplifier l'écriture de ces expressions, nous allons effectuer les changements de variables suivants :

$$x = \left(\frac{k}{a} \right)^2, \quad b = \frac{\beta}{a}, \quad r = \frac{R}{a}, \quad s = \left(\frac{S}{a^2} \right)^2, \quad p = \frac{P}{a^4},$$

et on obtient :

$$\frac{A(ab) \sin ab - B(ab)}{2 r b A(ab) \sin^2 \frac{ab}{2}} = \frac{(3x + 1) [(1 + x)^2 + b^2 r^2] - s}{(3x^2 + 2x + 1) [(1 + x)^2 + b^2 r^2] + s(1 + x)} \quad (50)$$

$$4 a^2 x A(ab) \sin^2 \frac{ab}{2} p = 2 x^2 + (1 + x)^2 + s \frac{1 + x}{(1 + x)^2 + b^2 r^2} \quad (51)$$

$$\text{avec } A(ab) = \frac{1}{a^2 b^2 (1 - b^2)^2} \text{ et } B(ab) = \frac{3 b^2 - 2}{2 ab (b^2 - 1)}$$

A ce point, étant donnée la complexité des équations, il apparaît que la résolution de notre problème relève d'un traitement numérique. Avant d'aborder ultérieurement l'étude dans toute sa généralité, il est cependant utile de tirer par voie analytique le maximum d'information de ce que peuvent dire les équations. Un cas particulièrement intéressant et auquel nous nous restreindrons ici est l'étude du cas $b \ll 1$ qui va nous permettre de déterminer les points de branchement des courbes $p_{r,s}(x)$ correspondant aux solutions oscillatoires sur la courbe $p_{conv,s}(x)$ correspondant à la solution convective. En particulier, on établira l'équation donnant l'abscisse des points de branchement et on comparera les pentes des branches oscillatoires et convective au voisinage de ce point.

Etude du cas $b \rightarrow 0$

En faisant un développement limité suivant b , on peut trouver les expressions asymptotiques des équations (50) et (51). Comme pour $b \rightarrow 0$ on a :

$$A(ab) \approx \frac{1}{a^2 b^2} (1 + 2 b^2 + 3 b^4)$$

$$B(ab) \approx \frac{1}{ab} (1 - \frac{3}{2} b^2) (1 + b^2 + b^4) \approx \frac{1}{ab} (1 - \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} b^4)$$

$$\sin ab \approx ab - \frac{a^3 b^3}{3!} + \frac{a^5 b^5}{5!} = ab \left[1 - \frac{a^2 b^2}{3!} + \frac{a^4 b^4}{5!} \right]$$

$$\sin^2 \frac{ab}{2} \approx \frac{a^2 b^2}{4} \left[1 - \frac{a^2 b^2}{2 \times 3!} \right]$$

Le premier membre de (50) s'écrit :

$$\left(\frac{5 - \frac{a^2}{3}}{r a} \right) \left\{ 1 + b^2 \left[\frac{7 - \frac{2a^2}{3} + \frac{a^4}{60}}{5 - \frac{a^2}{3}} + \frac{a^2}{2 \times 3!} - 2 \right] \right\}$$

soit :

$$- \frac{1,2986203}{r} [1 + 0,4740296 b^2] \quad (52)$$

et le premier membre de (51) :

$$a^2 x [1 + (2 - \frac{a^2}{2 x^3}) b^2] p = a^2 x (1 - 1,2898681 b^2) p \quad (53)$$

En posant $X = x + 1$, le deuxième membre de (50) devient :

$$\frac{2 x X^2 + X^3 - s}{X (2 x^2 X + X^3 + s)} \left[1 + r^2 b^2 2 s \frac{X^2 + x X + x^2}{(2 x X^2 + X^3 - s) X (2 x^2 X + X^3 + s)} \right] \quad (54)$$

et le deuxième membre de (51) :

$$a^2 x p_{conv} (x, s) \left[1 - \frac{s b^2 r^2}{X^2 (2 x^2 X + X^3 + s)} \right] \quad (55)$$

où $p_{conv} = \frac{1}{a^2 x} (2 x^2 + X^2 + \frac{s}{X})$ est la valeur du paramètre

de stabilité caractérisant la solution convective ($b = 0$) pour le même nombre d'onde.

Compte-tenu des différents développements, l'équation (50) s'écrit :

$$b^2 \left[2 s r^3 \frac{X^2 + x X + x^2}{X^2 (2 x^2 X + X^3 + s)} + 0,47 x 1,298 \right] \quad (56)$$

$$= r \frac{s - 2 x X^2 - X^3}{X (2 x^2 X + X^3 + s)} - 1,298$$

comme b est réel, une première condition nécessaire pour qu'il puisse exister une solution oscillatoire est que le second membre soit positif :

$$1,298 X (2 x^2 X + X^3 + s) < r (s - 2 x X^2 - X^3) \quad (57)$$

Le premier membre de cette inégalité est une fonction croissante de x ($x > 0$) et est donc supérieur à la valeur de la fonction pour $x = 0$, c'est-à-dire à $1,298 (s + 1)$.

Le second membre est une fonction décroissante de x et est donc inférieur à la valeur de la fonction en $x = 0$, c'est-à-dire à $r (s - 1)$. Une première condition pour que l'inégalité (57) puisse être satisfaite pour certaines valeurs de x est donc que :

$$1,298 (s + 1) < r (s - 1) \quad (58)$$

soit :

$$r > 1,298 \frac{s + 1}{s - 1} > 1,298 \quad (59)$$

par conséquent, pour $r \leq 1,298$, l'inégalité (57) ne peut jamais être satisfaite, et l'instabilité ne peut être que convective.

Remarque : R est relié à P par la relation

$$R = P/M^2 C^2 \quad (\text{voir [1] }) \text{ soit}$$

$$r = a^3 p/M^2 C^2 \quad \text{où} \quad M = \frac{1}{K} \left(\frac{\epsilon}{\rho} \right)^{1/2} \text{ est un}$$

paramètre qui ne dépend que des propriétés physiques du liquide. M^2 va jouer dans notre problème un rôle analogue au nombre de PRANDTL $Pr = \eta/\rho K$ dans le problème de RAYLEIGH - BENARD avec rotation [10].

En effet, dans ce cas, une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir obtenir des solutions oscillatoires est $Pr < 1$; l'existence d'une borne inférieure sur r montre que M^2 admettra une borne supérieure, ce qui va bien dans le sens de l'analogie entre les deux problèmes. Cette remarque montre que l'étude que nous faisons en traitant r comme un paramètre formel indépendant de p aboutit à des conclusions qualitativement satisfaisantes.

Dans le cas où $r > 1,298$, une autre condition sur s est nécessaire pour que l'inégalité (57) puisse être satisfaite ; en effet, d'après (58) :

$$s (r - 1,298) > r + 1,298 \quad (60)$$

soit :

$$s > \frac{r + 1,298}{r - 1,298} \quad (s \text{ supérieur à } 1) \quad (61)$$

pour une valeur donnée de r satisfaisant (59) et une valeur donnée de s satisfaisant (61), une solution oscillatoire n'est possible que pour $x < x_0 (r, s)$ où x_0 est la racine positive de :

$$1,298 X_0 (2 X_0^2 X_0 + X_0^3 + s) = r (s - 2 X_0 X_0^2 - X_0^3) \quad (62)$$

avec $X_0 = x_0 + 1$

Comme on peut s'y attendre, pour $x = x_0$, l'équation (56) indique que $b = 0$ et donc que $p = p_{conv}$ d'après les expressions (53) et (55).

Dans le cas où les suroscillations sont possibles (conditions sur r , s et $x < x_0$), la question se pose de savoir sous laquelle des deux formes apparaît l'instabilité. Il semble naturel de supposer que l'instabilité se développera suivant la forme qui correspond au plus petit nombre critique. Ceci amène à comparer les deux valeurs critiques des paramètres d'instabilité p (relatif aux oscillations) et p_{conv} . A défaut de ne pouvoir connaître analytiquement l'expression de la valeur critique de p , on se contente (dans cette thèse) de comparer les valeurs de p et p_{conv} au voisinage des points de branchement (i.e. $0 \leq x_0 - x \ll 1 \implies b \ll 1$). Dans ce cas, la relation (51), non exploitée jusqu'à présent s'écrit :

$$(1 - 1,289 b) p = p_c \left[1 - \frac{s b^2 r^2}{X^2 (2 x^2 X + X^3 + s)} \right]$$

$$p = p_c \left\{ 1 - \left[\frac{s r^2}{X^2 (2 x^2 X + X^3 + s)} - 1,289 \right] b^2 \right\} \quad (63)$$

de la forme :

$$p = p_c [1 - \alpha b^2]$$

Montrons que la condition (57) implique que $\alpha > 0$, ce qui revient à écrire :

$$1,289 X^2 (2 x^2 X + X^3 + s) < s r^2 \quad (64)$$

Nous allons majorer la quantité de gauche et montrer que le majorant trouvé est inférieur à la quantité de droite ; en effet, d'après (57) :

$$1,298 X (2 x^2 X + X^3 + s) < r (s - 2 x X^2 - X^3) < r (s - 1)$$

d'où en majorant X par X_0

$$1,289 X^2 (2 x^2 X + X^3 + s) < X_0 r (s - 1) \quad (65)$$

On peut trouver une majoration de X_0 grossière mais néanmoins suffisante en exprimant que :

$$\forall x < x_0 : s - 2 x X^2 - X^3 > 0$$

en vertu de (57) ; soit :

$$\forall x < x_0 : X^3 < s - 2 x X^2 < s$$

et donc :

$$X_0^3 \leq s$$

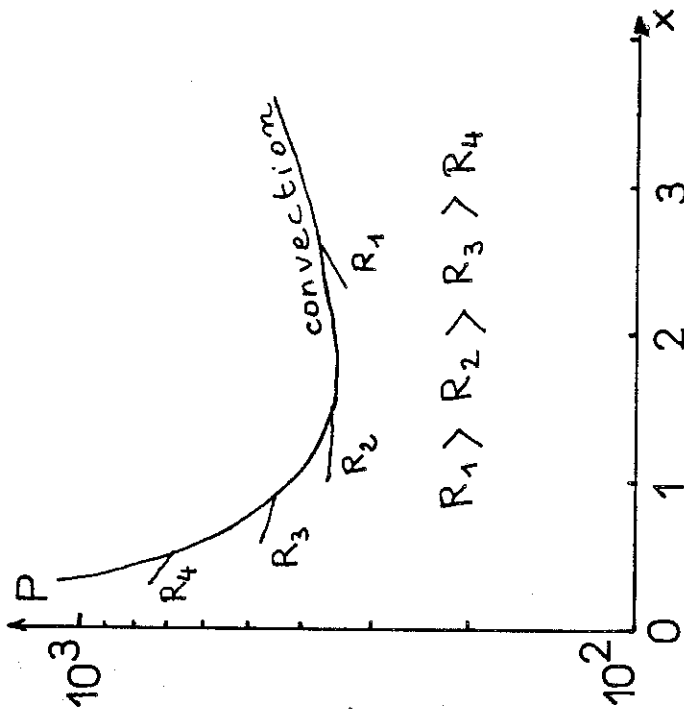
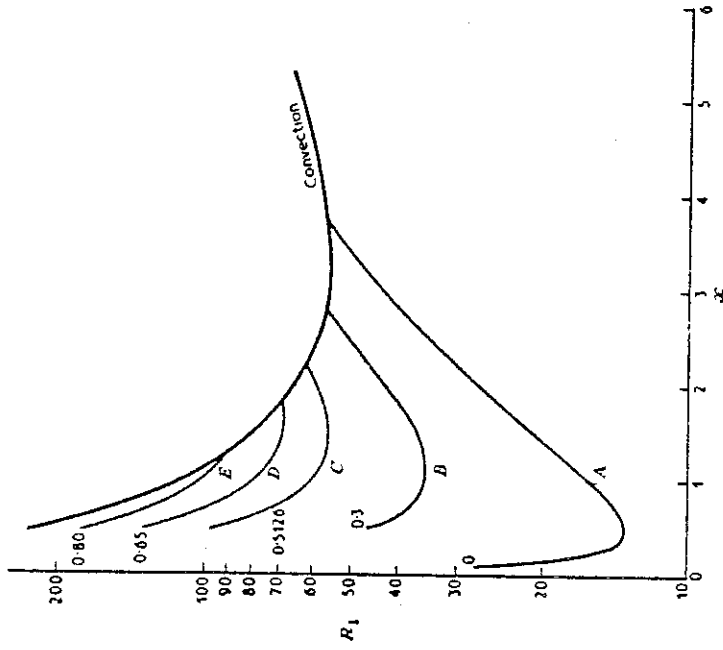


