



HAL
open science

Duos d'artefacts tangibles et numériques et objets connectés pour apprendre et faire apprendre les mathématiques

Sophie Soury-Lavergne

► **To cite this version:**

Sophie Soury-Lavergne. Duos d'artefacts tangibles et numériques et objets connectés pour apprendre et faire apprendre les mathématiques. Education. Ecole Normale Supérieure de Lyon - ENS LYON; Institut Français de l'Éducation, 2017. tel-01610658

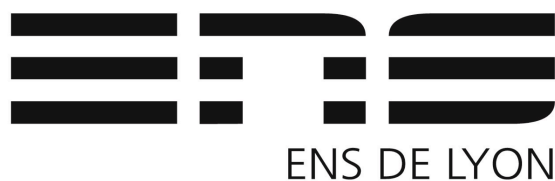
HAL Id: tel-01610658

<https://hal.science/tel-01610658>

Submitted on 5 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



DUOS D'ARTEFACTS TANGIBLES ET NUMÉRIQUES ET OBJETS CONNECTÉS POUR APPRENDRE ET FAIRE APPRENDRE LES MATHÉMATIQUES

SOPHIE SOURY-LAVERGNE

30 JUIN 2017

DOCUMENT POUR L'HABILITATION À DIRIGER LES RECHERCHES

JURY

Paul Drijvers, Professeur | Université d'Utrecht, Pays-Bas
Brigitte Grugeon, Professeur des Universités | Université Paris Est Créteil
Ghislaine Gueudet, Professeur des Universités | Université de Bretagne Occidentale
Ulrich Kortenkamp, Professeur | Université de Potsdam, Allemagne
Christian Mercat, Professeur des Universités | Université Claude Bernard Lyon I
Nathalie Sinclair, Professeur | Université Simon Fraser, Canada
Luc Trouche, Professeur des Universités | École Normale Supérieure de Lyon

REMERCIEMENTS

Au moment de finaliser ce document, j'ai l'occasion de revenir sur cette première partie de ma vie de chercheur et d'adresser de sincères remerciements aux personnes qui l'ont rendue possible et l'ont profondément marquée. Car la recherche ce n'est pas seulement le travail des idées et des concepts, mais aussi et surtout une histoire de personnes et de rencontres. J'ai eu beaucoup de chance à ce propos en faisant des rencontres décisives avec des chercheurs d'exception et des personnes de grande qualité.

En prémisses à la vie de chercheur, il y a d'abord la rencontre déterminante avec mes deux enseignantes de maîtrise à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, Annie Bessot et Denise Grenier, sans qui je serais passée à côté de la didactique des mathématiques.

La recherche démarre pour moi en 1993 avec Nicolas Balacheff, qui présente Cabri-géomètre en cours de DEA. Mon enthousiasme pour les questions que pose la géométrie dynamique est immédiat et Nicolas accepte d'encadrer mon mémoire puis ma thèse. A l'époque, je ne mesure pas aussi bien que maintenant la chance que j'ai eu de bénéficier de son exigence scientifique et de sa vision unique sur le rôle de la technologie pour produire des connaissances en didactique. Merci Nicolas.

La chance continue avec l'obtention d'un poste de maître de conférence à l'IUFM de l'académie de Grenoble en 2003 et mon arrivée dans l'équipe IAM dirigée par Colette Laborde. Bien sûr je connaissais déjà Colette et sa renommée. Mais en menant des projets de recherche à ses côtés, je bénéficie à ce moment là de son expertise et de sa façon tout à fait unique, avec finesse et discernement, d'amener chacun à produire le meilleur de lui-même. Colette m'ouvre les portes des collaborations internationales et, avec Jean-Marie Laborde, m'offre le soutien constant de Cabrilog qui rend concrètement les projets possibles. Merci Colette.

Ceux qui connaissent les difficultés que rencontrent les enseignants-chercheurs pour muter mesurent la chance que j'ai eu de pouvoir réaliser une véritable mobilité lorsque j'ai été détachée à l'INRP à Lyon en 2007. C'est Luc Trouche qui m'accueille dans la toute nouvelle équipe EducMath. Grâce à Luc et sa capacité à embrasser la complexité des situations étudiées, à construire du collectif associant chercheurs et enseignants, j'élargis le champ de mes recherches à d'autres mathématiques, d'autres technologies et d'autres niveaux scolaires. Grâce à Luc et à sa persévérance, je mène à bien ce projet d'HDR dont il accepte d'être le garant. Merci Luc.

Enfin, ma rencontre avec Michela Maschietto est d'une autre nature que les précédentes. J'avais rencontré des professeurs, avec Michela je rencontre un *alter-égo*. Nous formons un duo pour construire de nouveaux concepts et de nouveaux outils pour la didactique. Nous mettons à profit nos différences et nos complémentarités pour tracer de nouvelles perspectives de recherche. Nous vivons l'intense satisfaction de voir se réaliser nos projets et émerger de nouvelles idées. Merci Michela.

Peut être la chance n'a-t-elle rien à voir avec tout cela et qu'il s'agit plutôt de la dynamique bienveillante et constructive de ma communauté de recherche, une dynamique positive qui se manifeste lorsque Paul Drijvers, Brigitte Grugeon, Ghislaine Gueudet, Ulrich Kortenkamp, Nathalie Sinclair et Christian Mercat acceptent de participer au jury de cette habilitation à diriger les recherches. Chers collègues, que vous soyez tous ici remerciés pour m'avoir donné une place parmi vous.

Sophie

SOMMAIRE

Introduction. Questionner le potentiel des technologies pour les apprentissages fondamentaux en mathématiques.....3

Partie 1. Potentiel de la géométrie dynamique pour apprendre et faire apprendre et difficultés d'intégration dans les pratiques des enseignants..... 9

1. Géométrie dynamique et travail de l'enseignant : étayage et processus explicatif ...	11
1.1. Etude de l'interaction enseignant-élève avec un système simplifié et une méthodologie alliant expérimentation de laboratoire et étude de terrain	12
1.2. Première tentative de mise en relation du tangible avec le numérique.....	13
2. La géométrie dynamique pour apprendre la géométrie	15
2.1. Genèse instrumentale du déplacement	16
2.1.1. Différents instruments « déplacement ».....	16
2.1.2. Genèse instrumentale du déplacement chez les élèves de sixième.....	17
2.2. Genèse instrumentale et raisonnement déductif au collège et au lycée	18
2.3. Premiers apprentissages avec la géométrie dynamique.....	20
2.3.1. Constructions robustes et boîtes noires	21
2.3.2. Difficultés et solutions pour la genèse instrumentale du déplacement au premier degré	22
2.3.3. Premières situations didactiques combinant géométrie dynamique et matériel tangible	24
3. Intégration complexe des technologies dans les systèmes de ressources et les pratiques des enseignants	26
3.1. Conception de tâches avec la géométrie dynamique et remise en cause d'une approche en terme de « bonnes pratiques »	27
3.2. Conception de ressources et travail collaboratif comme moyens de formation des enseignants .	29
3.2.1. Conception dans l'usage des ressources de formation	30
3.2.2. Les ressources au cœur de la dynamique des collectifs d'enseignants et de formateurs	30
3.2.3. Nécessité des collectifs pour faire émerger des ressources et des pratiques.....	32
3.3. Qualité des ressources dans le cas de la géométrie dynamique.....	33
3.3.1. I2geo, une plateforme ouverte et informelle pour la géométrie dynamique.....	33
3.3.2. Prise en compte du point de vue de la recherche dans l'évaluation de la qualité.....	34
3.3.3. Potentiel du processus d'évaluation de la qualité pour le développement professionnel des enseignants.....	36
3.3.4. Contribution du processus qualité à l'amélioration des ressources et au développement des compétences des enseignants	39
4. Conclusion de la partie 1, nécessité des collectifs d'enseignants pour concevoir et utiliser la géométrie dynamique, des pistes pour les duos d'artefacts.....	39

Partie 2. Duos d'artefacts tangibles et numériques et systèmes d'instruments 43

1. Différentes perspectives pour considérer le rapport entre monde physique et environnement informatique pour l'apprentissage	44
1.1. Objets et monde extérieur dans les EIAH	45
1.1.1. L'environnement informatique comme intermédiaire entre le tangible et le numérique	45
1.1.2. La cognition incarnée et l'apprentissage des mathématiques	46
1.1.3. La validité épistémique de l'interaction élève-dispositif numérique.....	47
1.2. Animations interactives et simulations de machines mathématiques	49

1.2.1.	Absence d'incertitude et de nécessité d'anticipation chez l'utilisateur d'animations	49
1.2.2.	Simulations numériques de machines mathématiques et finalité didactique	50
1.3.	Virtual manipulatives ou « manipulés virtuels »	53
1.4.	Conclusion, recherche de complémentarité plutôt que de fidélité entre environnement numérique et artefact matériel	54
2.	Perspectives théoriques pour la conception d'un duo d'artefacts et l'analyse de ses usages.....	55
2.1.	Genèses instrumentales conjointes d'un système d'instruments à partir d'un duo d'artefacts	56
2.2.	Potentiel sémiotique d'un duo d'artefacts	58
2.3.	Particularité d'une situation didactique avec un duo d'artefacts.....	59
2.4.	Choix du tangible et du numérique pour créer les deux artefacts du duo.....	60
3.	L'exemplarité du duo pascaline et e-pascaline	61
3.1.	Conception du duo d'artefacts pascaline et e-pascaline.....	62
3.1.1.	Principes retenus pour la conception du duo pascaline e-pascaline	63
3.1.2.	Description et analyse de la pascaline pour la numération décimale de position	63
3.1.3.	La e-pascaline et les cahiers d'activité informatisés.....	68
3.2.	Apprentissage des élèves avec le duo d'artefacts.....	78
3.2.1.	Numération décimale et addition avec le duo pascaline et e-pascaline.....	79
3.2.2.	Complémentarité dans le duo d'artefacts : effet d'une rétroaction de stratégie	80
3.2.3.	Une situation problème « Compter les clics de la e-pascaline ».....	81
3.2.4.	Apprentissages avec un duo d'artefacts, une étude à poursuivre	83
3.3.	Appropriation d'un duo d'artefacts par les enseignants	83
3.3.1.	Intégration du duo d'artefacts dans le système de ressources des enseignants	84
3.3.2.	Méthodologie de suivi des genèses instrumentales et documentaires des enseignants	85
3.3.3.	Genèses documentaires attestées et orchestrations variées.....	87
3.3.4.	Conclusion sur l'appropriation du duo pascaline et e-pascaline.....	91
4.	Conclusion de la partie 2, le duo d'artefacts pascaline et e-pascaline, un exemplaire pour la recherche et pour le terrain.....	92
Partie 3. Des duos d'artefacts aux objets connectés, la mise en réseau des artefacts ..		95
1.	Les duos d'artefacts au-delà de l'exemplarité de la pascaline et la e-pascaline	96
1.1.	Duo d'artefacts dans le passage du spatial au géométrique en cycle 2	96
1.2.	Duo d'artefacts, genèse instrumentale et parcours de conceptions en géométrie au cycle 3	98
1.3.	Articulation du tangible et du numérique dans les duos d'artefacts	98
2.	Objets connectés et interfaces numériques pour l'apprentissage	99
2.1.	Objets Connectés et Interfaces Numériques pour l'Apprentissage à l'École Élémentaire.....	100
2.1.1.	Processus collectif et itératif entre enseignants, chercheurs et développeurs.....	102
2.2.	Étude des dispositifs d'objets connectés à la lumière des duos d'artefacts.....	104
2.2.1.	Conception des artefacts et des situations	104
2.2.2.	Apprentissage des élèves avec un dispositif d'objets connectés.....	105
2.2.3.	Appropriation du dispositif par les enseignants.....	106
3.	Conclusion de la partie 3, les duos d'artefacts et les objets connectés.....	106
Conclusion. Trois points de vue renouvelés par les duos d'artefacts.....		107
Références bibliographiques.....		111

INTRODUCTION.

QUESTIONNER LE POTENTIEL DES TECHNOLOGIES POUR LES APPRENTISSAGES FONDAMENTAUX EN MATHÉMATIQUES

Les questions relatives aux technologies pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, qu'il s'agisse des environnements informatiques pour l'apprentissage humain¹ ou plus largement des ressources qui intègrent ces technologies, ont alimenté un domaine de recherche en didactique très fécond, à la fois du point de vue des connaissances sur le rôle de ces technologies dans les processus d'apprentissage et d'enseignement et du point de vue des connaissances sur les apprentissages en mathématiques qu'elles ont permis de mieux comprendre.

En France, comme à l'étranger, ces travaux ont permis de définir les principes d'implémentation des connaissances mathématiques dans un dispositif informatique, de mieux comprendre les apprentissages des élèves interagissant avec ces dispositifs et, plus récemment, d'étudier l'activité des enseignants les utilisant dans leur classe, celle des formateurs qui les forment, les ressources qu'ils produisent et utilisent et de déterminer les contraintes institutionnelles permettant ou pas à ces activités de se développer. Il y a dix ans, l'étude ICMI de 2006 (Hoyle & Lagrange, 2010) dressait un panorama des travaux réalisés. Dans sa conférence de clôture, Michèle Artigue (2010) était très optimiste sur la vision qui se dégagait des travaux accomplis. Elle faisait le pronostic que cette vision du rôle des technologies serait suffisamment forte pour provoquer une évolution profonde des pratiques éducatives en mathématiques, de même que les technologies avaient modifié fondamentalement les pratiques des mathématiciens.

Effectivement, les travaux ont été très productifs, avec des développements théoriques, la conception de nouveaux environnements et la caractérisation de situations favorables ou non à l'apprentissage et l'enseignement d'une variété de notions mathématiques. Des approches théoriques nouvelles sont apparues, notamment en France, pour traiter des problèmes identifiés. Nous disposons d'une modélisation des connaissances mathématiques implémentable (Balacheff & Margolinas, 2005) qui articule la théorie des situations de Brousseau (1998) avec la théorie des champs conceptuels de Vergnaud, (1990) réalisée par la théorie cKç de Balacheff (1995). Nous pouvons traiter des contraintes institutionnelles introduites par la technologie dans une situation didactique, grâce à l'approche instrumentale de Rabardel (1995) intégrée dans les théories

¹ EIAH, proposition de Nicolas Balacheff pour nommer l'équipe de recherche du laboratoire Leibniz de l'Université Joseph Fourier à Grenoble dont il a été le responsable, qui a ensuite baptisé une conférence et désigne actuellement un domaine de recherche français.

didactiques par Guin et Trouche (1999) et Artigue (2002), en relation avec la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999). Les questions d'enseignement avec les technologies et d'intégration dans les pratiques complexes des enseignants ont rendu nécessaire un regard élargi sur les ressources des enseignants et la prise en compte des ressources « déjà là ». Ces ressources forment un système nourrissant et se nourrissant de l'activité des enseignants, système au sein duquel les nouveautés, qu'elles soient technologiques ou pas, peuvent être intégrées. Ce renouvellement du point de vue sur les technologies apporté par les ressources est travaillé par l'approche documentaire de Gueudet et Trouche (2008). Par ailleurs, de nombreux résultats ont été obtenus dans différents contextes : sur le calcul formel et l'analyse avec les calculatrices symboliques (Guin & Trouche, 2002) (Lagrange, 2010), la pensée algébrique (Grugeon et al., 2012) ou encore la géométrie (Laborde, 2000). Tous ces travaux ont mis en évidence le potentiel des technologies numériques pour faire apprendre les mathématiques, c'est-à-dire leur valeur épistémique justifiant, en complément de leur valeur pragmatique, leur utilisation en classe. Ces travaux ont aussi décrit les conditions permettant ces apprentissages. Mais finalement, la transformation profonde de l'enseignement des mathématiques à l'école n'a toujours pas eu lieu et la déclaration d'Artigue de 2010 reste vraie en 2017 : « *l'intégration technologique réussie à large échelle est encore un problème majeur, et cela semble être un phénomène général* »² (2010, p. 472).

La géométrie dynamique et le rôle qu'elle a eu pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie sont à ce titre exemplaires. La géométrie dynamique a été rendue très largement disponible au niveau mondial grâce à la conception et la diffusion de logiciels dès la fin des années 80, avec Cabri-géomètre en France (Baulac, Bellemain, & Laborde, 1988) et The Geometer's Sketchpad aux Etats-Unis (Jackiw, 1989) puis, plus tard, grâce à d'autres créations comme Cinderella, privilégiant la continuité des constructions au cours du déplacement au détriment de la réversibilité de l'action (Richter-Gebert & Kortenkamp, 1999). Elle a fait l'objet de nombreuses recherches au niveau mondial, mettant en évidence son intérêt pour l'apprentissage des notions géométriques, du raisonnement et de la démarche de preuve (Sinclair et al., 2016). Elle a été adoptée par des enseignants dans le monde entier, en particulier à la suite de la mise à disposition du gratuit GeoGebra. Elle a été intégrée en France dans les programmes et les manuels au secondaire dès la fin des années 90 et a même été utilisée dans un sujet du concours de recrutement des professeurs des écoles de 2006. Pourtant, 30 ans après son invention, bien que les usages soient très répandus, la géométrie dynamique n'a pas conduit à une modification généralisée des situations d'apprentissage des élèves et des pratiques des enseignants en géométrie (Assude, 2007) (Abboud Blanchard, 2013). Malgré la puissance épistémique de la géométrie dynamique associée à une puissance pragmatique citée par les enseignants – des constructions plus rapides, plus précises et en plus grand nombre – la géométrie dynamique n'a fondamentalement modifié ni le rapport des élèves à la géométrie et aux mathématiques ni les pratiques d'enseignement.

Quelles sont les raisons de la stabilité de ces rapports et de ces pratiques ? Ce n'est sans doute pas un problème d'équipement et de familiarité des utilisateurs avec les technologies en général : plus de 40 ans après l'apparition de l'informatique grand public,

² Conférence de clôture de l'étude ICMI d'Hanoi en décembre 2006, notre traduction de : « successful technological integration at large scale level is still a major problem, and this seems to be a general phenomenon » (Artigue, 2010, p. 472).

le niveau d'équipement personnel n'a jamais été aussi élevé : 80% des français possèdent un ordinateur et un accès à Internet, plus de la moitié un smartphone dont 81% des 12-17 ans (Brice et al., 2015). Les établissements scolaires en France sont équipés, au moins au niveau du secondaire, 59% des enseignants du secondaire disent avoir facilement accès à des ordinateurs pour leurs élèves et 78% utilisent les ressources numériques au moins une fois par semaine avec leur élèves (MEN DNE, 2016). Mais pour seulement 35% d'entre eux, cela implique la manipulation de la ressource numérique par les élèves. Par ailleurs, 35% des enseignants trouvent que les ressources pédagogiques numériques sont mal organisées ou peu pertinentes et 17% ont des doutes sur la pertinence de l'usage du numérique dans leur discipline.

Si les bons résultats obtenus lors des expérimentations ne se diffusent pas toujours au delà des groupes initiaux, il semble nécessaire d'étudier les choix des enseignants et les raisons de leur apparente résistance : que font-ils effectivement dans leur classe ? Ont-ils accès aux bonnes ressources ? Ont-ils les compétences pour les mettre en œuvre ? Un volet important de travaux sur les technologies concerne particulièrement les enseignants, leurs connaissances, le contexte institutionnel de leur exercice, leurs pratiques dans et en dehors de la classe, leurs ressources et leur développement professionnel, (pour un bilan en 2006, voir la section 3 de (Hoyles & Lagrange, 2010), plus récemment (Gueudet, Pepin, & Trouche, 2012)). Ces travaux ont permis d'identifier la complexité de la situation des enseignants. Il ne suffit pas de leur donner accès à une technologie, il faut aussi qu'ils sachent l'utiliser pour eux même et enfin, ce qui n'est pas la même chose, qu'ils sachent l'utiliser pour faire apprendre. A propos de la géométrie dynamique par exemple, l'étude des ressources mises à disposition des enseignants, non seulement les ressources de type « logiciel » mais également les ressources de type « figure dynamique », a mis en évidence que la conception des tâches est cruciale et qu'elle est loin d'être évidente (Laborde, 2001) (Sinclair, 2003). Le foisonnement de ressources relatives à la géométrie dynamique sur Internet ne facilite pas l'identification par les enseignants des ressources adéquates, c'est-à-dire utilisables effectivement avec l'environnement disponible en classe, acceptables d'un point de vue institutionnel et utiles pour atteindre l'objectif visé. Les enseignants ne semblent pas suffisamment aidés pour identifier les ressources les plus pertinentes et adaptées à leur besoin, malgré les sites et portails institutionnels dédiés. L'évaluation de la qualité des ressources de géométrie dynamique et la façon dont les enseignants pouvaient y avoir accès a été l'enjeu du projet européen Intergeo (Kortenkamp & Laborde, 2011). Or, l'accès aux ressources ne signifie pas appropriation par les enseignants et intégration dans les pratiques. Un accompagnement par des formations ou par d'autres dispositifs de développement professionnel est également nécessaire. Mais là encore, en 2017, la diffusion des pratiques issues de la recherche au delà du cercle d'enseignants directement impliqués n'est pas généralisée. Les programmes de formation de type formation hybride et accompagnement par les pairs, comme le programme Pairform@nce, n'ont pas réussi à s'étendre au delà des utilisateurs initiaux, enseignants, formateurs et concepteurs de formation (Gueudet, Sacristan, Soury-Lavergne, & Trouche, 2012) (Aldon et al., 2013).

Prendre en compte les ressources des enseignants amène à ne pas considérer la technologie de façon isolée mais comme faisant partie d'un ensemble plus complexe d'équipements, de logiciels, de situations d'utilisation et d'utilisateurs, pouvant chacun,

tour à tour ou de façon combinée, être une ressource pour apprendre et faire apprendre. L'enseignant ne doit donc pas seulement choisir une technologie à la place d'une autre, pour enseigner une notion, mais comparer, combiner et compléter les technologies et les ressources entre elles. C'est un système d'instruments, élaboré à partir d'une collection de ressources incluant les technologies, que l'enseignant doit orchestrer (Trouche, 2003) (Drijvers, Doorman, Boon, Reed, & Gravemeijer, 2010). La prise en compte de ce système complexe dans les problématiques relatives aux technologies s'avère nécessaire.

La situation décrite précédemment à propos de la géométrie dynamique repose sur des travaux majoritairement conduits sur le second degré³. Qu'en est-il pour les enseignants du premier degré ? Le constat d'une spécificité des technologies et des ressources pour les mathématiques du premier degré a été fait par le groupe ICME en août 2016, sans que cette spécificité ne soit encore clairement identifiée. La principale explication avancée serait l'insuffisance de la formation initiale en mathématiques des enseignants du premier degré. C'est un constat rapide et insuffisant pour imaginer les moyens de faire évoluer la situation. S'interroger sur l'intégration des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au niveau du primaire amène à reconsidérer sa place au sein d'un ensemble d'outils et de ressources, matériels et numériques, à disposition des enseignants pour concevoir des situations didactiques et les mettre en œuvre. Comment la technologie peut-elle intégrer les systèmes d'instruments des enseignants du premier degré ?

Une particularité du premier degré est d'accorder de l'importance aux ressources matérielles et aux objets tangibles⁴ pour l'apprentissage. Un champ assez récent de recherches concerne la manipulation, le rôle du corps et des gestes pour la conceptualisation mathématique, à la suite d'une plus ancienne tradition de recherche en pédagogie et en psychologie dans les traces de Maria Montessori (1958) ou Caleb Gattegno et Georges Cuisenaire (1962) par exemple. Les travaux sur la cognition incarnée⁵ ont montré que la conceptualisation mathématique est enracinée dans le corps et l'expérience corporelle de l'apprenant (Lakoff & Nunez, 2000) (Pinet & Gentaz, 2008) (Edwards, Radford, & Arzarello, 2009) (Artigue, Cazes, Haspekian, Khanfour-Armalé, & Lagrange, 2013). La séparation entre corps et pensée, entre action et activité intellectuelle n'est plus une grille de lecture pertinente pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, de la même façon qu'elle est remise en question dans d'autres domaines de l'activité humaine, tel que le travail (Crawford, 2010). A propos des technologies, dans les années 80, Papert mettait déjà l'accent sur l'enracinement corporel des connaissances et du raisonnement mathématique. Il utilisait cet argument pour montrer en quoi l'informatique fonctionnait de façon analogue en offrant un moyen de manipuler directement les représentations mathématiques (Papert, 1980). Avec l'arrivée des tablettes tactiles, la séparation entre manipulation d'objets et environnement numérisé s'atténue et renforce la nécessité d'examiner les apports

³ Le second degré en France comprend le collège et le lycée, soit 7 années de la 6^e à la terminale. Les élèves ont de 11 à 18 ans.

⁴ Je retiens l'adjectif tangible pour caractériser les objets et les phénomènes physiques dans le monde matériel et les distinguer des environnements informatiques et des technologies numériques. La raison est que cela correspond à un usage. Pourtant, « tangible » s'applique tout aussi bien aux représentations d'objets avec lesquelles interagissent les utilisateurs d'environnements informatiques, représentations qui ont les propriétés du tangible puisqu'il s'agit de phénomènes accessibles par les sens tels que la vision et le toucher pour les tablettes tactiles.

⁵ « Embodied cognition » (Lakoff & Nunez, 2000).

respectifs de la manipulation d'objets tangibles et de l'interaction avec un environnement numérique pour l'apprentissage.

L'association étroite d'outils tangibles et d'environnements informatiques, qui engagent de façon conjointe et complémentaire, le corps et la pensée dans l'activité mathématique, ouvre de nouvelles possibilités pour la conception de situations didactiques et renouvelle les problématiques de recherche. C'est dans cette perspective que ce mémoire se situe, en faisant le choix d'un système minimal qui combine les apports du tangible et du numérique au sein d'une situation didactique, appelé duo d'artefacts.

Notre hypothèse est que ce modèle simplifié doit permettre de comprendre la dynamique et les enjeux des systèmes complexes d'instruments dans les situations d'apprentissage, en particulier au niveau primaire (K-6). Il renouvelle les problématiques relatives à :

(i) la conception de systèmes d'instruments tangibles et numériques pour les situations d'apprentissage des mathématiques, (ii) l'apprentissage et la conceptualisation des mathématiques par les élèves résultant de leurs expériences dans le monde physique et dans le monde numérique, (iii) l'appropriation des technologies par les enseignants et l'intégration dans leurs pratiques, encore insuffisamment développée, en particulier en primaire.

La conceptualisation de la relation entre monde tangible et monde numérique pour apprendre et faire apprendre, au cœur de la problématique des duos d'artefacts, permet aussi de traiter les questions émergentes dans le domaine de la robotique et des objets connectés pour l'éducation, questions cruciales au moment où apparaissent les premiers dispositifs d'objets connectés, comme celui conçu et étudié dans le projet OCINAE (Soury-Lavergne, 2016). L'objectif de ce mémoire est d'examiner en quoi les duos d'artefacts offrent un cadre pertinent à moyen et long terme pour produire une recherche en phase avec les évolutions du monde et qui transforme les situations d'apprentissage sur le terrain.

Ce mémoire est organisé en trois parties.

La première partie présente les travaux relatifs à *la géométrie dynamique* qui constituent une référence sur les questions relatives aux technologies pour l'apprentissage et l'enseignement. La présentation n'est pas exhaustive. Elle reprend certains des travaux menés à Grenoble, dans l'équipe du projet Cabri-géomètre, sur les situations d'enseignement et d'apprentissage avec Cabri-*sgéomètre* en mettant en évidence les résultats obtenus et les méthodologies utilisées. Ils concernent en particulier les premiers usages de la géométrie dynamique au premier degré. Cette première partie termine avec les questions de formation des enseignants à l'utilisation de la géométrie dynamique et présente les problématiques en cours pour soutenir le développement professionnel des enseignants et l'intégration de la géométrie dynamique dans leurs pratiques.

La deuxième partie débute par un panorama de la façon dont a pu être pris en compte le rapport entre monde réel et monde numérique dans les travaux sur les EIAH. Il permet alors d'introduire *la proposition de duo d'artefacts* pour étudier les technologies à l'école

primaire. L'éclairage théorique apporté par l'approche instrumentale (Rabardel, 1995), la médiation sémiotique (M. G. Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) et la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) permet de caractériser les duos d'artefacts par rapport aux systèmes d'instruments et de formuler un ensemble de questions relatives à leur conception et à leur utilisation pour apprendre et faire apprendre. L'exemple que constitue le duo d'artefacts pascaline et e-pascaline pour l'apprentissage de la numération et du calcul montre en quoi une modélisation en terme de duo d'artefacts permet de problématiser et de traiter un large spectre de questions relatives à la conception, aux apprentissages des élèves et à l'appropriation des enseignants.

La troisième partie présente une première extension de la notion de duo d'artefacts à d'autres domaines mathématiques, notamment en géométrie. Les duos d'artefacts offrent également un modèle pour aborder les nouvelles questions que posent *les objets connectés et des dispositifs hybrides pour l'apprentissage*. Les questions relatives aux relations entre monde tangible et monde numérique pour l'apprentissage sont au cœur de ce domaine émergent dans la recherche sur les EIAH. Les duos d'artefacts permettent de problématiser un ensemble de questions sur la conception de ces nouveaux dispositifs de réalité mixte, les apprentissages qu'ils permettent et les conditions de leur intégration dans les pratiques des enseignants.

PARTIE 1.

POTENTIEL DE LA GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE POUR APPRENDRE ET FAIRE APPRENDRE ET DIFFICULTÉS D'INTÉGRATION DANS LES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS

Les recherches sur la géométrie dynamique constituent un ensemble important et assez représentatif des recherches sur les technologies pour les mathématiques. Ainsi, les questions posées, les cadres théoriques utilisés et les résultats obtenus à propos de la géométrie dynamique fournissent une référence pour caractériser les nouveaux problèmes que pourraient permettre de traiter les duos d'artefacts.

Par exemple, l'étude des situations de préceptorat distant relatives aux usages de la géométrie dynamique, c'est-à-dire un enseignant travaillant à distance avec un seul élève pour l'aider à résoudre des problèmes de géométrie (Soury-Lavergne, 1998) est une façon de traiter les situations d'enseignement des mathématiques avec les technologies à partir d'un système très particulier, un système simplifié, mais qui a du sens par rapport aux questions posées. Il est tout à fait intéressant de constater que la proposition de travailler avec des duos d'artefacts correspond également à une situation limite. Elle permet d'étudier l'articulation d'un ensemble d'artefacts numériques et tangibles constituant un possible système complexe d'instruments (Rabardel & Bourmaud, 2003), selon la distinction artefact-instrument de l'approche instrumentale (Rabardel, 1995) dans une situation didactique. Ces choix répondent tous deux à un besoin de simplification des situations complexes à l'étude, besoin nécessaire pour pouvoir les rendre intelligibles. Cependant, il y a un risque inhérent à ce type de méthodologie, celui d'étudier des situations non significatives ou de leur attribuer une signification erronée. C'est bien le travail du chercheur et de la communauté scientifique que de développer les critères permettant de contrôler la validité de la situation étudiée en regard de la situation de référence. La pertinence et la portée générale des résultats obtenus sont des critères utilisables pour valider le choix d'un système simplifié.

Pour la géométrie dynamique comme les autres EIAH, les résultats très positifs sur les apprentissages mis en évidence par les recherches n'ont pas été suivis d'une diffusion et d'une appropriation massive par le système scolaire. Les recherches ont alors pris en considération d'autres contraintes que l'utilité de la géométrie dynamique pour apprendre. Elles ont montré d'une part le rôle clef joué par certaines caractéristiques des tâches faisant intervenir la géométrie dynamique (Laborde, 2001) (Leung & Bolite-Frant, 2015). D'autre part, elles ont mis en évidence les processus d'instrumentation et d'instrumentalisation et montré qu'ils étaient critiques pour l'intégration dans les

pratiques existantes (Grugeon-Allys, 2008). La prise en compte de l'interdépendance entre l'usage de la géométrie dynamique et l'ensemble des activités de l'enseignant (Drijvers, 2012), notamment celles concernant les ressources, a montré que l'accompagnement de ces processus ne pouvait pas être pris en charge uniquement par la formation. C'est une double évolution des problématiques et du regard sur la géométrie dynamique qui a eu lieu. D'un côté, le regard est parti d'un EIAH pour s'élargir à l'EIAH au sein d'une collection de ressources et la constitution de cette collection en système d'instruments. D'autre part, les questions d'appropriation des EIAH et des ressources par les enseignants ont été abordées initialement par l'identification de besoins en formation, l'étude de ces formations et le constat des difficultés (Tapan, 2006). C'est en adoptant le point de vue des ressources, de leur rôle au sein des collectifs et de la continuité des processus de conception et d'usage, que de nouvelles façons d'aborder le problème de l'appropriation de la géométrie dynamique par les enseignants ont émergé. En particulier, les travaux sur la qualité des ressources de géométrie dynamique ont montré comment le développement professionnel des enseignants pouvait résulter de collectifs constitués pour analyser et faire évoluer la qualité des ressources.

Au point 1 de cette partie, je présente les travaux sur le préceptorat distant et les processus d'accompagnement de la résolution de problèmes avec la géométrie dynamique. Les résultats sont une modélisation du processus explicatif et de l'étayage dans la situation didactique, dans le cadre de la théorie des situations didactiques de Brousseau (Soury-Lavergne, 2001) (Soury-Lavergne, 2003). La méthodologie employée, la situation de préceptorat, et les outils d'analyses conçus pour comparer matériel et géométrie dynamique apportent un premier éclairage pour penser les duos d'artefacts.

Au point 2, je présente les résultats sur les apprentissages des élèves avec la géométrie dynamique (Restrepo, 2008) (Mithalal, 2010) (Soury-Lavergne, 2006) qui ont été obtenus en utilisant l'approche instrumentale (Rabardel, 1995). Ils permettent de situer certains des apports spécifiques de la géométrie dynamique aux situations d'apprentissage et d'identifier les difficultés des processus en jeu que doivent accompagner les enseignants. Cette partie aborde l'utilisation de la géométrie dynamique au premier degré, avec les premières problématisations de la mise en relation d'environnements matériels et numériques dans des situations didactiques.

Au point 3, j'aborde la question de l'intégration de la géométrie dynamique dans les pratiques des enseignants en commençant par la présentation des différences entre les tâches que les enseignants proposent et celles qui sont les plus pertinentes pour les apprentissages (Laborde, 2001) (Soury-Lavergne, 2011). Puis, la question de la formation des enseignants est développée en ne regardant plus uniquement la géométrie dynamique et les tâches proposées aux élèves, mais en prenant en compte les systèmes de ressources des enseignants dans lesquels elles s'insèrent. Le point de vue sur les collectifs de concepteurs et d'utilisateurs qui créent et utilisent ces ressources et sur les processus de conception et d'usage fait apparaître de nouveaux moyens pour soutenir l'appropriation et l'usage des technologies, dans le cadre des formations ou en dehors. La présentation du travail d'un collectif d'enseignants et de chercheurs, mobilisés sur les questions de mutualisation et de qualité des ressources de géométrie dynamique, est un exemple de tels collectifs contribuant au développement professionnel des enseignants impliqués (Trgalova, Soury-Lavergne, & Jahn, 2011) (Soury-Lavergne, Jahn, & Trgalova,

2011). Ces travaux mettent en évidence certains principes à suivre pour la conception et l'appropriation des duos d'artefacts. Leur élaboration par des collectifs d'utilisateurs, dont les enseignants, impliqués dès la conception du duo devra être recherchée.

1. GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE ET TRAVAIL DE L'ENSEIGNANT : ÉTAYAGE ET PROCESSUS EXPLICATIF

Les travaux menés pour mon doctorat ont eu pour objet les interventions de l'enseignant dans l'activité mathématique personnelle de l'élève. La théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) ne répondait que partiellement à la question initiale relative à ce que fait l'enseignant lorsqu'il veut aider un élève dans une résolution de problème. A l'époque, dans les années 90, il apparaissait clairement que l'enseignant ne pouvait pas ne rien faire. Les didacticiens observaient régulièrement, y compris dans les expérimentations très cadrées, que les enseignants intervenaient et modifiaient la situation des élèves. Mais la théorie des situations ne permettait pas de modéliser ces interventions de l'enseignant modifiant la situation a-didactique (Artigue, 1990, p. 296) : « on ne peut nier que, pour l'instant, dans la théorisation didactique, l'enseignant occupe une place marginale, et que faute de pouvoir être convenablement pris en compte, les phénomènes didactiques qui l'impliquent tendent à être perçus comme des bruits par rapport au fonctionnement dont l'étude est privilégiée : celle des relations élève/milieu à propos du savoir ». Les processus de dévolution et d'institutionnalisation, souvent dénommés phases pour indiquer qu'ils opèrent avant et après la situation potentiellement a-didactique, ont constitué une première intégration, dans la théorie, du rôle de l'enseignant et de son interaction avec les élèves (Brousseau, 1995). Mais les interventions de l'enseignant dans la situation, c'est-à-dire celles qui modifient le système élève-milieu, étaient décrites principalement, mais de façon incomplète et finalement assez négative, par la négociation du contrat didactique et les phénomènes didactiques, tels que l'effet Topaze (Brousseau, 1988).

En reprenant l'idée de négociation comme processus nécessaire dans l'interaction didactique enseignant-élève (Brousseau, 1988) (Sarrazy, 1995), il a été possible de redonner du sens aux interventions de l'enseignant auprès de l'élève qui consistent à l'aider mais qui peuvent aussi finalement s'avérer contre-productives pour l'apprentissage (Soury-Lavergne, 2003). J'ai cherché pourquoi ces interventions apparaissaient nécessaires et inévitables du point de vue des enseignants. En fait, l'objectif de ces interventions est d'abord de préserver la relation didactique. De plus, elles n'apparaissent pas comme forcément néfastes, du moins initialement. Ces interventions modifient la relation élève-milieu, donc la situation a-didactique. Mais en les caractérisant comme un élément d'un processus de négociation entre l'enseignant et l'élève, modifiant la relation élève-milieu donc le sens de la situation et de l'apprentissage, mais dont l'issue n'est pas automatiquement la perte de toute signification mathématique, ces interventions apparaissent légitimes, voire nécessaires. Il s'avère que l'enseignant peut intervenir, au moins initialement, sans pour autant remettre en cause toute la signification mathématique de la situation et l'apprentissage de l'élève. Le concept d'étayage (Bruner, 1983) a permis de caractériser ces interventions de l'enseignant qui ne dénaturent pas la signification de l'activité pour l'élève et d'expliquer

en quoi elles sont nécessaires. L'étayage s'insère dans un processus de négociation du sens mathématique de l'interaction élève-milieu. Il correspond à une première étape de ce processus. Un problème bien identifié par la théorie des situations est que ce type d'intervention peut parfois déboucher sur un effet Topaze. Mais ce qui est observé expérimentalement est qu'il y a tout un processus de négociation, dans lequel l'enseignant peut s'engager car l'issue n'est pas forcément négative et que, ce faisant, il préserve la relation didactique. Enfin, des apprentissages peuvent avoir lieu, y compris en cas d'effet Topaze.

En parallèle, un second processus, le processus explicatif, a été utilisé pour modéliser les interventions de l'enseignant auprès de l'élève. Alors que l'espace partagé à distance entre l'enseignant et l'élève était principalement la géométrie dynamique, les enseignants ont utilisé de façon récurrente des références aux constructions papier-crayon pour aider les élèves. L'analyse des interactions de préceptorat à la lumière d'un processus explicatif co-construit entre l'enseignant et l'élève, a donc rendu nécessaire la mise en relation de l'environnement numérique constitué par Cabri-géomètre avec l'environnement papier-crayon habituel pour la construction des figures géométriques. Il s'agit là d'une autre expérience expliquant l'émergence de la notion de duos d'artefacts pour traiter les situations d'apprentissage avec les technologies.

1.1. Etude de l'interaction enseignant-élève avec un système simplifié et une méthodologie alliant expérimentation de laboratoire et étude de terrain

La méthodologie élaborée pour étudier ces deux processus d'interaction enseignant-élève, étayage et explication, a été tout à fait originale de deux points de vue.

Tout d'abord, elle s'est appuyée à la fois sur un dispositif expérimental spécifique, relevant de l'expérimentation en laboratoire et simultanément sur une expérimentation en terrain réel. Le préceptorat distant est une construction intermédiaire entre la situation de terrain écologique et la situation de laboratoire. Le préceptorat distant permet de contrôler l'objet d'étude et relève donc d'une méthodologie de laboratoire. Il s'agit d'un dispositif qui isole les acteurs et qui permet de choisir certaines caractéristiques de la situation grâce aux contraintes qu'il fait peser sur l'interaction. En mettant en présence pour enseigner et apprendre un enseignant et un unique élève, j'ai isolé la paire enseignant-élève pour étudier les interventions de l'enseignant sur la relation élève-milieu et observer ses effets sur les apprentissages de l'élève. Avec deux acteurs devant un ordinateur, il était possible de recueillir les observables nécessaires. De plus, avec le préceptorat distant, j'ai pu contrôler les situations d'apprentissage et le milieu didactique en utilisant le micromonde Cabri-géomètre dont les caractéristiques en tant que constituant d'un milieu didactique pour l'apprentissage des mathématiques étaient bien établies (Laborde & Capponi, 1994), associé à une banque d'exercices constituée à partir des activités issues de deux manuels, Pythagore (Bonfond, Daviaud, & Revranche, 1992) et Cabri-classe présentant des activités et des problèmes spécifiques à la géométrie dynamique (Capponi & Laborde, 1994). Ainsi, le préceptorat distant a permis de reconstruire et d'observer la situation d'enseignement en contrôlant l'interaction élève-milieu et ses transformations dues aux interventions de l'enseignant.

Mais, par ailleurs, l'intégration de ce dispositif dans un établissement scolaire a assuré l'authenticité de la situation d'enseignement et d'apprentissage observée. Ce dispositif a été déployé, dans le cadre du projet Télécabri, au sein de la structure de « l'école à l'hôpital » du CHU Michallon de Grenoble, reconnue par le rectorat de Grenoble. Télécabri avait pour objet l'étude des usages et la spécification d'un environnement informatique d'enseignement à distance intégrant la téléprésence et le partage de l'espace d'apprentissage, notamment le micromonde Cabri-géomètre. L'implémentation du dispositif Télécabri à l'école à l'hôpital a donc permis d'observer des situations écologiques par le fait qu'il s'agissait d'une réelle institution d'enseignement au sein desquels patients et intervenants étaient bien en position d'élèves et d'enseignants.

L'autre originalité de la situation de préceptorat est qu'elle correspond à une situation d'enseignement limite qui a néanmoins permis d'étudier les interactions didactiques entre enseignant et élève. L'hypothèse est que le préceptorat appartient à un ensemble continu de situations d'interactions enseignant-élève et au final rend compte aussi de ce qui se joue en classe, au moment où un enseignant se penche précisément sur l'activité mathématique d'un élève et intervient pour l'aider. Pour les besoins de la recherche, le préceptorat distant a utilisé les technologies de communication qui émergeaient à l'époque. Cependant, l'interaction à distance n'a pas été problématisée en tant que telle. C'était une condition de réalisation de la situation et de son insertion dans le projet Télécabri. La distance a permis de rendre nécessaire l'usage de la technologie et en particulier de la géométrie dynamique dans la situation de préceptorat. Mais les résultats obtenus n'ont pas concerné la dimension « à distance » de la situation observée. En revanche, ils ont concerné l'aspect préceptorat et les modifications didactiques de la situation de l'élève. La situation de préceptorat distant est donc apparue comme une situation particulière par rapport à l'objet étudié, précisément l'interaction enseignant-élève, du point de vue du nombre d'élèves avec lesquels l'enseignant peut interagir. Et au final, ce choix méthodologique a permis d'obtenir des résultats sur les décisions de l'enseignant et sur les apprentissages des élèves qui sont pertinents au delà de la situation particulière étudiée.

1.2. Première tentative de mise en relation du tangible avec le numérique

Au delà des résultats obtenus qui concernent la pratique habituelle des enseignants, en particulier leur gestion de l'espace de travail Cabri-géomètre, l'étayage et l'effet Topaze ainsi que la caractérisation didactique du processus explicatif, ce qui est intéressant à retenir de ce travail dans la perspective des duos d'artefacts, c'est qu'il s'agit d'un outil méthodologique élaboré pour conduire l'analyse des interactions de préceptorat distant, en particulier en tant que processus explicatif. En effet, il a été nécessaire de décrire et mettre en relation les constructions géométriques réalisées avec des outils tangibles et les constructions avec la géométrie dynamique car les enseignants du secondaire, plus ou moins experts en géométrie dynamique, s'appuyaient sur leur connaissance de la géométrie papier-crayon pour interagir avec l'élève distant. L'analyse du préceptorat distant avec la géométrie dynamique a ainsi rendu nécessaire une mise en correspondance des artefacts tangibles et des artefacts numériques. Sans faire référence à l'approche instrumentale de Rabardel (1995) qui était diffusée quasiment au même

moment, c'est la compréhension de la relation entre action sur les objets tangibles ou numériques et les connaissances mobilisées pour la résolution d'un problème qui était recherchée.

La comparaison des mises en œuvre et des contrôles nécessaires pour réaliser une tâche de construction peut être décomposée en quatre niveaux (Soury-Lavergne, 1998) (2001) : heuristique, épistémologique, fonctionnel et perceptivo-gestuel. Par exemple, pour reporter une longueur dans la tâche de construction d'un carré étant donné un côté, le compas matériel ou le cercle de la géométrie dynamique peuvent être utilisés suivant l'environnement de résolution disponible (Figure 1).

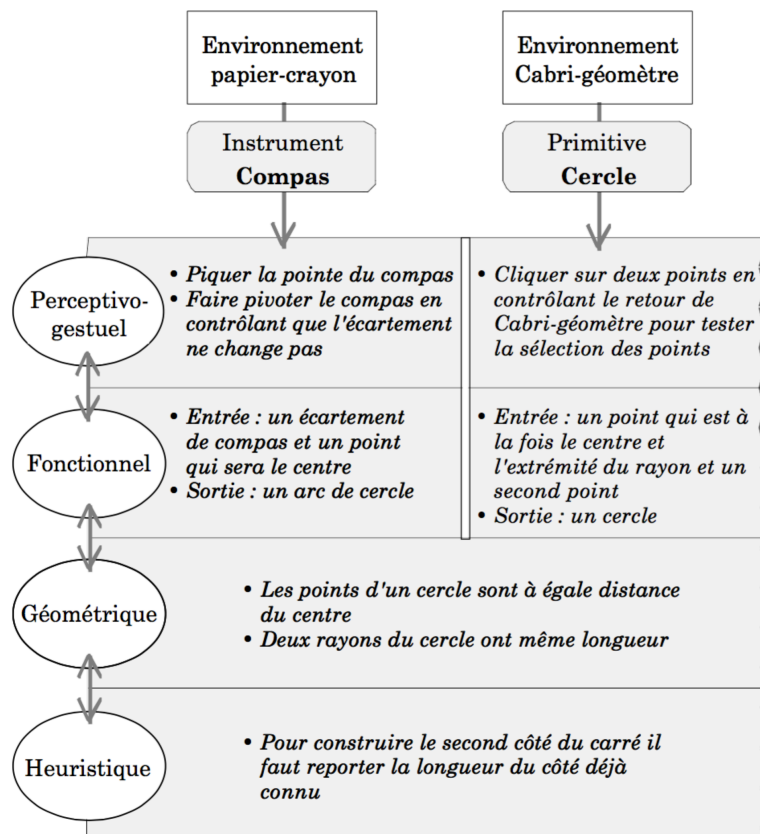


Figure 1. Quatre niveaux pour comparer les mises en œuvre et les contrôles mobilisés lors de l'usage d'un compas ou d'un cercle de la géométrie dynamique pour reporter une longueur (Soury-Lavergne, 1998, p. 262).

