



**HAL**  
open science

# Étude mathématique et numérique pour le modèle Darcy-Brinkman pour les écoulements diphasiques en milieu poreux

Houssein Nasser El Dine

► **To cite this version:**

Houssein Nasser El Dine. Étude mathématique et numérique pour le modèle Darcy-Brinkman pour les écoulements diphasiques en milieu poreux . Mathématiques [math]. Lebanese University - EDST; Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2017. Français. NNT: . tel-01626032v2

**HAL Id: tel-01626032**

**<https://hal.science/tel-01626032v2>**

Submitted on 5 Nov 2017 (v2), last revised 28 Oct 2020 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

**Houssein NASSER EL DINE**

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de Docteur de l'École Centrale de Nantes  
Docteur de l'Université Libanaise  
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans*

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques (STIM)  
École doctoral de sciences et technologies (EDST)

Discipline : Mathématiques et leurs interactions

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématique Jean Leray (LMJL)  
Laboratoire de Mathématiques-EDST

Soutenue le 26 septembre 2017

## Étude mathématique et numérique pour le modèle Darcy-Brinkman pour les écoulements diphasiques en milieu poreux

### JURY

Rapporteurs : **M. Didier BRESCH**, DR CNRS, Université de Savoie  
**M. Mladen JURAK**, Professeur, University of Zagreb

Examineurs : **M. Mostafa BENDAHMANE**, MC HDR, Université de Bordeaux  
**M. Charles-Henri BRUNEAU**, Professeur, Université de Bordeaux  
**M. Mustapha GHILANI**, Professeur, Université Moulay Ismail  
**M. Frédéric GRONDIN**, Professeur, Ecole Centrale de Nantes

Directeurs de thèse : **M. Mazen SAAD**, Professeur, École Centrale de Nantes  
**M. Raafat TALHOUK**, Professeur, Université Libanaise



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Mazen Saad et Raafat Talhouk, mes directeurs de thèse. Je leur exprime ma profonde gratitude pour : le soutien scientifique, les encouragements, les précieux conseils et la confiance accordée par chacun d'eux. Je n'oublie pas aussi leur chaleur humaine qui m'a beaucoup touché. Je suis très heureux d'avoir eu la chance de bénéficier aux niveaux scientifique et humain de leur grande expérience, de leur vision mathématique, ainsi que leur immense culture.

Je souhaite remercier très vivement les professeurs Didier Bresch et Mladen Jurak, qui ont accepté d'en être les rapporteurs et de donner de leur temps pour examiner cette thèse. Je remercie également les professeurs Charles-Henri Bruneau, Mostafa Bendahmane, Frédéric Grondin et Mustapha Ghilani qui m'ont tous fait l'honneur et le plaisir de constituer le jury de ma thèse.

Je remercie de façon générale les membres du laboratoire de mathématiques Jean Leray ainsi que les membres du département informatique et mathématique de l'École Centrale de Nantes et de l'Université Libanaise, dans lequel j'ai été accueilli avec bonne humeur et convivialité.

Je voudrais également exprimer mes plus chaleureux remerciements aux professeurs Ali Wehbe, Ayman Mourad, Ibrahim Zalzali pour leur aide ,leur soutien et conseils continus tout le long de mon parcours universitaire.

M'éloignant de la sphère des mathématiques, j'adresse ma reconnaissance et bien plus... à tous mes amis (en France et au Liban) pour leur soutien. Sans eux je n'aurais pas eu la joie de continuer sur ce long chemin studieux. Ce "succès" est également un peu le leur. Un grand Merci à Hassan Mohsen, Hussein Mesmarr, Moustafa Ibrahim, Hala Ghazi, Bilal Al Taki, Mouhamad Samoury, Lamis Sabbagh, Abir Moukaddem,

---

Mouhamad Akil, Hassan Karaki, Ali Mcheik, Muhanad Ismail, Imad Khalil, Denise Khazem, Zahraa Monzer, Fida Saad, Pascale Thebian, Malek Abou Diab, Hassan Mahfouz, Zahra Singer, Rima Ghamloush, Youmna Al Chab, Yara Achkar, May Balhas, Moni Yazbek, Noura Hareb et Samah Al Khechen,... pour leurs encouragements. À eux tous, je souhaite beaucoup de bien.

Je clos enfin ces remerciements en dédiant cette thèse de doctorat à ma famille : mon père, ma mère, mes frères. Grâce à eux mon séjour en France et la poursuite de mes études jusqu'à ce stade ont été possibles. Je les remercie de tout mon coeur pour leur amour et leur soutien discret et essentiel. C'est avec leurs encouragements que j'ai pu accomplir ce travail de thèse. Il m'est impossible de trouver des mots pour dire à quel point je suis fier d'eux, et à quel point je les aime. J'en profite pour glisser un clin d'oeil aussi au reste de la famille, sans qui je n'aurais pas eu le goût de me lancer dans cette aventure.

# Résumé

Le système modélisant un écoulement de deux phases incompressibles dans un gisement pétrolier à large porosité est régi par la loi de Darcy-Brinkman. La vitesse de filtration de Darcy conduit à une équation elliptique en pression et une équation parabolique dégénérée en saturation. Ce système est très largement utilisé en milieu poreux. Dans cette thèse, on s'intéresse à la modification de Brinkman qui consiste à modifier la loi de Darcy en ajoutant un terme de dissipation en vitesse. Ce système conduit à une équation elliptique en pression et une équation parabolique non standard en saturation, régularisante en temps. On s'intéresse dans un premier temps à l'étude mathématique du système Darcy-Brinkman et à la régularité des solutions. Afin de simuler numériquement les solutions de ce problème, on propose une première étude de convergence d'un schéma aux volumes finis sur un maillage admissible et pour un milieu poreux homogène. Ensuite, une méthode combinée de type volumes finis-éléments finis non conformes est proposée pour tenir compte de l'anisotropie du milieu. Le but du deuxième volet de cette thèse est de tenir compte de la compressibilité des fluides. On propose de décrire le modèle de Darcy-Brinkman dans le cas monophasique compressible. On montre que ce modèle est bien posé en dimension un d'espace et sur l'espace entier. Ensuite, sous l'hypothèse de Bear, on montre également que le modèle est bien posé en dimension  $d \geq 2$ .

**Mots clés :** Darcy, Brinkman, milieux poreux, incompressible, compressible, immiscible, isotrope, anisotrope, volumes finis, éléments finis, schéma combiné, systèmes paraboliques dégénérés, systèmes elliptiques, systèmes dégénérés, systèmes couplés non linéaire.



# Abstract

The system modeling a two incompressible phase flow with high porosity in an oil-field is governed by the law of Darcy-Brinkman. The velocity of filtration of Darcy leads to an elliptic equation in pressure and a degenerate parabolic equation in saturation. This system is widely used in porous media. In this thesis, we are interested in the modification of Brinkman which consists in modifying Darcy's law by adding a viscosity dissipative term. This system leads to an elliptic equation in pressure and unstandard parabolic equation in saturation regularized in time. First, we are interested in the mathematical study of the Darcy-Brinkman's system and in the regularity of the solutions. To simulate numerically the solutions of this problem, we study the convergence of a finite-volume scheme on an admissible mesh for a homogeneous porous media. Then, we propose a combined method of finite volume - nonconforming finite element type to deal with the anisotropic of the media. In the second part of this thesis we deal with the compressibility of the fluids. We suggest a model of Darcy-Brinkman to describe the compressible monophasic case. We show that this model is well posed in dimension one in the whole space. Then, under the hypothesis of Bear, we also show that this model is well posed in dimension  $d \geq 2$ .

**Key words :** Darcy, Brinkman, porous media, incompressible, compressible, immiscible, isotropic, anisotropic, finite volume, finite element, combined scheme, degenerate parabolic systems, elliptic systems, degenerate systems, nonlinear coupled systems





# Table des matières



# Introduction

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte général et scientifique</b>	<b>2</b>
1.1.1	Milieux poreux	2
1.1.2	Récupération de pétrole	3
<b>1.2</b>	<b>Formulation mathématique</b>	<b>5</b>
1.2.1	Loi de Darcy	5
1.2.2	Loi de Darcy-Brinkman	8
1.2.3	Écoulement monophasique	9
1.2.4	Écoulement multiphasique immiscible	10
1.2.5	Écoulement diphasique incompressible et immiscible	14
<b>1.3</b>	<b>Plan de la thèse</b>	<b>15</b>
1.3.1	Chapitre 2. Analyse mathématique du modèle de Darcy-Brinkman diphasique incompressible et immiscible	15
1.3.2	Chapitre 3. Méthode de Volumes Finis pour le modèle de Darcy-Brinkman	22
1.3.3	Chapitre 4. Schéma Volumes Finis-Éléments Finis combiné monotone pour un modèle anisotrope de Darcy-Brinkman	27

## 1.1 Contexte général et scientifique

Les écoulements dans le sol ont été très étudiés depuis une cinquantaine d'années pour comprendre comment un liquide s'écoule en milieu poreux, avec des applications à la géothermie et en ingénierie pétrolière, par exemple pour la récupération des hydrocarbures. Plus récemment, différents organismes se sont intéressés à l'étude de la pollution des sols, à la restauration biologique des nappes acquifères, au stockage du  $\text{CO}_2$  dans des gisements déplétés ainsi qu'au stockage des déchets radioactifs dans le sol.

Dans ce manuscrit, on va décrire deux modèles, écoulement de Darcy-Brinkman monophasique compressible (une seule phase par exemple eau, huile, gaz..), l'écoulement de Darcy-Brinkman diphasique immiscible et incompressible dans un milieu poreux.

Dans la suite de cette section, nous allons dans un premier temps détailler l'une des applications (récupération secondaire des hydrocarbures) et les modèles physiques qui seront étudiés mathématiquement et numériquement dans ce mémoire. Ensuite, nous donnerons un plan détaillé des principaux résultats obtenus.

### 1.1.1 Milieux poreux

Un milieu poreux est un domaine dont la phase solide est fortement imbriquée avec la phase fluide. On modélise classiquement un sol par une matrice solide (le grain) et un espace interstitiel (constitué de pores) perméable à travers lequel s'effectuent des échanges de masse fluide. Cet espace est connexe par arcs, deux points de la partie fluide sont liés par un trajet entièrement intérieur à l'espace interstitiel (voir la figure ??). Deux grandeurs macroscopiques décrivent un milieu poreux :

- Pour un volume élémentaire donné, centré en un point  $x$  du milieu, la porosité (« fraction de vide »)  $\phi(x)$  est le rapport (sans dimension) entre le volume occupé par les pores et le volume total élémentaire.
- La perméabilité intrinsèque  $K$  ne dépend que de la géométrie du milieu, et indique l'aptitude de celui-ci à être traversé par un écoulement. Lorsque le

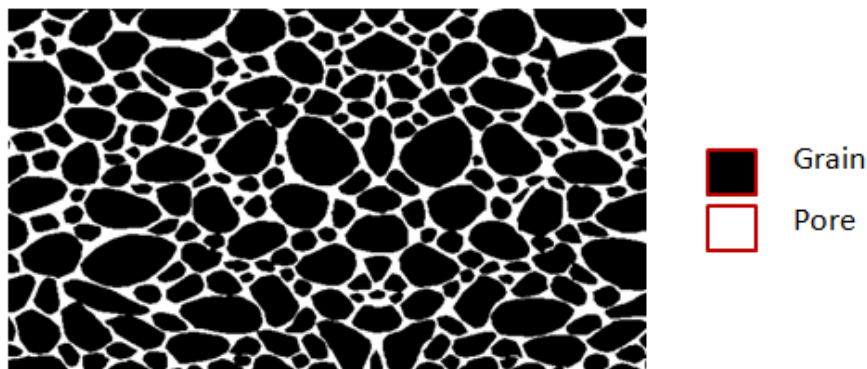


FIGURE 1.1 : Milieux poreux

milieu est isotrope, la perméabilité  $K$  est indépendante de la direction, et une perméabilité scalaire suffit à le décrire. Sinon, le milieu est dit anisotrope, et la perméabilité  $K$  prend la forme d'un tenseur symétrique [? ], soit en deux dimensions :

$$K = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{xy} & k_{yy} \end{pmatrix}$$

Par exemple, un tenseur de la forme  $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ , avec  $\alpha < 1$ , traduit une direction préférentielle horizontale pour l'écoulement. Un tenseur de la forme

$$K = \mathbb{k}_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \mathbb{k}_{\frac{\pi}{4}}^t, \quad \text{avec} \quad \mathbb{k}_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

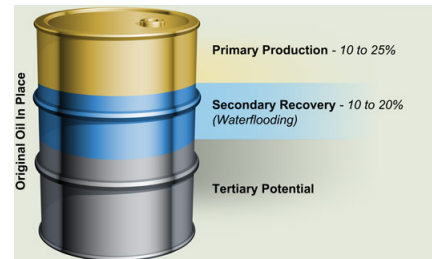
traduit une direction préférentielle oblique pour l'écoulement. On doit à Matheron [?] l'essentiel des démonstrations des propriétés de  $K$ . On notera en particulier que c'est un tenseur symétrique défini positif.

### 1.1.2 Récupération de pétrole

La récupération du pétrole se fait en plusieurs étapes, les deux premières étapes représentent l'enjeu du présent travail.

## Récupération primaire.

Au début de la production dans un champ de pétrole, le pétrole est récupéré typiquement par suite de l'expansion des fluides du réservoir qui est naturellement produite par pression à l'intérieur de la formation productrice. La seule force naturelle présente pour déplacer le pétrole à travers la roche-réservoir pour le puits de forage est la différence de pression entre la pression la plus élevée dans la formation rocheuse et la pression la plus faible dans le puits de production. Différents types de pompes sont souvent utilisés pour réduire la pression dans le puits de forage, ce qui augmente ainsi la différence de pression.



En même temps, il existe de nombreux facteurs qui agissent pour empêcher la circulation de pétrole, selon la nature de la formation et les propriétés des fluides, tels que la pression, la perméabilité, la viscosité et la saturation en eau. Cette étape de production, dite « récupération primaire », récupère seulement une petite fraction de pétrole initialement en place dans une formation de production, allant typiquement de 10% à 25%.

## Récupération secondaire.

Après la phase de récupération primaire, des techniques de "récupération secondaire" sont mises à la place, dans lesquels des fluides externes sont injectés dans un réservoir pour augmenter la pression du réservoir et déplacer le pétrole vers les puits de forage. Les techniques de la récupération secondaire se traduisent souvent par une augmentation de la production et des réserves issues de la récupération primaire.

L'injection d'eau, une forme de récupération secondaire, fonctionne par recompression d'un réservoir à travers l'injection d'eau, autrement dit pousser à l'extraction du pétrole des puits de forage. L'injection d'eau remplace la perte de pression dans le réservoir qui est due à la production primaire de pétrole et de gaz.

Un réservoir qui a eu tous les fluides produits remplacés par injection est à 100% plein. En général, la production de pétrole à partir de l'injection d'eau se produit à 100% de remplissage en place. Le fait d'estimer le pourcentage de remplissage en place qui a eu lieu, ou quand un réservoir est rempli entièrement, est soumis à une

## 1.2 Formulation mathématique

---

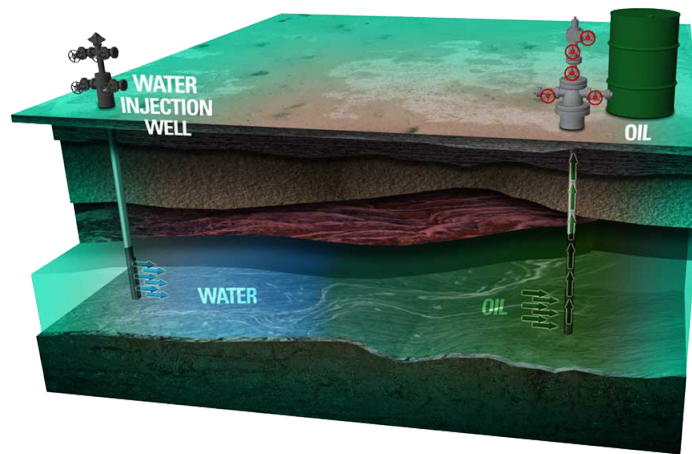


FIGURE 1.2 : récupération secondaire du pétrole

grande variété de techniques géologiques d'incertitudes. Suite à l'eau injectée, les fluides produits contiennent à la fois l'eau et le pétrole, où la quantité relative d'eau augmente de plus en plus au cours du temps.

Les équipements de surface sont utilisés pour séparer le pétrole de l'eau. Le pétrole, par le biais des pipelines ou des bassins de rétention, est transmis pour la vente et l'eau déjà recyclée, sera utilisé de nouveau pour les installations d'injections. En général, le projet de récupération secondaire permet une extraction supplémentaire de pétrole de 10% à 20%, de la quantité initiale présente dans le réservoir.

## 1.2 Formulation mathématique

Dans cette section nous fournissons le cadre physique général pour d'écrire l'écoulement des liquides dans un milieu poreux en présence d'une phase ou de deux phases. Nous établissons les équations aux dérivées partielles (EDPs) régissant ces écoulements. L'objectif est de rappeler l'origine physique des coefficients qui apparaissent dans les EDPs et les diverses lois de fermeture permettant de bien poser le problème.

### 1.2.1 Loi de Darcy

L'étude des écoulements dans les milieux poreux a été réalisée par l'ingénieur Darcy en 1856, cette étude est parue dans "Mémoire sur les fontaines publiques de la ville de Dijon". Les enquêtes d'Henry Darcy (1856) sur l'hydrologie de l'approvisionnement



en eau de Dijon et ses expériences sur la circulation unidirectionnelle en régime permanent en milieu uniforme ont révélé une proportionnalité entre le débit et la différence de pression appliquée. Il a mis en évidence une relation linéaire entre la vitesse et le gradient de pression appliqué de part et d'autre du matériau poreux. La loi de Darcy s'applique à un milieu poreux homogène et isotrope parcouru par un écoulement à faible vitesse.

À cet effet, l'auteur a tenté d'améliorer la qualité des filtres à sable utiles à la purification des eaux d'alimentation de la ville de Dijon, il a établi expérimentalement la relation entre le débit d'écoulement à travers un matériau poreux et la perte de charge qui lui est associée dans un dispositif semblable à celui illustré à la figure ??, extraite de [? ].

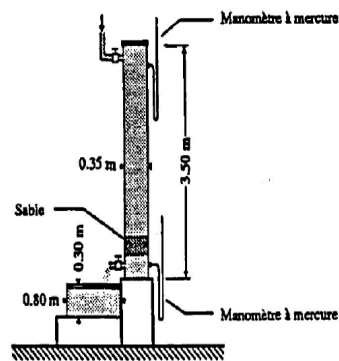


FIGURE 1.3 : Dispositif expérimentale de Darcy.

De cette expérience, Darcy a déduit une relation exprimant le débit total  $Q$  transitant au travers de la colonne comme le produit de sa section  $A$ , du rapport de la différence de la charge totale  $\Delta h$  existant entre ces deux extrémités à sa longueur  $L$  et d'un coefficient de proportionnalité  $H$ ,

$$Q = H.A \frac{\Delta h}{L} \simeq H.i.A \quad (1.1)$$

## 1.2 Formulation mathématique

---

où

$Q$  : débit d'écoulement total mesuré à la sortie ( $m^3/s$ ).

$K$  : constante connue sous le nom de coefficient de perméabilité de Darcy ( $m/s$ ).

$\Delta h$  : différence de la charge totale entre les deux extrémités du tube de sol.

$L$  : longueur de l'échantillon ( $m$ ).

$i$  : gradient hydraulique ( $i = \frac{\Delta h}{L}$ ).

$A$  : Section de l'échantillon normale à la direction de l'écoulement ( $m^2$ ).

$H$  : Conductivité hydraulique ( $m/s$ ).

En divisant les deux membres de la relation (??) par  $A$ , nous obtenons la vitesse de filtration,  $V = \frac{Q}{A}$  appelé également vitesse de Darcy,

$$V = \frac{Q}{A} = H \frac{\Delta h}{L} = H.i \quad (1.2)$$

Dans la notation moderne, cela s'exprime, sous une forme locale, par la relation différentielle

$$V = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Ici  $\frac{\partial p}{\partial x}$  est le gradient de pression dans la direction de l'écoulement,  $K$  est la perméabilité et  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide. La loi de Darcy est aujourd'hui généralisée à des fluides compressibles en l'exprimant selon les propriétés intrinsèques du milieu poreux et du fluide :

$$V = -\frac{K}{\mu} (\nabla p - \rho(p) \vec{g}),$$

où  $\rho(p)$  est la masse volumique du fluide et  $\vec{g}$  le vecteur de la gravité. La loi de Darcy a été vérifiée par les résultats de nombreuses expériences. Le support théorique a été obtenu de diverses façons, en utilisant les modèles déterministes ou statistiques. Il est intéressant que les données originales de Darcy aient été affectées par la variation de viscosité avec la température [?]. Un traitement raffiné des équations de conservation de masse et de momentum, basé sur la moyenne du volume, a été présenté par Altevogt et al. (voir [? ?] pour plus de détails).

### 1.2.2 Loi de Darcy-Brinkman

Une alternative à l'équation de Darcy est ce qu'on appelle couramment l'équation de Brinkman, qui prend la forme

$$\mu V = -K (\nabla p - \rho(p) \vec{g}) + \tilde{\mu} K \nabla^2 V. \quad (1.3)$$

Nous avons maintenant deux termes visqueux. Le premier est le terme usuel de Darcy et le second est similaire au terme laplacien qui apparaît dans l'équation de Navier-Stokes. Le coefficient  $\tilde{\mu}$  est la viscosité effective. Brinkman suppose que ces deux viscosités sont égales, mais en général ce n'est pas vrai.

Dans les récents articles, l'équation (??) a été désigné sous le nom de « l'extension de Brinkman de la loi de Darcy », mais c'est une expression trompeuse. Brinkman [? ?] n'a pas simplement ajouté un autre terme. Au contraire, il a obtenu une relation entre la perméabilité  $K$  et la porosité  $\phi$  pour un assemblage de sphères d'une procédure "auto-cohérente", qui n'est valable que lorsque la porosité est suffisamment grande  $\phi > 0.6$  selon Lundgren [?]. Cette exigence est très restrictive puisque la plupart des milieux poreux naturels ont des porosités inférieures à 0.6.

Lorsque l'équation de Brinkman est employée comme une équation d'impulsion générale, la situation est plus compliquée. Dans l'équation (??)  $p$  est la pression intrinsèque du fluide, de sorte que chaque terme dans cette équation représente une force par unité de volume du fluide. Un processus détaillé conduit au résultat que, pour un milieu poreux isotrope,  $\frac{\tilde{\mu}}{\mu} = \frac{1}{\phi} T^*$ , où  $T^*$  est une quantité appelée tortuosité du milieu [?]. Ainsi,  $\frac{\tilde{\mu}}{\mu}$  dépend de la géométrie du milieu. Ce résultat semble être conforme au résultat de Martyrs et al. [?], qui parlent d'une étude dans laquelle une solution numérique de l'équation de Stokes était associée à une solution de l'équation de Brinkman pour un flux proche de l'interface entre un pur fluide et un milieu poreux, conclut que la valeur de  $\frac{\tilde{\mu}}{\mu}$  doit dépasser l'unité et augmenter de façon monotone avec une diminution de la porosité.

Liu et Masliyah [?] résument la compréhension actuelle en disant que les simulations numériques ont montré que, selon le type du milieu poreux, la viscosité effective peut être plus petite ou plus grande que la viscosité du fluide. D'une part, le travail présenté par Ochoa-Tapia et Whitaker [?], donne  $\frac{\tilde{\mu}}{\mu} = \frac{1}{\phi}$ , plus grande que l'unité. D'autre part, des analyses celles de Sáez et al. [?] donnent  $\frac{\tilde{\mu}}{\mu}$  près d'une tortuosité  $\tau$ , défini comme  $dx/ds$  où  $s(x)$  est la distance le long d'une courbe et une telle quantité est inférieure à l'unité. Liu et Masliyah [?] suggèrent que l'on peut

## 1.2 Formulation mathématique

---

penser que la différence entre  $\tilde{\mu}$  et  $\mu$  est due à la dispersion d'impulsion. Ils disent qu'il a été généralement admis que  $\tilde{\mu}$  dépend fortement du type de milieu poreux ainsi que de la force du flux. Ils notent qu'il existe d'autres complications si le milieu n'est pas isotrope. Ils notent également qu'il est courant que  $\tilde{\mu}$  soit considéré égal à  $\mu$  pour les cas de forte porosité.

Les vérifications expérimentales de la théorie de Brinkman ont été indirectes et peu nombreuses. Lundgren [?] se réfère à des mesures de flux à travers des réseaux cubiques de perles sphériques sur des fils, ce qui correspond assez bien à la formule de Brinkman pour la perméabilité en fonction de la porosité. Levy (1981) a montré que le modèle de Brinkman ne contient que des particules dont la taille est d'ordre  $\eta^3$ , où  $\eta(\ll 1)$  est la distance entre les particules voisines. Pour les particules plus grandes, la filtration des fluides est régie par la loi de Darcy et, pour les particules plus petites, le flux ne s'écarte pas de cela pour aucune particule.

Durlofsky et Brady [?], en utilisant une approche de fonction de Green, ont conclu que l'équation de Brinkman était valable pour  $\phi > 95\%$ . Rubinstein [?] a introduit un milieu poreux ayant un très grand nombre d'échelles et a conclu qu'il pourrait être valable pour  $\phi > 80\%$ .

Nous concluons que le terme laplacien est en effet nécessaire lorsque la condition "no-slip boundary" est satisfaite, et encore lorsque la porosité est suffisamment grande. Il existe des situations dans lesquelles certains auteurs ont trouvé que c'est pratique d'utiliser l'équation de Brinkman. Une telle situation est celle où l'on souhaite comparer les flux dans les milieux poreux avec ceux dans les fluides purs.

L'équation de Brinkman a un paramètre  $K$  (la perméabilité) de sorte que l'équation se réduit à une forme de l'équation de Navier-Stokes quand  $K \rightarrow \infty$  et à l'équation de Darcy quand  $\tilde{\mu} \rightarrow 0$ .

### 1.2.3 Écoulement monophasique

En présence d'un seul fluide (gaz, huile ou eau..), l'écoulement est dit écoulement monophasique. Ce modèle a été utilisé par exemple pour le gisement gazier.

L'équation de conservation de la masse décrit la dynamique de l'écoulement :

$$\phi(x)\partial_t(\rho(p)) + \text{div}(\rho(p)V) = 0 \quad (1.4)$$

où  $\phi$  est la porosité,  $p$  est la pression,  $\rho(p)$  est la masse volumique du fluide et finalement  $V$  est la vitesse cinématique. Comme nous l'avons noté précédemment, il

y a plusieurs lois pour d'écrire la vitesse de l'écoulement mais nous sommes intéressé à la loi Darcy-Brinkman donnée par

$$\mu V = -K (\nabla p - \rho(p) \vec{g}) + \tilde{\mu} K \nabla^2 V, \quad (1.5)$$

nous rappelons que  $K$  est la perméabilité,  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide et  $\tilde{\mu}$  est la viscosité effective.

### 1.2.4 Écoulement multiphasique immiscible

Ici on suppose que  $n$  phases se distinguent bien, par exemple : eau, huile, gaz. dans ce cas, la composition du mélange présent dans le milieu est repérée à partir de la saturation de chaque phase :

$$s_i = \frac{\text{volume occupé par la phase } i}{\text{volume du vide}},$$

telles que :

$$\sum_{i=1}^n s_i = 1 \quad (1.6)$$

et, suivant la conservation de la masse de chaque phase :

$$\phi(x) \partial_t (\rho_i(p_i) s_i) + \text{div}(\rho_i(p_i) V_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.7)$$

La loi de Darcy est toujours applicable avec des modifications dues à Muskat :

$$V_i = -\frac{k_i(s_i)}{\mu_i} K (\nabla p_i - \rho_i(p_i) \vec{g}) \quad (1.8)$$

De la même manière on applique ces modifications à la loi de Darcy-Brinkman afin d'obtenir

$$V_i = -\frac{k_i(s_i)}{\mu_i} K (\nabla p_i - \rho_i(p_i) \vec{g}) + \tilde{\mu}_i K \nabla^2 V_i \quad (1.9)$$

où  $k_i$  est la perméabilité relative de la phase  $i$ , dans une circulation multiphasiques. On admet que chaque fluide  $i$  suit séparément une telle loi (par exemple Darcy ou Brinkman), comme s'il occupait une certaine portion du milieu poreux. La perméabilité relative  $k_i$  est une fonction croissante de la saturation du fluide  $i$ . Plus la

## 1.2 Formulation mathématique

portion du milieu poreux occupée par le fluide  $i$  sera grande, plus la perméabilité liée à ce fluide sera grande.

Expérimentalement on mesure que  $\sum_i k_i < 1$  (voir figure ?? ci-dessous). On appelle parfois le rapport  $k_i/\mu_i$  la « mobilité » du fluide  $i$  et il sera noté plus tard  $\lambda_i$ .

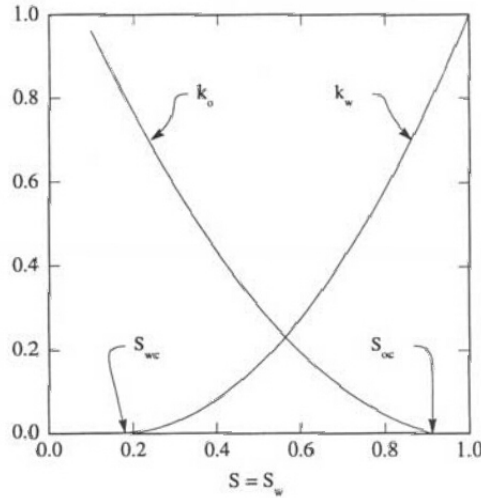


FIGURE 1.4 : Effet de la saturation en eau  $S = S_w$ , sur la perméabilité relative de l'eau  $k_w$  et de l'huile  $k_o$ , dans un sable non consolidé. Il n'y a pas de perméabilité de l'eau en dessous d'une saturation critique de l'eau  $S_{wc} = 0.19$  et il n'y a pas de perméabilité de l'huile pour une saturation en eau supérieure à  $S_{oc} = 0.91$ , c'est-à-dire pour une saturation en huile inférieure à la saturation résiduelle en huile  $S_{0r} = 1 - S_{0c}$ .

En dessous d'une certaine saturation limite (en eau par exemple), la phase eau n'est plus continue et la perméabilité de l'eau est nulle. On peut noter au passage que la somme des deux perméabilités intrinsèques de deux fluides n'est pas constante, et est le plus souvent inférieure ou égale à la perméabilité intrinsèque du milieu poreux. cela traduit le fait que plus la phase est présente dans le milieu plus elle est mobile. La fonction  $s_i \rightarrow k_i(s_i)$  est croissante en fonction de  $s_i$ . Noter aussi que la phase est immobile dès qu'elle est absente, ce qui implique que les perméabilités relatives satisfont

$$k_i(s_i = 0) = 0.$$

Ces courbes de perméabilité relative sont déterminées expérimentalement sur échan-

tillon. Elles ne sont malheureusement pas biunivoques, et subissent des cycles d'hystérésis. Ainsi une perméabilité relative n'est pas une fonction unique de la saturation. On néglige cependant très souvent cette hystérésis.

Le concept de perméabilité relative rend compte de l'interférence entre plusieurs fluides lors de leur circulation [? ]. La figure ?? montre des courbes typiques de perméabilité relative en fonction de la saturation pour des fluides mouillants et non-mouillants. Fixer la saturation relative du fluide mouillant (par exemple  $S_w = 0.8$ ) définit implicitement la saturation relative du fluide non mouillant (par exemple,  $S_n = 0.2$ ). Pour ces deux saturations relatives, on a  $k_w = 0.47$  et  $k_n = 0.04$  (pour la courbe d'imbibition).

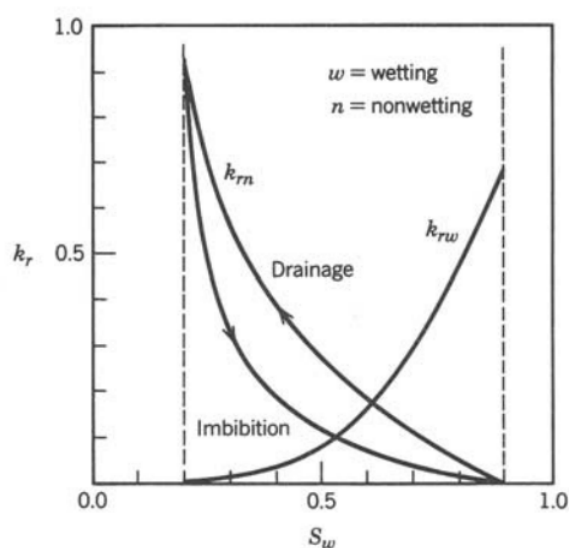


FIGURE 1.5 : Courbes de perméabilités relatives typiques (d'après [? ]).

Plusieurs méthodes permettent d'estimer de manière empirique les perméabilités relatives, par exemple celles de Corey [?] pour le drainage d'huile et de gaz (déplacement d'huile par un gaz),

$$k_o = (s_{oc})^4$$

$$k_g = (1 - s_{oc})^2(1 - s_{oc}^2)$$

$$s_{oc} = \frac{s_o - s_{or}}{1 - s_{or}}$$

Ici  $s_{or}$  est la saturation résiduelle en huile, c'est à dire le seuil de saturation à partir

## 1.2 Formulation mathématique

---

duquel l'huile commence à circuler. On cite encore le modèle de Van Genuchten [? ?] pour le drainage d'eau et d'air :

$$k_w = s_{wc}^\epsilon \left[ 1 - \left( 1 - s_{wc}^{\frac{1}{m}} \right)^m \right]^2$$

$$k_a = (1 - s_{wc})^\gamma \left[ 1 - s_{wc}^{\frac{1}{m}} \right]^{2m}$$

où les paramètres  $\epsilon$  et  $\gamma$  sont habituellement choisis par  $\epsilon = \frac{1}{2}$  et  $\gamma = \frac{1}{3}$  (voir Helmig, 1997 [?]).

À partir de ces équations on a le bilan suivant :  $(n+1)$  équations (équations (??) et (??)). Il y a  $2n$  inconnues du problème  $(s_i, p_i)_{i=1..n}$ . Le système n'est pas fermé, par contre expérimentalement entre deux fluides non miscibles, il existe une interface qui engendre une différence de pression entre ces deux fluides. Cette différence est appelée pression capillaire. La pression capillaire entre deux fluides  $i$  et  $j$  est définie par :

$$p_c^{ij} = p_i - p_j, \quad (\text{il y a } (n-1) \text{ équations}).$$

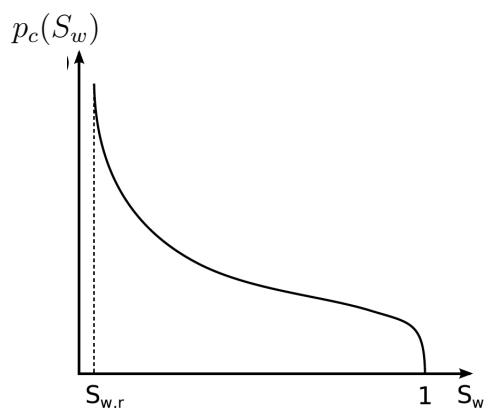


FIGURE 1.6 : Évolution de la pression capillaire en fonction de la saturation d'eau avec  $S_{w,r}$  la saturation résiduelle de l'eau selon la définition de Van Genuchten dans(??)

Il y a plusieurs méthodes pour exprimer le pression capillaire, par exemple celle de Van Genuchten qui exprime le pression capillaire en fonction de la saturation



pour l'écoulement diphasique

$$p_c(s_{wc}) = \frac{1}{\alpha} \left[ s_{wc}^{\frac{1}{m}} - 1 \right]^{\frac{1}{n}}, \quad \text{pour } p_c > 0, \quad (1.10)$$

où  $\alpha$  est un paramètre de mise à l'échelle et est lié à l'inverse de la pression d'entrée. Le coefficient  $n$  représente la distribution des tailles des pores. Selon Mualem, 1976 [? ],  $m$  est défini comme  $m = 1 - \frac{1}{n}$ .

Par la suite, on va décrire le cas d'écoulement diphasique de Darcy-Brinkman

### 1.2.5 Écoulement diphasique incompressible et immiscible

On suppose que le fluide est incompressible c'est à dire que  $\rho_i$  est une constante indépendante de  $p_i$ . Pour fixer les idées, on considère deux phases eau et huile. On note  $s_w$  la saturation de l'eau et  $s_o$  la saturation de l'huile.

Conservation de la masse de la phase eau :

$$\phi(x)\partial_t(s_w) + \text{div}(V_w) = 0, \quad (1.11)$$

Conservation de la masse de la phase huile :

$$\phi(x)\partial_t(s_o) + \text{div}(V_o) = 0, \quad (1.12)$$

de plus on a

$$s_w + s_o = 1 \quad (1.13)$$

avec

$$V_w = -\frac{k_w(s_w)}{\mu_w} K (\nabla p_w - \rho_w \vec{g}) + \tilde{\mu}_w K \nabla^2 V_w \quad (1.14)$$

$$V_o = -\frac{k_o(s_o)}{\mu_o} K (\nabla p_o - \rho_o \vec{g}) + \tilde{\mu}_o K \nabla^2 V_w \quad (1.15)$$

La courbure de la surface de contact entre deux fluides entraîne une différence de pression appelé pression capillaire. Les expériences ont montré que les pressions capillaires sont fonctions de saturations. On définit alors la pression capillaire par

$$p_c(s_w) = p_w - p_o,$$

ce qui donne 4 équations à 4 inconnues qui forment le système de Brinkman. Notez que nous pouvons toujours obtenir le système Darcy si on prend  $\tilde{\mu}_i = 0$ . Ce modèle sera détaillé dans le chapitre 2.

## 1.3 Plan de la thèse

Ce manuscrit est composé de quatre chapitres. Le premier correspond à l'étude théorique de l'écoulement diphasique immiscible et incompressible de Darcy-Brinkman, ainsi qu'à l'étude asymptotique du système de Darcy-Brinkman quand la viscosité de Brinkman tend vers zéro. Dans le deuxième chapitre, un schéma numérique de type volumes finis est développé pour la discrétisation du modèle généralisé de Darcy-Brinkman sur des maillages admissibles dans un milieu homogène et isotrope. Dans le troisième chapitre, nous proposons et nous étudions un schéma combinant les méthodes de volumes finis et d'éléments finis pour la discrétisation de modèles de Darcy-Brinkman avec un tenseur hétérogène et anisotrope sur des maillages très généraux. Enfin le quatrième chapitre est consacré à l'existence de solutions pour l'écoulement monophasique compressible du Darcy-Brinkman d'abord en dimension 1 d'espace dans les espaces de Sobolev de type  $H^s(\mathbb{R})$  avec  $s \geq \frac{5}{2}$ , puis sous l'hypothèse de Bear en dimension  $d \geq 2$ . Le terme quadratique en gradient de pression est négligeable dans ce cas et nous montrons l'existence de solutions faibles pour l'écoulement monophasique compressible du Darcy-Brinkman.

### 1.3.1 Chapitre 2. Analyse mathématique du modèle de Darcy-Brinkman diphasique incompressible et immiscible

Dans ce chapitre, on décrit le modèle de Darcy-Brinkman et on propose un système de Darcy-Brinkman en appliquant l'opérateur de Helmholtz. On prouve l'existence d'une solution faible du modèle de Darcy-Brinkman et finalement on étudie le comportement asymptotique du système de Darcy-Brinkman quand  $\mu \rightarrow 0$ . On montre rigoureusement que le modèle de Darcy-Brinkman converge vers celui de Darcy quand  $\mu \rightarrow 0$ .

**Modèle de Darcy-Brinkman :** Les écoulements à deux phases immiscibles dans un milieu poreux intervenant en géophysique sont nombreux. A titre d'exemple, mentionnons la récupération secondaire dans des réservoirs de pétrole et la séques-

tration de dioxyde de carbone dans des formations souterraines.

La conservation de la masse pour chaque phase est donnée par (voir [3]) :

$$\phi \partial_t (\rho_i s_i) + \operatorname{div}(\rho_i v_i) = 0, \quad i \in \{w, o\}. \quad (1.16)$$

Ici,  $s_w$  et  $s_o$  représentent respectivement la saturation (rapport du volume de la phase sur le volume total) de la phase d'eau et celle du pétrole, les vitesses des phases sont désignées respectivement par  $v_w$  et  $v_o$ ,  $\rho_i$  est la densité de la phase  $i = w, o$ , et  $\phi$  est la porosité. Compte tenu de l'identité  $s_w + s_o = 1$ , les deux vitesses de phase peuvent se résumer à produire la condition d'incompressibilité sous la condition que les densités soient constantes :

$$\operatorname{div}(v) = 0, \quad (1.17)$$

où  $v = v_w + v_o$  est la vitesse totale. Les vitesses de phase sont décrites par la loi de Darcy (voir [3]) :

$$v_i = -\frac{k_i(s_i)}{\mu_i} K \nabla p_i = -\lambda_i(s_i) K \nabla p_i, \quad i \in \{w, o\}. \quad (1.18)$$

La quantité  $k_i = k_i(s_i)$  est la perméabilité de la phase  $i$ ,  $p_i$  est la pression de la phase  $i$ ,  $\mu_i$  la viscosité de la phase  $i$ ,  $\lambda_i = \lambda_i(s_i) = \frac{k_i(s_i)}{\mu_i}$  la mobilité de la phase  $i$ . A noter que nous avons négligé la gravité dans la loi de Darcy (la gravité peut être facilement considéré, conduisant à un terme supplémentaire  $v_i = -\lambda_i(s_i) K (\nabla p_i - \rho_i \vec{g})$ , voir [3]). On note la saturation de l'eau  $s = s_w$  dans la discussion ci-dessous.

Soit  $p_c(s) = p_w - p_o$  la pression capillaire qui est une fonction croissante par rapport à  $s$ . Nous pouvons sommer (??) pour obtenir

$$v = -\lambda K (\nabla p_o + \nabla \tilde{p}(s)), \quad (1.19)$$

où  $\tilde{p}'(s) = \frac{\lambda_w}{\lambda} p_c'(s)$  et  $\lambda = \lambda_w + \lambda_o$  étant la mobilité totale.

On note  $p = p_o + \tilde{p}(s)$  la pression globale, ce qui donne

$$v = -\lambda K \nabla p. \quad (1.20)$$

### 1.3 Plan de la thèse

---

Utilisant (??), le gradient de pression dans (??) peut être éliminé et conduit à :

$$v_w = -\lambda_w K \nabla p - \alpha(s) K \nabla s, \quad (1.21)$$

avec  $\alpha(s) = \frac{\lambda_w \lambda_o}{\lambda} p'_c$ . Soit  $f$  la fonction fraction de flux définie par

$$f(s) = \frac{\lambda_w(s)}{\lambda(s)} = \frac{\lambda_w(s)}{\lambda_w(s) + \lambda_o(1-s)}. \quad (1.22)$$

L'équation de la saturation (??) pour l'eau peut être écrite sous la forme :

$$\phi \partial_t s - \operatorname{div}(f(s) \lambda(s) K \nabla p) - \operatorname{div}(\alpha(s) K \nabla s) = 0 \quad (1.23)$$

La combinaison de l'équation de saturation (??) avec la condition d'incompressibilité (??) et l'équation de la pression, nous conduit aux équations d'évolutions pour un écoulement diphasique dans un milieu poreux :

$$\begin{cases} \phi \partial_t s - \operatorname{div}(f(s) \lambda(s) K \nabla p) - \operatorname{div}(\alpha(s) K \nabla s) = 0, \\ \operatorname{div}(v) = 0, \\ v = -\lambda(s) K \nabla p. \end{cases} \quad (1.24)$$

Les équations ci-dessus doivent être complétées par des conditions initiales et aux frontières convenables.

La perméabilité de phase  $k_w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction régulière monotone croissante avec  $k_w(0) = 0$  tandis que la perméabilité de phase  $k_o : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction régulière monotone décroissante avec  $k_o(1) = 0$ .

En outre, la mobilité totale est strictement positive c'est à dire,  $\lambda \geq \lambda_* > 0$  pour un certain  $\lambda_*$ .

L'introduction de la pression globale et la transformation de Kirchoff [??] ont permis d'obtenir des solutions faibles Les équations (??) forment un système parabolique-elliptique. Pour un champ de vitesse donnée, l'équation de la saturation est une loi de conservation parabolique dégénérée. La condition d'incompressibilité fait que la vitesse peut être obtenue en résolvant une équation elliptique pour la pression  $p$ .

Une approche différente de celle ci-dessus est de poser la question fondamentale, est-ce que la loi de Darcy (??) est correcte? De nombreuses études ont porté sur cette question et ont constaté que la loi de Darcy peut-être insuffisante pour expliquer la dynamique de l'écoulement de fluide dans les milieux poreux, même pour une seule

phase [4].

Plusieurs modifications de la loi de Darcy ont été proposées, voir [5]. Un intérêt particulier dans ce document est porté sur la modification de Brinkman [4]. Il est bien connu que cette modification explique la dynamique de l'écoulement dans certain milieu poreux, et semble mieux adaptée que le modèle de Darcy dans de nombreuses situations, voir chapitre 1 pour plus de détails et [12, 15] et les références qui s'y trouvent. Le modèle de Brinkman pour la vitesse de phase de chaque phase est donné par,

$$-\nu_i K \nabla^2 v_i + \mu_i v_i = -k_i K \nabla p_i, \quad i \in \{w, o\} \quad (1.25)$$

Ici,  $\nu_i$  est la viscosité effective. Notons que l'approximation de Brinkman ajoute un terme de régularisation dissipative à la loi de Darcy.

En additionnant les relations de vitesse de phase (??) pour les deux phases  $\{w, o\}$ , on obtient que la vitesse totale  $v = v_w + v_o$  satisfait :

$$-\mu K \nabla^2 v + v = -\lambda(s) K \nabla p, \quad (1.26)$$

pourvu que  $\mu = \frac{\nu_w}{\mu_w} = \frac{\nu_o}{\mu_o}$  (condition de compatibilité) pour que le système redonne la vitesse totale dans le cas où l'écoulement est incompressible (c'est à dire  $\mu = 0$ ). En appliquant l'opérateur divergence à l'équation (??) ci-dessus et en utilisant l'incompressibilité (??), nous obtenons l'équation elliptique suivante pour la pression.

$$-\operatorname{div}(\lambda(s) K \nabla p) = 0 \quad (1.27)$$

car dans le cas où le milieu est isotrope (c'est à dire  $K = k$  constante) on a

$$\operatorname{div} \Delta v = \sum_i \partial_{x_i} (\Delta v_i) = \sum_i \Delta \partial_{x_i} v_i = \Delta \operatorname{div} v = 0$$

et dans le cas où le milieu est anisotrope on néglige le terme d'ordre 3 en vitesse  $\mu \operatorname{div} (K \nabla^2 v)$ . Ici, nous avons noté  $s = s_w$  la saturation de l'eau . En combinant cette équation avec la conservation de la masse de la phase d'eau et avec l'approximation de Brinkman (??) décrivant la vitesse de la phase d'eau et la fonction de flux fractionnel définie en (??), nous obtenons le modèle Darcy-Brinkman diphasique

incompressible et immiscible suivant,

$$\begin{cases} \varphi \partial_t s + \operatorname{div}(v_w) & = 0, \\ -\mu K \nabla^2 v_w + v_w & = -f(s)\lambda(s)K \nabla p - \alpha(s)K \nabla s, \\ -\operatorname{div}(\lambda(s)K \nabla p) & = 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

Le système (??) est désormais qualifié comme la régularisation de Brinkman des écoulements diphasiques dans un milieu poreux. On remarque que le système de Darcy (??) peut être obtenu à partir de la régularisation de Brinkman (??) si on prend  $\mu = 0$ .

Appliquons formellement l'opérateur d'Helmholtz  $-\mu \operatorname{div} K \nabla + I$  à la première équation du système (??) et utilisons le fait que  $K \nabla^2 V = \operatorname{div}(K \nabla V)$  (cette égalité est vraie seulement dans le cas où  $K$  le tenseur homogène est une matrice symétrique), on obtient le système de Brinkman- Darcy suivant :

$$\begin{cases} \phi \partial_t s - \mu \phi \operatorname{div}(K \nabla \partial_t s) - \operatorname{div}(K f(s)\lambda(s)\nabla p) - \operatorname{div}(\alpha(s)K \nabla s) = 0, \\ -\operatorname{div}(\lambda(s)K \nabla p) = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

On prend  $\phi = 1$  et  $K = cte = 1$  dans le reste de ce chapitre pour la simplicité. Le reste de ce chapitre concerne l'analyse du système de Brinkman (??). Il s'agit de définir une notion convenable de solutions pour (??) et de montrer que ces solutions existent.