FIGURE 14 : Injection faible ; allure de la variation du critère relatif à la convection en fonction de $x = k^2/4 \pi^2$ et points de branchement de quelques solutions oscillatoires pour différents valeurs de R pour un nombre de TAYLOR = 10^4 .



The disposition of the curves for marginal stability in the (x, R_1) plane for a Taylor number, $T = 10^4$, and for various values of the Prandtl number p . The curve labelled 'convection' applies for all values of p and defines the locus $R_1^{(c)}$ (equation 227). The remaining curves are the overstable loci $R_1^{(p)}$ for values of p by which they are labelled. The minimum for the curve C ($p = 0.5126$) and for the convection curve occurs for the same value of R_1 .

FIGURE 15 : Figure correspondant à la Figure 14 dans le problème de RAYLEIGH - BENARD plan avec rotation. Le nombre de PRANDTL joue un rôle formellement analogue à $1/R$.

comme $x_0 \geq 1$, on peut écrire :

$$x_0 \leq x_0^3 \leq s$$

et en reportant dans (65), on voit que :

$$1,289 x^2 (2 x^2 x + x^3 + s) < r s (s - 1) < r s^2$$

ce qui montre que, si la condition (57) est vérifiée, la condition (64) l'est également et que donc α est > 0 .

La situation est résumée sur la Figure (14). Dans le plan (x, p), nous avons représenté qualitativement et pour s donné, la courbe :

$$p_{\text{conv}} = \frac{1}{a^2 x} [2 x^2 + (1 + x)^2 + \frac{s}{1 + x}]$$

définissant le lieu des points du plan caractérisant l'état marginal d'une convection. Pour différentes valeurs de r , on peut obtenir différentes valeurs (croissantes) $x_0 (r)$ et pour $x < x_0$ on peut tracer des branches de solutions oscillatoires ; comme nous ne connaissons pas l'équation explicite de ces branches, nous nous sommes contentés de représenter les variations au voisinage immédiat ($b \ll 1 \implies x_0 - x \ll 1$) du point de branchement en tenant compte du fait que $\alpha > 0$ comme nous venons de le montrer.

La Figure (15) est la reproduction de la série de courbes obtenues dans le cas du problème de RAYLEIGH - BENARD avec rotation [10]. Pour un nombre de TAYLOR donné, on a la courbe ($x, Ra^{(c)}$) correspondant à la convection ainsi que les différentes branches oscillatoires ($x, Ra^{(o)}$) obtenues pour différentes valeurs du nombre de PRANDTL. Dans ce problème, on connaît explicitement l'équation des différentes branches.

On observe sur la Figure (15) que les branches oscillatoires sont toutes en dessous de la courbe convective. Si l'on compare les minima de la courbe convective à ceux correspondants aux différentes valeurs du nombre de PRANDTL, on observe qu'il existe une valeur de Pr (Pr_0 dépend de s) en dessous de laquelle l'instabilité se développera par

Taylor numbers above which instability occurs as overstability

p	$T(p)$	R	p	$T(p)$	R
0.0	548	1315	0.55	18,870	7748
0.1	728	1471	0.60	68,150	16,790
0.2	990	1669	0.63	2.588×10^5	3.876×10^4
0.4	3163	2890	0.65	1.223×10^8	1.050×10^5
0.5	8505	4910	0.6766	∞	∞

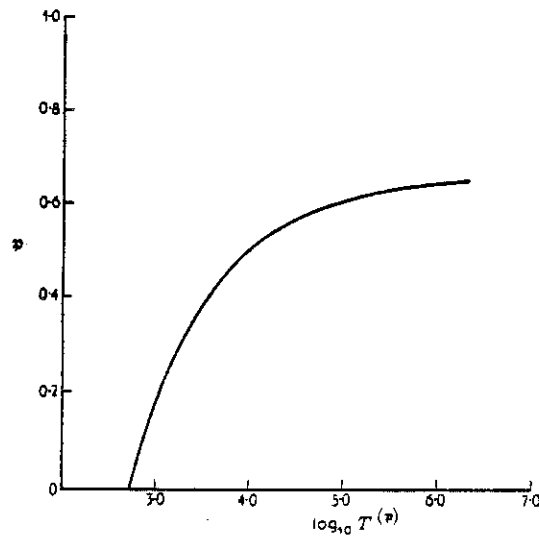


FIG. 28. The variation of $T(p)$ with the Prandtl number p .

FIGURE 16 : Nombres de TAYLOR $T (P_n)$ au delà desquels l'instabilité apparaît par suroscillations en fonction du nombre de PRANDTL P_n dans le problème de RAYLEIGH - BENARD avec rotation.

suroscillations. En particulier, lorsque $x_0 > x_{\min}$, on est assuré que le minimum de la branche oscillatoire sera inférieur à celui de la branche convective.

En s'appuyant sur l'analogie que nous avons constatée jusqu'à présent entre le problème d'injection unipolaire et le problème de RAYLEIGH - BENARD, il semble raisonnable de penser que l'allure des courbes régissant les deux problèmes sont les mêmes : les comportements devraient être qualitativement les mêmes ; dans le problème de RAYLEIGH - BENARD, pour un s donné (supérieur à une certaine valeur), il existe une valeur $Pr(s)$ en dessous de laquelle l'instabilité est oscillatoire (voir Figure (16) tirée de [10]). Dans le problème d'injection, pour un s donné (supérieur à une certaine valeur), il devrait exister une valeur r_0 de r en dessus de laquelle l'instabilité est oscillatoire (il faut avoir présent à l'esprit que dans l'équation de NAVIER - STOKES le nombre R joue le même rôle que $1/Pr$). On devrait donc obtenir dans le plan (s^2, M) une courbe séparant les régions d'instabilité convective et oscillatoire dont l'allure est la même que celle de la Figure (16) obtenue dans le cas thermique.

CHAPITRE III

Circulation d'un liquide isolant compris
entre électrodes planes non parallèles et soumis
à une injection unipolaire faible.

A. INTRODUCTION

Dans ce troisième chapitre, nous allons envisager un écoulement particulier qui devrait présenter une certaine analogie avec la circulation atmosphérique générale idéalisée (i.e. en l'absence de rotation de la terre et pour une surface terrestre homogène).

Dans cette hypothèse, l'écart de température entre les pôles et l'équateur induit un mouvement qui devrait être méridien. Une circulation analogue pourrait être obtenue dans un modèle électrohydrodynamique isotherme en faisant varier la densité de force de façon monotone du pôle à l'équateur ; comme la force de Coulomb s'écrit $F = qE$, ceci peut être réalisé, ou bien en faisant varier le paramètre d'injection, ou bien en faisant varier le champ électrique, voire les deux. La méthode la plus simple consiste à faire varier le champ (ce qui peut éventuellement entraîner une variation de l'injection si celle-ci dépend du champ), ce qui est réalisé en faisant varier la distance entre les électrodes du pôle à l'équateur. Ceci suggère d'étudier la circulation d'un liquide compris entre une sphère et un ellipsoïde de révolution comme sur la figure (17).

L'étude dans cette géométrie étant assez complexe, on peut se contenter dans une première étape d'examiner le cas plus simple d'un liquide isolant compris entre deux électrodes faisant entre elles un angle faible ; le but de cette première approche est de préciser les grandeurs (tensions, distances, liquides, vitesses obtenues...) nécessaires à la réalisation effective du modèle en géométrie sphère-ellipsoïde.

Dans les deux situations envisagées jusqu'à présent, géométrie sphérique au chapitre I, géométrie plane au chapitre II, le liquide avait la possibilité de rester au repos même en présence d'injection, c'est-à-dire sous l'action d'une densité de force électrique qE . Ceci prove-

nait du fait que la géométrie présentait une symétrie qui permettait d'obtenir une situation dans laquelle les surfaces d'égale densité de charge étaient confondues avec les surfaces équipotentiellles. On avait donc :

$$\text{Rot } q_s \vec{E}_s = \vec{E}_s \wedge \text{grad } q_s = 0$$

ce qui est une condition nécessaire pour qu'il puisse exister une solution sans mouvement (même si, comme nous l'avons vu, cette solution est instable au-dessus d'un certain seuil). Au repos, la force de COULOMB est alors compensée par le gradient de pression.

Dans le cas de deux électrodes planes non parallèles, géométrie moins symétrique que les précédentes, la densité de charge n'est pas constante sur une équipotentielle et par suite, le rotationnel de la force électrique n'est jamais nul ; par conséquent, le liquide se met toujours en mouvement sous l'action de la force de COULOMB.

Une première étude du mouvement est faite dans cette géométrie en supposant la densité de charge q_0 constante sur l'injecteur, ce qui conduit à des vitesses faibles (sans doute difficiles à mesurer) variant comme le carré de q_0 et indépendantes de la tension appliquée Φ_0 . On envisage ensuite le cas où l'injection dépend du champ sur l'injecteur ce qui conduit à des vitesses plus élevées variant comme q_0 . (densité moyenne de charge sur l'injecteur) et Φ_0 .

L'étude expérimentale qui suit, montrant une dépendance de la vitesse proportionnelle à Φ_0^2 , il faut admettre que les deux hypothèses faites précédemment ne s'accordent pas à l'expérience que nous avons réalisée. En effet, la dépendance de la vitesse en Φ_0^2 , la mesure des temps de transit t_T et de relaxation τ suggèrent plutôt que la conduction en volume n'est pas du tout négligeable. Une évaluation grossière prenant en compte ce phénomène permet d'interpréter les résultats obtenus par l'expérience.

