



HAL
open science

Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines

Sylvie Grau

► **To cite this version:**

Sylvie Grau. Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines. Mathématiques générales [math.GM]. Université Bretagne Loire, 2017. Français. NNT: . tel-01629911

HAL Id: tel-01629911

<https://hal.science/tel-01629911v1>

Submitted on 6 Nov 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Sylvie GRAU

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : 504 – Cognition, Éducation, Interactions (CEI)

Discipline : Sciences de l'éducation (section 70)

Unité de recherche : CREN – Université de Nantes n°EA2661

Soutenue le 9 octobre 2017

Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines

Volume 1

JURY

Président du jury	Christian ORANGE, Professeur des Universités, Université Libre de Bruxelles
Rapporteurs :	Yann LHOSTE, Professeur des Universités, Université des Antilles, pôle Martinique Fabrice VANDEBROUCK, Professeur des Universités, Université Paris Diderot Paris 7
Examineur-riche-s :	Sylvie COPPE, Maîtresse de conférences, Université de Genève Christian ORANGE, Professeur des Universités, Université Libre de Bruxelles
Directrice de Thèse :	Magali HERSANT, Professeure des Universités, ESPE Université de Nantes

Résumé : La notion de fonction affine n'est pas disponible (Robert et Rogalski, 2002) pour bon nombre d'élèves malgré un enseignement par les problèmes. Nous avons essayé de comprendre pourquoi et de trouver des pistes pour y remédier. Pour cela, nous avons analysé le savoir enseigné en lien avec l'épistémologie de cette notion, évalué les connaissances des élèves à la sortie du collège pour identifier les difficultés qu'ils rencontrent, et expérimenté différentes situations d'apprentissage. Nous avons utilisé des outils inspirés du cadre de la problématisation (Fabre et Orange, 1997) pour analyser les productions langagières des élèves, comprendre la manière dont ils posent les problèmes liés à l'affinité, comment ils agissent sur les objets et effectuent des changements de cadres (Douady) ou de registres (Duval). Cette étude nous a amenée à penser que la disponibilité du savoir est issue d'un double processus : un apprentissage par problématisation de l'outil, un processus de secondarisation du discours. Nous avons fait l'hypothèse qu'une approche de l'affinité par un point de vue global et covariationnel devrait permettre aux élèves de mieux comprendre en quoi la fonction affine peut être un outil de modélisation pour résoudre des problèmes liés à la covariation de deux grandeurs et pensé un format de séquence intégrant ces hypothèses par une succession de situations basée sur l'idée d'une problématisation par analyse des productions des élèves (PPAP). L'objectif est de travailler la relation entre l'action et l'objet de savoir. Nous avons expérimenté cette ingénierie afin d'en tirer quelques conditions favorables pouvant servir à l'enseignement des fonctions affines.

Mots clés : apprentissage – collège – covariation – discours – fonction affine – grandeurs – modélisation – problématisation

PROBLEMATIZING IN MATHEMATICS: LINEAR FUNCTIONS CASE

Abstract: For certain pupils, the notion of linear functions is not available in spite of a teaching by problems. We tried to understand why and to find tracks to remedy it. For that purpose, we analyzed the knowledge taught in connection with the epistemology of the notion of affinity, estimated the knowledge of the pupils at the exit of the middle school to identify the obstacles or the difficulties which they meet and experimented various situations of learning. We used tools inspired by the framework of the problematization (Fabre et Orange, 1997) to analyze the linguistic productions of the pupils to understand the way they raise the problems bound to the affinity, how they act on the met objects and how they make changes of frames (Douady) or registers (Duval). This study brought to us to make the hypothesis that the availability of the knowledge arises from a double process: a learning by problematization of the tool, a process of secondarisation of the speech. Besides, an approach of the affinity by a global point of view and covariationnel should allow the pupils to understand better in what the linear functions can be a modelling tool to solve problems bound to the covariation of two quantities measurable. We thought of a format of sequence integrating these various approaches by a succession of situations based on the idea of a problematization by analysis of the productions of the pupils (PPAP) to work the relation between the action and the object of knowledge. We experimented this engineering to reach some favorable conditions which can be of use to the teaching of the linear functions.

Key words: covariation – learning – linear functions – mathematics – middle school – modelling – problematization – quantities –

Université de Nantes UFR Lettres et Langage
Département des sciences de l'éducation
Centre de Recherche en Éducation de Nantes (CREN)
Chemin de la Censive du Tertre BP 81227
44312 Nantes cedex 3

Table des matières

INTRODUCTION	13
PARTIE 1 CADRES THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIE	
CHAPITRE I : ANALYSE ÉPISTÉMOLOGIQUE	16
I.1 : Repères historiques sur l'évolution de la notion de fonction affine.....	17
I.1.1 : Le moyen-âge et la Renaissance.....	17
I.1.2 : L'époque classique.....	21
I.1.3 : L'époque moderne.....	22
I.1.4 : Caractérisation des fonctions affines à chaque période.....	24
I.2 : La fonction affine dans les programmes scolaires du collège et du lycée.....	25
I.2.1 : Première période avant 1902 : l'algèbre au service de la géométrie.....	25
I.2.2 : Deuxième période de 1902 à 1960 : la droite comme représentation graphique de fonction.....	29
I.2.3 : Troisième période : à partir de 1959, le temps des réformes.....	34
I.2.4 : Quatrième période à partir de 1986 : le problème au cœur du processus d'apprentissage.....	39
I.2.5 : Conclusion sur l'évolution de la transposition didactique de la notion de fonction affine.....	43
I.3 : Étude des organisations mathématiques de la notion de fonction affine.....	46
I.3.1 : Étude de l'organisation mathématique dans les programmes de 2008.....	46
I.3.2 : Étude de l'organisation mathématique de la notion de fonction affine dans le manuel Sésamaths de la classe de 3 ^e	53
I.4 : Conclusion.....	57
CHAPITRE II : DEUX POINTS DE VUE	59
II.1 : La covariation.....	59
II.2 : L'expression de ces deux points de vue dans les différents registres.....	62
II.3 : Cycle de modélisation.....	69
II.4 : Conclusion.....	74
CHAPITRE III : LE CHOIX DU CADRE THÉORIQUE	75
III.1 : Mise en évidence des difficultés repérées.....	75
III.2 : Les fondements théoriques.....	83
III.2.1 : La Théorie des situations didactiques (TSD).....	83
III.2.2 : L'apprentissage par problématisation.....	84
III.3 : A propos des définitions.....	89
III.4 : Vers une praxéologie de modélisation de la fonction affine.....	93
III.5 : Le cadre épistémique pour l'apprentissage par problématisation.....	95
III.6 : Le rôle du langage.....	102
III.7 : Le contrat didactique.....	106
III.8 : Structure générale du cadre épistémique.....	109
III.9 : Conclusion.....	111
CONCLUSION DE LA PARTIE 1	113

PARTIE 2 L'ÉLABORATION DES ÉLÉMENTS DE L'INGÉNIERIE

CHAPITRE I : LE TEST ET LES RÉSULTATS 115

I.1 : Les types de problèmes mathématiques relevant de l'affinité et les procédures utilisées pour les résoudre.....	115
I.2 : Méthodologie de construction, passation et analyse.....	117
I.2.1 : Méthodologie de construction.....	117
I.2.2 : Méthodologie de passation.....	121
I.3 : Le choix des exercices en lien avec les hypothèses de recherche.....	121
I.3.1 : Les grandeurs et la proportionnalité : exercices A, B et H.....	126
I.3.2 : La proportionnalité et les graphiques : exercices C et E.....	131
I.3.3 : L'utilisation du registre des expressions algébriques : exercice D.....	133
I.3.4 : Les fonctions, notations et vocabulaire : exercices F et G.....	135
I.4 : Analyse des résultats.....	138
I.4.1 : Analyse des résultats exercice par exercice.....	140
I.4.2 : Analyse par thèmes.....	145
I.5 : Analyse des propos des enseignants des classes testées.....	173
I.5.1 : Le retour des élèves après correction du test.....	173
I.5.2 : Les réactions des enseignants.....	174
I.6 : Conclusion.....	175

CHAPITRE II : INTRODUCTION DE LA NOTION DE FONCTION AU COLLÈGE 178

II.1 : Quelles situations sont proposées aux élèves dans les chapitres consacrés aux fonctions dans les manuels de 3 ^e ?.....	179
II.2 : Quels problèmes proposer en classe pour introduire la notion de fonction au collège ?.....	184
II.2.1 : L'utilisation de la lecture graphique pour analyser l'aspect global d'une fonction.....	186
II.2.2 : Identifier une relation fonctionnelle.....	189
II.2.3 : L'étude de situations mettant en évidence la covariation de grandeurs par une fonction non monotone.....	194
II.2.4 : La généralisation d'un comportement covariationnel pour résoudre un problème de covariation non affine : le problème du pluviomètre à différents niveaux de la scolarité.....	202
II.2.5 : L'interpolation linéaire sur un intervalle sur lequel on considère le comportement d'une fonction continue et monotone : le problème du marchand de glace.....	222
II.3 : Conclusion.....	237

CONCLUSION DE LA PARTIE 2 238

PARTIE 3 MISE EN PLACE D'UNE INGÉNIERIE

CHAPITRE I : EXPÉRIMENTATIONS DE SÉQUENCES VISANT L'APPRENTISSAGE PAR PROBLÉMATISATION DES FONCTIONS AFFINES 242

I.1 : Analyse d'un temps de débat en classe de 2 ^{nde}	244
I.1.1 : Analyse du débat.....	245
I.1.2 : Problématisation dans le débat.....	249
I.1.3 : Que nous apprend l'analyse de la séquence « degrés Celsius-degrés Fahrenheit » ?.....	255

I.2 : Un essai pour permettre l'apprentissage par problématisation de l'affinité par les élèves.....	256
I.2.1 : Présentation de la situation salaire-chiffre d'affaires.....	257
I.2.2 : La mise en œuvre de la situation salaire-chiffre d'affaires.....	258
I.2.3 : Analyse <i>a priori</i> de la séquence salaire-chiffre d'affaires.....	260
I.2.4 : Analyse <i>a posteriori</i> de la séquence salaire-chiffre d'affaires.....	263
I.3 : Conclusion sur le choix des problèmes.....	285
I.3.1 : Du point de vue des savoirs.....	285
I.3.2 : Du point de vue du scénario.....	286
CHAPITRE II : UN MODÈLE DE SÉQUENCE : LA PPAP	288
II.1 : L'apport des travaux en didactique des sciences et vie de la terre.....	288
II.2 : Les séquences PPAP (Problématisation Par Analyse des Productions).....	290
II.3 : La dynamique de problématisation dans une PPAP.....	297
II.4 : Un nouvel outil pour l'analyse de l'activité de l'élève.....	302
II.5 : Des pistes pour l'élaboration d'une ingénierie didactique.....	307
II.6 : Conclusion.....	310
CHAPITRE III : L'INGÉNIERIE TEMPÉRATURE-PRESSION	313
III.1 : Situation problème : mise en évidence de la proportionnalité des écarts pour caractériser la covariation de deux grandeurs.....	313
III.1.1 : Grandeurs repérables, grandeurs mesurables et proportionnalité.....	313
III.1.2 : Aspect didactique.....	316
III.1.1 Choix de la situation.....	316
III.2 : Analyse de l'expérimentation dans la classe de collège.....	318
III.3 : Le format.....	322
III.3.1 : L'étape 1.....	322
III.3.2 : Analyse <i>a priori</i> de l'étape 1.....	323
III.3.3 : Analyse <i>a priori</i> de l'étape 2.....	329
III.4 : La situation 2.....	334
III.4.1 : Présentation de la situation 2.....	334
III.4.2 : Analyse <i>a priori</i> de la situation 2.....	335
III.5 : La situation 3.....	336
III.5.1 : Présentation de la situation 3.....	336
III.5.2 : Analyse <i>a priori</i> de la situation 3.....	337
III.6 : Évaluation intermédiaire.....	339
III.6.1 : Présentation de l'évaluation.....	339
III.6.2 : Analyse <i>a priori</i> de l'évaluation.....	339
III.7 : La situation 4.....	340
III.8 : Analyse de la séquence PPAP.....	342
III.9 : Conclusion.....	345
CHAPITRE IV : ANALYSE <i>A POSTERIORI</i> DE LA SÉQUENCE PPAP TEMPÉRATURE-PRESSION DANS DEUX CLASSES DE SECONDE	347
IV.1 : Méthodologie d'analyse de l'expérimentation.....	347
IV.1.1 : Méthodologie liée à l'ingénierie didactique.....	347
IV.1.2 : L'organisation du traitement des données.....	347
IV.1.3 : La structure de l'analyse et les différents outils.....	348
IV.1.4 : La synthèse au travers des espaces de contraintes.....	350
IV.2 : Présentation des classes et des enseignants.....	351

IV.3 : Analyse <i>a posteriori</i> de l'expérimentation de l'étape 1 dans la classe de 2 ^{nde} 1	354
IV.3.1 : Analyse des procédures des élèves lors de l'étape 1	354
IV.3.2 : Analyse des traces écrites des différents groupes étape 1	355
IV.3.3 : Synthèse dans l'espace de contraintes <i>a posteriori</i>	365
IV.3.4 : Ce que les fonctions langagières nous apprennent de la mise en relation des données et des conditions du problème à l'étape 1	369
IV.3.5 : Configuration des registres à l'étape 1	371
IV.4 : Analyse <i>a posteriori</i> de l'expérimentation de l'étape 2 dans la classe de 2 ^{nde} 1	372
IV.4.1 : Analyse des productions écrites étape 2	372
IV.4.2 : Analyse des interactions dans les groupes par comparaison entre l'étape 1 et l'étape 2	380
IV.5 : Analyse <i>a posteriori</i> de l'expérimentation de l'étape 1 dans la classe de 2 ^{nde} 2	398
IV.5.1 : Analyse des procédures des élèves lors de l'étape 1 à travers les productions écrites	398
IV.5.2 : Analyse des traces écrites des différents groupes étape 1	399
IV.5.3 : Analyse comparée des fonctions langagières entre les classes de 2 ^{nde} 1 et 2 sur l'étape 1	409
IV.6 : Analyse <i>a posteriori</i> de l'expérimentation de l'étape 2 dans la classe de 2 ^{nde} 2	419
IV.6.1 : Analyse des productions écrites	419
IV.6.2 : Analyse des interactions dans les groupes durant l'étape 2	422
IV.7 : Analyse <i>a posteriori</i> de l'expérimentation de l'étape 3 dans la classe de 2 ^{nde} 1	435
IV.7.1 : Les procédures utilisées par les élèves pour caractériser les variations dans la classe 1	435
IV.7.2 : La comparaison des variations entre les trois tableaux de valeurs dans la classe 1	438
IV.8 : Analyse <i>a posteriori</i> de l'expérimentation de l'étape 3 dans la classe de 2 ^{nde} 2	438
IV.8.1 : Les procédures utilisées par les élèves pour caractériser les variations dans la classe 2	439
IV.8.2 : La comparaison des variations entre les trois tableaux de valeurs dans la classe 2	441
IV.9 : Analyse et comparaison des processus de secondarisation dans les classes de 2 ^{nde} 1 et 2 au cours de l'étape 3	442
IV.10 : Analyse <i>a posteriori</i> de l'expérimentation des étapes 4 et 5	448
IV.11 : Conclusion à l'issue de cette expérimentation	449
CONCLUSION DE LA PARTIE 3	453
CONCLUSION	
1. L'apport du cadre de la problématisation pour penser l'organisation de l'enseignement-apprentissage de la notion de fonction affine et sa transposition didactique	457
1.1. Une revisite des cadres, registres et points de vue par le travail de figuration, configuration et de reconfiguration	457
1.2. L'apport de notre étude épistémologique pour penser la transposition didactique de la fonction affine	458
1.3. Les programmes du cycle 4 à la rentrée 2016	460

2. L'apport du format PPAP pour problématiser en mathématiques.....	465
2.1. Ses effets attendus sur l'apprentissage.....	465
2.2. Les effets produits au regard des effets attendus.....	466
2.3. Des outils d'analyse pour mesurer les progrès des élèves dans l'apprentissage par problématisation.....	467
2.4. La PPAP comme pratique pédagogique pour élémenter l'apprentissage par problématisation dans l'enseignement.....	467
2.5. Une généralisation possible.....	469
3. Synthèse dans un espace de contraintes.....	469
BIBLIOGRAPHIE	471

Table des annexes

Volume 2

ANNEXE 1 : EXTRAIT DE MANUEL 1931.....	5
ANNEXE 2 : PROGRAMMES DE 1902 À 1962.....	8
ANNEXE 3 : PROGRAMMES DE 1962.....	9
ANNEXE 4 : EXTRAIT DE MANUEL 1975.....	10
ANNEXE 5 : EXTRAIT DE MANUEL 1968.....	11
ANNEXE 6 : ANNALES DU BEPC 1976.....	12
ANNEXE 7 : BULLETIN OFFICIEL SPÉCIAL N° 6 DU 28 AOÛT 2008.....	13
ANNEXE 8 : PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DE 2009.....	15
ANNEXE 9 : PROTOCOLE PASSATION DU TEST.....	16
ANNEXE 10 : EXTRAIT COPIE POLYTECH NANTES MASTER 1^{ÈRE} ANNÉE.....	17
ANNEXE 11 : TEST PROPOSÉ SUR L'ACADÉMIE DE NANTES.....	18
ANNEXE 12 : ÉCHANTILLON POUR EXPLOITATION DES RÉSULTATS DU TEST.....	21
ANNEXE 13 : RÉPONSES DE L'ÉCHANTILLON AU TEST.....	22
ANNEXE 14 : TABLEAUX DYNAMIQUES CROISÉS POUR L'ANALYSE DES RÉPONSES AU TEST	42
ANNEXE 15 : EXTRAITS DE TESTS POUR ANALYSE.....	46
ANNEXE 16 : SUJET DU DNB NOUVELLE CALÉDONIE JUIN 2013 EXERCICE 8.....	98
ANNEXE 17 : EXEMPLE DE PRODUCTION D'ÉLÈVE DE CLASSE DE 6^E DANS L'ACTIVITÉ « LE PETIT CHAPERON ROUGE ».....	99
ANNEXE 18 : PRODUCTIONS DE GROUPES EN CLASSE DE 4^E POUR L'ACTIVITÉ « HAUTEUR D'EAU - HEURE ».....	101
ANNEXE 19 : SCÉNARIO ACTIVITÉ « LA BOÎTE SANS COUVERCLE » (BAUDU ET AL., 2012)	102

ANNEXE 20 : PROBLÈME DU PLUVIOMÈTRE.....	104
ANNEXE 21 : PRODUCTIONS DES ÉLÈVES DE 6^E POUR L'ACTIVITÉ « PLUVIOMÉTRIE »...105	105
ANNEXE 22 : PRODUCTIONS DES ÉLÈVES DE 5^E POUR L'ACTIVITÉ « PLUVIOMÉTRIE »...111	111
ANNEXE 23 : PRODUCTION DE GROUPES CLASSE DE 5^E POUR L'ACTIVITÉ « LES GLACES DE M. LEGOFF ».....117	117
ANNEXE 24 : PRODUCTION DES GROUPES SITUATION DEGRÉ CELSIUS-DEGRÉS FAHRENHEIT.....123	123
ANNEXE 25 : CORPUS DE LA SYNTHÈSE DE LA SITUATION « CONVERSIONS UNITÉS °C – °F ».....130	130
ANNEXE 26 : RECHERCHE « SALAIRE-CHIFFRE D'AFFAIRES » – 2^{NDE} ÉTAPE.....134	134
ANNEXE 27 : RECHERCHE « SALAIRE-CHIFFRE D'AFFAIRES »– 3^{ÈME} ÉTAPE.....135	135
ANNEXE 28 : RECHERCHE « SALAIRE-CHIFFRE D'AFFAIRES »– 4^{ÈME} ÉTAPE.....136	136
ANNEXE 29 : RECHERCHE « SALAIRE-CHIFFRE D'AFFAIRES » BILAN.....137	137
ANNEXE 30 : RECHERCHE « SALAIRE-CHIFFRE D'AFFAIRES » - PRODUCTION DU GROUPE A À L'ÉTAPE 1.....139	139
ANNEXE 31 : TRANSCRIPTION RECHERCHE « SALAIRE-CHIFFRE D'AFFAIRES » - SÉANCE 1 INTERACTIONS DANS LE GROUPE A.....145	145
ANNEXE 32 : RECHERCHE « SALAIRE-CHIFFRE D'AFFAIRES » - PRODUCTIONS DES ÉLÈVES ÉTAPE 3.....156	156
ANNEXE 33 : BILAN RECHERCHE « SALAIRE-CHIFFRE D'AFFAIRES »- DOCUMENT DISTRIBUÉ AUX ÉLÈVES.....161	161
ANNEXE 34 : COPIE ÉTUDIANTE MASTER 2 MEEF.....162	162
ANNEXE 36 : CHOIX DES VALEURS POUR LA SITUATION "PRESSION-TEMPÉRATURE"168	168
ANNEXE 37 : DOCUMENT ÉLÈVE SITUATION "PRESSION-TEMPÉRATURE" SITUATION 2. .169	169
ANNEXE 38 : DOCUMENT ÉLÈVE SITUATION "PRESSION-TEMPÉRATURE" SITUATION 3. .173	173
ANNEXE 39 : DOCUMENT ÉLÈVE SITUATION "PRESSION-TEMPÉRATURE" ÉVALUATION INTERMÉDIAIRE.....174	174
ANNEXE 40 : DOCUMENT DE PRÉSENTATION DE L'EXPÉRIMENTATION AUX FAMILLES...175	175
ANNEXE 41 : TESTS CLASSES DE SECONDE EXPÉRIMENTATION 2015.....177	177

ANNEXE 42 : EXEMPLES DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES DE 2^{NDE} LORS DE L'EXPÉRIMENTATION "PRESSION-TEMPÉRATURE".....	179
ANNEXE 43 : TRANSCRIPTION DICT5 DE L'ÉTAPE 1 GROUPE E LYCÉE 1.....	208
ANNEXE 44 : TRANSCRIPTION DICT5 DE L'ÉTAPE 2, LYCÉE 1.....	212
ANNEXE 45 : TRANSCRIPTION DICT1 DE L'ÉTAPE 1, LYCÉE 2.....	230
ANNEXE 46 : TRANSCRIPTION DICT5 DE L'ÉTAPE 2, LYCÉE 2.....	236
ANNEXE 47 : TRANSCRIPTION GROUPE 3 DICT7 DE L'ÉTAPE 2, LYCÉE 2.....	247
ANNEXE 48 : TRANSCRIPTION GROUPE 10 DICT4 DE L'ÉTAPE 2, LYCÉE 2.....	250
ANNEXE 49 : TRANSCRIPTION DICT5 ÉTAPE 3 LYCÉE 1.....	262
ANNEXE 50 : TRANSCRIPTION DICT4 ÉTAPE 3 LYCÉE 1.....	266
ANNEXE 51 : PRODUCTIONS DES GROUPES LYCÉE 2 ÉTAPE 5.....	269

Les autorisations des élèves mineurs et de leurs parents ainsi que l'ensemble des productions écrites des élèves, les enregistrements, les fichiers sous tableur et les fichiers de transcription sont à disposition sur demande à sylvie.grau@univ-nantes.fr.

Le test en ligne est consultable ici : [Test 3ème](#)

Introduction

Certaines notions ont un statut particulier dans les apprentissages mathématiques du secondaire du fait de leur positionnement à l'intersection de plusieurs cadres (Douady, 1986). C'est le cas des fonctions affines enseignées en fin de collège. Lorsqu'elles sont introduites, elles interviennent comme outil dans le cadre des mesures de grandeurs et le plus souvent comme objet dans le cadre algébrique du fait de leur définition, parfois réduite dans la mémoire des élèves à l'expression « $ax+b$ ». Elles servent ensuite à l'entrée dans l'analyse. Mais, les difficultés que rencontrent les élèves dans la suite de leur scolarité attestent d'un savoir sur l'affinité qui reste peu disponible (Robert & Rogalski, 2002) que ce soit au sein des mathématiques, dans d'autres disciplines scolaires ou à l'extérieur de l'école. Notre recherche a pour objectif d'explorer de manière systémique différentes pistes pour tenter de remédier à ces difficultés. De nombreux travaux se sont intéressés à la construction du concept de fonction, en analysant en particulier la transition entre lycée et supérieur (Chesnais & Munier, 2015; Dubinsky & McDonald, 2001; Passaro, 2016; Vandebrouck, 2011; Vinner & Dreyfus, 1989). Ces travaux évoquent le plus souvent la fonction affine en tant qu'objet, considérant que cet apprentissage est une première rencontre avec le concept de fonction. Nous avons choisi de nous intéresser à cette notion en tant qu'outil de modélisation d'une situation où les accroissements des grandeurs sont proportionnels. La fonction affine est en effet une fonction qui a la particularité d'être caractérisée par son taux de variation de manière relativement simple. Nous allons donc nous placer dans une approche dans le cadre des grandeurs et viser la problématisation de l'apprentissage des fonctions affines comme outil de modélisation.

La Théorie des Situations Didactiques de Brousseau (TSD) s'appuie sur des hypothèses d'un apprentissage par adaptation et par acculturation ; elle permet de construire et d'analyser des situations didactiques et d'analyser le savoir construit par l'élève (Brousseau, 1988, 2011). Elle ne procure cependant pas d'outils pour comprendre comment s'effectue cette construction par chaque élève au sein du collectif. Si la Théorie Anthropologique du Didactique développée par Chevallard procure un cadre d'analyse de l'activité mathématique, elle ne renseigne pas non plus sur la manière dont chaque individu organise sa propre activité dans ce collectif (Chevallard, 1999; Bosch & Chevallard, 1999; Bosch & Quilio, 2015). Nous proposons donc de mobiliser un autre cadre, celui de la problématisation (Fabre & Orange, 1997; Orange, 2001, 2005b; Fabre, 2011; Orange, 2012), afin de comprendre ce qui organise l'activité de l'élève. Nous nous appuierons en particulier sur la théorie de Piaget (Legendre, 2006; Piaget & Garcia, 1983) pour analyser à différents niveaux de granularité le tissage entre les trois mondes mathématiques : le monde des objets, le monde de l'action, le monde des propriétés. Nous nous intéresserons en particulier à ce qui se joue à un niveau micro, au cours de l'activité, lors des échanges entre élèves. Ces analyses nous amèneront à penser de nouveaux dispositifs didactiques tenant compte du rôle du langage dans le processus (Jaubert & Rebière, 2001; Jaubert, Rebière, & Pujo, 2010) et donc à nous interroger sur le contrat (Perrin-Glorian & Hersant, 2003; Hersant, 2001 2010, 2014) afin que l'adéquation contrat/milieu permette de limiter les malentendus (Bautier & Rayou, 2013). Dans la

continuité des travaux de Tall (Tall, 2006, 2014), nous testerons un dispositif permettant de travailler la relation et les connexions entre les objets et l'action par la mise en place d'une certaine « symbolique naturelle », qui pourra être mise elle-même en connexion avec une « symbolique formelle ».

Dans une première partie, nous allons explorer la piste épistémologique en revenant sur la chronogenèse historique (Brousseau, 2003) de la notion de fonction affine, sur la reconstruction didactique de cette notion dans notre système scolaire à différentes époques et sur son organisation mathématique dans les programmes de 2008. Nous préciserons en particulier comment différents points de vue sur la fonction affine peuvent amener des représentations plus ou moins en cohérence avec la topogenèse de cette notion (Brousseau, 1992). Nous terminerons cette première partie par le choix de cadres théoriques pour concevoir et analyser les situations d'enseignement-apprentissage en tenant compte en particulier de l'activité de l'élève. Dans la deuxième partie, nous allons nous intéresser aux contraintes externes qui pèsent sur l'élève : ses représentations, ses connaissances, le rôle du contrat didactique, les conversions de registres et les changements de cadres qu'il peut effectuer. Nous identifierons certains effets du milieu sur l'apprentissage par l'analyse de différentes situations expérimentées à différents niveaux de la scolarité. Nous en tirerons quelques caractéristiques d'une situation a-didactique favorisant la construction d'un savoir apodictique que nous appelons *problématisation par analyse des productions* (aussi notée PPAP). Enfin la troisième partie sera consacrée à l'élaboration, l'expérimentation et l'analyse d'une ingénierie de type PPAP à la fin du collège. Nous conclurons sur la pertinence de nos outils d'analyse et sur les limites de notre ingénierie en termes de transposition dans les classes dites ordinaires. Nous préciserons en quoi l'évolution des programmes scolaires amène une nouvelle organisation mathématique du savoir et comment les pistes que nous proposons peuvent s'inscrire dans cette évolution de l'enseignement de la notion de fonction affine.

Partie 1

Cadres théoriques et méthodologie

Notre objectif est d'identifier ce qui peut amener des incohérences dans l'enseignement de la fonction affine et de repérer ce qui peut générer les difficultés que rencontrent les élèves dans l'utilisation de cette notion pour résoudre des problèmes. Cette première partie vise à définir les cadres théoriques que nous allons mobiliser dans notre étude. Dans le chapitre I, une analyse épistémologique va nous aider à comprendre l'organisation mathématique de la notion de fonction affine et la genèse de cette organisation. Nous verrons dans le chapitre II que différents points de vue sont possibles. Ces deux chapitres nous amèneront à formuler des hypothèses pour penser une approche différente de l'enseignement des fonctions affines au collège. Enfin pour mesurer l'impact des situations d'enseignement-apprentissage sur la disponibilité du savoir chez les élèves, nous caractériserons dans le chapitre III les différents cadres théoriques dans lesquels nous allons effectuer nos analyses. Ces cadres nous amèneront à construire des outils d'analyse des situations et de l'activité de l'élève que nous allons mettre en place pour tester nos hypothèses dans la partie 2, concevoir et expérimenter des séquences d'enseignement-apprentissage dans la partie 3.

Chapitre I : Analyse épistémologique

Dans ce chapitre, nous allons revenir sur l'épistémologie de cette notion puis nous allons préciser ce qu'est aujourd'hui la fonction affine dans la culture scolaire de la classe de 4^e du collège à la classe de seconde, c'est-à-dire pour des élèves de 14 à 17 ans. Ce détour épistémologique vise à comprendre en quoi cette notion peut perdre beaucoup de son sens dans l'enseignement actuel et à expliquer certaines difficultés que peuvent rencontrer les élèves. A travers l'étude des programmes scolaires de 1800 à nos jours, nous allons revenir sur l'évolution de cet enseignement, ses finalités et son organisation. Il s'agit ici de préciser les connaissances dont peuvent disposer les élèves aux différents niveaux de la scolarité ainsi que les liens établis entre les différentes compétences travaillées au cycle 4 et en classe de seconde. Cette analyse posera quelques principes qui guideront nos choix de situations d'enseignement apprentissage ainsi que des éléments indispensables à la reconstruction de l'activité des élèves à partir de leurs productions.

Actuellement la définition de la fonction affine la plus utilisée dans les programmes, les sites sur l'internet ou les manuels à l'école est :

Une fonction affine f est une fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f: \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x) = ax + b$$

où a et b sont des nombres réels.

Cette définition usuelle s'appuie sur l'utilisation de l'algèbre. Elle était pertinente au lycée à une époque où le calcul algébrique était un objectif d'apprentissage au collège. Or si nous nous intéressons aux résultats en mathématiques en fin de collège révélés par le dispositif CEDRE (Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon) en mai 2014, nous apprenons que « le taux de réussite aux items demandant à l'élève de développer ou factoriser une expression baisse en moyenne de 8 points de pourcentage entre 2008 et 2014 » (Note d'information DEPP N°19, mai 2015¹). Aujourd'hui les élèves ont donc une maîtrise insuffisante de l'algèbre au collège pour que cette définition puisse avoir du sens au moment de l'introduction de la notion de fonction. Nous verrons dans les paragraphes qui suivent que d'autres approches sont possibles mais que chacune mobilise des connaissances différentes qui peuvent être aussi source de difficultés pour les élèves.

Les deux analyses proposées dans ce chapitre visent à comprendre ce qui a pu motiver la transposition didactique actuelle (Chevallard, 1985).

Nous utiliserons régulièrement la notion de cadre (Douady, 1986) et de registre (Duval, 1993). Ces notions permettent de distinguer le domaine mathématique dans lequel nous travaillons du registre sémiotique utilisé pour formaliser ce travail.

¹http://cache.media.education.gouv.fr/file/2015/26/0/depp-ni-2015-19-cedre-2014-mathematiques-college_422260.pdf consulté le 06/02/2016

I.1 : Repères historiques sur l'évolution de la notion de fonction affine

Nous allons nous intéresser à la genèse et à l'évolution du concept de fonction affine du moyen-âge à nos jours, cette étude n'est pas exhaustive et ne relève pas d'un travail historique en tant que tel. Il s'agit de donner quelques repères pour situer l'approche de cette notion dans l'enseignement à partir des travaux d'histoire des mathématiques (Dhombres, 1983; Dhombres, Dahan-Dalmedico, Bkouche, Houzel, & Guillemot, 1987) et de différentes publications (Dahan-Dalmedico & Peiffer, 1986; Dorier, 1996).

La communauté mathématique a utilisé des textes de savoirs très variés suivant les époques pour définir la fonction affine. Le concept et le formalisme semblent apparaître par petites touches au croisement de différents cadres (Douady, 1986) qui ont eux-mêmes évolué dans des directions différentes. Nous allons repérer malgré tout un certain nombre d'éléments qui vont nous permettre d'identifier les obstacles rencontrés par les mathématiciens à travers trois grandes périodes : le moyen âge et la Renaissance, l'époque classique et l'époque moderne.

I.1.1 : Le moyen-âge et la Renaissance

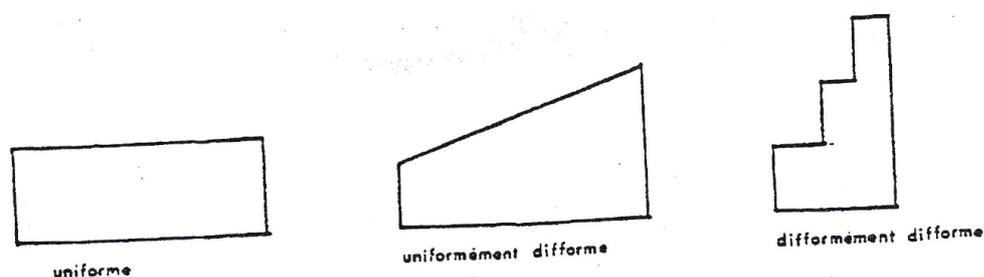
Le développement des mathématiques arabes et de l'algèbre a permis la naissance du calcul des polynômes. Le dépassement de l'obstacle lié à la contrainte d'homogénéité des équations permet de ramener le plus d'équations possible à des types canoniques associés à des procédures de résolution dans l'idée de se rapprocher d'équations linéaires.

L'apparition de la notion de fonction au XIV^{ème} siècle est en quelque sorte une vision numérique des raisons euclidiennes du livre V d'Euclide. Les mesures de longueurs servent de modèle universel pour toutes les mesures de grandeurs. Oresme dans son « Traité sur la configuration des qualités et du mouvement » (Costé, 1996) appelle « qualité » les variations d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur. Il a l'idée de représenter cette variation :

« Les propriétés de cette qualité en seront examinées plus clairement et plus facilement dès lors que quelque chose qui lui est semblable est dessiné en une figure plane, et que cette chose, rendue claire par exemple visible, est saisie rapidement et parfaitement par imagination ...car l'imagination des figures aide grandement à la connaissance des choses même. » cite Costé (1996)

Il étudie ensuite mathématiquement les représentations obtenues et en fait une classification. En particulier, il compare les espaces parcourus par un mobile sur des temps égaux, ce qui lui permet de dire que la « rapidité » est plus ou moins grande. Il représente graphiquement cette grandeur, en fonction du temps écoulé. La durée est représentée par une droite horizontale. En chaque point de cette droite, Oresme élève une perpendiculaire dont la hauteur est proportionnelle à la rapidité (qui peut être assimilée à notre notion contemporaine de vitesse instantanée du mobile) à l'instant correspondant. Il arrive à la conclusion que l'aire de la partie du plan balayée par les verticales est proportionnelle à la distance parcourue par le mobile sur un intervalle de temps donné.

Oresme caractérise différentes figures (voir graphique 1) :



graphique 1: Figures du texte original d'Oresme

Nous allons interpréter ces graphiques avec nos mathématiques contemporaines pour montrer le lien entre ces représentations et nos registres actuels. Dans un mouvement rectiligne à vitesse constante, la distance parcourue est proportionnelle à la durée du parcours. Une telle qualité est dite « qualité uniforme ». Nous allons la représenter par un rectangle ABCD (voir graphique 2), le mobile se déplace sur un intervalle de temps proportionnel à la longueur AB à une vitesse constante proportionnelle à la longueur AD. La distance parcourue pendant cet intervalle de temps est proportionnelle à l'aire du rectangle ABCD. Avec nos notations actuelles, on écrira que la vitesse V est constante ($V = AD$) sur un intervalle de temps Δt ($\Delta t = AB$) et que la distance x parcourue pendant cet intervalle de temps est $x = V \times \Delta t$ donc $x = AD \times AB$.

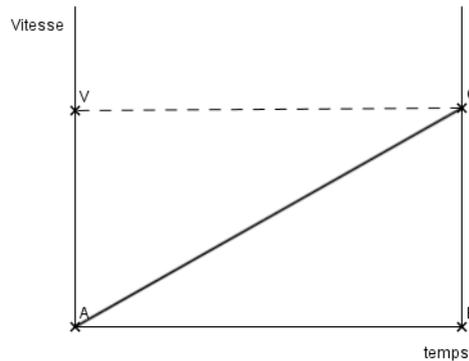


graphique 2: Qualité uniforme

Dans un mouvement rectiligne uniformément accéléré, l'accroissement de la vitesse est proportionnel à la durée pendant laquelle se produit cet accroissement. Ainsi une « qualité uniformément difforme terminée à un degré nul » est représentée par un triangle rectangle. Nous allons représenter ce triangle dans un repère (voir graphique 3). Sur l'intervalle de temps AB, le mobile passe d'une vitesse nulle à la vitesse V représentée par la longueur BC, son mouvement est uniformément accéléré. La distance parcourue sur cet intervalle de temps correspond à l'aire du triangle ABC, c'est-à-dire la partie du plan balayée par les verticales. Avec nos notations actuelles, si nous notons t un instant et $V(t)$ la vitesse instantanée du mobile à l'instant t , l'accélération est constante sur l'intervalle de temps AB et est égale à $\frac{BC}{AB}$. La vitesse est proportionnelle à t , elle peut alors s'exprimer par $V = \frac{BC}{AB} \times t$. La distance parcourue s'obtient aujourd'hui par intégration :

$$\int_0^{AB} \frac{BC}{AB} t \, dt = \frac{BC}{AB} \times \frac{1}{2} AB^2 = \frac{1}{2} BC \times AB$$

Nous obtenons la représentation graphique d'une fonction linéaire dans le repère d'origine A.



graphique 3: Qualité uniformément difforme terminée à un degré nul représentée dans un repère

De la même manière, une « qualité uniformément difforme » est représentée par un trapèze (voir graphique 4). Le mobile a une vitesse AD à l'instant A et une vitesse BC à l'instant B, pendant l'intervalle de temps AB, son mouvement est rectiligne uniformément accéléré. Avec nos mathématiques contemporaines, si nous notons t un instant et $V(t)$ la vitesse à l'instant t , une accélération constante est caractérisée par le fait que :

$$\frac{V(t_1) - V(t_2)}{V(t_2) - V(t_3)} = \frac{t_1 - t_2}{t_2 - t_3} \text{ pour tous } t_1, t_2 \text{ et } t_3 \text{ distincts.}$$

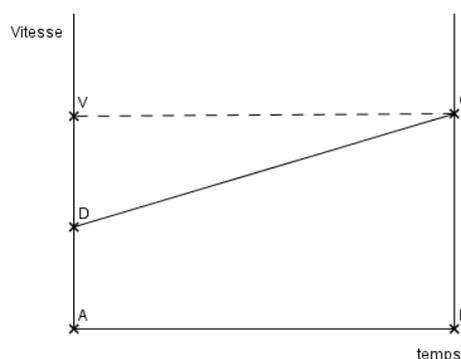
La distance parcourue pendant l'intervalle de temps AB est l'aire du trapèze ABCD.

Si nous reprenons les notations précédentes, la vitesse à l'instant t peut s'écrire aujourd'hui :

$$V(t) = AD + \frac{BC - AD}{AB} \times t \text{ par intégration la distance parcourue est :}$$

$$\int_0^{AB} AD + \frac{BC - AD}{AB} \times t dt = AD \times AB + \frac{BC - AD}{AB} \times \frac{1}{2} AB^2 = AD \times AB + \frac{1}{2} \times (BC - AD) \times AB$$

Nous avons la représentation graphique d'une fonction affine dans le repère d'origine A.



graphique 4: Qualité uniformément difforme

Oresme se propose de résoudre des problèmes géométriques en les déplaçant vers des résolutions d'équations algébriques. C'est la première fois qu'apparaît l'idée de représentation graphique. Lorsqu'il écrit :

Ainsi on peut dire que la qualité difforme est telle que trois points quelconques du sujet étant donnés, le rapport de la distance entre le premier et le deuxième à la distance entre le deuxième et le troisième est comme le rapport de l'excès d'intensité du premier sur le deuxième à l'excès d'intensité du deuxième sur le troisième. (Nicole D'Oresme, Sur la configuration des qualités, v.1350)

Il s'agit en fait de caractériser la relation par une proportion qui n'est autre que « l'écriture analytique du théorème de Thalès » (Dhombres et al., 1987).

Toujours avec notre regard contemporain, si $f(x)$ est l'intensité de la qualité en x , on peut interpréter la caractéristique énoncée par Oresme comme l'égalité de $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2) - f(x_3)}$ et

$\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3}$. Si la traduction de cette partie du texte peut prêter à différentes interprétations²

(suivant ce que Oresme cherche à désigner, il pourrait s'agir de simples proportions), on peut cependant noter que cette égalité est équivalente avec les notations actuelles à la

proportionnalité des accroissements $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$ qui caractérise les

fonctions affines. Les relations entre grandeurs qui ne sont ni constantes, c'est-à-dire qui ne sont pas des qualités uniformes telles que les définit Oresme, ni des qualités uniformément difformes, sont appelées des qualités difformément difformes. Si Oresme démontre que le trapèze est la représentation graphique qui représente les qualités uniformément difformes, il ne démontre pas la réciproque et pourtant la tient pour vraie en définissant les autres cas comme la négation des deux qualités que sont les qualités uniformes et les qualités uniformément difformes.

Cette lecture de ces travaux nous permet de retrouver ici une relation fonctionnelle caractéristique d'une fonction affine (Dhombres, 1983) en donnant une expression générale du théorème dit de Merton sans référence cinématique. Ce théorème énonce que dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré de vitesse initiale v_i et de vitesse finale v_f , la distance parcourue sur un temps déterminé est la même que celle parcourue pendant cette même durée à une vitesse moyenne de v_i et v_f . En remplaçant x_2 par la moyenne de x_1 et x_3 dans la relation obtenue par Oresme, on obtient :

$$f\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_3)}{2}$$

On peut estimer que la représentation du rapport comme une vitesse a été déterminante. Elle donne un statut et une existence pragmatique à ce rapport.

²<http://wwwrc.obs-azur.fr/cerga/SitePierreSouffrin/> consulté le 06/02/2016

Au moyen-âge et à la Renaissance, les variations d'une grandeur sont donc représentées par une figure, on appelle qualité uniformément difforme l'équivalent des cas d'affinité, et l'idée de mouvement uniformément accéléré amène à des expressions mettant en évidence la proportionnalité des écarts.

I.1.2 : L'époque classique

Avec François Viète (1540-1603) naît l'Art analytique. Les grandes nouveautés sont la représentation des grandeurs par des lettres et les calculs sur les lettres qui permettent d'écrire pour la première fois des formules. Il s'agit d'une théorie des équations mettant en jeu des grandeurs et des coefficients (terme nouveau). Cependant, c'est Descartes qui, dans sa géométrie des coordonnées, va rendre l'algèbre indépendante de la géométrie et se libérer de la question de l'homogénéité. Il va prouver que la résolution algébrique permet de résoudre des problèmes géométriques qui n'avaient pas encore de solution. Il introduit les équations cartésiennes comme caractérisation de lignes. Avec Descartes, la courbe est un outil qui permet de résoudre des problèmes par la recherche de lieux de points, elle se passe de toute idée de fonction. On peut lire dans L'Encyclopédie de Diderot et D'Alembert :

Il est visible que l'équation d'une courbe étant résolue, donne une ou plusieurs valeurs de l'ordonnée y pour une même abscisse x , & que par conséquent une courbe tracée n'est autre chose que la solution géométrique d'un problème indéterminé, c'est-à-dire qui a une infinité de solutions : c'est ce que les anciens appelloient lieu géométrique. (Diderot & d'Alembert, 1751)

Notons qu'à cet article « courbe » il est précisé que « Courbe, ajoute-t-on, pris en ce sens, est opposé à ligne droite, dont les points sont tous situés de la même manière les uns par rapport aux autres. »

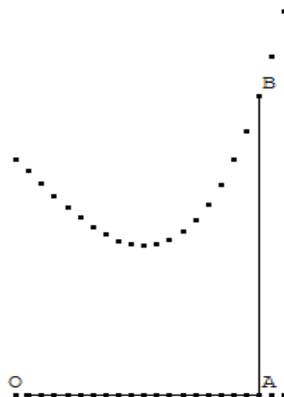


Schéma 1: trajectoire de points en mouvement

Au XVII^{ème} siècle, c'est l'étude des mouvements qui va permettre à la notion d'évoluer, il s'agit de comprendre et non d'expliquer dans le but de résoudre des problèmes techniques (Barbin, 2001). On étudie les équations des courbes, celles-ci étant considérées comme des trajectoires de points en mouvement. C'est avec Leibniz que la grandeur AB qui varie lors d'un déplacement d'un point A d'abscisse x sur une ligne, est considérée comme remplissant une certaine fonction dans l'engendrement de la courbe (voir schéma 1).

Un autre aspect est la représentation de la fonction dans le registre algébrique par une formule, facilitée par le symbolisme apporté par Viète. Les problèmes de minimum, de maximum, de tangente vont nécessiter le calcul infinitésimal. Deux conceptions vont alors se développer en parallèle : la conception de la fonction comme équation relativement à une courbe, et celle de fonction comme expression analytique. La notion de fonction va prendre de la distance par rapport à la géométrie avec Jean Bernoulli qui va définir la fonction comme processus de calcul entre une variable et des constantes, cette variable n'étant plus liée systématiquement à une grandeur géométrique, il introduit la notation fx qui deviendra $f(x)$ et ne fait donc plus explicitement référence à l'ordonnée d'un point dans un repère cartésien.

Le substantif « affinité » est introduit par Euler en 1748 dans son *Introduction à l'analyse infinitésimale* pour caractériser en analyse les applications ou fonctions qui sont du premier degré. Avec Euler, une fonction du premier degré est caractérisée par le fait qu'elle est une fonction uniforme (une seule valeur déterminée par quelque valeur déterminée que l'on donne à la variable), algébrique (elle n'utilise que des opérations algébriques et non des opérations transcendentes par exemple), rationnelle, et il fait aussi la distinction entre entières et fractionnaires.

En parallèle, le problème de la résolution des systèmes linéaires d'équations amène Gabriel Cramer (1704-1752) à définir une méthode qui se développera ensuite avec la théorie des déterminants et l'écriture matricielle.

I.1.3 : L'époque moderne

Dans les années 1840, Grassmann pose les bases de la théorie des espaces vectoriels, il cherche à étudier la géométrie en développant une axiomatique rigoureuse permettant des calculs. C'est à ce moment que la question de la linéarité émerge reprise ensuite par Peano et bien d'autres.

Un autre concept va se lier à la notion de fonction, celui de nombre réel et avec lui l'idée de continuité. Si jusqu'à présent la légitimité des assertions passait par la géométrie, le développement de l'algèbre et du calcul devait pouvoir supplanter la géométrie à condition d'y construire un ensemble de nombres pouvant représenter l'idée de grandeur continue. En associant à chaque point de la droite réelle son abscisse, la construction de l'ensemble des réels allait à son tour ouvrir de nouveaux horizons. Georg Cantor cherche à travers sa théorie des ensembles à traiter l'infini comme un objet homogène aux autres quantités numériques. A partir de 1880, cette théorie des ensembles apparaîtra comme une synthèse unifiant les savoirs mathématiques, créant de nouveaux objets, regroupant les anciens dans des structures, englobant les connaissances arithmétiques et géométriques.

L'équipe Bourbaki à partir de 1930 va redéfinir une grande partie des connaissances mathématiques en partant du général vers le particulier, les structures ayant un intérêt dès qu'elles permettent d'étudier en une seule opération toute une catégorie de situations. Les calculs donnent alors leur valeur de vérité aux assertions. L'organisation est axiomatique et la logique prend de fait plus d'importance au point de devenir une discipline et d'avoir son propre formalisme.

Ainsi va naître la notion d'espace vectoriel de fonctions. Dans l'idée de regrouper les problèmes qui nécessitent les mêmes types de traitement, on met en relation tout ce qui a un lien avec les questions de linéarité que ce soit dans le domaine du calcul vectoriel, de la géométrie, de l'étude de systèmes d'équations numériques et différentielles linéaires, des formes bilinéaires etc. Un outil devient central, il s'agit du déterminant. Tandis que se développent les techniques et les applications du calcul matriciel et des déterminants, on commence à imaginer des espaces à n dimensions. Ces questions amènent celle de la linéarité en dimension infinie. Les problèmes en sciences physiques, comme la corde vibrante, l'équation de la chaleur, les mouvements des planètes, demandent à résoudre des systèmes linéaires. Fourier en 1822 devant l'infinité des équations et des inconnues, étudie un sous-système d'ordre n avant de passer à la limite. Cette procédure est très lourde et très technique. On note une similitude avec le langage géométrique et la définition axiomatique d'espace vectoriel de Peano. Pincherle en 1912 considère toutes les combinaisons linéaires des fonctions régulières au voisinage d'un point. Il étudie ce qu'il appelle « operazione » (application) et « operazioni distributive » (applications linéaires). L'idée est de repérer entre les deux procédures une même structure topologique (Dorier, 1996).

De nouvelles caractérisations des applications linéaires vont émerger d'une définition générale dont l'expression algébrique $f(x) = ax$ n'est qu'un cas particulier.

La définition d'une application affine peut alors prendre différentes formes. La fonction affine peut par exemple être caractérisée par :

$$f: E \rightarrow F$$

$$\forall (x; y) \in E^2; \forall (\alpha; \beta) \in A^2; f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

f est un homomorphisme de $(E; +; \times)$ dans $(F; +; \times)$.

ou par la matrice $A = \begin{pmatrix} x & y \\ f(x) & f(y) \end{pmatrix}$ de déterminant nul.

ou encore sur d'autres notions comme en attestent les exemples qui suivent tirés d'ouvrages de cette période.

Dans « Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie » de Pierre Martin (1967) on trouve :

Étant donné deux espaces affines A et B attachés à deux espaces vectoriels E et F sur le même corps K , on dit que u de A dans B est une application linéaire si, quelle que soit la famille finie d'éléments $(m_i; \lambda_i)$ de $A \times K$ possédant un barycentre g , $u(g)$ est le barycentre des éléments $(u(m_i); \lambda_i)$ de $B \times K$ avec $1 \leq i \leq k$, k fini quelconque. Il existe une application linéaire f et une seule, de E dans F , telle que pour m et n quelconques dans A et $m' = u(m)$; $n' = u(n)$ on a $f(\vec{mn}) = \vec{m'n'}$.

Dans le « Dictionnaire des mathématiques » d'Alain Bouvier, Michel Georges et François Le Lionnais en 1979 on peut lire :

Soit E et F deux espaces affines attachés aux espaces vectoriels E et F sur un corps K . Une application u de E dans F est dite affine s'il existe une application linéaire f de E dans F (elle est alors unique) telle que, pour tout point M de E et pour tout vecteur \vec{v} de E , on ait : $u(M + \vec{v}) = u(M) + f(\vec{v})$.
Les applications affines de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont de la forme $x \rightarrow ax+b$ et leurs représentations graphiques sont des droites, leurs applications linéaires associées sont les applications $x \rightarrow ax$.

I.1.4 : Caractérisation des fonctions affines à chaque période

Dans cette évolution, nous repérons quatre sauts épistémologiques : le passage du calcul arithmétique au calcul fonctionnel, celui du discret au continu, celui de la courbe au graphe de fonction et enfin celui de la fonction numérique à la fonction comme élément d'une structure plus générale. Nous pouvons donc imaginer que l'enseignement de cette notion, de l'école à la fin du secondaire, demande une prise en compte de ces sauts épistémologiques qui peuvent devenir des obstacles épistémologiques pour les élèves.

Par ailleurs, la notion d'affinité traverse différents cadres (Douady, 1986) : algébrique, arithmétique, géométrique, fonctionnel, qui interviennent différemment suivant les périodes et qui amènent des conceptions plurielles de l'objet. Dans le tableau 1, nous résumons les principaux champs de problèmes qui ont contribué à la formalisation de la notion de fonction affine, dans une dualité outil-objet (Douady, 1986). Ce tableau est organisé de façon chronologique. Les caractérisations indiquées utilisent, de façon anachronique, les notations actuelles.

Actuellement, on retrouve une pluralité du même type dans la manière d'introduire la notion de fonction auprès des élèves. La fonction peut être considérée comme une relation entre des nombres, comme un processus d'évolution qui lie deux grandeurs, comme un processus de calcul entre des nombres, ou comme l'expression liée à l'équation d'une courbe. Nous allons regarder comment ces différentes approches sont intervenues dans les programmes scolaires et dans quelle chronologie elles sont étudiées à l'école.

Types de problèmes qui induisent l'utilisation des fonctions affines	Types de caractérisation	Cadre au sens de Douady (1986)
Problèmes géométriques comme cas particulier des problèmes de grandeurs	Théorie des proportions $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$	Géométrie euclidienne
Problèmes de cinétique	Caractérisation fonctionnelle $v\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right) = \frac{v(x_1) + v(x_3)}{2}$	Mécanique
Problèmes géométriques ou cinétiques résolus par l'algèbre	Caractérisation analytique $f(x) = ax + b$	Géométrie analytique
Problèmes liés à la résolution de systèmes linéaires	Caractérisation vectorielle $u(M + \vec{v}) = u(M) + f(\vec{v})$	Algèbre linéaire

Tableau 1: Caractérisation des fonctions affines à partir des différents problèmes de l'histoire des mathématiques

I.2 : La fonction affine dans les programmes scolaires du collège et du lycée

Nous allons étudier les programmes à travers les textes officiels, des rapports ou des instructions (Belhoste, 1995) ainsi qu'à travers certains manuels cités dans ces mêmes rapports ou dans le bulletin de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) comme étant des ouvrages de référence. Du XIX^{ème} siècle à 2016, nous allons nous intéresser à la place donnée aux fonctions affines et linéaires dans l'enseignement, aux niveaux scolaires qui correspondent à la fin du cycle 4 actuel et au début du lycée (élèves de 13 à 16 ans). Nous n'étudierons pas les programmes entrés en application à la rentrée 2016 car les expérimentations ont été faites avant cette date, par contre nous reviendrons sur ces programmes dans notre conclusion. Par ailleurs, nous nous limitons à ce niveau d'étude car les fonctions n'apparaissent pas dans les programmes avant le cycle 4. Nous nous aiderons de l'« Histoire générale de l'Enseignement et de l'Éducation en France » d'Antoine Prost (1981) pour comprendre les choix qui sont faits pour établir les programmes. Cette analyse va nous permettre d'identifier différentes périodes et de pointer une évolution qui permet de comprendre certaines difficultés liées à l'apprentissage de cette notion qui perdurent aujourd'hui.

I.2.1 : Première période avant 1902 : l'algèbre au service de la géométrie

Nous allons regarder comment certaines définitions sont présentées dans les manuels pour repérer des disparités et des continuités. Ces exemples ne sont pas choisis pour leur aspect novateur mais parce qu'ils sont indiqués dans les programmes comme étant des références et donc témoignent des choix de transposition didactique et des objectifs de l'apprentissage à cette époque.

Sur cette période, l'algèbre a pour fonction d'outiller la résolution de problèmes géométrique par leur mise en équations. L'algèbre est censée rendre la recherche plus simple et plus sûre, le traitement algébrique permettant un traitement exhaustif. Elle permet en outre une aide à la formulation et se révèle économique en écriture. Elle a cette force de généraliser et de donner des procédures transférables à une famille de problèmes du même type. On retrouve ce premier aspect du programme dans les études de haut niveau comme par exemple dans le programme d'admission à l'école polytechnique du 9 ventôse an VIII (28 février 1800) où on peut lire : Application de l'algèbre à la géométrie comprenant les propriétés de la ligne d'après son équation.

Le règlement des études des lycées et des collèges du 28 septembre 1814 préconise l'« Arithmétique » de Bezout, Bossut, Marie ou Lacroix et l'Algèbre de Lacroix. Dans son ouvrage, Bossut (Bossut, 1808) montre en quoi la mise en équation des problèmes du géomètre permet non seulement des résolutions efficaces mais ouvre sur de nouveaux champs de recherche :

En lisant avec attention les anciens géomètres, on aperçoit facilement qu'ils possédoient une espèce d'analyse de ressemblance à la nôtre par les principes, traitant les quantités connues comme les inconnues, et cherchant les rapports qu'elles ont les unes avec les autres. Mais ils n'avoient pas su la généraliser et la réduire en calcul. Chaque question particulière exigeoit d'eux une méthode qui, pour ainsi dire, y fût propre individuellement. Quelques génie, quelque élégance qu'ils missent dans leurs solutions, on regrettoit souvent qu'elles fussent trop bornées et trop pénibles. Il étoit à désirer que le géomètre, s'élevant à une plus grande hauteur, pût embrasser d'un même coup-d'oeil et comprendre dans une même formule générale toute une famille de problèmes. C'est à quoi les modernes parvinrent en appliquant l'algèbre à la géométrie. Cette heureuse alliance produisit dans l'empire des mathématiques une révolution qui en recula prodigieusement les limites. (Bossut, 1808)

Il choisit donc dans son ouvrage de montrer comment les notions élémentaires peuvent être redéfinies par cette mise en équation. Il est intéressant de repérer les problèmes qui, à cette époque, vont justifier l'étude de ce qui n'est pas encore nommé « fonction affine » et de voir comment ces problèmes s'articulent avec la mise en texte du savoir. Reprenons par exemple la définition de la droite dans les cours de mathématiques de Bossut :

La ligne droite est celle AB qui va d'un point A à un autre B, sans se détourner en aucun sens ; elle peut être regardée comme produite par le mouvement du point A qui marche de A vers B, en suivant toujours la même direction. (Bossut, 1800)

Nous avons ici une définition de type réelle essentielle qui s'appuie sur la perception (Ouvrier-Bufferet, 2003). Bossut (1800) démontre que deux points suffisent à définir une droite en ces termes :

La ligne droite exprime la distance ou le plus court chemin d'un point A à un autre B. Ce plus court chemin est nécessairement *unique* ; de sorte que du point A au point B on ne peut mener qu'une seule ligne droite, ou que si on veut en mener plusieurs elles se confondront toutes en une seule et même ligne. En d'autres termes, *deux points suffisent pour déterminer la position d'une ligne droite*. (Bossut, 1800)

Nous sommes donc passés d'une définition de nature perceptive à une caractérisation par compréhension avec un caractère d'optimisation lié au concept de distance. On peut noter que les arguments sont du domaine empirique, ce qui peut difficilement être autrement étant donné qu'il s'agit d'un axiome d'Euclide. Il s'agit d'une argumentation par la rhétorique, c'est la force du discours qui doit convaincre, discours éventuellement renforcé par la donnée de contre-exemples : si on prend des lignes brisées, le chemin sera plus long. On peut donc penser que dans l'esprit de l'auteur, l'enseignement d'un concept mathématique comme celui de droite passe par :

- une définition perceptive de l'objet mathématique et d'équivalences ;
- la mise en évidence d'exemples ou de contre-exemples ;
- des représentations du concept.

Cette définition ne met pas le concept en relation avec des problèmes ou des questions. Cette introduction de l'ouvrage vise à poser des définitions et des notions préliminaires, la fonction de cette définition est plutôt une fonction de communication.

Sous l'Empire, la place des disciplines scientifiques diminue. C'est l'enseignement humaniste qui est censé former l'homme moral et cette formation doit être acquise pour que l'on puisse enseigner les sciences. Les mathématiques retrouvent une place dans les classes de philosophie à partir de 1821. L'horaire hebdomadaire prévoit 9 heures de sciences dans cette section contre 3 heures en classe rhétorique. Le livre indiqué pour cette classe de philosophie est l'« Application de l'algèbre à la géométrie » de Bourdon. Dans cet ouvrage (Bourdon, 1831), nous avons une définition mathématique de la droite dont l'axiomatique est la suivante (voir annexe 1) : en premier est définie l'équation d'un point, c'est-à-dire la caractérisation d'un point par ses coordonnées dans un repère ; puis reprenant cette définition, nous avons une caractérisation des points de la droite par leurs coordonnées qui vérifient une relation de la forme $y = ax + b$. Suit une discussion de tous les cas possibles. Par exemple, b est défini comme une distance, b est donc un nombre positif. La définition va devoir être généralisée au cas où b est négatif, de même pour a , ainsi que pour les cas particuliers $a = 0$ et $b = 0$. Tous seront étudiés pour arriver à une formule générale. Nous avons donc ici une définition de type analytique qui se base sur le fait qu'elle fait barrage à toutes les exceptions.

Qu'en est-il dans les enseignements qui précèdent cette classe de philosophie (classe de terminale aujourd'hui) ? Dans le programme de l'enseignement des mathématiques préparatoires dans les collèges royaux de Paris et de Versailles de 18 octobre 1833, on peut trouver :

Cours élémentaire d'arithmétique

Nombres concrets

Définition et propriétés principales des rapports et des proportions

Règle de trois simple, direct et inverse

Règle de trois composée

Règle de société

Règle d'intérêt simple

Règle d'escompte

Géométrie

Définition de la ligne droite

Les problèmes de proportionnalité sont traités par des procédures arithmétiques et la droite est définie dans le cadre de la géométrie. Aucun lien n'est fait entre les deux cadres. Rien n'est prévu pour accompagner le saut conceptuel qui consiste à résoudre par l'algèbre des problèmes géométriques. Pourtant les propriétés de linéarité sont censées être acquises par les exercices et ensuite formalisées par l'écriture algébrique. On trouve par exemple ce type d'épreuve au baccalauréat ès lettres du 14 juillet 1840 :

18 . Démontrer que la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent.

Avec nos notations actuelles la raison étant le quotient de l'antécédent par le conséquent, l'exercice revient à démontrer que pour tous nombres positifs y_1, y_2 et x_1, x_2 non-

nuls, nous avons l'égalité : $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ qui est la propriété de linéarité additive.

Mais ici encore, les démonstrations se font dans un cadre et aucun aller-retour n'est attendu entre géométrie et algèbre.

Cette période se caractérise par une « conception positiviste » de la science. Les mathématiques apparaissent comme une science déductive utile à toutes les autres sciences. Pour ce qui concerne son enseignement, il semble que les mathématiques ont une place privilégiée, on reconnaît comme essentielle la rigueur déductive qui la caractérise.

Il est nouveau que les mathématiques soient élevées au rang de discipline scolaire, formatrice de l'esprit à rang égal avec les humanités classiques. D'autre part, il est tout aussi nouveau que des finalités praticiennes (en référence à des pratiques ou secteurs d'activités professionnelles ou sociales) soient reconnues comme relevant de l'enseignement secondaire. (Gispert, 2000)

Les mathématiques représentent donc à elles seules la majorité des enseignements scientifiques qui ont une place bien modeste dans l'enseignement secondaire traditionnel. A noter qu'à cette époque, le lycée n'accueille pas plus de 5 % d'une classe d'âge. Par contre la démarche d'enseignement doit s'appuyer, au niveau primaire, sur la « réalité concrète » et donc sur des connaissances empiriques, pour peu à peu organiser un passage à l'abstraction par une mise en équation et une définition axiomatique des objets mathématiques au niveau secondaire.

I.2.2 : Deuxième période de 1902 à 1960 : la droite comme représentation graphique de fonction

En 1902, des modifications sont annoncées avec l'objectif de tendre vers un enseignement plus pratique, plus vivant, mieux adapté aux données récentes de la science par l'introduction de travaux pratiques, d'exemples et de problèmes empruntés à la réalité, l'introduction de dessins géométriques pour illustrer les théories. Les sciences naturelles et les sciences physiques subissent de grands changements, elles nécessitent l'étude de variations de grandeurs, ce qui justifie l'étude de la notion de fonction qui jusque là était enseignée de manière disparate (Boyé, 2007). Les objectifs des nouveaux programmes de mathématiques dans les divisions A et B et de la classe de philosophie du 30 juillet 1909 précisent le rôle des mathématiques : « Il s'agit de préparer les élèves à l'étude des sciences physiques qui est supprimé en seconde et première, les heures allant aux mathématiques. Le but est de les préparer à entrer dans les classes de mathématiques spéciales préparatoires qui préparent elles-mêmes aux classes de mathématiques spéciales pour se présenter aux concours ». Seulement le programme est flou (voir annexe 2a) et nécessite des limites, réclamées par les enseignants et le sénat. Des allègements sont donc proposés en mai 1912 (voir annexe 2b) et un nouvel aménagement en 1925 du programme des classes de terminales scientifiques (voir annexe 2c). Cette période est une période charnière pour la transposition didactique (Chevallard, 1985) de la définition de fonction ou d'équation de droite : il y a une hésitation entre une axiomatique liée à l'analyse et une application des théories algébriques. En effet, les mêmes contenus peuvent apparaître sous le titre « algèbre » comme celui de « fonction d'une variable ».

Dans le manuel « Enseignement secondaire, Algèbre et notions de trigonométrie, classes de 2^e et 1^{re} » (Brachet & Dumarque, 1942) on peut trouver dans le livre II Le Premier Degré, chapitre IV page 97, la définition de la fonction linéaire en ces termes :

Définition : On appelle fonction linéaire un binôme du 1^{er} degré : $y = ax + b$ où a et b sont des nombres donnés.

Plus loin on précise l'origine de la dénomination.

C'est pour rappeler que sa représentation graphique est une ligne droite que la fonction $y = ax + b$ est appelée linéaire.

L'axiomatique de ce cours va nous permettre de comprendre les notions sur lesquelles se base l'apprentissage. La notion de fonction est définie ainsi :

x étant une lettre susceptible de prendre diverses valeurs numériques, on dit que y est une fonction de x si à une valeur donnée de x correspond une valeur déterminée de y . x s'appelle la variable indépendante.

On parle alors d'une « variable dépendante » fonction d'une « variable indépendante ». La représentation graphique d'une fonction est définie par la proposition suivante :

Pour représenter graphiquement la variation d'une fonction, on porte en abscisse une valeur de la variable indépendante et en ordonnée la valeur correspondante de la fonction. On obtient ainsi autant de points représentatifs que l'on veut. Les points représentatifs forment un arc de courbe AB.

Suit la définition de la fonction linéaire, et l'étude de cette fonction (ensemble de définition, sens de variation justifié par des exemples, l'unicité des antécédents pour n'importe quelle nombre, le signe du binôme, le tracé de la représentation graphique). Page 102 il est précisé l'importance de la fonction $y = ax$: « Quand deux grandeurs sont proportionnelles, le nombre x qui mesure l'une et le nombre y qui mesure l'autre sont liés par une relation de la forme $y = ax$. »

Ensuite la droite est caractérisée par une équation de la forme : $Ax + By + C = 0$: la démonstration étudie le cas où A et B sont non-nuls, l'équation revient alors à une équation de la forme $y = mx + p$. Si $p = 0$, on a une équation $y = mx$ et une démonstration utilisant les triangles semblables permet de prouver l'alignement des points avec l'origine. Réciproquement, il est prouvé qu'une droite passant par l'origine admet une équation de la forme $y = mx$. Le coefficient angulaire est alors défini comme l'ordonnée du point qui a pour abscisse (+1). L'étude générale est faite sur un exemple : $y = 2x + 3$. La droite graphique de $y = 2x$ étant connue, le problème revient à déterminer le lieu des points M tels que, M' étant sur la droite graphique D de $y = 2x$ et M étant un point d'abscisse \overline{OP} , on a $\overline{M'M} = 3$. Ce lieu est la droite Δ obtenue par translation de la droite D dans la direction (Oy) d'amplitude +3. Les cas particuliers sont étudiés. On regarde ce qui se passe si $B = 0$, et pour cela on s'appuie toujours sur un exemple, ici : $2x - 3 = 0$. Le lieu des points est la parallèle à (Oy) qui coupe (Ox) au point A d'abscisse $\frac{3}{2}$. Nous avons le même type de démonstration pour $A = 0$.

Une remarque importante est formulée dans le chapitre « Applications » :

Dès la définition des coordonnées d'un point, nous avons constaté une correspondance réciproque entre les propriétés algébriques des coordonnées et les propriétés géométriques des points ; ainsi :

Coordonnées de même signe points dans l'angle yOx ou son opposé par le sommet

Coordonnées égales points sur la 1^{ère} bissectrice

Un nouvel exemple vient d'apparaître :

coordonnées liées par $A + By + C = 0$. Points en ligne droite.

C'est l'étude systématique de cette correspondance qui constitue la géométrie analytique : les propriétés d'une figure se déduisent de certaines équations et d'opérations algébriques. (Brachet & Dumarque, 1942)

Les auteurs posent ici les premiers éléments de la conversion entre le registre algébrique et le registre géométrique. Cette conversion n'est pas présentée comme une convention, elle s'appuie sur des démonstrations. Par exemple, l'alignement n'est pas seulement constaté de manière perceptive, il est démontré.

Ces extraits de manuels concernent le même niveau que précédemment. Ils montrent que les définitions se fondent de moins en moins sur une représentation empirique des objets mathématiques étudiés : des démonstrations viennent renforcer les liens entre les différents cadres. Cela peut s'interpréter comme l'amorce de la recherche d'une théorie générale à travers la ressemblance entre des procédures relevant de cadres ou de problèmes différents. Les exercices et problèmes sont proposés à la fin du livre II et portent sur l'ensemble du programme sur le premier degré. Il s'agit d'exercer les techniques de résolutions algébriques (équations, inéquations, systèmes linéaires du premier degré à deux inconnues) puis de résoudre des problèmes du 1^{er} degré qui commencent par des problèmes anciens (Diophante, Pythagore, Euler) et enfin des problèmes numériques, des problèmes littéraires. Dans les énoncés les procédures ne sont pas données, l'utilisation de fonctions linéaires n'est pas précisée, la variable n'est pas toujours indiquée. Les sujets de baccalauréat précisent par contre si la solution attendue est géométrique. Ainsi, ce manuel est caractérisé par rapport aux précédents exemples par la rigueur des démonstrations, par l'axiomatique mise en place qui fait de la fonction $y = ax$ un simple cas particulier de la fonction linéaire générale définie au préalable et par le lien qui est mis en place entre la géométrie et l'analyse par le biais de la géométrie analytique. Les deux cadres sont pourtant distingués par l'utilisation de lettres différentes : $y = mx + p$ au moment de la démonstration des propriétés géométriques et $y = ax + b$ pour les parties relevant plus de l'algèbre. Ce tournant va se préciser dans les programmes et instructions du cours complémentaire (Arrêté du 24 juillet 1947 édition 1949 Hachette, voir annexe 2d). Pourtant ce programme suggère de commencer par l'étude de la fonction $y = ax$ avant de généraliser avec la fonction $y = ax + b$, ce qui amènera peut-être à distinguer les deux fonctions et non à considérer la première comme un cas particulier de la seconde.

Ainsi dans le manuel « Algèbre classes de 5^e, 4^e et 3^e » écrit par une réunion de professeurs de l'enseignement libre en 1951, le chapitre XXXVI reprend la notion de grandeurs directement proportionnelles illustrée par des exemples de grandeurs quotients (prix au mètre, vitesse constante), la représentation graphique obtenue est une demi-droite qui correspond à une fonction $y = ax$ pour x positif. La généralisation par l'étude systématique de la fonction $Y = ax$ pour toute valeur donnée à x a pour objectif une décontextualisation et une plus grande abstraction. On remarque que le y minuscule est devenu Y . Il s'agit sans doute

d'une étape dans le codage de ce qu'est une fonction dans l'ensemble continu des réels, d'une relation discrète dans un contexte ou une situation concrète.

Le chapitre suivant aborde la fonction $Y = ax + b$ comme l'étude du cas des grandeurs à accroissements proportionnels. Le chapitre suit le même plan, partant d'une situation concrète reposant sur des intérêts à taux fixe, et une autre sur le déplacement d'un cycliste.

Dans « Algèbre Arithmétique et géométrie classe de troisième » de Lebossé et Hémerly de 1964, on trouve un chapitre intitulé : Fonctions et graphes. La notion de fonction est définie ainsi : « un nombre y est fonction d'un nombre variable x quand à chaque valeur de x correspond une valeur déterminée de y . » On définit ensuite son ensemble de définition, son sens de variation, les coordonnées des points d'un plan pour arriver à la représentation graphique d'une fonction.

Le chapitre suivant est « Étude de la fonction : $y = ax$. » On y redéfinit les grandeurs proportionnelles par le rapport constant entre deux grandeurs x et y et la relation $\frac{y}{x} = a$ donne la relation $y = ax$ qui définit la fonction étudiée sans porter de nom particulier. Le théorème de Thalès est utilisé pour démontrer l'alignement des points permettant de dire que « le graphe de la fonction $y = ax$ est une droite passant par l'origine des coordonnées. »

Enfin le chapitre : « Étude de la fonction : $y = ax + b$ » est introduit par un théorème : « La fonction $y = ax + b$ est définie pour toute valeur de x . Elle est croissante lorsque a est positif et décroissante lorsque a est négatif ».

Immédiatement suit un problème qui contextualise la situation :

150. Problème. — *Un train parti de Paris se dirige vers Bordeaux à la vitesse de 75 km à l'heure. A minuit il a parcouru 125 km. Calculer et représenter graphiquement la distance parcourue à une heure quelconque.*

La tâche concerne une représentation de la distance parcourue dans deux registres différents que sont l'algèbre et le graphique. Pour établir l'expression algébrique demandée, il faut définir les variables. Les deux grandeurs en question sont la distance parcourue en kilomètres et le temps en heures. En fait les deux grandeurs implicitement proportionnelles sont la distance (variation de lieux) et la durée (variation de temps), le rapport de proportionnalité étant la vitesse considérée comme une vitesse moyenne uniforme. Comme il n'est pas indiqué à quelle heure le train part de Paris, il est proposé de poser que minuit représente 0 heure.

Minuit représente 0 heure. Désignons par x l'heure actuelle. De minuit à x h le train a parcouru $75 \text{ km} \times x$. La distance totale y parcourue par le train est donc, en kilomètres : $y = 75x + 125$.

La résolution détaille le tracé de la droite d'équation $y = 75x$ et justifie que celle d'équation $y = 75x + 125$ est parallèle à la première par l'étude du quadrilatère OBMN où $M(x ; 75x + 125)$; $N(x ; 75x)$ et $B(0 ; 125)$.

Cette relation s'applique aux distances parcourues avant minuit à condition de considérer : $x = -1$ pour 23 h, $x = -2$ pour 22 h, etc...

Traçons deux axes de coordonnées : Ox gradué en heures, Oy en kilomètres et supposons tracée la droite OA représentant $y = 75x$.

Considérons le point M de coordonnées x et $y = 75x + 125$. Soit N le point de OA ayant même abscisse x et d'ordonnée $y = 75x$. Le segment NM est égal à la différence des ordonnées et, quel que soit x , représente 125 km à l'échelle des ordonnées. Ce segment NM est donc toujours égal et parallèle au segment $OB = 125$ de l'axe Oy .

Le quadrilatère OBMN est donc un parallélogramme et lorsque x varie le point M décrit la droite menée par B et parallèle à OA .

Cette droite doit être limitée au point d'ordonnée $y = 0$, correspondant au départ du train de Paris. Son abscisse vérifie la relation $75x + 125 = 0$, soit $x = -\frac{5}{3}$. Le train est parti de Paris à : $24 \text{ h} - \frac{5}{3} \text{ h} = 22 \text{ h} \frac{1}{3}$ ou 22 h 20 m.

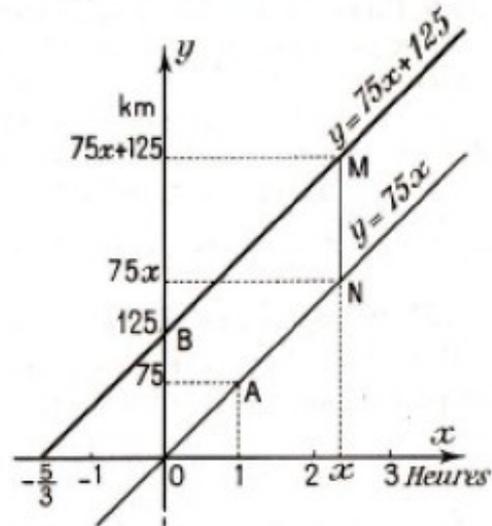


Fig. 12.

Illustration 1: Extrait manuel (Lebosse & Hemery, 1964, p.106-107)

On notera que la fonction est considérée comme affine uniquement par le choix de l'origine du repère et de la grandeur en abscisse. Si nous avons posé que le départ de Paris représentait 0 heure et que l'on désignait par x la durée du trajet, nous aurions obtenu une fonction linéaire. Ces choix ne sont pas explicités par contre la fin de la correction montre comment la représentation choisie permet de répondre à des questions liées à la situation, en particulier comment déterminer l'heure de départ du train de Paris. Pour être cohérent avec le modèle, il est précisé que « la droite doit être limitée au point d'ordonnée $y = 0$ qui correspond au départ de Paris ». Il n'est rien dit de l'arrivée à Bordeaux. On comprend ensuite que l'objectif est de caractériser le point d'intersection de la droite, représentation graphique de la fonction affine définie par $y = ax + b$, avec l'axe des abscisses, par le point de coordonnées $(-\frac{b}{a} ; 0)$.

Le problème traité permet de généraliser : « C'est pourquoi la fonction $y = ax + b$ est aussi appelée fonction linéaire. Notons que la relation $y = ax + b$ s'appelle l'équation de la droite. » Ici on commence à préciser le vocabulaire et à distinguer l'expression algébrique de la fonction de l'équation de son graphe, pourtant la notation $f(x)$ n'est pas encore utilisée.

Le chapitre qui suit montre que la représentation graphique de l'équation $ax + by = c$ revient à tracer une droite, on étudie ensuite les systèmes linéaires de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Ce qui fait office de texte de savoir est à la fin du chapitre sous forme de conclusion

1. La fonction $y = ax + b$ est représentée par une droite.
2. a est le coefficient angulaire de cette droite.
3. b est l'ordonnée à l'origine.

La définition semble plutôt de type synthétique, sa composition est aussi sa construction. Le fait de donner un nom aux coefficients semble donner par la même occasion une définition. Un résumé regroupe l'ensemble des résultats à mémoriser : croissance en fonction du signe de a , intersection avec les axes, cas particulier si $a = 0$. Les exercices permettent de s'entraîner à représenter graphiquement des fonctions $y = ax + b$, à déterminer a et b connaissant des points appartenant à la représentation graphique de la fonction, ou à étudier des propriétés géométriques (parallélisme, orthogonalité, intersection). Ensuite viennent des problèmes issus d'expériences ou de la vie courante (allongement d'un ressort en fonction de la température, changement d'unité °C et °F, distance parcourue par un cycliste, location de taxi, capital placé, mélange de liquides et prix). Plus loin dans le manuel sont proposés des exercices groupés suivant des types de problèmes : application de la fonction linéaire au mouvement uniforme, à des questions de géométrie ou des applications diverses. Le protocole est toujours le même : mise en équation (le texte précise toujours la variable et les notations), représentation graphique (on donne comme consigne de représenter les variations de la fonction, les échelles sont données), résolution d'équation par le calcul, contrôle du résultat sur le graphique (on parle de solution algébrique et solution graphique).

On remarquera qu'un chapitre aborde la question du mouvement uniforme. Si un mobile se déplace sur un axe dans le sens positif à la vitesse v et si au temps $t = 0$, son abscisse est égale à x_0 , alors son abscisse au temps t est : $x = x_0 + vt$. Cette expression permet de conclure que tout mouvement uniforme est représenté graphiquement par une droite et donc que les problèmes qui relèvent de mouvements uniformes peuvent être résolus à l'aide de graphiques.

I.2.3 : Troisième période : à partir de 1959, le temps des réformes

À la fin des années 1950, l'organisation institutionnelle induit des inégalités. Plusieurs réformes vont avoir pour objectif de réduire ces inégalités : en 1959 la scolarité devient obligatoire jusqu'à 16 ans et les CEG et CET sont créés ; en 1963 ce seront les CES, en 1965 les seconds cycles sont restructurés. Dans ce contexte, la réforme des mathématiques

modernes a plusieurs objectifs et plusieurs enjeux. A cette période, on a le souci d'une mathématique utile pour la technique, la science, l'économie moderne. L'idée que la science est un ensemble de procédures pour résoudre un certain type de problèmes amène à envisager un enseignement des mathématiques visant d'une part à reconnaître les procédures utiles et d'autre part à un bon usage des techniques mises en œuvre dans ces procédures. La réforme est construite autour de deux idéologies : le retour au concret avec l'activisme pédagogique et les mathématiques comme langage unifié de la rationalité moderne. « Cette conception étriquée quant au lien entre le langage et la pensée conduit à croire que la connaissance des définitions suffit à la connaissance des objets et à confondre le respect des procédures logiques avec le raisonnement » (Bkouche, Charlot, & Rouche, 1991a).

Les théories de Piaget apportent des éléments à la mise en place des nouveaux programmes. L'idée de stades (intuitif, opératoire concret, opératoire formel) amène à structurer l'enseignement suivant ce principe. Le terme « analyse » apparaît pour la première fois au lycée sous la rubrique « Algèbre, et notions d'analyse » dès les classes de seconde et première dans l'arrêté du 6 mars 1962, on estime qu'à cet âge on peut aborder des notions plus formelles (voir annexe 3a). Les publications de l'APMEP de l'époque témoignent de l'appui de l'association au nouveau programme (voir annexe 3b).

Dorier (Dorier, 2000) explique comment l'enseignement de l'algèbre linéaire s'est imposé et quelle transposition didactique a été choisie. Il cite page 44 Dieudonné :

Ainsi il faut préparer les élèves à l'algèbre linéaire qui est à la base de la plupart des notions enseignées en propédeutique. D'autre part, j'ai cherché à résister à la tentation d'introduire *prématurément* les théories qui seront enseignées à l'Université. Il me semble que la nature nous a heureusement fourni « une ligne de démarcation » toute tracée, en nous dotant de l'intuition géométrique pour les espaces à 2 et 3 dimensions ; il est donc possible de représenter graphiquement *tous* les phénomènes de l'Algèbre linéaire limités à ces deux dimensions (et bien entendu aux scalaires *réels*). (Dieudonné, 1964)

L'intérêt de la géométrie dans l'enseignement secondaire tient alors en ce qu'elle représente un « merveilleux laboratoire où se familiariser avec des cas particuliers d'aspect fort simple et susceptible d'images concrètes, de notions dont l'essence est beaucoup plus générale mais aussi beaucoup plus abstraite, et qu'il faudra assimiler sous cette forme générale plus tard. » (Dieudonné, 1964)

En fait l'algèbre linéaire nécessaire pour les études supérieures s'impose dans l'enseignement secondaire mais deux choix sont possibles : utiliser la géométrie et une certaine intuition permettant de se représenter le plan et l'espace comme des espaces euclidiens de dimension 2 et 3 ; ou commencer par une définition axiomatique des espaces vectoriels afin de familiariser les futurs étudiants au caractère abstrait de cette théorie englobante.

Dans le groupe « Liaison Lycée-Université » de l'IREM de Lille en 1998, dont le but est de définir ce que serait « enseigner en mathématiques au Lycée au XXI^e siècle »,

Daubelcour mène une étude de l'évolution des contenus des programmes de mathématiques au Lycée au cours du siècle écoulé. Il écrit concernant la réforme de 1970 :

Au début du siècle, l'idéologie scientiste se basait sur l'empirisme ; Hilbert lui-même reconnaissait la place, à côté de l'axiomatique et du formalisme, d'une approche intuitive de la connaissance des objets étudiés. Par contre en 1960-70 les concepteurs abandonnent tout recours à l'empirisme et au concret. Ce qui caractérise le mieux cette idéologie scientiste et devient la pensée dominante dans les années 60-70, c'est le "structuralisme". Ce courant de pensée est issu de la linguistique qui, par ses méthodes d'analyse, est proche des mathématiques. En France, il va toucher l'anthropologie, la philosophie, la psychanalyse et l'éducation avec respectivement Levi-Stauss, Althusser, Michel Foucault, Lacan et Piaget. Cette diversité rend une définition simple du structuralisme d'autant plus difficile : retenons que cette théorie exprime le primat de la structure sur l'objet, le phénomène ou l'événement. (Daubelcour, 2009)

Nous avons donc ici deux interprétations possibles mais qui ne s'opposent pas : d'une part l'algèbre linéaire est une théorie abstraite aux caractères unificateurs et généralisateurs qu'il est difficile d'enseigner puisqu'elle ne permet pas une économie en terme de procédures pour les problèmes qui peuvent se poser à ce niveau de la scolarité, il semble donc préférable de l'introduire par une approche axiomatique ; d'autre part l'idéologie basée sur le structuralisme donne priorité au langage donnant à l'algèbre le statut de langue universelle de la science, une approche axiomatique permet donc une construction générale abstraite prête à être reconstruite dans tous les domaines. Pourtant même dans cette approche axiomatique, plusieurs entrées sont envisageables. Il y a d'une part ceux qui préconisent le choix d'une axiomatique qui définit d'abord l'ensemble des points et un système d'axiomes, et ensuite intervient seulement l'algèbre linéaire qui permet de définir le groupe affine et les isométries. Ce sera le choix pour le collège avec la définition suivante :

La droite affine est un ensemble de points E muni d'une famille de bijections de E sur E telles que si f et g sont deux bijections, il existe deux réels a et b tels que $\forall M \in E, g(M) = af(M) + b$.

D'autre part, nous avons ceux qui préfèrent s'appuyer sur le socle de l'algèbre linéaire avec son axiomatique très simple pour construire la géométrie affine et enrichir celle-ci de « façon naturelle » par des considérations métriques. Ce sera le choix au lycée où la notion d'espace vectoriel sera étudiée dès la classe de seconde. Les transformations affines sont définies par leur application linéaire associée et un couple de points homologues, comme l'illustre l'extrait du tome 3 de géométrie dans la "collection Durrande" publié en 1975 dont les auteurs sont trois anciens de l'E.N.S.E.T (Ecole Nationale de l'Enseignement Technique): A.Thuizat, G.Girault et E.Aspee (voir annexe 4).

Dans le programme de seconde applicable en 1968 apparaît la notation $f(x)$:

Notion de fonction conçue comme correspondance.

Fonction d'une variable ; notation $y=f(x)$. Notion d'accroissement, fonction croissante, décroissante, fonction constante sur un intervalle.

Transformation du binôme $ax + b$ conduisant à la forme $a(x - p)$.

Fonctions $y = ax$, $y = ax + b$, de la variable x : existence, sens de variation, étude lorsque x tend vers l'infini ; signe.

Mais c'est dans le programme de 1972 (arrêté du 2 mai 1972) en classe de troisième que nous voyons pour la première fois la dénomination encore utilisée aujourd'hui de fonctions linéaires et affines. En 4^e, ce même programme met en place la structure de l'ensemble des réels \mathbb{R} qui permet ensuite de définir les fonctions polynômes (applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R}). Dans le manuel de 4^e cours Bredif de chez Hachette en 1968, on peut donc lire dans le chapitre 16 : expressions algébriques, monômes, polynômes, la définition d'une fonction : « On appelle fonction une relation qui, à chaque élément d'un ensemble de départ A associe au plus un élément d'un ensemble d'arrivée B. » Puis vient celle d'une fonction monôme : « On appelle fonction monôme une fonction comportant uniquement comme opérations sur la ou les variables, des multiplications ou des élévations à une puissance positive. » Suivent des exemples présentés comme suit :

$$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad x \xrightarrow{f} y = ax$$

La fonction affine peut donc alors être définie comme une fonction polynôme dont l'expression algébrique est un binôme du premier degré (voir annexe 5), le vocabulaire et les notations prennent beaucoup plus d'importance. Aucune application concrète n'est proposée, les instructions officielles vont bien dans ce sens donnant à l'enseignement l'objectif de « faire saisir le sens et la vie profonde des êtres de la mathématique ». Il s'agit bien de séparer les êtres mathématiques du monde empirique. Dans la circulaire n°71-370 du 22 novembre 1971, il est précisé que :

L'étude des solutions des équations et inéquations à une inconnue réelle appellera l'emploi d'une représentation graphique [...] l'ensemble des points $(x ; y)$ du plan affine \mathbb{R}^2 , vérifiant une même relation du premier degré, par exemple $2x + 3y - 12 = 0$, est, - on le démontrera en géométrie, - une droite affine du plan affine \mathbb{R}^2 ; elle est représentée, dans le plan physique, muni d'un repère, par une droite physique D qui en est la représentation graphique.

On demande donc de différencier la fonction affine, sa représentation graphique qui est une droite affine et la droite physique représentation graphique de la droite affine.

Pour se donner une idée des attentes du système scolaire, nous pouvons étudier les Annales du BEPC (Brevet d'Étude du Premier Cycle) de 1976 (annexe 6). Les questions portent sur l'objet fonction et il s'agit de faire des additions, des compositions de fonctions, de vérifier que l'on a ou non une bijection ; ou de résoudre des équations et inéquations $f(x) = k$; $f(x) = g(x)$; $f(x) \geq g(x)$... plus rarement de résoudre un problème dans un contexte plus concret. En fait les grandeurs disparaissent des programmes en 1970 (Chambris, 2008). Les mêmes types de problèmes sont posés dans le cadre géométrique mais en partant de droites dont on donne une équation, ou comme dans le sujet de Besançon en partant de fonctions dont on trace la représentation graphique puis par un travail sur la droite comme objet géométrique. Les techniques visées sont essentiellement la résolution de systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues, la maîtrise du calcul algébrique (développement, factorisation) pour résoudre des équations ou pour déterminer l'ensemble de définition de fonctions. La terminologie est « application affine » ou « fonction affine ». On ne parle pas d'applications linéaires.

La réforme aura bien du mal à être appliquée, les enseignants ont besoin de formation. D'autre part, il ne s'agit pas que d'une réforme portant sur les contenus, les idées de Piaget amènent une conception de l'apprentissage non plus par le langage mais par l'activité. Gilbert Walusinski³ alors président de l'APMEP, définit la nouvelle pédagogie mathématique par cinq principes :

- Priorité à l'action de l'élève.
- C'est à l'élève d'observer, d'analyser.
- C'est à l'élève d'abstraire.
- C'est à l'élève de déduire.
- C'est à l'élève d'appliquer ; c'est-à-dire d'utiliser ses connaissances, ses acquisitions.

Les difficultés rencontrées sont multiples et changer les programmes ne va pas toutes les résoudre. On propose de mettre en place une commission des programmes pour permettre aux enseignants de participer à leur élaboration. On commence par ailleurs à réfléchir aux moyens pédagogiques de la mise en activité des élèves, au sens des apprentissages, à la motivation. Du côté de l'enseignement, la didactique des mathématiques commence à être introduite en formation et à prendre place dans les manuels.

³ <http://www.apmep.asso.fr/Notre-president-d-honneur-Gilbert> consulté en mai 2011.

I.2.4 : Quatrième période à partir de 1986 : le problème au cœur du processus d'apprentissage

Les programmes du collège de l'arrêté du 14 novembre 1985 sont pour la première fois édités dans un format poche et donc accessibles au public. La rédaction est pensée pour être accessible à ce public mais aussi pour permettre plus de liberté pédagogique aux enseignants. Les mathématiques sont organisées en trois grands domaines : travaux géométriques, travaux numériques et organisation et gestion de données, fonctions. En classe de 4^e il est prévu d'aborder « applications linéaires et proportionnalité : représentation graphique d'une application linéaire, notion de coefficient directeur, de pente » et en classe de 3^e « applications affines : représentation graphique d'une fonction affine ». Dans la partie géométrie on aborde les équations de droites et dans les travaux numériques la résolution graphique d'équations du premier degré. Les savoirs sont donc organisés dans des cadres et il n'est pas précisé si le passage d'un cadre à l'autre doit être travaillé. On s'intéresse plus à des tâches qu'à une technique ou une technologie, encore moins à une théorie. Il est demandé de faire appel à l'activité des élèves et de privilégier la résolution de problèmes et les applications.

Le programme du 25 avril 1990 modification de l'arrêté du 14 mars 1986, BO N°20 du 17 mai 1990, classe de seconde, prévoit :

Fonctions :

Fonctions usuelles

On mettra en valeur la diversité du comportement des fonctions. Dans ce cadre, il est important que les élèves soient entraînés à mieux maîtriser les situations de proportionnalité, dont l'étude a été abordée au collège, en relation avec l'étude des fonctions linéaires et des fonctions affines.

Variation et représentation graphique des fonctions : $x \rightarrow ax+b \dots$

Arrivés en seconde, les élèves associent le mot « fonction » aux propriétés de linéarité. Il devient difficile d'aborder le concept de fonction tant la représentation des fonctions affines est intégrée. L'étude de l'application linéaire sera donc bientôt abandonnée en 4^e au profit d'une pratique plus importante de « problèmes mettant en œuvre la proportionnalité » (vitesse, changement d'unités, grandeurs quotients...). Le mot « application » semble abandonné au profit de la terminologie « fonction », « en fonction de » qui correspond mieux à l'objet mathématique considéré. On peut parler de fonction de proportionnalité ou de fonction à accroissements proportionnels (Bulletin APMEP décembre 1996 n°407). La réforme du collège de 2001 précise donc que « l'essentiel est que les élèves parviennent à maîtriser les différents aspects de la proportionnalité et se familiarisent avec les grandeurs utilisées dans la vie courante et les autres disciplines. Ils sont amenés à rencontrer des liens entre variables préparant à la notion de fonction qui n'est pas travaillée au collège dans un cadre général. Il faut les initier à la lecture et à l'utilisation de représentations graphiques. » (CNDP & Lang,

2002). C'est le début d'une nouvelle conception des mathématiques comme outil de modélisation, au service des autres disciplines. C'est aussi le premier texte dans l'enseignement faisant référence à des compétences, idée qui va peu à peu s'imposer dans les politiques éducatives. Cette fois ce n'est pas la tâche qui prédomine mais le passage d'un cadre à l'autre pour résoudre des problèmes. On insiste sur la prise d'informations sous toutes ses formes. L'entrée de l'informatique et des outils numériques modifie aussi considérablement la manière dont l'information est communiquée et nécessite de nouveaux apprentissages.

On peut lire dans le programme de 2000 (*BO HS N°6 du 12 août 1999*) classe de seconde : « Il est souvent utile aux élèves de revoir, à l'éclairage des propriétés de linéarité (l'image d'une somme est égale à la somme des images, l'image de k fois un nombre est k fois l'image de ce nombre), les pièges classiques que constituent la somme de deux carrés, de deux inverses, de deux racines ». La théorie n'étant pas enseignée, on réalise que les élèves mettent en place des « théorèmes en acte », c'est-à-dire qu'ils construisent par eux-mêmes des règles éventuellement fausses, et même parfois plusieurs règles qui cohabitent tout en étant contradictoires. L'idée ici est de se focaliser sur la caractérisation des fonctions affines non seulement pour définir correctement l'objet mais pour imaginer qu'il existe d'autres fonctions n'ayant pas ces caractéristiques. Le programme précise : « Objectif : étudier quelques fonctions de références préparant à l'analyse. » et dans le cadre *Calcul et fonctions* on trouve :

Contenu	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Fonctions linéaires et affines	Caractériser les fonctions affines par le fait que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable.	Exemples de non-linéarité. En particulier on fera remarquer que les fonctions carré, inverse,... ne sont pas linéaires.

Il est conseillé de présenter des contre-exemples pour définir l'objet. Dans l'idée de définir le concept à travers des attributs, c'est par comparaison d'exemples « oui » et d'exemples « non » que se structure un réseau de caractéristiques liées au concept. En géométrie, les équations de droites sont introduites en classe de troisième dans le cadre des représentations graphiques des fonctions affines. C'est ce point de vue, indispensable et suffisant pour toutes les poursuites d'études qui a été privilégié : d'où la caractérisation analytique des droites proposée. Aucun développement n'est demandé sur la forme générale mais les élèves devront néanmoins être capables de s'appuyer sur l'équivalence d'expressions telles $4y + 2x - 1 = 0$ et $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ pour interpréter géométriquement une résolution de systèmes.

Contenu	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Équations de droites	Caractériser analytiquement une droite, reconnaître que deux droites sont parallèles	On démontrera que toute droite a une équation de la forme $y = ax + b$ ou $x = c$.

Le programme propose en outre des thèmes d'étude et parmi ceux-ci : « Fonctions affines par morceaux conforme à un tableau de variation ou un tableau de valeurs et problèmes d'interpolation linéaire. »

Si l'ingénierie didactique n'a pas donné les résultats escomptés dans les classes dites ordinaires, il semble cependant acquis que la résolution de problème est au centre de l'activité mathématique. L'entrée des programmes de 2008 (BO HS N°6 du 19 avril 2007) collège propose les contenus suivants :

Organisation et gestion de données, fonction :

Maîtriser différents traitements en rapport avec la proportionnalité ;

Approcher la notion de fonction (exemples des fonctions linéaires et affines) ;

S'initier à la lecture, à l'utilisation et à la production de représentations, de graphiques, et à l'utilisation d'un tableur.

La notion de fonction est donc approchée globalement dès le collège comme outil pour modéliser, expliquer, des situations issues souvent de problèmes concrets. Il est précisé dans les intentions que « Pour être efficaces, les connaissances doivent être identifiées, nommées et progressivement détachées de leur contexte d'apprentissage. »

Sur cette période, on donne aussi une place centrale à la résolution de problèmes car les évaluations internationales PISA montrent que les élèves français savent globalement restituer des connaissances mais n'arrivent pas à les mobiliser dans des situations nouvelles (D.E.P., 2004). La question est donc celle du transfert, comment la résolution d'un problème permet-elle de construire des connaissances mobilisables ? Les exemples d'activités et les commentaires du B.O. N°6 du 19 avril 2007 Hors série essayent de donner des pistes pour favoriser une pratique pédagogique partant des connaissances des élèves pour construire la théorie et il est demandé de prouver autant que possible les résultats obtenus.

Les Instructions Officielles de 2008 pour le collège mettent en avant le rôle des mathématiques comme outils de modélisation au service de la compréhension du monde :

A l'issue de ses études au collège, l'élève doit s'être construit une première représentation globale et cohérente du monde dans lequel il vit. [...] Les mathématiques fournissent des outils puissants pour modéliser des phénomènes et anticiper des résultats, en particulier dans le domaine des sciences expérimentales et de la technologie, en permettant l'expression et le développement de nombreux éléments de connaissance. Elles se nourrissent des problèmes posés par la recherche d'une meilleure compréhension du monde, leur développement est également, pour une très large part, lié à la capacité de l'être humain à explorer des concepts théoriques.

Dans le bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008 ; programme du collège ; programmes de l'enseignement de mathématiques on lit :

L'organisation et la gestion des données sont indispensables pour comprendre un monde contemporain dans lequel l'information chiffrée est omniprésente, et pour y vivre. Il faut d'abord apprendre à lire et interpréter des tableaux, schémas, diagrammes, à réaliser ce qu'est un événement aléatoire. Puis apprendre à passer d'un mode de représentation à l'autre, à choisir le mode le plus adéquat pour organiser et gérer des données. Émerge ainsi la proportionnalité et les propriétés de linéarité qui lui sont associées. En demandant de s'interroger sur la signification des nombres utilisés, sur l'information apportée par un résumé statistique, sur les risques d'erreur d'interprétation et sur leurs conséquences possibles, y compris dans la vie courante, cette partie des mathématiques contribue à former de jeunes adultes capables de comprendre les enjeux et débats de la société où ils vivent.

Les intentions sont donc clairement de favoriser une pratique pédagogique mettant l'élève en activité à partir d'une situation-problème ou d'un problème ouvert, d'une mise en débat et d'une correction collective qui amène à une institutionnalisation. Le rôle essentiel des mathématiques devient la modélisation. L'objectif est de comprendre le monde qui nous entoure. La réalité perçue, les résultats d'expériences sont alors représentés dans différents registres sémiotiques dont l'élève doit apprendre à la fois le code et les règles.

La mise en place du socle passe par un inventaire des compétences jugées indispensables pour un élève à la sortie du collège. La notion de fonction affine n'apparaît pas dans le socle en tant que telle, mais on y trouve des compétences liées aux calculs sur les grandeurs. Aucun formalisme n'est exigé et l'utilisation de l'algèbre n'est pas un attendu, l'approche algorithmique permet d'aborder la formule à travers le programme et l'utilisation d'un tableur-grapheur (voir annexe 7).

En seconde, on retrouve toujours les deux cadres de travail : analyse et géométrie. L'équation de droite de la forme $ax+by+c = 0$ apparaît comme une caractérisation permettant d'englober tous les cas de figures possibles en distinguant les représentations de fonctions affines ($b \neq 0$) et les droites parallèles à l'axe des ordonnées ($b = 0$). Le lien avec les vecteurs doit permettre de donner du sens à la proportionnalité des accroissements et le texte précise dans la partie « géométrie » que la droite est considérée comme courbe représentative d'une fonction affine.

L'apprentissage en 3^e et en 2nde se base sur une connaissance des situations de proportionnalité et sur la modélisation de ces situations par une fonction, le concept de fonction étant construit sur le concept de variables. Il s'agit de repérer deux grandeurs qui varient l'une en fonction de l'autre, que l'accroissement de l'une est proportionnel à l'accroissement de l'autre et que sur un graphique les points obtenus sont alignés. Le programme (voir annexe 8) précise qu'il n'est pas question de donner une définition formelle de la notion de « fonction ». On travaille donc implicitement sur des variations de grandeurs connues soit par des graphiques, soit par des tableaux de valeurs, soit encore par un processus de calcul donné sous forme de calcul ou d'algorithme.

Si maintenant nous regardons du côté des modalités d'enseignement de ces contenus, la réforme de 1986 amorce un changement de point de vue sur l'analyse qui, comme l'indique M. Artigue (Artigue, 1996b), opte pour une approche intuitive de l'analyse et pose de nouveaux problèmes :

Des intentions louables des promoteurs à la réalité des classes, les décalages sont perceptibles. Les problèmes riches qui doivent motiver l'introduction des notions et techniques, passés au filtre des manuels, des contraintes d'écriture de ces derniers comme du souci compréhensible de ne pas heurter les pratiques usuelles des enseignants, deviennent souvent de pseudo-activités, où l'élève, conduit pas à pas, devient un simple exécutant de micro-tâches dont la cohérence globale n'a aucune raison de lui apparaître. [...] De ce fait, le cours qui est censé suivre ces activités introductrices est souvent en fort décalage avec ce qu'ont réellement vécu les élèves. Les choix faits au niveau de la formalisation, des définitions ou de leur absence ne sont pas non plus sans poser problèmes. On le voit bien à la lecture des manuels où le statut des énoncés est le plus souvent ambigu. On peut se demander quelles répercussions ont les choix effectués sur la conception que se font les élèves du vrai et du faux en mathématiques, et si la difficulté réelle à engager le jeu des preuves et réfutations sur des bases aussi floues, ne renforce pas des fonctionnements peu scientifiques ou pilotés par le seul contrat didactique. (Artigue, 1996b)

Ce qui est dénoncé ici est bien la difficulté de l'institutionnalisation. Entre le nécessaire passage par l'activité, la prise en compte de l'intuition, la capitalisation de savoirs issus des expériences et la mise en forme d'un savoir structuré, il manque une étape dont la dévolution n'est pas encore pensée.

I.2.5 : Conclusion sur l'évolution de la transposition didactique de la notion de fonction affine

Nous avons donc distingué cinq périodes qui se succèdent et qui se caractérisent par :

- 1) Période avant 1902 : l'étude des situations de proportionnalité se fait par des procédures arithmétiques, l'affinité est étudiée dans ce cadre (variations proportionnelles), on ne parle pas encore de fonction affine ou linéaire ;
- 2) Période de 1902 à 1960 : l'algèbre se met au service de la géométrie, l'affinité est étudiée dans le cadre algébrique en lien avec les équations de droites, la droite est considérée comme représentation graphique de la fonction $x \rightarrow ax+b$;
- 3) Période de 1960 à 1980 : les fonctions affines de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont un cas particulier dans l'espace vectoriel de fonctions ;
- 4) Période de 1980 à 2016 : Les fonctions sont un outil de modélisation pour résoudre des problèmes. Les fonctions affines sont associées à un processus de calcul permettant de transformer un nombre entrant en un nombre sortant.

Si nous mettons en parallèle les travaux des mathématiciens et le savoir enseigné depuis le début du XX^{ème} siècle, nous voyons que la notion de fonction affine est devenue un objet qui se construit tout au long du secondaire plutôt comme outil de modélisation de la covariation de grandeurs alors même que le travail sur les grandeurs est minime au primaire (Chambris, 2008). Sa formalisation reste difficile du fait des différents cadres dans lesquels cette notion est mobilisée (Grau, 2011). Le tableau 2 a pour but de montrer dans quels contextes se fait la transposition didactique en identifiant pour chaque période ce qui

caractérise la recherche scientifique et les objectifs et moyens que se donne l'école pour enseigner les mathématiques.

Pour ce qui concerne la notion de fonction affine, elle prend des sens et a des fonctions très différentes suivant les périodes, allant d'un traitement arithmétique de valeurs discrètes à une vision covariationnelle de grandeurs continues en passant par une définition abstraite de fonction théorique sur des nombres. On repère les difficultés que peuvent avoir les élèves à aborder cette notion à travers les différents sauts évoqués dans le chapitre I.1.4 :

- le passage de l'arithmétique à l'algèbre ;
- le passage de la courbe au graphe de fonction ;
- le passage du discret au continu ;
- le passage du processus de calcul à l'approche covariationnelle.

Si depuis 1986 la résolution de problèmes est centrale dans l'apprentissage des mathématiques, les problèmes qui servent d'introduction à la notion de fonction affine reviennent, actuellement, aux problèmes initiaux liés à la théorie des proportions et à la notion de grandeur mesurable pour donner un meilleur accès au sens. Cette évolution est liée au fait que les fonctions sont introduites plus tôt dans le cursus scolaire. L'apprentissage manque donc alors d'appuis : les compétences ne sont pas stables en algèbre, les structures ne sont pas enseignées dans le second degré, pas plus que les vecteurs qui permettraient une approche cinétique pertinente. Dans les programmes du collège de 2000, la notion de fonction apparaissait sous le terme de « boîte noire », un nombre entrant dans la boîte et un autre ressortait de la boîte. La transformation était liée à un processus de calcul. Parmi ces processus « multiplier par a » ou « ajouter b » où a et b sont deux nombres réels, apparaissaient comme deux opérations élémentaires. On pouvait alors définir la fonction affine comme un processus de calcul réduit à une composition de ces deux opérations élémentaires et rien d'autre. Cette introduction ne mobilisait pas l'écriture algébrique dans la définition et ne permettait pas d'envisager la proportionnalité des accroissements. Une autre approche qui n'est pas développée dans les programmes, est de partir de la notion de proportionnalité pour définir les fonctions linéaires en les caractérisant par leur représentation graphique puis par des changements de variables, d'associer à une fonction linéaire une famille de fonctions affines comme cela est amorcée dans le Lebossé et Hemery 1964. Dans cette approche, l'aspect graphique apporte le sens. En effet le parallélisme des droites obtenues permet de visualiser la caractéristique commune de la famille de fonctions. Une difficulté demeure cependant dans le passage des mesures aux nombres. Si les mesures sont approchées, les lectures graphiques le sont aussi, il n'est alors pas possible de définir des fonctions numériques « idéales ».

Période	Contexte mathématique qui influence les programmes	Contexte scientifique qui influence les programmes	Finalité de l'école et pratiques pédagogiques	Savoir enseigné
Avant 1902	<ul style="list-style-type: none"> - Notion de fonction - Géométrie au cœur des problèmes - Question de l'infini - Procédures algébriques 	<ul style="list-style-type: none"> - Positivisme : la science permet de construire un monde meilleur. - On part de l'expérience empirique pour aller vers l'abstraction 	<ul style="list-style-type: none"> - Enseignement pour les élites sous le mode de la transmission, cours magistral. 	<ul style="list-style-type: none"> - Arithmétique sur des problèmes concrets. - Géométrie : équation de droites
De 1902 à 1960	<ul style="list-style-type: none"> - Fonction et courbe associée - L'algèbre permet de résoudre des familles de problèmes géométriques - Calcul matriciel, recherche de déterminants 	<ul style="list-style-type: none"> - Les mathématiques sont la science abstraite qui se met au service des autres sciences. 	<ul style="list-style-type: none"> - Enseignement pour les élites. - Sélection par les lettres remise en cause, idée d'humanités scientifiques. - Programmes rédigés par les savants. 	<ul style="list-style-type: none"> - Algèbre - Démonstration algébrique - Géométrie analytique - Les mathématiques sont considérées comme un « langage » pour décrire le monde.
De 1960 à 1980	<ul style="list-style-type: none"> - Recherche de théories qui englobent tous les domaines dans lesquels des procédures se ressemblent (ex: les espaces vectoriels) 	<ul style="list-style-type: none"> - Les structures permettent une modélisation abstraite et le traitement des problèmes dans un cadre purement mathématique. 	<ul style="list-style-type: none"> - Démocratisation de l'enseignement. - Apprentissage lié aux étapes de développement. - Structuralisme. - Importance de l'activité dans l'apprentissage. - Programme rédigé par les savants. 	<ul style="list-style-type: none"> - Mathématiques modernes : espaces vectoriels fonction et opérations sur les fonctions. - L'accent est mis sur le formalisme et l'abstraction.
Depuis 1980	<ul style="list-style-type: none"> - Recherche de modèles adaptés à des situations non stables (probabilités, statistiques, théorie du chaos, fractal...) et aux sciences dites molles. 	<ul style="list-style-type: none"> - Le réel est complexe, le monde est problématique. - Les concepts mathématiques évoluent en fonction de notre représentation du monde. 	<ul style="list-style-type: none"> - Enseignement pour tous. - Constructivisme. - Apprentissage par la résolution de problèmes. - Programmes rédigés par une commission regroupant des professionnels de l'enseignement (didacticiens, chercheurs, inspecteurs, enseignants) 	<ul style="list-style-type: none"> - Le savoir se construit de façon provisoire en fonction des problèmes rencontrés - Pas de définitions mais des rencontres avec des situations de proportionnalité, des fonctions, des fonctions affines, de la géométrie analytique, vectorielle...

Tableau 2: Evolution des savoirs savants et des savoirs enseignés et contextes de cette évolution

En fait la proportionnalité est étudiée suivant les deux modèles que sont les proportions et les fonctions linéaires, or ces deux modèles n'ont pas le même niveau de performance suivant les problèmes à résoudre, certaines propriétés étant justifiées par l'une ou par l'autre (Hersant, 2001). De la même façon, les expressions algébriques peuvent avoir différents sens. Si l'expression est comprise comme un processus opératoire ($3x + 2$ c'est « multiplier par 3 » et « ajouter 2 ») on retrouve l'idée de transformation évoquée plus haut. La fonction est alors le processus opératoire représenté par l'expression algébrique. Si l'expression algébrique représente le résultat de ce processus, $3x + 2$ représente alors un nombre, elle peut aussi représenter l'image de x par une fonction. Mais l'expression algébrique peut encore être considérée comme une expression générique ($2n + 1$ par exemple représente un nombre impair) ou une simple chaîne de symboles avec des règles qui permettent des transformations.

La fonction introduite comme une transformation de nombres amène des traitements qui peuvent se faire dans les différents registres (graphique, tableaux, écritures algébriques, programmes). Les élèves doivent ensuite mobiliser ce savoir pour résoudre des problèmes dans le cadre des mesures de grandeurs sans que ce cadre soit travaillé et sans que la nécessité de l'outil ait été mise en évidence à l'intérieur de ce cadre.

Le sens que chaque élève va donner aux objets dans un cadre peut aider ou non la construction de ces objets dans un autre cadre. Cette porosité entre les domaines mathématiques n'est pas explicite dans les programmes, il semble qu'elle soit considérée comme naturelle après un certain temps d'étude censé apporter suffisamment de familiarité avec la notion pour la rendre disponible dans des situations nouvelles. Une étude de l'organisation mathématique est nécessaire pour comprendre comment cette porosité est pensée dans le cursus scolaire.

I.3 : Étude des organisations mathématiques de la notion de fonction affine

I.3.1 : Étude de l'organisation mathématique dans les programmes de 2008

Si nous étudions l'organisation mathématique de la notion de fonction affine dans les programmes de 2008, nous pouvons identifier ce que cette écologie liée à la modélisation met en place comme types de tâches, techniques, progression, choix des activités. Pour repérer cette organisation mathématique sous-jacente (Matheron, 2000), on peut isoler les tâches t demandées aux élèves, les techniques τ nécessaires pour réaliser ces tâches, les technologies θ qui permettent d'élaborer du discours autour de ces techniques, de les rendre intelligible et les justifiant et enfin les théories Θ qui les soutiennent, en lien avec la Théorie Anthropologique du Didactique développée par Chevallard et la notion d'organisation praxéologique (Chevallard, 1992).

Le texte des programmes liste les capacités attendues des élèves, nous regroupons ces capacités selon les types de tâches T suivants :

- déterminer une fonction affine ;
- représenter une fonction affine ;

- déterminer l'image ou l'antécédent d'un nombre par une fonction affine.

Pour chaque type de tâche T , nous pouvons identifier les tâches t effectivement attendues dans les programmes et ce qu'elles supposent comme techniques τ . La formulation des capacités dans les programmes place la tâche attendue dans un seul registre ou demande une conversion d'un registre à l'autre. Les conversions ne sont pas travaillées de manière exhaustive. Il est particulièrement intéressant de voir que la question du choix du registre et celle de la nécessité d'une conversion pour faciliter un traitement ne sont pas abordées. Le schéma 2 organise les types de tâches (en gras) en lien avec le registre dans lesquelles on attend un traitement (dans les ovales) en listant (dans le cadre correspondant à chaque flèche ce qui relève d'une conversion de registre) les capacités attendues qui apparaissent dans le programme de la classe de troisième de 2008.

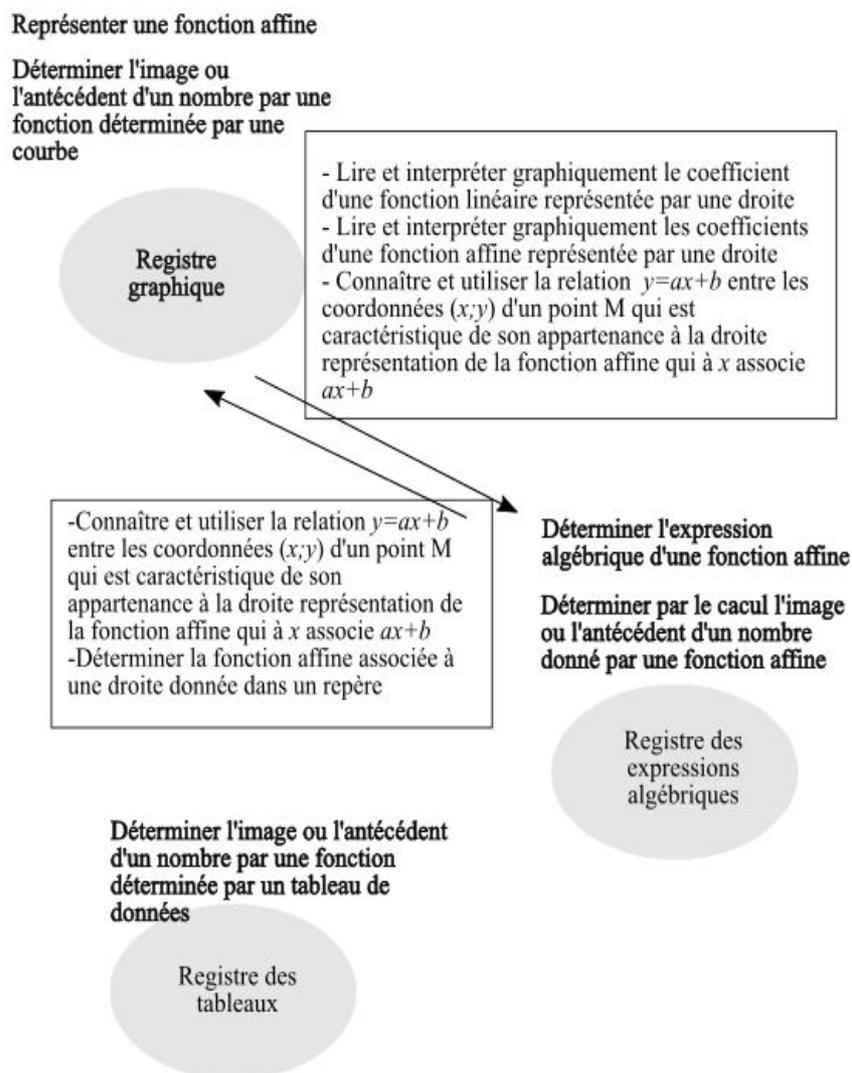


Schéma 2: tâches relevées dans le programme de 3^{es} de 2008 en lien avec les différents registres

Il apparaît que si « déterminer l'image ou l'antécédent d'un nombre » est explicitement demandé dans les trois registres dans l'item intitulé « Notion de fonction », et si certaines conversions sont explicites (lire et interpréter graphiquement) d'autres capacités restent très floues. En particulier il n'est pas clairement signalé ce qu'on attend par « déterminer une fonction affine », les techniques seront différentes suivant les éléments dont on dispose et suivant le registre utilisé pour formuler la tâche.

Pour d'autres tâches, comme la représentation graphique de la fonction, il n'est pas précisé dans quel registre sont données les informations. Si on dispose de l'expression algébrique, les techniques ne seront pas les mêmes que si on dispose d'un tableau de valeurs. Si le programme place ces connaissances et capacités dans le chapitre « organisation et gestion de données » et s'il est spécifié que « les exemples mettant en jeu des fonctions sont issus de situations concrètes ou de thèmes interdisciplinaires », il n'est pas explicité la manière dont se fait le lien entre les situations concrètes et la théorie. Certains obstacles risquent donc de venir de cette généralisation à partir de situations concrètes (en particulier le passage du discret au continu et le passage des mesures de grandeurs aux nombres) ou à l'inverse de la modélisation d'une situation concrète par un modèle théorique qui n'est pas explicitement défini. En effet, le programme ne dit pas comment définir la fonction affine. S'il est indiqué que « parmi les situations qui ne relèvent pas de la proportionnalité, certaines sont cependant modélisables par une fonction dont la représentation graphique est une droite. Cette remarque peut constituer un point de départ à l'étude des fonction affine. » rien n'indique comment est caractérisée la fonction affine. Les commentaires précisent que « pour les fonctions affines, la proportionnalité des accroissements de x et y est mise en évidence » sans que cela ne soit présenté comme une caractéristique faisant partie des connaissances attendues.

Nous allons reprendre les trois types de tâches. Le premier type de tâche T_1 (déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine) peut être reformulé ainsi : déterminer les coefficient a et b permettant de définir la fonction affine par une relation du type $x \rightarrow ax+b$. Le second type de tâche T_2 est de représenter une fonction affine, ce qui peut revenir à identifier deux points pour les relier par une droite. Enfin le troisième type de tâche T_3 est de déterminer l'image ou l'antécédent d'un nombre donné. Nous allons organiser dans un tableau (voir tableau 3) les différentes techniques possibles τ pour réaliser les tâches t telles qu'elles peuvent être utilisées par des élèves en classe de 3^e, ceci pour identifier de quelles technologies θ elles relèvent et donc les théories Θ sous-jacentes. Une même tâche peut mobiliser différentes techniques mais une même technique peut aussi être mobilisée pour différentes tâches. C'est sans doute en cela que l'enseignement des fonctions affines est problématique, le programme ne donne pas une organisation mathématique suffisamment structurée et sa formulation sous forme de capacités, parfois dans des registres spécifiques, amène à cloisonner les techniques sans donner une représentation globale de la notion. Pour chaque tâche, il est possible d'utiliser des techniques qui relèvent de chacun des registres : registre graphique, registre des expressions algébriques, registre des tableaux. Ces techniques amènent un discours qui justifie leur emploi. On peut identifier quatre technologies : la

caractérisation de la fonction affine par son expression algébrique et la nature des coefficients qui interviennent dans cette expression, la géométrie cartésienne, les règles du calcul algébrique, les grandeurs proportionnelles. Derrière ces technologies, l'élément théorique est la notion de fonction. La difficulté est que cette notion est encore en construction à ce stade de l'apprentissage, elle ne peut pas être l'élément théorique qui explique les technologies. Ne pas mettre en évidence cet élément théorique peut amener à justifier les technologies dans un autre cadre comme celui de l'algèbre, celui de la géométrie cartésienne ou celui des grandeurs proportionnelles, ou encore à introduire les éléments théoriques par ostension.

Les technologies que nous avons identifiées font référence à la fonction considérée comme un processus de calcul. On peut même penser que l'algorithme de calcul préexiste. La question est de savoir quelles techniques vont être enseignées, quelles technologies vont justifier ces techniques et lesquelles vont être absentes. Ces choix vont jouer sur la représentation que l'élève va se faire de l'objet « fonction affine ».

Par ailleurs, certaines tâches s'intéressent à une valeur, un point en particulier (déterminer l'image d'un nombre par exemple), d'autres à ce qu'on pourrait appeler un « ponctuel universel » (l'utilisation de x pour désigner « tout x » sans que ce soit toujours explicite comme par exemple dans l'expression algébrique), un global (comme la représentation graphique d'une fonction affine dont l'allure globale donne des informations) ou un local (comme lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine qui se fait sur une portion de la droite incluant le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées). Ces aspects nous amènent à considérer trois niveaux différents d'un point de vue cognitif :

- l'aspect ponctuel : un élément isolé est traité indépendamment du reste, on s'occupe d'une valeur ou d'un point en particulier sans qu'une relation soit faite avec les autres valeurs ou les autres points ;

- l'aspect processus : des éléments sont mis en relation soit d'un point de vue statique (on s'occupe du processus de calcul permettant de lier l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée), soit d'un point de vue covariationnel (on s'occupe des variations de chacune des deux variables et de la dépendance entre ces variations) ;

- l'aspect global : ce qui témoigne de l'ensemble du processus.

Ces aspects peuvent être interprétés comme relevant de l'intra-objectal (analyse des objets), de l'inter-objectal (étude des transformations ou des relations) et du trans-objectal (construction des structures) si nous reprenons la terminologie de Piaget (Piaget & Garcia, 1983). Pour ce qui concerne la fonction affine, les trois aspects sont en relation étroite. La représentation de la fonction affine par une droite passant par deux points est liée à la perspective ponctuelle, la perception globale permet de tracer la droite, elle est nécessaire pour avoir une perspective locale, c'est-à-dire pour se représenter la continuité. De manière générale, l'étude locale d'une fonction n'est possible qu'à condition d'avoir au préalable construit une perspective globale (Vandebrouck, 2011).

Le programme de 2008 s'intéresse essentiellement à l'aspect ponctuel et à l'aspect processus d'un point de vue statique en privilégiant les conversions entre le registre des

expressions algébriques et le registre graphique (Duval, 1993). La question étant de savoir si la conversion peut avoir du sens hors des contextes dans lesquels les élèves ont des problèmes à résoudre. Par ailleurs cette approche amène les élèves à opérer sur un nombre fini de valeurs. Cette perspective ponctuelle peut être un obstacle à la construction du concept de variabilité et de continuité (Comin, 2005).

Tâche T ₁		Différentes tâches t	Techniques τ	Technologie θ
<p>Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine</p>  <p>Déterminer les coefficients a et b pour définir la fonction par une relation du type : $x \rightarrow ax+b$</p>	<u>Registre graphique</u>	<ul style="list-style-type: none"> - lire un graphique - lire des coordonnées - lire les coordonnées de points d'intersection entre deux droites - lire un coefficient directeur - mesurer la distance entre deux points - déterminer graphiquement l'image d'un nombre, un antécédent - lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine 	<ul style="list-style-type: none"> - Lecture de graphiques - Mesure sur un graphique - Utiliser la relation entre les coordonnées $(x ; y)$ d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite qui représente la fonction affine : $x \rightarrow ax+b$ 	<ul style="list-style-type: none"> - La courbe représentative de la fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x;f(x))$. - Distance entre deux points sur la droite des réels - Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$. - La représentation graphique d'une fonction affine est une droite - b est l'ordonnée à l'origine - a est le coefficient directeur de la droite
	<u>Registre des expressions algébriques</u>	<ul style="list-style-type: none"> - identifier les différents éléments dans une expression algébrique - appliquer un algorithme de calcul - résoudre une équation du premier degré - résoudre un système linéaire de deux équations du 1er degré à deux inconnues - Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné 	<ul style="list-style-type: none"> - Calcul algébrique 	<ul style="list-style-type: none"> - Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$. - Règles du calcul algébrique - b est l'image de 0
	<u>Registre des tableaux</u>	<ul style="list-style-type: none"> - lire un tableau de valeurs - identifier l'ordonnée à l'origine - calculer un taux d'accroissement - appliquer les propriétés de linéarité - calculer une quatrième proportionnelle 	<ul style="list-style-type: none"> - Lecture de tableaux - Calcul numérique - Calculs dans une situation de proportionnalité 	<ul style="list-style-type: none"> - Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$. - b est l'image de 0 - a est le coefficient de proportionnalité des accroissements

Tâche T ₂		Différentes tâches t	Techniques τ	Technologie θ
<p>Représenter une fonction affine</p>  <p><i>Tracer la droite représentant la fonction affine</i></p>	<u>Registre graphique</u>	<ul style="list-style-type: none"> - lire un graphique - lire des coordonnées - placer un point dont les coordonnées sont données - mesurer la distance entre deux points - interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine 	<ul style="list-style-type: none"> - Lecture de graphiques - Mesure sur un graphique - Utiliser la relation entre les coordonnées (x ; y) d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentation de la fonction affine : $x \rightarrow ax+b$ - tracer un triangle matérialisant la pente 	<ul style="list-style-type: none"> - La courbe représentative de la fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$. - Distance entre deux points sur la droite des réels - Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$. - La représentation graphique d'une fonction affine est une droite - b est l'ordonnée à l'origine - a est le coefficient directeur de la droite - Une droite est caractérisée par deux points - L'axe (Ox) étant interprété comme un axe horizontal, la pente représente le rapport entre la distance verticale et la distance horizontale lorsqu'on suit le mouvement d'un point sur la droite

Tâche T ₃		Différentes tâches t	Techniques τ	Technologie θ
<p>Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné</p>	<u>Registre des expressions algébriques</u>	<ul style="list-style-type: none"> - appliquer un algorithme de calcul - résoudre une équation du premier degré - résoudre un système linéaire de deux équations du 1er degré à deux inconnues 	<ul style="list-style-type: none"> - Calcul algébrique 	<ul style="list-style-type: none"> - Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$. - Règles du calcul algébrique - b est l'image de 0

Tableau 3: organisation mathématique liée au programme de 2008 en classe de 3e

I.3.2 : Étude de l'organisation mathématique de la notion de fonction affine dans le manuel Sésamaths de la classe de 3^e

Nous allons comparer l'organisation mise en évidence dans les programmes de 2008 avec l'organisation mathématique de la notion de fonction dans un manuel. Nous avons choisi le manuel Sésamath collection Mathenpoche qui est un manuel collaboratif et qui fait actuellement référence dans les établissements de l'académie de Nantes. Nous avons listé les tâches attendues des élèves et essayé d'identifier de la même manière que nous l'avons fait pour les programmes, les techniques, technologies et théories sous-jacentes à ces tâches. La présentation de ces tâches respecte l'ordre chronologique du manuel et dans la colonne de gauche nous avons identifié le type de tâche auquel correspond la tâche demandée (voir tableau 4). Nous pouvons remarquer que ce manuel propose un éventail beaucoup plus large de tâches que ne l'exige le programme et que certaines ne relèvent pas des trois types de tâches identifiés dans les programmes. Elles relèvent de l'existence, de la preuve ou de la modélisation et étudient la fonction comme outil pour résoudre des problèmes (comparaison, optimisation, modélisation, prévision...) en fin de parcours. Ces démonstrations peuvent mobiliser des savoirs géométriques comme la mesure des angles ou la position d'un tracé par rapport à un autre. Pour l'ensemble des technologies, nous retrouvons les éléments théoriques évoqués dans l'organisation mathématique du programme mais nous remarquons que la notion de fonction est toujours présente et mise en lien avec d'autres éléments théoriques qui relèvent d'autres cadres comme la géométrie cartésienne et l'algèbre.

Il ressort de cette étude que les tâches demandées aux élèves sont traitées majoritairement dans le registre des expressions algébriques ou dans celui des graphiques et que les techniques sont très dissociées, elles ne travaillent pas explicitement les conversions de registres. Pour problématiser la notion de fonction affine au collège et la rendre disponible au lycée, il nous semble qu'on pourrait aborder les problèmes qui peuvent être résolus par une modélisation par une fonction au moment de la découverte plutôt que de reléguer ces questions en fin d'apprentissage. Nous pensons que nous avons donc intérêt à introduire la notion de fonction affine en classe de 3^{ème} par un problème de modélisation.

Type de tâches T	Tâches t	Techniques τ	Technologies θ
T ₃	Calculer des images et des antécédents. Compléter un tableau de valeurs. Vérifier si une expression correspond au graphique donné.	Appliquer le coefficient multiplicateur. Utiliser les propriétés de linéarité. Remplacer une variable dans une expression algébrique par un nombre et calculer.	Proportionnalité Lecture de tableaux Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$. Calcul algébrique
	Comparer les variations.	Calculer un coefficient de proportionnalité. Conjecturer des propriétés à partir d'exemples.	Proportionnalité Lecture de tableaux
T ₃	Comparer $f(4)$ et $5 \times f(0,8)$ $f(1,2)$ et $f(0,8) + f(0,4)$ Utiliser les propriétés $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ $f(k \times x) = k \times f(x)$ pour calculer des images.	Conjecturer des propriétés à partir d'exemples. Appliquer les propriétés pour calculer.	Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$. Calcul algébrique
T ₁	Exprimer ... en fonction de ...	Déterminer l'expression algébrique d'une fonction	Calcul algébrique
	Déterminer l'ensemble de définition lié au contexte.	Analyser les contraintes sur la variable pour en déduire un domaine de validité.	Définition et généralités sur les fonctions
T ₁	Reconnaître l'expression d'une fonction affine ou linéaire.	Analyser et transformer une expression algébrique pour reconnaître une forme linéaire du 1 ^{er} degré.	Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$. Calcul algébrique
	Utiliser le vocabulaire (image, antécédent). Utiliser les notations ($f(2)$; $f(x)=\frac{5}{3}$).	Traduire « 3 est l'image de 2 par la fonction f » par la notation $f(2)=3$...	Définition et généralités sur les fonctions
T ₁	Dire si une fonction est linéaire ou affine à partir du tableau de valeurs.	Reconnaître un tableau de proportionnalité. Tester la proportionnalité des écarts. Tester une expression affine correspondant au tableau.	Proportionnalité Lecture de tableaux Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$.

T ₂	Dire si une fonction est linéaire ou affine à partir de son graphique.	Reconnaître si la représentation graphique est une droite passant ou non par l'origine.	La courbe est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$ Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$.
T ₂	Représenter une fonction affine à partir de son tableau de valeurs.	Identifier les axes. Placer les points correspondant à un tableau.	La courbe est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$
T ₂	Illustrer sur un graphique le coefficient multiplicateur d'une fonction affine.	Utiliser un indice de type angle que fait la droite avec l'axe des abscisses ou triangle rectangle des écarts.	Angles et trigonométrie Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$.
T ₂	Déterminer le lien entre le coefficient multiplicateur et l'angle que fait la droite avec l'axe des abscisses.	Utiliser la trigonométrie pour calculer la tangente de cet angle et la comparer avec le coefficient de proportionnalité des écarts.	Angles et trigonométrie Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$.
	Justifier que la représentation graphique d'une fonction affine est une droite parallèle à la représentation de la fonction linéaire associée.	Utiliser le théorème de Thalès ou la trigonométrie et les angles correspondants pour démontrer le parallélisme.	Angles et trigonométrie Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$.
	Comparer des images	Repérer à partir de quelle abscisse, une droite est au dessus de l'autre. Résoudre une inéquation linéaire du premier degré.	Géométrie cartésienne Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$. Calcul algébrique
	Résoudre $f(x) = g(x)$.	Repérer l'abscisse du point d'intersection de deux droites. Résoudre une équation linéaire du premier degré.	Géométrie cartésienne Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$. Calcul algébrique

	Démontrer l'alignement de 3 points.	Identifier une fonction affine f pouvant être représentée par la droite passant par deux de ces points et vérifier que le troisième point est de la forme $(x ; f(x))$. Vérifier la proportionnalité des écarts entre abscisses et ordonnées.	La courbe est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$ Une fonction affine f est caractérisée par une expression algébrique de la forme : $f(x)=ax+b$. Proportionnalité
	Prévoir un résultat.	Utiliser une fonction affine pour modéliser et calculer une image.	La représentation d'une fonction affine est une droite.

Tableau 4: organisation mathématique de la notion de fonction affine dans le manuel Sésamaths de la classe de 3^e

I.4 : Conclusion

L'analyse épistémologique de la notion de fonction affine met en évidence que cette notion s'est construite par le dépassement de trois obstacles que sont le passage du discret au continu, le passage du ponctuel au global et le passage d'un processus de calcul à la covariation de deux grandeurs. Ces différents passages ont été possibles par l'utilisation de différents registres dans lesquels des traitements peuvent alors être effectués. En effet, la représentation graphique permet de visualiser en quelque sorte le continu et l'aspect global, l'expression algébrique permet un traitement local et le travail sur les mesures donne du sens à la notion de covariation. Les fonctions affines sont un outil de modélisation pour résoudre des problèmes mais elles sont aussi un exemple de fonction. La question est de savoir si elles peuvent être un exemple permettant la généralisation du concept de fonction ou si elles ne représentent qu'un cas particulier qui facilite certains traitements. Dans le premier cas, on les considère comme des objets, elles sont un élément d'une théorie, dans le second elles sont plutôt outils et sont une technologie permettant de justifier certaines tâches. L'histoire montre que les deux aspects se sont développés en parallèle et que la transposition didactique n'a pas toujours été la même depuis que les fonctions affines sont apparues dans les programmes.

L'étude des fonctions affines a beaucoup évolué dans l'enseignement au collège et au lycée. La formalisation est encore aujourd'hui liée aux structures enseignées dans les années 70 ce qui éloigne la notion de fonction affine des problèmes qui nécessitent un traitement lié à la proportionnalité des écarts. L'aspect fonctionnel est essentiellement abordé en utilisant la relation entre deux séries de nombres dans l'idée de processus input/output et néglige l'étude de la covariation de deux grandeurs. Nous verrons dans le prochain chapitre que ce choix, qui n'est pas uniquement celui du système éducatif français, peut entraîner des difficultés dans l'apprentissage de l'analyse dans les études supérieures, comme peuvent en attester différentes recherches internationales (Birgin, 2012; Vinner & Dreyfus, 1989; Wang, Barmby, & Bolden, 2017). Le concept de dérivée pourrait avantageusement être construit progressivement en définissant la fonction affine comme une fonction dont la dérivée est constante, ce qui pourrait se rapprocher du concept de vitesse constante.

Les différents registres qui peuvent être utilisés ne permettent pas de travailler la notion d'affinité au même niveau (par exemple les graphiques permettent d'avoir des éléments sur la nature de la fonction, les écritures algébriques permettent des calculs d'image, les tableaux sont favorables à une organisation permettant de travailler les variations). Il peut être difficile d'avoir un discours technologique permettant de justifier les conversions d'un registre à un autre, conversions qui sont cependant indispensables. En effet, ces technologies relèvent de théories inconnues ou peu familières des élèves de collèges et lycées comme la géométrie analytique ou les triangles semblables.

Actuellement nous pouvons faire l'hypothèse que les difficultés des élèves peuvent être de plusieurs ordres :

- une définition formelle des fonctions affines éloignée des utilisations dans les problèmes et qui ne les rend pas disponibles ;
- un travail dans plusieurs cadres (Douady, 1986) et plusieurs registres (Duval, 2006) sans que le passage de l'un à l'autre ne soit explicité ;
- une maîtrise insuffisante du calcul algébrique ;
- un lien entre proportionnalité et fonction linéaire centré sur la question du coefficient de proportionnalité ou de l'alignement des points sur le graphique mais qui ne prend pas en compte les propriétés de linéarité.

Nous allons préciser dans le chapitre qui suit, ce que serait une représentation dynamique du concept de fonction. L'objectif étant de voir si un tel point de vue peut répondre aux difficultés actuelles des élèves.

Chapitre II : Deux points de vue

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord définir la covariation de deux grandeurs. Nous allons revenir sur les différents points de vue (Rogalski, 2001) que sont la variation et la covariation.

On peut concevoir la fonction affine de deux manières ;

- (a) soit comme un processus de calcul qui à un réel x associe un réel y ;
- (b) soit comme un processus de variations qui partant de deux réels x_1 et y_1 permet d'engendrer deux autres réels x_2 et y_2 .

On peut penser aussi la proportionnalité par ces deux approches :

- (a') existence d'un coefficient de proportionnalité ;
- (b') propriétés de linéarité.

Ces deux conceptions relèvent d'un même cadre mais de deux points de vue différents (Rogalski, 2001). Le passage d'un point de vue à l'autre pouvant se faire par une démonstration algébrique. Pour Rogalski, chaque point de vue, dans un même cadre ou un même registre, se caractérise par le fait que des propriétés y sont plus ou moins visibles, si bien que chaque point de vue est adapté à un type de problèmes. L'enjeu des changements de cadre, de registre ou de point de vue, est de transporter un problème pour en faciliter le traitement. Il faut cependant noter que certains cadres, registres ou points de vue peuvent être choisis par simple préférence personnelle parce que les procédures y sont automatisées ou familières. L'apprentissage peut nécessiter d'imposer un changement de cadre, de registre ou de point de vue, pour justement permettre d'explorer de nouvelles pistes, de nouveaux outils, de rencontrer de nouveaux objets.

Nous allons voir que ces points de vue n'apportent pas les mêmes éléments de sens à la notion d'affinité dans les différents cadres (Douady, 1986) et qu'ils entraînent différentes expressions de l'affinité dans chaque registre (Duval, 2006). Nous étudierons ensuite le statut des fonctions affines comme modèle pour étudier la covariation de grandeurs physiques. Cette analyse va nous permettre d'envisager une organisation mathématique de ce savoir sur laquelle nous nous appuierons pour proposer des situations d'enseignement-apprentissage dans la partie 2 de cette thèse, et analyser leurs effets sur les apprentissages des élèves.

II.1 : La covariation

Notre étude épistémologique de la notion de fonction affine a permis d'établir des périodes dans le développement de cette notion et de lier le savoir enseigné à différents contextes. Il semble cependant qu'un autre aspect de cette notion soit essentiel dans la représentation que les élèves vont se faire du concept de fonction. On peut en effet considérer

la fonction par une définition très large : une fonction est définie par la donnée d'un ensemble E de départ, d'un ensemble F d'arrivée, et d'un procédé mettant en relation chaque élément de l'ensemble de départ avec au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

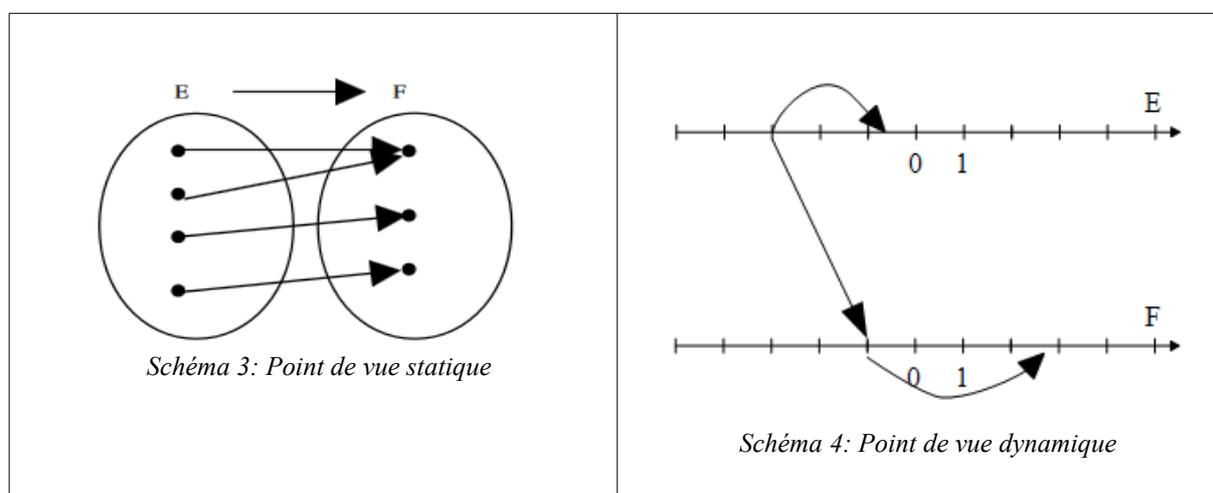
Cette définition peut amener des représentations plus ou moins erronées de ce qu'est une fonction. En effet chaque élément de l'ensemble de départ peut être pris isolément, lui et son image déterminent un couple. Dans le cas d'une fonction linéaire, ce couple suffit à déterminer la fonction. Par extension, l'élève peut penser qu'un couple suffit à déterminer n'importe quelle fonction. Plusieurs couples peuvent amener à une organisation dans un tableau de valeurs, on peut alors représenter graphiquement un ensemble de points isolés. Cette définition est un point de vue statique puisque basée sur la correspondance terme à terme. On peut l'illustrer par un schéma de type diagramme de Venn.

Pour David Tall :

More generally different symbols representing different actions but having the same effect are considered to be different ways of representing the same concept. (Gray & Tall, 1994)

Dans l'idée d'un développement naturel de la pensée, la notion de fonction vient ici comme un « procept » : deux processus de calcul différents qui donnent pour toute valeur d'entrée le même nombre en sortie, peuvent être considérés comme caractérisant une fonction (Tall, 2006).

Si maintenant nous définissons la fonction comme ce qui caractérise la covariation de deux nombres, cela signifie que tout élément de l'ensemble de départ E peut varier et que cette variation entraîne une variation de son image dans F . Nous avons une représentation dynamique. De plus, si nous considérons plus spécifiquement la covariation de deux grandeurs, cette représentation dynamique peut prendre en charge le continu. On peut schématiser ce point de vue par deux droites ou segments qui définissent d'ailleurs un repère si les deux axes sont sécants en l'origine. La représentation graphique peut amener à l'idée d'une courbe.



Ces deux approches se complètent mais l'étude des fonctions dans notre système scolaire débouche sur l'étude des dérivées et donc sur un usage dynamique alors que son

introduction est faite de manière statique. Il semblerait donc utile de développer le raisonnement covariationnel chez les élèves dès le début du collège, ce qui nécessite une réintroduction des grandeurs dans les programmes du primaire et du collège.

On peut définir la covariation comme la variation concomitante de deux grandeurs. « le raisonnement covariationnel correspond à l'ensemble des activités cognitives sollicitées lors de la coordination de la variation de deux quantités dans la perspective où on s'intéresse au type de relation entretenue par celles-ci. » (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002; Carlson & Oehrtman, 2005).

Les auteurs regroupent dans le tableau 5 les deux regards sur les fonctions : le premier comme action sur des valeurs, et l'autre comme processus.

Action View	Process View
A function is tied to a specific rule, formula, or computation and requires the completion of specific computations and/or steps.	A function is a generalized input-output process that defines a mapping of a set of input values to a set of output values.
A student must perform or imagine <i>each action</i> .	A student can imagine the <i>entire process</i> without having to perform each action.
The "answer" depends on the formula.	The process is independent of the formula.
A student can only imagine a single value at a time as input or output (e.g., x stands for a specific number).	A student can imagine all input at once or "run through" a continuum of inputs. A function is a transformation of entire spaces.
Composition is substituting a formula or expression for x .	Composition is a <i>coordination</i> of two input-output processes; input is processed by one function and its output is processed by a second function.
Inverse is about algebra (switch y and x then solve) or geometry (reflect across $y = x$).	Inverse is the <i>reversal of a process</i> that defines a mapping from a set of output values to a set of input values.
Domain and range are conceived at most as an algebra problem (e.g., the denominator cannot be zero, and the radicand cannot be negative).	Domain and range are produced by operating and reflecting on the set of all possible inputs and outputs.
Functions are conceived as static.	Functions are conceived as dynamic.
A function's graph is a geometric figure	A function's graph defines a specific mapping of a set of input values to a set of output values.

Tableau 5 : Action and process views of functions extrait de (Carlson & Oehrtman, 2005, p.7)

Une hypothèse posée par Valériane Passaro (Passaro, 2013) est que le raisonnement covariationnel contribue à la réification du concept de fonction et qu'il est à la base du travail sur la dérivée. La réification étant ce qui va permettre de transformer l'information en connaissance. Si c'est effectivement le cas, le raisonnement covariationnel devrait modifier les représentations des fonctions linéaires et affines construites par les élèves. La question

étant de mesurer l'impact que pourrait avoir cette approche sur la disponibilité du concept d'affinité chez les élèves.

II.2 : L'expression de ces deux points de vue dans les différents registres

Duval identifie d'une part le langage naturel et d'autre part des registres symboliques comme l'écriture des nombres, l'écriture algébrique, les tableaux, les graphiques, les graphes, un registre étant un système de signes. Pour Duval (1995), il n'y a pas de néosis, c'est-à-dire d'appréhension conceptuelle d'un objet, sans sémosis, production ou appréhension de représentations sémiotiques.

Tout concept mathématique doit s'appuyer sur des représentations, la conceptualisation doit donc nécessairement passer par des registres de représentation qui, pour différentes raisons, ne peuvent pas être univoques, surtout s'ils ont un caractère linguistique. (D'Amore, 2001, p.5)

Ainsi pour représenter un objet mathématique, certains traits caractéristiques sont choisis mais ce choix dépend des capacités sémiotiques de représentation du registre. Changer de registre peut donc amener à privilégier des caractéristiques différentes. Pour conceptualiser un objet mathématique, il est donc nécessaire de mettre en relation différents registres de représentation, chaque registre apportant une vue particulière de l'objet, la néosis étant la reconstruction par la pensée de l'objet. La conversion d'un registre à l'autre est donc essentielle, elle permet d'identifier les caractéristiques indépendantes de l'objet. L'apprentissage d'un concept devrait prendre en compte non seulement la représentation de ce concept dans différents registres, le traitement des représentations à l'intérieur d'un registre, mais aussi sa conversion d'un registre à l'autre (D'Amore, 2001).

Nous allons analyser comment est représenté le concept de fonction affine dans différents registres suivant le point de vue qui est choisi, pour identifier les caractéristiques qui sont représentées et la manière dont la conversion peut ou non les représenter dans un autre registre.

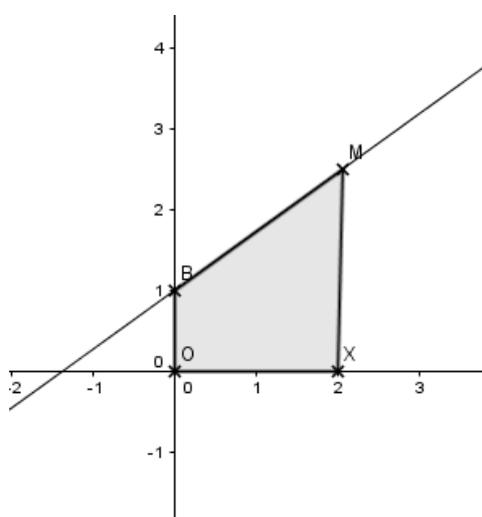
Le point de vue variation s'intéresse à la relation entre deux Grandeurs que nous noterons G_A et G_B . Nous noterons Grandeur (avec un grand G) l'ensemble des classes d'équivalence et grandeur (avec un petit g) une classe d'équivalence (Hersant, 2001). Le terme de « relation » permet d'englober différents aspects : il peut s'agir d'une relation de causalité, d'une transformation, d'une corrélation, d'un processus, d'une loi physique... Il est plus large que le terme d' « action » utilisé par Carlson (Carlson & Oehrtman, 2005), car il ne s'agit pas systématiquement de l'action d'une Grandeur sur une autre. Si x est une mesure prise par G_A et y la mesure correspondante de G_B , la relation entre les deux grandeurs peut être considérée comme une fonction, à condition que pour chaque mesure de G_A , une seule mesure de G_B lui est associée. Dans le cas des fonctions affines, cette relation peut s'exprimer dans différents registres.

Dans le registre algébrique, la fonction affine est caractérisée par l'expression : $y = ax + b$ où a et b sont deux réels. Pour déterminer a et b à partir de valeurs connues, il

suffit d'écrire les deux expressions correspondantes et de résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Dans le registre des tableaux, la relation entre la variable notée x et la variable notée y est donnée par la succession de deux opérateurs : multiplier par a et additionner b . Le traitement s'effectue par des opérations.

Dans le registre graphique la même relation est caractérisée par un trapèze OXMB où O est l'origine du repère, X le point d'abscisse x_1 et d'ordonnée nulle, M le point de coordonnées $(x_1; y_1)$ et B le point de coordonnées $(0; b)$. La fonction affine est caractérisée par la droite (BM).



graphique 5: trapèze OXMB

Si nous prenons maintenant le point de vue covariation, la relation affine est définie dès que nous avons deux valeurs x_1 et x_2 de G_A et les valeurs y_1 et y_2 de G_B qui leur sont associées.

Dans le registre algébrique, cette relation s'exprime par $(y_2 - y_1) = a(x_2 - x_1)$.

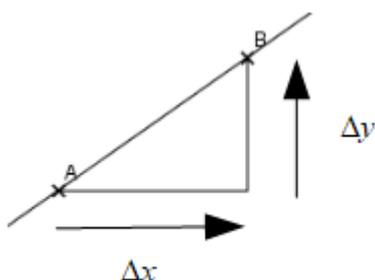
Dans le registre des tableaux, l'affinité se traduit par un opérateur multiplicatif entre les variations qui suppose de faire apparaître les variations, ce qui n'est pas habituel. Cela peut amener des représentations du type :

x	1	2	3	6
$f(x)$	3	6	9	18

Diagramme illustrant les variations et les opérateurs multiplicatifs :

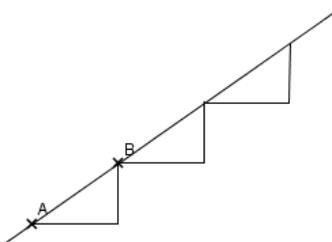
- Entre les colonnes de x : $1 \rightarrow 2$ (+1), $2 \rightarrow 3$ (+1), $3 \rightarrow 6$ (+3).
- Entre les colonnes de $f(x)$: $3 \rightarrow 6$ (+3), $6 \rightarrow 9$ (+3), $9 \rightarrow 18$ (+9).
- Opérateurs multiplicatifs : $\times 3$ (indiqué par un cercle rouge et une flèche rouge).

Dans le registre des graphiques, la covariation se caractérise par des triangles constitués de deux points et de la marche et contre-marche allant de l'un à l'autre (voir graphique 6) :



graphique 6: « marches » égales ou proportionnelles

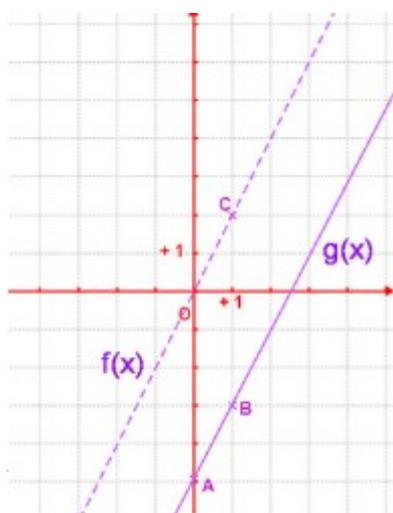
Ces marches sont égales ou proportionnelles (voir graphique 7) :



graphique 7: « marches » égales

Les deux points de vue n'amènent donc pas les mêmes informations dans chaque registre. Regardons différents graphiques qui illustrent des cours de mathématiques de niveau fin de collège :

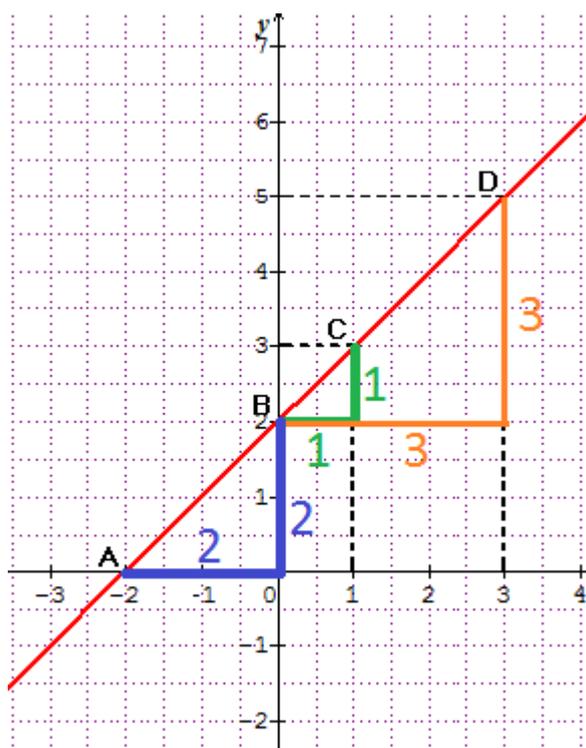
Sur le graphique 8 tiré du cours en ligne du site [educastream](http://www.educastream.com)⁴, la représentation sur quadrillage et le fait que les points sont sur des nœuds du quadrillage permet de rendre visibles les marches et contre-marches de manière implicite et donc de montrer implicitement la covariation. Le choix est ici de représenter la fonction affine et sa fonction linéaire associée, le quadrillage permet donc de visualiser le parallélisme des deux droites obtenues. La fonction affine est introduite comme un processus de calcul : « En associant à chaque nombre « x » un nombre « $ax + b$ » appelé image de x , on définit une fonction affine ».



graphique 8: représentation graphique des fonctions affines

⁴<http://www.educastream.com/fonctions-affines-introduction-3> consulté le 3/3/2016

A l'inverse, sur le site de Grégory Fabas⁵ qui propose des exercices dans un module pour la classe de 2^{nde}, nous trouvons le graphique 9 qui met en évidence la proportionnalité des marches et contre-marches. Le cours est organisé de telle sorte qu'une définition du taux de variation est donnée avant l'étude des fonctions affines. Ainsi juste après la définition par l'expression algébrique des fonctions affines, le cours étudie le taux de variation d'une fonction affine⁶. Le point de vue est donc plutôt du côté de la covariation.



graphique 9: fonction affine et représentation par une droite

Sur le site mathovore⁷, le cours de 3^e sur les fonctions affines, commence par une étude de la variation du périmètre noté y d'un rectangle de largeur fixe 3cm en fonction de sa longueur notée x cm. Cet exemple permet de constater que la situation n'est pas proportionnelle. Il est ensuite demandé de chercher une relation (égalité) reliant y et x , et de constater sur la représentation graphique que les points sont alignés. Suivent des techniques pour déterminer la fonction affine à partir des coordonnées de deux points par la résolution d'un système. Le point de vue choisi ici est donc plutôt celui des variations et la définition par l'expression algébrique caractérise la fonction affine par le processus opératoire qui lui correspond. Cependant la résolution du système dans le cas général amène à définir le

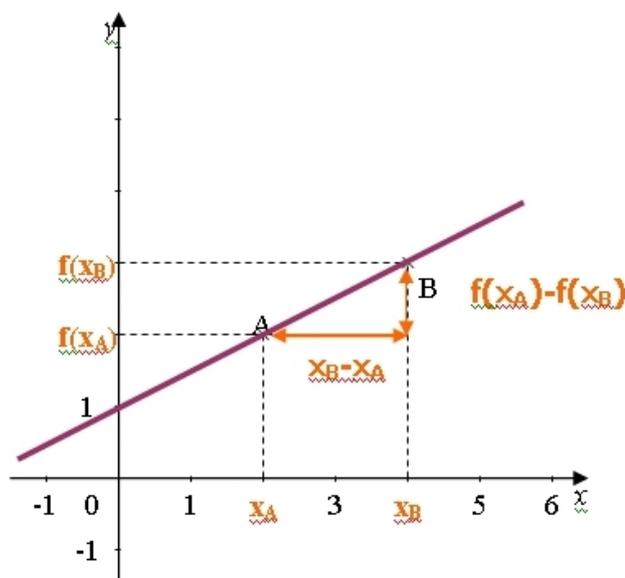
⁵professeur de mathématiques sur l'Académie de Nantes

⁶<http://losfabas.free.fr/2sd/co/taux%20de%20variation%20d'une%20fonction.html>

consulté le 3/3/2016

⁷<http://www.mathovore.fr/les-fonctions-affines-cours-maths-27.php> consulté le 3/3/2016

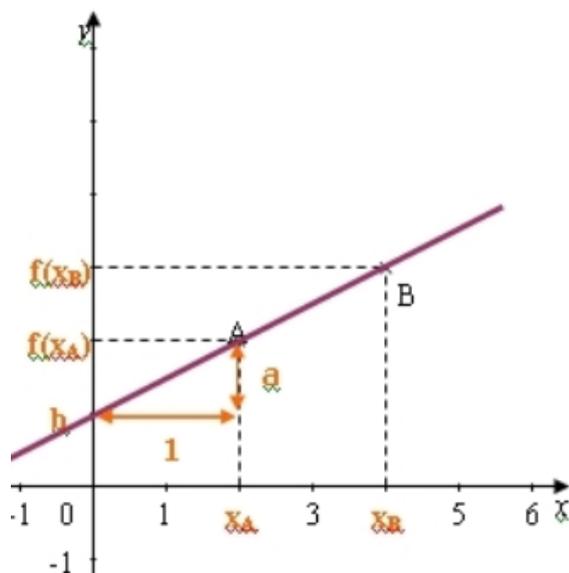
coefficient directeur par l'expression : $a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$ où $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points de la droite représentative de la fonction affine f . Le cours propose une interprétation de ce résultat avec le graphique 10 pour permettre de déterminer ce qu'il appelle « le coefficient de proportionnalité entre les accroissements de $f(x)$ et ceux de x » à partir de n'importe quels nombres x_A et x_B .



graphique 10: calcul du coefficient a

Ce cours propose donc deux points de vue, l'approche par la covariation venant combler un manque de technique en algèbre pour pouvoir traiter la question uniquement par l'approche variation.

La différence entre l'approche par la variation et l'approche par la covariation se voit dans le registre graphique par le choix des points et des indications qui sont ajoutées au graphique. Si on compare les graphiques 9 et 10 avec le graphique 11, on remarque que, si un point B figure sur le graphique 11, seul le point A est nécessaire pour caractériser la fonction affine alors que dans les graphiques précédents plusieurs points sont indiqués dans le graphique 9 et les coordonnées sont indiquées comme des variables dans le graphique 10 pour donner un aspect de généralité à la propriété.

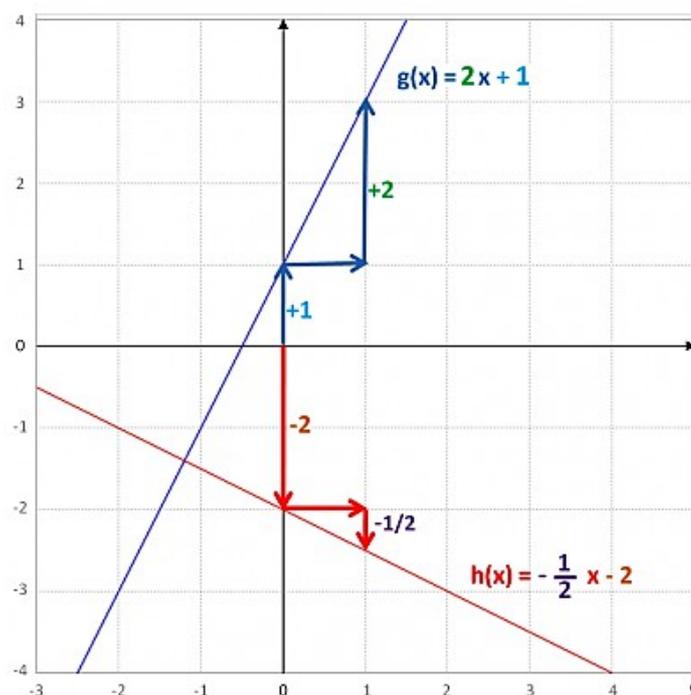


graphique 11: Courbe représentative d'une fonction affine

Sur un autre site, lyclic.fr⁸, la fonction affine est toujours définie par son expression algébrique. Le fait que sa représentation graphique est une droite est posé comme élément caractéristique. Pour tracer la représentation graphique de la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ où a et b sont deux nombres réels, deux méthodes sont proposées.

Celle des « deux points » consiste à calculer les coordonnées de deux points et à les relier et celle « du déplacement en escalier » (voir graphique 12) consiste à partir de l'origine du repère et à se déplacer verticalement de b pour obtenir un premier point puis à se déplacer « d'un cran » vers la droite pour se déplacer à nouveau verticalement de a . On retrouve ici une démarche algorithmique, un seul déplacement est indiqué mais implicitement, on peut le reproduire à l'infini. On notera qu'il n'est donné aucun conseil pour choisir l'une ou l'autre de ces méthodes. La première s'appuie plutôt sur l'approche variation et la seconde sur la covariation sans que les déplacements ne soient mis en relation avec les variations. Le « cran » dont il est question dans la consigne relève du langage naturel et on peut s'interroger sur ce choix. Il semble que ce soit une manière de mettre en évidence les déplacements qui sont liés directement aux coefficients a et b . D'ailleurs ces coefficients sont partout identifiés par leur couleur quel que soit le registre utilisé.

⁸<http://www.lycllic.fr/lyclpedia/document/MzEAAA==:les-fonctions-affines> consulté le 3/3/2016



graphique 12: Déplacement en escalier

Ces exemples montrent que les deux points de vue peuvent cohabiter de manière plus ou moins implicite et que les auteurs passent de l'un à l'autre sans toujours expliquer ce qui motive ce changement. L'objectif semble essentiellement lié aux compétences techniques pour effectuer la tâche demandée et non au sens que véhiculent ces points de vue.

II.3 : Cycle de modélisation

Tran Kiem (Tran Kiem, 2012) propose un schéma du cycle de modélisation (voir schéma 5) reprenant trois niveaux de représentation des fonctions que sont : la covariance et la dépendance dans un système physique, la covariance et la dépendance au niveau des grandeurs et des mesures, les fonctions mathématiques.

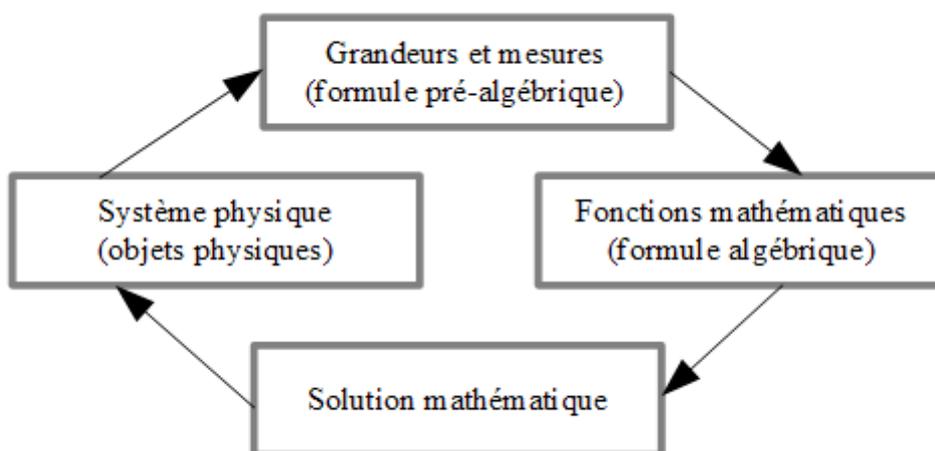


Schéma 5: Cycle de modélisation

Partant du système physique, l'élève repère des modifications du système liées à des objets physiques. Il repère des grandeurs et faisant varier ces grandeurs, il peut mesurer les variations de mesures, il peut alors choisir une variable et écrire une formule pré-algébrique de dépendance que nous pourrions penser dans le paradigme du physicien-analyste. La représentation algébrique de cette formule se fait au niveau des fonctions mathématiques qui peuvent permettre une preuve algébrique d'une solution mathématique qu'il s'agit ensuite d'interpréter dans le système physique de départ.

Tran Kiem s'appuie sur une typologie proposée par Lagrange et Artigue (Lagrange & Artigue, 2009) ayant pour but de classer et de relier les activités variées sur les fonctions et qui s'appuie sur les niveaux de représentation et les types de représentations et d'activité. Le premier niveau de représentation est celui du système physique. A ce niveau, les élèves font une exploration globale des modifications du système, ils perçoivent la dépendance entre les grandeurs qui peuvent être considérées comme des objets génériques. Au niveau suivant, celui des grandeurs et mesures, l'exploration est plutôt locale. Les élèves font varier une grandeur et ils observent les variations des mesures. Il est possible de créer une formule pour exprimer la dépendance. Enfin le dernier niveau est celui des fonctions mathématiques à travers la trace locale du graphe et l'étude de ses propriétés, l'élève peut créer une formule et donner un domaine de définition. Un traitement algébrique des expressions peut apporter des éléments de preuve, les expressions par leur forme peuvent permettre de reconnaître par leur structure des familles de fonction.

Si nous reprenons ces trois niveaux, celui du système physique relève plus de la perception, celui des grandeurs et mesures de l'analyse et celui des fonctions mathématiques des déductions formelles. L'hypothèse que nous faisons est que le passage du perceptif au formel peut être facilité par le niveau des « grandeurs et mesures ». Ce niveau induit des déductions informelles qui permettent de modéliser ce qui est perçu tout en justifiant la nécessité de preuves formelles. Nous allons tester cette hypothèse dans le cas particulier des fonctions affines. Ces fonctions ne pourront modéliser des types de situations qu'à condition que les élèves aient rencontré d'autres cas que ceux d'affinités pour justement repérer ce qui caractérise cette famille de fonctions. Le travail plus spécifique sur la fonction affine au collège peut se justifier dans ce cadre d'analyse comme étant le seul pour lequel la preuve algébrique peut être apportée. Les autres fonctions mobilisent des techniques de calcul algébrique qui ne sont pas encore maîtrisées. On peut cependant objecter que les types de problèmes pouvant être résolus par l'algèbre à ce niveau ne peuvent pas être des problèmes d'optimisation mais des problèmes de comparaison. Nous y reviendrons plus loin.