Le niveau « perceptivo-gestuel » au sens de Vergnaud (1994, p. 179), concerne la manipulation physique de la primitive de géométrie dynamique ou de l'outil matériel. Cette manipulation correspond à la maîtrise des gestes à réaliser pour sélectionner la primitive dans la barre de menu, contrôler le déplacement de la souris relativement à un effet recherché et cliquer au bon endroit et au bon moment, en particulier en attendant un retour de la part de Cabri-géomètre. Avec le compas, il s'agit de contrôler les gestes correspondant à l'ouverture du compas et au pivotement, de distinguer pointe et crayon, de conserver l'écartement et d'appuyer suffisamment sur la pointe pour produire une trace.

Le niveau fonctionnel correspond au contrôle des entrées et des sorties de la primitive de Cabri-géomètre ou du compas. Avec le compas, l'entrée est d'abord une distance (donnée par une longueur ou par deux points) puis un point, un arc de cercle est alors

produit en sortie. Avec la primitive cercle, selon le logiciel considéré, c'est par exemple un segment et un point qui doivent être fournis en entrée et la sortie est un cercle, l'ordre étant libre.

Le niveau épistémique est celui de la géométrie. L'utilisation de la primitive cercle ou d'un compas met en jeu des propriétés géométriques qui sont embarquées au niveau de Cabri-géomètre ou les propriétés mécaniques du compas. Le choix et l'utilisation d'une primitive ou du compas peuvent être contrôlés par les connaissances géométriques de l'utilisateur. C'est aussi l'exploitation par l'utilisateur de certaines propriétés géométriques de la construction obtenue qui permet de dire qu'il y a un contrôle géométrique de l'utilisation de la primitive ou de l'outil compas.

Le niveau heuristique est celui du problème à résoudre. Il correspond à la maîtrise heuristique de la primitive ou du compas, c'est-à-dire au contrôle de son utilité pour résoudre le problème mathématique posé. L'élève doit maîtriser la correspondance entre le problème qu'il doit résoudre et la figure qu'il est en train de construire, la figure construite est-elle un bon modèle du problème à résoudre ?

Cet outil d'analyse a permis de décrire les résolutions de problème des élèves avec la géométrie dynamique, les difficultés qu'ils rencontraient et les processus explicatifs co-construits avec les enseignants. Il témoigne d'un effort de mise en relation de l'action observable, des contrôles sur cette action et des connaissances mathématiques engagées dans une tâche, d'une façon qui soit applicable aux deux types d'environnements. Une des limites de ce modèle est d'avoir considéré que la connaissance était réduite à un niveau parmi les quatre, le niveau géométrique. A la lumière des travaux plus actuels, c'est bien l'ensemble des contrôles et des actions des quatre niveaux qui sont nécessaires pour caractériser les connaissances mises en œuvre par un sujet.

2. LA GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE POUR APPRENDRE LA GÉOMÉTRIE

L'approche instrumentale proposée par Rabardel (1995) (1999) a répondu au besoin ressenti dans les travaux précédents de décrire le fonctionnement des outils, tangibles ou numériques, et leur rapport aux connaissances mathématiques mobilisées dans les résolutions de problème. L'outil méthodologique d'analyse en quatre niveaux a été avantageusement remplacé par une modélisation en terme de genèses instrumentales et de processus d'instrumentation et d'instrumentalisation pour étudier l'apprentissage de la géométrie avec la géométrie dynamique. A partir du moment où l'approche instrumentale a été disponible, elle a permis de considérer les différentes fonctionnalités de Cabri-géomètre comme des artefacts et d'analyser leur mise en œuvre et leur contrôle en terme de genèse instrumentale. L'étude du déplacement, fonctionnalité centrale de la géométrie dynamique (Kortenkamp, 1999), a été initiée par les travaux de Hölzl (1996) puis continuée en Italie et au Royaume-Uni (Arzarello, Olivero, Paola, & Robutti, 2002) (Olivero, 2002), et s'est donc poursuivie en France. L'approche instrumentale a amené à distinguer différents instruments « déplacement » à partir du même artefact et à permis d'étudier l'interaction entre les genèses instrumentales du déplacement (Restrepo, 2008) et le développement d'autres raisonnements géométriques, notamment le raisonnement déductif (Soury-Lavergne, 2006) (2007) (Mithalal, 2010).

2.1. Genèse instrumentale du déplacement

Le déplacement est la fonctionnalité clé de la géométrie dynamique qui permet d'une part l'exploration des figures et d'autre part l'obtention de rétroactions, deux fonctions qui font des environnements de géométrie dynamique des espaces d'expérimentation mathématique. Le déplacement apparaît comme une fonctionnalité centrale de ces logiciels et pour bénéficier des potentialités de ces logiciels, il faut « faire bouger » les figures.

Or, le déplacement n'est pas d'emblée mobilisé par les élèves. En effet, les premiers travaux sur l'utilisation de Cabri-géomètre avec des élèves faisaient mention d'un contrat Cabri qui consiste à faire bouger les figures quand on travaille avec le logiciel. Mais bien que cette règle du jeu soit rendue explicite, Capponi souligne qu'elle n'est pas systématiquement mise en œuvre par les élèves : « *Seulement certains aspects qui peuvent sembler immédiats pour un professeur, comme le rôle du déplacement dans la validation, ne sont pris en compte que très progressivement par les élèves.* » (Capponi & Laborde, 1994, p. 12). Ainsi, cette règle du jeu ne s'instaure pas facilement et c'est la responsabilité de l'enseignant que de rappeler régulièrement aux élèves de bouger les éléments de la figure.

Cependant, une fois que les élèves acceptent de déplacer la figure, subsistent encore de nombreuses difficultés (Soury-Lavergne, 2006). Premièrement, les déplacements sont fortement limités. Les élèves bougent les points en les maintenant à proximité de leur position initiale et les replacent immédiatement dans cette position. Par ailleurs, ils ne déplacent pas tous les points possibles. Ils peuvent ainsi bouger la figure sans produire d'effet significatif. Deuxièmement, lorsque le déplacement produit un effet, les élèves n'analysent pas forcément les phénomènes observés d'un point de vue géométrique. Ils peuvent en rester au simple constat du fait que "ça bouge" ou alors avoir une interprétation spatio-graphique des phénomènes : "ça monte", "la figure s'agrandit, s'aplatit"... Nous avons pu montrer les différences d'interprétation d'un même observable entre l'élève et l'enseignant interagissant à propos d'une figure Cabri : l'élève perçoit des relations spatiales et mécaniques alors que l'enseignant, de par ses connaissances mathématiques, lit directement les relations géométriques entre les objets construits (Balacheff & Soury-Lavergne, 1996) (Soury-Lavergne, 2001). Enfin, même lorsque les élèves analysent la figure d'un point de vue géométrique, ils peuvent avoir du mal à identifier correctement la conservation ou la perte d'une propriété géométrique (par exemple le parallélisme de deux segments ou la perpendicularité ne sont pas reconnus pour certaines configurations spatiales des segments).

2.1.1. Différents instruments « déplacement »

Ces constats ont amené à concevoir le déplacement non pas comme une fonctionnalité évidente de la géométrie dynamique, mais comme un instrument, au sens de Rabardel, pour faire des mathématiques. Cet instrument doit être construit par les élèves au cours de leur interaction avec le logiciel. A partir d'un recensement des différentes tâches utilisées dans les recherches sur la géométrie dynamique et du rôle qu'y joue le déplacement, Restrepo (2008) a décrit différents déplacements et proposé une classification plus générale que celle d'Arzarello et al. (op.cit) en prenant en compte d'autres finalités mathématiques que la preuve. La classification des déplacements a été

obtenue à partir d'une étude *a priori* des différentes tâches réalisées en différenciant puis en croisant les finalités des tâches premières, c'est-à-dire les finalités et contraintes mathématiques, avec les finalités des tâches secondes, c'est-à-dire les finalités et contraintes de l'artefact.

Du côté des tâches secondes et de l'artefact, Restrepo (2008, pp. 42-44) distingue le déplacement libre (point libre partout dans l'écran), le déplacement contraint (point sur objet) et le déplacement indirect (pour les points d'intersection, non attrapables mais qui peuvent se déplacer dans l'écran par l'intermédiaire du déplacement d'un autre objet), qui peuvent être couplés à la distinction opérée par Olivero (*op. cit.*) entre un déplacement discret et un déplacement continu.

Du côté des tâches premières et de la finalité mathématique, Restrepo distingue : le déplacement pour ajuster, le déplacement mou ou guidé, les déplacements exploratoires (pour identifier des invariants, pour constater des variations, pour trouver la trajectoire d'un point) et les déplacements pour valider ou invalider (une construction ou une conjecture), auxquels il faut ajouter le déplacement sans finalité mathématique.

2.1.2. *Genèse instrumentale du déplacement chez les élèves de sixième*

Les expérimentations conduites au début du collège ont permis de confronter ce modèle à la réalité des genèses instrumentales observées chez des élèves de sixième de collège. Quinze situations ont été conçues ou choisies parmi des situations utilisées par la recherche pour provoquer et favoriser la genèse instrumentale du déplacement et observer quels instruments pouvaient être effectivement construits par les élèves. Sur la base des observations réalisées, différents schèmes et invariants opératoires ont pu être inférés. Le principal résultat (obtenu à partir de l'analyse détaillée des productions de dix élèves issus de deux classes) est qu'il existe un ordre dans les différents instruments déplacements élaborés au cours d'une genèse instrumentale et que tous les instruments ne peuvent pas être construits par tous les élèves au cours d'une année de travail.

Le déplacement pour ajuster est le premier déplacement généré par l'utilisation de la géométrie dynamique. Il apparaît chez tous les élèves et, pour la plupart des élèves, très tôt dans la genèse instrumentale. Le déplacement pour invalider une construction et le déplacement pour trouver la trajectoire d'un point sont aussi construits par tous les élèves de la classe (sauf un élève pour la trajectoire). En revanche, la validation des constructions par le déplacement n'est prise en charge que de manière partielle. En fait, il ne fonctionne que lorsqu'il aboutit à une invalidation. Quant au déplacement pour identifier les invariants d'une figure, il n'est construit que par quelques élèves. Il repose sur l'identification spatiale des propriétés qui ne sont pas toujours disponibles chez tous les élèves. Par ailleurs, au début du processus, le schème d'usage de déplacement d'un objet n'est mobilisé par les élèves que pour des objets de dimension supérieure ou égale à 1, les segments, les cercles, les triangles par exemple. Ce schème n'est étendu aux points de la figure qu'au fur et à mesure du travail. Or de nombreuses constructions et propriétés ne peuvent être invalidées que par le déplacement d'un point et pas par le déplacement d'un segment par exemple. Les élèves ne peuvent donc pas valider ou invalider leur construction par déplacement tant qu'ils ne considèrent pas les points comme des objets déplaçables. Or la déconstruction dimensionnelle des figures est une caractéristique du raisonnement géométrique (Duval, 2005). Ainsi, ce travail montre que l'utilisation du déplacement de la géométrie dynamique pour valider ou invalider une

construction ou une conjecture est caractéristique non seulement de connaissances dans l'utilisation de la géométrie dynamique mais aussi d'une entrée dans le raisonnement géométrique.

Autre conclusion, l'utilisation de la géométrie dynamique pour valider et invalider une construction ou pour identifier les invariants géométriques d'une figure n'est pas disponible initialement chez les élèves de collège. Or, il s'agit d'un des principaux arguments en faveur de l'utilisation de la géométrie dynamique dans l'enseignement.

2.2. Genèse instrumentale et raisonnement déductif au collège et au lycée

Avec les travaux précédents, il est donc apparu clairement que le déplacement n'allait pas de soi dans le travail mathématique des élèves. En particulier, son utilisation pour valider ou invalider une conjecture, donc son instrumentation pour les démarches de preuve n'est pas accessible aux élèves sans apprentissage. Nous avons donc cherché à construire des situations d'utilisation de la géométrie dynamique pour l'introduction des démarches de preuve et l'initiation au raisonnement déductif, en partant de deux principes différents au collège (Soury-Lavergne, 2007) et au lycée (Mithalal, 2010).

Pour l'initiation au raisonnement déductif au début du collège, nous sommes partis de l'hypothèse largement partagée selon laquelle la géométrie dynamique permet de différencier les propriétés d'un dessin de celle de la figure, car seules les deuxièmes sont conservées au cours du déplacement (Laborde & Capponi, 1994). Nous avons aussi utilisé la distinction entre les propriétés données (hypothèses) et les propriétés déduites (conclusions). Cette seconde distinction est rendue explicite par la géométrie dynamique car les données correspondent aux primitives utilisées pour construire la figure et pas les propriétés déduites. A partir de cette double distinction des propriétés, nous avons construit une situation didactique dont l'objectif était d'amener les élèves à constater que certaines propriétés de la figure n'apparaissent pas dans l'énoncé de construction alors qu'elles sont pourtant bien conservées au cours du déplacement et à se questionner à ce propos. Une telle question, si elle émerge chez les élèves, justifie l'introduction par l'enseignant d'un premier pas de démonstration. Dans ce cas, l'introduction de la nécessité d'une déduction ne repose pas sur une mise en défaut de la perception ou l'existence d'une incertitude liée à la figure, argument souvent utilisé par les enseignants pour introduire la démonstration. Elle répond à une question authentique des élèves. Pour fonctionner et aboutir à cette question, la situation nécessite la construction de plusieurs instruments déplacement par les élèves : déplacer pour identifier une propriété qui se conserve, pour constater sa disparition, pour élaborer une conjecture ou valider/invalider une construction. Cela passe par une discussion explicite des objets qui doivent être déplacés, en particulier des points, et des propriétés qui doivent être observées au cours du déplacement.

L'expérimentation de cette situation a été conduite trois années de suite, auprès des classes de sixième d'une même enseignante, six classes au total. Elle s'est déroulée sur une dizaine de séances, incluant une séance d'évaluation. Nous avons constaté que les connaissances géométriques des élèves se sont développées au fur et à mesure de leur instrumentation de la géométrie dynamique et notamment du déplacement. Mais le

problème d'instrumentation, qui se pose aux élèves, est encore plus complexe pour l'enseignant. Comme explicité par Artigue (2002), l'enseignant doit connaître la géométrie dynamique pour résoudre des problèmes mathématiques, ce qui est relativement aisé pour les enseignants du secondaire grâce à leurs connaissances mathématiques. Mais ils doivent aussi savoir organiser les conditions pour l'apprentissage avec la géométrie dynamique. Ce second processus en revanche n'est pas évident (Tapan, 2006). C'est le processus que nous avons accompagné chez l'enseignante dans le cadre de cette expérimentation, sans qu'il soit pris explicitement en charge dans la recherche.

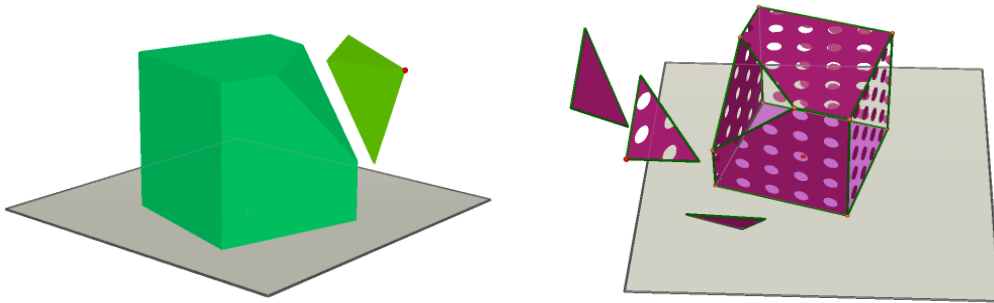


Figure 2. Reconstruction du sommet manquant du cube, sans déconstruction dimensionnelle avec un tétraèdre (à gauche) et avec une déconstruction dimensionnelle 3D/2D par les faces triangulaires (à droite).

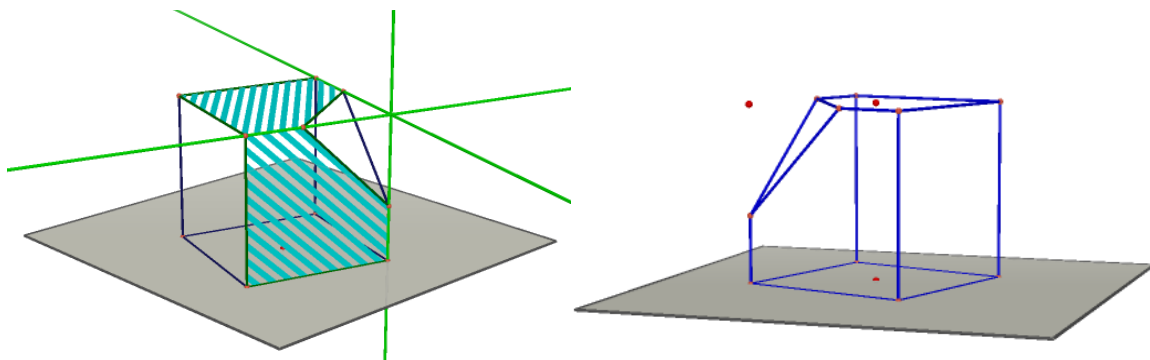


Figure 3. Différentes déconstructions dimensionnelles pour la reconstruction du sommet manquant du cube : par prolongement des arêtes (déconstruction dimensionnelle 3D/1D à gauche) et par construction du point sommet comme symétrique d'un sommet existant (déconstruction dimensionnelle 3D/0D à droite).

Le travail de Mithalal (2010) a aussi consisté à utiliser la géométrie dynamique, en particulier la géométrie dans l'espace pour faire apparaître la nécessité d'une preuve. Il est parti du constat que la perception et la vision iconique des figures étaient très rapidement déstabilisées au cours de la manipulation d'objets géométriques dans un environnement de géométrie dynamique 3D dont l'interface est à deux dimensions. Au contraire de la géométrie plane, pour laquelle la perception est très opérationnelle et permet un bon contrôle des objets et des constructions, en géométrie 3D, il est quasiment impossible d'ajuster la position d'un objet. La géométrie dynamique 3D fournit alors un environnement de travail dans lequel l'évidence visuelle est déstabilisée et rend nécessaire l'évolution vers des contrôles théoriques. Néanmoins, l'environnement de géométrie dynamique Cabri3D permet de manipuler et de construire des représentations et d'obtenir des rétroactions visuelles très riches, d'une façon impossible à réaliser dans l'environnement papier-crayon. De ce point de vue, la situation est très différente de la géométrie plane. Il a donc été possible de concevoir des situations didactiques dans

lesquelles une première problématique pratique de manipulation, de construction et d'exploration de dessins d'objets 3D est possible tout en rendant rapidement nécessaire l'adoption d'un point de vue plus théorique sur les objets et leurs propriétés. En exhibant une telle situation, « le cube tronqué » (Figure 2 et Figure 3), et en l'analysant avec le modèle cK ϕ (Balacheff & Margolinas, 2005), Mithalal a montré que la géométrie dynamique 3D constitue un milieu pour l'évolution vers une géométrie de type GII (Houdement & Kuzniak, 2006), caractérisée par la déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005).

L'autre résultat de ce travail est que la déconstruction instrumentale nécessaire pour la résolution de problème avec la géométrie dynamique 3D est un facteur clef de l'évolution de l'activité géométrique des élèves d'une visualisation iconique à une visualisation non iconique, caractérisée par la déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005). L'environnement de géométrie 3D crée un milieu pour lequel les deux types de visualisation sont opératoires, contrairement aux représentations papier-crayon d'objets 3D qui sont souvent difficiles à construire et à manipuler sans connaissances théoriques. De plus, la géométrie 3D nécessite une déconstruction instrumentale qui ne cherche pas à contrôler uniquement la reproduction d'une forme mais aussi à contrôler les relations géométriques entre les entités, statiquement et dynamiquement.

En conclusion, d'après ces travaux au collège et au lycée, la géométrie dynamique apparaît comme un moyen de concevoir des situations pour lesquelles les connaissances géométriques des élèves se développent à mesure que se développe leur utilisation de l'environnement, les deux processus d'apprentissage étant intimement liés. En conséquence, s'il n'y a pas de prérequis en terme de connaissances géométriques pour pouvoir l'utiliser, cela permet d'envisager son usage dès l'école primaire pour les premiers apprentissages.

2.3. Premiers apprentissages avec la géométrie dynamique

L'ERTe MAGI – Mieux Apprendre la Géométrie avec l'Informatique – a démarré en 2003 pour étudier les intérêts et les possibilités de la géométrie dynamique dès l'école élémentaire. Les travaux menés par une équipe nationale, pilotée à Grenoble, ont eu pour objectif de concevoir et d'analyser des situations possibles pour tous les niveaux de l'école élémentaire jusqu'au début du collège, mais aussi d'étudier l'intégration de la technologie dans les pratiques des enseignants (Laborde, 2004) (Assude, Grugeon, Laborde, & Soury-Lavergne, 2006) (Soury-Lavergne, 2014a).

Au premier degré, les connaissances en jeu dans l'apprentissage de la géométrie renvoient à deux champs de connaissances, l'un théorique celui de la géométrie et l'autre fondé sur l'interaction du sujet avec l'environnement sensible, celui des connaissances spatiales (Berthelot & Salin, 1993). La caractérisation de la géométrie comme ensemble d'objets et de relations théoriques, que l'on manipule à travers des énoncés de langage et des dessins permet de la distinguer du champs des connaissances et des problèmes spatiaux qui engagent la position du corps et concernent les relations topologiques, les rapports de voisinage et d'ordre, disponibles plus tôt chez l'enfant (Sauvy & Sauvy, 1972).

L'enjeu est donc d'amener les élèves à la géométrie à partir de leurs connaissances spatiales, sans toutefois négliger le développement des connaissances spatiales elles-

mêmes. La géométrie dynamique sollicite les deux référents, le spatial et le géométrique. Elle permet d'expliciter les propriétés théoriques sous forme d'invariants spatiaux avec le déplacement (Laborde & Capponi, 1994). Elle articule une appréhension globale, celle nécessaire au registre des dessins, fondée sur des contrôles perceptifs, avec une appréhension plus linéaire et analytique au cours des processus de construction de figure, analogue à celle nécessaire au registre discursif des énoncés contrôlés par les connaissances géométriques (Duval, 2005). Un autre intérêt de la géométrie dynamique au premier degré, en plus de la validation par déplacement, résulte du fait que l'on peut élaborer des situations dans lesquelles la connaissance géométrique fonctionne comme un outil de résolution de problème (Douady, 1986), y compris les problèmes spatiaux.

Plusieurs problématiques ont donc été traitées au moment de l'introduction de la géométrie dynamique au primaire. D'abord, la conception de scénarios pour la classe, dédiés aux apprentissages des notions de l'école primaire. Ensuite, les processus d'instrumentation de la géométrie dynamique avec des élèves ayant *a priori* peu de connaissances géométriques. Enfin, les questions relatives à l'enseignement, à l'insertion des situations dans les progressions des enseignants et à la conception de ressources appropriables par les enseignants du primaire.

2.3.1. Constructions robustes et boîtes noires

Comme pour les usages de la géométrie dynamique au secondaire, la distinction entre construction robuste et construction molle (Healy, 2000) (Laborde, 2005) s'est avérée très utile pour le premier degré. La recherche de constructions robustes par déplacement a été un des points de départ pour la conception de situations. Les scénarios ont utilisé de nombreuses constructions géométriques contextualisées dans un cadre non mathématique, permettant aux élèves d'anticiper les formes et de mobiliser des références spatiales. Une autre caractéristique des tâches proposées aux élèves était de démarrer avec une figure partiellement construite, dont les élèves pouvaient anticiper l'état final.

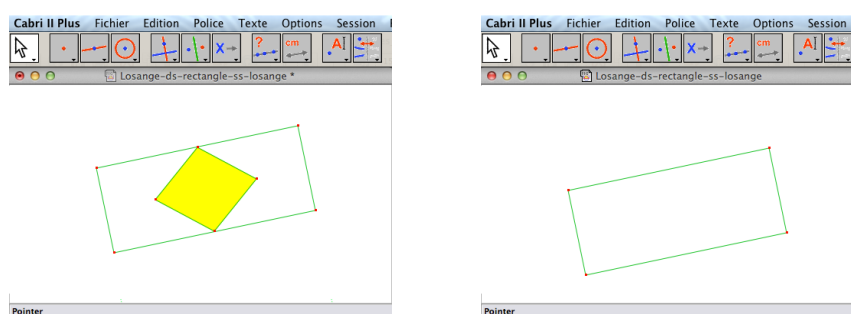


Figure 4. Une tâche de type boîte noire dans Cabri-géomètre. A gauche, la figure à reproduire que l'élève peut explorer mais dont il ne connaît pas l'historique de construction. A droite, un état partiel de la figure que l'élève doit terminer, conformément au modèle (objets géométriques et comportements dynamiques).

La technologie a aussi permis de proposer de nouvelles tâches, dont la résolution engage les connaissances géométriques d'une façon qui ne serait pas possible sans elle (Laborde, 2001). Par exemple, les tâches appelées « boîte noire » sont des tâches de reproduction de figures dans lesquelles la figure dynamique attendue, en version informatisée, est directement donnée à l'élève, sans toutefois permettre l'accès aux parties cachées ou à

l'historique de la construction. La figure à reproduire n'est donc pas fournie à l'élève à partir d'une description verbale ou d'un schéma statique. Cependant, même avec la figure disponible et la possibilité de déplacer les objets qui la constitue, la reproduction n'est pas simple et le travail mathématique reste à faire. Car ce n'est pas seulement la forme graphique de la figure que l'élève doit reproduire, mais aussi son comportement dynamique. Pour y arriver, une identification des propriétés géométriques de la figure est nécessaire. La tâche nécessite de passer d'une analyse des propriétés spatiales et graphiques de la figure à une analyse en termes géométriques. Elle requiert également de déplacer les points de la figure initiale pour l'explorer et ceux de la figure reproduite pour valider ou non le processus de construction.

Dans l'exemple proposé en Figure 4 qui n'est pas une situation issue de MAGI mais a été conçue et expérimentée dans une classe de CM1-CM2 à Soleymieux dans la Loire et diffusée par l'IREM de Lyon, la tâche consiste à reconstruire le quadrilatère intérieur à partir du rectangle initial (Figure 4, à droite), après avoir analysé la figure modèle (Figure 4, à gauche). Dans une boîte noire, la reconstruction de la figure peut démarrer d'une page blanche, ou bien d'un début de construction. Lors de la résolution du problème, le déplacement joue deux rôles différents. Il permet d'abord d'explorer la figure donnée en modèle (au sens de modèle à reproduire, le modèle du peintre), puis de valider ou invalider la reconstruction (d'autres exemples de boîtes noires sont présentés dans (Charrière, 1995) (Clerc, 2006)).

2.3.2. Difficultés et solutions pour la genèse instrumentale du déplacement au premier degré

Dans les situations précédentes, le déplacement apparaît comme une fonctionnalité centrale de la géométrie dynamique au premier degré. Les difficultés rencontrées au niveau du second degré (Soury-Lavergne, 2006) (Restrepo, 2007) (§2.1, page 16), ont été retrouvées dans le premier degré, en particulier la difficulté des élèves à déplacer les points des figures plus que les autres éléments, révélatrice de la non-conceptualisation des points géométriques à ce niveau scolaire (Soury-Lavergne, 2014a) (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015a). Ces constats ont amené les participants au projet MAGI à développer deux stratégies complémentaires pour améliorer l'utilisation du déplacement par les élèves : proposer des situations contextualisées qui incitent au déplacement et concevoir une fonctionnalité spécifique dans le logiciel pour déplacer les points de la figure.

Utiliser un contexte qui incite au déplacement

Replacer la construction géométrique dans un contexte non-mathématique qui évoque un déplacement est un moyen d'inciter les élèves à bouger la figure et à obtenir des rétroactions indépendamment de l'enseignant. Dans l'exemple du « Pajerond »⁶ (Figure 5, (Restrepo, 2008, p. 60)), la voiture doit rouler. Le problème se comprend aisément par les élèves : il s'agit de construire la roue manquante de la voiture. De même, il est évident pour les élèves d'utiliser un cercle pour construire cette roue. De nombreuses stratégies sont alors possibles (Soury-Lavergne & Maschietto, 2012).

⁶ Situation MAGI présentée par C. Fini, lors du congrès Cabri-world à Rome en 2004 et utilisée au premier et au second degré.

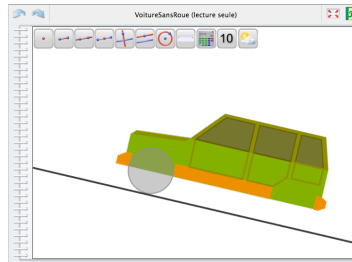


Figure 5. La figure proposée renvoie à un contexte non mathématique qui implique du déplacement. Cela favorise le fait que les élèves valident ou invalident leur construction de la roue manquante en faisant bouger la voiture.

La stratégie du « garagiste » consiste à construire un cercle n'importe où dans l'écran (prendre une roue dans la réserve) et à le poser au bon endroit (monter la roue), en ajustant le diamètre si nécessaire (gonfler la roue), ou bien construire le cercle directement au bon endroit en ajustant visuellement son centre et prenant comme point de la circonférence l'extrémité de la carrosserie. Une stratégie gagnante est de construire le milieu des deux extrémités de la carrosserie et d'utiliser ce milieu comme centre du cercle. Toutes ces stratégies permettent d'obtenir une figure statique satisfaisante (Figure 6 à gauche). Cependant, la métaphore de la voiture qui roule incite les élèves à déplacer les objets de la construction et donc à obtenir des rétroactions. Selon les constructions, la voiture perd sa roue (Figure 6 au milieu) ou la roue change de taille (Figure 6 à droite). Ce sont ces rétroactions qui invalident les stratégies inadaptées et qui provoquent une évolution vers la solution.

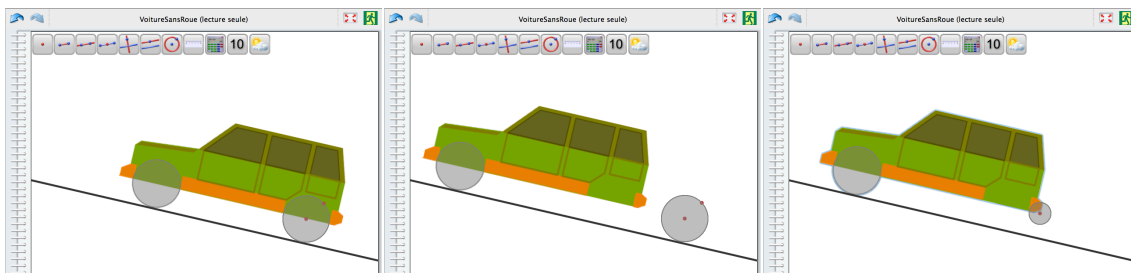


Figure 6. A gauche, construction perceptive de la roue manquante, stratégie du garagiste. Au milieu et à droite, rétroactions obtenues lors du déplacement de la voiture.

La connaissance mathématique en jeu n'est pas le cercle, qui est mobilisé très facilement comme modèle d'une roue. Plus précisément, le problème posé par la voiture sans roue est celui de la construction d'un cercle étant donné son diamètre. La connaissance géométrique visée est que le point milieu d'un diamètre est le centre du cercle. Plus précisément encore, il s'agit de convertir une information spatiale disponible chez tous les élèves (l'endroit où doit se situer le centre) en une construction géométrique (milieu de deux points). Cette connaissance fonctionne comme un outil de résolution du problème dans la situation proposée.

D'autres situations conçues dans le cadre du projet MAGI reposent sur cette idée de plonger un problème mathématique dans un contexte non mathématique impliquant un déplacement. Dans de nombreux cas, il s'est avéré nécessaire de créer un point particulier pour déplacer la figure, afin de produire les rétroactions les plus significatives. C'est le point « tempête » de la situation du « Bateau sans mat » ou le point « leader » de la situation « Patrouille » (Figure 7). En bougeant le point « tempête », le bateau tangue et

les mats construits au jugé ne bougent pas de la façon attendue par les élèves. De même, en déplaçant le point « leader », les alignements des avions ne sont plus respectés s'ils ont été faits au jugé.

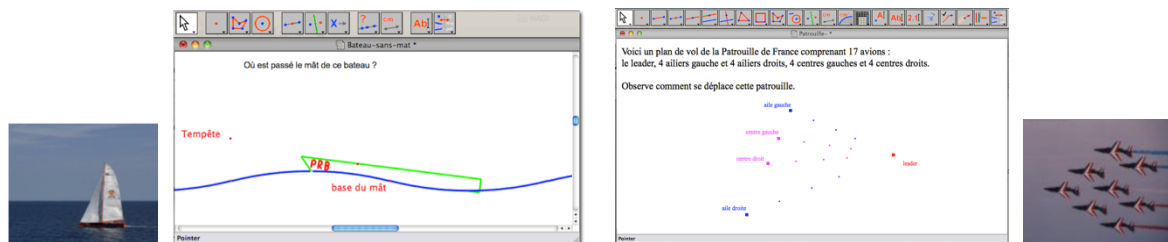


Figure 7. Les situations « Bateau sans mat » ou « Patrouille » renvoient à un contexte non mathématique impliquant un déplacement (celui d'un bateau sur l'eau ou des avions de la patrouille de France).

Des outils spécifiques pour déplacer les points d'une figure

La mise en évidence, dans une figure, d'un point-poignée destiné à être manipulé par l'élève pour valider ou invalider sa construction par déplacement a fait émerger l'idée d'un outil spécifique dans l'environnement dont la fonctionnalité serait justement de déplacer les points de la figure, d'une façon automatique et indépendante de l'utilisateur. Ainsi le « lutin » a été développé dans le cadre du projet MAGI pour Cabri 2+ (il n'a pas été introduit dans la version du logiciel actuellement diffusée). De façon analogue, le « Monkey » a été créé dans le logiciel CaRMetal (Y. Martin, 2010). Le bouton « Monkey », lorsqu'il est maintenu appuyé, secoue la figure. Lorsqu'il est relâché, les points retrouvent leur position initiale (Figure 8). Cela permet aux élèves d'observer la perte de certaines propriétés géométriques au cours du mouvement. Cependant, il peut être difficile de percevoir ces propriétés au cours du mouvement.

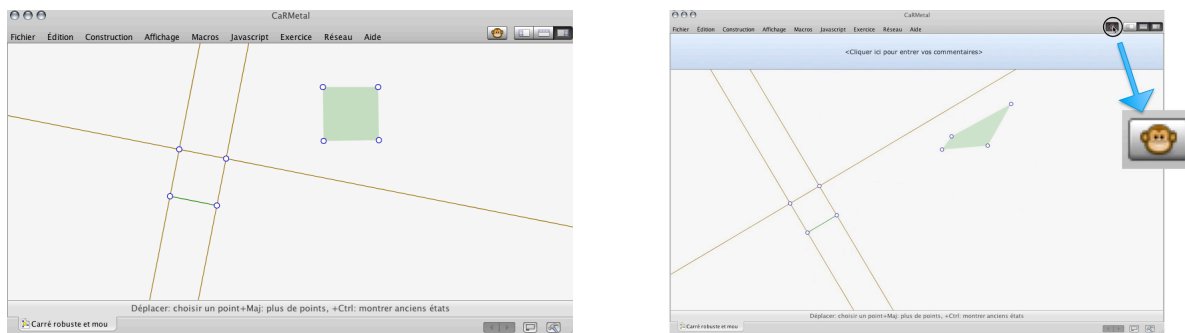


Figure 8. Interface du logiciel de géométrie dynamique CaRMetal avec le bouton « Monkey », en haut à droite, qui agite les points de la figure.

Si des solutions ont été identifiées pour inciter les élèves à déplacer les objets des figures construites, il est néanmoins à la charge de l'enseignant de mettre en place de façon explicite avec les élèves le recours au déplacement pour valider les constructions réalisées.

2.3.3. Premières situations didactiques combinant géométrie dynamique et matériel tangible

Un autre aspect du travail mené sur les usages de la géométrie dynamique à l'école primaire dans le cadre de l'ERTe MAGI a concerné l'articulation entre la géométrie

dynamique et les autres environnements mobilisés dans le travail géométrique, dont celui des objets tangibles. Dès 2003, le volet MAGESI du projet MAGI – Mieux Apprendre la Géométrie dans des ESaces Instrumentés (Rolet, 2003) – a développé une ingénierie faisant appel à l'utilisation de trois environnements distincts caractérisés par des tailles d'espace, micro et méso espace, et des instruments distincts : le papier-crayon (Figure 9), la géométrie dynamique (Figure 10) et l'environnement spatial habituel, celui de la cour de l'école ou du préau, qui n'a pas la même taille que les deux premiers (Figure 11). Les instruments de construction étant différents d'un environnement à l'autre, les stratégies de résolution des élèves le sont également pour un même problème de construction, comme par exemple « construire un carré ».

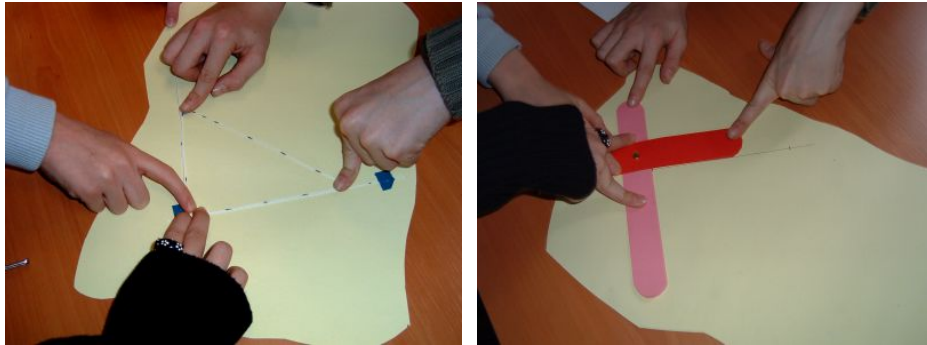


Figure 9. Construction d'un carré sur feuille de papier
<http://magesi.ens-lyon.fr/seance.php?Rub=1&Id=5>

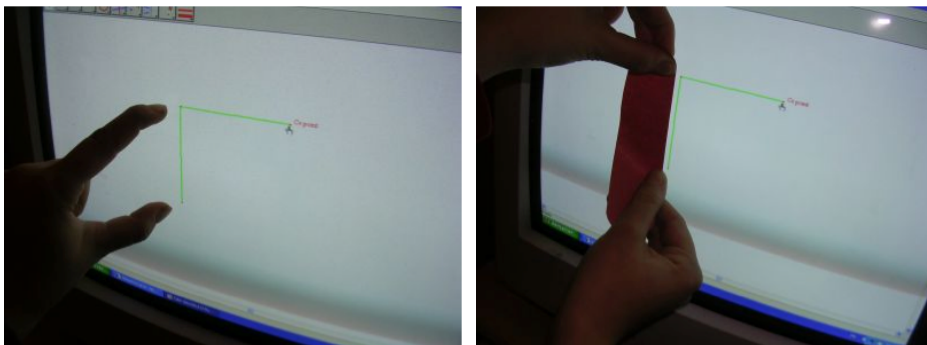


Figure 10. Construction d'un carré avec un logiciel de géométrie dynamique
<http://magesi.ens-lyon.fr/seance.php?Rub=1&Id=22>

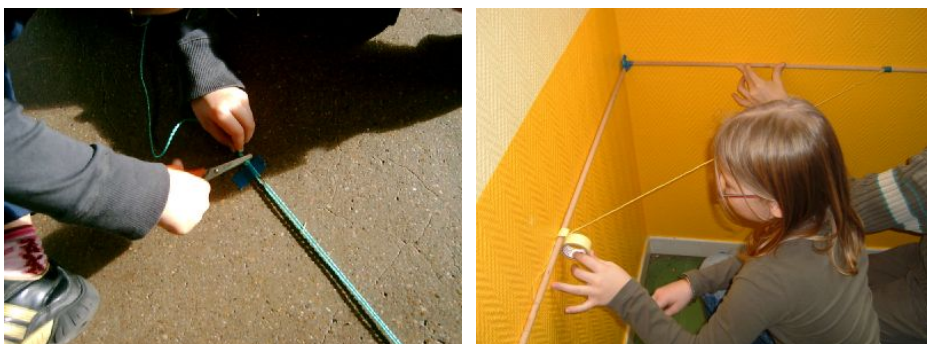


Figure 11. Construction d'un carré dans un meso espace
<http://magesi.ens-lyon.fr/seance.php?Rub=1&Id=3>

Un scénario d'enseignement des propriétés de trois figures géométriques (le carré, le parallélogramme et le losange) et d'une transformation (la symétrie), pour le CM1 et le

CM2 du cycle 3, a été conçu et décrit sur un site web⁷. Le scénario repose sur la construction des mêmes figures successivement dans les trois espaces instrumentés différents. L'objectif a été d'étudier l'imbrication des tâches et des dimensions techniques et conceptuelles de la résolution de problème entre les différents environnements.

Recourir à différents environnements instrumentés pour la conception de scénarios a été repris depuis (par exemple (Bombrun & Thomas, 2014)). L'articulation recherchée dans MAGESI entre les différentes tâches et les différents systèmes d'instruments préfigure la proposition de duo d'artefacts. Il ne s'agit pas de réaliser une simple juxtaposition de situations mais bien l'articulation des espaces instrumentés au sein d'une situation, grâce à une même tâche proposée d'un environnement à un autre et grâce aux ruptures et discontinuités provoquant des genèses instrumentales liées et des apprentissages.

Lors des nombreuses expérimentations réalisées à partir de la collection de situations conçues dans le cadre du projet MAGI, nous avons pu observer que les usages spontanés du déplacement étaient variés. Ils correspondaient notamment aux différents instruments déplacement, en particulier les ajustements des constructions molles identifiés par Coutat (2006) et Restrepo (*op. cit.*). En conséquence, nous avons conçu les tâches du premier degré pour que le déplacement n'y joue pas seulement le rôle d'un moyen de validation, mais qu'il constitue une partie de la tâche attendue. Le déplacement y est un instrument d'exploration et d'ajustement contrôlé perceptivement.

C'est sur cette piste, combinant le matériel, le numérique et les usages variés du déplacement dans les situations didactiques, que les plus récents développements relatifs à l'utilisation de la géométrie dynamique pour l'école primaire ont été réalisés. Le travail de Voltolini (2014) et (2017) prend en compte le point de vue sur l'activité géométrique apporté par la déconstruction dimensionnelle des formes de Duval (2005) et considère les environnements matériels et numériques pour la conception et l'analyse des situations didactiques. Je les résume dans la partie 3 (p. 96) de ce mémoire consacrée aux duos d'artefacts.

3. INTÉGRATION COMPLEXE DES TECHNOLOGIES DANS LES SYSTÈMES DE RESSOURCES ET LES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS

Si les travaux précédents ont montré tout le potentiel des technologies, en particulier de la géométrie dynamique, pour l'apprentissage, la question de leur usage dans l'enseignement, de leur transposition sur le terrain pose clairement problème. La complexité de leur intégration dans les pratiques des enseignants a été mise en évidence (Assude et al., 2006), (Assude, 2007). Actuellement, de nombreux enseignants du secondaire en France, comme dans de nombreux pays développés, utilisent la géométrie dynamique en classe avec leurs élèves. Mais les usages majoritaires sont loin d'être ceux qui seraient les plus pertinents. Laborde et Laborde (2011) notent la distance qu'il y a entre les situations didactiques avec la géométrie dynamique utilisées dans les travaux de recherche et celles présentes dans les pratiques quotidiennes des enseignants. Ils

⁷ Le scénario est toujours accessible en ligne (dernier accès 31 mars 2017) : <http://magesi.ens-lyon.fr/>

suggèrent de mettre à disposition des enseignants des ressources prêtes à l'emploi pour aider les enseignants à tirer partie des avantages de la géométrie dynamique dans leur travail quotidien avec les élèves. Dès le début des années 2000, à partir d'une étude des ressources de géométrie dynamique, de type fichier logiciel préconçus, Sinclair (2003) concluait sur l'aspect critique de la conception de ces fichiers ressources quant à leur potentiel pour soutenir ou au contraire contrarier les apprentissages des élèves. Cependant, l'idée de proposer des ressources de qualité prêtes à l'emploi n'est pas si simple à mettre en œuvre et est même questionnable. En effet, outre la conception de ces ressources et leur mise à disposition auprès des enseignants, un autre point clef est celui de leur appropriation par les enseignants et leur utilisation effective avec les élèves.

3.1. Conception de tâches avec la géométrie dynamique et remise en cause d'une approche en terme de « bonnes pratiques »

Si l'on examine les fondements de la conception de ressources utilisant la géométrie dynamique, le fait que les travaux de l'équipe grenobloise avec Cabri-géomètre aient été très fortement enracinés dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) a conduit la communauté de didactique des mathématiques à porter une attention toute particulière au fonctionnement de la connaissance géométrique comme outil de résolution de problème dans les situations conçues. Pour que ce fonctionnement de la connaissance soit possible dans la situation didactique, il faut non seulement que la connaissance visée soit nécessaire dans les stratégies de résolution gagnantes mais qu'il existe également un réel choix des élèves parmi différentes stratégies, choix associé à une incertitude initiale sur les issues possibles suivant la stratégie de résolution choisie. S'il n'y a pas de choix ou si l'issue est certaine, il n'y a pas de situation a-didactique et potentiellement pas d'apprentissage.