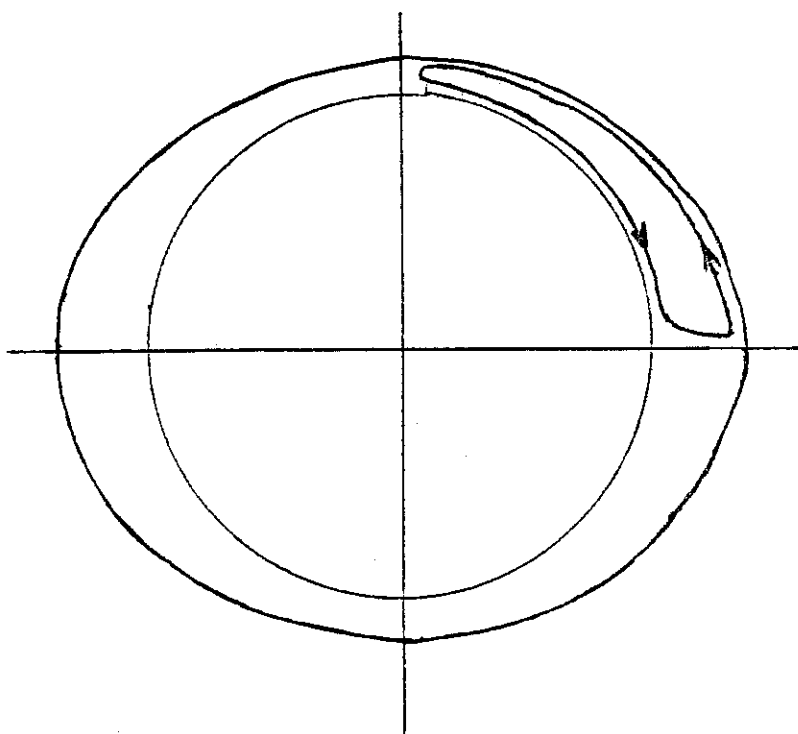


FIGURE 17 : Ecoulement méridien dans le cas de l'injection entre une sphère et un ellipsoïde.

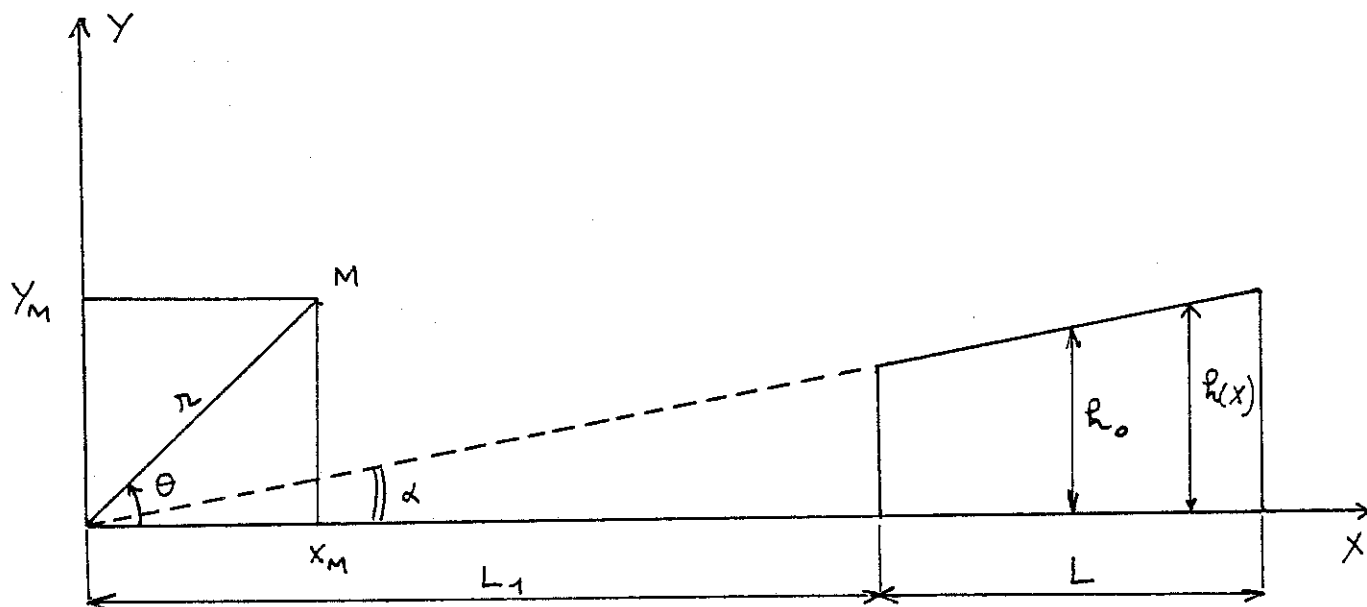


FIGURE 18 : Schéma de définition du système étudié.

B. PRESENTATION DU SYSTEME

La coupe de la cellule étudiée est représentée sur la figure (18) ; l'angle α est petit (inférieur à 0,1 rd) ainsi que les rapports h_0/L (cellule allongée) et $L\alpha/h_0$ (la variation de l'épaisseur relative reste faible). Le liquide compris entre les électrodes, considéré comme un isolant parfait, est soumis à une injection unipolaire très faible d'ions négatifs par l'électrode $y = 0$. Les conditions aux limites pour les différentes grandeurs se formulent de la façon suivante :

- sur l'injecteur :
 $q = q_0 \quad (< 0)$
 $\Phi = 0$
 $\vec{V} = 0$

- sur le collecteur :
 $\Phi = \Phi_0 \quad (> 0)$
 $\vec{V} = 0$

Après avoir donné ces précisions, nous allons poser les équations et résoudre de façon approchée le problème du calcul de la vitesse maximale dans le liquide en supposant la présence d'un champ de vitesses stationnaire de faible amplitude.

C. CALCUL DE L'AMPLITUDE DE LA VITESSE

1 - Les équations

Au sein du liquide, les équations régissant le problème défini au I sont :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{q}{\epsilon} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} q(K\vec{E} + \vec{V}) = 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (3)$$

$$0 = - \operatorname{grad} P + \eta \nabla^2 \vec{V} + q\vec{E} \quad (4)$$

par rapport aux équations générales, on a supprimé les termes en $\frac{\partial}{\partial t}$ et négligé les termes du second ordre en \vec{V} dans (4) car $|\vec{V}|$ est faible.

2 - Cas de l'injecteur autonome ($q_0 = \text{constante}$)

a. Méthode de résolution approchée par itération

En l'absence d'injection, i.e. $q_0 = 0$, la solution du problème est la solution harmonique :

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_0 \frac{\theta}{\alpha} \quad (5)$$

$$E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\Phi_0}{\alpha} \quad (6)$$

La vitesse étant nulle partout. Lorsque l'injection se produit, celle-ci étant supposée faible, cette solution est perturbée ; la nouvelle solution peut alors être cherchée sous la forme d'une série entière suivant les puissances croissantes du petit paramètre q_0 :

$$q = 0 + q_0 + a_2 q_0^2 + a_3 q_0^3 + \dots \quad (7)$$

$$E = E_{\text{harm}} + b_1 q_0 + b_2 q_0^2 + \dots \quad (8)$$

$$\vec{V} = 0 + q_0 \vec{V}_1 + q_0^2 \vec{V}_2 + \dots \quad (9)$$

A partir de l'équation (4), on peut déduire (en prenant le rotationnel des deux membres) l'équation :

$$\eta \text{Rot} (\nabla^2 \vec{V}) = - \text{Rot} (q \vec{E}) = - \text{grad } q \Delta \vec{E} \quad (10)$$

$$\text{car } \text{Rot } \vec{E} = 0$$

Cette relation montre clairement que le premier terme non nul dans le développement de \vec{V} est du deuxième ordre en q_0 . Ce terme est obtenu en ne considérant que le produit du terme en q_0 dans le gradient de la densité de charge

(c'est-à-dire en q_0^2 dans l'expression (7) de la densité de charge) par le terme principal du champ électrique dans (8), c'est-à-dire le champ harmonique.

Notre but étant de calculer un ordre de grandeur du maximum de $|\vec{V}|$, nous concentrerons notre intérêt sur le terme au 2e ordre dans le développement de la vitesse ; pour le calculer, il suffit de calculer a_2 dans (7) ; ceci se fait grâce à l'équation (2) que l'on peut écrire sous la forme :

$$(K\vec{E} + \vec{V}) \text{grad } q + Kq \text{div } \vec{E} = 0$$

en remplaçant $\text{div } \vec{E}$ par son expression (1), \vec{E} par le terme principal $E_\theta = -\Phi_0/r\alpha$, et en négligeant la vitesse \vec{V} qui est une correction au 2e ordre, et d'après l'expression du gradient en coordonnées polaires, on obtient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \theta} E_\theta + \frac{q^2}{\epsilon} = 0$$

$$\text{soit } \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{1}{q^2} = \frac{r^2 \alpha}{\epsilon \Phi_0}$$

d'où en intégrant entre 0 et θ

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0} = - \frac{r^2 \alpha}{\epsilon \Phi_0} \theta$$

$$\text{d'où } q \approx q_0 \left[1 + \frac{q_0 r^2}{\epsilon \Phi_0} \alpha \theta \right]$$

qui donne le terme correctif sur q à l'ordre voulu.

Le second membre de (10) s'écrit alors :

$$\text{Rot } q\vec{E} = \text{grad } q \wedge \vec{E} \approx \frac{\partial q}{\partial r} E_{\text{harm}} \vec{k} = \left(\frac{2q_0^2 r}{\epsilon \Phi_0} \alpha \theta \right) \left(-\frac{\Phi_0}{r \alpha} \right) \vec{k}$$

$$\text{soit } \text{Rot } q\vec{E} = -\frac{2q_0^2 \theta}{\epsilon} \vec{k}$$

d'où l'équation qui va nous permettre de calculer la vitesse :

$$\eta \operatorname{Rot} (\vec{\nabla}^2 \vec{V}) = \frac{2q_0^2}{\epsilon} \vec{k} \quad (11)$$

Cette équation exprime l'égalité du couple moteur (rotationnel de la force électrique) et du couple visqueux (rotationnel de la force visqueuse).

