



HAL
open science

Méthode XFEM et modèles réduits en dynamique des structures et en vibro-acoustique

Antoine Legay

► **To cite this version:**

Antoine Legay. Méthode XFEM et modèles réduits en dynamique des structures et en vibro-acoustique. Mécanique des structures [physics.class-ph]. INSA Lyon; Université Claude Beranrd Lyon 1, 2015. tel-01598503

HAL Id: tel-01598503

<https://hal.science/tel-01598503v1>

Submitted on 5 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année 2015

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée devant

l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon
et l'Université Claude Bernard LYON I

Méthode XFEM et modèles réduits en dynamique des structures et
en vibro-acoustique

par
Antoine Legay

Soutenue le 23 novembre 2015 devant la commission d'examen

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Pr. Louis Jézéquel	École centrale de Lyon
	Pr. Patrick Laborde	Institut de Mathématiques de Toulouse
	Pr. Morvan Ouisse	ENSMM, Besançon
<i>Examineurs :</i>	Dr. HDR Thouraya Baranger	Université Lyon I
	Pr. Alain Combescure	INSA de Lyon
	Pr. Pierre Villon	UTC, Compiègne

Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, Cnam
EA 3196

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Introduction et motivations	5
1.2	Axes de recherche et organisation de ce mémoire	6
2	Contributions à XFEM	11
2.1	Introduction	11
2.2	Méthode des éléments finis étendus	12
2.2.1	Espace des solutions du problème de référence	12
2.2.2	Espace des solutions du problème discrétisé : partie standard	13
2.2.3	Espace des solutions du problème discrétisé : partie enrichie	15
2.2.4	Localisation de la discontinuité	16
2.2.5	Intégration numérique des éléments enrichis	16
2.2.6	Application à un problème d'élasticité linéaire	17
2.3	Enrichissement d'éléments finis spectraux	19
2.3.1	Motivations	19
2.3.2	Espace discrétisé de la partie standard	20
2.3.3	Construction de l'espace discrétisé enrichi	20
2.3.4	Principaux résultats	22
2.4	Enrichissement d'éléments finis espace-temps	25
2.4.1	Motivations	25
2.4.2	Hypothèses	27
2.4.3	Espace discrétisé de la partie standard	28
2.4.4	Construction de l'espace discrétisé enrichi	29
2.4.5	Résolution du problème couplé	30
2.4.6	Principaux résultats	30
2.5	Conclusion sur mes apports à la méthode XFEM	32
3	Modélisation des problèmes vibro-acoustique	33
3.1	Introduction	34
3.2	Formulation et discrétisation du problème vibro-acoustique sans dissipation	34
3.3	Problème vibro-acoustique avec utilisation de matériaux poreux	37
3.3.1	Introduction	37
3.3.2	Modélisation du problème vibro-acoustique avec matériaux poreux	38

3.3.3	Réduction de modèle du fluide acoustique	40
3.4	Vibro-acoustique pour des structures minces	44
3.4.1	Introduction	44
3.4.2	Enrichissement du champ de pression	45
3.4.3	Écriture du problème couplé discrétisé	46
3.4.4	Réduction de la structure	47
3.4.5	Réduction du fluide par méthode de synthèse modale	47
3.4.6	Système réduit	48
3.4.7	Application	48
3.4.8	Conclusion sur mes apports à la modélisation de problèmes vibro- acoustiques	50
4	Modélisation des structures amorties	53
4.1	Introduction	53
4.2	Modèle simplifié pour les structures de révolution	55
4.3	Structures sandwich visco-élastiques	57
4.3.1	Introduction	57
4.3.2	Modélisation des lois de comportement des matériaux visco-élastiques	59
4.3.3	Prise en compte de l'incompressibilité	61
4.3.4	Modélisation de structures sandwich avec matériaux visco-élastiques	61
4.3.5	Réduction de modèle de structures sandwich à partir de bases mo- dales	69
4.3.6	Sous-structuration dynamique	70
4.4	Extensions aux structures en grandes transformations	72
4.5	Conclusion sur mes apports à la modélisation des structures amorties . . .	77
5	Conclusions et axes de recherche envisagés	79
5.1	Conclusions	79
5.2	Axes de recherche envisagés à court terme	80
5.3	Une proposition d'étude à court terme	82
5.4	Un domaine d'application possible à plus long terme : l'archéologie	83

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction et motivations

Ce mémoire résume les travaux de recherche que j'ai menés et auxquels j'ai contribué, depuis ma thèse, dans le domaine de la modélisation numérique de problèmes mécaniques, liés à la réduction des vibrations des structures et la réduction du bruit dans des cavités acoustiques couplées à des structures. Ils ont été effectués en lien avec des entreprises industrielles comme le CNES, la DGA, Airbus Defence and Space, Thalès Alenia-Space et la DCNS qui souhaitent disposer d'outils numériques rapides en phase de conception. En effet, pendant la phase exploratoire de conception, les ingénieurs sont souvent amenés à optimiser leurs solutions techniques afin de satisfaire aux critères du cahier des charges. Ils souhaitent alors disposer d'outils de modélisation numérique efficaces et suffisamment précis pour évaluer une solution technique rapidement, voire pouvoir paramétrer le modèle numérique en fonction des données à optimiser. Pour gagner en temps de calcul, ces outils sont alors souvent basés sur des modèles réduits (projection sur base réduite par exemple) et/ou des modèles simplifiés (modèle poutre par exemple). Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire suivent cette ligne directrice qui se décline en deux aspects :

- réduire les temps de calcul sans affecter sensiblement la qualité des résultats,
- permettre une étude paramétrique à moindre coût.

Pour parvenir à ces objectifs, les méthodes développées et leurs liens avec les problèmes mécaniques traités sont exposés figure 1.1. Les problèmes mécaniques traités dans ce

mémoire concernent les structures élastiques et hyper-élastiques, les matériaux visco-élastiques et poreux, les problèmes de vibro-acoustique et enfin les problèmes d'interaction fluide-structure pour lesquels le fluide est en écoulement. Les méthodes numériques utilisées et adaptées sont la méthode des éléments finis étendus (XFEM), les méthodes de réduction de modèles (principalement par projection sur base modale) et enfin les modèles mécaniques simplifiés.

1.2 Axes de recherche et organisation de ce mémoire

La thèse que j'ai soutenue en 2002 au LMT-Cachan sous la direction de A. Combesure (LMT-Cachan puis LAMCOS) en co-tutelle avec M. Lemaire (IFMA, LAMI) suivait déjà ces idées. Elle portait sur "Une méthode de calcul efficace pour l'étude paramétrique du flambage non-linéaire de structures tridimensionnelles : application à la fiabilité". Financée par la DGA, le but était de proposer des outils numériques pour évaluer efficacement la fiabilité des coques de bâtiments submersibles. Ce travail avait plusieurs axes de recherche :

- modéliser correctement la géométrie et les imperfections de la coque : contribution au développement d'un élément fini tridimensionnel dégénéré (SHB8PS) pour le calcul des coques minces en non-linéaire géométrique et matériau [ACL 2] ;
- proposer une méthode de calcul efficace pour la prédiction du flambage non-linéaire lors de petites variations des paramètres afin de réduire les temps de calcul [ACL 1] : basé sur l'algorithme de Newton-Raphson, la méthode de calcul proposée utilise les informations d'un calcul de référence (en général les valeurs moyennes des paramètres) pour calculer la réponse quasi-statique non-linéaire d'une structure aux paramètres modifiés ;
- inclure ces développements dans un contexte fiabiliste.

Finalement, les temps de calcul d'une estimation de fiabilité ont été diminués d'un facteur variant de 1,5 à 15 suivant les cas.

La première partie de ce mémoire concerne mes apports à la méthode des éléments finis étendus (XFEM). La méthode XFEM permet de prendre en compte des discontinuités dans les modèles numériques éléments finis sans avoir besoin de remailler lorsque

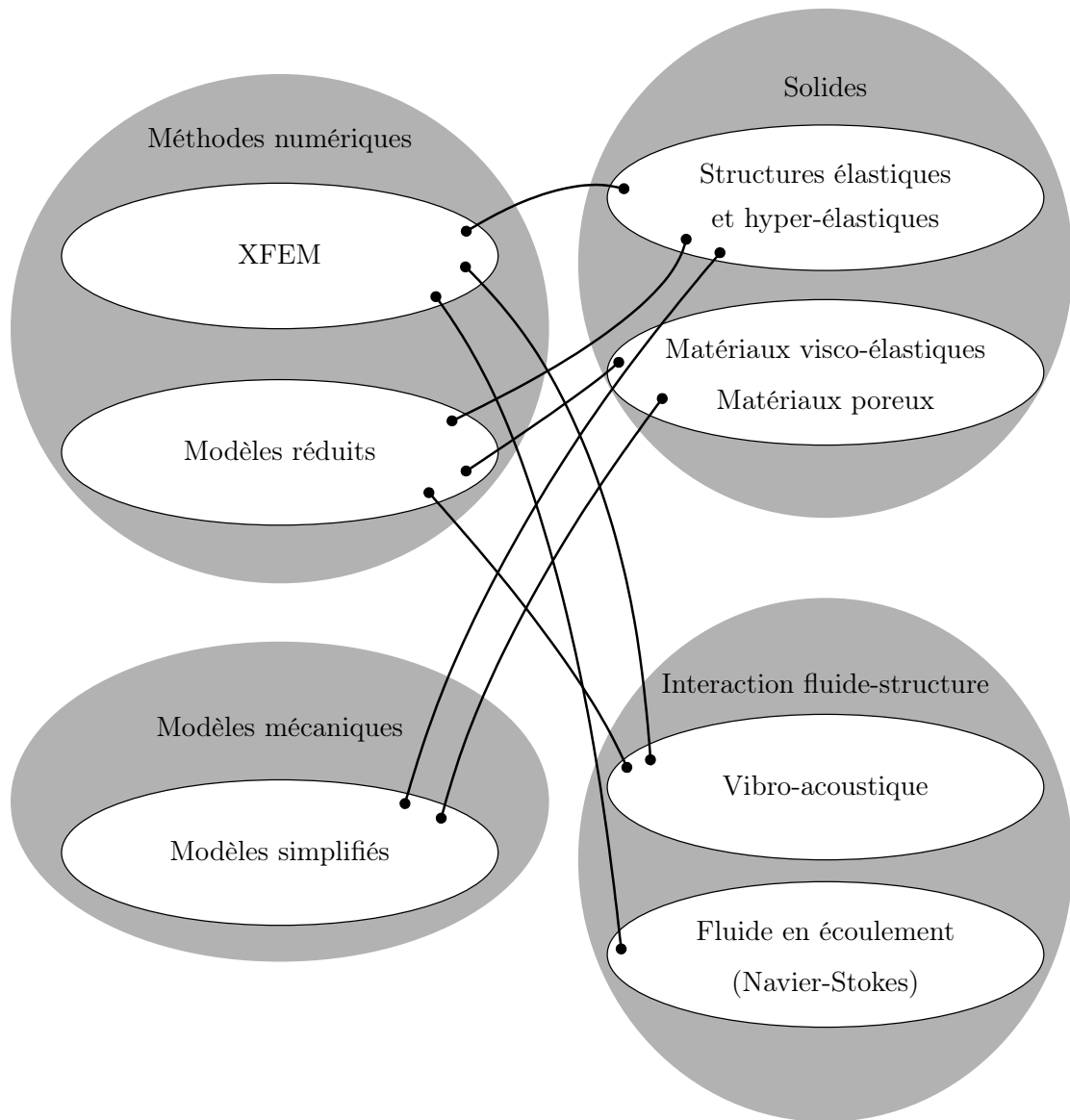


FIGURE 1.1 – Méthodes développées et liens avec les problèmes mécaniques traités

la discontinuité évolue. Ce travail a débuté lors de mon stage de post-doctorat à Northwestern University (avec le Prof. Ted Belytschko) pour la modélisation de discontinuités matériaux [ACL 3]. Une première application à un problème d'interaction fluide structure a alors été proposé [ACL 4], suivie d'un deuxième travail réalisé avec A. Tralli [ACLN 1] au Cnam. Il a été poursuivi en collaboration avec A. Zilian (Université de Braunschweig en Allemagne, maintenant à l'Université du Luxembourg) afin d'adapter XFEM pour des structures minces flexibles dans un fluide en écoulement en utilisant des éléments finis espace-temps [ACL 5, ACLN 2].

Les deux parties suivantes de ce mémoire concernent la réduction des nuisances sonores et vibratoires. Ces bruits peuvent être simplement gênants, par exemple pour les passagers d'un avion, ou plus dimensionnants lorsqu'il s'agit de vibrations de systèmes embarqués électroniques et/ou optique de précision. Deux pistes sont principalement explorées pour atténuer les bruits acoustiques et les vibrations des structures :

- utilisation de matériaux poreux pour amortir le bruit dans la cavité,
- utilisation de matériaux visco-élastiques pour limiter les amplitudes de vibrations des structures.

La deuxième partie de ce mémoire présente mes contributions pour calculer efficacement des problèmes vibro-acoustiques. Dans un premier temps, des matériaux poreux sont introduits dans la cavité acoustique afin d'absorber une partie du champ de pression du fluide acoustique (Thèse de R. Rumpler [ACL 7, THESE 1]). Des modèles de matériaux poreux sont alors proposés [ACL 6] et une stratégie de réduction du système couplé vibro-acoustique est mise en place. Dans un second temps, un travail effectué seul et de façon autonome, sur l'utilisation de XFEM pour les problèmes vibro-acoustiques et la réduction de modèle associée, est présenté. Il porte sur la modélisation de structures minces dans une cavité acoustique. Dans un contexte d'optimisation ou d'étude de sensibilité de certains paramètres, la réponse complète du système couplé peut nécessiter un temps de calcul très important. Cette étude propose alors des méthodes de réduction adaptées à ce type de problèmes. Elles combinent des méthodes de projections modales et la méthode XFEM afin de traiter les variations des paramètres géométriques des structures [ACL 11, ACL 10].

La troisième partie expose les recherches menées concernant la modélisation de l'amortissement des vibrations de structures. Un premier travail mené en collaboration avec le CNES est présenté. Il s'agit de caractériser expérimentalement l'amortissement d'une structure représentative d'Ariane (l'adaptateur charge utile d'Ariane 4), puis de proposer un outil de simulation numérique rapide et facile à mettre en œuvre pour les structures de révolution. Ensuite, une étude menée dans le cadre de la thèse de L. Rouleau (Thèse CIFRE-Défense avec DCNS) portant sur l'utilisation de matériaux visco-élastiques [ACL 8, THESE 2] pour amortir les vibrations de structures est exposée. Les paramètres des modèles de comportement visco-élastique sont identifiés à partir d'essais expérimentaux en utilisant le principe de causalité [ACL 9]. Des modèles simplifiés sont développés pour modéliser une couche de matériau visco-élastique [INT-CONF 29]. De plus, plusieurs méthodes de réduction sont testées, souvent basées sur des projections modales [INT-CONF 25]. Enfin, une extension à des comportements hyper-élastiques pour des structures en grandes transformations est exposée [THESE 3].

Un dernier chapitre met en perspective ces travaux et propose des extensions et axes de recherches possibles.

Chapitre 2

Contributions à la méthode des éléments finis étendus (XFEM)

Ce chapitre résume les travaux menés sur la méthode des éléments finis étendus (XFEM). Les articles publiés sur ce sujet sont :

- A. Zilian and A. Legay. The enriched space-time finite element method (EST) for simultaneous solution of fluid-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(3), 305-334, 2008.
- A. Legay, J. Chessa and T. Belytschko. An Eulerian-Lagrangian Method for Fluid-Structure Interaction Based on Level Sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17-18), 2070-2087, 2006.
- A. Legay, H.W. Wang and T. Belytschko. Strong and Weak Arbitrary Discontinuities in Spectral Finite Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(8), 991-1008, 2005.

2.1 Introduction

Beaucoup de problèmes mécaniques font intervenir des interfaces qui engendrent des discontinuités (interaction fluide-structure, propagation de fissures, inclusions). Avec une approche classique par éléments finis, ces discontinuités sont prises en compte en choisissant un maillage compatible à l'interface (Fig. 2.1). La méthode des éléments finis étendus (XFEM - eXtended Finite Element Method) permet de s'affranchir de la compatibilité de maillage à l'interface Γ en prenant en compte dans l'espace d'approximation éléments

finis ces discontinuités.

Cette méthode a été initialement développée pour la modélisation de fissures [9, 46]. Elle a été rapidement étendue à d'autres problèmes de mécanique des solides faisant intervenir des discontinuités [58] puis a été ensuite appliquée à des problèmes de mécanique des fluides [21]. Elle s'appuie sur le principe de partition de l'unité [44] afin d'enrichir l'espace d'approximation par des fonctions représentant la physique du phénomène.

Mes travaux ont porté sur le développement de XFEM pour :

- 1- des éléments finis spectraux de haut degré pour les solides élastiques,
- 2- des éléments finis espace-temps dans le cadre de l'interaction fluide-structure où le fluide est en écoulement,
- 3- des éléments finis tridimensionnels pour la vibro-acoustique.

Ce chapitre présente les points 1 et 2; le point 3 est abordé dans la section 3.4.2.

La section 2.2 décrit les principes de XFEM ainsi que certaines difficultés liées à son implémentation. La section 2.3 résume mes apports à l'application de XFEM dans le cas d'enrichissement d'éléments finis spectraux. La section 2.4 expose mes travaux concernant l'adaptation de XFEM pour les problèmes d'interaction fluide-structure, notamment dans le cadre d'une approche espace-temps.

2.2 Méthode des éléments finis étendus

2.2.1 Espace des solutions du problème de référence

Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ où d peut prendre les valeurs 1, 2 ou 3. La solution d'un problème de mécanique défini sur Ω (élasticité, acoustique, fluide en écoulement par exemple) appartient à un espace vectoriel fonctionnel \mathcal{V} , construit à partir des espaces $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et $\mathcal{H}^1(\Omega)$. L'espace $\mathcal{L}^2(\Omega)$ des fonctions de carré-intégrables sur le domaine Ω est défini comme

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} v(M)^2 dV < \infty \right\}. \quad (2.1)$$

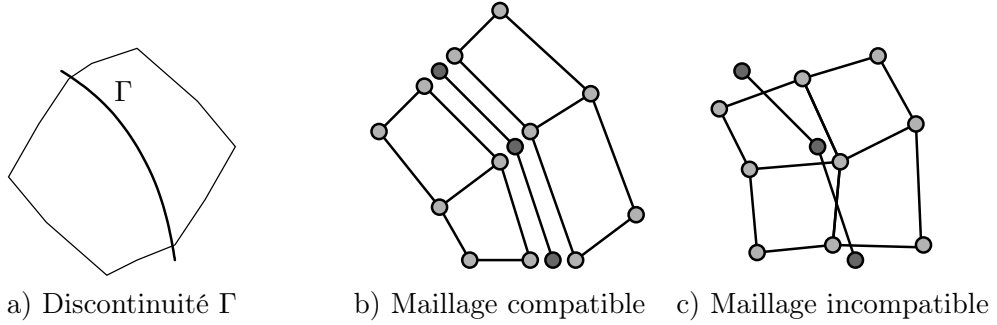


FIGURE 2.1 – Discretisation par éléments finis d'une discontinuité

On peut alors construire l'espace $\mathcal{H}^1(\Omega)$ des fonctions dont les dérivées sont de carré-intégrables sur le domaine Ω défini comme

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{L}^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} \frac{\partial v(M)^2}{\partial x_i} dV < \infty \right\}, \quad (2.2)$$

pour tout $i \in [1, d]$.

À partir de ces espaces, on pose l'espace vectoriel fonctionnel de dimension infinie \mathcal{V} défini de Ω vers \mathbb{R}^δ où δ peut prendre les valeurs 1, 2 ou 3 :

$$\mathcal{V} = \left\{ \vec{v} \text{ avec } v_k \in \mathcal{H}^1(\Omega) : \begin{array}{l} \Omega \rightarrow \mathbb{R}^\delta \\ M \mapsto \vec{v}(M) \end{array} \right\}, \quad (2.3)$$

avec $\vec{v} = \sum_{k=1}^{\delta} v_k \vec{e}_k$.

2.2.2 Espace des solutions du problème discrétisé : partie standard

Afin de chercher une approximation de la solution dans un espace de dimension finie, on construit classiquement un sous-espace vectoriel \mathcal{V}^h de \mathcal{V} comme étant engendré par une base de n fonctions $\vec{\varphi}_i \in \mathcal{V}$. Les fonctions $\vec{\varphi}_i$, définies de \mathbb{R}^d vers \mathbb{R}^δ , peuvent s'écrire dans une base \vec{e}_k de \mathbb{R}^δ sous la forme $\vec{\varphi}_i = \sum_{k=1}^{\delta} \varphi_{ik} \vec{e}_k$.

Par soucis de simplification, on pose $\delta = 1$ dans la suite de ce paragraphe. Dans ce cas, l'espace vectoriel \mathcal{V}^h est de dimension n . Il s'écrit comme

$$\mathcal{V}^h = \text{Vec}(\varphi_1, \dots, \varphi_n). \quad (2.4)$$

Les fonctions φ_i sont construites sur un maillage qui découpe le domaine Ω en n_e

éléments $\Omega_e \subset \Omega$ tels que :

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e = \Omega \quad \text{et} \quad \bigcap_{e=1}^{n_e} \Omega_e = \emptyset.$$

Les éléments sont connectés entre eux à des nœuds. On associe à chacun des nœuds du maillage une fonction de forme φ_i .

Dans un élément Ω_e , qui est connecté à m nœuds, on choisit une base canonique polynomiale de m termes. L'espace \mathcal{V}^h , restreint à l'élément Ω_e et noté \mathcal{V}_e^h , est alors engendré par cette base canonique. Les fonctions de forme φ_i dans l'élément Ω_e sont obtenues par le changement de base imposant que toute fonction $u_h \in \mathcal{V}_e^h$ s'écrive sous la forme :

$$u_h = \sum_{i=1}^m u_h|_{(\text{nœud } i)} \varphi_i, \quad (2.5)$$

où $u_h|_{(\text{nœud } i)}$ est la valeur de la fonction u_h évaluée au nœud i . Cette condition rend la base des fonctions de forme unique. Les fonctions de forme ainsi construites réalisent une partition de l'unité. En effet, la condition (2.5) étant vraie pour toute fonction de \mathcal{V}_e^h , elle l'est en particulier pour la fonction constante 1, ce qui donne en remplaçant u_h par 1 :

$$\forall M \in \Omega, \quad \sum_{i=1}^n \varphi_i(M) = 1. \quad (2.6)$$

Par exemple pour $d = 2$, dans le cas d'un élément triangle à 3 nœuds (nommés a, b et c) dont les coordonnées sont $(x_a, y_a), (x_b, y_b), (x_c, y_c)$, les fonctions de base φ_i sont solutions de :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

où $\{\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c\}$ est la base des fonctions de forme tandis que $\{1, x, y\}$ est la base canonique choisie pour engendrer \mathcal{V}_e^h . Ce dernier système est formé en écrivant la condition (2.5) successivement pour les trois termes de la base canonique choisie.

Dans le cas général où $\delta \in [1, 2, 3]$, tout champ $\vec{u}^h \in \mathcal{V}^h$ est une combinaison linéaire des fonctions de forme $\vec{\varphi}_i$. En notant \underline{u}^h la représentation de \vec{u}^h dans la base canonique de \mathbb{R}^δ , on a :

$$\underline{u}^h = \Phi \underline{U} \quad (2.8)$$

où Φ est la matrice des fonctions de forme et \underline{U} est la représentation de \bar{u}^h dans la base des fonctions de forme.

Le document de cours, que j'ai écrit, portant sur le calcul des structures par éléments finis¹ donne les détails de la construction des fonctions de forme et de l'implémentation pratique des éléments finis. Ce document est complété par le code éléments finis SILEX² écrit en Python, qui peut facilement être couplé à des routines en Fortran.

2.2.3 Espace des solutions du problème discrétisé : partie enrichie

À partir de cette partition de l'unité, on peut construire des espaces vectoriels de dimension finie ou infinie, comme cela est proposé par I. Babuska [2, 44].

On introduit l'espace vectoriel $\mathcal{V}^{\text{PU}}(\mathcal{E})$ engendré par la partition de l'unité définie précédemment et construit à partir d'un espace vectoriel $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$ donné :

$$\mathcal{V}^{\text{PU}}(\mathcal{E}) = \varphi_1 \mathcal{E} \oplus \varphi_2 \mathcal{E} \oplus \dots \oplus \varphi_n \mathcal{E} . \quad (2.9)$$

On peut montrer que

- l'espace de la partition de l'unité construit sur \mathcal{V} est $\mathcal{V} : \mathcal{V}^{\text{PU}}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$,
- l'espace de la partition de l'unité construit sur la fonction constante unitaire définie sur Ω , notée 1, est $\mathcal{V}^h : \mathcal{V}^{\text{PU}}(1) = \mathcal{V}^h$.

L'enrichissement de \mathcal{V}^h par une fonction arbitraire $\psi \in \mathcal{V}$ se fait en construisant l'espace de la partition de l'unité sur l'ensemble des 2 fonctions 1 et ψ :

$$\mathcal{V}^{\text{PU}}(1, \psi) = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \dots \oplus \varphi_n \oplus \varphi_1 \psi \oplus \varphi_2 \psi \oplus \dots \oplus \varphi_n \psi , \quad (2.10)$$

ou encore

$$\mathcal{V}^{\text{PU}}(1, \psi) = \mathcal{V}^h \oplus \mathcal{V}^{\text{PU}}(\psi) . \quad (2.11)$$

Afin que la somme de ces deux espaces soit une somme directe, il faut que ψ satisfasse des conditions particulières : par exemple cette fonction ne doit pas être constante sur le support d'une des fonction φ_i formant la partition de l'unité.