Les problèmes proposés aux élèves qui s'appuient sur des expérimentations en sciences peuvent s'apparenter à des situations de modélisation, ils montrent toute la complexité de l'enseignement-apprentissage de la mesure. Les travaux en cours d'Aurélié Chesnais et de Valérie Munier au sein de l'équipe ERES à l'université de Montpellier, montrent la nécessité d'un enseignement qui prenne en charge différents enjeux, en particulier l'articulation entre la mesure empirique et la mesure théorique (Chesnais & Munier, 2015). L'objectif de l'activité mathématique peut être la modélisation de la relation entre deux grandeurs à partir de mesures empiriques données dans le but de comprendre cette relation, la décrire, anticiper une évolution, permettre une prise de décision. Si les données sont des mesures empiriques (effectivement mesurées ou non), on ne peut évacuer la question de l'approximation de mesurage. Certains élèves peuvent les considérer comme des mesures théoriques et donc comme des valeurs exactes alors que d'autres estimeront que ce sont des valeurs approchées et que les calculs effectués sur ces valeurs sont valides à condition que la dispersion des résultats de calcul soit dans un intervalle acceptable. Toute la difficulté est dans la définition de cet « acceptable », de la négligibilité, d'autant que peuvent se cumuler des approximations de mesurage et des approximations de calcul.

Il s'agit donc d'articuler l'élaboration de lois avec d'une part des mesures empiriques et d'autre part des théorèmes mathématiques sur des mesures théoriques. Théoriquement, pour une unité choisie, on obtient une seule mesure pour une grandeur donnée. Tandis que d'un point de vue empirique, une unité étant fixée, on peut obtenir des mesures différentes pour une même grandeur. Ceci est dû aux problèmes de précision des mesures. Comment tenir compte alors, d'une part, de la dispersion des mesures et, de l'autre, des théorèmes ?

On peut estimer qu'une étape consiste à faire « comme si » on travaillait sur des mesures théoriques dans un intervalle de confiance. L'élaboration d'un modèle dans cet espace théorique ne peut en aucun cas être élaboré sans un but. La modélisation peut avoir pour objectif d'élaborer une loi ou de permettre un traitement. Ce traitement ne peut pas servir à compléter un tableau de mesures empiriques, cela n'aurait aucun sens. Les modèles théoriques mis en place à partir de mesures empiriques ne se justifient que s'ils ont pour fonction d'aider à la prise de décision.

L'apprentissage des fonctions comme modélisation de covariation entre deux grandeurs ne peut pas écarter la question de l'incertitude sur les mesures.

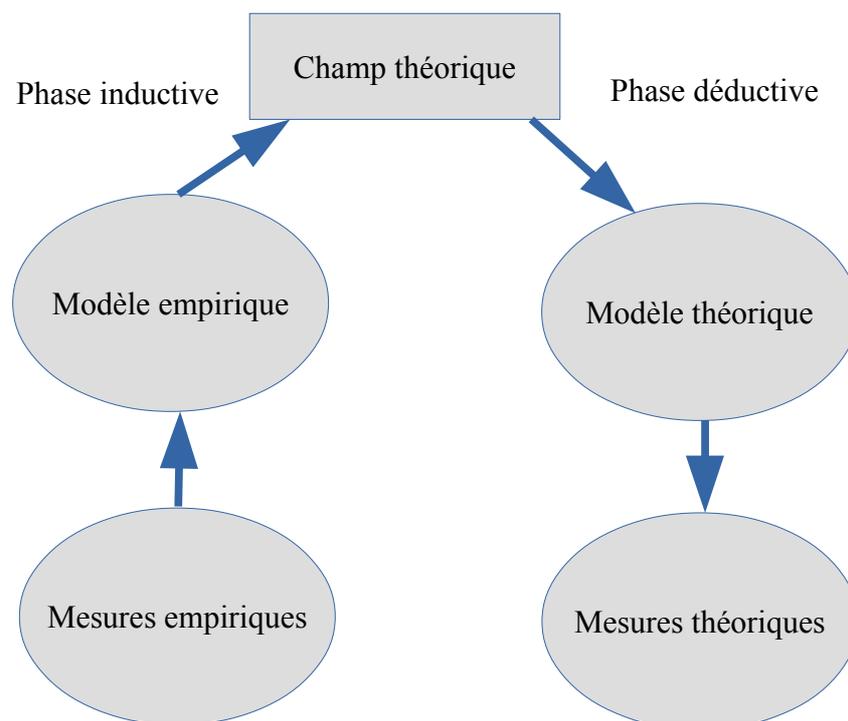


Schéma 6: Deux types de mesures (Chesnais & Munier, 2015)

Aurélien Chesnais et Valérie Munier évoquent l'idée d'explicitier les deux types de mesures en étant beaucoup plus précis par exemple dans les consignes.

Si le modèle empirique permet une élaboration d'un modèle théorique, ce n'est possible qu'à travers un champ théorique, or plusieurs champs théoriques peuvent intervenir : celui des mathématiques et celui des sciences expérimentales sur lesquelles s'appuie la situation. Comme dans toute modélisation de la covariation, les théories mathématiques rencontrent celles du domaine dont relèvent les grandeurs étudiées. La prise en charge des enjeux de précision est presque plus aisée lorsque les mesures concernent des grandeurs extérieures aux mathématiques car les représentations des élèves des sciences dites expérimentales par exemple, les rendent sensibles à la dispersion des mesures. Les élèves sont souvent confrontés à des expériences identiques menées en classe et ils savent pourtant que chaque binôme trouvera des mesures différentes. C'est plus délicat lorsque les grandeurs émanent des mathématiques (mesures de longueur, d'angles par exemple) car le contrat didactique n'explicite pas toujours clairement la différence entre la mesure instrumentée et la mesure calculée au sein des mathématiques.

Cela nous amène à repenser le statut de la fonction affine comme modèle. Dans la situation, le modèle empirique permet de définir une fonction affine « empirique » en ce sens que les coefficients sont des valeurs approchées calculées à partir de mesures empiriques. Le modèle théorique ne peut pas être une fonction affine clairement définie puisque nous ne pouvons pas calculer les coefficients exacts. Il ne peut être caractérisé que par les nécessités liées à la relation, qui sont ici la relative proportionnalité des écarts. Cette relation peut encore être formulée dans le registre algébrique sous forme d'une loi. Il s'agit donc pour les élèves de travailler à deux niveaux de conjecture : une conjecture sur les mesures empiriques puis une conjecture sur les mesures théoriques pour aboutir à une loi.

En fait nous avons le même schéma concernant les fonctions que celui qui concerne les mesures :

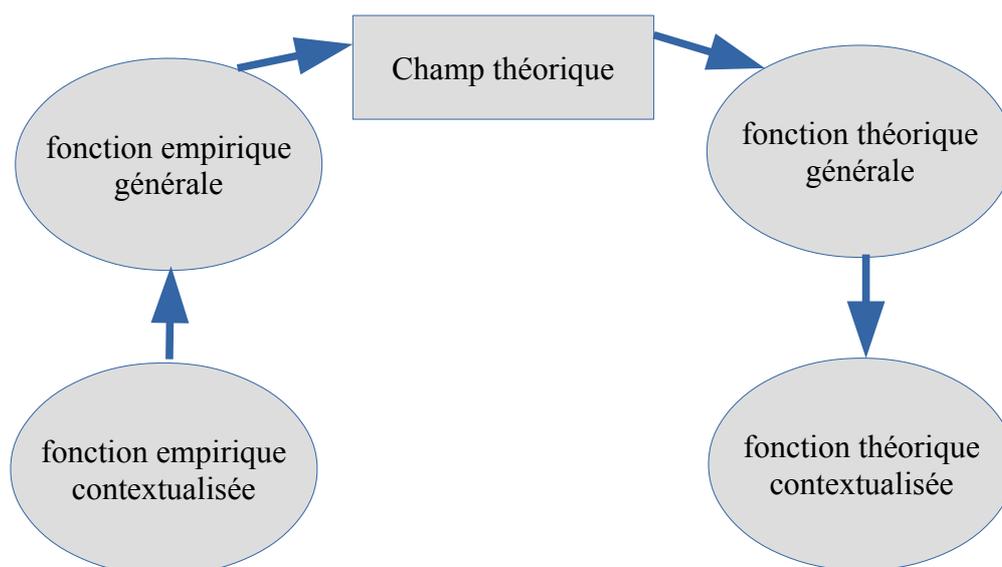


Schéma 7: Deux types de fonctions

La fonction empirique contextualisée consiste en une relation observée à partir de données empiriques sur la covariation de deux grandeurs. Par induction, les élèves peuvent définir une fonction empirique générale qui peut avoir le statut de programme de calcul. Dans le champ théorique lié aux grandeurs en question, cette fonction empirique générale peut devenir une fonction théorique générale qui peut à son tour avoir le statut de loi en sciences expérimentales par exemple. L'application de cette loi dans un contexte amène à l'identification d'une fonction théorique contextualisée.

Pour ce qui concerne les mathématiques, la difficulté est que la fonction théorique générale est encore à un niveau différent de celui lié au champ théorique de la discipline dont relèvent les grandeurs étudiées.

Ainsi on peut se poser la question du choix des grandeurs suivant qu'elles relèvent du champ des mathématiques (longueurs, aires, secteurs angulaires...), de disciplines scientifiques expérimentales (SVT, sciences physiques, technologie) ou des sciences économiques et sociales ou encore de sciences humaines. Comment l'élève peut-il transposer ce qu'il sait de fonctions empiriques générales à des fonctions théoriques s'il ne perçoit pas les nécessités communes qui les caractérisent ?

II.4 : Conclusion

Le point de vue covariationnel semble à privilégier dans l'idée d'une approche de la notion de fonction comme outil de modélisation de la covariation. Dans ce cas, il faut cependant distinguer deux types de fonctions. La fonction empirique s'applique à des mesures de grandeurs et doit prendre en compte les incertitudes ainsi que le contexte pour établir un domaine de validité. La fonction théorique s'applique à des nombres, l'ensemble de définition peut être un ensemble discret ou continu. Nous ne pouvons pas avoir un traitement identique sur ces deux types de fonctions. Les calculs effectués avec le modèle théorique ne peuvent pas avoir le même statut que ceux effectués avec le modèle empirique. Le modèle théorique permet d'identifier des classes de problèmes et peut devenir un outil pour résoudre de nouveaux problèmes du même type. Le modèle empirique permet d'anticiper un phénomène pour prendre une décision, comprendre ou expliquer.

Ce point de vue dynamique prépare le travail du lycée sur les fonctions en abordant de manière intuitive la notion d'interpolation linéaire et de dérivée. Il permet de jouer sur l'aspect ponctuel et l'aspect global de la fonction. Il permet par ailleurs de résoudre des problèmes sans l'algèbre.

Nous allons analyser des séquences qui montrent comment les élèves s'approprient ce point de vue covariationnel. Le chapitre suivant a pour objet la présentation du cadre théorique que nous allons utiliser, d'une part pour la construction de situation, pour leur analyse et d'autre part pour analyser l'activité des élèves.

Chapitre III : Le choix du cadre théorique

Dans ce chapitre, nous allons poser les éléments théoriques qui nous ont permis de mettre en place les expérimentations et de les analyser. Différents cadres interviennent à différents niveaux ou temps d'analyse. Nous allons préciser en quoi chacun de ces cadres apporte un éclairage pertinent, tout en pointant les limites de notre étude. Nous allons partir des difficultés des élèves pour identifier deux axes de travail : l'un autour du savoir problématisé et l'autre autour de situations d'enseignement-apprentissage problématisante. Il s'agit d'identifier ce que signifie un savoir problématisé en mathématiques et le cadre épistémique correspondant, en particulier ce que serait des nécessités et le registre explicatif en mathématiques. Partant de ce cadre, nous nous interrogerons sur l'activité de l'élève, sur les situations qui peuvent amener l'élève à problématiser.

III.1 : Mise en évidence des difficultés repérées

L'enseignement-apprentissage des fonctions affines pose des difficultés aux lycéens. Comme nous le verrons dans la partie 2 chapitre I, les élèves peuvent mettre en place des automatismes de calculs ou des techniques, ils ont des connaissances procédurales mais ces connaissances sont rarement mobilisables pour résoudre des problèmes non routiniers (Grau, 2011). En particulier les enseignants constatent que les notions sont peu disponibles au sens de Robert en sciences expérimentales, en sciences économiques ou en sciences de l'ingénieur (Robert, 1998). De même au sein des mathématiques, il peut être difficile pour les élèves d'utiliser les connaissances qu'ils ont des fonctions affines pour aborder la dérivation, les approximations linéaires ou les interpolations linéaires. Plusieurs pistes sont possibles pour analyser cette question :

- modifier le savoir à enseigner ;
- modifier la pratique pédagogique ;
- mieux comprendre comment l'élève s'approprié les concepts ;
- mieux comprendre la manière dont l'élève s'engage dans la résolution de problèmes.

Comme nous avons pu le voir au chapitre 1, la notion de fonction affine a évolué dans l'histoire des mathématiques, elle n'a pas la même expression ni la même fonctionnalité suivant les époques. Actuellement, l'enseignement des fonctions est lié à l'idée de modélisation et d'approximation. Il existe une dualité entre le formalisme rigoureux de l'écriture algébrique et l'interpolation linéaire qui s'appuie sur des intuitions et des approximations. Cette dualité peut être liée à la différence que nous avons relevée au chapitre 2 entre la fonction modèle empirique et la fonction modèle théorique. Il peut sembler incohérent aux élèves de résoudre algébriquement des équations pour déterminer des valeurs de mesures qui par nature sont approchées. Tout comme il peut leur sembler incohérent de déterminer de manière précise le point d'intersection de deux droites alors que l'on se

contentera d'une lecture graphique dans d'autres cas. On peut donc penser qu'il serait bon d'explicitier le cadre de travail aux élèves.

Si les programmes scolaires précisent qu'il ne sera pas donné de définition d'une fonction, on peut lire dans la plupart des manuels : « la fonction est définie par... », suivi d'un programme de calcul P, d'une formule algébrique F, d'un tableau de valeurs T ou d'une courbe représentative C, ceci pour définir une fonction particulière. Nous noterons PTFC ce système de définition. Si nous cherchons les liens entre ces différents registres (Duval, 1995), nous pouvons identifier certains traitements qui permettent de passer de l'un à l'autre.

- Le **tableau de valeurs** donne les coordonnées de points qui sont sur la courbe représentative de la fonction, il permet dans certains cas (en particulier si la fonction correspond à un ou deux opérateurs simples) de déterminer le programme de calcul de la fonction correspondante, ce programme est implicitement nécessaire pour établir l'expression algébrique de la fonction.
- La **courbe représentative** permet de lire les coordonnées de points qui peuvent être placés dans un tableau de valeurs, elle peut donner une idée de la forme de l'expression algébrique de la fonction (la droite suppose une expression linéaire du premier degré, la parabole du second etc.). La courbe peut alors amener à définir le programme de calcul mais pas directement, il est nécessaire d'avoir une idée de son expression algébrique.
- Le **programme de calcul** permet d'effectuer des calculs d'images, de résoudre des équations et donc de trouver des valeurs qu'il est possible d'organiser dans un tableau de valeurs. Remplacer le nombre entrant dans le programme par une lettre x désignant une variable dans l'ensemble de définition permet d'écrire l'expression algébrique de la fonction. Le programme ne donne pas directement des informations liées à la courbe représentative, il faut soit l'utiliser pour définir des points de cette courbe, soit avoir une idée de l'allure de la courbe d'après son expression algébrique.
- La **formule** permet quant à elle de mettre en place le programme de calcul correspondant ou d'avoir une idée de l'allure de la courbe (l'expression canonique du second degré permet de connaître directement les coordonnées du sommet de la parabole par exemple). La formule ne donne pas directement les valeurs du tableau, puisqu'un calcul est nécessaire et donc demande l'application du programme de calcul.

Nous avons donc des liens directs entre P et TF, entre T et PC, entre C et TF et entre F et PC, ce qui peut se schématiser par la représentation d'un losange PTFC dont chaque côté symbolise une action qui permet de passer d'un registre à l'autre (voir schéma 8). Pour chaque conversion (Duval, 2006), le sens dans lequel il s'effectue correspond à des tâches qui peuvent avoir plus ou moins de sens et être plus ou moins faciles. Il est par exemple plus facile de tracer une courbe à partir d'une expression algébrique que de déterminer une expression algébrique à partir d'une courbe. La courbe étant considérée comme un lieu de points géométriques, la courbe est un objet matériel associé au graphe de la fonction. Ceci est lié en particulier aux lectures sur le graphique qui ne permettent pas toujours de déterminer

précisément les valeurs des différents coefficients qui interviennent dans l'expression algébrique de la fonction. Pour les fonctions affines, l'intersection entre l'axe des ordonnées et la droite représentative de la fonction affine peut être imprécise et le coefficient multiplicateur peut être délicat à déterminer puisqu'il n'est généralement pas indiqué par un ostensif. Le passage du programme à l'expression algébrique mobilise des compétences en calcul algébrique mais les difficultés sont relativement les mêmes dans les deux sens du travail. Par contre si le programme permet de calculer images et antécédents pour compléter le tableau de valeurs, l'inverse est plus délicat puisque pour une série de valeurs, il peut exister différentes opérations qui permettent d'obtenir les mêmes couples. Le problème étant de savoir combien de valeurs sont nécessaires pour définir le programme correspondant, ce qui revient à un problème d'interpolation. Le tableau de valeurs est alors insuffisant car c'est l'allure globale de la courbe qui renseigne sur le type d'interpolation qui semble le mieux adapté à la situation. Dans notre cas, le problème de l'interpolation linéaire revient à définir le programme de calcul correspondant à une fonction affine définie par deux couples de valeurs.

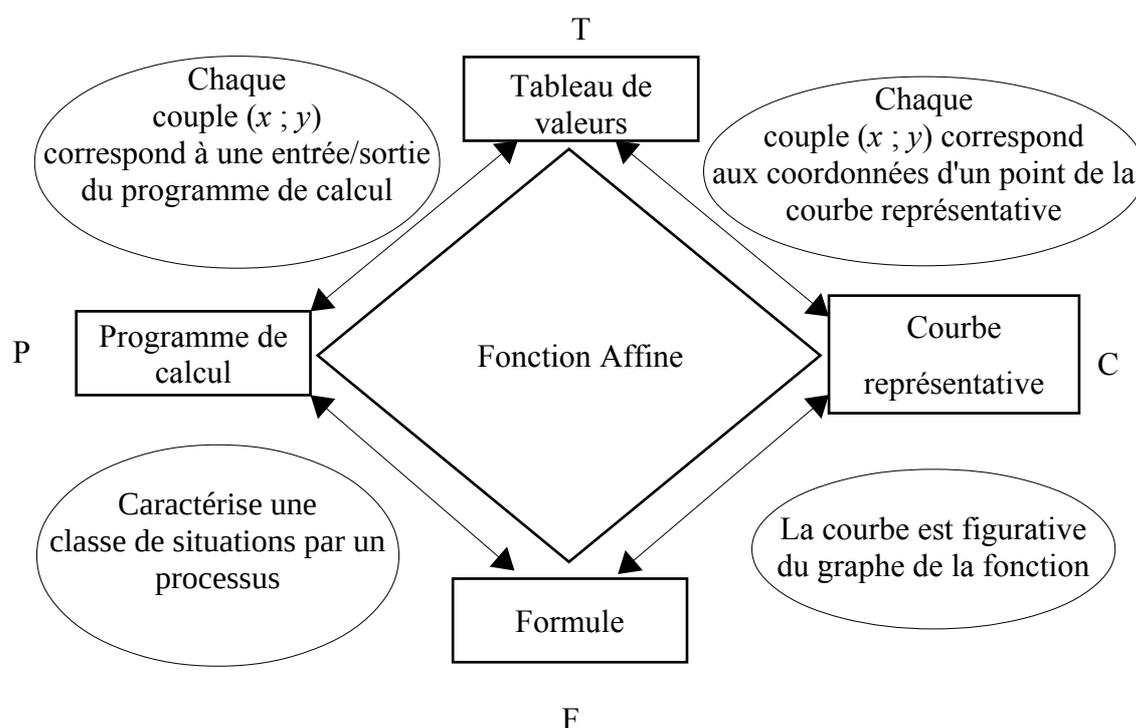


Schéma 8: Caractérisation PTFC d'une fonction affine

Raymond Duval (Duval, 1993) parle de « registres » pour désigner des systèmes sémiotiques différents. L'objet mathématique est un objet inaccessible qui est défini dans un certain cadre, c'est-à-dire un ensemble de concepts susceptibles d'être organisés en une progression théorique (Douady, 1986) mais qu'on se représente dans un registre de représentation sémiotique comme dans le cas des fonctions : écriture algébrique, représentation graphique, organisation de valeurs dans des tableaux, programme de calcul. Si effectuer un changement de cadre revient à une réinterprétation portant sur la formulation des problèmes à résoudre, à l'intérieur d'un même cadre, il se peut que le problème exige de

changer de registre pour utiliser un autre traitement relatif à un autre système. Il s'agit donc de convertir la représentation faite dans un registre dans un autre registre. Cette conversion (Duval, 2006) pose problème aux élèves puisqu'elle ne relève ni de règles, ni de correspondances isomorphes. Cette conversion n'est donc ni un codage, ni une traduction. Si le retour à l'objet matériel (tracé, signe, signifiant...) est possible, il devient plus facile de mettre en correspondance deux représentations dans deux registres différents, mais l'objet mathématique étant inaccessible, il faut pouvoir passer d'un registre à l'autre sans passer par l'objet lui-même. Le cas des fonctions affines est particulièrement complexe puisqu'il existe de multiples représentations de la fonction affine qui ne désignent pas toujours les mêmes caractéristiques de l'objet. Duval précise : « La conversion ne se fait pas au niveau de ce que chaque représentation représente mais à celui des unités de sens pertinentes qui constituent son contenu. » Il s'agirait donc de mettre en évidence des unités de sens par exemple en partant d'un registre et d'étudier, en ne faisant varier qu'un facteur à la fois dans ce registre de départ, ce que cela modifie dans un autre registre. «Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être tout à fait équivalentes, permettent la mise en œuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation» (Douady, 1986, p.11). Le changement de cadre provoque donc une extension de sens des objets alors que le changement de registre permet dans un même cadre d'utiliser d'autres propriétés d'un même objet. La difficulté dans l'apprentissage est que, pour les élèves, « deux représentations d'un même objet sont deux représentations de deux objets totalement différents, et ils ne voient pas comment on a pu passer de l'une à l'autre » (Duval, 2002).

La conversion de registre a alors deux fonctions différentes. La première est une fonction pragmatique, elle est liée à la nécessité de choisir le registre le plus approprié au traitement afin de résoudre le problème. Un élève particulièrement à l'aise avec les transformations des écritures algébriques aura tendance à utiliser la formule algébrique de la fonction affine pour résoudre le problème posé. Un autre plus à l'aise avec la lecture graphique fera un tracé. Certains registres sont explicitement associés à des types de traitement. Par exemple la consigne « résoudre graphiquement » amène de fait l'utilisation du registre graphique. Pour d'autres le choix peut être plus implicite et fonction des techniques automatisées. La conversion de registre a une autre fonction plus heuristique liée au concept visé. En effet, puisque le concept se construit sur les représentations qui ne sont possibles que si le registre est connu, la conversion de registre doit permettre une représentation complète de la notion dans chacun de ces registres et le passage de l'un à l'autre permet d'explicitier ses caractéristiques. La conversion joue donc un rôle dans la construction même du concept.

La construction des concepts mathématiques dépend donc étroitement de la capacité d'utiliser plusieurs registres de représentations sémiotiques de ces concepts et donc de la capacité à :

- Les représenter sur un registre donné.
- Traiter ces représentations à l'intérieur d'un même registre.
- Convertir ces représentations d'un registre donné à un autre. (D'Amore, 2001, p.18)

Nous allons nous intéresser particulièrement à deux registres monofonctionnels, c'est-à-dire dont les traitements sont essentiellement algorithmiques, l'un étant discursif, c'est-à-dire qu'il permet un traitement discursif : le système d'écriture, numérique, littéral, algébrique, symbolique, et l'autre non discursif : les graphes cartésiens (Duval, 2002). Nous avons deux sauts conceptuels qui sont le passage de l'arithmétique à l'algèbre (Comin, 2009) et le passage de la courbe au graphe (Chauvat, 1998).

Gérard Chauvat (Chauvat, 1998) définit trois modes de fonctionnement vis-à-vis des représentations graphiques des fonctions :

- **Le mode nomographique** : correspond à un rapport au dessin sans souci de son signifiant.
- **Le mode idéogrammatique** : le graphique correspond alors à un idéogramme, il sert à la communication, le dessin représente une idée.
- **Le mode opératoire** : le graphique est considéré comme un processus interactif, il ne donne pas de réponses mais il est indispensable pour donner la réponse.

La notion de courbe peut donc devenir une connaissance obstacle suivant le mode dans lequel elle est utilisée. Par exemple pour la fonction affine, la droite est un emblème, sa fonction est avant tout idéogrammatique, « le tracé à la règle tue la relation entre les coordonnées » (Chauvat, 1998). Même si les élèves de troisième étudient les généralités sur les fonctions, les seules fonctions au programme du collège sont les fonctions linéaires et affines. Cette fréquentation favorise la mise en place de théorèmes en acte du type : « la représentation d'une fonction est une droite » ou « deux points suffisent pour tracer la représentation graphique d'une fonction ». Le risque est d'institutionnaliser des aspects généraux alors que le processus de conceptualisation n'est qu'à peine entamé. L'enjeu est donc de proposer des situations d'apprentissage qui demandent à l'élève d'utiliser le graphique selon les trois modes et qui favorisent le passage au mode opératoire.

Si maintenant nous nous appuyons sur les travaux d'Eugène Comin (Comin, 2009) sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans le cadre des fonctions, il apparaît que le saut conceptuel indispensable est le passage de la grandeur à la notion de variable numérique. Ce saut passe par une conversion de registre et la formule est sans doute l'objet d'étude qui permet le mieux de travailler ce changement de cadre. Nous pouvons résumer les représentations liées aux fonctions suivant qu'elles sont perçues dans le cadre arithmétique ou dans le cadre algébrique dans le tableau 6 .

Cadre arithmétique	Cadre algébrique
Travail sur des Grandeurs	Travail sur des variables numériques
Exprime une dépendance entre grandeurs.	Exprime une correspondance entre nombres abstraits.
Peut être définie par une formule arithmétique sur des mesures et leurs unités.	Peut être définie par une formule algébrique.
Résume un calcul.	Modélise une classe de situations.
Les lettres et mots désignent des grandeurs mesurées.	Les lettres désignent des nombres réels.
Le résultat est une mesure et son unité.	Les variables décrivent des ensembles numériques (x et y sont des variables muettes).
Le sens est porté par la structure des grandeurs.	Le sens est porté par la structure de \mathbb{R} et le processus itératif.
Pour l'élève la formule désigne un calcul et les lettres désignent des mesures.	La formule désigne une fonction, les lettres désignent des variables.

Tableau 6: Caractérisation des fonctions dans les cadres arithmétiques et algébriques

Comin définit aussi trois niveaux de maîtrise :

- **L'usage implicite** : l'élève utilise des modèles implicites d'action, il infère un raisonnement arithmétique
- **L'usage canonique** : l'élève utilise un savoir institutionnalisé comme outil comme par exemple les tableaux de valeurs, les programmes ou les formules.
- **L'usage familier** : l'élève met en œuvre une conceptualisation algébrique.

Nous avons croisé ces deux aspects pour déterminer des profils d'élèves en listant leurs compétences suivant leur maîtrise de ces deux aspects algébrique et graphique. Nous avons obtenu neuf classes et nous avons utilisé ces classes pour mesurer les progrès des élèves au cours des activités. Nous noterons PTFC l'ensemble des caractérisations des fonctions : programme, tableau, fonction, courbe. Dans le tableau 7, nous avons décrit les compétences des élèves pour chaque classe. Nous pouvons imaginer une progression dans ce tableau mais elle n'est pas forcément linéaire. En effet, plus d'expertise dans le passage de la courbe au graphe peut entraîner un recul dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre et ce sur certaines situations plutôt que sur d'autres. Ce tableau va nous permettre d'identifier les changements de registres qui posent le plus de difficultés aux élèves et les connaissances qu'il serait souhaitable de développer pour permettre ces changements de registres.

		Représentation des fonctions dans les registres discursifs			
		Cadre arithmétique → cadre algébrique			
		Usage implicite	Usage canonique	Usage familier	
Représentation des fonctions dans les registres non discursifs	Courbe (cadre géométrique) → Graphe (cadre fonctionnel)	Mode nomographique	Calcule sur des grandeurs. Lit des informations sur des graphiques.	Calcule sur des nombres. Sait résoudre un problème dans un seul registre à la fois.	A des procédures algébriques aisées. Peut décrire des variations sur la courbe ou sur le tableau.
		Mode idéogrammatique	Sait reconnaître une situation de proportionnalité.	Sait manipuler les expressions algébriques. Sait qu'une situation affine se représente par une droite.	Les capacités sont mobilisables. Sait mettre en relation différents registres et donc valider.
		Mode opératoire	Résout aisément des problèmes sur les grandeurs que ce soit avec l'aide du graphique ou d'un calcul arithmétique.	Sait associer une fonction affine à des types de situations. Sait caractériser les coefficients sur le graphique.	Les capacités sont disponibles. Peut utiliser la fonction affine pour modéliser une situation. Sait décontextualiser un problème et sait faire des aller retour entre les registres PTFC.

Tableau 7: neuf classes de compétences liées à l'apprentissage des fonctions affines

Les fonctions affines relèvent de la théorie des espaces vectoriels et s'appuient sur l'idée de transformation géométrique, deux notions qui ne sont plus au programme du collège et du lycée. Un groupe de recherche de l'IREM de Poitiers a pris une entrée épistémologique pour lister les grandes questions autour desquelles s'organise la notion de fonction. Ils établissent que les grands problèmes mathématiques sont : Comment optimiser une quantité ? Comment connaître les variations d'une quantité ? Comment comparer des quantités ? (IREM de Poitiers Groupe Lycée, 2011). Au collège, les problèmes posés aux élèves sont contextualisés et la résolution peut s'appuyer sur des techniques qui peuvent se passer de l'algèbre (graphiques, calculs numériques, tableur). En effet, les résolutions algébriques du premier degré n'ont que peu d'intérêt, elles peuvent même devenir une source d'erreur si les techniques n'ont pas pris tout leur sens. Prenons l'exemple des équations du type $ax = b$ avec a et b deux réels non nuls, beaucoup d'élèves hésitent entre $x = \frac{b}{a}$ et $x = \frac{a}{b}$ alors que pour résoudre $5x = 20$ la table de multiplication de 5 devrait permettre de résoudre immédiatement l'équation en la regardant comme une multiplication « à trou ». En seconde, les fonctions du second degré peuvent amener à des résolutions algébriques qui nécessitent plus de technicité.

On peut donc regretter que la notion de fonction affine soit encore abordée au collège par son formalisme et son aspect algébrique alors que ces aspects ne sont absolument pas nécessaires pour la résolution des problèmes posés à ce niveau de la scolarité. On peut même s'interroger sur la pertinence de l'introduction des notations et du vocabulaire avant la classe de première où le travail sur la dérivation rend ce formalisme incontournable. Nous verrons que les élèves écrivent spontanément le signe d'égalité pour signifier que deux variables sont en correspondance. Ils sont conscients qu'on ne peut pas écrire par exemple $2,5 = 40$. Il est alors aisé de motiver un nouveau symbole et on peut proposer d'utiliser la flèche pour symboliser cette correspondance : $2,5 \rightarrow 40$. Cette notation apporte de la clarté et elle simplifie l'écriture, elle est cependant beaucoup plus simple que l'écriture $f(2,5) = 40$ où les parenthèses ont un sens nouveau et où f désigne un objet qui n'a pas été défini.

Le passage de l'arithmétique à l'algèbre ne permet pas à lui seul d'aider la transition entre le calcul sur les grandeurs et la notion de fonction (Comin, 2005). Les élèves apprennent un certain nombre de techniques liées à des registres et ils les utilisent dans des situations semblables comme nous le verrons dans la partie 2 chapitre I. Ces capacités les amènent-elles à construire le concept de fonction affine ? Un apport essentiel de la neuroéducation est que tout apprentissage demande de résister aux automatismes déjà installés (Masson, 2014). L'inhibition est un facteur essentiel en résolution de problèmes (Houdé, 2009). L'élève doit avoir une certaine flexibilité mentale pour changer de point de vue, remettre en cause sa représentation du problème. Pour ce qui concerne les fonctions affines, les automatismes techniques mis en place ne suffisent pas à la transposition de ces techniques dans de nouveaux contextes. Prenons par exemple la méthode pour représenter graphiquement une fonction affine. Les élèves peuvent automatiser le calcul des coordonnées de deux points et tracer la droite passant par ces deux points. Cet automatisme peut amener les élèves à reproduire la même technique pour une fonction qui n'est pas affine. De même, le calcul d'images ou d'antécédents amène à des calculs algébriques du premier degré qui peuvent être automatisés sans qu'une autre procédure ne soit éventuellement étudiée. Un autre exemple pour le cas de la proportionnalité est la technique du produit en croix. Les élèves l'appliquent systématiquement alors que les propriétés de linéarités peuvent s'avérer plus rapides. Cet automatisme peut amener les élèves à utiliser cette technique quelle que soit la fonction étudiée.

Si les élèves sont amenés à résoudre des problèmes et donc à utiliser et même inventer des symboles pour écrire leur procédure, l'enseignant a souvent la responsabilité de la conversion des productions dans le registre des expressions algébriques. Ce formalisme s'impose à l'élève sans que les conventions soient systématiquement explicitées. Notre hypothèse est qu'il serait utile de donner du temps à la mise en texte des représentations initiales des élèves et à la formulation autonome de savoirs apodictiques par les élèves. La problématisation du savoir demande de mettre en œuvre des relations entre les conditions du problème et les données du problème afin de faire émerger des nécessités. L'inhibition serait alors encouragée par le contrôle des conditions au cours de la mise en œuvre de techniques par ailleurs automatisées.

Enfin au niveau des programmes, il semble nécessaire de repenser l'organisation du savoir enseigné autour des grands types de problèmes que les connaissances mathématiques permettent de résoudre : les problèmes pour agir, pour modéliser pour comprendre, pour expliquer, pour anticiper... et non suivant les domaines mathématiques, ce qui pourrait éviter le cloisonnement des cadres et registres induits par l'organisation scolaire des textes de savoir.

Les questions sont donc à la fois épistémologiques, didactiques et pédagogiques, et il semble bien impossible d'isoler chacune des composantes dans les analyses. C'est pourquoi différents cadres théoriques nous semblent nécessaires, non pas pour les mettre en opposition ou analyser des éléments micros indépendamment les uns des autres, mais bien pour recomposer un nouveau cadre complexe qui met en relation les différentes composantes.

III.2 : Les fondements théoriques

Deux cadres théoriques vont être mobilisés dans cette recherche : l'apprentissage par problématisation (Fabre & Orange, 1997) qui s'intéresse au lien entre apprentissage et problème mis en évidence par Bachelard, Dewey, Deleuze, Meyer et Fabre et la théorie des situations didactiques (TSD) de Brousseau. Nous allons présenter ces deux cadres théoriques et montrer comment ils contribuent à différents niveaux de notre recherche.

III.2.1 : La Théorie des situations didactiques (TSD)

La TSD de Guy Brousseau nous donne un cadre pour concevoir des situations visant l'acculturation d'une population à telle ou telle connaissance de la communauté mathématique. Elle s'intéresse à l'utilisation de problèmes pour construire le savoir dans une perspective constructiviste. Elle permet d'analyser les potentiels didactiques de situations qui sont des situations d'action, de formulation et de validation où l'élève interagit avec le milieu. Nous considérons ici le milieu au sens large. Ce sont les objets physiques, culturels, sociaux, humains avec lesquels le sujet interagit dans une situation. Les analyses *a priori* permettent de repérer en quoi le milieu permet ou non la mobilisation de certaines connaissances, savoirs, savoir-faire et en fonction des erreurs anticipées des élèves si le milieu permet des rétroactions favorables à la construction ou la stabilisation de connaissances mathématiques visées par le professeur.

Les situations mathématiques ont pour objet de représenter les conditions minimales nécessaires pour expliquer ou justifier la mise en œuvre d'un énoncé mathématique par un agent ou un groupe d'agents, sans intervention didactique extérieure. (Brousseau, 2011, p.2)

Les situations mathématiques permettent à l'élève de construire « des connaissances mathématiques sans qu'elles soient préalablement enseignées directement ou formellement » précise Brousseau. Il s'agit de penser le système « connaissances, milieu, élève, professeur » de sorte qu'il apporte toutes les validations et rétroactions nécessaires pour que les connaissances mathématiques soient fonctionnelles. Ce qui signifie qu'une collection de

connaissances mathématiques apparaît en lien avec une collection de situations et que la TSD fait apparaître à la fois la nature et l'organisation de ces collections. Si cette théorie reconnaît la nécessité de l'institutionnalisation des connaissances, elle vise essentiellement à construire les connaissances en faisant apparaître un besoin à travers les situations. En fait, les erreurs et les obstacles sont les leviers de la situation d'apprentissage, ils permettent de savoir « pourquoi c'est vrai ».

La validation s'occupe cependant peu de savoir « pourquoi ça ne peut pas être autrement ». Se pose ici la question du vrai en mathématique. Pour les élèves, une proposition peut être vraie pour différentes raisons :

- la perception : « ça se voit » ;
- la construction : « c'est fait comme ça » ;
- les définitions formelles : « c'est la définition » ;
- la logique à l'intérieur d'une axiomatique : « je l'ai démontré » ;
- l'absence d'objections : « personne n'a prouvé que c'était faux ».

Comment amener les élèves vers un savoir apodictique, c'est-à-dire un savoir pour lequel on sait pourquoi il est ce qu'il est et pourquoi il ne peut pas être autrement ? En mathématiques, les connaissances ont rarement ce statut. « Le besoin de preuve (et de nécessités) en mathématiques renvoie d'une part à l'impératif de ne pas introduire d'éléments faux dans l'édifice ; d'autre part, à l'impératif de compréhension. » (Hersant, 2015). Comme le propose le philosophe Charles de Villers, on peut opposer la certitude analogique qui s'établit sur un grand nombre d'expériences à la certitude apodictique qui prescrit les lois : « La certitude apodictique porte les caractères d'universalité et de nécessité absolues : elle ne dérive donc point de l'expérience, qui ne peut établir qu'une certitude analogique » (Villers, 1830). Il s'agirait donc de permettre l'apprentissage d'un savoir apodictique qui ne soit pas un simple savoir analogique non mobilisable par le fait que l'élève ne rencontrera que très rarement des situations reconnues comme analogues. Pour cela, nous allons nous tourner vers un autre cadre théorique.

III.2.2 : L'apprentissage par problématisation

Dans le cadre de la problématisation, de nouveaux outils s'offrent au didacticien des mathématiques pour analyser l'activité de l'élève. Issue du champ de la didactique des Sciences et Vie de la Terre (Fabre & Orange, 1997), ce cadre théorique s'intéresse à la construction du problème et aux nécessités construites par les élèves au cours de la résolution de problèmes en lien avec la nature du savoir.

Un savoir scientifique n'est pas seulement un savoir qui permet de résoudre des problèmes, c'est aussi un savoir qui permet d'en formuler de nouveaux dont le travail va faire progresser en retour les savoirs. (Orange, 2005, p.76)

Si la conceptualisation est le cheminement qui amène à définir une notion, la problématisation est la mise en relation de données et de conditions pour formuler des questions posant un problème à résoudre. Ces deux processus de pensée interagissent avec un troisième qui est lié à l'argumentation et à la représentation du problème dans différents registres. Si les élèves produisent différentes solutions à un même problème, il se peut que ces solutions diffèrent parce que ces élèves n'ont pas les mêmes connaissances. En fonction de ses connaissances, l'élève va sélectionner des indices et se donner un horizon d'attente de la solution. Cependant, même s'ils ont les mêmes connaissances, les élèves peuvent engager des procédures différentes. D'autres aspects peuvent interférer comme les expériences personnelles, l'estime de soi, la représentation que se fait l'élève des attentes de l'enseignant etc. Si bien que le savoir construit par l'élève dépasse largement la solution du problème, il est lié à la construction du problème, c'est ce qu'on appelle la problématisation. Cette construction est en fait un processus car au cours de la résolution d'un problème, l'élève construit en réalité une succession de problèmes. Chaque étape l'amène à construire de nouveaux savoirs qui viennent modifier la sélection des indices et donc les données du problème initial. Ainsi un savoir ne vient pas seulement répondre à un problème, il permet d'en formuler de nouveaux. Ce savoir, même s'il est théorique, doit être critiqué et ce, non seulement d'un point de vue empirique en lien avec la solution du problème, mais aussi d'un point de vue explicatif et cohérent. Il s'agit de se demander s'il pourrait être autrement, quelles sont les nécessités liées d'une part au contexte du problème (les éléments empiriques) et d'autre part au modèle théorique utilisé comme condition de traitement des données (les éléments analytiques). La problématisation demande donc d'explorer tous les possibles pour s'assurer que rien ne peut entrer en conflit avec les savoirs construits. C'est pourquoi formalisation et argumentation sont deux éléments indispensables de la problématisation des savoirs afin de confronter les différentes constructions, les différentes contraintes et de repérer les constantes tout en contrôlant qu'il y a bien eu exploration de tous les possibles. Dans le domaine des sciences expérimentales, on identifiera deux types de contraintes, celles empiriques et celles sur les modèles. Problématiser un savoir reviendrait à mettre en tension les contraintes empiriques et celles liées aux modèles pour construire des nécessités à l'intérieur du modèle par un raisonnement. Ainsi, les contraintes sur les modèles (dans le domaine des mathématiques il s'agit de théorèmes, notions, connaissances) et celles empiriques (en mathématiques les essais, observations, calculs) sont mises au travail pour poser le problème. Par des raisonnements, une argumentation, elles permettent d'élaborer des nécessités sur les modèles et donc de construire un savoir apodictique (Lhoste, Peterfalvi, & Orange, 2007).

Le modèle du losange avec deux espaces dialogiques (voir schéma 9), l'un horizontal entre le problème et la solution, l'autre vertical entre les données et les conditions du problème (Fabre, 2011) permet de comprendre à la fois les contraintes posées par le milieu et celles que l'élève se pose par ses représentations naturelles ou les objets préconstruits.

Si la TSD permet de travailler l'articulation entre les données et les conditions, elle ne prend pas explicitement en compte la façon dont les élèves construisent le problème, comment les élèves identifient à partir de faits « pourquoi ça ne peut pas être autrement ». La

TSD vise, dans une certaine mesure, une réduction des possibles par un aménagement du milieu, alors que l'apprentissage par problématisation est, toujours dans une certaine mesure, une ouverture et une exploration de possibles permettant une mise en évidence des nécessités. La TSD s'intéresse à la dynamique des milieux alors que du côté de l'élève, la construction du problème et des nécessités nous amène à nous interroger plutôt sur la dynamique des problèmes (Hersant, 2015).

Face à un problème mathématique, la mise en place d'un concept nouveau n'est pas dans la solution qui préexisterait au problème mais bien dans la construction du problème, c'est-à-dire dans la mise en tension des données et des conditions du problème et de la représentation que l'on se fait de sa solution. (Grau, 2011, p.16).

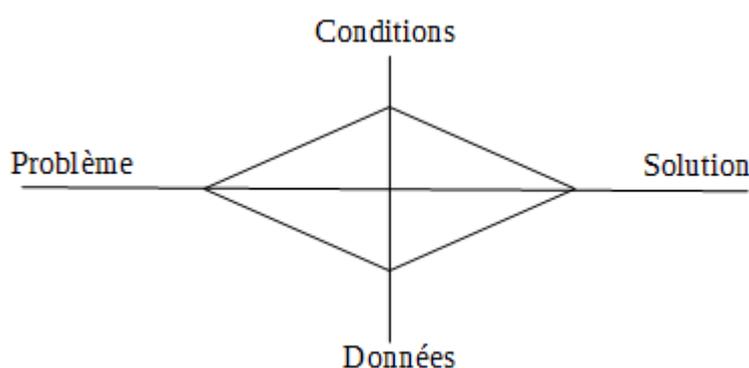


Schéma 9: losange de la problématisation (Fabre, 2011)

C'est l'articulation entre ce qui relève des faits et les modèles explicatifs qui permet de problématiser. Le processus demande une schématisation du réel et donc une hiérarchisation des données et la mobilisation de différentes techniques. Les discours autour de ces techniques peuvent utiliser des registres sémiotiques différents (Duval, 2002), être dans différents cadres (Douady, 1986), utiliser un langage lié au contexte. Ces discours évoluent en fonction des situations et nécessitent une validation pragmatique pour les rendre crédibles et pour permettre leur modélisation au sein d'une théorie. En classe, la genèse artificielle de cette théorie à travers des débats amène souvent à une construction déductive du savoir et certains "trous" de la théorie sont comblés par l'enseignant par des gestes d'ostension. Il s'agit donc d'imaginer d'autres pratiques pour aider l'élève à problématiser sans problématiser à sa place.

Les inducteurs de problématisation (Fabre & Musquer, 2009) sont des aides spécifiques dans la situation d'enseignement-apprentissage qui peuvent activer le processus de problématisation chez les élèves. Les inducteurs font partie du milieu, ils permettent d'attirer l'attention vers des analogies de structures, vers des évocations, des schématisations successives. Ils doivent aider l'élève à « structurer peu à peu les données au regard des conditions » (Fabre & Musquer, 2009).

Le processus de problématisation s'effectuant suivant deux axes : celui reliant problème et solution et inversement et celui reliant données et conditions, on peut considérer deux types d'activités cognitive : la position du problème et la résolution du problème. L'axe qui met en relation recherche de données et recherche de conditions correspond à la construction du problème. Les inducteurs peuvent avoir un potentiel sur chacune de ces étapes dans un sens ou dans l'autre. Ainsi Fabre et Musquer notent a , b , c , d et e les différentes directions et ils mettent en indice i si l'inducteur amène une inférence et d s'il amène une déduction. Ils résument cette typologie dans le schéma 10.

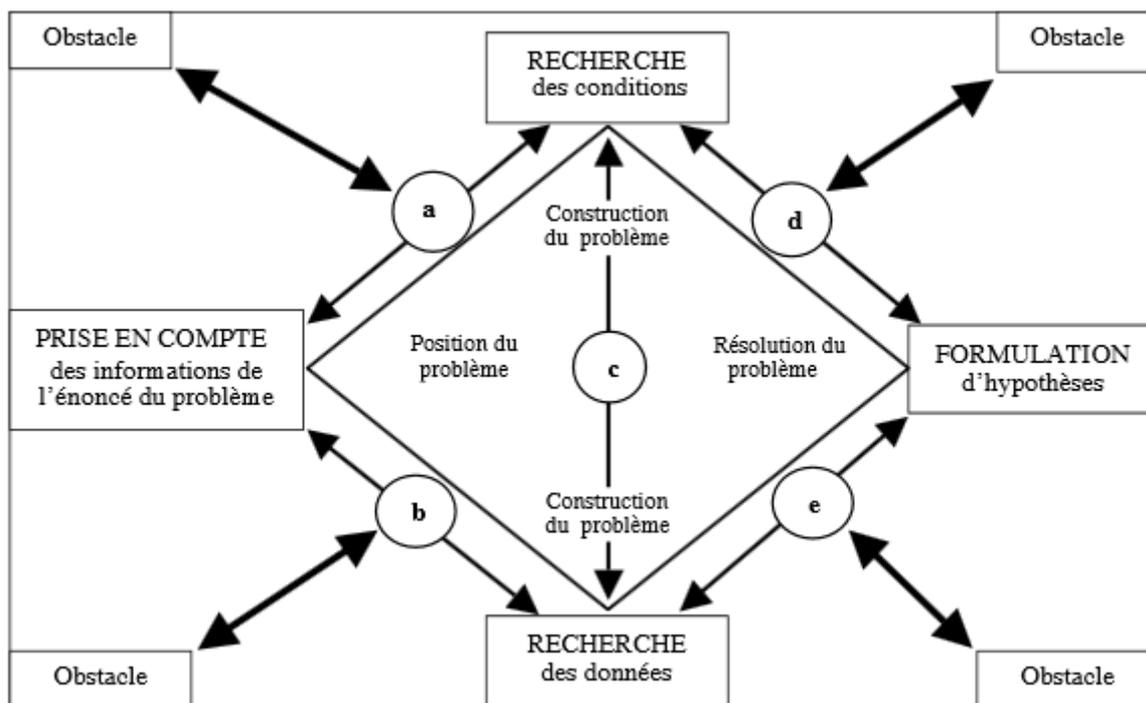


Schéma 10: Losange de problématisation extrait de Fabre et Musquer (2009, p.52)

Prenons quelques exemples pour illustrer ce schéma. Un inducteur de type b_i peut amener l'élève à prendre en compte des données pour interpréter la question initiale alors qu'un inducteur de type b_d amène l'élève à choisir une donnée en fonction de la question initiale. Les inducteurs de type c_i amènent l'élève à choisir un cadre, un registre sémiotique pour poser le problème, ceux de type c_d amènent l'élève à réfléchir comment les conditions l'amènent à penser les données du problème. Ces inducteurs peuvent être dans la consigne ou prévus dans des aides apportées à l'élève au cours de l'activité. Ils peuvent aussi apparaître de manière spontanée dans les inter-actions professeur-élève ou élève-élève. Les inducteurs qui favorisent la problématisation sont ceux de l'axe c , c'est-à-dire ceux qui mettent en tensions données et conditions. Encore faut-il prendre la précaution de parler de « potentiel » de problématisation d'un inducteur car rien ne prouve que la problématisation va effectivement avoir lieu. Agnès Musquer distingue deux aspects des inducteurs de problématisation : l'aspect structurel visant une fonction conceptuelle, basé sur ce qui favorise la manipulation, prépare à l'action et la communication, la systématisation, c'est-à-dire sur le caractère directionnel donné par le réseau de concepts déjà là et des problèmes antérieurs résolus, et l'aspect fonctionnel visant une fonction cognitive permettant de structurer le savoir à

construire sur la base de l'appariement, de l'évocation, de la mise en correspondance consciente (problème/représentation ; problème/réseau de concepts ; problème/problème déjà résolu ; résolution/savoir à construire) et sur l'évaluation et l'adaptation. Le repérage des inducteurs dans une situation d'enseignement-apprentissage permet de mesurer le potentiel de problématisation de la situation.

La représentation en espaces de contraintes (EC) proposée par Christian Orange (2005) dans le domaine des SVT est un outil permettant de représenter ce qui relève du registre empirique, du registre des modèles et du registre des nécessités au regard des modèles qui portent la solution du problème, ainsi que les relations entre ces registres. Hersant les redéfinit de la sorte :

Le registre empirique est celui des faits provenant d'observations ou d'expériences ; le registre des modèles est celui des explications construites pour rendre compte des faits préjugés pertinents pour le problème par les élèves et qui leur permettent de produire des explications, de s'expliquer les choses. (Hersant, 2015)

Face à un problème, les élèves observent, expérimentent et collectent donc des faits qui relèvent du registre empirique. La mise en relation de ces faits avec les connaissances, les expériences antérieures, d'autres données du problème, la sélection même des données et des faits, tout cela se fait par rapport au monde des idées, de ce qui relève du registre des modèles. Le tissage entre le registre des modèles et celui des faits révèle un registre explicatif. En effet, les modèles existent au sein d'un cadre. Nous verrons les différentes composantes de ce cadre ou paradigme que Christian Orange appelle registre explicatif (Orange, 2012). Les interactions entre le registre des modèles et celui empirique amènent l'élève à produire les éléments du registre des nécessités.

En sciences, les nécessités ont une fonction liée au problème, elles peuvent devenir des explications dans une autre situation, elles n'ont donc pas le statut de « vérité absolue ». Si nous prenons par exemple la question de la relation entre l'eau et la croissance d'un végétal chlorophyllien, le fait que les plantes ont besoin d'eau correspond à une contrainte empirique (la plante a besoin d'eau pour ne pas se dessécher) mais la nécessité d'hydrater peut intervenir qu'en tant qu'explication du dessèchement et non de nécessité pour grandir (Lhoste et al., 2007). En mathématiques, les nécessités sont plutôt liées aux théories qu'aux données empiriques elles-mêmes. Si nous étudions la conversion entre degrés Celsius et degrés Fahrenheit, les nécessités viennent des conventions mathématiques et des règles du calcul algébrique et non des valeurs mesurées. Si bien que la dialectique faits/idées peut relever en mathématique d'une question de modélisation. Les EC permettent une organisation de l'analyse *a priori* des situations en listant les actions que l'on peut prévoir et les registres explicatifs (REX) qui peuvent structurer les explications, organiser la pensée de l'élève dans l'exploration des possibles. Les procédures des élèves sont mises en relation avec les contraintes internes ou externes qui déterminent l'usage d'un modèle dans un cadre mathématique. Les EC sont un outil pour modéliser les relations internes du système

« connaissances, milieu, élève ». Ils peuvent aussi permettre de repérer la dynamique de l'apprentissage par problématisation en identifiant les moments où l'élève change son regard sur la situation, les moments où il y a rupture d'intelligibilité de la situation. Ces moments que Sylvain Doussot, Denise Orange-Ravachol et Magali Hersant appellent des événements de problématisation sont à l'origine de la construction de nécessités.

III.3 : A propos des définitions

La résolution de problèmes contribue à la construction des savoirs mathématiques à l'école (Bkouche, Charlot, & Rouche, 1991b), mais ces problèmes peuvent avoir différentes fonctions : du problème ouvert (Arsac & Mante, 2007) aux situation-problèmes (Douady, 1986), en passant par les problèmes de réinvestissement, d'évaluation. Les problèmes permettent de mesurer le degré de mobilisation des connaissances (Robert, 1998) pour peu qu'ils ne soient pas des exercices routiniers. La question est de savoir quelles conceptions l'élève a de la notion de fonction affine lors de sa rencontre avec les problèmes proposés par l'enseignant et quelles connaissances il construit à travers les différentes situations. Nous identifions trois types de problèmes pour lesquels le savoir construit ne sera pas de même nature : les problèmes techniques, les problèmes technologiques et les problèmes théoriques. Les problèmes techniques portent sur les propriétés, l'apprentissage porte sur les actions à effectuer pour construire l'objet. Les problèmes technologiques portent sur les objets et sur leurs relations, l'apprentissage porte sur les objets eux-mêmes. Les problèmes théoriques portent sur les nécessités, l'apprentissage porte sur les propriétés caractéristiques de ces objets. Tous ces problèmes peuvent exister dans une même séance et tous les élèves ne travaillent pas simultanément sur les mêmes problèmes. Pourtant c'est dans la transformation du problème d'un niveau à l'autre, technique, technologique, théorique, que les nécessités conceptuelles se transforment en nécessités d'action. Il s'agit donc de penser des situations qui permettent à tous les élèves d'effectuer cette transformation.

L'analyse de l'activité reconstruite de l'élève à partir des traces écrites ou orales lors des séquences en classe, permet de repérer les représentations que les élèves ont mobilisées et élaborées autour des concepts mathématiques travaillés et d'avoir une idée du processus qui amène la construction de ces concepts. Certaines pratiques langagières permettent d'identifier les changements de niveaux évoqués plus haut. En effet, l'utilisation de « il faut », ou l'utilisation du verbe « devoir » indique la mise en évidence de nécessités même si ces nécessités ne sont pas forcément mathématiques. Par ailleurs l'utilisation du « je » correspond le plus souvent à une nécessité d'action alors que les sujets qui désignent des objets mathématiques marquent une nécessité plus conceptuelle (Gobert, 2014). Ces transformations relèvent de la secondarisation du discours que nous évoquerons dans la suite de ce chapitre.

Les travaux de Cécile Ouvrier-Bufferet (Ouvrier-Bufferet, 2003, 2006, 2014, 2015) ont montré que la compréhension d'un concept passe par plusieurs stades : la connaissance de définitions et des preuves de leur équivalence, des exemples et des contre-exemples qui délimitent le concept, des situations donnant du sens au concept et des représentations du concept. Si le cours de mathématiques ne donne à travailler que certains stades, on peut craindre que le concept ne soit pas acquis de façon stable. Nous avons vu au chapitre 1 qu'il est bien difficile de donner une définition du concept mathématique de fonction affine puisque

cette notion amène à définir différents objets suivant le cadre où elle est travaillée et suivant le point de vue choisi : une fonction comme un processus de calcul ou comme une relation de proportionnalité des écarts dans une covariation de deux grandeurs. Comment l'enseignant peut-il alors amener l'élève à élaborer une définition de la fonction affine ?

Selon Ouvrier-Bufferet (Ouvrier-Bufferet, 2006) il existe deux types de définitions : les définitions perceptives et les définitions axiomatiques. Dans la théorie du nominalisme, le concept se construit à partir d'une perception, il procède de l'observation car ce qui est vu, observé, peut être comparé. La définition permet de nommer le perceptif et amène à des classifications (par exemple : les courbes qui sont des droites, les droites qui passent par l'origine, celles qui sont parallèles...). Concernant les fonctions, on "voit" que les représentations graphiques de certaines fonctions sont des droites, on nomme alors ces fonctions « affines ». Une définition perceptive des fonctions affines pourrait être celle-ci : une fonction affine est une fonction dont la représentation graphique est une droite. Cette définition s'appuie sur une connaissance préalable des fonctions et de leur graphe. Là encore, suivant la conception que les élèves ont des fonctions, ils peuvent avoir différents points de vue et donc avoir des perceptions différentes de l'objet. Ils peuvent voir la courbe comme un ensemble de points ou comme un tracé reliant des points isolés. L'alignement n'a pas le même sens puisque dans le premier cas il est une caractéristique et dans l'autre il est une modélisation.

Une autre approche étudie l'essence et l'existence d'un concept, c'est l'essentialisme qui amène à l'élaboration de théories en partant du principe que les idées ne partent pas toutes des sens. La définition des fonctions affines dans le cadre des espaces affines relève d'une définition axiomatique et non d'une perception. La difficulté est que ces deux approches ne correspondent pas au même processus de construction et en particulier ne donnent pas le même poids aux nécessités. L'objet existe dans un cas de par la perception qu'on en a, dans l'autre il existe de par la non-contradiction de son existence avec la théorie. Aristote distinguait déjà les définitions nominales qui donnent la signification d'un mot mais n'établissent pas l'existence, des définitions par la cause, pour lesquelles le discours montre pourquoi la chose existe. Pour les logiciens, on a les énoncés démontrés (théorèmes) et les énoncés primitifs (axiomes), mais l'axiome premier serait l'existence de l'objet et par existence on comprend « exempt de contradictions », c'est-à-dire que rien ne prouve qu'il n'existe pas.

Chez les enseignants, la représentation la plus courante des définitions mathématiques est une succession de conventions, axiomes, théorème, propriétés. Les aspects logiques et langagiers prédominent, ce qui correspond aux fonctions des définitions qui, pour eux, sont essentiellement l'utilisation dans une démonstration, la possibilité d'abrégé le discours, la précision du sens des mots, de lever les ambiguïtés (Ouvrier-Bufferet, 2014). Si bien que les textes de savoirs produits ou proposés aux élèves ne sont pas des textes provisoires ou des définitions qui évoluent au fil de l'apprentissage. Pourtant les concepts mathématiques scolaires peuvent être considérés comme provisoires en ce sens que les théories sont en constante évolution. Ce qui est vrai à un stade de l'apprentissage peut se révéler faux à un autre et cela d'autant plus que les axiomes premiers ne sont pas toujours enseignés. Prenons le simple exemple du carré qui n'est pas considéré comme étant un rectangle particulier au cycle 2, ou les propriétés qui sont vraies pour les entiers et ne le sont pas pour les réels. Pourtant les

textes de savoir sont très souvent présentés à l'école sous la forme de définitions et de propriétés qui utilisent des termes exacts et précis. Ces textes peuvent donner une illusion de scientificité voire d'universalité.

[Ces termes] peuvent être extrêmement trompeurs, non seulement parce qu'ils donnent fortement à penser que quelque chose existe qui en fait n'existe pas, à savoir l'exactitude absolue ou la précision absolue, mais aussi parce qu'ils possèdent une forte charge émotionnelle : sous couvert de scientificité et d'objectivité scientifique, ils donnent à penser que la précision et l'exactitude sont des valeurs supérieures, voir ultimes, et qu'il est mauvais, non scientifique ou brouillon d'utiliser des termes inexacts. Or un terme exact n'existe pas, comme il n'existe pas de terme devenu « précis » grâce à une définition précise. (Popper, 1990)

La modélisation de la connaissance poppérienne est basée sur un autre schéma : les problèmes amènent des théories concurrentes et la génération de réfutations, la définition n'est qu'une abréviation d'un concept ayant un pouvoir explicatif plus grand que ceux déjà connus. La définition permet alors de renforcer une théorie résistante aux réfutations et qui donne donc une solution au problème. Elle est en lien étroit avec les preuves et réfutations : chercher des contre-exemples de la conjecture met en chantier sa preuve comme sa réfutation. Une théorie n'est donc pas une accumulation de théorèmes dans le temps mais une réinterrogation des conjectures qui se traduit par des définitions qui évoluent comme nous avons pu le voir à travers notre étude épistémologique au chapitre I.1. Lakatos (1984) traite cette question à deux niveaux : le niveau heuristique et le niveau du langage et de la linguistique.

Lorsque vous accroissez le contenu, vous développez des idées, vous faites des mathématiques, après cela vous clarifiez les concepts, vous faites de la linguistique.
(Lakatos, 1984)

Pour lui, la recherche mathématique amène à contester des vérités établies ou à compléter un noyau théorique par de nouvelles hypothèses explicatives ou prédictives.

Un processus dialectique s'installe entre la construction du concept et l'élaboration de la preuve et ce processus met en interaction trois espaces dans lesquels les définitions peuvent avoir des fonctions différentes.

Il se dégage trois « lieux » où se joue la construction de définitions : la recherche mathématique, la logique et le langage, ainsi que l'élaboration de théories. (Ouvrier-Bufferet, 2006, p.25)

Les travaux de Cécile Ouvrier-Bufferet (Ouvrier-Bufferet, 2006) montrent que les contre-exemples peuvent permettre différents types de rétroactions : préciser le domaine de validité du concept, capituler face à un contre-exemple exemplaire, reformuler pour éviter les erreurs d'interprétation. Lakatos propose de son côté trois types de définitions avec respectivement des fonctions qui induisent différents types de contrôles. Nous pouvons croiser ces deux approches pour définir trois types de situations d'apprentissage. Chacune permet de construire

le concept visé dans un lieu particulier, à travers une activité cognitive différente et par la mobilisation de types de contrôles spécifiques. Chacune permet la construction de définitions mais ces définitions ont une fonction différente au sein même de l'activité et au sein des mathématiques. Ces trois types de situations ne sont pas indépendantes et l'élève, comme l'enseignant, peut très bien passer alternativement de l'une à l'autre.

Le premier genre vise la dénomination, c'est la fonction première des situations où s'élaborent les théories, l'activité s'oriente vers la modélisation, l'étude d'objets mathématiques familiers mais dans un contexte différent. Le contrôle se fait par la reformulation de quelque chose qui existe déjà, on peut parler d'essentialisme.

Le second a pour fonction première la communication. Il se joue dans les situations de classification par le contrôle de la logique et des règles langagières. On parlera de nominalisme.

Le troisième a pour fonction principale la preuve. Il intervient en résolution de problèmes, l'activité de l'élève étant la recherche, les contrôles visent la démonstration de la solution, on est dans un système de preuve et réfutation.

Ces trois fonctions, résumées dans le tableau 8, correspondent à trois transpositions didactiques possibles ou rencontrées dans les classes lors de la construction de la notion de fonction affine.

Fonction principale de la définition	Lieu où se joue la construction de définitions	Situation de construction du concept	Type de contrôle
Dénomination	L'élaboration de théories	Modélisation, étude d'objets familiers dans un contexte différent	Reformulation, existence (essentialisme)
Communication	La logique et le langage	Classification	Contrôles langagiers et logistiques (nominalisme)
Preuve	La recherche mathématique	Résolution de problèmes	Démonstration (preuve et réfutation)

Tableau 8 : Fonction, lieu, situation de construction et contrôle des définitions

- La dénomination correspond à l'introduction d'une définition algébrique de la fonction affine, les exemples et contre-exemples ayant pour fonction de repérer les caractéristiques liées au processus, dans le registre des expressions algébriques. L'exemple et contre-exemple classique étant la comparaison de tarifs suivant qu'elles comptent ou non une part fixe (abonnement, droit d'entrée ...).

- La communication correspond à la classification des fonctions suivant leur forme algébrique ou leur graphe. La définition sert alors dans les démonstrations à justifier l'alignement de points ou la pertinence de l'expression algébrique cherchée.

- La preuve correspond à la résolution de problèmes fonctionnels liés à la prise de décision, la compréhension ou la généralisation. La définition permet dans ce cas de regrouper les problèmes qui relèvent de certaines caractéristiques communes.

Comment se construit le concept de fonction affine suivant l'entrée qui est choisie ? Si l'important est de concevoir la définition comme un processus qui passe par des définitions provisoires, quelles modalités permettent la mise en place de ce processus ? Nous essayerons de donner des éléments de réponse dans la partie 2 chapitre I, mais nous avons déjà quelques pistes. Proposer une situation de classification ne permet pas à proprement parler une construction de concepts nouveaux. Cependant, certaines définitions étant déjà connues des élèves, on peut imaginer une construction de concepts par une redéfinition d'un objet particulier dans un contexte différent. Cécile Ouvrier-Buffet prend en particulier le cas de la droite (Ouvrier-Buffet, 2006). Les élèves ont une définition perceptive du concept de droite, on peut en avoir une approche problématisée si on étudie la régularité, par exemple par l'étude de « droites discrètes ». On met alors à l'épreuve la droite réelle, il s'agit de chercher une axiomatique permettant de définir la régularité.

Le concept de fonction considéré comme modélisation de phénomènes empiriques amène à faire la différence entre les hypothèses et les théories au sens de Popper, c'est-à-dire que les hypothèses se réfèrent à des tentatives d'explication de phénomènes particuliers alors que les théories se réfèrent à un ensemble de phénomènes de types différents qui ont en commun des principes fondamentaux (Popper, 1985). L'élève peut être ainsi amené à chercher une explication au sein même des théories associées au cadre dans lequel il travaille. Il n'est pas évident pour lui de croiser des explications qui viendraient de différents cadres ni de contrôler leur cohérence entre elles. Pour identifier ces croisements, nous allons essayer de comprendre comment sont organisés les savoirs.

III.4 : Vers une praxéologie de modélisation de la fonction affine

D'après la théorie anthropologique de la didactique (Chevallard, 1992), toute action humaine peut s'analyser en un système qu'on nomme praxéologie dans lequel l'homme effectue des types de tâches qui nécessitent des techniques (schèmes d'actions utilisés), justifiées par un discours appelé technologie qui liste les propriétés qui justifient ces techniques (le discours technologique), lui-même justifiable par une théorie (relève d'un discours théorique). L'entrée par les problèmes dans des contextes de covariation de deux grandeurs, amène à travailler sur des grandeurs mesurables, et donc dans le monde physique. La démarche que nous allons éprouver dans les expérimentations se rapproche d'une praxéologie de modélisation (Schneider & Gantois, 2012). Nous allons expliquer ce choix.

Maggy Schneider parle de deux types de praxéologie (Schneider-Gilot & Alain, 2011). La praxéologie « déduction » vise à définir les objets par un raisonnement déductif et donc de partir de la théorie pour construire la technologie. La praxéologie « modélisation » part au contraire des tâches qui peuvent modéliser des systèmes intra ou extra mathématiques par des concepts mathématiques (Schneider & Gantois, 2012) qui sont des objets mentaux, des substituts de concepts mathématiques qui n'ont pas été définis mathématiquement. Les

techniques utilisées s'appuient sur des objets « préconstruits ». Il s'agit alors d'aider l'élève à passer de ces objets « préconstruits » aux concepts mathématiques en jouant sur l'élaboration de nouvelles techniques et d'un discours technologique pour lequel le langage peut aller d'un langage proche du quotidien à des connaissances symboliques ou graphiques en passant par des savoirs physiques construits ou préconstruits, et ce dans un même énoncé. Ces jeux de langage permettant une évolution des notations et des techniques. On peut imaginer que l'élève deviendra responsable de la construction de la théorie par adaptation et validation des techniques au regard de la résolution de problèmes au travers des jeux de langages. L'objet mathématique existe alors comme une contrainte et non comme une étiquette. Il se définit comme la modélisation pertinente d'objets non mathématiques pour devenir un objet déductif. Si nous prenons par exemple l'étude de grandeurs comme la température, les élèves ont des représentations liées à la perception du chaud et du froid, à l'utilisation d'instruments de mesures quotidiens (thermomètres utilisant différentes technologies) ce qui les amène à utiliser un langage naturel pour décrire les variations de température. Dans les différents cadres mathématiques, l'élève va être invité à utiliser différents registres pour parler de ces mêmes variations. Dans un même énoncé, on pourra croiser des éléments qui décrivent l'expérience empirique, d'autres le modèle mathématique et ce dans différents registres.

Comment peut s'effectuer la bascule entre le discours technologique et le discours théorique visé ? C'est ce que nous nous proposons d'analyser dans les séquences menées en classe. Une hypothèse est que le passage par la mesure de grandeur peut faciliter la transition. Les didacticiens des mathématiques ont porté une attention particulière au passage d'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive (Houdement, 2007). Un paradigme intermédiaire entre ces deux géométries serait nécessaire, il permettrait à la fois de réhabiliter le mesurage et d'initier les élèves à la preuve déductive (Tanguay & Geeraerts, 2012). Tanguay et Geeraerts appellent ce paradigme « la géométrie du physicien-géomètre ». Le mesurage a dans ce paradigme une double fonction : une fonction d'exploration qui permet d'émettre des conjectures qui peuvent être remises en doute suivant les contextes, les conditions d'application et une fonction de vérification qui permet de vérifier, contrôler. Dans ce paradigme, on peut déduire des énoncés mais ces énoncés ne sont pas démontrés tant que les conjectures ne sont pas assurées. On peut leur donner le nom de postulat. C'est un lieu privilégié pour mettre en œuvre des raisonnements abductifs, ces raisonnements pouvant être modélisés par le fait que si on sait que « P implique Q », savoir que Q est vraie rend plus plausible le fait que P soit vraie (Polya, 1967). Ce sont ces raisonnements que nous utilisons le plus souvent pour émettre des conjectures et ce sont eux qui peuvent mettre en lumière certaines contraintes ou nécessités.

On peut faire la même hypothèse concernant le concept de fonction. Pour amener les élèves de la perception de dépendances de deux grandeurs à l'utilisation d'une fonction mathématique, on peut imaginer un passage par le paradigme du physicien-analyste où la mesure permet à la fois d'émettre des conjectures et de vérifier, contrôler les résultats. De même, les déductions faites à partir de ces conjectures peuvent avoir statut de postulat. Faire la différence entre les axiomes et les postulats pourrait aider l'élève à comprendre en quoi l'algèbre et l'analyse sont indispensables pour fournir une preuve formelle des énoncés. Prenons l'exemple de l'étude des variations d'un volume en fonction d'une longueur. Le

passage par le paradigme du physicien-analyste correspondrait à cette étape floue où l'élève utilise des « formules géométriques » pour exprimer des fonctions empiriques sans que cette formule n'ait encore le statut d'expression algébrique. Par exemple une formule du style : « Volume = aire de la base \times hauteur » a le statut de « formule géométrique » alors que $V(x) = 6\pi x$ a le statut de formule algébrique.

III.5 : Le cadre épistémique pour l'apprentissage par problématisation

Nous allons reprendre la notion de cadre épistémique au sens de Piaget, c'est-à-dire « le cadre de significations dans lequel la société insère les objets ou les événements et qui exerce une influence sur la manière dont nous assimilons et interprétons chaque expérience particulière. » (Legendre, 2006). Ce cadre a deux aspects qui ne sont pas indépendants mais qui offrent des approches différentes : le système social qui détermine la sociogenèse historique des connaissances scientifiques et le niveau individuel qui détermine une certaine vision du monde que l'individu construit de par ses expériences individuelles dans un environnement social et culturel particulier. Pour ce qui concerne l'apprentissage des fonctions affines, nous allons définir un cadre épistémique qui s'appuie sur cette approche piagétienne. Si Bachelard considère l'obstacle épistémologique comme une rupture nécessaire pour passer de représentations préscientifiques à des conceptions scientifiques, on peut interpréter la pensée bachelardienne dans une version que Michel Fabre appelle « molle » :

La version « molle » tente de rétablir une continuité entre opinion et savoir, et tend à penser degrés de savoir (et donc perfectionnement, enrichissement des représentations), gommant ainsi les différences entre psychologie du développement et psychanalyse de la connaissance. (Fabre, 2013, p.62)

Piaget envisage lui aussi cette dualité rupture et continuité entre différents niveaux de connaissance :

Nous-mêmes croyons, d'une part, qu'il y a une continuité plus grande entre la pensée préscientifique et scientifique, dans la mesure où les mécanismes en jeu dans le processus cognitif sont les mêmes ; et d'autre part, nous considérons qu'il y a un certain type de « rupture » chaque fois que l'on passe d'un état de connaissance à un autre, dans la science tout comme dans la psychogenèse. On peut bien accepter qu'il s'agit d'une rupture, mais dans le sens d'un changement de cadre épistémique. (Piaget & Garcia, 1983, p.282)

Dans son épistémologie génétique, Piaget distingue trois grandes étapes dans l'évolution historique des mathématiques : l'étape de la contemplation, celle des opérations, celle des transformations. Nous retrouvons ces mêmes étapes dans l'évolution de la notion de fonction affine. L'antiquité étant le temps de la contemplation, en ce sens que la réalité est propre à l'objet, le sujet peut décrire ce qui préexiste, il n'agit pas sur les objets, il est absent. Même si les instruments permettent de représenter des figures, elles ne sont qu'une figuration du réel. Ainsi les problèmes de grandeurs de l'époque sont bien des problèmes liés à des caractéristiques de l'objet. La période qui suit correspond à la prise de conscience que le sujet peut opérer sur les objets, il peut les classer, les relier, identifier des critères. Ces opérations,

même si elles peuvent modifier l'objet, ne peuvent pas le créer, elles sont imposées par l'objet lui-même et tout objet de pensée peut être ramené à l'action à travers des signes ou des significations. Nous pouvons constater cette bascule durant la période du moyen-âge et de la renaissance, où les problèmes de cinétique permettent d'opérer sur les courbes représentant le mouvement et amèneront au XVII^e siècle la classification de ces courbes et l'organisation de classes de problèmes. Ce n'est que depuis le XIX^e que nous sommes dans une période de transformation, c'est-à-dire que les opérations effectuées par le sujet peuvent créer des objets nouveaux. C'est une période synthétiste qui amène à une coordination opératoire dans un système de pensée. Elle correspond, pour ce qui nous concerne, à l'apparition de l'algèbre linéaire.

En parallèle, chacune de ces étapes correspond au franchissement d'un obstacle épistémologique au sens de Bachelard. La période contemplative étant marquée par l'impossibilité de donner une réalité à l'infini, l'obstacle est le passage du discret au continu. La période correspondant aux opérations amène un autre obstacle lié au passage du local au global. La vision globale est indispensable pour pouvoir penser en terme de transformation mais, comme nous l'avons expliqué précédemment (voir chapitre II p.59) cette vision peut se faire suivant deux points de vue (la variation ou la covariation) et le dernier obstacle est lié au point de vue covariationnel. Il est intéressant de noter que ces trois obstacles sont encore aujourd'hui ceux identifiés au niveau du lycée comme ont pu le montrer Julie Horoks et Nicolas Grenier-Boley à travers leur recherche sur la discontinuité dans l'enseignement des fonctions à la transition entre le collège et le lycée⁹. En particulier, il s'avère que le programme du lycée se base sur un point de vue global de la fonction alors que son étude est essentiellement locale au collège. Par ailleurs, l'étude des manuels a permis à ces chercheurs de repérer que la lettre x au collège a un statut de « nombre généralisé » dans l'idée d'un ponctuel universel sans que le domaine de définition ne soit clairement déterminé. Elle n'a que rarement un statut de « variable », ce qui peut générer une difficulté à concevoir la covariation et donc concevoir que si à x on associe y , la lettre y désigne aussi une variable, mais une variable dépendante. (Horoks & Grenier-Boley, 2016).

Une autre triade caractérise pour Piaget les étapes d'une épistémologie constructiviste, il s'agit de « l'intra », analyse de l'objet, de « l'inter », étude des relations, des transformations et du « trans », construction de structures. Ce même processus cognitif se retrouve à différents niveaux et Piaget considère que ce processus est indépendant du groupe social. Cette triade a été étudiée en particulier par Dubinsky et McDonald pour analyser les modalités de l'apprentissage mathématique au niveau universitaire (Holton, 2006). De cette étude est née la théorie APOS qui consiste à identifier l' « action » (transformation d'objets), le « process » (construction à partir de la répétition d'actions), l' « object » (entité produite par un « process ») et le « schema » (collection d' « actions », « processus », « objets » et d'autres « schemas »). Cette théorie a pour but de décrire le mécanisme de « reflective abstraction » que Piaget définit comme le résultat de deux processus : le réfléchissement sur un palier supérieur de ce qui est tiré du palier inférieur (par exemple la représentation d'une action) et

⁹Séminaire de l'IREM du 16/03/2016 Université Paris Diderot http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/Analyser_la_discontinuite_dans_lenseignement_des_mathematiques/ consulté le 22/03/2017

la réflexion qui reconstruit et réorganise en l'élargissant ce qui est transféré par réfléchissement. Il précise :

La généralisation constructive ne consiste pas à assimiler des nouveaux contenus à des formes déjà constituées mais bien à engendrer de nouvelles formes et de nouveaux contenus, donc de nouvelles organisations structurales. (Piaget & Garcia, 1983)

L'objectif est de penser une pédagogie permettant d'aider les élèves dans la construction mentale de concepts mathématiques complexes ou abstraits comme le concept de fonction au niveau universitaire, mais Holton précise que la théorie APOS est aussi un outil pour comprendre comment les élèves abordent des concepts mathématiques plus basiques. Cet outil d'analyse est appelé « Genetic Decomposition » (GD). Voskoglou décrit cette analyse en prenant l'exemple des fonctions :

Action : if an individual can think of a function only through an explicit expression and can do little more than substitute for the variable in the expression and manipulate it, he/she is considered to have an action understanding on functions.

Process : an individual with a process understanding of a function thinks about it in terms of inputs, possibly unspecified, and transformations of those inputs to produce outputs.

Object : in defining the sum $f + g$ of two functions possessing a common domain, say A , it is necessary to reconsider again f and g at a process level and thinking of all x in A to obtain a new process associating to each x in A the sum $f(x) + g(x)$. Then this new process must be encapsulated, in order to obtain the function $f + g$ at an object level.

Schema : in the case of functions it is the schema structure that is used to see a function in a given mathematical or real-world situation. (Voskoglou, 2015)

Ces recherches ont permis de développer une approche pédagogique appelée ACE pour désigner un cycle d'enseignement composé de trois étapes : (A) activité sur ordinateurs, (C) débat en classe et (E) exercices à l'extérieur de la classe. En effet, l'équipe de Dubinsky (Dubinsky & McDonald, 2001) est partie du fait que pour toute construction mentale relevant de la théorie APOS, il est possible de trouver une activité informatique telle que l'étudiant engagé dans cette activité construit l'activité mentale correspondante. Nos travaux peuvent se placer dans une certaine continuité de cette approche. En effet, nous cherchons à définir plus précisément le processus décrit par Piaget et ce, non seulement au niveau d'une classe ou d'un élève générique, mais au niveau de chaque individu d'une classe. Nous préciserons ce qui fait la singularité de chaque parcours d'apprentissage, pendant les débats en groupes ou en classe entière. Nous verrons en particulier que nous situons nos analyses à un niveau de granularité plus fin, par exemple au niveau d'un épisode dans un débat. Pourtant si l'approche pédagogique ACE est basée sur un apprentissage partant de situations qui intègrent l'ordinateur dans la première phase, nous restons pour notre part sur la résolution de problèmes, telle qu'elle se généralise dans l'enseignement en France. Nous verrons aussi que la triade de Piaget, si elle décrit effectivement un processus, ne correspond pas à un développement linéaire. En particulier lorsqu'un concept relève de différents cadres, le « process » décrit par Dubinsky engendre différents objets. Nous cherchons à mettre en place

des situations d'apprentissage ayant le statut de situations de références plutôt que des situations porteuses de répétitions généralisatrices.

De notre point de vue, ces grandes étapes (intra-inter-trans) se retrouvent dans la façon dont les élèves mettent en relation le registre explicatif, le registre des modèles et le registre empirique. Cela qui nous amène à définir différentes configurations, une configuration étant la manière de tisser du lien entre les trois registres de la problématisation :

- La **configuration pragmatique des registres de la problématisation** est liée à une réalité, à l'observable, au perceptif. Ici l'action valide le modèle. On est au stade de la contemplation de faits.
- La **configuration analytique des registres de la problématisation** correspond à la comparaison, la mise en évidence de critères et la mise ne place de modèles par des inductions. Ici la similitude valide le modèle.
- La **configuration théorique des registres de la problématisation** réorganise le savoir dans une théorie générale. Le cadre épistémique valide le modèle.

Ces trois configurations correspondent à l'idée de « c'est vrai parce que je le vois, je l'ai tracé » ; « c'est vrai parce que c'est comme tel ou tel modèle », « c'est vrai parce que ça relève de telle théorie ». Nous retrouvons ici les trois mondes mathématiques décrits par Tall :

- an object-based conceptual-embodied world reflecting on the senses to observe, describe, define and deduce properties developing from thought experiment to Euclidean proof ;
- an action-based proceptual-symbolic world that compresses actions chemas into thinkable concepts operating dually as process and concept (procept);
- a property-based formal-axiomatic world focused to build axiomatic systems based on formal definitions and set-theoretic proof. (Tall, 2006)

L'enjeu de l'apprentissage serait de construire des savoirs problématisés, ce qui passe par la construction d'une certaine cohérence entre ces trois configurations et par le passage de l'une à l'autre. Tall précise que :

An analysis of the development of mathematical thinking reveals the surprising conclusion that mathematics is not a system that builds logically on previous experience at each stage, even though every mathematics curriculum in the world is intent on presenting topics in a coherent sequence, carefully preparing the necessary pre-requisites at each stage for the more sophisticated stages that follow. On the contrary, an experience that has been « met before » may be supportive in some new situations yet problematic in others.(Tall, 2014)

Faire passer les élèves d'une conception à une autre ne peut pas être suffisant. Comme l'explique Michel Fabre :

Ce qui compte n'est pas d'abandonner une représentation fautive pour une représentation plus vraie, plus conforme au savoir actuel, ce qui ne serait que changer d'opinion. L'important est de problématiser les représentations ou les habitudes

intellectuelles pour accéder à un savoir raisonné, un savoir qui incorpore ses raisons et qui donc, par la même, peut critiquer les mauvaises raisons de sa culture première. (Fabre, 2013, p.71)

Cet accès à un savoir raisonné suppose une évolution du registre explicatif. Cette évolution se traduit par un changement dans les différents registres de la problématisation. Le risque est de provoquer un changement de modèles sans que cette bascule ne soit mise en relation avec un nouveau paradigme ou de nouvelles expériences personnelles. De même amener l'élève à changer de conception à travers une activité peut apporter de nouvelles expériences qui remettent en cause les connaissances antérieures mais elles doivent être mise en cohérence avec les autres registres sinon ces expériences peuvent amener l'élève à construire des modèles erronés, des liens erronés ou être simplement oubliées. L'apprentissage doit prendre en compte les reconfigurations nécessaires dans les trois registres de la problématisation.

Amener les élèves à problématiser le savoir, consisterait à amener les élèves à assimiler les connaissances, c'est-à-dire à effectuer une continuelle structuration par une « abstraction réfléchissante » qui consiste en deux processus. Le premier est le réfléchissement sur un palier supérieur (les représentations) de ce qui est tiré du palier inférieur (l'action). Le second est la réflexion qui reconstruit et réorganise en l'élargissant ce qui est transféré par réfléchissement. La nature du savoir mathématique est ainsi une construction qui effectue une configuration de l'action, des modèles et des cadres. Nous retrouvons ici la dialectique outil/objet (Douady, 1986) en ce sens qu'un concept mathématique peut avoir plusieurs statuts, il peut être un outil implicite pour devenir un objet d'étude. L'objectif de l'apprentissage étant de faire de cette notion un outil explicite. La phase ultime est le moment où ce savoir donne lieu à de nouvelles théories. Le mécanisme d'ensemble correspond au passage de « l'intra » à « l'inter » et de « l'inter » au « trans », mécanisme qui se répète à chaque nouvelle étape du processus, à chaque construction de nouvelles structures. Cela signifie que ce mécanisme se retrouve aussi bien au stade où la notion mathématique visée est un outil implicite, qu'à celui où elle devient un élément d'une nouvelle théorie. Il s'agirait donc de penser l'apprentissage par problématisation de l'outil avant de penser la problématisation de l'objet. Actuellement, l'enseignement des fonctions affines consiste principalement à demander aux élèves de travailler différents aspects de la fonction à travers des tâches qui ont pour objectif de familiariser les élèves avec différentes techniques (lire graphiquement, déterminer l'expression algébrique, calcul d'images, d'antécédents etc.). Ces techniques relèvent de l'étude de l'objet fonction affine avant de comprendre en quoi cet objet peut être un outil pour résoudre des problèmes. L'élève se retrouve dans une posture « contemplative », la notion préexiste et si par inférences l'élève va jusqu'à reconstruire un système déductif, il n'a cependant pas construit de « raisons ». La configuration qui correspond peut être de nature pragmatique, analytique ou théorique mais les théories se limitent à celles que l'élève connaît (théorie des proportions par exemple). Une approche par problématisation de l'outil doit amener un changement de registre explicatif en mettant au travail les nécessités liées aux problèmes et au contexte, non pas en établissant des

lois par un système déductif appliqué aux faits sans nécessités, mais bien par la transformation des structures antérieures au travers d'un modèle explicatif. Cette transformation se fait à travers le processus décrit par Piaget et Garcia :

La succession conduisant de « l'intra » à « l'inter » et au « trans » n'est que l'expression d'un même processus qui, subjectivement, est la recherche des raisons et qui, objectivement, est la conquête d'une nécessité toujours relative mais qui s'accroît de façon constante d'une étape à la suivante. (Piaget & Garcia, 1983, p.194)

Cécile Ouvrier Buffet définit différents moments de l'activité mathématique qui correspondent à des stades de définition. Le premier stade est celui de l'activité d'exploration, de formulation de problèmes et de changement de cadre, de recherche d'exemple et de contre-exemple. Ce stade amène des définitions « en actes » qui sont des outils pour l'action et qui s'appuient sur une intuition de l'objet. Par un travail de classification, de catégorisation et de dénomination, on arrive au stade suivant qui est la « définition zéro » apportée par une idée de la preuve, la délimitation du domaine d'applicabilité. La nécessité de communiquer amène une définition formalisée, c'est le stade de la généralisation. L'objet devient alors un élément dans une théorie par transposition à d'autres champs ou par des principes unificateurs de type FUGS (formalisateur, unificateur, généralisateur, simplificateur) (Robert, 1998), nous arrivons au stade de la définition axiomatique. Si ces différents stades sont ceux que les mathématiciens identifient dans leur activité de définition, Cécile Ouvrier Buffet se pose la question de la transposition dans l'enseignement. Mais ces stades sont aussi très proches des étapes de l'épistémologie génétique définies par Piaget.

On pourrait concevoir un niveau de transposition épistémologique forte (ou épistémologie historique), qui prendrait complètement en charge la dimension épistémologique du concept, de la démarche, et de la construction théorique ; un niveau de transposition théorique forte qui prendrait appui sur des théories mais sans les construire et où la problématisation de concepts se ferait indépendamment de leur genèse historique (il y a donc là la construction d'une genèse scolaire), mais sans enjeux théoriques ni questionnements relatifs à la construction de théorie même locale. (Ouvrier-Buffet, 2015, p.21)

Nous avons donc ici plusieurs pistes pour penser l'enseignement des fonctions affines :

1) La notion de fonction affine peut être introduite non pas comme une théorie mais comme un outil à travers une activité de définition passant par différents temps : l'intuition de l'objet, la mise en évidence du statut particulier de cet objet, la formalisation au sein d'une théorie locale. Cette approche demande de bien réfléchir aux problèmes posés, ils doivent permettre de faire évoluer la définition et permettre la généralisation des problèmes et la mise en évidence des analogies entre les problèmes.

2) Par l'apprentissage par problématisation nous amenons un changement de registre explicatif en lien avec la représentation de ce que sont les définitions en mathématiques : elles

doivent permettre d'accéder à une meilleure compréhension, de simplifier, de généraliser des concepts, d'explorer d'autres domaines, de communiquer.

3) Par l'étude de la covariation, nous proposons un point de vue dynamique de la fonction affine, nous amenons un changement dans la manière de poser la question en lien avec le statut de la fonction affine comme outil de modélisation.

Le cadre épistémique de notre recherche s'appuie donc sur ces trois mouvements : un apprentissage qui permet à l'élève de problématiser l'outil et non seulement de problématiser l'objet dans l'idée d'une épistémologie génétique qui passe par une évolution des schèmes : contempler, opérer, transformer ; une activité portée par un REX qui est cohérent avec le registre empirique et celui des modèles par un tissage qui évolue d'une configuration pragmatique à une configuration théorique dans l'idée d'une épistémologie cognitive par le mécanisme « intra, inter, trans », un savoir abordé d'un point de vue dynamique par l'étude des transformations dans un contexte qui nécessite un traitement du continu et une vision globale du processus dans l'idée d'une sociologie de la science qui évolue par rupture et continuité en lien avec des obstacles au sens de Bachelard. Nous allons résumer ces trois aspects dans le tableau 9 en listant pour chacun le levier sur lequel cet aspect va permettre d'agir (la construction d'un « système » général au sens de théorie, le mécanisme d'acquisition de l'objet de connaissance et la façon dont on va le présenter), l'objet sur lequel il intervient (la dialectique outil/objet, les structures cognitives nécessaires pour donner du sens au niveau de l'acquisition, l'organisation et l'utilisation de l'information, le contenu) et les différents niveaux. La dernière ligne donne les fonctions, il peut s'agir de provoquer chez l'élève un changement de schèmes, de registre explicatif et dans la manière de poser le problème.

	Cadre épistémique		
	Épistémologie génétique	Sociogenèse des connaissances	Sociologie de la science
levier	Construction d'un système général	Mécanisme d'acquisition	Façon de présenter l'objet de connaissance
objet	Dialectique outil/objet	Structure cognitive nécessaire pour donner du sens	Contenu de la connaissance
niveaux	Contempler, opérer, transformer	Intra, inter, trans	Libération des pseudo-nécessités
fonction	Changement de schèmes	Changement de registre explicatif.	Changement dans la manière de poser le problème.

Tableau 9 : Caractéristiques des différents aspects du cadre épistémique

L'hypothèse que nous faisons est qu'il est rare qu'un dispositif d'enseignement permette effectivement de jouer sur ces trois aspects alors même qu'ils sont nécessaires pour une construction d'un savoir problématisé.

III.6 : Le rôle du langage

Nous avons vu que la définition ne peut être formalisée que dans un but de communication, le rôle du langage est donc primordial. Pour analyser l'activité de l'élève, on ne peut que la reconstruire à partir de productions écrites ou orales. Le discours est omniprésent dans l'activité mathématiques et il utilise aussi bien le langage naturel que le langage mathématique. Nous utiliserons le mot « langue » pour désigner un système de communication et le mot « langage » pour désigner l'utilisation de la langue pour communiquer, même si la distinction entre les deux n'est pas toujours aisée (Jaubert & Rebière, 2001). Ainsi la langue mathématique comprend les symboles, les mots spécifiques, la langue naturelle dans un sens spécifique et la langue naturelle « ordinaire » avec une syntaxe spécifique. Dans la représentation platonicienne, le langage dit des idées déjà là, la langue permet d'exprimer une pensée déjà construite. Dans la perspective vygotkienne, la construction des concepts scientifiques suppose une mise en réseau avec des concepts déjà maîtrisés pour aller vers une généralisation, une objectivation et une mise à distance de leur formulation. L'activité langagière joue alors un rôle dans la construction de la pensée à travers la transposition de l'observation et du sensible à une représentation symbolique. La question du lien entre la construction des connaissances et le langage intéresse fortement les didactiques.

Une discipline n'est pas une « matière », mais un fonctionnement socio-historique caractérisé par un ou plusieurs genres de l'activité, sémiotisés et socialisés par des genres discursifs, qui leur donnent leur substance et qui fonctionnent comme des « intercalaires sociaux » permettant au sujet de se mettre au diapason de la situation. (Jaubert, Rebière et Bernié dans les actes du colloque pluridisciplinaire international de Bordeaux en 2003 cité par Ducancel (Ducancel, 2003, p.189))

Christian Orange est d'ailleurs intervenu dans ce colloque pour montrer en quoi le débat scientifique peut être considéré comme une forme didactique permettant de problématiser le savoir à travers la mise en tension du monde du vécu et du monde des idées explicatives et des modèles. En mathématiques, le langage n'est pas qu'un outil, les écritures symboliques sont aussi l'objet d'activités langagières en classe, activités qui leur confèrent un statut de langage :

La façon dont un langage est défini dans la théorie chomskyenne dite « standard » (Chomsky, 1971) permet de considérer qu'une écriture telle que « $2x^2+3x$ » est un élément (une « Phrase » dans le vocabulaire chomskyen) d'un langage, alors que cette même écriture (isolée), dépourvue de réflexivité discursive, ne peut être élément d'un langage au sens de Duval. (Drouhard, 2014, p.90)

Ainsi les productions orales et écrites des élèves peuvent nous permettre de mesurer comment les élèves s'approprient le langage mathématique symbolique écrit. Si l'oral est éphémère et demande une analyse du discours et du contexte pour être interprété, l'écrit est atemporel, « on peut accéder du regard à tout moment à n'importe quelle partie du discours » (Drouhard, 2014). En donnant la possibilité aux élèves d'avoir une attitude réflexive par

rapport à leurs productions écrites, il s'agit de favoriser la fonction de réflexivité discursive et par la même le raisonnement mathématique (Duval, 1995).

Lorsqu'avec l'aide du maître, un élève prend la parole ou écrit pour reformuler une proposition ou la mettre en cause, pour proposer une interprétation, l'argumenter, exposer une démarche, interroger celle d'un pair, verbaliser des attentes ... il participe à des scénarios différents, inscrits dans le(s) genre(s) de discours initié(s) et attendu(s) par l'enseignant. Il devient alors acteur dans un contexte disciplinaire donné, dont la fonction énonciative répond à un certain nombre de valeurs et de règles historiquement et culturellement élaborées qui rendent possible la verbalisation et la « mise en texte » du savoir (Chevallard). Non seulement il apprend à mettre en œuvre des modes d' « agir-parler-penser » (Bernié, Jaubert, & Rebière, 2003) indispensables au travail de la discipline à l'école, mais il construit simultanément des éléments constitutifs du savoir visé. Il construit une attitude intellectuelle, un rapport au monde *autre* que celui qu'il avait jusque là, un rapport à autrui soumis à certains principes étrangers aux interactions ordinaires, un positionnement énonciatif particulier, qui procèdent du point de vue singulier de la discipline. (Jaubert et al., 2010, p.2)

Selon Jaubert et Rebière, le genre témoigne de la spécificité d'une communauté et des savoirs. Le genre premier est de l'ordre du spontané, de la vie courante, alors que le genre second relève de la pratique argumentative et permet l'accès au savoir. La secondarisation du discours est le passage du genre premier au genre second, elle peut témoigner de la construction des concepts mais aussi en être le maître d'œuvre. Il ne s'agit pas d'enseigner le genre second mais de permettre à l'élève de construire lui-même son genre second. C'est à travers la reprise des productions écrites ou orales que l'on peut observer ce déplacement, c'est donc aussi à travers la provocation de ces reprises que l'enseignant peut amener chaque élève, à son niveau, à effectuer des reformulations dans différents contextes, et s'approprier le savoir par ces ajustements qui peu à peu mettent à distance du sensible. En particulier l'usage de mots ou expressions comme « ça », « c'est » permettent d'évoquer des objets mathématiques dans plusieurs contextes (par exemple « c'est croissant » peut être utilisé pour caractériser l'ordre des données, des grandeurs qui croissent par rapport au temps, le fait que la courbe monte ou que la fonction est croissante), d'autres comme « en fait » témoignent d'une décontextualisation ou d'un changement de contexte :

La finalité des productions langagières pour apprendre n'est pas de permettre à l'élève de mieux dire quelque chose qui préexisterait en lui, mais de s'approprier les connaissances et les formes langagières dans lesquelles elles s'inscrivent, en les reformulant et en les soumettant au jugement d'autrui. (Jaubert & Rebière, 2001, p.85)

Pour rendre visible le déplacement d'un genre premier vers un genre second, plusieurs outils sont disponibles. Les espaces de contraintes de Orange (2005), permettent de repérer les différents REX. L'analyse de l'activité des élèves à l'aide des espaces de contraintes permet de repérer les objets pré-construits ainsi que les traitements effectués. Pour cela nous repérons les tâches, les actions et les objets construits par les élèves. A partir de cet état, nous pouvons faire des hypothèses sur les connaissances, les techniques, les savoir-faire qui génèrent cette activité, ce que nous appellerons des conditions. Ces traitements nécessitent le choix de

registres de représentation sémiotiques. Les discours autour de ces choix permettent de repérer des moments où s'effectue la secondarisation. Le langage naturel et l'identification de ce sur quoi porte ce langage peut renseigner sur le niveau de secondarisation du discours. Enfin à travers les discours de l'élève ou de l'enseignant, il est possible de repérer le passage d'un discours technologique à un discours théorique (Hersant, 2016b). L'analyse des interactions langagières doit mettre en évidence l'articulation et la dynamique des processus de secondarisation des différents élèves et des conditions favorables à ces processus.

L'activité scientifique est la mise en relation du monde du vécu et des expériences avec le monde des idées explicatives (Orange Ravachol, 2005), ainsi les REX varient d'une discipline à l'autre. Pour certaines connaissances, comme en géologie par exemple, la problématisation du savoir peut relever d'une problématisation historique. Les explications de phénomènes actuels peuvent être liées aux observations actuelles transposées dans le passé ou à l'étude d'événements historiques. Nous avons ici un passage par une expérience sensible très différente puisque dans un cas le sensible génère des explications (l'événement) alors que dans le second c'est le contexte qui donne des éléments explicatifs (le phénomène) (Orange Ravachol & Orange, 2012). Pour ce qui est des mathématiques, le rapport au sensible est encore différent. Les objets mathématiques n'ayant pas d'existence physique, ils ne peuvent être évoqués qu'à travers des registres de représentations sémiotiques. Le langage a donc un rôle prépondérant en mathématiques, puisqu'il est le seul accès possible aux représentations des objets. Les nécessités en mathématiques sont de deux types : « des nécessités-contraintes qui constituent, d'une certaine façon, les règles à respecter pour jouer le jeu du problème, ces nécessités ne sont pas apodictiques ; des nécessités apodictiques intrinsèquement liées au problème une fois les règles du jeu posées » (Hersant, 2010). L'espace de contraintes doit nous permettre de mettre en relation les différents types de nécessités dans les différentes situations proposées et de voir comment elles diffèrent ou évoluent.

Analyser le rôle du langage, repérer cadres et registres, comprendre ce qui peut faire obstacle à la formalisation des nécessités est donc essentiel pour analyser l'activité des élèves. En particulier, l'étude de la conversion de l'expression des propriétés d'un objet mathématique d'un cadre à l'autre, qui est loin d'être évidente pour les élèves et n'est pas toujours objet d'enseignement, doit permettre l'expression des nécessités à travers les théories qui relèvent de ce cadre. Certaines nécessités peuvent être mises en évidence dans le cadre où l'élève se sent plus à l'aise pour le faire. Encore faut-il identifier clairement la manière dont les propriétés des objets s'expriment dans chacun de ces cadres, ce qui nécessite aussi un travail des conversions de registres.

Par ailleurs, une activité langagière n'existe que dans une relation sociale. Bernié définit une communauté discursive comme une communauté constituée sur la base d'une pratique sociale, d'un « cadre où l'élaboration, la circulation de valeurs donne sens aux pratiques matérielles qui en sont le fondement et aux genres discursifs qui leur donnent leur substance » (Bernié, 2002) La classe est donc le lieu de construction d'une communauté langagière et plus particulièrement ici d'une communauté mathématique scolaire. Cela suppose l'explicitation de certains codes comme la différence entre ce qui est de l'ordre de la logique mathématique, de la convention, de la rigueur, de la cohérence. Cela suppose aussi un travail de productions ayant des fonctions différentes qui vont de la distanciation de

l'expérience et du sensible à la démonstration, en passant par la formulation de conjectures, d'interprétations, ou par l'expression de savoirs stabilisés. L'objectif final étant d'amener chaque élève à produire un énoncé explicatif et informatif du savoir, il s'agit de permettre à chacun de proposer des points de vue, de mettre en relation des données, de contrôler son activité par une confrontation critique avec l'activité des autres. Autant d'activités langagières qui ne peuvent être travaillées en une ou deux séances, ou en un unique temps de débat ou de cours dialogué.

On peut donc s'interroger sur le caractère potentiellement différenciateur d'une pratique dans laquelle l'action est très rapidement formulée dans un débat collectif. En effet, dans un tel débat, le professeur n'est en fait confronté qu'aux formulations des élèves les plus rapides qui ont en quelque sorte anticipé la nécessité d'une expression des régularités de l'action. Même si le professeur ne sélectionne pas immédiatement les meilleures formulations dans la phase de bilan et laisse les élèves s'exprimer, cette pratique masque l'absence de travail de formulation de la majorité des élèves qui n'ont fait, au fond, que ce que le professeur leur a demandé individuellement : agir. (Margolinas, 2003, p.12)

Dans ces moments, même si l'enseignant cherche à ne pas sélectionner uniquement les bonnes réponses ou les bonnes formulations, le travail de reformulation n'est pas fait par l'élève lui-même et l'énoncé final est souvent celui anticipé par l'enseignant. Sur ces temps, les affichages ou les supports écrits mis en débat, ont un rôle important puisque le fait de les montrer avec le doigt par exemple, permet d'éviter la situation de formulation. La difficulté est d'identifier ce qui relève de la volonté de l'enseignant et ce qui relève d'habitudes ou de routines qui installent dans la classe un contrat implicite.

Ceci nous amène à considérer que l'approche problématisée du savoir mathématique s'appuie sur la construction d'une communauté discursive particulière et donc sur une action de l'enseignant pour conduire cette construction, liée à un contrat didactique qui lui est favorable. Cette communauté discursive est éloignée de celle construite à travers la pratique du débat scientifique en classe parce que les rôles, les modalités, le langage, les jeux argumentatifs sont différents. L'analyse de séances en classe mettant en jeu des débats dans différentes disciplines a amené Jaubert et Rebière à définir un « scénario » au sens de Bruner (Bruner, 1987) à partir d'une matrice commune qui s'organise comme suit (Jaubert et al., 2010) :

- sollicitation par l'enseignant et verbalisation de propositions singulières ;
- mise en commun de propositions énoncées : confrontation de l'action et de l'interprétation individuelle avec celle des pairs ;
- reformulation et incitation à la justification ;
- verbalisation et stabilisation provisoire d'un énoncé acceptable.

Ce scénario vise l'appropriation d'une langue spécifique, incite les élèves à prendre en compte les propositions des autres pour reformuler systématiquement. Il a pour finalité la construction d'une cohérence locale ou globale et stabilise les valeurs de la communauté.

Nous reconnaissons ici les caractéristiques attendues pour problématiser le savoir, le tableau 10 met en relation les éléments de la matrice avec les effets sur la manière de poser le problème.

Matrice	Fonction pour la problématisation
Sollicitation par l'enseignant et verbalisation de propositions singulières	Poser le problème : <ul style="list-style-type: none"> • Produire des hypothèses par rapport à la solution • Formuler un problème
Mise en commun de propositions énoncées : confrontation de l'action et de l'interprétation individuelle avec celle des pairs	Construire le problème : <ul style="list-style-type: none"> • Confrontation des données et des conditions • Mise en évidence de possibles
Reformulation et incitation à la justification	<ul style="list-style-type: none"> • Mise en évidence de nécessités
Verbalisation et stabilisation provisoire d'un énoncé acceptable	<ul style="list-style-type: none"> • Formulation provisoire d'un savoir problématisé

Tableau 10 : Lien entre matrice de construction d'une connaissance et sa problématisation

Ces caractéristiques ne sont cependant pas suffisantes pour définir un scénario permettant de problématiser en mathématiques, en particulier du fait des spécificités de la communauté discursive en mathématiques. En effet, nous avons vu que l'apprentissage par problématisation devait passer par une secondarisation du discours. Cette matrice doit donc être complétée pour amener la construction d'une communauté discursive tenant compte des spécificités du langage écrit du fait des différents registres de représentation sémiotiques en mathématiques et des conversions de registres, et visant cette secondarisation du discours. Notre recherche a pour objectif de mettre en évidence quelques aspects qui peuvent compléter ce scénario pour amener les élèves à problématiser le savoir ou du moins à construire un savoir problématisé. Ces aspects seront proposés dans la partie 3 chapitre II.

III.7 : Le contrat didactique

Le contrat didactique a été défini par Brousseau comme « l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève, et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant » (Brousseau, 1980, p.127). Il ne s'agit pas à proprement parlé d'un contrat en ce sens qu'il n'est pas explicite et qu'il n'est pas négocié. Il met en évidence certaines clauses liées aux représentations des pratiques sociales, du savoir et du partenariat dans la relation didactique qui modifient l'activité de l'élève. Le contrat nourrit le REX en ce sens que certaines clauses peuvent devenir des éléments du registre explicatif mais il émane aussi du REX en ce sens que les registres explicatifs engendrent elles aussi certaines clauses du contrat didactique.

Certains aspects étudiés par Hersant permettent de comprendre comment ce contrat agit sur le milieu (Hersant, 2001, 2014). Notre objectif est d'identifier des pratiques et des gestes langagiers de l'enseignant qui permettent l'élaboration d'une communauté scientifique

scolaire comme la définit Jaubert, permettant à l'élève d'identifier la manière d'agir, penser, parler en mathématiques. Le contrat didactique peut avoir différentes clauses suivant le cadre dans lequel l'élève travaille. Prenons le contrat didactique en algèbre, il comporte des connaissances qui permettent à l'élève d'organiser son travail (par exemple des expressions algébriques écrites les unes en dessous des autres sont équivalentes). La situation proposée aux élèves peut appeler un contrat en particulier, comme par exemple l'utilisation de la lettre x dans le texte de l'exercice peut appeler un contrat didactique algébrique ou le mot « fonction » peut appeler un autre contrat didactique lié au domaine. Nous sommes ici au niveau du macro-contrat. D'autres aspects du contrat didactique sont à prendre en compte au niveau du méso-contrat, c'est-à-dire au niveau des conventions mises en place dans la classe de manière provisoire. En particulier, le méso-contrat apparaît dans les outils mis à disposition des élèves et rappelés éventuellement par l'enseignant au cours de l'activité comme « vous pouvez utiliser les ordinateurs » qui montre une attente de l'enseignant vis-à-vis de l'utilisation du tableur ou d'un grapheur, ou encore « du papier millimétré est à votre disposition si vous en avez besoin » qui doit amener les élèves à tracer une représentation graphique. Enfin le micro-contrat joue dans la manière dont l'enseignant peut valider ou non des procédures, oriente le travail des élèves, à travers des gestes ou routines qui ne sont pas liés au savoir mathématiques mais à la dimension sociale des interactions didactiques (Hersant, 2014). Nous verrons que la mise en place de la salle peut par exemple être un aspect du micro-contrat qu'un élève formulera en disant : « Si on est en groupe, c'est qu'il va falloir chercher, ça peut pas être aussi simple ». Le contrat didactique peut donc être considéré comme ayant deux facettes.

La facette épistémologique du contrat renvoie aux connaissances mathématiques ou portant sur les pratiques des mathématiques. Ces connaissances sont susceptibles d'évoluer au cours des apprentissages. Elles sont spécifiques du savoir et peuvent être stables au niveau du domaine mathématique qui dépasse le cadre de la classe ou de la séquence enseignée. [...] La facette sociale du contrat didactique renvoie quant à elle au fonctionnement de la situation didactique non spécifique du savoir en jeu. Sans être directement liées au savoir mathématique, les clauses concernées correspondent à des connaissances sur les attentes respectives de l'enseignant et des élèves pour la construction du savoir ; elles relèvent en cela du didactique. (Hersant, 2014, p.9)

La construction d'une communauté mathématique scolaire demande de la même manière la mise en place d'un contrat didactique spécifique tant dans sa facette épistémologique que dans sa facette sociale. Nous verrons que ce deuxième aspect joue un rôle important dans l'activité de l'élève lors de l'analyse de séquences menées par différents enseignants. Ceci nous amènera à poser quelques éléments de ce contrat comme étant des facteurs importants pour l'apprentissage par problématisation du savoir. Si nous reprenons le croisement effectué par Hersant entre facettes et structuration du contrat didactique et si nous l'appliquons à une ingénierie visant l'apprentissage par problématisation de la notion de fonction affine par les élèves, nous obtenons le tableau 11 dans lequel ce qui est en italique correspond aux exemples rencontrés dans notre étude.

Niveau de contrat didactique concerné	Composantes du contrat stables à ce niveau	Facette épistémologique	Facette sociale
		Exemples de clauses (certaines sont des connaissances élèves fausses)	
Macro-contrat	Discipline mathématique / pédagogie	On prouve toujours son résultat, un contre-exemple invalide une proposition. <i>Une lecture graphique donne une réponse approximative, on peut la valider par un calcul.</i>	<i>On doit utiliser toutes les données pour résoudre le problème. On peut utiliser tous les outils à notre disposition.</i>
	Domaine mathématique	Quand on utilise des lettres, il faut résoudre une équation. <i>Si on nous parle de fonction, on peut trouver une formule. Si on nous dit « en fonction de » on peut tracer un graphique.</i>	<i>Dans le chapitre sur les fonctions, on doit utiliser l'algèbre, la lecture graphique et la proportionnalité.</i>
Méso-contrat	Statut didactique du savoir & caractéristiques de la situation	<i>Si on dispose des ordinateurs, c'est qu'on peut utiliser un tableur pour résoudre le problème. Quand les valeurs sont dans un tableau, on peut utiliser les propriétés de la proportionnalité. Si du papier millimétré est proposé, on doit faire un graphique.</i>	<i>Quand on a un problème complexe à résoudre, il peut y avoir plusieurs solutions. Quand on est en groupe, c'est que le problème est difficile, il faut chercher. Si on doit produire une affiche c'est qu'il existe plusieurs procédures. Si le professeur organise un débat, le but est de savoir ce qui est faux.</i>
Micro-contrat	Répartition des responsabilités	<i>Quand le résultat d'un calcul n'est pas un entier ou un décimal c'est qu'il y a une erreur.</i>	<i>Quand le professeur demande d'expliquer, c'est qu'il a repéré une erreur.</i>

Tableau 11 : Organisation du contrat didactique en fonction de ses facettes et de sa structuration, exemples de clauses (Hersant, 2014) adaptées à notre recherche

Certaines clauses sont toujours fausses, d'autres peuvent être vraies dans certains contextes. Nous faisons bien la différence entre les clauses du contrat didactique considérées comme une règle d'action, et les représentations que les élèves peuvent avoir des objets mathématiques qui elles aussi peuvent être vraies localement mais fausses si elles sont généralisées en dehors de leur domaine de validité. Ainsi, les élèves peuvent avoir construit une propriété fautive, par exemple la propriété « les fonctions sont toutes monotones », sans

que cette propriété ne se traduise en terme d'action et devienne une clause du contrat didactique. Par contre une clause qui peut en découler serait qu'il faut systématiquement ranger les données dans l'ordre croissant.

Margolinas explique que « le contrat détermine les places du professeur et de l'élève. Si la place de l'élève est de proposer une solution et celle du professeur de l'évaluer, alors toute intervention du professeur sur la solution d'un élève sera interprétée en fonction de cette place » (Margolinas, 2003). Le micro-contrat peut donc empêcher toute activité langagière qui amènerait à de nouveaux points de vue et au contrôle de l'activité de l'élève. Ce contrat peut être mis en place de manière plus ou moins consciente par l'enseignant. Par exemple, la validation peut se faire explicitement ou de manière implicite à travers des gestes, regards, attitudes que l'élève aura repérés. Même si le milieu a été pensé pour donner des éléments de validation et pour que des rétroactions soient possibles, un autre contrat peut prendre le pas sur celui qui a été prévu par l'enseignant. C'est la raison pour laquelle les séances expérimentées tentent de réduire au maximum l'intervention de manière spontanée de l'enseignant pendant l'activité. Il semble cependant difficile de nier la part des malentendus liés au contrat didactique préalablement mis en place dans les classes lors des analyses. Nous essayerons de les mettre en évidence dans la mesure du possible.

III.8 : Structure générale du cadre épistémique

Le cadre épistémique de notre recherche est caractérisé par deux approches : l'apprentissage par problématisation du savoir par les élèves et l'enseignement de la notion de fonction affine d'un point de vue dynamique dans une praxéologie de modélisation. L'apprentissage par problématisation du savoir passe par la construction du problème et l'identification de nécessités qui sont liées à un cadre épistémique. Ce cadre épistémique comprend le registre explicatif que nous assimilerons aux cadres au sens de Douady (Douady, 1986) comme le fait Hersant (Hersant, 2016a) et tout ce qui relève de la psychogenèse individuelle auquel contribue le contrat didactique. Le tissage entre le registre explicatif qui s'appuie sur des théories et des définitions axiomatiques, le registre des modèles qui émane de la confrontation de théories provisoires dans différents contextes et le registre empirique relève d'une configuration qui peut avoir différentes natures suivant qu'elle s'appuie sur le pragmatique, l'analytique ou le théorique. Des situations ont été expérimentées dans les classes et nous allons mesurer le niveau de problématisation que les élèves ont atteint au regard de ces éléments. Nos cadres théoriques vont permettre de construire des outils pour analyser ces situations et penser l'élaboration d'une ingénierie.

On peut analyser la situation à travers trois dimensions indissociables que sont : le niveau de problématisation du savoir visé par la situation, la part d'adidacticité de la situation et donc d'autonomie de l'élève dans l'action et la fonction de la situation dans la construction d'une communauté discursive. Ces trois entrées entrent en résonance et reprennent les trois dimensions de l'épistémographie (Drouhard, 2011) : le théorique, la praxis, la sémiolinguistique. Si dans la TSD, Brousseau propose pour analyser les situations didactiques

de les décomposer en quatre types de situation en fonction du statut du savoir que sont l'action, la formulation, la validation et l'institutionnalisation, ces situations ne se succèdent pas mais elles interagissent suivant des règles qui peuvent être désignées comme des clauses du contrat didactique. Dans les situations d'action intervient ce que nous appellerons le contrat de l'agir. Nous avons vu le rôle du macro-contrat sur l'activité de l'élève, mais les autres composantes sont aussi intéressantes, en particulier le statut de la recherche dans la classe, de l'initiative, de ce que l'élève estime « avoir le droit » de faire en mathématiques. Pour les situations de formulation, le contrat de communication (Charaudeau, 1993) organise les échanges et les productions langagières écrites ou orales suivant des codes qui peuvent relever de la facette épistémologique du contrat didactique (liés par exemple à des usages dans la discipline, ou la pédagogie), de sa facette sociale (les régulations des inter-actions langagières dans la classe) ou de critères subjectifs (tolérance au bruit, valeurs esthétiques...) et ce au niveaux micro, méso ou macro. Le contrat de communication se construit autour de quatre principes : le principe d'interaction qui définit l'acte de communication comme un phénomène d'échange entre deux partenaires, le principe de pertinence qui exige une raison d'être de l'échange et un minimum de données communes entre le locuteur et l'interlocuteur (ici nous pouvons parler de la communauté discursive scolaire), un principe d'influence qui oblige le locuteur à se demander comment ce qu'il dit peut agir sur l'autre, un principe de régulation qui permet l'aboutissement de l'échange (Charaudeau, 1993). Pour les situations de validation, nous définirons un contrat de validation dont les clauses sont liées à la façon dont l'enseignant traite l'erreur dans la classe, à la représentation qu'ont les élèves du rôle de l'erreur dans l'apprentissage, mais aussi à des aspects liés à la validation dans la discipline. On les retrouve aussi bien dans la facette épistémologique (une lecture graphique donne un résultat approché) que dans la facette sociale (si le professeur me demande d'expliquer, c'est que mon résultat est faux). Pour les situations d'institutionnalisation, le contrat épistémique est lié aux contraintes de la discipline et à la communauté scientifique construite dans la classe : le rôle des écrits provisoires, le registre utilisé, le langage mathématique écrit... Deux aspects sont toujours à prendre en compte dans ces différents contrats : ce qui est explicite et partagé par l'ensemble des élèves de la classe et ce qui est implicite et peut relever d'une règle fautive ou d'un malentendu. Cette approche rejoint celle de la théorie de l'action conjointe (Sensevy, 2011) qui définit le jeu didactique. Toutes ces connaissances liées au contrat didactique sont des conditions qui interviennent dans la construction du problème.

Nous pouvons donc schématiser une situation didactique de la façon suivante (voir schéma 11) : trois types d'activités entrent en relation suivant trois aspects du contrat didactique. Les activités productives sont liées à des situations d'action que régissent le contrat épistémique d'une part et le contrat de communication d'autre part. Les activités de formulation sont liées à la construction d'une communauté discursive à travers ce même contrat de communication mais aussi par le contrat de validation. Enfin les activités constructives génèrent les savoirs qui peuvent être problématisés selon le contrat épistémique et le contrat de validation. Le contrat didactique est l'ensemble de ces trois contrats qui ont chacun une facette épistémologique et une facette sociale (Hersant, 2014) et peuvent être étudiés à différents niveaux macro, méso ou micro suivant que ce contrat est général, lié à l'objectif d'enseignement, à la répartition des responsabilités, lié au type de situation, à une unité de contenu ou d'organisation, ou singulier, lié à une unité d'interaction (Hersant, 2001). Notre

analyse des situations prendra en compte ces différentes entrées en essayant de mettre en évidence les caractéristiques des différents clauses du contrat didactique et leur effet sur l'activité de l'élève.

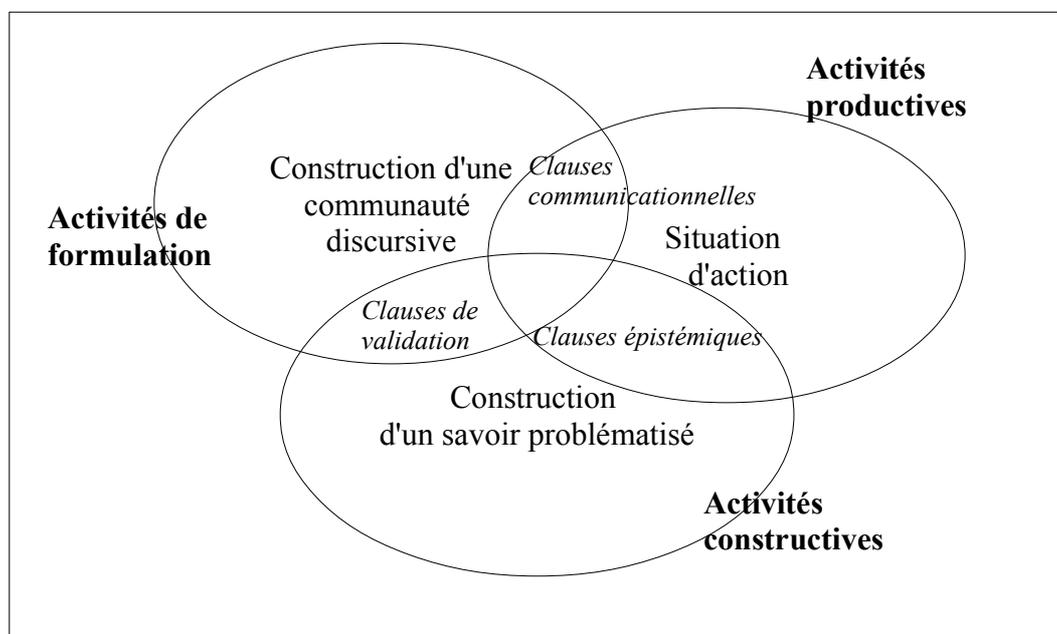


Schéma 11: Organisation d'une situation didactique et clauses du contrat didactique

III.9 : Conclusion

Notre approche de l'enseignement-apprentissage de la notion de fonction affine par la problématisation nous amène à construire des situations permettant à l'élève de concevoir la fonction affine comme un outil problématisé de modélisation de phénomènes empiriques de covariation. Nous visons l'ouverture et l'exploration de possibles pour mettre en évidence des nécessités par un raisonnement abductif. Cela passe par un processus de reconversion et de redéfinition du savoir au niveau du discours. La construction d'un savoir problématisé requiert une vigilance sur trois points, pour chacun de ces points, le langage a plusieurs fonctions. Nos analyses doivent donc porter parallèlement sur trois processus :

- **La problématisation de la fonction affine comme outil de modélisation** : Comment le problème est-il posé ? Quelle activité est mise en place ? Quels sont les schèmes d'actions ? Quel raisonnement est utilisé pour agir ?
- **La secondarisation du discours** : Comment les élèves effectuent-ils des conversions de registres de représentations sémiotiques ? Dans quel but ? Quel discours produisent-ils sur leur activité et sur les données produites ? Quelle est la fonction de ces discours ?
- **L'évolution du REX** : Comment le REX évolue-t-il ? Quelles configurations se mettent en place entre le registre empirique, le registre des modèles et le REX ?

Pour favoriser ce triple processus, nous pouvons agir sur différents leviers :

- le problème que les élèves ont à résoudre dans le but de mettre en place un milieu proactif et rétroactif ;
- l'organisation pédagogique de la séquence ;
- les caractéristiques du contrat didactique.

La suite de notre travail va nous amener à préciser en quoi et comment agir sur ces leviers pour favoriser un apprentissage problématisé dans l'espoir d'une construction d'un savoir plus disponible par les élèves.

Conclusion de la partie 1

Cette première partie a permis de mettre en évidence certaines incohérences dans l'enseignement de la notion de fonction affine : la définition formelle enseignée est éloignée des utilisations dans les problèmes rencontrés, la maîtrise du calcul algébrique est insuffisante pour que cette définition puisse être un outil efficace, le lien entre proportionnalité et fonction linéaire ne prend pas en compte les propriétés de linéarité. Par ailleurs, cette notion est particulièrement complexe du fait qu'elle relève de différents cadres, de différents registres et de différents points de vue sans que la question de la conversion soit un objet d'étude. En particulier le point de vue dynamique est peu étudié alors qu'il permet de considérer la fonction sous trois aspects : le ponctuel, le global et le local et qu'il permet de résoudre des problèmes sans mobiliser l'algèbre. Notre hypothèse est qu'une approche covariationnelle problématisée associée à un travail explicite des changements de cadres et de conversions de registres devrait permettre de dépasser certains obstacles. Cette approche suppose de penser le milieu de sorte que, ce que les élèves vont être amenés à produire, leur construction et leur formulation des objets du savoir visé soient mis en relation ; et donc de préciser les clauses du contrat didactique nécessaire. Dans la partie 2, nous allons tester différentes hypothèses et affiner les indicateurs et outils d'analyse des situations et de l'activité de l'élève afin de penser des situations d'enseignement-apprentissage visant une telle approche.

Partie 2

L'élaboration des éléments de l'ingénierie

Notre étude épistémologique et l'analyse de différents points de vue sur la notion de fonction nous ont permis de faire trois hypothèses :

1. la définition des fonctions affines dans le registre des expressions algébriques peut ne pas être opérante du fait que les élèves n'arrivent pas à effectuer les changements de cadre nécessaires, ni les conversions d'un registre à un autre ;
2. l'approche statique de la fonction ne permet pas à cette notion d'être disponible pour résoudre des problèmes qui relèvent plutôt d'une modélisation dynamique ;
3. les automatismes mis en place dans l'étude de la proportionnalité peuvent devenir un obstacle à la conception de relations fonctionnelles non linéaires.

Nous allons examiner ces hypothèses dans cette deuxième partie. Dans le premier chapitre, nous allons analyser les difficultés des élèves quant à l'affinité à partir d'un test à la fin du collège. Dans le second chapitre, nous analyserons les productions d'élèves lors de situations qui mettent en tensions les représentations erronées que nous aurons repérées à travers le test.

Nos conclusions vont nous permettre de penser une ingénierie que nous éprouverons et analyserons dans la partie 3.

Chapitre I : Le test et les résultats

Dans ce chapitre, il s'agit d'identifier les difficultés voire les obstacles que les élèves rencontrent dans l'apprentissage de la notion d'affinité à la sortie du collège. Pour avoir une représentation quantitative, nous avons élaboré un test dont nous avons proposé la passation à l'ensemble des enseignants de collège de l'académie de Nantes. Nous allons présenter la méthodologie utilisée pour la conception et la passation de ce test visant à mesurer les connaissances des élèves à la sortie du collège concernant les fonctions affines. Nous présenterons une analyse préalable des différents exercices pour justifier les choix que nous avons effectués. Nous ferons ensuite une analyse des résultats afin de tirer quelques éléments de compréhension des difficultés des élèves. Aline Robert distingue les connaissances techniques qui « correspondent à des mises en fonctionnement isolées, mettant en jeu des applications immédiates de théorèmes, propriétés, définitions, formules, etc. » (Robert, 1998), les connaissances mobilisables qui « correspondent à des mises en fonctionnement plus larges : encore indiquées mais dépassant l'application simple d'une propriété à la fois » (Robert, 1998) et les connaissances disponibles que l'élève peut utiliser dans la résolution d'un problème sans aucune indication. Nous allons repérer à travers l'analyse des procédures des élèves les savoirs mobilisables et les savoirs disponibles. Ces résultats nous permettront de poser les objectifs de travail pour la mise en place d'une ingénierie et de pointer certaines clauses du contrat didactique mis en place dans les classes afin d'identifier celles qui peuvent être favorables à l'apprentissage par problématisation du savoir par les élèves.

I.1 : Les types de problèmes mathématiques relevant de l'affinité et les procédures utilisées pour les résoudre

Si nous considérons une fonction affine f définie d'un ensemble de nombres A dans un ensemble de nombres B . Pour tout i entier naturel, nous noterons x_i un élément de A et y_i un élément de B . Les problèmes posés aux élèves peuvent être classés suivant différents critères : la tâche, la nature des nombres en jeu, le contexte de l'exercice, la nature de la fonction.

Pour ce qui concerne la tâche, il peut s'agir de :

- connaissant x_1 et f , déterminer y_1 (calculer l'image de x_1) ;
- connaissant f et y_1 déterminer x_1 (calculer un antécédent de y_1) ;
- connaissant deux couples $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ et sachant que f est affine déterminer l'image de x_3 ;
- connaissant deux couples $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ et sachant que f est affine déterminer l'antécédent de y_3 ;
- connaissant deux couples $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ et sachant que f est affine, déterminer l'expression algébrique de la fonction f .

Nous pouvons regrouper ces tâches dans trois catégories : déterminer une image, déterminer un antécédent, déterminer une fonction affine. Pour les deux premières questions la réponse est un nombre, pour la dernière il s'agit d'une expression algébrique.

La nature des nombres ainsi que leur rapport sont deux autres variables didactiques : x_i entier ou non, rapport entre x_1 et x_2 entier ou non, rapport entre les accroissements entier ou non. Le type de rapport numérique influence le niveau de difficulté du problème (Rajotte, Giroux, & Voyer, 2014).

Enfin la nature du contexte induit des représentations différentes. En particulier s'il s'agit d'une fonction opérant sur deux grandeurs de même nature, le rapport entre les grandeurs est un scalaire sans unité, on parlera de rapport interne (Comin, 2002a). Si les grandeurs sont de natures différentes, le rapport est dit externe, il peut être plus facilement associé à une relation fonctionnelle et implique une fonction réciproque (Levain & Vergnaud, 1995). La question de la continuité liée à l'idée de grandeur continue et non plus discrète est aussi un aspect important du problème.

En fonction de ces variables, les élèves peuvent être amenés à utiliser différentes procédures qui nécessitent des changements de cadre et des conversions de registres. Nous en caractériserons trois selon les registres utilisés : la résolution graphique, la résolution par équations dans le cadre algébrique, la résolution par calculs dans le cadre arithmétique. Pour chaque procédure, nous allons préciser les difficultés et risques d'erreurs afin de préciser notre première hypothèse (voir page 114) :

- **La résolution graphique** se fait par tracé d'une droite et par des lectures graphiques. Suivant le contexte, les difficultés peuvent venir de l'identification des grandeurs, des unités et du choix de la graduation des axes, de la précision des lectures, de la précision du tracé suivant la proximité des points obtenus.
- **La résolution dans le cadre algébrique** peut être plus ou moins complexe suivant le nombre de variables dépendantes et la nature des grandeurs et des nombres. Le travail avec des fractions peut engendrer des erreurs de même que la manipulation de nombres décimaux inférieurs à 1. La technique de résolution peut aussi poser des difficultés.
- **La résolution par des calculs arithmétiques** peut se faire par l'utilisation de la proportionnalité des accroissements et donc l'utilisation des techniques associées aux problèmes de proportionnalité qui reviennent à deux types de raisonnement heuristiques (Simard, 2012a) : les propriétés de linéarités et le retour à l'unité. Les difficultés peuvent venir de la complexité des nombres à manipuler et de la perte de sens parfois associées à des techniques comme le produit en croix.

Concernant cette dernière procédure, si nous nous appuyons sur les travaux de Comin sur l'apprentissage de la proportionnalité, les difficultés que rencontrent les élèves sont plus liées à des problèmes d'enseignement que d'apprentissage. Il s'appuie sur les résultats du travail expérimental de Dupuis et Pluvinage (Dupuis & Pluvinage, 1981) qui définissent trois périodes dans l'enseignement de la proportionnalité : « celle de « la règle de trois » des

« mathématiques traditionnelles », celle des fonctions linéaires des « mathématiques modernes », celle enfin, des tableaux de proportionnalité des « mathématiques concrètes ». » (Comin, 2002, p.138).

A ces trois périodes correspondent trois organisations mathématiques avec des techniques différentes pour lesquelles il n'existe pas toujours de technologie réellement enseignée (Chevallard, 1999). Comin remarque que les élèves peuvent changer de technique d'un exercice à l'autre et que la diversité des techniques est un facteur important de réussite. Cependant les élèves n'établissent pas de liens entre les organisations, le taux d'élèves de seconde qui associent proportionnalité et application linéaire dans le questionnaire qu'il leur propose ne dépasse pas 57 %. Une réponse donnée par Marianna Bosch est que les techniques de l'arithmétique souffrent de l'absence d'une « algèbre des grandeurs » (Bosch, 1995). La notion de fonction peut y remédier facilement mais « les techniques fondées sur la modélisation algébrique ne permettent pas de justifier l'adéquation du modèle au système étudié » (Comin, 2002, p.139). Il conclut que « l'enseignement de l'algèbre fait gagner en généralité mais n'améliore pas l'extension de son champ d'utilisation » (Comin, 2002, p.143). Ainsi l'enseignement de la proportionnalité ne bénéficie pas d'outils ni de « jargon » permettant l'émergence d'une conception universelle. Nous devons tenir compte de ces données si nous voulons enseigner une approche covariationnelle de la notion de fonction affine. Pour utiliser des techniques liées à la proportionnalité, les élèves doivent reconnaître une situation de proportionnalité. Or « l'utilisation de la conservation des rapports internes est subordonnée à la reconnaissance de l'invariance du rapport externe », cette reconnaissance peut être mise en échec si elle n'est pas « calculable » ou « explicitable » (Comin, 2002, p.142). Dans le cas des fonctions affines, le taux de variation est un nouveau type de proportion en ce sens qu'il s'agit du rapport de deux différences. Notre test doit nous aider à identifier les difficultés liées au traitement de la proportionnalité des écarts sachant que les techniques sont influencées par la nature des nombres et leur fonction.

I.2 : Méthodologie de construction, passation et analyse

I.2.1 : Méthodologie de construction

Nous sommes partie d'un constat auprès de quelques classes de seconde et avons entrepris de vérifier si les difficultés repérées par rapport au traitement des situations affines chez les lycéens (Gille, 2008) étaient déjà là en fin de collège. Il s'agit d'une étude quantitative permettant d'identifier des constantes à partir d'un échantillon recueilli auprès de différents établissements de l'académie nantaise. Nous avons listé à partir des manuels de la classe de 3^e les différentes notions mobilisées par les élèves en ce qui concerne l'étude des fonctions affines et avons cherché à établir des exercices portant chacun sur une seule notion. Nous avons choisi des indices qui nous semblaient induire certaines actions pour repérer des invariants dans les contrats didactiques mis en place dans les classes de troisième du collège (élèves de 15 ans). Nous avons cherché à varier le type de questions (ouvertes, fermées, choix multiples, vrai ou faux) sans demander de justifications pour des raisons de traitement mais aussi pour laisser la possibilité à tous les élèves de répondre, quelle que soit leur aisance avec l'écrit. L'ordre des exercices proposés sur deux pages format A4, devait permettre aux élèves

d'aborder différents registres (Duval, 2002) et de choisir différents degrés de difficulté sur chacune des pages.

Un premier objectif est de mesurer le niveau de maîtrise du vocabulaire lié aux fonction (image, antécédent...) et la capacité qu'ont les élèves à convertir une donnée d'un registre à l'autre. Ce vocabulaire est nouveau pour les élèves, quelques exercices simples vont permettre de voir s'ils le connaissent. Nous avons veillé à ce que ce le vocabulaire ne soit pas un obstacle dans le reste du test.

Un second objectif est de mettre en évidence des « théorèmes en acte » qui peuvent être faux et pourtant largement partagés tels qu'ils sont définis par Vergnaud :

Les concepts se développent dans l'action et sous tendent les formes d'organisation de l'activité que sont les schèmes. Il n'y a pas d'action possible sans propositions tenues pour vraies sur le réel. Ce sont justement ces propositions tenues pour vraies que j'appelle théorèmes-en-acte, y compris pour d'autres domaines d'activité que les mathématiques. Leur portée est souvent locale (elle l'est toujours dans la phase d'émergence) ; ils peuvent rester implicites ; ils peuvent même être faux. (Vergnaud, 2001, p.302)

Certaines connaissances fausses nous semblaient fréquentes dans les classes. Nous avons en particulier isolé les propriétés suivantes déjà repérées dans de nombreuses recherches (Baldy, Dusseau, & Durand-Guerrier, 2007; Comin, 2002a; Hersant, 2005; René De Coteret, 1991; Simard, 2012a) mais ces recherches s'intéressent essentiellement aux élèves de l'école primaire et des classes de 6^e de collège. Par ailleurs les derniers changements de programmes amènent de nouveaux profils d'élèves. Nous allons donc nous intéresser aux théorèmes en acte qui suivent :

- les tableaux de nombres sont des tableaux de proportionnalité ;
- une fonction est toujours monotone ;
- les grandeurs sont toujours proportionnelles ;
- une droite représente une situation de proportionnalité.

Nous faisons l'hypothèse que ces connaissances erronées se sont installées peu à peu du fait de l'enseignement de certaines notions. En effet, les tableaux sont utilisés au primaire pour organiser une suite de nombres et son image par un opérateur, ils sont principalement rencontrés dans des situations de proportionnalité. Le tableau devient un ostensif qui appelle l'utilisation de techniques liées à la proportionnalité, d'autant que les élèves sont relativement à l'aise pour compléter un tableau de proportionnalité (Gille, 2008). De la même manière, les grandeurs mesurables sont mesurées par un nombre et une unité et les changements d'unités utilisés au primaire et au collège sont principalement des conversions proportionnelles, tout comme les changements d'échelles qui amènent des calculs de proportionnalité. Prenons l'exemple de la mesure des longueurs, les unités du système métrique se déclinent en

multiples ou un sous-multiples décimaux du mètre. De même, la conversion des mètres en mille marin se fait à partir de l'égalité : 1 mille marin = 1 852 m et celle des mètres en pieds à partir de la convention : 1 pied = 0,3048 m. Les élèves peuvent donc être amenés à penser que les « grandeurs » appellent un traitement par la proportionnalité alors que cela n'est vrai que pour les grandeurs mesurables. En effet, « une grandeur est mesurable s'il est possible de réaliser (ou d'imaginer) une opération définissant le rapport de deux grandeurs de cette espèce » (Basdevant, Bataille, Fleury, Kohl, & Robert, 2007). Mesurer une grandeur, c'est chercher combien de fois elle renferme une autre grandeur de même espèce prise pour unité. Si bien qu'une mesure de grandeur G comparée à une unité U peut être notée : $G = g \times U$. Si U' est une autre unité, cette mesure de grandeur peut être notée $G = g' \times U'$. Soient g et g' les nombres qui mesurent la même grandeur G avec deux unités U et U' , ces unités étant des exemplaires particuliers de la grandeur mesurée, il existe un nombre k qui mesure U dans l'unité U' donc $U = k U'$. Les mesures dans l'unité U sont donc proportionnelles aux mesures dans l'unité U' . De plus les nombres concrets (nombre suivi de l'unité) sont souvent absents des calculs, les enseignants préfèrent écrire des opérations sur des nombres (Chevallard & Bosch, 2001). Cela amène les élèves à confondre opérations sur les grandeurs et conversions et donc à considérer que tous les calculs effectués dans un contexte faisant intervenir des grandeurs relèvent de la proportionnalité. Si cela est vrai pour des grandeurs mesurables, c'est faux pour des grandeurs repérables (voir partie 3 chapitre III.1.1 page 313). Toujours en lien avec les programmes scolaires, les fonctions rencontrées au collège sont principalement des fonctions monotones et même croissantes, voire croissantes en « fonction du temps » comme nous le verrons dans le chapitre suivant, ce qui peut amener les élèves à penser que toutes les fonctions sont monotones. Enfin, un objet caractérisé par deux conditions nécessaires et suffisantes peut amener les élèves à une généralisation abusive. La fonction linéaire est caractérisée par sa représentation graphique qui est une droite passant par l'origine. Comme la fonction affine est caractérisée par sa représentation graphique qui est une droite, il est très difficile pour les élèves de considérer la fonction linéaire comme un cas particulier des fonctions affines. Les fonctions linéaires et affines sont souvent mises en opposition. De la même façon que les nombres sont soit pairs, soit impairs, les élèves pensent qu'une fonction est soit affine, soit linéaire et ils associent à ce critère une caractéristique qui peut être « passe par l'origine ou non », ou « est une droite ou non ».

Enfin, même si nous cherchons à identifier les notions mobilisées par les élèves sur des tâches isolées, nous testerons cependant quelques conversions qui semblent les plus délicates au début du lycée : le passage du registre graphique et du registre des tableaux au registre des expressions algébriques (Comin, 2009). Si nous reprenons les neuf stades de compétences définis dans la partie 1 chapitre III.1, les exercices sont repérés dans le tableau 12 par les lettres de A à H en face des compétences qu'ils testent. Notre test vise à mettre en évidence les connaissances et certaines clauses du contrat didactique qui nous permettront de mieux comprendre le REX utilisé par les élèves lorsqu'ils résolvent des problèmes.

Le test ne devait pas durer plus de 20 min pour inciter les enseignants à le faire sans perdre de temps sur l'avancée de leur programme, en particulier en fin de troisième à l'approche de l'examen du DNB (Diplôme National du Brevet). L'impératif était de proposer

un test tenant sur une feuille A4 recto-verso, les photocopies étant à la charge des enseignants. Nous avons utilisé Google Drive¹⁰ afin de permettre aux établissements qui le souhaitent de répondre au test directement sur l'internet. La saisie des réponses par le même intermédiaire permet d'obtenir directement les données dans un tableur. Les enseignants pouvaient aussi scanner les tests et les envoyer par mail sous fichier pdf.

Nous avons prévu de choisir un échantillon représentatif en choisissant des productions d'établissements publics et privés des cinq départements, en prenant pour chacune des établissements de centre ville, de proche banlieue, de zones sensibles, de zone rurale à petit effectif et à gros effectif.

		Représentation des fonctions dans les registres discursifs						
		Cadre arithmétique → cadre algébrique						
		Usage implicite		Usage canonique		Usage familier		
Représentation des fonctions dans les registres non discursifs	Courbe (cadre géométrique) → Graphe (cadre fonctionnel)	Mode nomographique	Calcule sur des grandeurs. Lit des informations sur des graphiques.	A H	Calcule sur des nombres. Sait résoudre un problème dans un seul registre à la fois.	D	A des procédures algébriques aisées. Peut décrire des variations sur la courbe ou sur le tableau.	F
		Mode idéogrammatique	Sait reconnaître une situation de proportionnalité.	B C	Sait manipuler les expressions algébriques. Sait qu'une situation affine se représente par une droite.	D	Les capacités sont mobilisables. Sait mettre en relation différents registres et donc valider.	G
		Mode opératoire	Résout aisément des problèmes sur les grandeurs que ce soit avec l'aide du graphique ou d'un calcul arithmétique.	B H	Sait associer une fonction affine à des types de situations. Sait caractériser les coefficients sur le graphique.	E	Les capacités sont disponibles. Peut utiliser la fonction affine pour modéliser une situation. Sait décontextualiser un problème et sait faire des aller retour entre les registres PTFC.	

Tableau 12: Stades de compétences dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre et de la courbe au graphe

¹⁰ Test : <https://docs.google.com/forms/d/1z0h-xosUeXbwGBddbYpN6TVLsA5VlzYojLEHHhyHTKo/edit#>

I.2.2 : Méthodologie de passation

Un premier test a été passé en 2012 par 99 élèves, 32 en fin de 3^{ème} et 67 en début de 2^{nde} dans deux lycées dont le public est issu de divers collèges. Un établissement est en centre ville, l'autre en périphérie et le troisième en zone rurale. Les enseignants étaient volontaires et participaient de près ou de loin au travail du groupe IREM des Pays de La Loire sur les fonctions. Une première analyse a été faite, mais pour avoir un échantillon suffisamment représentatif, le test a été proposé par l'intermédiaire des IPR de mathématiques à tous les professeurs de mathématiques de l'académie de Nantes en mai 2013. A cette période de l'année, nous sommes sûrs que les fonctions affines ont été étudiées car elles font partie du programme du DNB. L'envoi a été fait par mail, précisant qu'il s'agissait d'une enquête pour un travail de recherche. Le côté non obligatoire était précisé, mais le fait que l'envoi vienne des IPR a sans doute incité les enseignants à participer car nous avons eu plus de 4 000 réponses. Une lettre d'accompagnement précisait le protocole de passation (voir annexe 9) et l'objectif était formulé en ces termes : « L'objet de ma recherche est de repérer ce qui permet ou non aux élèves de problématiser et je me centre sur une connaissance en particulier qui est la fonction affine ». Nous avons pris soin de préciser que nous étudions les connaissances des élèves et non les pratiques de l'enseignant. Nous avons aussi précisé le déroulement en insistant sur plusieurs points :

- La non-intervention des enseignants pendant le test : pas de reformulation, de commentaires, de conseils.
- L'anonymat à la fois du côté des élèves, de l'enseignant et de l'établissement, par un système de codage que je préciserai ultérieurement.
- La possibilité pour les élèves de faire des essais, de poser des questions sur leur feuille de test, de réagir aux questions si besoin. Le travail doit être personnel et le plus spontané possible pour montrer les automatismes mis en place.
- La possibilité d'utiliser la calculatrice pour rassurer les élèves.

La mise en avant de l'apport de ce travail au groupe IREM « fonctions » sur l'académie, devait permettre de considérer ce travail comme une coopération entre collègues et non comme une évaluation par les inspecteurs. Il était aussi précisé que les enseignants qui le souhaitaient pouvaient apporter des éléments d'analyse, des commentaires ou des critiques, ce que certains ont fait.

I.3 : Le choix des exercices en lien avec les hypothèses de recherche

Plusieurs exercices proposés dans ce test ont pour but de vérifier notre troisième hypothèse (voir page 114) qui est que la proportionnalité est un obstacle à la construction du concept d'affinité. L'idée est de proposer des problèmes dans différents registres et de voir si les élèves mobilisent ou non le modèle de la proportionnalité pour les traiter. D'où vient cette hypothèse ? Nous avons constaté auprès des élèves que le modèle de la proportionnalité est tellement intégré qu'il est incarné et mobilisé systématiquement face à certaines situations. En particulier les élèves ont du mal à se détacher du modèle de la proportionnalité pour se représenter autrement la covariation de deux grandeurs.

Si la proportionnalité n'est jamais réellement définie, elle est caractérisée à plusieurs moments de la scolarité par des propriétés qui jouent le rôle de définition :

- deux grandeurs sont proportionnelles si on trouve un coefficient de proportionnalité ;
- deux grandeurs proportionnelles si leur représentation graphique est une droite passant par l'origine.

D'autres propriétés ont plutôt un statut fonctionnel pour effectuer des calculs comme les propriétés de linéarité additives ou multiplicatives. La proportionnalité des écarts est rarement un objet d'étude car elle n'est pas une caractéristique des situations de proportionnalité, elle ne peut donc pas être mobilisée dans le cas des fonctions affines.

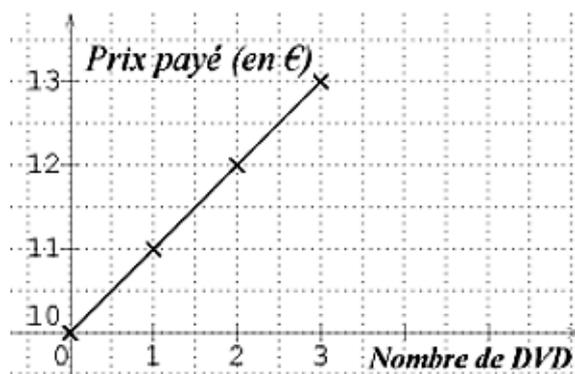
Pour illustrer notre propos, nous allons prendre un exercice proposé en classe de 4^e de SEGPA et analysé dans le cadre d'une thèse (Voisin, 2013). L'énoncé est le suivant :

Dans cette médiathèque, la carte d'inscription valable un an coûte 10€. On paye en plus 1€ par DVD emprunté.

1) Complétez le tableau représentant cette situation

Nombre de DVD empruntés en un an dans chaque cas	0	1	2	3
Prix payé en € pour un an dans chaque cas

2) Léa a représenté sur le graphique ci-dessous les données du tableau.



Est-ce que ce graphique traduit une situation de proportionnalité ? Justifiez.

Si Samuel Voisin écrit que « les accroissements proportionnels liés au caractère affine de cette relation fonctionnelle seront un élément à porter au débat lors de l'institutionnalisation » dans la présentation de la situation expérimentée en classe de SEGPA, on ne voit aucune trace de cette mise en débat dans le déroulé de la séance. Par contre le professeur des écoles intervient à un moment de l'échange :

E : C'est pas une situation ça.

PE : Il nous demande si en regardant ce graphique, si c'est une situation de proportionnalité cette histoire de DVD à la médiathèque là, Alexandre tu dis non, t'as l'air catégorique. Pourquoi non ?

E : A chaque fois on rajoute 1, on n'a pas besoin de calculer non plus.

Es : ouais... et si on prend 1 DVD.

PE : Oui ?

E : Eh ben on rajoute 1.

PE : Si on rajoute toujours 1, moi je trouve que ça ressemble à une situation de proportionnalité. Par exemple, quand on avait 3 kilos de pêches à chaque, enfin si 1 kilo de pêches ça coûte 2,40,

E : Oui, mais

PE : Pour 2 kilos, on rajoute 2,40. Pour 1 DVD on rajoute 1 euro : ça ressemble à une situation de proportionnalité.

On voit dans cet échange toute la difficulté qu'ont les différents interlocuteurs pour se comprendre. En particulier, le fait que les élèves ne terminent pas leurs phrases ne permet pas d'identifier leur représentation de la situation. L'enseignant émet des hypothèses sans tester leur adéquation avec l'idée exprimée par l'élève. Il semble partir du fait que l'élève qui affirme que la situation n'est pas une situation de proportionnalité est arrivé à cette conclusion suite à une erreur et son intervention vise à mettre son argument en défaut alors que cet argument n'a pas été développé par l'élève. En commençant par « si on rajoute 1 », l'élève pose son attention sur la variation d'une grandeur, le nombre de DVD loué ou le prix en euros de cette location. Il termine sa phrase par « on n'a pas besoin de calculer » sans expliciter le calcul dont il veut parler. Il peut très bien s'agir du fait qu'on n'a pas besoin d'utiliser le coefficient multiplicateur puisqu'on sait qu'on doit rajouter 1€ pour chaque DVD supplémentaire. Si pour lui, la proportionnalité est caractérisée par l'utilisation d'un coefficient de proportionnalité, cet élève peut affirmer qu'il n'y a pas proportionnalité, non pas parce que ce coefficient n'existe pas, mais parce qu'on n'en a pas besoin. L'enseignant explique la proportionnalité des écarts sur un exemple de proportionnalité traité auparavant. Sans doute les valeurs sont-elles plus faciles à repérer alors que pour la location des DVD, quand on dit « on ajoute 1 », on ne sait pas de quelle grandeur il est question puisqu'on ajoute une unité pour chacune des grandeur. Avec la situation des prix au kilogramme de pêches, ajouter 1kg revient à payer 2,40€ de plus. L'enseignant cherche donc à attirer l'attention sur une nécessité qui est que, dans les situations affines, les variations sont proportionnelles, ce qui est par conséquent le cas des fonctions linéaires mais ne constitue cependant pas une caractéristique des situations de proportionnalité. L'enseignant profite finalement de l'intervention d'un autre élève pour revenir à la caractérisation graphique et la question des variations ne sera plus abordée.

Dans ce cas particulier d'une classe de SEGPA, on remarque que les élèves ne disposent pas d'un vocabulaire suffisant pour exprimer ce qui est observé. L'enseignant lui-même utilise des formulations très contextualisées : « Qu'est ce que c'est que cette situation là, cette fois ? Est-ce que c'est une histoire de pêches, est-ce que c'est une histoire de ». Le risque étant que, pour certains élèves, une situation de proportionnalité ne soit caractérisée que par le contexte (ici les problèmes liés à un prix unitaire). Il semble alors bien difficile de savoir ce que les élèves ont construit comme connaissances autour de la notion de proportionnalité.

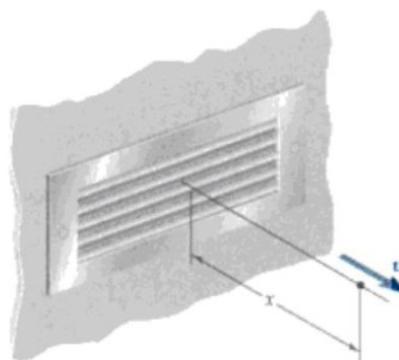
Un autre exemple atteste que la proportionnalité reste un obstacle qui perdure dans la scolarité, même à un niveau plus élevé et même chez les étudiants dans une filière

scientifique. Il s'agit d'un exercice extrait d'un partiel de mécanique générale d'élève - ingénieur 1^{ère} année en Maîtrise des énergies. Il est demandé de calculer l'accélération de l'air mais la vitesse de l'air est exprimée non pas en fonction du temps mais de la distance à l'événement notée x .

Selon des données expérimentales, la vitesse de l'air émis par la partie aval d'un évent est définie par la relation $v = \frac{0,18 v_0}{x}$, dans laquelle v est en m/s et x en m, et v_0 est la vitesse d'écoulement initial de l'air. Pour $v_0 = 3,6$ m/s :

3.1. Calculer l'accélération de l'air à $x = 2$ m.

3.2. Calculer le temps mis par l'air pour se déplacer de $x = 1$ m à $x = 3$ m.



Sur une promotion de 20 étudiants, trois ont résolu complètement le problème¹¹, trois ont cru que v ne dépendait pas du temps, cinq ont dérivé la vitesse par rapport à x , quatre sont restés bloqués à l'équation différentielle et son intégration ou bien se sont trompés en intégrant celle-ci et trois n'ont pas traité l'exercice. On peut considérer que ceux qui ont posé l'équation différentielle ont réussi à poser le problème et qu'ils ont besoin de travailler des techniques pour terminer le travail. Pour les autres, deux difficultés sont apparues. La première est l'identification des relations fonctionnelles entre les grandeurs accélération, vitesse, temps, distance. Elle relève de l'unité de raisonnement U1 définie par Passaro (Passaro, 2016). Elle amène certains étudiants à considérer la vitesse comme indépendante du temps, elle peut être la raison de l'absence de réponse. La seconde est liée à l'interprétation du taux de variation comme une grandeur associée (vitesse, accélération). Les étudiants peuvent alors dériver la vitesse par rapport à la distance. Dans les deux cas, le problème est posé dans le cadre algébrique et non dans le cadre fonctionnel, ce qui amène les étudiants à travailler sur les écritures en appliquant les techniques liées au traitement de la proportionnalité dans le cadre numérique. En particulier, il n'est pas question de fonction dans l'énoncé, l'expression de v n'utilise pas les notations fonctionnelles comme $v(t)$ qui permet d'identifier la variable indépendante et la variable dépendante (voir page 30) mais elle se présente comme une formule dans laquelle intervient la lettre x qui désigne usuellement la variable indépendante. On peut supposer que le traitement aurait été tout autre si l'énoncé avait proposé une

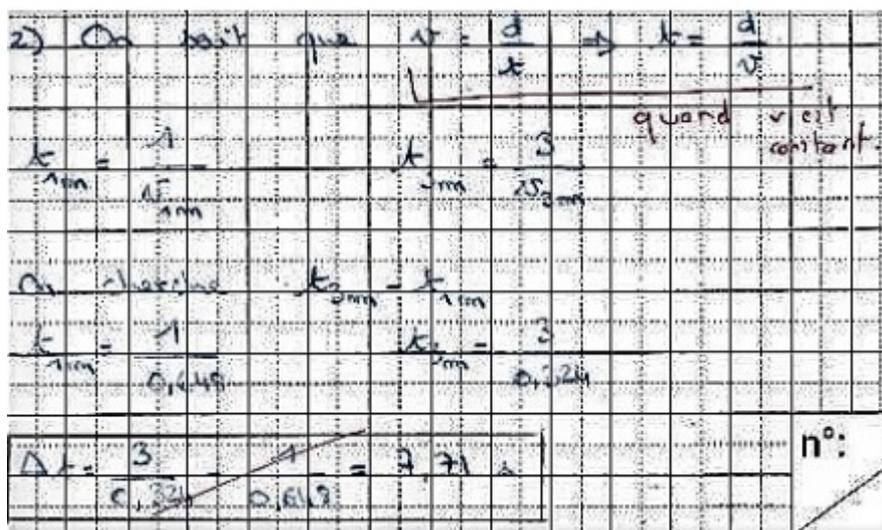
¹¹ Solution du problème : x étant fonction du temps, l'accélération est $v' = 0,18 v_0 \times \frac{-x'}{x^2} = \frac{-(0,18 v_0)^2}{x^3}$.

$v = \frac{dx}{dt}$ donc $\frac{dx}{dt} = \frac{0,18 v_0}{x}$, on a $\frac{x}{0,18 v_0} dx = dt$ et le temps mis par l'air pour se déplacer de $x=1$ m à $x=3$ m est $\frac{1}{0,18 v_0} \int_1^3 x dx = \frac{1}{0,18 v_0} \times \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \frac{4}{0,18 v_0}$ soit 6,17 secondes au centième près.

définition de v sous la forme : $v(t) = 0,18 \frac{v_0}{x(t)}$. On trouve donc des calculs du type :

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v}{t}$ où a désigne l'accélération. L'étudiant simplifie le quotient par d comme il le

ferait dans une expression algébrique. On trouve aussi l'écriture $v = \frac{d}{t}$ où v est considérée comme constante et donc comme un coefficient de proportionnalité entre la distance et le temps comme nous pouvons le lire dans l'extrait 1 (voir annexe 10).



Extrait 1: copie étudiant Polytech Master 1ère année

Les exercices que nous allons proposer dans le test (voir annexe 11) doivent permettre de repérer précisément en quoi la notion de proportionnalité peut devenir un obstacle à l'apprentissage de la notion d'affinité. Nous allons analyser rapidement chaque exercice en listant :

- les connaissances nécessaires pour comprendre la question posée ;
- les différentes manières de comprendre la question ;
- les réponses possibles.

Nous allons regrouper les exercices autour de quatre thématiques, le codage des exercices correspond à celui utilisé dans le tableau page 120 :

1. les grandeurs et la proportionnalité : exercices A, B et H ;
2. la proportionnalité et les graphiques : exercices C et E ;
3. l'utilisation du registre des expressions algébriques : exercice D ;
4. les connaissances sur les notations et le vocabulaire utilisés dans le cadre fonctionnel : exercices F et G.

I.3.1 : Les grandeurs et la proportionnalité : exercices A, B et H

Présentation exercice A

Nous faisons l'hypothèse que la proportionnalité est globalement bien maîtrisée pour les élèves lorsqu'il s'agit d'opérer sur des grandeurs. Nous nous proposons de le vérifier dans l'exercice A. Ce premier exercice porte sur les grandeurs masse en kg et prix en euros.

Exercice A

1 kg d'abricots coûte 2,50€. Je dois en acheter 3,5 kg, combien vais-je payer ?

Connaissances nécessaires

Le travail demande la mise en relation de différentes données en ayant reconnu une situation de proportionnalité, on peut dire que le travail attendu est au niveau de l'inter (comparaisons des données, mise en relation) ou du trans-objectal (connaissances théoriques sur la proportionnalité). Le contexte est lié à des valeurs discrètes et une étude locale est suffisante en ce sens qu'il n'est pas utile d'avoir une idée du comportement global de la fonction. On demande le calcul du prix de 3,5kg d'abricots, le prix de 1kg étant donné. C'est la situation la plus simple de proportionnalité avec résolution par retour à l'unité et l'image de 1 est une donnée du texte. Le contexte est un contexte usuel de proportionnalité implicite par la reconnaissance sociale du prix au kilogramme comme coefficient de proportionnalité (Levain, 1994). Les nombres sont des décimaux mais uniquement sur des unités ou des demi-unités. La grandeur prix peut permettre de travailler séparément sur les euros et les centimes.

Les différentes manières de comprendre la question

Les valeurs sont choisies de telle sorte que les élèves peuvent utiliser différentes procédures pour lesquelles les difficultés de mise en œuvre sont équivalentes :

- La **propriété de linéarité multiplicative** en disant que 3,5kg c'est 3,5 fois plus grand que 1kg donc le prix est 3,5 fois plus grand que 2,50€. Le calcul $3,5 \times 2,5$ pouvant être fait avec la calculatrice ou mentalement en repérant que multiplier par 2,5 revient à multiplier par 10 et diviser par 4 par exemple.
- La **propriété de linéarité additive** en décomposant 3,5kg en 3 fois 1kg et la moitié de 1kg. Son prix est donc de 3 fois 2,5€ et la moitié de 2,5€.
- Le **coefficient multiplicateur** en utilisant 2,50€/kg, ce qui revient à multiplier 3,5kg par 2,50€/kg.

- Le **produit en croix** en posant le calcul $\frac{3,5 \times 2,5}{1}$

1	3,5
2,5	?

Les réponses possibles

La réponse attendue est 8,75€.

Présentation de l'exercice B

L'exercice B est toujours dans le contexte des grandeurs mais il s'agit de la mesure de la température en degrés Fahrenheit et en degrés Celsius d'une part et de la mesure de longueurs en pieds et en mètres d'autre part. Nous sommes dans le contexte des conversions qui appelle un traitement proportionnel dans le cas des grandeurs mesurables.

Exercice B

Les tableaux suivants concernent des conversions de mesures de grandeurs. Le degré Fahrenheit (°F) est une unité de température et le pied (ft) est une unité de mesure de longueur utilisées au Royaume-Uni.

Température en °F	14	32	50	59
Température en °C	-10	0	10	15

Distance en ft	0	5	10	15
Distance en m	0	1,524	3,048	4,572

Convertir 20 pieds (ft) en mètres.

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit (°F).

Les connaissances nécessaires

Les élèves doivent savoir reconnaître un tableau de proportionnalité. Si la situation est une situation proportionnelle, les élèves doivent appliquer les techniques associées pour calculer un quatrième proportionnelle. Dans la négative, les élèves doivent prendre des initiatives. Dans le cas des distances les nombres qui mesurent les distances en mètres sont des décimaux, pour les pieds, ce sont des entiers multiples de 5 dans une progression arithmétique. Dans le cas des températures ; les nombres sont des entiers relatifs pour faciliter les calculs. L'exercice mobilise un niveau trans-analytique puisqu'il nécessite de croiser

différentes données et d'utiliser une classification des fonctions (affines linéaires et affines non linéaires).

Les différentes manières de comprendre la question

La proportionnalité n'est pas indiquée mais la présentation en tableau peut induire une situation de proportionnalité, tout comme le contexte des conversions. Deux cas sont proposés : la conversion des pieds en mètres qui relève de la proportionnalité et la conversion des degrés Fahrenheit en degrés Celsius qui se modélise par une fonction affine non linéaire. Si les élèves se placent dans le cas d'une situation de proportionnalité, ils vont se lancer dans les calculs. Ils peuvent contrôler leur réponse s'ils utilisent différentes procédures ou valeurs numériques pour effectuer leur calcul et s'ils comparent les résultats obtenus. Si les élèves passent par une première étape visant à déterminer si la situation est de proportionnalité, ils peuvent être bloqués face à une situation affine pour laquelle ils n'ont pas de technique automatisée.

Les réponses possibles

La proportionnalité dans le cas de la mesure de longueurs peut être rapidement vérifiée par le fait que l'image de 0 est 0 et par les propriétés de linéarité. On peut vérifier mentalement que l'image du double de 5 est bien le double de l'image de 5. Par la linéarité additive, on peut aussi facilement vérifier que l'image de $5 + 10$ est bien la somme des images de 5 et de 10. La conversion des pieds en mètres peut se faire par différentes procédures, certaines sont plus simples de par la nature des nombres :

- par un **retour à l'unité** : sachant que 10ft correspondent à 3,048m on sait que l'unité 1ft correspond à 10 fois moins soit 0,3048m donc 20ft correspondent à 20 fois plus ;
- par la **propriété de linéarité multiplicative** : puisque nous connaissons l'équivalent en mètres de 5ft, il suffit de multiplier par 4 ce résultat pour avoir la conversion de 20ft, (la même procédure peut être utilisée à partir de la conversion de 10ft qu'il suffit de doubler) ;
- par la **propriété de linéarité additive** : connaissant la conversion de 5ft et 15ft, il suffit d'ajouter les deux résultats ;
- par le **produit en croix** : cette procédure nécessite une technique plus élaborée de calcul qui peut rendre nécessaire l'usage de la calculatrice.

$$\frac{20 \times 1,524}{5}$$

5	20
1,524	?

Pour la conversion des degrés Fahrenheit en degrés Celsius, l'hypothèse est que la présentation dans un tableau induit une proportionnalité, pourtant la donnée de 32°F qui correspond à 0°C peut être un indicateur fort d'une situation de non-proportionnalité, de

même -10°C est l'opposé de 10°C alors que 14°F et 50°F sont tous deux positifs. Si le tableau concernant les mesures de longueurs propose des valeurs qui progressent en ft de 5 en 5, la même progression arithmétique se retrouve pour les trois premières valeurs en degrés Celsius, elle double pour la dernière. Cet aspect peut induire une situation de proportionnalité mais il a surtout pour but d'inciter les élèves à travailler à partir de la proportionnalité des accroissements. La comparaison des images de 14°F et 50°F permet de conclure sans calculs au fait qu'il n'existe pas de coefficient multiplicateur entre les deux grandeurs puisque ce coefficient serait négatif pour l'un et positif pour l'autre.

Deux procédures fausses sont anticipées :

- la **linéarité multiplicative** : le fait de donner l'image de 50°F qui est 10°C incite le raisonnement qui consiste à dire que 100°C c'est 10 fois plus que 10°C donc 10 fois plus que 50°F font 500°F ;
- le **coefficient de proportionnalité** : un coefficient multiplicateur est facile à calculer à partir de la valeur 10°C qui multipliée par 5 donne 50°F . De même $100^{\circ}\text{C} \times 5 = 500^{\circ}\text{F}$.

Une autre difficulté est introduite dans cette question car usuellement on donne la valeur correspondant à une case du haut du tableau et on demande de calculer une case du bas du tableau (comme nous l'avons présenté ci-dessus). Certains élèves peuvent être troublés par le fait qu'on demande la correspondance de degrés Celsius en Fahrenheit et non l'inverse. Cette confusion peut amener l'élève à faire des opérations inverses :

- Chercher la conversion de 100°F en degrés Celsius en utilisant la propriété de linéarité multiplicative : 50°F correspond à 10°C , le double donne 100°F ce qui correspondrait alors au double de 10°C soit 20°C .

50	100
10	?