Pour estimer le terme de dissipation visqueuse (terme de gauche dans (11)), nous allons, l'angle α restant petit, assimiler la section de la cellule à un rectangle. (voir figure (19)). Ceci va nous permettre de simplifier les équations et de travailler en coordonnées cartésiennes. De plus, comme on s'intéresse à un écoulement bidimensionnel, nous allons introduire la fonction de courant Ψ définie par :

$$u = - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

et après le passage en coordonnées cartésiennes, l'équation (11) peut s'écrire :

$$\eta \vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla}^2 \Psi) = \frac{2q_0^2 \alpha}{\epsilon h} y \quad (12)$$

On recherche la solution Ψ en la décomposant sur une base adéquate de fonctions orthogonales :

$$\Psi = a_0 \Psi_0 + a_1 \Psi_1 + \dots$$

telles que les différents termes de la décomposition vérifient :

$$|a_0 \Psi_0| \gg |a_1 \Psi_1| > |a_2 \Psi_2| \dots$$

de façon à pouvoir obtenir une bonne approximation en ne gardant que le terme principal $a_0 \Psi_0$. Pour ce faire, il

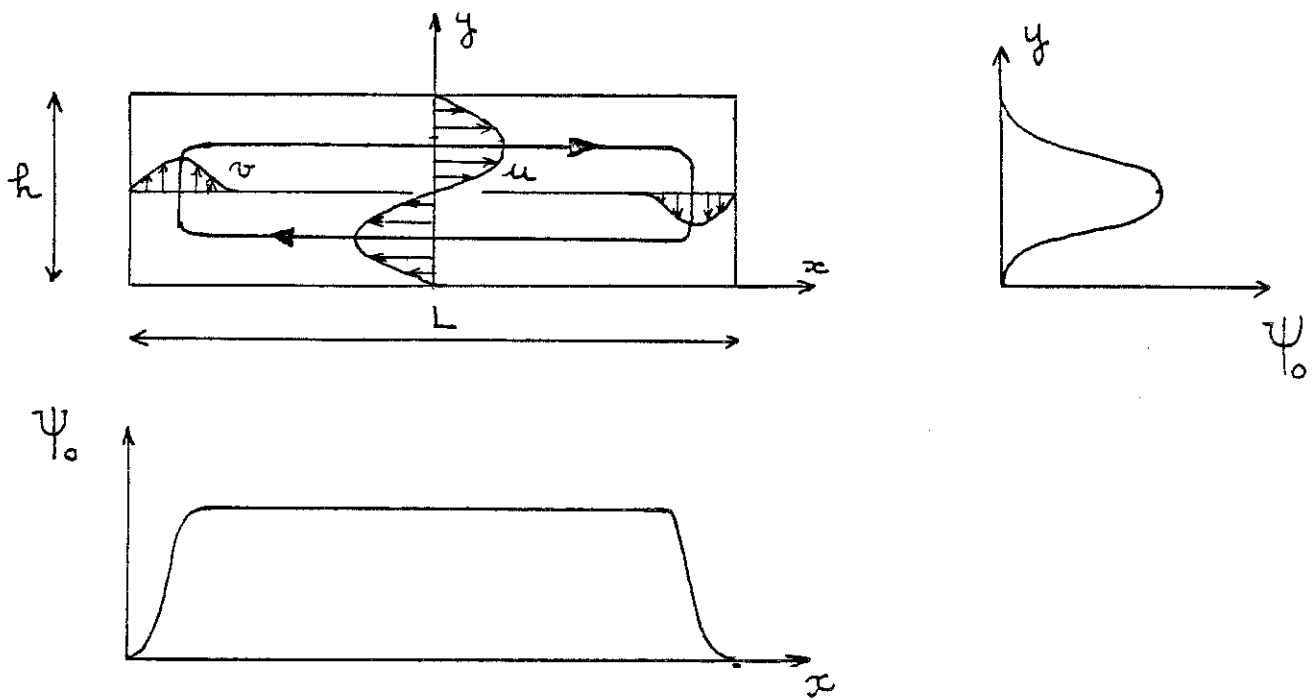


FIGURE 19 : Profil de vitesse et fonction de courant correspondante.

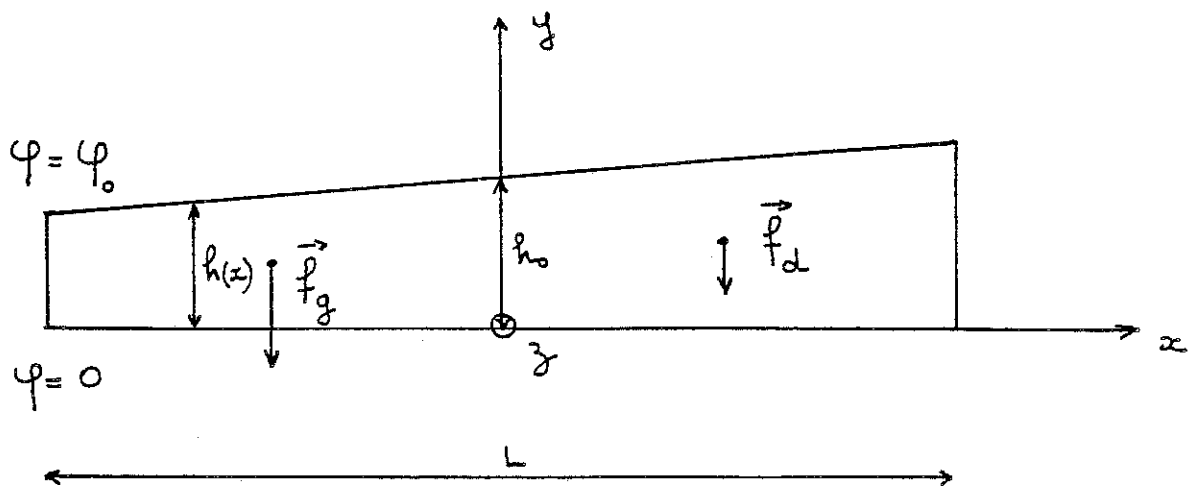


FIGURE 20 : Schéma de définition du modèle hydraulique.

faut choisir pour Ψ_0 une fonction très proche de la solution exacte de l'équation (12). Dans le cas d'une cellule allongée, c'est-à-dire $\frac{h_0}{L} \ll 1$, on peut s'attendre à un profil de vitesse comme celui représenté sur la figure (19). Une bonne approximation consiste à prendre pour Ψ_0 une fonction indépendante de x et dont la variation suivant y suit la loi :

$$\Psi_0 = \left(\frac{y}{h_0}\right)^2 \left(\frac{y}{h_0} - 1\right)^2 \quad (13)$$

En reportant $\Psi \approx a_0 \Psi_0$ dans le terme de gauche dans (12), en multipliant les deux membres de (12) par Ψ_0 et en intégrant entre 0 et h_0 , on obtient :

$$a_0 \int_0^{h_0} \Psi_0 \frac{d^4 \Psi_0}{dy^4} dy = \frac{2q_0 \alpha}{\eta \varepsilon h_0} \int_0^{h_0} \Psi_0 y dy \quad (14)$$

Ce qui donne :

$$a_0 = \frac{1}{24} \frac{q_0^2 h_0^3}{\eta \varepsilon} \alpha \quad (15)$$

Avec cette approximation pour la fonction de courant, on peut trouver un bon ordre de grandeur pour la vitesse horizontale maximale :

$$u_{\max} = - a_0 \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial y}\right) \left(y = \frac{h_0}{4}\right) = \frac{\alpha}{128} \frac{q_0^2 h_0^3}{\varepsilon \eta} \quad (16)$$

Remarque :

Si on suppose $\frac{h_0}{L} \approx 1$, on est amené à prendre pour Ψ_0 une fonction du type

$$\Psi_0(x, y) = \left(\frac{y}{h_0}\right)^2 \left(\frac{y}{h_0} - 1\right)^2 \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\right)^2$$

qui conduit à :

$$u_{\max} = - a_0 \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial y}\right) \left(y = \frac{h_0}{4}\right) = \frac{\alpha}{100} \frac{q_0^2 h_0^3}{\varepsilon \eta}$$

on constate que le coefficient n'est pas très différent et que donc la formule (16) donne la valeur de façon satisfaisante.

b. Autre méthode de résolution

Nous allons évoquer très brièvement une autre possibilité pour parvenir à ce même résultat ; cette deuxième méthode est directement inspirée du modèle hydraulique de Félici [38]. On sépare la cellule en deux parties comme sur la figure (20) et on calcule la force électrique s'exerçant sur chacune de ces parties. Ces deux forces n'étant pas égales il en résulte une pression motrice qui, en régime stationnaire, sera opposée à la pression visqueuse (perte de charge) dont on connaît l'expression en fonction de la vitesse que l'on pourra déterminer par cette équation.

i) Calcul de la pression due à la force électrique

Cette pression est proportionnelle à :

$$f_g - f_d = z \int_{x=-\frac{L}{2}}^0 \int_{y=0}^{h(x)} qE \, dx dy - z \int_{x=0}^{\frac{L}{2}} \int_{y=0}^{h(x)} qE dx dy \quad (17)$$

f_g est la force s'appliquant sur la partie de gauche, f_d sur la partie de droite. Avec les mêmes approximations que dans la première méthode, on suppose les lignes de courant électrique confondues partout avec la direction Oy (on néglige la vitesse du liquide face à la vitesse des ions) et comme \vec{j} est constant le long d'une de ses lignes de champ (en vertu de $\text{div } \vec{j} = 0$), on déduit que la densité de force $q\vec{E}$ est indépendante de y :

pour x fixé, $qE = q_0 E_0$ (constante)

E_0 est le champ électrique sur l'injecteur ; pour trouver son expression au 1er ordre, on commence par résoudre l'équation de GAUSS qui, au 1er ordre, s'écrit :

$$\frac{dE}{dy} \approx \frac{q_0}{\epsilon} \quad \text{d'où } E = E_0 + \frac{q_0}{\epsilon} y$$

E_0 est alors donné par la condition :

$$\Phi_0 = \int_0^{h(x)} E dy$$

soit

$$E_0 = \frac{\Phi_0}{h(x)} \left[1 - \frac{q_0 h^2(x)}{2\epsilon \Phi_0} \right] \quad (18)$$

L'expression (17) prend alors la forme

$$f_g - f_d = z \int_{x=-\frac{L}{2}}^0 \int_{y=0}^{h(x)} q_0 E_0 dx dy - z \int_0^{\frac{L}{2}} \int_{y=0}^{h(x)} q_0 E_0 dx dy \quad (19)$$

en remplaçant E_0 par son expression (18) et en tenant compte que :

$$h(x) = h_0 + \alpha x \quad (20)$$

L'équation (19) s'écrit :

$$f_g - f_d \approx zh_0 L^2 \frac{q_0^2 \alpha}{4\epsilon} \left(1 + \frac{\alpha}{6} \frac{L}{h_0} \right) \quad (21)$$

La variation d'épaisseur relative étant faible, on omet le deuxième terme de la parenthèse, d'où :

$$\Delta p_e = \frac{f_g - f_d}{zL/2} = h_0 L \frac{q_0^2 \alpha}{2\epsilon} \quad (22)$$

ii) Evaluation de la vitesse

La pression résistante est donnée par la formule de POISEUILLE :

$$\Delta p_\eta = 16\eta u_{\max} \frac{L}{(h_0/2)^2} \quad (23)$$

en égalant Δp_e et Δp_n à l'état stationnaire, on tire :

$$u_{\max} = \frac{1}{128} \frac{\alpha}{\epsilon \eta} \frac{q_o^2 h_o^3}{\epsilon \eta} \quad (24)$$

Cette vitesse varie comme q_o^2 et est indépendante de la tension appliquée.

On peut constater que les deux méthodes de calcul aboutissent dans ce cas à la même formule. On peut donc penser que la méthode hydraulique (deuxième méthode présentée), manifestement plus courte, suffira néanmoins à obtenir dans les calculs ultérieurs une évaluation des vitesses à quelques pour cents près.