1. http://antoinelegay.free.fr/Calcul_des_structures_par_elements_finis_Legay.pdf
 2. <http://antoinelegay.free.fr/silex/silex.html>

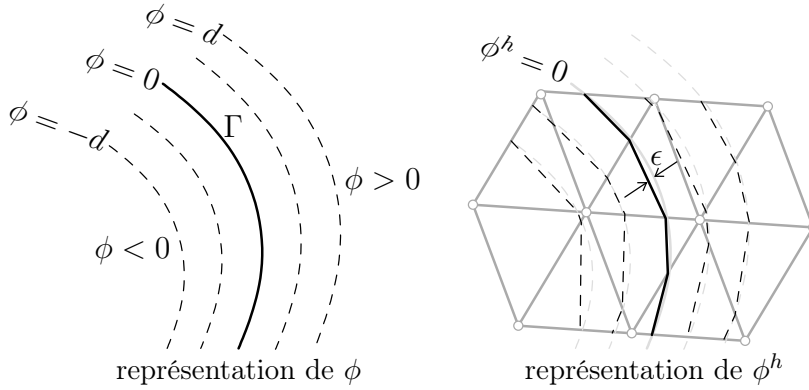


FIGURE 2.2 – Localisation de la discontinuité par une surface de niveau

2.2.4 Localisation de la discontinuité

La discontinuité Γ est localisée dans le domaine Ω par une surface de niveau ϕ telle que la surface de niveau nul $\phi = 0$ soit exactement sur Γ (Fig. 2.2). Cette surface de niveau est prise comme étant la distance signée à la discontinuité où le signe est choisi de façon arbitraire. La fonction ϕ est donc positive d'un côté de la discontinuité et négative de l'autre. Sauf dans quelques cas particuliers où la discontinuité a une position connue de façon analytique, on projette ϕ dans l'espace \mathcal{V}^h (avec $\delta = 1$) et on note ϕ^h cette projection. En notant $\underline{\phi}$ la représentation de ϕ^h dans la base des fonctions de forme de \mathcal{V}^h , on a alors :

$$\phi^h = \mathbf{\Phi} \underline{\phi} . \quad (2.12)$$

Dans la pratique, la discontinuité est donc localisée dans le maillage par la surface de niveau nul telle que $\phi^h = 0$, ce qui introduit une erreur ϵ dans la position de Γ (Fig. 2.2). Cette erreur dépend de la courbure de la discontinuité ainsi que de la richesse de l'espace \mathcal{V}^h , aussi bien du point de vue de la taille des éléments que du degré de la base canonique de \mathcal{V}^h .

2.2.5 Intégration numérique des éléments enrichis

L'intégration numérique des éléments enrichis nécessite un traitement particulier puisque les positions et les poids des points d'intégration sont donnés classiquement dans la littérature afin d'intégrer exactement des polynômes continus d'un degré donné

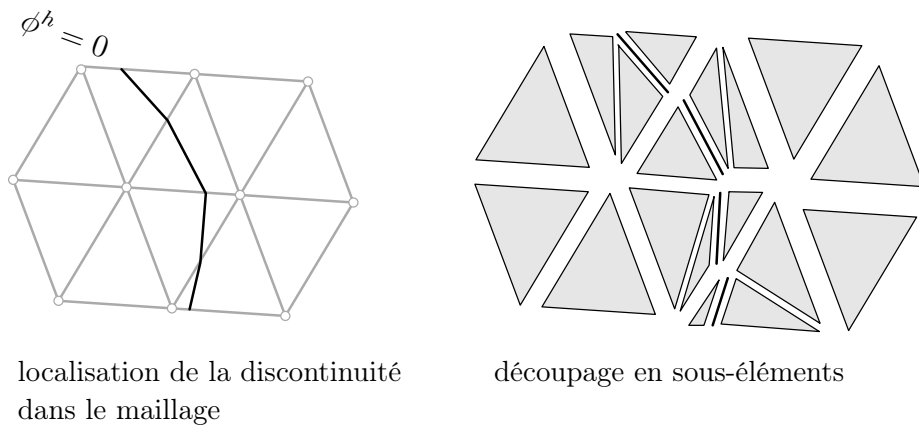


FIGURE 2.3 – Intégration numérique des éléments enrichis : découpage compatible avec la discontinuité en sous-éléments dans lesquels les fonctions à intégrer sont continues

dans un élément. Ces règles ne sont plus directement applicables car les fonctions à intégrer dans un élément enrichi sont discontinues. Plusieurs stratégies existent pour intégrer numériquement les éléments enrichis.

La première possibilité consiste à utiliser des intégrations analytiques lorsque cela est possible. C'est le cas pour des tétraèdres à 4 nœuds enrichis avec des fonctions de Heaviside, ce cas est utilisé dans un travail présenté en section 3.4.2. Dans un article de G. Ventura [61], les formules analytiques sont données, mais une configuration manque pour le tétraèdre : 2 nœuds d'un côté de la surface de discontinuité et 2 nœuds de l'autre. En suivant la démarche de G. Ventura, les formules analytiques sont complétées et sont données dans [ACL 10].

La deuxième possibilité est de créer un découpage géométrique de l'élément enrichi compatible avec la discontinuité. Dans chaque sous-élément créé, la fonction à intégrer est continue et les règles d'intégration classiques peuvent alors être utilisées. Sur la figure 2.3, les triangles coupés par la discontinuité sont découpés en sous-triangles dont les bords sont compatibles avec la discontinuité. Chaque sous-triangle peut alors être intégré avec une règle standard d'intégration numérique.

2.2.6 Application à un problème d'élasticité linéaire

La méthode XFEM a été développée historiquement pour des problèmes de propagation de fissures [46], puis pour des structures présentant plusieurs matériaux [58] par

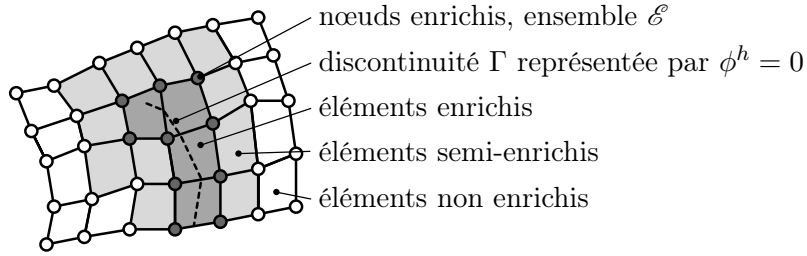


FIGURE 2.4 – Nœuds et éléments enrichis

l'équipe du Prof. Ted Belytschko. L'idée est d'enrichir la base des fonctions de forme par des fonctions permettant de représenter la physique des phénomènes, ces fonctions peuvent être discontinues. Classiquement, les enrichissements utilisés pour modéliser ces deux problèmes sont :

- la fonction de Heaviside $H(\phi)$ dans le cas d'une fissure, complétée éventuellement par un ensemble de fonctions définies autour du front de fissure afin de représenter correctement les concentrations de contraintes ;
- la valeur absolue de la distance signée à l'interface pour modéliser une interface entre deux matériaux.

La fonction de Heaviside $\psi = H(\phi)$ ne remplit pas les conditions pour que $\mathcal{V}^{\text{PU}}(1, \psi)$ puisse s'écrire comme une somme directe de \mathcal{V}^h et de $\mathcal{V}^{\text{PU}}(\psi)$ puisque cette fonction est constante (1 ou -1) sur tous les supports des fonctions φ_i qui ne sont pas coupés par la discontinuité. On note \mathcal{E} l'ensemble des nœuds dont les supports associés aux fonctions φ_i sont coupés par la discontinuité (Fig. 2.4) : ces nœuds sont appelés les nœuds enrichis. On ne forme alors la partition de l'unité que par les fonctions φ_i dont les nœuds associés sont enrichis, c'est à dire l'ensemble $\{\varphi_{i \in \mathcal{E}}\}$. Cet ensemble de fonctions forme une partition de l'unité dans les éléments enrichis (Fig. 2.4) mais ne forme plus une partition de l'unité dans les éléments dont seulement quelques nœuds sont enrichis (éléments semi-enrichis). Les erreurs éventuelles introduites sont examinées au cas par cas et plusieurs méthodes non détaillées dans ce document permettent de les corriger [22, 30]. On définit l'espace engendré par la partition de l'unité restreint aux nœuds de \mathcal{E} comme :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{E}}^{\text{PU}}(\psi) = \sum_{i \in \mathcal{E}} \varphi_i \psi, \quad (2.13)$$

où la somme représente ici une somme directe. On cherche alors la solution dans l'espace enrichi suivant :

$$\mathcal{V}^{\text{enr.}} = \mathcal{V}^h \oplus \mathcal{V}_{\mathcal{E}}^{\text{PU}}(\psi) . \quad (2.14)$$

Dans la pratique, afin de conserver la propriété de Kronecker des fonctions de base de l'espace enrichi $\mathcal{V}^{\text{enr.}}$, on peut choisir d'enrichir chaque nœud avec une fonction différente, par exemple avec les fonctions suivantes :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{E}}^{\text{PU}}(\psi) = \sum_{i \in \mathcal{E}} \varphi_i(\psi - \psi_i) , \quad (2.15)$$

où ψ_i représente la valeur de la fonction d'enrichissement ψ au nœud i .

2.3 Enrichissement d'éléments finis spectraux

2.3.1 Motivations

Les méthodes spectrales ont pour principal intérêt de pouvoir propager des ondes avec une grande précision, mais les géométries doivent être simples. Les éléments finis spectraux [39] exploitent les avantages des éléments finis en permettant de modéliser des géométries complexes et les avantages des méthodes spectrales dédiés à la propagation d'ondes. Les premiers travaux de A. Patera [47] portent sur des propagations d'ondes unidimensionnelles et sur des écoulements laminaires incompressibles confinés dans des tunnels. Les fonctions de forme sont basés sur des polynômes de Tchebychev. Ces éléments ont été développés plus particulièrement pour la propagation d'ondes acoustiques [25, 50, 56], ils montrent un très bon comportement en terme de convergence et de précision.

Dans le cadre de mon post-doc avec T. Belytschko, où l'objectif était de proposer des outils de calculs numériques pour modéliser l'effet d'une explosion sous-marine sur une structure (financement DGA), nous avons testés dans un premier temps les éléments finis spectraux pour des problèmes d'élasticité linéaire en y incluant la méthode XFEM. L'idée était de pouvoir utiliser par la suite ces éléments pour modéliser la partie fluide tout en traitant les discontinuités liées à la présence de structures par la méthode XFEM.

2.3.2 Espace discrétisé de la partie standard

Les éléments finis spectraux sont des éléments de type Lagrange avec une répartition non uniforme des nœuds dans l'élément. Les polynômes utilisés sont des polynômes de Tchebychev de première espèce. Par définition, le polynôme de Tchebychev de première espèce de degré p , noté $T_p(x \in [-1, 1])$ s'écrit :

$$T_p(x) = \cos(p \arccos x), \quad \forall x \in [-1, 1], \quad (2.16)$$

ou encore

$$T_p(\cos \theta) = \cos(p\theta), \quad \forall \theta \in [0, \pi]. \quad (2.17)$$

Pour un élément fini unidimensionnel, les positions x_i des $p + 1$ nœuds sont choisies de façon à annuler la dérivée de T_p :

$$T_p'(x) = 0 \Leftrightarrow x_i = \cos \frac{i\pi}{p}, \quad \forall i \in [0, 1, \dots, p]. \quad (2.18)$$

On définit alors la fonction de forme $\varphi_{p,i}$, de degré p , associée au nœud i pour un élément fini unidimensionnel comme [39] [47] :

$$\varphi_{p,i}(x) = \frac{2}{p} \sum_{j=0}^p \frac{1}{c_i c_j} T_j(x_i) T_j(x), \quad \forall x \in [-1, 1], \quad (2.19)$$

où $c_k = 2$ pour $k = 0$ ou $k = p$ et $c_k = 1$ pour $k \neq 0$ et $k \neq p$. La fonction de forme $\varphi_{p,i}$ s'écrit aussi comme un polynôme de Lagrange :

$$\varphi_{p,i}(x) = \frac{\prod_{j=0 \text{ et } j \neq i}^p (x - x_j)}{\prod_{j=0 \text{ et } j \neq i}^p (x_i - x_j)}. \quad (2.20)$$

Quelques éléments finis spectraux sont dessinés sur la figure 2.5.

2.3.3 Construction de l'espace discrétisé enrichi

Espace de la partition de l'unité

Pour tout q , l'ensemble des fonctions $\{\varphi_{q,i}\}$ forme une partition de l'unité. L'espace engendré par les fonctions de forme de degré q est

$$\mathcal{V}^{h,q} = \text{Vec}(\varphi_{q,1}, \dots, \varphi_{q,n}). \quad (2.21)$$

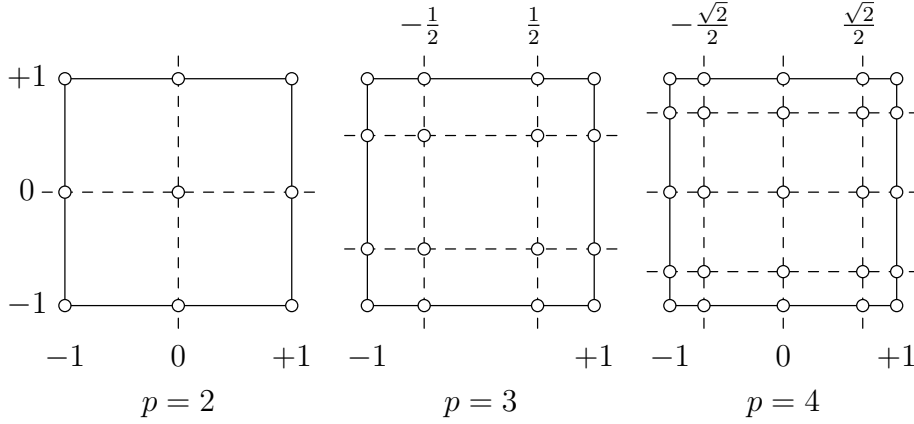


FIGURE 2.5 – Éléments finis spectraux de référence pour les problèmes plans pour $p = 2$, $p = 3$ et $p = 4$

On introduit l'espace d'enrichissement pour la fonction $\psi \in \mathcal{V}$ et basé sur la partition de l'unité de degré q restreinte aux nœuds enrichis \mathcal{E} :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{E}}^{\text{PU},q}(\psi) = \sum_{i \in \mathcal{E}} \varphi_{q,i}(\psi - \psi_i) , \quad (2.22)$$

où ψ_i est la valeur de ψ au nœud i .

Dans ce travail, on construit l'espace d'approximation enrichi \mathcal{V}^{enr} comme une somme directe de l'espace $\mathcal{V}^{h,p}$ où les polynômes sont de degré p avec l'espace $\mathcal{V}_{\mathcal{E}}^{\text{PU},q}(\psi)$ où les polynômes formant la partition de l'unité sont de degré q :

$$\mathcal{V}^{\text{enr}} = \mathcal{V}^{h,p} \oplus \mathcal{V}_{\mathcal{E}}^{\text{PU},q}(\psi) . \quad (2.23)$$

Cette construction permet d'enrichir la solution en utilisant une partition de l'unité de degré inférieur à la partie standard. Dans ce cas, il y a alors deux maillages superposés. Ces deux maillages sont cependant basés sur le même découpage élémentaire, les éléments partagent leurs nœuds sommets.

Dans un cas plus général où le déplacement est défini dans \mathbb{R}^{δ} (avec $\delta = 1, 2$ ou 3), la solution en déplacement $\bar{u}^{\text{enr}} \in \mathcal{V}^{\text{enr}}$ s'écrit sous la forme :

$$u_k^{\text{enr}}(M) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \varphi_{p,i}(M) U_{ik} + \sum_{j \in \mathcal{E}} \varphi_{q,j}(M) (\psi(M) - \psi(M_j)) A_{jk} , \quad (2.24)$$

où k varie de 1 à d , U_{ik} est l'inconnue de la composante k du déplacement du nœud i et A_{jk} est l'inconnue liée à l'enrichissement du nœud j de la composante k .

Discontinuité de déplacement

Dans le cas où la discontinuité à modéliser est une discontinuité de déplacement, la fonction d'enrichissement doit être discontinue à la traversée de la discontinuité. On choisit par exemple la fonction de Heaviside $H(\phi)$ qui prend la valeur -1 si $\phi < 0$, $+1$ si $\phi > 0$ et 0 si $\phi = 0$. Dans ce cas on construit \mathcal{V}^{enr} comme

$$\mathcal{V}^{\text{enr.}} = \mathcal{V}^{h,p} \oplus \mathcal{V}_{\mathcal{E}}^{\text{PU},q}(H(\phi)) . \quad (2.25)$$

Dans le cas où la discontinuité de déplacement est introduite dans toutes les directions, tout élément $\vec{u}^{\text{enr}} \in \mathcal{V}^{\text{enr.}}$ s'écrit sous la forme :

$$u_k^{\text{enr.}}(M) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \varphi_{p,i}(M) U_{ik} + \sum_{j \in \mathcal{E}} \varphi_{q,j}(M) (H(\phi(M)) - H(\phi(M_j))) A_{jk} . \quad (2.26)$$

Dans le cas où la discontinuité de déplacement n'est introduite que dans la direction tangentielle \vec{t} à l'interface, tout élément $\vec{u}^{\text{enr}} \in \mathcal{V}^{\text{enr.}}$ s'écrit sous la forme :

$$u_k^{\text{enr.}}(M) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \varphi_{p,i}(M) U_{ik} + \sum_{j \in \mathcal{E}} \varphi_{q,j}(M) (H(\phi(M)) - H(\phi(M_j))) t_k A_j . \quad (2.27)$$

Discontinuité de déformation

Dans le cas où la discontinuité à modéliser est une discontinuité dans le gradient de déplacement, la fonction d'enrichissement doit être continue mais de dérivée discontinue à la traversée de la discontinuité. On choisit par exemple la fonction $|\phi|$. Dans ce cas on construit \mathcal{V}^{enr} comme

$$\mathcal{V}^{\text{enr.}} = \mathcal{V}^{h,p} \oplus \mathcal{V}_{\mathcal{E}}^{\text{PU},q}(|\phi|) . \quad (2.28)$$

Tout élément $u_k^{\text{enr}} \in \mathcal{V}^{\text{enr.}}$ s'écrit alors sous la forme :

$$u_k^{\text{enr.}}(M) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \varphi_{p,i}(M) U_{ik} + \sum_{j \in \mathcal{E}} \varphi_{q,j}(M) (|\phi(M)| - |\phi(M_j)|) A_{jk} . \quad (2.29)$$

2.3.4 Principaux résultats

Les résultats montrent tout d'abord que la qualité de l'intégration numérique influe fortement sur le taux de convergence. Afin de voir cet effet, on considère le problème bi-matériaux d'une inclusion circulaire centrée dans un domaine carré dont les conditions sur

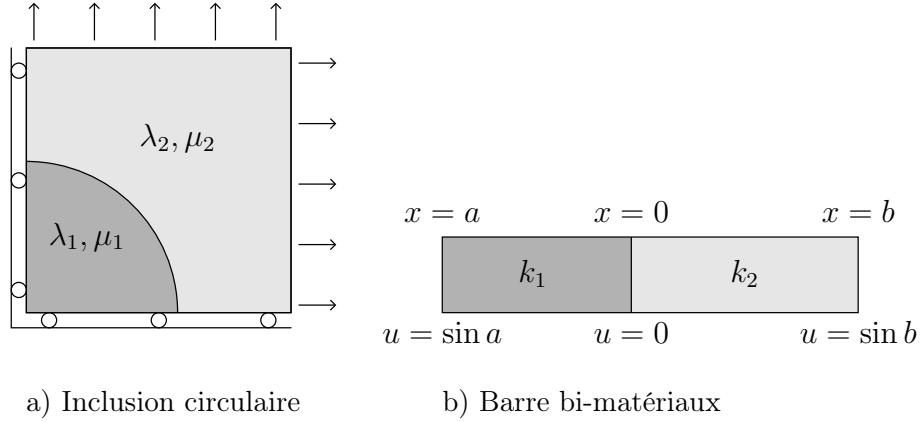


FIGURE 2.6 – Problèmes mécaniques traités pour l'étude de convergence des éléments finis spectraux enrichis

les bords permettent de connaître la solution analytique (Fig 2.6-a). L'inclusion circulaire traverse les éléments finis spectraux enrichis. On cherche la solution dans l'espace \mathcal{V}^{enr} sous la forme de l'équation (2.29) où $q = 1$. Un découpage de l'élément spectral de référence enrichi basé sur des quadrangles et des triangles à bords courbés (Fig. 2.7(b)), donne des taux de convergence meilleurs qu'un découpage basé sur des triangles à bords droits (triangles à 3 nœuds, Fig. 2.7(a)) comme l'indique les courbes de convergence de la figure 2.8(a). Pour ce problème, les taux de convergence sont optimaux pour $p = 2$ et $p = 3$. Les triangles courbés permettent de mieux approximer la courbure de la discontinuité (ici un cercle), mais cela ne semble pas suffisant pour le degré 4 puisque le taux de convergence optimal n'est pas atteint.

Ensuite, le degré q des polynômes composant la partition de l'unité a une influence sur la qualité de la solution. On considère une barre bi-matériaux dont les raideurs k_1 et k_2 sont différentes (Fig 2.6-b). Le chargement de traction linéique $f(x)$ imposé est non uniforme :

$$\begin{cases} f(x) = 4k_1 \sin 2x & \text{si } a < x < 0 \\ f(x) = k_2 \sin x & \text{si } 0 < x < b \end{cases} . \quad (2.30)$$

La solution en déplacement vaut :

$$\begin{cases} u(x) = \sin 2x & \text{si } a < x < 0 \\ u(x) = \sin x & \text{si } 0 < x < b \end{cases} . \quad (2.31)$$

Pour ce problème, la convergence est meilleure lorsque le degré q de la partition de l'unité est égal à $p - 1$ où p est le degré des éléments finis spectraux utilisés. En effet, dans ce

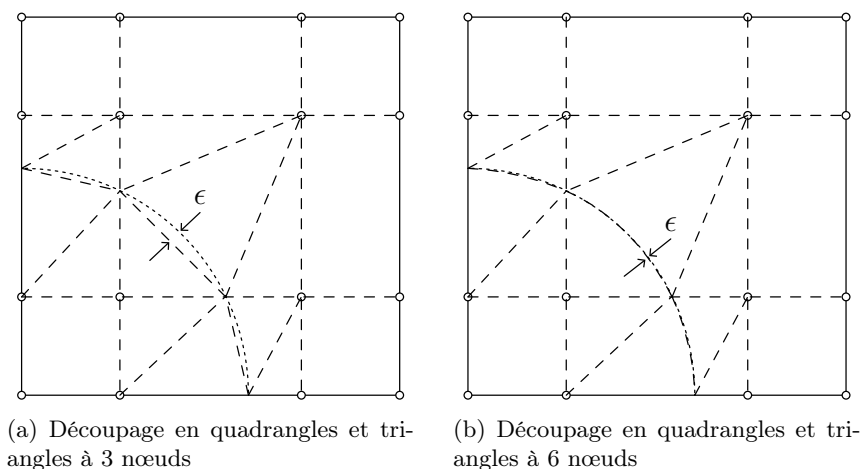


FIGURE 2.7 – Découpage d'un élément spectral de degré 3 enrichi pour l'intégration numérique

cas pour lequel la discontinuité est rectiligne, le taux de convergence optimal est atteint en choisissant $q = p - 1$. Par contre, les tests numériques n'ont pas montré une influence notable du degré q de la partition de l'unité sur les résultats du problème d'inclusion circulaire pour lequel la discontinuité est courbée.

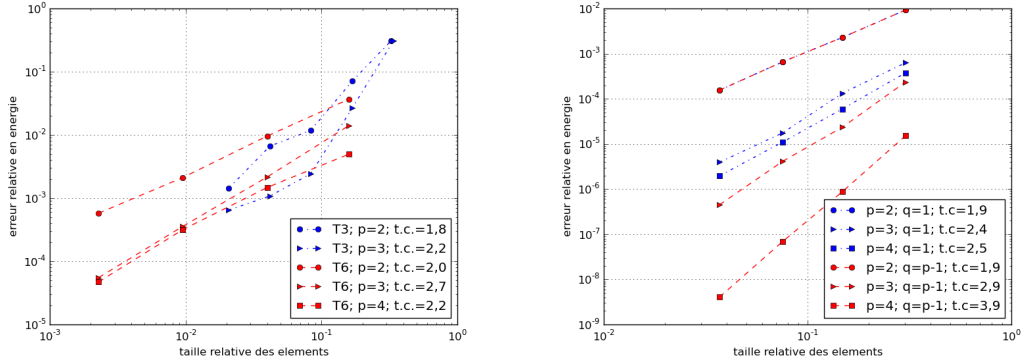
L'article [ACL 3] donne tous les détails des problèmes considérés ainsi que tous les résultats obtenus ; d'autres tests de convergence sont aussi réalisés.

À ma connaissance, ce travail était le premier traitant des discontinuités courbées dans des éléments finis enrichis de haut degrés. Ce travail n'a pas été poursuivi malgré les axes d'améliorations possibles sur :

- la stratégie à adopter pour intégrer au mieux les éléments enrichis,
- le choix de l'espace de représentation de la fonction surface de niveau localisant la discontinuité,
- le choix de la partition de l'unité, et notamment le degré q de sa base.

Ces différents points ont été depuis abordés et améliorés par différents auteurs [18–20,29]. De plus, malgré les bons taux de convergences des éléments finis spectraux observés par les auteurs pour modéliser des propagations d'ondes ou des écoulements de fluide, ces éléments font apparaître plusieurs difficultés lors de leurs manipulations :

- création délicate des maillages pour des géométries complexes (nœuds non équi-



(a) Influence de l'intégration numérique pour le problème de l'inclusion circulaire (b) Influence du choix du degré q de la partition de l'unité pour le problème bi-matériaux

FIGURE 2.8 – Convergence en norme énergétique

distants),

- gestion compliquée du nombre de nœuds variable en fonction du degré polynomial choisi,
- intégration numérique délicate des éléments enrichis lorsqu'ils sont couplés à XFEM.

