HAL open science

Sur les invariants de noeuds et de variétés de dimension 3

Jean-Baptiste Meilhan

To cite this version:

Jean-Baptiste Meilhan. Sur les invariants de noeuds et de variétés de dimension 3. Mathématiques [math]. Université Grenoble Alpes, 2015. tel-01609377

HAL Id: tel-01609377

https://hal.science/tel-01609377v1

Submitted on 8 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

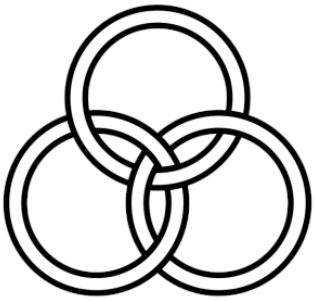
Université Grenoble Alpes, Institut Fourier, UMR CNRS 5582

Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

Sur les invariants de nœuds et de variétés de dimension 3

Jean-Baptiste Meilhan

4 Décembre 2015



JURY

Christian BLANCHET	Université Paris Diderot	Rapporteur
Michael EISERMANN	Universität Stuttgart	Examinateur
Rinat KASHAEV	Université de Genève	Rapporteur
Greg KUPERBERG	University of California, Davis	Rapporteur
Christine LESCOP	Université Grenoble Alpes	Examinateur
Pierre VOGEL	Université Paris Diderot	Examinateur

Table des matières

Remerciements 1

Introduction 3
Bibliographie 5

Chapitre I. Invariants des objets noués 7
I.1. Quelques rappels 7
I.2. Invariants de Milnor et invariants quantiques ([13] ;[17]) 15
I.3. Invariants des enlacements d'intervalles ([9] ;[16]) 22

Chapitre II. Invariants des variétés de dimension 3 29
II.1. Quelques rappels 29
II.2. Chirurgie borroméenne et invariant de Casson ([8]) 34
II.3. Relations d'équivalence sur les cylindres d'homologie ([15]) 36
II.4. Invariants de type fini et graphes épais ([10]) 39

Chapitre III. Perspectives 47

Bibliographie 57
Travaux de l'auteur 57
Références 58

Remerciements

Je veux tout d'abord adresser mes sincères remerciements à Christian Blanchet, Rinat Kashaev et Greg Kuperberg d'avoir accepté les rôles de rapporteurs pour ce mémoire. C'est un vrai honneur que ces personnes dont j'admire le travail se penchent sur mes modestes contributions. Je ne peux qu'en dire autant des autres membres de mon jury. Je remercie ainsi chaleureusement Christine Lescop, au contact de laquelle j'ai tant appris depuis mon arrivée à Grenoble. Michael Eisermann fut aussi un collègue éphémère mais précieux ; j'admire l'élégance de son travail autant que sa faculté à le raconter. Je remercie enfin Pierre Vogel pour l'intérêt bienveillant qu'il a porté à mes travaux, depuis mon tout premier séminaire, un jour de Décembre 2002 à Chevaleret.

Travailler à l'Institut Fourier pendant les sept dernières années (déjà...) a véritablement été un plaisir. J'y ai trouvé les interlocuteurs pour m'accompagner et me faire avancer dans mon travail d'enseignant et de chercheur, une équipe administrative efficace et sympathique malgré mes multiples sollicitations plus ou moins tordues, et bien sûr – et surtout – des amis. Je remercie donc tous les gens qui ont ainsi contribué à un environnement de travail aussi agréable. Je ne pense pas me risquer au périlleux exercice de l'énumération des personnes concernées... mais disons que les membres de l'alias [IFrasta], les amateurs de films improbables et de musique tout aussi improbable, les cueilleurs de champignons et les amateurs de *kampai* et de ouiches lorraines, font partie de la liste.

Ces années ont aussi été l'occasion de croiser et interagir avec de nombreux collègues au-delà des murs de l'IF. Je remercie ainsi tous les gens avec qui j'ai eu la chance de collaborer. Akira, Alex, Benjamin, Bob, Gwénaël, Jœrgen, Kazuo, Manu, Nathan, Paolo et Sakie sont autant d'amis, avec qui travailler a été avant tout l'occasion de passer de bons moments. Je remercie aussi Vincent, et tous les participants aux écoles *Winter Braids*, pour avoir rendu possible cette chouette aventure.

Je remercie enfin ma famille, au sein de laquelle j'ai toujours trouvé le soutien indispensable pour avancer. C'est en partant loin de vous que j'ai compris ce que signifie 'chez moi', et à quel point il est précieux de pouvoir s'y retrouver, et de s'y sentir bien, avec et grâce à vous.

Et merci a toi, Marie, pour ta douceur, ta générosité et ta curiosité. Siloé te ressemble chaque jour un peu plus, et cette seule pensée suffit à me remplir de bonheur.

Introduction

Ce mémoire porte sur les invariants de la topologie en petite dimension. Qu'il s'agisse de la théorie des nœuds, et plus généralement des objets noués (entrelacs, tresses, enlacements d'intervalles, enchevêtrements, graphes noués), ou de l'étude des variétés[1] de dimension 3, ce sont en effet là des branches de la topologie qui sont activement étudiées depuis plus d'un siècle, et pour lesquelles ont été développés des outils toujours plus nombreux et sophistiqués. Cette diversité s'est significativement accentuée dans les 30 dernières années, avec plusieurs avancées spectaculaires. Il est donc devenu nécessaire d'étudier cette multitude d'invariants, de tenter de comprendre les liens qui existent entre eux.

La topologie algébrique fût longtemps la source principale et quasi-exclusive de techniques pour étudier nœuds et 3–variétés. Groupe fondamental, homologie ou revêtement, permirent ainsi de construire une large classes d'invariants dits 'classiques', dont le polynôme d'Alexander est un exemple typique.

La théorie des invariants quantiques est née au milieu des années 80, suite aux travaux fondateurs de V. Jones [Jon87]. Au lieu des outils usuels de la topologie utilisés jusqu'ici, cette classe d'invariants repose sur des liens nouveaux avec d'autres branches des mathématiques, telles les algèbres d'opérateurs ou les représentations des groupes quantiques, et met en lumière des connections inattendues avec la physique théorique. C'est à E. Witten [Wit89] que l'on doit l'interprétation physique généralisant la construction de Jones : une théorie quantique des champs, basée sur la fonctionnelle de Chern-Simons, et dont la fonction de partition fournirait un invariant topologique. V. Turaev et N. Reshetikhin [RT90] donnèrent une construction mathématique rigoureuse des invariants 'quantiques' proposés par Witten. Bien que cette théorie engendre la construction et l'étude de toute une famille d'invariants nouveaux et puissants des nœuds et variétés, leur définition demeure mysterieuse du point de vue du topologue, dans le sens où l'on n'a qu'une compréhension très partielle des informations topologiques ou géométriques qu'ils portent. Une façon d'attaquer cette question fondamentale est d'essayer d'établir des connections entre invariants quantiques et classiques, dont nous comprenons bien, en revanche, le 'sens topologique'. C'est ce qui motive les travaux présentés dans la section I.2.

Le début des années 90 vit l'apparition des invariants de type fini [Gus94a ; Gus94b ; Vas90], qui poursuivirent la révolution initiée par Jones de la topologie de petite dimension. Cette théorie apporte un cadre unifié pour l'étude de nombreux invariants, qui présentent un comportement de type 'polynomial' au sens d'une certaine opération de 'dérivation topologique' (que nous précisons dans les dans les sections I.1.1 et II.1.1). De très nombreux invariants de la topologie en petite dimension s'avèrent posséder une telle propriété, en particulier l'ensemble des invariants quantiques. Il s'agit en effet d'une classe d'invariants 'cousine' des invariants quantiques, la théorie de type fini apparaissant comme l'approche perturbative de la théorie de Chern-Simons. L'un des résultats principaux de cette théorie est la construction par M. Kontsevich d'un invariant universel

1. Disons ici, et une fois pour toutes que les variétés que nous considérons ici sont supposées lisses et compactes, sauf mention explicite du contraire.

[Kon93], qui peut être vue comme une vaste généralisation de la formule intégrale de Gauss pour l'enlacement. La théorie de type fini est au cœur des travaux présentés dans les sections I.3 et II.3, où l'on s'intéresse plus spécifiquement à des objets 'modèles' pour la théorie ; la section II.3 investigue aussi les liens entre théorie de type fini et groupe de difféotopies [2], liens qui sont aussi au cœur de la section II.4.

Il est indispensable de comprendre comment s'organise cette multitude d'invariants, les liens qui existent entre eux, et les informations topologiques/géométriques qu'ils contiennent. Trente ans après son apparition, le polynôme de Jones lui-même reste un exemple emblématique de cette problématique. La conjecture du volume, énoncée en 1997 par R. Kashaev puis reformulée par H. et J. Murakami, suggère par exemple que le comportement asymptotique du polynôme de Jones colorié d'un nœud est lié au volume hyperbolique de son complémentaire. Une autre question importante est de comprendre quel lien existe avec le groupe fondamental [3]. C'est l'esprit de la conjecture AJ [FGL02 ; Gar04], selon laquelle une certaine variation du polynôme de Jones colorié coïncide avec le A-polynôme, un invariant de nœuds extrait de représentations non-abéliennes du groupe fondamental ; la conjecture de Melvin–Morton, démontrée par Bar-Natan et Garoufalidis grâce à la théorie de type fini [BNG96], établit déjà un premier lien concret entre polynômes de Jones et d'Alexander.

Depuis le début des années 2000, la catégorification constitue un nouvel essor dans l'étude des invariants topologiques en petite dimension, et apporte un regard nouveau sur les invariants quantiques. M. Khovanov [Kho00] initia cette théorie, en montrant que le polynôme de Jones d'un nœud n'est en fait 'que' la caracteristique d'Euler (graduée) d'un complexe associé à un diagramme, et dont l'homologie est un invariant qui s'avère bien plus riche – l'homologie de Khovanov détecte ainsi le nœud trivial [KM11], ce qui n'est pas connu pour le polynôme de Jones. L'homologie de Heegaard-Floer, qui categorifie de même le polynôme d'Alexander, a aussi produit une impressionante quantité de résultats dans le domaine. Un programme visant à catégorifier l'ensemble des invariants de Reshetikhin–Turaev fait à l'heure actuelle l'objet d'une activité soutenue. Les liens entre catégorification et théorie de type fini restent en revanche à peu près totalement incompris. Nous ne parlerons néanmoins pas davantage de ces derniers aspects dans ce mémoire.

Ce mémoire est constitué de deux chapitres principaux, le premier traitant des objets noués et le second des variétés de dimension 3. Chacun de ces deux chapitres commence par une section contenant les rappels nécessaires ; ces sections de rappel sont organisées de façon strictement parallèle, mettant en évidence les fortes analogies existant entre les deux contextes. Un troisième et dernier chapitre regroupe une série de questions ou pistes de recherches, plus ou moins directement liées aux travaux présentés ici.
Les résultats exposés dans les chapitres I et II sont tirés des publications [13 ; 17 ; 9 ; 16] et [8 ; 15 ; 10], respectivement. Tous ont été obtenus après ma thèse, et en fait seul [8] (et une partie de [10]) est antérieur à mon arrivée à l'Institut Fourier. L'article [8] est aussi le seul à ne pas être le fruit d'une collaboration, les autres travaux ayant été obtenus avec Akira Yasuhara ([9 ; 13 ; 16]), Sakie Suzuki ([17]), Gwénaël Massuyeau ([15]), et Jørgen E. Andersen, Alex J. Bene et Robert C. Penner ([10]).

2. Dans ce mémoire, groupe de difféotopies sera la traduction adoptée pour *mapping class group* ; une difféotopie est une classe d'isotopie de difféomorphisme.

3. On sait en effet depuis les travaux de Waldhausen [Wal68] que le groupe fondamental du complémentaire d'un nœud, muni d'une structure périphérique, forme un invariant complet : tout invariant de nœuds doit donc pouvoir s'extraire, en principe du moins, du groupe fondamental. De même, dans le contexte des invariants de 3–variétés, la Conjecture de Poincaré prouvée par G. Perelman place aussi, en un sens, le groupe fondamental au cœur de l'étude de ces objets.

Bibliographie

[0] J.-B. Meilhan. "Invariants de type fini des cylindres d'homologie et des string-links". Français. Thèse de doct. Université de Nantes, 2003.

[1] G. Massuyeau et J.-B. Meilhan. "Characterization of Y_2-equivalence for homology cylinders". Dans : *J. Knot Theory Ramifications* 12.4 (2003), p. 493–522.

[2] J.-B. Meilhan. "On Vassiliev invariants of order two for string links". Dans : *J. Knot Theory Ramifications* 14.5 (2005), p. 665–687.

[3] J.-B. Meilhan. "Goussarov-Habiro theory for string links and the Milnor-Johnson correspondence". Dans : *Topology Appl.* 153.14 (2006), p. 2709–2729.

[4] K. Habiro et J.-B. Meilhan. "On the Kontsevich integral of Brunnian links". Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 6 (2006), p. 1399–1412.

[5] J.-B. Meilhan. "On surgery along Brunnian links in 3-manifolds". Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 6 (2006), p. 2417–2453.

[6] K. Habiro et J.-B. Meilhan. "Finite type invariants and Milnor invariants for Brunnian links". Dans : *Internat. J. Math.* 19.6 (2008), p. 747–766.

[7] J.-B. Meilhan et A. Yasuhara. "On C_n-moves for links". Dans : *Pacific J. Math.* 238.1 (2008), p. 119–143.

[8] J.-B. Meilhan. "Borromean surgery formula for the Casson invariant". Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 8.2 (2008), p. 787–801.

[9] J.-B. Meilhan et A. Yasuhara. "Characterization of finite type string link invariants of degree < 5". Dans : *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 148.3 (2010), p. 439–472.

[10] J. E. Andersen, A. J. Bene, J.-B. Meilhan et R. C. Penner. "Finite type invariants and fatgraphs". Dans : *Adv. Math.* 225.4 (2010), p. 2117–2161.

[11] J.-B. Meilhan et A. Yasuhara. "Whitehead double and Milnor invariants". Dans : *Osaka J. Math.* 48.2 (2011), p. 371–381.

[12] N. Habegger et J.-B. Meilhan. "On the classification of links up to finite type". Dans : *Topology and physics*. T. 12. Nankai Tracts Math. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008, p. 138–150.

[13] J.-B. Meilhan et A. Yasuhara. "Milnor invariants and the HOMFLYPT polynomial". Dans : *Geom. Topol.* 16.2 (2012), p. 889–917.

[14] J.-B. Meilhan, E. Seida et A. Yasuhara. "Local moves for links with common sublinks". Dans : *Topology Appl.* 160.6 (2013), p. 836–843.

[15] G. Massuyeau et J.-B. Meilhan. "Equivalence relations for homology cylinders and the core of the Casson invariant". Dans : *Trans. Amer. Math. Soc.* 365.10 (2013), p. 5431–5502.

[16] J.-B. Meilhan et A. Yasuhara. "Abelian quotients of the string link monoid". Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 14.3 (2014), p. 1461–1488.

[17] J.-B. Meilhan et S. Suzuki. "The universal sl_2 invariant and Milnor invariants". Dans : *ArXiv e-prints* (2014). arXiv :1405.3062.

[18] B. Audoux, P. Bellingeri, J.-B. Meilhan et E. Wagner. "Homotopy classification of ribbon tubes and welded string links". Dans : *ArXiv e-prints* (2014). arXiv :1407.0184.

CHAPITRE I

Invariants des objets noués

I.1. Quelques rappels

Dans cette section, nous donnons quelques rappels sur les objets et notions qui interviennent de façon centrale dans la suite du chapitre. Bien que probablement superflues pour le lecteur expert, ces quelques pages pourront peut-être s'avérer utile à toute personne souhaitant s'initier aux sujets de mes travaux.

I.1.1. Invariants de type fini des objets nouées. Comme expliqué dans l'introduction, la notion d'invariant de type fini, ou invariant de Goussarov-Vassiliev, propose un cadre unifé pour l'étude de nombreux invariants d'objets noués [Gus94a ; Gus94b ; Vas90]. Avant d'en rappeler la définition ci–dessous, un petit point historique s'impose. La littérature fait quasi–exclusivement référence aux *invariants de Vassiliev*. En effet, Vassiliev a défini à la fin des années 80 une nouvelle classe d'invariants très riche, à partir de l'étude des classes de cohomologie de l'espace des nœuds [Vas90] [1]. Le travail de Vassiliev fut rapidement remarqué comme une percée importante en théorie des nœuds [Kon93]. Birman et Lin [BL93], puis Bar-Natan [BN95a], en donnèrent ainsi une reformulation simple et combinatoire, qui est aujourd'hui l'approche communément adoptée (y compris dans ce mémoire). Il s'avère cependant que les mêmes idées avaient été développées indépendamment par Goussarov dans [Gus94a ; Gus94b], en des termes combinatoires très proches de la reformulation de Birman-Lin, mais de façon peut-être moins visible [2].

Par la suite, nous adopterons la terminologie d'invariants de type fini.

Pour des raisons de commodité, nous donnerons les définitions de cette section dans le cas des nœuds, en signalant simplement qu'elles se généralisent de façon naturelle et immédiate aux entrelacs, tresses, et autres objets noués, et nous utiliserons librement les-dites généralisations.

L'idée de base est qu'un invariant de nœuds est de type fini s'il est polynomial, au sens d'une certaine opération de dérivation sur les nœuds. Pour formaliser cette idée, on élargit sensiblement la classe des objets topologiques considérés, avec la notion de nœud singulier.

Un *nœud singulier* est une immersion du cercle orienté dans S^3 dont l'ensemble des singularités est un nombre fini de points doubles transverses. Un invariant de nœuds v, à valeurs dans un groupe abélien, peut être évalué sur un nœud singulier d'après la règle suivante

(I.1) $v\Big($ $\Big) = v\Big($ $\Big) - v\Big($ $\Big)$.

1. En un mot, on considère l'ensemble des applications lisses de S^1 dans S^3 ; le complémentaire de l'ensemble des nœuds est ainsi l'ensemble de telles applications qui admettent des singularités, et est naturellement stratifié par le nombre de points doubles de ces immersions. Un invariant de nœuds est alors vu comme une classe de cohomologie de degré 0 de l'espace des nœuds, et la notion d'invariant de Vassiliev est extraite du H^0 grâce à cette stratification du complémentaire. On peut noter au passage que l'étude des invariants issus des classes de cohomologie de degré supérieur est quasiment inexplorée.

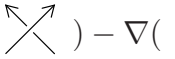
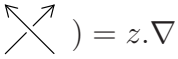
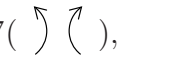
2. L'article qui contient l'essence des idées s'intitule *A new form of the Conway-Jones polynomial of oriented links*, ce qui semble un peu restrictif a posteriori.

On dit que v est un *invariant de type fini de degré* $\leq k$ s'il s'annule sur tout nœud singulier ayant (au moins) $k+1$ points doubles. Si v est de degré $\leq k$ mais détecte un nœud singulier à k points doubles, on dira que c'est un *invariant de type fini de degré* k.

Remarque I.1.1. L'égalité (I.1) implique deux nœuds qui ne diffèrent que localement, par un *changement de croisement* ; c'est en ce sens que l'on peut voir (I.1) comme la dérivée de l'invariant de nœuds v, et que l'on peut donc voir les invariants de type fini comme des polynômes. Cette idée est développée dans [Wil98].

Ce qui fait l'intérêt de cette définition, outre sa grande simplicité, est le fait que de très nombreux invariants connus alors s'avérèrent avoir une telle propriété d'annulation.

Par exemple, chacun des coefficients du polynôme d'Alexander est de type fini. Plus précisément, si on note ∇ la normalisation d'Alexander-Conway, qui prend la valeur 1 sur le nœud trivial et vérifie la formule d'écheveaux,

$\nabla($  $) - \nabla($  $) = z.\nabla($  $),$

alors le $n$ième coefficient de ∇ est un invariant de degré n. La preuve est en fait un exercice facile, voir [BN95a].

Un argument à peine plus compliqué nous dit que le polynôme de Jones, et en fait tous les invariants quantiques, rentrent aussi dans le cadre de cette théorie. Plus précisément, étant donnés une algèbre de Lie (complexe) simple $\mathcal{G}$, et une représentation irreductible de dimension finie R de cette algèbre, on note $Q(\mathcal{G}; R)$ l'invariant 'quantique' de Reshetikhin–Turaev associé (voir [Kas95 ; RT90 ; Oht02b] ; nous ne rappellerons pas la définition ici).

Théorème I.1.2 ([BL93 ; Lin91]). *Le coefficient de x^n dans la série formelle obtenue de l'invariant quantique $Q(\mathcal{G}; R)$ en posant $t = e^x$ est un invariant de degré n.*

Un corollaire imédiat est qu'il existe des invariants de type fini en tout degré. Bien sûr, il existe aussi beaucoup d'invariants de nœuds qui ne sont pas de type fini. De fait, tout invariant qui détecte le nœud trivial, tel que le nombre gordien ou le genre, ne peut pas être de type fini (voir la Remarque I.1.5 plus bas). Il reste cependant que l'ensemble des invariants de type fini forme conjecturalement un ensemble complet d'invariants de nœuds.

Conjecture I.1.3. Les invariants de type fini classifient les nœuds.

G. Kuperberg a montré que le point délicat ici est en fait de déterminer si les invariants de type fini distinguent un nœud de son image par inversion de l'orientation ; en effet, une réponse négative à cette question invaliderait la conjecture ci–dessus [Kup96]. Notons que l'on sait que cette conjecture est vraie dans le cas des tresses [BN95b].

L'intégrale de Kontsevich [Kon93]

$$Z : \{\text{Nœuds de } S^3\}/\text{isotopie} \to \mathcal{A}(\bigcirc)$$

est universelle parmi les invariants de type fini rationnels, dans le sens où tout invariant de type fini factorise par Z. Nous ne rappellerons pas la définition de cet objet ici, mais mentionnerons simplement qu'il peut être construit de façon combinatoire, à partir de la donnée d'un associateur de Drinfeld, et qu'il prend ses valeurs dans l'espace $\mathcal{A}(\bigcirc)$ des *diagrammes de Jacobi* sur le cercle $\bigcirc$.

Précisément, un diagramme de Jacobi sur une 1-variété (orientée) X est un diagramme $(1,3)$-valent, dont les 3-sommets (i.e. les sommets trivalents) sont munis d'un ordre cyclique sur les trois arêtes incidentes et dont l'ensemble des 1-sommets est plongé dans X. L'espace $\mathcal{A}(X)$ est alors le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les diagrammes de Jacobi sur X, modulo les relations AS, IHX et STU de la figure I.1[3], voir [BN95a]. L'espace $\mathcal{A}(X)$ est gradué par le degré

3. Plus précisément, la version de l'intégrale de Kontsevich pour les nœuds *non parallélisés* requiert que l'on quotiente aussi cet espace par la relation qui déclare nul tout diagramme contenant une corde isolée.

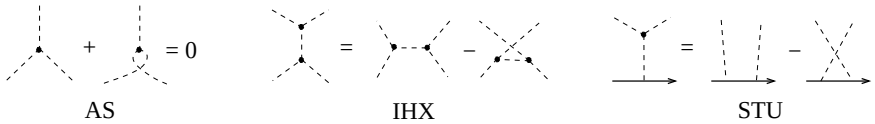


FIGURE I.1. Les relations AS, IHX et STU.

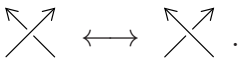
des diagrammes de Jacobi, simplement donné par la moitié du nombre total de sommets.

En général, l'intégrale de Kontsevich est un invariant d'enchevêtrements parenthésés (*q-tangle* en anglais), qui sont des objets obtenus par plongement propre dans le cube standard d'une 1-variété X (le squelette), tel que le bord est constitué de deux ensembles de points alignés sur deux faces opposées du cube, chacun étant muni d'un parenthésage complet. L'intégrale de Kontsevich d'un envevêtrement parenthésé de squelette X prend ses valeurs dans $\mathcal{A}(X)$. Par exemple, l'invariant de Kontsevich des tresses à n brins, ainsi que des enlacements de n intervalles définis dans la section I.1.4, prend ses valeurs dans $\mathcal{A}(\uparrow^n)$, où $\uparrow^n$ désigne n copies disjointes, orientées et ordonnés de l'intervalle unité. Enfin, nous utiliserons aussi le fait que $\mathcal{A}(\uparrow^n)$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{B}(n)$ des diagrammes de Jacobi dont les 1-sommets sont coloriés par $\{1; \ldots, n\}$, modulo AS et IHX, par un analogue diagrammatique de l'isomorphisme de Poincaré–Birhoff–Witt [BN95a].

I.1.2. Invariants de type fini et C_k-mouvement. S'il est donc conjecturé que l'ensemble des invariants de type fini puisse distinguer les nœuds, il est par ailleurs naturel de se demander quelles propriétés topologiques détectent les invariants en un degré donné.

Pour répondre à cette question, K. Habiro [Hab00b] et M. Goussarov [Gou00] ont introduit, de façon indépendante, la notion de C_k-mouvement, qui permet de donner, au moins dans le cas des nœuds, une caractérisation topologique des invariants de type fini.

Un C_1-mouvement est par convention un simple changement de croisement



Pour tout entier $k \geq 2$, un C_k-*mouvement* est un mouvement local entre objets noués, représenté dans la figure I.2 ci–dessous. Un C_k-mouvement peut ainsi être vu comme un 'changement de croisement d'ordre supérieur'.

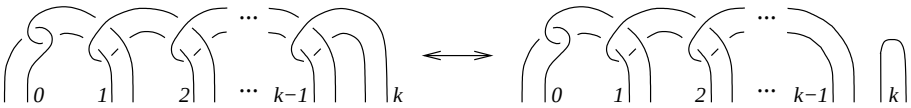


FIGURE I.2. Un C_k-mouvement implique $(k+1)$ brins, numérotés ici par des entiers entre 0 et k.

Cette opération de C_k-mouvement engendre une relation d'équivalence sur les objets noués, appelée C_k-*équivalence*. Cette famille de relations d'équivalence devient de plus en plus fine lorsque l'indice devient grand : si $m > n$, alors deux nœuds C_n-équivalents sont aussi C_m-équivalents.

La relation de C_k-équivalence peut-être reformulée en des termes plus algébriques : deux objets noués sont C_k-équivalents si et seulement si l'on passe de l'un à l'autre par 'insertion' d'un élément du $k$ième terme de la série centrale descendante d'un groupe de tresses pures [Sta96]. Ici, 'insertion' signifie que l'on remplace une copie de la tresse triviale (avec un nombre de brins arbitraire) par une autre tresse dans un diagramme de l'objet noué. Une autre reformulation est donnée en termes de claspers dans la section I.1.3.

Le résultat principal de Goussarov et Habiro est

THÉORÈME I.1.4 ([Gou00 ; Hab00b]). *Deux* nœuds *ont les mêmes invariants de type fini de degré* $< k$ *si et seulement s'ils sont* C_k*-équivalents.*

Le fait que deux nœuds C_k-équivalents ne sont pas distinguables par les invariants de type fini de degré $< k$ est relativement facile à vérifier, et il s'agit en fait d'un résultat général sur toutes les classes d'objets noués. On sait de plus que la réciproque est en général fausse pour les entrelacs ; Habiro donne en effet dans [Hab00b, §7.2] des contre–exemples explicites, qui font intervenir les invariants de Milnor des entrelacs Brunniens[4].

Cependant, il est possible que le théorème I.1.4 se généralise aux *enlacements d'intervalles*, qui sont en quelque sorte des entrelacs à bord, dont nous rappelons la définition complète dans la section I.1.4 ci–dessous.

REMARQUE I.1.5. La notion de C_k-mouvement permet de construire des nœuds (non triviaux !) dont tous les invariants de type fini sont triviaux jusqu'à un degré fixé, arbitrairement grand. On en déduit donc qu'un invariant qui détecte le nœud trivial ne peut pas être de type fini.

I.1.3. Rapide survol de la théorie des claspers. La relation de C_k-équivalence introduite ci–dessus admet une reformulation en termes de claspers, dont nous rappelons les définitions essentielles ci–dessous. Il n'est pas du tout nécessaire de maîtriser cette théorie pour la compréhension du mémoire, mais il faut tout de même signaler que c'est un des outils de preuve pour de nombreux résultats qui y sont exposés. L'article [Hab00b] de Habiro est la référence incontournable pour de plus amples détails. A nouveau, nous considérons ici le cas des nœuds, tout en signalant que la théorie s'applique de la même manière aux autres classes d'objets noués.

Un *clasper* pour un nœud K est une surface plongée dans S^3, qui est l'épaississement planaire d'un diagramme de Jacobi $(1,3)$-valent. Les épaississements des 1-sommets sont des disques appelés feuilles du claspers, et l'on demande que K intersecte tranversalement ce clasper en un nombre fini de points qui sont tous à l'interieur de ses feuilles.
Le degré d'un clasper est le degré du diagramme sous-jacent, soit la moitié du nombre total de sommets.

Un clasper G pour un nœud K est une instruction de modification chirurgicale sur ce nœud. On a effet une procédure pour construire un nouveau nœud K_G de S^3, qui repose sur les mouvements locaux 1 et 2 de la figure[5] I.3, comme suit. Dans un premier temps, on applique de façon récursive le mouvement local 1 à une feuille de G connectée par une arête à un 3-sommet[6], jusqu'à obtenir une union disjointe de claspers de degré 1 pour K (notons qu'oublier ces claspers de degré 1 produit un nœud qui est isotope à K). On applique alors le mouvement 2 à chacun de ces claspers de degré 1. Le résultat est le nœud K_G, que l'on dit obtenu de K par chirurgie le long de G. La classe d'isotopie de K_G ne dépend pas des choix faits dans cette construction.