L'élève qui vérifie que la situation n'est pas proportionnelle peut ensuite s'appuyer sur **la proportionnalité des écarts** :

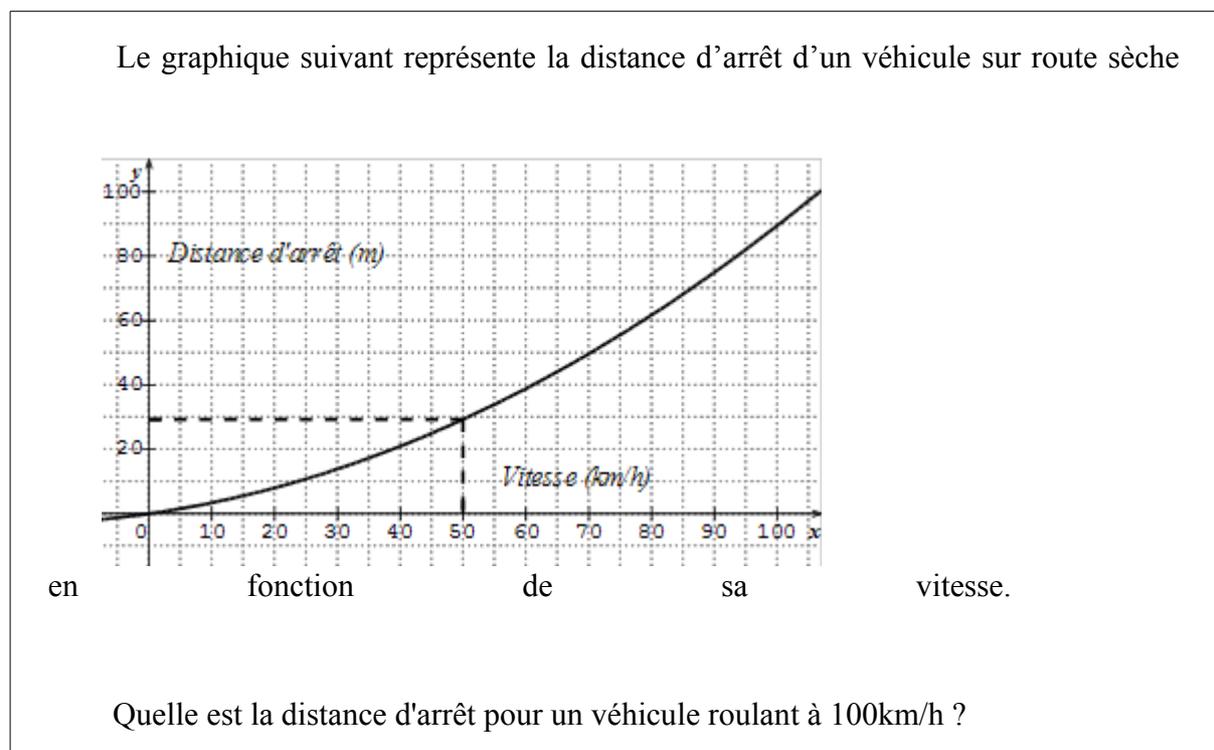
- Les degrés Celsius augmentent de 5°C lorsque les degrés Fahrenheit augmentent de 9°F , ils augmentent de 10°C lorsque les degrés Fahrenheit augmentent de 18°F . Proportionnellement, la température en $^{\circ}\text{F}$ augmentera de 180°F si la température en $^{\circ}\text{C}$ augmente de 100°C . Comme 0°C correspond à 32°F , si 0°C augmente de 100°C , 32°F augmente de 180°F , ce qui fait que 100°C correspondent à 212°F .

0	100
32	?

Présentation de l'exercice H

Dans l'item H, le graphique est associé à la covariation de deux grandeurs : la distance d'arrêt du véhicule en mètres et sa vitesse en km/h. Notre hypothèse est que le graphique n'amène pas les élèves à traiter la situation comme étant une situation de proportionnalité comme peut le faire le registre des tableaux.

Exercice H



Les connaissances nécessaires

Ici l'exercice est au niveau intra-objectal puisqu'il s'agit de lire l'information sur le graphique sans opérer sur l'objet. Les élèves doivent connaître les conventions liées à la représentation de graphiques de fonctions et savoir lire une graduation, les unités n'étant pas les mêmes sur chaque axe.

Les différentes manières de comprendre la question

La représentation graphique n'est pas une droite, ce qui permet de conclure que la situation n'est pas une situation de proportionnalité sans avoir besoin d'effectuer des calculs. Dans notre graphique, nous avons indiqué en pointillés la lecture de l'image de 50 alors qu'on demande l'image de 100. Si l'automatisme de la procédure de linéarité multiplicative fonctionne chez la plupart des élèves lorsque les données sont dans un tableau et d'autant plus si on travaille sur des doubles ou des moitiés, nous faisons l'hypothèse qu'il ne fonctionne plus lorsque les données sont dans le registre graphique. Les résultats de l'exercice H doivent donc être mis en relation avec ceux de la question B pour vérifier si les élèves vérifient effectivement qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité avant d'en utiliser les techniques de calcul.

Les réponses possibles

La seule procédure possible est par lecture graphique :

- Les élèves doivent repérer les grandeurs sur les axes et lire 100 sur l'axe des abscisses. Ensuite ils doivent chercher le point de la courbe d'abscisse 100 et lire son ordonnée pour conclure 90m.
- La procédure fautive utilisant la linéarité multiplicative consiste à lire l'image de 50 qui est 30 et de conclure que le double de 50 a pour image le double de 30 : 100 a pour image 60. Ce qui amène la réponse 60m.

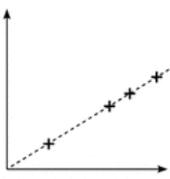
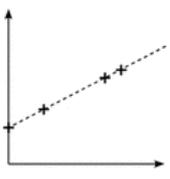
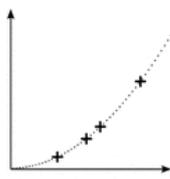
I.3.2 : La proportionnalité et les graphiques : exercices C et E

Présentation de l'exercice C

Dans l'exercice C, nous proposons aux élèves trois graphiques : une droite passant par l'origine, une droite ne passant pas par l'origine mais représentant malgré tout une croissance et une courbe passant par l'origine mais qui n'est pas une droite. Nous demandons de répondre par oui ou non à la question : le graphique représente-t-il une situation de proportionnalité ? Pour ne pas cumuler les difficultés, les graphiques sont représentés dans un repère sans que les unités soient précisées et ce repère fait référence à des grandeurs positives. Il s'agit en fait plus de « schémas » que de graphiques, ils illustrent des représentations mentales. La courbe est représentée en pointillé alors que quelques points sont repérés par des croix. Cette représentation rappelle les graphiques réalisés à partir de quelques données. Les pointillés peuvent être interprétés comme une courbe passant au mieux par les points et non comme le graphe d'une fonction.

Exercice C

Ces graphiques représentent-ils des situations de proportionnalité ?

		
oui – non	oui – non	oui – non
graphique 1)	graphique 2)	graphique 3)

Les connaissances nécessaires

Une situation de proportionnalité se caractérise par une droite passant par l'origine. Il n'est pas évident pour les élèves de comprendre que les deux critères doivent être vrais simultanément et beaucoup se contentent de vérifier l'un ou l'autre.

Les différentes manières de comprendre la question

Les grandeurs n'étant pas indiquées, les élèves ne peuvent pas s'appuyer sur le contexte pour répondre à la question. Par ailleurs, toutes les courbes représentent des fonctions monotones croissantes, ce critère ne peut donc pas intervenir dans le choix des réponses.

Les réponses possibles

Il s'agit de vérifier les automatismes : une droite est-elle systématiquement associée à une situation de proportionnalité ? De même pour une courbe qui passe par l'origine ? Il s'agit aussi de repérer les non-réponses associées aux deux derniers graphiques qui peuvent signifier une instabilité de cette connaissance. Cet exercice est au niveau inter-objectal, il mobilise uniquement une perception sans opérer sur l'objet mais demande une mise en relation de plusieurs données ou d'utiliser un classement des fonctions suivant deux critères. Nous avons trois types de réponses possibles :

- 1) oui ; 2) non et 3) non : correspond à la réponse attendue ;
- 1) oui, 2) oui et 3) non : correspond aux élèves qui associent une droite à une situation de proportionnalité ;
- 1) oui, 2) non et 3) oui : correspond aux élèves qui associent une courbe passant par l'origine à une situation de proportionnalité.

Présentation de l'exercice E

L'exercice E permet d'identifier le niveau de maîtrise des élèves dans la conversion entre registre graphique et registre des expressions algébriques.

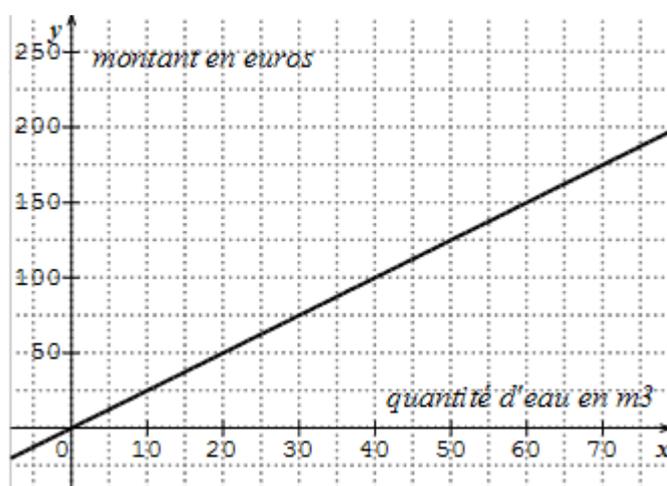
Les connaissances nécessaires

Cet exercice demande de savoir lire un graphique, de caractériser une situation de proportionnalité par l'alignement des points avec l'origine et de savoir calculer le coefficient de proportionnalité à partir du graphique par le quotient d'un nombre par son antécédent. En effet, il n'est pas possible de lire directement le coefficient de proportionnalité sur ce graphique. Il faut aussi savoir formaliser cette relation de proportionnalité par une expression algébrique, un programme de calcul ou en langage naturel.

Les différentes manières de comprendre la question

Pour ne pas induire le résultat, les mots « expression » ou « formule » n'ont pas été employés. Par contre le fait de demander « le prix à payer » peut induire une réponse sous forme numérique et non une expression. La lettre x dans le texte de l'exercice peut induire un traitement algébrique. Elle peut appeler une résolution d'équation et l'élève peut être amené à répondre par une équation ou une valeur chiffrée. Elle peut aussi amener l'utilisation d'une écriture symbolique du type y ou $f(x)$.

Exercice E



Ce graphique représente le montant en euros payé en fonction de la quantité d'eau consommée exprimée en m^3 . Pour x mètres cubes consommés, quel sera le prix à payer ?

Les réponses possibles

La procédure demande deux étapes de traitement. La première est l'identification d'une situation de proportionnalité à partir du graphique (la représentation est une droite passant par l'origine) et du contexte (prix au mètre cube). La seconde est l'identification du coefficient de proportionnalité par le quotient d'un prix par le nombre de m^3 correspondant. On peut par exemple repérer que $10m^3$ coûtent 25€ et conclure que $1m^3$ coûte 2,5€. Pour éviter les erreurs de lecture, on peut aussi prendre des valeurs indiquées sur les axes : $40m^3$ coûtent 100€, le coefficient de proportionnalité est donc de $\frac{100}{40}$.

La réponse attendue doit être de la forme $2,5x$ ou être donnée en langage naturel (par exemple « on multiplie le nombre de m^3 par 2,5. »). L'utilisation du x dans l'expression montre que l'élève sait que la lettre peut être utilisée pour désigner une variable et non seulement pour désigner une inconnue. L'exercice mobilise donc un traitement de type « inter » ou « trans » au niveau de l'analyse ou de la synthèse.

I.3.3 : L'utilisation du registre des expressions algébriques : exercice D

L'exercice D a pour but d'évaluer l'aisance des élèves avec les expressions algébriques et la manière dont ils vérifient la validité d'un résultat (conjecture ou contrôle par des essais). Cet exercice reprend une tâche que les élèves rencontrent très souvent en classe de troisième : traduire un programme de calcul par une expression algébrique. C'est par ce type d'exercices que la notion de fonction est régulièrement introduite. Elle apparaît comme un processus de calcul qui, à un nombre en entrée, associe un unique nombre en sortie. Il n'est pas évident pour les élèves qu'un même calcul puisse correspondre à différents processus. La

transformation des expressions algébriques est un outil pour démontrer l'équivalence de deux programmes de calculs. En particulier, il se peut qu'un processus complexe puisse être équivalent à une situation de proportionnalité et donc se résumer à une seule opération : la multiplication par un scalaire.

Exercice D

Voici un programme de calcul :

Étape 1 : Choisir un nombre.

Étape 2 : Lui ajouter 2.

Étape 3 : Multiplier cette somme par le nombre de départ.

Étape 4 : Lui retirer le carré du nombre de départ et annoncer le résultat obtenu.

Si on appelle x le nombre de départ, peux-tu écrire l'allure du résultat ?

Si on choisit le nombre 121 034, quel sera le résultat ?

Les connaissances nécessaires

L'exercice demande une bonne connaissance du vocabulaire, une bonne maîtrise de la structure des phrases, de la formulation des calculs avec le registre des expressions algébriques, des priorités de calcul et de la transformation des expressions algébriques. Les élèves peuvent utiliser leur calculatrice, ce qui demande une bonne gestion des calculs.

Les différentes manières de comprendre la question

L'utilisation de la lettre x dans l'énoncé induit une écriture algébrique du résultat pour la première question. Il s'agit bien ici de règles liées à un langage symbolique. On peut supposer que les deux premières étapes vont amener les élèves à écrire $x + 2$. L'étape suivante est plus délicate car il faut à la fois savoir ce que désigne « cette somme », utiliser une parenthèse pour écrire $(x + 2)$ et se souvenir que le nombre de départ est toujours noté x . On doit obtenir une expression de la forme $(x + 2) \times x$. L'étape 4 est encore plus complexe puisqu'elle commence par « lui », qui désigne le résultat de l'étape précédente et non seulement x . Ensuite le mot « carré » peut être symbolisé par un 2 en exposant ou par le produit du nombre par lui même. Il faut aussi repérer que le carré s'applique au nombre de départ, c'est-à-dire à ce qui est écrit après le mot « carré » alors que symboliquement l'exposant suit le nombre qui est au carré. Cette fois les parenthèses sont inutiles pour désigner le résultat de l'étape 3 puisque la multiplication est prioritaire sur la soustraction. On peut donc écrire $(x + 2) \times x - x^2$ ou $[(x + 2) \times x] - x^2$. Les élèves qui ont compris l'intérêt des expressions équivalentes chercheront sans doute à réduire l'écriture mais on peut craindre des erreurs si les règles ne sont pas maîtrisées. Si le détail du calcul ne figure pas sur le test, il sera

difficile d'apprécier la nature de l'erreur en cas de résultat faux. On pourra cependant repérer les élèves qui ne répondent pas par une expression algébrique, ceux qui donnent un résultat numérique et ont donc remplacé x par une valeur, ceux qui donnent l'expression non réduite, ceux qui donnent le résultat simplifié qui est $2x$. Les élèves qui testeront sur quelques valeurs pourront peut-être conjecturer ce résultat et donner une réponse du type « c'est le double ».

La simplification de l'expression obtenue est utile pour répondre à la question suivante car les valeurs ont été choisies pour rendre le calcul difficile à partir de l'algorithme (la taille des nombres dépasse la capacité de certaines calculatrices collèges, dès le premier calcul l'affichage passe en écriture scientifique, ce qui rend la lecture plus difficile). De plus les élèves qui ne sont pas habitués à manipuler des enchaînements d'opérations sur leur calculatrice peuvent obtenir un résultat erroné du fait des priorités de calcul. Cette simplification permet de prouver que le processus de calcul revient à calculer le double du nombre qui entre.

Quelles réponses possibles ?

Il existe une infinité de réponses possibles mais les plus attendues sont :

- l'expression littérale dans l'ordre du programme : $[(x + 2) \times x] - x^2$;
- une expression simplifiée : retrait des parenthèses, du symbole \times , développement de $(x + 2) \times x$, commutativité de l'addition, réduction ;
- une formulation en langage naturel.

Pour ce qui est du calcul, soit l'élève utilise le résultat qui précède et il calcule le double de 121 034 pour obtenir 242 068, soit il applique le processus. Le calcul est complexe et si l'élève utilise sa calculatrice, il peut faire différentes erreurs liées au fait que l'expression n'est pas canonique, qu'elle nécessite des parenthèses et que nous avons des grands nombres. L'élève risque d'obtenir une expression en écriture scientifique difficile à interpréter.

I.3.4 : Les fonctions, notations et vocabulaire : exercices F et G

Les exercices suivants ont pour objectif de mesurer le degré de familiarité des élèves avec les écritures liées aux fonctions. En particulier la notation $f(x)$, les mots « image » et « antécédent » qui posent problème car les élèves ont du mal à faire la différence entre « est l'image de » et « a pour image ». Notre hypothèse est que les élèves maîtrisent assez bien les notations et le vocabulaire lié aux fonctions. La difficulté est plutôt dans la conversion d'un registre à l'autre : comment symboliser la grandeur indépendante ? la grandeur dépendante ? Lorsque deux grandeurs sont proportionnelles, la relation est symétrique et le coefficient de proportionnalité est lié au sens de la relation fonctionnelle. Ainsi s'il existe un coefficient réel a non nul tel que pour tout x réel nous avons $f(x) = ax$ alors $x = \frac{1}{a} \times f(x)$. Le sens de la relation est souvent choisi par les élèves en fonction de la nature du coefficient (entier, fraction, décimal, inférieur à 1...) (René De Coteret, 1991).

Présentation exercice F

L'exercice propose un tableau de valeurs d'une fonction p , il s'agit de lire des images et des antécédents dans le tableau, puis de repérer des images « possibles » du nombre 5 qui ne figurent pas dans le tableau de valeurs. Nous cherchons ici à mettre en évidence les théorèmes en acte qui suivent :

- la fonction est implicitement continue sur l'intervalle $[-10 ; 10]$;
- la fonction est implicitement monotone sur l'intervalle $[2,5 ; 10]$.

Exercice F

Voici le tableau de quelques valeurs d'une fonction p :

x	-10	-7	-3	-1	0	2,5	6	10
$p(x)$	-5	-3	-1	0	1,5	8	-3	-6

- Déterminer l'image de -10.
- Déterminer $p(2,5)$.
- Déterminer le ou les antécédents de -3.
- Peut-on avoir :

e) $p(5) = 16$? oui – non – ne sais pas	f) $p(5) = 4$? oui – non – ne sais pas	g) $p(5) = 0$? oui – non – ne sais pas
---	--	--

Les connaissances nécessaires

Les élèves doivent connaître le vocabulaire (image, antécédent) et la notation $p(x)$ et il est nécessaire de savoir lire un tableau.

Les différentes manières de comprendre la question

Pour les questions e , f et g , les élèves doivent prendre des initiatives. La difficulté est que ces questions demandent des interprétations nuancées. Les images de 0 ; 2,5 ; 6 et 10 sont données et on demande si l'image de 5 peut être 16, 4 ou 0. Il s'agit bien d'une possibilité mais certains élèves peuvent chercher à donner une valeur dont ils sont certains, ce qui est impossible puisque nous ne disposons pas du programme de calcul, ni de la nature de la fonction. Un premier essai du test formulé uniquement sous forme de vrai/faux a montré que la question posait problème puisque certains élèves ne répondent pas mais on ne peut pas savoir s'ils ne savent pas répondre ou s'ils veulent exprimer le fait qu'on ne peut pas être certain. La formulation « Peut-on avoir $p(5) = 16$? » signale qu'il ne s'agit que d'un possible mais la question reste délicate pour les élèves qui ont plus l'habitude de répondre sous forme de vrai ou faux. La réponse proposée « je ne sais pas » était là pour faire la différence entre les élèves qui n'ont pas eu le temps de traiter la question et ceux qui effectivement ne savent pas y répondre. Parmi les réponses, il sera intéressant de voir quelles solutions sont choisies alors

que d'autres sont refusées. C'est le regard croisé sur ces trois réponses qui pourra donner des éléments d'interprétation.

Les réponses possibles

Pour l'image de -10 , la réponse est -5 mais certains élèves peuvent ne pas tenir compte du signe et donner l'image de 10 .

Pour l'image de $2,5$, la réponse est 8 , il n'y a guère d'erreurs possibles puisque $2,5$ n'apparaît qu'une fois dans le tableau.

Pour -3 , on trouve deux antécédents qui sont -7 et 6 mais il peut y avoir confusion avec l'image de -3 qui est -1 .

Pour l'image de 5 , la réponse attendue est oui pour les trois mais plusieurs réponses fausses peuvent être anticipées :

- L'élève se représente la situation comme étant proportionnelle, pour lui l'image de 5 est le double de l'image de $2,5$ et ne peut donc être que 16 . En tout cas ce ne peut pas être 0 . Il peut aussi penser que 5 est la moitié de 10 donc son image devrait être -3 donc aucune réponse n'est possible.
- L'élève se représente la fonction comme forcément croissante, ce qui est le cas le plus fréquent dans les situations rencontrées au collège. Dans ce cas 16 est possible car supérieur à 8 qui est l'image de $2,5$.
- L'élève étudie les variations et voit que la fonction semble décroissante sur $[2,5 ; 10]$, il peut alors proposer 0 ou 4 .
- L'élève pense à une proportionnalité des accroissements et comme 5 est le double de $2,5$, son image est la moitié de celle de $2,5$ puisque la fonction semble décroissante sur $[2,5 ; 10]$, il peut alors proposer uniquement 4 .
- L'élève repère que les images passent du positif au négatif et donc doivent passer par 0 , ce qui ressemble à une utilisation naïve du théorème des valeurs intermédiaires. Il peut alors proposer uniquement 0 .

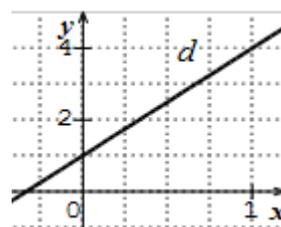
Présentation exercice G

Dans l'exercice G, il ne s'agit plus de grandeurs mais de nombres. On ne peut donc plus s'appuyer sur la cohérence des unités et la légende du graphique est abstraite. Il s'agit encore de conversions entre différents registres. L'objectif est de voir si l'aspect de la courbe appelle une forme d'expression algébrique.

Les connaissances nécessaires

Les élèves doivent savoir lire un graphique, lire une graduation, connaître le vocabulaire, savoir qu'une droite ne passant pas par l'origine et non parallèle à l'axe des ordonnées représente une fonction affine dont l'expression algébrique est de la forme $ax+b$ avec a et b deux coefficients non nuls. Il faut savoir que l'addition est commutative pour reconnaître l'équivalence des expressions $1+3x = 3x + 1 = ax+b$ avec $a = 3$ et $b = 1$.

Exercice G



La droite (d) représente une fonction.

- Quelle est l'image de 1 ?
- Quelle est l'image de 0 ?
- Quelle est la fonction représentée ?

$$f(x) = 3x$$

$$g(x) = 3x^2 + 1$$

$$h(x) = 1 + 3x$$

Les différentes manières de comprendre la question

Il est précisé que la droite représente une fonction, les élèves doivent en déduire que la fonction représentée est une fonction affine non linéaire. Son expression est donc de la forme $f(x) = ax + b$ (où a et b sont deux réels non nuls). L'image de 0 doit permettre d'identifier le coefficient b et l'image de 1 peut permettre de tester les expressions proposées. Notre idée est de voir si les élèves savent identifier l'allure de l'expression plus que de savoir la déterminer. Il s'agit de vérifier certains automatismes : la formule du type ax est-elle associée à une droite ? Est-ce le cas pour $ax+b$? Les élèves testent-ils des valeurs ?

Les réponses possibles

La lecture des images pose problème par le choix des unités. L'unité figure sur l'axe des abscisses et correspond à 4 carreaux alors que la graduation est de deux en deux sur l'axe des ordonnées où l'unité est de 1 carreau. Les élèves peuvent alors répondre 1 au lieu de 4 pour l'image de 1. De même, ils peuvent répondre 1 pour l'image de 0 s'ils lisent le nombre de carreaux ou 0,25 s'ils utilisent la même graduation que celle des abscisses.

Les élèves peuvent tester des valeurs pour identifier la fonction représentée. Dans ce cas, les fonctions g et h donnent le même résultat pour 0 et 1 qui sont les deux valeurs dont l'image est lisible facilement sur le graphique, on peut donc penser que si l'élève teste la fonction g sur ces valeurs, il choisira cette réponse et ne testera pas la fonction h .

I.4 : Analyse des résultats

Un premier échantillon de 99 tests a été complété par 803 tests effectués dans des collèges de l'académie de Nantes en mai 2013, 34 effectués par une stagiaire à l'entrée en seconde à Argenteuil (95) et 65 dans deux classes de seconde en septembre 2015. Pour ce qui est des 803 tests, les établissements ont été choisis dans les différents départements (Loire-Atlantique, Sarthe, Maine-et-Loire, Vendée) de sorte que cet échantillon soit le plus

représentatif possible, il intègre 12 tests passés par des élèves de 3^e prépa-pro en lycée professionnel. Les enseignants nous sont inconnus, ce qui permet d'avoir un regard plus objectif sur les productions. Pour les deux classes de seconde qui s'ajoutent au panel en 2015, il s'agit des classes dans lesquelles ont été faites les dernières expérimentations. La présentation des enseignants de ces deux classes sera faite dans la partie 3 chapitre IV.2.

Pour que l'échantillon soit le plus représentatif possible, nous nous sommes appuyée sur des données de l'INSEE, sur les informations données sur les sites e-lyco des établissements et sur les résultats du DNB¹². Nous avons choisi de n'étudier que les établissements publics et avons limité notre étude à un millier de tests, considérant que de nouveaux tests n'apporteraient pas de modifications notables aux résultats. Le profil de l'académie et celui de notre échantillon est donné dans le tableau 13.

Type d'établissement	Pourcentage dans l'académie de Nantes extrait de (Thaurel-Richard & Thomas, 2006)	Pourcentage dans notre échantillon
1/ Urbain favorisé	17,2 %	15,1 %
2/ Urbain défavorisé	9,6 %	11,4 %
3/ Petits collèges (moins de 400 élèves)	34,3 %	29,3 %
4/ Mixtes socialement défavorisés	11,7 %	16,7 %
5/ Mixtes socialement favorisés	27,2 %	27,5 %

Tableau 13 : Répartition des tests recueillis selon les types d'établissements

Notre échantillon comporte un peu plus d'établissements défavorisés que l'académie mais il est à noter que les données de l'INSEE ne sont pas actualisées et que le profil de l'académie compte aujourd'hui moins de petits établissements. La liste des établissements ayant passé le test et retenus dans notre échantillon est donnée en annexe 12.

Les tests ont été saisis un par un et les données enregistrées dans un tableur. Les tests qui présentaient des réponses caractéristiques ou remarquables ont été scannés et des extraits vont illustrer notre analyse. Chaque élève est repéré par un numéro d'anonymat.

Nous avons organisé notre analyse en deux temps. Le premier présente les résultats exercice par exercice. Ces résultats sont présentés dans un tableau. Dans la première colonne est indiqué le numéro de l'exercice, dans la seconde les résultats en pourcentages, et dans la troisième une analyse des réponses. Tous les calculs de pourcentages ont été effectués avec des tableaux dynamiques croisés à partir de la feuille de résultats que vous trouverez en annexe 13. Les tableaux sont en annexe 14. Le second temps met en relation les résultats des

¹²<http://www.france-examen.com/brevet/palmares-colleges/nantes/loire-atlantique-44/> consulté le 28/05/2016

différents exercices par rapport aux hypothèses de travail présentées précédemment. Cette analyse est organisée autour de nos hypothèses initiales et est illustrée par des exemples des réponses collectées (voir annexe 15). Les procédures envisagées pour le traitement des réponses au test servent à catégoriser les problèmes que rencontrent les élèves dans l'apprentissage de la notion de fonction affine.

I.4.1 : Analyse des résultats exercice par exercice

Item	Résultats	Analyse
A	87,98 % de bonnes réponses 4,18 % de non-réponses 7,83 % de réponses fausses	<p>La majorité des élèves utilisent les propriétés de linéarité pour répondre à la question et trouvent effectivement 8,75€.</p> <p>Les erreurs sont principalement des erreurs de calcul.</p> <p>A noter qu'un peu plus de 4 % des élèves ne répondent pas à la question alors que certains répondent aux items suivants.</p>
B	<p>Conversion longueurs : 82,29 % de bonnes réponses 12,6 % ne répondent pas 5,1 % de réponses fausses</p> <p>Conversions températures : 4,7 % de bonnes réponses 8,87 % par produit en croix 40,92 % répondent 500°F 13,67 % donnent une autre réponse 31,83 % ne répondent pas</p>	<p>La majorité des élèves utilise les techniques de traitement des tableaux de proportionnalité. Pour la conversion des unités de longueurs, l'erreur principale est l'application du coefficient de proportionnalité inverse, viennent ensuite des erreurs de calcul, des confusions entre la multiplication et l'addition dans les opérations.</p> <p>Pour ce qui est de la conversion entre degrés Celsius et degrés Fahrenheit, 4,7 % d'élèves trouvent la bonne réponse mais 31,5 % d'élèves ne répondent pas et parmi eux certains indiquent clairement qu'il n'est pas possible de répondre car la situation n'est pas de proportionnalité (ce cas de non-réponses n'a pas été comptabilisé sur l'ensemble des tests, nous ne pouvons donc pas donner un pourcentage mais il reste marginal, il alerte cependant sur le motif d'absence de réponse à cette question).</p> <p>Plus de 49 % utilisent la proportionnalité dont 9 % utilisent le produit en croix. Sinon toutes les propriétés de linéarité apparaissent même si la plus fréquente est l'utilisation de la propriété multiplicative.</p> <p>Parmi ceux qui donnent une autre réponse, certains ont bien repéré la covariation, d'autres font une erreur dans le traitement d'une situation de proportionnalité. Par exemple, certains font l'erreur de considérer 100°F au lieu de 100°C. Cette erreur est très certainement liée à une habitude qui est de chercher systématiquement une image et non un antécédent, ou elle peut être induite par la procédure utilisée pour les longueurs.</p>

C	<p>1,87 % ne répondent pas</p> <p>96,79 % répondent oui pour le graphique 1)</p> <p>23,94 % répondent oui pour les graphiques 1) et 2).</p> <p>11,3 % répondent oui pour les graphiques 1) et 3).</p>	<p>Très peu d'élèves ne renseignent pas cet item qui ne demande pas d'opérer sur les objets.</p> <p>Une très grande majorité d'élèves repèrent bien la droite passant par l'origine comme caractérisant une situation de proportionnalité. Ce résultat doit cependant être nuancé au regard des autres réponses. En effet, uniquement 58,34 % répondent oui pour le graphique 1) et non pour les deux autres.</p> <p>On peut estimer que 24 % pensent qu'une droite quelle qu'elle soit, caractérise une proportionnalité, et que 11,3 % pense que c'est le fait que la courbe passe par l'origine qui caractérise une situation de proportionnalité.</p> <p>Seulement 58,34 % tiennent bien compte des deux caractéristiques et ont donc un traitement inter-objet.</p>
D	<p>24,92 % répondent $2x$</p> <p>24,71 % répondent $x(x+2)-x^2$</p> <p>13,76 % ne répondent pas</p> <p>5,53 % répondent $2x+2x-x^2$</p> <p>4,48 % répondent $x+2x-x^2$</p> <p>2,5 % répondent par un calcul sur un exemple</p> <p>1,25 % répondent x, même chose pour x^2.</p> <p>42,8 % trouvent 242 068</p> <p>19,04 % ne répondent pas</p> <p>38,19 % donnent un résultat erroné</p>	<p>Près de 50 % des élèves donnent une expression algébrique correcte même s'ils ne sont que 25 % à réduire l'expression. Il faut noter le nombre important de réponses différentes puisque nous avons 124 expressions proposées.</p> <p>Une erreur relativement fréquente (3,44 % des réponses) consiste à remplacer « le carré du nombre de départ » par « la racine carrée du nombre de départ ».</p> <p>Les autres réponses mériteraient une analyse plus spécifique mais elles relèvent d'erreurs sur le vocabulaire, les priorités, l'utilisation des parenthèses, sur la gestion du signe de la multiplication ou de division (: ou /), sur les simplifications ($x^2 - x = x$ par exemple), sur le mélange entre expression algébrique et résultats de calculs antérieurs etc.</p> <p>Le résultat pour 121 034 est trouvé par 43 % des élèves, 38 % donnent une réponse erronée et 19 % ne répondent pas à la question. Les élèves peuvent très bien trouver à la question précédente que le résultat est le double du nombre de départ et cependant se tromper dans le calcul ou ne pas répondre (7%). Ce qui prouve qu'ils ne donnent pas de sens à la réponse pour pouvoir la rendre opératoire. Inversement 9 % des élèves peuvent ne pas avoir trouvé l'expression algébrique et trouver cependant le résultat. L'utilisation de la calculatrice peut les avoir aidés mais cela signifie qu'ils n'ont pas utilisé leur réponse pour valider ou les aider à modifier la réponse précédente.</p>

E	<p>38,41 % de non-réponses 25,29 % répondent $2,5x$ 6,19 % répondent 200€. 7,35 % répondent $y, f(x)$ ou des expressions voisines 6,93 % donnent une expression linéaire avec un coefficient erroné.</p>	<p>Certains élèves écrivent sur le test qu'ils ne comprennent pas la question. L'ambiguïté vient de la demande d'un prix à payer qui ne pourra pas s'exprimer sous la forme d'un nombre mais d'une expression algébrique. Si la question avait été posée comme suit : « comment s'exprime le prix à payer ? », le mot « exprime » aurait sans doute induit une écriture algébrique alors qu'ici le mot « combien » induit une réponse sous forme d'un nombre. Ce qui peut expliquer que 9,5 % des élèves répondent par des valeurs numériques, leur réponse est souvent rédigée sous la forme « pour..., il faut payer... »</p> <p>1 % font apparaître la bonne covariation. 3,25 % répondent en justifiant l'existence d'une relation fonctionnelle entre les grandeurs. 6,9 % donnent un coefficient erroné (par exemple $50x$) 1,36 % donnent une expression affine (par exemple $x + 25$) On notera que 11 % des élèves sont capables de répondre correctement $2x$ à l'item D et $2,5x$ à l'item E.</p>
F	<p>78,45 % répondent -5 13,78 % ne répondent pas.</p> <p>61,31 % trouvent $p(2,5)$ 29,67 % ne répondent pas</p> <p>62,19 % trouvent les deux antécédents de -3 4,17 % n'en trouvent qu'un 15,1 % font une erreur 18,54 % ne répondent pas</p>	<p>A la question « déterminer l'image de -10 » l'élève 447 lit cette image sur le graphique de l'item E au lieu de le lire dans le tableau. Ce qui n'empêche pas l'élève de répondre en utilisant le tableau à la question suivante, cela atteste que pour lui le graphique du E est sans doute la représentation graphique correspondant au tableau du F. Il semble que le fait de nommer p la fonction de l'item F appelle les élèves à interpréter cette fonction comme étant le « prix » défini en E. En effet, très souvent la fonction dans un contexte de grandeurs, est nommée par une lettre rappelant la nature de la grandeur dépendante. Au E, le prix varie en fonction de la consommation, d'où l'idée que ce prix peut être désigné par une fonction appelée p.</p> <p>Des erreurs sont aussi liées à la non prise en compte du signe, la réponse est alors que l'image de -10 est -6 (qui est en fait l'image de 10).</p> <p>Des confusions apparaissent entre image et antécédents mais la plus grosse difficulté est liée à l'écriture $p(2,5)$ puisque près de 30% ne répondent pas. Parmi eux on trouve des essais de calcul, la notation p semble induire l'utilisation d'une formule.</p> <p>Certains ne donnent qu'un antécédent et parmi ceux qui font une erreur, il arrive souvent que l'image de -3 soit donnée en plus des antécédents.</p>

	<p>Image de 5 19,31 % ne répondent pas. 12,98 % ne savent pas pour aucune valeur. 7,58 % optent pour 16 comme unique solution. 6,23 % pensent qu'aucun ne convient. 1,77 % pensent que les trois sont possibles.</p>	<p>7,58 % pensent que 16 est la seule solution possible. On peut estimer que cette réponse est induite par le fait que 8 est l'image de 2,5. Ces élèves ne prennent donc pas en compte les autres données et appliquent une propriété de linéarité multiplicative : 5 est le double de 2,5 donc son image est le double de 8. Ils sont environ 5 % à choisir uniquement 0 ce qui peut être induit par le fait qu'entre 2,5 et 6 la fonction change de signe. 6,75 % choisissent uniquement 4, induit par le fait que 2,5 double pour donner 5 et son image 8 diminuerait de moitié dans l'idée que la fonction serait décroissante sur l'intervalle [2,5 ; 6]. Lorsqu'on croise les réponses, chacun des résultats a sensiblement la même chance d'être choisi comme une possibilité (20,5 % pour 0 ; 20,25 % pour 4 et 18,5 % pour 16) ou d'être rejeté (5 % pour 4 ; 6,75 % pour 0 et 7,6 % pour 16). 19,31 % des élèves pensent qu'une seule valeur est possible.</p>
G	<p>Image de 1 : 68,6 % répondent 4. 6,53 % répondent 0. 10,78 % donnent une autre réponse 14,09 % ne répondent pas.</p> <p>Image de 0 : 68,2 % répondent 1. 4 % répondent 0. 2,28 % répondent – 1. 10,38 % donnent une autre réponse erronée. 15,06 % ne répondent pas.</p>	<p>Certains élèves mesurent avec leur règle au lieu d'utiliser les unités indiquées et proposent 1,9 pour l'image de 1 ou se trompent d'unité et lisent 2, ce qui explique le nombre de réponses erronées. Cette erreur de lecture est liée au fait que le repère n'est pas orthonormé et que l'unité sur les ordonnées est le quart de celle des abscisses.</p> <p>Beaucoup de confusions dans la lecture de l'image de 0, les élèves donnent l'antécédent de 0 en lisant l'abscisse du point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses (la lecture n'étant pas immédiate, ils lisent – 0,3 ou encore – 1,2 en mesurant à la règle).</p> <p>4 % des élèves ont répondu que l'image de 0 était 0, cette réponse peut-être une réponse automatique liée à l'étude des fonctions linéaires pour lesquelles l'image de 0 est toujours 0.</p> <p>La réponse – 1 comme image de 1 correspond à ces élèves qui lisent 1 sur l'axe des ordonnées comme intersection de la droite avec cet axe et lisent ensuite l'intersection de la droite avec l'axe des abscisses. Cette erreur est souvent induite par un travail automatique sur les fonctions affines qui amène à lire l'ordonnée à l'origine. Par extension les élèves cherchent les intersections avec les deux axes.</p>

Fonction :

53,37 % reconnaissent la fonction h .

11,73 % reconnaissent la fonction g .

9,35 % reconnaissent la fonction f .

24,30 % ne répondent pas.

1,14 % cochent les fonctions g et h .

Plus de la moitié des élèves identifient la bonne expression algébrique.

Parmi eux seulement 63,6 % ont bien caractérisé la proportionnalité sur les graphiques de l'item B et 24,32 % pensent qu'une droite caractérise une situation de proportionnalité.

Parmi ceux qui répondent la fonction g , 61 % avaient correctement répondu à l'item B, 12,4 % avaient identifié le passage par l'origine comme caractéristique de la proportionnalité.

Parmi ceux qui ont reconnu la fonction f , 47 % avaient correctement répondu à l'item B.

Il semble donc que la reconnaissance d'une situation de proportionnalité dans le registre graphique n'influe pas sur la conversion du registre graphique au registre des expressions algébriques.

Les élèves peuvent très bien savoir qu'une droite ne passant pas par l'origine ne représente pas une situation de proportionnalité (réponse C correcte) et pourtant cocher f à cet item. Preuve que le lien entre proportionnalité et expression algébrique de la fonction linéaire n'est pas automatisé.

A l'inverse, des élèves peuvent ne pas savoir lire les images de 1 et 0 et pourtant entourer la fonction h . On peut supposer qu'ils ont automatisé le fait qu'une droite ne passant pas par l'origine est une fonction affine non linéaire et qu'ils savent reconnaître l'allure de son expression algébrique.

L'élève 470 coche deux fonctions g et h . Un graphique peut effectivement être la représentation de deux fonctions définies par leur expression algébrique mais à la condition que ces expressions soient équivalentes sur le même intervalle de définition, ce qui n'est pas le cas ici.

L'élève 683 entoure la fonction h mais écrit à côté que $h(x) = 1 + 3x = 4x$. L'expression revenant alors à celle d'une fonction linéaire.

H	<p>12,64 % ne répondent pas. 80,83% répondent 90m.</p> <p>0,83 % répondent 60m.</p> <p>5,70 % donnent une autre réponse.</p>	<p>La grande majorité des élèves savent trouver l'information. Le pourcentage important de non-réponses correspond au fait qu'il s'agit de la dernière question et que le temps n'a pas permis à tous les élèves d'aborder cette question. En particulier certains élèves n'ont pas pensé à tourner la feuille. 2,59 % ne répondent à aucun item à partir de F, 5 % à partir de G.</p> <p>Moins de 1 % seulement se laisse induire en erreur par l'indice de lecture en 50 et font le double de l'image de 50 pour trouver 60m.</p> <p>Comme pour l'item E, certains élèves donnent comme réponse 100m qui correspondrait à l'ordonnée du dernier point de la courbe visible et dont les élèves peuvent penser que l'abscisse est x. Si la lettre x désigne systématiquement l'inconnu, on peut penser que ces élèves repèrent le x écrit à côté de l'axe comme l'indice de l'abscisse à considérer. D'autres confondent ordonnée et abscisse et lisent 100 sur l'axe des ordonnées, ce qui les amène à répondre par l'abscisse du point d'ordonnée 100 qui est environ 150.</p>
---	--	---

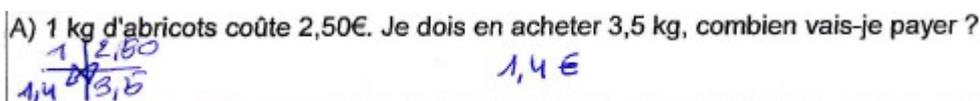
Tableau 14 : traitement statistique des résultats du test

I.4.2 : Analyse par thèmes

I.4.2.a : Proportionnalité et grandeurs

Le test confirme que les élèves maîtrisent la proportionnalité dans le cas d'un retour à l'unité sur des grandeurs mesurées courantes puisque 88% des élèves répondent correctement à l'item A. Les erreurs sont principalement des erreurs de calculs du fait qu'il s'agit de décimaux et que les élèves n'ont pas tous accès à une calculatrice. On peut cependant voir quelques erreurs comme celle de l'élève 684 qui applique le produit en croix mais fait une erreur dans l'organisation de son tableau.

A) 1 kg d'abricots coûte 2,50€. Je dois en acheter 3,5 kg, combien vais-je payer ?



Extrait 2: production élève 684

Plus qu'un travail sur les grandeurs, il s'agit d'un travail sur les tableaux de proportionnalité (Hersant, 2005). Il ne peut pas contrôler son travail à partir des unités puisqu'il ne les fait plus figurer. Cette procédure qui est enseignée comme une technique pour opérer sur des nombres abstraits peut cependant être plus opérationnelle sur les grandeurs si on s'autorise à écrire les unités à l'intérieur du tableau (Levain, 1994).

De même dans le cas de la conversion des pieds en mètres, le test est réussi par 82% des élèves. Les élèves utilisent différentes procédures et les propriétés de linéarité sont correctement mises en œuvre. Ils font cependant des erreurs de calculs qui ne permettent pas

d'obtenir un résultat satisfaisant. Une difficulté est liée au calcul du coefficient de proportionnalité. Dans le cas des mesures de longueurs de notre test, ce coefficient est inférieur à 1, ce qui amène les élèves à préférer calculer le quotient $\frac{5}{1,524}$ plutôt que son inverse (Levain, 1994). Ce n'était pas le cas pour l'item A, ce qui peut expliquer l'écart entre la réussite à l'item A et celle au B.

La conversion des degrés Fahrenheit en degrés Celsius n'a été réussie que par 4,7% des élèves, 49% traitent la situation comme une situation de proportionnalité. Parmi eux, certains trouvent 500°F en partant du fait que 50°F = 10°C et en appliquant la linéarité multiplicative, mais nous trouvons aussi des élèves qui utilisent cette procédure et qui font une erreur de calcul dans la multiplication par 100, ce qui les amène à répondre 5 000°F. Parmi les autres réponses fausses, les élèves utilisent majoritairement la proportionnalité mais ils passent par le produit en croix. Beaucoup parmi eux utilisent la dernière colonne du tableau, ce qui les amène à calculer $59 \times 100:15$. Cette procédure se caractérise par le résultat de 393,3°F.

L'élève 438 écrit : « sa fait 3200°F si 0°C = 32 alors $\times 100 = 3200$. » Ici la propriété de linéarité multiplicative est utilisée mais avec une erreur qui consiste à penser que 100 est 100 fois plus grand que 0. La confusion entre addition et multiplication est une erreur récurrente : $0 + 100 = 100$ est confondu avec $0 \times 100 = 0$.

Un élève utilise la linéarité additive et trouve 404°F :

$$\begin{array}{l} \cancel{59} \quad 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 10 = 100 \\ 6 \times 59 = 354 + 50 = \underline{404 \text{ (F)}} \end{array}$$

Extrait 3: production élève 656

Cependant certains élèves semblent avoir mis en œuvre des procédures et les avoir invalidées comme nous pouvons le constater chez l'élève 501 qui pose le calcul et le raye.

Convertir 20 pieds (ft) en mètres :

$$\begin{array}{l} \cancel{59} \quad 20 \quad \cancel{15} \quad 10 \quad 20 \times 4,572 : 15 = \underline{6,096 \text{ m}} \\ \cancel{15} \quad \cancel{10} \quad 4,572 \end{array}$$

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit (°F) :

$$\begin{array}{l} \cancel{59} \quad \cancel{100} \quad \cancel{15} \\ \cancel{15} \quad \cancel{100} \quad \cancel{15} = \end{array}$$

Extrait 4: production élève 501

D'autres signalent explicitement qu'il ne s'agit pas d'un tableau de proportionnalité et qu'ils n'ont donc aucun moyen de les traiter, comme l'élève 270 qui écrit « Je ne peux pas, c'est pas proportionnel. », l'élève 131 qui répond : « On ne peut pas, ce n'est pas un tableau de conversion. » ou l'élève 500 pour lequel « On ne peut pas, les valeurs du tableau ne sont pas proportionnelles. » :

On ne peut pas, les valeurs du tableau ne sont pas proportionnelles

Extrait 5: production élève 500

ou encore l'élève 538 qui propose une justification :

*Ce n'est pas une situation de proportionnalité donc
on ne peut pas trouver le résultat. $\frac{32}{8} \neq \frac{50}{10}$*

Extrait 6: production élève 538

Ainsi les non-réponses à cette question, alors que les élèves ont correctement répondu aux précédentes questions, peuvent indiquer une prise de conscience de non-proportionnalité. Les élèves sont près de 32% à ne pas avoir répondu mais il est impossible de savoir combien ont effectivement identifié la non-proportionnalité car tous ne justifient pas leur réponse. Seulement 4,4 % trouvent les bons résultats aux items A, B et C. 99,9 % des élèves qui ont trouvé 212°F ont trouvé les réponses précédentes. 15,4 % des élèves ayant trouvé l'item A et la conversion des pieds en mètres ne répondent pas à la question de la conversion des degrés Celsius en degrés Fahrenheit. On peut faire l'hypothèse que ces élèves identifient que la situation ne relève pas de la proportionnalité.

Quelques réponses utilisent des calculs sans explicitation des procédures, comme l'élève 658 qui semble repérer que 100°C correspond à 10 fois 10°C mais le calcul ne faisant pas apparaître les unités, il écrit $10 \times 10 = 100$ ce qui ne donne plus aucun repère de sens. Si bien que 10°C correspondant à 50°F, l'élève opère de la même manière en écrivant non pas 50×10 mais $50 \times 50 = 2500$:

$$\begin{array}{l} 10 \times 10 = 100 \\ 50 \times 50 = 2500 \end{array}$$

Extrait 7: production élève 658

Plus étonnant encore l'élève 660 écrit un calcul sur les nombres en barrant l'unité. Il néglige le signe et écrit que $10 \times (-10) = 100$ puis que $14 \times 50 = 700$ comme s'il avait pris les deux colonnes du tableau et avait multiplié les deux nombres sur chaque ligne. On peut imaginer qu'il s'agit d'une mauvaise mise en œuvre du produit en croix ou d'une extension au produit de la règle de linéarité additive.

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit (°F) : $100 \times 1,8 = 180$
 $180 + 32 = 212$ 100°C converti en degrés (°F) est égal à
 212°F.

Extrait 8: production élève 660

Certains n'écrivent rien sur le test mais d'autres font apparaître les accroissements et montrent qu'ils ont repéré une caractéristique qui permet d'affirmer que la situation n'est pas proportionnelle. Parmi les élèves qui ont trouvé 212°F ou qui auraient pu obtenir le résultat s'ils n'avaient pas fait une erreur de calcul ou de copie, nous avons souvent quelques traces des procédures. Les élèves montrent les variations sous différentes formes comme par exemple celles qui vont suivre.

L'élève 119 schématise la régularité des variations par des flèches et il indique la concomitance des variations par une écriture symbolique. Il avance de 10°C en 10°C jusqu'à 100°C. Il fait malheureusement une erreur de calcul en ajoutant successivement 18°F et obtient un résultat erroné.

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit (°F) :

$50 - 32 = 18$ °F
 $10 - 0 = 10$ °C
 $\sim = +18$
 $\cup = +10$

$50 \rightarrow 68 \rightarrow 86 \rightarrow 104 \rightarrow 122 \rightarrow 140 \rightarrow 158 \rightarrow 176 \rightarrow 194$
 $20 \rightarrow 30 \rightarrow 40 \rightarrow 50 \rightarrow 60 \rightarrow 70 \rightarrow 80 \rightarrow 90 \rightarrow 100$
 $100^\circ\text{C} = 204^\circ\text{F}$

Extrait 9: production élève 119

L'élève 187 formalise les variations par ce que nous appellerons des « flèches opératrices » qui indiquent qu'une augmentation de 18 de la grandeur indépendante correspond à une augmentation de 10 de la grandeur dépendante. Il montre la proportionnalité des écarts mais ne va pas au bout du raisonnement car il pose 100°F au lieu de 100°C et ne peut donc pas trouver mentalement un coefficient car l'augmentation de 41 n'est pas un multiple de 9.

B) Les tableaux suivants concernent des conversions de mesures de grandeurs. Le degré Fahrenheit (°F) est une unité de température et le pied (ft) est une unité de mesure de longueur utilisées au Royaume-Uni.

Température en °F	14	32	50	59	100
Température en °C	-10	0	10	15	

Handwritten annotations: +18, +10, +18, +10, +18, +10, +41

Extrait 10: production élève 187

L'élève 198 procède de la même manière mais pour 9 et 5 et formule les variations concomitantes en langage naturel : « quand j'ajoute 9 degré F, j'ajoute 5°C. » :

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit (°F) :
 quand j'ajoute 9 degré F, j'ajoute 5°C.
 $10 \times 5 \times 18 = 100^\circ\text{C}$
 $50^\circ\text{F} + 9^\circ\text{F} \times 18 = 212^\circ\text{F}$

Extrait 11: production élève 198

L'élève 229 cherche à exprimer cette caractéristique en écrivant : « C'est un tableau à avancement régulier. » :

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit (°F) :
 C'est un tableau à avancement régulier donc

+162	
50	212
10	100
+90	

100°C fait 212°F.

Extrait 12: production élève 229

Il schématise la concomitance des variations. Il opère sur des nombres et non plus sur des grandeurs mesurées et met en place une technique qui s'inspire de celle du produit en croix sous la forme de ce qu'il appelle « un tableau d'avancement régulier » (voir tableau 15).

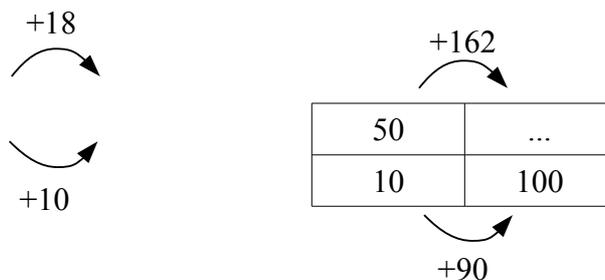


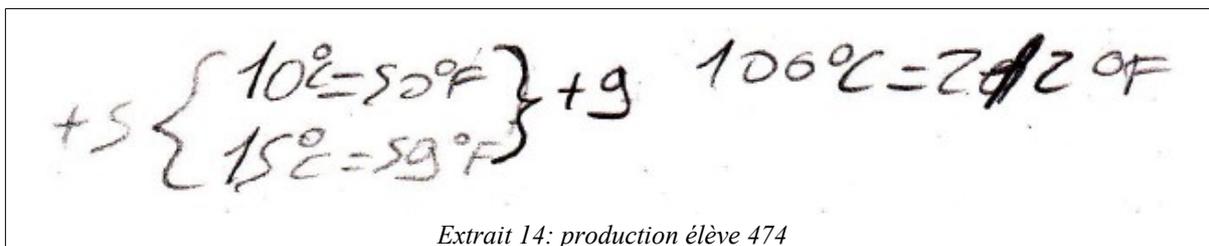
Tableau 15 : technique du « tableau d'avancement régulier »

L'élève 218 formule cette même concomitance entre les accroissements des deux grandeurs dans un autre registre en écrivant « 5 degrés Celsius = 9 degré Fahrenheit » :

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit (°F) :
 5 degrés Celsius = 9 degré Fahrenheit
 $5 \times 20 = 9 \times 20$
 $100^\circ\text{C} = 180^\circ\text{F}$

Extrait 13: production élève 218

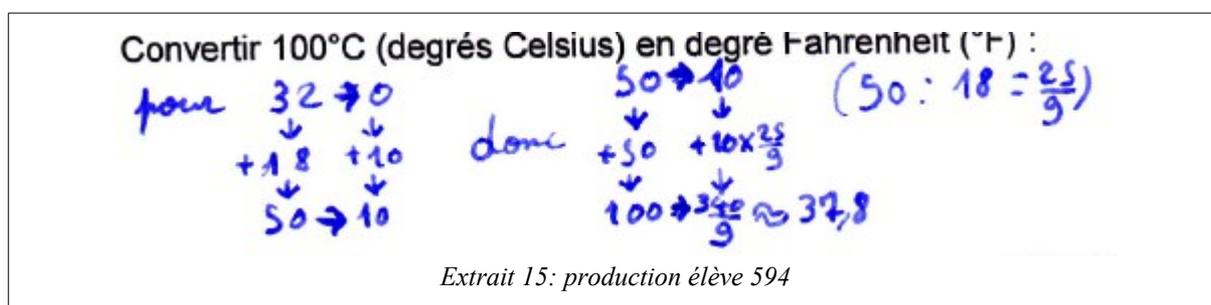
L'élève 474 utilise une notation originale :



Extrait 14: production élève 474

Ici les variations sont montrées sur un exemple avec l'utilisation de parenthèses pour montrer le processus sur chaque variable.

L'élève 594 montre une organisation qui fait apparaître le processus et les variations par un jeu de flèches et d'opérateurs.



Extrait 15: production élève 594

Le premier schéma indique qu'une température de 32°F correspond à 0°C et que son augmentation de 18°F correspond à une augmentation de 10°C, si bien que 50°F correspondent bien à 10°C. Le second schéma part de 50°F et montre qu'il faut une augmentation de 50°F pour arriver à 100°F. La comparaison entre les deux schémas amène l'élève à considérer les augmentations comme proportionnelles. Il calcule que 50 est égal à $\frac{25}{9}$ ème de 18 et il cherche l'augmentation correspondant à $\frac{25}{9}$ ème de 10. Il ajoute $\frac{250}{9}$ à 10 et trouve environ 37,8. Son raisonnement est correct mais l'élève détermine ici la mesure en °C de 100°F et non l'inverse. Ainsi le schéma attendu serait le suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 50 & \rightarrow & 10 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 +18 \times 9 & +90 & 90 : 10 = 9 \\
 ? & \rightarrow & 100
 \end{array}$$

Encore une fois le fait d'opérer sur des nombres et non sur des mesures ne permet pas de contrôler le travail ni de repérer l'erreur sur le sens de la relation considérée.

D'autres montrent les calculs comme ici l'élève 608 :

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit (°F) :

Si $14^{\circ}\text{F} = -10^{\circ}\text{C}$, $32^{\circ}\text{F} = -10 + 10^{\circ}\text{C}$, $50^{\circ}\text{F} = -10 + 20^{\circ}\text{C}$ et $59^{\circ}\text{F} = -10 + 25^{\circ}\text{C}$
 cela veut dire que on rajoute 10°C lorsque on rajoute 18°F , alors:
 $100^{\circ}\text{C} = 212^{\circ}\text{F}$,

Extrait 16: production élève 608

Une phrase décrit la covariation en reprenant les unités. L'utilisation des mesures permet de caractériser le processus sur chacune des variables. Nous retrouvons cette même caractéristique chez l'élève 495 lorsqu'il écrit « On remarque que lorsqu'on rajoute 5°C , on ajoute 9°F . » Cette formulation demande une relative aisance avec l'expression et l'écrit :

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit (°F) :

On remarque que lorsque l'on rajoute 5°C , on ajoute 9°F .
 $-10 + 2 \times 5 = 0$ $10 + 5 = 15$ $100 - 15 = 85$ $17 \times 9 = 153$
 ds: $14 + 2 \times 9 = 32$ $50 + 9 = 59$ $85 : 5 = 17$ $153 + 59 = 212^{\circ}\text{F}$.

Extrait 17: production élève 495

Si les exemples précédents n'explicitent pas comment la valeur 212 a été trouvée, l'élève 495 montre clairement sa procédure. Si 15°C correspondent à 59°F et si chaque augmentation de 5°C correspond à une augmentation de 9°F , il cherche combien d'augmentation de 5°C sont nécessaires pour passer de 15°C à 100°C . Il trouve une différence de 85°C soit 17 augmentations de 5°C . Il calcule ensuite 17 augmentations de 9°F et trouve 153°F . La température de 59°F doit donc augmenter de 153°F , ce qui lui permet d'obtenir 212°F . Nous remarquons qu'en dehors de la phrase d'explicitation, la gestion des calculs se fait ensuite dans l'ensemble des nombres réels et non sur les mesures, les unités ne figurent pas.

L'élève 459 met dans un tableau la progression arithmétique de raison 9 sur la première ligne à partir de 68 et celle de raison 5 sur la seconde ligne à partir de 20.

68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	185	194	203	212	214
20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	

Extrait 18: production élève 459

Il s'arrête lorsqu'il arrive au terme de valeur 100 sur la seconde ligne qui correspond pour lui à 214. En fait il fait une erreur de 2 au niveau du nombre 196, ce qui se répercute dans la suite des calculs. La procédure est donc valide et permet effectivement de trouver le résultat. Nous pouvons malgré tout nous interroger sur les valeurs de départ. 68 et 20 ne

figurent pas dans les données, ce qui signifie que l'élève a déjà mis en évidence le double processus et l'a appliqué aux valeurs 50 et 10 avant de formaliser la suite de son raisonnement avec un tableau. Ce tableau est un tableau de nombres, les unités ne sont rappelées que dans la conclusion portée à droite du tableau.

L'élève 233 met en évidence le processus de calcul sous forme d'opérateur au bout du tableau de valeurs avec les deux opérations permettant de passer de la seconde ligne à la première. Il utilise ensuite ces opérateurs pour le nombre 100 en mettant les unités dans le calcul mais sans les mettre dans le résultat. Nous remarquons que cet élève procède aussi avec un opérateur pour l'item A, ce qui est relativement rare.

A) 1 kg d'abricots coûte 2,50€. Je dois en acheter 3,5 kg, combien vais-je payer ?

1 kg $\times 2,5 \rightarrow 2,5 \text{€}$
 3,5 kg $\times 2,5 \rightarrow 8,75$

Température en °F	14	32	50	59
Température en °C	-10	0	10	15

$(x \times 1,8) + 32$

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit (°F) :

$(100^\circ\text{C} \times 1,8) + 32 = 212$

Extrait 19: production élève 233

L'élève 248 montre qu'il a d'abord considéré qu'il s'agissait d'une situation de proportionnalité puis abandonné l'idée pour écrire « fonction affine » et donner le processus de calcul sous forme d'une expression algébrique « $x \times 1,8 + 32$ », x désignant la mesure de la température en degrés Celsius, qu'il applique à 100 en utilisant la flèche fonctionnelle :

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit (°F) :

~~Proportionnalité~~
 fonction affine : $x \times 1,8 + 32 \rightarrow 100 \times 1,8 + 32 = 212^\circ\text{F}$

Extrait 20: production élève 248

L'élève 539 propose lui aussi une expression algébrique mais il utilise des lettres pour symboliser les grandeurs en reprenant la majuscule F initiale de l'unité Fahrenheit : pour désigner l'image de x , x désignant la mesure de la température en degrés Celsius comme il prend la peine de le préciser :

Ceci n'est pas un tableau de proportionnalité car $\frac{50}{10} \neq \frac{59}{15}$
 Mais on a $F = 1,8 \times C + 32$ Avec $C =$ la température en $^{\circ}\text{C}$
 Donc $F(100) = 1,8 \times 100 + 32 = 180 + 32 = 212^{\circ}\text{F}$

Extrait 21: production élève 539

Il fait une erreur dans le dernier calcul et n'explique pas comment il connaît l'expression de F en fonction de x . On peut faire l'hypothèse que cette formule a déjà été rencontrée mais c'est le seul élève qui l'utilise dans la classe. Cette connaissance peut venir de l'environnement culturel familial mais il n'est pas exclu que certains élèves puissent l'établir par eux-mêmes. Cela signifie que l'élève a reconnu une situation affine et qu'il a une maîtrise de l'algèbre suffisante, ce qui peut être attesté dans d'autres items.

Très rares sont les élèves qui posent une expression algébrique de la forme $f(x) = ax + b$ et cherchent ensuite à résoudre un système. Nous en avons trouvé trois dans une même classe, preuve qu'il s'agit sans doute d'une technique qui a été vue en cours peut-être peu de temps avant la passation du test.

B) Les tableaux suivants concernent des conversions de mesures de grandeurs. Le degré Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) est une unité de température et le pied (ft) est une unité de mesure de longueur utilisées au Royaume-Uni.

Température en $^{\circ}\text{F}$	14	32	50	59	500 212
Température en $^{\circ}\text{C}$	-10	0	10	15	100 100

Distance en ft	0	5	10	15	20
Distance en m	0	1,524	3,048	4,572	6,096

Convertir 20 pieds (ft) en mètres :
 20 pieds sont égaux à 6,096 mètres.

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) :

Donc 100°C sont égaux à 212°F

la fonction f détermine la relation entre les degrés C et F avec $f(^{\circ}\text{F}) = \frac{5}{9} \times ^{\circ}\text{F} - 160$
 et avec $f(^{\circ}\text{C}) = \frac{9}{5} \times ^{\circ}\text{C} + 160$

fonction à l'envers

$f(14) = -10$
 $-14a + b = -10$
 $-32a + b = -10$
 $36a = 20$
 $a = \frac{5}{9}$
 $\frac{160}{9}$

Extrait 22: production élève 604

L'élève 604 est celui qui développe le plus la technique utilisée. Il montre déjà que sa première idée a été la proportionnalité et il écrit une colonne à la suite du tableau faisant apparaître 500°F pour 100°C . Ce résultat est raturé. Il pose plus bas que « la fonction f détermine la relation entre les degrés C et F » et il écrit que $f(14) = -10$ puis il cherche à déterminer les coefficients en posant $14a + b = -10$. Il détermine a et n'écrit pas le calcul

mais laisse une trace de la valeur de b avant de conclure que $f(^{\circ}\text{F}) = \frac{5}{9} \times ^{\circ}\text{F} - \frac{160}{9}$ et de donner la fonction inverse $f(^{\circ}\text{C}) = (^{\circ}\text{C} - \frac{160}{9}) \div \frac{5}{9}$. Il montre des compétences en calcul sur les fractions, d'autres ont abandonné la technique devant le rapport $\frac{5}{9}$. Il est le seul à parler de « fonction à l'envers » pour désigner la fonction inverse. Il atteste par ailleurs que la fonction n'est pas connue au préalable.

Il est à noter que dans cette même classe, un autre élève utilise une procédure similaire. Il pose cependant un système à résoudre pour déterminer les coefficients a et b . Il utilise systématiquement cette procédure, si bien qu'il est amené à faire les mêmes types de calculs dans l'item F qui ne relève pourtant pas d'une affinité. Il repère malgré tout que son expression n'est pas la bonne et conclut « je sais pas c'est pas ça ».

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit (°F) :

pour convertir: ~~100~~ ~~50~~ ~~100~~ ~~32~~ ~~100~~ ~~32~~ ~~100~~ ~~32~~ ~~100~~ ~~32~~

$$f(x) = 1,8 \times x + b$$

$$\left. \begin{array}{l} f(50) = a \times 10 + b \\ f(32) = a \times 0 + b \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{r} 10a + b = 56 \\ \underline{b = 32} \\ 10a = 18 \\ a = \frac{18}{10} \\ a = 1,8 \end{array}$$

Extrait 23: production élève 610 B

Déterminer l'image de -10.

Déterminer $p(2,5)$. $p(35) =$

Déterminer le ou les antécédents de -3. ~~je sais pas c'est pas ça~~

Donc ~~100~~ ~~50~~ ~~100~~ ~~32~~ ~~100~~ ~~32~~ ~~100~~ ~~32~~ ~~100~~ ~~32~~

Si $p(-5) = -10$ et $p(-6) = 10$ et b

alors $-5 = a \times (-10) + b$ et $-6 = a \times (-6) + b$

$$\begin{array}{r} -5 = -10a + b \\ -6 = -6a + b \\ \underline{1 = -3a} \\ a = \frac{1}{-3} \end{array}$$

Extrait 24: production élève 610 F

L'élève 554 utilise des symboles pour indiquer les variations dans le tableau mais il les formule aussi en langage naturel, puis il utilise la proportionnalité des écarts :

B) Les tableaux suivants concernent des conversions de mesures de grandeurs. Le degré Fahrenheit (°F) est une unité de température et le pied (ft) est une unité de mesure de longueur utilisées au Royaume-Uni.

Température en °F	14	32	50	59
Température en °C	-10	0	10	15

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit (°F) :

Quand on a 10°C de plus on a 18°F de plus.
 $100^{\circ}\text{C} = 50 + (18 \times 9) = 212^{\circ}\text{F}$

Extrait 25: production élève 554

L'élève 569 repère bien les variations mais il fait une erreur en recopiant 12 au lieu de 18 et il oublie d'ajouter cette variation à 50°F qui correspond aux 10°C dont il est parti pour calculer qu'il faut ajouter 9 fois 10°C à 10°C pour obtenir 100°C.

~~18 x 10 = 180~~
 on peut $100 - 10 = \frac{90}{10} = 9$
 $9 \times 12 = 108$ 100°C est égal à 108°F .

Extrait 26: production élève 569

On remarque donc ici que si les variations sont bien repérées comme étant une donnée importante, elles sont ensuite traitées comme des valeurs et non comme des variations. On peut trouver le calcul du quotient $\frac{18}{10}$ qui correspond au taux d'accroissement sans que les élèves sachent utiliser cette nouvelle donnée. Ces élèves peuvent avoir effectué le même calcul pour les mesures de longueur et obtenu qu'une augmentation de 5ft correspondait à une augmentation de 1,524m. Le calcul du quotient $\frac{1,524}{5}$ permet de connaître le coefficient de proportionnalité correspondant au second tableau. Le fait de calculer 1,8 et non son inverse dans le premier tableau montre qu'il y a eu analyse par rapport au sens de lecture vis-à-vis de la question posée, ce qui peut consister en une alerte amenant l'élève à être plus vigilant et à ne pas appliquer automatiquement une technique. Ici encore, ne pas continuer la procédure peut être le signe que l'élève se pose des questions.

De même l'élève 577 repère lui aussi qu'il ne s'agit pas d'une situation de proportionnalité. Le calcul des variations apparaît avec une erreur dans la soustraction et ensuite les variations sont considérées comme proportionnelles. Ainsi si une augmentation de 28°F correspond à une augmentation de 10°C , en multipliant par 10 on a qu'une augmentation de 280°F qui correspond à une augmentation de 100°C . Mais l'élève semble conclure sur les valeurs en disant que $100^{\circ}\text{C} = 280^{\circ}\text{F}$ au lieu de conclure sur les variations.

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) :

$$\begin{array}{r} 14 \\ -10 \\ \hline 32 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ -14 \\ \hline 18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ -14 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 10 \\ \hline 280 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \\ 10 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$100^{\circ}\text{C} = 280^{\circ}\text{F}$$

Extrait 27: production élève 577

Certains élèves tracent des tableaux qui leurs servent d'outil pour traiter les données ou en produire de nouvelles. L'élève 782 utilise plusieurs fois la même procédure qui consiste à appliquer les variations proportionnellement aux valeurs du tableaux jusqu'à obtenir le résultat attendu. Par exemple ici, cet élève écrit une suite de nombres en comptant de 18 en 18 à partir de 50 sur la première ligne et de 10 en 10 à partir de 10 sur la seconde. On peut supposer que l'élève a commencé par la conversion des pieds en mètres, il indique les variations de 5 en 5 pour les distances en ft et trouve le résultat. Il refait ensuite la même procédure pour les températures sans indiquer les variations par des flèches.

Température en $^{\circ}\text{F}$	14	32	50	59	68	86	104	110	176	212
Température en $^{\circ}\text{C}$	-10	0	10	15	20	30	40	50	80	100

Distance en ft	0	5	10	15	20
Distance en m	0	1,524	3,048	4,572	6,096

Convertir 20 pieds (ft) en mètres :

$$\begin{array}{c} +1,524 \\ +1,524 \\ +1,524 \end{array}$$

Extrait 28: production élève 815

Pour ce qui est de l'élève 815, il pose une expression sans que nous ayons de traces de sa procédure. Il écrit que $1,8x + 32^{\circ}\text{F} = x^{\circ}\text{C}$ et il applique sa formule en écrivant en dessous que $1,8 \times 100 + 32^{\circ}\text{F} = 100^{\circ}\text{C} = 212^{\circ}\text{F}$.

$$\cancel{1,8x + 32 = x} + 32^\circ\text{F} = x^\circ\text{C}$$

$$1,8 \times 100 + 32^\circ\text{F} = 100^\circ\text{C} = \cancel{320^\circ\text{F}} \quad 212^\circ\text{F}$$

Extrait 29: production élève 815

Nous remarquons que la lettre x désigne la Grandeur (avec un grand G) puisque l'écriture algébrique $1,8x + 32 = x$ serait une équation. Les unités permettent à l'élève de contrôler son travail. On remarque aussi que les ratures sont sans doute là pour réguler l'activité et permettre de ne plus avoir en vue les pistes qui ont été abandonnées. On retrouve cette façon de faire dans de nombreuses production d'élèves qui ont plutôt de bonnes réponses.

Dans une classe, plusieurs élèves utilisent directement la fonction affine f correspondant à la conversion des $^\circ\text{C}$ en $^\circ\text{F}$ définie par $f(x) = x \times 1,8 + 32$. On peut supposer qu'un travail a été fait dans la classe autour de cette question. Même dans ce cas, l'élève 946 par exemple, est capable de contextualiser cette connaissance et d'utiliser correctement la formule, c'est-à-dire comme un processus de la seconde ligne du tableau vers la première ligne et non comme un opérateur de la première à la seconde ligne comme on le fait habituellement :

Température en $^\circ\text{F}$	14	32	50	59
Température en $^\circ\text{C}$	-10	0	10	15

$f(x) = x \times 1,8 + 32$

Extrait 30: production élève 946

Un autre formalise le processus en langage naturel de la façon suivante : « Pour obtenir la température en $^\circ\text{F}$, il faut multiplier la température en $^\circ\text{C}$ par 1,8 et ajouter 32. »

L'élève 890 identifie la covariation et il écrit que $5^\circ\text{C} = 9^\circ\text{F}$ mais il traite ensuite la situation comme une situation de proportionnalité en disant que $100:5=20$ et que $20 \times 9 = 180$ ce qui lui permet de conclure que $100^\circ\text{C} = 180^\circ\text{F}$.

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit ($^\circ\text{F}$) :

$$100^\circ\text{C} = 180^\circ\text{F} \quad \text{car } 5^\circ\text{C} = 9^\circ\text{F}$$

$$100 : 5 = 20 \quad 20 \times 9 = 180$$

Extrait 31: production élève 890

L'élève 575 repère qu'il n'y a pas proportionnalité mais il fait comme si les variations des degrés Celsius et Fahrenheit étaient les mêmes. Il utilise le modèle additif au lieu du modèle multiplicatif. Il part du fait que 100°C c'est 110°C de plus que -10°C et il ajoute de même 110°F à 14°F qui est la température correspondante à -10°C . Il trouve ainsi 124°F .

On sait que $-10^{\circ}\text{C} = 14^{\circ}\text{F}$ donc
 $100^{\circ}\text{C} = 124^{\circ}\text{F}$.

Extrait 32: production élève 575

L'élève 709 met en place une technique qui donne un résultat correct dans le cas d'une situation de proportionnalité. Il utilise la linéarité additive avec une écriture de type fractionnaire. Ainsi pour dire que la distance correspondant à $5\text{ft} + 15\text{ft}$ correspond à $1,524\text{m} + 4,572\text{m}$ il écrit $\frac{5}{1,524} + \frac{15}{4,572} = \frac{20}{6,096}$. Cette écriture est fautive si on considère que ce sont des fractions mais elle est juste si on définit cette nouvelle notation en relation avec le tableau de proportionnalité. L'élève applique la même chose avec un produit, ce qui est faux même dans le cas d'une proportionnalité. Cette idée lui vient du fait qu'il ne trouve pas d'addition correspondant à sa recherche mais que par contre en multipliant 10 par 10, il obtient 100. Il pose donc que $\frac{50}{10} \times \frac{50}{10} = \frac{2500}{100}$ ce qui lui permet de conclure que 100°C correspondent à 2500°F . La technique utilisée ici n'a certainement pas été enseignée mais le risque est qu'appliquée dans le cas d'une somme, elle donne un résultat qui est valide et donc le domaine de validité de cette technique a besoin d'être précisé. L'importance du registre est aussi très important car dans le cadre du calcul numérique il est possible que cet élève utilise correctement les règles du calcul sur les fractions mais dans le cadre de la proportionnalité, il utilise une écriture fractionnaire pour formaliser la propriété de linéarité additive sans lui attribuer le statut de fraction.

Convertir 20 pieds (ft) en mètres :

$$20\text{ft} = \frac{5}{1,524} + \frac{15}{4,572} = \frac{20}{6,096} \quad 20\text{ft} = 6,096\text{m}$$

Convertir 100°C (degrés Celsius) en degré Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) :

$$100^{\circ}\text{C} = \frac{50}{10} \times \frac{50}{10} = \frac{2500}{100} \quad 100^{\circ}\text{C} = 2500^{\circ}\text{F}$$

Extrait 33: production élève 709

Plusieurs élèves ont proposé $20\text{ft} = 65,6\text{m}$. Nous n'avions pas anticipé cette erreur et un seul élève a explicité son calcul, permettant de comprendre le raisonnement mis en place.

Convertir 20 pieds (ft) en mètres : $3,048 \times 2 = 6,096$ $20 \div 6,096 = \frac{100}{3048} \approx 3,28$
 $20 \times 3,28 = 65,6$
 20 pieds (ft) est égale à 65,6 m.

Extrait 34: production élève 930

Cet élève utilise la propriété de linéarité multiplicative et trouve que $3,048 \times 2 = 6,096$ mais ensuite il divise 20 par 6,096 ce qui lui donne un coefficient de proportionnalité d'environ 3,28. Par contre il multiplie ensuite 20 par ce coefficient pour obtenir 65,6. Son erreur est de calculer le quotient de 20 par 6,096 alors qu'il devrait calculer l'inverse. Ceci vient du fait que les élèves divisent plus volontiers un nombre par un autre plus grand, ils ont du mal à concevoir qu'un quotient puisse être inférieur à 1. On peut interpréter sa procédure comme une généralisation du produit en croix qui nécessite de faire successivement une multiplication et une division ce qui peut être une clause du macro-contrat didactique dans sa facette épistémologique.

I.4.2.b : Proportionnalité et graphiques

On peut rapprocher les résultats des exercices C, E, H et G. 81% des élèves ont donné la bonne réponse à l'exercice H, alors que 13% n'ont pas répondu, 6% ont donné une réponse fautive mais moins de 1 % seulement utilisent la proportionnalité.

La majorité des erreurs sont liées à une mauvaise lecture des ordonnées. 2 carreaux représentent 20m, l'ordonnée étant sur la graduation entre 80 et 100, les élèves lisent 85 au lieu de 90. Ceux qui confondent ordonnées et abscisses peuvent chercher l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 100 et répondre 110 ou 115 (l'unité donnée est alors km).

Quelques élèves se laissent cependant induire en erreur par l'indice des pointillés et traitent la situation comme une situation de proportionnalité.

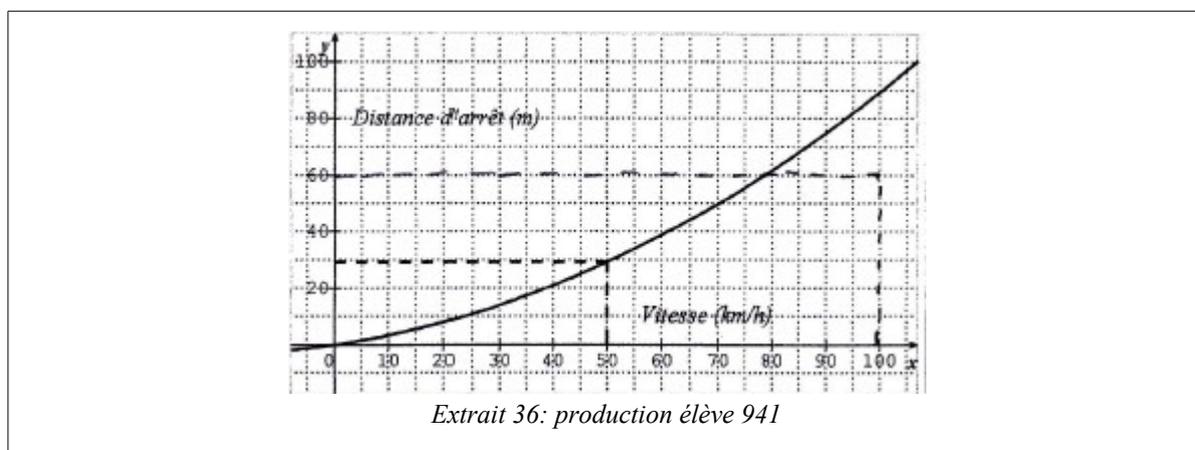
H) Vu que la distance d'arrêt de 50km/h est de 30m pour 100km/h on va doubler la distance.
 donc : $50 \times 2 = 100 \text{ km/h}$
 $30 \times 2 = 60 \text{ m}$
 La distance d'arrêt est donc de 60 m.

Extrait 35: production élève 483

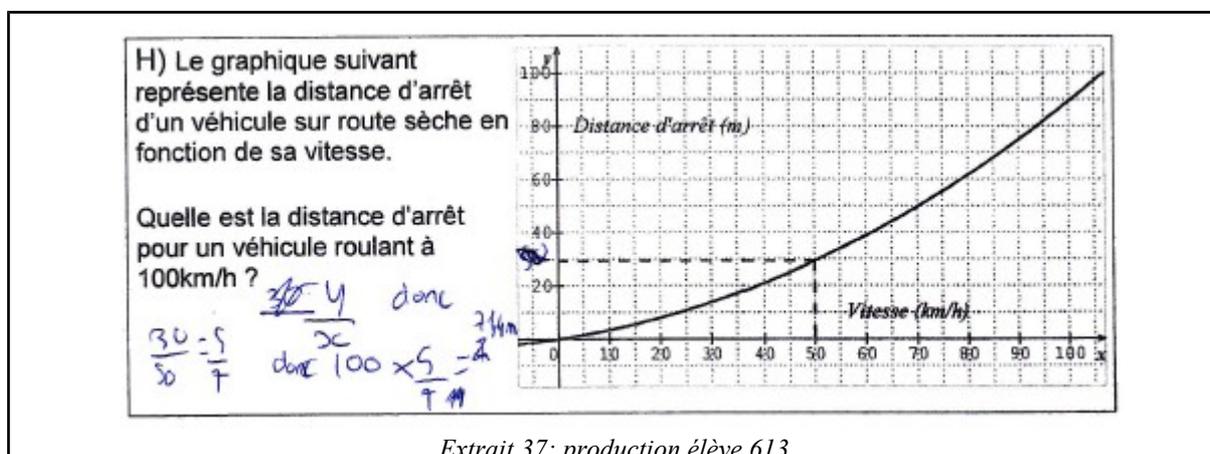
L'élève 483 a explicité sa démarche sur une copie ajoutée à son test, on peut y lire que « vu que la distance d'arrêt de 50km/h est de 30m pour 100km/h on va doubler la distance. »,

l'élève utilise donc la linéarité multiplicative : Ce même élève à l'item C, identifie les droites comme des représentations de proportionnalité mais pas la courbe qui ressemble à celle de l'item H. On peut donc penser que l'élève sait qu'il ne s'agit pas d'une situation de proportionnalité mais que cela ne l'empêche pas d'utiliser les propriétés de linéarité, ce qui signifie que la proportionnalité n'est pas reconnue comme nécessaire pour utiliser la technique de linéarité multiplicative.

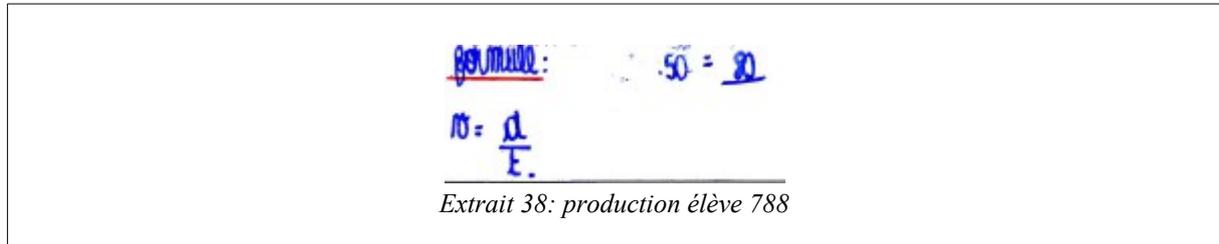
L'élève 941 fait le même raisonnement mais il utilise le registre graphique et ne répond pas à la question. On peut penser que le tracé est la réponse attendue ou que le tracé lui pose question puisque le point (100 ; 60) n'est pas sur la courbe et qu'il ne va donc pas plus loin dans le raisonnement :



L'élève 613 utilise la même procédure dans les différents exercices, il calcule le quotient $\frac{y}{x}$ pour $x \neq 0$. Ainsi même dans cet item où la courbe ne représente pas une situation de proportionnalité (ce qu'il affirme à l'item C), il calcule le quotient de 30 par 50 qui correspond à la lecture mise en évidence par des pointillés sur le graphique. Il utilise ensuite ce quotient comme un coefficient de proportionnalité pour répondre à la question.



L'élève 788 pose la formule $v = \frac{d}{t}$ et commence à exploiter les données correspondant aux pointillés sur le graphique mais n'ayant pas d'information sur la durée t , l'élève s'arrête :



formule: $v = \frac{d}{t}$ $50 = 20$

$v = \frac{d}{t}$

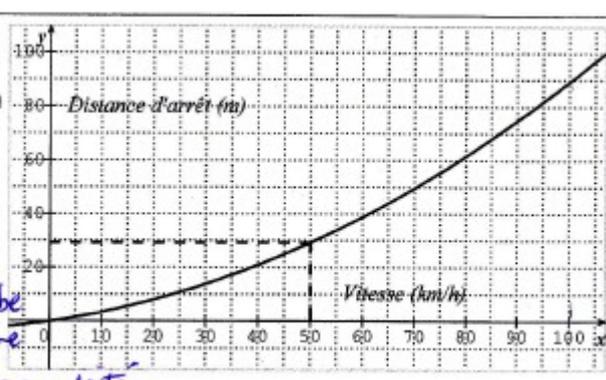
Extrait 38: production élève 788

Nous avons sans doute ici un effet du macro-contrat didactique dans sa facette épistémologique. Nous pouvons imaginer que la clause appliquée ici est que « s'il est question de vitesse, c'est qu'il faut utiliser la formule $v = \frac{d}{t}$ et effectuer des calculs ». En effet cet élève a globalement réussi à lire les informations sur les graphiques aux items précédents, il n'y a donc pas de raisons pour qu'il soit en difficulté pour lire le résultat sur le graphique.

Nous avons un autre effet du contrat à travers la production de l'élève 804 qui répond « qu'on ne peut pas savoir, cette courbe ne correspond pas à une situation de proportionnalité ». Cet élève sait lire des informations sur un graphique puisqu'il répond correctement aux items E et G, mais peut-être que la question « quelle est la distance d'arrêt... » induit un calcul et que cet élève ne voit pas comment déterminer le calcul lorsqu'il n'est pas face à une situation de proportionnalité. En effet, à l'item B il répond « comme le tableau des températures n'est pas un tableau de proportionnalité on ne peut pas savoir combien font 100°C en °F ».

H) Le graphique suivant représente la distance d'arrêt d'un véhicule sur route sèche en fonction de sa vitesse.

Quelle est la distance d'arrêt pour un véhicule roulant à 100km/h ? On ne peut pas savoir, cette courbe ne correspond pas à une situation de proportionnalité.



Extrait 39: production élève 804

Le test permet d'affirmer que si la présentation de données en tableau influe sur une représentation de la situation comme étant proportionnelle, la présentation dans un graphique oriente vers une lecture locale d'images ou d'antécédents. Le registre appelle certaines techniques et joue sur le point de vue (plus global dans le cas du tableau et plus local dans le

cas des graphiques). Les non-réponses à ce dernier item pouvant être liées à un manque de temps pour terminer le test, on peut considérer que globalement la lecture de graphiques est acquise. Cette conclusion venant aussi de la réussite à l'item G qui est de 69% pour la lecture de l'image de 1 et de 68% pour celle de 0, les erreurs étant principalement liées à une mauvaise lecture des unités. 15% n'ont pas répondu, ce qui est à rapprocher des 15% qui n'ont pas répondu à l'item H, sans doute par manque de temps. 2,6 % d'élèves n'ont pas répondu à aucun item à partir de l'item F et 5 % à partir de G.

La situation de proportionnalité est bien repérée à l'item C comme étant caractérisée par une droite passant par l'origine par 97% des élèves, par contre 26,5% reconnaissent une situation de proportionnalité lorsque la droite ne passe pas par l'origine et 12,6% dans le cas d'une courbe passant par l'origine. 24% répondent oui pour les graphiques 1 et 3 et non pour le graphique 2, ce qui laisse penser que le passage par l'origine est la seule nécessité reconnue. 1% répondent oui pour les trois graphiques, ces élèves correspondent à des élèves qui n'ont pas identifié la nécessité des deux critères simultanément. 58,3% ont correctement répondu à la question et ont donc repéré les deux nécessités simultanément. 24% ne reconnaissent que la caractérisation par une droite et ne tiennent pas compte de l'origine. 11,3% reconnaissent une situation de proportionnalité dans le fait que la courbe passe par l'origine et ne tiennent pas compte de sa nature.

I.4.2.c : Proportionnalité et algèbre

La maîtrise du calcul algébrique peut être mesurée à travers les réponses à l'item D. Il faut avant tout remarquer le nombre important de réponses différentes puisque nous obtenons 122 réponses différentes. 25% des élèves arrivent à $2x$ qui est l'écriture réduite de l'expression du programme de calcul et 25% donnent une expression correcte mais non réduite, soit un total de 50% de bonnes réponses. Les erreurs relevées viennent d'une difficulté à interpréter le vocabulaire (racine carrée pour carré), d'une confusion entre addition et multiplication ($x + 2$ est réduit en $2x$). Les élèves qui continuent d'écrire le signe \times ont beaucoup de mal à transformer correctement l'expression obtenue. La transformation suppose de prendre de la distance vis-à-vis de la situation puisqu'elle revient à modifier l'ordre et la nature des opérations du programme. Les élèves qui restent attachés au programme de calcul comme processus, ont donc tendance à garder l'expression qui rend au mieux compte du processus. Les élèves qui trouvent l'expression $2x$ n'utilisent cependant pas toujours ce résultat pour le calcul suivant, ni même comme moyen de vérification ou de contrôle. 10,7 % des élèves ont trouvé l'expression $2x$ et font une erreur au calcul suivant, 3,6 % ne répondent pas au calcul.

La lettre x est considérée par un certain nombre d'élèves comme désignant tout nombre inconnu. Ainsi elle peut servir à désigner plusieurs valeurs différentes dans un même calcul. Elle peut aussi désigner le nombre choisi mais si l'élève a testé le programme avec une valeur, il se contente de remplacer par x ce nombre à la première étape du calcul ce qui revient à avoir une représentation canonique du processus. Il n'est pas rare qu'à la fin de l'écriture, l'élève ajoute une égalité et le résultat qu'il a trouvé lors de son essai. Il obtient de la sorte une équation, ce qui est la forme d'écriture qui lui semble la plus familière lorsqu'on utilise une écriture algébrique. On retrouve cette tendance à l'item E où les élèves écrivent des

expressions de la forme $x = 2,5$ ce qui se rapproche d'une solution d'équation, forme de solution à laquelle ils sont habitués.

On peut aussi trouver des expressions qui correspondent à un calcul validé par un essai. Par exemple l'élève 915 teste le programme pour 10 et obtient comme résultat 20. Il en déduit que l'expression $x + 10$ correspond au programme. L'expression n'a donc pas un statut universel et l'élève ne prend pas la peine de tester l'expression avec une autre valeur. Nous avons ici un travail sur le mode intra-objectal en ce sens qu'une seule donnée sert à une interprétation générale de la situation. Ici, un seul possible est étudié, or avec ce même raisonnement, l'élève aurait pu conclure $2x$ et avoir un résultat correct. C'est toute la difficulté de la validation d'un résultat et du statut de la démonstration.

Étape 1 : Choisir un nombre. 10
 Étape 2 : Lui ajouter 2. 12
 Étape 3 : Multiplier cette somme par le nombre de départ. 120
 Étape 4 : Lui retirer le carré du nombre de départ et annoncer le résultat obtenu. 20
 Si on appelle x le nombre de départ, peux-tu écrire l'allure du résultat ?
 $x + 10$

Extrait 40: production élève 915

Une autre erreur consiste à ne pas considérer x comme désignant un nombre universel et donc à lui donner une valeur choisie arbitrairement. Nous en avons un exemple dans le test de l'élève 629 :

Si on appelle x le nombre de départ, peux-tu écrire l'allure du résultat ?

$$x + 2 = 2$$

$$0 - 4 = -4$$

$$2 \times x = 0$$

Si on choisit le nombre 121 034, quel sera le résultat ?

Si on choisit ce nombre le résultat est 242 068

Extrait 41: production élève 629

Ici le nombre de départ est sans doute 0. A l'étape 2, il faut lui ajouter 2 ce qui donne $x + 2 = 2$ puis $2 \times x = 0$. Enfin $0 - 4 = -4$ semble indiquer une confusion. Le nombre de départ considéré est alors 2 et non 0. Le résultat obtenu est un nombre, il n'a pas le statut d'un résultat général. En effet, il donne un résultat différent à la question suivante.

14% des élèves ne répondent pas à la question. Quelques uns laissent des traces de calculs sur des valeurs numériques, peu visiblement contrôlent leur résultat sur des exemples.

Pour déterminer le résultat du programme de calcul pour 121 034, les élèves ont utilisé leur calculatrice et ont fait des erreurs de manipulation car ils ne savent pas enchaîner les calculs et ils ne savent pas interpréter les notations scientifiques. Les élèves font peu de liens entre les différentes tâches, ils n'utilisent pas non plus les conversions de cadres ou de registres pour vérifier la cohérence de leurs résultats.

43 % des élèves ont bien trouvé 242 068, 34,3 % ont aussi trouvé une expression algébrique correcte (17,9% ont trouvé l'expression $2x$ et 16,4% l'expression $x(x+2) - x^2$). La réponse 242 068 est trouvée majoritairement par les élèves qui ont su trouver une expression algébrique correcte. Pour les autres, rien ne les empêchait de repartir du programme, ce qui a permis à 6 % d'élèves de trouver la réponse. Par contre, les élèves qui ont mal interprété le texte et utilisé la racine carrée par exemple au lieu du carré, ont fait la même erreur avec les nombres.

On peut remarquer que la notion de variable n'a pas pris sens pour tous les élèves en particulier ceux qui ont donné « 2 » comme réponse à l'expression du calcul peuvent trouver malgré tout 242 068 comme réponse à la deuxième question (1,15 % des réponses). Les deux résultats ne semblent pas entrer en conflit.

L'item E demande aussi de trouver une expression algébrique mais le contexte est différent puisque le graphique et le type de grandeurs induisent une situation de proportionnalité. La difficulté réside donc à déterminer le coefficient de proportionnalité et demande de savoir que l'expression est de la forme ax , a étant le coefficient multiplicateur. Ce coefficient peut facilement être identifié dans le contexte comme prix au m^3 , c'est un cas particulièrement fréquent au collège et le coefficient apparaît comme une grandeur quotient que les élèves connaissent bien dans et hors l'école. Par contre la lecture de ce coefficient n'est pas immédiate sur le graphique. Il faut repérer un point et calculer le quotient de son ordonnée par son abscisse. 25,3% des élèves trouvent l'expression $2,5x$ mais 38,4% ne répondent pas et parmi les 36,3% qui donnent une réponse erronée, 6,5 % ont malgré tout identifié le coefficient 2,5. L'erreur porte alors sur l'opération (division au lieu d'une multiplication). 6 % répondent par un symbole, principalement y mais on trouve aussi $y \text{ €}$, $f(x)$, $p(x)$... Moins de 1 % expriment une covariation par des expressions de la forme « tous les ... m^3 , on paye ... € ». 1,4 % écrivent une équation comme nous l'avons vu précédemment.

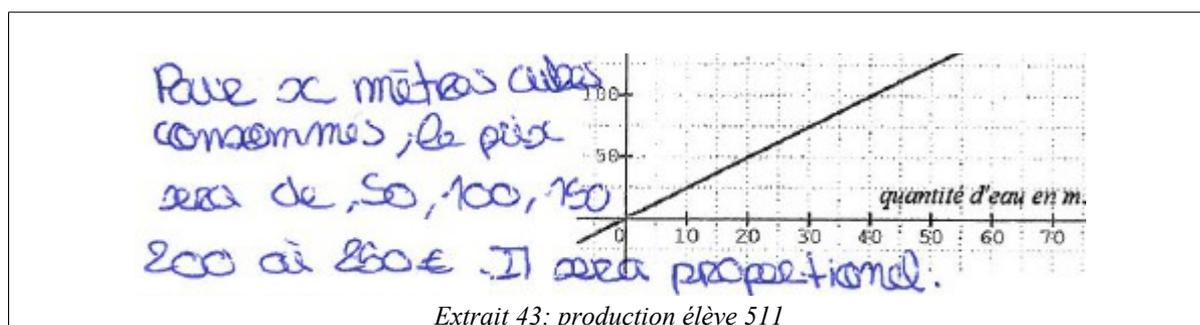
L'élève 991 répond par $f(x) = ax+b$. Il fait une hypothèse sur la forme que devrait avoir la solution. Preuve est qu'il associe le tracé d'une droite à une fonction affine caractérisée par la forme de son expression algébrique.

Des élèves ont complètement intégré la technique du produit en croix et peuvent l'utiliser ici, comme en témoigne l'élève 501 :

Extrait 42: production élève 501

Pour d'autres le produit en croix ne sert qu'à calculer le prix à l'unité. Il est utilisé et noté sur la feuille de test pour calculer le prix à payer pour 1m^3 . La présentation en tableau ou le calcul servent de réponses, il n'y a pas de conclusion. S'ils ne font pas d'erreurs de calcul, ces élèves répondent seulement « 2,5 ».

Certains repèrent qu'il s'agit bien d'une situation de proportionnalité mais n'arrivent pas à formaliser une réponse. Par exemple on lit sur le test de l'élève 511 « Pour x mètres cubes consommés, le prix sera de 50, 100, 150, 200 ou 250€. Il sera proportionnel ». Nous remarquons ici que la proportionnalité se caractérise par une suite arithmétique de nombres. Nous pouvons douter de la perception du continu pour cet élève, peut-il concevoir d'autres montants que ceux qui entreraient dans cette suite arithmétique ? S'agit-il seulement de donner la technique de lecture à travers le protocole : je repère le nombre de mètres cubes, je cherche le point de la droite, le lis son ordonnée ?



L'élève 528 fait partie de ceux qui formulent en langage naturel : « Le prix à payer sera 2,5 fois plus grand que la quantité d'eau achetée. » en oubliant de préciser les unités.

Extrait 44: production élève 528

Nous avons encore le cas de l'élève 533 qui écrit : « le prix à payer sera $2,5 \times$ nombre de m^3 consommés. »

le prix à payer sera
 $2,5 \times$ nombre de m^3
 consommés

Extrait 45: production élève 533

Des élèves calculent l'inverse du coefficient de proportionnalité comme l'élève 536 :

$90 : 50 = 0,4$
 donc on paye $0,4 \times \text{€}$ pour
 x mètres cubes

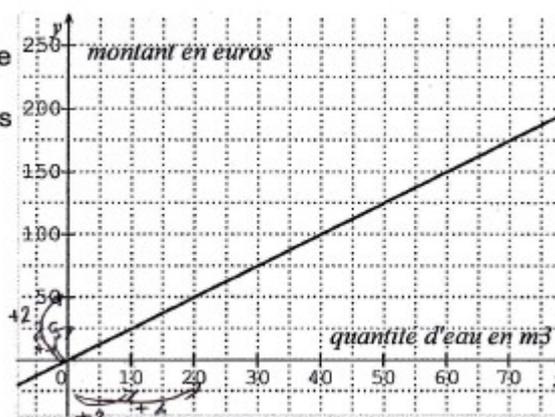
Extrait 46: production élève 536

Parmi ceux qui répondent en terme de symboles : y , $f(x)$, $p(x)$, ou par une phrase « x multiplié par le prix au m^3 ». On peut supposer qu'ils ont une vision globale mais que ceux qui répondent y ou $f(x)$ ont une prise d'information au niveau intra-objectuel car ces expressions n'évoquent pas les deux grandeurs en jeu. Ces expressions ont plutôt un caractère générique. Le niveau inter-objectuel correspond à ceux qui mettent en relation les deux variables et donc opèrent sur les objets pour obtenir une écriture de la forme $p(x)$, ils contextualisent l'expression générique.

Certains élèves ont une perception de la covariation au niveau inter-objectuel et répondent par des expressions du type « tous les $10m^3$ on paye 25€ de plus ». L'élève 688 a une manière originale de coder la lecture du prix sur le graphique, il désigne les variations correspondantes sur le quadrillage : en partant de l'origine il faut se déplacer de 1 carreau en haut et 2 carreaux à droite.

E) Ce graphique représente le montant en euros payé en fonction de la quantité d'eau consommée exprimée en m^3 . Pour x mètres cubes consommés, quel sera le prix à payer ?

$f(x) = 2x$



Extrait 47: production élève 688

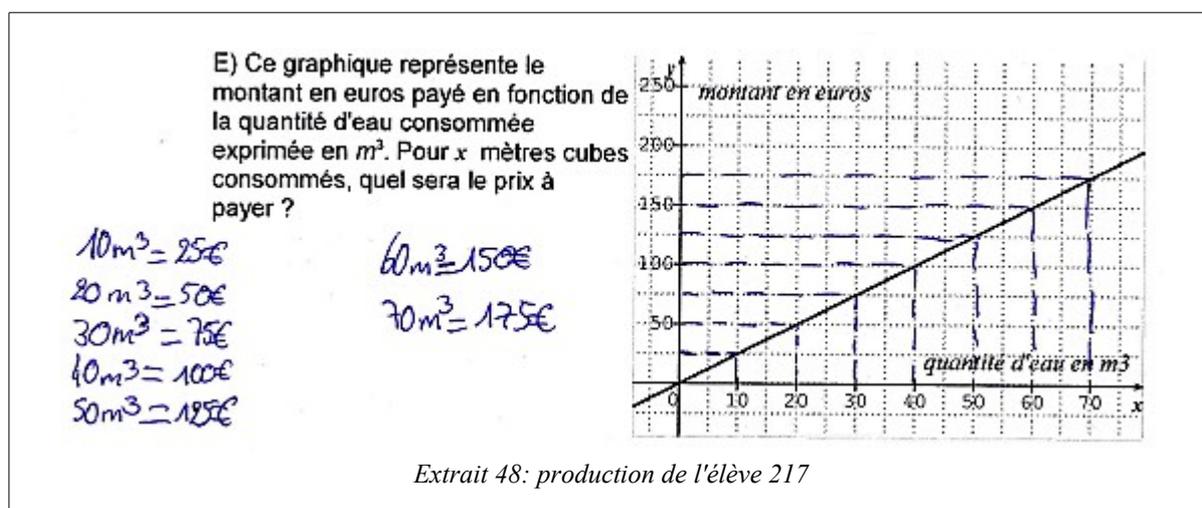
Enfin une quantité non négligeable d'élèves répondent par une somme. En particulier ceux qui répondent par 200€ ont automatisé la procédure qui consiste à lire l'image d'un nombre sur un graphique et ils appliquent le protocole : je repère le nombre en abscisse, je

monte verticalement jusqu'à trouver la courbe, je lis l'ordonnée du point de la courbe. Ici l'élève repère la lettre x qui sert de légende à l'axe des abscisses et il cherche le point de la droite dont l'abscisse est x , et il lit son ordonnée qui est 200. Le travail se fait ici sur une valeur au niveau intra-objectal.

D'autres élèves répondent 25€, ce qui correspond à une consommation de 10m^3 , or cette abscisse est la première valeur indiquée sur l'axe des abscisses. On peut donc supposer qu'elle est confondue avec l'unité. Le prix pour 1m^3 aurait bien fourni le coefficient multiplicateur cherché mais cette valeur seule ne suffit pas à répondre à la question.

Les élèves qui donnent un montant quelconque lu sur le graphique peuvent aussi avoir interprété l'exercice comme le précédent où pour le programme de calcul, on dit de « choisir une valeur ». La lettre x peut avoir pour eux le statut de nombre généralisé ou d'inconnue. L'élève choisit donc une valeur et lit son image sur le graphique. On peut ainsi lire sur certains tests « pour 40m^3 , il faudra payer 100€ ».

Un dernier type de réponse est apparu pour cet exercice, il s'agit d'une liste ou d'un tableau de valeurs. Comme les fonctions affines sont définies dans les exercices par leur représentation dans un des registres sémiotiques et que le tableau est un de ces registres, on peut penser qu'ils caractérisent la fonction par un tableau de valeurs. Il semble que ces élèves opèrent sur les objets mais il est impossible de savoir s'ils ont une perception locale ou globale de la fonction. L'exemple de l'élève **217** montre la conversion du registre graphique au registre des écritures numériques :



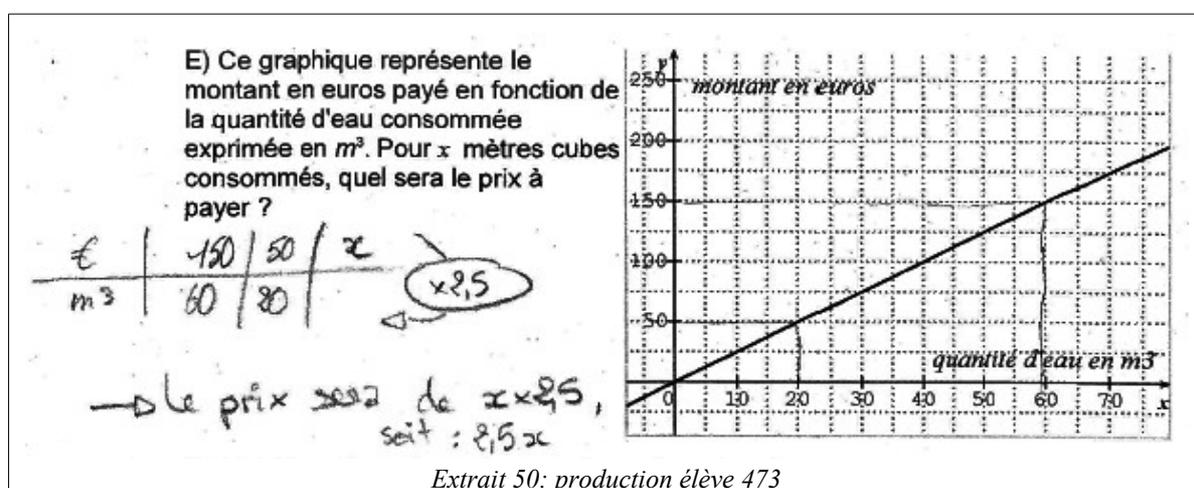
L'élève **831** propose un calcul qu'il est difficile d'interpréter. Il semble qu'il ait repéré que le point de coordonnées (10 ; 25) était un point de la courbe et qu'il utilise ces données dans une expression algébrique en écrivant $x + 10 - 25$. Il précise qu'il lui manque des informations pour bien comprendre. En fait il a bien sélectionné les données utiles mais il ne sait pas leur donner un sens, il ne se représente pas l'allure de la solution.

$$x + 10 - 25 = x - 15 \text{ m}^3$$

Il me manque des infos
pour que je comprenne
bien.

Extrait 49: production de l'élève 831

L'élève 473 a laissé sur son test l'ensemble de son raisonnement et nous pouvons apprécier les changements de registres opérés, on voit la lecture graphique, le tableau de valeurs avec l'apparition de l'opérateur et l'expression algébrique.



Par contre la réponse à l'item suivant de ce même élève montre que cette maîtrise de la conversion ne suffit pas à lever l'automatisme largement installé du traitement systématique des tableaux comme des tableaux de proportionnalité :

F) Voici le tableau de quelques valeurs d'une fonction p :

-10	5	x	-10	-7	-3	-1	0	2,5	6	10	antécédent
5	2,5	$p(x)$	-5	-3	-1	0	1,5	8	-3	-6	image

Extrait 51: production élève 473

Un autre, l'élève 623, rédige son raisonnement et montre les étapes : identifier une fonction linéaire, identifier la forme de son expression algébrique, lire l'image d'une valeur, calculer le coefficient, écrire l'expression :

E) Ce graphique représente le montant en euros payé en fonction de la quantité d'eau consommée exprimée en m^3 . Pour x mètres cubes consommés, quel sera le prix à payer ?

fonction linéaire proportionnelle
forme $f(x) = ax$

$$f(x) = 2,5x$$

$$f(20) = 50$$

$$20 \times 2,5 = 50 \quad f(x) = 2,5x$$

Extrait 52: production élève 623

L'élève 611 a une compréhension très particulière du tableau de l'item F. Il ne reconnaît sans doute pas un tableau usuel puisque qu'il ne s'agit pas d'un tableau de proportionnalité et qu'il ne correspond pas non plus à une fonction monotone. Il interprète donc les valeurs non pas comme des nombres et leur image par la fonction notée p , mais comme les valeurs de coefficients qui interviendraient dans l'expression de la fonction. On notera que cet élève a traité correctement la question B pour la conversion des pieds en mètres. Peut-être ne maîtrise-t-il pas le vocabulaire, mais en tout cas sa réponse montre que des clauses du contrat didactique l'amènent à imaginer une forme de solution qui n'est pas celle attendue. La lettre x n'a sans doute pas le statut de variable et l'opération ne peut être qu'une multiplication. La situation n'étant pas une situation de proportionnalité, il n'est pas gênant pour lui d'avoir un coefficient différent pour chaque valeur.

F) Voici le tableau de quelques valeurs d'une fonction p :

x	-10	-7	-3	-1	0	2,5	6	10
$p(x)$	-5	-3	-1	0	1,5	8	-3	-6

Déterminer l'image de -10. $p(-10) = -10x - 5$.

Déterminer $p(2,5)$. $p(2,5) = 2,5x \times 8$

Extrait 53: production élève 611

Un autre élève de la même classe (l'élève 602) utilise aussi la donnée du tableau comme un opérateur alors qu'il a répondu correctement aux autres questions de l'item F. C'est donc l'écriture $p(2,5)$ qui appelle un traitement différent qui serait l'application d'une formule pour effectuer un calcul. La donnée 8 du tableau devant être utile, il l'utilise comme coefficient multiplicateur.

Déterminer $p(2,5)$. $p(2,5) = 800 = 8 \times 2,5 = 20.$

Extrait 54: production élève 602

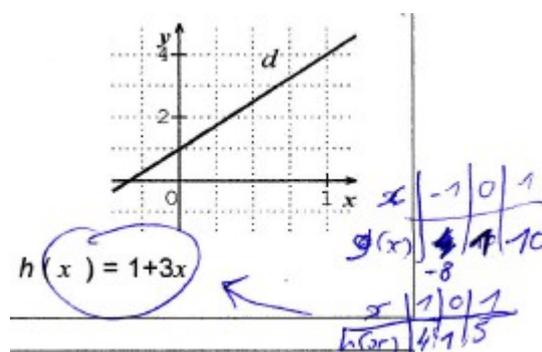
I.4.2.d : Fonctions : notations et vocabulaire

Pour ce qui est de la maîtrise du vocabulaire image, antécédent, et des notations comme par exemple $p(x)$, il s'avère que 78% connaissent le mot image, 62% répondent correctement pour les antécédents, 61% maîtrisent la notation $p(2,5)$.

53,4% reconnaissent l'expression algébrique de la fonction affine représentée à l'item G alors que 24,3% ne répondent pas à la question. 11,7% choisissent une expression qui n'est pas affine et 9,3% choisissent la fonction linéaire. Il est à remarquer que 13% des élèves ont identifié la droite ne passant pas par l'origine de l'item C comme étant une représentation d'une situation de proportionnalité et ont cependant choisi la fonction h à l'item G. Cet item montre qu'il n'y a pas de lien entre la représentation que se fait l'élève de la proportionnalité dans les différents cadres et registres.

Beaucoup d'élèves sont capables de choisir la fonction h sans avoir pu lire les images de 1 et 0, ce qui atteste qu'ils ont associé à une droite ne passant pas par l'origine une expression algébrique de forme affine non linéaire et qu'ils sont capables de reconnaître une expression de ce type.

Certains laissent une trace de leurs calculs et, comme l'élève **728**, testent sur plusieurs valeurs mais rares sont ceux qui montrent effectivement avoir contrôlé sur trois valeurs et non uniquement sur les valeurs identifiées pour 1 et 0.



Extrait 55: production élève 728

Par contre, cet élève fait de nombreuses erreurs de calcul, si bien que sa réponse est juste mais avec une justification erronée (il ne tient pas compte des priorités de calcul pour la fonction g et applique le programme de calcul correspondant à « multiplier par 1, mettre au

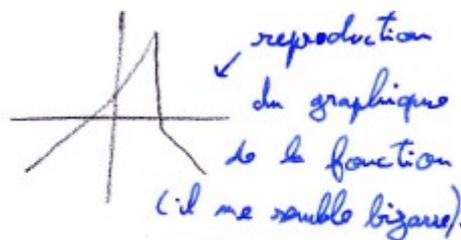
carré, ajouter 1 » et pour h il calcule deux fois l'image de 1, la première avec les bonnes opérations et la seconde en calculant $1+3+x$).

Il semble que les élèves définissent la fonction dans un des registres et ne soient pas capables de faire des conversions. En particulier on trouve des élèves pour qui la fonction est uniquement définie par son expression algébrique. Sans cette donnée, cette représentation, éventuellement associée à d'autres erreurs comme ci-dessous sur le vocabulaire, fait que les élèves ne peuvent pas opérer. Par exemple l'élève 618 semble constater que sa procédure n'est pas bonne du fait du point d'interrogation qu'il met à côté de son résultat et il formule ensuite « je ne peux pas trouver les autres [antécédents] car je ne connais pas la fonction ».

Déterminer $p(2,5)$.
 $8 \div 2,5 = 3,2$ $8 \div 3,2 = 2,5$ $f(8) = 2,5$ $2,5 \div 3,2 = 0,78125$
 Déterminer le ou les antécédents de -3 .
 $f(2,5) = 0,78125$
 -1 je ne peux pas trouver les autres car je ne connais pas la fonction.

Extrait 56: production élève 618

L'élève 599 a fait un graphique pour se représenter les données dans un autre registre. Il ajoute « il me semble bizarre » sans doute par le fait qu'il ne reconnaît ni une droite, ni la représentation d'une fonction polynomiale. La fonction n'étant pas monotone, l'élève s'autorise à relier les points mais l'allure de la courbe lui pose visiblement question. C'est sans doute pour cela qu'il répondra qu'il ne sait pas si on peut avoir 0, 4 ou 16 comme image de 5.



Extrait 57: production élève 599

Pour la délicate question de l'image possible de 5 dans l'item F, il semble que le sens de variation ne peut pas changer sur un intervalle aux yeux des élèves même si la non-proportionnalité est reconnue. 38,6% des élèves ne répondent pas à cette question et seulement 3,4% reconnaissent les trois résultats possibles alors que différentes réponses sont acceptables pour 18% des élèves. Le fait que les élèves admettent que plusieurs réponses sont possibles montre qu'il y a une exploration plus large des informations que la simple observation du tableau, nous avons au moins un traitement inter-objectal des données. 8,2 % pensent que 0 et 16 sont possibles, 9,1 % penchent pour 4 et 16 et 20,2 % pour que 0 et 4

soient tous les deux possibles. Il semble donc que les élèves privilégient le fait que le sens de variation doit être monotone sur l'intervalle $[2,5 ; 6]$. Comme $p(2,5) = 8$ et que $p(6) = -3$, les élèves considèrent que l'image de 5 doit être dans l'intervalle $[-3 ; 8]$, ce qui exclut le nombre 16. Pour ceux qui choisissent 4 et 16, la proportionnalité doit primer mais pour correspondre au sens de variation ils pensent que l'image de 2,5 peut être doublée ou diminuée de moitié pour obtenir celle de 5. Si nous regardons maintenant les élèves qui répondent par la négative, nous avons un peu plus d'élèves qui éliminent le nombre 16 mais c'est beaucoup moins représentatif que pour ceux qui choisissent des valeurs possibles. Ils sont autant à avoir éliminé 0 et 16 que 4 et 16.

Total 0 et 4	Total 0 et 16	Total 4 et 16
20,19%	8,17%	9,13%

Tableau 16: Pourcentage d'élèves ayant choisi deux valeurs possibles pour l'image de 5 à l'item F

non pour 0	non pour 4	non pour 16
49,43%	45,66%	52,08%

Tableau 17: Pourcentage d'élèves ayant éliminé des valeurs pour l'image de 5 à l'item F

Contrairement à la situation de l'item B où la conversion des degrés Fahrenheit en degrés Celsius avaient induit la proportionnalité, ici la présentation malgré tout en tableau a sans doute plus questionné les élèves de par l'usage de la notation $p(5)$ et du fait qu'il n'est pas question de grandeurs mais de nombres. Le fait que deux nombres puissent avoir la même image semble poser question aux élèves, ainsi $p(5) = 0$ semble impossible puisque -1 a déjà pour image 0 et ceci alors même que la question précédente amenait les élèves à repérer que -3 a deux antécédents. Nous ne pouvons pas interpréter de manière générale le fait que 38 % des élèves répondent « on ne sait pas » pour les trois valeurs. Cela peut signifier que pour eux c'est possible mais on ne peut pas l'affirmer, peut-être qu'ils ne savent pas répondre. L'élève 945 écrit cependant au-dessous de sa réponse que « la formule n'est pas connue pour résoudre ces fonctions ». Comme cet élève a réussi à convertir les pieds en mètres, on en déduit qu'il a bien identifié qu'il ne s'agissait pas d'une situation de proportionnalité dans cet item. Il semble que cet élève associe la notion de fonction aux situations de non-proportionnalité et que dans ce cas, il lui est nécessaire de connaître l'expression algébrique de la fonction pour pouvoir donner l'image d'un nombre donné. Si la situation est de proportionnalité, il peut utiliser d'autres procédures.

L'élève 605 fait apparaître un coefficient de proportionnalité aux extrémités du tableau de valeurs au crayon de bois, ce qui atteste qu'il s'agit d'éléments de recherche. L'élève utilise ce coefficient pour calculer l'image de 5 en posant $5 \times \frac{8}{2,5}$ ce qui lui permet de répondre qu'on ne peut pas avoir 4 ou 0 comme image de 5. Par contre il répond que l'image de 5 est 16.

F) Voici le tableau de quelques valeurs d'une fonction p :

x	-10	-7	-3	-1	0	2,5	6	10
$p(x)$	-5	-3	-1	0	1,5	8	-3	-6

Déterminer l'image de -10. $p(-10) = -5$

Déterminer $p(2,5)$. $p(2,5) = 8$

Déterminer le ou les antécédents de -3. $-7; 6$

Peut-on avoir :

$p(5) = 16$? oui - non - on ne sait pas	$P(5) = 4$? oui - non - on ne sait pas	$P(5) = 0$? oui - non - on ne sait pas
---	---	---

Extrait 58: production élève 605

Dans l'item G, plusieurs élèves répondent que l'image de 1 est $4y$. Ils ajoutent donc y pour indiquer qu'il s'agit de l'ordonnée lue sur le graphique sans doute pour différencier de l'abscisse qu'ils écriraient $1x$. Le statut de la lettre n'est donc pas clair, il a ici un peu la même fonction que la lettre f dans l'écriture $f(1)$ où f ne désigne pas un nombre. La question étant de savoir si le formalisme peut s'apprendre en dehors de son utilisation comme outil pour résoudre des problèmes ou pour communiquer. Dans ce dernier cas, tout se joue dans la pertinence de la situation de communication. Si elle a pour but de rendre compte à l'enseignant, la validité se fait par rapport aux normes et conventions. Si maintenant elle a pour but d'agir et s'adresse par exemple à un autre élève, une écriture non conventionnelle peut s'avérer parfois très efficace.

I.5 : Analyse des propos des enseignants des classes testées

Quelques enseignants ont complété leur envoi de tests d'un écrit pour donner des détails sur leur enseignement, donner leur sentiment sur les questions ou des informations sur la manière dont s'est déroulé le test. Les progressions peuvent être très différentes d'un enseignant à l'autre. Pour certains, les fonctions sont étudiées de manière spiralaire tout au long de l'année, pour d'autres elles sont étudiées de façon massée, pour les uns sur la période janvier à mars et pour d'autres plutôt en fin d'année. Les enseignants disent avoir fait passer le test suivant le protocole. Globalement le test a duré de 20 à 30 minutes. Les élèves ont été plus ou moins motivés suivant les établissements. Le calendrier a fait que certains élèves ont passé le test sur les dernières heures de cours. Le test a donc été considéré comme une occasion de révisions très appréciée ou comme une épreuve non notée et donc sans intérêt.

I.5.1 : Le retour des élèves après correction du test

La formulation de certaines questions a posé problème aux élèves. En particulier dans l'item D qui propose un programme de calcul, la consigne « Si on appelle x le nombre de départ, peux-tu décrire l'allure du résultat ? » n'indique pas clairement la nature de la réponse attendue. Une enseignante signale qu'elle s'attendait à des réactions face à l'expression « l'allure du calcul » mais qu'aucun élève n'a posé de questions. Nous pouvons remarquer que l'enseignante parle de l'allure du « calcul » et non du « résultat » comme écrit dans le sujet. Un

autre enseignant dit que ses élèves n'ont pas « vu » qu'il fallait utiliser une formule. On peut s'interroger sur le vocabulaire utilisé ici. Le nombre en sortie de programme peut s'écrire $2x$, mais peut-on parler de formule ? Il est effectivement difficile pour les élèves de concevoir $2x$ comme l'écriture d'un nombre, mais nous voyons à travers ces deux remarques que pour les enseignants aussi, l'expression $2x$ désigne un calcul plus qu'un nombre. Notre consigne a été choisie de telle sorte qu'elle n'induisse pas une technique, elle autorisait l'utilisation du langage naturel pour répondre « le double » ou « il est multiplié par 2 ». La même remarque a été faite concernant l'item E qui demandait « Pour x mètres cubes consommés, quel sera le prix à payer ? ». L'enseignant explique que demander explicitement aux élèves de « donner une formule » les amène à répondre par une expression algébrique et à réagir en disant « Ah c'était que ça ? ». Ceci atteste que l'utilisation du registre algébrique n'est pas une connaissance disponible mais qu'elle est mobilisable.

1.5.2 : Les réactions des enseignants

Plusieurs enseignants témoignent de leur surprise devant certaines erreurs. Le test leur a permis d'identifier ce qui était à retravailler avec leurs élèves alors qu'ils pensaient que ces notions étaient acquises. Ils citent en particulier les items C, E et G. Ces items sont ceux qui demandent une mise en relation de plusieurs données et donc un traitement inter-objectal alors que les enseignants les considèrent trop souvent comme des tâches simples.

Plusieurs enseignants posent la question de l'utilité ou de l'intérêt de la question de l'item F : « Peut-on avoir $p(5) = 0$? ». Nous avons déjà évoqué la difficulté de formulation pour cette question qui visiblement a heurté quelques professeurs et a demandé des explications. Certains demandent « qu'attendez-vous ? ». Derrière cette question se lit une clause du contrat didactique qui est que celui qui pose la question attend une réponse particulière. Cette question au contraire devait permettre de cerner ce que les élèves considéraient comme des « possibles » et ce que les élèves spontanément repoussaient. Un professeur a essayé de représenter la fonction p , il a dessiné une parabole et ne peut pas répondre. Il écrit « Je ne vois pas l'intérêt, attend-on de nous qu'on subodore selon l'allure ? » Nous voyons ici les limites de la définition d'une fonction par un tableau de valeurs. Le tableau ne donne que des indications locales mais aucune information globale. La question n'aurait pas soulevé les mêmes interrogations dans le cas d'une fonction affine. Un enseignant témoigne au contraire qu'il trouve la question très intéressante : « Je me suis rendu compte que le lien tableau-représentation graphique a été mis à mal lorsqu'on s'intéresse à ce qui se passe entre les points. »

L'item B a fait réagir par rapport aux tableaux de conversion. Une enseignante demande : « Était-ce implicite que les fonctions étaient linéaires ou affines ? ». Un autre parle de « piège » et propose une question préalable sur la reconnaissance de la proportionnalité. Un autre encore demande si la conversion des degrés a été placée volontairement à cet endroit du test car elle a eu pour effet chez certains élèves de penser que la suite du test serait encore plus difficile, ils n'ont pas pris la peine de faire le verso. Nous avons ici une représentation de l'évaluation qui montre que ces enseignants sont préoccupés par le résultat et non par les procédures. Alors que nous nous intéressons à ce qui induit un certain type d'activité chez l'élève, ces enseignants s'intéressent à ce qui amène les élèves à la bonne réponse. Ce type

d'enseignement n'amène pas les élèves à problématiser puisque les questions sont posées par le professeur et qu'il n'existe qu'une solution, celle attendue par le professeur.

Beaucoup d'enseignants fournissent des informations sur leurs classes (composition, orientation, niveau, participation). Les courriers peuvent rappeler qu'il s'agit d'une réponse à la demande de l'IPR (Inspecteur Pédagogique Régional) de mathématiques et semblent vouloir excuser des résultats insuffisants à leur sens.

I.6 : Conclusion

Il ressort de ce test que les résultats confirment l'hypothèse que certains automatismes liés au travail sur la proportionnalité deviennent des obstacles à la conception d'une relation fonctionnelle non linéaire et celle que les élèves ont des difficultés à effectuer des conversions. En effet, on peut constater que :

- les élèves maîtrisent la proportionnalité dans le contexte des grandeurs mesurées ;
- la présentation de données en tableau induit la proportionnalité plus sûrement que des données sur un graphique prouve que la conversion de registre n'opère pas ;
- le vocabulaire et les notations liés aux fonctions sont globalement maîtrisés mais les élèves n'utilisent pas ces symboles pour effectuer des traitements, ils servent uniquement à désigner des objets.

Les registres utilisés par les élèves semblent désigner des relations ponctuelles entre des grandeurs ce qui les amène à une représentation statique des fonctions, ils utilisent parfois des symboles ou des organisations spatiales (parenthèses, alignements, flèches...) pour représenter l'aspect dynamique des fonctions sans que ces symboles soient intégrés dans un système permettant toujours un traitement. Ces éléments renforcent l'hypothèse que l'approche statique prédomine chez les élèves à la sortie du collège.

Il apparaît de plus que les élèves développent des savoir-faire liés à des situations de référence et qu'ils procèdent par automatismes sans contrôle des résultats par confrontation dans différents cadres ou registres. Il semble en particulier que la lecture d'image sur un graphique est automatisée mais n'est pas reliée à la recherche d'une formule ou une expression algébrique. En fait les élèves maîtrisent globalement des tâches simples concernant le vocabulaire et le formalisme mais ils ne font pas le lien entre la signification de ces différentes tâches, ni sur l'intérêt de ce formalisme dans la résolution de problèmes complexes. L'étude historique de la notion de fonction montre que les définitions et le formalisme ne sont pas indispensables pour construire le concept ni pour la résolution des problèmes qui y sont liés. La nécessité d'un vocabulaire précis et de notations est venue du besoin d'expliquer et de communiquer les travaux puis de la mise en place d'une théorie. On peut craindre que ce formalisme enseigné trop tôt empêche certains élèves d'accéder au sens, créant des blocages difficiles à faire disparaître par la suite.

Par ailleurs, si les grandeurs sont souvent associées à des situations de proportionnalité, l'utilisation de certains registres dans ce contexte, comme par exemple les tableaux de valeurs, risque d'associer ce registre à la notion de proportionnalité. Dans le contexte des grandeurs, la proportionnalité est bien comprise par le sens donné au coefficient

de proportionnalité qui est souvent une grandeur quotient identifiée (prix à l'unité, vitesse, débit...); dans le registre fonctionnel, le coefficient est un nombre abstrait qu'il devient plus difficile d'identifier.

Enfin l'algèbre n'est pas un outil suffisamment maîtrisé pour être utile dans la modélisation de situations, la lettre apparaît comme une étiquette mais elle ne désigne pas à proprement parlé un nombre. La difficulté peut venir du fait que les expressions utilisées en algèbre sont exclusivement limitées à l'expression d'une quantité en fonction d'une autre. Dans les sciences expérimentales, les formules font apparaître plusieurs grandeurs désignées par des lettres, ces quantités étant suivant le contexte des constantes, des variables, des inconnues ou des paramètres et sont valides pour des unités qui sont précisées. Le transfert en mathématiques n'est donc pas évident. Cela explique que, face à des mesures recueillies lors d'une expérience, obtenir un tracé de droite n'amène pas systématiquement l'élève à reconnaître une expression de type affine pour caractériser la situation. Pour lui, il s'agit de deux disciplines différentes et donc de deux registres explicatifs différents.

Une piste serait donc d'amener les élèves à travailler plus souvent sur des grandeurs qui varient l'une en fonction de l'autre mais pas exclusivement de manière proportionnelle et de permettre aux élèves de construire le registre fonctionnel en lien avec ces situations et non comme un registre indépendant. La fonction affine pourrait alors être définie comme le modèle mathématique de situations ayant les mêmes caractéristiques ou relevant des mêmes nécessités (la proportionnalité des écarts). Il s'agirait alors de revenir aux problèmes que les fonctions permettent de résoudre plus efficacement qu'une autre procédure. Les traces écrites des élèves montrent qu'ils n'ont pas assez d'outils pour formaliser les variations et utilisent des notations personnelles (flèches opérateurs, égalités, langage naturel, accolades...). Il serait sans doute utile d'avoir à disposition une écriture conventionnelle stable, ce qui signifierait l'introduction de la notion de taux de variation dès le collège et d'utiliser cette notion comme caractéristique d'une relation fonctionnelle entre deux grandeurs.

A noter que les résultats de chaque classe attestent d'un fonctionnement propre à l'enseignant et de l'effet important du contrat didactique. Certaines procédures peuvent être clairement automatisées dans certains groupes. On remarque aussi l'écart important entre les élèves de zones urbaines sensibles et ceux des autres établissements. Dans les classes de REP, les SEGPA ou les troisièmes de lycée professionnel, le nombre de non-réponses est très important. Ces élèves ont aussi très peu de bons résultats aux questions globalement les mieux réussies comme l'item A ou le H. On peut aussi mesurer l'écart dans l'usage de la langue par le peu de formalisation des réponses et les erreurs de syntaxes ou d'orthographe. On peut supposer que la lecture des consignes a aussi posé plus de problèmes car les situations laissent une grande part d'implicite. Si peu d'items sont renseignés, ceux qui demandent seulement d'entourer une réponse l'ont été alors que ces questions n'étaient pas les plus simples. Il serait intéressant de proposer à ces élèves un test uniquement sous forme de QCM (questions à choix multiple). Les élèves peuvent estimer que ces questions sont simples, pourtant elles demandent de travailler le contrôle et la validation. Si les réponses proposées dans le QCM

ont été bien choisies, elles doivent permettre de pointer les règles fausses construites par l'élève.

Notre test nous permet de pointer les compétences des élèves par rapport aux connaissances mobilisées pour construire la notion de fonction. Il nous aidera à construire des situations dont l'objectif est de modifier l'activité usuelle des élèves de collège relativement aux fonctions affines. Nous allons travailler plusieurs pistes dans le chapitre suivant :

- l'utilisation de la lecture de graphiques pour analyser l'aspect global d'une fonction ;
- l'étude de situations mettant en évidence la covariation de grandeurs par une fonction non monotone ;
- la généralisation d'un comportement covariationnel pour résoudre un problème de covariation non affine ;
- l'interpolation linéaire sur un intervalle lorsque les accroissements sont plus petits.

Chapitre II : Introduction de la notion de fonction au collège

Nous appuyant sur notre analyse épistémologique et le repérage des difficultés que pose l'apprentissage de la notion de fonction au collège, nous avons proposé des activités de la 5^e à la 3^e dont l'objectif est d'amener les élèves à une approche covariationnelle de la notion de fonction. Notre hypothèse est que certaines difficultés ou obstacles sont étroitement liés au contexte de l'enseignement de cette notion révélé par le test : l'automatisation de procédures qu'il devient difficile d'inhiber et qui peuvent être appelées par certains registres, la mise en place d'un formalisme qui ne permet pas toujours les traitements nécessaires et le manque de symboles pour désigner les aspects dynamiques, le travail insuffisant de la nécessité des conversions de registre. La première partie de ce chapitre vise à mettre en relation certaines difficultés des élèves avec les contenus des manuels scolaires. L'approche covariationnelle demande d'étudier les fonctions d'un point de vue global et non plus local comme c'est encore souvent le cas dans les exercices proposés aux élèves. La proportionnalité étant une représentation qui peut devenir le seul modèle pour caractériser la covariation de deux grandeurs par les propriétés de linéarité, il semble utile de faire en sorte que les élèves rencontrent le plus tôt possible des situations de covariation de grandeurs non proportionnelles. Un autre obstacle est lié au fait que les élèves considèrent les fonctions comme des fonctions monotones voire des fonctions croissantes. Enfin la variable durée a un statut privilégié qui fait que l'organisation des variations est principalement liée à la chronologie, d'où peut-être cette idée de croissance implicite.

Nous avons expérimenté des activités demandant aux élèves du collège et de seconde de résoudre des problèmes tenant compte de ces caractéristiques. Nous avons construit des situations permettant aux élèves de travailler :

1. l'utilisation de la lecture de graphiques pour analyser l'**aspect global** d'une fonction ;
2. l'**identification d'une relation fonctionnelle** entre des grandeurs ;
3. l'étude de situations mettant en évidence la **covariation** de grandeurs par une fonction non monotone ;
4. la **généralisation d'un comportement covariationnel** pour résoudre un problème de covariation non affine ;
5. l'**interpolation linéaire** sur un intervalle lorsque les accroissements sont plus petits.

L'objectif de ce chapitre est de repérer les modifications induites par ces situations dans les schèmes des élèves. Il s'agit la plupart du temps d'activités ponctuelles sur une à deux séances. Les productions écrites sont collectées et analysées afin de pointer les raisonnements covariationnels induits et utilisés comme outils pour résoudre les problèmes.

II.1 : Quelles situations sont proposées aux élèves dans les chapitres consacrés aux fonctions dans les manuels de 3^e ?

Nous avons étudié les situations et contextes proposés dans les chapitres « notion de fonction », « fonctions linéaires » et « fonctions affines » dans quatre manuels de 3^e correspondant au programme de 2008, deux publiés en 2008 et deux en 2012, c'est-à-dire après les modifications apportées au Brevet des collèges au BO du 29 mars 2012. Une de ces modifications est importante, elle précise qu'« un des exercices au moins a pour objet une tâche non guidée, exigeant une prise d'initiative de la part du candidat » et que « les exercices peuvent prendre appui sur des situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines ». La compétence « modéliser » est aussi clairement un attendu. Nous pouvons donc penser que les manuels vont proposer des tâches de modélisation en particulier dans le chapitre des fonctions. Nous avons donc listé pour chaque manuel le nombre de contextes différents faisant intervenir des dépendances entre grandeurs, chaque contexte peut apparaître une ou plusieurs fois dans les pages du chapitre, que ce soit dans la partie cours ou la partie exercices. Nous avons ensuite calculé combien de contextes parmi ceux proposés sont modélisés par des fonctions monotones, par des fonctions croissantes, par des fonctions du temps. Nous obtenons les résultats qui figurent dans le tableau 18.

	Nombre total de contextes différents proposés	Nombre de fonctions monotones	Nombre de fonctions croissantes	Nombre de fonctions du temps
Sésamaths 2008 (Génération 5)	14	6 (43%)	5 (36%)	4 (29%)
Phare 2008 (Hachette)	26	21 (81%)	18 (69%)	11 (42%)
Transmath 2012 (Nathan)	45	36 (80%)	30 (67%)	16 (35%)
Prisme 2012 (Belin)	24	19 (79%)	11 (46%)	6 (25%)

Tableau 18: types de fonctions dans les modélisations étudiées dans les manuels de 3^e avant 2016

Nous pouvons remarquer que le nombre d'exercices proposés dans l'ensemble des chapitres ainsi que le nombre de contextes rencontrés peuvent être très différents d'un manuel à l'autre. Certains manuels regroupent dans un même chapitre fonctions affines et linéaires, d'autres regroupent fonctions linéaires et proportionnalité. Ces choix modifient le type de problèmes proposés aux élèves. L'étude des fonctions linéaires dans un chapitre isolé des fonctions affines fait que les contextes proposés sont plus liés aux grandeurs, les tâches sont dans le cadre arithmétique, des styles d'exercices sont répétés pour entraîner des automatismes de traitement (travail sur les augmentations et réductions en pourcentages, travail sur les grandeurs quotients vitesse, débit, travail sur les grandeurs physiques) et que les fonctions

affines sont aussi introduites par une modélisation de dépendance entre grandeurs. Certains contextes sont travaillés à de nombreuses reprises. Par exemple le manuel Phare des éditions Hachette propose essentiellement des problèmes concernant des comparaisons de tarifs dans le chapitre sur les fonctions affines ce qui peut induire des représentations erronées. En effet, les études de tarifs correspondent à des grandeurs discrètes, l'affinité n'est donc pas rencontrée dans le cas de grandeurs continues. A l'inverse l'introduction simultanée des notions de fonctions affines et linéaires se fait plutôt dans le cadre algébrique à partir de la notion de processus de calcul. Les modélisations sont proposées en application. Elles sont moins nombreuses mais plus variées. Le nombre d'exercices pour ces chapitres peut aller de 79 à 205 suivant les manuels mais la variété des contextes n'induit pas la variété des modèles puisque les fonctions monotones sont encore largement majoritaires, ce qui est lié à l'étude des fonctions affines en particulier et parmi ces fonctions, 85 % sont croissantes. Environ un tiers des contextes font intervenir des fonctions du temps. Le tableau 19 regroupe des éléments de comparaison entre les quatre manuels étudiés. Il liste pour chacun le nombre d'exercices proposés dans le chapitre qui traite de la notion de fonction au sens général, dont celui autour de la notion de proportionnalité en lien avec les fonctions linéaires, et enfin celui autour de la notion de fonction affine. Nous constatons que les choix peuvent être différents suivant les auteurs tant au niveau de l'organisation que du nombre de situations proposées.

Nombre d'exercices dans le chapitre :	Notion de fonction	Proportionnalité et fonctions linéaires	Fonctions affines	Total
Sésamaths 2008 (Génération 5)	33	46		79
Phare 2008 (Hachette)	63	100	84	247
Transmath 2012 (Nathan)	79	111	101	291
Prisme 2012 (Belin)	95	110		205

Tableau 19: Nombres d'exercices proposés dans les chapitres liés à la notion de fonction dans des manuels de 2008 et 2012

Dans ces quatre manuels, nous avons cherché la place donnée à la proportionnalité des accroissements. Là encore, nous observons une grande disparité. Le manuel Transmath propose une tâche complexe où les données sont les variations concomitantes de deux grandeurs : « chaque augmentation de 2€ du prix de vente entraînera 50 ventes de moins ». L'objectif de l'activité est une étude de marché, elle est proposée en fin de chapitre après les exercices d'approfondissement. La proportionnalité des accroissements est donnée par l'utilisation du mot « chaque » et la dépendance par le mot « entraîne ». Le manuel ne propose aucun autre exercice mettant cette connaissance au travail. Le manuel Sésamath propose l'étude des accroissements dans une activité de découverte au début du chapitre sur les fonctions linéaires et affines (voir extrait 59). Il s'agit de la mesure du périmètre p d'un

rectangle dont une dimension est 4cm en fonction de son autre dimension notée l . La partie 3 étudie les variations du périmètre et la partie 4 demande une conclusion sur les accroissements.

3. Variations du périmètre

Tu pourras construire une bande de papier de largeur 4 cm et de longueur suffisante pour t'aider à répondre aux questions suivantes.

- On suppose que $l = 5$ cm. Calcule le périmètre de la bande de papier.
 - On augmente l de 3 cm. Le périmètre augmente-t-il ou diminue-t-il ? De combien ? Et si l augmente de 4 cm ?
 - On enlève 2 cm à l . Le périmètre augmente-t-il ou diminue-t-il ? De combien ?
- Prends la question **a.** avec cette fois-ci $l = 12,5$ cm.
- Que constates-tu pour la variation du périmètre lorsqu'on a augmenté l de 3 cm ? Semble-t-elle dépendre de la valeur de l ? Démontre-le.
- Retrouves-tu les réponses de la question **c.** pour une augmentation de l de 4 cm ? Et pour une diminution de l de 2 cm ?
- Recopie et complète le tableau suivant sachant que p_1 cm et p_2 cm sont les périmètres de deux bandes dont les dimensions sont 4 cm et respectivement l_1 cm et l_2 cm.

$l_1 - l_2$	0	1	1,5	3	4	-1	-2
$p_1 - p_2$							

Que peux-tu dire de ce tableau ? Justifie ta réponse.

4. Accroissement

f étant la fonction établie dans la question **2.**, x_1 et x_2 étant deux nombres quelconques, exprime $f(x_1) - f(x_2)$ en fonction de $x_1 - x_2$. Conclus.

Extrait 59: manuel Sésamath 3^e page 123 (Collectif, 2008)

4 Je découvre une propriété des fonctions affines

1 Je conjecture

- Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 2x + 1,5$.

Calculer les quotients suivants :

$$\bullet \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \quad \bullet \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \quad \bullet \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} \quad \bullet \frac{f(-2) - f(-3)}{-2 - (-3)}$$

- Reprendre les calculs précédents avec la fonction f définie par $f(x) = -5x + 4$.
- Que peut-on conjecturer ?

2 Je démontre

Soient a et b deux nombres quelconques et f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

- On considère deux nombres distincts x_1 et x_2 .

Exprimer la différence $f(x_2) - f(x_1)$ sous sa forme développée et réduite.

- Factoriser la différence $f(x_2) - f(x_1)$, puis en déduire la valeur du quotient $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

La différence $f(x_2) - f(x_1)$ est appelée l'accroissement de $f(x_1)$ à $f(x_2)$.
La différence $x_2 - x_1$ est appelée l'accroissement de x_1 à x_2 .



Extrait 60: manuel Prisme page 119 (Jacob, 2012)

Le manuel Prisme propose une activité de découverte de la proportionnalité des accroissements et une démonstration dans le cadre algébrique (voir extrait 60).

Une aide à la formulation est proposée sous la forme : « La différence $f(x_2) - f(x_1)$ est appelée l'accroissement de $f(x_1)$ à $f(x_2)$. La différence $x_2 - x_1$ est appelée l'accroissement de x_1 à x_2 . »

La propriété est aussi indiquée dans le cours dans le registre du langage naturel et dans celui des expressions algébriques, un exemple dans le cadre algébrique illustre la propriété (voir extrait 61).

C Proportionnalité des accroissements

Propriété Soient f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$, et x_1 et x_2 deux nombres distincts. L'accroissement de $f(x)$ est **proportionnel** à l'accroissement de x , a étant le coefficient de proportionnalité.

Soit :
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\text{Accroissement de } f(x_1) \text{ à } f(x_2)} = a \frac{x_2 - x_1}{\text{Accroissement } x_1 \text{ à } x_2} \quad \text{ou} \quad a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Exemple Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 4x - 3$. On a : $\frac{f(100) - f(99)}{100 - 99} = \frac{397 - 393}{1} = 4$.

Extrait 61: manuel Prisme page 121 (Jacob, 2012)

Deux activités proposent des données sur la proportionnalité des écarts, l'une dans les exercices d'approfondissement étudie l'évaporation de l'eau d'une piscine en indiquant que « chaque jour, à cause de l'évaporation, le niveau d'eau baisse de 1cm » ; l'autre dans les « thèmes de convergence » étudie la masse de dioxyde de carbone rejetée par une voiture en fonction du nombre de kilomètres parcourus.

Le manuel Phare, quant à lui, ne propose pas d'activités autour de cette propriété.

Pour ce qui est du DNB, les exercices qui demandent de mobiliser des connaissances sur les fonctions affines restent sensiblement de même nature malgré le texte de 2012. En effet, les élèves n'ont pas à utiliser de manière autonome ces connaissances pour résoudre des problèmes. Peu d'exercices portent sur des grandeurs continues, les contextes sont souvent liés à des comparaisons de tarifs (choix entre un tarif proportionnel à la quantité achetée et un tarif comportant une part fixe et une part proportionnelle à l'unité). Certaines conversions sont évaluées (du programme de calcul à l'expression algébrique, du tableau au graphique ou du graphique au tableau, du langage naturel à l'expression algébrique) mais ces conversions ne sont pas directement reliées à la résolution d'un problème. Des questions testent la connaissance du vocabulaire (par exemple « comment nomme-t-on ce type de de fonction ? » dans le sujet des Centres Étrangers de 2014). Enfin, lorsqu'il est question d'une modélisation par une fonction affine, les élèves ont rarement la modélisation à leur charge, ils sont amenés à résoudre étape par étape le problème en suivant une procédure largement guidée comme en atteste le sujet de Nouvelle Calédonie de juin 2013 (voir annexe 16). On note cependant une évolution dans les derniers sujets. L'exercice 5 du sujet des Centres étrangers de 2015 présente un thermomètre à double graduation en degrés Celsius et en degrés Fahrenheit et un graphique représentant la mesure en degrés Fahrenheit en fonction de la mesure en degrés Celsius. Les questions posées nécessitent des conversions de registre. En particulier la

question 2 est intéressante puisqu'il ne s'agit pas de trouver la réponse mais de justifier la solution. Enfin la question 4 évalue la capacité des élèves à faire le lien entre fonction « pratique » et fonction « théorique » puisque le calcul effectué dans la question 3 apporte directement la réponse. La question portant uniquement sur l'existence, un raisonnement peut aussi être fait à partir du graphique pour valider la réponse.

1. En vous appuyant sur les représentations précédentes, déterminer s'il y a proportionnalité entre la température en degré Celsius et la température en degré Fahrenheit. Justifier votre réponse.
2. Soit f la fonction qui à une température x en degré Celsius associe la température $f(x)$ en degré Fahrenheit correspondante. On propose trois expressions de $f(x)$:

Proposition 1	Proposition 2	Proposition 3
$f(x) = x + 32$	$f(x) = 1,8x + 32$	$f(x) = 2x + 30$

« Les propositions 1 et 3 ne peuvent pas être correctes. C'est donc la proposition 2 qui convient. ». Justifier cette affirmation.

3. On considère la fonction f définie par $f(x) = 1,8x + 32$.
Calculer $f(10)$ et $f(-40)$.
4. Existe-t-il une valeur pour laquelle la température exprimée en degré Celsius est égale à la température exprimée en degré Fahrenheit? Justifier votre réponse.

Extrait 62: Sujet DNB Centres étrangers groupement 1 juin 2015 exercice 5

Par ailleurs, un nouveau contexte apparaît dans les sujets, il s'agit de l'informatique. Les élèves sont amenés à retrouver une expression algébrique d'une fonction affine à partir d'une feuille de tableur (sujet de Polynésie 2014), à reconnaître une expression affine, à faire le lien entre une expression et un graphique. De manière générale, les élèves sont beaucoup plus souvent confrontés à des formules ou des graphiques de fonctions qui ne sont pas des fonctions affines. Des études locales les amènent à effectuer des comparaisons ou à résoudre des équations graphiquement. Les problèmes linéaires dans des contextes de la vie courante sont la plupart du temps résolus dans la cadre des grandeurs proportionnelles. Ils portent sur des grandeurs quotients ou produits (essentiellement des calculs de vitesses), sur des pourcentages et sur des échelles. On assiste à un déplacement des attendus dans le DNB. Le concept de fonction est abordé de manière générale et les fonctions affines apparaissent comme des exemples. Les problèmes d'affinité sont présentés dans le cadre des grandeurs proportionnelles. Certaines questions peuvent amener l'élève à s'intéresser aux variations comme dans cet exemple : « On entend fréquemment l'affirmation suivante : « Lorsqu'on va deux fois plus vite, il faut une distance deux fois plus grande pour s'arrêter. » Est-elle exacte ? » (sujet de Polynésie 2015 exercice 7).

Cette étude rapide conforte l'idée que les élèves du collège rencontrent prioritairement des fonctions monotones croissantes et que près d'un tiers des fonctions rencontrées sont des fonctions du temps. Les élèves n'ont que très rarement l'occasion d'identifier les relations fonctionnelles et si un point de vue covariationnel est attendu, ce n'est que dans les situations de réinvestissement ou d'approfondissement. Les manuels qui proposent des exercices

répétitifs sur les mêmes types de grandeurs amènent des routines associées à des tâches simples le plus souvent dans un cadre algébrique car c'est dans ce cadre que les fonctions sont définies (Comin, 2002b). Nous allons proposer des activités d'une autre nature pour savoir si les élèves sont en mesure d'aborder la notion de fonction par une autre approche.

II.2 : Quels problèmes proposer en classe pour introduire la notion de fonction au collège ?

Les auteurs de la brochure « Enseigner les mathématiques en Seconde : Trois parcours sur les Fonctions » (IREM de Poitiers Groupe Lycée, 2011) identifient plusieurs « grandes questions » d'après l'écologie de la notion de fonction :

- décrire les variations d'une quantité en fonction d'une autre ;
- déterminer une quantité à partir d'une autre ;
- optimiser ;
- comparer des quantités ;
- décrire un phénomène par un modèle, en quantifiant la dépendance ;
- prévoir l'évolution d'un phénomène.

Le groupe IREM de Poitiers choisit une organisation de l'enseignement des fonctions en classe de seconde suivant trois parcours : optimiser, connaître les variations, comparer des quantités. Ce choix est justifié par la possibilité offerte par ces trois entrées de traiter l'ensemble du programme de seconde, sans fixer l'ordre de traitement de ces parcours. Partant de cette proposition, nous avons cherché quels parcours seraient pertinents au cycle 4 et comment les fonctions affines pourraient y être introduites. Avant les programmes de 2016, les activités proposées au collège visaient le plus souvent la comparaison de quantités et la détermination d'une quantité à partir d'une autre. Les problèmes rencontrés décrivaient des phénomènes par des modèles en quantifiant la dépendance mais les élèves avaient rarement à déterminer ou critiquer ces modèles, ils étaient imposés pour permettre le traitement. Les programmes de 2016 changent radicalement avec ceux de 2008 en faisant de « modéliser » une compétence à travailler au cycle 4. Modéliser demande de décrire les variations d'une quantité en fonction d'une autre et donc de mettre en place un autre point de vue sur la dépendance de deux grandeurs. Pour cela, nous pouvons nous appuyer sur les travaux de Valérianne Passaro qui définit le raisonnement covariationnel comme une articulation de 13 unités de raisonnement (Passaro, 2016). Les trois premières unités portent sur une étude globale et qualitative sur les variations concomitantes des deux grandeurs observées. Les unités 4 à 7 concernent un questionnement sur les accroissements concomitants des deux grandeurs observées. Les unités de 8 à 11 sont toujours dirigées par un questionnement local sur les accroissements mais plus quantitatif. Enfin les unités 12 et 13 portent sur une étude ponctuelle, le questionnement nécessite la prise en compte d'un taux de variation instantané. Ses travaux portent sur le passage de la notion de fonction à celle de dérivée. En France, les unités 12 et 13 ne sont pas un objectif d'apprentissage au niveau du collège. Par contre

Passaro montre que les élèves doivent revenir très souvent aux unités 1 et 2 qu'elle appelle des unités de raisonnement « racines » et aux unités « troncs » 3 et 4 pour pouvoir mettre en œuvre les unités suivantes appelées « branches ».

Unités	Description	Rôle
U1	Identifier une relation fonctionnelle a) identifier les deux grandeurs étudiées b) établir la grandeur indépendante et la grandeur dépendante (existence et sens de cette dépendance) c) vérifier si cette relation est une relation de proportionnalité	Unités de raisonnement racines
U2	Considérer une relation fonctionnelle sous l'angle de la variation a) établir que la grandeur indépendante est variable b) établir que la grandeur dépendante est variable c) établir la concomitance entre les variations des deux grandeurs	
U3	Décrire le comportement de la fonction a) établir le sens de variation de la grandeur dépendante quand la grandeur indépendante augmente b) qualifier cette variation de manière intuitive	Unité de raisonnement troncs
U4	Décrire le comportement des accroissements a) considérer des accroissements constants de la grandeur indépendante b) considérer des accroissements de la grandeur dépendante c) établir la concomitance entre les accroissements des deux grandeurs d) décrire le comportement global de cette concomitance	
U5	Repérer les changements de comportement	Unités de raisonnement branches
U6	Considérer des intervalles sur lesquels la fonction est continue monotone a) généraliser intuitivement le comportement sur un intervalle b) passer à des accroissements plus petits	
U7	Interpréter le changement des accroissements en terme de taux de variation et nommer la grandeur associée	

Tableau 20: Description des unités et sous unités de raisonnement d'après la grille d'analyse finale (Passaro, 2016, p.17)

Notre approche des fonctions affines par la covariation peut être considérée comme la mise en place des unités racines et troncs dès l'introduction de la notion de fonction au cycle 4 comme proposé dans le tableau 20. La colonne de gauche numérote les unités de

raisonnement, celle du milieu donne une description du raisonnement mis en œuvre et celle de droite qualifie les unités suivant les trois niveaux définis par Passaro.

Nous allons analyser des situations expérimentées à différents niveaux de la scolarité en identifiant les unités de raisonnement mobilisées. Nous essayerons de pointer les constantes et les événements qui induisent des changements d'unités. Nous proposerons enfin un outil d'analyse de l'activité de l'élève intégrant la grille d'analyse de Passaro au cadre épistémique défini au chapitre 3 de notre première partie.

II.2.1 : L'utilisation de la lecture graphique pour analyser l'aspect global d'une fonction

Nous avons utilisé un exercice qui est fréquemment proposé dans les classes de 6^e sous le nom « Le petit chaperon rouge ». L'objectif est la lecture et l'interprétation de graphiques. Les grandeurs en jeu sont l'instant en heures et la distance qui sépare le petit chaperon rouge de sa maison en kilomètres. L'instant est une grandeur qui pose problème car ce n'est pas une grandeur mesurable à moins de considérer l'heure indiquée comme la durée entre un instant initial 0 et l'instant considéré. Plusieurs versions existent, le texte introductif est cependant toujours le même :

Le petit Chaperon Rouge habite à un bout de la ville. Sa Mère-grand habite à l'autre bout de la ville, 10 km plus loin. Sur la longue avenue qui sépare la maison du Chaperon Rouge et celle de sa Mère-grand, on peut marcher à 5 km par heure ou prendre un bus qui roule à 30 km/h.

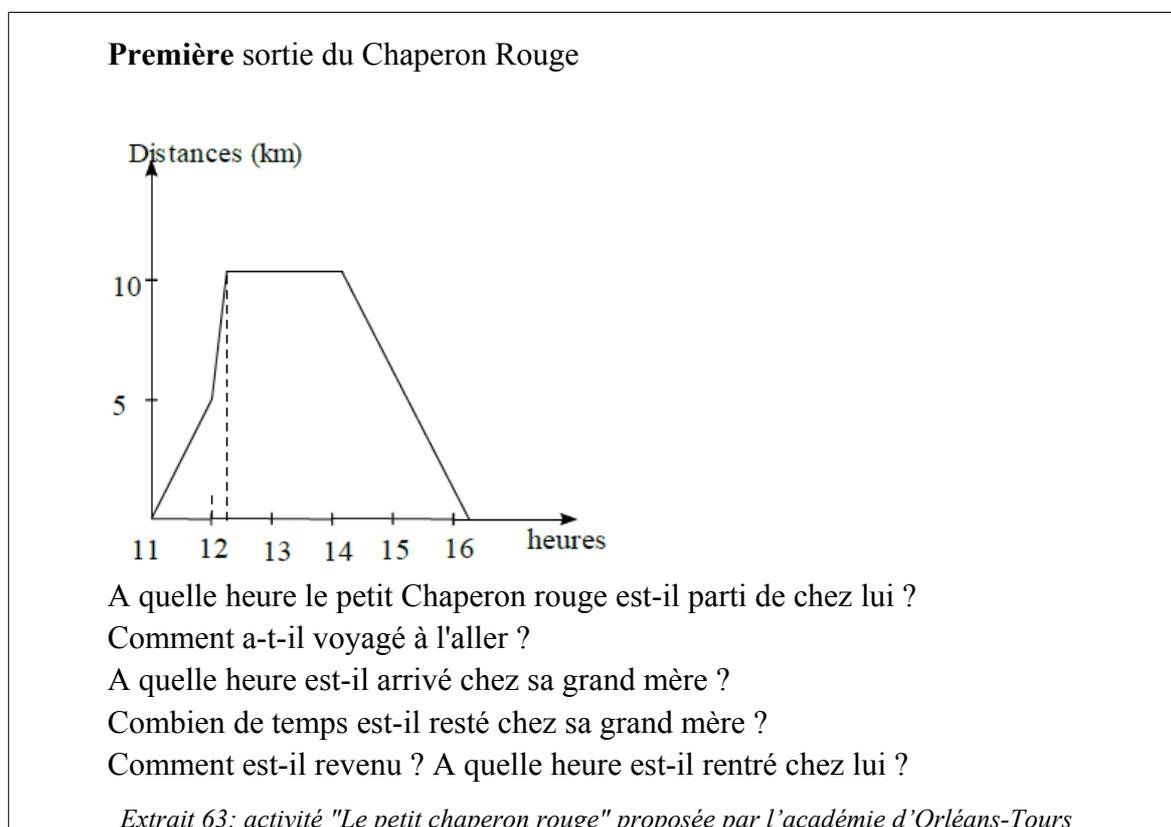
Sur son carnet personnel, le petit Chaperon Rouge raconte ses sorties en traçant un graphique. Sur l'axe horizontal il marque les heures, sur l'axe vertical il marque la distance qui le sépare de sa maison.

Suivent cinq graphiques. Dans certaines versions, chaque graphique est accompagné d'un questionnaire. L'exemple ci-dessous est tiré d'une ressource sur le site de l'académie d'Orléans-Tours¹³. L'ordre des question induit une lecture de gauche à droite sur les abscisses, puis une prise en compte de la pente des segments et le lien qu'il faut faire entre la vitesse du déplacement et l'inclinaison des segments sur le graphique par comparaison, la lecture sur l'axe des ordonnées de la distance de 10km, l'interprétation du palier, de la pente du dernier segment ainsi qu'une lecture d'abscisse. Ce travail nécessite implicitement une perception globale du graphique pour pouvoir ensuite le segmenter. Le raisonnement nécessite une approche inter-objectale puisqu'il faut comparer, classer les informations en croisant deux registres : le langage naturel et la représentation graphique. Le milieu introduit des données à travers les questions puisque « l'histoire » est proposée par le texte : « le petit chaperon part de chez lui, reste un certain temps chez sa grand-mère puis revient » (voir extrait 63).

Nous avons choisi de présenter l'exercice autrement et de donner les cinq graphiques sans questions mais avec comme consigne de raconter l'histoire correspondant à chaque graphique. Notre présentation modifie l'activité de l'élève puisqu'il n'a pas de guide pour lire

¹³http://maths.ac-orleans-tours.fr/ressources_college/progressions/articles/progressions_annuelles_6e/

chaque graphique. Il faut comparer les graphiques entre eux pour comprendre qu'il s'agit effectivement d'histoires différentes. Cette comparaison amène l'élève à poser le problème. Cette activité a été expérimentée dans trois classes de sixième. Les élèves par groupes ont échangé sur leurs interprétations et formalisé les indices qu'ils ont relevés.



Les débats ont été particulièrement intéressants s'agissant du graphique de la cinquième étape (voir extrait 64). En effet, dans la version trouvée sur le site de l'académie d'Orléans-Tours, il est spécifié que « cette fois le Chaperon Rouge s'est trompé dans son graphique » et on demande « pourquoi ? ». La question n'est pas claire, on ne sait pas si on cherche pourquoi le graphique est faux, ou pourquoi le Chaperon Rouge se serait trompé. Dans notre expérimentation, les élèves n'ont pas eu de questions, ils interprètent le graphique dans le contexte du conte et ils écrivent sous forme de narration, une histoire cohérente, même si elle est fantastique. Ainsi les élèves parlent de « remonter le temps » ou de « porte spatio-temporelle » (voir un exemple en annexe 17).

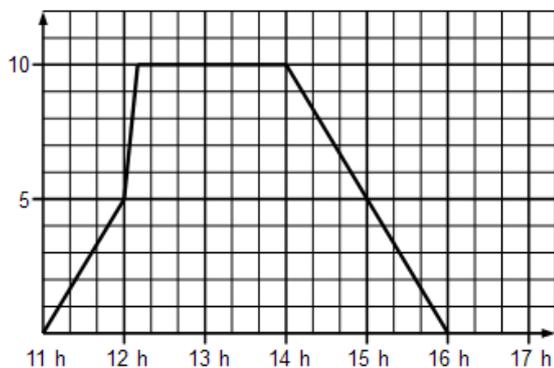
Nous avons ici un effet lié au contrat didactique. Dans la première version, les questions posent le problème au sein des mathématiques et les validations se font sur des arguments mathématiques, dans la seconde il est demandé une narration et la validation se fait sur la cohérence du récit par rapport au graphique. Les deux approches sont donc différentes puisque la première incite à des contrôles locaux d'une interprétation de la covariation donnée par l'énoncé alors que la seconde demande de construire l'interprétation de la covariation.

Il était une fois... le petit chaperon rouge

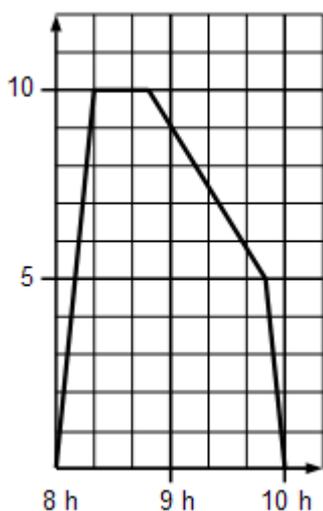
Le Petit Chaperon Rouge habite à un bout de la ville. Sa mère-grand habite à l'autre bout de la ville, 10 km plus loin. Sur la longue avenue qui sépare la maison du Chaperon Rouge et celle de sa mère-grand, on peut marcher à 5 km par heure ou prendre un bus qui roule à 30 km/h.

Sur son carnet personnel, le Chaperon Rouge "raconte" ses sorties en traçant un graphique. Sur l'axe horizontal, il marque les heures ; sur l'axe vertical, il marque la distance qui le sépare de sa maison.

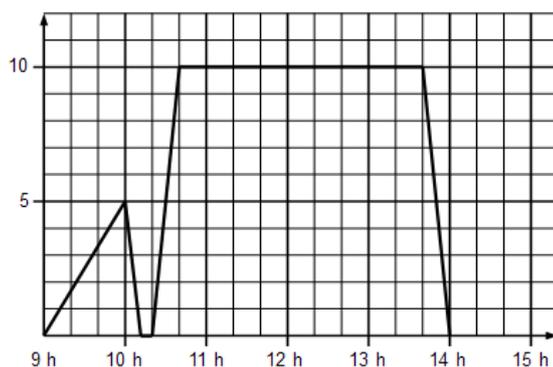
Raconte l'histoire correspondant à chaque graphique.



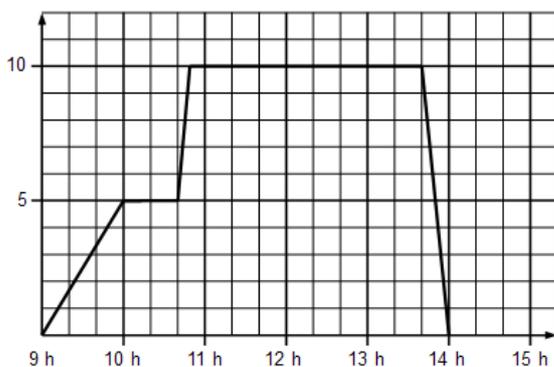
Première sortie



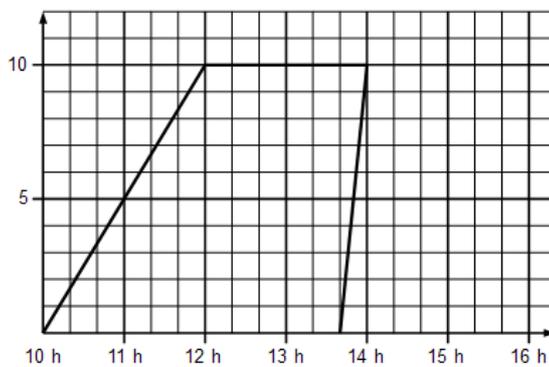
Deuxième sortie



Troisième sortie



Quatrième sortie



Cinquième sortie

Par ailleurs, les élèves peuvent faire une lecture du graphique qui atteste d'un raisonnement correspondant à l'unité U3, ils peuvent qualifier et même quantifier l'augmentation ou la diminution de la grandeur dépendante, sans pour autant interpréter le changement des accroissements avec la grandeur associée qui est ici la vitesse.

Dans cette activité, nous avons pu mesurer les écarts entre les représentations et le savoir construit par les élèves suivant le milieu et suivant le scénario proposé. L'intérêt de la situation est de proposer des graphiques qui ne représentent pas des fonctions monotones. Par contre le phénomène est naturellement considéré comme continu. Les grandeurs sont facilement identifiables et l'idée de récit guide vers une perception globale. Proposer l'activité sans questions intermédiaires et dans un travail de groupes amène les élèves à formaliser les liens qu'ils effectuent entre données et conditions, l'écriture collective permettant aux élèves les moins à l'aise avec l'écrit de participer au travail. Il semble indispensable de traiter ce type de problèmes en classe et non en travail personnel individuel à la maison tant il est important d'explicitier les procédures utilisées.

II.2.2 : Identifier une relation fonctionnelle

Un autre aspect important à travailler avec les élèves est l'identification des variations d'une grandeur en fonction d'une autre, ce qui n'est pas simple, même en sciences expérimentales, où l'on pourrait penser que la manipulation et la mesure permettent de les observer. Les situations de la vie courante sont complexes et il n'est pas toujours possible d'isoler les variations d'une seule grandeur en fonction d'une autre, le reste étant égal par ailleurs. C'est donc une étape essentielle de la modélisation qui doit être abordée très tôt : le choix des variables étudiées et la discussion de la pertinence de ce choix. Cette entrée peut cependant modifier le traitement mathématique. En effet, en dehors des mathématiques, il est rarement utile d'obtenir des résultats exacts, des résultats approchés suffisent. La précision de la réponse est souvent liée au choix des variables, aux instruments de mesure et aux hypothèses de départ. Lorsqu'un problème est proposé à l'école, ces premières étapes sont ignorées et l'élève est face à un problème déjà posé. Amener l'élève à problématiser suppose donc de proposer une question plus large et d'aider l'élève à faire cette démarche de choix des données et d'hypothèses de départ. Ainsi la question première pourrait être de « décrire un phénomène par un modèle, en quantifiant la dépendance ». Peut-on intégrer les attendus du programme autour de cette question ?

En classe de cinquième on pouvait lire dans le programme du B.O. n°6 du 28 août 2008 le tableau 21. C'est sans doute en s'appuyant sur les commentaires à ce niveau de la scolarité que pouvait le mieux s'intégrer la question de la description d'un phénomène par un modèle en quantifiant la dépendance. Il s'agit bien d'étudier des variations de deux grandeurs dans des situations s'appuyant sur les grandeurs au programme (longueurs, masses, durées, aires, angles, volumes) ou hors des mathématiques, sans définir la notion de fonction, et d'organiser ces données dans des tableaux, des formules ou des graphiques, d'étudier à partir d'un tableau, si oui ou non il s'agit de situations de proportionnalité.

Connaissances	Capacités	Commentaires
1.1. Proportionnalité Propriété de linéarité Tableau de proportionnalité Passage à l'unité ou « règle de trois »	- compléter un tableau de nombres représentant une relation de proportionnalité - reconnaître si un tableau complet de nombres est ou non un tableau de proportionnalité	Le travail sur des tableaux de nombres sans lien avec un contexte doit occuper une place limitée. Les activités numériques et graphiques font le plus souvent appel à des situations mettant en relation deux grandeurs.
1.2. Expressions littérales	Utiliser une expression littérale	De nombreux thèmes du programme, notamment dans le domaine grandeurs et mesures conduisent à utiliser des expressions littérales (formules)
1.3. Activités graphiques repérage dans le plan	Dans le plan muni d'un repère orthogonal : - lire les coordonnées d'un point donné, - placer un point de coordonnées données	Le repérage est à relier avec des situations de la vie quotidienne, le vocabulaire n'est pas un objet d'apprentissage pour lui-même.