## Résultat principal.

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné dans  $\mathbb{R}^d$ , dont le bord  $\partial\Omega$  est Lipschitz et  $\eta$  est la normale sortante au bord de  $\Omega$ . On note  $Q_T := ]0, T[ \times \Omega$  où  $T > 0$  est un temps fixé. Le bord du  $\Omega$  est divisé en trois partie  $\partial\Omega = \Gamma_i \cup \Gamma_e \cup \Gamma_s$  et on note  $\Sigma_T = ]0, T[ \times \partial\Omega$ . Nous allons étudier le modèle Darcy-Brinkman suivant :

$$\partial_t s - \mu \Delta \partial_t s - \operatorname{div}(f(s)\lambda(s)\nabla p) - \operatorname{div}(\alpha(s)\nabla s) = 0, \quad (t, x) \in Q_T \quad (1.30)$$

$$-\operatorname{div}(\lambda(s)\nabla p) = 0, \quad (t, x) \in Q_T \quad (1.31)$$

$$\int_{\Omega} p(t, x) dx = 0, \quad \forall t > 0 \quad (1.32)$$

Ce système est complété par les conditions aux bords sur  $\Sigma_T = ]0, T[ \times \partial\Omega$ ,

$$\lambda(s)\partial_\eta p(t, x) = \begin{cases} 0, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_i \\ q_e, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_e, \\ -q_s, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_s, \end{cases} \quad (1.33)$$

$$\mu\partial_\eta\partial_t s(t, x) + \alpha(s)\partial_\eta s(t, x) = 0, \quad t \in ]0, T[, x \in \Gamma_i \cup \Gamma_s \quad (1.34)$$

$$s(t, x) = 1, \quad t \in ]0, T[, x \in \Gamma_e \quad (1.35)$$

où  $\partial_\eta = \eta \cdot \nabla$  désigne la dérivée normale sortante au bord de  $\Omega$ , et la condition initiale définie dans  $\Omega$  :

$$s(0, x) = s_0(x). \quad (1.36)$$

Sous les hypothèses suivantes :

**(H1)**  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue bornée tel que  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  avec  $0 \leq f \leq 1$ .

**(H2)** La mobilité totale  $\lambda$  est une fonction continue bornée telle que  $\lambda(\cdot) \geq \lambda_* > 0$  pour une certaine constante  $\lambda_*$ .

**(H3)** Le terme de pression capillaire  $\alpha$  est une fonction continue bornée positive telle que  $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$ .

**(H4)**  $\int_{\Gamma_e} q_e d\sigma = \int_{\Gamma_s} q_s d\sigma$  C'est la condition de compatibilité.

**(H5)**  $s_0 \in H^1(\Omega)$  est la donnée initiale avec  $s_0(x) = 1$  sur  $\Gamma_e$ .

Afin d'imposer une condition de Dirichlet homogène sur  $\Gamma_e$ , le système devient

$$\partial_t s - \mu\Delta\partial_t s + \operatorname{div}(f(1-s)\lambda(1-s)\nabla p) - \operatorname{div}(\alpha(1-s)\nabla s) = 0, \quad (1.37)$$

$$- \operatorname{div}(\lambda(1-s)\nabla p) = 0, \quad (1.38)$$

$$\int_{\Omega} p(t, x) dx = 0, \quad (1.39)$$

### 1.3 Plan de la thèse

---

avec les conditions aux bords suivantes

$$\lambda(1-s)\partial_\eta p(t,x) = \begin{cases} 0, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_i \\ q_e, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_e, \\ -q_s, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_s, \end{cases} \quad (1.40)$$

$$\mu\partial_\eta\partial_t s(t,x) + \alpha(1-s)\partial_\eta s(t,x) = 0, \quad t \in ]0, T[, x \in \Gamma_i \cup \Gamma_s, \quad (1.41)$$

$$s(t,x) = 0, \quad t \in ]0, T[, x \in \Gamma_e. \quad (1.42)$$

L'existence d'une solution du problème (??)-(??) est alors équivalente à l'existence d'une solution du problème (??)-(??), pour cela dans la suite de ce chapitre on va chercher une solution du problème (??)-(??).

Maintenant on définit l'espace de Sobolev suivant :

$$H_M^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega); \int_\Omega u \, dx = 0 \right\}, \text{ et } H_{\Gamma_e}^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_e \right\}$$

Ensuite, nous introduisons la notion de solutions faibles du système (??)-(??) ci-dessous.

**Définition 1.1.** *On dit que  $(s, p) : Q_T \times Q_T \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , est une solution faible du système (??)-(??) si :  $\forall T > 0$ ,  $s \in W^{1,\infty}(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega))$ ,  $p \in L^\infty(0, T; H_M^1(\Omega))$ ; avec  $s(0, x) = 1 - s_0(x)$   $p.p$  dans  $\Omega$  vérifiant pour tout  $\varphi \in L^1(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega))$  on a*

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \partial_t s \varphi \, dx \, dt + \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla \partial_t s \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega f(1-s)\lambda(1-s)\nabla p \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt \\ + \int_0^T \int_\Omega \alpha(1-s)\nabla s \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s)\varphi \, d\sigma \, dt; \end{aligned} \quad (1.43)$$

et pour tout  $\psi \in L^1(0, T; H^1(\Omega))$

$$\int_0^T \int_\Omega \lambda(1-s)\nabla p \cdot \nabla \psi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Gamma_e} q_e \psi \, d\sigma \, dt - \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s \psi \, d\sigma \, dt; \quad (1.44)$$

On a le théorème d'existence suivant.

**Théorème 1.1.** *Sous les hypothèses (H1)- (H5), le problème aux limites (??)-(??) admet une solution  $(s, p)$  au sens de la définition ??.*

La preuve de ce théorème est basée sur l'approximation récursive du système (??)-(??) ci-dessous. Nous commençons par définir  $s_0(t, x) = 1 - s_0(x)$ ,  $(t, x) \in Q_T$ ,



puis, on définit l'algorithme suivant pour  $n = 0, 1, \dots$  :

Soit  $s_n(t, x) \in W^{1,\infty}(0, T; H^1(\Omega))$  donné, on cherche  $(p_n, s_{n+1})$  solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\lambda(1 - s_n)\nabla p_n) = 0, \quad (t, x) \in Q_T \\ \lambda(1 - s_n)\partial_\eta p_n(t, x) = \begin{cases} 0, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_i \\ q_e, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_e, \\ -q_s, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_s, \end{cases} \\ \int_\Omega p_n(t, x) dx = 0, \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (1.45)$$

et de

$$\begin{aligned} \partial_t s_{n+1} - \mu \Delta \partial_t s_{n+1} + \operatorname{div}(f(1 - s_n)\lambda(1 - s_n)\nabla p_n) - \operatorname{div}(\alpha(1 - s_n)\nabla s_{n+1}) &= 0, \\ \mu \partial_\eta \partial_t s_{n+1} + \alpha(1 - s_n)\partial_\eta s_{n+1} &= 0, \quad ]0, T[ \times (\Gamma_i \cup \Gamma_s), \\ s_{n+1}(t, x) &= 0, \quad ]0, T[ \times \Gamma_e \end{aligned} \quad (1.46)$$

D'abord, on montre que les itérés sont bien définis en prouvant que les systèmes (??) et (??) sont bien posés. Ensuite, on établit des estimations d'énergies sur la solution faible indépendantes de  $n$  pour passer à la limite afin d'obtenir une solution faible pour le système (??)-(??), puis on établit le principe de maximum sur la solution obtenue. Enfin, on étudie le comportement asymptotique du système de Darcy-Brinkman quand  $\mu \rightarrow 0$ .

### 1.3.2 Chapitre 3. Méthode de Volumes Finis pour le modèle de Darcy-Brinkman

On s'intéresse dans ce chapitre à la construction d'un schéma numérique pour le modèle général de Darcy-Brinkman. Nous montrons que ce schéma vérifie les propriétés indispensables à tout schéma numérique : existence de solutions, convergence vers une solution faible du modèle général. La première partie précise le modèle à discrétiser et la notion de solution faible lui étant associée. Les discrétisations spatiale (maillages admissibles) et temporelle (pas de temps fixes) ainsi que le schéma de type volumes finis sont introduits dans une deuxième partie. La dérivée temporelle, le terme de Brinkman, la diffusion et les termes de réaction sont discrétisés de façon classique : implicite en temps, et un flux à deux points pour la diffusion et le terme

de Brinkman [? ]. Quant au terme d'advection, il n'est pas discrétisé par un flux décentré amont classique mais par un flux préservant la monotonie; cela permet d'assurer un principe de robustesse des solutions (voir [? ]).

## Problème posé

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné dans  $\mathbb{R}^d$ , dont le bord  $\partial\Omega$  est Lipschitz et soit  $\eta$  la normale sortante au bord de  $\Omega$ . On note  $Q_T := ]0, T[ \times \Omega$  où  $T > 0$  est un temps fixé et on note  $\Sigma_T = ]0, T[ \times \partial\Omega$ . Nous allons étudier le système Darcy-Brinkman suivant :

$$\partial_t s - \mu \Delta \partial_t s - \operatorname{div} (f(s)\lambda(s)\nabla p) - \operatorname{div} (\alpha(s)\nabla s) = 0, \quad (t, x) \in Q_T \quad (1.47)$$

$$- \operatorname{div} (\lambda(s)\nabla p) = 0, \quad (t, x) \in Q_T \quad (1.48)$$

$$\int_{\Omega} p(t, x) dx = 0, \quad \forall t > 0 \quad (1.49)$$

Ce système est complété par les conditions aux bords sur  $\Sigma_T$ ,

$$\lambda(s)\partial_{\eta} p(t, x) = \pi(t, x), \quad (1.50)$$

$$\mu\partial_{\eta}\partial_t s + f(s)\pi + \alpha(s)\partial_{\eta} s = h(t, x), \quad (1.51)$$

et des conditions initiales définies dans  $\Omega$  :

$$s(0, x) = s_0(x). \quad (1.52)$$

Les hypothèses sont celles du chapitre 2. Ensuite on définit une solution faible du système (??)-(??).

**Définition 1.2** (Solution faible). *On dit que  $(s, p) : Q_T \times Q_T \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , est une solution faible du système (??)-(??) si :  $\forall T > 0$ ,  $s \in W^{1,2}(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $p \in L^2(0, T; H_M^1(\Omega))$ , telles que pour tout  $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  on a*

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t s \varphi dx dt + \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \partial_t s \cdot \nabla \varphi dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} f(s)\lambda(s)\nabla p \cdot \nabla \varphi dx dt \\ + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \beta(s) \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} h\varphi d\sigma dt, \end{aligned} \quad (1.53)$$

et pour tout  $\psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  on a

$$\int_0^T \int_{\Omega} \lambda(s) \nabla p \cdot \nabla \psi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \pi \psi \, d\sigma \, dt. \quad (1.54)$$

**Problème discret :** On s'intéresse à la formulation du schéma de volumes finis. Au début, on décrit les discrétisations en espace et en temps, ensuite on énonce le schéma numérique.

**Discrétisation en espace :** On dit qu'un maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$ , formé de polygones  $K$  ouverts et convexes nommés volumes de contrôle, est admissible s'il vérifie les propriétés suivantes :

- La clôture de l'union des  $K$  est  $\bar{\Omega}$ .
- L'intersection entre deux volumes voisins  $K$  et  $L$  est un sommet ou un côté en dimension deux (une face en dimension trois). Donc, la mesure de Lebesgue  $(d-1)$ -dimensionnel de  $\partial\bar{K} \cap \partial\bar{L}$  n'est pas nulle dans le deuxième cas.
- Il existe une famille  $\mathcal{P} = (x_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ , où  $x_K$  est le centre du volume  $K$  tel que  $\overline{x_K x_L} \perp \sigma_{K,L}$  où  $\sigma_{K,L}$  est l'interface commune entre deux volumes de contrôle voisins. Par exemple pour une triangularisation ayant uniquement des triangles avec des angles aigus, on prend  $x_K$  comme étant le centre du cercle circonscrit au triangle  $K$ .

Dans ce chapitre, on considère  $\mathcal{T}_h$  comme étant un maillage admissible de  $\Omega$ . Dans ce qui suit, on utilise les notations suivantes :

- La taille du maillage :  $\tilde{h} = \sup\{\text{diam}(K), K \in \mathcal{T}_h\}$ .
- $|K| = \text{mes}(K) =$  la mesure de Lebesgue  $d$ -dimensionnel de  $K$  (c'est l'aire de  $K$  en dimension 2 et le volume de  $K$  en dimension 3) et  $|\sigma|$  est la mesure  $(d-1)$ -dimensionnel de  $\sigma$ .
- $\mathcal{E}_{int}$  est l'ensemble des côtés intérieurs du maillage et  $\mathcal{E}_{ext} = \{\sigma; \sigma \subset \partial\Omega\}$ .
- $d_{K,L}$  est la distance euclidienne entre  $x_K$  et  $x_L$ . Si  $\sigma \subset \partial\Omega$  alors  $d_{K,\sigma}$  est la distance euclidienne entre  $x_K$  et  $y_\sigma$  où  $y_\sigma$  est la projection orthogonale de  $x_K$  sur  $\sigma$ .
- $\eta_{K,L}$  est la normale sortante de  $K$  et orthogonale à  $\sigma_{K,L}$ ;  $\eta_{K,L} = -\eta_{L,K}$ .

### 1.3 Plan de la thèse

---

- $\tau_{K,L}$  est la transmissibilité à travers l'interface  $\sigma_{K,L}$  définie par :

$$\tau_{K,L} = \frac{|\sigma_{K,L}|}{d_{K,L}}. \quad (1.55)$$

- $N(K) = \{L \in \mathcal{T}_h / \partial \bar{K} \cap \partial \bar{L} \neq \emptyset\}$  est l'ensemble de volumes voisins à  $K$ .
- $T_{K,L}$  est le diamant convexe construit en reliant les deux centres voisins  $x_K$  et  $x_L$  aux sommets de l'interface commune  $\sigma_{K,L}$ . On a :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \bigcup_{L \in N(K)} \bar{T}_{K,L} \right).$$

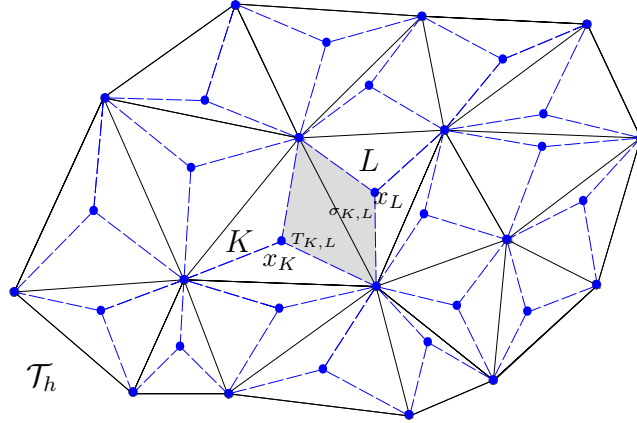


FIGURE 1.7 : maillage volume fini  $\mathcal{T}_h$  : volume de contrôle, centre et diamant.

**Discretisation en temps :** Une discretisation de l'intervalle  $[0, T]$  est donnée par un entier  $N \in \mathbb{N}^*$ ;  $t_n = n\Delta t$  pour  $n \in \{0, \dots, N\}$  et pour un pas de temps fixe  $\Delta t$  avec  $N\Delta t = T$ . Les inconnues discrètes sont notées par  $w_K^n = w(t_n, x_K)$  pour  $w = s$  ou  $p$ .

Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible de  $Q_T = \Omega \times [0, T]$  qui n'est autre qu'un maillage admissible  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  et un pas de temps fixé  $\Delta t > 0$ . On définit la régularité du maillage par :

$$h = \max\{\Delta t, \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K), \max_{K \in \mathcal{T}_h} \max_{L \in N(K)} d_{K,L}\}.$$

**Fonctions discrètes associées :** Sur un maillage  $\mathcal{T}_h$  admissible, on définit  $L_h(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  l'espace des fonctions constantes sur chaque volume  $K \in \mathcal{T}_h$ .

$$L_h = \{w_h \in L^2(\Omega), \quad w_h(x) = W_K \text{ p.p sur } K\}.$$

On peut lui associer un produit scalaire et une norme :

$$\langle w_h, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| W_K V_K, \quad \|w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |W_K|^2.$$

En plus, on définit un produit scalaire qui correspond à une semi-norme  $H_0^1(\Omega)$  discrète :

$$\begin{aligned} \langle w_h, v_h \rangle_{H_h^1(\Omega)} &= d \sum_{\sigma_{K,L} \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K,L} (W_L - W_K)(V_L - V_K), \\ |w_h|_{H_h^1(\Omega)}^2 &= d \sum_{\sigma_{K,L} \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K,L} (W_L - W_K)^2. \end{aligned}$$

Finalement, on définit le gradient discret d'une fonction  $w_h$  constante par volume de contrôle, comme étant une fonction constante par diamant  $T_{K,L}$  :

$$(\nabla_h w_h)|_{T_{K,L}} = \nabla_{K,L} w_h := d \frac{W_L - W_K}{d_{K,L}} \eta_{K,L}. \quad (1.56)$$

Notons que la mesure  $d$ -dimensionnel  $|T_{K,L}|$  est égale à  $\frac{1}{d} |\sigma_{K,L}| d_{K,L}$  donc la semi-norme  $|w_h|_{H_h(\Omega)}$  coïncide avec la norme de  $\nabla_h w_h$  dans  $L^2(\Omega)$ .

**Schéma Numérique .** le schéma de volumes finis (l'obtention du schéma numérique est détaillé dans le chapitre 3) est donné par :  $\forall K \in \mathcal{T}_h, \forall n = 0..N - 1$  on a :

$$|K| \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} - \mu \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right) \quad (1.57)$$

$$- \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1}) \right) + \sum_{L \in N(K)} G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) = |\partial K \cap \partial \Omega| h_K^{n+1},$$

$$- \sum_{L \in N(K)} G_p(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) = |\partial K \cap \partial \Omega| \pi_K^{n+1}, \quad (1.58)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{T}_h} |K| P_K^{n+1} = 0, \quad (1.59)$$

où

- $h_K^{n+1} = \frac{1}{|\partial K \cap \partial \Omega| \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial K \cap \partial \Omega} h(t, x) d\sigma dt,$
- $\pi_K^{n+1} = \frac{1}{|\partial K \cap \partial \Omega| \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial K \cap \partial \Omega} \pi(t, x) d\sigma dt,$
- $dp_{K,L}^{n+1} = \tau_{K,L} (P_L^{n+1} - P_K^{n+1}).$

Les fonctions  $G_s$  et  $G_p$  désignent les flux numériques et elles satisfont les propriétés suivantes :

- $G_s(\cdot, b, c)$  est croissante,  $\forall b, c \in \mathbb{R}$  et  $G_s(a, \cdot, c)$  est décroissante,  $\forall a, c \in \mathbb{R}$ .
- $G_s(a, b, c) = -G_s(b, a, -c) \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ; donc le flux est conservatif.
- $G_s(a, a, c) = -f(s)\lambda(a)c \forall a, c \in \mathbb{R}$ ; donc le flux est consistant.
- Il existe un module de continuité  $w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall a, b, a', b', c \in \mathbb{R}$ ,  
 $|G_s(a, b, c) - G_s(a', b', c)| \leq |c|w(|a - a'| + |b - b'|).$

**Théorème 1.2.** *Sous l'hypothèse (H1 – H5), le schéma numérique (??)-(??) converge vers une solution  $(s, p)$  du système (??)-(??) au sens de la définition ?? .*

La preuve de ce théorème se décompose en plusieurs lemmes et propositions détaillés dans la chapitre 3.

### 1.3.3 Chapitre 4. Schéma Volumes Finis-Éléments Finis combiné monotone pour un modèle anisotrope de Darcy-Brinkman

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un schéma combinant les méthodes de volumes finis et d'éléments finis non conformes qui permet une discrétisation efficace du modèle dégénéré.

Dans le cas de tenseurs isotropes et homogènes réduits à une matrice d'identité, un schéma volumes finis a été récemment développé dans [?] et a été étendu au cas isotrope hétérogène et discontinu dans le premier chapitre de cette thèse. Toutefois, le schéma volumes finis classique centré par maille impose des restrictions sur le maillage (condition d'orthogonalité) pour obtenir des flux diffusifs consistants et on ne peut pas l'étendre simplement au cas où le tenseur de diffusion est anisotrope où le calcul du flux numérique diffusif général nécessite d'approcher les valeurs  $\Lambda \nabla \beta(s) \cdot \eta$  sur les interfaces du maillage.

## Modèle anisotrope de Darcy-Brinkman.

Le modèle anisotrope de Darcy-Brinkman est donné par le système suivant :

$$\phi \partial_t s - \mu \phi \operatorname{div}(\Lambda \nabla \partial_t s) - \operatorname{div}(f(s)\lambda(s)\Lambda \nabla p) - \operatorname{div}(\alpha(s)\Lambda \nabla s) = 0, \quad t > 0, x \in \Omega \quad (1.60)$$

$$- \operatorname{div}(\lambda(s)\Lambda \nabla p) = 0, \quad t > 0, x \in \Omega \quad (1.61)$$

$$\int_{\Omega} p(t, x) dx = 0, \quad \forall t > 0 \quad (1.62)$$

Ce système est complété par les conditions aux bords sur  $\Sigma_T = [0, T] \times \partial\Omega$ ,

$$\lambda(s)(\Lambda \nabla p(t, x)) \cdot \eta = \pi(t, x), \quad (1.63)$$

$$\mu \Lambda \nabla \partial_t s \cdot \eta + f(s)\pi + \alpha(s)(\Lambda \nabla s) \cdot \eta = h(t, x), \quad (1.64)$$

et des conditions initiales définies dans  $\Omega$  :

$$s(0, x) = s_0(x). \quad (1.65)$$

On rappelle que  $Q_T := \Omega \times (0, T)$  où  $T > 0$  est un temps fixé et  $\Omega$  est un domaine ouvert borné polygonal connexe dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $d = 3$  dont le bord  $\partial\Omega$  est Lipschitz et  $\eta$  est un vecteur normal unitaire. Dans ce qui suit, on considère les mêmes hypothèses **(H1)**-**(H6)** ainsi que leurs interprétations. Seulement, on généralise l'hypothèse sur la perméabilité ( $\lambda = \text{cte}$ ) à la suivante :  $\Lambda \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  où  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices symétriques  $d \times d$ , vérifient :

$$\Lambda_{i,j} \in L^\infty(\Omega), \forall i, j \in \{1, \dots, d\}, \quad (1.66)$$

et il existe  $C_\Lambda \in \mathbb{R}_+^*$  telle que  $x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\Lambda(x)\xi \cdot \xi \geq C_\Lambda |\xi|^2. \quad (1.67)$$

Tout d'abord, il faut noter que l'existence globale d'une solution faible de ce modèle ainsi que l'unicité sous une hypothèse supplémentaire ont été énoncées et montrées dans le deuxième chapitre de cette thèse . Dans ce qui suit, on va construire un schéma combiné robuste et efficace discrétisant le modèle **(??)**-**(??)**. On construit le problème discret et on effectue une étude de convergence de la solution discrète vers une solution faible du problème continu au sens de la Définition suivante :

**Définition 1.3.** On dit que  $(s, p)$ ,  $s, p : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , est une solution faible de la système (??)-(??) si :  $\forall T > 0$ ,  $s \in W^{1,\infty}(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $p \in L^\infty(0, T; H_M^1(\Omega))$ ; et vérifient :

$\forall \varphi \in L^2((0, T); H^1(\Omega))$  on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \partial_t s \varphi \, dx \, dt + \mu \int_0^T \int_\Omega \Lambda \nabla \partial_t s \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega f(s) \lambda(s) \Lambda \nabla p \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt \\ + \int_0^T \int_\Omega \alpha(s) \Lambda \nabla s \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} h \varphi \, d\sigma \, dt = 0. \end{aligned} \quad (1.68)$$

$$\int_0^T \int_\Omega \lambda(s) \Lambda \nabla p \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \pi \varphi \, d\sigma \, dt = 0; \quad (1.69)$$

## Problème discret

Cette section est consacrée à la formulation du schéma combinant les méthodes de volumes finis et d'éléments finis non conformes afin de discrétiser le modèle anisotrope de Darcy-Brikman (??)-(??). Au début, on décrit la discrétisation en espace et en temps, on définit les espaces d'approximation et après on introduit le schéma combiné.

**Discrétisation en espace et en temps** On rappelle que  $\Omega$  est un ouvert polygonal borné de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d = 2$  ou  $3$ . Afin de discrétiser (??)-(??), on considère une famille de maillages  $\{\mathcal{T}_h\}$  du domaine  $\Omega$ , composé de simplexes fermés avec des intérieurs disjoints, telle que  $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \bar{K}$ . En plus, l'intersection de deux volumes distincts  $K, L \in \mathcal{T}_h$  est un ensemble vide, une face, un segment ou un sommet commun à ces deux volumes. On note par  $\mathcal{E}_h$  (resp. par  $\mathcal{E}_h^{int}$ ,  $\mathcal{E}_h^{ext}$ ) l'ensemble de tous les segments/faces (resp. intérieurs, extérieurs) et par  $\mathcal{E}_K$  l'ensemble de tous les segments/faces d'un élément  $K \in \mathcal{T}_h$ . La taille du maillage  $\mathcal{T}_h$  est définie par  $h := \text{size}(\mathcal{T}_h) = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K)$  comme étant la borne supérieure du diamètre maximal des volumes de contrôle dans  $\mathcal{T}_h$ . On peut aussi définir un facteur géométrique relié à la régularité du maillage, en imposant l'hypothèse suivante de régularité sur la famille de triangularisations  $\{\mathcal{T}_h\}_h$  : Il existe une constante positive  $k_{\mathcal{T}}$  telle que

$$\min_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{|K|}{(\text{diam}(K))^d} \geq k_{\mathcal{T}}, \quad \forall h > 0. \quad (1.70)$$



L'hypothèse (??) est équivalente à l'existence d'une constante  $\theta_{\mathcal{T}} > 0$  telle que

$$\max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\text{diam}(K)}{\rho_K} \leq \theta_{\mathcal{T}}, \forall h > 0, \quad (1.71)$$

où  $\rho_K$  est le diamètre de la plus grande boule inscrite dans le simplexe  $K$ .

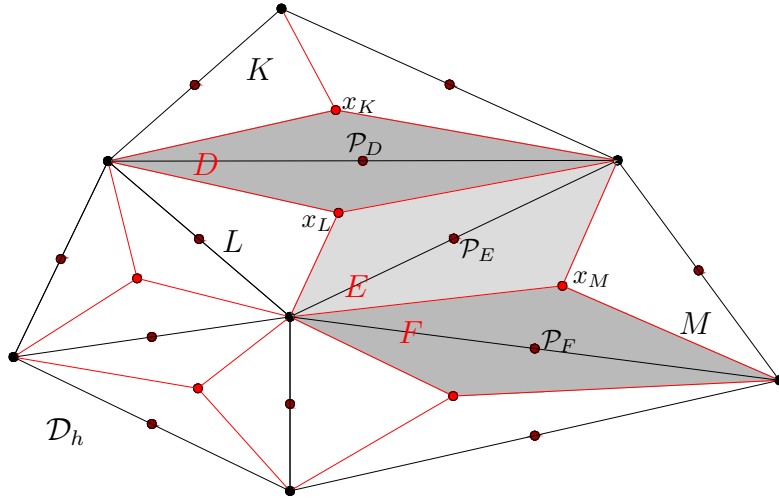


FIGURE 1.8 : maillage dual  $\mathcal{D}_h$  associé aux interfaces du maillage initial de  $\Omega$ .

Pour construire le schéma, il est nécessaire de définir un maillage dual associé au maillage  $\mathcal{T}_h$  initial. Pour cela, on définit une partition duale  $\mathcal{D}_h$ , de simplexes fermés avec des intérieurs disjoints nommés volumes de contrôle de  $\Omega$ , telle que  $\bar{\Omega} = \cup_{D \in \mathcal{D}_h} \bar{D}$ . Un élément dual  $D$  est associé à chaque côté  $\sigma_D = \sigma_{K,L} \in \mathcal{E}_h$ . On le construit en reliant les barycentres de volumes voisins du côté  $\sigma_D$  à travers les sommets de  $\sigma_D$ . Similairement au maillage initial, on définit  $\mathcal{F}_h$ ,  $\mathcal{F}_h^{int}$  et  $\mathcal{F}_h^{ext}$  respectivement l'ensemble de tous les côtés, des côtés intérieurs et des côtés extérieurs du maillage dual  $\mathcal{D}_h$ . Pour  $\sigma_D \in \mathcal{F}_h^{ext}$ , le contour de  $D$  est complété par le côté  $\sigma_D$ . La Figure ?? représente le cas bidimensionnel. On utilise les notations suivantes :

- $|D| = \text{mes}(D)$  = la mesure  $d$ -dimensionnel du volume  $D$  et  $|\sigma|$  est la mesure  $(d - 1)$ -dimensionnel du côté  $\sigma$ .

### 1.3 Plan de la thèse

---

- $\mathcal{P}_D$  est le barycentre du côté  $\sigma_D$ .
- $\mathcal{N}(D)$  est l'ensemble des voisins du volume  $D$ .
- $d_{D,E} := |\mathcal{P}_E - \mathcal{P}_D|$  est la distance entre les centres  $\mathcal{P}_D$  et  $\mathcal{P}_E$ .
- $\sigma_{D,E}$  est l'interface commune entre le volume  $D$  et  $E \in \mathcal{N}(D)$ .
- $\eta_{D,E}$  est le vecteur normal unitaire à  $\sigma_{D,E}$  sortant de  $D$ .
- $K_{D,E} = \{K \in \mathcal{T}_h; \sigma_{D,E} \subset K\}$ .
- $\mathcal{D}_h^{int}$  et  $\mathcal{D}_h^{ext}$  sont respectivement les ensembles de volumes duals intérieurs et extérieurs.

Ensuite, on définit les espaces suivants d'éléments finis non conformes (détaillés dans [?, Appendice A]) :

$$X_h := \{\varphi_h \in L^2(\Omega); \varphi_h|_K \text{ est linéaire } \forall K \in \mathcal{T}_h, \varphi_h \text{ est continue aux points } \mathcal{P}_D, D \in \mathcal{D}_h^{int}\},$$

$$X_h^0 := \{\varphi_h \in X_h; \varphi_h(\mathcal{P}_D) = 0, \forall D \in \mathcal{D}_h^{ext}\}.$$

La base de  $X_h$  est engendrée par des fonctions chapeaux  $\varphi_D$ ,  $D \in \mathcal{D}_h$  telle que  $\varphi_D(\mathcal{P}_E) = \delta_{DE}$ ,  $E \in \mathcal{D}_h$  et  $\delta$  est le delta de Kronecker. On rappelle que les approximations dans ces espaces de Crouzeix-Raviart sont non conformes dès que  $X_h \not\subset H^1(\Omega)$ . En effet, seulement la continuité faible de la solution est assurée à travers les faces du maillages et donc la solution peut être discontinue sur les interfaces. On munit l'espace  $X_h$  de la semi-norme suivante :

$$\|S_h\|_{X_h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla S_h|^2 dx,$$

qui devient une norme sur  $X_h^0$ .

Une discrétisation en temps de  $[0, T]$  est donnée par  $\tilde{N} \in \mathbb{N}^*$  tels que  $t_n = n\Delta t$  pour  $n \in \{0, \dots, \tilde{N} + 1\}$  et  $\Delta t$  est le pas constant de temps.

**Schéma combiné :** Afin de discrétiser le système (??)-(??), on utilise le schéma d'Euler implicite en temps et la méthode d'éléments finis non conformes pour la discrétisation des termes diffusifs en espace. Les autres termes sont discrétisés par la méthode de volumes finis sur le maillage dual  $\mathcal{D}_h$ .

En notant l'approximation du flux  $f(s)\lambda(s)K(x)\nabla p$  sur l'interface  $\sigma_{D,E}$  par  $\delta P_{D,E}$ , on peut considérer la même fonction  $G_s(S_D, S_E, \delta P_{D,E})$  que celle du troisième chapitre comme étant une approximation du flux numérique convectif  $f(s)\lambda(s)K(x)\nabla p$ . Cette fonction est exprimée à l'aide des valeurs  $S_D, S_E$  et  $\delta P_{D,E}$  qui sont valables au voisinage de l'interface  $\sigma_{D,E}$  et elle satisfait les mêmes propriétés que le flux  $G_s$  données au paragraphe ?? du premier chapitre. On peut aussi construire ce flux  $G_s$  selon l'équation (??) du chapitre précédent.

Ensuite, pour tout élément  $S_h = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} S_D \varphi_D$  de l'espace  $X_h$ , on définit la fonction  $\beta_h(S_h)$  comme étant une fonction discrète de  $\beta(S_h)$  :

$$\beta_h(S_h) = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \beta(S_D) \varphi_D. \quad (1.72)$$

Finalement, un schéma combiné volume fini-élément fini non conforme est donné par l'ensemble des équations suivantes : Pour tout  $D \in \mathcal{D}_h$ ,

$$S_D^0 = \frac{1}{|D|} \int_D s_0(x) dx, \quad (1.73)$$

et pour tout  $D \in \mathcal{D}_h$ ,  $n \in \{0, 1, \dots, \tilde{N}\}$ ,

$$\begin{aligned} |D| \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} - \mu \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right) \\ - \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \beta(S_E^{n+1}) - \beta(S_D^{n+1}) \right) + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}; \delta P_{D,E}^{n+1}) \\ = |\partial D \cap \partial \Omega| h_D^{n+1}, \end{aligned} \quad (1.74)$$

$$- \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_p(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}; \delta P_{D,E}^{n+1}) = |\partial D \cap \partial \Omega| \pi_D^{n+1}, \quad (1.75)$$

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} P_D^{n+1} \varphi_D = 0. \quad (1.76)$$

La matrice de diffusion  $\mathcal{M}_{D,E}$  pour  $D, E \in \mathcal{D}_h^{int}$  est la matrice de rigidité de la méthode d'éléments finis non conformes dont les éléments  $\mathcal{S}_{D,E}$  expriment les coefficients de flux diffusifs discrets entre les inconnus. Donc,

$$\mathcal{M}_{D,E} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\Lambda \nabla \varphi_E, \nabla \varphi_D)_{0,K}, \quad (1.77)$$

### 1.3 Plan de la thèse

---

où  $(\cdot, \cdot)_{0,K}$  désigne le produit intérieur dans l'espace de Lebesgue  $[L^2(K)]^d$ . En plus,  $\delta P_{D,E}^{n+1}$  désigne l'approximation du flux  $f(s)\lambda(s)\nabla p$  sur l'interface  $\sigma_{D,E}$  :

$$\delta P_{D,E}^{n+1} = \mathcal{M}_{D,E} \left( P_E^{n+1} - P_D^{n+1} \right). \quad (1.78)$$

**Remarque 1.1.** (Comparaison avec la méthode de volumes finis.) Si le maillage  $\mathcal{T}_h$  est formé des triangles équilatéraux et si les tenseurs diffusifs sont  $K(x) = Id$  alors les segments  $[\mathcal{P}_D, \mathcal{P}_E]$  sont perpendiculaires aux faces duales  $\sigma_{D,E}$  et on a :

$$\mathcal{M}_{D,E} = \mathcal{M}_{D,E} = \frac{|\sigma_{D,E}|}{d_{D,E}}, \quad E \in N(D),$$

(Voir [? ], sections 3.4.1 et 3.4.2). Dans ce sens, on peut voir le schéma combiné comme étant une extension du schéma volume fini classique aux maillages généraux et aux tenseurs diffusifs anisotropes et hétérogènes.

**Remarque 1.2.** Dès que :

$$\nabla \varphi_D \Big|_K = \frac{|\sigma_D|}{|K|} n_{\sigma_D} \text{ pour } K \in \mathcal{T}_h \text{ et } \sigma_D \in \mathcal{E}_K,$$

montré dans [? , Appendice A], on peut facilement remarquer que l'hypothèse (??) est satisfaite quand les tenseurs diffusifs sont réduits à des fonctions scalaires et quand l'angle entre les normales  $n_{\sigma_D}$ ,  $\sigma_D \in \mathcal{E}_K$  pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$  est plus grand ou égale à  $\pi/2$ .

On énonce maintenant un premier résultat de convergence du schéma combiné sous l'hypothèse suivante de la positivité de transmissibilités :

$$\mathcal{M}_{D,E} \geq 0, \quad \forall D \in \mathcal{D}_h, \quad E \in \mathcal{N}(D). \quad (1.79)$$

**Théorème 1.3.** *On suppose (H1 – H6), (??) et (??). Sous l'hypothèse (??), alors le schéma numérique (??)-(??) converge vers une solution  $(s, p)$  du système (??)-(??) au sens de la Définition ?? .*

La preuve de ce théorème se décompose en plusieurs lemmes et propositions détaillés dans la chapitre 4.

ce chapitre fait d'objet d'une publication soumise.

### 1.3.4 Chapitre 5. Résultat d'existence pour l'écoulement monophasique de Darcy-Brinkman dans un milieu poreux

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au système de Darcy-Brinkman dans le cas compressible mais avec une seule phase. Tout d'abord on va décrire le système général de Darcy-Brinkman, puis on va ajouter l'hypothèse de Bear [...] qui consiste à négliger la variation de densité  $\nabla\rho \cdot V$  dans la direction de l'écoulement. Avec cette hypothèse, on obtient le premier modèle,

La première equation est l'équation de transport de notre phase donnée par :

$$\phi\partial_t\rho(p) + \text{div}(\rho(p)V) = 0, \quad (1.80)$$

où  $\rho$  est la densité,  $p$  la pression,  $\phi$  est la porosité et  $V$  est la vitesse de la phase. La deuxième équation est l'équation de Darcy-Brinkman qui exprime la vitesse en fonction de la pression

$$-\nu k\Delta V + \tilde{\mu}V = -k\nabla p, \quad (1.81)$$

où  $k$  est la perméabilité,  $\tilde{\mu}$  est la viscosité usuelle de Darcy et  $\nu$  est la viscosité de Brinkman.

On pose  $u = \log(\rho(p))$  et on reformule l'équation (??). On obtient :

$$\phi\partial_t u + \text{div} V + V \cdot \nabla u = 0, \quad (1.82)$$

et on a  $p = \rho^{-1}(e^u) = h(u)$ , d'où le système général de Darcy-Brinkman donné par

$$\begin{cases} \phi\partial_t u + V \cdot \nabla u + \text{div} V = 0, \\ -\nu k\Delta V + \tilde{\mu}V = -k\nabla h(u). \end{cases} \quad (1.83)$$

Puis en appliquant sur l'équation de transport l'opérateur  $(-\nu k\Delta + \tilde{\mu})$ , on obtient le modèle suivant :

$$\begin{cases} \phi\tilde{\mu}\partial_t u - \phi\nu k \text{div}(\nabla\partial_t u) - k\nabla h(u) \cdot \nabla u - 2\nu k\nabla V : \nabla\nabla u \\ \quad - \nu kV \cdot \nabla\Delta u - k \text{div}(\nabla h(u)) = 0, \\ \quad -\nu k\nabla^2 V + \tilde{\mu}V = -k\nabla h(u). \end{cases} \quad (1.84)$$

### 1.3 Plan de la thèse

---

On utilise les notations :  $\nabla V = (\nabla V)_{ij} = (\partial_j V_i)_{ij}$ ,  $\nabla \nabla u = (\partial_j \partial_i u)_{ij}$ ,  $\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V$  et  $A : B = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$ .

Dans la première partie de ce chapitre, on va résoudre ce système dans  $C(0, T; H^s(\mathbb{R}))$  avec  $s > \frac{5}{2}$ .

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu \partial_x^2 \partial_t u - a \partial_x h(u) \partial_x u - 2\mu \partial_x V \partial_x^2 u - \mu V \partial_x^3 u - a \partial_x^2 h(u) = 0, \\ -\mu \partial_x^2 V + V = -a \partial_x h(u), \end{cases} \quad (1.85)$$

**Théorème 1.4.** *Soit  $s_0 > \frac{1}{2}$ ,  $s \geq s_0 + 1$  et  $u_0 \in H^{s+1}$ . Alors il existe une constante positive  $T$  telle que pour tout  $0 \leq t \leq T$ , il existe une unique solution  $(u, V)$  de (??), en particulier, on a  $u \in C([0, T]; H^{s+1}) \cap C^1([0, T]; H^s)$  et  $V \in C(0, T; H^{s+2})$ .*

Ensuite, dans la deuxième partie on va étudier le système de Darcy-Brinkman avec un terme source

$$\begin{cases} \phi \partial_t \rho + V \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} V = \rho f, \\ -\mu \Delta V + V = -a \nabla p \end{cases} \quad (1.86)$$

avec  $a = \frac{k}{\mu}$  et  $\mu = \frac{\nu k}{\mu}$ . Ensuite, on utilise l'hypothèse de Bear et on applique l'opérateur de Helmholtz  $(-\mu \Delta + I)$  sur la première équation du système (??) pour obtenir

$$\phi \partial_t u - \mu \phi \Delta \partial_t u - \operatorname{div}(a \nabla p) = g, \quad (1.87)$$

avec  $u = \ln(\rho(p))$  and  $p = \rho^{-1}(e^u)$ . Voici quelques exemples de loi d'état :

**Cas 1 : gaz parfait** Pour ce cas, l'équation du gaz parfait affirme que :

$$p = p_0 \rho^\gamma = p_0 e^{\gamma u} \text{ d'où } \nabla p = \gamma p_0 e^{\gamma u} \nabla u, \quad (1.88)$$

avec  $\gamma$  est l'exposant polytropique,  $\gamma = 1$  pour le processus isothermique, et  $\gamma > 1$  pour les adiabatiques (par exemple, pour l'air avec une température normale, on détermine  $\gamma = 1.405$  par des données expérimentales). Dans tous les cas on a  $\gamma \geq 1$ . L'équation (??) devient

$$\phi \partial_t u - \mu \phi \Delta \partial_t u - a \gamma p_0 \operatorname{div}(e^{\gamma u} \nabla u) = g. \quad (1.89)$$

**Cas 2 : gaz faiblement compressible.** L'équation du gaz faiblement compressible est donnée par

$$\rho(p) = \rho_0 \exp(\zeta(p - p_0)), \text{ d'où } \nabla p = \frac{1}{\zeta} \frac{\nabla \rho}{\rho} = \frac{1}{\zeta} \nabla u. \quad (1.90)$$

L'équation devient alors :

$$\phi \partial_t u - \mu \phi \Delta \partial_t u - \frac{a}{\zeta} \operatorname{div}(\nabla u) = g. \quad (1.91)$$

**Cas 3 : une autre forme du gaz faiblement compressible :** L'équation du gaz faiblement compressible

$$\rho(p) = \rho_0 (1 + \gamma(p - p_0)), \text{ d'où } \nabla p = \frac{1}{\gamma \rho_0} e^u \nabla u, \quad (1.92)$$

l'équation devient

$$\phi \partial_t u - \mu \phi \Delta \partial_t u - \frac{a}{\gamma \rho_0} \operatorname{div}(e^u \nabla u) = g. \quad (1.93)$$

Dans ce chapitre, on prouve l'existence d'une solution faible pour une système généralisé de l'équation du Darcy-Brinkman sous l'hypothèse de Bear.

Soit  $\Omega$  est un domaine ouvert borné polygonal dans  $\mathbb{R}^d$ , dont le bord  $\partial\Omega$  est Lipschitz et  $\eta$  est un vecteur normal unitaire. On note  $Q_T := [0, T] \times \Omega$  où  $T > 0$  est un temps fixé.

Notre système est donnée par

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu \Delta \partial_t u - \operatorname{div}(f(u) \nabla u) = g, & (t, x) \in Q_T, \\ \mu \nabla \partial_t u \cdot \eta + \nabla u \cdot \eta = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.94)$$

où  $g$  est une fonction dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , et  $f$  une fonction continue positive. Ensuite, nous introduisons la notion de solutions faibles de (??) comme ci-dessous.

**Définition 1.4.** On dit que  $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , est une solution faible du système (??)

### 1.3 Plan de la thèse

---

si :  $\forall T > 0, u \in W^{1,\infty}(]0, T[; H^1(\Omega))$ , et est tel que :

$\forall \varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  on a :

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t u \varphi \, dx \, dt + \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \partial_t u \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} f(u) \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} g \varphi \, dx \, dt. \quad (1.95)$$

Nous énonçons le théorème d'existence de solutions faibles du système (??) suivant.

**Théorème 1.5.** *Sous l'hypothèse  $u_0 \in H^1(\Omega)$ , le problème aux valeurs limites initiales (??) admet une solution  $u$  dans le sens de la définition (??).*

La démonstration de l'existence d'une solution  $u$  du système (??) est basée sur le théorème de point fixe de Schauder.

Ce chapitre fait d'objet d'une publication soumise.







# 2

---

## Analyse mathématique du modèle de Darcy-Brinkman diphasique incompressible et immiscible

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Écoulement diphasique</b> . . . . .	<b>40</b>
<b>2.2</b>	<b>Hypothèses sur les paramètres physiques et résultat principal</b> . . . . .	<b>44</b>
2.2.1	Existence et estimations d'énergie . . . . .	48
2.2.2	Passage à la limite sur $n$ . . . . .	55
<b>2.3</b>	<b>Principe de maximum</b> . . . . .	<b>57</b>
<b>2.4</b>	<b>Étude asymptotique du système Darcy-Brinkman</b> . . . . .	<b>58</b>
2.4.1	Énoncé du problème . . . . .	58

---

## 2.1 Écoulement diphasique

Les écoulements à deux phases immiscibles dans un milieu poreux intervenant en géophysique sont nombreux. A titre d'exemple, mentionnons la récupération secondaire dans des réservoirs de pétrole et la séquestration de dioxyde de carbone dans des formations souterraines.

Une situation d'intérêt typique, est l'écoulement de l'eau et du pétrole dans un milieu poreux. Les variables d'intérêts sont les phases  $s_w$  et  $s_o$  représentant respectivement la saturation (fréquence ou rapport de taux) de la phase d'eau et celle du pétrole. Nous avons l'identité suivante :

$$s_w + s_o = 1. \quad (2.1)$$

Par conséquent, on peut décrire la dynamique en fonction de la saturation de l'une des deux phases. On note la saturation de l'eau  $s = s_w$  dans la discussion ci-dessous. La conservation de la masse pour chaque phase est donnée par (voir [3]) :

$$\phi \partial_t (\rho_i s_i) + \operatorname{div}(\rho_i v_i) = 0, \quad i \in \{w, o\}. \quad (2.2)$$

Ici, les vitesses des phases sont désignées respectivement par  $v_w$  et  $v_o$ ,  $\rho_i$  est la densité de la phase  $i = w, o$ , et  $\phi$  est la porosité. Compte tenu de l'identité (??), les deux vitesses de phase peuvent se résumer à produire la condition d'incompressibilité sous la condition que les densités soient constantes :

$$\operatorname{div}(v) = 0, \quad (2.3)$$

où  $v = v_w + v_o$  est la vitesse totale. Les vitesses de phase sont décrites par la loi de Darcy (voir [3]) :

$$v_i = -\frac{k_i(s_i)}{\mu_i} K \nabla p_i = -\lambda_i(s_i) K \nabla p_i, \quad i \in \{w, o\}. \quad (2.4)$$

La quantité  $k_i = k_i(s_i)$  est la perméabilité de la phase  $i$ ,  $p_i$  est la pression de la phase  $i$ ,  $\mu_i$  la viscosité de la phase  $i$ ,  $\lambda_i = \lambda_i(s_i) = \frac{k_i(s_i)}{\mu_i}$  la mobilité de la phase  $i$ . Notez que, nous avons négligé la gravité dans la loi de Darcy (la gravité peut être facilement

## 2.1 Écoulement diphasique

---

considérée, conduisant à un terme supplémentaire  $v_i = -\lambda_i(s_i)K(\nabla p_i - \rho_i \vec{g})$ , voir [3]).

Soit  $p_c(s) = p_w - p_o$  la pression capillaire qui est une fonction croissante par rapport à  $s$ , nous pouvons sommer (??) pour les deux phases et obtenir :

$$\begin{aligned}
 v &= -\lambda_w K \nabla p_w - \lambda_o K \nabla p_o = -\lambda_w K (\nabla p_o + \nabla p_c) - \lambda_o K \nabla p_o \\
 &= -\lambda K \nabla p_o - \lambda_w K \nabla p_c(s) \\
 &= -\lambda K \left( \nabla p_o + \frac{\lambda_w}{\lambda} p'_c(s) \nabla s \right) \\
 &= -\lambda K (\nabla p_o + \nabla \tilde{p}(s)), \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

où  $\tilde{p}'(s) = \frac{\lambda_w}{\lambda} p'_c(s)$  et  $\lambda = \lambda_w + \lambda_o$  étant la mobilité totale.

On note  $p = p_o + \tilde{p}(s)$  la pression globale, ce qui donne

$$v = -\lambda K \nabla p. \tag{2.6}$$

Utilisant (??), le gradient de pression dans (??) peut être éliminé et conduit à :

$$\begin{aligned}
 v_w &= -\lambda_w K \nabla p_w = -\lambda_w K \nabla (p_o + p_c) = -\lambda_w K \nabla (p - \tilde{p} + p_c) \\
 &= -\lambda_w K \nabla p - \alpha(s) K \nabla s, \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

avec  $\alpha(s) = -\frac{\lambda_w^2}{\lambda} p'_c + \lambda_w p'_c = -\frac{\lambda_w}{\lambda} p'_c (\lambda_w - \lambda) = \frac{\lambda_w \lambda_o}{\lambda} p'_c$ . De même on a

$$v_o = -\lambda_o K \nabla p + \alpha(s) K \nabla s. \tag{2.8}$$

Soit  $f$  la fonction fraction de flux définie par

$$f(s) = \frac{\lambda_w(s)}{\lambda(s)} = \frac{\lambda_w(s)}{\lambda_w(s) + \lambda_o(1-s)}. \tag{2.9}$$

L'équation de la saturation (??) pour l'eau peut être écrite sous la forme :

$$\phi \partial_t s - \operatorname{div}(f(s)\lambda(s)\nabla p) - \operatorname{div}(\alpha(s)K\nabla s) = 0 \tag{2.10}$$

La combinaison de l'équation de saturation (??) avec la condition d'incompressibilité (??) et l'équation de la pression, nous conduit aux équations d'évolution pour un

écoulement diphasique dans un milieu poreux :

$$\begin{cases} \phi \partial_t s + \operatorname{div}(f(s)\lambda(s)v) - \operatorname{div}(\alpha(s)K\nabla s) & = 0, \\ \operatorname{div}(v) & = 0, \\ v & = -\lambda(s)K\nabla p. \end{cases} \quad (2.11)$$

Les équations ci-dessus doivent être complétées par des conditions initiales et aux frontières convenables.

