



HAL
open science

Problème inverse de sources en Electro-Encéphalo-Graphie chez le nouveau-né

Mohamadou Malal Diallo

► **To cite this version:**

Mohamadou Malal Diallo. Problème inverse de sources en Electro-Encéphalo-Graphie chez le nouveau-né. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Picardie Jules Verne, 2017. Français. NNT : 2017AMIE0022 . tel-01620271v2

HAL Id: tel-01620271

<https://hal.science/tel-01620271v2>

Submitted on 25 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Doctorale de Sciences Technologie et Santé (ED 585)
Université de Picardie Jules Verne

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

Mohamadou Malal DIALLO

Problème inverse de sources en Electro-Encéphalo-Graphie chez le nouveau-né

Soutenue le 29 juin 2017 devant le jury composé de :

M. Ainsebi BEDR'EDDINE	Université de Bordeaux	examineur
M. Marc BONNET	Ecole Polytechnique Palaiseau	rapporteur
M ^{me} Marion DARBAS	Université Picardie Jules Verne	directrice
M. Abdellatif EL BADIA	UTC	directeur
M. Olivier GOUBET	Université Picardie Jules Verne	examineur
M ^{me} Stephanie LOHRENGEL	Université de Reims	directrice
M. Faouzi TRIKI	Université Grenoble Alpes	rapporteur
M. Fabrice WALLOIS	Université Picardie Jules Verne	examineur

Remerciements

J'exprime tout d'abord ma gratitude à mes directeurs de thèse Mme Marion DARBAS, M. Abdellatif EL BADIA et Mme Stéphanie LOHRENGEL pour leur aide, leur patience et leurs conseils durant ces années de thèse.

Je tiens à remercier M. Marc BONNET et M. Faouzi TRIKI d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

J'adresse mes remerciements à M. Ainsebi BEDR'EDDINE, M. Olivier GOUBET et M. Fabrice Wallois pour leur participation à mon jury de thèse en tant qu'examineurs.

Je remercie également tous les membres du LAMFA notamment Christelle Calimez, Isabelle Wallet et Laurent Renault pour leur disponibilité et leur aide.

Je remercie Audrey Lecompte, Virginie Lefevre et Virginie Pecourt pour leurs aides administratives.

Je remercie tous les doctorants du LAMFA, particulièrement à Pierre, Aktham, Emna, Anne-sophie, Lucie, Alexandre, Georges, Ruxi et Sylvain, pour tous les moments de convivialité et de partage que nous avons passés ensemble.

Je tiens aussi à remercier toute ma famille et mes amis pour leur soutien durant toutes ces années.

Résumé

Résumé

On s'intéresse à la localisation des sources normales et pathologiques de l'activité cérébrale électrique chez le nouveau-né et l'enfant prématuré à partir de mesures en Electro-Encéphalo-Graphie (EEG). La spécificité chez le nouveau-né est la présence, dans la couche du crâne, des fontanelles qui ont des propriétés électriques différentes de celles de l'os. Du point de vue mathématique, le problème direct en EEG consiste à calculer le potentiel électrique sur le scalp connaissant la géométrie de la tête, les conductivités de différents tissus de la tête et les caractéristiques des sources de courant localisées à l'intérieur du cerveau. Le problème inverse de sources en EEG vise à identifier les caractéristiques des sources de courant à partir de mesures du potentiel électrique enregistrées sur le scalp. Nous proposons dans cette thèse un modèle mathématique du problème direct chez le nouveau-né capable de prendre en compte la présence et l'ossification des fontanelles. L'analyse théorique et numérique des problèmes direct et inverse sont traitées et une discussion sur l'impact des fontanelles est effectuée. En outre, une étude de la sensibilité des mesures du potentiel par rapport à la variation de la conductivité est réalisée.

Mots-clefs

Electro-encéphalo-graphie (EEG), problème direct, problème inverse, analyse de sources, méthode éléments finis, nouveau-né, modèle réaliste de tête.

Electroencephalography inverse source problem in neonates

Abstract

We investigate the localization of the normal and pathological sources of electric cerebral activity in neonates from measures in Electro-Encephalo-Graphy (EEG). The specificity for neonates is the presence of fontanels in the skull. Mathematically, the forward EEG problem consists in computing the electric potential on the scalp for given electrical sources located in the brain and different head tissues' conductivities. The inverse EEG source problem is identifying the characteristics of current sources from the knowledge of the measured potentials on the scalp. We propose in this thesis a mathematical

model for the forward EEG problem in neonates able to take into account the presence and ossification process of fontanelles. We perform the theoretical and numerical analysis for the forward and inverse problems and discuss the impact of fontanelles. We perform a sensitivity analysis of the model with respect to variations of the conductivity.

Keywords

Electroencephalography (EEG), inverse problem, forward problem, source analysis, finite element method, realistic head model, neonates.

Table des matières

Introduction	9
1 Contexte clinique et aspects de modélisation	13
1.1 Contexte	13
1.2 Aspect physiologique du cerveau	14
1.3 Modèle EEG direct chez le nouveau-né	20
1.4 Modèles considérés	26
2 Problème direct en EEG	27
2.1 Mise en équations	27
2.2 Formulation variationnelle du problème direct	28
2.3 Discrétisation par éléments finis	35
2.4 Résolution numérique dans le cas du modèle sphérique	46
2.5 Simulations numériques pour un modèle réaliste	52
2.6 Analyse de l'impact des fontanelles sur les mesures EEG	54
3 Analyse de la sensibilité du potentiel électrique	67
3.1 Introduction et notations	67
3.2 Différentiabilité au sens de Gâteaux du potentiel électrique	68
3.3 Analyse numérique de la sensibilité	72
4 Problème inverse de sources en EEG	81
4.1 Introduction	81
4.2 Position du problème	82
4.3 Identifiabilité	83
4.4 Quelques propriétés de l'opérateur d'observation Λ	85
4.5 Stabilité	92
4.6 Méthodes de reconstruction	95
5 Résolution numérique du problème inverse	105
5.1 Algorithmes numériques	105
5.2 Résultats numériques	106
5.3 Modèle sphérique	107
5.4 Modèle réaliste	121
Conclusion générale	125
A Calcul du gradient par la méthode de sensibilité	127
Table des figures	131

Liste des tableaux	135
Bibliographie	137

Introduction

La compréhension du fonctionnement de l'activité cérébrale est un enjeu important de recherche dans plusieurs domaines en neurosciences comme la psychologie ou la neurophysiologie. Un exemple de recherche en neurophysiologie est de mieux comprendre et de traiter les maladies neurologiques comme l'épilepsie. Durant plusieurs années, les recherches sur le cerveau s'appuyaient sur des expériences comportementales et des études sur les lésions cérébrales chez l'animal. Aujourd'hui, les techniques d'imagerie cérébrale sont devenues très développées et permettent d'étudier l'activité cérébrale humaine de manière quasi-invasive. Ces techniques d'imagerie sont séparées en deux catégories : l'imagerie structurelle ou anatomique et l'imagerie fonctionnelle. L'imagerie structurelle génère des images anatomiques du cerveau et les techniques utilisées sont par exemple l'imagerie par résonance magnétique (IRM) ou le scanner par tomographie. L'imagerie fonctionnelle quant à elle étudie le cerveau en action et les technologies fréquemment utilisées sont l'électroencéphalographie (EEG) ou la magnétoencéphalographie (MEG). Grâce à sa haute résolution et son faible coût, l'électroencéphalographie (EEG) est la méthode la plus utilisée en neuroscience cognitive et pour le diagnostic de l'épilepsie.

Pour reconstruire les sources de l'activité cérébrale ayant généré les mesures du signal par EEG, il faut résoudre un problème inverse de sources en EEG. La résolution de ce problème inverse requiert une bonne modélisation du champ électrique généré par les sources à l'intérieur du cerveau : ce problème est appelé problème direct en EEG.

Le modèle mis en jeu est celui de l'approximation quasi-statique des équations de Maxwell qui conduit à une équation elliptique de sources. Le problème inverse revient alors à reconstruire ces sources à partir des mesures du potentiel qu'elles auraient générées.

La localisation de l'activité cérébrale électrique chez l'adulte a fait l'objet de nombreux travaux de recherches ces dernières années. Nous pouvons citer notamment dans ce cadre les travaux de El Badia et Farah [15, 16, 17], Wolters et al. [7, 40, 62, 63, 65, 66, 67] et Vallaghé et al [59].

Le travail de cette thèse s'inscrit dans le cadre de la localisation de l'activité cérébrale électrique chez le nouveau-né. La différence avec les travaux déjà existants chez l'adulte cités précédemment est la présence des fontanelles dans le crâne du nouveau-né. Plus précisément, l'objectif de cette thèse est d'étudier l'impact des fontanelles sur la localisation des sources de l'activité cérébrale pathologique chez le nouveau-né, notamment dans le cas de sources épileptogènes par Électro-Encéphalo-Graphie (EEG). Les fontanelles sont des espaces membraneux en cours d'ossification, qui séparent les différentes parties du crâne du nouveau-né. Ce travail s'est effectué dans le cadre du projet MIFAC (Mesure de l'Impact des Fontanelles sur l'Activité Cérébrale) financé par la région de Picardie, en collaboration avec le laboratoire GRAMFC du CHU d'Amiens. Les attentes exprimées par les cliniciens du projet étaient de savoir si les fontanelles ont un impact sur les mesures du potentiel électrique par EEG et si oui quelle est leur influence sur la localisation des sources de l'activité cérébrale.

Le manuscrit est organisé comme suit.

Dans le premier chapitre, nous décrivons brièvement le contexte de ces travaux. Ensuite, nous exposons l'aspect physiologique du problème en décrivant le mécanisme bioélectrique de base de l'activité électrique du cerveau et en exposant les principales techniques de mesure de l'activité électromagnétique cérébrale. Nous rappelons les équations du problème découlant de l'approximation quasi-statique des équations de Maxwell et nous décrivons les différents modèles de sources de courant et de modèles de tête. Et enfin, les différentes méthodes de résolution numérique sont présentées et une description des modèles considérés dans ce travail est donnée.

Dans le second chapitre, nous présentons le problème direct en EEG et nous donnons sa formulation variationnelle. Une discrétisation par éléments finis est présentée et des résultats de convergence sont établis. Ensuite, une description des maillages utilisés est présentée ainsi que les méthodes pour l'implémentation numérique du problème direct. Une validation de la méthode avec une solution analytique est proposée pour le modèle sphérique. Et enfin, nous présentons des résultats numériques sur le modèle réaliste de la tête d'un nouveau-né pour analyser l'impact des fontanelles sur le problème direct. Ce chapitre est adapté de l'article soumis au journal *Applicable analysis* et a été présenté à la conférence IPMS 2016 et au CANUM 2016.

Dans le chapitre 3, nous introduisons un outil mathématique pour analyser la sensibilité des mesures par rapport à une faible variation de la conductivité. La sensibilité est donnée par la dérivée directionnelle au sens de Gâteaux du potentiel. Une preuve de la différentiabilité du potentiel électrique au sens de Gâteaux ainsi que sa dérivée sont données. À la fin du chapitre, nous présentons quelques simulations numériques de la sensibilité par rapport à une faible variation des conductivités des fontanelles et l'os dans le cas du modèle réaliste de tête. Ce chapitre est également adapté de l'article soumis au journal *Applicable Analysis* et présenté à la conférence international IPMS 2016 et au congrès CANUM 2016.

Le chapitre 4 est consacrée à l'étude théorique du problème inverse de sources en EEG. Nous montrons un résultat d'identifiabilité et un résultat de stabilité pour le modèle dipolaire de sources. Ensuite, nous introduisons deux méthodes d'identification qui sont la méthode de Kohn-Vogelius (KV) et la méthode classique des moindres carrés (MC). Nous définissons les fonctionnelles coût associées et nous démontrons que, pour des données compatibles, le problème de minimisation admet un unique minimum qui est la solution du problème inverse. Puis, nous calculons le gradient de ces fonctionnelles coût par la méthode de l'état adjoint. À la fin du chapitre nous donnons une revue bibliographique sur les méthodes d'identification utilisées pour la résolution du problème inverse en EEG. Ce chapitre fait l'objet d'un article en cours de finalisation et a été présenté au congrès SMAI 2017.

Dans le chapitre 5, nous procédons à la résolution numérique du problème inverse. Nous décrivons la méthode de quasi-Newton BFGS pour la résolution du problème de minimisation. Nous présentons ensuite des expériences numériques sur des modèles sphérique et réaliste de la tête. Nous étudions le comportement des méthodes en fonction de l'excentricité (distance par rapport à la surface du cerveau) et la séparabilité (distance entre

deux dipôles) des sources dans le cerveau. La sensibilité des méthodes par rapport à la perturbation et au manque de données est également étudiée. Nous étudions enfin l'impact de l'exclusion des fontanelles dans le modèle inverse.

Chapitre 1

Contexte clinique et aspects de modélisation

1.1 Contexte

L'objet de ces travaux est d'étudier l'activité électrique cérébrale chez le nouveau-né, notamment en vue du traitement de l'épilepsie. L'approche biologique ou expérimentation *in vivo* est très pratiquée sur les animaux. Cependant, cette technique est difficile et le plus souvent impossible à réaliser sur le cerveau humain. Ces dernières années, les spécialistes en neurophysiologie se tournent vers la modélisation mathématique et le calcul scientifique pour une meilleure compréhension du fonctionnement du cerveau humain.

L'électroencéphalographie (EEG) est une technique non invasive d'imagerie fonctionnelle du cerveau. L'EEG mesure l'activité électrique du cerveau enregistrée par des électrodes placées sur le scalp. Les mesures fournissent des informations importantes sur les sources à l'origine de l'activité pathologique du cerveau. En particulier, l'EEG est l'une des principales méthodes de diagnostic de l'épilepsie.

L'épilepsie est une maladie neurologique chronique provoquée par des dysfonctionnements de l'activité électrique du cerveau. Elle est la maladie neurologique la plus fréquente après la migraine. Elle touche environ 50 millions de personnes dans le monde. En France, on estime à environ 430 000 personnes touchées dont 33 000 nouveaux cas chaque année. L'épilepsie touche plus fréquemment les enfants et les jeunes de moins de 18 ans. Elle se manifeste par des crises tout au long de la vie.

Dans le cas de l'adulte, les os du crâne sont complètement soudés. Ceci n'est pas le cas chez le nouveau-né avec la présence des fontanelles (voir Figure 1.1). Les fontanelles sont des espaces membraneux séparant les différents os du crâne du nouveau-né. Les fontanelles sont en cours d'ossification et possèdent des propriétés électriques différentes de celles des os du crâne. On distingue deux types de fontanelles :

- La fontanelle antérieure (ou grande fontanelle) est celle qui se trouve au-dessus du crâne entre l'os frontal et les os pariétaux. Elle possède une forme de losange de trois à quatre centimètres de large. Sa fermeture a lieu entre un an et demi et trois ans.
- La fontanelle postérieure (ou petite fontanelle) est celle qui est située entre les os pariétaux et l'os occipital. Elle possède une forme triangulaire de 0,5 cm de large. Sa fermeture est observée à partir du deuxième mois.

Les fontanelles jouent un rôle important dans le développement du cerveau des nouveau-nés. Elles donnent notamment au crâne la flexibilité nécessaire pour faciliter l'accouchement. Cette flexibilité permet au cerveau et au crâne de se développer au même rythme.

L'objectif de la thèse est d'analyser d'une part l'impact de la présence des fontanelles sur les mesures EEG et d'autre part son influence sur la localisation des sources de ces mesures. Plus précisément, il s'agit de savoir s'il est important de les prendre en compte dans le modèle direct et le développement d'algorithmes d'inversion des mesures EEG pour la localisation des sources.



FIGURE 1.1 – Fontanelles

1.2 Aspect physiologique du cerveau

Le cerveau humain est une structure très organisée et complexe. Il est le centre du système nerveux et est constitué de milliards de cellules nerveuses communiquant entre elles par des signaux bioélectriques, appelés influx nerveux (ou potentiel d'action). Le cerveau (ou encéphale) est une masse gélatineuse gris-rose. Il est contenu et protégé par la boîte crânienne. Il pèse environ 330g et baigne dans un liquide nourricier et protecteur appelé liquide céphalo-rachidien (LRC). Il est constitué par une partie superficielle appelé cortex (ou substance grise) et une partie plus profonde appelée substance blanche (ou matière blanche) dont la couleur blanche est due à la présence de myéline. Les cellules nerveuses à l'intérieur du cerveau sont appelées neurones.

1.2.1 Le neurone

Nous décrivons brièvement le mécanisme bioélectrique de base de l'activité électrique du cerveau qui est due au mouvement d'ions entre les neurones [19, 17, 59, 1]. Le neurone est composé de trois parties (Figure 1.2) que sont le soma ou corps cellulaire, les dendrites et un axone. Le soma contient le noyau cellulaire et permet de traiter les signaux provenant des dendrites. Il génère en réponse un *potentiel d'action* qui est transmis le long des axones vers les autres neurones. Les dendrites sont des prolongements courts et arborescents rattachés au soma. Leur rôle est de recevoir les signaux des autres neurones et de les transmettre au soma. Le signal transmis le long des dendrites est appelé *potentiel post-synaptique*. L'axone est un prolongement unique du soma et sa fonction est de transmettre les signaux électrique et chimique aux autres neurones qui l'entourent grâce à des connexions appelées *synapses*. Chaque neurone compte environ une dizaine de milliers de connexions synaptiques avec d'autres neurones.

Le processus de transmission des signaux entre les neurones est basé sur des montées et chutes du potentiel électrique aux membranes cellulaires, établi par la diffusion d'ions. Ces différences de potentiel électrique créent des courants ioniques intra-cellulaires et extra-

cellulaires qui représentent respectivement les courants entrant et sortant des neurones. Un neurone au repos a une différence de potentiel de l'ordre de -70mV . Ce potentiel est dû à une répartition inégale des ions sodium (Na^+) et potassium (K^+) de part et d'autre de la cellule ; il y a davantage de charges négatives à l'intérieur qu'à l'extérieur et plus de charges positives à l'extérieur.

La transmission du signal commence par l'apparition d'un *potentiel post-synaptique*. Cette transmission se fait via un processus biochimique au niveau des synapses par l'intermédiaire de substances chimiques appelées neurotransmetteurs (ou neuromédiateurs) sécrétés par le terminal présynaptique (Figure 1.3). Lorsque les neurotransmetteurs touchent la partie postsynaptique de l'autre neurone, la perméabilité de la membrane est affectée et certains ions (Na^+ et K^+) pénètrent à l'intérieur augmentant ainsi le potentiel au repos d'une dizaine de mV. Le *potentiel post-synaptique* dure en moyenne une dizaine de millisecondes.

Lorsque plusieurs *potentiels post-synaptiques* s'accumulent, le potentiel de la membrane du soma atteint localement un seuil et une phase de dépolarisation transitoire et locale de l'état de repos est déclenchée, puis un potentiel appelé *potentiel d'action* est généré. Les canaux ioniques sont alors ouverts et laissent passer les ions Na^+ à l'intérieur de la cellule. Ceci polarise davantage le neurone jusqu'à un seuil. Puis, la cellule se repolarise avec la fermeture des canaux ioniques. L'influx nerveux se propage ainsi tout au long de l'axone et vient exciter d'autres neurones par l'intermédiaire des synapses. La durée de ce phénomène est environ de la milliseconde.

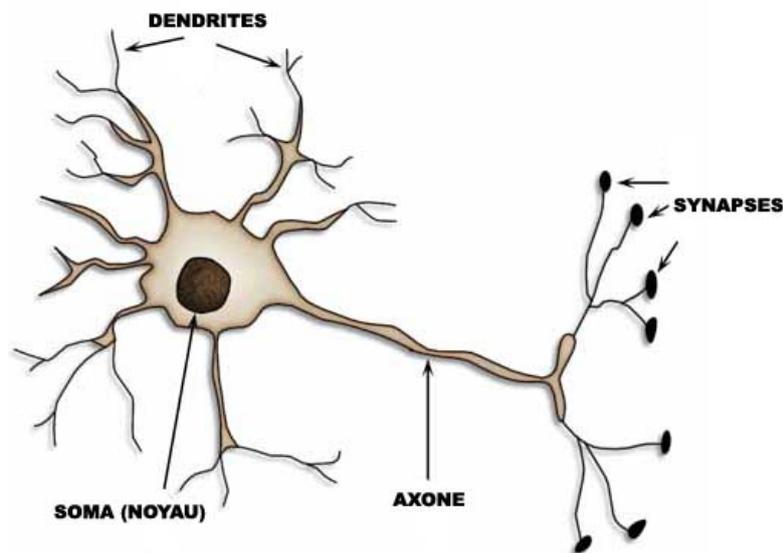


FIGURE 1.2 – Neurone (source : tpe-neurotechnologies.e-monsite.com)

Le *potentiel post-synaptique* peut être représenté comme un dipôle de courant qui varie proportionnellement à l'inverse du carré de la distance entre la source et le point d'observation. Par ailleurs, il faut la synchronisation d'environ 10^6 neurones concentrés dans quelques millimètres cubes du cortex pour générer des champs électromagnétiques mesurables à distance. L'amplitude du moment du dipôle résultant de la synchronisation est d'environ $10\text{nA}\cdot\text{m}^{-2}$ tandis que le *potentiel d'action* est modélisé par un quadripôle qui décroît proportionnellement à l'inverse du cube de la distance. Il est dû à la succession des

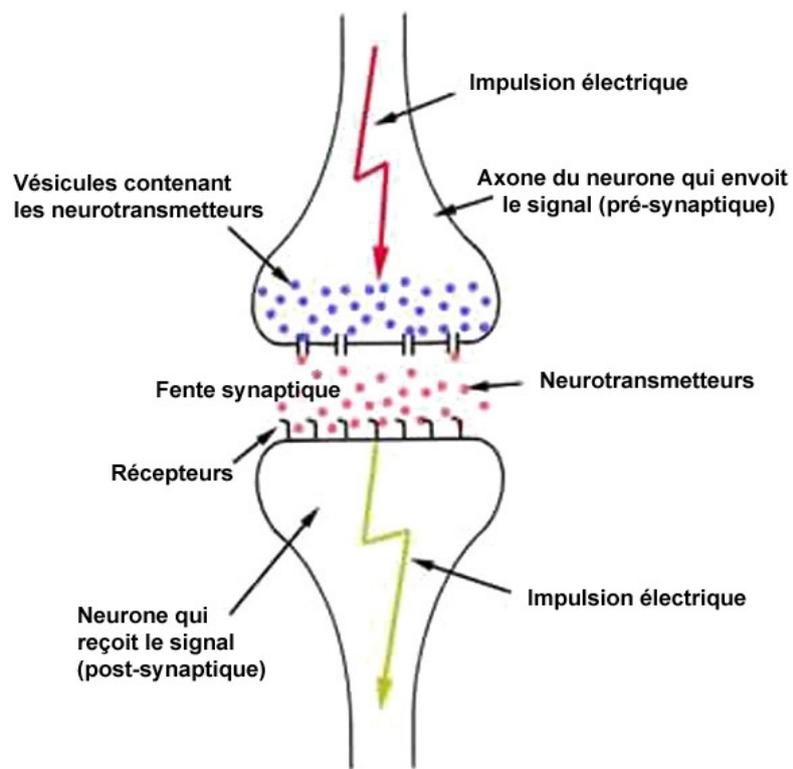


FIGURE 1.3 – Synapse (source : web.expasy.org)

phénomènes de dépolarisation et de repolarisation dans le potentiel d'action qui peuvent être représentés comme deux dipôles opposés dont les actions s'annulent. Les effets du potentiel d'action sont en effet négligeables par rapport au potentiel post-synaptique lors des mesures sur le scalp. En outre, la synchronisation des potentiels post-synaptiques a plus de chance d'avoir lieu que celle des potentiels d'action. Ceci est dû à la durée du potentiel post-synaptique ($10ms$) qui est plus longue que celle du potentiel d'action ($1ms$). En effet, les champs électromagnétiques générés lors de l'émission du potentiel d'action ont tendance à s'annuler les uns après les autres ; ce qui rend leur synchronisation peu probable. Ainsi, les principales méthodes de mesures de l'activité électromagnétique du cerveau (EEG et MEG) ne détectent que les champs créés par les potentiels post-synaptiques.

1.2.2 Techniques de mesure de l'activité cérébrale

Il existe différentes méthodes pour mesurer l'activité cérébrale et elles sont classées en deux grandes familles : l'imagerie structurale (ou anatomique) et l'imagerie fonctionnelle. La première méthode consiste à étudier l'anatomie du cerveau (par exemple identifier des lésions). Elle permet aussi de situer et d'identifier les différentes zones du cerveau. Parmi les méthodes d'imagerie structurale, nous pouvons citer l'imagerie par résonance magnétique (IRM) et le scanner par tomographie appelé aussi scanner CT (Computerized Tomography).

Imagerie par résonance magnétique (IRM) : L'IRM est une technique qui permet d'obtenir des images 2D et 3D de l'intérieur du cerveau. C'est une méthode d'imagerie récente et très sophistiquée. Elle repose sur la résonance magnétique nucléaire (RMN) qui est basée sur le moment magnétique des atomes. En effet, le corps humain est constitué majoritairement d'eau qui renferme un grand nombre d'atomes d'hydrogène. L'IRM est basée sur les propriétés magnétiques de ces atomes d'hydrogène. Le noyau de cet atome est composé d'un proton qui peut être assimilé à un petit aimant. En plaçant le sujet à l'intérieur d'un tunnel où règne un champ magnétique, les protons des noyaux d'hydrogène voient leurs moments s'aligner sur ce champ. Ensuite, une émission d'ondes radio (appelé champ excitateur) est ajoutée, ce qui va placer les moments magnétiques des noyaux d'hydrogène alignés dans un état dit de *résonance*. Le champ excitateur est brusquement interrompu et les atomes repassent à l'état d'équilibre en émettant des ondes qui sont recueillies par des antennes. L'analyse des ondes fournit ainsi des images anatomiques de la densité d'eau présente dans les tissus.

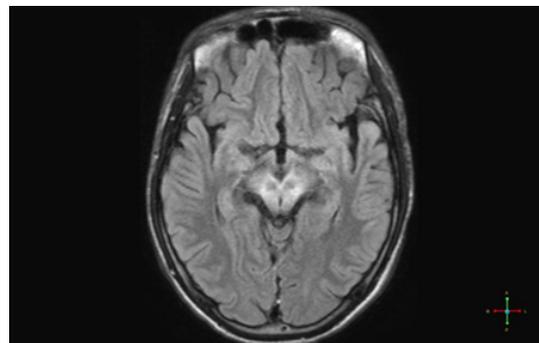


FIGURE 1.4 – Scanner IRM à gauche et image à droite

Scanner par tomographie (ou scanner CT) : Le scanner CT est une technique d'imagerie médicale qui utilise les rayons X couplée à un ordinateur. Il permet d'obtenir des images en tranches des différentes parties de la tête et de visualiser les tissus de densités différentes. Le principe du scanner CT est basé sur l'absorption du rayonnement par les différents tissus de la tête en fonction de leur composition. Lors d'une radiographie simple, le rayonnement traverse le sujet puis il est mesuré par un capteur numérique plat ; ce qui permettra d'obtenir une image 2D de l'intérieur du corps. En ce qui concerne le scanner CT, il y a plusieurs rangées de détecteurs situés en face du tube à rayons X. Ces détecteurs vont mesurer le rayonnement traversant le sujet, au fur et à mesure que le couple tube-détecteurs tourne. Les données obtenues sont ensuite traitées par un ordinateur, ce qui permet de reconstruire des vues en coupes 2D puis 3D de la tête.

Ces deux techniques d'imagerie structurelle permettent d'obtenir, après segmentation des



FIGURE 1.5 – Scanner CT à gauche et image à droite

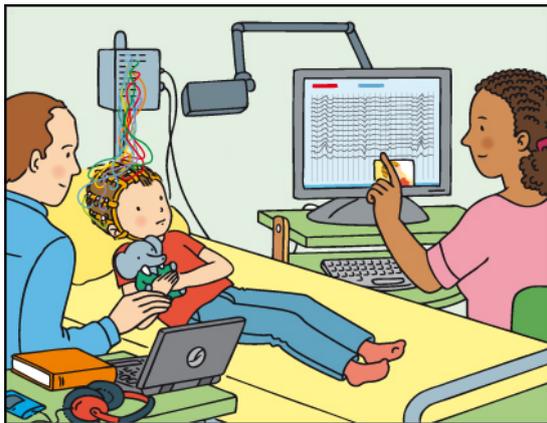
images, un modèle réaliste de la tête.

L'imagerie fonctionnelle consiste à étudier et à caractériser le cerveau en action. Elle mesure l'activité de certaines zones du cerveau lorsque l'on effectue des tâches. Elle est souvent utilisée pour comprendre et diagnostiquer les foyers épileptiques. Nous pouvons citer des méthodes d'imagerie fonctionnelle comme l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf), la tomographie par émission de positrons (TEP), l'électroencéphalographie (EEG) et la magnétoencéphalographie (MEG). L'IRMf repose sur les mêmes principes physiques que l'IRM dite anatomique mais elle permet d'imager la concentration d'oxygène dans le sang et ainsi les images obtenues permettent de localiser les zones actives du cerveau. La TEP consiste à injecter un traceur radioactif au sujet et ensuite utiliser un scanner pour détecter la distribution de ce traceur dans la tête. Les deux dernières méthodes citées mesurent directement les champs électromagnétiques issus de l'activité des neurones (décrite dans la partie 1.2.1).

Electroencéphalographie (EEG) : L'EEG est une méthode qui mesure l'activité électrique du cerveau sous forme d'un tracé. Le principe de la méthode consiste à mesurer les différences de potentiel électrique entre les électrodes disposées à la surface du scalp. Le nombre d'électrodes utilisées varie de 20 à 128, le plus souvent 64 et leurs dispositions répondent à des normes internationales. Les électrodes sont disposées dans un bonnet posé sur la tête du patient alors que dans le cas de l'épilepsie les électrodes sont collées directement sur le scalp. Le contact électrique est alors assuré par un gel conducteur. Dans le cas de l'épilepsie, on a recours à des enregistrements de longue durée et sur plusieurs jours. Chaque électrode relève une mesure du potentiel électrique qui sera ensuite amplifiée et enregistrée par un ordinateur. Puisque le potentiel électrique absolu ne peut être mesuré,

il est nécessaire de choisir une électrode de référence. Le plus souvent, une seule électrode est utilisée comme référence pour l'ensemble des autres. L'EEG a une excellente résolution temporelle de l'ordre de la milliseconde, mais une faible résolution spatiale ($> 5mm$). Néanmoins, l'EEG reste la méthode la plus utilisée pour diagnostiquer l'épilepsie. Le coût de l'EEG est moins élevé que la plupart des autres méthodes et elle est très répandue. Les mesures EEG sont fortement affectées par les tissus de la tête. Ceci se manifeste par une diffusion importante du potentiel électrique rendant ainsi l'interprétation des signaux difficile.

L'EEG est notamment beaucoup utilisée en neuroscience cognitive qui étudie l'activité spontanée du cerveau lorsque le sujet est soumis à un stimulus (image, stimulation tactile, etc) : c'est ce que l'on appelle les *potentiels évoqués*.



© SH - Association SPARADRAP

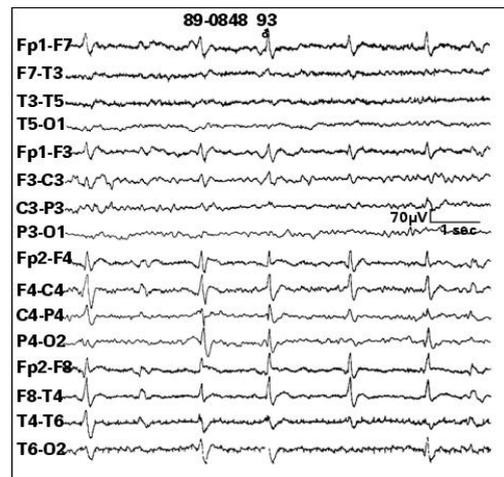


FIGURE 1.6 – Examen EEG (gauche) et exemple de tracé (droite)

Magnétoencéphalographie (MEG) : La MEG est une technique de mesure du champ magnétique induit par l'activité des neurones dans le cerveau. Le déplacement des ions lors de la propagation de l'influx nerveux génère un champ magnétique très faible à la surface de la tête de l'ordre de la centaine de femtoTeslas (10^{-13} Teslas) c'est-à-dire dix milliard de fois plus faible que le champ magnétique terrestre. La MEG utilise des capteurs de champ magnétique très sensibles à base de bobines réceptrices de flux couplées à des anneaux supraconducteurs appelés SQUIDS (Superconducting Quantum Interference Device) placés à proximité de la tête. Ces capteurs sont plongés dans un cryostat contenant de l'hélium liquide à $-270^{\circ}C$. Les champs magnétiques du cerveau étant très faibles, l'utilisation d'un blindage est nécessaire pour isoler les champs magnétiques externes. L'appareil de la MEG est donc placé dans une chambre blindée formée de parois en μ métal qui permet d'atténuer les champs magnétiques extérieur d'un facteur 10^3 à 10^4 . La MEG reste néanmoins une technique d'imagerie relativement coûteuse à cause du blindage de la chambre et de la technologie des supraconducteurs basse température. Contrairement à l'EEG, la MEG est peu affectée par les tissus cérébraux et peu sensible aux sources profondes.

Nous signalons que la plupart des techniques d'imagerie citées dans cette partie sont non invasives (IRM, IRMf, Scanner CT, EEG et MEG) exceptée la TEP qui requiert l'injection d'un traceur radioactif.

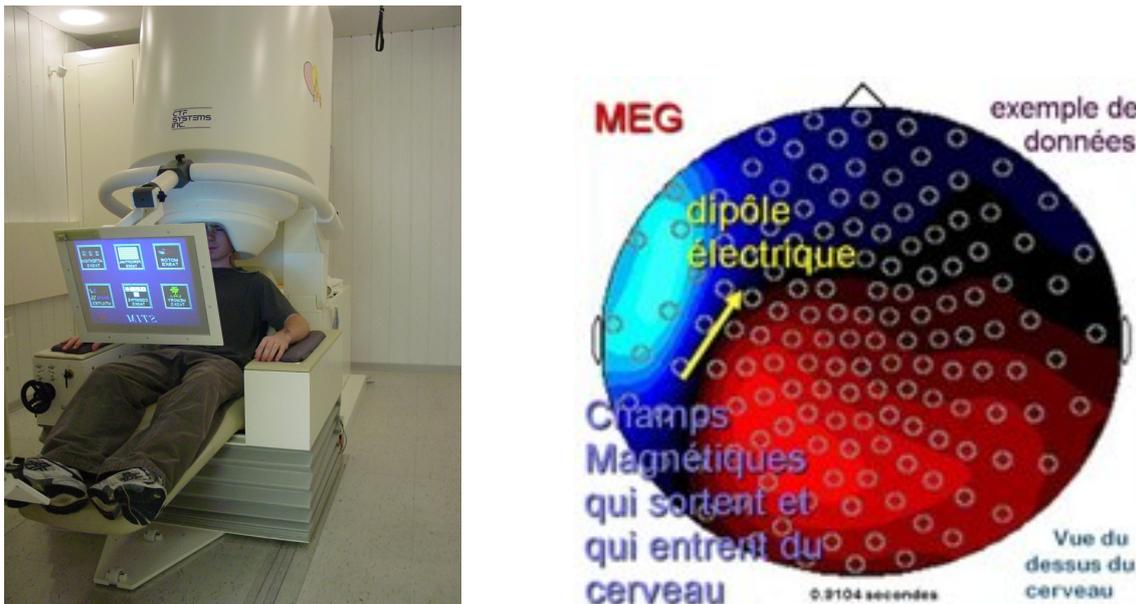


FIGURE 1.7 – MEG à gauche et image à droite

1.3 Modèle EEG direct chez le nouveau-né

Nous nous intéressons à la modélisation de l'examen EEG. L'objectif est de résoudre le problème direct en EEG qui consiste à calculer le potentiel électrique sur le scalp connaissant la modélisation de la tête, la distribution de la conductivité et le modèle de sources. La modélisation du problème direct en EEG est une étape importante dans la compréhension et la résolution du problème de reconstruction des sources qui est encore appelé problème inverse en EEG. Le problème inverse en EEG consiste à estimer les sources de courant dans le cerveau à partir du potentiel électrique sur le scalp pour une distribution de conductivités donnée.

1.3.1 Modélisation de la tête

Dans le modèle multi-couches de la tête, nous distinguons trois à cinq couches : le cerveau (contenant les matières grise et blanche, le liquide céphalo-rachidien), le crâne et le scalp. Il existe deux modèles pour représenter la tête : le modèle sphérique et le modèle réaliste.

Modèle sphérique : Les modèles de tête sphérique sont les modèles les plus simplifiés de la tête. Ils considèrent la tête comme un ensemble de sphères concentriques (voir Figure 1.8) dont chaque couche représente un tissu différent de la tête. Le plus simple des modèles sphérique est le modèle à trois couches composé du cerveau, du crâne et du scalp. D'autres modèles plus complexes à quatre et cinq couches sont également utilisés. Les modèles à quatre couches incluent une couche sphérique de liquide céphalo-rachidien entre le crâne et le cerveau et les modèles à cinq couches distinguent en plus les matières grise et blanche dans le cerveau. Pour ces modèles, une formule analytique pour calculer le potentiel est disponible dans le cas de tissus homogènes et isotropes [2, 45, 68]. Les modèles sphériques servent le plus souvent de solution de référence pour la validation des méthodes numériques (cf. Chapitre 2). Pour le nouveau-né, nous considérons le modèle sphérique à trois couches

avec des rayons $r_1 = 50mm$, $r_2 = 54mm$ et $r_3 = 60mm$ correspondant au cerveau (Ω_1), au crâne (Ω_2) et au scalp (Ω_3) respectivement.

Modèle réaliste : Les modèles réalistes reproduisent la géométrie la plus fidèle de la tête. Ils se sont développés avec l'arrivée de certaines techniques d'imagerie anatomique telles que l'IRM et le scanner par tomographie CT. Les modèles réalistes sont difficiles à obtenir ; ils nécessitent l'utilisation de méthodes de traitement d'images pour segmenter les images issues de ces techniques d'imagerie et d'extraire les différents tissus de la tête. Dans le cas du nouveau-né, l'obtention de modèles réaliste est encore plus complexes car les méthodes de segmentation utilisées pour l'adulte ne sont plus adaptées [3]. Pour les modèles réalistes, nous avons besoin de méthodes numériques pour calculer le potentiel électrique car il n'existe pas de solution analytique. Une description du modèle de tête réaliste du nouveau-né utilisé dans cette thèse sera donnée dans la partie 2.3.4.

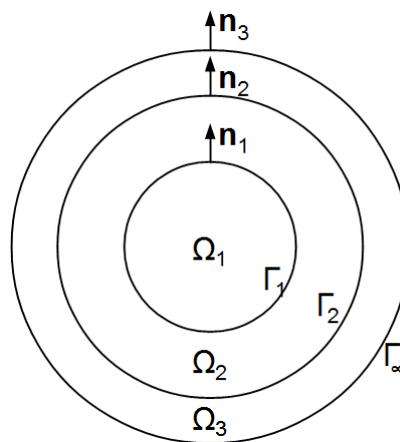


FIGURE 1.8 – Modèle sphérique de tête à trois couches.

1.3.2 Choix des conductivités

La modélisation en EEG requiert une bonne connaissance des conductivités des différents tissus de la tête. Les conductivités électriques des tissus affectent la propagation du potentiel électrique dans la tête.

Les conductivités électriques des tissus de la tête sont difficiles à mesurer chez l'homme. Elles sont mesurées le plus souvent *in vitro* et sont disponibles dans la littérature [40, 20, 3]. Certains tissus sont mesurés *in vivo* sur des animaux et chez l'homme [40, 70, 8]. Mais ces valeurs de conductivités ne sont pas forcément les meilleurs choix pour le problème. D'une part, il y a une différence entre les conductivités des tissus des animaux et celles de l'homme et d'autre part, les conductivités des tissus varient d'une personne à l'autre et suivant l'âge. Néanmoins, il est connu que la conductivité de l'os du crâne et la matière blanche sont anisotropes [67, 26] c'est-à-dire que leurs valeurs dépendent de la direction du courant et que la conductivité de l'os du crâne est plus faible que les autres tissus. La conductivité du milieu extérieur (l'air) est considérée négligeable ou nulle.

Dans le cas de l'adulte, un rapport de l'ordre 80 entre la conductivité du cerveau/scalp et celle de l'os du crâne est évoquée dans [52]. Dans le cas du nouveau-né, la conductivité de l'os du crâne est plus élevée comparée à celle de l'adulte [48] et elle a été déduite d'une mesure expérimentale de la conductivité du crâne d'un nouveau-né porcelet [40]. La prise en compte de l'anisotropie de l'os du crâne est limitée par la faible épaisseur du

crâne du nouveau-né. En revanche, la conductivité des fontanelles n'est pas bien connue et les valeurs utilisées dans la littérature [40, 20] indiquent qu'elle est plus grande que celle de l'os du crâne. Un rapport de l'ordre de 10 entre la conductivité des fontanelles et celle de l'os est considérée dans [40]. Pour modéliser le processus d'ossification des fontanelles, nous considérons une conductivité continue dans le crâne qui est définie par $\sigma_{\text{crâne}} = \sigma_{\text{os}} + (\sigma_f - \sigma_{\text{os}})g$ où g est une fonction gaussienne. Nous donnons quelques valeurs de conductivités utilisées dans la littérature dans le tableau 1.1.

Cerveau	LCR	Os crâne	Fontanelles	Scalp	Référence
0.33	1.8	0.04	0.3	0.33	Lew et al. [40]
0.33	1.54	0.03 à 0.3	0.003 à 1.54	0.435	Gargiulo et al. [20]

TABLE 1.1 – Valeurs de conductivités en $S.m^{-1}$

1.3.3 Modélisation des sources

L'activité électrique cérébrale décrite dans la partie 1.2.1 est concentrée dans un petit nombre de volumes du cortex à chaque instant donné. La dimension de chaque volume actif est petite par rapport à sa distance aux capteurs sur la surface de la tête. Dans ce cas, l'activité de chacun des volumes actifs peut être représentée par un dipôle de courant. Le modèle dipolaire donne une bonne approximation des générateurs neuronaux et est fréquemment utilisé en EEG et MEG [46, 28]. Dans le modèle dipolaire, chaque source est caractérisée par une position et un moment. Nous distinguons deux types de modèles dipolaires : le *modèle de dipôle équivalent* et le *modèle de sources distribuées*.

Pour le *modèle de dipôle équivalent*, l'objectif du problème de localisation de sources consiste à estimer les $6m$ paramètres des dipôles si nous considérons m dipôles (6 paramètres pour chaque dipôle, 3 pour la position et 3 pour le moment). En général, pour qu'une solution du problème de localisation soit unique, le nombre de paramètres à estimer ne doit pas être supérieur à celui des données [14]. Par exemple, les données EEG pour un montage de 64 électrodes ne peuvent être expliquées qu'avec au plus 10 dipôles, sinon il faudra ajouter des contraintes. Le *modèle de dipôle équivalent* nécessite de fixer a priori le nombre de sources actives. Le plus souvent, le nombre de sources est déterminé en fonction de la connaissance de l'expérience considérée.

Le *modèle de sources distribuées* considère un nombre important de dipôles régulièrement répartis dans une partie ou la totalité du volume cérébral. Le nombre de sources étant très grand, on peut ajouter des contraintes anatomiques en restreignant la recherche de sources dans la surface corticale et contraindre l'orientation de chaque dipôle à être perpendiculaire au cortex. La position et l'orientation étant fixées, il ne reste qu'à estimer l'amplitude de chaque dipôle. Dans ce modèle, le nombre d'inconnues à déterminer est souvent très supérieur au nombre de données. La résolution du problème de localisation dans ce cas nécessite des techniques de régularisation.

1.3.4 Équations de Maxwell

L'activité cérébrale crée des ondes électromagnétiques à l'intérieur du cerveau. Leur propagation est décrite par les équations de Maxwell. Le champ électrique \mathbf{E} et le champ

magnétique \mathbf{H} vérifient les équations suivantes :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mu \left(\mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (1.1c)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{H}) = 0. \quad (1.1d)$$

où ρ est la densité de charge, ε et μ sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique, et \mathbf{J} est la densité de courant.

Approximation quasi-statique

L'approximation quasi-statique consiste à négliger les dérivées temporelles dans les équations de Maxwell. Dans cette partie, nous allons justifier l'application de l'approximation quasi-statique dans le cas de la modélisation de l'activité cérébrale en suivant [19]. Nous donnons quelques ordres de grandeurs des tissus de la tête. La permittivité électrique et la perméabilité magnétique valent respectivement $\varepsilon = 10^5 \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$ où $\varepsilon_0 \simeq 8.85 \cdot 10^{-12} F.m^{-1}$ et $\mu_0 \simeq 4\pi \cdot 10^{-7} H.m^{-1}$ sont la permittivité et la perméabilité du vide. Les fréquences des champs électromagnétiques du cerveau n'excèdent pas $100 Hz$. En utilisant la loi d'Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, nous avons

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mu \left(\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right),$$

où σ est une distribution de la conductivité.

L'approximation quasi-statique dans ce cas consiste à vérifier la relation $\left\| \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\| \ll \left\| \sigma \mathbf{E} \right\|$. Pour cela, nous décomposons le champ électrique dans le domaine Fourier et nous considérons une onde plane de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{2\pi i f t},$$

où f est la fréquence, \mathbf{E}_0 un vecteur d'amplitude réelle et i l'unité imaginaire.

La relation que nous devons justifier revient à vérifier que $\kappa = |2\pi f \varepsilon / \sigma| \ll 1$. Dans le cas précis de l'EEG, nous avons $\kappa \simeq 2 \cdot 10^{-3} \ll 1$. Ceci valide l'approximation $\nabla \times \mathbf{H} = \mu \mathbf{J}$.

Pour justifier que $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ est négligeable, nous supposons que l'onde plane considérée précédemment est de plus transverse. Cette onde vérifie $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{G} e^{2\pi i \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}}$ avec \mathbf{G} un vecteur d'amplitude réelle et \mathbf{F} un vecteur de fréquence spatiale réelle satisfaisant la condition d'orthogonalité $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} = 0$. Comme $\nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 2\pi i (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) e^{2\pi i \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}} = 0$, nous obtenons

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}.$$

Donc, nous avons $\|\Delta \mathbf{E}\| = 2\pi f \mu_0 \sigma \|\mathbf{E}\|$. La longueur d'onde spatiale est $\Lambda = \sqrt{\frac{2\pi}{2\pi f \mu_0 \sigma}} \simeq 417m$. Puisque les dimensions de la tête sont petites devant la longueur d'onde, nous pouvons négliger ces variations et nous avons $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

Ainsi, l'approximation quasi-statique conduit aux équations suivantes :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (1.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1.2b)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mu \mathbf{J}, \quad (1.2c)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{H}) = 0. \quad (1.2d)$$

L'équation (1.2b) montre que le champ électrique \mathbf{E} est à rotationnel nul. Ceci signifie qu'il dérive d'un potentiel électrique scalaire u (à une constante additive près) :

$$\mathbf{E} = \nabla u. \quad (1.3)$$

Dans l'équation (1.2c), la densité de courant \mathbf{J} produite par l'activité cérébrale est divisée en deux parties : le courant source \mathbf{J}^s et le courant volumique \mathbf{J}^v . D'après la loi d'Ohm, on a la relation $\mathbf{J}^v = \sigma \mathbf{E}$. La densité \mathbf{J} se décompose alors sous la forme :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^s + \sigma \mathbf{E} = \mathbf{J}^s + \sigma \nabla u, \quad (1.4)$$

où σ est la distribution de la conductivité de la tête.

En substituant l'équation (1.4) dans (1.2c) et en appliquant l'opérateur divergence à l'équation, on obtient

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mu \nabla \cdot (\mathbf{J}^s + \sigma \nabla u).$$

En utilisant le fait que $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$, nous obtenons l'équation elliptique suivante satisfaite par le potentiel u :

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = \nabla \cdot \mathbf{J}^s. \quad (1.5)$$

Avec le modèle dipolaire, la densité de courant source s'écrit

$$\mathbf{J}^s = \sum_{m=1}^M \mathbf{q}_m \delta_{S_m}$$

où δ_{S_m} est la distribution de dirac au point S_m . Le second membre de (1.5) est alors donné par

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \cdot \mathbf{J}^s = \sum_{m=1}^M \mathbf{q}_m \cdot \nabla \delta_{S_m}. \quad (1.6)$$

1.3.5 Méthodes numériques pour la résolution du problème direct

La résolution numérique du problème direct nécessite des méthodes numériques surtout dans le cas du modèle réaliste de la tête. On distingue plusieurs méthodes numériques pour cela et elles s'appuient sur le modèle de tête considéré. Pour les modèles surfaciques de tête, la méthode la plus utilisée est la méthode des éléments frontières (BEM), alors que des méthodes comme les éléments finis 3D (MEF) et les différences finies (MDF) sont utilisées pour les modèles volumiques de tête.

Méthode des éléments frontières (BEM)

La méthode BEM repose sur une formulation du problème à résoudre sous forme d'équation intégrale. Elle s'applique à des problèmes physiques dans lesquels le domaine peut être partitionné à des sous-ensembles ouverts de caractéristiques physiques constantes séparés par des interfaces. Elle consiste à calculer la solution sur les interfaces et non dans le

domaine. Cette méthode est utilisée dans plusieurs domaines comme l'électromagnétisme, l'acoustique, la mécanique Pour la résolution d'un problème direct en EEG, la BEM a été introduite pour la première fois par Goselowitz [24] en 1967. Elle est ensuite utilisée dans plusieurs études [17, 1, 38, 59] et dans des logiciels commerciaux comme ASA de la société ANT software.

Avantages La premier avantage de la BEM est qu'elle utilise un maillage simple constitué d'une triangulation des interfaces des différents sous-domaines. Ceci dispense l'étape du maillage volumique de la tête surtout pour le modèle réaliste dans lequel le maillage du crâne est délicat du fait de la faible épaisseur de celui-ci. La BEM permet aussi de réduire la dimension du problème tridimensionnel au départ à un problème bidimensionnel ce qui implique une réduction du temps de calcul et de la mémoire.

Inconvénients La méthode BEM mène à la résolution d'un système linéaire de la forme $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ avec A une matrice carrée et pleine, ce qui amène à une étude du conditionnement de cette matrice. Le principal inconvénient de la BEM est qu'elle impose un domaine homogène par morceaux. En conséquence, elle ne permet pas de prendre en compte l'anisotropie de certains tissus de la tête comme l'os et l'inhomogénéité du crâne en présence des fontanelles en cours d'ossification chez le nouveau-né.

Méthode des différences finies (MDF)

La méthode des différences finies (MDF) consiste à discrétiser le problème sur une grille cubique régulière. Elle a été utilisée pour la première fois sur un modèle réaliste par Witwer et al. [64] en 1972. Il existe différentes approches pour obtenir un schéma aux différences finies [32, 33] et la plus utilisée repose sur la loi de Kirchoff (la somme des intensités des courants entrants est égale à la somme des intensités des courants sortants).

Avantages L'avantage de la MDF est qu'elle peut utiliser une grille régulière formée à partir des voxels des images IRM anatomique. Cela permet de s'affranchir de la construction du maillage qui est souvent délicate. La MDF permet également de prendre en compte l'anisotropie et l'inhomogénéité des tissus de la tête. La matrice obtenue après discrétisation par la MDF est creuse.

Inconvénients L'étude de convergence et stabilité des schémas pour la MDF est délicate et pose des difficultés théoriques [32]. En outre, la définition des schémas est difficile près des interfaces entre les tissus dû à la discontinuité de la conductivité.

Méthode des éléments finis (MEF)

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique d'approximation numérique d'EDPs qui est un peu similaire à la BEM. La différence réside dans le fait que la MEF approche directement la formulation variationnelle de l'EDP à résoudre alors que la BEM utilise une reformulation en équation intégrale de surface. La MEF fût appliquée la première fois en 1983 [57] pour le calcul du potentiel électrique dans un modèle 2D. L'utilisation de la MEF pour des modèles réalistes 3D est intervenue dans les années 90 avec le développement des techniques d'imagerie anatomiques [69]. Par la suite, elle a été utilisée dans de multiples travaux de recherches [65, 66, 3, 63] entre autres.

Avantages La MEF a l'avantage de pouvoir prendre en compte l'anisotropie et l'inhomogénéité des différents tissus de la tête. Comparée à la MDF, elle permet de s'adapter à la géométrie complexe de la tête notamment aux interfaces entre les différents tissus. La discrétisation de la MEF conduit à une matrice creuse.

Inconvénients La MEF utilise un maillage 3D de la tête qui est difficile à générer à partir des images IRM. Depuis quelques années, la génération de maillages tétraédriques est facilitée par le développement informatique et la MEF est de plus en plus utilisée [3, 63].

1.4 Modèles considérés

Dans ce chapitre, nous avons présenté le contexte de nos travaux et décrit la particularité de la tête du nouveau-né par rapport à l'adulte avec la présence des fontanelles dans le crâne. Ensuite, nous avons décrit l'aspect physiologique et mathématique du cerveau. Et enfin nous avons présenté les différents modèles utilisés dans la littérature.

Dans le modèle EEG du nouveau-né, la présence des fontanelles en cours d'ossification dans le crâne nous impose une conductivité inhomogène pour celui-ci. Cette inhomogénéité de la conductivité du crâne ne permet pas l'application de la méthode des éléments frontières (BEM) qui est fréquemment utilisée dans le cas de l'adulte.

Dans le contexte de la thèse, nous utilisons la méthode des éléments finis tridimensionnels pour la résolution du problème direct en EEG. Les sources de courant sont modélisées par des dipôles équivalents. Nous considérons, d'une part, un modèle sphérique à trois couches composé du cerveau, du crâne (avec fontanelle antérieure) et du scalp et, d'autre part, un modèle réaliste de la tête d'un nouveau-né constitué du cerveau, du LCR, du crâne (avec les fontanelles) et du scalp. Les conductivités électriques des différents tissus de la tête sont prises dans [40] et sont données dans le tableau 1.1.