Tableau 21: extrait du programme BO n°6 du 28 août 2008

Dans le programme qui entre en application à la rentrée 2016 pour le cycle 4 (élèves de 12 à 15 ans) la formulation est encore plus claire :

En 5^e, la rencontre de relations de dépendance entre grandeurs mesurables, ainsi que leurs représentations graphiques, permet d'introduire la notion de fonction qui est stabilisée en 3^e, avec le vocabulaire et les notations correspondantes. (Vallaud-Belkacem, 2015, p.375)

Nous allons prendre l'exemple d'une question posée par les élèves dans une classe de 5^e en novembre 2012 au collège Sophie Germain de Nantes suite à la projection d'une vidéo en Sciences et Vie de la Terre montrant une grenouille sautant pour attraper sa proie : quel animal saute le plus haut ? Les élèves ont proposé des réponses. Très vite le débat a été de savoir s'il fallait comparer la hauteur du saut ou s'il fallait prendre en compte cette hauteur relativement à la taille de l'animal. D'autres pistes ont alors été lancées, la hauteur du saut varie-t-elle en fonction de la taille des muscles, du squelette, de la force, de l'âge, dans un même groupe etc ? Un critère a été choisi : comparer la hauteur du saut par rapport à la taille de l'animal, définie non pas comme la distance au garrot mais comme la distance de la tête aux pattes arrières. Les données ont été organisées dans un tableau et la présentation a immédiatement conduit les élèves à parler de proportionnalité. Ils ont pu conclure qu'il n'y avait pas proportionnalité entre la taille de l'animal et la hauteur de son saut. Le cas est intéressant car le coefficient qu'ils cherchent se calcule sur des grandeurs mesurées or les deux grandeurs en question sont des longueurs. Le coefficient n'a donc pas de sens en tant que grandeur quotient puisqu'il s'agit d'un scalaire. La question de la comparaison des mesures devait alors se poser autrement et les élèves ont proposé de calculer ce que serait la hauteur du saut pour un homme s'il était proportionnel au saut d'une puce, un kangourou, un puma... Cette comparaison a amené les élèves à reposer la question de la dépendance en

cherchant si la différence de taille du squelette était la seule explication. Un squelette humain et un squelette de grenouille ont été mesurés et dans un tableau, les élèves ont relevé les tailles. Ils ont encore pu constater qu'il y avait proportionnalité entre la longueur des os du squelette de la grenouille et ceux du squelette humain pour la partie supérieure mais qu'il n'y avait pas proportionnalité pour les membres inférieurs. La suite de l'étude a été de nouveau transportée en SVT où des expériences ont été faites pour mesurer le rôle des muscles. Cette situation a permis aux élèves d'utiliser l'organisation de données en tableau pour tester la proportionnalité sur des grandeurs mesurées et des données collectées. L'étude devait permettre de répondre à une question posée par les élèves et les résultats ont été interprétés relativement aux hypothèses de départ, en particulier relativement au choix de deux grandeurs parmi d'autres. La notion de dépendance a été questionnée et des valeurs approchées ont suffi à conclure. Les élèves étaient convaincus que deux individus de même catégorie peuvent très bien sauter à des hauteurs différentes, ils ont utilisé pour cela leur expérience de saut en hauteur effectué par la classe en EPS (Éducation Physique et Sportive). Nous travaillons ici l'unité de raisonnement U1 en identifiant des grandeurs et en cherchant l'existence d'une relation de dépendance.

Ainsi en comparant la taille d'un animal à la hauteur de son saut, les élèves ont obtenu plusieurs hauteurs possibles pour une même taille. Nous n'avions donc pas une fonction. Les deux grandeurs étudiées étant indépendantes. Le risque était que les élèves associent les tableaux non proportionnels à des situations qui ne sont pas fonctionnelles. Il s'agissait donc de soumettre aux élèves une nouvelle situation où deux grandeurs étaient effectivement fonction l'une de l'autre sans être proportionnelles. C'est dans ce but que la question suivante a été posée aux élèves en 4^e :

Le tableau ci-dessous donne la hauteur d'eau en mètres relevée mardi dernier dans le port de Saint-Malo en fonction de l'heure. Expliquez pourquoi on peut affirmer que ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.

Heure	8h	10h	11h	12h	16h
Hauteur d'eau (m)	2,5	8	10	11	4,5

Texte 1: Activité EIST collège Sophie Germain 2013

Ici, les grandeurs étudiées sont spécifiées et les élèves les connaissent car elles relèvent de connaissances sociales relativement communes. L'heure pose de nouveau problème à moins de considérer l'heure indiquée comme la durée écoulée depuis 0h le mardi en question. Les élèves ont cherché individuellement, puis ils devaient se mettre d'accord sur un écrit commun. La question n'est pas de prouver la non-proportionnalité, mais d'expliquer pourquoi on peut affirmer qu'il n'y a pas proportionnalité.

Sur les 6 groupes de 4 élèves, deux groupes montrent des difficultés à considérer une relation fonctionnelle sous l'angle de la variation et sont donc sur une unité U1 de raisonnement (voir annexe 18). Le premier écrit comme bilan : « La hauteur d'eau n'est pas forcément fonction de l'heure, elle est fonction de la lune ». Ici l'argument majeur a été la relation de causalité entre les deux phénomènes : le temps qui s'écoule, l'eau qui monte et descend dans le port. Or la cause de la variation de hauteur d'eau dans le port n'est pas le

temps écoulé, cette variation est liée à la variation d'une autre grandeur qui est l'attraction de la lune. Pour ce groupe, le mot « fonction » est associé à une dépendance causale et s'il n'existe pas de relation fonctionnelle (au sens de dépendance causale), il ne peut pas y avoir proportionnalité. Le second groupe écrit dans son bilan que « la hauteur d'eau ne peut pas être multipliée ou divisée par l'heure ». Pour lui, le problème est lié au processus qui lie les deux grandeurs et au fait qu'il considère que deux grandeurs proportionnelles sont liées par un coefficient considéré comme une grandeur quotient qui a du sens. Ici le coefficient serait obtenu par la division d'une hauteur par une heure. Si on considère la durée, ce même quotient serait un débit mais les élèves ne peuvent pas se résigner à opérer sur ces grandeurs car dans le contexte, on ne peut pas parler d'écoulement, le concept de « débit » ne semble donc pas approprié. Trois groupes ont argumenté par des calculs sur les nombres en utilisant les propriétés de linéarité, le produit en croix ou le calcul des quotients, ils n'utilisent donc pas un raisonnement covariationnel. Un groupe a utilisé les variations en montrant qu'elles n'étaient pas régulières puisque l'eau monte de 5,5 mètres en deux heures entre 8h et 10h et de 3 mètres seulement en deux heures entre 10h et 12h. Ce groupe est donc sur l'unité U4 de raisonnement en considérant la concomitance entre les accroissements des deux grandeurs.

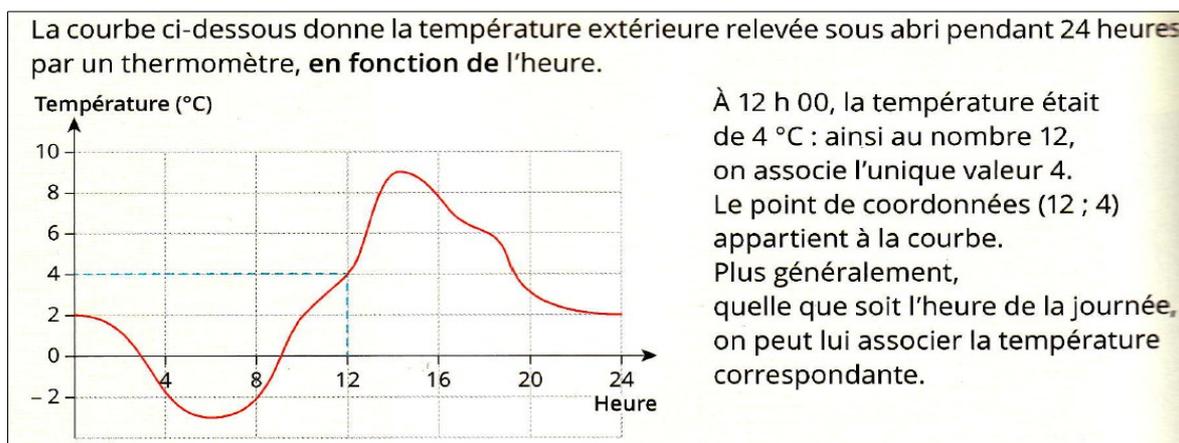
Ces deux exemples montrent que, pour les élèves de cycle 4, il n'est pas simple d'identifier une relation fonctionnelle entre deux grandeurs à partir d'une situation concrète. Les exercices scolaires sont souvent posés de telle sorte que les grandeurs sont clairement mises en évidence et que leur dépendance est posée a priori. Les manuels de cycle 4 sortis en juin 2016 proposent des problèmes pour introduire la notion de fonction autour de la modélisation et de la dépendance entre grandeurs. La difficulté réside dans le flou autour de ces notions. Si nous comparons trois manuels nous avons des définitions qui peuvent même être contradictoires. Ainsi le manuel Dimensions définit la dépendance entre deux grandeurs de la manière suivante :

Quand deux grandeurs mesurables dépendent l'une de l'autre, on dit que l'une est fonction de l'autre. Dans ce cas on peut :

- trouver une relation algébrique qui permet de passer d'une grandeur à l'autre ;
- tracer une courbe qui relie ces deux grandeurs ;
- construire un tableau de valeurs qui associe les nombres des deux grandeurs.

(Dos Santos, 2016, p.268)

Le manuel Delta ne propose pas une telle définition mais un exemple de dépendance à partir d'une courbe, d'un tableau de valeurs, d'une expression littérale et d'un programme de calcul dans le chapitre « Dépendance entre deux grandeurs ». Dans cet exemple les variables sont l'heure et la température. La variable indépendante est l'heure sur l'intervalle $[0 ; 24]$. La variable dépendante est la température extérieure. Tel qu'il est présenté, ce graphique semble être valable pour n'importe quel jour. D'ailleurs la température à 24 heures est la même qu'à 0 heure. Il n'est pas précisé comment a été fait le relevé ni la manière dont les points ont été reliés entre eux.



Extrait 65: manuel Delta (Lambotte, 2016)

Au regard de la définition précédente nous devrions avoir une relation algébrique pour passer de l'heure à la température, ce qui n'est pas le cas. D'ailleurs le manuel des éditions Belin donne l'exemple de la température moyenne à Bordeaux pour chaque mois du 1^{er} semestre de l'année 2015 mais il précise « la température dépend du mois considéré mais on ne connaît pas de relation algébrique qui relie ces deux grandeurs ». Le manuel de la collection Kiwi des éditions Hachette choisit de proposer un chapitre complet intitulé « Comprendre la dépendance d'une grandeur en fonction d'une autre. Manipuler la notion de variable ». Il ne donne pas de définition mais introduit le vocabulaire par plusieurs exemples dans différents registres et utilise différentes couleurs dans chaque situation pour repérer en bleu la variable dépendante et en rouge la variable indépendante. Le mot « variable » est utilisé pour désigner uniquement la variable dépendante. Quelques pages plus loin, un autre chapitre intitulé « Modéliser un phénomène à l'aide d'une fonction » est introduit par « Deux grandeurs peuvent varier et en étant liées l'une à l'autre. Dans certains cas, on modélise ce lien par une fonction ». Dans le manuel Maths Monde des éditions Didier il est précisé qu' « une fonction modélise mathématiquement une dépendance entre deux grandeurs afin de mieux connaître le comportement de la grandeur dépendante ». Le vocabulaire utilisé peut porter à confusion. Qu'appelle-t-on un « comportement » en mathématiques ? Peut-on parler de modélisation lorsqu'il s'agit de retrouver une loi physique ? La modélisation correspondrait-elle à la fonction mathématique abstraite ? Autant de questions qui risquent de multiplier les malentendus.

Concernant la dépendance, aucun des manuels ne propose une approche covariationnelle si ce n'est le manuel Delta dans la partie « Je développe mes connaissances » mais les compétences attendues ne sont pas explicitées dans le cours, ni mises en place dans les entraînements. Nous trouvons par exemple un exercice dans lequel on dispose du graphique représentant la croissance du chêne en fonction de son âge et on demande s'il est vrai que tous les 50 ans la taille du chêne augmente de la même hauteur. Sinon l'ensemble des problèmes proposés dans les différents ouvrages demandent une étude locale.

Le programme de 3^e de 2008 précisait dans son introduction : « L'un des objectifs est de faire émerger progressivement, sur des exemples, la notion de fonction en tant que processus faisant correspondre, à un nombre, un autre nombre. Les exemples mettant en jeu des fonctions sont issus de situations concrètes ou de thèmes interdisciplinaires. Les fonctions

linéaires et affines apparaissent alors comme des exemples particuliers de tels processus ». Il n'était pas fait référence aux grandeurs, la notion de fonction était définie comme un processus statique de correspondance sur des nombres et non sur des grandeurs. Les situations proposées étaient cependant des situations concrètes. On pouvait alors se demander comment effectuer le passage de la grandeur au nombre abstrait. Dans les programmes de 2016, la « modélisation » doit permettre ce passage, d'où l'émergence dans certains manuels d'un chapitre très théorique qui a pour objectif de poser le formalisme et le vocabulaire, indépendamment de la question de la dépendance d'une grandeur en fonction d'une autre, puis une mise en application dans le cas particulier de l'affinité. On peut lire dans le Hatier que « toute situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire » (page 282). Dans le Didier on précise que « parmi les situations qui ne relèvent pas de la proportionnalité, certaines sont cependant modélisables par une fonction dont la représentation graphique est une droite. On appelle fonction affine une telle fonction » (page 105). Les fonctions affines sont définies par leur expression algébrique mais la seule caractéristique permettant la modélisation par une fonction affine est la caractérisation graphique.

Il semble donc que la question générale « décrire un phénomène par un modèle, en quantifiant la dépendance » permette d'intégrer l'ensemble du programme de collège pour peu qu'en 3^e cette dépendance permette de caractériser le cas particulier de l'affinité.

L'étude des fonctions affines et linéaires ne permet pas d'étudier des cas d'optimisation sauf si on compare plusieurs fonctions entre elles (cas de la comparaison de tarifs proportionnels et ceux avec une part fixe et une part proportionnelle). La fonction affine ne permet pas d'aborder non plus les études de maximum ou de minimum puisqu'elle est monotone, sauf si on l'étudie sur un intervalle ce qui a peu d'intérêt. La deuxième question qu'il s'agit de privilégier serait alors la question de la comparaison. Enfin, déterminer une quantité en fonction d'une autre, peut être envisagée comme la question qui permet de traiter le programme d'algèbre.

C'est pourquoi nous nous proposons d'envisager le programme du cycle 4 autour des thèmes de travail qui suivent pris dans cet ordre :

- décrire un phénomène par un modèle, en quantifiant la dépendance ;
- déterminer une quantité en fonction d'une autre ;
- comparer des quantités.

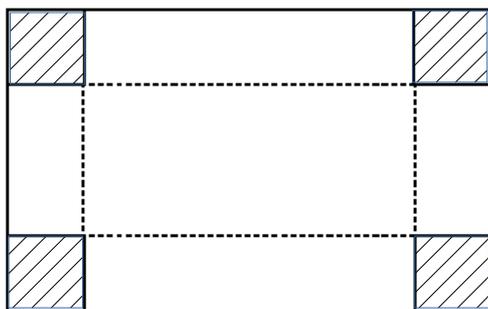
Ce qui signifie que ces trois thèmes de travail sont régulièrement abordés de manière spiralee pendant le cycle.

II.2.3 : L'étude de situations mettant en évidence la covariation de grandeurs par une fonction non monotone

Une fois la dépendance établie entre deux grandeurs, il s'agit de considérer la relation sous l'angle de la variation, c'est-à-dire de s'occuper de la concomitance entre les variations des deux grandeurs plutôt que du processus de calcul qui caractérise la relation entre les deux

grandeurs. Pour travailler cette question, nous avons utilisé un problème très largement étudié dans les classes car il est proposé dans la plupart des manuels de mathématiques du collège. Il s'agit du problème de la boîte¹⁴.

Avec une feuille cartonnée de format 24cm sur 16cm, on construit une boîte sans couvercle ayant la forme d'un parallélépipède rectangle en ôtant un carré à chaque coin puis en formant la boîte en pliant suivant les pointillés.



Quel côté du carré permet de construire la boîte de volume maximal ?

Ce problème a été analysé par le groupe lycée de l'IREM de Poitiers (IREM de Poitiers Groupe Lycée, 2011) et a fait l'objet d'un Groupe de Recherche Action Formation à l'IUFM des Pays de la Loire. Nous allons nous appuyer sur les analyses et les productions de ce GRAF (Baudu et al., 2012) et proposer un nouveau scénario pour modifier le processus d'institutionnalisation. L'objectif premier des enseignants était de mettre les élèves en situation de recherche pour qu'ils prennent des initiatives et qu'ils arrivent collectivement à résoudre le problème, le but étant d'opérationnaliser les connaissances sur les fonctions. Par ailleurs le GRAF visait un déplacement des pratiques enseignantes vers un enseignement moins directif et un accès à un savoir par situation problème. Le constat posé en classe de 3^e et en seconde est que les élèves veulent coûte que coûte trouver une proportionnalité dans la situation proposée et qu'ils ne savent pas organiser leurs calculs ni leurs résultats sous une forme exploitable permettant de prendre conscience des variations et de l'existence d'un maximum. Au regard de notre travail, ce constat semble tout à fait cohérent puisque les élèves n'ont pas été formés à considérer les relations fonctionnelles sous l'angle de la variation. On peut donc estimer qu'en terme de milieu, les élèves n'ont pas les éléments nécessaires pour que les connaissances disponibles et celles réinjectées par les élèves permettent de passer du cadre arithmétique à celui algébrique ou fonctionnel. Ce problème pourrait servir d'activité de recherche pour la question « décrire un phénomène par un modèle, en quantifiant la dépendance » à condition que le scénario proposé ne pose pas immédiatement le problème

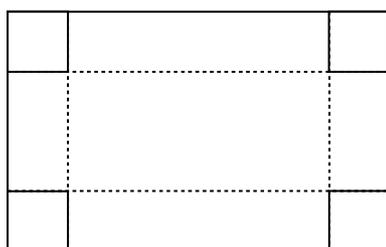
¹⁴ Solution du problème de la boîte : si on note x la mesure du côté du carré retiré à chaque coin, x appartient à l'intervalle $]0;8[$ et mesure la hauteur de la boîte dont le fond a une largeur de $16 - 2x$ et une longueur de $24 - 2x$. Son volume est donc $x(16 - 2x)(24 - 2x)$ qui est une expression cubique admettant un maximum local sur $]0;8[$ pour $x = \frac{40 - \sqrt{472}}{6} \approx 3,046$. Le volume de la boîte est maximal quand on retire des carrés dont le côté mesure environ 3 cm.

dans le cadre et le registre fonctionnel. Cependant la fonction qui modélise la variation du volume en fonction du côté du carré découpé est une fonction du troisième degré que les élèves ne savent pas étudier à ce niveau de la scolarité. La mise en évidence d'un maximum doit donc venir en cycle 4 d'une analyse des variations concomitantes de ces deux grandeurs plutôt que de la quantification de la dépendance des deux grandeurs. Il s'agit de penser le milieu de sorte que des rétroactions permettent aux élèves de basculer effectivement vers une approche covariationnelle de la fonction.

La première étape mobilise une unité de raisonnement U1, il s'agit d'identifier les variables et d'établir la grandeur dépendante et la grandeur indépendante, l'existence de cette dépendance et son sens. Pour cela, nous avons repris en partie le scénario prévu par le GRAF (voir annexe 19) dans lequel l'activité initiale ne posait pas une question mais mettait immédiatement les élèves en position de fabriquer des boîtes, chaque groupe ayant des dimensions différentes proposées à chaque élève du groupe. La consigne était donc la suivante :

La boîte sans couvercle – Travail individuel

Chacun d'entre vous dispose de deux feuilles de papier de format 24 cm sur 16 cm, dans le but d'obtenir deux boîtes sans couvercle, selon le modèle ci-dessous :



On découpe les quatre carrés et on plie en suivant les pointillés

Vous écrirez votre nom et votre groupe sur chacune des boîtes.

Vous ne les collerez pas, il faut pouvoir les remettre à plat.

Nous avons pris le parti de poser plutôt le problème dès le départ pour motiver l'activité. Nous avons demandé aux élèves l'idée première qui leur venait pour obtenir la boîte ayant le plus grand volume possible. Les élèves ont eu quelques minutes pour réfléchir et les réponses ont été écrites au tableau. Tous les élèves de la classe de troisième dans laquelle la situation a été testée sont arrivés au constat que le volume varie en fonction de la dimension du carré découpé mais trois idées prédominent et sont formalisées au tableau. Il est alors demandé aux élèves de dire avec laquelle ils sont le plus en accord :

- le volume de la boîte diminue quand on retire un carré dont le côté est plus grand ;
- le volume de la boîte sera toujours le même quelle que soit la mesure du côté retiré ;
- le volume de la boîte est proportionnel au côté du carré retiré.

Comme les avis se répartissent entre les trois propositions, le doute est moteur d'une recherche de preuve (Balacheff, 1988) et il est alors proposé de fabriquer des boîtes comme prévu dans le document du GRAF (Baudu et al., 2012). Les élèves doivent fabriquer des boîtes de dimensions différentes et la consigne ci-dessus est distribuée. Au moins deux feuilles de papier quadrillées 5×5 de format 24×16 sont à la disposition de chaque élève.

Le GRAF explique ses choix dans les remarques ci-dessous :

Remarques sur certains de nos choix :

- A) Ce travail est donné dans la deuxième moitié d'une séance (à moduler suivant les classes...) afin de mieux gérer les rythmes différents des élèves ; cela permettra au professeur de ramasser les boîtes déjà faites et de faire terminer les autres à la maison.
- B) Pour chacun des élèves, la première boîte qu'il a à réaliser ressemble effectivement à une boîte, de façon à éviter des blocages.
- C) Dans chaque groupe, il y a un élève qui a deux boîtes de mesures différentes mais de volumes voisins.
- D) Dans chaque groupe, l'éventail des valeurs a été donné ; les groupes ont donc le même travail et peuvent arriver à des conclusions voisines.

(Baudu et al., 2012, p.3)

Le phénomène étudié est le volume de la boîte et ses variations en fonction du côté des carrés découpés. Si le volume est fonction de la longueur, la largeur du fond et la hauteur de la boîte, il faut repérer que longueur, largeur et hauteur sont toutes trois dépendantes du côté du carré découpé. La grandeur indépendante peut donc être le côté du carré découpé que nous pouvons noter x . Beaucoup d'élèves ne voient pas cette dépendance et utilisent différentes lettres pour désigner les dimensions de la boîte, ce qui les amène à des formules du type $L \times l \times h$ dont ils ne savent pas trop que faire. Encore faut-il que le phénomène soit perçu, ce qui explique que le scénario proposé en 3^e commence par une activité de fabrication des boîtes afin de constater empiriquement la dépendance entre les deux grandeurs.

Dans ce scénario, deux groupes produisent les mêmes boîtes mais dans chaque groupe de quatre, les élèves construisent chacun deux boîtes différentes (parmi les huit boîtes réalisées, deux ont des mesures différentes mais des volumes voisins). Ce problème a l'avantage de permettre une approche empirique, on peut construire différentes boîtes, les manipuler, les empiler, les faire et les défaire, les mesurer. Ainsi la variable, qui est le côté du carré découpé, est perçue par le geste et visible à travers les morceaux de papier découpés. Les dimensions de la boîte sont alors clairement fonction de la taille du carré découpé. La possibilité de mettre les boîtes les unes dans les autres permet de les comparer. La possibilité enfin de mesurer permet de calculer le volume de la boîte sans utilisation d'une formule faisant intervenir la variable indépendante qui peut très bien ne pas être nommée. Tous les élèves peuvent entrer dans la tâche de fabrication et donc dans la construction des données du problème.

Dans le scénario initial du GRAF, l'étape suivante se fait lors d'une autre séance, les élèves par groupe ont les huit boîtes et la question posée individuellement est « que pouvez-vous dire de leurs volumes ? ». Les productions montrent que la connaissance disponible est la proportionnalité. Nous retrouvons les mêmes prise de position que lorsque la question a été

posée avant la construction des boîtes, prouve que cette réalisation ne fait pas bouger les représentations initiales.

Le groupe n°3 (voir extrait 66) écrit qu'il n'a pas trouvé de coefficient de proportionnalité, il ne fait pas le lien avec la formule utilisée. Ils n'arrivent pas à envisager d'autres possibles.

On a calculé le volume des différentes boîtes.

$$V. \text{boite} = l \times L \times h$$

Exemples:

$$13 \times 21 \times 1,5 = 409,5$$

Le volume de la boîte, qui a les carrés découpés de 1,5 cm, ~~est~~ ^{est} de 409,5 cm³.

$$17,8 \times 9,8 \times 3,1 = 540,764$$

Le volume de la boîte, qui a les carrés découpés de 3,1 cm, est de 540,764 cm³.

$$7,85 \times 8,3 \times 0,3 = 19,5465$$

La boîte qui a les carrés découpés 7,85, ~~est~~ a un volume de 19,5465 cm³.

On a constaté que les résultats étaient différents.
On a essayé de calculer un coefficient de proportionnalité et nous n'en avons pas trouvé.

Extrait 66: affiche groupe n°3 GRAF p.226

Dans la production suivante (voir extrait 67), on remarque que les élèves considèrent que longueur, largeur et hauteur sont proportionnelles, ce qui est faux. En fait ces élèves concluent à la proportionnalité car ils ont organisé leurs données et constatent sur la première série de A à D que les accroissements sont réguliers pour les trois grandeurs. Ainsi, si la longueur diminue de 1cm en 1cm, la largeur diminue aussi de 1cm en 1cm et la hauteur augmente de 0,5cm en 0,5cm alors que les variations du volume diminuent de 23,5, ensuite de 39,5 puis augmentent de 7,5cm³. Il se peut que pour les suivantes, les élèves ne repèrent que le fait que le sens de variation change pour le volume. On remarque qu'ils écrivent la même constatation pour les cas E, F et G et notent une exception pour H. Il semble que le problème qui se pose à eux se focalise sur cette incohérence : comment se fait-il que le comportement du volume ne soit pas le même que celui des dimensions de la boîte ? On peut donc estimer que ce groupe développe une unité de raisonnement U4. Ils ont un traitement inter-opérationnel des données puisqu'ils ont opéré sur les objets et mis en relation les différents résultats. On peut même estimer qu'ils cherchent une théorie générale permettant d'expliquer l'ensemble du phénomène. Or le compte-rendu (Baudu et al., 2012) de l'activité ne tient pas compte de ces aspects puisque l'attendu de l'enseignant est l'expression du volume en fonction

du côté x du carré découpé. Il serait donc intéressant de donner aux élèves des outils pour formaliser l'étude des variations afin de rendre cette procédure visible et opérationnelle.

Si on peut calculer le volume d'une boîte sans couvercle: 20 groupe 4

L	17	16	15	14	22	21	23	10	17,4	17,8	18,3
P	9	8	7	6	14	13	15	7	11,74	9,8	10,3
R	3,5	4	4,5	5	1	1,5	0,5	2	2,13	3,1	7,85
V	535,5	512	425	420	308	409,5	172,5	116	433,6	540,7	119,5
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K

$L; l; R$ sont proportionnels entre eux. $L; l; A$ sont proportionnels entre eux. *exception V = ...*

Conclusion: Les volumes sont différents
 \Rightarrow d'après le tableau, les volumes ne sont pas proportionnels, et pas égaux.

Problème: pourquoi le volume qui dépend de la largeur, de la longueur et de la hauteur n'est-il pas proportionnel alors que L, P, R le sont?

Extrait 67: affiche groupe 4 GRAF p.27

La diversité des réponses fait naître le doute comme moteur de la preuve comme dans notre scénario. En effet, la classe se répartit équitablement entre les mêmes trois propositions. La première vient du fait que retirer de la matière amène à penser que la boîte sera réduite. La seconde correspond aux élèves qui ont perçu que si le fond diminue, la hauteur augmente. Ces élèves sont convaincus que la diminution du fond compense l'augmentation de la hauteur et que la boîte aura toujours le même volume. La dernière proposition atteste de la prédominance du modèle de la proportionnalité pour traiter la covariation de deux grandeurs.

Lors de l'étape suivante, les élèves sont en groupes de trois ou quatre. Ils doivent prouver leur affirmation et convaincre les autres, pour cela ils doivent rédiger une réponse sur une copie. Tous se lancent dans les calculs de volumes, certains à partir des mesures, d'autres à partir de formules. La nécessité de refaire de nombreuses fois les calculs peut amener la nécessité d'utiliser une formule, cette formule pouvant être incitée par un travail sur tableur si des ordinateurs sont disponibles dans la salle.

Lors de la séance suivante, on propose aux élèves des éléments de leurs réponses. Les élèves ont prouvé que la situation n'était pas une situation de proportionnalité, les deux autres affirmations ont été mises en défaut par des contre-exemples. Il s'agit maintenant de répondre

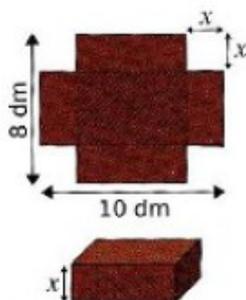
dans chaque groupe à la question « Comment varie le volume ? », la réponse se fait toujours collectivement par écrit. La justification doit prendre en compte trois boîtes de plus que les élèves ne doivent pas construire mais dont la dimension du carré est donnée (2,13cm ; 3,1cm et 7,85cm). Pour rendre visibles les variations, les élèves cherchent des formalisations différentes, des tableaux et des graphiques peuvent apparaître. Dans l'expérimentation, les élèves ont utilisé le registre des tableaux utilisé en EIST (enseignement intégré des sciences et des techniques) ainsi que la notation $v(x)$ découverte en sciences physiques. Le nombre de valeurs étant plus important, les élèves ont une vision plus globale de la variation du volume. Un groupe réalise un graphique mais n'ordonne pas les données en abscisse, en fait il repère chaque boîte par un numéro et non par la valeur de la variable x .

Plutôt qu'un débat ou une mise en commun collective, nous proposons de retravailler sur les productions (calculs, formule, tableau, graphique, constatation en langage naturel) en demandant de les critiquer pour faire évoluer les techniques et de les comparer pour travailler les conversions de registres. Ainsi nous pouvons institutionnaliser le fait qu'il faut ordonner les valeurs prises par la variable indépendante pour pouvoir comparer les variations. Nous sommes sur l'unité de raisonnement U3a (établir l'augmentation, la diminution ou la constance de la grandeur dépendante alors que la grandeur indépendante augmente). La réalisation d'un graphique et d'une organisation en tableau des données ordonnées permet d'avoir une idée du résultat par une perception globale du phénomène. Le travail peut se poursuivre avec un tableau en utilisant les formules utilisées par les groupes. Nous ne reviendrons pas sur ce travail mais il s'appuie bien sur la covariation. La question de l'unicité de la solution peut aussi se poser et cette question ne peut pas avoir de réponse rigoureuse avec les outils mathématiques du collège.

Dans le manuel Sésamath de 2016, cet exercice est proposé avec son corrigé (voir extrait 68). L'énoncé est proche de celui que nous avons donné aux élèves mais la dimension du côté du carré découpé est notée x , ce qui induit une procédure algébrique. Ceci est cohérent avec le fait que ce manuel présente la modélisation mathématique d'une situation comme la détermination d'une expression algébrique définissant une fonction. La correction commence donc par la transformation d'une formule dont les facteurs sont exprimés en langage naturel en une expression algébrique. Un code couleur aide à repérer la correspondance entre chaque facteur et son expression. Il est implicite que la longueur, la largeur et la hauteur de la boîte sont trois grandeurs fonctions du côté du carré. La modélisation consiste à changer de cadre : le volume V (cadre arithmétique) devient l'image de x par la fonction f (cadre fonctionnel). La distinction n'est pas évidente entre V qui désigne un nombre, V qui désigne la fonction empirique et f qui désigne la fonction théorique. Pourtant la question de l'ensemble de définition se pose aux élèves. En particulier que serait le volume d'une boîte de hauteur 0 ou celui d'une boîte dont le fond a une surface dont l'aire est nulle. La conversion est faite dans plusieurs registres : $f(x) = V$ (registre des expressions algébriques), un tableau de valeurs (registre des tableaux) et par la représentation graphique de la fonction f avec le volume de la boîte comme légende de l'axe des ordonnées (registre graphique). Rien n'est dit sur la continuité, le sens de variation, l'existence ou non d'un maximum. La lecture de l'estimation du volume maximal est implicite aussi bien sur le graphique que dans le tableau de valeurs.

Énoncé

Avec une plaque de carton rectangulaire de 8 dm par 10 dm, en découpant quatre carrés identiques, on obtient le patron d'une boîte (sans couvercle !).



On veut trouver la longueur du côté des carrés à découper pour obtenir une boîte dont le volume sera maximal.

On note x cette longueur en cm.

Estime ce volume maximal et la longueur x au cm près.

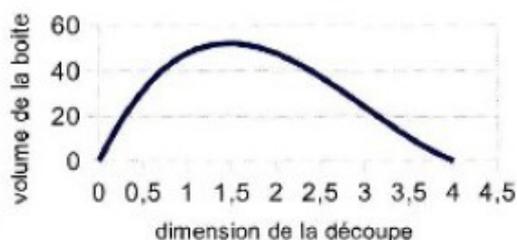
Correction

Le volume de cette boîte est donné par la formule :

$$V = \text{Longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur soit}$$

$$V = (10 - 2x) \times (8 - 2x) \times x$$

On appelle f la fonction qui à x associe ce volume. Un tableur-grapheur donne la représentation de la fonction f .



On estime le volume maximal aux environs de 1,5. On affine avec un tableau de valeurs.

x	1,4	1,5	1,6
$V=f(x)$	52,416	52,5	52,224

Le volume est maximal pour 1,5 dm (environ).

Extrait 68: manuel cycle 4 (Sésamath, 2016)

La correction de l'exercice ne prend pas en charge les difficultés que nous pouvons relever chez les élèves, comme en attestent les expérimentations de 2008. Lorsque le GRAF a proposé cette activité, l'enjeu était de faire évoluer les pratiques par la mise en place de débats en classe de mathématiques. Pour ce problème, le débat n'apporte pas les éléments mathématiques attendus, c'est plutôt la formalisation négociée dans de petits groupes qui amène les élèves à décrire le comportement de la fonction étudiée dans différents registres et donc à développer des unités de raisonnement covariationnel. Par ailleurs le GRAF s'étonne du fait que peu d'élèves utilisent la notation x pour désigner la variable et établir une formule caractérisant la dépendance entre le volume et la longueur x du côté du carré retiré. Or cette formule n'apporterait pas la solution, elle peut au mieux aider à programmer des cellules dans un tableur pour donner des valeurs sur des intervalles de plus en plus petits comme le propose le manuel Sésamath. Si les affiches ne gardent pas trace de tous les essais, les observateurs de l'expérimentation ont noté que :

Dans un groupe, des élèves remarquent qu'une variation de 0,5cm du côté du carré entraîne une variation de volume de 50,5cm³. Ils vérifient donc avec une boîte obtenue avec une valeur de $x = 0,5$: l'écart de volume n'est le même. Leur conclusion est que ce n'est pas proportionnel mais ça devrait l'être. (Baudu et al., 2012, p.13)

Cet extrait atteste que l'étude de la concomitance des variations est intuitive pour certains élèves mais qu'elle n'est pas reprise par l'enseignant ni formalisée avec des notations conventionnelles. Nous verrons au fil de ce chapitre que ce constat se retrouve à tous les niveaux de la scolarité. Nous allons essayer de valoriser cette unité de raisonnement à travers une situation testée avec des élèves à différents niveaux, du collège au post-bac.

II.2.4 : La généralisation d'un comportement covariationnel pour résoudre un problème de covariation non affine : le problème du pluviomètre à différents niveaux de la scolarité

II.2.4.a : Choix de la situation

Nous avons cherché, au sein du groupe « Fonctions au collège » de l'IREM de Nantes, à créer une situation tenant compte des différents obstacles et des contraintes que nous avons identifiées.

- Une covariation mais pas une fonction du temps

En premier lieu, l'organisation mathématique de la notion de fonction amène à considérer cette notion comme liée à l'étude de la covariation de deux grandeurs. Le plus souvent cette variation est considérée comme fonction du temps. Ici le problème amène à comparer deux grandeurs fonction du temps entre elles : la pluviométrie trouvée sur l'internet en fonction des dates ainsi que la hauteur d'eau dans le pluviomètre de M. Legoff en fonction des dates.

- Rompre avec la proportionnalité ou les formules établies

Ces grandeurs ne sont pas liées par une relation connue et à fortiori ces deux grandeurs ne sont pas proportionnelles. En effet, la pluviométrie exprimée en litres par m² correspond au volume d'un prisme droit dont la base serait un carré de 1m de côté alors que la hauteur d'eau dans le pluviomètre est exprimée en millimètres et correspond au volume d'eau recueilli dans un récipient dont nous n'avons pas la forme mais qui se rapproche d'un tronc de cône. Les données sont fournies dans des tableaux qui ne sont pas organisés de la même manière l'un en ligne et l'autre en colonne, pour rompre avec les représentations usuelles en lignes. Les dates n'ont pas non plus le même format.

- Le doute comme moteur de la preuve

Le problème amène à argumenter pour une prise de décision. La solution n'est pas évidente, on peut donc être amené à prédire deux réponses contraires, ce qui doit provoquer des débats. L'approximation linéaire doit cependant permettre de donner une réponse convaincante.

- Un problème ouvert pour comparer les procédures

Aucune procédure n'est induite, les élèves peuvent se lancer dans des essais. Aucune aide n'est proposée au départ de l'activité pour laisser les groupes choisir les cadres et registres dans lesquels ils vont travailler.

II.2.4.b : Le scénario

Le texte du problème page 204 (voir annexe 20) est distribué aux élèves répartis en petits groupes de trois ou quatre. Un élève est chargé de poser les questions à l'enseignant, un autre rédige une narration de recherche, un autre régule l'activité et un dernier est gardien du temps (ces deux rôles pouvant être affectés au même élève dans un groupe de trois). Un temps de lecture est laissé dans les groupes mais les élèves sont autorisés à échanger dès ce premier temps. Les élèves qui ont des difficultés de lecture peuvent avoir besoin d'échanger très vite sur la prise d'indices pour que la dévolution puisse se faire.

Il est précisé qu'après 5 minutes de lecture, les élèves peuvent poser des questions d'explicitation par l'intermédiaire de leur porte parole. Il faut en effet évacuer très vite certaines questions et préciser si besoin la situation (le pluviomètre est vidé chaque jour, le pluviomètre n'est pas gradué comme un verre doseur mais on mesure la hauteur d'eau comme on le ferait avec une règle graduée, on ne sait pas ce qu'il y a dans la cave...). Ensuite les élèves cherchent dans les groupes et la narration est relevée à la fin de la séance.

Durant l'activité, l'enseignant doit être le plus effacé possible pour ne pas agir sur le milieu. En particulier les validations doivent pouvoir se faire directement à partir des données initiales ou construites par les élèves. Ce problème nécessite de faire des hypothèses et la réponse dépend des hypothèses, elle ne peut être qu'une estimation ou une fourchette. On peut le considérer comme un problème de modélisation en considérant qu'« un modèle est avancé par un actant pour répondre à une question ou à un problème, à l'aide de son répertoire de connaissances » comme le propose Brousseau. Raoult explique :

Un modèle est un moyen, pour un actant donné, de traiter un problème donné par l'usage d'un répertoire de connaissances "restreint". L'actant met en présence sciemment un "univers représenté" et un "univers représentant".(Raoult, 2003, p.13)

Il précise plus loin

Un modèle prédictif comprend des objets ou des valeurs calculables, et s'il est falsifiable ces valeurs sont observables (concrètement significatives). En général le modèle est le résultat d'une mise en correspondance de système à système. Ainsi on peut observer, dans l'univers représenté, des objets "négligés" dans le modèle (aux variations supposées inopérantes), des objets fixés (des conditions de validité, n'intervenant pas dans le modèle), des variables concrètement significatives entrant dans le calcul. Dans l'univers représentant, on peut observer outre les parties concrètement significatives, des variables additionnelles, non concrètement significatives, mais nécessaires au calcul, et éventuellement des objets ou des propriétés "parasites" inutiles ou même gênants mais inévitables. (Raoult, 2003, p.14)

Le problème du pluviomètre a pour objectif d'explicitier les caractéristiques du modèle choisi pour discuter de sa cohérence, de sa pertinence, de son adéquation et de son efficacité.

Le problème du pluviomètre

Monsieur Legoff, habitant du Finistère Nord, a installé un pluviomètre dans son jardin. Chaque jour il mesure la hauteur d'eau en millimètres dans son pluviomètre et ensuite il le vide. Il a relevé dans un tableau la hauteur d'eau de pluie dans son pluviomètre du 01 mars au 15 mars 2014.

Dates	01/03	02/03	03/03	04/03	05/03	06/03	07/03	08/03	09/03	10/03	11/03	12/03	13/03	14/03	15/03
Hauteur d'eau en mm dans le pluviomètre	0	0	0	0	38	76	127	89	38	117	129	107	89	0	72

Monsieur Legoff a remarqué que sa cave est inondée quand, sur une journée, la hauteur d'eau dans son pluviomètre atteint 142 mm.

Il doit s'absenter du 16 au 21 mars. Avant de partir, il consulte un site météo et il obtient les renseignements suivants :

Dates	Pluviométrie en litre par m ²
1 mars	0
2 mars	0
3 mars	0
4 mars	0
5 mars	0,2
6 mars	1,6
7 mars	7,5
8 mars	2,6
9 mars	0,2
10 mars	6
11 mars	8
12 mars	4,6
13 mars	2,6
14 mars	0
15 mars	1,4
Prévisions météo	
16 mars	3,2
17 mars	4
18 mars	3,4
19 mars	7
20 mars	1,2
21 mars	11

Monsieur Legoff doit-il s'inquiéter pour sa cave ?

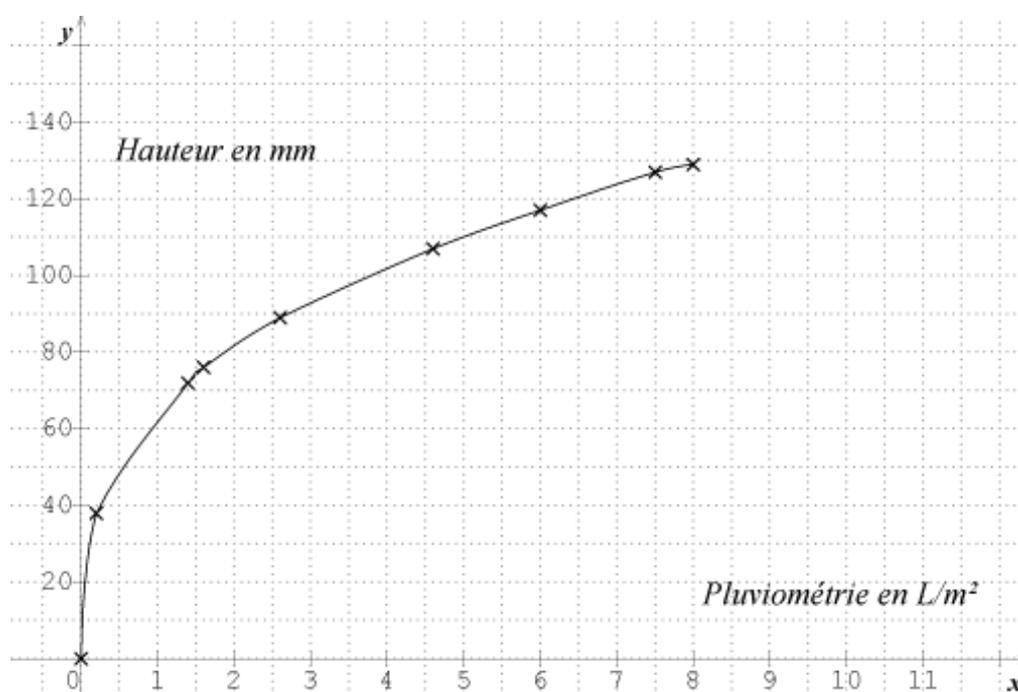
II.2.4.c : Analyse *a priori* de la situation

Une première étape du raisonnement doit amener les élèves à considérer la grandeur indépendante et la grandeur dépendante, ce qui signifie de faire abstraction des dates. Les élèves sont alors amenés à réorganiser les données en niant l'ordre chronologique. Cette mise en relation peut être faite de manière isolée à partir de quelques valeurs ou bien elle peut être organisée en rangeant les données dans un nouveau tableau mettant en évidence les deux grandeurs importantes par ordre croissant. Cette organisation n'est pas indispensable pour répondre au problème à partir du moment où les connaissances des élèves les amènent à considérer que plus la pluviométrie est importante, plus la hauteur d'eau dans le pluviomètre augmente, ce qui revient à savoir que les deux grandeurs varient dans le même sens, mais elle peut aider à la représentation du problème. Nous obtenons alors le tableau de données suivantes :

Pluviométrie en L/m ²	0	0,2	1,4	1,6	2,6	4,6	6	7,5	8
Hauteur d'eau dans le pluviomètre en mm	0	38	72	76	89	107	117	127	129

Tableau 22: Hauteur d'eau dans le pluviomètre (en mm) en fonction de la pluviométrie (en L/m²)

On peut aussi représenter la situation sur un graphique (voir graphique 13).



graphique 13: Hauteur d'eau dans le pluviomètre (en mm) en fonction de la pluviométrie (en L/m²)

Ici encore la difficulté réside dans la mise en relation des deux grandeurs pour les représenter sur un seul et même graphique.

L'analyse des données doit amener les élèves à repérer que s'il y a un problème, ce sera pour une pluviométrie entre 8 L/m^2 et 11 L/m^2 , ce qui limite l'étude à la date du 21 mars.

Beaucoup de questions peuvent venir du contexte et du passage du discret au continu. Si l'augmentation du niveau de l'eau dans le récipient lorsqu'il pleut amène une représentation continue de la variation de hauteur dans le pluviomètre, le manque d'informations sur la pluviométrie peut laisser penser que les valeurs indiquées sont des moyennes. Ces remarques doivent permettre de différencier clairement la fonction théorique de la fonction empirique.

La relation n'étant pas affine, les élèves ne devraient pas être tentés de mettre en œuvre des procédures liées à la proportionnalité. Cependant la courbe peut être approchée localement par une droite.

Ainsi on sait que dès que la pluviométrie dépasse 8 L/m^2 , on a un risque pour que la hauteur d'eau du pluviomètre dépasse 129 mm . La question reste de savoir si pour une pluviométrie de 11 L/m^2 , la hauteur est encore en dessous de 142 mm . Pour certains élèves, le principe de précaution suffit à affirmer que M. Legoff doit s'inquiéter. Pour d'autres la question reste posée.

Les valeurs numériques ont été modifiées au fur et à mesure des expérimentations pour que les approximations permettent malgré tout d'argumenter la prise de décision et que le graphique soit relativement simple à tracer pour permettre de faire des conjectures par lecture graphique.

II.2.4.d : Les procédures envisagées

- **L'approximation graphique** : on peut prolonger la courbe par un tracé de même direction et vérifier si le tracé est en dessous de la droite d'équation $y = 142$. La lecture est approximative et ne permet pas de prendre la décision.

- **La conversion** : pour répondre plus précisément à la question, une procédure experte consiste à établir la formule exprimant la hauteur d'eau dans le pluviomètre en fonction de la pluviométrie. Cette expression n'est pas simple et demande des données supplémentaires. Ce travail peut être envisagé en 3^e ou seconde avec des aides. Par exemple si on considère que le pluviomètre est un cône de hauteur 30 cm et de base un disque de rayon de 10 cm , on peut établir que la hauteur de l'eau dans le pluviomètre en mm est le produit de 300 par la racine cubique du centième de la pluviométrie en litre par m^2 . Les élèves qui se lancent dans cette procédure sans donnée supplémentaire risquent de rester sur des questions de conversion.

- **L'interpolation linéaire** : nous avons ici un des objectifs de l'étude des fonctions affines qui est la modélisation de problèmes complexes par des situations affines afin de permettre une prise de décision.

Pour cette approximation il s'agit de choisir l'intervalle le plus petit possible. Si nous prenons par exemple les valeurs 7,5 et 8 ; nous obtenons :

7,5	8
127	129

On remarque que $7,5 + 0,5 = 8$ alors que $127 + 2 = 129$, or pour atteindre 142 la hauteur doit augmenter de 13 mm à partir de 129, ce qui correspondrait à 6,5 fois l'augmentation de 2mm ci dessus. On aura donc une augmentation de la pluviométrie de $6,5 \times 0,5L/m^2$ soit $3,25L/m^2$ donc $11,25L/m^2$. Ce qui permet de dire que M. Legoff ne doit pas s'inquiéter.

Si on choisit d'autres valeurs voisines, on aura une approximation différente et la conclusion sera elle aussi différente. Par exemple en prenant les valeurs pour 6mm et 8mm :

6	8
117	129

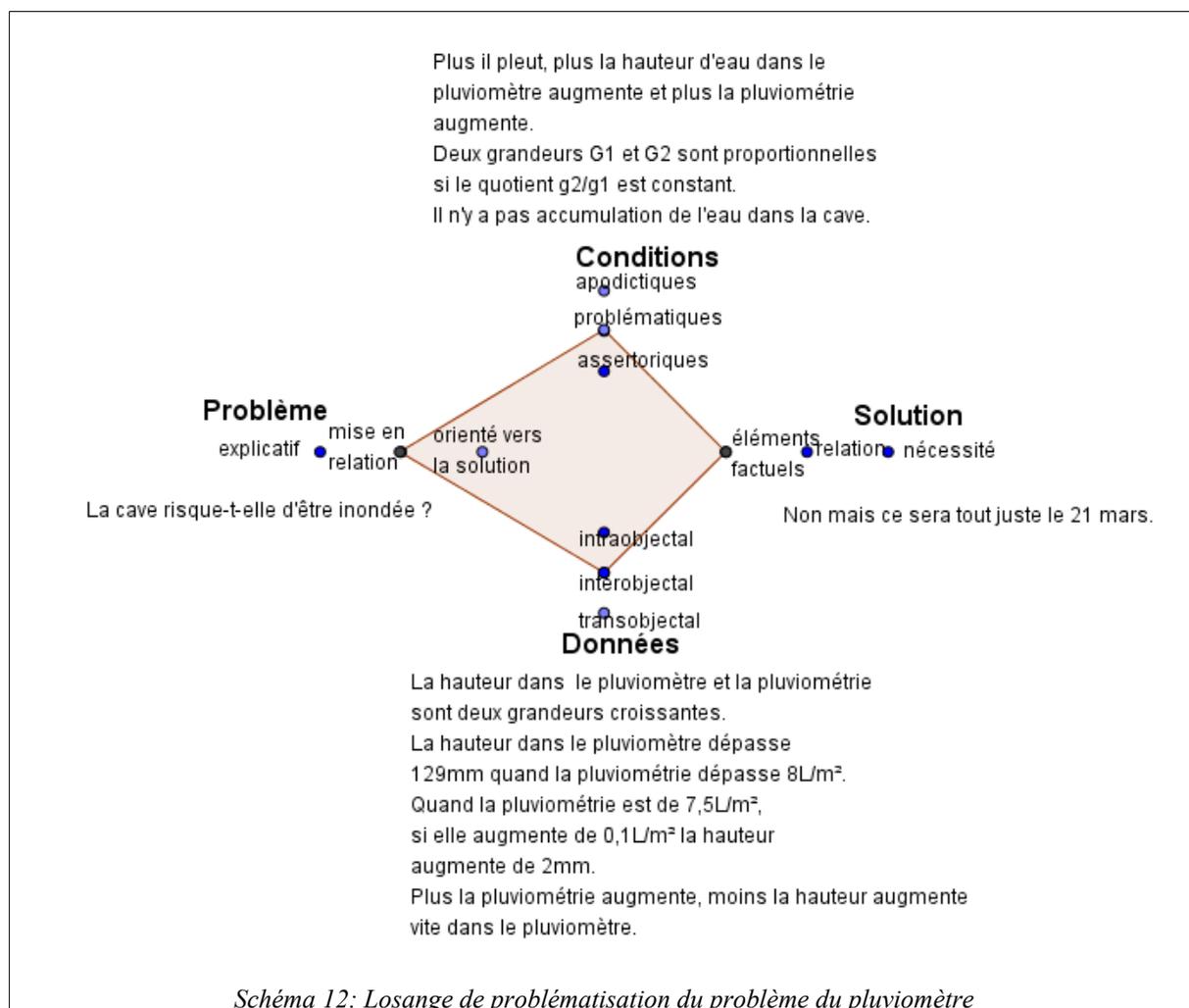
Le pluviomètre augmente de 12mm quand la pluviométrie augmente de $2L/m^2$, donc pour augmentation de $3L/m^2$ la hauteur sera de $129 + 12 + 6 = 147mm$. M. Legoff doit donc s'inquiéter.

Nous avons donc une même procédure qui amène deux conclusions opposées. La seule différence est le domaine d'approximation. On peut justifier de la pertinence du premier calcul en montrant que la courbe monte de moins en moins vite ce qui correspond au fait que les variations sont dans un rapport qui est de plus en plus petit.

- **La détermination d'une fonction affine** : le traitement précédent utilise la proportionnalité des accroissements mais on peut imaginer d'autres procédures, comme la recherche de l'expression de la fonction affine f telle que $f(7,5) = 127$ et $f(8) = 129$. Suivant les savoirs disponibles, différentes techniques peuvent être utilisées (système linéaire de deux équations à deux inconnues, équation de droite, calcul vectoriel...).

II.2.4.e : Losange de problématisation du problème du pluviomètre

L'analyse précédente nous permet de construire un losange de problématisation reprenant d'une part les conditions et d'autre part les données qui permettent de modéliser localement la situation par une fonction affine. Il reste un implicite fort qui est que l'eau ne s'accumule pas de jour en jour dans la cave.



Le problème nécessite la mise en relation des deux grandeurs (hauteur d'eau dans le pluviomètre et pluviométrie) et la solution est une solution factuelle, il s'agit de prendre une décision oui ou non. Les conditions sont problématiques car les élèves ne disposent pas d'une procédure de résolution qu'ils peuvent appliquer. Ils doivent ouvrir de nouveaux possibles. Le traitement des données doit se faire nécessairement de manière inter-objectale puisque la réponse ne peut pas s'appuyer sur une seule donnée, du moins dans un cadre mathématique.

II.2.4.f : Analyse des expérimentations en classe de sixième

La situation a été proposée dans une classe de sixième le 24 mars 2014. Les élèves sont par groupes de 3 ou 4 et doivent rédiger une chronique de leur recherche (voir annexe 21). L'enseignant que nous désignerons E1 n'apporte aucune aide sur cette première étape. Notre objectif est de voir comment les élèves traitent les données et quelles procédures ils utilisent alors qu'ils n'ont pas travaillé la notion de fonction.

Dans la version du problème proposée en sixième les valeurs étaient différentes de celles exposées précédemment. La hauteur critique est de 130mm et on obtient le tableau 23.

Pluviométrie en L/m ²	0	0,2	1,4	1,6	2,6	4,6	7,5	7,6	11
Hauteur d'eau dans le pluviomètre en mm	0	38	72	76	89	107	127	129	144

Tableau 23: Hauteur d'eau dans le pluviomètre (en mm) en fonction de la pluviométrie (en L/m²)

Dans cette version la pluviométrie la plus élevée est prévue le 21 mars, elle est de 9mm alors qu'elle reste inférieure à 7,6 sur les autres dates. La question est donc de savoir si entre 7,6L/m² et 11L/m² la hauteur de 130mm est atteinte à 9L/m². Par rapport à notre situation présentée plus haut qui proposait une interpolation par prolongement, il s'agit ici d'une interpolation sur un intervalle.

Nous allons analyser les productions des différents groupes.

Groupe A : les élèves ont identifié dans les deux tableaux les dates du 10 mars et du 11 mars qui correspondent à 11 et 7,6L/m² et ils ont fait une croix pour repérer la date du 21 mars sur la feuille distribuée aux élèves avec les données du problème. Ils ont donc bien identifié l'intervalle sur lequel il faut travailler. Ils n'ont pas organisé les données dans un nouveau tableau mais ils concluent (voir extrait 69) :

Oui, Monsieur Legoff doit s'inquiéter pour sa cave
le 21 mars 2013.
Car cela dépasse 7,65.

7,6 = 129 0,1 = 2 7,65 = 130
7,5 = 127 0,05 = 1

Extrait 69: Production activité "Pluviométrie" 6^e groupe A

On remarque que le groupe met les données en relation en utilisant le symbole d'égalité entre les deux grandeurs. Les unités ont disparu, les élèves travaillent donc sur des nombres. Cette écriture pourrait être rapprochée de $f(7,6) = 129$ et $f(7,5) = 127$.

En face ils écrivent la correspondance liée aux variations. En effet, 0,1 correspond à la variation de 7,5 à 7,6 et 2 à celle de 127 à 129. Ils symbolisent donc ici qu'une variation de 0,1 pour l'une correspond à une variation de 2 pour l'autre. Enfin ils utilisent la proportionnalité des écarts pour dire qu'une variation de moitié, donc de 0,05 de l'une correspond à la variation de moitié de l'autre, c'est-à-dire 1. Ce qui donne que 7,6 augmenté de 0,05 correspond à 129 augmenté de 1. Comme 7,65 correspond à 130 et que la hauteur maximum doit être de

130 mm, les élèves concluent que dès que la pluviométrie dépasse 7,65 L/m², il y a un risque d'inondation.

Groupe B : Ce groupe conclut aussi au risque d'inondation. Il fournit un compte-rendu (voir extrait 70).

Calcul:

7 mars: 127 mm = 7,5
 11 mars: 129 mm = 7,6

127 mm = 7,54 L

Il y a une intervalle de 2 mm entre la quantité d'eau du 7 mars (127 mm) et celle du 11 mars (129 mm).

Selon la météo (celle-ci ne se trompe pas), la quantité d'eau en L par m² du 7 mars (7,5) et celle du 11 mars (7,6) a une intervalle de 0,10.

~~Donc l'intervalle entre 1 jour~~

Extrait 70: Production activité "pluviométrie" classe de 6e groupe B

Ce groupe s'intéresse aussi au voisinage de 130 mm et donc recopie les valeurs prises les 7 et 11 mars. Ces élèves mettent en relation les deux grandeurs en utilisant aussi le signe d'égalité. Ici, l'unité est conservée pour la première grandeur et ne figure pas pour la seconde. De plus, la date est indiquée. La ligne suivante fait apparaître la même égalité sans la date et avec l'unité 7,5 L. Cette ligne effacée puis recopiée en dessous amène une confusion entre L et 4 et on peut lire 7,54 L mais cette valeur ne semble pas correspondre à un calcul. Comme le groupe A, ce groupe s'occupe ensuite des variations. Le raisonnement n'est pas mené à son terme mais dans la partie qui est rayée, on voit que les dates sont sans doute un obstacle, les élèves ne savent pas vraiment comment exploiter ces données.

Groupe C : Cette production est intéressante car les élèves prennent soin de formuler leur problème. Ils n'arrivent pas à s'extraire de la chronologie et ils se focalisent donc sur ce qui se passe du 16 au 21 mars. Ils ne réorganisent pas les données mais ils extraient la partie

du tableau correspondant à la période critique. Ils concluent que M. Legoff doit s'inquiéter puisque 9 est supérieur à 7,6 qu'ils identifient comme étant le maximum. Ici le discret est un obstacle, comme le risque est à 130 mm, les élèves concluent que 129 mm est le maximum à ne pas dépasser, obtenu pour 7,6 L/m². Ils n'envisagent pas une hauteur de 129,8 mm, et ne se posent pas la question des variations.

Pour savoir si la cave de Mr Legoff s'inonde il faut regarder la date du 11/03/13. On constate que la date du 11 du pluviométrie en litre par m². On voit qu'il y a eu 7,6 m² donc il faut regarder le 16, 17, 18, 19, 20 et 21 l'eau ne dépasse pas 7,60 m.

Extrait 71: Production activité "Pluviométrie" 6^e groupe C

Trois autres groupes ont le même raisonnement et concluent donc très vite au fait que M. Legoff doit s'inquiéter.

Groupe D : Ce groupe n'a pas rendu l'intégralité de son travail, il a organisé les données dans un tableau regroupant les dates, la pluviométrie et la hauteur d'eau. Ce groupe a ensuite cherché une conversion. La seule information donnée est que 3,4 L = 3 400 m. On peut supposer qu'ils ont tenu compte de la taille des nombres pour chercher un système de conversion mais que ces calculs n'ont pas abouti. L'utilisation d'un effaceur atteste d'une discussion ou d'essais dans le groupe qui ont amené des révisions de ce qui avait été écrit.

Réponse: Oui, monsieur Legoff doit s'inquiéter car = 3,4 l = 3400ml.

Extrait 72: Production activité "Pluviométrie" 6^e groupe C

Groupe E : Comme l'équipe précédente, le problème est posé : « Il faut trouver combien il y aura de m² à 130 m ». Ce groupe utilise les données des 7 et 12 mars sans que ce choix soit explicite. On peut supposer qu'il choisit les données proches des 130 mm mais alors, pourquoi ne pas utiliser la donnée du 11 mars qui est de 129 mm ? Peut-être les calculs ont-ils semblé plus faciles puisque les écarts sont plus importants. Les élèves ont calculé les variations et symbolisent la proportionnalité des accroissements par l'égalité 2,9 m² = 20mm. Ils utilisent ensuite la proportionnalité pour calculer la variation correspondant à 3 mm et obtiennent que la hauteur de 130 mm correspond à 7,935 L/m², ce qui leur permet de conclure. Les unités sont indiquées même si elles sont erronées, on peut penser que c'est un outil de contrôle pour vérifier de quelle grandeur il s'agit à chaque étape.

Il faut trouver combien il y aura de m^2 à 130m

le 7 et le 12 mars, il y a eu 127 et 107 mm de pluie, donc 20 mm de différence. En m^2 y a eu 7,5 et 4,5 m^2 de pluie donc 2,9 de différence. $2,9 m^2 = 20 mm$.

On cherche pour 130, 3mm de plus de 127mm (7,5 m^2)
 $3mm = ? m^2$

$(2,9 \div 20) \times 3 = 0,435$
 $0,435 + 7,5 = 7,935$

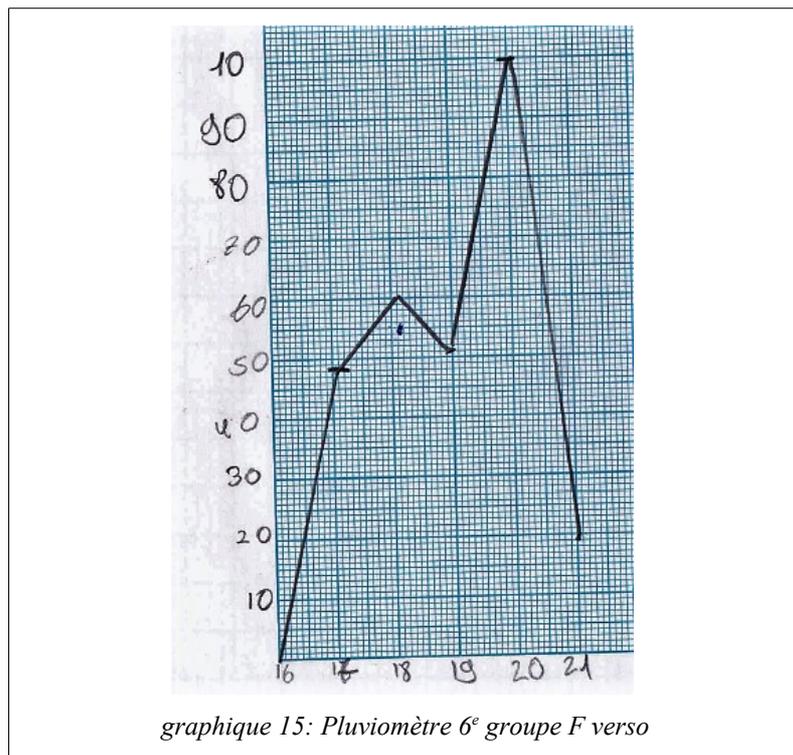
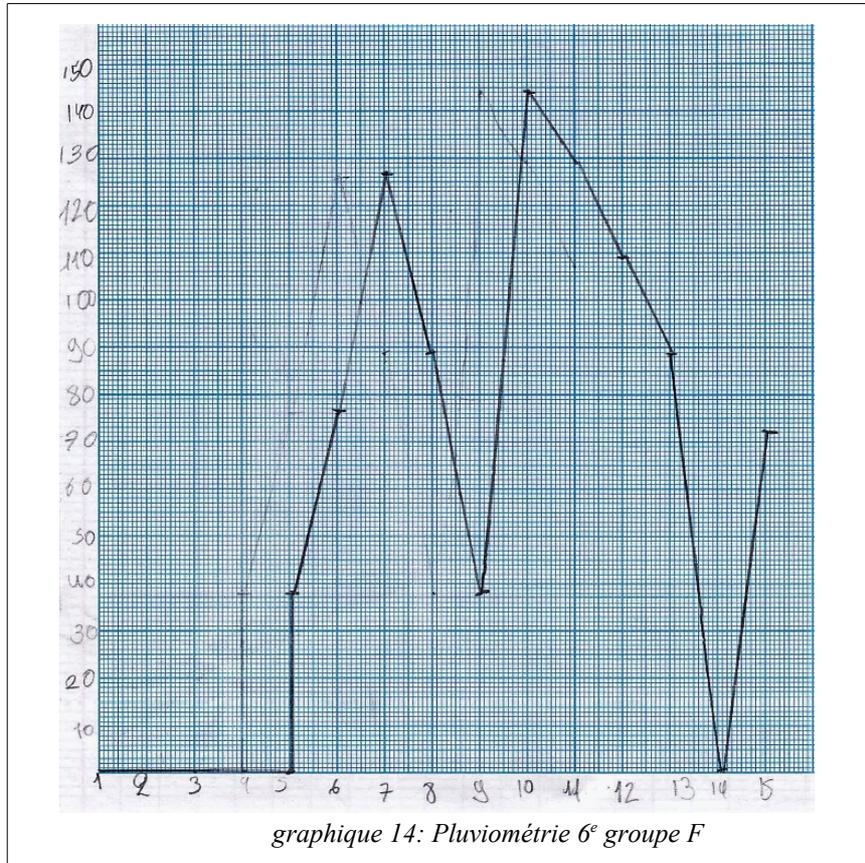
À partir de 7,935 m^2 de pluie, la cave s'inondera, le 21 mars, le jour de son retour
 (9, m^2)

Extrait 73: Production activité "Pluviométrie" 6^e groupe E

Groupe F : Ce groupe a rendu un bilan qui ne présente que deux courbes collées sur une même feuille recto et verso, ce qui ne permet pas de les comparer entre elles. La première est le graphique représentant la hauteur en mm dans le pluviomètre en fonction de la date du 1^{er} au 15 mars. Le second prolonge la courbe du 16 au 21 mars. Le premier point a été placé à l'abscisse 17, il semble y avoir un décalage et la dernière valeur est manquante. Si bien que le 16 qui se retrouve à l'origine du repère est relié au point suivant. Le même type de décalage est visible sur le premier graphique qui a été gommé et refait. Par contre les ordonnées des points correspondent globalement à la pluviométrie en L/ m^2 à laquelle serait appliqué un coefficient multiplicateur voisin de 15. Nous pouvons alors nous demander d'où vient ce coefficient ? Une hypothèse est que le groupe a cherché un coefficient de proportionnalité entre la pluviométrie et la hauteur d'eau. Pour les quotients $\frac{114}{11} \approx 13,09$ et $\frac{129}{7,6} \approx 16,97$ leur moyenne donne effectivement 15,03. Par contre nous n'avons aucun indice pour savoir si les élèves ont ordonné les données pour se focaliser sur ces valeurs. Le calcul des quotients est très différent pour $\frac{38}{0,2}$ on obtient 190 par exemple. Peut-être ont-ils testé tous les quotients et gardé une valeur moyenne correspondant aux environs de 130.

Voici les valeurs obtenues par application du coefficient multiplicateur de 15. On retrouve les ordonnées du second graphique avec un décalage d'une abscisse.

Pluviométrie	3,2	4	3,4	7	1,2	9
ordonnée	48	60	51	105	18	135



En conclusion, la situation proposée dès la sixième prouve que la procédure qui consiste à étudier la covariation et la proportionnalité des écarts est mise en application par les élèves et donc que le concept d'affinité est déjà outil sans que l'objet n'ait été étudié. Contrairement à notre hypothèse de départ qui était que la proportionnalité était un obstacle à la mise en place du concept d'affinité, il apparaît que des élèves s'emparent de ce concept dès la sortie de l'école élémentaire. Il semble que si la proportionnalité devient effectivement automatisée, cette automatisation relève du collège et non du primaire. A moins que la présentation des données ne soit un élément déterminant. En effet la présentation de données en tableau induit un traitement par la proportionnalité, ici les données ne sont pas mises en relation dans un même tableau.

L'obstacle du continu par rapport au discret apparaît dans la moitié des groupes. Il n'est pas lié au fait d'avoir un point de vue global ou local sur la fonction, les élèves étudient effectivement la covariation au voisinage du point (7,6 ; 129), donc localement, mais ils n'envisagent pas de valeurs intermédiaires entre 129 et 130. Nous pouvons aussi remarquer que les élèves peuvent traiter les données comme des nombres et donc indépendamment des unités, ce qui ne signifie cependant pas qu'ils élaborent un modèle théorique.

II.2.4.g : Analyse des expérimentations en classe de 5^e

La situation a été proposée dans deux classes de 5^e par un autre enseignant E2. Comme les classes de E2 ont l'habitude des narrations de recherche, les productions des groupes apportent des éléments d'analyse intéressants (voir annexe 22). La consigne donnée est « Vous répondrez à la question posée en ayant soin d'argumenter votre réponse. Si vous ne trouvez pas de réponse satisfaisante, vous indiquez vos difficultés, vos essais, vos erreurs, les pistes que vous avez suivies avec ou sans succès. » Le travail est individuel, il a été proposé le 29 janvier 2014 et a duré 30 à 40 minutes.

Nous allons analyser les procédures utilisées dans ces deux classes.

L'étude d'une seule donnée

Certains élèves concluent à partir d'une seule donnée en disant qu'ils n'ont trouvé aucune date où la pluviométrie est de 130mm. L'un d'eux écrit « Non car aucune météo annonce plus de 130mm pendant le 16 au 21 mars. »

Proportionnalité

Les élèves qui utilisent cette procédure utilisent les propriétés de linéarité en écrivant par exemple que si pour 1,6 L/m² on a 76 mm pour le double 3,2 L/m² on aura $76 \times 2 = 152$ soit 152 mm. Si les valeurs obtenues semblent ne pas correspondre, les élèves n'hésitent pas à jouer sur la virgule pour interpréter le 152 obtenu en 15,2 mm.

Une élève propose par exemple de multiplier la pluviométrie par 9 et de comparer à 130mm. Le coefficient 9 étant choisi car c'est la pluviométrie au 21 mars.

On constate que cette procédure est utilisée comme une technique sans que le sens soit interrogé par rapport aux valeurs obtenues ou traitées.

Explication physique

Un élève explique : « Monsieur Legoff ne doit pas s'inquiéter car l'eau va descendre au fur et à mesure grâce à la chaleur haute de la prévision météo car elle va de 1,2 à 9mm. » Cette explication laisse entendre une confusion entre pluviométrie et température. En tout cas, elle cherche à tenir compte d'un phénomène physique réel qui est l'évaporation. La difficulté dans ce type de contexte est la simplification nécessaire de la situation pour pouvoir la traiter. Cette modélisation d'un point de vue des sciences physiques est implicite alors que nous cherchons à expliciter un modèle mathématique. Deux théories sont donc utiles alors que nous ne tenons compte que d'une seule dans notre expérimentation.

Procédure somme

Les élèves ont eu l'idée d'additionner les hauteurs d'eau dans le pluviomètre. Il n'est pas précisé dans cette version du texte du problème que le pluviomètre est vidé à chaque prise de mesure, les élèves ont avec raison pensé que l'eau s'accumule de jour en jour. Nous avons modifié le problème pour éviter d'intervenir pour apporter cette précision à l'oral. Par contre ce qui est intéressant, c'est que les élèves ont additionné toutes les hauteurs du 1^{er} au 15 mars sans se préoccuper de ce qui se passerait ensuite puisqu'ils ont déjà leur conclusion. Le tableau de pluviométrie n'a donc pas été utilisé par certains élèves comme le montre l'élève B1 (voir extrait 74).

OUI, il devrait s'inquiéter car si on additionne tout ce qui va tomber, ça fera 909 mm:

$$446 + 429 = 273.$$

$$127 + 104 = 234$$

$$273 + 234 = 507.$$

$$89 + 89 = 178$$

$$76 + 72 = 148$$

$$38 + 38 = 76$$

$$178 + 148 = 326$$

$$326 + 76 = 402$$

$$507 + 402 = 909.$$

Extrait 74: Production activité "Pluviométrie" en 5^e élève B1

D'autres ont additionné les valeurs de la pluviométrie avant et après le départ de M. Legoff, comme l'a fait par exemple l'élève B2 (voir extrait 75).

Pour les précipitations Hélo quand Monsieur Legoff est parti. Il faut faire une opération.

$$3,2 + 4 + 3,4 + 7 + 1,2 + 9 = 27,8 \text{ mm}$$

Quand le monsieur Legoff a regardé les précipitations météo, il a vu les précipitations qui c'était marqué. L'autre calcul est de pluviomètre en centimètre par mètre.

$$0 + 0,1 + 0 + 10 + 0,2 + 1,6 + 7,5 + 2,6 + 0,2 + 1 + 7,6 + 4,6 + 2,6 + 0 + 1,4 = 35,43$$
~~35,43~~ $35,43 + 27,8 \text{ cm} = 63,23$

Quand le Monsieur n'était pas là il y avait 63,23 mm.

Il ne fallait pas qu'il s'inquiète.

Extrait 75: Pluviomètre 5^e élève B2
$$3,2 + 3,4 = 6,6$$

$$6,6 + 1,2 = 7,8$$

$$7,8 + 4 = 11,8$$

$$11,8 + 7 = 18,8$$

$$18,8 + 9 = 27,8$$

$$27,8 \times 6 = 166,8$$

On multiplie le résultat au nombre de jours c'est à dire 6 jours.

$$\begin{array}{r} 27,8 \\ \times 6 \\ \hline 166,8 \end{array}$$

Monsieur Legoff a des raisons de s'inquiéter car l'eau en accumulant au fil des 6 jours la première de la hauteur c'est à dire 1,66 m d'eau dans sa cour.

Extrait 76: Pluviométrie 5^e élève B4

Certains font les deux calculs en présentant cela comme deux essais et arrivent donc à une contradiction. Un autre encore (voir extrait 76) additionne les valeurs de la pluviométrie et trouve 27,8 mm pour la période du 1^{er} au 15 mars. Ensuite comme M. Legoff part 6 jours, il multiplie ce résultat par 6 pour prévoir la hauteur d'eau dans la cave, il conclut qu'il y aura $27,8 \times 6 = 166,8$ soit 1,66m d'eau dans la cave. Il y a ici une confusion qui semble venir de l'idée d'accumulation sur les 6 jours sans contrôle des résultats produits, des conversions ou du sens des opérations dans le contexte.

En fait, beaucoup d'élèves écrivent qu'ils ne savent pas ce qu'il faut calculer. Ils font donc des essais mais la somme des hauteurs donne 909 mm ce qui leur semble beaucoup, celle des valeurs de pluviométrie donne 67,1 L/m² ce qui semble peu. Comme les unités ne sont pas usuelles, les élèves sont nombreux à penser qu'une conversion doit permettre d'exprimer ce résultat en mm. Un élève écrit par exemple que 67,1 m² fera 671 mm d'eau.

Procédure conversion

Une autre procédure a consisté à chercher une conversion entre deux unités. Les élèves ont sans doute considéré que cet outil étudié en classe de 5^e était à privilégier. Ils sont nombreux à avoir posé des tableaux de conversion qu'ils utilisent pour exprimer les L en mm ou m². Ces conversions peuvent intervenir en début de calcul ou après des essais comme l'élève B3.

Monsieur Legoff doit s'inquiéter car son péage montre que l'eau dépassera les 130 mm d'eau. car si on convertit 11 m² en mm cela montre que ça fera 11 000 mm d'eau donc dépassera les 130 mm d'eau. La cave de monsieur Legoff sera inondée.

Km	km	dam	m	dm	cm	mm
			1 1	0	0	0

Extrait 77: Production activité "Pluviométrie" en classe de 5e élève B3

D'autres élèves cherchent des conversions plus complexes soit en cherchant une relation de proportionnalité, en multipliant par une puissance de 10, en divisant par 2 comme l'élève A4, ou en cherchant une formule comme l'élève A5 qui ne précise pas comment il obtient ses approximations. Il n'applique pas un coefficient de proportionnalité, il donne des résultats qui sont très proches du modèle qui a été appliqué. Peut-être fait-il une approximation locale en prenant une valeur proche parmi celles qui sont données sur la période du 1^{er} au 15 mars.

Il ne devrait s'inquiéter que le dernier jour qui est le 21 mars car il y aura 9 m² d'eau dans sa Pluviométrie.

16 mars = 3,2 m² qui est égal à ≈ 94 mm
 17 mars = 4 m² qui est égal à ≈ 100 mm
 18 mars = 3,4 m² qui est égal à ≈ 97 mm
 19 mars = 7 m² qui est égale à ≈ 117 mm
 20 mars = 1,2 m² qui est égal à ≈ 69 mm.
 21 mars = 9 m² qui est égal à ≈ 136 mm

Donc M^r Legoff ne devrait s'inquiéter que le 21/03/13.

Extrait 78: Production activité "Pluviométrie" en classe de 5^e élève A5

J'ai essayé de convertir les pa litres en ml

$$7,5 = 7500 \text{ ml}$$

$$1,6 = 1600 \text{ ml}$$

Ça ne marche car c'est tous les nombres bien au dessus de 190 mm et aussi je me suis rendu compte qu'il fallait faire en mm.

$$16 \text{ mars} = 16 \text{ car j'ai fait } 3,2 \text{ divisé par } 2 \text{ ce qui m'a donné } 16$$

$$17 \text{ mars} = 4 = 2 \text{ car c'est le quotient de } 4$$

$$18 \text{ mars} = 3,4 = 18 \text{ car c'est le quotient de } 3,4$$

$$19 \text{ mars} = 7 = 3,5 \text{ car c'est le quotient de } 7$$

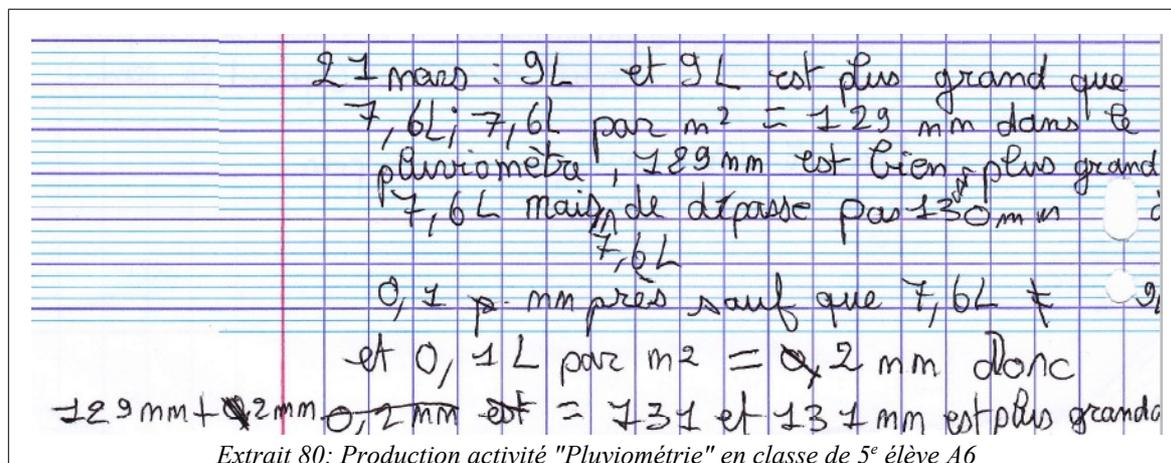
$$20 \text{ mars} = 1,2 = 6 \text{ car c'est le quotient de } 1,2$$

$$21 \text{ mars} = 9 = 4,5 \text{ car c'est le quotient de } 9$$

Extrait 79: Production activité "Pluviométrie" en classe de 5^e élève A4

L'étude des variations

Cette étude peut amener les élèves à parler de proportionnalité mais d'autres en restent au constat et à la comparaison.



Conclusion de l'expérimentation en 5^e

Le tableau 24 permet de comparer les procédures dans les deux classes que nous noterons 5^e A et 5^e B.

	5 ^e A	5 ^e B	Pourcentage global
Nombre d'élèves	29	25	
Conversion	6	6	22%
Somme	6	12	33%
Proportionnalité	3	1	7%
Approximation De la croissance	6	4	19%
Proportionnalité des écarts	3	0	6%
Formule	1	0	2%
Explication physique	1	0	2%
Pas de relation entre les grandeurs	0	1	2%
Situation non comprise	4	1	9%

Tableau 24: Activité « Pluviométrie » procédures utilisées en classe de 5^e

Nous pouvons constater que le tiers de l'effectif a utilisé la procédure « somme » et un quart les techniques de conversions. Les élèves ont visiblement cherché une technique de calcul mettant en relation les deux séries de valeurs et non les variations. Comparativement à l'expérimentation en 6^e, deux hypothèses peuvent être faites. La première est que le travail étant individuel, les échanges entre élèves n'ont pas permis de remettre en cause les représentations erronées comme cela a peut-être été possible en 6^e alors qu'ils étaient par groupes de 3 ou 4. La seconde est que les élèves plus habiles dans les procédures techniques

cherchent systématiquement à réinvestir ce qu'ils maîtrisent au détriment parfois du sens, ce qui pourrait relever du contrat didactique.

II.2.4.h : En classe de 3^e, avec les étudiants de Master MEEF 1^{er} degré ou des étudiants en apprentissage

Cette activité a été proposée à des étudiants de master MEEF 1^{er} degré pour une première activité sur la notion de fonction sans que le thème de travail soit donné et à des groupes d'étudiants en apprentissage dans les métiers du spectacle issus de filières plus courtes ou de terminales STI (Sciences et techniques de l'ingénieur). Ces séances n'ont pas été analysées avec un protocole de recherche mais servent justes à enrichir notre analyse auprès d'un public qui a suivi un enseignement en analyse au moins au niveau terminale avec plus ou moins de réussites dans le domaine mathématique. Nous tenons à faire figurer la synthèse de ces activités car elle apporte des éléments utiles à la compréhension de certains éléments qui vont nous permettre de penser les situations d'enseignement que nous allons expérimenter.

L'observation des séances a permis de constater que les différents groupes ont tous eu le même parcours dans la recherche de ce problème :

1. la recherche d'un changement d'unités pour obtenir des mesures dans la même unité ;
2. l'organisation des données dans un seul tableau en ordonnant les données et en oubliant les dates ;
3. la détermination de l'intervalle qu'il faut étudier ;
4. le calcul par produit en croix et la vérification par le graphique ou l'inverse ou encore par plusieurs calculs ;
5. le doute quant à la procédure ;
6. le calcul des variations ;
7. le calcul par la proportionnalité des écarts au voisinage de la valeur critique ;
8. le contrôle du résultat au regard de l'ensemble des données.

Ces différentes étapes et la constante des observations attestent que le milieu est favorable à un déplacement d'une approche par processus à une approche covariationnelle.

La spécificité de ce problème est qu'il nécessite de mettre en relation différentes données pour permettre un traitement et qu'aucune technique ne peut être directement appliquée pour sa résolution. La solution ne dépend pas que des résultats des calculs puisque nous appliquons un modèle et que ce modèle a ses limites. Les arguments proposés par les élèves montrent bien en quoi le contexte joue un rôle dans la résolution, les mathématiques ne permettent que de donner un élément supplémentaire dans la prise de décision. En particulier il faut noter que la pluviométrie est estimée, c'est une prévision, elle peut très bien être beaucoup plus importante que prévu. Le calcul montre que nous serons très proches du seuil, il est donc impossible de certifier que nous ne dépasserons pas la hauteur limite. Le

phénomène n'est pas lié aux seules précipitations : le sol peut être humide et moins drainer l'eau à partir d'un certain moment, l'évaporation doit aussi jouer un rôle. Par ailleurs, des élèves de 3^e ont expliqué que le risque ne peut pas être mesuré si on ne sait pas ce qui doit être protégé dans la cave. Si M. Legoff a vraiment besoin de protéger sa cave, il lui suffit d'acheter une pompe pour ne plus avoir de craintes.

Du côté des conditions (voir schéma 12 p.208), on peut voir que les connaissances nécessaires sont limitées au niveau des techniques de calcul et de la technologie (il suffit de connaître la définition de deux grandeurs proportionnelles), par contre la représentation du problème est très liée à une connaissance externe à l'école issue de l'expérience : connaissance de ce qu'est un pluviomètre (plus il pleut, plus la hauteur d'eau va augmenter dans le pluviomètre) avec une idée de continuité dans le phénomène qui semble naturelle. Les unités de raisonnement U1 et U2 ne posent donc pas de grosses difficultés. Les élèves identifient la relation fonctionnelle et la considèrent sous l'angle de la variation.

Il s'agit donc pour les élèves de construire un modèle pour représenter et traiter la manière concomitante dont les deux grandeurs vont croître. Pour les élèves qui sont convaincus qu'il s'agit d'une même grandeur dans deux unités différentes, la recherche d'un processus de conversion les amène à chercher un coefficient multiplicateur donc une proportionnalité entre les deux séries de valeurs. Le milieu est suffisant pour remettre en cause cette procédure, une perception locale du phénomène ne permet pas de résoudre le problème. Une perception globale du processus est nécessaire pour voir que les deux grandeurs varient bien dans le même sens mais que, plus la pluviométrie augmente, plus la hauteur d'eau dans le pluviomètre augmente lentement. Pour poser le problème, il faut donc, d'une part avoir une vision globale du processus et, d'autre part, un traitement local des données. Nous avons besoin ici de mobiliser les unités de raisonnement U4 pour décrire le comportement global de l'augmentation de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente mais aussi des unités de raisonnement U6 pour généraliser ce comportement.

Ce changement de point de vue a lieu car la situation permet des rétroactions qui invalident les représentations erronées. La première idée étant de travailler sur les conversions, les élèves se perdent dans des calculs qu'ils n'arrivent pas à interpréter. Ils partent de l'expérience qu'ils ont de la pluie et disent que s'il pleut sur une surface, la hauteur d'eau est la même sur toute la surface. La pluviométrie est la mesure de cette hauteur d'eau, si on l'exprime en mm, on peut vérifier que $1\text{L}/\text{m}^2$ correspond à 1mm. On peut donc considérer que les deux grandeurs sont dans la même unité, la question est alors de savoir pourquoi nous n'avons pas les mêmes valeurs. L'image peut aider à concevoir que le pluviomètre peut avoir une forme qui fait que la hauteur n'est pas proportionnelle au volume. Cette première étape met au travail l'unité de raisonnement U1 et comme elle n'est pas évidente, cette étape est clairement discutée dans les groupes. Il peut arriver que l'enseignant intervienne pour relancer l'activité si les élèves n'arrivent pas à quitter cette représentation malgré les débats.

L'étape suivante est induite par l'intuition que le risque ne va apparaître qu'autour de la valeur 11 qui est la pluviométrie prévue le 21 mars. L'argumentation prend appui sur une étude rapide du comportement des deux variables. A ce stade, certains élèves peuvent déjà

proposer une réponse justifiée par une estimation de la prise de risque : « Il n'a qu'à rentrer plus tôt pour être tranquille. » Le doute rend nécessaire d'établir la concomitance des variations entre les deux grandeurs. Cela passe par le rapprochement des grandeurs dans un même tableau. Une fois ce rapprochement effectué l'hypothèse de la proportionnalité est vite évacuée, il faut donc décrire le comportement de la fonction. C'est à ce stade que plusieurs registres peuvent être utilisés : le tableau ordonné, le graphique. Le graphique montre la croissance de la fonction mais la courbe monte de plus en plus doucement. Ce constat peut être rapproché du calcul des variations à partir du tableau. Ces variations sont le plus souvent indiquées par des flèches opérateurs. Les débats dans les groupes amènent les élèves à envisager une modélisation du comportement au voisinage de 8. Sans le formaliser, les élèves considèrent que la fonction peut être confondue avec une fonction affine au voisinage de cette valeur et donc qu'on peut supposer que la courbe se prolonge par un segment ou que les variations peuvent être les mêmes pour les valeurs suivantes. La modélisation est donc nécessaire pour résoudre le problème et l'approximation affine se justifie par la proportionnalité des écarts. La notion est donc utilisée comme outil sans avoir été objet d'étude. La formalisation par contre est difficile puisque les élèves ne disposent pas de notations conventionnelles pour désigner les variations et opérer sur ces variations. La nécessité de travailler sur les variations apparaît beaucoup plus avec le besoin de prolonger le phénomène que dans l'interpolation linéaire sur un intervalle. Sans doute l'idée de prolonger amène à poser des hypothèses et ouvrir des possibles alors que sur un intervalle où certaines données sont déjà connues, ces mêmes hypothèses sont considérées comme des « erreurs » par rapport à une réalité que l'on peut observer. Dans le premier cas, on ne sait pas si c'est vrai mais on pense que c'est possible, dans le second on sait que c'est faux. Le vocabulaire utilisé montre des analogies avec des grandeurs associées à des taux de variation comme la vitesse (« Ça monte de moins en moins vite. »).

Le risque est que les élèves retiennent de cette activité que le comportement d'une fonction peut être généralisé et en particulier que toutes les fonctions sont monotones. C'est pourquoi nous avons réfléchi à une autre situation mettant en jeu une fonction non monotone.

II.2.5 : L'interpolation linéaire sur un intervalle sur lequel on considère le comportement d'une fonction continue et monotone : le problème du marchand de glace

Il nous fallait proposer aux élèves une situation dans laquelle les deux grandeurs n'ont pas le même sens de variation, c'est-à-dire une situation que l'on peut modéliser par une fonction qui ne soit pas monotone. Nous avons pensé aux fonctions coûts qui sont généralement des fonctions cubiques. La situation a été élaborée dans le groupe « Fonctions au collège » du groupe IREM de Nantes et expérimentée dans les classes de 3^e de deux collèges du groupe en mars 2015.

II.2.5.a : Le choix de la situation

Dans ce problème, nous avons souhaité garder une présentation de deux grandeurs fonction du temps (la quantité produite et le coût de production) et amener les élèves à étudier la relation fonctionnelle entre ces deux grandeurs. La fonction obtenue est une

fonction cubique avec un changement de variation. Il fallait qu'une solution attendue soit au voisinage de ce changement de variation pour amener les élèves à réduire l'intervalle d'étude. Le problème doit provoquer le doute sur le nombre de solutions pour amener les élèves à considérer le changement de variation. Les unités de raisonnement U5 et U6 sont mobilisées pour considérer à la fois les changements de comportement de la fonction et la généralisation d'un comportement sur un intervalle de plus en plus petit du domaine de définition.

Pour de nouveau amener les élèves à faire abstraction du temps, nous avons proposé deux tableaux, l'un donnant les quantités produites en fonction des mois de l'année, et l'autre les coûts de production de ce produit en fonction des mois de l'année. Notre hypothèse de départ était que les élèves allaient, comme dans la première situation, organiser les données pour montrer la relation entre le coût de production et les quantités produites et devoir ainsi trouver un moyen de donner une solution approchée du problème par résolution graphique ou par approximation linéaire. Le contexte est une fabrique de glaces, il permet de justifier une évolution des quantités produites en fonction des saisons. La fonction empirique est donc définie de manière discrète et la continuité ne va pas de soi. La fonction théorique qui modélise la situation est donc liée à des choix qui devront être justifiés. Pour que le problème ait plusieurs solutions, nous avons choisi d'étudier le cas où un coût de production maximal est défini. Il fallait trouver une raison valable pour limiter les coûts et que cette explication procure aussi des pistes d'interprétation. Ici l'idée d'investissement permet de comprendre que les coûts tiennent compte des contraintes liées à l'achat d'un local, de matériel ou de machines. La situation est présentée page 225.

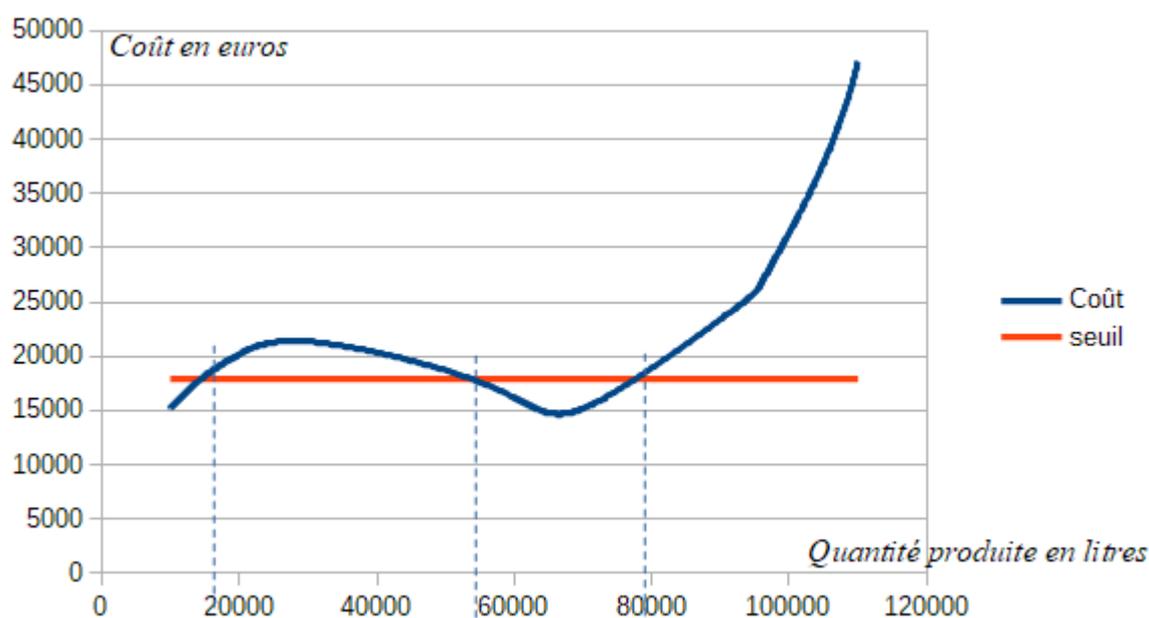
Les objectifs d'apprentissage de cette situation sont la réactivation des connaissances de la numération (nombre de dizaines, nombre de centaines) ; la confrontation avec la covariation de deux grandeurs non proportionnelles et non monotone ; l'identification de cette covariation et la formalisation de cette covariation dans le registre des graphiques ou des tableaux ; l'utilisation de l'outil informatique pour traiter le problème et l'utilisation d'une procédure de résolution (lecture graphique, utilisation des écarts pour calculer une valeur approchée, utilisation d'un procédé proche de la dichotomie ou de moyennes localement). Les prérequis sont l'utilisation du tableur, savoir représenter des données sur un graphique et le calcul d'une quatrième proportionnelle. Nous avons choisi une fonction cubique pour définir une fonction coût. Les données sont dans deux tableaux qui n'ont pas la même orientation, pour que les élèves soient contraints de réorganiser les données en fonction de la question qu'ils vont se poser. Les variables ont été choisies pour que les variations soient visibles sur un graphique, que les valeurs solutions ne soient pas ni trop proches ni trop éloignées, et pour qu'une interpolation linéaire soit possible. Les unités sont choisies pour un traitement aisé au niveau des nombres. Les dates ont été écrites en lettres pour ne pas induire un traitement numérique. Enfin la question relève de la prise de décision, l'idée étant de confronter les élèves à la nécessité de modéliser une situation afin d'avoir des éléments tangibles pour choisir, décider, entreprendre. Cela suppose qu'il n'y pas de solution exacte au problème mais juste une mise en évidence des contraintes du problèmes et des nécessités qui font que la réponse adaptée est celle qui prend en compte le maximum de ces contraintes. En fait, les données permettent de tracer un nuage de points. On pourrait très bien avoir deux quantités

identiques mais des coûts de fabrication différents, ce qui rendrait impossible la modélisation par une fonction. La covariation coût-quantité n'est qu'une hypothèse de travail.

Nous sommes partis des données suivantes :

Mois	12/13	1/14	2/14	3/14	4/14	5/14	6/14	7/14	8/14	9/14	10/14	11/14
Quantité (L)	15000	18000	20000	25000	70000	96000	100000	110000	95000	60000	18000	10000
Coût (€)	18200	19500	20200	21300	15200	26800	31400	47200	25900	16200	19500	15200

La question est de chercher quelle doit être la quantité produite pour que le coût de production ne dépasse pas 18 000€ chaque mois. L'intersection de la courbe représentative de la fonction cubique avec la droite d'équation $y = 18\ 000$ correspondant au seuil de 18 000€ donne trois points (voir graphique 16). Deux intervalles sont donc solution du problème. Les lectures graphiques étant très imprécises, les élèves doivent chercher un moyen pour donner une meilleure approximation et justifier leur choix.



graphique 16: variation du coût en euros en fonction de la quantité produite en litres

Les glaces de Monsieur LEGOFF

L'entreprise de Monsieur Legoff fabrique des glaces qui sont vendues dans les sites touristiques de la région.

Il souhaite investir dans un nouveau local en 2015, mais pour cela il ne faut pas que ses coûts de fabrication soient trop importants. Il a calculé qu'il serait bon qu'en 2015, il ne dépasse jamais 18 000 € de coûts dans le mois. Sachant que les coûts de fabrication dépendent seulement des quantités produites, il faut qu'il puisse prévoir les quantités de glaces à ne pas dépasser !

Il a trouvé le tableau indiquant les quantités produites depuis 12 mois :

mois	Déc. 2013	Jan. 2014	Févr. 2014	Mars 2014	Avril 2014	Mai 2014	Juin 2014	Juillet 2014	Août 2014	Sept. 2014	Oct. 2014	Nov. 2014
Quantité produite en dix milliers de litres	1,5	1,8	2	2,5	7	9,6	10	11	9,5	6	1,8	1

Son comptable lui a fourni les coûts de fabrication sur ces 12 mois :

Mois	Coûts de fabrication en centaines d'euros
Déc. 2013	182
Janv. 2014	195
Févr. 2014	202
Mars 2014	213
Avril 2014	152
Mai 2014	268
Juin 2014	314
Juillet 2014	472
Août 2014	259
Sept. 2014	162
Oct. 2014	195
Nov. 2014	152

Peux-tu l'aider à savoir quelles quantités il doit produire pour ne pas dépasser 18 000€ de coût de fabrication ?

II.2.5.b : Le scénario

Lors de la première séance, les élèves ont le document et le lisent individuellement. Un temps de questions d'explicitation est prévu et ensuite les élèves cherchent individuellement. Ils rédigent une narration de recherche. La deuxième séance se fait en salle multimédia, les élèves sont par groupes de trois ou quatre. Ils procèdent à une mise en commun des procédures dans le groupe et il s'agit de rédiger une solution. L'utilisation d'un tableur est possible puisque les ordinateurs sont disponibles. La production de l'écrit pour le groupe peut se faire sous forme numérique ou non. La séance 3 permet, à partir des réponses des groupes, d'explicitier et de valider les procédures. Les élèves doivent chercher comment montrer les variations du coût de production en fonction de la quantité produite. Ils produisent une affiche et une solution par groupe. Une synthèse est réalisée collectivement visant à isoler les conditions nécessaires pour pouvoir traiter un problème par une méthode linéaire.

II.2.5.c : Analyse a priori de la situation

Le milieu évolue au fur et à mesure des séances puisque s'ajoutent des données et des connaissances produites par les élèves. Nous faisons l'hypothèse que les élèves vont naturellement mobiliser les outils liés à la proportionnalité : calcul de moyenne, recherche d'un minimum à ne pas dépasser. Les procédures attendues sont la résolution par lecture graphique ou l'utilisation d'un tableau et éventuellement du tableur pour des calculs de moyennes. La première étape du raisonnement est de conclure à la non-proportionnalité soit en montrant qu'il n'existe pas de coefficient multiplicateur, ce qui reviendrait à définir un coût de production unitaire, soit en décrivant les variations, soit en repérant que le tracé ne donne pas une droite passant par l'origine. Les élèves peuvent donc entrer dans l'activité et le milieu offre des rétroactions pour valider les hypothèses. La seule procédure disponible pour résoudre le problème est le tracé d'un graphique et une lecture graphique. Certains élèves peuvent aussi utiliser des procédures d'approximation linéaire sur des intervalles pour déterminer une valeur approchée par le calcul. Une nécessité doit alors apparaître qui est que cette approximation n'est possible que sur un intervalle où les grandeurs varient dans le même sens et sont relativement proches. L'activité mobilise des compétences dans le domaine de la prise d'initiative. Les productions attendues doivent donc expliciter les choix et les justifier. L'utilisation du tableur doit permettre d'inciter les élèves à effectuer des calculs ou des représentations graphiques.

II.2.5.d : Analyse des productions après la séance 1

Les questions d'explicitation portent sur l'aspect temporel : « Faut-il le faire sur 2015 ou sur l'année dans le tableau ? » ; « 18 000€ c'est par an ou par mois ? ». Cette dernière question est liée à l'unité utilisée, les élèves ne repèrent pas que les coûts sont en dix milliers d'euros. Une autre demande « On fait comment avec les dix-milliers d'euros ? » ou encore « Il y a une erreur, ça ne peut pas être 18 000€, c'est trop par rapport à ce qu'il y a dans le tableau : on trouve 2 766€ en additionnant tout. » Un autre problème est lié à la notion d'application : « En avril 2014 et en novembre 2014, on a les mêmes coûts alors que les quantités sont différentes, ce n'est pas possible. » L'enseignant ajoute donc des informations à

l'oral sur les unités et sur le contexte. Le contexte n'est pas familier et si les deux grandeurs sont identifiées, la relation fonctionnelle est beaucoup moins évidente du fait qu'il n'y a pas monotonie et que les causes ne sont pas clairement identifiées.

Si nous reprenons la grille d'analyse des unités de raisonnement définie au début de ce chapitre (voir tableau 25), certains élèves sont sur les unités de raisonnement U1 et U2 mais beaucoup cherchent à effectuer des calculs et pour cela ils considèrent le phénomène comme continu et monotone. Malgré ces précisions 10 élèves sur une classe de 28 se lancent dans le calcul de la somme des coûts ou des quantités sur l'année. Ceci amène 7 élèves à considérer une proportionnalité au mois ou à l'année, c'est-à-dire à travailler sur des coûts et des quantités moyennes par mois ou sur un coût et une quantité totale à l'année. 5 élèves calculent des moyennes.

Nous constatons que les élèves ont deux hypothèses pour la forme de la solution : soit une quantité maximale calculée pour toute l'année et un même maximum pour chaque mois, soit une quantité maximale spécifique pour chaque mois. Suivant l'hypothèse choisie, l'activité sera différente. Dans le premier cas, les élèves cherchent à lisser le problème et à envisager soit une moyenne, soit un maximum, soit une proportionnalité, dans le second cas, ils cherchent les mois qui peuvent poser problème et à déterminer par proportionnalité ou soustraction la quantité maximale. Le contexte permet ces deux interprétations car les variations du coût de production peuvent être expliquées de deux manières : soit par le fait que le coût des fruits n'est pas le même suivant les saisons, cela signifie qu'on doit étudier le problème pour chaque mois et non de manière globale ; soit par une augmentation de la production qui suppose de nouveaux investissements (matériel, personnel, matière première). La première représentation induit un traitement proportionnel à chaque période car elle suppose que les coûts sont uniquement fonction de l'achat des denrées qui est lui-même proportionnel à la quantité produite alors que la seconde induit un traitement affine puisque un nouvel investissement est un coût fixe qui s'ajoute au coût des denrées qui lui, reste proportionnel à la quantité.

Unités	Description	Activité des élèves
U1	Identifier une relation fonctionnelle <ol style="list-style-type: none"> identifier les deux grandeurs étudiées établir la grandeur indépendante et la grandeur dépendante (existence et sens de cette dépendance) vérifier si cette relation est une relation de proportionnalité 	Deux élèves répondent au problème en donnant les valeurs qui conviennent dans les données sans considérer d'autres possibles. Certains identifient les grandeurs coût et quantité indépendamment des dates. Cette identification est visible par : <ul style="list-style-type: none"> une mise en correspondance avec des flèches (6 élèves) un tableau (1 élève) des calculs (2 élèves utilisent la proportionnalité sur une valeur, 1 élève l'utilise pour chaque mois)
U2	Considérer une relation fonctionnelle sous l'angle de la variation <ol style="list-style-type: none"> établir que la grandeur indépendante est variable établir que la grandeur dépendante est variable établir la concomitance entre les variations des deux grandeurs 	Les grandeurs coût et quantité sont identifiées mais elles sont considérées comme des grandeurs dépendantes des dates : 3 élèves tracent une représentation du coût et de la quantité en fonction des mois. Un élève explique en langage naturel la relation fonctionnelle par la variation de production. Deux élèves calculent des variations par soustractions successives.
U3	Décrire le comportement de la fonction <ol style="list-style-type: none"> établir le sens de variation de la grandeur dépendante quand la grandeur indépendante augmente qualifier cette variation de manière intuitive 	
U4	Décrire le comportement des accroissements <ol style="list-style-type: none"> considérer des accroissements constants de la grandeur indépendante considérer des accroissements de la grandeur dépendante établir la concomitance entre les accroissements des deux grandeurs décrire le comportement global de cette concomitance 	

Tableau 25: grille d'analyse séance 1

II.2.5.e : Analyse des productions après la séance 2

Aucun apport n'est fait entre les deux séances, le changement dans le milieu est provoqué par la mise en groupe et l'utilisation possible d'un tableur. Nous allons analyser l'activité des différents groupes (voir annexe 23).

Groupe 1 :

Ce groupe a utilisé un tableur pour organiser les données dans un tableau reprenant les mois, les coûts et les quantités produites.

Ils obtiennent le tableau suivant :

Mois	12/13	1/14	2/14	3/14	4/14	5/14	6/14	7/14	8/14	9/14	10/14	11/14	total
Coût	18200	19500	20200	21300	15200	26800	31400	47200	25900	16200	19500	15200	276600
Quantité	15000	18000	20000	25000	70000	96000	100000	110000	95000	60000	18000	10000	637000

On remarque que les données sont toujours organisées chronologiquement. Pour les élèves le coût et la quantité sont fonction du mois. Les élèves calculent en bout de ligne le coût total sur l'année et la quantité totale produite. Les élèves calculent ensuite le coût total à ne pas dépasser sur l'année par le calcul : $18\ 000 \times 12 = 216\ 000\text{€}$

Ils présentent leurs résultats dans un tableau (voir extrait 81) :

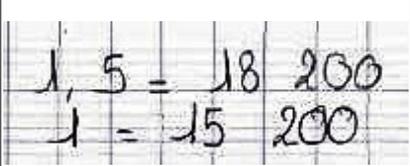
Pour l'année :	
Coût (€)	276 600 216.000
Quantité (dix millions de L)	637 000 $\approx 49,7$

Extrait 81: Production groupe 1 activité "Glaces" en 3^e

Une erreur dans les unités amène un résultat qu'ils n'ont pas su exploiter au moment de rendre leur travail. Ils n'ont donc pas formulé de conclusion mais on peut penser que s'ils reprennent leur calcul, ils vont donner une quantité moyenne à ne pas dépasser qui sera de $497\ 440\text{L}/12$ soit $41\ 450\text{L}$ par mois. Ce groupe utilise donc un calcul de moyenne qui s'appuie sur une idée de proportionnalité entre le coût et la quantité produite.

Groupe 2 :

Les élèves n'ont pas tenu compte des dates mais ils repèrent que 18 000 est entre 15 200 et 18 200 qui sont les deux premières valeurs du tableau. Ils repèrent les deux quantités de glaces en dix milliers de litres qui correspondent à ces valeurs (voir extrait 82).



1,5 = 18 200
1 = 15 200

Extrait 82: Production groupe 2 pour l'activité "Glaces" en 3^e

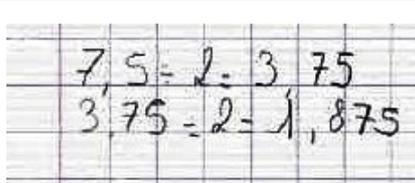
Ils écrivent ces données avec l'utilisation du signe « = » au lieu d'une flèche pour représenter la relation fonctionnelle mais ensuite ils calculent l'écart entre 18 200 et 15 200 et trouvent 3 000 ce qui correspond à 30 centaines. Ils écrivent $0,5 = 30$ ce qui signifie qu'ils mettent en regard le fait que si le coût augmente de 30, la quantité augmente de 0,5. Ils utilisent donc l'unité de raisonnement U2 en mettant en évidence la concomitance entre les variations des deux grandeurs. Ils divisent alors par deux ces variations, utilisant ainsi la proportionnalité des écarts :

$$30 : 2 = 15 \text{ donc } 0,5 : 2 = 0,25$$

$$15 : 2 = 7,5 \text{ donc } 0,25 : 2 = 0,125$$

$$\text{Or en ajoutant } 152 + 15 = 167 \text{ on obtient pour les quantités : } 1 + 0,25 = 1,25$$

Leur problème est donc de s'approcher de 180. Leurs essais successifs sont tous du même type, ils n'utilisent que des moitiés (voir extrait 83).



7,5 = 2 = 3,75
3,75 = 2 = 1,875

Extrait 83: Production groupe 2 situation "Glaces" en classe de 3^e

On peut penser qu'ils ne perçoivent la relation de proportionnalité que dans un rapport de un demi : « si une grandeur diminue de moitié, l'autre diminue de moitié ». Comme cette technique ne les amène pas à 180, ils cherchent une autre piste et posent PGCD = 200. La notion de PGCD ayant été étudiée les cours précédents, on est ici dans un effet du contrat didactique dans sa facette sociale qui amène les élèves à penser qu'on doit réutiliser les savoirs qui viennent d'être travaillés. 200 est bien le PGCD de 18 200 et 15 200 et cette nouvelle donnée les amène à partir de 18 200 plutôt que de 15 200 et à écrire $182 - 2 = 180$. On remarque que ce groupe ne fait jamais allusion aux grandeurs, il travaille sur les nombres et même sur des nombres entiers dans la seconde partie de leur travail, ce qui a induit l'utilisation du PGCD.

Groupe 3 :

Ce groupe rédige la conclusion suivante :

En fonction des périodes le coût de production varie
 En hiver, période froide la quantité produite est peu élevée
 contrairement à son coût de production qui est élevé et
 dépasse les 18 000€.
 En période d'été, lors des grandes vacances la quantité
 produite est très élevée donc le prix aussi.
 Pour nous, on ne peut donc pas prévoir le coût de
 production ne dépassant pas les 18 000€.

Extrait 84: production groupe 3 activité "Glaces" en classe de 3e

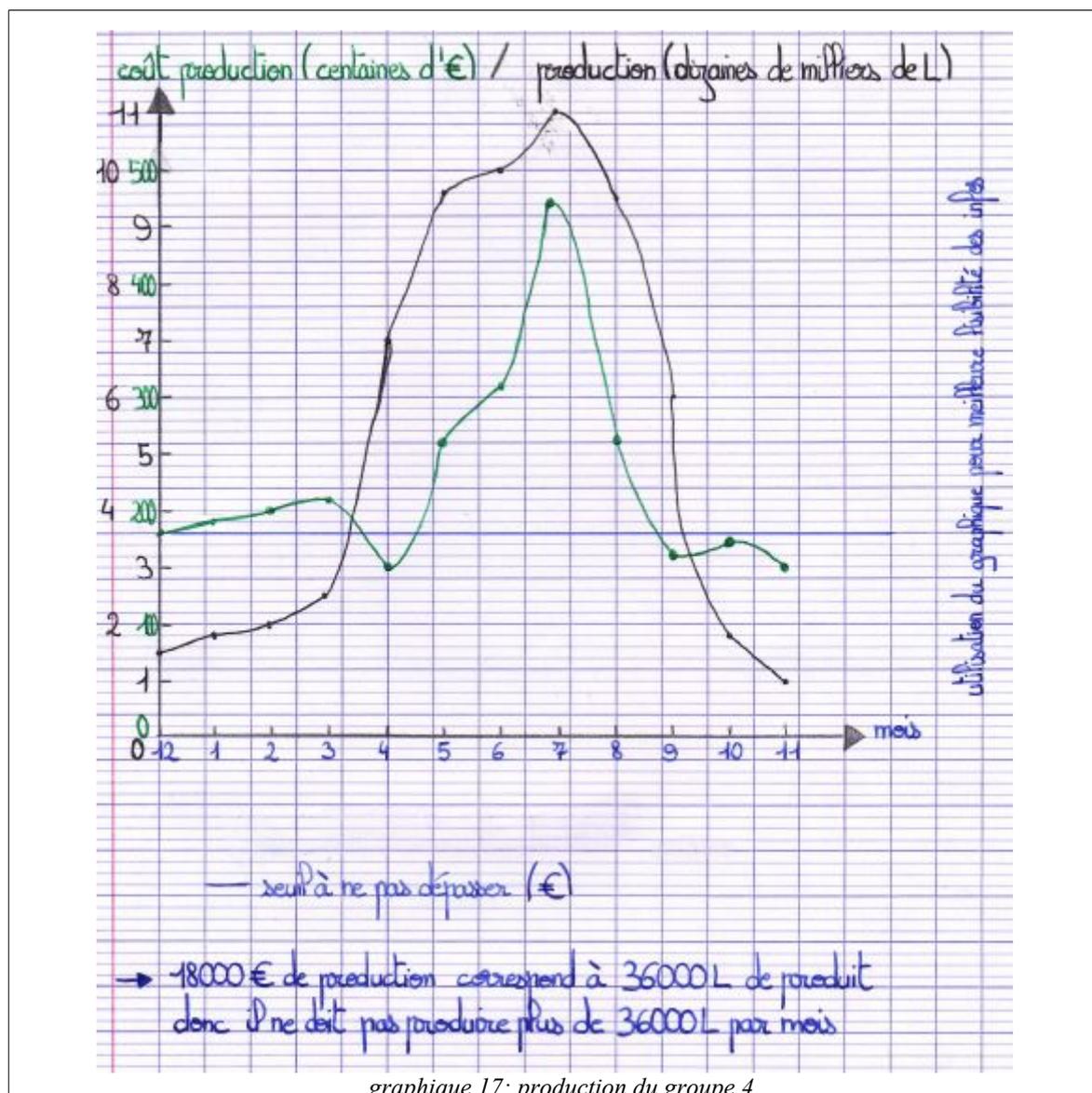
Pour ce groupe, la notion de covariation est liée à la causalité. La saison fait que les quantités et les coûts ne seront pas les mêmes. Pourtant on ne peut pas dire qu'il y a proportionnalité entre les grandeurs puisque les coûts peuvent dépasser 18 000€ en hiver comme en été, c'est-à-dire avec une faible production comme avec une production élevée. Ne pouvant imaginer une autre relation que la proportionnalité, les élèves disent ne pas pouvoir répondre à la question. Cette conclusion est importante, elle atteste d'un contrat didactique qui autorise ce type de réponse. Dans cette classe, il semble possible qu'un problème posé par l'enseignant ne puisse pas avoir de solution.

Groupe 4 :

Ce groupe fait une représentation sur un même graphique des variations des coûts et de la quantité produite (voir graphique 17). Ils utilisent trois couleurs différentes pour représenter la courbe et graduer l'axe des ordonnées : le vert pour le coût de production, le noir pour la production et en bleu ils tracent la droite d'équation $y = 180$ pour indiquer le seuil à ne pas dépasser.

Ils concluent que la production ne doit pas dépasser 36 000L de produit par mois. Nous n'avons aucune indication sur la lecture du graphique qui les a amenés à cette conclusion. Nous pouvons faire trois hypothèses :

- soit ils ont repéré le point d'intersection de la courbe des coûts avec la droite mais ce point correspond à une quantité produite qui dépasse 36 000L ;
- soit ils ont cherché le point d'intersection de la courbe des quantités avec la droite, ce qui n'a pas de sens au regard des grandeurs ;
- soit ils ont lu directement sur l'échelle de l'ordonnée la quantité correspondant au coût.

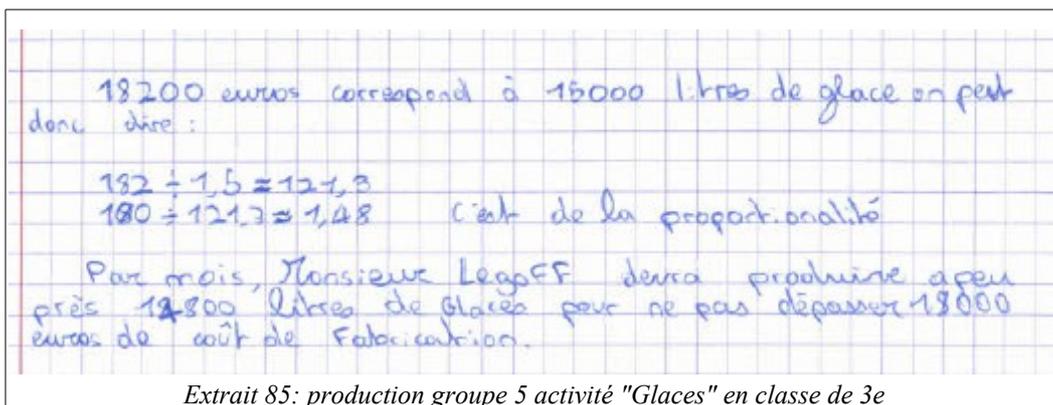


graphique 17: production du groupe 4

Cette dernière hypothèse semble la plus vraisemblable, elle s'appuie sur l'idée implicite d'une proportionnalité entre les deux grandeurs et donc d'une conversion possible entre le coût et la quantité produite : 2 000L coûte 10 000€ à produire, comme le suppose l'échelle à gauche du graphique.

Groupe 5 :

Le groupe 5 utilise la proportionnalité pour calculer la production correspondant à 18 000€. Ils s'appuient enfin sur la monotonie pour affirmer que cette production calculée est la limite à ne pas dépasser (voir extrait 85). Suivent deux calculs de PGCD et une seconde conclusion : « Le PGCD n'est pas le même partout, on ne peut donc pas l'utiliser ». On ne peut pas savoir si cette deuxième piste vient valider ou invalider la solution proposée.



18200 euros correspond à 15000 litres de glace on peut donc dire :

$$182 \div 1,5 \approx 121,3$$

$$180 \div 121,3 \approx 1,48$$

C'est de la proportionnalité

Par mois, Monsieur Legoff devra produire approx 12800 litres de glaces pour ne pas dépasser 18000 euros de coût de fabrication.

Extrait 85: production groupe 5 activité "Glaces" en classe de 3e

Groupe 6 :

Le groupe 6 réorganise les données en mettant en correspondance le mois, la quantité produite et le coût de production. Ils cherchent un coefficient de proportionnalité et calculent tous les quotients en divisant le coût par la production correspondante pour chaque mois (voir extrait 86). Ils n'utilisent pas un conte-exemple pour conclure à la non-proportionnalité à partir de deux calculs, ce qui aurait suffi. On peut faire l'hypothèse qu'ils cherchent une nouvelle information par l'analyse de l'évolution de ces quotients. Ils écrivent que : « Plus il produit de litres moins le prix est chère et moins il produit de litres plus il paye chère aux litres. » Ils calculent ensuite le total sur l'année sans utiliser cette nouvelle donnée.



18200	: 15000	≈ 1,21
19500	: 18000	≈ 1,08
20200	: 20000	≈ 1,01
21300	: 20500 ²⁵⁰⁰⁰	≈ 0,85
15200	: 70000	≈ 0,21
26800	: 50000	≈ 0,28
31400	: 100000	≈ 0,31
47200	: 110000	≈ 0,42
25900	: 95000	≈ 0,27
16200	: 60000	≈ 0,27
19500	: 18000	≈ 1,08
15200	: 10000	≈ 1,52
TOTAL	= 276600	637000

On en déduit que le prix n'est pas proportionnelle au litres.
Plus il produit de litres moins le prix est chère et moins il produit de litres plus il paye chère : aux litres.
En une année il va payer 276600 € et il va produire 637000 litres de glace.

Extrait 86: Production du groupe 6 activité "Glaces" en classe de 3e

Bilan de la séance 2

La situation est traitée par tous les groupes comme une situation de proportionnalité quel que soit le cadre ou le registre utilisé. Le groupe 3 est le seul qui invalide sa

représentation, le milieu n'est donc pas suffisant pour apporter des rétroactions permettant de faire évoluer les procédures. Deux choix s'offrent à nous : soit l'enseignant explicite la non-proportionnalité, soit il s'agit d'amener les élèves à établir l'incohérence des réponses produites. Nous avons choisi d'aller dans le sens d'une dévolution de la validation aux élèves et avons proposé un travail à partir de caricatures réalisées à partir des réponses produites (voir page 235). Ces caricatures reprennent des éléments de réponses proposés par les élèves et les présentent juxtaposées de manière anonyme. Certaines validations sont prises à la charge de l'enseignant. Certains symboles peuvent être ajoutés pour expliciter des démarches.

II.2.5.f : La séance 3

Nous avons repris les productions des groupes 1, 2 et 4 en finalisant les procédures : calcul de moyennes, calcul par proportionnalité des écarts, lecture graphique. L'objectif n'est pas que les élèves sachent résoudre le problème avec la procédure proposée mais d'expliquer pourquoi les résultats obtenus sont faux.

Pour le premier groupe un contre-exemple suffit, on peut lire dans le tableau qu'en septembre 2014 la production dépasse 41 453L et pourtant que le coût est de 16 200€. Pour les autres groupes l'argument reste valable puisqu'ils proposent des quantités produites inférieures à celle du premier groupe.

L'explication attendue doit faire apparaître que nos deux grandeurs n'ont pas le même sens de variation. Des explications relatives au contexte peuvent être utilisées (une fois la matière première achetée, on peut produire sans surcoût mais si on veut produire beaucoup plus, on peut être amené à prendre un ouvrier en plus, acheter une machine, racheter de la matière première...)

Le groupe 3 pointe l'erreur de représentation implicite : les coûts sont fonction de la période de l'année. Nous nous proposons donc de lever cette ambiguïté pour relancer l'activité.

Pour représenter la covariation de nos deux grandeurs, on peut reprendre les procédures proposées à savoir un tableau en ordonnant une des grandeurs ou un graphique. Devraient alors apparaître deux intervalles permettant d'assurer que les coûts ne dépasseront pas 18 000€. La lecture graphique peut donner des valeurs approchées mais la procédure du groupe 2 permet des calculs par approximation linéaire aux abords des valeurs recherchées.

Il peut être intéressant de mesurer en quoi le travail sur ces caricatures des groupes permet ou non le réinvestissement dans cette deuxième étape du travail. Le document est distribué aux élèves en groupes de trois ou quatre et la consigne est d'expliquer sur une affiche pourquoi aucune de ces trois solutions n'est valable.

Séance 3 : Trois groupes ont proposé des solutions au problème de M. Legoff.

Groupe 1 :

Mois	12/13	1/14	2/14	3/14	4/14	5/14	6/14	7/14	8/14	9/14	10/14	11/14	total
Coût	18200	19500	20200	21300	15200	26800	31400	47200	25900	16200	19500	15200	276600
Quantité	15000	18000	20000	25000	70000	96000	100000	110000	95000	60000	18000	10000	637000

Comme $18\ 000 \times 12 = 216\ 000$

on a :

Coût (€)	276600	216000
Quantité (L)	637000	497440

$497\ 440 : 12 = 41\ 453$

donc **M. Legoff ne doit pas produire plus de 41 453 L par mois.**

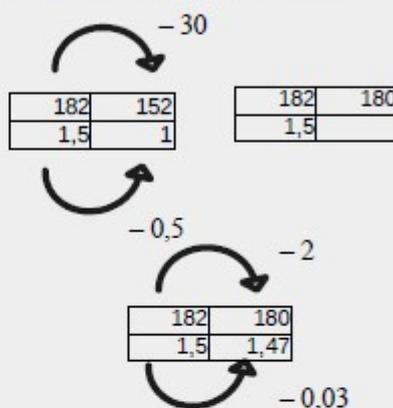
Groupe 2 :

$30 : 5 = 6$

$0,5 : 5 = 0,1$

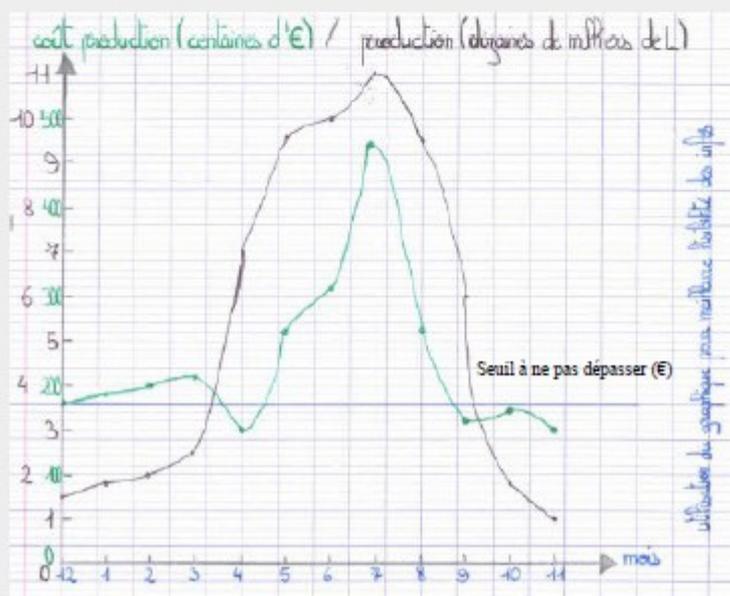
$6 : 3 = 2$

$0,1 : 3 \approx 0,03333$



M. Legoff ne doit pas produire plus de 14 700 L par mois.

Groupe 3 :



M. Legoff ne doit pas produire plus de 36 000L de produit par mois.

La production attendue est une explication, elle doit nous permettre d'identifier comment les élèves traitent les données au regard de quelles conditions. Sur les sept groupes, deux n'ont rien proposé pour la solution du groupe 1. Au contraire, deux autres n'ont proposé une réponse que pour le premier groupe.

Nous avons deux types d'arguments, ceux qui mettent en jeu des nécessités liées à des théories mathématiques et ceux liés au contrat didactique. Pour ce qui est de la remise en cause de la proportionnalité, les deux unités de raisonnement U1 et U3 sont remises en cause par les élèves dans la critique de la première solution. Le tableau 26 organise les réponses des élèves au regard de l'erreur qu'ils ont repérée et de l'unité de raisonnement qui lui est associée.

Solution critiquée	Unité	Erreur pointée par les élèves	Réponse du groupe
1	U3	Mauvais comportement de la fonction	<i>18 200€ produit seulement 15 000L donc 41 453L dépasseront facilement le seuil à ne pas dépasser qui est de 18 000€.</i>
2	U1	Mauvaise identification des grandeurs	<i>Ce n'est pas proportionnel parce que le coût par litre de glace varie d'un mois à l'autre.</i>
3	U1	Dépendance mal identifiée	<i>Les prix et les quantités ne sont pas proportionnelles. L'échelle n'est pas respectée (15 000L=18 200€ donc 18 000€ ≠ 36 000L).</i>

Tableau 26 : analyse des réponses des élèves séance 3

Un autre groupe justifie en écrivant que « le résultat à l'année 2014 est faux » et un dernier par le fait que les élèves ont utilisé des arrondis. Nous avons ici deux clauses du méso-contrat didactique : d'une part toute justification d'un phénomène en mathématiques doit se faire par des calculs justes, d'autre part les nombres ne doivent pas être arrondis.

Le raisonnement covariationnel mis en œuvre par le second groupe n'est pas compris par les élèves qui demandent plus d'explications. Ils n'identifient pas les données ajoutées par le groupe et écrivent qu'« on ne sait pas d'où proviennent les chiffres et à quoi ils correspondent » ou « d'où vient le 30, le 5, le 0,5, le 0,1 et le 6 ? » preuve que le manque d'outils pour formaliser les variations des grandeurs est un obstacle à la communication entre les groupes. Un indice manque pour attirer le regard des élèves sur la proportionnalité des écarts, peut-être qu'une flèche opérateur aurait suffi entre 30 et 2 ou une formulation du type « 2 c'est 15 fois moins que 30 ». Nous remarquons que si la proportionnalité est systématiquement mobilisée par les élèves lorsqu'il s'agit de grandeurs, les proportions sur les nombres sont mal maîtrisées du point de vue des calculs.

L'enseignant a été très étonné par les productions de ses élèves car l'écart est important entre les écrits et ce qui peut se dire lors d'une synthèse orale. Il en retire de précieuses informations sur les représentations que ses élèves ont, aussi bien de l'activité mathématiques que du savoir lui-même. Nous voyons ici l'importance d'un temps d'analyse critique en

groupes autour de productions intermédiaires et du travail de la formalisation écrite des procédures. C'est ce type d'activité que nous allons étudier dans le chapitre suivant.

II.3 : Conclusion

Ces quelques exemples permettent d'identifier certaines compétences indispensables pour modéliser des phénomènes de covariations entre grandeurs par des fonctions affines qu'il s'agirait de travailler au cycle 4 :

1. Les élèves doivent savoir identifier les grandeurs étudiées.
2. Les élèves doivent avoir une approche globale des variations des deux grandeurs et de la concomitance entre ces variations. Cette approche semble intuitive pour quelques élèves dans toutes les classes ayant participé aux expérimentations. Il semble qu'elle soit plus fréquente en début de collège mais que non outillée par des notations et non reprise par les enseignants, elle soit peu à peu abandonnée.
3. Les élèves doivent poser des hypothèses sur la continuité du phénomène et sa monotonie sur un intervalle d'étude suffisamment petit pour utiliser la proportionnalité des écarts.

Nous avons montré que les élèves peuvent utiliser l'affinité comme concept outil pour résoudre des problèmes dès qu'ils s'autorisent à ne pas utiliser des techniques automatisées. Il s'agit de provoquer cette inhibition en identifiant pourquoi et comment certains élèves y parviennent. Il semble que le choix de problèmes de modélisation prédictive et que le type de tâches demandé (comparer, critiquer, expliquer...) peuvent amener une évolution du registre explicatif.

Par ailleurs, nous avons montré que la confrontation entre les procédures au sein de groupes d'élèves n'est pas suffisante pour faire évoluer les représentations. Il faut donc penser à introduire dans le milieu de nouvelles données, à jouer sur les inducteurs ou à modifier certaines clauses du contrat pour que le déplacement d'un point de vue statique vers un point de vue dynamique puisse s'effectuer. Nous allons tester certaines situations qui tiennent compte de ces conclusions dans le chapitre suivant.

Conclusion de la partie 2

Nous avons vu au chapitre I qu'il serait intéressant de proposer aux élèves des situations dans lesquelles ils seraient amenés à étudier la covariation de deux grandeurs non proportionnelles et dont la variation n'est pas systématiquement monotone. Plusieurs pistes sont possibles :

- S'intéresser à la covariation : cela nécessite des calculs de taux de variation qui peuvent ensuite permettre de résoudre des problèmes par une modélisation affine. Le calcul des taux de variation peut s'appuyer sur des données présentées en tableaux, chaque ligne correspondant à une grandeur. On peut alors orienter l'attention des élèves sur le passage d'une colonne à une autre plutôt que d'une ligne à une autre par des symboles (par exemple des flèches à l'image des opérateurs). L'organisation des données dans le tableau laissée à la charge de l'élève amène la nécessité d'identifier clairement les grandeurs en jeu et donne une première approche globale de la fonction. Le calcul des taux de variations peut aussi s'appuyer sur une analyse de l'aspect global de la fonction par une lecture graphique.
- Mettre en défaut certains automatismes peut amener l'élève à envisager de nouveaux possibles. La non-proportionnalité semble un préalable pour imaginer d'autres relations fonctionnelles.
- La détermination de la relation fonctionnelle entre les grandeurs peut être considérée comme un moyen pour résoudre le problème et pas uniquement une finalité. Aucun formalisme n'est imposé mais on peut partir des productions de symboles des élèves pour construire la nécessité d'un registre permettant le traitement des données.

Le chapitre II a permis d'attester que ces approches sont possibles et qu'elles amènent des évolutions du registre explicatif mobilisé par les élèves. Nous pouvons donc envisager de proposer une ingénierie didactique tenant compte de toutes les caractéristiques que nous avons mises en avant. Encore faut-il pouvoir quantifier l'évolution que nous attendons.

Pour analyser les situations que nous allons proposer, nous allons affiner la grille d'analyse de Passaro en prenant appui sur le cadre épistémique au sens de Piaget. Nous avons montré qu'on pouvait considérer une évolution des schèmes : contempler, opérer transformer ainsi qu'une évolution des REX par le mécanisme « intra, inter, trans » que nous noterons de 1 à 3. Nous pouvons donc identifier pour chaque unité de raisonnement les schèmes auxquels elle est associée et le REX correspondant. Le schème « contempler » correspond à l'utilisation d'une donnée présente dans le milieu par la simple perception (on voit, on lit) sans qu'il y ait d'action sur cette donnée. Nous entendons par action, le fait que la donnée n'est pas modifiée (pas de changement de registre, pas de calcul, pas d'interprétation), tout le monde peut en avoir la même perception. Cette donnée peut cependant être considérée de manière isolée que nous noterons « intra », ou en relation avec d'autres données que nous noterons « inter » ou encore relativement à une théorie que nous noterons « trans ». Le schème « opérer » indique une opération effectuée sur les données (calcul, lecture graphique, traitement) qui permet de

construire de nouvelles données mais de la même manière cette opération peut être isolée, comparée à d'autres ou relative à une théorie apprise. Enfin le schème « transformer » correspond à une transformation des données par des conversions en lien avec une synthèse, des éléments d'une théorie. Ce schème suppose la création de nécessités mais il peut porter sur une seule donnée, plusieurs ou sur une théorie apprise plus globale. Ainsi nous pouvons caractériser U3o1 une unité de raisonnement 3 au niveau du schème opérer au stade intra et U1t3 une unité de raisonnement 1 au niveau du schème transformer au stade trans. Le tableau 27 propose une schématisation des unités de raisonnement et le détail de la grille d'analyse. Dans cette schématisation, les Grandeurs (grand G) sont notées X et Y et les grandeurs (petit g) sont notées x et y. On notera Δx un accroissement de x. La flèche \rightarrow symbolise une relation fonctionnelle.

Cette grille va nous permettre d'analyser l'activité des élèves et de repérer ce qui peut influencer le passage d'une unité à l'autre en terme de milieu ou de contrat. Nous allons comparer ces indicateurs suivant le scénario mis en place dans les classes afin de penser une ingénierie qui intègre le maximum de conditions favorables à une problématisation de la notion de fonction affine. L'objectif est d'amener les élèves à reconnaître un phénomène pouvant être modélisé par une fonction affine (U1t3) par la mise en relation des données avec les conditions amenant à définir le phénomène comme continu monotone avec un taux de variation constant sur un intervalle déterminé. Cette reconnaissance pouvant passer par différents schèmes suivant le contexte : la reconnaissance immédiate (contempler), par un traitement des données (opérer) ou par des conversions de cadres, de registres ou de points de vue (transformer).

Unités	Description
U1 $x \rightarrow y$	Identifier une relation fonctionnelle 1 intra : identifier les deux grandeurs étudiées 2 inter : établir la grandeur indépendante et la grandeur dépendante (existence et sens de cette dépendance) 3 trans : comparer cette relation à des relations fonctionnelles apprises (utiliser différents registres pour effectuer cette comparaison)
U2 $\begin{array}{ccc} x_1 & \rightarrow & x_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ y_1 & \rightarrow & y_2 \end{array}$	Considérer une relation fonctionnelle sous l'angle de la variation 1 intra : établir que la grandeur indépendante est variable, établir que la grandeur dépendante est variable 2 inter : établir la concomitance entre les variations des deux grandeurs 3 trans : interpréter la dépendance (aller vers un point de vue dynamique)
U3 $x + \Delta x \rightarrow y + \Delta y$	Décrire le comportement de la fonction 1 intra : qualifier cette variation de manière intuitive 2 inter : établir le sens de variation de la grandeur dépendante quand la grandeur indépendante augmente 3 trans : qualifier cette variation au regard du processus
U4 $\Delta x \rightarrow \Delta y$	Décrire le comportement des accroissements 1 intra : considérer des accroissements constants de la grandeur indépendante, considérer des accroissements de la grandeur dépendante 2 inter : établir la concomitance entre les accroissements des deux grandeurs 3 trans : décrire le comportement global de cette concomitance (aller du local au global)
U5 $\begin{array}{ccc} \Delta x_1 & \rightarrow & \Delta x_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta y_1 & \rightarrow & \Delta y_2 \end{array}$	Repérer les changements de comportement 1 intra : quantifier les accroissements 2 inter : comparer les accroissements de la valeur dépendante à ceux de la grandeur indépendante 3 trans : interpréter la dépendance entre les accroissements (utiliser différents registres pour effectuer cette interprétation)
U6 $\Delta x_1 \approx \Delta x_2$ $\Delta y_1 \approx \Delta y_2$	Considérer des intervalles sur lesquels la fonction est continue monotone 1 intra : considérer intuitivement une continuité et une monotonie locale 2 inter : généraliser intuitivement le comportement sur un intervalle 3 trans : passer à des accroissements plus petits (aller du global au local)
U7 $x \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}$	Interpréter le changement des accroissements en terme de taux de variation et nommer la grandeur associée 1 intra : considérer le taux de variation comme une variable 2 inter : considérer les variations du taux de variation 3 trans : considérer le taux de variation comme une grandeur (changer de cadre et de registres pour pouvoir opérer sur les variations)

Tableau 27: grille d'analyse des unités de raisonnement dans le cadre épistémique de référence

Partie 3

Mise en place d'une ingénierie

Dans cette partie nous allons nous intéresser à différentes expérimentations que nous avons réalisées dans des classes de 3^e du collège en fin d'année scolaire, lors de la découverte de la notion de fonction affine, et des classes de 2^{nde} du lycée au premier trimestre, lors des premiers réinvestissements. Dans le premier chapitre, nous présenterons quelques expériences menées entre 2011 et 2014, le second chapitre va décrire l'élaboration du modèle PPAP, dans le troisième nous ferons l'analyse *a priori* d'une séquence de ce type considérée comme une ingénierie didactique (Douady, 1993) et dans le chapitre IV nous analyserons sa mise en œuvre dans deux classes de lycée.

Nous appellerons « traditionnelle » une séquence qui enchaîne activité de recherche, mise en commun des solutions, débat pour établir un nouveau savoir, formalisation et entraînement, réinvestissement dans un nouveau problème. Nous analyserons le niveau de problématisation atteint par les élèves lors de ces séquences tel que nous l'avons défini dans la partie I chapitre 3. Nous proposerons ensuite un modèle de séquence basé sur l'enchaînement d'activités à partir des productions intermédiaires des élèves que nous appellerons « Problématisation Par Analyse des Productions » (désigné par PPAP dans la suite du texte). Nous allons utiliser le cadre théorique de la problématisation pour analyser des séquences de type PPAP et tenter de mesurer les effets qu'elles produisent sur les apprentissages. Nous verrons enfin quels éléments de stabilité peuvent être tirés de séances PPAP visant l'apprentissage de la notion de fonction affine expérimentées dans différentes classes. Nous identifierons les éléments du contexte qui jouent sur les phénomènes didactiques observés (Johsua, 1996). Nous définirons quelques principes à privilégier pour permettre aux élèves de problématiser le savoir ou du moins pour permettre aux élèves de fréquenter un savoir problématisé. Nous repérerons aussi ce qui peut être identifié comme des freins à l'apprentissage par problématisation et nous en préciserons la nature.

Chapitre I : Expérimentations de séquences visant l'apprentissage par problématisation des fonctions affines

Les expériences que nous allons présenter ici ont été menées dans différentes classes de seconde. Les séances ont été enregistrées et les productions écrites des élèves ont été recueillies et analysées à l'aide de la grille établie dans la partie 2. Les productions des élèves et la transcription des débats ou inter-actions sont donnés en annexe (voir annexe 23 à 32). Nous allons tirer de ces expérimentations des éléments qui vont nous amener à concevoir un modèle de séquence visant l'apprentissage d'un savoir problématisé. Pour cela, nous allons utiliser différents outils d'analyse.

Nous allons élaborer des **EC (espaces de contraintes) *a priori*** à partir de ce que nous pouvons anticiper sur l'activité de l'élève face au problème posé. Pour cela, nous listons ce qui relève du registre empirique, ce qui relève des modèles ou des nécessités (Lhoste et al., 2007; Orange, 2001, 2005a) au travers de cette activité et enfin ce qui relève du registre explicatif (REX) tel qu'il est défini par Orange, c'est-à-dire ce qui organise la pensée, ce qui structure les explications : « Le registre explicatif intervient en permanence pour organiser la mise en tension entre les contraintes empiriques avec les conditions de possibilité des modèles explicatifs » (Orange, 2001, p.27). Le REX peut s'apparenter à la notion de cadre en mathématiques au sens de Douady comme nous l'avons vu dans la partie 1 chapitre III. Nous allons identifier les différentes tâches que les élèves sont dans la capacité d'effectuer. Ces tâches permettent de construire de nouvelles données qui enrichissent le registre empirique. Le traitement des données, les procédures utilisées et les discours sur ces procédures permettent d'identifier différents modèles et différentes nécessités mobilisés et construits par les élèves, c'est le registre des modèles. Le REX est le registre qui structure cette mise en tension entre les données et les conditions. Les liens sont symbolisés dans l'EC par des segments sans orientation car les modèles peuvent générer l'action, tout comme, à l'inverse, l'action appelle des modèles. L'EC nous aide à repérer la dynamique qui permet de passer d'une configuration pragmatique à une configuration théorique.

L'analyse des interactions verbales entre les élèves pendant la résolution de problèmes mathématiques doit nous amener à analyser comment les élèves configurent les trois registres (le registre empirique, le registre des modèles et le REX) et la nature de cette configuration. La configuration pragmatique correspond au tissage des registres par des raisons trouvées dans l'empirique (« C'est vrai parce que je le vois, parce que je l'ai fait. »). Ces raisons peuvent correspondre à un concept outil. La configuration analytique est liée à un raisonnement opératoire par comparaison et mise en place de classes, de catégories (« C'est vrai parce que c'est pareil que... »). La configuration théorique fait référence à une théorie (« C'est vrai parce que c'est cohérent avec la théorie. »). Certains raisonnements peuvent

relever de plusieurs configurations. Ainsi le traitement de plusieurs cas peut autant relever de la théorie (études dans le but de traiter de manière exhaustive tous les possibles) que d'une configuration pragmatique (généralisation à partir de plusieurs essais considérés comme génériques). De même le registre des modèles intègre les modèles qui peuvent être construits par l'élève pour structurer les expériences vécues et qui peuvent ou non relever de théories scientifiques. La difficulté est de repérer comment l'élève configure les registres puisqu'il ne dispose pas toujours des théories scientifiques. Il peut avoir élaboré une théorie « élève » qu'il s'agit de reconstruire à partir de son activité et de ses discours. Certains marqueurs permettent d'identifier la nature de la configuration des registres mais ce n'est pas toujours le cas. Dans les échanges entre pairs, on peut avoir des configurations de natures différentes qui créent des malentendus d'autant plus importants que l'enseignant peut lui-même ne pas être conscient de ces configurations. Par exemple, différencier fonction pratique et fonction théorique, peut être considéré comme un moyen d'explicitier aux élèves la configuration attendue. Nous avons donc besoin de prendre des indices dans les interactions langagières.

Les macrostructures du débat (Fabre & Orange, 1997) seront proposées selon la méthodologie utilisée par Hanaà Chalak (Chalak, 2012). Il s'agit d'un résumé global mettant en évidence les thèses, les objections et les dépassements des objections. Des segments montrent les liens entre les propositions qui peuvent être éventuellement reformulées par le chercheur pour tenir compte des différents registres au sens de Duval. Le locuteur et le numéro de l'intervention dans la transcription sont indiqués pour chaque énoncé. La macrostructure doit donner des informations sur la configuration des différents registres et permettre de repérer les évolutions éventuelles du REX. Nous verrons que cet outil peut être généralisé à l'analyse de débat en petits groupes.

Les unités de raisonnement (Passaro, 2016) définies dans la partie 2, vont nous permettre de voir comment le raisonnement covariationnel se développe au cours du travail mené par les élèves et comment cette évolution se traduit dans les productions langagières.

Nous construirons, à partir de cette évolution, des losanges inspirés du losange de problématisation du problème théorique (Fabre, 2011) qui correspondent aux différents problèmes rencontrés ou construits par les élèves. Nous mettrons ainsi en évidence les nécessités en lien avec les problèmes tels qu'ils sont posés. **Les losanges de problématisation et les inducteurs de problématisation** (Fabre & Musquer, 2009) vont nous permettre de voir comment les données et les contraintes sont mises en tensions et de préciser le rôle de certains inducteurs sur la manière dont les élèves vont construire les problèmes. Nous verrons en particulier comment certains aspects de la situation peuvent être des inducteurs potentiels.

Les situations initiales seront analysées *a priori* et *a posteriori* pour mesurer les écarts et identifier les éléments contextuels qui peuvent expliquer ces écarts. Les autres situations seront plutôt analysées du point de vue de l'activité de problématisation des élèves à l'aide des différents outils d'analyse présentés plus haut. L'EC *a priori* liste différents possibles, nous y retrouvons les éléments qui interviennent dans les losanges de problématisation. Cela nous

permet de repérer les éléments qui prédominent et ceux qui peuvent être absents ainsi que l'articulation entre les différents problèmes, données et conditions construits par les élèves.

La synthèse de ces expérimentations permettra de poser quelques principes pour concevoir une ingénierie visant l'apprentissage par problématisation de la notion de fonction affine.

I.1 : Analyse d'un temps de débat en classe de 2nde

Le problème suivant a été posé dans une classe de seconde en mars 2010. Nous n'allons pas faire l'analyse complète de la séquence mais nous allons nous focaliser sur le temps de débat en classe autour des productions des élèves à l'issue d'une recherche en petits groupes.

A ce niveau d'étude, les élèves ont des connaissances sur les fonctions et une certaine aisance en calcul algébrique. On peut estimer que la notion de fonction affine est disponible, au moins comme outil. L'objectif est de déterminer le programme de calcul permettant de convertir en degrés Fahrenheit une mesure de température en degrés Celsius. Ce programme revient à déterminer l'expression algébrique de la fonction affine modélisant cette conversion.

Les américains utilisent une autre unité que le degré Celsius pour mesurer la température, ils utilisent le degré Fahrenheit. Quand la température augmente de 50°C , elle augmente de 90°F et l'eau qui bout à 100°C , bout à 212°F .

On veut créer un programme à l'aide d'un tableur pour que lorsqu'on entre une température en $^{\circ}\text{C}$ dans une cellule, s'affiche automatiquement dans une autre cellule la température en $^{\circ}\text{F}$. Comment faire ?

Notre choix est d'imposer le point de vue covariationnel sans pour cela donner une procédure de résolution. Pour cela, nous donnons aux élèves un couple de valeurs $(x ; y)$ et un couple de variations $(\Delta x ; \Delta y)$. Nous avons donc un milieu contraignant. Si le problème est posé dans le cadre arithmétique, il n'est pas imposé de cadre pour la résolution. Les élèves ont une représentation de la solution attendue, il s'agit de réaliser un programme à l'aide d'un tableur. La référence au tableur pourrait amener les élèves à penser immédiatement au cadre algébrique du fait qu'il faut utiliser des formules mais cela n'a rien d'évident (Haspekian, 2012). En effet, les élèves associent plutôt le tableur à une calculatrice. Les Grandeurs sont familières et les élèves ont une représentation intuitive d'un phénomène continu et monotone sur l'ensemble des réels. Des rétroactions sont possibles du fait de la possibilité d'utiliser le tableur ou la calculatrice pour tester les solutions. Les élèves sont par groupes et la production attendue est une chronique de la recherche. Le scénario prévoit un temps de recherche individuel, de questions d'explicitation puis une recherche en petits groupes.

Les élèves ont d'abord vérifié que la situation n'était pas une situation de proportionnalité. Ensuite les groupes ont tous cherché à déterminer une fonction sous la forme d'une expression algébrique, certains sont passés par une représentation graphique pour avoir l'idée de la nature de la fonction (ils ont étudié les fonctions affines, les fonctions du second

degré et la fonction inverse). A la fin de l'activité qui a duré environ 35 minutes, 3 groupes ont la solution, 3 groupes ont une solution affine mais le coefficient multiplicateur est faux, 2 groupes ont éliminé de nombreuses pistes fausses mais n'ont pas réussi à identifier qu'il s'agissait d'une fonction affine, un groupe a identifié qu'il s'agissait bien d'une fonction affine mais n'est pas parvenu à se mettre d'accord sur les coefficients (voir annexe 24). Les groupes qui ont obtenu un résultat sont allés le tester sur l'ordinateur. Le test n'a pas permis de mettre en évidence l'erreur de coefficient multiplicateur.

A l'issue de la séance, l'enseignant organise un débat autour d'une difficulté commune à plusieurs groupes qui est la confusion entre les variations et les grandeurs. Les élèves ont interprété que 50°C correspondait à 90°F et ont donc traduit cette donnée dans le registre fonctionnel par $f(50) = 90$, dans le registre des tableaux en traitant 50 et 90 comme 100 et 212 et dans le registre graphique en positionnant le point de coordonnées (50 ; 90). Le débat est organisé autour de la production d'un groupe qui a très peu écrit sur son compte-rendu alors qu'il a fait de nombreux essais. Ce groupe a fait l'erreur que nous venons de signaler, il conclut à la non-proportionnalité des grandeurs, il a fait un graphique, il a défini un coefficient multiplicateur mais n'arrive pas à définir l'expression globale de la fonction.

Nous allons analyser le contenu de ce temps de débat pour montrer en quoi malgré l'intention de l'enseignant, le scénario n'est pas favorable à un apprentissage problématisé du concept d'affinité, c'est-à-dire amenant à établir pourquoi un phénomène relève de l'affinité, et pourquoi il ne peut pas en être autrement. Autrement dit, il s'agit que les élèves construisent les raisons qui expliquent le phénomène par une relation affine entre les grandeurs. Nous sommes bien dans le cas d'un problème explicatif au sens de la problématisation. Nous allons reprendre les différentes interactions et repérer les unités de raisonnement mobilisées. Toutes les références à la transcription se font en désignant le locuteur par ses initiales et le numéro de son intervention. E désigne l'enseignant.

I.1.1 : Analyse du débat

Nous avons construit la macrostructure du débat (voir schéma 13). Pour cela, nous nous sommes basée sur sa transcription donnée en annexe 25.

Nous pouvons identifier deux nécessités : il y a concomitance entre les accroissements des deux grandeurs (petit g) et le taux de variation étant constant, on peut calculer n'importe quelle valeur à condition de partir de la correspondance entre 100°C et 212°F . Ces nécessités apparaissent bien dans le débat mais prennent-elle réellement sens ? Qui les fait émerger ? Qui les formule et comment ? Pour répondre à ces questions, nous allons analyser les différentes unités de raisonnement utilisées en faisant référence à la grille proposée dans la partie 2 chapitre II.3.

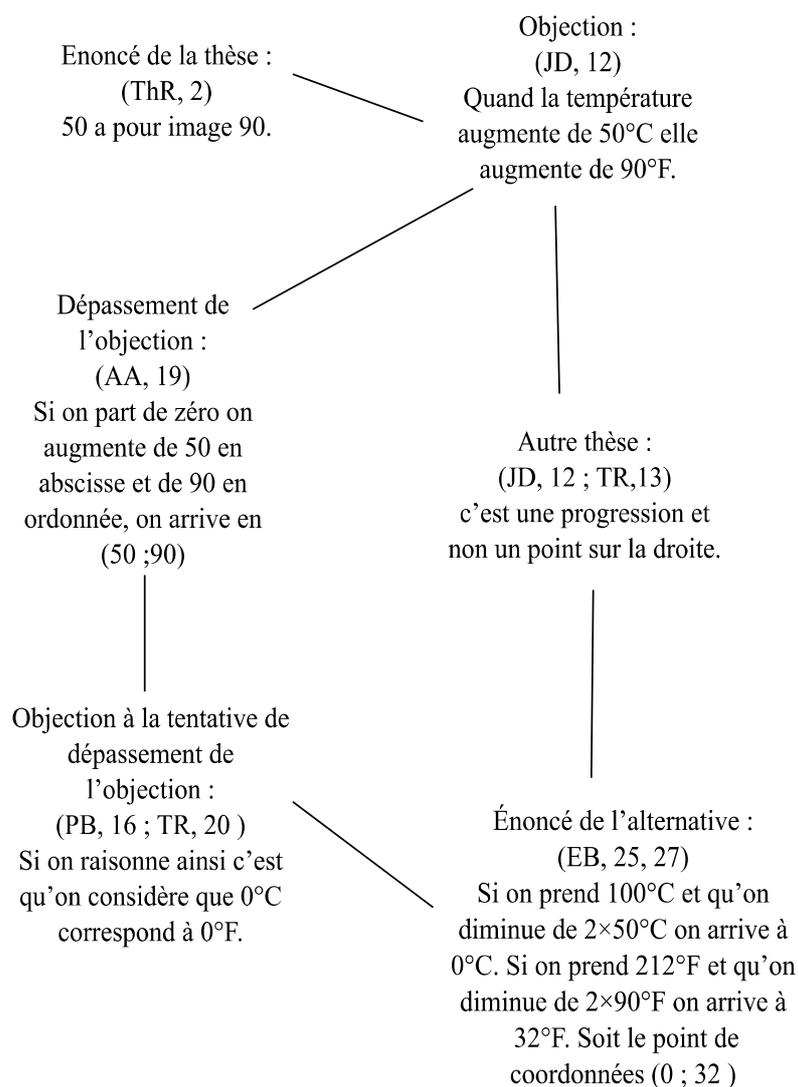


Schéma 13: Macrostructure du débat dans l'expérimentation du problème de conversion d'unités de température

Au niveau de la structure du débat, nous identifions quatre épisodes qui correspondent à quatre problèmes successifs :

- **P1** : Trouver une fonction (ouvert par (ThR, 2) et fermé par (GF, 8))
- **P2** : La courbe passe-t-elle par l'origine ? (ouvert par (ThR, 9) et fermé par (PB, 20))
- **P3** : 0°C correspond à combien en °F (ouvert par (TR, 21) et fermé par (EB, 33))
- **P4** : Le tracé est-il une droite ? (ouvert par (E, 34) et fermé par (EB, 59) repris par (E, 60))

Les premiers problèmes sont ouverts par les élèves et le dernier par l'enseignant. Il s'agit d'explicitier le fait que la représentation graphique est bien une droite alors que les élèves n'avaient pas placé les bons points initialement et que cette question n'a pas été mise en regard

des nouvelles données construites. La transcription est donc découpée en quatre épisodes dont l'ouverture et la fermeture sont identifiées en gras (voir annexe 26). Ensuite pour chaque épisode, nous avons repéré des éléments textuels permettant d'identifier les unités de raisonnement. Nous avons alors fait des hypothèses sur le type de traitement utilisé. Nous avons identifié trois schèmes : « contempler » si les données sont explicitement dans le milieu et suffisent à justifier l'assertion, « opérer » si des opérations sont effectuées, évoquées ou supposées sur les données (calculs, comparaisons) et « transformer » si les données subissent une conversion de cadre ou de registre. De même nous avons caractérisé la problématisation à partir de la triade « intra-inter-trans » en posant « intra » une assertion ne prenant en compte qu'une donnée isolée, « inter » une assertion prenant en compte au minimum deux données et « trans » une assertion s'appuyant sur une généralisation (voir partie 2). Chaque épisode fournit différentes unités de raisonnement que nous avons codées dans la transcription. Ces unités de raisonnement sont ensuite numérotées dans l'ordre chronologique du débat de 1 à 17 et représentées sur un graphique. Le schéma 14 permet de visualiser l'évolution du raisonnement au cours du débat. Nous avons attribué une couleur différente à chaque locuteur pour repérer la circulation de la parole.

Premier épisode de 1 à 8 inclus

La première proposition atteste d'un raisonnement **U2o2** puisque le petit groupe a testé les propriétés linaires multiplicatives (U2) en ayant effectué des opérations (Opérer) et en comparant le résultat à celui attendu dans le cas d'une situation de proportionnalité (« trans »).

Le groupe conclut au fait qu'il n'a pas trouvé de fonction. Il s'agit d'un raisonnement **U1c3** puisque le groupe cherche à identifier la relation fonctionnelle et sur le mode de la contemplation (ils ont tracé la représentation graphique et pensaient pouvoir déterminer la fonction par observation du graphique), et dans un mode « trans » puisqu'ils font référence à une théorie apprise. Cette théorie n'est pas énoncée et le propos n'est pas achevé, on peut cependant penser que les élèves considèrent que pour trouver une fonction il faut obtenir une droite passant par l'origine.

Ce raisonnement perdure avec l'intervention (PB, 6) et celle de (GF, 8) qui conclut : « On voit là... » ; « vu ce qu'on a là.. ». La formulation atteste d'une configuration de nature empirique. « C'est une affine » fait référence à un élément du cours « Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine ».

Deuxième épisode de 9 à 20 inclus

Cet épisode commence par une unité de raisonnement **U3t2**, l'élève considère la variation de la grandeur dépendante quand la grandeur indépendante augmente et effectue une conversion dans le registre graphique pour conclure que la représentation du couple (50 ; 90) ne peut pas être un point. Il utilise le mot « progression » pour caractériser ce couple pour lequel les élèves n'ont pas de formalisation à disposition. Ce couple correspond à la marche et contre-marche évoquée dans notre partie 1. Un autre élève reformule en disant qu'il s'agit d'une « augmentation ». Les élèves comparent deux interprétations, d'où le mode « inter ». En

effet, il est difficile de savoir dans quel cadre les élèves travaillent (géométrie analytique, mesures de grandeurs, fonctions).

(MB, 13) revient à une unité **U1t2** en mettant en relation les cadres fonctionnels et arithmétiques par une conversion du registre arithmétique au registre graphique : « quand on place 50, ça fait 90 ». On peut situer cette intervention en « inter » puisqu'il y a mise en relation de deux données : 50 et 90. L'argument qui suit est une unité **U1c2** qui revient aux données initiales sans opération ni transformation des données. (AA, 18) reformule en faisant des conversions entre le registre des écritures symboliques, celui du langage naturel et sans doute le registre graphique en ce sens que lorsqu'elle dit « on part de zéro » il peut s'agir de la valeur 0 (mais dans le contexte sans connaître l'unité, on ne peut pas savoir de quelle grandeur (petit g) il est question) ; ou de l'origine du repère. On peut donc estimer qu'il s'agit d'une unité **U3o2**. L'épisode se termine par (PB, 20) qui synthétise le propos en commençant par « ça veut dire que... », il utilise ses connaissances pour comparer le processus à celui déjà appris concernant les fonctions affines et conclut qu'il faut trouver l'image de 0. On peut estimer que nous sommes ici sur une unité **U3t3** puisque les variations sont prises en compte pour remettre en cause une donnée au regard d'une condition qui n'est cependant pas énoncée par cet élève.

Troisième épisode de 21 à 34 inclus

(MB, 22) donne un résultat qui n'est pas justifié et qui ne sera pas repris ensuite. On peut caractériser cette intervention comme une unité **U3o3**, une nouvelle donnée a été construite et elle tient compte de la variation. (EB, 24) permet de faire un saut avec une unité **U4o2** en proposant une opération permettant de calculer l'image de 0 à partir des accroissements. Cette unité va se retrouver tout au long de l'épisode jusqu'à la conclusion (EB, 33) : « il faudrait partir de 32°F », qui laisse toujours le doute sur le registre utilisé entre le registre arithmétique (« partir » au sens de donnée initiale) et le registre graphique (« partir » au sens d'origine). L'enseignant reformule en généralisant le processus. Nous sommes toujours sur une unité **U4** mais il y a recherche d'une propriété générale posant la concomitance entre les accroissements des deux grandeurs (petit g) de manière globale, soit une unité **U4t3**.

Quatrième épisode de 34 à 60 inclus

Le problème est posé par l'enseignant et la première réponse relève de l'unité **U5c2** (EB, 37). Le mot « régulièrement » supposant que les accroissements ont été comparés entre eux. L'élève fait référence à une donnée du texte. Après une période de silence, (MB, 39) revient aux valeurs et avance que les deux séries de nombres sont proportionnelles, ce qui suppose d'avoir opéré sur les nombres indépendamment de la prise en compte des variations. Nous sommes donc sur une unité **U1o3**. Les calculs vont être remis en cause et nous resterons sur cette unité jusqu'à l'intervention (JD, 51) en réponse à l'enseignant. En signifiant que les augmentations des deux grandeurs sont proportionnelles, nous sommes à l'unité **U5o3** en

supposant que l'élève s'appuie sur les opérations effectuées précédemment. De nouveau, l'enseignant synthétise en insistant sur l'identification des deux grandeurs proportionnelles qui sont ici l'accroissement des températures en °C et l'accroissement des températures en °F. Nous avons une unité **U5o2** qui devient **U5t3** avec l'intervention (JD, 55) qui fait référence à une « fonction affine » et donc à une théorie apprise. (EB, 59) reformule la condition pour obtenir une droite, on a une unité **U5o2** car il n'interprète pas la dépendance entre les accroissements, il la reformule d'un point de vue opératoire et fait référence à une nécessité par l'utilisation du mot « forcément ». Nous avons comparaison entre les augmentations d'où le stade « inter ». L'enseignant apporte un élément nouveau en essayant de convertir cette nouvelle donnée dans le registre graphique dans une idée de généralisation. Nous avons ici une unité **U5t3**.

I.1.2 : Problématisation dans le débat

Le schéma 14 permet de suivre l'évolution des unités de raisonnement au fil du débat, les points numérotés de 1 à 17 indiquent la chronologie des échanges en pointant les unités définies dans l'analyse. Sur l'axe des abscisses, les unités sont rangées suivant les schèmes mobilisés (contempler, opérer, transformer) et sur l'ordonnée les unités de 1 à 7 avec trois sous niveaux correspondant au modes « intra, inter, trans ». Le premier point est indiqué par un losange plein et le dernier par un losange vide, le tracé permet de suivre les intervention dans l'ordre chronologique. Ce schéma permet de visualiser les allers et retours entre les différentes unités mais aussi celles les plus sollicitées ainsi que les évolutions. On remarque ici que les unités U2 et U3 sont les plus fréquentes puis qu'un saut se fait avec l'état 9 à partir duquel l'unité U5 est mobilisée. Si on met en parallèle cette analyse des échanges avec les interlocuteurs on peut remarquer que les interventions de l'enseignant (points ronds 10 et 14) correspondent à une volonté de glissement par une reformulation de résultats et de nouvelles questions visant une généralisation. Ce glissement est repris par certains élèves. Mais si on regarde en détail les élèves qui interviennent, on remarque peu de déplacements individuels, chacun reste sensiblement au niveau où il est. Si on repère les quatre problèmes P1 à P4 par des ovales, nous avons des chevauchements ou des inclusions du fait que les données construites sont réutilisées. On remarque que les élèves interviennent sur un type de problème et que ces problèmes mobilisent certaines unités de raisonnement spécifiques. Dans la progression du débat, le problème est de moins en moins lié aux grandeurs et tient de plus en plus compte des variations, ce qui correspond à l'objectif de l'enseignant mais si globalement l'avancée se fait, individuellement cette avancée correspond à des élèves différents.