La perméabilité de phase  $k_w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction régulière monotone croissante avec  $k_w(0) = 0$  tandis que la perméabilité de phase  $k_o : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction régulière monotone décroissante avec  $k_o(1) = 0$ .

En outre, la mobilité totale est strictement positive c'est-à-dire,  $\lambda \geq \lambda_* > 0$  pour un certain  $\lambda_*$ .

Comme les deux équations d'écoulement diphasique (??) sont des lois de conservation, pour montrer qu'elles sont bien posées, nous aurons besoin de définir un concept convenable de solutions entropiques de ces équations. Ce fait a contribué à une difficulté de la preuve d'existence de solutions faibles globales des deux équations de flux de phase et ce problème est resté ouvert pendant de nombreuses décennies. La principale difficulté pour démontrer l'existence est le fait que le champ de pression  $\nabla p_i$  agit comme un coefficient dans l'équation de saturation (??). Bien que les lois de conservation avec des coefficients aient été largement étudiées au cours des dernières années, voir [1, 13, 6, 2] et les références qui s'y trouvent, l'état de l'art des résultats exige que le coefficient soit une fonction à variation bornée. Beaucoup de tentatives pour montrer que la fonction de la mobilité  $\lambda_i$  dans (??) est suffisamment régulière, par exemple, que c'est une fonction de à variation bornée ou avec suffisamment de régularité Sobolev, ont échouées. Les résultats partiels (avec des hypothèses fortes sur le champ de vitesse ou sur la solution) ont été obtenus dans [11, 16] et les références qui s'y trouvent.

L'introduction de la pression globale et la transformation de Kirchoff [? ?] ont permis d'obtenir des solutions faibles Les équations (??) forment un système parabolique-elliptique. Pour un champ de vitesse donnée l'équation de la saturation est une loi de conservation parabolique dégénérée. La condition d'incompressibilité fait que la vitesse peut être obtenue en résolvant une équation elliptique pour la pression  $p$ .

Une approche différente de celles citées ci-dessus, est de poser la question fondamentale, est-ce que la loi de Darcy (1.4) est correcte? De nombreuses études ont porté sur cette question et ont permis de constater que la loi de Darcy peut-être

## 2.1 Écoulement diphasique

---

insuffisante pour expliquer la dynamique de l'écoulement de fluide dans les milieux poreux, même pour une seule phase [4].

Plusieurs modifications de la loi de Darcy ont été proposées, voir [5]. Un intérêt particulier dans ce document est porté sur la modification de Brinkman [4]. Il est bien connu que cette modification explique la dynamique de l'écoulement dans certain milieu poreux, et semble mieux adapté que le modèle de Darcy dans de nombreuses situations, voir chapitre 1 pour plus de détails et [12, 15] et les références qui s'y trouvent. Le modèle Brinkman pour la vitesse de phase de chaque phase est donné par,

$$-\nu_i K \nabla^2 v_i + \mu_i v_i = -k_i K \nabla p_i, \quad i \in \{w, o\} \quad (2.12)$$

Ici,  $\nu_i$  est la viscosité effective. Notez que l'approximation de Brinkman ajoute un terme de régularisation dissipative à la loi de Darcy.

En additionnant les relations de vitesse de phase (??) pour les deux phases  $\{w, o\}$ , on obtient que la vitesse totale  $v = v_w + v_o$  satisfait,

$$-\mu K \nabla^2 v + v = -\lambda(s) K \nabla p, \quad (2.13)$$

pourvu que  $\mu = \frac{\nu_w}{\mu_w} = \frac{\nu_o}{\mu_o}$  (condition de compatibilité), afin que le système redonne la vitesse totale dans le cas où l'écoulement est incompressible (c'est à dire  $\mu = 0$ ). Appliquant l'opérateur divergence à l'équation (??) ci-dessus et en utilisant l'incompressibilité (??), nous obtenons l'équation elliptique suivante pour la pression.

$$-\operatorname{div}(\lambda(s) K \nabla p) = 0 \quad (2.14)$$

car dans le cas où le milieu est isotrope (c'est à dire  $K = k$  constante) on a

$$\operatorname{div} \Delta v = \sum_i \partial_{x_i} (\Delta v_i) = \sum_i \Delta \partial_{x_i} v_i = \Delta \operatorname{div} v = 0$$

et dans le cas où le milieu est anisotrope, on néglige le terme d'ordre 3 en vitesse  $\mu \operatorname{div} (K \nabla^2 v)$ . Ici, nous avons noté  $s = s_w$  la saturation de l'eau. En combinant cette équation avec la conservation de la masse de la phase d'eau et avec l'approximation de Brinkman (??) décrivant la vitesse de la phase d'eau et en utilisant la fonction de flux fractionnel définie en (??), nous obtenons le modèle Darcy-Brinkman diphasique

incompressible et immiscible suivant,

$$\begin{cases} \varphi \partial_t s + \operatorname{div}(v_w) & = 0, \\ -\mu K \nabla^2 v_w + v_w & = -f(s)\lambda(s)K \nabla p - \alpha(s)K \nabla s, \\ -\operatorname{div}(\lambda(s)K \nabla p) & = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Le système (??) est désormais qualifié comme la régularisation de Brinkman des écoulements diphasiques dans un milieu poreux. On remarque que le système de Darcy (??) peut être obtenu à partir de la régularisation de Brinkman (??) si on prend  $\mu = 0$ .

Appliquons formellement l'opérateur d'Helmholtz  $-\mu \operatorname{div} K \nabla + I$  à la première équation du système (??) et utilisons le fait que  $K \nabla^2 V = \operatorname{div}(K \nabla V)$  (cette égalité est vraie seulement dans le cas où  $K$  le tenseur homogène est une matrice symétrique), on obtient le système de Brinkman- Darcy suivant :

$$\begin{cases} \phi \partial_t s - \mu \phi \operatorname{div}(K \nabla \partial_t s) - \operatorname{div}(K f(s)\lambda(s)\nabla p) - \operatorname{div}(\alpha(s)K \nabla s) = 0, \\ -\operatorname{div}(\lambda(s)K \nabla p) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

On prend  $\phi = 1$  et  $K = cte = 1$  dans le reste de ce chapitre pour plus de simplicité. Le reste de ce chapitre concerne l'analyse du système de Brinkman (??). Il s'agit de définir une notion convenable de solutions pour (??) et de montrer que ces solutions existent.

## 2.2 Hypothèses sur les paramètres physiques et résultat principal

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné dans  $\mathbb{R}^d$ , dont le bord  $\partial\Omega$  est Lipschitz et soit  $\eta$  la normale sortante au bord de  $\Omega$ . On note  $Q_T := ]0, T[ \times \Omega$  où  $T > 0$  est un temps fixé. Le bord du  $\Omega$  est divisé en trois parties  $\partial\Omega = \Gamma_i \cup \Gamma_e \cup \Gamma_s$  et on note  $\Sigma_T = ]0, T[ \times \partial\Omega$ . Nous allons étudier le modèle Darcy-Brinkman suivant :

$$\partial_t s - \mu \Delta \partial_t s - \operatorname{div}(f(s)\lambda(s)\nabla p) - \operatorname{div}(\alpha(s)\nabla s) = 0, \quad (t, x) \in Q_T \quad (2.17)$$

$$-\operatorname{div}(\lambda(s)\nabla p) = 0, \quad (t, x) \in Q_T \quad (2.18)$$

$$\int_{\Omega} p(t, x) dx = 0, \quad \forall t > 0 \quad (2.19)$$

## 2.2 Hypothèses sur les paramètres physiques et résultat principal

---

Ce système est complété par les conditions aux bords sur  $\Sigma_T = ]0, T[ \times \partial\Omega$ ,

$$\lambda(s)\partial_\eta p(t, x) = \begin{cases} 0, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_i \\ q_e, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_e, \\ -q_s, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_s, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\mu\partial_\eta\partial_t s(t, x) + \alpha(s)\partial_\eta s(t, x) = 0, \quad t \in ]0, T[, x \in \Gamma_i \cup \Gamma_s \quad (2.21)$$

$$s(t, x) = 1, \quad t \in ]0, T[, x \in \Gamma_e \quad (2.22)$$

où  $\partial_\eta = \nabla \cdot \eta$  désigne la dérivée normale sortante au bord de  $\Omega$ , et par la condition initiale définie dans  $\Omega$  :

$$s(0, x) = s_0(x). \quad (2.23)$$

Sous les hypothèses suivantes :

**(H1)**  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue bornée telle que  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  avec  $0 \leq f \leq 1$  et  $\mu$  est une constante positive telle que  $0 < \mu \leq 1$ .

**(H2)** La mobilité totale  $\lambda$  est une fonction continue bornée telle que  $\lambda(\cdot) \geq \lambda_* > 0$  pour une certaine constante  $\lambda_*$ .

**(H3)** Le terme de pression capillaire  $\alpha$  est une fonction continue bornée positive telle que  $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$ .

**(H4)**  $\int_{\Gamma_e} q_e d\sigma = \int_{\Gamma_s} q_s d\sigma$  C'est la condition de compatibilité.

**(H5)**  $s_0 \in H^1(\Omega)$  est la donnée initiale avec  $s_0(x) = 1$  sur  $\Gamma_e$ .

On remarque que si  $s$  est une solution du problème (??)-(??) alors on peut remplacer  $s$  par  $1 - s$ . Alors  $s$  devient la solution du problème suivant

$$\partial_t s - \mu\Delta\partial_t s + \operatorname{div}(f(1-s)\lambda(1-s)\nabla p) - \operatorname{div}(\alpha(1-s)\nabla s) = 0, \quad (2.24)$$

$$- \operatorname{div}(\lambda(1-s)\nabla p) = 0, \quad (2.25)$$

$$\int_{\Omega} p(t, x) dx = 0, \quad (2.26)$$



avec les conditions aux bords suivantes

$$\lambda(1-s)\partial_\eta p(t,x) = \begin{cases} 0, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_i \\ q_e, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_e, \\ -q_s, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_s, \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\mu\partial_\eta\partial_t s(t,x) + \alpha(1-s)\partial_\eta s(t,x) = 0, \quad t \in ]0, T[, x \in \Gamma_i \cup \Gamma_s \quad (2.28)$$

$$s(t,x) = 0, \quad t \in ]0, T[, x \in \Gamma_e \quad (2.29)$$

$$s(0,x) = 1 - s_0(x), \quad x \in \Omega \quad (2.30)$$

Alors l'existence d'une solution du problème (??)-(??) est équivalente à l'existence d'une solution du problème (??)-(??). Pour cette raison, dans la suite de ce chapitre, on va chercher une solution du problème (??)-(??).

Maintenant on définit l'espace de Sobolev suivant :

$$H_M^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega); \int_\Omega u \, dx = 0 \right\}, \text{ et } H_{\Gamma_e}^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_e \right\}$$

Ensuite, nous introduisons la notion de solutions faibles du système (??)-(??) ci-dessous.

**Définition 2.1.** *On dit que  $(s, p) : Q_T \times Q_T \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , est une solution faible du système (??)-(??) si :  $\forall T > 0$ ,  $s \in W^{1,\infty}(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega))$ ,  $p \in L^\infty(0, T; H_M^1(\Omega))$ ; avec  $s(0, x) = 1 - s_0(x)$  p.p dans  $\Omega$  vérifiant pour tout  $\varphi \in L^1(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega))$  on a*

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \partial_t s \varphi \, dx \, dt + \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla \partial_t s \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega f(1-s)\lambda(1-s)\nabla p \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt \\ + \int_0^T \int_\Omega \alpha(1-s)\nabla s \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s)\varphi \, d\sigma \, dt; \end{aligned} \quad (2.31)$$

et pour tout  $\psi \in L^1(0, T; H^1(\Omega))$

$$\int_0^T \int_\Omega \lambda(1-s)\nabla p \cdot \nabla \psi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Gamma_e} q_e \psi \, d\sigma \, dt - \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s \psi \, d\sigma \, dt; \quad (2.32)$$

On a le théorème d'existence suivant.

**Théorème 2.1.** *Sous les hypothèses (H1)- (H5), le problème aux limites (??)-(??) admet une solution  $(s, p)$  au sens de la définition ??.*

**Preuve :** *La preuve est basée sur l'approximation récursive du système (??)-(??) ci-dessous. Nous commençons par définir  $s_0(t, x) = 1 - s_0(x)$ ,  $(t, x) \in Q_T$ , puis, La*

## 2.2 Hypothèses sur les paramètres physiques et résultat principal

---

fonction  $p_0 = p_0(t, x)$  est solution du problème elliptique suivant, avec les conditions aux limites de Neumann :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\lambda(1-s_0)\nabla p_0) = 0, \quad (t, x) \in Q_T \\ \lambda(1-s_0)\partial_\eta p_0(t, x) = \begin{cases} 0, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_i \\ q_e, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_e, \\ -q_s, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_s, \end{cases} \\ \int_{\Omega} p_0(t, x) dx = 0, \quad t > 0. \end{array} \right.$$

Ensuite, nous définissons  $s_1 = s_1(t, x)$  comme la solution du problème suivant

$$\partial_t s_1 - \mu \Delta \partial_t s_1 + \operatorname{div}(f(1-s_0)\lambda(1-s_0)\nabla p_0) - \operatorname{div}(\alpha(1-s_0)\nabla s_1) = 0, \quad (t, x) \in Q_T$$

avec

$$\begin{aligned} \mu \partial_\eta \partial_t s_1 + \alpha(1-s_0)\partial_\eta s_1 &= 0, \quad (t, x) \in ]0, T[ \times (\Gamma_i \cup \Gamma_s), \\ s_1(t, x) &= 0, \quad (t, x) \in ]0, T[ \times \Gamma_e. \end{aligned}$$

On définit alors l'algorithme suivant :

Pour  $s_n(t, x) \in W^{1,\infty}(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega))$  donné, on cherche  $(p_n, s_{n+1})$  solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\lambda(1-s_n)\nabla p_n) = 0, \quad (t, x) \in Q_T \\ \lambda(1-s_n)\partial_\eta p_n(t, x) = \begin{cases} 0, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_i \\ q_e, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_e, \\ -q_s, & t \in ]0, T[, x \in \Gamma_s, \end{cases} \\ \int_{\Omega} p_n(t, x) dx = 0, \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (2.33)$$

et de

$$\begin{aligned} \partial_t s_{n+1} - \mu \Delta \partial_t s_{n+1} + \operatorname{div}(f(1-s_n)\lambda(1-s_n)\nabla p_n) - \operatorname{div}(\alpha(1-s_n)\nabla s_{n+1}) &= 0, \\ \mu \partial_\eta \partial_t s_{n+1} + \alpha(1-s_n)\partial_\eta s_{n+1} &= 0, \quad ]0, T[ \times (\Gamma_i \cup \Gamma_s), \\ s_{n+1}(t, x) &= 0, \quad ]0, T[ \times \Gamma_e \end{aligned} \quad (2.34)$$

En absence du principe du maximum sur les itérés de l'algorithme, on prolonge toutes

les fonctions non linéaires par continuité sur  $\mathbb{R}$  :

$$f(1 - s_n) = \begin{cases} f(1) & \text{pour } s_n \leq 0 \\ f(1 - s_n) & \text{pour } 0 < s_n < 1 \\ f(0) & \text{pour } s_n \geq 1 \end{cases}$$

Dans la suite, on va prouver l'existence d'une solution  $(p_n, s_{n+1})$  du système (??)-(??) et établir quelques estimations d'énergie sur  $(p_n, s_{n+1})$  pour passer à la limite quand  $n \rightarrow \infty$ .

### 2.2.1 Existence et estimations d'énergie

**Proposition 2.1** (Estimation  $H^1$  sur  $p_n$ ). *Soit  $n \in \mathbb{N}$ , alors pour tout  $T > 0$ , il existe  $p_n \in L^\infty(0, T; H_M^1(\Omega))$  satisfaisant (??), de plus*

$$\|p_n(t, \cdot)\|_{H^1(\Omega)} \leq C, \quad (2.35)$$

pour une certaine constante  $C$  positive indépendante de  $n$ .

**Preuve :** On multiplie la première équation du (??) par  $\varphi \in H_M^1(\Omega)$  qui est un espace d'Hilbert pour la norme  $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$  et faisons une intégration par parties pour obtenir :

$$\int_{\Omega} \lambda(1 - s_n) \nabla p_n \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Gamma_e} q_e \varphi d\sigma - \int_{\Gamma_s} q_s \varphi d\sigma, \quad \forall \varphi \in H_M^1(\Omega). \quad (2.36)$$

D'après l'hypothèse **(H2)** on a  $\lambda(\cdot) \geq \lambda_*$ , donc d'après l'inégalité de Poincaré à moyenne nulle, la forme bilinéaire continue  $\int_{\Omega} \lambda(s_n) \nabla p_n \cdot \nabla \varphi dx$  coercive et du fait de la continuité de la forme linéaire du second membre, par le Théorème de Lax-Milgram, on déduit qu'il existe une unique solution  $p_n \in H_M^1(\Omega)$  vérifiant (??).

Finalement pour obtenir l'estimation (??), on considère  $\varphi = p_n$  comme fonction test dans (??), il vient :

$$\lambda_* \int_{\Omega} |\nabla p_n|^2 dx \leq \int_{\Omega} \lambda(1 - s_n) |\nabla p_n|^2 dx = \int_{\Gamma_e} q_e p_n d\sigma - \int_{\Gamma_s} q_s p_n d\sigma \leq \frac{C_1}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \int_{\partial\Omega} p_n^2 d\sigma,$$

où  $\epsilon > 0$  est une constante qui sera choisie plus tard et  $C_1 = 2(\max(q_e, q_s))^2 |\partial\Omega|$ .

## 2.2 Hypothèses sur les paramètres physiques et résultat principal

La condition de moyenne nulle sur  $p_n$  et la continuité de l'application trace donnent :

$$\lambda_* \int_{\Omega} |\nabla p_n|^2 dx \leq \frac{C_1}{\epsilon} + \frac{\epsilon c_T}{2} \int_{\Omega} |\nabla p_n|^2 dx,$$

où  $c_T$  est la constante de la continuité de l'application trace. En choisissons  $\epsilon = \frac{\lambda_*}{c_T}$ , nous obtenons

$$\int_{\Omega} |\nabla p_n|^2 dx \leq \frac{c_T C_1}{\lambda_*}$$

la condition de moyenne nulle sur  $p_n$  donne :  $\|p_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla p_n\|_{L^2(\Omega)}$  d'où le résultat.  $\square$

**Remarque 2.1.** Si  $\psi \in H^1(\Omega)$ , nous prenons  $\phi = \psi - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \psi dx$  et utilisons l'hypothèse **(H4)** pour obtenir l'égalité (??) pour tout  $\psi \in H^1(\Omega)$  i.e :

$$\int_{\Omega} \lambda(s_n) \nabla p_n \cdot \nabla \psi dx = \int_{\Gamma_e} q_e \psi d\sigma - \int_{\Gamma_s} q_s \psi d\sigma, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \quad (2.37)$$

**Proposition 2.2** (Estimation sur  $s_n$ ). Pour  $n \in \mathbb{N}$ , sous l'hypothèse que  $(s_n, p_n) \in W^{1,\infty}(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega)) \times L^\infty(0, T; H_M^1(\Omega))$ , alors il existe une unique  $s_{n+1} \in W^{1,\infty}(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega))$ , satisfaisant (??). De plus, pour tout  $t > 0$ , on a

$$\|s_{n+1}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq g(t) + C(\mu) \int_0^t g(s) \exp(C(\mu)(t-s)) ds, \quad (2.38)$$

$$\|\partial_t s_{n+1}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_2(\mu) \left( g(t) + \int_0^t g(s) \exp(C(\mu)(t-s)) ds \right), \quad (2.39)$$

où  $C, C_1$  et  $C_2$  sont des constantes positives dépendantes de  $\mu$ , indépendantes de  $n$ , avec

$$g(t) = C_1(\mu) + \frac{1}{2} \|1 - s_0(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla s_0(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

**Preuve :** On considère l'équation suivante

$$\partial_t s_{n+1} - \mu \Delta \partial_t s_{n+1} + \operatorname{div} \left( f(1 - s_n) \lambda(1 - s_n) \nabla p_n \right) - \operatorname{div} \left( \alpha(1 - s_n) \nabla s_{n+1} \right) = 0, \quad (2.40)$$

avec pour conditions au bord celles du système (??). Nous allons construire des solutions approchées à l'aide de la méthode de Faedo-Galerkin. Il existe une base

hilbertienne  $(w_k)_{k \geq 1}$  de  $L^2(\Omega)$  telle que pour tout  $k$ ,  $w_k \in H_{\Gamma_e}^1(\Omega)$  et

$$\begin{cases} -\Delta w_k - \lambda_k w_k = 0, & \forall x \in \Omega \\ \nabla w_k \cdot \eta = 0, & \forall x \in \Gamma_i \cup \Gamma_s. \\ w_k = 0, & \forall x \in \Gamma_e, \end{cases}$$

où  $(\lambda_k)_k$  sont les valeurs propres (strictement positives) associées aux vecteurs propres  $(w_k)_k$ . De plus, cette base hilbertienne  $(w_k)_{k \geq 1}$  est une base orthogonale de  $H_{\Gamma_e}^1(\Omega)$  [voir d'Allaire (2005)]. Nous avons  $\Delta \Delta w_k = -\lambda_k \Delta w_k = \lambda_k^2 w_k$ , où  $w_k \in L^2(\Omega)$  donc  $w_k \in H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_e}^1(\Omega)$ . Cela implique que  $w_k \in L^\infty(\Omega)$  (voir Brezis, 1983).

Soit  $H_m := \text{vect} \langle w_1, \dots, w_m \rangle$ , l'espace vectoriel engendré par les  $m$  premières fonctions de la base  $(w_k)_{k \geq 1}$ . Le problème approché consiste à trouver  $s_{n+1}^m \in \mathcal{C}^1([0, T[, H_{\Gamma_e}(\Omega))$  sous la forme

$$s_{n+1}^m = \sum_{k=1}^m d_{n,m}^k(t) w_k(x), \quad (2.41)$$

et on choisit les coefficients  $d_{n,m}^k(t)$  pour tout  $k = 1, \dots, m$  tel que :

$$d_{n,m}^k(0) = (1 - s_0(\cdot), w_k). \quad (2.42)$$

On prend  $s_m^{n+1}$  comme une solution du système d'équations (??) suivante pour toute fonction  $w_k$  appartenant à  $H_m(\Omega)$ ,  $k = 1, \dots, m$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t s_{n+1}^m w_k dx + \mu \int_{\Omega} \nabla \partial_t s_{n+1}^m \cdot \nabla w_k dx - \int_{\Omega} f(1 - s_n) \lambda (1 - s_n) \nabla p_n \cdot \nabla w_k dx \\ + \int_{\Omega} \alpha (1 - s_n) \nabla s_{n+1}^m \cdot \nabla w_k dx - \int_{\Gamma_s} q_s f(1 - s_n) w_k d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

**Lemme 2.1.** Pour chaque entier  $m$ , il existe une unique fonction  $s_{n+1}^m$  définie par

$$s_{n+1}^m = \sum_{k=1}^m d_{n,m}^k(t) w_k(x), \text{ satisfaisant (??) et (??).}$$

**Preuve :** D'après la structure de la fonction  $s_{n+1}^m(t)$  dans (??) on a

$$\left( \partial_t s_{n+1}^m(t), w_k \right)_{L^2(\Omega)} = (d_{n,m}^k)'(t) \text{ et } \left( \nabla \partial_t s_{n+1}^m(t), \nabla w_k \right)_{L^2(\Omega)} = (d_{n,m}^k)'(t) \int_{\Omega} \nabla w_k \cdot \nabla w_k,$$

## 2.2 Hypothèses sur les paramètres physiques et résultat principal

ainsi l'équation (??) devient pour  $k = 1, \dots, m$

$$(d_{n,m}^k)'(t) + \mu (d_{n,m}^k)'(t) \int_{\Omega} \nabla w_k \cdot \nabla w_k dx - \int_{\Omega} f(1 - s_n) \lambda(1 - s_n) \nabla p_n \cdot \nabla w_k dx + \sum_{j=1}^m d_{n,m}^j(t) \int_{\Omega} \alpha(1 - s_n) \nabla w_j \cdot \nabla w_k = \int_{\Gamma_s} q_s f(1 - s_n) w_k d\sigma. \quad (2.44)$$

on réécrit (??) sous la forme d'un système différentiel ordinaire :

$$AY'(t) + B(t)Y(t) = Z(t) \quad (2.45)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \mu \|\nabla w_1\|_{L^2}^2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 + \mu \|\nabla w_m\|_{L^2}^2 \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \left( \int_{\Omega} \alpha(1 - s_n(t)) \nabla w_i \cdot \nabla w_j \right)_{i,j=1,\dots,m},$$

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} f(1 - s_n(t)) \lambda(1 - s_n(t)) \nabla p_n(t) \cdot \nabla w_1 dx + \int_{\Gamma_s} q_s f(1 - s_n(t)) w_1 d\sigma \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \int_{\Omega} f(1 - s_n(t)) \lambda(1 - s_n(t)) \nabla p_n(t) \cdot \nabla w_m dx + \int_{\Gamma_s} q_s f(1 - s_n(t)) w_m d\sigma \end{pmatrix}.$$

Comme  $A$  est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs, alors  $A$  est inversible et puisque  $B(t)$  et  $Z(t)$  sont continues par rapport à  $t$ , alors il existe une unique solution  $Y(t) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^m)$  du système (??).  $\square$

Nous allons établir les estimations (??)-(??). Pour cela, on multiplie (??) par  $d_{n,m}^k(t)$  pour  $k = 1, \dots, m$  pour obtenir :

$$\int_{\Omega} \partial_t s_{n+1}^m \cdot s_{n+1}^m dx + \mu \int_{\Omega} \nabla \partial_t s_{n+1}^m \cdot \nabla s_{n+1}^m dx + \int_{\Omega} \alpha(1 - s_n) |\nabla s_{n+1}^m|^2 dx - \int_{\Omega} f(1 - s_n) \lambda(1 - s_n) \nabla p_n \cdot \nabla s_{n+1}^m dx - \int_{\Gamma_s} q_s f(1 - s_n) s_{n+1}^m d\sigma = 0, \quad (2.46)$$

mais  $\partial_t s_{n+1}^m \cdot s_{n+1}^m = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |s_{n+1}^m|^2$  et  $\nabla \partial_t s_{n+1}^m \cdot \nabla s_{n+1}^m = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla s_{n+1}^m|^2$ , d'où :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |s_{n+1}^m|^2 dx + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla s_{n+1}^m|^2 dx + \int_{\Omega} \alpha(1-s_n) |\nabla s_{n+1}^m|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} f(1-s_n) \lambda(1-s_n) \nabla p_n \cdot \nabla s_{n+1}^m dx + \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s_n) s_{n+1}^m d\sigma, \end{aligned} \quad (2.47)$$

on intègre sur  $[0, t]$  :

$$\begin{aligned} & \|s_{n+1}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla s_{n+1}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \alpha(1-s_n) |\nabla s_{n+1}^m|^2 dx dt = \|1-s_0(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla s_0(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ 2 \int_0^t \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s_n) s_{n+1}^m d\sigma dt + 2 \int_0^t \int_{\Omega} f(1-s_n) \lambda(1-s_n) \nabla p_n \cdot \nabla s_{n+1}^m dx dt. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Puisque  $\alpha(1-s_n) \geq 0$  alors  $\int_0^t \int_{\Omega} \alpha(1-s_n) |\nabla s_{n+1}^m|^2 dx dt \geq 0$ . En outre, d'après les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on a pour tout  $0 < \beta < 1$

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \int_{\Omega} f(1-s_n) \lambda(1-s_n) \nabla p_n \cdot \nabla s_{n+1}^m dx dt \right| \\ & \leq \beta \int_0^t \|\nabla s_{n+1}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{4\beta} \int_0^t \|f\lambda\|_{L^\infty} \|\nabla p_n\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & \leq \beta \int_0^t \|\nabla s_{n+1}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{C}{4\beta} \|f\lambda\|_{L^\infty} t \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $n$  et  $m$ . D'après la continuité de l'application trace et l'inégalité de Cauchy-schwarz on a

$$\left| \int_0^t \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s_n) s_{n+1}^m d\sigma dt \right| \leq \beta C_1 \int_0^t \|s_{n+1}^m\|_{H_{\Gamma_s}^1(\Omega)}^2 dt + \frac{q_s^2 |\Omega|}{4\beta} \|f\|_{L^\infty}^2 t.$$

Donc pour un certain  $0 < \beta < 1$  suffisamment petit, on a

$$\|s_{n+1}^m\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C(\mu) \int_0^t \|s_{n+1}^m\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + g(t). \quad (2.49)$$

où  $g(t) = C_1(\mu)t + \frac{1}{2} \|1-s_0(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla s_0(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2$ .

La fonction  $g$  étant dans  $L^1(0, T)$ , d'après le lemme de Grönwall, on déduit de (??)

$$\|s_{n+1}^m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq g(t) + C(\mu) \int_0^t g(s) \exp(C(\mu)(t-s)) ds. \quad (2.50)$$

## 2.2 Hypothèses sur les paramètres physiques et résultat principal

L'estimation sur la dérivée en temps est obtenue en multipliant (??) par  $(d_{n,m}^k)'(t)$  pour  $k = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} & \|\partial_t s_{n+1}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla \partial_t s_{n+1}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \alpha(1 - s_n) \nabla s_{n+1}^m \cdot \nabla \partial_t s_{n+1}^m dx \\ &= \int_{\Omega} f(1 - s_n) \lambda(1 - s_n) \nabla p_n \cdot \nabla \partial_t s_{n+1}^m dx + \int_{\Gamma_s} q_s f(1 - s_n) \partial_t s_{n+1}^m d\sigma. \end{aligned}$$

Comme précédemment dans la preuve d'estimation (??) et en utilisant le fait que la fonction  $\alpha$  est bornée on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\partial_t s_{n+1}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla \partial_t s_{n+1}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \zeta \|\nabla \partial_t s_{n+1}^m\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + (\eta + \gamma) \|\nabla \partial_t s_{n+1}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ C_3(\eta) \|\nabla s_{n+1}^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_4(\eta, \zeta, \gamma) \end{aligned}$$

où  $C_3, C_4$  sont des constantes positives indépendantes de  $m$  et  $n$  avec  $\zeta, \eta$  et  $\gamma$  sont des constantes positives à choisir suffisamment petites. On déduit alors de l'estimation (??) et de la continuité de l'application trace, que

$$\|\partial_t s_{n+1}^m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_2(\mu) \left( g(t) + \int_0^t g(s) \exp(C(\mu)(t-s)) ds \right) \quad (2.51)$$

avec  $C_2$  une constante positive dépendant seulement de  $\mu$ .

Donc d'après les estimations d'énergies (??) et (??), les suites  $(s_{n+1}^m)_m$  et  $(\partial_t s_{n+1}^m)_m$  sont bornées dans  $L^\infty(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega))$  et  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$  respectivement pour tout  $T > 0$ , donc il existe une sous suite  $(s_{n+1}^{m_l})_{m_l}$  de  $(s_{n+1}^m)_m$  telle que :

$$\begin{aligned} s_{n+1}^{m_l} &\overset{*}{\rightharpoonup} s_{n+1}, \text{ converge faible* dans } L^\infty(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega)) \\ \partial_t s_{n+1}^{m_l} &\overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t s_{n+1}, \text{ converge faible* dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ainsi,

$$\|s_{n+1}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq g(t) + C(\mu) \int_0^t g(s) \exp(C(\mu)(t-s)) ds \quad (2.53)$$

$$\|\partial_t s_{n+1}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_2(\mu) \left( g(t) + \int_0^t g(s) \exp(C(\mu)(t-s)) ds \right). \quad (2.54)$$

On fixe un entier  $N > 0$  et on choisit une fonction  $v_N \in C^1(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega))$  admettant la forme suivante :  $v_N(t) = \sum_{k=1}^N \theta^k(t) w_k$ , tel que  $\{\theta^k\}_{k=1}^N \subset \mathcal{D}([0, T])$ . On choisit  $m \geq N$ , et on multiplie (??) par  $\theta^k$  pour  $k = 1, \dots, N$  et on intègre par rapport à  $t$ ,



on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t s_{n+1}^m v_N dxdt + \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \partial_t s_{n+1}^m \cdot \nabla v_N dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} \alpha(1-s_n) \nabla s_{n+1}^m \cdot \nabla v_N dxdt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} f(1-s_n) \lambda(1-s_n) \nabla p_n \cdot \nabla v_N dxdt - \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s_n) v_N d\sigma dt = 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Les convergences faibles (??), suffisent pour passer à la limite pour obtenir

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t s_{n+1} v_N dxdt + \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \partial_t s_{n+1} \cdot \nabla v_N dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} \alpha(1-s_n) \nabla s_{n+1} \cdot \nabla v_N dxdt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} f(1-s_n) \lambda(1-s_n) \nabla p_n \cdot \nabla v_N dxdt - \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s_n) v_N d\sigma dt = 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

On rappelle que  $V_N = \left\{ \sum_{k=1}^N \theta^k w_k, \theta^k \in D([0, T]), \{w_k\}_k \text{ base de } H_{\Gamma_e}^1(\Omega) \right\}$  est dense dans  $C^1(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega))$  [?]. Puis comme  $C^1(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega))$  est dense dans  $L^1(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega))$  alors on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t s_{n+1} \varphi dxdt + \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \partial_t s_{n+1} \cdot \nabla \varphi dxdt - \int_0^T \int_{\Omega} f(1-s_n) \lambda(1-s_n) \nabla p_n \cdot \nabla \varphi dxdt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \alpha(1-s_n) \nabla s_{n+1} \cdot \nabla \varphi dxdt - \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s_n) \varphi d\sigma dt = 0, \forall \varphi \in L^1(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Il reste à montrer que  $s_{n+1}(0, x) = s_0(x)$  et l'unicité de  $s_{n+1}$ . D'après (??), pour tout  $v \in C^1(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega))$  avec  $v(T, \cdot) = 0$ , on a

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} s_{n+1} \partial_t v dxdt + \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \partial_t s_{n+1} \cdot \nabla v dxdt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} \alpha(1-s_n) \nabla s_{n+1} \cdot \nabla v dxdt - \int_0^T \int_{\Omega} f(1-s_n) \lambda(1-s_n) \nabla p_n \cdot \nabla v dxdt \\ & = \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s_n) v d\sigma dt + \int_{\Omega} s_{n+1}(0, x) v(0, x) dx. \end{aligned} \quad (2.58)$$

## 2.2 Hypothèses sur les paramètres physiques et résultat principal

---

De même d'après (??) on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} s_{n+1}^m \partial_t v \, dx dt + \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \partial_t s_{n+1}^m \cdot \nabla v \, dx dt \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} f(1-s_n) \lambda(1-s_n) \nabla p_n \cdot \nabla v \, dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \alpha(1-s_n) \nabla s_{n+1}^m \cdot \nabla v \, dx \\ & = \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s_n) v \, d\sigma dt + \int_{\Omega} s_0 v(0, x) \, dx. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Maintenant si on passe à la limite quand  $m \rightarrow \infty$  dans (??) et (??) et comparons les résultats on obtient que :

$$s_0(x) = s_{n+1}(0, x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Pour l'unicité il suffit de prendre  $s_0 = 0$ ,  $p_n = 0$  et  $q_s = 0$  et démontrer que  $s_{n+1} = 0$ . L'assertion découle d'après l'inégalité (??).  $\square$

### 2.2.2 Passage à la limite sur $n$

**Preuve du théorème ??.** D'après les Proposition ?? et ??, les estimations d'énergies (??), (??) et (??) qui sont indépendantes de  $n$ , on peut extraire une sous suite telle que

$$s_{n_k} \xrightarrow{*} s, \text{ faible* dans } L^\infty(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega)), \quad (2.60)$$

$$\partial_t s_{n_k} \xrightarrow{*} \partial_t s, \text{ faible* dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad (2.61)$$

$$p_{n_k} \xrightarrow{*} p, \text{ faible* dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)). \quad (2.62)$$

De plus, si on utilise le théorème d'Aubin-Simon on obtient

$$s_{n_k} \rightarrow s, \text{ fortement dans } \mathcal{C}^0(0, T, L^2(\Omega)) \text{ et p.p dans } Q_T. \quad (2.63)$$

et on a :

$$\nabla p_{n_k} \rightharpoonup \nabla p, \text{ faiblement dans } L^2(Q_T), \quad T > 0. \quad (2.64)$$

**Chapter 2. Analyse mathématique du modèle de Darcy-Brinkman diphasique  
incompressible et immiscible**

---

Par conséquent, d'après les convergences (??)-(??) on passe à la limite dans (??) et (??) on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t s \varphi \, dx dt + \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \partial_t s \cdot \nabla \varphi \, dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} f(1-s)\lambda(1-s)\nabla p \cdot \nabla \varphi \, dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \alpha(1-s)\nabla s \cdot \nabla \varphi \, dx dt = \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s) \varphi \, d\sigma dt, \quad \forall \varphi \in L^1(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega)), \\ & \int_{\Omega} \lambda(s)\nabla p \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Gamma_e} q_e \psi \, d\sigma - \int_{\Gamma_s} q_s \psi \, d\sigma. \quad \forall \psi \in L^1(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Il est clair que (??)-(??), et les propositions ?? et ?? et la faible semi-continuité inférieure des normes donnent les estimations suivantes

$$\|p(t, \cdot)\|_{H^1(\Omega)} \leq C, \quad (2.65)$$

$$\|s(t, \cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq g(t) + C(\mu) \int_0^t g(s) \exp(C(\mu)(t-s)) \, ds, \quad (2.66)$$

$$\|\partial_t s(t, \cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_2(\mu) \left( g(t) + \int_0^t g(s) \exp(C(\mu)(t-s)) \, ds \right) \quad (2.67)$$

pour presque tout  $t > 0$ , où  $C, C(\mu), C_1(\mu)$  et  $C_2(\mu)$  sont des constantes positives dépendant de  $\mu$  et  $g(t) = C_1(\mu) + \frac{1}{2}\|s_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{2}\|\nabla s_0\|_{L^2(\Omega)}^2$ .  $\square$

**Remarque 2.2.** Si  $\Omega$  est de classe  $C^{1,1}$  et  $\frac{\lambda'}{\lambda}$  est bornée alors  $p \in L^\infty(0, T; H_M^1(\Omega) \cap W^{2,1}(\Omega))$ . En effet, grâce à l'équation (??) on a

$$\Delta p = -\frac{\lambda'(s)}{\lambda(s)} \nabla p \cdot \nabla s,$$

et comme  $\frac{\lambda'}{\lambda}$  alors d'après les inégalités (??)-(??) le second membre est borné dans  $L^1(\Omega)$

$$\|\Delta p(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \left( \|\nabla p(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla s(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \left\| \frac{\lambda'(s)}{\lambda(s)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

et puisque  $p$  vérifie la condition au bord (??) alors d'après le Théorème de régularité elliptique classique on a

$$p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega) \cap W^{2,1}(\Omega))$$

## 2.3 Principe de maximum

**Théorème 2.2** (Principe de maximum). *Soit  $(s, p)$  une solution faible du système (??)-(??). Si  $0 \leq s_0(x) \leq 1$ , pour tout  $x \in \Omega$ , alors  $0 \leq s(t, x) \leq 1$ ,  $\forall (t, x) \in Q_T$ .*

**Preuve :** Soient,  $f^+ = \frac{|f| + f}{2}$  et  $f^- = \frac{|f| - f}{2}$ .

Prouvons que  $s(t, x) \geq 0$  pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ . Pour cela, on va montrer que  $s^- = 0$ . On prend  $\varphi = -s^-$  comme une fonction test dans (??) pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |s^-|^2 dx + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla s^-|^2 dx + \int_{\Omega} f(1-s)\lambda(1-s)\nabla p \cdot \nabla s^- dx \\ + \int_{\Omega} \alpha(1-s)|\nabla s^-|^2 dx = - \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s)s^- d\sigma, \end{aligned}$$

puisque  $f$  est une fonction continue telle que  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ , on rappelle qu'on prolonge par continuité  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par  $f = 0$  sur  $] -\infty, 0]$  et  $f = 1$  sur  $[1, +\infty[$ . d'où

$$\int_{\Omega} f(1-s)\lambda(1-s)\nabla p \cdot \nabla s^- dx = \int_{\Omega} \lambda(1)\nabla p \cdot \nabla s^- dx = \int_{\Gamma_e} q_e s^- d\sigma - \int_{\Gamma_s} q_s s^- d\sigma.$$

et  $\int_{\Gamma_s} q_s f(1-s)s^- = \int_{\Gamma_s} q_s s^-$ , ce qui donne

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |s^-|^2 dx + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla s^-|^2 dx + \int_{\Omega} \alpha(1-s)|\nabla s^-|^2 dx = - \int_{\Gamma_e} q_e s^- d\sigma,$$

Et comme  $\alpha \geq 0$  et  $q_e \geq 0$  on déduit

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |s^-|^2 dx + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla s^-|^2 dx \leq 0.$$

Finalement, si on intègre par rapport à  $t$  sur  $[0, t]$  et on utilise le fait que  $0 \leq s_0 \leq 1$  i.e  $s_0^- = 0$  on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |s^-|^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla s^-|^2 dx \leq 0,$$

d'où  $s(t, x) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et pour presque tout  $x \in \Omega$ .

Prouvons que  $s \leq 1$  pour tout  $t \in [0, T]$  et pour presque tout  $x \in \Omega$ . Comme  $s = 0$  sur  $\Gamma_e$ , alors  $(s-1)^+ = 0$  sur  $\Gamma_e$ , donc on peut prendre  $(s-1)^+$  comme une fonction

test dans (??) pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |(s-1)^+|^2 dx + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla(s-1)^+|^2 dx - \int_{\Omega} f(1-s)\lambda(1-s)\nabla p \cdot \nabla(s-1)^+ dx \\ + \int_{\Omega} \alpha(1-s)|\nabla(s-1)^+|^2 dx = \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s)(s-1)^+ d\sigma, \end{aligned}$$

puisque  $f(s) = 0$  si  $s \leq 0$  alors

$$\int_{\Omega} f(1-s)\lambda(1-s)\nabla p \cdot \nabla(s-1)^+ = 0, \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s)(s-1)^+ d\sigma = 0.$$

d'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |(s-1)^+|^2 dx + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla(s-1)^+|^2 dx \leq 0.$$

Finalemnt, si on intègre par rapport à  $t$  sur  $[0, t]$  et utilise le fait que  $0 \leq s_0 \leq 1$  i.e  $(s_0 - 1)^+ = 0$  on obtient :

$$\int_{\Omega} |(s-1)^+|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla(s-1)^+|^2 dx \leq 0,$$

d'où  $s(t, x) \leq 1$  pour tout  $t \in [0, T]$  et pour presque tout  $x \in \Omega$ . □

## 2.4 Étude asymptotique du système Darcy-Brinkman

Dans cette section on va étudier le comportement de système de Darcy-Brinkman quand  $\mu \rightarrow 0$ . On montre rigoureusement que le modèle de Darcy-Brinkman converge vers celui de Darcy quand  $\mu \rightarrow 0$ .

### 2.4.1 Énoncé du problème

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné dans  $\mathbb{R}^d$ , dont le bord  $\partial\Omega$  est Lipschitz et  $\eta$  est la normale sortante au bord de  $\Omega$ . On note  $Q_T := ]0, T[ \times \Omega$  où  $T > 0$  est un temps fixé. Le bord de  $\Omega$  est divisé en trois parties  $\partial\Omega = \Gamma_i \cup \Gamma_e \cup \Gamma_s$  et on note  $\Sigma_T = ]0, T[ \times \partial\Omega$ .

## 2.4 Étude asymptotique du système Darcy-Brinkman

Nous allons étudier le système suivante quand  $\mu \rightarrow 0$  :

$$\partial_t s_\mu - \mu \Delta \partial_t s_\mu - \operatorname{div}(f(s_\mu) \lambda(s_\mu) \nabla p) - \operatorname{div}(\alpha(s_\mu) \nabla s_\mu) = 0, \quad (t, x) \in Q_T \quad (2.68)$$

$$- \operatorname{div}(\lambda(s_\mu) \nabla p_\mu) = 0, \quad (t, x) \in Q_T \quad (2.69)$$

$$\int_{\Omega} p_\mu(t, x) dx = 0, \quad \forall t > 0 \quad (2.70)$$

Ce système est complété, pour tout  $t \in ]0, T[$ , par les conditions aux bords sur  $\Sigma_T$ ,

$$\lambda(s_\mu) \partial_\eta p_\mu(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \Gamma_i \\ q_e, & \text{si } x \in \Gamma_e, \\ -q_s, & \text{si } x \in \Gamma_s, \end{cases} \quad (2.71)$$

$$\mu \partial_\eta \partial_t s_\mu(t, x) + \partial_\eta s_\mu(t, x) = 0, \quad x \in \Gamma_i \cup \Gamma_s \quad (2.72)$$

$$s_\mu(t, x) = 1, \quad x \in \Gamma_e \quad (2.73)$$

et la condition initiales définie dans  $\Omega$  :

$$s_\mu(0, x) = s_0(x). \quad (2.74)$$

Comme précédemment, nous noterons par  $(s, p)$  le vecteur solution asymptotique du système (??)-(??) sous les hypothèses **(H1)**- **(H4)** avec  $\mu \rightarrow 0$ . Nous allons introduire une définition de solutions asymptotiques faibles du système (??)-(??).