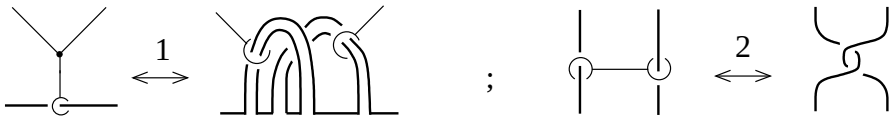


FIGURE I.3. Construire l'image d'un nœud par chirurgie le long d'un clasper (ici, les lignes en gras représentent une famille parallèle de brins du nœud).

La chirurgie le long de claspers de degré 1 est donc équivalente à un changement de croisement, comme l'illustre la partie droite de la figure I.3 ; la partie gauche de la figure permet de

4. Ce résultat fut le point de départ de ma collaboration avec Kazuo Habiro sur les invariants de type fini des entrelacs Brunniens [4 ; 6], dont nous ne parlerons pas ici. L'étude de la C_k-équivalence pour les entrelacs est aussi l'objet de mon premier travail avec Akira Yasuhara [7], qui ne sera pas non plus présenté dans ce mémoire.
5. Pour les quelques figures représentant des claspers, on utilisera les conventions de [Hab00b, Fig. 7].
6. On utilise ici les termes sommets et arêtes en faisant référence au diagramme sous-jacent.

vérifier que la chirurgie le long de claspers de degré 2 est équivalente au Δ-mouvement introduit par Murakami et Nakanishi [MN89].

La relation de C_k-équivalence définie dans la section précédente coïncide avec la relation d'équivalence engendrée par la chirurgie le long de claspers de degré k [Hab00b].

Comme l'illustre la définition donnée ici, les claspers fournissent une réalisation topologique des diagrammes de Jacobi qui apparaissent dans l'invariant universel de Kontsevich. En effet, Habiro a montré que, 'modulo C_{k+1}-équivalence', on a pour les claspers de degré k des relations analogues aux relations AS, IHX et STU. Plus généralement un ensemble de résultats (le *calcul de claspers*) montrent que la classe de C_{k+1}-équivalence d'un (nœud obtenu par chirurgie le long d'un) clasper de degré k est essentiellement déterminée par le diagramme sous-jacent.
Le calcul de clasper constitue ainsi un outil très puissant pour l'étude des objets noués, en particulier en lien avec la théorie des invariants de type fini.

I.1.4. Enlacements d'intervalles et la conjecture de Goussarov–Habiro. Un enlacement d'intervalles est ce qu'on trouve dans la littérature (anglophone, mais pas seulement, cf [0]) sous le nom de *string link*. Concrètement, il désigne un enchevêtrement pur sans composante circulaire (voir ci–dessous pour une définition moins sibylline). Cette notion semble être apparue dans la monographie [LD88] de Le Dimet, sous le nom d'*enlacement de disques* car dans un cadre plus général, en toute dimension, ce qui justifie la terminologie adoptée ici dans le seul cas de la dimension 1. Le terme de *string link* est dû à Habegger et Lin, qui redécouvrirent dans [HL90] les enlacements d'intervalles et les exploitèrent de façon cruciale pour le problème de classification des entrelacs à homotopie près.

I.1.4.1. *Définition.* Dans toute cette section, n désigne un entier naturel non nul. On note D le disque unité, dont l'intérieur est muni de n points $p_1, ..., p_n$ fixés (cf figure I.5).

On appelle *enlacement de n intervalles* un plongement propre (et lisse)

$$L : \bigsqcup_{i=1}^{n} [0,1]_i \to D \times [0,1]$$

de n copies disjointes $[0,1]_i$ de l'intervalle unité tel que, pour tout i, l'image L_i de $[0,1]_i$ satisfait $L_i \cap (D \times \{\varepsilon\}) = (p_i, \varepsilon)$ pour $\varepsilon = 0, 1$. On notera toujours L son image dans $D \times [0,1]$, et L_i sa $i$ème composante.

Voir la figure I.4 pour quelques exemples. Dans la cas $n = 1$, on parle parfois de *nœud long* dans la littérature. Notons que chaque brin d'un enlacement d'intervalles est muni d'une orientation induite par l'orientation naturelle de l'intervalle unité $[0,1]$.

Un enlacement d'intervalles *monotone*, dans le sens où il intersecte $D \times \{t\}$ en n points pour tout $t \in [0,1]$, est une tresse pure.

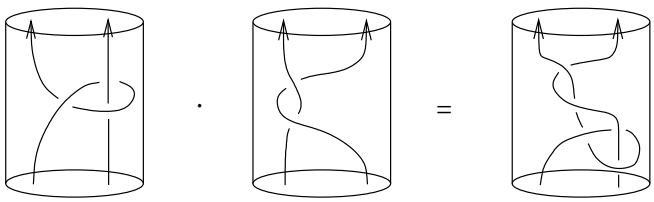


FIGURE I.4. Deux enlacements de 2 intervalles, et leur produit d'empilement.

Etant donnés deux enlacements de n intervalles L et L', on définit leur *produit d'empilement* par $L \cdot L' := L \cup_{L \cap (D \times \{1\}) = L \cap (D \times \{0\})} L'$ et reparamétrisation. (Voir la figure I.4.) L'*enlacement d'intervalles trivial* $\mathbf{1}_n := \bigsqcup_{i=1}^{n} p_i \times [0,1]$ est un élément neutre pour cette opération, et l'ensemble $\mathcal{SL}(n)$ des classes d'isotopies (fixant le bord) d'enlacements de n intervalles est ainsi muni d'une structure de monoïde. Ce monoïde est ceci dit loin d'être un groupe, les seuls éléments inversibles étant les tresses pures.

L'opération de clôture usuelle des tresses induit une application naturelle de *clôture*

$$\mathrm{cl}\ : \mathcal{SL}(n) \to \mathcal{L}(n),$$

où $\mathcal{L}(n)$ désigne l'ensemble des classes d'isotopie d'entrelacs orientés à n composantes dans S^3, qui est clairement surjective. Il est bien connu que pour $n = 1$, cette application est un isomorphisme de monoïdes.

Ainsi, la notion d'enlacement d'intervalles 'contient la théorie des nœuds' dans le cas $n = 1$, mais contrairement à la notion d'entrelacs, elle porte en outre une règle de composition naturelle qui généralise la somme connexe des nœuds orientés.

I.1.4.2. *Conjecture de Goussarov–Habiro.* Comme annoncé plus haut, Habiro et Goussarov ont indépendamment formulé la conjecture suivante sur les enlacements d'intervalles.

Conjecture I.1.6 (Goussarov-Habiro ; [Gou00 ; Hab00b]). Deux enlacements d'intervalles du même nombre de composantes ont les mêmes invariants de type fini de degré $< k$ si et seulement s'ils sont C_k-équivalents.

Rappelons que la condition suffisante de cette conjecture est toujours vérifiée (de même que dans le cas des entrelacs).

La condition nécessaire est aussi vérifiée en bas degré. C'est évident (car vide) pour $k = 1$, et bien connu pour $k = 2$: le seul invariant de degré 1 est le nombre d'enlacement, qui classifie les enlacements d'intervalles (comme les entrelacs) à C_2-équivalence près [MN89]. Le cas $k = 3$ de la conjecture de Goussarov-Habiro était l'un des résultats de ma thèse, publié dans [2]. G. Massuyeau a ensuite donné une preuve pour $k \leq 4$ dans [Mas07], basée sur des arguments purement algébriques. Dans une série de travaux en commun avec A. Yasuhara, présentés en grande partie dans la section I.3.2, nous étudions (et vérifions) cette conjecture en bas degré, par plusieurs approches.

Mais, au delà du fait qu'elle soit vérifée en bas degré, pourquoi croire à cette conjecture ? D'une part, comme expliqué dans la section I.1.4.1, les enlacements d'intervalles peuvent être vus comme une généralisation naturelle des nœuds, en particulier parce qu'ils admettent une composition naturelle qui généralise la somme connexe. La Conjecture I.1.6 est en ce sens un prolongement naturel du théorème I.1.4. (Cette structure de monoïde joue un rôle crucial dans la preuve de Habiro du théorème, comme on le verra dans la section I.3.2.2.) D'autre part, ces objets admettent beaucoup plus d'invariants de type fini que les entrelacs (ou, dualement, l'espace des diagrammes de Jacobi est bien plus grand). Par exemple, les invariants de Milnor sont définis pour les entrelacs et les enlacements d'intervalles, mais ne sont des invariants de type fini que pour ces derniers (excepté le nombre d'enlacement). Ces invariants de Milnor jouent aussi un rôle central dans les travaux présentés dans ce chapitre, et nous en donnons donc une présentation relativement détaillée dans la section suivante.

I.1.5. Invariants de Milnor des entrelacs et des enlacements d'intervalles. Les invariants de Milnor sont des invariants classiques des objets noués qui généralisent naturellement le nombre d'enlacement. Ils furent définis dans les années 50 par John Milnor dans le cas des entrelacs [Mil54 ; Mil57]. Ce sont, comme on va le voir, des invariants numériques extraits des quotients nilpotents du groupe fondamental du complémentaires.

I.1.5.1. *Invariants de Milnor des entrelacs.* On rappelle ici la construction de Milnor pour les entrelacs, en suivant [Mil57].

Soit $n \geq 2$ un entier, et $L = L_1 \cup \ldots \cup L_n$ un entrelacs orienté et ordonné à n composantes dans S^3. Soit Y le complémentaire d'un voisinage tubulaire ouvert de L. On note π le groupe fondamental de Y, pour un choix de point base fixé dans l'intérieur de Y.

Etant donné un diagramme de L, il est bien connu que l'on peut écrire une présentation de π par un procédé algorithmique élémentaire : la présentation ainsi obtenue, que l'on appelle présentation de Wirtinger, est en général assez 'lourde' a manipuler, puisque qu'elle comprend

un grand nombre de générateurs et relations – en l'occurence, autant que de croisements dans le diagramme. Cependant, on dispose d'une famille de quotients de π admettant des présentations beaucoup plus simples, et qui contiennent encore des informations riches sur l'entrelacs L : ses quotients nilpotents.

Rappelons que la *suite centrale descendante* $(\Gamma_k G)_{k\geq 1}$ d'un groupe G est une famille de sous-groupes définie inductivement par

$$\Gamma_1 G = G \quad \text{ et } \Gamma_{k+1} G = [G, \Gamma_k G].$$

Le *$k$ième quotient nilpotent* du groupe G est le quotient $G/\Gamma_k G$. (En particulier, le second quotient nilpotent du groupe est simplement son abelianisé.)

Il s'avère ainsi que, pour tout $k \geq 2$, le $k$ième quotient nilpotent de π est engendré par (seulement) n éléments $m_1, \ldots, m_n$, qui sont donnés par le choix d'un lacet méridien m_i pour chaque composante L_i.

Fixons dorénavant une valeur de $k \geq 2$. Pour chaque indice j de $\{1, \ldots, n\}$, on note λ_j un mot en les $m_i^{\pm}$ qui représente la $j$ième *longitude préférée* de L, c'est-à-dire la classe d'isotopie d'une copie parallèle de la composante L_i et ayant un enlacement nul avec cette dernière.

Le *développement de Magnus* [MKS76] $E(\lambda_j)$ de λ_j est un élément de $\mathbb{Z}\langle\langle X_1, ..., X_n\rangle\rangle$, l'anneau des séries formelles en les variables non commutatives $X_1, \ldots, X_n$, obtenu par la substitution

$$\begin{array}{rcl} m_i & \mapsto & 1 + X_i \\ m_i^{-1} & \mapsto & 1 - X_i + X_i^2 - X_i^3 + \ldots \end{array}$$

On associe ainsi à L, n séries formelles à coefficients entiers, et on note $\mu_L(i_1 i_2 \ldots i_p j)$ le coefficient du monôme $X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_p}$ dans le développement de Magnus de λ_j. Ce coefficient n'est en géneral pas un invariant d'isotopie de l'entrelacs, mais il le devient lorsqu'on le regarde modulo une indéterminée définie comme suit.

Etant donnée une suite I d'indices pris dans $\{1, ..., n\}$ (éventuellement avec des répétitions), on note $\Delta_L(I)$ le plus grand diviseur commun de l'ensemble des coefficients $\mu_L(I')$, où I' est toute suite obtenue de I par suppression d'au moins un indice et éventuellement permutation cyclique.

Milnor montra que la classe

$$\overline{\mu}_L(I) \equiv \mu_L(I) \text{ mod } \Delta_L(I)$$

est un invariant d'isotopie de l'entrelacs L, pour toute suite d'indices de longueur $|I| \leq k$. (Ici, la longueur $|I|$ de I est simplement le nombre d'indices dans la suite I.) C'est ce qu'on appelle un *invariant de Milnor* de l'entrelacs L.

On remarquera que, pour $k = 2$, on définit ainsi des invariants $\overline{\mu}_L(ij)$ de longueur 2 qui sont bien définis sur $\mathbb{Z}$ (i.e. $\Delta(ij) = 0$), et qui sont par définition les nombres d'enlacements des $i$ième et $j$ième composantes.

Ces invariants de Milnor ont des propriétés topologiques simples, bien connues pour le nombre d'enlacement. D'une part, ce sont des invariants de concordance[7]. Rappelons que deux entrelacs L et L' à n composantes sont concordants s'il existe un plongement $f : (\sqcup_{i=1}^n S_i^1) \times [0,1] \longrightarrow S^3 \times [0,1]$, de n copies disjointes $\sqcup_{i=1}^n S^1$ du cercle S^1, tel que $f\left((\sqcup_{i=1}^n S_i^1) \times \{0\}\right) = L \times \{0\}$ et $f\left((\sqcup_{i=1}^n S_i^1) \times \{1\}\right) = L' \times \{1\}$. D'autre part, les invariants de Milnor indexés par une suite *sans répétition* sont des invariants d'*homotopie*. Ici, ce que l'on appelle homotopie est la relation d'équivalence sur les objets noués engendrée par les changements de croisements au sein d'une même composante[8].

7. Ce résultat est une conséquence du travail de Stallings sur la suite centrale descendante. Comme Stallings l'explique dans [Sta65], ce travail était de fait motivé par le papier de Milnor.

8. Cette relation d'équivalence est usuellement appelée *link-homotopy*, ou parfois simplement *homotopy*, dans la littérature anglophone.

I.1.5.2. *Invariants de Milnor des enlacements d'intervalles.* Comme on l'a vu, les invariants de Milnor des entrelacs comportent une indéterminée subtile, qui rend leur étude assez délicate. Cette indéterminée provient des choix faits dans la construction exposée ci-dessus, en l'occurrence le choix d'un lacet méridien pour chaque composante. Habegger et Lin montrent dans [HL90] que les invariants de Milnor sont en fait des invariants des enlacements d'intervalles, puisqu'ils portent naturellement un tel système de méridiens pour les entrelacs obtenus par clôture. En d'autres termes, l'indéterminée dans les invariants de Milnor d'un entrelacs peut être interprétée géométriquement comme l'indéterminée à représenter cet entrelacs comme la clôture d'un enlacement d'intervalles. De plus, Habegger et Lin ont montré que l'ensemble des invariants de Milnor d'un enlacement d'intervalles peuvent être assemblés dans une unique *application de Milnor*, comme esquissé ci-dessous.

Soit $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$ un enlacement de n intervalles dans le cylindre $D \times [0,1]$. Comme auparavant, on note $Y = (D \times [0,1]) \setminus L$ le complémentaire de L, et on pose $Y_0 = (D \times \{0\}) \setminus L$ et $Y_1 = (D \times \{1\}) \setminus L$.

Fixons un point e sur le bord du disque D, et pour chaque $i = 1, ..., n$, un lacet orienté α_i dans D basé en e comme représenté dans la figure I.5. Pour $i = 0, 1$, le groupe fondamental de

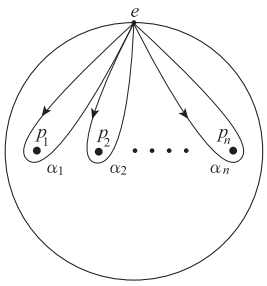


FIGURE I.5. Le disque D muni des points marqués p_i et des lacets α_i ; $i = 1, \cdots, l$.

Y_i basé en (e, i) s'identifie naturellement avec le groupe libre F engendré par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Par un théorème de Stallings [Sta65, Thm. 5.1], les inclusions $\iota_i : Y_i \longrightarrow Y$ induisent des isomorphismes $(\iota_i)_k : \pi_1(Y_t)/\Gamma_k\pi_1(Y_t) \longrightarrow \pi_1(Y)/\Gamma_k\pi_1(Y)$ pour tout entier positif k. Ainsi, l'enlacement d'intervalles L induit pour chaque k un automorphisme $(\iota_1)_k^{-1} \circ (\iota_0)_k$ de $F/\Gamma_k F$. Ceci définit plus précisément un morphisme de monoïdes

$$A_k : \mathcal{SL}(n) \to \mathrm{Aut}_0\left(F/\Gamma_k F\right),$$

où $\mathrm{Aut}_0\left(F/\Gamma_k F\right)$ désigne le groupe des automorphismes de $F/\Gamma_k F$ envoyant chaque générateur α_j sur un conjugué de lui-même et préservant le produit $\prod_j \alpha_j$. Plus précisément, si l'on note l_j l'élément de $\pi_1(Y)/\Gamma_k\pi_1(Y)$ défini par la $j$ième longitude préférée de L, et si on note $l_j^k := (\iota_1)_k^{-1}(l_j) \in F/\Gamma_k F$, alors $A_k(L)$ envoie α_j sur

$$A_k(L)(\alpha_j) = l_j^k \alpha_j (l_j^k)^{-1},$$

(où l'image de α_j dans le quotient $F/\Gamma_k F$ est encore noté α_j.)

On obtient ainsi une filtration descendante de monoïdes

$$\mathcal{SL}(n) = \mathcal{SL}_1(n) \supset \mathcal{SL}_2(n) \supset ... \supset \mathcal{SL}_k(n) \supset ...$$

où $\mathcal{SL}_k(n)$ est le noyau de A_k. Concrètement, $\mathcal{SL}_k(n)$ est le monoïde des enlacements d'intervalles dont les invariants de Milnor de longueur au plus k sont tous nuls. On peut considérer pour chaque k l'application

$$\mu_{k+1} : \mathcal{SL}_k(n) \to \frac{F}{\Gamma_2 F} \otimes \frac{\Gamma_k F}{\Gamma_{k+1} F}$$

qui envoie un enlacement d'intervalles L sur

$$\mu_{k+1}(L) := \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes l_j^{k+1}.$$

On appelle μ_{k+1}, l'*application de Milnor de degré* k. Cette terminologie est justifiée par le résultat suivant, dû indépendamment à Bar-Natan et Lin : l'application de Milnor μ_{k+1} est un invariant de type fini de degré k [BN95b ; Lin97].

Comme indiqué plus haut, l'application de Milnor μ_{k+1} est strictement équivalente à la collection de l'ensemble des invariants de Milnor de longueur $k+1$, via la formule $\mu_{k+1}(L) := \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes E_k(l_j^{k+1})$, où E_k désigne la composée du développement de Magnus E avec la projection sur la partie de degré k, c'est-à-dire

$$E_k(l_j^{k+1}) = \sum_{\substack{\text{toutes suites} \\ i_1 i_2 \ldots i_k}} \mu_{i_1 i_2 \ldots i_k j}(L) X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_k}.$$

Notons que $E_k(l_j^{k+1})$ vit dans l'image isomorphe de $\Gamma_k F/\Gamma_{k+1} F$ dans $\mathbb{Z}\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$.

I.2. Invariants de Milnor et invariants quantiques ([13] ;[17])

Comme on l'a vu dans l'introduction, les invariants quantiques demeurent encore mystérieux du point de vue de la topologie et de la géométrie, et il est donc toujours intéressant d'établir des liens avec des invariants classiques et bien compris.

Dans cette section, nous présentons des résultats extraits des articles [13] et[17], écrits en collaboration respectivement avec Akira Yasuhara et Sakie Suzuki, qui abordent cette question à travers les invariants de Milnor. De fait, les liens entre invariants de Milnor et la topologie quantique ont déjà été explorés par plusieurs auteurs. Il semble que la première tentative dans cette direction est due à L. Rozansky, qui a conjecturé dans [Roz94] une formule reliant les invariants de Milnor et le polynôme de Jones. Mais la contribution la plus importante est celle de Habegger et Masbaum, qui ont montré explicitement dans [HM00] comment les invariants de Milnor des enlacements d'intervalles sont liés à l'intégrale de Kontsevich, qui est universelle parmi les invariants quantiques ; en deux mots, ils montrèrent que, pour un enlacement de n intervalles L dont tous les invariants de Milnor de longueur $\leq m$ sont nuls, on a

$$Z^t(L) = 1 + \mu_m(L) + (\text{termes de degré} \geq m+1) \in \mathcal{B}^t(n), \tag{I.2}$$

où Z^t est une certaine reduction de l'intégrale de Kontsevich (sa projection sur l'espace $\mathcal{B}^t(n)$ des diagrammes de Jacobi coloriés par $\{1, \ldots, l\}$ modulo les diagrammes non simplement connexes), et où $\mu_m(L)$ est l'application de Milnor vue comme un élément de $\mathcal{B}^t(n)$.

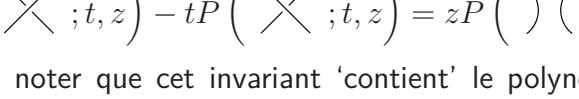
Les résultats que nous présentons dans cette section établissent de nouveaux liens, avec le polynôme de HOMFLYPT d'une part, et l'invariant universel sl_2 d'autre part ; nous rappellerons les définitions de ces derniers un peu plus loin. On verra que, si ces deux résultats sont donc dans un esprit très proche, ils prennent des formes différentes, apportent des éclairages différents sur ces invariants, et se démontrent tout à fait différemment.

I.2.1. Invariants de Milnor et polynôme de HOMFLYPT. Nous présentons ici les résultats de [13], obtenus avec **Akira Yasuhara**, qui expriment les invariants de Milnor d'un entrelacs comme une combinaison d'évaluations du polynôme de HOMFLYPT sur certains nœuds construits à partir de cet entrelacs.

Commençons par rappeler la définition du polynôme de HOMFLYPT[9]. Il s'agit de l'unique invariants P d'entrelacs orientés de S^3, à valeurs dans l'anneau des polynômes de Laurent à deux

9. Ce nom un peu curieux est bien un acronyme, qui reprend les initiales de toutes les personnes ayant participé, de manière simultanée et indépendante, à la découverte de cet invariant : J. Hoste, A. Ocneanu, K. Millett, P. Freyd, W. B. R. Lickorish, D. Yetter, J. Przytycki et P. Traczyk.

variables $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$, prenant la valeur 1 sur le nœud trivial et satisfaisant la relation d'écheveaux



Il n'est pas inutile de noter que cet invariant 'contient' le polynôme d'Alexander-Conway $\nabla(z)$, via la spécialisation $\nabla(z) = P(t,z)_{|\, t=1}$, qu'il se spécialise aussi en le polynôme de Jones $V(t)$ en posant $V(t) = P(t,z)_{|\, z=t^{1/2}-t^{-1/2}}$, et plus généralement qu'il se spécialise en tous les invariants quantiques sl_n.

Pour un entrelacs à n composantes L, le polynôme de HOMFLYPT prend la forme

$$P(L;t,z) = \sum_{k=1}^{N} P_{2k-1-n}(L;t) z^{2k-1-n},$$

pour un certain entier N (qui dépend de L) et où $P_{2k-1-n}(L;t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ est appelé le $(2k-1-n)$ième polynôme coefficient de L. Dans le cas d'un nœud, le polynôme de HOMFLYPT s'assemble donc en puissances positives paires de z. Par la suite, nous ne nous intéresserons qu'au polynôme coefficient P_0 des *nœuds*, dont l'on extrait des invariants numériques en posant

$$P_0^{(m)}(K) := (P_0(K;t))^{(m)}_{|\, t=1},$$

pour un nœud K et un entier $m \geq 0$, c'est-à-dire en prenant l'évaluation en $t = 1$ de la dérivée $m$ième du polynôme coefficient P_0. Notons que ceci définit un invariant de type fini de degré m, d'après un résultat (plus général) de Kanenobu et Miyazawa [KM98].

I.2.1.1. *Des entrelacs aux nœuds : la somme en bande généralisée.* Commençons par donner le résultat pour les invariants de Milnor d'homotopie, c'est-à-dire indexés par des suites sans répétition.

Soit donc $I = i_1 i_2 ... i_m$ une suite de m entiers deux à deux distincts de $\{1, ..., n\}$. Puisque l'objectif est d'exprimer l'invariants *d'entrelacs* $\overline{\mu}(I)$ en fonction de l'invariant *de nœuds* $P_0^{(m)}$, nous avons besoin d'une procédure qui, à partir d'un entrelacs L et de la suite I, fournit une famille de nœuds : c'est l'objet de la notion suivante.

Soit $L = \bigcup_i L_i$ un entrelacs à n composantes de S^3. Un *disque de I-somme* pour L est un polygone orienté B_I à $2m$ côtés, dont on note un ensemble de m côtés non-adjacents p_j $(j = 1, ..., m)$, et plongé dans S^3 tel que

– $B_I \cap L = \bigcup_{j=1}^{m} p_j$,
– $B_I \cap L_{i_j} = p_j$ pour chaque j.

Pour toute sous-suite non vide I' de I (on notera $I' < I$, ce qui comprend le cas où $I' = I$), on note $K_{I'}$ le nœud de S^3 défini par

$$K_{I'} := \overline{((\bigcup_{j \in \{I'\}} L_j) \cup \partial B_I) \setminus ((\bigcup_{j \in \{I'\}} L_j) \cap B_I)}.$$

Voir l'Exemple I.2.1. Notons que pour une sous-suite $I' = i$ de longueur 1, le nœud K_i est donc isotope à la $i$ième composante L_i de L, tandis que pour une sous-suite $I' = ij$ de longueur 2, le nœud K_{ij} est une somme en bande des $i$ième et $j$ième composantes de L.

Exemple I.2.1. Prenons $n = 6$, et considérons la suite $I = 2416$. Soit L un entrelacs à 6 composantes, et B_I le choix d'un disque de I-somme pour L. Alors on peut supposer, à isotopie près, qu'il existe une boule de S^3 qui intersecte $L \cup B_I$ comme représenté au centre de la figure I.6 ci–dessous (différents choix de disque B_I résultant en différents enlacements entre les composantes de L en dehors de cette boule). La figure donne alors quelques exemples de nœuds $K_{I'}$; $I' < I$, en l'occurence pour les sous-suites $I' = 216$, 2 et 21.

On a alors le résultat suivant.

Théorème I.2.2. *[13, Thm. 1.1] Soit L un entrelacs à n composantes de S^3, dont tous les invariants d'homotopie de Milnor de longueur au plus k sont nuls $(k \geq 2)$. Pour toute suite I*

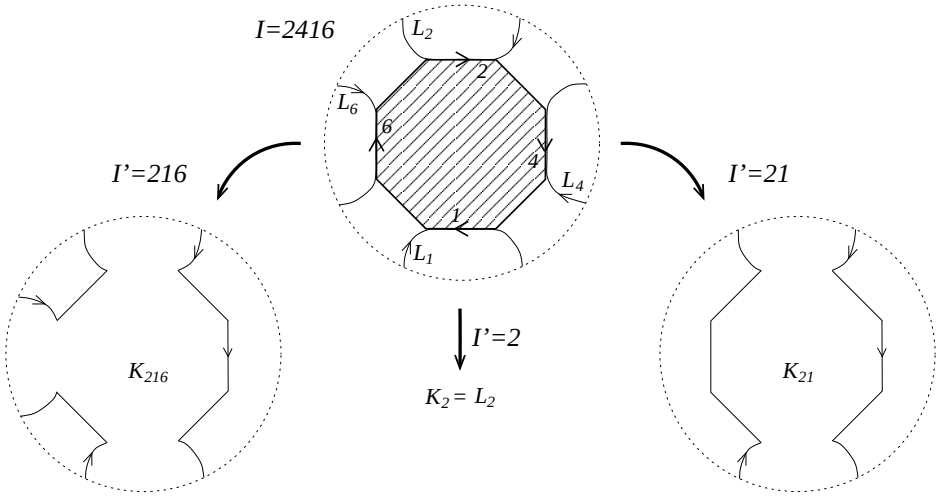


FIGURE I.6. Un disque de I–somme pour l'entrelacs L, et quelques exemples de nœuds $K_{I'}$ construits à partir de celui–ci.

de $(k+1)$ indices deux à deux distincs de $\{1, ..., n\}$, et pour tout choix de disque de I-somme pour L, on a

$$\overline{\mu}_L(I) = \frac{(-1)^{k-1}}{k!2^k} \sum_{I'<I} (-1)^{|I'|} P_0^{(k)}(K_{I'}) \in \mathbb{Z},$$

où la somme est sur l'ensemble des sous-suites propres I' de I, et où $|I'|$ désigne la longueur de I'.

A l'image de ce théorème, la littérature sur les invariants de Milnor des entrelacs porte de manière quasi-exclusive sur les premiers invariants de Milnor non nuls : ce sont ceux que l'on maitrise et comprend le mieux, parce qu'ils sont bien définis sur $\mathbb{Z}$. Mais nous pouvons étendre considérablement le champ d'application de notre formule, au prix d'une petite complication technique, qui consiste à remplacer le rôle de l'invariant $P_0^{(m)}(K)$ d'un nœud K par

$$(\log P_0(K))^{(m)} := (\log P_0(K;t))^{(m)}_{|\ t=1},$$

la $m$ième dérivée de $\log P_0(K;t)$ évaluée en $t=1$. (Puisque $P_0(K;t)$ est un élément de $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ et que $P_0(K;1) = 1$ pour tout nœud K, $\log P_0(K;t)$ peut être regardé comme une fonction lisse sur un intervalle ouvert centré en 1.) On vérifie facilement que $(\log P_0(K))^{(n)}$ est égal à la somme de $P_0(K)^{(n)}$ et une somme de produits des $P_0(K)^{(k)}$ pour $k < n$. On a la généralisation suivante du théorème I.2.2.