3 - Cas où l'injection dépend du champ sur l'injecteur

En adoptant la méthode exposée au 2.b, on suppose maintenant que q_o dépend de E_o ; q_{oo} et E_{oo} étant les valeurs de q_o et E_o en $x = 0$ et la variation de E_o restant faible sur l'injecteur, $(E_o - E_{oo})/E_{oo}$ reste faible et on admet que l'on peut se contenter d'un développement au premier ordre de q_o suivant $(E_o - E_{oo})/E_{oo}$.

$$q_o \approx q_{oo} [1 + \mu (E_o - E_{oo})/E_{oo}] \quad \text{avec } \mu = \left(\frac{dq_o}{dE_o} \right)_{E_o = E_{oo}} \quad (25)$$

L'expression (18) étant toujours valable, on peut calculer le rapport $(E_o - E_{oo})/E_{oo}$ en négligeant les termes en q_{oo} :

$$\frac{E_o - E_{oo}}{E_{oo}} \approx \frac{h_o}{\Phi_o} \left[\frac{\Phi_o}{h_o + \alpha x} - \frac{\Phi_o}{h_o} \right] \approx - \frac{\alpha x}{h_o}$$

On peut aussi éliminer le champ dans l'expression (25) et obtenir la dépendance de q_o suivant x :

$$q_o \approx q_{oo} \left[1 - \mu \frac{\alpha x}{h_o} \right] \quad (26)$$

En continuant à négliger les termes en q_0 dans l'expression (18) de E_0 , la densité de force \bar{x} pour expression :

$$q_0 E_0 \approx q_{00} \frac{\Phi_0}{h(x)} \left[1 - \mu \frac{\alpha x}{h_0} \right] \quad (27)$$

et l'expression (19) de $(f_g - f_d)$ devient :

$$(f_g - f_d) = z q_{00} \Phi_0 \left[\int_{x=-L/2}^0 \left(1 - \frac{\mu \alpha x}{h_0} \right) dx - \int_{x=0}^{L/2} \left(1 - \frac{\mu \alpha x}{h_0} \right) dx \right] \quad (28)$$

d'où :

$$(f_g - f_d) = \frac{zL^2}{4} \mu q_{00} \frac{\Phi_0}{h_0} \quad (29)$$

et la pression électrique s'écrit :

$$\Delta p_e = \frac{f_g - f_d}{zL/2} = \frac{\alpha L}{2} \mu q_{00} \frac{\Phi_0}{h_0} \quad (30)$$

en égalant cette pression à la pression résistante [éq. (23)] , on obtient :

$$u_{\max} = \frac{\alpha \mu q_{00}}{128} \frac{\Phi_0 h_0}{\eta} \quad (31)$$

la vitesse varie comme q_{00} et comme Φ_0 . Comparons la vitesse obtenue en supposant q_0 constante [éq. (24)] et celle obtenue en prenant en compte la variation de q_0 le long de l'injecteur [éq. (31)] ; on obtient :

$$\frac{u_{\max} (q_0 \text{ constante})}{u_{\max} (q_0 \text{ fonction de } E_0)} \approx \frac{q_0 h_0^2}{\mu \epsilon \Phi_0} = \frac{C}{\mu}$$

Sous réserve que la conduction en volume reste faible, la vitesse mesurée correspondra donc, soit à l'équation (24) si le rapport C/μ est fort, soit à l'équation (31) si le rapport C/μ est faible. Le premier cas correspond à une injection indépendante du champ sur l'injecteur, ce qui est bien vérifié à la limite des champs très faibles ; le second cas, prenant en compte la dépendance de l'injection en fonction du champ, devrait sans doute mieux rendre compte des expériences pour des champs plus importants (sous réserve que la conduction soit négligeable).

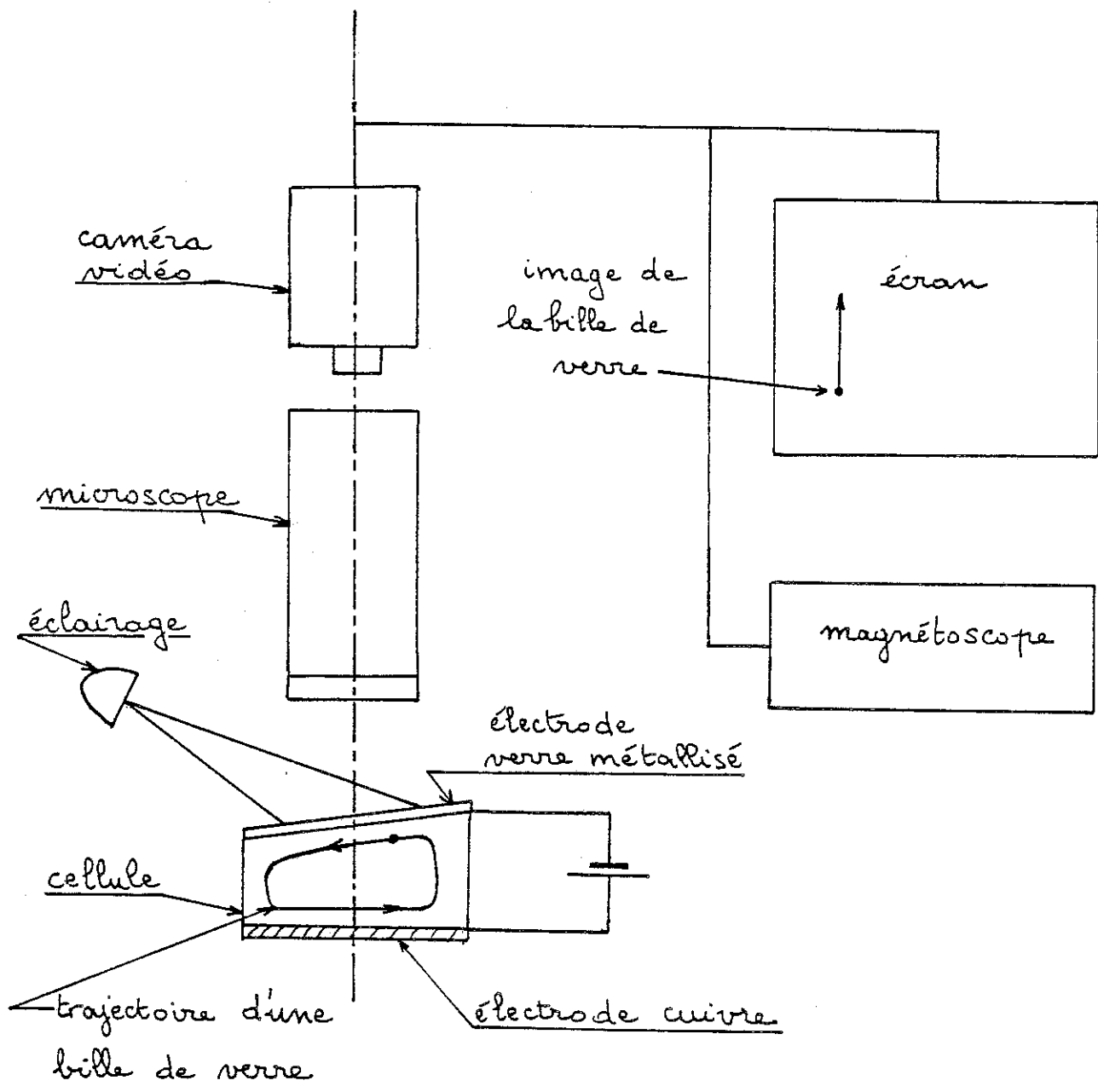


FIGURE 21 : Schéma descriptif du dispositif expérimental.

D - ETUDE EXPERIMENTALE

Le dispositif expérimental de mesure de vitesse est représenté sur la Figure (21) ; l'une des électrodes de la cellule est en cuivre, l'autre électrode, constituée d'un verre métallisé (BALTRACON : verre recouvert d'une couche de $\text{In}_2\text{O}_3 - \text{SnO}_2$) est transparente de façon à permettre l'observation de l'écoulement. Pour cela, on ensemence le liquide (PXE + TiAP)^{*} avec des petites billes de verre que l'on éclaire en prenant soin de ne pas échauffer le liquide (le plus simple est d'utiliser une fibre optique). Le mouvement des billes peut s'observer à l'aide d'un microscope, soit directement, soit plutôt en utilisant une caméra vidéo et en portant l'image sur un écran de télévision afin de mesurer la vitesse des billes.

1 - Observation qualitative

Pour un plan donné de mise au point du microscope ; on a bien observé comme prévu un mouvement d'ensemble des billes en faisant varier la hauteur du plan de mise au point d'une électrode à l'autre ; on a aussi pu observer une variation de la vitesse $u(y)$ qui est qualitativement semblable à celle représentée sur la Figure (19) : en particulier, on observe bien le changement de sens de parcours des billes, ce qui montre qu'on a bien affaire à la forme d'écoulement prévue.

2 - Mesure de vitesses et analyse des résultats

Le grandissement du système optique est mesuré en plaçant un objet de dimension connue dans le plan de mise au point du microscope et en mesurant la dimension de son image sur l'écran ; ensuite, une règle et un chronomètre suffisent à mesurer la vitesse d'une bille avec une précision acceptable ($\sim 10\%$) pour un simple ordre de grandeur.

*PXE : Phényl-Xylyl-Ethane

*TiAP : Picrate de Triisoamylammonium

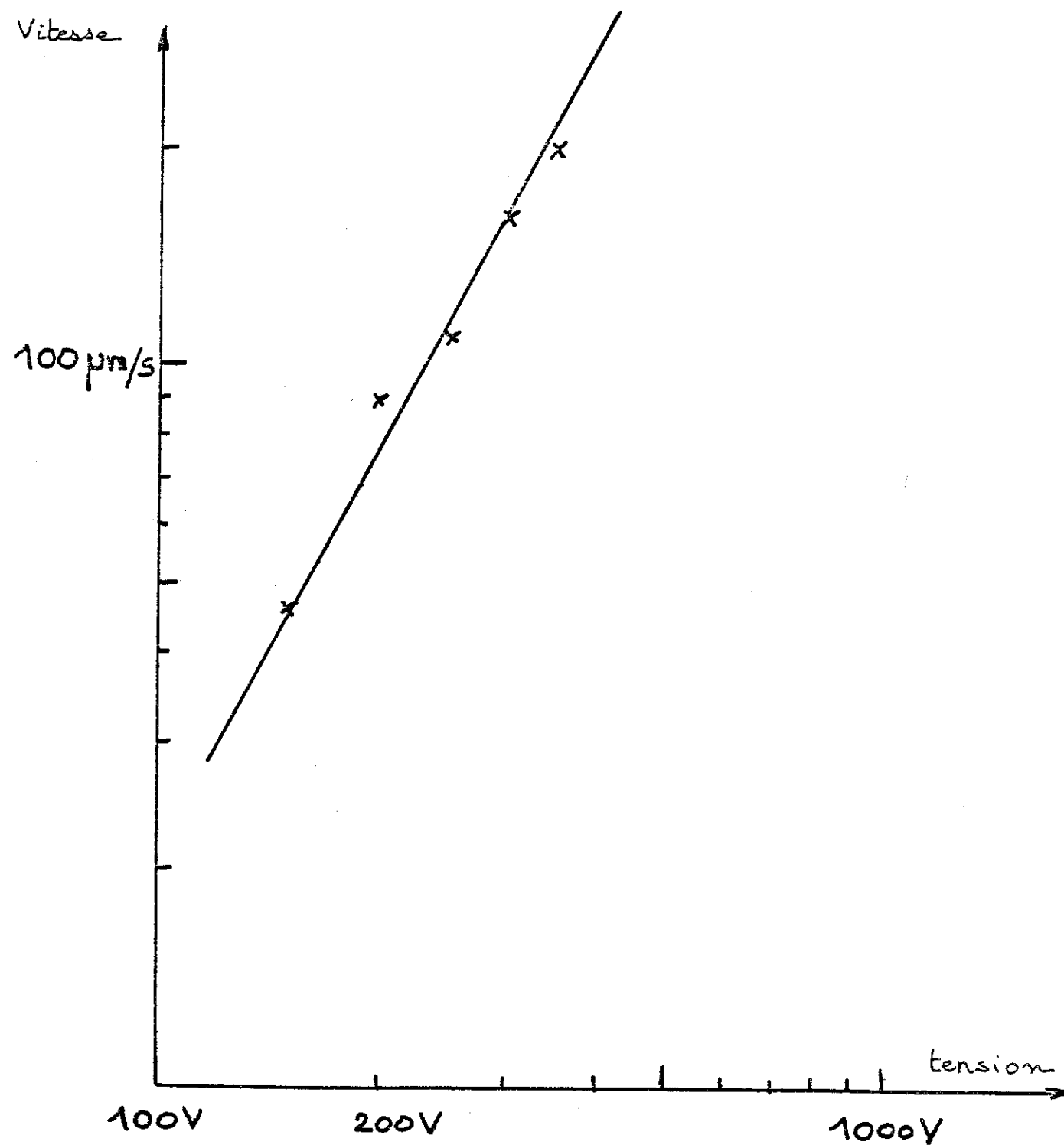


FIGURE 22 : Dépendance de la vitesse mesurée en fonction de la tension appliquée.