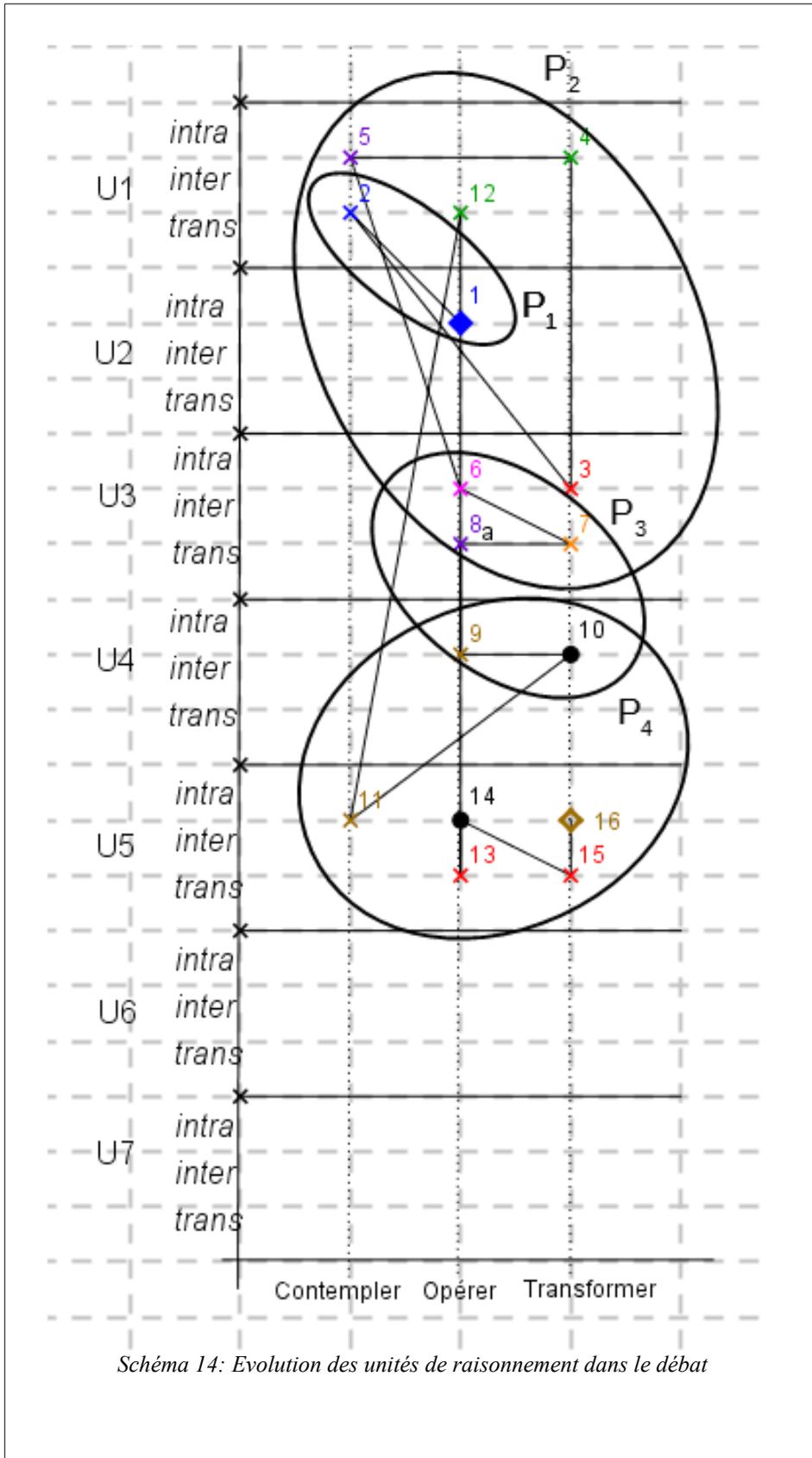


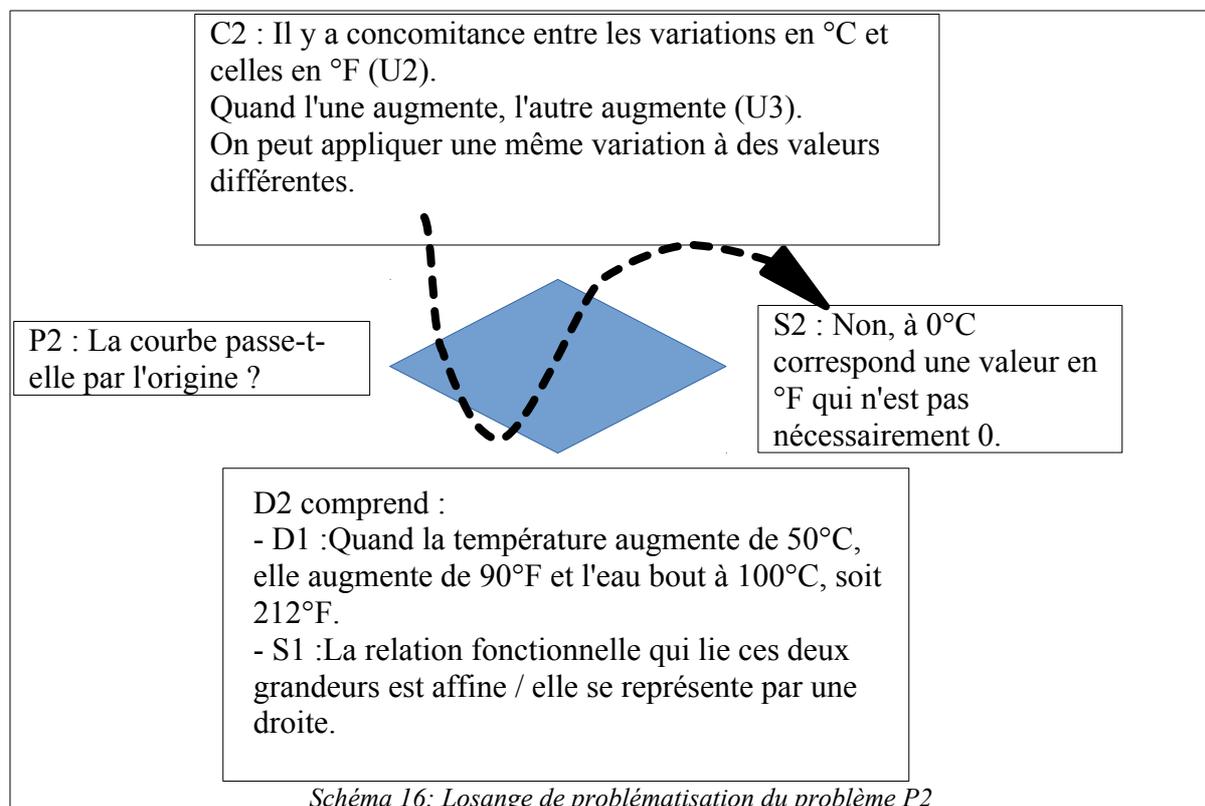
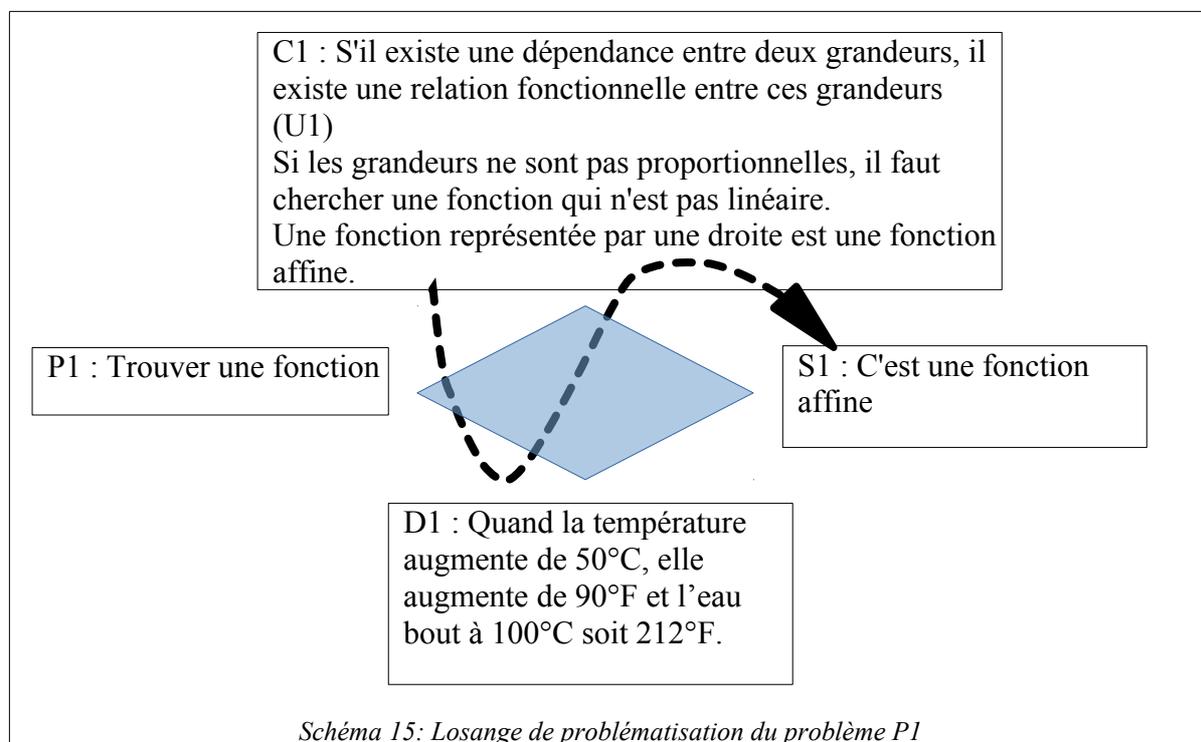
Schéma 14: Evolution des unités de raisonnement dans le débat

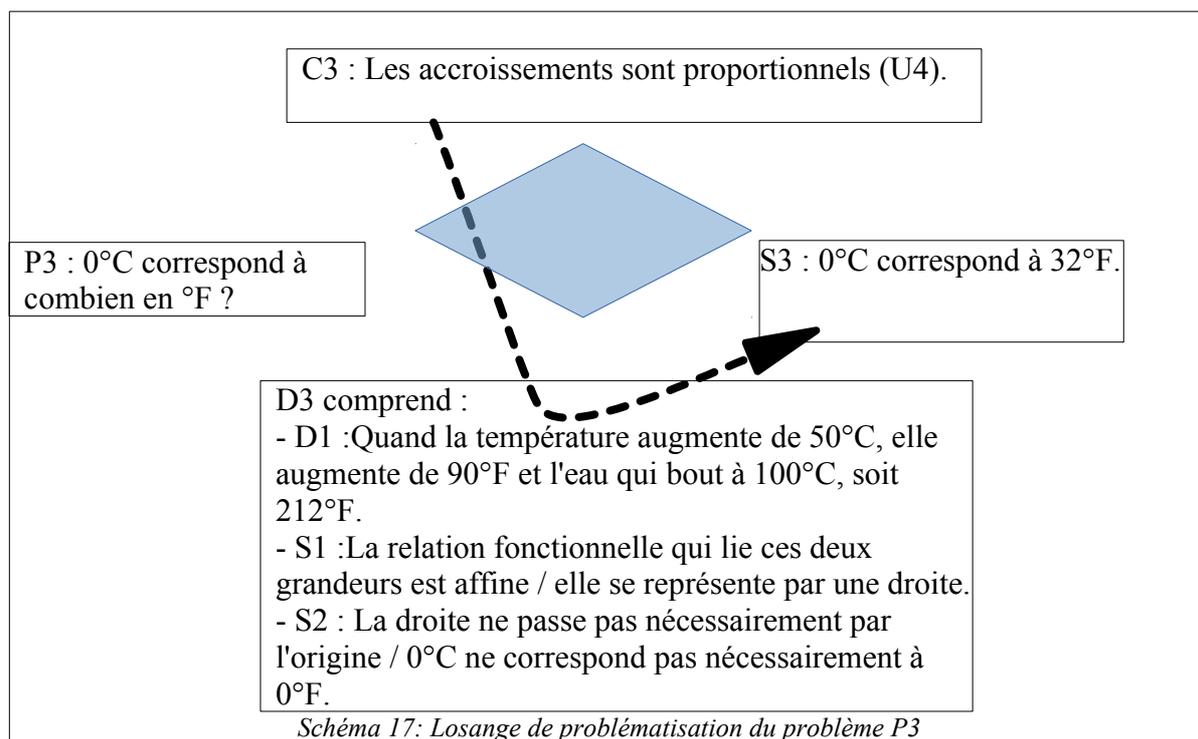
Pour ce qui est du saut avec l'état 9, on peut repérer avec la macrostructure du débat donnée dans le schéma 2 que l'objection permet l'adhésion à partir du moment où elle utilise des conversions pour fournir des arguments dans les différents registres, en particulier celle du registre des nombres à celui des graphiques. Le registre du langage naturel est utilisé pour traduire la propriété qu'il s'agisse de nombres ou de points en utilisant le mot « augmente ». Ainsi on peut parler d'une « augmentation de 50°C » pour désigner un déplacement de 50 unités vers la droite, parallèlement à l'axe des abscisses. Au tableau sont notées les valeurs dans un tableau et le graphique a été tracé à main levée pour servir de support à la réflexion. Il faut donc associer la vidéo à la transcription pour savoir si les commentaires portent sur les nombres ou sur les coordonnées de points, en particulier quand le locuteur accompagne son propos de gestes par rapport aux supports écrits.

Les quatre problèmes apparaissent sur le schéma comme quatre zones d'échanges correspondant à des unités de raisonnement différentes. Pour chacun de ces problèmes, on peut tracer un losange de problématisation. Ces quatre losanges mettent en évidence que les solutions des problèmes successifs apportent des conditions ou des données nouvelles et que la mise en tension des données et des conditions se fait suivant différents modes : opérer, transformer et plus particulièrement convertir d'un registre à un autre. La solution émerge d'une mise en relation de données ou de données et conditions (correspond au stade « inter ») et d'une généralisation qui peut passer par des éléments théoriques construits qui peuvent toutefois être erronés ou intuitifs (correspond au stade « trans »).

On peut remarquer que le premier problème posé par l'enseignant amène les élèves à opérer sur les données initiales. C'est souvent une stratégie de dévolution : la mise en activité permet aux élèves de s'approprier la situation et doit les amener à poser le problème ou à émettre des hypothèses sur les solutions.

Pour les autres problèmes, nous pouvons remarquer le rôle de la conversion qui permet de comparer les données construites au regard des conditions formulées dans différents registres.





Les conditions peuvent être les moteurs de l'activité, c'est le cas lorsque certaines notions appellent de manière automatique des schèmes d'action (ici la proportionnalité appelle le calcul de quotients ou l'utilisation du produit en croix par exemple). Dans d'autres cas, ce sont les données qui appellent certains traitements et qui fournissent de nouvelles données construites qui correspondent à des conditions qui n'auraient peut-être pas été mobilisées sinon (par exemple la proportionnalité des variations permet le calcul de certaines valeurs et peut amener la connaissance de la valeur en °F correspondant à 0°C). Les solutions ne viennent pas d'une contemplation des données en ce sens que ces faits doivent être transformés pour être mis en relation avec des connaissances, des théorèmes, des théories. C'est à ce stade que peuvent émerger les nécessités. La question étant celle de l'émergence de ces nécessités pour tous les élèves sachant que la participation au débat est inégale et que la formalisation explicite de ces nécessités peut être absente ou rester très contextualisée.

Dans le schéma 18, la nécessité des accroissements réguliers est formulée par l'enseignant en utilisant différents registres dans la même phrase :

60 : Les augmentations seront toujours de la même façon, tu as dit que ça allait augmenter régulièrement, ça augmente régulièrement pour les °C comme pour les °F. Ça veut dire que vos points lorsque vous allez les faire sur votre graphique, ils vont augmenter toujours dans la même proportion, la même régularité. Donc on est sûr que *c'est une droite*.

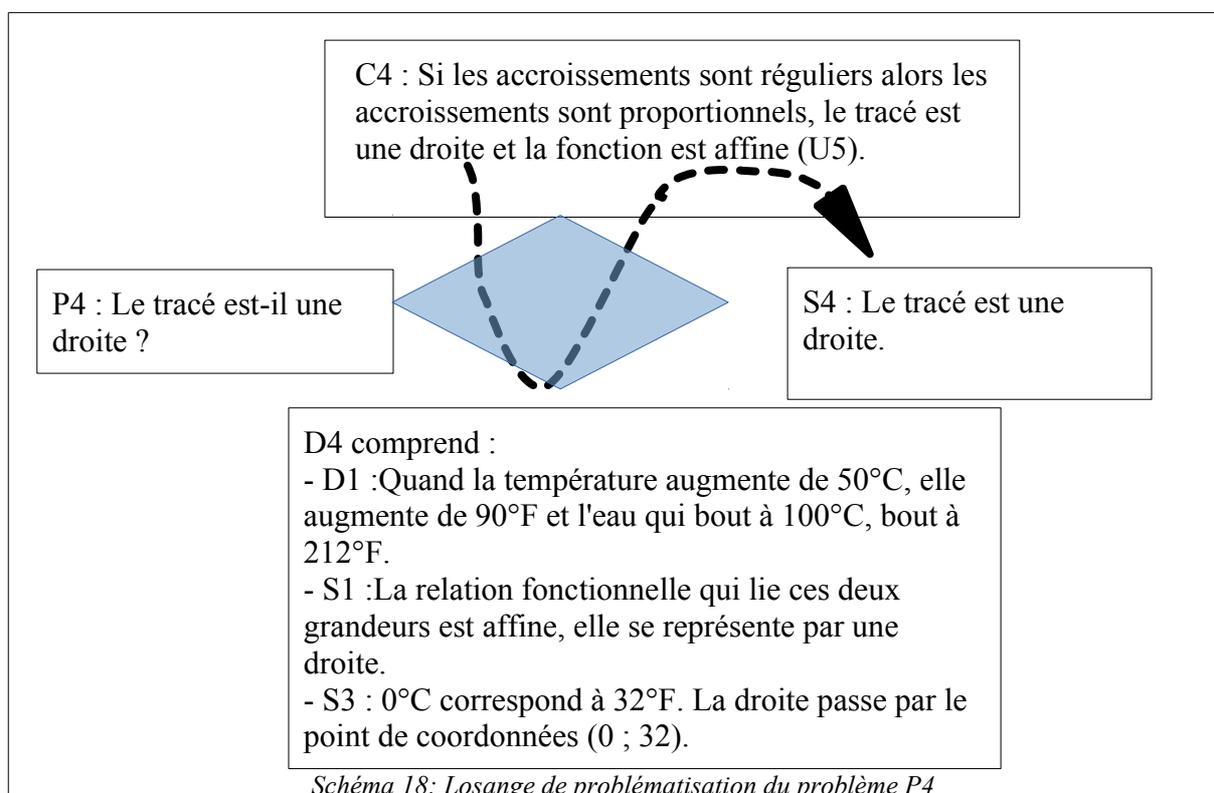
La propriété est contextualisée. Les unités sont utilisées pour désigner les grandeurs. Le mot « ça » est censé désigner la Grandeur (grand G) qui est ici la température. Ainsi la

formulation « [...] ça augmente régulièrement pour les °C comme pour les °F. » cherche à exprimer qu'une même variation Δx de la mesure de la température en degrés Celsius correspond à une même variation Δy de la mesure de la température en degrés Fahrenheit. Si on note f la fonction qui associe à la variation de mesure Δx de la température en °C, la variation de mesure Δy de la température en °F, on a pour tout Δx_1 et Δx_2 réels la propriété suivante :

$$f(\Delta x_1 + \Delta x_2) = f(\Delta x_1) + f(\Delta x_2)$$

or une fonction qui vérifie cette propriété est une fonction linéaire.

L'enseignant change de registre pour exprimer la même propriété (utilisation de l'expression « c'est-à-dire ») et utilise le registre graphique. La difficulté est de formaliser dans ce registre, et qui plus est à l'oral, le fait que les variations sont « régulières ». Nous obtenons une phrase qui n'est pas correcte mathématiquement dans laquelle le mot « point » du registre graphique est associé au mot « augmenter » du registre fonctionnel et au mot « proportion » du registre arithmétique pour conclure par « c'est une droite » ou le « c'est » désigne la représentation graphique de la fonction qui à une mesure de la température en °C associe sa mesure en °F.



I.1.3 : Que nous apprend l'analyse de la séquence « degrés Celsius-degrés Fahrenheit » ?

Nous constatons que le débat, s'il permet une avancée du travail collectivement, ne permet pas à chaque élève de mobiliser toutes les unités de raisonnement. Les élèves interviennent chacun à certains moments sur des problèmes spécifiques. L'élève qui intervient par exemple sur le problème P1, n'intervient plus ensuite, alors que sur le problème P4 interviennent deux élèves qui n'ont pas participé aux échanges sur les questions précédentes. Si les nécessités émergent bien du groupe suite à une progression dans les unités de raisonnement de 1 à 5, elles n'apparaissent pas en relation avec le même problème pour chaque élève et rien ne prouve que les élèves ont mobilisé les différentes unités. En particulier les élèves qui ont mobilisé les unités 1 et 2 n'interviennent plus ensuite, on ne peut donc pas savoir s'ils ont utilisé les autres unités de raisonnement sans s'exprimer ou s'ils sont restés sur leurs représentations premières du problème. Il s'agirait donc de penser un dispositif permettant à chaque élève de se confronter effectivement aux différents problèmes et donc de mobiliser différentes unités de raisonnement. Cela implique un temps plus long et un usage de l'écrit pour permettre des rétroactions. Cela implique aussi de formaliser clairement les différents problèmes alors que dans l'avancée du débat, ces étapes ne sont pas explicites, même si l'enseignant prend soin de reformuler les questions.

Nous pouvons isoler quelques repères pour organiser cette progressivité :

1. Le problème est initialement posé dans le cadre arithmétique et doit permettre de mobiliser les unités U1 à U3, la dévolution se fait par une activité que les élèves maîtrisent visant à reconnaître que la situation n'est pas une situation de proportionnalité.
2. Une deuxième étape consiste à travailler sur le comportement global de la fonction qui modélise la situation et à le quantifier (unités U3 et U4).
3. Une dernière étape vise à formaliser ce comportement pour le généraliser ou pour l'étudier sur un intervalle plus petit (unités U5 et U6).

Par ailleurs la mise en texte des nécessités demande un travail rigoureux d'expression dans les différents registres. Ce travail de formalisation peut être un objectif d'apprentissage.

Ces éléments vont nous permettre de mettre en place une grille pour l'analyse *a priori* des situations à travers un questionnement s'inspirant de celui utilisé par Artigue qui vise au « contrôle du sens » (Artigue, 1996). Cette analyse comporte différentes parties :

- La description des choix effectués et les caractéristiques de la situation a-didactique qui en découlent : Quel est l'apprentissage visé ? Quelles sont les connaissances nécessaires pour comprendre la question posée ? Le problème mobilise-t-il des unités de raisonnement de U1 à U7 ? Quelles sont les réponses possibles ? Cette analyse

pourra se faire au travers d'un « espace de contraintes *a priori* » pour identifier ce qui, dans le milieu, relève du registre empirique ou du registre apodictique (Hersant, 2011, p.163).

- L'analyse de l'enjeu de la situation pour l'élève en fonction des possibilités d'actions, de choix, de décision, de contrôle et de validation : Le milieu permet-il l'entrée dans l'activité ? L'élève est-il amené à choisir un cadre ? L'élève est-il amené à faire des conversions d'un registre à un autre ? D'un cadre à un autre ? Ces changements lui permettent-ils de contrôler ou de valider sa solution ? Le milieu a-t-il des propriétés antagonistes qui permettent aux élèves de confronter leurs arguments et d'évacuer les explications ne relevant pas d'un domaine des mathématiques ?
- La prévision des comportements et la mobilisation effective des connaissances visées par l'apprentissage : Le milieu est-il contraignant en ce sens qu'il contraint le passage par l'étude de la covariation ? La construction des nécessités qui permettent de conclure permet-elle de caractériser l'affinité ?

Ainsi le milieu a trois propriétés : une propriété antagoniste, une propriété proactive et une propriété contraignante au sens de Hersant.

Il est question ici d'une caractéristique du milieu de la situation qui est complémentaire de son degré d'adidacticité et non opposée que nous nommons contraignance : sa capacité à permettre l'apparition des explications souhaitées et à contraindre l'activité des élèves dans une direction de façon à éviter la dispersion des explications tout en préservant des potentialités adidactiques de la situation. (Hersant, 2011, p.111)

Notre analyse *a priori* doit mettre en évidence ces propriétés pour que sa confrontation avec l'analyse *a posteriori* permette de valider ou d'invalider les hypothèses de départ.

I.2 : Un essai pour permettre l'apprentissage par problématisation de l'affinité par les élèves

Nous allons étudier une situation conçue à partir des conclusions précédentes. Cette situation a été proposée dans une classe de seconde dans un lycée de la périphérie nantaise en 2011. Les élèves ont l'habitude de travailler en groupes et d'être observés, enregistrés ou filmés. Notre connaissance des élèves en tant qu'enseignante de la classe, apporte des éléments d'analyse supplémentaires mais notre propre implication dans la séance, même si nous avons adopté une attitude la plus effacée possible pendant le travail des élèves, en limite la portée. Nous nous intéresserons donc principalement aux productions écrites des élèves.

Notre objectif est d'analyser l'activité des élèves pour mesurer l'impact de cette situation sur le registre explicatif mobilisé par les élèves et sur la manière dont ils problématisent la notion de fonction affine. Pour cela nous allons présenter la situation et sa

mise en œuvre, analyser les procédures des élèves pour identifier les unités de raisonnement qu'ils utilisent, repérer comment les élèves tissent des liens entre le registre empirique, le registre des modèles et le registre explicatif.

I.2.1 : Présentation de la situation salaire-chiffre d'affaires

L'idée de la situation initiale est tirée d'un problème proposé dans l'ouvrage de J. Bair, G. Haesbroeck et J.J. Haesbroeck (Bair, Haesbroeck, & Haesbroeck, 2000, p.99).

Au cours des six dernières années on a relevé le montant global y des salaires payés aux ouvriers d'une entreprise en fonction du chiffre d'affaires x de la société (x et y exprimés dans une certaine unité monétaire). Les résultats observés sont les suivants :

Chiffre d'affaires x	11 136	13 037	13 223	14 115	15 829	17 950
Salaire y	1 686	2 009	2 040	2 192	2 484	2 844

Trouvez une loi exprimant y en fonction de x .

Ce problème est considéré par les auteurs comme « un exemple fort simple de modélisation », le savoir visé étant l'interpolation linéaire qui n'est pas au programme de la classe de seconde. Il s'agit d'étudier la covariation de deux grandeurs pour lesquelles il n'existe pas de loi scientifique établie. Le problème n'amène pas les élèves à retrouver une loi prédéfinie et la loi n'est pas l'objectif de l'apprentissage. La relation entre les deux grandeurs peut être modélisée par une fonction affine. L'apprentissage visé est donc la détermination de l'expression algébrique d'une fonction affine à partir d'un couple de valeurs et leurs images. La situation a un fort potentiel a-didactique (Perrin-Glorian & Hersant, 2003) en ce sens que le milieu représente bien le savoir visé et que les élèves ont des connaissances permettant d'interpréter les rétroactions. Ce milieu est constitué des données du problème, des connaissances que les élèves ont de la représentation graphique de données, des techniques de calcul (quotient, produit en croix, soustraction, résolution d'équations algébriques, de systèmes algébriques linéaires à deux équations et deux inconnues) permettant de construire de nouvelles données, des comparaisons possibles entre les différentes procédures, des représentations possibles sur un tableur ou sur une calculatrice graphique. La recherche d'une expression linéaire du premier degré peut se justifier par l'alignement relatif des points sur la représentation graphique ou par le calcul de taux de variation qui sont voisins. Aucune connaissance du contexte ne peut apporter des éléments pour résoudre le problème puisqu'il n'existe *a priori* aucune raison pour que ces deux grandeurs soient dépendantes l'une de l'autre d'un point de vue causal.

Les valeurs données dans le tableau peuvent être considérées comme des valeurs approchées à l'unité près. Le modèle utilisé est donc une fonction empirique. Il ne s'agit pas

ici de définir le domaine de validité, ce qui relèverait de concepts d'économie ou de gestion. D'un point de vue mathématique, la résolution du problème se fait ici dans l'ensemble des entiers naturels. La loi recherchée est donc une restriction d'une fonction affine à l'ensemble des entiers naturels. Les nombres sont suffisamment grands et il n'existe pas de rapport simple entre eux (pas de doubles ou de triples).

Nous avons modifié le problème pour le proposer aux élèves en tenant compte des hypothèses de travail que nous avons posées dans cette recherche. Nous avons choisi l'euro comme unité monétaire pour simplifier le contexte. Nous avons retiré le mot « loi » de la consigne pour que les élèves ne pensent pas qu'une telle loi soit définie scientifiquement et nous n'avons pas désigné les variables par x et y pour ne pas induire l'utilisation du registre des expressions algébriques. Nous avons cependant évité de faire apparaître le mot « fonction » pour ne pas induire de procédures liées aux fonctions affines déjà étudiées au collège. Nous avons choisi le mot « relation ». Ce choix peut amener les élèves à étudier les variations (point de vue covariation) ou le processus numérique (point de vue variation). Nous avons aussi modifié les données numériques pour que les élèves soient convaincus de la pertinence d'un modèle affine par rapport à un modèle linéaire. La validation peut se faire par l'application de la relation ou processus de calcul trouvé aux différentes valeurs données. L'écart avec les résultats peut donner des éléments de rétroaction : Les écarts sont-ils tous dans le même sens ? Sont-ils du même ordre ? Dans l'affirmative la relation peut être corrigée par une addition ou une soustraction sinon par une correction du coefficient multiplicateur. Le fait que le coefficient de proportionnalité des écarts soit entre 0 et 1 doit amener les élèves à réfléchir sur l'effet du coefficient sur les calculs.

Le problème posé est donc le suivant :

Au cours des six dernières années on a relevé le montant en euros des salaires payés aux ouvriers d'une entreprise en fonction du chiffre d'affaires en euros de la société. Les résultats observés sont les suivants :

Chiffre d'affaires <i>en euros</i>	11 136	13 037	13 225	14 117	15 831	17 952
Salaire <i>en euros</i>	1 686	2 009	2 041	2 193	2 483	2 845

Trouvez une relation entre le salaire ouvrier et le chiffre d'affaires de la société.

I.2.2 : La mise en œuvre de la situation salaire-chiffre d'affaires

Lors de la première séance, les élèves sont répartis par demi-classe en 6 groupes de 3 ou 4 élèves. Le sujet est distribué et la consigne est de chercher seul une dizaine de minutes

puis de mettre en commun, un secrétaire doit prendre note des pistes même si elles n'ont pas abouti. Il est important de demander aux élèves de garder des traces des essais (en particulier s'ils utilisent une calculatrice) pour voir comment les rétroactions sont organisées. Pendant les 5 dernières minutes, le groupe doit rédiger une conclusion qui n'est pas forcément une solution.

La deuxième séance se fait en classe entière, les élèves sont répartis dans des groupes de quatre homogènes en fonction des procédures utilisées lors de la première séance. L'objectif est de permettre à chaque groupe de se centrer sur le nouveau problème posé à partir des données et des conditions qu'ils ont choisies. L'enseignante prend à sa charge la formalisation de la première étape de l'apprentissage par problématisation faite par les élèves et dévolue aux élèves la résolution du nouveau problème. Les élèves ont besoin d'exemples exemplaires (Kuhn, 2008) qui vont constituer une banque de problèmes qu'ils ont effectivement résolus eux-mêmes. Cette banque leur permettra, dans un nouveau problème, de reconnaître une procédure ou un type de données, un élément quelconque qui puisse leur permettre d'initier une résolution. Il faut donc que chaque élève ait effectivement résolu, lui-même, un certain nombre de problèmes, seul ou avec une aide. Les corrections collectives permettent rarement à tous les élèves d'aller au bout de la résolution, le problème corrigé n'a donc pas le même statut dans sa mémoire. L'activité proposée en deuxième séance a comme premier objectif de donner le temps à tous les élèves de résoudre le problème, en partant d'une procédure qu'ils ont initiée lors de la première séance et qui a été validée par l'enseignante (voir annexe 27). Le deuxième objectif est de faire apparaître des nécessités différentes dans les groupes pour confronter ensuite les solutions entre groupes ayant utilisé la même procédure puis entre groupes ayant utilisé des procédures différentes. Les textes donnés aux groupes valident pour chacun une partie des résultats de la séance précédente et la consigne est fonction du travail antérieur des groupes. Du côté des inducteurs de problématisation (voir page 87), ils sont différents suivant les groupes, nous les préciserons au moment de l'analyse de l'activité des élèves.

La troisième séance va amener les élèves à critiquer les solutions et donc à tester la validité des réponses au regard non plus des données du problème, mais des raisons évoquées ou construites. Trois réponses validées sont proposées qui présentent chacune de nouvelles données construites du problème (voir annexe 28). Il s'agit de trouver les liens, donc de retrouver la règle qui a permis de construire ces nouvelles données et son expression dans chaque registre (Duval, 1993). La situation fait agir des inducteurs de type e_i et d_i , il est demandé de tester la validité d'une solution par rapport aux raisons construites ou aux données construites par un autre groupe. Comme à l'étape précédente, tout ce qui est écrit dans le document fourni aux élèves est validé, le problème consiste à expliquer pourquoi c'est vrai et non à dire si c'est juste ou faux.

Les questions pour lesquelles les élèves n'ont pas réussi à se mettre d'accord sont identifiées à partir des productions de la séance précédentes. Lors de la quatrième séance (voir annexe 29), elles vont être mises en débat dans des groupes de quatre élèves. Les différentes procédures et leurs solutions validées constituent les nouvelles données du problème. L'objectif est de contraindre les élèves à expliquer le lien entre ces différentes productions,

c'est-à-dire à justifier le lien entre les arguments tirés du graphique, ceux obtenus à partir du coefficient multiplicateur et ceux qui utilisent la fonction affine. Par cette attente de formulation, nous visons un travail de conversion de registres (Duval, 2006) et peut-être des changements de cadres (Rogalski, 2001). La production demandée aux élèves doit conclure sur une définition de ce qu'est pour eux une fonction affine.

Dans la cinquième séance, il est proposé aux élèves d'expliquer ce qu'est une fonction affine par la confrontation de textes savants de différentes époques avec les propositions faites par les élèves lors de la séance précédente (voir annexe 30). La première consigne demande de « repérer ce qui est faux » parmi les productions des élèves, c'est un inducteur de type d_i puisqu'il s'agit de tester la validité par rapport aux raisons construites, nous n'avons plus de données numériques. La seconde consigne « repérer ce qui se ressemble entre les définitions savantes et vos propositions » est un inducteur de type c_i , il est demandé de relier faits et raisons.

1.2.3 : Analyse a priori de la séquence salaire-chiffre d'affaires

L'apprentissage visé est l'interpolation linéaire comme outil pour résoudre un problème. Les connaissances nécessaires pour comprendre la question sont : la lecture de tableau, la notion de grandeur et de variation. Pour trouver une relation entre les deux grandeurs, il faut identifier ces grandeurs et étudier la concomitance de leurs variations. Pour cela, on peut prévoir trois types de procédures :

Procédure 1 : utiliser le modèle de la proportionnalité

Cette procédure peut amener les élèves à trouver une fonction linéaire qu'ils estimeront convenir dans un contexte de mesures approchées. Les débats dans les groupes autour de cette procédure porteront vraisemblablement sur la validation ou non sur le modèle. Les arguments peuvent être liés à la nature des nombres, à la précision des résultats obtenus, à la signification que peut avoir le coefficient de proportionnalité trouvé d'autant que les deux grandeurs se mesurent dans la même unité. Est-ce une grandeur quotient ? Est-ce une proportion ?

Procédure 2 : représenter graphiquement la situation

Le tracé amène au constat que les points sont presque alignés mais l'alignement des points avec l'origine n'est pas facile à vérifier sur le graphique. Les grandeurs n'étant pas proportionnelles mais le tracé étant proche d'une droite, on peut avoir débat autour de la recherche ou non d'un coefficient multiplicateur entre les deux grandeurs ou entre leurs accroissements. Une telle constatation peut orienter les élèves vers la recherche d'une fonction affine. Les méthodes utilisées seront révélatrices de l'appropriation de la notion de fonction affine par les élèves.

Procédure 3 : le point de vue covariationnel

Cette procédure peut amener les élèves à effectuer des calculs de variations. Les discours autour de cette procédure pourront donner une idée de la représentation que les élèves ont du concept de variation d'une fonction. En particulier, on peut mettre en évidence

certaines représentations fausses comme celle d'associer systématiquement la croissance à l'addition ou à la multiplication.

Espace de contraintes *a priori* lié à la situation

L'espace de contraintes permet d'identifier différents REX (voir tableau 28). Différentes configurations sont possibles. On peut attendre des élèves qu'ils mettent en place une configuration pragmatique consistant à conclure uniquement à partir du fait qu'ils voient les points alignés ou du fait qu'ils ont testé un certain nombre d'algorithmes de calculs et qu'ils ne trouvent pas de calcul permettant de déterminer le salaire à partir du chiffre d'affaires. Une configuration analytique est possible si les élèves cherchent à appliquer les fonctions de référence qu'ils connaissent. Enfin une configuration théorique consisterait à s'appuyer sur les caractéristiques des fonctions affines pour attester que le modèle est pertinent. Certains modèles sont erronés, en effet :

- on ne peut pas conclure en mathématiques à partir d'une perception visuelle puisque les objets mathématiques sont des objets abstraits dont on ne peut donner qu'une représentation imparfaite ;
- on ne peut pas tester toutes les solutions lorsque le nombre de solutions est infini.

Les deux cadres à privilégier sont celui des suites de nombres proportionnelles dans lequel les propriétés de linéarité sont relativement bien maîtrisées par les élèves (Simard, 2012b) et le cadre des fonctions dans lequel nous visons la caractérisation des fonctions affines par la proportionnalité des accroissements. Comment peut-on favoriser une configuration théorique des registres faisant évoluer le REX dans ces deux cadres ?

Les fonctions affines sont souvent étudiées en fin d'année scolaire de la classe de 3^e avec l'échéance rapide de l'évaluation du brevet des collèges. Il s'agit de développer au mieux des routines et l'apprentissage peut être accéléré du fait de l'urgence de se préparer à l'examen. Dans la longue durée, les représentations liées à l'enseignement des fonctions est très ancrée dans la pratique de l'algèbre du fait de l'évolution des programmes scolaires que nous avons analysés en première partie. Nous devons penser une autre approche qui donne du temps aux élèves pour penser et problématiser et non uniquement agir. Si nous reprenons la question de l'alignement des points, la caractérisation des fonctions affines par leur représentation graphique est le plus souvent constatée empiriquement et généralisée. Il manque un travail de réflexion autour de cette propriété qui est installée comme une routine non ancrée dans une théorie.

Les programmes scolaires entrés en application à la rentrée 2016 précisent les liens possibles entre les différents cadres. On peut lire par exemple :

Les homothéties sont amenées en 3^e, en lien avec les configuration de Thalès, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction des grandeurs géométriques. (Vallaud-Belkacem, 2015, p.378)

Expériences mises en place par les élèves	Tester des opérations (quatre opérations, carré, racine...)	Effectuer des opérations sur les grandeurs, comparer les résultats	Tester la proportionnalité	Étudier les variations	Calculer les accroissements et les comparer	Représenter les points sur un graphique
Registre empirique	On ne trouve pas de relation apparente.	Les propriétés de linéarité ne sont pas vérifiées.	Il n'existe pas de coefficient de proportionnalité, le produit en croix n'est pas vérifié.	Quand le chiffre d'affaires augmente, le salaire augmente.	Le quotient des variations de salaires par la variation du chiffre d'affaires correspondant est presque constant.	Les points sont presque alignés. On peut tracer une droite.
Registre des modèles	<p>Nécessité d'une procédure de calcul liant le salaire et le chiffre d'affaire.</p> <p>Nécessité d'une covariation pour qu'il existe une relation fonctionnelle.</p> <p>Nécessité d'un taux de variation constant pour définir une fonction « presque linéaire »</p> <p>Nécessité d'un alignement des points pour définir une fonction « presque linéaire ».</p>					
REX	Cadre de l'arithmétique		Cadre des suites de nombres proportionnelles		Cadre des fonctions	

Tableau 28: Espace de contraintes a priori de la situation "chiffre d'affaires-salaire"

On peut donc envisager de justifier la caractérisation des fonctions affines à partir de propriétés géométriques démontrées. Cela demande un changement de paradigme du côté des enseignants habitués à travailler les fonctions dans le cadre de l'algèbre. Nous pourrions alors faire passer l'argument « les points sont alignés » d'une configuration pragmatique des registres à une configuration théorique.

Pour ce qui est des propriétés faussement généralisées dans une configuration analytique, nous avons vu que la diversité des contextes et des relations fonctionnelles rencontrées par les élèves devrait permettre de lutter contre ces représentations erronées. En particulier, les outils algébriques étant insuffisants pour traiter d'autres situations que des problèmes du premier degré, aborder les fonctions à travers un autre cadre que l'algèbre peut autoriser l'étude de relations fonctionnelles plus diversifiées dès le collège qui limiteront les modèles erronés du type « toutes les fonctions sont croissantes » ou « toutes les fonctions sont des fonctions affines ».

I.2.4 : Analyse a posteriori de la séquence salaire-chiffre d'affaires

I.2.4.a : Première séance

Les élèves sont répartis en 6 groupes de 3 ou 4 notés A, B, C, D, E et F (voir annexe 31). Pendant le travail individuel, les élèves du groupe A posent cette question : « Faut pas juste dire si ça augmente, genre faut trouver une formule ? ». Cette demande d'explicitation de la consigne indique une hésitation entre un point de vue dynamique plutôt global (covariation) et un point de vue statique plutôt local (relation fonctionnelle). Elle témoigne d'un début de construction du problème amenant une représentation de la forme de la solution.

Nous avons identifié différents moments pendant la séance qui peuvent être considérés comme des périodes dont la succession montre comment les élèves évoluent dans leur représentation du problème.

Première période : procédure 3 et comparaison du sens de variation

Dans la plupart des groupes, une première étape consiste à justifier l'existence d'une relation fonctionnelle entre les deux grandeurs, nous sommes dans l'unité de raisonnement U1. Il apparaît que, pour les élèves, une grandeur peut s'exprimer en fonction de l'autre uniquement si ces deux grandeurs ont le même sens de variation. Nous pouvons rapprocher ce constat de l'analyse des manuels qui montre qu'effectivement les élèves peuvent rencontrer majoritairement des fonctions croissantes (voir partie 2 chapitre II.1). Nous pouvons lire par exemple que « Plus le chiffre d'affaires est élevé, plus le salaire est élevé, ce qui veut dire que le salaire dépend du chiffre d'affaires. » (groupe B) ; « Si le chiffre d'affaires augmente ou baisse, le salaire augmente ou baisse aussi. » (groupe A) ou « Le salaire varie en fonction du chiffre d'affaires. » (groupe F).

Deuxième période : procédure 1 et recherche d'une proportionnalité

Tous les groupes cherchent un coefficient de proportionnalité. Ils calculent donc les quotients $\frac{11\,136}{1\,686}$, $\frac{13\,037}{2\,009}$, $\frac{13\,225}{2\,041}$; etc. ou leurs inverses. Certains arrondissent immédiatement le résultat et peuvent conclure : « Hypothèse : le salaire représente 15% du chiffre d'affaires. » (groupe A). On remarque que ce groupe utilise le mot « hypothèse », on peut donc penser qu'il se met en projet de vérifier ce résultat. En fait ce groupe est surpris d'avoir déjà la solution et se doute qu'il va falloir faire autre chose. Nous avons ici un effet du méso-contrat didactique. Le groupe a demandé l'aide de l'enseignante qui les incite à améliorer l'approximation. La retranscription des échanges (voir annexe 32) montre que le groupe se donne comme but de montrer que la relation ne peut pas être autre chose que celle qu'ils ont trouvée, ce qui indique un début de problématisation : « Faut montrer que ça représente ça, que c'est pas autre chose que 15%. »

Le groupe B n'a pas écrit de conclusion mais a enchaîné directement sur la période 3 ci-dessous. Le groupe E effectue la moyenne des quotients et trouve : 6,45. Il conclut : « Le salaire est 6,45 fois inférieur au chiffre d'affaires. ». Leur formulation n'utilise pas de symboles mathématiques, elle semble adaptée au contexte. Le langage naturel relève d'un registre discursif, il ne permet pas en règle général un traitement algorithmique (Duval, 2002). Dans ce groupe, le travail personnel n'a pas été suffisamment rigoureux pour permettre les échanges. Un des membres a tout de suite imposé sa solution qui n'a pas été remise en cause par les autres. Ces élèves ne se sont pas mis en projet de validation, par contre ils ont demandé, en vain, la correction par l'enseignante.

D'autres concluent au contraire : « On a pensé au coefficient : chiffre d'affaires divisé par le salaire, mais le résultat est différent à chaque fois. Ce qui est faux, le tableau n'est pas proportionnel ! » (groupe D) et plus loin « Le salaire faisant partie du chiffre d'affaires, on peut trouver le pourcentage du salaire qui est toujours environ de 15%, seule la décimale change. » Les élèves ont travaillé la notion de fréquences en statistiques le cours précédent, ils appliquent donc ce qu'ils ont vu précédemment et expriment le quotient sous forme de pourcentage. Nous avons encore ici un effet du méso-contrat didactique.

Le groupe C écrit « mauvais résultat » en face des calculs de quotients. Le groupe F a l'idée de faire une représentation graphique. Certains élèves de ce groupe proposent de représenter le salaire en fonction du chiffre d'affaires mais d'autres proposent de représenter le pourcentage que représente le salaire par rapport au chiffre d'affaires en fonction de l'année. Ils concluent « Le pourcentage du salaire par rapport au chiffre d'affaires augmente comme celui-ci. » Par contre ils ne savent pas quoi faire de ce résultat. En effet ils n'obtiennent pas une situation de proportionnalité.

Troisième période : étude des accroissements

Une nouvelle piste est étudiée par plusieurs groupes et avait été évoquée très tôt par certains élèves sans obtenir l'adhésion du reste de leur groupe. Il s'agit de regarder ce qui se

passé au niveau des accroissements. Le groupe B a juste noté les calculs. Le groupe D écrit : « Si le chiffre d'affaires augmente par exemple de 30%, le salaire détiendra peut-être la même augmentation, ce qui est faux (le pourcentage n'est pas le même). » Pourtant plus loin les élèves précisent : « On a pensé à prendre la différence entre les chiffres d'affaires et les salaires et en les divisant ensemble. Le résultat de cette opération est au plus bas de 5,86 et au plus élevé de 5,91, la plupart sont autour de 5,87. »

Il apparaît donc que les accroissements sont presque proportionnels puisque le quotient, s'il n'est pas le même, est malgré tout dans un intervalle de plus faible amplitude.

Le groupe A écrit sa piste 2 :

« recherche : - taux de pourcentage entre le salaire
- taux de pourcentage entre chiffre d'affaires.

$$13\,037 - 11\,136 = 1901$$

$$1901 \div 11\,136 \times 100 = 17,06 \% \text{ »}$$

Ce calcul revient à calculer la variation relative, notion qu'ils utilisent en enseignement de PFEG¹⁵. Ils n'ont pas eu le temps de poursuivre leur recherche mais on peut penser qu'ils vont effectuer le même calcul sur le salaire. On ne peut pourtant pas certifier qu'ils vont chercher à établir la proportionnalité des accroissements. Le travail est cependant au niveau U2 et U3 des unités de raisonnement, les élèves cherchent à décrire et quantifier la relation fonctionnelle entre les deux grandeurs.

Les autres pistes qui n'apparaissent pas sur les comptes-rendus

D'autres idées ont été évacuées assez rapidement. Un élève propose des boîtes à moustaches, elles ont été étudiées en début de semaine. On retrouve ici la clause très fréquente du méso-contrat didactique dans sa facette sociale qui consiste à penser que l'enseignant attend de l'élève qu'il mette en application ce qui a été vu durant le cours précédent. Même si depuis septembre, les élèves ont été confrontés à un autre type d'enseignement des mathématiques, il semble que l'organisation : activités, cours, exercices, problèmes de réinvestissement soit suffisamment courante pour rester une image stable des attentes de l'enseignant chez certains élèves. On peut penser que pour cet élève, il n'y a pas eu dévolution du problème puisqu'il s'intéresse plus aux attentes du professeur qu'au problème lui-même. Au cours de la séance, l'élève qui propose cette solution n'en bougera pas, même si ses camarades ne comprennent pas ce qu'il compte faire du diagramme. Il posera plusieurs fois la question à l'enseignante, attendant sa correction, il ne cherchera pas à anticiper la représentation du diagramme, ni d'ailleurs son choix des données qu'il va utiliser pour le faire, pas plus que le type de résultats qu'il va obtenir. Cet élève est particulièrement en réussite scolaire mais on repère ici qu'il restitue plus qu'il ne problématise.

D'autres idées ont été lancées qui n'apparaissent pas complètement sur les comptes-rendus par manque de temps. Un élève du groupe B a tracé la représentation graphique du

¹⁵ Principes Fondamentaux de l'Économie et de la Gestion

salaires en fonction du chiffre d'affaires, ce qui correspond à la procédure 3 qui n'a finalement été proposée que par deux groupes. Le tracé n'était pas terminé à la fin de la séance et les élèves n'ont pas pu en discuter. Dans le groupe C, un élève a très vite écrit le mot « fonction » (voir annexe p.141). Plus tard sur son cahier on a pu lire $f(x) = ax + b$ et enfin il a écrit $f(11136) = a \times 11136 + b$. Ensuite, il a cherché dans son manuel comment résoudre cette équation. Ne trouvant pas, il a demandé l'aide de l'enseignante qui lui fait remarquer que son équation comporte deux inconnues. Sur le compte-rendu il est écrit « équation à double inconnu ». Il a ensuite trouvé le rappel sur la résolution des systèmes de deux équations à deux inconnues et écrit une deuxième équation :

$f(13037) = a \times 13037 + b$ et posé le système :

$$\begin{cases} a \times 11136 + b = 1686 \\ a \times 13037 + b = 2009 \end{cases}$$

Cet élève est en grande difficulté, il est dans le même groupe que l'élève qui a proposé les boîtes à moustaches. A aucun moment il n'a pu imposer son idée à l'autre. Ce qui est en jeu ici, ce sont bien les enjeux intersubjectifs liés aux positions hautes ou basses que chaque interlocuteur a dans l'échange. Si son travail n'avait pas été observé, nous n'aurions aucune trace de sa recherche. Il est le seul à avoir très vite cherché un modèle fonctionnel et utilisé des écritures symboliques pour représenter le problème. Cet élève a tenté d'argumenter mais sa difficulté est liée à l'estime de soi et à son rapport aux autres. Il est passionné par la programmation informatique et donc très à l'aise avec les procédures algorithmiques et le passage d'un langage naturel à un langage de programmation. Il communique avec d'autres internautes et est capable d'un travail collaboratif au sein de cette communauté. Il n'a pas l'habitude du contact direct avec les autres pour ce genre de travail. Ces éléments montrent que l'analyse des arguments qui permettent à un groupe d'invalider ou non une piste ne peut pas faire abstraction des relations interpersonnelles et qu'il devient très difficile à la fois de pouvoir anticiper l'activité des élèves comme de la reconstruire à partir des traces écrites ou des enregistrements. Le fait de travailler avec des élèves que nous connaissons par ailleurs, modifie le regard porté sur l'activité. L'analyse sera forcément différente avec un groupe d'élèves que nous ne connaissons pas dans la classe d'un autre enseignant.

Quelle mise en projet des élèves ?

Dans les échanges verbaux, on peut assez vite repérer que les élèves ont de multiples projets. Certains sont liés à des processus de preuve : « Faudrait montrer pourquoi ça représente ça. », il s'agit de montrer que c'est nécessairement vrai ; et d'autres sont liés à des processus de vérification : « Est-ce que c'est bon ? », c'est-à-dire est-ce que c'est vraisemblable, par une vérification pour soi sans recherche de généralité. C'est le doute qui met en projet de validation et ce qui peut faire douter l'élève peut être : le fait que « c'est trop facile », « on est passé à côté de quelque chose » ; le fait que les résultats sont différents ou que les résultats sont contradictoires. La situation pouvait permettre un contrôle par des calculs, des essais sur les mesures données. Pourtant, les élèves cherchent à contrôler leurs hypothèses par des tests sur différentes valeurs dans l'idée d'une anticipation : « Si on applique les 15%, on n'aura pas les bonnes valeurs. » L'utilisation du futur dans la phrase

indique cette anticipation. Anticiper une action à partir d'un résultat partiel impose une représentation, une modélisation. L'élève s'appuie sur des expériences antérieures, des résultats acquis et par analogie ou comparaison, il est capable de comparer les situations, de mesurer l'écart à un modèle qu'il a en tête. C'est donc à travers ces anticipations qu'il est possible de voir les représentations et modèles utilisés par les élèves. La difficulté est d'en garder une trace. Bien souvent il ne s'agit que d'échanges verbaux dans le groupe, dans un travail individuel il n'en reste pratiquement jamais rien.

Si l'apprentissage doit amener l'élève à prouver, son activité doit être orientée vers ce projet. Pour cela, il peut être intéressant de ne pas donner une place trop importante à la validation du résultat mais plutôt de s'occuper de la validation du processus et veiller à l'institutionnalisation du raisonnement.

Quelles sont les procédures récurrentes et que nous disent-elles sur l'évolution du REX ?

Il semble que le passage par la proportionnalité déjà mis en évidence dans cette recherche, est un passage nécessaire pour envisager une relation affine entre les grandeurs. Au préalable, on remarque la nécessité pour chaque groupe d'établir la concomitance entre les variations des deux grandeurs visant à justifier que la recherche d'une relation est motivée. Une fois la non-proportionnalité établie, soit les groupes ont cherché une autre façon de se représenter la situation (graphique, fonction, accroissements), soit ils ont testé d'autres algorithmes de calcul en utilisant leur calculatrice (addition d'une constante, carré, racine carrée...) sans en garder de traces écrites.

A ce stade, le risque d'une mise en commun serait de valoriser une procédure par rapport à une autre ou d'imposer un modèle à toute la classe. Enseigner que « toute situation se représentant par des points alignés relève d'une situation affine » n'amène pas la même connaissance que de faire réfléchir l'élève sur ce qui fait que ce ne peut pas être autrement. Nous allons prendre comme principe de faire travailler les groupes sur le problème mais en regroupant ceux qui ont choisi une même procédure. Les groupes B et F vont donc partir de la représentation graphique, les groupes A et E vont chercher à valider leur résultat et à chercher d'autres procédures arithmétiques plus précises, les groupes C et D vont partir de l'idée de fonction et du coefficient de proportionnalité entre les accroissements trouvés par le groupe D. Pour relancer l'intérêt pour la situation et tester les hypothèses auprès d'une nouvelle donnée, une valeur supplémentaire est proposée dans le tableau. La nouvelle situation commence donc pour tous les groupes par la présentation qui suit. La question est ensuite différente suivant les procédures.

On a obtenu les résultats de la dernière année : au cours des sept dernières années on a relevé le montant global des salaires payés aux ouvriers d'une entreprise en fonction du chiffre d'affaires de la société. Les résultats observés sont les suivants :

Chiffre d'affaires <i>en euros</i>	11 136	13 037	13 225	14 117	15 831	17 952	18 129
Salaire <i>en euros</i>	1 686	2 009	2 041	2 193	2 483	2 845	2 873

I.2.4.b : Deuxième séance

Dans chaque groupe, les élèves ont tous des données valides et une procédure valide extraites des productions de la première séance et une consigne qui pose le problème dans le cadre choisi (voir annexe 27). La solution attendue est la caractérisation d'une fonction affine qui modélise la situation. La solution relève du cadre fonctionnel. Pour les groupes B et F, les données sont interprétées comme des coordonnées de points, le cadre est donc géométrique. La contrainte est l'alignement des points qui atteste qu'il existe une fonction affine dont la représentation graphique passe par ces points. Les élèves doivent faire un changement de cadre et considérer la droite comme le graphe d'une fonction. Pour les groupes A et E, les données sont les accroissements des deux grandeurs et ils doivent étudier la proportionnalité de ces accroissements. Le cadre est donc celui des grandeurs proportionnelles. La contrainte est que la proportionnalité prouve l'existence d'un coefficient multiplicateur entre les accroissements des deux grandeurs. Le registre utilisé est principalement celui des tableaux. Enfin pour les groupes C et D, les données sont des images de nombres par une fonction, le cadre est fonctionnel et le registre utilisé est celui des expressions algébriques. La contrainte est que la proportionnalité des accroissements atteste que la fonction est affine.

Pour les groupes B et F les inducteurs sont de type c_i pour ce qui est de la consigne « à partir de la représentation graphique » puisqu'on fournit ici la règle pour analyser les données, et l'ajout de valeurs numériques engage à tester la validité par rapport à cette nouvelle donnée ce qui est un inducteur de type e_i .

Pour les groupes C et D, les inducteurs sont de type c_d puisque la consigne relie faits et raisons en précisant « les grandeurs ne sont pas proportionnelles », puis de type d_d puisqu'il est demandé de trouver une expression conforme à la règle donnée.

Pour les groupes A et E, une règle est donnée, c'est un inducteur de type c_i , puis « essayer de déduire une relation entre ces deux grandeurs » est un inducteur de type d_d comme ci-dessus.

Nous allons analyser les productions des différents groupes pour repérer les unités de raisonnement mobilisées et les configurations. Ces éléments permettront de voir les évolutions éventuelles du REX.

Groupes A et E :

Ces groupes sont sur l'unité de raisonnement U4. Les grandeurs ont été identifiées et la concomitance entre les variations des deux grandeurs est établie. Il est demandé de comparer les accroissements ce qui suppose que les élèves effectuent ces calculs. Le groupe E va se perdre en calculs de pourcentages d'augmentation, finalement ils concluent qu'« il y a les mêmes augmentations » sans parler de proportionnalité des accroissements. Dans le groupe A, les échanges permettent de comprendre que, malgré l'orientation de la consigne qui doit inciter les élèves à considérer les accroissements des deux grandeurs, le mot « relation » les oriente à établir un processus de calcul entre les grandeurs. La concomitance est encore associée à une causalité. Lorsque Vincent dit : « le salaire ne dépend pas du chiffre d'affaires », il signifie qu'il n'y a pas de raison pour que ce soit le cas, le salaire n'est pas

calculé à partir du chiffre d'affaires. Pour lui, la configuration est plutôt pragmatique puisque son argument est lié à une expérience, une connaissance du contexte qui relève d'une culture individuelle acquise en dehors de l'école. Maxence lui répond que « c'est normal, c'est pas proportionnel », ce qui relève d'une configuration de nature différente. Son argument est lié à un modèle de situations, la configuration est analytique, le REX est le cadre des grandeurs proportionnelles. Plus tard le groupe arrive à cette formulation : « ça augmente toujours proportionnellement ». Marine demande alors « c'est quoi une relation ? » appuyée par Maxence : « Si c'est pas un pourcentage on ne sait pas trop. » Vincent répond : « ça pourrait être plus, ou carré. » Pour Vincent, la configuration relève d'une théorie qui commence à se construire dans le cadre fonctionnel : une relation fonctionnelle peut être un processus de calcul faisant intervenir différentes opérations. Cet échange atteste d'une possible évolution du REX et donc d'un apprentissage.

Groupe B et F :

Les élèves du groupe B ont représenté le salaire en fonction du chiffre d'affaires ou l'inverse. La comparaison des graphiques les amène à conclure que les points sont alignés dans les deux cas. Suivant les échelles choisies, l'alignement est plus ou moins évident. Ils concluent sur leur feuille : « le salaire augmente proportionnellement au chiffre d'affaires » et

ils argumentent par le calcul de $\frac{S \times 100}{CA}$ où S désigne le salaire et CA le chiffre d'affaires.

Dans chaque cas, ce quotient est arrondi à 15%. Le modèle de la proportionnalité est donc privilégié. Le groupe F a représenté séparément sur deux graphiques le chiffre d'affaires en fonction des années et le salaire en fonction des années. Ce groupe est donc revenu sur une unité U1, une nouvelle grandeurs indépendante a été introduite qui est l'année. Les élèves obtiennent malgré tout deux graphiques qui attestent que les variations sont dans le même sens et en écrivant « ça monte pareil », ils vont plus loin en remarquant que les deux graphiques montrent le même comportement global. L'enseignante rappelle la consigne et le graphique attendu. Après la réalisation du nouveau graphique, les élèves sont convaincus qu'ils obtiennent une droite, d'autant qu'ils avaient trouvé un coefficient multiplicateur. Le groupe note sur le compte-rendu : « $f(x) = x : 6,5$ ». Les élèves ont choisi une écriture symbolique, la relation semble considérée comme une fonction mais est-ce du fait de la proportionnalité ou du fait qu'ils ont trouvé une opération permettant d'obtenir la deuxième

ligne du tableau à partir de la première ? Ces élèves représentent la courbe d'équation $y = \frac{x}{6,5}$ sur leur calculatrice dans le but de vérifier si le modèle est meilleur avec 6,4 ou 6,6 au dénominateur, ou en ajoutant ou retirant une valeur. Le raisonnement n'est donc pas covariationnel mais bien centré sur le processus de calcul. La configuration semble globalement analytique et tisse du lien avec le cadre fonctionnel.

Groupe C et D :

Kevin qui avait posé le système n'arrive pas à expliquer sa démarche aux autres. Il ne formule pas explicitement qu'il cherche une fonction affine. Claire lui fait remarquer « Pourquoi il y aurait que deux valeurs a et b ? Et pourquoi que des + et des \times ? » L'autre ne

sait pas comment argumenter, il finit par reconnaître que « ce n'est qu'une conjecture mais c'est au moins un point de départ ». Kevin sait résoudre le système et il a déjà une solution. Claire demande alors « Mais comment on saura si ce sera bon ? » Cette fois c'est Maxence qui lui répond : « Ben on n'aura qu'à vérifier avec les autres valeurs du tableau. ». Le groupe passera le reste de l'heure sur la résolution du système, revenant sur les techniques de substitution ou de combinaison, comparant l'efficacité des méthodes, comparant les résultats et leur cohérence. Ils ne vont pas réussir à se mettre d'accord et ils rendent un compte-rendu avec deux propositions : $f(x) = \frac{323}{1901}x - 210$ et le test $f(15\ 831) = 2479,854$ et l'autre solution : $f(x) = 0,17x - 207,12$ et le test $f(11\ 136) = 1686$.

Il ne faut pas négliger la question des valeurs approchées. Ce problème est un problème de modélisation, nous devons sans cesse décider si oui ou non l'erreur est acceptable pour valider le modèle. Ainsi, même dans le compte-rendu, le choix n'est pas fait dans le groupe entre $\frac{323}{1901}$ et 0,17.

Brieuc a résolu un précédent problème de géométrie en démontrant l'alignement de points dans un repère avec une fonction affine. Par analogie, il cherche à transposer sa méthode au problème actuel mais les autres sont difficilement convaincus. Pierre décide de faire la représentation graphique. Il aidera ensuite Brieuc à faire le lien entre les deux procédures. Brieuc arrivera à poser que $f(x) = ax + b$ et $a = \frac{13\ 037 - 11\ 136}{2\ 009 - 1\ 686} = 0,17$. Le fait que l'ordonnée à l'origine ne soit pas donnée pose problème. Florian et Clotilde ne semblent pas avoir suivi le raisonnement et n'ont pas pu apporter leur aide aux autres.

Les trois groupes utilisent plutôt un point de vue statique malgré le manque de sens que pourrait avoir un processus de calcul dans le contexte de l'exercice. Même si les trois problèmes sont posés dans des registres différents, on assiste à des conversions en fonction de l'horizon d'attente fixé par les élèves. Pour eux, une « relation » entre grandeurs ne peut être qu'un processus de calcul qu'il s'agit de déterminer, la multiplication par un coefficient étant l'opérateur testé en premier et dont ils ont du mal à se séparer. Certains envisagent ce processus dans le registre des expressions algébriques, ce qui les amène à poser des équations.

I.2.4.c : Troisième séance

Un document (voir illustration 2) est proposé à tous les élèves. On y retrouve le tracé (groupe 1), le tableau avec les calculs de variations et la conclusion qui est que « le tableau des variations respectives des deux grandeurs est « presque » un tableau de proportionnalité » (groupe 2) et la résolution du système permettant le calcul des coefficients a et b de la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ (groupe 3). La consigne est nouvelle pour les élèves. Ils n'ont pas à résoudre un problème, ni à démontrer une solution mais à chercher les liens entre les productions des élèves. Leurs réponses sont annexe 33.

Le secrétaire du groupe F rédige tout d'abord une description des productions. Ce premier écrit pointe une difficulté majeure qui va gêner l'interprétation des données : le sens du mot « différence ». Deux interprétations sont possibles suivant qu'on l'utilise dans son sens commun qui est « ce qui diffère, ce qui distingue, ce qui n'est pas pareil » et le sens mathématique qui est le résultat d'une soustraction. Ici on peut calculer la différence entre deux chiffres d'affaires ou entre deux salaires mais on peut étudier la différence entre chiffres d'affaires et salaires au sens de « ce qui distingue, ce qui n'est pas pareil ». L'homogénéité des unités peut amener à considérer la différence entre salaire et chiffre d'affaires possible. Il est plus difficile de donner du sens aux grandeurs quotients dans le contexte de l'exercice. Il s'agit donc de faire émerger des nécessités dans le cadre fonctionnel et non plus seulement dans le cadre des grandeurs proportionnelles.

Les élèves doivent faire du lien entre les solutions des trois groupes, le travail demande donc un raisonnement de type « inter » au sens de Piaget. Les données seules ne suffisent pas, on peut parler d'inter-opérationnel. Les élèves cherchent un lien entre les coefficients de la fonction affine trouvés par le groupe 3 avec les calculs du groupe 2.

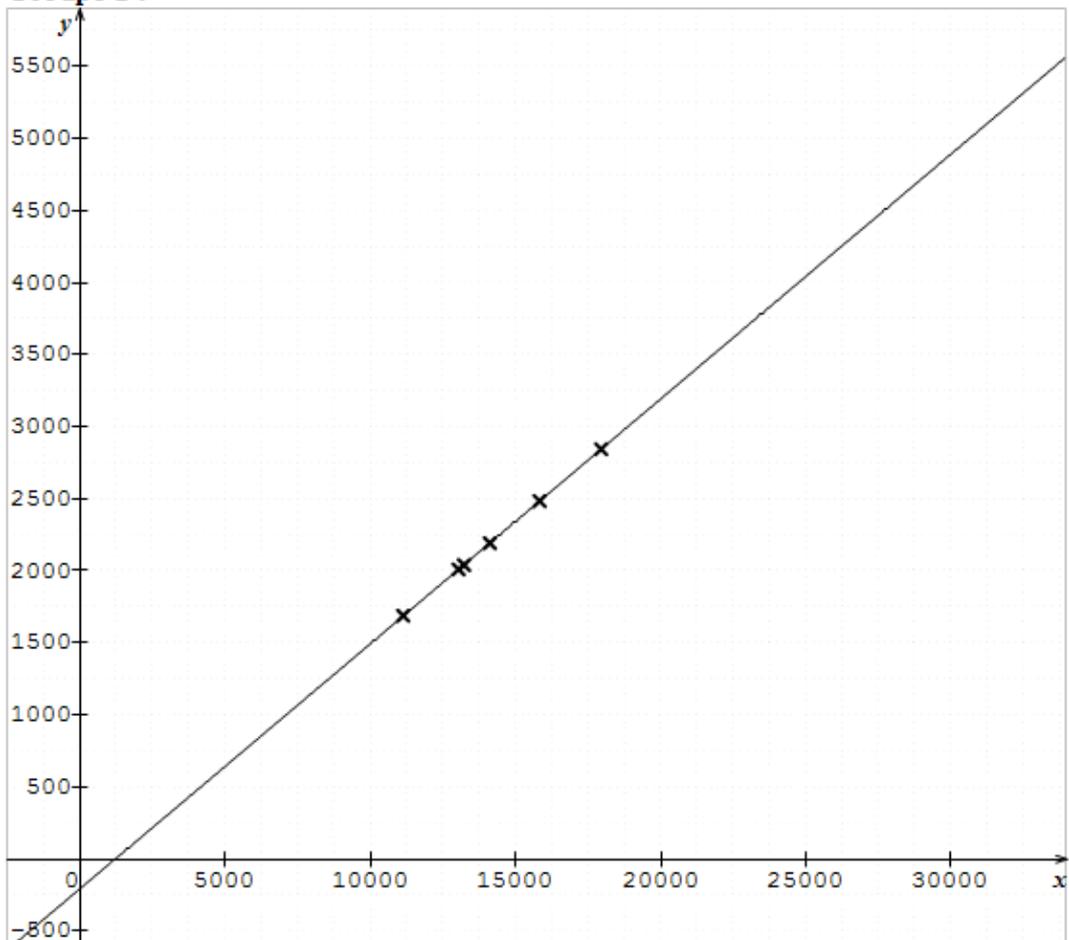
Certains groupes vont tester toutes les opérations possibles pour trouver 0,17 comme on peut lire dans le compte-rendu du groupe B :

$$\begin{aligned} \ll a = 0,17 \quad & 1901 \times 0,17 \approx 323 \\ & 188 \times 0,17 \approx 32 \\ & 892 \times 0,17 \approx 152 \gg \end{aligned}$$

Ce groupe a d'ailleurs correctement mis en relation toutes les productions puisqu'il continue en écrivant : « Si on prend une valeur sur x et que l'on fait le calcul $ax + b$ on trouve la valeur sur y . En plaçant les chiffres du tableau dans un graphique, on constate qu'une droite se forme, fonction affine. ». Si on ajoute que ce groupe B est constitué de trois élèves particulièrement en difficulté, on peut espérer que l'activité leur a permis de formaliser par eux-mêmes ce qu'ils n'auraient jamais fait si cette étape avait été mise en place lors d'un débat en classe. En effet dans les situations frontales, ces élèves se mettent plutôt en retrait et attendent au mieux que l'enseignant leur dise ce qu'il faut noter. Ils sont persuadés qu'ils ne sont pas capables de trouver ce qui est attendu par l'enseignant.

Les groupes ont obtenu les résultats suivants, cherchez les liens entre ces productions :

Groupe 1 :



Groupe 2 :

1901	188	892	1714	2121	177
------	-----	-----	------	------	-----

Chiffre d'affaire en €	11136	13037	13225	14117	15831	17952	18129
Salaire en €	1686	2009	2041	2193	2483	2845	2873

323	32	152	290	362	28
-----	----	-----	-----	-----	----

Ce tableau est presque un tableau de proportionnalité

1901	188	892	1714	2121	177
323	32	152	290	362	28

Groupe 3 : On cherche $f(x) = ax + b$ avec $\begin{cases} a \times 11136 + b = 1686 \\ a \times 13037 + b = 2009 \end{cases}$

On trouve $a = 0,17$ et $b = -207$

Illustration 2: document distribué aux élèves lors de la 3^e séance du problème salaire-chiffre d'affaires

Par contre d'autres élèves en difficulté sont des élèves « scolaires » or ici on s'intéresse plus à la façon dont chaque groupe a posé le problème qu'à sa solution. Cette démarche semble totalement nouvelle et déstabilisante pour ces élèves habitués à se conformer à la demande de résolution et pour qui le savoir est posé au préalable. Le groupe E note dans son bilan : « Chaque groupe a exploité les données, à savoir qu'ils n'ont pas cherché la même chose. », preuve que cet aspect est important et nouveau pour eux. Il est effectivement essentiel que chaque élève réalise qu'il a l'autonomie et la responsabilité de construire le problème et que sa procédure sera fonction de ce choix. Ce n'est pas une clause usuelle dans les pratiques ordinaires comme en témoigne les recherches de Robert ou celles de Roditi :

Les activités provoquées portent sur des tâches (devenues) isolées si ce n'est simples et isolées, qui portent sur le chapitre en cours, sans beaucoup d'adaptations des connaissances à utiliser ; il n'y a pas souvent (besoin) de structuration des connaissances en acte du côté des élèves (ils n'ont pas besoin de le faire, c'est le professeur qui s'en charge). De même dans ces conditions, il n'y a pas besoin de dévolution des moyens de contrôles aux élèves. (Robert, 2011, p.60)

Une autre question est celle de la validité. Ce groupe précise ensuite le problème construit par chaque équipe : « Le tableau cherche à mettre en relation les lignes entre elles. La fonction cherche un facteur commun aux 2 colonnes quant au graphique il met en évidence les 2 méthodes. ». On remarque ici une représentation du travail par un schéma de type spatial. Les données sont organisées en tableau, le sens de lecture est double : lien entre les colonnes, lien entre les lignes. Le graphique fait le lien entre toutes les lignes et toutes les colonnes. On peut estimer qu'à ce stade le groupe a posé le problème, il fait la liste des contraintes mais il ne met pas encore en relation les données et les conditions. Il commence à le faire dans la suite du compte-rendu : « Avec le groupe 1 et le groupe 3 on remarque le - 207. Si on applique la fonction avec les valeurs du tableau on obtient le graphique. » La donnée - 207, explicite dans la troisième procédure, est cherchée et trouvée sur le graphique sans qu'aucune justification ne soit donnée. Rien ne prouve que ce soit nécessairement cette valeur. La seconde remarque fait le lien entre la formule algébrique de la fonction, le tableau de valeurs et les points de la courbe. Ce lien est justifié implicitement par la connaissance que les élèves ont des fonctions.

Le groupe D est resté très longtemps en difficulté. Deux élèves dans le groupe sont plutôt du type « scolaire » en ce sens qu'ils essaient d'être avant tout en conformité avec les attentes de l'enseignant, un élève est en très grande difficulté, le dernier est un élève qui formalise très peu à l'écrit. Le groupe finit par rédiger : « Le groupe 2 a trouvé un tableau où le coefficient multiplicateur est 0,17, le a du groupe 3. On obtient le coefficient en divisant les résultats des soustractions de 2009 - 1986, de 13037 - 11136 etc. » Les deux élèves en difficulté expriment des remarques très pertinentes à l'oral, que ni eux, ni les autres, n'arrivent à formaliser à l'écrit. Un élève montre par l'utilisation du surligneur le lien entre l'expression

$f(x) = ax + b$ et « coef. $M \times$ chiffre d'affaires - salaire en € ». Cette remarque est d'autant plus pertinente qu'elle met en évidence que la fonction affine est construite sur une relation entre deux espaces et que le b est bien de la même nature que $f(x)$. Une flèche relie le a au coefficient multiplicateur mis en évidence dans le tableau de proportionnalité et indique que ce coefficient n'est pas une mesure de grandeur mais un scalaire, un coefficient.

Toujours sur cette même fiche, x et $f(x)$ sont écrits devant les deux lignes du tableau donnant le salaire en fonction du chiffre d'affaires et il est écrit $f(x) = ax + b$ à côté de la droite. On voit donc que cet élève est en train de mettre en place un niveau d'abstraction qui lui permet de mettre en relation les différents registres. Cet élève a réussi à faire les liens entre les représentations à partir du moment où il a déterminé le coefficient multiplicateur entre les accroissements. Or un premier obstacle était de concevoir le rapport accroissement du salaire/accroissement du chiffre d'affaires et non son inverse. Il apparaît toujours très difficile pour les élèves, même arrivés en classe de seconde, de diviser un nombre par un nombre plus grand, la multiplication est encore associée à l'idée de « croissance ». Les élèves concevaient bien que le salaire était égal au chiffre d'affaires divisé par environ 6 mais ne pouvaient pas s'autoriser à écrire que diviser par 5,88 revenait à multiplier par 0,17. On peut penser que si des élèves n'ont pas réussi à calculer ce coefficient, ils n'ont pas pu interpréter les relations entre les représentations. Les groupes qui ont le moins avancé sont restés bloqués sur deux types de questions : Quelles sont les grandeurs proportionnelles ? A quoi correspond sur le graphique le coefficient de proportionnalité trouvé ?

Les élèves savent que, si deux grandeurs sont proportionnelles, la représentation graphique de l'une en fonction de l'autre est une droite, mais ils ne tiennent pas compte de l'autre contrainte qui est que cette droite passe par l'origine du repère. Cette contrainte est pourtant évoquée par un élève qui a surligné de la même couleur sur son graphique « presque un tableau de proportionnalité » et l'intersection de la droite avec les axes du repère. Il semble mettre en évidence que « la droite passe presque par l'origine ». On peut lire cette même tension dans les remarques suivantes :

« C'est presque une droite, il y a proportionnalité, c'est $f(x) = ax + b$. »

« Si le tableau n'est pas de proportionnalité on ne devrait pas avoir une droite. »

« Pour tous les groupes, c'est toujours une question de proportionnalité. »

Il y a donc pour ces élèves une caractérisation de la proportionnalité par le tracé d'une droite, reste à préciser quelles sont les grandeurs proportionnelles.

Deux autres groupes cherchent à lire graphiquement les accroissements mais ils ne retrouvent pas comment lire les variations des deux grandeurs sur le graphique.

On peut identifier différents niveaux dans l'apprentissage par problématisation. Le premier niveau « intra » serait la description simple des données (début du travail du groupe F). On peut penser que chacun des groupes est passé par cette étape qui est la prise

d'informations. La lecture est motivée dès le départ par la recherche de relations entre les productions, elle sera de fait d'un niveau « inter » pour répondre à la consigne. Cette relation peut être simplement identifiée sans être expliquée ou justifiée (début du travail du groupe E), elle reste dans la contemplation. On peut aussi avoir des éléments repérés sans que la relation soit correctement expliquée, c'est le cas lorsque des éléments sont par exemple surlignés de la même couleur (groupe D). Enfin le dernier niveau serait le niveau « trans » correspondant à la justification de la relation entre les éléments (fin du travail du groupe E) en s'appuyant sur une théorie ou sur une conversion de registre (Duval, 2006).

Nous retrouvons les différents stades que nous avons évoqués dans la partie 1 chapitre III.5, appliqués au contexte d'un problème que nous dirons analytique (la situation demande de comparer des productions). Nous pouvons définir quatre stades qui permettent de repérer la dynamique de problématisation.

Intra-objectal	Les élèves se contentent de décrire sans établir de lien ou de relations. Il n'y a ni question ni problème posé.
Inter-objectal	Il y a perception d'un lien possible, d'une mise en relation possible, d'un problème possible sans que celui-ci soit construit, sans essai de résolution.
Inter-opérationnel	Il y a construction du problème en ce sens que des éléments particuliers sont mis en relation sans qu'une justification soit proposée.
inter-analytique	Il y a construction et résolution du problème du sens. Il y a identification des relations et justification de ces relations.

Tableau 29: Différents stades de problématisation dans le contexte des problèmes analytiques

La situation proposée a le mérite de mettre l'élève face à l'obligation de se mettre en projet d'atteindre le deuxième stade. Si à aucun moment du processus enseignement-apprentissage, l'élève n'est confronté à ce type de tâche, on peut penser que seuls quelques élèves le font spontanément. Lorsque la synthèse du travail de groupes amène l'enseignant à formuler le savoir, c'est lui qui est responsable de cette mise en relation des différentes procédures des élèves. Bien souvent, les groupes ont effectivement abordé les différentes nécessités et traité les différentes contraintes. L'enseignant met un point d'honneur à expliciter les liens entre les productions mais c'est justement ce travail de mise en relation qui est porteur du sens et qui doit être dévolu à l'élève. L'activité proposée ici avait pour but de proposer clairement ce travail à l'élève et les difficultés rencontrées montrent bien que ce n'est pas immédiat. Une hypothèse forte est donc que si cette étape du processus d'institutionnalisation est faite en situation frontale, en un temps relativement court, on a de fortes chances pour que les élèves les plus en difficulté passent à côté de l'essentiel.

I.2.4.d : Quatrième Séance

Nous avons donc choisi de continuer à faire travailler les élèves sur les conversions à partir des résultats des différents groupes. Dans cette nouvelle étape les principaux points où il y a eu accord sont validés (voir illustration 3) :

- Le groupe 2 a trouvé un tableau de proportionnalité dont le coefficient multiplicateur est 0,17 c'est-à-dire le coefficient a trouvé par le groupe 3.
- Le tableau donne le tableau de valeurs de la fonction f dont la représentation graphique est la droite d .
- - 207 est le salaire qui correspondrait à $x = 0$, c'est-à-dire au point C sur la droite.

La consigne précise qu'il reste des relations à déterminer. On demande enfin de rédiger une synthèse des trois procédures. On remarque qu'il n'est pas précisé entre quelles grandeurs il y a proportionnalité. C'est sans doute une des difficultés rencontrées par les groupes. Ils ont bien identifié qu'on mesure l'accroissement entre deux valeurs qui se suivent dans le tableau, mais aucun élève n'a réussi à formuler la proportionnalité des accroissements autrement que par une flèche opérateur. Ils se contentent de conclure de manière très vague par « il y a proportionnalité ». La partie synthèse doit permettre aux élèves d'aborder le dernier stade de problématisation, l'utilisation de $f(x)$ et de x ayant remplacé salaire et chiffre d'affaires, un premier pas vers la décontextualisation est commencé. Pourtant la présentation très similaire à la précédente rappelle le problème initial.

Si on analyse les inducteurs de problématisation, « Comment trouver le coefficient 0,17 sur le graphique ? » est un inducteur de type c_d , il est demandé de construire une donnée à partir des données mais en fonction d'une règle à découvrir à partir de cas. « Comment le groupe 3 a-t-il eu l'idée de chercher une fonction affine ? » est un inducteur de type c_d , il est explicitement demandé comment on peut énoncer une règle à partir des données. « A-t-il eu raison et pourquoi ? » engage à tester la validité, c'est un inducteur de type d_i ou e_i , mais la règle énoncée au préalable engage à tester la validité par rapport aux raisons.

Lors de cette séance, les élèves ont eu du mal à entrer dans l'activité. Ils ont pris du temps pour s'appropriier les premières conclusions et ensuite sont restés bloqués sur la question de la lecture du coefficient 0,17 sur le graphique où figurent deux points A et B. Un élève construit son propre problème et le soumet à son groupe de la manière suivante : « Est-ce que B est un agrandissement de 0,17 de A ? ». C'est ce travail qui va être mis en débat plus loin. Dans un autre groupe un élève a bien du mal à essayer de mettre des mots sur sa pensée : « Le 0,17 il est dans l'évolution, il correspond à la droite. Le -207 on peut le lire, là, mais le 0,17 c'est ça (il montre la droite). ». Un troisième groupe conclut que « le coefficient de 0,17 on ne peut pas le lire directement, c'est un calcul ». Enfin une élève pose la question à son groupe : « Est-ce qu'on peut parler de coefficient directeur pour une fonction affine et est-ce que quelqu'un sait comment on le calcule ? » Un autre lui répond « C'est pour monter d'un carreau. »

Il semble donc que le concept de coefficient directeur ne soit pas acquis, et que le seul souvenir que les élèves ont, relève d'une démarche pragmatique.

Le groupe 2 a trouvé un tableau de proportionnalité dont le coefficient multiplicateur est 0,17 c'est à dire le coefficient a trouvé par le groupe 3.
Le tableau donne le tableau de valeurs de la fonction f dont la représentation graphique est la droite d .

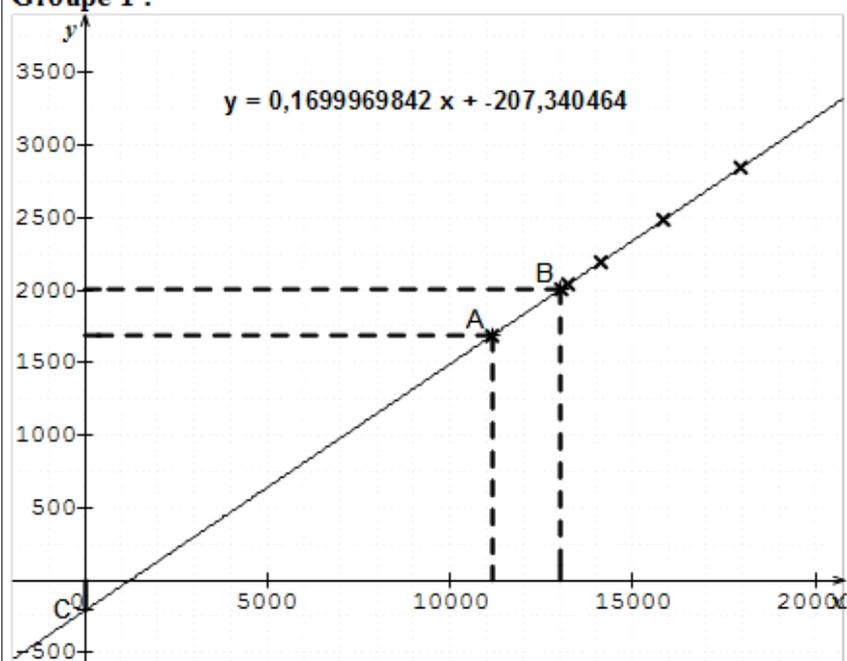
– 207 est le salaire qui correspondrait à $x = 0$, c'est à dire au point C sur la droite.

Restent quelques questions :

- Comment trouver le coefficient 0,17 sur le graphique ?
- Comment le groupe 3 a-t-il eu l'idée de chercher une fonction affine ?
- A-t-il eu raison et pourquoi ?

Rédigez ce qu'est pour vous une fonction affine.

Groupe 1 :



Groupe 2 :

	+1901	+188	+892	+1714	+2121	+177	
x	11136	13037	13225	14117	15831	17952	18129
f(x)	1686	2009	2041	2193	2483	2845	2873
	+323	+32	+152	+290	+362	+28	

Groupe 3 :

On cherche $f(x) = ax + b$ avec $\begin{cases} a \times 11136 + b = 1686 \\ a \times 13037 + b = 2009 \end{cases}$
On trouve $a = 0,17$ et $b = -207$

Illustration 3: document distribué aux élèves lors de la séance 4 de la situation salaire-chiffre d'affaires

Pour la deuxième question, ils ont des idées : « C'est parce que c'est une droite. » ; « C'est parce que la droite ne passe pas par l'origine. » ; « C'est parce que c'est pas

proportionnel. » Un élève demande pourquoi on n'aurait pas pu tracer une parabole passant par ces points ou même si ce bout de courbe qui semble être une droite ne serait pas un bout de la branche d'une parabole. Cette remarque évacuée par le reste du groupe qui lui « montre » que c'est « visiblement » une droite parce que « ça se voit », permet de repérer que les arguments sont ici purement empiriques c'est-à-dire liés à l'expérience, le perceptif, ce qui peut être réalisé ou non. Nous sommes sur une configuration pragmatique.

Un échange argumentatif de 10 minutes est engagé dans la classe dont voici la transcription d'un extrait :

1	Thomas : En multipliant l'abscisse par 0,17 et - 207, on trouve l'ordonnée.
2	Matthéo : Ça revient à faire la fonction, ça dit pas comment on trouve le 0,17.
3	Maxence B : Oui, ça répond pas à la question. [silence]
4	Maxence J : $\frac{x_B}{x_A} = 1,17$. B est une augmentation de A de 0,17.
5	Matthéo : Tu as fait avec les x ?
6	Maxence J : Ben heu, on a fait .
7	Matthéo : oui d'accord mais avec les x ou les y ?
8	Maxence J : Ha ? Ben heu, on a fait ... heu.
9	Marine : et on a trouvé 1,17 donc c'est bien 0,17 d'augmentation.
10	Enseignante : Et qu'est-ce que ça dit pour les y ?
11	Thomas : $y = f(x)$ donc 0,17 c'est l'évolution.
12	Matthéo : Mais c'est une fonction affine. Ça passe pas par l'origine, elle est pas linéaire.
13	Etienne : Faut prouver que c'est proportionnel.
14	Matthéo : Affine c'est pas proportionnel.
15	Audray : L'affine ajoute ou soustrait un nombre à x , comme ça passe pas par 0. Il y a une évolution.
16	Maxence B : Oui, c'est pas proportionnel parce que ça passe pas par l'origine.
17	Nathan : Si ça passe par l'origine, c'est linéaire.

Tableau 30 : extrait échange argumentatif en classe de seconde

Dans cet échange nous pouvons isoler deux épisodes. Le premier, des interventions 1 à 3, se termine par un temps de silence dans la classe. Thomas rappelle un résultat établi par plusieurs groupes dans la séance précédente. Dans le texte distribué, la formulation : « Le tableau de valeurs de la fonction f dont la représentation graphique est la droite d » ne précise pas que la fonction f est le processus de calcul qui enchaîne la multiplication par 0,17 et l'addition de -207 d'autant que le groupe 3, qui a déterminé les coefficients de la fonction affine, n'écrit pas la formule obtenue. On peut comprendre l'intervention de Thomas de deux manières. Soit pour lui, il répond à la question, c'est-à-dire que le coefficient 0,17 n'a pas

d'interprétation directe sur le graphique mais il intervient dans le calcul mettant en relation les abscisses et les ordonnées des points. Soit il n'a pas cherché à répondre à la question et propose ce qui, pour lui, vient seulement de faire sens. Son projet dans les deux cas est de faire corriger sa réponse par les autres. Nous avons le même type de prise de parole avec Maxence J qui débute le second épisode. Matthéo intervient, pour proposer un contre-argument au premier épisode et pour demander une explicitation dans le second. En fait, le calcul n'a pas d'intérêt pour la situation car le résultat serait différent pour d'autres valeurs du tableau. Il se trouve que la valeur 0,17 apparaît et qu'ayant travaillé précédemment sur les statistiques et les pourcentages, le groupe a retrouvé ici le coefficient 1,17 correspondant à une augmentation de 17%. L'enseignante va donc essayer de faire préciser aux élèves qu'ils n'ont travaillé que sur l'abscisse et non sur les coordonnées. Il est cependant intéressant de remarquer que ce groupe définit une fonction sur des points, la démarche est donc « trans » en ce sens que les élèves cherchent à utiliser une théorie pour justifier l'interprétation des données. Ici le travail fait sur les vecteurs amène à envisager la colinéarité de façon intuitive, l'agrandissement vu en géométrie est assimilé à l'accroissement étudié en statistique, l'ensemble est mis en cohérence. Il semble donc important de valoriser la démarche et d'essayer de la faire évoluer plutôt que de la rejeter ou l'ignorer. Pour favoriser la recherche de relations entre les différents registres qui permettent de repérer comment un même concept peut avoir des représentations différentes, on peut faire l'hypothèse qu'il faut que les élèves soient amenés le plus souvent possible et le plus régulièrement possible à formuler les correspondances entre les différents registres que sont ici la représentation graphique, les expressions algébriques et les tableaux de données numériques. On peut aussi noter que les mots « abscisses » et « ordonnées » ainsi que x et y , ont remplacé le vocabulaire « chiffre d'affaires » et « salaire », ce passage est soit une conséquence, soit le déclencheur, d'une certaine décontextualisation, à moins qu'il ne soit constitutif du processus. Si nous essayons de donner la macrostructure argumentative de cet échange argumentatif, nous obtenons le schéma 19.

On note qu'il n'y a aucun dépassement de l'objection mais que les différentes interventions qui viennent renforcer l'objection ont pour objectif d'argumenter et ce dans des registres explicatifs différents :

1. La droite ne passe pas par l'origine (proportionnalité dans le cadre fonctionnel).
2. Les grandeurs ne sont pas proportionnelles (cadre des grandeurs proportionnelles).
3. On ajoute ou on soustrait un nombre à x (cadre des fonctions affines).
4. Si ça passe par l'origine c'est linéaire (cadre des fonctions affines).

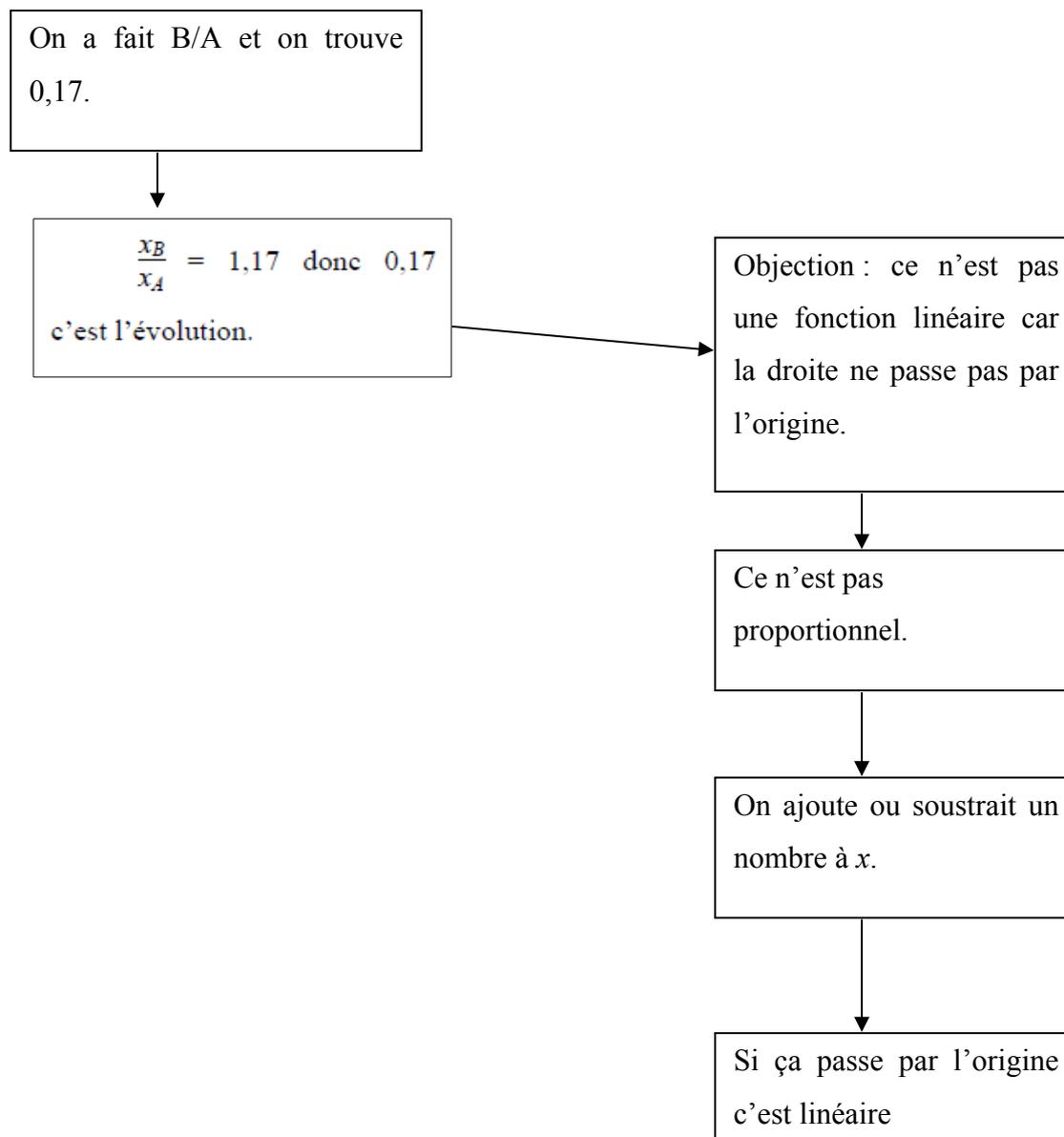


Schéma 19: macrostructure du débat argumentatif séance 4 de la situation salaire-chiffre d'affaires

Ces REX permettent d'envisager des propriétés implicites d'une fonction affine :

- sa représentation graphique est une droite ;
- son expression comporte la multiplication de x par un coefficient mais aussi l'addition ou la soustraction d'un nombre.

Restent la première et la dernière remarques qui peuvent soit inclure le cas particulier des fonctions linéaires au cas des fonctions affines, soit venir opposer les deux notions. Nous

avons donc deux types de représentations, la seconde pouvant être un obstacle à la compréhension de l'affinité.

Cette analyse amène l'enseignante à demander aux élèves de formuler une définition de ce qu'est pour eux une fonction affine. Chaque groupe formule collectivement une réponse, ces réponses sont regroupées dans un document (voir illustration 5). Le contexte fait que cet écrit est placé au rang d'écrit de travail intermédiaire et non de texte de savoir commun à la communauté de la classe et encore moins à celle des mathématiciens.

Nous pouvons organiser ces textes dans un tableau (voir tableau 31) qui reprend les trois registres de représentation sémiotique rencontrés : le registre graphique et plus précisément la description de ce qui est lu dans le registre graphique, le registre des expressions algébriques et le registre du langage naturel. Le registre des tableaux n'a pas été utilisé. Le cadre des suites de nombres proportionnelles était au cœur des arguments lors des séances précédentes, le cadre fonctionnelle est maintenant privilégié. Nous avons donc une décontextualisation du problème, nous sommes passés d'un problème sur une fonction empirique à un problème de fonction théorique. Il reste à travailler les conversions pour formuler les nécessités apparues dans le cadre fonctionnel dans les différents registres de représentation sémiotique et à expliciter les changements de cadres utiles pour résoudre certains types de problèmes. En effet, pour le groupe A par exemple, le fait que la représentation graphique soit une droite n'est pas établi comme une caractéristique des fonctions affines à moins que le groupe ne confonde les propriétés graphiques de la fonction linéaire avec celles de la fonction affine.

<p>Voici les propositions de la classe pour expliquer ce qu'est une fonction affine :</p>	$f(x) = ax + b$	<ul style="list-style-type: none"> • $f(x) = ax + b$ • ne passe pas par l'origine • pas forcément droit
<p>C'est une droite qui s'écrit $ax + b$, a oriente la droite, elle passe ou pas par l'origine : $b = 0$ passe par l'origine, $b < 0$ ne passe pas par l'origine.</p>	<p>Fonction qui ne passe pas par l'origine et qui n'est pas proportionnel.</p>	
<p>Droite ne passant pas par l'origine.</p>	<p>Une fonction affine est une fonction linéaire où on ajoute une valeur $f(x) = ax + b$.</p>	

Illustration 4: extrait des formulations proposées par les élèves à l'issue de la séance 4 de la situation salaire-chiffre d'affaires

La forme algébrique $f(x) = ax + b$ donnée comme définition de la fonction affine au collège est proposée par la majorité des groupes. Il est intéressant de regarder la proposition du groupe D qui utilise la définition de la fonction affine relativement à sa fonction linéaire

associée. Un seul groupe inclut dans son texte des explications qui permettent de faire le lien entre le cadre géométrique et le cadre algébrique : « a oriente la droite, elle passe ou pas par l'origine : $b = 0$ passe par l'origine, $b < 0$ ne passe pas par l'origine. ».

Si on considère ces textes comme des écrits intermédiaires qu'il faut faire évoluer vers une mise en texte qui soit reconnue par la communauté mathématique au sein de la classe, l'objectif est de remettre en cause certaines occurrences (en gras dans le tableau), d'amener les élèves à proposer une formulation de la proportionnalité des accroissements dans les différents registres et de proposer une synthèse des autres propositions.

Groupe	Descriptions des propriétés lues dans le registre des graphiques	Formulation dans le registre des expressions algébriques	Formulation dans un langage naturel
A	ne passe pas par l'origine pas forcément droit	$f(x) = ax + b$	
B	C'est une droite a oriente la droite, elle passe ou pas par l'origine : $b = 0$ passe par l'origine, $b < 0$ ne passe pas par l'origine.	qui s'écrit $ax + b$,	
C	ne passe pas par l'origine		Fonction qui n'est pas proportionnel.
D		Une fonction affine est une fonction linéaire où on ajoute une valeur $f(x) = ax + b$.	
E	Droite ne passant pas par l'origine.		
F		$f(x) = ax + b$	

Tableau 31: Analyse des productions des élèves dans la situation salaire-chiffre d'affaires suivant les différents cadres

I.2.4.e : Cinquième séance

Plusieurs textes savants sont proposés aux élèves en plus des textes produits par les groupes à l'issue de la séance 4 (voir illustration 5). La consigne est de repérer ce qui est faux dans les propositions de la classe ; colorier de la même couleur ce qui se ressemble entre les définitions savantes et les propositions de la classe ; proposer leur propre synthèse pour expliquer ce qu'est une fonction affine.

La définition dans le cadre des espaces vectoriels est vite repérée comme « incompréhensible » par les élèves, sinon les points communs relevés sont essentiellement des repérages de notations et d'identifications.

Voici maintenant comment les mathématiciens ont défini les fonctions affines à différentes époques :

En 1942 : On appelle fonction linéaire un binôme du 1^{er} degré : $y = ax + b$, où a et b sont des nombres donnés. C'est pour rappeler que sa représentation graphique est une droite qu'elle est appelée linéaire.

En 1951 : Deux grandeurs x et y sont directement proportionnelles si $\frac{y}{x} = \text{constante}$ ou $y = ax$. Les fonctions $Y = ax$ sont représentées par des droites passant par l'origine. Le coefficient a est la pente de la droite aussi appelé coefficient angulaire.

Deux grandeurs x et y sont à accroissements proportionnelles si y étant fonction de x on a

$$\frac{\text{accroissement de la fonction}}{\text{accroissement correspondant de la variable}} = \text{constante} .$$

Elles sont alors liées par la relation $y = ax + b$

a et b étant des nombres constants. Les fonctions $Y = ax + b$ sont représentées par des droites parallèles à la représentation graphique de la fonction auxiliaire $Y = ax$ et coupant l'axe des y au point d'abscisse nulle et d'ordonnée b . La constante b est appelée ordonnée à l'origine.

En 1975 : Soit E et F deux espaces affines attachés aux espaces vectoriels E et F sur un corps K . Une application u de E dans F est dite affine s'il existe une application linéaire f de E dans F (elle est alors unique) telle que, pour tout point M de E et pour tout vecteur de E , on ait :

$$u(M + \vec{v}) = u(M) + f(\vec{v}).$$

Les applications affines de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont de la forme $x \rightarrow ax + b$ et leurs représentations graphiques sont des droites, leurs applications linéaires associées sont les applications $x \rightarrow ax$.

En 2011 sur Wikipedia après de nombreuses modifications :

En mathématiques élémentaires, une **fonction affine** est une fonction de la variable réelle dont la représentation graphique est une droite. C'est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

Elle est de la forme : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto a \times x + b$$

avec a et b des nombres réels fixés.

Dans l'expression ci-dessus, a et b sont des constantes et x est la variable.

La constante a est appelée *coefficient directeur* et b *ordonnée à l'origine*.

Si a est nul alors la fonction est constante et sa droite représentative est parallèle à l'axe des abscisses.

Si b est nul alors la fonction est linéaire et sa droite représentative passe par l'origine.

Une fonction affine est caractérisée par le fait que son taux d'accroissement est constant. En effet, si x_1 et x_2 sont deux réels différents, l'accroissement $f(x_1) - f(x_2)$ est proportionnel à $x_1 - x_2$, comme le donne l'égalité : $f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)$. Cette propriété donne alors un outil pour déterminer le coefficient a :

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Illustration 5: définitions proposées aux élèves suite à la recherche « salaire-chiffre d'affaires »

Les élèves font une synthèse qui est très proche du texte de savoir correspondant au résumé trouvé sur Wikipédia et se limite à :

Une fonction affine est de la forme : $f(x) = ax + b$ sa représentation graphique est une droite.

a est appelée *coefficient directeur* et b *ordonnée à l'origine*.

Si a est nul alors la fonction est constante et sa droite représentative est parallèle à l'axe des abscisses.

Si b est nul alors la fonction est linéaire et sa droite représentative passe par l'origine.

On peut remarquer que ce texte de savoir est purement assertorique, c'est une définition nominale des éléments en jeu (Ouvrier-Buffet, 2014). Les élèves n'ont absolument pas gardé d'éléments permettant soit de calculer les constantes, soit de les lire sur le graphique. Dans cette définition, le mot semble à lui seul devoir détenir la vérité et la nature de l'objet. Il apparaît que les nécessités, les contraintes, les passages d'un cadre à l'autre n'ont pas été repérés comme utiles dans la définition. Même certains mots comme « constante », « variable » n'ont pas été retenus par les élèves. La contradiction entre l'utilisation du mot « linéaire » et celle actuelle du mot « affine » n'a pas non plus été relevée. Notre séquence a-t-elle atteint son but ? Cette dernière production peut nous en faire douter. Il s'avère cependant que les élèves n'ont pas utilisé cet écrit dans leur mémo de cours mais qu'ils ont préféré la fiche distribuée lors de la quatrième séance sur laquelle ils ont ajouté quelques éléments (voir annexe 34). La définition formelle n'est effectivement pas opérationnelle alors que la synthèse de l'exercice garde mémoire des conversions entre cadres et entre registres.

La séquence montre donc une évolution de la position du problème à une phase de construction et de critique des hypothèses. Cette organisation est totalement différente de celle habituellement mise en place. Même si un débat collectif permet de critiquer les hypothèses, ce sont souvent les élèves les plus à l'aise à la fois à l'oral et dans la formulation de leurs idées, qui s'expriment, les autres sont souvent en attente du savoir déclaratif qui sera donné par l'enseignant et n'auront donc pas profité des inducteurs de type c , d et e donnés à l'écrit ou redits à l'oral pour quelques élèves. Un même exercice a été proposé à la classe qui a vécu l'expérimentation et à une autre classe de seconde de même profil n'ayant pas profité de cette séquence. La comparaison entre les deux groupes montre deux résultats positifs : le nombre d'élèves ayant résolu l'exercice est plus important dans la classe ayant vécu l'expérimentation (5 groupes sur 6 ont la solution contre 3 groupes sur 8 dans l'autre classe), les élèves sont plus autonomes et contrôlent régulièrement leur travail au regard des conditions. Il semble donc que la séquence ait permis aux élèves de gagner en compétence pour ce qui est de la recherche, de la modélisation et du raisonnement. Par contre les élèves utilisent moins de techniques et de notations conventionnelles. Ils interrogent plus les technologies mais sont moins rigoureux dans leur formulation.

Le programme de 2008 proposait d'introduire la notion de fonction en tant que processus faisant correspondre à un nombre un autre nombre, l'exemple des fonctions

linéaires devait amener les élèves à associer l'écriture $x \rightarrow ax$ à la formulation « je multiplie par a » et les notations étaient un objet d'apprentissage. De très nombreux exercices n'avaient pour but que de travailler des changements de registres de représentation sémiotique sans que ces conversions ne soient associées à des résolutions de problèmes. Si le langage est indispensable à la construction de la pensée, on peut se demander si l'apprentissage prématuré de notations conventionnelles ne risque pas de nuire à cette construction. Les mathématiciens utilisent des écritures très différentes lors de la construction de nouveaux concepts, ces écritures deviennent stables lorsque le concept rejoint une théorie plus globale ou devient un nouvel objet de débat dans la communauté scientifique. Nous pensons qu'il en est de même au sein de la classe et que les élèves ont besoin de construire leurs propres notations avant de reconnaître la notation conventionnelle comme efficace. On peut aussi s'interroger sur le choix de l'institution qui consiste à ne pas autoriser les élèves à utiliser des notations relevant de théories non enseignées alors que les élèves sont capables spontanément de manipuler ces notations reconnues comme efficaces et porteuses de sens. Nous pensons par exemple au calcul matriciel que de nombreux élèves utilisent, ou aux fonctions affines dans les espaces vectoriels. Si nous partons du principe que les concepts sont très souvent utilisés comme outils avant d'être des objets d'étude, nous pouvons considérer que le langage mathématique doit, de la même façon, montrer son efficacité comme outil de résolution et de pensée et s'inscrire dans un processus de construction. Le programme mis en œuvre à la rentrée 2016 formalise les attendus différemment. Le titre du domaine correspondant est « comprendre et utiliser la notion de fonction » et les compétences visées sont « modéliser des phénomènes continus par une fonction et résoudre des problèmes modélisés par des fonctions ». La notation est toujours une connaissance du programme mais elle n'est pas première. Dans l'esprit de la réforme du collège, les connaissances viennent alimenter les compétences. La notation doit être au service de la compréhension et être utile pour résoudre des problèmes. L'écriture $f(x) = \dots$ pose de gros problèmes aux élèves qui la lisent comme une écriture algébrique alors que les parenthèses ont ici un sens différent. Elle pourrait avantageusement être oubliée au bénéfice de l'écriture $x \mapsto \dots$ qui a le mérite d'être spécifique au cadre fonctionnel. Noter f une fonction n'a d'intérêt qu'à partir du moment où l'on opère sur les fonctions, ce qui n'est pas le cas à ce niveau d'étude. Par contre les élèves travaillent régulièrement sur les accroissements et sur les taux d'accroissement alors qu'ils n'ont aucune notation à leur disposition. Il pourrait être intéressant d'introduire le mot « taux de variation » et la notation $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ lorsque les élèves en ont besoin pour voir si cela les aide à opérer sur ces objets.

I.3 : Conclusion sur le choix des problèmes

I.3.1 : Du point de vue des savoirs

Une constante ressort de ces expérimentations : le passage obligé dans la conceptualisation de la notion d'affinité par une étape mobilisant l'unité de raisonnement U1 qui consiste à identifier une relation fonctionnelle et à comparer cette relation fonctionnelle à

une relation de proportionnalité. Ce n'est qu'une fois que la non-proportionnalité est établie alors même que la relation fonctionnelle est reconnue, que de nouvelles investigations peuvent être entreprises. En d'autres termes, il semble obligé que les élèves se posent la question de savoir si les grandeurs sont proportionnelles ou non. On peut donc penser que de formaliser explicitement cette question aux élèves peut être aidant.

Une autre étape est celle qui permet de décrire le comportement des accroissements sous la forme « Toute augmentation Δx de x est concomitante à une augmentation Δy de y . » où x désigne la variable indépendante et y la variable dépendante. Cette étape mobilise l'unité de raisonnement U4. Une difficulté importante des élèves est alors d'avoir un vocabulaire et des notations pour parler de ces phénomènes. Les mots « accroissement » et « variation » ne sont pas disponibles. Par ailleurs les grandeurs sont souvent peu ou mal identifiées, ce qui amène les élèves à produire des énoncés où se mélangent le nom de la grandeur, sa mesure, son unité.

Concernant le contexte de ces deux problèmes, on peut souligner que le premier étudie une seule grandeur mesurée dans deux unités différentes, on peut parler d'un problème de conversion, le second étudie la covariation de deux grandeurs qui se mesurent dans une même unité. Les fonctions sous-jacentes à ces deux situations sont donc de natures différentes. La première peut être considérée comme une « fonction théorique » en ce sens qu'elle est définie à partir d'une théorie scientifique et s'applique sans référence à une validation expérimentale alors que la seconde est une « fonction pratique » construite comme un modèle à partir de données expérimentales. Derrière cette différence se cache aussi des représentations différentes de la notion de fonction puisque dans le second cas, les élèves cherchent une éventuelle causalité de la concomitance des variations alors que pour la première, ils cherchent une procédure de calcul comme un outil technique de conversion semblable à celles utilisées pour changer d'unité dans le système décimal ou des changements d'échelles.

Il s'agit cependant de voir si les deux passages obligés identifiés (établir la non-proportionnalité et établir la proportionnalité des écarts) sont encore efficaces dans un autre contexte. Dans les cas de proportionnalité, les élèves identifient mieux les grandeurs lorsqu'elles sont de nature différente (Levain, 1994). Nous pouvons proposer aux élèves d'étudier la covariation de deux grandeurs différentes mesurées dans des unités différentes. Dans ce nouveau contexte, nous pouvons faire l'hypothèse que les élèves identifieront plus vite les deux grandeurs et examineront plus rapidement la nature de la relation fonctionnelle entre ces deux grandeurs, c'est-à-dire qu'ils mobiliseront plus vite les unités de raisonnement U2 à U4. Par ailleurs, le fait de travailler sur des grandeurs et des unités différentes devrait contraindre les élèves à utiliser un vocabulaire différent pour parler de chaque grandeur et donc de construire des formulations pour exprimer les variations et leur concomitance.

I.3.2 : Du point de vue du scénario

Dans le travail proposé, nous pouvons remarquer que différents problèmes sont construits par les élèves dans des temporalités différentes. Ces écarts ne permettent pas lors de débats ou de mises en commun de travailler sur les mêmes questions car les élèves ne disposent pas des mêmes données, ni des mêmes conditions, ni même d'un problème

similaire. Nous risquons fort d'être ici sur un « malentendu scolaire » (Bautier & Patrick, 2013) en ce sens que la participation au débat consiste à amener des éléments en réponse à des questions isolées pour les élèves les plus éloignés de l'apprentissage par problématisation alors qu'elle permet de faire évoluer le REX des élèves qui ont déjà problématisé le savoir visé.

Nous pouvons cependant mesurer ces écarts au cours des différents stades de la réflexion de par les écrits intermédiaires proposés par les élèves et voir que chaque élève doit bénéficier d'un travail lui permettant de construire peu à peu le problème pour mobiliser effectivement les différentes unités de raisonnement. Nous allons présenter dans le chapitre qui suit un scénario allant dans ce sens. Il s'agit de permettre aux élèves de construire le problème en petits groupes et d'analyser l'activité mathématique du groupe dans sa dimension collective. Si l'objectif de la didactique est de « créer les conditions qui conduisent les élèves à agir, à concevoir, puis à formuler et à étayer à leur façon les concepts mathématiques » comme le proposait Guy Brousseau au congrès international de la TAD en 2013, nous devons réfléchir à la mise en place de situations opportunes pour que tous les élèves aient l'occasion d'effectivement agir, concevoir et formuler au sein du collectif, et non des situations qui entretiennent les élèves dans un seul de ces rôles. Amener les élèves à problématiser suppose que le REX de chaque élève évolue en lui permettant d'avoir des rôles différents au sein du collectif d'abord, puis d'endosser ces rôles individuellement à différents stades de sa résolution du problème.

Nous avons donc deux aspects à travailler : d'une part l'approche épistémologique pour mieux cerner la notion de fonction affine et les obstacles épistémologiques que doivent surmonter les élèves et d'autre part la mise en place de scénarios pédagogiques plus propices à l'apprentissage par problématisation de chaque élève dans la classe.

Chapitre II : Un modèle de séquence : la PPAP

Lors de l'analyse de débats en classe, nous avons constaté que certains élèves pouvaient très bien participer et énoncer le savoir sans pour cela être capables de le réutiliser ou même de le reformuler les séances suivantes. Une hypothèse est que les échanges entre l'enseignant et les élèves peuvent donner l'illusion que le concept est construit alors que les initiatives langagières sont peu réparties pendant le débat. Lorsque la résolution de problème amène une mise en texte de savoirs à travers des débats, une mise en commun sous forme de cours dialogué ou de bilans préparés par l'enseignant, les élèves sont face à une synthèse rétroactive sur les objets mathématiques, or cette synthèse n'amène pas forcément les élèves à une rencontre proactive de ces mêmes objets devant le problème posé. Par ailleurs, les pratiques langagières comme les débats ou les cours dialogués amènent des malentendus scolaires en ce sens que : « Tous les élèves ne « profitent » pas de la même manière, scolairement et cognitivement, voir langagièrement de ce type de situation » (Bautier & Rayou, 2013, p.8). En particulier, tous les élèves ne disposent pas de la littératie étendue permettant une mise en mots puis une secondarisation (ressaisie d'un discours) ou une reconfiguration (mise en mot d'une expérience pour s'en ressaisir dans un discours second). Certains élèves peuvent donc participer activement aux échanges oraux sans mesurer l'enjeu cognitif de la situation.

Comment amener l'élève à faire lui-même la synthèse des activités de recherche dans l'idée d'une problématisation de la notion dans sa dualité outil/objet (Douady, 1986) ? Les expérimentations présentées dans le chapitre I ont permis de mettre en évidence que l'analyse par les élèves de productions intermédiaires permettait de reformuler le problème et de centrer l'activité de l'élève plus sur le pourquoi, que sur la solution elle-même. Si les élèves sont soumis à des tâches, il s'agit de les faire parler autour des techniques utilisées c'est-à-dire des technologies sous-jacentes (Chevallard, 1999). Nous faisons l'hypothèse que c'est à travers ces formulations et un travail autour de ces formulations que l'élève peut être amené à problématiser le savoir. Nous allons proposer un modèle de séquence qui a pour but de donner l'occasion à tous les élèves d'expliquer les solutions pour penser les nécessités du savoir construit.

II.1 : L'apport des travaux en didactique des sciences et vie de la terre

Nous avons vu dans la partie 2 chapitre III que trois registres s'articulent dans l'activité scientifique : le registre empirique lié à l'observation et aux expériences, le registre des modèles qui est celui des idées, des représentations, et enfin le registre explicatif qui structure les explications données par les élèves. L'objectif de l'apprentissage est de faire évoluer les représentations erronées, les conceptions naturelles qui peuvent être fausses. Ce renversement ne peut pas se contenter d'observations et d'explications souvent fournies par l'enseignant, il s'agit pour l'élève de passer d'une conception à une autre. Pour cela, la mise en évidence des nécessités qui font que le savoir est ce qu'il est et ne peut pas être autre chose, doit permettre à

l'élève de construire un savoir problématisé. Pour Christian Orange, le débat a un rôle fondamental dans la mise en évidence de ces nécessités. Il doit permettre d'envisager tous les possibles et mettre en lumière à travers la production de thèses, d'objections et d'énoncés, les conditions qui permettent d'envisager la solution d'un problème. En fait cette dynamique argumentative a pour objet la formulation d'un problème construit et par conséquent la construction d'un texte de savoir raisonné à travers la production d'argumentations pour et contre les modèles (Orange, 2012). « Le but est d'aider les élèves à explorer les possibles de manière raisonnée et donc de les conduire à produire des argumentations sur des productions explicatives » explique Christian Orange. On peut se demander quel est le statut du débat, s'agirait-il d'un scénario d'aide à l'apprentissage par problématisation au sens de Bruner ?

Un scénario est un modèle d'interaction standardisé, microscopique au début, entre un adulte et un tout petit enfant, qui distribue des rôles délimités susceptibles de devenir réversibles plus tard. (Bruner, 1987, p.111)

Dans le débat, il s'agit d'une interaction non entre un adulte et un enfant, mais bien entre un adulte et une communauté scientifique scolaire avec des rôles qui sont amenés à évoluer pour être réversibles. Dans son activité scolaire, les élèves peuvent prendre différents rôles que l'on peut rapprocher des profils de comportement mis en évidence par Pléty (Pléty, 1996) :

- L'**agissant** est l'élève qui réalise des tâches, qui produit, qui fait. C'est un quêteur, il cherche des informations, il pose des questions multiples.
- L'**entraîneur** est l'élève qui donne des consignes, qui guide, oriente l'activité ou les échanges. Il est animateur en ce sens qu'il multiplie les intervention, il a plusieurs partenaires, et ses interventions entraînent des réactions positives.
- L'**observateur** est celui qui participe peu, il est plutôt en retrait, il reste indépendant, discret.
- L'**énonciateur** est celui qui met en mots, il peut raconter, décrire, ou clore suivant le cas. Il se rapproche du vérificateur car ses interventions entraînent rarement d'autres interventions.

Par ailleurs, dans l'interaction argumentative, il faut distinguer différents actants au sens de Plantin que sont le proposant, l'opposant et le tiers, parmi les acteurs que sont les individus engagés dans la communication :

Le proposant tient le discours de proposition, l'opposant tient le discours d'opposition et le tiers prend en charge la question. Le proposant supporte la charge de la preuve. Les rôles de proposant et d'opposant ne sont pas distribués une fois pour toutes dans l'interaction. Ils sont déterminés notamment en fonction de la nature de la question, qui joue un rôle fondamental en problématisant la situation et en déterminant les orientations argumentatives des interventions des parties. (Plantin, 1996, p.12)

Dans un débat, les élèves peuvent prendre plusieurs rôles à différents moments, ils peuvent être différents actants. Le fait d'être soi-même alternativement les trois actants serait

la caractéristique de ce qu'on pourrait appeler « le débat intérieur ». Le débat ne suit donc pas un modèle d'interactions en ce sens que le jeu entre les acteurs peut modifier considérablement la forme du débat. Le débat n'est donc pas un scénario, nous allons plutôt nous orienter vers la notion de « format ». Bruner définit un format comme une situation d'actions-échanges dont on peut décrire les variables et les supports. On pourrait comprendre le débat argumentatif présenté par Orange comme un format caractérisé par :

- l'objectif est une production explicative à un problème ;
- la classe n'a pas à se mettre d'accord sur un modèle explicatif ;
- les explications et les modèles sont discutés ;
- les arguments peuvent être issus d'expériences empiriques ou de connaissances antérieures, ce qui amène les acteurs à avoir plusieurs rôles : faire, entraîner, observer, énoncer, pour avoir des références communes ;
- les acteurs peuvent être actants et donc proposer, opposer ou jouer le rôle du tiers.

Du côté de l'enseignant, ses interventions dans le débat ont plusieurs fonctions, il peut valider, ouvrir un possible, demander des explications ou demander une formulation. En aucun cas, il ne doit intervenir pour donner son avis sur les thèses ou pour valider une solution.

Un même élève peut avoir différents rôles suivant les épisodes, le groupe, la tâche. Il ne s'agit pas d'un profil immuable. Il peut aussi être différents actants et c'est le tissage entre son comportement et son rôle dans le débat argumentatif au sein du groupe qui peut l'amener à une posture de « tiers » et à une évolution de son registre explicatif.

II.2 : Les séquences PPAP (Problématisation Par Analyse des Productions)

Si les activités langagières argumentatives ont un rôle essentiel dans l'apprentissage par problématisation, les travaux de Christian Orange posent la question du rapport entre l'activité constructive des élèves et la production de textes. L'hypothèse forte est que les écrits produits par les élèves permettent de garder une trace de l'argumentation et donc du stade de problématisation comme nous le définirons un peu plus loin dans ce chapitre. On peut schématiser une séance par un triangle dont les trois sommets sont : la situation, l'activité et la production (voir schéma 20). La situation est proposée à l'élève qui, pour effectuer une tâche, développe une activité intellectuelle plus ou moins visible (par exemple à travers une activité langagière ou la procédure utilisée), ceci dans le but de produire quelque chose (résultat, discours). Dans le milieu scolaire, cette production est très souvent mise en texte.

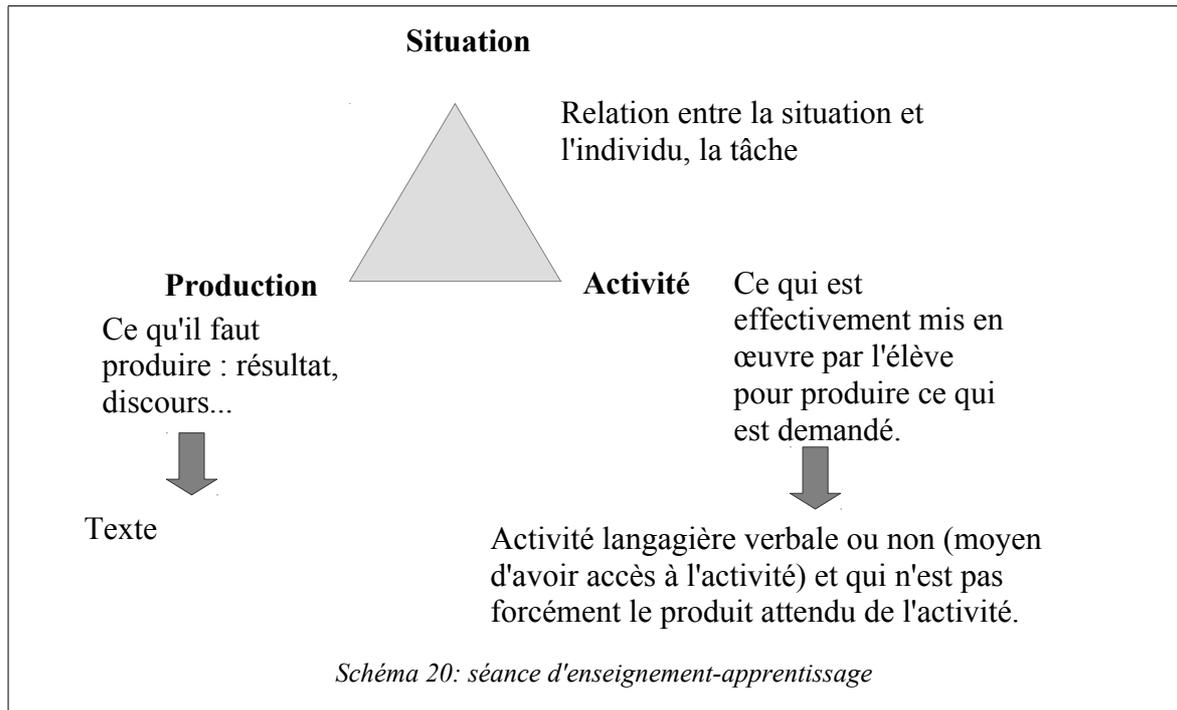
Brousseau met en garde contre les contre sens liés à l'emprunt de théories différentes, il précise en particulier la différence entre situation et tâche :

Une leçon a donc deux faces tout à fait différentes :

- La notion de « tâche à accomplir (par l'élève et par le professeur). Elle ignore, dans un premier temps, les questions relatives au « si », au « pourquoi » et au « comment », en particulier pour les élèves.

- La notion de « situation » ignore dans un premier temps les détails et les raisons de la transposition didactique ou de la culture psychopédagogique, pour s'interroger sur les « pourquoi » mathématiques (immédiats ou lointains) sur lesquels se construisent les réactions et la pensée d'un groupe d'élèves (et non pas « de l' » élève) et sur celle « du » professeur (et non pas « des » professeurs), comme instruments d'une volonté commune d'acculturation. (Brousseau, 2016)

Nous utilisons le mot « situation » pour tenir compte de cette volonté d'acculturation et pour montrer l'écart entre ce qui est proposé à un groupe d'élèves, des tâches que chacun de ces élèves va planifier au cours de son activité.



Dans une situation d'enseignement-apprentissage, le professeur agit la plupart du temps sur le rapport entre la situation et le texte produit et laisse de côté l'activité intellectuelle, d'une part parce que cette activité peut ne pas être accessible, d'autre part parce que le produit est censé révéler cette activité. Dans le cadre de notre recherche, nous avons été amenée à faire des enregistrements audio ou vidéo pour reconstruire une partie de cette activité. Pour former à la problématisation, Christian Orange fait l'hypothèse qu'il faut agir sur le lien entre l'activité intellectuelle et la production. L'idée est de favoriser des écrits réflexifs qui permettent à l'élève d'identifier le contexte dans lequel sont produits ces écrits et l'amener à une secondarisation du discours (Jaubert & Rebière, 2001). L'agir permet une transformation du sujet par le développement de son expérience et de ses compétences, on a donc un lien fort entre activité productive et activité constructive (Samurçay, Rabardel, & Pastré, 2004). C'est pourquoi les activités de débriefing, de débat autour des productions, d'analyse réflexive après l'action sont essentielles pour structurer les nouveaux savoirs et faire du lien avec les connaissances anciennes. Encore faut-il prendre le temps de ces activités et permettre à tous les élèves d'y participer également.

Pour agir sur le lien entre activité intellectuelle et texte, nous proposons de soumettre à l'élève des productions intermédiaires. Notre idée est de relancer l'activité de l'élève autour du processus de problématisation. La situation doit inclure suffisamment d'indices pour permettre à l'élève de diriger son regard sur ce qui peut donner des éléments pour expliquer la démarche et donc se rapprocher des « caricatures » données en sciences et vie de la terre (Orange, 2007). L'objectif est d'amener l'élève à produire un discours argumentatif/explicatif. L'enchaînement de plusieurs situations doit permettre un processus de décontextualisation et recontextualisation dont l'élève est le premier acteur. Ce nouveau format rompt avec les situations classiques d'enseignement que sont le débat en classe, la synthèse dialoguée ou encore le cours magistral. Souvent, ces situations amènent un énoncé du savoir sous la forme d'un texte savant, supposé désigner un savoir déjà là et non en construction, et pour lequel la situation problème ne sert que d'illustration ou de prétexte. Cette représentation de l'activité mathématique scolaire peut d'ailleurs devenir une clause du méso-contrat didactique. Ici le texte de savoir s'élabore peu à peu en lien avec les activités qui doivent permettre d'établir les nécessités du savoir construit. Nous appellerons PPAP un enchaînement de ce type (Problématisation Par Analyse des Productions).

Une séquence de PPAP est un enchaînement de situations qui a les caractéristiques suivantes :

Première situation : la résolution du problème (étape intra/inter/trans-objectale)

- a) Une situation où les nécessités sont susceptibles d'être construites et à fort potentiel a-didactique est proposée. Le problème peut être posé dans différents cadres (Douady, 1986). Il doit prendre en charge les ruptures épistémologiques identifiées. Les élèves produisent par petits groupes un écrit de type narratif où ils expliquent comment ils posent le problème et la ou les procédures qu'ils utilisent pour le résoudre.
- b) A partir des textes narratifs, les élèves, toujours par groupes, utilisent une des procédures proposées par leurs camarades pour résoudre le problème dans un cadre spécifique. La solution est rédigée collectivement ou individuellement.

Deuxième situation : la classification des procédures (étape intra/inter/trans-analytique)

- c) Les différentes solutions sont soumises à la critique, les élèves doivent expliquer par groupes comment les mêmes nécessités s'expriment à travers les différentes procédures et donc dans les différents cadres.

Troisième situation : la définition de l'outil (étape intra/inter/trans-synthétique)

- d) Les nécessités sont identifiées et les élèves construisent, individuellement ou par groupes, un texte de savoir qu'ils peuvent éventuellement être amenés à comparer aux écrits savants.

Ce format amène les élèves à produire différents écrits : un texte narratif, une solution, une critique, un texte de savoir. Le débat argumentatif se joue à chaque étape dans les petits

groupes qui ont à discuter les productions du groupe classe. Chaque séance met en jeu des inducteurs de problématisation (Fabre & Musquer, 2009) que nous pouvons repérer dans la préparation et l'analyse *a priori* des séquences. L'étape a) amène à travailler la position du problème (nous sommes sur l'axe vertical du losange de problématisation), l'étape b) sa résolution (nous sommes sur l'axe horizontal), la c) l'analyse de la construction du problème (la comparaison entre les différents losanges), la d) amène à construire le savoir problématisé (par identification des nécessités) qui apporte ainsi de nouvelles conditions. L'écrit servant de support aux situations joue différents rôles qui reviennent à ceux de l'enseignant que nous avons identifiés dans le débat argumentatif : il peut valider, ouvrir des possibles, demander une explication ou demander une formulation. Le travail étant proposé en petits groupes de 3 ou 4 élèves, chacun a la possibilité d'être actant à chaque séance. L'activité productive de l'élève amène un texte de savoir tandis que l'activité constructive amène un savoir problématisé. Les étapes s'enchaînent avec la production de textes qui correspondent à la tâche demandée, tâche qui évolue vers la production d'un texte de savoir décontextualisé mais tenant compte de la mise en place du concept par les élèves eux-mêmes. On vise un processus de secondarisation du discours (Jaubert & Rebière, 2001) en ce sens qu'on passe d'un genre premier (échanges spontanés liés à l'action dans la narration) à une reformulation, un énoncé de savoir dans différents contextes. Ce processus permet l'élaboration d'un nouveau contrat de communication laissant le temps d'un travail réflexif. Il permet d'explicitier les enjeux de la situation pour éviter un malentendu cognitif et langagier identifié par Bautier et Rayou :

C'est une spécificité des situations scolaires que de solliciter implicitement et sans l'enseigner un travail de mobilisation et de « reprise » d'autres discours, de diverses origines, voire même de reprise d'expériences non déjà mises en mots et leur modification dans un registre et un genre différent de l'original. (Bautier & Rayou, 2013, p.133)

Si la situation initiale est un problème qui tient compte des obstacles épistémologiques au sens de Bachelard, chaque situation peut être traitée par l'élève sous le mode « intra », « inter » ou « trans » en ce sens que les élèves peuvent utiliser une donnée pour construire le problème ou tenir compte de plusieurs données mises en relation, ou encore utiliser une théorie. L'enchaînement des situations doit cependant assurer le passage du « contempler » au « opérer » et du « opérer » au « transformer » pour reprendre le mécanisme identifiés par Piaget et Garcia (Piaget & Garcia, 1983). Nous avons résumé ce format dans le schéma 21 où se succèdent différentes séances, chacune est symbolisée par le triangle défini précédemment (voir schéma 20). La transformation du texte produit à l'issue d'une séance en un texte proposé à la séance suivante est appelée figuration. Nous allons maintenant définir en quoi consiste une figuration dans notre format.

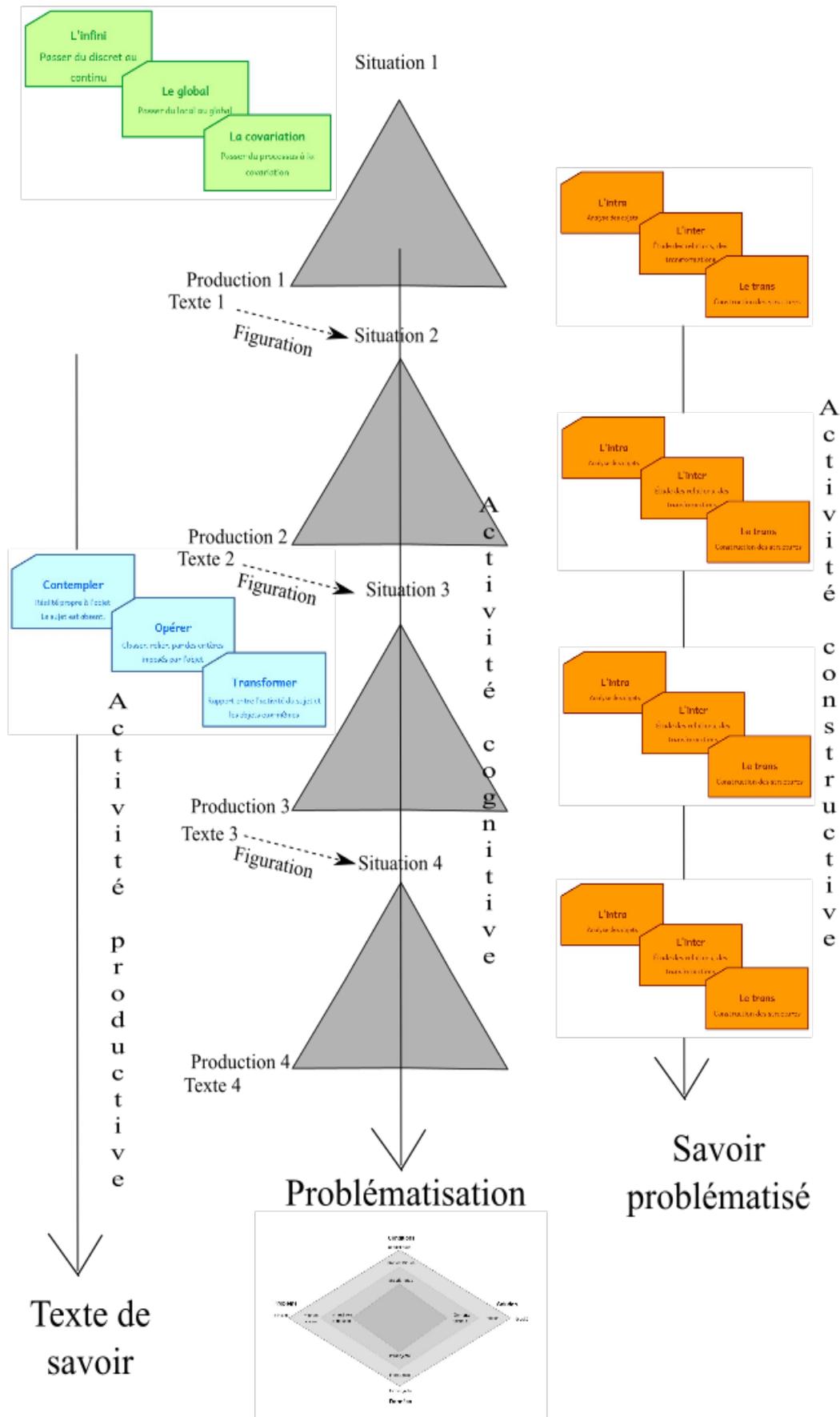


Schéma 21: Format des séquences PPAP

Dans une séquence de type PPAP, à part la situation initiale, les situations sont fonction de la production précédente, il y a déplacement de l'intervention de l'enseignant par rapport aux pratiques usuelles où l'enseignant intervient entre la production et le texte. Ici l'enseignant intervient dans une mise en relation entre le texte et les arguments pour proposer la situation suivante. C'est à ce stade qu'agissent des inducteurs de problématisation qui vont modifier l'activité de l'élève. On peut différencier le processus de modélisation qui consiste à vouloir rendre compte d'une situation par une épure donnant les relations essentielles à voir et appelée « modèle », du processus de référenciation qui cherche à appeler un savoir antérieur. La transformation de la production des élèves en un nouveau support pour la situation suivante d'apprentissage relève de cette référenciation. La figuration doit à la fois évoquer les productions des élèves et le savoir nécessaire pour expliquer cette production.

L'idée de « caricature » a été empruntée à un type de séquences en sciences expérimentales, mais ce qui joue le même rôle ici a cependant une autre fonction. Le plus souvent, la caricature en SVT est un schéma qui modélise une représentation erronée ou incomplète d'un phénomène. Plusieurs caricatures sont ainsi proposées aux élèves pour relever les écarts de représentation et donc argumenter sur la validité ou non des modèles (Orange, 2007). En mathématiques, les caricatures peuvent modéliser des idées toutes valides mais qui mettent un même concept au travail dans différents cadres ou exprimés dans différents registres. La fonction est donc toujours d'amener l'élève à expliquer, mais dans le cas où certaines caricatures correspondent à des solutions non valides, l'explication met en avant des impossibilités. Au contraire, lorsque les solutions sont toutes validées, l'explication fait du lien entre différents possibles.

La production des élèves peut être un texte, un discours, un schéma. Orange propose d'utiliser le terme d' « inscription ». L'enseignant intervient pour choisir, modifier, restructurer cette inscription. Pour ce qui concerne les PPAP, nous préférons utiliser le terme de « figuration ». En effet, trois caractéristiques permettent de définir cette notion. Tout d'abord une figuration est une reconstruction par l'enseignant de l'activité de l'élève, qui englobe et reprend différentes productions et les synthétise de manière anonyme. Ensuite, c'est un ensemble de signes, icônes, symboles, schémas, plus ou moins conventionnels qui apportent des éléments explicitant la procédure utilisée et permettant d'évoquer le problème dans un cadre spécifique sans pour autant en apporter une solution. Enfin, la figuration est une focale sur certains éléments qui doivent favoriser une secondarisation ou plutôt une reconfiguration c'est-à-dire une mise en mots de l'expérience liée à la situation pour pouvoir s'en ressaisir dans un discours second (Bautier & Rayou, 2013), l'objectif est de provoquer une analyse critique, une explication, une interprétation, l'analyse des arguments, l'exploration de nouveaux possibles.

Les figurations ont donc trois fonctions : épistémique, argumentative et cognitive. Pour chacune de ces fonctions, la figuration a une visée et des caractéristiques différentes que nous résumerons dans le tableau 32.

Fonction	Objectif	Caractéristiques
Épistémique	vise la construction d'un savoir précis	La figuration est une épure du savoir visé.
Argumentative	vise la preuve ou la critique	La figuration attire le regard sur les données sélectionnées, c'est un filtre.
Cognitive	active des connaissances (automatismes, schèmes d'action, analogies, découpage en sous-buts)	La figuration amplifie ce qui peut amener une reconnaissance d'objets ou de procédures.

Tableau 32: Caractéristiques des figurations en lien avec leur fonction

Le rôle d'une figuration est de permettre aux élèves de construire une configuration théorique entre les différents registres : le registre empirique, le registre des modèles et le registre explicatif. Pour cela, il s'agit de synthétiser l'état de la réflexion du groupe de sorte que chaque élève puisse prendre conscience des modèles utilisés par ses pairs.

La séquence analysée dans le chapitre précédent correspond à une PPAP. Dans cette séquence, il s'agit de modéliser la relation entre deux grandeurs. Dans la première étape, un problème est posé et la consigne est de produire une narration de recherche dans chaque groupe de 3 ou 4 élèves. Trois modèles ont été utilisés par les élèves qui correspondent à trois façons de se représenter la situation :

- en lisant le tableau comme une liste de coordonnées de points ;
- en considérant ces mesures de grandeurs comme des nombres qui varient les uns en fonction des autres par un processus de calcul ;
- en lisant le tableau comme le tableau de valeurs d'une fonction.

Chacune correspond à un cadre et peut s'exprimer dans un registre, registre visible dans la façon dont le problème est reconstruit par les élèves.

Avec le premier modèle, le problème est posé dans le cadre fonctionnel (les élèves cherchent l'expression d'une fonction affine) mais l'utilisation du registre des tableaux les amène à changer implicitement de cadre pour poser le problème dans celui de la géométrie analytique. La difficulté étant de reformuler le problème dans ce nouveau cadre.

Avec le deuxième modèle, le problème est posé dans le cadre arithmétique et dans le registre des écritures numériques, les élèves cherchent à calculer un coefficient.

Enfin dans le troisième modèle, le problème est posé dans le cadre fonctionnel et traité dans le registre des expressions algébriques puisque les élèves cherchent l'expression d'une fonction affine par la résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

A la seconde étape, l'enseignant reprend chaque modèle mis en place et formule le problème dans le cadre correspondant :

- à partir du graphique considéré comme graphe d'une fonction, déterminer la fonction représentée ;
- à partir du tableau de nombres, comparer les variations et déterminer un processus de calcul qui pourrait correspondre à ce tableau ;
- à partir de l'image par une fonction affine de deux nombres données, déterminer l'expression de la fonction affine.

Nous avons donc trois problèmes posés différemment. Les groupes ont un des problèmes à résoudre, la production attendue est la résolution du problème donnant l'expression d'une relation entre les deux grandeurs.

A l'étape 3, l'enseignant repère les indices qui mettent en évidence la structure du raisonnement dans chaque cadre et propose trois solutions figurant les productions des élèves. La comparaison entre les différentes procédures doit permettre de travailler le passage d'un cadre à l'autre et donc la technologie mise en œuvre, c'est-à-dire le discours sur les techniques utilisées. Il est demandé de critiquer les solutions et d'expliquer comment les éléments de chaque solution se retrouvent dans les différents registres. Ils doivent ensuite proposer une définition de la fonction affine. Les élèves sont amenés à passer d'un registre à l'autre or il n'existe pas d'isomorphisme entre ces registres (Duval, 2006). Les productions font apparaître deux difficultés : Comment lire le coefficient multiplicateur sur le graphique ? Comment calculer l'ordonnée à l'origine quand elle n'est pas donnée dans le tableau et qu'on ne connaît pas l'expression algébrique de la fonction ?

Enfin à l'étape 4, l'enseignant regroupe les propositions de définitions des élèves et des définitions savantes de différentes époques. Les élèves doivent comparer, chercher des analogies, donner des critères de validité, pour expliquer comment les caractéristiques sont formalisées dans les différentes définitions. Ils doivent enfin choisir un texte de savoir qui leur servira de référence.

Nous avons bien dans cette séquence les différents éléments qui caractérisent une PPAP. La question est de savoir si ce format peut être reconduit sur d'autres activités et sur d'autres apprentissages. Nous n'avons pas ici la possibilité de développer cet aspect mais quelques expérimentations ont permis de mettre en évidence que la PPAP est particulièrement adaptée aux problèmes qui peuvent être résolus dans plusieurs cadres et qui font appel à des outils en construction pour lesquels aucune théorie n'a encore été enseignée.

II.3 : La dynamique de problématisation dans une PPAP

Tout au long de la séquence PPAP, l'enseignant focalise l'attention des élèves sur certains éléments pour les aider à changer de contexte. Les écrits visent une secondarisation du discours. En effet, la première étape est du registre narratif, elle liste des échanges spontanés liés à l'action, s'appuie sur la co-présence et le partage de situations vécues avec l'enseignant. L'interlocuteur est l'enseignant lui-même et ses attentes sont claires pour les élèves c'est-à-dire que le statut de l'erreur, le statut de cet écrit intermédiaire, la nécessité d'argumenter ou d'expliquer, font partie du méso-contrat didactique mis en place (Hersant, 2014). La deuxième étape amène une prise en compte des hypothèses d'autrui et une

reformulation dans un contexte différent. Elle crée un espace de réflexion en retrait de l'action. La troisième étape, amène une discussion des résultats, avec une recontextualisation dans un autre cadre ou registre. Le discours attendu est plus argumentatif et le lecteur est identifié comme étant le groupe classe, les écrits sont publiés. Il s'agit d'argumenter vis-à-vis des pairs et de l'enseignant. Enfin l'étape 4 amène une confrontation et une nouvelle décontextualisation et recontextualisation de textes de savoirs de la sphère scolaire avec le discours de la sphère savante qui prouve qu'un savoir est situé et qu'il peut se formaliser de multiples façons.

La comparaison des productions suppose des questions *de dicto* (les élèves se demandent pourquoi certains ont affirmé que...), la comparaison des résultats amène des questions *de re*.

La production de raisons correspond à une fonction très générale manifestée par les questions du type « pourquoi », aussi bien les questions *de dicto* (« pourquoi affirmes-tu que... ? », « pourquoi réponds-tu que... ? ») que les questions *de re* (« pourquoi tel phénomène se produit-il ? », « pourquoi obtient-on tel résultat ? »...). Les questions *de re* appellent une explication. Les questions *de dicto* demandent que l'on avance au moins un argument. (Duval, 1992)

Duval insiste par ailleurs sur le fait que l'examen de l'acceptabilité des raisons relève du raisonnement et qu'il demande une distanciation qui n'est pas possible dans une argumentation orale. C'est pourquoi il nous semble pertinent de demander ce travail par écrit. La dernière étape qui vise à confronter une même proposition exprimée dans différents registres amène à la production d'une définition. Il s'agit donc plus ici de produire un raisonnement valide et non plus uniquement vraisemblable. L'objectif n'est pas de convaincre mais d'établir un énoncé tiers permettant d'organiser la déduction entre les prémisses (données sur l'objet) et la conclusion (caractérisation de l'objet). Cet énoncé doit pouvoir englober toutes les représentations possibles de l'objet et prendre un statut théorique, c'est-à-dire suffisamment décontextualisé et non discutable. Les inscriptions évoluent donc au cours de la séquence d'un type de discours narratifs à un type argumentatif (qui reste subjectif) puis explicatif (qui devient objectif), nous parlerons de trois niveaux de productions, la production étant ici la trace écrite de la résolution du problème. A chacun de ces niveaux correspond en fait un niveau de problème, un niveau de traitement de données allant de l'intra-objectal au trans-objectal (Piaget & Garcia, 1983) et un niveau de conditions allant de l'énoncé de savoirs assertoriques à l'énoncé de nécessités et donc de savoirs apodictiques en passant par un niveau d'énonciation de nouveaux possibles. Nous parlerons de conditions assertoriques, problématiques et apodictiques. Nous allons résumer dans le tableau 32 les caractéristiques du problème, du traitement des données, des conditions et de la solution dans sa nature et sa forme pour chacun des niveaux. Il n'y a cependant pas homogénéité en ce sens qu'un élève peut très bien utiliser un niveau 1 pour les conditions et effectuer un traitement de données au niveau 2.

Une séquence PPAP a pour but de provoquer des changements de niveaux. Les situations doivent permettre d'ouvrir des possibles pour amener l'élève à mettre en relation les données et les conditions par un raisonnement proche d'une démonstration.

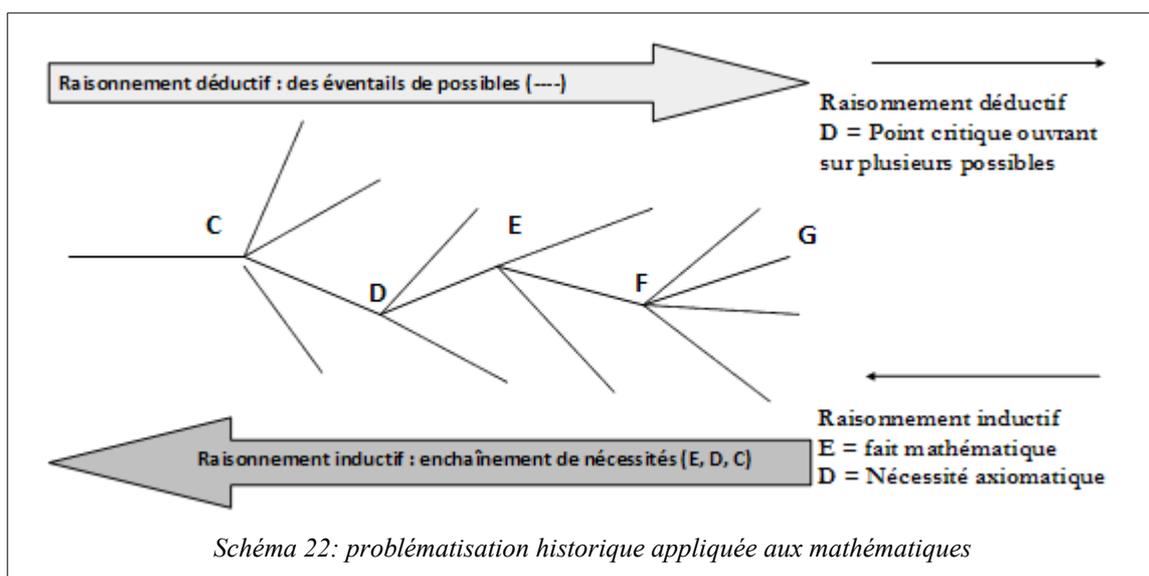
	Problème	Données	Conditions	Solution
Niveau 1	Problème orienté vers la solution .	Intra-objectales : une seule donnée induit le sens général, celles qui ne vont pas dans ce sens sont oubliées.	Assertoriques : constat sans explications	Des éléments factuels , un résultat tangible. Utilise des icônes qui montrent l'objet. Les discours sont narratifs. L'action est spontanée.
Niveau 2	Problème de mise en relation de différentes procédures	Inter-objectales : plusieurs données sont interprétées par rapport à une idée générale.	Problématiques : ouvre des possibles	Une mise en relation . Utilise des indices qui indiquent ce qu'il faut regarder. Le discours est argumentatif. L'action est réfléchie.
Niveau 3	Problème explicatif	Trans-objectales : L'idée générale tient compte de toutes les données.	Apodictiques : nécessairement vrai	Des nécessités . Utilise des symboles qui démontrent et se déchiffrent avec un code. Le discours est explicatif. L'action est adaptée.

Tableau 32: Niveaux de problématisation

Dans le cadre de la problématisation historique, Sylvain Doussot reprend un schéma proposé par Denise Orange pour montrer le double mouvement entre la descente de l'histoire qui donne un éventail de possibles, chaque nœud représentant un point critique qui ouvre sur plusieurs possibles, et la remontée de l'histoire qui est un enchaînement de nécessités événementielles (Doussot, 2015). Nous pouvons reprendre le même schéma et mettre en évidence le double mouvement similaire entre le raisonnement déductif et le raisonnement inductif. Cependant la différence est que dans le cas de l'histoire, la remontée se fait à partir d'événements historiques et de nécessités de l'histoire, en mathématiques nous parlerons de « faits mathématiques » et de nécessités mathématiques. La question étant de savoir de quel ordre sont ces nécessités. Nous considérons que ces nécessités relèvent de la configuration entre le registre empirique, le registre des modèles et le REX, c'est-à-dire de ce qui « structure les explications des élèves et donc leur façon de travailler les problèmes scientifiques » (Orange, 2012). Nous avons vu que cette configuration peut avoir trois natures : empirique (référence à l'action : « je l'ai fait »), analytique (référence à un modèle : « c'est comme... ») ou synthétique (référence à une théorie : « d'après le théorème... »).

Chaque embranchement correspond à une étape du raisonnement qui ouvre sur différents possibles, le nœud suivant étant fonction du choix effectué sur ces différents possibles. Ce choix dépend de nombreux paramètres : il est fonction de l'organisation des savoirs mathématiques, de l'état des connaissances de l'élève, de son aisance avec les outils, de ses représentations de la solution, de la tâche attendue, du contrat didactique, du contexte etc. Expliciter ces choix devrait permettre de tisser du lien entre les configurations et de

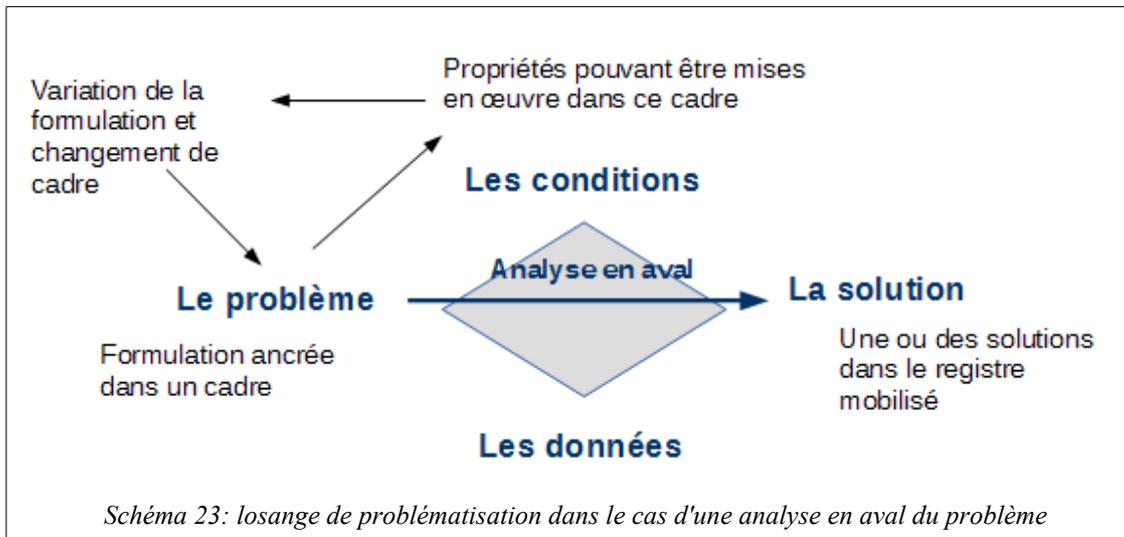
mettre en évidence des nécessités communes qui pourraient alors avoir le statut de « principe structurant ».



Duval pose la question de l'analyse des problèmes en vue d'explicitier les conditions ou les moyens d'apprentissage que ces problèmes offrent aux élèves. Il identifie deux méthodes pour mener cette analyse : l'analyse en aval et l'analyse en amont. Duval définit la première de la façon suivante :

La méthode habituellement mise en œuvre consiste à rechercher et à examiner les différentes solutions possibles en vue de choisir les conditions, ou la situation, dans lesquelles ce problème pourra être proposé en classe : introduire une notion nouvelle, faire utiliser ce qui a déjà été enseigné dans des situations différentes de celles déjà présentées aux élèves... Et l'examen des différentes solutions possibles se fait en fonction des différentes « notions » (propriétés) ou des différentes procédures que chacune met en œuvre. Nous appellerons « analyse en aval » cette méthode d'analyse puisqu'elle va de l'énoncé du problème à la résolution du problème. (Duval, 2002, p.7)

Si nous reprenons le schéma du losange de problématisation, l'analyse en aval est orientée vers la solution et les procédures sont comparées en terme de performances, en fonction de critères parfois implicites (la plus originale, la plus rapide, celle qui utilise le cours de la veille...). L'objectif est de proposer une rédaction canonique de la démonstration amenant éventuellement à définir un nouvel objet mathématique (voir schéma 23). Le travail de conversion se fait essentiellement au niveau de la reformulation de l'énoncé du problème par changement de cadre.

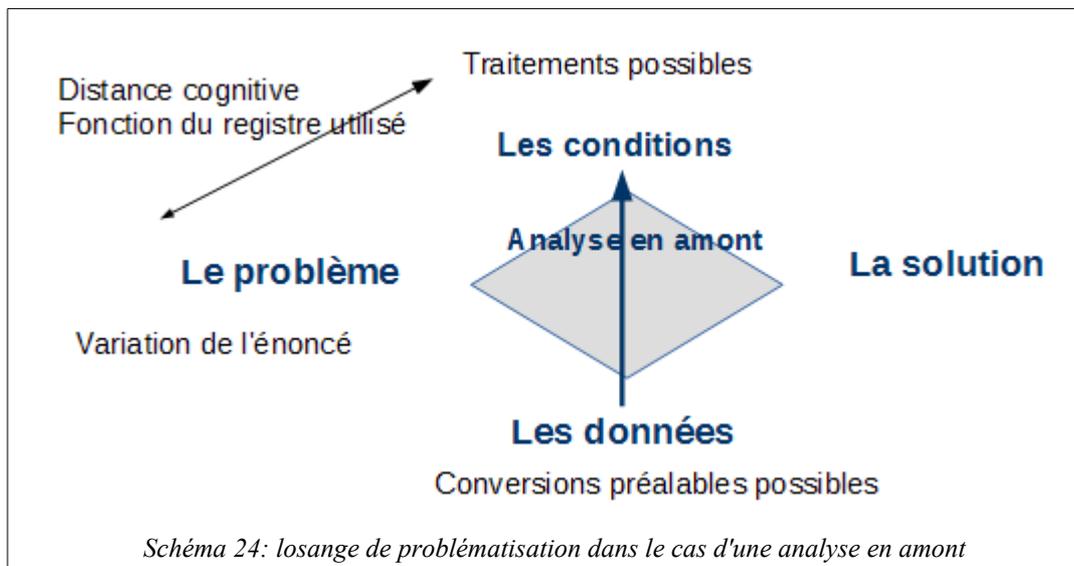


Duval définit l'analyse en amont (voir schéma 24) comme étant la mesure de la distance cognitive entre la formulation du problème et les traitements possibles. Elle permet de lister toutes les variations possibles de l'énoncé ancré dans un cadre mathématique, ce qui entraîne nécessairement des conversions préalables des données d'un registre à l'autre, afin de réduire la distance cognitive entre l'énoncé et donc permettre les « premiers pas » de solution aux élèves n'ayant pas la culture mathématique attendue .

A la différence de la méthode en aval qui relève plus de la «synthèse», la méthode en amont est vraiment une analyse qui cherche à identifier les différents facteurs commandant la dynamique de pensée propre à un type de démarche mathématique. (Duval, 2002, p.20)

Dans le losange de problématisation, l'analyse en amont est donc plutôt une mise en relation des données et des conditions.

L'analyse en amont semble donc à privilégier si nous voulons problématiser le savoir. Ce qui revient à identifier pour chaque nœud de la problématisation sur le modèle historique, les éléments qui permettent le choix entre différents possibles de sorte que la distance cognitive entre la formulation du problème et son traitement soit la plus faible possible. Il s'agit donc bien de repérer ce que ces variations en terme de registres induisent du côté de l'activité de l'élève.



II.4 : Un nouvel outil pour l'analyse de l'activité de l'élève

L'organisation des différents niveaux de problématisation dans le schéma du losange de problématisation théorique de Fabre (Fabre & Musquer, 2009) procure un nouvel outil d'analyse de l'activité de l'élève qui donne des éléments de compréhension de l'activité de l'élève et permet de repérer les inducteurs de problématisation qu'il serait bon de mettre en place pour le faire évoluer d'un niveau à l'autre.

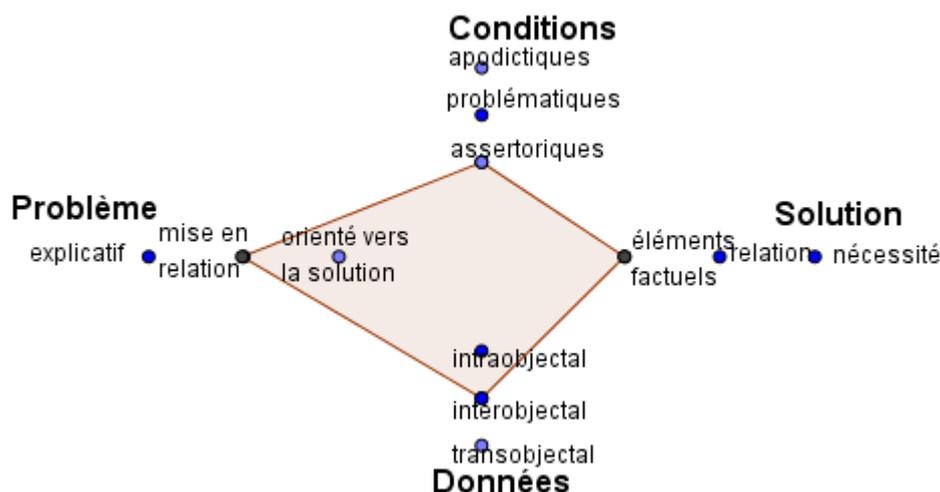


Schéma 25: Losanges de problématisation par niveaux

Pour mesurer l'intérêt de cet outil, nous allons l'utiliser sur un exemple. Nous allons analyser la production d'une étudiante de Master 2 MEEF (Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation) 1^{er} degré. Il s'agit d'un exercice d'un concours blanc proposé un an plus tôt dans une autre académie et donné en travail personnel. L'étudiante n'a pas eu accès au corrigé et n'a pas eu d'échanges à propos de ce sujet avec d'autres étudiants. Le contexte du problème est l'organisation d'une sortie au théâtre par le directeur d'une école :

Dans l'école Denis LEGRAND, il y a 308 enfants dont 168 filles et 140 garçons.

Le directeur décide de préparer une sortie au théâtre.

1 – *Combien de cars de 48 places doit-il réserver pour transporter les 308 enfants avec les 11 professeurs ?*

2 – *Le directeur souhaite réaliser des groupes ayant le même nombre de garçons et de filles.*

a) *Quel est le plus grand nombre de groupes possibles ?*

b) *Quel est alors le nombre de filles et de garçons par groupe ?*

c) *Le directeur souhaite qu'un adulte gère chaque groupe. Combien de parents doit-il prévoir pour aider les 11 professeurs ? Y aura-t-il assez de places dans les cars pour transporter tout le monde ?*

3 – *Pour cette école, le prix d'une place est :*

- *5 € pour un enfant ayant moins de 8 ans.*
- *10 € pour un enfant ayant 8 ans ou plus.*
- *gratuit pour les accompagnateurs et les professeurs.*

Le montant total est de 2 300 €, quel est le nombre d'enfants de moins 8 ans et d'enfants de 8 ans ou plus dans cette école ?

On peut analyser l'écrit de l'étudiante (voir annexe 35) en repérant deux étapes.

Étape 1 : L'étudiante a une lecture intra-objectale des données, c'est-à-dire qu'un élément du texte sert à l'interprétation de l'ensemble. En effet, dans la question 2, l'étudiante comprend que le nombre de garçons doit être le même que le nombre de filles dans chaque groupe. Cette interprétation n'est pas remise en cause par la donnée du nombre total de garçons et de filles dans l'établissement et l'étudiante calcule le PGCD de 168 et 140 pour arriver à la conclusion qu'on peut faire 28 groupes de 6 filles et 5 garçons mais elle conclut : « ce qui n'est pas équilibré ». Elle recherche alors proportionnellement la composition de 14 groupes, 7 groupes et 2 groupes. Elle obtient respectivement des groupes de 12 filles et 10 garçons ; 24 filles et 20 garçons ou 84 filles et 70 garçons. Elle conclut par : « Il n'y a donc

pas de diviseur commun qui permet d'obtenir un nombre égal de filles et de garçons par groupe. (Il aurait fallu que les diviseurs soient tous pairs pour que cela soit possible). Si on veut regarder le problème différemment, on peut dire que l'on peut faire 5 groupes de 28 filles et 28 garçons, mais il restera un groupe de 28 filles sans garçons. »

Le problème semble bien posé par l'étudiante en terme de recherche de solution, cette solution ayant une forme attendue du type : « n groupes de p filles et p garçons » avec n et p deux nombres entiers. Du côté des conditions, l'étudiante prouve qu'elle sait calculer un PGCD, qu'elle sait l'utiliser dans une situation où ce calcul est effectivement une procédure efficace. Sa solution est factuelle mais ne répond pas aux contraintes qu'elle s'est données.

Étape 2 : Elle pose alors un nouveau problème qui est plutôt un problème d'existence de la solution. Elle utilise les propriétés de linéarité multiplicative pour étudier d'autres organisations. Ses connaissances et savoir-faire ne sont pas problématiques en ce sens que l'étudiante n'explore pas d'autres possibles. La recherche « du plus grand nombre de groupes possible » évoque l'utilisation du PGCD sans qu'une autre stratégie ne soit imaginée. La représentation du problème ne se fait qu'autour de l'idée qu'il faut chercher un diviseur commun. Les réponses factuelles ne correspondent toujours pas à la solution attendue.

L'étudiante semble alors chercher une nécessité : il aurait fallu que les diviseurs soient tous pairs pour que cela soit possible. On sent que la question de la parité doit avoir un rôle mais on ne comprend pas bien en quoi celle des diviseurs intervient. Plusieurs hypothèses peuvent être avancées : l'étudiante peut ne pas utiliser le mot « diviseur » à bon escient, elle peut vouloir dire que tous les diviseurs doivent être pairs si on veut répartir également garçons et filles dans 2 groupes, ce qui est le dernier cas qu'elle explore, elle peut aussi désigner par « diviseurs » le nombre de garçons et de filles par groupes, comme celui des filles est pair, il faudrait que celui des garçons soit pair aussi s'il doit être égal.

L'étudiante semble avoir exploré tous les possibles en cherchant la composition de groupes de 2, 7, 14 et 28 élèves en oubliant le cas de groupes de 4 élèves. Comme les données sont toujours explorées de manière intra-objectale, l'interprétation de départ n'est pas remise en cause. La nouvelle piste est de partir de la solution attendue et l'étudiante propose une répartition qui utilise à la fois la valeur 28 calculée avec le PGCD et la contrainte d'avoir un nombre de garçons égal au nombre de filles dans les groupes. On peut penser que sa représentation contextualisée de la situation permet de valider 28 comme étant un nombre d'élèves acceptable dans un groupe. « *mais il restera un groupe de 28 filles sans garçons* », cette objection n'est pas levée. L'étudiante ne répond pas à la question 2)b) alors que cette question aurait pu l'alerter sur l'interprétation erronée de la question précédente.

Dans la question suivante, on retrouve le même procédé. L'étudiante ne va interpréter les données qu'à partir d'un élément en oubliant de le mettre en relation avec les autres données du problème. Ici, elle modélise le problème dans le cadre algébrique en écrivant une équation qui traduit le fait que le montant total est de 2 300€. Elle prend l'initiative de noter x le nombre d'enfants ayant 8 ans ou plus et y le nombre d'enfants ayant moins de 8 ans. Elle obtient l'équation $y = 460 - 2x$ et écrit :

L'équation admet plusieurs solutions représentées par les points de la fonction $f(x) = 460 - 2x$, dont voici ci-dessous un tableau de valeurs.

x	0	10	100	115	200	230
$y = f(x)$	460	440	260	230	60	0

Attention : les solutions doivent être des points de la droite ayant une abscisse et une ordonnée étant un nombre entier positif (cela ne correspond donc pas à tous les points de la droite).

Suit une représentation graphique de la fonction. L'étudiante ne prend pas en compte une donnée qui est le nombre total d'élèves. Elle ne peut donc pas conclure car elle obtient trop de solutions qui ne sont pas clairement lisibles sur le graphique. Elle termine par une parenthèse incomplète « (La fonction n'est pas...) ».

On remarque que cette étudiante a des connaissances et qu'elle sait utiliser des techniques expertes en algèbre (elle réduit l'expression algébrique de manière correcte dans cet exercice mais dans d'autres exercices elle montre qu'elle sait aussi résoudre des équations linéaires du premier degré et du second par la technique du produit nul). Elle modélise la situation dans le cadre fonctionnel et opte pour une résolution graphique du problème. Elle repère qu'il existe plusieurs points alignés qui correspondent à la contrainte donnée. On peut faire l'hypothèse qu'elle cherche à obtenir une fonction linéaire mais rien ne le prouve.

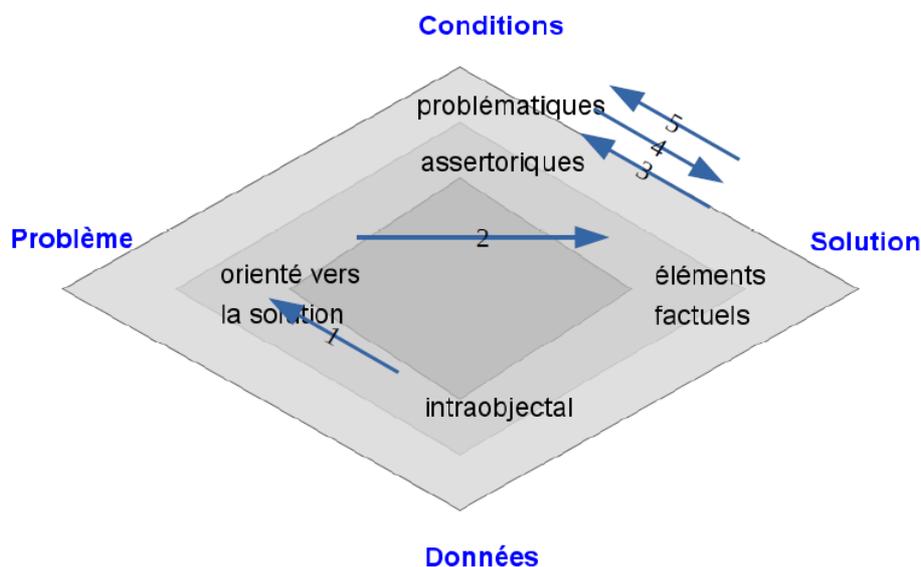


Schéma 26: Evolution de la problématisation de l'étudiante dans le losange

On peut schématiser sa démarche sur le losange de problématisation (voir schéma 26) dans lequel figurent les différents niveaux et dont les flèches indexées indiquent l'ordre dans lequel s'effectue la recherche du problème. La difficulté de cette étudiante semble venir de la prise d'informations initiale qui est faite de manière intra-objectale et de la construction du problème qui est uniquement orienté vers la solution. Cela amène l'étudiante à appliquer des

techniques pertinentes mais qui ne sont pas réfléchies ou adaptées au regard des données ou des conditions.

Une seule donnée est interprétée au regard de la forme attendue de la solution en terme de résultat. Cette solution met au travail des connaissances, des techniques, des modélisations. La solution obtenue est questionnée par rapport au savoir mais pas par rapport aux données ni à la manière de poser le problème.

Dans cet exemple, l'étudiante témoigne de connaissances de haut niveau qui semblent disponibles alors même qu'elle n'arrive pas à poser le problème. Cet exemple nous amène à penser que les situations d'apprentissage devraient permettre de travailler l'axe vertical du diagramme, c'est-à-dire la mise en tension des données et des conditions, pour que l'élève soit réellement amené à poser le problème. La TSD permet d'analyser comment le milieu peut permettre ce questionnement par la validation interne et les rétroactions possibles. Cela s'avère extrêmement efficace lorsque la solution est factuelle. C'est beaucoup plus difficile dans des problèmes qui ne permettent pas de confronter directement les solutions à des éléments du milieu pour les valider et pour lesquels on attend une démonstration. On note ici à quel point l'horizon d'attente fait obstacle à l'ouverture d'autres possibles. L'hypothèse est que l'enseignement d'un savoir problématisé devrait autoriser les élèves à envisager plusieurs possibles et donc être plus autonomes et prendre plus d'initiatives devant un problème nouveau ou plus complexe.