La question de l'incertitude est centrale dans la conception des situations (Bessot, 2003). Mais elle n'est pas forcément comprise par les enseignants. En effet l'exploration libre d'une figure de géométrie dynamique par les élèves n'est pas toujours très productive, surtout lorsqu'elle n'est pas finalisée, c'est-à-dire que les élèves ne cherchent pas à obtenir une configuration particulière. De plus, comme décrit précédemment à propos de la genèse instrumentale du déplacement, les élèves ne déplacent pas volontiers les points et quand ils le font, ils n'en tirent pas les conclusions mathématiques attendues par l'enseignant. Du coup, les enseignants cherchent à réduire les possibilités d'exploration des figures pour mieux en contrôler l'issue (Ruthven, Hennessy, & Deane, 2008). Ils utilisent fréquemment des figures de géométrie dynamique pour lesquelles l'exploration est réduite, contrainte au moyen de curseurs ou en indiquant quels points doivent être déplacés. Les enseignants guident la construction de la figure par les élèves, ils indiquent le point à déplacer et donnent l'instruction d'observer ce qui se passe. Ils attendent alors des élèves qu'ils observent les propriétés pertinentes, en particulier l'invariance. Mais avec ce type de figure contrainte, les élèves déplacent le point ou le curseur sans attente particulière, sans avoir eu la nécessité d'anticiper les possibles conséquences sur la figure. Qu'ils anticipent ou pas le résultat ne change rien aux observations possibles. En conséquence, les élèves ne font pas les observations qui leur permettraient d'arriver à des conclusions mathématiques mais énoncent les propriétés qu'ils pensent que l'enseignant attend. Un tel type de tâche ne produit pas des situations robustes pour

l'apprentissage. En revanche, les tâches qui explicitent la configuration recherchée mais ne donnent pas d'indications sur les moyens d'y arriver, créent pour les élèves un espace d'exploration, une liberté et une incertitude sur la stratégie à mobiliser tout en leur donnant les moyens de reconnaître s'ils ont réussi ou pas. L'incertitude nécessaire doit porter sur les conditions de la construction et non sur les conclusions pour qu'elle soit productive pour l'apprentissage (Soury-Lavergne, 2011).

Laborde (2001) a distingué quatre types de tâches suivant le rôle qu'y joue la géométrie dynamique : (i) la géométrie dynamique est utilisée comme facilitateur de l'aspect pratique de la tâche sans impacter le travail mathématique, par exemple parce qu'il permet de construire rapidement une figure de bonne qualité graphique ; (ii) la géométrie dynamique facilite la tâche mathématique en fournissant plus de cas et en permettant de faire des constats qui seraient plus difficilement accessibles en papier-crayon ; (iii) la géométrie modifie les stratégies de résolution possibles en contraignant les outils utilisables, donc les propriétés géométriques mobilisables dans la résolution, par exemple la construction du parallélogramme sans droites parallèles enfin (iv) la géométrie dynamique permet de créer de nouvelles tâches qui ne pourraient pas exister sans elle, par exemple les boîtes noires.

Avec les deux premiers types de tâches, la géométrie dynamique joue *un rôle d'amplificateur*, amplificateur de la précision ou du nombre de cas traités en comparaison à l'utilisation du papier-crayon. Mais elle ne modifie pas fondamentalement le travail mathématique. Avec les deux derniers types de tâches, la géométrie dynamique joue *un rôle de générateur*, soit générateur de contraintes et d'affordances relatives aux outils géométriques de résolution de problème, soit générateur de nouvelles tâches qui n'auraient pas de signification en dehors de la géométrie.

Ces principes pour la conception de tâches avec la géométrie dynamique, identifiés par les recherches, ont été diffusés aux enseignants et aux formateurs à travers des ressources, des séminaires, des formations et des publications de vulgarisation (comme par exemple (Soury-Lavergne, 2011), (Soury-Lavergne & Maschietto, 2012) et (Maschietto & Soury-Lavergne, 2012)). Cependant, ces nombreuses initiatives ont souvent relevé de l'explicitation de « bonnes pratiques » et se sont révélées insuffisantes à provoquer une profonde évolution des pratiques. Ainsi, nous avons cherché à aller au delà de la simple diffusion en travaillant avec les enseignants à la conception des situations qu'ils pourraient effectivement utiliser. Soutenir l'intégration des technologies dans les pratiques enseignantes nécessite un changement de point de vue sur ces pratiques. Il faut considérer que les enseignants utilisent les technologies dans la classe avec leurs élèves mais aussi hors de la classe, lorsqu'ils préparent les cours, lorsqu'ils cherchent des ressources, se les approprient et les organisent en vue de leur enseignement. Ce changement de point de vue passe par l'élargissement de la question des technologies à celles des ressources et des systèmes d'instruments construits par les enseignants (Gueudet & Trouche, 2008) (Drijvers et al., 2010).

3.2. Conception de ressources et travail collaboratif comme moyens de formation des enseignants

La nécessité de former les enseignants à l'utilisation des technologies a été identifiée comme un facteur clef de son utilisation, en particulier en géométrie dynamique (Laborde & Laborde, 2008) et a donné lieu à de nombreuses initiatives au niveau international comme par exemple ICTML (Fuglestad, Healy, Kynigos, & Monaghan, 2010), AProvaME (Healy, Jahn, & Bolite-Frant, 2009) ou M@t.abel (Arzarello et al., 2012)). Ces programmes ont en commun de réunir des enseignants, des formateurs et des chercheurs pour co-construire les outils et les méthodes pour la formation continue des enseignants. En France, le SFoDEM – Suivi de Formation à Distance pour les Professeurs de Mathématiques (Guin, Joab, & Trouche, 2008) – a été conduit selon trois principes : la formation à l'usage des technologies passe par un travail de conception de ressources qui tirent profit de la technologie dont l'appropriation est visée ; les enseignants sont des acteurs essentiels tout au long de ce processus de conception ; le travail collaboratif des enseignants est essentiel dans ce processus.

L'objectif de cette partie n'est pas de présenter les problématiques liées à la formation des enseignants, ni les développements théoriques que ces questions ont générés, comme par exemple la transposition méta-didactique initiée par Arzarello (Aldon et al., 2013) ou l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche, 2008), qui s'est développée dans le fil du SFoDEM. Il s'agit en revanche d'identifier le rôle du collectif et des ressources pour susciter le développement professionnel des enseignants à propos de la géométrie dynamique. Car si l'on adopte le point de vue de l'approche documentaire qui met l'accent sur les collectifs pour susciter les genèses documentaires au cœur des dynamiques de développement professionnel, c'est l'émergence des communautés de pratique (Wenger, 1998) autour de la géométrie dynamique qui est visée.

De tels collectifs créés par les dispositifs de formation ont été étudiés dans le cadre du programme national de formation continue Pairform@nce. Il s'agit d'un programme de formation des enseignants par et pour les technologies, basé sur la collaboration et l'utilisation d'une plateforme de formation hybride, déployé par le ministère de 2007 à 2013. Les principes retenus dans Pairform@nce héritent des travaux du SFoDEM : collaboration entre pairs, formation hybride en présence et à distance, conception collaborative de situations pour la classe avec test en classe et retour réflexif. Le programme repose sur l'hypothèse que des parcours de formation peuvent être conçus et mutualisés sur la plateforme pour ensuite être utilisés par des formateurs ne les ayant pas conçus afin qu'ils mettent en œuvre des formations.

Dans le cadre d'une convention avec le ministère, l'INRP⁸ a accompagné le déploiement de ce dispositif de formation par la recherche (Gueudet, Soury-Lavergne, & Trouche, 2008a), (Soury-Lavergne, Gueudet, & Trouche, 2009), (Soury-Lavergne, Gueudet, Loisy, & Trouche, 2011) et (2013). Nous avons suivi les processus de conception de parcours, puis d'appropriation des parcours et de mise en œuvre des formations, avec une méthodologie reposant elle-même sur la conception collaborative de ressources au sein

⁸ INRP Institut National de Recherche Pédagogique, institution à l'origine de la création de l'IFE, Institut Français de l'Éducation en 2011.

d'un collectif de chercheurs et formateurs (Gueudet, Soury-Lavergne, & Trouche, 2008b). Ainsi, nous avons organisé des collectifs de formateurs et d'enseignants pour concevoir des parcours, dont plusieurs parcours relatifs à la géométrie dynamique, en même temps que les premières formations étaient réalisées, dans un processus de conception dans l'usage (Rabardel & Pastré, 2005). Ces parcours ont ensuite été mis à disposition d'autres formateurs, au sein du collectif, pour qu'ils conduisent des formations en dehors du cercle initial qui les avait conçus. De cette manière, nous avons pu étudier la complexité des processus de conception et d'appropriation des parcours de formation au sein d'un collectif et mettre en évidence les raisons des difficultés rencontrées par les autres formateurs Pairform@nce, concevant des parcours et tentant de transmettre leur expertise.

3.2.1. Conception dans l'usage des ressources de formation

Nous avons analysé le processus initié par la conception d'un parcours de formation Pairform@nce par les concepteurs et se poursuivant par son utilisation par d'autres formateurs pour conduire des formations (Soury-Lavergne & Sanchez, 2009). Les parcours sont des objets numériques sur la plateforme Pairform@nce, constitués d'un ensemble de ressources textes, vidéos, liens, documents à télécharger et outils de collaboration pour accompagner les formations, notamment la conception de situations d'enseignement et leur mise en œuvre dans la classe. Le début du programme Pairform@nce a consisté à concevoir ces parcours dans l'objectif qu'ils soient mutualisés et utilisables au niveau national comme support de formation par des formateurs qui n'avaient pas participé à leur conception.

L'appropriation d'un parcours pour mettre en œuvre une formation n'est pas immédiate. Elle résulte d'une genèse instrumentale (Rabardel, 1995) qui transforme le parcours initial, l'artefact, en instrument de formation. L'adaptation du parcours au contexte de formation d'une part et le développement des connaissances et compétences sur la façon d'utiliser ce parcours pour former des enseignants d'autre part sont les deux processus d'instrumentalisation et d'instrumentation complémentaires qui forment la genèse instrumentale. Ces deux processus alimentent la poursuite de la conception du parcours, facilitant leur appropriation par des formateurs qui en feront un instrument pour la formation, d'où la conception dans l'usage (Rabardel & Pastré, 2005). L'approche documentaire (Gueudet & Trouche, 2008) élargit l'approche instrumentale et permet de prendre en compte avec la genèse documentaire, d'une part, le fait que le parcours est un ensemble de ressources, lui-même inscrit dans un ensemble de ressources en évolution et, d'autre part, le fait que ce parcours résulte d'une conception collective pour un usage collectif. Cela amène à prendre en compte dans la conception et dans l'analyse les collectifs mixtes de concepteurs et formateurs, de formateurs et d'enseignants, voire qui rassemblent tous les acteurs impliqués dans la formation.

3.2.2. Les ressources au cœur de la dynamique des collectifs d'enseignants et de formateurs

Nous avons étudié le dispositif Pairform@nce du point de vue des différents collectifs qui ont émergé et des ressources caractérisant les genèses documentaires des enseignants et formateurs engagés dans le programme. En reprenant les travaux de Wenger (1998), une communauté de pratique est un collectif dont la pratique repose sur l'engagement

mutuel, un objectif commun et un répertoire partagé, c'est à dire des ressources conçues et utilisées au sein du groupe qui matérialisent certains aspects de la pratique collective.

C'est à travers les ressources fabriquées par les formateurs et les concepteurs que nous avons pu attester de l'émergence d'une communauté de pratique entre formateurs et concepteurs Pairform@nce (Soury-Lavergne & Sanchez, 2009). Nous nous sommes intéressés aux ressources produites par les concepteurs des parcours pour étayer l'action du formateur, dont les assistants méthodologiques prévus pour aider son appropriation et sa mise en œuvre par les formateurs (Gueudet et al., 2008b). En cohérence avec les principes de la communauté de pratiques, l'approche documentaire fait l'hypothèse que la formation d'un collectif d'enseignants et de formateurs est indissociable de l'apparition d'un vivier de ressources partagées (Gueudet & Trouche, 2008). Elle ajoute que ces ressources sont instrumentalisées et instrumentées par les enseignants ou formateurs dans un processus de genèse documentaire. La présence d'assistants méthodologiques ajoutés par les concepteurs aux parcours est un moyen de soutenir les genèses documentaires qu'ils anticipent chez les formateurs. Les adaptations et modifications d'un parcours Pairform@nce par les formateurs sont les signes de ce processus de genèse documentaire à l'œuvre. Plus précisément, les ressources produites (processus d'instrumentalisation) et les connaissances construites (processus d'instrumentation) dans la genèse documentaire permettent d'explicitier les ressorts du développement professionnel.

Nous avons pu observer les processus d'appropriation des parcours de formation par des formateurs en organisant un protocole d'échange de parcours entre deux groupes de formateurs-concepteurs et en choisissant quelques principes méthodologiques forts (Gueudet, Sacristan, et al., 2012). Chaque groupe de formateurs a dû implémenter une formation auprès d'un groupe d'enseignants à partir d'un parcours qu'il n'avait pas lui-même conçu. Puis les formateurs-concepteurs ont pu procéder à une évolution du parcours à partir des retours des formateurs-utilisateurs. Nous avons mis en place les moyens d'observer l'activité des formateurs-utilisateurs en continu pendant les sessions de formation mais en aussi avant et après les sessions. Nous avons aussi pu réaliser ce recueil sur le temps long que nécessitent les genèses documentaires pour se développer et pour être observées. Le recueil de données a consisté en des journaux de bord, l'enregistrement des échanges mails et la collecte de toutes les ressources produites.

A partir de ces données, nous avons identifié les ressources modifiées par les formateurs-utilisateurs ainsi que les nouvelles ressources qu'ils ont créées. Pour l'un des parcours concernant la géométrie dynamique et la démarche d'investigation, les formateurs-utilisateurs qui étaient déjà des experts de la géométrie dynamique ont ressenti le besoin d'ajouter un diaporama présentant des résultats de recherche sur l'enseignement fondé sur la démarche expérimentale avec la géométrie dynamique. Par ailleurs, les modèles de description de séance, nécessaires à la mutualisation entre les enseignants stagiaires lors de la formation, ont été modifiés pour être rendus plus conformes aux habitudes du formateur. Mais si certaines ressources issues du travail des formateurs-utilisateurs ont été acceptées et intégrées dans les parcours par les formateurs-concepteurs à l'issue de cette boucle de conception et d'utilisation, d'autres ont été rejetées. Cela révèle la difficulté d'appropriation de ressources par un formateur qui ne les a pas lui-même conçues et utilisées. Une des explications avancées est que la genèse documentaire, déjà

développée relativement à une ressource pour un objectif ou une tâche donnée, rend coûteuse la substitution de cette ressource par une autre.

En considérant ces parcours de formation comme des ressources, l'approche documentaire permet de décrire les processus d'appropriation et d'intégration de ces parcours dans les pratiques des formateurs et d'identifier quelques points clefs dans leur développement professionnel. Le développement professionnel, caractérisé par la genèse documentaire s'appuie, en particulier mais pas seulement, sur des ressources produites, utilisées, transformées. Le parcours de formation d'enseignants apparaît comme un instrument de formation de formateurs et un outil de génération de ressources. Cependant, cela n'a été possible que grâce à l'engagement des participants au sein du collectif et aux interactions, provoquées, soutenues et structurées par le dispositif expérimental.

En conclusion, si le développement professionnel des enseignants est analogue à celui des formateurs, c'est-à-dire qu'il résulte de leur participation à un collectif de travail produisant des ressources, une piste de solution est de susciter le travail collectif chez enseignants.

3.2.3. Nécessité des collectifs pour faire émerger des ressources et des pratiques

Adopter le point de vue théorique sur la conception dans l'usage permet de mettre en évidence la continuité des processus de conception depuis les étapes initiales de conception jusqu'aux usages, voire au fil des itérations de boucles de conception-usage. Il donne les moyens de favoriser l'appropriation des ressources par les enseignants en intégrant effectivement les enseignants-utilisateurs, dès les phases de conception des ressources. Nous l'avons fait de façon systématique dans tous les projets menés par l'IFE. Cette façon de procéder permet également de favoriser l'émergence de communautés de pratique au sein des collectifs. Ce sont ces communautés de pratique, identifiables notamment par les ressources qu'elles produisent et font évoluer, qui sont les facteurs de développement professionnel.

Dans le travail mené pour Pairform@nce, le regard s'est positionné essentiellement au niveau du formateur. Mais les questions posées sont analogues à celles de l'appropriation des ressources par les enseignants et permettent d'aborder la complexité des processus en jeu lorsqu'ils les intègrent dans leur pratique.

A quelle condition l'utilisation et la réutilisation de ressources de géométrie dynamique par des enseignants ne les ayant pas conçues est-elle possible ? C'est une question centrale si l'on veut comprendre comment les enseignants vont pouvoir utiliser des ressources issues de la recherche et développer des usages voire en créer qui ne soient pas en rupture avec les intentions initiales des auteurs. Nous avons cherché les moyens de créer des communautés d'enseignants et d'accompagner les dynamiques de développement professionnel au sein de ces communautés, à l'exemple de ce qui se passe dans les IREM, Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques existants dans les universités. Mais comment généraliser ce mode de fonctionnement à tous les collectifs d'enseignants qui le souhaiteraient ?

3.3. Qualité des ressources dans le cas de la géométrie dynamique

Un des objectifs du projet Européen Intergeo, programme e-content+ 2007-2010 (Kortenkamp & Laborde, 2011), a été d'organiser des collectifs d'enseignants à propos des questions de mutualisation et réutilisation de ressources de géométrie dynamique. L'entrée retenue pour aider la diffusion et les usages de la géométrie dynamique n'a pas été la formation. L'objectif a été de fédérer un collectif d'utilisateurs européens de géométrie dynamique, qu'ils soient enseignants, formateurs, chercheurs ou élèves, à propos de problèmes qu'ils rencontrent dans leur utilisation de la géométrie dynamique.

Certaines difficultés ne sont pas surmontées par la seule formation, comme par exemple celles relatives à la disponibilité et à la qualité des ressources sur Internet. Le problème que rencontrent les enseignants n'est pas de ne pas avoir accès à des ressources de qualité mais plutôt de ne pas pouvoir les identifier facilement parmi les innombrables ressources disponibles (24 900 résultats pour la requête « théorème de Pythagore géométrie dynamique » sur google en français⁹). Lorsqu'ils cherchent des ressources, les enseignants ont des difficultés pour identifier : (i) les ressources adaptées au contexte d'enseignement prévu, (ii) les ressources d'une qualité suffisante pour permettre les apprentissages et (iii) les ressources qu'ils pourront s'approprier en raison de leurs compétences et connaissances. Ainsi, de nombreuses barrières existent, telles que la langue utilisée, le type de logiciel ou l'absence d'information sur la valeur pédagogique dans la recherche de ressources utilisables par les enseignants (Robertson, 2006).

3.3.1. *I2geo, une plateforme ouverte et informelle pour les ressources de géométrie dynamique*

L'idée développée dans Intergeo (Kortenkamp & Laborde, 2011) est de traiter ces difficultés en proposant une plateforme ouverte et informelle¹⁰, contrôlée par la communauté de ses utilisateurs. La particularité de ce portail de ressources de géométrie dynamique est qu'il n'impose aucune contrainte initiale sur les ressources acceptées, à part qu'elles aient un lien avec la géométrie dynamique. Les ressources sont déposées par tout utilisateur sans contrainte sur l'endroit où la déposer, ni sur la nature de la ressource, que ce soit en terme de type de fichier, de langue, de logiciel ou de contenu. Cette absence de barrière initiale permet de constituer rapidement une grande collection de ressources en s'affranchissant des contraintes d'évaluation de la conformité des ressources aux objectifs du projet. Mais une telle collection inorganisée de ressources hétérogènes est identique à la situation sur Internet. Elle serait difficilement utilisable sans outil pour gérer et pouvoir ensuite retrouver les ressources intéressantes. C'est à ce sujet que le projet a développé et testé des outils reposant sur le collectif des utilisateurs. Bien que n'ayant pas abouti à une diffusion généralisée de l'usage de la plateforme au delà du cadre du projet¹¹, ces propositions sont toujours d'actualité.

Intergeo a développé sur la plateforme des outils de traitement *a posteriori* des ressources déposées, outils utilisables et tout au long de la présence de la ressource sur la plateforme. D'une part, les ressources peuvent être recherchées par l'intermédiaire d'une ontologie des compétences de géométrie dynamique et non pas avec des mots clés qui

⁹ Le 30 mars 2017

¹⁰ <http://i2geo.net/>

¹¹ Au 30 mars 2017, la plateforme rassemble 3 956 ressources, 5 829 membres et 888 évaluations.

dépendent, eux, de la langue. Le portail fonctionne ainsi de façon inter-curriculum et multi-langage. D'autre part, la plateforme organise l'accès aux ressources avec un processus d'évaluation de la qualité par les utilisateurs qui permet de mettre en évidence les ressources les plus intéressantes (Mercat, Soury-Lavergne, & Trgalova, 2008), (Mercat et al., 2010). Pour la mise en place de ce processus, une définition opérationnelle de la qualité d'une ressource de géométrie dynamique a été nécessaire.

3.3.2. *Prise en compte du point de vue de la recherche dans l'évaluation de la qualité d'une ressource par les utilisateurs*

Pour définir la qualité d'une ressource de géométrie dynamique dans Intergeo, nous sommes parties des usages des ressources par les enseignants (Trgalova, Jahn, & Soury-Lavergne, 2009) (Trgalova et al., 2011), et en particulier du constat que les enseignants ne créent pas toujours des ressources nouvelles mais le plus souvent adaptent des ressources existantes. Cet aspect fondamental du travail de l'enseignant, bien pris en compte par l'approche documentaire de Gueudet et Trouche (2008), met en évidence le travail réalisé pour sélectionner, modifier et utiliser des ressources. Ce processus de genèse documentaire dépend de la ressource mais aussi de l'enseignant. De ce point de vue, la qualité d'une ressource dépend à la fois de la ressource et de la genèse documentaire qui s'est développée, donc de l'enseignant qui met en œuvre la ressource. Par ailleurs, le contexte d'utilisation conditionne également l'utilisabilité d'une ressource (au sens de Tricot et al. (2003)), indépendamment de sa qualité intrinsèque. Par exemple, une même ressource peut être utilisable et pertinente, ou pas, suivant les attentes institutionnelles du système scolaire ou tout simplement du niveau scolaire considéré. L'utilisateur, le contexte d'utilisation et la possibilité d'évolution et de transformation d'une ressource apparaissent alors comme différentes dimensions complémentaires de la qualité de cette ressource, au delà de ses propriétés intrinsèques.

Nous avons retenu neuf dimensions contribuant à la qualité d'une ressource. Ces dimensions recouvrent des aspects intrinsèques mais également extrinsèques de la ressource. Les dimensions « contenu » et les « caractéristiques techniques » de la ressource concernent la validité mathématique du contenu, l'indication de son adéquation aux attentes institutionnelles et son exploitabilité technique. La spécificité de la géométrie dynamique pour les apprentissages est prise en compte à travers les deux dimensions que sont les « aspects instrumentaux » et la « valeur ajoutée » de la géométrie dans la tâche mathématique. La dimension « pédagogique et didactique » concerne son implémentation didactique et pédagogique. Elle mesure en quoi la ressource précise et accompagne son utilisation en classe avec des indications d'organisation, des fiches élèves... Enfin, l'« ergonomie » et la présence de « métadonnées » complètent la caractérisation de la qualité d'une ressource de géométrie dynamique, que cette ressource soit un fichier unique ou bien un ensemble plus complexe de figures dynamiques, fiches élèves, fiches enseignants etc....

La qualité des ressources ainsi définie est évaluable par les utilisateurs du portail I2geo à l'aide d'un questionnaire qu'ils peuvent remplir, partiellement ou complètement, autant de fois que voulu pour une même ressource (Figure 12). Comme pour le dépôt des ressources, le remplissage du questionnaire n'est pas contraint et tout utilisateur, chercheur, formateur ou enseignant peut le faire, une fois qu'il est identifié sur la plateforme. Un même questionnaire rempli par tous les contributeurs et utilisateurs de la

plateforme a été choisi comme moyen de constituer une communauté d'utilisateurs et de faire émerger une vision partagée de la qualité d'une ressource de géométrie dynamique. L'enjeu a donc été de concevoir ce questionnaire pour qu'il soit utilisable par toute la communauté, indépendamment de l'expertise de chacun, chercheur ou pas. L'objectif premier du processus qualité dans Intergeo a été d'organiser l'accès à la collection de ressources en les faisant apparaître par ordre de pertinence lié à la qualité. Mais un second objectif a été recherché par les concepteurs du questionnaire. Nous avons fait l'hypothèse que l'utilisation du questionnaire pouvait permettre à l'utilisateur de développer ses compétences relatives à l'usage de la géométrie dynamique. C'est en cela que la plateforme I2geo a pu constituer un moyen de développement professionnel, complémentaire à la formation et touchant potentiellement un public plus large.

Dans le système de revues de la plateforme I2geo, chaque dimension contribuant à la qualité d'une ressource est évaluée à partir de plusieurs critères et plusieurs questions dans le questionnaire (Figure 13). Nous donnons l'exemple du traitement des deux dimensions « instrumentation » et « valeur ajoutée » car ce sont celles qui prennent en compte plus particulièrement les aspects mis en évidence par les recherches.

Boutons radios: pas d'accord : plus à gauche, d'accord : plus à droite

▶ <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>	La description de la ressource est complète (thème, notions et compétence, niveau scolaire, pré-requis, mise en œuvre en classe, durée).
▶ <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>	Les fichiers sont techniquement utilisables
▶ <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>	Le contenu mathématique est valide et utilisable dans la classe pour travailler les notions et compétences annoncées
▶ <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>	L'interaction avec les figures de géométrie dynamique est valide et cohérente avec l'activité mathématique prévue
▶ <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>	Les activités mathématiques proposées bénéficient des apports de la géométrie interactive, elles ne peuvent pas être transposées telles qu'elles en activités papier-crayon
▶ <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>	La description de cette activité en permet une utilisation efficace pour l'apprentissage des notions et compétences annoncées
▶ <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>	La description de l'activité propose une mise en œuvre
▶ <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>	L'activité s'inscrit facilement dans une progression pédagogique
▶ <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>	La ressource est facile à prendre en main et adaptable

Figure 12. Interface du questionnaire qualité d'une ressource sur la plateforme I2geo. Les neuf dimensions peuvent être évaluées globalement.

En concevant le questionnaire, la difficulté a donc été de formuler les questions de façon à étayer une analyse didactique de la ressource, sans pour autant qu'il soit nécessaire de réaliser une analyse théorique pour y répondre.

Par exemple, la dimension relative à l'instrumentation est issue de la prise en compte de l'approche instrumentale (Rabardel, 1995). Elle se traduit dans le questionnaire par des questions telles que « la figure se comporte de manière cohérente par rapport à l'activité » ou « les valeurs numériques ne remettent pas en cause le déroulement de

l'activité » (Figure 13). A partir de telles questions, l'hypothèse est que l'évaluateur s'interroge sur la relation entre les manipulations que vont pouvoir réaliser les élèves et les principes mathématiques visés. Par exemple, suivant la construction retenue pour un parallélogramme, certains points ne seront pas déplaçables directement (ils bougent mais uniquement par l'intermédiaire du déplacement d'un autre point), empêchant les élèves de réaliser les déplacements voulus. Un autre exemple est que les valeurs numériques affichées pour les longueurs et les mesures d'angles sont des valeurs approchées décimales qui, suivant l'approximation retenue, donnent des résultats de calcul en contradiction avec les propriétés géométriques attendues. Ces comportements de figures doivent être anticipés par les enseignants pour pouvoir être gérés au moment de l'utilisation avec les élèves.

▼

○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○

L'interaction avec les figures de géométrie dynamique est valide et cohérente avec l'activité mathématique prévue

Les figures de géométrie dynamique se comportent de manière cohérente par rapport à l'activité mathématique prévue

La figure se comporte de manière cohérente par rapport à l'activité

Poussée dans leurs limites, les figures "résistent bien"

Les valeurs numériques (mesures d'angles, de longueurs) ne remettent pas en cause le déroulement de l'activité

Les fonctionnalités avancées, comme l'usage du clavier ou de macro-constructions, sont bien décrites

Commentaires:

Figure 13. Chaque dimension peut être évaluée séparément de façon détaillée et accompagnée d'un commentaire dans le questionnaire qualité de la plateforme I2geo.

Par ailleurs, les ressources issues des recherches et en particulier celles qui ne correspondent pas à une transposition des activités papier-crayon sont en rupture avec les ressources dont les enseignants ont l'habitude (Laborde, 2001). L'identification d'un fonctionnement original d'une ressource est aidée par l'utilisation du questionnaire, avec des critères tels que « L'activité ne peut pas être transposée en papier-crayon » ou « Le déplacement est utilisé pour mettre en évidence les conditions de validité ou d'invalidité d'un théorème ». Le questionnaire accompagne également l'analyse de la situation en terme de théorie des situations (Brousseau, 1998) à partir des rétroactions de la figure, avec des questions telles que « Les rétroactions du logiciel permettent aux élèves d'avancer dans la résolution de l'activité ».

Ainsi, l'utilisation du questionnaire a été conçue comme un moyen d'amener les utilisateurs à analyser les ressources selon des critères issus de la recherche et donc de s'approprier ces références à propos de la géométrie dynamique.

3.3.3. *Potentiel du processus d'évaluation de la qualité pour le développement professionnel des enseignants*

Les usages de ce questionnaire par différents groupes d'enseignants, en France et au Brésil, ont été suivis et ont permis de mesurer son effet en terme de développement professionnel. Les résultats d'une première expérimentation (Trgalova et al., 2009), menée avec un questionnaire partiel et un recueil de témoignages dans le cadre d'une formation de 22 enseignants, ont montré l'intérêt de former les enseignants à l'analyse

des ressources par un questionnaire. Les enseignants déclarent que les caractéristiques des ressources mises en évidence par le questionnaire, en particulier le rôle du déplacement, deviennent des « repères » lors du choix d'une ressource.

Une autre expérimentation de court terme en France a consisté à comparer la revue de trois ressources par un chercheur à celles effectuées par six enseignants. Nous avons mis en évidence que les informations saisies dans le questionnaire par les enseignants reflètent d'autres propriétés que celles de la ressource analysée. En effet, les enseignants remplissent le questionnaire en interprétant l'intention de l'auteur de la ressource à la lumière de leur propre expertise. En particulier, ils anticipent les modifications et évolutions de la ressource qu'ils feraient en vue d'une utilisation en classe. Ce résultat est très intéressant parce qu'il montre bien que la qualité d'une ressource n'est pas une propriété statique et définitive, mais bien une propriété dynamique qui résulte de l'évaluation d'un potentiel tenant compte des possibilités d'évolution et d'amélioration de la ressource. Ainsi, c'est finalement le document résultant de la genèse documentaire que l'utilisateur évalue et pas simplement la ressource.

Le suivi sur le long terme de sept enseignants français ayant participé à la conception du questionnaire, puis utilisant la plateforme, a donné les moyens de préciser en quoi le travail des enseignants avec la plateforme, les ressources et le questionnaire a pu contribuer à leur développement professionnel. En utilisant ces outils, les enseignants ont pu d'une part s'approprier les ressources pour les mettre en œuvre dans leur classe et, d'autre part, développer leur compréhension des possibilités offertes par la géométrie dynamique.

Nous avons utilisé conjointement les cadres théoriques de l'approche instrumentale (Rabardel, 1995) et de l'approche documentaire (Gueudet & Trouche, 2010b) pour comprendre en quoi l'usage de la plateforme I2geo et en particulier du questionnaire pouvait avoir des conséquences sur l'usage de la géométrie dynamique en classe et donc en terme de développement professionnel (Soury-Lavergne, Jahn, et al., 2011). L'usage de la plateforme, des ressources et du questionnaire par les enseignants provoque une genèse instrumentale relative à ces outils. Elle concerne à la fois l'apprentissage de l'utilisation de la plateforme (Où cliquer ? Comment faire pour trouver une ressource ? Comment remplir un questionnaire ?) et l'objectif visé qui est d'évaluer la ressource. Cette genèse instrumentale transforme potentiellement le remplissage du questionnaire en instrument d'analyse de la ressource. Les schèmes d'utilisation construits, notamment les schèmes d'action instrumentés, participent au développement professionnel. En tant qu'extension de l'approche instrumentale à la question des ressources et du travail documentaire de l'enseignant, l'approche documentaire permet de traiter le passage d'une ressource proposée par la plateforme en réponse à une requête de l'enseignant à un document, c'est-à-dire la ressource utilisée et intégrée dans le système d'instruments de l'enseignant. La question traitée a donc été d'identifier les schèmes d'action instrumentés développés par les six enseignants de l'expérimentation lorsqu'ils font des revues de ressources sur la plateforme.

Suivant le but qu'ils poursuivaient en remplissant le questionnaire, les usages ont été différents. Certains des enseignants ont utilisé le questionnaire qualité pour manipuler la visibilité d'une ressource lors de l'affichage des réponses à une requête. Ils pouvaient la rendre plus ou moins visible, selon la qualité qu'ils lui attribuaient. Pour cela, ils ont rempli le questionnaire de façon générale, en ne contrôlant que l'effet obtenu sur la qualité

finale de la ressource. Ils ont répondu aux neuf questions principales en évitant de rentrer dans les critères précis pour chacune des dimensions, car l'effet sur la qualité était moins facilement contrôlable. A l'inverse, les enseignants qui voulaient comprendre le potentiel de la ressource pour l'apprentissage, dans la perspective d'une utilisation en classe, ont analysé la ressource plus finement et utilisé les critères précis de certaines dimensions, en particulier les dimensions didactiques et pédagogiques. Enfin, un autre objectif recherché par l'enseignant via l'évaluation a été de faire évoluer certaines caractéristiques de la ressource. Dans ce cas-là, l'évaluateur a utilisé les commentaires libres associés à chaque dimension d'analyse pour fournir un avis qualitatif et précis à l'auteur de la ressource pour qu'il puisse l'améliorer. Les deux derniers objectifs, recherche d'une compréhension ou d'une évolution, ont conduit à une instrumentation du questionnaire pour en faire un outil d'analyse des ressources. Les schèmes d'action instrumentée qui se sont développés ont contribué à l'utilisation de la ressource en classe et donc au travail documentaire. D'autres usages de la plateforme ont également contribué au développement des compétences, comme celui d'apprendre à formuler des requêtes précises en utilisant l'ontologie de compétences en géométrie.

A partir de journaux de bord rassemblant l'historique des décisions d'un enseignant relatives à une ressource (nombres de requêtes avant d'obtenir une liste contenant la ressource, sélection de la ressource parmi les réponses, évaluation avec le questionnaire et implémentation en classe), issus du travail de sept enseignants, nous avons identifié plusieurs compétences chez ces enseignants. Ils ne sont pas intéressés par des fichiers de type animation qui illustrent une propriété ou un théorème (invariance d'une propriété par déplacement). Pour eux, ce type de tâche n'est pas assez engageant pour les élèves et ne donne pas suffisamment de place à la manipulation de la figure par les élèves. Ils rejettent également les ressources dont ils pensent qu'elles nécessiteraient trop de modifications. Cela semble contradictoire avec les résultats de l'étude précédente, montrant que les enseignants anticipaient les modifications nécessaires d'une ressource au moment où ils l'évaluaient. Il semble que ce soit la perspective d'une utilisation en classe et d'une comparaison avec d'autres ressources qui les amènent à ne pas les retenir. Le protocole précédent n'impliquait pas une utilisation en classe. En conséquence, le système d'évaluation a lui-même été modifié pour que l'évaluateur indique si son évaluation suivait un usage en classe ou pas.

La façon dont les enseignants ont rempli le questionnaire a évolué significativement, avec des revues de plus en plus détaillées et la présence de commentaires qualitatifs au cours des trois mois de l'étude. Les enseignants eux-mêmes en ont été conscients (Bourgeat et al., 2010, p. 4) :

« Avant notre implication dans le projet, nous utilisions des sites officiels présentant peu de ressources avec la géométrie dynamique, ou des sites personnels divers, sans trouver nécessairement ce que nous voulions. [...] Depuis, nos habitudes ont changé en ce qui concerne nos pratiques. L'engin de recherche est devenu efficace, I2Geo est devenu un outil pour la conception de notre enseignement. [...] Nous analysons et améliorons nos pratiques grâce aux débats et aux outils que nous avons introduits (questionnaire, journal de bord). Nos activités en lien avec la formation d'enseignants, nous aident à identifier des critères explicites de « qualité » [et] nous aident aussi à être plus précis sur les ressources évaluées. »

Mais il est probable que cette déclaration de 2010 ne soit plus valable en 2017 en ce qui concerne l'utilisation de la plateforme I2geo par les enseignants pour préparer leur enseignement.

3.3.4. Contribution du processus qualité à l'amélioration des ressources et au développement des compétences des enseignants

Le processus d'évaluation de la qualité mis en place sur la plateforme I2geo a permis d'améliorer certaines ressources. Il a également contribué à leur indexation qui, associée à une évaluation positive de leur qualité, permet leur repérage et leur affichage en bonne place dans les réponses à une requête. Les critères de qualité, dont ceux issus de la recherche, ont pu être considérés comme des moyens d'améliorer les ressources existantes. Ils ont aussi été utiles pour la conception de nouvelles ressources chez les enseignants de l'expérimentation. L'association d'un questionnaire qualité à une ressource est donc un moyen de faire participer l'utilisateur à l'évolution de la ressource, à son indexation, et de ce fait au processus même de sa conception. Il a aussi permis d'explicitier certains critères de qualité issus de la recherche de manière compréhensible et accessible aux usagers potentiels. C'est ce dont ont témoigné les enseignants de l'expérimentation sur le long terme. Ce processus aurait pu donner lieu à un guide pour les concepteurs de ressources, fonctionnant comme un repère méthodologique en mettant en évidence les éléments attendus dans une ressource de géométrie dynamique.

Par ailleurs, la participation des enseignants à la démarche qualité est un facteur de développement professionnel, puisque des ressources ont été conçues et utilisées au sein du collectif (Soury-Lavergne, Jahn, et al., 2011). Le questionnaire qualité a contribué à l'amélioration de l'appropriation et de l'utilisation de la géométrie dynamique. Cependant, ce travail n'a pas permis de distinguer clairement, dans la dynamique de développement professionnel, les rôles respectifs de l'utilisation du questionnaire sur le portail I2geo et de la participation à un collectif d'enseignants et chercheurs qui questionne la qualité et l'usage de la géométrie dynamique.

4. CONCLUSION DE LA PARTIE 1, NÉCESSITÉ DES COLLECTIFS D'ENSEIGNANTS POUR CONCEVOIR ET UTILISER LA GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE, DES PISTES POUR LES DUOS D'ARTEFACTS

Dans le cas de la géométrie dynamique, nous avons pu montrer le potentiel du numérique pour concevoir des tâches et créer des situations didactiques. La géométrie dynamique peut jouer un rôle d'amplificateur par rapport à l'environnement papier-crayon ou bien un rôle de générateur de contraintes et de nouvelles tâches très productives pour l'apprentissage. Ceci atteste de sa valeur didactique. L'approche instrumentale a contribué à mettre en évidence la genèse du déplacement en tant qu'instrument du travail mathématique, ce qui a rendu la valeur épistémique de la géométrie dynamique plus explicite. Mais elle a, du même coup, révélé la complexité des genèses instrumentales, en particulier celles relatives au déplacement, fonctionnalité capitale de la géométrie dynamique. Or ces résultats n'apparaissent pas directement appropriables

par les enseignants sans un cadre favorable à cette appropriation comme le sont les formations ou certains collectifs d'enseignants.

Les formations des enseignants sont des leviers possibles pour faire évoluer la situation. Avec l'approche documentaire, nous avons pu questionner les ressorts du développement professionnel des enseignants dans les formations. Le collectif d'enseignants qui se constitue au cours de la formation et qui, grâce aux activités menées, utilise, modifie et améliore des ressources existantes tout en en produisant de nouvelles, s'avère être un élément clef pour accompagner l'utilisation des technologies. Le collectif accompagne et assiste les genèses instrumentales et documentaires de chacun des membres. Mais nos travaux ont également montré que ces collectifs peuvent se constituer autour d'autres objectifs que celui de formation. Avec le projet européen Intergeo, un collectif d'enseignants s'est organisé dans l'objectif de développer un portail pour la mutualisation des ressources et l'évolution de leur qualité. Ce point de vue sur la qualité des ressources en tant que propriété qui n'est pas figée mais qui évolue a permis d'engager les enseignants dans des processus d'évaluation de la qualité qui ont été générateurs, à leur tour, de développement professionnel.

Conjugué à ce premier phénomène d'apprentissage au sein des collectifs, le principe de conception dans l'usage met en évidence la relation à double sens entre conception et usage, depuis la conception de l'artefact, qu'il soit tangible ou numérique, environnement logiciel ou ressource, par un concepteur jusqu'à son utilisation par un utilisateur. Pour Rabardel : « *les utilisateurs, en tant qu'acteurs de ces processus [de conception], sont aussi acteurs du mouvement d'ensemble de la conception, certes de façon et à un titre différent des concepteurs "institutionnels".* » (1995, p. 131). Comme l'explique Rabardel, en développant les schèmes qui transforment l'artefact en instrument, l'utilisateur crée les moyens de son utilisation et donc de son intégration dans les pratiques. Cette « conception dans l'usage » signifie à la fois que l'utilisateur poursuit le processus de conception au moment de l'usage, mais aussi, comme le disent Kaptelinin et Nardi, que le concepteur doit intégrer l'usage dès le début de la conception :

*« les artefacts devraient être conçus pour permettre une transformation efficace en instruments. [...] l'importance de concevoir des artefacts flexibles, ouverts, qui peuvent être modifiés par les utilisateurs et ajustés pour différentes tâches, en incluant les tâches non anticipées et le besoin des concepteurs de prendre en compte les véritables transformations des pratiques et les réels besoins des utilisateurs au cours de l'appropriation de l'artefact. »*¹² (Kaptelinin & Nardi, 2006, p. 110).

Ces résultats ont été obtenus essentiellement à propos des technologies et en particulier de la géométrie dynamique comme cas singulier d'EIAH. Cependant, dans les travaux menés, les cadres que nous avons mobilisés peuvent s'étendre au delà des technologies numériques et des environnements informatiques pour englober tout type de ressources, en particulier les outils et objets tangibles. En effet, les genèses instrumentales et documentaires opèrent sur les artefacts numériques comme sur les artefacts tangibles.

¹² Notre traduction de : "artefacts should be designed to enable efficient transformation into instruments. [...] the importance of designing flexible, open artefacts that can be modified by users and adjusted for various tasks, including unanticipated tasks and the need for designers to take into account the actual transformation of practices and the real needs of users over the course of appropriating an artefact" (Kaptelinin & Nardi, 2006, p. 110).

Ainsi, ces mécanismes et principes mis en évidence, théoriquement et expérimentalement, dans les processus de conception des artefacts pour qu'ils puissent devenir des instruments, peuvent être repris à propos des duos d'artefacts en tant que potentiels systèmes d'instruments tangibles et numériques.

Ces principes permettent d'aborder les trois champs de questions que sont la conception des duos d'artefacts, l'apprentissage des élèves et l'appropriation par les enseignants.

- (i) Du point de vue de la conception, lorsqu'il s'agit d'élaborer des artefacts pour l'apprentissage, qu'ils soient tangibles ou numériques, les enseignants et les élèves utilisateurs doivent être pris en compte en les associant le plus tôt et le plus directement possible aux processus de conception, par exemple au sein de collectifs dont l'objectif est la conception et l'usage de ces artefacts. L'existence de ressources, à propos desquelles les solliciter, est un bon moyen de favoriser l'engagement initial et l'implication des utilisateurs, en particulier les enseignants, dans les processus de conception. Les duos d'artefacts peuvent être un moyen de disposer de ressources pour initier le processus de conception, dès le début de ce processus. Par exemple, si l'un des deux artefacts, qu'il soit tangible ou numérique, est disponible, le collectif se constitue autour de l'enjeu de conception de l'autre artefact du duo et des situations didactiques.
- (ii) Du point de vue des apprentissages, les rétroactions et les variables didactiques, issues de la théorie des situations didactiques, ont permis de concevoir des situations pour divers concepts mathématiques avec la géométrie dynamique. Les mêmes principes sont utiles, utilisables et pertinents pour la conception d'un duo, c'est-à-dire d'une situation didactique dont le milieu inclut un artefact numérique et un artefact tangible.
- (iii) Du point de vue de l'appropriation du duo d'artefacts par les enseignants, les résultats des travaux présentés dans cette partie, explicités par les recommandations de Kaptelinin et Nardi, nous amènent à retenir la possibilité de faire évoluer les artefacts et les ressources. En le faisant, les enseignants se les approprient et les corrigent si nécessaire, donc en améliorent la qualité. Ils les enrichissent, ils les adaptent à leurs contraintes et finalement se forment. Il est donc nécessaire que le duo d'artefacts offre ces possibilités d'adaptation et de modification, que ce soit dans sa partie tangible, dans sa partie numérique ou dans l'articulation des deux dans la situation didactique.

PARTIE 2.

DUOS D'ARTEFACTS TANGIBLES ET NUMÉRIQUES ET SYSTÈMES D'INSTRUMENTS

A partir de l'exemple de la géométrie dynamique, nous avons établi que, si les apports des technologies étaient indéniables pour l'apprentissage des mathématiques, les questions d'instrumentation par les utilisateurs, qu'ils soient élèves ou enseignants, n'allaient pas de soi. Du côté des élèves, les apprentissages dépendent fortement des situations qui leur sont proposées et du rôle qu'y jouent les technologies. Selon ce rôle, les instruments qu'ils construisent ne sont pas toujours des instruments mathématiques et n'entraînent pas nécessairement les apprentissages voulus. Du côté des enseignants, les usages développés sont soit trop peu répandus, soit peu performants.

Une des hypothèses implicites dans les travaux précédents sur les EIAH est qu'ils embarquent une partie de la réalité à modéliser : phénomènes physiques, objets, connaissances, voire experts. Une fois cette réalité inscrite dans la machine, l'étude se concentre sur l'interaction entre l'élève et l'environnement pour identifier les conditions et caractéristiques favorables à l'apprentissage. L'incorporation du monde extérieur dans l'environnement informatique n'est plus vraiment la conception actuelle du rôle donné à la technologie. L'émergence des réseaux, de la communication via les technologies et du paradigme des ressources amène plutôt à considérer la technologie comme pourvoyeuse d'un artefact parmi d'autres, jouant de multiples fonctions, dans un système complexe. Cependant, toutes les pistes qu'ouvre ce changement de point de vue sur le rapport entre technologie et monde physique n'ont pas été explorées.

Parmi les multiples ressources utilisables pour apprendre et enseigner les mathématiques, il y a les objets matériels qui pourraient entretenir avec la technologie un lien plus serré qu'une simple juxtaposition ou succession. Les travaux du projet MAGI, dont certains scénarios étaient basés sur la combinaison de différents environnements instrumentés pour la résolution de la même tâche de construction de figures, ont initié l'étude de la complémentarité des processus d'instrumentation d'un environnement à l'autre. Pour Rolet (2003) et sur le site MAGESI¹³, « *selon les instruments fournis, les élèves peuvent être confrontés à des aspects différents des objets et des relations géométriques* ». Et pour Hoyles et Noss (1996), ce sont les connexions faites entre des situations ou bien entre des instruments différents qui permettent à la connaissance mathématique de se construire. Nous proposons d'étudier ces processus dans le cas d'un duo d'artefacts tangible et numérique, choisi comme représentant simplifié des systèmes d'artefacts

¹³ <http://magesi.ens-lyon.fr/seance.php?Rub=2&Id=16>

complexes, dont les artefacts numériques, avec lesquels les élèves interagissent habituellement.