Les éléments finis spectraux enrichis par l'utilisation de XFEM ne sont alors pas utilisés pour les problèmes d'interaction fluide-structure traités dans la suite de ce mémoire.

2.4 Enrichissement d'éléments finis espace-temps

2.4.1 Motivations

On s'intéresse ici à la modélisation de problèmes d'interaction fluide-structure entre une (ou plusieurs) structure(s) mince(s) dans un écoulement fluide. Les exemples d'applications sont nombreux comme la modélisation du comportement des valves d'un cœur artificiel dans l'écoulement sanguin ou encore le déploiement d'un airbag. En effet, l'approche classique ALE (méthode Arbitraire Lagrangienne Eulérienne) est de mettre à jour le maillage fluide au cours du temps afin de garantir à chaque instant la compatibilité entre le maillage fluide et le maillage structure. Les inconvénients sont que i) la mise à jour du maillage a un coût numérique, ii) les éléments peuvent devenir trop déformés et il est alors nécessaire de remailler et de projeter les quantités sur le nouveau maillage.

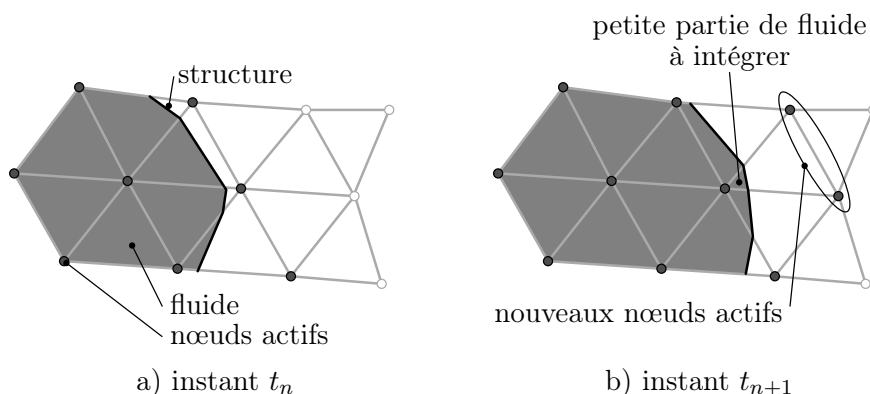


FIGURE 2.9 – Application de XFEM pour l’interaction fluide-structure avec un maillage espace et un schéma d’intégration temporel classique, le fluide n’est présent que d’un côté de la structure, les nœuds actifs participent à la solution dans le fluide

L’usage de XFEM permet de faire évoluer la structure dans un maillage fluide fixe sans avoir à remailler.

Un premier travail exploratoire a été mené en stage de post-doctorat avec T. Belytschko et J. Chessa. Dans ce travail, qui avait pour but de modéliser l’effet d’une explosion sous-marine sur une structure, la méthode XFEM est appliquée à une structure mince flexible en contact avec un fluide compressible en mouvement [ACL 4] où le fluide n’est présent que d’un côté de la structure. Le domaine fluide bi-dimensionnel est discrétisé par éléments finis et un schéma d’intégration temporel est utilisé. La position mobile de la structure est suivie par une ligne de niveau qui évolue dans le maillage fluide fixe. Le fluide n’étant présent que d’un côté de la structure, il n’y a pas d’enrichissement. Les nœuds connectés aux éléments coupés par la structure sont activés et participent à la solution dans le fluide, mais les éléments coupés ne sont intégrés que dans le domaine fluide (Fig. 2.9-a).

Dans une deuxième étude effectuée avec A. Tralli (Université de Rome à l’époque), la méthode XFEM a été appliquée à des structures minces flexibles en grands mouvements dans un écoulement de fluide incompressible [ACLN 1]. Enfin, ces premiers travaux ont été poursuivis en collaboration avec A. Zilian de l’Université de Braunschweig (Université du Luxembourg actuellement). Ce travail est détaillé dans la suite du document, il porte sur les problèmes d’interaction entre une (ou plusieurs) structure(s) mince(s) et un fluide

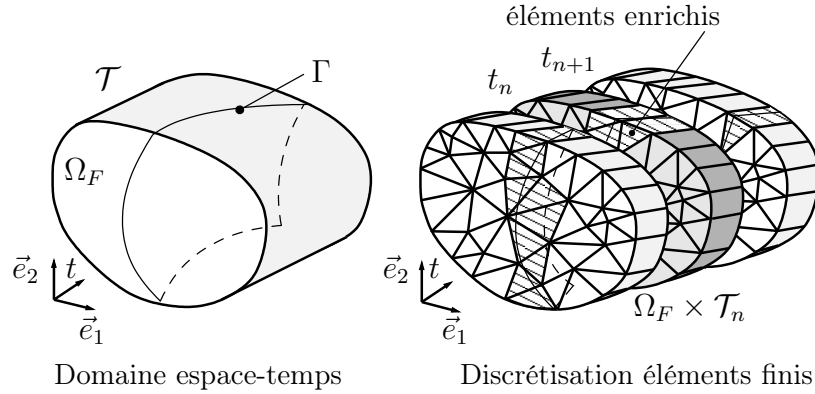


FIGURE 2.10 – Domaine espace-temps et discrétisation éléments finis associée

en écoulement [ACL 5, ACLN 2].

2.4.2 Hypothèses

Dans ce travail, le fluide est considéré comme étant incompressible, visqueux et en écoulement en description Eulérienne. Le mouvement du fluide est régi par les équations de Navier-Stokes. On ne considère que des problèmes plans dans cette étude. La structure est supposée mince sans épaisseur dans le fluide, elle est modélisée comme une poutre en description Lagrangienne. La méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre en espace mais aussi en temps ce problème couplé où les champs inconnus sont la pression p et la vitesse v dans le domaine fluide Ω_F , ainsi que le déplacement u du domaine Ω_S de la structure (Figure 2.10). En notant \mathcal{T} l'intervalle de temps de l'étude, l'espace \mathcal{V}_p des champs de pression dans le domaine fluide $\Omega_F \in \mathbb{R}^2$ s'écrit :

$$\mathcal{V}_p = \left\{ \begin{array}{l} p \text{ avec } p \in \mathcal{H}^1(\Omega_F) : \Omega_F \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R} \\ M, t \mapsto p(M, t) \end{array} \right\}. \quad (2.32)$$

L'espace des champs de vitesse \mathcal{V}_v dans le fluide s'écrit :

$$\mathcal{V}_v = \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} \text{ avec } v_i \in \mathcal{H}^1(\Omega_F) : \Omega_F \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ M, t \mapsto \vec{v}(M, t) \end{array} \right\}. \quad (2.33)$$

Une des originalités de ce travail est l'utilisation de la méthode XFEM dans un cadre espace-temps pour prendre en compte les discontinuités introduites par la structure dans le domaine fluide. La discrétisation espace-temps permet de suivre de façon continue en espace la structure entre deux instants, ce qui permet de gérer simplement les nouveaux

nœuds enrichis au cours du temps. Des multiplicateurs de Lagrange assurent la continuité du vecteur contrainte à l'interface fluide-structure.

L'évolution de la (ou des) structure(s) dans le domaine fluide espace-temps est suivie par une surface de niveau $\phi(M, t)$ dont la valeur nulle indique la position Γ de la (ou des) structure(s) en espace mais aussi en temps (Fig. 2.10). Cette surface de niveau est approximée en utilisant l'espace engendré par les fonctions de forme espace-temps du fluide.

2.4.3 Espace discrétisé de la partie standard

On définit \mathcal{V}_p^h et \mathcal{V}_v^h comme :

$$\mathcal{V}_p^h = \text{Vec}\{\varphi_{p,1}, \dots, \varphi_{p,n_p}\}, \quad (2.34)$$

$$\mathcal{V}_v^h = \text{Vec}\{\varphi_{v,1}\vec{e}_1, \varphi_{v,1}\vec{e}_2 \dots \varphi_{v,n_v}\vec{e}_1, \varphi_{v,n_v}\vec{e}_2\}, \quad (2.35)$$

où n_p est le nombre de nœuds du maillage fluide pour le champ de pression et n_v est le nombre de nœuds du maillage fluide pour le champ de vitesse. Les fonctions de formes associées sont notées $\varphi_{p,i} \in \mathcal{V}_p$ et $\varphi_{v,i} \in \mathcal{V}_v$. Dans ce travail, on choisit d'utiliser les mêmes maillages pour les deux champs de pression et de vitesse ; la condition LBB [16] n'étant pas vérifiée, des termes de stabilisation sont ajoutés à la formulation. On note dans la suite φ_i^F la fonction de forme associée au nœud i du maillage fluide espace-temps ($\varphi_i^F = \varphi_{p,i} = \varphi_{v,i}$ et $n = n_p = n_v$).

De plus, on choisit de garder les directions espace et temps orthogonales dans les éléments. Les éléments utilisés sont des prismes à 6 nœuds dont les deux faces triangulaires sont situées l'une en face de l'autre aux deux instants t_n et t_{n+1} . La base canonique de cet espace restreint à un élément prisme espace temps est $\{1, x, y\} \times \{1, t\}$. Un seul élément est utilisé dans la direction temporelle pour mailler le domaine espace-temps $\Omega_F \times \mathcal{T}_n$ où $\mathcal{T}_n = [t_n, t_{n+1}]$ est l'intervalle d'un pas de temps. Un exemple typique de maillage espace-temps utilisé dans cette étude pour mailler le domaine $\Omega_F \times \mathcal{T}_n$ est représenté sur la figure 2.10.

2.4.4 Construction de l'espace discrétisé enrichi

La structure induit dans le domaine fluide un saut de pression de part et d'autre de l'interface fluide-structure. On enrichit alors le champ de pression par une fonction ψ discontinue à l'interface. L'espace de discrétisation de la pression fluide est

$$\mathcal{V}_p^{\text{PU}}(1, \psi) = \mathcal{V}_p^h \oplus \mathcal{V}_p^{\text{PU}}(\psi) . \quad (2.36)$$

Le champ de pression discrétisé dans le fluide s'écrit alors sous la forme :

$$p(M, t) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \varphi_i^F(M, t) P_i + \sum_{j \in \mathcal{E}} \varphi_j^F(M, t) \psi_j(M, t) A_j^p , \quad (2.37)$$

où \mathcal{S} est l'ensemble des nœuds du maillage, P_i est la partie non enrichie de la pression au nœud i , \mathcal{E} est l'ensemble des nœuds enrichis, et A_j^p est la nouvelle inconnue d'enrichissement du champ de pression au nœud j . Les nœuds enrichis sont ceux connectés aux éléments du maillage espace-temps coupés par l'interface fluide-structure (Figure 2.10).

La fonction d'enrichissement ψ est choisie différente pour chaque nœud $j \in \mathcal{E}$ et vaut :

$$\psi_j(M, t) = \frac{1}{2} \left(1 - \text{sgn}(\phi(M, t)) \text{sgn}(\phi(M_j, t_j)) \right) , \quad (2.38)$$

où (M_j, t_j) sont les coordonnées espace-temps du nœud j , L'avantage de cette fonction d'enrichissement est qu'elle permet de garder la propriété dite de Kronecker, c'est à dire que la valeur du champ de pression en un nœud enrichi j est bien l'inconnue P_j car $\psi_j(M_j, t_j) = 0$.

La présence de la structure introduit un saut dans le gradient de vitesse de part et d'autre de l'interface fluide-structure. Deux choix sont possibles pour enrichir l'espace de discrétisation du champ de vitesse fluide.

Le premier choix est de construire l'espace enrichi à partir de la valeur absolue de la fonction ligne de niveau :

$$\mathcal{V}_v^{\text{PU}}(1, |\phi|) = \mathcal{V}_v^h \oplus \mathcal{V}_v^{\text{PU}}(|\phi|) . \quad (2.39)$$

Ce choix a l'avantage de préserver la continuité du champ de vitesse à la traversée de la structure, tout en introduisant une discontinuité dans le gradient de vitesse, ce qui

correspond à la physique attendue. L'inconvénient est que cet enrichissement introduit des termes indésirables dans les éléments adjacents aux éléments enrichis (éléments semi-enrichis) qui doivent alors être corrigés [22, 30].

Le deuxième choix est de construire l'espace enrichi en utilisant la fonction saut ψ introduite précédemment :

$$\mathcal{V}_v^{\text{PU}}(1, \psi) = \mathcal{V}_v^h \oplus \mathcal{V}_v^{\text{PU}}(\psi) . \quad (2.40)$$

Le champ de vitesse discrétisé dans le domaine fluide espace-temps s'écrit alors :

$$v_k(M, t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \varphi_i^F(M, t) V_{ik} + \sum_{j \in \mathcal{E}} \varphi_j^F(M, t) \psi_j(M, t) A_{jk}^v , \quad (2.41)$$

où V_{ik} est la partie non enrichie de la vitesse suivant \vec{e}_k au nœud i , et A_{jk}^v est la nouvelle inconnue d'enrichissement de vitesse suivant \vec{e}_k au nœud j . L'avantage de ce deuxième choix est l'absence des termes indésirables dans les éléments adjacents. L'inconvénient est qu'une discontinuité de vitesse à la traversée de la structure est introduite. Un multiplicateur de Lagrange est alors utilisé afin d'assurer la continuité de la vitesse fluide et structure à l'interface fluide-structure des deux côtés de l'interface.

2.4.5 Résolution du problème couplé

La formulation variationnelle du problème couplé n'est pas rappelée ici. Le problème est calculé entre deux instants par un schéma de Galerkin discontinu : les quantités à l'instant t_{n+1} mais aussi à l'instant t_n sont inconnues. Ce schéma permet de gagner un ordre de grandeur en convergence sur le schéma temporel. Les inconnues du système à résoudre entre deux pas de temps sont les vitesses du fluide (avec l'enrichissement) et de la structure, la pression enrichie dans le fluide ainsi que les inconnues liées au multiplicateur de Lagrange. Ce système non-linéaire est résolu de façon itérative par une méthode de point fixe. La position de la (ou des) structure(s) dans le fluide est mise à jour au cours des itérations et la surface de niveau $\phi(M, t)$ est recalculée.

2.4.6 Principaux résultats

On considère deux structures minces flexibles dans un tunnel de fluide en écoulement (Fig. 2.11). La vitesse d'entrée horizontale du fluide à l'extrémité gauche du tunnel est

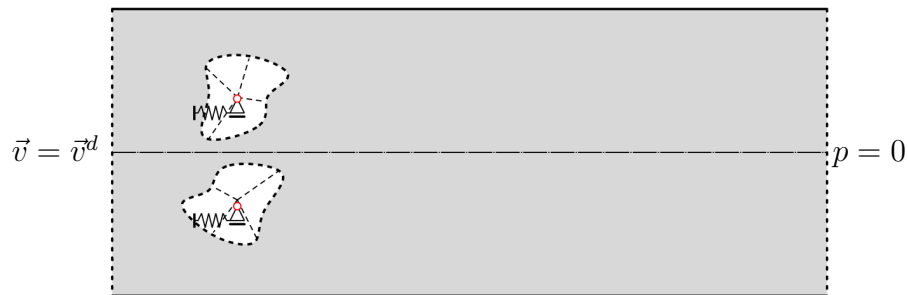
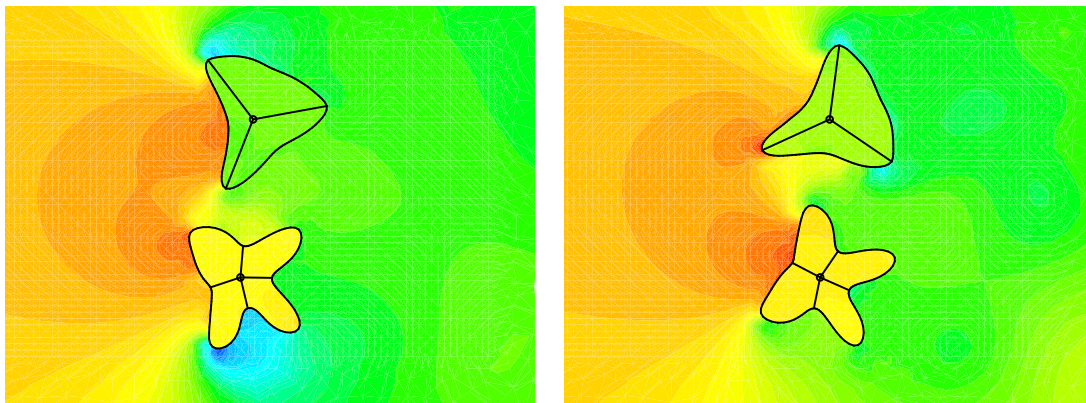


FIGURE 2.11 – Deux structures flexibles dans un écoulement fluide



(a) Champ de pression à t=1 s

(b) Champ de pression à t=2 s

FIGURE 2.12 – Deux structures flexibles dans un écoulement, champs de pression à deux instants

imposée ($\vec{v} = \vec{v}^d$) tandis que l'écoulement est libre à l'extrémité droite ($p = 0$). Les structures sont construites à partir de 3 ou 4 barres rigides en liaisons pivot au centre des motifs. Du fluide est emprisonné à l'intérieur de chaque structure fermée. Les centres des motifs sont en liaison glissière dans le sens horizontal avec le bâti par l'intermédiaire d'un ressort de rappel.

Le comportement du système est non-linéaire et un couplage fort s'installe entre l'écoulement fluide et les deux structures. La méthode développée permet cependant de traiter ce type de problème efficacement sans remaillage. Le champ de pression autour des structures est présenté sur la figure 2.12 pour deux instants. Le champ de vitesse évolue aussi très fortement au cours du temps comme le montre la figure 2.13.

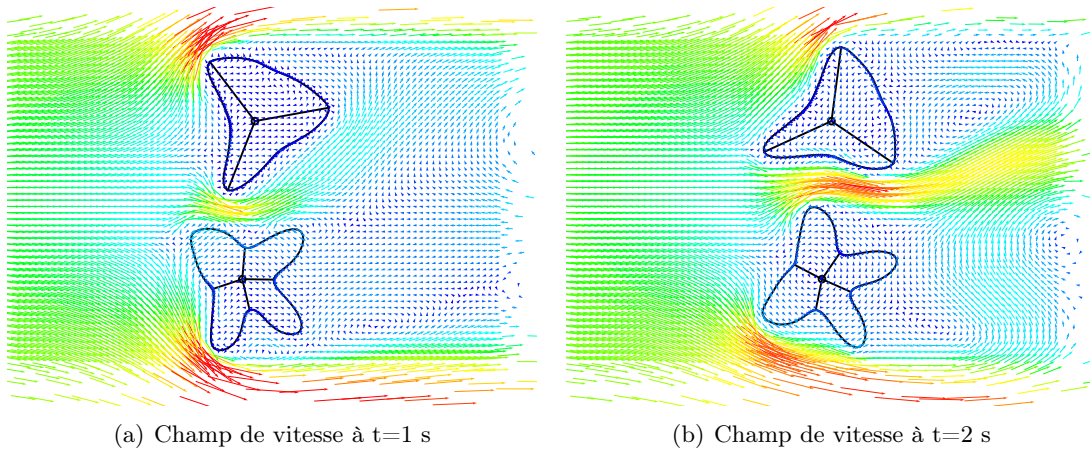


FIGURE 2.13 – Deux structures flexibles dans un écoulement, champs de vitesse à deux instants

2.5 Conclusion sur mes apports à la méthode XFEM

Mes apports concernent le développement et l'application de la méthode XFEM à :

- des éléments finis spectraux de haut degré,
- des éléments finis espace-temps,
- des problèmes d'interaction fluide-structure.

Ces travaux mettent en évidence l'importance de l'intégration numérique et du choix de degré de la base polynomiale de la partition de l'unité. Les tests effectués sur un premier cas simple d'interaction fluide-structure montrent les difficultés de gérer un enrichissement qui évolue dans le temps. L'utilisation d'éléments finis espace-temps permet de s'affranchir de ce problème puisque l'enrichissement est naturellement géré dans le temps. Différentes stratégies d'enrichissement sont développées, permettant de conserver la propriété de Kronecker mais aussi d'éviter les termes parasites dans les éléments semi-enrichis.

Cette expertise acquise sur XFEM me permet de l'adapter à d'autres problèmes, notamment en vibro-acoustique pour des structures minces dans une cavité acoustique (section 3.4).

Chapitre 3

Modélisation des problèmes vibro-acoustique

Ce chapitre fait état du travail réalisé sur les problèmes vibro-acoustique. Une thèse et des articles sont associés à ces travaux :

- Thèse de Romain Rumpler. Efficient finite element approach for structural-acoustic applications including 3D modelling of sound absorbing porous materials. *Soutenue le 13 mars 2012 au Cnam-Paris, cotutelle entre P. Goransson de KTH et J.-F. Deü du LMSSC*, Lauréat du prix de thèse 2012 du CSMA. Thèse d'allocation d'élève normalien.
- R. Rumpler, A. Legay, J.-F. Deü. Performance of a restrained-interface substructuring FE model for reduction of structural-acoustic problems with poroelastic damping. *Computers and Structures*, 89(23-24), 2233-2248, 2011.
- A. Legay, A. Zilian, C. Janssen. A rheological interface model and its space-time finite element formulation for fluid-structure interaction *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 86(6), 667-687, 2011.
- A. Legay. An extended finite element method approach for structural-acoustic problems involving immersed structures at arbitrary positions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(4), 376-399, 2013.
- A. Legay. The extended finite element method combined with a modal synthesis approach for vibro-acoustic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 101(5), 329-350, 2015.

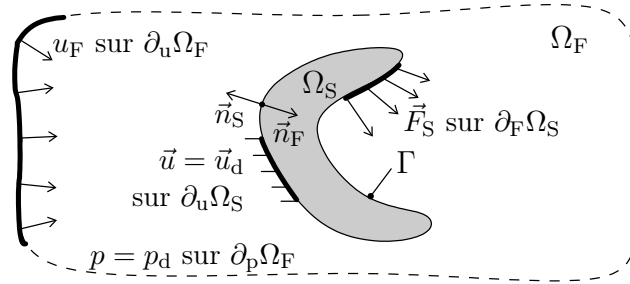


FIGURE 3.1 – Description d'un problème de vibro-acoustique sans dissipation

3.1 Introduction

Les problèmes vibro-acoustiques étudiés dans ce travail sont supposés linéaires, la réponse du système couplé est alors calculée dans le domaine fréquentiel. Les difficultés et coûts numériques proviennent de l'amortissement introduit dans le système. En effet, la résolution numérique en nombres complexes est plus lourde, et l'amortissement dépendant le plus souvent de la fréquence oblige à un re-calcul des matrices à chaque fréquence étudiée. Dans ce chapitre, des stratégies de réduction adaptées à ces problèmes sont explorées.

La section 3.2 rappelle la formulation et la discrétisation d'un problème couplé vibro-acoustique. La section 3.3 décrit plus spécifiquement dans apports dans la modélisation d'un problème vibro-acoustique avec utilisation de matériaux poreux. La section 3.4 détaille la modélisation d'un problème vibro-acoustique pour des structures minces.

3.2 Formulation et discrétisation du problème vibro-acoustique sans dissipation

On rappelle dans ce paragraphe les équations couplés, écrites sous forme variationnelle, d'un problème de vibro-acoustique linéaire dans le domaine fréquentiel. La figure 3.1 illustre ce problème et précise les notations utilisées.

Le fluide acoustique est caractérisé par sa masse volumique ρ_F , par la célérité du son c et par une source acoustique harmonique dont le déplacement fluide vaut u_F dans la direction normale au bord $\partial_u \Omega_F$. Le cas d'une paroi rigide est à considérer comme un

3.2. FORMULATION ET DISCRÉTISATION DU PROBLÈME VIBRO-ACOUSTIQUE SANS DISSIPATION

cas particulier d'une source acoustique dont le déplacement fluide est nul. On introduit l'espace des champs de pression dans le domaine fluide Ω_F suivant :

$$\mathcal{V}_p = \left\{ p \text{ avec } p \in \mathcal{H}^1(\Omega_F) : \begin{array}{l} \Omega_F \rightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto p(M) \end{array} \right\}. \quad (3.1)$$

On définit l'espace des champs de pression admissibles \mathcal{P} comme :

$$\mathcal{P} = \{ p \in \mathcal{V}_p / p = p_d, \forall M \in \partial_p \Omega_F \}, \quad (3.2)$$

et l'espace des champs de pression admissibles à zéro \mathcal{P}_0 comme :

$$\mathcal{P}_0 = \{ p \in \mathcal{V}_p / p = 0, \forall M \in \partial_p \Omega_F \}. \quad (3.3)$$

La structure élastique est caractérisée par la loi de Hooke \mathbf{C} (en notation de Voigt) et par sa masse volumique ρ_S . Le déplacement harmonique \vec{u}_d est imposé sur le bord $\partial_u \Omega_S$ et les forces extérieures harmoniques \vec{F}_S sont appliquées sur le bord $\partial_F \Omega_S$. On introduit l'espace des champs de déplacements dans la structure Ω_S suivant :

$$\mathcal{V}_u = \left\{ \vec{u} \text{ avec } u_i \in \mathcal{H}^1(\Omega_S) : \begin{array}{l} \Omega_S \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ M \mapsto \vec{u}(M) \end{array} \right\}. \quad (3.4)$$

On définit l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles \mathcal{U} comme :

$$\mathcal{U} = \{ \vec{u} \in \mathcal{V}_u / \vec{u}(M) = \vec{u}_d, \forall M \in \partial_u \Omega_S \}, \quad (3.5)$$

et l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles à zéro \mathcal{U}_0 comme :

$$\mathcal{U}_0 = \left\{ \vec{u} \in \mathcal{V}_u / \vec{u}(M) = \vec{0}, \forall M \in \partial_u \Omega_S \right\}. \quad (3.6)$$

On note dans la suite \underline{u} la représentation du champ de déplacement \vec{u} dans la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\underline{\epsilon}(\underline{u})$ la représentation du champ de déformation en notation de Voigt associé au champ de déplacement \underline{u} .