Chapitre 2

Problème direct en EEG

Dans ce chapitre, la méthode des éléments finis est utilisée pour la résolution numérique du problème direct en EEG. Le problème direct est modélisé par une équation de Poisson avec des conditions de bords de type Neumann. Une méthode de soustraction est introduite pour traiter la singularité du terme source (1.6). La résolution du problème direct permettra, d'une part, de comprendre l'influence des sources dipolaires et de certains tissus de la tête sur les mesures. Et d'autre part, il servira à générer des données simulées pour la résolution et la validation des méthodes développées pour le problème inverse.

Tout d'abord, le modèle mathématique du problème direct en EEG est présenté. La méthode de soustraction est présentée et une formulation variationnelle est obtenue. L'existence et l'unicité de la solution ainsi des estimations d'erreurs en norme H^1 sont établies. Par la suite, une validation de la méthode est réalisée dans le cas du modèle sphérique et sa robustesse est évaluée lorsque les sources sont proches de l'interface du cerveau. Des simulations numériques sur un maillage réaliste de la tête d'un nouveau-né sont présentées. Et enfin, une analyse de l'impact des fontanelles sur les mesures EEG est effectuée sur le modèle réaliste.

2.1 Mise en équations

Pour le modèle multi-couches, nous identifions la tête comme un domaine ouvert Ω de \mathbb{R}^3 partitionné en L sous-domaines $(\Omega_i)_{i=1,\dots,L}$ (Figure 1.8) tels que

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= \bigcup_{i=1}^L \bar{\Omega}_i \text{ et} \\ \Omega_i \cap \Omega_j &= \emptyset \quad \forall i \neq j.\end{aligned}$$

Pour $i = 1, \dots, L - 1$, nous notons par Γ_i l'interface entre Ω_i et Ω_{i+1} et $\Gamma_\infty = \partial\Omega$ le bord extérieur de Ω . Nous désignons par \mathbf{n}_i le vecteur normal unitaire sur Γ_i dirigé vers l'extérieur. On suppose que les $(\Gamma_i)_i$ sont des surfaces régulières telles que

$$\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, \dots, L - 1\} \cup \{\infty\}.$$

Nous avons montré dans le chapitre précédent que l'activité électromagnétique de la tête est décrite par les équations de Maxwell qui conduisent à l'équation elliptique suivante

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = F$$

où $F = \nabla \cdot \mathbf{J}^s$ est le terme source de courant.

Puisque la conductivité de l'air est nulle et que le courant électrique ne sort pas de la tête, nous imposons un flux nul sur la surface du scalp. Le potentiel électrique u est alors solution du problème avec condition au bord de Neumann homogène suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = F, & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_n u = 0, & \text{sur } \Gamma_\infty, \end{cases} \quad (2.1)$$

où le terme source F est donné par (1.6). Puisque F est identiquement nul au voisinage des interfaces Γ_i , le potentiel u satisfait les conditions de transmission

$$[u]_{|\Gamma_i} = 0 \text{ sur } \Gamma_i \quad (i = 1, \dots, L-1), \quad (2.2a)$$

$$[\sigma \partial_n u]_{|\Gamma_i} = 0 \text{ sur } \Gamma_i \quad (i = 1, \dots, L-1), \quad (2.2b)$$

où $[f]_{|\Gamma_i} = f|_{\Omega_i} - f|_{\Omega_{i+1}}$ désigne le saut de f à travers l'interface Γ_i .

Dans la suite, nous supposons que la conductivité est constante au voisinage de chaque source. Plus précisément, on fixe une famille de boules ouvertes $(\mathcal{V}_m)_{m=1, \dots, M}$ telles que $\mathcal{V}_m \subset \subset \Omega_1$, $S_m \in \mathcal{V}_m$ et

$$\sigma|_{\mathcal{V}_m} \equiv c_m \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

pour tout $m \in \{1, \dots, M\}$. Sans perte de généralité, on suppose que les boules \mathcal{V}_m ne s'intersectent pas, $\mathcal{V}_m \cap \mathcal{V}_p = \emptyset$ si $m \neq p$. On suppose aussi que les conductivités σ_i ont une régularité $W^{1, \infty}$,

$$\sigma_i \in W^{1, \infty}(\Omega_i) \quad \forall i = 1, \dots, L. \quad (2.4)$$

Ainsi, le problème direct en EEG revient à résoudre le problème (2.1) connaissant les sources de courant (S_m, \mathbf{q}_m) et la distribution de la conductivité σ .

2.2 Formulation variationnelle du problème direct

La régularité du terme source F est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Le terme source F appartient à l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$ pour tout $s < -5/2$.*

L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ est défini par :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{v \in \mathcal{S}' : \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{v}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < +\infty\}.$$

On le munit du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_s = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi) (1 + |\xi|^2)^s d\xi.$$

Démonstration. La norme du gradient de v sur $H^s(\mathbb{R}^n)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\nabla v}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j} \right|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n |\xi_j|^2 |\hat{v}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \quad \text{car } \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j} = i \xi_j \hat{v}(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\hat{v}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi. \end{aligned}$$

En remplaçant v par la distribution de dirac, nous avons $\hat{v}(\xi) = 1$. L'expression ci-dessus devient alors

$$\|\nabla\delta\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \sim \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s+2}.$$

Elle est finie si et seulement si $2s + 2 < -n$ ce qui équivaut à $s < -\frac{n+2}{2}$. Dans le cas où $n = 3$, nous obtenons $s < -5/2$. \square

Le manque de régularité du terme source interdit une formulation variationnelle de (2.1) dans $H^1(\Omega)$. Pour contourner le problème, nous utilisons une idée de [14]. Cette méthode a été aussi introduite dans [17, 65] et est appelée la méthode de soustraction.

2.2.1 La méthode de soustraction

L'idée de la méthode de soustraction est de décomposer le potentiel électrique u , solution de (2.1), en un potentiel \tilde{u} qui contient la singularité et un relèvement régulier w tels que

$$u = \tilde{u} + w, \text{ avec } \tilde{u} = \sum_{m=1}^M \tilde{u}_m. \quad (2.5)$$

Le potentiel singulier \tilde{u}_m est la solution de l'équation de Poisson dans un conducteur homogène non borné de conductivité $c_m = \sigma_1(S_m)$,

$$-c_m \Delta \tilde{u}_m = \mathbf{q}_m \cdot \nabla \delta_{S_m} \text{ dans } \mathbb{R}^3. \quad (2.6)$$

Il est obtenu par convolution de la solution fondamentale de l'équation de Laplace avec le second membre $\frac{1}{c_m} \mathbf{q}_m \cdot \nabla \delta_{S_m}$.

Lemme 2.2. *La solution fondamentale de l'équation de Laplace dans \mathbb{R}^3 est donnée par*

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Elle vérifie l'équation $-\Delta G(\mathbf{x}) = \delta$ où δ est la distribution de Dirac à l'origine.

Proposition 2.3. *Le potentiel singulier \tilde{u}_m , solution de l'équation (2.6), est donné par :*

$$\tilde{u}_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi c_m} \mathbf{q}_m \cdot \frac{(\mathbf{x} - S_m)}{|\mathbf{x} - S_m|^3}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{S_m\}. \quad (2.7)$$

Démonstration. Le potentiel singulier \tilde{u}_m est obtenu par convolution de la solution fondamentale de l'équation de Laplace avec le terme source $\frac{1}{c_m} \mathbf{q}_m \cdot \nabla \delta_{S_m}$. On note τ_{S_m} le translaté de vecteur S_m .

$$\begin{aligned} \tilde{u}_m(\mathbf{x}) &= \left(G * \frac{1}{c_m} \mathbf{q}_m \cdot \nabla \delta_{S_m} \right) (\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{c_m} \mathbf{q}_m \cdot \nabla (G * \delta_{S_m}) (\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{c_m} \mathbf{q}_m \cdot \nabla (G * \tau_{S_m} \delta) (\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{c_m} \mathbf{q}_m \cdot \tau_{S_m} \nabla G(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{4\pi c_m} \mathbf{q}_m \cdot \frac{(\mathbf{x} - S_m)}{|\mathbf{x} - S_m|^3}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{S_m\}. \end{aligned}$$

\square

Nous observons que le potentiel \tilde{u} a une singularité en chaque point source S_m , mais qu'il est régulier ailleurs. Pour identifier le problème satisfait par w , notons que pour tout $m \in \{1, \dots, M\}$, la quantité $\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla \tilde{u}_m)$ est bien définie sur Ω_1 par

$$\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla \tilde{u}_m) = \nabla \cdot ((\sigma_1 - c_m) \nabla \tilde{u}_m) + c_m \Delta \tilde{u}_m.$$

En effet, les deux termes du second membre de l'identité ci-dessus sont bien définis comme distributions dans Ω_1 , même si σ_1 a seulement une régularité $W^{1,\infty}$, puisque $\sigma_1 - c_m$ s'annule identiquement sur \mathcal{V}_m et \tilde{u}_m est régulier en dehors de $\cup_m \mathcal{V}_m$. On obtient donc

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla w) = -\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla (u - \tilde{u})) = F + \sum_{m=1}^M \nabla \cdot ((\sigma_1 - c_m) \nabla \tilde{u}_m) + c_m \Delta \tilde{u}_m \text{ sur } \Omega_1.$$

Il découle de la définition de \tilde{u}_m que le terme source $F = -\sum_{m=1}^M c_m \Delta \tilde{u}_m$. Ensuite, en prenant en compte l'identité

$$\nabla \cdot ((\sigma_1 - c_m) \nabla \tilde{u}_m) = (\sigma_1 - c_m) \Delta \tilde{u}_m + \nabla(\sigma_1 - c_m) \cdot \nabla \tilde{u}_m \quad (2.8)$$

et en notant que le premier terme du second membre s'annule sur Ω_1 , nous obtenons

$$-\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla w) = \sum_{m=1}^M \nabla(\sigma_1 - c_m) \cdot \nabla \tilde{u}_m = \nabla \sigma_1 \cdot \nabla \tilde{u}.$$

Dans chaque couche Ω_i , $i \neq 1$, les potentiels \tilde{u}_m sont réguliers. On observe par un calcul direct que w est solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma_i \nabla w) &= \nabla \sigma_i \cdot \nabla \tilde{u}, & \text{dans } \Omega_i \ (i = 1, \dots, L), \\ \sigma \partial_n w &= -\sigma \partial_n \tilde{u}, & \text{sur } \Gamma_\infty, \end{cases} \quad (2.9)$$

avec les conditions de transmission

$$[w]_{|\Gamma_i} = 0 \text{ sur } \Gamma_i, \quad (2.10a)$$

$$[\sigma \partial_n w]_{|\Gamma_i} = (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \partial_n \tilde{u} \text{ sur } \Gamma_i, \quad (2.10b)$$

pour $i = 1, \dots, L-1$. Nous rappelons que le second membre de (2.9) s'annule au voisinage \mathcal{V}_m de chaque source, puisque σ_1 est constante sur \mathcal{V}_m et a une régularité $W^{1,\infty}$ dans Ω_1 .

2.2.2 Formulation variationnelle

Dans cette partie, nous donnons une formulation variationnelle du problème (2.9)-(2.10) pour la fonction auxiliaire w . Nous supposons $v \in H^1(\Omega)$. En multipliant (2.9) par $v|_{\Omega_i}$, en intégrant sur Ω_i et en sommant sur i , nous obtenons la formulation suivante en utilisant la formule de Green et les conditions aux limites et de transmission,

$$\sum_{i=1}^L \int_{\Omega_i} \sigma_i \nabla w \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{L-1} \int_{\Gamma_i} (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \partial_n \tilde{u} v \, ds - \int_{\Gamma_\infty} \sigma_L \partial_n \tilde{u} v \, ds + \sum_{i=1}^L \int_{\Omega_i} (\nabla \sigma_i \cdot \nabla \tilde{u}) v \, d\mathbf{x}. \quad (2.11)$$

Proposition 2.4. *La formulation variationnelle (2.11) est équivalente à*

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla w \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M \left(\int_{\Omega} (c_m - \sigma) \nabla \tilde{u}_m \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\infty} c_m \partial_n \tilde{u}_m v \, ds \right) \quad (2.12)$$

qui est la formulation variationnelle du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla w) &= \sum_{m=1}^M \nabla \cdot ((\sigma - c_m) \nabla \tilde{u}_m), & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_{\mathbf{n}} w &= -\sigma \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}, & \text{sur } \Gamma_{\infty}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Démonstration. En utilisant l'identité (2.8) et le fait que $\nabla(\sigma_i - c_m) = \nabla \sigma_i$, nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \int_{\Omega} (c_m - \sigma) \nabla \tilde{u}_m \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_{\infty}} c_m \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m v \, ds \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^L \int_{\Omega_i} (c_m - \sigma_i) \nabla \tilde{u}_m \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_{\infty}} c_m \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m v \, ds \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^L \left(- \int_{\Omega_i} \nabla \cdot ((c_m - \sigma_i) \nabla \tilde{u}_m) v \, d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega_i} (c_m - \sigma_i) \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m v \, ds \right) - \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_{\infty}} c_m \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m v \, ds \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^L \int_{\Omega_i} \nabla(\sigma_i - c_m) \cdot \nabla \tilde{u}_m v \, d\mathbf{x} + \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_1} (c_m - \sigma_1) \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m v \, ds \\ & \quad + \sum_{m=1}^M \left(\int_{\Gamma_2} (c_m - \sigma_2) \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m v \, ds - \int_{\Gamma_1} (c_m - \sigma_2) \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m v \, ds \right) \\ & \quad + \sum_{m=1}^M \left(\int_{\Gamma_{\infty}} (c_m - \sigma_L) \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m v \, ds - \int_{\Gamma_{L-1}} (c_m - \sigma_L) \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m v \, ds \right) - \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_{\infty}} c_m \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m v \, ds \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^L \int_{\Omega_i} \nabla \sigma_i \cdot \nabla \tilde{u}_m v \, d\mathbf{x} + \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{L-1} \int_{\Gamma_i} (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m v \, ds - \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_{\infty}} \sigma_L \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m v \, ds \\ &= \sum_{i=1}^L \int_{\Omega_i} \nabla \sigma_i \cdot \nabla \tilde{u} v \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{L-1} \int_{\Gamma_i} (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u} v \, ds - \int_{\Gamma_{\infty}} \sigma_L \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u} v \, ds. \end{aligned}$$

□

Dans la suite, nous nous concentrons sur la formulation (2.12). Nous introduisons la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ définie sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ par

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \sigma \nabla w \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}, \quad (2.14)$$

ainsi que la forme linéaire

$$l(v) = \sum_{m=1}^M \left(\int_{\Omega} (c_m - \sigma) \nabla \tilde{u}_m \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{\infty}} c_m \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m v \, ds \right) \quad (2.15)$$

définie pour tout $v \in H^1(\Omega)$. Puisque (2.13) est un problème avec condition aux limites de Neumann, la formulation variationnelle (2.12) admet une solution seulement sous la condition de compatibilité

$$l(1) = \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_{\infty}} c_m \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m(x) \, ds = 0. \quad (2.16)$$

La condition (2.16) résulte du lemme suivant [17].

Lemme 2.5. Soit \tilde{u}_m la solution de l'équation (2.6) donnée par (2.7). Alors

$$\int_{\Gamma_\infty} c_m \partial_n \tilde{u}_m ds = 0 \quad \forall m = 1, \dots, M. \quad (2.17)$$

Démonstration. Soit \tilde{v} la solution de $-\Delta \tilde{v} = \mathbf{q}_m \cdot \nabla \delta_{S_m}$ obtenue par convolution du terme source avec la solution fondamentale G du Laplacien dans \mathbb{R}^3 . Nous obtenons alors par des règles de différentiation du produit de convolution

$$\tilde{v}(\mathbf{x}) = (G * (\mathbf{q}_m \cdot \nabla \delta_{S_m}))(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_m \cdot \nabla (G * \delta_{S_m})(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_m \cdot \nabla G(\mathbf{x} - S_m)$$

où ∇ désigne le gradient suivant la variable \mathbf{x} . La symétrie de la fonction de Green G donne

$$\mathbf{q}_m \cdot \nabla G(\mathbf{x} - S_m) = -\mathbf{q}_m \cdot \nabla_{S_m} G(\mathbf{x} - S_m).$$

Nous avons alors

$$\partial_n \tilde{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{q}_m \cdot \nabla_{S_m} (\partial_n G(\mathbf{x} - S_m)),$$

pour tout $\mathbf{x} \neq S_m$. Cela implique

$$\int_{\Gamma_\infty} \partial_n \tilde{v} ds = -\mathbf{q}_m \cdot \nabla_{S_m} \int_{\Gamma_\infty} \partial_n G(\cdot - S_m) ds,$$

Puisque $S_m \in \Omega_1$, nous avons $S_m \cap \Gamma_\infty = \emptyset$. Notons maintenant que la formule de l'angle solide (voir par exemple [37]) dit que

$$\int_{\Gamma_\infty} \partial_n G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & \text{si } \mathbf{y} \in \Omega, \\ -\frac{1}{2} & \text{si } \mathbf{y} \in \Gamma_\infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.18)$$

Par conséquent,

$$\int_{\Gamma_\infty} \partial_n \tilde{v} ds = 0$$

et on en déduit (2.17) puisque $\tilde{u}_m = \frac{1}{c_m} \tilde{v}$. \square

Une solution de (2.12) est unique seulement à une constante additive près. Nous introduisons le sous-espace de $H^1(\Omega)$ suivant qui ne contient aucune constante autre que zéro,

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} v d\mathbf{x} = 0 \right\}. \quad (2.19)$$

L'inégalité de Poincaré-Wirtinger est vraie avec une constante $C_P > 0$ qui dépend seulement du domaine Ω ,

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C_P \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V. \quad (2.20)$$

Dans la suite, nous écrivons $a \lesssim b$ s'il existe une constante $C > 0$ indépendante des quantités a et b telles que $a \leq Cb$.

Définition 2.6. Soit H un espace de Hilbert et $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. $a(\cdot, \cdot)$ est continue si

$$\forall w, v \in H : |a(w, v)| \lesssim \|w\|_H \|v\|_H.$$

$a(\cdot, \cdot)$ est H -elliptique si

$$\|w\|_H \lesssim a(w, w), \quad \forall w \in H.$$

Définition 2.7. Soit H un espace de Hilbert. Une forme linéaire $l : H \rightarrow \mathbb{R}$ est continue si

$$|l(v)| \lesssim \|v\|_H.$$

Lemme 2.8. Soit Ω un ouvert régulier et borné. L'application trace

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ v &\longmapsto \gamma_0 v := v|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

est continue et surjective.

Théorème 2.9. Soit $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ telle que $0 < \sigma_{\min} \leq \sigma(\mathbf{x}) \leq \sigma_{\max}$ pour presque tout $\mathbf{x} \in \Omega$, où σ_{\min} et σ_{\max} sont deux constantes positives. Supposons que $\sigma|_{\mathcal{V}_m}$ est constante pour tout $m = 1, \dots, M$ et notons par c_m la valeur de σ sur $\mathcal{V}_m \subset \Omega_1$. Soient la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ et la forme linéaire $l(\cdot)$ données par (2.14) et (2.15) respectivement. Alors le problème variationnel

$$\text{Trouver } w \in V \text{ tel que } a(w, v) = l(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (2.21)$$

a exactement une solution $w \in V$. De plus, l'estimation suivante est vraie,

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \sum_{m=1}^M \left(\|\nabla \tilde{u}_m\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \right). \quad (2.22)$$

Nous remarquons ici que l'hypothèse (plus faible) $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ suffit pour montrer l'existence et l'unicité de w , mais que la condition faite avant $\sigma_i \in W^{1,\infty}(\Omega_i)$ (H^1 serait suffisant) est nécessaire pour définir $\nabla \cdot (\sigma \nabla \tilde{u})$ ce qui permet de montrer que $u = \tilde{u} + w$ est la solution du problème initial.

Avant de démontrer le théorème précédent, nous allons énoncer quelques propositions.

Proposition 2.10. Sous les hypothèses du théorème 2.9, la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ définie par (2.14) est continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et V -elliptique.

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &\lesssim \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall w, v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Ce qui prouve la continuité de la forme bilinéaire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

Pour montrer que la forme bilinéaire est V -elliptique, nous avons d'abord

$$a(w, w) = \int_{\Omega} \sigma |\nabla w|^2 d\mathbf{x} \geq \sigma_{\min} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

Ensuite nous obtenons en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger

$$\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim a(w, w), \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

Ainsi, nous avons

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \lesssim a(w, w), \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

La forme bilinéaire est ainsi V -elliptique. \square

Proposition 2.11. Sous les hypothèses du théorème 2.9, la forme linéaire $l(\cdot)$ définie par (2.15) est continue sur $H^1(\Omega)$.

Démonstration. Soit $v \in H^1(\Omega)$. En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, nous avons

$$|l(v)| \leq \sum_{m=1}^M \left(\sigma_{\max} \|\nabla \tilde{u}_m\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + c_m \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \|\gamma_0 v\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \right).$$

Ensuite, en utilisant la continuité de l'opérateur trace, nous obtenons

$$|l(v)| \lesssim \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.23)$$

Ceci prouve que la forme linéaire est continue sur $H^1(\Omega)$ et donc sur V . \square

Nous allons maintenant démontrer le théorème 2.9.

Démonstration. Nous avons montré dans les propositions précédentes que la forme bilinéaire est continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et V -elliptique et que la forme linéaire est continue. Le théorème de Lax-Milgram donne l'existence et l'unicité d'une fonction $w \in V$ telle que

$$a(w, v) = l(v) \quad \forall v \in V.$$

Ensuite, soit $v \in H^1(\Omega)$. Nous avons $v - v_\Omega \in V$ où $v_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v \, d\mathbf{x}$ est la valeur moyenne de v sur Ω . Puisque $l(1) = 0$ d'après la condition de compatibilité (2.16) et $\nabla v = \nabla(v - v_\Omega)$, nous obtenons

$$l(v) = l(v - v_\Omega) = a(w, v - v_\Omega) = a(w, v)$$

qui prouve que w est l'unique solution du problème (2.21). Finalement, l'estimation (2.22) résulte de la coercivité de la forme bilinéaire avec l'estimation (2.23) de la forme linéaire $l(\cdot)$. \square

Le théorème suivant donne la régularité globale H^2 de la solution variationnelle de (2.21) dans le sous-domaine Ω_i .

Théorème 2.12. *En plus des hypothèses du Théorème 2.9, supposons que $\sigma_i \in W^{1,\infty}(\Omega_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, L\}$ et que Γ_i est de classe \mathcal{C}^2 pour $i \in \{1, \dots, L-1\} \cup \{\infty\}$. Soit $w \in H^1(\Omega)$ la solution du problème variationnel (2.21). Alors, nous avons $w|_{\Omega_i} \in H^2(\Omega_i)$ pour tout $i = \{1, \dots, L\}$ et*

$$\|w\|_{H^2(\Omega_i)} \lesssim \sum_{m=1}^M \left(\|\nabla \tilde{u}_m\|_{H^1(\Omega_i \setminus \mathcal{V}_m)} + \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m\|_{H^1(\Gamma_\infty)} \right). \quad (2.24)$$

La preuve du Théorème 2.12 repose sur des techniques standard pour les équations aux dérivées partielles elliptiques. En effet, nous pouvons noter que dans chaque domaine Ω_i , la solution variationnelle w satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$-\nabla \cdot (\sigma_i \nabla w) = f_i$$

avec

$$f_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^M \nabla \cdot ((\sigma_i - c_m) \nabla \tilde{u}_m) = \sum_{m=1}^M \nabla(\sigma_i - c_m) \cdot \nabla \tilde{u}_m.$$

D'après les hypothèses sur σ_i , les fonctions f_i appartiennent à $L^2(\Omega_i)$. Par conséquent, des arguments classiques pour les équations aux dérivées partielles à coefficients variables s'appliquent et donnent une régularité intérieure dans chaque Ω_i . La régularité H^2 dans les sous-domaines Ω_i en découle puisque le bord Γ_∞ et les interfaces Γ_i aussi bien que la donnée de Neumann $\sigma \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}$ sont régulières.

2.3 Discrétisation par éléments finis

La méthode des éléments finis est une technique d'approximation numérique de solutions d'EDPs. Elle consiste à trouver une approximation discrète de la solution de l'EDP. L'idée de la méthode consiste à chercher la solution, donnée par le problème variationnel dans un espace de dimension infinie (dans notre cas $H^1(\Omega)$ ou V), dans un espace de dimension finie qui n'est rien d'autre qu'un sous- espace de l'espace du problème variationnel. Pour construire ce sous espace de dimension finie, nous considérons une triangulation du domaine Ω . En dimension deux, ces éléments sont des triangles alors qu'en dimension trois ce sont des tétraèdres. Les tétraèdres permettent une meilleure approximation de la géométrie de la tête.

2.3.1 La méthode des éléments finis de Lagrange

Considérons une famille $\{\mathcal{T}_h\}_h$ de maillage tétraédriques satisfaisant les hypothèses de régularité usuelles (voir e.g. [10]). Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, soit h_T son diamètre. Alors $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ est le paramètre du maillage de \mathcal{T}_h . Pour tout h , on note par \mathcal{N}_h l'ensemble des nœuds de \mathcal{T}_h et N_v son cardinal. Nous introduisons aussi le domaine discret $\Omega_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ et son bord $\Gamma_{\infty,h} = \partial\Omega_h$. Notons que Ω_h ne s'adapte pas exactement au domaine Ω et à ses sous-domaines Ω_i puisque ces derniers sont supposés être au moins de classe \mathcal{C}^2 . Ainsi, nous définissons la triangulation de $\mathcal{T}_{h,i}$ liée à Ω_i par

$$\mathcal{T}_{h,i} = \left\{ T \in \mathcal{T}_h \mid \mathcal{N}_h \cap T \subset \bar{\Omega}_i \right\} \quad \forall i = 1, \dots, L.$$

Soit alors

$$\Omega_{i,h} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_{h,i}} T \quad \text{and} \quad \Gamma_{i,h} = \mathcal{N}_h \cap \Gamma_i.$$

Les conditions suivantes assurent que \mathcal{T}_h correspond approximativement à Ω et à ses sous-domaines

$$\bigcup_{i=1}^L \Omega_{i,h} = \Omega_h \tag{2.25a}$$

$$\Gamma_{i,h} = \Omega_{i,h} \cap \Omega_{i+1,h} \quad \forall i = 1, \dots, L-1. \tag{2.25b}$$

Ces hypothèses garantissent qu'aucun élément ne possède des nœuds à l'intérieur de deux sous-domaines. Pour formuler le problème discret, nous avons besoin d'étendre les fonctions σ_i sur $\Omega_{i,h}$. Ainsi, supposons que pour tout $i = 1, \dots, L$ il existe un domaine $\tilde{\Omega}_i$ tel que

$$\bar{\Omega}_i \subset \tilde{\Omega}_i \quad \text{and} \quad \Omega_{i,h} \subset \tilde{\Omega}_i.$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\tilde{\Omega}_i \cap \tilde{\Omega}_{i+2} = \emptyset$ aussi bien que $\tilde{\Omega}_2 \cap \mathcal{V}_m = \emptyset$ pour une famille donnée de voisinages $(\mathcal{V}_m)_m$ des sources S_m . Notons alors par $\tilde{\sigma}_i$ une extension de σ_i sur $\tilde{\Omega}_i$ tel que $\tilde{\sigma}_i \in W^{1,\infty}(\tilde{\Omega}_i)$ et $\tilde{\sigma}_i(\mathbf{x}) \geq \sigma_{\min}$ pour presque tout $\mathbf{x} \in \tilde{\Omega}_i$. Nous introduisons sur \mathcal{T}_h l'espace vectoriel standard des éléments finis de Lagrange P1,

$$X_h = \left\{ v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_h) \mid v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\} \tag{2.26}$$

où $\mathbb{P}_1(T)$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à 1 sur T . Nous définissons aussi l'espace de discrétisation $V_h = X_h \cap L_0^2(\Omega_h)$ des éléments finis P1 à moyenne nulle sur Ω_h .

Le problème discret s'écrit alors : trouver $w_h \in V_h$ telle que

$$a_h(w_h, v_h) = l_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.27)$$

avec

$$a_h(w_h, v_h) = \sum_{i=1}^L \int_{\Omega_{i,h}} \tilde{\sigma}_i \nabla w_h \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad l_h(v_h) = \sum_{i=1}^L \int_{\Omega_{i,h}} \tilde{\mathbf{F}}_i \cdot \nabla v_h + \int_{\Gamma_{\infty,h}} \tilde{g} v_h \, ds \quad (2.28)$$

où

$$\tilde{\mathbf{F}}_i = \sum_{m=1}^M (c_m - \tilde{\sigma}_i) \nabla \tilde{u}_m \quad \text{sur} \quad \tilde{\Omega}_i \quad \text{et} \quad \tilde{g} = - \sum_{m=1}^M c_m \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\infty,h}.$$

Notons que \tilde{u}_m est définie de manière unique sur toute extension $\tilde{\Omega}_i$ à l'extérieur du voisinage \mathcal{V}_m de la source S_m . Néanmoins, la fonction \tilde{g} diffère de la donnée originale $g = - \sum_{m=1}^M c_m \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m$ sur Γ_{∞} puisque les vecteurs normaux sur Γ_{∞} et $\Gamma_{\infty,h}$ ne sont pas les mêmes.

Comme pour le problème continu, l'existence et l'unicité de la solution de (2.27) découlent du théorème de Lax-Milgram puisque $a_h(\cdot, \cdot)$ est coercive sur V_h grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger dans Ω_h . Notons aussi que la condition de compatibilité peut être prouvée comme dans le lemme 2.5.

X_h désigne les fonctions affines par morceaux et continues. Les fonctions de base de l'espace X_h sont appelées fonctions chapeaux et sont définies par

$$\varphi_k \in X_h \quad \text{et} \quad \varphi_k(\mathbf{x}_i) = \delta_{ki} \quad \text{pour tout} \quad \mathbf{x}_i \in \mathcal{N}_h \quad \text{et} \quad 1 \leq i, k \leq N_v.$$

Notons par $\mathcal{B}_h := \{\varphi_k, k = 1, \dots, N_v\}$ les fonctions de base de X_h . Puisque l'ensemble des fonctions de base de Lagrange \mathcal{B}_h est unisolvant, alors tout $w_h \in X_h$ s'écrit de manière unique comme

$$w_h = \sum_{k=1}^{N_v} w_k \varphi_k(\mathbf{x}). \quad (2.29)$$

Les w_k sont appelés les degrés de liberté de X_h .

Si on remplace l'espace $H^1(\Omega)$ par son approximation discrète $X_h = \text{Vect} \mathcal{B}_h$ dans (2.12), puis w par son approximation $w_h \in X_h$ et la fonction test v par φ_k , nous aurons à résoudre le problème variationnel approché

$$\text{Trouver } w_h \in V_h \text{ tel que } \int_{\Omega_h} \sigma \nabla w_h \cdot \nabla \varphi_k \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_h} \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi_k \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{\infty,h}} g \varphi_k \, ds \quad \forall \varphi_k \in \mathcal{B}_h. \quad (2.30)$$

où

$$\mathbf{F} = \sum_{m=1}^M (c_m - \sigma) \nabla \tilde{u}_m \quad \text{et} \quad g = - \sum_{m=1}^M c_m \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m$$

Lorsqu'on utilise l'écriture de w_h donnée par (2.29), nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{N_v} w_i \int_{\Omega_h} \sigma \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_k \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_h} \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi_k \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{\infty,h}} g \varphi_k \, ds \quad \forall w \in V_h, \quad \varphi_k \in \mathcal{B}_h, \quad (2.31)$$

avec

$$a_h(w_h, \varphi_k) = \sum_{i=1}^{N_v} w_i \int_{\Omega_h} \sigma \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_k \, d\mathbf{x},$$

$$l_h(\varphi_k) = \int_{\Omega_h} \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi_k \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{\infty,h}} g \varphi_k \, ds.$$

En définissant

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= (w_i)_{1 \leq i \leq N_v}, \\ A_{ij} &:= a_h(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega_h} \sigma \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x}, \\ b_i &:= l_h(\varphi_i) = \int_{\Omega_h} \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi_i \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{\infty,h}} g \varphi_i \, ds, \end{aligned}$$

nous obtenons le problème variationnel (2.30) sous forme matricielle

$$A\mathbf{W} = \mathbf{b} \tag{2.32}$$

où A est une matrice de taille $N_v \times N_v$, \mathbf{W} un vecteur de taille N_v et \mathbf{b} un vecteur de taille N_v . La contrainte de moyenne nulle $\int_{\Omega_h} w_h = 0$ doit être rajoutée au système linéaire (2.32) pour avoir l'unicité.

Remarque 2.13. Sans la condition de moyenne nulle, la forme bilinéaire n'est pas coercive puisque l'inégalité de Poincaré-Wirtinger ne s'applique plus. Ainsi, le potentiel w est obtenu à une constante additive près.

En général, la condition de moyenne nulle n'est pas prise en compte dans la construction de l'espace V_h .

Proposition 2.14. *La matrice A obtenue ci-dessus est symétrique et semi-définie positive.*

Démonstration. La symétrie de la matrice A vient de celle de la forme bilinéaire a_h . Soit $y \in \mathbb{R}^{N_v}$ tel que

$$v_h = \sum_{j=1}^{N_v} y_j \varphi_j(\mathbf{x}).$$

Puisque nous n'avons pas la condition de moyenne nulle alors la forme bilinéaire a_h n'est plus coercive. Et nous avons

$$y^T A y = a_h(v_h, v_h) = \int_{\Omega} \sigma \nabla v_h \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} \geq \sigma_{\min} \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0, \quad \forall y \neq 0$$

où σ_{\min} est définie dans le théorème 2.9 ($0 < \sigma_{\min} \leq \sigma(\mathbf{x}) \leq \sigma_{\max}$). Ce qui montre que la matrice A est semi-définie positive. □

Théorème 2.15. *Le système linéaire (2.32) admet une unique solution dans le sous-espace vectoriel $(Ker(A))^\perp$ (espace orthogonal de $Ker(A)$) où $Ker(A) = Vect(\mathbf{e})$ avec $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^t$ est le vecteur dont tous les coefficients valent 1.*

Démonstration. Nous montrons que le noyau de A est donné par $Vect(\mathbf{e})$. Soit $y \in Ker(A)$ alors $y \in \mathbb{R}^{N_v}$ tel que $Ay = 0$. Ceci équivaut à

$$\sum_{j=1}^{N_v} a_h(\varphi_j, \varphi_i) y_j = 0.$$

En multipliant cette relation par y_i et en sommant sur $i = 1, \dots, N_v$, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{N_v} \sum_{j=1}^{N_v} a_h(\varphi_j, \varphi_i) y_j y_i = 0.$$

Ce qui équivaut à

$$a_h(v_h, v_h) = 0 = \int_{\Omega} \sigma \nabla v_h \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} \geq \sigma_{\min} \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ avec } v_h = \sum_{j=1}^{N_v} y_j \varphi_j(\mathbf{x}).$$

Ce qui entraîne que $\nabla v_h = 0$ et par conséquent $v_h = \sum_{j=1}^{N_v} y_j \varphi_j(\mathbf{x}) = \text{constante}$. Donc,

$y \in \text{Vect}(e)$. Réciproquement, soit $y \in \text{Vect}(e)$ alors $y = c \times e$ et $(Ay)_i = \sum_{j=1}^{N_v} A_{ij} y_j =$

$c \sum_{j=1}^{N_v} A_{ij} \times 1 = a_h(v_h, \varphi_i) = 0$ car y représente les coefficients de la fonction $v_h \equiv c$. Ceci

montre que $y \in \text{Ker}(A)$. Le système linéaire peut s'écrire alors

$$A\mathbf{W} = \mathbf{b} \text{ s.c } \mathbf{W}^t \mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (2.33)$$

□

Nous présenterons dans la partie 2.3.3 quelques méthodes permettant de résoudre un problème avec condition de Neumann.

2.3.2 Analyse de convergence

Définition 2.16. Pour une famille de problèmes discrets (2.27), les formes bilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$ sont uniformément V_h -coercives s'il existe une constante α indépendante de h telle que

$$a_h(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_{H^1(\Omega_h)}^2 \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.34)$$

Notons que la famille $(a_h(\cdot, \cdot))_h$ de formes bilinéaires définie par (2.28) est uniformément V_h -coercive puisque les extensions $\tilde{\sigma}_i$ sont uniformément minorées par σ_{\min} et Ω_h est inclus dans le domaine $\tilde{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^L \tilde{\Omega}_i$ pour tout h . L'inégalité de Poincaré-Wirtinger reste alors vraie sur Ω_h avec une constante indépendante de h .

La forme bilinéaire discrète $a_h(\cdot, \cdot)$ est naturellement définie pour des éléments dans X_h . Pour obtenir des estimations d'erreurs de la discrétisation, nous avons besoin d'étendre cette définition aux éléments dans $\prod_{i=1}^L H^1(\tilde{\Omega}_i)$,

$$\forall \tilde{w} = (\tilde{w}_i)_{i=1, \dots, L} \in \prod_{i=1}^L H^1(\tilde{\Omega}_i), \quad a_h(\tilde{w}, v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^L \int_{\Omega_{i,h}} \tilde{\sigma}_i \nabla \tilde{w}_i \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x}.$$

De même, nous cherchons à définir la forme bilinéaire continue $a(\cdot, \cdot)$ aussi bien que la forme linéaire $l(\cdot)$ pour des éléments $v_h \in X_h$ qui sont définis seulement sur Ω_h . Sans perte de généralité, on peut supposer que tout tétraèdre $T \in \mathcal{T}_h$ a au plus une face sur le bord extérieur $\Gamma_{\infty,h}$. Soit T un tétraèdre du bord et désignons par f_h^1 sa face située sur $\Gamma_{\infty,h}$. Désignons par f_h^2, \dots, f_h^4 les faces de T qui ne sont pas contenues dans $\Gamma_{\infty,h}$. La face f_h^1 est l'approximation d'une surface courbe $\tilde{f}^1 \subset \Gamma_{\infty}$. Soit \tilde{T} le tétraèdre courbe avec les faces $\tilde{f}^1, f_h^2, \dots, f_h^4$. Maintenant, considérons $v_h \in X_h$. v_h coïncide sur T avec un polynôme p de degré inférieur ou égale à 1. Définissons v_h sur \tilde{T} de manière unique par

$$v_h|_{\tilde{T}} = p.$$

Cette définition permet de définir $a(w_h, v_h)$ et $l(v_h)$ pour des éléments dans X_h .

Théorème 2.17. *Considérons une famille régulière de maillages $(\mathcal{T}_h)_h$ couvrant la géométrie de Ω et de ses sous-domaines dans le sens de (2.25). Supposons que $(\mathcal{T}_h)_h$ satisfait l'estimation inverse suivante avec une constante $C_{\text{inv}} > 0$ indépendante de h ,*

$$\forall K \in \bigcup_h \mathcal{T}_h, \quad \frac{h}{h_K} \leq C_{\text{inv}}. \quad (2.35)$$

Soit $\tilde{w} = (\tilde{w}_i)_{i=1,\dots,L} \in \prod_{i=1}^L H^2(\tilde{\Omega}_i)$ une extension de w , la solution du problème (2.21), telle que $\tilde{w}_i|_{\Omega_i} = w$ sur Ω_i pour $i = 1, \dots, L$. Soit $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_i)_{i=1,\dots,L} \in \prod_{i=1}^L W^{1,\infty}(\tilde{\Omega}_i)$ une extension de σ telle que pour $i = 1, \dots, L$ $\tilde{\sigma}_i|_{\Omega_i} = \sigma_i$ on Ω_i et $i = 1, \dots, L$ $\tilde{\sigma}_i|_{\Omega_i} = \sigma_i$ on Ω_i presque partout.

Considérons la famille de problème discrets (2.27) et supposons que les formes bilinéaires associées $a_h(\cdot, \cdot)$ sont uniformément V_h -coercives. Pour tout h , soit $w_h \in V_h$ la solution du problème discret (2.27).

Alors, nous avons l'estimation d'erreur suivante,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L \|\tilde{w}_i - w_h\|_{H^1(\Omega_{i,h})} &\lesssim h \sum_{m=1}^M \left(\|\nabla \tilde{u}_m\|_{H^1(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m\|_{H^1(\Gamma_\infty)} \right) \\ &+ h^{3/2} \sum_{m=1}^M \left(\|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_{\infty,h})} + \|\nabla \tilde{u}_m\|_{H^1(\Gamma_{\infty,h})} \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

L'estimation d'erreur pour la solution approchée u_h découle immédiatement de (2.36). En effet, u_h est définie par $u_h = w_h + \tilde{u}$ et donc l'erreur $u_h - u$ coïncide avec $w_h - w$ qui peut être estimée par (2.36).

Le résultat du Théorème 2.17 repose sur l'estimation d'erreur abstraite suivante qui stipule que l'erreur de discrétisation peut être estimée par l'erreur d'interpolation sur X_h et l'erreur de consistance due à l'approximation du domaine de calcul. Il découle de la même manière comme dans [10], en prenant en compte les extensions de la conductivité σ sur les différents sous-domaines $\tilde{\Omega}_i$.

Proposition 2.18. *Considérons une famille de problèmes discrets de la forme (2.27) pour qui les formes bilinéaires associées $a_h(\cdot, \cdot)$ sont uniformément V_h -coercives. Pour tout h , soit $w_h \in V_h$ la solution du problème discret (2.27). Alors*

$$\sum_{i=1}^L \|\tilde{w}_i - w_h\|_{H^1(\Omega_{i,h})} \lesssim \inf_{v_h \in V_h} \sum_{i=1}^L \|\tilde{w}_i - v_h\|_{H^1(\Omega_{i,h})} + \sup_{\xi_h \in V_h} \frac{|a_h(\tilde{w}, \xi_h) - l_h(\xi_h)|}{\|\xi_h\|_{H^1(\Omega_h)}} \quad (2.37)$$

où $\tilde{w} = (\tilde{w}_i)_{i=1,\dots,L}$ est un élément arbitraire de $\prod_{i=1}^L H^1(\tilde{\Omega}_i)$.

Grâce à la régularité de la solution w de (2.21) sur les sous-domaines Ω_i , nous pouvons affirmer l'estimation de l'erreur d'interpolation suivante.

Proposition 2.19. *Considérons une famille $(X_h)_h$ d'espaces d'éléments finis de type $P1$ sur des triangulations régulières $(\mathcal{T}_h)_h$. Alors, nous avons l'estimation suivante pour tout $\tilde{w} = (\tilde{w}_i)_{i=1,\dots,L} \in \prod_{i=1}^L H^2(\tilde{\Omega}_i)$.*

$$\|\tilde{w}_i - \Pi_{i,h} \tilde{w}_i\|_{H^1(\Omega_{i,h})} \lesssim h \|\tilde{w}_i\|_{H^2(\tilde{\Omega}_i)}. \quad (2.38)$$

La proposition suivante concerne l'estimation de l'erreur de consistance $\frac{|a_h(\tilde{w}, \xi_h) - l_h(\xi_h)|}{\|\xi_h\|_{H^1(\Omega_h)}}$:

Proposition 2.20. Soit $\tilde{w} = (\tilde{w}_i)_{i=1,\dots,L} \in \prod_{i=1}^L H^2(\tilde{\Omega}_i)$ une extension de w , la solution du problème (2.21), telle que $\tilde{w}_i|_{\Omega_i} = w$ sur Ω_i pour $i = 1, \dots, L$. Soit $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_i)_{i=1,\dots,L} \in \prod_{i=1}^L W^{1,\infty}(\tilde{\Omega}_i)$ une extension de σ telle que $i = 1, \dots, L$, $\tilde{\sigma}_i|_{\Omega_i} = \sigma_i$ sur Ω_i et $\tilde{\sigma}_i(\mathbf{x}) \geq \sigma_{\min}$ presque partout.

Supposons que la famille de maillages $(\mathcal{T}_h)_h$ satisfait l'estimation inverse (2.35).

Soit $w_h \in V_h$ la solution discrète du problème (2.27) où V_h est l'espace des éléments finis linéaires sur le maillage \mathcal{T}_h . Alors, nous avons l'estimation suivante pour tout $v_h \in V_h$,

$$\begin{aligned} \frac{|a_h(\tilde{w}, v_h) - l_h(v_h)|}{\|v_h\|_{H^1(\Omega_h)}} &\lesssim h \sum_{m=1}^M \left(\|\nabla \tilde{u}_m\|_{H^1(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m\|_{H^1(\Gamma_\infty)} \right) \\ &+ h^{3/2} \sum_{m=1}^M \left(\|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_{\infty,h})} + \|\nabla \tilde{u}_m\|_{H^1(\Gamma_{\infty,h})} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} &a_h(\tilde{w}, v_h) - l_h(v_h) \\ &= \sum_{i=1}^L \int_{\Omega_{i,h} \cap \Omega_i} (\sigma_i \nabla w_i - \mathbf{F}_i) \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{i,h} \setminus \tilde{\Omega}_i} (\tilde{\sigma}_i \nabla \tilde{w}_i - \tilde{\mathbf{F}}_i) \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{\infty,h}} \tilde{g} v_h \, ds \\ &= \int_{\Omega_h} (\sigma \nabla w - \mathbf{F}) \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^L \int_{\Omega_i \setminus \tilde{\Omega}_{i,h}} (\sigma \nabla w - \mathbf{F}) \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \sum_{i=1}^L \int_{\Omega_{i,h} \setminus \tilde{\Omega}_i} (\tilde{\sigma}_i \nabla \tilde{w}_i - \tilde{\mathbf{F}}_i) \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{\infty,h}} \tilde{g} v_h \, ds \\ &= \sum_{i=1}^L \int_{\Omega_{i,h} \setminus \tilde{\Omega}_i} (\tilde{\sigma}_i \nabla \tilde{w}_i - \tilde{\mathbf{F}}_i) \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^L \int_{\Omega_i \setminus \tilde{\Omega}_{i,h}} (\sigma \nabla w - \mathbf{F}) \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Gamma_\infty} g v_h \, ds - \int_{\Gamma_{\infty,h}} \tilde{g} v_h \, ds, \end{aligned}$$

en prenant en compte l'égalité variationnelle (2.21) pour w . Les deux premiers termes dans l'expression ci-dessus sont d'ordre h selon les estimations suivantes (voir e.g. [50]) :

$$\|\tilde{\sigma}_i \nabla \tilde{w}_i - \tilde{\mathbf{F}}_i\|_{L^2(\Omega_{i,h} \setminus \tilde{\Omega}_i)} \lesssim h \|\tilde{\sigma}_i \nabla \tilde{w}_i - \tilde{\mathbf{F}}_i\|_{H^1(\tilde{\Omega}_i)}, \quad (2.40a)$$

$$\|\sigma_i \nabla w_i - \mathbf{F}_i\|_{L^2(\Omega_i \setminus \tilde{\Omega}_{i,h})} \lesssim h \|\sigma_i \nabla w_i - \mathbf{F}_i\|_{H^1(\Omega_i)}. \quad (2.40b)$$

Notons que les termes de droite dans (2.40) dépendent continûment des données \mathbf{F} et g si nous supposons que l'opérateur extension de Ω_i vers $\tilde{\Omega}_i$ est continu. Alors

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^L \int_{\Omega_{i,h} \setminus \tilde{\Omega}_i} (\tilde{\sigma}_i \nabla \tilde{w}_i - \tilde{\mathbf{F}}_i) \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_i \setminus \tilde{\Omega}_{i,h}} (\sigma \nabla w - \mathbf{F}) \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} \\ &\lesssim h \left(\sum_{m=1}^M (\|\nabla \tilde{u}_m\|_{H^1(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m\|_{H^1(\Gamma_\infty)}) \right) \|v_h\|_{H^1(\Omega_h)}. \end{aligned}$$

La norme H^1 de v_h sur Ω a été majorée par $\|v_h\|_{H^1(\Omega_h)}$ à une constante multiplicative près ce qui est possible chaque fois que le paramètre du maillage h est assez petit (voir e.g. [34]).

Pour estimer les intégrales de bord, soit $f_h \subset \Gamma_{\infty,h}$ une des faces du bord. Alors f_h est l'approximation du premier ordre d'une surface courbe $f \subset \Gamma_\infty$ définie par les nœuds

de f_h . Soit φ la paramétrisation de classe \mathcal{C}^2 qui relie f_h à f . $\varphi(s) - s$ représente l'erreur d'interpolation avec des polynômes de degré 1.

Donc,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_\infty} g v_h ds - \int_{\Gamma_{\infty,h}} \tilde{g} v_h ds \\
&= \sum_{f_h \subset \Gamma_{\infty,h}} \int_{f_h} ((g v_h)(\varphi(s)) - (g v_h)(s)) ds + \int_{f_h} (g - \tilde{g})(s) v_h(s) ds \\
&= \sum_{f_h \subset \Gamma_{\infty,h}} \int_{f_h} (\nabla_s (g v_h))(s) \cdot (\varphi(s) - s) + o(\|\varphi(s) - s\|) ds + \int_{f_h} (g - \tilde{g})(s) v_h(s) ds \\
&\lesssim \sum_{f_h \subset \Gamma_{\infty,h}} \left(\|v_h \nabla_s g\|_{L^2(f_h)} + \|g \nabla_s v_h\|_{L^2(f_h)} \right) \|\varphi - \Pi_{f_h} \varphi\|_{L^2(f_h)} + \|g - \tilde{g}\|_{L^2(f_h)} \|v_h\|_{L^2(f_h)}.
\end{aligned}$$

Il découle de la régularité de g que $\|g\|_{W^{1,\infty}(f_h)}$ est bornée indépendamment de h . Nous obtenons alors, à partir d'estimations standards dans les espaces vectoriels de polynômes, que

$$\|v_h \nabla_s g\|_{L^2(f_h)} + \|g \nabla_s v_h\|_{L^2(f_h)} \lesssim \|g\|_{W^{1,\infty}(f_h)} \|v_h\|_{H^1(f_h)} \lesssim h^{-1/2} \|g\|_{W^{1,\infty}(f_h)} \|v_h\|_{H^1(T)}$$

à condition que les maillages satisfassent l'estimation inverse (2.35).

Nous déduisons des estimations d'interpolation classiques que

$$\|\varphi - \Pi_{f_h} \varphi\|_{L^2(f_h)} \lesssim h^2$$

avec une constante dépendant de $|\varphi|_{H^2(f_h)}$ qui peut être choisie indépendante de h . Il reste à estimer le terme $\|g - \tilde{g}\|_{L^2(f_h)} \|v_h\|_{L^2(f_h)}$. Rappelons que la normale extérieure sur f est donnée par $\mathbf{n} = -\nabla_s \varphi$ puisque φ est la paramétrisation de f . Alors,

$$g - \tilde{g} = \sum_{m=1}^M c_m \nabla \tilde{u}_m \cdot (\nabla_s \varphi - \mathbf{n}|_{f_h}).$$

$\nabla_s \varphi - \mathbf{n}|_{f_h}$ est le gradient de l'erreur d'interpolation entre φ et son interpolée P1. Cela donne

$$\|g - \tilde{g}\|_{L^2(f_h)} \lesssim h \sum_{m=1}^M \|\nabla \tilde{u}_m\|_{L^2(f_h)}$$

avec une constante dépendante de $|\varphi|_{H^2(f_h)}$ mais indépendante de h . Finalement, il découle de la continuité de l'opérateur trace sur l'élément de référence que

$$\|v_h\|_{L^2(f_h)}^2 \lesssim \frac{\text{meas}(f_h)}{\text{meas}(T)} h^2 \|v\|_{H^1(T)}^2 \lesssim h \|v\|_{H^1(T)}^2$$

à condition que l'estimation inverse soit vraie. Cela donne l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
\frac{|a_h(\tilde{w}, v_h) - l_h(v_h)|}{\|v_h\|_{H^1(\Omega_h)}} &\lesssim h \sum_{m=1}^M \left(\|\nabla \tilde{u}_m\|_{H^1(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m\|_{H^1(\Gamma_\infty)} \right) \\
&+ h^{3/2} \sum_{m=1}^M \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_{\infty,h})} + h^{3/2} \sum_{m=1}^M \|\nabla \tilde{u}_m\|_{H^1(\Gamma_{\infty,h})}
\end{aligned}$$

ce qui prouve (2.39). \square

2.3.3 Implémentation du problème discret

Dans cette partie, nous allons exposer différentes méthodes pour prendre en compte la condition de moyenne nulle. Nous citerons les méthodes décrites dans [61]. Il s'agit de la méthode de pénalisation et de la méthode qui consiste à introduire un multiplicateur de Lagrange. Ensuite, nous présenterons brièvement la méthode itérative GMRES (Generalized minimal residual method)[53] qui sera utilisée pour la résolution numérique des différents systèmes linéaires.

Méthode de pénalisation

Elle consiste à remplacer la condition aux limites de type Neumann par une condition mixte sur le bord en introduisant ϵ un petit paramètre de pénalisation [61]. Nous avons alors la formulation variationnelle du problème modifié

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla w^\epsilon \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} + \epsilon \int_{\Gamma_\infty} w^\epsilon v \, ds = l(v), \quad (2.41)$$

où $l(v)$ est définie par (2.15). La forme bilinéaire du problème pénalisé est alors coercive dans $H^1(\Omega)$ avec $\alpha = \epsilon$. Donc, le problème pénalisé admet une unique solution w^ϵ . Nous avons l'estimation d'erreur suivant pour la solution du problème pénalisé (Lemme de Céa)

$$\|w^\epsilon - w_h^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}\left(\frac{h}{\epsilon}\right),$$

où w_h^ϵ est la solution approchée du problème pénalisé. Nous avons également la convergence en $\mathcal{O}(\epsilon)$ de w^ϵ vers w dans $H^1(\Omega)$ lorsque ϵ tend vers zéro. Nous obtenons alors

$$\|w - w_h^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \|w - w^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} + \|w^\epsilon - w_h^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}\left(\epsilon + \frac{h}{\epsilon}\right). \quad (2.42)$$

L'inconvénient de cette méthode vient de la difficulté de choisir le paramètre de pénalisation. En effet, si ϵ est trop petit le deuxième terme dans \mathcal{O} devient trop grand et si ϵ est trop grand le premier terme devient trop grand. Le compromis idéal est alors $\epsilon = \sqrt{h}$.