En définissant à la suite de Brousseau (1998) l'apprentissage comme l'évolution du système élève-milieu, le duo d'artefacts doit permettre la constitution d'une succession de milieux et une évolution des variables didactiques de la situation qui provoquent l'apprentissage. L'approche instrumentale et la médiation sémiotique complètent les outils théoriques pour élaborer une modélisation des duos d'artefacts qui soit utilisable pour concevoir ces duos puis en étudier les usages, par les élèves et par les enseignants.

Au point 1, différentes perspectives didactiques pour considérer le rapport entre environnement informatique et monde extérieur sont passées en revue pour éclairer les rapports possibles entre tangible et numérique. Les travaux sur les simulations, les animations ou les manipulés virtuels¹⁴ ont comme point commun de numériser une partie de la réalité externe pour l'embarquer dans l'environnement informatique. Ils relèvent d'une transposition informatique (Balacheff, 1994) du monde externe à l'intérieur de l'artefact numérique, cette transposition pouvant agir sur des objets, des phénomènes ou des connaissances.

Au point 2, nous élaborons un cadre théorique pour considérer la relation entre tangible et numérique en identifiant les différences et les continuités possibles et souhaitables entre les deux types d'artefacts. Cela amène à concevoir les duos d'artefacts en tant que modèle simplifié pour l'étude de l'émergence des systèmes d'instruments. L'objectif est que le potentiel du duo d'artefacts pour l'apprentissage soit plus important que les potentiels des deux artefacts considérés séparément.

Au point 3, l'exemplaire de duo constitué par la pascaline et la e-pascaline pour l'apprentissage de la numération et du calcul est présenté. Il est développé selon les trois axes de recherche que sont la conception du duo, les apprentissages des élèves et les processus d'appropriation et de développement professionnel des enseignants.

1. DIFFÉRENTES PERSPECTIVES POUR CONSIDÉRER LE RAPPORT ENTRE MONDE PHYSIQUE ET ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE POUR L'APPRENTISSAGE

Le rôle fondamental de l'activité réelle dans le monde tangible pour l'apprentissage des mathématiques (Lakoff & Nunez, 2000) est connu de la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques et fait l'objet d'un nombre croissant de travaux depuis les années 2000 (Nemirovsky et al., 2004), (Pinet & Gentaz, 2008), (Edwards et al., 2009), (Artigue et al., 2013). Pourtant, en didactique, les relations entre objets physiques du monde matériel et technologie numérique ont été peu étudiées en tant que telles, pour ce qu'elles permettaient aux élèves d'apprendre en mathématiques. C'est la relation entre environnement informatique et connaissance ou situation d'apprentissage qui a été l'enjeu des travaux menés dans le champ des EIAH, en particulier à propos de la géométrie dynamique. Les travaux de Balacheff (1994) sur la transposition didactique traitent de cette relation entre connaissance et technologie numérique. En revanche,

¹⁴ Je propose de traduire l'anglais « virtual manipulatives » par « manipulés virtuels ». Cela permet également de désigner par l'expression « manipulés tangibles » ou « manipulés concrets » le matériel pédagogique dont une des principales propriétés est de permettre la prise en main.

d'autres domaines de recherche sur les technologies pour l'apprentissage font plus explicitement référence au monde matériel pour caractériser la technologie utilisée et ses apports ou ses inconvénients pour l'apprentissage. C'est le cas des travaux sur les animations et les simulations (Lowe & Schnotz, 2008), lorsqu'elles font référence à des phénomènes ou objets physiques, géologiques, mécaniques, biologiques par exemple et des travaux sur les manipulés virtuels (P. Moyer-Packenham, 2016) qui renvoient à toutes les applications informatisées qui permettent à l'utilisateur d'interagir avec des représentations dynamiques d'objets réels.

Nous avons donc retenu quelques travaux sur le rapport entre monde physique et monde informatisé, sur les animations et les simulations et sur les manipulés virtuels pour pouvoir situer notre proposition pour la construction d'un duo d'artefacts tangible et numérique. Cette revue n'est pas exhaustive mais elle permet d'identifier certains principes à retenir ainsi que les limites déjà connues concernant les EIAH.

1.1. Objets et monde extérieur dans les EIAH

1.1.1. *L'environnement informatique comme intermédiaire entre le tangible et le numérique*

Il y a plus de 30 ans Turkle et Papert (1992) ont étudié le rapport entre numérique, incarné par l'ordinateur, et le tangible à travers les différentes approches de la programmation observées chez des apprentis programmeur, tant au niveau primaire qu'universitaire. Ils montrent comment le bricolage, en référence à Levi-Strauss, et la proximité avec les objets sont les caractéristiques d'une approche de la programmation qui se distingue des approches plus conventionnelles, basées sur le formalisme et l'abstraction, mais qui est tout aussi valide et recèle de tout autant d'expertise. Ce qui est intéressant dans la vision de Turkle et Papert est le rôle qu'ils attribuent à l'ordinateur, l'environnement informatique de l'époque : « *il a la capacité de rendre l'abstrait concret* »¹⁵ (Turkle & Papert, 1992, p. 4).

Ce rapport au concret, qui doit être revalorisé (déclaration explicite dans le titre de l'article¹⁶), déclaré comme étant crucial pour les apprentissages, est au centre du travail mené par Papert avec les ordinateurs. Il l'explique en partant de l'analogie avec du matériel concret, en l'occurrence des engrenages avec lesquels il a aimé jouer enfant :

*« L'engrenage peut être utilisé pour illustrer de nombreuses idées mathématiques « avancées », telles que les groupes ou le mouvement relatif. Mais il fait plus que cela. De même qu'il se connecte avec la connaissance formelle des mathématiques, il se connecte avec la « connaissance corporelle », le schéma sensori-moteur d'un enfant. Tu peux être l'engrenage, tu peux comprendre comment il tourne en te projetant à sa place et en tournant avec. C'est la double relation – à la fois abstraite et sensorielle – qui donne à l'engrenage la capacité d'apporter à l'esprit la puissance des mathématiques »*¹⁷. (Papert, 1980, p. XX).

¹⁵ « *The computer stands betwixt and between the world of formal systems and physical things; it has the ability to make the abstract concrete.* » (Turkle & Papert, 1992, p. 4)

¹⁶ « *Epistemological Pluralism and the Revaluation of the Concrete* »

¹⁷ Notre traduction de « *The gear can be used to illustrate many powerful "advanced" mathematical ideas, such as groups or relative motion. But it does more than this. As well as connecting with the formal knowledge of mathematics, it also*

Papert veut que les ordinateurs jouent pour les enfants le rôle que les engrenages ont eu pour lui : le rôle d'un modèle sensori-moteur, connectant l'abstrait et le sensoriel et permettant d'aborder et traiter les connaissances mathématiques : « *transformer les ordinateurs en instruments suffisamment flexibles pour que de nombreux enfants puissent créer pour eux-mêmes quelque chose d'analogue à ce que les engrenages ont été pour moi* »¹⁸ (op. cit., p. XXI).

Avec Papert, il faut reconnaître le caractère intermédiaire, voire indécidable, de l'environnement informatique, entre le monde formel et le monde physique, traitant des systèmes logiques et abstraits tout en étant tangible et concret (Turkle & Papert, 1992). Mais une telle conception amène à considérer l'ordinateur comme un tout suffisant, embarquant et généralisant les propriétés des artefacts matériels. Cela peut conduire à vouloir substituer l'environnement informatique aux artefacts matériels, comme Papert le propose pour les engrenages. Une autre voie que nous proposons d'étudier est de conserver les deux et de les rendre complémentaires.

1.1.2. *La cognition incarnée et l'apprentissage des mathématiques*

Cette attention de Papert au rôle du tangible et de l'action sur les artefacts matériels est présente dans d'autres travaux.

Martin et Schwartz (2005) ont construit une théorie de l'apprentissage, « *Physically Distributed Learning* » qui prend en compte l'organisation des interactions tangibles avec le monde physique dans l'apprentissage, en particulier dans le domaine des fractions. Ils ont traité une propriété particulière des représentations physiques qui est que l'information peut être manipulée spatialement grâce aux actions physiques. Pour Uttal et al. (1997)¹⁹, l'utilisation de matériel peut masquer l'apprentissage visé dans la mesure où il demande aux élèves de gérer simultanément deux processus de représentation, celui du concept visé et celui véhiculé par le matériel. Mais une telle remarque n'est valable que si l'on considère qu'il est possible de manipuler un concept mathématique directement. Or, tout concept mathématique n'est appréhendé que par l'intermédiaire de représentations, exprimées avec différents systèmes sémiotiques (Duval, 1995). Aucune de ces représentations ne rend compte à elle seule de toutes les propriétés du concept et chacune a également des propriétés propres qui diffèrent de celles du concept visé. C'est l'accès de l'apprenant aux propriétés d'un concept à travers ses interactions avec différentes représentations que nous cherchons à mieux organiser et contrôler avec le duo d'artefacts. Nous simplifions l'analyse de la situation d'apprentissage en ne retenant que deux systèmes de représentations, aux propriétés bien différenciées : un système matériel dans un artefact physique et un système informatique dans un artefact numérique. Cette idée de multi-représentations, abondamment travaillée dans les environnements informatiques (Ainsworth, 1999), est étendue à la combinaison de représentations matérielles et de représentations numériques.

connects with the "body knowledge," the sensorimotor schemata of a child. You can be the gear, you can understand how it turns by projecting yourself into its place and turning with it. It is this double relationship – both abstract and sensory – that gives the gear the power to carry powerful mathematics into the mind. »¹⁷. (Papert, 1980, p. XX)

¹⁸ Notre traduction de « ... to turn computers into instruments flexible enough so that many children can each create for themselves something like what the gears were for me. » (Papert, 1980, p. XXI)

¹⁹ Notre traduction de « Materials may hinder learning by requiring children to process two representations simultaneously : target concept and the object itself. »

Toutefois, la complémentarité des artefacts tangibles et numériques du duo, n'est pas restreinte à la question des représentations utilisées. Il s'agit aussi de combiner les environnements du point de vue des propriétés mathématiques manipulables.

Dans cette perspective, l'artefact numérique peut présenter des évolutions par rapport à l'artefact tangible, lorsque celui-ci étant déjà disponible. En donnant aux élèves les moyens de dépasser les limites de la manipulation physique, l'environnement informatique leur permet d'identifier des propriétés mathématiques parfois cachées dans le comportement du matériel ou complètement absentes. Pour Bruner (1966), les situations d'apprentissage doivent suivre la même trajectoire que le développement intellectuel et s'appuyer sur trois modes de représentation du savoir, passant du mode enactif basé sur des représentations tangibles permettant l'action perceptivo-motrice aux représentations iconiques pour terminer avec les représentations symboliques. Un duo d'artefacts permet d'offrir aux élèves un environnement et une suite de situations qui suivent la même évolution, contribuant à l'effacement des propriétés concrètes au profit des propriétés mathématiques (Fyfe, McNeil, Son, & Goldstone, 2014).

Britt-Mari Barth (1985) met en évidence, dans les travaux de Bruner, l'idée du conflit entre les modes de représentation source de l'apprentissage. Ainsi, le duo d'artefacts peut-il être conçu non seulement pour créer une continuité d'un artefact à l'autre, mais aussi pour provoquer les ruptures nécessaires à une nouvelle adaptation. Dans cet objectif, l'analyse du savoir mathématique et des limites de l'artefact tangible permet de choisir les caractéristiques de l'artefact numérique.

1.1.3. La validité épistémique de l'interaction élève-dispositif numérique

Balacheff (1994) questionne la relation entre monde réel et environnement informatique à partir du concept de transposition informatique et de fidélité épistémique qu'il reprend de Wenger (1987). La fidélité est utilisée en intelligence artificielle pour décrire le degré auquel une simulation numérique correspond au monde réel. Burton, cité par Balacheff, distingue plusieurs dimensions selon lesquelles la fidélité peut être évaluée : fidélité physique (relative au ressenti), fidélité d'affichage (relative à la vue), fidélité mécanique (relative au comportement) et fidélité conceptuelle (relative à la pensée). La fidélité épistémique chez Wenger mesure l'écart entre la réalisation physique d'une représentation et la connaissance de référence. Ainsi, pour ces chercheurs, ce qui est pris en référence dans le monde réel n'est pas forcément un objet ou un mécanisme, mais les connaissances. Les micromondes sont construits en référence à un champ de connaissances (Healy & Kynigos, 2010), comme la géométrie dynamique en référence à la géométrie euclidienne ou bien les éditeurs algébriques tels que Aplusix en référence au calcul algébrique élémentaire (Nicaud, Bouhineau, & Chaachoua, 2004).

Cependant, chez Wenger, la fidélité par rapport à la connaissance de référence repose sur la possibilité d'accéder à cette connaissance de référence, indépendamment du sujet. Or, ce n'est pas la modélisation de la connaissance retenue en didactique. La connaissance est une propriété d'équilibre du système sujet-milieu (Brousseau, 1998). La connaissance ne peut pas être caractérisée indépendamment d'un sujet, d'un apprenant. C'est donc le système, incluant l'apprenant qui doit être modélisé. Balacheff utilise la transposition informatique pour désigner le « *travail sur la connaissance qui en permet une représentation symbolique et la mise en œuvre de cette représentation par un dispositif*

informatique, qu'il s'agisse ensuite de « montrer » la connaissance ou de la manipuler » (Balacheff, 1994, p. 14).

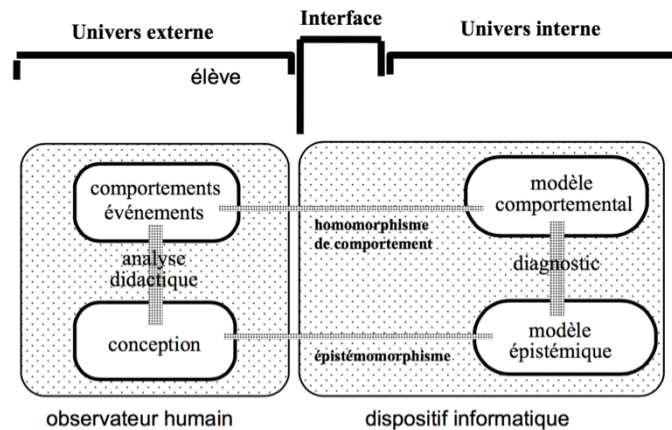


Figure 14. Avec ce schéma, Balacheff illustre la séparation entre le monde réel (univers externe) et l'environnement informatique (univers interne). C'est bien le rapport entre le sujet apprenant « élève » et le dispositif informatique qui est modélisé, mettant en évidence les analogies entre le monde réel et l'environnement informatique (op. cit., 1994, p. 24).

Sa problématisation est bien celle du rapport entre univers externe, non numérique, et univers interne, numérique, mais du point de vue de la prise en compte de l'interaction de l'élève avec le système et des conceptions de l'élève (Figure 14). Dans cette problématique, la fidélité épistémique est recherchée et non les autres types de fidélités. Plus précisément, le domaine de validité épistémique de l'environnement informatique est défini par la validité des interactions entre le sujet et l'environnement du point de vue des apprentissages. Pour déterminer la validité épistémique d'un environnement informatique, Balacheff propose de commencer par étudier les caractéristiques de l'environnement qui auront des conséquences sur les connaissances construites par l'élève lors de son interaction avec le système :

« ... le dispositif informatique va prendre sa place dans un jeu d'interaction impliquant d'autres dispositifs matériels et des acteurs sociaux, professeurs et élèves sous les contraintes du système didactique » (Balacheff, 1994, p. 12).

Balacheff propose alors de déterminer l'ensemble des problèmes que l'environnement permet de traiter et de caractériser l'interface du point de vue du comportement des objets et des registres sémiotiques.

Ces pistes ont ensuite été explorées avec succès. Par exemple, dans le domaine de la démonstration en géométrie, le projet Baghera a démontré l'intérêt d'une modélisation didactique de la connaissance associée à un système multi-agents pour la conception et la réalisation d'un dispositif d'apprentissage (Pesty, Webber, & Balacheff, 2003) (Soury-Lavergne et al., 2003) (Trgalova & Soury-Lavergne, 2003). La notion de multi-agents a été utilisée à deux niveaux dans le projet. A un premier niveau, l'environnement d'apprentissage de l'élève a été conçu comme un système de plusieurs agents en interaction, humains ou pas, dotés de compétences locales et complémentaires pour accompagner le processus d'apprentissage. Au second niveau, l'architecture du système informatique est elle-même un système multi-agents, dont le fonctionnement basé sur le concept d'émergence permet le diagnostic des connaissances d'un apprenant. Avec l'utilisation du cadre théorique cK ϵ (Balacheff & Margolinas, 2005), une des raisons de la

réussite du système multi-agents Baghera a été la possibilité d'intégrer le micromonde de géométrie dynamique Cabri-géomètre pour l'interaction avec l'élève, avec d'autres composantes telles un système de déduction automatique et un éditeur d'énoncés géométriques. Le dispositif Baghera n'a pas été utilisé pour évaluer les apprentissages des élèves. Et la possibilité de réaliser de tels environnements pour d'autres domaines mathématiques est dépendante de la disponibilité de micromondes traitant de ces autres domaines mathématiques. Ces systèmes sont très spécialisés si l'on considère les apprentissages qu'ils permettent et finalement peu adaptés à l'enseignement primaire.

Cependant, ce qui peut être retenu de cette problématisation de la relation entre univers externe et univers interne, c'est le paradigme didactique sur la connaissance. L'interaction entre le sujet apprenant et le milieu définit la connaissance (Vergnaud, 1990). Le milieu peut inclure des entités matérielles et des entités numériques, comme prévu dans Baghera. A l'époque de ces travaux et dans les années qui ont suivi, l'attention a été portée sur le développement des environnements informatiques. Mais maintenant que les possibilités logicielles se sont largement développées, qu'il existe de nombreux logiciels et applications et en particulier des logiciels éditeurs, comme Cabri Elem (§ 3.1.3 p. 68), il est possible de concevoir de nouveaux EIAH questionnant l'articulation entre univers réel et univers informatisé.

1.2. Animations interactives et simulations de machines mathématiques

1.2.1. Absence d'incertitude et de nécessité d'anticipation chez l'utilisateur d'animations interactives

Dans d'autres domaines que la didactique des mathématiques, plusieurs travaux ont également étudié la relation entre monde réel et environnement informatisé. Lowe et Schnotz (2008) ont étudié le potentiel pour l'apprentissage des animations interactives qui modélisent le fonctionnement d'objets matériels ou de phénomènes physiques à partir de schémas et graphiques dont le défilement est contrôlé par l'utilisateur. Ils ont mis en évidence que les apprenants construisent des relations complexes entre les représentations externes, comme les textes et les graphiques présentés dans les animations, et leurs représentations internes, mentales. Ils précisent que notre compréhension actuelle des relations entre les différents types de représentations sur lesquelles les apprenants peuvent agir et l'activité cognitive de ces apprenants, donc l'apprentissage qui en résulte, ne permet pas d'affirmer que leur usage est bénéfique. La conclusion de Lowe et Schnotz est plutôt une remise en cause du principe largement répandu qu'une animation interactive entraîne toujours une amélioration et une augmentation du traitement cognitif de la situation par l'apprenant. Ils indiquent que les aspects sémiotiques et sensoriels sont essentiels pour une animation à but éducatif. En conséquence, ces aspects doivent être pris en compte en priorité par rapport aux aspects techniques lors du processus de conception.

Boucheix (2008) (2011) va plus loin en affirmant que si les animations interactives ne sont pas toujours positives pour l'apprentissage, elles peuvent même être néfastes pour la compréhension de processus dynamiques. Il insiste sur le rôle critique joué par le contrôle de l'apprenant sur le déroulement de l'animation. Lorsqu'il existe, ce contrôle de

l'animation par l'utilisateur peut amener ce dernier à centrer son attention sur les phénomènes les plus visibles au détriment des phénomènes moins perceptibles mais plus pertinents pour la compréhension du processus. Cela confirme le principe de Balacheff relatif à la primauté de la validité épistémique de l'interaction sur d'autres caractéristiques de cette interaction. De plus, si l'utilisateur agit sur l'animation sans anticiper, sans chercher à obtenir un effet, ce n'est pas efficace pour l'apprentissage (Bétrancourt, 2005).

Ce constat est identique à celui fait à propos de certains usages de la géométrie dynamique (Partie 1. § 3.1 p. 27). Plus généralement, en ce qui concerne l'apprentissage des mathématiques, la possibilité pour l'élève de faire un choix parmi plusieurs possibilités d'actions, c'est-à-dire de choisir une stratégie parmi d'autres, est une composante nécessaire de la situation d'apprentissage dans la théorie des situations (Brousseau, 1998) (Bessot, 2003). Ceci explique en partie pourquoi les animations, qui contraignent trop l'action et les choix des utilisateurs et ne nécessitent pas d'anticipation, ne sont pas les plus efficaces pour l'apprentissage.

Ainsi, dans la perspective d'identifier les relations possibles entre réel et numérique et le rôle du numérique pour l'apprentissage, une animation, dont la succession des étapes est définie *a priori* par le concepteur, ne sera pas recherchée en complément du tangible dans un duo d'artefacts.

1.2.2. Simulations numériques de machines mathématiques et finalité didactique

Bétrancourt (2005) fait la distinction entre les simulations et les animations par le type d'interactivité offerte. Avec les animations, l'interaction est réduite au contrôle par l'utilisateur du déroulement d'étapes prédéfinies. Avec les simulations, le comportement est interactif, l'utilisateur pouvant faire plusieurs choix (« interactive behaviour », *op. cit.* p. 291).

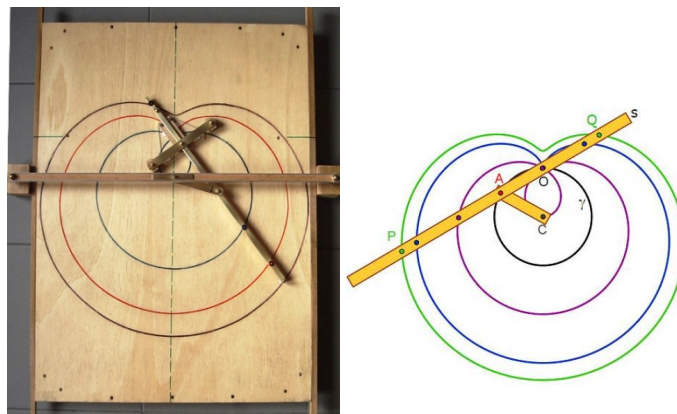


Figure 15. A gauche, machine du laboratoire des machines mathématiques pour tracer le limaçon de Pascal (du nom d'Etienne Pascal, mathématicien amateur et père de Blaise Pascal). A droite, image écran d'une simulation réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra, <https://www.geogebra.org/m/HWkn5fx4>.

Bartolini-Bussi et Maschietto (2006), du laboratoire italien des machines mathématiques (Université de Modena et Reggio Emilia), ont étudié l'utilisation pédagogique de machines mathématiques historiques et d'animations et simulations relatives à ces

machines. Le MMLab²⁰ rassemble des machines mathématiques pour le dessin en perspective, les transformations géométriques et le tracé de courbes. Le site web du laboratoire présente une simulation numérique de chacune des machines, réalisée avec la géométrie dynamique ou avec une application Java. Bartolini-Bussi et Maschietto ont étudié quelles connaissances mathématiques les élèves pouvaient construire à partir d'un enseignement expérimental basé sur l'utilisation de ces machines, en particulier lorsque les élèves avaient pu utiliser les machines mais aussi visionner des vidéos de démonstration (sans possibilité de contrôle). Leur conclusion rejoint celle Lowe et Schnotz (2008): les animations participent à l'apprentissage, dans la mesure où les significations mathématiques associées aux phénomènes présentés dans l'animation ou la vidéo sont explicitement travaillées.

Cet usage est assez différent de celui de nombreuses simulations d'outils mathématiques, en particulier de machines historiques, qui sont présentées par les musées ou les laboratoires de mathématiques. Ces simulations numériques, générées avec les logiciels professionnels de réalité virtuelle, privilégient la fidélité d'affichage et la fidélité de comportement et sont présentées sans tâche associée, si ce n'est d'explorer et de comprendre le fonctionnement de la machine simulée. C'est le cas par exemple des ressources du site web ix-quadrat²¹ du Zentrums Mathematik de Munich en Allemagne. Ce site présente une simulation de l'Addiator Duplex, machine arithmétique mécanique pour le calcul des sommes et des différences (Figure 16). La façade de l'outil est reproduite ainsi que le stylet et la barre de réinitialisation. C'est une simulation intéressante qui permet, en suivant les instructions, de reproduire la technique de calcul de façon analogue à celle utilisée avec la machine.

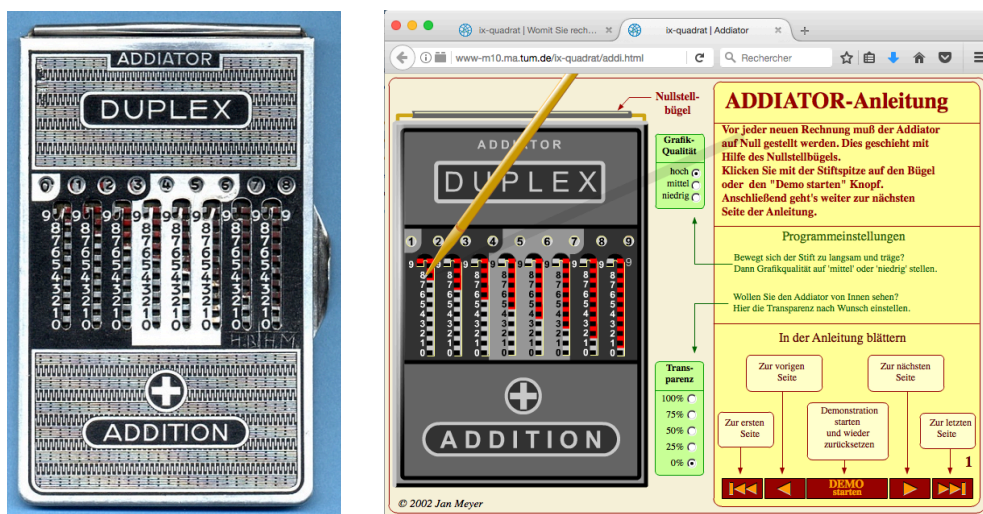


Figure 16. A gauche photo d'un Addiator DUPLEX (sans le stylet), à droite simulation en ligne de l'Addiator réalisée par le Zentrums Mathematik de Munich. <http://www-m10.ma.tum.de/ix-quadrat>

Une simulation numérique similaire existe pour la Pascaline de Blaise Pascal²². Elle a été conçue par Bascoul²³ à l'Institut Français de Mécanique Avancée de l'Université Blaise

²⁰ <http://www.mmlab.unimore.it/site/home.html>

²¹ <http://www-m10.ma.tum.de/ix-quadrat>

²² Blaise Pascal (1623-1662) construit sa célèbre machine, surnommée « Pascaline », pour aider son père, alors collecteur des impôts. Cette machine effectuait des opérations arithmétiques grâce au mouvement de roues dentées, analogues à celles des horloges de cette époque. À partir de l'introduction de la Pascaline, Blaise Pascal fut considéré comme l'inventeur de la première machine à calculer. Une lettre de présentation et de description de sa machine a été rédigée par Blaise Pascal à destination de Monseigneur le Chancelier (Pascal B. 1645) pour attirer de potentiels

Pascal de Clermont Ferrand. Elle permet d'explorer le mécanisme de la machine et de l'utiliser pour effectuer des calculs. Cependant, la simulation ne pose aucune question à l'utilisateur, n'adresse aucun problème à résoudre, ce qui limite sa portée didactique. Par exemple, la question de la réalisation des soustractions par complément à 9 n'est pas abordée.



Figure 17. A droite, machine de Marguerite Périer, exemplaire historique de la Pascaline du Musée Lecoq Clermont-Ferrand. Au milieu, image écran de la simulation de la Pascaline réalisée par C. Bascoul IFMA, utilisable pour faire les calculs. A droite, la simulation du mécanisme de la Pascaline.

Parfois, la machine mécanique historique n'a pas existé initialement de manière fonctionnelle, comme le constructeur universel d'équations décrit dans l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert (Figure 18 à gauche). Des simulations informatiques ont pu être construites à partir de sa description, avec un objectif déclaré d'utilisation dans l'enseignement (Carral & Cuppens, 1993) (Tournes, 2003) (Figure 18 à droite). Parallèlement, un constructeur universel a été réalisé de façon fonctionnelle (R. Bellemain, 1994, collection privée Laborde, Figure 18 au centre). Mais les usages pour l'apprentissage ne sont pas attestés.



Figure 18. Illustration du constructeur universel d'équations de Segner dans l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert (à gauche). Au centre, la machine fonctionnelle jusqu'au degré 3 construite en 1994 par R. Bellemain (collection privée). A droite, une simulation informatique réalisée avec Cabri-géomètre (Carral & Cuppens, 1993).

Dans ces derniers exemples, l'existence de simulations numériques d'artefacts tangibles pour les mathématiques est justifiée par la difficulté d'accès à la machine mécanique, indisponible ou trop précieuse pour être utilisée. Mais, elle n'est pas souvent associée à une utilisation pédagogique, au-delà de la compréhension du fonctionnement de la machine mécanique. La conception de situations didactiques utilisant des machines mathématiques et des simulations, comme initié par le MMLab, reste à poursuivre.

utilisateurs et lui demander de soutenir la diffusion de son invention. Il est intéressant de noter que cette lettre ne révèle en rien la façon de se servir de la machine et n'en souligne que les avantages : « tu me sauras gré du soin que j'ai pris pour faire que toutes les opérations qui par les précédentes méthodes sont pénibles, composées, longues et peu certaines, deviennent faciles, simples promptes et assurées. » (Pascal B. 1645, p. 3).

²³ <http://christophe.bascoul.free.fr/spip.php?article20>

1.3. Virtual manipulatives ou « manipulés virtuels »

C'est finalement à propos des mathématiques à l'école primaire que la question de la comparaison entre environnement matériel et environnement informatique a été traitée plus directement (Ladel & Kortenkamp, 2015) (Sarama & Clements, 2016). Resnick et ses collègues (1998) définissent les manipulés virtuels à partir des objets et jouets appréciés par les enfants qui seraient dotés des propriétés de calcul et de communication des environnements informatiques. Leur point de départ n'est donc pas l'environnement informatique mais bien les objets du monde concret, dont les propriétés seraient augmentées par la numérisation. Plus tard, Moyer-Packenham et ses collègues (2002) ont proposé une caractérisation des manipulés virtuels, qui prend en compte prioritairement le potentiel pour l'apprentissage mathématique visé et s'applique aux représentations informatisées d'objets, dont la manipulation à l'écran permet de représenter un concept, une relation ou une procédure mathématique. Moyer-Packenham (2016), dans une actualisation de cette définition, précise également que ce ne sont pas les représentations qui comptent mais bien leur comportement dynamique dans l'interaction, issu des choix de développement par les auteurs de l'environnement. La cohérence du comportement dynamique de la représentation avec le savoir mathématique étant cruciale, Moyer-Packenham et Bolyard précisent qu'un manipulé virtuel est « *une représentation d'un objet dynamique, incluant toutes les fonctionnalités programmées qui lui permettent d'être manipulée; ou qui lui permettent d'être dynamique; ou qui lui permettent d'être interactive* »²⁴ (2016, p. 9). Cinq catégories de manipulés virtuels sont identifiées, suivant les types de représentations disponibles pour l'utilisateur, représentation unique ou multi-représentations mises en relation, présence d'un guidage, d'un tutoriel ou de problème à résoudre dans l'environnement, intégration dans un jeu et possibilité pour l'utilisateur de réaliser des simulations. Cette définition et la classification proposée n'interrogent pas le lien avec les manipulations d'objets réels. En revanche, elles mettent l'accent sur le comportement dans l'interaction avec l'utilisateur.

Dans le domaine des nombres et du calcul, Manches *et al.* (2010) ont comparé la résolution de problèmes avec du matériel physique et avec du matériel numérique chez des élèves de 4 à 8 ans. Leur objectif n'était pas seulement de choisir entre physique et numérique pour les matériels pédagogiques à proposer aux élèves, mais aussi de concevoir de nouveaux environnements d'apprentissages prenant en compte les apports des différents contextes. Pour cela, ils ont étudié la relation entre les contraintes sur l'action des élèves dans chaque contexte et les stratégies développées.

Leur étude a porté sur la recherche par les élèves de toutes les décompositions d'un nombre, proposées dans trois contextes différents : l'un sans aucun matériel, un autre avec du matériel tangible et un troisième avec un environnement numérique. Les contraintes sur l'action des élèves ont été soit communiquées oralement soit véhiculées par le contexte. Les stratégies de résolution des élèves se sont révélées très différentes, dépendant des conditions et contraintes attachées à chaque contexte et en particulier

²⁴ Notre traduction de : « a representation of a dynamic object, including all the programmable features that allow it to be manipulated; or that allow it to be dynamic; or that allow it to be interactive. » (Moyer-Packenham & Bolyard, 2016, p. 9)

des possibilités d'action. Par exemple, une stratégie de résolution basée sur la commutativité à partir de la première décomposition obtenue est apparue dans le contexte physique car il était possible de grouper et d'attraper plusieurs objets pour les bouger simultanément et les échanger. Cette stratégie a été abandonnée dans le contexte numérique à cause de la contrainte de ne déplacer qu'un objet à la fois et de la nécessité d'un contrôle moteur fin dans l'utilisation de la souris. Dans le contexte numérique en revanche, la contrainte d'un seul objet déplacé à la fois a favorisé une autre stratégie, celle par compensation. Ainsi les possibilités d'actions dans l'un ou l'autre des contextes agissent sur les stratégies. Cependant, toutes les actions possibles dans l'un ou l'autre contexte n'ont pas des conséquences observables et mesurables sur les stratégies. Par exemple, dans le contexte physique, le comptage a été favorisé par la possibilité de toucher les objets et de les organiser spatialement sur la table, qui offrait dans les conditions de l'expérience un espace plus large que l'écran. Mais cela n'a pas permis d'observer une différence de réussite ou de stratégie dans la tâche proposée. Cette étude comparative entre les environnements physiques et numériques, du point de vue des propriétés des représentations qui sont manipulées, n'a pas conclu qu'un environnement était préférable à l'autre. Mais elle a montré que les actions possibles, notamment à l'interface, orientent les idées développées par les élèves. Les auteurs concluent que les environnements, qu'ils soient matériels ou numériques, doivent donc être conçus en contrôlant les contraintes sur les manipulations possibles et leur cohérence avec les stratégies en vue de l'apprentissage visé.

Cette conclusion rejoint celle de Balacheff, sur l'importance des possibilités d'actions de l'élève dans le développement des stratégies, que ce soit dans l'un ou l'autre des contextes. Ces travaux mettent en évidence la complémentarité entre les environnements du point de vue de l'action, ce qui justifie de les considérer non pas les uns à la place des autres mais de façon complémentaire dans les situations d'apprentissage.

1.4. Conclusion, recherche de complémentarité plutôt que de fidélité entre environnement numérique et artefact matériel

Il apparaît que, dans les travaux en didactique des mathématiques sur les EIAH, le monde réel et matériel a été pris en compte mais principalement comme univers à embarquer dans l'environnement informatique. De ce point de vue, les questions de fidélité par rapport à la référence externe ont évolué vers la prise en compte de la connaissance et de l'interaction entre l'apprenant et l'environnement. La question de la combinaison des deux types d'environnements n'est la plupart du temps pas problématisée dans ces travaux. Lorsqu'elle l'est, c'est du point de vue de la comparaison et rarement de la complémentarité.

Les travaux sur les EIAH et les manipulés virtuels sont utiles pour traiter les questions relatives à la conception de l'artefact numérique dans la perspective qu'il soit associé à un artefact tangible en vue de l'apprentissage. L'important n'est pas la fidélité de l'artefact numérique aux caractéristiques techniques ou à l'apparence de l'objet physique, mais la validité épistémique de l'interaction qu'il génère avec l'utilisateur.

Par ailleurs, puisqu'il s'agit de concevoir un système d'instruments pour l'apprentissage, la théorie des situations invite à modéliser l'apprentissage par l'interaction de l'apprenant avec un milieu. Nous devons caractériser ce que l'artefact tangible et l'artefact numérique associés vont permettre de créer comme milieu. Ainsi, avec l'artefact numérique, nous n'allons pas chercher à concevoir une animation dans laquelle l'utilisateur n'a qu'un choix réduit de possibilités d'interactions mais plutôt une simulation numérique qui offre toute une palette de possibilités d'actions et de contrôles de la part de l'utilisateur, complémentaires à celles possibles avec l'artefact tangible. De ce point de vue, toutes les composantes matérielles et tous les comportements de l'artefact tangible n'ont pas besoin d'être simulés. L'implémentation ne concerne que les caractéristiques qui sont nécessaires à l'apprentissage, c'est-à-dire constitutives du milieu didactique. En conséquence, la conception d'un duo d'artefacts passe aussi par celle d'une situation didactique qui rend nécessaire le recours aux deux types d'artefacts.

Concevoir un duo d'artefacts, c'est concevoir une situation didactique qui associe un artefact tangible à un artefact numérique et rend les deux nécessaires et complémentaires pour la situation d'apprentissage.

L'enjeu est alors de montrer à quelles conditions un duo d'artefacts apporte plus à la situation didactique, du point de vue de l'apprentissage et de l'enseignement, que chaque artefact pris séparément. Pour cela, considérer le duo d'artefacts comme un système simplifié des systèmes d'instruments complexes utilisés dans les situations d'apprentissage est un outil de recherche. Et il s'avère que c'est en même temps un moyen concret de produire des outils pour le terrain.

2. PERSPECTIVES THÉORIQUES POUR LA CONCEPTION D'UN DUO D'ARTEFACTS ET L'ANALYSE DE SES USAGES

L'objectif de cette partie théorique est d'identifier *a priori* les caractéristiques d'un duo d'artefacts dans lequel l'artefact tangible et l'artefact numérique peuvent constituer les éléments d'un système d'instruments dont les propriétés pour l'apprentissage sont augmentées par rapport à l'utilisation séparée des deux artefacts.

Comme mise en évidence dans la première partie de ce mémoire, l'approche instrumentale pour étudier les artefacts numériques (Trouche, 2003), (Artigue, 2010) (Drijvers et al., 2010), dont la géométrie dynamique, a fourni un cadre théorique utile pour les recherches du domaine : elle a permis de formuler des questions, de mener des analyses et d'obtenir des résultats. Cette approche fournit également un cadre pour l'analyse de l'artefact tangible et de la façon dont son usage permet l'apprentissage. Elle apporte des informations pour concevoir un artefact numérique qui enrichisse l'usage de l'artefact tangible et renforce la complémentarité entre les deux au cours des genèses instrumentales.

La médiation sémiotique (M. G. Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) apporte un éclairage complémentaire sur les duos d'artefacts. Elle a également contribué à l'étude des artefacts numériques, comme à celle des machines mathématiques et autres artefacts tangibles. L'étude du point de vue des signes et des potentiels sémiotiques des deux

artefacts permet aussi d'identifier les complémentarités et la valeur ajoutée de chaque artefact dans le duo.

Au début de ce mémoire, nous avons proposé une définition élémentaire des duos d'artefacts, un artefact tangible et un artefact numérique associés, dont la complémentarité dans une situation didactique permet l'apprentissage. Nous allons travailler cette définition du point de vue de l'approche instrumentale, de la médiation sémiotique et de la théorie des situations pour identifier quelles peuvent en être les caractéristiques qui en font des systèmes d'instruments pour l'apprentissage et l'enseignement, appropriables et utilisables par les élèves et les enseignants.

2.1. Genèses instrumentales conjointes d'un système d'instruments à partir d'un duo d'artefacts

L'approche instrumentale (Rabardel, 1995) permet d'étudier les potentialités d'un artefact donné, qu'il soit tangible ou numérique, pour l'apprentissage. Cette approche s'appuie sur la distinction entre l'artefact (objet matériel ou abstrait produit par l'activité humaine) et l'instrument, entité mixte combinant une composante artefactuelle et une composante cognitive constituée de schèmes. Le processus de genèse instrumentale, concept clef de l'approche, décrit le processus par lequel un artefact, *a priori* disponible pour accomplir une tâche, devient l'instrument d'un sujet pour la réalisation de cette tâche. Lorsqu'un élève, ou sujet, doit utiliser un artefact pour réaliser une tâche, il élabore des premiers schèmes d'utilisation et donc initie une genèse instrumentale relative à cet artefact. Ces schèmes caractérisent l'apprentissage et la construction de connaissances qui résultent de l'utilisation de l'artefact (Vergnaud, 1990), (Trouche & Drijvers, 2010).

Cependant, un même artefact peut donner lieu à différentes genèses instrumentales, développant une diversité d'instruments, cette diversité étant liée à l'utilisateur, aux tâches associées et à l'institution dans laquelle ces tâches sont proposées, comme présenté dans le cas de la géométrie dynamique (Partie 1.2.1.1 p. 16).

L'artefact lui-même peut correspondre à une diversité d'objets matériels ou symboliques, ou à une partie seulement de ces objets. Pour mener une analyse basée sur l'approche instrumentale, une des décisions à prendre est de définir l'artefact considéré. Dans l'étude des duos d'artefacts, l'artefact sera donc double, avec une composante tangible et une composante numérique. Rabardel et Bourmaud (2003) ont souligné que les nouveaux instruments - outils et fonctionnalités - ne résultent pas d'une genèse instrumentale isolée mais que les instruments forment un système qui incorpore les instruments précédemment élaborés. Considérer un tel système est crucial mais finalement très complexe lorsque le chercheur veut concevoir les artefacts et analyser les apprentissages qui résultent de leur usage. Ainsi, réduire cette complexité à un duo d'artefacts en interaction, permettant de générer des genèses instrumentales interdépendantes est une perspective intéressante.

Notre objectif est donc de concevoir un duo dans lequel les genèses instrumentales relatives à chaque artefact s'enrichissent mutuellement. De ce point de vue, la reproduction la plus réaliste de l'artefact tangible dans l'artefact numérique, à supposer qu'elle soit possible, n'est pas un objectif. C'est l'imbrication des genèses instrumentales relatives à chaque artefact du duo qui est recherchée. La question est alors relative aux

moyens de les contrôler au moment de la conception du duo (ou de la conception de l'un des artefacts lorsque l'autre est donné). Nous avons considéré ces genèses du point de vue des processus d'instrumentation et des processus d'instrumentalisation, c'est-à-dire les schèmes qui se développent lors de l'usage du duo et les caractéristiques de l'artefact qui émergent dans les schèmes.

Dans les choix de conception de l'un des artefacts du duo étant donné l'autre, les questions à traiter sont :

- quels sont les schèmes issus de l'usage de l'un des artefacts qui doivent se développer pour assimiler de nouvelles situations et quels sont ceux qui doivent être réorganisés et modifiés dans l'interaction avec l'autre artefact ?
- quelles caractéristiques de l'un des artefacts doivent être reprises dans l'autre, pour réaliser une continuité favorable au développement conjoint des schèmes, et quelles caractéristiques doivent-elles être ignorées dans la conception de l'autre artefact pour nécessiter une réorganisation et une modification des schèmes ?

Nous voulons concevoir un duo d'artefacts de telle manière que le produit du développement des genèses instrumentales conjointes ait les caractéristiques d'un *système d'instruments* et ne soit pas uniquement la juxtaposition des deux instruments qui pourraient résulter de genèses autonomes. Bourmaud (2007) précise certaines caractéristiques des systèmes d'instruments et signale en particulier la dualité complémentarité et antagonisme : « *Un système est un ensemble de complémentarités et d'antagonismes entre les éléments, il va donc se jouer un équilibre au plus juste pour permettre leur organisation* » (op. cit., p. 65). Si l'on considère la seule *complémentarité* des deux artefacts au sein du duo, il n'y a pas nécessairement de valeur ajoutée aux deux artefacts utilisés successivement ou séparément du point de vue des instruments qui en résultent. En revanche, les antagonismes entre les artefacts du duo sont des caractéristiques qui peuvent permettre de générer un système d'instruments différent. Pour Bourmaud : « *Un système peut être, à l'inverse, moins que la somme des éléments qui le composent : c'est ici le concept de contraintes, i.e. les qualités ou propriétés inhibées par l'organisation de l'ensemble* » (op.cit, p. 65).

Les antagonismes dans le duo, au sens où certaines propriétés ou fonctionnalités de l'un des artefacts sont absentes ou inopérantes dans l'autre artefact, vont orienter et modifier le développement des schèmes lors du passage de l'un à l'autre. La création de contraintes, de situations auquel les schèmes doivent s'adapter peut s'avérer très utile pour l'apprentissage. Comme l'explique Rabardel, faciliter l'action n'est pas toujours le but en particulier en situation d'apprentissage : « *Dans une perspective formative, les critères peuvent être d'un tout autre ordre. Il peut, par exemple être souhaitable de ne pas rendre l'action plus aisée, mais au contraire de construire des contraintes sur cette action telles qu'elles conduisent le sujet à opérer les constructions cognitives que l'on souhaite lui voir élaborer.* » (Rabardel, 1995, p. 154).

Enfin, les deux artefacts peuvent être perçus comme un duo, si des éléments de continuité de l'un à l'autre existent. La continuité peut être créée par la présence d'éléments communs entre les deux artefacts. *La redondance* de certaines caractéristiques d'un artefact à l'autre produit la continuité. Si elle produit de la redondance dans le système d'instrument, alors elle assure également la robustesse et

l'adaptabilité du système d'instruments : « *La double caractéristique de la complémentarité et de la redondance des fonctions contribue selon nous simultanément à la robustesse du système et à la souplesse et l'adaptabilité de sa mobilisation en relation avec la variabilité des circonstances.* » (Bourmaud, 2007, p. 72).

En conclusion, nous retenons le principe suivant pour caractériser la valeur ajoutée d'un duo d'artefacts en tant que pouvant produire un système d'instruments potentiel :

- La valeur ajoutée du duo d'artefacts pour l'apprentissage résulte des complémentarités, des antagonismes et des redondances entre les deux artefacts du duo. La complémentarité, la redondance et les antagonismes favorisent les genèses instrumentales conjointes vers un possible système d'instruments.

Ce n'est donc pas la complémentarité entre tangible et numérique qui crée seule le duo d'artefacts, bien que cette complémentarité soit nécessaire pour l'utilité du duo. La redondance renforce également le développement de certains schèmes d'un artefact à l'autre et les antagonismes nécessitent des réorganisations et des modifications. Si ces mécanismes opèrent de façon cohérente avec les apprentissages mathématiques visés, un tel duo peut donner matière au développement d'un possible système d'instruments valide pour l'apprentissage et l'enseignement.

Les complémentarités, redondances et antagonismes des deux artefacts du duo sont donc retenus comme des caractéristiques importantes *a priori* pour que le duo d'artefacts puisse se développer en un système d'instruments pour apprendre et faire apprendre. Ils doivent être analysés dans les associations d'artefacts qui pourraient devenir des duos. Ils doivent être recherchés lors de la conception d'un duo car ils permettent de contrôler l'émergence des schèmes les plus significatifs du point de vue mathématique.