THÉORÈME I.2.3. *[13, Thm. 1.2] Soit L un entrelacs à n composantes de S^3, dont tous les invariants de Milnor de longueur au plus k sont nuls $(k \geq 2)$. Pour toute suite I de $(m+1)$ indices deux à deux distincs de $\{1, ..., n\}$, avec $k \leq m \leq 2k$, et pour tout choix de disque de I-somme pour L, on a*

$$\overline{\mu}_L(I) = \frac{(-1)^{m-1}}{m!2^m} \sum_{I'<I} (-1)^{|I'|} (\log P_0(K_{I'}))^{(m)} \ (\textit{mod}\ \Delta_L(I)).$$

De plus, la borne $2k$ est optimale, c'est-à-dire que cette formule est en général fausse pour les invariants de longueur $2k+1$.

ESQUISSE DE PREUVE. La démonstration du théorème I.2.3 se décompose essentiellement en deux étapes. La première étape est de représenter l'entrelacs L comme la clôture d'un enlacement d'intervalles, et d'invoquer la classification de Habegger et Lin des enlacements à homotopie près [HL90]. Plus précisément, on utilise la preuve alternative de ce résultat due à Yasuhara [Yas09b], qui est constructive et donne donc un représentant explicite de la classe d'homotopie

de L, en termes de claspers, et déterminé par les invariants de Milnor de L. La seconde étape est nettement plus difficile ; elle consiste en une étude minutieuse de ce représentant lorsque l'on clôture l'enlacement d'intervalles en un nœud, et d'une déformation de ce nœud en une somme connexe bien choisie, par du calcul de clasper relativement avancé. Une ingrédient clef est que l'invariant $P_0^{(k)}$ détecte la 'planarité' de ces claspers ; la théorie des invariants de type fini est aussi utilisée en toute fin de preuve.

On donne aussi dans [13, Thm. 1.3] un résultat général, pour les invariants de Milnor indexés par des suites avec répétition, et dont l'énoncé est similaire aux précédents. Sa démonstration repose sur un résultat de Milnor [Mil57, Thm. 7], qui montre comment exprimer les invariants de Milnor avec répétition d'un entrelacs comme un invariant de Milnor d'homotopie d'un nouvel entrelacs, obtenu du premier par cablage.

Remarque I.2.4. Ces résultats ont été généralisés dans deux directions. D'une part, Yuka Kotorii et Akira Yasuhara ont montré dans [KY13] comment étendre le théorème I.2.3 au cas des invariants de longueur $2k+1$: ils sont réalisés par une formule analogue, où interviennent des termes correctifs eux aussi extraits du polynôme de HOMFLYPT. D'autre part, Kotorii a récemment donné dans [Kot14] une version pour les enlacements d'intervalles (c'est-à-dire sans l'indéterminée Δ). Les techniques utilisées pour ces deux généralisations sont des raffinements de [13].

Remarque I.2.5. Les deux énoncés ci-dessus diffèrent de ceux de [13] par un facteur signe. En effet, Kotorii a noté dans [Kot14, Rem. 2.5] que le calcul des invariants de Milnor sur les représentants de classe d'homotopie donnés dans [13, Thm. 4.1] diffèrent de ceux de [Yas09b, Thm. 4.3] par un facteur $(-1)^{k+1}$. Par conséquent, les énoncés de [13] sont pour les invariants de Milnor renormalisés par ce signe.

I.2.2. Milnor et l'invariant universel sl_2. Dans cette section, nous donnons un autre type de relation entre invariants de Milnor et invariants quantiques, cette fois à travers l'invariant universel sl_2. Ces résultats sont contenus dans l'article [17], écrit en collaboration avec **Sakie Suzuki**. Ici, on s'intéresse donc à *l'invariant universel sl_2 des enlacements d'intervalles*, qui est universel pour le polynôme de Jones colorié des entrelacs, au sens où il se spécialise à ce dernier via une opération de type trace en la représentation associée à chaque composante d'entrelacs ; voir [Law89 ; Law90 ; Oht02b] et le diagramme ci–dessous. Rappelons plus précisément sa définition, afin de fixer les notations, mais aussi afin de donner un exemple concret (et typique) de définition d'invariant quantique.

I.2.2.1. *L'invariant universel sl_2.* On note $U_\hbar = U_\hbar(sl_2)$ la complétion $\hbar$-adique de l'algèbre engendrée sur $\mathbb{Q}[[\hbar]]$ par trois éléments H, E, et F, définie par les relations

$$HE - EH = 2E, \quad HF - FH = -2F, \quad EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}},$$

où $q = \exp \hbar$ et $K = q^{H/2} = \exp \frac{\hbar H}{2}$. On a une structure d'algèbre de Hopf enrubannée sur $U_\hbar$ (que nous ne détaillerons pas ici).

Pour définir l'invariant universel sl_2, on a besoin d'une *R-matrice universelle* et de son inverse, donnés par

$$R = D\left(\sum_{n\geq 0} q^{\frac{1}{2}n(n-2)} \frac{(q-1)^n}{[n]_q!} F^n \otimes E^n\right),$$

$$R^{-1} = \left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n q^{-\frac{n}{2}} \frac{(q-1)^n}{[n]_q!} F^n \otimes E^n\right) D^{-1},$$

où $D = q^{\frac{1}{4}H\otimes H} = \exp\left(\frac{\hbar}{4} H \otimes H\right) \in U_\hbar^{\hat{\otimes} 2}$, et où $[n]_q! := \prod_{i=1}^{n-1} \dfrac{q^i - 1}{q-1}$.

Maintenant, étant donné un enlacement de n intervalles $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$, on définit son invariant universel sl_2, noté $J(L) \in U_\hbar^{\hat{\otimes} n}$ comme suit.

On fixe un diagramme de L, qui se décompose en recollements horizontaux et verticaux de copies des enchevêtrements élémentaires représentés dans la figure I.7 (munis d'orientations arbitraires).

FIGURE I.7. Les enchevêtrements élémentaires.

On assigne ensuite, au niveau de chaque copie d'enchevêtrement élémentaire du diagramme, certains éléments de $U_\hbar$, d'après la règle donnée dans la figure I.8. On assigne ainsi une copie de la R-matrice (ou son inverse) à chaque croisement ; de même, on assigne une copie de l'élément $K \in U_\hbar$ à chaque extremum local orienté de la gauche vers la droite, mais pas à un extremum ayant l'autre orientation.

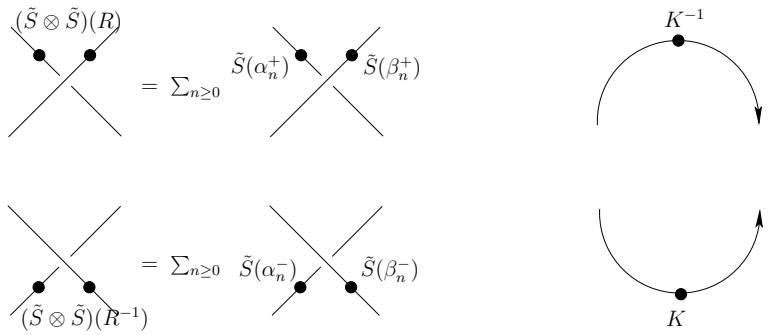


FIGURE I.8. Elements associés aux enchevêtrement élémentaires. Ici, on note formellement $R^{\pm 1} = \sum_{n \geq 0} \alpha_n^\pm \otimes \beta_n^\pm$, et $\tilde{S}$ signifie que l'on applique l'antipode de l'algèbre de Hopf au tenseur correspondant si (et seulement si) le brin est orienté vers le haut.

Le $j$ième facteur de $J(L) \in U_\hbar^{\hat{\otimes} n}$ est alors simplement défini comme le produit des éléments assignés aux brins de la $j$ième composante du diagramme de L, où l'on prend le produit par la droite des éléments rencontrés successivement en suivant l'orientation. Il s'avère que le résultat de cette procédure ne dépend pas du choix de diagramme, et définit donc bien un invariant des enlacement d'intervalles parallélisés [Oht02b].

L'intégrale de Kontsevich étant universelle parmi les invariants quantiques, il existe *en principe* une application W^U, le système de poids pour l'invariant universel sl_2, telle que $W^U \circ Z = J$. Mais on ne connaît pas de formule explicite pour W^U.

On dispose en revanche d'un *système de poids* sl_2 [10], qui est un morphisme d'algèbres graduées

$$W : \mathcal{B}(n) \to S(sl_2)^{\otimes n}[[\hbar]],$$

10. Cette application W est habituellement appelée le système de poids sl_2 universel, ce qui peut prêter à confusion ici.

défini sur l'espace $\mathcal{B}(n)$ des diagrammes de Jacobi coloriés par $\{1,\dots,n\}$, où $S(sl_2)$ est l'algèbre symétrique de sl_2. On a ainsi le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \{\text{enlacements de } n \text{ intervalles}\} \arrow[r, "\mathsf{cl}"] \arrow[dl, "Z"'] \arrow[d, "J"] & \{\text{entrelacs à } n \text{ comp.}\} \arrow[d, "J_{V_1,\dots,V_n}"] \\
\mathcal{B}(n) \arrow[r, dashed, "W^U"] \arrow[dr, "W"'] & U_\hbar(sl_2)^{\hat{\otimes} n} \arrow[r, "\mathsf{tr}_q^{V_1,\dots,V_n}"] & \mathbb{Q}[[\hbar]] \\
 & S(sl_2)^{\otimes n}[[\hbar]] \arrow[ur, "\mathsf{tr}_\nu^{V_1,\dots,V_n}"'] &
\end{tikzcd}$$

où $J_{V_1,\dots,V_n}(\mathsf{cl}(L))$ désigne le polynôme de Jones colorié de la clôture de L, et où $\mathsf{tr}_q^{V_1,\dots,V_n}$ et $\mathsf{tr}_\nu^{V_1,\dots,V_n}$ sont des variantes de l'application trace quantique.

I.2.2.2. *Reduction de l'invariant universel sl_2 et invariants de Milnor.* Nous introduisons maintenant certaines 'réductions' de l'invariant universel sl_2 que nous pouvons relier directement aux invariants de Milnor, ou plus précisément à l'application de Milnor introduite dans la section I.1.5.2. En particulier, nous pouvons déduire de tels résultats certaines propriétés topologiques de (réductions de) l'invariant universel sl_2.

Pour énoncer ces résultats, nous avons encore besoin de quelques préliminaires.

Les algèbres $U_\hbar(sl_2)^{\hat{\otimes} n}$ et $S(sl_2)^{\otimes n}[[\hbar]]$ sont isomorphes, mais on ne dispose pas d'isomorphisme explicite canonique. Ici, on *fixe* donc un isomorphisme

$$\rho : U_\hbar(sl_2)^{\hat{\otimes} n} \to S(sl_2)^{\otimes n}[[\hbar]], \tag{I.3}$$

(voir [17, §5.1]), afin de pouvoir comparer les deux applications *distinctes* $\rho \circ W^U$ et W.

On peut ainsi considérer les projections

$$\pi^t : U_\hbar^{\hat{\otimes} n} \to \prod_{m\geq 1} (S^{\otimes n})_{m+1}\hbar^m,$$

où $(S^{\otimes n})_{m+1}$ désigne la partie de degré $m+1$ de l'algèbre $S(sl_2)^{\otimes n}$.

Comme rappelé pour (I.2) en début de section, l'application de Milnor $\mu_m(L)$ prend ses valeurs dans l'espace $\mathcal{B}^t(n)$ des arbres (i.e. des diagrammes connexes et simplements connexes), et on vérifie par ailleurs que la restriction du système de poids sl_2 W à $\mathcal{B}^t(n)$ prend ses valeurs dans $\prod_{m\geq 1}(S(sl_2)^{\otimes n})_{m+1}\hbar^m$.

Théorème I.2.6 ([17, Thm. 5.2]). *Soit L un enlacement de n intervalles dont les invariants de Milnor de longueur $\leq m$ sont nuls. Alors on a*

$$J^t(L) := (\pi^t \circ J)(L) \equiv (W \circ \mu_m)(L) \pmod{\hbar^{m+1}}.$$

Ici, on écrit simplement '$(\mathrm{mod}\ \hbar^k)$' pour deux éléments de $U_\hbar^{\hat{\otimes} n}$ qui sont égaux 'modulo l'ideal $\hbar^k U_\hbar^{\hat{\otimes} n}$'.

Remarque I.2.7. Ce résultat évoque inévitablement le résultat (I.2) de Habegger et Masbaum [HM00]. De fait, (I.2) nous dit qu'un énoncé comme le théorème I.2.6 doit exister, et si l'on connaissait explicitement le système de poids W^U de l'invariant universel sl_2, on pourrait facilement dériver de (I.2) un tel énoncé via W^U. Mais, comme on l'a dit plus haut, on ne dispose pas de formule explicite pour W^U. En fait, on peut, à l'inverse, voir nos résultats comme un moyen de calculer et étudier ce système de poids – ou du moins sa restriction à l'espace des arbres. Nous reviendrons sur cet aspect dans le Chapitre III.

Puisque les invariants de Milnor sont des invariants de concordance, on déduit immédiatement la propriété topologique suivante de la reduction J^t de l'invariant universel sl_2.

Corollaire I.2.8. *Si un enlacement d'intervalles L est* bordant, *i.e. est concordant à l'enlacement trivial, alors $J^t(L)$ est trivial.*

Plus généralement, on déduit de théorème I.2.6 que si deux enlacements d'intervalles L et L' ont des invariants de Milnor de longueur $\leq m$ nuls et sont concordants, on a $J^t(L') \equiv J^t(L) \pmod{\hbar^{m+1}}$.

Les détails de la preuve du théorème I.2.6, que nous ne donnerons que très superficiellement dans ce mémoire, permettent de dégager une version alternative de cet énoncé, qui fournit le critère suivant.

Corollaire I.2.9. *Si L est un enlacement de n intervalles dont tous les invariants de Milnor sont nuls, en particulier si L est bordant, alors*

$$J(L) \in 1 + \prod_{1\leq i\leq j} (S^{\otimes n})_i \hbar^j.$$

L'intérêt de cet énoncé est qu'il permet de supporter une conjecture énoncée par Sakie Suzuki dans [Suz12, Conj. 1.5], qui suggère que l'invariant universel sl_2 d'un enlacement d'intervalles dont tous les invariants de Milnor sont nuls est contenu dans une certaine sous-algebre de $U_\hbar^{\hat{\otimes} n}$.

Comme on le verra plus bas, la démonstration du théorème I.2.6 passe par une version de ce résultat pour les invariants de Milnor d'homotopie. Rappelons que les invariants de Milnor indexés par des suites d'indices non–répétés classifient les enlacements d'intervalles à homotopie près [HL90], et que, si les premiers invariants d'homotopie non nuls sont de longueur $(m+1)$, ils peuvent être assemblés en une application μ_m^h, qui est une sorte de 'réduction homotopique' de l'application de Milnor μ_m et qui prend ses valeurs dans l'espace des arbres coloriés par des entiers non-répétés. D'autre part, on introduit la projection de $\mathbb{Q}$-modules

$$\pi^h : U_\hbar^{\hat{\otimes} n} \to \bigoplus_{m=1}^{n-1} \langle sl_2\rangle_{m+1}^{(n)} \hbar^m,$$

où $\langle sl_2\rangle_{m+1}^{(n)} \subset (S(sl_2)^{\otimes n})_{m+1}$ est engendré par les tenseurs dont chaque facteur est de degré au plus 1, c'est-à-dire que l'on considère des 'produits tensoriels de 1 et d'éléments de sl_2'. Il s'avère que la restriction de W, le système de poids sl_2, à l'espace des arbres coloriés par des entiers non-répétés prend ses valeurs dans cet espace $\bigoplus_{m=1}^{n-1} \langle sl_2\rangle_{m+1}^{(n)} \hbar^m$.

Théorème I.2.10 ([17]). *Soit L un enlacement d'intervalles dont les invariants de Milnor d'homotopie de longueur $\leq m$ sont nuls. Alors on a*

$$J^h(L) := (\pi^h \circ J)(L) \equiv (W \circ \mu_m^h)(L) \pmod{\hbar^{m+1}}.$$

Comme pour le résultat précédent, ce théorème est accompagné d'un critère topologique pour la réduction J^h de l'invariant universel sl_2.

Corollaire I.2.11. *Si un enlacement d'intervalles L est homotope à l'enlacement trivial, alors $J^h(L)$ est trivial.*
Plus généralement, si deux enlacements d'intervalles L et L' ont des invariants de Milnor d'homotopie de longueur $\leq m$ nuls et sont homotopes, on a $J^h(L') \equiv J^h(L) \pmod{\hbar^{m+1}}$.

Il faut noter cependant que, si on peut déduire cet énoncé du théorème I.2.10 (et donc le présenter comme un corollaire), il est démontré directement dans [17], et est en fait l'ingrédient principal pour prouver le théorème I.2.10.

Esquisse de Preuve. On démontre d'abord la version 'homotopie' du résultat, c'est-à-dire Thm. I.2.10. Pour cela, on vient de le dire, le gros du travail consiste à établir l'invariance par homotopie (du terme dominant) de l'invariant J^h (Cor. I.2.11). On a recours au calcul de clasper, et plus précisément au fait que l'homotopie est engendrée par la chirurgie le long de claspers 'répétés' (i.e. intersectant une composante en plusieurs feuilles). Ceci, combiné avec la classification des enlacements d'intervalles à homotopie près [HM00], réduit la preuve à un calcul explicite des deux invariants sur un certaine famille de tresses pures.
Contrairement au résultat présenté dans la section précédente (Thm. I.2.3), le cas général du

Thm. I.2.6 n'est pas une conséquence immédiate de la version homotopique. Il nécessite en particulier une analyse du (relativement) bon comportement de l'invariant J^t sous l'opération de cablage des brins.

Remarque I.2.12. Signalons que le théorème I.2.10 ne peut pas en général être simplement déduit du théorème I.2.6 par un simple procédé de 'réduction homotopique' (tout simplement parce qu'un enlacement d'intervalles peut en général avoir des invariants de Milnor de longueur m non nuls, mais ses invariants d'homotopie de longueur m nuls).

I.3. Invariants des enlacements d'intervalles ([9] ;[16])

Nous présentons dans cette section quelques résultats obtenus en collaboration avec **Akira Yasuhara**, principalement extraits des articles [9] et [16], et qui abordent sous divers angles la conjecture de Goussarov–Habiro sur les enlacements d'intervalles (Conjecture I.1.6) et sa version pour les invariants de concordance. Nous reformulons les résultats de [9] en termes d'invariants de clôture, une notion que nous introduisons ci–dessous.

I.3.1. Invariants de clôture. Nous introduisons maintenant une procédure générale permettant de définir une famille d'invariants (de type fini) des enlacements d'intervalles. L'idée de base est simple : en cablant chaque brin et en connectant les extrémités d'un enlacement d'intervalles, on peut produire une collection de nœuds et entrelacs, sur lesquels il suffit d'évaluer un invariant (de type fini) bien connu.

Plus précisément, étant donné un enlacement $L = K_1 \cup ... \cup K_n$ de n intervalles, et une suite $I = i_1 i_2 \cdots i_m$ de m éléments de $\{1, ..., n, \overline{1}, ..., \overline{n}\}$, on construit un nœud $K(L; I)$ de S^3 via une certaine opération de clôture induite par la suite I :

- Dans le cas où, pour chaque entier $i \in \{1, ..., n\}$, l'indice i ou $\overline{i}$ apparaît dans I au plus une fois, on note L_I l'enchevêtrement à m brins de $D^2 \times [0, 1]$ obtenu de L en renversant l'orientation de chaque composante K_i telle que l'indice $\overline{i}$ apparaît dans I, et en oubliant les composantes K_j de L telles que ni l'indice j, ni l'indice $\overline{j}$ n'apparaissent dans I. On *fixe* alors un choix d'enchevêtrement T_I dans $S^3 \setminus (D^2 \times [0, 1])$ tel que, pour chaque $k \in \{1, ..., m\}$, une composante de T_I connecte le point final du $i_k$ième brin de L_I au point initial du i_{k+1}ième brin (étant entendu que $i_{m+1} = i_1$). Alors
$$K(L; I) = L_I \cup T_I$$
définit un nœud de S^3. Bien sûr, le choix de l'enchevêtrement T_I n'est pas unique : on fixe donc un tel choix, tel que l'enlacement d'intervalles trivial est envoyé sur le nœud trivial. Voir la figure I.9 pour un exemple.

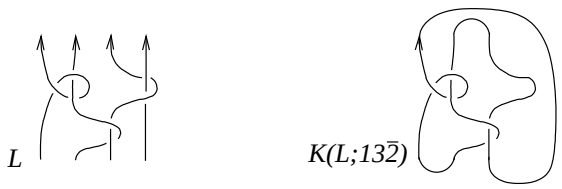


Figure I.9. L'enlacement L et le nœud associé à la suite la suite $I = 13\overline{2}$.

- Dans le cas général, où les indices i ou $\overline{i}$ apparaissent $r_i \geq 0$ fois pour chaque entier $i \in \{1, ..., n\}$, on pose $m = \sum_i r_i$, et on note $D_I(L)$ l'enlacement de m intervalles obtenu à partir de L comme suit. On remplace chaque brin K_i de L par r_i copies parallèles zero-parallelisées, que l'on note $K_{(i,1)}, \ldots, K_{(i,r_i)}$. Si $r_i = 0$ pour un certain i, on oublie simplement le brin K_i. L'enlacement de m intervalles $D_I(L) = \bigcup_{i,j} K_{(i,j)}$ ainsi obtenu est muni d'un ordre sur ses composantes, donné par l'ordre lexicographique sur les indices (i, j). Si on note $D(I)$ la suite d'éléments de $\{(i, j); 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r_i\}$ obtenue en remplaçant successivement chaque indice i de I par $(i, 1), ..., (i, r_i)$ dans cet ordre, on

peut alors considérer le nœud $K(L;I) := K(D_I(L);D(I))$ comme défini ci–dessus.

Il n'est pas trop difficile de vérifier la

PROPOSITION I.3.1. *Soit I une suite (non vide) d'éléments de $\{1,...,n,\overline{1},...,\overline{n}\}$, et soit v_m un invariant de type fini de nœuds de degré m. Alors l'invariant des enlacements de n intervalles $v_m(I)$ défini par*

$$v_m(I) : L \mapsto v_m(K(D_I(L);D(I)))$$

est un invariant de type fini de degré m, que l'on appelera invariant de clôture.

On pourra être un peu plus explicite en appelant $v_m(I)$ un 'invariant de clôture induit par v_m'.

I.3.2. Invariants de type fini des enlacements d'intervalles et C_k-équivalence. Nous donnons ici quelques résultats autour de la Conjecture I.1.6 de Goussarov–Habiro. Dans la section I.3.2.1, nous classifions explicitement les invariants de type fini des enlacements d'intervalles en petit degré, ce qui implique en particulier ladite conjecture ; dans la section I.3.2.2, nous explorons la structure abélienne du groupe des classes de C_k-équivalence, et voyons comment ceci s'applique à la Conjecture I.1.6. Nous discutons quelques possibles développements de ces deux approches dans le Chapitre III.

I.3.2.1. *Classification en bas degré.* On donne ici un résultat de classification des enlacements d'intervalles à C_k-équivalence près pour $k \leq 5$. Il apparaît que les invariants de type fini fournissent une telle classification, impliquant la conjecture de Goussarov–Habiro en bas degré. Il suit que les invariants de clôture permettent d'engendrer tous les invariants de type fini en bas degré (Corollaire I.3.4). Notons que l'énoncé ci-dessous est différent de celui donné dans [9], mais est essentiellement le même.

Rappelons que le $n$ième coefficient a_n du polynôme d'Alexander–Conway est un invariant de type fini de degré n ; rappelons aussi que $P_0^{(m)}$, l'évaluation en 1 de la $m$ième dérivée du polynôme coefficient d'ordre 0 de HOMFLYPT, est un invariant de type fini de degré m.

THÉORÈME I.3.2 ([2 ; 9]). *Soit L et L' deux enlacements de n intervalles, et soit $k \leq 5$ un entier. Les assertions suivantes sont mutuellement équivalentes.*

(1) *L et L' sont C_k-équivalents,*

(2) *L et L' partagent tous les invariants de type fini de degré $< k$,*

(3) *L et L' ont la même intégrale de Kontsevich jusqu'en degré k,*

(4) *L et L' partagent tous les invariants de l'ensemble $\cup_{1\leq i\leq k}\mathcal{I}_i$ décrit ci–dessous.*

Les ensembles explicites d'invariants de type fini sont $\mathcal{I}_1 = \emptyset$, $\mathcal{I}_2 = \{\mu(ij)\}$, et

$$\mathcal{I}_3 = \{\ a_2(I) \text{ pour } I = i \text{ ou } i\overline{j}, \text{ et } \mu(I) \text{ pour } I = ij \text{ ou } ijk\ \},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_4 = \{\ & P_0^{(3)}(I) \text{ pour } I = i,\ i\overline{j} \text{ ou } ij\overline{k},\\ & \text{et } \mu(I) \text{ pour } I = iijj,\ ijkl\ (i,j<k<l) \text{ ou } ijkk\ (i<j)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_5 = \{\ & a_4(I) \text{ pour } I = i,\ i\overline{j},\ ii\overline{j},\ i\overline{j}\overline{k},\ i\overline{k}j \text{ ou } ik\overline{j},\\ & P_0^{(3)}(I) \text{ pour } I = i,\ i\overline{j},\ ii\overline{j},\ i\overline{j}\overline{k},\ i\overline{k}j,\ ik\overline{j},\ i\overline{j}k,\ i\overline{j}k\overline{l},\ i\overline{j}l\overline{k} \text{ ou } i\overline{k}j\overline{l},\\ & \text{et tous les invariants de Milnor } \mu(I) \text{ de longueur } \leq 5\}.\end{aligned}$$

ESQUISSE DE PREUVE. La preuve consiste essentiellement en une construction explicite d'un représentant de la classe de C_k-équivalence d'un enlacement d'intervalles. Cette construction est faite de façon itérative, degré après degré, en termes de claspers. Nous montrons ensuite, par des calculs explicites, comment les invariants donnés dans (4) détectent les 'générateurs' avec lesquels notre représentant est construit.

Remarque I.3.3. A titre de comparaison, un travail analogue a été mené dans le cas des invariants de type fini d'entrelacs jusqu'au degré 3 par Kanenobu-Miyazawa-Tani [KMT98], et jusqu'au degré 4 par Kanenobu pour les entrelacs à deux composantes [Kan07]. Dans ce cas, tous les invariants sont donnés par les polynômes d'Alexander-Conway et de HOMFLYPT des sous-entrelacs, et le nombre d'invariants est significativement plus faible que dans le cas des enlacements d'intervalles.

Si l'on combine le résultat ci-dessus avec le théorème I.2.3, on obtient le

Corollaire I.3.4 ([2 ; 9]). *Les invariants de type fini de degré < 5 des enlacements d'intervalles sont engendrés par les invariants de clôture a_i ($i = 2, 4$) et $P_0^{(j)}$ ($j = 3, 4$), et classifient les enlacements d'intervalles à C_5-équivalence près.*

C'est cette observation qui a suggeré qu'il était possible de reconstruire les invariants de Milnor par des invariants de clôture, et a donc conduit aux résultats présentés dans la section I.2.1

I.3.2.2. *Sur le monoïde des enlacements d'intervalles.* Habiro a montré dans [Hab00b] que le quotient $\mathcal{SL}(n)/C_k$ des classes de C_k-équivalence des enlacements de n intervalles est un groupe nilpotent de génération finie, pour tous n et k. Il est naturel de se demander si ce groupe est en outre abélien. C'est immédiat, pour $k = 1$ (puisque $\mathcal{SL}(n)/C_1$ est trivial), et il suit immédiatement des travaux de Murakami et Nakanishi que c'est aussi vrai pour $k = 2$ [MN89]. En fait, le cas des enlacements de 3 intervalles ou plus est simple :

Proposition I.3.5. *Le groupe $\mathcal{SL}(n)/C_k$ n'est pas abélien pour toute valeur de $n \geq 3$ et tout $k \geq 3$.*

Cela est facilement vérifié en utilisant le nombre triple de Milnor $\mu(123)$, qui est un invariant de C_3–équivalence, et qui détecte la tresse pure $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}$ (dont la clôture est une copie des anneaux borroméens).

Dans le cas des enlacements de 2 intervalles, on disposait déjà d'une réponse partielle par Yasuhara, qui montra dans [Yas03], que le groupe $\mathcal{SL}(2)/C_k$ n'est pas abélien pour $k \geq 12$. Nous avons pu améliorer ce résultat comme suit.

Théorème I.3.6 ([16]).
(1). Le groupe $\mathcal{SL}(2)/C_k$ est abélien pour $k < 7$.
(2). Le groupe $\mathcal{SL}(2)/C_k$ est non *abélien pour $k > 7$.*
(3). Le groupe $\mathcal{SL}(2)/C_7$ est abelien s'il n'a pas de 2-torsion.

Esquisse de Preuve. La preuve de ces deux résultats utilise les représentants explicites des classes de C_k-équivalences construits dans [9] pour démontrer le théorème I.3.2. Plus précisément, on considère les 'générateurs' utilisés pour construire ces représentants, et on montre qu'ils commutent deux à deux dans le quotient $\mathcal{SL}(n)/C_k$, ce qui se fait en combinant deux méthodes. Un grand nombre de cas est traité purement algébriquement, en mettant en place deux lemmes techniques *ad hoc* ; les cas restants, plus difficiles, sont montrés diagrammatiquement, à la main, notamment à l'aide de calcul de clasper quelque peu 'avancé'.