Multiplicateur de Lagrange

Une autre méthode consiste à introduire la contrainte de moyenne nulle à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange noté λ . Elle revient à résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} A\mathbf{W} + \lambda\mathbf{B} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{B}^T \mathbf{w} &= 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et le vecteur \mathbf{B} est défini par les composantes

$$B_i = \int_{\Omega} \varphi_i \, d\mathbf{x}.$$

Proposition 2.21. *La matrice définie par le système linéaire (2.43) est inversible.*

Démonstration. Nous avons que la forme variationnelle discrète

$$\text{Trouver } w_h \in V_h \text{ tel que } \int_{\Omega_h} \sigma \nabla w_h \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_h} \mathbf{F} \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{\infty,h}} g v_h \, ds \quad \forall v_h \in V_h$$

admet une unique solution. Pour prouver que le système linéaire (2.43) est inversible, il suffit de montrer l'équivalence entre la forme variationnelle discrète et le système linéaire (2.43). Nous rappelons que la matrice $A \in \mathcal{M}_{N_v}$ et le vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N_v}$ sont définis par

$$A_{ij} := a_h(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega_h} \sigma \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} \text{ et}$$

$$b_i := l_h(\varphi_i) = \int_{\Omega_h} \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi_i \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{\infty, h}} g \varphi_i \, ds, \forall \varphi_i \in \mathbb{B}_h.$$

Alors, le système linéaire (2.43) peut s'écrire de la manière suivante

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N_v} w_i \left(\int_{\Omega_h} \sigma \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} \right) + \lambda \left(\int_{\Omega_h} \varphi_j \, d\mathbf{x} \right) &= \int_{\Omega_h} \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{\infty, h}} g \varphi_j \, ds \\ \sum_{j=1}^{N_v} w_j \left(\int_{\Omega_h} \varphi_j \, d\mathbf{x} \right) &= 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

En multipliant la première relation du système (2.44) par v_j et en sommant sur $j = 1, \dots, N_v$, nous obtenons

$$\sum_{i,j=1}^{N_v} w_i \left(\int_{\Omega_h} \sigma \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} \right) v_j + \sum_{j=1}^{N_v} \lambda \left(\int_{\Omega_h} \varphi_j \, d\mathbf{x} \right) v_j = \sum_{j=1}^{N_v} v_j \left(\int_{\Omega_h} \mathbf{F} \cdot \nabla \varphi_j \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{\infty, h}} g \varphi_j \, ds \right)$$

avec la contrainte

$$\sum_{j=1}^{N_v} w_j \left(\int_{\Omega_h} \varphi_j \, d\mathbf{x} \right) = 0.$$

Le système linéaire (2.44) devient alors

$$\begin{cases} \int_{\Omega_h} \sigma \nabla w_h \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} + \lambda \int_{\Omega_h} v_h \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_h} \mathbf{F} \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{\infty, h}} g v_h \, ds \\ \int_{\Omega_h} w_h \, d\mathbf{x} &= 0. \end{cases}$$

Ceci équivaut à la forme variationnelle

$$\text{trouver } w_h \in V_h \text{ tel que } a_h(w_h, v_h) = l_h(v_h), \forall v_h \in V_h.$$

□

La résolution du système linéaire (2.43) donne à la fois la solution à moyenne nulle et le multiplicateur de Lagrange associé. Cette dernière méthode est plus robuste que la méthode de pénalisation (voir [61]). Dans la suite, nous utiliserons cette méthode du multiplicateur de Lagrange pour résoudre notre problème (2.32).

Méthode GMRES

GMRES [53] est une méthode itérative de résolution de systèmes linéaires de type

$$\mathcal{A}\mathbf{W} = \mathcal{F}, \quad (2.45)$$

où $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{N_v+1}$ est supposée inversible. Le principe de la méthode GMRES consiste à minimiser la norme du vecteur résidu sur un sous-espace de Krylov à chaque itération. Elle donne une approximation de la solution \mathbf{W} de (2.45) sous la forme $\mathbf{W}_0 + \mathbf{Z}$ où \mathbf{W}_0 est le vecteur initial de la solution et \mathbf{Z} appartient à l'espace de Krylov \mathbb{K}_k avec k le numéro de l'itération. Le sous-espace de Krylov \mathbb{K}_k s'écrit

$$\mathbb{K}_k = \text{Vect}\{\mathbf{r}_0, \mathcal{A}\mathbf{r}_0, \mathcal{A}^2\mathbf{r}_0, \dots, \mathcal{A}^{k-1}\mathbf{r}_0\},$$

où $\mathbf{r}_0 = \mathcal{F} - \mathcal{A}\mathbf{W}_0$ est le vecteur résidu initial.

Ainsi, nous cherchons \mathbf{Z} sous la forme $\mathbf{Z} = V_k \mathbf{y}$ où $V_k = \{v_1, \dots, v_k\}$ est une matrice de taille $(N_v + 1, k)$ formée de vecteurs colonnes orthonormés de l'espace de Krylov \mathbb{K}_k et \mathbf{y} minimise la fonction $J(\mathbf{y}) = \|\beta \mathbf{e}_1 - H_k \mathbf{y}\|_2$ avec $\beta = \|\mathbf{r}_0\|_2$ et \mathbf{e}_1 le vecteur unité. Les vecteurs orthonormés v_k et la matrice H_k provenant d'une décomposition de Hessenberg sont obtenus par la méthode d'Arnoldi. Par conséquent, la solution est donnée par $\mathbf{W}_k = \mathbf{W}_0 + V_k \mathbf{y}_k$ à chaque itération k où \mathbf{y}_k minimise la fonction $J(\mathbf{y})$ avec $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$.

La méthode GMRES peut être couteuse car elle demande un stockage des vecteurs colonnes de V_k et que le coût de la résolution est en $\mathcal{O}(k^3)$. Pour remédier à ce problème, nous pouvons utiliser la méthode restarted GMRES. Elle consiste à fixer une taille maximale m pour V_k . Et lorsque cette taille m est atteinte, V_k sera supprimée et la méthode GMRES est relancée en utilisant comme vecteur initial \mathbf{W}_m .

Pour la discrétisation du problème (2.31) et la résolution du système linéaire (2.32) par la méthode du multiplicateur de Lagrange, nous utilisons le logiciel d'éléments finis FreeFem++ [31] qui a été développé au laboratoire Jacques-Louis Lions de l'université Pierre et Marie Curie. Les différents systèmes linéaires sont résolus avec le solveur itératif GMRES avec restart pour une tolérance de 10^{-6} .

2.3.4 Maillages

Dans cette thèse, nous utilisons deux modèles de maillages pour modéliser la tête. Nous avons d'abord le maillage du modèle sphérique qui servira pour une première validation et évaluation de la méthode numérique puisqu'une solution analytique du problème direct est connue pour ce modèle. Ensuite, nous considérons le maillage du modèle réaliste qui est fourni par le laboratoire GRAMFC du CHU d'Amiens.

Modèle sphérique

Le modèle sphérique à trois couches composé du cerveau, du crâne et du scalp est utilisé. Les rayons des différentes couches sont fixés à 50 mm, 54 mm et 60 mm. Les conductivités choisies sont indiquées dans le tableau 2.1. Le maillage sphérique volumique est obtenu en deux étapes. Nous construisons d'abord un maillage sphérique surfacique, puis le maillage volumique est généré à partir de ce maillage surfacique. Les maillages sphériques surfaciques sont construits par le logiciel libre Gmsh [22] développé par Christophe Geuzaine de l'université de Liège et Jean-François Remacle de l'université de Louvain en Belgique. Ce logiciel permet de créer la géométrie sphérique puis de générer le maillage triangulaire surfacique. Ensuite, le maillage sphérique volumique tétraédrique est conçu avec le logiciel TetGen [29] créé par Hang Si de Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics (WIAS) à Berlin en Allemagne. TetGen est interfacé dans FreeFem++ [31] et il permet de générer un maillage volumique tétraédrique à partir d'un maillage surfacique donné. Le tableau 2.2 donne les différents maillages sphérique utilisés dans ce chapitre.

	Cerveau	Crâne	Scalp
Rayon [mm]	50	54	60
Conductivité [S/m]	0.33	0.04	0.33

TABLE 2.1 – Modèle sphérique à trois couches

Maillage	Nœuds	Tétraèdres	Nœuds de bord	h_{min} [m]	h_{max} [m]
M_1	102 540	594 907	16 936	$8.16 \cdot 10^{-4}$	$4.81 \cdot 10^{-3}$
M_2	302 140	1 855 005	23 339	$6.35 \cdot 10^{-4}$	$3.07 \cdot 10^{-3}$
M_3	596 197	3 632 996	54 290	$4.1 \cdot 10^{-4}$	$2.46 \cdot 10^{-3}$
M_{ref}	2 754 393	17 263 316	124 847	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$1.51 \cdot 10^{-3}$

TABLE 2.2 – Description des maillages du modèle sphérique à trois couches

Modèle réaliste

Le maillage du modèle réaliste modélise la géométrie de la tête le plus fidèlement possible. Ce modèle est propre à chaque sujet car sa construction nécessite d'abord l'acquisition d'images IRM du sujet. Nous considérons ici un maillage du modèle réaliste de tête d'un nouveau-né créé par Hamed Azizollah du laboratoire GRAMFC du CHU d'Amiens[3].

La génération d'un modèle de tête réaliste pour le nouveau-né est plus difficile comparée à celle de l'adulte. Les méthodes pour la segmentations automatique d'images cérébrales d'adultes ne sont plus performants chez le nouveau-né à cause d'un faible rapport signal à bruit, de l'effet de volume partiel et du manque de similitude anatomique entre les images cérébrales d'adultes et de nouveau-nés. Ensuite, l'extraction de l'os du crâne et des fontanelles des images IRM constitue une autre difficulté. Pour construire un maillage du modèle de tête réaliste comprenant les différents tissus de la tête d'un nouveau-né (cerveau, LCR, os du crâne, fontanelles et scalp), des images IRM et de scanner par tomographie d'un nouveau-né mâle, sain et âgé de 42 semaines sont utilisées. Les images IRM sont obtenues sur un scanner à résonance magnétique de 1.5 Tesla GE avec utilisant des séquences d'impulsions TR=4500ms et TE=149ms avec une résolution spatiale de $1 \times 0.47 \times 0.47 \text{ mm}^3$. Ces images permettront d'extraire les tissus mous comme le cerveau, le LCR et le scalp. Les images scanner par tomographie sont enregistrées séparément sur un scanner LightSpeed16 GE avec une résolution spatiale de $0.35 \times 0.35 \times 0.63 \text{ mm}^3$ et elles seront utilisées pour extraire les tissus durs comme le crâne.

Ensuite, les images IRM et scanner par tomographie sont recalées dans SPM8 (Wellcome Trust Center for Neuroimaging, UCL, Londres). Le cerveau et le LCR sont segmentés d'images IRM à l'aide d'une procédure de segmentation automatique dans SPM8. L'os du crâne est extrait des images de scanner par tomographie par une méthode de seuillage. Cette méthode consiste à faire une segmentation de l'histogramme des niveaux de gris de l'image. Les fontanelles sont elles délimitées manuellement par les écarts entre les os du crâne (Fig.2.1). Ensuite, les différents tissus segmentés sont retirés des images IRM pour obtenir le scalp. Enfin, la librairie so2mesh [18] de Matlab est utilisée pour construire le maillage tétraédrique du modèle de tête réaliste chez le nouveau-né avec une résolution de 1.1 mm. La description du maillage est donnée dans le tableau 2.3. Les conductivités des différents tissus de la tête sont indiquées dans le tableau 2.4.

Maillage	Nœuds	Tétraèdres	Nœuds de bord	h_{min} [m]	h_{max} [m]
M_{real}	108 669	590 878	55 660	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$14 \cdot 10^{-3}$

TABLE 2.3 – Description du maillage de tête réaliste



FIGURE 2.1 – Modèle de tête réaliste d'un nouveau-né. Gauche : crâne et fontanelles. Droite : Maillage des fontanelles.

Tissus	Cerveau (Ω_1)	LCR (Ω_2)	Crâne (Ω_3)	Fontanelles ($\Omega_{3,f}$)	Scalp (Ω_4)
Conductivités [S/m]	0.33	1.8	0.04	0.3	0.33

TABLE 2.4 – Conductivités des différents tissus de la tête

2.4 Résolution numérique dans le cas du modèle sphérique

2.4.1 Solution analytique

Dans la littérature [45, 68, 2], il existe différentes formules pour la solution analytique du problème direct en EEG dans le cas du modèle sphérique multi-couches de la tête. Ces formules analytiques permettent de calculer le potentiel électrique en supposant le modèle de tête comme des sphères concentriques avec des conductivités homogènes. La formule tirée de Ala et Francomano [2] sera utilisée dans cette thèse.

Nous considérons un modèle contenant N sphères concentriques de rayons $r_1 < r_2 < \dots < r_N$ avec des conductivités constantes σ_i , $i = 1, \dots, N$ dans chaque sphère. Nous supposons que la source est située dans la sphère la plus profonde à la position S avec un moment électrique \mathbf{q} . Alors le potentiel électrique observé à la position \mathbf{x}_j de la surface de la sphère extérieure est donné par

$$\Phi(S, \mathbf{x}_j, \mathbf{q}) = \frac{\mathbf{q}}{4\pi\sigma_N \mathbf{x}_j} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} \left(\frac{S}{\mathbf{x}_j} \right)^{n-1} \times f_n \left(n \cos \alpha P_n(\cos \gamma) + \cos \beta \sin \alpha P_n^1(\cos \gamma) \right), \quad (2.46)$$

où α est l'angle entre la position du dipôle S et le moment électrique \mathbf{q} , γ est l'angle entre la position du dipôle S et l'observation \mathbf{x}_j , β est l'angle entre les plans définis par S et \mathbf{q} et par S et \mathbf{x}_j , P_n et P_n^1 sont respectivement les polynômes de Legendre et les polynômes de Legendre associés. De plus, nous avons

$$f_n = \frac{n}{nm_{22} + (1+n)m_{21}},$$

où les coefficients m_{22} et m_{21} sont calculés via la formule suivante

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{(2n+1)^{N-1}} \times \prod_{i=1}^{N-1} \begin{bmatrix} n + \frac{(n+1)\sigma_i}{\sigma_{i+1}} & (n+1) \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{i+1}} - 1 \right) \left(\frac{r_{x_j}}{r_i} \right)^{2n+1} \\ n \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{i+1}} - 1 \right) \left(\frac{r_i}{r_{x_j}} \right)^{2n+1} & (n+1) + \frac{n\sigma_i}{\sigma_{i+1}} \end{bmatrix}.$$

L'implémentation de cette solution exacte est réalisée avec le logiciel matlab pour tirer profit des polynômes de Legendre déjà codés. Pour l'implémentation, cette série infinie sera tronquée. Le calcul de cette série est arrêté dès que les termes de la série deviennent négligeables ou qu'ils n'influent plus dans la somme. Dans ce cas précis, Les 50 premiers termes suffisent pour obtenir la solution.

2.4.2 Validation pour un modèle sans fontanelles

Deux critères sont communément utilisés pour la validation numérique des modèles en EEG [65]. Le premier, appelé mesure relative de différence (RDM : Relative Difference Measure), est donné par

$$\text{RDM} := \left\| \frac{u_h}{\|u_h\|_{L^2(\Gamma_{\infty,h})}} - \frac{u_{\text{ref}}}{\|u_{\text{ref}}\|_{L^2(\Gamma_{\infty,h})}} \right\|_{L^2(\Gamma_{\infty,h})}. \quad (2.47)$$

Le second est le facteur d'amplification (MAG : magnification factor) qui est défini par

$$\text{MAG} := \left| 1 - \frac{\|u_h\|_{L^2(\Gamma_{\infty,h})}}{\|u_{\text{ref}}\|_{L^2(\Gamma_{\infty,h})}} \right|. \quad (2.48)$$

Le RDM peut être interprété comme une erreur L^2 normalisée. Il montre que l'erreur n'est pas influencée par l'amplitude globale $\|u_h\|_{L^2(\Gamma_{\infty,h})}$ de la solution. Il mesure seulement l'erreur sur la topographie, i.e les défauts sur la distribution du potentiel à la surface. Tandis que le MAG mesure la différence d'amplitudes entre la solution globale et une solution de référence. Il est symétrique autour de zéro comparé à celui utilisé fréquemment dans la littérature [42], ce qui simplifie la comparaison des sur et sous-estimations de l'amplitude. Le RDM et le MAG sont des erreurs fonctionnelles par rapport à une solution de référence u_{ref} . Pour le modèle idéal où $u_h = u_{\text{ref}}$, on a $\text{RDM} = 0$ et $\text{MAG} = 0$. Dans le cas où les conductivités des différents tissus du modèle sphérique sont homogènes, le potentiel à la surface du scalp peut être exprimé comme une série infinie (2.46). Nous prenons ainsi pour u_{ref} la série tronquée de la solution exacte qui peut être facilement calculée. Nous calculons le RDM et le MAG pour différentes positions de sources et de maillages. Le moment électrique de la source est $\mathbf{q} = (0, 0, J)$ avec une intensité $J = 10^{-6} \text{A.m}^{-2}$.

Nous considérons d'abord une source placée sur l'axe z à différentes positions 30mm , 40mm , 45mm et 49mm qui correspondent respectivement à des excentricités de 0.6, 0.8, 0.9 et 0.98. Rappelons que l'excentricité de la source mesure la distance relative à l'interface cerveau/crâne et est définie par $1 - \text{dist}(S, \Gamma_{1,h})/r_1$ pour un dipôle situé au point S . La Figure 2.2 montre la convergence du facteur RDM par rapport au pas du maillage en échelle logarithmique pour différentes excentricités du dipôle. Ces résultats montrent que l'ordre de convergence diminue lorsque l'excentricité du dipôle augmente.

Nous allons étudier le comportement des facteurs RDM et MAG en fonction de l'excentricité du dipôle. Nous considérons que la source dipolaire varie le long de l'axe z entre les valeurs 10mm et 49mm qui correspondent respectivement à des excentricités de 0.2 et 0.98. Les résultats sont reportés sur la Figure 2.3. La précision de la méthode est très

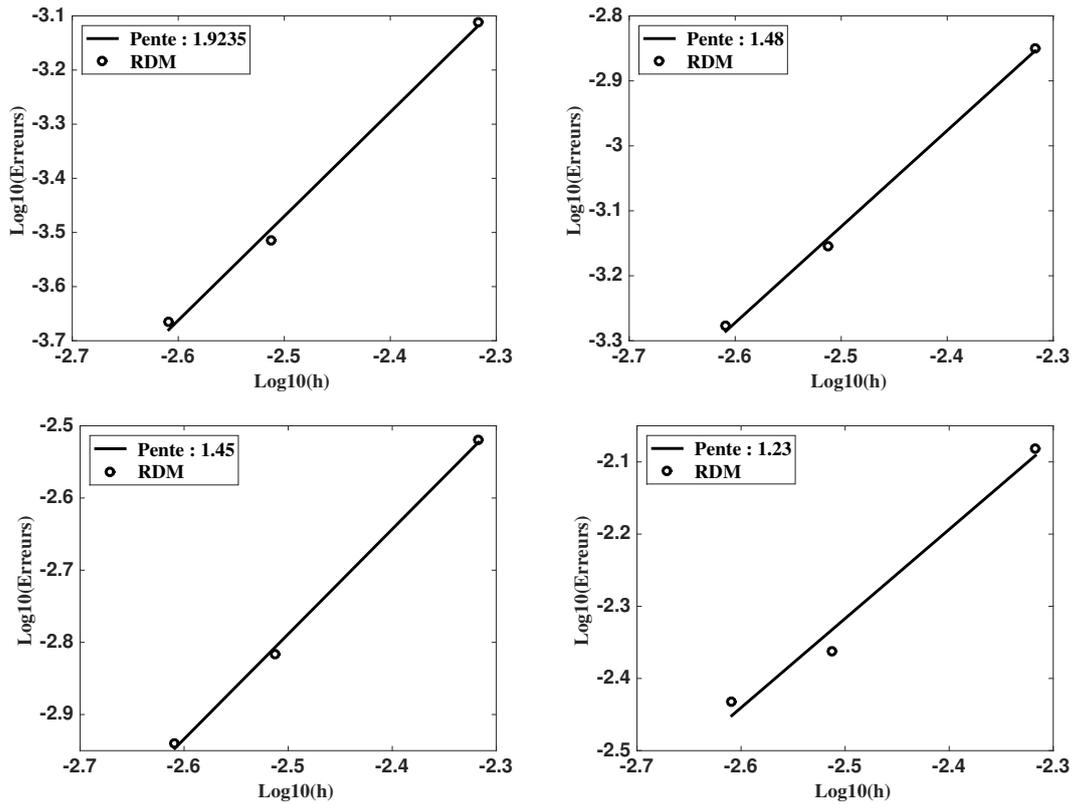


FIGURE 2.2 – RDM par rapport au pas de maillage h en échelle logarithme. Modèle de tête sphérique à trois couches sans fontanelles. Solution de référence exacte. Haut à gauche : excentricité 0.6. Haut à droite : excentricité 0.8. Bas à gauche : excentricité 0.9. Bas à droite : excentricité 0.98.

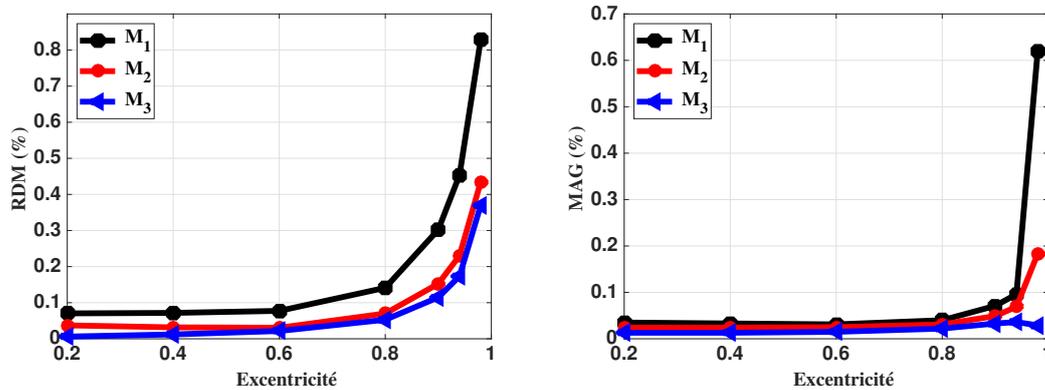


FIGURE 2.3 – Comportement des facteurs RDM et MAG par rapport à l'excentricité du dipôle. Différents pas de maillage (maillage le plus fin M_3). Modèle sphérique de tête à trois couches sans fontanelles. Solution de référence exacte.

satisfaisante pour toutes les positions du dipôle et tous les maillages. On voit que le RDM conserve une valeur en dessous de 0.9% pour tous les maillages testés et même inférieure à 0.5% pour les deux maillages les plus fins. Le facteur d'amplitude MAG garde une valeur inférieure à 0.7% pour tous les maillages jusqu'à une excentricité de 0.98. Globalement,

le RDM et le MAG diminuent lorsque le maillage devient fin. Cela valide la méthode de soustraction dans le cas du modèle de tête sphérique sans fontanelles.

On représente sur les Figures 2.4 et 2.5 la solution du potentiel électrique sur le scalp dans le cas d'un modèle de tête sphérique à trois couches sans fontanelles pour différentes excentricités. Elles montrent respectivement l'influence de l'excentricité (ou de la position) et de la direction du moment sur la distribution du potentiel électrique sur le scalp.

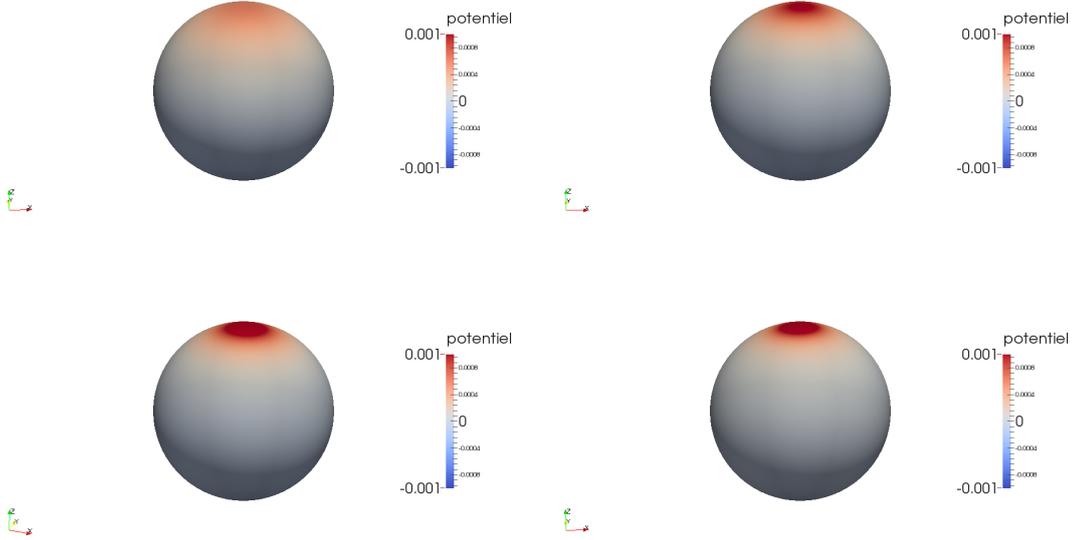


FIGURE 2.4 – Solution du potentiel électrique sur le scalp. Simulation faite sur le maillage M_2 . Haut à gauche : potentiel avec l'excentricité 0.6. Haut à droite : potentiel avec l'excentricité 0.8. Bas à gauche : potentiel avec l'excentricité 0.9. Bas à droite : potentiel avec l'excentricité 0.98.

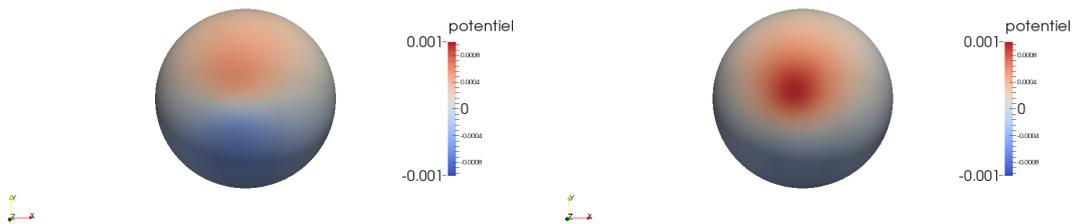


FIGURE 2.5 – Solution du potentiel électrique sur le scalp. Simulation faite sur le maillage M_2 . Gauche : excentricité 0.8 et $\mathbf{q} = (0, J, 0)$. Droite : excentricité 0.8 et $\mathbf{q} = \left(0, \frac{J}{\sqrt{2}}, \frac{J}{\sqrt{2}}\right)$.

2.4.3 Validation pour un modèle avec fontanelles

Dans cette partie, nous prenons maintenant en compte la fontanelle principale, i.e. la fontanelle antérieure située entre l'os frontal et pariétal. La modélisation de la fontanelle principale dans le modèle sphérique à trois couches est réalisée par la définition d'une

région $\Omega_f \subset \Omega_2$. Dans Ω_2 , la conductivité est définie par $\sigma_2(\mathbf{x}) = \sigma_{os} + (\sigma_f - \sigma_{os})g(\mathbf{x})$ avec $\sigma_{os} = 0.04S.m^{-1}$, $\sigma_f = 0.3S.m^{-1}$ et une fonction gaussienne $g(\mathbf{x}) = \exp[-\alpha(x_1^2 + x_2^2)]$. Le paramètre dans la définition de g est $\alpha = 10^4$. Ceci revient à dire que la fontanelle est limitée (jusqu'à 1.5%) dans la région $\Omega_f := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_2 : x_1^2 + x_2^2 \leq L^2\}$ avec $L = 20mm$ (voir Figure 2.6). Par conséquent, la gaussienne g permet de modéliser le processus d'ossification de la fontanelle et conduit à une fonction continue σ_2 . Différentes valeurs des conductivités de la fontanelle et du crâne chez le nouveau-né peuvent être trouvées dans la littérature. Un ensemble de paramètres de conductivités des tissus et de modèles EEG dans le cas du nouveau-né sont comparés dans la partie 2.6.

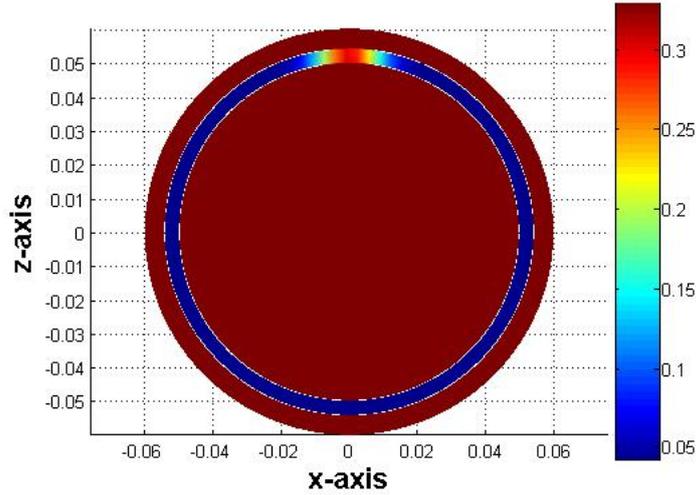


FIGURE 2.6 – Modèle de tête sphérique avec la fontanelle principale.

La validation numérique est réalisée pour différentes configurations. Notons qu'aucune solution analytique n'est disponible dans le cas du modèle sphérique avec fontanelles. Par conséquent, les solutions numériques sont donc comparées avec une solution numérique de référence u_{ref} calculée sur le maillage de référence très fin M_{ref} (cf. Table 2.2). Nous définissons l'erreur globale sur l'ensemble du domaine Ω par

$$\|u_h - u_{ref}\|_{H^1(\Omega_h)}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|w_h - w_{ref}\|_{H^1(\Omega_h)}^2.$$

La Figure 2.7 montre les deux courbes de convergence en norme H^1 de l'erreur relative en échelle logarithmique. Le graphe de gauche correspond à une source dipolaire à la position $S = (0, 0, 40mm)$ et de moment $\mathbf{q} = (0, 0, J)$ avec une intensité $J = 10^{-6}A.m^{-2}$. L'excentricité de la source est donc égale à 0.8. Le graphe de droite montre le taux de convergence pour deux sources profondes avec une excentricité $e = 0.2$ situées respectivement à $S_1 = (0, 0, 10mm)$ et $S_2 = (0, 10mm, 0)$ avec des moments respectifs $\mathbf{q}_1 = (0, 0, J)$ et $\mathbf{q}_2 = (0, J, 0)$. Les résultats numériques corroborent les estimations de convergence de la partie 2.3 qui prédit un taux de convergence théorique de $\tau = 1$. On peut aussi noter que le taux de convergence numérique ne dépend ni de l'excentricité, ni du nombre de sources même si les erreurs sont plus grandes pour les sources situées à proximité de l'interface cerveau/crâne.

Nous reportons sur la Figure 2.8 les coefficients RDM et MAG pour différentes positions de source et différents pas de maillage. Les conclusions sont les mêmes que celles obtenues pour le modèle de tête sphérique sans fontanelles. Les facteurs RDM et MAG gardent

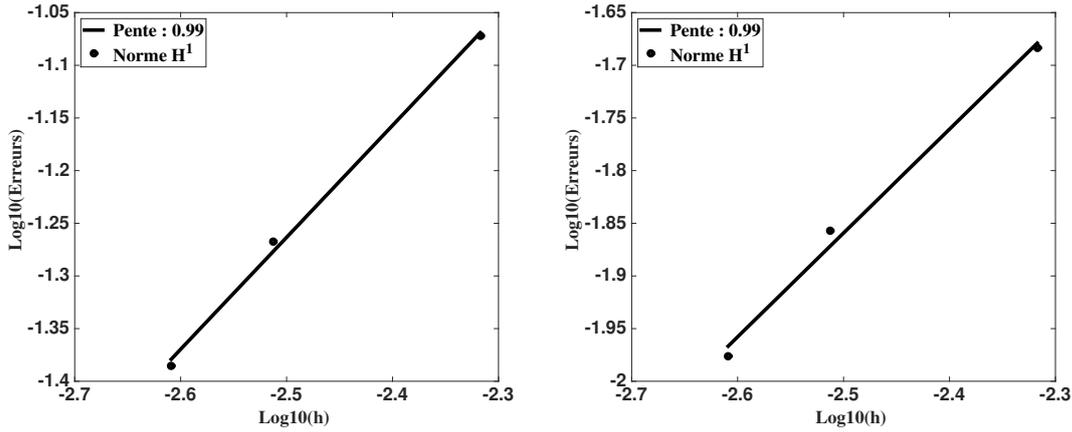


FIGURE 2.7 – Erreur en norme H^1 par rapport au pas de maillage h en échelle logarithme. Modèle de tête sphérique à trois couches avec la fontanelle antérieure (Comportement gaussien pour la conductivité de la fontanelle). Solution numérique de référence calculée sur M_{ref} . Gauche : une seule source $S = (0, 0, 40\text{mm})$, $\mathbf{q} = (0, 0, J)$. Droite : deux sources $S_1 = (0, 0, 10\text{mm})$, $S_2 = (0, 10\text{mm}, 0)$ avec des moments $\mathbf{q}_1 = (0, 0, J)$, $\mathbf{q}_2 = (0, J, 0)$. Intensité $J = 10^{-6} \text{A.m}^{-2}$.

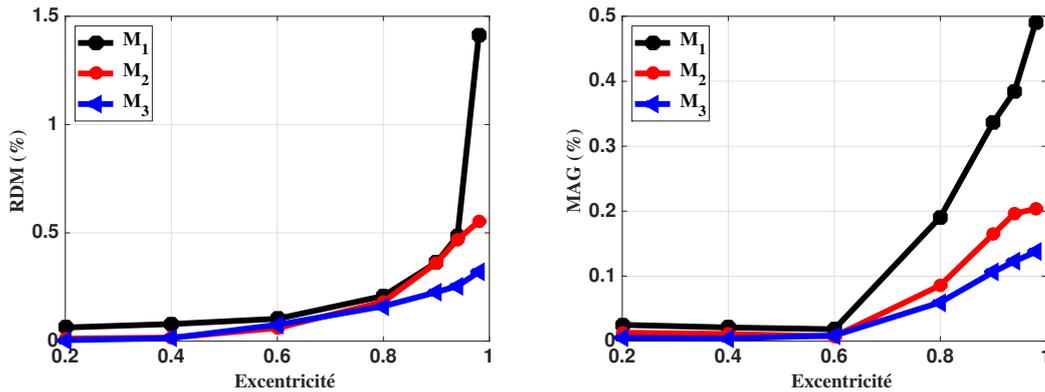


FIGURE 2.8 – Comportement des facteurs RDM et MAG par rapport à l'excentricité de la position du dipôle pour différents maillages. Modèle de tête sphérique à trois couches avec la fontanelle antérieure (Comportement gaussien pour la conductivité de la fontanelle). Solution numérique de référence calculée sur M_{ref} .

des valeurs inférieures à 1.5% et 0.5% respectivement pour tous les maillages et toutes les excentricités, et diminuent avec le pas de maillage. Cela valide la méthode de soustraction dans le cas du modèle de tête sphérique avec une fontanelle antérieure.

On remarque sur les Figures 2.3 et 2.8 que l'erreur augmente avec l'excentricité. En effet, une analyse minutieuse du terme de droite sur l'estimation de l'erreur (2.36) dans le cas où σ_1 est constante sur Ω_1 montre que l'erreur en norme H^1 peut être majorée par $\delta^{-5/2}$ à une constante indépendante près de h et δ (cf. [65]). Ici, δ désigne la distance entre la source et l'interface cerveau/crâne,

$$\delta = \max_{m=1:M} \text{dist}(S_m, \Gamma_1)$$

qui est liée à l'excentricité e par

$$e = 1 - \frac{\delta}{r_1}.$$

Nous représentons sur la Figure 2.9 la solution du potentiel électrique sur le scalp dans le cas du modèle sphérique à trois couches avec la fontanelle intérieure.

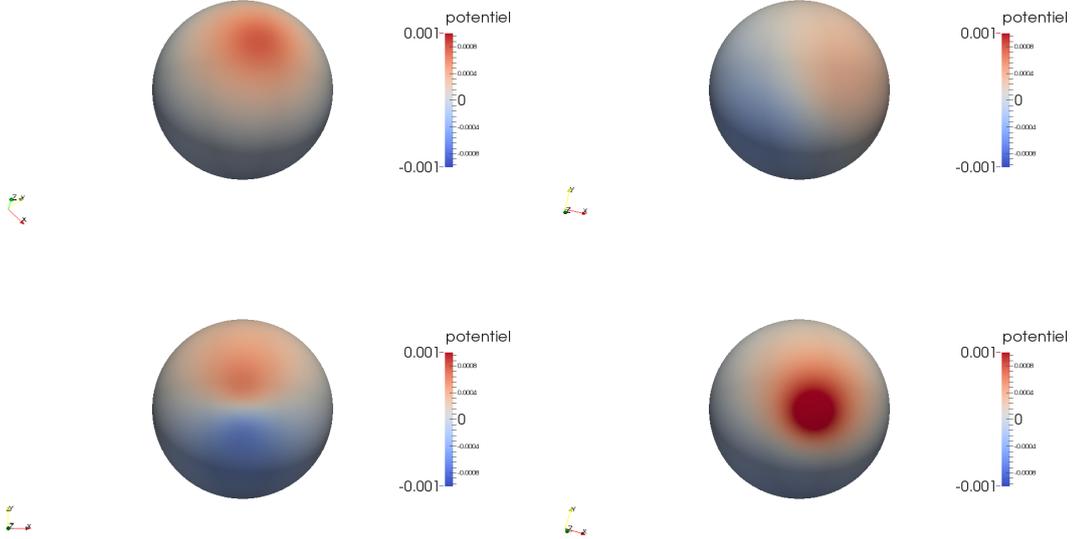


FIGURE 2.9 – Solution du potentiel électrique sur le scalp dans le cas du modèle sphérique avec la fontanelle antérieure. Simulation faite sur le maillage M_2 . Haut à gauche : potentiel pour source d'excentricité 0.6, $\mathbf{q} = (0, 0, J)$. Haut à droite : potentiel pour source d'excentricité 0.6, $\mathbf{q} = (\frac{J}{\sqrt{2}}, \frac{J}{\sqrt{2}}, 0)$. Bas à gauche : potentiel pour source d'excentricité 0.8, $\mathbf{q} = (0, J, 0)$. Bas à droite : potentiel pour source d'excentricité 0.8, $\mathbf{q} = (0, \frac{J}{\sqrt{2}}, \frac{J}{\sqrt{2}})$.

2.5 Simulations numériques pour un modèle réaliste

Dans cette partie, nous étudions d'abord l'influence de certains paramètres des sources (positions et moments) sur les mesures du potentiel électrique sur le scalp. Ensuite, nous présenterons des simulations dans le cas de plusieurs sources (deux, trois, quatre et cinq sources). Nous considérons le modèle réaliste de tête décrit dans la partie 2.3.4. Les conductivités considérées sont données dans la table 2.4.

2.5.1 Influence de la position des sources

Dans ce paragraphe, nous étudions l'influence de la position d'une source dipolaire unique sur les mesures du potentiel électrique sur le scalp. Pour un moment électrique donné, nous présentons le potentiel électrique sur le scalp pour différentes positions. Nous considérons le moment électrique $\mathbf{q} = (J, 0, 0)$ avec une intensité $J = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-6} A \cdot m^{-2}$. Nous calculons et présentons le potentiel électrique sur le scalp pour différentes positions placées dans le cerveau Ω_1 . La première source S_1 est placée à $5mm$ de l'interface

cerveau/LCR alors que la deuxième source S_2 est à $15mm$. La figure 2.10 représente la distribution du potentiel électrique sur le scalp pour différentes positions de la source. Nous remarquons un potentiel électrique plus important lorsque la source est proche de l'interface cerveau/LCR (Fig2.10,gauche). Nous observons également un effet de diffusion du potentiel électrique pour des sources profondes (Fig2.10, droite).

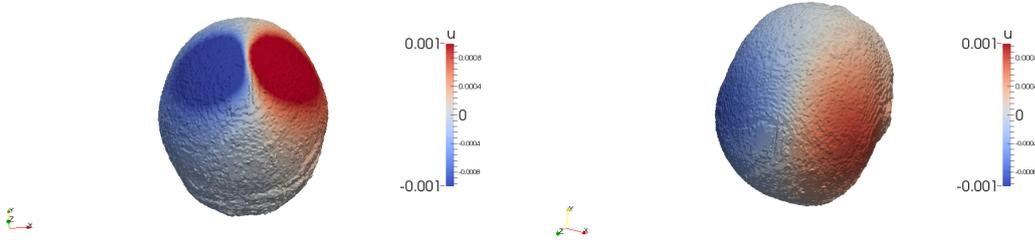


FIGURE 2.10 – Solution du potentiel électrique sur le scalp dans le cas du modèle de tête réaliste à quatre couches. Gauche : potentiel électrique pour le dipôle placé en S_1 . Droite : potentiel électrique pour le dipôle placé en S_2 .

2.5.2 Influence de la direction du moment électrique

Nous étudions maintenant l'influence de la direction du moment électrique sur la distribution du potentiel électrique sur le scalp. Nous fixons la position de la source et nous présentons le potentiel électrique sur le scalp pour différents moments électriques. Un dipôle unique est placé dans Ω_1 à $5mm$ de l'interface cerveau/LCR. Nous considérons les moments $\mathbf{q}_1 = (0, J, J)$ et $\mathbf{q}_2 = (J, J, 0)$ avec une intensité $J = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-6} A.m^{-2}$. La figure Fig2.11 montre que le potentiel électrique en valeur absolue est plus élevé dans la direction du moment. Ainsi, les mesures EEG obtenues sont plus significatifs sur la zone du scalp perpendiculaire à la direction du moment.

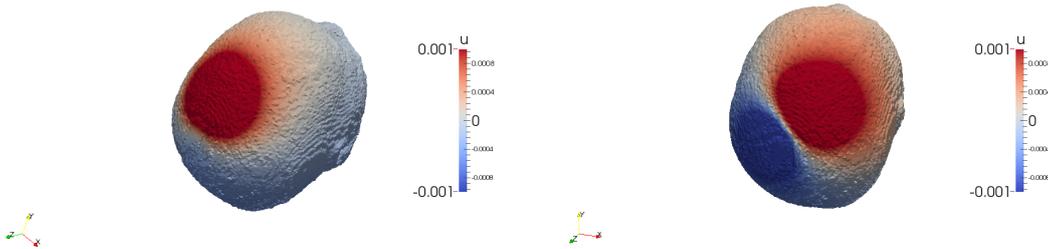


FIGURE 2.11 – Solution du potentiel électrique sur le scalp dans le cas du modèle de tête réaliste à quatre couches. Gauche : potentiel électrique pour le moment électrique \mathbf{q}_1 . Droite : potentiel électrique pour le moment électrique \mathbf{q}_2 .

2.5.3 Simulations numériques dans le cas de plusieurs sources

Nous considérons un modèle avec plusieurs sources (deux, trois, quatre, cinq sources). Pour le modèle avec deux sources, nous plaçons les sources (S_1, \mathbf{q}_1) et (S_2, \mathbf{q}_2) dans le cerveau Ω_1 près des parties pariétale et occipitale de la tête respectivement. Les moments

électriques sont donnés par $\mathbf{q}_1 = (0, J, J)$ et $\mathbf{q}_2 = (0, -J_1, 0)$ avec des intensités $J = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-6} A.m^{-2}$ et $J_1 = 4 \cdot 10^{-6} A.m^{-2}$. Nous considérons ensuite le modèle avec trois sources. Les dipôles (S_1, \mathbf{q}_1) , (S_2, \mathbf{q}_2) et (S_3, \mathbf{q}_3) sont placés respectivement près des parties pariétale, occipitale et frontale de la tête. Leurs moments électriques sont donnés par $\mathbf{q}_1 = (0, 0, J_1)$, $\mathbf{q}_2 = (0, -J_1, 0)$ et $\mathbf{q}_3 = (0, J, J)$. Pour le modèle avec quatre sources, nous ajoutons une source (S_4, \mathbf{q}_4) à droite de la partie pariétale de la tête avec un moment électrique $\mathbf{q}_4 = (J_1, 0, 0)$. Et enfin, nous ajoutons la source dipolaire (S_5, \mathbf{q}_5) à gauche de la partie pariétale de la tête dans le modèle avec cinq sources. Son moment électrique est $\mathbf{q}_5 = (-J_1, 0, 0)$. La figure Fig2.13 représente la distribution du potentiel électrique dans le cas de plusieurs sources (deux, trois, quatre et cinq sources).

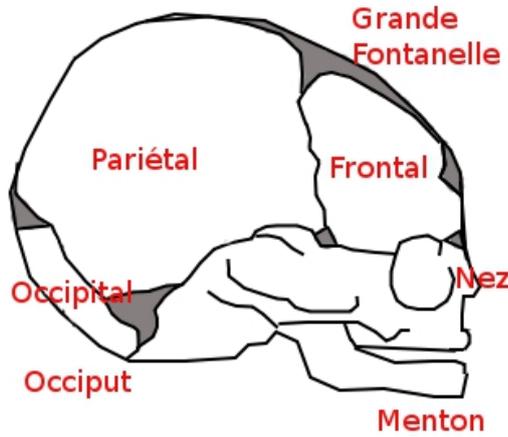


FIGURE 2.12 – Les différentes parties de la tête (Source : campus.cerimes.fr).

2.6 Analyse de l'impact des fontanelles sur les mesures EEG

Dans cette partie, nous comparons différents modèles EEG chez le nouveau-né. Nous analysons l'impact en considérant les fontanelles dans le modèle de tête à travers sa conductivité σ_f , ainsi que les effets de la conductivité de l'os σ_{os} . Nous utilisons un panel de conductivités trouvées dans la littérature [51, 40, 20]. Chaque couple (σ_f, σ_{os}) de paramètres de conductivités correspond à un modèle EEG et le choix $\sigma_f = \sigma_{os}$ donne le modèle sans fontanelles. Pour quantifier l'influence des valeurs (σ_f, σ_{os}) sur le potentiel électrique mesuré sur le scalp, nous calculons les facteurs RDM et MAG (cf. formules (2.47) et (2.48)) par rapport à u_h et u_{ref} qui sont, respectivement, les solutions des modèles avec fontanelles et sans fontanelles. Nous menons une série de tests sur le modèle de tête réaliste décrit dans la partie 2.3.4. Les propriétés du maillage sont données dans le tableau 2.3 et les différentes valeurs de conductivité dans le tableau 2.4. Ces tests sont faites pour des sources S_1 et S_2 placées à 5mm et 15mm de l'interface cerveau/LCR. Nous utilisons les moments électriques $\mathbf{q}_1 = (0, J, J)$ et $\mathbf{q}_2 = (J, J, 0)$.

Nous effectuons d'abord cette étude pour des données sur tout le scalp. Ensuite, nous comparons les effets des conductivités des fontanelles et de l'os sur deux zones de mesures du scalp (Fig2.14). La zone $m0$ se trouve au-dessus de la fontanelle antérieure tandis que $m1$ est une zone du scalp ne couvrant pas les fontanelles. Les solutions u_h et u_{ref} sont évaluées en 820 nœuds sur chaque zone de mesures. Dans ce cas précis, nous modifions la définition des facteurs RDM et MAG donnés respectivement par les expressions (2.47) et

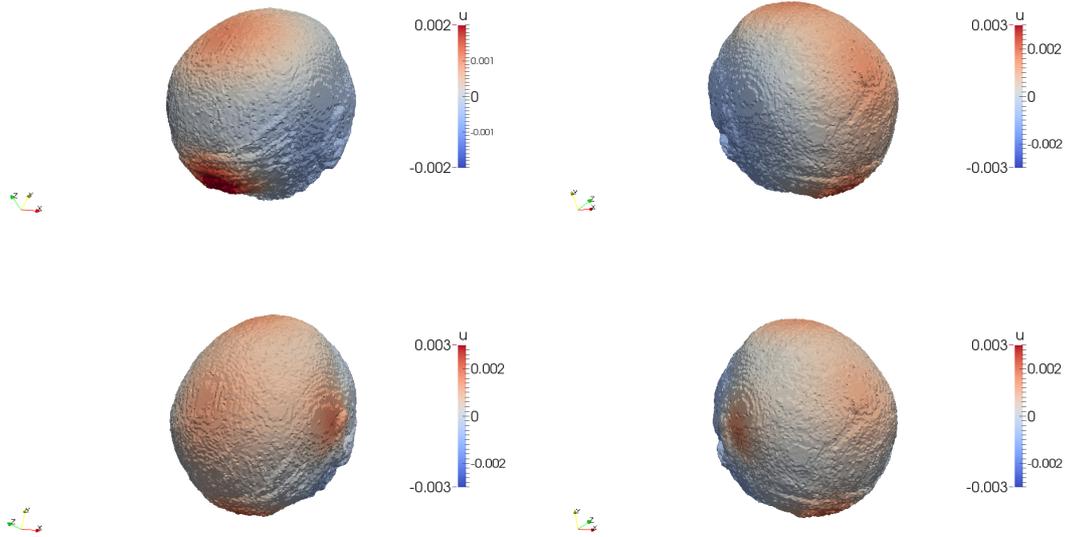


FIGURE 2.13 – Solution du potentiel électrique sur le scalp dans le cas du modèle de tête réaliste à quatre couches. Haut à gauche : potentiel électrique pour le modèle avec deux sources. Haut à droite : potentiel électrique pour le modèle avec trois sources. Bas à gauche : potentiel électrique pour le modèle avec quatre sources. Bas à droite : potentiel électrique pour le modèle avec cinq sources.

(2.48). Nous les notons RDM_s et MAG_s et ils sont définis par :

$$RDM_s := \left\| \frac{u_f^s}{\|u_f^s\|_{l^2}} - \frac{u^s}{\|u^s\|_{l^2}} \right\|_{l^2} \quad (2.49)$$

et

$$MAG_s := \left| 1 - \frac{\|u_f^s\|_{l^2}}{\|u^s\|_{l^2}} \right|, \quad (2.50)$$

où u_f^s , $u^s \in \mathbb{R}^s$ sont les solutions des modèles avec fontanelles et sans fontanelles, s étant le nombre de nœuds considérés et $\|u\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^s u_i^2}$ la norme Euclidienne. Les facteurs RDM, RDM_s , MAG et MAG_s sont calculés pour différentes configurations de sources.

2.6.1 Effets de la conductivité des fontanelles

Dans cette étude, nous analysons les effets de la conductivité des fontanelles sur les mesures du problème direct en EEG. La conductivité de l'os σ_{os} est fixée à $0.04S.m^{-1}$ et celle des fontanelles σ_f varie entre 0.003 et $0.5S.m^{-1}$. Les facteurs RDM, RDM_s , MAG et MAG_s sont présentés pour quatre configurations de sources.

Résultats

Les figures 2.15 et 2.16 montrent des RDM et MAG importants pour des conductivités des fontanelles petites par rapport à celle de l'os. Le RDM et le MAG atteignent respectivement, en $\sigma_f = 0.003S.m^{-1}$, 10.65% et 10.44% pour une source proche avec un moment dirigé vers la fontanelle antérieure (S_1, \mathbf{q}_1) (Figure 2.15, haut gauche) et 1.93%

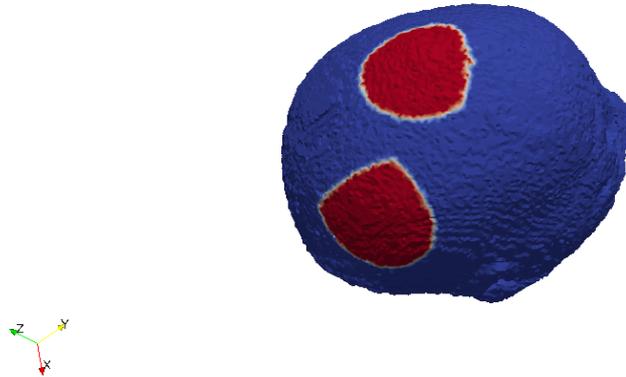


FIGURE 2.14 – Zones de mesures sur le scalp. m_0 :zone au-dessus de la fontanelle antérieure. m_1 :zone du scalp ne couvrant pas les fontanelles.

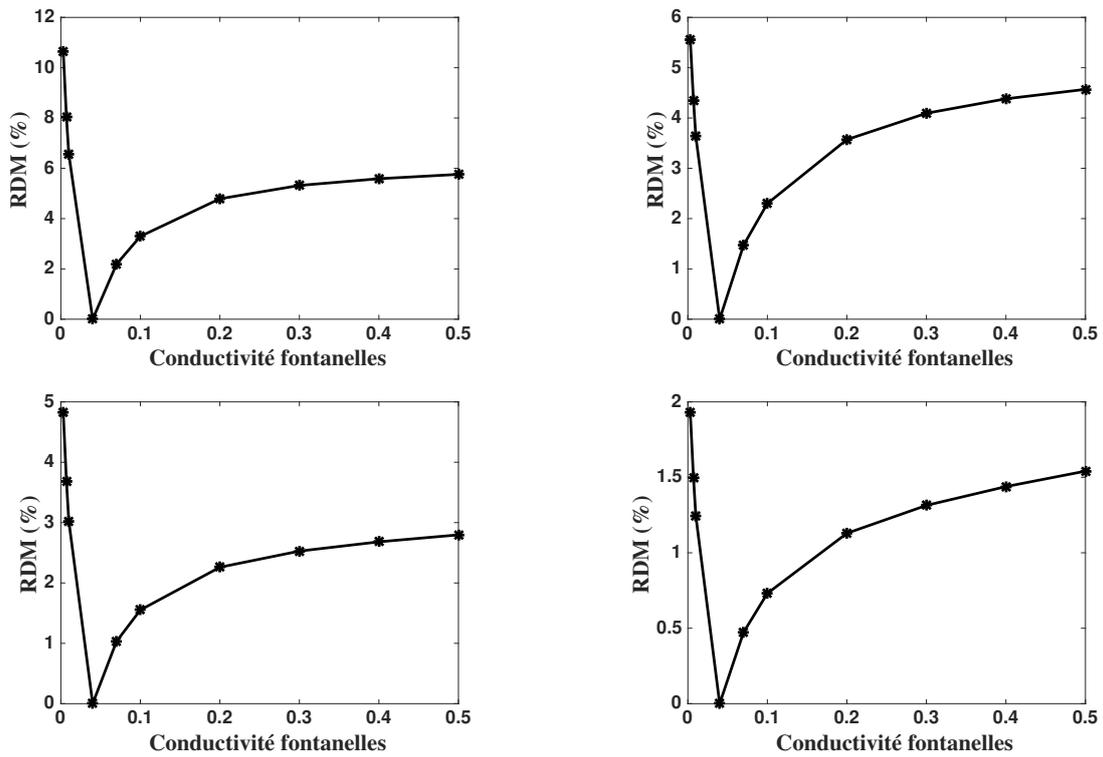


FIGURE 2.15 – RDM en fonction de la conductivité des fontanelles. Haut à gauche : dipôle (S_1, q_1) . Haut à droite : dipôle (S_1, q_2) . Bas à gauche : dipôle (S_2, q_1) . Bas à droite : dipôle (S_2, q_2) .