2.2. Potentiel sémiotique d'un duo d'artefacts

Du point de vue de l'approche instrumentale, la valeur ajoutée du duo d'artefacts, par rapport aux deux artefacts considérés séparément, résulte des genèses instrumentales conjointes et de leur cohérence avec les apprentissages mathématiques visés. Le cadre théorique de la médiation sémiotique (M. G. Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) permet de caractériser les processus qui démarrent lorsque qu'un élève utilise un artefact et qui aboutissent à l'apprentissage de concepts mathématiques choisis *a priori*. La médiation sémiotique est issue d'une perspective Vygotskienne sur le rôle de l'artefact dans l'activité humaine. Elle prend en compte le fait que les artefacts culturels embarquent des connaissances mathématiques reconnues.

Le potentiel sémiotique d'un artefact, c'est-à-dire l'identification des connaissances mathématiques, embarquées dans le fonctionnement de l'artefact et qui pourraient émerger des usages, est caractérisé par la combinaison de deux points de vue complémentaires : celui de l'utilisateur, élève, utilisant l'artefact et construisant des connaissances personnelles au cours de cet usage (ce qui est modélisé dans l'approche instrumentale) et celui de l'expert, enseignant, reconnaissant dans le fonctionnement de l'artefact des propriétés et connaissances mathématiques. Cette double relation sémiotique, les connaissances construites par l'utilisateur et la reconnaissance experte du mathématique dans l'artefact définit le potentiel sémiotique d'un artefact. Pour Mariotti

« mettre en évidence le potentiel sémiotique d'un artefact nécessite une fine analyse de l'artefact et de son utilisation, analyse qui inclut de multiples perspectives, dont une perspective épistémologique et cognitive mais aussi une perspective historique et didactique. Plus la description du potentiel sémiotique d'un artefact est riche, plus puissante sera la base pour la conception d'une séquence pédagogique centrée sur l'utilisation de cet artefact comme outil de médiation sémiotique. »²⁵ (2012, p. 30). Elle précise également que l'approche instrumentale fournit des outils d'analyse efficaces pour déterminer le potentiel sémiotique d'un artefact.

Le potentiel du duo d'artefacts résulte des potentiels sémiotiques des deux artefacts considérés séparément. Le potentiel sémiotique du duo est-il plus important que celui des deux artefacts considérés séparément ? Autrement dit, chacun des deux artefacts permet-il d'augmenter le potentiel sémiotique de l'autre artefact ? Notre hypothèse est que la valeur ajoutée du duo résulte des relations qu'il est possible d'établir entre les deux. L'existence de ces relations renforce et explicite les potentiels sémiotiques de chaque artefact. Dans l'interaction de l'élève avec l'un ou l'autre des artefacts, certaines interactions et rétroactions ont un potentiel sémiotique par rapport à l'apprentissage mathématique visé et d'autres n'ont pas de signification mathématique accessible à l'élève. Si d'un artefact à l'autre, les actions et rétroactions qui n'ont pas de potentiel sémiotique par rapport à l'apprentissage visé sont limitées et celles sur lesquelles les signes peuvent émerger sont renforcées et étendues, alors la valeur ajoutée du duo, du point de vue de la médiation sémiotique, pourrait être plus importante que celles des deux artefacts considérés séparément.

Lors de la conception des artefacts du duo, l'analyse du potentiel sémiotique s'appuie sur les usages des artefacts qui ont déjà pu être observés et des significations que les élèves ont pu développer au cours de ces usages et de la façon dont les enseignants ont pu les utiliser pour aboutir aux connaissances mathématiques visées. A travers l'analyse de ces usages, il s'agit de déterminer :

- les signes émergeant durant l'usage de l'un des artefacts qui doivent être utilisés pour la conception de l'autre artefact ;
- la possibilité de faire des choix de conception pour l'un des deux artefacts du duo de façon à ce que le potentiel sémiotique du duo soit plus important que la réunion des potentiels sémiotiques des deux artefacts considérés séparément.

Notre hypothèse étant que le duo d'artefacts peut renforcer et rendre plus explicite le potentiel sémiotique des deux artefacts du duo, la question est alors de savoir si les enseignants pourront l'utiliser comme outil de médiation sémiotique.

2.3. Particularité d'une situation didactique avec un duo d'artefacts

Nous avons retenu la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) pour modéliser la situation d'apprentissage et le rôle du duo dans cette situation. Les connaissances

²⁵ Notre traduction de : « Outlining the semiotic potential of an artifact requires a fine grain analysis of the artifact and its use, analysis that encompasses multiple perspectives, including the epistemological and the cognitive perspective, but also a historic and a didactic perspective. The richer the description of the semiotic potential the richer and more powerful is the base for the design of an instruction sequence centered on exploiting such an artifact as a tool of semiotic mediation. » (Mariotti, 2012, p. 30)

mathématiques sont une propriété du système élève-milieu à l'équilibre. Ces connaissances résultent du retour du système à l'équilibre, par adaptation de l'élève suite à une série d'actions de l'élève sur le milieu et de rétroactions du milieu vers l'élève. Le travail du didacticien consiste, en particulier, à concevoir des milieux potentiels pour l'apprentissage de chaque concept mathématique, c'est-à-dire les situations a-didactiques.

Un duo d'artefacts offre le moyen de concevoir un milieu pour une situation a-didactique relative à une connaissance. Il permet de penser les ruptures d'une phase à l'autre, suivant l'artefact engagé, entraînant la nécessité d'une adaptation pour l'élève. Il offre aussi les continuités d'un milieu à l'autre permettant l'émergence et le réinvestissement des stratégies gagnantes au cours de la situation. Pour que l'interaction de l'apprenant avec le milieu soit enrichie par l'usage des deux artefacts, il faut que ces derniers aient des caractéristiques communes et présentent des éléments de continuité apparente qui appelle la mobilisation des mêmes stratégies avec l'un et l'autre des deux artefacts (développement des schèmes par assimilation). Mais, dans la mesure où l'apprentissage est visé, il faut aussi que des antagonismes entre les deux artefacts existent pour provoquer des adaptations, des réorganisations et donc l'évolution des connaissances (développement des schèmes par accommodation).

D'une façon analogue au fait que la géométrie dynamique constitue un élément central d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique (Laborde & Capponi, 1994), les duos d'artefacts fournissent des constituants de milieu pour la conception de situations didactiques.

2.4. Choix du tangible et du numérique pour créer les deux artefacts du duo

Les cadres théoriques déjà introduits, approche instrumentale, médiation sémiotique et théorie des situations didactiques, permettent de caractériser *a priori* en quoi un duo d'artefacts pourrait avoir une valeur ajoutée pour l'apprentissage. Ils offrent aussi des outils complémentaires pour penser la conception de tels duos, l'analyse de leurs usages par les élèves et leur appropriation par les enseignants. Mais jusque là, ils ne permettent pas d'expliquer le choix de l'association entre tangible et numérique.

Partir du tangible et du numérique pour concevoir un duo offre une solution opérationnelle à la recherche de complémentarité, de redondance et d'antagonisme entre les deux artefacts. En effet, premièrement les environnements tangibles et les environnements numériques ont des propriétés bien différentes dont peuvent hériter séparément les deux artefacts du duo. De plus, la redondance éventuelle est assurée par la possibilité d'un minimum de fidélité visuelle et comportementale de l'un à l'autre. Enfin, les antagonismes résultent des contraintes nécessairement différentes dans l'interaction avec l'utilisateur. Plusieurs choix possibles s'offrent au concepteur pour créer ces complémentarités, redondances et antagonismes. Les technologies numériques sont maintenant aisément accessibles pour concevoir une variété importante d'artefacts numériques en duo avec des artefacts tangibles. Par ailleurs, au moment de leur utilisation par les élèves et les enseignants, le numérique et le tangible offrent des possibilités complémentaires d'instrumentation et d'instrumentalisation.

Avant de présenter en détail, sur un exemple, comment ces principes ont pu être mis en œuvre, il me semble nécessaire de préciser que l'idée de duo d'artefacts n'a pas émergé de façon théorique, guidée par une conceptualisation *a priori* de l'intérêt scientifique qu'il y aurait à considérer le duo d'artefacts tangible et numérique avant de chercher à en éprouver la validité. La présentation de ces éléments théoriques avant les réalisations qu'ils permettent d'explicitier pourrait en effet donner cette impression. Le processus a plutôt été celui d'une dialectique outil-objet (Douady, 1986), au cours duquel un ensemble de problèmes sont apparus, relatifs à l'usage des technologies par les enseignants du primaire, avec des solutions locales liées aux technologies disponibles et aux connaissances mathématiques visées. Une première solution très contextuelle a été de concevoir un artefact numérique associé à un artefact tangible, la e-pascaline associée à la pascaline (Figure 19), pour donner du sens à l'utilisation des ressources numériques par les enseignants du primaire. Le contexte ayant permis l'émergence de cette idée est celui d'une coopération internationale avec le laboratoire des machines mathématiques de l'Université de Modena et Reggio-Emilia (Maschietto, 2011). Les travaux et les formalisations nécessaires à la conception de la e-pascaline associée à la pascaline et à leur expérimentation en classe ont fait émerger la proposition de duo d'artefacts exposée dans ce mémoire.

3. L'EXEMPLARITÉ DU DUO PASCALINE ET E-PASCALINE

Le duo d'artefacts, constitué par la pascaline et la e-pascaline, présenté en détail dans cette partie, pourrait être un possible « *exemplaire* », un « *exemple étalon* » au sens de Kuhn (1990) de la notion de duo d'artefacts tangible et numérique : « *les exemplaires sont des solutions de problèmes concrets, acceptées par le groupe comme paradigmatiques* » (op. cit., p. 397). Il s'agit de façons connues de traiter un problème, qui fonctionnent comme des étalons et qui permettent la mise en correspondance des principes scientifiques acceptés par la communauté avec le monde concret à l'étude. Sensevy (2016) donne comme exemplaires pour les didacticiens : le puzzle de Brousseau pour le concept de milieu ou l'âge du capitaine pour le concept de contrat didactique.

Sans prétendre être une proposition didactique du même niveau que les précédentes, la notion de duo d'artefacts permet de traiter concrètement certains des problèmes identifiés par la communauté didactique. En reprenant Kuhn pour qui « *les problèmes concrets et leurs solutions forment les exemplaires* » (Kuhn et al., 1990, p. 408), je propose de considérer le duo d'artefacts pascaline et e-pascaline comme un éventuel « *exemplaire* » pour questionner les problèmes d'intégration des technologies dans les usages des enseignants à la lumière des principes théoriques issus de l'approche instrumentale, de la médiation sémiotique et de la théorie des situations didactiques.

- Les problèmes concrets qui pourraient être résolus avec la solution « pascaline et e-pascaline » sont ceux de la conception de situations didactiques diffusables, utilisables et appropriables sur le terrain.
- Les principes didactiques qui sont à l'œuvre dans la conception et l'utilisation d'un duo d'artefacts pascaline et e-pascaline combinent le point de vue sur les ressources et les technologies issu de l'approche instrumentale et de la médiation sémiotique, une conception de l'apprentissage issue de la théorie des situations

avec la connaissance mathématique comme équilibre d'un système « élève-milieu » et les connaissances actuelles sur le rôle de la manipulation dans l'apprentissage.

3.1. Conception du duo d'artefacts pascaline et e-pascaline

Le premier duo d'artefacts composé de la pascaline et de la e-pascaline (Figure 19) a été conçu dans le cadre d'une collaboration internationale entre le laboratoire des machines mathématiques, MMLab, et l'Institut Français de l'Éducation, IFE (Soury-Lavergne & Maschietto, 2013) (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013a) (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013b). La pascaline, qui constitue la partie tangible du duo, est une petite machine en plastique, commercialisée sous le nom de « Zéro+1 »²⁶ par la société Quercetti. L'artefact tangible est donc donné, éventuellement modifiable, mais n'a pas été inventé par les concepteurs du duo. La conception de l'artefact numérique, baptisé e-pascaline, a été réalisée en référence à l'artefact tangible existant, en recherchant les complémentarités, les redondances et les antagonismes avec la pascaline. Enfin, les situations didactiques ont été conçues avec le duo comme constituant d'un milieu.

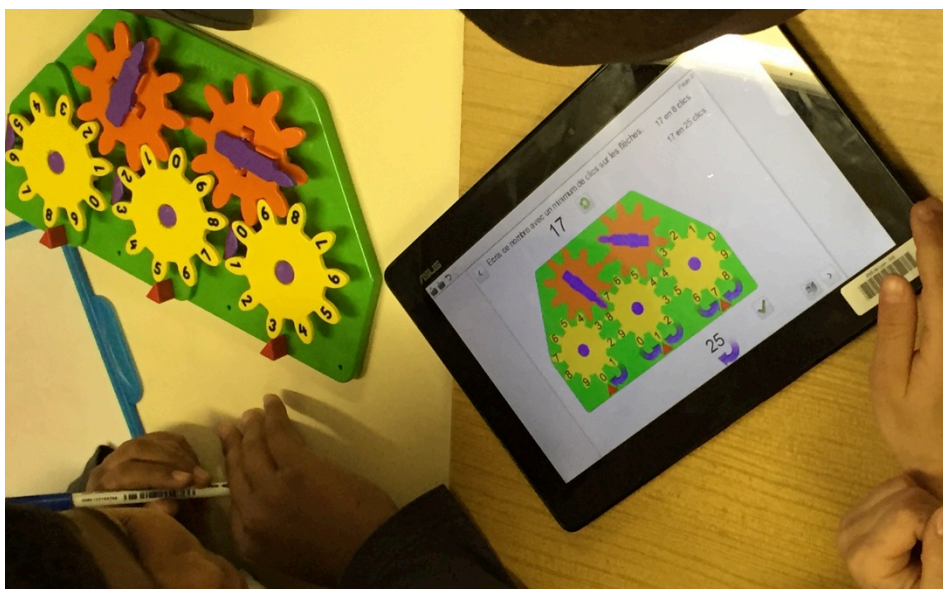


Figure 19. Le duo d'artefacts pascaline et e-pascaline, la e-pascaline fonctionnant sur une tablette.

Ces processus de conception nécessitent de prendre en compte les usages existants, comme indiqué en conclusion de la partie 1 et donc d'impliquer les utilisateurs-enseignants comme élèves.

C'est au cours de deux projets de recherche que la pascaline a été introduite dans les classes en France et que le duo pascaline et e-pascaline a été développé. Dans le cadre du projet Mallette²⁷, Mallette de ressources mathématiques pour l'école, cycle 1 cycle 2, la e-pascaline et les situations ont été conçues et matérialisées sous la forme d'un prototype de mallette et d'un contenu en ligne²⁸. Dans le cadre du Plan sciences en Côte d'Or²⁹, un

²⁶ Commercialisée par la société italienne Quercetti, elle est distribuée en France par l'ARPEME : <http://www.arpeme.fr/>

²⁷ Mallette, projet financé de 2011 à 2014 par la DGESCO du ministère de l'éducation français et par deux CRDP (Centre Régional de Documentation Pédagogique), celui de Lyon et celui d'Aix-Marseille.

²⁸ <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees-13-14/mallette/prototype-mallette>

scénario pour le CP (K1) a été conçu, testé et formalisé dans un site web³⁰. Une formation pour les enseignants a été conçue pour la plateforme M@gistère, programme de formation en ligne du ministère remplaçant Pairform@nce.

Ces deux projets se sont développés dans deux LÉA, lieux d'éducation associés à l'IFE (Chabanne, Monod-Ansaldi, & Loisy, 2016), qui ont permis de fédérer des collectifs d'enseignants, de formateurs et de chercheurs autour des questions d'intégration des technologies. Ces LÉA ont permis la reconnaissance par une convention de l'engagement des enseignants dans le projet. Ils ont réalisé les conditions d'une communauté de pratique permettant la conception dans l'usage du duo pascaline et e-pascaline, avec des itérations de boucle de conception, développement et usage et la prise en compte des utilisateurs. Un second volet du projet Mallette, « MOM » pour Mallette d'Outils Mathématiques, a consisté à évaluer l'appropriation du duo et des situations par des enseignants qui n'étaient pas membres du collectif initial.

3.1.1. Principes retenus pour la conception du duo pascaline e-pascaline

Des complémentarités, redondances et antagonismes ont été recherchés pour produire des continuités et des ruptures dans les usages de la pascaline et de la e-pascaline par les élèves et donc contribuer à l'apprentissage. Ainsi, comme établi précédemment, ce n'est pas uniquement la fidélité de la e-pascaline en référence à la pascaline, par exemple la fidélité visuelle, qui a été recherchée, mais bien la validité épistémique des interactions en situation.

Les principes retenus à propos de la e-pascaline en référence à la pascaline ont été :

- fidélité suffisante entre la pascaline et la e-pascaline pour assurer la redondance permettant le développement des schèmes par assimilation lors du passage de l'une à l'autre et le renforcement du potentiel sémiotique de la pascaline par la reprise dans la e-pascaline des caractéristiques ayant le plus fort potentiel sémiotique ;
- antagonismes entre la pascaline et la e-pascaline pour créer des discontinuités dans la situation didactique, par suppression dans l'artefact numérique des caractéristiques de la machine mécanique qui n'ont pas un fort potentiel sémiotique par rapport aux apprentissages visés, pour entraîner le développement des schèmes par accommodation ;
- recherche d'une complémentarité et d'une validité épistémique du duo d'artefacts par la conception de situations didactiques incluant les deux artefacts.

3.1.2. Description et analyse de la pascaline pour la numération décimale de position

Nous avons identifié les caractéristiques de la pascaline dans les expériences d'usage en classe réalisées en Italie par Maschietto et ses collègues (Maschietto & Ferri, 2007) (Canalini Corpacci & Maschietto, 2011, 2012). La pascaline est une petite machine arithmétique constituée d'un engrenage de cinq roues dentées (Figure 20). Elle évoque les premières machines à calculer à engrenages qui se diffusèrent en Europe à partir du

²⁹ Plan Sciences en Côte d'Or, projet financé de 2011-2014 par la Ville de Dijon

³⁰ <http://ife.ens-lyon.fr/sciences21/ressources/sequences-et-outils/pascaline-CP>

XVII^{ème} siècle, dont la célèbre machine de Blaise Pascal (Figure 17, page 52). Mais la réalité de son fonctionnement est très éloignée de celle de la machine historique.

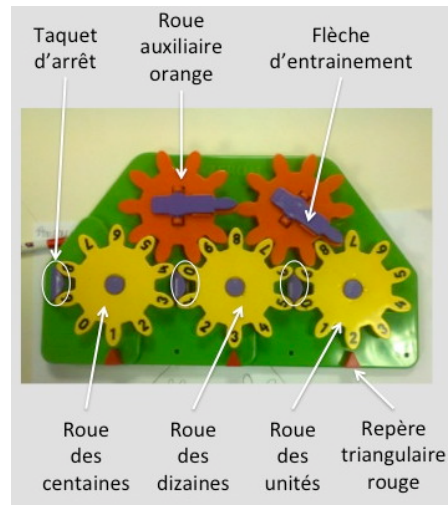


Figure 20. La pascaline Zéro+1 de la société italienne Quercetti, constituée d'un engrenage de cinq roues dentées, chacune avec 10 dents, fixées sur un support.

La pascaline permet d'afficher les nombres avec leur écriture décimale de position et de réaliser des calculs. Les dix chiffres de 0 à 9 sont inscrits sur les dents des roues inférieures, jaunes, qui représentent les unités (à droite), les dizaines (au milieu) et les centaines (à gauche). Les roues supérieures, oranges, sont des roues auxiliaires. Elles transmettent le mouvement de rotation d'une roue inférieure à une autre, au moment nécessaire, grâce aux flèches violettes placées sur leur dessus. Chaque roue de la pascaline peut tourner dans le sens des aiguilles d'une montre (sens indirect) ou dans le sens contraire (sens direct). Lorsque la roue des unités a fait un tour complet, c'est-à-dire 10 unités, la roue supérieure à sa gauche fait pivoter la roue des dizaines d'un cran. De même, lorsque la roue des dizaines a fait un tour complet, la roue orange supérieure à sa gauche fait pivoter la roue des centaines d'un cran. Cela fonctionne dans les deux sens de rotation. Le cliquet violet muni d'un ressort, à la gauche de chacune des roues chiffrées, discrétise la rotation des roues. Les chiffres à prendre en compte pour la représentation du nombre affiché par la machine sont lus en face des trois triangles rouges, en bas du support.

Trois procédures sont utilisables pour afficher un nombre $N = \overline{cdu}$ sur la pascaline :

- **Procédure par ajustement** : si l'utilisateur connaît l'écriture chiffrée du nombre qu'il veut afficher, \overline{cdu} , il lui suffit de tourner les trois roues de façon à positionner les chiffres c, d et u en face des triangles. Il se peut que des ajustements soient nécessaires lorsqu'un chiffre déjà correctement positionné est décalé par la manipulation des autres roues. Le contrôle de l'utilisateur porte sur l'affichage final qui doit correspondre spatialement à celui qu'il anticipe.
- **Procédure par itération** : à partir de l'initialisation de la pascaline à 000, la roue des unités est avancée d'autant de clics/dents que le nombre qui doit être affiché, c'est à dire N. Le contrôle de l'utilisateur porte sur le nombre N et l'itération de la roue des unités.
- **Procédure par décomposition** : à partir de l'initialisation de la pascaline à 000, l'utilisateur fait tourner séparément chacune des trois roues chiffrées, pour les

incrémenter du nombre d'unités u , du nombre de dizaines d et du nombre de centaines c .

La différence entre les deux dernières procédures pour afficher les nombres, la procédure par itération et la procédure par décomposition, est le nombre de clics qu'il faut effectuer pour obtenir l'affichage. Avec la procédure par itération, à partir de la pascaline initialisée à 000, il faut exactement N clics pour afficher le nombre N . Avec la procédure par décomposition, le nombre de clics est égal à la somme des chiffres de N , donc nécessairement inférieur ou égal à N (égal dans le cas où N est un nombre inférieur ou égal à 9). C'est sur cette différence de coût de procédure que les principes de la numération décimale (principe de position et principe décimal (Tempier, 2013)) peuvent apparaître comme les éléments d'une stratégie gagnante dans une situation didactique. Cette différence de coût de procédure, s'il est ressenti par l'utilisateur, crée également le potentiel sémiotique sur lequel l'expert peut s'appuyer pour donner du sens à la numération décimale.

Pour calculer des sommes avec la pascaline, les deux procédures par itération et par décomposition sont également possibles. Une fois le premier terme affiché sur la pascaline avec l'une des trois procédures précédentes, l'addition par itération consiste à incrémenter la roue des unités d'un nombre de clics égal au second terme. La procédure par décomposition consiste à décomposer le second terme en unités, dizaines et centaines et à incrémenter chacune des roues du nombre correspondant. A la fin du processus, le nombre affiché sur la pascaline, en face des triangles rouges, correspond à la somme. Pour la soustraction, la seule différence est le sens de rotation des roues pour le second terme. Pour chacune des procédures, les actions à réaliser pour le second terme ne sont pas les mêmes que pour le premier terme. L'utilisateur affiche le premier terme sur la pascaline et peut le visualiser alors qu'il agit pour incrémenter le second terme sans pouvoir le visualiser sur la machine. L'utilisateur manipule une représentation chiffrée du premier terme, essentiellement du point de vue des positions relatives des chiffres. Pour le second terme, l'utilisateur agit sur la machine et contrôle son action, la quantité de clics, avec le second terme, ce qui ne mobilise pas les mêmes connaissances. Les multiplications et divisions peuvent être réalisées par des procédures d'addition ou de soustraction itérées.

Dans ce fonctionnement de la pascaline, les caractéristiques essentielles sont les trois roues de dix dents, leur rotation discrète à chaque action sur une dent et l'entraînement automatique de la rotation des roues adjacentes.

Usages de la pascaline pris en compte pour la conception de la e-pascaline

Les études menées par Maschietto et ses collègues ont conduit à identifier les procédures des élèves pour afficher les nombres et pour calculer. D'après l'analyse sémiotique de l'artefact pascaline, ces procédures sont strictement liées aux connaissances des élèves relatives à la numération décimale de position. En particulier, les procédures par décomposition sont basées sur la signification de l'écriture décimale d'un nombre. C'est l'intérêt principal de l'utilisation didactique de la pascaline.

Au début de l'utilisation de la machine, les élèves sont centrés sur les aspects mécaniques de la machine, l'identification des différentes entités qui la composent et leur relation : engrenage et mouvements de rotation. L'utilisation mathématique de la machine passe par la découverte de deux principes : le rôle des triangles pour désigner les chiffres qui

composent le nombre affiché par la machine et l'entraînement d'une roue par la rotation d'une autre roue chiffrée. Le premier principe ne peut pas être découvert par le simple usage car il correspond à une convention de lecture. La médiation de l'enseignant est alors nécessaire. En revanche, le second principe peut être construit par les élèves s'ils associent les gestes qu'ils réalisent sur la machine aux rétroactions visuelles, haptiques et sonores de la machine. La rotation des roues est évidemment visible, mais elle se traduit également par une force exercée sur les doigts, différente si une seule roue chiffrée tourne, ou deux ou trois. La rotation d'une roue se traduit aussi au niveau sonore, par des clics pour chaque dent qui tourne et des sons plus intenses lorsque plusieurs roues chiffrées tournent simultanément.

Nous avons exploité deux types d'observables issus des séances avec les élèves pour identifier les éléments à retenir pour la conception de la e-pascaline avec des redondances et des antagonismes : les gestes réalisés par les élèves et les productions graphiques. Nous avons considéré que ces deux types d'observables étaient porteurs des significations attribuées à la machine par les élèves. En effet, pour Trouche (2004), certains signes produits au cours de l'activité de l'élève peuvent être interprétés comme la part observable de schèmes d'utilisation. Pour Rabardel, « *nombre d'éléments matériels, pourtant bien "visibles", ne sont pas pris en compte dans les représentations des sujets alors que des propriétés beaucoup plus masquées sont reconstruites au prix d'une activité cognitive importante. La caractéristique de ces propriétés n'est pas dans leur évidence perceptive, dans leur visibilité, mais dans leur pertinence pour l'action.* » (Rabardel, 1995, p. 146).

Potentiel sémiotique des gestes

Différents gestes pour manipuler la machine apparaissent lors des premières utilisations de la pascaline par les élèves, en particulier pour faire tourner les roues : tourner les roues auxiliaires oranges, ou bien saisir les flèches violettes qui font fonction de poignée ou encore faire tourner une roue jaune de plus d'une dent à la fois en posant la main dessus. Ils déterminent différents schèmes d'usage pour la tâche de rotation des roues : geste « flèche » dans le schème d'usage « rotation des roues auxiliaires », geste « main sur roue » dans le schème d'usage « rotation continue », geste « doigts » dans le schème d'usage « rotation une dent à la fois ». L'utilisation des doigts, notamment l'utilisation du pouce et de l'index, au niveau des dents n'apparaît qu'au bout d'un certain temps, associée à la recherche du moyen de ne passer qu'une dent à la fois. Ce dernier geste est celui qui a le plus fort potentiel sémiotique car il est associé à l'itération de l'unité (ou de la dizaine ou de la centaine).



Figure 21. Trois gestes différents pour faire tourner les roues de la pascaline. A gauche, l'élève utilise la flèche violette comme poignée (geste « flèche »). Au milieu il pose ses doigts repliés sur le dessus de la roue et peut la faire pivoter de plusieurs dents d'un seul coup (geste « main sur roue »). A droite, le geste utilise deux doigts, le pouce en appui sur le triangle et l'index sur une dent (geste « doigts »). Ce geste permet de faire tourner la roue dent par dent.

Ainsi, en concevant la e-pascaline, nous devons renforcer ce geste de rotation d'une dent à la fois, en le rendant possible tout en empêchant les autres moyens de faire pivoter les roues de la pascaline. Par exemple, faire tourner les roues chiffrées en manipulant les roues oranges peut créer un obstacle au moment de différencier et verbaliser le fonctionnement de la machine pour faire les additions ou les soustractions. Si chaque opération est associée à un unique sens de rotation, le potentiel sémiotique est plus important que si les opérations peuvent se réaliser en tournant les roues indifféremment dans un sens ou dans un autre, selon la roue choisie. Ainsi, un antagonisme à créer avec la e-pascaline résulte du fait que l'action sur les roues auxiliaires ne doit plus être possible.

Représentations de la pascaline et de son fonctionnement par les élèves

Les dessins des élèves montrent que les gestes et les mouvements de la machine sont transférés de l'action à la représentation.

Les signes peuvent désigner les gestes qui sont réalisés au cours de l'activité, par exemple pour actionner les roues (les doigts et les mains de la Figure 22 à droite), un composant de schème d'utilisation pour additionner avec la pascaline (les flèches avec +2 et +6 de la Figure 22 à gauche), ou encore le mouvement d'une roue résultant d'une action (des petits traits indiquent la vibration de la roue des unités dans la Figure 22 à droite, ils sont difficilement visibles sur cette reproduction). L'importante utilisation de flèches par les élèves dans leurs dessins pour indiquer la rotation des roues nous a amenées à retenir des icônes de flèches pour indiquer la rotation des roues de la e-pascaline.

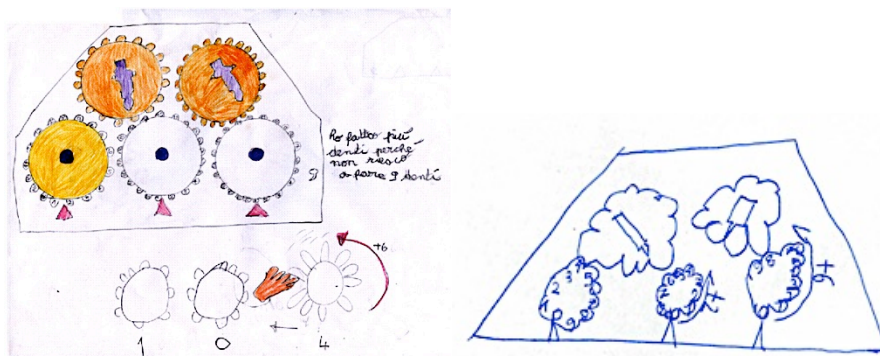


Figure 22. A gauche, dessin et description de la pascaline par un élève de 9 ans (Italie, équivalent CE2), avec la présence d'une flèche indiquant le sens de rotation des roues et montrant les mains et les doigts agissant sur la machine. A droite, dessin de la pascaline par un élève de 7 ans (France, CE1) expliquant l'écriture du nombre 26 avec des flèches pour indiquer la rotation des roues (+2 sur la roue des dizaines et +6 sur la roue des unités).

Par ailleurs, les élèves ont produit différents écrits au cours de leur utilisation de la pascaline, en particulier pour garder la trace de leurs actions et raisonnements au cours du travail (pour faire des multiplications par exemple). L'utilisation de la pascaline est incorporée à un système complexe d'instruments personnels des élèves (Trouche, 2004), que l'on peut prendre en compte dans la e-pascaline. La nécessité de conserver certaines traces, par exemple le nombre d'incrémentations d'une roue, doit également être prise en compte par la e-pascaline. Cela constitue un exemple de complémentarité entre la e-pascaline et la pascaline.

Caractéristiques de la pascaline dont le potentiel sémiotique est faible ou nul

Certaines composantes de la pascaline ne sont pas utiles d'un point de vue didactique car aucun potentiel sémiotique ne leur a été rattaché et peu de schèmes d'utilisation sont développés. Selon le cas, elles sont conservées dans la e-pascaline ou pas.

Par exemple, les cliquets violets à la gauche des roues chiffrées ne sont pas utilisés par les élèves pour travailler avec la pascaline. De plus, ils ne les représentent pas systématiquement dans leurs dessins. Pour l'expérimentation française prise en compte au moment de la conception, ils n'apparaissent que dans 22 des 33 dessins des élèves de 6 ans, dans 3 des 20 dessins des élèves de 7 ans et dans 2 des 6 dessins des élèves de 8 ans, soit moins de la moitié des dessins). Bien que nécessaires à la rotation discrète des roues de la pascaline, ils ne seront pas repris dans la e-pascaline.

En revanche, ce n'est pas le cas des flèches violettes sur les roues auxiliaires qui apparaissent dans la plupart des dessins (dans tous les dessins des élèves de 6 ans, dans 11 des 20 dessins des élèves de 7 ans et dans 3 dessins sur 6 pour les élèves de 8 ans, soit plus de $\frac{3}{4}$ des dessins). Ces flèches pourraient donc être représentées, pour assurer une continuité et une reconnaissance de la machine, mais sans qu'elles soient utilisables, comme les roues auxiliaires. Elles participent à la redondance, à la fidélité visuelle, mais n'ont pas de rôle dans la situation didactique. D'autres caractéristiques, telles que les couleurs de la pascaline ne sont pas porteuses de potentiel sémiotique et sont reprises pour les mêmes raisons.

3.1.3. La e-pascaline et les cahiers d'activité informatisés

Pour concevoir et développer l'artefact numérique du duo, la e-pascaline, nous avons retenus certains principes de développement d'environnements informatiques (Mackrell, Maschietto, & Soury-Lavergne, 2013) qui permettent d'attribuer aux représentations des objets à l'interface les comportements nécessaires et adaptés à l'apprentissage, notamment des mathématiques. Parmi ces caractéristiques, il y a la manipulation directe, le potentiel pour la création des actions et rétroactions de l'utilisateur ainsi que le contrôle possible sur ces actions et rétroactions. Le choix de ces principes permet de doter la e-pascaline des propriétés de dynamisme et d'interaction qui en font un manipulé virtuel tel que Moyer-Packenham les définit (Partie 2.1.3 p. 53).

Manipulation directe dans l'environnement d'édition Cabri Elem

La e-pascaline a été développée avec la technologie Cabri Elem de l'entreprise Cabrilog dans le cadre d'un partenariat scientifique avec l'Institut Français de l'Éducation. Il s'agit d'un environnement auteur permettant la conception d'applications mathématiques pour l'apprentissage, également nommées « cahiers d'activité informatisés ». Cabri Elem intègre les principaux outils de la géométrie dynamique ainsi que de nombreuses autres fonctionnalités. Cet environnement de création d'applications pour l'apprentissage a été conçu pour permettre la production de ressources prêtes à l'emploi, telles que les souhaitaient Sinclair en 2003, et ainsi mieux répondre aux besoins des enseignants dans leur pratique quotidienne, notamment à l'école primaire (Laborde & Laborde, 2011) (Partie 1.3.1 p. 27). Contrairement aux autres environnements de géométrie et mathématiques dynamiques, la technologie Cabri Elem est prévue pour la conception de tâches et pas seulement pour la création de figures dynamiques.

La principale raison du choix de cet environnement pour développer la e-pascaline vient du fait qu'il s'agit d'un environnement auteur utilisable par un non-informaticien, grâce à une approche orientée utilisateur. L'auteur crée les applications en manipulant directement les objets et les fonctions qu'il souhaite donner à ces objets. Un didacticien ayant une bonne culture de la géométrie dynamique peut raisonnablement développer des petits logiciels dont la qualité et la robustesse sont à la hauteur des exigences d'une diffusion dans les classes. Il peut alors mettre en œuvre une méthodologie impliquant les utilisateurs, avec une conception itérative de ressources, s'appuyant effectivement, et à plusieurs reprises, sur les expérimentations avec les utilisateurs, élèves et enseignants.

Une autre caractéristique importante de cet environnement est que l'auteur contrôle l'interface « élève » de façon très poussée. Il décide des objets présents à l'interface, de leur comportement, des actions possibles de l'élève et des rétroactions de l'environnement. Il le fait à partir d'un ensemble d'outils et de fonctionnalités mathématiques (objets géométriques 2D, 3D, nombres, graphiques, booléens³¹...) et non mathématiques (texte, cacher/montrer, animations). Des images du monde réel peuvent être intégrées avec des comportements associés (apparition/disparition, déplacement par exemple). Ces possibilités offertes par l'environnement ont été importantes pour pouvoir contrôler les caractéristiques de la e-pascaline en référence à la pascaline, dont la continuité et la discontinuité des actions et rétroactions entre l'artefact tangible et l'artefact numérique. La manipulation directe est un concept fondamental de l'interaction homme-machine, qui caractérise l'action de l'utilisateur et les rétroactions du système numérique. Elle se décline en différents principes (Shneiderman & Plaisant, 2010).

- La continuité des représentations des objets et des actions pertinentes par rapport à la tâche à partir de métaphores signifiantes : les outils de Cabri Elem vont permettre de représenter les éléments clefs de la pascaline, de son fonctionnement et des actions possibles de l'élève sur ces éléments.
- Privilégier des actions physiques, ou des boutons à cliquer, plutôt que des syntaxes complexes : les actions sur la pascaline, par exemple « faire tourner une roue », doivent être directes. Si possible, l'utilisateur doit agir sur les dents ou bien appuyer sur un bouton pour faire tourner les roues.
- Des actions rapides, incrémentales et réversibles dont les effets sur les objets d'intérêt sont immédiatement visibles : la rotation des roues doit être immédiate et réversible.

Ces principes sont intégrés à la technologie Cabri Elem, notamment parce qu'ils sont hérités de la géométrie dynamique telle qu'elle est réalisée dans un environnement comme Cabri-géomètre (Laborde & Laborde, 2008) (Laborde & Laborde, 2011). Pour la e-pascaline, la manipulation directe est rendue possible par la sélection d'objets et de comportements de bases disponibles dans l'environnement. Mais l'auteur doit aussi s'assurer que, pour les objets et les comportements qui résultent d'une combinaison des premiers, les principes restent valides. Par exemple, à propos de la rotation des roues de la e-pascaline : lors d'un seul clic, la rotation est d'un dixième de tour (angle de

³¹ Les booléens sont des fonctions de Cabri Elem qui vérifient des propriétés sur les objets. Ils admettent comme attributs des propriétés sur les objets (égalité entre deux nombres, appartenance d'un point à un objet géométrique par exemple) et donnent en sortie deux valeurs, Vrai ou Faux (1 ou 0). Ils sont utilisés pour conditionner les actions (déplacement, calcul, affichage etc...) et les rétroactions à l'interface. Les booléens de Cabri Elem sont une des fonctionnalités critiques permettant la conception d'environnements pour l'apprentissage.

$36^\circ=360/10$). Mais cette rotation pourrait être réalisée d'au moins deux manières à l'interface. Une première façon de faire, discontinue, consisterait à afficher la nouvelle position de la roue dès que l'utilisateur demande la rotation de la roue. Dans ce cas, l'utilisateur ne verrait pas qu'il y a une rotation. Il pourrait seulement constater que la dent en face du triangle a changé. Plus précisément, il ne pourrait que constater que le chiffre a changé, puisque les 10 dents de la roue sont toutes identiques (si les dents étaient colorées différemment l'utilisateur percevrait mieux la modification consécutive à son action). Une autre façon de faire consisterait à produire une rotation continue de la roue sur 36° par affichage des positions intermédiaires de la dent entre la position initiale et la position finale. Cette rétroaction, plus complexe à implémenter, montrerait alors bien l'effet de l'action de l'utilisateur sur la roue. C'est celle qui respecte les principes de manipulation directe, notamment l'aspect continu, incrémental et réversible.

Ces principes sont nécessaires pour créer une e-pascaline en complémentarité et redondance avec la pascaline. C'est la manipulation directe à l'œuvre dans l'utilisation de la pascaline tangible qui est reproduite dans la e-pascaline lorsque l'environnement numérique respecte, lui aussi, le principe de manipulation directe. L'utilisateur perçoit alors immédiatement l'effet de son action sur la machine. L'environnement Cabri Elem nous a permis de contrôler, en tant qu'auteur, les éléments de complémentarité, de redondance et d'antagonisme entre les deux artefacts.

Cependant, tout choix d'environnement de conception apporte également un ensemble de contraintes. En retenant Cabri Elem, nous nous sommes assurés de la cohérence des objets et de leur comportement par rapport aux connaissances mathématiques (fidélité épistémique) ainsi que du contrôle de l'interface. Les propriétés de Cabri Elem pour modéliser les objets mécaniques sont assez développées, mais elles ne permettent parfois pas de modéliser tous les comportements physiques nécessaires pour animer des représentations d'objets tangibles. Ce n'est pas non plus un environnement qui permet le « multi-touch ».

La e-pascaline : complémentarités, redondances et antagonismes avec la pascaline

La e-pascaline a été conçue comme un objet complexe qui ressemble à la pascaline tangible (Figure 23). La forme, les principaux éléments et les couleurs ont été repris pour assurer la redondance. Néanmoins, l'implémentation a nécessité de faire des choix additionnels résultants de deux champs de possibilités et de contraintes : celles issues de l'environnement de développement retenu et celles issues de notre analyse didactique. Cela a conduit à des différences d'éléments et de comportements, qui soutiennent les genèses conjointes des schèmes avec les deux artefacts.

Une première différence concerne la présence de flèches à droite et à gauche des triangles rouges. Ces flèches sont des boutons qui permettent d'actionner les roues. Il aurait été possible de permettre une action directe sur la roue, mais cela aurait conduit à un mouvement continu des roues, comme celui obtenu avec le schème d'usage « main sur la roue » sur la pascaline. Or, il s'agit d'un geste qui n'a pas un potentiel sémiotique permettant la construction de la suite des nombres entiers par itération de l'unité. Le choix a donc été fait de l'empêcher. De même, la flèche violette sur les roues auxiliaires est présente mais ne permet pas de faire tourner les roues.

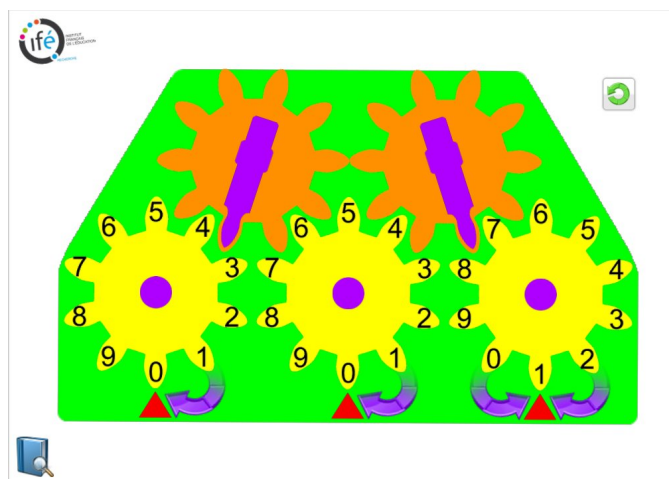


Figure 23. La e-pascaline, conçue avec la technologie Cabri Elem, a une apparence analogue à la pascaline. Les principaux comportements de la pascaline ont été implémentés : rotation des roues dent par dent et entraînement automatique des roues chiffrées. Ici, la e-pascaline affiche le nombre 1. Selon les cas, une ou deux flèches actionnant la roue des unités sont affichées.

Pour lancer la rotation des roues de la e-pascaline, l'utilisateur doit cliquer sur un bouton qui a la forme d'une flèche incurvée. La roue pivote alors de façon continue dans le sens de la flèche et s'arrête sur la dent suivante. Cette différence crée une discontinuité dans les gestes et donc dans les schèmes d'usage qui se développent. La e-pascaline ne permet aucun des différents gestes possibles avec la pascaline pour faire tourner les roues en les manipulant directement. Cependant, le schème d'usage « une dent à la fois », bien qu'il s'appuie sur un geste différent, est celui qui peut assimiler la nouvelle situation. D'ailleurs la forme du bouton indique, non seulement le sens de rotation de la roue, mais aussi le mouvement du doigt et sa position avec la pascaline tangible. La continuité est assurée par le choix de la flèche comme métaphore de l'action sur la roue. Présente dans les dessins des élèves (Figure 22) comme signe du mouvement de la roue, elle devient un moyen d'action pour provoquer le même mouvement sur la roue. Cette action est celle qui a le potentiel sémiotique voulu pour l'apprentissage des mathématiques, le sens de +1, -1, +10, -10 et +100, -100 en l'occurrence.

Deux boutons distincts sont associés à chaque roue, un bouton qui fait tourner la roue dans le sens indirect, un autre qui la fait tourner dans le sens direct. Cette différence entre la pascaline et la e-pascaline permet de créer une complémentarité entre les deux. En effet, les boutons d'action sur les roues ne sont pas toujours affichés sur la e-pascaline, alors que les rotations sont toujours possibles sur l'artefact tangible. Les boutons ne sont affichés sur la e-pascaline, donc utilisables, que lorsque leur activation a une signification mathématique possible dans le champ des entiers naturels. Les flèches de rotation ne sont affichées que lorsque le résultat du calcul est dans l'intervalle $[0 ; 999]$. Sur la Figure 23, la e-pascaline affiche le nombre 1. Les calculs soustractifs $1 - 10$ ou $1 - 100$ n'ont pas un résultat dans l'intervalle voulu. En conséquence, les flèches de rotation directe sur les roues des dizaines et des centaines ne sont pas affichées. En revanche, il est possible d'ajouter ou d'ôter une unité à un, donc les deux flèches correspondantes sont affichées. Ce choix résulte des possibilités de l'environnement mais surtout de l'analyse sémiotique qui pointe la difficulté didactique qu'il y a à donner un sens mathématique au calcul 000 moins 1 à l'école primaire. Par ailleurs, avec la pascaline tangible, le calcul $000 - 1$ est mécaniquement possible et produit l'affichage 999 ; ce qui

reste complexe à expliquer, étant donné qu'il faut penser 1000-1, imaginer une roue supplémentaire invisible qui serait initialisée à 1 alors que les autres sont à 0.

Les complémentarités entre la pascaline et la e-pascaline concernent notamment les fonctionnalités additionnelles de la e-pascaline par rapport à la pascaline, par exemple l'initialisation de l'affichage. L'utilisation de la pascaline pour calculer nécessite de régulières remises à 000 de la machine. Avec la pascaline, il faut actionner chaque roue et selon les procédures utilisées, il peut falloir revenir sur une roue déjà mise à 0. Avec la e-pascaline, il a été choisi de rendre possible une réinitialisation par une action unique, en cliquant sur le centre violet d'une roue ou bien en utilisant le bouton « réinitialiser » (Figure 23, en haut à droite).

La e-pascaline est incluse dans une page de cahier qui présente d'autres éléments. Il s'agit d'un ensemble d'outils qui ne sont pas des composantes de la e-pascaline mais qui sont liés à son utilisation. Leur présence dans les cahiers résulte de l'analyse des usages de la pascaline et du système d'instruments au sens de Bourmaud (2007) mobilisé par les élèves, comme par exemple « un stylo pour écrire ». Ils sont introduits dans le cahier, avec la e-pascaline, sous la forme d'un outil pour écrire des nombres ou du texte (Figure 24).