Le long de l'interface fluide-structure Γ , on note \vec{n}_F le vecteur unitaire normal à Γ et sortant de Ω_F , on définit \vec{n}_S comme étant son opposé.

On cherche la solution harmonique du couple pression p , déplacement \vec{u} , à la pulsation ω tel $p \in \mathcal{P}$, $\vec{u} \in \mathcal{U}$, et $\forall \vec{v} \in \mathcal{U}_0, \forall q \in \mathcal{P}_0$, on ait :

$$\int_{\Omega_S} \underline{\epsilon}^T(\underline{v}) \mathbf{C} \underline{\epsilon}(\underline{u}) \, dV - \omega^2 \int_{\Omega_S} \rho_S \underline{v}^T \underline{u} \, dV - \int_{\Gamma} \underline{v}^T \underline{n}_F p \, dS = \int_{\partial_F \Omega_S} \underline{v}^T \underline{F}_S \, dS \quad (3.7)$$

et

$$\frac{1}{\rho_F} \int_{\Omega_F} \underline{\text{grad}}^T(q) \underline{\text{grad}}(p) \, dV - \frac{\omega^2}{c^2 \rho_F} \int_{\Omega_F} q p \, dV - \omega^2 \int_{\Gamma} q \underline{u}^T \underline{n}_F \, dS = \omega^2 \int_{\partial_u \Omega_F} q u_F \, dS. \quad (3.8)$$

On construit les espaces \mathcal{V}_p^h et \mathcal{V}_u^h comme étant engendrés respectivement par les fonctions de forme des maillages fluide φ_i^F et structure φ_i^S . On note \underline{P}_F la représentation d'un champ de pression p^h appartenant à \mathcal{V}_p^h dans la base des fonctions de forme φ_i^F . On note de même \underline{U}_S la représentation d'un champ de déplacement \vec{u}^h appartenant à \mathcal{V}_u^h dans la base des fonctions de forme φ_i^S . En introduisant les matrices des fonctions de forme Φ_F et Φ_S des maillages fluide et structure respectivement, on a :

$$p^h \in \mathcal{V}_p^h \Leftrightarrow p^h = \Phi_F \underline{P}_F \quad (3.9)$$

et

$$\vec{u}^h \in \mathcal{V}_u^h \Leftrightarrow \underline{u}^h = \Phi_S \underline{U}_S \quad (3.10)$$

On définit de plus les ensembles fonctionnels suivants : $\mathcal{P}^h = \mathcal{P} \cap \mathcal{V}_p^h$, $\mathcal{P}_0^h = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{V}_p^h$, $\mathcal{U}^h = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}_u^h$, $\mathcal{U}_0^h = \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{V}_u^h$.

Le couple solution ($p^h \in \mathcal{P}^h$, $\vec{u}^h \in \mathcal{U}^h$) vérifie alors les équations du système linéaire suivant pour la pulsation ω donnée :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{FF} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_{FS}^T & \mathbf{K}_{SS} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{FF} & \mathbf{C}_{FS} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{SS} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{P}_F \\ \underline{U}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \underline{U}_F \\ \underline{F}_S \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

où les matrices introduites sont définies par :

$$\mathbf{K}_{FF} = \frac{1}{\rho_F} \int_{\Omega_F} \mathbf{B}_F^T \mathbf{B}_F \, dV, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{M}_{FF} = \frac{1}{\rho_F c^2} \int_{\Omega_F} \Phi_F^T \Phi_F \, dV, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{C}_{FS} = \int_{\Gamma} \Phi_F^T \underline{n}_F \Phi_S \, dS, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{K}_{SS} = \int_{\Omega_S} \mathbf{B}_S^T \mathbf{C} \mathbf{B}_S \, dV, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{M}_{SS} = \int_{\Omega_S} \rho_S \Phi_S^T \Phi_S \, dV, \quad (3.16)$$

où \mathbf{B}_F et \mathbf{B}_S sont les opérateurs "gradients discrétisés" tels que :

$$\underline{\text{grad}}(p^h) = \mathbf{B}_F \underline{P}_F, \quad (3.17)$$

$$\underline{\epsilon}(\underline{u}^h) = \mathbf{B}_S \underline{U}_S. \quad (3.18)$$

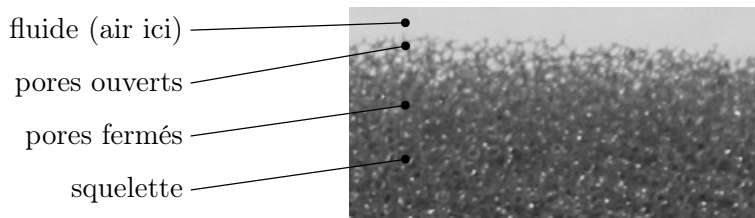


FIGURE 3.2 – Matériau poreux

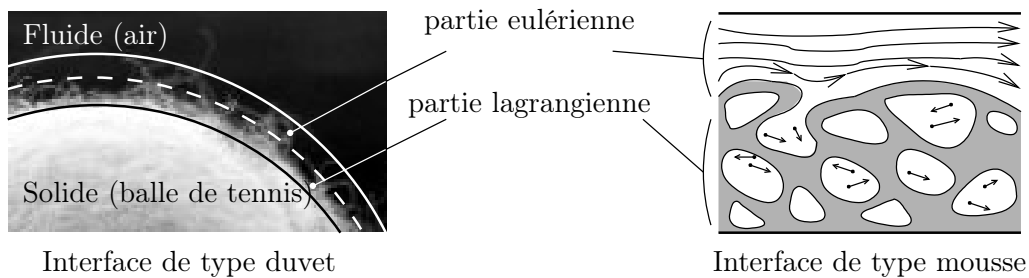


FIGURE 3.3 – Interface dissipative entre une structure et un fluide en écoulement : décomposition en parties lagrangienne et eulérienne

Afin d’obtenir la fonction de réponse en fréquence du système couplé, ce système doit être résolu pour une bande de fréquence donnée.

3.3 Problème vibro-acoustique avec utilisation de matériaux poreux

3.3.1 Introduction

La réduction du bruit dans une cavité acoustique peut être réalisée en utilisant des matériaux poreux absorbants sur les parois de la cavité acoustique. Un matériau poreux est hétérogène et est constitué d’un squelette solide autour duquel un fluide (de l’air ici) circule (Fig. 3.2). Les pores du squelette peuvent être ouverts ou fermés. Les capacités dissipatives, d’un point de vue acoustique, sont les plus intéressantes dans le cas de pores ouverts car le fluide peut circuler dans le squelette et donc dissiper de l’énergie par effet visqueux. Le caractère visco-élastique du squelette renforce cet effet dissipatif. La modélisation d’un tel matériau fait donc intervenir des physiques différentes sur des géométries complexes. Un modèle homogénéisé de comportement est alors difficile à construire.

Afin de simplifier la modélisation du matériaux poreux, un travail a été mené avec

A. Zilian et C. Janssen [ACL 6]. Cette étude porte sur la modélisation d'une interface dissipative à l'interface entre une structure et un fluide en écoulement (Fig. 3.3). Ce modèle est inspiré des modèles d'impédance de paroi en vibro-acoustique [10,27]. La partie eulérienne modélise l'amortissement visqueux dans la partie fluide en écoulement le long de l'interface. La partie lagrangienne modélise la rigidité et l'amortissement structurel du squelette solide et du fluide au repos dans le squelette. L'avantage d'un tel modèle simplifié rhéologique est qu'il n'introduit pas de nouveaux degrés de liberté dans le système et qu'il est facile à implémenter. L'inconvénient est qu'il ne prend en compte que des couplages unidimensionnels des domaines où deux points voisins de l'interface ont des comportements indépendants.

Dans le cadre de la thèse de R. Rumpler [THESE 1, ACL 7], une modélisation fine tridimensionnelle du matériau poreux (théorie de Biot-Allard) est préférée à un modèle simplifié mais cela induit une augmentation des temps de calcul. L'idée est alors de construire une base réduite du problème, basée ici sur une méthode de type synthèse modale. Le système final à résoudre est de taille réduite par rapport au système initial, mais il contient toujours, en plus des degrés de liberté des interfaces entre sous-domaines, l'ensemble des degrés de liberté du domaine poreux. D'autres approches de synthèse modale existent dans la littérature en lien avec des problèmes d'optimisation des caractéristiques du milieu poreux [12], ou plus récemment pour réduire les degrés de liberté du milieu poreux lui-même [51].

3.3.2 Modélisation du problème vibro-acoustique avec matériaux poreux

On considère le problème vibro-acoustique pour lequel un matériau poreux est placé sur une partie de la paroi rigide de la cavité acoustique comme décrit sur la figure 3.4.

Le matériau poreux est modélisé par la théorie de Biot-Allard comme possédant un squelette solide flexible noyé dans de l'air [1, 13, 14]. C'est un modèle homogénéisé où les deux phases, solide et fluide, sont définies en tout point du domaine Ω_P occupé par le matériau poreux. Les champs de contraintes σ_s et σ_f des phases solide et fluide

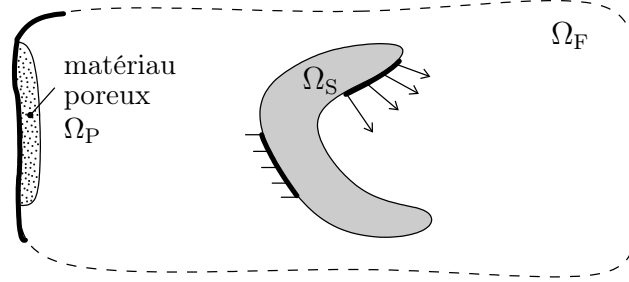


FIGURE 3.4 – Description d'un problème de vibro-acoustique avec matériau poreux

respectivement vérifient les équations locales de la dynamique :

$$\vec{\text{div}}\boldsymbol{\sigma}_s + \omega^2(\tilde{\rho}_s\vec{u}_s + \tilde{\rho}_{sf}\vec{u}_f) = \vec{0} \text{ dans } \Omega_P, \quad (3.19)$$

$$\vec{\text{div}}\boldsymbol{\sigma}_f + \omega^2(\tilde{\rho}_{sf}\vec{u}_s + \tilde{\rho}_f\vec{u}_f) = \vec{0} \text{ dans } \Omega_P, \quad (3.20)$$

où \vec{u}_s et \vec{u}_f sont respectivement les champs de déplacement des phases solide et fluide, $\tilde{\rho}_s$, $\tilde{\rho}_f$ et $\tilde{\rho}_{sf}$ sont des densités complexes équivalentes dépendantes de la pulsation ω qui prennent en compte les effets visqueux ainsi que les couplages inertiels entre les deux phases. Les champs de déplacements et de contraintes homogénéisés sont reliés par des relations de comportements qui s'écrivent en notation de Voigt :

$$\underline{\sigma}_s = \tilde{\mathbf{D}}_s \underline{\epsilon}(\underline{u}_s) + \tilde{\mathbf{D}}_{sf} \underline{\epsilon}(\underline{u}_f), \quad (3.21)$$

$$\underline{\sigma}_f = \tilde{\mathbf{D}}_{sf}^T \underline{\epsilon}(\underline{u}_s) + \tilde{\mathbf{D}}_f \underline{\epsilon}(\underline{u}_f), \quad (3.22)$$

où $\tilde{\mathbf{D}}_s$, $\tilde{\mathbf{D}}_{sf}$ et $\tilde{\mathbf{D}}_f$ sont des opérateurs d'élasticité complexes équivalents dépendants de la pulsation ω .

En discrétisant le matériau poreux par des éléments finis tridimensionnels et en notant $\underline{\eta}_s$ et $\underline{\eta}_f$ respectivement les représentations de \underline{u}_s et de \underline{u}_f dans la base des fonctions de forme du maillage du domaine poreux, le système couplé fluide-poreux-structure à résoudre pour la pulsation harmonique ω est :

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{FF} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_{FS}^T & \mathbf{K}_{SS} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -(1-\phi)\mathbf{C}_{Fs}^T & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{ss} & \tilde{\mathbf{K}}_{sf} \\ -\phi\mathbf{C}_{Ff}^T & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{fs} & \tilde{\mathbf{K}}_{ff} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{FF} & \mathbf{C}_{FS} & (1-\phi)\mathbf{C}_{Fs} & \phi\mathbf{C}_{Ff} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_F & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_{ss} & \tilde{\mathbf{M}}_{sf} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_{fs} & \tilde{\mathbf{M}}_{ff} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_F \\ \underline{U}_S \\ \underline{\eta}_s \\ \underline{\eta}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \underline{U}_F \\ \underline{F}_S \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

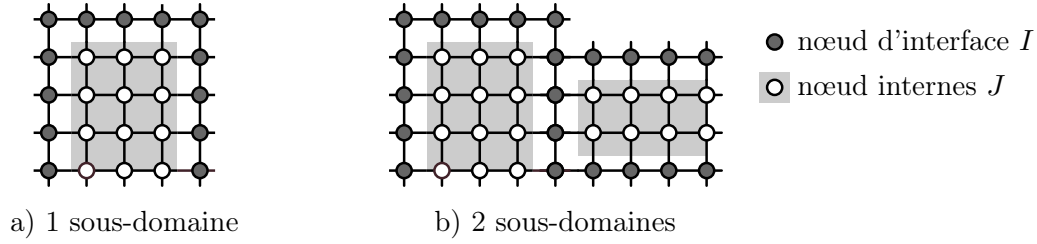


FIGURE 3.5 – Décomposition en sous-domaines du domaine fluide

où ϕ est la porosité du matériau poreux, c'est à dire la fraction volumique de fluide. La thèse de R. Rumpler détaille les matrices du système précédent [THESE 1].

3.3.3 Réduction de modèle du fluide acoustique

La réduction du fluide acoustique est basée sur la méthode de décomposition en sous-domaines pour la dynamique de Craig-Bampton [6].

Méthode de synthèse modale pour un sous-domaine

On considère un sous-domaine du domaine acoustique (Fig. 3.5-a). Ses degrés de liberté sont décomposés en degrés de liberté d'interfaces I et internes J . Les degrés de liberté d'interface correspondent aux nœuds en contact avec les autres sous-domaines, la structure, le matériau poreux ainsi que les nœuds des sources acoustiques. L'idée est de construire une base réduite pour le fluide à partir des p premiers modes propres à interface fixe et des modes statiques d'interface.

Les modes propres du sous-domaine sont calculés à interfaces fixes, c'est à dire pour $\underline{P}_I = \underline{0}$:

$$(\mathbf{K}_{JJ} - \omega^2 \mathbf{M}_{JJ}) \underline{\phi}_J = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

Ces p modes propres sont rangés dans la matrice Φ_{Jp} , ils sont normés par rapport à la matrice de masse, et la matrice de rigidité Ω_{pp} projetée sur les modes est diagonale.

Les modes statiques d'interfaces sont calculés comme les réponses successives du fluide à des pressions unitaires en chaque nœud de l'interface. Ces modes forment les colonnes de la matrice Ψ_{JI} qui peut s'écrire de la façon suivante :

$$\Psi_{JI} = -\mathbf{K}_{JJ}^{-1} \mathbf{K}_{JI} . \quad (3.25)$$

Les inconnues de pression s'écrivent dans la base réduite :

$$\begin{bmatrix} \underline{P}_J \\ \underline{P}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{Jp} & \Psi_{JI} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_p \\ \underline{P}_I \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

où $[\underline{\alpha}_p^T \ \underline{P}_I^T]^T$ est le champ de pression discrétisé écrit dans la base réduite Ξ de dimension $p + \dim(I)$. Cette base réduite est définie par :

$$\Xi = [\Phi_J \Phi_{Jp} \ \Phi_J \Psi_{JI} + \Phi_I], \quad (3.27)$$

où Φ_J est la matrice des fonctions de forme du fluide restreinte aux nœuds internes. En définissant l'espace $\mathcal{V}_p^{h,\Xi}$ comme étant engendré par la base Ξ , on peut alors écrire un champ de pression $p^{h,\Xi} \in \mathcal{V}_p^{h,\Xi}$ comme :

$$p^{h,\Xi} = \Xi \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_p \\ \underline{P}_I \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Méthode de synthèse modale pour plusieurs sous-domaines

La démarche précédente est appliquée pour chaque sous-domaine : calcul des modes propres à interface fixe pour chaque sous-domaine, puis calcul des modes statiques d'interface. Une fois tous les sous-domaines assemblés, la solution du problème couplé, où $p^{h,\Xi} \in \mathcal{P}^{h,\Xi}$, est solution du système réduit suivant pour lequel les inconnues de pressions internes \underline{P}_J sont condensées sur l'interface :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^* - \omega^2 \mathbf{M}_{II}^* - \omega^4 \mathbf{M}_{II}^o(\omega) & -\omega^2 \mathbf{C}_{IS} & -\omega^2(1-\phi)\mathbf{C}_{Is} & -\omega^2 \phi \mathbf{C}_{If} \\ -\mathbf{C}_{IS}^T & \mathbf{K}_{SS} - \omega^2 \mathbf{M}_{SS} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -(1-\phi)\mathbf{C}_{Is}^T & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{ss} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{ss} & \tilde{\mathbf{K}}_{sf} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{sf} \\ -\phi \mathbf{C}_{If}^T & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{fs} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{fs} & \tilde{\mathbf{K}}_{ff} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_I \\ \underline{U}_S \\ \underline{\eta}_s \\ \underline{\eta}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \underline{U}_I \\ \underline{F}_S \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

où les expressions des différentes matrices ainsi que le détail de l'implémentation du calcul des modes statiques d'interface sont données dans [ACL 7] et [THESE 1]. La condensation des inconnues de pression interne sur les inconnues de pression d'interface demande le calcul de l'inverse d'une matrice, mais cette matrice étant diagonale, le coût de calcul est minime.

Exemple d'application

On considère le problème inspiré de la voiture TRICARMO [26] conçue par LMS international à Leuven qui est constituée de deux cavités acoustiques à parois rigides

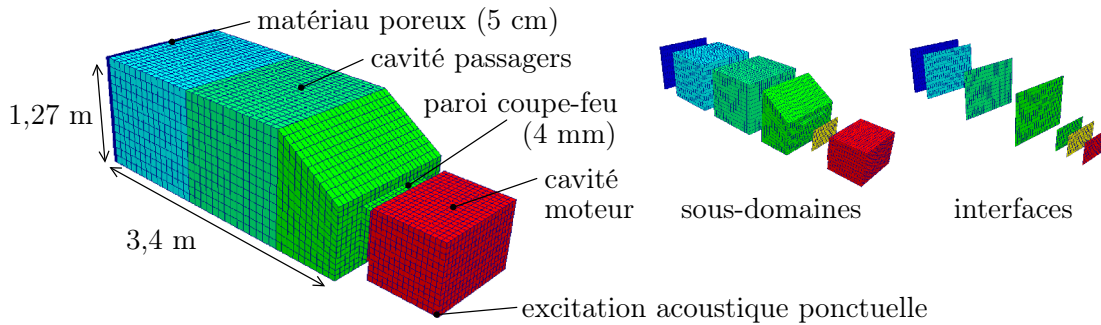


FIGURE 3.6 – Problème vibro-acoustique d'une automobile idéalisée

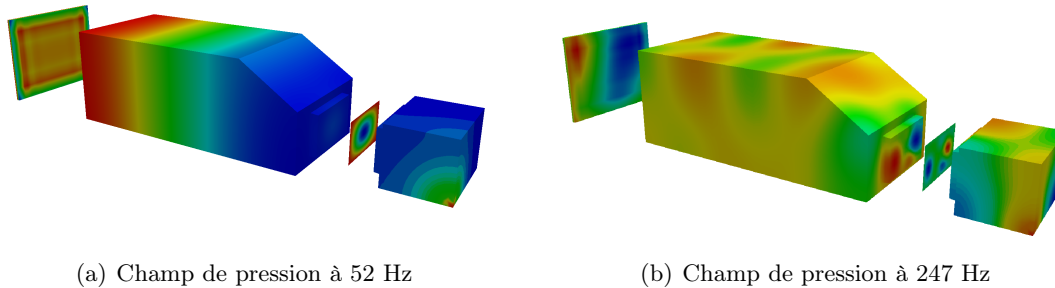
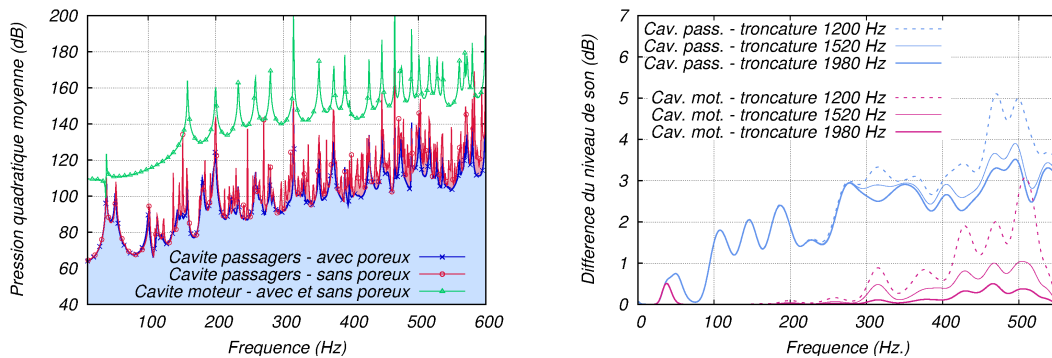


FIGURE 3.7 – Champs de pression dans les cavités passagers et moteur avec matériau poreux pour deux fréquences d'excitations ; amplitude du déplacement de la paroi coupe-feu

(en béton), la cavité moteur et la cavité passagers, ainsi que d'une plaque flexible (paroi coupe-feu) séparant les deux cavités (Fig. 3.6). Le domaine acoustique est discrétisé par des éléments hexaèdres (12620 pour la cavité passagers et 3728 pour la cavité moteur), tandis que la paroi coupe-feu est discrétisée par des éléments de plaque de Kirchhoff-Love de type quadrangle à 4 nœuds (135 éléments). Le problème complet incluant le matériau poreux contient 28500 degrés de liberté. Toutes les caractéristiques exactes du problème calculé sont détaillées dans la thèse de R. Rumpler [THESE 1] et dans [ACL 7].

La cavité passagers est décomposée en 3 sous-domaines, alors que la cavité moteur ne constitue qu'un seul sous-domaine (Fig. 3.6).

Les champs de pression dans les cavités pour les fréquences d'excitations de 52 Hz et 247 Hz sont données sur la figure 3.7. Les couleurs sont proportionnelles à la pression dans le domaine acoustique (du bleu au rouge) et proportionnelles à l'amplitude du



(a) Fonctions de réponse en fréquence de la pression quadratique moyenne dans les deux cavités, avec ou sans poreux (b) Erreurs des différentes troncatures par rapport à la solution du problème non réduit

FIGURE 3.8 – Résultats et comparaisons des différentes réductions pour la voiture TRI-CARMO

déplacement pour la plaque flexible. Les fonctions de réponse en fréquence de la pression quadratique moyenne dans les cavités sont données sur la figure 3.8(a), avec et sans matériau poreux. On remarque que le bruit est plus important dans la cavité moteur que dans la cavité passagers et que la présence du matériau poreux atténue le bruit dans la cavité passagers.

On étudie l'influence du nombre de modes propres constituant la base réduite sur la qualité du résultat en comparant à la solution du problème non réduit. Trois bases réduites sont construites pour lesquelles le dernier mode retenu dans chaque sous-domaine à une fréquence inférieure à 1200 Hz, 1520 Hz et 1980 Hz respectivement qui correspond à 2, 2,5 et 3,3 fois la fréquence d'observation. La figure 3.8(b) montre l'évolution de la différence en dB entre le modèle complet et les 3 modèles réduits dans les deux cavités. La différence est globalement plus faible dans la cavité moteur. Cette différence diminue lorsque la fréquence de troncature augmente. Dans une phase de pré-dimensionnement, la première base pour laquelle la troncature est de 2 fois la fréquence d'observation donne rapidement des résultats acceptables.

Les temps de calcul des modèles réduits sont comparés au temps de calcul du problème non réduit sur la figure 3.9. Le nombre de modes retenus dans les bases réduites influence peu le temps de calcul des modèles réduits. Les modèles réduits demande un temps fixe

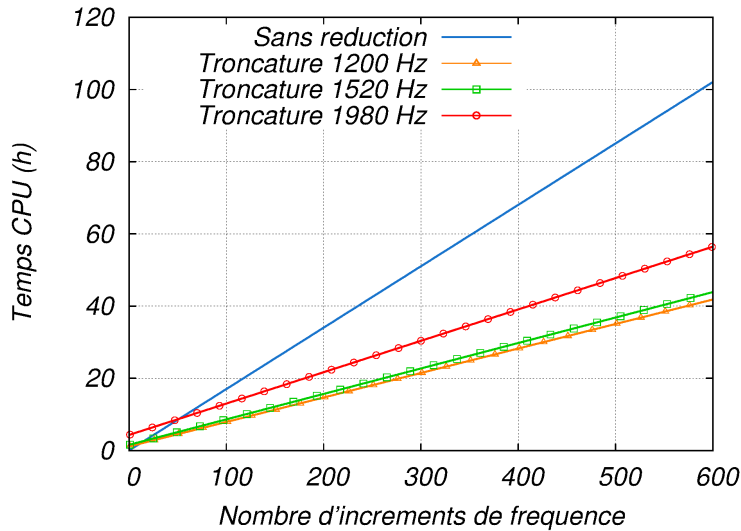


FIGURE 3.9 – Temps de calcul des modèles réduits comparés à celui du problème complet

avant le premier incrément de fréquence pour calculer les bases réduites. Globalement, les temps de calcul pour cet exemple sont divisés pas deux, mais ils dépendent fortement du nombre de degrés de liberté conservés pour l'interface.