Une séquence de type PPAP pour l'apprentissage des fonctions affines a pour objectif d'amener les élèves à mobiliser des unités de raisonnement de niveau 3, la question étant de mesurer l'impact de séquences de ce type sur la capacité des élèves à problématiser. Lors de l'expérimentation en seconde présentée dans la partie 3 chapitre I, nous avons proposé une autre situation ouverte à deux groupes, l'un ayant fait une séquence PPAP et l'autre ayant suivi un enseignement ordinaire. Cette expérimentation n'a pas fait l'objet d'un travail de recherche et la méthodologie n'a pas pris en compte un certain nombre de biais. Le bilan (Grau, 2011) montre une progression pour le premier groupe dans l'argumentation, le contrôle des résultats et plus de réussites dans des problèmes similaires. Par contre on note une formulation moins rigoureuse que dans le second groupe et l'utilisation de notations non conventionnelles. Bien sûr nous devons prendre cette conclusion avec beaucoup de précautions car d'autres facteurs peuvent expliquer les écarts entre les résultats. Ce constat nous amène cependant à formuler des hypothèses pour expliquer les difficultés des élèves. Comme cela a déjà été identifié par les travaux de Douady, les élèves développent des schèmes d'actions associés à une représentation de la situation dans un cadre ou un registre et ont du mal à envisager un changement de cadre ou une conversion de registre qui leur permettrait de formuler le problème autrement (Douady, 1986). Notre outil d'analyse peut être utile pour comprendre comment s'élaborent les représentations des élèves et leur choix de cadre ou de registre.

Par ailleurs, certaines habitudes entraînent des traitements spécifiques et ces habitudes peuvent être liées au contrat didactique. D'après Hersant (Hersant, 2014), ce contrat est l'ensemble des clauses relatives au savoir et à sa construction, il a une facette

épistémologique, c'est-à-dire liée au savoir lui-même (comme par exemple le fait d'utiliser la lettre x amène à un traitement algébrique du problème) mais aussi une facette sociale liée au mode de communication mis en place par l'enseignant (par exemple l'élève peut avoir mis en place cette règle « si on me donne un tableau incomplet, je dois le compléter en utilisant la proportionnalité » simplement par habitude de rencontrer cette situation) et donc lié à la communauté scientifique scolaire en place.

Par exemple l'habitude de traiter les données en tableau comme étant des données proportionnelles est liée au contrat didactique. En effet, nous avons vu que les tableaux de valeurs introduits au cycle 3 sont essentiellement des tableaux de proportionnalité. Si on rompt avec cette habitude, on obtient des réactions très différentes comme nous avons pu le montrer dans l'exemple de la hauteur d'eau dans le port en fonction de l'heure (voir partie 2 chapitre II.2.2 page 191). Ce contexte induit assez naturellement des calculs de variations. On perçoit plus facilement une variation de la hauteur de l'eau dans le port que la hauteur elle-même. On peut donc considérer la variation de la hauteur de l'eau pendant une durée ce qui amène à étudier la concomitance des variations des deux grandeurs.

Un autre exemple illustre le rôle du contrat dans sa facette sociale. Dans une classe de 5^e, les élèves ont un tableau de valeurs, ils doivent identifier les deux grandeurs en jeu et expliquer s'il s'agit ou non d'une situation de proportionnalité. Un élève justifie sa réponse en disant que ce n'est pas une situation de proportionnalité parce que « *si c'était un tableau de proportionnalité, il y aurait une case vide qu'il faudrait compléter* ». Il énonce ici une clause du contrat didactique, clause qui vient faire obstacle à l'analyse de la situation.

Dans ces deux exemples, le discours révèle les valeurs, les représentations de l'élève et donc le sens qu'il donne à son activité ou peut-être peut-on parler du cadre épistémique dans lequel il pose le problème. Pour le problème de la hauteur d'eau dans le port, les élèves font appel à des connaissances en sciences et non à des connaissances mathématiques. Nous verrons plus loin en quoi le fait de ne pas expliciter le cadre théorique peut être source de malentendus et donc de difficultés scolaires.

II.5 : Des pistes pour l'élaboration d'une ingénierie didactique

L'objectif de ce chapitre est de décrire l'activité de l'enseignant lorsque celui-ci propose une PPAP. Nous allons nous interroger sur les conditions à mettre en place pour proposer une activité qui permette à la fois la construction d'une communauté scientifique scolaire (Bernié, 2002), une secondarisation du discours et une problématisation du savoir construit.

On peut déjà s'interroger sur les caractéristiques de la communauté mathématique scolaire (Bernié, 2002; Jaubert et al., 2010) : Quels genres de discours en mathématiques rencontre-t-on à l'école ? Quel rôle social ont ces discours ? Quels récepteurs peuvent être anticipés ? Quelles sont les traces de la secondarisation du discours ? Nous pouvons déjà lister du côté des genres discursifs (Bakhtine, 1984) différentes formes qui peuvent faire référence à

des genres différents : des conjectures, des narrations de recherche, des compte-rendus d'observations, des énoncés de propriétés, théorèmes, axiomes, postulats, hypothèses, définitions, des démonstrations, justifications, explications, des questions, des relevés de conclusions, des programmes de calcul, des algorithmes, des procédures... En ce qui concerne les rôles sociaux des productions langagières, on peut en repérer plusieurs : fixer le contexte, fixer le savoir déjà-là, fixer les hypothèses de travail, montrer les procédures, montrer ce qui justifie le choix des procédures, prouver des équivalences. Pour les récepteurs potentiels, on peut trouver : soi, un pair, le groupe, l'enseignant, un mathématicien, un expert dans une autre discipline.

Plus difficile est le repérage des traces de secondarisation du discours. Nous proposons de nous intéresser à ces éléments :

- le cheminement logique ;
- l'évolution du statut de ce qui est énoncé par l'élève : compte-rendu de données empirique, conjecture, proposition vraie ou fausse ;
- l'argumentation ;
- la contextualisation (rappel de données, du cadre, de contraintes, d'hypothèses de travail) ;
- le contrôle ou la validation.

Les figurations données à analyser aux élèves étant écrites, nous devons préciser le rôle des différents signes. Selon Peirce (1903), trois types de signes peuvent être utilisés, ces trois types de signes étant eux-mêmes présents dans différents systèmes sémiotiques de représentation et d'expression au sens de Duval (Duval, 1995). Les icônes, signes qui ressemblent à l'objet représenté, servent à montrer. Ils demandent à être regardés. Les indices indiquent l'objet représenté, ils expliquent. Enfin, les symboles, signes qui désignent arbitrairement, servent à dire, démontrer et se déchiffrent avec un code. Prenons par exemple le signe x . L'inscription d'un x sur une figure géométrique peut servir à montrer la longueur d'un côté. Reporté plusieurs fois sur la même figure, la même lettre x peut être un indice qui explique que la figure a plusieurs côtés de même longueur. Utilisé dans l'expression $P = 4x$, le symbole x est utilisé dans un système qui permet d'effectuer des calculs algébriques. Raisonner suppose de passer par une spéculation liée à un regard global à partir d'icônes, une explication par un regard plus sélectif sur des indices, et une démonstration à partir de symboles, l'icône source ayant disparu. On retrouve ici le processus de décontextualisation qui permet de passer de l'icône au symbole. Ce passage de l'empirique au théorique transite par une phase d'explications dans laquelle tous les possibles sont explorés.

Les indices peuvent être des inducteurs de problématisation en ce sens qu'ils induisent des explications. Les corpus de débats en classe que nous avons été amenée à analyser laissent supposer que les symboles sont introduits trop rapidement et que les indices sont sans doute insuffisants pour la majorité des élèves. En particulier l'utilisation de l'expression $f(x) = ax + b$ peut être introduite pour symboliser une situation affine sans que les différents

symboles soient identifiés comme des icônes. Les codages et notations ont une simple fonction énonciative de ce qui est. Il n'y a pas construction de ce codage. Le contrat de communication (Charaudeau, 1993) mis en place dans les classes ordinaires relève le plus souvent du genre premier en ce sens que le discours porte sur l'action, sur l'ici et le maintenant et que les élève sont plus dans la recherche des attentes de l'enseignant que dans un travail réflexif, le professeur cherchant à conduire les élèves vers un écrit savant prédéfini par lui.

Nous devons donc nous interroger sur un autre contrat de communication et pour cela envisager d'utiliser des inducteurs de problématisation. Ces inducteurs ont trois fonctions tout comme les figurations définies plus tôt dans ce chapitre : épistémique, argumentative et cognitive (Fabre & Musquer, 2009). Fabre et Musquer précisent que la fonction épistémique vise la construction d'un savoir précis, la fonction argumentative vise la preuve ou la critique, la fonction cognitive quant à elle active des connaissances (automatismes, schèmes d'action, analogies, découpage en sous-buts). L'inducteur peut avoir des fonctions de rupture ou de continuité suivant là où en est l'élève. En fait, la dynamique de problématisation peut avoir trois leviers : pragmatique (on donne à faire), argumentative (on amène une controverse, on donne un repère) ou sémiotique (on propose une schématisation qui vise à montrer). Dans notre cas, les inducteurs doivent permettre d'expliquer les nécessités au regard des conditions et ainsi mettre en évidence ce qui doit déclencher ou non des schèmes d'action. Le savoir visé étant la notion de fonction affine, il s'agit de mettre en relation : les problèmes (vus en partie 2 au chapitre II) qui relèvent de la notion de fonction affine (optimiser, prévoir, représenter), les contraintes (proportionnalité des accroissements, points alignés), les données (tableau de valeurs, expression algébrique, graphique), les solutions (valeurs, intervalles, droites).

On peut résumer les conditions de notre ingénierie suivant trois aspects :

- du point de vue de la transposition didactique, la situation initiale propose un problème au plus proche des problèmes dont relève l'organisation mathématique ;
- du point de vue du contrat didactique dans sa facette épistémologique, des inducteurs de problématisation permettent à l'élève d'expliquer les procédures et de mettre en évidence les nécessités à travers l'utilisation d'indices dans différents cadres et registres ;
- du point de vue du contrat didactique dans sa facette sociale, un dispositif de PPAP permet le processus de problématisation au regard de l'évolution des productions par une secondarisation du discours.

Ces caractéristiques peuvent aider à l'élaboration de séquences d'enseignement-apprentissage de concepts en mathématiques. Par exemple en 5^e lors de l'introduction de l'algèbre on peut concevoir une PPAP sur le même principe : la situation initiale est un problème de dénombrement et de mise en place d'une formule. Les indices permettent de comprendre que différentes stratégies de comptage sont possibles. La PPAP permet une secondarisation du discours qui passe de la description de l'action à une écriture respectant les conventions mathématiques en passant par une écriture symbolique.

II.6 : Conclusion

Le format PPAP s'appuie sur une hypothèse qui mérite d'être interrogée. Si l'activité de l'élève ne peut être reconstruite par l'enseignant qu'à partir des traces et des productions langagières, peut-on affirmer que la secondarisation du discours atteste d'une problématisation ? Enfin l'apprentissage par problématisation atteste-t-il en retour d'une secondarisation du rapport au réel ?

Si nous nous appuyons sur ce concept de « secondarisation du rapport au réel » :

Le processus de secondarisation peut être défini comme une transformation et une reconfiguration cognitives des élèves, consistant à passer d'une maîtrise pratique du monde et des savoirs à leur maîtrise symbolique. Ce processus est inhérent au processus de scolarisation, comme le montrent aujourd'hui les chercheurs de l'équipe Escol et du réseau Reseida¹⁶, et comme l'avaient déjà mis en évidence des travaux plus anciens (B. Bernstein, 1975; Vincent, 1994). L'objectif de secondarisation fonde la socialisation scolaire : c'est ce qui en fait la spécificité, par contraste avec d'autres lieux et modes de socialisation, tels que la famille ou les médias. (Philippot & Bouissou, 2006, p.1)

la question de la maîtrise symbolique du savoir en mathématiques se pose à plusieurs niveaux. Concernant les fonctions affines, ce savoir traverse plusieurs cadres et relève donc de différentes théories qui demandent chacune des maîtrises symboliques différentes. Nous avons aussi vu que la fonction pratique et la fonction théorique sont deux fonctions de natures différentes. On peut imaginer la fonction pratique comme étant une secondarisation de la covariation observée dans le monde sensible et la fonction théorique comme une secondarisation de la fonction pratique dans la théorie mathématique. L'apprentissage par problématisation a pour but de mettre en tension les figurations avec le réel afin de mettre en évidence les nécessités qui font que les savoirs sont ce qu'ils sont et ne peuvent pas être autrement. La secondarisation permet de mettre en tension les différents registres sémiotiques pour mettre en évidence la cohérence des symboles avec le savoir problématisé. Problématisation et secondarisation sont donc les résultats de deux processus qui interagissent et s'alimentent l'un l'autre. Ces deux processus sont nécessaires pour que le savoir soit disponible pour agir.

Des difficultés peuvent venir du fait que ces deux processus ne sont pas clairement explicités aux élèves, et même de la non-conscience de ces deux processus par les enseignants eux-mêmes. L'objectif d'une séance-apprentissage peut être la découverte d'une nouvelle notion pour l'enseignant quand l'élève ne voit qu'un objectif de résolution d'un problème. Dans ce cas, l'élève peut problématiser sans qu'il y ait secondarisation. Par contre, si l'élève ne voit dans la situation qu'un exemple illustrant une théorie, il peut y avoir secondarisation sans

¹⁶ Recherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages

problématisation. Dans ce cas l'élève peut avoir accès à une maîtrise symbolique du savoir sans être capable de l'utiliser de lui même pour résoudre un problème nouveau.

Ainsi lorsque Bautier et Goigoux (Bautier & Goigoux, 2004) proposent une grille d'analyse des contenus de séances, les huit dimensions de cette grille croisent des caractéristiques que nous retrouvons dans l'apprentissage par problématisation. En particulier, la séquence PPAP permet de cadrer l'activité pour la rendre favorable à une secondarisation du rapport au réel. Le tableau 33 reprend les huit dimensions et précise pour chacune en quoi la PPAP peut être considérée comme favorable.

Par ailleurs dans une PPAP, la situation joue un rôle différent suivant les étapes. En premier lieu la situation est neutre, l'élève se retrouve en situation de proposant. A l'étape suivante, la situation propose des solutions à la critique, l'élève devient opposant. Ensuite les différentes solutions doivent être mises en relation et l'élève se retrouve dans le rôle du tiers. Ce déroulement rend explicite une démarche qui sinon peut devenir la cause de malentendus scolaires (Bautier & Rayou, 2013).

Pour ces auteurs, l'écrit scolaire relève d'un tissage entre des savoirs enseignés, l'oral de la classe et le monde sensible, les références à soi comme sujet d'expérience et le travail des textes. C'est ce tissage qui doit être montré et travaillé en classe, il s'agit de mettre en évidence qu'écrire, c'est penser avec la parole, et non une simple juxtaposition de discours. Dans le cadre de la problématisation, nous avons à construire ce même tissage entre le registre empirique, celui des modèles et le registre explicatif.

De la même manière lorsque Bautier et Rayou décrivent différents « registres », ils parlent de concepts plus ou moins scientifiques (registre cognitif/symbolique), des éléments d'une culture plus ou moins légitimes (registre culturel) et d'identités plus ou moins proches de l'élève idéal (registre scolaire). Ils concluent à la nécessité de ne pas laisser la possibilité à un élève de « faire » en n'utilisant qu'un seul registre mais au contraire d'amener les élèves à trouver un bon équilibre entre ces trois registres. Transposés à notre séquence PPAP, ces trois dimensions sont aussi à prendre en compte. Les différentes situations donnent des places différentes à ce qui relève du savoir savant, du culturel et du scolaire. Ces trois dimensions doivent toutes intervenir à un moment ou à un autre et c'est leur mise en cohérence qui doit permettre à l'élève de réussir l'activité. En particulier pour ce qui concerne la culture scolaire, les élèves doivent trouver le juste équilibre entre une communication ordinaire basée sur des connaissances quotidiennes et une communication savante formelle des savoirs sans lien avec les caractéristiques des problèmes que ces savoirs peuvent amener à résoudre.

On peut donc penser que la PPAP rompt avec les pratiques usuelles des enseignants et qu'elle peut mettre en évidence les enjeux de la situation d'apprentissage en donnant le temps réflexif nécessaire à la reconfiguration et la secondarisation du discours. Cela signifie aussi que la PPAP s'accompagne d'un changement de posture de l'enseignant et d'une évolution du contrat didactique qu'il nous faudra préciser.

Dimension caractérisant une démarche favorable à la secondarisation du rapport au réel chez Bautier et Goigoux	Caractère correspondant dans une PPAP
« <u>l'explicitation des enjeux</u> » par l'enseignant : les enjeux cognitifs et culturels de l'activité sont explicités	Pour chaque étape, l'enjeu est clairement défini et évolue.
« <u>le sens de l'activité</u> » donné par l'enseignant : l'enseignant parvient à amener l'activité vers la définition et l'appropriation de savoirs objectifs rationnels et « seconds »	La dernière étape d'une PPAP est la production d'un texte de savoir mettant en évidence les nécessités et les conversions dans différents registres.
« <u>l'orientation des tâches et consignes</u> » : l'élève est conduit à la prise de conscience et au contrôle des processus cognitifs à mettre en œuvre	Les étapes intermédiaires ont pour but d'expliciter les processus cognitifs mis en œuvre.
« <u>l'ajustement didactique</u> » : celui-ci est correct, adapté au niveau des élèves et à l'objectif d'apprentissage visé	La première étape doit amener tous les élèves à résoudre le problème pour pouvoir accéder à l'analyse des procédures.
« <u>la mobilisation de concepts</u> » : l'enseignant recherche l'abstraction par l'utilisation d'un vocabulaire spécifique	Les différentes procédures peuvent relever de différents cadres et les productions écrites peuvent utiliser différents registres. L'abstraction est recherchée par la maîtrise des conversions sur un même concept.
« <u>les critères de réussite</u> » de la séance : la réussite de l'activité est évaluée au regard de la normativité des savoirs à acquérir	La réussite de l'activité est évaluée au regard de la disponibilité du savoir à acquérir.
« <u>le rapport aux disciplines scolaires</u> » : l'enseignant considère que l'ensemble des disciplines concourt au développement de la pensée et au contrôle des processus cognitifs	La maîtrise des différents registres et les aspects langagiers sont considérés comme indispensables pour la mise en place d'un raisonnement et d'un contrôle du processus et des résultats.
« <u>l'exactitude des savoirs</u> » : l'enseignant est attentif à la justesse des savoirs qu'il invoque	Le savoir savant est présenté sous différentes formes pour amener les élèves à identifier ce qui est commun et caractérise donc le concept indépendamment du cadre ou du registre utilisé.

Tableau 33 : Huit dimensions caractérisant une démarche favorable à la secondarisation du rapport au réel chez Bautier et Goigoux et leur expression dans une PPAP

Chapitre III : L'ingénierie température-pression

Nous avons élaboré une séquence basée sur les éléments d'ingénierie présentés au chapitre précédent. Nous allons présenter le format tel qu'il a été défini après quelques ajustements suite à une première expérimentation en classe de 3^e et nous ferons une analyse *a priori* des situations (Artigue, 1996a). Nous commencerons par expliquer le choix du contexte et l'intérêt de travailler sur des grandeurs repérables pour amener les élèves à utiliser le concept de covariation. Pour chaque étape, nous préciserons les variables didactiques et justifierons des choix effectués. Nous étudierons l'expérimentation menée dans une classe de 3^e en fin d'année, pour expliquer les adaptations qui en ont découlé. Nous poserons ainsi le cadre des expérimentations qui seront analysées dans le chapitre IV et nous définirons les critères et les outils utilisés pour cette analyse.

III.1 : Situation problème : mise en évidence de la proportionnalité des écarts pour caractériser la covariation de deux grandeurs

III.1.1 : Grandeurs repérables, grandeurs mesurables et proportionnalité

La fonction affine peut servir de modèle pour expliciter la covariation de deux grandeurs physiques. Cette modélisation est souvent mise en évidence par le tracé de graphiques suite à des expériences et par la mise en évidence d'un alignement de points. Les élèves ont ensuite beaucoup de mal à interpréter cette observation dans le cadre de l'algèbre et à établir une forme algébrique associée à ce graphique. Plusieurs difficultés interviennent à ce stade, en particulier la différence entre une expression algébrique et une formule, ainsi que le statut du graphique.

En sciences expérimentales, les formules utilisées pour exprimer les lois font intervenir des lettres pour désigner des grandeurs mesurées. Ces lettres ne suffisent donc pas à désigner la mesure, elles doivent être accompagnées de l'unité associée. Par ailleurs, toutes les lettres peuvent tour à tour désigner une variable ou une inconnue. Ainsi dans la loi $U = R \times I$, on peut très bien étudier les variations de U en fonction de R , ou en fonction de I ou les variations de I en fonction de U ou en fonction de R ou encore les variations de R en fonction de U ou en fonction de I . On peut aussi étudier les variations d'une grandeur en fonction des deux autres, mais les fonctions à deux variables ne sont pas étudiées au niveau scolaire qui nous intéresse. En mathématiques, par convention, l'écriture $f(x) = y$ exprime les variations de y en fonction de x et il n'est pas toujours simple d'envisager les variations de x en fonction de y , d'autant que la fonction réciproque n'existe pas toujours. Si elle existe, elle peut ne pas être définie sur le même ensemble. D'autre part, si x et y peuvent désigner des mesures de grandeurs, le traitement mathématiques se fait généralement sur les nombres et le retour aux grandeurs ne se fait que pour conclure ou vérifier un résultat.

De plus, en sciences expérimentales, les données sont soumises à la précision des instruments de mesures, il n'est pas possible d'obtenir des points alignés mais on peut représenter un nuage de points qui s'approche d'une droite, ce qui peut suffire à affirmer qu'il existe une relation affine entre les grandeurs. Nous avons deux cadres théoriques différents dans lesquels les traitements ne sont pas les mêmes. En effet, en mathématiques, il est normal de conclure au non-alignement de points si le calcul des quotients de l'ordonnée par l'abscisse ne sont pas égaux. Faire la différence entre valeur exacte et valeur approchée est d'ailleurs un enjeu fort du statut de la preuve mathématiques sur des objets idéaux.

Nous avons vu que dans le cadre des mathématiques scolaires, les élèves caractérisent la fonction affine par son écriture algébrique de la forme $f(x) = ax + b$ et par sa représentation graphique qui est une droite. Les différentes expérimentations et le test ont conforté l'idée que cette caractérisation ne permet pas un transfert des nécessités d'un registre à l'autre et nous avons vu que ces deux registres (le registre des expressions algébriques et celui des graphiques) posent chacun des problèmes d'interprétation des données dans le transfert entre le champ théorique des sciences expérimentales et celui des mathématiques. Nous avons donc cherché une situation où les caractérisations précédentes (l'expression algébrique et l'alignement des points) ne sont pas suffisantes pour exprimer la covariation des deux grandeurs physiques. Pour cela, nous avons choisi des grandeurs repérables et non des grandeurs mesurables. En effet, les grandeurs mesurables s'expriment dans des unités qui sont proportionnelles les unes aux autres, alors que les grandeurs repérables sont exprimées dans des unités liées à une origine et une unité choisie. Pour des grandeurs mesurables, le 0 correspond à la même mesure dans toutes les unités, ce n'est pas le cas pour les mesures de température puisque $0^{\circ}\text{C} = 273,15 \text{ K}$. Par ailleurs l'unité choisie pour une grandeur mesurable ou repérable est reportée ou fractionnée, on obtient des sous-unités qui sont des sous-multiples. La conversion est donc affine et non plus linéaire. Le passage d'une unité à l'autre n'est pas toujours une relation de proportionnalité.

En sciences physiques, on définit aussi deux types de variables dans un système à l'équilibre et homogène. Les variables extensives sont des grandeurs qui sont proportionnelles à la taille du système, on parle aussi de grandeurs additives. D'autres variables sont dites intensives, elles ne dépendent pas de la quantité de matière en présence dans le système (Kapala, 2006). La température et la pression sont deux grandeurs repérables intensives. En effet si la température d'une pièce est de 20°C , on peut ouvrir la porte sur une pièce ayant les mêmes caractéristiques, la température de l'ensemble ne sera pas de 40°C . De même la pression qui n'est autre qu'un rapport de deux densités extensives est une grandeur intensive.

Pour mesurer la température nous allons considérer trois unités : les degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$), les degrés Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) et les Kelvins (K). Les formules suivantes permettent les conversions :

$$T_{\text{K}} = T_{^{\circ}\text{C}} + 273,15$$

$$T_{^{\circ}\text{F}} = T_{^{\circ}\text{C}} \times 1,8 + 32$$

où T_{K} est la mesure en Kelvins, $T_{^{\circ}\text{C}}$ la mesure en degrés Celsius et $T_{^{\circ}\text{F}}$ la mesure en degrés Fahrenheit.

Ces conversions ne sont pas linéaires, si bien qu'une loi physique faisant intervenir la variation d'une grandeur en fonction de la température, peut s'exprimer de différentes manières suivant l'unité choisie. En particulier la loi de Gay-Lussac stipule que la pression d'un gaz parfait est proportionnelle à la température absolue pour un volume constant et un nombre de moles constant or cette relation qui s'écrit sous une forme linéaire quand la température est exprimée en Kelvins, s'écrit sous une forme affine quand la température est mesurée en degrés Celsius. La caractérisation de la covariation entre ces deux grandeurs est donc la proportionnalité des écarts, ce qui se traduit en sciences par le fait que la variation de pression est proportionnelle à la variation de température.

En sciences physiques, la température est spécifique en ce sens qu'on a longtemps confondu température et chaleur. Tous les phénomènes observés sont donc plutôt liés à des variations de températures et non à une température absolue. En fait si la température est une grandeur repérable, la variation de température est une grandeur mesurable.

L'instant est une autre grandeur repérable, puisque nous étudierons plus précisément des évolutions sur des durées et donc des variations de temps. Si un instant est repérable par un point sur une droite, une durée peut être représentée par un vecteur dans l'espace vectoriel associé à l'espace affine des instants. On peut alors additionner des durées ou les multiplier par un scalaire. La durée est donc une grandeur mesurable tout comme une variation de température. De très nombreux problèmes font intervenir les variations d'une grandeur en « fonction du temps ». Cette classe de problèmes a même été clairement identifiée dans les programmes scolaires de 2001, comme un axe de travail en classe de seconde :

Croissance et fonction du temps. Suite de données annuelles : mesure absolue $f(t+1) - f(t)$ et mesure relative (coefficient multiplicateur) $\frac{f(t+1)}{f(t)}$.

On observe que l'évolution relative n'est pas visible sur un graphique à graduation régulière. (Programmes BO N°2 du 30 août 2001, p.36)

L'étude de ce thème était l'occasion de travailler les variations en « fonction du temps » indispensables pour les études statistiques que ce soit en biologie ou en sciences économiques et sociales par exemple. Il est d'ailleurs intéressant de voir qu'on appelle « graphique linéaire » un graphique à graduation régulière, en ce sens que les variations absolues sont indiquées par la pente des segments qui joignent les points. Il faut un graphique semi-logarithmique pour que ces mêmes pentes informent sur les variations relatives¹⁷.

Il existe d'autres grandeurs repérables qui fonctionnent sur le même mode que sont l'altitude ou le potentiel. Tous les problèmes faisant intervenir ces grandeurs peuvent peut-être fournir une classe de problèmes permettant de définir la relation affine à partir de la proportionnalité des écarts puisque leurs variations sont alors des grandeurs mesurables.

¹⁷ Cours IUT en ligne : <http://public.iutenligne.net/economie/simonnet/Stateco/Chapitre-3/Section-3-3.html> consulté le 31 mars 2015

III.1.2 : Aspect didactique

Si l'affinité a été identifiée comme un obstacle à la proportionnalité, comme la situation du puzzle de Brousseau (Brousseau, 1981) a pu le démontrer, nous avons pu vérifier que la proportionnalité devenait un obstacle au concept d'affinité. Notre situation vise donc à faire le même travail en sens inverse. Nous proposons de caractériser les fonctions affines par la proportionnalité des écarts et nous faisons l'hypothèse que ce travail amènera les élèves à mieux comprendre le concept de proportionnalité. Comme l'écrit Comin : « Il est donc nécessaire de modéliser la connaissance initiale de la linéarité dans son rapport avec les grandeurs » (Comin, 2000). Nous allons nous appuyer sur une situation faisant intervenir la covariation de deux grandeurs mais si Comin précise bien qu'il parle de grandeurs additives dans le cas de la proportionnalité, nous utiliserons aussi des grandeurs intensives dans le cas d'affinités.

Le problème posé aux élèves a pour but de faire émerger la question des conditions qui permettent ou non d'utiliser certaines procédures ou certains raisonnements. Les élèves font usage des propriétés liées à la proportionnalité sans vérifier qu'ils sont autorisés à le faire parce que la situation est, de fait, liée à la proportionnalité. La situation doit donc faire naître un doute pour que les élèves remettent en cause les techniques qu'ils associent à la proportionnalité, non pas parce que la situation n'est pas une situation de proportionnalité (cas d'étude de fonctions carrées ou cubiques) mais parce que la proportionnalité n'intervient pas au même endroit (proportionnalité des écarts et non-proportionnalité des grandeurs mesurées). A travers cette remise en cause, les élèves vont questionner les relations entre conditions et données du problème et donc s'interroger sur les nécessités. C'est cette prise de conscience qui doit permettre à la fois de donner du sens à la proportionnalité et à l'affinité. Les valeurs choisies doivent donc être travaillées pour être cohérentes dans le contexte et donner des éléments pertinents de calcul.

III.1.1 Choix de la situation

La situation que nous proposons doit mettre l'élève face à une incohérence qu'il est capable d'identifier et de formaliser. Il s'agit d'utiliser le doute comme moteur de la preuve. L'apprentissage par problématisation demande à ce que les élèves posent le problème, la situation initiale a pour but d'amener les élèves face à un résultat qui interroge, un résultat qui ne peut pas être accepté et qui demande à se poser de nouvelles questions.

Nous allons partir d'une expérience scientifique. Il s'agit de faire varier la température d'un gaz dans un récipient hermétiquement fermé en fonction de la température. Cette expérience illustre la loi de Gay-Lussac, elle est menée par trois professeurs fictifs qui utilisent chacun une unité différente pour mesurer la température. Chaque groupe d'élèves a le relevé d'une des expérimentations et doit déterminer si les grandeurs étudiées sont proportionnelles. Les groupes ont chacun un tableau avec les températures exprimées soit en degrés Celsius, soit en degrés Fahrenheit, soit encore en Kelvins. Nous faisons six groupes, si bien que deux groupes ont les mêmes données, on espère avoir ainsi des réponses différentes pour chaque tableau de même unité. Les valeurs numériques ci-dessous ont été choisies après un premier test de la situation dans une classe de 3^e en fin d'année scolaire 2015-2016. Cette

première expérimentation a montré que les représentations graphiques n'étaient pas aisées, beaucoup d'erreurs ont gêné le raisonnement. Pour la suite de l'expérimentation, les valeurs ont donc été modifiées pour faciliter le positionnement des points sur le graphique et des feuilles de papier millimétré avec des axes gradués ont été préparées pour ne pas perdre de temps sur la recherche d'une échelle pertinente sur chaque axe.

Le problème est posé de la manière suivante pour chacun des groupes :

Groupes A/B : Trois professeurs font la même expérience. Ils mesurent la pression en hPa (hectopascal) en faisant varier la température d'un même corps dans un même récipient hermétique. Voici le tableau de mesures obtenues par le professeur Anders :

T en °C	-14	8,5	11	23,5	41	43,5	46	51
P en hPa	774	842	850	890	942	950	958	974

D'après ces données, la pression est-elle proportionnelle à la température ? Justifiez votre réponse sur une affiche.

Groupes C/D : Trois professeurs font la même expérience. Ils mesurent la pression en hPa (hectopascal) en faisant varier la température d'un même corps dans un même récipient hermétique. Voici le tableau de mesures obtenues par le professeur Gabriel :

T en °F	7	47,5	52	74,5	106	110,5	115	124
P en hPa	774	842	850	890	942	950	958	974

D'après ces données, la pression est-elle proportionnelle à la température ? Justifiez votre réponse sur une affiche.

Groupes E/F : Trois professeurs font la même expérience. Ils mesurent la pression en hPa (hectopascal) en faisant varier la température d'un même corps dans un même récipient hermétique. Voici le tableau de mesures obtenues par le professeur Thomson :

T en K	259	281,5	284	296,5	314	316,5	319	324
P en hPa	774	842	850	890	942	950	958	974

D'après ces données, la pression est-elle proportionnelle à la température ? Justifiez votre réponse sur une affiche.

Après cette première étape, les élèves vont confronter leurs réponses. La mise en commun va mettre en évidence une incohérence puisque la relation est proportionnelle pour les mesures en Kelvins alors qu'elle est affine dans les autres cas. Les premières explications seront sans doute liées à la précision des calculs, ou à la nature même des opérations. Nous pensons que les élèves vont d'abord vérifier qu'ils utilisent les bons outils et qu'ils n'ont pas fait d'erreurs de calcul. Il s'agira donc de vérifier les travaux rapidement pour évacuer cette piste. Une autre hypothèse peut être que les unités ne sont pas les mêmes et donc les valeurs sont différentes mais que les mesures sont peut-être identiques. En leur donnant les formules de conversion, les élèves pourront vérifier qu'il s'agit bien des mêmes températures. Les

valeurs sont choisies de telle sorte que les conversions donnent des résultats très voisins, ce qui élimine l'erreur de mesure comme réponse au problème. Par ailleurs les valeurs, si elles tiennent compte d'incertitudes, amènent à des écarts qui sont proportionnels. L'idée forte est justement de montrer que c'est la seule propriété commune à ces trois séries de mesures. Nous allons inciter les élèves à formuler cette propriété pour qu'elle puisse unifier et généraliser le résultat.

Il s'agit de conclure que tous les résultats corrects amènent malgré tout à cette incohérence : le même phénomène montre une proportionnalité dans un cas et pas dans les autres, comment est-ce possible ? Les élèves sont amenés à se questionner sur ce qui caractérise la situation, et dans le cas présent, à mettre en évidence la proportionnalité des écarts.

III.2 : Analyse de l'expérimentation dans la classe de collège

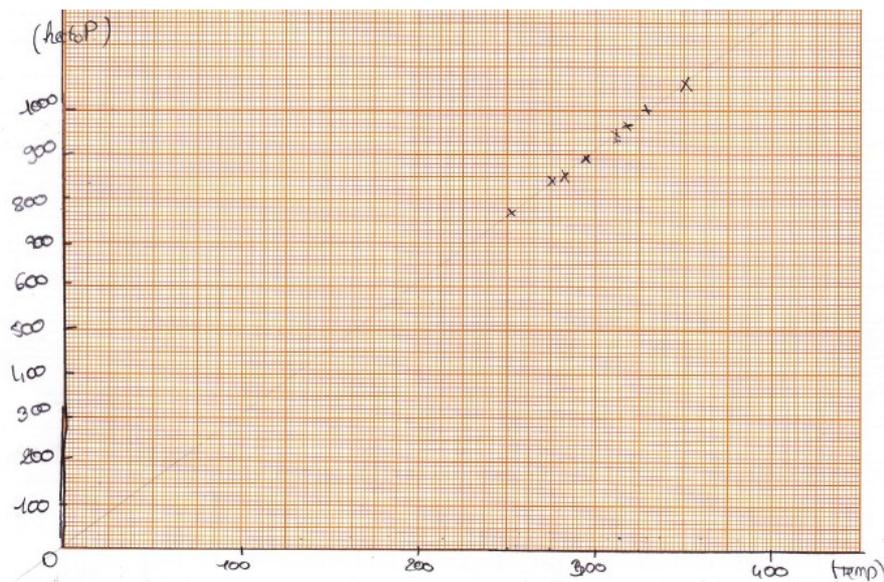
Cette situation a été testée dans une classe de 3^e dans un collège de la périphérie nantaise pour une première expérimentation en mai 2015. A cette date, les élèves ont déjà abordé les fonction affines et linéaires. Dans cette classe, ils ont surtout travaillé la notion de fonction à travers des activités dans le registre graphique. Les élèves sont habitués à travailler en groupe et des séances sont régulièrement dédiées à un travail de recherche sur un problème qui ne s'inscrit pas nécessairement dans la progression de l'apprentissage en cours. Les problèmes posés sur ces heures de recherche n'ont pas toujours de solution. La plupart du temps, ces problèmes obligent à remettre en cause des automatismes, la solution n'est jamais évidente si bien que les élèves se doutent qu'ils ont fait une erreur dès que le problème leur semble facile. Les élèves se sont exprimés à propos de certains aspects du contrat didactique à travers des entretiens. Deux élèves ont filmé la séance et ont demandé aux autres d'exprimer leur ressenti pendant le travail. Il ressort de ces témoignages que les élèves savent qu'ils peuvent chercher, que l'enseignant leur fait confiance, qu'il est à l'écoute. Les élèves s'investissent volontiers dans le travail : « c'est donnant, donnant » ; « Monsieur B. donne plus de libertés ce qui entraîne une envie de travailler plus intense » ; « c'est une manière différente de bosser, aucun élève est laissé seul ». Par ailleurs, nous avons pu observer que les vérifications sont collectives, ce n'est pas l'enseignant qui valide.

La classe est organisée en 6 îlots de 4 élèves, les groupes sont fixés par l'enseignant selon trois types : les groupes par affinité pour les travaux de recherche, les groupes de besoin pour des travaux différenciés, les groupes de tutelle pour favoriser l'entraide par l'hétérogénéité. Le cours du mardi est consacré aux problèmes de recherche, les élèves sont donc habitués à ce fonctionnement et sont dans des groupes par affinité.

Pour cette première expérimentation, les élèves de la classe ont cherché la première étape de la séquence et une mise en commun devait permettre de construire le problème à partir d'un débat autour des productions afin d'arriver à la question : comment est-il possible que suivant les unités choisies la relation soit proportionnelle ou non ?

Des enregistreurs vocaux ont été disposés sur les tables des différents groupes. La classe a l'habitude d'accueillir des stagiaires, observateurs ou formateurs. La présence du chercheur n'a semble-t-il pas modifié le déroulement de la séance.

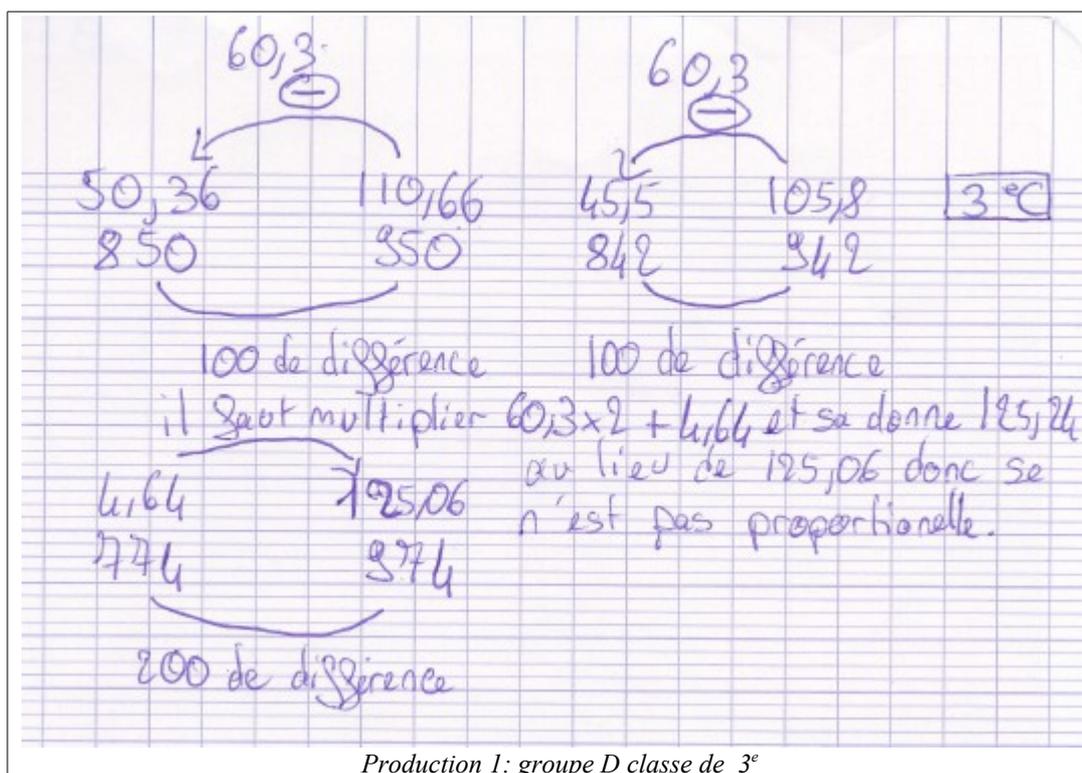
Les élèves ont cherché en groupe à établir que la température et la pression étaient proportionnelles à partir des données d'un des tableaux. Ils ont ensuite exposé à la classe leurs résultats en présentant leur feuille ou en écrivant au tableau quelques éléments. Nous allons lister dans l'espace de contraintes 34 (voir page 320) les explications données par le rapporteur de chaque groupe en mettant en évidence le registre empirique correspondant, le registre des nécessités à l'intérieur des modèles et les registres explicatifs mobilisés. Les numérotations sont en lien avec l'espace de contraintes de l'analyse *a posteriori* qui sera établi dans la suite de notre travail (voir page 346). Les groupes sont intervenus dans l'ordre de A à F, l'enseignant n'a pas choisi de présenter une solution avant une autre. On remarque que certains ont utilisé plusieurs procédures. Le fait de trouver rapidement une solution les a amenés à douter de leur résultat. Certains ont argué du contexte scientifique et de l'imprécision des mesures pour conclure à la proportionnalité dans le cas de l'utilisation des Kelvins comme unité de mesure de la température. Nous avons donc deux registres explicatifs différents qui apparaissent : celui de les suites numériques proportionnelles et celui des grandeurs proportionnelles. Les tracés ont été difficiles car les élèves ont eu du mal à choisir les graduations et certains points étaient trop proches. L'alignement n'est pas apparu dans la plupart des essais à cause d'erreur de lecture des coordonnées. Cet aspect sera amélioré dans les expériences suivantes. Un seul groupe a obtenu un tracé permettant de conclure. On remarque que les points ont été placés, ils ont ensuite été reliés à la règle et le tracé a été prolongé pour montrer l'alignement avec l'origine. Le registre graphique (Duval, 2006) est ici pertinent pour permettre une conversion du cadre des grandeurs proportionnelles (les grandeurs et les unités figurent sur le graphique) au cadre fonctionnel. Dans le compte-rendu, le groupe E ne fera pas référence au tracé mais à la recherche du coefficient de proportionnalité. On peut faire l'hypothèse que la cohérence entre les résultats obtenus par les deux procédures a permis de valider leur réponse.

Graphique 18: groupe E classe de 3^e 3^e

Expériences mises en place par les élèves	Groupe A : On a essayé de faire le produit en croix sur les premières cases.	Groupe B : On a fait un graphique et le produit en croix, comme la fonction n'est pas affine, ce n'est pas proportionnel.	Groupe C : On a fait pareil, le graphique et le produit en croix. Ce n'est pas proportionnel.	Groupe D : On a fait la même chose mais différemment. $60,3 \times 2 = 120,6$ $+ 120,6$ 4,64  125,24 774  974 $+200$	Groupe E : Vu que dans un tableau de proportionnalité, on a un coefficient, on a testé sur les deux premières colonnes, on a trouvé environ 0,3332 puis environ 0,3333 donc ce n'est pas proportionnel.	Groupe F : On a utilisé le produit en croix et vu que c'est un exercice de physique on a dit que c'était presque proportionnel. On néglige les chiffres derrière la virgule.
Registre empirique lié aux données	D₄ : Le calcul des produits en croix donne un résultat erroné sauf dans un tableau où les valeurs sont très proches.	D₅ : On obtient des points alignés. et D₄	D₅ et D₄	D₈ : Une même variation sur une grandeur amène une même variation sur l'autre, une variation double de l'une amène une variation double de l'autre.	D₃ : Les coefficients sont différents dans deux cas, ils sont très proches dans le troisième.	D₄
Registre des nécessités à l'intérieur des modèles	La représentation graphique est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc c'est la représentation graphique d'une fonction affine.		La variation de pression est proportionnelle à la variation de température.	Deux suites de nombres (grandeurs) sont proportionnelles si on peut calculer un coefficient de proportionnalité (approximatif)	Si deux suites de nombres sont proportionnelles, on peut appliquer le produit en croix.	
Registre explicatif	E₁ : Suites numériques proportionnelles		E₂ : Grandeurs proportionnelles		E₃ : Proportionnalité dans le cadre fonctionnel	E₄ : Fonction affine

Tableau 34 : espace de contraintes des explications données par les élèves en collège à l'étape 1

Le groupe D a été signalé par l'enseignant comme étant un groupe particulièrement faible dès le début de l'activité, or c'est le seul groupe à avoir étudié la proportionnalité des écarts. L'enseignant a valorisé la procédure lors de la mise en commun mais la formulation a été très difficile du fait que les élèves n'avaient pas de symboles pour désigner les variations. La présentation au tableau a nécessité de désigner avec le doigt les différents objets mathématiques. Les élèves ont reproduit au tableau ce qui était sur leur compte-rendu (voir production 1) sans pouvoir justifier la technique utilisée.



Production 1: groupe D classe de 3^e

Comme il n'y a pas eu de débat et que le problème n'était toujours pas résolu, les élèves ont eu un nouveau document la semaine suivante (voir annexe 36) avec les trois tableaux et le rappel des quatre procédures présentées lors de la mise en commun (quotients égaux, produit en croix, représentation graphique, variations proportionnelles). Ils ont testé la proportionnalité en utilisant les différentes procédures dans chacun des groupes. Les graphiques produits ont alors été plus précis et les calculs des variations ont été appliqués. Les élèves ont ainsi constaté qu'on obtenait trois droites, que l'une d'elles passait par l'origine, qu'il y avait donc proportionnalité dans un cas. Les variations ont été calculées mais les élèves n'ont pas conclu à la proportionnalité des écarts du fait des approximations.

L'expérimentation n'a pas été continuée dans cette classe. L'enseignant n'a pas eu le temps de reprendre l'activité avant la fin de l'année scolaire. Il a fait une correction du problème collectivement. Cette première expérimentation a cependant permis de repérer que les valeurs choisies n'étaient pas pertinentes car le tracé n'était pas aisé et les approximations trop grandes pour conclure à la proportionnalité dans le cas des Kelvins, nous les avons modifiées en conséquence. Les élèves n'ont pas été gênés par le contexte, ils ont très vite fait

abstraction des mesures pour travailler sur les nombres. Un seul groupe a considéré qu'il pouvait conclure à la proportionnalité du fait des approximations.

III.3 : Le format

Nous avons donc préparé un format de séquence intégrant toutes les remarques précédentes et tenant compte des conditions favorables à la problématisation de l'apprentissage des fonctions affines.

III.3.1 : L'étape 1

Les élèves sont par groupes de 3 par affinité, si possible avec un ordinateur à disposition par groupe. Chaque élève reçoit une carte à jouer correspondant à son groupe (trois cartes d'une même couleur, par exemple trois valets (cœur, carreau pique), trois as, trois huit...) pour permettre la constitution de groupes aléatoires sur la deuxième étape.

Présentation : 10 min

Le but de cette présentation est de faire comprendre le contexte et d'identifier les grandeurs étudiées. Si besoin, on peut s'appuyer sur une vidéo en anglais¹⁸ qui peut être présentée à la classe. On insiste sur le fait qu'on ne cherche pas à tout comprendre mais qu'on veut repérer les grandeurs étudiées, ce qui varie, ce qui est mesuré. Après présentation, demander à la classe ce qui a été identifié, si besoin refaire un arrêt sur image pour repérer la plaque chauffante et le thermomètre, et un autre pour repérer le flacon hermétique et le nanomètre servant à mesurer la pression.

Étape 1 : 10 à 15 min

Un document présentant un des tableaux de mesures est distribué à chaque groupe, les groupes n'ont pas tous les mêmes données. La consigne est de justifier si les deux grandeurs sont proportionnelles ou non. Des feuilles avec des repères tracés sont prêtes en cas de besoin pour éviter que les élèves ne perdent du temps à définir les axes et les graduations puisque notre objectif est ailleurs. On peut aussi mettre à disposition des ordinateurs pour que les élèves puissent utiliser un tableur ou chercher des informations. La calculatrice est aussi autorisée. On précise que les groupes vont ensuite changer et que chaque élève devra être capable d'expliquer le résultat aux autres membres du nouveau groupe qui n'auront pas eu les mêmes données.

Étape 2 : 30 min

Les élèves se regroupent par 3 ou 4 suivant la valeur de la carte à jouer reçue à l'étape 1 (les rois ensemble, les as ensemble, huit ensemble...). De cette manière dans chaque nouveau groupe sont réunis des élèves ayant travaillé sur les trois unités de mesures différentes. La consigne est de comparer les réponses et d'en faire une synthèse en formulant la relation qui existe entre la pression et la température indépendamment des unités de température choisies. Une feuille est distribuée en complément. Il s'agit de deux documents :

¹⁸ <https://www.youtube.com/watch?v=TDiAPyQIYW8>

un schéma montrant la correspondance entre les degrés Celsius et les Kelvins (schéma 27) et d'une photographie d'un thermomètre gradué dans les deux unités degrés Celsius et degrés Fahrenheit (illustration 6).

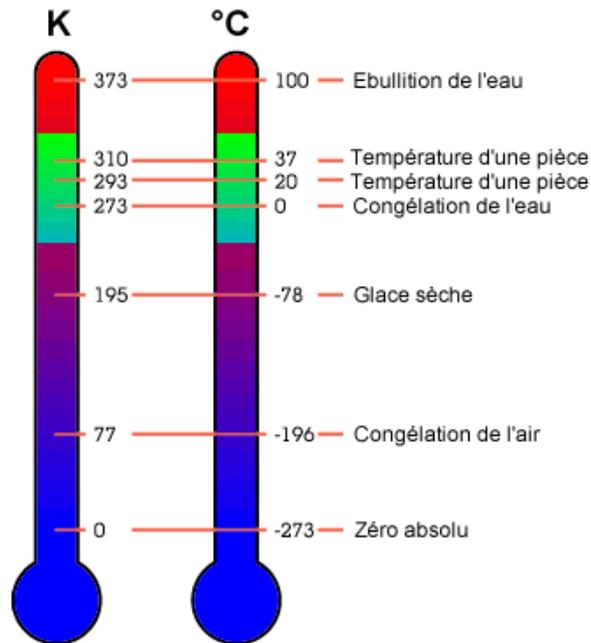


Schéma 27: Correspondance entre graduations de thermomètres en K et en °C



Illustration 6: thermomètre canadien à double graduation °C et °F

III.3.2 : Analyse a priori de l'étape 1

La vidéo de présentation de l'expérience a été choisie en fonction de plusieurs critères. Elle met en scène une étudiante dans un laboratoire, des arrêts sur image permettent de voir le

matériel de mesure utilisé et elle est de durée raisonnable (2 min13). Le support vidéo a pour objectif de contextualiser le problème et de permettre aux élèves particulièrement attachés au contexte de mieux comprendre la situation. Elle situe l'expérience dans le domaine des sciences expérimentales et donne un indice sur la nature des données.

D'un point de vue expérimental, il aurait été préférable d'avoir les mêmes valeurs dans les trois tableaux pour la grandeur que l'on fait varier et non pour la grandeur dépendante. Comme nous voulons travailler sur les unités de température, il aurait fallu trouver une expérience inverse, faisant varier la pression et faisant mesurer la température atteinte. Il s'avère que nous n'avons pas trouvé d'expérience de ce type fournissant des mesures intermédiaires au cours de l'expérience. Nous trouvons plutôt des modifications d'état et une comparaison des mesures à deux états différents. Nous pouvons préciser que la température est mesurée quand la pression atteint certaines valeurs identiques pour chaque expérimentateur. La question qui se pose ici est celle de la détermination de la variable indépendante et de la variable dépendante. Dans un contexte expérimental, il est habituel de choisir comme variable indépendante la variable sur laquelle agit le manipulateur, dans notre cas la température.

Les connaissances nécessaires pour traiter la question posée sont des connaissances sur la proportionnalité et en particulier des techniques pour résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité. Il est aussi nécessaire de se placer dans le cadre expérimental et donc de raisonner sur des mesures et non sur des nombres.

Pour ce qui concerne l'étape 1, plusieurs procédures peuvent être envisagées compte-tenu des connaissances supposées des élèves à ce niveau d'enseignement et à cette période de l'année :

- la recherche d'un éventuel coefficient de proportionnalité (**P₃**) ;
- la vérification par une égalité de type produit en croix (**P₄**) ;
- la représentation graphique (**P₅**) ;
- la vérification des propriétés de linéarité (**P₇**) ;
- le calcul des variations (**P₈**).

III.3.2.a : Recherche d'un éventuel coefficient de proportionnalité (**P₃**)

Le calcul permet d'avoir une valeur approchée du coefficient de proportionnalité dans le cas des températures en Kelvins qui est de 2,99 à 1.10^{-2} près (voir tableau 35).

T en K	259	281,5	284	296,5	314	316,5	319	324
P en hPa	774	842	850	890	942	950	958	974
P/T	2,98841699	2,99111901	2,99295775	3,00168634	3	3,00157978	3,0031348	3,00617284

Tableau 35: calcul des quotients (T en K)

La question des valeurs approchées risque de faire débat. En mathématiques, on dit qu'un tableau est de proportionnalité si le calcul exact pour chaque colonne du quotient de la valeur d'une même ligne par celle de l'autre ligne donne le même résultat. On peut donc penser que certains élèves diront que les valeurs exactes de ces quotients ne sont pas égales et donc qu'il ne s'agit pas d'une situation de proportionnalité. Dans le contexte de mesures dans le cadre d'une expérience, d'autres diront qu'on peut conclure à la proportionnalité si les valeurs approchées sont relativement proches.

Pour les autres tableaux (voir tableau 36 et 37), les coefficients sont clairement différents et la non-proportionnalité s'impose.

T en °C	-14	8,5	11	23,5	41	43,5	46	51
P en hPa	774	842	850	890	942	950	958	974
P/T	-55,2857143	99,0588235	77,2727273	37,8723404	22,9756098	21,8390805	20,826087	19,0980392

Tableau 36: calcul des quotients (T en °C)

T en °F	7	47,5	52	74,5	106	110,5	115	124
P en hPa	774	842	850	890	942	950	958	974
P/T	110,571429	17,7263158	16,3461538	11,9463087	8,88679245	8,59728507	8,33043478	7,85483871

Tableau 37: calcul des quotients (T en °F)

Au niveau du raisonnement, il est différent suivant que la situation est de proportionnalité ou non.

Si les deux suites sont proportionnelles, les élèves utilisent un **raisonnement exhaustif** en ce sens qu'ils vérifient bien que tous les quotients donnent le même résultat :

Soit les deux suites de nombres $\{a ; b ; \dots\}$ et $\{a' ; b' ; \dots\}$.

Il existe un coefficient de proportionnalité entre ces deux suites, si quels que soient $a, a', \dots, b, b', \dots$ on a : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \dots$

Quand ce n'est pas le cas, les élèves peuvent donner un **contre-exemple** :

Soit les deux suites de nombres $\{a ; b ; \dots\}$ et $\{a' ; b' ; \dots\}$.

Il existe deux couples $(a ; b)$ et $(a' ; b')$ tels que on a : $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ donc il n'existe pas de coefficient de proportionnalité.

Ils peuvent aussi utiliser un **raisonnement par l'absurde** du type :

- Soit les deux suites de nombres $\{a ; b ; \dots\}$ et $\{a'; b' ; \dots\}$. S'il existe un coefficient de proportionnalité entre ces deux suites, alors $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \dots$. Calculons les quotients.

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \text{ donc il n'existe pas de coefficient de proportionnalité.}$$

- Soit les deux suites de nombres $\{a ; b ; \dots\}$ et $\{a'; b' ; \dots\}$. S'il existe un coefficient de proportionnalité entre ces deux suites, alors $\frac{a}{a'} \times b' = b$. Calculons $\frac{a}{a'} \times b'$. Ici

$$\frac{a}{a'} \times b' \neq b \text{ donc il n'existe pas de coefficient de proportionnalité.}$$

III.3.2.b : La vérification par une égalité de type produit en croix (P₄)

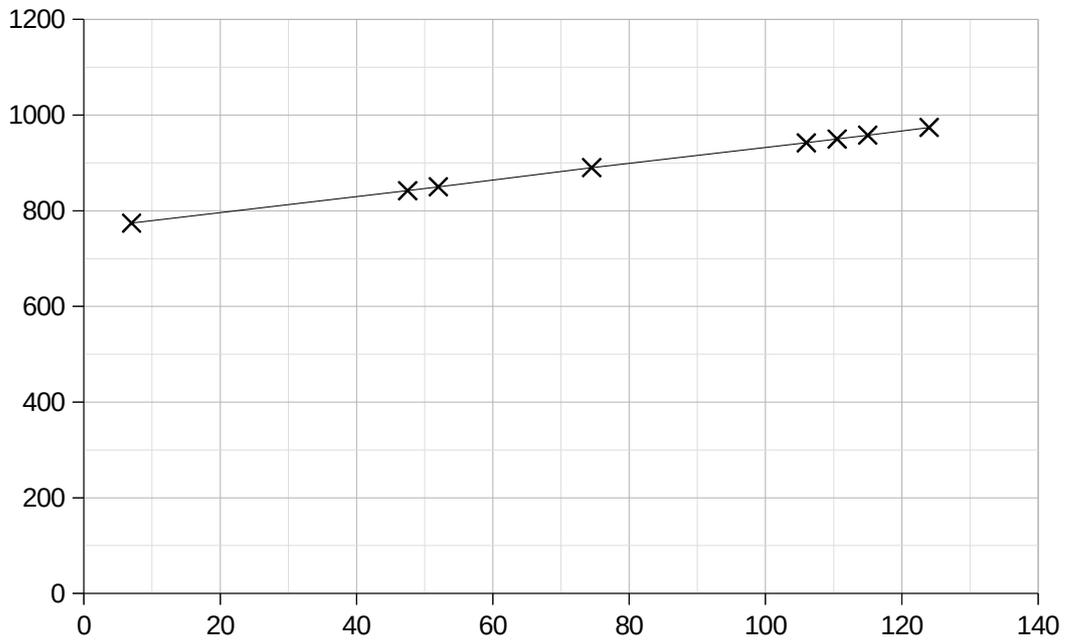
Cette procédure peut être induite par la présentation en tableaux. Les calculs permettent de conclure à la proportionnalité pour ce qui concerne les Kelvins si les élèves acceptent des erreurs de mesures comme dans le cas précédent. Cette approximation est cependant moins naturelle car nous n'obtenons pas des erreurs du même ordre. Ici le calcul d'une quatrième proportionnelle peut amener à un résultat approché à 2,5 près (voir annexe 37). Dans les autres cas, le calcul atteste de la non-proportionnalité.

III.3.2.c : La représentation graphique (P₅)

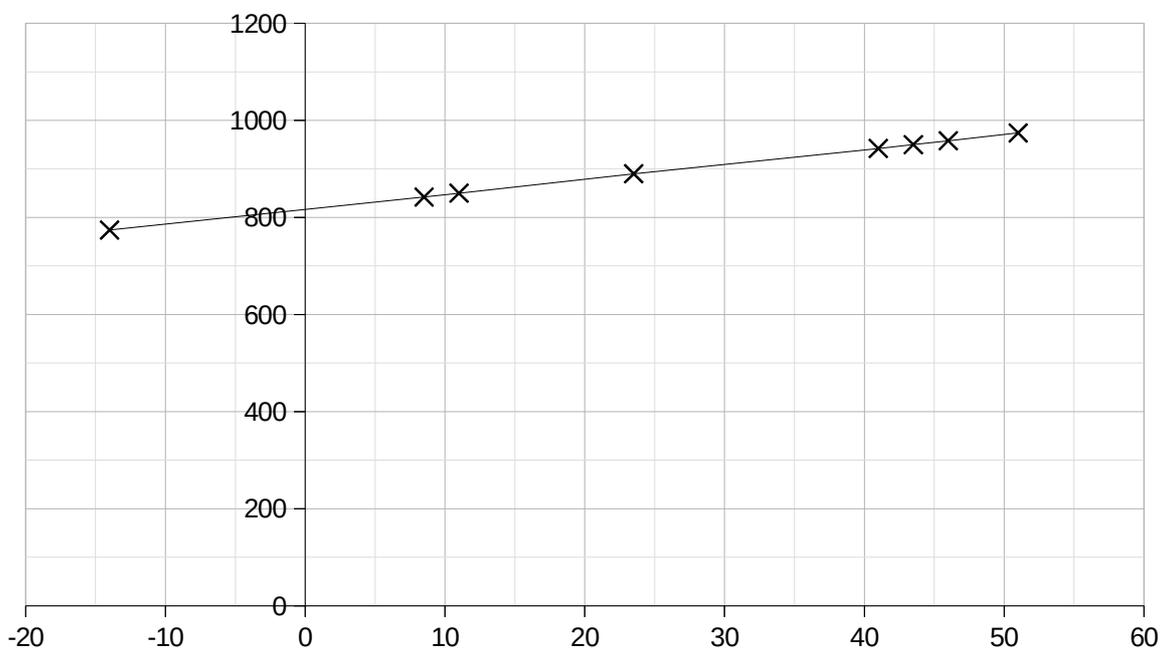
Une première difficulté est liée aux valeurs et aux unités choisies. Si on veut garder un repère orthogonal faisant apparaître l'origine, les unités ne permettent pas un placement aisé dans les différents repères. Même si une graduation est proposée pour éviter aux élèves de perdre du temps à choisir leurs unités, le tracé peut amener des erreurs.

Les points sont éloignés de l'origine dans le cas des températures en Kelvins, si bien qu'il n'est pas évident de conclure à l'alignement des points avec l'origine. On peut penser que certains élèves vont conclure à une relation affine et non linéaire. Dans les autres cas les points semblent bien alignés mais on peut facilement vérifier que la droite ne passe pas par l'origine.

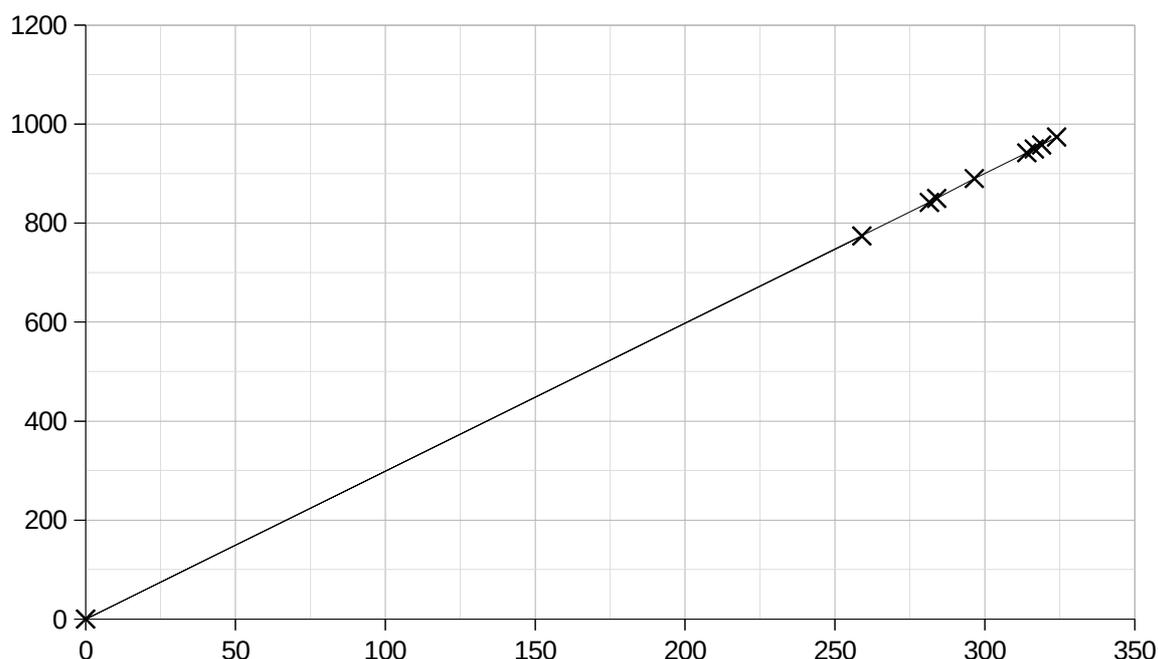
Les élèves qui utiliseraient un tableur pour le tracé auront aussi le problème de l'alignement avec l'origine, nous avons ajouté ce point sur le graphique 21 pour le visualiser. La même difficulté peut être rencontrée avec les élèves qui utiliseraient leur calculatrice graphique mais au lycée en début d'année, peu d'élèves savent utiliser cet outil en particulier pour ce type de tracés.



graphique 19: Variation de la pression en hPa en fonction de la température en °F



Graphique 20: Variation de la pression en hPa en fonction de la température en °C



Graphique 21: Variation de la pression en hPa en fonction de la température en K

III.3.2.d : Les propriétés de linéarité (P₇)

Une question peut être celle de l'origine, l'image de 0 est-elle 0 ? Nous avons vu comment répondre à cette question par le graphique mais qu'en est-il par les tableaux de valeurs ? Pour le tableau en degrés Celsius, il peut apparaître que la température de -14°C devrait entraîner une pression négative si les grandeurs étaient proportionnelles, ce qui n'est pas le cas. Il s'agit d'utiliser en acte le théorème de Bolzano. Les élèves ont une connaissance intuitive de la continuité du phénomène de par leur expérience de la variation de la température. En effet, ils savent de manière empirique que la variation ne fait pas de « sauts » mais qu'elle varie de manière continue. Pour les degrés Fahrenheit, une approximation peut rapidement amener à constater qu'une baisse de 7°F ne pourra pas entraîner une baisse de 774 hPa. La courbe ne passera pas par l'origine.

Pour ce qui est des propriétés de linéarité multiplicative et additive, nous ne retrouvons pas de doubles ou de triples dans les tableaux, les nombres décimaux n'incitent pas à des calculs de proportions, nous n'avons pas non plus de propriétés additives immédiatement repérables. Le milieu n'incite pas à utiliser ces propriétés, elles ne sont pas facilement mobilisables.

III.3.2.e : Le calcul des variations (P₈)

On peut repérer qu'une variation de $2,5^{\circ}\text{C}$ entraîne une variation de 8 hPa et qu'une variation du double soit 5°C entraîne à son tour une variation du double soit de 16 hPa, les variations sont proportionnelles. Le même constat peut être fait sur les mesures en Kelvins et en degrés Fahrenheit. Pour certains élèves, ce constat peut les amener à conclure qu'il y a

proportionnalité entre les grandeurs. Il s'agira de repérer les indices qui montrent que les élèves ont calculé ces variations et de nommer les grandeurs qui sont mises en relation.

Si on calcule les écarts, le quotient des variations de P par celles de T donne des valeurs comprises dans un intervalle centré en 3,085 et d'amplitude 0,228 pour les Kelvins et les degrés Celsius et dans un intervalle centré en 1,714 et d'amplitude 0,127 pour les degrés Fahrenheit (voir annexe 37). Si on accepte cette approximation des mesures, on peut considérer que ces quotients sont constants et donc qu'il y a proportionnalité des écarts dans les trois cas.

III.3.3 : Analyse a priori de l'étape 2

La mise en commun permet de vérifier les résultats et de conclure à une contradiction. Les élèves sont dans un nouveau groupe, chacun a étudié un tableau de mesures, ils doivent produire une explication. Cette production servira de support à la situation d'apprentissage suivante dans l'esprit d'une PPAP.

Les connaissances nécessaires sont la comparaison de nombres, le concept de grandeur mesurée, l'organisation de données.

Les élèves vont comparer leurs résultats et expliquer les écarts. Nous faisons l'hypothèse que les élèves vont d'abord expliquer les différences par des erreurs de calcul ou de procédures (ordre des opérations dans le produit en croix par exemple), on va donc inciter à vérifier le travail des groupes point par point pour valider les procédures. L'important ici est plus d'évacuer cette explication que de réellement travailler sur les procédures elles-mêmes. L'enseignant peut s'autoriser à valider les calculs pour gagner du temps si le groupe reste trop longtemps bloqué à ce stade de la recherche.

Une fois qu'il est établi qu'il n'y a pas d'erreurs, comment expliquer pourquoi nous n'avons pas les mêmes résultats ?

La piste des unités différentes peut amener des débats. L'idée de convertir dans différentes mesures est induite par les documents proposés. Le schéma et la photographie doivent amener les élèves à différencier grandeur (avec un petit g) et mesure : une même grandeur peut avoir des mesures différentes suivant les unités (la température de la pièce est la même qu'elle soit indiquée par 293K ou par 20°C). La présentation de ces documents donne de nouveaux indices liés à la comparaison des graduations. Elles sont régulières et identiques pour le schéma, elles sont régulières mais différentes pour le thermomètre photographié. Cela peut donner une première image de la proportionnalité des écarts. Ces documents sont des inducteurs pour amener les élèves à comparer les données des différents problèmes. La fonction de cet inducteur est cognitive en ce sens que les documents doivent activer des connaissances sur les mesures et sur les unités et amener à travailler un sous-but qui est de convertir les mesures dans la même unité. Ce document est injecté dans le milieu pour permettre une rétroaction sur les assertions. Le contrat didactique dans sa facette sociale (Hersant, 2014) joue aussi à ce niveau car certains élèves considèrent que si le document est donné, c'est qu'il faut l'utiliser. Ceux là risquent d'utiliser le document non pas de manière rétroactive mais proactive, en se demandant comment ils peuvent l'utiliser pour répondre au

problème posé. Par ailleurs cet inducteur a aussi une fonction argumentative puisqu'il doit amener à critiquer les résultats ou apporter des éléments de preuve par exemple en situant le travail dans un cadre expérimental (d'où l'imprécision des mesures) et en amenant à comparer une mesure dans deux unités différentes.

On peut aussi envisager des aides à distribuer en cas de besoin (voir la proposition ci-dessous) pour les élèves qui veulent effectuer les conversions. Cette aide peut être considérée comme un inducteur à fonction cognitive car il peut activer les connaissances sur les expressions algébriques et les formules. Il incite à effectuer des calculs pour convertir respectivement les degrés Celsius en Kelvins et en degrés Fahrenheit.

Information sur les unités de mesure de température

Il existe trois unités de mesure pour les températures : les degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$), les degrés Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) et les Kelvins (K).

Pour changer d'unité on utilise les formules suivantes :

$$T_{\text{K}} = T_{\text{C}} + 273,15$$

$$T_{\text{F}} = T_{\text{C}} \times 1,8 + 32$$

où T_{K} est la mesure en Kelvins, T_{C} la mesure en degrés Celsius et T_{F} la mesure en degrés Fahrenheit.

En effectuant les conversions, on peut vérifier que les trois tableaux donnent bien les mêmes températures exprimées dans trois unités différentes. L'objectif n'est pas de faire trop de calculs dans lesquels les élèves risquent de se perdre, on peut proposer de faire les calculs avec un tableur ou une calculatrice programmable ou encore avec un convertisseur (sur téléphone ou l'internet). Dans ce cas, on enregistrera les feuilles de calcul sur une clé USB, on pourra prendre une photographie des écrans utilisés, ou on questionnera l'élève pour qu'il décrive ce qu'il obtient lors de l'enregistrement audio. L'important ici est d'arriver à la conclusion que les trois expériences correspondent aux mêmes résultats exprimés dans des unités différentes pour poser le nouveau problème : trois personnes ont observé le même phénomène, comment est-il possible que certains trouvent que les deux grandeurs sont proportionnelles alors que les autres non ? On demande alors une explication sur une copie.

Pour cette explication, nous pouvons anticiper certaines procédures que nous allons maintenant détailler.

III.3.3.a : Procédures graphiques

Pour ce qui est de l'explication attendue, la caractéristique commune entre les trois cas étudiés est l'alignement des points, les élèves peuvent aussi remarquer que deux droites ont le même coefficient directeur puisqu'elles ont la même pente. Ils peuvent penser à un changement de repère de manière intuitive par translation de la droite ou de l'origine. Ces translations peuvent mettre en évidence les valeurs utilisées dans les formules de conversion. On peut en particulier interpréter $-273,15$ comme l'abscisse du point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses.

Dans le cadre fonctionnel, les élèves peuvent savoir qu'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine et ils peuvent avoir des techniques permettant de calculer les coefficients de l'expression algébrique de cette fonction à partir des coordonnées de deux points.

III.3.3.b : Procédures liées aux calculs de grandeurs

La mise en relation des formules de conversion avec les expressions des fonctions affines peut les amener à conclure que le même coefficient peut être mis en évidence dans les trois cas.

Le fait que les grandeurs varient dans le même sens et qu'il s'agit de la même Grandeur (avec un grand G) dans les trois expériences, doit amener les élèves à penser qu'il existe bien une relation entre les deux grandeurs et que cette relation peut s'exprimer algébriquement sous la forme d'une formule.

III.3.3.c : Procédures liées aux variations

Les élèves peuvent chercher à effectuer des calculs sur les nombres pour faire apparaître des régularités ou des propriétés. Le calcul des variations peut amener à conclure qu'à une variation de température donnée, correspond toujours la même variation de pression. Le contexte peut induire un tel calcul du fait que l'expérience suppose qu'on augmente petit à petit la température mais comme il ne s'agit pas ici d'un ajout du fait que les grandeurs sont intensives, le calcul de la variation ne prendra peut-être pas autant de sens. Les nombres sont choisis pour que des variations identiques ou multiples permettent de repérer la proportionnalité des écarts.

III.3.3.d : Procédures algébriques

Il est peu probable que les élèves travaillent directement sur les expressions algébriques mais cette procédure est malgré tout envisageable. Si on écrit P la pression en hPa, T_K la mesure en Kelvins, T_C la mesure en degrés Celsius et T_F la mesure en degrés Fahrenheit, nous avons déjà la relation :

$$T_K = T_C + 273,15$$

$$T_F = T_C \times 1,8 + 32$$

et avec le coefficient de proportionnalité calculé précédemment :

$$P = 3 \times T_K \text{ d'où } P = 3 \times (T_{\text{C}} + 273,15) \text{ et } P = 3 \times (T_{\text{C}} \times 1,8 + 32)$$

On peut donc obtenir les trois formules, la relation est bien affine au sens large dans les trois cas, elle est linéaire dans le cas de la température absolue.

Nous pouvons retrouver ces différentes approches dans l'espace de contraintes présenté dans le tableau 38, espace de contraintes tel que nous l'avons défini dans le chapitre 1 de la partie III. La première ligne reprend les tâches des élèves, les actions engagées. Ces actions apportent de nouvelles données qui confrontées à celles de la situation initiale permettent de formuler des explications que nous dirons relever du registre empirique (c'est-à-dire qu'elles ne font pas référence explicitement à des théories mais à des résultats d'une expérience) produites par une action sur les données initiales. On peut identifier certaines contraintes mises en évidence à l'issue de ces expériences et qui restent du domaine empirique, il s'agit de ramener ces nécessités dans le registre explicatif pour construire l'objet théorique à partir de ces nécessités.

Dans notre cas, ces nécessités sont :

- Il existe une relation entre les grandeurs, il doit exister une formule pour caractériser cette relation.
- Cette relation n'est pas une relation de proportionnalité mais les écarts sont proportionnels.
- La représentation graphique de la fonction cherchée est une droite.

Toutes ces nécessités se ramènent à la proportionnalité des variations. On voit sur l'espace de contraintes 38 que le calcul des écarts permet de mettre en évidence cette nécessité. Il s'agit donc d'amener les élèves à effectuer des calculs de variations pour formuler cette nécessité et la confronter aux autres résultats.

Expériences mise en place par les élèves	Comparaison des valeurs	Conversion	Calcul des quotients d'une mesure de grandeur par une autre.	Calcul par le produit en croix	Représentation graphique	Calculs à partir des propriétés de linéarité	Calcul des variations des mesures de grandeur
Registre empirique lié aux données	Les pressions sont les mêmes dans les trois tableaux.	Seule l'unité de mesure des températures change. Les valeurs prises dans les différentes unités ne sont pas proportionnelles.	Les coefficients sont différents dans deux cas, ils sont très proches dans le troisième.	Le calcul des produits en croix donne un résultat erroné sauf dans un tableau où les valeurs sont très proches.	On obtient des points alignés.	Les calculs par propriétés de linéarité donnent des résultats erronés sauf dans un tableau où les valeurs sont très proches.	Une même variation sur une grandeur amène une même variation sur l'autre, une variation double de l'une amène une variation double de l'autre.
Registre des nécessités à l'intérieur des modèles	Nécessité d'un calcul permettant de passer d'une grandeur à l'autre.		Nécessité d'une intervention de la proportionnalité dans la relation.	Nécessité d'une relation non proportionnelle sauf si on utilise l'unité Kelvin pour la température.		Nécessité de variations proportionnelles.	
	La représentation graphique est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc c'est la représentation graphique d'une fonction affine.	$f(x+a)=f(x)+b$ avec a et b constantes caractérise une fonction affine.		La variation de pression est proportionnelle à la variation de température.		$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Constante}$ donc f est affine et $f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} x + f(0)$	
Registre explicatif	Suites numériques proportionnelles	Grandeurs proportionnelles	Proportionnalité dans le cadre fonctionnel (fonction linéaire)		Fonction affine		

Tableau 38: Analyse a priori par les espaces de contraintes pour conclure à la relation affine

La situation 1 peut être modélisée par le losange de problématisation (Fabre, 2011). On peut considérer que les données D_1 sont utilisées de manière intra-objectales en ce sens qu'une seule condition permet de traiter les données et d'avoir une réponse.

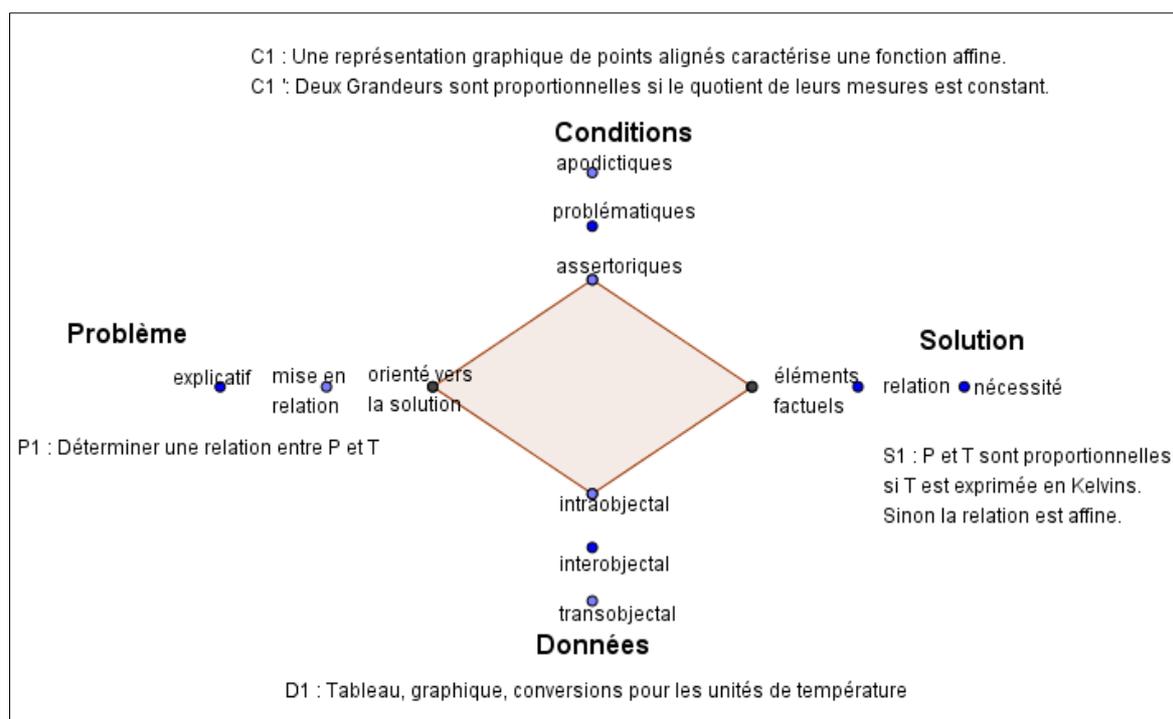


Schéma 28: losange de problématisation Pression-Température situation 1

Nous sommes au premier stade de problématisation puisque le problème P_1 est orienté vers la solution, les données sont traitées de manière intra-objectale, les conditions C_1 sont des propriétés assertoriques déjà disponibles et la solution S_1 est un élément factuel isolé.

III.4 : La situation 2

III.4.1 : Présentation de la situation 2

La situation suivante doit permettre à tous les élèves de résoudre le problème initial, c'est-à-dire ici d'énoncer que la variation de pression est proportionnelle à la variation de température. En effet, c'est la seule relation que nous pouvons énoncer qui soit vraie quelle que soit l'unité choisie.

Pour cela, nous partons des productions des élèves et établissons une figuration des solutions trouvées ou du moins des procédures mises en œuvre. Nous regroupons sur un document les propositions vraies produites par les différents groupes. Ceci a aussi pour objectif de remettre la situation en tête puisque la séance a lieu à un autre moment. Ensuite la figuration doit faire apparaître les procédures dans les différents registres utilisés par les groupes, on trouvera donc un tableau, un graphique et une expression algébrique au cas où l'une d'elle aurait été trouvée. Nous avons vu qu'il faut absolument construire la nécessité de la proportionnalité des variations et que cela passe par le calcul des variations. La consigne est

de produire un texte dans lequel sera proposée la conclusion commune aux trois chercheurs de l'expérience, c'est-à-dire exprimant une relation entre la pression et la température qui soit vraie quelle que soit l'unité choisie.

Les élèves sont par groupes de 4. Ils ont un exemplaire des documents par groupe (voir annexe 38) et l'autorisation d'utiliser tous les outils nécessaires (calculatrice, ordinateur, manuels). La séance dure 55 min au total. Les productions sont relevées.

III.4.2 : Analyse a priori de la situation 2

Nous faisons l'hypothèse que l'expression algébrique de la relation entre les grandeurs a très peu de chance d'être proposée à l'issue de la première séance. Par contre la lecture des conclusions peut amener certains élèves à produire plus facilement une expression dans le cas de la proportionnalité ou d'envisager la forme de cette expression si le mot « affine » par exemple a été utilisé. Les calculs des variations sont souvent difficiles à repérer dans les écrits des élèves car ils n'ont pas de conventions d'écriture permettant de formaliser ce travail. Nous allons donc utiliser un inducteur pour appeler ce calcul. Pour la présentation en tableau, cet inducteur est une série de flèches pour indiquer les variations pour passer d'une colonne à l'autre. Un calcul peut éventuellement être donné à titre d'exemple. On peut proposer de calculer une valeur pour mettre en évidence la proportionnalité des écarts soit par le calcul du coefficient de proportionnalité, soit par les propriétés de linéarité. Les flèches variations fournissent un modèle de présentation suffisamment clair pour permettre à tous les élèves d'entrer dans la tâche (voir tableau 39).

T en °C	-14	8,5	11	23,5	41	43,5	46	51	61
P en hPa	774	842	850	890	942	950	958	974	

Tableau 39: calcul des variations (T en °C)

Il n'est pas demandé de travail particulier autour des graphiques mais ils sont fournis au même titre que les propositions vraies énoncées par les groupes à l'issue de la situation 1.

La production demandée est un texte énonçant une conclusion, nous ne sommes donc pas dans le même type de problème que dans la situation 1 où le produit attendu était plutôt un écrit relatant les procédures utilisées et leur argumentation. Cet écrit demande la prise en compte des différents cas, des différents registres utilisés et des différentes conclusions énoncées par les groupes. Il s'agit donc de faire du lien entre les propositions pour les réunir dans un énoncé englobant de type apodictique. Nous sommes donc dans un travail qui relève de l'inter-objectal. Nous pouvons schématiser ce travail avec le losange de problématisation (voir schéma 29) et nous visons un deuxième niveau de problématisation puisque le problème demande une mise en relation induite par la précision « quelle que soit l'unité choisie », les

données doivent être traitées de manière inter-objectales puisqu'elles doivent être regardées les unes par rapport aux autres, les conditions ne sont plus assertoriques puisque nous n'avons plus de théorèmes ou de propriétés permettant de traiter les données, il s'agit donc de conditions problématiques en ce sens que plusieurs conditions entrent en conflit (quelque chose dans la relation relève de la proportionnalité mais ce n'est pas une situation de proportionnalité) et la solution est bien une mise en relation des différents résultats sous la forme d'une propriété générale. En fait dans ce schéma, $C_2 = \{C_1; S_1\}$ et $D_2 = \{D_1; S_1\}$, c'est-à-dire que le premier problème a permis de construire de nouvelles données et de nouvelles conditions.

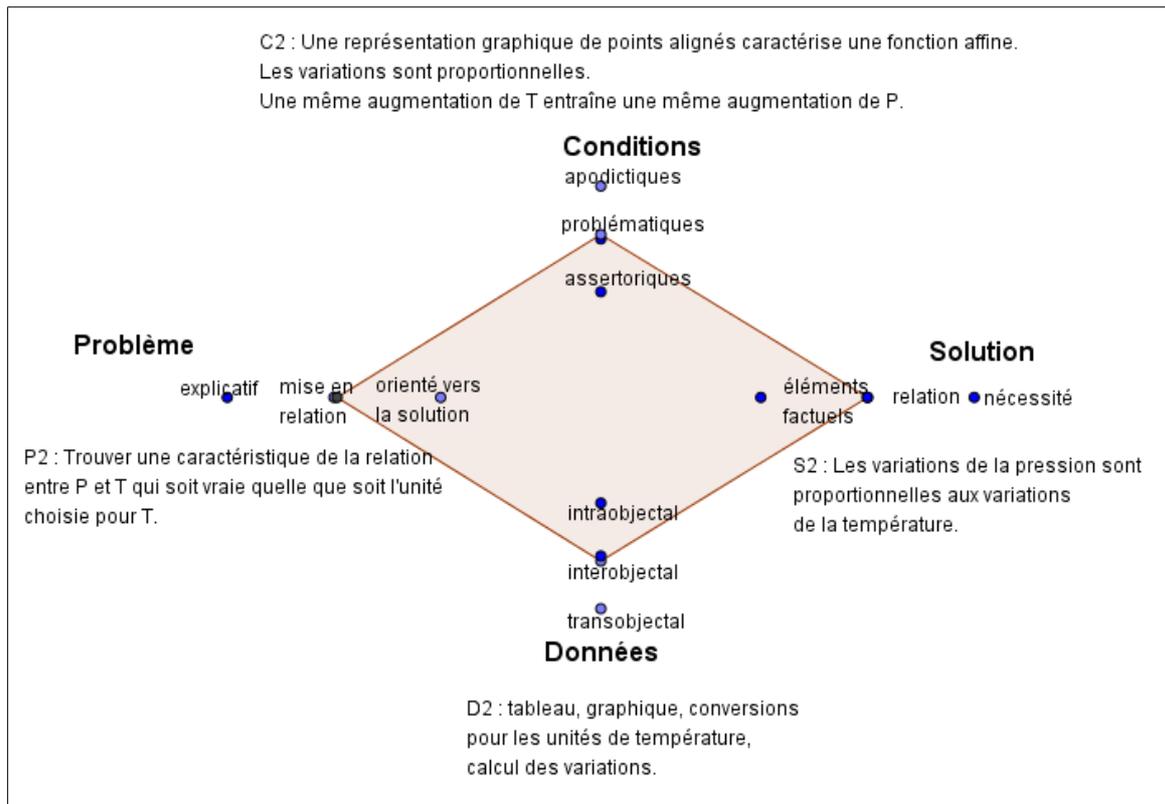


Schéma 29: losange de problématisation Pression-Température situation 2

III.5 : La situation 3

III.5.1 : Présentation de la situation 3

A l'issue de la situation 2, les élèves doivent avoir formulé une propriété caractéristique de la relation entre P et T qui soit vraie quelle que soit l'unité choisie. Cette caractéristique doit maintenant être reformulée dans les différents registres pour que la nécessité puisse plus facilement prendre du sens dans les différents cadres. Nous faisons l'hypothèse qu'à ce stade certains élèves auront une expression algébrique de la relation entre P et T lorsque T est exprimé en °C ou en °F. Nous allons proposer cette expression avec comme consigne d'expliquer comment on peut retrouver ce résultat dans les différents registres : registre des tableaux et registre des graphiques. En fait il s'agit de voir comment s'exprime la nécessité « une même augmentation de T entraîne une même augmentation de

P » dans ces différents registres. Dans le tableau, cela se traduit par la proportionnalité des écarts et nous allons utiliser comme inducteur de problématisation une flèche opérateur entre les variations. Sur le graphique, cela se traduit par les « marches et contre-marches » égales ou proportionnelles, et dans la formule par le coefficient multiplicateur. Le coefficient additif se retrouve dans le tableau par le calcul de l'image de 0 et les inducteurs de problématisation ici sont une case vide au départ de chaque ligne ainsi que le point d'intersection avec l'axe des ordonnées sur le graphique qui est mis en évidence (voir tableau 40 et annexe 39).

T en °C		43,5	46	51	61	× ...
P en hPa		950	958	974	1006	Variation de

Tableau 40: Pression-Température tableau proposé aux élèves en situation 3

III.5.2 : Analyse a priori de la situation 3

Dans cette situation, nous proposons un problème explicatif, la production attendue est une explication. Les données doivent être traitées toujours de manière inter-objectale, les conditions sont exprimées sous forme de nécessités locales (« quand la pression augmente de 32hPa, la température augmente de 10°C ») et la solution s'oriente vers des nécessités qui peuvent être des nécessités d'action ou plus théoriques suivant les élèves. En effet, les techniques mises en œuvre pour un certain nombre d'actions, produisent des effets sur la situation. La technologie est une mise à distance, elle produit des explications. La théorie quant à elle, organise les technologies. Pour nous, une nécessité d'action est une nécessité qui intervient au niveau de la production des actions, c'est-à-dire à un niveau technique. Certains élèves peuvent incorporer des techniques sans technologie et donc avoir une réponse adaptée sans qu'elle soit nécessairement problématisée. Nous sommes donc dans un losange de problématisation qui s'approche du dernier niveau (voir schéma 30). Le but sera ensuite de faire évoluer le REX vers des nécessités de savoir.

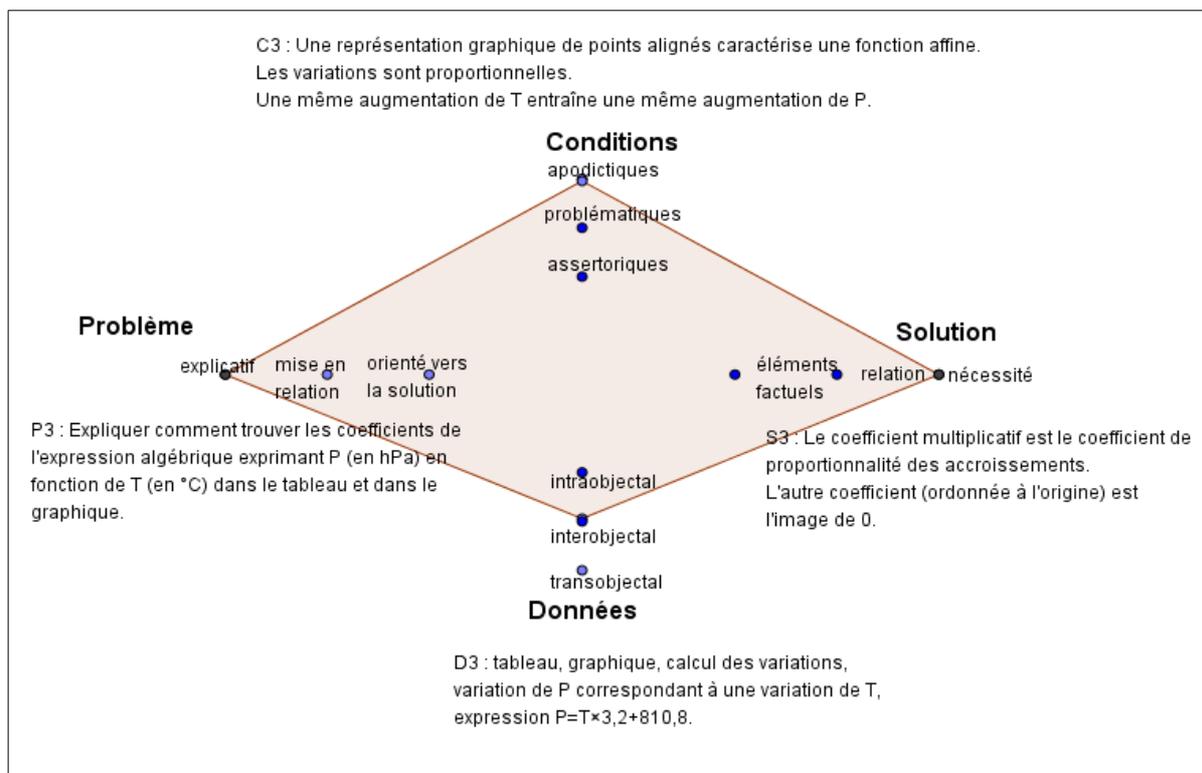


Schéma 30: losange de problématisation Pression-Température situation 3

Le calcul du coefficient de proportionnalité des variations doit permettre de repérer rapidement le coefficient 3,2 qui a sans doute été déjà identifié dans la situation précédente. La difficulté est plutôt dans le repérage de ce coefficient dans le graphique. Il peut être proposé de refaire le graphique sur une feuille de papier millimétré pour permettre des tracés et des lectures plus faciles. Sur ces tracés, les élèves vont pouvoir repérer la valeur voisine de 810 comme ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées. Si les élèves savent que ce point a comme coordonnées (0 ; 810) et que ces coordonnées expriment le fait que pour une température de 0°C la pression est de 810hPa, ils peuvent calculer une valeur plus précise dans le tableau. Pour cela, ils peuvent utiliser les propriétés de linéarité ou le coefficient de proportionnalité des accroissements. Pour une diminution de 43,5°C la pression diminue de $43,5 \times 3,2 = 139,2$ hPa, elle sera donc de $950 - 139,2 = 810,8$ soit 810,8 hPa. Les valeurs ont été choisies pour faire en sorte que le résultat soit le même quelle que soit la ligne choisie pour le calcul. Les variations sur le graphique apparaissent si on dessine les « marches et contre-marches ». La proportionnalité des accroissements est encore difficile à identifier à ce stade et on peut se dire qu'une autre situation est nécessaire pour la mettre clairement en évidence. Peut-être certains élèves penseront-ils à faire le lien entre le quotient et la tangente. Nous pouvons prévoir une aide pour aller dans ce sens par un mémo de trigonométrie mis à disposition des élèves.

III.6 : Évaluation intermédiaire

III.6.1 : Présentation de l'évaluation

Pour que les explications fournies puissent avoir le statut de nécessités, encore faut-il qu'elles aient une fonction opératoire reconnue. Nous allons donc reprendre les données et les explications fournies par les élèves à la situation 3 et poser un nouveau problème. Il s'agit de trouver l'expression algébrique de P en hPa en fonction de T en °F. La situation est très similaire à la précédente et doit permettre à un maximum d'élèves de trouver la solution. Elle est proposée individuellement et doit servir aussi d'évaluation pour l'enseignant. Suivant les réponses, on peut imaginer reprendre la situation 3 individuellement ou la reprendre uniquement pour un groupe spécifique. Il est souhaitable que cette situation arrive très rapidement après la situation 2 pour que le contexte soit familier, elle doit être courte (voir annexe 40).

III.6.2 : Analyse a priori de l'évaluation

Cette situation est de nouveau un problème orienté vers la solution et la solution attendue est factuelle, on demande une expression algébrique. Les explications trouvées en situation 3 ont maintenant le statut de conditions pour traiter les données.

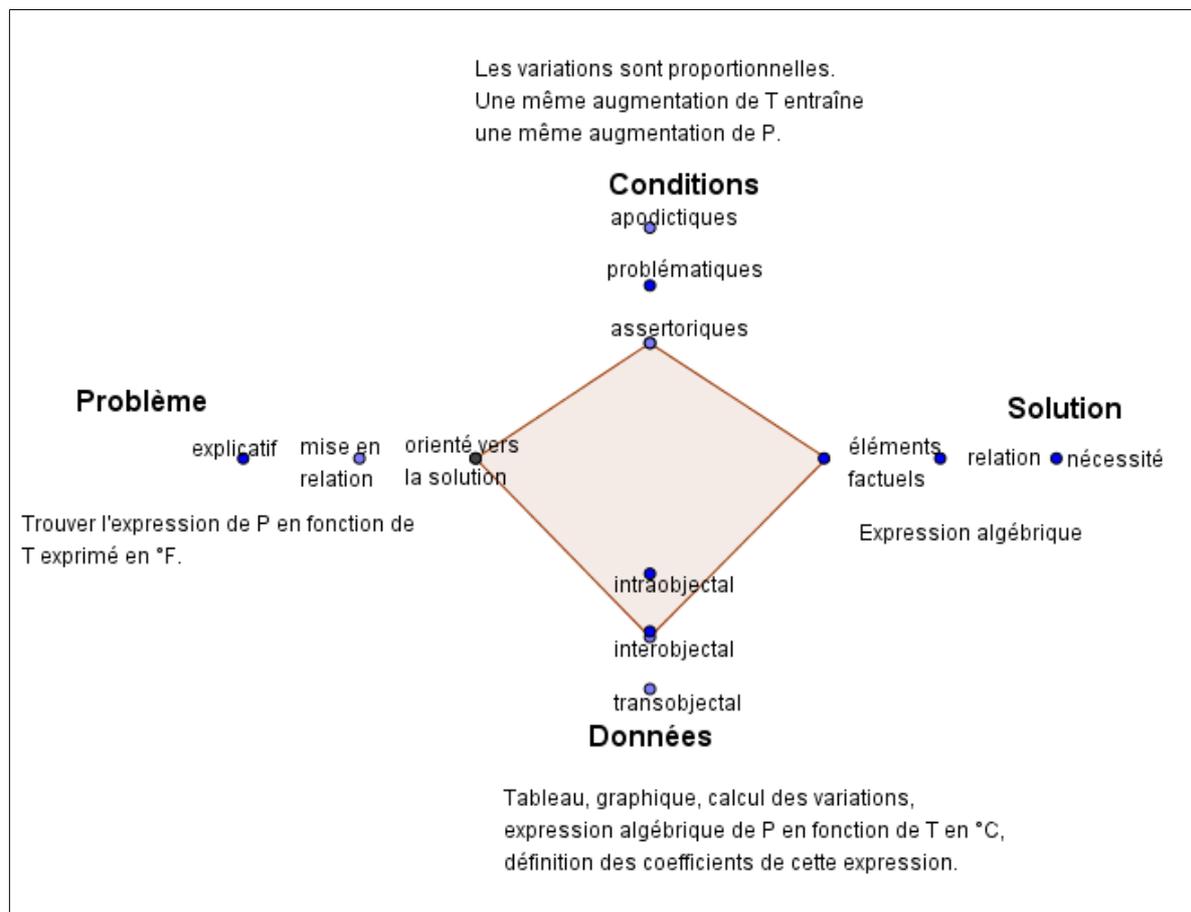


Schéma 31: losange de problématisation Pression-Température évaluation

Elles apparaissent donc comme une nécessité globale et non plus locale pour traiter une classe de problèmes. Les différents registres peuvent permettre de contrôler la validité du résultat.

Les élèves peuvent calculer le coefficient de proportionnalité des accroissements, et donc obtenir le coefficient multiplicateur, ils peuvent ensuite calculer de plusieurs manières l'image de 0 pour obtenir le coefficient additif, en faire une lecture approchée sur le graphique ou le trouver par une équation algébrique à partir des premiers éléments obtenus.

Nous pourrions mesurer la réussite de cette étape en vérifiant si la forme de l'expression est bien affine, si le coefficient multiplicateur est identifié, enfin si le coefficient additif a un ordre de grandeur proche de la valeur attendue.

Les données sont donc traitées de manière inter-objectale. On peut analyser l'activité comme étant l'application d'une technique mais cette technique n'a pas été énoncée en terme d'actions mais de nécessités sur les relations entre les objets et par la mise en place d'un vocabulaire spécifique pour énoncer ces relations. Les conditions ne sont pas encore apodictiques à ce stade puisque la nécessité n'a pas encore été formulée de manière générale et qu'il n'y a pas eu décontextualisation (voir schéma 31).

III.7 : La situation 4

La dernière étape doit amener l'élève à un savoir problématisé : la caractérisation de la fonction affine par la proportionnalité des variations. Le problème théorique doit donc être explicatif et amener à une généralisation. Nous allons demander aux élèves une démonstration. Nous allons proposer le problème suivant :

On note x et y deux variables. Prouver que si les variations de y sont proportionnelles aux variations de x alors il existe une fonction affine f telle que $f(x) = y$.

Deux aides seront fournies : un graphique vierge avec une marche et une contre-marche (voir graphique 22) et un tableau vierge avec des flèches de variations et un opérateur multiplicateur (voir tableau 41).

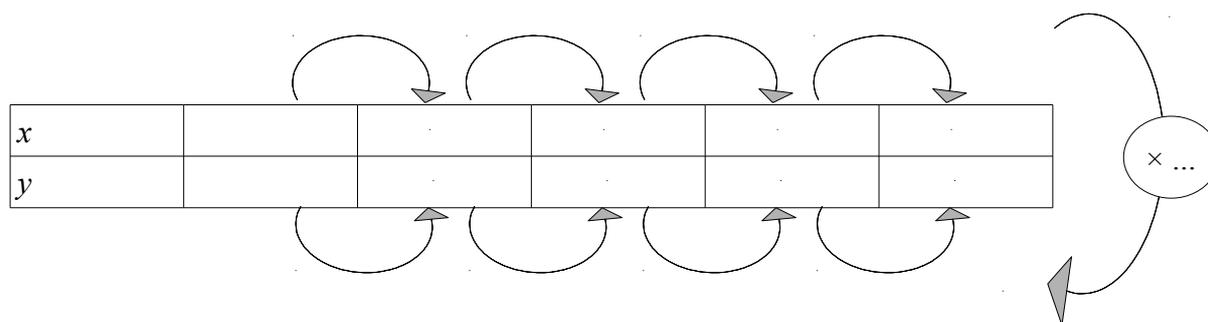
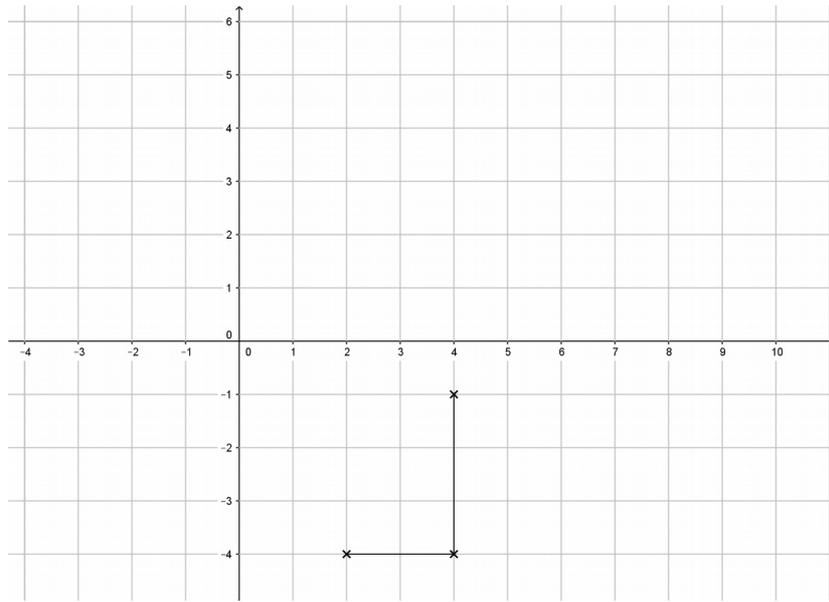


Tableau 41 : tableau vierge avec variation et opérateur



Graphique 22: graphique vierge avec marche et contre-marche

Nous obtenons un losange de problématisation (voir schéma 32) où la solution est la connaissance visée mettant en relation les conditions et les données du problème, les conditions étant les nécessités liées au savoir construit qui doivent permettre de prendre en compte l'ensemble des données.

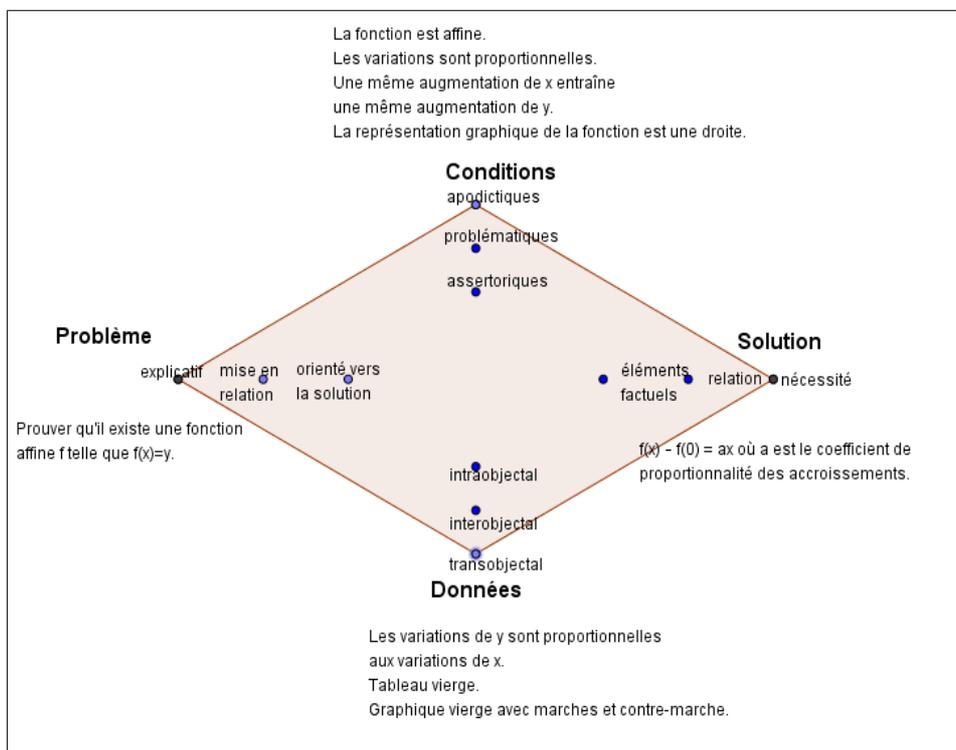


Schéma 32: losange de problématisation du savoir visé

III.8 : Analyse de la séquence PPAP

Nous avons une séquence PPAP en 4 étapes que nous pouvons schématiser par un enchaînement de situations (voir schéma 33). Le problème passe d'un problème orienté vers les solutions à un problème explicatif, les données prises et traitées isolément sont peu à peu mises en relation pour être traitées de façon globale à travers des conditions qui partant de connaissances assertoriques s'enrichissent de nécessités liées à l'action, nécessités locales contextualisée puis de nécessités théoriques décontextualisés. La solution factuelle, met en relation les différents aspects liés au cadre ou au registre pour évoluer vers un texte de savoir problématisé. Nous avons une montée en généralité avec le passage d'un cas à un modèle mathématique transposable.

Dans une séquence PPAP, une situation peut correspondre à un séance ou une partie de séance de mathématiques. Certains aspects du contrat vont jouer dans la mise en place de la séquence dans les classes, nous les avons organisés dans le tableau 42. Les clauses du micro-contrat doivent être explicitées à la classe au moment de lancer le travail. Pour les autres, certaines clauses sont intégrées dans les consignes, redites à l'oral à la classe ou précisées à certains élèves en particulier, ceci en fonction des usages et du contrat explicite ou implicite habituellement mis en place par l'enseignant avec son groupe. Nous verrons que suivant les classes, certains aspects peuvent modifier notablement l'activité de l'élève.

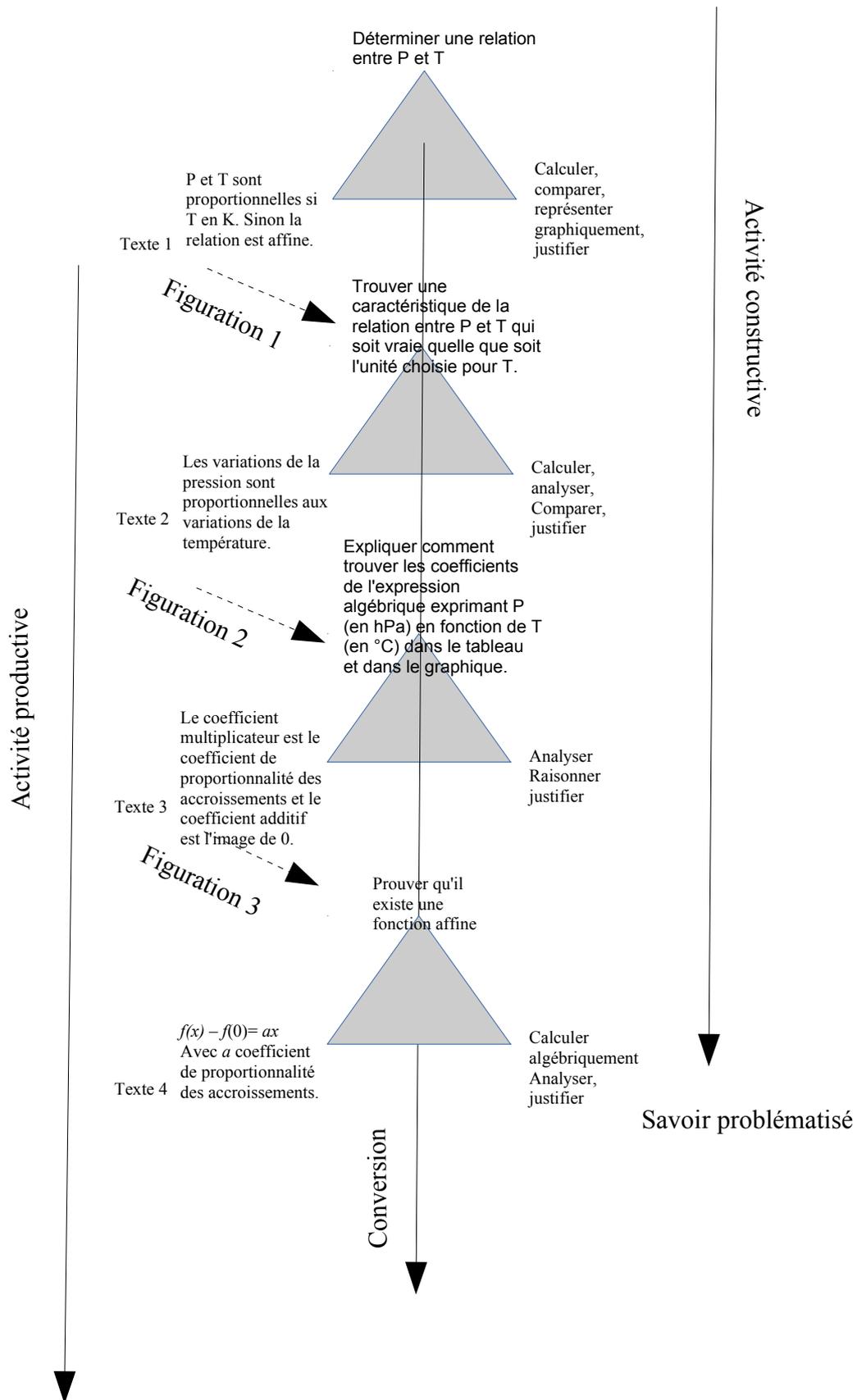


Schéma 33: PPAP de la situation Température-Pression

Niveau de contrat didactique concerné	Composantes du contrat stables à ce niveau	Facette épistémologique	Facette sociale
		Clauses du contrat liées au PPAP	
Macro-contrat	Discipline mathématique / pédagogie	On prouve toujours son résultat, un contre-exemple invalide une proposition. Une lecture graphique donne une réponse approximative, on peut la valider par un calcul. Les données obtenues dans une expérience scientifique sont approchées.	On peut utiliser tous les outils à notre disposition. On peut noter toutes les idées même si elles n'aboutissent pas. On peut tester plusieurs procédures pour valider une réponse. On peut demander du matériel si on en a besoin.
	Domaine mathématique	Quand on étudie une fonction, on peut travailler dans plusieurs registres : le graphique, le tableau de valeurs, l'expression algébrique. La mesure d'une grandeur est fonction de l'unité choisie.	On peut utiliser la calculatrice ou le tableur pour représenter une fonction.
Méso-contrat	Statut didactique du savoir & caractéristiques de la situation	Dans une modélisation, il y a toujours une approximation, il faut estimer la pertinence du modèle choisi.	Il peut y avoir plusieurs solutions. Quand on est en groupe, il faut débattre pour confronter les idées. Si on a besoin, on peut chercher des informations sur l'internet ou dans notre manuel.
Micro-contrat	Répartition des responsabilités	Ce n'est pas le professeur qui valide.	Quand le professeur demande d'expliquer, c'est qu'il a besoin de comprendre ce qu'on fait.

Tableau 42: Clauses du contrat liées à une séquence PPAP

III.9 : Conclusion

L'analyse *a priori* a permis d'identifier des procédures et des registres explicatifs liés à la mise en place de ces procédures. La séquence vise la mise en évidence de la nécessité de variations proportionnelles par un double cheminement : vers un raisonnement covariationnel d'une part et vers une secondarisation du discours amenant à exprimer la nécessité de variations proportionnelles dans les différents registres et dans les différents cadres (suites de nombres proportionnels, grandeurs proportionnelles, fonction linéaire et fonction affine). L'expérimentation dans les classes va permettre de comparer les procédures effectivement mises en œuvre par les élèves avec celles que nous avons anticipées et de mesurer le déplacement sur ces deux axes :

1. Quelle est l'activité de l'élève ? Quels sont les registres explicatifs ? Comment sont configurés les différents registres (empirique, des modèles, explicatif) ?
2. Comment les élèves construisent-ils le problème ?

Pour cela, nous allons utiliser deux outils : l'espace de contraintes et le losange de problématisation. Pour le premier nous avons dans le tableau 43 l'espace de contraintes réalisé par le regroupement des différentes procédures effectives. Pour chaque analyse, nous griserons les cases correspondantes et identifieront les données, nécessités et registres explicatifs par le codage correspondant.

Pour le losange de problématisation, nous utiliserons un schéma permettant de visualiser l'évolution du niveau de problématisation et reprenant les éléments de l'espace de contraintes par les mêmes symboles. Cette étude permettra de mettre en évidence les unités de raisonnement mobilisées aux différentes étapes du travail et en particulier leur évolution.

Expériences mise en place par les élèves	Comparaison des valeurs	Conversion	Recherche d'un coefficient de proportionnalité	Égalité type produit en croix	Représentation graphique	Test d'alignement avec la calculatrice	Calculs à partir des propriétés de linéarité	Calcul des variations des mesures de grandeur
Registre empirique lié aux données	D₁ : Les pressions sont les mêmes dans les trois tableaux.	D₂ : Seule l'unité de mesure des températures change. Les valeurs prises dans les différentes unités ne sont pas proportionnelles.	D₃ : Les coefficients sont différents dans deux cas, ils sont très proches dans le troisième.	D₄ : Le calcul des produits en croix donne un résultat erroné sauf dans un tableau où les valeurs sont très proches.	D₅ : On obtient des points alignés.	D₆ : Affichage « vrai » ou « faux »	D₇ : Les calculs par propriétés de linéarité donnent des résultats erronés sauf dans un tableau où les valeurs sont très proches.	D₈ : Une même variation sur une grandeur amène une même variation sur l'autre, une variation double de l'une amène une variation double de l'autre.
Registre des nécessités à l'intérieur des modèles	N₁ : Nécessité d'un calcul permettant de passer d'une grandeur à l'autre.		N₂ : Nécessité d'une intervention de la proportionnalité dans la relation.		N₃ : Nécessité d'une relation non proportionnelle sauf si on utilise l'unité Kelvin pour la température.		N₄ : Nécessité de variations proportionnelles.	
	La représentation graphique est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc c'est la représentation graphique d'une fonction affine.		$f(x+a) = f(x) + b$ avec a et b constantes caractérise une fonction affine.		La variation de pression est proportionnelle à la variation de température.		$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Constante}$ donc f est affine et $f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} x + f(0)$	
Registre explicatif	E₁ : Suites numérique proportionnelles		E₂ : Grandeurs proportionnelles		E₃ : Proportionnalité dans le cadre fonctionnel		E₄ : Fonction affine	

Tableau 43: Espace de contraintes lié à l'analyse a posteriori

Chapitre IV : Analyse a posteriori de la séquence PPAP température-pression dans deux classes de seconde

Les premières étapes de la séquence PPAP température-pression présentée au chapitre III ont été expérimentées dans une classe de seconde en septembre 2015 et après quelques ajustements, dans une classes de seconde d'un autre établissement en octobre 2015. Dans un premier temps nous allons rappeler la méthodologie d'analyse de ces séances. Ensuite, nous allons présenter les classes et les enseignants pour mettre en évidence leurs caractéristiques et quelques aspects des pratiques enseignantes utiles à l'analyse *a posteriori*. Suivrons les analyse *a posteriori* et nous concluons ce chapitre par la mise en évidence des écarts entre ce qui s'est passé dans les classes et ce que nous avons anticipé dans notre analyse *a priori*.

IV.1 : Méthodologie d'analyse de l'expérimentation

IV.1.1 : Méthodologie liée à l'ingénierie didactique

Pour cette analyse, nous nous plaçons dans le cadre d'une ingénierie didactique telle que la définit Artigue (Artigue, 1996a). C'est par la confrontation entre l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori* que nous allons essayer de mettre en évidence les conditions favorables à l'apprentissage par problématisation dans la classe, mais aussi par la confrontation des expérimentations dans les différentes classes pour identifier des aspects éventuellement reproductibles et repérer en quoi le rôle de l'enseignant peut avoir des effets sur l'apprentissage par problématisation. Dans les deux lycées dans lesquels la situation a été expérimentée, les élèves ont passé le test étudié dans la partie 2 de cet écrit dès les premières semaines de cours à la rentrée 2015, notre présentation des classes s'appuiera sur les résultats de ce test (quelques exemples sont donnés en annexe 42). Nous comparerons les résultats de chaque classe à l'ensemble de notre échantillon et nous comparerons aussi les deux classes entre elles. Cette analyse doit nous permettre d'identifier quelques éléments du contrat didactique.

Nous procéderons ensuite à une analyse *a posteriori* de la situation suivant deux axes : le premier en nous basant sur l'espace de contraintes construit à partir de l'activité des élèves et des registres qu'ils ont mobilisés (Orange, 2005b, 2012), le second en nous basant sur l'analyse langagière pour identifier les unités de raisonnement mobilisées par les élèves et définir un niveau de problématisation à partir du modèle du losange (Fabre, 2011).

IV.1.2 : L'organisation du traitement des données

Nous avons observé les deux premières séances (étapes 1, 2 et 3), elles ont été filmées et enregistrées et nous avons conservé les productions écrites des élèves. Nos analyses vont s'appuyer sur les productions écrites individuelles, les notes prises pendant l'observation des

élèves et l'enregistrement des débats dans les petits groupes. Certains éléments peuvent avoir échappé à notre observation, si bien que certaines hypothèses sont renforcées par des éléments que nous avons pu voir effectivement (certaines photographies ou séquences filmées peuvent en garder la trace) alors que d'autres ne s'appuient que sur les productions orales enregistrées ou écrites. En particulier, il est difficile de connaître toutes les recherches effectuées par les élèves sur l'internet ou sur la calculatrice pendant l'activité.

Nous commencerons par l'étape 1 dans les demi-classes de seconde 1 puis 2. Nous noterons A et B (respectivement A' et B') les groupes qui ont les mesures de température exprimées en degrés Celsius, C et D (respectivement C' et D') en degrés Fahrenheit et E et F (respectivement E' et F') en Kelvins pour la demi-classe ayant travaillé sur la première heure (respectivement pour la deuxième heure). L'indice 1 ou 2 indique s'il s'agit de la classe de seconde du lycée 1 ou du lycée 2. (Ainsi « D'₂ » désigne le groupe de trois ou quatre élèves qui, à l'étape 1, a étudié le tableau dans lequel les températures sont exprimées en degrés Fahrenheit sur la deuxième heure en demi-classe de seconde du lycée 2).

Nous procéderons de même pour l'étape 2, mais les groupes sont constitués de trois ou quatre élèves ayant chacun étudié un tableau de données exprimées dans des unités différentes (par exemple un élève du groupe A, un de C et un de E), et les écrits sont des écrits collectifs, nous n'avons pas de productions individuelles. Pour l'étape 3, l'expérimentation se fait en classe entière en reprenant les mêmes groupes qu'à l'étape 2. Les productions sont écrites et collectives, nous avons cependant les enregistrements des échanges dans les différents groupes. Nous proposons en annexe des exemples de productions, des extraits permettent de suivre le propos dans le texte (voir annexe 43). Nous ferons un point rapide des étapes suivantes pour lesquelles nous avons peu de données car nous n'avons pas pu les observer, nous n'avons pas d'enregistrements et les écrits individuels ou collectifs, souvent très courts, ne révèlent que peu de choses sur les procédures et la nature des échanges dans les groupes.

IV.1.3 : La structure de l'analyse et les différents outils

Les analyses seront structurées de la manière suivante :

- une **analyse des procédures** des élèves (notées P_i en référence aux procédures étudiées dans l'analyse *a priori* en partie 3 chapitre III) dans chaque demi-classe à partir de l'activité observée et des productions individuelles regroupées dans un tableau afin de mettre en évidence les constantes et les écarts au sein d'une même classe d'une part et entre les deux classes d'autre part ;

- une **analyse des productions écrites** nous permettant d'identifier les données (notées D_i en référence aux procédures qui ont permis de les construire), les éléments du REX (notées E_j) et les nécessités à l'intérieur des modèles (notées N_k). Le codage peut aider à les repérer dans l'espace de contraintes de notre analyse *a priori* du chapitre III. La problématisation sera étudiée à partir des losanges de problématisation construits à partir du losange de Michel Fabre dans lesquels nous ferons figurer trois niveaux de problématisation tel que nous l'avons défini dans la partie 3 chapitre II. Nous préciserons les critères qui nous permettent de repérer

les niveaux mobilisés à partir des productions écrites et orales des élèves et de ce que nous savons de leur activité ;

- une **analyse des interactions langagières** pour identifier comment les élèves mettent en tension les données et les conditions du problème en repérant ce qui relève des fonctions langagières au sens de Rondal :

Par fonction langagière, nous entendons ici non les usages généraux du langage [...] mais bien les deux grands volets de l'activité langagière que sont la production et la compréhension des énoncés. (Rondal, 1997, p.19)

Nous allons essayer de déterminer comment les élèves comprennent l'énoncé au regard de ce qu'ils produisent pour nous permettre d'identifier les unités de raisonnement mobilisées et les registres explicatifs dans lesquels s'inscrit la mise en tension des données et des conditions du problème. Pour cela, nous identifierons des éléments du langage qui nous semblent pertinents soit parce qu'ils sont récurrents, ce qui suppose un code commun, soit parce qu'ils génèrent des incompréhensions. Ces éléments peuvent être repérés par leur fréquence mais aussi parce qu'ils témoignent d'une compréhension partagée (c'est-à-dire des réponses du même type que ce soit en terme d'interactions langagières à l'oral, d'actions, de comportements ou de productions écrites).

Nous avons enregistré les différents groupes, ces enregistrements peuvent être repérés par le numéro du dictaphone utilisé (exemple : Dict5). A l'écoute des enregistrements, certains sont peu exploitables car les échanges sont peu nombreux ou inaudibles. Nous avons choisi d'analyser les enregistrements dont la qualité permet de cerner les tours de paroles et qui témoignent de nombreux échanges entre les membres du groupe autour d'une question, d'un problème, d'une controverse. La transcription a été faite avec le logiciel TranscriberAG. Les locuteurs sont repérés par un prénom ou l'identifiant E suivi du numéro d'anonymat, prof1 pour l'enseignant de la classe et prof2 pour le chercheur. Les élèves ont conservé leur numéro d'anonymat sur toute la séquence ce qui permet de suivre le cheminement d'un élève précis sur l'ensemble de la séquence. L'instant du tour de parole est indiqué entre des accolades, le symbole [...] indique un temps de silence avant la reprise de parole du même locuteur, « pas de locuteur » entre parenthèses indique un moment sans échanges verbaux, d'autres indications entre accolades signalent une prononciation inintelligible, des bruits, des rires, des respirations qui sont au premier plan. Des extraits permettent de suivre l'analyse dans la suite de ce chapitre. Ils seront présentés dans des tableaux en trois colonnes : identification du locuteur, instant en secondes, propos.

Nous avons ensuite identifié des épisodes en repérant les différents problèmes qui se posent au groupe (Hersant, 2015). Un épisode peut donc être caractérisé par une question, il est ouvert par un élève, un résultat, une nouvelle donnée ou l'intervention de l'enseignant. Il se clôt par une réponse qui peut être intermédiaire ou par le déplacement du problème. Certains épisodes peuvent être modélisés par un losange de problématisation et par différents niveaux dans ce losange, ils s'inscrivent dans l'avancée de la résolution du problème, nous les

appellerons des **épisodes de problématisation**. D'autres épisodes sont des moments de formulation ou de reformulation. Il peut s'agir d'une mise en mots de l'expérience, d'une argumentation, ou d'une synthèse. Pendant ces épisodes, les élèves décident de ce qu'ils vont écrire dans le compte-rendu.

L'enchaînement des épisodes de problématisation et de formulation permet de caractériser l'avancée de la réflexion à la fois en terme de problématisation et de secondarisation du discours. On peut alors extraire ce qui relève des différents registres : le registre empirique, le registre des modèles et le registre explicatif. L'activité et le discours permettent de reconstruire la configuration (voir Partie 1 chapitre III p.98) de ces différents registres au sein du groupe. Il est alors important de repérer la cohérence de cette configuration et sa validité au regard des registres théoriques dont elle relève. On peut faire l'hypothèse qu'un savoir sera disponible si la configuration entre les différents registres est cohérente, complète et valide au regard des différentes théories.

Les interactions sont résumées dans des macrostructures à l'image des macrostructures du débat (Fabre & Orange, 1997 ; Chalak, 2012). Pour cela, nous considérons les interactions langagières comme des micro-débats entre élèves. Nous mettons dans des ovales ce qui relève de propositions, dans des rectangles ce qui relève de contre-propositions, de renforts ou d'objections, le reste n'apparaît pas dans la macrostructure. Pour chaque intervention, nous indiquons le locuteur (sous son identifiant ou sous un pseudo pour rendre la lecture plus confortable et l'instant correspondant à cette prise de parole en secondes). Les différents objets sont organisés du haut vers le bas dans l'ordre chronologique et on peut suivre l'échange à partir des segments qui indiquent comment les interventions se succèdent ou interagissent. La macrostructure rend visible les agencements qui permettent de caractériser différents problèmes travaillés dans le groupe et donc d'identifier ce qui amène une évolution en terme de REX ou de contrat d'une proposition à une autre.

La macrostructure permet aussi de repérer les rôles des différents élèves et de repérer ce qui peut amener ou non un changement de rôle pour un même élève. Nous utiliserons les **rôles** définis dans la partie 3 chapitre II.1 : l'agissant, l'entraîneur, l'observateur et l'énonciateur. Nous pourrons aussi faire référence aux différents **actants** : le proposant, l'opposant et le tiers. Les actants étant déjà en partie repérables dans la macrostructure du débat.

IV.1.4 : La synthèse au travers des espaces de contraintes

L'ensemble sera résumé dans un espace de contraintes (EC) *a posteriori* que nous allons construire pour chaque demi-classe ou classe afin de visualiser l'organisation de la problématisation pour l'ensemble des élèves. Nous détournons ici l'outil d'analyse de Christian Orange initialement prévu pour rendre compte de la problématisation au cours de débats scientifiques, afin de comprendre les éléments de problématisation au cours des échanges entre élèves lors de la résolution de problèmes mathématiques en petits groupes. Ainsi nos EC sont construits à partir de différents micro-débats, ce qui nous permet de les comparer. Cette comparaison doit permettre de vérifier si l'EC peut être établi de manière *a priori* en lien avec

la situation ou si des écarts importants supposent que l'EC est aussi fonction du contexte et dans ce cas d'identifier ce qui joue sur les écarts entre l'EC *a priori* et celui *a posteriori*.

Nous évaluerons ainsi la pertinence de notre situation au regard des conditions que nous avons posées préalablement et nous proposerons des aménagements pour une transposition dans des classes ordinaires.

IV.2 : Présentation des classes et des enseignants

Nous avons expérimenté les étapes 1 à 4 de la séquence présentée au chapitre précédent dans une classe de seconde d'un lycée à Saint-Nazaire que nous repérons par l'indice 1 puis dans une autre classe de seconde d'un lycée à Angers repérée par l'indice 2. Nous allons présenter les classes et les profils des enseignants ainsi que le contexte de l'expérimentation.

L'expérimentation a été faite dans le lycée 1 à la fin du mois de septembre 2015. La classe regroupe des élèves ayant choisi l'option « arts visuels ». L'enseignante a suivi une formation sur le travail en îlots et les situations complexes, c'est dans ce cadre qu'elle accepte de tester la situation avec ses élèves. La présence d'un chercheur est expliquée aux élèves et à leurs parents par un document qui contextualise l'expérimentation (voir annexe 42). Une seule élève refuse de participer sur un effectif de 32, les autres entrent volontiers dans le jeu mais il est clair que le contrat n'est pas celui de la classe habituelle. L'enseignante estime que ses élèves ont peu d'intérêt pour les mathématiques et peu de culture scientifique, elle pense que la situation est trop complexe et qu'ils vont avoir besoin d'aide. Elle convient cependant de faire peu d'interventions dans les groupes pour ne pas influencer l'activité des élèves.

L'expérimentation s'est poursuivie en octobre 2015 dans une classe de seconde du lycée 2 dont l'enseignant est titulaire d'un master de didactique (EEA) à l'université de Nantes. Le professeur de la classe connaît le cadre de la problématisation. L'intervention du chercheur se fait dans les mêmes conditions que dans la classe du lycée 1, les séances seront cependant plus regroupées dans le temps, ce qui nous obligera à faire travailler les élèves sur les productions des élèves de la classe du lycée 1 lors de l'étape 3. L'enseignant estime que le niveau de la classe est plutôt bon et que les élèves sont motivés par les activités scientifiques.

Les deux classes de lycée ont passé le test analysé en partie 2 chapitre I p.115 (voir énoncé en annexe 11), ce qui permet de mettre en relation l'activité des élèves avec leurs représentations initiales. Nous allons ici nous intéresser aux résultats sans analyser les réponses fausses ou la nature des réponses. Il s'agit avant tout de vérifier si ces deux classes ont des caractéristiques qui les distinguent des classes les plus communes de l'académie. Pour chaque item, nous avons rappelé les résultats du test global et calculé les taux de réussite des classes A et B.

Item A : proportionnalité dans le contexte de prix/kg

	Test global	classe de seconde 1	classe de seconde 2
Bonne réponse	87,98 %	88,2 %	93,5 %
Réponse fausse	7,83 %	8,8 %	3,2 %
Pas de réponse	4,18 %	2,9 %	3,2 %

Item B : conversions de mesures

		Test global	classe de seconde 1	classe de seconde 2
Conversion des ft en m	réponse correcte 6,096m	82,29 %	93,9 %	90,0 %
	Pas de réponse	12,6 %	6,1 %	10,0 %
Conversion des °C en °F	500°F	40,92 %	32,35 %	58,06 %
	Pas de réponse	31,83 %	29,41 %	22,58 %
	Réponse correcte : 212°F	4,7 %	0 %	3,23 %

Item C : représentations graphiques

Droite passant par l'origine	Droite ne passant pas par l'origine	Courbe passant par l'origine	Test global	classe de seconde 1	classe de seconde 2
oui	non	oui	11,3 %	14,7 %	22,6 %
		non	58,34 %	64,7 %	58,1 %
	oui	non	24 %	17,7 %	9,7 %

Item D : programme de calcul

	Test global	classe de seconde 1	classe de seconde 2
Bonne réponse : $2x$	24,92 %	38,2 %	22,6 %
Pas de réponse	19,04 %	5,9 %	16,3 %

Item E : expression algébrique d'une fonction linéaire

	Test global	classe de seconde 1	classe de seconde 2
Bonne réponse : $2,5x$	25,29 %	11,76 %	9,68 %
Pas de réponse	38,41 %	38,24 %	58 %

Item F : lecture d'images et antécédents dans un tableau de valeurs

	Test global	classe de seconde 1	classe de seconde 2
Bonnes réponses	46,04 %	47,1 %	61,3 %
Pas de réponse	11,88 %	5,9 %	9,7 %

Item G : expression d'une fonction affine à partir d'un graphique

	Test global	classe de seconde 1	classe de seconde 2
Bonne réponse pour la lecture des images	58,15 %	67,7 %	67,7 %
Bonne expression algébrique	53,37 %	32,4 %	35,5 %
Pas de réponse	24,30 %	55,9 %	51,6 %

Item H : lecture graphique

	Test global	classe de seconde 1	classe de seconde 2
Bonne réponse	87,98 %	82,4 %	90,3 %
Pas de réponse	4,18 %	17,7 %	3,2 %

On peut remarquer que la classe de seconde 1, pourtant identifiée par l'enseignante comme peu performante en mathématiques, obtient des résultats très comparables à l'ensemble de notre étude et même parfois supérieurs. En particulier le nombre de non-réponses est inférieur dans plusieurs items du début du test. On peut en déduire que ces élèves ont plutôt de bonnes représentations, savent utiliser la proportionnalité dans des contextes usuels, ont des bases en transformation d'écritures algébriques. Ils n'hésitent pas à proposer des solutions plutôt que de ne pas répondre. Par contre ils ont besoin de temps et ont du mal à terminer le test. Ils font plus d'erreurs dans les exercices qui utilisent des écritures formelles qui semblent peu porteuses de sens. Les élèves de la classe de seconde 2 semblent mieux gérer le temps et traiter toutes les questions même si le nombre de non-réponses est plus important que dans la classe de seconde 1 et peut même dépasser celui de notre échantillon global. En effet ces non-réponses ne sont pas concentrées en fin de test. On peut penser que ces élèves préfèrent ne pas répondre quand ils ne sont pas certains du résultat. Plus d'élèves font les erreurs que nous avons anticipées en lien avec des automatismes induits par l'enseignement. Ces élèves identifiés comme étant plutôt en réussite scolaire semblent avoir du mal à répondre à des questions auxquelles ils ne sont pas habitués mais ils sont aussi en difficulté avec les expressions algébriques que ce soit dans le traitement comme dans la modélisation avec un écart très important par rapport à notre échantillon pour ce qui concerne

l'item E (expression algébrique d'une fonction linéaire avec 9,68 % de réussite contre 25,29 % dans notre échantillon).

Nous avons deux classes avec des profils différents : la classe de seconde 1 qui ose plus se lancer dans des essais mais maîtrise moins les symboles conventionnels et la classe de seconde 2 relativement à l'aise avec les outils quand il s'agit de techniques automatisées mais moins encline à se lancer dans la recherche. Ces deux classes ont par ailleurs des niveaux mathématiques correspondant à la moyenne de notre échantillon.

En étudiant le détail des réponses, la classe de seconde 1 montre des réponses basées sur l'étude des covariations. Ceci est visible par des calculs notés en marge du type « $+18^{\circ}\text{F}=10^{\circ}\text{C}$ » (élève N°45), des flèches pour indiquer des variations (élève N°23), ou des formulations comme « tous les 10m^2 on paye 25€ en plus » (élève N°41) (voir annexe 43). Il semble que les élèves de la classe de seconde 2 n'utilisent pas des formulations qui ne relèvent pas de conventions apprises au préalable, ils n'ont donc pas de symboles pour formuler à l'écrit un travail sur les variations. Cependant, cela ne signifie pas qu'ils n'ont pas eu cette approche.

IV.3 : Analyse a posteriori de l'expérimentation de l'étape 1 dans la classe de 2^{nde} 1

IV.3.1 : Analyse des procédures des élèves lors de l'étape 1

A la demande de l'enseignante, nous avons proposé la vidéo de présentation¹⁹. Cette vidéo a permis de définir les grandeurs étudiées et les appareils de mesure utilisés. Cette présentation est peut-être la raison d'un ancrage plus fort dans le domaine des sciences physiques que pour les élèves de troisième qui ont testé la séquence en fin d'année scolaire précédente. Les élèves de lycée n'ont pas considéré les trois tableaux comme des tableaux de nombres mais bien des tableaux de mesures. Lors de la première étape, il s'agit de dire si les grandeurs sont proportionnelles ou non. La situation a été proposée en demi-classe en salle informatique et les lettres désignent le sujet traité par les groupes de deux ou trois élèves (voir partie 3 chapitre III). Nous avons listé dans le tableau 44 les procédures mises en place par les élèves telles que nous avons pu les observer lors de la séance. Ces procédures sont codées P_i en lien avec des données D_j qu'elles vont éventuellement permettre de construire.

¹⁹<https://www.youtube.com/watch?v=TDiAPyQIYW8>

Procédures	Groupes utilisant cette procédure dans la demi-classe 10h10-11h05	Groupes utilisant cette procédure dans la demi-classe de 11h05-12h
P₃ : Recherche d'un éventuel coefficient de proportionnalité	$A_1 - D_1 - E_1 - F_1$	$A'_1 - B'_1 - D'_1 - E'_1 - F'_1$
P₄ : Égalité type produit en croix	$A_1 - B_1$	$C'_1 - D'_1$
P₅ : Représentation graphique	$B_1 - C_1$	$C'_1 - E'_1$
P₆ : Test d'alignement avec la calculatrice	A_1	
P₇ : Utilisation des propriétés de linéarité		
P₈ : Calcul des variations		

Tableau 44: Procédures lors de l'étape 1 dans la classe de seconde 1

Les procédures privilégiées par les élèves de cette classe sont le calcul d'un éventuel coefficient de proportionnalité suivi des égalités type produit en croix. Les deux procédures se rejoignent d'ailleurs car certains élèves calculent un premier quotient puis appliquent ce coefficient à une autre valeur. Dans cette classe, aucun élève n'a calculé les variations, ni utilisé les propriétés de linéarité. Des ordinateurs étant disponibles, deux groupes ont utilisé un tableur pour tracer la représentation graphique, aucun élève n'a voulu se lancer dans un tracé à la main. Quelques élèves ont utilisé la calculatrice pour donner une valeur de vérité à un test d'alignement alors qu'aucun apprentissage n'a été fait sur cet outil par l'enseignante. Cette procédure (que nous notons **P₆**) n'avait pas été imaginée lors de notre analyse *a priori*. Il est possible que des élèves ayant récemment acheté leur calculatrice pour le lycée, ont cherché à utiliser certaines fonctions. Ils n'ont cependant pas réussi à l'utiliser correctement.

Nous pouvons remarquer que les élèves ont parfois besoin de plusieurs procédures pour conclure. Cela peut provenir du fait que les élèves ont cherché individuellement et utilisé des procédures différentes, ils n'identifient pas une procédure comme étant plus performante qu'une autre et ils préfèrent les évoquer toutes. Cependant les écrits étant individuels, le fait d'utiliser plusieurs procédures semble plus relever de la nécessité d'un contrôle, d'une vérification. En particulier le groupe A_1 utilise trois procédures, chacune lui permet de conclure et pourrait être suffisante. La question du « nécessaire et suffisant » n'est donc pas perçue par les élèves. Pour eux, c'est la cohérence des résultats obtenus par plusieurs procédures qui a pouvoir de validation et peut-être même statut de preuve. Par exemple en ce qui concerne les calculs qui amènent des résultats sous formes de décimaux, les décimaux inférieurs à 1 entraînent le doute. On peut attribuer cette méfiance à une maîtrise insuffisante des nombres décimaux ou au fait que les valeurs entières ou décimales à deux ou trois chiffres sont privilégiées dans les exercices scolaires.

IV.3.2 : Analyse des traces écrites des différents groupes étape 1

Nous avons recopié ci-dessous dans des encadrés les productions des différents groupes à l'issue de la première étape, nous avons gardé leur formulation et les notations ainsi

que la mise en page. Nous analyserons chacune de ces productions pour identifier la représentation que les élèves se font du problème et mesurer ainsi l'évolution de cette représentation au cours de la séquence. Certaines productions sont individuelles, elles sont repérées par le numéro de l'élève. Pour les autres, la production est collective, les élèves se sont mis d'accord. Nous indiquerons par les symboles correspondant le registre empirique (D), celui des nécessités liées aux modèles (N) et celui des registres explicatifs (E). Pour chacun nous ferons une analyse pour mettre en évidence les éléments qui nous permettent d'identifier ces registres.

Nous avons précisé à l'oral que chaque membre du groupe à la première étape devait prendre suffisamment de notes pour échanger avec les autres élèves qui n'auront pas les mêmes valeurs dans l'étape suivante. De ce fait, chaque élève a effectivement noté ce qu'il a compris et ce qui lui a semblé important. L'écrit n'a pas valeur de réponse au professeur mais de mémoire pour continuer le travail. C'est sans doute pour cette raison que les élèves, sur ce temps relativement court, ne se sont pas toujours mis d'accord sur une formulation commune mais peuvent avoir gardé trace de leur propre cheminement au sein du groupe. Parfois les membres ont tous noté exactement la même chose. Deux d'entre eux (les groupes B₁ et B'₁) ont eu un fonctionnement spécifique : les échanges n'ont commencé qu'après un temps long de recherche individuelle ou en binômes et finalement, c'est l'élève ou le binôme qui est parvenu à un résultat qui l'a communiqué au reste du groupe.

Les groupes pour lesquels les réponses sont très différentes d'un élève à l'autre, sont ceux pour lesquels les débats ont été les plus nourris et les démarches les plus variées. Ce sont aussi les groupes qui ont le plus sollicité les enseignants pour valider des pistes ou conforter une idée.

Groupe A₁

Il n'y a pas proportionnalité : $\frac{8,5}{842} \neq \frac{11}{850}$

Méthodes utilisées :

- trouver le coefficient : inutile
- produit en croix : utile
- fonction vrai/faux de la calculatrice : utile

Du coup la pression n'est pas proportionnelle à la température.

P₃ : Le groupe A₁ calcule deux quotients et en déduit qu'il n'y a pas proportionnalité.

P₄ : Le groupe A₁ précise les différentes procédures utilisées et celles qui ont été utiles. Le produit en croix semble avoir été plus convaincant que le calcul du coefficient.

P₆ : Nous n'avons pas de détails sur la fonction vrai/faux utilisée sur la calculatrice. L'enregistrement audio devrait donner quelques éléments supplémentaires.

E₁ : Les unités ne figurent pas, le calcul est effectué sur les nombres.

E₂ : La conclusion porte sur les grandeurs.

Groupe B₁

Non, les résultats ne sont pas proportionnels car s'ils l'étaient, le résultat d'un produit en croix serait le même :

$$\text{exemple : } \frac{774 \times 8,5}{-14} \approx -470$$

 $-470 \neq 842$

P₄ : Le groupe B₁ justifie sa réponse par le calcul du produit en croix. Il précise que c'est un exemple. Le raisonnement a une structure de raisonnement par l'absurde.

E₁ : Les unités ne figurent pas, le calcul est effectué sur les nombres. L'écrit ne fait pas référence aux grandeurs mais évoque des « résultats » pour parler des nombres utilisés dans les calculs ou produits par ces calculs. Il semble que tous les nombres sont considérés comme des résultats d'opérations et non associés à des mesures.

Groupe C₁

Oui, la pression est proportionnelle à la température car la courbe est droite.

P₅ : Le groupe C₁ a utilisé un tableur pour tracer la représentation graphique et il conclut qu'il y a proportionnalité du fait de l'alignement des points. Il ne dit rien des autres procédures utilisées alors que les élèves ont fait de nombreux calculs.

E₃ : On peut supposer que le graphique évoque la proportionnalité dans le cadre fonctionnel mais ce n'est qu'une hypothèse car le vocabulaire ne permet pas de savoir si la « courbe » est représentative d'une fonction. Le fait de relier les points peut correspondre une technique automatisée.

E₂ : Les élèves utilisent le vocabulaire des grandeurs ce qui suppose qu'ils ont identifié la covariation de grandeurs et le fait que la courbe modélise cette covariation.

Groupe D₁

Non elle n'est pas proportionnelle car pour trouver le coef. de proportionnalité il faut diviser le bas par le haut et trouver le même nombre à chaque fois.

$$\text{Ex : } 774 \div 7,0 \approx 110,6$$

$$842 \div 47,5 \approx 17,73$$

P₃ : Le groupe D₁ conclut à la non-proportionnalité par la recherche d'un coefficient de proportionnalité.

E₁ : Il ne fait pas référence aux unités, ni aux valeurs approchées. Lorsque les élèves écrivent « elle n'est pas proportionnelle », nous pouvons mesurer à quel point l'expression est mal assurée. On ne peut parler de proportionnalité qu'entre des grandeurs, des listes de nombres mais on ne peut pas parler d'une seule grandeur proportionnelle. De même le fait d'écrire « il faut diviser le bas par le haut », montre que, si les élèves se comprennent dans l'action, les mots désignent des objets vagues et l'action ne prend pas de sens au regard d'une théorie. S'agit-il de nombres, de grandeurs, de cases ? Cette imprécision nuit largement à l'utilisation du langage pour organiser le raisonnement. On note aussi que « il faut » semble imposer le calcul dans un sens et ne rend pas possible de diviser « le haut par le bas », c'est une méconnaissance qui peut être source de difficultés (Hersant, 2001).

Groupe E₁

Élève 49 :

$$\frac{259}{774} \approx 0,3346\dots$$

$$\frac{314}{942} \approx 0,3333\dots$$

Ce n'est pas proportionnel car si l'on compare $\frac{259}{774}$ et $\frac{314}{942}$ les divisions ne donnent pas le même résultat.

Élève 33 :

$$774 \div 259 = \frac{774}{259}$$

ce n'est pas proportionnel car : $259 \times \frac{774}{259} = 774$

$$314 \times \frac{774}{259} = \frac{243036}{259}$$

Élève 34 :

Ce n'est pas proportionnel car si l'on fait

$$\frac{259}{774} = 0,334\ 625\ 323$$

$$\frac{314}{942} = 0,333\ 333\ 333$$

Nous n'avons pas les mêmes nombres.

Le groupe E₁ donne des écrits individuels et n'a pas statué sur un bilan collectif mais ils concluent tous qu'il n'y a pas proportionnalité.

P₃ : La recherche d'un coefficient de proportionnalité a été proposée par l'élève 49 très convaincue et convaincante. Ce calcul se traduit par des écritures fractionnaires suivies de valeurs approchées et l'élève conclut malgré tout en terme de « division » et de « résultat ». L'élève 34 écrit des égalités et note tous les chiffres indiqués sur l'écran de sa calculatrice, il conclut aussi que les résultats sont différents. L'élève 33 n'utilise pas de valeurs approchées, il note aussi tous les chiffres lus sur l'écran de la calculatrice mais sa conclusion est moins claire car on ne comprend pas à quoi il compare son résultat.

E₁ : Nous retrouvons encore une imprécision dans le mot « ce » utilisé et par le singulier « ce n'est pas proportionnel » dans les trois écrits. S'agit-il de nombres ou de grandeurs ? Aucune unité n'apparaît dans les calculs, il semble donc que le registre explicatif soit bien celui des suites numériques proportionnelles.

Groupe F₁

Élève 2 :

Nous utilisons des valeurs arrondies car les mesures réalisées ne sont pas exactes car les instruments ne permettent pas une précision parfaite.

Nous recherchons le coefficient de proportionnalité donc la relation entre le bas et le haut.

~~Donc c'est proportionnel.~~ Ce n'est quand même pas proportionnel.

Élève 22 :

Nous utilisons des valeurs arrondies car les mesures réalisées ne sont pas exactes car les instruments ne permettent pas une précision parfaite.

Donc nous recherchons le coefficient de proportionnalité en trouvant la relation $a = \frac{P}{T}$ avec a coefficient de proportionnalité dans plusieurs calculs.

$$\frac{974}{324} \approx 3,00$$

$$\frac{942}{314} = 3$$

$$\frac{774}{259} \approx 2,99$$

Nous choisissons le coefficient de proportionnalité 3 avec $P = 3 \times T$.

Élève 12 :

Nous ne savons pas si nous devons utiliser les valeurs arrondies ou les valeurs exactes.

Nous allons utiliser des valeurs arrondies.

Nous allons chercher le coefficient de proportionnalité entre les 2 unités.

$$\frac{P}{T} = \frac{774}{259} \approx 2,98 \approx 3$$

$$314 \times 3 = 942$$

$$324 \times 3 = 974$$

Donc pour moi c'est proportionnel.

Le coefficient de proportionnalité est 3.

Donc la pression est égale à $3 \times$ la température en Kelvin.

P₃ : Le groupe F₁ cherche un coefficient de proportionnalité.

E₂ : Le groupe F₁ a rendu aussi des écrits individuels mais une partie commune montre une hésitation dans la conclusion. Le groupe a débattu de la pertinence ou non de conclure sur des valeurs exactes alors qu'il s'agit de mesures. Il semble que les trois élèves n'ont pas réussi à se mettre d'accord. L'élève 2 revient sur la première conclusion et écrit que « ce n'est quand même pas proportionnel ». Il utilise l'expression « quand même » pour montrer qu'il a du mal à accepter que les grandeurs puissent être considérées comme proportionnelles alors que l'élève 22 prend le parti d'arrondir les résultats et conclut « nous choisissons le coefficient de proportionnalité 3 » et écrit une formule « $P = 3 \times T$ » qui utilise des symboles qui rappellent les grandeurs dont il est question. Le « nous » montre qu'il y a bien eu débat, le « choisissons » montre que plusieurs possibilités ont été étudiées. Nous sommes bien dans une démarche de modélisation en ce sens que le choix se justifie en ayant clairement posé les limites du modèle. L'élève 12 est dans la même démarche mais il utilise la première personne « pour moi c'est proportionnel » ce qui traduit un choix parmi plusieurs possibles. Il prend la précaution de préciser dans sa formulation les grandeurs qui sont mises en relation et l'unité utilisée pour la température.

E₃ : L'élève 22 écrit une formule « $P = 3 \times T$ » qui peut évoquer une relation fonctionnelle. L'élève 12 la formalise par « la pression est égale à $3 \times$ la température » mais ici encore la relation entre les grandeurs est clairement mise en évidence.

Groupe A₁'

Élève 37 :

La pression n'est pas proportionnelle à la température.

$$842 \div 8,5 \approx \frac{1684}{17} \text{ et } 11 \times \frac{1684}{17} \approx 1089,64$$

Élève 50 :

La pression n'est pas proportionnelle à la température puisque les coefficients de proportionnalité

$$842 \div 8,5 \approx 99,06$$

$$850 \div 11 \approx 77,3$$

P₃: Le groupe A₁' propose deux écrits qui présentent la même procédure mais l'une utilise des valeurs approchées alors que l'autre utilise des écritures fractionnaires. L'élève 50 ne termine pas sa phrase car il la commence par « les coefficients de proportionnalité » or on ne peut pas parler de coefficients de proportionnalité puisque nous n'avons pas une situation de proportionnalité. L'élève aurait pu parler de quotients mais ce mot n'est que rarement utilisé par les élèves. L'élève 37 utilise une démonstration par l'absurde en calculant un coefficient de proportionnalité qu'il applique ensuite à une autre valeur.

E₂: On peut estimer que les élèves utilisent bien le registre explicatif des grandeurs proportionnelles puisque ces grandeurs sont nommées dans la conclusion.

Groupe B₁'

Non, la pression n'est pas proportionnelle car le coefficient de proportionnalité est pas un nombre rond. Lorsque l'on fait $-14 \times \frac{850}{11}$ le résultat n'est pas égal à 774.

Le groupe B' rend un écrit très court dans lequel se glisse plusieurs erreurs de formulation. Comme nous l'avons déjà vu dans plusieurs productions, le sens de la proportionnalité pose problème. On peut le voir dans l'utilisation de l'adjectif « proportionnel ». On peut l'utiliser pour qualifier ce qui augmente ou diminue dans les mêmes rapports (par exemple des quantités, des grandeurs proportionnelles) mais dans ce cas, il est utilisé au pluriel en mathématiques et au singulier en droit ou en politique (on parle d'« impôt proportionnel » ou de « scrutin proportionnel »). En mathématiques, s'il est au singulier, on doit utiliser « proportionnel à ».

P₃: Comme le groupe précédent, le quotient est appelé « coefficient de proportionnalité » alors même que les élèves disent qu'il ne s'agit pas d'une relation de proportionnalité. Enfin l'utilisation de l'expression « nombre rond » renvoie à l'idée qu'on n'obtient pas un nombre entier alors que le calcul qui suit utilise une autre propriété. Les élèves calculent bien le quotient mais ils multiplient ensuite ce quotient par -14 . Si le coefficient était $-\frac{774}{14}$, il donnerait bien le résultat attendu et pourtant ce coefficient n'est pas un nombre entier. Nous voyons ici que le groupe ne formule pas un raisonnement correct. Nous ne pouvons pas savoir si le raisonnement est correct et la formulation fautive ou si le raisonnement est faux. Lors d'un échange oral, ce type de formulation est rarement repris et questionné, l'enseignant se contente au mieux de reformuler correctement. Il semble pourtant

essentiel de travailler avec les élèves sur ce type de productions pour les amener à expliciter leur raisonnement.

On note par ailleurs que les élèves ne relèvent pas le problème du signe. On peut estimer que cette donnée n'a pas été prise en compte. Elle n'a donc pas induit une analyse des variations.

E₂ : La conclusion évoque les grandeurs effectivement nommées.

Groupe C₁'

produit en croix : $774 \times 47,5 : 7 \rightarrow$ ça ne marche pas

ce n'est pas proportionnel.

Test avec Excel \rightarrow ce n'est pas proportionnel

P₄ : Un calcul est posé sans que le résultat soit donné et sans que la procédure de validation soit donnée.

P₅ : La procédure est évoquée. Le « test avec Excel » n'explique pas le travail effectué avec le logiciel. Nos observations lors du travail nous permettent d'affirmer qu'il s'agit en fait de la représentation graphique.

E₁ : Le groupe C₁' ne fait pas vraiment de phrases si ce n'est la conclusion avec toujours l'utilisation impropre de l'adjectif « proportionnel » et l'imprécision du mot « ce ». Les grandeurs ne sont pas évoquées et les techniques ne font pas référence à des cadres. On peut supposer que le registre explicatif se limite à celui des suites numériques proportionnelles.

Groupe D₁'

Élève 26 :

Non le quotient de proportionnalité n'est pas commun c'est-à-dire pas de relation de proportionnalité.

Élève 21 :

7		45
<hr/>		
774		≈ 4975

Il n'y a pas de coefficient de proportionnalité.

La pression n'est pas proportionnelle à la température.

Élève 17 :

Ce n'est pas proportionnel car il n'y a pas de coefficient de proportionnalité.

T en °F	7	$\approx 7,61$
P en hPa	774	842

P₃: L'élève 26 parle de « quotient de proportionnalité », l'élève 21 écrit qu'il n'y a pas de coefficient de proportionnalité.

P₄: Dans le groupe, les élèves semblent avoir utilisé le produit en croix alors qu'ils parlent tous de « coefficient de proportionnalité » ou de « quotient de proportionnalité ». Nous voyons un tableau qui évoque le produit en croix pour un des élèves et ce même tableau avec des unités pour un autre mais dans les deux cas une case n'est pas remplie avec la valeur donnée dans le texte, mais avec une valeur calculée. Le résultat est précédé du signe \approx pour indiquer qu'il s'agit d'une valeur approchée. Il est plus difficile de conclure sur ce type de calcul que sur le calcul des quotients. En effet, les valeurs du tableau donné dans le texte de l'exercice sont des mesures considérées comme empiriques. Une formule permet de calculer une valeur théorique mais elle ne permet pas de calculer une mesure empirique, cette mesure étant sujette à des imprécisions. Il est donc plus difficile de conclure à partir d'un tel calcul. La recherche d'un coefficient de proportionnalité est de nature différente car on ne calcule plus quelque chose qui serait mesurable mais un rapport entre des mesures existantes. C'est sans doute ce qui explique que la conclusion porte sur le fait qu'il n'existe pas de coefficient de proportionnalité.

E₂: On peut estimer que les élèves 21 et 17 travaillent sur les grandeurs du fait qu'ils concluent en utilisant les mots « température » et « pression » mais l'élève 17 est le seul à les utiliser explicitement dans sa procédure.

E₁: L'élève 26 ne parle que de nombres et utilise le mot « relation » sans préciser à quoi s'applique cette relation.

Groupe E₁'

Élève 47 :

Oui, c'est proportionnel, car le coefficient est 2,99.

$$\frac{774}{259} \approx 2,99 \text{ et } \frac{850}{284} \approx 2,99$$

Sur Excel on a fait un tableau en rajoutant la valeur (0 ; 0) et on obtient une droite qui passe par O et qui passe par tout les points.

Élève 5 :

Non, pour pouvoir savoir si la pression est proportionnelle il faut faire l'inverse de la fraction c'est à dire :

$$\frac{259}{774} = \frac{774}{259} \approx 2,99... \text{ alors que } \frac{314}{942} = \frac{942}{314} = 3$$

inverse

donc comme le résultat n'est pas identique, la pression n'est pas proportionnelle.

Élève 31 :

Oui et non, car la pression est proportionnelle à la température que si l'on arrondi au 100^e, 10^e ou à l'unité. Donc en physique ça l'est.

Dans ce groupe, les élèves n'ont pas réussi à se mettre d'accord.

P₃: L'un affirme qu'il y a proportionnalité par la recherche d'un coefficient de proportionnalité et des valeurs approchées au 100^eme, l'autre dit que le « résultat n'est pas identique » et conclut à la non-proportionnalité alors que le troisième répond « oui et non » et précise que dans le contexte des sciences physiques on peut considérer des valeurs arrondies et conclure qu'il y a proportionnalité entre les grandeurs.

L'élève 5 semble rester sur une autre question qui est de savoir dans quel sens on calcule le quotient. Comme les autres lui disent que ce n'est pas important, il pense que les deux calculs doivent donner le même résultat. Il écrit donc l'égalité entre le quotient et son inverse avant de donner une valeur approchée du résultat supérieur à 1. En effet les élèves sont souvent déroutés lorsque le numérateur est inférieur au dénominateur. L'élève 5 a donc préféré calculer l'inverse des quotients posés initialement. Il conclut à la non-proportionnalité car $2,99... \neq 3$ sans tenir compte de la précision des résultats.

P₅: L'élève 47 confirme sa conclusion par la représentation graphique. Il est remarquable que cet élève précise avoir ajouté une donnée (le point de coordonnées (0 ; 0)) pour vérifier que la droite passait bien par l'origine.

E₁ et E₂: Nous retrouvons la controverse déjà évoquée : doit-on considérer les valeurs exactes ou approchées ? L'élève qui indique que dans le contexte des sciences physiques on peut considérer qu'il y a proportionnalité entre les grandeurs, suggère qu'il n'y a pas proportionnalité dans le cadre des mathématiques. Il met bien en tension les deux registres explicatifs : les suites numériques proportionnelles et les grandeurs proportionnelles. On peut estimer que l'élève 47 travaille dans le registre des grandeurs proportionnelles alors que l'élève 5 est dans le registre des suites numériques proportionnelles.

Groupe F₁'

le tableau n'est pas proportionnel car :

$$\frac{842}{281,5} = \frac{1684}{563} = 2,991\ 119\ 005$$

$$\frac{850}{284} = \frac{425}{142} = 2,992\ 957\ 746$$

Il n'y a pas de coefficient de proportionnalité.

P₃ : Les quotients sont calculés avec la calculatrice et les élèves recopient l'intégralité des décimales affichées comme si le résultat exact était le nombre décimal affiché. Ils concluent à la non-proportionnalité du fait de l'écart entre les deux résultats.

E₁ : Le groupe F₁' ne se pose pas la question de la précision des résultats. Ici encore l'adjectif « proportionnel » est utilisé abusivement pour qualifier le tableau. On peut donc estimer qu'il est dans le registre des suites numériques proportionnelles.

IV.3.3 : Synthèse dans l'espace de contraintes a posteriori

Les deux espaces de contraintes qui suivent listent les expériences mises en place par les élèves au sein des différents groupes (ce qui est en italique correspond aux formulations telles qu'elles peuvent être lues dans les productions écrites) et permettent d'identifier ce qui relève d'une part du registre empirique lié aux données, et d'autre part du registre des nécessités lié aux modèles dans les cases grisées. Dans le dernier espace de contraintes est indiqué en grisé ce qui a été mobilisé par les élèves de la seconde 1 à l'intérieur de l'espace de contraintes initial élaboré dans l'analyse *a priori*.

Nous pouvons repérer que les registres explicatifs sont essentiellement les suites numériques proportionnelles et les grandeurs proportionnelles. La proportionnalité dans le cadre fonctionnel n'est évoquée que dans le registre graphique mais il est aussi probable que la représentation graphique des données ne soit pas associée à la représentation d'une fonction. A ce stade, aucun élève ne s'est intéressé aux variations ni même à proprement parlé à une relation fonctionnelle entre les grandeurs.

Expériences mises en place par les élèves	Groupe A₁ : <i>Méthodes utilisées :</i> - trouver le coefficient - produit en croix - fonction vrai/faux de la calculatrice	Groupe B₁ : <i>Si les résultats étaient proportionnels, le résultat du produit en croix serait le même</i>	Groupe C₁ : Utilise le tableur pour tracer un graphique. <i>La pression est proportionnelle à la température car la courbe est droite.</i>	Groupe D₁ : <i>Il faut diviser le bas par le haut et trouver le même nombre à chaque fois</i>	Groupe E₁ : Recherche un éventuel coefficient de proportionnalité	Groupe F₁ : Recherche un éventuel coefficient de proportionnalité, utilise des valeurs arrondies qui permettent de conclure à la proportionnalité
Registre empirique lié aux données	D₃ : Les coefficients sont différents D₄ : Le calcul du produit en croix donne un résultat erroné D₆ : Affichage « faux »	D₄ : Le calcul du produit en croix donne un résultat erroné	D₅ : On obtient des points alignés.	D₃ : Les coefficients sont différents	D₃ : Les coefficients sont différents D₄ : Le calcul du produit en croix donne un résultat erroné	D₃ : Les coefficients sont très proches.
Registre des nécessités à l'intérieur des modèles	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30%;"> <p>N₃ : Nécessité d'une relation non proportionnelle sauf si on utilise l'unité Kelvin pour la température.</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30%;"> <p>N₂ : Nécessité d'une intervention de la proportionnalité dans la relation.</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30%;"> <p>La représentation graphique est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc c'est la représentation graphique d'une fonction affine.</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30%;"> <p>Deux suites de nombres (grandeurs) sont proportionnelles si on peut calculer un coefficient de proportionnalité (approximatif)</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30%;"> <p>Si deux suites de nombres sont proportionnelles, on peut appliquer le produit en croix.</p> </div> </div>					
Registre explicatif	E₁ : Suites numériques proportionnelles	E₂ : Grandeurs proportionnelles		E₃ : Proportionnalité dans le cadre fonctionnel		

Tableau 45: Espace de contraintes lié à l'étape 1 dans la classe de seconde 1 premier demi-groupe

Expériences mises en place par les élèves	Groupe A₁' : recherche un éventuel coefficient de proportionnalité	Groupe B₁' : recherche un éventuel coefficient de proportionnalité	Groupe C₁' : Calcule un produit en croix Représentation graphique avec le tableur	Groupe D₁' : <i>il n'y a pas de coefficient de proportionnalité</i> calcule un produit en croix	Groupe E₁' : recherche un éventuel coefficient de proportionnalité, utilisation de valeurs arrondies qui permettent de conclure à la proportionnalité Utilise le tableur pour tracer un graphique.	Groupe F₁' : <i>il n'y a pas de coefficient de proportionnalité</i>
Registre empirique lié aux données	D₃ : Les coefficients sont différents	D₃ : Les coefficients sont différents	D₄ : Le calcul du produit en croix donne un résultat erroné D₅ : On n'obtient pas des points alignés avec l'origine	D₃ : Les coefficients sont différents D₄ : Le calcul du produits en croix donne un résultat erroné	D₃ : Les coefficients sont très proches D₅ : On obtient des points alignés avec l'origine	D₃ : Les coefficients sont différents
Registre des nécessités à l'intérieur des modèles	<p>N₃ : Nécessité d'une relation non proportionnelle sauf si on utilise l'unité Kelvin pour la température.</p>		<p>N₂ : Nécessité d'une intervention de la proportionnalité dans la relation.</p>			
	La représentation graphique est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc c'est la représentation graphique d'une fonction affine.	Deux suites de nombres (grandeurs) sont proportionnelles si on peut calculer un coefficient de proportionnalité (approximatif)		Si deux suites de nombres sont proportionnelles, on peut appliquer le produit en croix.		
Registre explicatif	E₁ : Suites numériques proportionnelles		E₂ : Grandeurs proportionnelles		E₃ : Proportionnalité dans le cadre fonctionnel	

Tableau 46: Espace de contraintes lié à l'étape 1 dans la classe de seconde 1 second demi-groupe

Expériences mise en place par les élèves	Comparaison des valeurs	Conversion	Recherche d'un coefficient de proportionnalité	Égalité type produit en croix	Représentation graphique	Test d'alignement avec la calculatrice	Calculs à partir des propriétés de linéarité	Calcul des variations des mesures de grandeur
Registre empirique lié aux données	D₁ : Les pressions sont les mêmes dans les trois tableaux.	D₂ : Seule l'unité de mesure des températures change. Les valeurs prises dans les différentes unités ne sont pas proportionnelles.	D₃ : Les coefficients sont différents dans deux cas, ils sont très proches dans le troisième.	D₄ : Le calcul des produits en croix donne un résultat erroné sauf dans un tableau où les valeurs sont très proches.	D₅ : On obtient des points alignés.	D₆ : Affichage « vrai » ou « faux »	D₇ : Les calculs par propriétés de linéarité donnent des résultats erronés sauf dans un tableau où les valeurs sont très proches.	D₈ : Une même variation sur une grandeur amène une même variation sur l'autre, une variation double de l'une amène une variation double de l'autre.
Registre des nécessités à l'intérieur des modèles	N₁ : Nécessité d'un calcul permettant de passer d'une grandeur à l'autre.		N₂ : Nécessité d'une intervention de la proportionnalité dans la relation.		N₃ : Nécessité d'une relation non-proportionnelle sauf si on utilise l'unité Kelvin pour la température.		N₄ : Nécessité de variations proportionnelles.	
	La représentation graphique est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc c'est la représentation graphique d'une fonction affine.		$f(x+a) = f(x) + b$ avec a et b constantes caractérise une fonction affine.		La variation de pression est proportionnelle à la variation de température.		$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Constante}$ donc f est affine et $f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} x + f(0)$	
Registre explicatif	E₁ : Suites numériques proportionnelles		E₂ : Grandeurs proportionnelles		E₃ : Proportionnalité dans le cadre fonctionnel		E₄ : Fonction affine	

Tableau 47: espace de contraintes de la séance 1 étape 1 dans la classe de seconde 1 à l'intérieur de l'espace de contraintes a priori

IV.3.4 : Ce que les fonctions langagières nous apprennent de la mise en relation des données et des conditions du problème à l'étape 1

Les fonctions langagières permettent de repérer que les élèves ont des connaissances très hétérogènes qui jouent sur la compréhension des énoncés mais aussi sur les productions. En effet, dans un même groupe de trois élèves, même s'il y a accord sur une procédure et sur une réponse, les formulations sont différentes et peuvent éventuellement révéler des conceptions différentes du même objet mathématique. Ainsi au niveau des productions du groupe E_1 on peut repérer que :

- l'élève 49 écrit des quotients sous forme fractionnaire et en donne une **valeur approchée au 10 000^{ème}** ;
- l'élève 34 écrit que les quotients sont égaux à des valeurs considérées comme des **valeurs exactes** avec les neuf décimales affichées par la calculatrice ;
- l'élève 33, utilise le quotient sous forme fractionnaire et le multiplie par une autre valeur inscrite dans la première ligne du tableau et donne le résultat sous **forme fractionnaire**.