**Définition 2.2.** *On dit que le couple des fonctions  $(s, p)$  définies sur  $Q_T$  est une solution asymptotique faible du système (??)-(??) si  $s(0, x) = 1 - s_0(x)$  et pour tout  $T > 0$ , on a  $s \in L^\infty(Q_T)$ ,  $p \in L^\infty(0, T; H_M^1(\Omega))$ ,  $\sqrt{\alpha(1-s)} \nabla s \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  et pour tout  $\varphi \in L^1(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega))$  on a*

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t s \varphi \rangle dt - \int_0^T \int_{\Omega} f(1-s) \lambda(1-s) \nabla p \cdot \nabla \varphi dx dt \\ + \int_0^T \int_{\Omega} \sqrt{\alpha(1-s)} \nabla \beta(s) \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s) \varphi dx dt; \end{aligned} \quad (2.75)$$

et pour tout  $\psi \in L^1(0, T; H^1(\Omega))$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \lambda(1-s) \nabla p \cdot \nabla \psi dx dt = \int_0^T \int_{\Gamma_e} q_e \psi d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s \psi d\sigma dt; \quad (2.76)$$

De même, dans cette formulation variationnelle, on a remplacé  $s$  par  $1 - s$  avec

$$\beta(s) = \int_0^s \sqrt{\alpha(1-\zeta)} d\zeta.$$

**Théorème 2.3.** *Supposons que les hypothèses (H1)- (H5) sont vérifiées avec l'inverse de  $\beta(s)$  est continue . Alors quand  $\mu \rightarrow 0$ , le système (??)-(??) possède une solution asymptotique faible au sens de la définition ??.*

**Preuve :** *Tout d'abord, on a pour chaque  $\mu$  fixé, il existe une solution  $(s_\mu, p_\mu)$  du système (??)-(??) au sens de la définition ?? avec  $s_\mu \in L^\infty(Q_T)$ . Donc il faut montrer que cette solution admet une limite et cette limite est la solution asymptotique faible du (??)-(??) au sens de la définition ??.*

*Pour cela, on remplace  $s$  par  $1 - s$  dans (??)-(??) et on multiplie l'équation (??) par  $\varphi \in L^2(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega))$ , l'équation (??) par  $\psi \in L^2(0, T; H_M^1(\Omega))$ , et intègre sur  $\Omega$  pour obtenir*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t s_\mu \varphi \, dx + \mu \int_{\Omega} \nabla \partial_t s_\mu \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} f(1-s_\mu) \lambda(1-s_\mu) \nabla p_\mu \cdot \nabla \varphi \, dx \\ + \int_{\Omega} \alpha(1-s_\mu) \nabla s_\mu \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s_\mu) \varphi \, dx; \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\int_{\Omega} \lambda(1-s_\mu) \nabla p_\mu \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Gamma_e} q_e \psi \, d\sigma - \int_{\Gamma_s} q_s \psi \, d\sigma. \quad (2.78)$$

*En prenant  $\psi = p_\mu$  dans (??), on obtient*

$$\int_{\Omega} \lambda(1-s_\mu) \nabla p_\mu \cdot \nabla p_\mu \, dx = \int_{\Gamma_e} q_e p_\mu \, d\sigma - \int_{\Gamma_s} q_s p_\mu \, d\sigma,$$

*et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la continuité de la fonction trace et l'inégalité de Poincaré à moyenne nulle, on en déduit*

$$\|p_\mu\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla p_\mu|^2 \, dx \leq C_1, \quad (2.79)$$

*où  $C$  et  $C_1$  sont indépendantes de  $\mu$ .*

*Pour la saturation, on prend  $\varphi = s_\mu$  dans (??) pour obtenir*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t s_\mu s_\mu \, dx + \mu \int_{\Omega} \nabla \partial_t s_\mu \cdot \nabla s_\mu \, dx - \int_{\Omega} f(1-s_\mu) \lambda(1-s_\mu) \nabla p \cdot \nabla s_\mu \, dx \\ + \int_{\Omega} \alpha(1-s_\mu) \nabla s_\mu \cdot \nabla s_\mu \, dx = \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s_\mu) s_\mu \, dx, \end{aligned}$$

*ce qui donne grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (??)*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |s_\mu|^2 \, dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\sqrt{\mu} \nabla s_\mu|^2 \, dx + \int_{\Omega} \alpha(1-s_\mu) |\nabla s_\mu|^2 \, dx \leq C_2 \int_{\Omega} |s_\mu|^2 \, dx + C_3.$$

## 2.4 Étude asymptotique du système Darcy-Brinkman

Finalemment, d'après le lemme de Gronwall on obtient

$$\|s_\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sqrt{\mu}\nabla s_\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sqrt{\alpha(1-s_\mu)}\nabla s_\mu\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C_4 \quad (2.80)$$

où  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  sont des constantes positives indépendantes de  $\mu$ . Par ailleurs, si on prend  $\varphi = \mu\partial_t s_\mu$  dans (??), on obtient

$$\begin{aligned} \mu \int_{\Omega} |\partial_t s_\mu|^2 dx + \mu^2 \int_{\Omega} |\nabla \partial_t s_\mu|^2 dx - \mu \int_{\Omega} f(1-s_\mu)\lambda(1-s_\mu)\nabla p_\mu \cdot \nabla \partial_t s_\mu dx \\ + \mu \int_{\Omega} \alpha(1-s_\mu)\nabla s_\mu \cdot \nabla \partial_t s_\mu dx = \mu \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s_\mu)\partial_t s_\mu dx, \end{aligned}$$

d'où, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young ( $ab \leq \frac{\mu}{4}a^2 + \frac{1}{\mu}b^2$ ), la continuité du fonction trace et les estimations (??)-(??) on a

$$\mu\|\partial_t s_\mu\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\mu\nabla \partial_t s_\mu\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C_5 \quad (2.81)$$

où  $C_5$  est une constante positive indépendant de  $\mu$ . On peut déduire des estimations (??)-(??), qu'on a pour tout  $\varphi \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ ,

$$\int_0^T \langle \partial_t s, \varphi \rangle_{H^{-1}H^1} dt \leq C\|\varphi\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2$$

d'où,

$$(\partial_t s_\mu)_\mu \text{ est une suite bornée dans } L^2(0,T; (H^1(\Omega))'). \quad (2.82)$$

L'estimation (??) assure alors :

$$(\mu\nabla \partial_t s_\mu)_\mu \text{ est une suite bornée dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad (2.83)$$

De plus, il existe une sous suite de  $(s_\mu, p_\mu)$  telle que

$$p_{\mu_k} \rightharpoonup_* p, \text{ faible* dans } L^\infty(0,T;H^1(\Omega)), \quad (2.84)$$

$$s_{\mu_k} \rightharpoonup_* s, \text{ faible* dans } L^\infty(Q_T), \quad (2.85)$$

$$\mu\nabla s_{\mu_k} \rightharpoonup 0, \text{ faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad (2.86)$$

$$\sqrt{\alpha(1-s_{\mu_k})}\nabla s_{\mu_k} \rightharpoonup \Gamma, \text{ faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \quad (2.87)$$

D'après (??),(??) et l'injection compacte de l'espace



**Chapter 2. Analyse mathématique du modèle de Darcy-Brinkman diphasique  
incompressible et immiscible**

---

$\{w \in L^2(Q_T), 0 \leq w \leq 1, \partial_t w \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))'), \beta(w) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))\} \hookrightarrow L^2(Q_T)$   
d'après [?, Lemma 3, p 140], on a que

$$\text{il existe une sous-suite de } (s_\mu)_\mu \text{ tel que } s_\mu \longrightarrow s \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p.} \quad (2.88)$$

Comme  $\beta$  est continue et borné, alors

$$\beta(s_\mu) \longrightarrow \beta(s) \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p. dans } Q_T. \quad (2.89)$$

Finalemnt, à partir des (??),(??),(??),(??) et (??) on passe à la limite dans la formulation faible suivant quand  $\mu \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t s_\mu \varphi \rangle_{H^{-1}H^1} dt - \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla s_\mu \cdot \nabla \partial_t \varphi dxdt + \int_0^T \int_\Omega \sqrt{\alpha(1-s_\mu)} \nabla \beta(s_\mu) \cdot \nabla \varphi dxdt \\ - \int_0^T \int_\Omega f(1-s_\mu) \lambda(1-s_\mu) \nabla p_\mu \cdot \nabla \varphi dxdt = \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s_\mu) \varphi d\sigma dt - \mu \int_\Omega \nabla s_0 \nabla \varphi dx; \\ \int_0^T \int_\Omega \lambda(1-s_\mu) \nabla p_\mu \cdot \nabla \psi dxdt = \int_0^T \int_{\Gamma_e} q_e \psi d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s \psi d\sigma dt. \end{aligned}$$

pour obtenir que pour tout  $\varphi \in L^2(0, T; H_{\Gamma_e}^1(\Omega))$  et  $\psi \in L^2(0, T; H_M^1(\Omega))$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \partial_t s \varphi dxdt + \int_0^T \int_\Omega \sqrt{\alpha(1-s)} \nabla \beta(s) \cdot \nabla \varphi dxdt \\ - \int_0^T \int_\Omega f(1-s) \lambda(1-s) \nabla p \cdot \nabla \varphi dxdt = \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s f(1-s) \varphi d\sigma dt; \\ \int_0^T \int_\Omega \lambda(1-s) \nabla p \cdot \nabla \psi dxdt = \int_0^T \int_{\Gamma_e} q_e \psi d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_s} q_s \psi d\sigma dt; \end{aligned}$$

ce qui prouve le Théorème. □



# 3

---

## Méthode de Volumes Finis pour le modèle de Darcy-Brinkman

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>64</b>
3.1.1	Problème posé	64
3.1.2	Solution faible	65
<b>3.2</b>	<b>Problème discret</b>	<b>66</b>
3.2.1	Discrétisation en espace	66
3.2.2	Discrétisation en temps	68
3.2.3	Fonctions discrètes associées	68
3.2.4	Construction du schéma de volumes finis	69
3.2.5	Estimations a priori	72
<b>3.3</b>	<b>Existence d'une solution discrète</b>	<b>81</b>
<b>3.4</b>	<b>Translatés en espace et en temps</b>	<b>82</b>
<b>3.5</b>	<b>Résultats de compacité</b>	<b>86</b>
<b>3.6</b>	<b>Convergence vers une solution faible</b>	<b>89</b>

<b>3.7 Test numérique pour un modèle isotrope de Darcy-Brinkman</b> . . . . .	<b>94</b>
3.7.1 Test 1 : Écoulement eau-gaz . . . . .	95
3.7.2 Test 2 : Écoulement eau-pétrole . . . . .	96

---

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous proposons un schéma numérique pour la discrétisation du modèle général de Darcy-Brinkman composé de trois équations (??)-(??) complétées par des conditions de bords (??)-(??) et une condition initiale (??). Nous montrons que ce schéma vérifie les propriétés indispensables à tout schéma numérique : existence de solutions, convergence vers une solution faible du modèle général. La première partie précise le modèle à discrétiser et la notion de solution faible associée. Les discrétisations spatiales (maillages admissibles) et temporelle (pas de temps fixes) ainsi que le schéma de type volumes finis sont introduits dans une deuxième partie. La dérivée temporelle, la diffusion et les termes des sources sont discrétisés de façon classique : implicite en temps et un flux à deux points pour la diffusion TPFA (two points flux approximation) [? ]. Quant au terme d'advection, il n'est pas discrétisé par un flux décentré amont classique mais par un flux préservant la monotonie, cela permet d'assurer un principe de robustesse des solutions (voir [? ]).

### 3.1.1 Problème posé

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné dans  $\mathbb{R}^d$ , dont le bord  $\partial\Omega$  est Lipschitz et  $\eta$  est la normale sortante au bord de  $\Omega$ . On note  $Q_T := ]0, T[ \times \Omega$  où  $T > 0$  est un temps fixé et on note  $\Sigma_T = ]0, T[ \times \partial\Omega$ . Nous allons étudier le système Darcy-Brinkman suivant :

$$\partial_t s - \mu \Delta \partial_t s - \operatorname{div} (f(s) \lambda(s) \nabla p) - \operatorname{div} (\alpha(s) \nabla s) = 0, \quad (t, x) \in Q_T \quad (3.1)$$

$$- \operatorname{div} (\lambda(s) \nabla p) = 0, \quad (t, x) \in Q_T \quad (3.2)$$

$$\int_{\Omega} p(t, x) dx = 0, \quad \forall t > 0 \quad (3.3)$$

### 3.1 Introduction

---

Ce système est complété par les conditions aux bords sur  $\Sigma_T$ ,

$$\lambda(s)\partial_\eta p(t, x) = \pi(t, x), \quad (3.4)$$

$$\mu\partial_\eta\partial_t s + f(s)\pi + \alpha(s)\partial_\eta s = h(t, x), \quad (3.5)$$

et des conditions initiales définies dans  $\Omega$  :

$$s(0, x) = s_0(x). \quad (3.6)$$

Ce système a été obtenu dans le chapitre 2. On précise  $s$  la saturation,  $p$  la pression globale et on prend des condition plus générale sur les bords sous les hypothèses suivantes :

**(H1)**  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue bornée telle que  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  avec  $0 \leq f \leq 1$ . et  $\mu$  est une constante positive telle que  $0 < \mu \leq 1$ .

**(H2)** La mobilité totale  $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue bornée telle que  $\lambda(\cdot) \geq \lambda_* > 0$  pour une certaine  $\lambda_*$  constante.

**(H3)** Le terme de la pression capillaire  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue bornée positive telle que  $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$ . On définit  $\beta(s) = \int_0^s \alpha(z)dz$ .

**(H4)**  $\pi$  et  $h$  sont des fonctions bornées dans  $L^\infty(0, T; L^2(\partial\Omega))$  avec la condition de compatibilité  $\int_{\partial\Omega} \pi(t, \sigma)d\sigma = 0$  p.p dans  $(0, T)$ .

**(H5)**  $s_0 \in H^1(\Omega)$  est la donnée initiale .

On commence par définir une solution faible du système (??)-(??).

#### 3.1.2 Solution faible

**Définition 3.1.** On dit que  $(s, p)$ ,  $s, p : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , est une solution faible du système (??)-(??) si :  $\forall T > 0$ ,  $s \in W^{1,2}(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $p \in L^2(0, T; H_M^1(\Omega))$ ; et si pour toute fonction  $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \partial_t s \varphi dx dt + \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla \partial_t s \cdot \nabla \varphi dx dt + \int_0^T \int_\Omega f(s)\lambda(s)\nabla p \cdot \nabla \varphi dx dt \\ + \int_0^T \int_\Omega \nabla \beta(s) \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} h\varphi dx dt, \end{aligned} \quad (3.7)$$

et pour tout  $\psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  on a

$$\int_0^T \int_{\Omega} \lambda(s) \nabla p \cdot \nabla \psi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \pi \psi \, d\sigma \, dt. \quad (3.8)$$

## 3.2 Problème discret

Cette section est consacrée à la formulation du schéma de volumes finis. D'abord, on décrit les discrétisations en espace et en temps, ensuite on construit le schéma numérique.

### 3.2.1 Discrétisation en espace

On rappelle que le domaine  $\Omega$  est un ouvert borné polygonal et connexe de bord  $\partial\Omega$  et qu'il est inclus dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $d = 3$ ). On dit qu'un maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$ , formé de polygones  $K$  ouverts et convexes nommés volumes de contrôle, est admissible s'il vérifie les propriétés suivantes :

- La clôture de l'union des  $K$  est  $\bar{\Omega}$ .
- L'intersection entre deux volumes voisins  $K$  et  $L$  est un sommet ou un côté en dimension deux (une face en dimension trois). Donc, la mesure de Lebesgue  $(d - 1)$ -dimensionnel de  $\partial\bar{K} \cap \partial\bar{L}$  n'est pas nulle dans la deuxième cas.
- Il existe une famille  $\mathcal{P} = (x_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ , où  $x_K$  est le centre du volume  $K$  tel que  $\overline{x_K x_L} \perp \sigma_{K,L}$  où  $\sigma_{K,L}$  est l'interface commune entre deux volumes de contrôle voisins. Dans le cas d'une triangularisation, on prend  $x_K$  comme étant le centre du cercle circonscrit au triangle  $K$ .

Dans ce chapitre, on considère  $\mathcal{T}_h$  comme étant un **maillage admissible** de  $\Omega$ . Dans ce qui suit, on utilise les notations suivantes :

- La taille du maillage :  $\tilde{h} = \sup\{\text{diam}(K), K \in \mathcal{T}_h\}$ .
- $|K| = \text{mes}(K)$  = la mesure de Lebesgue  $d$ -dimensionnel de  $K$  (c'est l'aire de  $K$  en dimension 2 et le volume de  $K$  en dimension 3) et  $|\sigma|$  est la mesure  $(d - 1)$ -dimensionnel de  $\sigma$ .
- $\mathcal{E}_{int}$  est l'ensemble des côtés intérieurs du maillage et  $\mathcal{E}_{ext} = \{\sigma; \sigma \subset \partial\Omega\}$ .

### 3.2 Problème discret

- $d_{K,L}$  est la distance euclidienne entre  $x_K$  et  $x_L$ . Si  $\sigma \subset \partial\Omega$  alors  $d_{K,\sigma}$  est la distance euclidienne entre  $x_K$  et  $y_\sigma$  où  $y_\sigma$  est la projection orthogonale de  $x_K$  sur  $\sigma$ .
- $\eta_{K,L}$  est la normale sortante de  $K$  et orthogonale à  $\sigma_{K,L}$ ;  $\eta_{K,L} = -\eta_{L,K}$ .
- $\tau_{K,L}$  est la transmissibilité à travers l'interface  $\sigma_{K,L}$  définie par :

$$\tau_{K,L} = \frac{|\sigma_{K,L}|}{d_{K,L}}. \quad (3.9)$$

- $N(K) = \{L \in \mathcal{T}_h / \partial\bar{K} \cap \partial\bar{L} \neq \emptyset\}$  est l'ensemble de volumes voisins à  $K$ .
- $T_{K,L}$  est le diamant convexe construit en reliant les deux centres voisins  $x_K$  et  $x_L$  aux sommets de l'interface commune  $\sigma_{K,L}$ . On a :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \bigcup_{L \in N(K)} \bar{T}_{K,L} \right).$$

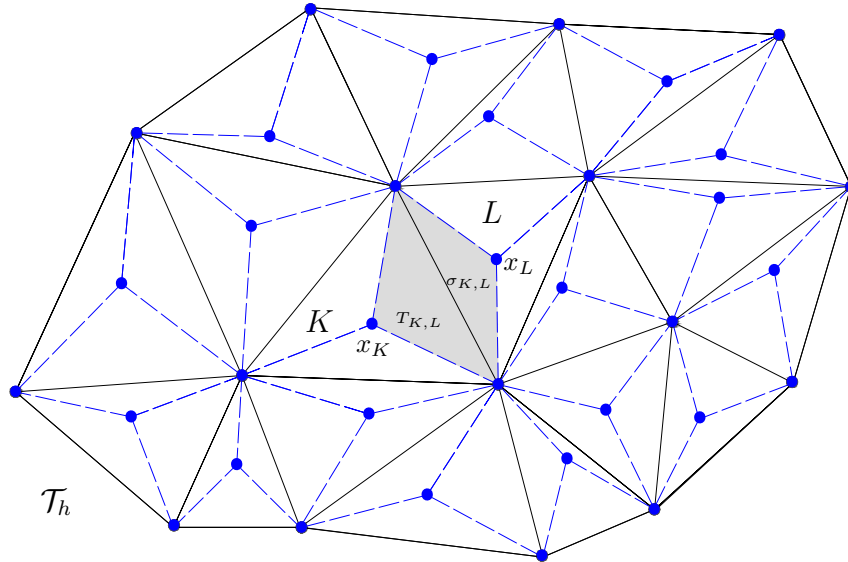


FIGURE 3.1 : maillage volume fini  $\mathcal{T}_h$  : volume de contrôle, centre et diamant.

### 3.2.2 Discrétisation en temps

Une discrétisation de l'intervalle  $[0, T]$  est donnée par un entier  $N \in \mathbb{N}^*$ ;  $t_n = n\Delta t$  pour  $n \in \{0, \dots, N\}$  et pour un pas de temps fixe  $\Delta t$  avec  $N\Delta t = T$ . Les inconnues discrètes sont notées par  $w_K^n = w(t_n, x_K)$  pour  $w = s$  ou  $p$ .

Soit  $\mathcal{D}$  une discrétisation admissible de  $Q_T = \Omega \times [0, T]$  qui n'est autre qu'un maillage admissible  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  et l'union des intervalles  $[t_n, t_{n+1}]$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$ . On définit la régularité du maillage par :

$$h = \max\{\Delta t, \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K), \max_{K \in \mathcal{T}_h} \max_{L \in N(K)} d_{K,L}\}.$$

### 3.2.3 Fonctions discrètes associées

Sur un maillage  $\mathcal{T}_h$  admissible, on définit  $L_h(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  l'espace des fonctions constantes sur chaque volume  $K \in \mathcal{T}_h$ .

$$L_h = \{w_h \in L^2(\Omega), \quad w_h(x) = W_K \text{ p.p sur } K\}.$$

On peut lui associé un produit scalaire :

$$\langle w_h, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| W_K V_K, \quad \|w_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |W_K|^2.$$

En plus, on définit un produit scalaire qui correspond à une semi-norme  $H_0^1(\Omega)$  discrète :

$$\begin{aligned} \langle w_h, v_h \rangle_{H_h^1(\Omega)} &= d \sum_{\sigma_{K,L} \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K,L} (W_L - W_K)(V_L - V_K), \\ |w_h|_{H_h^1(\Omega)}^2 &= d \sum_{\sigma_{K,L} \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K,L} (W_L - W_K)^2. \end{aligned}$$

Finalement, on définit le gradient discret d'une fonction  $w_h$  constante par volume de contrôle, comme étant une fonction constante par diamant  $T_{K,L}$  :

$$(\nabla_h w_h)|_{T_{K,L}} = \nabla_{K,L} w_h := d \frac{W_L - W_K}{d_{K,L}} \eta_{K,L}. \quad (3.10)$$

Notons que la mesure  $d$ -dimensionnel  $|T_{K,L}|$  est égale à  $\frac{1}{d} |\sigma_{K,L}| d_{K,L}$  donc la semi-norme  $|w_h|_{H_h(\Omega)}$  coïncide avec la norme de  $\nabla_h w_h$  dans  $L^2(\Omega)$ .

#### 3.2.4 Construction du schéma de volumes finis

Afin de discrétiser les équations (??) et (??), on intègre formellement ces deux équations sur chaque volume de contrôle  $K$  et on utilise la formule de Stokes pour les intégrales de divergence. Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_K \partial_t s \, dx - \mu \int_{\partial K} \nabla \partial_t s \cdot \eta_K \, d\gamma(x) - \int_{\partial K} f(s) \lambda(s) \nabla p \cdot \eta_K \, d\gamma(x) - \int_{\partial K} \alpha(s) \nabla s \cdot \eta_K \, d\gamma(x) = 0, \\ - \int_{\partial K} \lambda(s) \nabla p \cdot \eta_K \, d\gamma(x) = 0. \end{aligned}$$

Or, l'intégrale sur le bord  $\partial K$  est la somme des intégrales sur les côtés (ou faces) du volume de contrôle  $K$ . Par la suite :

$$\begin{aligned} \int_K \partial_t s \, dx - \mu \sum_{L \in N(K)} \int_{\sigma_{K,L}} \nabla \partial_t s \cdot \eta_{K,L} \, d\gamma(x) - \sum_{L \in N(K)} \int_{\sigma_{K,L}} f(s) \lambda(s) \nabla p \cdot \eta_{K,L} \, d\gamma(x) \\ - \sum_{L \in N(K)} \int_{\sigma_{K,L}} \alpha(s) \nabla s \cdot \eta_{K,L} \, d\gamma(x) = 0, \\ - \sum_{L \in N(K)} \int_{\sigma_{K,L}} \lambda(s) \nabla p \cdot \eta_{K,L} \, d\gamma(x) = 0. \end{aligned}$$

Pour approcher les dérivées par rapport au temps, l'approximation consiste à remplacer  $s$  par  $\bar{s}$  qui est défini de la manière suivante :

$$\forall t \in [t_n, t_{n+1}], \quad \bar{s}(t, x) = \frac{s(t_{n+1}, x) - s(t_n, x)}{\Delta t} (t - t_n) + s(t_n, x). \quad (3.11)$$

On décrit maintenant l'approximation des termes diffusifs et convectifs.

**Terme diffusif :** Le calcul du flux numérique diffusif nécessite d'approcher les valeurs des  $\nabla \partial_t s \cdot \eta_{K,L}$  et  $\alpha(s) \nabla s \cdot \eta_{K,L}$  sur les interfaces  $\sigma_{K,L}$  des volumes de contrôle et sur l'intervalle de temps  $[t_n, t_{n+1}]$ . Sous l'hypothèse d'admissibilité du maillage  $\mathcal{T}_h$ , la valeur approchée du flux diffusif normal peut être calculer en utilisant les différences finies dans la direction de la normale

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_{K,L}} \nabla \partial_t s \cdot \eta_{K,L} \, d\gamma(x) &\approx \tau_{K,L} (\partial_t \bar{s}(t, x_L) - \partial_t \bar{s}(t, x_K)) \\ &\approx \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$



$$\int_{\sigma_{K,L}} \alpha(s) \nabla s \cdot \eta_{K,L} d\gamma(x) = \int_{\sigma_{K,L}} \nabla \beta(s) \cdot \eta_{K,L} d\gamma(x) \approx \tau_{K,L} (\beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1})) \quad (3.13)$$

où  $\beta(s) = \int_0^s \alpha(z) dz$  et le coefficient de transmissibilité  $\tau_{K,L}$  est défini par (??).

**Terme Convectif :** Pour calculer le flux numérique convectif, on approche  $-f(s)\lambda(s)\nabla p \cdot \eta_{K,L}$  en utilisant les valeurs  $P_K, P_L, S_K$  et  $S_L$  qui sont valables dans le voisinage de l'interface  $\sigma_{K,L}$ . Pour cela, on utilise un flux numérique  $G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1})$ . La fonction  $G_s \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$  d'arguments  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  désigne le flux numérique de convection et elle satisfait les propriétés suivantes :

- $G_s(., b, c)$  est croissante,  $\forall b, c \in \mathbb{R}$  et  $G_s(a, ., c)$  est décroissante,  $\forall a, c \in \mathbb{R}$ .
- $G_s(a, b, c) = -G_s(b, a, -c) \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ; donc le flux est conservatif.
- $G_s(a, a, c) = -f(s)\lambda(a)c \forall a, c \in \mathbb{R}$ ; donc le flux est consistant.
- Il existe un module de continuité  $w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall a, b, a', b', c \in \mathbb{R}$ ,  $|G_s(a, b, c) - G_s(a', b', c)| \leq |c|w(|a - a'| + |b - b'|)$ .

Donc, l'approximation du terme convectif est définie par

$$\int_{\sigma_{K,L}} f(s)\lambda(s)\nabla p \cdot \eta_{K,L} d\gamma(x) \approx -G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1})$$

avec  $dp_{K,L}^{n+1} = \tau_{K,L}(P_L^{n+1} - P_K^{n+1})$ .

Finalement, on approche  $\lambda(s)\nabla p \cdot \eta_{K,L}$  en utilisant le flux numérique  $G_p(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1})$  qui satisfait les mêmes propriétés que  $G_s$ , la fonction  $G_p \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ . Remarquez que, puisque la mobilité totale est strictement positive, nous pouvons également approcher ce terme en utilisant un flux centré.

**Remarque 3.1.** *Voici une possibilité de construire un flux numérique  $G$  qui approche  $g(s)\nabla p \cdot \eta_{K,L}$  (avec  $g(s) = -f(s)\lambda(s)$  ou  $\lambda(s)$ ) satisfait les propriétés précédentes. On décompose  $g$  en sa partie  $(g)_\uparrow$  croissante et sa partie  $(g)_\downarrow$  décroissante :*

$$(g)_\uparrow(z) := \int_0^z ((g)'(s))^+ ds, \quad (g)_\downarrow(z) := - \int_0^z ((g)'(s))^- ds.$$

On rappelle que :

$$s^+ = \max(s, 0) \text{ et } s^- = \max(-s, 0).$$

### 3.2 Problème discret

---

Il suffit donc de prendre comme flux numérique convectif,

$$G_s(a, b, c) = c^+ \left( (g)_\uparrow(a) + (g)_\downarrow(b) \right) - c^- \left( (g)_\uparrow(b) + (g)_\downarrow(a) \right).$$

et par suite comme  $-f\lambda$  est décroissante et  $f(0) = 0$ , on définit  $G_s$  de la manière suivante :

$$G_s(a, b, c) = -f(b)\lambda(b)c^+ + f(a)\lambda(a)c^-. \quad (3.14)$$

et on définit  $G_p$  par

$$G_p(a, b, c) = c^+ \left( (\lambda)_\uparrow(a) + (\lambda)_\downarrow(b) \right) - c^- \left( (\lambda)_\uparrow(b) + (\lambda)_\downarrow(a) \right).$$

#### Schéma Numérique

Maintenant, on peut écrire le schéma de volumes finis suivant :  $\forall K \in \mathcal{T}_h, \forall n = 0..N - 1$  on a :

$$|K| \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} - \mu \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right) \quad (3.15)$$

$$- \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1}) \right) + \sum_{L \in N(K)} G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) = |\partial K \cap \partial \Omega| h_K^{n+1},$$

$$- \sum_{L \in N(K)} G_p(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) = |\partial K \cap \partial \Omega| \pi_K^{n+1}, \quad (3.16)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| P_K^{n+1} = 0, \quad (3.17)$$

où

$$\bullet h_K^{n+1} = \frac{1}{|\partial K \cap \partial \Omega| \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial K \cap \partial \Omega} h(t, x) dx,$$

$$\bullet \pi_K^{n+1} = \frac{1}{|\partial K \cap \partial \Omega| \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial K \cap \partial \Omega} \pi(t, x) dx,$$

$$\bullet dp_{K,L}^{n+1} = \tau_{K,L} \left( P_L^{n+1} - P_K^{n+1} \right).$$

Afin de définir les fonctions non linéaires  $f, \lambda$  et  $\beta$  en dehors de leurs domaines de définition, on les prolonge de façon continue et bornée, par exemple

$$\beta(s) = \begin{cases} 0 & \text{pour } s < 0 \\ \beta(s) & \text{pour } 0 \leq s \leq 1 \\ \beta(1) & \text{pour } s > 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

### 3.2.5 Estimations a priori

On rappelle tout d'abord quelques résultats, le premier est un résultat sur la trace discrète démontrée dans [? ], et le deuxième est un résultat classique d'une intégration par partie discrète et la dernière est la forme discrète de l'inégalité de Poincaré à moyenne nulle.

**Lemme 3.1** ([? ]). *Soit  $\Omega$  est un ouvert borné polygonal et connexe de bord  $\partial\Omega$  et qu'il est inclus dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $d = 3$ ). Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage admissible. Soit  $S_K$  la valeur de  $s_h$  sur le volume de contrôle  $K$ . On définit  $\gamma(s_h)$  par  $\gamma(s_h) = S_K$  presque partout sur  $\sigma_K = \partial K \cap \partial\Omega$  (pour la mesure de Lebesgue de dimension  $(d-1)$ ) pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ . Alors il existe  $C_1$  une constante positive dépendante de  $\Omega$  telle que :*

$$\|\gamma(s_h)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_1(\|s_h\|_{H_h^1(\Omega)} + \|s_h\|_{L^2(\Omega)}).$$

□

**Lemme 3.2** ([? ]). **(Intégration par partie discrète)** *Soit  $F_{K,L} \in \mathbb{R}$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$  et  $L \in N(K)$  tel que  $F_{K,L} = -F_{L,K}$ . Soit  $\varphi_K \in \mathbb{R}$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ . Alors :*

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} F_{K,L} \varphi_K = -\frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} F_{K,L} (\varphi_L - \varphi_K)$$

**Remarque 3.2.** *Il est facile de voir que  $G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) = -G_s(S_L^{n+1}, S_K^{n+1}, dp_{L,K}^{n+1})$  et  $G_p(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) = -G_p(S_L^{n+1}, S_K^{n+1}, dp_{L,K}^{n+1})$ , ainsi les termes convectifs peuvent être intégrés par partie.*

**Lemme 3.3** ([? ]). **(Inégalité du Poincaré discrète)** *Soit  $\Omega$  est un ouvert borné polygonal et connexe de bord  $\partial\Omega$  et qu'il est inclus dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $d = 3$ ). Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage admissible. Soit  $U_K$  la valeur de  $u$  une fonction constante presque partout dans le volume de contrôle  $K$ . Alors il existe une constante positive  $C$  qui*

### 3.2 Problème discret

---

dépend seulement de  $\Omega$  telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H_h^1(\Omega)} + 2(m(\Omega))^{-1} \left( \int_{\Omega} u(x) dx \right)^2$$

Par la suite, on commence par démontrer une estimation sur le gradient discret de la pression globale, ensuite on établit deux estimations sur la saturation.

**Proposition 3.1.** *Soit  $(S_K^{n+1}, P_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}_h, n \in \{0, \dots, N-1\}}$  une solution du schéma de volume finis (??)–(??). Alors il existe une constante  $C(\Omega)$  positive qui dépend seulement de  $\Omega$  et telle que :*

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (P_L^{n+1} - P_K^{n+1})^2 \leq C(\Omega) \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2. \quad (3.19)$$

**Preuve :** On multiplie l'équation (??) par  $P_K^{n+1}$  pour obtenir :

$$- \sum_{L \in N(K)} G_p(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) P_K^{n+1} = |\partial K \cap \partial\Omega| \pi_K^{n+1} P_K^{n+1}$$

maintenant en faisant une sommation sur  $K \in \mathcal{T}_h$  et en intégrant par partie, on obtient

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} G_p(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) (P_L^{n+1} - P_K^{n+1}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\partial K \cap \partial\Omega| \pi_K^{n+1} P_K^{n+1}.$$

Le flux discret satisfait  $G_p(a, b, c)c \geq \lambda_* |c|^2 \quad \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . En effet

$$\begin{aligned} G_p(a, b, c)c &= (\lambda(b)c^+ - \lambda(a)c^-)c = \lambda(b)(c^+)^2 + \lambda(a)(c^-)^2 \\ &\geq \lambda_* \left( (c^+)^2 + (c^-)^2 \right) = \lambda_* c^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \lambda_* \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (P_L^{n+1} - P_K^{n+1})^2 &\leq 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\partial K \cap \partial \Omega| \pi_K^{n+1} P_K^{n+1} \\
 &\leq \frac{2}{\Delta t} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial K \cap \partial \Omega} \pi(t, x) P_K^{n+1} dx dt \\
 &\leq 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \frac{1}{\beta \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial K \cap \partial \Omega} \pi^2(t, x) dx dt \right. \\
 &\quad \left. + \beta \int_{\partial K \cap \partial \Omega} (P_K^{n+1})^2 dx \right).
 \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le résultat sur les traces discrètes du Lemme ?? et le fait que  $\pi \in L^\infty(0, T; L^2(\partial \Omega))$  on déduit :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (P_L^{n+1} - P_K^{n+1})^2 \leq \\
 &2 \left[ \frac{1}{\beta} \|\pi\|_{L^\infty(0, T; L^2(\partial \Omega))} + \beta C' \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (P_L^{n+1} - P_K^{n+1})^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| (P_K^{n+1})^2 \right) \right]
 \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme ?? sur l'inégalité du Poincaré discrète, on a l'estimation suivante

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| (P_K^{n+1})^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (P_L^{n+1} - P_K^{n+1})^2,$$

car  $\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| P_K^{n+1} = 0$ , ainsi

$$\begin{aligned}
 \lambda_* \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (P_L^{n+1} - P_K^{n+1})^2 &\leq \\
 &2 \left[ \frac{1}{\beta} \|\pi\|_{L^\infty(0, T; L^2(\partial \Omega))} + \beta C'' \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (P_L^{n+1} - P_K^{n+1})^2 \right].
 \end{aligned}$$

On déduit le résultat (??), après avoir choisi le paramètre  $\beta$  d'une façon convenable.  $\square$

**Proposition 3.2.** Soit  $(S_K^{n+1}, P_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}_h, n \in \{0, \dots, N-1\}}$  une solution du schéma de volumes finis (??)-(??). Alors il existe une constante  $C(\Omega)$  positive qui dépend seulement de  $\Omega$  et telle que pour tout  $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$  où  $\Delta t_0 \leq \frac{1}{C}$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

### 3.2 Problème discret

avec  $n\Delta t \leq T$  on a

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |S_K^n|^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} |S_L^n - S_K^n|^2 &\leq \left( \|h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 \right) \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |S_K^0|^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} |S_L^0 - S_K^0|^2 \exp\left(\frac{CT}{\mu(1-C\Delta t_0)}\right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

**Preuve :** On multiplie l'équation de la saturation du schéma de volumes finis (??) par  $S_K^{n+1}$  pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$  cela donne :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} S_K^{n+1} - \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right) S_K^{n+1} \\ + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) S_K^{n+1} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (\beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1})) S_K^{n+1} \\ = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\partial K \cap \partial\Omega| h_K^{n+1} S_K^{n+1} \end{aligned}$$

En faisant une intégration par partie sur les termes diffusifs et convectifs on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} S_K^{n+1} + \frac{\mu}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right) (S_L^{n+1} - S_K^{n+1}) \\ - \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) (S_L^{n+1} - S_K^{n+1}) \\ + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (\beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1})) (S_L^{n+1} - S_K^{n+1}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\partial K \cap \partial\Omega| h_K^{n+1} S_K^{n+1}. \end{aligned}$$

Maintenant on utilise l'inégalité  $[a^2 - ab \geq \frac{1}{2}(a^2 - b^2)]$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \frac{|S_K^{n+1}|^2 - |S_K^n|^2}{\Delta t} + \frac{\mu}{4\Delta t} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (|S_L^{n+1} - S_K^{n+1}|^2 - |S_L^n - S_K^n|^2) \\ + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (\beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1})) (S_L^{n+1} - S_K^{n+1}) \leq \\ \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) (S_L^{n+1} - S_K^{n+1}) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\partial K \cap \partial\Omega| h_K^{n+1} S_K^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Comme  $\beta$  est une fonction croissante alors

$$\left(\beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1})\right) \cdot (S_L^{n+1} - S_K^{n+1}) \geq 0$$

d'où

$$\frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left(\beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1})\right) (S_L^{n+1} - S_K^{n+1}) \geq 0.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que

$$|G_s(a, b, c)|^2 = (f(b)\lambda(b))^2(c^+)^2 + (f(a)\lambda(a))^2(c^-)^2 \leq \|f\lambda\|_{L^\infty}^2((c^+)^2 + (c^-)^2) = \|f\lambda\|_{L^\infty}^2 c^2,$$

alors le terme convectif (??) est estimé par :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) (S_L^{n+1} - S_K^{n+1}) \leq \\ & C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (P_L^{n+1} - P_K^{n+1})^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (S_L^{n+1} - S_K^{n+1})^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Pour estimer le terme source, on utilise l'inégalité de Cauchy-schwarz :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\partial K \cap \partial \Omega| h_K^{n+1} S_K^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial K \cap \partial \Omega} h(t, x) S_K^{n+1} dx dt \\ &\leq \frac{1}{\Delta t} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial K \cap \partial \Omega} (h(t, x))^2 dx dt + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K \cap \partial \Omega} (S_K^{n+1})^2 dx, \end{aligned}$$

on utilise à nouveau le résultat du Lemme ?? sur les traces pour obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\partial K \cap \partial \Omega| h_K^{n+1} S_K^{n+1} &\leq \|h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial \Omega))}^2 + C_1 \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| (|S_K^{n+1}|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} |S_L^{n+1} - S_K^{n+1}|^2 \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

### 3.2 Problème discret

---

où  $C_1$  une constante positive dépendante seulement de  $\Omega$ . Finalement, on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \left( |S_K^{n+1}|^2 - |S_K^n|^2 \right) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( |S_L^{n+1} - S_K^{n+1}|^2 - |S_L^n - S_K^n|^2 \right) \\ & \leq \frac{4\Delta t}{\mu} \left[ C_1 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \left( S_K^{n+1} \right)^2 + C_1 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( S_L^{n+1} - S_K^{n+1} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \|h(t, \cdot)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + C_2 \|\pi(t, \cdot)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

La suite de la preuve découle du lemme ci-après.

**Lemme 3.4. (Inégalité de Grönwall discrète).** Soit  $K_1 \geq 0$ ,  $K_2 > 0$ ,  $T > 0$  et une suite  $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant

$$0 \leq y^{n+1} \leq y^n + K_1 \Delta t + K_2 \Delta t y^{n+1}, \quad (3.26)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Étant donné  $\Delta t_0 < \frac{1}{K_2}$  alors pour tout  $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n\Delta t \leq T \Rightarrow y^n \leq \left( y^0 + \frac{K_1}{K_2} \right) \exp\left( \frac{K_2 T}{1 - K_2 \Delta t_0} \right) \quad (3.27)$$

**Preuve :** Puisque  $\Delta t \leq \Delta t_0 < \frac{1}{K_2}$ ,

$$0 \leq y^{n+1} \leq \frac{1}{1 - K_2 \Delta t} y^n + \frac{K_1 \Delta t}{1 - K_2 \Delta t}.$$

En notant  $\alpha = \frac{1}{1 - K_2 \Delta t} > 1$ , une simple récurrence permet d'obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y^n \leq \alpha^n y^0 + \alpha K_1 \Delta t \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}.$$

Remarquons que  $\frac{\alpha}{\alpha - 1} = \frac{1}{K_2 \Delta t}$  et  $\alpha^n - 1 \leq \alpha^n$ , ainsi, finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y^n \leq \left( y^0 + \frac{K_1}{K_2} \right) \alpha^n.$$

Puisque  $\alpha \geq 1$ , il existe  $\lambda \geq 0$  tel que  $\alpha = \frac{1}{1 - K_2 \Delta t} = 1 + \lambda \Delta t$ , d'où  $\lambda = \frac{K_2}{1 - K_2 \Delta t}$ .



Par conséquent  $\alpha^n = (1 + \lambda\Delta t)^n \leq \exp(\lambda n\Delta t)$  et si  $\Delta t \leq \Delta t_0$ ,

$$y^n \leq \left(y^0 + \frac{K_1}{K_2}\right) \exp\left(\frac{K_2 T}{1 - K_2 \Delta t}\right) \leq \left(y^0 + \frac{K_1}{K_2}\right) \exp\left(\frac{K_2 T}{1 - K_2 \Delta t_0}\right).$$

□

On applique le Lemme ?? avec

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \left( |S_K^{n+1}|^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} |S_L^{n+1} - S_K^{n+1}|^2 \right) \\ K_1 &= \frac{4}{\mu} \left( \|h(t, \cdot)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + C_2 \|\pi(t, \cdot)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 \right) \\ K_2 &= \frac{4C_1}{\mu}, \end{aligned}$$

ce qui termine le preuve de la Proposition ??. □

**Proposition 3.3.** *Soit  $(S_K^{n+1}, P_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}_h, n \in \{0, \dots, N-1\}}$  une solution du schéma de volumes finis (??)-(??). Alors il existe deux constantes  $C$  et  $C_1$  positives qui dépendent seulement de  $\Omega$  et telles que :*

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \left( \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right)^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right)^2 \leq \\ C_1 \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |S_K^0|^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} |S_L^0 - S_K^0|^2 \right. \\ \left. + \|h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 \right) \exp\left(\frac{CT}{\mu(1 - C\Delta t_0)}\right) \quad (3.28) \end{aligned}$$

où  $T$  et  $\Delta t_0$  sont définis comme dans la Proposition ??. De plus on a

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} |\beta(S_L^n) - \beta(S_K^n)|^2 \leq C_2(T, \Delta t_0, \Omega, \mu), \quad (3.29)$$

où  $C_2$  est une constante positive qui dépend de  $T, \Delta t_0, \Omega$ , et  $\mu$ .

**Preuve :** On multiplie la première équation du schéma de volumes finis (??) par

### 3.2 Problème discret

$\frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t}$  et on somme sur  $K \in \mathcal{T}_h$  cela donne :

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \left( \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right)^2 - \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right) \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \\ & \quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \\ & - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1}) \right) \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\partial K \cap \partial \Omega| h_K^{n+1} \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \end{aligned}$$

En faisant une intégration par partie, on obtient  $E_1 + E_2 - E_3 + E_4 = E_5$  avec

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \left( \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right)^2 \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1}) \right) \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right) \\ & \quad = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\partial K \cap \partial \Omega| h_K^{n+1} \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Les termes  $E_1$  et  $E_2$  étant positifs, on cherche à estimer les termes  $E_3, E_4$  et  $E_5$ . En utilisant la définition de  $G_s$  dans (??) et l'estimation sur le gradient discret de la pression (??), alors pour tout  $\gamma > 0$  on a

$$\begin{aligned} E_3 & \leq \frac{C}{\gamma} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( P_L^{n+1} - P_K^{n+1} \right)^2 + \gamma \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right)^2 \\ & \leq \frac{C}{\gamma} \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial \Omega))}^2 + \gamma \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right)^2. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, alors pour tout  $\delta > 0$  on a :

$$\begin{aligned} E_4 & \leq \frac{1}{2\delta} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1}) \right)^2 \\ & \quad + \frac{\delta}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right)^2. \end{aligned}$$

Comme  $\beta$  est une fonction sous linéaire alors il existe  $C > 0$  telle que

$$E_4 \leq \frac{C}{2\delta} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (S_L^{n+1} - S_K^{n+1})^2 + \frac{\delta}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right)^2,$$

$\delta$  est un reel positif à choisir ultérieurement. D'après la Proposition ?? :

$$E_4 \leq \frac{C}{2\delta} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |S_K^0|^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} |S_L^0 - S_K^0|^2 + \|h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 \right) \exp\left(\frac{CT}{\mu(1-C\Delta t_0)}\right) + \frac{\delta}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right)^2.$$

où  $T$  et  $\Delta t_0$  sont définis comme dans la Proposition ??.

De façon similaire, comme déjà fait dans la Proposition ??, en utilisant les résultats sur les trace discrètes, pour tout  $\zeta > 0$  on a :

$$E_5 \leq \frac{1}{\zeta} \|h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + \zeta C \left[ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \left( \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right)^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right)^2 \right].$$

Enfin, on choisit les paramètres  $\gamma, \delta$  et  $\zeta$  suffisamment petit pour obtenir

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \left( \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right)^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right)^2 \leq C_1 \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |S_K^0|^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} |S_L^0 - S_K^0|^2 + \|h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 \right) \exp\left(\frac{CT}{\mu(1-C\Delta t_0)}\right)$$

où  $C$  et  $C_1$  sont deux constantes positives dépendant seulement de  $\Omega$ .

Pour l'estimation (??), on multiplie l'équation (??) par  $\beta(S_K^{n+1})$ , faisant une intégration par partie et utilisant les estimations (??)-(??) et (??).  $\square$

### 3.3 Existence d'une solution discrète

L'existence d'une solution du schéma de volume finis (??)-(??) est basée sur le lemme suivant.

**Lemme 3.5.** [?] Soit  $\mathcal{A}$  un espace de Hilbert de dimension finie muni d'un produit scalaire  $[\cdot, \cdot]$  et de la norme  $\|\cdot\|$  associée, et soit  $\mathcal{P}$  une application continue de  $\mathcal{A}$  dans lui même telle que :

$$[\mathcal{P}(\xi), \xi] > 0 \text{ pour } \|\xi\| = r > 0.$$

Alors il existe  $\xi \in \mathcal{A}$  avec  $\|\xi\| \leq r$  tel que

$$\mathcal{P}(\xi) = 0$$

**Proposition 3.4.** Soit  $\mathcal{T}$  une discrétisation admissible de  $Q_T$ . Alors le schéma de volume finis (??)-(??) admet au moins une solution  $(P_K^{n+1}, S_K^{n+1})_{(K \in \mathcal{T}_h, n=0..N)}$ .

**Preuve :** Tout d'abord on utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \text{Card}(\mathcal{T}_h) \\ s_{\mathcal{M}} &:= \{s_K^{n+1}\}_{K \in \mathcal{T}_h} \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \\ p_{\mathcal{M}} &:= \{p_K^{n+1}\}_{K \in \mathcal{T}_h} \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

On définit l'application  $\mathcal{P}_h : \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \mapsto \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ ,

$$\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}}) = (\{\mathcal{P}_{1,K}\}_{K \in \mathcal{T}_h}, \{\mathcal{P}_{2,K}\}_{K \in \mathcal{T}_h}) \text{ avec,}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1,K} &= |K| \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} - \mu \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right) \\ &- \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1}) \right) + \sum_{L \in N(K)} G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) - |\partial K \cap \partial \Omega| h_K^{n+1} \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_{2,K} = - \sum_{L \in N(K)} G_p(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) - |\partial K \cap \partial \Omega| \pi_K^{n+1}$$

Notant que  $\mathcal{P}_h$  est une application continue bien définie. La but est de démontrer que

$[\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}}), (s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})] > 0$  pour  $\|(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})\| = r$  avec  $r$  est suffisamment grand. Pour cela, on a d'après la Proposition ?? et les équations (??),(??),(??) et (??)

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}}), (s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})] &\geq \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \frac{|S_K^{n+1}|^2 - |S_K^n|^2}{\Delta t} \\ &\quad + \frac{\mu}{4\Delta t} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (|S_L^{n+1} - S_K^{n+1}|^2 - |S_L^n - S_K^n|^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (\beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1})) (S_L^{n+1} - S_K^{n+1}) \\ &\quad - [C_1 \gamma \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| (S_K^{n+1})^2 + C_1 \gamma \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (S_L^{n+1} - S_K^{n+1})^2 \\ &\quad \quad + \frac{1}{\gamma} \|h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + \frac{C_2}{\gamma} \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2] \\ &\quad \quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (P_L^{n+1} - P_K^{n+1})^2 - C(\Omega) \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 \end{aligned}$$

maintenant, on utilise le Lemme ?? et pour un  $\gamma$  suffisamment petit on obtient :

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}}), (s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})] &\geq C(\gamma, \Delta t) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |S_K^{n+1}|^2 + C_3 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |P_K^{n+1}|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta t} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |S_K^n|^2 - \left[ \frac{1}{\gamma} \|h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + \frac{C_2}{\gamma} \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 \right] - C(\Omega) \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 \end{aligned}$$

avec  $C(\gamma, \Delta t), C(\Omega), C_2$  et  $C_3$  sont des constantes positives. D'où pour  $r$  suffisamment grand on a  $[\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}}), (s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})] > 0$ .  $\square$

### 3.4 Translatés en espace et en temps

Soit  $(s_h, p_h)$  une solution du schéma de volumes finis (??)-(??) donnée par  $s_h|_{Q_K^n} = S_K^{n+1}$  et  $p_h|_{Q_K^n} = P_K^{n+1}$  où  $Q_K^{n+1} = ]t^n, t^{n+1}] \times K$ .