Remarque I.3.7. Des calculs de Bar-Natan [BN96] montrent qu'un invariant de type fini doit avoir degré au moins 7 pour pouvoir détecter l'orientation des enlacements de 2 intervalles. Duzhin and Karev [DK07] ont ensuite démontré l'existence d'un tel invariant, et c'est ce résultat que nous utilisons pour démontrer le théorème I.3.6 (2). Par un argument similaire, on serait en mesure de compléter le cas $n = 7$ si l'on pouvait montrer l'existence d'un invariant de type fini de degré 6 et à valeurs dans $\mathbb{Z}_2$ qui puisse détecter l'orientation des enlacements de 2 intervalles. Voir aussi le Chapitre III pour le cas $n = 7$.

Ce problème de la structure abélienne du groupe $\mathcal{SL}(n)/C_k$ est très fortement lié à la conjecture de Goussarov–Habiro (Conj. I.1.6). En effet, rappelons que le cas $n = 1$ de cette conjecture

a été démontré par Habiro (cf Théorème I.1.4). L'un des ingrédients clefs de la preuve de Habiro, qui repose lourdement sur le calcul de clasper, est le fait que l'ensemble des classes de C_k-équivalence des nœuds forme un groupe abélien pour tout $k \geq 1$; l'idée de Habiro est alors de considérer l'homomorphisme de groupes abéliens qui envoie chaque nœud sur sa classe de C_k-équivalence, et de montrer que c'est un invariant de type fini de degré $k-1$, et qu'il est universel parmi les invariants de degré $< k$. L'existence de cette application (c'est-à-dire le fait qu'elle est bien définie) repose sur le fait que $\mathcal{SL}(1)/C_k$ est abélien ; le fait que c'est un invariant de type fini est loin d'être évident, mais la preuve de Habiro s'adapte directement au cas des enlacements d'intervalles (cela repose sur résultat profond sur la structure de la filtration de Goussarov-Vassiliev [Hab00b, Prop. 6.10], qui est de fait énoncé pour les enlacements d'intervalles — et même plus généralement pour les enlacements d'intervalles sur les surfaces). Par conséquent, on peut déduire du théorème I.3.6 (1) le resultat suivant.

Corollaire I.3.8 ([16]). *Pour tout entier $k \leq 6$, deux enlacements de 2 intervalles ne peuvent être distingués par les invariants de type fini de degré $< k$ si et seulement s'ils sont C_k-équivalents.*

I.3.3. Invariants de type fini et concordance. Rappelons que deux enlacements de n intervalles L et L' sont *concordants* s'il existe un plongement

$$f : (\sqcup_{i=1}^n [0,1]_i) \times [0,1] \longrightarrow \left(D^2 \times [0,1]\right) \times [0,1],$$

où $\sqcup_{i=1}^n [0,1]_i$ désigne n copies disjointes de l'intervalle unité, tel que $f\left((\sqcup_{i=1}^n [0,1]_i) \times \{0\}\right) = L \times \{0\}$ et $f\left((\sqcup_{i=1}^n [0,1]_i) \times \{1\}\right) = L' \times \{1\}$, et satisfaisant $f\left(\partial(\sqcup_{i=1}^n [0,1]_i) \times [0,1]\right) = (\partial L) \times [0,1]$.

Un enlacement d'intervalles est *bordant* (slice) s'il est concordant à l'enlacement trivial.

La concordance induit une relation d'équivalence $\overset{c}{\sim}$ sur les enlacements de n intervalles, et le monoïde quotient $\mathcal{SL}(n)/\overset{c}{\sim}$ a en fait une structure de groupe. En effet, étant donné un enlacement d'intervalles L, son image miroir horizontale $\overline{L}$ avec orientation inverse vérifie que le produit $L \cdot \overline{L}$ est bordant ; voir la figure I.10.

Dans la monographie où il introduit la notion d'enlacement de disques (i.e. la notion d'enlacement d'intervalles en toutes dimensions), Le Dimet s'intéresse à cette structure de groupe, et en particulier à son caractère abélien [LD88]. Il montre ainsi que le groupe des classes de concordance de enlacements de n intervalles n'est pas abélien pour $n \geq 3$. Ce résultat est encore vrai pour $n = 2$, ce qui semble être dû à De Campos [Cam05], en utilisant un résultat de Miyazaki sur le groupe de cobordisme des Θ-graphes noués [11].

Nous avons donc deux relations d'équivalence, la concordance et la C_k-équivalence, qui munissent le monoïde des enlacements d'intervalles d'une structure de groupe. En les combinant, on obtient une nouvelle structure de groupe. On appelle C_k-*concordance* cette relation d'équivalence engendrée par les C_k-mouvements et la concordance.

Remarque I.3.9. Cette notion de C_k-concordance, introduite avec Yasuhara dans [9], est intimement liée à la relation d'équivalence étudiée par Conant, Schneiderman et Teichner sous le nom de *Whitney tower concordance* d'ordre $k-1$, voir [CST12]. Ces deux relations d'équivalence sont en fait équivalentes, comme annoncé dans [CST12].

Nous avons classifié les enlacements de n intervalles à C_k-concordance près en petit degré avec Yasuhara. Le cas des nœuds (i.e. $n = 1$) est essentiellement dû à L. Ng : pour tout $k \geq 3$, deux nœuds sont C_k-concordants si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de Arf [12] [Ng98].

11. La littérature fait parfois référence à Le Dimet pour ce résultat, mais comme il l'explique dans [LD88, 4.5 Conclusions 2.], ses arguments ne lui permettent pas de statuer sur le cas $n = 2$.

12. L'invariant de Arf d'un nœud est l'invariant de Arf de la forme quadratique $\delta_2 : H_1(S, \mathbf{Z}_2) \to \mathbf{Z}_2$ sur le premier groupe d'homologie modulo 2 d'une surface de Seifert S du nœud, définie par $\delta_2(\alpha) = lk(\alpha, \alpha^+)(\text{mod } 2)$, où α^+ désigne une copie parallèle de α dans le sens normal positif de S.

Ci-dessous, on appelle 'invariants de Arf d'un enlacement d'intervalles' les invariants de Arf de la clôture de chaque composante. On a alors :

THÉORÈME I.3.10 ([9]). *Soit $k \leq 6$ un entier.*
La relation de C_k-concordance pour les enlacements de n intervalles est classifiée par
- *les invariants de Arf et les invariants de Milnor de longueur $\leq k$ si k est pair,*
- *les invariants ci–dessus et, respectivement, les invariants $\mu(jiij)$ mod 2 $(1 \leq i < j \leq n)$ pour $k = 3$, et les invariants $\mu(kijjik)$ mod 2 $(1 \leq i, j < k \leq n)$ pour $k = 5$.*

REMARQUE I.3.11. La raison pour laquelle nous nous sommes arrêtés au cas $k = 6$ est simple : au delà, la classification de la C_k-concordance nécessite un invariant supplémentaire, de nature différente. C'est ce qui a amené Conant, Schneiderman et Teichner à introduire leurs 'invariants de Arf d'ordre supérieur' (dont on ne sait pas pour l'heure s'ils sont non triviaux). Ceci est discuté plus amplement dans le Chapitre III.

Deux enlacements d'intervalles C_k-concordants ne peuvent être distingués par les invariants de concordance de type fini de degré $< k$. La question suivante est une version 'concordance' de la conjecture de Goussarov–Habiro.

QUESTION I.3.12. Les invariants de concordance de type fini de degré $< k$ classifient-ils les enlacements d'intervalles à C_k-concordance près ?

Rappelons que les invariants de Milnor sont des invariants de concordance. Habegger et Masbaum ont en fait montré que tous les invariants de concordance de type fini à valeurs *rationnelles* sont déterminés par les invariants de Milnor, via l'intégrale de Kontsevich [HM00]. Dans le cas pair, le théorème I.3.10 nous donne donc immédiatement une réponse affirmative à la Question I.3.12 pour $k = 2$ (ce qui est bien connu), mais aussi 4 et 6. De plus, on peut montrer qu'il implique aussi le cas $k = 3$ (par un examen précis de la démonstration, détaillé dans [9, Rem. 5.4]). Le cas $k = 5$, lui, reste ouvert, et il serait donc intéressant de savoir si $\mu(jiiij)$ (mod 2) et $\mu(kijjik)$ (mod 2) sont des invariants de degré ≤ 4 (on sait qu'ils sont de degré ≤ 5). Plus généralement, on peut noter la question suivante.

QUESTION I.3.13. Pour tout entier $m \geq 3$, la reduction modulo 2 d'un invariant de Milnor de la forme $\mu(i_0, ..., i_m, i_m, ..., i_0)$ est-elle un invariant de type fini de degré $\leq 2m$?

(On montre déjà dans [9, Remark 5.4] que ce sont des invariants de C_{2m+1}-équivalence.)

Par ailleurs, comme dans le cas de la C_k–équivalence évoqué plus haut, nous pouvons adapter les arguments de Habiro pour montrer que, si le groupe $\mathcal{SL}(n)/(C_k + c)$ des classes de C_k-concordance des enlacements de $n \geq 2$ intervalles est abélien, on a une réponse positive à la question I.3.12 en degré correspondant. Dans [16], nous avons donné avec Yasuhara une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe $\mathcal{SL}(n)/(C_k + c)$ soit abélien.

THÉORÈME I.3.14 ([16]).

(1) *Le groupe $\mathcal{SL}(2)/(C_k + c)$ est abélien si et seulement si $k \leq 8$.*

(2) *Pour $n \geq 3$, le groupe $\mathcal{SL}(n)/(C_k + c)$ est abélien si et seulement si $k \leq 2$.*

(Pour $n = 1$, le groupe $\mathcal{SL}(1)/(C_k + c)$ est trivial pour $k = 1$ ou 2, et est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et classifié par l'invariant de Arf pour $k \geq 3$, comme vu dans [9].)

Nous obtenons ainsi la conséquence suivante du théorème I.3.14.

COROLLAIRE I.3.15. *Pour tout entier $k \leq 8$, deux enlacements de 2 intervalles partagent tous les invariants de concordance de type fini de degré $< k$ si et seulement s'ils sont C_k-concordants.*

Esquisse de Preuve. Le cas (2) est une application simple des nombres triples de Milnor. Le cas (1) des enlacements de 2 intervalles est le plus intéressant. La condition suffisante est prouvée par des méthodes analogues à celles employées pour le théorème I.3.6. La condition nécessaire repose sur un calcul direct :

Fait. Les enlacements A et B ci–dessous ne commutent pas dans $\mathcal{SL}(2)/(C_9 + c)$.

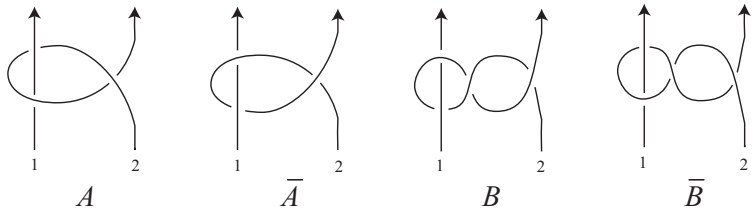


Figure I.10. Les enlacements d'intervalles A et B, et leurs inverses respectifs $\overline{A}$ et $\overline{B}$ dans le groupe de concordance.

Nous mentionnons ce calcul car il utilise un programme qui a été développé pour l'occasion [TKS]. Basé initialement sur l'algorithme donné par Milnor dans [Mil57] et écrit en langage `Ruby` par Tetsuji Kuboyama, il a depuis été considérablement amélioré par Yoshimasa Takabatake, Tetsuji Kuboyama et Hiroshi Sakamoto, par des techniques de *grammar compression*, et réecrit en `C++`. La question de l'amélioration de cet algorithme est manifestement intéressante du point de vue de l'informatique théorique, puisqu'un projet a été monté par Y. Takabatake sur cette question, et que cela fait à présent l'objet de la thèse de H. Sakamoto.

CHAPITRE II

Invariants des variétés de dimension 3

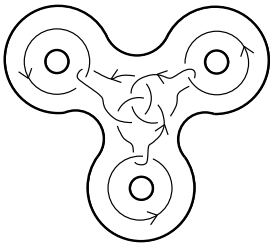
II.1. Quelques rappels

Dans cette section, nous apportons quelques rappels supplémentaires, cette fois dans le cadre des variétés de dimension 3, ceci de façon parallèle et complémentaire à ce qui a été fait dans la section I.1 pour les objets noués.

II.1.1. Invariants de type fini des 3–variétés. La théorie d'invariants de type fini des objets noués de Goussarov-Vassiliev présentée à la section I.1.1 peut être transposée à d'autres objets de la topologie de petite dimension. Comme on l'a dit, l'idée de base est qu'un invariant est de type fini s'il est polynomial, au sens d'une certaine opération de 'dérivation' sur les objets considérés. Dans le cas des objets noués, cette opération est donnée par le changement de croisement, un point double matérialisant simplement la différence de deux objets différant par cette opération.

T. Ohtsuki a le premier développé une théorie analogue pour les sphères d'homologie entière, au milieu des années 90 [Oht96]. L'opération de 'dérivation' que Ohtsuki considère est la chirurgie le long d'entrelacs algébriquement scindés et ± 1-parallélisés. Ce choix est naturel : de même que tout nœud peut être trivialisé par une suite de changements de croisement, toute sphère d'homologie entière peut être obtenue de la 3-sphère par une suite de telles chirurgies. La théorie d'Ohtsuki fut ensuite généralisée aux variétés de dimension 3 quelconques, d'abord par Cochran et Melvin [CM00], puis indépendamment par Goussarov et Habiro [Gou99 ; Hab00b ; GGP01].

La théorie des invariants de type fini de Goussarov–Habiro repose sur l'opération de 'dérivation' de chirurgie borroméenne [Mat87].
Un *entrelacs de chirurgie borroméenne* dans une 3–variété close orientée M est un entrelacs orienté et parallélisé obtenu par plongement dans M d'une copie du corps en anses de genre 3 muni de l'entrelacs 0–parallélisé à 6 composantes représenté ci–dessous. La chirurgie le long d'un tel entrelacs est appelée une *chirurgie borroméenne*.



Cette notion de chirurgie borroméenne fut introduite dans les années 80 par Matveev, qui démontra que deux 3–variétés closes orientées sont reliées par une suite (finie) de chirurgies borroméennes si et seulement si elles ont les mêmes premiers groupes d'homologie et des formes d'enlacement isomorphes [Mat87]. En particulier, deux sphères d'homologie sont toujours reliées par une suite de chirurgies borroméennes (ce qui, selon Hilden [Hil81], avait déjà été noté par Birman).

Ainsi, un invariant f de 3–variétés, disons, closes, et à valeurs dans un groupe abélien, est un *invariant de type fini de degré* $\leq k$ (au sens de Goussarov–Habiro) si son extension

linéaire s'annule sur toute somme alternée induite par (au moins) $k+1$ chirurgies borroméennes indépendantes. Autrement dit, f est de degré $\leq k$ si

$$\sum_{B' \subset B} (-1)^{|B'|} f(M_{B'}) = 0,$$

où M est une 3–variété close quelconque, B est une famille quelconque de $k+1$ entrelacs de chirurgie borroméenne disjoints dans M, et $M_{B'}$ désigne la 3–variété close obtenue de M par chirurgie le long des entrelacs de chirurgie borroméenne de la sous-famille B' de cardinal $|B'|$.

A nouveau, cette théorie s'avère très puissante car riche d'exemples, parmi les invariants quantiques et classiques. Le premier exemple est celui de l'invariant de Casson–Walker–Lescop, qui est un invariant de degré 2. Cela était déjà observé par Ohtsuki pour l'invariant de Casson des sphères d'homologie entière dans [Oht96], et suit plus généralement des formules de 'somme' dues à Morita [Mor91] ou à Lescop [Les98].

L'invariant LMO, de Le–Murakami–Ohtsuki [LMO98],

$$Z_{LMO} : \{3\text{–variétés closes}\}/\text{diffeo}+ \to \mathcal{A}(\emptyset)$$

est construit à partir de l'intégrale de Kontsevich d'une présentation de chirurgie dans S^3, et prend ses valeurs dans l'espace $\mathcal{A}(\emptyset)$ des diagrammes de Jacobi purement trivalents (défini à la fin de la section I.1.1). Plus précisément, si M est une 3–variété close obtenue de S^3 par chirurgie le long d'un entrelacs parallélisé L, alors la partie de degé n de Z_{LMO} est donnée par

$$(Z_{LMO})_n(M) := \left(\frac{\iota_n(\check{Z}(L))}{\iota_n(\check{Z}(U_+))^{\sigma_+^L} \iota_n(\check{Z}(U_-))^{\sigma_-^L}} \right)_n \in \mathcal{A}_n(\emptyset), \tag{II.1}$$

où $U_\pm$ désigne le nœud trivial (± 1)–parallélisé, $\sigma_\pm^L$ désigne le nombre de valeurs propres positives/négatives de la matrice d'enlacement de L pour un choix d'orientation arbitraire, et où $\check{Z}$ est obtenu de l'intégrale de Kontsevich Z en faisant la somme connexe sur chaque composante avec une copie de $\nu = Z(U)$, l'intégrale de Kontsevich du nœud trivial U [1]. Le dernier ingrédient de (II.1), l'application ι_n, est l'outil technique central dans la construction ; concrètement, elle consiste à 'remplacer les copies de $\bigcirc$ par des combinaisons de diagrammes en arbres'. Nous n'en rappellerons pas ici la définition (très sophistiquée), mais noterons simplement que c'est cela, et la version $\check{Z}$ de Z, qui assurent l'invariance de LMO par le second mouvement de Kirby – l'invariance par le premier mouvement étant simplement assurée par la normalisation dans (II.1).

II.1.2. Y_k–équivalence. De même que l'opération de changement de croisement peut être généralisée à la notion de C_k–mouvement, qui caractérise les invariants de type fini des nœuds, la chirurgie borroméenne peut être vue comme la première d'une famille d'opérations chirurgicales sur les variétés de dimension 3. A nouveau, il existe plusieurs définitions possibles de ces mouvements, que nous esquissons dans cette section.

II.1.2.1. *Claspers et Y_k–équivalence.* Un *clasper* dans une 3–variété M est le plongement, dans l'intérieur de M, d'une surface qui est l'épaississement d'un diagramme de Jacobi portant une copie de S^1 attachée à chacun de ses 1-sommets. (Ce diagramme n'est pas nécessairement connexe, mais chaque componente connexe doit contenir au moins un 3-sommet.) Le degré d'un clasper est le nombre de 3-sommets du diagramme sous-jacent.

Un clasper dans M détermine un entrelacs de chirurgie, si bien que l'on peut parler de la chirurgie le long de ce clasper dans M. Pour construire cet entrelacs, on se place dans un voisinage régulier, et on commence par appliquer la règle de scindement illustrée à gauche de la figure II.1 jusqu'à obtenir une union disjointe de claspers de degré 1 dans M. Puis, pour chacun de ces claspers de degré 1, on le remplace par un entrelacs de chirurgie borroméenne dans un voisinage régulier (voir figure II.1).

1. Rappelons qu'une formule explicite pour ν est connue, voir [BNGRT00].

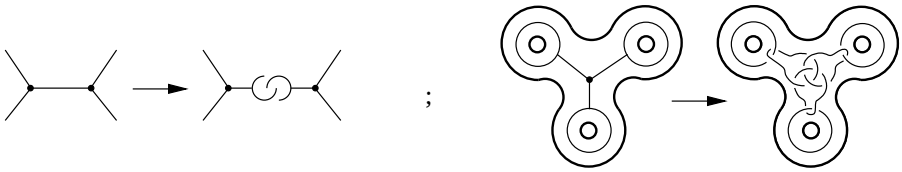


FIGURE II.1. Construire l'entrelacs de chirurgie associé à un clasper.

On dit que deux variétés de dimension 3 sont Y_k*–équivalentes* si elles sont reliées par une suite finie de chirurgies le long de claspers de degré $\leq k$.

Cette notion a été introduite indépendamment par Goussarov et Habiro en connection avec leur théorie d'invariants de type fini des 3–variétés. Il est facile de montrer que deux 3–variétés qui sont Y_k–équivalentes ne peuvent pas être distinguées par un invariant de degré $< k$. Dans le cas des sphères d'homologie entière, on a le résultat suivant, qui est l'analogue en dimension 3 du théorème I.1.4.

THÉORÈME II.1.1 ([Gou00 ; Hab00b]). *Deux* sphères d'homologie entière *ont les mêmes invariants de type fini de degré $< k$ si et seulement si elles sont Y_k-équivalentes.*

De même, on a dans ce contexte un analogue de la Conjecture I.1.6, voir section II.1.3 ci–dessous.

II.1.2.2. *Chirurgie de Torelli et Y_k–équivalence.* Soit M une variété de dimension 3 et S une surface avec une composante de bord plongée dans l'intérieur de M. Etant donné un élément φ du groupe de difféotopies de S, on peut considérer la 3–variété

$$M(S,\varphi) := \Big(M \setminus \mathrm{int}(S \times [0,1])\Big) \cup_\varphi S \times [0,1], \tag{II.2}$$

où $\cup_\varphi$ désigne le recollement par le difféormophisme de $\partial(S \times [0,1])$ donné par φ sur $S \times \{1\}$ et par l'identité sur $\partial S \times [0,1] \cup S \times \{0\}$. On dira que $M(S;\varphi)$ est obtenue de M en *tordant* le long de S par φ.

On note que si φ est un élément du groupe de Torelli de S, alors $M(S,\varphi)$ a le même type d'homologie entière que M. Rappelons que le groupe de Torelli de S est le sous-groupe du groupe de difféotopies formé par les (classes d'isotopie de) difféomorphismes agissant trivialement en homologie. On dit alors que $M \rightsquigarrow M(S,\varphi)$ est une *chirurgie de Torelli*[2].

Deux 3–variétés M et M' sont Y_k-équivalentes si et seulement si M' peut-être obtenue de M en tordant le long d'une surface E par un élément du $k$ième terme de la suite centrale descendante du groupe de Torelli de E. (Il n'y a pas de restriction particulière sur cette surface E, sinon qu'elle doit avoir une composante de bord.) On peut trouver une preuve de ce fait dans [Mas07, Lem. A.2].

II.1.3. Cylindres d'homologie et conjecture de Goussarov–Habiro. Soit Σ une surface compacte, connexe et orientée de genre $g \geq 0$, éventuellement à bord.

Un *cylindre d'homologie* sur Σ est une 3–variété M compacte orientée obtenue par une suite de chirurgies borroméennes (autrement dit, par chirurgie le long d'un clasper) dans $\Sigma \times [0,1]$. On note qu'une telle variété est naturellement munie de deux plongements orientés $i^\pm : \Sigma \to M$ d'images $\Sigma^\pm$, tels que :

(i) $\partial M = \Sigma^+ \cup (-\Sigma^-)$ et $\Sigma^+ \cap (-\Sigma^-) = \pm\partial\Sigma^\pm$;

(ii) $i^+|_{\partial\Sigma} = i^-|_{\partial\Sigma}$;

(iii) $i^\pm$ induisent les mêmes isomorphismes $i^\pm_* : H_1(\Sigma;\mathbb{Z}) \to H_1(M;\mathbb{Z})$ en homologie.

Réciproquement, dans le cas où Σ a au plus une composante de bord, tout triplet (M, i^+, i^-) vérifiant les trois propriétés ci–dessus peut être obtenu de $\Sigma \times [0,1]$ par une suite de chirurgies borroméennes, voir [Hab00b ; Hab00a ; 1]. En genre $g = 0$, on retrouve là le résultat de Matveev sur les sphères d'homologie [Mat87] mentionné plus haut.

2. Cette terminologie est due à Gwénaël Massuyeau [Mas07].

Les cylindres d'homologie sont considérés à difféomorphisme conservant l'orientation et fixant le bord près, et on note $\mathcal{H}(\Sigma)$ l'ensemble des classes d'équivalence des cylindres d'homologie sur Σ. Si $M = (M, i^+, i^-)$ et $N = (N, j^+, j^-)$ sont des cylindres d'homologie sur Σ, on peut définir leur *produit d'empilement* par

$$M \cdot N := (M \cup_{i^- \circ (j^+)^{-1}} N, i^+, j^-). \tag{II.3}$$

Ce produit munit $\mathcal{H}(\Sigma)$ d'une structure de monoïde.

Ces objets furents introduits par Goussarov [Gou00] et Habiro [Hab00b], comme des objets centraux dans leur théorie d'invariants de type fini. En effet, tous deux soulevèrent indépendamment la question suivante.

Conjecture II.1.2 ([Gou00 ; Hab00b]). Deux cylindres d'homologie sur une surface Σ ont les mêmes invariants de type fini de degré $< k$ si et seulement s'ils sont Y_k-équivalents.

Il s'agit donc de l'analogue pour les 3–variétés de la Conjecture I.1.6. De fait, on a une correspondance précise entre enlacement d'intervalles et cylindres d'homologie, qui relie invariants de Milnor et Johnson [Hab00a] que l'on rappelle dans la section II.1.4.2. En particulier, on sait que la Conjecture II.1.2 est vérifiée en bas degré. Voir aussi la section II.3.

Enfin, mentionnons l'article de survol [HM12] de Habiro, qui constitue une bonne référence sur ces objets.

II.1.4. Homomorphismes de Johnson. Dans cette section nous donnons quelques brefs rappels sur les homomorphismes de Johnson. Nous commençons par présenter le contexte 'classique' dans lequels ils ont été introduits, pour l'étude du groupe de Torelli. Puis nous expliquons comment ces objets s'étendent aux cylindres d'homologie et comment, dans ce contexte, ils constituent un analogue des invariants de Milnor des enlacements d'intervalles.

II.1.4.1. *Théorie de Torelli–Johnson–Morita pour le groupe de difféotopies.* Soit $\Sigma = \Sigma_{g,1}$ une surface orientée de genre g avec une composante de bord, et avec un point base $\star$ fixé sur le bord. On notera $\pi := \pi_1(\Sigma, \star)$ et $H := H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$.

Le groupe de difféotopies $\mathcal{M}(\Sigma)$ agit naturellement sur le groupe fondamental π, produisant la représentation de Dehn–Nielsen $\rho : \mathcal{M}(\Sigma) \to \mathrm{Aut}(\pi)$, qui est classiquement injective. (L'image est constituée des automorphismes fixant l'élément bord.) Pour chaque entier $k \geq 0$, la représentation de Dehn–Nielsen induit un homomorphisme de groupes

$$\rho_k : \mathcal{M}(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\pi/\Gamma_{k+1}\pi) \tag{II.4}$$

où $\pi = \Gamma_1\pi \supset \Gamma_2\pi \supset \Gamma_3\pi \supset \cdots$ désigne la série centrale descendante du groupe π, définie à la section I.1.5.1. La *filtration de Johnson* du groupe de difféotopies est la suite descendante de sous-groupes

$$\mathcal{M}(\Sigma) = \mathcal{M}_{[0]}(\Sigma) \supset \mathcal{M}_{[1]}(\Sigma) \supset \mathcal{M}_{[2]}(\Sigma) \supset \mathcal{M}_{[3]}(\Sigma) \supset \cdots \tag{II.5}$$

où $\mathcal{M}_{[k]}(\Sigma)$ désigne le noyau de ρ_k, pour tout $k \geq 1$.

Le premier terme $\mathcal{M}_{[1]}(\Sigma)$ de cette filtration est donc le groupe de Torelli, déjà rencontré plus haut et que l'on notera aussi $\mathcal{I}(\Sigma)$. L'étude de ce groupe, d'un point de vue topologique, a commencé au début des années 70 avec les travaux de Birman [Bir71], et s'est poursuivi dans les années 80, notamment avec une suite d'articles de D. Johnson, dont il donne une très bonne synthèse dans [Joh83].

Rappelons la définition d'un des outils centraux développés par Johnson. Pour $k \geq 1$, le *$k$ième homomorphisme de Johnson*

$$\tau_k : \mathcal{M}_{[k]}(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H; \Gamma_{k+1}\pi/\Gamma_{k+2}\pi)$$

est l'homomorphisme de groupe $\mathcal{M}(\Sigma)$–équivariant défini par $\tau_k(f) : [x] \mapsto f(x).x^{-1}$. Voir [Joh83 ; Mor93].

Par définition, l'homomorphisme de Johnson τ_k a pour noyau $\mathcal{M}_{[k+1]}(\Sigma)$, le terme suivant de la filtration. On peut être un peu plus précis sur son ensemble d'arrivée. En effet, le quotient $\Gamma_{k+1}\pi/\Gamma_{k+2}$ s'identifie naturellement à $\mathcal{L}_{k+1}(H)$, la partie de degré $k+1$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(H)$ librement engendrée par H. Par dualité de Poincaré, on a alors l'identification $\mathrm{Hom}(H;\Gamma_{k+1}\pi/\Gamma_{k+2}\pi) = H^* \otimes \mathcal{L}_{k+1}(H) = H \otimes \mathcal{L}_{k+1}(H)$. Morita a en fait montré que τ_k prend ses valeurs dans le noyau de l'application crochet de Lie

$$D_k(H) = \mathrm{Ker}\left[H \otimes \mathcal{L}_{k+1}(H) \xrightarrow{[\,;\,]} \mathcal{L}_{k+2}(H)\right]. \tag{II.6}$$

Ceci dit, outre le cas $k=1$ que l'on sait surjectif [Joh83], on ne sait en général à peu près rien sur l'image ou le conoyau de τ_k. Mais on peut passer par la dimension 3 pour étendre les homomorphismes τ_k à des applications surjectives, comme expliqué dans le paragraphe suivant.

II.1.4.2. *Extension des homomorphismes de Johnson et correspondance Milnor–Johnson.* Les cylindres d'homologie, et plus largement les cobordismes d'homologie, constituent un contexte propice pour étendre la théorie de Torelli–Johnson–Morita, et lui appliquer des méthodes de la topologie en dimension 3. Ici, les *cobordismes d'homologie* sont définis comme les cylindres d'homologie dans la section II.1.3, à ceci près que les paramétrisation du bord $i^\pm$ induisent simplement deux isomorphismes en homologie (non nécessairement identiques).