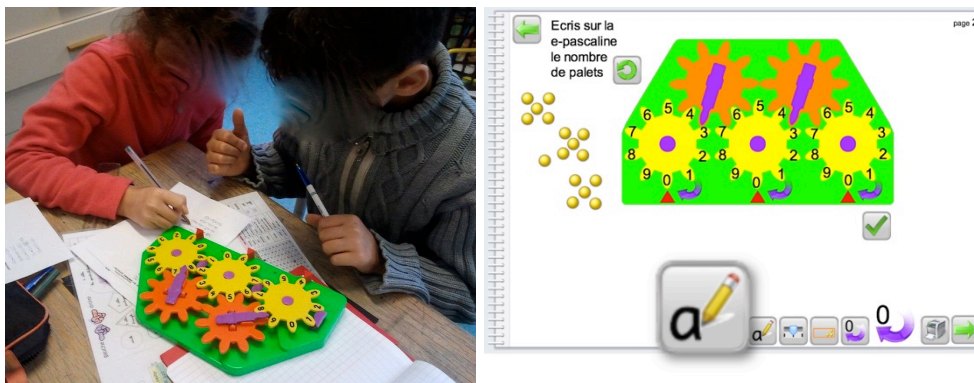


Figure 24. A gauche, les élèves de CP utilisent la pascaline, comptent avec leur doigts et prennent des notes sur une fiche. A droite, l'écran du cahier qui inclut la e-pascaline propose une série d'outils (en bas) dont un stylo pour écrire des nombres et du texte (zoom sur bouton texte).

Plusieurs outils ont été associés à la e-pascaline, certains spécifiques aux situations proposées et d'autres plus génériques (Figure 25).

- Une bande numérique permet d'afficher et de parcourir la suite des nombres sur l'intervalle $[0 ; 30]$ ou $[0 ; 100]$; construite à l'aide d'un curseur, elle peut être associée au geste de compter avec les doigts également mobilisés par les élèves (Figure 24).
- Des boîtes de dix permettent de grouper des objets par paquets de 10. Construites à l'aide de conteneurs, chaque boîte ne peut accueillir que 10 palets qui sont disposés en deux rangées de 5 et elle rejette les palets additionnels.
- Un compteur de clics compte chaque clic sur la e-pascaline, quelle que soit la roue utilisée et le sens de rotation choisi. Le rôle majeur du compteur de clics comme élément de complémentarité entre la pascaline et la e-pascaline est décrit ci-dessous.

Certains outils ont été intégrés puis supprimés dans des versions ultérieures de la e-pascaline, suite aux expérimentations avec les utilisateurs. C'est le cas du pointeur qui permettait de marquer les palets et jouait le rôle d'une aide au dénombrement.



Figure 25. Icônes des outils proposés dans le cahier « Ecrire les nombres avec la e-pascaline ». De gauche à droite, un stylo pour écrire, un curseur pour afficher la suite des nombres, un conteneur pour grouper les palets par dix et un compteur de clics (qui affiche 3 clics).

Le compteur de clics est un outil qui a un fort potentiel sémiotique pour la numération décimale. En effet, la différence entre les deux procédures pour afficher les nombres, la procédure par itération et la procédure par décomposition, que ce soit avec la pascaline ou la e-pascaline, est le nombre de clics qu'il faut effectuer pour obtenir l'affichage. Mais avec la pascaline physique, ce nombre de clics peut être difficile à appréhender par l'utilisateur, surtout un utilisateur dont les connaissances en numération sont en construction. Le compteur de clics de la e-pascaline ajoute une rétroaction supplémentaire à chaque clic : non seulement la roue tourne, mais le compteur s'incrémente. Cette rétroaction est alors disponible pour construire des situations didactiques et susciter des verbalisations.

L'addition d'outils à la e-pascaline, notamment le compteur de clics, montre que la e-pascaline n'est pas une imitation plus ou moins réussie de la pascaline. La e-pascaline et les outils qui l'accompagnent constituent un environnement qui augmente l'expérience mathématique des élèves par rapport à l'utilisation de la pascaline seule. De fait, la technologie Cabri Elem est prévue pour concevoir des situations d'apprentissage sous la forme de des cahiers d'activité. L'auteur choisit non-seulement les objets et leur comportement, mais également les rétroactions et les contraintes qui caractérisent les situations didactiques.

Situations didactiques et cahiers d'activité de la collection e-pascaline

La e-pascaline est incluse dans une collection de cahiers d'activité informatisés qui constituent des ressources directement utilisables par les enseignants. Une grande variété de possibilités d'utilisation de la e-pascaline est rendue possible par le choix de cette technologie. La valeur ajoutée de la partie numérique du duo, en plus des complémentarités, redondances et antagonismes, tient aussi à ces situations didactiques qui organisent l'activité de l'élève.

Chaque cahier peut inclure la e-pascaline, d'autres éléments et au fur et à mesure des pages, chaque élément et chaque comportement peut être modifié, en fonction des objectifs didactiques, ceux des auteurs initiaux ou ceux des utilisateurs-enseignants. Ces cahiers ont été conçus selon les principes de la théorie des situations didactiques, en particulier selon une analyse en terme de milieu et de variables didactiques. Cette analyse est implémentable dans un cahier par le concepteur qui peut choisir les actions possibles de l'utilisateur et les rétroactions de l'environnement. En effectuant ces choix en fonction d'une analyse didactique, notamment des procédures possibles et des variables didactiques, il crée les éléments d'un milieu. Caractérisé par les choix de valeurs de

variable didactique, ce milieu évolue au fur et à mesure des pages et provoque des modifications de stratégie, donc l'apprentissage. Avec la e-pascaline, les cahiers Cabri Elem organisent des milieux pour l'apprentissage de l'écriture chiffrée des nombres, des principes de la numération décimale ou d'autres notions selon les choix des concepteurs.

Pour concevoir des cahiers qui soient des ressources pertinentes du point de vue didactique mais aussi finalisées pour les enseignants, il a été utile de distinguer et d'implémenter trois types de rétroactions: rétroaction de manipulation directe, rétroaction d'évaluation, rétroaction de stratégie (Mackrell et al., 2013) (Mandin, De Simone, & Soury-Lavergne, 2016) (Soury-Lavergne, 2016). Dans les trois cas, il s'agit d'une rétroaction à l'action de l'élève, que cette action soit une manipulation directe, une stratégie ou une demande d'évaluation.

- Les *rétroactions de manipulation directe* sont tous les phénomènes sensibles (affichage, mouvement, son) générés par l'environnement en réponse à l'action de l'utilisateur. Ce sont les rétroactions de base que l'artefact numérique doit produire pour toute action de l'utilisateur, afin que celui-ci sache que son action a été prise en compte. Une bonne qualité d'interface résulte du fait que ces rétroactions suivent les principes de la manipulation directe. Ces rétroactions existent pour la e-pascaline à la fois grâce à la technologie choisie mais aussi en conséquence des choix de développement (tel que le choix fait pour la rotation des roues expliqué p. 70). Elles soutiennent la construction des schèmes d'usage et l'accomplissement des tâches secondes, liées à la manipulation de la composante artefact de l'instrument. Ces rétroactions sont combinées pour produire les rétroactions des deux autres types.
- Les *rétroactions d'évaluation* concernent l'évaluation finale par le système de la tâche accomplie par l'utilisateur. C'est une évaluation de la réponse apportée au problème posé, en l'occurrence au problème mathématique. Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, les rétroactions du milieu doivent être suffisantes pour que l'élève sache par lui-même s'il a réussi, c'est-à-dire mis en œuvre la stratégie gagnante ou pas. Cependant, nous avons constaté que les utilisateurs, élèves et enseignants, attendent plus d'un système informatique que le seul état courant de la résolution du problème. Ils attendent un verdict entre termes de « réussi » ou « non réussi ». Un système qui ne le proposerait pas serait considéré comme insuffisamment développé. Si le système est capable d'évaluer la réponse de l'utilisateur par rapport au problème posé, il peut la communiquer à la demande de l'utilisateur par un affichage, un déplacement ou un son, qui sont symbole de réussite ou d'échec. Ces phénomènes sont d'abord des rétroactions de manipulation directe au fait que l'élève a cliqué sur un bouton de demande de validation. Mais leur sens dans l'interaction avec l'utilisateur est celui d'une évaluation de la tâche accomplie.
- Les *rétroactions de stratégie* sont les phénomènes produits par le système pour étayer et faire évoluer la stratégie de résolution de l'utilisateur au cours de la résolution de la tâche. Pour produire ce type de rétroaction, le système doit être capable de (i) *faire un diagnostic* de la stratégie de résolution utilisée, à partir d'informations disponibles à l'écran du système, comme la reconnaissance de

configurations des objets à l'écran (position des roues de la pascaline) ou de suite d'actions (suite de clics), (ii) *déterminer une valeur de variable didactique* permettant de faire évoluer cette stratégie, c'est-à-dire disposer d'une analyse didactique relative à cette stratégie, (iii) *implémenter cette valeur* à travers un affichage, un déplacement, un son etc. Une telle rétroaction peut consister en des messages d'aide ou par la mise en surbrillance d'éléments contradictoires pour amener l'utilisateur à se rendre compte des limites de la stratégie courante (impossibilité de la mener à bien ou coût ou complexité trop importante). Ce type de rétroaction utilise donc les rétroactions de manipulation directe, mais son objectif dans l'interaction avec l'élève est de faire évoluer la stratégie en cours, sans toutefois indiquer une autre stratégie et sans résoudre le problème à la place de l'élève. Ce sont les rétroactions les plus fortement didactiques et les plus complexes à concevoir dans un environnement numérique. Les difficultés pour le concepteur se situent à trois niveaux. Premièrement, le diagnostic ne peut être réalisé qu'à partir des traces des actions de l'utilisateur à l'interface ; en l'absence de traces significatives, le diagnostic n'est pas possible. Ensuite, l'analyse didactique fournit les valeurs des variables didactiques qui déterminent la possibilité ou pas de créer une rétroaction. Enfin au niveau de l'implémentation, il n'est pas toujours possible d'implémenter l'action du système correspondant à la réponse à apporter. Un exemple d'une telle rétroaction dans la e-pascaline est donné par le fait de limiter le nombre de clics sur la roue des unités de la e-pascaline lorsque la stratégie par itération est mobilisée.

Six cahiers constituent actuellement la collection e-pascaline. Ils sont décrits et disponibles en ligne sur le site EducMath :

<http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees-13-14/mallette/prototype-mallette/les-cahiers-cabri-elem>

- Le cahier « e-pascaline seule » : l'artefact numérique e-pascaline tout seul à l'écran.
- Le cahier « Les nombres avec la e-pascaline » décrit p. 76.
- Le cahier « Additionner avec la e-pascaline », version CP et version CE1, décrit p. 79.
- Le cahier « Compter les clics de la e-pascaline », version CP et version CE1, décrit p. 81.

Ces cahiers présentent des caractéristiques communes, qui contribuent à la valeur ajoutée de l'artefact numérique par rapport à l'artefact tangible : possibilité de naviguer librement d'une page à l'autre et de retrouver l'état dans lequel la page a été quittée ; génération aléatoire des situations-problèmes dans le cadre défini par la valeur de variable didactique choisie ; rechargement libre d'une nouvelle tâche par l'élève ; possibilité de recommencer la tâche autant de fois que voulu et de redemander l'évaluation au système.

Les cahiers offrent également des outils pour l'enseignant : possibilité de contrôler la liste de problèmes dans une des pages du cahier et possibilité de suivre localement les résultats des élèves (via la liste des smiley qui reste affichée, Figure 27).

Nous décrivons ci-dessous le cahier « Les nombres avec la e-pascaline ». Les autres cahiers sont présentés dans le cadre des expérimentations réalisées avec les élèves et les enseignants.

Cahier « Les nombres avec la e-pascaline »

L'objectif didactique de ce cahier est la numération décimale, c'est-à-dire l'utilisation du code d'écriture chiffrée des nombres. Dans chacune des six pages d'activité du cahier, la tâche de l'élève est identique. Elle consiste à utiliser la e-pascaline pour afficher un nombre, déterminé par une collection de palets ou bien donné oralement.



Figure 26. Deux pages du cahier « Les nombres avec la e-pascaline ». A gauche, la page 2 propose à l'élève d'écrire le nombre de palets sur la e-pascaline. A droite, à la page 6, l'élève entend un nombre et doit l'écrire sur la e-pascaline.

Les objets présents sur chaque page (Figure 26) sont quasiment identiques : la e-pascaline, un bouton de réinitialisation qui permet d'obtenir un nouveau nombre à écrire, un ensemble d'outils, un bouton d'évaluation qui permet d'obtenir une rétroaction sur la validité du nombre affiché, des flèches de navigation d'une page à l'autre. La différence notable est la façon dont le nombre est indiqué : par une collection de palets pour les pages 2 à 4 ou bien oralement pour les pages 5 à 7.

Les autres différences, moins visibles mais tout aussi importantes, concernent la nature des rétroactions implémentées. Le bouton « réinitialiser » produit une nouvelle collection de palets dont la disposition spatiale dans la page est modifiée à chaque nouvelle demande. Un smiley « content/pas content » apparaît lorsque l'évaluation par le système est demandée (Figure 27).

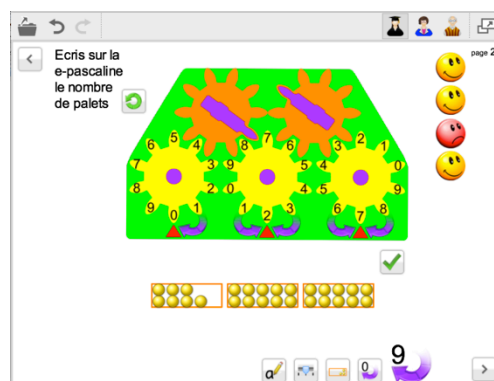


Figure 27. Au cours du travail de l'élève avec la e-pascaline, les réussites ou les échecs sont signifiés par un smiley. Quatre collections différentes ont été dénombrées, les deux premières et la dernière (encore présente à l'écran avec les palets rangés dans les boîtes de dix) ont conduit à un résultat correct, la troisième à un résultat incorrect.

Les variables didactiques de cette situation sont principalement la taille du nombre à écrire et la représentation initiale de ce nombre (qui n'est pas l'écriture chiffrée). La

variable didactique « taille du nombre à écrire » peut prendre trois valeurs correspondant à trois intervalles : [1 ; 30], [11 ; 69] et [70 ; 100]. Ces trois intervalles sont déterminés par les irrégularités de la suite orale des cent premiers nombres et la familiarité des enfants avec l'écriture chiffrée des petits nombres, avant qu'ils ne connaissent la numération décimale. La variable didactique « représentation initiale » peut prendre quatre valeurs : collection de palets en vrac, collection de palets en constellations du dé, collection de palets en bandes de dix, message oral.

Pour le dénombrement de la collection, une des procédures possible consiste à associer au déplacement de chaque palet un clic sur la roue unité de la e-pascaline, jusqu'à épuisement de la collection, et ainsi voir le nombre désignant le cardinal de la collection s'afficher sur la e-pascaline. Un élève qui ne connaît pas l'écriture chiffrée du nombre, peut la produire de cette façon. Dans la partie relative aux dictées de nombres, c'est l'association entre dénomination orale et dénomination écrite chiffrée qui est travaillée. Là encore, un élève qui ne connaît pas les associations désignation-orale/désignations-écrites de chaque nombre, mais qui connaît la comptine numérique, peut quand même produire l'écriture chiffrée d'un nombre dans l'intervalle de la suite numérique orale qu'il connaît. Il lui suffit d'associer chaque énonciation de nombre à un clic sur la e-pascaline. Une autre procédure consiste pour l'élève à dénombrer la collection, puis à associer au nom du nombre l'écriture chiffrée, puis à la reproduire sur la e-pascaline par l'une des trois procédures caractéristiques : ajustement, itération de l'unité ou décomposition.

Cependant, lorsque les palets sont organisés en ligne de dix, la procédure par décomposition, consistant à incrémenter la roue des dizaines de la e-pascaline d'un clic pour chaque bande est possible, sans passer par le dénombrement.

Tableau 1. Choix de valeurs de variables didactiques suivant les pages du cahier « Les nombres avec la e-pascaline »

Page du cahier	Variable didactique « taille du nombre »	Variable didactique « représentation initiale »
2	[1 ; 30]	Collection palets en vrac
3	[1 ; 30]	Collection palets en constellations du dé
4	[1 ; 30]	Collection palets en bandes de dix
5	[1 ; 30]	Orale
6	[11 ; 69]	Orale
7	[70 ; 100]	Orale

Évolutions envisagées mais non implémentées

L'intérêt d'un artefact numérique dans le duo d'artefacts résulte aussi du fait que l'artefact numérique peut évoluer et être décliné suivant les besoins didactiques. L'évolution de l'artefact tangible, tout à fait possible d'un point de vue théorique, l'est beaucoup moins en pratique. La flexibilité de l'artefact numérique est un atout important, rendu possible concrètement dans le cas de la e-pascaline, par le choix de la technologie Cabri Elem.

Au vu des analyses précédentes, des expérimentations qui ont suivi et des demandes des utilisateurs, des modifications et évolutions de la e-pascaline ont été envisagées, mais n'ont pas encore pu être réalisées :

- une e-pascaline avec plus de trois roues ;
- une e-pascaline avec une apparence visuelle plus adaptée à des élèves du secondaire, par exemple un support en bois et des roues en laiton évoquant la Pascaline historique ; actuellement la pascaline et la e-pascaline ont un design visuel plus adapté aux élèves du primaire, voire du cycle 2 (K-3) ;
- une modification des boutons d'action sur les roues pour ne plus s'appuyer sur une métaphore relative à la rotation des roues mais sur des signes mathématiques, par exemple une série de boutons avec les symboles +1 et -1, +10 et -10, +100 et -100, ou une série avec les symboles +1 unité et -1 unité, +1 dizaine et -1 dizaine, +1 centaine et -1 centaine ;
- l'effacement progressif des composantes mécaniques de la machine, roues oranges et support, puis masquage partiel des roues chiffrées (comme dans les compteurs papiers utilisés en classe de cycle 2 en France) ne laissant voir que le chiffre en face du triangle, puis affichage uniquement des chiffres utilisés pour écrire le nombre, pour mettre en œuvre un processus d'effacement du concret au profit du symbolique (Bruner, 1966) (Fyfe et al., 2014).

D'autres activités d'entraînement et de nouvelles situations-problèmes pourraient être conçues avec la e-pascaline, pour différents domaines des apprentissages numériques. Par exemple :

- Un cahier situation-problème qui demande d'anticiper le nombre qui vient avant ou le nombre qui vient après un nombre donné (domaine suite des nombres) ;
- Un cahier d'entraînement ou situation-problème (suivant le niveau des élèves) pour travailler les « compléments à » (compléments à 10 essentiellement), ce qui demande d'anticiper combien de clics sur une roue permettent d'actionner la roue adjacente (domaine numération décimale) ;
- Un cahier qui demande d'anticiper les chiffres affichés sur les roues en masquant partiellement ou complètement les roues ou les dents en face des triangles et en donnant d'autres informations sur le nombre ou en permettant certaines actions (suivant les informations et actions possibles, domaine numération décimale ou domaine suite des nombres) ;
- Un cahier d'entraînement pour faire des additions et des soustractions (domaine du calcul).

3.2. Apprentissage des élèves avec le duo d'artefacts

Nous avons réalisé en France de nombreuses observations d'élèves utilisant la pascaline et la e-pascaline, essentiellement au niveau CP et CE1, avec des objectifs et des contextes variés : des classes avec l'enseignant habituel qui utilise le duo ou l'un des deux artefacts, des classes avec des expérimentateurs qui interviennent, des classes qui se déplacent dans un autre lieu que l'école avec des intervenants. Ces observations ont eu pour objectif de recueillir des informations permettant l'évolution de la conception du duo d'artefacts au cours des projets. Il ne s'agissait pas d'expérimentations scientifiques, mais de situations permettant de récolter des retours d'expérience-utilisateurs sur le duo.

Nous n'avons pas conduit d'expérimentations permettant le recueil individualisé des procédures d'élèves. Par ailleurs, les cahiers e-pascaline n'offrent pas cette

fonctionnalité. Cependant, nos observations ont mis en évidence la stabilité de l'apparition de certaines procédures chez les élèves. Nous avons ainsi pu observer certaines procédures et certains phénomènes anticipés théoriquement. Enfin, quelques phénomènes non anticipés sont apparus comme étant très significatifs et ont été pris en compte dans le développement du duo et des cahiers. Néanmoins, une étude des apprentissages possibles avec le duo reste à conduire.

3.2.1. Numération décimale et addition avec le duo pascaline et e-pascaline

A partir d'une analyse didactique des principes de la numération décimale (Tempier, 2013) et de la façon dont la pascaline permet d'additionner par sur-comptage, nous avons analysé *a priori* les apprentissages d'élèves de 6 ans relatifs à la numération décimale et en particulier à la notion de dizaine avec le duo. Il s'agit que les élèves passent d'une conception du nombre selon laquelle l'écriture chiffrée est une icône, symbole d'une quantité (le nombre 17, c'est dix-sept objets ou dix-sept clics sur la pascaline) correspondant à une bijection entre les symboles et les quantités, à une conception selon laquelle l'écriture chiffrée représente des groupements indiqués par la position des chiffres dans l'écriture (le nombre 17, c'est une dizaine et sept unités). Avec cette dernière conception, la position et la valeur du chiffre doivent être combinées pour indiquer la quantité. Cette évolution est observable, lors de l'utilisation de la pascaline ou de la e-pascaline, à travers le changement de procédure et le passage de la procédure par itération à la procédure par décomposition.

Le cahier « Additionner avec la e-pascaline » prend en charge le passage de la procédure par itération à la procédure par décomposition avec une rétroaction qui consiste à bloquer l'itération de la roue des unités au-delà de 9 unités (Figure 28). Pour réussir le calcul, une telle rétroaction rend nécessaire la procédure par décomposition, associée à l'utilisation de l'écriture décimale du nombre.

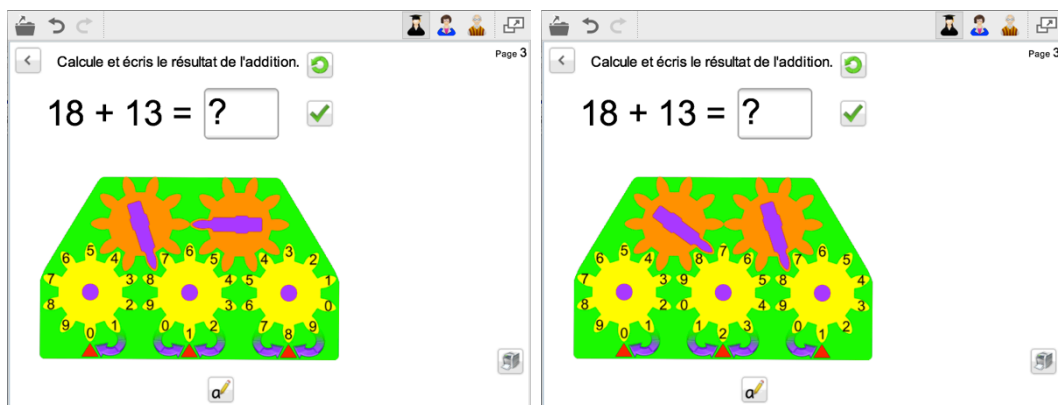


Figure 28. A gauche le nombre 18 est inscrit sur la e-pascaline. A droite, l'incrémentation de 13 unités par rotation de la roue des unités a été débutée. Après 3 clics, la flèche de rotation de la roue des unités a disparu.

Les choix de variables didactiques d'une page à l'autre du cahier concernent : le blocage de la roue des unités qui n'est pas actif en page 2, mais actif en page 3 et la taille des nombres à additionner (somme jusqu'à 30 en pages 2 et 3, somme jusqu'à 69 en page 4), rendant plus ou moins coûteuse la procédure par itération.

Tableau 2. Choix de valeurs de variables didactiques dans le cahier « Additionner avec la e-pascaline »

Page du cahier	Variable didactique « blocage de la roue unité »	Variable didactique « taille de la somme »
2	inactive	[1 ; 30]
3	active	[1 ; 30]
4	active	[1 ; 69]

La rétroaction par blocage de l'addition sur la roue des unités est la caractéristique qui crée de la complémentarité dans le duo. C'est une « rétroaction de stratégie » (p. 74) car elle n'évalue pas la réussite de la tâche mais provoque potentiellement un changement dans les stratégies des élèves. Elle est possible, car les trois conditions sont réalisées : le diagnostic du nombre de clics effectués sur la roue des unités est traçable dans le cahier, l'analyse didactique indique qu'une autre valeur de variable didactique est possible. Elle est implémentable, car le concepteur peut conditionner la possibilité d'actionner la roue des unités.

3.2.2. Complémentarité dans le duo d'artefacts : effet d'une rétroaction de stratégie dans les procédures des élèves

Nos observations dans toutes les classes de cycle 2³² (K-3) ont montré que les élèves n'hésitent pas à utiliser la procédure par itération même avec des grands nombres, proches de ou plus grands que 100. Par ailleurs, les élèves (y compris certains adultes en formation) mobilisent initialement d'autres stratégies que l'itération ou la décomposition pour réaliser une addition avec la pascaline lorsqu'ils découvrent la machine. Ils écrivent les deux termes côte à côte sur les roues de la pascaline et attendent que la machine produise le résultat comme avec une calculette (Soury-Lavergne & Maschietto, 2013) ou ils calculent la somme par un autre moyen, en particulier mentalement, et l'inscrivent sur la pascaline. La procédure par itération n'apparaît qu'après intervention de l'enseignant et discussion des deux stratégies précédentes.

Pour étudier les usages du cahier e-pascaline pour faire des additions, nous avons observé deux classes de CP (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015b) avec des élèves qui connaissaient déjà la pascaline.

Dans la classe de Cléo³³, la procédure par itération avec la pascaline est apparue après l'intervention de l'enseignante qui a imposé de n'utiliser que la roue des unités. Ensuite, avec les nombres plus grands que 10 mais pour une somme inférieure à 30, les erreurs générées par cette procédure par itération ne sont pas assez nombreuses pour amener les élèves à chercher une autre stratégie, même lorsque l'enseignant incite à le faire. Lorsqu'ils ont utilisé le cahier e-pascaline, les élèves bloqués par la disparition de la flèche sur la roue des unités sont revenus à l'utilisation de pascaline pour réaliser le calcul puis ont inscrit le résultat sur la e-pascaline. Dans ce cas, la e-pascaline considère le résultat

³² Nous utilisons les terminologies cycle 1, cycle 2 et cycle 3 en vigueur en 2017 : cycle 1 pour les trois années d'école maternelle, cycle 2 pour les trois premières années de l'école élémentaire, cycle 3 pour les deux dernières années de l'école élémentaire et la première année du collège.

³³ Tous les noms des enseignants ont été modifiés.

comme correct si le nombre saisi correspond bien à la somme. Cela illustre précisément la difficulté du diagnostic de la procédure de l'élève, qui, dans ce cas-là, n'a pas effectué le calcul avec la e-pascaline. En effet, lorsque l'élève saisit $13+18$ sur la e-pascaline avec la procédure par décomposition, ou bien lorsqu'il saisit directement 31, il réalise les mêmes actions à l'interface, c'est-à-dire 3 clics sur la roue des dizaines et 1 clic sur la roue des unités. La e-pascaline ne peut pas différencier ces deux stratégies, donc ne peut pas créer une rétroaction adaptée. L'enseignante a alors empêché l'usage de la pascaline tangible, ce qui est facile étant donné qu'il s'agit de deux artefacts distincts. Cependant, les élèves n'ont pas réussi à mobiliser une autre stratégie pour réaliser les calculs, montrant la difficulté à conceptualiser le nombre à travers son écriture en unités et dizaines.

Dans la classe de Stina, les élèves ont utilisé directement la e-pascaline et ont été, comme ceux de Cléo, incapables de terminer les calculs lorsque la roue des unités n'était plus disponible. Stina a alors interrompu la séance, pensant qu'il s'agissait d'un « bug » du cahier (voir p. 87). Au cours de la séance suivante, Stina a posé le problème collectivement aux élèves, « la roue des unités est bloquée », et a animé une discussion pour faire expliciter par les élèves les différentes explications possibles. Parmi les explications proposées par les élèves, telles que : il n'est pas possible de tourner la roue des unités plus d'une fois ou bien ils ont trop tourné la roue ou encore ils ont dépassé une limite (vingtaine ou dizaine), montrent qu'ils identifient bien la contrainte mais pas la connaissance en jeu, l'écriture décimale, et donc pas la solution. L'enseignante a alors demandé aux élèves de décomposer les termes de la somme de différentes façons. À partir des décompositions additives de 23 telles que $20 + 3$; $10 + 10 + 3$; $13 + 10$; $10 + 10 + 2 + 1$ etc... qui ont été proposées, la plupart des élèves ont pu mobiliser la stratégie par décomposition et comparer l'efficacité des deux stratégies.

Ainsi le blocage de la roue des unités a bien créé une situation-problème pour les élèves, situation qui n'aurait pas existé sans l'artefact numérique. De ce point de vue, il y a bien complémentarité. Cependant, sans l'intervention de l'enseignante et l'utilisation des décompositions additives, les élèves n'auraient pas pu construire la procédure alternative visée par la situation.

3.2.3. Une situation problème « Compter les clics de la e-pascaline »

Le cahier « Compter les clics de la e-pascaline » demande d'afficher un nombre sur la e-pascaline en faisant un minimum de clics.

La formulation de la tâche « Ecris ce nombre avec un minimum de clics sur les flèches » fait appel au domaine de la numération et pas à celui du calcul. Or, en partant de la e-pascaline initialisée à 000, c'est une combinaison d'additions et de soustractions qui, pour certains nombres, permet de trouver la stratégie gagnante. Par exemple, avec le nombre 17, ni la procédure par itération (17 clics sur la roue des unités) ni la procédure par décomposition (8 clics) ne sont les procédures gagnantes. La procédure gagnante est celle qui s'appuie sur le calcul et l'égalité $17 = 20 - 3$ et permet d'écrire 17 avec seulement 5 clics. Cette situation demande donc de mettre en relation deux propriétés du nombre, son écriture décimale et ses décompositions additives.



Figure 29. Le cahier « Compter les clics de la e-pascaline ». Pour écrire le nombre 17, trois stratégies ont été utilisées, 17 clics sur la roue des unités, 1 clic sur la roue des dizaines et 7 sur la roue des unités, 2 clics sur la roue des dizaines et 3 clics en sens inverse des aiguilles d’une montre sur la roue des unités. La dernière permet d’obtenir le smiley.

La seule variable didactique identifiée et implémentée dans le cahier est le nombre à écrire. Elle prend trois valeurs, suivant la procédure qui permet de l’écrire avec le minimum de clics : les nombres de 0 à 5 pour lesquels la procédure par itération donne le minimum de clics, les nombres de la forme \overline{cdu} avec $c, d, u \in [0; 5]$ pour lesquels la procédure par décomposition donne le minimum de clics et les nombres de la forme \overline{cdu} avec c ou d ou u plus grand que 5, pour lesquels un calcul soustractif donne le minimum de clics. Cette variable didactique ne change pas de valeur au fur et à mesure des pages du cahier. Quelle que soit la page, les nombres tirés aléatoirement peuvent appartenir à l’une des trois valeurs. En revanche, cette variable est contrôlable par l’enseignant pour les nombres affichés dans la première page d’activité du cahier (Figure 30). Au moment du choix des six nombres qui seront proposés aux élèves, le cahier indique à l’enseignant le type de procédure qui donne le minimum de clics.

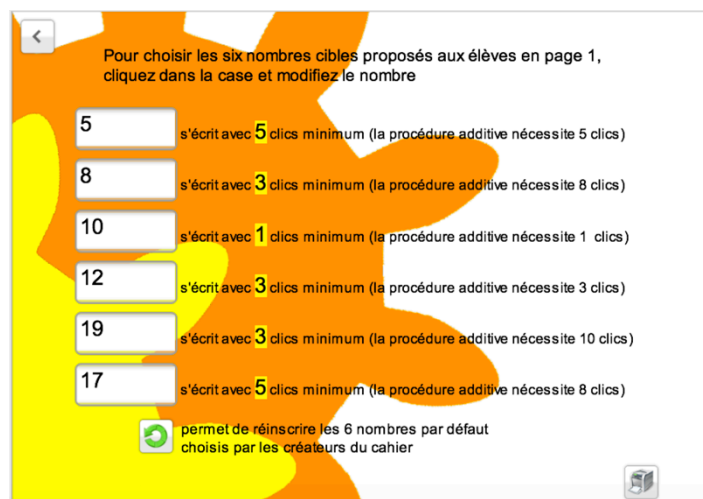


Figure 30. Page de configuration des nombres à écrire dans le cahier « Compter les clics de la e-pascaline ». Cette page à destination des enseignants leur permet de choisir les nombres à écrire et leur fournit dynamiquement une rétroaction sur les conséquences du choix en terme de procédure d’élèves.

Pour tous les élèves, jusqu’au niveau 6^e (K-6), ce cahier présente une réelle situation-problème. Les nombres pour lesquels la procédure par décomposition n’est pas gagnante

demandent un changement de procédure qui nécessite la mise en relation de deux visions du nombre : son écriture décimale et le nombre comme résultat d'un calcul. C'est la même mise en relation qui permet d'associer l'addition + 1 à l'obtention du successeur dans la suite des nombres, ou encore compter de 2 en 2, c'est-à-dire de faire successivement l'opération + 2. Au niveau du CP, et pour de nombreux élèves dans les classes supérieures, la relation n'est pas construite.

Au cours de l'expérimentation avec Cléo et Stina, nous avons fait une observation non prévue dans l'analyse *a priori*. D'après l'analyse *a priori*, 9 et 19 correspondent à la même valeur de variable, la procédure pour les afficher avec un minimum de clics nécessitant de faire un calcul. Or, les élèves de CP ont réussi plus facilement à écrire le nombre 19 avec un minimum de clics que le nombre 9.

Nos observations nous ont montré que les élèves écrivaient 19 en utilisant la procédure par décomposition. Ils commençaient par indiquer 1 sur la roue des dizaines, puis voyant, sur la roue des unités la dent du 9 à proximité du triangle rouge, ils actionnaient la roue des unités en sens inverse. Voyant alors que la roue des dizaines n'affichait plus 1, ils ajustaient la roue en ajoutant à nouveau une dizaine. C'est le calcul $+10-1+10 = 19$ qui explique la procédure des élèves, et pas $20-1 = 19$. Comme le nombre 9 n'a pas de dizaine, la procédure par décomposition n'utilise pas la roue des dizaines et les élèves étaient bloqués. Cela signifie aussi que pour l'écriture d'un nombre, l'utilisation des différentes roues de la pascaline ne signifie pas que l'élève mobilise ses connaissances sur la numération décimale. Il reproduit simplement l'organisation spatiale des chiffres.

Ce cahier met particulièrement en évidence la complémentarité entre la pascaline tangible et la e-pascaline. La pascaline émet les clics, mais n'est pas utilisable pour les dénombrer simultanément avec la tâche d'écriture. La e-pascaline n'émet pas de son mais fournit la rétroaction nécessaire en dénombrant les clics.

3.2.4. *Apprentissages avec un duo d'artefacts, une étude à poursuivre*

Ces premières études montrent l'intérêt de la e-pascaline et des cahiers d'activité pour concevoir des situations didactiques et les utiliser en classe. Elles ont permis de confirmer la grande résistance des élèves à abandonner les stratégies par itération au profit des stratégies par décomposition, révélatrice d'une conceptualisation du nombre qui n'intègre pas encore les principes de l'écriture décimale.

Cependant, elles ne mettent pas clairement en évidence le gain didactique lié au duo d'artefacts, en plus de l'intérêt de chacun considéré séparément. De plus, elles n'ont pas permis d'identifier les trajectoires d'apprentissage des élèves, ni l'imbrication des schèmes dans le passage d'un artefact à l'autre. Cela reste à faire pour le duo pascaline et e-pascaline. En revanche, la mise en évidence du développement des schèmes et des connaissances a été réalisée par Voltolini pour son travail de doctorat, à propos de 34 élèves utilisant un duo d'artefacts en géométrie (Voltolini, 2017).

3.3. Appropriation d'un duo d'artefacts par les enseignants

Les collectifs d'enseignants, de formateurs et de chercheurs ayant participé au développement du duo d'artefacts pascaline et e-pascaline ont produit un ensemble important de ressources pour accompagner l'utilisation du duo. En plus de la pascaline

tangible et des six cahiers e-pascaline, les principes de travail avec le duo sont présentés dans un site web « prototype de mallette » sur le site EducMath, avec des conseils de prise en main, les descriptifs exhaustifs des cahiers et des vidéos tutorielles.

Un scénario pédagogique pour la classe de CP a été élaboré et testé par les enseignants du Plan Science en Côte d'Or. Il est organisé en quatre unités selon quatre objectifs successifs : découverte de la pascaline, écriture des nombres, additions et soustractions et calcul réfléchi. Ce scénario pédagogique, décrit sur le site web du projet Plan science en Côte d'Or, précise pour chaque unité : les objectifs et compétences, un déroulement temporel de l'utilisation de la pascaline et/ou de la e-pascaline et les procédures probables des élèves, des propositions d'organisation pédagogique (travail individuel, en binôme, collectif) et l'explicitation de choix didactiques.

Un parcours de formation « IFE – La numération décimale avec une machine mathématique au cycle 2 » a également été conçu et rendu accessible au niveau local sur la plateforme M@gistère. Ce parcours fait référence à l'ensemble des ressources de la mallette, mallette désignant un ensemble complexe, mais organisé, de ressources de différentes natures : les pascalines, les cahiers e-pascaline, le site prototype de Mallette et le site scénario pédagogique.

3.3.1. Intégration du duo d'artefacts dans le système de ressources des enseignants

La question de leur appropriation et de leur utilisation par les enseignants n'ayant pas pris part aux travaux initiaux a été étudiée au cours d'une expérimentation spécifique du projet Mallette (Soury-Lavergne, 2014b), (Maschietto & Soury-Lavergne, à paraître). Il s'agissait également de répondre à la question posée par les partenaires du projet Mallette sur l'intérêt et l'opportunité de la diffusion de la mallette pour la communauté éducative.

Notre hypothèse de recherche avec cette expérimentation était que la valeur ajoutée du duo d'artefacts pouvait être perçue par les enseignants et contribuait à son utilisation en classe avec leurs élèves. En suivant Drijvers (2012) qui a identifié trois fonctions que remplissent les technologies numériques, nous voulions savoir si les enseignants utiliseraient le duo et les ressources de la mallette pour (i) faire des mathématiques, (ii) faire apprendre et entraîner les compétences et/ou (iii) provoquer et soutenir une évolution conceptuelle chez leurs élèves.

Nous avons étudié cette appropriation à la lumière du cadre conceptuel fourni par l'approche documentaire et la notion d'orchestration (Gueudet & Trouche, 2008) (Trouche, 2009) (Drijvers et al., 2010). Ces approches permettent de saisir l'activité complexe de l'enseignant élaborant une mise en œuvre en situation avec les élèves, à partir d'une collection de ressources dont un germe de scénario et le duo d'artefacts. L'approche documentaire accorde de l'importance à l'apparition de nouveaux éléments pour renouveler et enrichir le scénario, en tant que signes d'une genèse documentaire en cours. Dans la situation du duo pascaline et e-pascaline que nous voulions étudier, la collection de ressources désigne les différents éléments précités mis à disposition des enseignants, dont le germe de scénario en quatre étapes pour le CP. Les éléments nouveaux, que nous voulions observer et que nous avons retenus comme critères du développement d'une genèse instrumentale et donc de l'appropriation, sont : l'apparition de nouvelles tâches pour les élèves et l'existence et l'évolution des orchestrations

instrumentales élaborées par les enseignants. Les orchestrations instrumentales désignent les configurations didactiques des artefacts associées à des modes d'exploitation, qui permettent à l'enseignant de mener son projet didactique. Le scénario en quatre étapes mentionne pour chaque étape quels sont les artefacts utilisés, propose des usages conjoints ou successifs et indique le rôle joué par chacun des deux. En accédant aux tâches nouvelles par rapport au scénario proposé, aux configurations didactiques avec la pascaline et la e-pascaline et aux intentions et réalisations des enseignants, nous avons pu suivre l'appropriation du duo et de chacun des artefacts par les enseignants.

Nous avons complété cette étude par une analyse ergonomique de l'utilité, l'utilisabilité et l'acceptabilité du duo d'artefacts (Tricot et al., 2003) à partir des déclarations des enseignants. Cette analyse a permis d'intégrer le point de vue des enseignants dans les résultats.

Les questions auxquelles cette expérimentation a cherché à répondre ont été :

- Les ressources disponibles sont-elles suffisantes pour initier les genèses instrumentales et documentaires des enseignants relatives au duo ?
- Les genèses documentaires des enseignants se développent-elles suffisamment pour leur permettre d'utiliser le duo d'artefacts avec leurs élèves et plus précisément :
 - Le duo est-il utilisé par les enseignants pour faire des mathématiques, pour faire apprendre et s'entraîner et/ou pour provoquer et soutenir la conceptualisation ?
 - Les enseignants produisent-ils des ressources nouvelles lors de l'utilisation du duo, attestant d'une genèse documentaire ?
 - Les orchestrations réalisées par les enseignants s'appuient-elles sur des configurations didactiques et des modes d'exploitation qui utilisent les deux artefacts du duo ?

3.3.2. Méthodologie de suivi des genèses instrumentales et documentaires des enseignants relatives au duo d'artefacts

Huit enseignantes de CP n'ayant pas été impliquées dans les projets initiaux et découvrant la pascaline et la e-pascaline ont été recrutées avec l'aide institutionnelle de l'académie (inspecteurs de l'éducation nationale et direction des services de l'enseignement scolaire). Elles étaient volontaires avec la contrainte d'être deux dans une même école. Il s'agit là d'un des résultats de la recherche menée sur le programme Pairform@nce à propos du rôle de la collaboration dans le développement professionnel des enseignants. Le choix de deux enseignants par établissement a eu pour objectif de favoriser leur engagement dans l'expérimentation en leur donnant les moyens de collaborer et de créer un collectif dans le cadre quotidien de leur pratique. Elles ont été indemnisées financièrement pour le travail supplémentaire lié à leur participation à l'expérimentation. Elles ont été suivies pendant 4 mois, de mars à juin 2014, avec la consigne de prendre connaissance de la mallette à partir du site EducMath et du site Plan Science en Côte d'Or et de l'utiliser en classe avec leurs élèves pour au moins huit séances entre mars et juin 2014.

Pour pouvoir répondre à nos questions à partir de l'échantillon réduit à 8 enseignantes, un minimum de genèse instrumentale et documentaire chez toutes les participantes a été assuré en organisant le lancement de l'expérimentation par une première journée de travail collectif. Le déroulement de l'expérimentation a été le suivant :

- Une première réunion de lancement, sous la responsabilité de l'équipe conceptrice, chercheur et formateur, et avec le soutien institutionnel de l'académie. Au cours de cette journée, le calendrier de l'expérimentation et le processus de collecte des données ont été présentés. La pascaline, la e-pascaline et l'ensemble des ressources ont été également introduits.
- Pendant douze semaines, les enseignantes ont mis en œuvre des séances en classe avec la pascaline et la e-pascaline. Toutes les deux semaines, nous avons interviewé par téléphone les binômes d'enseignantes dans leur école et nous avons récolté leurs productions dans un dossier partagé en ligne (travaux d'élèves, fiches de préparation, photos de classe et états successifs des « fiches de ressources consultées » décrites ci-dessous).
- Une journée de séminaire final a été organisée pour donner l'occasion aux enseignantes de partager leurs attentes et leurs difficultés et de présenter leurs créations et adaptations du scénario pédagogique. Nous avons aussi restitué aux participants les premiers résultats de l'étude.

Pour connaître quelles ressources de la mallette étaient consultées par les enseignantes nous leur avons demandé de remplir *une fiche « ressources consultées »* à chaque fois qu'elles consultaient l'un des sites ou qu'elles faisaient des recherches complémentaires en lien avec les séances. Toutes les ressources des sites étaient listées sur une fiche, qu'il suffisait de copier, de dater avant de surligner les ressources consultées. Elles pouvaient indiquer également les autres ressources qu'elles avaient consultées. Au cours des seize *interviews téléphoniques*, nous avons recueilli des éléments sur la préparation des séances (période de travail avant et après la séance de classe) avec des informations telles que : la date, la durée, si le travail avait été individuel ou collectif et quelles ressources avaient été considérées comme utiles, inutiles ou manquantes. A propos des séances de classe avec les élèves, nous leurs avons demandé des informations factuelles (date, nombre d'élèves, durée anticipée et réelle, disposition des ordinateurs, organisation pédagogique et nombre d'adultes présents). Nous avons également recueilli leurs commentaires sur le déroulement de la séance à propos des mathématiques en jeu, des apprentissages des élèves, des événements inattendus, des changements de plan et des remarques des élèves. Nous avons complété ces deux recueils de données par *les productions d'élèves et les photos* de classe que les enseignantes ont déposées sur le dossier partagé.

Il faut ajouter trois remarques sur cette méthodologie. Tout d'abord, elle n'a pas prévu l'observation de l'activité de l'enseignant dans sa classe. Nous n'y avons eu accès que par l'intermédiaire des enseignants, par leurs rapports, ressources et interviews. Ensuite, l'organisation du recueil de données par interview a entraîné des interactions régulières avec les expérimentateurs. Elle a donc fourni un soutien méthodologique dont ne bénéficieraient pas les enseignants dans leurs conditions habituelles d'exercice. D'après les travaux sur les collectifs d'enseignants (présentés en partie 1. § 3.2.3 p. 32 et § 3.3.4 p. 39), ces éléments ont des conséquences positives sur l'appropriation de la mallette par les enseignants. Mais ils conditionnent la généralisation de l'expérimentation. Enfin, le recueil de données par partage de photos, de productions d'élèves, de rapports et par les

interviews téléphoniques régulières a très bien fonctionné. En revanche, nous n'avons récupéré que 19 fiches « ressources consultées », ce qui semble en deçà de l'usage vraisemblable des ressources proposées, car il n'est pas cohérent avec les déclarations lors des interviews.

3.3.3. Genèses documentaires attestées et orchestrations variées

Les ressources mises à disposition des enseignantes ont été utilisées et ont permis aux *genèses instrumentales et documentaires* d'être *initiées*. Le scénario pour la classe est la plus utilisée des ressources mises à disposition. Il est mentionné dans 11 des 19 fiches « ressources consultées » ainsi que par toutes les enseignantes lors des interviews. Elles déclarent que c'est une ressource clef, en particulier grâce à son organisation chronologique qui suit l'ordre des séances pour la classe. Un site web de ressources qui ne propose pas cette entrée temporelle est considéré comme inadapté. Le site regroupant les vidéos tutorielles et les documents de prise en main a été moins consulté. Il n'est mentionné que dans 9 fiches ressources sur 19 et ces 9 fiches n'ont été remplies que par deux enseignantes. Il a été utilisé au début, pour initier les genèses instrumentales, en particulier lors du séminaire de lancement, puis il n'est plus apparu nécessaire, comme l'a précisé Cléo lors de la première interview. Même en cas de difficulté, il n'a pas été perçu comme une ressource possible (exemple de l'épisode de la flèche qui disparaît, § 3.2.2 p. 80 et ci-dessous).