**Lemme 3.6. (Translatés en espace)** *Il existe une constante  $C(\Omega, T) > 0$  telle que :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \iint_{\Omega' \times [0, T]} |\bar{s}_h(t, x + \xi) - \bar{s}_h(t, x)|^2 dx dt \leq C |\xi| (|\xi| + 2h), \quad (3.30)$$

### 3.4 Translatés en espace et en temps

---

avec  $\Omega' = \{x \in \Omega, [x, x + \xi] \subset \Omega\}$

**Preuve :** Tout d'abord, on simplifie les notations en écrivant :

$$\sum_{\sigma_{K,L}} \text{ au lieu de } \sum_{[(K,L) \in \mathcal{T}_h^2, K \neq L, |\sigma_{K,L}| \neq 0]} .$$

Soit  $\xi \in \mathbb{R}^3$ ,  $L \in N(K)$ . On définit sur  $\Omega'$  la fonction :

$$\chi_{\sigma_{K,L}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } [x, x + \xi] \text{ intersekte } \sigma_{K,L}, K \text{ et } L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Ensuite, on définit  $c_{\sigma_{K,L}} = \left| \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \eta_{K,L} \right|$  et on remarque que

$$i) \int_{\Omega'} \chi_{\sigma_{K,L}}(x) dx \leq |\sigma_{K,L}| |\xi| c_{\sigma_{K,L}},$$

car  $\int_{\Omega'} \chi_{\sigma_{K,L}}(x) dx$  est la mesure de l'ensemble des points de  $\Omega'$  qui se trouvent dans un cylindre de base  $\sigma_{K,L}$  et de vecteur générateur  $-\xi$ . En plus, on a :

$$ii) \sum_{\sigma_{K,L}} \chi_{\sigma_{K,L}}(x) c_{\sigma_{K,L}} d_{K,L} \leq |\xi| + 2h .$$

Par la suite, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la Proposition ?? entraînent que :

$$\begin{aligned} & \int \int_{(0,T) \times \Omega'} |s_h(t, x + \xi) - s_h(t, x)|^2 dt dx \\ & \leq \sum_{\sigma_{K,L}} \chi_{\sigma_{K,L}}(x) c_{\sigma_{K,L}} d_{K,L} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\sigma_{K,L}} \frac{|S_L^{n+1} - S_K^{n+1}|^2}{c_{\sigma_{K,L}} d_{K,L}} \int_{\Omega'} \chi_{\sigma_{K,L}}(x) dx \\ & \leq (|\xi| + 2h) \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\sigma_{K,L}} \frac{|S_L^{n+1} - S_K^{n+1}|^2}{c_{\sigma_{K,L}} d_{K,L}} \int_{\Omega'} \chi_{\sigma_{K,L}}(x) dx \\ & \leq |\xi| (|\xi| + 2h) \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} |S_L^{n+1} - S_K^{n+1}|^2 . \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\int \int_{(0,T) \times \Omega'} |\bar{s}_h(t, x + \xi) - \bar{s}_h(t, x)|^2 dt dx \leq 2 \int \int_{(0,T) \times \Omega'} |s_h(t, x + \xi) - s_h(t, x)|^2 dt dx + 2\Delta t \int_{\Omega'_\Delta} |s_h(0, x)|^2 dx,$$

où  $\Omega'_\Delta = \{x \in \Omega, \text{dist}(x, \partial\Omega') < |\Delta|\}$ . Comme  $\Delta t \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$  et puisque  $s_h(0, \cdot)$  est borné dans  $L^2(\Omega'_\Delta)$  alors la translation d'espace est uniformément estimée.  $\square$

**Lemme 3.7. (Transaltés en temps)** Il existe une constante  $C(\Omega, T) > 0$  telle que :

$$\forall \tau \in ]0, T[, \quad \int_0^{T-\tau} \int_{\Omega} |\bar{s}_h(t + \tau, x) - \bar{s}_h(t, x)|^2 dx dt \leq C(\tau + \Delta t), \quad (3.31)$$

**Preuve :** La preuve de ce lemme est basée sur celle développée par Eymard et al. [?] pour une équation parabolique. Soit  $\tau \in ]0, T[$  et  $t \in ]0, T - \tau[$ . Posons

$$A(t) = \int_{\Omega} |s_h(t + \tau, x) - s_h(t, x)|^2 dx,$$

le nombre  $n_0 := n_0(t) = n + 1$  si  $t \in ]t^n, t^{n+1}[$  et le nombre  $n_1 := n_1(t) = n + 1$  si  $t + \tau \in ]t^n, t^{n+1}[$ . La fonction  $A$  peut se réécrire sous la forme

$$A(t) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |S_K^{n_1} - S_K^{n_0}|^2,$$

qui implique aussi

$$A(t) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| (S_K^{n_1} - S_K^{n_0}) \sum_{n=n_0}^{n_1-1} (S_K^{n+1} - S_K^n).$$

Il suffit de démontrer que  $\int_0^{T-\tau} A(t) dt \leq C\tau$ , pour obtenir le résultat souhaité. Soit

$$\Upsilon_n(t, t + \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } n\Delta t \in [t, t + \tau[, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

### 3.4 Translatés en espace et en temps

---

de telle façon que

$$A(t) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| (S_K^{n_1} - S_K^{n_0}) \sum_{n=0}^{N-1} \Upsilon_n(t, t + \tau) (S_K^{n+1} - S_K^n).$$

En remplaçant  $S_K^{n+1} - S_K^n$  par son expression donnée par le schéma numérique (??) puis en intégrant par partie, nous obtenons

$$\begin{aligned} A(t) = & \\ & - \mu \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Upsilon_n(t, t + \tau) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right) (S_L^{n_1} - S_L^{n_0} - S_K^{n_1} + S_K^{n_0}) \\ & - \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Upsilon_n(t, t + \tau) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1}) \right) (S_L^{n_1} - S_L^{n_0} - S_K^{n_1} + S_K^{n_0}) \\ & + \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Upsilon_n(t, t + \tau) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) (S_L^{n_1} - S_L^{n_0} - S_K^{n_1} + S_K^{n_0}) \\ & + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \Upsilon_n(t, t + \tau) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\partial K \cap \partial \Omega| h_K^{n+1} (S_K^{n_1} - S_K^{n_0}), \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young ( $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ ), les propriétés des  $G_s$  et  $\beta$ , et le fait que pour tout  $K \in \mathcal{T}_h, L \in N(K)$  et le Lemme ?? nous obtenons que  $\forall 0 < \varpi < 1$  on a

$$\begin{aligned} A(t) \leq & \mu \frac{\Delta t}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \Upsilon_n(t, t + \tau) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left| \frac{S_L^{n+1} - S_L^n}{\Delta t} - \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} \right|^2 \\ & + \frac{\Delta t}{4} C \sum_{n=0}^{N-1} \Upsilon_n(t, t + \tau) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} |S_L^{n+1} - S_K^{n+1}|^2 \\ & + \frac{\Delta t}{4} C_1 \sum_{n=0}^{N-1} \Upsilon_n(t, t + \tau) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} |P_L^{n+1} - P_K^{n+1}|^2 \\ & + \Delta t \left( 1 + \frac{\mu}{2} + C_2 \varpi \right) \sum_{n=0}^{N-1} \Upsilon_n(t, t + \tau) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( |S_L^{n_1} - S_K^{n_1}|^2 + |S_L^{n_0} - S_K^{n_0}|^2 \right) \\ & + \frac{\Delta t}{\varpi} \sum_{n=0}^{N-1} \Upsilon_n(t, t + \tau) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\partial K \cap \partial \Omega| (h_K^{n+1})^2 \\ & + C_2 \varpi \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \Upsilon_n(t, t + \tau) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |S_K^{n_1} - S_K^{n_0}|^2, \end{aligned}$$



où  $C$ , et  $C_1$  sont deux constantes positives dépendent respectivement de  $\beta$  et  $G_s$ , et  $C_2$  est la constante définie dans le Lemme ??.

Les propriétés suivantes vont permettre d'obtenir les translatés souhaités (voir Ey-mard et al. [? ], pour plus de détails)

$$\int_0^{T-\tau} \Upsilon_n(t, t + \tau) dt \leq \tau$$

et

$$\forall m = 0 \dots N - 1, \quad \int_{t^m}^{t^{m+1}} \left( \sum_0^{N-1} \Upsilon_n(t, t + \tau) \right) dt \leq \tau.$$

Cela permet notamment d'obtenir que

$$\int_0^{T-\tau} \Delta t \left( \sum_0^{N-1} \Upsilon_n(t, t + \tau) \right) dt \leq \tau T.$$

En utilisant le fait que  $n_0 = m + 1$  si  $t \in ]t^m, t^{m+1}[$ , les estimations d'énergie dans les Proposition ??-??-?? et en choisissant une certaine  $\varpi$  convenable, on déduit que, pour  $C(\Omega, T, G_s, \beta, \mu, \varpi) > 0$ ,

$$\int_0^{T-\tau} A(t) dt \leq C\tau.$$

□

### 3.5 Résultats de compacité

On rappelle le Théorème de Riesz-Frechet-Kolmogorov suivant

**Théorème 3.1. (Riesz-Frechet-Kolmogorov)** Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble borné dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$  avec  $1 \leq p < \infty$ . On suppose que pour  $h \in \mathbb{R}^d$ ,  $\lim_{|h| \rightarrow 0} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0$  uniformement dans  $\mathcal{F}$ . Alors la fermeture de  $\mathcal{F}|_{\Omega}$  dans  $L^p(\Omega)$  est compact pour tout ensemble mesurable borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .

**Preuve :** voir Haim Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations [? ]. □

**Lemme 3.8.** Il existe une sous suite toujours notée  $(s_h, p_h)$ , telles que, quand  $h \rightarrow 0$

### 3.5 Résultats de compacité

---

on a

$$s_h \longrightarrow s, \text{ fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p dans } Q_T, \quad (3.32)$$

$$\nabla_h s_h \rightharpoonup \nabla s, \text{ faiblement dans } (L^2(Q_T))^d, \quad (3.33)$$

$$\nabla_h \beta(s_h) \rightharpoonup \nabla \beta(s), \text{ faiblement dans } (L^2(Q_T))^d, \quad (3.34)$$

$$p_h \rightharpoonup p, \text{ faiblement dans } L^2(Q_T), \quad (3.35)$$

$$\nabla_h p_h \rightharpoonup \nabla p, \text{ faiblement dans } (L^2(Q_T))^d, \quad (3.36)$$

$$\partial_t \bar{s}_h \rightharpoonup \partial_t s \text{ faiblement dans } L^2(Q_T), \quad (3.37)$$

$$\nabla \partial_t \bar{s}_h \rightharpoonup \nabla \partial_t s \text{ faiblement dans } (L^2(Q_T))^d. \quad (3.38)$$

**Preuve :** Soit la fonction  $\hat{s}_h$  définie sur  $\mathbb{R}^{d+1}$  par

$$\hat{s}_h = \begin{cases} \bar{s}_h & \text{pour tout } (t, x) \in Q_T \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après les Lemmes des translatsés en temps et en espace Lemme ?? et Lemme ??, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \iint_{\mathbb{R}^d} |\hat{s}_h(t, x + \xi) - \hat{s}_h(t, x)|^2 dx dt \leq C|\xi|(|\xi| + 2h),$$

et

$$\forall \tau \in ]0, T[, \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\hat{s}_h(t + \tau, x) - \hat{s}_h(t, x)|^2 dx dt \leq C(\tau + \Delta t).$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \left\| \hat{s}_h(t + \tau, x + \eta) - \hat{s}_h(t, x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})} &\leq \left\| \hat{s}_h(t, x + \eta) - \hat{s}_h(t, x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})} \\ &\quad + \left\| \hat{s}_h(t + \tau, x) - \hat{s}_h(t, x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})}, \end{aligned}$$

donc

$$\left\| \hat{s}_h(t + \tau, x + \eta) - \hat{s}_h(t, x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})} \longrightarrow 0 \text{ quand } (\tau, \eta, \Delta t) \rightarrow 0$$

Maintenant, en appliquant le théorème ?? et le Lemme 8.4 de [?], nous obtenons que la suite  $(s_h)$  est relativement compacte dans  $L^2(Q_T)$ . Ainsi, il existe une sous-suite,

encore notée  $(s_h)$ , telle que lorsque  $h \rightarrow 0$

$$s_h \longrightarrow s \text{ fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p dans } Q_T.$$

Pour la convergence (??), d'après la Proposition ??  $(\nabla_h s_h)_h$  est bornée dans  $L^2(Q_T)$  d'où il existe une sous-suite, encore notée  $(\nabla_h s_h)_h$  qui converge faiblement vers une fonction  $\zeta \in (L^2(Q_T))^d$ . Il reste à démontrer que  $\zeta = \nabla s$  au sens des distribution. Pour cela il suffit de démontrer que, lorsque  $h \rightarrow 0$  on a

$$E_h = \int_{Q_T} \nabla_h s_h \cdot \varphi dx dt + \int_{Q_T} s_h \operatorname{div} \varphi dx dt \longrightarrow 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q_T)^d.$$

On suppose que  $h$  est suffisamment petit pour que  $\varphi$  s'annule sur  $T_{K,\sigma}^{ext}$  pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ . Puisque  $\eta_{K,L} = -\eta_{L,K}$  on obtient pour tout  $t \in ]t^n, t^{n+1}[$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} s_h \operatorname{div} \varphi(t, x) dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K s_h \operatorname{div} \varphi(t, x) dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} S_K^{n+1} \int_{\sigma_{K,L}} \varphi(t, s) \cdot \eta_{K,L} ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} (S_K^{n+1} - S_L^{n+1}) \int_{\sigma_{K,L}} \varphi(t, s) \cdot \eta_{K,L} ds. \end{aligned}$$

Maintenant d'après la définition du gradient discret

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_h s_h \cdot \varphi(t, x) dx &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \int_{T_{K,L}} \nabla_h s_h \cdot \varphi(t, x) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \frac{d}{d_{K,L}} (S_K^{n+1} - S_L^{n+1}) \int_{T_{K,L}} \varphi(t, x) \cdot \eta_{K,L} dx. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} E_h &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Delta t}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K,L}| (S_K^{n+1} - S_L^{n+1}) \left( \frac{1}{|\sigma_{K,L}|} \int_{\sigma_{K,L}} \varphi(t, s) \cdot \eta_{K,L} ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{|T_{K,L}|} \int_{T_{K,L}} \varphi(t, x) \cdot \eta_{K,L} dx \right) \end{aligned}$$

D'après la régularité de la fonction  $\varphi$  on a

$$\left| \frac{1}{|\sigma_{K,L}|} \int_{\sigma_{K,L}} \varphi(t, s) \cdot \eta_{K,L} ds - \frac{1}{|T_{K,L}|} \int_{T_{K,L}} \varphi(t, x) \cdot \eta_{K,L} dx \right| \leq Ch,$$

### 3.6 Convergence vers une solution faible

---

et si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec la Proposition ?? on obtient

$$\begin{aligned}
|E_h| &\leq Ch \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \sigma_{K,L} (S_K^{n+1} - S_L^{n+1}) \\
&\leq Ch \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \frac{\sigma_{K,L}}{d_{K,L}} (S_K^{n+1} - S_L^{n+1})^2 + Ch \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \sigma_{K,L} d_{K,L} \\
&\leq Ch |\Omega| T.
\end{aligned}$$

Pour la convergence (??) on utilise la continuité de la fonction  $\beta$  et la convergence presque par de  $s_h$ , alors

$$\beta(s_h) \rightarrow \beta(s) \text{ p.p dans } Q_T,$$

de plus  $\beta$  est bornée par construction (??), alors le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure que  $\beta(s_h) \rightarrow \beta(s)$  fortement dans  $L^p(Q_T)$  avec  $p \geq 1$  et p.p dans  $Q_T$ .

Ensuite, pour les convergences (??) et (??) on a d'après la Proposition ??, la suite  $(\nabla_h p_h)_h$  est bornée dans  $L^2(Q_T)^d$ , ainsi  $(p_h)_h$  est encore bornée dans  $L^2(Q_T)$  d'après le Lemme ?. D'où il existe des sous suites encore notée  $(p_h)_h$  et  $(\nabla_h p_h)_h$  telles que

$$p_h \rightharpoonup p \text{ faiblement dans } L^2(Q_T), \text{ et } \nabla_h p_h \rightharpoonup \zeta \text{ faiblement dans } (L^2(Q_T))^d.$$

Les autres résultats s'obtiennent facilement en utilisant la même méthode que celle déjà utilisée précédemment pour montrer que  $\zeta = \nabla p$  au sens des distributions .

Finalement, les convergences (??)-(??) découlent directement de la Proposition ?? et les convergences (??)-(??).  $\square$

### 3.6 Convergence vers une solution faible

**Théorème 3.2. (Convergence vers une solution faible)** *Sous les hypothèses (H1) – (H6), la suite  $(s_h, p_h)$  solution du schéma (??)-(??) converge vers  $(s, p)$  une solution faible du modèle (??)-(??) au sens de la définition ??.*

**Preuve :** Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T[ \times \bar{\Omega})$  et la suite  $(\varphi_K^n)_{L \in \mathcal{T}_h, n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\varphi_K^n = \varphi(t^n, x_K)$ . En multipliant l'équation (??)-(??) par  $\varphi_K^{n+1}$  puis en sommant pour

$K \in \mathcal{T}_h$  et  $n = 0 \dots N - 1$ , nous obtenons

$$A_h + B_h + C_h + D_h = F_h, \quad M_h = N_h$$

avec

$$\begin{aligned} A_h &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| (S_K^{n+1} - S_K^n) \varphi_K^{n+1} \\ B_h &= -\mu \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( (S_L^{n+1} - S_L^n) - (S_K^{n+1} - S_K^n) \right) \varphi_K^{n+1} \\ C_h &= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) \varphi_K^{n+1} \\ D_h &= - \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( \beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1}) \right) \varphi_K^{n+1} \\ F_h &= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\partial K \cap \partial \Omega| h_K^{n+1} \varphi_K^{n+1} \\ M_h &= - \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} G_p(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) \varphi_K^{n+1} \\ N_h &= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\partial K \cap \partial \Omega| \pi_K^{n+1} \varphi_K^{n+1}. \end{aligned}$$

Pour le premier terme on a

$$A_h = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Delta t |K| |\partial_t \bar{s}_h|_{[t_n, t_{n+1}] \times K} \varphi_K^{n+1} = \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \bar{s}_h \varphi_h \, dx dt.$$

En utilisant la convergence faible de la suite  $(\partial_t \bar{s}_h)_h$  et la régularité de la fonction  $\varphi$ , on obtient

$$A_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t s \varphi \, dx dt.$$

### 3.6 Convergence vers une solution faible

---

Pour le deuxième terme, on a

$$\begin{aligned}
B_h &= \frac{\mu}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} \left( (S_L^{n+1} - S_L^n) - (S_K^{n+1} - S_K^n) \right) (\varphi_L^{n+1} - \varphi_K^{n+1}) \\
&= \frac{\mu}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} |T_{K,L}| d \frac{(S_L^{n+1} - S_L^n) - (S_K^{n+1} - S_K^n)}{d_{K,L}} \left( \frac{\varphi_L^{n+1} - \varphi_K^{n+1}}{d_{K,L}} \right) \\
&= \frac{\mu}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} |T_{K,L}| \nabla_{K,L} \partial_t \bar{s}_h \cdot \eta_{K,L} \nabla \varphi(t, x_{K,L}) \cdot \eta_{K,L} dt.
\end{aligned}$$

avec  $x_{K,L} = \theta x_K + (1 - \theta)x_L$ ,  $0 < \theta < 1$ , un point dans le segment  $]x_K, x_L[$ . Mais, la valeur de  $\nabla_{K,L}$  admet la même direction que  $\eta_{K,L}$ , d'où

$$\nabla_{K,L} \partial_t \bar{s}_h \cdot \eta_{K,L} \nabla \varphi(t, x_{K,L}) \cdot \eta_{K,L} = \nabla_{K,L} \partial_t \bar{s}_h \cdot \nabla \varphi(t, x_{K,L})$$

Comme chaque terme correspondant à  $T_{K,L}$  apparait deux fois alors on peut récrire  $B_h$  sous la forme

$$B_h = \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla_h \partial_t \bar{s}_h \cdot (\nabla \varphi)_h dx dt,$$

en utilisant la convergence faible de la suite  $(\nabla_h \partial_t \bar{s}_h)_h$  et la régularité de la fonction  $\varphi$  on obtient

$$B_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \partial_t s \cdot \nabla \varphi dx dt.$$

Maintenant, on va montrer la convergence suivante

$$D_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \beta(s) \cdot \nabla \varphi dx dt.$$

En effet, en intégrant par partie  $D_h$ , on obtient

$$\begin{aligned}
D_h &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} |T_{K,L}| d \left( \frac{\beta(S_L^{n+1}) - \beta(S_K^{n+1})}{d_{K,L}} \right) \left( \frac{\varphi_K^{n+1} - \varphi_L^{n+1}}{d_{K,L}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} |T_{K,L}| \nabla_{K,L} \beta(s_h) \cdot \eta_{K,L} \nabla \varphi(t^{n+1}, x_{K,L}) \cdot \eta_{K,L} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} |T_{K,L}| \nabla_{K,L} \beta(s_h) \cdot \nabla \varphi(t^{n+1}, x_{K,L}) \cdot \eta_{K,L}
\end{aligned}$$

Comme chaque terme correspondant à  $T_{K,L}$  apparait deux fois alors on peut récrire  $D_h$  sous la forme

$$D_h = \int_0^T \int_{\Omega} \nabla_h \beta(s_h) \cdot (\nabla \varphi)_h dx dt,$$

il est clair que, d'après la régularité de  $\varphi$ ,  $(\nabla \varphi)_h \rightarrow \nabla \varphi$  dans  $L^\infty(Q_T)$ . Ensuite, le résultat découle de la convergence faible (??).

Pour la convergence du flux convectif, on va montrer que

$$C_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} f(s) \lambda(s) \nabla p \cdot \nabla \varphi dx dt.$$

En effet, on fait une intégration par partie de  $C_h$

$$C_h = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) (\varphi_L^{n+1} - \varphi_K^{n+1}).$$

Pour chaque couple de voisins  $K, L$  on définit  $S_{K,L}^{n+1}$  le minimum des  $S_K^{n+1}$  et  $S_L^{n+1}$ , et nous introduisons

$$C_h^* = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} f(S_{K,L}^{n+1}) \lambda(S_{K,L}^{n+1}) dp_{K,L}^{n+1} (\varphi_L^{n+1} - \varphi_K^{n+1}).$$

on définit  $\bar{s}_h$  et  $\underline{s}_h$  par

$$\bar{s}_h|_{]t^n, t^{n+1}] \times T_{K,L}} := \max\{S_K^{n+1}, S_L^{n+1}\}, \text{ et } \underline{s}_h|_{]t^n, t^{n+1}] \times T_{K,L}} := \min\{S_K^{n+1}, S_L^{n+1}\}.$$

Maintenant, on peut récrire  $C_h^*$  sous la forme variationnelle suivante

$$C_h^* = \int_0^T \int_{\Omega} f(\underline{s}_h) \lambda(\underline{s}_h) \nabla_h p_h \cdot (\nabla \varphi)_h dx dt.$$

En outre, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |\bar{s}_h - \underline{s}_h|^2 dx dt &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} |T_{K,L}| (S_L^{n+1} - S_K^{n+1})^2 \\ &\leq Ch^2 \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K,L} (S_L^{n+1} - S_K^{n+1})^2 \\ &\leq Ch^2. \end{aligned}$$

### 3.6 Convergence vers une solution faible

---

grâce à l'estimation (??), d'où

$$|\bar{s}_h - \underline{s}_h| \rightarrow 0 \text{ presque partout dans } Q_T. \quad (3.39)$$

Par conséquence, on a  $\underline{s}_h \leq s_h \leq \bar{s}_h$  et  $s_h \rightarrow s$  presque partout dans  $Q_T$ . Par conséquence comme  $f\lambda$  est continue alors  $f(\underline{s}_h)\lambda(\underline{s}_h) \rightarrow f(s)\lambda(s)$  presque partout dans  $Q_T$  et dans  $L^p(Q_T)$  pour  $p < \infty$ . On utilise la convergence (??) et la convergence forte de  $(\nabla\varphi)_h$  vers  $\nabla\varphi$  on obtient

$$C_h^* \longrightarrow \int_0^T \int_{\Omega} f(s)\lambda(s)\nabla p \cdot \nabla\varphi \, dx \, dt.$$

Il reste à montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} |C_h - C_h^*| = 0 \quad (3.40)$$

D'après la propriété de consistance du flux numérique on a

$$\begin{aligned} & |G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) - f(S_{K,L}^{n+1})\lambda(S_{K,L}^{n+1})dp_{K,L}^{n+1}| \\ &= |G_s(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) - |G_s(S_{K,L}^{n+1}, S_{K,L}^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1})| \\ &\leq |dp_{K,L}^{n+1}|\omega(2|S_L^{n+1} - S_K^{n+1}|). \end{aligned}$$

Par conséquence

$$|C_h - C_h^*| \leq \int_0^T \int_{\Omega} \omega(2|\bar{s}_h - \underline{s}_h|)\nabla_h p_h \cdot (\nabla\varphi)_h \, dx \, dt$$

Finalement en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et en utilisant le fait que la suite  $(\nabla_h p_h)_h$  est bornée et la convergence (??), on obtient le résultat (??).

Pour le terme source :

$$F_h = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\partial K \cap \partial\Omega| h_K^{n+1} \varphi_K^{n+1} = \int_0^T \int_{\partial\Omega} h(t, x) \varphi_h \, dx \, dt \longrightarrow \int_0^T \int_{\partial\Omega} h \varphi \, dx \, dt.$$

On s'intéresse maintenant à la limite pour l'équation discrétisée de la pression. En intégrant par partie  $M_h$ , on obtient

$$M_h = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} G_p(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1})(\varphi_L^{n+1} - \varphi_K^{n+1})$$



puis, on introduit

$$\begin{aligned} M_h^* &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{L \in N(K)} \lambda(S_{K,L}^{n+1}) dp_{K,L}^{n+1} (\varphi_L^{n+1} - \varphi_K^{n+1}) \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \lambda(\underline{s}_h) \nabla_h p_h \cdot (\nabla \varphi)_h \, dxdt, \end{aligned}$$

en utilisant la convergence forte du  $\lambda(\underline{s}_h) \cdot (\nabla \varphi)_h$  vers  $\lambda(s) \nabla \varphi$  et la convergence faible sur la pression (??), on obtient

$$M_h^* \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \lambda(s) \nabla p \cdot \nabla \varphi \, dxdt.$$

Il reste à montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} |M_h - M_h^*| = 0,$$

D'après les propriétés de  $G_p$  on a

$$|G_p(S_K^{n+1}, S_L^{n+1}, dp_{K,L}^{n+1}) - \lambda(S_{K,L}^{n+1}) dp_{K,L}^{n+1}| \leq C |dp_{K,L}^{n+1}| |(\bar{s}_h - \underline{s}_h)|_{]t^n, t^{n+1}] \times T_{K,L}}|$$

le résultat découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et du fait que la suite  $(\nabla_h p_h)_h$  est bornée et de la convergence (??). Enfin, le terme source s'écrit de façon équivalente :

$$N_h = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\partial K \cap \partial \Omega| \pi_K^{n+1} \varphi_K^{n+1} = \int_0^T \int_{\Omega} \pi \varphi_h \, dxdt \longrightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \pi \varphi \, dxdt.$$

Ce qui prouve le Théorème ?? □

### 3.7 Test numérique pour un modèle isotrope de Darcy-Brinkman

Dans ce qui suit, on effectue plusieurs tests numériques pour valider le schéma de volumes finis appliqué au modèle isotrope de Darcy-Brinkman. Le calcul de la solution numérique est effectué selon l'algorithme suivant : à chaque instant discret  $t_{n+1}$ , on calcule la solution  $(P^{n+1}, S^{n+1})$  du système non-linéaire (??)-(??) en utilisant un algorithme de Newton pour approcher la solution du système non-linéaire

### 3.7 Test numérique pour un modèle isotrope de Darcy-Brinkman

---

et une méthode de bigradient pour résoudre les systèmes linéaires résultants de la procédure de l'algorithme de Newton. On va effectuer nos tests sur des maillages admissibles donnés dans la Figure ??.

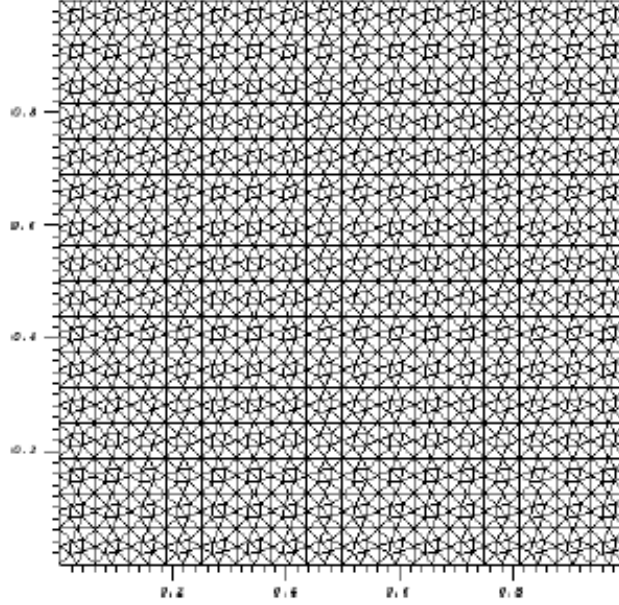


FIGURE 3.2 : Maillage Mazen Benchmark FVCA5 de 3584 triangles.

Nous fournirons deux tests faits sur un maillage admissible nonuniforme. On considère les données suivantes :  $L_x = 1$  et  $L_y = 1$  comme étant la longueur et la largeur du domaine construit par un logiciel triangle et donné dans la Figure ??.

#### 3.7.1 Test 1 : Écoulement eau-gaz

Dans ce premier test, on considère les fonctions avec les indices  $w$  et  $g$  qui désignent respectivement les fonctions de l'eau et de gaz :

- $k_w(s_w) = s_w^2$  : perméabilité relative de l'eau,
- $k_w(s_g) = s_g^2$  : perméabilité relative de gaz,
- $K = 0.15 \times 10^{-8}$  : perméabilité du milieu,
- $\phi = 0.7$  : porosité du milieu, :
- $\mu_w = 10^{-3}$  : viscosité usuel de l'eau,
- $\mu_g = 9 \times 10^{-5}$  : viscosité usuelle de gaz,

–  $p_c = 0$  : pression capillaire.

**Conditions initiales :** Initialement, la saturation du gaz est considérée égale à 0.9 dans le domaine et la pression du gaz est considérée égale à  $1.013 \times 10^5$  Pa.

**Conditions aux bords :** L'eau est injectée dans la région gauche du domaine ( $x = 0$ , et  $0.8 \leq y \leq 1$ ) avec une pression constante égale à  $4.026 \times 10^5$  Pa. Dans la région droite du domaine ( $x = 1$  et  $0 \leq y \leq 0.2$ ) les fluides s'écoulent librement à la pression atmosphérique et la partie restante du bord est supposée être imperméable (aucun flux n'est imposé). Sur les figures ??, ??, ??, ?? on a tracé la saturation de l'eau à différents instants et en fonction de la viscosité effective de Brinkman. On observe l'effet diffusif par rapport à  $\mu$ , l'augmentation de  $\mu$  entraîne d'une part l'avancée du front eau/gaz et d'autre part son étalement ce qui traduit l'effet régularisant de l'opérateur de Brinkman. En absence des termes capillaires la diffusion est due à la diffusion de Brinkman.

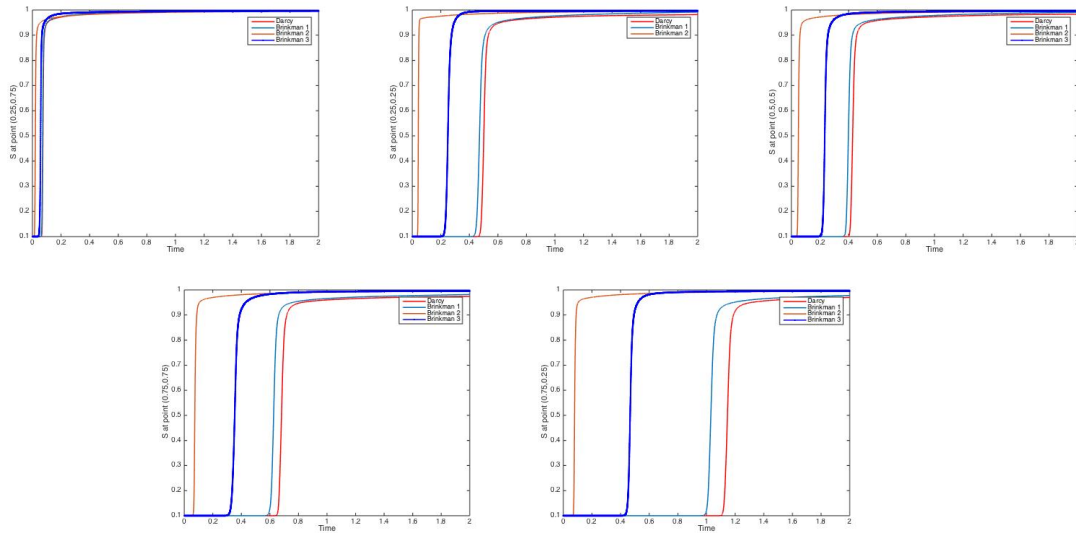


FIGURE 3.3 : Les figures de haut en bas et de gauche à droite représentent l'évolution au cours du temps de la saturation de l'eau aux points  $(0,25, 0,75)$ ,  $(0,25, 0,25)$ ,  $(0,5, 0,5)$ ,  $(0,75, 0,75)$ ,  $(0,75, 0,25)$ . La courbe Brinkman 1 correspond à  $\mu = 10^{-7}$ , Brinkman 2 correspond à  $\mu = 10^{-6}$  et Brinkman 3 correspond à  $\mu = 10^{-5}$ .

### 3.7.2 Test 2 : Écoulement eau-pétrole

Dans ce premier test, on a changé seulement le type des fluides, on remplace le gaz par le pétrole et on prend la viscosité de pétrole  $\mu_o = 1$  et on suppose que le

### 3.7 Test numérique pour un modèle isotrope de Darcy-Brinkman

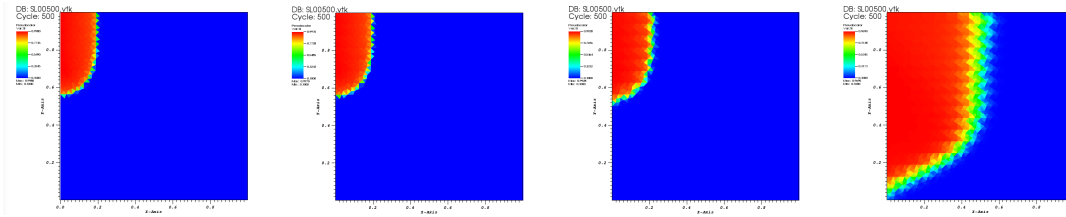


FIGURE 3.4 : Saturation de l'eau à  $t=0.05$  s et le courbe de gauche à droite correspondent à  $\mu = 0, 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}$  respectivement.

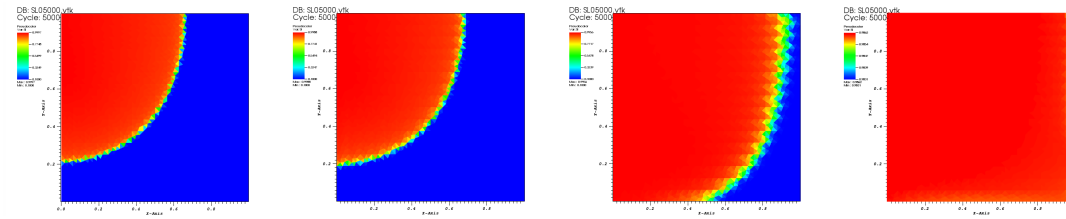


FIGURE 3.5 : Saturation de l'eau à  $t=0.5$  s et le courbe de gauche à droite correspondent à  $\mu = 0, 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}$  respectivement.

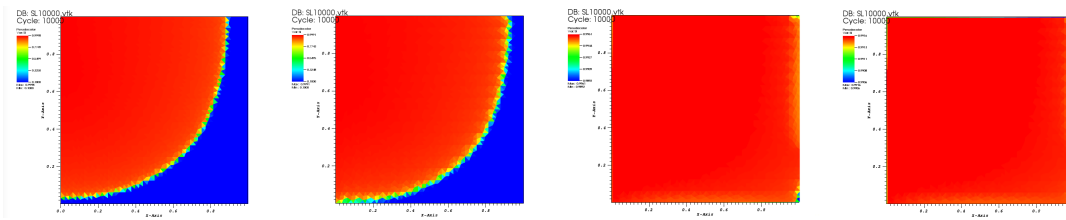


FIGURE 3.6 : Saturation de l'eau à  $t=1$  s et le courbe de gauche à droite correspondent à  $\mu = 0, 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}$  respectivement.

domaine est saturé par le pétrole. Sur les figures ??, ??, ??, ??, le phénomène d'étalement du front et de la dissipation sont encore plus prononcés. On voit l'influence de l'augmentation de la viscosité du fluide présent dans le milieu. En effet, le pétrole résiste à l'injection de l'eau, ainsi l'eau crée une direction privilégiée entre la région d'injection et de production des fluides.

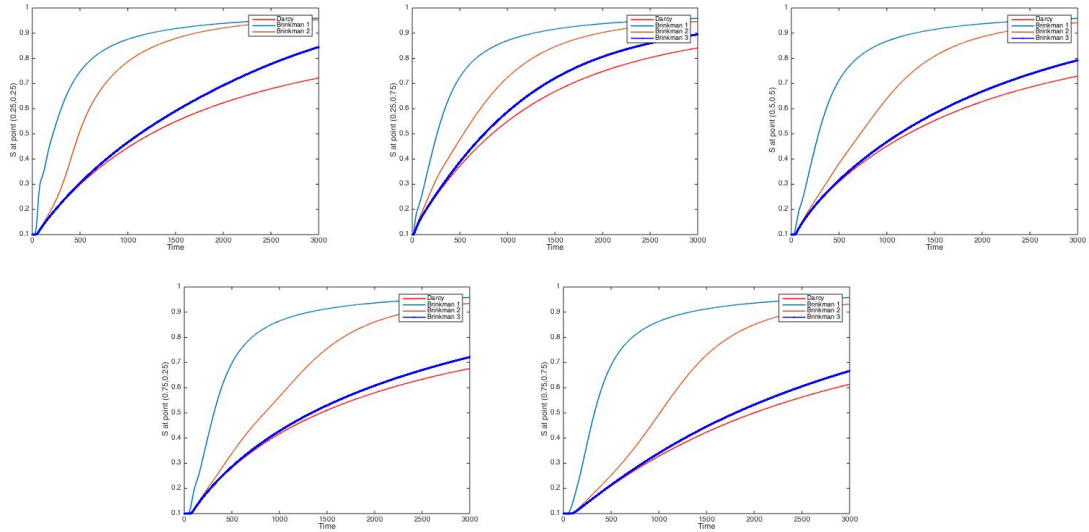


FIGURE 3.7 : Évolution du saturation de l'eau par rapport au temps en plusieurs points dans le domaine

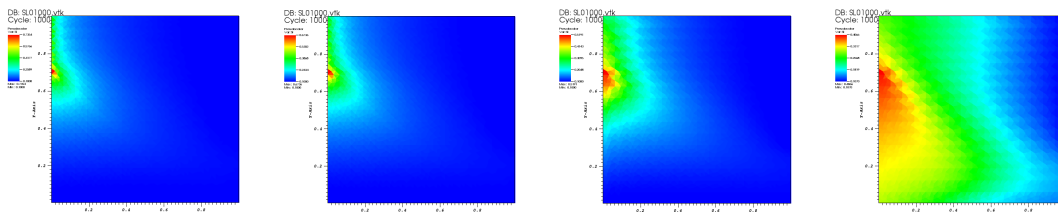


FIGURE 3.8 :  $t=100$  s et  $\mu = 0, 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}$

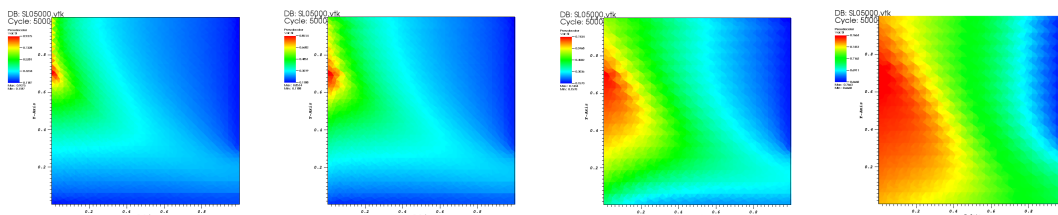


FIGURE 3.9 :  $t=500$  s et  $\mu = 0, 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}$

### 3.7 Test numérique pour un modèle isotrope de Darcy-Brinkman

---

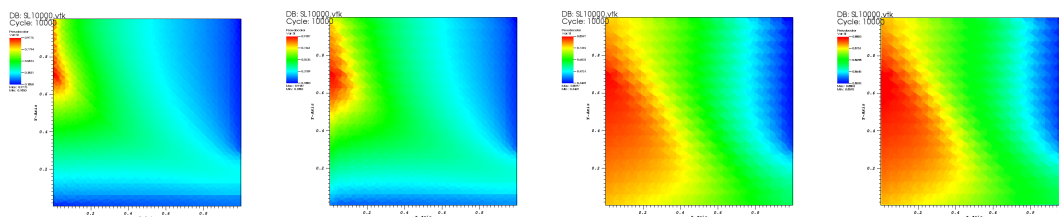


FIGURE 3.10 :  $t=1000$  s et  $\mu = 0, 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}$



---

# Analysis of a finite volume-finite element method for Darcy-Brinkman two-phase flows in porous media

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>The Darcy-Brinkman model</b>	<b>102</b>
<b>4.2</b>	<b>Combined Finite volume-Finite element scheme for system (??)</b>	<b>105</b>
4.2.1	Space and time discretizations	105
4.2.2	Combined scheme	107
<b>4.3</b>	<b>Existence and discrete properties</b>	<b>110</b>
4.3.1	Preliminary results	110
4.3.2	A priori estimates	114
4.3.3	Existence of discrete solution	121
<b>4.4</b>	<b>Convergence</b>	<b>123</b>



4.4.1	Compactness Estimates on Discrete Solutions . . . . .	123
4.4.2	Convergence of the combined scheme . . . . .	123
<b>4.5</b>	<b>Proof of theorem ?? . . . . .</b>	<b>127</b>

---

## 4.1 The Darcy-Brinkman model

Different empiric laws are used to describe the filtration of a fluid through porous media. Darcy law is the most popular one, due to its simplicity. It states that the filtration velocity of the fluid is proportional to the pressure gradient. Darcy law cannot sustain the no-slip condition on an impermeable wall or a transmission condition on the contact with free flow [? ?]. That motivated H. Brinkmann in 1947 to modify the Darcy law in order to be able to impose the no-slip boundary condition on an obstacle submerged in porous medium [? ? ?]. He assumed large permeability to compare his law with experimental data and assumed that the second viscosity  $\mu$  equals to the physical viscosity of the fluid in the case of monophasic flow. Brinkman law could formally be obtained from the Stokes system describing the microscopic flow, by adding the resistance to the flow [? ].

Let  $T > 0$ , fixed and let  $\Omega$  be a bounded set of  $\mathbb{R}^d (d \geq 1)$ . We set  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ ,  $\Sigma_T = (0, T) \times \partial\Omega$ , and  $\eta$  is the outward normal to the boundary  $\partial\Omega$ . The mass conservation of two incompressible phases with Darcy-Brinkman velocity of each phase can be written in the following system, (see [? ?] for more details),

$$\begin{cases}
 \phi \partial_t s - \mu \phi \operatorname{div} (\Lambda \nabla \partial_t s) - \operatorname{div} (f(s) \lambda(s) \Lambda \nabla p) - \operatorname{div} (\alpha(s) \Lambda \nabla s) = 0, & \text{in } Q_T \\
 - \operatorname{div} (\lambda(s) \Lambda \nabla p) = 0, & \text{in } Q_T \\
 \int_{\Omega} p(t, x) \, dx = 0, & \text{in } (0, T) \\
 \lambda(s) \Lambda \nabla p(t, x) \cdot \eta = \pi(t, x), & \text{on } \Sigma_T \\
 \mu \phi \Lambda \nabla \partial_t s \cdot \eta + f(s) \pi + \alpha(s) \Lambda \nabla s \cdot \eta = h(t, x), & \text{on } \Sigma_T \\
 s(0, x) = s_0(x), & \text{in } \Omega.
 \end{cases}
 \tag{4.1}$$

In the above model, the first saturation phase (volume fraction) is represented by  $s = s(t, x)$  and the other saturation phase is stated to be  $1 - s$  and by  $p = p(t, x)$  the global pressure. Next,  $\lambda(s) = \frac{\lambda_1(s)}{\mu_1} + \frac{\lambda_2(s)}{\mu_2}$  is the total mobility with  $\lambda_i$  and  $\mu_i$  are the relative permeability and the viscosity of the phase  $i = 1, 2$ ; where  $\Lambda$  is the

## 4.1 The Darcy-Brinkman model

---

permeability tensor of the porous medium and  $f(s) = \frac{\lambda_1(s)}{\mu_1 \lambda(s)}$  is the fractional flow. Furthermore, the function  $\alpha(s) = \frac{\lambda_1(s) \lambda_2(s)}{\mu_1 \mu_2 \lambda(s)} p'_c(s)$  is the capillary pressure term. The viscosity  $\mu > 0$  is said the Brinkman viscosity.

We give the main assumptions made about the system :

- (H1)  $\Lambda$  is a symmetric matrix where  $\Lambda_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ , and there exists a constant  $C_\Lambda > 0$  such that  $\Lambda \xi \cdot \xi \geq C_\Lambda |\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$ .
- (H2) The fractional flow  $f$  is a continuous function satisfies  $f(0) = 0, f(1) = 1$  and  $0 \leq f(u) \leq 1$ .
- (H3) The total mobility  $\lambda$  is a continuous function and there exists a positive constant  $\lambda_*$ , such that  $0 < \lambda_* \leq \lambda(\cdot)$ .
- (H4) the capillary pressure term is a continuous function with  $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$ .
- (H5) The function  $\pi : \Sigma_T \rightarrow \mathbb{R}$  is a bounded function in  $L^\infty(0, T; L^2(\partial\Omega))$  with  $\int_{\partial\Omega} \pi d\sigma = 0$ .
- (H6) The initial function  $s_0 \in H^1(\Omega)$ , and the function  $h \in L^\infty(0, T; L^2(\partial\Omega))$ .

In the sequel, we use the Lipschitz continuous nondecreasing function  $\beta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  defined by

$$\beta(s) := \int_0^s \alpha(\zeta) d\zeta, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+.$$

We now give the definition of a weak solution of the problem (??).

**Définition 4.1.** *A weak solution of system (??) is a pair of function  $(s, p)$ ,  $s, p : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , such that  $\forall T > 0, s \in W^{1,2}(0, T; H^1(\Omega)), p \in L^2(0, T; H_M^1(\Omega))$ ; and for all  $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  we have :*

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \partial_t s \varphi dx dt + \mu \int_0^T \int_\Omega \Lambda \nabla \partial_t s \cdot \nabla \varphi dx dt + \int_0^T \int_\Omega \Lambda f(s) \lambda(s) \nabla p \cdot \nabla \varphi dx dt \\ + \int_0^T \int_\Omega \Lambda \alpha(s) \nabla s \cdot \nabla \varphi dx dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} h \varphi dx dt = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\int_0^T \int_\Omega \Lambda \lambda(s) \nabla p \cdot \nabla \varphi dx dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \pi \varphi dx dt = 0, \quad (4.3)$$

where,  $H_M^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega), \int_\Omega u = 0 \right\}$ .

Numerical discretization and simulation of multi-phase flow in porous media with

Darcy velocity have been the object of several studies during the past decades. There is an extensive literature on the approximation of incompressible two-phase flows with Darcy's velocities for each phase. For instance the finite difference method can be found in the book of Aziz and Settari [? ]. The method of finite element methods (mixed or hybrid) is also studied in the past years see Chavent et al. [? ] and Chen et al. [? ]. For the incompressible immiscible model; let us mention the work of Eymard, Herbin and Michel [? ] where a coupled scheme, consisting in a finite volume method together with a phase-by-phase upstream weighting scheme, is analyzed on orthogonal admissible mesh. In [? ], the authors propose to explore the limit of a finite volume scheme of two-phase flow model with discontinuous capillary pressure. For that, they proposed to study the limit of the upstream finite volume scheme for the incompressible immiscible model. In [? ], the authors suggest a second order accurate finite volume scheme for the Richards equation. Otherwise, the numerical analysis of finite volume and a finite volume-finite element schemes for a compressible two phases flow in porous media for Darcy flow have been studied in the works [? ? ].

At our knowledge, the numerical analysis of combined finite volume-finite element scheme of the problem (??) is not studied on triangular mesh. Nevertheless, we mention the pioneer work [? ] on the convergence analysis of the finite difference scheme of the Brinkman regularization of two incompressible phase flows in porous media. Recently, in chapitre 3, we have been studied the finite volume scheme of Darcy-Brinkman model.

Our aim is to propose a finite volume-finite element scheme based on upstream approach of fractional flow with respect to the gradient of the global pressure.

The rest of this paper is organized as follows. In section 2, we define a primal triangular mesh and its corresponding dual mesh, next, we introduce the nonlinear finite volume-finite element scheme and specify the discretization of the degenerate diffusion and convection terms. In Section 3, we prove the existence of a discrete solution to the finite volume-finite element scheme based on the establishment of a priori estimates on the discrete solution. In Section 4, we give estimates on differences of time and space translates for the approximate solutions. Finally, in Section 5, using the Kolmogorov relative compactness criterion, we prove the convergence of a subsequent of discrete solutions to the weak solution in the sense of definition ??.

## 4.2 Combined Finite volume-Finite element scheme for system (??)

This section is devoted to the formulation of a combined scheme for the anisotropic Darcy-Brinkman model (??). First, we will describe the space and time discretization, define the approximation spaces and then we will introduce the combined scheme.

### 4.2.1 Space and time discretizations

In order to discretize problem (??), we perform a finite element triangulation  $\{\mathcal{T}_h\}$  of the polygonal domain  $\Omega$ , consisting of open bounded simplices such that  $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \bar{K}$  and such that for all  $K, L \in \mathcal{T}_h$ ,  $K \neq L$ , then  $\bar{K} \cap \bar{L}$  is either an empty set or a common vertex or edge of  $K$  and  $L$ . We denote by  $\mathcal{E}_h$  the set of all edges, by  $\mathcal{E}_h^{int}$  the set of interior edges, by  $\mathcal{E}_h^{ext}$  the set of all exterior edges and by  $\mathcal{E}_K$  the set of all edges of an element  $K$ . We define  $h := \max\{\text{diam}(K), K \in \mathcal{T}_h\}$  and make the following shape regularity assumption on the family of triangulation  $\{\mathcal{T}_h\}_h$  :

$$\min_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{|K|}{(\text{diam}(K))^d} \geq k_{\mathcal{T}} > 0 \quad \forall h > 0. \quad (4.4)$$

Assumption (??) is equivalent to the more common requirement of the existence of a constant  $\theta_{\mathcal{T}} > 0$  such that

$$\max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\text{diam}(K)}{\rho_k} \geq \theta_{\mathcal{T}} \quad \forall h > 0,$$

where  $\rho_k$  is the diameter of the largest ball inscribed in the simplex  $K$ .