Le groupe de difféotopie se plonge dans le monoïde $\mathcal{C}(\Sigma)$ des cobordismes d'homologie via l'application

$$\mathrm{cyl} : \mathcal{M}(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{C}(\Sigma) \tag{II.7}$$

qui envoie un difféomorphisme φ sur son 'cylindre d'application'

$$\mathrm{cyl}(\varphi) := (\Sigma \times [0,1], \mathrm{Id} \times \{0\}, \varphi \times \{1\}))\,.$$

Comme l'ont noté Garoufalidis et Levine dans [GL05] et [Lev01], les homomorphismes de Johnson factorisent par l'application cyl. En effet, c'est une conséquence du théorème de Stallings [Sta65, Thm. 5.1] (déjà utilisé dans la section I.1.5.2) que les inclusions $i^\pm$ paramétrisant le bord d'un cobordisme d'homologie (M, i^+, i^-) induisent des isomorphismes au niveau de chacun des quotients nilpotents du groupe fondamental

$$(i^\pm)_k : \pi/\Gamma_k\pi \longrightarrow \pi_1(M)/\Gamma_k\pi_1(M)$$

(où l'on rappelle que $\Gamma_k G$ désigne le $k$ième terme de la série centrale descendante du groupe G). Ainsi, en prenant la composition $(i^-)_k^{-1} \circ (i^+)_k$, le cobordisme d'homologie M agit naturellement sur $\pi/\Gamma_k\pi$. Ceci définit plus précisément un morphisme de monoïdes

$$\rho_k : \mathcal{C}(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(\pi/\Gamma_{k+1}\pi)\,, \tag{II.8}$$

qui étend (II.4). La filtration de Johnson (II.5) s'étend ainsi en une filtration descendante

$$\mathcal{C}(\Sigma) = \mathcal{H}_{[0]}(\Sigma) \supset \mathcal{H}_{[1]}(\Sigma) \supset \mathcal{H}_{[2]}(\Sigma) \supset \mathcal{H}_{[3]}(\Sigma) \supset \cdots \tag{II.9}$$

de $\mathcal{H}(\Sigma)$ par les noyaux successifs $\mathcal{H}_{[k]}(\Sigma) = \mathrm{Ker}(\rho_k)$, le premier d'entre eux n'étant autre que le monoïde $\mathcal{H}(\Sigma) = \mathcal{H}_{[1]}(\Sigma)$ des cylindres d'homologie. On vérifie que ρ_k induit un homomorphisme de monoïdes

$$\tau_k : \mathcal{H}_{[k]}(\Sigma) \longrightarrow D_k(H),$$

qui constitue l'extension de l'homomorphisme de Johnson aux cylindres d'homologie. Cette extension a la propriété remarquable d'être surjective [GL05].

Il existe un parallèle manifeste entre la construction des invariants de Milnor des enlacements d'intervalles vue dans la section I.1.5.2 et celle des homomorphismes de Johnson des cylindres d'homologie ci–dessus. Cette correspondance a été établie de façon rigoureuse par Habegger dans [Hab00a] ; voir aussi [GL05, Rem. 2.7].

Pour cela, on considère le complémentaire d'un voisinage ouvert de l'enlacement trivial[3] de $2g$ intervalles dans le cylindre $D^2 \times [0,1]$. Habegger fixe un difféomorphisme (dont une description explicite est donnée dans [Hab00a, §3]) qui identifie $\Sigma \times [0,1]$ avec ce voisinage ouvert, et montre que cette identification induit une bijection entre $\mathcal{H}(\Sigma)$ et le monoïde des enlacements de $2g$ intervalles ayant enlacements et auto-enlacements nuls. La *correspondance Milnor–Johnson* établit alors que cette bijection envoie bijectivement $\mathcal{H}_{[k]}(\Sigma)$ sur $\mathcal{SL}_{k+1}(2g)$ (défini à la section I.1.5.2), et de telle sorte que le $k$ième homomorphisme de Johnson τ_k correspond précisément à l'application de Milnor μ_{k+1} ; voir [Hab00a, Thm. 2.1] – voir aussi [HM12, §8.3] pour une autre preuve de ce résultat.

II.2. Chirurgie borroméenne et invariant de Casson ([8])

Ce court chapitre porte sur l'article [8], qui propose une formule de variation simple pour l'invariant de Casson sous une chirurgie borroméenne. C'est le seul travail présenté dans ce mémoire qui a été entièrement effectué avant mon arrivée à Grenoble (publié en 2008), mais aussi le seul à ne pas avoir été écrit en collaboration...

Comme on l'a rappelé dans le chapitre précédent, à la section II.1.1, un résultat de Matveev [Mat87] implique que toute sphère d'homologie entière peut être obtenue à partir de la 3-sphère S^3 par une suite finie de chirurgies borroméennes. Il devient dès lors naturel d'étudier le comportement d'invariants classiques des sphères d'homologie sous une chirurgie borroméenne, et ce chapitre se propose précisément de donner une formule simple qui répond à cette question dans le cas de l'invariant de Casson.

II.2.1. Conventions. Commençons par fixer quelques notations et conventions.
Soit L un entrelacs de chirurgie borroméenne dans une sphère d'homologie rationnelle M. A isotopie près, on peut toujours supposer qu'il existe une 3-boule dans M qui intersecte L comme montré dans la figure II.2. Le bord de cette boule intersecte trois composantes de L, que l'on appelle les *feuilles*. Fixons une numérotation des feuilles F_1, F_2 et F_3 de L. On note f_i l'auto-

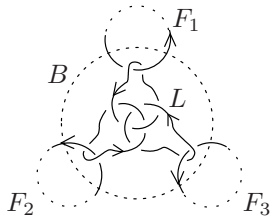


FIGURE II.2.

enlacement de F_i, et l_{ij} le nombre d'enlacement $lk(F_i, F_j)$, $1 \leq i \neq j \leq 3$.

On peut par ailleurs associer à L un entrelacs algébriquement scindé[4] à 3 composantes canonique de la façon suivante. Pour chaque couple (i,j) avec $1 \leq i < j \leq 3$, on considère la tresse pure à deux brins $B_{ij} = \sigma_1^{2l_{ij}}$ (voir la figure II.3), avec la convention que B_{ij} est trivial si $l_{ij} = 0$. Maintenant, partant de l'entrelacs $F_1 \cup F_2 \cup F_3$, on insère pour chaque $1 \leq i < j \leq 3$ la tresse B_{ij} dans F_i et F_j comme indiqué dans la figure II.3, de telle sorte que l'enlacement soit réduit à zero. Le résultat est l'entrelacs algébriquement scindé F_0 à 3 composantes
Les enlacements de F_0 étant tous nuls, cet entrelacs a un nombre de Milnor $\overline{\mu}(123)$ bien défini sur $\mathbb{Z}$. On notera $\mu_{123}(L)$ le nombre de Milnor $\overline{\mu}_{F_0}(123)$ de l'entrelacs algébriquement scindé F_0 associé à L.

3. Pour être précis, on doit considérer ici des enlacements parallélisés.
4. Un entrelacs est dit algébriquement scindé si tous ses sous-entrelacs à deux composantes ont des enlacements nuls.

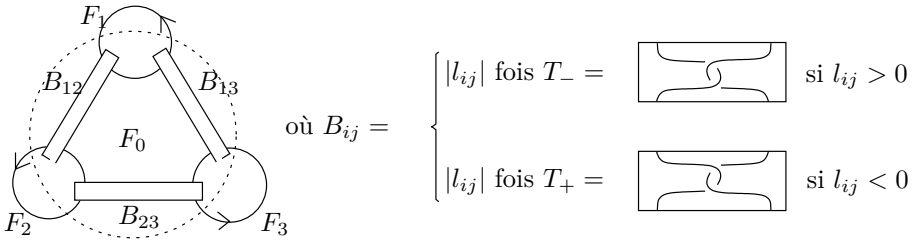


FIGURE II.3. L'entrelacs algébriquement scindé F_0.

II.2.2. Formules de variation. Le résultat principal de [8] est une formule de variation pour l'invariant de Casson-Walker[5] sous chirurgie borroméenne dans une sphère d'homologie rationnelle M.

THÉORÈME II.2.1 ([8, Thm. 2.2]). *Soit L un entrelacs de chirurgie borroméenne dans une sphère d'homologie rationnelle M, tel que les feuilles de L ont des enlacements entiers et un auto-enlacement nul dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Alors la différence $\lambda(M_L) - \lambda(M)$ est donnée par la formule*

$$-f_1.f_2.f_3 - 2.l_{12}.l_{13}.l_{23} - 2.\mu_{123}(L) + \sum_{\circlearrowleft_{1,2,3}} l_{23}.(l_{23}+1).f_1,$$

où la somme est sur les permutations cycliques des indices $(1,2,3)$.

REMARQUE II.2.2. Notons que si M est une sphère d'homologie entière, les conditions requises sur les feuilles de L sont trivialement satisfaites.

Ce résultat se généralise à une union disjointe $L_1 \cup ... \cup L_n$ de n entrelacs de chirurgie borroméenne dans une sphère d'homologie entière M.

THÉORÈME II.2.3 ([8, Thm. 2.3]). *La difference $\lambda(M_{L_1\cup...\cup L_n}) - \lambda(M)$ est donnée par*

$$\sum_{1\le i\le n} (\lambda(M_{L_i}) - \lambda(M)) - 2 \sum_{1\le k<l\le n} \sum_{\sigma\in S_3} s(\sigma) l^{kl}_{1\sigma(1)} l^{kl}_{2\sigma(2)} l^{kl}_{3\sigma(3)},$$

où $s(\sigma) \in \{-1;+1\}$ désigne la signature d'un élément σ de S_3, et où l^{kl}_{ab} désigne l'enlacement de la $a$ième feuille de L_k avec la $b$ième feuille de L_l (où a et b, resp. k et l, sont distincts et compris entre 1 et 3, resp. entre 1 et n).

En prenant la réduction du théorème II.2.3 modulo 2, on obtient en particulier une formule de variation pour l'invariant de Rochlin μ des sphères d'homologie entière, qui avait déjà été (essentiellement) établie indépendamment par Massuyeau [Mas03], et par Auclair et Lescop [AL05].

COROLLAIRE II.2.4 ([8, Cor. 2.4]).

$$\mu(M_{L_1\cup...\cup L_n}) - \mu(M) = \sum_{1\le i\le n} f_1^i.f_2^i.f_3^i \ (mod\ 2).$$

A titre d'application, le théorème II.2.1 donne une preuve alternative, et de moins de 10 lignes, du résultat principal de [Miz09], disant que tout entier pair peut être réalisé comme l'invariant de Casson d'une sphère d'homologie de type Mazur.

ESQUISSE DE PREUVE. La démonstration du théorème II.2.1 repose essentiellement sur deux ingrédients. D'une part, on peut utiliser une formule de Johannes [Joh99], qui exprime la variation de l'invariant de Casson lors d'un changement de croisement entre deux brins d'une même composante d'un entrelacs de chirurgie de S^3 (préservant l'auto-enlacement). Avec cette formule et du calcul de Kirby, on peut exprimer la variation de l'invariant de Casson lors d'une perturbation élémentaire de l'enlacement ou de l'auto-enlacement sur les feuilles d'un entrelacs

5. On utilise ici la normalisation $\lambda = \lambda_{CW}/2$, de l'invariant λ_{CW} de Walker [Wal92].

de chirurgie borroméenne. Puis, en considérant un corps en anses de genre 3 supportant dans M l'entrelacs de chirurgie borroméenne L, on peut conclure en appliquant la formule de recollement de Lescop dans [Les98] ; le nombre triple de Milnor apparaît alors naturellement par la forme d'intersection triple sur le Lagrangien de ce corps en anses.
Pour montrer le théorème II.2.3 à partir du théorème II.2.1, on utilise la théorie des invariants de type fini des sphères d'homologie rappelée à la section II.1.1, et plus particulièrement le fait que l'invariant de Casson est de degré deux pour cette théorie. Concrètement, cela signifie que la variation de Casson lors de n chirurgies borroméennes 'simultanées' est complètement controlée par les variations engendrées par les paires de telles chirurgies, qui sont les expressions cubiques en les enlacements qui apparaissent dans la formule.

II.3. Relations d'équivalence sur les cylindres d'homologie ([15])

Cette section présente un travail en commun avec **Gwénaël Massuyeau** [15], dans lequel nous revisitons et généralisons des travaux de Morita sur les sphères d'homologie entière et la filtration de Johnson du groupe de difféotopies, et sur le cœur de l'invariant de Casson.
Il s'agit d'une 'généralisation' dans le sens où nous étudions une classe de 3–variétés plus grande, en l'occurence les cylindres d'homologie présentés à la section II.1.3, mais aussi parce que nous caractérisons pour ces objets non seulement la relation d'équivalence induite par la filtration de Johnson (la J_k-équivalence que considérait déjà Morita, définie à la section II.3.3), mais aussi la relation plus fine de Y_k-équivalence, définie à la section II.1.2.

II.3.1. Sphères d'homologie, filtration de Johnson et le cœur de Casson. L'étude du groupe de Torelli est intimement liée à celle des sphères d'homologie entière, via la construction de Heegaard. Commençons par rappeler quelques résultats de Morita et Pitsch sur le sujet, qui ont motivé ce travail. Comme précédemment, on note Σ une surface orientée de genre g à une composante de bord, et on note $\mathcal{I}$ son groupe de Torelli.

Considérons la surface de Heegaard (orientée) de genre g de S^3, et notons F_g la surface obtenue en retirant un petit disque ouvert. Soit $j : \Sigma \hookrightarrow S^3$ un *plongement de Heegaard*, c'est-à-dire d'image F_g et préservant l'orientation, et soit φ un élément de $\mathcal{I}$. Alors la variété $S^3(j(\Sigma);\varphi)$ obtenue de S^3 en 'tordant' le long de $j(\Sigma)$ par φ (au sens de la section II.1.2.2) est une sphère d'homologie entière.

S. Morita a montré [Mor89] que toute sphère d'homologie entière s'obtient ainsi de S^3 par un élément du *groupe de Johnson*, qui est le second terme $\mathcal{M}[2]$ de la filtration de Johnson[6]. Ce résultat a ensuite été amélioré par W. Pitsch, qui montra que le terme suivant $\mathcal{M}[3]$ de la filtration de Johnson suffit [Pit08].

Ce théorème de Pitsch est particulièrement intéressant au vu d'un autre résultat de Morita, sur l'invariant de Casson λ des sphères d'homologie entière. Par la construction rappelée ci–dessus, on peut définir un invariant de Casson au niveau du groupe de Torelli

$$\lambda_j : \mathcal{I} \to \mathbb{Z} \tag{II.10}$$

par $\lambda_j(\varphi) = \lambda\left(S^3(\varphi, j)\right)$. Comme le suggère la notation, cet invariant dépend bien du choix de plongement de Heegaard utilisé. Mais Morita a montré cependant qu'une partie de cet invariant est canonique. En effet, il montre dans [Mor89, Thm. 6.1] que la restriction de λ_j au groupe de Johnson se scinde en deux homomorphismes

$$(\lambda_j)_{|\mathcal{M}[3]} = q_j + \frac{1}{24}d \tag{II.11}$$

où q_j est entièrement déterminé par ρ_3, défini dans (II.4), et où l'homomorphisme d est indépendant du choix de j : c'est ce que l'on appelle le *cœur de Casson*. En combinant ceci avec

6. Résultat que l'on peut aussi voir comme conséquence de l'observation de Casson que toute sphère d'homologie entière s'obtient de S^3 par chirurgie (± 1)-parallélisée le long d'un nœud, voir [GM92].

le résultat de Pitsch, on obtient donc que le cœur de Casson d contient toutes les informations topologiques sur les sphères d'homologie entière portées par l'invariant de Casson.

II.3.2. Y_k-équivalence pour les cylindres d'homologie. Nous présentons donc ici quelques résultats obtenus avec Massuyeau dans [15] qui généralisent les travaux exposés ci–dessus. Nous considérons les cylindres d'homologie sur une surface de genre quelconque (et non le seul cas du genre zero, i.e. des sphères d'homologie), et les opérations de couper/recoller non seulement par des élements de la filtration de Johnson, mais aussi de la suite centrale descendante du groupe de Torelli (c'est la Y_k-équivalence définie à la section II.1.2.2).

Dans ma première collaboration avec Massuyeau en 2003 [1], nous nous intéressions déjà à ces relations d'équivalence, et avions caractérisé la Y_2-équivalence.

THÉORÈME II.3.1 ([1]). *Deux cylindres d'homologie sur Σ sont Y_2-équivalents si et seulement s'ils induisent la même action ρ_2 sur $\pi/\Gamma_3\pi$ et ont les mêmes invariants de Birman–Craggs.*

Ici, l'invariant de Birman–Craggs d'un cylindre d'homologie M est une application qui 'contient' tous les invariants de Rochlin des sphères d'homologie entières $S^3(M,j)$ obtenues de S^3 pour un plongement de Heegaard j quelconque. Ce résultat est parallèle au calcul de l'abélianisé du groupe de Torelli de Σ par Johnson [Joh80], et implique en particulier que l'application cyl définie dans (II.7) induit un isomorphisme entre cet abélianisé et le groupe des classes de Y_2-équivalence des cylindres d'homologie. De plus, on montre que ce résultat implique la conjecture II.1.2 dans le cas $n = 2$.

Le premier résultat principal de [15] est la prolongation naturelle du théorème II.3.1, puisqu'il consiste en une caractérisation de la Y_3–équivalence, et la validation de la conjecture de Goussarov–Habiro en degré 2. Pour cela, on caractérise les invariants de type fini de degré 2 en termes d'invariants classiques. Au vu du cas précédent, on est naturellement conduit à utiliser l'action ρ_3 sur $\pi/\Gamma_3\pi$; sachant que l'invariant de Casson est un invariant de degré 2, comme vu dans la section II.1.1, un autre ingrédient attendu est l'invariant λ_j (pour un plongement de Heegaard j donné), défini exactement comme dans (II.10) dans le cas des sphères d'homologie. Comme le montre le résultat suivant, la classification requiert un troisième invariant α, extrait de la torsion de Reidemeister–Turaev, dont nous rappelons la définition plus bas.

THÉORÈME II.3.2 ([15] ;Thm. A). *Pour deux cylindres d'homologie sur Σ, les propriétés suivantes sont équivalentes*

(a) *être Y_3-équivalents ;*

(b) *avoir les mêmes invariants de type fini de Goussarov–Habiro de degré ≤ 2 ;*

(c) *avoir les mêmes invariants ρ_3, α et λ_j.*

Afin d'esquisser la définition de l'invariant α, rappelons que l'on a pour les cylindres d'homologie une version bien définie du polynôme d'Alexander, que l'on appelle la torsion de Reidemeister–Turaev. En effet, le polynôme d'Alexander relatif d'un cylindre d'homologie (M, m_+, m_-) est défini comme l'ordre du premier groupe d'homologie relative de $(M; \partial M)$ à coefficients tordus via l'isomorphisme $\mathbb{Z}[\pi_1(M)] \to \mathbb{Z}[H]$ induit par $m_\pm^{-1}$, mais il n'est défini dans $\mathbb{Z}[H]$ que modulo multiplication par un élement de $\pm H$ [Sak08]. Pour lever cette indéterminée, on doit fixer une classe d'Euler, c'est-à-dire un champ de vecteurs non singulier sur M satisfaisant certaines prescriptions au bord (voir [BP01]), à homotopie supportée en dehors d'une boule près. Nous montrons que, pour les cylindres d'homologie, il existe une classe d'Euler canonique (définie en termes de classe de Chern relative), si bien que l'on peut parler de la torsion de Reidemeister relative $\tau(M, \partial M) \in \mathbb{Z}[H]$ du cylindre d'homologie M. L'invariant α est la *partie quadratique de la torsion de Reidemeister*, dans le sens où c'est l'image de τ par la projection sur le quotient I^2/I^3, où I désigne l'idéal d'augmentation[7].

7. Pour être tout à fait exact, on doit corriger τ par une quantité déterminée par ρ_2 pour définir α.

Esquisse de Preuve. La preuve du théorème II.3.2 repose lourdement sur la théorie des invariants de type fini de Goussarov–Habiro, et sur l'invariant universel des cylindres d'homologie construit par Cheptea–Habiro–Massuyeau dans [CHM08], à savoir le *foncteur LMO*, une extension de type 'TQFT' de l'invariant LMO qui prend ses valeurs dans l'espace des diagrammes de Jacobi coloriés par H. On peut décomposer la démonstration de la façon suivante. D'une part, nous montrons que deux cylindres d'homologie sont Y_3-équivalents si et seulement si leurs foncteurs LMO coïncident jusqu'en degré 2 (ceci necessite en particulier un résultat de Levine assurant qu'en degré 2 l'espace des diagrammes de Jacobi est sans torsion [Lev01 ; Lev02]). D'autre part, nous montrons explicitement comment les invariants ρ_3, α et λ_j sont contenus dans le foncteur LMO, comme coefficients de diagrammes.

Nous donnons de plus une description diagrammatique explicite du groupe des classes de Y_3-équivalence des cylindres d'homologie [15, Thm. 5.8 et 5.5]. Nous ne donnerons pas cet énoncé un peu technique ici, mais mentionnerons qu'il implique une importante dose de calcul de clasper, mettant en évidence les relations qui sont vérifiées dans ce groupe [15, App. A]. Précisons aussi que cela constitue un raffinement d'un résultat de Morita sur le groupe de Torelli [Mor91, Thm. 3.1].

Remarque II.3.3. Le théorème II.3.2 généralise, du genre zero au genre quelconque, un résultat de Habiro, disant que la Y_3-équivalence des sphères d'homologie entière est classifiée par l'invariant de Casson [Hab00b].

II.3.3. J_k–équivalence. On dit que deux 3–variétés M et M' sont *J_k-équivalentes* si M' peut-être obtenu de M en 'tordant' (au sens de la section II.1.2.2) le long d'une surface à bord E plongée dans l'intérieur de M par un élément du $k$ième terme de la filtration de Johnson. Ce sont précisément les relations d'équivalence considérées par Morita–Pitsch sur les sphères d'homologie dans les résultats rappelés plus haut. Il suit immédiatement des définitions que les relations de Y_k et J_k-équivalence coïncident pour $k = 1$, et qu'en général la première implique la seconde. On sait par ailleurs que ces deux relations sont bien distinctes, i.e. que la J_k-équivalence n'implique en général pas la Y_k-équivalence. En effet, on obtient facilement comme corollaire du théorème II.3.1 que deux cylindres d'homologie sur Σ sont J_2-équivalents si et seulement s'ils induisent la même action ρ_2 sur $\pi/\Gamma_3\pi$ [15, Thm. B].

De même, on déduit du théorème II.3.2 le résultat suivant.

Théorème II.3.4 ([15, Thm. C]). *Deux cylindres d'homologie sur Σ sont J_3-équivalents si et seulement s'ils ont les mêmes invariants ρ_3 et α.*

Remarque II.3.5. On retrouve et généralise donc le résultat de Pitsch (correspondant au genre zero) qui dit toute sphère d'homologie entière est J_3-équivalente à S^3.

Esquisse de Preuve. Il y a au moins deux bonnes raisons d'esquisser ici la démonstration du théorème II.3.4. Elle est d'une part relativement simple, et, surtout, elle est susceptible de se généraliser ou de s'adapter à d'autres situations (voir Chapitre III). L'invariance par J_3-équivalence des invariants ρ_3 et α est une conséquence assez directe des définitions de ces derniers, et est valable en tous degrés. Pour montrer la condition suffisante, considérons deux cylindres d'homologie M et M' tels que $\rho_3(M) = \rho_3(M')$ et $\alpha(M) = \alpha(M')$. Puisque $\mathcal{C}/Y_3$ a une structure de groupe [Gou00 ; Hab00b], il existe $D \in \mathcal{C}$ tel que M est Y_3-équivalent à $D \cdot M'$, et qui donc satisfait $\rho_3(D) = 1$ et $\alpha(D) = 0$. Par ailleurs, Morita a montré dans [Mor89] qu'il existe une sphère d'homologie P qui est J_3-équivalente à S^3 et dont l'invariant de Casson est 1. On peut alors considérer

$$D' := (\Sigma \times [0,1]) \sharp P^{\sharp \lambda_j(D)}.$$

Par définition, D et D' ont les mêmes invariants ρ_3, α et λ_j, et sont donc Y_3-équivalents par le théorème II.3.1. On obtient donc que

$$M \overset{J_3}{\sim} D \cdot M' \overset{J_3}{\sim} D' \cdot M' = M' \sharp P^{\sharp \lambda_j(D)} \overset{J_3}{\sim} M',$$

ce qui achève la preuve.

II.3.4. Extension du Cœur de Casson. Contrairement à ρ_3 et α, l'invariant λ_j apparaissant dans le théorème de classification II.3.2 n'est pas canonique, puisqu'il dépend d'un choix de plongement de Heegaard j. Cette application est en effet l'extension aux cylindres d'homologie de l'application λ_j définie par Morita sur le groupe de Torelli, et rappelée dans (II.10). Le théorème suivant montre que le cœur d de l'invariant de Casson, i.e. la 'partie canonique de λ_j' identifiée par Morita, s'étend aux cylindres d'homologie.

THÉORÈME II.3.6 ([15] ;Thm. D). *Il existe une unique extension d du cœur de l'invariant de Casson au monoïde $\mathcal{H}_{[2]}$*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}[2] \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathrm{cyl}"'] & 8\mathbb{Z} \\ \mathcal{H}_{[2]} \arrow[ur, dashed, "d"'] & \end{tikzcd}$$

qui soit invariante par Y_3-équivalence et par l'action par conjugaison du groupe de difféotopies.

On rappelle que $\mathcal{H}_{[2]}$ est le deuxième terme de l'extension de la filtration (II.9) de Johnson aux cylindres d'homologie.

L'existence d'une telle extension est prouvée par construction explicite, dans un premier temps comme une combinaison (rationnelle) de la 'partie en Θ' du foncteur LMO et d'un terme correcteur extrait de ρ_3, dont on déduit une formule explicite en termes des trois invariants ρ_3, α et λ, qui généralise la formule (II.11) de Morita.

II.4. Invariants de type fini et graphes épais ([10])

Nous présentons ici des résultats de l'article [10], issu d'un projet en commun avec **Jørgen E. Andersen**, **Alex J. Bene** et **Robert C. Penner**. L'idée centrale du projet était de proposer une première connection entre la théorie de Teichmüller décorée, développée par Penner, et les invariants de type fini en topologie de basse dimension. Nous construisons un invariant de variétés de dimension trois obtenues par chirurgie dans $\Sigma \times [0,1]$, où Σ est une surface à bord. Cette construction utilise l'invariant universel 'AMR' des entrelacs de $\Sigma \times [0,1]$ de Andersen, Mattes et Reshekithin [AMR96], ainsi que des ingrédients de l'invariant LMO. Nous donnons plusieurs applications de cette construction : une représentation diagrammatique du groupe de difféotopies, et des 'relèvements au groupoïde de Ptlolémée' de l'invariant LMO et du premier homomorphisme de Johnson.

II.4.1. Quelques préliminaires. Commençons par quelques rappels supplémentaires, nécessaires à notre construction.

II.4.1.1. *Graphes épais et théorie de Teichmüller décorée.* Ce que nous appellerons ici un *graphe épais* est simplement un diagramme de Jacobi connexe et ayant un unique sommet 1-valent, appelé la *queue* du graphe épais. Etant donné un graphe épais G, et une surface $\Sigma = \Sigma_{g,n}$ orientée de genre g avec $n > 0$ composantes de bord, dont une composante distinguée, un *marquage* de G dans Σ est une classe d'homotopie de plongements $G \hookrightarrow \Sigma$ tels que la queue de G est envoyée sur la composante de bord distinguée, et que le complémentaire $\Sigma \setminus G$ consiste en un disque (correspondant à la composante de bord distinguée) et $n-1$ anneaux (correspondant aux $n-1$ autres composantes de bord). Voir la partie gauche de la figure II.6 pour un exemple.

Dans divers contextes, une notion *ad hoc* de graphe épais marqué permet de donner une description combinatoire d'un certain fibré trivial sur l'espace ce Teichmüller (voir [Pen12] pour une présentation complète de tous les aspects de cette théorie). Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir la version à bord [Pen04] de la théorie de Teichmüller décorée développée par Penner [Pen87], on regarde Σ comme une surface à une composante de bord, les $s = n-1$ composantes restantes étant vues comme des piqûres (ou points marqués). Rappelons que l'espace

de Teichmüller $T(\Sigma)$ de la surface Σ est l'espace quotient de l'ensemble des structures hyperboliques sur Σ par l'action naturelle du groupe des difféomorphismes (préservant l'orientation) isotopes à l'identité, et que $T(\Sigma)$ est homéomorphe à une boule ouverte de dimension réelle $6g+2s-2$. Une *décoration* sur Σ est la donnée de s horocycles, centrés sur chacune des piqûres. Une décoration est donc paramétrée par le s–tuple de $\mathbb{R}_{>0}$ des longueurs hyperboliques de ces s horocycles, et *l'espace de Teichmüller décoré* de Σ est l'espace total $\tilde{T}(\Sigma)$ du fibré trivial $\tilde{T}(\Sigma) = T(\Sigma) \times (\mathbb{R}_{>0})^s \to T(F)$, où la fibre au dessus d'un point est donnée par l'ensemble des décorations sur Σ. En particulier, on voit que $\tilde{T}(\Sigma)$ est homéomorphe à une boule ouverte de dimension $6g+3s-2$. Le groupe de difféotopies $\mathcal{M}(\Sigma)$ agit librement sur l'espace de Teichmüller et sur sa version décorée. La connection avec la notion de graphe épais se fait à travers le résultat suivant.