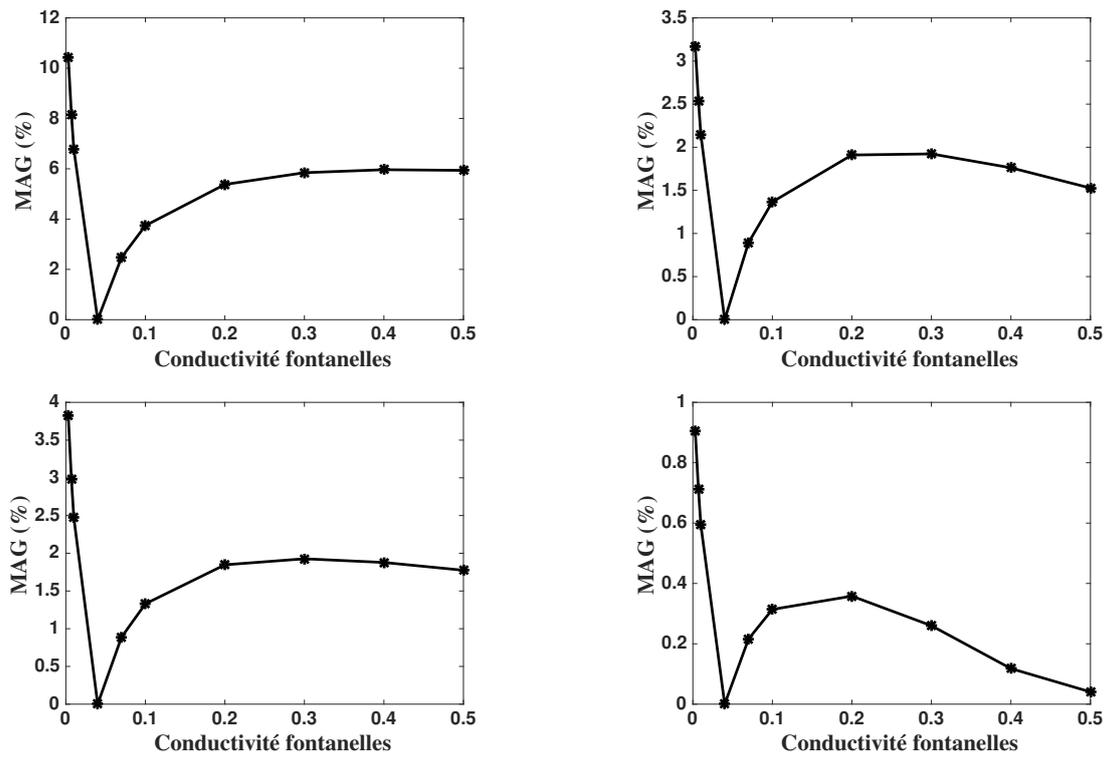


FIGURE 2.16 – MAG en fonction de la conductivité des fontanelles. Haut à gauche : dipôle (S_1, q_1) . Haut à droite : dipôle (S_1, q_2) . Bas à gauche : dipôle (S_2, q_1) . Bas à droite : dipôle (S_2, q_2) .

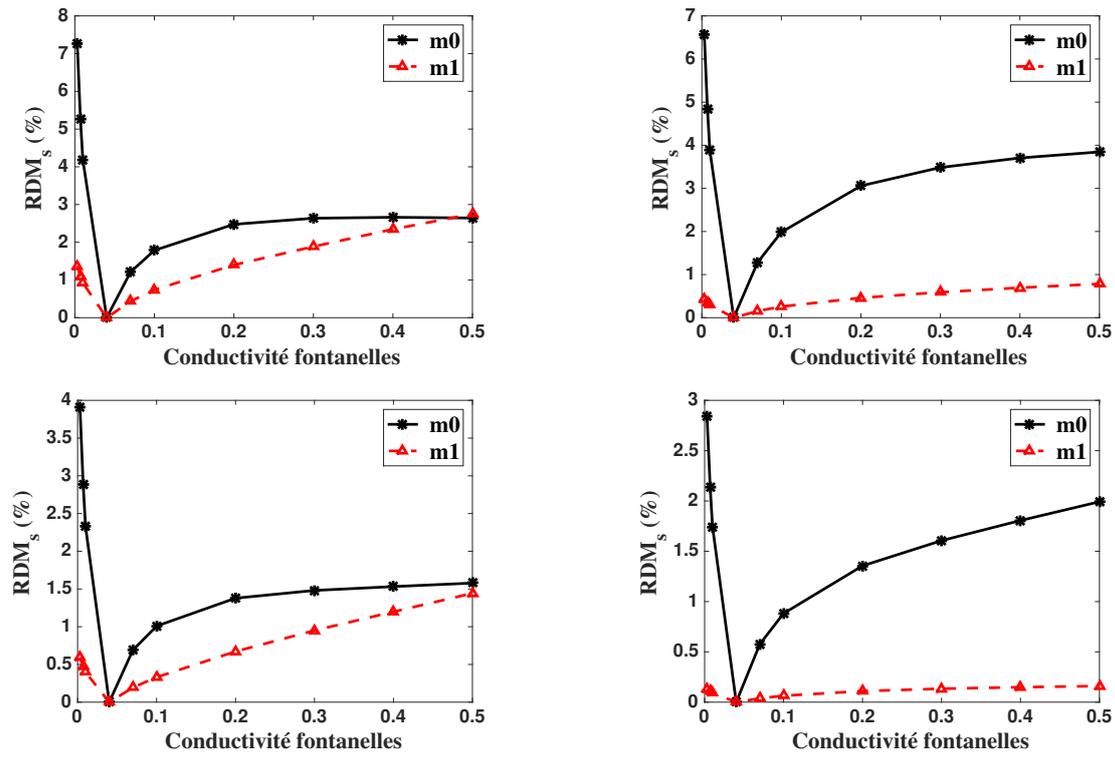


FIGURE 2.17 – RDM_s en fonction de la conductivité des fontanelles. Haut à droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1) . Haut à gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2) . Bas à droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1) . Bas à gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2) .

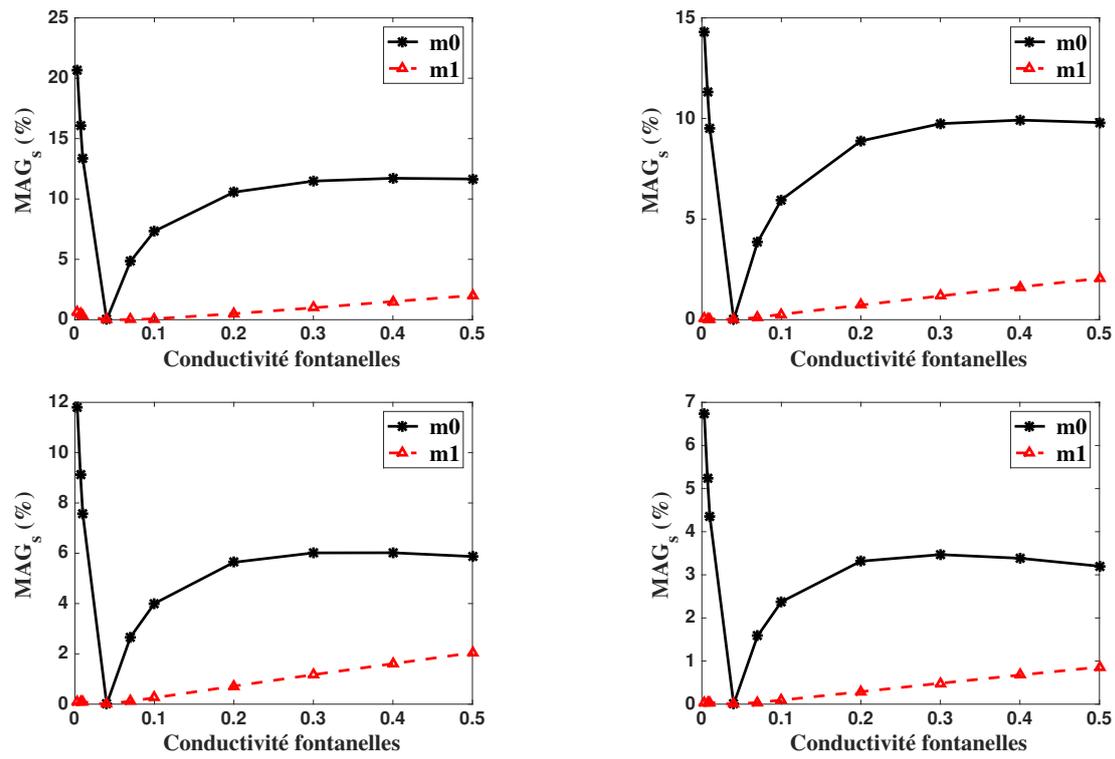


FIGURE 2.18 – MAG_s en fonction de la conductivité des fontanelles. Haut à droite : dipôle (S_1, q_1) . Haut à gauche : dipôle (S_1, q_2) . Bas à droite : dipôle (S_2, q_1) . Bas à gauche : dipôle (S_2, q_2) .

et 0.9% pour une source un peu éloignée (S_2, \mathbf{q}_2) (Figure 2.15, bas droite). Pour toutes les configurations de sources, le RDM diminue avec l'augmentation de la conductivité des fontanelles pour atteindre zéro lorsque $\sigma_f = \sigma_{os}$. Pour des valeurs de conductivités des fontanelles supérieures à celle de l'os, le RDM croît avec l'augmentation de σ_f pour atteindre, en $\sigma_f = 0.5S.m^{-1}$, 5.76% pour le dipôle proche (S_1, \mathbf{q}_1) et 1.54% pour le dipôle (S_2, \mathbf{q}_2). En ce qui concerne le MAG, la figure 2.16 montre un facteur qui croît puis décroît légèrement lorsque la conductivité des fontanelles augmente. Sa valeur maximale de 5.96% est atteinte en $\sigma_f = 0.4S.m^{-1}$ pour le dipôle proche (S_1, \mathbf{q}_1) et 0.35% en $\sigma_f = 0.2S.m^{-1}$ pour le dipôle (S_2, \mathbf{q}_2). Nous remarquons (Figure 2.15 et Figure 2.16) un impact plus ou moins important de la conductivité des fontanelles sur les mesures EEG. Cet impact est plus prononcé dans le cas de conductivités des fontanelles très petites par rapport à celle de l'os mais aussi dans le cas d'une configuration de sources proche de l'interface cerveau/LCR et de la fontanelle antérieure.

Les figures 2.17 et 2.18 illustrent les résultats obtenus lorsque nous comparons les effets de la conductivité des fontanelles sur les zones $m0$ et $m1$ du scalp. Dans la plupart des cas, les RDM_s et MAG_s sont plus petits sur la zone $m1$ que sur la zone $m0$. Les RDM_s et MAG_s maximaux sont obtenus sur la zone $m0$ dans le cas d'une source proche de l'interface et de la fontanelle antérieure. Ils valent respectivement 7.26% et 20.64% tandis que leurs valeurs sur la zone $m1$ sont équivalentes à 1.37% et 0.66%. Ensuite, ils décroissent lorsque la conductivité des fontanelles augmente avec $\sigma_f < \sigma_{os}$ pour atteindre zéro en $\sigma_f = \sigma_{os}$. Pour $\sigma_f > \sigma_{os}$, le RDM_s croît quand la conductivité des fontanelles augmente dans toutes les configurations de sources considérées. Pour les dipôles (S_1, \mathbf{q}_1) et (S_2, \mathbf{q}_1), les RDM_s sur les zones $m0$ et $m1$ en $\sigma_f = 0.5S.m^{-1}$ sont sensiblement proches (Figure 2.17, gauche). Ils sont égaux respectivement à 2.64% pour la zone $m0$ et 2.74% pour celle de $m1$ dans le cas du dipôle (S_1, \mathbf{q}_1) et 1.58% pour $m0$ et 1.44% pour $m1$ dans le cas du dipôle (S_2, \mathbf{q}_1). Concernant le MAG_s , toutes les configurations de sources gardent une valeur sur la zone $m0$ plus grande que celle sur la zone $m1$. Nous constatons à travers ces graphes (Figures 2.17 et 2.18) un impact de la conductivité des fontanelles sur les mesures EEG plus important au-dessus de la fontanelle antérieure.

2.6.2 Effets de la conductivité de l'os

Ensuite, nous menons des tests pour étudier les effets de la conductivité de l'os sur les mesures EEG. En conséquence, nous fixons la conductivité des fontanelles σ_f à $0.3S.m^{-1}$ tandis que celle de l'os σ_{os} varie entre 0.01 et $0.07S.m^{-1}$. Les facteurs RDM, RDM_s , MAG et MAG_s sont calculés pour chaque conductivité de l'os et ils sont présentés pour différentes configurations de sources.

Résultats

Les figures 2.19 et 2.20 décrivent le comportement du RDM et du MAG en fonction de la conductivité de l'os. Les facteurs RDM et MAG sont plus significatifs pour des conductivités de l'os petites dans toutes les configurations de sources considérées. Pour une source proche de l'interface cerveau/LCR et de la fontanelle antérieure (S_1, \mathbf{q}_1), le RDM et le MAG valent respectivement, en $\sigma_{os} = 0.01S.m^{-1}$, 12.88% et 18.88% (Figures 2.19 et 2.20, haut gauche) alors qu'ils équivalent à 3.36% et 2.85% (Figures 2.19 et 2.20, bas droite) pour une source éloignée (S_2, \mathbf{q}_2). Ensuite, ils diminuent avec l'augmentation de la conductivité de l'os pour atteindre 3.17% et 2.97% pour une source proche et 0.79% et 0.1% pour une source éloignée. Nous remarquons un impact des fontanelles sur les mesures EEG plus prononcé dans le cas de petites conductivités de l'os et pour une source proche

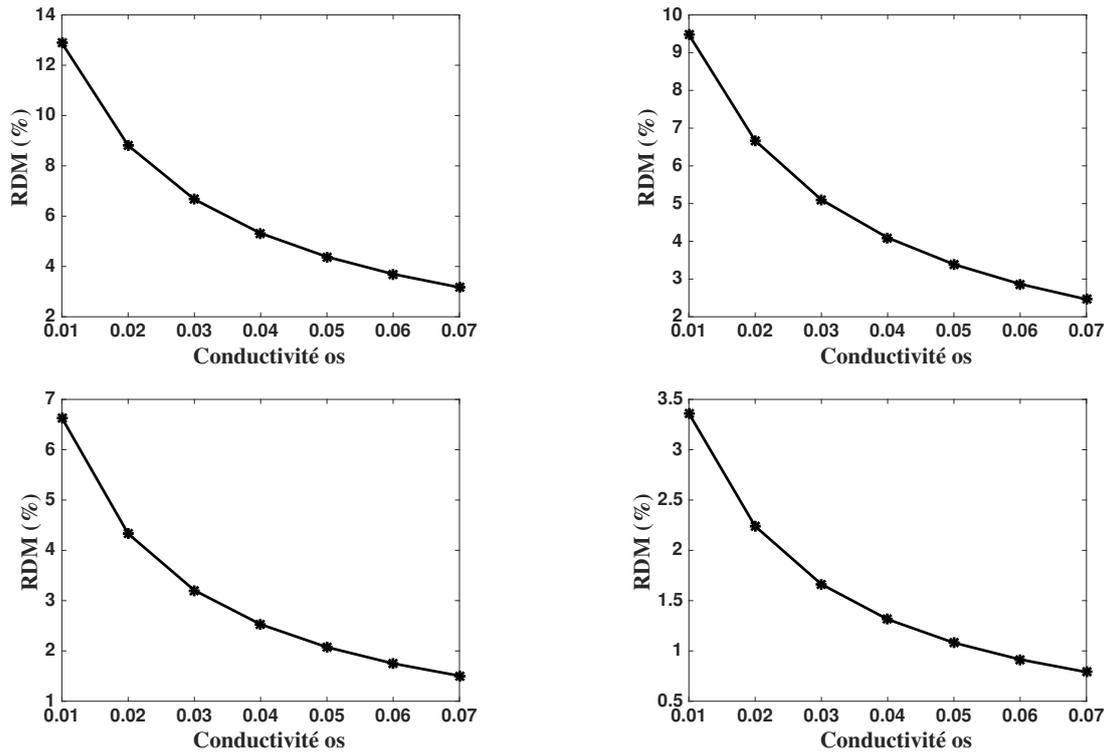


FIGURE 2.19 – RDM en fonction de la conductivité de l'os. Haut à gauche : dipôle (S_1, q_1) . Haut à droite : dipôle (S_1, q_2) . Bas à gauche : dipôle (S_2, q_1) . Bas à droite : dipôle (S_2, q_2) .

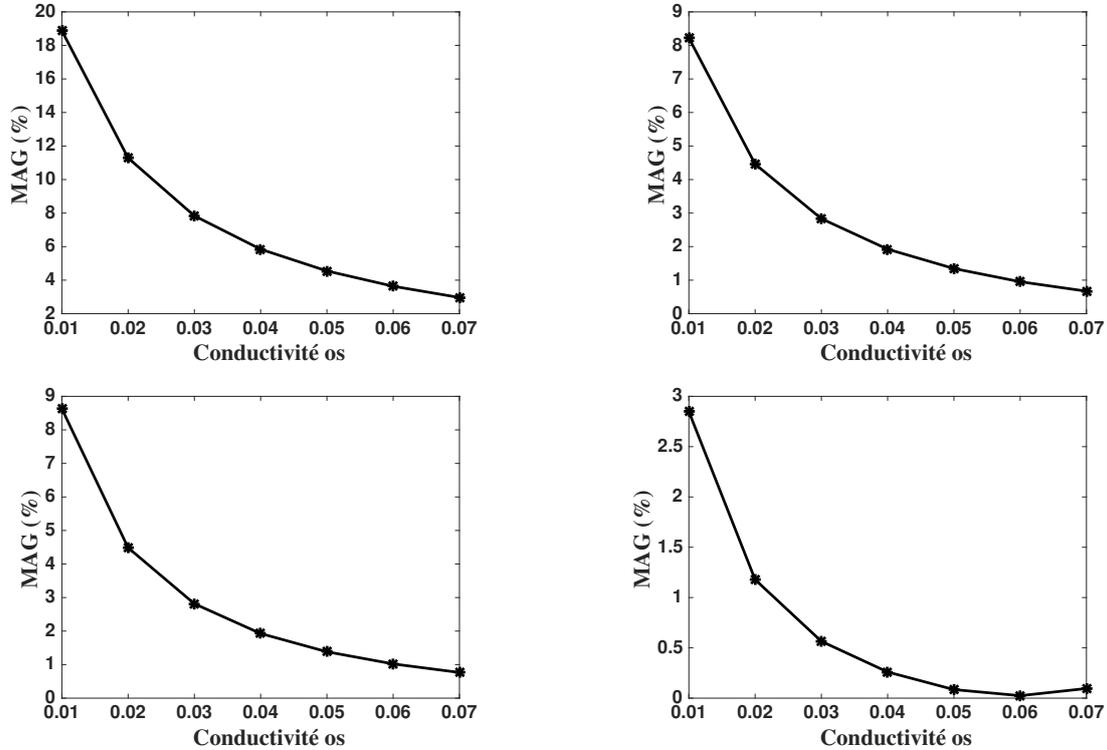


FIGURE 2.20 – MAG en fonction de la conductivité de l'os. Haut à gauche : dipôle (S_1, q_1) . Haut à droite : dipôle (S_1, q_2) . Bas à gauche : dipôle (S_2, q_1) . Bas à droite : dipôle (S_2, q_2) .

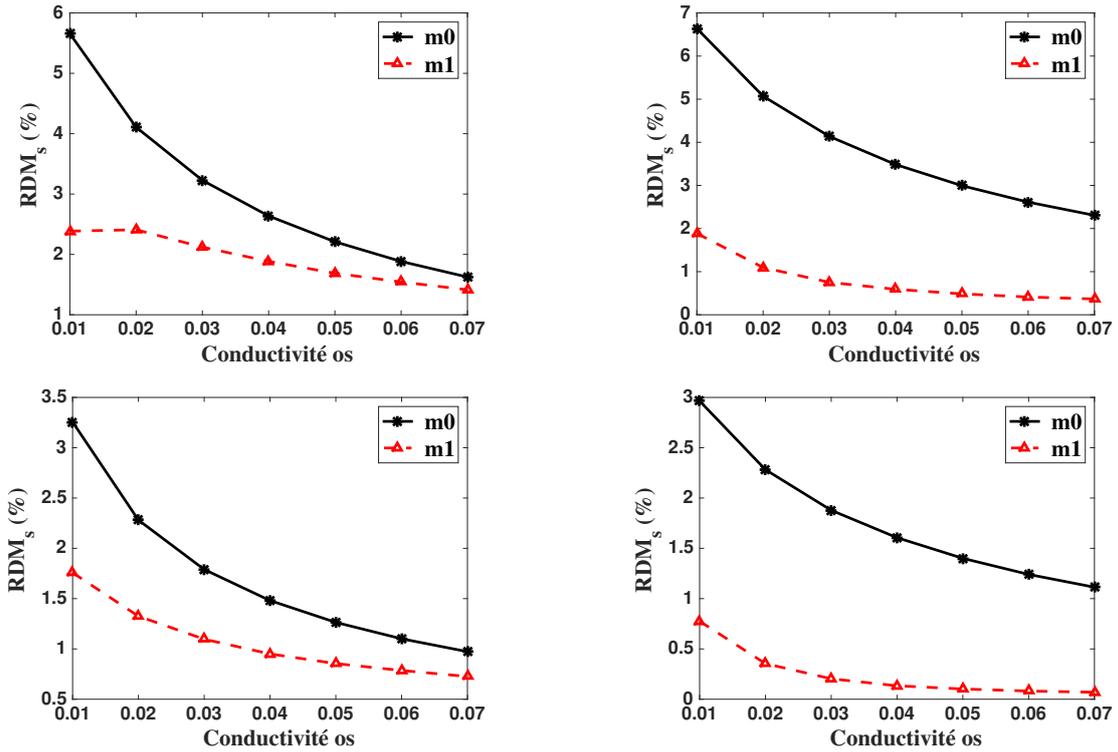


FIGURE 2.21 – RDM_s en fonction de la conductivité de l'os. Haut à gauche : dipôle (S_1, q_1). Haut à droite : dipôle (S_1, q_2). Bas à gauche : dipôle (S_2, q_1). Bas à droite : dipôle (S_2, q_2).

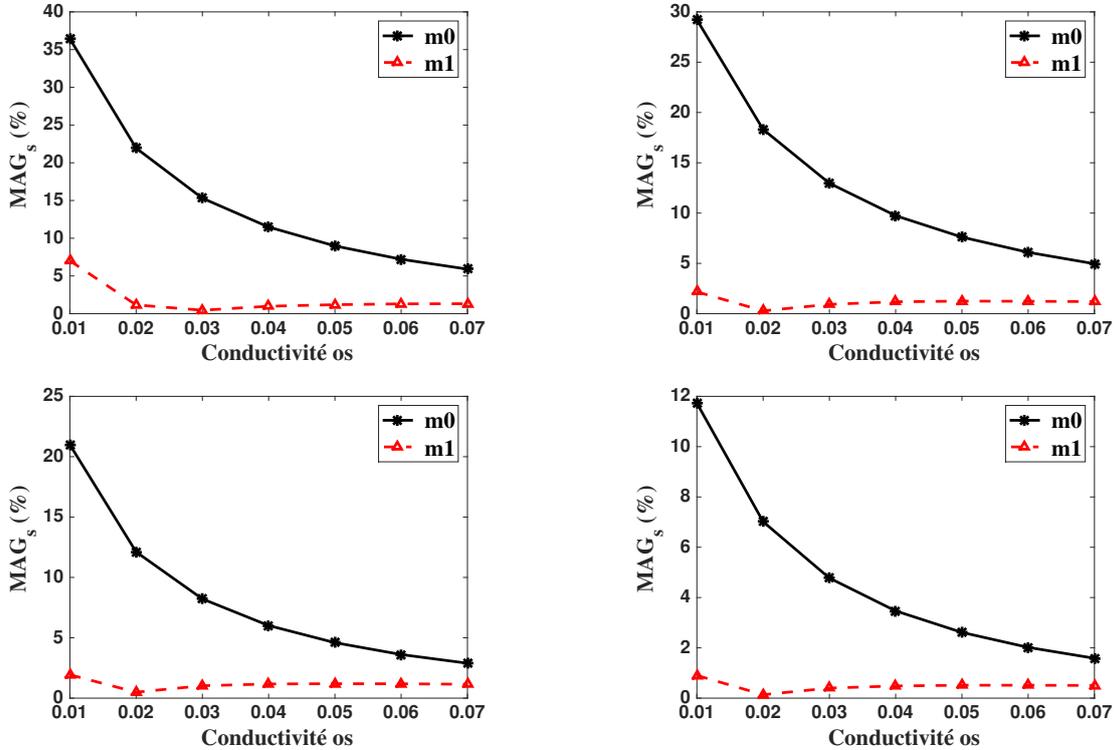


FIGURE 2.22 – MAG_s en fonction de la conductivité de l'os. Haut à gauche : dipôle (S_1, q_1). Haut à droite : dipôle (S_1, q_2). Bas à gauche : dipôle (S_2, q_1). Bas à droite : dipôle (S_2, q_2).

de l'interface cerveau/LCR et de la fontanelle antérieure.

En ce qui concerne le RDM_s et le MAG_s (Figures 2.21 et 2.22), nous retrouvons les mêmes allures que pour le RDM et le MAG. Pour toutes les configurations de sources considérées, le RDM_s et le MAG_s sur la zone $m0$ sont plus grands que sur la zone $m1$. Nous trouvons, pour une source proche (S_1, \mathbf{q}_1), des valeurs du RDM_s/MAG_s en $\sigma_{os} = 0.01S.m^{-1}$ de 5.66%/36.43% sur la zone $m0$ alors qu'ils sont de 2.39%/7% sur la zone $m1$ (Figures 2.21 et 2.22, haut gauche). Pour une source éloignée (S_2, \mathbf{q}_2), ces valeurs passent à 3%/11.73% sur la zone $m0$ et 0.78%/0.9% sur la zone $m1$ (Figures 2.21 et 2.22, bas droite). Les facteurs RDM_s et MAG_s sur la zone $m0$ décroissent avec l'augmentation de la conductivité de l'os pour toutes les configurations de sources. Les valeurs du RDM_s/MAG_s sur la zone $m0$, en $\sigma_{os} = 0.07S.m^{-1}$, sont de 1.63%/5.9% pour une source proche (Figures 2.21 et 2.22, haut gauche) et 1.11%/1.59% pour une source éloignée (Figures 2.21 et 2.22, bas droite). Concernant la zone $m1$, le RDM_s diminue lorsque la conductivité de l'os augmente. Il atteint, en $\sigma_{os} = 0.07S.m^{-1}$, la valeur de 1.41% pour une source proche (Figure 2.21, haut gauche) et 0.07% pour une source éloignée (Figure 2.21, bas droite). Tandis que le MAG_s sur la zone $m1$ diminue puis augmente légèrement avec l'augmentation de la conductivité de l'os. Il vaut, en $\sigma_{os} = 0.07S.m^{-1}$, 1.32% pour une source proche (Figure 2.22, haut gauche) et 0.5% pour une source éloignée (Figure 2.22, bas droite). Nous observons via les figures 2.21 et 2.22 un impact des fontanelles sur les mesures EEG plus important au-dessus de la fontanelle antérieure. Cet impact est plus significatif dans le cas de conductivités de l'os petites et de sources proches de l'interface.

2.6.3 Effets du couple de conductivités (σ_f, σ_{os})

Dans les parties précédentes 2.6.1 et 2.6.2, nous avons étudié l'impact des conductivités des fontanelles et de l'os séparément. Maintenant, nous allons analyser les effets du couple de conductivité (σ_f, σ_{os}) sur les mesures EEG. Pour cela, nous calculons les facteurs RDM et MAG pour différents couples (σ_f, σ_{os}) qui varient autour d'une conductivité de référence de $\sigma_f = 0.3S.m^{-1}$ et $\sigma_{os} = 0.04S.m^{-1}$. L'incertitude sur les conductivités des tissus de la tête est estimée à $\pm 25\%$. Les sources S_1 et S_2 placées dans le cerveau Ω_1 respectivement à une distance de 5mm et 15mm de l'interface cerveau/LCR sont utilisées dans les simulations numériques. Le moment $\mathbf{q} = (0, J, J)$ d'intensité $J = 2\sqrt{2} 10^{-6} A.m^{-2}$ est choisi pour les deux sources. La figure Fig2.23 représente les lignes de niveau des facteurs RDM et MAG pour des conductivités des fontanelles et du crâne variables. Les facteurs RDM et MAG se comportent comme une fonction du rapport σ_f/σ_{os} . Les valeurs maximales du RDM et du MAG sont atteintes lorsque le rapport σ_f/σ_{os} est le plus élevé (égal à $0.375/0.03 = 12.5$) et elles valent respectivement 10% et 15% pour une source proche (Figure 2.23, haut) et 8% et 10% pour une source éloignée (Figure 2.23, bas). Pour une conductivité fixée des fontanelles, les facteurs RDM et MAG diminuent quand la conductivité du crâne augmente. Ce que nous avons observé dans la partie 2.6.2. Néanmoins, le RDM et le MAG gardent une valeur significative même au plus faible ratio (RDM = 6% and MAG = 8% pour une source proche et RDM = 4.5% et MAG = 5.5% pour une source éloignée). L'étude numérique montre que la présence des fontanelles impacte les mesures EEG chez le nouveau-né à travers le rapport σ_f/σ_{os} des conductivités des tissus.

Conclusions

Dans ce chapitre, la méthode des éléments finis a été introduite pour la résolution numérique du problème direct en EEG chez le nouveau-né. Pour traiter la singularité

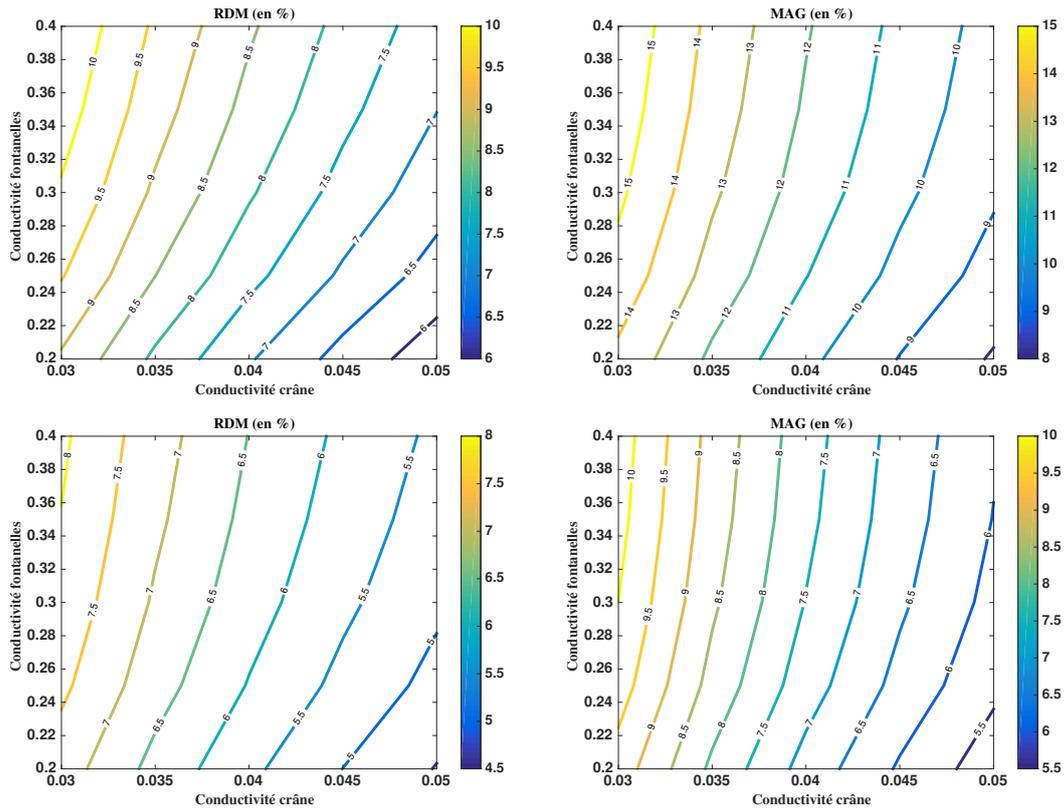


FIGURE 2.23 – Variations des facteurs RDM et MAG par rapport aux différentes conductivités (σ_f, σ_{os}). Modèle de tête réaliste à quatre couches. Solution de référence calculée avec le modèle sans fontanelles. Haut : RDM et MAG pour une source proche. Bas : RDM et MAG pour une source éloignée.

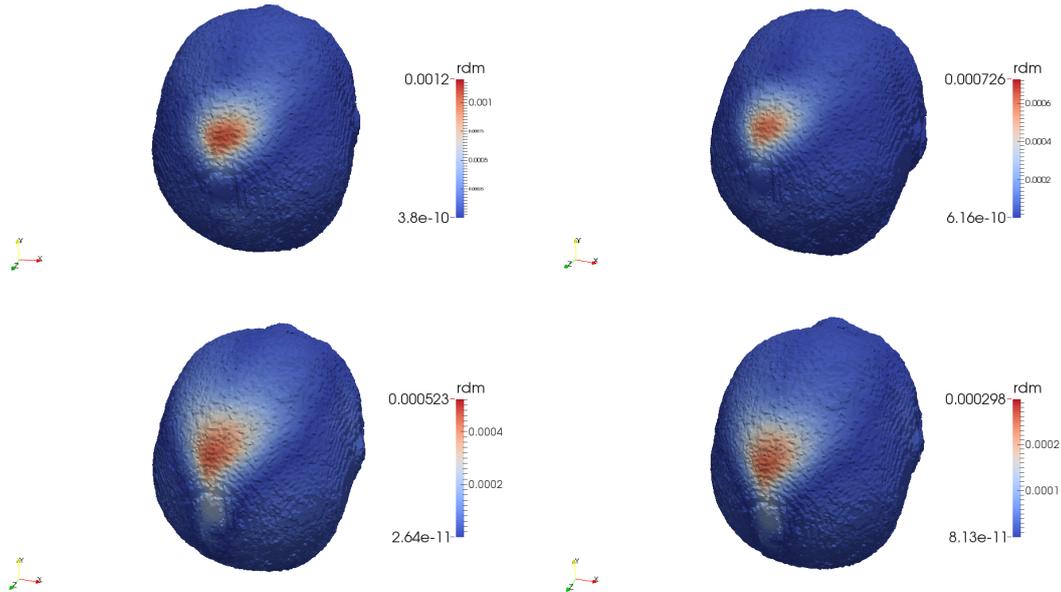


FIGURE 2.24 – rdm pour différents rapports de σ_f/σ_{os} . Modèle de tête réaliste à quatre couches. Solution de référence calculée avec le modèle sans fontanelles. Haut à gauche : rdm pour $\sigma_f/\sigma_{os} = 0.5/0.03$ avec une source proche. Haut à droite : rdm pour $\sigma_f/\sigma_{os} = 0.2/0.05$ avec une source proche. Bas à gauche : rdm pour $\sigma_f/\sigma_{os} = 0.5/0.03$ avec une source éloignée. Bas à droite : rdm pour $\sigma_f/\sigma_{os} = 0.2/0.05$ avec une source éloignée.

du terme source, une méthode de soustraction est appliquée. Des résultats théoriques d'existence et d'unicité de la solution faible sont présentés dans le cas de conductivités des tissus variables. Des estimations de convergence sont obtenues pour des éléments finis de type P1. Ensuite, une étude pour la validation numérique de la méthode est effectuée dans le cas du modèle tête sphérique à trois couches pour le problème direct en EEG. Des simulations numériques pour le modèle réaliste de tête sont également présentées. Enfin, une analyse numérique de l'impact des fontanelles est effectuée dans le cas du modèle réaliste de tête.

Les résultats numériques obtenus dans l'étude du modèle de tête sphérique ont montré des facteurs RDM et MAG satisfaisants pour tous les maillages et toutes les excentricités considérés. Ces facteurs diminuent avec le pas de maillage mais augmentent avec l'excentricité (Figures 2.3 et 2.8). Ces résultats corroborent avec ceux obtenus par Wolters et al. (2007) [65]. Nous avons obtenu dans le cas du modèle sphérique sans fontanelles, une ordre de convergence des facteurs RDM et MAG qui diminuent lorsque l'excentricité augmente (Figure 2.2). Pour le modèle sphérique avec fontanelles, la convergence en norme H^1 pour une et deux sources profondes est très satisfaisante (Figure 2.7). Ceci nous permet de valider la méthode de soustraction utilisée pour résoudre le problème direct en EEG.

Les résultats obtenus dans la partie 2.5 nous ont décrits l'influence sur le scalp des caractéristiques des sources. Les mesures EEG sont plus significatives lorsque le dipôle est proche de l'interface et elles sont plus importantes en valeur absolue sur la zone perpendiculaire à la direction du moment (Figure 2.10 et 2.11). Cette étude nous montre que les électrodes, se situant près des parties de la tête où se trouvent les dipôles et couvrant une zone perpendiculaire à la direction des moments, recueillent plus d'informations que celles placées ailleurs (Figure 2.13).

L'étude faite dans la partie 2.6 a montré que l'impact des fontanelles sur les mesures EEG chez le nouveau-né est plus important au-dessus de la fontanelle antérieure. Elle a montré également que la présence des fontanelles impacter les mesures à travers le rapport σ_f/σ_{os} . L'impact de la présence des fontanelles est plus prononcé lorsque le rapport est élevé. Cependant, l'impact dépend aussi des caractéristiques du dipôle comme le montre la Figure 2.23. L'impact est plus important lorsque le dipôle est proche de la fontanelle antérieure et que son moment est dirigé vers celle-ci.

En ce qui concerne la reconstruction de source en EEG, ces observations numériques attestent de l'importance de considérer la présence de la fontanelle dans le modèle direct en EEG chez le nouveau-né. Cette analyse du problème direct en EEG constitue une étape importante dans la résolution numérique du problème inverse de sources correspondant.

Chapitre 3

Analyse de la sensibilité du potentiel électrique

Les facteurs RDM et MAG, décrits dans le chapitre précédent, sont communément utilisés pour comparer la différence entre deux modèles. Dans cette thèse, nous introduisons un outil d'analyse supplémentaire pour étudier la sensibilité du potentiel électrique, solution du problème direct, aux variations de conductivités des différents tissus de la tête et plus particulièrement celles des fontanelles et de l'os. Mathématiquement, une manière rigoureuse de décrire la sensibilité est donnée par la dérivée directionnelle au sens de Gâteaux qui exprime un concept faible de dérivée. Dans ce chapitre, nous allons montrer que le potentiel électrique, solution du problème direct, est différentiable au sens de Gâteaux par rapport à la conductivité σ et exprimer sa dérivée. Ensuite, nous présenterons des résultats numériques qui illustrent ce concept.

3.1 Introduction et notations

L'analyse de sensibilité mesure d'une manière générale l'influence des perturbations des variables d'entrée d'un modèle sur sa variable de sortie. Elle permet de distinguer les variables d'entrée dont la variation impacte le plus la variable de sortie. Nous distinguons deux catégories de méthodes d'analyse de sensibilité : l'analyse de sensibilité globale et l'analyse de sensibilité locale. L'analyse de sensibilité globale consiste à identifier et à quantifier l'influence de la variation des paramètres d'entrée du modèle sur la variation de la sortie, tandis que l'analyse de sensibilité locale étudie l'impact d'une petite variation autour d'une valeur donnée des paramètres d'entrée sur la variable de sortie. L'analyse de sensibilité globale est basée sur des méthodes statistiques alors que la sensibilité locale est inspirée du calcul différentiel.

Dans le cas du problème direct en EEG, l'analyse de sensibilité globale des variations des différentes conductivités sur le potentiel électrique a été étudiée dans [59] par Maureen Clerc et Sylvain Vallaghé dans le cas du modèle de l'adulte. Nous nous intéressons à la sensibilité locale des variations de la conductivité de l'os et des fontanelles dans le cas du modèle du nouveau-né. La sensibilité, dans ce cas, est donnée par la dérivée directionnelle au sens de Gâteaux du potentiel électrique [9]. Nous proposons de montrer la Gâteaux différentiabilité du potentiel électrique par rapport à la conductivité σ . Avant cela, nous rappelons la définitions de la différentiabilité de Gâteaux et nous introduisons quelques notations.

Définition 3.1. Soit $F : X \rightarrow Y$ une application entre deux espaces de Banach X et Y .

Soit $U \subset X$ un ensemble ouvert. La dérivée directionnelle $D_\mu F(\sigma)$ de F en $\sigma \in U$ dans la direction $\mu \in X$ est définie par

$$D_\mu F(\sigma) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(\sigma + \delta\mu) - F(\sigma)}{\delta}$$

si la limite existe. Si $D_\mu F(\sigma)$ existe pour toute direction $\mu \in X$ et si l'application $\mu \mapsto D_\mu F(\sigma)$ est linéaire et continue de X dans Y , F est dite différentiable au sens de Gâteaux en σ .

Nous considérons $(\mathcal{V}_m)_m$ une famille fixée de voisinages des sources telle que pour tout m , $S_m \in \mathcal{V}_m \subset \Omega_1$ et $\mathcal{V}_m \cap \mathcal{V}_{m'} = \emptyset$ si $m \neq m'$. Nous introduisons l'espace

$$\mathcal{P} = \left\{ \sigma \in L^\infty(\Omega) \mid \sigma|_{\mathcal{V}_m} \equiv \text{const. } \forall m = 1, \dots, M \right\}$$

des paramètres étudiés et le sous-ensemble ouvert

$$\mathcal{P}_{\text{adm}} = \{ \sigma \in \mathcal{P} \mid \sigma_{\min} < \sigma(\mathbf{x}) < \sigma_{\max} \text{ p.p.t. } \mathbf{x} \in \Omega \}$$

des conductivités admissibles avec σ_{\min} et σ_{\max} deux constantes positives fixées. D'après le Théorème 2.9, le problème (2.12) de conductivité $\sigma \in \mathcal{P}_{\text{adm}}$ admet une solution unique $w(\cdot, \sigma) \in V$.

3.2 Différentiabilité au sens de Gâteaux du potentiel électrique

L'objectif de cette partie est de prouver la différentiabilité de w par rapport à la conductivité σ et d'identifier sa dérivée de Gâteaux dans une direction donnée μ . Puisque w dépend du potentiel singulier \tilde{u} , nous analysons d'abord la dérivée de \tilde{u} en σ . Nous rappelons que

$$\tilde{u}_m(\mathbf{x}, \sigma) = \frac{1}{4\pi c_m} \mathbf{q}_m \cdot \frac{(\mathbf{x} - S_m)}{|\mathbf{x} - S_m|^3} \quad (3.1)$$

est la solution de l'équation de Poisson

$$-c_m \Delta \tilde{u}_m(\cdot, \sigma) = \mathbf{q}_m \cdot \nabla \delta_{S_m} \text{ in } \mathbb{R}^3$$

où $c_m = \sigma(S_m)$. Nous considérons maintenant une direction arbitraire $\mu \in \mathcal{P}$ et nous supposons que $\sigma + \delta\mu$ appartient à \mathcal{P}_{adm} pour δ petit. Par définition, nous avons

$$\tilde{u}_m(\mathbf{x}, \sigma + \delta\mu) = \frac{1}{4\pi(c_m + \delta p_m)} \mathbf{q}_m \cdot \frac{(\mathbf{x} - S_m)}{|\mathbf{x} - S_m|^3}, \quad (3.2)$$

où $p_m = \mu(S_m)$, et $\tilde{u}_m(\cdot, \sigma + \delta\mu)$ est la solution de l'équation de Poisson perturbée suivante,

$$-(c_m + \delta p_m) \Delta \tilde{u}_m(\cdot, \sigma + \delta\mu) = \mathbf{q}_m \cdot \nabla \delta_{S_m} \text{ in } \mathbb{R}^3.$$

La proposition suivante montre que \tilde{u}_m est différentiable au sens de Gâteaux en un point intérieur $\sigma \in \mathcal{P}_{\text{adm}}$ et identifie sa dérivée au sens de Gâteaux :

Proposition 3.2. *Soient $\sigma \in \mathcal{P}_{\text{adm}}$ et $\mu \in \mathcal{P}$ avec $\|\mu\|_\infty = 1$. Alors, $\tilde{u}_m(\cdot, \sigma)$ est différentiable au sens de Gâteaux en σ et la dérivée au sens de Gâteaux $\tilde{u}_m(\cdot, \sigma)$ de \tilde{u}_m en σ suivant la direction μ s'écrit*

$$D_\mu \tilde{u}_m(\cdot, \sigma) = -\frac{p_m}{c_m} \tilde{u}_m(\cdot, \sigma) \quad (3.3)$$

avec $p_m = \mu(S_m)$ et $c_m = \sigma(S_m)$.

Démonstration. Un calcul simple du quotient différentiel donne

$$\frac{\tilde{u}_m(\mathbf{x}, \sigma + \delta\mu) - \tilde{u}_m(\mathbf{x}, \sigma)}{\delta} = -\frac{p_m}{c_m + \delta p_m} \tilde{u}_m(\mathbf{x}, \sigma), \quad \forall \mathbf{x} \neq S_m \quad (3.4)$$

et (3.3) en découle. Le second membre de (3.3) est clairement linéaire et continue en μ puisque $p_m = \mu(S_m)$. \square

Théorème 3.3. *Soient $\sigma \in \mathcal{P}_{\text{adm}}$ et $\mu \in \mathcal{P}$ avec $\|\mu\|_\infty = 1$. Alors, la solution $w(\cdot, \sigma)$ de (2.12) est différentiable au sens de Gâteaux en σ et la dérivée au sens de Gâteaux de w en σ suivant la direction μ est l'unique solution du problème variationnel : trouver w^1 tel que*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \nabla w^1 \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \mu \nabla w \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{m=1}^M \left(\int_{\Omega} (c_m - \sigma) \nabla \tilde{u}_m^1 \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\infty} c_m \partial_n \tilde{u}_m^1 v \, d\mathbf{x} \right) \\ &+ \sum_{m=1}^M \left(\int_{\Omega} (p_m - \mu) \nabla \tilde{u}_m \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\infty} p_m \partial_n \tilde{u}_m v \, d\mathbf{x} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

pour tout $v \in V$. Ici, on a noté $\tilde{u}_m^1 = D_\mu \tilde{u}_m(\cdot, \sigma)$ et $\tilde{u}_m = \tilde{u}_m(\cdot, \sigma)$.

Démonstration. Tout d'abord, nous notons que w^1 est bien définie par (3.5) d'après le théorème de Lax-Milgram puisque le second membre de (3.5) définit clairement une forme linéaire et continue sur $H^1(\Omega)$ et satisfait la condition de compatibilité $l(1) = 0$. En effet, les deux intégrales de bord dans (3.5) s'annulent pour $v \equiv 1$ d'après le lemme 2.5 en prenant en compte que $\tilde{u}_m^1 = -\frac{p_m}{c_m} \tilde{u}_m$.

Afin d'établir la dérivée au sens de Gâteaux de w en σ , nous prenons $\mu \in \mathcal{P}$ avec $\|\mu\|_\infty = 1$. Nous avons $\sigma + \delta\mu \in \mathcal{P}_{\text{adm}}$ pour tout $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$ avec δ_0 suffisamment petit. Dans la suite, on omettra la dépendance de w et \tilde{u}_m en fonction des paramètres σ et μ pour une meilleure lisibilité et nous posons

$$w \stackrel{\text{def}}{=} w(\cdot, \sigma) \text{ et } w_\delta \stackrel{\text{def}}{=} w(\cdot, \sigma + \delta\mu)$$

ainsi que

$$\tilde{u}_m \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{u}_m(\cdot, \sigma) \text{ et } \tilde{u}_{m,\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{u}_m(\cdot, \sigma + \delta\mu).$$

Nous rappelons que w_δ et w sont les solutions respectives dans V des problèmes variationnels

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma + \delta\mu) \nabla w_\delta \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} &= \sum_{m=1}^M \left(\int_{\Omega} ((c_m + \delta p_m) - (\sigma + \delta\mu)) \nabla \tilde{u}_{m,\delta} \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \right. \\ &\left. - \int_{\Gamma_\infty} (c_m + \delta p_m) \partial_n \tilde{u}_{m,\delta} v \, ds \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

et

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla w \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M \left(\int_{\Omega} (c_m - \sigma) \nabla \tilde{u}_m \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\infty} c_m \partial_n \tilde{u}_m v \, ds \right), \quad (3.7)$$

pour tout $v \in V$. L'hypothèse sur σ et μ implique que $\sigma + \delta\mu > \sigma_{\min}$ pour tout $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$ et donc la forme bilinéaire dans (3.6) est V -elliptique avec une constante indépendante de

δ . Le second membre de (3.6) définit une forme linéaire et continue sur $H^1(\Omega)$ et nous obtenons l'estimation suivante

$$\|w_\delta\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \sum_{m=1}^M \left(\|\nabla \tilde{u}_{m,\delta}\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_{m,\delta}\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \right). \quad (3.8)$$

En effet, si on note $a_h(\cdot, \cdot)$ et $l_h(\cdot)$ la forme bilinéaire et la forme linéaire respectivement de (3.6). L'estimation (3.8) résulte de la coercivité de a_h et de la continuité de l_h . Nous avons

$$\|w_\delta\|_{H^1(\Omega)}^2 \lesssim a_h(w_\delta, w_\delta) = l_h(w_\delta) \lesssim \sum_{m=1}^M \left(\|\nabla \tilde{u}_{m,\delta}\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_{m,\delta}\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \right) \|w_\delta\|_{H^1(\Omega)}$$

et par la suite l'estimation (3.8).

Pour définir la dérivée de Gâteaux de w , nous introduisons les quotients différentiels

$$w_\delta^1 = \frac{w_\delta - w}{\delta} \text{ et } \tilde{u}_{m,\delta}^1 = \frac{\tilde{u}_{m,\delta} - \tilde{u}_m}{\delta}.$$

En retranchant (3.7) de (3.6) et en divisant par δ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \nabla w_\delta^1 \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \mu \nabla w_\delta \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{m=1}^M \left(\int_{\Omega} (c_m - \sigma) \nabla \tilde{u}_{m,\delta}^1 \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\infty} c_m \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_{m,\delta}^1 v \, ds \right) \\ &+ \sum_{m=1}^M \left(\int_{\Omega} (p_m - \mu) \nabla \tilde{u}_{m,\delta} \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\infty} p_m \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_{m,\delta} v \, ds \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

pour tout $v \in V$. Nous comparons la formulation (3.9) pour le quotient différentiel w_δ^1 avec la formulation variationnelle (3.5) pour w^1 : pour $v \in V$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \nabla (w_\delta^1 - w^1) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \mu \nabla (w_\delta - w) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{m=1}^M \left(\int_{\Omega} (c_m - \sigma) \nabla (\tilde{u}_{m,\delta}^1 - \tilde{u}_m^1) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\infty} c_m \partial_{\mathbf{n}} (\tilde{u}_{m,\delta}^1 - \tilde{u}_m^1) v \, ds \right) \\ &+ \sum_{m=1}^M \left(\int_{\Omega} (p_m - \mu) \nabla (\tilde{u}_{m,\delta} - \tilde{u}_m) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\infty} p_m \partial_{\mathbf{n}} (\tilde{u}_{m,\delta} - \tilde{u}_m) v \, ds \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Notons que les intégrales sur Ω dans le second et le troisième terme s'annulent sur \mathcal{V}_m puisque $\sigma|_{\mathcal{V}_m} \equiv c_m$ et $\mu|_{\mathcal{V}_m} \equiv p_m$. En prenant $v = w_\delta^1 - w^1$ dans (3.10), nous obtenons l'estimation suivante par des inégalités classiques,

$$\begin{aligned} \|w_\delta^1 - w^1\|_{H^1(\Omega)} &\lesssim \|\nabla(w_\delta - w)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \sum_{m=1}^M \left(\|\nabla(\tilde{u}_{m,\delta}^1 - \tilde{u}_m^1)\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + \|\partial_{\mathbf{n}}(\tilde{u}_{m,\delta}^1 - \tilde{u}_m^1)\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \right) \\ &+ \sum_{m=1}^M \left(\|\nabla(\tilde{u}_{m,\delta} - \tilde{u}_m)\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + \|\partial_{\mathbf{n}}(\tilde{u}_{m,\delta} - \tilde{u}_m)\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Le second et troisième terme dans le second membre de (3.11) sont d'ordre δ et peuvent être majorés par les résultats du Lemme 3.4 ci-après. Pour estimer le premier terme,

notons que $w_\delta - w$ est lié au quotient différentiel w_δ^1 par $w_\delta - w = \delta w_\delta^1$. Par conséquent, $\delta^{-1}(w_\delta - w)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta^{-1}\|w_\delta - w\|_{H^1(\Omega)} &\lesssim \|\nabla w_\delta\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{m=1}^M \left(\|\nabla \tilde{u}_{m,\delta}^1\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_{m,\delta}^1\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \right) \\ &\quad + \sum_{m=1}^M \left(\|\nabla \tilde{u}_{m,\delta}\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_{m,\delta}\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le second membre dans (3.12) est borné lorsque δ tend vers zéro. En effet, nous avons $\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{u}_{m,\delta}^1 = \tilde{u}_m^1$ et $\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{u}_{m,\delta} = \tilde{u}_m$, et ∇w_δ est borné en terme de $\tilde{u}_{m,\delta}$ d'après (3.8). La multiplication de (3.12) par δ montre que $\|w_\delta - w\|_{H^1(\Omega)}$ est d'ordre δ . Par conséquent, (3.11) devient

$$\|w_\delta^1 - w^1\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \delta \sum_{m=1}^M \left(\|\nabla \tilde{u}_m\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \right).$$

Ceci prouve la convergence forte de la suite $(w_\delta^1)_\delta$ vers w^1 dans $H^1(\Omega)$.