La comparaison des nombres se fait donc à partir de valeurs approchées pour le premier, « décimales exactes » ou du moins considérées comme telles pour le second et fractionnaire pour le troisième. La production écrite ne permet pas de savoir quels ont été les arguments permettant de conclure à la non-proportionnalité mais elle permet de différencier trois mises en relation des données et des conditions en lien avec la nature des nombres considérés. Pour l'élève 33 tout se passe comme si les données étaient des nombres entiers et pour lui, deux suites de nombres sont proportionnelles si les rapports entre deux entiers en correspondance sont toujours égaux à la même fraction. Pour l'élève 34, tout se passe comme si les données étaient des nombres réels et pour lui deux suites de nombres sont proportionnelles si les quotients de deux nombres en correspondance sont toujours égaux à un même nombre décimal. Enfin pour l'élève 49, tout se passe comme si les données étaient des grandeurs et pour lui, il existe un lien fonctionnel entre elles. Les grandeurs sont proportionnelles si un coefficient multiplicatif caractérise cette relation .

Le groupe se met donc d'accord sur une réponse sans que la procédure ne soit explicitée ou questionnée. Seule la procédure de l'élève 49 peut laisser penser que l'unité de raisonnement U1 a été mobilisée (identification d'une relation fonctionnelle).

Dans les productions du groupe E_1' , nous avons aussi un écart entre les formulations. L'élève 5 met en évidence que c'est « l'inverse » qu'il s'agit de calculer. Il semble y avoir une confusion liée au vocabulaire entre « l'inverse » et « le quotient ». Cette confusion peut venir de la règle « diviser c'est multiplier par l'inverse » ou du fait que deux grandeurs proportionnelles permettent en fait de définir deux coefficients multiplicateurs inverses l'un de

l'autre. Plusieurs groupes se sont questionnés sur le calcul à effectuer : $\frac{P}{T}$ ou $\frac{T}{P}$. L'analyse des enregistrements est nécessaire pour permettre de lister les arguments et donc les nécessités sous-jacentes. Il semble cependant que la procédure que nous identifions comme le calcul d'un coefficient de proportionnalité se révèle très souvent comme un calcul de quotient sans que le coefficient de proportionnalité ne soit réellement évoqué. Le statut du calcul est plutôt de l'ordre du test. Il n'est pas évident que le résultat soit considéré comme un nombre, et encore moins comme un coefficient, d'autant que ce coefficient ne correspond pas à une grandeur quotient connue des élèves. Le différents sens attribués au coefficient de proportionnalité est une explication possible de la difficulté qu'éprouvent les élèves à formuler cette procédure dans un autre registre que celui des suites de nombres proportionnelles.

On note que les élèves utilisent différents mots pour désigner les mêmes objets (par exemple « résultat », « nombre », « quotient de proportionnalité ») mais aussi différents symboles pour les désigner. L'élève 33 écrit par exemple « $774 \div 259 = \frac{774}{259}$ ». On peut faire l'hypothèse que cette étape lui permet de faire le lien entre la « division » et le « quotient ». Une autre hypothèse est que cet élève a utilisé sa calculatrice collègue qui affiche le résultat des divisions sous forme de fractions irréductibles à moins de spécifier qu'on veut une valeur décimale approchée. Cette deuxième hypothèse est confirmée par un autre groupe lorsqu'il écrit : « $842 \div 8,5 \approx \frac{1684}{17}$ et $11 \times \frac{1684}{17} \approx 1089,64$ » car il semble peu probable que les élèves aient cherché l'écriture fractionnaire spontanément. Cette écriture est donc liée à l'apparition de nouvelles fonctions sur les calculatrices usuelles du collège et peut être un obstacle par rapport au problème posé. En effet l'écriture fractionnaire induit une représentation du nombre comme valeur exacte alors qu'il s'agit d'un rapport entre des valeurs approchées.

On retrouve cette confusion dans d'autres formulations. Ainsi pour expliquer la procédure utilisée, certains nomment ce qu'ils calculent « on cherche le **coefficient de proportionnalité** », d'autres détaillent le calcul en l'écrivant, ou en le décrivant avec des mots qui ne sont plus liés aux objets mais à leur représentation : « la **relation entre le bas et le haut** » ou encore « il faut **diviser le bas par le haut et trouver le même nombre à chaque fois** », d'autres encore jouent sur les grandeurs. Cet exemple montre que le concept de proportionnalité est peu lié à des nécessités mais plutôt à des techniques. D'ailleurs le fait que les élèves aient recours à plusieurs techniques pour répondre au problème est un autre élément qui va dans ce sens.

Pour certains la reformulation dans le registre algébrique atteste d'un passage relativement aisé d'un registre à l'autre comme ici, où l'élève prend soin d'encadrer la formule obtenue :

« Nous choisissons le coefficient de proportionnalité 3 avec $\boxed{P=3 \times T}$. »

Au niveau de la compréhension de l'énoncé, on note que les grandeurs sont oubliées dans 9 groupes sur 12 au profit des nombres. On peut remarquer que la proportionnalité n'est pas définie dans la moitié des groupes. Les élèves utilisent « ce » pour désigner suivant les cas : le tableau, les nombres, les grandeurs, les unités ? D'autres reviennent à la question pour formuler leur réponse et écrivent « la pression est proportionnelle à la température » mais cette formulation ne prouve pas que les grandeurs ont été clairement identifiées, elle peut être liée au conseil méthodologique donné par l'enseignant, qui est de répondre à une question en reprenant les termes mêmes de cette question.

IV.3.5 : Configuration des registres à l'étape 1

Si nous reprenons les différentes procédures utilisées pour justifier la proportionnalité des grandeurs, nous retrouvons des théorèmes élèves erronés. Le tableau 48 liste les procédures, l'activité mise en place par les élèves et les théorèmes élèves utilisés.

Procédure utilisée	P ₃ : Recherche d'un éventuel coefficient de proportionnalité	P ₄ : Égalité type produit en croix	P ₅ : Représentation graphique	P ₆ : Test d'alignement avec la calculatrice
Tâche effectuée	Calculer deux quotients ou tous les quotients	Calculer une quatrième proportionnelle et vérifier qu'elle est égale à la valeur de l'énoncé.	Représenter les points, tracer la courbe correspondant au tableau de valeurs, vérifier qu'il s'agit d'une droite passant par l'origine.	Entrer toutes les données dans deux listes de la calculatrice et demander un test d'alignement
Théorème élève utilisé	Le coefficient de proportionnalité n'existe que dans un seul sens : « On doit diviser le bas par le haut » « Le résultat doit être égal au 100° près »	le résultat doit être un nombre « rond » « Le résultat doit être égal à la valeur de l'énoncé au 100° près »	Les points doivent être alignés avec l'origine.	
Type de raisonnement mobilisé (voir partie 3 chapitre III.3.2.1)	Par un contre-exemple, un raisonnement exhaustif ou un raisonnement par l'absurde	Par un raisonnement par l'absurde	Par la perception visuelle directe ou indirecte avec l'usage de la règle	Par une lecture d'information sur la calculatrice et en faisant confiance à la calculatrice.

Tableau 48: mise en lien des procédures utilisées avec les tâches effectuées, les théorèmes utilisés et les raisonnements mobilisés dans la classe de seconde 1 à l'étape 1

A l'écoute des enregistrements, nous pouvons entendre les élèves échanger autour des procédures et finalement, c'est la cohérence entre les résultats qui amène la conviction. C'est plus la répétition et la fréquence d'apparition d'un résultat obtenu par des procédures et des raisonnements variés qui assure la validité d'une assertion que la validité de ce résultat au regard d'une théorie. Même dans le travail individuel, le fait que certains élèves testent plusieurs techniques montre bien qu'ils ont besoin de plusieurs résultats allant dans le même sens pour se convaincre de l'impossibilité de la proportionnalité. Pour ces élèves, le registre explicatif n'est donc pas à proprement parler un cadre au sens de Douady, mais bien une configuration dans différents cadres. C'est cette configuration qui permet de valider l'énoncé. Cela pose la question de ce qu'est pour eux, à ce stade, une nécessité.

IV.4 : Analyse a posteriori de l'expérimentation de l'étape 2 dans la classe de 2nde 1

Les élèves qui étaient dans des groupes choisis A, B, C, D, E et F et respectivement (A', B', C', D', E' et F') sont répartis aléatoirement dans neuf groupes numérotés de 1 à 9, de sorte qu'il y ait dans chaque groupe au moins un élève ayant eu les températures exprimées en degrés Celsius, un autre en degrés Fahrenheit et un troisième en Kelvins. La question ici est de confronter les résultats obtenus à l'étape 1 et de conclure sur une relation entre les grandeurs qui soit vraie quelles que soient les unités.

Pour cette étape nous allons confronter deux analyses, la première porte sur les productions écrites collectives des groupes et la seconde sur l'analyse des enregistrements des interactions dans les groupes qui ont amené les élèves à produire cet écrit collectif. Nous précisons bien ici qu'il n'y a eu aucune intervention de l'enseignant ou de débat en classe entre les étapes 1 et 2.

IV.4.1 : Analyse des productions écrites étape 2

Les productions des différents groupes sont retranscrites ici en respectant le style et l'orthographe.

Groupe 1 : Les nombres affichant la température ne sont pas les mêmes car les pays du monde n'utilisent pas les mêmes unités pour les mesures thermiques mais la température reste la même. C'est ce qui explique qu'aucun des tableaux de mesures n'est proportionnel.

Groupe 2 : En utilisant un convertisseur, on peut vérifier que les résultats des trois professeurs sont les mêmes.

$P = 3 K$ donc la fonction qui relie la pression P à la température K en Kelvin est une fonction linéaire.

$P = 273 + 3C$ donc la fonction qui relie la pression à la température C en °C est une fonction affine.

Groupe 3 : Les trois unités de température sont proportionnelles entre elles.

Groupe 4 : Plus la pression monte, plus la chaleur augmente. La pression est la même que ce soit en °C, °F ou K et K est proportionnel au °C.

Groupe 5 : Après avoir converti les Fahrenheit et les Kelvin en degrés Celsius, il y a une approximation de $\pm 0,2$ degrés par rapport aux mesures obtenues par le professeur Anders. Cette approximation peut faire varier la proportionnalité.

Groupe 6 : Les températures sont différentes car ce ne sont pas les mêmes unités de mesures mais la pression reste identique car tout est mesuré en hPa.

La température, même avec une unité différente, reste de la même intensité.

Quelque soit l'unité de mesure, la pression ne changera pas si la température reste la même.

Groupe 7 : Toutes les mesures sont pareil mais pas dans les mêmes degrés (°C, °F, K).

On peut expliquer les différences car les unités ne sont pas les mêmes.

Les Kelvins sont proportionnels alors que les Celsius et les Fahrenheit eux ne sont pas proportionnels.

Il y a une relation entre les deux car lorsque l'on augmente la température le P augmente aussi.

$$ax + b$$

Groupe 8 : Les unités de mesure sont différentes, ce qui veut dire que les nombres qui représentent les degrés de la température ne soient pas les mêmes, la proportionnalité de ces mesures dépend donc de l'unité.

Les unités ne sont pas proportionnelles ce qui explique les différences.

Groupe 9 : Les températures montrent que les degrés Celsius et les Kelvins sont différents de 273 unités. J'en conclus qu'il n'y a pas de différence entre les 2 unités puisque le résultat est proportionnel au niveau des unités.

Pour les Kelvins $69 - 21 = 48$ donc l'écart est de 48° mais pour 0°C on a : $32 - 0 = 32$, l'écart est de 32° . Du coup ce n'est pas proportionnel.

Ces productions montrent que dans cette étape, les groupes se sont trouvés confrontés à différents obstacles que nous allons détailler ci-après.

L'obstacle du concept de mesure

La grandeur est confondue avec sa mesure et la mesure avec l'unité. Il est très difficile pour certains élèves de concevoir qu'une même température puisse s'exprimer par des mesures différentes suivant les unités choisies. Pour certains groupes la conclusion de cette étape se résume à cette prise de conscience et ils n'ont pas abordé plus en avant la question de la proportionnalité (conclusion du groupe 6). Pour d'autres encore, cette différence d'expression suffit à expliquer la proportionnalité dans certains cas (conclusions des groupes 1, 8 et 9). Un autre groupe est resté bloqué car aucun membre n'avait conclu à la proportionnalité dans le cas des mesures en Kelvins. Nous les avons orientés vers la question des valeurs approchées et ils ont fait les conversions en mesurant les approximations (conclusion du groupe 5). Certains ont remarqué que les conversions ne fonctionnaient pas de la même façon entre degrés Celsius et degrés Fahrenheit et degrés Celsius et Kelvins (conclusions des groupes 7, 8, 9). D'autres n'ont pas fait ce constat et concluent au contraire que les mesures dans les différentes unités sont proportionnelles (conclusion du groupe 3).

Une confusion est aussi introduite par le document fourni. Le thermomètre photographié ressemble à un baromètre ou un nanomètre et les élèves pensent qu'il s'agit d'un cadran pour lire la mesure de pression. Ceci explique la conclusion du groupe 9 où la proportionnalité observée pour le tableau en Kelvins s'explique par la proportionnalité entre les deux unités de mesure, alors que pour les degrés Celsius et degrés Fahrenheit assimilés à la pression, il n'y a pas proportionnalité. Ce groupe n'a donc pas identifié correctement les deux grandeurs ni les unités correspondantes. On peut penser que le déplacement du problème dans le registre des tableaux a mis à l'écart la situation initiale et que l'étape 2 n'a pas été mise en relation avec l'expérience de l'étape 1.

L'obstacle de l'addition

Les conclusions des groupes 4 et 9 mettent en évidence la proportionnalité entre les mesures exprimées en degrés Celsius et en Kelvins. On retrouve ici l'obstacle de l'addition : les élèves décrivent comme proportionnelles deux grandeurs dont la différence est constante.

Le groupe 9 explique que l'écart de 273 est celui calculé entre 0°C et -273K . D'autres groupes font le même raisonnement et écrivent : « $0^\circ\text{C} = -273\text{K}$ ». On remarque que le signe égal peut être utilisé par les élèves à la place de la flèche, on ne peut donc pas savoir s'il s'agit d'une égalité au sens d'une conversion ou d'une relation fonctionnelle. Le groupe 9 a calculé la

différence entre 21°C et 69°F et trouve un écart de 48. Comme pour 0°C la température correspondante est de 32°F, la différence n'est pas constante, ils concluent que les deux mesures de température exprimées dans les deux unités degrés Celsius et degrés Fahrenheit ne sont pas proportionnelles.

La covariation des deux grandeurs

Deux groupes pointent le fait qu'il existe une relation entre la température et la pression, ils argumentent en disant que lorsque la température augmente la pression augmente aussi (conclusions des groupes 4 et 7) ou comme le signale le groupe 6 : « la pression ne changera pas si la température reste la même ». La question demeure de décrire cette covariation mais aucun groupe ne pense à calculer les variations des écarts. Le groupe 7 précise « qu'il y a une relation » puisque l'augmentation de la température entraîne une augmentation de la pression. Cette relation est recherchée entre les nombres or une suite de nombres est la même dans les trois cas alors que l'autre suite diffère, les élèves vont donc considérer séparément la question des unités en écrivant « les Kelvins sont proportionnels ».

A l'écoute de l'enregistrement, on entend un élève lancer l'idée de « fonction affine » mais sans étayer sa proposition. Elle peut être associée à certains éléments du contexte et peut même venir d'un théorème élève lié à une représentation binaire : « si ce n'est pas linéaire alors c'est affine ». Cette idée peut aussi venir du fait que l'expérimentation proposée a été présentée aux familles dans un document avec le titre « problématisation et fonctions affines ». Cet élève ajoute dans la conclusion : « $ax + b$ ». Il est intéressant de noter comment cette formulation symbolise à elle seule la notion de fonction affine, et ce quel que soit le niveau d'études des élèves. On remarque aussi qu'elle est imposée au groupe sans contestation ni discussion. On peut faire l'hypothèse que la formulation sous une forme savante séduit le groupe.

L'apport scientifique sur l'internet

Les élèves ayant accès aux ordinateurs ont fait différentes recherches. Aucun groupe n'a laissé de traces écrites, mais l'observation nous a permis de repérer que ces recherches pouvaient avoir des objectifs différents : définir pour celles autour du vocabulaire, trouver une procédure pour celles autour des outils, obtenir la solution. Certains élèves saisissent dans le moteur de recherche les mots clés ou ceux qui leurs posent problème (ici Kelvins, unités de température, degrés Fahrenheit). Ces nouvelles informations suffisent parfois à éclairer la lecture, elles sont souvent le départ de nouvelles investigations. Certains ont directement cherché des convertisseurs. Ces convertisseurs ont permis de conclure au fait que les températures mesurées étaient sensiblement les mêmes pour les trois professeurs. D'autres ont cherché la solution et ont saisi « loi de Gay-Lussac » car ils ont repéré cette désignation dans la vidéo présentée à l'étape 1, ils ont obtenu l'expression de la loi en question. La loi ainsi trouvée est générale alors que dans la situation, il s'agit d'une expérience. Les élèves ont obtenu une formulation du type « la fonction qui relie la pression P à la température K en Kelvins est une fonction linéaire. » qu'ils ont interprétée au regard de la situation proposée en écrivant $P = 3 K$. De même leurs recherches les ont forcément amenés à des expressions comme « la fonction qui relie la pression à la température C en °C est une fonction affine. »

mais ils n'ont pas pu obtenir sur l'internet l'expression $P = 273 + 3C$ qui figure dans leur conclusion. En effet, on ne trouve sur l'internet que l'expression de la loi pour des températures exprimées en Kelvins. Leur expression est fautive mais elle est construite à partir du fait que $K = C + 273$ et que $P = 3K$.

Si nous reprenons le losange de problématisation correspondant à la situation que nous avons établi dans notre analyse *a priori* (voir schéma 28), nous pouvons repérer l'écart entre le problème global tel que nous l'avons posé et le problème tel que les élèves le posent effectivement.

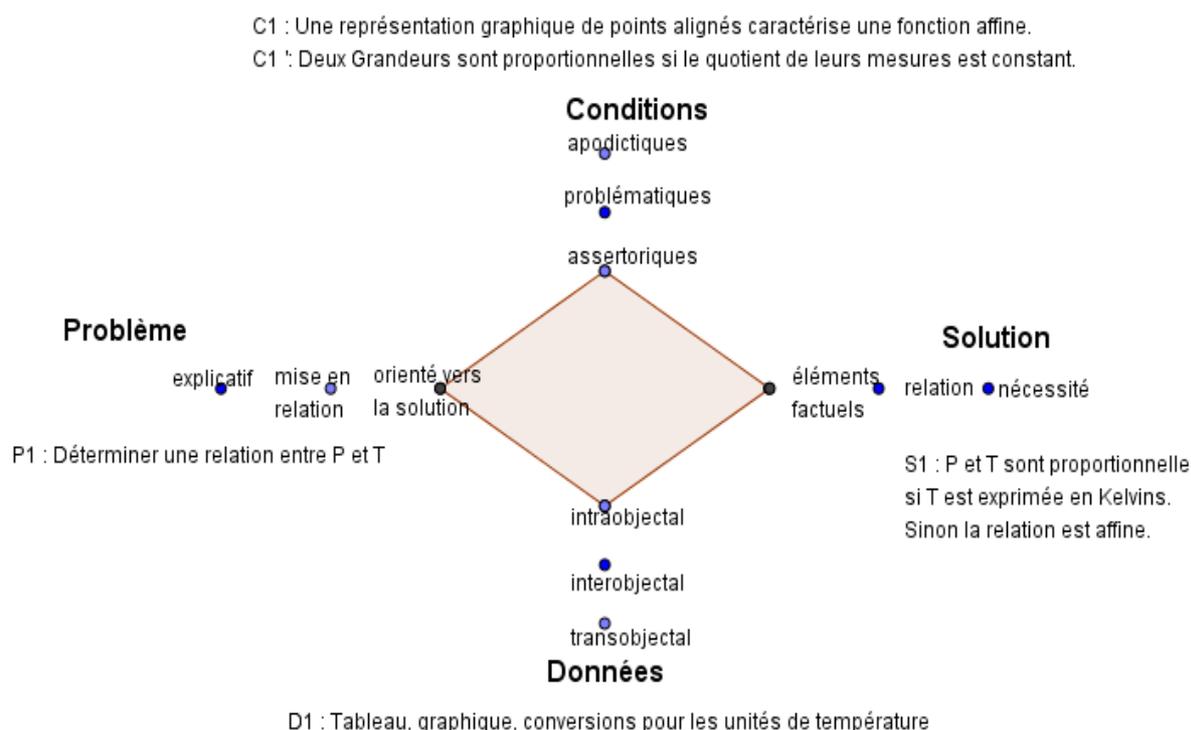


Schéma 28: Rappel du losange de problématisation de l'analyse a priori de la situation 1

Ce schéma peut en fait se décliner en trois problèmes différents que nous noterons Q_{11} , Q_{12} et Q_{13} . En effet, la conclusion que nous avons notée S_1 procure une nouvelle donnée : la pression est proportionnelle à la température exprimée en Kelvins, mais elle n'est pas proportionnelle à la température exprimée en degrés Celsius ou Fahrenheit. Cette nouvelle donnée mise en tension avec les conditions amène plusieurs questions :

- Q_{11} : La relation entre des grandeurs peut-elle être différente suivant les unités utilisées ?
- Q_{12} : La conversion entre les unités de température est-elle une relation de proportionnalité ?
- Q_{13} : Existe-t-il une relation entre deux grandeurs qui varient dans le même sens autre qu'une relation de proportionnalité ?

Nous pouvons donc établir trois nouveaux losanges de problématisation dans lesquels nous allons préciser la nature de la question, des conditions, des données et des solutions.

Pour le problème Q_{11} posé dans tous les groupes, nous sommes face à un problème explicatif. Il s'agit d'expliquer pourquoi la relation entre pression et température n'est pas toujours proportionnelle. Les données sont traitées de manière inter-objectale puisqu'elles vont être comparées, analysées les unes par rapport aux autres. Les conditions restent des conditions assertoriques liées à des apprentissages du collège. La solution est du domaine de la relation, l'expression de la relation entre pression et température est mise en lien avec les changements d'unités. Nous obtenons donc le losange de problématisation 34 :

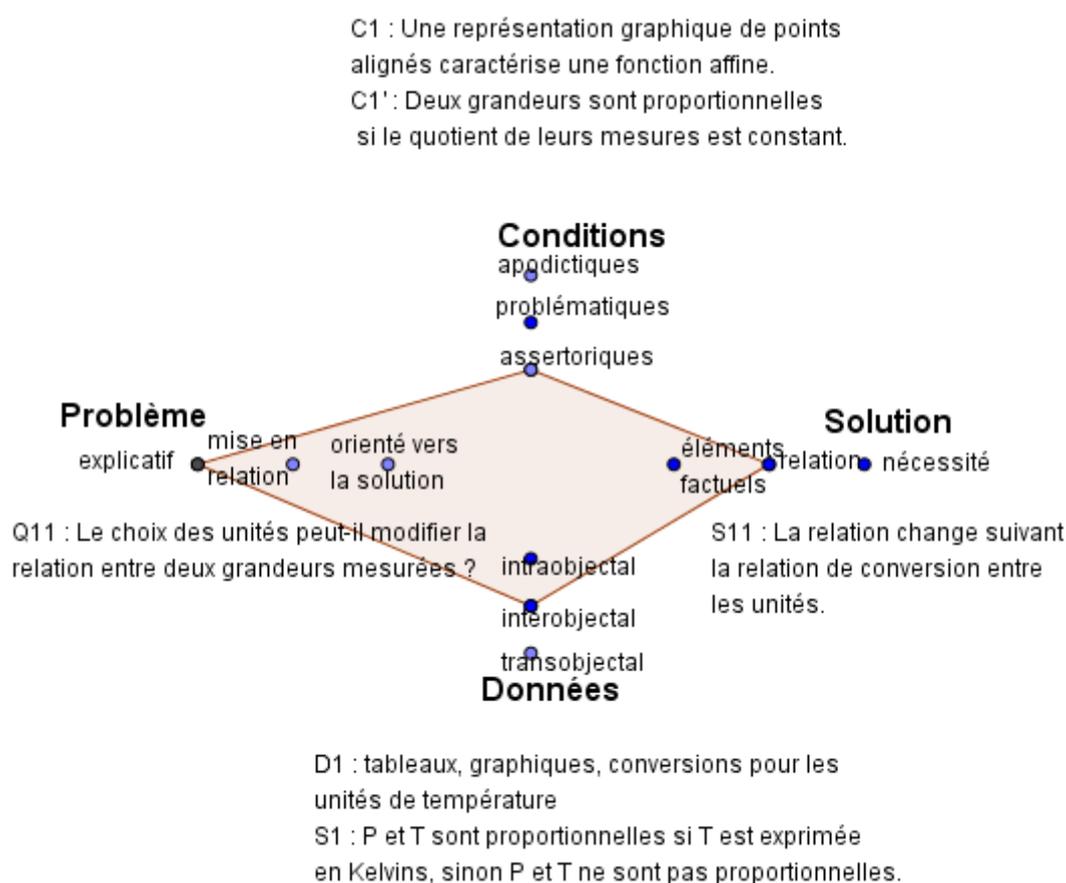


Schéma 34: Losange de problématisation lié au problème Q_{11}

Pour certains élèves (les groupes 5, 6 et 8) cette conclusion suffit à expliquer le fait que la pression soit proportionnelle à la température dans un cas et pas dans les deux autres. Pour les groupes 3, 4 et 9, cette solution S_{11} amène le problème suivant Q_{12} pour identifier le lien entre la relation entre la pression et la température et les conversions. Pour les groupes 2 et 7, elle les porte vers le problème Q_{13} pour caractériser une relation fonctionnelle.

Le problème Q_{12} est un problème orienté vers la solution, on recherche si la conversion est une relation de proportionnalité, la réponse est un élément factuel, la conversion est ou n'est pas proportionnelle. Les conditions sont assertoriques, les élèves disposent des outils

pour résoudre le problème et les données sont traitées de manière inter-objectale puisque plusieurs données doivent être mises en relation pour conclure. Nous obtenons donc le losange suivant pour lequel seul le premier niveau de problématisation est mobilisé. La solution suffit aux groupes 3, 4 et 9 à expliquer les différentes formes de la relation entre la pression et la température. L'obstacle est que les élèves ne travaillent que dans le cadre des suites numériques proportionnelles mais qu'ils ne pensent pas en termes de Grandeur (grand G). Pour eux, il n'y a pas de paradoxe : les relations entre les grandeurs sont différentes suivant les valeurs prises par leurs mesures dans les différentes unités.

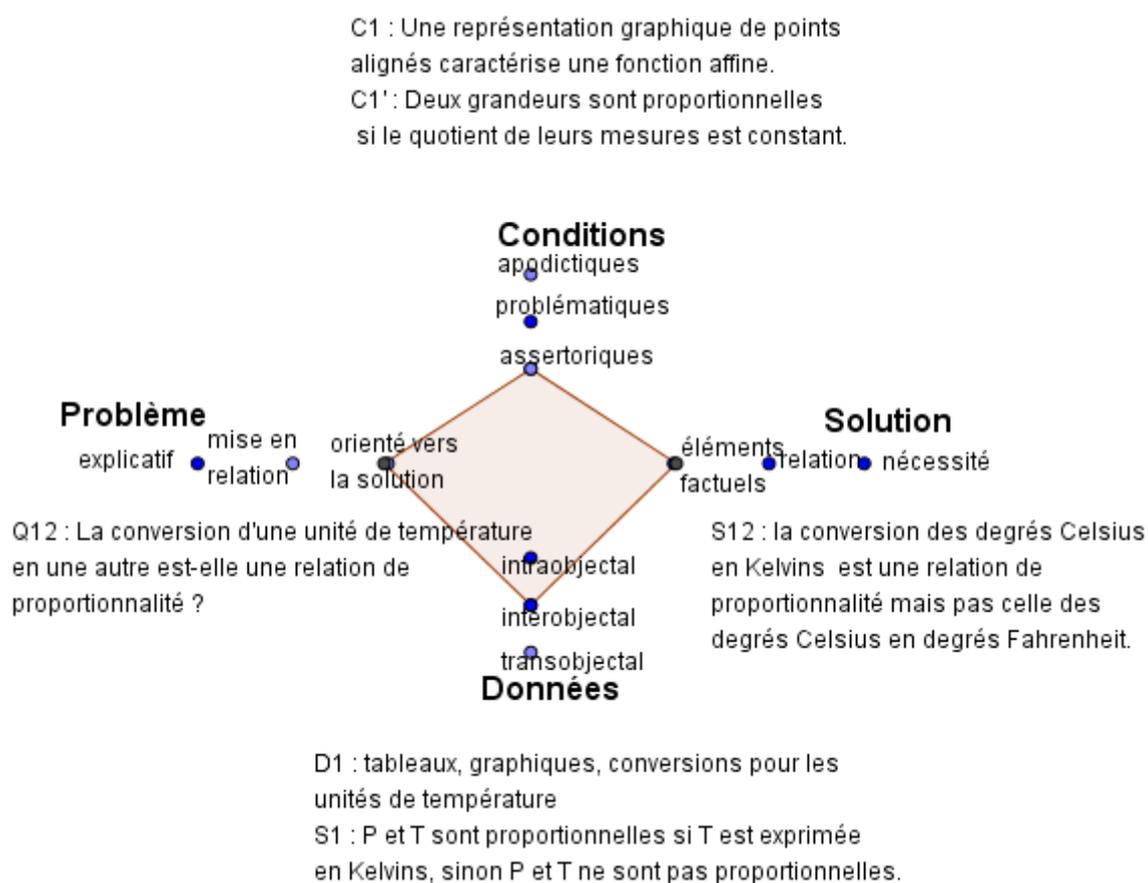


Schéma 35: Losange de problématisation lié au problème Q12

La solution S_{12} est erronée du fait que les élèves des groupes 3, 4 et 9 concluent que la conversion des degrés Celsius en Kelvins est une relation de proportionnalité. La différence entre les mesures dans ces deux unités est toujours de 273. N'ayant pas de mots ni de symboles pour parler de ce type de relation, les élèves utilisent le vocabulaire lié à la proportionnalité par une généralisation abusive de l'idée d'une « constante » dans le calcul permettant de mettre en relation les mesures dans ces deux unités. Cette solution est validée par les élèves car elle permet d'expliquer la relation entre les grandeurs par un raisonnement de type associatif qui permet une configuration entre différents registres explicatifs : P varie dans le même sens que T en $^{\circ}\text{C}$, les mesures exprimées en $^{\circ}\text{C}$ sont proportionnelles aux mesures en K, donc P est proportionnelle à T exprimée en K. A contrario, P varie dans le

même sens que T en °C mais les mesures en °C ne sont pas proportionnelles aux mesures en °F donc P n'est pas proportionnelle à T exprimée en °F. Pour mettre ce raisonnement en défaut, il s'agirait de mettre en évidence l'erreur sur la proportionnalité entre les mesures en °C et en K, mais aussi de poser la question de la relation entre P et T exprimée en °C et donc de la logique de ce raisonnement.

Le problème Q₁₃ est un problème explicatif, on cherche à expliquer la covariation des Grandeurs (grand G). Les conditions restent assertoriques, les élèves se basent sur les mêmes conditions que pour les problèmes précédents. Par contre les données sont traitées de manière intra-objectale en ce sens que la nécessité d'une relation affine résulte de la prise en compte d'une seule donnée : l'alignement des points. La condition utilisée est la caractérisation des fonctions affines par l'alignement des points de leur représentation graphique. On ne peut pas parler d'un traitement trans-objectal car l'affinité nécessaire du fait des propriétés du graphique ne permet pas de traiter les autres données du problème. Pour cela les élèves devraient effectuer des changements de cadres qui à ce stade restent problématiques.

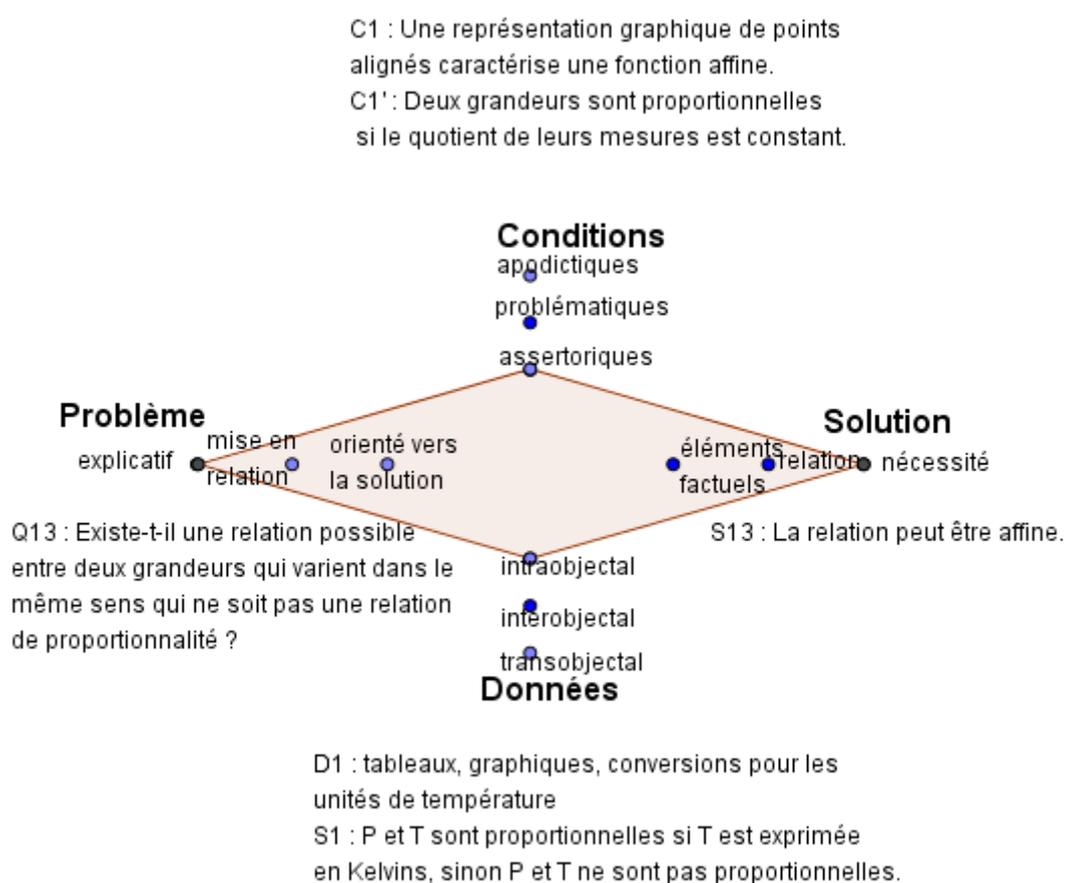


Schéma 36: Losange de problématisation associé au problème Q₁₃

L'objectif de l'étape est d'amener tous les élèves à travailler le problème Q₁₃. Nous faisons l'hypothèse qu'un débat en classe à ce stade aurait amené le groupe classe à la conclusion que la relation entre les deux grandeurs est une relation affine, mais nous pensons que peu d'élèves auraient compris le raisonnement du fait qu'ils sont encore sur les problèmes

précédents : quel rôle joue l'unité ?, les conversions sont-elles proportionnelles ? Si la séance se termine par une synthèse à partir des compte-rendus recueillis à ce moment précis, les écarts entre les élèves au niveau de l'apprentissage par problématisation peuvent empêcher certains de percevoir les nécessités car les registres explicatifs ne sont pas mobilisés autour des mêmes questions. Le problème du rôle des unités se pose dans le cadre des grandeurs proportionnelles, celui des conversions peut se poser dans celui des suites numériques, mais ni l'un ni l'autre ne rendent nécessaire de passer dans le cadre fonctionnel. Il s'agit donc de permettre à chaque élève de mobiliser le cadre fonctionnel pour y construire des nécessités liées à l'affinité. Ce n'est qu'à cette condition que le savoir pourra devenir disponible en référence aux registres explicatifs dans lesquels ces nécessités auront été mises en évidence.

Les documents soumis à l'analyse en deuxième séance, doivent permettre de caractériser cette covariation comme étant une relation affine. Nous allons orienter le travail autour de ce qui est commun aux trois expériences plutôt que de questionner sur les différences. L'objectif est de faire émerger que :

- sur le graphique, les points sont alignés ;
- les écarts sont proportionnels ;
- l'expression est de la forme $P = aT + b$ où a et b sont deux coefficients réels à déterminer.

IV.4.2 : Analyse des interactions dans les groupes par comparaison entre l'étape 1 et l'étape 2

Nous allons analyser le déroulement des échanges entre les élèves pendant l'étape 1 et pendant l'étape 2 pour rendre visible les déplacements effectués.

Enregistrement Dict5 de l'étape 1, groupe E, lycée 1

Le travail dure 10 minutes dans un groupe comportant deux filles et un garçon que nous appellerons Léa, Aude et Brice (voir transcription en annexe 44). Nous avons chronologiquement cinq épisodes :

- | | |
|-----------|----------------------------------|
| Épisode 1 | 02:32 : Quelle est la tâche ? |
| Épisode 2 | 04:42 : Calcul des quotients |
| Épisode 3 | 06:05 : La question des arrondis |
| Épisode 4 | 07:51 : La rédaction |
| Épisode 5 | 09:11 : Le choix de la procédure |

Ces cinq épisodes relèvent du même losange de problématisation donné ci-dessous. Le problème posé est bien celui indiqué dans la consigne, c'est un problème de mise en relation puisqu'il s'agit d'opérer sur les données pour obtenir des éléments qui permettront de

répondre. La solution reste factuelle, la réponse est oui ou non. Les données sont traitées de manière inter-objectales puisqu'elles doivent être comparées entre elles pour fournir la réponse. Enfin les conditions sont ici assertoriques puisque les élèves utilisent une définition qui a été apprise les années précédentes.

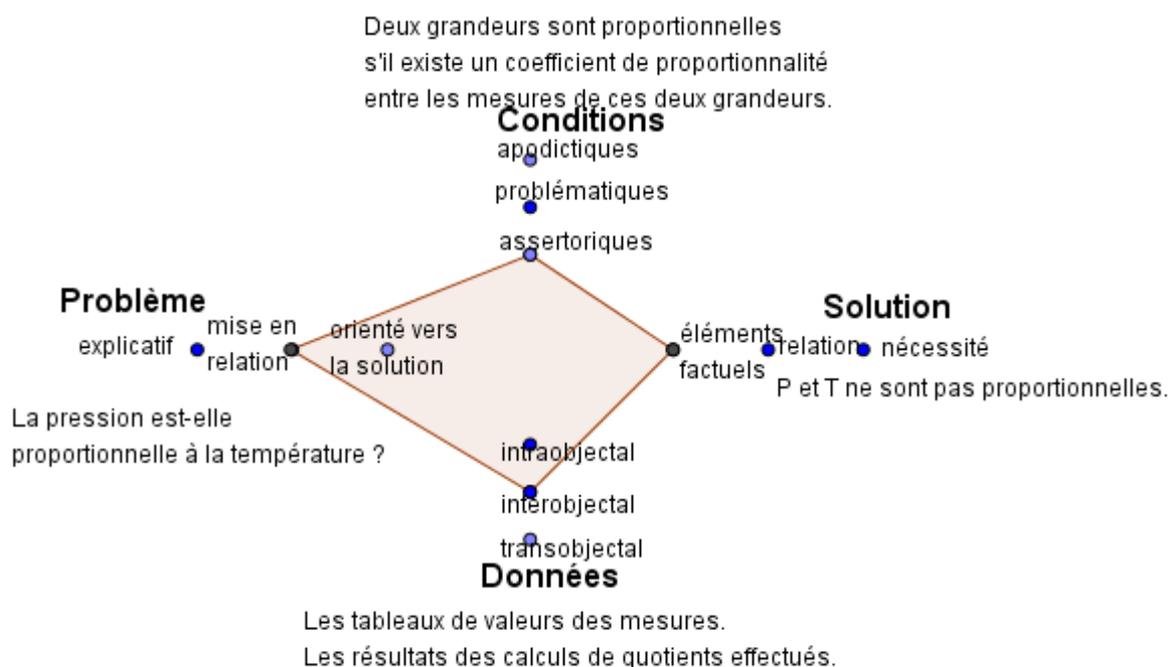


Schéma 37: Losange de problématisation de l'étape 1 dans le groupe E1

Nous ne pouvons pas tirer de nouvelles informations de ce modèle. Par contre nous allons utiliser la macrostructure du débat (Fabre et Orange, 1997 ; Chalak, 2012) pour mettre en évidence les propositions et les objections pendant le débat dans le groupe pour repérer comment les données et les conditions sont mises en tension. Cette macrostructure fait apparaître des propositions et des objections qui relèvent toutes de techniques, à aucun moment il n'est fait référence aux grandeurs, aux variations ou à la signification des opérations effectuées. La validation des procédures se fait au regard d'automatismes en terme d'activité : on a le droit de ... parce qu'on l'a déjà fait avec l'enseignant.

Les élèves cherchent à déterminer un coefficient de proportionnalité. Pour cela, ils calculent des quotients et obtiennent des résultats inférieurs à 1 relativement proches :

$$\frac{259}{774} \approx 0,3346 \quad \frac{314}{942} \approx 0,3333 \quad \frac{324}{974} \approx 0,3326$$

D'où la proposition de Aude : « c'est presque proportionnel ». Léa propose de calculer les inverses car « c'est la même chose ». Cette fois on obtient 2,9884 ; 3 et 3,0062. Si Léa pouvait être convaincue par un écart de 2 millièmes, il semble qu'elle ne peut pas considérer

deux nombres qui n'ont pas la même partie entière comme suffisamment proches pour conclure à l'égalité des quotients. La conception de non-proportionnalité est renforcée par la procédure de Brice, procédure proche du produit en croix qui consiste à appliquer le coefficient obtenu par le calcul d'un premier quotient à une autre donnée (« ça divisé par ça fois ça »). Ici $2,9884 \times 314 \approx 938$ or la pression correspondante à 314K est de 942hPa soit un écart de 4hPa.

On repère que les propositions sont faites par Brice ou Léa et que les contre-propositions viennent de Aude. Cette dernière intervient très peu et donne peu d'éléments.

Nous pouvons lister les éléments des différents registres (voir tableau 49) et remarquer que le travail s'inscrit dans le seul cadre des suites de nombres proportionnelles. La configuration de ces registres est essentiellement analytique, les validations se font en comparant les résultats à des expériences ou modèles qui ont été enseignés ou mis en œuvre dans la scolarité. Le vocabulaire utilisé ne fait pas référence à des éléments théoriques mais uniquement à des techniques de calcul instrumenté ou non. On peut aussi noter la reformulation au moment d'écrire le compte-rendu. Léa par exemple en 439 précise : « On fait deux chif... on fait deux nombres différents en fait, avec deux données différentes ». Le mot chiffre n'est pas prononcé entièrement, Léa corrige en disant « nombre », elle reprend ensuite en utilisant le mot « donnée ». Nous avons ici une recontextualisation. En effet, les échanges ont porté sur la comparaison de « chiffres » qui devait servir à prouver la proportionnalité de deux suites de « nombres » qui sont des mesures donc des « données ». Cette formulation permet de configurer le registre des modèles (comparaison des chiffres utilisés pour écrire les nombres) avec le registre empirique (comparaison des données du tableau) dans le cadre théorique des mathématiques et plus particulièrement le cadre arithmétique (les suites de nombres proportionnelles). Il n'y a cependant pas de trace d'une secondarisation du discours dans le groupe en ce sens qu'il n'y a pas reprise des énoncés pour généraliser ou pour évoquer les théories sous-jacentes. Si nous reprenons les unités de raisonnement définies précédemment (Partie 2 chapitre II), nous pouvons remarquer que le travail ici ne porte pas sur les grandeurs, pourtant l'unité U1 est mobilisée de par la question qui est posée aux élèves.

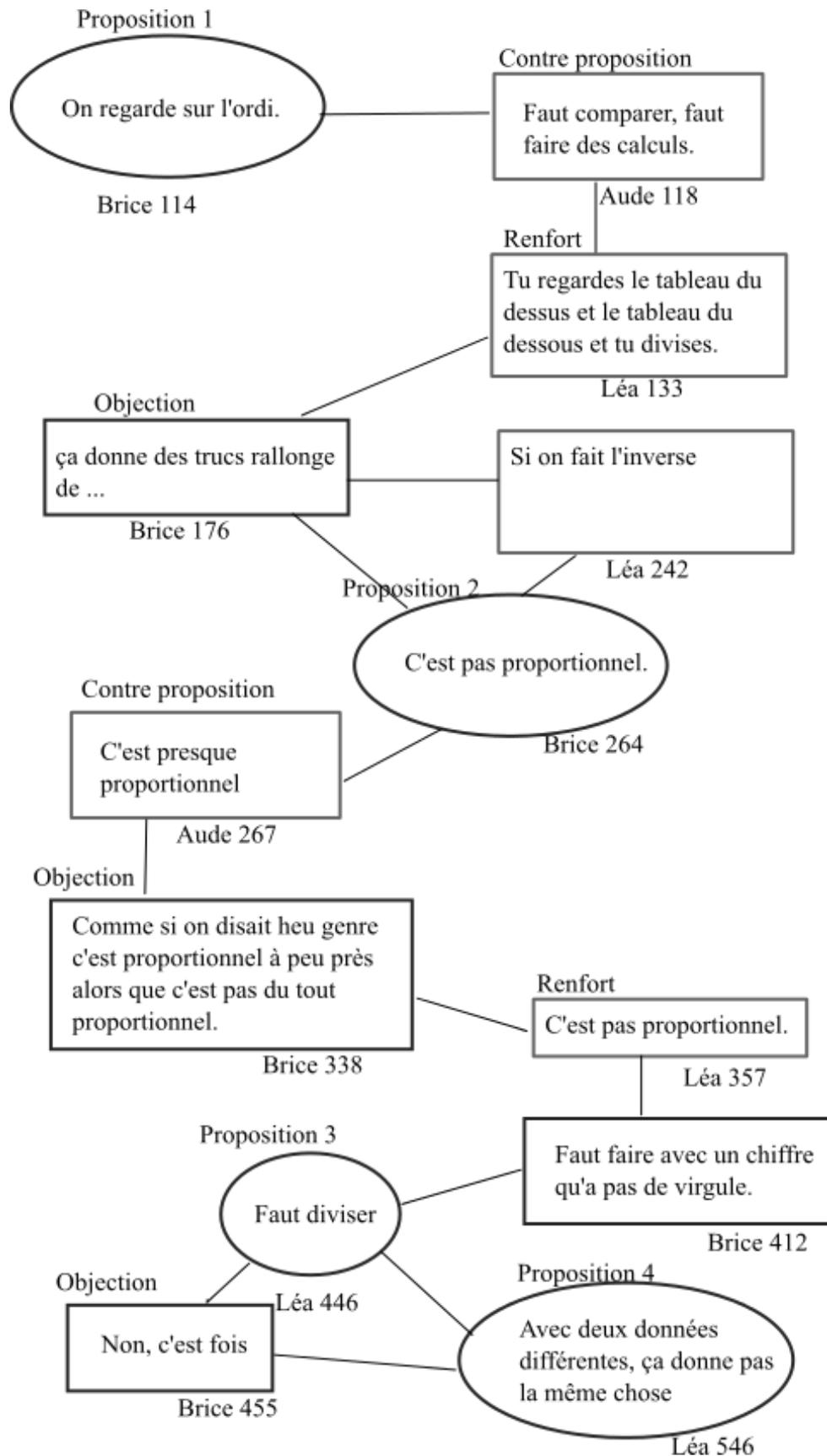


Schéma 38: Macrostructure du débat étape 1 lycée 1 groupe E

REGISTRE EXPLICATIF - cadre numérique et proportionnalité	REGISTRE EMPIRIQUE - Les quotients sont voisins de 0,33. - Les quotients inverses ne sont pas égaux. - Les écritures fractionnaires sur la calculatrice ne sont pas égales. - Le quotient multiplié par une autre donnée, ne donne pas le résultat du tableau.
	REGISTRE DES MODELES - Il y a proportionnalité entre deux suites de nombres si les quotients sont égaux. - On peut calculer les quotients ou leurs inverses pour prouver la proportionnalité. - Un contre-exemple suffit à prouver qu'il n'y a pas proportionnalité. - Un seul quotient ne prouve rien, on doit l'appliquer à une autre donnée pour vérifier qu'il y a proportionnalité. - On ne peut pas dire qu'il y a presque proportionnalité, les Grandeurs (grand G) sont proportionnelles ou non.

Tableau 49 : configuration des registres dans l'enregistrement Dict5 de l'étape 1, groupe E, lycée 1

Enregistrement Dict5 de l'étape 2, lycée 1 avec les nouveaux groupes

Le groupe est composé de quatre élèves que nous appellerons Lucas, Michel, Donatien et Hugo (voir transcription en annexe 45). L'échange dure 28 minutes et peut se décomposer en 10 épisodes dont trois (les épisodes 5, 9 et 10) sont des épisodes de formulation. Chaque épisode ci-dessous est suivi de l'instant où il débute en minutes et d'un titre correspondant au problème traité, nous avons donc chronologiquement :

Épisode 1 01:08 : le coefficient de proportionnalité

Épisode 2 05:45 : les différentes unités de température

Épisode 3 07:07 : le lien entre pression et température

Épisode 4 09:43 : la conversion des °C en K

Épisode 5 11:26 : la rédaction du compte-rendu

Épisode 6 16:20 : le paradoxe : on a les mêmes mesures mais dans des unités différentes or on a proportionnalité avec une unité et pas avec l'autre

Épisode 7 17:58 : les fonctions affines et linéaires

Épisode 8 19:42 : le modèle pour les °F

Épisode 9 20:49 : la formalisation avec les écritures algébriques

Épisode 10 24:53 : la rédaction et la conclusion

Parmi ces épisodes, deux sont de formulation et les autres sont de problématisation (voir partie 3 chapitre IV.1). Pour ces derniers, nous allons constituer le losange de problématisation en précisant les indices qui nous ont permis de faire ces hypothèses. Nous analyserons séparément les épisodes 5, 9 et 10 qui amènent les élèves à débattre de la formalisation des résultats dans le compte-rendu écrit.

Analyse des épisodes de problématisation

L'épisode 1 est ouvert par Donatien qui demande « Vous avez mis oui ou non ? », il fait référence à la question posée à l'étape 1 qui était : « les grandeurs sont-elles proportionnelles ? ». La question est de conclure sur la proportionnalité des deux grandeurs, il s'agit donc toujours d'un problème de mise en relation mais la solution est un fait qui se résume ici à donner le coefficient de proportionnalité. Les conditions évoquées par les élèves sont des conditions assertoriques (« c'est écrit dans le cours ») qui reprennent des définitions ou des techniques apprises (calcul des quotients, produits en croix) les données sont traitées de manière inter-objectale puisqu'elles sont comparées entre elles. Il est décidé que le coefficient de proportionnalité est 3 mais les élèves ont malgré tout mis en avant qu'ils n'avaient pas les mêmes unités. Nous avons donc un premier épisode qui peut être modélisé par le losange 39.

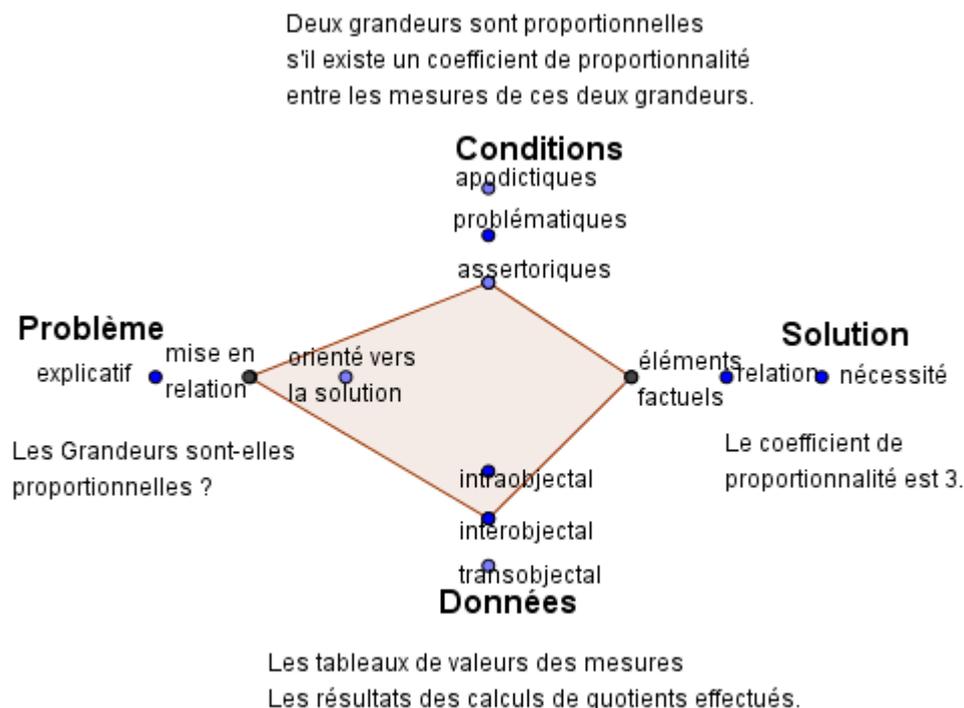


Schéma 39: Losange de problématisation étape 2 lycée 1 Dict5 épisode 1

L'épisode 2 est ouvert par la mise en relation des différentes données. On peut même penser qu'il s'agit en fait d'un problème explicatif qui vise à expliquer pourquoi le coefficient est bien 3 quelle que soit l'unité choisie. Michel propose de convertir en Kelvins sans justifier cette proposition. Le problème est un problème de conversion. La solution est une solution factuelle, il s'agit d'obtenir un nouveau tableau de valeurs, mais les données sont traitées en intra-objectal puisqu'il n'y a pas de mise en relation des données, les élèves cherchent une règle de conversion (donc une condition assertorique) qu'ils souhaitent appliquer à toutes les valeurs. Nous avons un nouveau losange de problématisation (voir schéma 40).

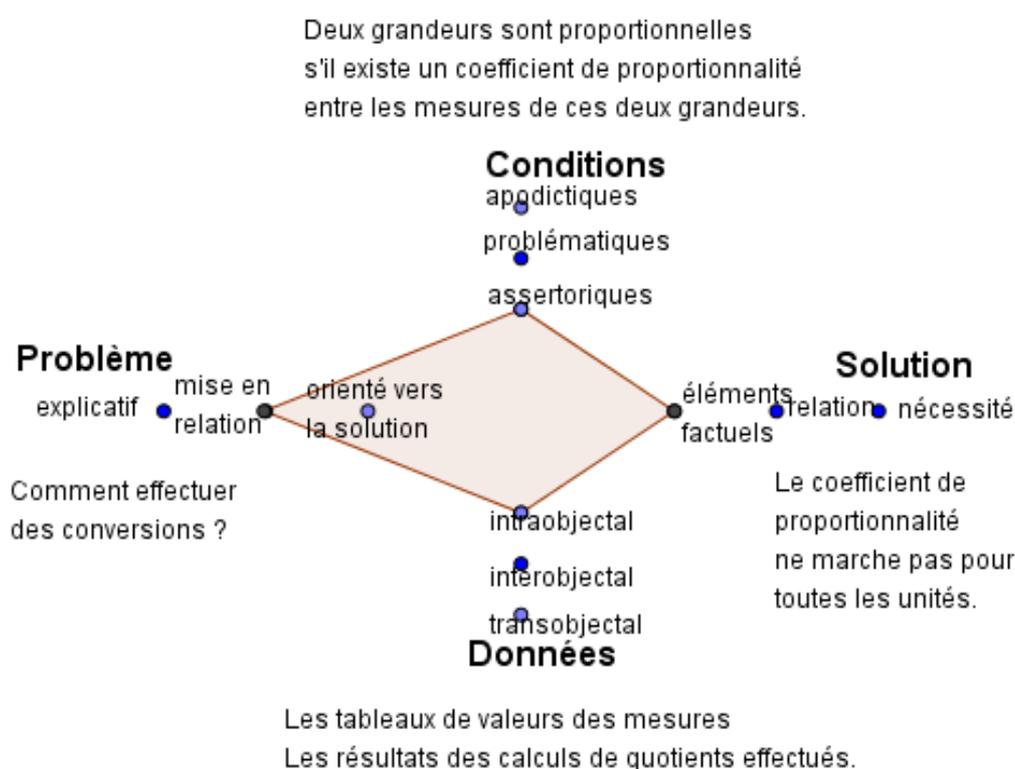


Schéma 40: Losange de problématisation étape 2 lycée 1 Dict5 épisode 2

L'épisode 3 se caractérise par une nouvelle question, celle de la consigne lue par Hugo : « Que peut-on conclure concernant la pression et la température ? ». Il s'agit toujours d'un problème de mise en relation qui demande de faire du lien entre les données. Cependant les élèves n'ont pas de connaissances assertoriques leur permettant de résoudre le problème, les conditions sont donc problématiques en ce sens qu'il faut envisager des possibilités et non plus des savoirs déjà là. Donatien dit « qu'il doit y avoir un lien », ce qui peut être une solution intermédiaire qui relève encore d'un élément factuel puisque ce lien n'est pas encore établi ou caractérisé. Nous avons donc un autre niveau de problématisation dans le schéma 41.

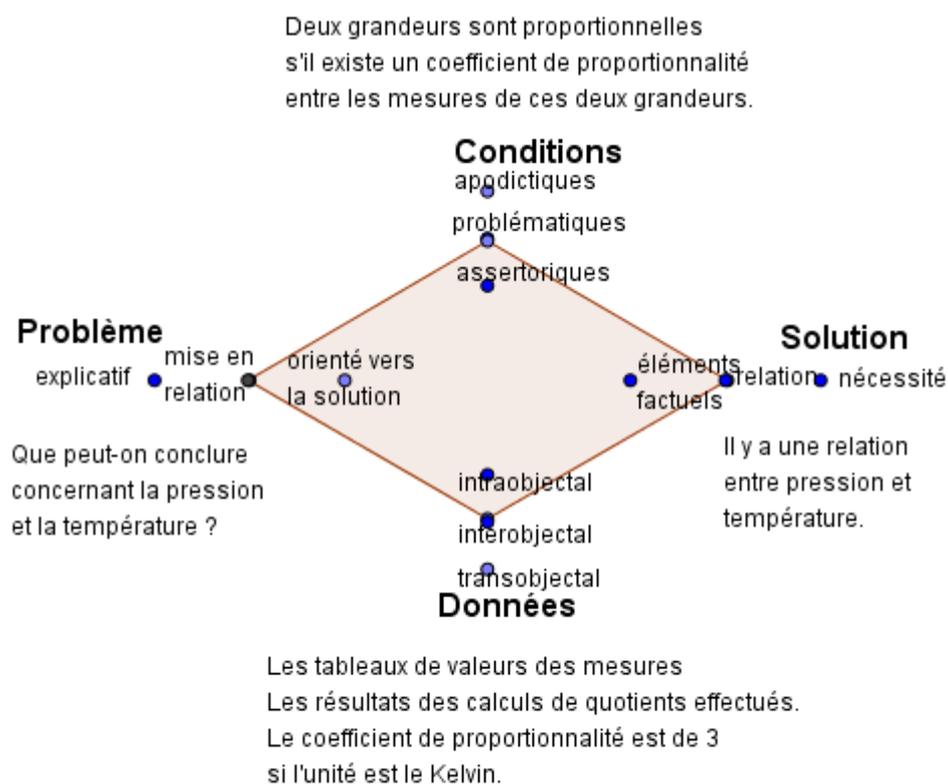


Schéma 41: Losange de problématisation étape 2 lycée 1 Dict5 épisode 3

L'épisode 4 correspond au moment où le groupe a identifié qu'il y avait trois unités différentes. Hugo synthétise : « Alors en gros on doit d'abord relier degrés Fahrenheit et Celsius et ensuite relier Celsius et Kelvin. », le groupe décide de tout convertir en Celsius. Le problème est alors orienté vers la solution, les mesures converties dans une même unité, et les conditions sont assertoriques car les élèves mobilisent des techniques acquises (produit en croix, multiplication par un coefficient, ajout d'un coefficient) ou un outil (convertisseur) mais ils n'essayent pas de construire la règle de conversion à partir des illustrations ou de valeurs obtenues avec le convertisseur. L'épisode se termine avec la certitude que les mesures sont les mêmes. Cet épisode peut être schématisé par le losange 42.

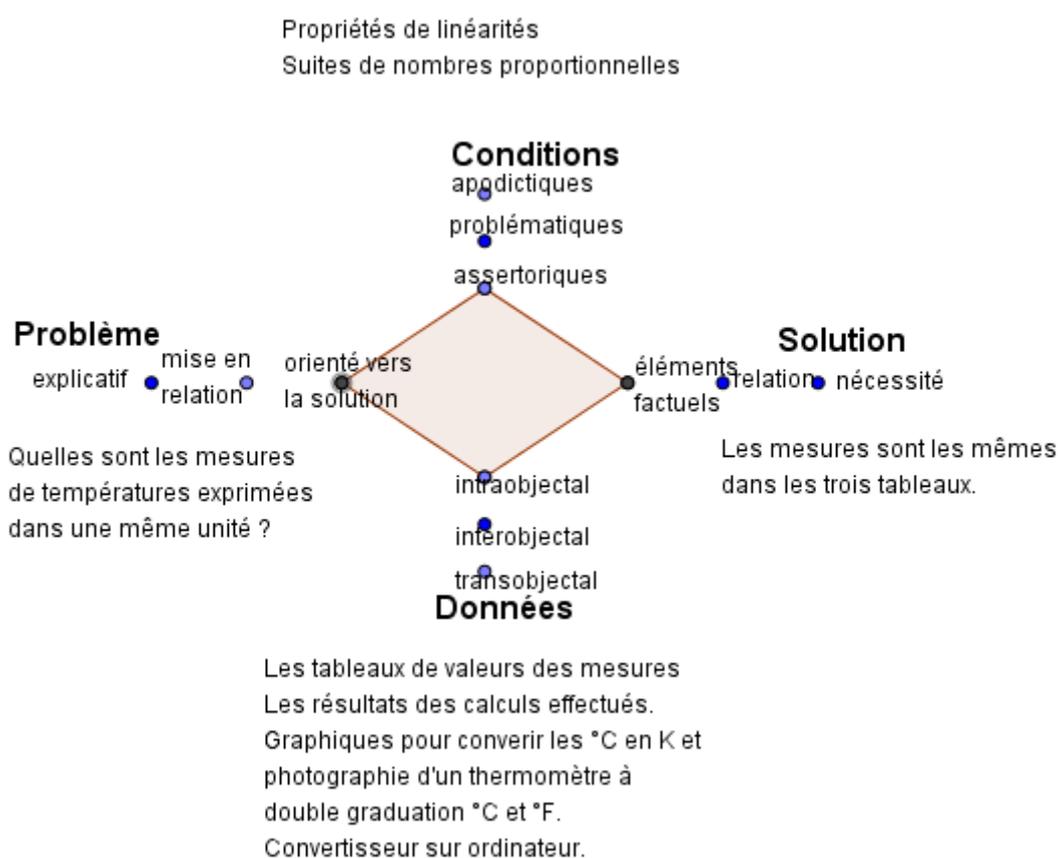


Schéma 42: Losange de problématisation étape 2 lycée 1 Dict5 épisode 4

L'épisode 5 est un épisode où se négocie le contenu du compte-rendu, nous l'étudierons dans la suite de ce chapitre avec un autre outil.

L'épisode suivant est plus difficile à analyser car les élèves ne travaillent pas tous la même question. Hugo lance le problème suivant en revenant aux consignes : « Mais c'est bizarre parce que là on a vu la pression et là ils ne parlent pas du tout de pression ». Le problème est explicatif : comment trouver la relation entre température et pression alors qu'on

sait seulement que suivant les unités choisies pour la température on peut avoir proportionnalité ou non entre les mesures ? Les conditions sont problématiques puisque les élèves cherchent de nouveaux possibles et la solution est bien une mise en relation. Les données sont considérées de manière inter-objectale ou même trans-objectale à certains moments, lorsque les élèves considèrent de manière générale les savoirs acquis sur les grandeurs.

L'épisode 6 peut être schématisé ainsi : le problème est de déterminer la relation entre la pression et la température, mais ici il s'agit bien d'expliquer quelle est cette relation ou du moins d'avoir des éléments de compréhension du fait que la relation est proportionnelle dans un cas et pas dans les autres. Les conditions sont maintenant problématiques, les élèves ont fait le tour des notions qu'ils ont apprises et ils savent qu'ils ne trouveront pas une réponse dans le cours. Il s'agit donc d'analyser les données pour essayer de définir une relation. La solution n'est plus factuelle. Nous obtenons le losange 43.

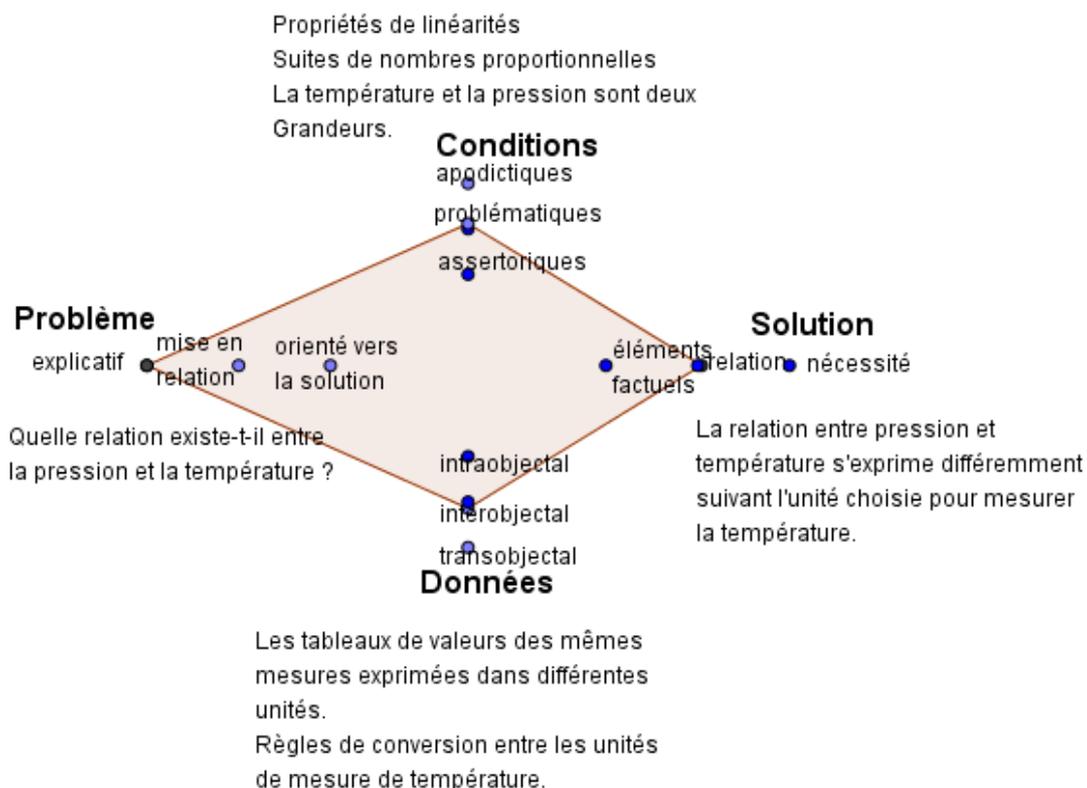


Schéma 43: Losange de problématisation étape 2 lycée 1 Dict5 épisode 6

L'épisode 7 pose un problème qui reste explicatif, il est initié par une attention portée au zéro. Michel l'exprime en terme de nécessité logique : « En fait limite le Kelvin c'est plus logique parce que le zéro c'est le zéro absolu. » L'idée sera reprise par Lucas : « Dans les Celsius le degré zéro absolu c'est moins 273, du coup ils commencent pas à partir de zéro et en fait c'est proportionnel. » qui met en relation la donnée mise en évidence par Michel et le

fait qu'il y a proportionnalité si on « part de zéro ». Hugo formalise ainsi la découverte de Lucas et Michel : « J'ai compris, en fait les degrés Celsius c'est pas proportionnel mais c'est une fonction affine justement, parce que tu fais plus 273 à chaque fois. » Les conditions sont assertoriques, les élèves s'appuient sur des définitions apprises en cours de mathématiques. La recherche se porte sur un problème explicatif et la solution est en terme de nécessité (il faut que ça passe par zéro) et de logique. Les données sont traitées de manière inter-objectale car elles ne relèvent pas encore toutes d'une même théorie en ce sens que des arguments sont liés à la conversion (relation entre les mesures d'une même grandeur dans deux unités différentes) et d'autres à la covariation (relation entre deux grandeurs). Nous obtenons le schéma 44 pour l'épisode 7.

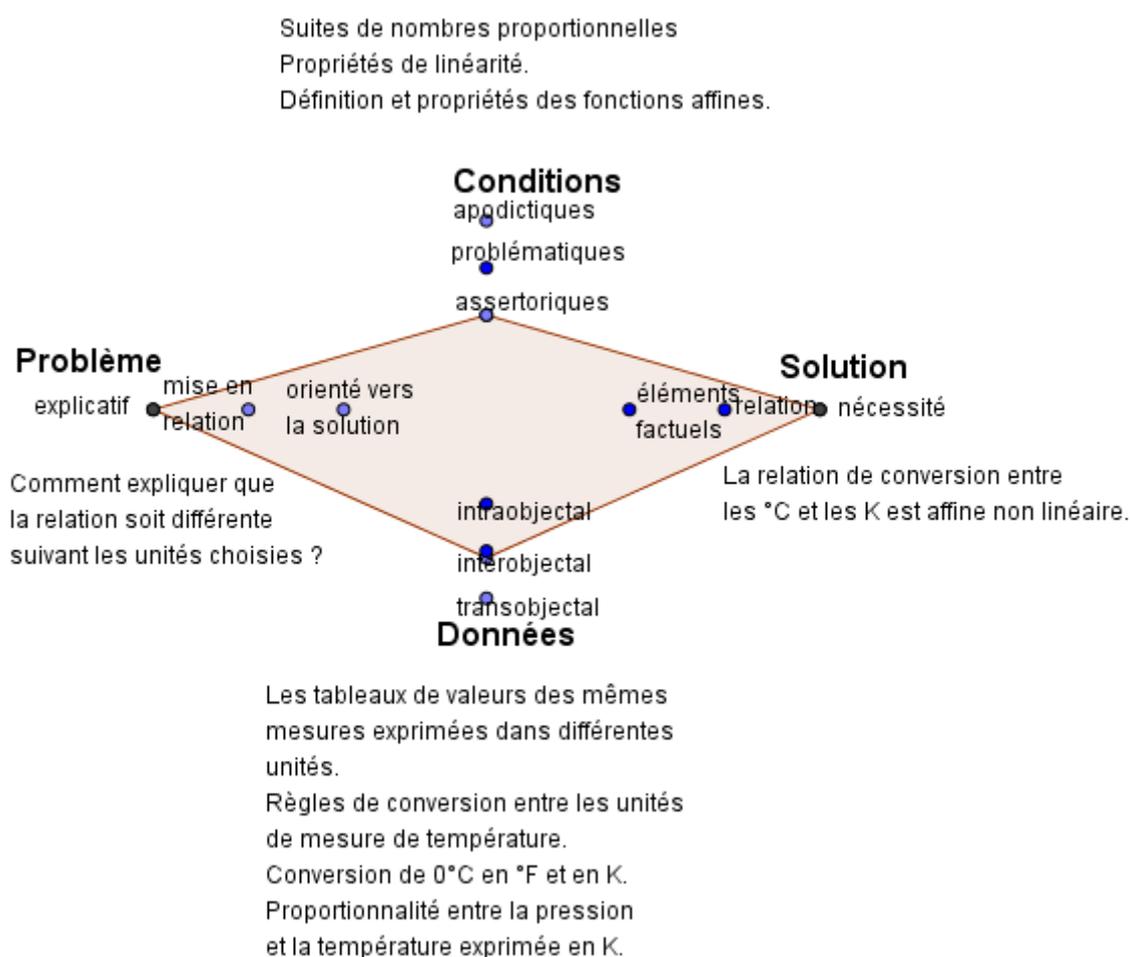


Schéma 44: Losange de problématisation étape 2 lycée 1 Dict5 épisode 7

Enfin la séance se termine sur un épisode qui amène une nouvelle question de généralisation : savoir comment l'explication trouvée peut prendre en compte le cas des degrés Fahrenheit. Il s'agit donc de considérer les données de manière trans-objectale et de

chercher un problème explicatif permettant de trouver une relation cohérente. Les élèves ne précisent cependant pas s'ils considèrent la relation entre la pression et la température ou la relation de conversion entre Kelvins et degrés Fahrenheit. Les conditions n'étant pas suffisantes, les élèves ont à explorer de nouveaux possibles mais ils n'en n'ont pas le temps. L'épisode se termine sur l'hypothèse que la relation entre la pression et la température exprimée en degrés Fahrenheit doit être affine mais sans savoir pour quelles raisons. On peut seulement noter que les élèves ne concluent pas à l'affinité du fait qu'il n'y a pas proportionnalité, ils savent qu'il faut encore chercher « C'est dommage, si on avait eu une heure de plus on aurait trouvé. », ils n'opposent donc pas linéarité et affinité. Par contre ils sont convaincus que la relation entre pression et température est une relation de proportionnalité quand la température est exprimée en Kelvins du fait du zéro absolu et qu'elle est affine si la température est exprimée en °C puisque la conversion entre Kelvins et degrés Celsius est affine.

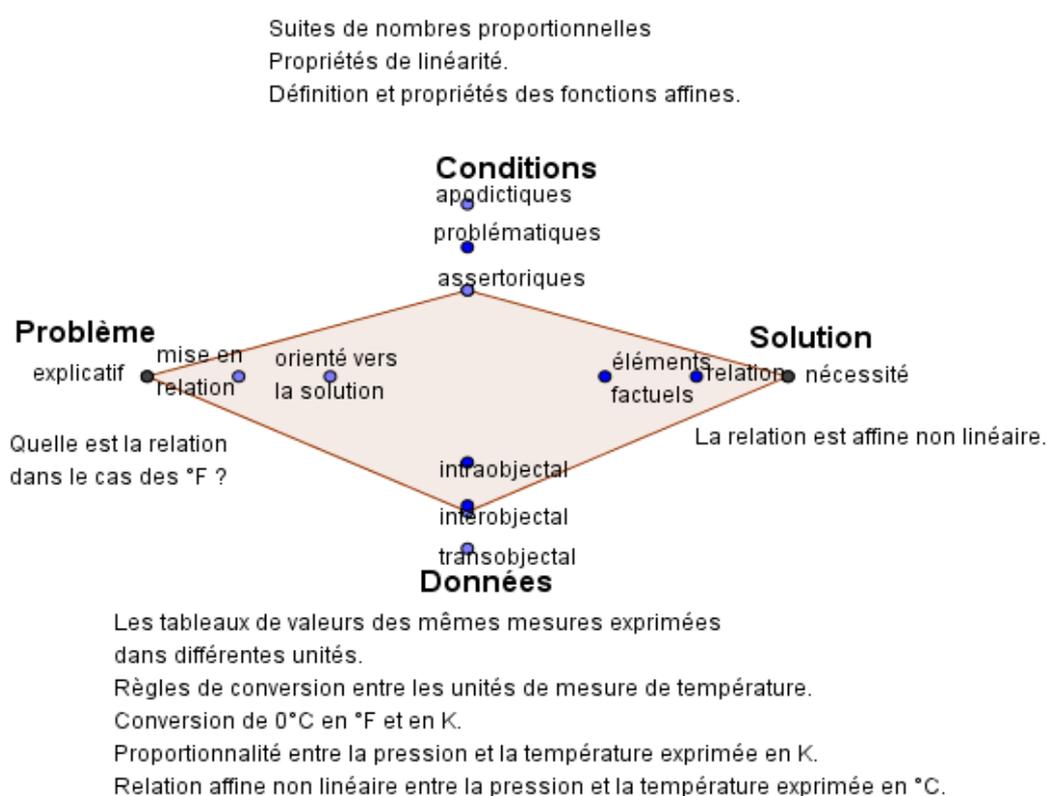


Schéma 45: losange de problématisation étape 2 lycée 1 Dict5 épisode 8

Leur hypothèse de généralisation au cas des degrés Fahrenheit peut être interprétée de différentes manières :

- les élèves ne connaissent pas d'autre relation possible entre deux grandeurs ;
- les points sont alignés dans les trois cas ;

- une conversion amenant à une relation de proportionnalité ne peut être que affine.

Même s'il n'est pas abouti, le problème se modélise par le losange 45.

Analyse des épisodes 5 et 8 de formalisation

Nous allons faire une analyse plus spécifique de l'épisode 5 afin de définir quels actants sont les élèves et de voir le lien avec leur comportement dans le groupe. Cet épisode 5 se joue de la 11^{ème} à la 15^{ème} minute du travail dans le groupe. Nous allons identifier le rôle de chaque élève. Hugo est plutôt entraîneur, il est proposant au tout début de l'épisode et il organise le travail : « on va voir », « on comparera », « faut que tu fasses », « je vais vérifier ». Donatien est plutôt énonciateur, il amène les autres à constater les conclusions à partir des traces écrites des calculs effectués. Lucas est agissant en ce sens qu'il pose de multiples questions, il cherche des informations, il demande des explicitations. Michel est plutôt observateur, mais il reformule ce que dit Lucas et on peut le considérer comme entraîneur car il guide l'activité de ce dernier. En fait le groupe est ici scindé en deux binômes qui sont sur une proposition différente. Hugo et Donatien veulent convertir toutes les mesures dans la même unité pour vérifier qu'elles sont les mêmes alors que Lucas et Michel considèrent déjà que les mesures sont les mêmes. Dans ce cas, ils estiment qu'on devrait avoir proportionnalité dans les trois tableaux de valeurs, pour eux, il y a une incohérence. L'épisode se clôt avec l'intervention de Hugo qui revient à la consigne de travail. L'échange est résumé dans la macrostructure du débat (Fabre et Orange, 1997 ; Chalak, 2012) où les propositions, oppositions et différents renforts sont rangés dans l'ordre chronologique du haut vers le bas (voir schéma 46).

Dans cet épisode, les élèves discutent de la procédure parce qu'ils se demandent ce qu'ils vont écrire dans le compte-rendu : « on a juste à recopier ça » conclut Donatien en 739. Le fait que les tableaux regroupent les mêmes mesures exprimées dans différentes unités peut être rédigé de deux manières : soit en proposant les tableaux avec toutes les valeurs converties dans une même unité, soit en donnant le processus de calcul qui permet de convertir. La deuxième solution est économique puisqu' « on n'a pas besoin de faire des calculs » (Donatien en 747), « on peut en noter juste deux trois, c'est pas important d'avoir toutes les mesures » précise Lucas en 828, et Hugo ajoute en 860 : « attends on n'a pas noté la relation qu'on avait mise en sachant que degrés Celsius est égal à degré Kepler moins 273 ». Nous avons ici la triade « intra-inter-trans » : écrire toutes les valeurs du tableau est au niveau « intra », chaque valeur et sa conversion est un élément en soi, il faut donc énoncer toutes les valeurs isolément ; en écrire deux ou trois relève du modèle, on suppose implicitement que la technique fonctionne de la même manière pour toutes les autres valeurs, nous sommes dans un mode « inter » ; le mode « trans » relève de la règle de conversion dans un principe généralisateur.

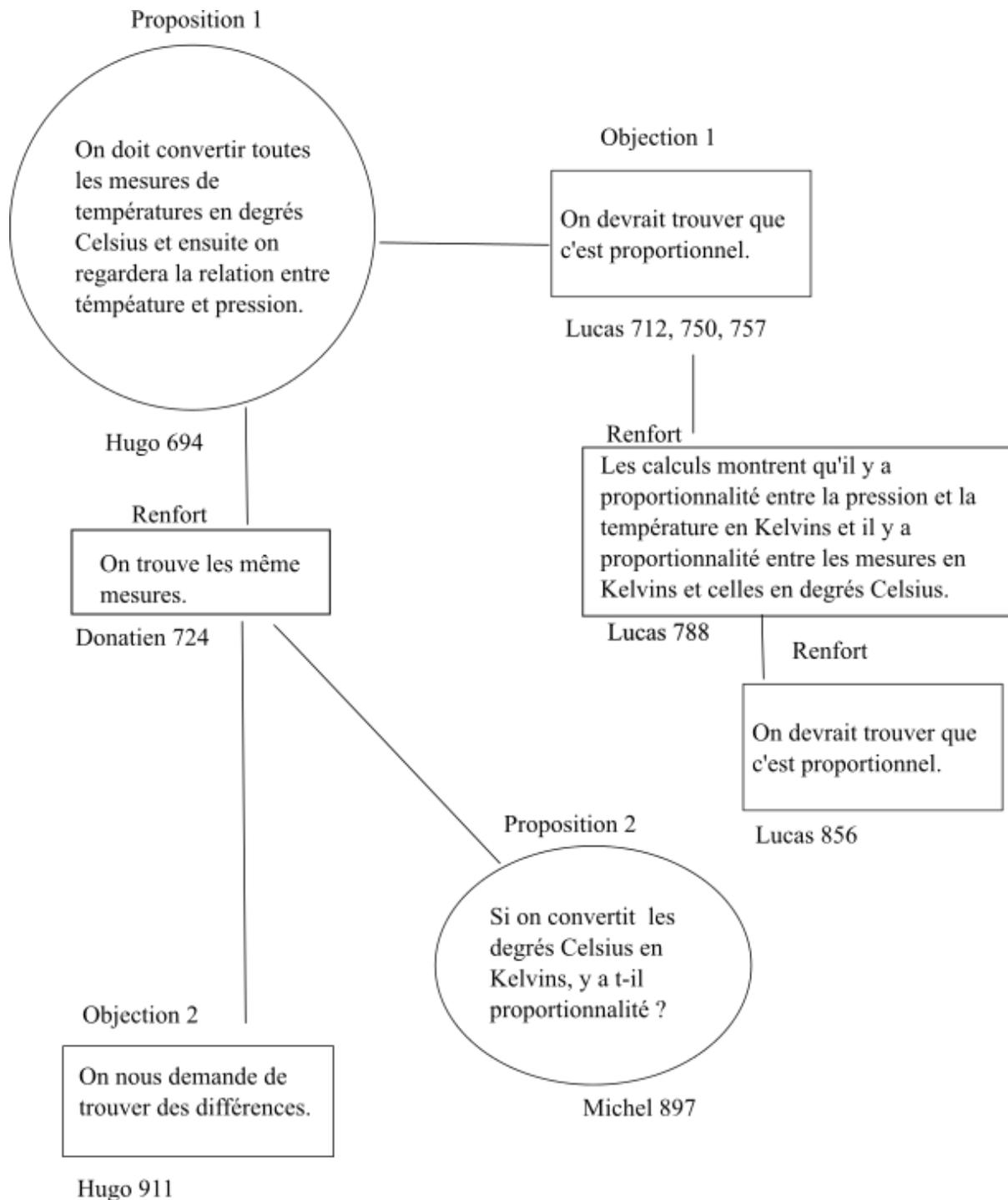


Schéma 46: Macrostructure du débat étape 2 lycée 1 épisode 5

Cet épisode est sans doute important puisqu'il permet de mettre en évidence le paradoxe : d'une part les mesures sont les mêmes dans les trois tableaux « en fait les trois, degrés Celsius, Kelvin, Fahrenheit, ils sont tous pareil » (Donatien, 983), et d'autre part la relation n'est pas la même « le problème c'est que c'est proportionnel en Kelvins mais pas en

degrés » (Lucas, 980). Nous faisons l'hypothèse que la discussion à propos du compte-rendu a permis au groupe de prendre de la distance par rapport à l'activité. Les élèves peuvent alors énoncer un principe plus général et donc de poser le nouveau problème au niveau explicatif. On peut faire l'hypothèse que les rôles correspondent à des niveaux de conceptualisation. En effet ici, l'énonciateur est à un niveau « intra », l'agissant à un niveau « inter » et l'entraîneur à un niveau « trans ».

Nous pouvons refaire la même analyse sur l'épisode 8. Sur cet épisode, les explications évoluent, certains modèles sont abandonnés mais d'autres s'y ajoutent. Ici Lucas a un rôle d'entraîneur, il cherche à mettre en relation les différentes données pour avoir un tout cohérent, il propose des idées, lance des possibles (« Les Kelvins en fait le zéro absolu c'est zéro du coup y a pas de chiffres négatifs dans les degrés » en 1021). Donatien est plutôt dans l'action, il cherche à faire le compte-rendu et à justifier le propos par des calculs qu'il effectue de manière exhaustive : « au pire c'est bizarre par exemple regarde le premier ça fait le coefficient regarde, le premier coefficient ça fait 110 alors que le deuxième ça fait 17. » Michel a un rôle de vérification, il cherche à expliquer les relations, il précise les fonctions des différents éléments : « Lui il fait tout, enfin le zéro absolu, il est pas, c'est pas un zéro en fait donc, ça peut être heu... » Enfin Hugo a un rôle d'énonciateur, il cherche une théorie permettant de poser le problème dans un cadre connu : « J'ai compris en fait les degrés Celsius c'est pas proportionnel mais c'est une fonction affine justement, parce que tu fais plus 273 à chaque fois. »

Ici l'énonciateur et l'entraîneur se décentrent de l'action, ils cherchent une condition permettant de tenir compte de toutes les données du problème. Le rôle ne semble donc pas déterminer à lui seul une condition suffisante pour amener l'élève à une secondarisation du discours. Si nous nous focalisons sur les éléments explicatifs liés à la résolution du problème et donc si nous faisons abstraction des justifications liées à la rédaction du compte-rendu, on peut repérer que globalement les différents registres évoqués dans cet enregistrement sont ceux que nous avons regroupés dans le tableau 50 page 395. Si le fait d'échanger dans le groupe sur la formalisation des découvertes permet une distanciation et si cette distanciation n'est pas fonction du rôle de l'élève dans le groupe, quelles sont les conditions qui favorisent une secondarisation du discours ? Le registre empirique est constitué des différents calculs effectués qui permettent de confirmer d'une part que toutes les mesures sont identiques et d'autre part qu'un seul tableau de valeurs est un tableau de proportionnalité. Le registre des modèles fait apparaître différents principes :

1. Pour comparer des mesures d'une même grandeur, elles doivent être exprimées dans la même unité.
2. S'il existe une relation entre deux grandeurs, elle doit être caractéristique et être la même quelle que soit l'unité choisie pour les mesurer.
3. Convertir une mesure d'une unité en une autre unité revient à mettre en œuvre une relation de proportionnalité.
4. Le travail demandé est de rédiger un compte-rendu donc il faut garder trace de ce qui est fait de manière exhaustive.

5. Le compte-rendu doit convaincre et démontrer, il faut choisir ce qui est essentiel.
6. Si le professeur demande quelque chose, ce quelque chose est forcément vrai.

Ces conditions relèvent de configurations (telles que nous les avons définies dans la partie I chapitre III.4) de natures différentes entre les registres (le REX, le registre empirique et le registre des modèles). Les trois premières conditions relèvent du cadre mathématique « grandeurs et mesures ». La première est conforme à la théorie. Les deux autres sont plutôt issues d'expériences scolaires du fait de la fréquence des rencontres avec des situations qui fonctionnent effectivement suivant ces principes. On peut donc estimer que les conditions 2 et 3 relèvent plutôt du contrat didactique dans sa facette épistémique. Les conditions 4, 5 et 6 sont liées au méso-contrat didactique dans sa facette sociale (Hersant, 2014).

Certains éléments sont cohérents dans les trois registres. Par exemple le modèle basé sur le fait que des grandeurs sont toujours proportionnelles est conforté par le calcul d'un coefficient de proportionnalité approché, et s'inscrit dans le cadre des grandeurs et mesures. En effet, les grandeurs étudiées dans l'environnement scolaire sont principalement dans une relation de proportionnalité. Pour d'autres éléments, la configuration est plus problématique. En effet, le fait que les trois tableaux regroupent les mêmes mesures alors que les relations sont différentes, s'accorde mal avec l'idée d'une relation de proportionnalité entre mesures dans des unités différentes. A quels moments cette configuration amène-t-elle des remises en cause ?

<p>REGISTRE EXPLICATIF</p> <ul style="list-style-type: none"> - cadre numérique et proportionnalité - cadre des grandeurs et des mesures - cadre fonctionnel - cadre algébrique 	<p>REGISTRE EMPIRIQUE</p> <ul style="list-style-type: none"> - On a un coefficient de proportionnalité dans un cas et pas dans les autres. - Le produit en croix ne donne pas les bons résultats. - Il y a 273 d'écart entre les mesures en °C et en K. - Les mesures de pression sont les mêmes pour les trois tableaux de mesures.
	<p>REGISTRE DES MODELES</p> <ul style="list-style-type: none"> - Les relations entre grandeurs sont toujours proportionnelles. - Les conversions sont proportionnelles. - Le zéro est l'origine des mesures. - S'il existe un lien entre des grandeurs, un calcul est possible. - Une relation linéaire ne passant pas par zéro est affine.

Tableau 50 : configuration des registres dans l'enregistrement Dict5 de l'étape 2, lycée 1

Les élèves remarquent que l'écart entre les mesures en °C et K est constant, ils concluent qu'« il faut ajouter 273 » mais ils n'ont pas de mot pour désigner cette relation entre les mesures et c'est naturellement le mot « proportionnel » qui est utilisé pour exprimer la relation. Pourtant lorsque les élèves identifient qu'« il doit y avoir un lien » entre les °F et les °C, ils ne parlent pas de proportionnalité. On peut donc penser que pour les élèves la proportionnalité est associée à l'existence d'un coefficient constant entre deux grandeurs que ce coefficient soit multiplicatif ou additif. De même lorsque les élèves vont écrire le compte-rendu, ils vont formaliser ce qu'ils ont trouvé dans le registre des expressions algébriques en écrivant des formules. C'est au moment de cette mise en texte que se posera la question du

lien entre la conversion des mesures de température et la relation entre la température et la pression. De manière intuitive, il semble que la relation entre les unités de température se retrouve sur la relation entre les deux grandeurs. Le raisonnement logique peut être résumé par : si P proportionnelle à T_K et T_C proportionnelle à T_K alors P proportionnelle à T_C (P désignant la pression en hPa, T_K la température en K, et T_C la température en °C).

On remarque par ailleurs que la configuration est stable dès qu'un élément théorique est posé comme étant une explication des phénomènes observés (configuration théorique) ou dès que les élèves peuvent faire référence à une expérimentation faite en classe de mathématiques (configuration analytique). Les élèves font plusieurs fois référence à ce qui a déjà été vu ou traité en classe. L'épisode 8 atteste cependant que pour conclure, il est nécessaire que l'ensemble soit aussi cohérent avec les résultats des calculs (configuration pragmatique).

Nous faisons l'hypothèse que les élèves ne configurent pas les registres de la même manière suivant leur rôle et qu'inversement la manière dont l'élève configure les registres peut déterminer le rôle qu'il va prendre dans les interactions verbales. Pour tisser du lien entre les différentes configurations, chaque élève doit pouvoir prendre alternativement les différents rôles. Il est indispensable de réfléchir à ce qui peut être introduit dans le milieu pour forcer ces changements. La situation peut elle-même jouer un rôle et tour à tour proposer, vérifier, agir ou énoncer (comme nous avons pu le voir dans la partie 3 chapitre II.6). Elle peut aussi tour à tour demander explicitement à l'élève de proposer, vérifier, agir ou énoncer, et ce de manière individuelle et non collective. Cela signifie que les inducteurs de problématisation doivent être pensés en fonction des axes du problème sur lesquels ils vont centrer l'attention de l'élève, mais aussi de la manière dont cette attention va être portée, c'est-à-dire le ou les rôles dévolus à l'élève pendant le travail.

A l'issue de ces deux étapes, on peut griser dans l'espace de contraintes initial ce qui a été effectivement mis en œuvre et voir que la nécessité de variations proportionnelles est absente. L'objectif de la deuxième séance sera donc de favoriser l'émergence de cette nécessité. Pour cela, il s'agit de considérer la relation fonctionnelle sous l'angle de la variation (unité de raisonnement U_2) pour pouvoir décrire le comportement des accroissements (unité de raisonnement U_4).

Expériences mise en place par les élèves	Comparaison des valeurs	Conversion	Calculs des quotients d'une mesure de grandeur par une autre.	Calculs par le produit en croix	Représentation graphique	Test d'alignement avec la calculatrice	Calculs à partir des propriétés de linéarité	Calculs des variations des mesures de grandeur
Registre empirique lié aux données	D₁ : Les pressions sont les mêmes dans les trois tableaux.	D₂ : Seule l'unité de mesure des températures change. Les valeurs prises dans les différentes unités ne sont pas proportionnelles.	D₃ : Les coefficients sont différents dans deux cas, ils sont très proches dans le troisième.	D₄ : Le calcul des produits en croix donne un résultat erroné sauf dans un tableau où les valeurs sont très proches.	D₅ : On obtient des points alignés.	D₆ : Affichage « vrai » ou « faux »	D₇ : Les calculs par propriétés de linéarité donnent des résultats erronés sauf dans un tableau où les valeurs sont très proches.	D₈ : Une même variation sur une grandeur amène une même variation sur l'autre, une variation double de l'une amène une variation double de l'autre.
Registre des nécessités à l'intérieur des modèles	N₁ : Nécessité d'un calcul permettant de passer d'une grandeur à l'autre.		N₂ : Nécessité d'une intervention de la proportionnalité dans la relation.		N₃ : Nécessité d'une relation non-proportionnelle sauf si on utilise l'unité Kelvin pour la température.		N₄ : Nécessité de variations proportionnelles.	
	La représentation graphique est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc c'est la représentation graphique d'une fonction affine.		$f(x+a) = f(x) + b$ avec a et b constantes caractérise une fonction affine.		La variation de pression est proportionnelle à la variation de température.		$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Constante}$ donc f est affine et $f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} x + f(0)$	
Registre explicatif	E₁ : Suites numérique proportionnelles		E₂ : Grandeurs proportionnelles		E₃ : Proportionnalité dans le cadre fonctionnel		E₄ : Fonction affine	

Tableau 51: Séance 1 étape 2 dans la classe de seconde 1 à l'intérieur de l'espace de contraintes a priori

IV.5 : Analyse a posteriori de l'expérimentation de l'étape 1 dans la classe de 2nde 2

Les étapes 1 et 2 se sont déroulées dans les mêmes conditions que dans la classe de seconde 1 de lycée. La vidéo de présentation a été proposée. Les groupes ont été constitués de la même manière, les enregistrements ont été faits dans tous les groupes. Comme les élèves de la classe de seconde 1 ont écrit collectivement la conclusion à l'issue de la deuxième étape, nous avons distribué une fiche réponse à l'issue de l'étape 2 précisant les membres du groupe, le numéro du dictaphone et un espace « nos conclusions » alors que l'écriture était demandée de manière individuelle dans la classe de seconde 1. Ces renseignements ont été utiles pour suivre les élèves dans les différents groupes par leur numéro d'identification (voir un exemple en annexe 43).

IV.5.1 : Analyse des procédures des élèves lors de l'étape 1 à travers les productions écrites

Comme dans la classe de seconde 1, les élèves ont souvent eu besoin de plusieurs procédures pour répondre à la question de l'étape 1. Le tableau 52 liste les procédures rencontrées dans les différents groupes des deux demi-classes lors de la première étape. Les lettres désignent le sujet et les deux demi-groupes sont identifiés par A_2 pour la première heure et A_2' pour la seconde.

Procédures	Groupes utilisant cette procédure dans la demi-classe de 14H - 15H	Groupes utilisant cette procédure dans la demi-classe de 15H - 16H
P₃ : Recherche d'un éventuel coefficient de proportionnalité	$A_2 - E_2$	$C_2' - E_2' - F_2'$
P₄ : Égalité type produit en croix	$B_2 - C_2 - F_2$	$C_2' - D_2' - E_2'$
P₅ : Représentation graphique	$A_2 - B_2 - D_2 -$	$A_2' - B_2' - F_2'$
P₉ : Lecture du tableau		A_2'
P₇ : Utilisation des propriétés de linéarité		
P₈ : Calcul des variations		

Tableau 52: Procédures lors de la séance 1 dans le lycée 2

Nous remarquons que la représentation graphique a plus été utilisée dans cette classe et que les tracés ont été faits à la main et non avec le tableur. La familiarisation des élèves avec l'outil numérique est peut-être un paramètre qui peut expliquer ce choix mais nous faisons aussi l'hypothèse qu'il est lié au contrat didactique en sciences expérimentales. En effet, la situation évoque les travaux pratiques de sciences physiques. Les attentes des professeurs dans cette discipline peuvent être différentes d'une classe à l'autre. Certains

peuvent exiger un tracé à la main alors que d'autres utilisent des outils de modélisation numériques.

Une nouvelle procédure P_9 apparaît ici. En effet dans le groupe A_2' , un élève justifie sa réponse par simple lecture dans le tableau de valeurs. Nous analyserons plus précisément le travail de ce groupe.

IV.5.2 : Analyse des traces écrites des différents groupes étape 1

Nous reprenons ici la même méthodologie que pour la classe de seconde 1.

Groupe A_2

$$\frac{774}{-14} \approx -55,3 \quad \frac{842}{8,5} \approx 99$$

Ce n'est pas proportionnelle car le coefficient n'est pas le même.

Donc la pression n'est pas proportionnelle à la température.

P_3 : Le groupe A_2 calcule deux quotients et déduit la non-proportionnalité du fait que les deux résultats ne sont pas les mêmes. Il n'est pas fait référence au signe.

P_5 : Le groupe joint à cet écrit la représentation graphique (voir illustration 7) mais n'écrit pas de conclusion à partir de ce tracé.

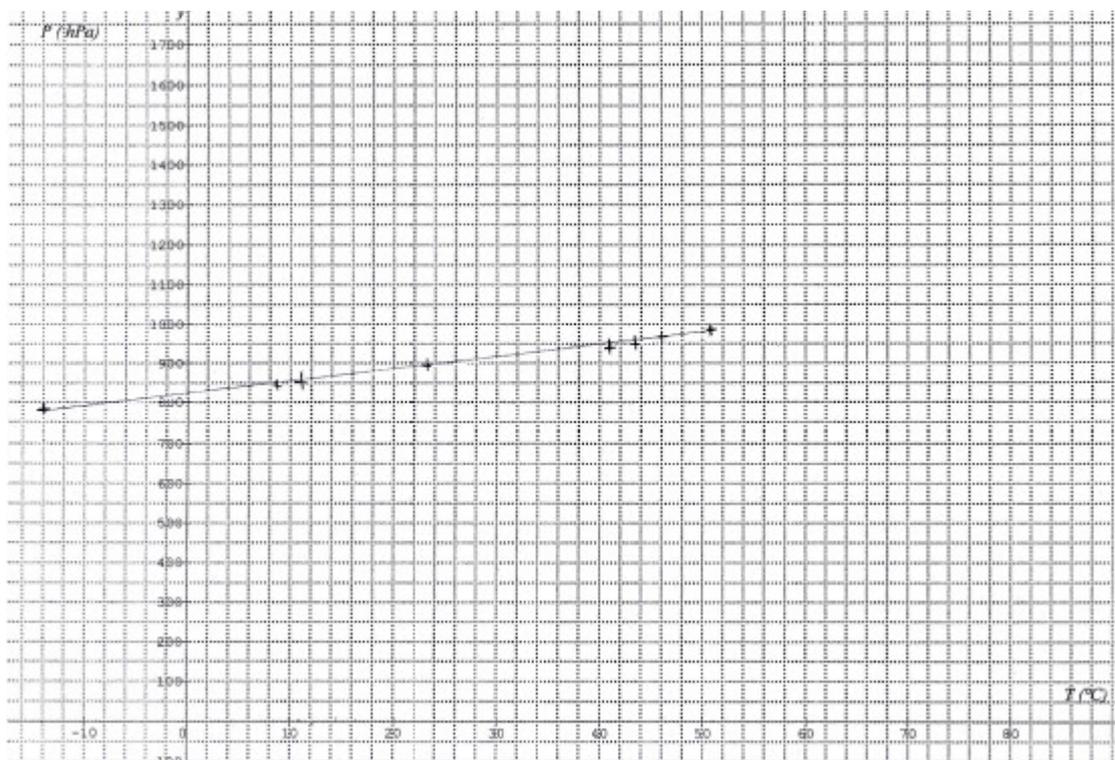


Illustration 7: production élève 18 étape 1 lycée 2

Nous pouvons remarquer que les points ont été reliés à la règle, ce qui atteste que l'élève 18 a perçu l'alignement des points.

Dans ce même groupe l'élève 4 n'a pas relié les points et l'élève 20 relie les points à main levée (voir illustration 8). Certains points sont gommés et repositionnés. Nous ne pouvons pas savoir si ces élèves ont conclu à l'alignement des points.

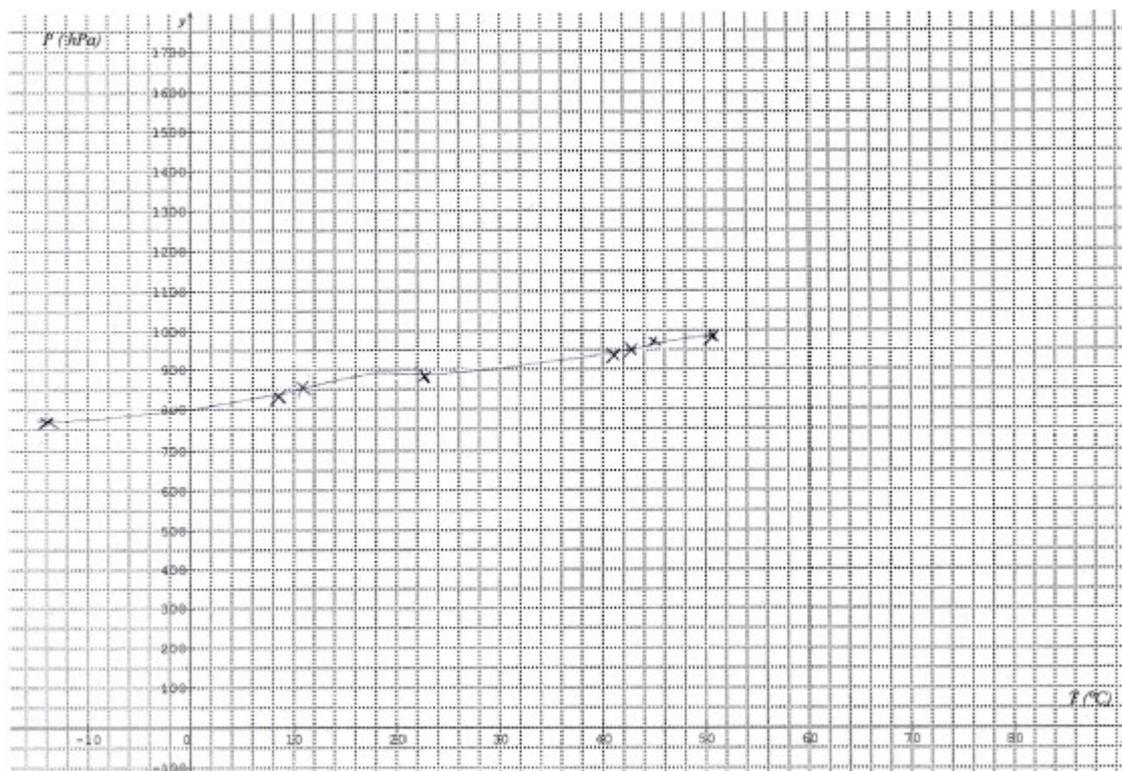


Illustration 8: production élève 20 étape 1 lycée 2

E₁ : Les unités n'apparaissent pas, les calculs sont effectués sur des nombres.

E₂ : La conclusion porte cependant sur les grandeurs. Le graphique peut évoquer le cadre des grandeurs proportionnelles mais le manque de propos autour de cette production ne permet pas de l'affirmer.

Groupe B₂

- Ce n'est pas proportionnelle car $\frac{-14 \times 842}{774} \neq 8,5$

$$\text{et } \frac{11 \times 890}{850} \neq 23,5$$

donc d'après ce tableau la pression n'est pas proportionnelle à la température.

- On remarque que la courbe n'est pas droite et ne passe pas par l'origine du repère.

P₄ : Le groupe justifie sa réponse par le calcul du produit en croix. Il est intéressant de noter que deux calculs ont été faits pour justifier la réponse. On ne peut pas savoir si les deux calculs sont effectivement nécessaires pour les élèves ou si le second n'a qu'un statut de contrôle.

P₅ : Les trois élèves du groupe ont fait un graphique et la conclusion est que la courbe n'est pas une droite, ce qui aurait pu suffire, mais les élèves ajoutent que la courbe ne passe pas par l'origine. Les trois productions sont différentes. L'élève 23 trace une droite qui passe au mieux par le nuage de points (certains points ne sont pas sur le tracé). Cependant, il trace deux segments ayant une extrémité commune : l'un pour les points d'abscisse inférieure à 25 et l'autre pour ceux qui ont une abscisse supérieure à 25. On peut supposer que sa règle ne lui permet pas de faire un tracé complet ou qu'il cherche à aligner le plus de points possible (voir illustration 9).

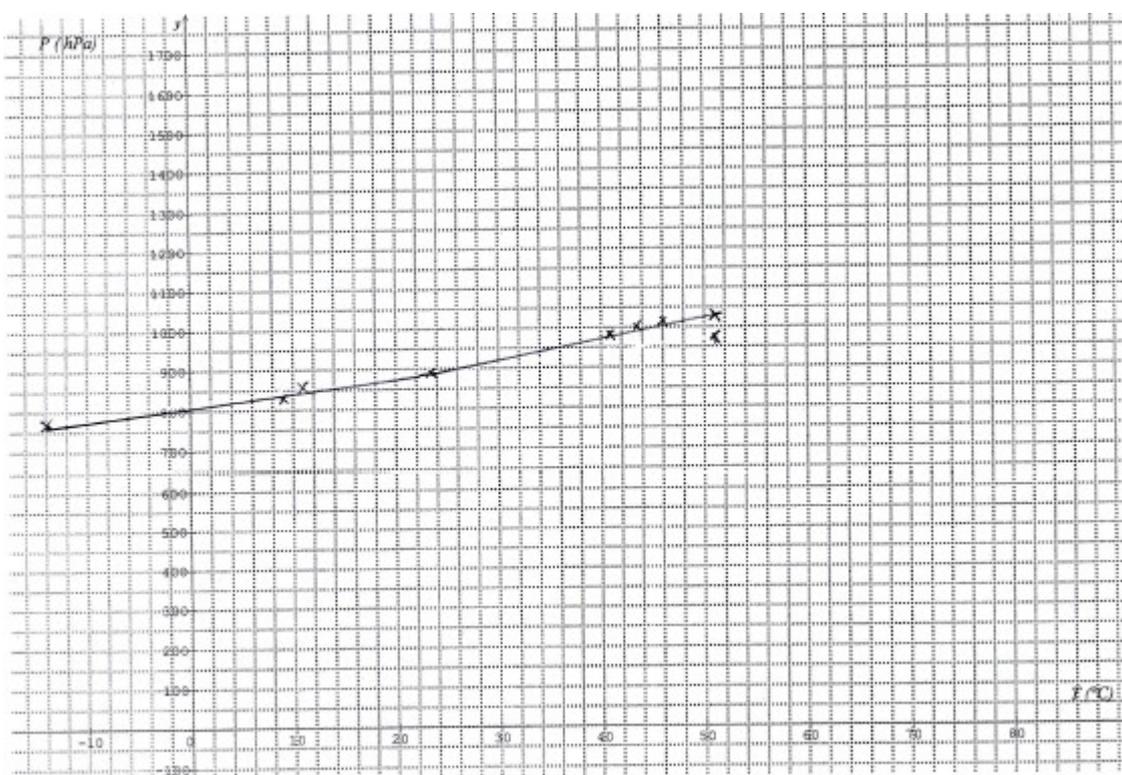


Illustration 9: production élève 23 étape 1 lycée 2

L'élève 23 a par ailleurs une autre rédaction de la première procédure, il écrit :

Ce n'est pas proportionnel car si on fait un produit en croix :

$$\text{ex : } 842 \times 11 = 9262$$

$$8,5 \times 850 = 7225$$

$$9262 \neq 7225$$

conclusion : ce n'est pas une situation de proportionnalité.

On remarque que les points ne sont pas alignés et ils ne passent pas par l'origine du repère.

E₁ : Ici un seul calcul justifie la non-proportionnalité et l'élève utilise le produit pour éviter d'avoir à comparer des résultats approchés ou des fractions. On peut supposer qu'il ne mobilise pas le même registre explicatif que ses camarades. Il est ici clairement dans le cadre des suites numériques proportionnelles.

E₃ : Les élèves 29 et 34 relient les points deux à deux ou trois par trois à la règle, ils obtiennent une ligne brisée (voir illustrations 10 et 11). Le groupe conclut au non-alignement des points. Comme cette conclusion arrive après la première justification par le produit en croix, on peut penser que les élèves cherchent à renforcer leur première conclusion. Ils auraient cependant pu attester de la non-proportionnalité par le fait que le tracé ne passe pas par l'origine mais remarquer malgré tout que les points semblent alignés.

Cette remarque nous amène à penser que le tracé est plutôt pensé dans le cadre fonctionnel que dans celui des grandeurs. La précision des mesures n'est pas prise en compte.

E₂ : Le calcul est effectué sur les nombres, le mot « tableau » est utilisé pour désigner les données et la conclusion porte sur les grandeurs. On peut penser que la formulation d'une réponse reprenant les termes de la question est automatisée mais le fait de relier les points par des segments et le fait d'effectuer plusieurs calculs, peuvent nous amener à penser que le travail est plutôt effectué dans le cadre des grandeurs proportionnelles et en référence aux pratiques en sciences expérimentales.

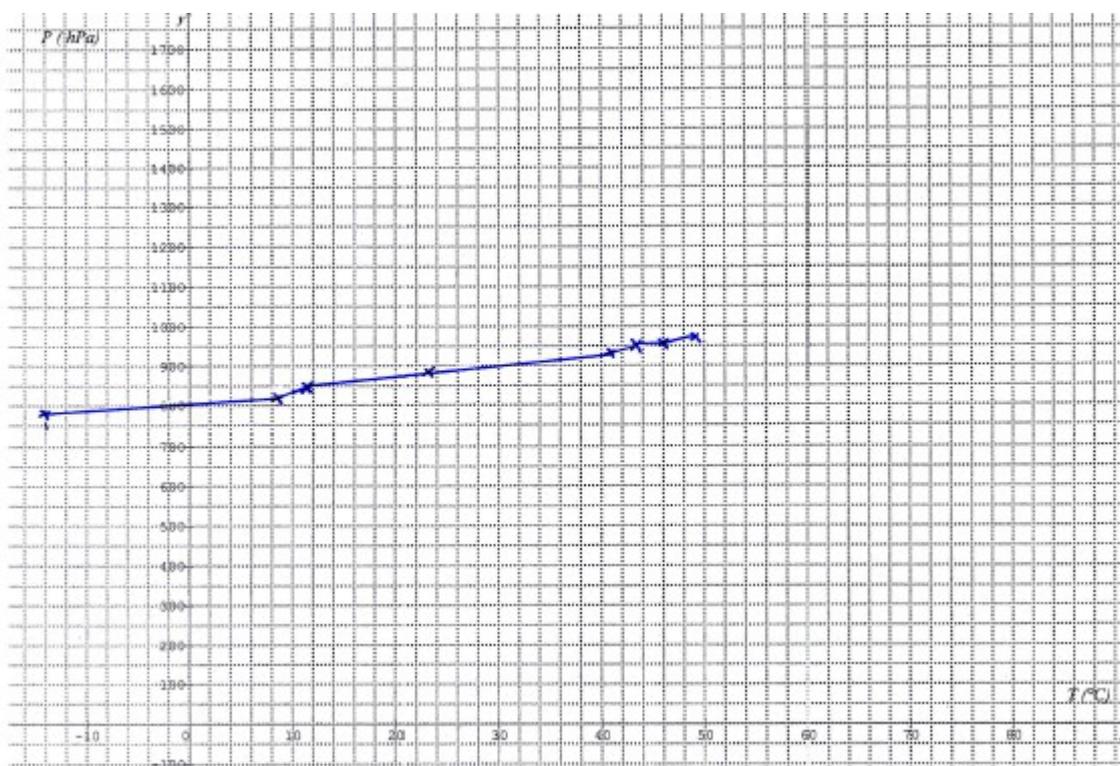


Illustration 10: production élève 29 étape 1 lycée 2

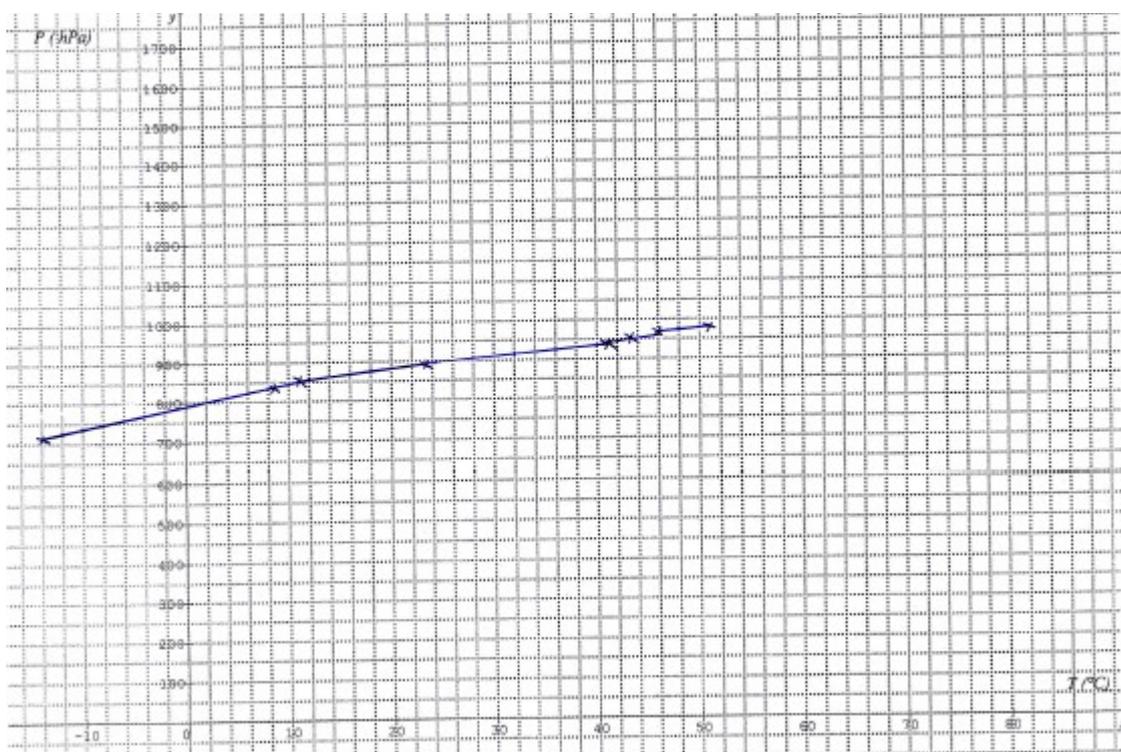


Illustration 11: production élève 34 étape 1 lycée 2

Groupe C₂

La pression n'est pas proportionnelle à la température car :

$$\frac{74,5 \times 890}{850} = 78,85 \text{ hors ce n'est pas égal à } 106.$$

Je refais la même chose avec $\frac{7 \times 842}{774} = 7,6$ hors ce n'est pas égal à 47,5 comme l'indique le tableau ce n'est donc pas 47,5.

Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

P₄ : Les membres de ce groupe ont des formulations un peu différentes mais ils ont tous fait deux calculs de type produit en croix et concluent sur les grandeurs en précisant le rôle du tableau comme source des informations.

E₂ : Il semble que ce groupe travaille dans le cadre des grandeurs proportionnelles du fait qu'un des membres précise « si on se fie au tableau ». Il montre ainsi que les données peuvent être contestées parce qu'il s'agit de mesures.

Groupe D₂

Si on place les points graphiquement on observe que les points ne forment pas une droite passant par l'origine.

P₅ : Les élèves n'ont pas relié les points, un seul graphique a été tracé pour le groupe ce qui ne permet pas de discuter ce tracé. L'écoute de l'enregistrement est nécessaire pour savoir comment la conclusion a été négociée dans le groupe.

E₂ : Le graphique semble être réalisé dans le cadre des grandeurs proportionnelles car les points ne sont pas reliés et le tracé n'est pas évoqué. Les élèves parlent bien de points. On peut s'interroger sur le sens que peut avoir la « forme » du tracé pour ces élèves.

Groupe E₂

Élève 24 :

C'est proportionnel car le chiffre commun est 2,99 à peu près ($259 \times 2,99 \approx 774$).

Élève 25 :

oui

car $2,99 \times \text{temps}$ fait toujours en arrondissant la pression

P₃ : Les élèves de ce groupe semblent avoir calculé différents quotients pour chercher un coefficient de proportionnalité que l'élève 24 appelle « le chiffre commun ». Ils précisent qu'ils travaillent sur des valeurs approchées mais si l'élève 24 donne un exemple (on peut supposer que c'est un exemple car l'élève 25 précise par l'emploi du mot « toujours » qu'ils ont testé tous les quotients), l'élève 25 propose une expression dans un langage naturel de la forme : $2,99 \times T = P$ où T désigne la température en Kelvins et P la pression en hPa.

E₂ : La précision des calculs et les valeurs approchées (« à peu près » et « en arrondissant ») ainsi que la formalisation d'une relation faisant intervenir les grandeurs « temps » et « pression » semblent indiquer que ce groupe travaille dans le cadre des grandeurs proportionnelles.

Groupe F₂

La pression et la température sont proportionnelle $\frac{259 \times 842}{774} \approx 281,5$

D₄ : Le test de type produit en croix donne un résultat approché de celui qui est lu dans le tableau de valeurs.

E₂ : On peut estimer que le cadre de travail est celui des grandeurs proportionnelles du fait de la formulation et de la prise en compte d'un résultat approché.

Groupe A₂'

Élève 14 :

Juste en regardant le tableau plus précisément (P en hPa

Élève 11 :

D'après le tableau la courbe ne passe pas par 0 elle n'est pas proportionnelle.

Élève 32 :

La pression n'est pas proportionnelle car la courbe ne passe pas par zéro.

P₅ : Les élèves ont chacun tracé un graphique. L'élève 11 n'a pas relié les points mais on voit les traces d'une droite qui a été effacée, les élèves 14 et 32 ont tracé une droite à la règle.

P₉ : Si l'élève 32 justifie bien la non-proportionnalité à partir du constat que la courbe ne passe pas par 0 (on note que le mot « droite » n'a pas été utilisé), les autres justifient ce résultat en faisant référence au tableau. On peut donc faire plusieurs hypothèses. Soit les points étant construits à partir des données du tableau, ils signifient que la donnée du point de coordonnée (0;0) n'y figure pas. Dans ce cas, on peut craindre une représentation erronée si la continuité n'est pas implicitement posée. Soit le regard de ces élèves s'est posé sur les variations pour attester qu'il est impossible que la courbe passe par l'origine du fait que la température passe d'une valeur négative à une valeur positive quand la pression reste positive. Une analyse de l'enregistrement audio est donc nécessaire pour préciser les données et les conditions mises en relation par ce groupe.

E₃ : La seconde hypothèse nous amène à penser que le cadre fonctionnel a été mobilisé.

E₂ : Le fait d'avoir relié les points atteste d'un travail dans le cadre des grandeurs proportionnelles.

Groupe B₂'

Élève 5 :

La pression n'est pas proportionnelle à la température car la droite ne passe par l'origine et sa forme n'est pas une ligne droite.

Élèves 3 :

La pression n'est pas proportionnelle à la température de l'eau car la courbe n'est pas une droite qui passe par l'origine du repère.

P₅ : Les élèves ont chacun tracé un graphique. L'élève 5 n'a pas relié les points et semble avoir eu du mal à les placer car il reste des tracés de repérage des différentes abscisses qui ont été effacés. L'élève 3 a tracé un segment à la règle passant par les 6 premiers points

puis deux segments qui ne sont pas dans l'alignement pour les deux derniers points pour lesquels il y a une erreur d'ordonnée. L'élève 2 a relié les points à main levée.

E₂: Le cadre mobilisé est celui des grandeurs proportionnelles du fait de la désignation des grandeurs, de la précision « la température de l'eau » qui montre une évocation d'expériences en sciences.

E₄: On peut cependant faire l'hypothèse que l'analyse du graphique se fait dans le cadre fonctionnel puisque les élèves ne se sont pas autorisés à relier au mieux les points par une droite.

Groupe C₂'

Non la pression n'est pas proportionnelle à la température car $\frac{7,0}{774} \approx 9,0$ et $\frac{47,5}{842} \approx 0,1$ comme $9,00 \neq 0,1$ alors ce n'est pas proportionnelle.

Pour vérifier on fait un tableau de proportionnalité $\frac{7,0 \times 842}{774} \approx 7,6$ donc le chiffre que je vient de trouver ne correspond pas à 47,5 qui est normalement le chiffre que je devais trouver pour que ce soit proportionnelle.

P₃: Les élèves calculent deux quotients et comme le résultat n'est pas le même ils concluent qu'il n'y a pas proportionnalité.

P₄: Les élèves ont utilisé le produit en croix pour vérifier le résultat. Il est intéressant de noter qu'ils utilisent la formulation « on fait un tableau de proportionnalité » pour désigner cette procédure.

E₁: Les calculs sont effectués sur des nombres.

E₂: La conclusion est faite sur les grandeurs et les résultats sont donnés en valeurs approchées. Le mot « chiffre » est utilisé pour désigner les valeurs des mesures dans la vérification comme si cette étape ne relevait pas de la même nature que celle qui consiste à chercher un coefficient de proportionnalité, coefficient qui n'évoque pas une grandeur quotient connue dans le contexte de la situation.

Groupe D₂'

$$\frac{774}{7} = 110,5714286 \qquad 47,5 \times 110,5714286 = 5252,142859 \neq 842$$

Donc ce tableau n'est pas proportionnel.

Donc la pression n'est pas proportionnel à la température.

$$\frac{47,5 \times 774}{7} = 5252,142859 \neq 842$$

Donc la pression et la température ne sont pas proportionnelles.

P₄: Les élèves ont calculé un coefficient de proportionnalité qu'ils ont ensuite appliqué à une autre valeur. Ils vérifient par une autre technique en utilisant la règle de trois pour calculer cette même valeur.

E₁: Les calculs sont clairement effectués dans le cadre des suites numériques proportionnelles du fait des résultats considérés comme exacts (le signe \approx n'est pas utilisé) et la copie de tous les chiffres lus sur l'écran de la calculatrice. Le résultat est donc considéré comme un nombre décimal exact. Par ailleurs la conclusion est que le « tableau » n'est pas proportionnel.

E₂: La conclusion est cependant reformulée en terme de grandeurs.

Groupe E₂'

Élève 1 :

On a cherché le facteur de proportionalité entre les 2 lignes. Quand on divise la température par la pression on obtient des valeurs approché de 0,33. donc la pression est proportionnelle à la température.

Élève 12 :

On a cherché a fair des produit en croix par rapport aux valeur dans le tableau pour chercher le facteur de proportionalité qui est de 3,3 \approx donc la pression est proportionel a la température.

Élève 21 :

Oui c'est proportionnel car l'on a chercher à faire un produit en croix pour voir si c'est proportionnel ou pas, et on en a déduit que oui malgré que les résultats ne soit pas exact et qu'il y a un écart de quelque millièmes.

P₃: Les trois élèves n'ont sans doute pas utilisé les mêmes procédures mais la mise en commun permet de valider une réponse commune qui montre la nécessité de considérer les valeurs approchées pour conclure à la proportionnalité.

P₄: Le test du produit en croix est évoqué par deux élèves sans que les calculs soient écrits sur le compte-rendu.

E₂: Le cadre des grandeurs proportionnelles est privilégié du fait des approximations. L'élève 1 formalise ce cadre dans le registre des tableaux avant de parler de « diviser la température par la pression ».

E₃: Cette formulation évoque un cadre fonctionnel puisque les mots « température » et « pression » symbolisent les grandeurs variables et le fait de les diviser évoque une relation fonctionnelle entre ces grandeurs.

Groupe F₂'

Élève 13 :

Les résultats sont proportionnels, nous avons utilisés un graphique et la courbe obtenue est droite, ce qui signifie que les résultats sont proportionnels.

Élève 7 :

La pression est proportionnelle à la température, on le voit d'après le graphique ainsi qu'avec les calculs.

P₅ : Les points obtenus ne sont pas reliés par l'élève 13 pourtant il parle de « courbe » et de « droite » (voir illustration 12). L'élève 7 les a reliés à main levée. Même si l'alignement peut être perçu du fait que les points sont relativement proches, l'alignement avec l'origine n'est pas évident et semble ne pas avoir été questionné par les élèves.

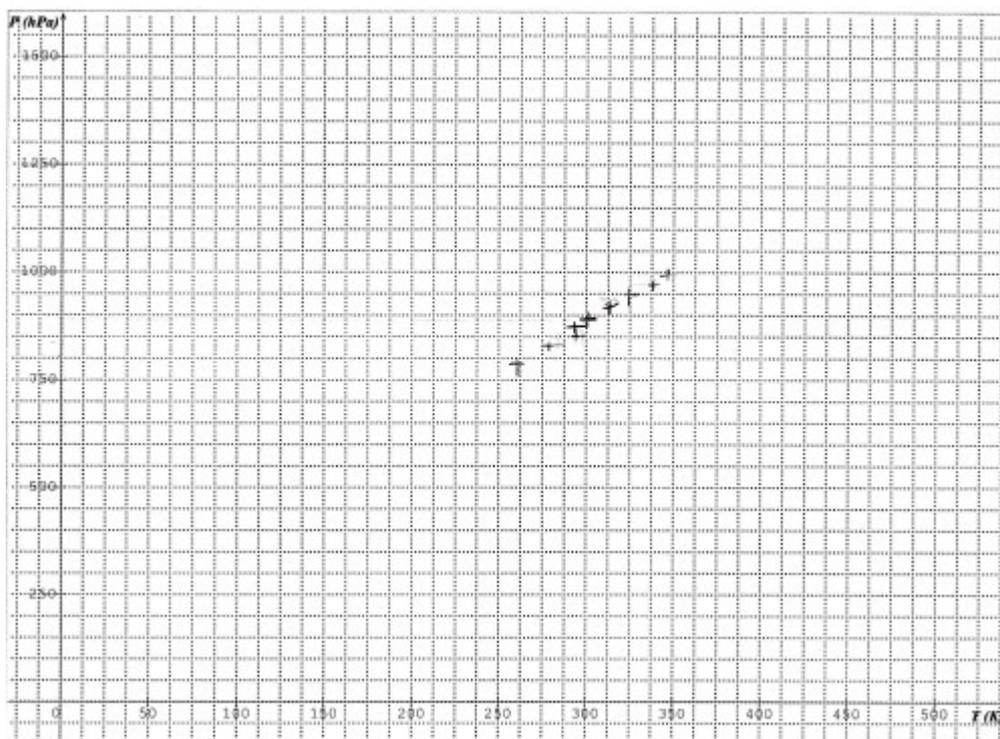


Illustration 12: production élève 13 étape 1 lycée 2

P₃ : L'élève 7 fait figurer « $\approx 0,33$ » en dessous de chaque colonne du tableau et il ajoute dans son bilan que le résultat est validé par les calculs. Il semble donc qu'il ait cherché à calculer un coefficient de proportionnalité et qu'il a trouvé une valeur approchée de ce coefficient. Peut-être cette donnée a-t-elle permis de conforter ou d'induire la perception de l'alignement des points sur le graphique.

E₂ : Le cadre est celui des grandeurs proportionnelles si on considère que les points n'ont pas été reliés, que la continuité des variations n'est pas mise en évidence pour un des élèves et qu'ils ont été reliés à main levée par l'autre. La formulation évoque les grandeurs et

le mot « résultat » qui pourrait faire référence à des calculs semble plutôt être utilisé pour parler des « résultats de l'expérience » puisque l'élève qui l'utilise n'a pas écrit de calculs.

IV.5.3 : Analyse comparée des fonctions langagières entre les classes de 2nde 1 et 2 sur l'étape 1

Nous remarquons que la classe de seconde 2 utilise peu « ça », et « c'est » pour désigner les objets. Par contre, aucune formulation algébrique n'est apparue. La place des grandeurs est plus affirmée dans cette classe. On peut faire l'hypothèse que le vocabulaire et certaines tournures de phrases sont maîtrisées par une proportion plus importante d'élèves par rapport à la seconde 1, ce qui permet une formulation plus aisée.

Comme dans la classe de seconde 1, les élèves peuvent avoir des formulations différentes dans un même groupe de travail. Mais si ces formulations mettaient surtout en évidence des registres sémiotiques différents ou des interprétations d'une même technique dans des cadres différents, dans la classe de seconde 2 les productions sont éloignées quand les élèves ont eu des procédures différentes. Il semble que les élèves soient moins dans le compromis et qu'ils tiennent à garder trace de leur propre réflexion. Ceci peut s'expliquer du fait que les élèves de la classe de seconde 2 sont considérés comme plutôt scientifiques et qu'ils ont une meilleure confiance en leurs compétences en mathématiques. Ils arrivent mieux à valider leurs conclusions car ils peuvent relier entre elles les procédures ou procéder à des conversions de registres. Dans la classe de seconde 1 certains élèves ne se sentent pas autorisés à écrire leur propre conclusion convaincus qu'ils sont que celle des autres est plus pertinente. Par contre l'interprétation des échanges et de la nature des registres explicatifs utilisés est parfois plus délicate dans la classe de seconde 2, comme nous l'avons signalé par exemple pour le groupe A₂'. Nous allons analyser l'enregistrement audio de ce groupe pour montrer en quoi l'écrit ne permet pas de comprendre les différents registres explicatifs mobilisés par ces élèves et essayer de déterminer les configurations utilisées par les élèves de ce groupe.

Analyse de l'enregistrement audio du groupe A₂' étape 1

Le groupe A₂' est composé de trois garçons : William, Alan et Marcus (voir transcription en annexe 45). L'étape 1 dure 16 minutes, nous pouvons la décomposer en épisodes en fonction du problème qui se pose aux élèves :

- | | |
|-----------|--|
| Épisode 1 | 00 : 00 : Découverte du sujet |
| Épisode 2 | 00 : 24 : Comment montrer qu'il y a proportionnalité ? |
| Épisode 3 | 01 : 50 : Faire le graphique (tracer les deux premiers points) |
| Épisode 4 | 03 : 37 : Recherche d'une autre procédure |
| Épisode 5 | 04 : 17 : Terminer le tracé individuellement |
| Épisode 6 | 11 : 40 : On trace à main levée ou avec une droite ? |

Épisode 7	12 : 04 : Le problème du zéro
Épisode 8	12 : 45 : Les variations
Épisode 9	14 : 32 : La question du point d'abscisse 0

Une procédure de résolution est proposée dans l'épisode 2 par William qui énonce que « Tu sais proportionnel quand il y a une droite heu, tu sais sur le graphique, quand la droite que tu fais, et qu'elle passe par l'origine ». Le groupe reformule et Marcus se lance dans le tracé. La difficulté est de placer les points, les valeurs ne sont pas entières et les points ne sont pas sur des nœuds du quadrillage. A aucun moment les élèves ne feront référence aux grandeurs. Le problème est donc clairement posé en terme de technique dans le registre graphique. On entend cependant Marcus reformuler l'objectif en 01:50 « on fait un graphique pour bâtir une fonction affine ». Le mot « fonction » est utilisé une seule fois pendant l'étape et il est utilisé pour désigner une fonction affine comme reformulation des conditions énoncées plus tôt dans le groupe.

Reprenons les reformulation successives de Marcus.

01:08 : On va faire un graphique, on va faire quoi

01:28 : On va faire un graphique pour

01:30 : Ça veut dire heu est-ce que la droite passe par l'origine.

01:50 : On fait un graphique pour bâtir une fonction affine.

Nous pouvons retrouver ici la triade « intra-inter-trans ». En effet l'élève considère les points (intra) pour réaliser le graphique, il étudie ensuite les relations entre ces points pour voir s'ils sont alignés avec l'origine (inter) pour enfin considérer la structure à laquelle ces objets appartiennent, ici les fonctions affines (trans). Quels facteurs induisent ce déplacement ? Ces reformulations se font en lien avec les propos des autres élèves, on peut donc chercher ce qui est susceptible d'activer le passage de l'intra au trans. Si nous isolons les reformulations de William, nous avons :

00:51 : Tu sais proportionnel quand il y a une droite heu, tu sais sur le graphique, quand la droite que tu fais, et qu'elle passe par l'origine.

01:17 : Ben oui on va faire un graphique.

01:20 : Oui pour te montrer sur **la courbe**.

01:29 : Démontrer que c'est proportionnel.

On peut faire l'hypothèse que le mot « courbe » induit un déplacement dans le cadre fonctionnel. Un autre événement renforce certainement cette conversion. Il s'agit de l'échange entre William et Marcus :

William 01 : 45 : Attends mais oui mais y a pas - 14

Marcus 01 : 47 : Mais si si c'est la pression

Alors que William est dans un cadre numérique qui ne lui permet pas d'identifier sur quel axe il peut lire les valeurs, Marcus revient aux grandeurs et identifie qu'il s'agit de la pression et donc que -14 se lit sur l'axe correspondant. Le mot « courbe » associé à la précision des grandeurs en jeux peut induire plus fortement l'interprétation de la situation dans un cadre fonctionnel. Il est possible aussi que l'activité en elle-même, de représenter graphiquement, ait un fort pouvoir évocateur du cadre fonctionnel. Enfin un dernier élément est sans doute important. En 01:03 Alan dit « Genre comme ça » pour illustrer le propos de William « Tu sais proportionnel quand il y a une droite heu, tu sais sur le graphique, quand la droite que tu fais, et qu'elle passe par l'origine ». Nous n'avons pas accès au geste ni au dessin qui appuient ce propos, mais nous pensons qu'il s'agit d'un tracé de droite dans un repère. Un schéma (voir schéma 47) peut être considéré comme une icône désignant les fonctions linéaires. Placer le premier point d'abscisse -14 sur le graphique peut déjà permettre d'anticiper que la situation n'est pas une situation de proportionnalité si la croissance de la fonction est déjà implicitement une caractéristique de cette fonction.

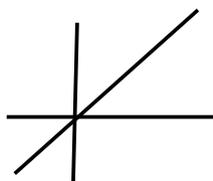


Schéma 47: Icône d'une fonction linéaire

Il semble que plusieurs facteurs permettent le changement de cadre : le registre sémiotique privilégié dans un cadre (vocabulaire, icônes et symboles), la désignation de la nature des objets, les schèmes d'actions associés à certains cadres.

Peut-on cependant affirmer que le cadre mobilisé dans le groupe est celui des fonctions ? Il semble que la technique relève malgré tout du cadre des grandeurs proportionnelles du fait que les élèves utilisent des valeurs approchées : « Mets pas des pointillés, tu fais à peu près » conseille William à 02:42 ou encore « C'est mal tracé, ils ont fait des erreurs avec les calculs ou quoi ? » s'exclame Marcus en 11:28. On peut supposer que le mot « ils » évoque les chercheurs qui ont fait l'expérience et les « calculs » désignent les mesures. Si William énonce en 02:28 « je pense pas que c'est proportionnel », il ne justifie pas son propos et les autres ne posent pas de questions. La tâche prime sur l'analyse de la situation pendant une bonne partie de l'étape. Cependant la difficulté pour placer les points incite Alan à chercher une autre procédure, il sait qu'il en existe mais n'arrive pas à s'en souvenir. Les autres n'ont pas plus d'idées et le tracé va donc les mobiliser jusqu'en 12:04.

En 11:40 se pose la question de savoir si on relie les points à main levée ou avec la règle, mais à aucun moment les élèves n'envisagent que les points ne soient pas alignés. Les élèves n'ont qu'une règle cassée, ils n'arrivent pas à la positionner pour relier l'ensemble des points, ce qui ne facilite pas le tracé. Ce problème amène Marcus à orienter son attention sur une autre question : la droite passe-t-elle par l'origine ? Il intervient en 12:04 « D'après ces données la pression est-elle proportionnelle à la température, eh on peut dire directement, non ? Hein ? » en reprenant l'énoncé et en utilisant le mot « directement » il évoque le fait qu'il peut répondre par perception visuelle mais sans avoir tracé la droite, c'est-à-dire en se

représentant mentalement le tracé car il précise en 12:14 : « parce qu'elle passe pas par zéro, donc on peut dire directement, on a pas besoin de tracer ». Pour argumenter il confronte son idée aux différentes données et il revient au tableau : « si tu vois dans le tableau si y a pas zéro, ça veut dire qu'elle passe pas par zéro ». Cette formulation est ambiguë, si on considère la continuité, une valeur peut être atteinte sans figurer dans le tableau. Alan ne cherche d'ailleurs pas à vérifier que « zéro est dans le tableau » mais que la valeur zéro peut être atteinte. Il porte alors explicitement son regard sur les variations en disant en 12:44 que « si on voit 774, 842, 850 ça veut dire qu'elle monte mais qu'elle passe jamais par zéro ». En disant cela il oublie de préciser qu'il considère que la température croît de manière concomitante à la pression de -14 à $8,5$ pour atteindre la valeur 11 . Elle passe donc par la valeur 0 , en supposant que la fonction est continue et croissante monotone sur cet intervalle.

Marcus n'est cependant pas convaincu. En effet les élèves n'ont pas à disposition le vocabulaire nécessaire pour exprimer leur pensée. Le mot « zéro » englobe à la fois l'abscisse, l'ordonnée et le point dans le registre graphique, il est parfois précisé « origine » pour faire la différence entre la nature de l'objet (le point et non le nombre) mais il n'est pas facile de différencier dans les échanges le « zéro » qui désigne l'abscisse ou l'ordonnée du point du « zéro » considéré comme mesure dans le tableau. Ainsi pour Marcus la droite passe par « zéro » du fait qu'il existe un point de la droite d'abscisse nulle, la droite coupe l'axe des ordonnées : « Si la pression est égale à 800 , ça veut dire la température est égale à zéro ». Alan ne peut pas le suivre dans son raisonnement car pour lui « passer par zéro » signifie « passer par l'origine ». Il donne un argument logique en ce sens que « ça passe ou ça passe pas », il ne peut pas y avoir d'alternative. Il n'arrive cependant pas à convertir la nécessité d'un registre à l'autre (Duval, 2006). En effet, les élèves n'utilisent pas la conversion de registre en considérant que dans le registre graphique « la droite passe par l'origine » signifie dans le registre des tableaux que « pour une température de 0°C , la pression est de 0 hPa ».

On remarque que la perception visuelle ne suffit pas à lever l'ambiguïté. Les échanges dans le groupe peuvent être schématisés dans la macrostructure du débat suivante (voir schéma 48). Il est significatif ici que l'avancée du raisonnement se fait de manière linéaire. Chaque proposition amène un déplacement du problème en apportant une réponse à une objection. Les rôles sont difficiles à déterminer. William a un rôle d'entraîneur, il lance l'activité et la régule, il ouvre des possibles mais il peut aussi être énonciateur (lorsqu'il reformule la pensée des autres, celle de Alan dans l'épisode 2 ou celle de Marcus dans l'épisode 9). Il peut aussi être vérificateur (il contrôle le travail dans l'épisode 3). Marcus est vérificateur en ce sens qu'il prend en compte les propositions et vérifie si elles sont en cohérence avec les expériences menées. Sur l'étape il est aussi agissant puisque c'est lui qui réalise les premières expériences. Nous avons vu qu'il peut être aussi énonciateur puisqu'il reformule les conditions (« on va bâtir une fonction affine »). Alan joue de même l'ensemble des rôles. C'est lui qui ouvre la piste de l'étude des variations, il vérifie régulièrement. En particulier il propose des reformulations « ce que tu veux dire c'est ... » pour s'assurer d'avoir compris l'autre. Enfin il énonce les conditions sous forme assertorique au départ et plus problématique ensuite (« Si y a pas écrit zéro ici depuis le début, ça veut dire que ... qu'elle passe pas par zéro ben elle est pas proportionnelle non plus » à 13 : 18). Chaque élève du groupe prend tour à tour des rôles différents et l'enchaînement des idées permet de passer

d'une proposition 1 pour laquelle la mise en relation des données et conditions est essentiellement pragmatique, à une proposition 2 qui est plus théorique, il s'agit de retrouver des éléments théoriques appris pour résoudre ce type de problèmes, à une proposition 3 qui est analytique en ce sens que les élèves étudient ce que les conditions peuvent supposer des relations entre les données. Cette dernière proposition atteste de la mobilisation d'une unité de raisonnement U3₂ (voir page 240) : Alan considère les variations et les qualifie de manière intuitive.

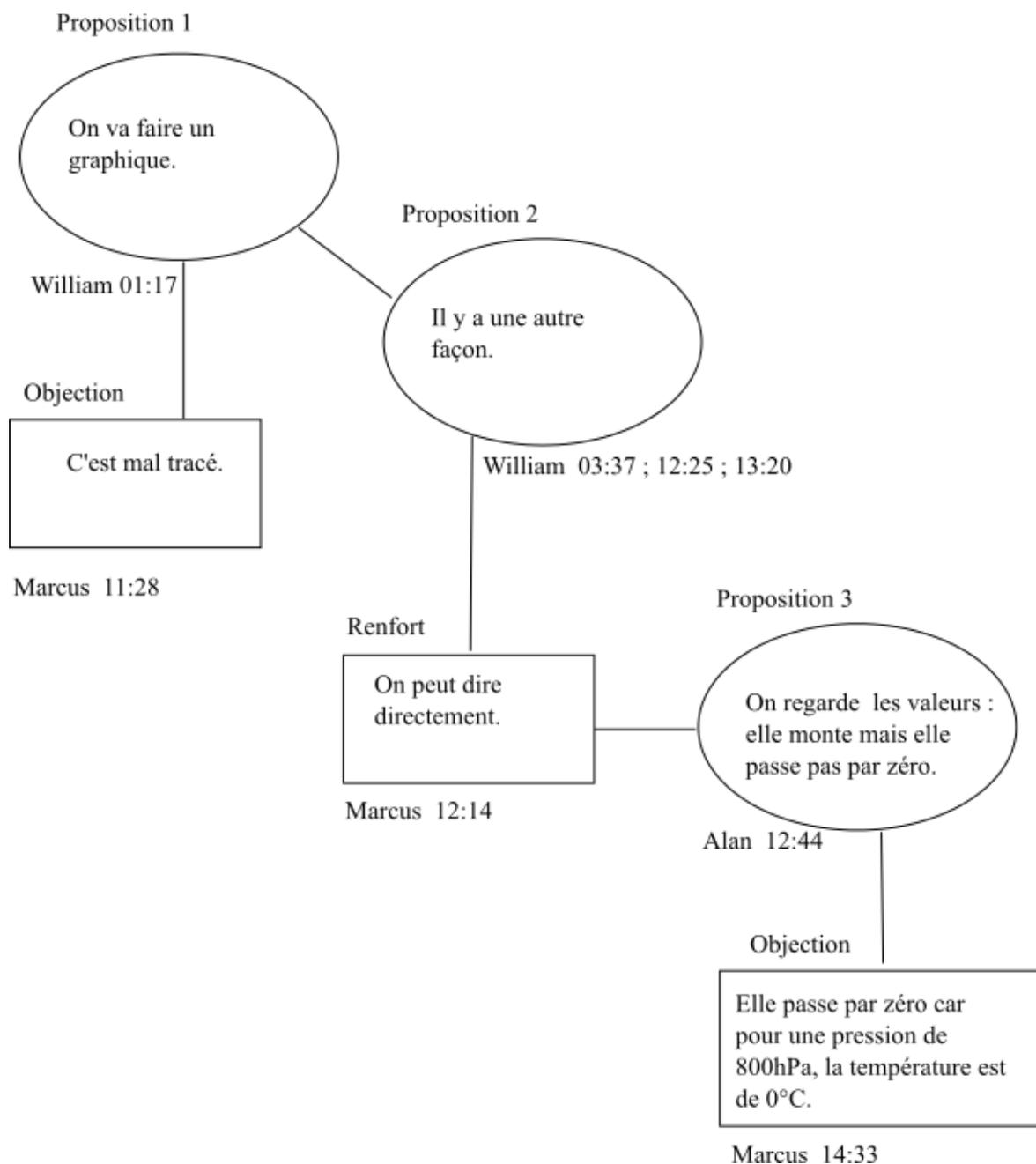


Schéma 48: Macrostructure du débat étape 1 groupe A₂' lycée 2

La lecture du tableau dans lequel les températures sont rangées dans l'ordre croissant, amène à comparer directement la variation de la pression au regard de la croissance de la température. Alan qualifie cette variation en disant « elle monte » sans préciser ce que le mot « elle » désigne. On peut supposer qu'il parle de la droite puisqu'il enchaîne avec « elle passe jamais par zéro ». De manière implicite il utilise aussi un raisonnement U_4 puisqu'il compare les deux variations pour vérifier que si la température passe par 0°C quand elle croit de -14°C à $8,5^\circ\text{C}$ alors que de manière concomitante la pression augmente de 774hPa à 842hPa et elle ne passe pas par 0hPa. L'ambiguïté vient du mot « zéro » qui peut désigner 0°C , 0hPa ou l'origine. Si bien que l'étape se termine alors que les élèves réfléchissent encore et Alan clôt l'épisode « Je sais pas, je sais pas, je sais pas, vraiment je sais pas quoi écrire, soit ça passe par zéro soit ça passe pas, mec, c'est ... » en 16:11. Les productions écrites des trois élèves reflètent bien la confusion qui demeure à la fin du travail.

Il peut être intéressant de compléter cette analyse en regardant comment les élèves du groupe A₂' vont rapporter leur résultat aux autres dans l'étape 2.

Marcus se retrouve dans un groupe où les premiers élèves à prendre la parole proposent des procédures utilisant des calculs. Il n'intervient pas mais questionne pour qu'on lui explique la technique utilisée. Il n'a pas l'occasion de parler de ce qu'il a fait car l'enseignant interrompt l'échange pour réorienter l'attention sur l'énoncé. Le groupe s'interroge alors sur les conversions. Une nouvelle intervention de l'enseignant les ramène vers les tableaux de valeurs. A ce moment l'élève du groupe B₂' énonce que « la pression n'est pas proportionnelle à la température car la droite ne passe pas par l'origine et ça ne forme pas une droite ». Marcus parle à son tour et précise simplement : « ça passe pas par zéro ». L'écart entre ces deux propositions n'est pas relevé car l'élève qui joue le rôle d'entraîneur attire à ce moment l'attention du groupe sur le fait qu'il y a proportionnalité dans un cas et pas dans les deux autres, sans que la validité des résultats soit remise en cause. Ceci signifie que, pour cet élève, le contrat didactique autorise la possibilité d'obtenir des résultats qui à première vue semblent incohérents.

William énonce à l'étape 2 qu'il a fait le graphique. D'autres ont également fait un graphique mais ils ont aussi utilisé une autre procédure. Au départ la différence entre les réponses est interprétée comme venant de la procédure choisie puis les trois unités de température les amènent à chercher une autre explication.

Alan quant à lui ne présente pas ses résultats au groupe car le problème construit à l'étape 2 est devenu un problème de conversion des unités de température sans que soit évoquée la pression. Malgré l'intervention de la chercheuse pour les inciter à prendre en compte le travail fait précédemment, les élèves restent sur cette question de conversion. Il faut attendre 4 minutes avant la fin de l'étape pour que les élèves considèrent la pression, ils n'échangeront pas sur leurs réponses de l'étape 1. On peut faire l'hypothèse qu'ils estiment déjà que les mesures sont les mêmes dans les trois tableaux et qu'il n'y pas proportionnalité car l'élève du groupe E₂' qui avait conclu à la proportionnalité dans l'étape 1 ne participe pas aux échanges. Ils n'ont alors aucune piste pour chercher une relation affine d'autant qu'une élève précise que la relation peut être du second degré.

Nous allons analyser l'ensemble des productions des élèves à l'étape 2 mais cet extrait permet de voir comment les trois élèves du groupe A₂' vont être ou non convaincus de leur solution : le premier est convaincu de par le fait qu'un autre élève a utilisé la même procédure et donne la même conclusion même si les arguments ne sont pas les mêmes (la configuration peut être considérée comme pragmatique : la même expérience amène la même constatation); le second est convaincu du fait qu'une autre procédure amène la même conclusion (la configuration est alors analytique : deux cadres permettent de conclure au même résultat). Il ne cherche cependant pas à préciser son argumentation. Enfin le troisième ne remet pas en cause le résultat, il considère que les autres ayant eu la même situation, ils sont forcément arrivés à la même conclusion, il s'engage sur une autre tâche. On peut interpréter cette configuration comme une configuration analytique, les expérimentations étant considérées comme relevant d'un même modèle.

La situation demande aux élèves d'échanger sur les procédures différentes mobilisées à l'étape 1 alors qu'ils ont un nouveau problème à résoudre collectivement. On pouvait penser que cela inciterait les élèves à justifier du choix et de la critique des procédures par des références théoriques. Il semble que la situation ne suffise pas à les amener à un niveau de configuration théorique. Nous remarquons que d'autres enjeux sont plus forts que la recherche d'une cohérence au sein d'une théorie. En particulier des enjeux relationnels et la manière dont les élèves vont prendre différents rôles dans les interactions. Il semble aussi que la posture de l'enseignant soit déterminante dans l'orientation du travail, ses interventions orientent l'attention. Ce paramètre n'a pas été relevé dans la classe de seconde 1 car l'enseignante était très en retrait et n'intervenait pas sur l'activité. Il est alors important de réfléchir à ce que nous pouvons modifier dans le milieu à ce stade pour réduire les facteurs qui peuvent nuire au processus de problématisation.

Les espaces de contraintes qui suivent mettent en évidence les procédures des différents groupes et les registres dont ils relèvent. L'espace de contraintes *a priori* présente en grisé ce qui a été effectivement mobilisé dans cette classe au regard de notre analyse *a priori* (voir tableaux 53, 54 et 55).

Expériences mises en place par les élèves	Groupe A₂ : - recherche d'un éventuel coefficient de proportionnalité - faire la représentation graphique	Groupe B₂ : - tester le produit en croix - vérifier que la représentation graphique est une droite passant par l'origine	Groupe C₂ : - tester le produit en croix	Groupe D₂ : - vérifier que la représentation graphique est une droite passant par l'origine	Groupe E₂ : - Rechercher un éventuel coefficient de proportionnalité approché	Groupe F₂ : - tester le produit en croix
Registre empirique lié aux données	P₃ : Les coefficients sont différents. P₅ : On n'obtient pas des points alignés avec l'origine.	P₄ : Le calcul du produit en croix donne un résultat erroné. P₅ : On n'obtient pas des points alignés avec l'origine.	P₄ : Le calcul du produit en croix donne un résultat erroné.	P₅ : On n'obtient pas des points alignés avec l'origine.	P₃ : Les coefficients sont très proches.	P₄ : Le calcul du produit en croix donne un résultat proche de celui attendu.
Registre des nécessités à l'intérieur des modèles	<div style="text-align: center; border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> N₃ : Nécessité d'une relation non-proportionnelle sauf si on utilise l'unité Kelvin pour la température. </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30%;"> La représentation graphique est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc c'est la représentation graphique d'une fonction affine. </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30%;"> Deux suites de nombres (grandeurs) sont proportionnelles si on peut calculer un coefficient de proportionnalité (approximatif) </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30%;"> Si deux suites de nombres sont proportionnelles, on peut appliquer le produit en croix. </div> </div>					
Registre explicatif	E₁ : Suites numériques proportionnelles	E₂ : Grandeurs proportionnelles		E₃ : Proportionnalité dans le cadre fonctionnel		

Tableau 53: espace de contraintes lié à l'étape 1 dans la classe de seconde 2 première demi-classe

Expériences mises en place par les élèves	Groupe A₂' : - représentation graphique	Groupe B₂' : - représentation graphique	Groupe C₂' : - recherche d'un éventuel coefficient de proportionnalité - test du produit en croix - représentation graphique	Groupe D₂' : - recherche d'un coefficient de proportionnalité - calcul du produit en croix	Groupe E₂' : - recherche d'un éventuel coefficient de proportionnalité approché - test du produit en croix	Groupe F₂' : - représentation graphique - recherche d'un éventuel coefficient de proportionnalité approché
Registre empirique lié aux données	P₅ : On obtient une droite mais les points ne sont pas alignés avec l'origine. P₉ : Lecture du tableau	P₅ : On n'obtient pas une droite. Les points ne sont pas alignés avec l'origine.	P₃ : Les coefficients sont différents P₄ : Le calcul du produit en croix donne un résultat erroné	P₄ : Le calcul du produits en croix donne un résultat erroné	P₃ : Les coefficients sont très proches P₄ : Le calcul du produits en croix donne un résultat proche de celui attendu	P₅ : On obtient une droite. P₃ : Les coefficients sont très proches.
Registre des nécessités à l'intérieur des modèles	<p>N₂ : Nécessité d'une intervention de la proportionnalité dans la relation.</p> <p>La représentation graphique est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc c'est la représentation graphique d'une fonction affine.</p>		<p>N₃ : Nécessité d'une relation non-proportionnelle sauf si on utilise l'unité Kelvin pour la température.</p> <p>Deux suites de nombres (grandeurs) sont proportionnelles si on peut calculer un coefficient de proportionnalité (approximatif)</p>		<p>Si deux suites de nombres sont proportionnelles, on applique le produit en croix.</p>	
Registre explicatif	E₁ : Suites numériques proportionnelles		E₂ : Grandeurs proportionnelles		E₃ : Proportionnalité dans le cadre fonctionnel	

Tableau 54: espace de contraintes lié à l'étape 1 dans la classe de seconde 2 seconde demi-classe

Expériences mise en place par les élèves	Comparaison des valeurs	Conversion	Calculs des quotients d'une mesure de grandeur par une autre.	Calculs par le produit en croix	Représentation graphique	Test d'alignement avec la calculatrice	Calculs à partir des propriétés de linéarité	Calculs des variations des mesures de grandeur
Registre empirique lié aux données	D₁ : Les pressions sont les mêmes dans les trois tableaux.	D₂ : Seule l'unité de mesure des températures change. Les valeurs prises dans les différentes unités ne sont pas proportionnelles.	D₃ : Les coefficients sont différents dans deux cas, ils sont très proches dans le troisième.	D₄ : Le calcul des produits en croix donne un résultat erroné sauf dans un tableau où les valeurs sont très proches.	D₅ : On obtient des points alignés.	D₆ : Affichage « vrai » ou « faux »	D₇ : Les calculs par propriétés de linéarité donnent des résultats erronés sauf dans un tableau où les valeurs sont très proches.	D₈ : Une même variation sur une grandeur amène une même variation sur l'autre, une variation double de l'une amène une variation double de l'autre.
Registre des nécessités à l'intérieur des modèles	N₁ : Nécessité d'un calcul permettant de passer d'une grandeur à l'autre.		N₂ : Nécessité d'une intervention de la proportionnalité dans la relation.		N₃ : Nécessité d'une relation non-proportionnelle sauf si on utilise l'unité Kelvin pour la température.		N₄ : Nécessité de variations proportionnelles.	
	La représentation graphique est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc c'est la représentation graphique d'une fonction affine.		$f(x+a) = f(x) + b$ avec a et b constantes caractérise une fonction affine.		La variation de pression est proportionnelle à la variation de température.		$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Constante}$ donc f est affine et $f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} x + f(0)$	
Registre explicatif	E₁ : Suites numérique proportionnelles		E₂ : Grandeurs proportionnelles		E₃ : Proportionnalité dans le cadre fonctionnel		E₄ : Fonction affine	

Tableau 55: Séance 1 étape 1 dans la classe de seconde 2 à l'intérieur de l'espace de contraintes a priori

IV.6 : Analyse a posteriori de l'expérimentation de l'étape 2 dans la classe de 2^{nde} 2

IV.6.1 : Analyse des productions écrites

Nous avons recopié ci-dessous les productions des différents groupes lors de l'étape 2 dans la classe de seconde 2. Ces nouveaux groupes sont constitués d'élèves ayant chacun travaillé à partir de tableaux de valeurs dans des unités différentes. Une feuille réponse est donnée pour le groupe. Il faut y indiquer le numéro d'identification des différents membres et le numéro du dictaphone. Ceci afin de suivre plus facilement les élèves de la première à la seconde étape.

Groupe 1 : Avec nos résultats précédents, nous avons conclu que les degrés Kelvin étaient proportionnels à la pression en hectopascal, alors que les degrés °C et °F n'étaient pas proportionnels.

$$1^{\circ}\text{K} \approx 3 \text{ hPa}$$

$$1^{\circ}\text{K} \neq 1^{\circ}\text{C} \neq 1^{\circ}\text{F}$$

Si la température augmente, la pression augmente.

Si la température baisse, la pression baisse.

Groupe 2 : $0^{\circ}\text{C} = 273 \text{ K} = 32^{\circ}\text{F}$

Donc le tableau des Kelvins, nous allons démontrer qu'il est proportionnelle :

$$259 \times 842 : 774 \approx 282$$

Groupe 3 : $1\text{K} =$

$$373\text{K} = 100^{\circ}\text{C} / 0 \text{ K} = -273^{\circ}\text{C}$$

$$100\text{F} = 38^{\circ}\text{C} / 0 \text{ F} = -18^{\circ}\text{C}$$

$$1^{\circ}\text{C} = 274 \text{ K}$$

$$1^{\circ}\text{C} = 32 \text{ F}$$

$$1\text{K} = -272^{\circ}\text{C}$$

$$1 \text{ F} = 10,5^{\circ}\text{C}$$

Groupe 4 : Il y a une relation entre Kelvin et Celsius. Il y a une relation entre chaque mesure, donc il y aura toujours un rapport, entre les Kelvin et les degrés °Celsius.

Groupe 5 : Pour les mesures en °F et en °C, les valeurs ne sont pas proportionnelle alors que les mesures en K sont proportionnelle.

Groupe 7 : Peu importe l'unité de mesure de la température, ce n'est jamais proportionnel à la pression.

Groupe 8 : Rien

Groupe 9 :
 -14°C $7,00\text{ F} \rightarrow -13,9^{\circ}\text{C}$ $259\text{ K} \rightarrow -14,15^{\circ}\text{C}$
 Lorsque l'on passe de C° Celsius en kelvin on ajoute 273. Et quand on passe de Celsius en Fahrenheit.

Groupe 10 :

$$\frac{20}{293}=0,07 \quad \frac{-196}{77}=-2,55$$

$$\frac{20^2}{293}=1,4 \quad \frac{(-196)^2}{77}=498 \quad -273,15^{\circ}\text{C}$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -459,65^{\circ}\text{F}$$

	124°F	0°C	
974 kPa	51°C	32°F	820 hPa
	324°K	273°K	

Les productions sont moins rédigées que dans la classe de seconde 1, un groupe n'a même rien écrit. Par contre, on note une utilisation plus importante de symboles mathématiques plus ou moins conventionnels. Certains symboles relèvent du registre des fonctions (comme la flèche pour désigner l'image d'un nombre par une fonction). La relation est cherchée sous la forme d'un algorithme de calcul comme dans le groupe 10 où, après la recherche d'un coefficient de proportionnalité entre les expressions de la température en degrés Celsius et en Kelvins, les élèves cherchent un coefficient de proportionnalité entre le carré de la mesure en degrés Celsius et la mesure en Kelvins. L'enregistrement permet de

comprendre que l'idée vient d'un travail effectué l'année précédente sur la relation entre la distance d'arrêt et le carré de la vitesse d'un véhicule.

Nous retrouvons dans ces productions certains obstacles repérés dans la classe de seconde 1. Il semble cependant que la question de la covariation entre pression et température ne soit pas traitée de la même manière. C'est ce que nous allons préciser maintenant.

L'obstacle du concept de mesure

Contrairement à la classe de seconde 1, la mesure d'une même grandeur dans des unités différentes ne semble pas être posée. D'ailleurs aucun groupe n'est arrivé à la conclusion que les tableaux donnent les mêmes mesures. Par contre tous posent le problème de la conversion et très souvent indépendamment du contexte et des résultats de l'étape 1. Certains groupes ne prennent pas le temps de confronter les résultats obtenus à cette première étape. Deux hypothèses peuvent être faites. La première est que le contrat de classe amène les élèves à considérer qu'ils ont tous eu le même travail à réaliser et donc qu'ils ont tous obtenu les mêmes résultats à l'étape 1. La seconde est que les interventions de l'enseignant ont orienté différemment le travail des élèves.

Le groupe 4 mobilise l'unité de raisonnement U1 et justifie qu'il existe une relation fonctionnelle entre les mesures de température en Kelvins et en degrés Celsius. Sa justification s'appuie sur le fait que, s'il existe une relation entre les unités, il existe une relation entre chacune des mesures. On note la confusion entre unités et mesures. Les élèves semblent vouloir attester que la relation entre les unités engendre de fait une relation entre les mesures. Le mot « toujours » venant renforcer l'aspect généralisateur de leur remarque.

Le groupe 5 écrit que « les valeurs ne sont pas proportionnelle », si les unités sont précisées, le mot « valeur » semble désigner des nombres et non des mesures comme si les élèves traitaient séparément les deux données : unité et valeur. Le fait même de ne pas mettre le « s » du pluriel à « proportionnelle » témoigne de la difficulté que les élèves rencontrent dans l'usage de cet adjectif. On retrouve aussi la difficulté de dénomination des grandeurs avec le groupe 7 quand il écrit : « ce n'est jamais proportionnel à la pression », il ne précise pas ce que désigne « ce ».

La covariation des deux grandeurs

L'unité de raisonnement U3 visant à décrire le comportement de la fonction est mobilisé par le groupe 1 qui conclut que les deux grandeurs varient dans le même sens. Ces variations sont même quantifiées dans le cas des Kelvins puisqu'ils écrivent que $1K \approx 3hPa$. En effet cette notation peut signifier qu'à « 1K on associe 3hPa », le symbole \approx remplaçant alors la flèche fonctionnelle $1 \rightarrow 3$ mais elle peut aussi signifier que « toute augmentation de 1K correspond à une augmentation de 3hPa ». La difficulté rencontrée ici est encore liée au manque de notations conventionnelles pour désigner les variations.

La conversion entre les différentes unités de température

Si dans le lycée 1, les groupes ont cherché des opérateurs permettant de déterminer une règle de conversion entre les unités, ceux du lycée 2 ont plutôt cherché des

correspondances entre des valeurs (groupes 2, 3, 9 et 10). Seul le groupe 9 cherche à établir une règle générale : « Lorsque l'on passe de C° Celsius en Kelvins on ajoute 273. Et quand on passe de Celsius en Fahrenheit... ». On remarque que le groupe 10 organise les données sous forme de fonction à plusieurs variables.

974 kPa 124° F
 51° C signifie que 974 est associé au triplet (124 ; 51 ; 324).
 324° K

Le fait d'ajouter une constante n'a pas été interprété dans cette classe comme une relation de proportionnalité.

L'apport scientifique sur l'internet

Dans la classe de seconde 2, les élèves se sont moins autorisés à chercher des informations sur l'internet. L'écoute des enregistrements atteste que si l'idée est émise par un élève, d'autres interviennent pour dire que ce n'est pas possible. Quelques rires ou moqueries semblent indiquer que chercher des éléments de réponse sur l'internet n'est pas acceptable, c'est en quelque sorte une « tricherie ». L'accès à l'information a dans la classe de seconde 2 un tout autre sens que dans la classe de seconde 1. Nous allons le préciser dans l'analyse de l'enregistrement du groupe 8 qui va suivre. Les élèves se sont ainsi privés de l'utilisation d'un convertisseur pour exprimer toutes les mesures dans la même unité. Les groupes sont donc restés essentiellement sur le problème Q₁₂ de conversion (voir schéma 35 p.378).

Pour mieux comprendre l'écart entre les productions des classes 1 et 2 pour cette étape et pour comprendre les difficultés rencontrées par les élèves, nous allons analyser les enregistrements audios.

IV.6.2 : Analyse des interactions dans les groupes durant l'étape 2

Comment expliquer le compte-rendu vierge du groupe 8 ?

Nous allons nous intéresser au groupe 8 qui n'a rien rédigé sur le compte-rendu. Ce groupe est constitué de trois élèves, Élodie (groupe D₂'), Benjamin (groupe B₂') et James (groupe F₂'). L'étape 2 dure un peu plus de 20 minutes pendant lesquelles le groupe peut rester silencieux de longs moments (voir transcription en annexe 46). L'étape peut être décomposée en épisodes, le changement d'épisode correspond souvent à une intervention de l'enseignant qui vient étayer le travail.

Épisode 1	19:35 : Mise en commun des résultats de l'étape 1
Épisode 2	21:56 : Lecture de la consigne et exploration des données
Épisode 3	22:38 : Identification de la tâche
Épisode 4	25:14 : Mise en évidence du paradoxe et formulation du problème
Épisode 5	34:01 : Recherche sur l'internet
Épisode 6	38:22 : Nouvelle donnée : les températures sont les mêmes

Épisode 7 39:15 : Remise en cause des résultats

Dans ce groupe, les élèves évoquent plusieurs fois leur difficulté à identifier ce qu'il faut faire, difficulté formalisée par Benjamin : « Pourquoi vous cherchez ça ? » (Benjamin, 22:38), « On voit pas ce qu'il faut faire. » (Benjamin, 24:29), « Il n'y a pas de question. » (Benjamin, 24:34). Lorsque l'enseignant intervient, les élèves n'arrivent pas à formuler le problème et plus tard James avoue : « Non mais on est, on est perdus en fait » (37:22). Les élèves échangent volontiers entre eux au début de l'activité sur leurs résultats de l'étape 1 et ils arrivent très vite à la constatation qu'ils n'ont pas les mêmes réponses. Ils expliquent cela du fait qu'ils n'avaient pas les mêmes données. Les mesures de pression sont les mêmes dans les trois tableaux mais pas les valeurs des mesures de températures exprimées dans des unités différentes « on avait les mêmes pressions mais pas les mêmes températures » (Benjamin, 22:35). Les élèves ne voient pas où est le problème car ils ne considèrent pas les Grandeur (grand G), ils ne prennent en compte que les valeurs numériques. Ces valeurs sont différentes, il n'y a donc pas de raison pour que les tableaux soient tous de même nature.