Théorème II.4.1 ([Pen87 ; Str84]). *L'espace de Teichmüller décoré de Σ admet une décomposition cellulaire idéale, $\mathcal{M}(\Sigma)$–invariante, dont les cellules sont indexées par les (classes d'isotopies de) graphes épais marqués dans Σ.*

Plutôt que le complexe cellulaire du théorème II.4.1, considérons ici son dual $\hat{\mathcal{G}}(\Sigma)$, dans lequel un graphe épais correspond à une 0-cellule. Une arête de $\hat{\mathcal{G}}(\Sigma)$ est donc indéxée par deux graphes épais G et G' marqués dans Σ, qui diffèrent par un *mouvement de Whitehead*, c'est-à-dire la contraction d'un côté (interne) et l'expansion du sommet quadrivalent ainsi produit en l'unique autre côté possible, voir la figure II.4. On notera par $G \xrightarrow{W} G'$ un tel mouvement W.

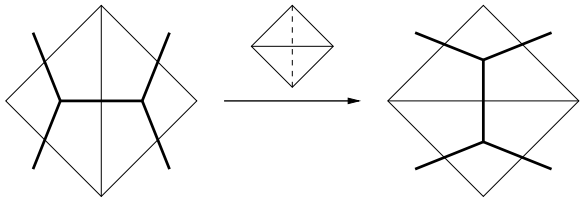


Figure II.4. Mouvement de Whitehead sur un graphe épais.

Il y a trois familles de suites de mouvements de Whitehead, appelées relations d'involutivité, de commutativité et du pentagone, qui laissent un graphe épais invariant, illustrées dans la figure II.5 ; voir [Pen93 ; MP08]. Ainsi, le groupoïde fondamental de $T(\Sigma)$ s'identifie naturellement au

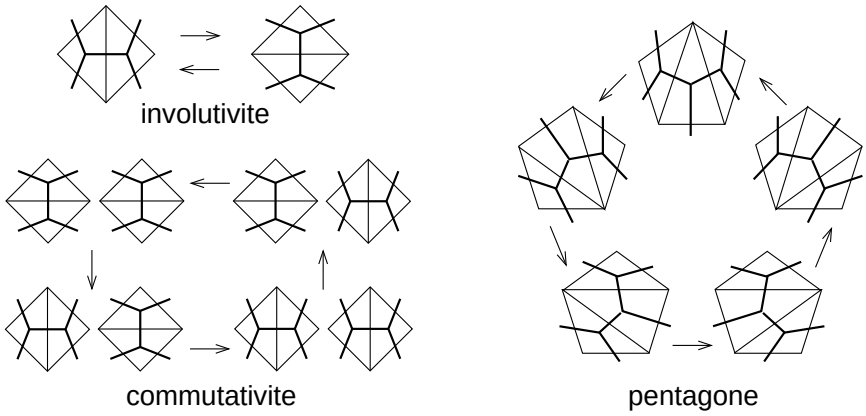


Figure II.5. Les relations d'involutivité, de commutativité et du pentagone.

groupoïde de Ptolémée $\mathfrak{Pt}(\Sigma)$, qui est défini par

$$\begin{cases} \textbf{Ob}(\mathfrak{Pt}(\Sigma)) & = & \text{classes d'isotopie de graphes épais marqués dans } \Sigma, \\ \textbf{Mor}(\mathfrak{Pt}(\Sigma)) & = & \text{suites de mouvements de Whitehead modulo les relations} \\ & & \text{de la figure II.5.} \end{cases}$$

Puisque le groupe de difféotopies $\mathcal{M}(\Sigma)$ agit librement sur $\hat{\mathcal{G}}(\Sigma)$, tout élément de $\mathcal{M}(\Sigma)$ peut être représenté par un chemin dans $\hat{\mathcal{G}}(\Sigma)$, reliant deux 0-cellules de la même $\mathcal{M}(\Sigma)$-orbite. Puisque l'espace de Teichmüller est homéomorphe à une boule, ce chemin est unique à homotopie près. Ainsi, tout élément $\varphi \in \mathcal{M}(\Sigma)$ peut être représenté par une suite de mouvement de Whitehead

$$G \xrightarrow{W_1} G_1 \xrightarrow{W_2} \dots \xrightarrow{W_k} G_k = \varphi(G),$$

qui est unique modulo les relations de la figure II.5, et ce pour *tout* choix de graphe épais G.

II.4.1.2. *L'invariant AMR.* Nous avons rappelé dans la section I.1.1, que si L est un entrelacs de S^3 à m composantes, son intégrale de Kontsevich $Z(L)$ est un élément de $\mathcal{A}(\bigcirc^m)$. Andersen, Mattes et Reshetikhin ont défini dans [AMR96] un invariant de type fini universel pour les entrelacs dans la surface épaissie $\Sigma \times [0,1]$, qui généralise l'intégrale de Kontsevich. Cet invariant prend ses valeurs dans l'espace $\mathcal{A}(\bigcirc^m; \Sigma)$ des diagrammes de Jacobi sur m cercles *sur* la surface Σ, ou, de manière équivalente, des diagrammes coloriés par $\pi_1(\Sigma)$. Outre la donnée d'un associateur (comme pour l'intégrale de Kontsevich), cet invariant requiert la donnée d'une certaine décomposition polygonale de la surface Σ, ainsi qu'une décoration supplémentaire. Nous rappelons ici cette construction en partant du fait, montré dans [10], que la donnée d'un graphe épais marqué dans Σ fournit ces données suppémentaires.

Etant donné un graphe épais G marqué dans Σ, la surface Σ se rétracte sur un petit voisinage de G, de telle sorte que l'on a une décomposition

$$\Sigma = (\cup_i S_i) \cup (\cup_j H_j),$$

en carrés et hexagones, où à chaque sommet trivalent de G correspond un hexagone H_j, chaque arête correspondant à un carré S_i, de telle sorte que ces divers polygones s'intersectent le long d'une union disjointe de côtés séparants : ceci est illustré dans la figure II.6. La donnée combi-

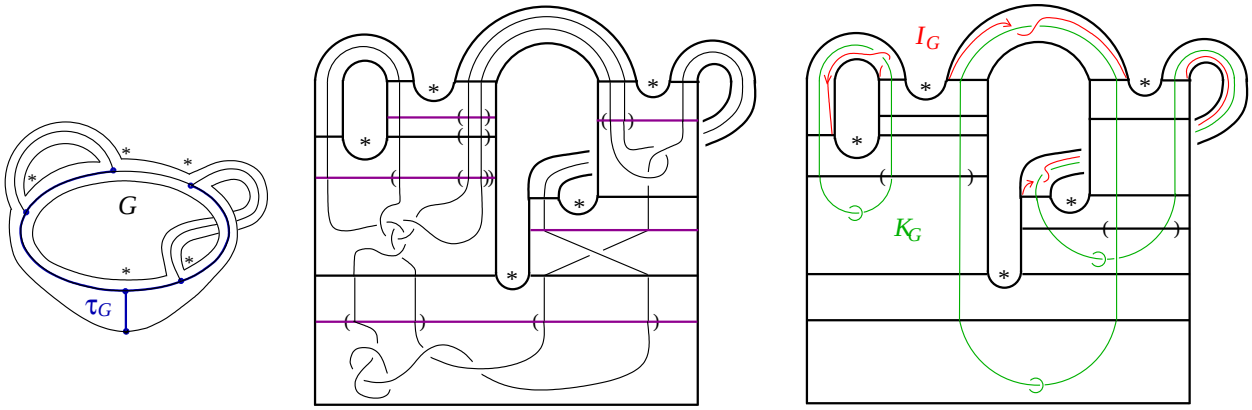


FIGURE II.6. A gauche, un graphe épais G marqué dans le tore à deux trous $\Sigma_{1,2}$ et l'arbre maximal τ_G ; au milieu, la décomposition polygonale et un nœud en position admissible ; à droite, les systèmes de paires de Kirby K_G et de crochets I_G.

natoire supplémentaire dont nous avons besoin est le choix d'un des trois côtés bordants pour chaque hexagone. Grâce à un algorithme simple [ABP09], on peut extraire de G un sous-arbre maximal τ_G (voir la figure II.6), contenant la queue. Pour chaque sommet trivalent de G, il y a donc un côté incident préféré, qui 'pointe vers la queue' dans cet arbre maximal : nous distinguons ainsi le côté bordant de l'hexagone correspondant qui fait face à cette direction. Voir le centre de la figure II.6, où les côtés distingués sont indiqués en violet.

Tout entrelacs L dans $\Sigma \times [0,1]$ peut alors être isotopé et muni d'un parenthésage de son intersection avec chaque côté séparant (épaissi) de telle sorte que

– Pour chaque carré S_i, l'enchevêtrement $L_i^S := L \cap (S_i \times [0,1])$ est un enchevêtrement parenthésé dans le cube $S_i \times [0,1]$ (cf section I.1.1).

– Pour chaque hexagone H_j, l'enchevêtrement $L_j^H := L \cap (H_j \times [0,1])$ est trivial, aucun brin de L_j^H ne connecte les deux côtés de ∂H_j adjacents au côté bordant distingué, et les parenthésages sont 'compatibles' comme illustré dans la figure II.6.

Un entrelacs respectant ces conditions sera dit en position admissible par rapport au graphe épais G. Voir la figure II.6.

Soit $\mathcal{L}(\Sigma; m)$ l'ensemble des classes d'isotopie d'entrelacs orientés et parallélisés à m composantes dans $\Sigma \times [0,1]$. Ayant fait le choix d'un associateur de Drinfeld *pair* et d'un graphe épais G marqué dans Σ, on définit *l'invariant AMR*

$$V_G : \mathcal{L}(\Sigma; m) \to \mathcal{A}(\bigcirc^m; \Sigma)$$

comme suit. Etant donné un entrelacs $L \in \mathcal{L}(\Sigma; m)$ en position admissible par rapport à G, on applique l'intégrale de Kontsevich Z à chacun des enchevêtrements parenthésés L_i^S, et on envoie chaque enchevêtrement (trivial) L_j^H sur le diagramme vide. Puis on compose les diagrammes de Jacobi ainsi produits, comme prescrit par la décomposition polygonale, pour obtenir une série formelle de diagrammes de Jacobi sur m cercles *sur* la surface Σ.

Remarque II.4.2. L'invariant AMR que nous allons utiliser par la suite est une version faible de celui défini ici ; en effet, par la suite on notera V_G^0 la composition de l'invariant AMR V_G issu de [AMR96] avec la projection $\mathcal{A}(\bigcirc^m; \Sigma) \to \mathcal{A}(\bigcirc^m)$ qui oublie simplement l'information homotopique d'immersion des diagrammes de Jacobi sur la surface. C'est là bien sûr une perte d'information considérable – on n'a plus, en particulier, un invariant universel. Voir aussi le Chapitre III sur ce point.

II.4.2. L'invariant ∇_G des cobordismes sur Σ. Ce que nous appelons ici un *cobordisme sur* Σ est une 3–variété $(\Sigma \times [0,1])_L$ obtenue par chirurgie le long d'un entralacs parallélisé L dans la surface épaissie $\Sigma \times [0,1]$. On note $\mathcal{C}(\Sigma)$ l'ensemble des cobordismes sur Σ, modulo les difféomorphismes préservant l'orientation et les identifications du bord à $\partial(\Sigma \times [0,1])_L$.

La définition de l'invariant ∇_G des cobordismes sur Σ est modelée sur celle de l'invariant LMO, rappelée dans la section II.1.1, mais le rôle de l'intégrale de Kontsevich est maintenant joué par l'invariant AMR.

Il nous faut pour cela extraire quelques ingrédients supplémentaires du graphe épais G que nous nous sommes fixé : un système de *paires de Kirby* et un système de *crochets*. Les premiers assurent l'invariance de notre construction, et les seconds permettent de 'porter' des informations homologiques. Nous ne donnons ici qu'un rappel sommaire de ces objets (bien qu'ils soient les contributions nouvelles essentielles de notre construction), et renvoyons le lecteur à [10] pour de plus amples détails.

Une *paire de Kirby* est un entrelacs parallélisé à deux composantes, la première étant un nœud quelconque et la second un méridien 0-parallélisé de ce dernier. Le complémentaire de l'arbre maximal τ_G dans le graphe épais G fournit naturellement une base ordonnée pour l'homologie de la surface Σ : pour chaque arête dans $G \setminus \tau_G$, les deux chemins reliant les extrémités à la queue de G dans τ_G fournissent en fait un lacet dans Σ. On peut réaliser ce système ordonné[8] de courbes fermées simples de Σ comme une union disjointe de nœuds parallélisés dans $\Sigma \times [0,1]$, simplement en épaississant le long de $\Sigma \times \{1\}$ et en poussant dans $\Sigma \times [0,1]$ suivant l'ordre donné ; on obtient alors une union K_G de $h := 2g + n - 1$ paires de Kirby en munissant chacun de ces nœuds d'un petit méridien 0-parallélisé. Un exemple est donné dans la partie droite de la figure II.6

Par ailleurs, pour chaque côté de $G \setminus \tau_G$, on considère un *crochet* dans le cube correspondant dans $\Sigma \times [0,1]$, qui est un arc orienté plongé dans le bord de $\Sigma \times [0,1]$, comme illustré dans la partie droite de la figure II.6 (voir aussi [10, §2.6]). On note I_G l'union de ces h crochets dans $\Sigma \times [0,1]$ obtenue de G.

8. L'ordre sur ces lacets est donné combinatoirement, par l'ordre de passage lorsque l'on parcourt le graphe G, à partir de la queue, et en suivant l'ordre cyclique en chaque sommet.

Maintenant, étant donné un cobordisme $(\Sigma \times [0,1])_L$ sur Σ, on définit

$$\widehat{\nabla}_n^G(L) := \frac{\iota_n(\check{V}_G(L \cup K_G \cup I_G))}{\iota_n(\check{V}_G(U_+))^{\sigma_+^{L\cup K_G}} \iota_n(\check{V}_G(U_-))^{\sigma_-^{L\cup K_G}}} \in \mathcal{A}_{\leq n}(\uparrow^h), \tag{II.12}$$

où l'on utilise les mêmes notations que pour (II.1), et où $\check{V}_G$ est obtenu de V_G^0 (la version faible de l'invariant AMR définie dans la Remarque II.4.2) en faisant la somme connexe avec une copie de ν sur chaque composante *circulaire* $\bigcirc$.

Théorème II.4.3 ([10, Thm. 3.1]). *Pour chaque entier $n \geq 1$, et pour tout choix de graphe épais G marqué dans Σ, la quantité $\widehat{\nabla}_n^G(L)$ définie dans (II.12) est invariante sous mouvements de Kirby et ne dépend pas de l'orientation choisie sur L. Ainsi, $\widehat{\nabla}_n^G(L)$ est un invariant du cobordisme $(\Sigma \times [0,1])_L$.*

On peut alors assembler ces $\widehat{\nabla}_n^G$ en une série formelle

$$\widehat{\nabla}_G(M) := 1 + \left(\widehat{\nabla}_1^G(L)\right)_1 + \left(\widehat{\nabla}_2^G(L)\right)_2 + \cdots \in \mathcal{A}(\uparrow^h) \tag{II.13}$$

et ainsi définir l'invariant

$$\widehat{\nabla}_G : \mathcal{C}(\Sigma) \to \mathcal{A}(\uparrow^h).$$

Notons que, dans le cas où Σ est un disque, on retrouve ainsi l'invariant LMO.

Esquisse de Preuve. La formule (II.12) est fortement réminiscente de celle apparaissant dans la définition (II.1) de l'invariant LMO. De fait, nous garantissons l'invariance par le premier mouvement de Kirby par le même procédé de normalisation, et re–exploitons la technologie des applications ι_n pour le second mouvement de Kirby. La nouveauté de notre construction, au delà du fait de substituer l'invariant AMR à l'intégrale de Kontsevich, est donc l'introduction de ce système de paires de Kirby, qui garantissent l'invariance sous le troisième mouvement de Kirby [9]. En effet, si l'on altère l'entrelacs L en ajoutant une paire de Kirby $l \cup m$, où m est un méridien 0-parallélisé de l, le fait que le système K_G 'représente' un système de générateurs de $\pi_1(\Sigma)$ assure que l'on peut glisser successivement le nœud l sur les composantes de K_G pour obtenir une paire de Kirby qui soit nulle–homotope dans $\Sigma \times [0,1]$, et donc contenue dans une 3–boule : on sait alors que l'on peut éliminer cette paire par une suite de mouvements de Kirby I et II.

Dans la suite, on s'intéresse plus particulièrement à l'invariant

$$\nabla_G \colon \mathcal{C}(\Sigma) \to \mathcal{A}_h,$$

qui est la composition de $\widehat{\nabla}_G$ avec l'isomorphisme $\mathcal{A}(\uparrow^h) \simeq \mathcal{B}(h)$ (rappelé à la fin de la section I.1.1) et la projection $\mathcal{B}(h) \to \mathcal{A}_h$ modulo les composantes sans 3-sommet. Clairement, pour tout choix de graphe épais G marqué dans Σ, ∇_G est un invariant des cobordismes sur Σ.

II.4.3. Universalité et représentation diagrammatique. Le premier intérêt de cet invariant ∇_G est le résultat d'universalité suivant pour les cylindres d'homologie.

Théorème II.4.4 ([10, Thm. 3.4]). *Pour tout choix de graphe épais G marqué dans Σ, l'invariant ∇_G est un invariant de type fini universel des cylindres d'homologie sur Σ. En d'autres termes, ∇_G induit un isomorphisme filtré*

$$\overline{\mathcal{H}}_\Sigma \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}_h,$$

où $\overline{\mathcal{H}}_\Sigma$ désigne le quotient du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (complété) engendré par les cylindres d'homologie sur Σ par l'intersection de tous les termes de la filtration de Goussarov-Habiro.

9. Rappelons en effet que, dans le cas de 3–variétés à bord, le théorème de Kirby implique un troisième mouvement, qui consiste à ajouter ou enlever une paire de Kirby à une présentation de chirurgie ; dans S^3, ce troisième mouvement est une conséquence des deux premiers.

Notons que le foncteur LMO de Cheptea, Habiro et Massuyeau [CHM08], dont nous avons déjà parlé dans la section II.3, est aussi un invariant universel des cylindres d'homologie, dont la relation avec notre famille d'invariants reste à comprendre.

Esquisse de Preuve. La preuve de ce résultat consiste à définir une application de chirurgie surjective, qui réalise topologiquement les diagrammes de Jacobi coloriés comme claspers dans $\Sigma \times [0,1]$, puis à montrer que l'invariant ∇_G induit un inverse au niveau gradué. Cela repose sur le bon comportement de l'intégrale de Kontsevich et l'invariant LMO sous la chirurgie le long de claspers (voir par ex. [Oht02b]), et la principale difficulté technique est la nécessité d'utiliser une double filtration sur les espaces de diagrammes.

Le théorème II.4.4 établit donc une famille d'isomorphismes, indexée par l'ensemble des graphes épais marqués dans Σ, entre deux espaces fixés. On en déduit facilement le

Théorème II.4.5 ([10, Thm. 5.2]). *L'application*

$$(G \xrightarrow{W} G') \mapsto \nabla_{G'} \circ \nabla_G^{-1}.$$

définit une représentation du groupoïde de Ptolémée dans l'espace de diagrammes $\mathcal{A}_h$.

Voir [10, §5.3] pour de plus amples détails sur cette représentation.

II.4.4. Relèvement de LMO au groupoïde de Ptolémée. Pour ne pas rendre ce mémoire plus indigeste qu'il ne l'est déjà, nous nous contenterons d'esquisser le prochain résultat, en renvoyant le lecteur à [10] pour les (nombreux) détails techniques omis ici.

On distingue ici trois opérations classiques sur les cobordismes sur les surfaces. D'une part, nous avons le *produit d'empilement* (II.3). D'autre part, étant donné un cobordisme sur la surface Σ_g close de genre g et un corps en anses d'homologie de genre g (qui est un cobordisme sur le disque à $(g-1)$ trous), nous pouvons considérer leur *emboîtement* en identifiant le bord du corps en anses avec la copie 'inférieure' de Σ_g dans le bord du cobordisme, produisant ainsi un nouveau corps en anses de genre g. Enfin, étant donnés deux corps en anses d'homologie de genre g, nous pouvons les recoller le long de leur bord pour former une variété close de dimension 3, que l'on appelle leur *couplage*.
Dans la section 4 de [10], nous définissons trois applications

$$\bullet : \mathcal{A}_{2g} \times \mathcal{A}_{2g} \to \mathcal{A}_{2g}, \quad \star : \mathcal{A}_{2g} \times \mathcal{A}_g \to \mathcal{A}_g, \quad \text{et} \quad \langle\ ,\ \rangle : \mathcal{A}_g \times \mathcal{A}_g \to \mathcal{A}(\emptyset),$$

qui sont les analogues diagrammatiques de ces trois opérations topologiques :

Théorème II.4.6 ([10, Thm. 4.4]). *Soit H, H' deux corps en anses d'homologie de genre g, et M, M' deux cylindres d'homologie sur $\Sigma_{g,1}$. On a*

$$Z_{LMO}(H \cup_\iota H') = \langle \nabla^r_{\overline{C}_g}(H), \nabla^r_{\overline{C}_g}(H') \rangle,$$
$$\nabla^r_{C_g}(M \cdot M') = \nabla^r_{C_g}(M) \bullet \nabla^r_{C_g}(M'),$$
$$\nabla^r_{\overline{C}_g}(M * H) = \nabla^r_{C_g}(M) \star \nabla^r_{\overline{C}_g}(H),$$

où $\cup_\iota$, $\cdot$ et $*$ sont respectivement les produits de couplage, d'empilement et d'emboîtement.

Ceci nécessite l'utilisation d'une version modifiée ∇^r de l'invariant ∇ défini plus haut (voir [10, §3.3]), et en outre dépend du *choix* de graphes épais C_g et $\overline{C}_g$ marqués respectivement dans les surfaces $\Sigma_{0,g}$ et $\Sigma_{g,1}$, voir [10, Fig. 12]. Ces trois produits diagrammatiques sont donnés par une même procédure, consistant en un sorte de 'produit de contraction universel' (le produit $\odot$ de [10, Eq. (14)]) avec trois constantes diagrammatiques, qui sont données par l'invariant de Kontsevich-LMO de trois enchevêtrements spécifiques [10, Fig. 13].

Par ailleurs, en combinant [ABP09, Cor. 7.1] et [ABP09, Thm. 8.1], on a, pour tout choix de graphe épais G marqué dans la surface $\Sigma_{g,1}$, une représentation du groupoïde de Ptolémée

$$\hat{id}_G : \mathfrak{Pt}(\Sigma_{g,1}) \to \mathcal{I}(\Sigma_{g,1})$$

dans le groupe de Torelli $\mathcal{I}(\Sigma_{g,1})$; cette représentation a la propriété que, si un élément φ de $\mathcal{I}(\Sigma_{g,1})$ est représenté par une suite de mouvements de Whitehead, alors la composée des images par $\hat{id}_G$ de ces mouvement est à nouveau φ. En notant simplement $\hat{id} = \hat{id}_{C_g}$ la représentation ainsi obtenue du graphe épais C_g déjà fixé plus haut, on obtient ainsi une représentation du groupoïde de Ptolémée[10]

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathfrak{Pt}(\Sigma_{g,1}) &\to \mathcal{A}_{2g}, \\ W &\mapsto \nabla^r_{C_g}\left(\mathrm{cyl}(\hat{id}(W))\right), \end{aligned}$$

qui fournit une *extension au groupoïde de Ptolémée de l'invariant LMO des sphères d'homologie entière*, au sens suivant.

THÉORÈME II.4.7 ([10, Thm. 5.4]). *Soit $M = H \cup_\iota H'$ un scindement de Heegaard de genre g d'une sphère d'homologie entière M. Soit $f \in \mathcal{I}(\Sigma_{g,1})$ un élément du groupe de Torelli, et soit*

$$G \xrightarrow{W_1} G_1 \xrightarrow{W_2} \dots \xrightarrow{W_k} G_k = f(G)$$

une suite de mouvements de Whitehead représentant f. Alors l'invariant LMO de la sphère d'homologie $M_f = H \cup_{\iota\circ f} H'$ est donné par

$$Z_{LMO}(M_f) = \langle v, (\rho(W_1) \bullet \rho(W_2) \bullet \cdots \bullet \rho(W_k)) \star v' \rangle\,,$$

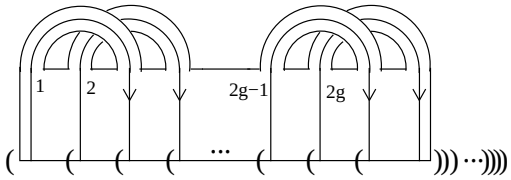
où $v = \nabla^r_{\overline{C}_g}(H) \in \mathcal{A}_g$ et $v' = \nabla^r_{\overline{C}_g}(H') \in \mathcal{A}_g$.

Comme le suggère la figure II.4, un mouvement de Whitehead est dual à un *flip* sur une triangulation idéale, qui est réalisé topologiquement en collant un tétraèdre. La décomposition de f en suite de mouvements de Whitehead induit une triangulation du cylindre d'application de f. La formule ci–dessus donne donc, en principe, une décomposition de l'invariant LMO en contributions diagrammatiques associées à chacun de ces tétraèdres.

II.4.5. Relèvement de Morita–Penner. Dans cette section, on se restreint au cas $\Sigma = \Sigma_{g,1}$, et on note $H = H_1(\Sigma_{g,1};\mathbb{Z})$ et $H_\mathbb{Q} = H \otimes \mathbb{Q}$.

Le dernier résultat de [10] que nous présentons dans ce mémoire montre comment une (autre) version modifiée de l'invariant ∇ des cobordismes permet de retrouver l'extension du premier homomorphisme de Johnson $\tau_1\colon \mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \to \Lambda^3 H$ au groupoïde de Ptolémée de Morita et Penner [MP08]. A nouveau, nous éluderons une bonne partie des détails techniques.

La première remarque est que, dans la construction de l'invariant ∇_G associé au graphe épais G, le système de crochets I_G n'est pas utilisé pour prouver l'invariance : nous utilisons juste le fait qu'il fournit une base duale en homologie, et ainsi 'capture' toutes les informations homologiques sur les entrelacs de $\Sigma \times [0,1]$[11]. On peut donc considérer une variante $\nabla^{I_g}_G$ de l'invariant ∇_G, à valeurs dans $\mathcal{A}(\uparrow^{2g})$, où l'on remplace I_G par le système de crochets I_g représenté ci–dessous



On ne s'intéresse ici qu'à une très petite partie de cet invariant $\nabla^{I_g}_G$, en l'occurence à la composée

$$\nabla^{\mathsf{Y}}_G := \pi^{\mathsf{Y}} \circ \nabla^{I_g}_G,$$

où π^{Y} est la projection sur l'espace $\mathcal{B}^{\mathsf{Y}}(2g)$ engendré par les diagrammes de Jacobi 'en Y' (i.e. ayant un 3-sommet et trois 1-sommets), qui s'identifie naturellement à $\Lambda^3 H_\mathbb{Q}$:

$$\pi^{\mathsf{Y}} : \mathcal{A}(\uparrow^{2g}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{B}(2g) \to \mathcal{B}^{\mathsf{Y}}(2g) \cong \Lambda^3 H_\mathbb{Q}.$$

10. On rappelle que cyl désigne le cylindre d'application.
11. Ce fait est en revanche essentiel pour le théorème d'universalité II.4.4.

Maintenant, considérons un mouvement de Whitehead $W\colon G \mapsto G'$. On peut alors comparer les évaluations des invariants ∇^{Y}_G et $\nabla^{\mathsf{Y}}_{G'}$ sur l'élément trivial $\Sigma_{g,1} \times [0,1]$. Ceci définit une application

$$\mathcal{J}(W) = \nabla^{I_g}_{G'}(\Sigma_{g,1} \times [0,1]) - \nabla^{I_g}_{G}(\Sigma_{g,1} \times [0,1]) \in \Lambda^3 H_{\mathbb{Q}},$$

dont on vérifie facilement qu'elle définit une representation

$$\mathcal{J}\colon \mathfrak{Pt}(\Sigma_{g,1}) \to \Lambda^3 H_{\mathbb{Q}}.$$

Théorème II.4.8 ([10, Thm. 5.5]). *La representation $\mathcal{J}$ étend le premier homomorphisme de Johnson τ_1 au groupoïde de Ptolémée : étant donnée une suite*

$$G \xrightarrow{W_1} G_1 \xrightarrow{W_2} \dots \xrightarrow{W_k} G_k = \varphi(G)$$

de mouvements de Whitehead représentant un élément $\varphi \in \mathcal{I}(\Sigma)$, on a $\tau_1(\varphi) = 4\sum_{i=1}^{k} \mathcal{J}^{\mathsf{Y}}(W_i)$.

Esquisse de Preuve. Ce résultat est prouvé par un calcul explicite de $\mathcal{J}(W)$ pour un mouvement de Whitehead W quelconque, dont on identifie le résultat à la formule de Morita et Penner [MP08]. Ce calcul repose essentiellement sur deux points techniques. Le premier dit que la 'partie en Y' de l'invariant ∇^{I_g} vient purement de l'enchevêtrement I_g, et autrement dit que le système de paires de Kirby peut être ignoré dans les calculs, voir [10, Lem. 5.6]. Le second est une trichotomie des possibles évolutions des décorations de la décomposition polygonale de la surface lors d'un mouvement de Whitehead, voir [10, Fig. 18].

CHAPITRE III

Perspectives

Ce dernier chapitre regroupe quelques directions de recherches plus ou moins directement liées aux résultats présentés dans ce mémoire. Nous les présentons ici en suivant principalement l'organisation du mémoire, sans autre forme de hiérarchie.

III.1. Vers la dimension 4

On l'a vu, les invariants de Milnor apparaissent de façon récurrente dans le Chapitre I, aussi bien comme outils que comme objet d'étude (c'est en un sens encore le cas dans le Chapitre II, à travers les homomorphismes de Johnson...).