Il reste à montrer que $D_\mu w$ appartient à $\mathcal{L}(L^\infty, V)$. Pour μ fixé, $D_\mu w(\cdot, \sigma)$ est définie par la solution de (3.5). Mais le second membre de (3.5) est linéaire en μ . Cela est évident pour le premier et troisième terme puisque w et \tilde{u}_m sont indépendants de μ et $p_m = \mu(S_m)$ est linéaire en μ . Le second terme dépend de μ seulement par la Gâteaux dérivée \tilde{u}_m^1 de \tilde{u}_m . D'après la Proposition 3.2, nous avons $\tilde{u}_m^1 = -\frac{\mu(S_m)}{\sigma(S_m)} \tilde{u}_m$ ce qui est une expression linéaire en μ .

Pour prouver que l'application linéaire $\mu \mapsto D_\mu w$ est une application continue de \mathcal{P} à V , nous obtenons une estimation de w^1 à l'aide de la formulation (3.5). En prenant $v = w^1$, nous avons

$$\|w^1\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|\mu\|_\infty \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{m=1}^M |\mu(S_m)| \left(\|\nabla \tilde{u}_m\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \right)$$

en utilisant encore la relation $\tilde{u}_m^1 = -\frac{\mu(S_m)}{\sigma(S_m)} \tilde{u}_m$. Ceci donne la continuité de $D_\mu w$ par rapport à μ et prouve que $w(\cdot, \sigma)$ est Gâteaux différentiable par rapport à la conductivité σ . \square

Lemme 3.4. *Soient $\tilde{u}_m = \tilde{u}_m(\cdot, \sigma)$ et $\tilde{u}_{m,\delta} = \tilde{u}_m(\cdot, \sigma + \delta\mu)$ donnés par (3.1) et (3.2) respectivement. Sous les hypothèses du Théorème 3.3, nous avons les estimations suivantes :*

$$\|\nabla(\tilde{u}_{m,\delta} - \tilde{u}_m)\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} \lesssim h \|\nabla \tilde{u}_m\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)}, \quad (3.13a)$$

$$\|\partial_{\mathbf{n}}(\tilde{u}_{m,\delta} - \tilde{u}_m)\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \lesssim \delta \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m\|_{L^2(\Gamma_\infty)}. \quad (3.13b)$$

Par ailleurs, soit $\tilde{u}_{m,\delta}^1 = \frac{\tilde{u}_{m,\delta} - \tilde{u}_m}{\delta}$ et notons par $\tilde{u}_m^1 = D_\mu \tilde{u}_m(\cdot, \sigma)$ la dérivée de Gâteaux de \tilde{u}_m en σ dans la direction μ . Sous les hypothèses du Théorème 3.3, nous avons les estimations suivantes :

$$\|\nabla(\tilde{u}_{m,\delta}^1 - \tilde{u}_m^1)\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} \lesssim \delta \|\nabla \tilde{u}_m\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)}, \quad (3.14a)$$

$$\|\partial_{\mathbf{n}}(\tilde{u}_{m,\delta}^1 - \tilde{u}_m^1)\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \lesssim \delta \|\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m\|_{L^2(\Gamma_\infty)}. \quad (3.14b)$$

Démonstration. D'après les définitions de \tilde{u}_m et $\tilde{u}_{m,\delta}$, nous obtenons

$$\tilde{u}_{m,\delta}(\mathbf{x}) - \tilde{u}_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{c_m + \delta p_m} - \frac{1}{c_m} \right) \frac{\mathbf{q}_m \cdot (\mathbf{x} - S_m)}{|\mathbf{x} - S_m|^3} = -\frac{\delta p_m}{c_m + \delta p_m} \tilde{u}_m(\mathbf{x}). \quad (3.15)$$

En prenant le module du gradient et de la dérivée normale de l'expression (3.15), nous arrivons

$$|\nabla (\tilde{u}_{m,\delta}(\mathbf{x}) - \tilde{u}_m(\mathbf{x}))| \leq \delta \frac{|p_m|}{|c_m + \delta p_m|} |\nabla \tilde{u}_m(\mathbf{x})| \quad (3.16a)$$

$$|\partial_{\mathbf{n}} (\tilde{u}_{m,\delta}(\mathbf{x}) - \tilde{u}_m(\mathbf{x}))| \leq \delta \frac{|p_m|}{|c_m + \delta p_m|} |\partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_m(\mathbf{x})|. \quad (3.16b)$$

Puisque $|p_m| \leq \|\mu\|_{\infty} = 1$ et $|c_m + \delta p_m| \geq \sigma_{\min}$, les estimations (3.13a) et (3.13b) découlent par intégration de l'expression (3.16a) sur $\Omega \setminus \mathcal{V}_m$ et de (3.16b) sur le bord Γ_{∞} .

Pour établir les estimations de (3.14), nous rappelons que $\tilde{u}_m^1 = -\frac{p_m}{c_m} \tilde{u}_m$ d'après la Proposition 3.2. Nous obtenons alors l'expression suivante

$$\tilde{u}_{m,\delta}^1 - \tilde{u}_m^1 = \left(-\frac{p_m}{c_m + \delta p_m} + \frac{p_m}{c_m} \right) \tilde{u}_m = \delta \frac{p_m^2}{c_m(c_m + \delta p_m)} \tilde{u}_m. \quad (3.17)$$

Puisque $|p_m|$ et c_m (resp. $c_m + \delta p_m$) sont bornés, les estimations (3.14a) et (3.14b) se démontrent de la même manière par intégration de l'expression (3.17). \square

Remarque 3.5. Nous supposons que la variation de la conductivité dans une direction donnée μ ait lieu uniquement dans le crâne Ω_2 . Dans ce cas particulier, le potentiel singulier \tilde{u} défini par (2.7) est indépendant de μ et nous avons

$$w(\cdot, \sigma + \delta\mu) - w(\cdot, \sigma) = u(\cdot, \sigma + \delta\mu) - \tilde{u}(\cdot, \sigma_1) - (u(\cdot, \sigma) + \tilde{u}(\cdot, \sigma_1)) = u(\cdot, \sigma + \delta\mu) - u(\cdot, \sigma).$$

Ainsi, la dérivée de Gâteaux $u^1 \stackrel{\text{def}}{=} u'(\sigma; \mu)$ du potentiel électrique u en σ dans la direction μ coïncide avec w^1 , la solution de (3.5).

3.3 Analyse numérique de la sensibilité

Dans cette partie, nous étudions numériquement comment une faible variation de la conductivité affecte les mesures EEG. Plus précisément, nous nous intéressons à l'analyse des perturbations de conductivité dans le crâne du nouveau-né, y compris les fontanelles. Nous considérons le modèle de tête réaliste présenté dans la partie 2.3.4 et nous fixons les conductivités respectives des fontanelles et de l'os à $\sigma_f = 0.3S.m^{-1}$ et $\sigma_{os} = 0.04S.m^{-1}$.

La sensibilité u^1 du potentiel électrique dans une direction donnée μ est la solution de l'équation (3.5). Nous considérons dans cette partie la perturbation des conductivités des fontanelles et de l'os, ce qui revient à prendre la fonction caractéristique sur Ω_f et Ω_{os} , $\mu = \mathbf{1}_{\Omega_f}$ et $\mathbf{1}_{\Omega_{os}}$, comme direction.

3.3.1 Sensibilité par rapport à la conductivité des fontanelles

Nous allons étudier dans cette partie la sensibilité du potentiel électrique par rapport à une petite variations de la conductivité des fontanelles. Nous considérons dans ce cas différentes configurations de sources.

La Figure 3.1 compare la sensibilité pour deux sources de même moment $\mathbf{q} = (0, J, J)$ avec $J = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-6} A.m^{-2}$ qui sont localisées en différentes positions. Le moment électrique est

dirigé vers la fontanelle antérieure et les sources sont situées respectivement à une distance de 5mm et 15mm de l'interface cerveau/LCR. Dans les deux cas, la zone la plus sensible est localisée au-dessus de la fontanelle antérieure, mais un effet de diffusion apparaît dans le cas de la source la plus éloignée. Ensuite, nous considérons une source qui est localisée à une distance de 15mm de l'interface cerveau/LCR. Nous comparons la sensibilité pour les moments $\mathbf{q}_1 = (J, J, 0)$ et $\mathbf{q}_2 = (J, 0, J)$ dirigés respectivement vers la partie frontale et occipitale de la tête avec $J = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-6} A.m^{-2}$. La Figure 3.2 montre que la zone de sensibilité maximale dépend de la direction du moment, mais est toujours localisée près de la fontanelle antérieure. Pour illustrer l'impact des fontanelles sur les mesures du potentiel indépendamment de la position et de l'orientation de la source, nous choisissons de calculer la sensibilité pour une source profonde loin de la fontanelle antérieure (voir Figure 3.3). Même si la valeur de la sensibilité est environ d'un ordre de grandeur plus petite que dans la configuration près de l'interface, nous remarquons que l'impact est toujours important près des fontanelles.

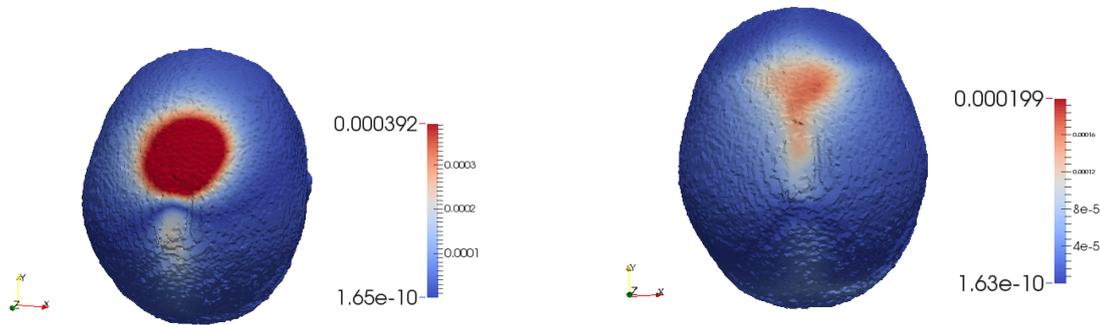


FIGURE 3.1 – Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de l'excentricité. Distance source-interface cerveau/LCR ≈ 5 mm (gauche) et ≈ 15 mm (droite).

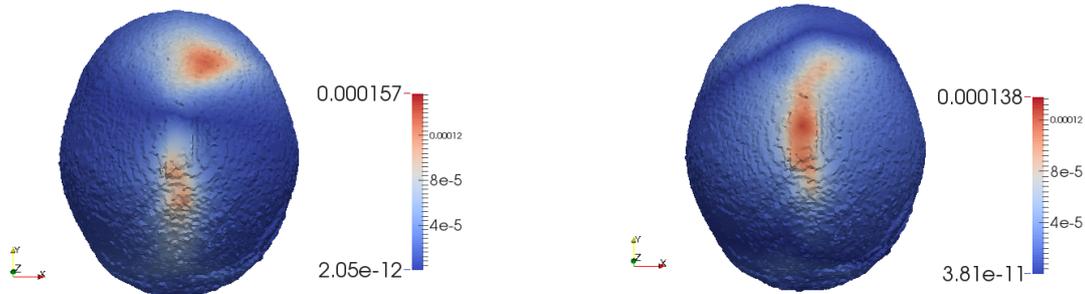


FIGURE 3.2 – Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de l'orientation. Distance source-interface cerveau/LCR ≈ 15 mm. Gauche : moment $\mathbf{q} = (J, J, 0)$. Droite : moment $\mathbf{q} = (J, 0, J)$.

Ensuite, nous illustrons l'impact des fontanelles en représentant les courbes de la norme L^2 sur le scalp (Γ_∞) de la sensibilité ($\|u^1\|_{L^2(\Gamma_\infty)}$). Nous considérons les deux sources S_1 et S_2 placées respectivement à 5mm et 15mm de l'interface cerveau/LCR. Les moments électriques $\mathbf{q}_1 = (0, J, J)$ et $\mathbf{q}_2 = (J, J, 0)$ avec $J = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-6} A.m^{-2}$ sont choisis pour faire cette étude. La Figure 3.4 montre les courbes de $\|u^1\|_{L^2(\Gamma_\infty)}$ en fonction de la conductivité des fontanelles pour différentes configurations de sources. Nous faisons varier la conductivité des fontanelles σ_f entre 0.03 et $0.5 S.m^{-1}$ tandis que celle de l'os est fixée à

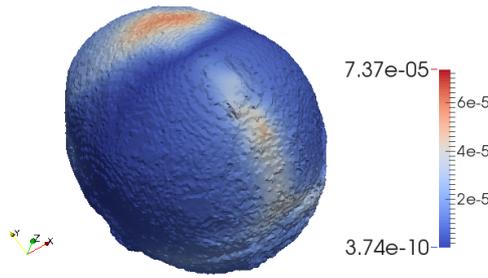


FIGURE 3.3 – Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp pour une source profonde.

$\sigma_{OS} = 0.04S.m^{-1}$. Le potentiel électrique est plus sensible pour de petites conductivités des fontanelles (de l'ordre de celle de l'os). Cette sensibilité diminue lorsque la conductivité des fontanelles augmente. Et comme attendu, l'ordre de grandeur de la norme de la sensibilité est plus élevée pour une source proche de l'interface.

Sur la Figure 3.5, nous présentons les courbes de la norme $\|u^1\|_{L^2(\Gamma_\infty)}$ en fonction de la

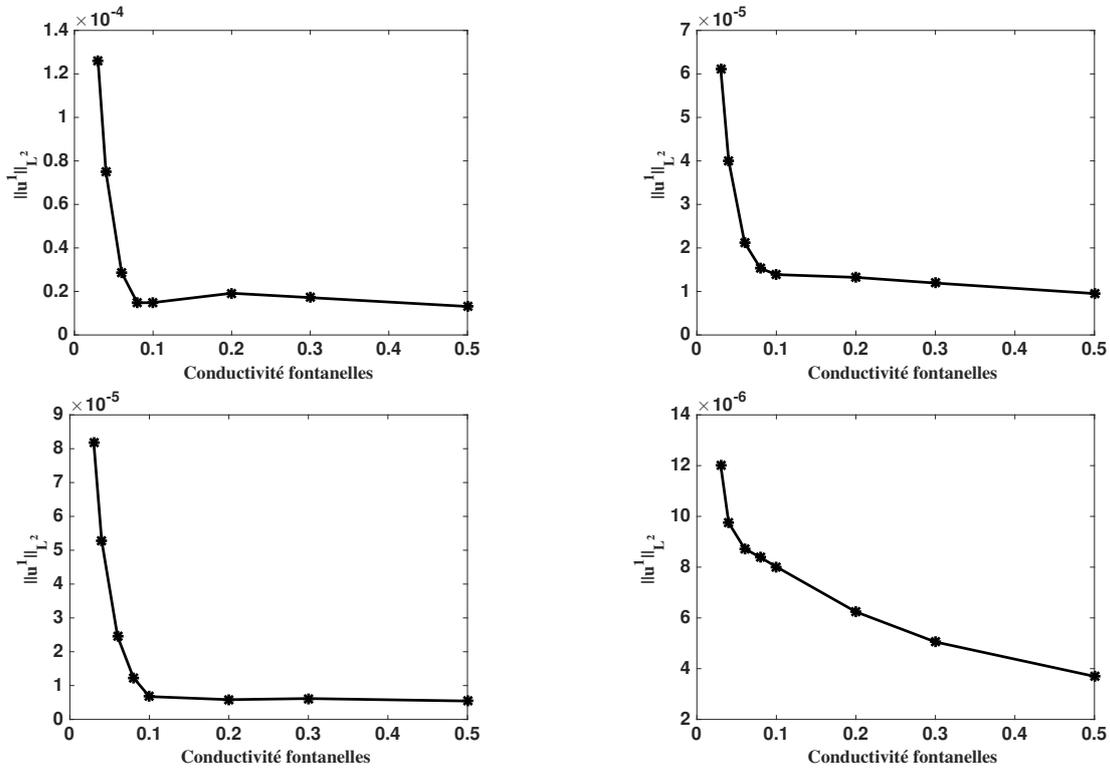


FIGURE 3.4 – Norme L^2 de la sensibilité par rapport à la conductivité des fontanelles du potentiel électrique sur le scalp en fonction de la conductivité des fontanelles. Haut droite : dipôle (S_1, q_1) . Haut gauche : dipôle (S_1, q_2) . Bas droite : dipôle (S_2, q_1) . Bas gauche : dipôle (S_2, q_2) .

conductivité de l'os σ_{OS} à σ_f fixée ($\sigma_f = 0.3S.m^{-1}$). La conductivité de l'os varie entre 0.01 et $0.07S.m^{-1}$. Nous remarquons, dans ce cas également, que le potentiel électrique est plus sensible pour de petites conductivités de l'os. La norme de la sensibilité diminue avec l'augmentation de la conductivité de l'os.

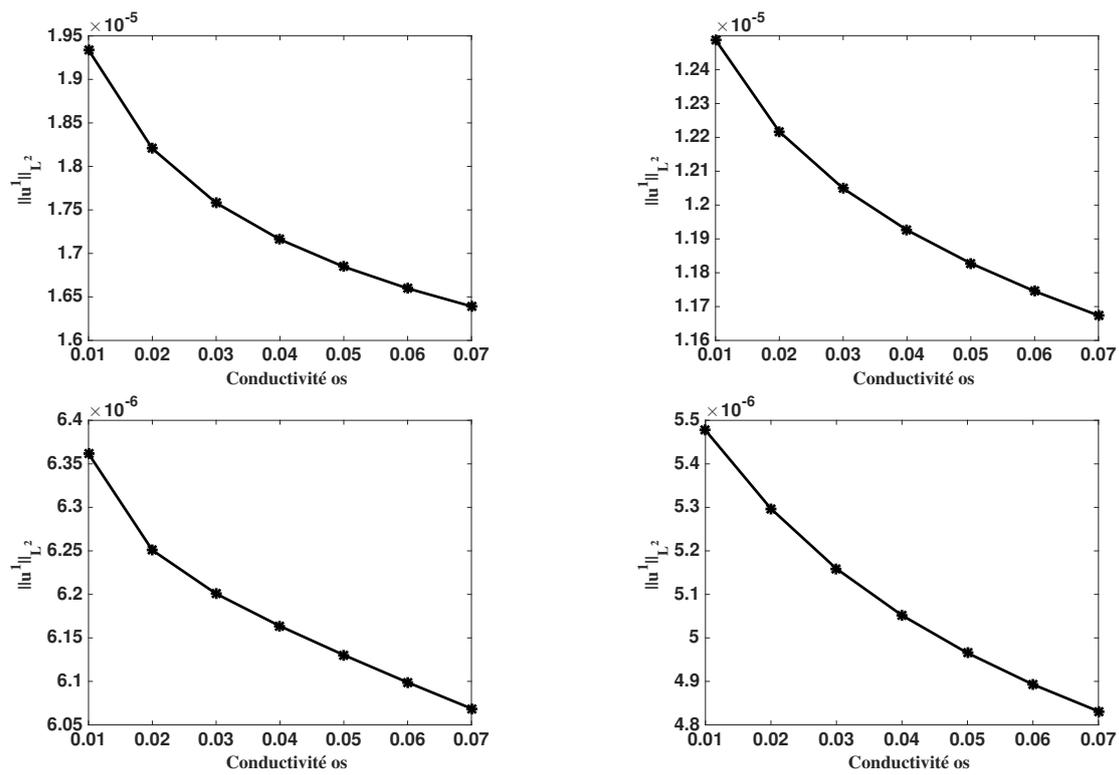


FIGURE 3.5 – Norme L^2 de la sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de la conductivité de l'os. Haut droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1) . Haut gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2) . Bas droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1) . Bas gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2) .

3.3.2 Sensibilité par rapport à la conductivité de l'os

Dans cette partie, nous analysons la sensibilité du potentiel électrique par rapport à la conductivité de l'os du crâne. Différentes configurations de sources sont étudiées. Nous comparons d'abord la sensibilité pour deux sources de même moment $\mathbf{q} = (0, J, J)$ électrique dirigé vers la fontanelle antérieure avec $J = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-6} A.m^{-2}$ (Figure 3.6). Les sources sont localisées respectivement à une distance de 5mm et 15mm de l'interface cerveau/LCR. Nous observons une sensibilité plus importante sur les zones au-dessus de l'os du crâne. L'effet de diffusion observé dans le cas l'étude de la sensibilité par rapport à la conductivité des fontanelles (Figure 3.1) apparaît également dans la configuration de la source éloignée. Nous évaluons en outre l'effet de la direction du moment sur la sensibilité d'une source située à une distance de 15mm de l'interface cerveau/LCR. La Figure 3.7 illustre la sensibilité pour les moments $\mathbf{q}_1 = (J, J, 0)$ et $\mathbf{q}_2 = (J, 0, J)$ avec $J = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-6} A.m^{-2}$. Nous remarquons que les zones les plus sensibles dépendent de la direction du moment comme dans le cas des fontanelles. Néanmoins, les zones très sensibles sont localisées au-dessus de l'os du crâne. Pour diminuer les effets de la position et de l'orientation de la source, nous calculons la sensibilité pour une source profonde (Figure 3.8). Dans ce dernier cas, nous constatons que le potentiel est toujours plus sensible au-dessus de l'os du crâne.

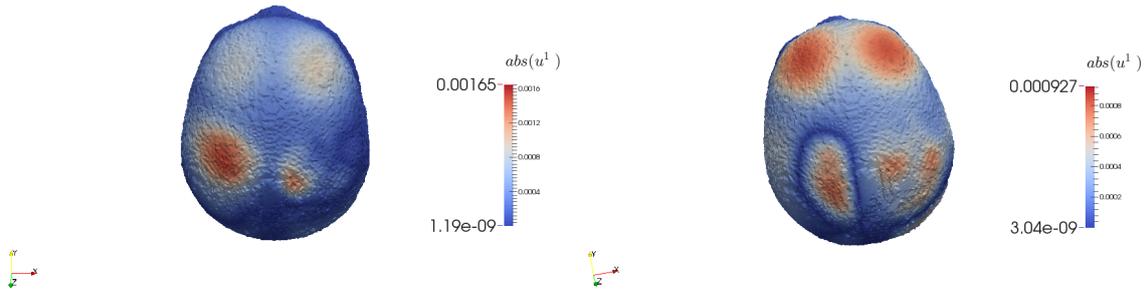


FIGURE 3.6 – Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de l'excentricité. Distance source-interface cerveau/LCR ≈ 5 mm (gauche) et ≈ 15 mm (droite).

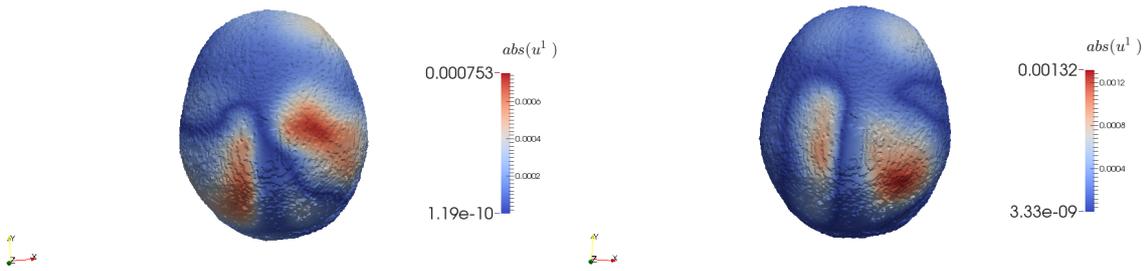


FIGURE 3.7 – Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de l'orientation. Distance source-interface cerveau/LCR ≈ 15 mm. Gauche : moment $\mathbf{q} = (J, J, 0)$. Droite : moment $\mathbf{q} = (J, 0, J)$.

Par la suite, nous étudions la sensibilité du potentiel électrique u_{os}^1 en calculant puis en représentant les courbes de sa norme L^2 sur le scalp ($\|u_{os}^1\|_{L^2(\Gamma_\infty)}$) en fonction des conductivités des fontanelles et de l'os du crâne. Nous utilisons pour cette étude les deux sources S_1 et S_2 placées respectivement à une distance de 5mm et 15mm de l'interface cerveau/LCR ainsi que les moments $\mathbf{q}_1 = (0, J, J)$ et $\mathbf{q}_2 = (J, J, 0)$ avec $J = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-6} A.m^{-2}$.

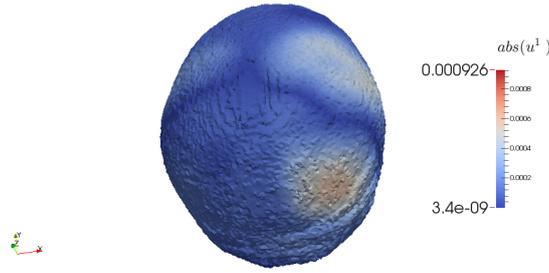


FIGURE 3.8 – Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp pour une source profonde.

La Figure 3.9 représente les courbes de la norme u_{os}^1 en fonction de la conductivité des fontanelles pour différentes configurations de sources. La conductivité des fontanelles σ_f varie entre 0.03 et $0.5S.m^{-1}$ alors que celle de l'os reste fixe et vaut $\sigma_{os} = 0.04S.m^{-1}$. Pour les configurations de sources (S_1, \mathbf{q}_1) et (S_2, \mathbf{q}_2) , la norme $\|u_{os}^1\|_{L^2(\Gamma_\infty)}$ vaut respectivement $6.6 \cdot 10^{-5}$ et $4.5 \cdot 10^{-5}$ en $\sigma_f = 0.03S.m^{-1}$. Cette norme augmente avec la conductivité des fontanelles pour atteindre une valeur maximale de $6.95 \cdot 10^{-5}$ pour (S_1, \mathbf{q}_1) et $4.54 \cdot 10^{-5}$ pour (S_2, \mathbf{q}_2) en $\sigma_f = 0.1S.m^{-1}$. Ensuite, elle décroît pour atteindre en $\sigma_f = 0.5S.m^{-1}$ les valeurs $6.85 \cdot 10^{-5}/4.44 \cdot 10^{-5}$ respectivement pour (S_1, \mathbf{q}_1) et (S_2, \mathbf{q}_2) . l'allure des courbes la norme $\|u_{os}^1\|_{L^2(\Gamma_\infty)}$ est un peu différent dans le cas des configurations de sources (S_1, \mathbf{q}_2) et (S_2, \mathbf{q}_1) . Les valeurs de la norme en $\sigma_f = 0.03S.m^{-1}$ sont $8.26 \cdot 10^{-5}/6.54 \cdot 10^{-5}$ respectivement pour $(S_1, \mathbf{q}_2)/(S_2, \mathbf{q}_1)$, puis elles diminuent jusqu'à $6.24 \cdot 10^{-5}/5.91 \cdot 10^{-5}$ en $\sigma_f = 0.5S.m^{-1}$. Ces résultats montrent une fois encore l'influence de la conductivité des fontanelles sur la sensibilité u_{os}^1 , mais également celle des sources (position et orientation). Enfin, nous évaluons l'effet de la conductivité de l'os du crâne sur la sensibilité u_{os}^1 . Nous calculons puis traçons la courbe de la norme $\|u_{os}^1\|_{L^2(\Gamma_\infty)}$ en fonction de la conductivité de l'os du crâne (Figure 3.10). Nous fixons la conductivité des fontanelles σ_f à $0.3S.m^{-1}$ et faisons varier celle de l'os entre 0.01 et $0.07S.m^{-1}$. Pour toutes les configurations, la norme de la sensibilité u_{os}^1 diminue lorsque la conductivité de l'os augmente. Ceci montre que le potentiel est plus sensible pour de faibles conductivités de l'os du crâne.

3.3.3 Sensibilité par rapport au couple de conductivités (os,fontanelles)

Dans ce paragraphe, nous effectuons une faible variation des conductivités de l'os du crâne et des fontanelles simultanément. Et, nous analysons la sensibilité du potentiel électrique par rapport à une perturbation de ces conductivités. Le but est de comparer les effets d'une petite variation de la conductivité de l'os et de celle des fontanelles. Pour cela, nous considérons différentes configurations de sources. D'abord, nous comparons la sensibilité $u_{os,f}^1$ des deux sources localisées à une distance de $5mm$ et $15mm$ de l'interface cerveau/LCR et de même moment $\mathbf{q} = (0, J, J)$ avec $J = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-6}A.m^{-2}$ (Figure 3.11). Les zones de forte sensibilité sont localisées au-dessus de l'os du crâne. La Figure 3.12 représente la sensibilité $u_{os,f}^1$ d'une source située à une distance de $15mm$ de l'interface cerveau/LCR pour différents moments $\mathbf{q}_1 = (J, J, 0)$ et $\mathbf{q}_2 = (J, 0, J)$ avec $J = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-6}A.m^{-2}$. Nous observons également que les zones très sensibles sont situées au-dessus de l'os du crâne même si elles dépendent de la direction du moment électrique comme dans les études précédentes. Enfin, nous analysons la sensibilité $u_{os,f}^1$ pour une source profonde (Figure 3.13). Nous remarquons encore une sensibilité plus forte au-dessus de l'os du crâne. Dans toutes les configurations de sources considérées, nous constatons que les mesures EEG sont plus sensibles à une faible perturbation de la conductivité de l'os du crâne que de celle des fontanelles.

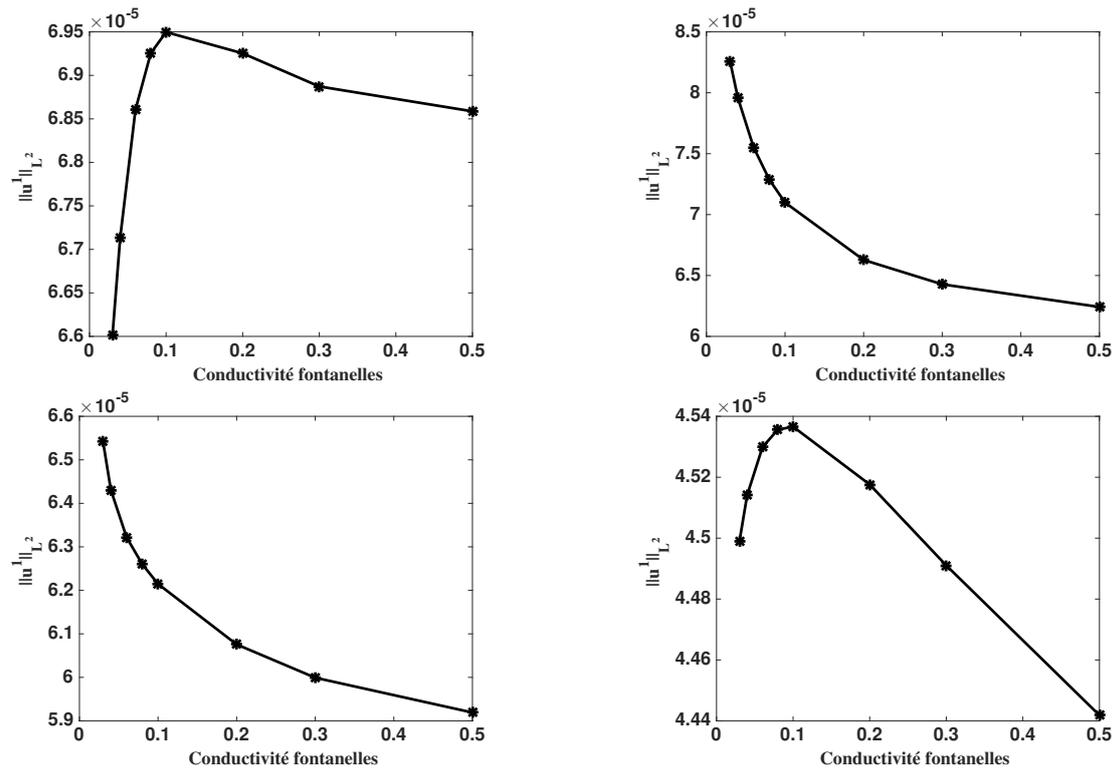


FIGURE 3.9 – Norme L^2 de la sensibilité par rapport à la conductivité de l'os du potentiel électrique sur le scalp en fonction de la conductivité des fontanelles. Haut droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1) . Haut gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2) . Bas droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1) . Bas gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2) .

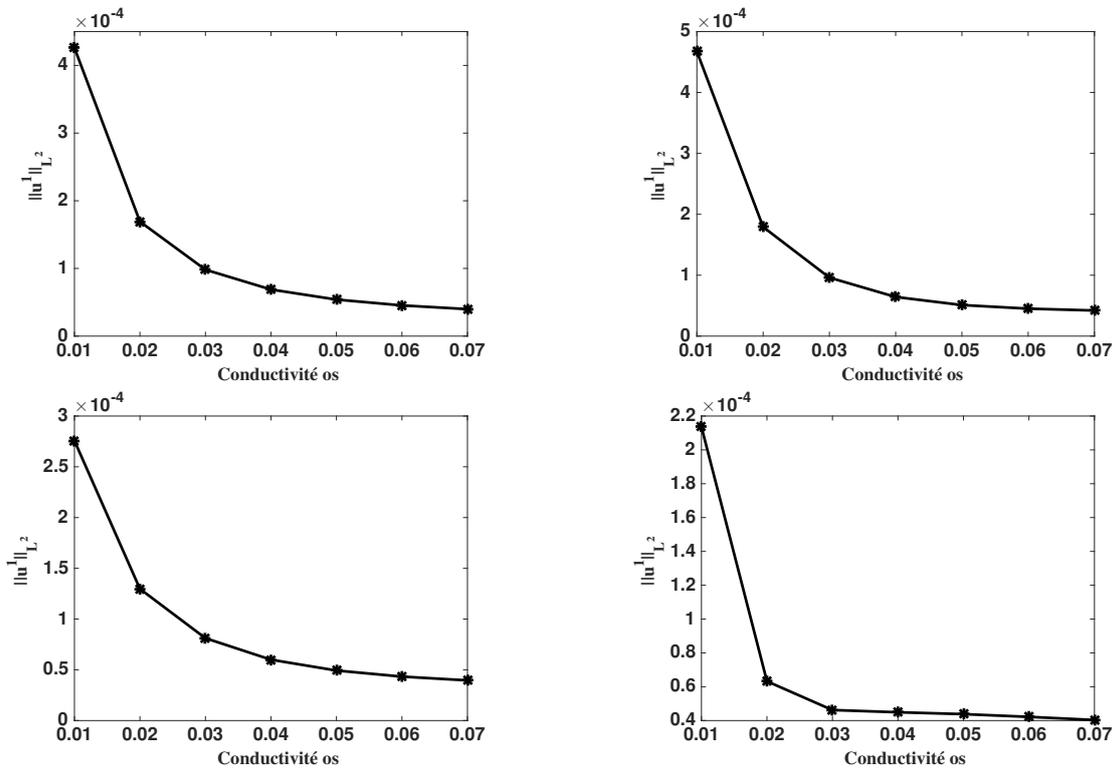


FIGURE 3.10 – Norme L^2 de la sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de la conductivité de l'os. Haut droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1) . Haut gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2) . Bas droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1) . Bas gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2) .

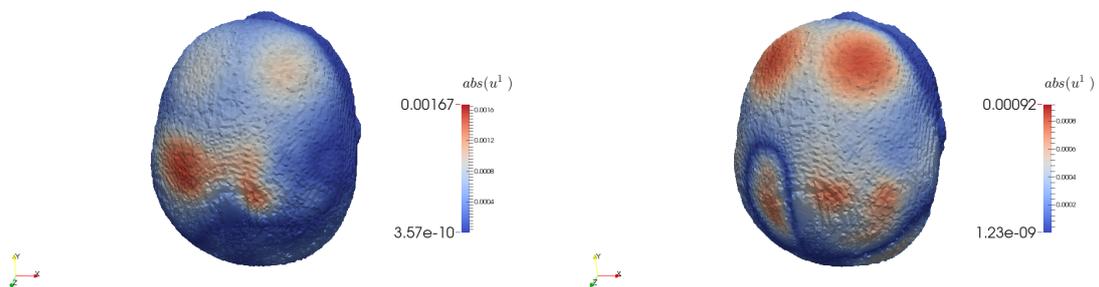


FIGURE 3.11 – Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de l'excentricité. Distance source-interface cerveau/LCR $\approx 5\text{mm}$ (gauche) et $\approx 15\text{mm}$ (droite).

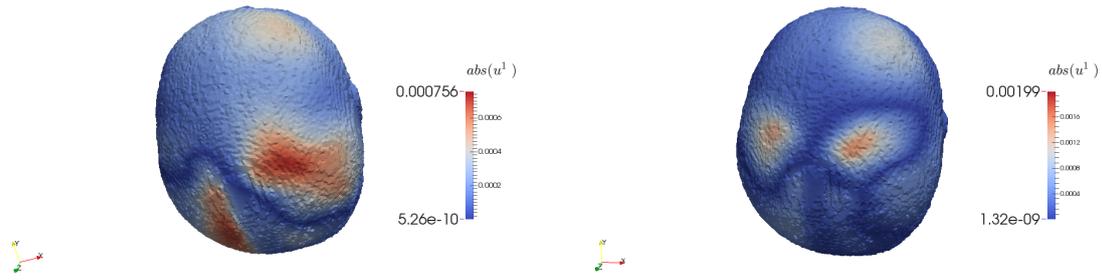


FIGURE 3.12 – Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de l’orientation. Distance source-interface cerveau/LCR $\approx 15\text{mm}$. Gauche : moment $\mathbf{q} = (J, J, 0)$. Droite : moment $\mathbf{q} = (J, 0, J)$.

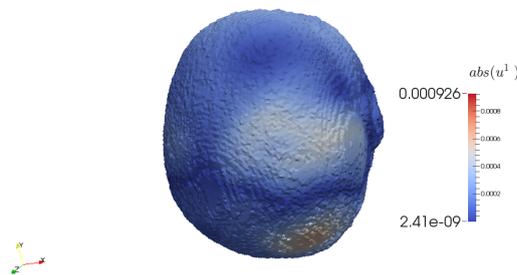


FIGURE 3.13 – Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp pour une source profonde.

Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons introduit l’analyse de sensibilité du potentiel électrique par rapport à la conductivité. Un cadre mathématique de la sensibilité est donné par la dérivée directionnelle au sens de Gâteaux. Nous avons prouvé l’existence et l’unicité de cette sensibilité. Ensuite, nous avons effectué une étude numérique de la sensibilité du potentiel électrique par rapport à la conductivité des fontanelles et de l’os du crâne. Cette étude a fourni des informations sur les zones du scalp où le potentiel électrique est affecté par de petites variations de la conductivité des fontanelles et de l’os du crâne. Ces résultats corroborent les conclusions du chapitre précédent qui disent que les valeurs des conductivités des fontanelles et de l’os du crâne impactent les mesures EEG. Cet impact semble être localisé au-dessus des fontanelles pour une faible variation de la conductivité des fontanelles et au-dessus de l’os du crâne lorsque nous avons une faible variation de la conductivité de l’os. L’impact dépend en outre de l’excentricité et de l’orientation des sources dipôlares. Les résultats obtenus montrent également une sensibilité plus prononcée lorsque les conductivités sont petites. Nous observons que les données EEG sont plus sensibles à une faible variation de la conductivité de l’os du crâne que celle des fontanelles. Nous pouvons déduire des résultats que les mesures EEG chez l’adulte sont plus affectées par une faible variation de la conductivité de l’os du crâne que chez le nouveau-né.

Cette analyse de sensibilité conforte le fait que les mesures EEG sont dépendantes du rapport des conductivités, et qu’elle apporte une information supplémentaire importante en indiquant les zones sensibles en fonction des différents paramètres du modèle (sources et conductivités).

Chapitre 4

Problème inverse de sources en EEG

4.1 Introduction

Ce chapitre porte sur le problème inverse en EEG qui consiste en la reconstruction de l'activité électrique cérébrale du nouveau-né à partir de mesures du potentiel électrique sur le scalp. Pour la convenance du lecteur, nous rappelons les différentes notations utilisées dans le chapitre 2.

La tête sera désignée par un domaine borné ouvert Ω de \mathbb{R}^3 , partitionné en L sous-domaines emboîtés Ω_i ($i = 1, \dots, L$) de frontière extérieure $\partial\Omega = \Gamma_\infty$, décrit comme suit

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= \bigcup_{i=1}^L \bar{\Omega}_i \\ \Omega_i \cap \Omega_j &= \emptyset \quad \forall i \neq j \\ \partial\Omega_1 &= \Gamma_1, \\ \partial\Omega_i &= \Gamma_i \cup \Gamma_{i-1}, \quad i = 2, \dots, L \\ \Gamma_i \cap \Gamma_{i-1} &= \emptyset, \quad i = 2, \dots, L.\end{aligned}$$

où Γ_i désigne l'interface entre Ω_i et Ω_{i+1} .

Le modèle de source considéré est de type dipolaire :

$$F = \sum_{m=1}^M \mathbf{q}_m \cdot \nabla \delta_{S_m}, \quad (4.1)$$

où δ_{S_m} est la masse de Dirac au point S_m , \mathbf{q}_m est un vecteur de \mathbb{R}^3 . $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ est une fonction de la position \mathbf{x} satisfaisant $0 < \sigma_{\min} \leq \sigma(\mathbf{x}) \leq \sigma_{\max}$ pour presque tout $\mathbf{x} \in \Omega$, où σ_{\min} et σ_{\max} sont deux constantes positives données. \mathbf{q}_m et S_m désignent respectivement, le moment et la position du dipôle $\mathbf{q}_m \cdot \delta_{S_m}$. Puisque l'activité cérébrale se déroule dans le cerveau, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que toutes les sources sont situées à l'intérieur du domaine Ω_1 ,

$$S_m \in \Omega_1 \quad \forall m = 1, \dots, M \quad (4.2)$$

Par ailleurs, les positions $(S_m)_m$ sont supposées mutuellement distinctes et les vecteurs \mathbf{q}_m sont non nuls :

$$S_m \neq S_p, \forall m \neq p \text{ et } \mathbf{q}_m \neq 0 \forall m, p \in \{1, \dots, M\}. \quad (4.3)$$

Afin de prendre en compte la présence des fontanelles chez le nouveau-né, la conductivité électrique σ est supposée non constante telle que

$$\sigma_{\Omega_i} = \sigma_i(\mathbf{x}) \text{ dans chaque sous-domaine } \Omega_i.$$

En outre, pour que le problème direct (4.7) soit bien posé et admette une solution régulière, nous supposons que σ_i a une régularité $W^{1,\infty}$ dans chaque Ω_i :

$$\sigma_i \in W^{1,\infty}(\Omega_i), \forall i = 1, \dots, L. \quad (4.4)$$

De plus, nous supposons que la conductivité est constante dans le voisinage de chaque source. Plus précisément, nous fixons une famille de boules ouvertes $(\mathcal{V}_m)_{m=1,\dots,M}$ telle que $\mathcal{V}_m \subset\subset \Omega_1$, $S_m \in \mathcal{V}_m$ et

$$\sigma_{1|\mathcal{V}_m} \equiv c_m \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } m \in \{1, \dots, M\}. \quad (4.5)$$

Comme les positions S_m sont mutuellement distinctes (4.3), nous pouvons supposer que les boules \mathcal{V}_m ne s'intersectent pas, autrement dit

$$\mathcal{V}_m \cap \mathcal{V}_p = \emptyset, \text{ si } m \neq p.$$

Remarque 4.1. Dans le cas où la conductivité σ est constante dans chaque sous-domaine Ω_i , ce qui correspond à l'activité électrique cérébrale de l'adulte, le problème inverse en EEG est beaucoup étudié dans la littérature. Les questions de l'unicité, de la stabilité et de l'identification sont traitées. Pour plus d'informations, on peut se référer, par exemple à la thèse de M. Farah [17] et les références qui y sont citées.

4.2 Position du problème

Nous considérons le problème de reconstruction de la source F (4.1) dans l'équation elliptique

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = F, & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_n u = 0, & \text{sur } \Gamma_\infty, \end{cases} \quad (4.6)$$

à partir d'une mesure de Dirichlet $f = u|_{\Gamma^*}$, où Γ^* désigne un sous-ensemble ouvert non vide de Γ correspondant à la partie du scalp sur laquelle les mesures EEG sont recueillies. Nous rappelons le problème direct en EEG étudié dans le chapitre 2

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = F, & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_n u = 0, & \text{sur } \Gamma_\infty, \end{cases} \quad (4.7)$$

qui est bien posé (voir théorème 2.9) dans le sous-espace V de $H^1(\Omega)$,

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \int_\Omega v \, d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

La trace $\gamma_0 u := u|_{\Gamma^*}$ est bien définie dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)$. Par conséquent, nous pouvons définir un opérateur d'observation appelé Λ . Étant donné F de la forme (4.1), nous résolvons le

problème (4.7) qui donne u (dépendant de F) puis nous prenons la trace sur Γ^* ce qui donne

$$\Lambda : \begin{array}{ccc} H^s(\mathbb{R}^3) & \rightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*) \\ F & \mapsto & u|_{\Gamma^*}. \end{array} \quad (4.8)$$

avec $s < -5/2$.

Le problème inverse auquel nous nous intéressons est le suivant.

(PI) Étant donnée une fonction $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)$, déterminer une source de la forme (4.1) telle que

$$\Lambda(F) = f.$$

La donnée f pour laquelle le problème inverse (PI) admet une solution sera dite compatible.

Plusieurs questions se posent : Y a-t-il une source F satisfaisant (PI) (existence) ? Est-ce que la solution du problème inverse est unique (identifiabilité) ? et si c'est le cas comment la solution dépend de la donnée f ? et enfin existe-t-il une méthode permettant d'identifier la solution (reconstruction) ?

Notons que, dans le cas des problèmes inverses issus de la physique, la question de l'existence de solutions ne se pose pratiquement pas. Dans notre cas, pour chaque jeu de mesures, on peut trouver une distribution de sources expliquant ces mesures. Par conséquent, nous nous focalisons sur les questions d'identifiabilité, de stabilité et de reconstruction.

4.3 Identifiabilité

L'identifiabilité joue un rôle important dans la suite ce travail, comme nous le verrons dans le chapitre portant sur l'identification. Elle nous permet de savoir si le problème inverse est bien posé dans le sens suivant : si deux mesures du potentiel coïncident sur un sous-ensemble non vide Γ^* , alors elles sont générées par la même source de la forme (4.1). Le résultat d'identifiabilité du problème inverse est donné par le théorème suivant.

Théorème 4.2. *Soit $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ telle que $0 < \sigma_{\min} \leq \sigma(\mathbf{x}) \leq \sigma_{\max}$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$, où σ_{\min} et σ_{\max} sont deux constantes positives. De plus, nous supposons que $\sigma_i \in W^{1,\infty}(\Omega_i)$, $i = 1, \dots, L$, (4.5). Soit F une source de la forme (4.1) dont les moments et les positions satisfont (4.3). Soit Γ^* un sous-ensemble non vide de Γ_∞ et u la solution du problème (4.6). Alors le nombre M , les positions $(S_m)_{1 \leq m \leq M}$ et les moments $(\mathbf{q}_m)_{1 \leq m \leq M}$ sont déterminés de manière unique (à une permutation près) à partir d'une seule mesure $f := u|_{\Gamma^*}$.*

La preuve du Théorème 4.2 s'appuie sur le Théorème 2.12 que l'on rappelle dans le Lemme 4.3 et le résultat de continuation unique rappelé dans le lemme 4.4.

Lemme 4.3. *Soit w la solution du problème variationnel (2.21). Si $\sigma_i \in W^{1,\infty}(\Omega_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, L\}$ et que Γ_i est de classe \mathcal{C}^2 pour $i \in \{1, \dots, L-1\} \cup \{\infty\}$, alors $w_i \in H^2(\Omega_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, L\}$.*

Lemme 4.4. *(Théorème de continuation unique [54]) Soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert de bord connexe. Considérons l'opérateur linéaire*

$$Pu = a_{ij}\partial_{ij}u + b_j\partial_ju + cu,$$

où $a_{ij} \in W^{1,\infty}(D)$, $b_j \in L^\infty(D)$, $c \in L^\infty(D)$ et (a_{ij}) est une matrice symétrique satisfaisant la condition d'ellipticité uniforme de constante $\lambda > 0$:

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in D, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Alors

1. Si $u \in H^2(D)$ satisfait $Pu = 0$ dans D et $u = 0$ dans une petite boule contenue dans D , alors $u = 0$ dans D .
2. Soit Γ^* un sous-ensemble non vide du bord ∂D de D . Si $u \in H^2(D)$ satisfait $Pu = 0$ dans D et $u_{\Gamma^*} = \partial_{\mathbf{n}}u_{\Gamma^*} = 0$, alors $u = 0$ dans D .

Preuve du Théorème 4.2. Soient

$$(\mathbf{q}_{m,\ell}, S_{m,\ell}) \text{ pour } m = 1, \dots, M^\ell \text{ et } \ell = 1, 2$$

deux configurations de sources correspondant aux sources F^ℓ de la forme (4.1) et u^ℓ les solutions correspondantes du problème (4.6) telles que

$$u_{\Gamma^*}^1 = u_{\Gamma^*}^2.$$

Il s'agit de montrer que

$$M^1 = M^2 = M$$

et qu'il existe une unique permutation π des nombres entiers $\{1, \dots, M\}$ telle que

$$\mathbf{q}_{m,1} = \mathbf{q}_{\pi(m),2}$$

et

$$S_{m,1} = S_{\pi(m),2}.$$

Pour cela, considérons la différence $v = u^2 - u^1$, solution du système suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla v) = F^2 - F^1 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_{\mathbf{n}} v = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma^*. \end{cases} \quad (4.9)$$

Nous désignons par u_m^ℓ la solution de l'équation de Poisson

$$-c_m \Delta u_m^\ell = \mathbf{q}_{m,\ell} \cdot \nabla \delta_{S_{m,\ell}} \text{ dans } \mathbb{R}^3,$$

et nous considérons la fonction

$$v_0^\ell = \sum_{m=1}^{M^2} u_m^2 - \sum_{m=1}^{M^1} u_m^1 \quad (4.10)$$

dont on sait qu'elle est analytique dans $\mathbb{R}^3 \setminus \left(\cup_{m=1}^{M^1} S_{m,1} \cup \cup_{m=1}^{M^2} S_{m,2} \right)$.

Puisque $S_{m,\ell} \in \Omega_1$ pour $\ell = 1, 2$ et $m = 1, \dots, M^\ell$, nous avons d'après les lemmes 4.3 et 4.4 que $v = 0$ dans Ω_L . Ensuite, en utilisant les conditions de transmissions (2.2a) et (2.2b), nous obtenons

$$v = 0 \text{ dans } \Omega \setminus \left(\cup_{m=1}^{M^1} \mathcal{V}_{m,1} \cup \cup_{m=1}^{M^2} \mathcal{V}_{m,2} \right), \quad (4.11)$$

où $\mathcal{V}_{m,\ell}$ désigne un voisinage du point $S_{m,\ell}$. Le reste de la preuve se fera en deux étapes.

Etape 1. Nous montrons que $M^1 = M^2$. Sans perte de généralité, nous supposons que $M^2 > M^1$. Par conséquent, comme les positions des sources sont supposées mutuellement distinctes (4.3), il existe une source $S_{m_0,2}$ telle que $S_{m_0,2} \neq S_{m,1}$ pour tout $m \in \{1, \dots, M^1\}$. Nous posons maintenant

$$B := B(S_{m_0,2}, \epsilon) \subset \mathcal{V}_{m_0}$$

une boule ouverte de centre $S_{m_0,2}$ et de rayon ϵ ne contenant aucune autre source que $S_{m_0,2}$. Ensuite, en utilisant à nouveau les conditions de transmission (2.2a) et (2.2b) et les relations (4.11) et (4.5), nous obtenons

$$\begin{cases} -c_{m_0} \Delta v = \mathbf{q}_{m_0,2} \cdot \nabla \delta_{S_{m_0,2}} & \text{dans } B, \\ c_{m_0} \partial_{\mathbf{n}} v = 0 & \text{sur } \partial B, \\ v = 0 & \text{sur } \partial B. \end{cases} \quad (4.12)$$

Par la régularité du problème direct (4.12) et d'après le Lemme 4.3 et le Lemme 4.4, nous obtenons $v = 0$ dans $B \setminus \{S_{m_0,2}\}$. Si on note \bar{v} le prolongement de v par 0 à l'extérieur de B , nous avons $\bar{v} = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{S_{m_0,2}\}$. Donc \bar{v} est une combinaison linéaire de dirac et de ses dérivées au point $S_{m_0,2}$ [55]. Par conséquent, sa régularité est au plus celle de la fonction Dirac dans \mathbb{R}^3 qui est dans H^s pour $s < -3/2$. Comme $\mathbf{q}_{m_0,2} \cdot \nabla \delta_{S_{m_0,2}} \in H^s(\mathbb{R}^3)$ pour $s < -5/2$, par la régularité elliptique nous avons $\bar{v} \in H^s(\mathbb{R}^3)$ avec $s < -1/2$. Ce qui implique que les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls et par la suite $v = 0$ et $\mathbf{q}_{m_0,2} = 0$. Ce qui est impossible puisque les intensités $\mathbf{q}_{m_0,2}$ ne sont pas identiquement nulles. Le cas $M^1 > M^2$ se démontre de manière similaire. Nous avons ainsi $M^1 = M^2 = M$.