3.4 Problèmes vibro-acoustique pour des structures minces immergées

Ce travail a été mené seul depuis les idées jusqu'au développement informatique.

3.4.1 Introduction

Dans beaucoup de problèmes de vibro-acoustique, les structures peuvent être dans un premier temps considérées comme minces par rapport aux dimensions de la cavité fluide. C'est le cas par exemple pour les sièges d'une cabine d'avion ou bien la tuyère de propulseur d'un sous-marin. Ce modèle simplifié nécessite moins de ressources informatiques et permet d'évaluer rapidement une configuration. La discrétisation éléments finis d'un tel problème requiert des maillages compatibles à l'interface et chaque nouvelle configuration (ajout d'une nouvelle structure, changement des positions des structures, modifications de la géométrie des structures, ...) demande un nouveau maillage. L'idée

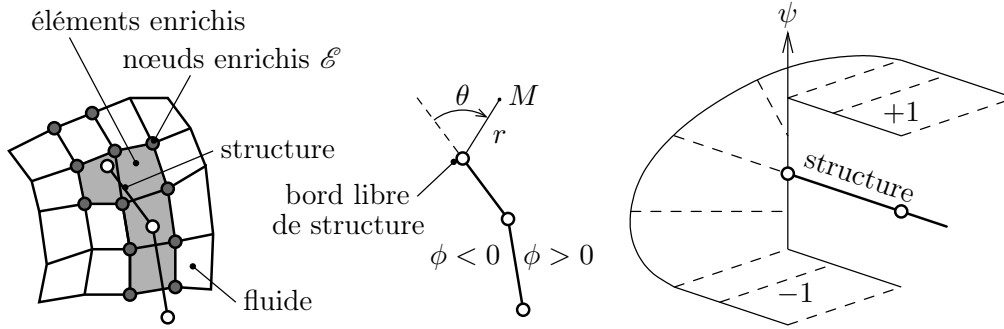


FIGURE 3.10 – Maillage XFEM autour d'une structure, fonction d'enrichissement

est d'utiliser la méthode XFEM afin de s'affranchir de cette étape de remaillage. De plus, il devient alors possible de construire un modèle réduit pour lequel une partie de la base réduite est indépendante de la configuration, ce qui n'est pas possible avec les méthodes de réduction proposées pour le fluide dans la partie précédente.

3.4.2 Enrichissement du champ de pression

Lorsque des structures minces sont immergées dans un fluide acoustique, elles séparent localement le fluide en deux parties. Le saut de pression d'un côté à l'autre peut être pris en compte par un maillage éléments finis conforme à l'interface ; 3 nœuds sont alors présents au même endroit. L'utilisation de XFEM permet de conserver un maillage fluide fixe et d'immerger les structures minces arbitrairement dans ce maillage. La structure est localisée dans le fluide par la surface de niveau nulle de la fonction ϕ .

On introduit l'espace d'enrichissement pour la fonction $\psi \in \mathcal{V}_p$ et basé sur la partition de l'unité engendrée par les fonctions de forme du maillage du fluide acoustique :

$$\mathcal{V}^{\text{PU},p}(1, \psi) = \mathcal{V}_p^h \oplus \mathcal{V}_p^{\text{PU}}(\psi) \quad (3.30)$$

L'ensemble des nœuds enrichis \mathcal{E} est défini sur la figure 3.10. La fonction d'enrichissement ψ est définie par :

$$\begin{cases} \psi(M) = \text{sgn}(\phi(M)) = H(\phi(M)) & \text{si } |\theta| > \frac{\pi}{2}, \\ \psi(M) = \frac{2}{\pi}\theta & \text{si } |\theta| < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (3.31)$$

où la fonction H est la fonction de Heaviside définie comme le signe (sgn) de la fonction ϕ , et θ est l'angle défini sur la figure 3.10 qui possède le même signe que la fonction ligne

de niveau.

L'enrichissement proposé permet de modéliser correctement le saut de pression le long du bord libre de la structure dans le fluide. En effet, en un point de cette ligne (c'est à dire pour $r = 0$), la normale change de direction et tourne de 180° : la pression varie dans un intervalle en ce point. La fonction d'enrichissement, qui a une valeur non définie en $r = 0$ mais qui varie de -1 à +1 (Fig. 3.10), permet de représenter correctement ce phénomène. Il n'est pas possible de le faire avec un maillage compatible où 1 seul nœud fluide serait présent en $r = 0$, la pression aurait une valeur fixe quel que soit θ .

Un champ de pression $p^h \in \mathcal{V}^{\text{PU},p}(1, \psi)$ s'écrit alors pour tout point M de Ω_F :

$$p^h(M) = \sum_{i \in \mathcal{S}} \varphi_i^{\text{F}}(M) P_i + \sum_{j \in \mathcal{E}} \psi(M) \varphi_j^{\text{F}}(M) A_j, \quad (3.32)$$

où \mathcal{S} est l'ensemble des nœuds du domaine fluide, φ_i^{F} est la fonction de forme associée au nœud i , P_i est la partie non enrichie de la pression au nœud i , \mathcal{E} est l'ensemble des nœuds enrichis du domaine fluide, ψ est la fonction d'enrichissement et A_j est la partie enrichie de la pression au nœud j . Le champ de pression enrichi p^h s'écrit aussi pour tout point M de Ω_F :

$$p^h(M) = [\Phi_{\text{F}}(M) \quad \psi(M)\Phi_{\text{F}}(M)\beta_{\text{FA}}] \begin{bmatrix} \underline{P}_{\text{F}} \\ \underline{P}_{\text{A}} \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

où Φ_{F} est la matrice des fonctions de forme du domaine fluide, \underline{P}_{F} contient les pressions nodales de la partie non enrichie et \underline{P}_{A} contient les inconnues associées à l'enrichissement. La matrice booléenne β_{FA} permet d'extraire les nœuds enrichis \mathcal{E} des nœuds \mathcal{S} du maillage fluide.

3.4.3 Écriture du problème couplé discrétisé

En écrivant la formulation variationnelle du problème couplé (Eq. 3.7 et Eq. 3.8) pour un champ de déplacement de structure $\vec{u}^h \in \mathcal{V}_u^h$ et un champ de pression $p^h \in \mathcal{V}_p^h$, on a le système suivant à résoudre :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{FF}} & \mathbf{K}_{\text{FA}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\text{FA}}^T & \mathbf{K}_{\text{AA}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}_{\text{SA}} & \mathbf{K}_{\text{SS}} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{FF}} & \mathbf{M}_{\text{FA}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{\text{FA}}^T & \mathbf{M}_{\text{AA}} & \mathbf{C}_{\text{SA}}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{\text{SS}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{P}_{\text{F}} \\ \underline{P}_{\text{A}} \\ \underline{U}_{\text{S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \underline{U}_{\text{F}} \\ \mathbf{0} \\ \underline{F}_{\text{S}} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

où les expressions des matrices et les détails de l'implémentation sont donnés dans [ACL 11] et [ACL 10].

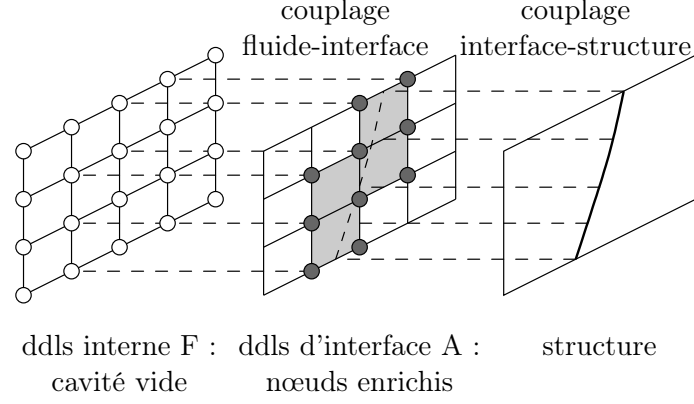


FIGURE 3.11 – Séparation des ddls internes au fluide (F) et d'interface (A)

3.4.4 Réduction de la structure

La base de réduction de la structure est construite à partir de ses m premiers modes propres rangés dans Φ_{S_m} , en prenant en compte ses liaisons, enrichie de la déformée statique $\underline{\Psi}_S$. La déformée statique est orthogonalisée par rapport à la base modale Φ_{S_m} par une procédure de Gram-Schmidt, puis normalisée par rapport à la matrice de masse. Le champ de déplacement de la structure \underline{u}^h s'écrit dans la base réduite :

$$\underline{U}_S = [\Phi_{S_m} \quad \underline{\Psi}_S] \underline{\alpha}_n , \quad (3.35)$$

où $n = m + 1$ et $\underline{\alpha}_n$ est le champ de déplacement écrit dans la base réduite Ξ_u définie par :

$$\Xi_u = [\Phi_S \Phi_{S_m} \quad \Phi_S \underline{\Psi}_S] . \quad (3.36)$$

L'amortissement structural modal est introduit sous forme d'une matrice diagonale \mathbf{D}_{nn} dont le $i^{\text{ème}}$ terme vaut $2\xi_i\omega_S^i$ où ξ_i est le facteur d'amortissement modal.

3.4.5 Réduction du fluide par méthode de synthèse modale

La méthode de réduction du fluide est similaire à celle employée pour réduire le fluide en présence de matériaux poreux (section 3.3.3). Les degrés de liberté d'interface sont choisis comme étant les ddls d'enrichissement comme indiqué sur la figure 3.11. Les modes propres du fluide sont ainsi les modes propres de la cavité sans structure à l'intérieur :

$$(\mathbf{K}_{FF} - \omega_F^2 \mathbf{M}_{FF}) \underline{\phi}_F = \underline{0}. \quad (3.37)$$

Les k premiers modes choisis comme base de projection pour le fluide sont rangés dans la matrice Φ_{Fk} . Les modes sont normés par rapport à la matrice de masse, et la projection Ω_{kk} de la matrice de raideur devient diagonale.

Les modes statiques d'interface sont calculés comme les réponses successives de la cavité vide à des pressions unitaires sur les degrés de liberté enrichis. Ces modes forment les colonnes de la matrice Ψ_{FA} qui peut s'écrire de la façon suivante :

$$\Psi_{FA} = -\mathbf{K}_{FF}^{-1}\mathbf{K}_{FA}. \quad (3.38)$$

Finalement, le champ de pression p^h est cherché dans la base réduite constituée des modes propres du fluide à interface fixe et des déformées statiques d'interface :

$$\begin{bmatrix} \underline{P}_F \\ \underline{P}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{Fk} & \Psi_{FA} \\ \mathbf{0}_{Ak} & \mathbf{1}_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_k \\ \underline{P}_A \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

où $[\underline{\alpha}_k^T \ \underline{P}_A^T]^T$ est le champ de pression discrétisé écrit dans la base réduite Ξ_p définie, en combinant les eqs. (3.33) et (3.39), par :

$$\Xi_p = [\Phi_F \Phi_{Fk} \quad \Phi_F \Psi_{FA} + \psi \Phi_F \beta_{FA}]. \quad (3.40)$$

3.4.6 Système réduit

Le système réduit obtenu en cherchant p^h dans l'espace réduit engendré par Ξ_p et u^h dans l'espace réduit engendré par Ξ_u s'écrit :

$$\left(\begin{bmatrix} \Omega_{kk} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}_{AA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}_{An}^T & \mathbf{K}_{nn} + \omega j \mathbf{D}_{nn} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{kk} & \mathbf{M}_{kA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{kA}^T & \hat{\mathbf{M}}_{AA} & \mathbf{C}_{An} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{nn} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_k \\ \underline{P}_A \\ \underline{\alpha}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \underline{U}_p \\ \mathbf{0} \\ \underline{F}_n \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Ce système peut être condensé à l'interface pour ne faire apparaître que l'inconnue de pression \underline{P}_A .

3.4.7 Application

On considère deux structures identiques immergées dans une cavité acoustique (Fig. 3.12). Les détails sont donnés dans [ACL 11]. Les positions des deux structures sont paramétrées par a et b . Une excitation harmonique est appliquée à une des deux structures. On cherche à connaître les courbes enveloppes de la réponse de la cavité en terme

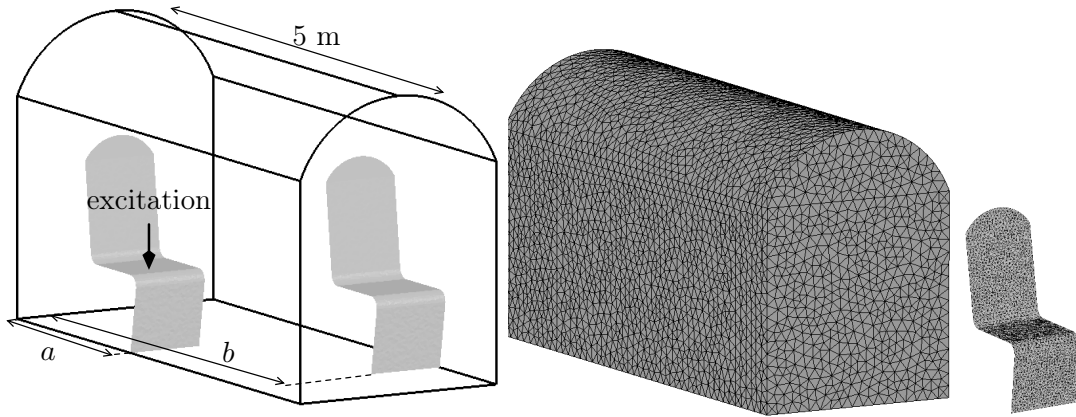


FIGURE 3.12 – Deux structures immergées dans une cavité acoustique : paramétrage des positions des deux structures, maillages du fluide et d’une structure

de pression quadratique moyenne lorsque les positions (en mètre) des structures varient avec $2 < a < 3$ et $3 < b < 4$. Un amortissement structural modal ($\xi = 0,02$) est introduit sur tous les modes.

Le fluide est discrétisé par un maillage de 125327 tétraèdres à 4 nœuds tandis que la structure est maillée par 3613 éléments DKT [8]. On donne sur la figure 3.13 les champs de pression pour la configuration $a = 2$ m et $b = 4$ m, pour les fréquences 27 et 168 Hz : la discontinuité de pression est bien prise en compte autour des structures.

Pour une configuration donnée (a et b fixés), on construit 3 bases :

- base 38F-24S : 38 modes propres de la cavité, 24 modes propres de la structure, troncature à 200 Hz ;
- base 102F-32S : 102 modes propres de la cavité, 32 modes propres de la structure, troncature à 300 Hz ;
- base 250F-44S : 250 modes propres de la cavité, 44 modes propres de la structure, troncature à 400 Hz.

On compare sur la figure 3.14(a) les résultats donnés par les 3 bases de réduction. La base construite avec des modes tronqués à la fréquence d’observation (200 Hz ici) donne des résultats trop éloignés de ceux attendus (base 38F-24S). Une troncature des modes propres du fluide à une fois et demi la fréquence d’observation (300 Hz ici) donne des résultats corrects (base 102F-32S). La base tronquée à deux fois la fréquence d’observation

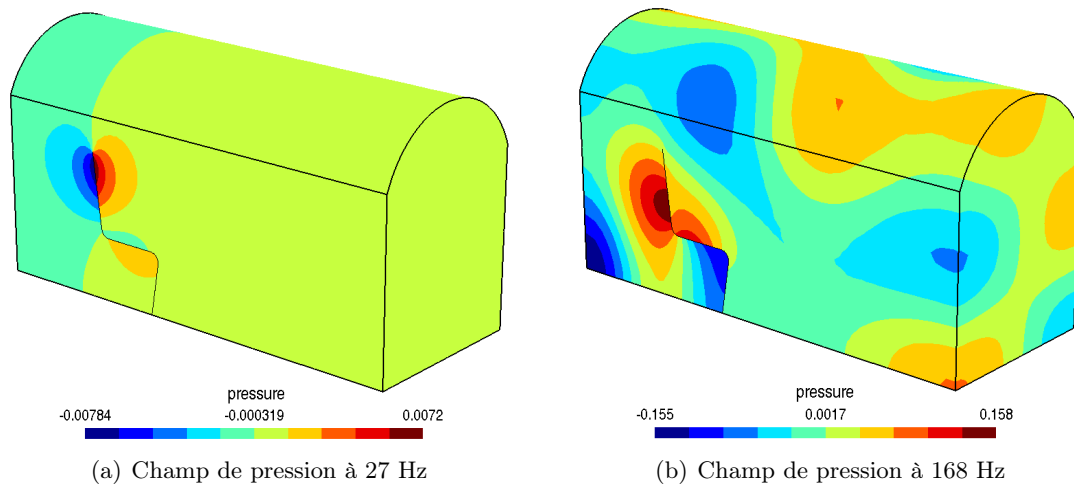


FIGURE 3.13 – Champs de pression dans la cavité acoustique pour une configuration de structures fixée ($a = 2$ m et $b = 4$ m)

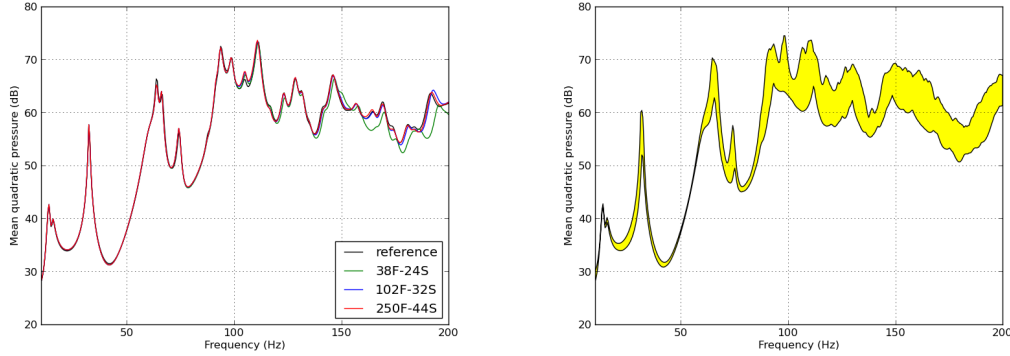
(400 Hz ici), donne des résultats très précis (base 250F-44S).

Les temps de calcul montrent que pour cet exemple où 500 pas de fréquence sont calculés, le temps de calcul en utilisant les bases réduites représente entre 6% (base 38F-24S) et 10% (base 250F-44S) du temps de calcul sans réduction. Autrement dit, le temps de calcul est globalement divisé par 10 pour cette étude.

Une étude paramétrique est menée sur les paramètres de position des structures a et b afin d'obtenir les courbes enveloppes de la réponse en fréquence de la cavité. Chaque intervalle de paramètre est discrétisé en 11 valeurs et toutes les possibilités de couples (a, b) sont calculées, ce qui représente 111 calculs. On utilise la base réduite 250F-44S afin de gagner en temps de calcul. Pour chaque nouvelle configuration, seuls les modes statiques d'interface sont recalculés, la base modale du fluide est inchangée. Le gain en temps de calcul est d'au moins un facteur 10 pour cette étude. Les courbes enveloppes sont tracées sur la figure 3.14(b).

3.4.8 Conclusion sur mes apports à la modélisation de problèmes vibro-acoustiques

Mes travaux sur la modélisation de problèmes vibro-acoustiques se déclinent en deux aspects, qui portent sur la modélisation et réduction de modèle d'une cavité acoustique :



(a) Comparaison des résultats des 3 bases de réduction pour une configuration donnée (b) Courbes enveloppes pour $2 < a < 3$ (m) et $3 < b < 4$ (m)

FIGURE 3.14 – Fonction de réponse en fréquence de la pression quadratique moyenne dans la cavité acoustique

- comportant un matériau poreux,
- dans laquelle une ou plusieurs structures minces sont présentes.

Un modèle rhéologique est proposé pour modéliser un matériau poreux à l'interface fluide-structure pour un fluide en écoulement. Une réduction de modèle pour la partie fluide acoustique est mise en place ; elle est basée sur des projections modales et de la décomposition de domaine.

L'utilisation de XFEM pour modéliser un problème vibro-acoustique pour des structures minces, combinée à une base réduite, permet d'étudier facilement et rapidement l'évolution de la fonction de réponse en fréquence de la cavité acoustique en fonction des paramètres de position ou de géométrie des structures. Le premier avantage d'utiliser XFEM est que le maillage fluide est fixe quelles que soient les positions des structures dans la cavité acoustique. Le deuxième avantage est que la base réduite est en partie indépendante des structures, seules les déformées statiques d'interface doivent être recalculées pour une nouvelle configuration.

Chapitre 4

Modélisation des structures amorties

Ce chapitre fait état du travail réalisé sur la modélisation des structures amorties. Une thèse soutenue, une thèse en cours, des articles, et des contributions à des contrats de collaborations avec des industriels sont associés à ces travaux :

- Lucie Rouleau. Modélisation vibro-acoustique de structures munies de matériaux visco-élastiques. *Soutenue le 18 octobre 2013 au Cnam-Paris, directeur de thèse J.-F. Deü du LMSSC*. Thèse CIFRE-Défense avec DCNS.
- Benjamin Morin. Modélisation de liaisons flexibles amortissantes en élastomère pour la prédiction du comportement de systèmes dynamiques complexes. *Thèse débutée en octobre 2012, directeur de thèse J.-F. Deü du LMSSC*.
- L. Rouleau, J.-F. Deü, A. Legay, F. Le Lay. Application of Kramers-Kronig relations to time-temperature superposition for viscoelastic materials. *Mechanics of Materials* 65 :66-75, 2013.
- L. Rouleau, J.-F. Deü, A. Legay, J.-F. Sigrist. Vibro-acoustic study of a viscoelastic sandwich ring immersed in water. *Journal of Sound and Vibration*, 331(3) :522-539, 2012.

4.1 Introduction

L'amortissement des vibrations des structures permet de réduire les bruits engendrés et de protéger les équipements sensibles qui y sont fixés. Afin de pouvoir prédire le

comportement vibratoire amorti de ce type de structures, on peut distinguer deux grandes familles de modèles d'amortissement : prise en compte au niveau de la structure ou prise en compte au niveau du matériau.

Lorsque l'amortissement est naturellement présent dans les matériaux, mais que ces derniers ne sont pas utilisés pour leurs propriétés amortissantes, il est difficile de séparer les contributions des différents matériaux (fibre et matrice par exemple) et phénomènes physiques (frottements aux interfaces des assemblages) à l'amortissement de la structure. La façon la plus simple de prendre en compte l'amortissement est alors de le faire au niveau de la structure, par exemple en introduisant de l'amortissement modal. C'est ce qui a été réalisé lors d'un travail effectué en collaboration avec le CNES dans le cadre d'un contrat. Les structures étudiées étant de révolution, un modèle coque 1D dont la solution est développée en séries de Fourier est utilisé.

Lorsqu'un matériau visco-élastique est placé spécifiquement sur (ou à cœur de) la structure avec pour objectif d'amortir les vibrations, l'amortissement peut être pris en compte par des modèles de loi de comportement visco-élastiques. La modélisation d'une structure sandwich avec matériau visco-élastique à cœur devient délicate : c'est une coque d'un point de vue géométrique, mais le comportement du matériau visco-élastique à cœur est tridimensionnel. Dans le cadre de la thèse de L. Rouleau, effectuée en partenariat avec DCNS, des modèles d'interfaces visco-élastiques sont alors proposés. De plus, plusieurs méthodes de réduction de modèles sont testées et appliquées pour ce type de structures.

Enfin, les matériaux visco-élastiques sont aussi utilisés pour fabriquer des liaisons souples amortissantes placées dans les assemblages. Ces liaisons ont pour but de diminuer les amplitudes des ondes qui transitent entre les structures. Dans certains cas d'application, comme par exemple dans les assemblages de structures spatiales étudiés dans un contrat de collaboration avec "Airbus Defence and Space", la liaison peut subir des grands déplacements et des grandes déformations. Dans le cadre de la thèse de B. Morin, ce type de liaison est étudié, de la modélisation du comportement du matériau visco-hyper-élastique à la proposition d'un modèle réduit numérique de liaison.

La section 4.2 concerne la modélisation des structures de révolution. La section 4.3 détaille mes contributions pour modéliser de façon efficace une structure amortie avec

des matériaux visco-élastiques. La section 4.4 décrit les travaux en cours pour les liaisons amortissantes en grandes transformations.

4.2 Modèle simplifié pour les structures de révolution

La prise en compte de l'amortissement au niveau de la structure peut par exemple être réalisé par modélisation de l'amortissement modal, des essais sur la structure sont alors le plus souvent nécessaires pour caractériser cet amortissement. Le laboratoire collabore avec le CNES depuis plusieurs années sur la problématique de diminution du niveau vibratoire dans l'adaptateur charge utile (ACU) d'Ariane au moment de la séparation du dernier étage. L'ACU est une structure mince de révolution avec des peaux en stratifiés composites et un cœur en "nid d'abeille". La géométrie de l'ACU étant de révolution, un modèle de coque 1D simplifié (inspiré de [8, 23]), dont la solution est développée en séries de Fourier, est utilisé. Ce type de modèle avait déjà été utilisé pendant ma thèse. Les résultats de ce dernier modèle sont comparables avec le modèle de coque 2D mais les temps de calcul sont considérablement réduits [INT-CONF 10].

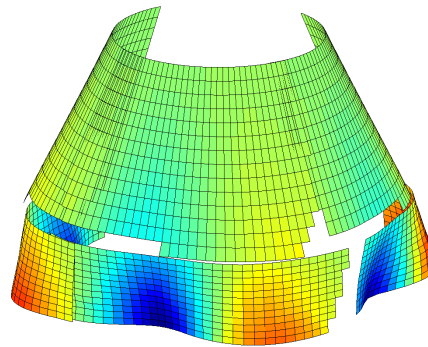
O. Thomas (initialement au LMSSC, actuellement à l'ENSAM de Lille) a effectué des essais sur l'ACU d'Ariane 4 (Fig. 4.1(a)) et a identifié les modes et fréquences propres ainsi que les amortissements modaux. Les modes propres non amortis calculés par les modèles sont comparables à ceux identifiés expérimentalement. La figure 4.1 compare le mode d'harmonique 4 dans la direction circonférentielle et 1 dans la direction axiale calculé par les deux modèles coques à celui identifié expérimentalement. Les fréquences propres et les formes modales sont très similaires.