Un travail très récent en commun avec Benjamin Audoux, Paolo Bellingeri et Emmanuel Wagner [18], que nous avons choisi de ne pas exposer ici, ouvre de nouvelles perspectives dans l'étude de ces invariants, en particulier dans le direction de la dimension 4. En effet, nous montrons (en autres choses), que la bonne extension des invariants de Milnor à la théorie des nœuds virtuels passe par une réalisation topologique (d'un quotient naturel) de ces objets virtuels, en termes de surfaces plongées en dimension 4 de type 'ruban' (nous renvoyons le lecteur à [18] pour les détails de ce travail).
De fait, cette adaptation des invariants de Milnor en dimension 4 repose principalement sur un résultat clef de Stallings [Sta65, Thm. 5.1], et s'applique à une situation plus générale, que nous esquissons ici.

Fixons n cercles $\{C_i\}_i$ orientés, ordonnés et alignés à l'intérieur du disque D^2 ; en identifiant $D^2 \hookrightarrow B^3 = D^2 \times [0,1]$ avec $D^2 \times \{\frac{1}{2}\}$ on peut voir canoniquement ces cercles plongés dans la 3-boule. On appelle *enlacement de n tubes* un plongement de n anneaux orientés disjoints dans $B^4 = B^3 \times [0,1]$, tel que le $j$ième anneau est cobordé par les cercles $C_j \times \{0\}$ et $C_j \times \{1\}$ en respectant l'orientation. Lorsqu'un enlacement de tubes (et l'union des disques bordés par les cercles C_j) borde n 3-boules immergées dans B^4 et qui ne présentent que des singularités de type ruban, on parlera d'*enlacement de tubes de type ruban* : ce sont précisément les objets que nous avons étudiés et classifiés à homotopie près dans [18]. Mais la construction donnée dans la section 6 de [18] se généralise sans aucune difficulté au cas plus général des enlacements de tubes. En effet, les applications d'inclusion de la boule B^3 privée de n cercles dans le complémentaire d'un enlacement vérifient toujours les hypothèses du théorème de Stallings, si bien que l'on peut définir de la même manière les invariants de Milnor $\mu^{(4)}$ de ces objets. Comme dans le cas classique, ce sont des invariants d'isotopie (fixant le bord) à valeurs entières et indexés par des suites finies d'indices compris entre 1 et n. De plus, il suit (presque) immédiatement d'un autre résultat général de Stallings [Sta65, Thm. 5.2] que ces invariants de Milnor en dimension 4 sont aussi des invariants de cobordismes. En revanche, la question suivante est beaucoup moins évidente.

Problème III.1. Montrer que les invariants de Milnor $\mu^{(4)}(I)$ d'enlacements de tubes indexés par des suites d'indices I *sans répétition* sont des invariants d'homotopie.

Ici, la relation d'homotopie en dimension 4 est définie de la façon usuelle, par une famille d'enlacements à un paramètre dans laquelle on autorise des objets singuliers où une composante s'intersecte *elle-même*. Mais la situation est cependant bien différente de la dimension 3 : la

difficulté principale est que l'on ne dispose pas, pour les surfaces en dimension 4, d'une description de la relation d'homotopie en termes de mouvements locaux (une exception notable est la classe des objets de type ruban, ce qui a permis les travaux de [18]). Par ailleurs, la relation d'homotopie est fondamentalement différente en dimension supérieure, puisque dans le cas des 2-entrelacs (i.e. des plongements de 2-sphères en dimension 4), Bartels et Teichner ont montré que tous les objets sont homotopes à l'entrelacs trivial [BT99] ! Cela contraste nettement avec le cas des entrelacs usuels : en particulier, il n'existe pas d'invariant de Milnor (d'homotopie) pour les 2-entrelacs. Néamoins, il semble raisonnable de considérer la question suivante (qui est bien sûr liée à la précédente).

Problème III.2. Déterminer si tout enlacement de tubes est homotope à un enlacement de type ruban.

Une réponse affirmative constituerait une jolie analogie avec la dimension 3 (on sait déjà que tout enlacement ruban est homotope à un enlacement de type tresse), et conduirait à une classification à homotopie près.

Un autre intérêt de ces invariants de Milnor en dimension 4 serait de pouvoir établir des relations avec les invariants de Milnor classiques. C'est de fait le cas dans le cas ruban : à un enlacement d'intervalles L peut naturellement être associé un enlacement de tubes $\mathrm{Tube}(L)$ de type ruban et on montre dans [18] que, pour toute suite d'indices I, on a

$$\mu_L(I) = \mu^{(4)}_{\mathsf{Tube}(L)}(I). \tag{III.1}$$

Il semble que, pour obtenir une relation plus générale, il faille encore étendre la construction proposée ci–dessus. Pour $i = 0, 1$, fixons un entrelacs à n composantes L_i de la boule B^3 (et non une classe d'isotopie d'entrelacs !), muni d'un système de n arcs méridiens basés en un point fixé sur le bord de la boule ; si L_0 et L_1 sont dans la même classe de concordance, alors on peut considérer un plongement de n anneaux disjoints dans $B^4 = B^3 \times [0, 1]$, le $j$ième anneau étant cobordé par les $j$ièmes composantes de L_0 et L_1, en respectant l'orientation. On appellera un tel objet un enlacement de n tubes de type (L_0, L_1) : les résultats de Stallings s'appliquent encore à ce cadre général, si bien que l'on peut définir les invariants de Milnor de tels objets. Cette dernière généralisation est néamoins plus subtile, car différents choix de longitudes des entrelacs L_0 et/ou L_1 affectent significativement les invariants d'ordre supérieur : c'est là que l'on peut espérer trouver des relations nouvelles entre dimension 3 et 4.

Enfin, pour clore cette digression sur les généralisations possibles des invariants de Milnor, notons que la construction donnée dans [18] constitue aussi une extension naturelle et complètement générale des invariants de Milnor à la théorie *virtuelle*. Plusieurs propositions pour une telle extension avaient déjà été faites, par Dye–Kauffman [DK07], Kotorii [Kot13] et Kravchenko–Polyak [KP11], mais toutes ces constructions sont partielles (n'abordant en particulier que le cas des invariants sans répétition) et difficilement adaptables au cas général car basées sur des approches combinatoires : notre extension se fonde sur la topologie, via l'application Tube évoquée dans (III.1). L'approche proposée par Kravchenko et Polyak est cependant très intéressante, car elle consiste en donner des formules de diagrammes de Gauss pour les invariants de Milnor. Non seulement cela fournit une extension virtuelle de ces invariants, mais aussi cela donne des formules de calculs efficaces pour les invariants classiques. L'extension que nous donnons dans [18] coïncide avec celle de [KP11] dans le cas des invariants d'homotopie, et pourrait donc très certainement être utilisée pour généraliser le résultat de Kravchenko–Polyak en donnant des formules de diagrammes de Gauss pour tous les invariants de Milnor. Une des clefs de ce problème est de parvenir à maitriser le lien entre invariants d'homotopie et invariants de Milnor avec répétitions via le procédé de cablage, dans l'esprit du théorème 7 de Milnor dans [Mil57]. On sait en effet que le cas des enlacements d'intervalles est un peu plus délicat de ce point de vue, comme l'explique Yasuhara dans [Yas09a, Sec. 3].

Un autre problème lié à cette question consiste à développer un calcul de clasper pour la théorie

virtuelle (ce qui ne semble pas du tout évident !), ou du moins pour la théorie soudée (*welded*), que nous considérons dans [18], ce qui est en revanche tout à fait possible : on peut ainsi donner des analogues 'soudés' du calcul de clasper classique, et l'utiliser pour donner une preuve alternative du théorème de classification de [18]. Bien que cette approche ait l'inconvénient de ne plus reposer sur la topologie, elle présente l'avantage d'être constructive, et de fournir (facilement !) un représentant explicite de la classe d'homotopie d'un enlacement d'intervalles : ce représentant, exprimé en termes de 'claspers soudés', est en un sens similaire aux arbres comptés dans les formules de diagrammes de Gauss de Kravchenko–Polyak.

III.2. Sur les invariants de Milnor

Le théorème I.2.2 présenté dans la section I.2.1 établit un lien assez inattendu entre invariants classiques et quantiques, en exprimant les invariants d'homotopie de Milnor d'un entrelacs en termes du polynôme de HOMFLYPT de certains nœuds obtenus par des sommes en bande généralisées. Plus précisément, rappelons que si les invariants de Milnor de longueur au plus k sont nuls $(k \geq 2)$ pour un entrelacs L, alors

$$\overline{\mu}_L(I) = \frac{-1}{k!2^k} \sum_{I' < I} (-1)^{|I'|} P_0^{(k)}(K_{I'}) \in \mathbb{Z}, \tag{III.2}$$

où I est une suite de $(k+1)$ indices deux à deux distincts de $\{1, ..., n\}$.
Cette formule pose plus de questions qu'elle n'apporte de réponse. D'une part, il serait bien sûr intéressant de pouvoir donner une justification conceptuelle de cette relation, qui pourrait éventuellement apporter un éclairage sur les autres coefficients polynômiaux de HOMFLYPT. Une autre question naturelle est de voir dans quelle mesure ce résultat peut être généralisé, comme ont commencé à le faire Kotorii et Yasuhara dans [KY13] : peut-on, par exemple, donner une formule générale *modulo 2* sans restriction sur la longueur des invariants ? Une prolongation plus intéressante de ce travail serait en fait de parvenir à 'inverser' cette formule (III.2), c'est-à-dire exprimer l'invariant $P_0^{(k)}$, voire le polynôme coefficient P_0 tout entier, d'un nœud ou entrelacs comme une combinaison d'invariants de Milnor. Un tel résultat apporterait véritablement un éclairage 'topologique' sur l'invariant de HOMFLYPT (ce qui n'est pas véritablement le cas de la formule ci–dessus). La grosse difficulté est que, si l'on tente d'utiliser les invariants de Milnor d'une famille d'entrelacs reliés entre eux par des opérations de type somme en bande, ces invariants seront définis modulo des indéterminées Δ qui diffèrent d'un terme à l'autre. Une réponse a cette difficulté réside peut-être dans un raffinement de la définition de cette indéterminée ; c'est notamment une idée exploitée par L. Traldi dans [Tra88, §8] pour relier les invariants de Milnor à la fonction potentiel de Conway. Une autre possibilité serait d'utiliser la version 'enlacements d'intervalles' de notre formule, mentionnée plus haut [Kot14]. Quelle que soit l'approche, les techniques utilisées dans [13], basées sur le calcul de clasper, sont vraisemblablement un outil approprié.

Enfin, la formule (III.2) suggère inévitablement une piste possible pour une catégorification des invariants de Milnor. Il peut sembler tentant d'utiliser la catégorification du polynôme de HOMFLYPT de Khovanov–Rozansky, mais une autre approche intéressante repose sur des travaux de Jaeger. Ce dernier a en effet donné dans [Jae90] deux formules de sommes d'état pour le polynôme de HOMFLYPT. Dans la première de ces formules, les états sont des 'circuits' obtenus par lissages partiels des croisements et pondérés de manière *ad hoc*. Il semble possible de raffiner ce résultat pour en extraire une formule pour chaque coefficient polynomial et ses dérivées – cela semble du moins être le cas pour le polynôme P_0, comme nous avons récemment pu le vérifier avec B. Audoux et E. Wagner. Ainsi, on peut extraire du travail de Jaeger des formules de somme d'état (combinatoires) pour les invariants de Milnor. Produire ces formules reste encore très loin d'être suffisant pour laisser espérer une catégorification, mais cela constitue une première étape tout à fait intéressante en soi. Outre le fait de donner une description combinatoire des invariants

de Milnor, elles pourraient aussi constituer un outil pertinent pour le problème 'd'inversion de la formule (III.2)' discutée plus haut.

Rappelons enfin que cette formule n'est valide que pour les 'enlacements supérieurs', autrement dit, pas pour les nombres d'enlacements usuels. La catégorification de l'enlacement reste cependant une question intéressante et largement ouverte : bien qu'il existe une telle construction, celle–ci repose sur l'homologie de Floer instanton. Il n'est en un sens pas surprenant de constater que cette théorie, très ancrée dans la géométrie, fournisse un tel résultat ; mais c'est aussi une théorie complexe, et il est raisonnable d'espérer qu'il existe une façon plus simple de catégorifier l'enlacement, qui est une notion relativement simple et admettant de multiples définitions.

III.3. Sur le système de poids sl_2 universel

Nous présentons ici une prolongation possible du travail avec Sakie Suzuki présenté dans la section I.2.2, qui a trait au système de poids de l'invariant universel sl_2, que l'on a noté W^U dans la section I.2.2.

Le théorème I.2.10 implique que, lorsque l'on se restreint à la 'partie en arbres' $\mathcal{B}^t(n)$ de l'espace des diagrammes de Jacobi coloriés par $\{1, ..., n\}$, on peut identifier W^U avec W, le système de poids sl_2, via l'isomorphisme ρ de (I.3). Ceci donne donc une construction partielle de W^U.

Il est clair que cette application n'est pas injective, autrement dit que l'on ne peut pas espérer que l'invariant universel sl_2 détecte les invariants de Milnor par le théorème I.2.6. Cela provient du fait que W prend ses valeurs dans la *partie invariante* de $S(sl_2)^{\otimes n}[[\hbar]]$, et d'un argument de dimension simple. Plus précisément, soit W_n la restriction de W^U au sous-espace $\mathcal{C}(n)$ engendré par les diagrammes connexes et simplement connexes ayant l sommets univalents coloriés par n éléments distincts. Alors W_l prend ses valeurs dans Inv$(sl_2^{\otimes n})$, dont la dimension est donnée par le 'nombre Riordan' [1] R_n, alors que la dimension de sa source est donnée par le groupe symétrique S_{n-2}. En petit degré, cela donne

n	2	3	4	5	6	7	8	9
dim $\mathcal{C}(n)$	1	1	2	6	24	120	720	5040
dim Inv$(sl_2^{\otimes n})$	1	1	3	6	15	36	91	232

Le système de poids W_n n'est donc manifestement pas injectif pour $n \geq 6$...

Reste la question de la surjectivité. Pour cela, il est déjà utile d'avoir une description *ad hoc* d'une base de Inv$(sl_2^{\otimes n})$, l'espace d'arrivée de ces applications W_n. Frenkel et Khovanov ont développé un calcul graphique pour décrire les bases duales canoniques de (produits tensoriels de) représentations irréductibles de dimension finie de $U_q(sl_2)$ [FK97]. Il s'avère que l'on peut utiliser le langage des diagrammes de Jacobi pour donner une base de Inv$(V_2^{\otimes n})$, où V_2 est la représentation 3–dimensionelle, via une modification de la base duale canonique de Frenkel-Khovanov par certaines insertions de copies du projecteur de Jones-Wenzl p_2. En $q = 1$, on peut ainsi obtenir une description de Inv$(sl_2^{\otimes n})$ qui semble bien adaptée à notre problème : les tenseur invariants sont exprimés en termes de diagrammes de Jacobi, qui s'avèrent bien satisfaire les relations usuelles AS et IHX, ainsi que la relation sl_2 de Chmutov et Varchenko [CV97]. Ce calcul graphique doit permettre une étude précise des systèmes de poids sl_2 ; il pourrait aussi présenter un certain intérêt du point de vue de la théorie de la représentation, et il serait intéressant d'en voir d'autres applications ou interprétations. En particulier, cette base de Inv$(V_2^{\otimes n})$ évoquée plus haut, exprimée en termes de diagrammes de Jacobi, mérite une étude plus approfondie ; d'une part, elle semble pouvoir présenter de bonnes propriétés (de type intégralité ou positivité), et d'autre part, ce calcul graphique pourrait permettre d'exhiber, au niveau de Inv$(V_2^{\otimes n})$, des

1. Les nombres Riordians sont définis par $R_2 = R_3 = 1$ et $R_n = (n-1)(2R_{n-1} + 3R_{n-2})/(n+1)$; voir `https://oeis.org/A005043` pour de nombreuses interprétations de cette généralisation des nombres de Catalan.

versions 'quantifiées' des relations usuelles sur les diagrammes de Jacobi (AS,IHX) - et éventuellement s'étendre aux autres représentations irréductibles de dimension finie de $U_q(sl_2)$.

III.4. Invariants de clôture et conjecture de Goussarov–Habiro

La conjecture de Goussarov–Habiro pour les enlacements d'intervalles (Conjecture I.1.6) demeure complètement ouverte, en dehors des cas traités dans les travaux exposés ci-dessus.

L'analyse systématique des invariants de type fini de petits degrés initiée dans [9] a cependant apporté quelques éclairages. C'est d'une part ce travail qui a suggéré la relation entre invariants de clôture et invariants de Milnor établie dans [13]. Mais plus généralement, ce travail de classification montre que les invariants de type fini entiers de degré < 5 sont en fait engendrés par les invariants de clôture (induits par les polynômes de HOMFLYPT et de Jones), donc essentiellement par des invariants de *nœuds*. Mais quelle est exactement la puissance de cette classe d'invariants ? Ceci suggère le

Problème III.3. Déterminer quels invariants de type fini des enlacements d'intervalles à valeurs entières ne sont pas réalisés par des invariants de clôture.

Une autre difficulté centrale dans l'étude de la conjecture de Goussarov–Habiro réside dans l'existence d'éléments de torsion dans le groupe des classes de C_k-équivalence des enlacements d'intervalles (et l'existence d'invariants de type fini susceptibles de détecter de tels éléments). Il est possible que ce phénomène se produise dès le degré 5, avec les enlacements de 2 intervalles L et L' représentés dans la figure III.1 ci-dessous. Ces deux enlacements d'intervalles peuvent être vus comme des analogues topologiques des diagrammes de cordes D et D' représentés dans la même figure : I. Dogolazky montra que $D - D'$ est un élement de 2-torsion de l'algèbre $\mathcal{A}(2)$ des diagrammes de cordes sur deux brins [Dog98]. T. Stanford montra par la suite dans [Sta02] que cet élément de torsion ne peut pas être 'intégré' en un invariant de type fini de degré 5 à valeurs dans $\mathbb{Z}_2$, autrement dit qu'il n'existe pas d'analogue de l'intégrale de Kontsevich à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$. Ceci implique qu'aucun invariant de type fini à valeurs dans $\mathbb{Z}_2$ ne peut distinguer

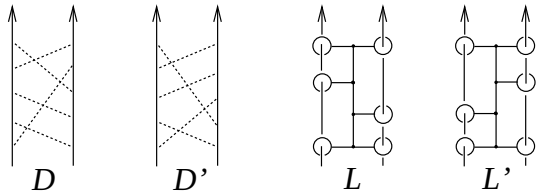


Figure III.1. Les diagrammes D et D' de Dogolazky, et les enlacements L et L'.

L et L'. Comme, d'autre part, nous avons récemment montré dans [16] que la conjecture de Goussarov–Habiro est valide pour $\mathcal{SL}(2)/C_6$, il suit que soit D et D' sont C_6-équivalents, soit ils fournissent un élément de 2-torsion dans $\mathcal{SL}(2)/C_6$. Il semble nécessaire de déterminer ce qu'il en est exactement : non seulement cela est susceptible d'avoir des conséquences sur les degrés supérieurs, mais cette paire d'enlacements d'intervalles réapparaît dans d'autres contextes, comme on le verra plus bas.

D'autre part, notons que les techniques utilisées dans [16] pour démontrer que le groupe $\mathcal{SL}(2)/C_k$ est abélien pour $k \leq 6$ (et ainsi obtenir la conjecture de Goussarov–Habiro) peuvent dans une large mesure encore s'appliquer au seul cas laissé ouvert, i.e. au cas $k = 7$. Autrement dit, on peut donner un système de générateurs pour $\mathcal{SL}(2)/C_7$ et tenter de montrer directement que deux éléments de cet ensemble commutent dans $\mathcal{SL}(2)/C_7$. Par du calcul de clasper quelque peu 'avancé' (utilisant des généralisations des lemmes usuels donnés dans [Hab00b], tenant compte des termes d'ordre supérieur), on peut montrer que c'est effectivement le cas, à l'exception d'*un* calcul restant ouvert. Plus précisément, nous avons que $\mathcal{SL}(2)/C_7$ est abélien si et seulement si les enlacements Y et H représentés à gauche de la figure III.2 commutent dans

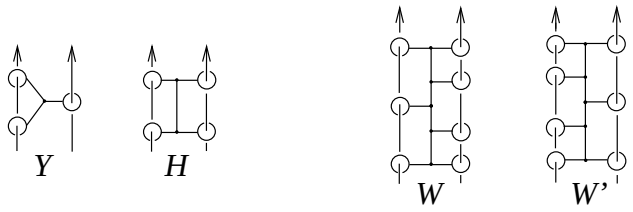


FIGURE III.2.

$\mathcal{SL}(2)/C_7$. Il est remarquable que les enlacements D et D' mentionnés plus haut apparaissent naturellement dans ce calcul de commutativité (voir par exemple le lemme 2.2 dans [16]), et que la question est à nouveau intimement liée à l'existence d'éléments de 2-torsion dans les groupes de C_k-équivalence des enlacements d'intervalles, voir le théorème I.3.6.

III.5. Concordance et invariants de Arf d'ordre supérieur

La version 'concordance' de la conjecture de Goussarov–Habiro (Question I.3.12) concerne cette notion de C_k-concordance qui, on l'a déjà dit plus haut, est équivalente à la *Whitney tower concordance d'ordre* $k-1$ étudiée dans [CST12]. Dans cet article, Conant, Schneiderman et Teichner montrent que la relation de C_k-concordance est complètement caractérisée par trois classes d'invariants : les invariants de Milnor de longueur $k+1$, et ce qu'ils appellent des *invariants de Sato–Levine d'ordre supérieur* et des *invariants de Arf d'ordre supérieur*. Les premiers sont en fait essentiellement des reductions modulo 2 d'invariants de Milnor de longueur $k+1$ (de la même façon que l'invariant de Sato–Levine coïncide avec l'invariant $\mu(iijj)$ pour les entrelacs algébriquement scindés), et apparaissent sous cette forme dans le théorème I.3.2. Les seconds sont de nouveaux invariants de concordance qui sont encore complètement à comprendre. Ces invariants de Arf d'ordre supérieur Arf_k $(k \geq 1)$ sont à valeurs dans $\mathbb{Z}_2$, et apparaissent en degré $4k-2$ $(k \geq 1)$: l'invariant de Arf classique $\mathrm{Arf}_1 = \mathrm{Arf}$ apparaît ainsi en degré 2, et c'est donc en degré 6 que l'on rencontre le premier 'nouvel' invariant Arf_2.[2]

Ces invariants de Arf supérieurs ne sont cependant pas donnés par une définition intrinsèque : dans les termes des travaux exposés dans la section I.3.2, ces invariants sont en fait définis dualement à certaines paires de générateurs du groupe $\mathcal{SL}(n)/C_k$, qui sont d'ordre 2 et que les invariants de Milnor ne peuvent distinguer. Par exemple, l'invariant Arf_2 détecte ainsi l'enlacement $W' \cdot W^{-1}$ dans $\mathcal{SL}(2)/C_7$, où W et W' sont représentés à droite de la figure III.2, et les invariants d'ordre supérieurs sont de même 'duaux' à certaines paires possédant une symétrie analogue.

Comme le soulignent Conant, Schneiderman et Teichner, la question suivante reste ouverte :

PROBLÈME III.4. Déterminer si les invariants de Arf d'ordre supérieurs Arf_k sont non-triviaux pour $k > 1$.

De fait, l'approche en terme de claspers permet de montrer facilement que si l'invariant Arf_n est trivial, alors tous les invariants Arf_m avec $m \geq n$ sont eux aussi triviaux (une remarque qui est due à Jim Conant). Ainsi, il est crucial pour cette question de déterminer si les enlacements W et W' sont C_7-concordants : une réponse affirmative impliquerait la trivialité de tous les invariants de Arf supérieurs.
A nouveau, on peut noter que cette question est reliée à celle soulevée plus haut sur les enlacements L et L' : on peut en effet montrer que L est C_7-concordant au produit $L' \cdot W \cdot W'$.

III.6. Théorème de Kirby pour la chirurgie borroméenne

On l'a vu, l'opération de chirurgie borroméenne, bien qu'à première vue peut-être assez peu

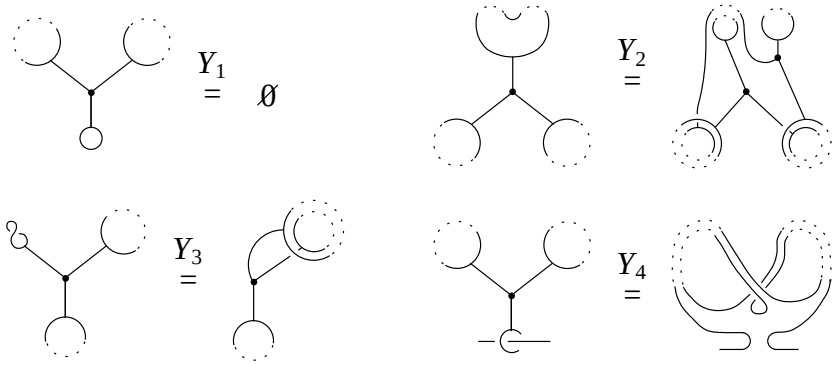
2. On notera que, dans [9], nous avons arrêté notre étude au degré 6, précisément parce que nous ne diposions pas d'invariant explicite susceptible de détecter de telles paires.

naturelle, est un outil performant pour l'étude des variétés de dimension 3, en particulier en lien avec la théorie d'invariants de type fini. Ceci motive la question suivante :

Problème III.5. Donner un ensemble complet de mouvements locaux sur les entrelacs de chirurgie borroméenne qui relie toutes présentations d'une même sphère d'homologie.

Le résultat principal de [8] exprime la variation de l'invariant de Casson λ sous une chirurgie borroméene. On peut se demander dans quelle mesure cette formule, accompagnée de la normalisation usuelle $\lambda(S^3) = 0$, détermine l'invariant de Casson. Ce serait là une première application d'un tel théorème 'à la Kirby'. On peut par ailleurs envisager d'appliquer plus généralement cette question aux cylindres d'homologie (on a en effet vu que ces derniers peuvent être définis comme l'ensemble des 3–variétés obtenues par chirurgie borroméenne dans une surface épaissie), et leurs invariants étudiés dans les travaux des sections II.3 et II.4.

On connaît déjà un certain nombre de mouvements sur les entrelacs de chirurgie borroméenne, qui préservent la classe d'équivalence des variétés obtenues par chirurgie. La figure ci–dessous donne quelques–uns de ces mouvements (que l'on trouve déjà essentiellement dans [GGP01], par exemple) [3]



Il faut aussi ajouter la relation 'type IHX' récemment étudiée en détail par Habiro et Widmer [HW14, §6.2].

Une stratégie que l'on envisage pour attaquer le Problème III.5, dont nous avons dessiné les contours avec K. Habiro, repose sur notre connaissance du groupe de Torelli, via la construction de Heegaard. En effet, on l'a vu, toute sphère d'homologie entière s'obtient de S^3 en 'tordant' par un élément du groupe de Torelli d'une surface plongée (voir section II.3.1). Un théorème de W. Pitsch [Pit09, Thm. 1] donne une description intrinsèque de la relation d'équivalence sur le groupe de Torelli (définie usuellement en termes de classe double), qui induit une bijection avec l'ensemble des sphères d'homologie entière. Cette relation d'équivalence implique la multiplication (à droite ou à gauche) par des éléments du sous-groupe de Torelli qui se prolongent à l'un ou l'autre des corps en anses dans le scindement de Heegaard ; de fait, il est possible de reformuler ce résultat en termes de chirurgie borroméenne, de telle sorte que l'on est bien ramené à une étude du groupe de Torelli, et plus précisément à formuler une présentation de ce groupe en termes de chirurgie borroméenne. Pour cela, on peut utiliser les travaux de Putman [Put09], qui donnent une présentation 'infinie' du groupe de Torelli. Cette présentation (qui utilise une classe non standard de générateurs impliquant les twists de Dehn sur une paire de courbes s'intersectant en deux points) a l'avantage de reposer sur un nombre fini de types de relations, mais certaines d'entre elles, dérivées d'identités formelles sur les commutateurs d'un groupe, admettent une infinité de réalisations topologiques. Toute la difficulté repose sur une analyse de ces relations – en fait, une simplification de la présentation de Putman – qui permette une interprétation en termes de chirugie borroméenne. Bien sûr, une telle simplification serait en soi d'un grand intérêt.

3. Dans cette figure, on utilise la convention usuelle pour représenter les entrelacs de chirurgie borroméenne par des 'graphes en Y', voir figure II.1.

III.7. Johnson–équivalence pour les sphères d'homologie

Le travail de caractérisation des relations de Y_k et J_k-équivalence sur les cylindres d'homologie initiée dans [1] et [15] peut certainement être poursuivi en degré supérieur.

Au delà de l'intérêt que de telles caractérisations présentent, l'idée est ici de mettre davantage en lumière les liens entre théorie de type fini et invariants classiques, en donnant en particulier une interprétation diagrammatique de ces derniers, mais aussi, et peut-être surtout, de généraliser ou étendre des résultats connus sur le groupe de difféotopies. L'article [1] (degré 1) apportait ainsi un éclairage nouveau sur le calcul par D. Johnson de l'abélianisé du groupe de Torelli et sur les invariants de Johnson-Birman-Craggs ; de même, comme vu dans la section II.3, l'article [15] (degré 2) donne une extension du cœur de Casson et des généralisations de résultats de Morita et Pitsch sur la structure des sphères d'homologie entière.