Les résultats obtenus en faisant varier la tension appliquée Φ_0 ont été portés en échelle doublement logarithmique sur la Figure (22), et cela pour une plage de valeurs de Φ_0 pour lesquelles la vitesse est assez grande pour être mesurée ($\Phi_0 \gtrsim 150 \text{ V}$) ; Φ_0 reste suffisamment faible pour que l'instabilité convective n'ait pas lieu ($\Phi_0 \lesssim 350 \text{ V}$). Aux incertitudes de mesure près, les points des mesures semblent alignés et sur une droite de pente deux. Cette dépendance en Φ_0^2 non prévue par les deux situations que nous avons envisagées auparavant (2 - et 3 - de ce même Chapitre), peut se comprendre si l'on tient compte de la conduction.

En effet, une mesure de la résistivité au pont donne $\rho \approx 4 \times 10^{10} \Omega \text{ m}$; on peut en déduire le temps de relaxation τ d'une charge d'espace :

$$\tau = \epsilon_r \epsilon_0 \rho \approx 1 \text{ s} \quad (\epsilon_r \text{ pour le PXE} = 2,65) \quad (32)$$

Le temps de transit t_T des ions est :

$$t_T = \frac{h^2}{K \Phi_0} \quad (33)$$

avec $h_0 = 2,5 \text{ mm}$, $K = 2 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1}$ pour le PXE et, par exemple, pour $\Phi_0 = 100 \text{ V}$, on obtient : un temps de transit moyen :

$$\overline{t_T} = 32 \text{ s}$$

Ceci montre que, dans le domaine des tensions pour lesquelles nous avons mesuré les vitesses, le temps de relaxation est petit face au temps de transit des ions et qu'on ne peut négliger la conduction.

Afin de caractériser la conduction, nous allons introduire comme dans [13], le paramètre adimensionnel C_0 défini par :

$$C_0 = \frac{p_0 h^2}{\epsilon \Phi_0} = \frac{n_0 h^2}{\epsilon \Phi_0} \quad (34)$$

p_0 et n_0 sont les valeurs à l'équilibre thermodynamique ($E = 0$) des densités volumiques de charge respectivement des ions positifs p et négatifs n provenant de la dissociation d'un électrolyte faible dans le liquide. Pour $C_0 \gg 1$, le coeur du liquide reste électriquement neutre :

$$p_0 = n_0$$

et il apparaît deux couches chargées proches des parois dites couches d'hétérocharges dont l'épaisseur caractéristique λ est donnée par la relation :

$$\lambda = \text{vitesse des ions} \times \tau = K \bar{E} \tau \quad (35)$$

Le nombre C_0 ainsi défini a plusieurs significations physiques ; en particulier, C_0 est relié au rapport du temps de transit t_T des ions sur le temps de relaxation d'une charge d'espace τ par la relation simple :

$$C_0 = \frac{1}{2} \frac{t_T}{\tau} \quad (36)$$

On montre également que C_0 mesure le rapport entre la distance inter-électrodes et l'épaisseur des couches d'hétérocharges :

$$C_0 = \frac{h}{2\lambda} \quad (37)$$

Compte-tenu des expressions (32) et (33) de τ et t_T , l'expression (36) permet d'écrire C_0 en fonction de la tension appliquée Φ_0 :

$$C_0 = \frac{1600}{\Phi_0} \quad (\Phi_0 \text{ en V})$$

ce qui montre que pour les tensions utilisées C_0 est grand ; on en déduit que λ est nettement plus petit que h et que le liquide est globalement neutre sauf dans les deux couches d'épaisseur λ près des électrodes. On a représenté cette situation sur les Figures (23-a) et (23-b) en portant les distributions spatiales de p_0 et n_0 en l'absence d'injection

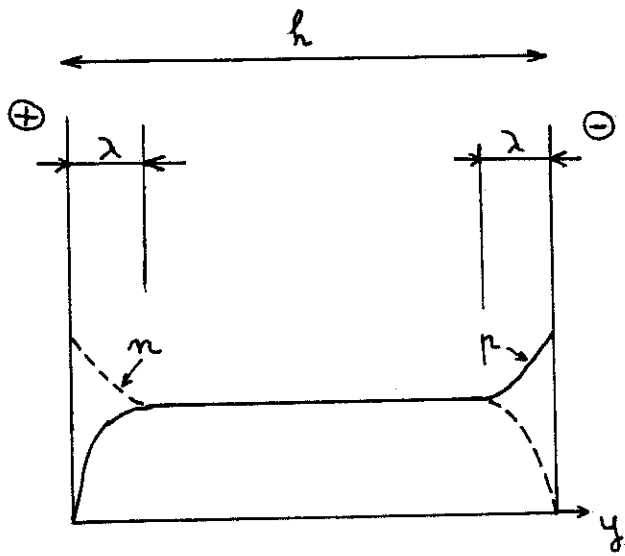


FIGURE 23-a

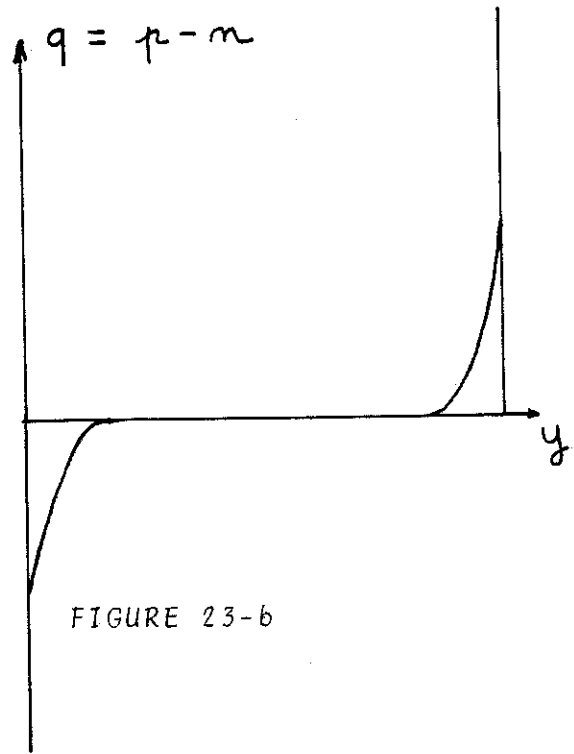


FIGURE 23-b

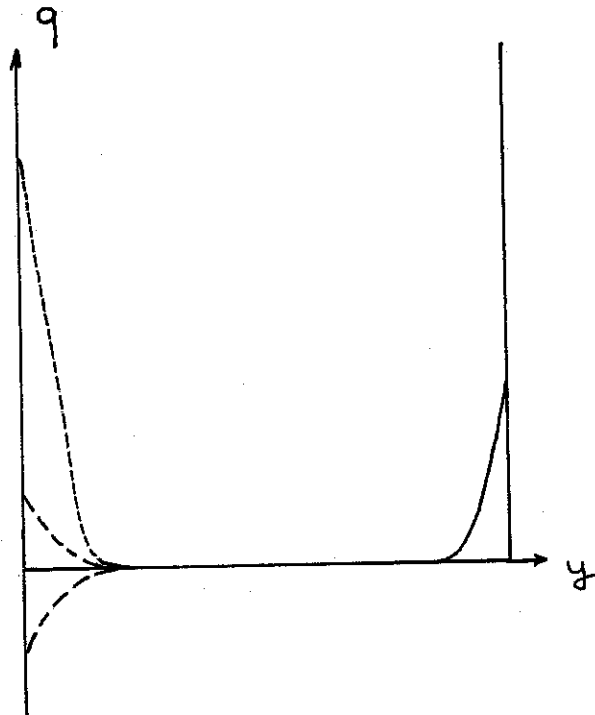


FIGURE 23-c

FIGURE 23 : Distribution de la densité de charge.

Figure 23-a et 23-b : en l'absence d'injection.

Figure 23-c : pour différentes forces d'injection.

[Figure (23 -a)] et la densité totale de charge qui en résulte [Figure (23 -b)].

Dans ce cas, les distributions de charges positives et négatives sont symétriques et la résultante des forces électriques est nulle : la conduction ne peut donc pas expliquer à elle seule la mise en mouvement du liquide selon le schéma envisagé. Si on considère maintenant l'effet d'une injection unipolaire positive sur la répartition de charge précédente, on aboutit à l'une des situations représentées sur la [Figure (23 -c)] où on a porté la densité totale de charge en fonction de y . Dans ce cas, la résultante des forces électriques n'est pas nulle et comme de plus la valeur de λ varie suivant x dans le cas d'électrodes non parallèles (puisque h donc E varient), le mouvement a lieu. Nous allons évaluer la contribution des deux couches chargées à l'intégrale de la densité de force. On commence par la couche près de l'injecteur. En appelant q_0 la densité volumique de charge sur l'électrode $y = 0$ et en admettant que la distribution volumique de charge est contrôlée par le phénomène de relaxation de la charge d'espace, on peut écrire en première approximation :

$$q(x, y) = q_0 e^{-\frac{y}{\lambda(x)}} \text{ avec } \lambda \text{ tel que : } \int_0^{\lambda(x)} \frac{dy}{K E(x, y)} = \int_0^{\tau} dt = \tau$$