Etape 2. Par les mêmes arguments, nous pouvons obtenir que pour toute position $S_{m,2}$ il existe une unique position $S_{r,1}$ telle que $S_{m,2} = S_{r,1}$. Cela veut dire qu'il existe une unique permutation π des nombres entiers $\{1, \dots, M\}$ telle que

$$S_{m,2} = S_{\pi(m),1} \text{ pour } m = 1, \dots, M.$$

Par suite, la fonction v satisfait le système suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma_1 \nabla v) = \sum_{m=1}^M (\mathbf{q}_{m,2} - \mathbf{q}_{\pi(m),1}) \cdot \nabla \delta_{S_{m,2}} & \text{dans } \Omega_1, \\ \sigma_1 \partial_{\mathbf{n}} v = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (4.13)$$

Puis, en utilisant les mêmes arguments que ceux développés dans l'étape 1, nous obtenons

$$\mathbf{q}_{m,2} = \mathbf{q}_{\pi(m),1} \text{ pour tout } m = 1, \dots, M.$$

Ce qui achève la preuve du théorème 4.2. ■

4.4 Quelques propriétés de l'opérateur d'observation Λ

Ce paragraphe est dédié à l'étude de quelques résultats de régularité de l'opérateur Λ défini dans (4.8), en vue de l'étude de la stabilité du problème inverse (4.2). Ces propriétés sont données dans les Propositions (4.5), (4.6) et (4.7).

Considérons la configuration $\varphi = (\mathbf{q}_m, S_m)_{1 \leq m \leq M}$ définissant la source F de la forme (4.1). Lorsque le nombre de sources M est connu, le problème direct peut être reformulé de la manière suivante : Pour une configuration de sources de la forme $\varphi = (\mathbf{q}_m, S_m)$, nous définissons l'application

$$\Lambda : (\mathbb{R}^3, \Omega_1)^M \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*) \quad (4.14)$$

$$\varphi \mapsto u_{|\Gamma^*}.$$

Le problème inverse devient alors : Etant donné $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)$, déterminer une configuration de $\varphi \in (\mathbb{R}^3, \Omega_1)^M$ de la source F telle que

$$\Lambda(\varphi) = f.$$

4.4.1 Dérivée de Fréchet

Soit $\psi = (\mathbf{p}_m, T_m)_{1 \leq m \leq M}$ un vecteur arbitraire de \mathbb{R}^{6M} tel que

$$S_m + T_m \subset \mathcal{B}_m \subset \subset \mathcal{V}_m.$$

où \mathcal{B}_m est la boule de centre S_m et de rayon ε . On pose

$$F^1 = \sum_{m=1}^M \mathbf{p}_m \cdot \nabla \delta_{S_m} - \mathbf{q}_m \cdot H(\delta_{S_m}) T_m \quad (4.15)$$

le terme source correspondant quand on dérive la solution u de (4.6) au point $\varphi = (\mathbf{q}_m, S_m)$ dans la direction $\psi = (\mathbf{p}_m, T_m)$. $H(\cdot)$ désigne la matrice hessienne

$$H(\cdot) = (\partial_{x_i x_j}^2(\cdot))_{1 \leq i, j \leq 3}$$

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u^1) = F^1, & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_n u^1 = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.16)$$

dont on peut montrer, selon les arguments développés dans le chapitre 2, qu'il est bien posé dans l'espace V et dont la trace $u^1_{|\Gamma^*}$ est bien définie dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)$. La dérivabilité de l'opérateur Λ au sens de Fréchet ainsi que sa dérivée sont données par la proposition suivante.

Proposition 4.5. *L'opérateur Λ défini par (4.8) est dérivable au sens de Fréchet et, sa dérivée en φ , $\Lambda'(\varphi)$, est définie comme suit :*

$$\Lambda'(\varphi) : \mathbb{R}^{6M} \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*) \quad (4.17)$$

$$\psi \mapsto u^1_{|\Gamma^*}.$$

Démonstration. On pose

$$F_\psi = \sum_{m=1}^M (\mathbf{q}_m + \mathbf{p}_m) \cdot \nabla \delta_{S_m + T_m} \quad (4.18)$$

et on considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u_\psi) = F_\psi, & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_n u_\psi = 0, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (4.19)$$

pour lequel la trace $u_{\psi|_{\Gamma^*}}$ est bien définie dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)$ d'après les résultats du chapitre 2. On pose

$$e_{\psi} = u_{\psi} - u - u^1, \quad (4.20)$$

où u et u^1 sont les solutions respectives des problèmes (4.6) et (4.16). Par conséquent, pour prouver la Fréchet différentiabilité de l'opérateur Λ en φ , il suffit de montrer que

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{\|u_{\psi} - u - u^1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)}}{\|\psi\|} = 0. \quad (4.21)$$

Pour cela, on considère la solution v_m de l'équation de Poisson

$$-c_m \Delta v_m = (\mathbf{q}_m + \mathbf{p}_m) \cdot (\nabla \delta_{S_m + T_m} - \nabla \delta_{S_m}) - \mathbf{q}_m \cdot H(\delta_{S_m}) T_m \text{ dans } \mathbb{R}^3, \quad (4.22)$$

on définit la fonction

$$e = \sum_{m=1}^M v_m \quad (4.23)$$

et on pose

$$w_{\psi} = e_{\psi} - e \quad (4.24)$$

dont on vérifie qu'elle est solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla w_{\psi}) = \sum_{m=1}^M \nabla \cdot ((\sigma - c_m) \nabla v_m), & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_{\mathbf{n}} w_{\psi} = -\sigma \partial_{\mathbf{n}} e, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.25)$$

En multipliant (4.25) par w_{ψ} puis en intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green, nous obtenons

$$\int_{\Omega} \sigma |\nabla w_{\psi}|^2 d\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M \int_{\Omega \setminus \mathcal{V}_m} (c_m - \sigma) \nabla v_m \cdot \nabla w_{\psi} d\mathbf{x} - \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_{\infty}} \sigma \partial_{\mathbf{n}} v_m w_{\psi} ds \quad (4.26)$$

et par suite

$$\|w_{\psi}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)} \leq \sum_{m=1}^M \left[a_m \|\nabla v_m\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + b_m \|\partial_{\mathbf{n}} v_m\|_{L^2(\Gamma_{\infty})} \right], \quad (4.27)$$

où a_m et b_m sont des constantes positives. Par conséquent, pour terminer la preuve, il suffit de montrer que

$$\lim_{\|\psi\| \rightarrow 0} \frac{\|w_{\psi}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)}}{\|\psi\|} = 0$$

et

$$\lim_{\|\psi\| \rightarrow 0} \frac{\|e\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)}}{\|\psi\|} = 0.$$

Pour cela, d'après (4.27) et (4.23), il suffit de montrer que

$$\|\partial_{\mathbf{n}} v_m\|_{L^2(\Gamma_{\infty})} = o(\|\psi\|) \quad (4.28)$$

$$\|\partial_{x_i} v_m\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} = o(\|\psi\|) \quad (4.29)$$

$$\|v_m\|_{L^2(\Gamma_{\infty})} = o(\|\psi\|). \quad (4.30)$$

D'abord, observons que la solution de l'équation (4.22) est donnée par

$$v_m = \sum_{j=1}^3 (q_m^j + p_m^j) \left[\partial_{x_j} G(x - S_m - T_m) - \partial_{x_j} G(x - S_m) \right] + \mathbf{q}_m \cdot H(G(x - S_m)) T_m \quad (4.31)$$

où G est la solution fondamentale de l'opérateur de Laplace dans \mathbb{R}^3 . Ensuite, en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2 dans $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_m$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} G(\mathbf{x} - S_m - T_m) &= \partial_{x_j} G(\mathbf{x} - S_m) - \sum_{k=1}^3 T_m^k \partial_{x_k} \partial_{x_j} G(\mathbf{x} - S_m) \\ &+ \frac{1}{2} T_m \cdot H(\partial_{x_j} G(\mathbf{x} - S_m)) T_m + \|T_m\|^2 \epsilon_j(T_m) \end{aligned} \quad (4.32)$$

avec

$$\lim_{\|T_m\| \rightarrow 0} \epsilon_j(T_m) = 0.$$

En injectant (4.32) dans (4.31), nous obtenons

$$v_m = -\mathbf{p}_m \cdot H(G(x - S_m)) T_m + \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{2} (q_m^j + p_m^j) T_m \cdot H(\partial_{x_j} G(x - S_m)) T_m + \|T_m\|^2 \epsilon_j(T_m) \right], \quad (4.33)$$

avec

$$\lim_{\|T_m\| \rightarrow 0} \epsilon_j(T_m) = 0 \text{ pour } j = 1, 2, 3.$$

Enfin, comme la fonction G est analytique dans $\mathbb{R}^3 \setminus \cup \mathcal{B}_m$, nous avons l'estimation

$$\|v_m\|_{L^2(\Gamma_\infty)} \leq c_1 \|\psi\|^2 + \sum_{j=1}^3 (c_2^j \|\psi\|^2 + c_3^j \|\psi\|^3) + (\|\psi\|^2 + \|\psi\|^3) \epsilon_j(T_m). \quad (4.34)$$

En divisant (4.34) par $\|\psi\|$ et en faisant tendre $\|\psi\|$ vers 0, le second membre de (4.34) tend vers zéro et nous avons (4.30). Les relations (4.28) et (4.29) se démontrent de la même manière. Ce qui achève la preuve de la proposition 4.5. \square

Proposition 4.6. *L'application*

Démonstration. Soient $\varphi^0 = (\mathbf{q}_{0,m}, S_{0,m})_{1 \leq m \leq M}$ et $\psi^0 = (\mathbf{p}_{0,m}, T_{0,m})_{1 \leq m \leq M}$ deux vecteurs appartenant respectivement à $(\mathbb{R}^3 \times \Omega_1)^M$ et \mathbb{R}^{6M} . Nous posons

$$F_0^1 = \sum_{m=1}^M \mathbf{p}_{0,m} \cdot \nabla \delta_{S_{0,m}} - \mathbf{q}_{0,m} \cdot H(\delta_{S_{0,m}}) T_{0,m} \quad (4.35)$$

le terme source correspondant à la dérivée u_0 solution de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u_0) &= \sum_{m=1}^M \mathbf{q}_{0,m} \cdot \nabla \delta_{S_{0,m}}, & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_n u_0 &= 0, & \text{sur } \Gamma_\infty, \end{cases} \quad (4.36)$$

au point φ^0 dans la direction ψ^0 . Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u_0^1) &= F_0^1, & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_n u_0^1 &= 0, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.37)$$

où u_0^1 peut être interprétée comme la dérivée de u_0 au point φ^0 dans la direction ψ^0 . D'après le chapitre 2, le problème (4.37) est bien posé et donc la trace $u_0^1|_{\Gamma^*}$ est bien définie dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)$.

Soit u^1 la solution du problème (4.16) que nous rappelons ci-dessous

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u^1) = F^1, & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_{\mathbf{n}} u^1 = 0, & \text{sur } \Gamma_{\infty}. \end{cases} \quad (4.38)$$

Pour prouver la continuité de l'application \mathcal{T} , il suffit de montrer que

$$\|u_0^1|_{\Gamma^*} - u^1|_{\Gamma^*}\| \rightarrow 0 \text{ quand } \|(\varphi - \varphi^0), (\psi - \psi^0)\| \rightarrow 0. \quad (4.39)$$

Soit $v_0^1 = u^1 - u_0^1$ la solution du système suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla v_0^1) = F^1 - F_0^1, & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_{\mathbf{n}} v_0^1 = 0, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (4.40)$$

et $v_{0,m}$ la solution de l'équation de Poisson

$$-c_m \Delta v_{0,m} = \mathbf{p}_m \cdot \nabla \delta_{S_m} - \mathbf{q}_m \cdot H(\delta_{S_m}) T_m - \mathbf{p}_{0,m} \cdot \nabla \delta_{S_{0,m}} + \mathbf{q}_{0,m} \cdot H(\delta_{S_{0,m}}) T_{0,m} \text{ dans } \mathbb{R}^3. \quad (4.41)$$

Nous posons

$$v_0 = \sum_{m=1}^M v_{0,m} \quad (4.42)$$

et nous considérons la différence $w_0^1 = v_0^1 - v_0$ solution du problème

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla w_0^1) = \sum_{m=1}^M \nabla \cdot ((\sigma - c_m) \nabla v_{0,m}), & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_{\mathbf{n}} w_0^1 = -\sigma \partial_{\mathbf{n}} v_0, & \text{sur } \Gamma_{\infty}. \end{cases} \quad (4.43)$$

En multipliant (4.43) par w_0^1 , en intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green, nous obtenons

$$\int_{\Omega} \sigma |\nabla w_0^1|^2 d\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M \int_{\Omega \setminus \mathcal{V}_m} (c_m - \sigma) \nabla v_{0,m} \cdot \nabla w_0^1 d\mathbf{x} - \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_{\infty}} \sigma \partial_{\mathbf{n}} v_{0,m} w_0^1 ds. \quad (4.44)$$

Par conséquent,

$$\|w_0^1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)} \leq \sum_{m=1}^M \left[a_m^0 \|\nabla v_{0,m}\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + b_m^0 \|\partial_{\mathbf{n}} v_{0,m}\|_{L^2(\Gamma_{\infty})} \right], \quad (4.45)$$

où a_m^0 et b_m^0 sont des constantes positives. D'après (4.42) et (4.45), pour achever la preuve de la proposition 4.6, il suffit de prouver que

$$\|\partial_{x_i} v_{0,m}\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} \rightarrow 0 \text{ quand } \|(\varphi - \varphi^0), (\psi - \psi^0)\| \rightarrow 0, \quad (4.46)$$

$$\|\partial_{\mathbf{n}} v_{0,m}\|_{L^2(\Gamma_{\infty})} \rightarrow 0 \text{ quand } \|(\varphi - \varphi^0), (\psi - \psi^0)\| \rightarrow 0, \quad (4.47)$$

$$\|v_{0,m}\|_{L^2(\Gamma_{\infty})} \rightarrow 0 \text{ quand } \|(\varphi - \varphi^0), (\psi - \psi^0)\| \rightarrow 0 \quad (4.48)$$

Pour cela, notons d'abord que la solution de l'équation de Poisson (4.41) est donnée par

$$v_{0,m} = \mathbf{p}_m \cdot \nabla G(\mathbf{x} - S_m) - \mathbf{q}_m \cdot H(G(\mathbf{x} - S_m)) T_m - \mathbf{q}_{0,m} \cdot \nabla G(\mathbf{x} - S_{0,m}) + \mathbf{q}_{0,m} \cdot H(G(\mathbf{x} - S_{0,m})) T_{0,m}, \quad (4.49)$$

et que l'on peut la réécrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
v_{0,m} &= (\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_{0,m}) \cdot \nabla G(\mathbf{x} - S_m) \\
&+ \mathbf{p}_{0,m} \cdot [\nabla G(\mathbf{x} - S_m) - \nabla G(\mathbf{x} - S_{0,m})] \\
&+ (\mathbf{q}_{0,m} - \mathbf{q}_m) \cdot H(G(\mathbf{x} - S_m))T_m \\
&+ \mathbf{q}_{0,m} \cdot H(G(\mathbf{x} - S_m))(T_{0,m} - T_m) \\
&+ \mathbf{q}_{0,m} \cdot [H(G(\mathbf{x} - S_{0,m})) - H(G(\mathbf{x} - S_m))]T_{0,m},
\end{aligned}$$

où G est la solution fondamentale de l'opérateur de Laplace dans \mathbb{R}^3 .
Posons ensuite

$$\begin{aligned}
A &= \mathbf{p}_{0,m} \cdot [\nabla G(\mathbf{x} - S_m) - \nabla G(\mathbf{x} - S_{0,m})] \\
&= \sum_{j=1}^3 p_{0,m}^j [\partial_{x_j} G(\mathbf{x} - S_m) - \partial_{x_j} G(\mathbf{x} - S_{0,m})]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
B &= \mathbf{q}_{0,m} \cdot [H(G(\mathbf{x} - S_{0,m})) - H(G(\mathbf{x} - S_m))]T_{0,m} \\
&= \sum_{i,j=1}^3 q_{0,m}^i [\partial_{x_i x_j}^2 G(\mathbf{x} - S_{0,m}) - \partial_{x_i x_j}^2 G(\mathbf{x} - S_m)]T_{0,m}^j
\end{aligned}$$

et considérons le développement de Taylor à l'ordre 1 de $\partial_{x_j} G(\mathbf{x} - S_m)$ et $\partial_{x_i x_j}^2 G(\mathbf{x} - S_m)$ qui donne

$$\partial_{x_j} G(\mathbf{x} - S_m) = \partial_{x_j} G(\mathbf{x} - S_{0,m}) - \nabla \partial_{x_j} G(\mathbf{x} - S_{0,m}) \cdot (S_m - S_{0,m}) + \|S_m - S_{0,m}\| \epsilon_j(S_m - S_{0,m}),$$

avec

$$\lim_{\|S_m - S_{0,m}\| \rightarrow 0} \epsilon_j(S_m - S_{0,m}) = 0 \text{ pour } j = 1, 2, 3,$$

et

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i x_j}^2 G(\mathbf{x} - S_m) &= \partial_{x_i x_j}^2 G(\mathbf{x} - S_{0,m}) - \nabla \partial_{x_i x_j}^2 G(\mathbf{x} - S_{0,m}) \cdot (S_m - S_{0,m}) \\
&+ \|S_m - S_{0,m}\| \epsilon_{ij}(S_m - S_{0,m}),
\end{aligned}$$

avec

$$\lim_{\|S_m - S_{0,m}\| \rightarrow 0} \epsilon_{ij}(S_m - S_{0,m}) = 0 \text{ pour } i, j = 1, 2, 3.$$

Enfin, en utilisant ces développements, nous obtenons

$$A = \sum_{j=1}^3 -p_{0,m}^j \left[\nabla \partial_{x_j} G(\mathbf{x} - S_{0,m}) \cdot (S_m - S_{0,m}) + \|S_m - S_{0,m}\| \epsilon_j(S_m - S_{0,m}) \right],$$

et

$$B = \sum_{i,j=1}^3 q_{0,m}^i \left[\nabla \partial_{x_i x_j}^2 G(\mathbf{x} - S_{0,m}) \cdot (S_m - S_{0,m}) - \|S_m - S_{0,m}\| \epsilon_{ij}(S_m - S_{0,m}) \right].$$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned}
v_{0,m} &= (\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_{0,m}) \cdot \nabla G(\mathbf{x} - S_m) \\
&\quad - \sum_{j=1}^3 p_{0,m}^j \left[\nabla \partial_{x_j} G(\mathbf{x} - S_{0,m}) \cdot (S_m - S_{0,m}) + \|S_m - S_{0,m}\| \epsilon_j(S_m - S_{0,m}) \right] \\
&\quad + (\mathbf{q}_{0,m} - \mathbf{q}_m) \cdot H(G(\mathbf{x} - S_m)) T_m \\
&\quad + \mathbf{q}_{0,m} \cdot H(G(\mathbf{x} - S_m)) (T_{0,m} - T_m) \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^3 q_{0,m}^i \left[\nabla \partial_{x_i x_j}^2 G(\mathbf{x} - S_{0,m}) \cdot (S_m - S_{0,m}) - \|S_m - S_{0,m}\| \epsilon_{ij}(S_m - S_{0,m}) \right].
\end{aligned}$$

Par suite, puisque la fonction G est analytique dans $\mathbb{R}^3 \setminus \cup \mathcal{V}_m$, nous avons l'estimation

$$\begin{aligned}
\|v_{0,m}\|_{L^2(\Gamma_\infty)} &\leq a_1 \|\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_{0,m}\| \\
&\quad + \sum_{j=1}^3 a_2^j \|S_m - S_{0,m}\| + a_3^j \|S_m - S_{0,m}\| \epsilon_j(S_m - S_{0,m}) \\
&\quad + a_4 \|\mathbf{q}_{0,m} - \mathbf{q}_m\| \\
&\quad + a_5 \|T_{0,m} - T_m\| \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^3 a_6^{ij} \|S_m - S_{0,m}\| + a_7^{ij} \|S_m - S_{0,m}\| \epsilon_{ij}(S_m - S_{0,m}).
\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $\|(\varphi - \varphi^0), (\psi - \psi^0)\| \rightarrow 0$, le second membre de l'estimation précédente tend vers 0, d'où (4.48). Les relations (4.46) et (4.47) se démontrent de manière similaire. Ce qui termine la preuve du résultat désiré. \square

4.4.2 Injectivité de la dérivée de Fréchet

La proposition suivante montre l'injectivité de la dérivée de Fréchet.

Proposition 4.7. *Soit $\varphi = (\mathbf{q}_m, S_m)_{1 \leq m \leq M}$ un vecteur de $(\mathbb{R}^3 \times \Omega_1)^M$ satisfaisant (4.3) et (4.2). Soit u^1 la solution du problème (4.16). Alors l'application $\Lambda'(\varphi)$*

$$\begin{aligned}
\Lambda'(\varphi) : \mathbb{R}^{6M} &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*) \\
\psi &\mapsto u_{|\Gamma^*}^1
\end{aligned} \tag{4.50}$$

est injective.

Démonstration. Soit $\varphi = (\mathbf{q}_m, S_m)_{1 \leq m \leq M}$ un vecteur de $(\mathbb{R}^3 \times \Omega_1)^M$ et $\psi = (\mathbf{p}_m, T_m)_{1 \leq m \leq M}$ un vecteur de \mathbb{R}^{6M} tels que $\Lambda'(\varphi) \cdot \psi = u_{|\Gamma^*}^1 = 0$. Il suffit de montrer que $\psi = 0$ puisque $\Lambda'(\varphi)$ est linéaire.

Pour cela, comme $u^1 = 0$ sur Γ^* par hypothèse et $\sigma \partial_{\mathbf{n}} u^1 = 0$ sur Γ^* d'après (4.16), par les lemmes (4.3) et (4.4), nous avons $u^1 = 0$ dans Ω_L . Ensuite, en utilisant les conditions de transmission de u^1 et $\sigma \partial_{\mathbf{n}} u^1 = 0$, nous obtenons

$$u^1 = 0 \text{ dans } \Omega_1 \setminus (\cup_{m=1}^M \mathcal{V}_m).$$

Nous avons à montrer que $\mathbf{p}_m = T_m = 0$. Pour cela, nous considérons le système suivant

$$\begin{cases} -c_m \Delta u_m^1 &= \mathbf{p}_m \cdot \nabla \delta_{S_m} - \mathbf{q}_m \cdot H(\delta_{S_m}) T_m, & \text{dans } \mathcal{V}_m, \\ \sigma \partial_{\mathbf{n}} u_m^1 &= u_m^1 = 0, & \text{sur } \partial \mathcal{V}_m. \end{cases} \tag{4.51}$$

pour tout $m = 1, \dots, M$ où u_m^1 désigne la restriction de la fonction u^1 à \mathcal{V}_m .

D'après les lemmes 4.3 et 4.4, nous avons $u_m^1 = 0$ dans $\Omega \setminus \{S_m\}$. D'une part, comme le second membre de (4.51) est dans $H^s(\mathbb{R}^3)$ pour $s < -\frac{7}{2}$, par la régularité elliptique, nous obtenons $u_m^1 \in H^s(\mathbb{R}^3)$ pour $s < -\frac{3}{2}$. D'autre part, le prolongement par zéro de u_m^1 à \mathbb{R}^3 est identiquement nul dans $\Omega \setminus \{S_m\}$. Par conséquent, d'après [55] u_m^1 est donné par $u_m^1 = \alpha_m \delta_{S_m}$. En substituant u_m^1 dans l'équation (4.51), nous obtenons

$$-c_m \alpha_m \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i x_i}^2 \delta_{S_m} = \sum_{i=1}^3 p_m^i \partial_{x_i} \delta_{S_m} - \sum_{i,j=1}^3 q_m^i T_m^j \partial_{x_i x_j}^2 \delta_{S_m}. \quad (4.52)$$

Ensuite, en prenant des fonctions tests $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty$ appropriées dans (4.52), nous déduisons pour tout $m = 1, \dots, M$

$$p_m^i = 0, \text{ pour } i = 1, 2, 3 \quad (4.53)$$

et

$$\begin{cases} c_m \alpha_m &= q_m^i T_m^i, \quad i = 1, 2, 3 \\ 0 &= q_m^1 T_m^2 + q_m^2 T_m^1 \\ 0 &= q_m^2 T_m^3 + q_m^3 T_m^2 \\ 0 &= q_m^1 T_m^3 + q_m^3 T_m^1. \end{cases} \quad (4.54)$$

En écrivant les trois dernières équations de (4.54) sous forme matricielle, nous avons $\mathbb{D}T_m = 0$ où

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} q_m^2 & q_m^1 & 0 \\ 0 & q_m^3 & q_m^2 \\ q_m^3 & 0 & q_m^1 \end{pmatrix}.$$

dont le déterminant est $\det(\mathbb{D}) = 2q_m^1 q_m^2 q_m^3$.

Pour achever la preuve de la proposition 4.7, il nous reste à démontrer que $T_m = 0$. En effet, rappelons d'abord que $\mathbf{q}_m \neq 0$. Par suite, si le déterminant de \mathbb{D} est non nul, nous avons $q_m^1 \neq 0$, $q_m^2 \neq 0$, $q_m^3 \neq 0$ et donc $T_m = 0$. Dans le cas contraire c'est à dire si $\det(\mathbb{D}) = 0$, comme $\mathbf{q}_m \neq 0$, il existe au moins un $q_m^i \neq 0$. Supposons que c'est q_m^3 qui est non nul, alors nous avons $q_m^1 q_m^2 = 0$. Donc, il y a au moins un des deux termes $q_m^i, i = 1, 2$ qui est nul. Si $q_m^1 = 0$ alors $\alpha_m = 0$ d'après la première équation de (4.54) puisque $c_m \neq 0$. Par conséquent, nous avons $q_m^2 T_m^2 = 0$ et $q_m^3 T_m^3 = 0$. En outre, puisque $q_m^1 = 0$ alors $q_m^2 T_m^1 = 0$ et $q_m^3 T_m^1 = 0$ d'après la deuxième et la troisième équation de (4.54). Puisque nous avons supposé que $q_m^3 \neq 0$, nous obtenons alors $T_m^1 = T_m^3 = 0$. Pour montrer que $T_m^2 = 0$, nous considérons les cas $q_m^2 \neq 0$ et $q_m^2 = 0$. Pour le premier cas, nous avons directement $T_m^2 = 0$ d'après la première équation de (4.54). Si $q_m^2 = 0$, nous avons $q_m^3 T_m^2 = 0$ ce qui implique que $T_m^2 = 0$ puisque $q_m^3 \neq 0$. Nous avons donc montré que $T_m^1 = T_m^2 = T_m^3 = 0$. Ce qui termine la preuve de la proposition 4.7. \square

4.5 Stabilité

Avant d'énoncer le résultat de stabilité, nous introduisons quelques notations. Nous considérons deux configurations

$$\varphi^\ell = (\mathbf{q}_m^\ell, S_m^\ell)_{1 \leq m \leq M}, \quad \ell = 1, 2, \quad (4.55)$$

correspondant à deux termes sources F^ℓ de type

$$\sum_{m=1}^M \mathbf{q}_m^\ell \cdot \nabla \delta_{S_m^\ell},$$

ayant le même nombre de sources M . Nous posons

$$\mathbf{S}^\ell = (S_m^\ell)_{1 \leq m \leq M}, \quad \ell = 1, 2,$$

l'ensemble des positions de sources de la configuration φ^ℓ . Nous rappelons la distance de Hausdorff, $d_{\mathcal{H}}(\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2)$, entre \mathbf{S}^1 et \mathbf{S}^2 définie par

$$d_{\mathcal{H}}(\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2) = \max \left(\max_{1 \leq i \leq M} \min_{1 \leq j \leq M} \|S_i^1 - S_j^2\|, \max_{1 \leq i \leq M} \min_{1 \leq j \leq M} \|S_j^1 - S_i^2\| \right),$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^3 . D'après [13], il existe une permutation π des nombres entiers $\{1, \dots, M\}$ telle que

$$d_{\mathcal{H}}(\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2) = \max_{1 \leq m \leq M} \|S_m^1 - S_{\pi(m)}^2\|. \quad (4.56)$$

Finalement, nous définissons la distance entre deux configurations de (4.55) comme suit

$$d(\varphi^1, \varphi^2) = \max_{1 \leq m \leq M} \|\mathbf{q}_m^1 - \mathbf{q}_{\pi(m)}^2\| + \max_{1 \leq m \leq M} \|S_m^1 - S_{\pi(m)}^2\|, \quad (4.57)$$

que nous utilisons dans cette étude de stabilité.

Soit maintenant $d(\Gamma_1, S)$ la distance euclidienne entre le bord Γ_1 et un point $S \in \Omega_1$. Nous posons

$$\alpha = \min_{1 \leq m \leq M} d(\Gamma_1, S_m),$$

qui est supérieur à zéro puisque $S_m \in \Omega_1$ et nous considérons le sous-ensemble

$$\Omega_\alpha = \{\mathbf{x} \in \Omega_1 : d(\Gamma_1, \mathbf{x}) \geq \alpha\}. \quad (4.58)$$

De plus, il existe deux constantes positives β_1 et β_2 telles que

$$\beta_1 \leq \|\mathbf{q}_m^\ell\| \leq \beta_2, \quad \text{pour } \ell = 1, 2 \text{ et pour tout } m = 1, \dots, M, \quad (4.59)$$

et nous désignons par \mathcal{Q} l'ensemble des moments $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant (4.59).

Le résultat de stabilité est donné par le théorème suivant.

Théorème 4.8. *Soit \mathcal{K} un sous-ensemble convexe de Ω_α . Alors il existe une constante positive c telle que*

$$d(\varphi^1, \varphi^2) \leq c \|\Lambda(\varphi^1) - \Lambda(\varphi^2)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \quad \forall \varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{Q}^M \times \mathcal{K}^M.$$

Démonstration. La preuve du théorème 4.8 se fera en trois étapes.

Étape 1. Soit l'ensemble $\mathcal{R} = \mathcal{Q}^M \times \Omega_\alpha^M$, nous montrons d'abord le résultat suivant

$$\exists c_1 > 0 : \|\Lambda'(\varphi) \cdot \psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)} \geq c_1 \|\psi\|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{R}, \quad \forall \psi \in \mathbb{R}^{6M} \quad (4.60)$$

ou le résultat équivalent

$$\exists c_1 > 0 : \|\Lambda'(\varphi) \cdot \psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)} \geq c_1, \quad \forall \varphi \in \mathcal{R}, \quad \forall \psi \in \mathcal{S}$$

où \mathcal{S} désigne la sphère unité de \mathbb{R}^{6M} .

En effet, supposons qu'il existe une suite (φ_n, ψ_n) qui converge vers un élément (φ_1, ψ_1) dans l'ensemble compact $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ telle que

$$\|\Lambda'(\varphi_n) \cdot \psi_n\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)} \leq \frac{1}{n}.$$

Alors par la compacité de l'ensemble $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ et la continuité de l'application \mathcal{T} démontrée dans la proposition ??, nous obtenons

$$\Lambda'(\varphi_1) \cdot \psi_1 = 0.$$

L'injectivité de l'application $\Lambda'(\varphi_1)$ (proposition 4.50), nous donne $\psi_1 = 0$, ce qui est impossible puisque $\|\psi\| = 1$.

Etape 2. Comme l'application \mathcal{T} est continue sur le compact $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$, elle y est uniformément continue. Par conséquent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour chaque $\varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{R}$ satisfaisant $\|\varphi^2 - \varphi^1\| < \varepsilon$, nous ayons pour tout $\psi \in \mathcal{S}$

$$\|\Lambda'(\varphi^2) \cdot \psi - \Lambda'(\varphi^1) \cdot \psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)} \leq \frac{c_1}{2}.$$

En prenant $\frac{\psi}{\|\psi\|} \in \mathcal{S}$, nous obtenons

$$\|\Lambda'(\varphi^2) \cdot \psi - \Lambda'(\varphi^1) \cdot \psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)} \leq \frac{c_1}{2} \|\psi\|, \forall \psi \in \mathbb{R}^{6M}. \quad (4.61)$$

Etape 3. Soit ε le réel donné dans l'étape 2 et $\varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{Q}^M \times \mathcal{K}^M$. Dans cette étape, nous considérons deux cas :

Cas 1. $\|\varphi^2 - \varphi^1\| < \varepsilon$

Par la convexité de l'ensemble \mathcal{K}^M et la régularité de l'application Λ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \Lambda(\varphi^2) - \Lambda(\varphi^1) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} [\Lambda(\varphi^1 + s(\varphi^2 - \varphi^1))] ds \\ &= \int_0^1 [\Lambda'(\varphi^1 + s(\varphi^2 - \varphi^1))] \cdot (\varphi^2 - \varphi^1) ds \\ &= \Lambda'(\varphi^1) \cdot (\varphi^2 - \varphi^1) + \int_0^1 [\Lambda'(\varphi^1 + s(\varphi^2 - \varphi^1)) - \Lambda'(\varphi^1)] \cdot (\varphi^2 - \varphi^1) ds. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|\Lambda(\varphi^2) - \Lambda(\varphi^1)\| \geq \|\Lambda'(\varphi^1) \cdot (\varphi^2 - \varphi^1)\| - \int_0^1 [\|\Lambda'(\varphi^1 + s(\varphi^2 - \varphi^1)) - \Lambda'(\varphi^1)\|] \cdot \|\varphi^2 - \varphi^1\| ds.$$

Par (4.60) et (4.61), nous obtenons

$$\frac{c_1}{2} \|\varphi^2 - \varphi^1\| \leq \|\Lambda(\varphi^2) - \Lambda(\varphi^1)\|.$$

Cas 2. $\|\varphi^2 - \varphi^1\| \geq \varepsilon$

Nous considérons l'ensemble compact

$$\mathbf{K} = \{\varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{Q}^M \times \mathcal{K}^M : \|\varphi^2 - \varphi^1\| \geq \varepsilon\}$$

sur lequel l'application continue

$$(\varphi^1, \varphi^2) \longrightarrow \|\Lambda(\varphi^1) - \Lambda(\varphi^2)\|$$

admet un minimum $\theta \geq 0$. En outre, d'après le résultat d'unicité du théorème 4.2, nous avons $\theta > 0$. En effet, s'il existe $(\varphi^1, \varphi^2) \in \mathbf{K}$ tel que $\Lambda(\varphi^1) = \Lambda(\varphi^2)$ alors $\varphi^1 = \varphi^2$, ce qui est impossible. Par conséquent,

$$\frac{\theta}{d} \|\varphi^2 - \varphi^1\| \leq \|\Lambda(\varphi^2) - \Lambda(\varphi^1)\|$$

où d désigne le diamètre de l'ensemble \mathbf{K} . Ici nous avons utilisé le fait que $\|\varphi^2 - \varphi^1\| \leq d$. Pour terminer la preuve, il suffit de prendre

$$c = \max\left(\frac{2}{c_1}, \frac{d}{\theta}\right).$$

□

4.6 Méthodes de reconstruction

Dans cette partie, nous développons des méthodes efficaces capables de reconstruire numériquement les moments et les positions des sources de la forme 4.1. Nous reformulons d'abord le problème inverse en un problème de minimisation à l'aide du résultat d'unicité obtenu dans la partie 4.3. Ensuite, nous considérons deux fonctionnelles coût : la fonctionnelle des moindres carrés et la fonctionnelle de Kohn-Vogelius. Pour chaque méthode, nous allons montrer que le problème de minimisation est équivalent au problème inverse. Enfin, nous nous intéressons au calcul du gradient de chaque fonctionnelle nécessaires pour les applications numériques via des méthodes du gradient.

4.6.1 Fonctionnelle de Kohn-Vogelius

Définition

La méthode de Kohn-Vogelius (KV) consiste à minimiser la fonctionnelle coût

$$J_{kv}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma |\nabla w|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma^*} w^2 ds. \quad (4.62)$$

Dans la définition de la fonctionnelle (4.62), $\varphi = (\mathbf{q}_m, S_m)_{1 \leq m \leq M}$ désigne la configuration de source correspondant à une source F de la forme 4.1, $w = u_n - u_d$ est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla w) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w = \Lambda(\varphi) - f & \text{sur } \Gamma^*, \\ \sigma \partial_n w = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma^*. \end{cases} \quad (4.63)$$

où u_n et u_d satisfont respectivement les systèmes

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u_n) = F & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_n u_n = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (4.64)$$

et

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u_d) = F & \text{dans } \Omega, \\ u_d = f & \text{sur } \Gamma^*, \\ \sigma \partial_n u_d = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma^*. \end{cases} \quad (4.65)$$

Problème de minimisation

Nous proposons de résoudre le problème de minimisation suivant

$$J_{kv}(\tilde{\varphi}) = \min_{\varphi \in (\mathbb{R}^3 \times \Omega_1)^M} J_{kv}(\varphi). \quad (4.66)$$

Nous rappelons que, pour une donnée compatible, le problème inverse admet une solution et par le résultat d'identifiabilité nous avons que cette solution est unique.

Pour une donnée compatible, nous prouvons dans la proposition suivante l'équivalence entre le problème inverse (**PI**) et ce problème de minimisation (4.66).

Proposition 4.9. *Pour une donnée compatible $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)$, la solution du problème inverse (**PI**) est équivalente à la solution du problème de minimisation (4.66).*

Démonstration. Soit $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)$ une donnée compatible et soit $\tilde{\varphi}$ la solution du problème inverse (**PI**). Nous montrons d'abord que $\tilde{\varphi}$ est solution du problème de minimisation et que $J_{kv}(\tilde{\varphi}) = 0$. Puisque $\tilde{\varphi}$ est solution du problème inverse, alors nous avons $\Lambda(\tilde{\varphi}) - f = 0$ sur Γ^* . Donc $w = 0$ sur Γ^* et par suite $w = 0$ dans Ω par unicité de la solution du problème (4.63). Par conséquent, $\tilde{\varphi}$ est un minimum de la fonctionnelle J_{kv} avec $J_{kv}(\tilde{\varphi}) = 0$.

Nous montrons maintenant que tout minimum de J_{kv} coïncide avec l'unique solution du problème inverse. Nous considérons $\tilde{\varphi}$ un autre minimum de J_{kv} . Alors $J_{kv}(\tilde{\varphi}) = 0$ ce qui équivaut à

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma |\nabla w|^2 d\mathbf{x} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma^*} w^2 ds = 0.$$

D'où $w = cte$ dans Ω et $w = 0$ sur Γ^* , donc $w = 0$ dans Ω . Ce qui entraîne que $\Lambda(\tilde{\varphi}) - f = 0$ et $\Lambda(\tilde{\varphi}) = f$, donc $\tilde{\varphi}$ est solution du problème inverse pour f . D'après le résultat d'identifiabilité du théorème 4.3, nous avons $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}$. \square

Nous venons de montrer que la résolution du problème de minimisation revient à résoudre le problème inverse. Il existe plusieurs algorithmes pour la résolution numérique du problème de minimisation. Nous allons en citer quelques-uns dans le chapitre suivant. Dans le but d'utiliser des méthodes de type gradient, nous avons besoin d'évaluer le gradient de la fonctionnelle J_{kv} . Dans le paragraphe suivant, nous proposons de calculer ce gradient. Pour cela, nous rappelons le principe de la méthode de l'état adjoint [35].

Méthode de l'état adjoint

Dans ce paragraphe, nous exposons brièvement le principe de la méthode de l'état adjoint. Pour cela, nous considérons $J(\varphi)$ la fonctionnelle dont nous voulons calculer le gradient. Nous posons

$$I(\varphi, u(\varphi)) = 0 \quad (4.67)$$

l'équation d'état dont la solution est $u(\varphi)$. Le principe de la méthode de l'état adjoint est de considérer l'équation d'état comme une contrainte et d'introduire un Lagrangien en supposant que u et φ sont indépendants. Le Lagrangien associé à la fonctionnelle J est alors défini par

$$\mathcal{L}(\varphi, u, \lambda) = J(\varphi) + \langle \lambda, I(\varphi, u) \rangle. \quad (4.68)$$

Lorsque u vérifie l'équation d'état ($u = u(\varphi)$), alors nous avons

$$\mathcal{L}(\varphi, u(\varphi), \lambda) = J(\varphi). \quad (4.69)$$

Ainsi, en dérivant (4.69) par rapport à φ dans la direction ψ on obtient

$$J'(\varphi) \cdot \psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}(\varphi, u(\varphi), \lambda) \cdot \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\varphi, u(\varphi), \lambda) \cdot Du(\varphi), \quad (4.70)$$

où $Du(\varphi) = \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\varphi) \cdot \psi$. Si u est indépendant de φ , le terme $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}$ de (4.70) est simple à calculer. L'idée est de choisir λ pour que le second terme de (4.70) s'annule c'est à dire on détermine λ tel que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\varphi, u(\varphi), \lambda) \cdot s = 0, \text{ quelque soit } s. \quad (4.71)$$

Ce qui donne l'équation adjointe dont λ (l'état adjoint) est la solution. Pour calculer le gradient de J , on utilise l'identité

$$J'(\varphi) \cdot \psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}(\varphi, u, \lambda) \cdot \psi. \quad (4.72)$$

Calcul du gradient

Avant de détailler le calcul de l'état adjoint, nous reformulons la fonctionnelle J_{kv} en termes d'intégrales sur le bord de Γ^* . En appliquant la formule de Green dans Ω à w puis en remplaçant w par $u_n - u_d$, nous obtenons

$$J_{kv}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} -\sigma \partial_n u_d (u_n - f) ds + \frac{\epsilon}{2} \int_{\Gamma^*} (u_n - f)^2 ds. \quad (4.73)$$

Etat adjoint

Le Lagrangien associé à la fonctionnelle J_{kv} est donné par

$$\mathcal{L}_{kv}(\varphi, u_n, u_d, \lambda_n, \lambda_d) = J_{kv}(\varphi) + \int_{\Omega} (-\nabla \cdot (\sigma \nabla u_n) - F) \lambda_n d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (-\nabla \cdot (\sigma \nabla u_d) - F) \lambda_d d\mathbf{x}. \quad (4.74)$$

Pour obtenir les états adjoints, nous dérivons d'abord le lagrangien par rapport à u_n et u_d . Elles sont données par

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{kv}}{\partial u_n} \cdot v = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} -\partial_n u_d v ds + \int_{\Omega} (-\nabla \cdot (\sigma \nabla v)) \lambda_n d\mathbf{x} + \epsilon \int_{\Gamma^*} v (u_n - f) ds, \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{kv}}{\partial u_d} \cdot v = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} -\partial_n v (u_n - f) ds + \int_{\Omega} (-\nabla \cdot (\sigma \nabla v)) \lambda_d d\mathbf{x}, \quad (4.76)$$

quelque soit $v \in H^1(\Omega)$. En faisant une double intégration par parties, les expressions (4.75) et (4.76) deviennent respectivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{kv}}{\partial u_n} \cdot v &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} -\partial_n u_d v ds + \epsilon \int_{\Gamma^*} v (u_n - f) ds \\ &\quad + \int_{\Omega} (-\nabla \cdot (\sigma \nabla \lambda_n)) v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma^*} (\sigma \partial_n \lambda_n v - \sigma \partial_n v \lambda_n) ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{kv}}{\partial u_d} \cdot v &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} -\partial_n v (u_n - f) ds \\ &\quad + \int_{\Omega} (-\nabla \cdot (\sigma \nabla \lambda_d)) v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma^*} (\sigma \partial_n \lambda_d v - \sigma \partial_n v \lambda_d) ds. \end{aligned}$$

Pour obtenir les équations adjointes de λ_n et λ_d , nous posons $\frac{\partial \mathcal{L}_{kv}}{\partial u_n} \cdot v = 0$ et $\frac{\partial \mathcal{L}_{kv}}{\partial u_d} \cdot v = 0$. Ainsi les états adjoints λ_n et λ_d associés respectivement aux potentiels u_n et u_d sont définis comme les solutions des équations suivantes

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla \lambda_n) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_n \lambda_n = \frac{1}{2} \sigma \partial_n u_d - \varepsilon(u_n - f) & \text{sur } \Gamma^*, \\ \sigma \partial_n \lambda_n = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma^*, \end{cases} \quad (4.77)$$

et

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla \lambda_d) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \lambda_d = -\frac{1}{2}(u_n - f) & \text{sur } \Gamma^*, \\ \sigma \partial_n \lambda_d = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma^*. \end{cases} \quad (4.78)$$

Le gradient de la fonctionnelle J_{kv} par rapport à la configuration de sources $\varphi = (\mathbf{q}_m, S_m)_{1 \leq m \leq M}$ est donné par la proposition suivante.

Proposition 4.10. *Soient λ_n et λ_d les états adjoints, solutions respectives des équations (4.77) et (4.78). Le gradient de J_{kv} par rapport à la source S_m et au moment \mathbf{q}_m de la source $\varphi = (\mathbf{q}_m, S_m)_{1 \leq m \leq M}$ est donné par*

$$(\nabla J_{kv})_m = \begin{pmatrix} \nabla \lambda_n(S_m) + \nabla \lambda_d(S_m) \\ H(\lambda_n(S_m)) \mathbf{q}_m + H(\lambda_d(S_m)) \mathbf{q}_m \end{pmatrix}. \quad (4.79)$$

Démonstration. Par la méthode de l'état adjoint, le gradient de J_{kv} est donné par la relation

$$\begin{aligned} J'_{kv}(\varphi) \cdot \psi &= \frac{\partial \mathcal{L}_{kv}}{\partial \varphi}(\varphi, u_n, u_d, \lambda_n, \lambda_d) \cdot \psi \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}_{kv}(\varphi + h\psi, u_n, u_d, \lambda_n, \lambda_d) - \mathcal{L}_{kv}(\varphi, u_n, u_d, \lambda_n, \lambda_d)}{h}. \end{aligned}$$

Posons

$$L_{kv} = \frac{1}{h} [\mathcal{L}_{kv}(\varphi + h\psi, u_n, u_d, \lambda_n, \lambda_d) - \mathcal{L}_{kv}(\varphi, u_n, u_d, \lambda_n, \lambda_d)].$$

Nous avons alors

$$L_{kv} = \frac{1}{h} \left[- \int_{\Omega} F^h \lambda_n d\mathbf{x} - \int_{\Omega} F^h \lambda_d d\mathbf{x} + \int_{\Omega} F \lambda_n d\mathbf{x} + \int_{\Omega} F \lambda_d d\mathbf{x} \right],$$

avec

$$F^h = \sum_{m=1}^M (\mathbf{q}_m + h\mathbf{p}_m) \cdot \nabla \delta_{S_m + hT_m}.$$

Puisque la conductivité σ est constante dans \mathcal{V}_m , alors d'après (4.77) et (4.78) les états

adjoints λ_n et λ_d sont analytiques dans \mathcal{V}_m et réguliers ailleurs. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
L_{kv} &= \frac{1}{h} \sum_{m=1}^M \left[(\mathbf{q}_m + h\mathbf{p}_m) \cdot \nabla \lambda_n(S_m + hT_m) + (\mathbf{q}_m + h\mathbf{p}_m) \cdot \nabla \lambda_d(S_m + hT_m) \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{q}_m \cdot \nabla \lambda_n(S_m) - \mathbf{q}_m \cdot \nabla \lambda_d(S_m) \right] \\
&= \frac{1}{h} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^3 \left[(q_m^i + hp_m^i) \partial_{x_i} \lambda_n(S_m + hT_m) - q_m^i \partial_{x_i} \lambda_n(S_m) \right. \\
&\quad \left. + (q_m^i + hp_m^i) \partial_{x_i} \lambda_d(S_m + hT_m) - q_m^i \partial_{x_i} \lambda_d(S_m) \right] \\
&= \frac{1}{h} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^3 \left[q_m^i (\partial_{x_i} \lambda_n(S_m + hT_m) - \partial_{x_i} \lambda_n(S_m)) + q_m^i (\partial_{x_i} \lambda_d(S_m + hT_m) - \partial_{x_i} \lambda_d(S_m)) \right. \\
&\quad \left. + hp_m^i (\partial_{x_i} \lambda_n(S_m + hT_m) + \partial_{x_i} \lambda_d(S_m + hT_m)) \right]. \tag{4.80}
\end{aligned}$$

Le développement de Taylor à l'ordre 2 des fonctions $\partial_{x_i} \lambda_n(S_m + hT_m)$ et $\partial_{x_i} \lambda_d(S_m + hT_m)$, $i = 1, 2, 3$, donne

$$\partial_{x_i} \lambda_n(S_m + hT_m) = \partial_{x_i} \lambda_n(S_m) + h \sum_{j=1}^3 T_m^j \partial_{x_j} \partial_{x_i} \lambda_n(S_m) + h^2 \|T_m\|^2 \epsilon_n^i(hT_m), \tag{4.81}$$

$$\partial_{x_i} \lambda_d(S_m + hT_m) = \partial_{x_i} \lambda_d(S_m) + h \sum_{j=1}^3 T_m^j \partial_{x_j} \partial_{x_i} \lambda_d(S_m) + h^2 \|T_m\|^2 \epsilon_d^i(hT_m), \tag{4.82}$$

avec $\lim_{h\|T_m\| \rightarrow 0} \epsilon_n^i(hT_m) = 0$ et $\lim_{h\|T_m\| \rightarrow 0} \epsilon_d^i(hT_m) = 0$, pour $i = 1, 2, 3$.

En injectant (4.81) et (4.82) dans (4.80), nous obtenons

$$\begin{aligned}
L_{kv} &= \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^3 \left[\mathbf{q}_m^i \sum_{j=1}^3 T_m^j \partial_{x_j} \partial_{x_i} \lambda_n(S_m) + \mathbf{q}_m^i \sum_{j=1}^3 T_m^j \partial_{x_j} \partial_{x_i} \lambda_d(S_m) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{p}_m^i (\partial_{x_i} \lambda_n(S_m) + \partial_{x_i} \lambda_d(S_m)) + h\mathbf{p}_m^i \left(\sum_{j=1}^3 T_m^j \partial_{x_j} \partial_{x_i} \lambda_n(S_m) + \sum_{j=1}^3 T_m^j \partial_{x_j} \partial_{x_i} \lambda_d(S_m) \right) \right. \\
&\quad \left. + h\|T_m\|^2 \epsilon_n^i(hT_m) + h\|T_m\|^2 \epsilon_d^i(hT_m) + h^2 \|T_m\|^2 \epsilon_n^i(hT_m) + h^2 \|T_m\|^2 \epsilon_d^i(hT_m) \right].
\end{aligned}$$

En faisant tendre h vers 0 dans l'expression ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}
J'_{kv}(\varphi) \cdot \psi &= \sum_{m=1}^M \left[\mathbf{p}_m \cdot \nabla \lambda_n(S_m) + \mathbf{p}_m \cdot \nabla \lambda_d(S_m) \right. \\
&\quad \left. + H(\lambda_n(S_m)) \mathbf{q}_m \cdot T_m + H(\lambda_d(S_m)) \mathbf{q}_m \cdot T_m \right] \tag{4.83}
\end{aligned}$$

À partir de la relation (4.83), nous déduisons l'expression (4.79) du gradient de J_{kv} par rapport au moment \mathbf{q}_m et à la position S_m de la source φ \square

4.6.2 Fonctionnelle aux moindres carrés

Définition

La méthode des moindres carrés consiste à chercher le minimum de la fonctionnelle coût des moindres carrés J_{mc} définie par

$$J_{mc}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} (u_n - f)^2 ds, \tag{4.84}$$

où $u_n = u_n(\varphi)$ est la solution du problème direct pour une configuration de sources de paramètres φ et f représente les mesures sur Γ^* . Ceci revient à minimiser l'écart entre les observations et la solution prédite par le problème direct.

Problème de minimisation

Nous considérons le problème de minimisation suivant

$$J_{mc}(\tilde{\varphi}) = \min_{\varphi \in (\mathbb{R}^3 \times \Omega_1)^M} J_{mc}(\varphi). \quad (4.85)$$

Comme pour la méthode de Kohn-Vogelius, nous allons montrer dans la proposition suivante que résoudre le problème inverse (**PI**) revient à résoudre le problème de minimisation (4.85) pour une donnée compatible.

Proposition 4.11. *Soit $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)$ une donnée compatible. Alors la solution du problème de minimisation (4.85) est la solution du problème inverse (**PI**).*

Démonstration. Soient $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^*)$ une donnée compatible et $\bar{\varphi}$ la solution du problème inverse. Nous montrons que $\bar{\varphi}$ est solution du problème de minimisation. La donnée $\bar{\varphi}$ étant solution du problème inverse, alors $\Lambda(\bar{\varphi}) - f = 0$ sur Γ^* , donc $u_n - f = 0$ sur Γ^* et $J_{mc}(\bar{\varphi}) = 0$. D'où $\bar{\varphi}$ est un minimum de J_{mc} .

Soit maintenant $\tilde{\varphi}$ un autre minimum de J_{mc} . Alors, nous avons $J_{mc}(\tilde{\varphi}) = 0$. Ceci implique que $u_n - f = 0$ sur Γ^* . Ainsi, $\Lambda(\tilde{\varphi}) - f = 0$ sur Γ^* et $\Lambda(\tilde{\varphi}) = f$. D'où $\tilde{\varphi}$ est solution du problème inverse. L'identifiabilité donne $\tilde{\varphi} = \bar{\varphi}$. \square

Calcul du gradient

Comme pour la fonctionnelle J_{kv} , nous calculons le gradient de J_{mc} par la méthode de l'état adjoint afin d'utiliser les méthodes de type gradient.

Etat adjoint

Nous considérons le Lagrangien associé à la fonctionnelle J_{mc}

$$\mathcal{L}_{mc}(\varphi, u_n, \lambda) = J_{mc}(\varphi) + \int_{\Omega} (-\nabla \cdot (\sigma \cdot \nabla u_n)) \lambda \, d\mathbf{x}. \quad (4.86)$$

En dérivant (4.86) par rapport à u_n suivant $v \in H^1(\Omega)$, nous obtenons

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{mc}}{\partial u_n} \cdot v = \int_{\Gamma^*} v(u_n - f) \, ds + \int_{\Omega} (-\nabla \cdot (\sigma \cdot \nabla v)) \lambda \, d\mathbf{x}. \quad (4.87)$$

En faisant une double intégration par parties, l'expression (4.87) devient

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{mc}}{\partial u_n} \cdot v = \int_{\Gamma^*} v(u_n - f) \, ds + \int_{\Omega} (-\nabla \cdot (\sigma \cdot \nabla \lambda)) v \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma^*} (\sigma \partial_n \lambda v - \sigma \partial_n v \lambda) \, ds.$$

En posant $\frac{\partial \mathcal{L}_{mc}}{\partial u_n} \cdot v = 0$, nous obtenons l'état adjoint λ comme solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla \lambda) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_n \lambda = -(u_n - f) & \text{sur } \Gamma^*, \\ \sigma \partial_n \lambda = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma^*. \end{cases} \quad (4.88)$$

Proposition 4.12. *Le gradient de J_{mc} par rapport au moment \mathbf{q}_m et à la source S_m de la source $\varphi = (\mathbf{q}_m, S_m)_{1 \leq m \leq M}$ est donné par*

$$(\nabla J_{mc})_m = \begin{pmatrix} \nabla \lambda(S_m) \\ H(\lambda(S_m)) \mathbf{q}_m \end{pmatrix}, \quad (4.89)$$

où λ est l'état adjoint solution de l'équation (4.88).