Une première approche naïve du cas du degré 3 (mais c'est comme cela qu'a commencé l'étude des cas précédents !) suggère que la caractérisation de la Y_4-équivalence pourrait ne pas nécessiter d'invariant fondamentalement nouveau. En effet, la partie de degré 3 de l'espace des diagrammes de Jacobi coloriés (dans lequel le foncteur LMO prend ses valeurs) est engendrée par les deux types de diagrammes représentés ci–dessous

(Il est connu par Habiro [Hab00b] que, dans le cas des sphères d'homologie, la Y_4-équivalence est caractérisée par l'invariant de Casson.) Si l'on se réfère aux cas précédents, ceci suggère que le groupe des classes de Y_4-équivalence des cylindres d'homologie Y_3-équivalents au trivial pourrait être classifié par le troisième homomorphisme de Johnson τ_3 (donc par l'homomorphisme ρ_4) et un terme de degré 3 à extraire de la torsion de Reidemeister relative (relativement à la filtration I-adique)[4]. Le problème est alors d'en déduire un résultat général de classification pour la Y_4-équivalence.

Il serait plus intéressant encore d'en déduire l'analogue pour la J_4-équivalence, en suivant la stratégie esquissée dans la section II.3.3. En effet, si l'on peut démontrer l'existence une sphère d'homologie qui soit J_4-équivalente à S^3 et ayant invariant de Casson égal à 1, alors il serait possible d'utiliser rigoureusement le même argument pour démontrer que toute sphère d'homologie entière est J_4-équivalente à S^3. Il serait très intéressant de savoir si une telle généralisation des théorèmes de Morita–Pitsch existe effectivement.

III.8. Invariant 'homotopique' des 3–variétés et representation diagrammatique du groupe de difféotopies

Le travail présenté dans la section II.4, et issu de [10], offre de multiples perspectives de recherche. Nous en présentons ici quelques-unes, ainsi que les (rares) progrès et (multiples) écueils rencontrés jusqu'à présent dans ces directions.

Rappelons que la construction de l'invariant de cobordismes ∇ ne fait intervenir qu'une version faible de l'invariant AMR des entrelacs dans $\Sigma \times [0,1]$. En effet, comme noté à la Remarque II.4.2, ce dernier prend ses valeurs dans une algèbre de diagrammes *sur* la surface Σ – ou, de façon équivalente, de diagrammes coloriés par des informations homotopiques – et la construction de [10] oublie ces informations homotopiques. Il serait très intéressant de parvenir à construire un invariant de variétés de dimension 3 à partir de cette version 'homotopique' de l'invariant AMR. Ceci pourrait permettre d'étendre de façon non-triviale les invariants de type fini à l'ensemble des 3–variétés, et plus particulièrement l'invariant universel LMO ; rappelons en effet que l'invariant LMO est nul pour toute 3-variété dont le premier nombre de Betti est plus grand que 3 [Hab96],

4. Répétons qu'il s'agit là d'une première approche naïve : un examen plus détaillé pourrait révéler la nécessité d'invariants additionnels, par exemple liés à des phénomènes de torsion.

et que la quête d'un raffinement de cet invariant aux variétés homologiquement non-triviales est un problème ouvert important [Oht02a, §11.5].

Malheureusement, l'approche naïve consistant en essayer de post-composer la version 'homotopique' de l'invariant AMR par les applications ι de LMO dans l'esprit de (II.1) et (II.12) s'avère assez immédiatement mal définie, si bien que cette approche, qui se base sur les présentations de chirurgie des variétés, semble vouée à l'échec (ou du moins nécessite une idée radicalement nouvelle).

On peut néanmoins espérer employer ces mêmes outils sur les présentations de variétés par diagrammes de Heegaard. En effet, on peut réaliser un diagramme de Heegaard sur Σ comme un entrelacs parallélisé de $\Sigma \times [0,1]$, afin de lui appliquer l'invariant AMR, puis LMO. Il faut assurer les invariances par stabilisation et glissement d'anses. Mais, ayant fait un choix de graphe épais (pour l'invariant AMR), donc de paramétrisation de la surface de Heegaard Σ, nous devons aussi contrôler ce dernier choix, et donc assurer l'invariance par l'action du groupe de difféotopies. Nous ne connaissons pas à ce jour de méthode pour cela qui ne rentre pas en conflit avec les autres problèmes d'invariance, et ne disposons que d'une construction 'partielle', et uniquement pour les 3–variétés closes munies d'une paramétrisation de leur surface de Heegaard (d'une manière comparable à ce que l'on a vu pour l'invariant de Casson dans la section II.3.1).

Ainsi, le problème suivant demeure largement ouvert, et mériterait d'être plus amplement investigué :

Problème III.6. Construire un invariant des variétés de dimension 3, via leurs diagrammes de Heegaard, et reposant sur l'invariant (homotopique) AMR et (peut-être une variante de) l'invariant LMO.

Une autre perspective intéressante porte sur la représentation diagrammatique du groupe de difféotopies (et plus généralement du groupoïde de Ptolémée) donnée dans le théorème II.4.5.

Cette représentation s'avère, en pratique, extrêmement difficile à manipuler, principalement du fait que notre invariant ∇ repose sur l'application ι déjà utilisée pour l'invariant LMO. Mais on peut contourner ce problème. Nous montrons en effet dans [10, Lem. 5.6] comment l'invariant AMR d'entrelacs dans $\Sigma \times [0,1]$ peut être utilisé pour reconstruire le relèvement de Morita–Penner du premier homomorphisme de Johnson de la section II.4.5. Ce lemme technique met en évidence le fait que, lorsque l'on travaille ainsi au niveau des invariants d'entrelacs (et non des 3–variétés), les calculs sont très considérablement simplifiés. Ceci motive le

Problème III.7. Construire et étudier une représentation diagrammatique du groupe de difféotopies définie à l'aide de l'invariant d'entrelacs AMR, et/ou de sa version faible.

Si la 'version faible' (i.e. en oubliant les informations homotopiques) d'une telle représentation peut sembler a priori moins intéressante, elle présente en revanche l'intérêt d'être bien mieux calculable ! De fait, on a pu montrer très récemment que l'invariant AMR (faible, ou homotopique, ou tout autre quotient de ce dernier) se relève lui-même au groupoïde de Ptolémée, en utilisant une version coloriée de ce groupoïde due à Kashaev [Kas12]. Cette dernière utilise des triangulations idéales où chaque triangle a un sommet distingué : dualement, on retrouve précisément la donnée combinatoire supplémentaire nécessaire à la définition de l'invariant AMR (voir section II.4.1.2). On se débarasse ainsi de l'algorithme utilisé dans [10] pour extraire cette donnée du graphe épais, ce qui simplifie très nettement les calculs : les relations du groupoïde peuvent être vérifiées directement (la relation pentagonale apparaissant comme une conséquence de la relation pentagone pour les associateurs), et ne requièrent plus d'avoir un invariant universel – d'où la possibilité de considérer la version faible. Les représentations ainsi obtenues s'avèrent en outre tout aussi intéressantes – nous pouvons, par exemple, reconstruire le relèvement du premier homomorphisme de Johnson de Morita et Penner de la section II.4.5.

Par ailleurs, toujours dans l'esprit de la section II.4.5, il est naturel d'espérer que des calculs

en plus grand degré puissent permettre d'obtenir des relèvements au groupoïde de Ptolémée des homomorphismes de Johnson d'ordre supérieur, par exemple dans l'esprit des travaux de Bene–Kawazumi–Penner [BKP09], voire d'appliquer cela à l'invariant de Casson.

Bibliographie

Les articles [1 ; 2 ; 3] sont issus de la thèse [0]. Les articles [4 ; 6 ; 5 ; 7 ; 8 ; 11 ; 12] sont issus de travaux effectués pendant mes années de postdocs. Les articles [9 ; 10 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18] constituent mon travail depuis mon arrivée à l'institut Fourier (bien que le travail de l'article [10] ait été largement entamé lors de mon dernier postdoc).

Travaux de l'auteur

[0] J.-B. Meilhan. "Invariants de type fini des cylindres d'homologie et des string-links". Français. Thèse de doct. Université de Nantes, 2003.

[1] G. Massuyeau et J.-B. Meilhan. "Characterization of Y_2-equivalence for homology cylinders". Dans : *J. Knot Theory Ramifications* 12.4 (2003), p. 493–522.

[2] J.-B. Meilhan. "On Vassiliev invariants of order two for string links". Dans : *J. Knot Theory Ramifications* 14.5 (2005), p. 665–687.

[3] J.-B. Meilhan. "Goussarov-Habiro theory for string links and the Milnor-Johnson correspondence". Dans : *Topology Appl.* 153.14 (2006), p. 2709–2729.

[4] K. Habiro et J.-B. Meilhan. "On the Kontsevich integral of Brunnian links". Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 6 (2006), p. 1399–1412.

[5] J.-B. Meilhan. "On surgery along Brunnian links in 3-manifolds". Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 6 (2006), p. 2417–2453.

[6] K. Habiro et J.-B. Meilhan. "Finite type invariants and Milnor invariants for Brunnian links". Dans : *Internat. J. Math.* 19.6 (2008), p. 747–766.

[7] J.-B. Meilhan et A. Yasuhara. "On C_n-moves for links". Dans : *Pacific J. Math.* 238.1 (2008), p. 119–143.

[8] J.-B. Meilhan. "Borromean surgery formula for the Casson invariant". Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 8.2 (2008), p. 787–801.

[9] J.-B. Meilhan et A. Yasuhara. "Characterization of finite type string link invariants of degree < 5". Dans : *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 148.3 (2010), p. 439–472.

[10] J. E. Andersen, A. J. Bene, J.-B. Meilhan et R. C. Penner. "Finite type invariants and fatgraphs". Dans : *Adv. Math.* 225.4 (2010), p. 2117–2161.

[11] J.-B. Meilhan et A. Yasuhara. "Whitehead double and Milnor invariants". Dans : *Osaka J. Math.* 48.2 (2011), p. 371–381.

[12] N. Habegger et J.-B. Meilhan. "On the classification of links up to finite type". Dans : *Topology and physics*. T. 12. Nankai Tracts Math. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008, p. 138–150.

[13] J.-B. Meilhan et A. Yasuhara. "Milnor invariants and the HOMFLYPT polynomial". Dans : *Geom. Topol.* 16.2 (2012), p. 889–917.

[14] J.-B. Meilhan, E. Seida et A. Yasuhara. "Local moves for links with common sublinks". Dans : *Topology Appl.* 160.6 (2013), p. 836–843.

[15] G. Massuyeau et J.-B. Meilhan. "Equivalence relations for homology cylinders and the core of the Casson invariant". Dans : *Trans. Amer. Math. Soc.* 365.10 (2013), p. 5431–5502.

[16] J.-B. Meilhan et A. Yasuhara. "Abelian quotients of the string link monoid". Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 14.3 (2014), p. 1461–1488.

[17] J.-B. Meilhan et S. Suzuki. "The universal sl_2 invariant and Milnor invariants". Dans : *ArXiv e-prints* (2014). arXiv :1405.3062.

[18] B. Audoux, P. Bellingeri, J.-B. Meilhan et E. Wagner. "Homotopy classification of ribbon tubes and welded string links". Dans : *ArXiv e-prints* (2014). arXiv :1407.0184.

Références

[ABP09] J. E. Andersen, A. J. Bene et R. C. Penner. "Groupoid extensions of mapping class representations for bordered surfaces". Dans : *Topology Appl.* 156.17 (2009), p. 2713–2725.

[AL05] E. Auclair et C. Lescop. "Clover calculus for homology 3-spheres via basic algebraic topology." English. Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 5 (2005), p. 71–106.

[AMR96] J. E. Andersen, J. Mattes et N. Reshetikhin. "The Poisson structure on the moduli space of flat connections and chord diagrams". Dans : *Topology* 35.4 (1996), p. 1069–1083.

[Bir71] J. S. Birman. "On Siegel's modular group". Dans : *Math. Ann.* 191 (1971), p. 59–68.

[BKP09] A. J. Bene, N. Kawazumi et R. C. Penner. "Canonical extensions of the Johnson homomorphisms to the Torelli groupoid". Dans : *Adv. Math.* 221.2 (2009), p. 627–659.

[BL93] J. S. Birman et X.-S. Lin. "Knot polynomials and Vassiliev's invariants". Dans : *Invent. Math.* 111.2 (1993), p. 225–270.

[BN95a] D. Bar-Natan. "On the Vassiliev knot invariants". Dans : *Topology* 34.2 (1995), p. 423–472.

[BN95b] D. Bar-Natan. "Vassiliev homotopy string link invariants". Dans : *J. Knot Theory Ramifications* 4.1 (1995), p. 13–32.

[BN96] D. Bar-Natan. *Some computations related to Vassiliev invariants*. disponible à `http://www.math.toronto.edu/~drorbn/`. 1996.

[BNG96] D. Bar-Natan et S. Garoufalidis. "On the Melvin-Morton-Rozansky conjecture." English. Dans : *Invent. Math.* 125.1 (1996), p. 103–133.

[BNGRT00] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis, L. Rozansky et D. P. Thurston. "Wheels, wheeling, and the Kontsevich integral of the unknot." English. Dans : *Isr. J. Math.* 119 (2000), p. 217–237.

[BP01] R. Benedetti et C. Petronio. "Reidemeister-Turaev torsion of 3-dimensional Euler structures with simple boundary tangency and pseudo-Legendrian knots". Dans : *Manuscripta Math.* 106.1 (2001), p. 13–61.

[BT99] A. Bartels et P. Teichner. "All two dimensions links are null homotopic." English. Dans : *Geom. Topol.* 3 (1999), p. 235–252.

[Cam05] J. E. P. P. de Campos. "Boundary theta curves in $\mathbf{S}^3$". Dans : *Tokyo J. Math.* 28.1 (2005), p. 283–288.

[CHM08] D. Cheptea, K. Habiro et G. Massuyeau. "A functorial LMO invariant for Lagrangian cobordisms". Dans : *Geom. Topol.* 12.2 (2008), p. 1091–1170.

[CM00] T. D. Cochran et P. Melvin. "Finite type invariants of 3-manifolds". Dans : *Invent. Math.* 140.1 (2000), p. 45–100.

[CST12] J. Conant, R. Schneiderman et P. Teichner. "Whitney tower concordance of classical links." English. Dans : *Geom. Topol.* 16.3 (2012), p. 1419–1479.

[CV97] S. Chmutov et A. Varchenko. "Remarks on the Vassiliev knot invariants coming from sl_2." English. Dans : *Topology* 36.1 (1997), p. 153–178.

[DK07] S. Duzhin et M. Karev. "Detecting the orientation of string links by finite type invariants." English. Dans : *Funct. Anal. Appl.* 41.3 (2007), p. 208–216.

[Dog98] I. Dogolazky. "Eine Abhandlung uber die Algebra der Schlingeldiagramme". German. Thèse de doct. University of Bonn, 1998.

[FGL02] C. Frohman, R. Gelca et W. LoFaro. "The A-polynomial from the noncommutative viewpoint." English. Dans : *Trans. Am. Math. Soc.* 354.2 (2002), p. 735–747.

[FK97] I. Frenkel et M. Khovanov. "Canonical bases in tensor products and graphical calculus for $U_q(sl_2)$." English. Dans : *Duke Math. J.* 87.3 (1997), p. 409–480.

[Gar04] S. Garoufalidis. "On the characteristic and deformation varieties of a knot." English. Dans : *Proceedings of the Casson Fest. Based on the 28th University of Arkansas spring lecture series in the mathematical sciences, Fayetteville, AR, USA, April 10–12, 2003 and the conference on the topology of manifolds of dimensions 3 and 4, Austin, TX, USA, May 19–21, 2003*. Coventry: Geometry et Topology Publications, 2004, p. 291–309.

[GGP01] S. Garoufalidis, M. Goussarov et M. Polyak. "Calculus of clovers and finite type invariants of 3-manifolds". Dans : *Geom. Topol.* 5 (2001), 75–108 (electronic).

[GL05] S. Garoufalidis et J. Levine. "Tree-level invariants of three-manifolds, Massey products and the Johnson homomorphism". Dans : *Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics*. T. 73. Proc. Sympos. Pure Math. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2005, p. 173–203.

[GM92] L. Guillou et A. Marin. "Notes sur l'invariant de Casson des sphères d'homologie de dimension trois". Dans : *Enseign. Math. (2)* 38.3-4 (1992). With an appendix by Christine Lescop, p. 233–290.

[Gou00] M. Goussarov. "Variations of knotted graphs. The geometric technique of n-equivalence". Dans : *Algebra i Analiz* 12.4 (2000), p. 79–125.

[Gou99] M. Goussarov. "Finite type invariants and n-equivalence of 3-manifolds". Dans : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 329.6 (1999), p. 517–522.

[Gus94a] M. Gusarov. "A new form of the Conway-Jones polynomial of oriented links." English. Dans : *Topology of manifolds and varieties. Transl. ed. by A. B. Sossinsky*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1994, p. 167–172. isbn : 0-8218-4124-6/hbk.

[Gus94b] M. Gusarov. "On n-equivalence of knots and invariants of finite degree." English. Dans : *Topology of manifolds and varieties. Transl. ed. by A. B. Sossinsky*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1994, p. 173–192. isbn : 0-8218-4124-6/hbk.

[Hab00a] N. Habegger. *Milnor, Johnson, and Tree Level Perturbative Invariants*. Preprint. 2000.

[Hab00b] K. Habiro. "Claspers and finite type invariants of links". Dans : *Geom. Topol.* 4 (2000), 1–83 (electronic).

[Hab96] N. Habegger. *A Computation of the Universal Quantum 3-manifold Invariant for Manifolds of Rank Greater than 2*. Preprint. 1996.

[Hil81] H. M. Hilden. "Representations of homology 3-spheres". Dans : *Pacific J. Math.* 94.1 (1981), p. 125–129.

[HL90] N. Habegger et X.-S. Lin. "The classification of links up to link-homotopy". Dans : *J. Amer. Math. Soc.* 3 (1990), p. 389–419.

[HM00] N. Habegger et G. Masbaum. "The Kontsevich integral and Milnor's invariants". Dans : *Topology* 39.6 (2000), p. 1253–1289.

[HM12] K. Habiro et G. Massuyeau. "From mapping class groups to monoids of homology cobordisms: a survey". English. Dans : (2012), p. 465–529.

[HW14] K. Habiro et T. Widmer. *Kirby calculus for null-homologous framed links in* 3*-manifolds*. 2014. arXiv :1404.0282.

[Jae90] F. Jaeger. "A combinatorial model for the homfly polynomial." English. Dans : *Eur. J. Comb.* 11.6 (1990), p. 549–557.

[Joh80] D. Johnson. "Quadratic forms and the Birman-Craggs homomorphisms". Dans : *Trans. Amer. Math. Soc.* 261.1 (1980), p. 235–254.

[Joh83] D. Johnson. "A survey of the Torelli group". Dans : *Low-dimensional topology (San Francisco, Calif., 1981)*. T. 20. Contemp. Math. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1983, p. 165–179.

[Joh99] J. Johannes. "A type 2 polynomial invariant of links derived from the Casson-Walker invariant." English. Dans : *J. Knot Theory Ramifications* 8.4 (1999), p. 491–504.

[Jon87] V. Jones. "Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials." English. Dans : *Ann. Math. (2)* 126 (1987), p. 335–388.

[Kan07] T. Kanenobu. "Finite type invariants of order 4 for 2-component links". Dans : *Intelligence of low dimensional topology 2006*. T. 40. Ser. Knots Everything. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, p. 109–115.

[Kas12] R. Kashaev. "Discrete Liouville equation and Teichmüller theory." English. Dans : *Handbook of Teichmüller theory. Volume III*. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2012, p. 821–851. isbn : 978-3-03719-103-3/hbk.

[Kas95] C. Kassel. *Quantum groups*. T. 155. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995, p. xii+531. isbn : 0-387-94370-6.

[Kho00] M. Khovanov. "A categorification of the Jones polynomial". Dans : *Duke Math. J.* 101.3 (fév. 2000), p. 359–426.

[KM11] P. Kronheimer et T. Mrowka. "Khovanov homology is an unknot-detector." English. Dans : *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* 113 (2011), p. 97–208.

[KM98] T. Kanenobu et Y. Miyazawa. "HOMFLY polynomials as Vassiliev link invariants". Dans : *Knot theory (Warsaw, 1995)*. T. 42. Banach Center Publ. Polish Acad. Sci., Warsaw, 1998, p. 165–185.

[KMT98] T. Kanenobu, Y. Miyazawa et A. Tani. "Vassiliev link invariants of order three". Dans : *J. Knot Theory Ramifications* 7.4 (1998), p. 433–462.

[Kon93] M. Kontsevich. "Vassiliev's knot invariants". Dans : *I. M. Gel'fand Seminar*. T. 16. Adv. Soviet Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 137–150.

[Kot13] Y. Kotorii. "The Milnor $\overline{\mu}$ invariants and nanophrases." English. Dans : *J. Knot Theory Ramifications* 22.2 (2013), p. 1250142, 28.

[Kot14] Y. Kotorii. *A relation between Milnor's* μ*-invariants and HOMFLYPT polynomial*. Preprint. 2014.

[KP11] O. Kravchenko et M. Polyak. "Diassociative algebras and Milnor's invariants for tangles." English. Dans : *Lett. Math. Phys.* 95.3 (2011), p. 297–316.

[Kup96] G. Kuperberg. "Detecting knot invertibility". Dans : *J. Knot Theory Ramifications* 5.2 (1996), p. 173–181.

[KY13] Y. Kotorii et A. Yasuhara. *Milnor invariants of length* $2k+2$ *for links with vanishing Milnor invariants of length* $\leq k$, Preprint. 2013.

[Law89] R. J. Lawrence. "A universal link invariant using quantum groups". Dans : *Differential geometric methods in theoretical physics (Chester, 1988)*. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989, p. 55–63.

[Law90] R. J. Lawrence. "A universal link invariant". Dans : *The interface of mathematics and particle physics (Oxford, 1988)*. T. 24. Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser. Oxford Univ. Press, New York, 1990, p. 151–156.

[LD88] J.-Y. Le Dimet. "Cobordisme d'enlacements de disques". Dans : *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* 32 (1988), p. ii+92.

[Les98] C. Lescop. "A sum formula for the Casson-Walker invariant". Dans : *Invent. Math.* 133.3 (1998), p. 613–681.

[Lev01] J. Levine. "Homology cylinders: an enlargement of the mapping class group". Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 1 (2001), 243–270 (electronic).

[Lev02] J. Levine. "Addendum and correction to: "Homology cylinders: an enlargement of the mapping class group"". Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 2 (2002), 1197–1204 (electronic).

[Lin91] X.-S. Lin. *Vertex models, quantum groups and Vassiliev's knot invariants*. Preprint. 1991.

[Lin97] X.-S. Lin. "Power series expansions and invariants of links". Dans : *Geometric topology (Athens, GA, 1993)*. T. 2. AMS/IP Stud. Adv. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, p. 184–202.

[LMO98] T. T. Q. Le, J. Murakami et T. Ohtsuki. "On a universal perturbative invariant of 3-manifolds". Dans : *Topology* 37.3 (1998), p. 539–574.

[Mas03] G. Massuyeau. "Spin Borromean surgeries." English. Dans : *Trans. Am. Math. Soc.* 355.10 (2003), p. 3991–4017.

[Mas07] G. Massuyeau. "Finite-type invariants of 3-manifolds and the dimension subgroup problem". Dans : *J. Lond. Math. Soc. (2)* 75.3 (2007), p. 791–811.

[Mat87] S. V. Matveev. "Generalized surgeries of three-dimensional manifolds and representations of homology spheres". Dans : *Mat. Zametki* 42.2 (1987), p. 268–278, 345.

[Mil54] J. Milnor. "Link groups". Dans : *Ann. of Math. (2)* 59 (1954), p. 177–195.

[Mil57] J. Milnor. "Isotopy of links. Algebraic geometry and topology". Dans : *A symposium in honor of S. Lefschetz*. Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1957, p. 280–306.

[Miz09] Y. Mizuma. "On the Casson invariant of homology 3-spheres of Mazur type." English. Dans : *Topology Appl.* 156.13 (2009), p. 2292–2294.

[MKS76] W. Magnus, A. Karrass et D. Solitar. *Combinatorial group theory.* English. Dover Books on Advanced Mathematics. New York: Dover Publications, Inc. XII, 444 p. $ 6.00 (1976). 1976.

[MN89] H. Murakami et Y. Nakanishi. "On a certain move generating link-homology". Dans : *Math. Ann.* 284.1 (1989), p. 75–89.

[Mor89] S. Morita. "Casson's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundles. I". Dans : *Topology* 28.3 (1989), p. 305–323.

[Mor91] S. Morita. "On the structure of the Torelli group and the Casson invariant". Dans : *Topology* 30.4 (1991), p. 603–621.

[Mor93] S. Morita. "Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces". Dans : *Duke Math. J.* 70.3 (1993), p. 699–726.

[MP08] S. Morita et R. C. Penner. "Torelli groups, extended Johnson homomorphisms, and new cycles on the moduli space of curves". Dans : *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 144.3 (2008), p. 651–671.

[Ng98] K. Y. Ng. "Groups of ribbon knots". Dans : *Topology* 37.2 (1998), p. 441–458.

[Oht02a] T. Ohtsuki. "Problems on invariants of knots and 3-manifolds." English. Dans : *Invariants of knots and 3-manifolds. Proceedings of the workshop, Kyoto, Japan, September 17–21, 2001*. Coventry: Geometry et Topology Publications, 2002, p. 377–572.

[Oht02b] T. Ohtsuki. *Quantum invariants*. T. 29. Series on Knots and Everything. A study of knots, 3-manifolds, and their sets. World Scientific Publishing, 2002, p. xiv+489. isbn : 981-02-4675-7.

[Oht96] T. Ohtsuki. "Finite type invariants of integral homology 3-spheres". Dans : *J. Knot Theory Ramifications* 5.1 (1996), p. 101–115.

[Pen04] R. C. Penner. "Decorated Teichmüller theory of bordered surfaces". Dans : *Comm. Anal. Geom.* 12.4 (2004), p. 793–820.

[Pen12] R. C. Penner. *Decorated Teichmüller theory.* English. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2012, p. xvii + 360. isbn : 978-3-03719-075-3/hbk.

[Pen87] R. C. Penner. "The decorated Teichmüller space of punctured surfaces". Dans : *Comm. Math. Phys.* 113.2 (1987), p. 299–339.

[Pen93] R. C. Penner. "Universal constructions in Teichmüller theory". Dans : *Adv. Math.* 98.2 (1993), p. 143–215.

[Pit08] W. Pitsch. "Integral homology 3-spheres and the Johnson filtration". Dans : *Trans. Amer. Math. Soc.* 360.6 (2008), p. 2825–2847.

[Pit09] W. Pitsch. "Trivial cocycles and invariants of homology 3-spheres." English. Dans : *Adv. Math.* 220.1 (2009), p. 278–302.

[Put09] A. Putman. "An infinite presentation of the Torelli group." English. Dans : *Geom. Funct. Anal.* 19.2 (2009), p. 591–643.

[Roz94] L. Rozansky. "Reshetikhin's formula for the Jones polynomial of a link: Feynman diagrams and Milnor's linking numbers". Dans : *J. Math. Phys.* 35.10 (1994). Topology and physics, p. 5219–5246.

[RT90] N. Y. Reshetikhin et V. G. Turaev. "Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups". Dans : *Comm. Math. Phys.* 127.1 (1990), p. 1–26.

[Sak08] T. Sakasai. "The Magnus representation and higher-order Alexander invariants for homology cobordisms of surfaces". Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 8.2 (2008), p. 803–848.

[Sta02] T. Stanford. "Some computational results on mod 2 finite-type invariants of knots and string links." English. Dans : *Invariants of knots and 3-manifolds. Proceedings of the workshop, Kyoto, Japan, September 17–21, 2001*. Coventry: Geometry et Topology Publications, 2002, p. 363–376.

[Sta65] J. Stallings. "Homology and central series of groups". Dans : *J. Algebra* 2 (1965), p. 170–181.

[Sta96] T. Stanford. "Braid commutators and Vassiliev invariants". Dans : *Pacific J. Math.* 174.1 (1996), p. 269–276.

[Str84] K. Strebel. *Quadratic differentials.* English. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Band 5. Berlin etc.: Springer-Verlag. XII, 184 p. (1984). 1984.

[Suz12] S. Suzuki. "On the universal sl_2 invariant of boundary bottom tangles." English. Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 12.2 (2012), p. 997–1057.

[TKS] Y. Takabatake, T. Kuboyama et H. Sakamoto. *stringcmp – Faster Calculation for Milnor invariant*. Disp. à `https://code.google.com/p/stringcmp/`.

[Tra88] L. Traldi. "Conway's potential function and its Taylor series". Dans : *Kobe J. Math.* 5.2 (1988), p. 233–263.

[Vas90] V. A. Vassiliev. "Cohomology of knot spaces". Dans : *Theory of singularities and its applications*. T. 1. Adv. Soviet Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, p. 23–69.

[Wal68] F. Waldhausen. "On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large." English. Dans : *Ann. Math. (2)* 87 (1968), p. 56–88.

[Wal92] K. Walker. *An extension of Casson's invariant.* English. 1992, p. v + 131. isbn : 0-691-08766-0/hbk; 0-691-02532-0/pbk.

[Wil98] S. Willerton. *Vassiliev invariants as polynomials.* English. Jones, Vaughan F. R. (ed.) et al., Knot theory. Proceedings of the mini-semester, Warsaw, Poland, July 13–August 17, 1995. Warszawa: Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Banach Cent. Publ. 42, 457-463 (1998). 1998.

[Wit89] E. Witten. "Quantum field theory and the Jones polynomial". Dans : *Comm. Math. Phys.* 121.3 (1989), p. 351–399.

[Yas03] A. Yasuhara. "C_k-moves on spatial theta-curves and Vassiliev invariants." English. Dans : *Topology Appl.* 128.2-3 (2003), p. 309–324.

[Yas09a] A. Yasuhara. "Classification of string links up to self delta-moves and concordance". Dans : *Algebr. Geom. Topol.* 9.1 (2009), p. 265–275.

[Yas09b] A. Yasuhara. "Self delta-equivalence for links whose Milnor's isotopy invariants vanish". Dans : *Trans. Amer. Math. Soc.* 361.9 (2009), p. 4721–4749.