En considérant en grossière approximation que le champ électrique \vec{E} est constant le long d'une ligne de courant, soit $E(x, y) \equiv E(x)$, (35) s'écrit :

$$\lambda(x) = K \bar{E}(x) \tau$$

$$\text{avec } \bar{E}(x) = \frac{\Phi_0}{h(x)} = \frac{\Phi_0}{h_0 + \alpha x} = \frac{\bar{E}_0}{1 + \frac{\alpha x}{h_0}}$$

l'expression de la densité de charge devient :

$$q(x, y) = q_0 \exp \left[-\frac{y}{K \bar{E} \tau} \left(1 + \frac{\alpha x}{h_0} \right) \right]$$

l'intégrale de la densité de force le long de y est pour cette couche :

$$f(x) = \int_0^{h(x)} q(x, y) \bar{E}(x) dy \approx \bar{E}(x) \int_0^{h(x)} q_0 e^{-\frac{y}{\lambda(x)}} dy$$

$$= K q_0 \bar{E}^2(x) \tau \left[1 - e^{-\frac{h(x)}{\lambda(x)}} \right]$$

comme $\frac{h(x)}{\lambda(x)} = \frac{t_T}{\tau} \approx \frac{1600}{\phi_0}$, $e^{-\frac{h(x)}{\lambda(x)}} \ll 1$ d'où :

$$f(x) = K q_0 \bar{E}^2(x) \tau \approx K q_0 \bar{E}_0^2 \tau \left(1 - \frac{2 \alpha x}{h_0} \right)$$

La contribution de cette couche au couple moteur est proportionnelle à :

$$f_g - f_d = z K q_0 \bar{E}_0^2 \tau \left[\int_{-\frac{L}{2}}^0 \left(1 - \frac{2 \alpha x}{h_0} \right) dx - \int_0^{\frac{L}{2}} \left(1 - \frac{2 \alpha x}{h_0} \right) dx \right]$$

avec les mêmes définitions de f_g et f_d que précédemment ; d'où :

$$f_g - f_d = z (K \bar{E}_0 \tau) L q_0 \bar{E}_0 \frac{\alpha L}{h_0} \quad (38)$$

q_0 est la densité moyenne totale de charge sur l'injecteur et se décompose comme suit :

$$q_0 = [q_i - n]_{y=0} \text{ (injecteur)}$$

où q_i est la densité moyenne de charge résultant de l'injection.

Pour la couche proche du collecteur, on trouvera une expression du couple dû à cette couche analogue à (38) où q_0 serait remplacé par $(p)_{y=h}$ (collecteur) ; comme en première approximation $(n)_{\text{injecteur}} \approx (p)_{\text{collecteur}}$, l'expression du couple dû aux deux couches ne fait intervenir que $(q_i)_{\text{injecteur}}$ soit :

$$(f_g - f_d)_{\text{total}} \approx z (K \bar{E}_0 \tau) L q_i \bar{E} \frac{\alpha L}{h_0} \quad (39)$$

$$u_{\max} \approx 100 \mu\text{m/s}$$

pour une tension appliquée de 200 V alors que la valeur mesurée est de 80 $\mu\text{m/s}$.

Etant donnée la concordance observée aussi bien sur la loi de variation que sur les valeurs numériques, l'interprétation donnée des observations apparaît tout-à-fait plausible.

Indépendamment du fait que le fluide ne soit pas aussi isolant que nous l'avions supposé dans les études théoriques précédentes, il est donc possible d'observer un écoulement du type prévu avec des vitesses aisément mesurables, ce qui est déjà un premier résultat. Dans le cas d'un liquide où la conduction est réellement négligeable, nous n'avons pas encore pu mettre en évidence le mouvement ; cela est peut-être dû au fait que, les vitesses devant être nettement plus faibles dans ce cas, les billes se déposent (sédimentation) et ne suivent pas le mouvement du liquide.

Cette étude expérimentale est une première approche avant d'examiner les conditions pratiques d'expériences quelles qu'elles soient (détermination des rayons des sphères, de la viscosité du liquide, de la vitesse de rotation, etc ...). En particulier, il apparaît nécessaire d'effectuer une étude expérimentale systématique des conditions de stabilité lorsqu'on utilise une électrode métallique pour injecteur et que la conduction n'est pas totalement négligeable ; l'exemple précédent mettant en évidence une instabilité pour $\Phi_0 \approx 350 \text{ V}$, alors qu'on s'attendrait plutôt à quelques kV, illustre bien ce besoin.

CONCLUSION

Le présent travail constitue un premier pas dans l'étude théorique et expérimentale de la classe de problèmes qui se posent lorsqu'on examine l'action de la force de COULOMB sur un liquide isolant, en géométrie sphérique ou quasi-sphérique, avec ou sans rotation.

Dans le cas d'une injection dans un liquide compris entre deux sphères concentriques, l'étude de la stabilité linéaire présentée dans le Chapitre I montre qu'on a une grande analogie avec le problème idéal d'une couche sphérique chauffée par l'intérieur et soumise à une force de gravitation (problème de RAYLEIGH - BENARD sphérique). Le problème électrique offre cependant une plus grande richesse de situations découlant de la possibilité de faire varier un paramètre supplémentaire, le paramètre d'injection C^* et d'injecter, soit par la sphère intérieure, soit par la sphère extérieure ; dans ces deux cas et pour différentes valeurs du paramètre C^* couvrant le domaine des injections faibles à fortes, les conditions critiques (l_c, T_c) ont été déterminées en fonction du rapport μ des rayons des sphères ($0,05 \leq \mu \leq 1$). L'inversion constatée (lorsque C^* varie) entre les critères relatifs à l'injection par la sphère intérieure et la sphère extérieure a été interprétée qualitativement. Dans le cas asymptotique de l'injection faible, on a déterminé précisément les valeurs de μ où se produit une discontinuité de la pente de la courbe $P_c (\mu)$ en raison du saut d'une unité dans la valeur de l_c . En particulier, dans le cas de l'injection par la sphère extérieure, on constate qu'il existe un domaine de μ ($0,06 \lesssim \mu \lesssim 0,18$) où $l_c = 2$, ce qui suggère une expérience pouvant avoir une relation avec la situation étudiée analytiquement par CHOSSAT [12].

L'effet de la rotation sur le critère d'instabilité dans le cas de la couche plane traité théoriquement au Chapitre II ressemble dans ses grandes lignes à celui étudié dans le cas thermique par CHANDRASEKHAR [10]. La rotation joue en effet le même rôle stabilisant dans les deux problèmes bien que des différences existent dans le détail des lois ; en

particulier, dans le cas asymptotique des fortes rotations (TAYLOR $\rightarrow \infty$), les critères pour une instabilité convective s'écrivent sous la forme :

$$T_c = (\text{facteur}) \times (\text{TAYLOR})^{1/3},$$

pour l'injection unipolaire et :

$$(\text{RAYLEIGH}) = (\text{facteur}) \times (\text{TAYLOR})^{2/3},$$

pour le problème de RAYLEIGH - BENARD ; alors que la dépendance des nombres d'onde en fonction du nombre de TAYLOR est la même dans les deux cas (au facteur près) :

$$k_c = (\text{facteur}) \times (\text{TAYLOR})^{1/6}.$$

Ces résultats asymptotiques du calcul numérique peuvent être déduit directement à l'aide d'arguments simples que nous avons présentés. L'examen de l'apparition de l'instabilité par oscillations d'amplitude croissante renforce encore l'analogie avec le problème thermique et suggère de poursuivre l'étude numérique des équations et de développer une étude expérimentale destinée à vérifier les prédictions de la théorie.

Le Chapitre III (écoulement entre deux plans légèrement divergents) présente une étude expérimentale simple mais intéressante pour la mise en oeuvre effective d'un écoulement méridien en géométrie sphère-ellipsoïde pour lequel on devrait observer, en l'absence de rotation, des cellules du type cellules de HADLEY. Les résultats expérimentaux présentés dans cette partie sont bien évalués à partir des propriétés d'injection et de conduction volumique du liquide utilisé et devraient permettre de définir de manière réaliste les conditions expérimentales des études ultérieures.

Lorsque la rotation est présente, on peut observer (dans l'atmosphère terrestre par exemple) que les cellules de HADLEY sont brisées, ce qui a été attribué au fait qu'elles sont instables vis à vis d'une classe de perturbations dites barocliniques [16]. Le système sphère-ellipsoïde que nous

avons déjà évoqué, où la température est uniforme, ne semble pas propre à donner lieu à des instabilités barocliniques. En effet, étant donné que les vitesses du liquide seront vraisemblablement négligeables vis à vis de la vitesse propre des ions $K \vec{E}$, la distribution des gradients de force est déterminée seulement par la géométrie, contrairement au cas purement thermique où la chaleur peut être convectée perpendiculairement à la force de gravitation. Afin de permettre ce type d'instabilités, dont le rôle semble déterminant lorsque la rotation intervient, et à la suite de travaux récents mettant en jeu la température et l'injection [35, 9], il paraît envisageable d'introduire des gradients de température conduisant à des perturbations notables de la force électrique sans toutefois entraîner des variations de densité telles que la gravitation terrestre puisse jouer un rôle significatif.

ANNEXE I

METHODE NUMERIQUE

Il s'agit de trouver par intégration numérique (méthode de RUNGE-KUTTA) et pour ℓ fixé, les valeurs propres de P pour le système :

$$\frac{DG}{r^4} = V$$
$$D_{\ell}^2 V = \frac{\delta P \ell (\ell + 1)}{\mu (1 - \mu)^3} \frac{G}{r^4}$$

avec les conditions aux limites

$$V = DV = 0 \quad \text{en } r = \mu, 1$$
$$G = 0 \quad \text{sur l'injecteur}$$

Ce système d'ordre 5 peut se mettre sous la forme de 5 équations du 1er ordre ; on peut le mettre dans une première étape sous une forme plus pratique en posant $Z = D_{\ell} V$; il vient :

$$\frac{DG}{r^4} = V$$
$$Z = D_{\ell} V$$
$$D_{\ell} Z = \frac{\delta P \ell (\ell + 1)}{\mu (1 - \mu)^3} \frac{G}{r^4}$$

ensuite en posant :

$$y_1 = G$$
$$y_2 = V$$
$$y_3 = DV$$
$$y_4 = Z$$
$$y_5 = DZ$$

On obtient un système de 5 équations du premier ordre.

$$\begin{aligned} Dy_1 &= r^4 y_2 \\ Dy_2 &= y_3 \\ Dy_3 &= \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} y_2 - \frac{2}{r} y_3 + y_4 \\ Dy_4 &= y_5 \\ Dy_5 &= \frac{\delta P \ell(\ell+1)}{\mu(1-\mu)^3} \frac{y_1}{r^4} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} y_4 - \frac{2}{r} y_5 \end{aligned}$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} \text{sur l'injecteur} \quad y_1 = y_2 = y_3 = 0 \\ \text{sur le collecteur} \quad y_2 = y_3 = 0 \end{aligned}$$

Ce problème peut encore se formuler sous forme vectorielle :

$$\begin{aligned} \vec{Y} &= (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \\ D\vec{Y} &= (Dy_1, Dy_2, Dy_3, Dy_4, Dy_5) \end{aligned}$$

et on peut construire aisément à partir des équations ci-dessus l'opérateur vectoriel linéaire M tel que :

$$D\vec{Y} = M\vec{Y}$$

Pour résoudre ce problème, on choisit une subdivision de l'intervalle d'intégration adéquate ainsi que deux vecteurs linéairement indépendants et satisfaisant les conditions aux limites sur l'injecteur - par exemple $Y^\alpha(\text{inj}) = (0, 0, 0, 1, 0)$ et $Y^\beta(\text{inj}) = (0, 0, 0, 0, 1)$. Par l'application, pour chaque pas de la subdivision de l'opérateur M, on est ainsi en mesure de construire deux solutions linéaires indépendantes du problème mais qui ne vérifient pas les conditions aux limites sur le collecteur. On cherche

alors la solution au problème (celle qui vérifie toutes les conditions aux limites) sous la forme d'une combinaison linéaire des solutions \vec{Y}^α et \vec{Y}^β .