Prénom *Mattéo*

1. Je trouve différentes manières d'écrire les nombres 28 et 37.

Calculs trouvés :

- 28 : $10 + 18$ (10 clics), $20 + 8$ (5 clics), $30 - 2$ (3 clics), $15 + 13$ (10 clics)
- 37 : $10 + 27$ (10 clics), $30 + 7$ (10 clics), $40 - 3$ (7 clics), $35 + 2$ (7 clics), $38 - 1$ (2 clics)

2. J'entoure dans le premier exercice l'opération qui utilise un minimum de clics sur la pascaline pour écrire les nombres 28 et 37. Et, je détaille en m'aidant des tableaux comment je peux écrire ces nombres.

Ecrire 28

	les dizaines	les unités	nombre de clics
Etape 1 j'avance ou je recule (j'entoure)	... 2 8 ...	9
Etape 2 j'avance ou je recule (j'entoure) 7 ...	2

Figure 31. Tâche de recherche de différents calculs et décompositions d'un nombre créée par Stina.

A propos du démarrage des genèses, Mia a été une exception. Absente au séminaire de lancement, elle a découvert le duo d'artefacts ainsi que les ressources de la mallette uniquement par les deux sites, qu'elle a parcourus sans avoir eu la pascaline entre les mains. Lors de son unique interview, elle a déclaré « j'ai essayé les cahiers pour vraiment me rendre compte de l'objet, de comment il fonctionnait, donc quand je l'ai eu entre les mains, avant de le proposer aux élèves, j'avais déjà bien compris comment ça fonctionnait » (Mia, interview 1). Dans cette déclaration, les cahiers apparaissent comme un moyen d'appropriation de la pascaline tangible, mettant en évidence l'utilité de la redondance

entre les deux artefacts. Les cahiers ont également joué un rôle dans l'appropriation des situations didactiques : « *j'ai même fait tous les cahiers pour vraiment me rendre compte de ce que l'on allait demander aux élèves dans le dispositif. [...] après, moi, je me suis posée des questions sur la dizaine en premier, les unités en premier, je me suis posée des questions sur euh, j'ai vu après en regardant sur le site, et j'ai lu les différents contenus sur les explications sur ce qu'avaient fait les élèves, sur, euh, ce qui avait déjà été fait dans les classes, c'est bon* » (Mia, interview 1). Ainsi les cahiers e-pascaline avec les ressources ont donné à Mia les informations nécessaires pour se lancer. Par la suite, Mia n'ayant pas poursuivi l'expérimentation pour des raisons de santé, nous n'avons pas pu suivre cette genèse débutée de façon autonome.

Les genèses documentaires de quatre des sept enseignantes ayant mené des séances en classe ont été suffisamment développées pour produire de nouvelles ressources, essentiellement de nouvelles tâches pour la classe. Rose et Iris ont utilisé la pascaline pour compter de 2 en 2, de 10 en 10 etc... à partir de 0 ou d'un autre nombre, au cours de situations collectives de classe (chaque élève énonce un terme de la suite arithmétique). Rose a créé une tâche de recherche du nombre d'avant et du nombre d'après un nombre donné, en particulier le nombre d'avant 70 ou celui d'après 59. Rose a justifié ce type de situation (interview 3) par son absence dans le scénario et le manque ressenti. Stina a créé plusieurs fiches élèves pour les amener à rechercher différentes décompositions des nombres ou calculs égaux avec la pascaline. Elle a conçu cette tâche supplémentaire pour aider les élèves à surmonter le problème posé par le cahier « minimum de clics ». Avec la fiche proposée par Stina, la mobilisation de calculs soustractifs a été prise en charge par l'enseignante. A la suite, les élèves ont pu réussir la tâche avec la e-pascaline.

Ces genèses se sont développées jusqu'au questionnement des ressources d'un point de vue didactique. Au cours de cette expérimentation, à propos de la suite des nombres, Rose a pris conscience du fait que, pour les élèves, compter de deux en deux n'était pas la même chose que faire $+2$: « *alors compter de 2 en 2, je me suis un peu... il y en a une qui me dit « on compte un nombre ». Je lui dis « oui » mais moi je voulais qu'ils disent « +2 » parce que mon but c'est l'addition* » (Rose, interview 3). Pour Iris, la prise de conscience concerne le fait que les caractéristiques de la tâche mathématique (variables didactiques) déterminent les procédures des élèves et leur réussite. A propos du calcul de 10 en 10, Iris remarque que les élèves réussissent lorsqu'il s'agit de l'activité de leur fichier³⁴ « calcul de 10 en 10 » et quand ils utilisent la pascaline et que la suite démarre à zéro. Dans ce cas, ils mobilisent la procédure par décomposition. En revanche, avec la pascaline ils ne réussissent plus en partant d'un autre nombre que 0 et, dans ce cas, ils mobilisent la procédure par itération. L'usage de la pascaline a permis à Iris d'interroger les deux procédures mobilisées et leur signification du point de vue des connaissances sur les nombres, comme présenté à propos de l'addition (§ 3.2.1 p. 79).

A propos du cahier « compter les clics de la e-pascaline », Lilas a produit le début de l'analyse didactique que nous avons présentée au § 3.2.3 p. 81. Elle explique dans le cahier de bord qu'elle a tenu (à son initiative) et nous a remis : « *Cahier nombre de clics : je me rends compte que les élèves sentent que pour écrire 8, il vaut mieux reculer mais à partir de 0 il n'y a pas de flèche donc ils passent par 10 pour faire apparaître la flèche et n'ont pas*

³⁴ Un « fichier » dans le langage des enseignants de mathématique en France est un cahier d'activités pour les élèves, vendu par les éditeurs, qui propose une page d'exercices par jour. Les élèves écrivent leurs réponses directement sur la page.

conscience qu'il faut faire $10 - 2$. Une mise en commun avec le vidéo projecteur sera nécessaire pour expliciter le calcul ».

A propos de l'addition et du phénomène la « flèche qui disparaît », conçu par les auteurs du cahier comme une rétroaction de stratégie, Stina et Nelly (interviews 2 et 3) ont d'abord pensé qu'il s'agissait d'un bug du cahier. Comme toutes les enseignantes de l'expérimentation, elles n'ont pas anticipé l'existence et le rôle de cette rétroaction et l'ont rencontrée au cours d'une séance avec les élèves (les commentaires du cahier addition à destination des enseignants explicitent le rôle de la flèche qui disparaît, la rétroaction est également présentée sur le site prototype de mallette). Stina et Nelly ont interrompu la séance suite aux échecs répétés de leurs élèves utilisant la procédure par itération. C'est au cours de l'interview 2 qu'elles ont signalé le problème aux expérimentatrices et ont appris que le fonctionnement était voulu. La discussion les a amenées à reprendre la séance avec les élèves en transformant la difficulté en problème à résoudre par les élèves. Sans le cadre de l'expérimentation, ces enseignantes n'auraient pas eu accès au rôle didactique de cette rétroaction. A propos de ce blocage de la roue des unités, Cléo a produit une analyse didactique plus approfondie. Elle s'est interrogée sur la pertinence de cette rétroaction dans le cas d'une addition dont le second terme est un nombre à un chiffre. C'est effectivement le cas pour certains tirages. Avec un second terme à un chiffre, la flèche disparaît au moment où le calcul est terminé. Or l'élève n'a pas eu à décider par lui-même s'il avait terminé ou non son calcul, le système le faisant à sa place. Rose s'est interrogée sur l'ambiguïté du diagnostic possible de la procédure de l'élève à cause de cette rétroaction : « je ne sais pas si l'élève en question a trouvé le bon résultat parce que oui, il a bien tourné le bon nombre de fois la roue des unités, ou si c'est parce que il est allé, il a tourné la roue des unités jusqu'à ce que la flèche disparaisse et euh, et c'est un peu... » (Cléo, interview 3). Cela démontre une appropriation approfondie des cahiers et de leur fonctionnement didactique.

Ces éléments d'analyse didactique produits par les enseignants au cours de l'utilisation des ressources de la mallette ainsi que les modifications du scénario réalisées démontrent le développement d'une genèse documentaire avancée. Ils montrent également que ces enseignantes cherchent à provoquer des avancées conceptuelles chez leurs élèves grâce à l'utilisation du duo, pascaline et e-pascaline (Drijvers, 2012). Mais il n'est pas possible de conclure que ces genèses auraient pu se développer de cette façon sans l'assistance apportée par le cadre expérimental et les interviews régulières.



Figure 32. Diverses configurations didactiques des orchestrations relatives à l'usage des artefacts pascaline et e-pascaline. A gauche un élève légende l'image de la pascaline projetée avec des étiquettes repositionnables. A droite, les élèves à leur bureau ont la pascaline, la e-pascaline est projetée et une souris wifi permet d'agir à distance sur la e-pascaline.

Des orchestrations variées ont été élaborées par les enseignantes qui ont toutes créé des configurations didactiques variées pour organiser, dans leur classe, l'accès de leurs élèves aux deux artefacts du duo. Elles ont combiné l'équipement mis à leur disposition, dont les 30 pascalines par école et les ordinateurs, la configuration spatiale des classes, la présence d'adultes supplémentaires pour organiser leurs séances de classe, pour faire travailler les élèves collectivement, par groupe, par binôme, simultanément ou successivement. Elles ont créé ou se sont procuré des artefacts supplémentaires pour orchestrer l'utilisation de la pascaline et de la e-pascaline. Par exemple Cléo a créé des étiquettes repositionnables pour légender une image de la pascaline (Figure 32 à gauche). Iris s'est dotée d'une souris wifi pour que les élèves puissent agir sur la e-pascaline projetée depuis leur place. Cinq des sept enseignantes ont utilisé un vidéo projecteur. Il a servi à combiner l'utilisation de la pascaline et de la e-pascaline par les élèves soit pour comparer le fonctionnement des deux soit pour mettre en commun les difficultés rencontrées, les procédures des élèves et les solutions. C'est une des configurations didactiques correspondant à l'utilisation simultanée des deux artefacts du duo. Bien qu'ayant reconnu l'utilité du vidéo projecteur pour les mises en commun et la grande difficulté de faire sans (la pascaline est trop petite pour être visible par tous les élèves de la classe), les deux autres enseignantes n'y ont pas eu recours.

Les enseignantes ont souvent combiné l'utilisation de la e-pascaline et de la pascaline dans leur séance. La combinaison a été faite selon deux caractéristiques : combinaison temporelle (simultanément ou successivement) et combinaison de type d'artefacts (e-pascaline sur un ordinateur pour un ou deux élèves ou bien projetée pour un usage collectif). On obtient alors six configurations didactiques possibles avec le duo d'artefacts : usage successif de la pascaline puis de la e-pascaline locale ou de la e-pascaline projetée, usage simultané de la pascaline avec la e-pascaline locale ou la e-pascaline projetée. Les configurations ont toujours été autorisées ou imposées par les enseignantes aux élèves. Au fur et à mesure de l'expérimentation, elles ont affiné leur choix pour l'une ou l'autre des configurations en fonction de l'équipement disponible, de la tâche donnée, de leur objectif didactique et en prenant conscience des différentes possibilités de contrôle sur les procédures des élèves. Un exemple a déjà été rapporté à propos du cahier addition pour lequel le recours à la pascaline, en même temps que la e-pascaline, a permis aux élèves de résoudre le problème sans mobiliser la procédure par décomposition requise par la e-pascaline (§ 3.2.2, p. 80). Un autre exemple est donné par Stina à propos du problème de minimiser les clics de la e-pascaline. Les élèves ont d'abord travaillé avec le cahier e-pascaline. Puis, à nouveau confrontée aux difficultés des élèves et à l'absence de réussite, Stina a fait travailler les élèves en binôme avec la pascaline tangible. Dans le binôme, un élève devait réaliser le calcul avec la machine pendant que l'autre écoutait et comptait les clics. Cela a permis aux élèves de reprendre ensuite le cahier e-pascaline et de réussir. Ces deux exemples montrent d'une part que la pascaline est utilisée comme aide quand les élèves n'arrivent pas à résoudre le problème avec la e-pascaline. Du point de vue didactique, c'est un moyen de changer de valeur de variable didactique, pour remettre les élèves en situation de réussir sans que cela implique un changement de procédure. D'autre part, ces deux exemples montrent des adaptations réalisées au cours de la mise en œuvre, dans la même séance ou d'une séance à l'autre, par les enseignantes. Il s'agit d'ajustements au cours de l'action, qualifiés de performance didactique par Drijvers (2012) (Drijvers et al., 2014). Ce type d'orchestration ne correspond à aucun des sept types d'orchestration identifiés par Drijvers et ses collègues. Il s'agit

d'une orchestration dans laquelle l'un des artefacts du duo assiste l'utilisation de l'autre artefact parce qu'il permet à d'autres procédures d'être mobilisées. La e-pascaline peut être utilisée pour assister les élèves dans l'instrumentation de la pascaline, pour la recherche du minimum de clics avec le recours au compteur de clics par exemple. La pascaline peut être utilisée pour assister les élèves dans l'instrumentation de la e-pascaline, en autorisant d'autres procédures, comme la procédure par itération dans le calcul d'additions. L'enseignant gère le passage de l'un à l'autre des artefacts mais les deux sont utilisés directement par les élèves.

D'après Trouche, il y a pour l'enseignant une triple nécessité qui pousse à développer des orchestrations instrumentales : « *suivre pour l'enseignant ce que font les élèves sur leurs petites machines, le rendre visible pour la classe et pouvoir influencer sur cette activité instrumentée* » (2009, p. 35). Les deux dernières nécessités sont prises en charge par les orchestrations des enseignants avec le duo décrites précédemment. En revanche, lors des interviews et de la discussion finale, il est apparu que le contrôle précis de ce qu'a fait chaque élève avec l'un ou l'autre des artefacts restait un problème pour les enseignantes, en particulier lors du travail en binôme (fréquent lorsque les 30 pascalines fournies à chaque école étaient partagées entre les deux classes de l'école). L'attente des enseignantes était importante du côté de la technologie pour résoudre ce problème. Or, les choix didactiques pour le développement des cahiers ne vont pas dans ce sens. En effet, avec les cahiers e-pascaline, les élèves peuvent naviguer librement, d'une page à l'autre, et demander un nouveau problème sans avoir résolu le problème précédent (un nouveau nombre à écrire, un nouveau calcul additif à réaliser). Les enseignantes considèrent ce fonctionnement négativement car il donne l'opportunité à certains élèves d'éviter de résoudre les problèmes soumis. Elles le considèrent aussi comme positif, car il permet aux élèves de sélectionner les problèmes adaptés à leur niveau d'expertise et de prendre conscience de ce qu'ils savent faire ou pas. Mais dans les deux cas, la gestion des tâches des élèves incombe aux enseignantes alors qu'elles s'attendaient à en être déchargées grâce à l'artefact numérique.

3.3.4. Conclusion sur l'appropriation du duo pascaline et e-pascaline et des ressources associées

Des genèses instrumentales et documentaires se sont initiées chez les huit enseignantes à partir du duo d'artefacts et des ressources proposées. D'après l'analyse précédente, les ressources ont été suffisantes pour initier les genèses, en particulier avec le site du prototype de la mallette et le séminaire de lancement. Le cas de l'enseignante n'ayant pas participé au séminaire, montre qu'il est également possible d'initier une genèse instrumentale et documentaire à partir des ressources uniquement.

Le site présentant le scénario a été une ressource décisive pour la conduite des situations de classe, donc pour le développement des genèses documentaires. Ces genèses ont été attestées par l'apparition de nouvelles ressources chez cinq des sept enseignantes ayant participé à toute l'expérimentation. Les ressources produites par les enseignantes sont de trois types : (i) des nouvelles tâches pour les élèves par rapport aux situations proposées dans le scénario initial (quatre enseignantes Iris, Rose, Stina et Lilas), (ii) des éléments d'analyse didactique complémentaires (cinq enseignantes Iris, Rose, Stina, Lilas et Cléo) (iii) des orchestrations instrumentales nouvelles par rapport à celles esquissées dans la proposition de scénario (quatre enseignantes Iris, Stina, Lilas et Cléo). Les

orchestrations ont été accessibles par l'intermédiaire des photos, des interviews et des documents écrits remis par les enseignantes. Ces observables donnent accès aux configurations didactiques et plus difficilement aux modes d'exploitation qui restent implicites. Les interviews ont permis de préciser quelques modes d'exploitation et donc de mettre en évidence des exemples d'orchestrations originales par rapport à celles identifiées par Drijvers *et al.* (2014). Une déclinaison des orchestrations possibles avec les duos d'artefacts est à faire pour étendre les sept catégories déjà répertoriées et prendre en compte les nouveaux modes d'exploitation rendus possibles par les caractéristiques d'un duo d'artefacts.

Avec partir des genèses instrumentales identifiées et des déclarations des enseignantes recueillies lors du séminaire de clôture, nous pouvons conclure que le duo d'artefacts a été utilisé pour les trois objectifs définis par Drijvers : faire des mathématiques avec les élèves (calculer des additions et des soustractions, chercher le nombre d'avant ou d'après), pour apprendre et entraîner les compétences (apprendre à distinguer unités et dizaines, construire les compléments à 10 et à 100, s'entraîner avec l'artefact numérique) et pour provoquer et soutenir la conceptualisation (conceptualiser la dizaine, visualiser les nombres d'une autre manière, résoudre des situations problèmes nécessitant une véritable recherche, avec différentes procédures, et identifier les procédures économiques). Cela démontre un bon niveau d'appropriation pour au moins cinq des sept enseignantes. Cependant, l'interaction avec les expérimentatrices a joué un rôle crucial pour accéder au potentiel de la e-pascaline pour l'une d'entre elles (Stina).

Ce résultat positif obtenu par l'analyse didactique en terme de genèse documentaire et d'orchestration est confirmé par des éléments d'une analyse ergonomique à propos de l'utilité, l'utilisabilité et l'acceptabilité du duo d'artefacts ressenties par les enseignantes (Maschietto & Soury-Lavergne, à paraître).

4. CONCLUSION DE LA PARTIE 2, LE DUO D'ARTEFACTS PASCALINE ET E-PASCALINE, UN EXEMPLAIRE POUR LA RECHERCHE ET POUR LE TERRAIN

Nous avons proposé de considérer le duo formé par la pascaline et la e-pascaline comme un exemplaire des duos d'artefacts qui permet de faire fonctionner les principes théoriques de l'approche instrumentale et des systèmes d'instruments, de la médiation sémiotique et de la théorie des situations. L'enjeu était de proposer une solution concrète au problème de la conception, de la diffusion et de l'appropriation sur le terrain des situations didactiques intégrant le numérique.

Le duo d'artefacts pascaline et e-pascaline a doublement répondu à cet objectif. Il s'agit d'un exemplaire concret du point de vue des chercheurs mais aussi du point de vue des enseignants sur le terrain.

Du point de vue des questions de recherche, l'approche en termes de duo d'artefacts et l'exemplaire de la pascaline et e-pascaline est très fécond.

- La conception du duo d'artefacts, dans l'objectif de susciter des genèses instrumentales conjointes chez les élèves, a permis de mettre en évidence le rôle

des complémentarités, des redondances et des antagonismes entre les deux artefacts du duo. En partant du cas de la conception d'un artefact numérique à partir d'un artefact tangible donné, le processus de conception de la e-pascaline a mis en évidence l'analyse didactique comme outil de conception d'artefacts et de situations didactiques. Un tel processus de conception est généralisable à d'autres types d'artefacts tangibles ou numériques pour d'autres contenus mathématiques.

- Les questions d'apprentissage avec le duo pascaline et e-pascaline ont été abordées avec une première analyse *a priori* des apprentissages possibles sur le nombre, la numération et le calcul. De nombreuses observations d'élèves en situation de classe ont eu lieu, principalement de type expérience-utilisateur, pour recueillir les informations nécessaires au développement du duo d'artefacts. Elles ont permis de mettre en évidence les principales stratégies anticipées par l'analyse *a priori* et de préciser les valeurs des variables didactiques. Cependant, les principales observations ont été réalisées au cours d'expérimentations conduites pour suivre l'appropriation par les enseignants, donc avec une autre problématique que celle de l'apprentissage. De plus, les premiers constats sur l'apprentissage des élèves, en particulier la difficile évolution de leurs stratégies, concernent plus particulièrement l'artefact numérique et non le duo. Ainsi, de nombreuses questions subsistent, relatives aux apprentissages possibles avec un duo d'artefacts. Comment les relations entre les deux artefacts interviennent-elles dans les genèses instrumentales conjointes chez les élèves ? Est-il possible de faire construire avec le duo pascaline et e-pascaline les principes de la numération décimale de position ou la suite des nombres comme itération de l'unité ? De nombreuses questions relatives à l'apprentissage sont posées par les duos d'artefacts et nécessitent de nouvelles expérimentations, comme cela a été réalisé par Voltolini (2017) à propos d'un duo d'artefacts en géométrie.
- L'appropriation du duo pascaline et e-pascaline par les enseignants a été étudiée de façon plus approfondie. L'expérimentation conduite pour suivre les genèses documentaires de huit enseignantes a donné des résultats positifs à propos du développement de ces genèses pour cinq des sept enseignantes ayant pu suivre le protocole prévu. En particulier, les orchestrations instrumentales observées font apparaître de nouvelles configurations combinant les deux artefacts du duo et de nouveaux modes d'exploitation consistant à utiliser l'un des artefacts pour modifier la situation d'apprentissage de l'élève. Le duo pascaline et e-pascaline a donc permis de questionner l'appropriation de ressources par les enseignants du primaire et d'apporter un début de réponse, plutôt positif, à la question initiale : un duo d'artefacts est-il un moyen de favoriser l'appropriation des technologies par les enseignants ? D'autres travaux sont à conduire pour apporter une réponse définitive.

L'intérêt du duo pascaline et e-pascaline, dépasse le seul point de vue de la recherche. Les recherches menées à l'Institut Français de l'Education ont le double objectif de faire avancer les connaissances scientifiques et de contribuer à la résolution de certains problèmes identifiés par le terrain et à la transformation des pratiques. La recherche s'étant développée au sein de deux LÉA (Chabanne et al., 2016), le LÉA MaCARhon et le

LéA Côte d'Or, elle a pu intégrer, dans le déroulement du projet, certaines contraintes issues des pratiques effectives des enseignants sur le terrain et des attentes institutionnelles.

Ainsi, *du point de vue de sa capacité d'intégration et de transformation des pratiques sur le terrain*, le duo pascaline et e-pascaline a produit des évolutions. Les enseignants-utilisateurs considèrent que le duo est utile pour faire apprendre les mathématiques aux élèves, d'une manière compatible avec l'équipement habituel des classes et les demandes institutionnelles, notamment la résolution de problème et l'utilisation du numérique (Soury-Lavergne, 2014b) (Maschietto & Soury-Lavergne, à paraître). L'utilisation du duo a suscité des demandes de modifications, de la pascaline comme de la e-pascaline. Ces demandes ont émané principalement du cercle initial de concepteurs-utilisateurs mais également de nouveaux utilisateurs. Les modifications de la pascaline tangible (par exemple « disposer d'une pascaline à quatre roues pour traiter les milliers ») ne sont pas possibles étant donnée la production industrielle de l'artefact. En revanche, le choix de l'environnement de développement Cabri Elem rend réalisables ces modifications pour la e-pascaline, que ce soit par les concepteurs ou par les enseignants-utilisateurs. Bien qu'elles n'aient pas encore été implémentées, ces possibilités d'évolution du duo par l'évolution de l'artefact numérique sont une des caractéristiques du duo qui doivent soutenir son appropriation et favoriser les transformations des pratiques. L'évolution de l'artefact numérique pour s'adapter aux besoins de l'utilisateur passe aussi par les possibilités de paramétrisation et d'adaptation lorsque celles-ci sont anticipées dans la conception, comme indiqué en conclusion de la partie 1. Dans les cahiers e-pascaline, de telles possibilités ont été créées, comme par exemple la page de choix des nombres dans le cahier « compter les clics de la e-pascaline » (Figure 30 p. 82). Cependant, elles semblent peu exploitées et n'apparaissent pas comme un facteur d'utilisabilité et d'acceptabilité du duo. Deux explications peuvent être formulées, mais restent à vérifier. Dans le cadre des LéA, les adaptations nécessaires ont été réalisées au fur et à mesure des demandes, la méthodologie du projet rendant possible des itérations successives de développement. Par ailleurs, l'enseignant disposait de deux artefacts, la pascaline et de la e-pascaline, ce qui lui offrait un ensemble de configurations assez flexibles lui procurant éventuellement les possibilités d'adaptation nécessaires.

En conclusion, le duo d'artefacts formé par la pascaline et la e-pascaline a permis de développer l'ensemble des questions posées initialement à propos de la conception d'un duo, des apprentissages possibles et des pratiques et ressources des enseignants. Le duo pascaline e-pascaline semble donc être un exemplaire tel que le définit Kuhn (Kuhn et al., 1990), c'est-à-dire une référence possible pour la communauté de recherche dans le domaine des technologies pour apprendre et faire apprendre.

PARTIE 3.

DES DUOS D'ARTEFACTS AUX OBJETS CONNECTÉS, LA MISE EN RÉSEAU DES ARTEFACTS

Si les duos d'artefacts tangibles et numériques fournissent un moyen de traiter les questions de conception, d'apprentissage et d'enseignement avec les technologies, alors ils doivent pouvoir offrir un moyen de problématiser un ensemble de problèmes au-delà du cas exemplaire de la pascaline et la e-pascaline pour l'apprentissage de la numération et du calcul ainsi que présenté en partie 2. Dans une dialectique outil-objet (Douady, 1986), telle que mentionnée en Partie 2, après avoir conçu le duo pascaline et e-pascaline comme un premier outil pour résoudre des problèmes, puis élaboré une caractérisation théorique de l'objet « duo d'artefacts » (Partie 2.2 p. 55), l'étape suivante serait d'interroger d'autres situations et de résoudre d'autres problèmes à partir des duos. Dans le temps de la recherche, le point de vue donné par l'association d'un artefact numérique à un artefact tangible pour élaborer des situations didactiques ou pour analyser des situations existantes a été utilisé en même temps que se développait l'exemplaire pascaline et e-pascaline. La mise en relation du tangible et du numérique a été un outil de problématisation pour l'étude de différentes situations d'apprentissage des mathématiques.

L'objectif de cette partie 3 est de présenter les questions que permet de poser le point de vue des duo d'artefacts pour étudier les situations d'apprentissage avec du numérique et du tangible.

Le point 1 présente les travaux réalisés à propos des apprentissages en géométrie, pour lesquels les duos d'artefacts ont été utilisés pour problématiser le rapport entre tangible et numérique.

Le point 2 présente un projet de conception et de déploiement d'un dispositif d'objets connectés pour l'apprentissage des mathématiques à l'école élémentaire. Il met en évidence le fait qu'une étude en termes de duos d'artefacts permet de produire un ensemble de questions pertinentes pour problématiser l'analyse de ce nouveau type de technologie pour l'apprentissage.

1. LES DUOS D'ARTEFACTS AU-DELÀ DE L'EXEMPLARITÉ DE LA PASCALINE ET LA E-PASCALINE

En géométrie, une approche en terme de duos d'artefacts a été utilisée pour étudier l'articulation entre les connaissances spatiales et les connaissances géométriques chez les élèves de cycle 2 (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015a), pour étudier la géométrie 3D avec les patrons du cube au cycle 3 (Calpe, Rabatel, Zucchetta, & Soury-Lavergne, 2014) et pour étudier la construction du triangle à la règle et au compas au cycle 3 (Voltolini, 2014) et (2017). A partir de cette notion de duo d'artefacts, d'autres recherches ont également été conduites pour développer l'articulation du tangible et du numérique, dans les apprentissages des élèves (Montone, Faggiano, & Mariotti, 2017) et dans le travail documentaire des professeurs (Besnier, 2016). Elles démontrent l'évolution de la communauté scientifique vers la prise en compte de l'articulation entre le tangible et le numérique (Sarama & Clements, 2016).

1.1. Duo d'artefacts dans le passage du spatial au géométrique en cycle 2

Pour caractériser les différents rapports possibles entre la géométrie et le monde réel, auquel appartiennent les objets tangibles, Perrin-Glorian et Salin (2010) puis Perrin-Glorian *et al.* (2013) mettent en évidence trois espaces en jeu dans le travail géométrique : l'espace sensible, l'espace graphique et l'espace géométrique théorique. La relation entre ces trois espaces et les deux champs de connaissances (au sens de champ conceptuel (Vergnaud, 1990)) convoqués dans l'apprentissage de la géométrie – celui des connaissances spatiales et celui des connaissances géométriques – met en évidence le rôle pivot de l'espace graphique. Il est à la fois un objet tangible, outil pour la réalisation de plans par exemple et, à ce titre, il relève du champ des connaissances spatiales et il est aussi espace de production de dessins en tant que représentations de figures géométriques, donc appartenant au champ des connaissances géométriques.

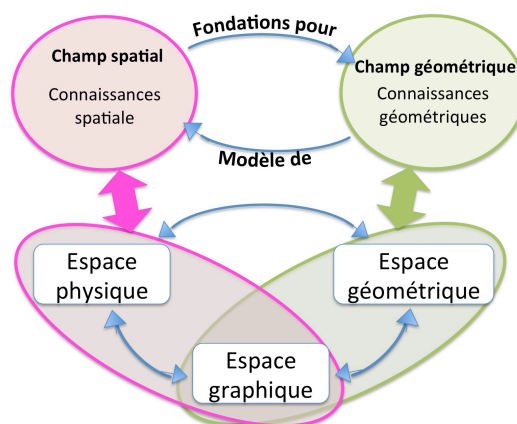


Figure 33. Mise en évidence du rôle pivot de l'espace graphique comme intermédiaire entre les deux champs de connaissances mobilisés dans l'apprentissage de la géométrie à l'école primaire : le champ des connaissances spatiales et le champ des connaissances géométriques d'après (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015a).

Dans leur présentation des trois espaces, Perrin-Glorian, Mathé et Leclercq (2013) donnent bien à l'espace graphique un rôle pivot qui est différent suivant qu'il est en relation avec l'espace sensible ou avec l'espace géométrique. Mais elles ne considèrent pas le numérique dans leur modèle.

L'insertion du numérique dans ce modèle passe par l'analyse des caractéristiques que la géométrie dynamique, comme environnement numérique possible, partage avec les trois espaces. La géométrie dynamique ne se substitue pas simplement à l'espace graphique du papier-crayon. Elle offre un registre graphique-dynamique (Coutat, 2006) qui amplifie les propriétés du papier-crayon. Mais elle génère aussi de nouvelles rétroactions qui transforment la nature des expérimentations possibles par rapport au papier-crayon, pour reprendre les deux apports de la géométrie dynamique explicités en partie 1 (Partie 1.3.1 p. 27). Par ailleurs, la taille de l'espace de représentation peut varier. De ce point de vue, le papier-crayon et la géométrie dynamique sont des micro-espaces. Or, l'espace tangible offre également la possibilité de représenter et de traiter des problèmes spatiaux ou géométriques dans le méso-espace avec une taille de représentations engageant des procédures, des instruments et des contrôles différents (comme vu en partie 1, Partie 1.2.3.3 p. 24).

Une problématique en termes de duo d'artefacts amène à penser l'articulation entre le tangible (micro-espace graphique et méso-espace tangible) et le numérique comme des complémentarités et des discontinuités (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015a) et plus précisément à analyser les complémentarités, redondances et antagonismes entre les artefacts mobilisés par rapport à l'apprentissage visé.

L'expérimentation conduite en Italie à propos de l'apprentissage du repérage dans le plan (mémorisation de positions et contrôles de trajectoires) et de l'utilisation du quadrillage comme outil de résolution de problème par des élèves de 7 ans, a été analysée du point de vue de l'articulation entre tangible et numérique dans l'évolution des stratégies de résolution des élèves. Elle n'a pas mobilisé directement les duo d'artefacts, mais elle a questionné le rôle de la technologie, comme complémentaire et associée au méso-espace tangible, pour connecter l'espace tangible du champ des connaissances spatiales avec l'espace géométrique du champ des connaissances géométriques.

Dans cette expérimentation, l'artefact numérique était donné *a priori* (le cahier « La grenouille et le cabri » niveau CE1 de la collection « 123... Cabri » éditée par Cabrilog) et la situation didactique a été conçue, par les enseignantes, en utilisant un grand tapis uni pour créer le problème dans le méso-espace (mémorisation d'une position). Cela illustre en quoi une problématique en termes de duo d'artefacts n'implique pas nécessairement la conception d'un artefact numérique ou d'un artefact tangible, mais en revanche nécessite une situation mettant les deux en relation. Dans cette situation, la complémentarité et les antagonismes entre les deux espaces sont importants. En revanche les redondances ont été peut-être trop limitées pour que les élèves perçoivent la continuité d'une phase à l'autre de la situation.

1.2. Duo d'artefacts, genèse instrumentale et parcours de conceptions en géométrie au cycle 3

Voltolini (2017) a étudié les conceptualisations des élèves dans une situation utilisant un duo d'artefacts numérique et matériel³⁵ pour l'apprentissage de la construction du triangle, les longueurs des côtés étant données. Il s'agit d'une construction emblématique de la fin de l'école primaire, reprise au début du secondaire et qui engage les concepts de triangle et de cercle. Voltolini a élaboré une situation utilisant un environnement numérique conçu spécifiquement, deux cahiers Cabri Elem, et des tâches papier-crayon de construction au compas.

A partir du suivi de 35 élèves, elle a identifié différentes conceptions, au sens de Balacheff (1995), du triangle et du cercle et montré comment ces conceptions évoluaient au cours de l'utilisation du duo d'artefacts. Elle a mis en évidence le rôle clef joué par une conception du triangle « ligne brisée » (Voltolini, 2016), opérant une déconstruction dimensionnelle 2D/1D (Duval, 2005), dans l'évolution des conceptions des élèves.

Le questionnement généré par les duos d'artefacts a permis de mettre en évidence la relation entre les genèses instrumentales de ces élèves et leur parcours de conception. Il a été conduit jusqu'à pouvoir identifier le rôle des genèses instrumentales relatives aux deux artefacts du duo, avec une prise en compte des manipulations de l'artefact tangible « compas », ainsi que leur imbrication ou non et les conséquences sur la conceptualisation des élèves. Ainsi, c'est une relation entre les genèses instrumentales et les genèses de connaissances que l'approche en termes de duo d'artefacts a permis de construire. Cette élaboration théorique de Voltolini atteste de la productivité de la notion de duo d'artefacts.

1.3. Articulation du tangible et du numérique dans les duos d'artefacts

La problématique construite à partir des duos d'artefacts amène à porter le regard sur l'articulation entre le tangible et le numérique dans les situations didactiques et pas uniquement sur l'un ou l'autre des artefacts, considérés séparément et de façon complémentaire, comme possibles contributeurs à la situation d'apprentissage.

Cette problématique n'est pas encore complètement mise en œuvre dans l'ensemble des études menées. Le questionnement des continuités et des ruptures entre le tangible et le numérique a été une étape dans la conceptualisation de l'articulation du tangible et du numérique (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013a) (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015a). Il peut être maintenant développé avec la prise en compte des complémentarités, redondances et antagonismes des deux artefacts du duo comme moyen de concevoir et d'analyser les possibles systèmes d'instruments résultant des genèses instrumentales conjointes.

La complémentarité entre les deux artefacts résulte principalement du fait que l'environnement de géométrie dynamique permet de dépasser certaines contraintes de

³⁵ Voltolini préfère le terme « matériel » pour désigner l'artefact non numérique du duo.

l'espace sensible qui ne sont pas pertinentes du point de vue des connaissances géométriques. A l'inverse, l'artefact tangible a des propriétés haptiques, mécaniques, tactiles ou de taille de l'espace sensible que n'a pas l'environnement informatique. Le premier cas est illustré par les patrons du cube conçus comme « enveloppe ». Dans l'espace sensible, le patron papier doit être légèrement plus grand que le cube en bois si l'on veut pouvoir envelopper correctement le cube avec le patron, ce qui n'est pas le cas dans l'environnement informatique (Calpe et al., 2014). Le second cas est illustré par la grande taille du tapis qu'il est possible d'introduire dans la situation de repérage dans le plan (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015a). Ces travaux illustrent le fait que la géométrie dynamique et plus généralement les environnements informatiques pour l'apprentissage ne remplacent pas les autres espaces mais les complètent, l'accent étant mis récemment sur l'articulation avec l'espace sensible. La complémentarité des artefacts dans un duo est ainsi bien établie.

Ce n'est pas le cas des autres caractéristiques, notamment les redondances et les antagonismes. Ils ont bien été identifiés pour le duo pascaline et e-pascaline. Leurs rôles dans la création de continuités et de ruptures restent à montrer pour les autres situations considérées. Pour toute connaissance mathématique, est-il possible de créer un duo d'artefacts tangible et numérique tel que des complémentarités, redondances et antagonismes soient créatrices de situations didactiques pour l'apprentissage de cette connaissance ?

2. OBJETS CONNECTÉS ET INTERFACES NUMÉRIQUES POUR L'APPRENTISSAGE

Les objets connectés, c'est-à-dire des objets du monde tangible capables de communiquer des informations à un environnement informatique, constituent une avancée technologique qu'il apparaît maintenant important d'intégrer dans la collection de technologies utilisables pour faire apprendre les mathématiques. Mais ce n'est pas seulement leur relative nouveauté qui les fait prendre en compte dans une problématique en termes de duos d'artefacts.

Les objets connectés permettent de poursuivre le travail débuté avec les duos d'artefacts pour la mise en relation du tangible et du numérique. Ces deux mondes, celui de la manipulation d'objets, des expériences tangibles et des phénomènes physiques et celui de l'interaction avec un environnement numérique, accessible à travers la manipulation directe de représentations sur un écran ont d'abord été considérés séparément, puis mis en relation par la situation didactique et le point de vue de l'utilisateur, qu'il soit élève ou enseignant dans le cas des duos d'artefacts. Avec les objets connectés, ces deux mondes interagissent directement, formant un système complexe d'entités matérielles et numériques dont on peut étudier les apports pour l'apprentissage des mathématiques à partir du point de vue donné par les duos d'artefacts.

Les objets connectés fournissent alors un nouveau terrain d'expérimentation, d'application et de développement des idées initiées avec les duos d'artefacts.

2.1. Objets Connectés et Interfaces Numériques pour l'Apprentissage à l'École Élémentaire, le projet OCINAEE

OCINAÉE est un exemple de dispositif d'objets connectés pour l'apprentissage des mathématiques à l'école élémentaire qui a été conçu et déployé en intégrant des préoccupations didactiques liées aux duos d'artefacts, c'est-à-dire à l'étude des apports respectifs du tangible et du numérique.

Le dispositif OCINAEE connecte les deux mondes, tangible et numérique, avec un petit robot mobile. Dans ce dispositif de réalité mixte, les objets tangibles sont du type cartes, plateaux de jeu, jetons, stylos et l'environnement informatique est accessible par des tablettes et un smartphone. Au cœur du dispositif, le robot a les propriétés des deux mondes. Il s'agit à la fois d'un objet tangible qui a des propriétés mécaniques et physiques. Mais simultanément, il est un artefact numérique dont le comportement résulte d'instructions générées par environnement informatique, que ce soit automatiquement ou par le pilotage d'un utilisateur.

Le projet OCINAEE a été financé de 2014 à 2016 par la Banque Publique d'Investissement France sur le programme Investissement d'avenir e-éducation « Services et contenus numériques innovants pour les apprentissages fondamentaux à l'École ». Il a été conduit par quatre partenaires lyonnais : les entreprises digiSchool et Awabot, le centre ERASME en charge des questions numériques pour la métropole de Lyon et l'Institut Français de l'Éducation.



Figure 34. Le dispositif d'objets connectés OCINAEE pour le jeu du Chiffroscope, avec un plateau, le robot et le smartphone, deux tablettes, deux jeux de cartes (chiffres et nombres), feutres pour écrire sur le plateau.

Une caractéristique du projet est la double volonté des partenaires de produire des résultats d'une part en terme de ressources et de dispositifs utilisés sur le terrain et d'autre part de nouvelles connaissances sur ces dispositifs et les situations d'apprentissages les impliquant. Inspiré des méthodologies de recherche fondées sur la conception³⁶ (Coob, Confrey, diSessa, & Schauble, 2003) (Sanchez & Monod-Ansaldi, 2014), un processus itératif de plusieurs boucles de conception, expérimentation et analyse, a été mis en place pour la production du dispositif, de la technologie et des

³⁶ Design based research (Coob, Confrey, diSessa, & Schauble, 2003)

situations didactiques. Il a impliqué, dans une collaboration effective, les enseignants, les chercheurs, les ingénieurs, les développeurs, les designers et les gestionnaires du projet.

Nous avons considéré qu'un *démonstrateur de terrain* est à la fois un outil de production et un outil de recherche. Il est constitué par les utilisateurs, l'équipement et les méthodologies de recueil de données (Soury-Lavergne, Guillaume, Rabatel, & Martinez, 2016).

En ce qui concerne la méthodologie, trois niveaux de recueil de données ont été effectués pour fournir les éléments nécessaires à une évaluation quantitative, à un suivi qualitatif et au travail des questions de recherche. Les trois niveaux de la méthodologie ont été :

- Evaluer quantitativement le volume d'usage effectif du dispositif technologique tout au long du projet. Ce volume d'usage peut constituer un indicateur de l'appropriation du dispositif par les enseignants, même si du fait de leur adhésion au projet, les enseignants du démonstrateur ne sont pas représentatifs de l'ensemble des enseignants.
- Fournir des informations qualitatives sur les usages, les attentes des utilisateurs et les difficultés rencontrées, tant techniques que pédagogiques ou didactiques, afin de faire évoluer le dispositif, les jeux et les situations didactiques au cours des itérations successives du projet.
- Traiter précisément certaines questions de recherche telles que les différences de stratégies de résolution avec les objets tangibles ou avec les interfaces numériques, ou encore la prise en compte d'une rétroaction tangible du robot dans les stratégies de résolution de problème d'élèves de CP.

Trente-cinq enseignants du CP à la 6^e de collège et près de 2000 élèves ont utilisé le dispositif au cours des 26 mois du projet. Ainsi, le volume d'usage évalué à 6508 élève.séance permet d'attester d'un réel usage. Mais il recouvre de grosses disparités, essentiellement explicables par la moindre pertinence des jeux conçus à certains niveaux de classe.



Figure 35. Contenu d'une mallette OCINAEE avec le matériel pour les quatre jeux.

L'équipement est constitué de mallettes (Figure 35) contenant le dispositif matériel et numérique ainsi que des notices de démarrage, règles du jeu et guides pédagogiques permettant de jouer aux quatre jeux conçus. Ces quatre jeux mathématiques exploitent

les possibilités offertes par le dispositif et s'adressent aux élèves du CP à la 6^e (cycle 2 et cycle 3 français).

- La « Course au calcul » est un jeu de calcul pour l'automatisation des faits numériques.
- Le « Nombre cible » est un jeu de résolution de problème relatif à la décomposition de nombres entiers ou décimaux en sommes de trois nombres.
- Le « Voyage dans le plan » est un jeu de repérage dans le plan et de codage des positions et des trajectoires d'un robot.
- Le « Chiffroscope » est un jeu sur la numération décimale des entiers et des décimaux qui permet de travailler les unités de numération.

2.1.1. Processus collectif et itératif entre enseignants, chercheurs et développeurs

Le démonstrateur de terrain a permis de conduire le projet en mettant en œuvre deux éléments clef de méthodologie : (i) l'implication des enseignants et de tous les partenaires dans les processus de conception dès le début du projet (ii) l'itération de boucles de conception, de développement et d'expérimentation en conditions écologiques.



Figure 36. Atelier de travail OCINAEE dans l'incubateur de l'IFE.

L'élément central de la méthode de conception a été la collaboration entre toutes les parties prenantes dans le processus de conception et dans le développement du dispositif. Elle s'est appuyée sur l'expertise du partenaire ERASME dans la mise en place de ce type de méthodologie et le lancement par l'IFÉ d'un laboratoire d'innovation pédagogique et numérique, le LIPn.



Figure 37. Vidéo EducTice présentant la collaboration avec les enseignants et les partenaires du projet dans le projet OCINAEE. Accessible sur <https://youtu.be/t-TrV1h4nM>

Pour favoriser *la collaboration entre les enseignants*, nous avons repris un principe de Pairform@nce et de la Mallette et nous avons recruté plusieurs enseignants, deux ou trois, d'une même école. Cette contrainte imposée aux enseignants a eu plusieurs avantages du point de vue du projet. Elle a favorisé la collaboration entre les enseignants en leur permettant d'interagir aussi au sein de leur école à propos du projet, facteur très favorable à l'engagement de chaque enseignant tout au long du projet. Elle a eu aussi l'avantage de pérenniser, d'une année sur l'autre, la participation des écoles au projet, même en cas de mutation ou d'abandon du projet par un enseignant. Cela a été un facteur important de stabilisation de la population des enseignants et des écoles impliqués dans le projet. Enfin, le troisième avantage est que le recrutement de plusieurs enseignants d'une même école a obligé les enseignants initialement intéressés par une participation au projet à solliciter leurs collègues d'établissement et a ainsi permis d'engager dans le projet les enseignants moins attirés spontanément par les technologies.

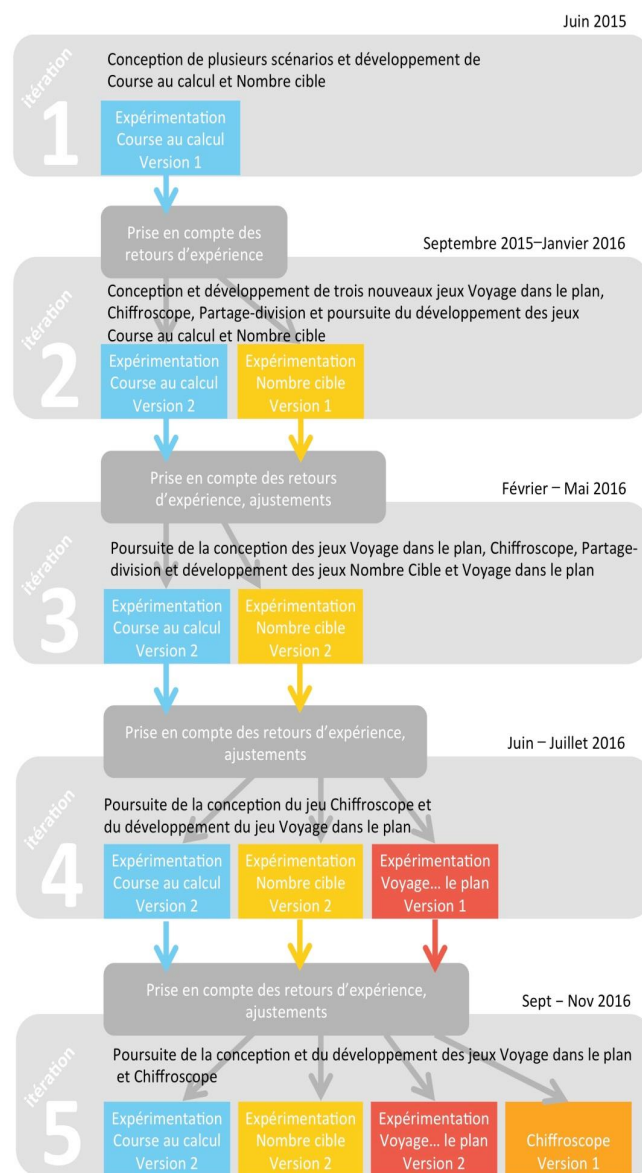


Figure 38. Cinq itérations des phases de conception, développement et expérimentation ont eu lieu au cours du projet OCINAE.