We also define a dual mesh  $\mathcal{D}_h$  generated by the triangulation mesh  $\mathcal{T}_h$  such that  $\bar{\Omega} = \cup_{D \in \mathcal{D}_h} \bar{D}$ . There is one dual element  $D$  associated with each side  $\sigma_D = \sigma_{K,L} \in \mathcal{E}_h$  a diamond. We construct it by connecting the barycenters of every  $K \in \mathcal{T}_h$  that contains  $\sigma_D$  through the vertices of  $\sigma_D$ . As for the primal mesh, we define  $\mathcal{F}_h$ ,  $\mathcal{F}_h^{int}$  and  $\mathcal{F}_h^{ext}$ , respectively, as the set of dual, interior, and exterior mesh edges. For  $\sigma_D \in \mathcal{F}_h^{ext}$ , the contour of  $D$  is completed by the edge  $\sigma_D$  itself which corresponds to a half diamond. We refer to the Fig. ?? for the 2D case.

We use the following notations :

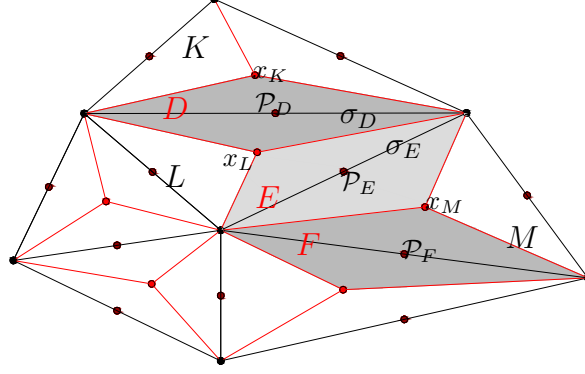


FIGURE 4.1 : Triangles  $K, L \in \mathcal{T}_h$  and dual volumes  $D, E \in \mathcal{D}_h$  associated with edges  $\sigma_D, \sigma_E \in \mathcal{E}_h$ .

- $|D| = mes(D) = d$ -dimensional Lebesgue measure of  $D$  and  $|\sigma|$  is the  $(d-1)$ -dimensional measure of  $\sigma$ .
- $\mathcal{P}_D$  is the barycenter of the edge  $\sigma_D$ .
- $\mathcal{N}(D)$  the set of neighbors of the diamond  $D$ .
- $d_{D,E} := |\mathcal{P}_E - \mathcal{P}_D|$  the distance between the center  $\mathcal{P}_D$  and  $\mathcal{P}_E$ .
- $\sigma_{D,E}$  the interface between a dual volume  $D$  and  $E \in \mathcal{N}(D)$ .
- $\eta_{D,E}$  the unit normal vector to  $\sigma_{D,E}$  outward to  $D$ .
- $K_{D,E}$  is the triangle  $K \in \mathcal{T}_h$  such that  $\sigma_{D,E} \subset K$ .
- $\mathcal{D}_h^{int}$  and  $\mathcal{D}_h^{ext}$  are, respectively, the set of all interior and boundary dual volumes.

Next, we define the following finite-dimensional space :

$$X_h := \{\varphi_h \in L^2(\Omega); \varphi_h|_K \text{ is linear } \forall K \in \mathcal{T}_h, \varphi_h \text{ is continuous at the points } \mathcal{P}_D, D \in \mathcal{D}_h^{int}\}.$$

The basis of  $X_h$  is spanned by the shape functions  $\varphi_D, D \in \mathcal{D}_h$  such that  $\varphi_D(\mathcal{P}_E) = \delta_{DE}, E \in \mathcal{D}_h$  and  $\delta$  being the Kronecker symbol. We recall that the approximations

## 4.2 Combined Finite volume-Finite element scheme for system (??)

---

in these spaces are nonconforming as  $X_h \not\subset H^1(\Omega)$ . We equip  $X_h$  with the semi-norm,

$$\|S_h\|_{X_h}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla S_h|^2 dx.$$

For the time discretization, it's might be performed with a variable time step, to simplify the notation, we consider a constant time step  $\Delta t \in [0, T]$ . A discretization of  $[0, T]$  is given by  $N \in \mathbb{N}^*$  such that  $t_n = n\Delta t$ , for  $n \in \{0, \dots, N+1\}$  with  $t_{N+1} = T$ . For a given value  $W_D$ ,  $D \in \mathcal{D}_h$  (resp.  $W_D^n$ ,  $D \in \mathcal{D}_h$ ,  $n \in [0, N]$ ), we define a piecewise constant function as :  $w(x) = W_D$  for  $x \in D$  (resp.  $w(t, x) = W_D^n$  for  $x \in D$ ,  $t \in ]t_n, t_{n+1}]$ ).

### 4.2.2 Combined scheme

This subsection is committed to discretize the Darcy-Brinkman system (??) with anisotropic tensors on general meshes. The classical approximation of the normal diffusive flux used in the typical finite volume scheme FV4 (see [?] for more details) is not consistent. The FV4 scheme is consistent on admissible mesh which satisfies the orthogonality condition only in the case of isotropic tensor. To discretize (??), we use the implicit Euler scheme in time and we consider the piecewise linear nonconforming finite element method for the discretization of the diffusion term in space. The convection terms are discretized by means of a finite volume scheme on the dual mesh.

The approximation of the flux  $\Lambda \nabla p \cdot \eta_{D,E}$  on the interface  $\sigma_{D,E}$  is denoted by  $\delta P_{D,E}$ . Now, we have to approximate  $\Lambda f(s)\lambda(s)\nabla p \cdot \eta_{D,E}$  by means of the values  $S_D, S_E$ , and  $\delta P_{D,E}$  that are available in the neighborhood of the interface  $\sigma_{D,E}$ . To do this, we use a numerical flux function  $G_s(S_D, S_E, \delta P_{D,E})$ . Numerical convection flux functions  $G_s$  of arguments  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  are required to satisfy the properties of consistency and monotony. One possibility to construct the numerical flux corresponding to  $g(s)c$  is by split  $g(s)$  to a nondecreasing part  $(g(\cdot))_\uparrow$  and a nonincreasing part  $(g(\cdot))_\downarrow$  such that

$$g_\uparrow(z) := \int_0^z (g'(s))^+ ds, \quad g_\downarrow(z) := - \int_0^z (g'(s))^- ds,$$

herein  $(g'(s))^+ = \max(g'(s), 0)$  and  $(g'(s))^- = \max(-g'(s), 0)$ . Then we take,

$$G_s(a, b, c) = c^+ (g_\uparrow(a) + g_\downarrow(b)) - c^- (g_\uparrow(b) + g_\downarrow(a)).$$

**Chapter 4. Analysis of a finite volume-finite element method for  
Darcy-Brinkman two-phase flows in porous media**

---

In our case  $g(\cdot) = -f(\cdot)\lambda(\cdot)$  and since  $f\lambda$  is nondecreasing with  $f(0) = 0$  then,

$$G_s(a, b, c) = -f(b)\lambda(b)c^+ - (-f(a)\lambda(a))c^-. \quad (4.5)$$

Next, for all  $S_h = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} S_D \varphi_D$ , we define a discrete function  $\beta_h(S_h)$  as

$$\beta_h(S_h) = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \beta(S_D) \varphi_D.$$

Finally, a combined finite volume-nonconforming finite element scheme for the discretization of the problem (??) is given by the following set of equations : For all  $D \in \mathcal{D}_h$ ,

$$S_D^0 = \frac{1}{|D|} \int_D s_0(x) dx, \quad (4.6)$$

and for all  $D \in \mathcal{D}_h$ ,  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ ,

$$\begin{aligned} |D| \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} - \mu \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right) - \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \beta(S_E^{n+1}) - \beta(S_D^{n+1}) \right) \\ + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}; \delta P_{D,E}^{n+1}) = |\partial D \cap \partial \Omega| h_D^{n+1}, \quad (4.7) \end{aligned}$$

$$- \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_p(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}; \delta P_{D,E}^{n+1}) = |\partial D \cap \partial \Omega| \pi_D^{n+1}, \quad (4.8)$$

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} P_D^{n+1} \varphi_D = 0. \quad (4.9)$$

$$h_D^{n+1} = \frac{1}{\Delta t |\partial D \cap \partial \Omega|} \int_{\partial D \cap \partial \Omega} \int_{t_n}^{t_{n+1}} h(t, x) dx, \quad \pi_D^{n+1} = \frac{1}{\Delta t |\partial D \cap \partial \Omega|} \int_{\partial D \cap \partial \Omega} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \pi(t, x) dx.$$

The coefficient  $\mathcal{M}_{D,E}$  for  $D, E \in \mathcal{D}_h^{int}$  is the stiffness coefficient of the nonconforming finite element method. So that :

$$\mathcal{M}_{D,E} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\Lambda \nabla \varphi_E, \nabla \varphi_D)_{L^2(K)}, \quad (4.10)$$

## 4.2 Combined Finite volume-Finite element scheme for system (??)

---

$\delta P_{D,E}^{n+1}$  denotes the approximation of  $\Lambda \nabla p$  on the interface  $\sigma_{D,E}$  :

$$\delta P_{D,E}^{n+1} = \mathcal{M}_{D,E} \left( P_E^{n+1} - P_D^{n+1} \right), \quad (4.11)$$

and we define  $G_p$  for all  $a, b, c \in \mathbb{R}$  as

$$G_p(a, b, c) = \lambda(b)c^+ - \lambda(a)c^-. \quad (4.12)$$

Notice that the source terms are, for  $n \in \{0, \dots, N\}$

**Remarque 4.1.** *A rigorous justification for the construction of the schema for nonlinear convection-diffusion problems can be found in [? ? ] and we only put the formal construction of the schema in this paper.*

**Remarque 4.2.** *We can rewrite (??) as follow :*

$$\begin{aligned} |D| \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} - \mu \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} \right) - \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{M}_{D,E} \left( \beta(S_E^{n+1}) \right) \\ + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}; \delta P_{D,E}^{n+1}) = |\partial D \cap \partial \Omega| h_D^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

**Preuve :** *The proof of this assertion is given in Lemma ?? and by equation (??)-(??).  $\square$*

**Définition 4.2.** *Using the values of  $((S_D^{n+1}, P_D^{n+1}), \forall D \in \mathcal{D}_h$  and  $n \in [0, \dots, N]$ , we will define two approximate solutions of discrete problem (??)-(??) in the sense of the combined finite volume-nonconforming finite element scheme : i) A nonconforming finite element solution  $(S_{h,\Delta t}, P_{h,\Delta t})$  as a function piecewise linear and continuous at the barycenters of the interior sides in space and piecewise constant in time, such that :*

$$S_{h,\Delta t}(x, 0) = S_h^0(x) \text{ for } x \in \Omega,$$

$$(S_{h,\Delta t}(x, t), P_{h,\Delta t}(x, t)) = (S_h^{n+1}(x), P_h^{n+1}(x)) \text{ for } x \in \Omega, t \in [t_n, t_{n+1}],$$

$$\text{where } S_h^{n+1} = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} S_D^{n+1} \varphi_D \quad \text{and} \quad P_h^{n+1} = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} P_D^{n+1} \varphi_D.$$

ii) A finite volume solution  $(\tilde{S}_{h,\Delta t}, \tilde{P}_{h,\Delta t})$  defined as piecewise constant on the dual volumes in space and piecewise constant in time, such that :

$$\tilde{S}_{h,\Delta t}(x, 0) = S_D^0 \text{ for } x \in D, D \in \mathcal{D}_h,$$



$$(\tilde{S}_{h,\Delta t}(x, t), \tilde{P}_{h,\Delta t}(x, t)) = (S_D^{n+1}, P_D^{n+1}) \text{ for } x \in D, D \in \mathcal{D}_h, t \in ]t_n, t_{n+1}].$$

Furthermore, we define a piecewise linear function in time given by

$$f_S(t) = f(S(t, x)) = \frac{S(t_{n+1}, x) - S(t_n, x)}{\Delta t} (t - t_n) + S(t_n, x) \text{ for } x \in \Omega, t \in ]t_n, t_{n+1}]. \quad (4.14)$$

Now, we state the existence theorem under the assumption that all transmissibilities coefficients are positive :

$$\mathcal{M}_{D,E} \geq 0 \quad \forall D \in \mathcal{D}_h, E \in \mathcal{N}(D). \quad (4.15)$$

**Remarque 4.3.** Assumption (??) is satisfied when the diffusion term reduces to a scalar function and when the magnitude of all interior angles smaller or equal to  $\pi/2$  in two space dimension.

**Théorème 4.1.** Assume (H1) – (H6) hold. Under assumption (??), the sequence  $(S_{h,\Delta t}, P_{h,\Delta t})$  converges to a solution  $(s, p)$  of system (??) in the sense of Definition ?? .

The proof of this theorem is splitted in several Lemmas and Propositions in the following section.

## 4.3 Existence and discrete properties

In this section, we present some technical Lemmas that show the conservativity of the scheme, the coercivity, and the continuity of the diffusion term. We show also a priori estimate on the gradient of the solution which we shall need later in the proof of the existence of a discrete solution of (??)-(??) and in the proof of the convergence.

### 4.3.1 Preliminary results

This subsection is devoted to known results. For the sake of clarity, we summarize the following lemmas :

**Lemme 4.1** (Discrete Gronwall's Inequality). Given  $\gamma_1 \geq 0$  and  $\gamma_2 \geq 0$ , assume that for all sequence  $\{y_n\}_n$  satisfies  $0 \leq y_{n+1} \leq y_n + \gamma_1 \Delta t + \gamma_2 \Delta t y_{n+1}$  for all  $n \in \mathbb{N}$ .

### 4.3 Existence and discrete properties

---

Given a fixed time-step  $\Delta t_0 \leq \frac{1}{\gamma_2}$  and a fixed time  $T > 0$ , we have for all  $\Delta t \leq \Delta t_0$ ,

$$\forall n \in N, \quad n\Delta t \leq T \Rightarrow y_n \leq \left( y_0 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \exp \left( \frac{\gamma_2 T}{1 - \gamma_2 \Delta t_0} \right)$$

**Preuve :** the proof of this Lemma can be found in [? ]. □

**Lemme 4.2.** *Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  or  $d = 3$ ) be an open bounded polygonal with a boundary  $\partial\Omega$ . Let  $\mathcal{T}_h$  an admissible mesh. Let  $U_K$  the value of  $u$  on the control volume  $K$ . Then, there exists a positive constant  $C$  depend on  $\Omega$  such that :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|u\|_{X_h}^2 + \frac{4}{|\Omega|} \left( \int_{\Omega} u(x) dx \right)^2.$$

**Preuve :** The proof of this Lemma is given in [? , theorem 8.1] □

**Lemme 4.3** (Discrete trace lemma). *Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  or  $d = 3$ ) be an open bounded polygonal with a boundary  $\partial\Omega$ . Let  $\mathcal{T}_h$  an admissible mesh. Let  $S_K$  the value of  $s_h$  on the control volume  $K$ . We define  $\gamma(s_h)$  by  $\gamma(s_h) = S_K$  piecewise on  $\sigma_K = \partial K \cap \partial\Omega$  for all  $K \in \mathcal{T}_h$ . Then, there exists a positive constant  $C_1$  depend on  $\Omega$  such that :*

$$\|\gamma(s_h)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_1 (\|s_h\|_{X_h} + \|s_h\|_{L^2(\Omega)}).$$

**Preuve :** By applying the trace theorem on the reference simplex and then using a homogeneity/scaling argument (see [? ]). □

**Lemme 4.4.** *For all  $W_h = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} W_D \varphi_D \in X_h$ , we have*

$$\sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{D}_h^{int}} \text{diam}(K_{D,E})^{d-2} (W_E - W_D)^2 \leq \frac{d+1}{2dk_{\mathcal{T}}} \|W_h\|_{X_h}^2, \quad (4.16)$$

$$\sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{D}_h^{int}} \frac{|\sigma_{D,E}|}{d_{D,E}} (W_E - W_D)^2 \leq \frac{d+1}{2(d-1)k_{\mathcal{T}}} \|W_h\|_{X_h}^2. \quad (4.17)$$

**Preuve :** This Lemma is proved in [? ], but for the sake of completeness we reproduce the proof. We notice that :

$$d_{D,E} \leq \frac{\text{diam}(K_{D,E})}{d}, \quad |\sigma_{D,E}| \leq \frac{(\text{diam}(K_{D,E}))^{d-1}}{d-1}. \quad (4.18)$$

then,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} \left( \text{diam}(K_{D,E}) \right)^{d-2} (W_E - W_D)^2 &\leq \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} \left( \text{diam}(K_{D,E}) \right)^{d-2} |\nabla W_h|_{K_{D,E}}|^2 d_{D,E}^2 \\ &\leq \frac{d+1}{2d} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \text{diam}(K) \right)^d |\nabla W_h|_K|^2 \leq \frac{d+1}{2dk_{\mathcal{T}}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |\nabla W_h|_K|^2 = \frac{d+1}{2dk_{\mathcal{T}}} \|W_h\|_{X_h}^2. \end{aligned}$$

Using the fact that the gradient of  $W_h$  is a piecewise constant on  $\mathcal{T}_h$ , the inequality (??) and each  $K \in \mathcal{T}_h$  contains exactly  $\binom{d+1}{2} = \frac{d(d+1)}{2}$  dual sides with assumption (??), we manage to show (??). similarly,

$$\sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} \frac{|\sigma_{D,E}|}{d_{D,E}} (W_E - W_D)^2 \leq \sum_{\sigma_{D,E} \in \mathcal{F}_h^{int}} |\nabla W_h|_{K_{D,E}}|^2 d_{D,E} |\sigma_{D,E}| \leq \frac{d+1}{2(d-1)k_{\mathcal{T}}} \|W_h\|_{X_h}^2.$$

□

**Lemme 4.5.** For all  $D \in \mathcal{D}_h$  :

$$\mathcal{M}_{D,D} = - \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E}. \quad (4.19)$$

and

$$\sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{M}_{D,E} \beta(M_E^{n+1}) = \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \beta(S_E^{n+1}) - \beta(S_D^{n+1}) \right). \quad (4.20)$$

**Preuve :** We can find the proof in [?]. for reader convenience we reproduce this proof. We fix a dual volume  $D \in \mathcal{D}_h$ . By using the structure of  $\varphi_D$ , the sum (??) is reduced just for two triangles  $K$  and  $L$  which have  $\sigma_D$  as a common interface,

$$\mathcal{M}_{D,D} = -(\Lambda \nabla \varphi_D, \nabla \varphi_D)_{L^2(L)} - (\Lambda \nabla \varphi_D, \nabla \varphi_D)_{L^2(K)}. \quad (4.21)$$

We denote by  $E_1$  and  $E_2$  the two dual volumes associated of the two other side of element  $L$ . Since we have

$$\varphi_D + \varphi_{E_1} + \varphi_{E_2} = 1 \text{ on } L,$$

### 4.3 Existence and discrete properties

---

then

$$-(\Lambda \nabla \varphi_D, \nabla \varphi_D)_{L^2(L)} = (\Lambda \nabla \varphi_{E_1}, \nabla \varphi_D)_{L^2(L)} + (\Lambda \nabla \varphi_{E_2}, \nabla \varphi_D)_{L^2(L)}.$$

By using a similar eventual contribution for the element  $K$  and by replacing that in the equation (??), this yield to prove the first assertion of Lemma ??.

Using the fact that  $\mathcal{M}_{D,E} = 0$  unless if  $E \in \mathcal{N}(D)$  or if  $E = D$ , we deduce from (??) :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{M}_{D,E} \beta(M_E^{n+1}) &= \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \beta(S_E^{n+1}) + \mathcal{M}_{D,D} \beta(S_D^{n+1}) \\ &= \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \beta(S_E^{n+1}) - \beta(S_D^{n+1}) \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{M}_{D,E} S_E^{n+1} = \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} (S_E^{n+1} - S_D^{n+1}). \quad (4.23)$$

Let us take two fixed neighboring dual volumes  $D$  and  $E \in \mathcal{D}_h$ . Using the symmetry of the tensor  $\Lambda$ , we remark that  $\mathcal{M}_{D,E} = \mathcal{M}_{E,D}$ , which yields to an equality up to the sign between two discrete diffusive flux, from  $D$  to  $E$  and from  $E$  to  $D$ . In other terms,

$$\mathcal{M}_{D,E} (S_E^{n+1} - S_D^{n+1}) = -\mathcal{M}_{E,D} (S_D^{n+1} - S_E^{n+1}).$$

□

**Lemme 4.6** (Coercivity). *For all  $\beta_h(S_h) = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \beta(S_D) \varphi_D$  and  $S_h = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} S_D \varphi_D \in X_h$ , then, the discrete degenerate diffusion operator is continuous coercive and we have*

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} (\beta(S_E) - \beta(S_D))^2 \geq C_\Lambda \|\beta_h(S_h)\|_{X_h}^2, \quad (4.24)$$

and

$$\left| \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} (\beta(S_E) - \beta(S_D))^2 \right| \leq C'_\Lambda \|\beta_h(S_h)\|_{X_h}^2. \quad (4.25)$$

**Preuve :** We have

$$\begin{aligned} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} (\beta(S_E) - \beta(S_D))^2 &= -2 \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \beta(S_D) \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} (\beta(S_E) - \beta(S_D)) \\ &= -2 \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \beta(S_D) \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{M}_{D,E} \beta(S_E). \end{aligned}$$

Then, by using the definition of  $\beta_h(S_h)$  and (??) we get :

$$- \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \beta(S_D) \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{M}_{D,E} \beta(S_E) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \Lambda \nabla \beta_h(S_h), \nabla \beta_h(S_h) \right)_{L^2(K)}.$$

Now thanks to the coercivity of the tensor  $\Lambda$  given by (H2), we can deduce that

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} (\beta(S_E) - \beta(S_D))^2 \geq C_\Lambda \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \nabla \beta(S_h), \nabla \beta(S_h) \right)_{L^2(K)},$$

and therefore (??) is a straightforward consequence of the boundedness of the tensor  $\Lambda$  given in (H2). □

### 4.3.2 A priori estimates

**Proposition 4.1.** *Let  $(S_D^{n+1}, P_D^{n+1})_{D \in \mathcal{D}_h, n \in \{0, \dots, N\}}$  be a solution of the scheme (??)–(??). Then, there exists a positive constant  $C(\Omega)$  depends only on  $\Omega$  such that :*

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( P_D^{n+1} - P_E^{n+1} \right)^2 \leq C(\Omega) \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2, \quad (4.26)$$

and consequently

$$\|P_h^{n+1}\|_{X_h}^2 \leq C(\Omega) \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2.$$

**Preuve :** We multiply (??) by  $P_D^{n+1}$ , we sum for all  $D \in \mathcal{D}_h$  and after a discrete integrating by parts we get :

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_p(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}, \delta P_{D,E}^{n+1}) \left( P_E^{n+1} - P_D^{n+1} \right) = 2 \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |\partial D \cap \partial \Omega| \pi_D^{n+1} P_D^{n+1}$$

### 4.3 Existence and discrete properties

but the numerical flux satisfies  $G_p(a, b, c)c \geq \lambda_*|c|^2$ , for all  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , and under the assumption that the transmissibilities coefficients are positive one gets

$$\begin{aligned} \lambda_* \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( P_E^{n+1} - P_D^{n+1} \right)^2 &\leq 2 \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |\partial D \cap \partial \Omega| \pi_D^{n+1} P_D^{n+1} \\ &\leq \frac{2}{\Delta t} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \left( \frac{1}{\beta} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\partial D \cap \partial \Omega} \pi^2 dx dt + 4\beta \Delta t \int_{\partial D \cap \partial \Omega} (P_D^{n+1})^2 dx \right). \end{aligned}$$

Furthermore, by using the discrete trace lemma and the fact that  $\pi \in L^\infty(0, T; L^2(\partial \Omega))$  we obtain :

$$\lambda_* \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( P_E^{n+1} - P_D^{n+1} \right)^2 \leq \frac{2}{\beta} \|\pi\|_{L^\infty(0, T; L^2(\partial \Omega))} + \beta C_1 \left( \|P_h^{n+1}\|_{X_h} + \|P_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Applying Lemma ?? to the sequence  $(P_h^{n+1})_h$  and using the equation (??), we have

$$\|P_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|P_h^{n+1}\|_{X_h},$$

then from above inequality, we get

$$\lambda_* \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( P_E^{n+1} - P_D^{n+1} \right)^2 \leq \frac{2}{\beta} \|\pi\|_{L^\infty(0, T; L^2(\partial \Omega))} + \beta C_1 (1+C) \|P_h^{n+1}\|_{X_h}.$$

Finally, The result follow from the use of the Lemmas ?? and after choosing appropriate parameter  $\beta$ .  $\square$

**Proposition 4.2.** *Let  $(S_D^{n+1}, P_D^{n+1})_{D \in \mathcal{D}_h, n \in \{0, \dots, N\}}$  be a solution of the scheme (??)-(??). then, there exists a positive constant  $C_1(\Omega)$  depends only on  $\Omega$ , where for all  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$  and  $n\Delta t \leq T$  with  $\Delta t_0 \leq \frac{\mu}{C_1(\Omega)}$  we have :*

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| |S_D^n|^2 + \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} |S_E^n - S_D^n|^2 \leq g(s_0, h, \pi, \Delta t_0), \quad (4.27)$$

where

$$\begin{aligned} g = &\left( \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| |S_D^0|^2 + \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} |S_E^0 - S_D^0|^2 \right. \\ &\left. + \|h\|_{L^\infty(0, T; L^2(\partial \Omega))}^2 + \|\pi\|_{L^\infty(0, T; L^2(\partial \Omega))}^2 \right) \exp\left(\frac{C_1(\Omega)T}{\mu - C_1(\Omega)\Delta t_0}\right). \end{aligned}$$

**Preuve :** We multiply (??) by  $S_D^{n+1}$  for all  $D \in \mathcal{D}_h$ , that gives :

$$\begin{aligned} & \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} S_D^{n+1} - \mu \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right) S_D^{n+1} \\ + \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}, \delta P_{D,E}^{n+1}) S_D^{n+1} & - \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \beta(S_E^{n+1}) - \beta(S_D^{n+1}) \right) S_D^{n+1} \\ & = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |\partial D \cap \partial \Omega| h_D^{n+1} S_D^{n+1}. \end{aligned}$$

Making an integration by parts and using the inequality  $[(a-b)a \geq \frac{1}{2}(a^2 - b^2)]$ , and using the conservative property of the function  $G_s$  we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| \frac{|S_D^{n+1}|^2 - |S_D^n|^2}{\Delta t} + \frac{\mu}{4\Delta t} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( |S_E^{n+1} - S_D^{n+1}|^2 - |S_E^n - S_D^n|^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \beta(S_E^{n+1}) - \beta(S_D^{n+1}) \right) (S_E^{n+1} - S_D^{n+1}) \leq \\ & \frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}, \delta P_{D,E}^{n+1}) (S_E^{n+1} - S_D^{n+1}) + \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |\partial D \cap \partial \Omega| h_D^{n+1} S_D^{n+1}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

The function  $\beta$  is a nondecreasing and since  $\mathcal{M}_{D,E} \geq 0$ , then the diffusion term leads

$$\frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \beta(S_E^{n+1}) - \beta(S_D^{n+1}) \right) (S_E^{n+1} - S_D^{n+1}) \geq 0.$$

Notice that from (??), we have  $|G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}, \delta P_{D,E}^{n+1})| \leq C_1 |\delta P_{D,E}^{n+1}|$ , then the first term in the right hand side of (??), is estimated as

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}, \delta P_{D,E}^{n+1}) (S_E^{n+1} - S_D^{n+1}) \leq \\ & C_1 \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( P_E^{n+1} - P_D^{n+1} \right)^2 + C_1 \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( S_E^{n+1} - S_D^{n+1} \right)^2. \end{aligned}$$

### 4.3 Existence and discrete properties

then

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}, \delta P_{D,E}^{n+1}) (S_E^{n+1} - S_D^{n+1}) \leq \\ C_1 C(\Omega) \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + C_\Lambda \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} (S_E^{n+1} - S_D^{n+1})^2. \end{aligned}$$

Using the Cauchy-Schwarz inequality with the discrete trace lemma ?? give us

$$\begin{aligned} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |\partial D \cap \partial\Omega| h_D^{n+1} S_D^{n+1} \leq \|h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 \\ + C_2 \left( \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (|S_D^{n+1}|^2) + \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} |S_E^{n+1} - S_D^{n+1}|^2 \right), \end{aligned}$$

where  $C_2$  is a positive constant depend only on  $\Omega$ . This leads

$$\begin{aligned} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (|S_D^{n+1}|^2 - |S_D^n|^2) + \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} (|S_E^{n+1} - S_D^{n+1}|^2 - |S_E^n - S_D^n|^2) \\ \leq \frac{4\Delta t}{\mu} \left( C_2 \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (S_D^{n+1})^2 + (C_2 + C_\Lambda) \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} (S_E^{n+1} - S_D^{n+1})^2 \right. \\ \left. + \|h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + C_1 C(\Omega) \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 \right), \end{aligned}$$

to end this proof, we take  $C_1(\Omega) = \frac{1}{4} \max\{C_2, C_2 + C_\Lambda, C_1 C(\Omega), 1\}$  and applying the discrete Gronwall lemma ?? with

$$y_{n+1} = \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| |S_D^{n+1}|^2 + \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} |S_E^{n+1} - S_D^{n+1}|^2, \quad \gamma_2 = \frac{C_1(\Omega)}{\mu} \text{ and} \\ \gamma_1 = \frac{C_1(\Omega)}{\mu} \left( \|h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 \right) \text{ to get (??).} \quad \square$$

**Proposition 4.3.** *Let  $(S_D^{n+1}, P_D^{n+1})_{D \in \mathcal{D}_h, n \in \{0, \dots, N\}}$  be a solution of the scheme (??)-(??). Then, there exist a positive constants  $C_2$  depend only on  $\mu$  such that :*

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| \left( \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right)^2 + \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right)^2 \leq C_2(\mu) g(s_0, h, \pi, \Delta t_0). \quad (4.29)$$

In addition, we have

$$\sum_{n=0}^N \Delta t \|\beta_h(S_h^{n+1})\|_{X_h}^2 \leq C \quad (4.30)$$



**Preuve :** We multiply (??) by  $\frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t}$ ,  $D \in \mathcal{D}_h$ , sum over all and  $D \in \mathcal{D}_h$ , and after integrating by parts we obtain  $J_1 + J_2 + J_3 = J_4$  where

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| \left( \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right)^2, \\ J_2 &= -\frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}, \delta P_{D,E}^{n+1}) \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right), \\ J_3 &= \frac{1}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} (\beta(S_E^{n+1}) - \beta(S_D^{n+1})) \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right), \\ J_4 &= \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |\partial D \cap \partial \Omega| h_D^{n+1} \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t}. \end{aligned}$$

First, to estimate the second term  $J_2$ , let us recall that there exist a positive constant  $C$ , such that  $|G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}, \delta P_{D,E}^{n+1})| \leq C |\delta P_{D,E}^{n+1}|$ , and by using Cauchy-Schwartz inequality we obtain, for all  $\gamma > 0$

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \frac{C}{\gamma} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} (P_E^{n+1} - P_E^n)^2 \\ &\quad + \gamma \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right)^2 \end{aligned}$$

from the estimate (??), one gets

$$J_2 \leq \frac{C}{\gamma} \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + \gamma \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right)^2.$$

Next, we use again Cauchy-Schwartz inequality with the proprieties of  $\beta$  to obtain for all  $\delta > 0$  :

$$\begin{aligned} J_3 &\leq \frac{C_2}{2\delta} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} (S_E^{n+1} - S_D^{n+1})^2 \\ &\quad + \frac{\delta}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right)^2. \end{aligned}$$

### 4.3 Existence and discrete properties

---

this yield us by Proposition ?? and Lemma ?? to have □

$$J_3 \leq \frac{C_1 C_2}{2\delta} g(s_0, h, \pi, \Delta t_0) + \frac{\delta}{2} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right)^2.$$

Similarly, we have for all  $\zeta > 0$

$$J_4 \leq \frac{C_3}{\zeta} \|h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + \zeta C \left[ \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| \left( \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right)^2 + \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right)^2 \right].$$

Finally, if we chose  $\gamma, \delta$  and  $\zeta$  small enough, we obtain

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| \left( \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right)^2 + \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right)^2 \leq C_4(\mu) g(s_0, h, \pi, \Delta t_0).$$

Now, we are concerned with estimate (??), for that we multiply (??) by  $\Delta t \beta(S_D^{n+1})$  and we sum for all  $D \in \mathcal{D}_h$  and  $n = \{0, \dots, N\}$  to obtain  $E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = E_5$ , where  $(E_i)_{i=1..5}$  are explicitly given and estimate in what follow. According to the convexity of the function  $\Upsilon(s) = \int_0^s \beta(z) dz$ , since  $\Upsilon''(s) = \alpha(s) \geq 0$ , we shall have the following inequality :  $(a - b)\beta(a) \geq \Upsilon(a) - \Upsilon(b)$ . Then,

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{n=0}^N \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (S_D^{n+1} - S_D^n) \beta(S_D^{n+1}) \geq \sum_{n=0}^N \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (\Upsilon(S_D^{n+1}) - \Upsilon(S_D^n)) \\ &= \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| (\Upsilon(S_D^N) - \Upsilon(S_D^0)). \end{aligned}$$

Using of Young inequality, an integrating by parts and the positivity of transmissibilities coefficient  $\mathcal{M}_{D,E}$  we obtain for all  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} E_2 &= -\mu \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right) \beta(S_D^{n+1}) \\ &\leq \frac{\mu}{\delta} \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right)^2 \\ &\quad + \delta \mu \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \beta(S_D^{n+1}) - \beta(S_E^{n+1}) \right)^2, \end{aligned}$$

this yield to

$$E_2 \leq \frac{C\mu}{\delta} g(s_0, h, \pi, \Delta t_0) + \delta \mu \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \beta(S_D^{n+1}) - \beta(S_E^{n+1}) \right)^2.$$

According to equation (??), we have

$$\begin{aligned} E_3 &= - \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \beta(S_E^{n+1}) - \beta(S_D^{n+1}) \right) \beta(S_D^{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \beta(S_E^{n+1}) - \beta(S_D^{n+1}) \right)^2 \geq C_\Lambda \sum_{n=0}^N \Delta t \|\beta_h(S_h^{n+1})\|_{X_h}^2. \end{aligned}$$

Next, we have

$$E_4 = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}, \delta P_{D,E}^{n+1}) \beta(S_D^{n+1}).$$

Integrating by part, using  $|G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}, \delta P_{D,E}^{n+1})| \leq C |\delta P_{D,E}^{n+1}|$  and the Cauchy-Schwarz inequality, give us

$$\begin{aligned} E_4 &\leq \frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( P_E^{n+1} - P_D^{n+1} \right)^2 \\ &\quad + \delta \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \beta(S_E^{n+1}) - \beta(S_D^{n+1}) \right)^2, \end{aligned}$$

### 4.3 Existence and discrete properties

---

for any  $\delta > 0$ . The estimate (??) and Lemma ?? lead to

$$E_4 \leq \frac{C}{\delta} \|\pi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + \delta \sum_{n=0}^N \Delta t \|\beta_h(S_h)\|_{X_h}^2.$$

Finally, we use the continuity of  $\beta$  and lemma ?? to obtain for all  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} E_5 &= \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |\partial D \cap \partial\Omega| h_D^{n+1} \beta(S_D^{n+1}) \\ &\leq \frac{C}{\delta} \|h(t, \cdot)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\partial\Omega))}^2 + \delta C_1 \left( \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| |S_D^{n+1}|^2 + \sum_{n=0}^N \Delta t \|\beta_h(S_h^{n+1})\|_{X_h}^2 \right) \\ &\leq C' g(s_0, h, \pi, \Delta t_0) + \delta C_1 \sum_{n=0}^N \Delta t \|\beta_h(S_h^{n+1})\|_{X_h}^2. \end{aligned}$$

In summarize, from the equation  $E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = E_5$  and by choosing an appropriate  $\delta$  we have

$$\sum_{n=0}^N \Delta t \|\beta_h(S_h^{n+1})\|_{X_h}^2 \leq C'' g(s_0, h, \pi, \Delta t_0) + \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| \Upsilon(S_D^0) \leq C,$$

where  $C''$  and  $C$  are positives constants.

#### 4.3.3 Existence of discrete solution

The existence of a discrete solution for the combined scheme is given in the following proposition.

**Proposition 4.4.** *There exists a least one solution of problem (??)-(??).*

**Preuve :** First, we will use the following notation :

$$\mathcal{M} := \text{Card}(\mathcal{D}_h), \quad s_{\mathcal{M}} := \left\{ s_D^{n+1} \right\}_{D \in \mathcal{D}_h} \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}}, \quad p_{\mathcal{M}} := \left\{ p_D^{n+1} \right\}_{D \in \mathcal{D}_h} \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}}.$$

We define the application  $\mathcal{P}_h : \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \mapsto \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{M}}$

$$\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}}) = (\{\mathcal{P}_{1,D}\}_{D \in \mathcal{D}_h}, \{\mathcal{P}_{2,D}\}_{D \in \mathcal{D}_h}), \quad (4.31)$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1,K} = & |D| \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} - \mu \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right) \\ & - \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \beta(S_E^{n+1}) - \beta(S_D^{n+1}) \right) \\ & + \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}; \delta P_{D,E}^{n+1}) - |\partial D \cap \partial \Omega| h_D^{n+1} \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_{2,K} = - \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_p(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}; \delta P_{D,E}^{n+1}) - |\partial D \cap \partial \Omega| \pi_D^{n+1}.$$

The scalar product of  $(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})$  by the equation (??), using the estimates (??)-(??) and Cauchy-Schwarz inequality permit to get

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}}), (s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})] \geq & \frac{C_1}{\Delta t} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| |S_D^{n+1}|^2 + C_2 \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| |P_D^{n+1}|^2 \\ & - \frac{1}{2\Delta t} \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| |S_K^n|^2 - C_3 g(s_0, h, \pi, \Delta t_0) \end{aligned}$$

where  $C_1, C_2$  and  $C_3$  are positives constants, this yields to

$$[\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}}), (s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})] > 0$$

For  $|(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})|_{\mathbb{R}^{\mathcal{M}}}$  large enough. And therefore we obtain the existence of  $(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})$  such that  $\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}}) = 0$ . Indeed, reasoning by contradiction. Assume that there is no  $(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})$  such that  $\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}}) = 0$ . In this case, one can define on a ball of origin center and radius  $k$ , the following application :  $A : \bar{B}(0, k) \rightarrow \bar{B}(0, k)$  which give for each  $(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})$ ,  $A((s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})) = -k \frac{\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})}{|\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})|}$ , where the constant  $k > 0$ . The map  $A$  is continuous due to the continuity of  $\mathcal{P}_h$ ,  $|\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})| \neq 0$  over  $\bar{B}(0, k)$  and  $\bar{B}(0, k)$  is closed convex and compact. The Brower fixed point theorem implies then that there exists  $(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})$  in  $\bar{B}(0, k)$  such that  $-k \frac{\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})}{|\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})|} = (s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})$ , If we take the norm of both sides of this equation, we see that  $|(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})| = k > 0$  and if we take the scalar product of each side with  $(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})$ , we find  $[(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}}), (s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})] = |(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})|^2 = -k \frac{[\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}}), (s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})]}{|\mathcal{P}_h(s_{\mathcal{M}}, p_{\mathcal{M}})|} \leq 0$ , this yield to contradiction.  $\square$

## 4.4 Convergence

### 4.4.1 Compactness Estimates on Discrete Solutions

In this subsection, we derive estimates on differences of space and time translates necessary to apply Kolmogorov's compactness theorem which will allow us to pass to the limit in the nonlinear second order terms.

**Lemma 4.7** (Time translate estimate). *There exists a constant  $C > 0$  depend of  $\Omega$ , and  $T$  such that*

$$\iint_{\Omega \times [0, T-\tau]} \left( \tilde{S}_{h, \Delta t}(t + \tau, x) - \tilde{S}_{h, \Delta t}(t, x) \right)^2 dx dt \leq C(\tau + \Delta t), \forall \tau \in [0, T].$$

**Lemma 4.8** (space translate estimate). *There exists a constant  $C > 0$  depend of  $\Omega$  and  $T$  such that :*

$$\iint_{\Omega \times [0, T]} \left( \tilde{S}_{h, \Delta t}(t, x + \xi) - \tilde{S}_{h, \Delta t}(t, x) \right)^2 dx dt \leq C|\xi|(|\xi| + h), \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

*The estimates on the discrete global pressure (??) and on the saturation (??) are sufficient to prove the Lemma. The technics is being classical and widely used in the works of Eymard, Galouet, Herbin and their co-authors [? ? ? ? ].*

### 4.4.2 Convergence of the combined scheme

This subsection is mainly devoted to the proof of the strong  $L^2(Q_T)$  convergence of approximate saturation solutions, using the estimations proved in the subsection ??, ?? and Kolmogorov's compactness criterion (see [? ]) for the convergence. Then, we prove that the limit is a weak solution to the continuous problem .

**Lemma 4.9.** *The sequence  $\left( g_h(S_{h, \Delta t}) - g(\tilde{S}_{h, \Delta t}) \right)_{h, \Delta t}$  converges strongly to zero in  $L^2(Q_T)$  when  $h \rightarrow 0$  for  $g = \beta$  and  $g = Id$ .*

**Proof :** Using the definition of the basis functions of the finite dimensional space  $X_h$ , and the reconstruction of discrete saturation in definition ?? give us

$$|\beta(\tilde{S}_{h, \Delta t}) - \beta_h(S_{h, \Delta t})|^2 = |\beta_h(S_{h, \Delta t})(\mathcal{P}_D) - \beta_h(S_{h, \Delta t})(x)|^2 = |\nabla \beta_h(S_{h, \Delta t}) \cdot (\mathcal{P}_D - x)|^2.$$

Integrating over  $\Omega$  leads

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\sigma_D \in \mathcal{E}_K} \int_{K \cap D} |\nabla \beta_h(S_{h,\Delta t}) \cdot (\mathcal{P}_D - x)|^2 dx &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\sigma_D \in \mathcal{E}_K} |\nabla \beta_h(S_{h,\Delta t})|_K|^2 (\text{diam}(D))^2 |K \cap D| \\ &\leq h^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\nabla \beta_h(S_{h,\Delta t})|_K|^2 |K| \leq h^2 \|\beta_h(S_{h,\Delta t})\|_{X_h}^2. \end{aligned}$$

Thus, the estimate (??) gives

$$\|\beta_h(S_{h,\Delta t}) - \beta(\tilde{S}_{h,\Delta t})\|_{L^2(Q_T)} \leq h^2 \sum_{n=0}^N \Delta t \|\beta_h(S_{h,\Delta t})\|_{X_h}^2 \leq C_1 h^2 \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0.$$

Same proof for  $g = Id$ .

**Théorème 4.2.** (*Strong convergence in  $L^2(Q_T)$* ) *There exists a subsequence of  $(S_{h,\Delta t})_{h,\Delta t}$  which converges strongly to a function  $s$  in  $L^2(Q_T)$ . In addition,  $(\beta_h(S_{h,\Delta t}))_{h,\Delta t}$  converges strongly in  $L^2(Q_T)$  to the function  $\Gamma = \beta(s)$ .*

**Preuve :** Proposition ??, and lemmas ??-?? implies that the sequence  $(\tilde{S}_{h,\Delta t})_{h,\Delta t}$  satisfies the assumptions of the Kolmogorov compactness criterion, and consequently the sequence  $(\tilde{S}_{h,\Delta t})_{h,\Delta t}$  is relatively compact in  $L^2(Q_T)$ . Thanks to lemma ??,  $(S_{h,\Delta t})_{h,\Delta t}$  converge strongly to a function  $s \in L^2(Q_T)$ .