Les amortissements modaux, identifiés expérimentalement, sont utilisés dans les modèles numériques. Les évolutions temporelles des accélérations sont comparées avec celles mesurées par des accéléromètres lors d'un "choc marteau". Les réponses temporelles des accélérations sont assez proches (Fig. 4.2(a)), mais les spectres de réponse au choc sont meilleurs (Fig. 4.2(b)). Ces travaux ont été réalisés par des mémoires d'ingénieurs effectués au LMSSC, en partie sous ma direction [MASTER 8, MASTER 6].

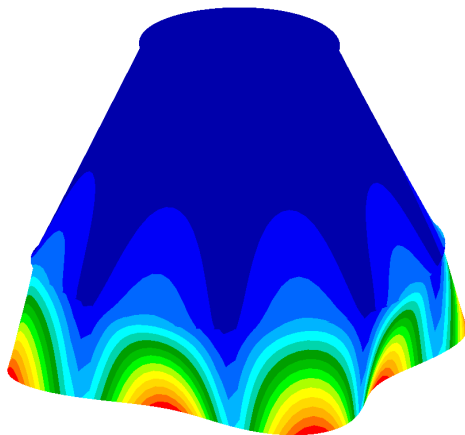
Afin de pouvoir bénéficier de ce type d'approche simplifiée, mais suffisamment précise



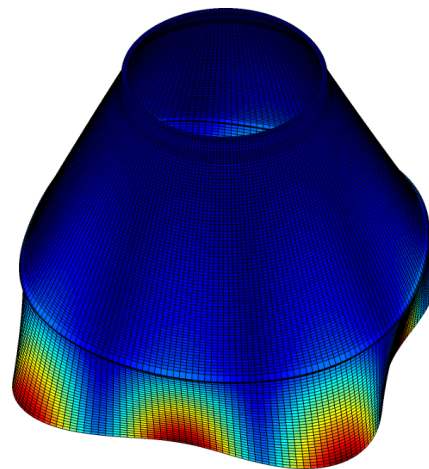
(a) ACU testé au laboratoire



(b) Mode expérimental ; 35,0 Hz



(c) Mode calculé du modèle coque 2D ; 35,3 Hz



(d) Mode calculé du modèle coque 1D en séries de Fourier ; 36,1 Hz

FIGURE 4.1 – Comparaison des résultats d'un mode propre de vibration de l'ACU testé au laboratoire (premier mode de l'harmonique 4)

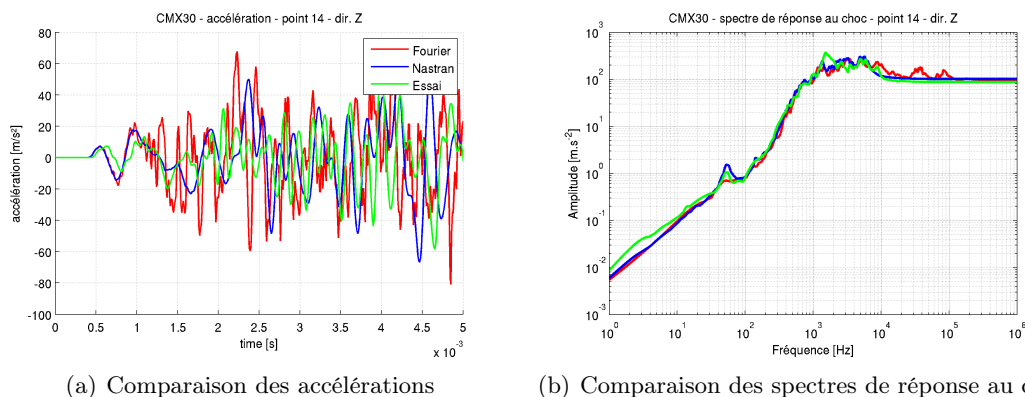


FIGURE 4.2 – Comparaisons des résultats d'un choc marteau sur l'ACU : calcul modèle coque 1D développé en séries de Fourier en rouge, calcul modèle coque 2D avec Nastran en bleu, résultat d'essai en vert

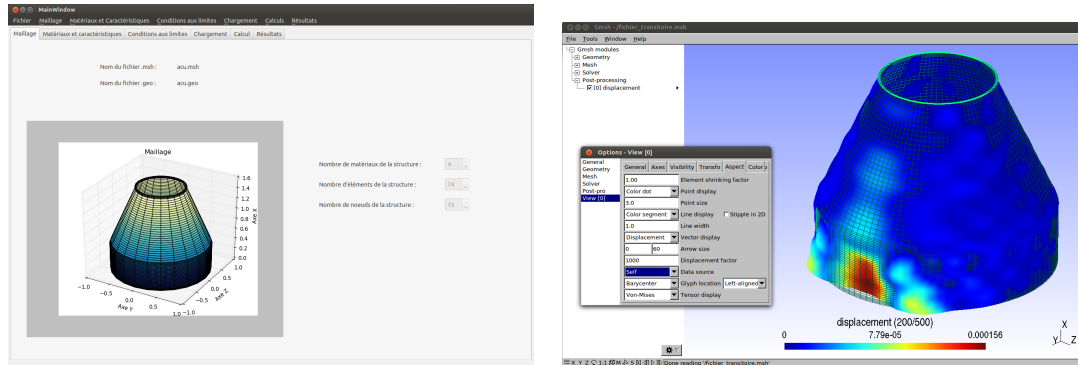
en phase de conception, le laboratoire a développé un outil numérique pour le CNES. J'ai activement participé au développement informatique de cet outil ("OSCAR") qui a été livré en 2014. Ce logiciel possède un cœur en Fortran ainsi qu'une couche en Python pour le calcul au niveau global et la gestion graphique des fenêtres (Fig. 4.3(a)). Gmsh [31] est utilisé pour faire les maillages et visualiser les résultats (Fig. 4.3(b)).

4.3 Structures sandwich visco-élastiques

4.3.1 Introduction

L'utilisation de matériaux visco-élastiques permet d'atténuer le bruit dans une cavité acoustique par dissipation d'une partie de l'énergie vibratoire de la structure. Ces matériaux sont souvent introduits dans le système sous forme de fines couches collées sur la structure ou prises en sandwich entre deux parties de la structure (Fig. 4.4).

Au niveau du matériau, la prise en compte de l'amortissement se fait par des modèles de lois de comportements visco-élastiques. Ces modèles peuvent être basés sur des modèles rhéologiques (section 4.3.2) dont les paramètres sont identifiés par des essais dynamiques sur une machine d'essai "DMA" (Dynamical mechanical analysis). Une telle machine possède cependant une gamme limitée de fréquences et une équivalence temps-température est couramment utilisée pour étendre l'identification des paramètres maté-



(a) Fenêtre principale d'OSCAR pour la mise en données (ici l'ACU) (b) Reconstruction tridimensionnelle de la solution, visualisation avec Gmsh (ici, choc marteau sur l'ACU)

FIGURE 4.3 – Outil graphique développé pour le CNES (OSCAR) pour le calcul des structures de révolution par éléments de coque 1D avec des séries de Fourier, post-traitement et visualisation dans Gmsh

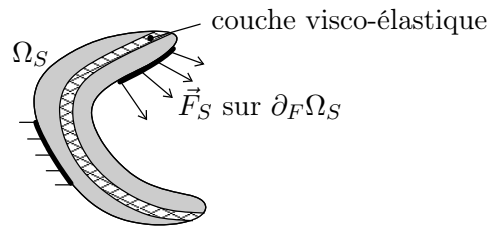


FIGURE 4.4 – Structure mince avec matériau visco-élastique à cœur

riaux à une gamme plus importante. Les modules de perte et de stockage du matériau sont alors obtenus pour une plage de fréquence étroite mais pour différentes températures. Ces courbes sont ensuite décalées en fréquence et en niveau par application du principe d'équivalence temps-température. Dans le cadre de la thèse de L. Rouleau, une méthodologie permettant de déterminer ces coefficients de décalage tout en respectant les relations de causalité de Kramers-Kronig est développée [ACL 9].

Au niveau de la structure, la couche visco-élastique peut être considérée comme mince par rapport à l'épaisseur des peaux métalliques. Des modèles simplifiés sont développés dans la thèse de L. Rouleau [THESE 2], ils sont détaillés dans la section 4.3.4. Afin de réduire les temps de calcul, les performances des méthodes de réduction de modèle couramment employées dans le cas des structures amorties sont comparées dans la section 4.3.5. Enfin, on propose dans la section 4.3.6 une méthode de sous-structuration

dynamique tirant avantage des différentes méthodes de réduction testées.

4.3.2 Modélisation des lois de comportement des matériaux visco-élastiques

Modèle unidimensionnel

Un matériau visco-élastique possède des propriétés élastiques qui changent au cours du temps en fonction de la sollicitation. Lors d'un essai de relaxation pour une éprouvette en traction, la réponse en contrainte $\sigma(t)$ est reliée à la déformation constante ϵ_0 imposée par le module de relaxation $E(t)$:

$$\sigma(t) = E(t)\epsilon_0 . \quad (4.1)$$

Dans un cas plus général où la contrainte et la déformation varie dans le temps, la relation de comportement dépend de l'histoire du chargement et fait intervenir le module de relaxation :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\tau) \frac{\partial \epsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau . \quad (4.2)$$

En régime établi, lorsque la déformation est sinusoïdale de pulsation ω , la réponse en contrainte est sinusoïdale de pulsation ω en déphasage de ϕ par rapport à ϵ :

$$\epsilon(t, \omega) = \epsilon_0 \sin(\omega t) , \quad (4.3)$$

$$\sigma(t, \omega) = \sigma_0 \sin(\omega t + \phi) . \quad (4.4)$$

Le déphasage ϕ est nul pour un matériau purement élastique, il vaut $\frac{\pi}{2}$ pour un matériau purement visqueux. En utilisant les représentations complexes ϵ^* et σ^* des ces signaux harmoniques, on a :

$$\epsilon(t, \omega) = \Im(\epsilon^*) \quad \text{avec} \quad \epsilon^* = \epsilon_0 e^{i\omega t} , \quad (4.5)$$

$$\sigma(t, \omega) = \Im(\sigma^*) \quad \text{avec} \quad \sigma^* = \sigma_0 e^{i(\omega t + \phi)} , \quad (4.6)$$

et la relation de comportement s'écrit sous la forme :

$$\sigma^*(t, \omega) = E^*(\omega)\epsilon^*(t, \omega) , \quad (4.7)$$

où le module de relaxation complexe $E^*(\omega)$ ne dépend que de la pulsation ω . Ce module complexe peut être écrit sous forme cartésienne ou polaire :

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) = |E^*(\omega)|e^{i\phi(\omega)} \quad (4.8)$$

où $E'(\omega)$ est le module de stockage, $E''(\omega)$ est le module de perte, $|E^*(\omega)|$ est l'amplitude du module et $\phi(\omega)$ est la phase. On note couramment $\eta = E''(\omega)/E'(\omega)$ le facteur de perte qui est égal à la tangente de la phase $\phi(\omega)$.

Différents modèles permettant de représenter le module de relaxation complexe sont classiquement utilisés. Les deux modèles présentés ici sont ceux de "Maxwell généralisé" et de "dérivée fractionnaire".

Le modèle de Maxwell généralisé est un modèle rhéologique basé sur l'assemblage en parallèle de système ressort-amortisseur, le premier élément étant un ressort seul de raideur E_0 (module relaxé). Le module de relaxation s'écrit alors sous la forme :

$$E^*(\omega) = E_0 + \sum_{k=1}^N \frac{E_k i\omega\eta_k}{E_k + i\omega\eta_k} = E_0 \left(1 + \sum_{k=1}^N \gamma_k \frac{i\omega\tau_k}{1 + i\omega\tau_k} \right), \quad (4.9)$$

où $\tau_k = \eta_k/E_k$ est le temps de relaxation de l'élément k , η_k est l'amortissement de l'élément k , $\gamma_k = E_k/E_0$ et E_k est la raideur de l'élément k . Le module non-relaxé E_∞ vaut

$$E_\infty = E_0 \left(1 + \sum_{k=1}^N \gamma_k \right). \quad (4.10)$$

Le modèle de Maxwell généralisé possède $2N + 1$ paramètres à identifier.

Le modèle à dérivée fractionnaire s'écrit sous la forme :

$$E^*(\omega) = \frac{E_0 + E_\infty (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha}, \quad (4.11)$$

où α est l'ordre de dérivation fractionnaire et τ est le temps de relaxation. Le modèle à dérivée fractionnaires possède 4 paramètres à identifier.

Modèle tridimensionnel

Le modèle visco-élastique tridimensionnel est basé dans ce travail sur la loi de Hooke généralisée avec des coefficients de Lamé complexes et dépendants de la fréquence. Les

essais montrent que la visco-élasticité intervient principalement sur la partie déviatorique des contraintes et des déformations. La séparation en partie sphérique et déviatorique des contraintes fait intervenir le module de compressibilité complexe $\kappa^*(\omega)$ et le module de cisaillement complexe $G^*(\omega)$. La relation de comportement reliant les déformations aux contraintes en notation de Voigt devient alors :

$$\mathbf{C}^*(\omega) = \kappa^*(\omega) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G^*(\omega) \begin{bmatrix} 4/3 & -2/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 4/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 4/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

4.3.3 Prise en compte de l'incompressibilité

Des techniques sont utilisées classiquement pour corriger les problèmes numériques liés à l'incompressibilité des élastomères. Trois d'entre elles ont été testées :

- La première est de prendre un coefficient de Poisson proche de 0,5 avec une formulation écrite en déplacement : c'est ce qui est fait dans la suite de ce mémoire.
- La deuxième est de prendre un coefficient de Poisson proche de 0,5 avec une formulation mixte de Hellinger-Reissner : ce choix a été fait dans le cadre d'un projet de développement d'un code multi-physique en collaboration avec une université de Séoul (SUV, Seoul university of Venture). L'objectif du code était de modéliser les phénomènes présents lors du fonctionnement d'un moteur à propulsion solide. Les éléments finis mixtes développés dans [35, 36] ont alors été implémentés par des stagiaires de mémoires d'ingénieurs que j'ai co-encadrés [MASTER 4, MASTER 5, MASTER 6].
- La troisième est d'utiliser une formulation pression-déplacement, cela a été fait lors d'un mémoire d'ingénieur que j'ai co-encadré [MASTER 5].

4.3.4 Modélisation de structures sandwich avec matériaux visco-élastiques

Différents modèles utilisés et développés

Les matériaux visco-élastiques sont souvent utilisés en couches collées à la surface des pièces mécaniques ou bien incorporées à la structure pour former une structure sandwich

(Fig. 4.4). Dans le cas de structures minces, la modélisation de ce type de structure multicouches est souvent délicate. Quelque soit le modèle choisi pour la structure sandwich, la matrice de rigidité du modèle numérique éléments finis associée (Eq. 3.15) est complexe et dépend de la pulsation, elle est notée $\mathbf{K}_{SS}^*(\omega)$. Elle peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{K}_{SS}^*(\omega) = \mathbf{K}_{SS}^E + \kappa^*(\omega)\mathbf{K}_{SS}^{V.Sph.} + G^*(\omega)\mathbf{K}_{SS}^{V.Dev.} \quad (4.13)$$

où \mathbf{K}_{SS}^E est la matrice de rigidité de la partie élastique de la structure (peaux), $\mathbf{K}_{SS}^{V.Sph.}$ est la matrice rigidité de la partie sphérique du matériau visco-élastique, $\mathbf{K}_{SS}^{V.Dev.}$ est la matrice rigidité de la partie déviatorique du matériau visco-élastique.

Dans ce travail, trois approches différentes sont suivies pour prendre en compte la couche visco-élastique :

- La première est d'utiliser des éléments de poutre (ou de coque) "zig-zag" où l'hypothèse d'Euler-Bernoulli (resp. Kirchhoff-Love) est faite pour les peaux élastiques de la structure et où l'hypothèse de Timoshenko (resp. Reissner-Mindlin) est utilisée pour le cœur visco-élastique.
- La deuxième est de garder un modèle tridimensionnel de chaque couche.
- La troisième est de créer des éléments finis d'interface soit basés sur un modèle simplifié surfacique soit basés sur un élément fini tridimensionnel.

Les deux premières approches, développées pour un problème plan, sont utilisées pour modéliser un anneau sandwich comportant une couche de matériau visco-élastique à cœur et immergé dans un fluide acoustique. Le fluide est présent dans l'anneau (fluide interne) et autour de l'anneau (fluide externe infini). Une solution analytique, développée en séries de Fourier, est utilisée pour modéliser le fluide que ce soit avec l'hypothèse compressible ou bien avec l'hypothèse incompressible. Cette solution analytique est couplée au modèle éléments finis de la structure. Ce travail fait l'objet d'une publication [ACL 8].

L'hypothèse principale pour la troisième approche est que l'épaisseur de la couche visco-élastique à cœur est faible devant les épaisseurs des couches extérieures de la structure. Les couches externes sont modélisées comme des solides tridimensionnels (Fig. 4.5) avec des nœuds doubles à l'interface avec la couche visco-élastique car celle-ci possède une épaisseur géométrique h_g nulle. Cette approche permet de faire varier la position de la

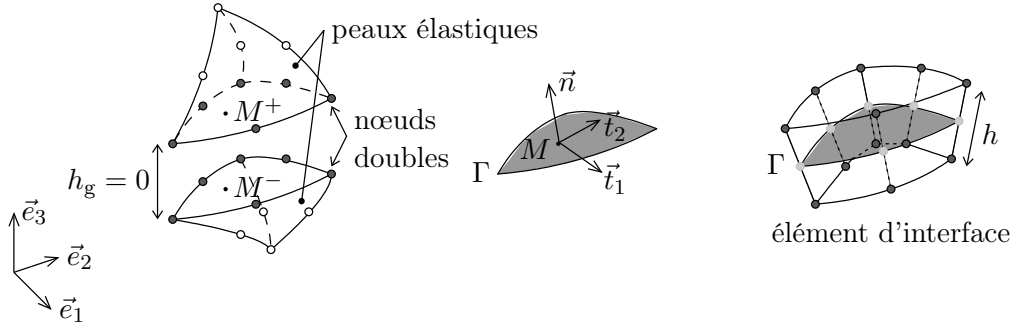


FIGURE 4.5 – Éléments volumiques d'interface prismatique à 12 nœuds connecté à deux tétraèdres à 10 nœuds

couche visco-élastique ainsi que son épaisseur sans avoir besoin de remailler la structure complète. Si la couche visco-élastique n'est pas présente sur une partie de l'interface, les nœuds doubles sont alors fusionnés. Deux types d'éléments d'interface sont développés : le premier est un élément joint adapté de [55] ; le deuxième est construit comme un élément fini tridimensionnel. Dans les deux cas, l'élément fini d'interface relie les déplacements des nœuds doubles des peaux élastiques.

Les détails de l'implémentation sont donnés dans la thèse de L. Rouleau [THESE 2]. Ces travaux sur ces éléments d'interface sont publiés dans des actes de conférences internationales [INT-CONF 29] [INT-CONF 21].

Élément joint d'interface

Les deux couches sont séparées par une distance géométrique nulle (notée h_g) mais la couche visco-élastique est prise en compte de façon analytique par un modèle bidimensionnel de l'interface. L'épaisseur de la couche visco-élastique est notée h . Le comportement de l'interface est caractérisé par le champ du saut de déplacement $\overrightarrow{\Delta u}$ entre les deux peaux élastiques. On définit l'espace \mathcal{V} des champs de saut de déplacement comme :

$$\mathcal{V} = \left\{ \vec{v} \text{ avec } v_i \in \mathcal{H}^1(\Gamma) : \begin{array}{l} \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ M \mapsto \vec{v}(M) \end{array} \right\}, \quad (4.14)$$

où Γ représente la surface moyenne de l'interface. Le saut de déplacement en un point M de Γ vaut :

$$\overrightarrow{\Delta u}(M) = \vec{u}(M^+) - \vec{u}(M^-), \quad (4.15)$$

où $\vec{u}(M^+)$ est le déplacement du point de la peau supérieure attaché à l'interface et $\vec{u}(M^-)$ est le déplacement du point de la peau inférieure attaché à l'interface. On note $\underline{\Delta u}$ le saut de déplacement écrit dans une base locale à l'interface $(\vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)$ où \vec{n} est la normale unitaire en M à Γ et \vec{t}_1 et \vec{t}_2 sont deux vecteurs unitaires orthogonaux entre eux et tangents à Γ en M (Fig. 4.5). L'interface Γ est discrétisée par des éléments finis surfaciques, par exemple des triangles à 6 nœuds si les peaux élastiques sont maillées par des tétraèdres à 10 nœuds. On construit ainsi l'espace discrétisé \mathcal{V}^h des champs de saut de déplacement de l'interface. En notant Φ_I la matrice des fonctions de forme de l'interface discrétisée, tout champ de saut de déplacement $\overrightarrow{\Delta u}^h \in \mathcal{V}^h$ s'écrit sous la forme :

$$\underline{\Delta u}^h = \Phi_I \underline{\Delta U}_I, \quad (4.16)$$

où $\underline{\Delta U}_I$ est la représentation du saut de déplacement dans la base des fonctions de forme de \mathcal{V}^h .

Pour cet élément d'interface destiné à modéliser une couche visco-élastique, on ne considère que les déformations transverses ainsi que la déformation normale :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{nn} & \epsilon_{t_1 n} & \epsilon_{t_2 n} \\ \epsilon_{t_1 n} & 0 & 0 \\ \epsilon_{t_2 n} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{n}, \vec{t}_1, \vec{t}_2)}. \quad (4.17)$$

Les déformations sont écrites en fonction des sauts de déplacement et de l'épaisseur h de la couche visco-élastique sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{nn} \\ 2\epsilon_{t_1 n} \\ 2\epsilon_{t_2 n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/h & 0 & 0 \\ 0 & 1/h & 0 \\ 0 & 0 & 1/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_n \\ \Delta u_{t_1} \\ \Delta u_{t_2} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

En utilisant la notation de Voigt on a alors :

$$\underline{\epsilon}(\overrightarrow{\Delta u}^h) = \frac{1}{h} \Phi_I \underline{\Delta U}_I. \quad (4.19)$$

La loi de Hooke pour ce matériau visco-élastique s'écrit en notation de Voigt :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{t_1 n} \\ \sigma_{t_2 n} \end{bmatrix} = \left(\underbrace{\kappa^*(\omega) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G^*(\omega) \begin{bmatrix} 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=C^*(\omega)} \right) \begin{bmatrix} \epsilon_{nn} \\ 2\epsilon_{t_1 n} \\ 2\epsilon_{t_2 n} \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

où κ^* et G^* sont les modules complexes de compressibilité et de cisaillement respectivement. La matrice de rigidité $\mathbf{K}_{[18 \times 18]}^e$ d'un élément d'interface, dont la surface moyenne est Γ_e , est alors donnée pour un triangle à 6 nœuds par :

$$\mathbf{K}_{[18 \times 18]}^e = \mathbf{R}_{[18 \times 18]}^e{}^T \left(\int_{\Gamma_e} \frac{1}{h} \boldsymbol{\Phi}_{[3 \times 18]}^{eT} \mathbf{C}_{[3 \times 3]}^*(\omega) \boldsymbol{\Phi}_{[3 \times 18]}^e dS \right) \mathbf{R}_{[18 \times 18]}^e \quad (4.21)$$

où la matrice $\mathbf{R}_{[18 \times 18]}^e$ est une matrice de transformation des déplacements des nœuds dans le système de coordonnées globales au système de coordonnées locales. Cette matrice est constituée de 6 blocs de tailles 3×3 écrits successivement sur la diagonale. Chaque bloc 3×3 est évalué au nœud correspondant et vaut :

$$\begin{bmatrix} \vec{n} \cdot \vec{e}_1 & \vec{n} \cdot \vec{e}_2 & \vec{n} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{t}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{t}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{t}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{t}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{t}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{t}_2 \cdot \vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

L'assemblage de cette matrice de rigidité élémentaire dans la matrice de rigidité de la structure complète comportant les peaux élastiques est fait en utilisant le lien existant entre le saut de déplacement à l'interface et les déplacements des deux peaux supérieure et inférieure (Eq. 4.15) écrit pour chaque nœud double dans la base globale ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) :

$$\begin{bmatrix} \Delta u_1^i \\ \Delta u_2^i \\ \Delta u_3^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{i+} \\ u_2^{i+} \\ u_3^{i+} \\ u_1^{i-} \\ u_2^{i-} \\ u_3^{i-} \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

où i est le numéro du nœud pour l'interface, i^+ est le numéro du nœud pour la peau supérieure et i^- est le numéro du nœud pour la peau inférieure. On construit ainsi la matrice $\mathbf{L}_{[18,36]}$ permettant de relier $\underline{\Delta U}_I^e$ de l'élément d'interface e aux déplacements des nœuds des peaux. La matrice de rigidité de l'élément d'interface permettant l'assemblage dans la matrice de rigidité de la structure complète est alors de taille 36×36 et vaut :

$$\mathbf{K}_{[36 \times 36]}^e = \mathbf{L}_{[18,36]}^T \mathbf{K}_{[18 \times 18]}^e \mathbf{L}_{[18,36]} \quad (4.23)$$

La matrice de masse élémentaire est calculée en répartissant de façon égale la masse sur les faces des peaux supérieure et inférieure. Cette matrice, de taille 18×18 , est

calculée de façon classique comme étant égale à

$$\mathbf{M}_{[18 \times 18]}^e = \int_{\Gamma_e} \frac{\rho h}{2} \mathbf{\Phi}_{[3 \times 18]}^{eT} \mathbf{\Phi}_{[3 \times 18]}^e dS \quad (4.24)$$

et s'assemble alors sur les 6 nœuds de la face de la peau supérieure et sur les 6 nœuds de la face de la peau inférieure.