$$\vec{Y} = a \vec{Y}^\alpha + b \vec{Y}^\beta$$

et on lui impose de satisfaire les conditions aux limites sur le collecteur ce qui revient à annuler les 2e et 3e composantes de \vec{Y} sur le collecteur :

$$ay_2^\alpha (\text{collect.}) + by_2^\beta (\text{collect.}) = 0$$

$$ay_3^\alpha (\text{collect.}) + by_3^\beta (\text{collect.}) = 0$$

Ce système de deux équations à deux inconnues a et b n'admet de solution que si son déterminant :

$$D(P) = y_2^\alpha(\text{collect})y_3^\beta(\text{collect}) - y_3^\alpha(\text{collect})y_2^\beta(\text{collect}) = 0,$$

Ce qui nous donne une équation que doit satisfaire P. On la résoud en encadrant d'abord la racine de plus petit module et en appliquant une des méthodes classiques de résolution d'une équation à une inconnue.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ATTEN et R. MOREAU
"Stabilité électrohydrodynamique des liquides isolants soumis à une injection unipolaire"
J. Mécan., 11, p. 471 (1972)

- [2] P. ATTEN et J.C. LACROIX
"Non-linear hydrodynamic stability of liquids subjected to unipolar injection"
J. Mécan., 18, p. 469 (1979)

- [3] P. ATTEN, J.C. LACROIX et R. TOBAZEON
"E.H.D. instabilities in polar liquids subjected to unipolar injection in cylindrical geometry"
4th International Conference on Conduction and Breakdown in Dielectric Liquids, Dublin, p. 89 (1972)

- [4] F.H. BUSSE
"Pattern of convection in spherical shells"
J. Fluid Mech., 72, p. 65 (1975)

- [5] F.H. BUSSE et P.G. CUONG
"Convection in rapidly rotating spherical fluid shells"
Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 8, p. 17 (1977)

- [6] F.H. BUSSE
"Thermal instabilities in rapidly rotating systems"
J. Fluid Mech., 44, p. 441 (1970)

- [7] J.P. CALTAGIRONE
"Thermoconvective instabilities in a porous medium bounded by two concentric horizontal cylinders"
J. Fluid Mech., 76, Part 2, p. 337 (1976)

- [8] C.R. CARRIGAN et F.H. BUSSE
"A laboratory study of convection in a rapidly rotating spherical layer"
European Mechanics Colloquium N° 106, Instability and Convection in Fluid Layers, Grenoble, p. 39
(11-14 Septembre 1978)

- [9] A. CASTELLANOS, P. ATTEN et M.G. VELARDE
"Oscillatory and steady convection in dielectric liquid layers subjected to unipolar injection and temperature gradient"
The Phys. of Fluids (à paraître)
- [10] S. CHANDRASEKHAR
"Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability"
1968 (Oxford : Clarendon)
- [11] P. CHOSSAT
"Bifurcation and stability of convective flows in a rotating or not rotating spherically shell"
SIAM, J. Appl. Math., 37, N° 3, p. 624 (1979)
- [12] P. CHOSSAT
"Le problème de Bénard dans une couche sphérique"
Thèse d'Etat, Université de Nice (1982)
- [13] A. DENAT
"Etude de la conduction électrique dans les solvants non polaires"
Thèse d'Etat, Grenoble (Mars 1982)
- [14] A. DENAT, B. GOSSE et J.P. GOSSE
"Ion injection in hydrocarbons"
Journal of Electrostatics, 7, p. 205 (1979)
- [15] S.H. DAVIS
"Convection in a box : on the dependence of preferred wave number upon the RAYLEIGH number at finite amplitude"
J. Fluid Mech., 32, Part 3, p. 619 (1968)
- [16] E.T. EADY
"Long waves and cyclone waves"
Tellus, 1, p. 35 (1949)
- [17] N. FELICI et J.P. GOSSE
"Injection d'ions par des électrodes métalliques dans les hydrocarbures liquides de résistivité élevée"
Revue de Physique Appliquée, 14, p. 629 (1979)

- [18] W.W. FOWLIS et G.H. FICHTL
"Geophysical fluid flow model experiments in spherical geometry"
Proceedings of the Third NASA, Weather and climate program science review, NASA Conference Publication, 2029, Paper N° 32, p. 177 (1977)
- [19] M. GOLUBITSKY et D. SCHAEFFER
"Bifurcations with $O(3)$ symmetry including. Applications to the Bénard problem"
Commun. Pure Appl. Math., 35, p. 81 (1982)
- [20] R.M. GOODY et A.R. ROBINSON
"A discussion of the deep circulation of the atmosphere of Venus"
Astrophys. J., 146, p. 339 (1966)
- [21] H.P. GREENSPAN
"The theory of rotating fluids"
Cambridge University Press (1980)
- [22] G. HADLEY
"Concerning the cause of the general trade winds"
Phil. Trans. Roy. Soc. London, 29, p. 58 (1735)
- [23] J.E. HART
"Stability of thin non-rotating hadley circulations"
J. Atm. Sciences, 28, p. 687 (1972)
- [24] J.E. HART
"Studies of earth simulation experiments"
NASA CR-2753 (1976)
- [25] R. HIDE et P.J. MASON
"Sloping convection in a rotating fluid"
Adv. in Physics, 24, p. 47 (1975)
- [26] R.C. LACHER, R. McARTHUR et G. BUZYNA
"Catastrophic changes in circulation flow patterns"
American Scientist, 65, N° 5, p. 614 (1977)

- [27] J.C. LACROIX, P. ATTEN et E.J. HOPFINGER
"Electro-convection in a dielectric liquid layer subjected to unipolar injection"
J. Fluid Mech., Vol. 69, Part 3, p. 539 (1975)
- [28] S. OLIVERI et P. ATTEN
"Stabilité électrohydrodynamique d'un liquide isolant compris entre deux sphères concentriques et soumis à une injection unipolaire faible"
C.R.A.S.P., 296, Série II, p. 313 (7 Février 1983)
- [29] S. OLIVERI et P. ATTEN
"Stabilité électrohydrodynamique d'un liquide isolant compris entre deux sphères concentriques et soumis à une injection unipolaire quelconque"
C.R.A.S.P., 297, Série II, p. 313 (3 Octobre 1983)
- [30] S. OLIVERI et P. ATTEN
"E.H.D. stability in a quasi-spherical geometry : an attempt to model general atmospheric circulation"
Congrès IAS - IEEE, Mexico, p. 1130 (Octobre 1983)
- [31] R. PFEFFER, G. BUZYNA et W.W. FOWLIS
"Synoptic features and energetics of wave-amplitude vacillation in a rotating, differentially-heated fluid"
J. Atmospheric Sciences, 31, N° 3, p. 622 (1974)
- [32] A.T. RICHARDSON
"The linear instability of a dielectric liquid contained in a cylindrical annulus and subjected to unipolar charge injection"
Q.J.M.A.M., 33, Pt 3, p. 277 (1980)
- [33] P.H. STONE
"Some properties of hadley regimes on rotating and nonrotating planets"
J. Atmos. Sci., 25, p. 644 (1968)

- [34] A.D. WEIR
"Axisymmetric convection in a rotating sphere.
Part 1. Stress-free surface"
J. Fluid Mech., Vol. 75, Part 1, p. 49 (1976)
- [35] W.J. WORRAKER et A.T. RICHARDSON
"The effect of temperature-induced variations in charge
carrier mobility on a stationary electrohydrodynamic
instability"
J. Fluid Mech., 93, Part 1, p. 29 (1979)
- [36] R.E. YOUNG
"Finite-amplitude thermal convection in a spherical
shell"
J. Fluid Mech., 63, Part 4, p. 695 (1974)
- [37] A.I. ZHAKIN
"Electrohydrodynamic instability of a weakly conductive
liquid located between spherical electrodes in the
presence of weak injection"
J. Appl. Mech. Tech. Phys., 20, p. 558 (1979)
- [38] N. FELICI
"Phénomènes hydro et aérodynamiques dans la conduction
des diélectriques fluides"
Rev. Gén. Elec., 78, p. 717 (1969)

DERNIERE PAGE D'UNE THESE

3È CYCLE, DOCTEUR INGÉNIEUR OU UNIVERSITÉ

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de M. ..Pierre.ATTEN, Maître de Recherche

M.

M. ..Salvatore OLIVERI..... est autorisé
à présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR de 3^e Cycle....

.....

Grenoble, le 08 NOV 1982

Le Président de l'Université Scientifique
et Médicale

M. TANCHE

Professeur N. FELICI
Président du Jury

N. Felici

M. Tanche

RESUME

On considère un fluide isolant isotherme soumis à la force de COULOMB résultant d'une injection d'ions par une électrode dans différentes situations pouvant avoir une relation avec certains problèmes rencontrés en géophysique et en astrophysique.

On étudie d'abord la stabilité électrohydrodynamique (E.H.D.) d'une couche sphérique en l'absence de rotation ; les conditions critiques de stabilité sont déterminées pour une gamme étendue des paramètres du système ; des injections faibles à fortes, par l'une ou l'autre sphère bornant la couche et pour un rapport des rayons variant dans un domaine étendu de ses valeurs permises.

L'influence de la rotation sur la stabilité E.H.D. est ensuite étudiée dans le cas d'une couche plane ; les résultats soulignent la grande analogie de comportement avec le problème de RAYLEIGH - BENARD plan avec rotation.

Ces études théoriques et une première réalisation expérimentale dans le cas d'un liquide compris entre plans faiblement divergents constituent des étapes préliminaires à l'obtention de différents types d'écoulements en géométrie sphérique ou quasi-sphérique, avec ou sans rotation.

MOTS - CLEFS

Stabilité hydrodynamique ; Convection ; Suroscillations ; Electrohydrodynamique ; Fluides en géométrie sphérique ; Fluides tournants ; Injection d'ions ; Modélisation d'écoulements.

ABSTRACT

We consider an insulating isothermal fluid subjected to a COULOMB force which results from an ionic injection by one electrode in different situations. These may have connections with certain problems met with in geophysics and in astrophysics.

Firstly, we study the electrohydrodynamic (E.H.D.) stability of a spherical shell in the absence of rotation. The critical conditions of stability are determined for a wide range of the system parameters : for weak injections to strong ones ; by either inner or outer electrode ; and for a ratio of the radii which varies over a large range of its permitted values.

Next, the influence of rotation on E.H.D. stability is studied in the case of a plane layer. The results emphasise the close analogy of behaviour with the RAYLEIGH - BENARD problem between rotating planes.

These theoretical studies, and the first experimental results in the case of a liquid between two planes lying at a small angle, form the preliminary stages in the obtainment of different types of flows in spherical or quasi-spherical geometry, with or without rotation.

KEY - WORDS

Hydrodynamic stability ; Convection ; Overstability ; Electrohydrodynamics ; Fluids in spherical geometry ; Rotating Fluids ; Ionic injection ; Flow modelisation.