Since  $\beta$  is well defined and continuous, thus, we extend it as follow :

$$\beta(s) = \begin{cases} 0, & \text{if } s \leq 0 \\ \int_0^s \alpha(z) dz, & \text{if } 0 \leq s \leq 1 \\ \int_0^1 \alpha(z) dz, & \text{if } s \geq 1. \end{cases}$$

applying  $L^\infty$  bound on  $\tilde{S}_{h,\Delta t}$  and the dominated convergence theorem of Lebesgue to  $\beta(\tilde{S}_h)$ , there exists subsequence  $\beta(\tilde{S}_{h,\Delta t})$  converge strongly in  $L^2(Q_T)$  and a.e in  $Q_T$  to  $\beta(s)$ . Finally, by Lemma ?? we deduce that  $(\beta_h(S_{h,\Delta t}))_{h,\Delta t}$  converges strongly in  $L^2(Q_T)$  to  $\Gamma = \beta(s)$ .  $\square$

**Lemme 4.10.** *There exists a subsequence of  $(f_{\tilde{S}_{h,\Delta t}})_{h,\Delta t}$  defined in (??) which is weakly convergent in  $W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega))$  to the function  $s$  defined in theorem ??.*

**Preuve :** For the first part of convergence, it is useful to introduce the following inequality, for all  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 |\theta a + (1 - \theta)b| d\theta \geq \frac{1}{2}(|a| + |b|)$$

#### 4.4 Convergence

---

Applying this inequality to  $a = \tilde{S}_h^{n+1} - \tilde{S}_h^n$ ,  $b = \tilde{S}_h^n - \tilde{S}_h^N$ , from the definition of  $f_{\tilde{S}_h, \Delta t}$  we deduce

$$\int_0^T \int_{\Omega} |f_{\tilde{S}_h, \Delta t}(t, x) - \tilde{S}_{h, \Delta t}(t, x)| dx dt \leq \int_0^{T-\Delta t} \int_{\Omega} |\tilde{S}_{h, \Delta t}(t + \Delta t, x) - \tilde{S}_{h, \Delta t}(t, x)| dx dt.$$

Since  $\Delta t$  tends to zero, the translate in time estimate in Lemma ?? implies that the right-hand side of the above inequality converges to zero as  $h$  and  $\Delta t$  tends to zero. Therefore, since we obtain a strongly convergence in  $L^1(Q_T)$  and by construction of  $f_S$  we have that  $f_{\tilde{S}_h, \Delta t}$  is bounded in  $L^2(Q_T)$ , this yield to deduce that  $f_{\tilde{S}_h, \Delta t}$  weakly converge to  $s$  in  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Next, for  $\psi \in \Theta = \{u \in C^{1,1}([0, T] \times \bar{\Omega}), u(T, \cdot) = 0\}$ , we denote by  $\psi_D^n = \psi(t_n, x_D)$  and we define

$$\begin{aligned} T_T &= \sum_{n=0}^N \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| S_D^{n+1} (\psi_D^n - \psi_D^{n+1}) - \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| S_D^0 (\psi_D^0) \\ &= - \sum_{n=0}^N \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_D S_D^{n+1} \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, P_D) dx dt - \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_D S_D^0 \psi(0, x_D) dx. \end{aligned}$$

also we define

$$\begin{aligned} \tilde{T}_T &= - \iint_{Q_T} \tilde{S}_{h, \Delta t} \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt - \int_{\Omega} \tilde{S}_{0, h}(0, x) \psi(x, 0) dx \\ &= - \sum_{n=0}^N \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_D S_D^{n+1} \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) dx dt - \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_D S_D^0 \psi(0, x) dx. \end{aligned}$$

We have, for all  $x \in D$ ,  $D \in \mathcal{D}_h$  and for all  $h > 0$ ,  $|\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, P_D) - \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x)| \leq \epsilon(h)$ , where the function  $\epsilon$  satisfies  $\epsilon(h) > 0$  and  $\epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ . This follows by the fact that  $\frac{\partial \psi}{\partial t} \in C^0(\bar{\Omega})$ , then  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  is uniformly continuous on  $\bar{\Omega}$ . Consequently, there exist a constant  $C > 0$  such that

$$|T_T - \tilde{T}_T| \leq C \epsilon(h) \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0.$$

Note that  $\tilde{S}_{h, \Delta t}$  converge also to  $s$  strongly in  $L^2(Q_T)$ , then we have but by theorem ?? and Lemma ?? we have,

$$\tilde{T}_T \rightarrow - \iint_{Q_T} s \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt - \int_{\Omega} s(0, x) \psi(x, 0) dx$$



Notice that,

$$\begin{aligned} T_T &= \sum_{n=0}^N \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \Delta t \psi_D^{n+1} \\ &= \iint_{Q_T} \frac{\partial f_{\tilde{s}_h, \Delta t}}{\partial t} \psi_h \rightarrow - \iint_{Q_T} s \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt - \int_{\Omega} s(0, x) \psi(0, x) dx. \end{aligned}$$

From estimate (??), the sequence  $\left( \frac{\partial f_{\tilde{s}_h, \Delta t}}{\partial t} \right)_{h, \Delta t}$  is bounded in  $L^2(Q_T)$ , then there exist a function  $\zeta$  such that  $\left( \frac{\partial f_{\tilde{s}_h, \Delta t}}{\partial t} \right)_{h, \Delta t}$  converge to  $\zeta$  weakly in  $L^2(Q_T)$ , thus

$$\iint_{Q_T} \zeta \psi dx dt = - \iint_{Q_T} s \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt - \int_{\Omega} s(0, x) \psi(0, x) dx = \iint_{Q_T} \frac{\partial f_{\tilde{s}_h, \Delta t}}{\partial t} \psi dx dt, \quad \forall \psi \in \Theta,$$

therefor, we can deduce that  $\zeta = \frac{\partial f_{\tilde{s}_h, \Delta t}}{\partial t}$  and  $\iint_{Q_T} \frac{\partial f_{\tilde{s}_h, \Delta t}}{\partial t} \psi \rightarrow \iint_{Q_T} \frac{\partial s}{\partial t} \psi, \quad \forall \psi \in \Theta.$

Furthermore, if we take  $\psi = \phi - \phi(T, \cdot)$  for all  $\phi \in C^{1,1}([0, T] \times \bar{\Omega})$ , we obtain

$$\iint_{Q_T} \frac{\partial f_{\tilde{s}_h, \Delta t}}{\partial t} \phi - \iint_{Q_T} \frac{\partial f_{\tilde{s}_h, \Delta t}}{\partial t} \phi(T, \cdot) \rightarrow \iint_{Q_T} \frac{\partial s}{\partial t} \phi - \int_{Q_T} \frac{\partial s}{\partial t} \phi(T, \cdot) \quad \forall \phi \in C^{1,1}([0, T] \times \bar{\Omega}).$$

then, it is enough to show

$$\iint_{Q_T} \frac{\partial f_{\tilde{s}_h, \Delta t}}{\partial t} \phi(T, \cdot) \rightarrow \int_{Q_T} \frac{\partial s}{\partial t} \phi(T, \cdot) \quad \forall \phi \in C^{1,1}([0, T] \times \bar{\Omega}),$$

to prove that

$$\iint_{Q_T} \frac{\partial f_{\tilde{s}_h, \Delta t}}{\partial t} \phi \rightarrow \iint_{Q_T} \frac{\partial s}{\partial t} \phi \quad \forall \phi \in C^{1,1}([0, T] \times \bar{\Omega}).$$

An integration by parts with respect to  $t$  gives us

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \frac{\partial f_{\tilde{s}_h, \Delta t}}{\partial t} \phi(T, x) dx dt &= \int_{\Omega} f_{\tilde{s}_h, \Delta t}(T, x) \phi(T, x) dx - \int_{\Omega} f_{\tilde{s}_h, \Delta t}(0, x) \phi(T, x) dx \\ &= \int_{\Omega} \tilde{S}_h^{N+1} \phi(T, x) dx - \int_{\Omega} \tilde{S}_h^0 \phi(T, x) dx, \end{aligned}$$

by Proposition ?? and by applying Lemma ?? for  $\tilde{S}_h^{N+1}, \tilde{S}_h^0$  respectively, we deduce

#### 4.5 Proof of theorem ??

---

by Kolmogorov's theorem that  $\tilde{S}_h^{N+1}, \tilde{S}_h^0 \rightarrow s(T, \cdot), s(0, \cdot)$ , strongly in  $L^2(\Omega)$ . Then

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \frac{\partial f_{\tilde{S}_h, \Delta t}}{\partial t} \phi(T, \cdot) dx dt &\rightarrow \int_{\Omega} s(T, \cdot) \phi(T, \cdot) - \int_{\Omega} s(0, \cdot) \phi(T, \cdot) \\ &= \int_{Q_T} \frac{\partial s}{\partial t} \phi(T, \cdot), \forall \phi \in C^{1,1}([0, T] \times \bar{\Omega}), \end{aligned}$$

Finally, by using the density of  $C^{1,1}([0, T] \times \bar{\Omega})$  in  $L^2(Q_T)$  we obtain

$$\iint_{Q_T} \frac{\partial f_{\tilde{S}_h, \Delta t}}{\partial t} \phi \rightarrow \iint_{Q_T} \frac{\partial s}{\partial t} \psi \quad \forall \phi \in L^2(Q_T).$$

□

#### 4.5 Proof of theorem ??

We will prove now that the limit couple  $(s, p)$  is a weak solution of the continuous problem. We take  $\psi \in C^{1,1}([0, T] \times \bar{\Omega})$ . We then multiply (??) by  $\Delta t \psi(t_{n+1}, \mathcal{P}_D)$  and we sum the result over  $D \in \mathcal{D}_h^{int}$  and for all  $n \in [0, \dots, N]$ , we have :

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_5,$$

with,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |D| \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \psi(t_{n+1}, \mathcal{P}_D), \\ \mathcal{E}_2 &= -\mu \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} - \frac{S_D^{n+1} - S_D^n}{\Delta t} \right) \psi(t_{n+1}, \mathcal{P}_D), \\ \mathcal{E}_3 &= -\sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} \left( \beta(S_E^{n+1}) - \beta(S_D^{n+1}) \right) \psi(t_{n+1}, \mathcal{P}_D), \\ \mathcal{E}_4 &= \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}; \delta P_{D,E}^{n+1}) \psi(t_{n+1}, \mathcal{P}_D), \\ \mathcal{E}_5 &= \sum_{n=0}^N \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \Delta t |\partial D \cap \partial \Omega| h_D^{n+1} \psi(t_{n+1}, \mathcal{P}_D). \end{aligned}$$

**Chapter 4. Analysis of a finite volume-finite element method for  
Darcy-Brinkman two-phase flows in porous media**

---

We now show that each of the above terms converges to its continuous version as  $h, \Delta t \rightarrow 0$ . The first term is equal to

$$\mathcal{E}_1 = \sum_{n=0}^N \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_D \frac{\partial f_{\tilde{S}_h}}{\partial t} \psi(t_{n+1}, \mathcal{P}_D) dx dt,$$

Define

$$\tilde{\mathcal{E}}_1 = \iint_{Q_T} \frac{\partial f_{\tilde{S}_h}}{\partial t} \psi dx dt = \sum_{n=0}^N \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_D \frac{\partial f_{\tilde{S}_h}}{\partial t} \psi(t, x) dx dt.$$

We have, for all  $x \in D$ ,  $D \in \mathcal{D}_h$  and for all  $h > 0$ ,  $\Delta t > 0$ ,  $|\psi(t_{n+1}, \mathcal{P}_D) - \psi(t, x)| \leq \epsilon(h, \Delta t)$ , as we have seen before, so we have

$$|\mathcal{E}_1 - \tilde{\mathcal{E}}_1| \leq C \epsilon(h, \Delta t) \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0.$$

Lemma ?? ensures that  $\frac{\partial f_{\tilde{S}_h}}{\partial t} \rightarrow \partial_t s$  weakly in  $L^2(Q_T)$ , then

$$\mathcal{E}_1 \longrightarrow \iint_{Q_T} \partial_t s \psi dx dt.$$

According to Remark ??, we can rewrite  $\mathcal{E}_2$  as follow

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= -\mu \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{D}_h} \mathcal{M}_{D,E} \left( \frac{S_E^{n+1} - S_E^n}{\Delta t} \right) \psi(t_{n+1}, \mathcal{P}_D) \\ &= \mu \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Lambda \nabla \partial_t f_{S_h} \cdot \nabla \left( \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \psi(t_{n+1}, \mathcal{P}_D) \varphi_D(x) \right) dx. \end{aligned}$$

We set

$$I_\psi(t_{n+1}, x) := \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \psi(t_{n+1}, \mathcal{P}_D) \varphi_D(x).$$

we will prove that

$$\mathcal{E}_{2,1} = \mu \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Lambda \nabla \partial_t f_{S_h} \cdot \nabla \left( I_\psi(t_{n+1}, x) - \psi(t_{n+1}, x) \right) dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

#### 4.5 Proof of theorem ??

---

Indeed, using Cauchy-Schwarz inequality, we estimate :

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{2,1}| &\leq \mu c_I \sum_{n=0}^N \Delta t \|\partial_t f_{S_h^{n+1}}\|_{X_h} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla(I_\psi(t_{n+1}, x) - \psi(t_{n+1}, x))|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \mu c_I \sum_{n=0}^N \Delta t \|\partial_t f_{S_h^{n+1}}\|_{X_h} \left( C \theta_{\mathcal{T}} h \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\psi(t_{n+1}, x)|_{2,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

where  $|\cdot|_{2,K}$  denotes the  $H^2$  seminorm and the constant  $C$  does not depend on  $h$  (nor on  $\Delta t$ ) see for instance [?, Theorem 15.3]. Finally, using Cauchy-Schwarz inequality, we conclude that

$$|\mathcal{E}_{2,1}| \leq \mu c_I C \theta_{\mathcal{T}} h C_\psi \left( \sum_{n=0}^N \|\partial_t f_{S_h^{n+1}}\|_{X_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^N \Delta t \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0.$$

Then, we can prove that

$$\mathcal{E}_2 \longrightarrow \mu \iint_{Q_T} \Lambda \nabla \partial_t s \cdot \nabla \psi dx dt.$$

For more details see the convergence of diffusion term in what follow.

To study the convergence of **diffusion term**, we use the same technic as in [?]. At first, according to remark ?? and if we replace  $M_{D,E}$  by its value, we obtain :

$$\mathcal{E}_3 = \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Lambda \nabla \beta_h(S_h^{n+1}(x)) \cdot \nabla \left( \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \psi(t_{n+1}, \mathcal{P}_D) \varphi_D(x) \right) dx.$$

a) As a first step, we use the boundedness of the tensor  $\Lambda$  and same technic as before to prove that

$$\mathcal{E}_{3,1} = \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Lambda \nabla \beta_h(S_h^{n+1}(x)) \cdot \nabla (I_\psi(t_{n+1}, x) - \psi(t_{n+1}, x)) dx \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0.$$

b) We next show that :

$$\sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Lambda \nabla \beta_h(S_h^{n+1}(x)) \cdot \nabla \psi(t_{n+1}, x) dx dt - \iint_{Q_T} \Lambda \nabla \beta(s) \cdot \nabla \psi dx dt \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0.$$

For that, we add and subtract  $\int_{Q_T} \Lambda \nabla \beta_h(S_h^{n+1}) \cdot \nabla \psi \, dx dt$  and consider

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{3,2} &= \sum_{n=0}^N \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \Lambda \nabla \beta_h(S_h^{n+1}(x)) \cdot \nabla (\psi(t_{n+1}, x) - \psi(x, t)) \, dx dt \\ \mathcal{E}_{3,3} &= \iint_{Q_T} \Lambda (\nabla \beta_h(S_h(x)) - \nabla \beta(s)) \cdot \nabla \psi(x, t) \, dx dt. \end{aligned}$$

Since  $\psi$  is of class  $C^1$  with respect to  $t$ , then  $|\nabla \psi(t_{n+1}, x) - \nabla \psi(x, t)| \leq g(\Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$  and

$$|\mathcal{E}_{3,2}| \leq C_\Lambda g(\Delta t) \sum_{n=0}^N \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left| \nabla \beta_h(S_h^{n+1})|_K \right| |K|.$$

The Cauchy-Schwartz inequality and the estimate (??) give

$$|\mathcal{E}_{3,2}| \leq C_\Lambda g(\Delta t) T^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^N \Delta t \|\beta_h(S_h^{n+1})\|_{X_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C C_\Lambda g(\Delta t) T^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0.$$

Now, we still have to prove that

$$\mathcal{E}'_{3,3} = \iint_{Q_T} (\nabla \beta_h(S_h(x)) - \nabla \beta(s)) \cdot w(x, t) \, dx dt \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0, \quad (4.32)$$

for all  $w \in (C^\infty(Q_T))^d$ . Indeed,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_{3,3} &= \iint_{Q_T} \nabla \beta_h(S_h(x)) \cdot w(x, t) \, dx dt + \iint_{Q_T} \beta(s(x, t)) \nabla \cdot w(x, t) \, dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\partial \Omega} \beta(s(x, t)) w(x, t) \cdot \eta \, d\gamma(x) dt = B_1 + B_2 + B_3, \end{aligned}$$

where we use the Green formula in  $B_2$  because  $\beta(s) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  but in  $B_1$  we apply the Green formula for each  $K \in \mathcal{T}_h$  because  $\beta_h(S_h^{n+1}) \notin H^1(\Omega)$ . For that,

$$B_1 = - \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \beta_h(S_h(x)) \nabla \cdot (w(x, t)) \, dx dt + \int_0^T \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \beta_h(S_h(x)) w(x, t) \cdot \eta \, d\gamma(x) dt.$$

#### 4.5 Proof of theorem ??

---

By reordering the summation of the second term by sides, we have

$$B'_1 = \int_0^T \sum_{\sigma_{K,L} \in \mathcal{E}_h^{int}} \int_{\sigma_{K,L}} \left( \beta_h(S_h(x))|_K - \beta_h(S_h(x))|_L \right) w(x,t) \cdot \eta \, d\gamma(x) dt \\ + \int_0^T \sum_{\sigma_K \in \mathcal{E}_h^{ext}} \int_{\sigma_K} \left( \beta_h(S_h(x))|_K \right) w(x,t) \cdot \eta \, d\gamma(x) dt.$$

Since the function  $w$  is smooth, we get

$$w \cdot \eta_{\sigma_D}(x) = w \cdot \eta_{\sigma_D}(\mathcal{P}_D) + f(\xi)|\mathcal{P}_D - x|, \quad x \in \sigma_D, \xi \in [\mathcal{P}_D, x],$$

with  $|f(\xi)| \leq C_w$ . Thus,

$$B'_1 = \int_0^T \sum_{\sigma_{K,L} \in \mathcal{E}_h^{ext}} \int_{\sigma_{K,L}} \left( \beta_h(S_h(x))|_K - \beta_h(S_h(x))|_L \right) \left( w \cdot \eta_{\sigma_D}(\mathcal{P}_D) + f(\xi)|\mathcal{P}_D - x| \right) d\gamma(x) dt \\ + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \beta_h(S_h(x)) w(x,t) \cdot \eta \, d\gamma(x) dt$$

The function  $\beta_h(S_h^{n+1}(x))|_K - \beta_h(S_h^{n+1}(x))|_L$  is a first-order polynomial, vanishing at the barycenter  $\mathcal{P}_D$  of this side. Consequently

$$\int_{\sigma_{K,L}} \left( \beta_h(S_h^{n+1}(x))|_K - \beta_h(S_h^{n+1}(x))|_L \right) d\gamma(x) = 0.$$

In addition, we have for all  $x \in \sigma_D = \sigma_{K,L}$ ,

$$\left| \beta_h(S_h^{n+1}(x))|_K - \beta_h(S_h^{n+1}(x))|_L \right| \leq \left| \nabla \beta_h(S_h^{n+1}(x))|_K \right| \frac{\text{diam}(\sigma_{K,L})}{4-d} \\ + \left| \nabla \beta_h(S_h^{n+1}(x))|_L \right| \frac{\text{diam}(\sigma_{K,L})}{4-d}$$

here we use that  $|x - \mathcal{P}_D| \leq \text{diam}(\sigma_{K,L})/2$  for  $d = 2$  and  $|x - \mathcal{P}_D| \leq \text{diam}(\sigma_{K,L})$  for  $d = 3$ . Thus, there exists a constant  $C$  depend on  $C_f$  and  $d$  such that

$$\sum_{\sigma_{K,L} \in \mathcal{E}_h^{int}} \int_{\sigma_{K,L}} \left( \beta_h(S_h^{n+1}(x))|_K - \beta_h(S_h^{n+1}(x))|_L \right) f(\xi)|\mathcal{P}_D - x| \, d\gamma(x) \\ \leq C \sum_{\sigma_{K,L} \in \mathcal{E}_h^{int}} |\sigma_{K,L}| \left( \left| \nabla \beta_h(S_h^{n+1}(x))|_K \right| + \left| \nabla \beta_h(S_h^{n+1}(x))|_L \right| \right) \left( \frac{\text{diam}(\sigma_{K,L})}{4-d} \right)^2.$$

Finally, it's remains to show that

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \beta_h(S_h(x))w(x, t) \cdot \eta \, d\gamma(x)dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \beta(s(x, t))w(x, t) \cdot \eta \, d\gamma(x)dt \rightarrow 0,$$

By applying Lemma ?? on  $\beta_h$  and by using Theorem ?? we have the result. By reordering all estimates and using Cauchy-schwarz inequality, we can easily deduce that  $B'_1$  tends to  $\int_0^T \int_{\partial\Omega} \beta(s(x, t))w(x, t) \cdot \eta \, d\gamma(x)$  where  $h$  tends to zero.

According to the convergence of  $\beta_h(S_h^{n+1})$  to  $\beta(s)$  in  $L^2(Q_T)$ , we obtain that  $\mathcal{E}'_{3,3}$  tend to 0 for all  $w \in (C^\infty(Q_T))^d$ , consequently  $\mathcal{E}'_{3,3}$  tends to 0 for all  $w \in L^2(Q_T)$  by using the density argument.

Since  $\mathcal{E}_{3,2}$  and  $\mathcal{E}_{3,3}$  tends to 0, then, the convergence of a step  $b)$  is proved. By reordering the convergences of steps  $a)$  and  $b)$ , we deduce :

$$\mathcal{E}_3 \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} \iint_{Q_T} \Lambda \nabla \beta(s) \cdot \nabla \psi \, dxdt$$

we are concerned now with the **convective term** :

$$\mathcal{E}_4 = \sum_{n=0}^N \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}; \delta P_{D,E}^{n+1}) \psi_D^{n+1}.$$

For each couple of neighbor volumes  $D$  and  $E$  we introduce

$$S_{D,E}^{n+1} = \min(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}), \tag{4.33}$$

and we set

$$\mathcal{E}_4^* = - \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} f(S_{D,E}^{n+1}) \lambda(S_{D,E}^{n+1}) \delta P_{D,E}^{n+1} \psi_D^{n+1}.$$

The diamond constructed from the neighbor edge centers  $\mathcal{P}_D, \mathcal{P}_E$  and the interface  $\sigma_{D,E}$  of the dual mesh is denoted by  $T_{D,E} \subset K_{D,E}$ . Then, we introduce

$$\overline{S_h} \Big|_{]t_n, t_{n+1}] \times T_{D,E}} := \max(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}), \quad \underline{S_h} \Big|_{]t_n, t_{n+1}] \times T_{D,E}} := \min(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}),$$

and we rewrite

$$\mathcal{E}_4^* = \iint_{Q_T} \Lambda f(\underline{S_h}) \lambda(\underline{S_h}) \nabla P_h \cdot (\nabla \psi)_h \, dxdt.$$

#### 4.5 Proof of theorem ??

---

By the monotonicity of  $\beta$  and thanks to the estimate (??), we have

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |\beta(\overline{S}_h) - \beta(\underline{S}_h)|^2 &\leq \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} |T_{D,E}| |\beta(S_D^{n+1}) - \beta(S_E^{n+1})|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} (\text{diam}(K_{D,E}))^2 |\beta(S_D^{n+1}) - \beta(S_E^{n+1})|^2 \\ &\leq Ch^{4-d} \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

with  $d = 2$  or  $3$ . Because  $\beta^{-1}$  is continuous, up to extraction of another subsequence, we deduce

$$|\overline{S}_h - \underline{S}_h| \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} 0 \text{ p.p. sur } Q_T.$$

In addition,  $\underline{S}_h \leq \tilde{S}_{h,\Delta t} \leq \overline{S}_h$  and  $\tilde{S}_{h,\Delta t} \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} s$  a.e on  $Q_T$ . Thus, we see that  $f(\underline{S}_h)\lambda(\underline{S}_h) \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} f(s)\lambda(s)$  a.e on  $Q_T$ . The dominated convergence theorem of Lebesgue implies that  $\Lambda f(\underline{S}_h)\lambda(\underline{S}_h)(\nabla\psi)_h \rightarrow \Lambda f(s)\lambda(s)\nabla\psi$  dans  $(L^2(Q_T))^d$ . Using the weak convergence of the gradient of the discrete solution  $P_h$  in  $(L^2(Q_T))^d$  (treated as for  $\beta_h(S_h)$  in (??)), we can deduce that

$$\mathcal{E}_4^* \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} \iint_{Q_T} \Lambda f(s)\lambda(s)\nabla p \cdot \nabla\psi \, dxdt.$$

It remains now to show that

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_4^*| = 0. \quad (4.34)$$

By properties of  $G_s$ , we have

$$\begin{aligned} &|G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}, \delta P_{D,E}^{n+1}) - f(S_{D,E}^{n+1})\lambda(S_{D,E}^{n+1})\delta P_{D,E}^{n+1}| \\ &= |G_s(S_D^{n+1}, S_E^{n+1}, \delta P_{D,E}^{n+1}) - |G_s(S_{D,E}^{n+1}, S_{D,E}^{n+1}, \delta P_{D,E}^{n+1})| \\ &\leq C|\delta P_{D,E}^{n+1}| |\overline{S}_h - \underline{S}_h|_{T_{D,E}}. \end{aligned}$$

Therefore,

$$|\mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_4^*| \leq \frac{C}{2} \sum_{n=0}^N \Delta t \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \sum_{E \in \mathcal{N}(D)} \mathcal{M}_{D,E} |P_E^{n+1} - P_D^{n+1}| |\overline{S}_h - \underline{S}_h|_{T_{D,E}} |\psi_E^{n+1} - \psi_D^{n+1}|.$$



Using Young's inequality, the estimate (??) and the Taylor formula for  $\psi$ , one can easily deduce (??).

Similarly, for the last term  $\mathcal{E}_5$  we have

$$\mathcal{E}_5 = \sum_{n=0}^N \sum_{D \in \mathcal{D}_h} |\partial D \cap \partial \Omega| h_D^{n+1} \psi(t_{n+1}, \mathcal{P}_D) = \sum_{n=0}^N \sum_{D \in \mathcal{D}_h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_D h(t, x) \psi(t_{n+1}, \mathcal{P}_D),$$

by continuity of  $\psi$  we have

$$\mathcal{E}_5 \xrightarrow{h, \Delta t \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\partial \Omega} h \psi dx dt.$$

Otherwise, for the second equation of scheme (??)-(??) we use the same proof ( as for convective term ) to obtain

$$\int_0^T \int_{\Omega} \lambda(s) \Lambda \nabla p \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_0^T \int_{\partial \Omega} \pi \varphi dx dt \quad \forall \varphi \in C^{1,1}([0, T] \times \bar{\Omega}).$$

Finally, we conclude that the limit couple  $(s, p)$  is a weak solution of the continuous problem in the sense of definition ?? by using the fact that the space  $C^{1,1}([0, T] \times \bar{\Omega})$  is dense in  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .

# Existence results for a compressible Darcy-Brinkman's flow in porous media

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction and the Darcy-Brinkman model</b>	<b>136</b>
5.1.1	Introduction	136
5.1.2	The Darcy-Brinkman model	137
5.1.3	Organization of the paper	138
<b>5.2</b>	<b>Study of Darcy-Brinkman model in one dimensional space</b>	<b>139</b>
5.2.1	Notation	139
5.2.2	Well-posedness of the Darcy-Brinkman equation in 1D	140
5.2.3	Linear analysis	141
<b>5.3</b>	<b>Study of Darcy-Brinkman's flow in <math>\mathbb{R}^d</math>, <math>d \geq 1</math> with Bear hypothesis.</b>	<b>151</b>
5.3.1	Some particular cases of state law	152

In this chapter, we are interested in the displacement of a single compressible phase in Darcy-Brinkman's flow in porous media. The equations are obtained by the conservation of mass and by considering the Brinkman regularization velocity of the standard Darcy infiltration velocity. This model is treated in its general form with the whole nonlinear terms. In first part, we prove the existence in one dimensional space of a solution for the Darcy-Brinkman system, and in the second one we treat this system with Bear hypothesis in multidimensional spaces.

## 5.1 Introduction and the Darcy-Brinkman model

### 5.1.1 Introduction

Flow in porous media occurs in a range of engineering applications, e.g., geothermal systems, oil extraction, groundwater pollution, storage of nuclear waste, heat exchangers, catalytic convertors, and chemical reactors. Among the important characteristics of such flows are the velocity profile and pressure drop [?]. For example, these two directly influence convection heat transfer in porous media, and the required pumping power in heat exchange processes. In convection heat transfer, the velocity profile is substituted into the energy equation to obtain the temperature distribution. In reactors, the velocity profile strongly impacts the chemical reactions (see [? ? ? ?]).

Different empirical laws are used to describe the filtration of a fluid through porous media [?]. We mention Darcy's law which states that the filtration velocity of the fluid is proportional to the pressure gradient. Darcy's law cannot sustain the no-slip condition on an impermeable wall or a transmission condition on the contact with free flow. That motivated H. Brinkman in 1947 to modify Darcy's law in order to be able to impose the no-slip boundary condition on an obstacle submerged in porous medium. He assumed large permeability to compare his law with experimental data and assumed that the second viscosity  $\mu$  equals the physical viscosity of the fluid in the case of monophasic flow. Also, an up-scaling of Stokes's equations with non-slip boundary condition describing the flow in a porous medium, leads to Darcy-Brinkman's equations [?].

### 5.1.2 The Darcy-Brinkman model

We are interested in the displacement of compressible phase in a Darcy-Brinkman flow in isotropic porous media. The equation describing the displacement of compressible fluid is given by the following mass conservation of the phase :

$$\phi \partial_t \rho(p) + \operatorname{div}(\rho(p)V) = 0, \quad (5.1)$$

where  $\rho$  is the density of the fluid which is a given function depending on the pressure  $p$  and  $\phi$  is the porosity. The velocity  $V$  is given by Brinkman-Darcy's law [? ? ] :

$$-\nu k \Delta V + \tilde{\mu} V = -k \nabla p, \quad (5.2)$$

where  $k$  is the permeability of the porous medium,  $\tilde{\mu}$  is the usual Darcy viscosity and  $\nu$  is the Brinkman viscosity. It is well known that solutions of hyperbolic conservation laws can develop discontinuities, even for smooth initial data (see, e.g., [? ] ). The presence of these discontinuities or shock waves implies that solutions of conservation laws are sought in a weak sense and are augmented with additional admissibility criteria or entropy conditions in order to ensure uniqueness. As the phase flow equation (??) involves a conservation law, we need to define a suitable concept of entropy solutions for these equations and show that these solutions are well posed. The main challenge in showing existence is the fact that the velocity field  $V$  acts as a coefficient in this equation. Although conservation laws with coefficients have been studied extensively in recent years (see [? ? ? ? ? ] ) and references therein, the state of the art results require that the coefficient is a function of bounded variation. However, the fact that the coefficient (the velocity) depends on  $p$  poses a big difficulty to treat our equation as a conservation law equation. First, we expand equation (??), then we divide by  $\rho(p)$  to get

$$\phi \partial_t u + V \cdot \nabla u + \operatorname{div} V = 0, \quad (5.3)$$

where  $u = \ln(\rho(p))$ , or equivalently the pressure is  $p = \rho^{-1}(e^u)$ . In what follows, let us define the function  $h(z) = \rho^{-1}(e^z)$  and suppose  $h$  is regular enough (see paragraph ?? for some given examples of  $h$ ) thus obtaining the general form of



## 5.2 Study of Darcy-Brinkman model in one dimensional space

### 5.2.1 Notation

We denote by  $C(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  a constant depending on the parameters  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ . The notation  $a \lesssim b$  means that  $a \leq Cb$ , for some nonnegative constant  $C$  whose exact expression is of no importance. Let  $p$  be any constant with  $1 \leq p < \infty$ .  $L^p = L^p(\mathbb{R})$  is the space of all Lebesgue-measurable functions  $f$  with the standard norm

$$|f|_{L^p} = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

When  $p = 2$ , we denote the norm  $|\cdot|_{L^2}$  simply by  $|\cdot|_2$ . The inner product of any functions  $f_1$  and  $f_2$  in the Hilbert space  $L^2(\mathbb{R})$  is denoted by

$$(f_1, f_2) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x)f_2(x)dx.$$

The space  $L^\infty = L^\infty(\mathbb{R})$  consists of all essentially bounded, Lebesgue-measurable function  $f$  with the norm

$$|f|_{L^\infty} = \text{ess sup } |f(x)| < \infty.$$

We denote by  $W^{1,\infty} = W^{1,\infty}(\mathbb{R}) = \{f \in L^\infty, \partial_x f \in L^\infty\}$  endowed with its canonical norm.

For any real constant  $s$ ,  $H^s = H^s(\mathbb{R})$  denotes the Sobolev space of all tempered distributions  $f$  with the norm  $|f|_{H^s} = |\Lambda^s f|_2 < \infty$ , where  $\Lambda$  is the pseudo-differential operator  $\Lambda = (1 - \partial_x^2)^{\frac{1}{2}}$ .

For any functions  $u = u(t, x)$  and  $v(t, x)$  defined on  $[0, T) \times \mathbb{R}$  with  $T > 0$ , we denote the inner product, the  $L^p$ -norm and especially the  $L^2$ -norm, as well as the Sobolev norm, with respect to the spatial variable  $x$ , by  $(u, v) = (u(t, \cdot), v(t, \cdot))$ ,  $|u|_{L^p} = |u(t, \cdot)|_{L^p}$ ,  $|u|_{L^2} = |u(t, \cdot)|_{L^2}$ , and  $|u|_{H^s} = |u(t, \cdot)|_{H^s}$ , respectively.  $B_{H^s}(0, R)$  is the closed ball of center 0 and radius  $R$  in  $H^s$ .

Let  $C^k(\mathbb{R})$  denote the space of  $k$ -times continuously differentiable functions and  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  denote the space of infinitely differentiable functions, with compact support in  $\mathbb{R}$ .

For any closed operator  $T$  defined on a Banach space  $X$  of functions, the commutator

$[T, f]$  is defined by  $[T, f]g = T(fg) - fT(g)$  with  $f, g$  and  $fg$  belonging to the domain of  $T$ .

### 5.2.2 Well-posedness of the Darcy-Brinkman equation in 1D

In one dimensional space, the Darcy-Brinkman equations (??) can be simplified, into

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu \partial_x^2 \partial_t u - a \partial_x h(u) \partial_x u - 2\mu \partial_x V \partial_x^2 u - \mu V \partial_x^3 u - a \partial_x^2 h(u) = 0, \\ -\mu \partial_x^2 V + V = -a \partial_x h(u), \end{cases} \quad (5.6)$$

where  $h(u) = \rho^{-1}(e^u)$ ,  $a = \frac{k}{\mu}$  and  $\mu = \frac{k\nu}{\mu}$ . By changing the scale in time, we can consider  $\phi = 1$  which changes nothing in the study of this system. For the sake of simplicity, we write

$$\mathcal{T} = 1 - \mu \partial_x^2.$$

The following lemma gives an important invertibility result on  $\mathcal{T}$

**Lemme 5.1.** *The operator  $\mathcal{T} : H^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$  is well defined, one-to-one and onto. In particular we have*

$$|\mathcal{T}^{-1}f|_{H^s} + \sqrt{\mu}|\mathcal{T}^{-1}\partial_x f|_{H^s} \lesssim |f|_{H^s}, \quad \forall s > 0. \quad (5.7)$$

**Preuve :** The proof of this Lemma is classical but for the sake of completeness we reproduce the proof. In order to prove the invertibility of  $\mathcal{T}$ , we point out that the quantity  $|v|_*$  defined as

$$|v|_*^2 = |v|_2^2 + \mu|\partial_x v|_2^2$$

is equivalent to the  $H^1(\mathbb{R})$ -norm but not uniformly with respect to  $\mu \in (0, 1)$ . We define by  $H_*^1(\mathbb{R})$  the space  $H^1(\mathbb{R})$  endowed with this norm. The bilinear form :

$$a(u, v) = (\mathcal{T}u, v) = (u, v) + \mu(\partial_x u, \partial_x v) \quad (5.8)$$

is obviously continuous on  $H_*^1(\mathbb{R}) \times H_*^1(\mathbb{R})$ . Remarking that  $a(u, u) = |u|_*^2$ ,  $a$  is coercive on  $H_*^1$ . Using the Riesz Theorem, for all  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , there exists a unique

## 5.2 Study of Darcy-Brinkman model in one dimensional space

---

$u \in H_*^1(\mathbb{R})$  such that, for all  $v \in H_*^1(\mathbb{R})$

$$a(u, v) = (f, v);$$

equivalently, there is a unique solution to the equation

$$\mathcal{T}u = f.$$

We then get from the definition of  $\mathcal{T}$  that  $\partial_x^2 u = \frac{1}{\mu}(u - f)$ . Since  $u \in H^1(\mathbb{R})$  and  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , we get  $\partial_x^2 u \in L^2(\mathbb{R})$  and thus  $u \in H^2(\mathbb{R})$ . We prove here estimate (??). Indeed, from equation (??) by using Cauchy-Schwartz inequality we have

$$a(u, u) \leq |f|_2 |u|_2 \leq \frac{1}{2}|f|_2^2 + \frac{1}{2}|u|_2^2.$$

Then it is easy to get  $|u|_*^2 \lesssim |f|_2^2$ . Then we prove that  $|\mathcal{T}^{-1}f|_{H^s} + \sqrt{\mu}|\mathcal{T}^{-1}\partial_x f|_{H^s} \lesssim |f|_{H^s}$ . Indeed, if  $f \in H^s$  and  $u = \mathcal{T}^{-1}f$  then  $\mathcal{T}u = f$ . Applying  $\Lambda^s$  to this identity, we get  $\mathcal{T}\Lambda^s u = \Lambda^s f$ . Since  $\Lambda^s$  commutes with  $\mathcal{T}$  and  $\mathcal{T}^{-1}$ , one can use estimate  $|u|_*^2 \lesssim |f|_2^2$  to get the result.  $\square$

### 5.2.3 Linear analysis

In order to rewrite the first equation of Darcy-Brinkman system (??)<sub>1</sub> in a condensed form, let us define the following operator

$$A[V, u]f = -a\partial_x h(u)f - 2\mu\partial_x V\partial_x f - \mu V\partial_x^2 f - a\partial_x h'(u)f - ah'(u)\partial_x f.$$

The Darcy-Brinkman system (??) can be written after applying  $\mathcal{T}^{-1}$  to both sides of the first equation in (??) as

$$\begin{cases} -\mu\partial_x^2 V + V = -a\partial_x h(u), \\ \partial_t u + B[V, u]\partial_x u = 0, \end{cases} \quad (5.9)$$



where  $B[V, u] = \mathcal{T}^{-1}A[V, u]$ . This subsection is devoted to the proof of energy estimates for the following initial value problem around some reference state  $\bar{u}$  :

$$\begin{cases} -\mu\partial_x^2 V + V = -a\partial_x h(\bar{u}), \\ \partial_t u + B[V, \bar{u}]\partial_x u = 0, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (5.10)$$

A natural energy of the second equation of system (??) is given by

$$E^s(u)^2 = (\Lambda^s u, \mathcal{T}\Lambda^s u) = |v|_{H^s}^2 + \mu|\partial_x v|_{H^s}^2.$$

Notice that  $E^s(u)^2$  for a fixed  $\mu$  is an equivalent norm of the norm of space  $H^{s+1}$ . We prove now the following proposition :

**Proposition 5.1.** *Let  $s_0 > \frac{1}{2}$ ,  $s \geq s_0 + 1$  and  $\bar{u} \in C([0, T]; H^{s+1})$ . Then for all  $u_0 \in H^{s+1}$  there exists a unique solution  $(u, V)$  to (??), In particular we have for all  $0 \leq t \leq T$ ,  $u \in C([0, T]; H^{s+1}) \cap C^1(0, T; H^s)$  and  $V \in C^0([0, T]; H^{s+2})$ , with*

$$E^s(u(t, x))^2 \lesssim e^{\lambda t} E^s(u_0(x))^2 \exp\left(\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)\right) \quad (5.11)$$

For some  $\lambda = \lambda_T = 2 \sup_{t \in [0, T]} (|\bar{u}|_{H^{s+1}} + 1)$ . And also we have

$$|V|_{H^{s+2}} \leq C(|\bar{u}|_{L^\infty}, |h|_{C^\infty}) |\bar{u}|_{H^{s+1}}. \quad (5.12)$$

**Preuve :** Before establishing the proof let us recall here some product as well as commutator estimates in Sobolev spaces.

**Lemme 5.2** (product estimates). *Let  $s \geq 0$ ; one has for all  $f, g \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ ,*

$$|fg|_{H^s} \lesssim |f|_{L^\infty}|g|_{H^s} + |f|_{H^s}|g|_{L^\infty}.$$

If  $s \geq s_0 > \frac{1}{2}$ , one deduces thanks to continuous embedding of Sobolev spaces,

$$|fg|_{H^s} \lesssim |f|_{H^s}|g|_{H^s}.$$

Let  $F \in C^\infty(\mathbb{R})$  such that  $F(0) = 0$ . If  $g \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  with  $s \geq 0$ , one has

## 5.2 Study of Darcy-Brinkman model in one dimensional space

---

$F(g) \in H^s(\mathbb{R})$  and

$$|F(g)|_{H^s} \leq C (|g|_{L^\infty}, |F|_{C^\infty}) |g|_{H^s}.$$

**Preuve :** The proof is classical (see [? ? ?]). □

**Lemme 5.3** (commutator estimates). For any  $s \geq 0$ , and  $\partial_x f, g \in H^{s_0}(\mathbb{R}) \cap H^{s-1}(\mathbb{R})$ , one has

$$|[\Lambda^s, f]g|_{L^2} \lesssim |\partial_x f|_{H^{s-1}} |g|_{L^\infty} + |\partial_x f|_{L^\infty} |g|_{H^{s-1}}.$$

Thanks to continuous embedding of Sobolev spaces, one has for  $s \geq s_0 + 1, s_0 > \frac{1}{2}$ ,

$$|[\Lambda^s, f]g|_{L^2} \lesssim |\partial_x f|_{H^{s-1}} |g|_{H^{s-1}}.$$

**Preuve :** The proof can be found in Kato and Ponce [? ]. □

**Proof of Proposition ?? :** Existence of  $V$  is classical and we can easily prove the following estimate on  $V$

$$|V|_{H^{s+2}} \leq C (|\bar{u}|_{L^\infty}, |h|_{C^\infty}) |\bar{u}|_{H^{s+1}},$$

indeed,

$$\begin{aligned} E^s(V)^2 &= (\mathcal{T} \Lambda^s V, \Lambda^s V) = -a(\Lambda^s \partial_x (h(\bar{u})), \Lambda^s V) = -a(\Lambda^s \partial_x (h(\bar{u}) - h(0)), \Lambda^s V) \\ &= a(\Lambda^s (h(\bar{u}) - h(0)), \Lambda^s \partial_x V), \end{aligned}$$

furthermore, for all  $\gamma > 0$  we have

$$E^s(V)^2 = a(\Lambda^s (h(\bar{u}) - h(0)), \Lambda^s \partial_x V) \lesssim \frac{1}{\gamma} |h(\bar{u}) - h(0)|_{H^s}^2 + \gamma |\partial_x V|_{H^s}^2,$$

this yields, for  $\gamma$  small enough and by Lemma ?? to

$$E^s(V)^2 \leq C (|\bar{u}|_{L^\infty}, |h|_{C^\infty}) |\bar{u}|_{H^s}^2.$$

Replacing now  $s$  by  $s + 1$ , we obtain the estimate. Furthermore, in order to prove

$V \in C([0, T]; H^{s+2})$  and having that for all  $u, v \in B_{H^s}(0, R)$ ,  $s > s_0 + 1$

$$|h(u) - h(v)|_{H^s} \leq C(R, |h|_{C^\infty})|u - v|_{H^s}, \quad (5.13)$$

we deduce from the first equation of (??) and the continuity of  $\bar{u}$  that  $V \in C([0, T]; H^{s+2})$ .

On the other hand, under the regularity of  $\bar{u}$  and  $V$ , the existence and uniqueness of a solution  $u$  of the second equation of (??) can be achieved like in Appendix A [?] if we have estimate (??). We thus focus our attention on the proof of the energy estimate which is also primordial to solve the non-linear system. For any  $\lambda \in \mathbb{R}$  we compute

$$e^{\lambda t} \partial_t (e^{-\lambda t} E^s(u)^2) = -\lambda E^s(u)^2 - \partial_t (E^s(u)^2)$$

since

$$E^s(u)^2 = (\Lambda^s u, \mathcal{T} \Lambda^s u).$$

we have

$$\partial_t (E^s(u)^2) = 2 (\mathcal{T} \Lambda^s \partial_t u, \Lambda^s u)$$

One gets using the equation (??) that :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{\lambda t} \partial_t (e^{-\lambda t} E^s(u)^2) &= -\frac{\lambda}{2} E^s(u)^2 + a (\Lambda^s (\partial_x h(\bar{u}) \partial_x u), \Lambda^s u) + 2\mu (\Lambda^s (\partial_x V \partial_x^2 u), \Lambda^s u) \\ &\quad + \mu (\Lambda^s (V \partial_x^3 u), \Lambda^s u) + a (\Lambda^s (\partial_x h'(\bar{u}) \partial_x u), \Lambda^s u) + a (\Lambda^s (h'(\bar{u}) \partial_x^2 u), \Lambda^s u). \end{aligned} \quad (5.14)$$

For all skew-operator  $T$  (That is  $T^* = -T$ ), and for all  $b$  smooth enough, one has

$$(\Lambda^s (bTu), \Lambda^s u) = ([\Lambda^s, b]Tu, \Lambda^s u) - \frac{1}{2} ([T, b]\Lambda^s u, \Lambda^s u),$$

we deduce by applying this identity with ( $T = \partial_x$  or  $T = \partial_x^3$ ) and integrating by

## 5.2 Study of Darcy-Brinkman model in one dimensional space

---

parts,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}e^{\lambda t}\partial_t\left(e^{-\lambda t}E^s(u)^2\right) &= -\frac{\lambda}{2}E^s(u)^2 + a([\Lambda^s, \partial_x h(\bar{u})]\partial_x u, \Lambda^s u) - \frac{a}{2}\left(\partial_x^2 h(\bar{u})\Lambda^s u, \Lambda^s u\right) \\
&\quad + 2\mu\left(\Lambda^s\left(\partial_x V\partial_x^2 u\right), \Lambda^s u\right) + \mu\left([\Lambda^s, V]\partial_x^3 u, \Lambda^s u\right) - \frac{\mu}{2}\left(\partial_x^3 V\Lambda^s u, \Lambda^s u\right) \\
&\quad - \frac{3\mu}{2}\left(\partial_x^2 V\partial_x \Lambda^s u, \Lambda^s u\right) - \frac{3\mu}{2}\left(\partial_x V\partial_x^2 \Lambda^s u, \Lambda^s u\right) + a([\Lambda^s, \partial_x h'(\bar{u})]\partial_x u, \Lambda^s u) \\
&\quad - \frac{a}{2}\left(\partial_x^2 h'(\bar{u})\Lambda^s u, \Lambda^s u\right) + a\left(\Lambda^s\left(h'(\bar{u})\partial_x^2 u\right), \Lambda^s u\right) \quad (5.15)
\end{aligned}$$

We now turn to find upperbounds the different components of the r.h.s. of (??).