Démonstration. La démonstration de cette proposition se fait de la même manière que celle de la proposition 4.10. D'après (4.72), nous avons

$$\begin{aligned} J'_{mc}(\varphi) \cdot \psi &= \frac{\partial \mathcal{L}_{mc}}{\partial \varphi}(\varphi, u_n, \lambda) \cdot \psi \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}_{mc}(\varphi + h\psi, u_n, \lambda) - \mathcal{L}_{mc}(\varphi, u_n, \lambda)}{h}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} L_{mc} &= \frac{1}{h} [\mathcal{L}_{mc}(\varphi + h\psi, u_n, \lambda) - \mathcal{L}_{mc}(\varphi, u_n, \lambda)] \\ &= \frac{1}{h} \left[- \int_{\Omega} F^h \lambda \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} F \lambda \, d\mathbf{x} \right] \\ &= \frac{1}{h} [(\mathbf{q}_m + h\mathbf{p}_m) \cdot \nabla \lambda(S_m + hT_m) - \mathbf{q}_m \cdot \nabla \lambda(S_m)] \\ &= \frac{1}{h} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^3 [(q_m^i + hp_m^i) \partial_{x_i} \lambda(S_m + hT_m) - q_m^i \partial_{x_i} \lambda(S_m)]. \end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor de $\partial_{x_i} \lambda(S_m + hT_m)$ à l'ordre 2, nous obtenons

$$\begin{aligned} L_{mc} &= \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^3 \left[q_m^i \sum_{j=1}^3 T_m^j \partial_{x_j} \partial_{v_{x_i}} \lambda(S_m) + h \|T_m\|^2 \epsilon_i(h \|T_m\|) \right. \\ &\quad \left. + p_m^i \partial_{v_{x_i}} \lambda(S_m) + hp_m^i \sum_{j=1}^3 T_m^j \partial_{x_j} \partial_{v_{x_i}} \lambda(S_m) + h^2 \|T_m\|^2 \epsilon_i(h \|T_m\|) \right], \quad (4.90) \end{aligned}$$

avec $\lim_{h \|T_m\| \rightarrow 0} \epsilon_i(h \|T_m\|) = 0$, pour $i = 1, 2, 3$.

Lorsque h tend vers zéro, nous avons

$$J'_{mc}(\varphi) \cdot \psi = \sum_{m=1}^M \mathbf{p}_m \cdot \nabla \lambda(S_m) + H(\lambda(S_m)) \mathbf{q}_m \cdot T_m. \quad (4.91)$$

De l'égalité (4.91) nous déduisons l'expression (4.89) du gradient de J_{mc} . □

4.6.3 Autres méthodes de reconstruction

Outre les deux méthodes exposées précédemment, il existe d'autres méthodes d'identification utilisées pour la résolution numérique du problème inverse en EEG. Nous classons ces méthodes en deux catégories : les approches dipolaires et les approches distribuées (ou images). Les approches dipolaires assimilent la source à un nombre fini de dipôles équivalents tandis que les approches distribuées considèrent des sources distribuées réparties sur le cortex de moments perpendiculaires à la surface de ce dernier. Nous donnons dans cette partie quelques méthodes pour ces deux approches.

1. Approches dipolaires

L'approche dipolaire considère un nombre fini de dipôles équivalents pour représenter l'ensemble des sources potentiellement actives du cerveau. Il s'agit alors d'estimer les six paramètres correspondant à chaque dipôle (trois pour la position et trois pour le moment) soit $6M$ paramètres ou M est le nombre de dipôles. Nous distinguons les méthodes itératives et les méthodes directes ou analytiques. Les méthodes itératives s'appliquent au modèle spatio-temporel et la solution est recherchée par un critère des moindres carrés sur un bloc de N échantillons temporels de mesures. Ce sont principalement des méthodes de balayage. Par contre, les méthodes directes ou analytiques ne prennent pas encore en compte l'aspect temporel du problème inverse. Mais elles ont l'avantage de déterminer le nombre de dipôles.

Méthodes de balayage

Comme son nom l'indique, elles consistent à balayer un volume de l'espace cérébral à la recherche d'une source qui explique les mesures. Une discrétisation de l'espace solution est alors nécessaire et pour chaque nœud on estime la probabilité de présence d'un dipôle de courant en cette position. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer la méthode MUSIC (Multiple Signal Classification) et la méthode beamforming.

MUSIC : L'approche MUSIC consiste à décomposer, à l'aide de la décomposition en valeurs singulières, l'espace des données en une somme directe du sous-espace des signaux (grandes valeurs singulières) et du sous-espace du bruit (faibles valeurs singulières). Ensuite, elle parcourt l'espace solution discrétisé et évalue, en chaque nœud, la projection minimale ou nulle sur le sous-espace bruit pour déterminer les sources. Pour plus de détails sur la méthode, voir [44] et [43] pour une version améliorée de cette méthode appelée RAP-MUSIC (Recursively Applied and Projected MUSIC) qui consiste à itérer MUSIC en retirant, à chaque étape, la composante des mesures correspondant à la source trouvée à l'itération précédente.

Beamforming : Cette technique est issue du traitement des signaux RADAR et SONAR. Elle est modifiée pour être appliquée au domaine médical. Elle consiste à balayer l'espace solution et à effectuer un filtrage spatial des données en chaque position du volume. Pour plus de détails voir [1, 58, 60].

Méthodes directes ou analytiques

Les méthodes directes ne prennent pas encore en compte l'aspect temporel du problème inverse en EEG. Elles s'appliquent au problème inverse statique pour des modèles sphériques homogènes par morceaux de la tête. Elles consistent dans une première étape à calculer les données de Cauchy (potentiel u et flux $\partial_n u$) sur la surface du cerveau Γ_1 à partir des mesures obtenues par EEG à la surface du scalp. Ensuite, elles permettent d'identifier les paramètres du terme source. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer une méthode algébrique développée par El-Badia et Ha-Duong [12, 14] et une méthode basée sur les approximations méromorphiques [5, 6].

Pour toutes ces méthodes, le problème inverse revient à identifier les paramètres S_m , \mathbf{q}_m et M qui vérifient le problème suivant dans le domaine Ω_1 du cerveau

$$\begin{cases} -\Delta u = \sum_{m=1}^M \mathbf{q}_m \cdot \delta_{S_m} & \text{dans } \Omega_1 \\ u = f_1 & \Gamma_1 \\ \partial_n u = g_1 & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases} \quad (4.92)$$

où f_1 et g_1 désignent les données de Cauchy sur la surface Γ_1 .

Méthode algébrique

Cette méthode est basée sur la relation de réciprocity suivante [14]

$$\mathcal{R}(f_1, g_1, v) = - \int_{\Gamma_1} (f_1 \partial_n v - g_1 v) ds$$

où v est une fonction harmonique dans Ω_1 et

$$\mathcal{R}(f_1, g_1, v) = \sum_{m=1}^M \mathbf{q}_m \cdot \nabla v(S_m).$$

On suppose que l'on dispose d'un majorant P du nombre de dipôles et on se place dans le plan (xOy) . En appliquant l'opérateur de réciprocity \mathcal{R} aux fonctions $v_k(x, y) = (x+iy)^k$ et à l'aide d'outils algébriques, la méthode permet d'obtenir le nombre M en calculant le rang d'une matrice de Hankel obtenue à partir des coefficients $\frac{\mathcal{R}(f_1, g_1, v_k)}{k}$. Les projections des positions S_m sont données par les valeurs propres d'une matrice T et les projections des moments \mathbf{q}_m sont obtenues par la résolution d'un certain système linéaire. Pour la troisième composante des vecteurs positions et moments, il suffit de reprendre l'algorithme sur un autre plan.

Approximation méromorphe

Cette approche est proposée dans [6] et se ramène également en 2D sur un disque. Elle est ensuite extrapolée en 3D sur un domaine sphérique avec Ω_1 la boule unité (\mathbb{B}). Le principe de la méthode est d'assimiler le plan \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} et de décomposer le potentiel électrique u en deux parties $w + \tilde{u}$, où w est la partie harmonique et \tilde{u} la partie singulière en S_m . On démontre ensuite que u peut être écrit comme la partie réelle d'une fonction ϕ :

$$\begin{aligned} u(\eta) &= \operatorname{Re}(\phi(\eta)), \quad \eta \in \mathbb{B} \setminus \{S_m\} \\ \phi(\eta) &= \mathbf{A}(\eta) + \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{q}_m}{2\pi(\eta - S_m)} \end{aligned}$$

où $\eta = x+iy$ est le nombre complexe assimilé à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et \mathcal{A} est une fonction analytique ($w = \operatorname{Re}(\mathcal{A})$). En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, nous obtenons

$$\phi(\eta) = f_1(\eta) + i \int_{\eta_0}^{\eta} g_1(\eta) ds(\eta), \quad \forall \eta \in \partial\mathbb{B}, \quad \eta_0 \text{ fixé.}$$

Ainsi, pour résoudre le problème inverse en 2D il suffit de trouver les pôles de la fonction anti-analytique $\mathcal{B} = \phi - \mathcal{A}$. À partir des données f_1 et g_1 , on calcule ϕ et \mathcal{B} sur le bord. Ensuite, on cherche une approximation méromorphe de \mathcal{B} [5]. Cette fonction est rationnelle de degré M , donc elle coïncide avec son approximant de degré n et donne 0 comme erreur pour $n \geq M$. Ceci permet alors de retrouver le nombre M des pôles, avec les positions et les résidus (moments). En 3D, on divise la boule unité en tranches pour $p = -P, \dots, P$, $P \in \mathbb{N}$, on fixe $z = z_p$ et on considère le disque D_p centré en 0 et de rayon r_p où $r_p^2 = 1 - z_p^2$. Pour $\eta \in T_p = \partial D_p$, on considère la fonction $u_p(\eta) = \tilde{u}(x, y, z_p)$ qui est une fonction rationnelle de degré M et on cherche ses pôles comme dans le cas 2D. Ainsi, si on note $\eta_p^i \in D_p$ le pôle correspondant à la source m , pour $p = -P, \dots, P$, P suffisamment grand, la position de la source recherchée est obtenue quand $|\eta_p^i|$ atteint son maximum. Pour plus de détails sur la méthode, voir [5, 6].

2. Approches distribuées

Les approches distribuées utilisent le modèle de sources distribuées comme termes source. Les sources sont réparties sur l'ensemble du cortex de moments orthogonales à la surface de ce dernier. On suppose que les positions et les orientations sont connues et il reste à estimer les amplitudes. Contrairement aux méthodes précédentes, les approches distribuées sont fortement sous-déterminées. En effet, le nombre de paramètres à estimer pour un instant donné est très largement supérieur au nombre de mesures pour ce même instant. Il est donc nécessaire d'introduire des contraintes dans l'espace de solutions. Les méthodes distribuées utilisent des méthodes de régularisation en introduisant un terme de pénalité à la solution des moindres carrés. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer l'approche bayésienne [4] et l'approche de norme minimale [28].

Conclusions

Dans cette partie, nous avons traité les questions théoriques liées au problème inverse en EEG chez le nouveau-né. Nous avons prouvé l'identifiabilité (unicité) de la solution du problème inverse. Le résultat montre que lorsque deux mesures coïncident, alors elles sont générées par la même source. Ensuite, nous avons établi un résultat de stabilité de la solution du problème inverse. Ce résultat est de type Lipschitz et montre qu'une faible variation des données implique une faible variation dans la localisation des sources. Mais cette stabilité dépend de l'ordre de grandeur de la constante c du Théorème 4.8. Enfin, nous avons introduit deux méthodes d'identification en vue de la localisation numérique des sources qui sera traité au chapitre suivant.

Chapitre 5

Résolution numérique du problème inverse

Nous abordons dans ce chapitre la résolution numérique du problème inverse en EEG. Nous développons pour cela des méthodes efficaces capables de reconstruire numériquement les sources qui sont à l'origine de l'activité électrique cérébrale. Nous considérons les fonctionnelles de Kohn-Vogelius et des moindres carrés. Pour chacune de ces méthodes, nous avons montré dans le chapitre 4 que la résolution du problème de minimisation est équivalente à celle du problème inverse. Nous présentons quelques algorithmes numériques de minimisation et les expériences numériques effectuées sur les modèles sphérique et réaliste de la tête d'un nouveau-né.

5.1 Algorithmes numériques

Pour résoudre les problèmes de minimisation (4.66) et (4.85), nous avons besoin de méthodes numériques d'optimisation. Dans cette partie, nous décrivons deux méthodes. Tout d'abord, nous présentons la méthode BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) [47]. Ensuite, nous citons une autre type de méthode appelée CMAES (Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy) [30] qui ne nécessite pas le calcul du gradient.

5.1.1 Méthode BFGS

La méthode BFGS est une méthode à directions de descente de type quasi-Newton. Cette méthode s'inspire de la méthode de Newton qui cherche à résoudre l'équation $J(\varphi) = 0$. Pour déterminer les paramètres des sources φ , nous donnons un vecteur initial φ_0 et la suite $(\varphi_k)_{k \geq 0}$ est générée par

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k - \rho_k H_k^{-1} (\nabla J(\varphi_k)),$$

où H_k est la matrice Hessienne de J évaluée à l'itération k , J est la fonctionnelle coût (J_{kv} ou J_{mc}) et ρ_k est le pas. Le principe de la méthode BFGS est d'éviter de calculer explicitement l'inverse de la matrice hessienne H_k^{-1} et d'en construire une approximation. A chaque itération de la méthode, l'inverse de la hessienne est mise à jour par la formule

$$H_{k+1}^{-1} = (\mathbb{I} - \alpha_k s_k y_k^T) H_k^{-1} (\mathbb{I} - \alpha_k y_k s_k^T) + \alpha_k s_k s_k^T, \quad (5.1)$$

où \mathbb{I} est la matrice identité, $y_k = \nabla J_{k+1} - \nabla J_k$, $s_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$ et $\alpha_k = \frac{1}{y_k^T s_k}$.

Nous utilisons l'algorithme BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) implémenté dans le logiciel FreeFem++[31] où le pas optimal ρ_k est déterminé par une recherche linéaire cubique. Le critère d'arrêt pour l'algorithme BFGS dans les tests numériques qui vont suivre est $\|\nabla J(\varphi_k)\| \leq \epsilon$ avec une tolérance $\epsilon = 10^{-4}$.

Dans certains cas, l'algorithme n'arrive pas à atteindre la tolérance fixée (nous l'indiquons par un (*) lorsque c'est le cas). Ceci se produit lorsqu'on a des dipôles placés à proximité de la surface du cerveau. Dans le cas de données perturbées, nous ajoutons un autre critère d'arrêt basé sur le principe de Morozov [36].

Critère de Morozov

Nous supposons que les incertitudes sur les observations sont caractérisées par la connaissance d'un certain δ tel que

$$\|f - f^\delta\|_{L^2(\Gamma^*)} \leq \delta,$$

où f^δ sont les données perturbées. Le critère de Morozov consiste à arrêter les itérations de l'algorithme BFGS lorsque

$$\|u_l - f^\delta\|_{L^2(\Gamma^*)} \leq a\delta,$$

où $a > 1$ est un paramètre réel et u_l la solution du problème direct pour la source de paramètres φ_l . La source de paramètres φ_l sera ainsi une approximation de la solution du problème inverse. Le critère de Morozov n'étant pas codé dans l'algorithme BFGS de FreeFem++, nous vérifions ce dernier après un nombre fixé d'itérations de l'algorithme.

Pour chaque itération de l'algorithme, nous aurons à résoudre plusieurs problèmes directs pour calculer $J(\varphi_k)$ et $\nabla J(\varphi_k)$.

Calcul du gradient

Le gradient de la fonctionnelle coût est calculé par la méthode de sensibilité que nous détaillerons dans l'annexe. Pour calculer chaque composante du gradient de J au point φ_k , nous remplaçons ψ par le vecteur e_i , $i = 1, \dots, 6M$ de la base canonique de \mathbb{R}^{6M} . Ensuite, nous avons à calculer les problèmes directs correspondants à u_n , u_n^1 , u_d , u_d^1 .

5.1.2 Méthode CMAES

CMAES est une méthode stochastique d'optimisation. Elle est basée sur l'évaluation de la fonctionnelle coût sur un ensemble de points appelé population que l'on fait évaluer selon des lois probabilistes. Cette méthode n'utilise pas le gradient de la fonctionnelle coût et a l'avantage de converger vers un minimum global contrairement aux méthodes classiques utilisant le gradient. Par contre, elle nécessite un grand nombre d'évaluations de la fonctionnelle coût. Pour plus de détails sur la méthode, nous renvoyons le lecteur à [30]. L'une des perspectives de ces travaux sera d'étudier ce type de méthodes pour la résolution numérique du problème inverse.

5.2 Résultats numériques

Dans cette partie, nous présentons les résultats numériques du problème de minimisation pour les fonctionnelles coût de moindres carrés et de Kohn-Vogelius. Nous rappelons que la solution de ce problème de minimisation correspond à l'unique solution du problème

inverse (PI). Les mesures sur le scalp sont générées en résolvant le problème direct en EEG pour des sources fixées. Ces mesures seront perturbées par un bruit blanc de la forme

$$f^\delta = f + p \times g \times f,$$

où g est une suite de nombre générée aléatoirement et suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et p l'écart-type du bruit.

Nous considérons d'abord un modèle sphérique de la tête à trois couches dont les caractéristiques sont données dans le tableau 5.1. Pour éviter l'effet du *crime inverse*, nous utilisons le maillage $M_{donnees}$ pour générer les mesures et le maillage M_{pbinv} pour la résolution numérique du problème de minimisation. Ensuite, nous effectuons des tests numériques sur un modèle réaliste de la tête avec le maillage M_{real} présenté dans le tableau 2.3 du chapitre 2 (partie 2.3.4).

Maillage	Nœuds	Tétraèdres	Nœuds de bord	h_{min} [m]	h_{max} [m]
M_{pbinv}	121 157	685 462	23 301	$6.74 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$
$M_{donnees}$	128 210	731 774	23 301	$6.74 \cdot 10^{-4}$	$4.76 \cdot 10^{-3}$

TABLE 5.1 – Maillages du modèle sphérique à trois couches pour le problème inverse

Pour le modèle sphérique, nous aborderons le cas d'un dipôle placé dans le cerveau à différentes excentricités, puis le cas de deux dipôles où nous allons étudier la séparabilité des sources. Pour le modèle réaliste, nous analyserons l'impact de la présence des fontanelles sur la localisation des sources.

Nous introduisons dans le tableau 5.2 les notations suivantes pour évaluer les écarts entre les dipôles.

$E_{q_l^0} = \frac{\ q_l - q_l^0\ }{\ q_l\ }$	Erreur relative du moment initial par rapport au moment exact
$E_{q_l} = \frac{\ q_l - q_l^c\ }{\ q_l\ }$	Erreur relative du moment calculé par rapport au moment exact
$E_{S_l^0} = \frac{\ S_l - S_l^0\ }{\ R\ }$	Erreur relative de la position initiale par rapport à la position exacte
$E_{S_l} = \frac{\ S_l - S_l^c\ }{\ R\ }$	Erreur relative de la position calculée par rapport à la position exacte

TABLE 5.2 – Écarts entre les dipôles. R rayon du cerveau.

5.3 Modèle sphérique

Nous considérons que la tête du nouveau-né est modélisée par un modèle sphérique à trois couches et nous supposons que les mesures sont connues sur toute la surface du scalp Γ .

5.3.1 Méthode des moindres carrés

1. Cas d'une source

Nous analysons le comportement de l'algorithme lorsque le dipôle s'approche de l'interface cerveau/crâne pour des données non perturbées. Ensuite, nous étudions son comportement

en fonction de la perturbation. Pour cette étude, nous considérons différentes positions d'un dipôle de moment fixe $\mathbf{q} = (0; 0; 1)$. Nous prenons comme valeur initiale de l'algorithme $\varphi_0 = (\mathbf{q}^0, S^0)$ où $\mathbf{q}^0 = (0.2; 0.3; 0.8)$ est d'écart $E_{\mathbf{q}^0} = 0.4$ et les valeurs de S^0 sont données dans le tableau 5.3.

Excentricités : e	Positions S	Positions initiales S_0	E_{S_0}
0.2	$S_1 = (0; 0; 0.01)$	$S_1^0 = (0.007; 0.005; 0.005)$	0.2
0.4	$S_2 = (0; 0; 0.02)$	$S_2^0 = (0.007; 0.007; 0.017)$	0.2
0.6	$S_3 = (0; 0; 0.03)$	$S_3^0 = (0.007; 0.007; 0.027)$	0.2
0.8	$S_4 = (0; 0; 0.04)$	$S_4^0 = (0.007; 0.007; 0.037)$	0.2
0.9	$S_5 = (0; 0; 0.045)$	$S_5^0 = (0.007; 0.007; 0.042)$	0.2
0.96	$S_6 = (0; 0; 0.048)$	$S_6^0 = (0.007; 0.007; 0.045)$	0.2
0.97	$S_7 = (0; 0; 0.0485)$	$S_7^0 = (0.007; 0.007; 0.0455)$	0.2

TABLE 5.3 – Le tableau montre les différentes positions testées, leurs excentricités et les valeurs initiales de l'algorithme BFGS.

Effet de l'excentricité : données non perturbées

Excentricités : e	E_S	E_q	Itérations : $iter$
0.2	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	10
0.4	$2.8 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-6}$	10
0.6	$4.2 \cdot 10^{-5}$	$8.7 \cdot 10^{-6}$	11
0.8	$4.4 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-5}$	13
0.9	$5.7 \cdot 10^{-5}$	$2.7 \cdot 10^{-5}$	22
0.96	$3 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	20* ($\ \nabla J(\varphi_k)\ = 4.7 \cdot 10^{-4}$)
0.97	$3 \cdot 10^{-4}$	$7.4 \cdot 10^{-4}$	26* ($\ \nabla J(\varphi_k)\ = 4.8 \cdot 10^{-3}$)

TABLE 5.4 – Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. $iter$ le nombre d'itérations de l'algorithme BFGS. Données non perturbées.

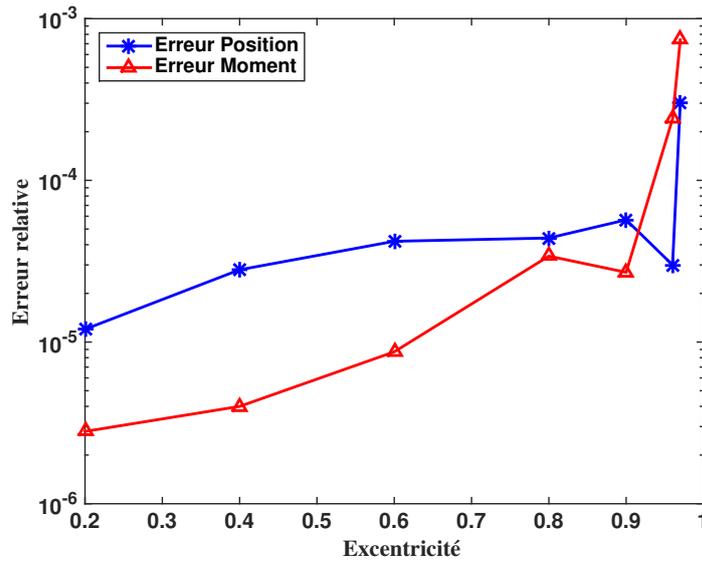
Les erreurs relatives sur la localisation du dipôle sont affichées dans le tableau 5.4 et sont représentées sur la figure 5.1 en échelle logarithme de base 10 en fonction de l'excentricité de la source e .

Résultats

Le tableau 5.4 et la figure 5.1 montrent que la précision de la localisation du dipôle diminue lorsqu'il s'approche de l'interface cerveau/crâne. Nous constatons que, pour les dipôles proches de l'interface, la tolérance $\epsilon = 10^{-4}$ fixée pour l'algorithme n'est pas atteinte. Ces résultats peuvent s'expliquer par la sensibilité de la résolution du problème direct pour les dipôles proches (vu au chapitre 2) lors du calcul de la fonctionnelle coût et de son gradient.

Effet de la perturbation des données

Nous reprenons la configuration précédente et nous perturbons les données par un bruit gaussien de niveau $p = 5\%$, 10% , 15% . Pour le critère d'arrêt, nous vérifions le principe de Morozov toutes les 20 itérations de l'algorithme avec $a = 1.01$. Nous présentons les

FIGURE 5.1 – Erreurs relatives E_S et E_q par rapport à l'excentricité e .

résultats obtenus dans les tableaux suivants. La figure 5.2 montre les erreurs relatives E_S et E_q en fonction de l'amplitude p .

Excentricités : e	E_S	E_q	Itération
0.2	2×10^{-4}	1.7×10^{-4}	10
0.4	3.1×10^{-4}	1.63×10^{-4}	10
0.6	7.4×10^{-4}	1.56×10^{-4}	11
0.8	9.8×10^{-4}	5.1×10^{-4}	13
0.9	8.4×10^{-4}	1.4×10^{-3}	32
0.96	6.6×10^{-4}	2.2×10^{-3}	20
0.97	4.3×10^{-4}	1.9×10^{-3}	20

TABLE 5.5 – Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. $iter$ le nombre d'itérations de l'algorithme BFGS. Données perturbées de niveau $p = 5\%$.

Excentricités : e	E_S	E_q	Itérations : $iter$
0.2	4×10^{-4}	3.4×10^{-4}	10
0.4	6.3×10^{-4}	3.3×10^{-4}	10
0.6	1.5×10^{-3}	3.03×10^{-4}	11
0.8	1.94×10^{-3}	1.05×10^{-3}	13
0.9	1.7×10^{-3}	3.04×10^{-3}	32
0.96	1.32×10^{-3}	4.3×10^{-3}	20
0.97	1.13×10^{-3}	2.4×10^{-3}	20

TABLE 5.6 – Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. $iter$ le nombre d'itérations de l'algorithme BFGS. Données perturbées de niveau $p = 10\%$.

Excentricités : e	E_S	E_q	Itérations : $iter$
0.2	$5.9 \cdot 10^{-4}$	$5.1 \cdot 10^{-4}$	10
0.4	$9.5 \cdot 10^{-4}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$	10
0.6	$2.24 \cdot 10^{-3}$	$4.52 \cdot 10^{-4}$	11
0.8	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	13
0.9	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	32
0.96	$2 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-3}$	20
0.97	$2.23 \cdot 10^{-3}$	$5.9 \cdot 10^{-3}$	20

TABLE 5.7 – Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. $iter$ le nombre d’itérations de l’algorithme BFGS. Données perturbées de niveau $p = 15\%$.

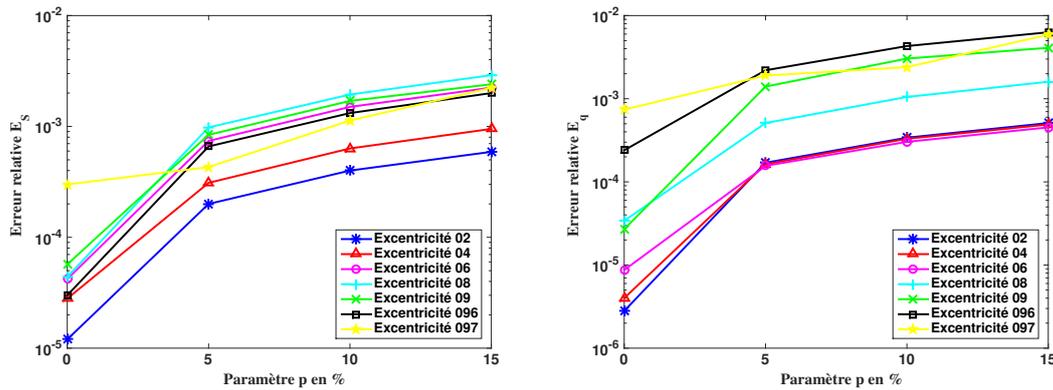


FIGURE 5.2 – Erreurs relatives E_S et E_q en fonction de l’amplitude de la perturbation p pour différentes excentricités e .

Résultats

Nous observons, sur la Figure 5.2, que la précision de la localisation est affectée par la perturbation des mesures. Dans les tableaux 5.5, 5.6 et 5.7, nous remarquons cependant que l’erreur relative E_S diminue, à partir de l’excentricité $e = 0.8$, lorsque le dipôle s’approche de l’interface. En effet, le dipôle proche de l’interface crée, sur le scalp, un potentiel $u_{|\Gamma_\infty} = f$ relativement élevé sur une petite zone par rapport au reste du scalp. Ainsi, la perturbation de la donnée f n’affecte que cette petite zone où la donnée est grande.

2. Cas de deux sources

Dans ce paragraphe, nous abordons le cas de deux sources. Nous étudions le comportement de l’algorithme de minimisation lorsque la distance entre les deux sources diminue. Pour cela, nous fixons un premier dipôle à une position $S_1 = (0; 0; 0.045)$ d’excentricité $e = 0.9$ et de moment normale unitaire $\mathbf{q}_1 = (0; 0; 1)$. Ensuite, nous varions la position d’un deuxième dipôle S_2 de moment normal unitaire \mathbf{q}_2 de même excentricité que le premier dipôle. Les tableaux 5.8 et 5.9 donnent les différentes positions et moments du deuxième dipôle. Le tableau 5.8 donne également la séparabilité des deux dipôles. La valeur initiale du premier dipôle est $S_1^0 = (0.007; -0.007; 0.042)$ et $\mathbf{q}_1^0 = (0.2; 0.3; 0.8)$ d’écart respectifs $E_{S_1^0} = 0.2$ et $E_{\mathbf{q}_1^0} = 0.4$. Nous désignons par α la séparabilité des deux dipôles S_1 et S_2 .

Nous analysons la séparabilité des dipôles dans le cas du modèle sans et avec fontanelles.

Nom	Séparabilité : $\alpha(\text{mm})$	Position S_2	Position initiale S_2^0	$E_{S_2^0}$
$d1$	1	(0; 0.001; 0.045)	(0.007; 0.007; 0.042)	0.2
$d2$	5	(0; 0.005; 0.0447)	(0.0075; 0.001; 0.04)	0.2
$d3$	10.1	(0; 0.01; 0.0439)	(0.007; 0.004; 0.04)	0.2
$d4$	20.5	(0; 0.02; 0.0403)	(0.007; 0.015; 0.0353)	0.2
$d5$	32.1	(0; 0.03; 0.0335)	(0.007; 0.024; 0.03)	0.2
$d6$	46,9	(0; 0.04; 0.0206)	(0.007; 0.035; 0.016)	0.2

TABLE 5.8 – Le tableau montre les différentes positions S_2 testées, leurs distances par rapport à S_1 et les valeurs initiales de l’algorithme BFGS.

Nom	Moment \mathbf{q}_2	Moment initial \mathbf{q}_2^0	$E_{\mathbf{q}_2^0}$
$d1$	(0; 0; 1)	(0.3; 0.2; 0.8)	0.2
$d2$	(0; 0.1111; 0.9933)	(0.3; 0.14; 0.74)	0.4
$d3$	(0; 0.2222; 0.9756)	(0.3; 0.1; 0.75)	0.4
$d4$	(0; 0.4444; 0.8956)	(0.3; 0.25; 0.72)	0.4
$d5$	(0; 0.6666; 0.7444)	(0.3; 0.45; 0.6)	0.4
$d6$	(0; 0.8889; 0.4578)	(0.3; 0.75; 0.25)	0.4

TABLE 5.9 – Le tableau montre les différents moments \mathbf{q}_2 testées et leurs valeurs initiales.

Impact de la séparabilité : modèle sans fontanelles

Nous considérons le modèle sans fontanelles et nous étudions la séparabilité des dipôles. Nous reportons dans le tableau 5.10 les résultats obtenus. Nous représentons sur la Figure 5.3 la distance de Hausdorff (4.56) (cf chapitre 4) pour les positions et les moments en fonction de la distance α entre les deux dipôles.

Nom	E_{S_1}	E_{S_2}	$E_{\mathbf{q}_1}$	$E_{\mathbf{q}_2}$	$iter$
$d1$	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-2}$	0.74	0.57	100* ($\ \nabla J(\varphi_k)\ = 7.2 \cdot 10^{-3}$)
$d2$	$6.7 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	0.99	1.01	62* ($\ \nabla J(\varphi_k)\ = 2.1 \cdot 10^{-3}$)
$d3$	$8.7 \cdot 10^{-3}$	$8.2 \cdot 10^{-3}$	$8.7 \cdot 10^{-2}$	$8.9 \cdot 10^{-2}$	78
$d4$	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-3}$	39* ($\ \nabla J(\varphi_k)\ = 7.9 \cdot 10^{-3}$)
$d5$	$5.1 \cdot 10^{-4}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	48* ($\ \nabla J(\varphi_k)\ = 2.3 \cdot 10^{-3}$)
$d6$	$8.1 \cdot 10^{-4}$	$7.8 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	36

TABLE 5.10 – Erreurs relatives sur les moments et les positions testées. $iter$ le nombre d’itérations de l’algorithme. Modèle sans fontanelles.

Résultats

Nous remarquons que l’erreur augmente lorsque la distance entre les dipôles diminue. Nous constatons également que l’identification de la position des sources est plus précise que celle des moments. Pour les configurations de dipôles très proches, en l’occurrence $d1$ et $d2$, nous observons que la localisation des deux dipôles est plus proche du dipôle de position $S = \frac{S_1 + S_2}{2}$ et que les moments ont tendance à s’additionner.

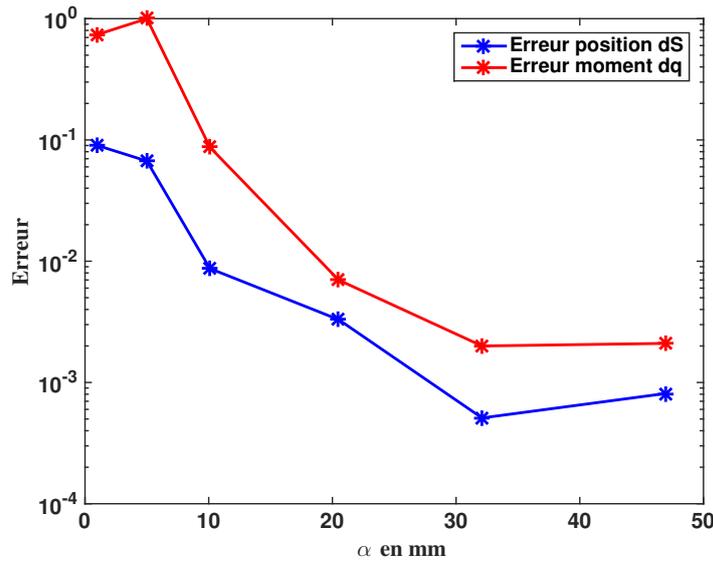


FIGURE 5.3 – Erreurs en fonction de la distance entre les deux dipôles. Modèle sans fontanelles.

Impact de la séparabilité : modèle avec fontanelles

Nous considérons maintenant le modèle avec fontanelles et nous reprenons la même étude que pour le cas sans fontanelles. Dans le tableau 5.11, nous présentons les résultats obtenus. Nous traçons sur la Figure 5.4 la distance de Hausdorff pour les positions et les moments en fonction de la distance entre les deux dipôles.

Nom	E_{S_1}	E_{S_2}	E_{q_1}	E_{q_2}	$iter$
$d1$	$9.5 \cdot 10^{-3}$	$8.7 \cdot 10^{-3}$	0.74	0.74	85
$d2$	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$8.5 \cdot 10^{-2}$	$8.5 \cdot 10^{-2}$	71
$d3$	$8.4 \cdot 10^{-4}$	$8.8 \cdot 10^{-4}$	$8.8 \cdot 10^{-3}$	$8.6 \cdot 10^{-3}$	70* ($\ \nabla J(\varphi_k)\ = 4.8 \cdot 10^{-3}$)
$d4$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	69* ($\ \nabla J(\varphi_k)\ = 2.1 \cdot 10^{-3}$)
$d5$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-3}$	47* ($\ \nabla J(\varphi_k)\ = 2.7 \cdot 10^{-3}$)
$d6$	$5 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	38

TABLE 5.11 – Erreurs relatives sur les moments et les positions testées. $iter$ le nombre d'itérations de l'algorithme. Modèle avec fontanelles.

Résultats

Nous faisons le même constat que dans le cas sans fontanelles. En outre, nous remarquons que l'erreur diminue brusquement aux alentours de $\alpha = 10$ mm. Ceci peut s'expliquer par l'augmentation de la conductivité dans le crâne due à la présence de la fontanelle antérieure en ossification. En effet, les dipôles $d4$, $d5$ et $d6$ sont éloignés de la fontanelle alors que $d1$, $d2$ et $d3$ sont proches et dirigés vers la fontanelle. Les fontanelles permettent donc d'améliorer la localisation dans ces cas spécifiques. Il paraît donc important de les considérer dans le modèle EEG chez le nouveau-né.

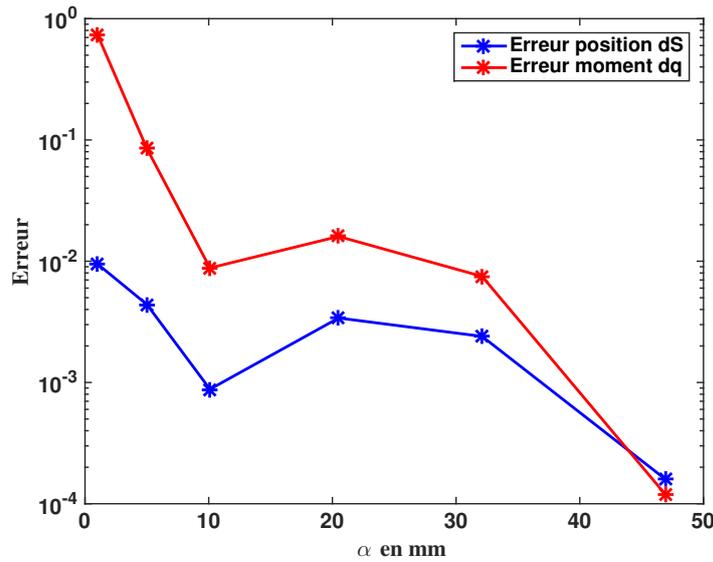


FIGURE 5.4 – Erreurs en fonction de la distance entre les deux dipôles. Modèle avec fontanelles.

Perturbation des données

Nous perturbons à présent les données d'une amplitude $p = 5\%$, 10% , 15% et nous présentons les résultats obtenus dans les tableaux 5.12, 5.13 et 5.14. Ensuite, nous traçons, dans chaque cas, la distance de Hausdorff pour les moments et positions en fonction de la distance entre les deux sources.

Nom	E_{S_1}	E_{S_2}	E_{q_1}	E_{q_2}	<i>iter</i>
<i>d1</i>	$7.2 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$6.6 \cdot 10^{-2}$	$6.7 \cdot 10^{-2}$	40
<i>d2</i>	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$7.2 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^{-2}$	60
<i>d3</i>	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$5.4 \cdot 10^{-3}$	$3.6 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$	40
<i>d4</i>	$3 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$3.1 \cdot 10^{-2}$	40
<i>d5</i>	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$9.8 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	20
<i>d6</i>	$9.8 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-3}$	40

TABLE 5.12 – Erreurs relatives sur les moments et les positions testées. *iter* le nombre d'itérations de l'algorithme BFGS. Modèle avec fontanelles. Données perturbées de niveau 5%.

Résultats

Les figures 5.5, 5.6 et 5.7 montrent une augmentation de l'erreur lorsque la distance entre les dipôles diminue. Nous remarquons également que l'impact positif de la fontanelle sur la séparabilité diminue légèrement avec le niveau du bruit.

5.3.2 Méthode Kohn-Vogelius

Dans cette partie, nous reprenons les tests effectués avec la méthode des moindres carrés pour le méthode KV. Nous nous plaçons ici encore dans le cas où la donnée est connue

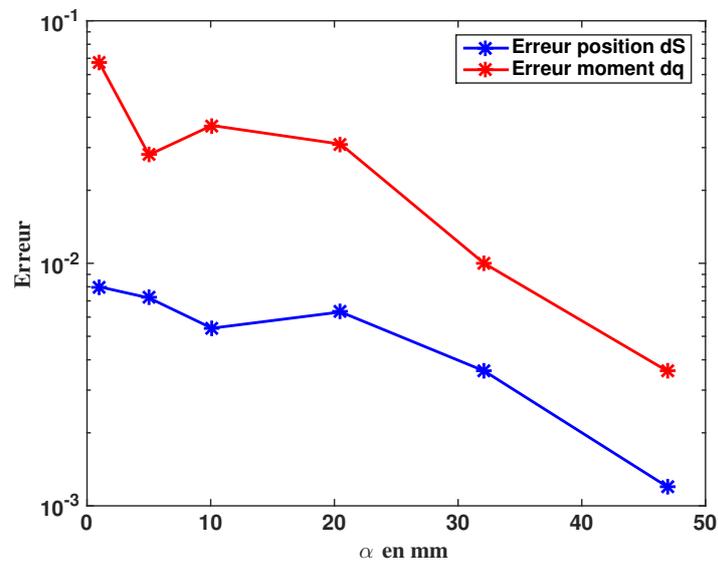


FIGURE 5.5 – Erreurs en fonction de la distance entre les deux dipôles. Modèle avec fontanelles. Données perturbées de niveau 5%.

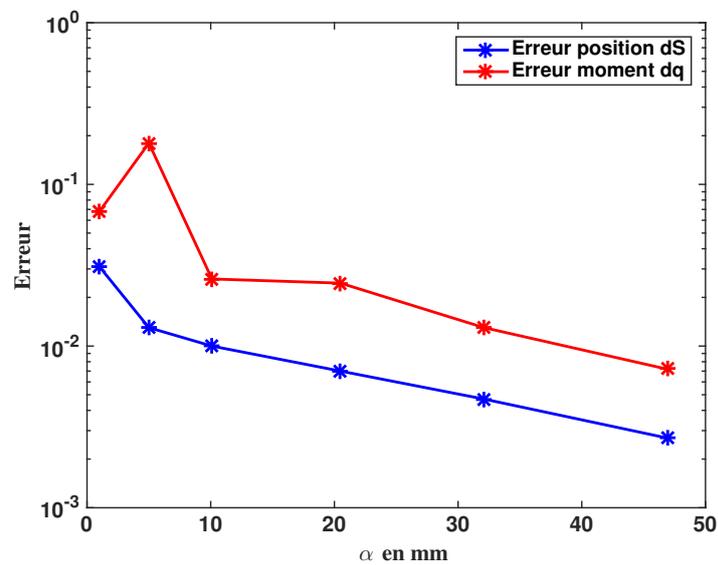


FIGURE 5.6 – Erreurs en fonction de la distance entre les deux dipôles. Modèle avec fontanelles. Données perturbées de niveau 10%.

Nom	E_{S_1}	E_{S_2}	E_{q_1}	E_{q_2}	<i>iter</i>
<i>d1</i>	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$6.2 \cdot 10^{-2}$	$6.8 \cdot 10^{-2}$	20
<i>d2</i>	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-1}$	$1.8 \cdot 10^{-1}$	40
<i>d3</i>	$4.6 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	40
<i>d4</i>	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2.45 \cdot 10^{-2}$	40
<i>d5</i>	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	20
<i>d6</i>	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$7.2 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$	40

TABLE 5.13 – Erreurs relatives sur les moments et les positions testées. *iter* le nombre d'itérations de l'algorithme. Modèle avec fontanelles. Données perturbées de niveau 10%.

Nom	E_{S_1}	E_{S_2}	E_{q_1}	E_{q_2}	<i>iter</i>
<i>d1</i>	$3 \cdot 10^{-2}$	$3.5 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	40
<i>d2</i>	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-1}$	$1.5 \cdot 10^{-1}$	40
<i>d3</i>	$6.5 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$5.5 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	40
<i>d4</i>	$7 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$6.5 \cdot 10^{-2}$	$5.8 \cdot 10^{-2}$	20
<i>d5</i>	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	20
<i>d6</i>	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$8.5 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$	20

TABLE 5.14 – Erreurs relatives sur les moments et les positions testées. *iter* le nombre d'itérations de l'algorithme. Modèle avec fontanelles. Données perturbées de niveau 15%.

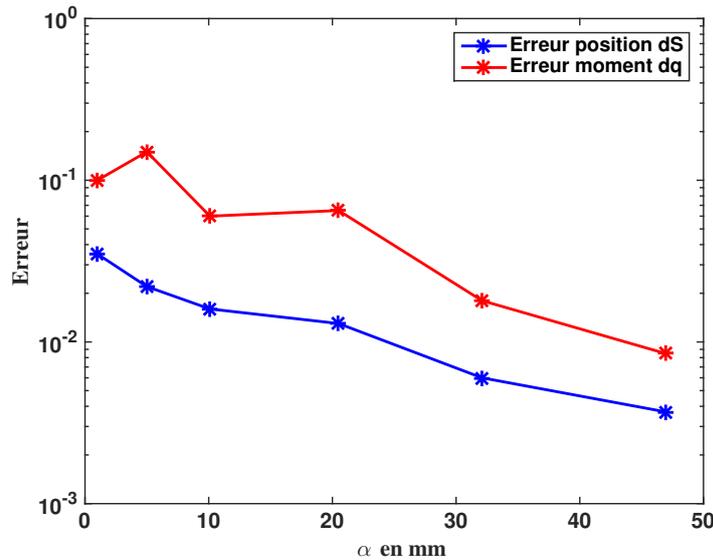


FIGURE 5.7 – Erreurs en fonction de la distance entre les deux dipôles. Modèle avec fontanelles. Données perturbées amplitude 15%.

sur tout le scalp.

1. Cas d'une source

Nous étudions l'effet de l'excentricité sur la localisation d'un dipôle placé dans le cerveau. Ensuite, nous regardons l'effet de la perturbation des données. Pour cela, nous fixons le moment $\mathbf{q} = (0; 0; 1)$ avec une valeur initiale $\mathbf{q}^0 = (0.2; 0.3; 0.8)$ d'écart $E_{q^0} = 0.4$. Et, nous

considérons les différentes positions présentées dans le tableau 5.3.

Effet de l'excentricité : données non perturbées

Nous présentons dans le tableau 5.15 les résultats obtenus dans le cas où les données ne sont pas perturbées. Ensuite, nous traçons les erreurs sur la localisation de la position et du moment en fonction de l'excentricité e .

Excentricité : e	E_S	E_q	Itérations : $iter$
0.2	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$2.6 \cdot 10^{-6}$	13
0.4	$2.8 \cdot 10^{-5}$	$3.1 \cdot 10^{-6}$	14
0.6	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	12
0.8	$5.3 \cdot 10^{-5}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$	15
0.9	$6.5 \cdot 10^{-5}$	$5.7 \cdot 10^{-5}$	16
0.96	$7.5 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	25
0.97	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	26

TABLE 5.15 – Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. $iter$ le nombre d'itérations de l'algorithme BFGS. Données non perturbées.

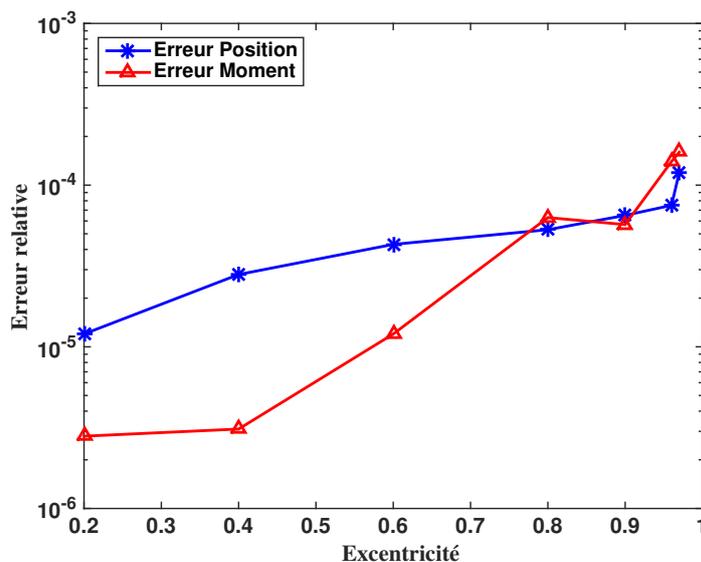


FIGURE 5.8 – Erreurs relatives E_S et E_q par rapport à l'excentricité e . Méthode KV.

Résultats

La Figure 5.8 montre que la précision de la localisation diminue lorsque le dipôle s'approche de l'interface. Comme précédemment, ceci s'explique par la sensibilité de la résolution du problème direct pour le calcul de la fonctionnelle et de son du gradient. En revanche, nous remarquons que l'algorithme BFGS converge pour le cas de dipôles proches (Tableau 5.15). Ceci est un avantage sur la méthode des moindres carrés.

Effet de la perturbation des données

Nous considérons maintenant des données perturbées de niveau $p = 5\%$, 10% , 15% . Nous donnons dans les tableaux 5.16, 5.17 et 5.18 les résultats obtenus dans ce cas et nous représentons dans la figure 5.2 les erreurs de localisation de la position et du moment en fonction du niveau p .

Excentricité : e	E_S	E_q	Itérations : $iter$
0.2	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	11
0.4	$7.1 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	12
0.6	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$7.4 \cdot 10^{-4}$	12
0.8	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	16
0.9	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	20
0.96	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$7.1 \cdot 10^{-3}$	20
0.97	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$7.6 \cdot 10^{-3}$	20

TABLE 5.16 – Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. $iter$ le nombre d'itérations de l'algorithme BFGS. Données perturbées de niveau $p = 5\%$.

Excentricité : e	E_S	E_q	Itérations : $iter$
0.2	$5.2 \cdot 10^{-4}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	12
0.4	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$	12
0.6	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	19
0.8	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$5.1 \cdot 10^{-3}$	20
0.9	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-3}$	16
0.96	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$1.44 \cdot 10^{-2}$	20
0.97	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$1.54 \cdot 10^{-2}$	20

TABLE 5.17 – Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. $iter$ le nombre d'itérations de l'algorithme BFGS. Données perturbées de niveau $p = 10\%$.

Excentricité : e	E_S	E_q	Itérations $iter$
0.2	$7.8 \cdot 10^{-4}$	$4.8 \cdot 10^{-4}$	12
0.4	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	12
0.6	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	12
0.8	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$7.7 \cdot 10^{-3}$	16
0.9	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$1.42 \cdot 10^{-2}$	20
0.96	$3.3 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$	20
0.97	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$	20

TABLE 5.18 – Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. $iter$ le nombre d'itérations de l'algorithme. Données perturbées de niveau $p = 15\%$.

Résultats

Nous observons sur la Figure 5.2 les mêmes comportement que pour la méthode des moindres carrés. La précision de la localisation est affectée par le bruit mais les erreurs restent malgré tout très satisfaisantes avec 15% de niveau de bruit et pour des excentricités proches de 1.

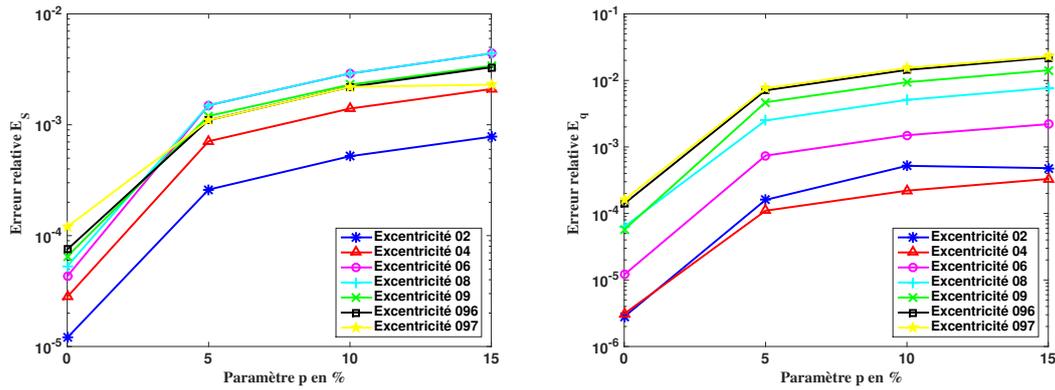


FIGURE 5.9 – Erreurs relatives E_S et E_q en fonction du niveau de la perturbation p pour différentes excentricités e . Méthode KV.

2. Cas de deux sources

Nous analysons l'effet de la séparabilité de deux dipôles. Nous fixons un dipôle 1 à une position $S_1 = (0; 0; 0.045)$ d'excentricité $e = 0.9$ et de moment unitaire $\mathbf{q}_1 = (0; 0; 1)$. Nous prenons un autre dipôle 2 de même excentricité que le premier et pour lequel nous varions la position S_2 . Son moment \mathbf{q}_2 est pris unitaire et normal à la surface du cerveau. La valeur initiale du dipôle 1 est $S_1^0 = (0.007; -0.007; 0.042)$ et $\mathbf{q}_1^0 = (0.2; 0.3; 0.8)$ d'écart respectifs $E_{S_1^0} = 0.2$ et $E_{\mathbf{q}_1^0} = 0.4$. Les positions et moments du dipôle 2 sont donnés respectivement dans le Tableau 5.8 et le tableau 5.9. Nous rappelons que α désigne la distance $d(S_1, S_2)$ entre les deux dipôles.

Impact de la séparabilité

Le tableau 5.19 présente les résultats obtenus dans le cas du modèle avec fontanelles pour des données non perturbées. Nous représentons dans la figure 5.10 la distance de Hausdorff pour les sources et les moments en fonction de la distance α entre les dipôles.