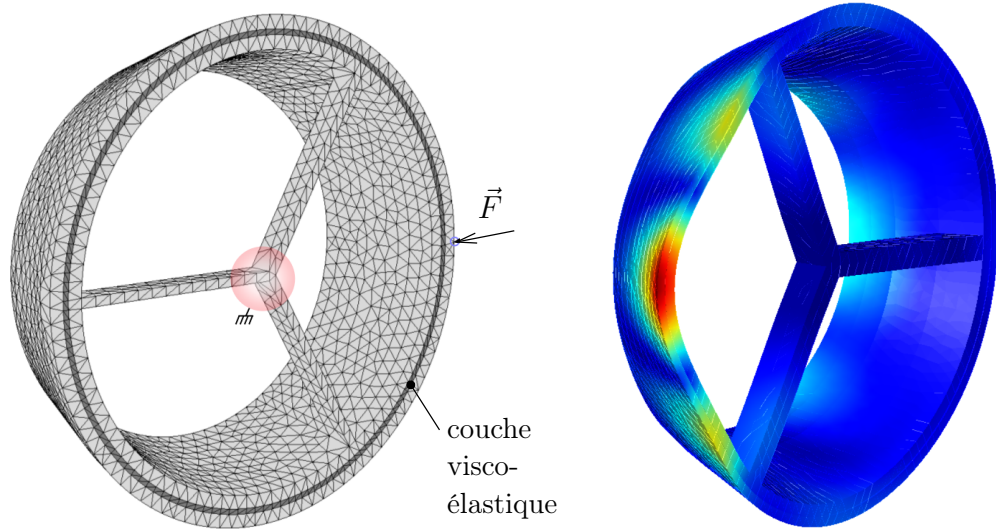
Élément volumique d'interface

Les deux couches sont séparées par une distance géométrique nulle (notée h_g) mais la couche visco-élastique est prise en compte par un modèle tridimensionnel dont chacune des faces supérieure et inférieure sont reliées aux peaux supérieure et inférieure de la structure.

Dans le cas où les deux peaux de la structure sont maillées avec des éléments tridimensionnel de type tétraèdres à 10 nœuds, les deux faces en contact l'une de l'autre ont 6 nœuds chacune mais distincts (nœuds doubles). À partir de ces 6 nœuds doubles, on construit un élément volumique prismatique à 12 nœuds qui possède la vraie épaisseur h de la couche visco-élastique (Fig. 4.5). Cet élément volumique est construit automatiquement à partir de h et des normales à la surface moyenne de l'interface calculées en chacun des 6 nœuds. Les matrices de masse et de raideur sont calculées de façon classique pour cet élément prismatique à 12 nœuds. Ces matrices élémentaires sont alors assemblées sur les nœuds doubles du maillage des peaux de la structure.

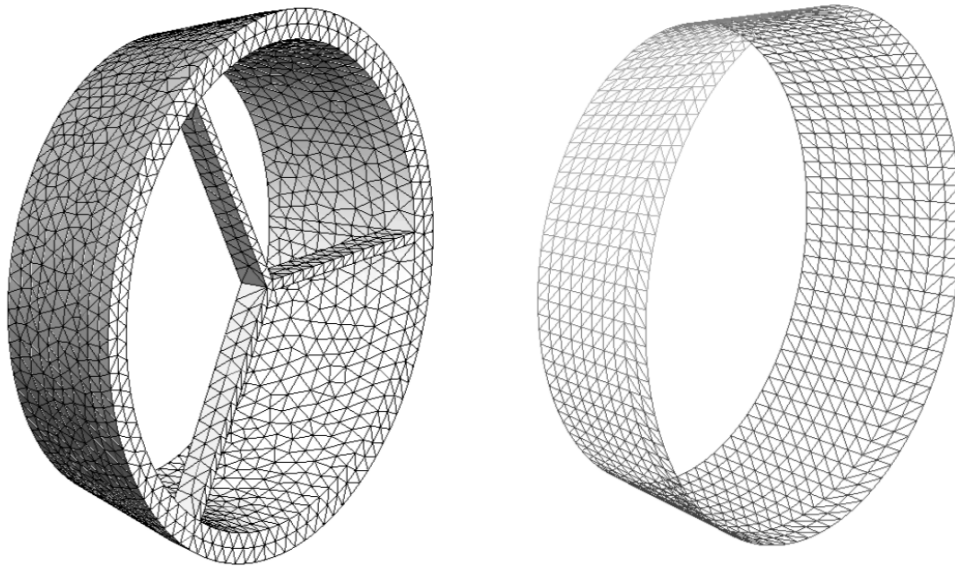
Comparaison des différents modèles d'interface

On considère un modèle simple de tuyère de propulseur de sous-marin (Fig. 4.6(a)). La géométrie complète, les matériaux ainsi que le chargement sont donnés dans la thèse de L. Rouleau [THESE 2]. Les dimensions globales de la structure sont : un diamètre de 3 m, une longueur de 1 m et une épaisseur de 20 cm. La structure est encastree au niveau de l'intersection des renforts et un effort harmonique ponctuel unitaire est appliqué en un point de la peau extérieure. Le matériau visco-élastique constituant la couche amortissante à cœur est le Deltane 350, dont les propriétés sont identifiées par des essais expérimentaux sur machine DMA par L. Rouleau dans sa thèse. Le modèle à



(a) Maillage tridimensionnel des peaux et de la couche visco-élastique, l'épaisseur géométrique est égale à l'épaisseur vraie ($h_g = h$)

(b) Partie réelle de la déformée à 197Hz pour une couche visco-élastique d'épaisseur 5 mm



(c) Maillage tridimensionnel des peaux avec une épaisseur géométrique nulle de la couche visco ($h_g = 0$)

(d) Surfaces moyennes des éléments d'interfaces de la couche visco-élastique

FIGURE 4.6 – Tuyère simplifiée de propulseur de sous-marin avec une couche visco-élastique à cœur

dérivée fractionnaire est utilisé.

On propose trois modèles de cette tuyère :

- un modèle complet tridimensionnel (Fig. 4.6(a)),
- un modèle tridimensionnel pour les peaux (Fig. 4.6(c)) et l'utilisation de l'élément joint d'interface (Fig. 4.6(d)),
- un modèle tridimensionnel pour les peaux et l'utilisation de l'élément volumique d'interface.

On étudie l'influence de l'épaisseur de la couche visco-élastique sur la qualité des modèles d'interface. La figure 4.7 donne la réponse fréquentielle de la tuyère en terme de déplacement du point d'excitation pour deux épaisseurs de la couche visco-élastique : 30 mm et 5 mm, soit environ 15% et 2,5% de l'épaisseur totale respectivement. On remarque que :

- les solutions liées aux éléments finis d'interface sont différentes de la solution de référence tridimensionnelle,
- ces écarts diminuent lorsque l'épaisseur de la couche visco-élastique est plus faible,
- l'élément volumique d'interface donne de meilleurs résultats que l'élément joint d'interface.

Les différences s'expliquent par le fait que les géométries tridimensionnelles des peaux sont différentes entre le modèle tridimensionnel complet et le modèle avec éléments finis d'interface : rayons de courbures différents, masses différentes. Ces différences géométriques sont moins importantes quand la couche visco-élastique a une épaisseur faible. Le modèle élément joint d'interface comporte des hypothèses simplificatrices qui ne sont plus acceptables pour de grandes épaisseurs de la couche visco-élastique.

Néanmoins, dans le cadre d'un pré-dimensionnement, ces éléments d'interface permettent d'optimiser rapidement les épaisseurs, positions et dimensions des couches visco-élastiques. Ces éléments peuvent aussi être utilisés pour étudier l'influence du moyen de collage de la couche visco-élastique sur les peaux élastiques. Dans [INT-CONF 28], on compare un collage à la colle époxy et une fixation au ruban adhésif double-face de façons expérimentale et numérique en utilisant avantageusement les modèles d'interface développés.

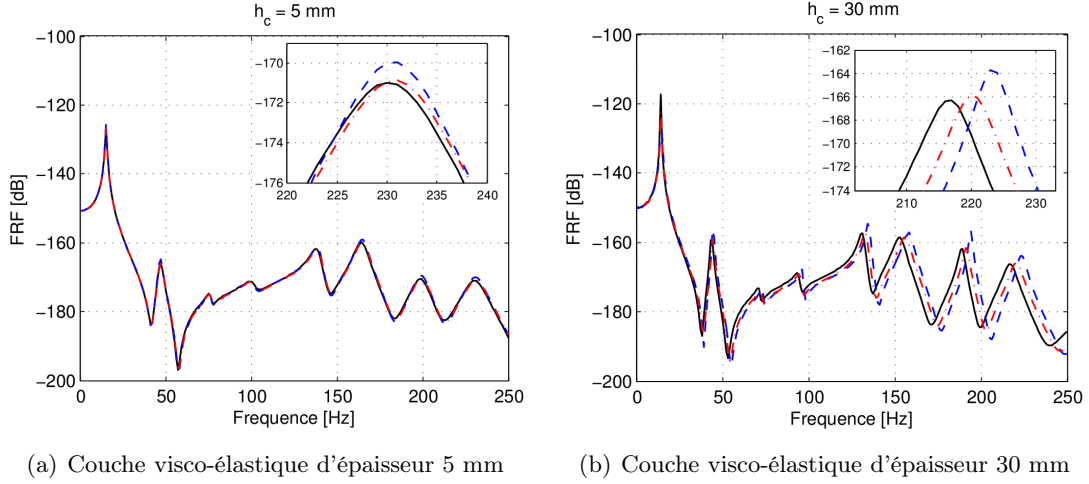


FIGURE 4.7 – Réponse fréquentielle de la tuyère (déplacement du point d'excitation) pour différents modèles et différentes épaisseurs de la couche visco-élastique : – courbe noire, modèle tridimensionnel complet ; - - courbe bleue, élément joint d'interface ; - - - courbe rouge, élément volumique d'interface

4.3.5 Réduction de modèle de structures sandwich à partir de bases modales

Motivations

Les modèles engendrés pour calculer une structure sandwich tridimensionnelle peuvent devenir de taille importante, une réduction de modèles est alors intéressante pour réduire les temps de calcul. En notant \mathcal{V}_u^h l'espace vectoriel engendré par les fonctions de forme du maillage éléments finis de la structure (base Φ_S), on cherche alors la meilleure façon de construire un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}_u^{h,\Xi}$ de \mathcal{V}_u^h à partir d'une base de n vecteurs Ξ_{Sn} . Le problème initial, pour lequel on cherche la réponse $\vec{u}^h \in \mathcal{V}_u^h$ de la structure amortie à une excitation harmonique de pulsation ω s'écrit sous la forme :

$$\left(\mathbf{K}_{SS}^*(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}_{SS} \right) \underline{U} = \underline{F}. \quad (4.25)$$

Le problème réduit revient à chercher $\vec{u}^{h,\Xi} \in \mathcal{V}_u^{h,\Xi}$ tel que

$$\Xi_{Sn}^T \left(\mathbf{K}_{SS}^*(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}_{SS} \right) \Xi_{Sn} \underline{\alpha}_n = \Xi_{Sn}^T \underline{F}, \quad (4.26)$$

où les matrices $\mathbf{K}_{SS}^*(\omega)$ et \mathbf{M}_{SS} sont définies par les expressions (4.13) et (3.16) et où $\underline{\alpha}_n$ est la représentation de $\vec{u}^{h,\Xi}$ dans la base Ξ_{Sn} . On peut alors écrire un champ de

déplacement $\underline{u}^{h,\Xi} \in \mathcal{V}^{h,\Xi}$ comme

$$\underline{u}^{h,\Xi} = \Phi_S \Xi_{S_n} \underline{\alpha}_n . \quad (4.27)$$

Plusieurs méthodes de construction de la base Ξ_{S_n} sont proposées dans la littérature par différents auteurs. Une étude comparative de certaines de ces méthodes est menée dans la thèse de L. Rouleau [THESE 2] et dans [INT-CONF 25] afin de montrer les tendances en terme de qualité de la solution par rapport au temps de calcul. Les méthodes comparées sont :

- méthode des énergies modales (MSE) [37] ,
- méthode itérative des énergies modales (IMSE) [59, 60, 63],
- méthode itérative des valeurs propres complexes (ICE) [40, 60],
- méthode itérative des énergies modales modifiée (MIMSE) [34, 45],
- méthode multi-modèles (MM) [3, 4, 49],
- méthode d’enrichissement de la base MSE par des termes de correction d’ordre 1 (MSE+C) [48],
- méthode d’enrichissement de la base MSE par des résidus (MSE+R) [5, 15].

Les tendances observées sur un exemple simple d’une poutre sandwich sont :

- les méthodes ICE, IMSE et MIMSE sont les plus lentes et parmi les moins précises,
- la méthode MSE+R est la plus précise mais plutôt lente,
- la méthode MSE est la plus rapide mais la moins précise,
- les méthodes MM et MSE+C donnent le meilleur compromis entre la précision et la rapidité.

4.3.6 Sous-structuration dynamique

Étant donné qu’une structure munie de matériau visco-élastique contient souvent des parties purement élastiques, une approche en sous-domaines permet alors de séparer les difficultés et de choisir la méthode de projection modale adaptée à chaque partie de la structure. On propose dans l’exemple de la tuyère de la figure 4.6(a) de réaliser une décomposition en deux sous-structures comme indiqué sur la figure 4.8. Les deux sous-structures sont en contact avec l’interface matérialisée sur la figure par les trois surfaces

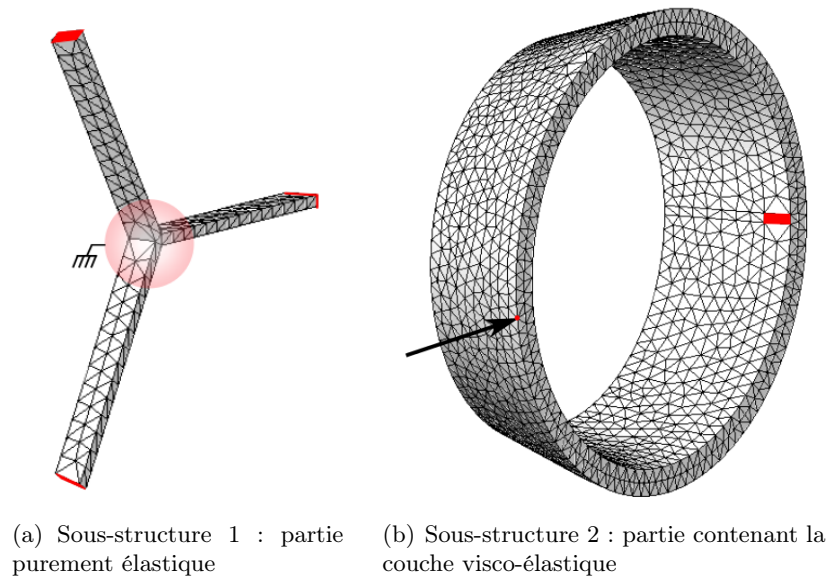


FIGURE 4.8 – Décomposition en 2 sous-structures de la tuyère simplifiée de propulseur de sous-marin

rouges. L'interface contient dans ce cas très peu de nœuds, le modèle réduit final condensé sur l'interface est donc très petit.

La sous-structure 1 est purement élastique. Elle est condensée sur l'interface par une stratégie classique de Craig-Bampton [6], rappelée dans la section 3.3.3 ([32] donne des détails sur les méthodes de décomposition de domaine). Les modes internes à interface fixe sont conservés jusqu'à la fréquence de $1,5 \times \omega_{\max}$, soit 375 Hz ici.

La sous-structure 2 contient la couche visco-élastique. Elle est condensée sur l'interface par une approche de type Craig-Bampton modifiée en tirant avantage de la méthode multi-modèles qui semble être la plus adaptée à ce type de structure. En effet, les modes internes à interface fixe sont calculés par la méthode multi-modèles (MM) avec deux fréquences caractéristiques : 0 et ω_{\max} qui correspond à la fréquence maximale d'observation (ici 250 Hz). Tous les modes dont la fréquence propre est inférieure à $1,5 \times \omega_{\max}$ (375 Hz ici) sont conservés. De plus, la couche visco-élastique est modélisée par des éléments finis volumique d'interface (section 4.3.4), ce qui permet de tester différentes épaisseurs de la couche visco-élastique sans remailler la structure.

La figure 4.9 montre l'évolution du temps de calcul en fonction du nombre de para-

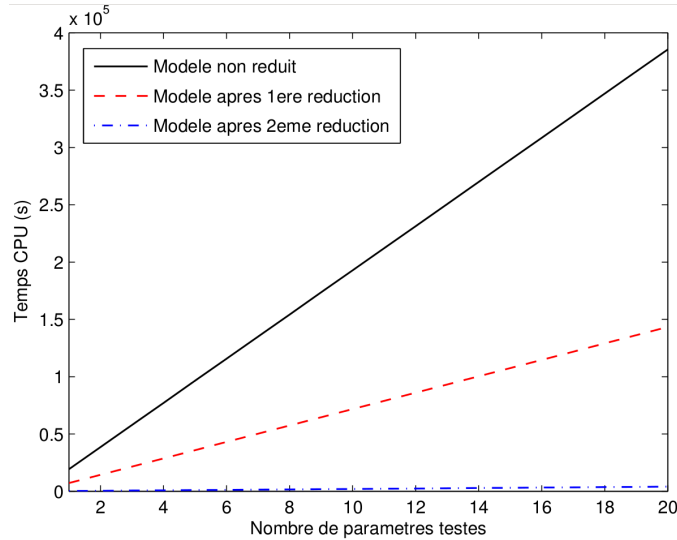


FIGURE 4.9 – Évolution du temps de calcul en fonction du nombre de paramètres de l'épaisseur de la couche visco-élastique testés

mètres de l'épaisseur de la couche visco-élastique testés. L'évolution du temps de calcul du modèle sans réduction est indiqué en noir ("non réduit"). Ce modèle correspond à la structure complète tridimensionnelle de la figure 4.6(a) avec opération de remaillage pour chaque nouvelle épaisseur. L'évolution du temps du modèle utilisant les éléments finis volumique d'interface (maillages des figures 4.6(c) et 4.6(d)) sans projection modale est tracé en rouge ("1ère réduction"). Enfin, l'évolution du temps de calcul du modèle utilisant les éléments finis volumiques d'interface et une réduction par sous-structuration comme expliqué dans les paragraphes précédents et indiqué en bleu ("2ème réduction").

L'utilisation de l'élément d'interface volumique permet clairement de gagner un facteur au moins 2 sur le temps de calcul car il n'y a pas d'opération de remaillage d'une épaisseur à l'autre. L'approche par sous-structuration combinant une base classique pour la partie purement élastique et une méthode multi-modèle pour la partie contenant la couche visco-élastique permet de réduire considérablement le temps de calcul.

4.4 Extensions aux structures en grandes transformations

Les matériaux visco-élastiques peuvent être utilisés dans des liaisons pour réaliser des pièces antivibratoires. Par exemple, dans l'industrie spatiale, ce type de liaison est

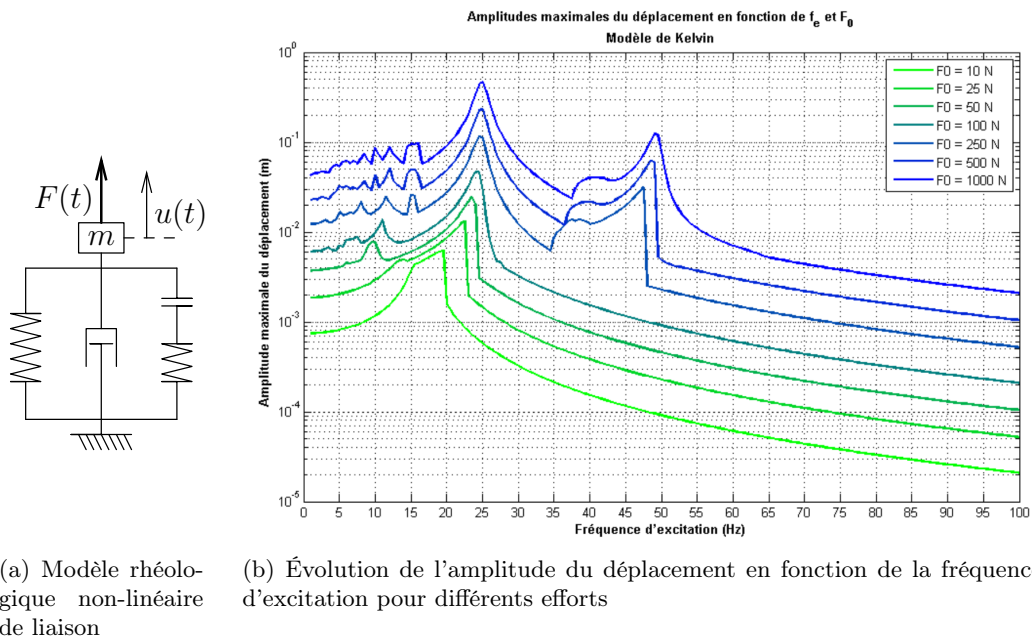


FIGURE 4.10 – Fonctions de réponse en fréquence obtenues pour un modèle de liaison rhéologique non-linéaire

utilisé pour protéger la charge utile (satellite) ou les équipements embarqués (cartes électroniques) des sollicitations dynamiques subies par le lanceur au décollage ou lors des séparations des étages par découpes pyrotechniques. La prédiction du comportement dynamique de ces liaisons dans leur environnement est relativement compliquée à réaliser car il faut à la fois :

- modéliser correctement le comportement visco-élastique du matériau,
- prendre en compte les non-linéarités géométriques et matériaux dues aux grandes déformations,
- tenir compte des non-linéarités de contacts éventuelles.

Ces modèles de liaisons peuvent demander des ressources informatiques importantes et il peut alors être très difficile de les inclure dans un assemblage de structures. Plusieurs pistes de réduction de modèle sont explorées dans ce travail.

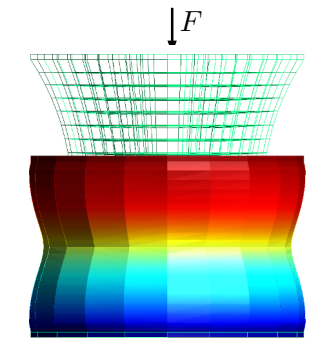
Dans le cadre d'un contrat de collaboration avec Thalès Alenia Space, un premier travail a été réalisé. L'objectif de l'étude était de proposer des solutions de liaisons amortissantes équipement-satellite répondant aux deux objectifs contradictoires suivants :

- transmettre les charges de lancement, ce qui implique une raideur importante pour résister aux accélérations de décollage et ne pas amplifier les vibrations,
- transmettre les actions de contrôle en micro gravité en limitant au maximum les vibrations, ce qui implique une dissipation dans les liaisons.

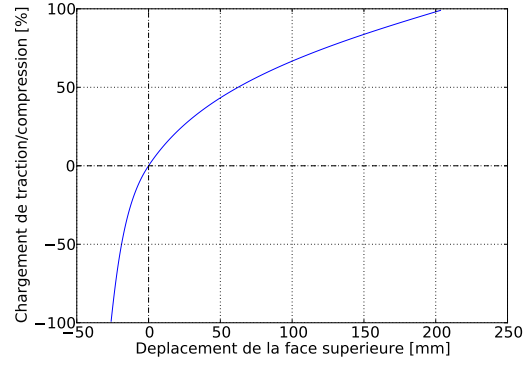
Des modèles rhéologiques non-linéaires simplifiés ont été développés, tenant compte d'une non-linéarité de contact dans la liaison. Cette démarche, relativement courante dans la littérature (voir par exemple [17]), est ici basée d'une part sur des calculs éléments finis pour déterminer la raideur de la liaison, et d'autre part sur les courbes maîtresses du matériau visco-élastique pour quantifier, entre autres, l'amortissement. La figure 4.10(b) montre l'évolution de l'amplitude du déplacement en fonction de la fréquence d'excitation pour différents efforts. Chaque point correspond à un calcul temporel non-linéaire pour lequel on attend le régime stationnaire. Le modèle rhéologique associé est un modèle de Kelvin-Voigt en parallèle d'un élément de contact non-linéaire qui permet de changer la raideur de la liaison à partir d'un certain niveau de chargement (Fig. 4.10(a)).

Un travail de thèse en cours (thèse de B. Morin) effectué en collaboration avec Airbus Defence and Space a pour objectif de proposer une stratégie de construction de modèles réduits de liaisons hyper-visco-élastiques. Les non-linéarités sont à la fois de type matériau et géométrique. Dans un premier temps, un modèle de comportement hyper-visco-élastique est implémenté en suivant les démarches de [38] et [33], couplé au modèle hyper-élastique de Yeoh à trois paramètres [62]. Dans un second temps, l'idée est de construire des lois entrée-sortie reliant les grandeurs généralisées des faces d'appuis de la liaison (torseurs cinématiques et d'efforts) à partir d'essais numériques, moins coûteux que des essais expérimentaux menés sur la liaison tridimensionnelle seule. La figure 4.11 montre les réponses non-linéaires quasi-statiques (sans amortissement) d'une liaison de type diabolo à la traction-compression (résultante F selon l'axe de la liaison sur la face supérieure), la torsion (couple C_t selon l'axe de la liaison sur la face supérieure) et la flexion (couple C_f selon l'axe transversal à la liaison sur la face supérieure); la face inférieure est encastrée.