– By using the commutator estimate one gets for all  $s > \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
a([\Lambda^s, \partial_x h(\bar{u})]\partial_x u, \Lambda^s u) &\leq a([\Lambda^s, \partial_x h(\bar{u})]\partial_x u|_2|u|_{H^s} \\
&\lesssim |\partial_x^2 h(\bar{u})|_{H^{s-1}}|\partial_x u|_{H^{s-1}}|u|_{H^s} \\
&\lesssim |\partial_x^2 h(\bar{u})|_{H^{s-1}}|u|_{H^s}^2,
\end{aligned}$$

then, If we apply Lemma ?? on  $F(\bar{u}) = h(\bar{u}) - h(0)$  we get

$$a([\Lambda^s, \partial_x h(\bar{u})]\partial_x u, \Lambda^s u) \lesssim |\partial_x^2 h(\bar{u})|_{H^{s-1}}|u|_{H^s}^2 \lesssim |\bar{u}|_{H^{s+1}}|u|_{H^s}^2.$$

– Thanks to continuous embedding of  $H^{s_0}(\mathbb{R})$  in  $L^\infty(\mathbb{R})$  for all  $s_0 > \frac{1}{2}$  we have

$$\frac{a}{2}\left(\partial_x^2 h(\bar{u})\Lambda^s u, \Lambda^s u\right) \lesssim |\partial_x^2 h(\bar{u})|_{L^\infty}|u|_{H^s}^2 \lesssim |\partial_x^2 h(\bar{u})|_{H^{s_0}}|u|_{H^s}^2 \lesssim |\bar{u}|_{H^{s_0+2}}|u|_{H^s}^2.$$

– The product estimate give as for all  $s \geq s_0$ , such that  $s_0 > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
2\mu\left(\Lambda^s\left(\partial_x V\partial_x^2 u\right), \Lambda^s u\right) &= 2\mu\left([\Lambda^s, \partial_x V]\partial_x^2 u, \Lambda^s u\right) + 2\mu\left(\partial_x V\Lambda^s\partial_x^2 u, \Lambda^s u\right) \\
&= 2\mu\left([\Lambda^s, \partial_x V]\partial_x^2 u, \Lambda^s u\right) - 2\mu\left(\partial_x V\Lambda^s\partial_x u, \Lambda^s\partial_x u\right) \\
&\quad - 2\mu\left(\partial_x^2 V\Lambda^s u, \Lambda^s\partial_x u\right) \\
&\lesssim \mu\left(|\partial_x^2 V|_{H^{s-1}}|\partial_x^2 u|_{H^{s-1}}|u|_{H^s}\right. \\
&\quad \left.+ |\partial_x V|_{H^{s_0}}|\partial_x u|_{H^s}^2 + |\partial_x^2 V|_{H^{s_0}}|\partial_x u|_{H^s}|u|_{H^s}\right).
\end{aligned}$$

– Similarly we have for all  $s \geq s_0$ , and  $s_0 > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 a\left(\Lambda^s\left(h'(\bar{u})\partial_x^2 u\right), \Lambda^s u\right) &= a\left([\Lambda^s, h'(\bar{u})]\partial_x^2 u, \Lambda^s u\right) + a\left(h'(\bar{u})\Lambda^s \partial_x u, \Lambda^s \partial_x u\right) \\
 &\quad + a\left(\partial_x h'(\bar{u})\Lambda^s u, \Lambda^s \partial_x u\right) \\
 &= a\left([\Lambda^s, h'(\bar{u})]\partial_x^2 u, \Lambda^s u\right) + a\left((h'(\bar{u}) - h'(0) + h'(0))\Lambda^s \partial_x u, \Lambda^s \partial_x u\right) \\
 &\quad + a\left(\partial_x h'(\bar{u})\Lambda^s u, \Lambda^s \partial_x u\right) \\
 &\lesssim |\partial_x h'(\bar{u})|_{H^{s-1}} |\partial_x^2 u|_{H^{s-1}} |u|_{H^s} + |h'(\bar{u}) - h'(0)|_{H^{s_0}} |\partial_x u|_{H^s}^2 \\
 &\quad + |\partial_x u|_{H^s}^2 + |\partial_x h'(\bar{u})|_{H^{s_0}} |\partial_x u|_{H^s} |u|_{H^s} \\
 &\lesssim |\bar{u}|_{H^s} |\partial_x^2 u|_{H^{s-1}} |u|_{H^s} + (|\bar{u}|_{H^{s_0}} + 1) |\partial_x u|_{H^s}^2 + |\bar{u}|_{H^{s_0+1}} |\partial_x u|_{H^s} |u|_{H^s}
 \end{aligned}$$

– Using the identity  $[\Lambda^s, V]\partial_x^3 u = \partial_x([\Lambda^s, V]\partial_x^2 u) - [\Lambda^s, \partial_x V]\partial_x^2 u$  leads to

$$\begin{aligned}
 \mu\left([\Lambda^s, V]\partial_x^3 u, \Lambda^s u\right) &= \mu\left(\partial_x([\Lambda^s, V]\partial_x^2 u), \Lambda^s u\right) - \mu\left([\Lambda^s, \partial_x V]\partial_x^2 u, \Lambda^s u\right) \\
 &= -\mu\left([\Lambda^s, V]\partial_x^2 u, \Lambda^s \partial_x u\right) - \mu\left([\Lambda^s, \partial_x V]\partial_x^2 u, \Lambda^s u\right) \\
 &\lesssim \mu\left(|\partial_x V|_{H^{s-1}} |\partial_x^2 u|_{H^{s-1}} |\partial_x u|_{H^s} + |\partial_x^2 V|_{H^{s-1}} |\partial_x^2 u|_{H^{s-1}} |u|_{H^s}\right).
 \end{aligned}$$

– An integration by parts give us for all  $s \geq s_0$ , and  $s_0 > \frac{1}{2}$

$$\frac{\mu}{2}\left(\partial_x^3 V \Lambda^s u, \Lambda^s u\right) = -\mu\left(\partial_x^2 V \Lambda^s \partial_x u, \Lambda^s u\right) \lesssim \mu |\partial_x^2 V|_{H^{s_0}} |u|_{H^s} |\partial_x u|_{H^s}$$

– Similarly we have for all  $s \geq s_0$ , and  $s_0 > \frac{1}{2}$

$$\frac{3\mu}{2}\left(\partial_x^2 V \Lambda^s \partial_x u, \Lambda^s u\right) \lesssim \mu |\partial_x^2 V|_{H^{s_0}} |u|_{H^s} |\partial_x u|_{H^s}$$

– As before, we integrate by parts and we have the product estimate to get for all  $s \geq s_0$ , and  $s_0 > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \frac{3\mu}{2}\left(\partial_x V \partial_x^2 \Lambda^s u, \Lambda^s u\right) &= -\frac{3\mu}{2}\left(\partial_x V \partial_x \Lambda^s u, \Lambda^s \partial_x u\right) - \frac{3\mu}{2}\left(\partial_x^2 V \partial_x^2 \Lambda^s u, \Lambda^s u\right) \\
 &\lesssim \mu\left(|\partial_x V|_{H^{s_0}} |u|_{H^s} |\partial_x u|_{H^s} + |\partial_x^2 V|_{H^{s_0}} |u|_{H^s} |\partial_x u|_{H^s}\right).
 \end{aligned}$$

– Furthermore we have for all  $s \geq s_0$ , and  $s_0 > \frac{1}{2}$

$$a([\Lambda^s, \partial_x h'(\bar{u})]\partial_x u, \Lambda^s u) \lesssim |\partial_x^2 h'(\bar{u})|_{H^{s-1}} |u|_{H^s} |\partial_x u|_{H^{s-1}} \lesssim |\bar{u}|_{H^{s+1}} |u|_{H^s} |\partial_x u|_{H^{s-1}}.$$

## 5.2 Study of Darcy-Brinkman model in one dimensional space

---

– Also we have for all  $s \geq s_0$ , and  $s_0 > \frac{1}{2}$

$$\frac{a}{2} \left( \partial_x^2 h'(\bar{u}) \Lambda^s u, \Lambda^s u \right) \lesssim |\partial_x^2 h'(\bar{u})|_{H^{s_0}} |u|_{H^s}^2 \lesssim |\bar{u}|_{H^{s_0+2}} |u|_{H^s}^2$$

Finally if we take  $s_0 = s - 1$  we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{\lambda t} \partial_t \left( e^{-\lambda t} E^s(u)^2 \right) &\lesssim |\bar{u}|_{H^{s+1}} |u|_{H^s}^2 + (|\bar{u}|_{H^s} + 1) |u|_{H^{s+1}}^2 + \mu |V|_{H^{s+1}} |u|_{H^{s+1}}^2 - \frac{\lambda}{2} E^s(u)^2 \\ &\lesssim (|\bar{u}|_{H^{s+1}} + 1) |u|_{H^{s+1}}^2 + \mu |V|_{H^{s+1}} |u|_{H^{s+1}}^2 - \frac{\lambda}{2} E^s(u)^2. \end{aligned}$$

Thanks to the above inequality, one can choose

$$\lambda = \lambda_T = 2 \sup_{t \in [0, T]} (|\bar{u}|_{H^{s+1}} + 1),$$

and one deduces

$$e^{\lambda t} \partial_t \left( e^{-\lambda t} E^s(u)^2 \right) \lesssim |V|_{H^{s+1}} E^s(u)^2.$$

Integrating this differential inequality yields

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], E^s(u(t, x))^2 &\lesssim e^{\lambda t} E^s(u_0(x))^2 + \int_0^t e^{\lambda(t-\zeta)} |V(\zeta, x)|_{H^{s+1}} E^s(u(\zeta, x))^2 d\zeta \\ &\lesssim e^{\lambda T} E^s(u_0(x))^2 + \int_0^t e^{\lambda(t-\zeta)} |V(\zeta, x)|_{H^{s+1}} E^s(u(\zeta, x))^2 d\zeta. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Then by estimate , one can deduce from estimate (??) that

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], E^s(u(t, x))^2 &\lesssim e^{\lambda T} E^s(u_0(x))^2 + \int_0^t e^{\lambda(t-\zeta)} |\bar{u}(\zeta, x)|_{H^s} E^s(u(\zeta, x))^2 d\zeta \\ &\lesssim e^{\lambda T} E^s(u_0(x))^2 + \int_0^t e^{\lambda(t-\zeta)} E^s(u(\zeta, x))^2 d\zeta. \end{aligned}$$

Next, by using Gronwall Lemma we obtain

$$E^s(u(t, x))^2 \lesssim e^{\lambda t} E^s(u_0(x))^2 e^{\left( \int_0^t e^{\lambda(t-n)} dn \right)} = e^{\lambda t} E^s(u_0(x))^2 \exp \left( \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \right). \tag{5.17}$$

Now, for the last estimate we have

$$\begin{aligned}
 E^{s-1}(\partial_t u)^2 &= (\Lambda^{s-1} \partial_t u, \mathcal{T} \Lambda^{s-1} \partial_t u) = (\Lambda^{s-1} \partial_t u, \Lambda^{s-1} \mathcal{T} \partial_t u) \\
 &= a \left( \Lambda^{s-1} (\partial_x h(\bar{u}) \partial_x u), \Lambda^{s-1} \partial_t u \right) + 2\mu \left( \Lambda^{s-1} (\partial_x V \partial_x^2 u), \Lambda^{s-1} \partial_t u \right) \\
 &\quad + \mu \left( \Lambda^{s-1} (V \partial_x^3 u), \Lambda^{s-1} \partial_t u \right) + a \left( \Lambda^{s-1} (\partial_x h'(\bar{u}) \partial_x u), \Lambda^{s-1} \partial_t u \right) \\
 &\quad + a \left( \Lambda^{s-1} (h'(\bar{u}) \partial_x^2 u), \Lambda^{s-1} \partial_t u \right),
 \end{aligned}$$

similarly, as in the estimate of  $E^s(u(t, x))^2$  we apply a similar estimate in order to obtain

$$E^{s-1}(\partial_t u)^2 \lesssim (|\bar{u}|_{H^{s+1}} + 1) |u|_{H^{s+1}} |\partial_t u|_{H^s} + \mu |V|_{H^{s+1}} |u|_{H^{s+1}} |\partial_t u|_{H^s}.$$

Then by using estimates (??) and Cauchy-schwarz inequalities we get

$$\begin{aligned}
 E^{s-1}(\partial_t u)^2 &\lesssim ((1 + \mu) |\bar{u}|_{H^{s+1}} + 1) |u|_{H^{s+1}} |\partial_t u|_{H^s} \\
 &\lesssim \frac{1}{\gamma} ((1 + \mu) |\bar{u}|_{H^{s+1}} + 1) |u|_{H^{s+1}}^2 + \gamma ((1 + \mu) |\bar{u}|_{H^{s+1}} + 1) |\partial_t u|_{H^s}^2.
 \end{aligned}$$

Now, since  $(E^s)^2$  is an equivalent norm of the norm of space  $H^{s+1}$  and by choosing  $\gamma$  small enough we obtain

$$E^{s-1}(\partial_t u)^2 \leq C(|u_0|_{H^{s+1}}, \mu, \lambda), \quad \forall t \in [0, T].$$

□

**Théorème 5.1.** *Let  $s_0 > \frac{1}{2}$ ,  $s \geq s_0 + 1$  and  $u_0 \in H^{s+1}$ . Then there exists a positive  $T$  such that for all  $0 \leq t \leq T$ , there exists a unique solution  $(u, V)$  to (??), in particular we have  $u \in C([0, T]; H^{s+1}) \cap C^1([0, T]; H^s)$  and  $V \in C(0, T; H^{s+2})$ .*

**Preuve :** We want to construct a sequence of approximate solution  $(u_n, V_n)_{n \geq 0}$  by the iterative scheme

$$u_0(t, x) = u_0(x), \quad \text{and } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} -\mu \partial_x^2 V_{n+1} + V_{n+1} = -a \partial_x h(u_n), \\ \partial_t u_{n+1} + B[V_{n+1}, u_n] \partial_x u_{n+1} = 0, \\ u_{n+1}(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (5.18)$$

## 5.2 Study of Darcy-Brinkman model in one dimensional space

---

where  $B[V_{n+1}, u_n] = \mathcal{T}^{-1}A[V_{n+1}, u_n]$  and  $A$  is defined as follows

$$A[V_{n+1}, u_n]f = -a\partial_x h(u_n)f - 2\mu\partial_x V_{n+1}\partial_x f - \mu V_{n+1}\partial_x^2 f - a\partial_x h'(u_n)f - ah'(u_n)\partial_x f.$$

In order to prove the existence of a unique solution of system (??), we will prove that the iterative scheme (??) is convergent and the sequence  $(u_n, V_n)_{n \geq 0}$  converges to  $(u, V)$  where  $(u, V)$  is the unique solution of system (??). By Proposition ??, we know that there is a unique solution  $(u_{n+1}, V_{n+1}) \in C([0, T]; H^{s+1}) \times L^\infty(0, T; H^{s+2})$  to (??) if  $u_n \in C([0, T]; H^{s+1})$ . Let  $R > 0$  be such that  $E^s(u_0)^2 \leq \frac{R}{2}$ , it follows from Proposition ??, equation (??) that  $u_{n+1}$  satisfies the following inequality

$$\forall t \in [0, T], E^s(u_{n+1}(t, x))^2 \leq e^{\lambda T} E^s(u_0(x))^2 + \int_0^t e^{\lambda(t-\zeta)} |V_{n+1}(\zeta, x)|_{H^{s+1}} E^s(u_{n+1}(\zeta, x))^2 d\zeta.$$

We suppose now that

$$E^s(u_n(t, x))^2 \leq R.$$

Then, using the fact that  $|V_{n+1}|_{H^{s+1}} \leq E^s(u_n)$  yields to

$$E^s(u_{n+1}(t, x))^2 \leq \frac{R}{2} e^{\lambda T} + \int_0^t R e^{\lambda(t-\zeta)} E^s(u_{n+1}(\zeta, x))^2 d\zeta,$$

and by using Gronwall Lemma we get

$$E^s(u_{n+1}(t, x))^2 \leq \frac{R}{2} e^{\lambda T} \exp\left(\int_0^t R e^{\lambda(t-\zeta)} d\zeta\right) = \frac{R}{2} e^{\lambda T} \exp\left(\frac{R}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1)\right).$$

Hence, there is  $T > 0$  small enough such that

$$\sup_{[0, T]} E^s(u_{n+1}(t, x))^2 \leq R. \quad (5.19)$$

On the other hand, we will show that  $(u_n)_{n \geq 0}$  is convergent, and to do this let us estimate  $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} \partial_t \left( E^0(u_{n+1} - u_n)^2 \right) &= 2(\mathcal{T}\partial_t(u_{n+1} - u_n), u_{n+1} - u_n) \\ &= -2(A[[V_{n+1}, u_n]\partial_x(u_{n+1} - u_n), u_{n+1} - u_n) \\ &\quad - 2((A[V_{n+1}, u_n] - A[V_n, u_{n-1}])\partial_x u_n, u_{n+1} - u_n). \end{aligned} \quad (5.20)$$



The first term in the r.h.s of (??) can be easily estimated for all  $s_0 > \frac{1}{2}$  as follows

$$\begin{aligned} -2(A[V_{n+1}, u_n] \partial_x (u_{n+1} - u_n), u_{n+1} - u_n) &\lesssim (|u_n|_{H^{s_0+1}} + 1) |u_{n+1} - u_n|_{H^1}^2 \\ &\quad + \mu |V_{n+1}|_{H^{s_0+2}} |u_{n+1} - u_n|_{H^1}^2 \\ &\lesssim ((1 + \mu) |u_n|_{H^{s_0+1}} + 1) |u_{n+1} - u_n|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Also the second term in the r.h.s of (??) can be estimated by

$$\begin{aligned} -((A[V_{n+1}, u_n] - A[V_n, u_{n-1}]) \partial_x u_n, u_{n+1} - u_n) &\lesssim (|u_n|_{H^{s_0+2}} + 1) |u_n - u_{n-1}|_{H^1} |u_{n+1} - u_n|_{H^1} \\ &\quad + \mu |u_n|_{H^{s_0+1}} |V_{n+1} - V_n|_{H^1} |u_{n+1} - u_n|_{H^1} \end{aligned}$$

and so on by the first equation of (??) and by estimate (??) we can obtain the following estimate

$$|V_{n+1} - V_n|_{H^{s+1}} \lesssim |u_n - u_{n-1}|_{H^s}. \quad (5.21)$$

Next using estimate (??), we obtain

$$\begin{aligned} \partial_t (E^0(u_{n+1} - u_n)^2) &\leq C(|u_0|_{H^{s+1}}, \mu, R) |u_{n+1} - u_n|_{H^1}^2 + C_1(|u_0|_{H^{s+1}}, \mu, R), |u_n - u_{n-1}|_{H^1}^2 \\ &\leq C(|u_0|_{H^{s+1}}, \mu, R) E^0(u_{n+1} - u_n)^2 + C_1(|u_0|_{H^{s+1}}, \mu, R) E^0(u_n - u_{n-1})^2 \\ &\leq C(|u_0|_{H^{s+1}}, \mu, R) E^0(u_{n+1} - u_n)^2 + C_1(|u_0|_{H^{s+1}}, \mu, R) \sup_{[0, T]} E^0(u_n - u_{n-1})^2. \end{aligned}$$

Integrating with respect to time gives us

$$\begin{aligned} E^0(u_{n+1} - u_n)^2 &\leq C(u_0|_{H^{s+1}}, \mu, \lambda) \int_0^t E^0(u_{n+1} - u_n)^2 + C_1(u_0|_{H^{s+1}}, \mu, \lambda) \sup_{[0, T]} \{E^0(u_n - u_{n-1})^2\} t \\ &\leq C(u_0|_{H^{s+1}}, \mu, \lambda) \int_0^t E^0(u_{n+1} - u_n)^2 + C_1(u_0|_{H^{s+1}}, \mu, \lambda) \sup_{[0, T]} \{E^0(u_n - u_{n-1})^2\} T. \end{aligned}$$

Furthermore, by using Gronwall Lemma we get

$$\begin{aligned} E^0(u_{n+1} - u_n)^2 &\leq C_1(|u_0|_{H^{s+1}}, \mu, \lambda) \sup_{[0, T]} \{E^0(u_n - u_{n-1})^2\} T \exp(C(|u_0|_{H^{s+1}}, \mu, \lambda) t) \\ &\leq C_1(|u_0|_{H^{s+1}}, \mu, \lambda) \exp(C(|u_0|_{H^{s+1}}, \mu, \lambda) T) T \sup_{[0, T]} \{E^0(u_n - u_{n-1})^2\}. \end{aligned}$$

### 5.3 Study of Darcy-Brinkman's flow in $\mathbb{R}^d$ , $d \geq 1$ with Bear hypothesis.

---

This yield to

$$\sup_{[0,T]} \{E^0(u_{n+1} - u_n)^2\} \leq \left( C_1(|u_0|_{H^{s+1}}, \mu, \lambda) \exp \left( C(|u_0|_{H^{s+1}}, \mu, \lambda) T \right) T \right)^n \sup_{[0,T]} \{E^0(u_1 - u_0)^2\}.$$

Finally, for  $T > 0$  small enough we have

$$C_1(|u_0|_{H^{s+1}}, \mu, \lambda) \exp \left( C(|u_0|_{H^{s+1}}, \mu, \lambda) T \right) T < 1.$$

Consequently, we conclude the existence of a time  $T = T(|u_0|_{H^{s+1}})$  and a function  $u$  such that  $u_n$  converges strongly to  $u$  in  $L^\infty(0, T; H^1)$ . On the other hand, we conclude from this convergence and by estimate (??) that there exists a function  $V$  such that  $V_n$  converges also strongly to  $V$  in  $L^\infty(0, T; H^2)$ . Since  $(u_n, V_n)$  are bounded in  $H^{s+1} \times H^{s+2}$  and according to the previous convergence we conclude that  $(u, V) \in L^\infty(0, T; H^{s+1}) \times L^\infty(0, T; H^{s+2})$ . Taking limits in system (??) when  $n \rightarrow \infty$ , we deduce that  $(u, V)$  is a solution of system (??). Furthermore, by interpolation results we obtain  $|(u_n - u)(t, \cdot)|_{H^{s'}} \rightarrow 0$  for all  $s' < s+1$  which gives us a strong convergence for  $u_n$  and  $V_n$  in higher space. Now we can prove  $V \in C([0, T], H^{s+2})$  and by classical argument see[?] we have that  $u \in C([0, T], H^{s+1})$ . Finally the continuity of  $\partial_t u$  can be obtained from the first equation of (??).  $\square$

### 5.3 Study of Darcy-Brinkman's flow in $\mathbb{R}^d$ , $d \geq 1$ with Bear hypothesis.

In this section, we are interested in studying the system of Darcy-Brinkman with Bear hypothesis (see [? ]) in a bounded multidimensional domain, which consists in neglecting the variation in density  $\nabla \rho \cdot V$  in the direction of the flow and from this assumption one obtains our model.

First of all, let us recall that the system of Darcy-Brinkman with a source term is given by

$$\begin{cases} \phi \partial_t \rho + V \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} V = \rho f, \\ -\mu \Delta V + V = -a \nabla p. \end{cases} \quad (5.22)$$

where  $a = \frac{k}{\tilde{\mu}}$  and  $\mu = \frac{\nu k}{\tilde{\mu}}$ , with  $k$  being the permeability coefficient,  $\tilde{\mu}$  the Darcy viscosity and  $\nu$  the Brinkman viscosity. Then by using Bear hypothesis  $V \cdot \nabla \rho \lll 1$  and after applying the Helmholtz operator  $(-\mu \Delta + I)$  on the first equation of (??),

we get

$$\phi \partial_t u - \mu \phi \Delta \partial_t u - \operatorname{div}(a \nabla p) = g, \quad (5.23)$$

with  $u = \ln(\rho(p))$  and  $p = \rho^{-1}(e^u)$ . In the following section, we are interested in some particular case of fluid in order to have a relationship between the pressure and the density.

### 5.3.1 Some particular cases of state law

**Case 1 : Ideal gas.** In this case, the relationship between the density and the pressure is given by

$$p = p_0 \rho^\gamma = p_0 e^{\gamma u}$$

hence

$$\nabla p = \gamma p_0 e^{\gamma u} \nabla u,$$

where  $\gamma$  is the polytropic exponent. Its values in the two main cases covered by this state when applied to gas are :  $\gamma = 1$  for isothermal process, and  $\gamma$  bigger than 1 for adiabatic process (as example, we have from experimental data that  $\gamma = 1.405$  in the case of air under normal temperature condition). In all cases we have  $\gamma \geq 1$ . So for this state, equation (??) becomes

$$\phi \partial_t u - \mu \phi \Delta \partial_t u - \gamma a p_0 \operatorname{div}(e^{\gamma u} \nabla u) = g.$$

**Case 2 : Slightly compressible gas.** The state law is given by

$$\rho(p) = \rho_0 \exp(\zeta(p - p_0)),$$

thus,

$$p = \frac{1}{\zeta} \left( p_0 + \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right)$$

### 5.3 Study of Darcy-Brinkman's flow in $\mathbb{R}^d$ , $d \geq 1$ with Bear hypothesis.

---

hence

$$\nabla p = \frac{1}{\zeta} \frac{\nabla \rho}{\rho} = \frac{1}{\zeta} \nabla u,$$

equation (??) becomes linear and reads as :

$$\phi \partial_t u - \mu \phi \Delta \partial_t u - \frac{a}{\zeta} \operatorname{div}(\nabla u) = g.$$

**Cas 3 : Another form of slightly compressible gas.** The equation of this form is given by

$$\rho(p) = \rho_0 (1 + \gamma(p - p_0)),$$

which leads to  $p = \frac{\rho - \rho_0}{\gamma \rho_0} + p_0$ , consequently  $\nabla p = \frac{1}{\gamma \rho_0} e^u \nabla u$ . Furthermore, equation (??) becomes :

$$\phi \partial_t u - \mu \phi \Delta \partial_t u - \frac{a}{\gamma \rho_0} \operatorname{div}(e^u \nabla u) = g.$$

In the next section, we prove the existence of a solution of a generalized system covering these 3 cases and we specify the regularity of this solution.

#### 5.3.2 A generalized system of the Darcy-Brinkman equation

Let  $\Omega$  be a bounded domain in  $\mathbb{R}^d$ , with Lipschitz boundary  $\partial\Omega$  and we denote by  $\eta$  the outward normal vector. We set  $Q_T := [0, T] \times \Omega$  where  $T > 0$  is a fixed time. Our system is given by

$$\begin{cases} \partial_t u - \mu \Delta \partial_t u - \operatorname{div}(f(u) \nabla u) = g, & (t, x) \in Q_T, \\ \mu \nabla \partial_t u \cdot \eta + \nabla u \cdot \eta = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (5.24)$$

where  $g$  is a function in  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , and  $f$  is a continuous positive function. The medium is considered isotropic and homogeneous, then, as before we can change the scale in time to consider  $\phi = 1$ . Furthermore, we introduce the notion of weak solutions of (??) as below.

**Définition 5.1.** We say that  $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , is a weak solution of system (??) if  $u_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  and for all  $T > 0$ ,  $u \in W^{1,\infty}(0, T; H^1(\Omega))$ , such that for all  $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  we have

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t u \varphi \, dx \, dt + \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla \partial_t u \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega f(u) \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega g \varphi \, dx \, dt, \quad (5.25)$$

and  $u(0, x) = u_0(x)$  in  $H^1(\Omega)$ .

We state the existence theorem of weak solutions of the system (??) as follow.

**Théorème 5.2.** Under assumption  $u_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , the initial value problem (??) has a solution  $u$  in the sense of the definition ??.

We first establish the maximum principle, then we prove theorem ??.

**Proposition 5.2. (Maximum principle)** Let  $u$  be the solution of system (??), if  $g$  in  $L^\infty(Q_T)$ , and if  $u_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  then

$$-\max(|g|_{L^\infty(Q_T)}, |u_0|_{L^\infty(\Omega)}) \leq u \leq \max(|g|_{L^\infty(Q_T)}, |u_0|_{L^\infty(\Omega)}) e^T.$$

Let us start by proving Proposition ??.

**Preuve :** We multiply the first equation of (??) by  $e^{\alpha t}$  where  $\alpha$  is a real to be chosen later

$$\partial_t(e^{\alpha t} u) = e^{\alpha t} \partial_t u + \alpha e^{\alpha t} u$$

we obtain

$$\partial_t(e^{\alpha t} u) - \alpha e^{\alpha t} u - \mu \Delta(\partial_t(e^{\alpha t} u) - \alpha e^{\alpha t} u) - \operatorname{div}(f(u) \nabla(e^{\alpha t} u)) = e^{\alpha t} g$$

let  $w = e^{\alpha t} u$ , the above equation is rewritten as

$$\partial_t w - \alpha w - \mu \Delta \partial_t w + \alpha \mu \Delta w - \operatorname{div}(f(u) \nabla w) = e^{\alpha t} g.$$

Let  $\alpha < 0$ , then we write  $\alpha = -|\alpha|$  and let  $\beta$  a constant to be determined,

$$\partial_t(w - \beta) + |\alpha|(w - \beta) - \mu \Delta \partial_t(w - \beta) - |\alpha| \mu \Delta(w - \beta) - \operatorname{div}(f(u) \nabla(w - \beta)) = e^{-|\alpha|t} g - |\alpha| \beta.$$

### 5.3 Study of Darcy-Brinkman's flow in $\mathbb{R}^d$ , $d \geq 1$ with Bear hypothesis.

---

Multiply the above equation by  $(w - \beta)^+$  and integrate on  $\Omega$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |(w - \beta)^+|^2 dx + |\alpha| \int_{\Omega} |(w - \beta)^+|^2 dx + \mu \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |\nabla(w - \beta)^+|^2 dx + |\alpha| \mu \int_{\Omega} |\nabla(w - \beta)^+|^2 dx \\ + \int_{\Omega} f(u) |\nabla(w - \beta)^+|^2 dx = \int_{\Omega} (e^{-|\alpha|t} g - |\alpha| \beta) (w - \beta)^+ dx \end{aligned}$$

we choose the parameter  $\beta \geq \max_{Q_T} \left( \frac{e^{-|\alpha|t}}{|\alpha|} |g| \right)$  to impose that the left hand side is negative. Precisely,

$$e^{-|\alpha|t} g - |\alpha| \beta \leq 0 \iff \beta \geq \frac{e^{-|\alpha|t}}{|\alpha|} g, \quad \forall (t, x) \in Q_T.$$

Then, by integrating over  $]0, t[$  and choosing  $\alpha = -1$  we get

$$\int_{\Omega} |(w - \beta)^+|^2 dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla(w - \beta)^+|^2 dx \leq \int_{\Omega} |(u_0 - \beta)^+|^2 dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla(u_0 - \beta)^+|^2 dx,$$

Finally, by choosing  $\beta = \max(|g|_{L^\infty(Q_T)}, |u_0|_{L^\infty(\Omega)})$  we get  $(u_0 - \beta)^+ = 0$ , consequently  $w \leq \beta$ .

Similarly, to show that the solution is bounded below, we take  $-(w - \beta)^-$  as a test function and we choose  $\beta = -\max(|g|_{L^\infty(Q_T)}, |u_0|_{L^\infty(\Omega)})$ .

□

**Proof of theorem ?? :** The proof of theorem ?? is done in two steps. The first step consists of study is a regularized problem, and the second step consists of taking limits  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Step 1 :** Let  $\epsilon > 0$  fixed. We introduce the regularization  $f_\epsilon$  instead of  $f$  in the system (??) which is given by  $f_\epsilon(u) = \frac{f(u)}{1 + \epsilon f(u)}$ . Then, we obtain the following regularized system :

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon - \mu \Delta \partial_t u_\epsilon - \operatorname{div} (f_\epsilon(u_\epsilon) \nabla u_\epsilon) = g, & (t, x) \in Q_T, \\ \mu \nabla \partial_t u_\epsilon \cdot \eta + \nabla u_\epsilon \cdot \eta = 0, & (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \\ u_\epsilon(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.26)$$

The proof of the existence of solution  $u$  of system (??) is based on Schauder's fixed

point theorem. For that reason, we build the following application  $\mathcal{F}$  given by :

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : L^2(0, T; L^2(\Omega)) &\longrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)) \\ \bar{u}_\epsilon &\longrightarrow \mathcal{F}(\bar{u}_\epsilon) = u_\epsilon,\end{aligned}$$

where  $u_\epsilon$  is the solution of the following linear problem

$$\int_{\Omega} \partial_t u_\epsilon \varphi \, dx + \mu \int_{\Omega} \nabla \partial_t u_\epsilon \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} f_\epsilon(\bar{u}_\epsilon) \nabla u_\epsilon \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} g \varphi \, dx, \quad (5.27)$$

for all  $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ . The existence and uniqueness of this solution is obtained by using of the Faedo-Galerkin method, which gives  $u_\epsilon \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$ , see for example [? ].

**Lemme 5.4.**  $\mathcal{F}$  is a continuous map from  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  to  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .

**Preuve :** Let  $\bar{u}_\epsilon^n$  be a sequence in  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  and  $\bar{u}_\epsilon \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  such that

$$\bar{u}_\epsilon^n \longrightarrow \bar{u}_\epsilon \text{ in } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ when } n \longrightarrow \infty.$$

Let  $u_\epsilon^n = \mathcal{F}(\bar{u}_\epsilon^n)$  and  $u_\epsilon = \mathcal{F}(\bar{u}_\epsilon)$ , the aim is to show

$$u_\epsilon^n \longrightarrow u_\epsilon \text{ in } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ when } n \longrightarrow \infty.$$

First of all, for all  $n \in \mathbb{N}$ , we have  $u_\epsilon^n$  and  $u_\epsilon$  are solution of (??), then taking the difference between the two corresponding equations of  $u_\epsilon^n$  and  $u_\epsilon$ , and using  $\varphi = u_\epsilon^n - u_\epsilon$  as a test function in (??) then integrating in time we get :

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |u_\epsilon^n - u_\epsilon|^2 \, ds \, dx + \frac{\mu}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |\nabla (u_\epsilon^n - u_\epsilon)|^2 \, ds \, dx \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} f_\epsilon(\bar{u}_\epsilon^n) |\nabla (u_\epsilon^n - u_\epsilon)|^2 \, ds \, dx + \int_0^t \int_{\Omega} (f_\epsilon(\bar{u}_\epsilon^n) - f_\epsilon(\bar{u}_\epsilon)) \nabla u_\epsilon \cdot \nabla (u_\epsilon^n - u_\epsilon) \, ds \, dx = 0.\end{aligned} \quad (5.28)$$

Next, we estimate each term of (??). The first one of the left hand side is written as follows, since the two sequences have the same initial condition

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (u_\epsilon^n - u_\epsilon)^2 \, ds \, dx = \frac{1}{2} \|u_\epsilon^n - u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

### 5.3 Study of Darcy-Brinkman's flow in $\mathbb{R}^d$ , $d \geq 1$ with Bear hypothesis.

---

Similarly, the second term is equivalent to

$$\frac{\mu}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\nabla (u_{\epsilon}^n - u_{\epsilon}))^2 ds dx = \frac{\mu}{2} \|\nabla (u_{\epsilon}^n - u_{\epsilon})\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Furthermore, the third term is nonnegative

$$\int_0^t \int_{\Omega} f_{\epsilon}(\bar{u}_{\epsilon}^n) (\nabla (u_{\epsilon}^n - u_{\epsilon}))^2 ds dx \geq 0.$$

Finally, for the last term by using Cauchy-Schwartz and Young inequalities, we get

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} (f_{\epsilon}(\bar{u}_{\epsilon}^n) - f_{\epsilon}(\bar{u}_{\epsilon})) \nabla u_{\epsilon} \cdot \nabla (u_{\epsilon}^n - u_{\epsilon}) ds dx \leq \\ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |(f_{\epsilon}(\bar{u}_{\epsilon}^n) - f_{\epsilon}(\bar{u}_{\epsilon})) \nabla u_{\epsilon}|^2 ds dx + \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla (u_{\epsilon}^n - u_{\epsilon})\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

Since  $f_{\epsilon}(\bar{u}_{\epsilon}^n) - f_{\epsilon}(\bar{u}_{\epsilon}) \rightarrow 0$  almost everywhere in  $Q_T$ , and  $|(f_{\epsilon}(\bar{u}_{\epsilon}^n) - f_{\epsilon}(\bar{u}_{\epsilon})) \nabla u_{\epsilon}|^2 \leq \frac{2}{\epsilon} |\nabla u_{\epsilon}|^2 \in L^1(Q_T)$ , then by Lebesgue dominated convergence theorem, there exists a positive integer  $n_0$  such that for all  $n \geq n_0$  we have

$$\int_0^T \int_{\Omega} |(f_{\epsilon}(\bar{u}_{\epsilon}^n) - f_{\epsilon}(\bar{u}_{\epsilon})) \nabla u_{\epsilon}|^2 \leq C_n$$

where  $C_n$  is a positive function of  $n$  that tends to zero when  $n \rightarrow +\infty$ . Finally, by using Gronwall Lemma for  $n \geq n_0$  we have

$$\|u_{\epsilon}^n - u_{\epsilon}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_1(\mu, T) C_n$$

Consequently, we have  $u_{\epsilon}^n \rightarrow u_{\epsilon}$  strongly in  $C^0(0, T; L^2(\Omega))$ , and particularly in  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .  $\square$

**Lemme 5.5.**  $\mathcal{F}$  is an application from  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  to  $W^{1,\infty}(0, T; H^1(\Omega))$

**Preuve :** Since  $u_{\epsilon} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , one takes the solution  $u_{\epsilon}$  as a test function in the weak formulation (??), and gets that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_{\epsilon}|^2 dx + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u_{\epsilon}|^2 dx + \int_{\Omega} f_{\epsilon}(\bar{u}_{\epsilon}) |\nabla u_{\epsilon}|^2 dx = \int_{\Omega} g u_{\epsilon} dx.$$

From the positivity of function  $f_{\epsilon}$ , and thanks to Cauchy-Schwartz and Young in-



equalities, one can deduce by Gronwall Lemma that

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C(\mu, \|u_0\|_{H^1}, \|g\|_{L^2}). \quad (5.29)$$

Similarly, if we take  $\partial_t u_\epsilon$  as a test function in (??) we get

$$\int_{\Omega} |\partial_t u_\epsilon|^2 dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla \partial_t u_\epsilon|^2 dx + \int_{\Omega} f_\epsilon(\bar{u}_\epsilon) \nabla u_\epsilon \cdot \nabla \partial_t u_\epsilon dx = \int_{\Omega} g \partial_t u_\epsilon dx,$$

by construction of  $f_\epsilon$  we have that  $|f_\epsilon| \leq \frac{1}{\epsilon}$ , then

$$\int_{\Omega} f_\epsilon(\bar{u}_\epsilon) \nabla u_\epsilon \cdot \nabla \partial_t u_\epsilon dx \leq \frac{1}{2\mu\epsilon} \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon|^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla \partial_t u_\epsilon|^2 dx.$$

Finally, by estimate (??) one can deduce that

$$\|\partial_t u_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C(\mu, \epsilon, \|u_0\|_{H^1}, \|g\|_{L^2}),$$

□

We return to the proof of the theorem (??), since  $\mathcal{F}(L^2(0, T; L^2(\Omega))) \subset W^{1,\infty}(0, T; H^1(\Omega))$  which is compactly embedded in  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Then by Schauder's fixed point theorem there exists a solution  $u_\epsilon \in W^{1,\infty}(0, T; H^1(\Omega))$  of problem (??) such that

$$\int_{\Omega} \partial_t u_\epsilon \varphi dx + \mu \int_{\Omega} \nabla \partial_t u_\epsilon \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} f_\epsilon(u_\epsilon) \nabla u_\epsilon \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} g \varphi dx, \quad \forall \varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (5.30)$$

**Step 2 :** In this step we derive energy estimates on the sequence  $(u_\epsilon)_\epsilon$  independently of  $\epsilon$  in order to pass to the limit. As  $u_\epsilon$  is a solution of (??), we take  $\varphi = u_\epsilon$  in (??), using the fact that  $f_\epsilon$  is nonnegative, and by Gronwall's Lemma we have :

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2 \leq C(\mu, g, u_0), \quad (5.31)$$

where  $C$  is a positive constant independent of  $\epsilon$ . Similarly, we take  $\varphi = \partial_t u_\epsilon$  in (??) we get :

$$\|\partial_t u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla \partial_t u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} f_\epsilon(u_\epsilon) \nabla u_\epsilon \cdot \nabla \partial_t u_\epsilon dx dt = \int_{\Omega} g \partial_t u_\epsilon dx dt. \quad (5.32)$$

Using the maximum principle in Proposition ?? and the positivity of  $f_\epsilon$ , one can

### 5.3 Study of Darcy-Brinkman's flow in $\mathbb{R}^d$ , $d \geq 1$ with Bear hypothesis.

---

deduce

$$-\max\left(|g|_{L^\infty(Q_T)}, |u_0|_{L^\infty(\Omega)}\right) \leq u_\epsilon \leq \max\left(|g|_{L^\infty(Q_T)}, |u_0|_{L^\infty(\Omega)}\right) e^T \quad (5.33)$$

Then by using this inequality we have

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_\epsilon(u_\epsilon) \nabla u_\epsilon \cdot \nabla \partial_t u_\epsilon \, dx \, dt &\leq \frac{1}{4\zeta} \|f(u_\epsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \zeta \|\nabla \partial_t u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{M}{4\zeta} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \zeta \|\nabla \partial_t u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

where  $\zeta$  is a positive constant to be chosen later and  $M = \max f(u_\epsilon)$  with  $u_\epsilon$  satisfying inequality (??). Similarly using Cauchy-Schwartz and Young inequalities we obtain

$$\int_{\Omega} g \partial_t u_\epsilon \, dx \, dt \leq \frac{1}{4\zeta} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \zeta \|\partial_t u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Using estimate (??) and after choosing  $\zeta$  small enough, we deduce from (??)

$$\|\partial_t u_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \mu \|\nabla \partial_t u_\epsilon(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\mu, g, u_0), \text{ for almost every } t \in (0, T),$$

where  $C$  is a positive constant independent of  $\epsilon$ . Consequently, the sequence  $(u_\epsilon)_\epsilon$  is bounded in  $W^{1,\infty}(0, T; H^1(\Omega))$ , and by Aubin-Simon Theorem [? ], there exists a subsequence denoted  $(u_\epsilon)_\epsilon$  that converges strongly to  $u$  in  $C^0(0, T; L^2(\Omega))$ . Finally, as  $f$  is continuous, we take limits in (??) to obtain for all  $\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  :

$$\int_{\Omega} \partial_t u \varphi \, dx \, dt + \mu \int_{\Omega} \nabla \partial_t u \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt + \int_{\Omega} f(u) \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt = \int_{\Omega} g \varphi \, dx \, dt, \quad (5.34)$$

and  $u$  is the weak solution of system (??).



# Bibliographie

- Adimurthi, Mishra, S., and Gowda, G. V. (2005). Optimal entropy solutions for conservation laws with discontinuous flux-functions. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 2(04) :783–837.
- Alinhac, S. and Gérard, P. (2012). *Opérateurs pseudo-différentiels et théoreme de Nash-Moser*. EDP Sciences.
- Altevogt, A. S., Rolston, D. E., and Whitaker, S. (2003a). New equations for binary gas transport in porous media : Part 1 : equation development. *Advances in water resources*, 26(7) :695–715.
- Altevogt, A. S., Rolston, D. E., and Whitaker, S. (2003b). New equations for binary gas transport in porous media, part 2 : experimental validation. *Advances in water resources*, 26(7) :717–723.
- Amiri, A. and Vafai, K. (1994). Analysis of dispersion effects and non-thermal equilibrium, non-darcian, variable porosity incompressible flow through porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 37(6) :939–954.
- Andreianov, B., Karlsen, K. H., and Risebro, N. H. (2011). A theory of  $l_1$ -dissipative solvers for scalar conservation laws with discontinuous flux. *Archive for rational mechanics and analysis*, 201(1) :27–86.
- Angirasa, D. (2002). Forced convective heat transfer in metallic fibrous materials. *Transactions-American society of mechanical engineers journal of heat transfer*, 124(4) :739–745.
- Angot, P., Dolejší, V., Feistauer, M., and Felcman, J. (1998). Analysis of a combined barycentric finite volume—nonconforming finite element method for nonlinear convection-diffusion problems. *Applications of Mathematics*, 43(4) :263–310.

- Antonceev, S. and Monahov, V. (1978). Three-dimensional problems of time dependant two-phase filtration in nonhomogeneous anisotropic porous media. In *Soviet Math. Dokl*, volume 19.
- Auriault, J.-L., Geindreau, C., and Boutin, C. (2005). Filtration law in porous media with poor separation of scales. *Transport in porous media*, 60(1) :89–108.
- Aziz, K. and Settari, A. (1979). Petroleum reservoir simulation. *Applied Science Publ. Ltd., London, UK*.
- Bear, J. (2013). *Dynamics of fluids in porous media*. Courier Corporation.
- Bear, J. and Bachmat, Y. (2012). *Introduction to modeling of transport phenomena in porous media*, volume 4. Springer Science & Business Media.
- Bendahmane, M., Khalil, Z., and Saad, M. (2014). Convergence of a finite volume scheme for gas–water flow in a multi-dimensional porous medium. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 24(01) :145–185.
- Brenner, K., Cances, C., and Hilhorst, D. (2013). Finite volume approximation for an immiscible two-phase flow in porous media with discontinuous capillary pressure. *Computational Geosciences*, 17(3) :573–597.
- Brenner, S. and Scott, R. (2007). *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15. Springer Science & Business Media.
- Brezis, H. (1983). Functional analysis. theory and applications, collection of applied mathematics for the master’s degree.
- Brezis, H. (2010). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media.
- Brinkman, H. (1949a). A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Applied Scientific Research*, 1(1) :27–34.
- Brinkman, H. (1949b). On the permeability of media consisting of closely packed porous particles. *Applied Scientific Research*, 1(1) :81–86.
- Brooks, R. H. and Corey, A. T. (1964). Hydraulic properties of porous media and their relation to drainage design. *Transactions of the ASAE*, 7(1) :26–0028.

- Calmidi, V. and Mahajan, R. (2000). Forced convection in high porosity metal foams. *Transactions-American society of mechanical engineers journal of heat transfer*, 122(3) :557–565.
- Chavent, G. and Jaffré, J. (1986). *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation : single phase, multiphase and multicomponent flows through porous media*, volume 17. Elsevier.
- Chen, Z., Ewing, R., and Espedal, M. (1994). Multiphase flow simulation with various boundary conditions. *Computational Methods in Water Resources*, pages 925–932.
- Ciarlet, P. G. (1991). Basic error estimates for elliptic problems. *Handbook of numerical analysis*, 2 :17–351.
- Coclite, G., Mishra, S., and Risebro, N. (2010). Convergence of an engquist-osher scheme for a multi-dimensional triangular system of conservation laws. *Mathematics of Computation*, 79(269) :71–94.
- Coclite, G., Mishra, S., Risebro, N., and Weber, F. (2014). Analysis and numerical approximation of Brinkman regularization of two-phase flows in porous media. *Computational Geosciences*, 18(5) :637–659.
- Coclite, G. M. and Risebro, N. H. (2005). Conservation laws with time dependent discontinuous coefficients. *SIAM journal on mathematical analysis*, 36(4) :1293–1309.
- Coudière, Y., Saad, M., and Uzureau, A. (2013). Analysis of a finite volume method for a bone growth system in vivo. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(9) :1581–1594.
- Demond, A. H. and Roberts, P. V. (1987). An examination of relative permeability relations for two-phase flow in porous media. *JAWRA Journal of the American Water Resources Association*, 23(4) :617–628.
- Dukhan, N. (2012). Analysis of brinkman-extended darcy flow in porous media and experimental verification using metal foam. *Journal of fluids engineering*, 134(7) :071201.

- 
- Durlafsky, L. and Brady, J. (1987). Analysis of the brinkman equation as a model for flow in porous media. *The Physics of fluids*, 30(11) :3329–3341.
- Eymard, R., Gallouët, T., and Herbin, R. (2000). Finite volume methods. *Handbook of numerical analysis*, 7 :713–1018.
- Eymard, R., Herbin, R., and Michel, A. (2003). Mathematical study of a petroleum-engineering scheme. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(06) :937–972.
- Eymard, R., Hilhorst, D., and Vohralík, M. (2006). A combined finite volume–nonconforming/mixed-hybrid finite element scheme for degenerate parabolic problems. *Numerische Mathematik*, 105(1) :73–131.
- Ferrandon, J. (1948). Les lois de l’écoulement de filtration. *Le Génie*, 155(125) :2.
- Gerke, H. and Genuchten, M. V. (1993). A dual-porosity model for simulating the preferential movement of water and solutes in structured porous media. *Water resources research*, 29(2) :305–319.
- Gimse, T. and Risebro, N. H. (1992). Solution of the cauchy problem for a conservation law with a discontinuous flux function. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(3) :635–648.
- Hannukainen, A., Juntunen, M., and Stenberg, R. (2011). Computations with finite element methods for the Brinkman problem. *Computational Geosciences*, 15(1) :155–166.
- Helmig, R. et al. (1997). *Multiphase flow and transport processes in the subsurface : a contribution to the modeling of hydrosystems*. Springer-Verlag.
- Ibrahim, M. (2014). Systèmes paraboliques dégénérés intervenant en mécanique des fluides et en médecine : analyse mathématique et numérique.
- Israwi, S. (2011). Large time existence for 1d green-naghdi equations. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 74(1) :81–93.
- Karlsen, K. H., Risebro, N. H., and Towers, J. D. (2003).  $L^1$  stability for entropy solutions of nonlinear degenerate parabolic convection-diffusion equations with discontinuous coefficients. *Preprint series. Pure mathematics <http://urn.nb.no/URN:NBN:no-8076>*.

- Kato, T. and Ponce, G. (1988). Commutator estimates and the euler and navier-stokes equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41(7) :891–907.
- Krotkiewski, M., Ligaarden, I. S., Lie, K.-A., and Schmid, D. W. (2011). On the importance of the stokes-brinkman equations for computing effective permeability in karst reservoirs. *Communications in Computational Physics*, 10(05) :1315–1332.
- Ladyzhenskaia, O. A., Solonnikov, V. A., and Uraltseva, N. N. (1988). *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, volume 23. American Mathematical Soc.
- Lage, J. (1998). The fundamental theory of flow through permeable media from darcy to turbulence. *Transport phenomena in porous media*, 1.
- Lannes, D. (2006). Sharp estimates for pseudo-differential operators with symbols of limited smoothness and commutators. *Journal of Functional Analysis*, 232(2) :495–539.
- Lions, J. L. and Magenes, E. (2012). *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, volume 1. Springer Science & Business Media.
- Liu, S. and Masliyah, J. H. (2005). Dispersion in porous media. *Handbook of porous media*, page 110.
- Luckner, L., Van Genuchten, M. T., and Nielsen, D. (1989). A consistent set of parametric models for the two-phase flow of immiscible fluids in the subsurface. *Water Resources Research*, 25(10) :2187–2193.
- Lundgren, T. S. (1972). Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres. *Journal of Fluid Mechanics*, 51(02) :273–299.
- Martys, N., Bentz, D. P., and Garboczi, E. J. (1994). Computer simulation study of the effective viscosity in brinkman’s equation. *Physics of Fluids*, 6(4) :1434–1439.
- Marušić-Paloka, E., Pažanin, I., and Marušić, S. (2012). Comparison between darcy and brinkman laws in a fracture. *Applied mathematics and computation*, 218(14) :7538–7545.



- 
- [] Matheron, G. (1967). Eléments pour une théorie des milieux poreux.
- [] Misiats, O. and Lipnikov, K. (2013). Second-order accurate monotone finite volume scheme for Richard’s equation. *Journal of Computational Physics*, 239 :123–137.
- [] Mualem, Y. (1976). A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water resources research*, 12(3) :513–522.
- [] Musy, A. and Soutter, M. (1991). *Physique du sol*, volume 6. PPUR presses polytechniques.
- [] Ochoa-Tapia, J. A. and Whitaker, S. (1995). Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid—i. theoretical development. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(14) :2635–2646.
- [] Renken, K. and Poulikakos, D. (1987). Forced convection in channel filled with porous medium, including the effects of flow inertia, variable porosity, and brinkman friction. *ASME Journal of Heat transfer*, 109 :880–888.
- [] Risebro, N. and Holden, H. (2002). Front tracking for hyperbolic conservation laws. *Applied Mathematical Sciences*, 152.
- [] Rubinstein, J. (1986). Effective equations for flow in random porous media with a large number of scales. *Journal of Fluid Mechanics*, 170 :379–383.
- [] Saad, B. and Saad, M. (2015). A combined finite volume–nonconforming finite element scheme for compressible two phase flow in porous media. *Numerische Mathematik*, 129(4) :691–722.
- [] Saez, A., Perfetti, J., and Rusinek, I. (1991). Prediction of effective diffusivities in porous media using spatially periodic models. *Transport in Porous Media*, 6(2) :143–157.
- [] Salinger, A. G., Aris, R., and Derby, J. J. (1994). Finite element formulations for large-scale, coupled flows in adjacent porous and open fluid domains. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18(12) :1185–1209.
- [] Simon, J. (1986). Compact sets in the space  $L^p(o, t; b)$ . *Annali di Matematica pura ed applicata*, 146(1) :65–96.

- Taylor, M. (2013). *Partial differential equations II : Qualitative studies of linear equations*, volume 116. Springer Science & Business Media.
- Vohralík, M. (2005). On the discrete poincaré–friedrichs inequalities for nonconforming approximations of the sobolev space  $h^1$ . *Numerical functional analysis and optimization*, 26(7-8) :925–952.





# Thèse de Doctorat

Houssein NASSER EL DINE

Étude mathématique et numérique pour le modèle Darcy-Brinkman pour les écoulements diphasiques en milieu poreux

Mathematical and numerical study of Darcy-Brinkman's two phase flow through a porous media

## Résumé

Le système modélisant un écoulement de deux phases incompressibles dans un gisement pétrolier à large porosité est régi par la loi de Darcy-Brinkman. La vitesse de filtration de Darcy conduit à une équation elliptique en pression et une équation parabolique dégénérée en saturation. Ce système est très largement utilisé en milieu poreux. Dans cette thèse, on s'intéresse à la modification de Brinkman qui consiste à modifier la loi de Darcy en ajoutant un terme de dissipation en vitesse. Ce système conduit à une équation elliptique en pression et une équation parabolique non standard en saturation, régularisante en temps. On s'intéresse dans un premier temps à l'étude mathématique du système Darcy-Brinkman et à la régularité des solutions. Afin de simuler numériquement les solutions de ce problème, on propose une première étude de convergence d'un schéma aux volumes finis sur un maillage admissible et pour un milieu poreux homogène. Ensuite, une méthode combinée de type volumes finis-éléments finis non conformes est proposée pour tenir compte de l'anisotropie du milieu. Le but du deuxième volet de cette thèse est de tenir compte de la compressibilité des fluides. On propose de décrire le modèle de Darcy-Brinkman dans le cas monophasique compressible. On montre que ce modèle est bien posé en dimension un d'espace et sur l'espace entier. Ensuite, sous l'hypothèse de Bear, on montre également que le modèle est bien posé en dimension  $d \geq 2$ .

## Mots clés

Darcy, Brinkman, milieux poreux, incompressible, compressible, immiscible, isotrope, anisotrope, volumes finis, éléments finis, schéma combiné, systèmes paraboliques dégénérés, systèmes elliptiques, systèmes dégénérés, systèmes couplés non linéaire.

## Abstract

The system modeling a two incompressible phase flow with high porosity in an oil-field is governed by the law of Darcy-Brinkman. The velocity of filtration of Darcy leads to an elliptic equation in pressure and a degenerate parabolic equation in saturation. This system is widely used in porous media. In this thesis, we are interested in the modification of Brinkman which consists in modifying Darcy's law by adding a viscosity dissipative term. This system leads to an elliptic equation in pressure and unstandard parabolic equation in saturation regularized in time. First, we are interested in the mathematical study of the Darcy-Brinkman's system and in the regularity of the solutions. To simulate numerically the solutions of this problem, we study the convergence of a finite-volume scheme on an admissible mesh for a homogeneous porous media. Then, we propose a combined method of finite volume - nonconforming finite element type to deal with the compressibility of the fluids. We suggest a model of Darcy-Brinkman to describe the compressible monophasic case. We show that this model is well posed in dimension one in the whole space. Then, under the hypothesis of Bear, we also show that this model is well posed in dimension  $d \geq 2$ .

## Key Words

Darcy, Brinkman, porous media, incompressible, compressible, immiscible, isotropic, anisotropic, finite volume, finite element, combined scheme, degenerate parabolic systems, elliptic systems, degenerate systems, nonlinear coupled systems.