Nom	E_{S_1}	E_{S_2}	$E_{\mathbf{q}_1}$	$E_{\mathbf{q}_2}$	<i>iter</i>
<i>d1</i>	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-4}$	$9.2 \cdot 10^{-2}$	$9.2 \cdot 10^{-2}$	72
<i>d2</i>	$7.7 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	164
<i>d3</i>	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	123
<i>d4</i>	$6.3 \cdot 10^{-5}$	$5.9 \cdot 10^{-4}$	$7.5 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	80
<i>d5</i>	$7 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	80
<i>d6</i>	$6.1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$5.1 \cdot 10^{-5}$	$8.3 \cdot 10^{-5}$	91

TABLE 5.19 – Erreurs relatives sur les moments et les positions testées. *iter* le nombre d'itérations de l'algorithme. Modèle avec fontanelles.

Résultats

Comme dans le cas de la méthode des moindres carrés, nous constatons (Figure 5.10) que la précision de la localisation des sources diminue lorsque la distance entre les deux dipôles diminue. Nous remarquons également l'impact positif de la présence de la fontanelle par

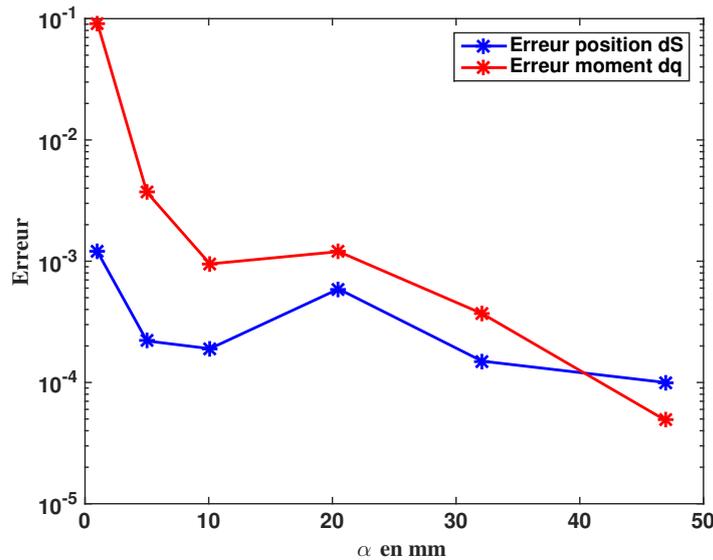


FIGURE 5.10 – Erreurs en fonction de la distance entre les deux dipôles. Modèle avec fontanelles. Données non perturbées.

une augmentation de la précision de la localisation lorsque les dipôles sont près de la fontanelle.

5.3.3 Données partielles

Dans ce paragraphe, nous étudions le comportement des méthodes d'identification lorsque les données sont connues partiellement sur le scalp. Nous nous plaçons dans le cas d'un seul dipôle situé à une excentricité $e = 0.9$ soit à 5mm de l'interface cerveau/crâne. Puisque les électrodes sont placées dans la partie supérieure du scalp, nous considérons que les mesures ne peuvent être prises que dans la moitié supérieure de la sphère. Nous divisons alors cette partie en quatre parts égales (Figure 5.11) et nous considérons que la partie Γ^* du scalp représente respectivement 100%, 75%, 50%, 25% lorsque nous connaissons les mesures sur la moitié supérieure, les $3/4$, les $1/2$ et les $1/4$ du sphère. La répartition du potentiel électrique dépendant de la position et du moment du dipôle, nous fixons celui-ci à une position $S = (0; 0; 0.045)$ avec un moment unitaire $\mathbf{q} = (0; 0; 1)$. Nous représentons sur la Figure 5.12 l'erreur relative E_S et E_q en fonction de la proportion de la surface du scalp sur laquelle sont connues les mesures.

Résultats

La Figure 5.12 montre que la précision de la localisation du dipôle diminue lorsque les mesures sont connues partiellement sur la surface du scalp. Nous remarquons également que la méthode KV est plus précise que celle des moindres carrés. Nous constatons que l'algorithme BFGS n'atteint pas la tolérance demandée pour la méthode des moindres carrés après une cinquantaine d'itération. Nous représentons également sur les figures 5.13 et 5.14 les résultats obtenus dans le cas de données perturbées. Les résultats dans ce cas spécifique montre que la méthode KV est plus précise que celle des moindres carrés lorsque les données ne sont connues que sur une petite partie de la surface du scalp.

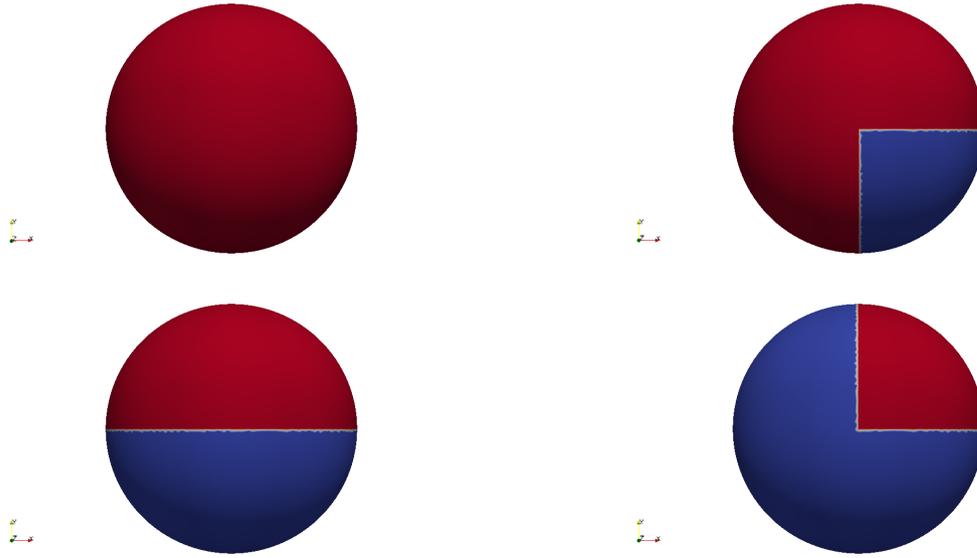


FIGURE 5.11 – Partie Γ^* du scalp représentant 100%, 75%, 50% et 25% de la demi-sphère supérieure.

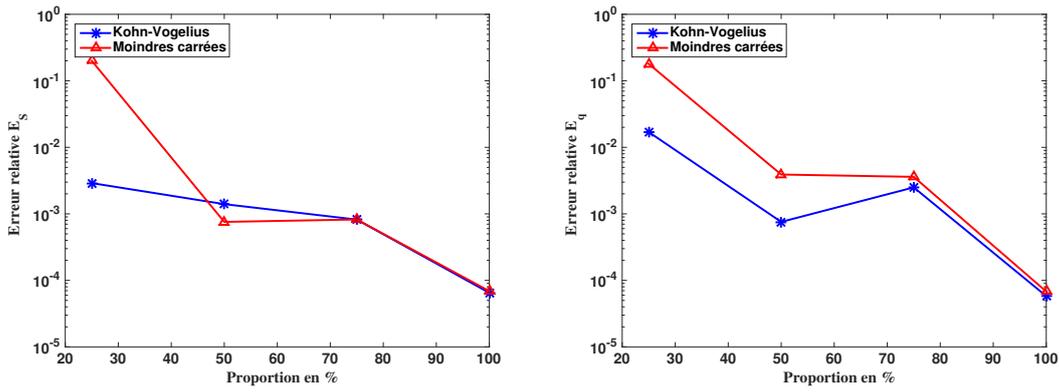


FIGURE 5.12 – Erreurs relatives E_S et E_q en fonction de la proportion de la surface du scalp sur laquelle sont connues les mesures.

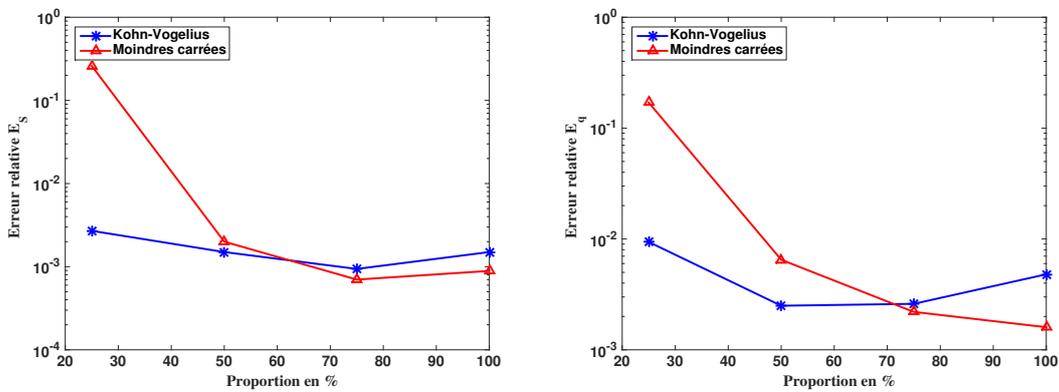


FIGURE 5.13 – Erreurs relatives E_S et E_q en fonction de la proportion de la surface du scalp sur laquelle sont connues les mesures. Données perturbées d'amplitude $p = 5\%$.

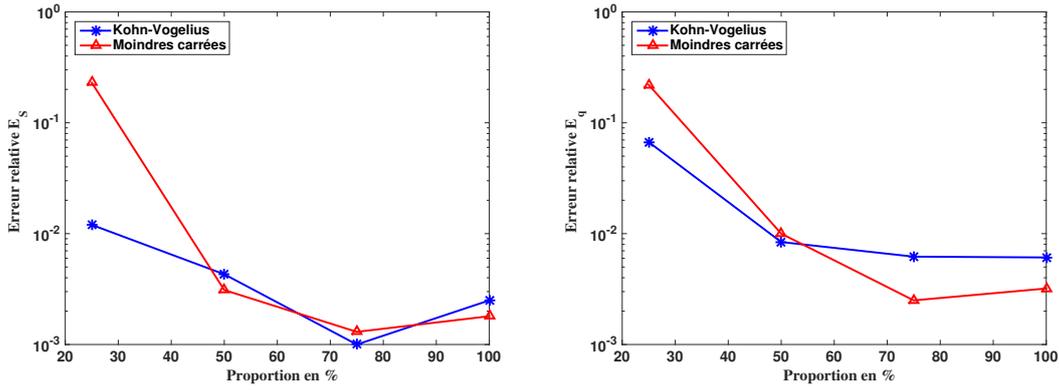


FIGURE 5.14 – Erreurs relatives E_S et E_q en fonction de la proportion de la surface du scalp sur laquelle sont connues les mesures. Données perturbées d’amplitude $p = 10\%$.

5.4 Modèle réaliste

Nous considérons dans ce paragraphe le maillage réaliste M_{real} donné par le tableau 2.3 de la partie 2.3.4 du chapitre 2. Nous testons le cas d’un dipôle pour les différentes méthodes. Les mesures sont connues sur toute la surface du scalp. La tolérance de l’algorithme est fixée à $\epsilon = 10^{-3}$. Nous considérons un dipôle placé à une position $S = (0.06; 0.06; 0.06)$ et de moment $\mathbf{q} = (0; 0; 1)$. Nous prenons comme valeur initiale $S^0 = (0.055; 0.065; 0.055)$ et $\mathbf{q}^0 = (0.01; 0.02; 0.9)$. Nous désignons par S_c et \mathbf{q}_c la position et le moment calculés. Nous donnons dans le tableau 5.20 les erreurs relatives obtenues pour la position et le moment calculés pour ce dipôle.

Méthode des moindres carrées

p (%)	$\frac{\ S-S_c\ }{\ S\ }$	$\frac{\ \mathbf{q}-\mathbf{q}_c\ }{\ \mathbf{q}\ }$	$iter$
0	$3.9 \cdot 10^{-5}$	$3.8 \cdot 10^{-4}$	84
2	$9.5 \cdot 10^{-5}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$	63
5	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	44
7	$3.6 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	59

Méthode de Kohn-Vogelius

p (%)	$\frac{\ S-S_c\ }{\ S\ }$	$\frac{\ \mathbf{q}-\mathbf{q}_c\ }{\ \mathbf{q}\ }$	$iter$
0	$1.7 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	136
2	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$6.5 \cdot 10^{-4}$	71
5	$3.9 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	109
7	$5.5 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	114

TABLE 5.20 – Erreurs relatives sur le moment et la position calculés obtenues sur le maillage réaliste. Mesure connue sur tout le scalp et perturbée de $p = 0, 2, 5, 7\%$.

Impact de la présence des fontanelles sur la localisation des sources

Pour étudier l’effet de la présence des fontanelles sur la localisation d’une source, nous générons les mesures par le modèle direct avec fontanelles. Ensuite, nous résolvons le problème inverse en considérant un modèle sans fontanelles. Le tableau 5.21 donne le résultat obtenu.

Méthodes	$\frac{\ S-S_c\ }{\ S\ }$	$\frac{\ q-q_c\ }{\ q\ }$	<i>iter</i>
MC	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$6.4 \cdot 10^{-3}$	72
KV	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-3}$	85

TABLE 5.21 – Erreurs relatives sur le moment et la position calculés obtenues sur le maillage réaliste. Mesure connue sur tout le scalp et non perturbée.

Résultats

Le tableau 5.21 montre que l'exclusion des fontanelles dans le modèle inverse fait passer l'erreur sur la localisation de l'ordre de 10^{-4} à l'ordre de 10^{-3} soit une augmentation de facteur 10. Nous en déduisons qu'il est important de prendre en compte les fontanelles dans le modèle inverse.

Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons résolu le problème inverse en EEG en minimisant une fonctionnelle de type Kohn-Vogelius (KV) et des moindres carrés (MC). Nous avons implémenté les deux méthodes en utilisant la méthode BFGS codée dans FreeFem++ [31] et ajouté le critère de Morozov. Nous avons testé les deux méthodes KV et MC sur un maillage sphérique et sur maillage réaliste de la tête d'un nouveau-né. Nous avons également testé plusieurs configurations de sources. Nous avons étudié le comportement des méthodes par rapport à la proximité du dipôle à la surface du cerveau et à la perturbation des données dans le cas d'une source. Nous avons également étudié le comportement des méthodes par rapport à la superficie de la partie Γ^* du scalp sur laquelle les mesures sont connues. Le comportement des méthodes par rapport à la distance entre deux dipôles (séparabilité) a été également étudié dans le cas de deux sources pour les modèles sphériques avec et sans fontanelles. Nous avons en outre analysé l'impact de la présence des fontanelles sur la localisation d'une source dans le cas du modèle réaliste.

L'analyse des résultats montre que les deux méthodes donnent de bons résultats sur le modèle sphérique lorsque nous disposons de données faiblement perturbées et d'un nombre faible de dipôles bien séparés et loin de la surface du cerveau. La précision de la localisation diminue lorsqu'il s'agit d'un dipôle à proximité de la surface du cerveau ou lorsqu'il s'agit de dipôles proches. Cependant, la précision s'améliore lorsqu'on considère le modèle avec fontanelles dans le cas de deux dipôles proches. La méthode MC nécessite dans la plupart des cas testés moins d'itérations que la méthode KV. La méthode MC est également moins sensible au bruit que la méthode KV. Mais, la méthode KV est plus précise lorsque nous avons une source à proximité de la surface du cerveau et lorsque nous avons deux dipôles proches dans le cas de données non perturbées. Les deux méthodes sont également sensibles à la superficie de la partie mesurée sur le scalp. La méthode KV se comporte mieux lorsque cette superficie est petite. Pour le modèle réaliste, nous avons obtenu des résultats sur l'impact de la présence des fontanelles sur le modèle inverse. Les résultats montrent que la précision est meilleure lorsqu'on prend en compte les fontanelles dans le modèle inverse.

Enfin, il serait intéressant d'implémenter des méthodes autres que la méthode de soustraction pour la résolution du problème direct et tester si cela permet d'améliorer la précision du calcul du gradient de la fonctionnelle et par suite de la localisation. Nous pouvons citer la méthode de Saint-Venant [7, 62]. On pourrait également penser à l'utilisation de méthodes d'optimisation sans gradient (par exemple les algorithmes stochastiques) pour

minimiser les erreurs dues au calcul numérique du gradient.

Conclusion générale

Cette thèse, proposée dans le cadre du projet MIFAC financé par la région de Picardie avait pour but de répondre à une question précise des cliniciens du projet, qui était celle de l'impact des fontanelles sur la localisation de l'activité cérébrale pathologique chez le nouveau-né.

Nous avons proposé un modèle direct qui permet de prendre en compte la présence des fontanelles (et leur ossification dans le cas sphérique). Nous avons introduit la méthode de soustraction pour traiter la singularité du terme source, résolu le problème direct par la méthode des éléments finis volumiques et validé ces choix dans le cas du modèle sphérique par comparaison avec une solution analytique. Une étude de l'impact des fontanelles dans le modèle direct a été effectuée dans le chapitre 2. Les résultats obtenus montrent que l'impact des fontanelles est non négligeable dans le modèle direct. Ensuite, nous avons introduit la dérivée de Gâteaux pour analyser la sensibilité des mesures par rapport à une faible variation de la conductivité. L'étude de la sensibilité par rapport à une petite variation de la conductivité des fontanelles a montré que les zones sensibles sont localisées au-dessus des fontanelles et qu'elles dépendent des paramètres du dipôle (position et moment). Nous avons étudié le problème inverse dans le chapitre 4 où des résultats d'identifiabilité et de stabilité ont été obtenus. Nous avons proposé deux méthodes d'identification basées sur la minimisation de la fonctionnelle de Kohn-Vogelius et de la fonctionnelle classique des moindres carrés. Nous avons développé ces méthodes et présenté dans le chapitre 5 les résultats numériques sur des géométries sphérique et réaliste de la tête d'un nouveau-né. Les résultats ont montré l'impact des fontanelles sur la séparabilité de deux dipôles dans le cas sphérique et l'importance de les considérer dans le modèle inverse du nouveau-né.

Nous pouvons déduire des résultats obtenus dans ces travaux qu'il est important de prendre en compte les fontanelles dans le modèle EEG chez le nouveau-né.

Pour les perspectives à ces travaux, nous envisageons plusieurs points :

- Étudier l'impact de la prise en compte du liquide céphalo-rachidien et de la distinction matière blanche/matière grise dans les problèmes direct et inverse, et de comparer ces différents impacts avec celui des fontanelles.
- Utiliser des algorithmes sans gradient (par exemple les algorithmes stochastiques) et d'introduire un paramètre de régularisation à la fonctionnelle coût de Kohn-Vogelius pour la résolution du problème inverse.
- Étudier la sensibilité par rapport à une faible variation des sources. Cette étude est motivée par l'évaluation de l'ordre de grandeur de la constante dans le résultat de stabilité du Théorème 4.8 du chapitre 4 qui dépend de la sensibilité par rapport à la source.

Annexe A

Calcul du gradient par la méthode de sensibilité

Dans cette partie, nous calculons le gradient des fonctionnelles définies dans cette thèse par la méthode de sensibilité. Elle consiste à calculer d'abord la dérivée directionnelle de la fonctionnelle. Ensuite, les composantes du gradient sont obtenues à partir de la dérivée directionnelle dans la direction e_i de la base canonique de \mathbb{R}^{6M} .

Fonctionnelle des moindres carrés

Nous rappelons la fonctionnelle des moindres carrés

$$J_{mc}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} (u_n - f)^2 ds,$$

où $u_n = u_n(\varphi)$ est la solution du problème direct pour une configuration de source φ et f représente les mesures sur le bord Γ^* . Nous définissons la dérivée directionnelle de J_{mc} par rapport au terme source $\varphi = (\mathbf{q}_m, S_m)_{1 \leq m \leq M}$ dans la direction $\psi = (\mathbf{p}_m, T_m)_{1 \leq m \leq M}$ par

$$J'_{mc}(\varphi) \cdot \psi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{J_{mc}(\varphi + \delta\psi) - J_{mc}(\varphi)}{\delta},$$

où $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $\varphi + \delta\psi \in \Omega_\alpha$. Nous posons

$$J_{mc}^\delta(\varphi) = \frac{J_{mc}(\varphi + \delta\psi) - J_{mc}(\varphi)}{\delta}.$$

Alors J_{mc}^δ devient

$$J_{mc}^\delta(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} \left[\left(\frac{u_{n,\delta}^2 - u_n^2}{\delta} \right) + 2f \left(\frac{u_n - u_{n,\delta}}{\delta} \right) \right] ds.$$

Nous posons

$$d_\delta u_n = \frac{u_{n,\delta} - u_n}{\delta}.$$

Alors $u_n^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} d_\delta u_n$ est la dérivée directionnelle de u_n dans la direction ψ . u_n^1 est la solution de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u_n^1) & = F^1 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_n u_n^1 & = 0 & \text{sur } \Gamma_\infty. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Remarquons que la dérivée directionnelle de $(u_n)^2$ vaut $\lim_{\delta \rightarrow 0} d_\delta u_n^2 = 2u_n u_n^1$. Nous rappelons également que le problème direct se décompose comme suit $u_n = w_n - \tilde{u}_n$ (méthode de soustraction) où w_n est solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla w_n) &= \sum_{m=1}^M \nabla \cdot ((c_m - \sigma)) \nabla \tilde{u}_n^m & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_{\mathbf{n}} w &= -\sigma \partial_{\mathbf{n}} \tilde{u}_n & \text{sur } \Gamma_\infty. \end{cases}$$

et $\tilde{u}_n = \sum_{m=1}^M \tilde{u}_n^m$ avec \tilde{u}_n^m la solution de l'équation de Poisson $-c_m \Delta \tilde{u}_n^m = \mathbf{q}_m \cdot \nabla \delta_{S_m}$. Nous avons alors $d_\delta u_n = d_\delta w_n + d_\delta \tilde{u}_n$.

D'une part, \tilde{u}_n étant analytique dans $\Omega \setminus \cup \mathcal{V}_m$, \tilde{u}_n et ses dérivées sont bornés dans $\Omega \setminus \cup \mathcal{V}_m$. D'autre part, $d_\delta w_n$ est la solution du problème variationnel bien posé suivant

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla d_\delta w_n \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \sum_{m=1}^M \int_{\Omega \setminus \mathcal{V}_m} (c_m - \sigma) \nabla d_\delta \tilde{u}_n^m v \, d\mathbf{x} - c_m \int_{\Gamma_\infty} \partial_{\mathbf{n}} d_\delta w_n v \, ds$$

et nous avons l'estimation

$$\|d_\delta w_n\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \sum_{m=1}^M \|\nabla d_\delta \tilde{u}_n^m\|_{L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_m)} + \|\partial_{\mathbf{n}} d_\delta \tilde{u}_n^m\|_{L^2(\Gamma_\infty)}.$$

Par conséquent, $d_\delta w_n$ est borné.

Par le théorème de convergence dominé, nous obtenons

$$J'_{mc}(\varphi) \cdot \psi = \int_{\Gamma^*} (-f u_n^1 + u_n u_n^1) \, ds = \int_{\Gamma^*} u_n^1 (u_n - f) \, ds,$$

où u_n^1 est la solution du problème (A.1). un calcul direct montre que F^1 est donnée par

$$F^1 = \sum_{m=1}^M \mathbf{p}_m \cdot \nabla \delta_{S_m} - \mathbf{q}_m \cdot H(\delta_{S_m}) T_m,$$

où $H(\delta_{S_m}) = (\partial_{x_i x_j}^2 \delta_{S_m})_{1 \leq i, j \leq 3}$ désigne la matrice hessienne.

Fonctionnelle de Kohn-Vogelius

La fonctionnelle de Kohn-Vogelius est donnée par

$$J_{kv}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} -\sigma \partial_{\mathbf{n}} u_d (u_n - f) \, ds + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma^*} (u_n - f)^2 \, ds,$$

où u_n et u_d sont les solutions respectives des problèmes suivants

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u_n) &= F & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_{\mathbf{n}} u_n &= 0 & \text{sur } \Gamma_\infty. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u_d) &= F & \text{dans } \Omega, \\ u_d &= f & \text{sur } \Gamma^* \\ \sigma \partial_{\mathbf{n}} u_d &= 0 & \text{sur } \Gamma_\infty \setminus \Gamma^*. \end{cases}$$

Nous rappelons que le second terme dans la définition de cette fonctionnelle est égal à $\varepsilon J_{mc}(\varphi)$ et nous avons déjà étudié sa dérivée directionnelle. Il reste à étudier la dérivée directionnelle du premier terme, à savoir

$$j_{kv}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} -\sigma \partial_n u_d (u_n - f) ds.$$

Soit ψ la direction et $\delta > 0$ tel que $\varphi + \delta\psi \in \Omega_\alpha$. La dérivée directionnelle de j_{kv} est alors donnée par

$$j'_{kv}(\varphi) \cdot \psi = \lim_{\delta \rightarrow 0} j_{kv}^\delta(\varphi),$$

où

$$j_{kv}^\delta = \frac{j_{kv}(\varphi + \delta\psi) - j_{kv}(\varphi)}{\delta}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} j_{kv}^\delta &= \frac{1}{2\delta} \int_{\Gamma^*} [-\sigma \partial_n u_{d,\delta} (u_{n,\delta} - f) + \sigma \partial_n u_d (u_n - f)] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} \left[-\sigma \partial_n u_{d,\delta} \left(\frac{u_{n,\delta} - u_n}{\delta} \right) + (f - u_n) \sigma \partial_n \left(\frac{u_{d,\delta} - u_d}{\delta} \right) \right] ds. \end{aligned}$$

Nous posons $d_\delta u_n = \frac{u_{n,\delta} - u_n}{\delta}$ et $d_\delta u_d = \frac{u_{d,\delta} - u_d}{\delta}$ et nous notons $u_n^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} d_\delta u_n$ et $u_d^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} d_\delta u_d$. Nous savons que u_n et u_d se décomposent en $u_n = w_n - \tilde{u}$ et $u_d = w_n - \tilde{u}$ par la méthode de soustraction. Ainsi, $d_\delta u_n$ et $d_\delta u_d$ s'écrivent $d_\delta u_n = d_\delta w_n + d_\delta \tilde{u}$ et $d_\delta u_d = d_\delta w_n + d_\delta \tilde{u}$. Comme auparavant, $d_\delta \tilde{u}$ et ses dérivées sont bornées. Et, w_n et w_d sont les solutions de problèmes variationnels bien posés et elles sont bornées.

Par le théorème de convergence dominé, nous obtenons la dérivée directionnelle de J_{kv}

$$J'_{kv}(\varphi) \cdot \psi = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} [-\sigma \partial_n u_d u_n^1 + (f - u_n) \sigma \partial_n u_d^1] ds + \varepsilon \int_{\Gamma^*} u_n^1 (u_n - f) ds,$$

où u_n^1 et u_d^1 sont les solutions respectives de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u_n^1) = F^1 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial_n u_n^1 = 0 & \text{sur } \Gamma_\infty. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma \nabla u_d^1) = F^1 & \text{dans } \Omega, \\ u_d^1 = 0 & \text{sur } \Gamma^* \\ \sigma \partial_n u_d^1 = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma^*. \end{cases}$$

avec

$$F^1 = \sum_{m=1}^M \mathbf{p}_m \cdot \nabla \delta_{S_m} - \mathbf{q}_m \cdot H(\delta_{S_m}) T_m.$$

Table des figures

1.1	Fontanelles	14
1.2	Neurone (source : tpe-neurotechnologies.e-monsite.com)	15
1.3	Synapse (source : web.expasy.org)	16
1.4	Scanner IRM à gauche et image à droite	17
1.5	Scanner CT à gauche et image à droite	18
1.6	Examen EEG (gauche) et exemple de tracé (droite)	19
1.7	MEG à gauche et image à droite	20
1.8	Modèle sphérique de tête à trois couches.	21
2.1	Modèle de tête réaliste d'un nouveau-né. Gauche : crâne et fontanelles. Droite : Maillage des fontanelles.	46
2.2	RDM par rapport au pas de maillage h en échelle logarithme. Modèle de tête sphérique à trois couches sans fontanelles. Solution de référence exacte. Haut à gauche : excentricité 0.6. Haut à droite : excentricité 0.8. Bas à gauche : excentricité 0.9. Bas à droite : excentricité 0.98.	48
2.3	Comportement des facteurs RDM et MAG par rapport à l'excentricité du dipôle. Différents pas de maillage (maillage le plus fin M_3). Modèle sphé- rique de tête à trois couches sans fontanelles. Solution de référence exacte.	48
2.4	Solution du potentiel électrique sur le scalp. Simulation faite sur le maillage M_2 . Haut à gauche : potentiel avec l'excentricité 0.6. Haut à droite : poten- tiel avec l'excentricité 0.8. Bas à gauche : potentiel avec l'excentricité 0.9. Bas à droite : potentiel avec l'excentricité 0.98.	49
2.5	Solution du potentiel électrique sur le scalp. Simulation faite sur le maillage M_2 . Gauche : excentricité 0.8 et $\mathbf{q} = (0, J, 0)$. Droite : excentricité 0.8 et $\mathbf{q} = \left(0, \frac{J}{\sqrt{2}}, \frac{J}{\sqrt{2}}\right)$	49
2.6	Modèle de tête sphérique avec la fontanelle principale.	50
2.7	Erreur en norme H^1 par rapport au pas de maillage h en échelle loga- rithme. Modèle de tête sphérique à trois couches avec la fontanelle anté- rieure (Comportement gaussien pour la conductivité de la fontanelle). So- lution numérique de référence calculée sur M_{ref} . Gauche : une seule source $S = (0, 0, 40mm)$, $\mathbf{q} = (0, 0, J)$. Droite : deux sources $S_1 = (0, 0, 10mm)$, $S_2 = (0, 10mm, 0)$ avec des moments $\mathbf{q}_1 = (0, 0, J)$, $\mathbf{q}_2 = (0, J, 0)$. Intensité $J = 10^{-6} A.m^{-2}$	51

2.8	Comportement des facteurs RDM et MAG par rapport à l'excentricité de la position du dipôle pour différents maillages. Modèle de tête sphérique à trois couches avec la fontanelle antérieure (Comportement gaussien pour la conductivité de la fontanelle). Solution numérique de référence calculée sur M_{ref} .	51
2.9	Solution du potentiel électrique sur le scalp dans le cas du modèle sphérique avec la fontanelle antérieure. Simulation faite sur le maillage M_2 . Haut à gauche : potentiel pour source d'excentricité 0.6, $\mathbf{q} = (0, 0, J)$. Haut à droite : potentiel pour source d'excentricité 0.6, $\mathbf{q} = (\frac{J}{\sqrt{2}}, \frac{J}{\sqrt{2}}, 0)$. Bas à gauche : potentiel pour source d'excentricité 0.8, $\mathbf{q} = (0, J, 0)$. Bas à droite : potentiel pour source d'excentricité 0.8, $\mathbf{q} = (0, \frac{J}{\sqrt{2}}, \frac{J}{\sqrt{2}})$.	52
2.10	Solution du potentiel électrique sur le scalp dans le cas du modèle de tête réaliste à quatre couches. Gauche : potentiel électrique pour le dipôle placé en S_1 . Droite : potentiel électrique pour le dipôle placé en S_2 .	53
2.11	Solution du potentiel électrique sur le scalp dans le cas du modèle de tête réaliste à quatre couches. Gauche : potentiel électrique pour le moment électrique \mathbf{q}_1 . Droite : potentiel électrique pour le moment électrique \mathbf{q}_2 .	53
2.12	Les différentes parties de la tête (Source : campus.cerimes.fr).	54
2.13	Solution du potentiel électrique sur le scalp dans le cas du modèle de tête réaliste à quatre couches. Haut à gauche : potentiel électrique pour le modèle avec deux sources. Haut à droite : potentiel électrique pour le modèle avec trois sources. Bas à gauche : potentiel électrique pour le modèle avec quatre sources. Bas à droite : potentiel électrique pour le modèle avec cinq sources.	55
2.14	Zones de mesures sur le scalp. $m0$: zone au-dessus de la fontanelle antérieure. $m1$: zone du scalp ne couvrant pas les fontanelles.	56
2.15	RDM en fonction de la conductivité des fontanelles. Haut à gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1). Haut à droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2). Bas à gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1). Bas à droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2).	56
2.16	MAG en fonction de la conductivité des fontanelles. Haut à gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1). Haut à droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2). Bas à gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1). Bas à droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2).	57
2.17	RDM _s en fonction de la conductivité des fontanelles. Haut à droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1). Haut à gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2). Bas à droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1). Bas à gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2).	58
2.18	MAG _s en fonction de la conductivité des fontanelles. Haut à droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1). Haut à gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2). Bas à droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1). Bas à gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2).	59
2.19	RDM en fonction de la conductivité de l'os. Haut à gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1). Haut à droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2). Bas à gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1). Bas à droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2).	61
2.20	MAG en fonction de la conductivité de l'os. Haut à gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1). Haut à droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2). Bas à gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1). Bas à droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2).	61
2.21	RDM _s en fonction de la conductivité de l'os. Haut à gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1). Haut à droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2). Bas à gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1). Bas à droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2).	62

2.22	MAG _s en fonction de la conductivité de l'os. Haut à gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1). Haut à droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2). Bas à gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1). Bas à droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2).	62
2.23	Variations des facteurs RDM et MAG par rapport aux différentes conductivités (σ_f, σ_{os}). Modèle de tête réaliste à quatre couches. Solution de référence calculée avec le modèle sans fontanelles. Haut : RDM et MAG pour une source proche. Bas : RDM et MAG pour une source éloignée.	64
2.24	rdm pour différents rapports de σ_f/σ_{os} . Modèle de tête réaliste à quatre couches. Solution de référence calculée avec le modèle sans fontanelles. Haut à gauche : rdm pour $\sigma_f/\sigma_{os} = 0.5/0.03$ avec une source proche. Haut à droite : rdm pour $\sigma_f/\sigma_{os} = 0.2/0.05$ avec une source proche. Bas à gauche : rdm pour $\sigma_f/\sigma_{os} = 0.5/0.03$ avec une source éloignée. Bas à droite : rdm pour $\sigma_f/\sigma_{os} = 0.2/0.05$ avec une source éloignée.	65
3.1	Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de l'excentricité. Distance source-interface cerveau/LCR $\approx 5\text{mm}$ (gauche) et $\approx 15\text{mm}$ (droite).	73
3.2	Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de l'orientation. Distance source-interface cerveau/LCR $\approx 15\text{mm}$. Gauche : moment $\mathbf{q} = (J, J, 0)$. Droite : moment $\mathbf{q} = (J, 0, J)$	73
3.3	Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp pour une source profonde. . .	74
3.4	Norme L^2 de la sensibilité par rapport à la conductivité des fontanelles du potentiel électrique sur le scalp en fonction de la conductivité des fontanelles. Haut droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1). Haut gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2). Bas droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1). Bas gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2).	74
3.5	Norme L^2 de la sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de la conductivité de l'os. Haut droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1). Haut gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2). Bas droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1). Bas gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2).	75
3.6	Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de l'excentricité. Distance source-interface cerveau/LCR $\approx 5\text{mm}$ (gauche) et $\approx 15\text{mm}$ (droite).	76
3.7	Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de l'orientation. Distance source-interface cerveau/LCR $\approx 15\text{mm}$. Gauche : moment $\mathbf{q} = (J, J, 0)$. Droite : moment $\mathbf{q} = (J, 0, J)$	76
3.8	Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp pour une source profonde. . .	77
3.9	Norme L^2 de la sensibilité par rapport à la conductivité de l'os du potentiel électrique sur le scalp en fonction de la conductivité des fontanelles. Haut droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1). Haut gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2). Bas droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1). Bas gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2).	78
3.10	Norme L^2 de la sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de la conductivité de l'os. Haut droite : dipôle (S_1, \mathbf{q}_1). Haut gauche : dipôle (S_1, \mathbf{q}_2). Bas droite : dipôle (S_2, \mathbf{q}_1). Bas gauche : dipôle (S_2, \mathbf{q}_2).	79
3.11	Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de l'excentricité. Distance source-interface cerveau/LCR $\approx 5\text{mm}$ (gauche) et $\approx 15\text{mm}$ (droite).	79
3.12	Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp en fonction de l'orientation. Distance source-interface cerveau/LCR $\approx 15\text{mm}$. Gauche : moment $\mathbf{q} = (J, J, 0)$. Droite : moment $\mathbf{q} = (J, 0, J)$	80
3.13	Sensibilité du potentiel électrique sur le scalp pour une source profonde. . .	80
5.1	Erreurs relatives E_S et E_q par rapport à l'excentricité e	109
5.2	Erreurs relatives E_S et E_q en fonction de l'amplitude de la perturbation p pour différentes excentricités e	110

5.3	Erreurs en fonction de la distance entre les deux dipôles. Modèle sans fontanelles.	112
5.4	Erreurs en fonction de la distance entre les deux dipôles. Modèle avec fontanelles.	113
5.5	Erreurs en fonction de la distance entre les deux dipôles. Modèle avec fontanelles. Données perturbées de niveau 5%.	114
5.6	Erreurs en fonction de la distance entre les deux dipôles. Modèle avec fontanelles. Données perturbées de niveau 10%.	114
5.7	Erreurs en fonction de la distance entre les deux dipôles. Modèle avec fontanelles. Données perturbées amplitude 15%.	115
5.8	Erreurs relatives E_S et E_q par rapport à l'excentricité e . Méthode KV.	116
5.9	Erreurs relatives E_S et E_q en fonction du niveau de la perturbation p pour différentes excentricités e . Méthode KV.	118
5.10	Erreurs en fonction de la distance entre les deux dipôles. Modèle avec fontanelles. Données non perturbées.	119
5.11	Partie Γ^* du scalp représentant 100%, 75%, 50% et 25% de la demi-sphère supérieure.	120
5.12	Erreurs relatives E_S et E_q en fonction de la proportion de la surface du scalp sur laquelle sont connues les mesures.	120
5.13	Erreurs relatives E_S et E_q en fonction de la proportion de la surface du scalp sur laquelle sont connues les mesures. Données perturbées d'amplitude $p = 5\%$	120
5.14	Erreurs relatives E_S et E_q en fonction de la proportion de la surface du scalp sur laquelle sont connues les mesures. Données perturbées d'amplitude $p = 10\%$	121

Liste des tableaux

1.1	Valeurs de conductivités en $S.m^{-1}$	22
2.1	Modèle sphérique à trois couches	44
2.2	Description des maillages du modèle sphérique à trois couches	45
2.3	Description du maillage de tête réaliste	45
2.4	Conductivités des différents tissus de la tête	46
5.1	Maillages du modèle sphérique à trois couches pour le problème inverse . .	107
5.2	Écart entre les dipôles. R rayon du cerveau.	107
5.3	Le tableau montre les différentes positions testées, leurs excentricités et les valeurs initiales de l'algorithme BFGS.	108
5.4	Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. <i>iter</i> le nombre d'itérations de l'algorithme BFGS. Données non perturbées.	108
5.5	Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. <i>iter</i> le nombre d'itérations de l'algorithme BFGS. Données perturbées de niveau $p = 5\%$	109
5.6	Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. <i>iter</i> le nombre d'itérations de l'algorithme BFGS. Données perturbées de niveau $p = 10\%$	109
5.7	Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. <i>iter</i> le nombre d'itérations de l'algorithme BFGS. Données perturbées de niveau $p = 15\%$	110
5.8	Le tableau montre les différentes positions S_2 testées, leurs distances par rapport à S_1 et les valeurs initiales de l'algorithme BFGS.	111
5.9	Le tableau montre les différents moments q_2 testées et leurs valeurs initiales.	111
5.10	Erreurs relatives sur les moments et les positions testées. <i>iter</i> le nombre d'itérations de l'algorithme. Modèle sans fontanelles.	111
5.11	Erreurs relatives sur les moments et les positions testées. <i>iter</i> le nombre d'itérations de l'algorithme. Modèle avec fontanelles.	112
5.12	Erreurs relatives sur les moments et les positions testées. <i>iter</i> le nombre d'itérations de l'algorithme BFGS. Modèle avec fontanelles. Données perturbées de niveau 5%.	113
5.13	Erreurs relatives sur les moments et les positions testées. <i>iter</i> le nombre d'itérations de l'algorithme. Modèle avec fontanelles. Données perturbées de niveau 10%.	115
5.14	Erreurs relatives sur les moments et les positions testées. <i>iter</i> le nombre d'itérations de l'algorithme. Modèle avec fontanelles. Données perturbées de niveau 15%.	115

5.15	Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. <i>iter</i> le nombre d'itérations de l'algorithme BFGS. Données non perturbées.	116
5.16	Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. <i>iter</i> le nombre d'itérations de l'algorithme BFGS. Données perturbées de niveau $p = 5\%$	117
5.17	Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. <i>iter</i> le nombre d'itérations de l'algorithme BFGS. Données perturbées de niveau $p = 10\%$	117
5.18	Erreurs relatives sur le moment et les différentes positions testées. <i>iter</i> le nombre d'itérations de l'algorithme. Données perturbées de niveau $p = 15\%$.	117
5.19	Erreurs relatives sur les moments et les positions testées. <i>iter</i> le nombre d'itérations de l'algorithme. Modèle avec fontanelles.	118
5.20	Erreurs relatives sur le moment et la position calculés obtenues sur le maillage réaliste. Mesure connue sur tout le scalp et perturbée de $p = 0, 2, 5, 7\%$	121
5.21	Erreurs relatives sur le moment et la position calculés obtenues sur le maillage réaliste. Mesure connue sur tout le scalp et non perturbée.	122

Bibliographie

- [1] G. Adde, *Méthodes de Traitement d'Image Appliquées au Problème Inverse en Magnéto-Electro-Encéphalographie*, Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, (2005).
- [2] G. Ala, E. Francomano, *A multi-sphere particle numerical model for non-invasive investigations of neuronal human brain activity*, Progress In Electromagnetics Research Letters(2013), vol. 36, pp. 143-153.
- [3] H. Azizollahi, A. Aarabi, F. Wallois, *Effects of uncertainty in head tissue conductivity and complexity on EEG forward modeling in neonates*, Humain Brain Mapping, (2016)
- [4] S. Baillet, L. Garnero, *A bayesian approach to introducing anatomofunctional priors in EEG/MEG inverse problem*, IEEE Trans. Biomed. Eng., **44** (5), 374-385, (1997)
- [5] L. Baratchart, A. Ben Abda, F. Ben Hassen, J. Leblond, *Recovery of pointwise sources or small inclusions in 2D domains and rational approximation*, Inverse Problems, **21**, 51-74, (2005)
- [6] L. Baratchart, J. Leblond, F. Mandrea, E. Saff, *How can the meromorphic approximation help to solve some 2D inverse problems for the laplacian ?*, Inverse Problems, **15**, 79-90, (1999)
- [7] M. Bauer, S. Pursiainen, J. Vorwerk, H. Köstler, C.H. Wolters, *Comparison Study for Whitney (Raviart-Thomas) -Type Source Models in Finite-Element-Method-Based EEG Forward Modeling*, IEEE Trans. Biomed. Eng., **62**(11) (2015), pp. 2648–2656.
- [8] S. Baumann, D. R. Wozny, S. K. Kelly, F. M. Meno, *The electrical conductivity of human cerebrospinal fluid at body temperature*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering 44(3) (1997).
- [9] J. Borggaard, V. L. Nunes, *Fréchet Sensitivity Analysis for Partial Differential Equations with Distributed Parameters*, American Control Conference, San Francisco, 2011.
- [10] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, New York, 1978.
- [11] M. Darbas, M.M. Diallo, A. El Badia, S. Lohrengel, *An inverse dipole EEG source problem in neonates*, in preparation.
- [12] A. El Badia, *Inverse source problem in an anisotropic medium by boundary measurements*, Inverse Problems **21**, 1787-1806, (2005)
- [13] A. El Badia, A. El Hajj, *Stability estimates for an inverse source problem of Helmholtz's equation from single Cauchy data at a fixed frequency*, Inverse Problems, **29** (12), 125008, (2013).
- [14] A. El Badia, T. Ha Duong, *An inverse source problem in potential analysis*, Inverse Problems **16** (2000) pp. 651–663.
- [15] A. El Badia, M. Farah, *Identification of dipole sources in an elliptic equation from boundary measurements*, J. Inv. Ill-Posed Problems **14** (2006), pp. 331–353.

- [16] A. El Badia, M. Farah, *A stable recovering of dipole sources from partial boundary measurements*, Inverse problems **26** (2010), 115006.
- [17] M. Farah, *Problèmes inverses de sources et lien avec l'Electro-encéphalo-graphie*, Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2007.
- [18] Q. Fang, D.A Boas, *Tetrahedral mesh generation from volumetric binary and grayscale images*, IEEE International Symposium on Biomedical Imaging (2009), pp. 1142-1145.
- [19] O. Faugeras, F. Clément, R. Deriche, R. Keriven, T. Papadopoulo, J. Roberts, T. Viéville, F. Devernay, J. Gomes, G. Hermosillo, P. Kornprobst, D. Lingrand, *The inverse EEG and MEG problems : The adjoint state approach I : The continuous case*, Rapport de recherche, 1999.
- [20] P. Gargiulo, P. Belfiore, E.A. Friogeirsson, S. Vanhalato, C. Ramon, *The effect of fontanel on scalp EEG potentials in the neonate*, Clin. Neurophysiol., **126** (2014), pp. 1703–1710.
- [21] L. Garnero *Les bases physiques et physiologiques de la magnétoencéphalographie et de l'électroencéphalographie*, Laboratoire de Neurosciences Cognitives et Imagerie Cérébrale.
- [22] C. Geuzaine, J.-F. Remacle *Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **79** (11) (2009), pp. 1309-1331.
- [23] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlin, 1977.
- [24] D.B. Goselowitz, *On bioelectric potentials in an homogeneous volume conductor*, Biophysics Journal, **7**, 1-11, 1967.
- [25] R. Grech, T. Cassar, J. Muscat, K.P. Camilleri, S.G. Fabri, M. Zervakis, P. Xanthopoulos, V. Sakkalis, B. Vanrumste, *Review on solving the inverse problem in EEG source analysis*, J. NeurEng. Rehabil., **5**(25) (2008), DOI : 10.1186/1743-0003-5-25.
- [26] D. Gullmar, J. Haueisen, J. R. Reichenbach, *Influence of anisotropic electrical conductivity in white matter tissue on the EEG/MEG forward and inverse solution. A high-resolution whole head simulation study*, NeuroImage, **51** (2010) 145 ?63.
- [27] H. Hallez, B. Vanrumste, R. Grech, J. Muscat, W. De Clercq, A. Vergult, Y. d'Asseler, K.P. Camilleri, S.G. Fabri, S. Van Huffel, I. Lemahieu, *Review on solving the forward problem in EEG source analysis*, J. NeurEng. Rehabil., **4**(45) (2007), DOI : 10.1186/1743-0003-4-46.
- [28] M. Hämmäläinen, R. Hari, J. Ilmoniemi, J. Knuutila, O. V. Lounasmaa, *Magnetoencephalography-theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain*, Rev. Mod. Phys. **65** (1993), pp. 413–497.B
- [29] Si Hang, *TetGen, a Delaunay-Based Quality Tetrahedral Mesh Generator*, ACM Trans. on Mathematical Software **41** (2) (2015).
- [30] N. Hansen, *The CMA evolution strategy : a comparing review*, Spinger, (2006).
- [31] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, K. Ohtsuka, *FreeFem++ Manual*, 2014.
- [32] V. Hédou, *Méthodes numériques pour la modélisation électro-anatomique du cerveau*, Thèse de doctorat, Université de Rennes, 1997.
- [33] V. Hédou-Rouillier, *A finite difference method to solve the forward problem in electroencephalography (EEG)*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **167** (2004) 35-58.

- [34] E. Hernández and R. Rodríguez, *Finite element Approximation of Spectral Problems with Neumann Boundary Conditions on curved domains*, Math. Comp. **72** (2002), pp. 1099–1115.
- [35] M. Kern, *Problèmes inverses*, École supérieure d'ingénieurs Léonard De Vinci 2002.
- [36] A. Kirsch, *An introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Second edition, Applied Mathematical Sciences 120, Springer.
- [37] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Second edition, Applied Mathematical Sciences 82, Springer-Verlag, 1999.
- [38] J. Kybic, M. Clerc, T. Abboud, O. Faugeras, R. Keriven, T. Papadopoulo, *A Common Formalism for the Integral Formulations of the Forward EEG Problem*, IEEE Transactions on Medical Imaging, **24** (2005), pp. 12–18.
- [39] J. Kybic, M. Clerc, T. Abboud, O. Faugeras, R. Keriven, T. Papadopoulo, *Generalized head models for MEG/EEG : boundary element method beyond nested volumes*, Phys. Med. Biol. **51** (2006) pp. 1333–1346.
- [40] S. Lew, D.D. Silva, M. Choe, P. Ellen Grant, Y. Okada, C.H. Wolters, M.S. Hämmäläinen, *Effects of sutures and fontanels on MEG and EEG source analysis in a realistic infant head model*, Neuroimage **76** (2013), pp. 282-293.
- [41] G. Marin, C. Guerin, S. Baillet, L. Garnero, G. Meunier, *Influence of skull anisotropy for the forward and inverse problem in EEG : Simulation studies using FEM on realistic head models*, Humain Brain Mapping 6 :250-269 (1998).
- [42] J. W. H. Meijs, O. W. Weier, M. J. Peters, A. Van Oosterom, *On the numerical accuracy of the boundary element method*, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol. 36, No 10 (1989).
- [43] J. C. Mosher, R. M. Leahy, *Source localization using recursively applied and projected (RAP) MUSIC*, IEEE Trans. Biomed. Eng., **47**, 332-340, (1999).
- [44] J. C. Mosher, P. S. Lewis, R. M. Leahy, *Multipole dipole modeling and localization from spatio-temporal MEG data*, IEEE Trans. Biomed. Eng., **39**, 541-557, (1992).
- [45] J.C. de Munck and M.J. Peters, *A fast method to compute the potential in the multisphere model*, IEEE Trans. Biomed. Eng. **40** (1993), pp. 1166–1174.
- [46] J.C. de Munck, B.W van Dijk, H. Spekreijse, *Mathematical dipoles are adequate to describe realistic generators of human brain activity*, IEEE Transactions of Biomedical Engineering, 35(11) (1988).
- [47] J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical Optimisation*, Springer, (2006).
- [48] Odabae, A. Tokariev, S. Layeghy, M. Mesbah, P.B. Colditz, C. Ramon, S. Vanhatalo, *Neonatal EEG at scalp is focal and implies high skull conductivity in realistic neonatal head models*, NeuroImage **96** (2014), pp. 73–80.
- [49] J. Rauch, *Partial Differential Equations*, Springer, (1991).
- [50] P.A. Raviart and J.M. Thomas, *Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles*, Masson, Paris, 1983.
- [51] N. Roche-Labarbe, A. Aarabi, G. Kongolo, C. Gondry-Jouet, M. Dümpelmann, R. Grebe, F. Wallois, *High-resolution electroencephalography and source localization in neonates*, Human Brain Mapping **29** (2008), pp. 167–76.
- [52] S. Rush, D. A. Driscoll, *Current distribution in the brain from surface electrodes*, Analg, 47 (1968) 717-723.

- [53] Y. Saad, H. Schultz, *GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **17** :401-425, (1996).
- [54] M. Salo, *Unique continuation for elliptic equations*, Notes, Fall, (2014).
- [55] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.
- [56] M. Schneider, *A multistage process for computing virtual dipole sources of EEG discharges from surface information*, IEEE Trans. on Biomed. Eng. **19**, pp. 1–19.
- [57] N.G. Sepulveda, C.F. Walker, R.G. heath, *Finite element analysis of current pathways with implanted electrodes*, Journal of Biomedical Engineering, **5**, 41-48, (1983).
- [58] M. Spencer, R. Leahy, P. Lewis, *Adaptative filters for monitoring localized brain activity from surface potential time series*, Proceedings of 26th Annual Asilamor conference on Signals, Systems and Computers, 151-161, (1992).
- [59] S. Vallaghé, *Modélisation du problème direct de la magnéto et électroencéphalographie : méthodes numériques et calibration*, Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, (2008).
- [60] B. D. van Veen, K. M. Buckley, *Beamforming : A versatile approach to special filtering*, IEEE ASSP magazine, **5** (2), 4-24, (1988).
- [61] G. Vial, *Résolution du problème de Laplace-Neumann avec MELINA* (2008).
- [62] J. Vorwerk, J.H. Cho, S. Rampp, H. Hamer, T.T. Knösche, C.H. Wolters, *A guideline for head volume conductor modeling in EEG and MEG*, NeuroImage **15** (2014), pp. 590–607.
- [63] J. Vorwerk, *New finite element methods to solve the EEG/MEG forward Problem*, Thèse de doctorat, Université de Munster, (2016).
- [64] J.G. Witwer, G.J. Trezek, D.L. Jewett, *The effect of media inhomogeneities upon intracranial electrical fields*, Transactions Biomedical Engineering, **19** (1972) 352-362.
- [65] C.H. Wolters, H. Köstler, C. Möller, J. Härdtlein, L. Grasedyck, and W. Hackbusch, *Numerical mathematics of the subtraction approach for the modeling of a current dipole in EEG source reconstruction using finite element head models*, SIAM J. Sci. Comput., **30**(1) (2007), pp. 24–45.
- [66] C.H. Wolters, H. Köstler, C. Möller, J. Härdtlein, A. Anwander, *Numerical approaches for dipole modeling in finite element method based source analysis*, Int. Congress Ser. **1300** (2007), pp. 189–192.
- [67] C. H. Wolters, A. Anwander, X. Tricoche, D. Weinstein, M. A. Koch, M. S. Macleod, *Influence of tissue conductivity anisotropy on EEG/MEG field and return current computation in a realistic head model : A simulation and visualization study using high-resolution finite element modeling*, NeuroImage, **30** (2006) 813–826.
- [68] Z. Zhang, *A fast method to compute surface potentials generated by dipoles within multilayer anisotropic spheres*, Phys. Med. Biol. **40** (1995), pp. 335–349.
- [69] Y. Yan, P.L. Nunez, R.T. Hart, *Finite element model of the human head : scalp potentials due to dipole sources*, Medical and Biological Engineering and Computing, **29** (5), 475-481, (1991).
- [70] Y. Zhang, W. V. Drongelen, B. He, *Estimation of in vivo brain-to-skull conductivity ratio in humans*, Applied Physics Letters, **89**(22) : 223903–223903 (2006).