James propose de faire des conversions, dans l'objectif de savoir qui a raison. Benjamin explique que « tout le monde a raison » (22:46). Le groupe se replonge alors dans l'exploration des documents. L'enseignant intervient, sans doute inquiet de ne pas les voir échanger. Benjamin répond « on voit pas ce qu'il faut faire » (24:29). Les élèves ne sont pas entrés dans un processus de problématisation, ils cherchent la tâche à exécuter. Pour eux, un problème doit être posé sous forme de question, et cette question amène une certaine tâche de résolution. Ici les élèves ont une consigne : rédiger une conclusion. L'enseignant demande une reformulation et James explique qu'il faut « comparer les résultats » (25:11). L'obstacle reste posé par Benjamin : « oui mais on a plusieurs unités » (25:21).

La macrostructure du débat au sein de ce groupe présentée en illustration 13 p.427 permet de mettre en évidence le rôle des interventions des enseignants dans l'avancée du problème. Nous avons codé avec des numéros les propositions des élèves et par des lettres celles des enseignants sur la droite du schéma. Nous pouvons repérer trois grands problèmes qui peuvent être schématisés dans un losange de problématisation. Cependant le premier problème est posé par James à partir des données et d'une condition qui n'est pas explicitement formulée : il faut savoir qui a raison. Il peut s'agir d'une clause du contrat didactique au niveau macro dans sa facette sociale : quand le professeur demande de discuter des résultats cela signifie qu'il faut déterminer qui a raison et qui a tort. Il peut aussi s'agir de clauses du contrat didactique au niveau macro dans sa facette épistémologique : la relation entre deux grandeurs ne peut pas être de natures différentes suivant les expériences, en logique mathématique une proposition est soit vraie soit fausse. La solution est donnée par Benjamin qui conclut que tout le monde a raison puisque les nombres sont différents dans les tableaux.

En parallèle, on remarque que les enseignants cherchent souvent à orienter le travail du groupe sur la lecture de la consigne pour que les élèves prennent en compte les grandeurs et non seulement les mesures. Le premier problème étant résolu, les élèves se posent alors la question de la conversion. Ici encore le problème est posé à partir de l'exploration des données et de la contrainte de trouver une « relation ». Si le professeur 2 amène les élèves à préciser

leur représentation de ce que serait une solution du problème en leur demandant ce que « ça peut être une relation », le professeur 1 cherche à ce que les élèves se concentrent sur la relation entre la pression et la température. Les élèves laissent alors de côté la question de la conversion mais ils n'arrivent pas à poser le nouveau problème. La nouvelle proposition de l'enseignant 1 est de donner une méthode : « commencez par un cas simple ». Par un échange de questions réponses sur les données, il finit par formaliser que « ce sont les mêmes températures dans des unités différentes. » En fait les élèves n'ont pas construit cette donnée. Ils n'ont pas mené à bout l'exploration des conversions qui pouvaient les amener au constat que les tableaux présentaient effectivement les mêmes mesures de température dans des unités différentes. Sans avoir effectué le travail sur les conversions, le groupe remet en cause cette donnée apportée par l'enseignant en justifiant que « ce n'est pas logique ». La condition qui est sous-jacente est que si les tableaux donnent les mêmes résultats de mesures, la relation entre les grandeurs devrait être la même quelle que soit l'unité choisie. Lorsque les élèves ont construit eux-mêmes les données, ils peuvent remettre en cause une condition. Ici les données sont introduites par l'enseignant et ce que ce dernier remet en cause c'est les résultats du travail effectué dans l'étape 1 : « Êtes-vous convaincus des résultats des uns et des autres ? » L'épisode se termine alors sur la remise en cause des données et non des conditions.

Il semble que l'étayage de l'enseignant 1 soit orienté vers la résolution du problème par l'identification de la question, le repérage des données et leur traitement. Il n'est pas fait référence à la construction du problème, c'est-à-dire à la reformulation de questions par les élèves ni par la formalisation des conditions. Cette orientation de l'étayage se caractérise par des verbes utilisés par l'enseignant qui visent à la contemplation des données et non à une opération sur ces données : « lisez », « relisez », « regardez bien », « partez de ce que vous avez constaté », « qu'est-ce que vous avez constaté », « vous regarderez ce qui se passe pour les autres ».

A 8 minutes de la fin de la séance, le chercheur décide d'intervenir plus explicitement auprès des élèves pour lever le blocage. Il essaye de faire reformuler la question et réalise que les élèves n'ont toujours pas mobilisé l'unité de raisonnement U1, ils n'ont pas identifié les deux grandeurs étudiées.

« Ce que l'on veut, c'est une relation entre la température d'un côté et la pression de l'autre. Là il est pas question de pression quand tu me montres ces deux heu... ces deux thermomètres là. Il est simplement question d'une seule grandeur, la température. Ce que l'on veut c'est une relation entre la température et la pression. Dans le cas où la température est exprimée en degrés Kelvins comme c'est le cas sur votre feuille, dans le cas où la température est donnée, est exprimée en degrés Fahrenheit et en degrés Celsius. »

En premier lieu, l'enseignant identifie la solution du problème attendue : on veut une relation entre la température et la pression. Il renforce la distinction entre les deux grandeurs en précisant « d'un côté... de l'autre ». Il permet ensuite une conversion de registre en associant l'image du thermomètre à la grandeur « température ». Le document présente deux illustrations, les élèves ont beaucoup de mal à en extraire des informations. La dualité

pression/température et la forme du thermomètre amènent comme nous l'avons déjà vu, une assimilation nanomètre/thermomètre. La fin du propos reprend la consigne mais la relation qui est attendue doit être toujours vraie quelle que soit l'unité de température choisie, alors qu'ici l'enseignant laisse supposer qu'on peut étudier cette relation en choisissant l'unité qui nous semble « la plus simple ». Ici encore implicitement l'unité la plus simple est pour l'enseignant le Kelvin puisqu'elle permet d'obtenir une relation de proportionnalité. Pour les élèves, l'unité la plus simple est très certainement le degré Celsius puisque c'est l'unité usuelle dont ils ont l'expérience à l'école comme à l'extérieur de l'école. Nous avons donc différentes sources de malentendus :

- sur l'activité attendue : convertir, calculer, chercher, débattre ;
- sur le statut de l'erreur, de l'essai : validation par le groupe ou par le professeur ;
- sur le problème posé : chercher une relation entre les différentes unités de température ou entre la pression et la température ;
- sur le registre explicatif mobilisé : cadre des suites de nombres proportionnelles ou cadre des grandeurs proportionnelles.

Le groupe n'a pas laissé de traces écrites, il ne se sent pas autorisé à rendre un écrit de recherche. On peut s'interroger sur le transfert de la situation dans une classe ordinaire. Comment et quand, l'enseignant prend-il et analyse-t-il l'activité des élèves ? Et dans quel but ? Les élèves ont eu une activité mathématique pendant la séance, mais cette activité est invisible pour l'enseignant. Le passage régulier de l'enseignant qui attend visiblement des indices d'activité (échanges verbaux, traces écrites) a-t-il une fonction d'enrôlement ? L'enseignant insiste auprès des élèves pour qu'ils relisent les documents, son recentrage répété sur la consigne n'apporte cependant pas l'effet escompté. Il a une connaissance de ses élèves, il agit peut-être en fonction de difficultés déjà repérées ? Il peut aussi être trompé par l'avancée des autres groupes qui ont déjà établi que les mesures de températures sont les mêmes dans les trois tableaux. Il peut encore vouloir étayer par un maintien de l'orientation (Bruner, 1998) pour ne pas déstabiliser les élèves. Le groupe ne peut cependant pas construire le problème puisque chaque ouverture de possibles ou chaque solution est finalement invalidée par l'enseignant. La dernière intervention est étonnante puisqu'elle remet en cause le travail préalable qui était pourtant valide. Benjamin murmure qu'il pense pourtant que « c'est bon, en fait ». L'enseignant redit plusieurs fois : « vous étiez convaincus ? » et pose sans doute ainsi une clause du méso-contrat didactique dans sa facette sociale : la validité d'un résultat est fonction de la conviction. Cette clause peut devenir un obstacle à l'apprentissage car une conviction peut s'opposer à la construction d'un concept nouveau ou différent. Nous faisons l'hypothèse au début de ce travail de thèse que la conviction que les relations entre grandeurs sont proportionnelles est un obstacle à la construction du concept d'affinité. Encore faut-il préciser ce qui forge la conviction en mathématiques et en particulier quel est le statut de la preuve.

L'échange montre aussi une intervention du chercheur. Son intervention vise aussi l'identification des grandeurs : « là quand tu me dis comment on va passer de degrés Kelvins heu, de degrés Celsius à Kelvin, on est sur une relation entre les unités qui sont là... Nous on cherche une relation entre la température et la pression. » L'intention est cependant de lier les deux relations entre elles et de faire préciser comment les élèves comptent définir la relation cherchée. L'enseignant 1 reformule « pour passer de l'un à l'autre » et le chercheur prend du recul en disant « je réfléchis au moment où je le dis... » et finit pas quitter le groupe. Ce choix doit permettre aux élèves de participer à l'échange, sinon le risque est grand de voir l'enseignant et le chercheur dialoguer sans prise en compte des élèves et de leurs représentations.

En conclusion, l'étayage dans ce groupe, a surtout une fonction d'orientation ou de mise en évidence des caractéristiques critiques de la tâche au sens de Bruner (Bruner, 1998). Il ne favorise pas l'apprentissage par problématisation par les élèves. Le manque de productions écrites ne permet pas d'identifier les connaissances mobilisées par les élèves.

Pour approfondir notre analyse, nous allons partir de la macrostructure du débat dans le groupe (voir illustration 13). L'organisation fait apparaître trois grands épisodes qui correspondent chacun à une invalidation de l'enseignant : « Avez-vous bien lu ? » qui a plutôt comme signification que les élèves n'ont pas bien lu ; « Regardez bien, on cherche une relation entre quoi et quoi ? » qui signifie que la relation que les élèves cherchent n'est pas la bonne ; « Est-ce que vous êtes convaincus des résultats des uns et des autres ? » qui remet en cause la validité des résultats en question. Ces trois grands épisodes peuvent être reliés à trois problèmes :

- le problème de la proportionnalité : « savoir qui a raison », c'est-à-dire, d'un point de vue mathématiques, savoir si la température est proportionnelle à la pression ;
- le problème de la conversion : comment convertir les degrés Celsius en Kelvins ?
- le problème du paradoxe : identifier l'erreur, trouver ce qui fait que ce n'est pas logique.

Nous obtenons pour chaque problème repéré dans la macrostructure, une schématisation dans le losange de problématisation que nous allons expliciter.

Problème de la proportionnalité

Dans cet épisode, la question posée par les élèves est de « savoir qui a raison », il s'agit d'un problème de mise en relation (comparaison des réponses et/ou des procédures en vue d'une validation ou d'une hiérarchisation). La solution est plutôt un élément factuel qui ne suppose pas une explication, la validation porte sur les résultats des calculs qui constituent la preuve à eux seuls. Les données sont les mesures dans les tableaux, or les élèves ont remarqué que les mesures de pression sont les mêmes dans les trois tableaux mais que celles des températures sont différentes car exprimées dans des unités différentes. Ils ont trouvé que la situation était une situation de proportionnalité dans un seul cas. Les données sont analysées les unes par rapport aux autres dans le mode inter-objectal.

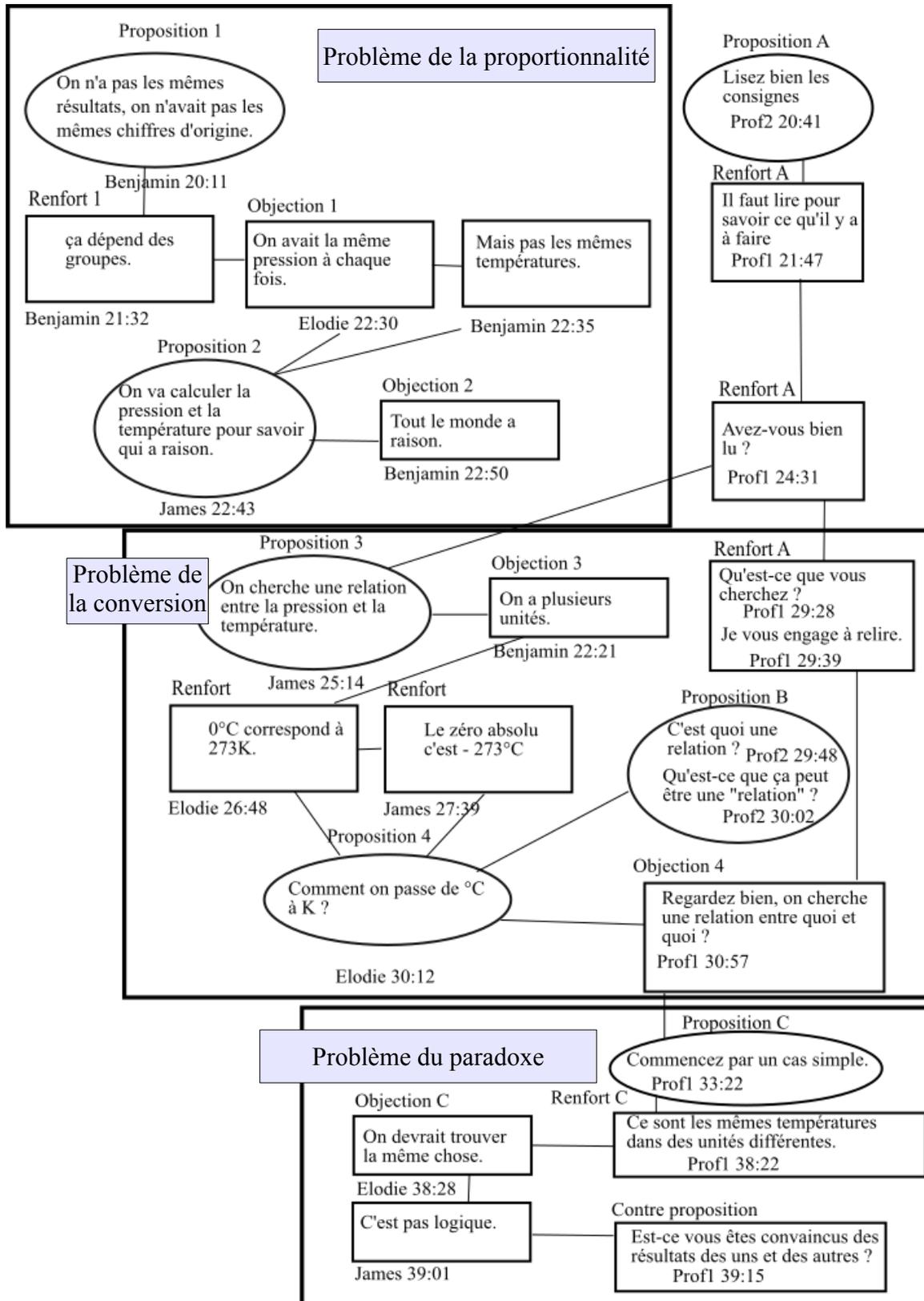


Illustration 13 : Macrostructure du débat étape 2 lycée 2 Dictaphone 5

Pour ces élèves, une condition semble être que pour comparer des mesures, il est nécessaire de les exprimer dans la même unité. Cette condition relève plus d'un automatisme pour les élèves à l'entrée en seconde que d'une nécessité construite. Dès que des calculs sont effectués sur des mesures exprimées dans différentes unités, il est demandé de convertir au préalable. Une autre condition intervient en fin d'épisode : la relation entre les grandeurs peut être d'une nature différente suivant les unités choisies. Nous qualifions cette condition de « problématique » car elle n'a pas été enseignée mais elle semble être une possibilité envisagée par un des élèves. C'est une ouverture de possible. La mise en relation des données et des conditions permet de conclure que tout le monde a raison : les calculs sont justes, les données sont exprimées dans des unités différentes, il est donc normal de ne pas trouver une relation de même nature entre la pression et la température. Nous obtenons le schéma 49.

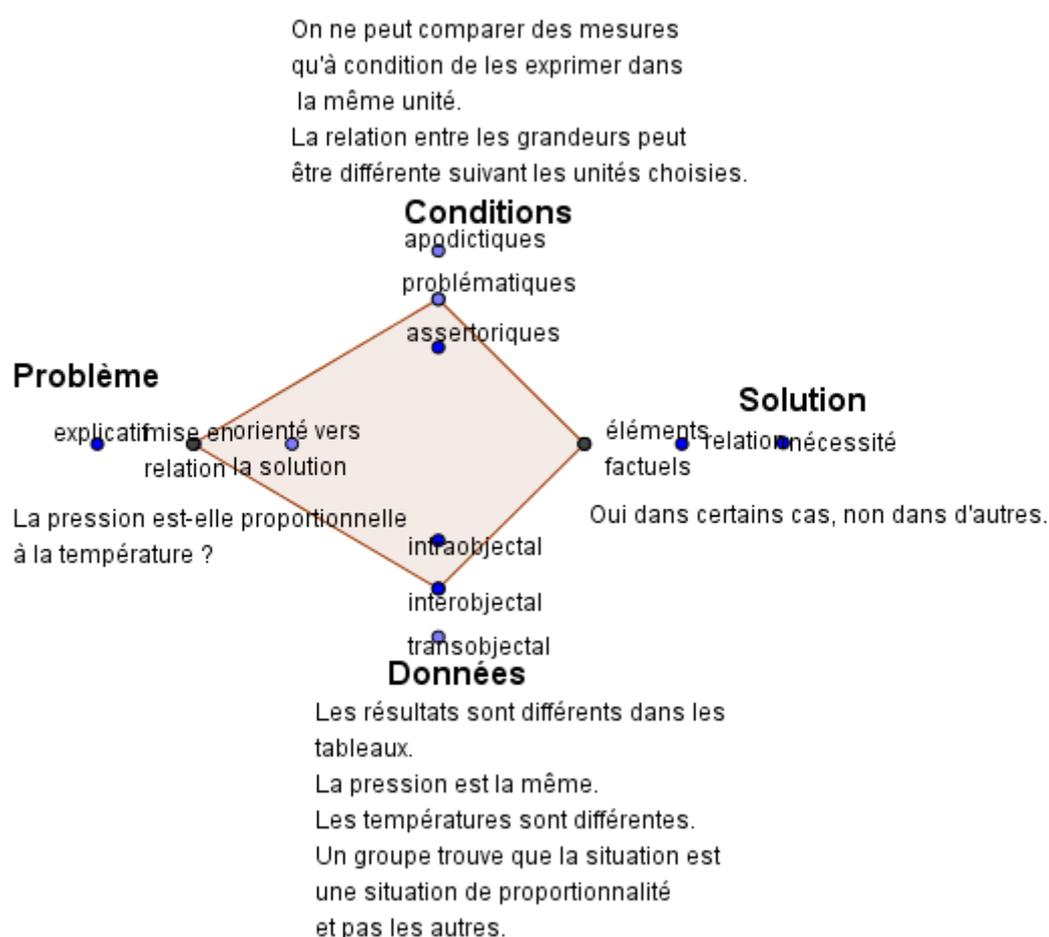


Schéma 49: losange de problématisation problème de la proportionnalité étape 2 lycée 2 Dict5

Problème de conversion

La question est de convertir les degrés Celsius en Kelvins. Les élèves posent un problème de mise en relation, ils cherchent « comment on passe de °C à K ? ». Pour cela, ils partent de lectures effectuées sur les illustrations proposées. Ils ne cherchent pas un convertisseur ni une formule qui aurait permis un traitement trans-objectal. Ils traitent les

données dans un mode inter-objectal. Peu de conditions semblent permettre l'exploitation de ces données si ce n'est qu'une « relation » consiste justement à chercher « comment on passe » de l'une à l'autre et que le regard se porte en premier sur le zéro, preuve sans doute que l'origine a un statut particulier ou peut-être simplement que c'est la première valeur qu'on peut lire en partant du bas du thermomètre. Les conditions ne sont donc pas problématiques, il n'y a pas ouverture de possibles. Le problème n'a pas de solution puisque l'enseignant oriente la réflexion dans une autre direction, amenant le troisième problème. Nous obtenons le schéma 50.

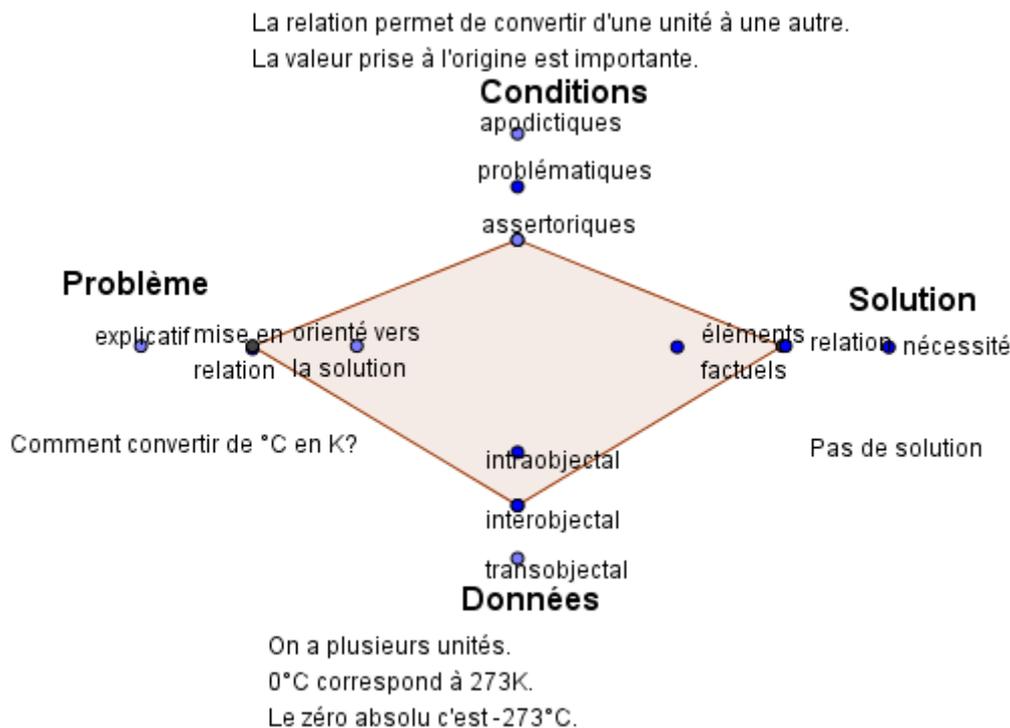


Schéma 50: losange de problématisation problème de conversion étape 2 lycée 2 Dict5

Problème du paradoxe

Une donnée nouvelle est introduite par l'enseignant : les températures sont les mêmes dans les trois tableaux. La question est alors d'expliquer comment il peut être possible d'avoir une relation différente entre les grandeurs. Le problème est explicatif et orienté vers une solution qui est une nécessité. La solution devrait montrer que les grandeurs ont nécessairement une caractéristique commune qu'il s'agit de déterminer. Les élèves ne trouvent pas de solution et restent sur le constat que « ce n'est pas logique ».

Les conditions mobilisées ont un statut assertorique, il ne s'agit pas de nouveaux possibles. Deux conditions interviennent dans le traitement des données :

- la relation entre deux grandeurs est toujours de même nature quelle que soit l'unité choisie, alors qu'elle peut être différente sur des valeurs numériques différentes ;
- les conversions sont des relations de proportionnalité.

En effet les élèves expliquent que les tableaux n'ont pas les mêmes propriétés du fait que les nombres ne sont pas les mêmes (problème de la proportionnalité). Un premier processus de secondarisation est de considérer les Grandeurs (grand G) et non pas les nombres, il correspond en fait à un changement de cadre : passer de la proportionnalité de deux suites de nombres au cadre des grandeurs proportionnelles. Dans le cadre des suites numériques proportionnelles, les tableaux contiennent des valeurs différentes, il n'est donc pas incohérent de ne trouver qu'un seul tableau de proportionnalité parmi les trois. Le paradoxe n'apparaît que si on se place dans le cadre des Grandeurs. Comment les mêmes mesures de Grandeur peuvent être dans un rapport de proportionnalité dans un cas et pas dans les deux autres ? Les conditions restent donc assertoriques et les données ne sont pas considérées de manière trans-objectales puisque les mesures ne sont pas considérées indépendamment des valeurs prises dans le tableau. Les élèves sont dans une impasse du fait que le problème explicatif n'est pas alimenté par un traitement des données trans-objectal, ni par une ouverture de nouveaux possibles du côté des conditions. On obtient le schéma 51

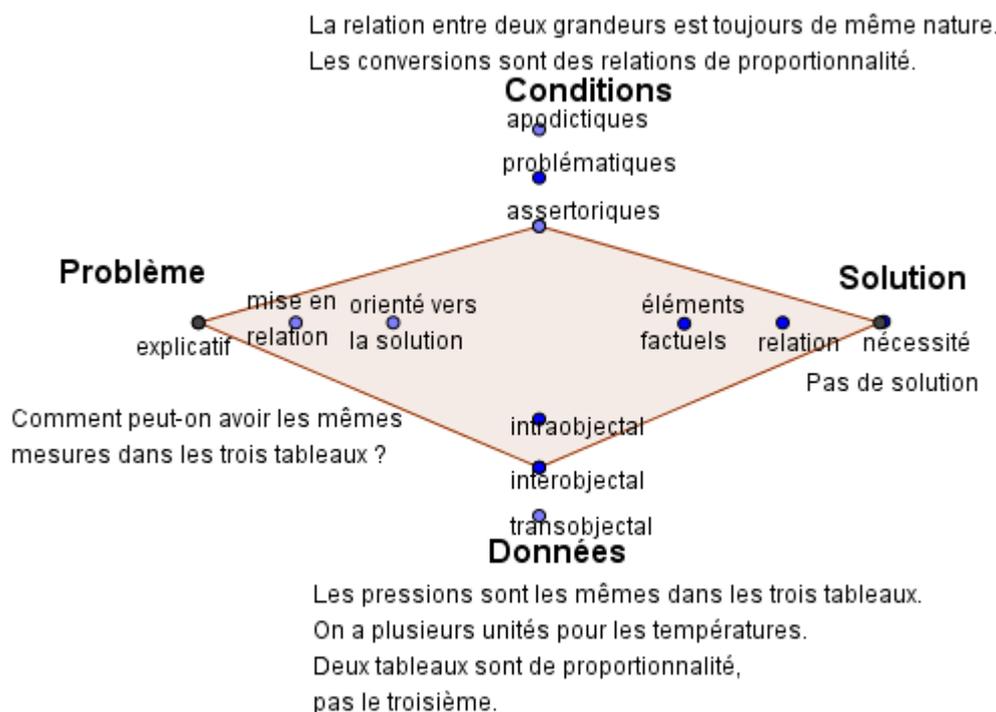


Schéma 51: losange de problématisation problème de conversion étape 2 lycée 2 Dict5

Conclusion

Le raisonnement principal à l'œuvre dans ce groupe semble être qu'une proposition est vraie tant qu'elle n'est pas démentie. Si les données sont traitées de manière inter-objectale, les conditions restent à un niveau intra-objectal. A ce stade peuvent alors coexister des conditions pourtant incompatibles ou incohérentes qui ne sont pas remises en cause puisqu'elles ne sont pas invalidées simultanément dans les mêmes contextes. En particulier, il semble que la mise à l'épreuve des conditions lors d'opérations sur les données soit un moyen de gagner en généralité. Par rapport à notre situation, nous faisons l'hypothèse que le travail

de conversion d'une unité de température à une autre joue le rôle d'inducteur de problématisation. Il permet d'ouvrir un possible en mettant en évidence une relation de conversion qui n'est pas proportionnelle.

Ce travail a été empêché dans ce groupe pour différentes raisons. Il devient alors impossible pour les élèves de traiter la nouvelle donnée (les températures sont les mêmes dans les trois tableaux) puisqu'ils ne l'ont pas construite. La genèse de cette donnée est nécessaire pour permettre d'envisager une conversion qui ne soit pas proportionnelle. Les registres empiriques et explicatifs ne peuvent pas être mis en cohérence par une configuration empirique ce qui ne permet pas au changement de cadres au sens de Douady (des suites numériques proportionnelles aux grandeurs proportionnelles) de jouer un rôle fonctionnel. Les élèves n'ont pas effectué d'opérations sur les données. On remarque par ailleurs que les élèves ne changent pas de rôle. James est proposant, Élodie vérifie et Benjamin énonce. Opérer sur les données aurait peut-être été favorable à des changements de rôles.

Comment expliquer les difficultés que rencontrent les élèves pour poser le problème à l'étape 2 ?

Dans la classe de seconde 2, les élèves semblent avoir plus de mal à poser le problème de l'étape 2 que dans la classe de seconde 1. Nous venons de voir que le groupe 8 n'arrive pas à savoir ce qui est attendu. Ce n'est cependant pas le seul. Le groupe 3 a aussi du mal avec la consigne comme peut en attester l'extrait donné dans le tableau 56 (voir transcription en annexe 47). Si l'élève E9 insiste pour que l'élève E32 explique ce qu'il a compris, il n'y a pas confrontation entre les interprétations des trois membres du groupe. L'important est de « savoir ce qu'il faut faire ». On peut faire l'hypothèse qu'à ce stade, les élèves n'ont pas clairement identifié les grandeurs pression et température et ne font pas la différence entre la grandeur et l'unité de mesure.

E12	1236.99	Vous avez compris ce qu'il faut faire ou pas ?
E9	1238.28	Ouais.
E12	1239.31	Attends.
E9	1240.27	Toi non ?
E12	1241.23	Compare leurs résultats, ok... et cherche une relation entre la température et la pression qui soit toujours vraie, quoi leurs résultats ?
E9	1252.37	Ouais.
E12	1253.19	Quelle que soit du ...quelle que soit l'unité de température...ok d'accord. Attends. Le premier c'est en... degrés...Celsius et en... et en Kelvins. Température d'une pièce, température d'une pièce... [prononce=unintelligible]
E9	1284.57	T'as lu la consigne au moins ?
E32	1286.01	Oui, oui.
E9	1287.21	Ben donne ton opinion dessus.

E32	1290.81	Attends je regarde.
E9	1293.52	Non mais direct, qu'est-ce que tu as compris toi de la consigne ?
E32	1296.12	Ben faut voir la relation qu'il y a toujours entre les Celsius, les Kelvins et les Fahrenheit.
E9	1303.2	Ben il faut le faire, voilà.
E32	1304.4	Oui ben c'est ce que je suis en train de regarder.

Tableau 56: extrait transcription étape 2 lycée 2 groupe 3 D7

Pour ce qui est du groupe 10 (voir transcription en annexe 48), les élèves ont beaucoup de mal à interpréter les données, en particulier le schéma et la photographie du thermomètre canadien. Une élève a une idée de la solution attendue, la situation évoque un problème rencontré l'année précédente. Dans l'extrait donné dans le tableau 57, on remarque que le vocabulaire permet d'exprimer clairement la relation. L'élève propose de transposer la relation en remplaçant la vitesse et l'autre grandeur dont elle ne se souvient pas la nature par la température et la pression. L'échange montre que les élèves ne cherchent pas à expliciter ce qui a permis de faire le lien entre les deux situations. Une hypothèse est que cette élève a des connaissances que les autres n'ont pas. Sa camarade lui demande si c'est sa mère, professeur de mathématiques, qui lui a appris cela. Ce n'est pas le cas et il semble que les deux élèves étaient dans la même classe l'année précédente. Il pourrait être intéressant de savoir pourquoi ce savoir est disponible pour l'une et non pour l'autre.

E21	1404.43	C'est peut-être un truc genre comme la vitesse où c'est l'un au carré est égal heu... proportionnel avec l'autre.
E14	1408.04	Vitesse ?... mais là t'as les températures, t'as pas les vitesses.
E21	1412.2	Mais « comme », comme les vitesses. C'est genre la vitesse au carré est proportionnelle avec truc.
E14	1416.77	Ouais... ouais ça peut le faire.
E8	1418.69	C'est ta mère qui t'a appris tout ça ?
E21	1420.04	Non, non, j'ai appris ça l'année dernière en troisième. Comme toi normalement.
E14	1423.43	Ah ouais pff.

Tableau 57: extrait 1 transcription étape 2 lycée 2 groupe 10 D4

Dans ce même groupe, un autre échange (voir tableau 58) permet d'avoir une idée du contrat didactique dans sa facette sociale. La solution n'est pas évidente parce que la situation est proposée dans le cadre d'une recherche et que le chercheur veut savoir comment on procède. Les questions sont donc considérées comme des « pièges » en ce sens que les automatismes ne fonctionnent pas.

E21	1499.02	Mais je vois pas du tout comment on peut faire en fait.
E14	1501.18	Non mais en fait, faut comprendre un truc, he Léna faut comprendre un truc, toutes ces questions c'est des questions pièges.
E21	1507.81	Mais non !
E14	1508.91	Ben si, c'est pour nous faire heu... c'est pour nous faire débloquer le cerveau.

Tableau 58: extrait 2 transcription étape 2 lycée 2 groupe 10 D4

Un peu plus tard (voir tableau 59), la question de la capacité ou non des élèves à résoudre le problème est évoquée. La remarque de l'élève 21 est importante car elle semble considérer qu'elle n'a pas le niveau pour résoudre le problème. Elle a étudié le tableau avec les températures en Kelvins à l'étape 1, elle est donc la seule à avoir trouvé que le tableau était un tableau de proportionnalité. A aucun moment, elle ne va proposer sa réponse, ni la mettre en discussion. On peut penser qu'elle estime que sa réponse est fautive puisque les deux autres membres du groupe, plus à l'aise qu'elle avec les mathématiques et ayant plus de connaissances disponibles, n'ont pas trouvé qu'il s'agissait d'une situation de proportionnalité.

E21	2091.14	Est-ce que..., mais comment on peut trouver un lien entre tout ça ?
E8	2093.76	Aucune idée.
E21	2095.51	C'est impossible.
E14	2097.67	Si c'est possible mais...
E21	2099.52	Oui c'est possible mais c'est pas à notre niveau. On n'est pas assez intelligent...

Tableau 59: extrait 3 transcription étape 2 lycée 2 groupe 10 D4

En particulier on peut lire ici que le doute ne peut être moteur de la preuve qu'à partir du moment où ce doute porte sur une incohérence entre des conditions et des données construites et partagées. Un inducteur de problématisation peut consister en la validation des données et des conditions. Un autre peut être d'invalidier la procédure. En effet, ce groupe cherche une relation qu'il teste. Comme cette relation peut être de multiples natures, il lui est impossible de les tester toutes. Le regard doit se porter ailleurs. De plus ce groupe ne s'est pas autorisé à chercher de nouvelles informations sur l'internet. Il se retrouve donc devant une impasse d'autant que les élèves du groupe ne changent pas de rôle. L'élève 21 propose et l'élève 14 vérifie. L'élève 8 intervient peu ou n'est pas dans le sujet.

En conclusion, à la fin de l'étape 2 dans la classe de seconde 2, on peut griser dans l'espace de contraintes général ce qui a été mobilisé (voir tableau 60). Nous pouvons constater que les variations n'ont pas été étudiées et que l'aspect fonctionnel n'a pas été traité de ce point de vue. Le registre explicatif est passé du registre des tableaux de nombres proportionnels à celui des grandeurs proportionnelles de par le travail de conversion d'une unité à une autre. La relation fonctionnelle est apparue dans le registre graphique et dans les

relations entre les unités de température. Pour mobiliser les unités de raisonnement U2 et U3, l'étape suivante doit amener les élèves à opérer sur ces variations pour qu'ils puissent s'appuyer sur des données empiriques.

Expériences mise en place par les élèves	Comparaison des valeurs	Conversion	Calcul des quotients d'une mesure de grandeur par une autre.	Calcul par le produit en croix	Représentation graphique	Test d'alignement avec la calculatrice	Calculs à partir des propriétés de linéarité	Calcul des variations des mesures de grandeur
Registre empirique lié aux données	D₁ : Les pressions sont les mêmes dans les trois tableaux.	D₂ : Seule l'unité de mesure des températures change. Les valeurs prises dans les différentes unités ne sont pas proportionnelles.	D₃ : Les coefficients sont différents dans deux cas, ils sont très proches dans le troisième.	D₄ : Le calcul des produits en croix donne un résultat erroné sauf dans un tableau où les valeurs sont très proches.	D₅ : On obtient des points alignés.	D₆ : Affichage « vrai » ou « faux »	D₇ : Les calculs par propriétés de linéarité donnent des résultats erronés sauf dans un tableau où les valeurs sont très proches.	D₈ : Une même variation sur une grandeur amène une même variation sur l'autre, une variation double de l'une amène une variation double de l'autre.
Registre des nécessités à l'intérieur des modèles	N₁ : Nécessité d'un calcul permettant de passer d'une grandeur à l'autre.		N₂ : Nécessité d'une intervention de la proportionnalité dans la relation.		N₃ : Nécessité d'une relation non-proportionnelle sauf si on utilise l'unité Kelvin pour la température.		N₄ : Nécessité de variations proportionnelles.	
	La représentation graphique est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc c'est la représentation graphique d'une fonction affine.		$f(x+a) = f(x) + b$ avec a et b constantes caractérise une fonction affine.		La variation de pression est proportionnelle à la variation de température.		$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Constante}$ donc f est affine et $f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} x + f(0)$	
Registre explicatif	E₁ : Suites numérique proportionnelles		E₂ : Grandeurs proportionnelles		E₃ : Proportionnalité dans le cadre fonctionnel		E₄ : Fonction affine	

Tableau 60: Espace de contraintes lié à l'analyse a posteriori à la fin de l'étape 2

IV.7 : Analyse a posteriori de l'expérimentation de l'étape 3 dans la classe de 2nde 1

L'expérimentation de cette étape s'est déroulée dans la classe de seconde 1 lors d'une autre séance, la semaine suivante. Les élèves sont en classe entière et ils se répartissent par groupes d'affinité de quatre élèves maximum. Nous avons donc dix groupes que nous identifierons par le numéro du dictaphone posé sur leur table. Un document est distribué par binômes comportant plusieurs pages. Certains groupes décident de se répartir les feuilles, d'autres lisent ensemble la première page, d'autres enfin portent directement leur attention sur la consigne. Nous avons donc une appréhension très différente suivant la façon dont les élèves sont entrés dans l'activité. La lecture de la première page qui fait un bilan des conclusions des différents groupes suite aux étapes précédentes, permet un retour réflexif sur l'activité et une validation de certaines conclusions. Les calculs de variations sont demandés, ils permettent une entrée par une activité relativement simple qui fournit de nouvelles données à traiter. Le partage des feuilles permet de gagner du temps dans les premiers calculs et une vision globale dès que le groupe échange sur les résultats obtenus. Ce n'est pas toujours le cas car dans certains groupes, tous les élèves travaillent sur le même support en même temps. Suivant l'ordre dans lequel sont effectués les calculs, nous avons des résultats qui peuvent sembler incohérents. En particulier si les élèves calculent la pression à partir du tableau de proportionnalité obtenu avec les températures en Kelvins, la valeur obtenue, si elle est recopiée dans les autres tableaux, ne permet pas de mettre en évidence la proportionnalité des écarts.

IV.7.1 : Les procédures utilisées par les élèves pour caractériser les variations dans la classe 1

La proportionnalité des variations est caractérisée par les élèves de quatre façons que nous noterons **P₃**, **P₄**, **P₇** et **P₈** en référence aux données nouvelles qu'elles permettent de construire. Le tableau 61 permet de voir les procédures utilisées par les différents groupes de la classe de seconde 1. Nous allons ensuite détailler les indices qui nous permettent de reconnaître les procédures et la manière dont les élèves les mettent en œuvre.

Procédures	Groupes de la classe de seconde 1 ayant utilisé ces procédures
P₇ : par la propriété de linéarité additive	1 – 5
P₈ : par la propriété de linéarité multiplicative	4 – 9
P₃ : par le coefficient de proportionnalité	2 – 7 – 8 – 9
P₄ : par le produit en croix	3 – 6

Tableau 61 : procédures utilisées par la seconde 1 étape 3

- **P₇ : par la propriété de linéarité additive**

Le groupe 5 écrit : « Il n'y a pas de coefficient de proportionnalité entre la température en °C et en °F cependant, nous supposons qu'il existe une relation par ajout entre les

variations de température et de pression. Les courbes de températures en °C et °F par rapport à la pression sont semblables ». Le fait d'écrire que les courbes sont semblables ne précise pas en quoi elles sont semblables. Les élèves peuvent signifier ici que ce sont des droites mais peut-être veulent-ils dire aussi qu'elles ont la même direction, que les variations sont dans le même sens. Ce groupe montre une appropriation du vocabulaire trouvé dans la consigne en parlant de « variations », qu'il a associé aux flèches au-dessus et dessous les lignes du tableau qui symbolisent l'accroissement d'une colonne à l'autre. La proportionnalité des écarts est caractérisée par les propriétés de linéarité additive, ce qui explique que les élèves écrivent « par ajout ». Ils signifient par là qu'une augmentation de 18°F ou de 10°C correspond à une augmentation de 32 hPa. Ils ne font pas le même constat pour les Kelvins car dans ce cas, nous avons proportionnalité entre la température et la pression. Les élèves ont alors d'autres outils pour calculer une pression, ils utilisent le produit en croix ou le coefficient de proportionnalité. Or même s'il est rappelé que les valeurs sont des valeurs approchées du fait des imprécisions liées à la mesure, l'écart entre les résultats est trop important pour convaincre les élèves.

- **P₈ : par la propriété de linéarité multiplicative**

Le groupe 9 indique les coefficients multiplicateurs en utilisant une couleur différente (voir illustration 14). Il montre ainsi que lorsque la variation de température double, la variation de pression double aussi. Les élèves écrivent : « pour les °K on peut utiliser le produit en croix ou des multiples (2,5 × 2 = 5 etc.) comme pour les °C par contre les °F n'ont aucune ressemblance avec les deux autres. » Ils signifient que les variations ont effectivement les mêmes valeurs pour les degrés Celsius et les Kelvins. Par contre ce groupe ne reconnaît pas la proportionnalité des variations comme une caractéristique commune aux trois cas étudiés du fait que ces variations n'ont pas les mêmes valeurs.

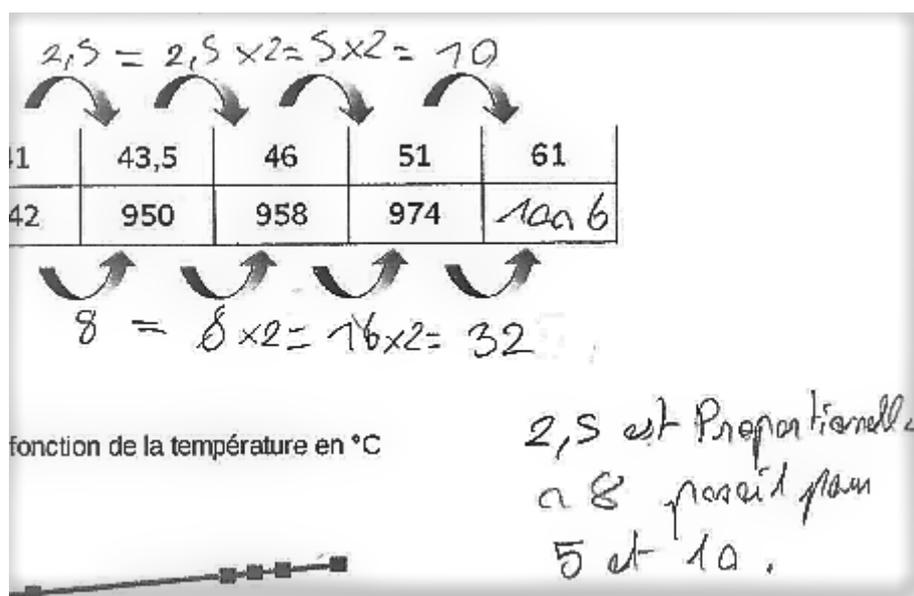


Illustration 14: production élève Dict9 étape 3 lycée 1 linéarité multiplicative

Les variations étant dans une progression géométrique de raison 2, cette règle est considérée par certains élèves comme la relation cherchée et ils peuvent conclure que la

formule est $f(x) = 2x$. Il y a confusion ici entre le coefficient multiplicateur lié à la propriété de linéarité multiplicative et le coefficient de proportionnalité. Les élèves ont cependant une formule qui permet de générer de nouvelles valeurs du tableau. Cette procédure peut se rapprocher de la méthode d'Euler qui permet, à partir d'une valeur initiale donnée et de son image par une fonction, d'approximer pas à pas l'image d'une autre valeur par approximation de la dérivée sur des intervalles. L'écriture symbolique est utilisée par ces élèves sans assigner les lettres aux grandeurs. Cet exemple montre en quoi l'écriture algébrique peut être ou non porteuse de sens. Ici, elle sert à désigner une opération mais ne permet pas d'identifier les grandeurs auxquelles elle s'applique, elle perd tout son pouvoir pour opérer ou transformer les objets.

- **P₃ : par le coefficient de proportionnalité**

Un élève du groupe 9 calcule le coefficient de proportionnalité entre les variations de températures en °F et les variations de pression en hPa, il trouve une valeur qu'il arrondit à 1,7. Il calcule ensuite la pression correspondant à 142 °F en écrivant que l'augmentation de 18 °F multipliée par 1,7 donne une augmentation de 30,5 hPa soit une pression de 1004,5 hPa.

Un autre élève dans le groupe 7 calcule aussi le coefficient de proportionnalité entre les variations de températures en °F et les variations de pression en hPa qu'il écrit sous forme d'opérateur à droite du tableau. Il en donne la valeur exacte $\frac{16}{9}$ sous cette forme fractionnaire.

- **P₄ : par le produit en croix**

Un groupe utilise le produit en croix pour calculer les variations (voir illustration 15). Ce groupe n'arrive cependant pas à conclure à cause d'une erreur de calcul dans un autre tableau.

	+5	+10	
	↘	↘	
46	51	61	$(18 \times 19) = 5 = 32$ $974 + 32 = 1006$
958	974	1006	
	↙	↙	
	+16	+32	

Illustration 15: production élève Dict3 étape 3 lycée 1- utilisation du produit en croix

IV.7.2 : La comparaison des variations entre les trois tableaux de valeurs dans la classe 1

La confrontation des différents tableaux est visible lorsque le groupe repasse en fluo ce qui est commun. Pour d'autres la synthèse se fait sur l'un des tableaux en mettant en évidence le coefficient de proportionnalité. On peut lire sur certains compte-rendus de la classe de seconde 1 : « les variations de la température sont proportionnelles à celles de la pression ». (voir illustration 16).

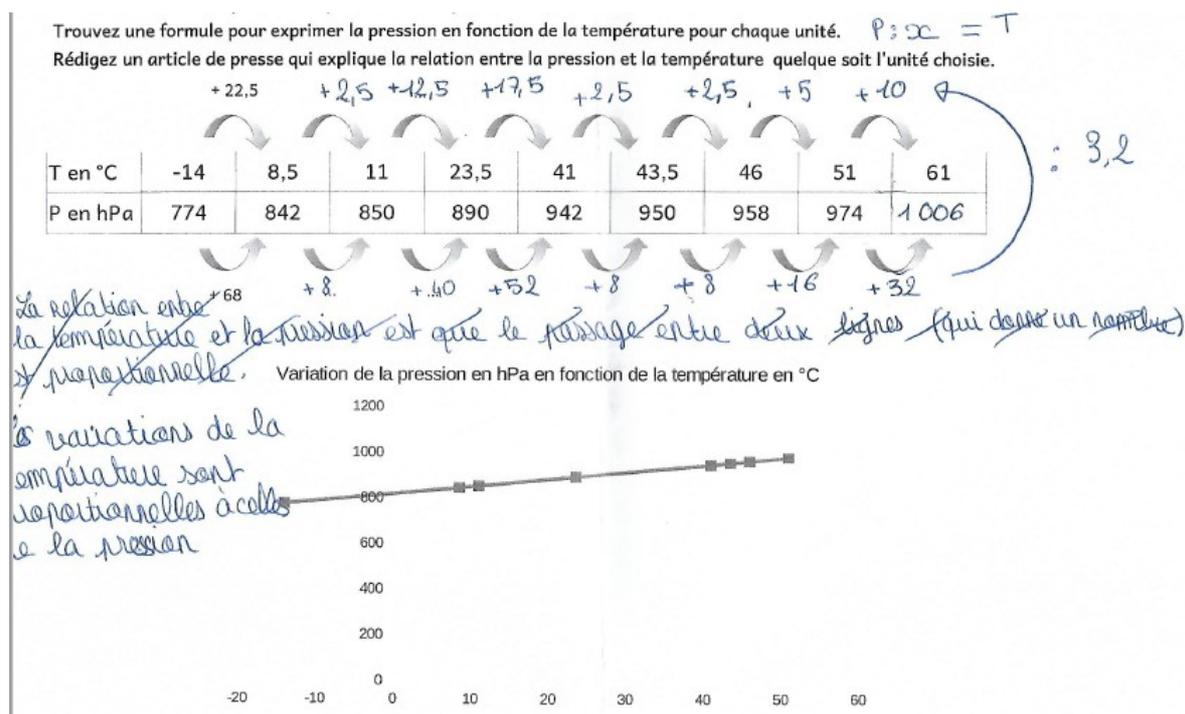


Illustration 16: production élève Dict7 étape 3 lycée 1

Si certains repèrent bien qu'il y a une proportionnalité dans un cas et qu'il s'agit d'une fonction affine non linéaire dans les autres, ils peuvent écrire que « $P=3K$ » où P désigne la pression en hPa et K la température en Kelvins mais ne proposent pas de formules pour les autres cas.

IV.8 : Analyse a posteriori de l'expérimentation de l'étape 3 dans la classe de 2^{de} 2

Dans la classe de seconde 2 l'organisation est la même mais la séance suit la première dans la même journée. Nous ne pouvons donc pas utiliser les productions de la classe pour alimenter la page de bilan qui leur est fournie. Le bilan proposé est donc présenté comme celui de la classe de seconde 1 et il est demandé de confronter leurs conclusions à celles des élèves de seconde 1. La consigne n'est pas exactement la même. Dans la classe de seconde 2, les élèves n'ont pas eu à calculer une pression mais une température, ainsi les imprécisions portent sur des valeurs différentes et ne semblent pas incohérentes. Dans la classe 1, il était demandé de rédiger un article de presse expliquant la relation entre la pression et la température quelle que soit l'unité choisie alors que dans la classe 2 il est seulement demandé d'expliquer cette relation. La fiche distribuée aux élèves prévoit un cadre pour

exprimer la relation entre la température et la pression sous forme d'une formule et un autre pour la caractériser par un texte. L'objectif est de permettre aux élèves de convertir d'un registre à l'autre : le registre des tableaux, celui des graphiques, celui des expressions algébriques et celui du langage naturel. Par ailleurs la production attendue est collective et non plus individuelle.

IV.8.1 : Les procédures utilisées par les élèves pour caractériser les variations dans la classe 2

Cette modification du support associé au profil de la classe fait que les procédures mobilisées sont un peu différentes. Nous allons les lister dans le tableau 62 et nous analyserons plus spécifiquement les procédures nouvelles apparues. Les groupes 1 et 8 n'apparaissent pas dans ce tableau car ils n'ont pas utilisé les variations. Le groupe 1 est resté sur la question des conversions et le groupe 8 sur la recherche d'un coefficient de proportionnalité entre les grandeurs mesurées. On peut faire l'hypothèse que le temps écoulé entre les étapes 2 et 3 dans la classe de seconde 1 a été favorable à une évolution des représentations. Dans la classe de seconde 2, les élèves ont abordé l'étape 3 en gardant en tête la représentation du problème qu'ils avaient à l'étape 2. La lecture du bilan n'a pas permis au groupe 1 et 8 de remettre en cause leurs représentations.

Procédures	Groupes de la classe de seconde 2 ayant utilisé ces procédures
P₇ : par la propriété de linéarité additive	9
P₈ : par la propriété de linéarité multiplicative	5 – 7
P₃ : par le coefficient de proportionnalité	2
P₄ : par le produit en croix	3 – 6
P₃' : par le taux de variation	4

Tableau 62: procédures utilisées par la seconde 2 étape 3

Les élèves de cette classe sont plus nombreux à prendre en compte le fait que la relation est une fonction affine. Cette donnée associée au fait qu'on demande explicitement une formule appelle des expressions algébriques dans lesquels les symboles peuvent désigner aussi bien des variables, des grandeurs que des unités : $f(C) = P$; $f(x) = P$; $f(x) = 2T$; $K(x) = 0,33 \times \text{hPa}$; $F = (T+273) \times 3 = P$; $C(x) = (0,3125 \times 11) + 850$.

Cette dernière expression est particulièrement intéressante puisque le coefficient 0,3125 est en fait le coefficient de proportionnalité des variations : $\Delta T_C = 0,3125 \times \Delta P$ où ΔT_C désigne la variation de température exprimée en degrés Celsius et ΔP la variation de pression en hPa. Comme 850 est l'image de 11 par la fonction affine associée, la fonction considérée peut donc être définie par $f(x) = 0,312 \times x + 850$. L'expression n'est pas celle attendue mais elle atteste de connaissances : la forme de l'expression, le coefficient multiplicateur est le coefficient de proportionnalité des variations. La confusion entre le coefficient de

proportionnalité 0,3125 et son inverse 3,2 fait que l'expression devient difficile à établir par des tests.

- **P₃' : par le taux de variation**

Le groupe 4 écrit l'expression $ax + b$ et le taux de variation $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Il utilise la même procédure pour les trois cas étudiés. Pour le tableau dans lequel la température est exprimée en Kelvins, deux points A et B ont été choisis sur le graphique et leur coordonnées ont été lues et notées ; A (200 ; 600) et B (300 ; 900). Le taux de variation est alors $\frac{900 - 600}{300 - 200} = 3$ et les élèves concluent en écrivant $3x$. L'expression algébrique désigne donc le processus de calcul sans que les grandeurs soient identifiées. Il n'est pas attribué une notation pour l'image de x . L'expression « $3x$ » est justifiée par « $a \times x$ » écrit juste au dessus. Pour les autres graphiques, les élèves ont aussi choisi des points mais la lecture est imprécise, les résultats sont donc erronés. Les élèves ne font pas le lien entre les coordonnées des points et les valeurs du tableau. La forme de l'expression est cependant correcte (illustration 17). Si dans ce groupe, les élèves arrivent à déterminer trois formules, ils ne trouvent pas de propriété pouvant englober les trois cas. A l'écoute de l'enregistrement, il s'avère que la technique est celle qui a été enseignée récemment en sciences physique. Un seul groupe cependant pense à l'utiliser.

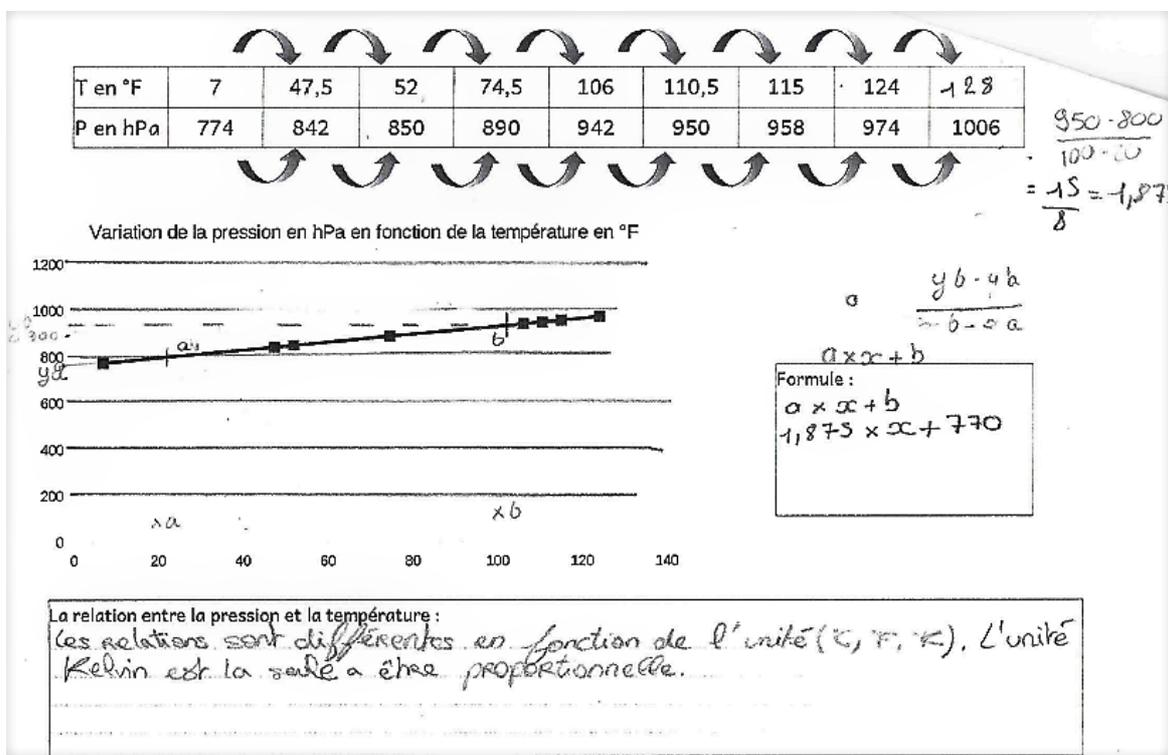


Illustration 17: production groupe Dict4 étape 3 lycée 2

- **P₃ : par le coefficient de proportionnalité**

Le groupe 2 cherche un coefficient de proportionnalité en divisant 974hPa par 51°C, il trouve un coefficient de 19,1. Sur le graphique les élèves lisent l'ordonnée à l'origine qui est 790. Ils écrivent une formule mais pour eux, la proportionnalité se caractérise par une expression de la forme $f(x) = x$ (c'est ainsi qu'ils expriment la relation lorsque la température est exprimée en Kelvins) et une expression affine est de la forme : $f(x) = x + (a - b)$ où a est « l'ordonnée où la courbe commence » et b le « coefficient directeur ». Leur formule est alors : $f(x) = x + (790 - 19,1)$.

IV.8.2 : La comparaison des variations entre les trois tableaux de valeurs dans la classe 2

S'il est demandé aux élèves de trouver une « formule », les élèves ont bien du mal à se représenter ce qui est attendu. « Faut trouver une formule pour exprimer le tableau » semble exprimer le sens que doit avoir la formule, elle doit permettre de donner autant de renseignements que le tableau, elle peut se substituer au tableau. « C'est une équation qu'il faut trouver » identifie certainement la forme (des écritures chiffrées ou des lettres, un signe d'égalité). « On va mettre des x , c'est moins précis » montre que pour cet élève, la lettre x permet de généraliser. Enfin « faut trouver un coefficient » indique que la formule met en jeu des coefficients qui caractérisent la relation entre les grandeurs. Certains élèves écrivent en langage naturel : « si on ajoute 1 en pression, on ajoute 0,3 en température ». Cette relation est exprimée aussi sous forme symbolique avec les flèches de variation comme dans l'exemple de l'illustration 18.

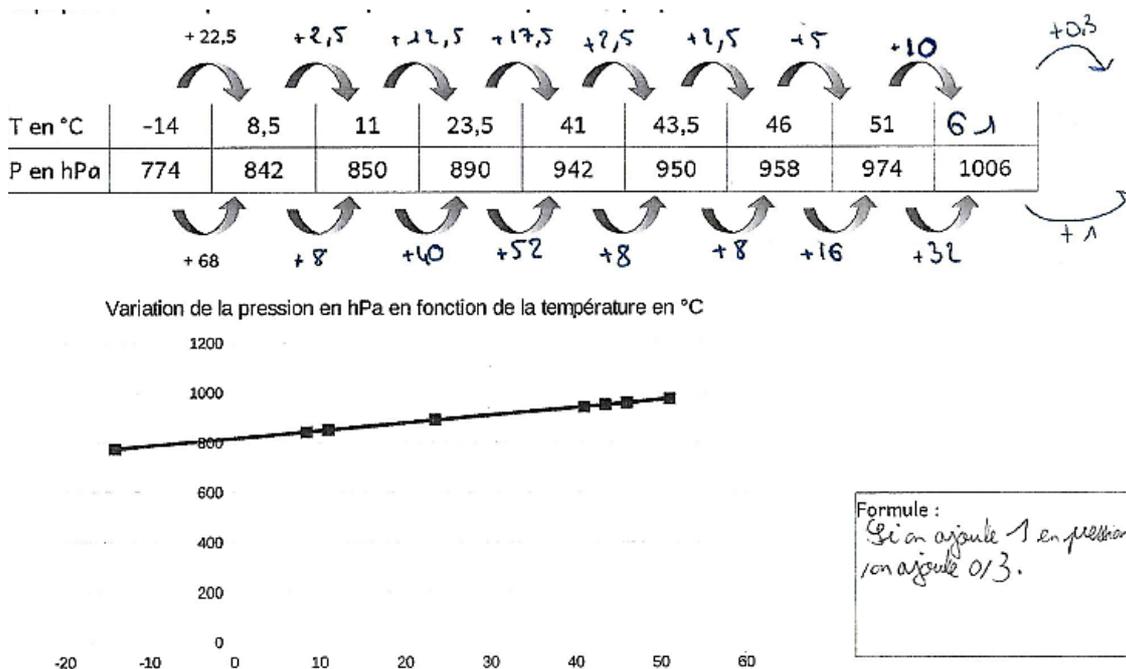


Illustration 18: production groupe Dict9 étape 3 lycée 2

IV.9 : Analyse et comparaison des processus de secondarisation dans les classes de 2nde 1 et 2 au cours de l'étape 3

Sur les 9 groupes de la classe 1, aucune formule n'a été produite, mais elle n'était pas expressément demandée. Tous les groupes de la classe 2 ont proposé une formule comme cela était demandé. Trois groupes de la classe 1 énoncent la nécessité de proportionnalité des accroissements alors qu'aucune propriété générale n'est produite dans la classe 2. La consigne étant différente dans les deux classes, nous avons écouté les enregistrements pour mesurer l'impact que cette consigne peut avoir sur les productions.

Dans le groupe 5 de la classe 1, une analyse des courbes mène à la constatation d'une « similitude » entre les tracés. L'échange donné dans le tableau 63 (voir annexe 49) montre comment l'exploration amène une formulation que l'on peut caractériser de « secondarisée » en ce sens que l'élève E26 cherche à expliquer une observation faite dans le registre graphique (« on a presque la même droite ») dans le registre des grandeurs proportionnelles (« la même relation de proportionnalité, mais à différents niveaux »).

E2	2130.96	Regardez, si on place le 60 sur le 60 ça nous donne une seule et même courbe.
E26	2140.91	{speaker_noise=laugh}
E22	2147.17	Attends montre.
E2	2149.71	Il faut regarder par transparence ce que ça nous donne... une seule et même courbe.
(Pas de locuteur)	2156.56	
E22	2160.78	J'appelle ça les progrès.
E2	2164.52	C'est un complot !
E26	2166.65	Attends imagine qu'on aurait à peu près exactement la même.
E22	2172.66	Bref du coup tu l'as trouvé ou pas ?
E26	2174.06	Attends, on fait..., on va peut-être regarder par transparence, on va regarder si c'est la même heu...
E26	2186.29	Hé regarde, t'as vu, on a presque la même, regarde, si tu regardes vraiment par transparence on a presque la même droite, il y a aucun... si ça se trouve t'as peut-être la même relation de proportionnalité, mais à différents niveaux.

Tableau 63: extrait de transcription étape 3 lycée 1 Dict5

Ce qui est formulé ici correspond en fait à ce qui peut caractériser les fonctions affines associées à une même fonction linéaire. Dans ce court extrait E2 propose, E22 questionne, E26 énonce. On peut supposer que ce sont ces interactions qui rendent nécessaires les reformulations et qui permettent des conversions de registres. Les conditions sont clairement problématiques puisque les élèves n'utilisent pas de connaissances assertoriques, ils ouvrent

des possibles. Des renforts viennent du contexte. En effet, comme la consigne dans la classe 1 est d'écrire un article pour expliquer la relation entre la pression et la température, les élèves de ce groupe ont pris le rôle de chercheurs qui font « une découverte majeure ». On peut supposer que cette mise en scène facilite l'ouverture de possibles et donc l'apprentissage par problématisation.

Dans un autre groupe, un élève énonce « c'est pareil en °C et en K » du fait que les variations sont les mêmes dans les deux tableaux. Un autre élève du groupe commente en disant : « c'est normal, ils se basent pas sur le même zéro. » Dans les deux cas, des possibles sont ouverts et une justification est proposée : les droites se superposent, le « zéro » n'est pas le même.

La consigne ne peut probablement pas expliquer à elle seule l'écart entre les deux classes. Par contre le test initial permet de mettre en relation les représentations que les élèves ont de l'activité mathématique avec la nature de leurs écrits. Les élèves de la classe 2 utilisent plus volontiers le formalisme des écritures algébriques sans pour autant en maîtriser le sens ou le pouvoir. Ceux de la classe 1 appliquent des techniques et hésitent moins à utiliser un langage naturel pour formuler leur raisonnement. L'enjeu de réussite n'est pas le même dans les deux classes, autorisant plus les essais et les erreurs dans la classe 1 où les élèves ont moins d'ambitions dans le domaine scientifique. Les élèves en difficulté sont plutôt dans la fuite ou le décrochage dans la classe 1 (les temps de silence ou de conversations personnelles sont importants dans cette classe au point que l'exploitation de certains enregistrements est impossible par manque de données sur l'activité mathématique), alors qu'ils sont dans l'opposition et la confrontation, voire même la compétition dans la classe 2 (la comparaison entre les niveaux des élèves, leurs projets d'avenir, leurs possibilités, les provocations et les attaques personnelles sont plus fréquentes).

Du point de vue du traitement des données, l'exploration dans l'étape 3 se fait par une recherche de ce qui est commun. Tous les élèves ne procèdent pas de cette manière. C'est pourtant ainsi que peuvent émerger les nécessités. Un inducteur de problématisation pourrait être d'orienter plus explicitement le regard sur ce qui est commun, ce qui relève du « même » : même pente, même coefficient, mêmes variations. Les élèves ont plutôt un traitement des données orienté vers une opération sur ces données (calculer, comparer, ordonner). Par exemple un groupe remarque que les variations de la pression sont des multiples de 4. Le mot « multiple » appelle des souvenirs liés à l'arithmétique. Un autre élève remarque que les variations sont des nombres premiers et il propose de calculer le PGCD. Nous avons ici un exemple d'automatisme lié à l'enseignement-apprentissage de notions non problématisées en ce sens que le PGCD n'est pas reconnu comme pertinent par rapport à une classe de problèmes ou en lien avec des nécessités, mais uniquement comme traitement à mettre en œuvre en présence de nombres premiers.

Si tous les groupes ont utilisé la proportionnalité des accroissements de manière implicite dans les calculs, ils n'ont pas tous réussi à formaliser cette propriété dans un registre ou un autre. Ainsi la situation joue le rôle de proposant et de vérificateur, elle demande aux élèves d'endosser le rôle d'agissant et d'énonciateur. Cette contrainte met visiblement les élèves en difficulté puisqu'ils ne maîtrisent pas les écritures algébriques et qu'ils ne disposent

pas du vocabulaire nécessaire pour parler des caractéristiques liées aux variations. Les élèves peuvent facilement agir en calculant les variations et compléter les tableaux. Très peu lisent les conclusions de l'étape précédente en première page du document distribué pour interpréter les nouvelles données. L'écoute des enregistrements montre une très grande dispersion. Dans la classe de seconde 1, la séance suit une évaluation en histoire, les élèves échangent sur ce qu'ils ont répondu pour savoir s'ils ont réussi. Quelques élèves ne pourront pas s'intéresser à autre chose. La vidéo et les observations faites pendant la séance montrent des élèves qui peuvent être actifs, en particulier ils effectuent des calculs avec la calculatrice. Par contre ces élèves n'échangent pas sur ces calculs, ils ne comparent pas leurs procédures et ils n'en gardent pas toujours de traces. Les échanges portent sur la répartition des tâches dans le groupe (qui rédige, qui est pilote) ou sur la consigne. Les débats amènent des reformulations et des explications dès qu'il s'agit d'écrire le compte-rendu comme par exemple dans le groupe 5 de la classe de seconde 1 (voir tableau 64).

E2	2238.78	Il y a... non, il n'y a pas de relation de proportionnalité entre les valeurs.
E26	2244.07	Attends, attends, heu... vas-y. Dis tout ce que tu veux mettre.
E2	2246.61	Ouais, attends, attends. Ce que je voulais mettre en gros c'est il n'y a pas de relation de proportionnalité entre les valeurs, de relation, pardon, de proportionnalité mais il y a en a sûrement une entre les heu... les coefficients , les valeurs d'ajout , heu... je sais pas comment ça s'appelle.
E26	2261.38	Ah oui, oui.
E2	2263.09	Entre les variations de température et de pression.
Pas de locuteur	2265.39	
E26	2274.68	Non mais c'est..., ouais, ouais, attends, on pourrait mettre... il n'y a pas de relation de propor... enfin il n'y a pas de coefficient de proportionnalité entre la température et la pression..
E22	2312.38	Ben oui mais en Kelvins il y en a une.
E26	2314.61	Ben on va mettre : il n'y a pas de relation ...
E2	2315.79	La relation pour la température en Kelvins c'est une proportionnalité de fois 3, mais oui bon, on l'écrit pas.
E22	2320.38	On doit mettre il y a une relation ...
E2	2322.64	Il n'y a pas de relation de proportionnalité entre la température et la pression dans les unités Fahrenheit et en Celsius.
E22	2332.24	Vas-y, vas-y.
E26	2332.99	Alors il n'y a pas de...

Tableau 64: extrait transcription étape 3 lycée 1 Dict5

Dans cet extrait, on peut voir comment s'effectue la secondarisation du discours par l'utilisation d'un vocabulaire de plus en plus précis : les coefficients deviennent des valeurs d'ajout puis des variations pour aboutir à une relation entre les variations de températures et de pressions de manière générale. Ici les objections ne remettent pas en cause la proposition mais obligent à la préciser. L'échange est caractérisé par le nombre d'encouragements « attends », « oui, oui », « vas-y ». Il semble que le climat relationnel facilite l'apprentissage par problématisation.

Contrairement aux deux étapes précédentes, les enseignants interviennent régulièrement pour étayer. Notre posture de chercheur pendant l'activité vise à aider les élèves à formuler la proportionnalité des écarts qu'ils utilisent implicitement. Les interactions avec les enseignants permettent une avancée dans le travail dans la classe de seconde 1 mais les groupes n'arrivent pas à fonctionner en autonomie, dès qu'ils sont seuls, ils se dispersent de nouveau parce qu'ils n'obtiennent pas de résultats. On peut alors s'interroger sur la nature de l'étayage et sur la façon dont cet étayage pourrait être introduit dans le milieu. La situation suivante devait aider les élèves à formaliser la proportionnalité des écarts et à énoncer des nécessités. Elle ne peut pas atteindre cet objectif si cette propriété n'est pas formalisée à minima dans le contexte du problème.

Prenons l'exemple du groupe 4 dans le lycée 1 (voir un extrait transcrit en annexe 50). Il s'agit d'un groupe de quatre filles qui gardent globalement le même rôle pendant toute la séance. L'élève E5 a une voix forte, elle intervient très souvent pour échanger sur le problème ou pour intervenir sur d'autres sujets, elle occupe beaucoup l'espace sonore. L'élève E25 a un rôle d'énonciatrice, elle formalise, fait le point, rappelle les consignes. L'élève E18 est discrète mais elle intervient pour proposer, elle énonce aussi en présence du professeur. Enfin l'élève E11 participe peu au travail, elle ouvre souvent des épisodes que nous avons notés « bavardages » dans la transcription pendant lesquels les élèves parlent de tout autre chose que de mathématiques. L'échange est régulièrement coupé par ces bavardages. Le retour au travail est demandé par une élève du groupe ou par l'arrivée d'un professeur. Une macrostructure apporterait peu d'éléments d'analyse car il n'y a pas à proprement parlé de débat dans le groupe. Les élèves ont effectué les calculs des variations, elles ont comparé ces variations, montré que si on tenait compte des valeurs approchées, les mesures sont les mêmes dans les trois tableaux et qu'il existe bien une relation dans les trois cas. Dans celui où il y a proportionnalité, le coefficient de proportionnalité est environ de 3, dans les autres cas les variations sont multipliées par 2, ce qui permet le calcul. Le point commun est donc l'existence d'un coefficient multiplicateur. Le chercheur intervient dans l'extrait donné dans le tableau 65 pour amener les élèves à mobiliser l'unité de raisonnement U4, c'est-à-dire à décrire le comportement de la concomitance des accroissements.

prof2	2196.01	Oui mais là elle est en train de dire que lorsque ici... là vous avez 2.5 et là 5. C'est comment 5 par rapport à 2.5 ?
E18	2207.77	Le double.
prof2	2208.31	Le double. Et là il y a 8 et là 16.

E18	2210.32	Le double.
prof2	2212.3	Donc il y a le double. Donc pour les Kelvins, est-ce que c'est vrai encore ?
E18	2218.86	Oui.
prof2	2219.51	Oui. Donc ça, ça semble être vrai tout le temps, quelle que soit l'unité qui est choisie. Donc comment vous pourriez écrire ça avec une phrase pour expliquer ce que c'est ?
E5	2228.39	Ben qu'importe la...le... l'unité de température, il y a toujours un lien dans les variations et c'est le... et du coup elles ont le même nombre. Enfin heu... on trouve les mêmes nombres de variation dans les trois unités. Et puis à la fin elles ont un lien pour qu'on puisse calculer.
prof2	2247.73	Mais alors qu'est-ce que ça veut dire pour les variations, s'il y en a une qui double, l'autre double aussi ? Ça veut dire qu'elles sont comment ?
E18	2253.3	Proportionnelles ?
prof2	2254.83	Ben oui.
E5	2255.31	Comment ?
prof2	2255.86	Ça veut dire qu'elles sont proportionnelles.
E18	2256.79	Donc les variations sont proportionnelles.
E5	2261.7	Azia tu marques tout.
E11	2270.91	Donc les variations elles sont proportionnelles entre elles.
E5	2273.07	Ouais.

Tableau 65: extrait transcription étape 3 lycée 1 Dict4

Si trois élèves semblent convaincues que « les variations sont proportionnelles entre elles » et que cette propriété permet de caractériser la relation entre la pression et la température, cette formulation n'est pas reprise ou reformulée par les élèves. L'important est d'avoir une réponse à écrire dans le compte-rendu. La configuration des registres dans ce groupe est uniquement pragmatique. L'action valide les résultats. La similitude des résultats ou des opérations suffit à apporter une cohérence à ce qui est produit. Les élèves disposent du vocabulaire, le manque de vocabulaire ne peut donc pas expliquer le manque de problématisation. Nous faisons l'hypothèse que les élèves construisent des problèmes factuels : calculer des variations, calculer une pression, calculer un coefficient... mais ne cherchent pas une mise en relation.

Globalement dans les deux classe, à ce stade du travail, les unités de raisonnement U2 et U3 ont été mobilisées. Certains ont mobilisé le raisonnement U4 pour décrire le comportement des accroissements en établissant la concomitance entre les accroissements des deux grandeurs. La nécessité des variations proportionnelles n'est pas encore complètement établie. La recherche d'une expression algébrique dont les termes sont mal identifiés ne permet pas de convertir les propriétés d'un registre sémiotique à un autre. Les variations sont identifiées dans le registre des tableaux et certains ont vu le lien entre le coefficient de

proportionnalité et le taux de variation. Comme dans l'expérience analysée dans la partie 3 chapitre I, les difficultés sont d'identifier le coefficient de proportionnalité dans le registre graphique et de calculer l'ordonnée à l'origine dans le registre des tableaux.

Nous pouvons extraire de l'ensemble des productions des classes 1 et 2 ce qui relève des différents registres pour analyser leur configuration. Nous avons regroupé l'ensemble dans le tableau 66.

	<p style="text-align: center;">Registre empirique</p> <ul style="list-style-type: none"> - On a un coefficient de proportionnalité d'environ 3 pour le tableau avec les températures exprimées en Kelvins. - Les variations sont les mêmes dans les tableaux avec les températures exprimées en °C et en K. - Il y a 273 d'écart entre les mesures en °C et en K. - Les mesures de pression sont les mêmes pour les trois tableaux de mesures. - Les trois représentations graphiques sont des droites. - Quand la température augmente, la pression augmente. - Quand la variation de température double, la variation de pression double.
<p style="text-align: center;">Registre explicatif</p> <ul style="list-style-type: none"> - cadre numérique et proportionnalité - cadre des grandeurs et des mesures - cadre fonctionnel - cadre algébrique 	<p style="text-align: center;">Registre des modèles</p> <ul style="list-style-type: none"> - Il existe une relation dès qu'une covariation suit une règle « logique ». - Cette règle peut être considérée comme une formule. - Les propriétés de linéarité caractérisent une situation de proportionnalité. - Une formule est une équation avec des x et des coefficients qu'il faut calculer. - Si la droite passe par l'origine, la relation est une relation de proportionnalité et il existe un coefficient de proportionnalité. - Si la relation est affine, l'expression est de la forme $ax+b$ où a est le taux de variation et b l'ordonnée à l'origine. - Les variations sont une suite géométrique de raison 2. - L'augmentation de pression correspondant à une augmentation de température d'une unité est un coefficient intervenant dans la formule. - Le taux de variation se calcule à partir des coordonnées de deux points de la droite. - Quand on a des nombres premiers, il faut calculer le PGCD.

Tableau 66: synthèse des différents registres mobilisés dans l'étape 3 pour les classes 1 et 2 pour caractériser la relation affine entre la pression et la température

La difficulté consiste en la multiplicité de modèles mobilisés qui relèvent parfois de REX différents et qui peuvent être incohérents entre eux. Par ailleurs, seule l'écoute des interactions langagières dans les groupes permet d'identifier certains aspects du registre des modèles. Beaucoup de pistes sont abandonnées par les élèves. On pourrait penser que les

arguments qui permettent de réfuter une thèse relèvent de la configuration des registres mais un autre élément intervient au cours des échanges. La représentation que se font les élèves de leurs capacités, de leur intelligence, de leur niveau de connaissance, est très souvent l'élément déterminant dans le choix d'une procédure ou dans la validation d'un résultat.

IV.10 : Analyse a posteriori de l'expérimentation des étapes 4 et 5

Ces deux étapes ont été faites ultérieurement et dans de mauvaises conditions, ce qui ne permet pas d'en tirer des éléments d'analyse satisfaisants. Une erreur de calcul dans le sujet a gêné la compréhension de la situation dans la classe de seconde 1 et un temps trop long d'inter-session dans la classe de seconde 2 n'a pas permis de faire le lien attendu entre les activités. Certains groupes ont de nouveau considéré qu'il s'agissait d'une situation de proportionnalité et ont calculé un coefficient, preuve que cette représentation est un automatisme qui devient un obstacle difficile à dépasser. Les séances n'ont pas été enregistrées et notre analyse précédente montre bien la nécessité des enregistrements pour suivre l'évolution de l'apprentissage par problématisation au fil de l'activité. La situation proposée à l'étape 4 contraint les élèves à formaliser explicitement les conversions d'un registre à un autre. Les élèves se contentent cependant de valider les formules par des calculs (ils testent la formule sur quelques exemples) ou par la lecture du graphique (contrôle de l'ordonnée à l'origine). Il serait sans doute préférable de séparer chaque conversion et de demander par exemple de retrouver les éléments caractéristiques sur le graphique dans un premier temps, puis dans le tableau dans un second temps. L'étape 5 doit amener à généraliser le processus en utilisant le modèle établi à l'étape 4. Beaucoup de groupes y parviennent sans laisser de traces écrites de leur procédure. Nous n'avons pas eu accès à la suite du travail et ne pouvons pas mesurer l'effet de la séquence sur les représentations des élèves. Il semble cependant que la situation ait été considérée comme un « exemple exemplaire » (Kuhn, 2008) en ce sens que la classe a pu reprendre ce contexte pour valider ou invalider des procédures, des connaissances ou des savoir-faire. Les enseignants ont fait référence à ce travail lorsqu'ils ont défini les fonctions affines un peu plus tard dans l'année mais ils n'ont pas donné une définition des fonctions affines s'appuyant sur le taux de variation.

L'écart entre les productions des élèves de la classe de seconde 2 à l'étape 5 (en annexe 51) montre la nécessité de reprise de l'activité sur un temps long pour que tous puissent progresser à leur rythme. Si certains élèves concluent à cette étape que « si la température augmente alors la pression aussi donc la pression dépend de la température » (unité de raisonnement U2), d'autres établissent directement l'expression en utilisant les différents registres (unité de raisonnement U4) comme en atteste la production de l'élève E16 (illustration 19).

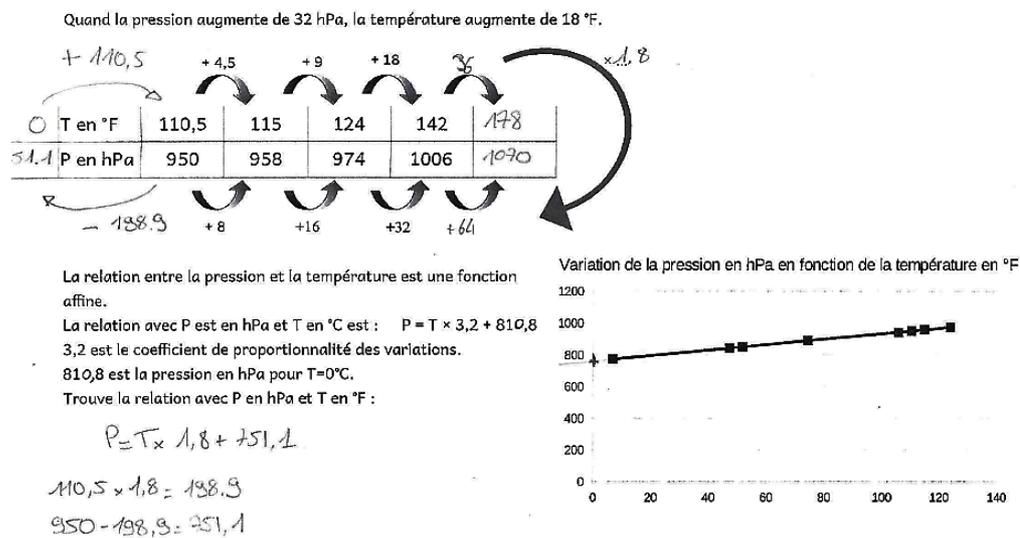


Illustration 19: production étape 5 lycée 2 élève E16

Beaucoup d'élèves écrivent des calculs mais ne formalisent pas une explication. Deux groupes expliquent la validation de la formule dans chacun des registres par des tests sans expliquer comment établir la relation. Ils décrivent comment on effectue le test par des calculs et comment on lit un graphique : « Dans le tableau en prenant un résultat de T et en calculant la pression ex : $43,5 \times 3,2 + 810,8 = 949,04$ qui donne le bon résultat. Et sur le graphique on se met sur l'axe des abscix sur 43,5 par ex et on monte sur l'axe des ordoné pour rencontré la courbe puis on se déplace quand on est sur le point vers l'axe des ordoné ce qui donne le résultat qui est $950 \approx$ ». Dans la classe de seconde 1, les élèves ont en majorité testé la formule à l'étape 4 mais la question des valeurs approchées revient régulièrement. Cela montre la nécessité d'utiliser des dénominations différentes pour désigner la fonction théorique et la fonction empirique que nous avons appelé aussi fonction « pratique » (voir Partie 1 chapitre II.3 p.69).

IV.11 : Conclusion à l'issue de cette expérimentation

L'analyse *a posteriori* montre que les obstacles ont été globalement anticipés. Cependant, si les étapes 1 et 2 ont permis aux élèves de poser le problème initial et de faire évoluer leur registre explicatif, l'étape 3 les a déstabilisés. Les élèves n'arrivent pas à comprendre ce qui est attendu. Ils n'arrivent pas à mettre en relation les différentes données. L'attitude est alors une attitude de fuite. A l'écoute des enregistrements audio-phoniques, il est particulièrement intéressant de comparer la nature des échanges entre les élèves d'une étape à l'autre. La composition des groupes étant différente, les inter-actions montrent une répartition des rôles qui change suivant le climat et l'écoute dans le groupe. Si nous grisons ce qui a été effectivement mobilisé dans l'espace de contraintes initial (voir le tableau 67), nous

voyons que l'ensemble des registres explicatifs ont été utilisés. La proportionnalité des variations est apparue comme une nécessité pour 15 groupes sur 18 à l'issue de l'étape 3. Par contre les élèves n'ont pas tous mobilisé les unités de raisonnement attendues et peu ont formalisé les nécessités à ce stade. La situation amène de nombreuses incompréhensions et nous pouvons nous interroger sur son aspect discriminant. Il semble que les élèves les plus scolaires soient les plus en difficulté, les élèves plus fragiles mais qui ont encore une bonne estime de leurs compétences s'engagent dans la recherche et voient leurs représentations évoluer. Ceux qui n'ont plus confiance en leurs possibilités ne participent plus au travail dès l'étape 3.

Plusieurs conditions semblent favoriser l'apprentissage par problématisation :

- les élèves doivent avoir l'occasion de changer de rôle dans le groupe et d'être en position d'énoncer. Ces changements de rôle sont possibles dès que les élèves s'écoutent et respectent les propositions des autres. Ils sont favorisés par le type de tâche attendue (critiquer, expliquer) ;

- des opérations sur les données doivent permettre de construire de nouvelles données ;

- les savoirs déjà rencontrés et formalisés doivent être à la disposition des élèves (définitions, propriétés, techniques...) ;

- le vocabulaire nécessaire doit être introduit ainsi que les notations qui peuvent faciliter une secondarisation du discours ;

- les élèves doivent résoudre un problème ou un sous-problème dans un cadre pour pouvoir effectuer des conversions d'un cadre à un autre ;

- le contrat didactique permet de créer certains automatismes mais il doit aussi permettre l'inhibition d'autres automatismes ;

- l'étayage doit viser une évolution des unités de raisonnement ;

- les élèves doivent être habitués à formaliser une critique des travaux et non seulement une validation des résultats ;

- les groupes de 3 mixtes, aléatoires et hétérogènes semblent mieux fonctionner.

Par contre, d'autres conditions semblent défavorables. La compétition et la recherche de performances semblent nuire à l'apprentissage par problématisation. En effet, dans ce cas, les arguments sont liés à la position de chaque élève et à la nécessité de protéger sa face telle que la définit Goffman, c'est-à-dire l'image positive que l'élève met en jeu dans l'interaction (Goffman, 1973). Les échanges mettent en évidence que certains élèves ont des statuts particuliers (les enfants de professeurs de mathématiques, les élèves qui ont doublé la classe précédente) et ces statuts changent la configuration des registres.

L'enseignant peut avoir des interventions qui nuisent à l'apprentissage par problématisation : l'introduction de nouvelles données non construites, le maintien de l'orientation sur les consignes ou sur la solution du problème au détriment de sa construction.

La gestion du temps peut aussi devenir un obstacle à l'apprentissage par problématisation. Les élèves doivent avoir suffisamment de temps pour construire les problèmes, les résoudre, discuter les procédures. Il est parfois nécessaire de laisser des questions en suspens et d'y revenir plus tard. Cela nécessite de laisser des traces, des écrits intermédiaires. La majorité des élèves n'ont pas l'habitude de ces écrits. En particulier, lors de l'étape 3, très peu ont pris le temps de lire les productions des autres groupes. Il s'agit donc de bien cibler les notions qui peuvent gagner à être enseignées par une PPAP car c'est une pratique qui est coûteuse en temps

Expériences mise en place par les élèves	Comparaison des valeurs	Conversion	Calcul des quotients d'une mesure de grandeur par une autre.	Calcul par le produit en croix	Représentation graphique	Test d'alignement avec la calculatrice	Calculs à partir des propriétés de linéarité	Calcul des variations des mesures de grandeur
Registre empirique lié aux données	D₁ : Les pressions sont les mêmes dans les trois tableaux.	D₂ : Seule l'unité de mesure des températures change. Les valeurs prises dans les différentes unités ne sont pas proportionnelles.	D₃ : Les coefficients sont différents dans deux cas, ils sont très proches dans le troisième.	D₄ : Le calcul des produits en croix donne un résultat erroné sauf dans un tableau où les valeurs sont très proches.	D₅ : On obtient des points alignés.	D₆ : Affichage « vrai » ou « faux »	D₇ : Les calculs par propriétés de linéarité donnent des résultats erronés sauf dans un tableau où les valeurs sont très proches.	D₈ : Une même variation sur une grandeur amène une même variation sur l'autre, une variation double de l'une amène une variation double de l'autre.
Registre des nécessités à l'intérieur des modèles	N₁ : Nécessité d'un calcul permettant de passer d'une grandeur à l'autre.		N₂ : Nécessité d'une intervention de la proportionnalité dans la relation.		N₃ : Nécessité d'une relation non-proportionnelle sauf si on utilise l'unité Kelvin pour la température.		N₄ : Nécessité de variations proportionnelles.	
	La représentation graphique est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc c'est la représentation graphique d'une fonction affine.		$f(x+a) = f(x) + b$ avec a et b constantes caractérise une fonction affine.		La variation de pression est proportionnelle à la variation de température.		$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Constante}$ donc f est affine et $f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} x + f(0)$	
Registre explicatif	E₁ : Suites numérique proportionnelles		E₂ : Grandeurs proportionnelles		E₃ : Proportionnalité dans le cadre fonctionnel		E₄ : Fonction affine	

Tableau 67: Espace de contraintes lié à l'analyse a posteriori à la fin de l'étape 5

Conclusion de la partie 3

Cette partie nous a permis de mettre à l'épreuve des outils d'analyse qui s'avèrent utiles pour modéliser l'activité cognitive des élèves. Les espaces de contraintes (Orange, 2012) permettent de positionner les étapes du travail dans une organisation qui permet d'explicitier les différents registres, les losanges de problématisations (Fabre, 2011) permettent de suivre la configuration de ces registres et de mesurer différents niveaux de problématisation. Ils permettent ainsi d'identifier ce qui est favorable à l'apprentissage par problématisation du savoir par les élèves. Les informations que nous tirons de nos analyses sont de plusieurs ordres, nous allons les détailler.

Le cadre des grandeurs proportionnelles pour travailler la notion d'affinité

Si la notion de fonction nous semble intéressante à construire dans le contexte de la covariation de deux grandeurs, la nature de ces grandeurs peut modifier l'expression des nécessités. Nous avons vu que l'étude de la conversion des mesures de température de degrés Celsius en degré Fahrenheit était propice à un travail de changement de cadre et de point de vue (Rogalski, 2001) mais le paradoxe vient ici du fait qu'une même grandeur est mesurée dans deux unités différentes. L'affinité est alors construite comme un principe de conversion dans la théorie des mathématiques, et non comme un outil de modélisation pouvant être mobilisé dans d'autres contextes. La situation du pluviomètre permet de travailler l'affinité comme outil de modélisation pour résoudre un problème par une interpolation linéaire. Il s'agit de la covariation entre deux grandeurs de natures différentes (pluviométrie et hauteur). Ici l'affinité est utilisée localement, la notion est un outil, les nécessités ne sont donc pas mises en évidence par rapport à la notion d'affinité mais par rapport au contexte. La séquence température-pression avait pour objectif de lever ces deux difficultés en proposant l'étude de la covariation de deux grandeurs différentes effectivement liées par une relation de type affine. Cette séquence a mis en évidence un obstacle que nous avons mal mesuré lié à la notion de proportionnalité. Si nous avons bien repéré que la proportionnalité s'impose aux élèves comme seule relation possible entre les grandeurs, et comme seul moyen de conversion d'une unité en une autre, il s'avère qu'elle n'est pas toujours construite dans le cadre des Grandeurs (avec un grand G) mais bien dans celui des suites numériques proportionnelles. Nous pensions que le fait d'avoir deux types de relation fonctionnelle entre deux mêmes Grandeurs serait considéré comme un paradoxe. Il s'avère qu'une majorité d'élèves ne voient là que l'effet des conversions sur les mesures.

L'approche dynamique de la notion de fonction affine et la question des nécessités

Les différentes situations proposées dans cette partie, prennent effectivement en charge les passages obligés (établir la non-proportionnalité et établir la proportionnalité des écarts) par un cheminement qui suppose de mobiliser les unités de raisonnement définies dans la partie 2. Pour la situation température-pression, l'unité U1 est particulièrement explorée mais les autres unités entrent en jeu progressivement et sont induites par la situation :

U1 : Les deux grandeurs étudiées sont de natures différentes ce qui permet de mieux les identifier, le contexte permet d'établir la grandeur dépendante et la grandeur indépendante, l'étude des résultats visant à déterminer si la relation entre les grandeurs est une relation de proportionnalité permet à tous d'entrer dans la tâche et d'utiliser le vocabulaire des grandeurs et de la proportionnalité pour une première reconfiguration. Le fait que cette relation n'ait pas toujours la même forme suivant les unités choisies amène les élèves à construire un nouveau problème qui devient un problème explicatif.

U2 : Les élèves sont incités à calculer les variations et à les comparer. La concomitance entre les variations est établie.

U3 : Les variations sont étudiées de manière quantitative, ce qui permet d'envisager un processus qu'il faut expliciter.

U4 : Décrire ce comportement permet de repérer que les variations suivent un comportement global.

U5 : Ce comportement peut être quantifié ce qui permet de définir la dépendance entre les variations.

U6 : La monotonie des accroissements devient une caractéristique de la relation entre les grandeurs. Elle permet de résoudre certains problèmes.

Pourtant certaines difficultés ne permettent pas à tous les élèves d'atteindre l'unité 6 : la confusion entre grandeur et mesure, les différentes unités de température et leur conversion, ainsi que certains malentendus. Les variations semblent être étudiées de manière naturelle par les plus jeunes alors que la prise en compte de ces variations devient difficile au lycée par le manque de symboles pour les désigner et par la difficulté que rencontrent les élèves à changer de registres. On note aussi que certains automatismes peuvent être aidants (formulation, transformation des écritures algébriques, caractérisation de l'affinité par l'alignement de points...) alors que d'autres peuvent freiner l'ouverture de nouveaux possibles (proportionnalité, produit en croix, conversions dans le système décimal...).

Les changements de rôles pour problématiser et la question du cadrage

La séquence PPAP prend en charge certains rôles pour permettre à l'élève alternativement de proposer, vérifier, agir, énoncer. Le dispositif qui alterne entre des recherches en petits groupes, la restitution dans des groupes différents, la formulation orale, écrite, individuelle ou collective, vise une secondarisation du discours par le passage de problèmes orientés vers la solution à des problèmes explicatifs. Ce processus, s'il est effectivement très efficace pour certains élèves, reste inopérant pour d'autres. En particulier la question de la dévolution reste problématique. L'expérimentation montre qu'une telle séquence ne peut pas être transposée sans une caractérisation précise du contrat didactique indispensable à sa mise en œuvre. En particulier une séquence PPAP suppose un étayage spécifique lié au statut de l'erreur, au statut de la preuve, et au statut de la validation.

Le cadrage doit donc prévoir une configuration des registres d'apprentissages tels que Patrick Rayou les définit (Bautier & Rayou, 2013) : le registre cognitif (lié aux procédures), le registre culturel (scolaire ou lié à une scolarisation de la culture de l'élève) et le registre

scientifique (lié à la place de la situation dans une cité savante). La situation du pluviomètre fait appel à des éléments qui ne relèvent pas de la culture scolaire (pluviométrie, météorologie, utilisation d'un pluviomètre) et qui peuvent être discriminants suivant que l'élève a ou non une expérience de ces éléments à l'extérieur de l'école. La situation température-pression a comme spécificité qu'elle relève de deux registres scientifiques (les mathématiques et les sciences expérimentales) dans lesquels l'erreur, la preuve et la validation n'ont pas forcément le même statut.

Si le cadrage se voulait explicite lors de la mise en œuvre, l'expérimentation atteste que les registres d'apprentissage sont sans cesse reconfigurés en fonction des différents membres avec lesquels les élèves travaillent, du regard posé par les enseignants sur l'activité, du moment où ces activités sont proposées par rapport à différents rythmes : celui de l'année scolaire, de la semaine, de la journée et même de l'heure de cours. Un temps « d'oubli » par exemple est tout autant nécessaire qu'un temps d'appropriation car il permet d'inhiber certains processus cognitifs. De même l'écoute des inter-actions langagières montre la nécessité de temps de « bavardages » qui mettent à distance la difficulté rencontrée pour mieux y revenir ensuite. Certains élèves sont considérés comme actifs parce qu'ils agissent, manipulent, cherchent. Leur activité cognitive peut cependant être d'un niveau inférieur à celle d'un élève qui a une posture passive ou qui se disperse facilement.

On peut se demander si ce cadrage ne relève pas de l'ordre de l'infra-didactique, c'est-à-dire de ce qui est convoqué d'un bout à l'autre de la scolarisation et qui est commun aux différentes disciplines : organiser une recherche, utiliser des écrits intermédiaires, gérer sa concentration, inhiber certains automatismes, chercher des informations... Le type de raisonnement mis en place pour traiter les données peut aussi relever de cet infra-didactique. En particulier on remarque que les élèves utilisent plus naturellement des traitements dichotomiques (« est » ou « n'est pas ») mais qu'ils sont peu habitués à des traitements par emboîtements par repérage de ce qui est commun.

Le contrat didactique peut prendre en charge une partie de ce cadrage, nos analyses montrent cependant que des aspects sociologiques sont à prendre en compte si nous voulons limiter les malentendus qui peuvent devenir discriminants.

Conclusion

Notre recherche a permis de confirmer l'hypothèse selon laquelle les connaissances que les élèves ont de la proportionnalité peuvent être un obstacle à l'apprentissage de l'affinité. Une première étape consistant à prouver la non-proportionnalité est nécessaire pour envisager une autre relation fonctionnelle entre deux grandeurs. Nous avons aussi montré que d'autres représentations sont fortement ancrées et empêchent d'envisager l'affinité comme un modèle possible : la croissance perçue comme une nécessité, la causalité comme justification de la relation fonctionnelle entre deux grandeurs, les unités et sous-unités dans le système décimal proportionnelles entre elles. En testant les mêmes exercices à différents niveaux de la scolarité, les procédures des élèves montrent que le point de vue statique s'impose au détriment du point de vue dynamique en ce qui concerne les fonctions et que ce point de vue est lié aux choix effectués par l'institution et les enseignants dans la transposition didactique. Nous avons aussi montré par nos expérimentations que l'approche covariationnelle semble permettre aux élèves de construire très tôt des modélisations affines. Les procédures utilisées sont alors plus efficaces pour résoudre des problèmes d'interpolation linéaire sans utiliser le calcul algébrique. Nous n'avons pas pu montrer que l'ingénierie testée rend plus disponibles les connaissances sur les fonctions affines mais nous avons pu mettre en lumière plusieurs facteurs qui empêchent actuellement cette disponibilité et dont nous devons tenir compte dans l'enseignement-apprentissage de cette notion. Parmi ces facteurs, nous avons vu que les élèves ne construisent pas de nécessités, ils sont ainsi capables de tester plusieurs procédures pour démontrer un résultat alors qu'une seule suffirait. L'apprentissage par problématisation du savoir mathématique reste donc une piste intéressante dont il faudrait poursuivre l'exploration.

Au terme de ce travail, deux résultats se dégagent : l'apport de notre recherche pour penser la transposition didactique de la fonction affine et le format PPAP pour élémenter l'apprentissage par problématisation dans les classes. Nous allons développer ces deux points.

Le cadre de la problématisation ouvre des perspectives pour penser l'organisation de séquences d'enseignement-apprentissage. Notre recherche a permis de mieux comprendre l'activité cognitive des élèves. L'analyse de cette activité amène de nouvelles perspectives de recherche autour de la transposition didactique de la notion de fonction affine et de la question du contrat didactique favorable à une approche problématisée de la notion comme outil. Nous mettrons en évidence ce que l'ingénierie a permis de dire sur l'apprentissage des élèves au travers des phénomènes et des récurrences observés.

Nous allons montrer comment le format PPAP permet d'organiser une séquence et en lister les points pertinents et les points discutables. Nous verrons comment ce format a produit ou non ce qui était attendu au travers des différentes expérimentations présentées. Nous verrons en quoi les outils développés (losanges de problématisation à différents niveaux, EC, Unités de raisonnement) permettent d'analyser l'activité mathématique de l'élève et leurs apports pour penser la transposition didactique. Nous évoquerons enfin la perspective d'une transposition de la PPAP en précisant les contextes dans lesquels ce format nous semble

favorable à un apprentissage problématisé et les conditions de sa mise en œuvre en lien avec le contrat didactique pour éviter que cette pratique ne soit discriminante socialement.

1. L'apport du cadre de la problématisation pour penser l'organisation de l'enseignement-apprentissage de la notion de fonction affine et sa transposition didactique

1.1. Une revisite des cadres, registres et points de vue par le travail de figuration, configuration et de reconfiguration.

Le cadre de la problématisation permet de réinterroger les théories développées en didactique des mathématiques en ce sens que le paradigme dans lequel il est pensé ne suppose pas que la théorie est déjà là mais plutôt « détermine la légitimité des problèmes et aussi des solutions proposées » (Kuhn, 2008). Ainsi dans le cadre de la problématisation, la situation didactique ne vise pas seulement la découverte d'un savoir qui préexisterait mais bien la construction des problèmes qui permettent de caractériser ce qui rend légitime ce savoir dans un contexte particulier, par la mise en évidence de nécessités. Ce contexte est caractérisé par un cadre épistémique qui inclut d'une part le REX (registre explicatif), c'est-à-dire tout ce qui sous-tend le raisonnement de l'élève lorsqu'il cherche le problème qu'il a construit, et d'autre part le contrat didactique, c'est-à-dire tout ce qui organise l'activité dans la classe du fait des attentes respectives de l'enseignant et des élèves au niveau des comportements (Hersant, 2016a). Pour le REX comme pour le contrat, certains aspects sont en lien direct avec les mathématiques considérées en tant que théorie scientifique dans une communauté savante, d'autres sont liés à la transposition didactique de cette théorie dans le contexte scolaire, d'autres enfin sont liés aux expériences personnelles de l'élève, à ses représentations du savoir, de l'apprentissage, de sa place dans le groupe. Si la TSD s'intéresse au savoir pour agir sur le problème, l'apprentissage par problématisation pose la question de la manière dont on pense ce savoir. C'est pourquoi le REX est configuré avec deux autres registres que sont le registre empirique (ensemble des données construites) et le registre des modèles (ensemble des conditions construites). Trois formes de configurations sont possibles, une configuration étant ce qui organise une cohérence entre les trois registres. La configuration peut être empirique si la cohérence émane du registre empirique, analytique si elle émane d'une comparaison à des modèles, théorique si elle est issue d'un cadre théorique et on peut estimer qu'il y a apprentissage à partir du moment où le REX évolue. Cette évolution peut être repérable à travers trois types d'activité : l'activité productive, l'activité constructive et l'activité de formulation. C'est pourquoi la situation d'enseignement-apprentissage doit permettre à l'élève un travail réflexif à la fois sur ce qu'il produit, sur ce qu'il formule et sur le savoir qu'il construit. Cela passe par une commande explicite qui oblige l'élève à changer de rôle. La situation doit amener l'élève alternativement à proposer, agir, vérifier, énoncer non seulement par une évolution du milieu mais par un travail explicite du rapport de chaque élève à ce milieu. Les outils d'analyse développés dans le cadre de la problématisation donnent un éclairage sur le processus d'acculturation en juxtaposant une étude en didactique à des éléments de psychologie de l'éducation. Cette juxtaposition a pour objectif de comprendre pourquoi et comment certaines expérimentations peuvent amener des pratiques différentes

dans les classes dites ordinaires plus favorables à une construction apodictique des savoirs. De fait nos analyses portent sur un objet d'étude différent de la TSD, nous portons notre regard sur l'élève et non plus sur la classe. Si nous reprenons la notion de situation comme lieu de rencontre entre l'élève et une co-naissance, si cette situation se veut la plus proche possible d'une situation fondamentale, nous nous intéressons à la dévolution comme un processus individuel qui amène les élèves face à des situations a-didactiques et donc à différents savoirs qu'il s'agit d'institutionnaliser au sein d'une communauté. Nos analyses visent à mesurer l'écart entre les problèmes que les élèves cherchent effectivement à résoudre et le savoir que l'enseignant vise effectivement à institutionnaliser.

1.2.L'apport de notre étude épistémologique pour penser la transposition didactique de la fonction affine

Notre étude a montré que la notion d'affinité relève de différents cadres et que son enseignement est parfois incohérent du fait qu'il s'inscrit dans chacun de ces cadres à différents moments de la scolarité, sans qu'un lien ne soit établi entre les différentes théories associées à ces cadres (par exemple le lien entre l'alignement des points sur une droite et la fonction affine). Ainsi la proportionnalité travaillée à l'école primaire sur les grandeurs puis sur les nombres dans des contextes très souvent récurrents, amène à concevoir la relation fonctionnelle de manière restreinte à une relation de proportionnalité et limite la représentation des fonctions au cas des fonctions monotones croissantes. L'étude du calcul algébrique fournit un outil intéressant pour opérer dans le registre des expressions algébriques sans que le cadre puisse donner les caractéristiques de l'affinité. Si certaines conversions d'un registre à un autre sont travaillées, comme par exemple les conversions entre le registre des tableaux et celui des graphiques, la caractérisation de l'affinité ne fait pas l'objet d'une étude de conversion : Comment lire le taux de variation sur le graphique ? Comment trouver l'ordonnée à l'origine dans le tableau de valeurs ?

Par ailleurs l'étude des deux points de vue sur la fonction (le point de vue statique et le point de vue dynamique) a mis en évidence l'intérêt d'une approche dynamique de l'affinité. En effet, l'approche dynamique permet de passer alternativement d'une approche ponctuelle à une approche globale de la relation fonctionnelle permettant de résoudre localement des problèmes sans utiliser l'algèbre mais en s'appuyant sur la proportionnalité des écarts. Elle permet surtout de modéliser des situations et donc de poser des problèmes d'interpolation linéaire. Elle prépare ainsi le travail du lycée sur la dérivée. Ce point de vue covariationnel est relativement intuitif et nécessite l'apport de codes langagiers pour permettre aux élèves de décrire, d'expliquer et d'argumenter ce qui relève du comportement de la fonction et d'explicitier ce qui relève de la continuité et de la monotonie.

Il semble tout à fait possible d'envisager une progressivité de l'apprentissage de la notion de fonction affine à partir de l'étude des variations et de caractériser l'affinité par la proportionnalité des écarts. Cette progressivité doit tenir compte des unités de raisonnements que nous avons mises en évidence à partir des travaux de Valériane Passaro (Passaro, 2016). Cela suppose que les élèves puissent identifier clairement les grandeurs dont on veut étudier la covariation. Actuellement, beaucoup d'élèves confondent encore à l'arrivée au lycée Grandeurs (grand G), grandeurs (petit g), unités et valeurs. Une difficulté est liée aux cadres

théoriques dans lesquels s'inscrivent ces grandeurs et donc au REX (Orange, 2012) que vont mobiliser les élèves lors de la résolution de problèmes. L'étude de la covariation entre la pression et la température montre par exemple que les connaissances et représentations acquises au sein des sciences expérimentales dans le cadre scolaire rencontrent celles acquises par l'expérience individuelle de chaque élève au sein de l'école mais aussi à l'extérieur de l'école. Il est alors complexe de les mettre en cohérence en mathématiques. En effet, les élèves ont bien du mal à transposer les techniques d'un cadre à un autre. Par exemple les techniques utilisées pour tester la proportionnalité dans le cadre des suites numériques proportionnelles sont difficilement transposables aux grandeurs proportionnelles dont les mesures sont approchées et liées à des expérimentations. La validation ne fonctionne pas suivant les mêmes clauses dans les deux cadres. Ce travail de transposition relève de la modélisation dont l'enseignement reste encore en débat (Bulf et al., 2011). Cette compétence est au programme de l'école et du collège depuis la rentrée 2016 comme nous le verrons plus loin.

Nous faisons l'hypothèse que les élèves pourraient mieux appréhender cette transposition si la nature des fonctions utilisées était précisée : les fonctions « pratiques » caractérisent la relation fonctionnelle entre les grandeurs dans un contexte empirique (nous sommes dans le cadre des mesures de grandeurs) et les fonctions « théoriques » caractérisent cette même relation fonctionnelle dans le cadre de l'analyse. Chaque nature de fonction est associée à des schèmes d'actions et à un contrat didactique qui peuvent être spécifiques. Expliciter ces schèmes et les clauses du contrat pour chaque nature de fonction pourrait aider l'élève à des conversions, des changements de cadres, des représentations différentes qui pourraient, à leur tour, ouvrir de nouveaux possibles.

Si nous reprenons le cadre épistémique dans lequel nous travaillons, on peut caractériser trois régimes (Bautier & Rayou, 2013) relevant de trois cultures : la culture scientifique, la culture scolaire et la culture individuelle. Le REX est le registre associé à la culture scientifique, le contrat didactique est lié à la culture scolaire, les nécessités vont émerger des trois cultures et leur configuration va donner du sens au savoir. Si un des régimes prime sur les autres ou si un régime est oublié, la disponibilité du savoir est plus difficile à acquérir. Le rôle de l'enseignant est de permettre la configuration de ces régimes par l'explicitation des liens que chaque élève tisse entre eux, et ce de manière individuelle et non seulement collective, de sorte que l'élève puisse arriver à un équilibre de ces trois cultures. Pour illustrer cette idée, reprenons les pratiques que nous avons pu observer dans les classes. Celle du débat peut donner la primeur à la culture individuelle et seuls les élèves habitués à s'exprimer oralement devant le groupe et ayant une bonne estime d'eux-mêmes participent. Les échanges peuvent être riches et vivants sans que le contenu ne soit adapté à la situation d'apprentissage, les arguments en particulier peuvent tourner autour de convictions et non de savoirs scientifiques. Tous les élèves ne participent pas également aux échanges et l'oral est peu travaillé pour lui même. Ainsi les élèves proches de la culture scolaire prennent une place plus remarquée en répondant aux critères posés par l'enseignant (prise de parole adaptée, réponse argumentée, écoute et reprise des arguments des autres élèves). La culture scientifique peut cependant être totalement absente ou laissée uniquement à la charge de l'enseignant qui tisse les liens entre ce que les élèves énoncent et le savoir savant visé. La recherche de problèmes ouverts peut donner la primeur à la culture scolaire, les élèves mettent

en place des automatismes au niveau des techniques et donnent à l'enseignant des indices de mise en activité qu'ils pensent attendus. Certains élèves peuvent encore être exclus du travail parce qu'ils n'ont pas ces codes et que leurs échanges dans le groupe sont orientés principalement par leur culture individuelle. Ici encore la culture scientifique peut être négligée si le savoir n'est pas lui même objet du travail. Comment envisager des pratiques pédagogiques permettant de rétablir l'équilibre entre les trois régimes culturels ? La réponse que nous avons explorée est de varier les dispositifs et de contraindre les élèves à confronter effectivement ces cultures.

1.3. Les programmes du cycle 4 à la rentrée 2016

Les programmes entrés en vigueur à la rentrée 2016 changent radicalement avec l'esprit des programmes antérieurs en ce sens qu'ils sont conçus de manière curriculaire comme un outil pour travailler les cinq domaines de compétences du socle commun et qu'ils ne présentent plus les mathématiques comme une liste de savoirs et de techniques à maîtriser. Leur rédaction est organisée en trois volets : les domaines du socle que la discipline travaille, les contenus disciplinaires et des repères de progressivité dans le cycle ainsi que des pistes pour travailler les croisements entre les enseignements. Pour ce qui concerne l'activité mathématique, le programme parle de six compétences majeures : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer et communiquer. Les contenus disciplinaires sont ensuite structurés selon les thèmes : nombres et calculs ; organisation et gestion de données, fonctions ; grandeurs et mesures ; espace et géométrie. Il est précisé : « une place importante doit être accordée à la résolution de problèmes qu'ils soient internes aux mathématiques, ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines » et plus loin « le programme fournit des outils permettant de modéliser des situations variées sous forme de problèmes mathématisés ». Ainsi le concept de fonction apparaît comme un outil de modélisation et de représentation, il s'agit de « traduire en langage mathématique une situation réelle » et de « choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique ». Une liste de connaissances et compétences associées est proposée (voir tableau 68) et des attendus de fin de cycle sont précisés. Modéliser et représenter amènent à travailler les domaines 1 (comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques) et 5 (les représentations du monde et l'activité humaine) du socle. Il est clairement indiqué que l'élève doit choisir et mettre en relation différents cadres (Douady, 1986) adaptés pour traiter un problème, ce qui sous-entend l'utilisation de différents registres (Duval, 1993), ce que précisent les accompagnements des programmes :

La notion de fonction, qui naît véritablement pour les élèves au cycle 4, continuera à se mettre en place au lycée et même au-delà. Les fonctions font en effet partie de ces objets mathématiques que les élèves vont être amenés à manier pendant longtemps sans en avoir une définition formelle rigoureuse. Le changement de registre de représentations est donc ici nécessaire pour cerner l'objet fonction. On ne peut pas dire ce qu'est une fonction, *mais on peut dire, grâce à cette formule, j'ai défini une fonction, que je pourrais aussi définir par une courbe.* (Groupe d'experts en partenariat avec l'inspection générale de l'Éducation nationale, 2016)

Cet aspect est plus développé autour de l'attendu « résoudre des problèmes de proportionnalité » qui précise que les élèves doivent savoir reconnaître des situations de proportionnalité et de non-proportionnalité. Des exemples de situations précisent que les élèves étudient « des relations entre deux grandeurs mesurables pour identifier si elles sont proportionnelles ou non ; ces relations peuvent être exprimées par :

- des formules
- des représentations graphiques
- un tableau ».

Un autre attendu de fin de cycle est : comprendre et utiliser la notion de fonction. Le préambule précise que les élèves « découvrent progressivement la notion de fonction, qui leur permet d'accéder à de nouvelles catégories de problèmes ». L'étude des fonctions est associée au domaine « gestions de données ».

Connaissances et compétences associées	Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève
<p>Modéliser des phénomènes continus par une fonction.</p> <p>Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions (équations, inéquations).</p> <ul style="list-style-type: none"> - Dépendance d'une grandeur mesurable en fonction d'une autre. - Notion de variable mathématique. - Notion de fonction, d'antécédent et d'image. - Notations $f(x)$ et $x \rightarrow f(x)$. - Cas particulier d'une fonction linéaire, d'une fonction affine. 	<p>Utiliser différents modes de représentation et passer de l'un à l'autre, par exemple en utilisant un tableur ou un grapheur.</p> <p>Lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite.</p> <p>Étudier et commenter des exemples (fonction reliant la tension et l'intensité dans un circuit électrique, fonction reliant puissance et énergie, courbes de croissance dans un carnet de santé, tests d'effort, consommation de carburant d'un véhicule en fonction de la vitesse, production de céréales en fonction des surfaces ensemencées, liens entre unités anglo-saxonnes et françaises, impôts et fonctions affines par morceaux...).</p> <p>Faire le lien entre fonction linéaire et proportionnalité.</p>

Tableau 68: Extrait des programmes de mathématiques cycle 4 : B.O. N°11 du 26 novembre 2015²⁰

Le programme donne les attendus pour l'ensemble du cycle et des repères pour organiser la progression sur les trois années de la 5^e à la 3^e mais il n'impose pas un contenu

²⁰ http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94717 consulté le 09/01/2016

pour chaque année. La notion de fonction affine qui dans les programmes antérieurs était étudiée en 3^e, peut être introduite dès le début du cycle et il est précisé que cette introduction se fait par l'étude de covariation de deux grandeurs mesurables :

En 5^e, la rencontre de relations de dépendance entre grandeurs mesurables, ainsi que leurs représentations graphiques, permet d'introduire la notion de fonction qui est stabilisée en 3^e, avec le vocabulaire et les notations correspondantes. (Extrait B.O. N°11 du 26 novembre 2015)

Dans la partie « Grandeurs et mesures », on peut aussi lire dans les repères de progressivité :

L'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les grandeurs géométriques est travaillé en 3^e, en lien avec la proportionnalité, les fonctions linéaires et le théorème de Thalès. (extrait B.O. N°11 du 26 novembre 2015)

La notion de fonction affine est donc introduite à travers la covariation de grandeurs alors que le programme de 2008 précisait qu'il s'agissait de « faire émerger progressivement, sur des exemples, la notion de fonction en tant que processus faisant correspondre à un nombre, un autre nombre ». Par ailleurs, si déjà en 2008, il est spécifié que « l'usage du tableur grapheur contribue à la mise en place du concept de fonction », l'arrivée en 2016 de l'algorithmique et de la programmation peut amener de nouveaux outils conceptuels. En particulier le tableur permet d'effectuer très rapidement des calculs et les algorithmes permettent d'envisager la production d'images ou d'antécédents à partir de valeurs déjà connues.

Nous avons vu que les élèves peuvent se représenter de manière intuitive la fonction affine d'un point de vue dynamique. L'enseignement a cependant privilégié jusqu'à aujourd'hui l'approche par les opérateurs au détriment des variations. Considérons le célèbre puzzle de Brousseau (Brousseau, 1981) initialement pensé pour l'apprentissage des nombres décimaux. Cette situation permet de remettre en cause la représentation additive d'un agrandissement (le théorème élève étant que pour agrandir en conservant la forme, il faut ajouter la même longueur à toutes les dimensions) pour amener l'élève à une représentation multiplicative (pour agrandir en conservant la forme, il faut multiplier toutes les dimensions par un même coefficient supérieur à 1). On pourrait envisager de rester sur une approche additive en remettant en cause le fait que ce n'est pas la même longueur qu'il faut ajouter à chaque dimension. On pourrait ainsi mettre en évidence que si une longueur est doublée, il faut doubler la longueur ajoutée pour obtenir son agrandissement.

Dans l'expérience de Brousseau, la consigne précise : « Voici des puzzles, vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètre sur votre reproduction. Je donne un puzzle par équipes de 5 ou 6, mais chaque élève fait au moins une pièce ou un groupe de 2 en fait 2. Lorsque vous aurez fini, vous devez pouvoir reconstituer les

mêmes figures qu'avec le modèle. » (Brousseau, 1981, p.70). Les élèves pensent qu'en ajoutant 3 cm à toutes les dimensions, ils auront un résultat correct.

$$2 \rightarrow 2 + 3 = 5$$

$$4 \rightarrow 4 + 3 = 7$$

$$6 \rightarrow 6 + 3 = 9$$

La vérification se fait avec le matériel et le problème vient du fait que si les pièces de mesures 2cm et 4cm viennent se coller sur la pièce de 6cm sur le modèle, il faut que la reproduction permette ce même collage. En ajoutant 3cm aux mesures de 2cm et 4cm on obtient 5cm et 7cm qui ne peuvent pas se coller à la pièce de 9cm obtenue en ajoutant aussi 3cm à la mesure de 6cm. Les élèves peuvent alors se diriger vers l'exploration des rapports. C'est pourquoi cette situation est souvent proposée pour « casser » le modèle additif pour les aggrandissements²¹.

Si maintenant on reste sur l'idée de l'addition, on peut se dire que si on ajoute 3cm à 4cm il faudra en ajouter la moitié à 2cm ce qui fait 1,5cm. De même pour 6cm qui est le triple de 2cm on ajoutera 4,5cm.

$$4 \rightarrow 4 + 3 = 7$$

$$2 \rightarrow 2 + 1,5 = 3,5$$

On a bien alors $7 + 3,5 = 10,5$.

$$6 \rightarrow 6 + 4,5 = 10,5$$

Ce que nous voulons illustrer ici, c'est que la proportionnalité est abordée à l'école par la mise en évidence d'un coefficient de proportionnalité sans doute dans l'idée d'une approche fonctionnelle, mais qu'un autre choix est possible. Les propriétés de linéarité sont peu mises en évidence au primaire si ce n'est dans des cas simples comme celui issu de la vie courante lié aux prix : si 1kg d'un produit coûte 13€, pour calculer le coût de 1,5kg il est plus aisé de calculer le prix de 0,5kg en prenant la moitié de 13€ puis de l'ajouter au prix de 1kg. Si dans la théorie des proportions, on parle de rapport scalaire entre grandeurs de même nature, la proportionnalité entre deux grandeurs de natures différentes suppose un coefficient de proportionnalité qui est une grandeur quotient. Suivant le contexte, ce coefficient peut ne pas avoir de sens pour les élèves. Comme Julio l'a déjà montré, l'approche par les variations peut être plus naturelle puisqu'elle suppose des calculs homogènes sur les mêmes grandeurs (Julio, 1982). Ce point de vue semble être celui privilégié par le programme de 2016 pour le cycle 3 concernant la proportionnalité :

En CM1, le recours aux propriétés de linéarité (additive et multiplicative) est privilégié dans des problèmes mettant en jeu des nombres entiers. Ces propriétés doivent

²¹ Ressource éducol : <http://eduscol.education.fr/bd/urtic/maths/index.php?commande=aper&id=2985>

être explicitées ; elles peuvent être institutionnalisées de façon non formelle à l'aide d'exemples. (Extrait B.O. N°11 du 26 novembre 2015)

Si maintenant nous étudions l'organisation mathématique des programmes de 2016, les connaissances et compétences visées sont :

- modéliser des phénomènes continus par une fonction ;
- résoudre des problèmes modélisés par des fonctions.

Nous avons donc deux types de tâches et le programme ne donne pas les techniques à enseigner, il précise cependant que la conversion peut être travaillée pour que les élèves puissent « choisir le mode de représentation le mieux adapté à la résolution d'un problème » (Vallaud-Belkacem, 2015) :

- utiliser différent mode de représentation et passer de l'un à l'autre ;
- lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite ;
- faire le lien entre fonction linéaire et proportionnalité.

La conversion est donc étudiée en lien avec les problèmes que les élèves vont avoir à résoudre.

Du point de vue des technologies, le programme identifie différents savoirs :

- dépendance d'une grandeur mesurable en fonction d'une autre ;
- notion de variable mathématique ;
- notion de fonction, d'antécédent et d'image ;
- cas particulier d'une fonction linéaire et d'une fonction affine.

Ici la théorie de référence est celle des fonctions. Le programme insiste donc beaucoup moins sur les techniques liées à l'algèbre même s'il est indiqué que les problèmes relèvent des équations et inéquations, aucune procédure n'est privilégiée. De même le lien entre fonction linéaire et proportionnalité est généralisé et justifié par des éléments théoriques : le théorème de Thalès et les homothéties. Nous voyons donc que l'organisation mathématique de ce programme est très différente de celle de 2008. Elle privilégie une approche dynamique, à travers des résolutions de problèmes liés à la covariation de grandeurs et s'appuie sur des éléments théoriques dans différents cadres pour inciter aussi l'élève à faire de conversions de registres.

Ce changement a amené le ministère à proposer des aménagements pour le programme de seconde au lycée qui ont été publiés le 4 mai 2017. On peut y lire que l'objectif du travail sur les fonctions est de rendre les élèves capables d'étudier des problèmes issus de domaines très variés les amenant à résoudre des problèmes se ramenant à une équation du type $f(x)=k$ ou des problèmes d'optimisation. Il est précisé que « la résolution de problèmes vise aussi à progresser dans la maîtrise du calcul algébrique » et qu'« il s'agit de faire comprendre que des

dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret mais qu'ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction » (Ministère de l'Éducation Nationale, 2017). Le détail des capacités attendues met l'accent sur l'étude des variations (par exemple les commentaires précisent : « les élèves doivent distinguer les courbes pour lesquelles l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique » et concernant la fonction affine « On fait le lien entre le signe de $ax+b$, le sens de variation de la fonction et sa courbe représentative ») et ce dans les différents registres.

Nous avons donc deux évolutions :

- l'organisation mathématique change puisque la théorie qui permet de justifier les technologies n'est plus la même, l'algèbre n'apparaît plus comme préalable à l'étude des fonctions ;
- les changements de cadre et les conversions de registre sont explicitement à travailler puisque le choix d'un cadre et le changement de registre sont des objectifs du programme.

2. L'apport du format PPAP pour problématiser en mathématiques

2.1. Ses effets attendus sur l'apprentissage

Pour amener l'élève à construire des nécessités et plus généralement à problématiser, le format PPAP est un enchaînement de situations d'actions ou d'échanges qui vise d'une part la mise à distance de l'action et la prise de rôle du tiers par l'élève. Ce format est constitué de trois étapes. La première étape vise la résolution d'un problème technique et la rédaction de cette résolution. La seconde vise une classification des procédures, le problème est donc technologique. Dans cette étape, les situations proposent un ajout, une ostension, dont la nature doit engager l'élève à un changement de rôle argumentatif et de position énonciative. Cet ajout est une figuration, c'est-à-dire une reconstruction par l'enseignant de l'activité de l'élève, qui englobe et reprend différentes productions et les synthétise de manière anonyme sans en apporter une solution. Elle met une focale sur certains éléments qui doivent favoriser une reconfiguration (Bautier & Rayou, 2013) pour provoquer une analyse rétrospective et prospective. La troisième étape est la définition de l'outil par la mise en évidence des nécessités et la production d'un texte de savoir, le problème est théorique.

Ce format rompt avec les pratiques usuelles de débats en classe de mathématiques. Les productions écrites attendues à chaque étape permettent un discours critique qui s'appuie sur des savoirs écrits qu'il est possible de réinterroger. L'oral dans sa temporalité, son imprécision et sa forme directement liée aux relations inter-personnelles ne permet pas cette analyse critique. L'écriture a des fonctions mnémotechniques mais surtout, elle transforme les processus cognitifs. Les étapes de la PPAP correspondent à plusieurs séances et un temps entre chaque séance est nécessaire pour travailler la figuration. Cette distance entre les séances semble favorable à l'apprentissage par problématisation par le fait qu'elle permet d'organiser et de réinterroger la réflexion. Elle doit cependant rester raisonnable, une semaine est un maximum. La nécessité enfin de changer de mode de communication, de représentation

graphique (Goody, Bazin, & Bensa, 2010), de fonction de communication, semble favorable à une appropriation du savoir par le plus grand nombre d'élèves.

2.2. Les effets produits au regard des effets attendus

Plusieurs aspects restent à préciser pour assurer l'efficacité d'un format PPAP : Quels problèmes poser ? Quel cadrage de l'activité ? Comment élaborer les figurations ?

Le choix du problème initial en fonction de l'objectif d'apprentissage est délicat. Suivant le point de vue que l'on cherche à travailler, les questions ne seront pas les mêmes. Les élèves peuvent avoir à construire la relation fonctionnelle entre deux grandeurs ou avoir à résoudre un problème par une fonction affine qu'il faut déterminer. C'est-à-dire que, dans un cas, la relation fonctionnelle est la solution, alors que dans l'autre, cette relation est un outil. Les expérimentations montrent que dans le premier cas, la PPAP peut être efficace et que le savoir est effectivement plus disponible même si la formalisation de ce savoir n'atteint pas la rigueur attendue. Dans le second cas, le contexte peut être un obstacle à la mise en place de nécessités capables de caractériser une classe de problèmes qui relèvent de l'affinité. En effet, la nature des grandeurs étudiées, le manque d'outils linguistiques pour désigner les objets manipulés et la modélisation, sont autant de freins potentiels à l'apprentissage par problématisation.

Le second problème est celui du cadrage de l'activité. La mise en œuvre dans la classe dépend fortement du contrat didactique, en particulier pour ce qui concerne le statut de l'erreur et la nature de l'étayage. Le climat de classe est un facteur important qui joue sur les échanges dans les groupes et sur la configuration des registres.

La troisième question est celle de l'élaboration des figurations. Comment analyser les productions des élèves pour en tirer les éléments qui vont permettre de réaliser ces figurations ? L'analyse *a priori* et les espaces de contraintes *a priori* permettent d'identifier les nécessités qu'il s'agit de faire émerger et d'identifier les conditions que les élèves doivent être amenés à expliciter pour les interroger ou les préciser. Comment se fait le repérage ? Comment peut-on former les enseignants à ce travail d'analyse ? Actuellement, les débats en classe sont menés à partir des productions des élèves, mais le choix de l'enseignant est souvent porté sur la solution ou sur la procédure comme solution. Le repérage se fait donc sur les erreurs et sur les outils de résolution. Plus difficile est l'analyse qui permet de mettre à jour pourquoi tel élève a effectivement mobilisé tel savoir, tel outil. Les enseignants sont donc habitués à analyser des productions de solutions mais pas des productions de récits de recherche ou du moins à reconstruire le récit de la recherche à travers la production, même partielle, de solutions. Notre expérimentation montre en quoi l'analyse du discours dans les échanges oraux au sein des groupes d'élèves apporte des éléments de compréhension sur ce qui appelle le savoir. Il n'est pas envisageable de généraliser cette pratique en classe car elle est trop coûteuse en temps pour l'enseignant. On peut cependant imaginer des pratiques de classes où l'enregistrement audio serait utilisé régulièrement pour permettre aux élèves d'avoir une analyse rétrospective des échanges. Par exemple, il peut être intéressant de demander un récit de recherche rédigé par les élèves à partir de l'enregistrement de leurs débats en petits groupes.

2.3. Des outils d'analyse pour mesurer les progrès des élèves dans l'apprentissage par problématisation

Au cours de notre recherche nous avons développé différents outils d'analyse. Nous avons adapté les EC aux mathématiques pour qu'ils mettent en évidence les différents registres : le registre empirique, le registre des modèles et le REX. Les EC nous renseignent sur les représentations des élèves et sur la manière dont s'organise leur activité. Les données ou conditions construites constituent le registre empirique. La construction de ces éléments peut être mise en évidence par des losanges de problématisation. Nous avons pu faire la preuve qu'au cours d'une recherche en petits groupes, les élèves construisent différents problèmes et qu'ils mettent en tension données et conditions avec différents raisonnements. C'est l'enchaînement de ces problèmes qui atteste de la configuration des registres et qui permet de comprendre comment émergent les nécessités. Pour qu'un savoir soit disponible pour résoudre un problème inédit, les nécessités liées à ce savoir doivent être efficaces pour permettre à l'élève de reconnaître une situation qui appelle ce savoir. Ces nécessités doivent être valides par rapport au REX, mais aussi par rapport aux autres registres ou du moins elles doivent être cohérentes avec ces différents registres. Les losanges de problématisation permettent de voir si ce qui est construit est en lien avec un problème explicatif et si les conditions portent des nécessités. Auquel cas, ce construit a de grandes chances de devenir un modèle.

Nos EC sont donc une synthèse de multiples losanges de problématisation, ils permettent d'avoir une vision globale du processus de résolution du problème par les élèves. Les losanges, tels que nous les avons construits, donnent les différents éléments qui constituent l'EC mais aussi le processus de construction dans le temps de ces éléments. Les losanges permettent une analyse micro et dynamique de la problématisation, les EC en donne une vision macro et statique. Les deux outils sont donc complémentaires si on veut penser l'enseignement/apprentissage par problématisation.

Nous avons vu que l'apprentissage par problématisation de l'outil s'accompagne de la secondarisation du discours et de l'évolution du REX. Les macrostructures du débat (Fabre et Orange, 1997 ; Chalak, 2012) permettent de repérer l'articulation entre les différents registres. Le discours peut être ancré dans l'empirique, dans l'évocation de modèle ou dans des savoirs théoriques. Les macrostructures par les propositions, objections et renforts mettent en évidence la nature et la force des arguments dans l'avancée du travail de réflexion et dans la prise de décision.

2.4. La PPAP comme pratique pédagogique pour élémenter l'apprentissage par problématisation dans l'enseignement

La PPAP essaye de jouer sur trois axes : le rôle, le discours et la production, de sorte que des changements de rôles amènent l'élève locuteur à utiliser un code élaboré pour résoudre un problème explicatif. Par code élaboré nous revenons à la définition de Bernstein :

On rencontre un code restreint là où la forme des relations sociales est fondée sur des identifications étroitement partagées, sur un large ensemble de présupposés communs : c'est pourquoi le code restreint apparaît en tant que régulateur et moyen de transmission de la culture dans les milieux dont la culture ou la sous-culture privilégie le « nous » par rapport au « moi » comme les prisons, les bandes d'adolescents, l'armée, les groupes d'amis de longue date, les couples mariés. [...] On rencontre le code élaboré partout où la culture ou la sous-culture privilégient le « moi » par rapport au « nous », partout où les intentions d'autrui ne peuvent être considérées comme allant de soi, et où les locuteurs sont, en conséquence, contraints d'élaborer ce qu'ils veulent signifier et de le rendre à la fois explicite et spécifique. Des significations qui ont pour le locuteur un sens personnel et particulier doivent être organisées et découpées de façon à devenir intelligibles pour celui qui les écoute ; cette nécessité contraint celui qui parle à opérer des choix syntaxiques différenciés et à user d'un vocabulaire varié. Un code élaboré polarise l'attention du locuteur sur l'expérience des autres comme expérience différente de la sienne propre ; au contraire, dans le cas du code restreint, la communication verbale renvoie à autrui en tant que membre du même groupe ou de la même catégorie statutaire. (Bernstein, 1993, p.196)

La situation pédagogique a pour objectif de provoquer le double processus de secondarisation indispensable à l'apprentissage par problématisation : un processus de secondarisation du rapport au réel en passant d'un problème orienté vers la solution à un problème explicatif et une secondarisation du discours par une description de données empiriques à la formulation de nécessités dans différents cadres et registres.

Dans la PPAP, les figurations sont essentielles puisqu'elles doivent amener l'élève à ce double processus de secondarisation. Nous nous interrogeons cependant sur l'a-didacticité des figurations. En effet, le travail sur les figurations est en rupture avec un certain nombre de clauses du contrat didactique le plus souvent rencontrées dans les classes ordinaires. Ces nouvelles clauses plus ou moins explicitées peuvent être source de malentendus scolaires du fait que le dispositif joue sur les relations sociales et sur des temporalités différentes par des activités de reprise de textes intermédiaires et du fait que l'organisation du discours proposée est un système de rôles de type ouvert. Cependant, si l'ouverture du système peut être bénéfique puisqu'elle conduit à explorer de nouveaux possibles et qu'elle donne plus de chances à l'individu de produire des significations qui lui sont propres, des difficultés peuvent apparaître si les élèves ne disposent pas de formulations scientifiques ou de codes symboliques pour désigner les objets qu'ils étudient. Nous avons donc une dualité système ouvert/code élaboré qui doit nous amener à penser le cadrage de la PPAP. Par ailleurs Bernstein définit deux formes de code élaboré, la forme « objectale » et la forme « personnelle ». L'école a tendance à amener les élèves à une maîtrise du code élaboré dans sa forme objectale dans l'idée de faire disparaître les ambiguïtés, l'apprentissage par problématisation a cependant pour but de faire construire les problèmes par les élèves en fonction de signifiants personnels en provoquant des ruptures, un changement de conception, une évolution du REX . La forme personnelle du code élaboré a donc pour fonction de créer l'ambiguïté qui est source de questionnement. Il semblerait utile de fournir aux élèves des éléments de langage mathématiques afin de constituer un code élaboré permettant la conversion entre des formes personnelles et des formes objectales.

La PPAP peut être envisagée comme une pratique permettant d'élémenter l'apprentissage par problématisation du fait du séquençage en étapes qui demandent explicitement un changement de rôle, des résolutions de problèmes de natures différentes et des écrits intermédiaires pour formaliser le savoir. La difficulté étant de savoir si une pratique plus régulière de ce type permet effectivement aux élèves de problématiser dans d'autres contextes.

2.5. Une généralisation possible

Les PPAP semblent adaptées à l'enseignement de notions qui relèvent explicitement dans les programmes de plusieurs cadres et qui demandent des conversions d'un registre à un autre. Dans ce cas, les nécessités doivent être formalisées pour chaque cadre et une mise en cohérence des expressions des nécessités doit permettre de caractériser les problèmes que ce savoir peut permettre de résoudre. Le problème initial doit être un problème orienté vers la solution. Le savoir visé est le concept outil nécessaire à la résolution du problème. Suivant le cadre ou le registre utilisé, ce concept outil s'exprime différemment et permet des traitements différents. On peut penser que la PPAP fonctionne lorsque le savoir mobilisé comme outil pour résoudre le problème devient objet d'étude. Dans ce cas, l'analyse rétrospective permet de mettre en évidence ce qui fait que ce savoir permet de résoudre le problème et l'analyse prospective permet de formaliser le savoir pour qu'il soit mobilisable dans d'autres situations. Une séquence PPAP se poursuit par la résolution de problèmes variés qui permettent de tester l'outil et de l'enrichir. L'utilisation régulière de cette pratique pédagogique semble susceptible d'amener les élèves à plus d'autonomie dans la résolution de problème mais cette hypothèse est à éprouver en testant le format PPAP à différents niveaux de la scolarité et dans des contextes relevant de différents domaines des mathématiques.

3. Synthèse dans un espace de contraintes

Pour faire une synthèse de notre travail, nous vous proposons une présentation sous forme d'espace de contraintes (voir tableau 69). Le problème posé est de savoir comment rendre le savoir sur les fonctions affines disponible pour les élèves à l'entrée du lycée. Le registre empirique regroupe toutes les expérimentations effectuées présentées dans les parties 2 et 3 de cet écrit. Le REX correspond au cadre théorique présenté dans la partie 1. Le registre des modèles liste les nécessités que nous avons mises en évidence au fil du travail. Nous voyons que ces nécessités sont nombreuses et qu'elles interviennent à différents niveaux : au niveau de la problématisation de l'outil, au niveau de la secondarisation du discours et au niveau de l'évolution du REX. Chacun de ces niveaux apparaît avec un codage spécifique dans l'EC. Les segments indiquent comment REX et expérimentations nourrissent ou sont nourris par les nécessités construites au sein des modèles. La difficulté au regard de cet EC est de savoir si on peut organiser un parcours de l'élève lui permettant d'accéder à un savoir problématisé par un apprentissage par problématisation du savoir ou si ces deux objectifs doivent être dissociés.

Registre empirique	Test académique	Expérimentations au collège	PPAP en classe de seconde	Situation Température-Pression
Registre des modèles	PROBLEMATISATION DE L'OUTIL			
	Nécessité de construire un problème de décision	Nécessité d'une approche dynamique de la fonction par étude de la covariation	Nécessité de varier les contextes d'étude de covariation	Nécessité d'expliciter la différence entre fonction « pratique » et fonction théorique
	SECONDARISATION DU DISCOURS			
	Accompagner la secondarisation du discours par une reprise des écrits intermédiaires	Nécessité d'un formalisme des variations et des taux de variations	Nécessité de convertir les nécessités dans différents registres	Nécessité de prendre le rôle du tiers
	EVOLUTION DU REX			
	Nécessité d'un passage de problèmes techniques à des problèmes théoriques	Nécessité de faire construire le problème par les élèves	Nécessité d'une auto-évaluation par la recherche de cohérence par des changements de cadres	
REX	Cadre théorique de la problématisation	Sociogenèse historique	Contrat Didactique	Sociogenèse individuelle

Tableau 69: Espace de contraintes lié à la recherche

Bibliographie

- Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon: Canopé - CRDP de Lyon.
- Artigue, M. (1996a). Ingénierie didactique. In *Didactique des mathématiques* (p. 243-274). Paris: Delachaux et Niestlé.
- Artigue, M. (1996b). Réformes et contre-réformes de l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994). In *Les sciences au lycée, un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*. Paris: Librairie Vuibert.
- Bair, J., Haesbroeck, G., & Haesbroeck, J. J. (2000). *Formation mathématique par la résolution de problèmes*. Bruxelles: De Boeck Université.
- Bakhtine, M. (1984). *Esthétique de la création verbale*. (A. Aucouturier, Trad.). Paris: Gallimard.
- Balacheff, N. (1988). Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège. Université Joseph Fourier - Grenoble 1, Grenoble. Consulté à l'adresse <https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/326426/>
- Baldy, E., Dusseau, J.-M., & Durand-Guerrier, V. (2007). Mathématiques et physique en classe de troisième : l'exemple de la proportionnalité. *Repères IREM*, (66), 73-82.
- Barbin, E. (2001). La courbe comme phénomène technique au XVIIe siècle. *Cahiers François Viète, série I(2)*, 3-28.
- Basdevant, J.-L., Bataille, X., Fleury, P., Kohl, P., & Robert, J. (2007). *Dictionnaire de Physique-Chimie*. Paris: Nathan.
- Baudu, B., Boffy, N., Bourreau, N., Boye, A., Bronsart, C., Castagne, J., ... Pons, G. (2012). *Evolution des pratiques en mathématiques* (Bilan GRAF). Nantes: IUFM.
- Bautier, É., & Goigoux, R. (2004). Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue française de pédagogie*, 148(1), 89-100. Consulté à l'adresse <https://doi.org/10.3406/rfp.2004.3252>

- Bautier, É., & Rayou, P. (2013). *Les inégalités d'apprentissage programmes, pratiques et malentendus scolaires* (2e édition revue et augmentée). Paris: Presses universitaires de France.
- Belhoste, B. (1995). *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels*. (Editions Economica). Paris: Institut national de recherche pédagogique.
- Bernié, J.-P. (2002). L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée? *Revue Française de Pédagogie*, (141), 77-88.
- Bernié, J.-P., Jaubert, M., & Rebière, M. (2003). conférence d'ouverture du colloque international « Construction des connaissances et langage dans les disciplines d'enseignement ». Présenté à Construction des connaissances et langage dans les disciplines d'enseignement, Bordeaux: Actes sur CD Rom IUFM-Bordeaux2.
- Bernstein, B. (1975). *Classes et pédagogies : visibles et invisibles*. Paris: Ceri-Ocde.
- Bernstein, B. (1993). *Langage et classes sociales : Codes socio-linguistiques et contrôle social*. Paris: Les Editions de Minuit.
- Birgin, O. (2012). Investigation of Eighth-Grade Student's Understanding of the Slope of the Linear Function. *Boletim de Educação Matemática*, 26(42A), 139-162.
- Bkouche, R., Charlot, B., & Rouche, N. (1991a). *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*. Paris: Armand Colin.
- Bkouche, R., Charlot, B., & Rouche, N. (1991b). *Faire des mathématiques le plaisir du sens* (Armand Colin). Paris.
- Bosch, M. (1995). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Universitat Autònoma de Barcelona. Consulté à l'adresse <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=13100>.
- Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124.

- Bosch, M., & Quilio, S. (2015). La prise en compte du collectif dans l'analyse des processus d'étude selon la TSD et la TAD. Cours présenté à 18ème Ecole d'Ete de Didactique des Mathématiques, Brest. Consulté à l'adresse <https://eedm18.sciencesconf.org/>
- Bossut, C. (1800). Cours de mathématiques (Vol. Tome second géométrie, et application de l'algèbre à la géométrie). Paris: Firmin Didot. Consulté à l'adresse <https://books.google.fr/1>
- Bossut, C. (1808). Arithmétique et algèbre. Paris: Firmin Didot. Consulté à l'adresse <https://books.google.fr/2>
- Bourdon, L. P. M. (1831). Application de l'algèbre à la géométrie. Bachelier. Consulté à l'adresse <https://books.google.fr/3>
- Boyé, A. (2007). Entre formalisme rigueur et sens : un siècle d'enseignement de l'analyse (1902-2002). In *Histoire et enseignement des mathématiques, Rigueurs, erreurs, raisonnement* (INRP). Lyon.
- Brachet, F., & Dumarque, J. (1942). Algèbre Et Notions De Trigonométrie à L'usage De L'enseignement Secondaire (Classes De Seconde et Première). Paris: Librairie Delagrave. Consulté à l'adresse <https://www.abebooks.com/>
- Brousseau, G. (1980). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rhinologie*, 101(3-4), 107-131.
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2.1, 37-128.
- Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.
- Brousseau, G. (1992). Eléments pour une ingénierie didactique. *Se former + Pratiques et apprentissages de l'éducation*, (15), 1-15.
- Brousseau, G. (2003). Situations, processus et curriculums en mathématiques [Guy Brousseau Didactique des mathématiques]. Consulté 23 mai 2017, à l'adresse <http://guy-brousseau.com/1665/>
- Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. *Education et didactique*, 5(1), 101-104.

- Brousseau, G. (2016). Situation vs Tâche, Transposition état vs Processus. Consulté 17 juillet 2017, à l'adresse <http://guy-brousseau.com/3263/rp-2016-1-tad-et-tsd/>
- Bruner, J. (1987). *Comment les enfants apprennent à parler*. (J. Piveteau & J. Chambert, Trad.). Paris: Retz.
- Bruner, J. (1998). *Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire*. Paris: PUF.
- Bulf, C., Cabassut, R., Denys, B., Douaire, J., Galisson, M.-P., Mesquita, A., ... Vivier, L. (2011). La modélisation dans l'enseignement des mathématiques : mise en perspective critique. *Cahiers du Laboratoire de didactique André Revuz*, (3). Consulté à l'adresse <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS11001.pdf>
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378.
- Carlson, M., & Oehrtman, M. (2005). Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function. Consulté à l'adresse http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html
- Chalak, H. (2012). *Conditions didactiques et difficultés de construction de savoirs problématisés en sciences de la Terre : étude de la mise en texte des savoirs et des pratiques enseignantes dans des séquences ordinaires et forcées concernant le magmatisme (collège et lycée)*. Université de Nantes, Nantes.
- Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Evolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Université Paris Diderot paris VII, Paris. Consulté à l'adresse <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665>
- Charaudeau, P. (1993). Le contrat de communication dans la situation de classe. In *Inter-Actions* (p. 245). Metz: Centre d'analyse syntaxique de l'Université de Metz. Consulté à l'adresse <http://www.patrick-charaudeau.com/Le-contrat-de-communication-dans.html>
- Chauvat, G. (1998). Courbes et fonctions au collège. *IREM*, (51), 23-44.
- Chesnais, A., & Munier, V. (2015). Mesure, mesurage et incertitudes : une problématique interdidactique mathématiques/physique. In *Actes du séminaire national de didactique des*

mathématiques de l'ARDM (p. 212-237). Paris. Consulté à l'adresse <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01317134/document>

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir enseignant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège, (55), 5-32.

Chomsky, N. (1971). *Aspects de la théorie syntaxique*. Éditions du Seuil.

CNDP, C. N. de D. P.-, & Lang, J. (2002). *Qu'apprend-on au collège?* Paris: X O Editions.

Collectif. (2008). *Sésamath*. Génération 5.

Comin, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Université Bordeaux 1, Bordeaux. Consulté à l'adresse <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00827905>

Comin, E. (2002a). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2.3), 135-182.

Comin, E. (2002b). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 22(2.3), 135-182.

Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée : méprise didactique ou quiproquo interinstitutionnel. *IREM*, (67), 33-61.

Comin, E. (2009). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans le cadre des fonctions en seconde. *IREM*, (79), 23-47.

Costé, A. (1996). L'oeuvre scientifique de Nicole Oresme. *Bulletin de la Société historique de Lisieux*, (37). Consulté à l'adresse <http://www.math.unicaen.fr/lmno/Oresme/Oresme.html>

Dahan-Dalmedico, A., & Peiffer, J. (1986). *Une histoire des mathématiques: routes et dédales*. France: Seuil.

- D'Amore, B. (2001). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique : interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXVIII(2), 143-168.
- Daubelcour, J. P. (2009). Evolution des programmes d'analyse et de géométrie au vingtième siècle en terminale scientifique. Consulté 7 février 2016, à l'adresse <http://jpdaubelcour.pagesperso-orange.fr/histoire20.html>
- D.E.P. (2004). *Les élèves de 15 ans, premiers résultats de l'évaluation internationale PISA 2003*. Paris: Ministère de l'éducation nationale. Consulté à l'adresse <http://educ-eval.pleiade.education.fr/pdf/eva0412.pdf>
- Dhombres, J. (1983). *Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction* (Vol. IV). Nantes: IREM.
- Dhombres, J., Dahan-Dalmedico, A., Bkouche, R., Houzel, C., & Guillemot, M. (1987). *Mathématiques au fil des âges*. Paris: Bordas.
- Diderot, D., & d'Alembert, J. L. R. (1751). *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers. Tome troisième, Cha-Conjonctif / par une société de gens de lettres ; mis en ordre et publié par M. [Denis] Diderot,... et quant à la partie mathématique, par M. [Jean Le Rond] d'Alembert,..* S. Faulche. Consulté à l'adresse <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k505351>
- Dieudonné, J. (1964). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire n °8* (2e Revue et augmentée). Paris: Hermann.
- Dorier, J.-L. (1996). Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions. *Revue d'histoire des mathématiques*, 2, 265-307.
- Dorier, J.-L. (2000). Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire - perspective théorique sur leurs interactions. *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, (12). Consulté à l'adresse <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338400/document>
- Dos Santos, R. (2016). *Maths cycle 4*. Paris: Hatier.

- Douady, R. (1986). Jeu de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (7/2), 5-32.
- Douady, R. (1993). L'ingénierie didactique. *Cahier de DIDIREM*, 19(1). Consulté à l'adresse <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97082.pdf>
- Doussot, S. (2015, novembre). *Le cadre théorique de la problématisation en didactique de l'histoire: modéliser des savoirs pour étudier l'incertitude des situations de classe*. Conférence présenté à ARCD. Atelier de didactique comparée, IFé Lyon.
- Drouhard, J.-P. (2011). L'épistémographie : mise au point d'un outil au service de la didactique. In *Séminaires ARDM* (p. 129-133). Paris: IREM Paris Diderot.
- Drouhard, J.-P. (2014). Quand écrire c'est faire. *Cahiers du Laboratoire de didactique André Revuz*, (12), 88-106.
- Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, & A. Schoenfeld (Éd.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (p. 275-282). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25
- Ducancel, G. (2003). Notes de lecture. *Repères IREM*, (28), 188-192.
- Dupuis, C., & Pluvinage, F. (1981). La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2/2.
- Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, (31), 37-61.
- Duval, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Strasbourg: IREM.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (2002). Comment décrire et analyser l'activité mathématique? Cadres et registres. Présenté à Séminaire TECFA, Genève. Consulté à l'adresse <http://tecfa.unige.ch/tecfa/teaching/staf26/Doua.pdf>

- Duval, R. (2006). *La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée*. Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble.
- Fabre, M. (2011). *Eduquer pour un monde problématique : la carte et la boussole*. Paris: PUF.
- Fabre, M. (2013). Rupture épistémologique et travail sur les représentations. *Recherche En Education*, (17), 62-72.
- Fabre, M., & Musquer, A. (2009). Quels outils pour la problématisation ? Analyse d'une banque de situations-problèmes. *Spirale*, 43, 45-68.
- Fabre, M., & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissement des obstacles. *ASTER*, (24), 37-57.
- Gille, E. (2008). Proportionnalité en seconde... et apprentissage de la citoyenneté. *APMEP*, (474), 11-19.
- Gispert, H. (2000). Pourquoi, pour qui enseigner les mathématiques? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes de mathématiques dans la société française au XXe siècle. (p. 16). Présenté à EMF, Paris. Consulté à l'adresse http://emf.unige.ch/files/7514/5467/5171/EMF2000_Conference_Gispert.pdf
- Gobert, S. (2014). Déplacements dans le processus de secondarisation. *Spirale Revue de Recherche en Éducation*, (54), 65-84.
- Goffman, E. (1973). *La Mise en scène de la vie quotidienne* (Vol. tome 2). Paris: Minuit.
- Goody, J., Bazin, J., & Bensa, A. (2010). *La raison graphique: la domestication de la pensée sauvage*. Paris: Les éditions de minuit.
- Grau, S. (2011). *Situations de problématisation en mathématiques Comment amener les élèves à un savoir apodictique? Le cas des fonctions affines en classe de seconde* (Mémoire Master 2 Sciences de l'Education). UFR Lettres et Langues, Nantes.
- Gray, M., & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 115-141.
- Groupe d'experts en partenariat avec l'inspection générale de l'Éducation nationale. (2016). Comprendre et utiliser la notion de fonction. Consulté à l'adresse <http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Fonctions/>

- Haspekian, M. (2012). Apports et limites du tableur dans l'enseignement de l'algèbre. Questions d'instrumentation. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série*, 123-136.
- Hersant, M. (2001). *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*. Paris 7 Denis Diderot, Paris.
- Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères IREM*, (59), 5-41.
- Hersant, M. (2010). *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques: de l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires* (Note de synthèse de travaux). Nantes: Université de Nantes laboratoire du CREN.
- Hersant, M. (2011). *Empirisme et rationalité au cycle 3, vers la preuve en mathématiques* (Mémoire de recherche HDR). Université de Nantes, Nantes.
- Hersant, M. (2014). Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique: une distinction pour mieux caractériser la relation contrat didactique milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 9-31.
- Hersant, M. (2015). *Problématisation en mathématiques: quelques spécificités* (Séminaire problématisation). Nantes: Université de Nantes laboratoire du CREN.
- Hersant, M. (2016a, mai). *Cadre épistémique, registre explicatif et contrat didactique*. Présenté au 13ème colloque du réseau Probléma, Lille.
- Hersant, M. (2016b). L'activité mathématique des élèves: nouveau regard sur les relations contrat didactique - milieu et perspective comparatiste. In *Actes du séminaire national de l'ARDM -Année 2015* (IREM Paris, p. 141_154). Paris: A.C. Mathé, E. Mounier. Consulté à l'adresse <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01317134/document>
- Holton, D. (2006). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*. Springer Science & Business Media.
- Horoks, J., & Grenier-Boley, N. (2016, mars). Analyser la (dis)continuité dans l'enseignement des mathématiques à la transition entre collège et lycée: le cas des fonctions. Conférence

- présenté à Séminaires de l'IREM, Université Paris Diderot. Consulté à l'adresse <http://mc.univ-paris-diderot.fr/videos/>
- Houdé, O. (2009). *La logique, le nombre et l'enfant. Se développer, c'est apprendre à inhiber.* Bruxelles: Math - UREM - ULB.
- Houdement, C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères IREM*, (67), 69-84.
- IREM de Poitiers Groupe Lycée. (2011). *Enseigner les mathématiques en seconde : trois parcours sur les fonctions.* Poitiers: IREM.
- Jacob, N. (2012). *Maths 3e.* Paris: Belin.
- Jaubert, M., & Rebière, M. (2001). Pratiques de reformulation et construction de savoirs, (33). Consulté à l'adresse <http://documents.irevues.inist.fr/>
- Jaubert, M., Rebière, M., & Pujo, J. (2010). Communauté discursives disciplinaires scolaires et formats d'interactions. In *Colloque international ICAR Université Lyon 2.* Lyon: INRP, CNRS.
- Johsua, S. (1996). Qu'est-ce qu'un « résultat » en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(2), 197-220.
- Julo, J. (1982). *Acquisition de la proportionnalité et résolution de problème.* Université de Rennes 1, Rennes.
- Kapala, Frédéric. (2006). Grandeur, mesure et unité. IUFM Franche-Comté. Consulté à l'adresse <http://www.fredkapala.net/documents/>
- Kuhn, T. S. (2008). *La structure des révolutions scientifiques.* (L. Meyer, Trad.). Paris: Flammarion.
- Lagrange, J.-B., & Artigue, M. (2009). Students' activities about function at upper secondary level : a grid for designing a digital environment and analysing uses. In *Proceedings of 33rd Conference of the international Groupe for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, p. 465-472). Grèce: PME.
- Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations.* (Balacheff & Laborde, Trad.). Paris: Hermann.
- Lambotte, L. (2016). *Delta Mathématiques cycle 4.* Paris: Belin.

- Legendre, M.-F. (2006). L'épistémologie de Piaget. Consulté 8 avril 2016, à l'adresse <http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/>
- Levain, J.-P. (1994). *Proportionnalité et acquisition des concepts d'agrandissement et d'échelle*. Paris 5. Consulté à l'adresse <http://www.theses.fr/1994PA05H039>
- Levain, J.-P., & Vergnaud, G. (1995). Proportionnalité simple, proportionnalité multiple. *Grand N*, (56), 55-66.
- Lhoste, Y., Peterfalvi, B., & Orange, C. (2007). Problématisation et construction de savoir en SVT : quelques questions théoriques et méthodologiques. Présenté à Symposium « Apprentissages, problématisations et savoirs », Strasbourg: Actualité de la Recherche en Education et en Formation.
- Margolinas, C. (2003). Un point de vue didactique sur la place du langagier dans les pratiques l'enseignement des mathématiques. IUFM d'Aquitaine. Consulté à l'adresse <https://hal.archives-ouvertes.fr/halshs-00470238/document>
- Masson, S. (2014). *Mieux comprendre le cerveau peut-il vraiment nous aider à mieux enseigner?* Montréal: Université du Québec. Consulté à l'adresse <https://www.youtube.com/watch?v=dZqW5cOSKlc&feature=youtu.be>
- Matheron, Y. (2000). Analyser les praxéologies : quelques exemples d'organisations mathématiques. *petit x*, (54), 51-78.
- Ministère de l'Education Nationale. Aménagement du programme de la classe de seconde, Bulletin officiel n°18 du 4 mai 2017 pour la rentrée de septembre 2017 § (2017). Consulté à l'adresse http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=115984
- Orange, C. (2001). *Idées et raisons : construction de problèmes, débats et apprentissages scientifiques en Sciences et Vie de la Terre*. CREN Université de Nantes, Nantes.
- Orange, C. (2005a). Problématisation et conceptualisation en sciences et dans les apprentissages scientifiques. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle*, 38(3), 69-94.
- Orange, C. (2005b). Problème et problématisation dans l'enseignement scientifique. *ASTER*, (40), 3-12.

- Orange, C. (2007). Quel Milieu pour l'apprentissage par problématisation en sciences de la vie et de la terre? *Education et didactique*, 1(2), 37-56.
- Orange, C. (2012). *Enseigner les sciences : Problèmes, débats et savoirs scientifiques en classe* (Première Édition). Bruxelles: De Boeck.
- Orange Ravachol, D. (2005). Problématisation fonctionnaliste et problématisation historique en sciences de la terre chez les chercheurs et chez les lycéens. *ASTER*, (40), 177-204.
- Orange Ravachol, D., & Orange, C. (2012). *Phénomènes et événements dans les problèmes de biologie et de géologie: conséquences didactiques*. Conférence invitée dans le cadre de l'Ecole doctorale thématique «Didactique des disciplines» de la recherche belge francophone, Liège.
- Ouvrier-Buffer, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concept: vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Université Joseph Fourier - Grenoble 1, Grenoble. Consulté à l'adresse <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515/document>
- Ouvrier-Buffer, C. (2006). *Des définitions pour quoi faire? Analyse épistémologique et utilisation didactique*. Paris: Fabert Education et sciences.
- Ouvrier-Buffer, C. (2014). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve. Etude épistémologique et enjeux didactiques* (p. 102). Paris: Université Paris Diderot.
- Ouvrier-Buffer, C. (2015). Quelles sont les conceptions d'élèves, d'enseignants, de mathématiciens contemporains sur la définition? *Repères IREM*, (100), 5-24.
- Passaro, V. (2013). Jouer avec le concept de fonction ou explorer la fonction par l'étude covariationnelle. *Bulletin AMQ*, LIII(3), 73-86.
- Passaro, V. (2016). Analyse du raisonnement covariationnel et des situations qui en favorisent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans au Québec. In *Actes de la 18ème école d'été de didactique des mathématiques* (p. à paraître). ARDM.
- Perrin-Glorian, M.-J., & Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(2), 217-276.

- Philippot, T., & Bouissou, C. (2006). Analyse d'une séance de géographie à l'école élémentaire : regards didactique et socio-didactique. Présenté à apprentissages des élèves et pratiques enseignantes en histoire et en géographie, nouvelles perspectives de recherche, IUFM Champagne-Ardenne. Consulté à l'adresse <https://www.google.fr/>
- Piaget, J., & Garcia, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris: Flammarion.
- Plantin, C. (1996). Le trilogue argumentatif. Présentation de modèle, analyse de cas. *Langue française*, 112(1), 9-30. <https://doi.org/10.3406/lfr.1996.5358>
- Pléty, R. (1996). *L'apprentissage coopérant*. Lyon: Presses universitaires de Lyon.
- Polya, G. (1967). *La découverte des mathématiques tome 2 une méthode générale*. Paris: Dunod.
- Popper, K. (1985). *Conjectures et réfutations. La connaissance du savoir scientifique*. Paris: Payot.
- Popper, K. (1990). *Le réalisme de la science*. Paris: Hermann.
- Rajotte, T., Giroux, J., & Voyer, D. (2014). Les difficultés des élèves du primaire en mathématiques, quelle perspective d'interprétation privilégier? *Revue des sciences de l'éducation de McGill*, 49(1), 67-87.
- Raoult, J.-P. (Éd.). (2003). La modélisation, recueil des contributions présentées le 26 novembre 2003 (p. 53). Paris: IREM de Pairs VII Université Paris Diderot.
- René De Coteret, S. (1991). *Étude de l'influence des variables indice de proportionnalité du thème et nombre de couples de données sur la reconnaissance, le traitement et la compréhension de problèmes de proportionnalité chez des élèves de 13-14 ans*. Joseph Fourier, Grenoble.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.
- Robert, A. (2011). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In *Ecole d'été* (p. 57-64). Carcassonne: La Pensée sauvage éd.
- Robert, A., & Rogalski, M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion de classe. *Petit x*, (60), 6-25.

- Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. In *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (p. 13-30). Paris.
- Rondal, J. A. (1997). *L'évaluation du langage*. Bruxelles: Editions Mardaga.
- Samurçay, R., Rabardel, P., & Pastré, P. (2004). *Recherches en didactique professionnelle*. Toulouse: Octarès.
- Schneider, M., & Gantois, J.-Y. (2012). Une forme embryonnaire du concept de dérivée induite par un milieu graphico-cinématique dans une praxéologie « modélisation ». *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 32/1(94), 57-99.
- Schneider-Gilot, M., & Alain, M. (2011). *Traité de didactique des mathématiques la didactique par des exemples et contre-exemples* (2e édition corrigée). Liège: les Éditions de l'Université de Liège.
- Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Brussel, Belgium: De Boeck.
- Sésamath. (2016). *Sésamath le manuel de cycle 4*. Italie: Magnard.
- Simard, A. (2012a). Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique. *Petit x*, 89, 51-62.
- Simard, A. (2012b). Proportionnalité en CM2 et sixième. *Petit x*, 90, 35-52.
- Tall, D. (2006). A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof. *Annales de didactique de Strasbourg*, 11, 195-215.
- Tall, D. (2014). Making sense of mathematical reasoning and proof. In *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground* (p. 223-236). Springer Science & Business Media.
- Tanguay, D., & Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, (88), 5-24.
- Thaurel-Richard, M., & Thomas, F. (2006). Typologie des collèges publics. *INSEE Références*, 149.

- Tran Kiem, M. (2012). Une approche expérimentale des fonctions au lycée avec le logiciel Casyopée. *Petit x*, (88), 49-74.
- Vallaud-Belkacem, N. BO spécial, Pub. L. No. MENE1526483A, § Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux, du cycle de consolidation et du cycle des approfondissements (2015).
- Vandebrouck, F. (2011). *Des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université: activités des élèves et pratiques des enseignants* (Note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches). Université Paris Diderot, Paris. Consulté à l'adresse <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01267429/document>
- Vergnaud, G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In *Actes du colloque GDM* (p. 287-304). Québec: Jean Portugais.
- Villers, C. de. (1830). *Philosophie de Kant ou principes fondamentaux de la philosophie transcendente*. Van der Monde.
- Vincent, G. (1994). *L'éducation prisonnière de la forme scolaire*. Lyon: Presse Universitaire de Lyon.
- Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.
- Voisin, S. (2013). *L'enseignement de la proportionnalité en SEGPA : contraintes, spécificités, situations* (Thèse de doctorat). Université de Bordeaux 2, Bordeaux.
- Voskoglou, M. G. (2015). Fuzzy Logic in the APOS/ACE Instructional Treatment for Mathematics. *American Journal of Educational Research*, 3(3), 330-339.
- Wang, Y., Barmby, P., & Bolden, D. (2017). Understanding linear function: a comparison of selected textbooks from England and Shanghai. *Journal of Science's and Mathematic's Education*, 15, 131-153.

Thèse de Doctorat

Sylvie GRAU

Problématiser en mathématiques : le cas de l'apprentissage des fonctions affines

Résumé

La fonction affine n'est pas disponible (Robert et Rogalski, 2002) pour bon nombre d'élèves malgré un enseignement par les problèmes. Nous avons essayé de comprendre pourquoi et de trouver des pistes pour y remédier. Pour cela, nous avons analysé le savoir enseigné en lien avec l'épistémologie de cette notion, évalué les connaissances des élèves à la sortie du collège pour identifier les difficultés qu'ils rencontrent, et expérimenté différentes situations d'apprentissage. Nous avons utilisé des outils inspirés du cadre de la problématisation (Fabre et Orange, 1997) pour analyser les productions langagières des élèves, comprendre la manière dont ils posent les problèmes liés à l'affinité, comment ils agissent sur les objets et effectuent des changements de cadres (Douady) ou de registres (Duval). Cette étude nous a amenée à penser que la disponibilité du savoir est issue d'un double processus : un apprentissage par problématisation de l'outil, un processus de secondarisation du discours. Nous avons fait l'hypothèse qu'une approche de l'affinité par un point de vue global et covariationnel devrait permettre aux élèves de mieux comprendre en quoi la fonction affine peut être un outil de modélisation pour résoudre des problèmes liés à la covariation de deux grandeurs et pensé un format de séquence intégrant ces hypothèses par une succession de situations basée sur l'idée d'une problématisation par analyse des productions des élèves (PPAP). L'objectif est de travailler la relation entre l'action et l'objet de savoir. Nous avons expérimenté cette ingénierie afin d'en tirer quelques conditions favorables pouvant servir à l'enseignement des fonctions affines.

Mots clés

Apprentissage ; collège ; covariation ; discours ; fonction affine ; grandeurs ; modélisation ; problématisation.

Abstract

For certain pupils, the notion of linear functions is not available in spite of a teaching by problems. We tried to understand why and to find tracks to remedy it. For that purpose, we analyzed the knowledge taught in connection with the epistemology of the notion of affinity, estimated the knowledge of the pupils at the exit of the middle school to identify the obstacles or the difficulties which they meet and experimented various situations of learning. We used tools inspired by the framework of the problematization (Fabre et Orange, 1997) to analyze the linguistic productions of the pupils to understand the way they raise the problems bound to the affinity, how they act on the met objects and how they make changes of frames (Douady) or registers (Duval). This study brought to us to make the hypothesis that the availability of the knowledge arises from a double process: a learning by problematization of the tool, a process of secondarisation of the speech. Besides, an approach of the affinity by a global point of view and covariationnel should allow the pupils to understand better in what the linear functions can be a modelling tool to solve problems bound to the covariation of two quantities measurable. We thought of a format of sequence integrating these various approaches by a succession of situations based on the idea of a problematization by analysis of the productions of the pupils (PPAP) to work the relation between the action and the object of knowledge. We experimented this engineering to reach some favorable conditions which can be of use to the teaching of the linear functions.

Key Words

Covariation ; learning ; linear function ; mathematics ; middle school ; modelling ; problematization ; quantities.