Cette implication des enseignants-utilisateurs s'est traduite par la sélection des domaines mathématiques travaillés. Ils découlent des propositions des enseignants et répondent à leurs demandes et préoccupations, comme par exemple la numération, travaillée dans le jeu du Chiffroscope et le calcul, travaillé dans le jeu du Nombre cible et de la Course au calcul. La conception s'est également appuyée sur les résultats de la recherche en didactique des mathématiques (apport des chercheurs) et a été réaliste du point de vue des développements informatiques (apport des développeurs). Au-delà des ateliers de co-conception, la collaboration s'est particulièrement manifestée dans le démonstrateur de terrain mis en place pour étudier les usages.

Les jeux ont été conçus au cours de 39 ateliers de conception collaborative (Figure 36 et Figure 37) rassemblant tous les partenaires ou des sous-groupes, dont les objectifs ont été d'animer et de fédérer le collectif OCINAE, de concevoir les jeux et d'explorer les opportunités d'un tel dispositif pour les classes.

Cinq itérations de boucles de conception, expérimentation et développement ont eu lieu (Figure 38). Elles mettent en évidence l'enchaînement et l'évolution des phases de conception, de développement et d'expérimentation de chaque jeu, ainsi que le déroulement temporel de ces phases. Au cours de ces itérations, différents processus de recueil de données ont été menés, pour certains en continu tout au long du projet et, pour d'autres, lors de campagnes expérimentales sur quelques jours ou quelques semaines. Les recueils d'expériences-utilisateurs ont alimenté le processus, de même que les expérimentations construites pour répondre aux questions de recherche du projet.

2.2. Étude des dispositifs d'objets connectés à la lumière des duos d'artefacts

Toutes les questions relatives aux duos d'artefacts se posent pour les objets connectés du dispositif OCINAE. Elles se regroupent sous les mêmes trois volets :

- Les questions relatives à la conception du dispositif matériel et numérique, des jeux et des situations d'apprentissage de type résolution de problème.
- Les questions relatives aux apprentissages des élèves dans les domaines mathématiques abordés par les jeux : la numération décimale des entiers et des décimaux, le calcul réfléchi ou automatisé sur les entiers, les décimaux et les fractions, le repérage et le codage des déplacements et positions dans un plan.
- Les questions relatives à l'appropriation du dispositif par les enseignants et à son intégration dans les pratiques.

2.2.1. Conception des artefacts et des situations

Les objets connectés font apparaître de nouvelles opportunités pour la conception de situations d'apprentissage, avec des possibilités d'actions et de rétroactions augmentées en comparaison avec ce qu'il est possible de faire soit avec du matériel tangible soit avec du numérique. Avec le robot, il est par exemple possible de créer des rétroactions conjuguant phénomène physique, dans le monde des objets concrets, et phénomène numérique à l'interface de l'environnement informatique. Il semble donc possible de concevoir de nouvelles situations didactiques pour toute une série de concepts et notions mathématiques.

Puisque le dispositif utilisé pour les jeux OCINAE est un dispositif hybride, qui utilise aussi bien du matériel tangible que des interfaces numériques, les concepteurs ont dû et pu faire des choix quant à l'entité tangible ou numérique qui devait porter la possibilité d'action de la part du joueur et de rétroaction de la part du dispositif. Une première question est celle des principes qui doivent guider ces choix :

- Quels principes permettent de décider à partir de quelle entité tangible ou numérique le joueur peut agir sur le dispositif (tablette, smartphone, ou carte et autre matériel tangible) ?
- Quels sont les principes qui doivent guider les choix de rétroaction par le dispositif : via les interfaces numériques (tablette, smartphone) ou via le comportement tangible du robot (déplacement, son, lumière) ?

Ces principes résultent d'un ensemble de considérations techniques, didactiques, économiques. Par exemple, à propos des rétroactions tangibles telles que le déplacement du robot et sa position sur le plateau, les questions suivantes se posent :

- Les rétroactions tangibles sont-elles utiles pour l'apprentissage, c'est-à-dire permettent-elles de faire évoluer les stratégies de résolution des élèves ? A quelles conditions ?
- Quelles médiatisations de concepts mathématiques (droite des nombres et déplacement du robot, structuration du plan (grille) et positions du robot) les jeux peuvent-ils offrir ?

Les principes de conception de rétroactions issus des précédents travaux sur les duos d'artefacts ont été repris pour la conception et l'analyse des usages du dispositif (Soury-Lavergne, 2016) (Rabatel & Soury-Lavergne, 2017).

2.2.2. Apprentissage des élèves avec un dispositif d'objets connectés

Un des objectifs du projet a été de décrire et d'évaluer les apports respectifs du tangible et du numérique dans l'expérience d'apprentissage mathématique de l'élève. A partir de l'hypothèse que les jeux peuvent être analysés comme des situations d'apprentissage, les questions plus précises relatives à la situation didactique ont été formulées :

- Quelles sont les variables didactiques des situations problèmes proposées aux élèves ?
- Dans le cas du jeu du Nombre cible, comment caractériser de manière générique les tirages des nombres afin de contrôler le tirage "aléatoire" des parties ? Comment regrouper ces tirages en partie de jeu faciles ou difficiles ?

Par exemple, les variables didactiques du jeu du Nombre cible ont été identifiées et utilisées pour générer les parties de jeu : nature du nombre cible (entier, décimal non entier), la distance entre les six nombres (distance importante ou pas), l'appui sur l'entier ou sur la dizaine (solution telle que la somme de deux des trois nombres est ou non un entier ou un multiple de 10), existence d'un distracteur (il existe ou non une somme de deux nombres qui est égale au nombre cible).

Les premières expérimentations ont été réalisées (Mandin, De Simone, & Soury-Lavergne, *op. cit.*) (Mandin, 2016) et montrent que différentes stratégies de résolution de problème apparaissent chez les élèves selon le matériel disponible.

L'étude des apprentissages des élèves avec les jeux Voyage dans le plan, pour le repérage des positions et le codage des trajectoires planes, et Chiffroscope, pour la numération décimale des entiers et des décimaux, va débiter dans le cadre d'un nouveau LéA, à la rentrée 2017.

2.2.3. Appropriation du dispositif par les enseignants

L'appropriation du dispositif par les enseignants a été forte puisque plus de 7000 parties ont été menées en classe. Mais elle résulte de la méthodologie de co-conception collaborative du projet mise en place, qui a fourni un accompagnement des usages du dispositif par les enseignants.

L'appropriation est aussi attestée par la demande des enseignants de pouvoir conserver le dispositif dans leur classe et leur engagement dans le nouveau LéA. Pour ce nouveau LéA, d'autres enseignants rejoignent le groupe initial, renforçant les collectifs au sein des écoles. L'objectif est d'étudier les apprentissages des élèves et l'intégration des jeux dans les progressions mathématiques des enseignants. Les études relatives à l'appropriation et à l'intégration d'un dispositif d'objets connectés vont pouvoir être lancées.

3. CONCLUSION DE LA PARTIE 3, LES DUOS D'ARTEFACTS ET LES OBJETS CONNECTÉS

Les travaux présentés dans cette partie ont mis en évidence qu'une problématisation de l'articulation du tangible et du numérique dans les situations d'apprentissage offre un cadre pour aborder un ensemble varié de questions sur les situations didactiques avec les technologies, à propos de notions mathématiques très diverses.

Avec les duos d'artefacts, la situation didactique amène l'élève ou l'enseignant à prendre en compte la relation entre tangible et numérique et éventuellement à lier les deux artefacts du duo dans les usages. Avec les dispositifs d'objets connectés, la relation existe au sein du dispositif, soit au sein d'un objet tel qu'un robot, à la fois tangible et numérique, ou par les interactions entre les objets. Un nouveau champ de possible est à explorer, pour les chercheurs, les concepteurs et les utilisateurs.

CONCLUSION.

TROIS POINTS DE VUE RENOUVELÉS PAR LES DUOS D'ARTEFACTS

Dans le monde de l'éducation, la frontière entre technologie numérique et objets du monde tangible est en train de s'estomper avec l'arrivée d'un ensemble de dispositifs hybrides tels que les tables tactiles ou les robots, utilisables pour l'apprentissage de connaissances autres que celles relatives à leur propre fonctionnement. Ces dispositifs permettent aux utilisateurs, en particulier les élèves, de manipuler de façon tangible les objets des interfaces numériques en agissant directement à partir d'objets tangibles. Ils produisent également des rétroactions en dehors des interfaces écran, dans le monde tangible, par exemple en faisant se déplacer un robot mobile. Ils offrent donc des moyens renouvelés de concevoir des situations pour apprendre et faire apprendre.

En introduction de ce mémoire, nous avons proposé d'étudier les duos d'artefacts en faisant l'hypothèse qu'ils procurent un modèle simplifié pour comprendre les enjeux et les processus relatifs aux dispositifs complexes, mêlant tangible et numérique, dans les situations d'apprentissage. Nous avons élaboré une caractérisation théorique des duos d'artefacts tangible et numérique, mettant en évidence la nécessité de complémentarités, redondances et antagonismes. Les duos d'artefacts apparaissent alors comme un modèle minimal, à disposition du chercheur, pour concevoir et étudier les genèses instrumentales conjointes des systèmes d'instruments. Nous avons illustré ce projet par plusieurs exemples, dont l'exemplaire duo d'artefacts pascaline et e-pascaline pour l'apprentissage de la numération et du calcul. Avec l'idée de duo d'artefacts, notre ambition est de renouveler les problématiques relatives aux technologies numériques pour l'apprentissage, du point de vue de leur conception, de leur utilisation pour apprendre et de leur appropriation pour enseigner.

Les duos d'artefacts modifient-ils effectivement le point de vue sur les technologies ? Ces questions travaillées au long de ce mémoire ont reçu un début de réponse positive qui encourage la poursuite des travaux engagés.

Plusieurs dynamiques ont contribué au développement des duos d'artefacts.

La première dynamique exposée dans ce travail est celle du [passage des EIAH aux ressources](#). Les EIAH – Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain – dont la géométrie dynamique est un représentant emblématique, ont d'abord été étudiés comme un tout réalisant un milieu didactique (Brousseau, 1998), ou le composant d'un milieu (Laborde & Capponi, 1994). L'approche instrumentale (Rabardel, 1995) a mis l'accent sur des parties d'EIAH, par exemple le déplacement en géométrie dynamique, objet des processus d'instrumentation et d'instrumentalisation. La prise en compte des

systèmes de ressources (Gueudet & Trouche, 2010a) a transformé la vision pour considérer les EIAH et les artefacts comme des ressources mises en système par ses utilisateurs, élèves ou enseignants. Ce dernier point de vue permet de considérer les deux artefacts tangible et numérique et leur mise en système dans le duo.

La deuxième dynamique est celle de *la prise en compte des objets tangibles dans les problématiques de recherche sur les technologies en didactique des mathématiques*. L'ordinateur a d'abord été étudié comme pouvant remplacer d'autres dispositifs, notamment le matériel tangible (Turkle & Papert, 1992). Puis la technologie numérique a été considérée comme offrant un espace instrumenté à côté d'autres espaces instrumentés du monde tangible (Rolet, 2003). Dans un duo d'artefacts, la technologie interagit avec un artefact tangible grâce à la situation didactique et à certaines caractéristiques du duo, en particulier la redondance. Enfin, dans les dispositifs d'objets connectés, la technologie est disséminée dans différents artefacts qui interagissent directement avec les artefacts tangibles.

La troisième dynamique est celle du *rôle du collectif et des enseignants dans les recherches*. Tel qu'il apparaît dans les travaux rapportés dans ce mémoire, l'enseignant a d'abord été considéré comme isolé dans sa classe, en interaction avec les chercheurs pour mettre en œuvre les propositions issues de la recherche. Dans les problématiques de formation, l'enseignant a été considéré au sein d'un collectif d'enseignants afin de concevoir des ressources pour l'usage des technologies en classe. Avec les méthodologies de recherche collaborative utilisées dans les projets de l'IFE (recherche orientée par la conception (Sanchez & Monod-Ansaldi, 2014)), qui visent la compréhension et la transformation des pratiques, l'enseignant est un partenaire de la recherche, impliqué dans le collectif pour son expertise et contribuant à la conception des dispositifs, des artefacts, des situations et de tout type de ressources.

Ces dynamiques ont joué un rôle important pour créer le terrain dans lequel l'idée de duo d'artefacts a pu émerger et se développer, en particulier pour tenir les *deux objectifs que sont la conception et l'étude des usages*.

Ce travail présente quelques limites importantes, mais elles ne sont pas définitives. Les travaux menés avec la problématique de duo d'artefacts, n'ont pas porté la même attention à l'artefact tangible qu'à l'artefact numérique. L'artefact tangible a été le plus souvent donné et sa prise en compte est faite *a priori*, pour la conception du duo. La contribution de l'artefact tangible, par les actions et rétroactions qu'il permet et par ses propriétés physiques, est considérée comme une hypothèse de travail et n'a été que rarement le sujet des questions de recherche. Une perspective de travail est donc de problématiser également la conception des artefacts tangibles dans les duos d'artefacts. Une autre limite est le déséquilibre entre l'ampleur du travail réalisé pour la conception et le moindre développement des études sur les apprentissages des élèves et l'appropriation par les enseignants. Ce déséquilibre résulte de l'ancrage de ce travail sur les duos d'artefacts dans les recherches sur les technologies. En effet, l'expertise développée sur les technologies a pu être réinvestie dans ce nouveau domaine, en particulier sur la conception de l'artefact numérique. De plus, un des obstacles liés à la conception d'environnements numériques a été levé avec la mise en disposition d'environnement auteurs tels que Cabri Elem. L'ouverture des possibles apportée par cet environnement a conduit à explorer en priorité la conception des duos. Cependant, les méthodologies de conception dans l'usage ont permis de prendre en compte également

les questions d'apprentissage des élèves et d'appropriation par les enseignants. Les résultats obtenus par l'étude des genèses instrumentales et des orchestrations du duo pascaline et e-pascaline invitent à conduire le même type d'étude pour les autres duos d'artefacts et pour le dispositif OCINAE.

Pour conclure, les points de vue renouvelés par les duos d'artefacts sont ceux des élèves, des enseignants et des chercheurs :

- Pour les élèves, les duos d'artefacts tangible et numérique permettent la construction d'une expérience des mathématiques qui n'isole pas l'interaction avec la technologie des autres interactions avec le monde, dont le monde sensible. Les situations construites et expérimentées avec des duos d'artefacts héritent des caractéristiques uniques des deux types d'artefacts.
- Pour les enseignants, les duos d'artefacts et les projets dans lesquels ils sont impliqués provoquent un développement professionnel qui les soutient dans l'intégration des technologies numériques dans leur système de ressources.
- Pour les chercheurs, les duos d'artefacts sont un outil qui permet de faire exister et d'étudier les trois processus que sont la conception des artefacts et des situations didactiques, les apprentissages des élèves et les genèses instrumentales et documentaires des enseignants.

Les idées rapportées dans ce mémoire à propos de l'articulation du numérique et du tangible dans les situations didactiques font reconsidérer avec enthousiasme toutes les situations d'apprentissage emblématiques, qu'elles soient fondées sur un artefact tangible ou un artefact numérique, pour les faire évoluer, imaginer les artefacts complémentaires et ainsi renforcer leur potentiel didactique. En plus d'être un outil de chercheur, les duos d'artefacts sont un facteur de créativité didactique, essentiel pour contribuer au développement du domaine des technologies pour apprendre et faire apprendre les mathématiques.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Abboud Blanchard, M. (2013, June). *Technology in mathematics education. Study of teachers' practices and teacher education. Syntheses and new perspectives*. (Habilitation à diriger des recherches). Université Paris-Diderot, Paris.

Ainsworth, S. (1999). The function of multiple representations. *Computers & Education*, 33, 131–152.

Aldon, G., Arzarello, F., Cusi, A., Garuti, R., Martignone, F., Robutti, O., ... Soury-Lavergne, S. (2013). The Meta-Didactical Transposition: A Model for Analysing Teachers Education Programs. In *Proceedings of PME 37*. Kiel, Germany.

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherche En Didactique Des Mathématiques*, 9(3), 281–307.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245.

Artigue, M. (2010). The Future of Teaching and Learning Mathematics with Digital Technologies. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Vol. 13, pp. 463–475). Boston, MA: Springer US.

Artigue, M., Cazes, C., Haspekian, M., Khanfour-Armalé, R., & Lagrange, J.-B. (2013). *Geste, cognition incarnée et artefacts : une analyse bibliographique pour une nouvelle dimension dans les travaux didactiques au LDAR* (Cahiers du Laboratoire de didactique André Revuz No. 8). Paris, France: IREM Paris 7. Retrieved from <http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/PS/IPS13006/IPS13006.pdf>

Arzarello, F., Bernardi, C., Borgi, R., Ciarrapico, L., De Sanctis, F., Baker, M., ... Zan, R. (2012). *m@t.abel. Matematica per gli studenti alla soglia del terzo millennio*. Florence: INDIRE-ANSAS.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 34(3), 66–72.

Assude, T. (2007). Modes et degrés d'intégration de Cabri dans les classes de primaire. In R. Floris & F. Conne (Eds.), *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques* (pp. 119–134). Paris.

Assude, T., Grugeon, B., Laborde, C., & Soury-Lavergne, S. (2006). Study of a teacher professional problem: how to take into account the instrumental dimension when using Cabri-geometry? In C. Hoyles, J.-B. Lagrange, S. Le Hung, & N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of ICMI Sudy 17 Technology revisited* (Vol. 2, pp. 317–333). Hanoi Vietnam.

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches En Didactique Des*

Mathematiques, 14, 9–42.

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. In D. Grenier (Ed.), *Séminaire Didatech Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp. 219–244). Grenoble: IMAG.

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). κ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In C. Margolinas & A. Mercier (Eds.), *Ecole d'Ete de Didactique des Mathématiques* (pp. 1–32). Corps, France: La pensée Sauvage Grenoble, France.

Balacheff, N., & Soury-Lavergne, S. (1996). Explication et préceptorat, à propos d'une étude de cas dans TéléCabri. In M. Joab (Ed.), *Journées Explication'96 du PRC-IA* (pp. 343–356). INRIA Sophia Antipolis France: Université Blaise Pascal.

Barth, B.-M. (1985). Jérôme Bruner et l'innovation pédagogique. *Communication et langages*, 66(1), 46–58.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International research in mathematics education* (pp. 746–783). New York: Routledge.

Bartolini Bussi, M., & Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Milano, Italie: Springer.

Baulac, Y., Bellemain, F., & Laborde, J.-M. (1988). *Cabri-géomètre, un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie, logiciel et manuel d'utilisation*. Paris: Cedic-Nathan.

Berthelot, R., & Salin, M.-H. (1993). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, 53, 39–56.

Besnier, S. (2016, June). *Le travail documentaire des professeurs à l'épreuve des ressources technologiques: Le cas de l'enseignement du nombre à l'école maternelle* (Theses). Université de Bretagne Occidentale.

Bessot, A. (2003). Une introduction à la théorie des situations didactiques. *Cahiers Du Laboratoire Leibniz*, 91.

Betrancourt, M. (2005). The Animation and Interactivity Principles in Multimedia Learning. In R. Mayer (Ed.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning*: (pp. 287–296). Cambridge: Cambridge University Press.

Bombrun, C., & Thomas, R. (2014). GeoGebra entre cour de récréation et feuille de papier : illustration avec le concept de cercle au cycle 3. Presented at the XXXXe colloque de la COPIRELEM, Nantes: IREM des pays de la Loire.

Bonnefond, G., Daviaud, D., & Revranche, B. (1992). *Pythagore Mathématiques 4e*. Paris: Hatier.

Boucheix. (2008). Young learners' control of technical animations. In R. Lowe & W. Schnotz (Eds.), *Learning with animations* (pp. 208–234). New York: Cambridge University Press.

Boucheix, J.-M. (2011). Des animations multimédias pour apprendre mieux? In N. Balacheff (Ed.), *Apprendre et transmettre: des idées, des savoir-faire, des valeurs* (pp. 48–55). Autrement.

- Bourgeat, F., Calpe, A., Digeon, M., Esfahani, E., Leyraud, I., & Soury-Lavergne, S. (2010). Working on resources quality assessment on I2geo. In *Interoperable Interactive Geometry*. Hluboká nad Vltavou, Czech Republic: CERMAT.
- Bourmaud, G. (2007). L'organisation systémique des instruments : méthodes d'analyse, propriétés et perspectives de conception ouvertes. In *Colloque de l'Association pour la Recherche Cognitive - ARCo'07: Cognition - Complexité - Collectif* (pp. 61–76). Nancy, France: ARCo - INRIA - EKOS.
- Brice, L., Croutte, P., Jauneau-Cotte, P., & Lautié, S. (2015). *Baromètre du NUMERIQUE édition 2015, rapport pour le CGE et l'ARCEP* (p. 170). CREDOC.
- Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 9(3), 309–336.
- Brousseau, G. (1995). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In M.-J. Perrin-Glorian & R. Noirfalise (Eds.) (pp. 1–46). Presented at the VIIIe école d'été de didactique des mathématiques, Sainte-Sauves d'Auvergne France: IREM de Clermont-Ferrand.
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée Sauvage.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Oxford University Press.
- Bruner, J. S. (1983). *Le développement de l'enfant, Savoir faire, Savoir dire*. Paris: PUF.
- Calpe, A., Rabatel, J.-P., Zucchetta, J.-F., & Soury-Lavergne, S. (2014). Explorer les patrons du cube : de l'intérêt des représentations à l'aide de logiciels de mathématique dynamique. In *Enseignement de la géométrie à l'école: enjeux et perspectives* (pp. 315–Atelier15). Nantes, France: IREM de Nantes.
- Canalini Corpacci, R., & Maschietto, M. (2011). Gli artefatti-strumenti e la comprensione della notazione posizionale nella scuola primaria. La 'pascalina' Zero+1 nella classe: genesi strumentale. *Insegnamento Della Matematica E Delle Scienze Integrate*, 34 A(2), 161–188.
- Canalini Corpacci, R., & Maschietto, M. (2012). Gli artefatti-strumenti e la comprensione della notazione posizionale nella scuola primaria. La "pascalina" Zero+1 e sistema di strumenti per la notazione posizionale. *Insegnamento Della Matematica E Delle Scienze Integrate*, 35A(1), 33–58.
- Capponi, B., & Laborde, C. (1994). *Cabri-classe, Apprendre la géométrie avec un logiciel*. Argenteuil: Éditions Archimède.
- Carral, M., & Cuppens, R. (1993). De D'Alembert à Cabri-géomètre : le constructeur universel d'équations. In *Apprentissage et enseignement de la géométrie avec ordinateur : Utilisation du logiciel Cabri-géomètre en classe*. Grenoble, France.
- Chabanne, J.-C., Monod-Ansaldi, R., & Loisy, C. (2016). Faire le lien entre la pratique et la recherche pour transformer l'école ? Le dispositif LÉA de l'IFE comme laboratoire de l'innovation en recherche-intervention-formation. Analyse du cas particulier d'un LÉA impliquant une ESPE. In B. Marin & D. Berger (Eds.), *Recherches en éducation, recherches sur la professionnalisation: consensus et dissensus*. Paris: Editions Le Réseau National des ESPE.
- Charrière, P.-M. (1995). Boîtes noires, 9. Retrieved from http://icosaweb.ac-reunion.fr/GeomJava/abraCAda/M_abra.htm

- Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche En Didactique Des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Clerc, B. (2006). Boîte noire en géométrie dynamique. Mise en place et utilisation d'une boîte noire avec Tracenpoche, 2. Retrieved from <http://revue.sesamath.net/spip.php?article13>
- Coob, P., Confrey, J., diSessa, A., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13.
- Coutat, S. (2006). *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège: une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété*. (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier.
- Crawford, M. B. (2010). *Eloge du carburateur. Essais sur le sens et la valeur du travail*. Paris: La Découverte.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherche En Didactique Des Mathématiques*, 7(2), 5–31.
- Drijvers, P. (2012). Digital Technology in Mathematics Education: Why it Works (or doesn't). Presented at the 12th ICME, Seoul, Korea.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213–234.
- Drijvers, P., Tacoma, S., Besamusca, A., van den Heuvel, C., Doorman, M., & Boon, P. (2014). Digital Technology and Mid-Adopting Teachers' Professional Development: A Case Study. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (Vol. 2, pp. 189–212). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne ; New York: P. Lang.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5–53.
- Edwards, L., Radford, L., & Arzarello, F. (Eds.). (2009). Gestures and multimodality in the construction of mathematical meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2).
- Fuglestad, A. B., Healy, L., Kynigos, C., & Monaghan, J. (2010). Working with Teachers: Context and Culture. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Vol. 13, pp. 293–310). Berlin: Springer.
- Fyfe, E. F., McNeil, N. M., Son, J. Y., & Goldstone, R. L. (2014). Concreteness Fading in Mathematics and Science Instruction: a Systematic Review. *Educational Psychology Review*, 26(1), 9–25.
- Gattegno, C., & Cuisenaire, G. (1962). *Initiation à la méthode: les nombres en couleurs: Nouvelle édition...* Delachaux et Niestlé.
- Grugeon-Allys, B. (2008). Pratiques d'intégration d'un logiciel de géométrie dynamique à l'école élémentaire. *Carrefours de l'éducation*, 25(1), 75–90.
- Grugeon, B., Pilet, J., Chenevotot, F., & Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours

- différenciés d'apprentissage en algèbre élémentaire / B. Grugeon-Allys, J. Pilet, F. Chenevotot-Quentin, É. Delozanne. *Recherche En Didactique Des Mathématiques, Enseignement de L'algèbre, Bilan et Perspectives, Hors série*, 137–162.
- Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (Eds.). (2012). *From text to “lived” resources: mathematics curriculum materials and teacher development*. Dordrecht: New York: Springer.
- Gueudet, G., Sacristan, A.-I., Soury-Lavergne, S., & Trouche, L. (2012). Online paths in mathematics teacher training: new resources and new skills for teacher educators. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 44, 717–731.
- Gueudet, G., Soury-Lavergne, S., & Trouche, L. (2008a). *Pairform@nce. Parcours de formation en ligne, quels assistants méthodologiques?*. Lyon: INRP pour la SDTICE du Ministère de l'Éducation Nationale. Retrieved from hal-00988911, v1.
- Gueudet, G., Soury-Lavergne, S., & Trouche, L. (2008b). Soutenir l'intégration des TICE : quels assistants méthodologiques pour le développement de la documentation collective des professeurs? Exemples du SFoDEM et du dispositif Pairform@nce. In F. Vandenbrouck (Ed.), *Colloque DIDIREM*. Paris France.
- Gueudet, G., & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. *Education & Didactique*, 2(3), 7–33.
- Gueudet, G., & Trouche, L. (2010a). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 57–74). Rennes: PUR et INRP.
- Gueudet, G., & Trouche, L. (Eds.). (2010b). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Rennes: PUR et INRP.
- Guin, D., Joab, M., & Trouche, L. (Eds.). (2008). Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM (2000 - 2006), cédérom. INRP et IREM Université Montpellier 2.
- Guin, D., & Trouche, L. (1999). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(3), 195–227.
- Guin, D., & Trouche, L. (2002). Calculatrices symboliques: transformer un outil en un instrument du travail mathématique, un problème didactique. *La Pensée Sauvage*.
- Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 103–117). Hiroshima: Hiroshima University.
- Healy, L., Jahn, A. P., & Bolite-Frant, J. (2009). Developing cultures of proof practices amongst Brazilian mathematics teachers. In Fou-lai Lin, Feng-Jui Hsieh, H. Gila, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education*. Taipei: National Taiwan Normal University.
- Healy, L., & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *ZDM*, 42(1), 63–76.
- Hölzl, R. (1996). How does “dragging” affect the learning of geometry. *International*

Journal of Computers for Mathematical Learning, 1(2), 169–187.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175–193.

Hoyles, C., & Lagrange, J.-B. (Eds.). (2010). *Mathematics education and technology: rethinking the terrain: the 17th ICMI study*. New York: Springer.

Jackiw, N. (1989). *The Geometer's Sketchpad (Computer Software)*. Berkeley: Key Curriculum Press.

Kaptelinin, V., & Nardi, B. (2006). *Acting with Technology: Activity Theory and Interaction Design*. Cambridge MIT Press.

Kortenkamp, U. (1999). *Foundations of Dynamic Geometry* (PhD Thesis). Swiss Federal Institute of Technology Zurich.

Kortenkamp, U., & Laborde, C. (2011). Interoperable Interactive Geometry for Europe: an introduction. *ZDM*, 43(3), 321–323.

Kuhn, T. S., Biezunski, M., Jacob, P., Lyotard-May, A., & Voyat, G. (1990). *La tension essentielle: tradition et changement dans les sciences*. Paris: Gallimard.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 151–161.

Laborde, C. (2001). Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283–317.

Laborde, C. (2004). Come la geometria dinamica puo rinnovare i processi di mediazione delle conoscenze matematiche nella scuola primaria. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *La didattica della matematica: una scienza per la scuola* (pp. 19–28). Bologna.

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. In W.-C. Y. Sung-Chi Chu, Hee-Chan Lew (Ed.), *10th Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 22–36). Cheong-Ju, South Korea: Korea National University of Education.

Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherche En Didactique Des Mathématiques*, 14(1.2), 165–210.

Laborde, C., & Laborde, J.-M. (2008). The development of a dynamical geometry environment Cabri-Géomètre. In M. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 31–52).

Laborde, C., & Laborde, J.-M. (2011). Interactivity in dynamic mathematics environments: what does that mean? In *Integration of Technology into Mathematics Education: past, present and future Proceedings of the Sixteenth Asian Technology Conference in Mathematics TCM*. Bolu, Turkey.

Ladel, S., & Kortenkamp, U. (2015). Development of conceptual understanding of place value. In *The Twenty-third ICMI Study: Primary Mathematics Study on Whole Numbers* (p. 323). Macau, China: ICMI.

Lagrange, J.-B. (2010). Teaching and learning about functions at upper secondary level: designing and experimenting the software environment Casyopée. *International Journal*

of *Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 243–255.

Lakoff, G., & Nunez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. (Basic Books). New York.

Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing Mathematics Tasks: The Role of Tools. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education* (pp. 191–225). Cham: Springer International Publishing.

Lowe, R., & Schnotz, W. (Eds.). (2008). *Learning with animation: research implications for design*. Cambridge: Cambridge Univ.

Mackrell, K., Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013). The interaction between task design and technology design in creating tasks with Cabri Elem. In C. Margolinas (Ed.), *ICMI Study 22 Task Design in Mathematics Education* (pp. 81–90). Oxford, Royaume-Uni.

Manches, A., O'Malley, C., & Benford, S. (2010). The role of physical representations in solving number problems: a comparison of young children's use of physical and virtual materials. *Computers & Education*, (54), 622–640.

Mandin, S. (2016, September 21). Apprendre par la manipulation physique grâce aux robots. Retrieved from <https://www.reseau-canope.fr/agence-des-usages/apprendre-par-la-manipulation-physique-grace-aux-robots.html>

Mandin, S., De Simone, M., & Soury-Lavergne, S. (2016). Robot moves as tangible feedback in a mathematical game at primary school. In *Proceedings of RIE*. Vienne, Autriche.

Mariotti, M. A. (2012). ICT as opportunities for teaching-learning in a mathematics classroom: the semiotic potential of artifacts. In T. Y. Tso (Ed.) (Vol. 1, pp. 25–40). Presented at the Proceedings of the 36th Conference of the Intern. Group for the Psychology of Mathematics Education, Tapei, Taiwan.

Martin, T., & Schwartz, D. L. (2005). Physically Distributed Learning: Adapting and Reinterpreting Physical Environments in the Development of Fraction Concepts. *Cognitive Science*, 29(4), 587–625.

Martin, Y. (2010). CaRMetal, une géométrie dynamique enrichie. *Expressions*, 35, 165–272.

Maschietto, M. (2011). Instrumental geneses in mathematics laboratory. In *PME 35*. Ankara, Turquie.

Maschietto, M., & Ferri, F. (2007). Artefacts, schèmes d'utilisation et significations arithmétiques. In J. Szendrei (Ed.) (pp. 179–183). Presented at the CIEAEM 59, Dobogoko, Hungary.

Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (à paraître). The duo “pascaline and e-pascaline”: an example of using material and digital artefacts at primary school. In F. Ferrara, A. Montone, & E. Faggiano (Eds.), *Innovation and technology*.

Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2012). Verso buone pratiche nell'uso dei software di geometria dinamica nella didattica della matematica. *Bricks*.

Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013a). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM*, 45(7), 959–971.

- Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013b). The beginning of the adventure with pascaline and e-pascaline. In *Proceedings of ICTMT 11*. Bari, Italie.
- MEN DNE. (2016). *Enquête PROFETIC 2016 auprès de 5000 enseignants du 2d degré* (p. 88). DNE Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche.
- Mercat, C., Hasek, R., Pech, P., Recio, T., Soury-Lavergne, S., & Trgalova, J. (2010). *Guidelines for external testing, The Intergeo Consortium, Deliverable N°D6.2* (Intergeo project No. 6.3). Programme eContentPlus, European Commission. Retrieved from <http://i2geo.net/files/D6.3.pdf>
- Mercat, C., Soury-Lavergne, S., & Trgalova, J. (2008). *Quality Assessment Plan The Intergeo Consortium* (Deliverable N°: D6.1 Programme eContentplus).
- Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier, Grenoble, France.
- Montessori, M. (1958). *Pédagogie scientifique*. Desclée de Brouwer.
- Montone, A., Faggiano, E., & Mariotti, M. A. (2017). The design of a teaching sequence on axial symmetry, involving a duo of artefacts and exploiting the synergy resulting from alternate use of these artefacts. In *CERME 10*. Dublin, Irlande.
- Moyer-Packenham, P. (Ed.). (2016). *International perspectives on teaching and learning mathematics with virtual manipulatives*. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg.
- Moyer-Packenham, P., & Bolyard, J. J. (2016). Revisiting the Definition of a Virtual Manipulative. In P. Moyer-Packenham (Ed.), *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (Vol. 7, pp. 3–23). Cham: Springer International Publishing.
- Moyer, P., Bolyard, J., & Spikell. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics*, 8(6), 372–377.
- Nemirovsky, R., Borba, M., Dimattia, C., Arzarello, F., Robutti, O., Schnepf, M., ... others. (2004). PME Special Issue: Bodily activity and imagination in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 57(3), 303–321.
- Nicaud, J.-F., Bouhineau, D., & Chaachoua, H. (2004). Mixing Microworld and Cas Features in Building Computer Systems that Help Students Learn Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(2), 169–211.
- Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: learning cultures and computers*. Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment* (PhD Thesis). Graduate School of Education, Bristol.
- Papert, S. (1980). The Gears of My Childhood. In *Indsroms: Children, computers, and powerful ideas* (Basic Books, pp. XVIII–XXI). New York, NY.
- Perrin-Glorian, M.-J., Mathe, A.-C., & Leclercq, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans? *Repères-IREM*, 90, 5–41.
- Perrin-Glorian, M.-J., & Salin, M.-H. (2010). Didactique de la géométrie. Peut-on commencer à faire le point? (pp. 47–81). Presented at the Séminaire national de

- didactique des mathématiques Année 2009, Université de Paris Diderot: IREM de Paris.
- Pesty, S., Webber, C., & Balacheff, N. (2003). Baghera : une architecture multi-agents pour l'apprentissage humain. In P. Aniorté & S. Gouardères (Eds.), *Cognitive - vers une informatique plus cognitive et sociale*. Cepadues.
- Pinet, L., & Gentaz, É. (2008). Évaluation d'entraînements multisensoriels de préparation à la reconnaissance de figures géométriques planes chez les enfants de cinq ans : étude de la contribution du système haptique manuel. *Revue française de pédagogie*, (162), 29–44.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes & les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris France: Armand Colin.
- Rabardel, P. (1999). Elements pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul (Ed.), *Evolution des pratiques des enseignants de mathématiques ; Role des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques?* (pp. 203–213). Houlgate France: IUFM académie de Caen.
- Rabardel, P., & Bourmaud, G. (2003). From computer to instrument system: A developmental perspective. *Interacting with Computers*, 15(5), 665–691.
- Rabardel, P., & Pastré, P. (2005). *Modèles du sujet pour la conception: dialectiques, activités, développement*. Octarès.
- Rabatel, J.-P., & Soury-Lavergne, S. (2017). Faire des mathématiques avec des cartes et un robot, le projet OCINAE. In *XXXIIIe colloque de la COPIRELEM* (pp. 265–278). Le Puy-en-Velay.
- Resnick, M., Martin, F., Berg, R., Borovoy, R., Colella, V., Kramer, K., & Silverman, B. (1998). Digital manipulatives: new toys to think with. In *CHI '98* (pp. 281–287). Los Angeles, California: ACM Press.
- Restrepo, A. M. (2007). L'instrumentation du déplacement dans un logiciel de géométrie dynamique. In I. B. F. Conne (Ed.), *XII école d'été de l'ARDM*. Sainte Livrade France.
- Restrepo, A. M. (2008). *Genese instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6e* (Thèse de doctorat). Joseph Fourier.
- Richter-Gebert, J., & Kortenkamp, U. (1999). The interactive geometry software Cinderella. Book & CD-ROM (Version First commercial release of the Cinderella software). Berlin: Springer-Verlag.
- Robertson, A. (2006). *Introduction aux banques d'objets d'apprentissage en français au Canada*. Canada: REFAD.
- Rolet, C. (2003). Teaching And Learning Plane Geometry In Primary School: Acquisition Of A First Geometrical Thinking. Presented at the CERME 3: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy.
- Ruthven, K., Hennessy, S., & Deane, R. (2008). Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. *Computers & Education*, 51(1), 297–317.
- Sanchez, E., & Monod-Ansaldi, R. (2014). Recherche collaborative orientée par la

conception. Un paradigme méthodologique pour prendre en compte la complexité des situations d'enseignement-apprentissage. *Éducation et Didactique*, 9(2), 73–94.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2016). Physical and Virtual Manipulatives: What Is “Concrete”? In P. S. Moyer-Packenham (Ed.), *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (Vol. 7, pp. 71–93). Cham: Springer International Publishing.

Sarrazy, B. (1995). Note de synthèse [Le contrat didactique]. *Le Contrat Didactique*, 85–118.

Sauvy, J., & Sauvy, S. (1972). *L'enfant à la découverte de l'espace De la marelle aux labyrinthes Initiation à la topologie intuitive*. Casterman Poche.

Sensevy, G. (2016). L'analogie, questions épistémologiques, théoriques, méthodologiques. Presented at the Séminaire International de l'IFE, « Apprendre et Faire apprendre : perspectives internationales », Lyon.

Shneiderman, B., & Plaisant, C. (2010). *Designing the user interface: strategies for effective human-computer interaction* (5th ed). Boston: Addison-Wesley.

Sinclair, N. (2003). Some implications of the results of a case study for the design of pre-constructed, dynamic geometry sketches and accompanying materials. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 289–317.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, 48(5), 691–719.

Soury-Lavergne, S. (1998). *Étayage et explication dans le préceptorat distant, le cas de TéléCabri* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier.

Soury-Lavergne, S. (2001). Connaissances et mise en œuvre d'un micromonde dans les interactions de préceptorat distant, le cas de la géométrie dynamique. *Sciences et Techniques Educatives*, 8, 321–345.

Soury-Lavergne, S. (2003). De l'étayage à l'effet Topaze, regard sur la négociation dans la relation didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 23(1), 9–40.

Soury-Lavergne, S. (2006). Instrumentation du déplacement dans l'initiation au raisonnement déductif avec Cabri-géomètre. In N. Bednarz (Ed.), *Espace Mathématique Francophone EMF2006*. Sherbrooke Canada: Université de Sherbrooke.

Soury-Lavergne, S. (2007). Utilisation de la géométrie dynamique pour l'introduction du raisonnement déductif en sixième : instrumentation du déplacement des figures. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds.), *Actes du Séminaire national l'association pour la recherche en didactique des mathématiques*. Paris France.

Soury-Lavergne, S. (2011). De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique. *MathemaTICE*, (27).

Soury-Lavergne, S. (2014a). Les technologies pour la géométrie à l'école primaire. In XXXXe colloque de la COPIRELEM (pp. 44–56). Nantes, France: IREM des pays de la Loire.

Soury-Lavergne, S. (2014b). *MOM pascaline et e-pascaline, une Mallette d'Outils Mathématiques pour la numération et le calcul en CP*. Rapport pour Canopé et l'Institut

Français de l'Éducation.

Soury-Lavergne, S. (2016). Duos of artefacts, connecting technology and manipulatives to enhance mathematical learning. Presented at the 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg, Germany.

Soury-Lavergne, S., Balacheff, N., Caferra, R., Peltier, N., Pesty, S., Sutherland, R., ... Olivero, F. (2003). *Baghera Assessment Project, designing an hybrid and emergent educational society* (Report for the European Community, IST program Information Society Technologies No. 81). Grenoble, France: Laboratoire Leibniz.

Soury-Lavergne, S., Gueudet, G., Loisy, C., & Trouche, L. (2011). *Recherche INRP-Pairform@nce. Parcours de formation, de formateurs et de stagiaires: suivi et analyse*. Lyon: rapport INRP pour la SDTICE du Ministère de l'Éducation Nationale.

Soury-Lavergne, S., Gueudet, G., Loisy, C., & Trouche, L. (2013). *Le travail collectif et les pratiques réflexives au cœur des dispositifs hybrides de formation: de Pairform@nce à M@gistère*. Lyon: rapport IFE pour la SDTICE du Ministère de l'Éducation Nationale.

Soury-Lavergne, S., Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). *Recherche INRP-Pairform@nce. Parcours de formation en ligne, étude de processus d'appropriation*. Lyon: INRP pour la SDTICE du Ministère de l'Éducation Nationale. Retrieved from hal-00988913, v1.

Soury-Lavergne, S., Guillaume, L., Rabatel, J.-P., & Martinez, J.-L. (2016). *OCINAE Livrable Tâche 5.4. Analyse des usages pédagogiques du démonstrateur* (p. 109). Institut Français de l'Éducation, ENS de Lyon.

Soury-Lavergne, S., Jahn, A.-P., & Trgalova, J. (2011). I2Geo quality assessment process: a tool for teacher professional development? *Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 5(3), 261–275.

Soury-Lavergne, S., & Maschietto, M. (2012). Les stratégies du garagiste. *Cahiers pédagogiques Apprendre avec le numérique*, 498, 34–35.

Soury-Lavergne, S., & Maschietto, M. (2013). A la découverte de la « pascaline » pour l'apprentissage de la numération décimale. In C. Ouvrier-Buffet (Ed.), *XXXIXe colloque de la COPIRELEM Faire des mathématiques à l'école: de la formation des enseignants à l'activité de l'élève*. Quimper, France.

Soury-Lavergne, S., & Maschietto, M. (2015a). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 47(3), 435–449.

Soury-Lavergne, S., & Maschietto, M. (2015b). Number system and computation with a duo of artefacts: The pascaline and the e-pascaline. In X. Sun, B. Kaur, & J. Novotna (Eds.), *The Twenty-third ICMI Study: Primary Mathematics Study on Whole Numbers* (pp. 371–378). Macau, China: ICMI.

Soury-Lavergne, S., & Sanchez, E. (2009). Pairform@nce, conception de parcours de formation continue pour les enseignants. In C. Develotte, F. cois Mangenot, & E. Nissen (Eds.), *EPAL Echanger Pour Apprendre en Ligne*. Grenoble, France.

Tapan, S. (2006). *Etude de la formation initiale des enseignants à l'intégration des nouvelles technologies*. (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique*

pour le développement d'une ressource. (Thèse de doctorat). Université Paris-Diderot - Paris VII.

Tournes, D. (2003). Du compas aux intégraphes : les instruments du calcul graphique. *Repères-IREM*, 50.

Trgalova, J., Jahn, A. P., & Soury-Lavergne, S. (2009). Analyse de ressources pédagogiques pour la géométrie dynamique et évaluation de leur qualité : le projet Intergeo. In *Actes du colloque de l'Espace Mathématique Francophone* (pp. 922–934). Dakar Sénégal.

Trgalova, J., & Soury-Lavergne, S. (2003). Diagnostic de conceptions d'élèves dans Baghera, un environnement informatique pour l'apprentissage humain. In *Congrès européen ITEM Intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques*. Reims France.

Trgalova, J., Soury-Lavergne, S., & Jahn, A.-P. (2011). Quality assessment process for dynamic geometry resources in Intergeo project: rationale and experiments. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 43(3), 337–351.

Tricot, A., Plécat-Soutjis, F., Camps, J.-F., Amiel, A., Lutz, G., & Morcillo, A. (2003). Utilité, utilisabilité, acceptabilité. Interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH. In *Proceedings of EIAH* (pp. 391–402). Strasbourg, France.

Trouche, L. (2003, November). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations* (Document pour l'habilitation à diriger des recherches). Paris 7, Paris, France.

Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding student's command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281–307.

Trouche, L. (2009). Penser la gestion didactique des artefacts pour faire et faire faire des mathématiques : histoire d'un cheminement intellectuel. *Educateur*, 3, 35–38.

Trouche, L., & Drijvers, P. (2010). Handeld technology for mathematics education: Flashback into the future. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 42(7), 667–681.

Turkle, S., & Papert, S. (1992). Epistemological Pluralism and the Revaluation of the Concrete. *Journal of Mathematical Behavior*, 11(1), 3–33.

Uttal, D., Scudder, K., & DeLoache, J. (1997). Manipulatives as Symbols: A new Perspective on the Use of Concrete Objects to Teach Mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18, 37–54.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 10(2.3), 133–170.

Vergnaud, G. (1994). Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavigneau (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, (pp. 177–191). La Pensée Sauvage éditions.

Voltolini, A. (2014). Un duo d'artefacts virtuel et matériel pour apprendre à construire un triangle à la règle et au compas. *Grand N*, 94, 25–46.

Voltolini, A. (2016). Duo of digital and material artefacts dedicated to the learning of geometry at primary school. Presented at the 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg, Allemagne.

Voltolini, A. (2017). *Duos d'artefacts matériel et numérique pour l'apprentissage de la géométrie* (Thèse de doctorat). Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon.

Wenger, E. (1987). *Artificial intelligence and tutoring systems: computational and cognitive approaches to the communication of knowledge*. Los Altos, Californie: Morgan Kaufmann Publishers.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice. Learning, Meaning and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.