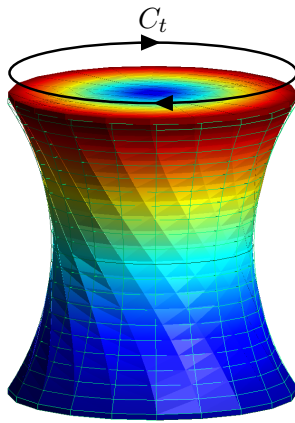
Enfin, on souhaite à terme inclure ces modèles réduits de liaisons hyper-visco-élastiques dans des assemblages des structures. La figure 4.12 montre un exemple de structure en



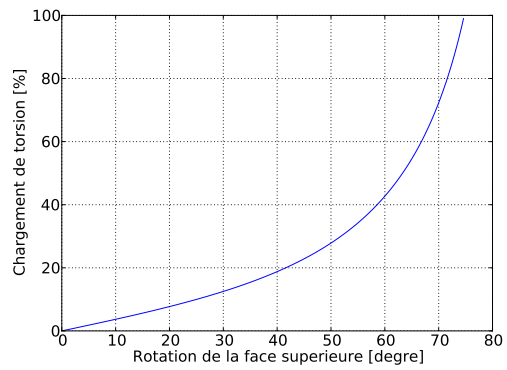
(a) Déformée à -100% en compression (F négatif sur la figure)



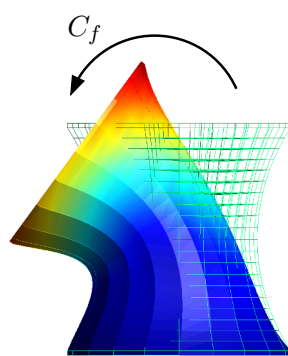
(b) Force de traction-compression en fonction du déplacement axial de la face supérieure



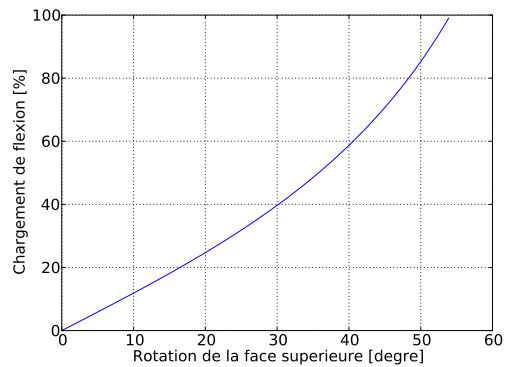
(c) Déformée à 100% en torsion



(d) Couple de torsion en fonction de la rotation de la face supérieure autour de l'axe de la liaison

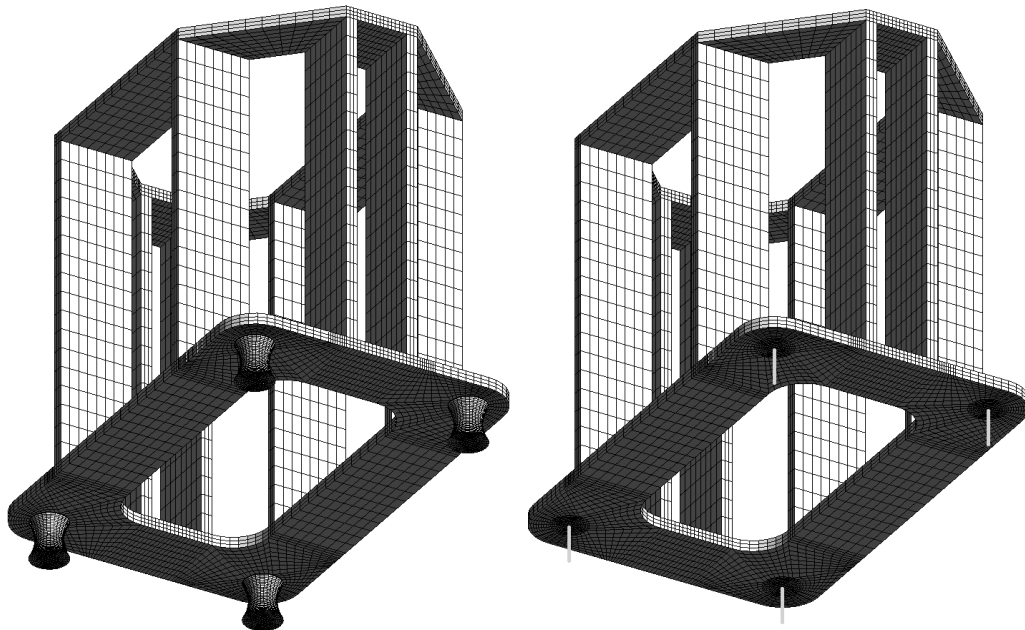


(e) Déformée à 100% en flexion



(f) Couple de flexion en fonction de la rotation de la face supérieure autour de l'axe transversal de la liaison

FIGURE 4.11 – Étude non-linéaire quasi-statique d'une liaison en élastomère de type diabololo



(a) Modèle complet tridimensionnel : 15036 éléments hexaédres pour la structure et 4×6860 éléments pour les liaisons (b) Utilisation du modèle réduit de liaison : 15036 éléments hexaédres et 4 éléments de liaisons à 12 ddl chacun

FIGURE 4.12 – Structure en liaison avec 4 "diabolos"

liaison avec l'extérieur par l'intermédiaire de 4 diabolos. Le modèle complet tridimensionnel contient en tout 42476 éléments dont 27440 pour les 4 liaisons. L'utilisation d'un modèle réduit de liaison permet, dans le cas traité, d'avoir une réduction de plus de la moitié du nombre de degré de liberté. Les faces supérieure et inférieure de la liaison sont modélisées comme des solides rigides, permettant de n'avoir que 6 degrés de liberté par face. Ces modèles réduits sont basés sur des méthodes de condensation dynamique avec réduction du nombre de degrés de liberté d'interface comme cela est également fait en double synthèse modale [11]. Dans un premier temps, le modèle réduit est construit pour une liaison non amortie afin de pouvoir calculer la réponse de la structure en vibrations linéarisées. Dans un second temps, le modèle réduit prend en compte l'amortissement. Enfin, on souhaite construire le modèle réduit en incluant une pré-contrainte dans la liaison par un calcul non-linéaire quasi-statique préliminaire.

4.5 Conclusion sur mes apports à la modélisation des structures amorties

Plusieurs pistes pour construire des modèles simplifiés et/ou réduits de structures amorties sont suivies dans ce travail. Elles ont toutes le même objectif de proposer des outils rapides mais suffisamment précis pour être utilisés en phase de conception.

Les structures de révolution sont modélisées par des éléments de coque 1D dont la solution est développée en séries de Fourier. Un amortissement modal est pris en compte après identification expérimentale. Un logiciel prototype (OSCAR) est développé afin de fournir au CNES un outil pour pré-dimensionner rapidement.

Concernant la modélisation de structures munies de matériaux visco-élastiques, le matériau visco-élastique est modélisé par un modèle à dérivée fractionnaire dont les paramètres sont identifiés à partir d'essais expérimentaux sur une machine DMA et respectant le principe de causalité. Des modèles simplifiés pour prendre en compte une couche de matériau visco-élastique dans une structure sandwich sont développés. Différentes bases réduites sont testées et adaptées à ce problème particulier.

Enfin, des modèles de lois de comportement visco-hyper-élastiques sont implémentés afin de pouvoir calculer les réponses de liaisons amorties en non-linéaire. À partir de calculs tridimensionnel effectués "off-line", on souhaite construire des modèles simplifiés de liaison afin de pouvoir les utiliser dans un assemblage de structures.

Chapitre 5

Conclusions et axes de recherche envisagés

5.1 Conclusions

Ce mémoire fait état du travail de recherche effectué depuis ma soutenance de thèse en 2002, d'abord en stage de post-doctorat à Northwestern University, puis au Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés au Cnam. Ces recherches portent principalement sur des modèles simplifiés et/ou réduits pour les problèmes touchant à la réduction des vibrations acoustiques et/ou structurelles.

La méthode XFEM est choisie pour faciliter le traitement des discontinuités dans les maillages. Les développements liés à la méthode XFEM ont permis de montrer les difficultés d'enrichir des éléments finis de haut de degré. Elle est appliquée à un fluide pour prendre en compte la discontinuité liée à la présence d'une (ou plusieurs) structure(s) mince(s). Le maillage fluide est alors fixe, tandis que l'enrichissement évolue dans le temps en suivant la position actualisée de la structure. Les éléments finis espace-temps sont utilisés car ils offrent l'avantage de gérer naturellement l'enrichissement au cours du temps.

La réduction du bruit dans une cavité acoustique est traitée dans un premier temps par l'utilisation de matériaux poreux. Afin d'avoir une modélisation fine du comportement de ce matériau, une loi tridimensionnelle (théorie de Biot-Allard) est préférée à un modèle simplifié rhéologique. Le modèle éléments finis du problème couplé vibro-acoustique est

en contre-partie de taille plus importante et des méthodes de réduction, basées sur les techniques de synthèse modales, sont alors proposées. Afin de pouvoir étudier à moindre coût numérique l'influence des dimensions ou des positions des structures dans la cavité acoustique, la méthode XFEM est utilisée pour enrichir le champ de pression dans la cavité acoustique. Les méthodes de réduction sont alors adaptées en tirant avantage de l'utilisation de XFEM ce qui permet d'obtenir des bases de réductions qui, en partie, ne dépendent pas des positions et des géométries des structures dans la cavité.

La réduction du bruit est traitée dans un deuxième temps en amortissant les vibrations structurelles. Des structures de révolutions sont modélisées par des éléments finis tronconiques développés en séries de Fourier. L'amortissement, issu d'expériences, est pris en compte sous forme d'un amortissement modal. Un outil de calcul (OSCAR) est développé afin d'être facilement utilisable en phase de pré-dimensionnement. Des modèles simplifiés sont mis en place pour les structures sandwich amorties par matériaux visco-élastiques à cœur. Les paramètres des lois de comportement visco-élastiques sont identifiées à partir d'essais DMA. Des modèles réduits, basés sur des projections modales et des décompositions de domaine, sont introduits et permettent de réduire sensiblement les temps de calcul. Enfin, une extension à des liaisons amortissantes pour des assemblages de structures est en cours. Ces liaisons sont en élastomère dont la loi de comportement est considérée comme visco-hyper-élastique. L'objectif de ce dernier travail est de construire des modèles réduits de ces liaisons.

5.2 Axes de recherche envisagés à court terme

L'enrichissement par la méthode XFEM des éléments finis spectraux montre un certain nombre d'inconvénients. Des travaux menés par différents auteurs sont maintenant disponibles dans la littérature pour résoudre les problèmes rencontrés. Ces éléments pourraient être de nouveau introduits dans le cadre des problèmes vibro-acoustique car ils permettent de bien modéliser les propagations d'ondes.

L'utilisation de XFEM pour les problèmes de vibro-acoustique en présence de structures minces est un sujet à développer. D'abord, la méthode XFEM dégrade le condition-

nement des matrices, ce qui rend le calcul des modes propres du système fluide-structure couplé délicat. C'est un axe d'amélioration qui pourrait être suivi. Ensuite, les bases réduites de projections développées dans ce cadre sont en partie dépendantes des positions des structures dans la cavité acoustique, de plus, cette partie du calcul est relativement long car elle fait appel à un complément de Schur. D'autres bases pourraient alors être envisagées. Enfin, il serait intéressant d'appliquer la méthode à des études de sensibilité aux incertitudes en utilisant des techniques développées au LMSSC.

Des modèles simplifiés de la couche visco-élastique à cœur de structures sandwich sont proposés dans ce travail. Premièrement, ces éléments finis d'interface sont relativement efficaces car ils permettent de positionner des couches visco-élastiques à cœur sans remaillage. Cependant, le maillage initial des couches externe et interne doit être prévu à l'avance pour couvrir toutes les positions envisagées de la couche visco-élastique. Afin de rendre plus adaptable la méthode, un axe de recherche pourrait être d'utiliser la méthode XFEM pour inclure ces éléments d'interface dans un maillage fixe de la structure. Deuxièmement, les différentes expériences menées au LMSSC montrent une influence du collage entre le matériau visco-élastique et les peaux sur la réponse d'une structure sandwich. Ce problème intéresse particulièrement les industriels et cet axe de recherche est d'ores et déjà en cours d'investigation aussi bien d'un point de vue expérimental que modélisation numérique.

Tous les calculs de réponse en fréquence de ce mémoire (vibro-acoustique ou structure seule) sont effectués fréquence par fréquence. Il faut donc reconstruire le système, voire la matrice de raideur si elle dépend de la fréquence, pour chaque fréquence. La méthode de séparation de variables (PGD, Proper Generalized Decomposition) pourrait réduire davantage les temps de calcul en séparant la solution en une somme de produits de fonctions d'espace et de fréquence [7]. De plus, d'autres variables pourraient être ajoutées dans la décomposition comme des paramètres géométriques. Des premiers tests sont en cours.

5.3 Une proposition d'étude à court terme

Mes travaux de thèse portaient sur le flambage non-linéaire quasi-statique des coques minces considérées comme homogènes. Mes travaux plus récents montrent que l'ajout de matériau visco-élastique à cœur permet de réduire les vibrations de structures de façon efficace. En contre-partie, des études montrent que le cœur visco-élastique influence la charge critique de flambage statique à cause de la forte dépendance des propriétés élastiques de l'élastomère à la température. De plus, la charge critique de flambage dynamique, plus faible que la charge statique [54], est réduite par la présence du cœur visco-élastique [57]. Le sujet que je propose porte alors sur le flambage non-linéaire statique et dynamique des coques sandwich avec matériau visco-élastique à cœur. Les applications visées sont par exemple les coques sandwich présentes dans les bâtiments submersibles qui peuvent être soumises à des sollicitations dynamiques lors d'une explosion sous-marine à proximité.

Le plan proposé est le suivant :

- étendre les modèles d'interface de couche visco-élastique à cœur au calcul non-linéaire,
- étudier l'influence des imperfections sur la charge critique de flambage statique, en particulier les imperfections concernant la couche visco-élastique (propriétés élastiques, épaisseur, ...);
- prendre en compte l'influence de la température,
- étudier l'influence des propriétés amortissantes de la couche à cœur sur la charge critique dynamique.

En fonction des résultats obtenus et des partenaires industriels intéressés par ce travail, les extensions peuvent être :

- proposer des bases de réduction pour le calcul du flambage dynamique,
- quantifier l'incertitude sur la charge critique de flambage en présence de paramètres incertains.

5.4 Un domaine d'application possible à plus long terme : l'archéologie

De façon plus générale, un domaine qui m'intéresse et qui me semble être prometteur en terme de problèmes mécaniques est l'archéologie. C'est un domaine qui utilise en effet de plus en plus les nouvelles technologies. Par exemple, Dassault Systèmes propose des reconstitutions tridimensionnelles de Paris (<http://paris.3ds.com>) qui permettent de s'immerger dans le Paris d'autrefois. L'attrait visuel de ces réalités virtuelles est indéniable, comme c'est le cas dans la crypte archéologique du parvis de Notre Dame de Paris, récemment rénovée, où l'on peut découvrir Lutèce à travers des écrans tactiles. Mais les modèles virtuels peuvent rendre encore plus de services aux archéologues en remplaçant une partie de l'archéologie expérimentale ; tout comme les modèles numériques ont remplacé une partie des essais dans l'industrie mécanique. Ils permettent alors de tester divers scénarios à moindre coût :

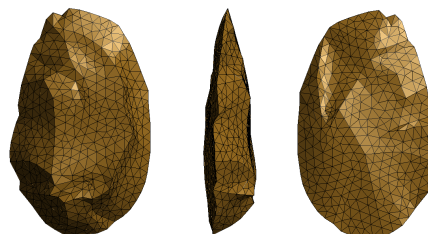
- la tenue mécanique de la voûte de la cathédrale de Cologne est par exemple étudiée par photoélasticité dans [43], puis un modèle éléments finis est proposé ;
- un modèle virtuel de l'Abbaye de Royaumont (commandée par Saint Louis et presque entièrement disparue aujourd'hui) est construit dans [42] afin de restituer et d'étudier l'acoustique à l'intérieur du bâtiment telle qu'elle était à sa construction.

Il existe beaucoup d'autres travaux où les outils numériques sont au service de l'archéologie, notamment lorsqu'il s'agit de restaurer un bâtiment ancien et/ou de s'assurer de son intégrité [41]. Une particularité de l'archéologie est que les problèmes soulevés introduisent souvent des incertitudes car les objets et vestiges retrouvés sont, la plus part du temps, incomplets : des hypothèses doivent être faites et testées. Les problèmes mécaniques associés à l'archéologie sont donc vastes et couvrent les thématiques développées dans ce mémoire : modélisation des structures et vibro-acoustique avec un objectif de pouvoir paramétrer le problème.

Une idée d'étude serait par exemple de reconstituer un char de l'âge du bronze à partir de quelques éléments retrouvés (voir par exemple [24]). La reconstitution virtuelle basée sur un modèle mécanique numérique permettrait de tester plusieurs hypothèses



(a) Original conservé au Muséum d'Histoire Naturelle de Toulouse (image de D. Descouens, 2010, CC)



(b) Maillage volumique du modèle virtuel

FIGURE 5.1 – Biface taillé du paléolithique inférieur trouvé à Griquatown (Afrique du Sud)


de conception et de conclure, par exemple, sur la résistance, la rigidité et la stabilité du char. Un exemple d'étude de ce type est effectué sur les chars égyptiens de Toutankhamon dans [28, 52, 53] où des modèles analytiques et numériques aident à la compréhension du fonctionnement du char pour finalement conclure sur ses capacités en terme de vitesse, d'accélération et de manœuvrabilité sur le champ de bataille.

Des prises de contacts sont en cours avec le Musée d'Archéologie National de Saint-Germain-en-Laye, cela pourrait déboucher sur des propositions de sujets de stage de Master. Si les premiers résultats sont concluants, l'idée serait alors de proposer un projet transversal à l'ANR. Récemment, le projet SeARCH¹ a été mené à bien. Il a regroupé des laboratoires d'archéologie, de visualisation numérique, d'informatique et de mécanique. Il a permis de financer une thèse. Pour l'instant, le seul modèle éléments finis d'une pièce archéologique effectué par moi-même est ce maillage d'un silex taillé du paléolithique présenté sur la figure 5.1 : le logiciel que je développe et dans lequel j'intègre les développements de mes recherches porte justement ce nom²!

1. <http://anr-search.labri.fr>

2. <http://antoinelegay.free.fr/silex/silex.html>

Publications, conférences, thèses et masters encadrés

ACL : Article international à comité de lecture
ACLN : Article national à comité de lecture
INT-CONF : Conférence internationale ; * : orateur ;  : avec actes
THESE : Thèse co-encadrée
MASTER : Master encadré, indication du taux d'encadrement en %

Articles internationaux à comité de lecture





- [ACL 11] A. Legay. The extended finite element method combined with a modal synthesis approach for vibro-acoustic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 101(5), 329-350, 2015. 8, 46, 48
- [ACL 10] A. Legay. An extended finite element method approach for structural-acoustic problems involving immersed structures at arbitrary positions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(4) :376-399, 2013. 8, 17, 46
- [ACL 9] L. Rouleau, J.-F. Deü, A. Legay, F. Le Lay. Application of Kramers-Kronig relations to time-temperature superposition for viscoelastic materials. *Mechanics of Materials* 65 :66-75, 2013. 9, 58
- [ACL 8] L. Rouleau, J.-F. Deü, A. Legay, J.-F. Sigrist. Vibro-acoustic study of a viscoelastic sandwich ring immersed in water. *Journal of Sound and Vibration*, 331(3) :522-539, 2012. 9, 62
- [ACL 7] R. Rumlper, A. Legay, J.-F. Deü. Performance of a restrained-interface substructuring FE model for reduction of structural-acoustic problems with poroelastic damping. *Computers and Structures*, 89(23-24) :2233-2248, 2011. 8, 38, 41, 42
- [ACL 6] A. Legay, A. Zilian and C. Janssen. A rheological interface model and its space-






- time finite element formulation for fluid-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(6) :667-687, 2011. 8, 38
- [ACL 5] A. Zilian and A. Legay. The enriched space-time finite element method (EST) for simultaneous solution of fluid-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(3) :305-334, 2008. 8, 27
- [ACL 4] A. Legay, J. Chessa and T. Belytschko. An Eulerian-Lagrangian Method for Fluid-Structure Interaction Based on Level Sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17-18), 2070-2087, 2006. 8, 26
- [ACL 3] A. Legay, H.W. Wang and T. Belytschko. Strong and Weak Arbitrary Discontinuities in Spectral Finite Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(8) :991-1008, 2005. 8, 24
- [ACL 2] A. Legay and A. Combescure. Elastoplastic Stability Analysis of Shells Using the Physically Stabilised Finite Element SHB8PS. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(9) :1299-1322, 2003. 6
- [ACL 1] A. Legay and A. Combescure. Efficient algorithms for parametric nonlinear instability analysis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37(4-5) :709–722, 2002. 6



Article nationaux à comité de lecture




- [ACLN 2] A. Legay and A. Zilian. Enriched space-time (EST) finite elements for fluid - thin structure interaction. *European Journal of Computational Mechanics*, 17 :725-737, 2008. 8, 27
- [ACLN 1] A. Legay and A. Tralli. An enriched finite element approach for prescribed motions of thin immersed structures in a fluid. *European Journal of Computational Mechanics*, 16(2), 145-160 2007. 8, 26

Conférences internationales

- [INT-CONF 31] A. Legay*. Reduced order models of structural-acoustic problems using XFEM. *The 13th U.S. National Congress on Computational Mechanics, USNCCM 13*. San Diego, California, USA, July 26-30, 2015.
- [INT-CONF 30] B. Morin, J.-F. Deü*, A. Legay, L. Rouleau. Predictive Numerical Models for Non-Linear Dynamic Behavior of Elastomer Damping Devices. *The 13th U.S. National Congress on Computational Mechanics, USNCCM 13*. San Diego, California, USA, July 26-30, 2015.
- [INT-CONF 29]  J.-F. Deü*, L. Rouleau, A. Legay. Viscoelastic interface finite elements for the modeling of complex structures with thin constrained damping layer. *Proceedings of the XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*. Natal, Brésil, 22-27 février, 2015. 9, 63
- [INT-CONF 28]  L. Rouleau*, J.-F. Deü, A. Legay. Viscoelastic characterisation of adhesives using inverse techniques. *Proceedings of the International Conference on Dynamics of Composite Structures*. Arles, France, 2-4 juin, 2015. 68
- [INT-CONF 27] L. Rouleau*, J.-F. Deü, A. Legay. Characterisation of the frequency and temperature-dependent properties of viscoelastic materials. *9th European Solid Mechanics Conference*. Madrid, Spain, July 6-10, 2015.
- [INT-CONF 26]  A. Legay*. Modal based reduction of structural-acoustic problems using XFEM. *Proceedings of the 11th World Congress on Computational Mechanics, WCCM XI, the 5th European Conference on Computational Mechanics, ECCM V and the 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECFD VI*. Barcelona, Spain, July 20-25, 2014.
- [INT-CONF 25]  L. Rouleau*, J.-F. Deü, A. Legay. Review of reduction methods based on modal projection for highly damped structures. *Proceedings of the 11th World Congress on Computational Mechanics, WCCM XI, the 5th European Conference on Computational Mechanics, ECCM V and the 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECFD VI*. Barcelona, Spain, July 20-25, 2014. 9, 70
- [INT-CONF 24] A. Legay*. Study of the position influence of thin immersed structures in an acoustic fluid using XFEM. *XFEM 2013*. Lyon, France, September 11-13, 2013.

- [INT-CONF 23] A. Legay*. Efficient method to study the influence of immersed structures in an acoustic fluid using XFEM and modal reductions. *The 12th U.S. National Congress on Computational Mechanics, USNCCM 12*. Raleigh, North Carolina, USA, July 22-25, 2013.
- [INT-CONF 22]  L. Rouleau*, J.-F. Deü, A. Legay, F. Le Lay. Dynamical mechanical characterization and modeling of viscoelastic materials in the frequency domain. *EUROMECH Colloquium 550 : Multiphysics of solid polymers : Experiments and modeling* Poitiers, France, July 1-5, 2013.
- [INT-CONF 21]  L. Rouleau, J.-F. Deü*, A. Legay, F. Le Lay. Characterization and modeling of viscoelastic interface. *12th International Conference on Computational Plasticity. COMPLAS XII*, Barcelona, Spain, September 3-5, 2013. 63
- [INT-CONF 20] L. Rouleau*, J.-F. Deü, A. Legay. Interface finite elements for parametric studies of structures with thin constrained layer damping. *2nd ECCOMAS Young Investigators Conference, YIC 2013*. Bordeaux, France, September 2-6, 2013.
- [INT-CONF 19]  A. Legay*. Modelization of immersed structures at arbitrary positions in an acoustic fluid using XFEM. *ECCOMAS 2012, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*. Vienna, Austria, September 10-14, 2012
- [INT-CONF 18]  L. Rouleau*, J.-F. Deü, A. Legay, J.-F. Sigrist, F. Le Lay, P. Marin-Curtoud. A component mode synthesis approach for dynamic analysis of viscoelastically damped structures. *10th World Congress on Computational Mechanics*. São Paulo, Brazil, July 8-13, 2012.
- [INT-CONF 17]  L. Rouleau*, J.-F. Deü, A. Legay, J.-F. Sigrist, P. Marin-Curtoud. Reduced order model for noise and vibration attenuation of water immersed viscoelastic sandwich structures. *Acoustics2012*. Nantes, France, April 23-27, 2012.
- [INT-CONF 16] A. Legay*. Modal reduction of a vibroacoustic problem for a parametric study using XFEM. *XFEM 2011, Thematic conference*. Cardiff, UK, 29 June - 1st July, 2011.

- [INT-CONF 15] R. Rumpler, A. Legay* and J.-F. Deü. A substructuring FE model for reduction of structural acoustic problems damped with poro-elastic media. *9th World Congress on Computational Mechanics*. Sydney, 19-23 July, 2010.
- [INT-CONF 14] R. Rumpler, A. Legay* and J.-F. Deü. A substructuring FE model for reduction of structural acoustic problems with dissipative interfaces. *IV European Conference on Computational Mechanics*. Paris, May 16-21, 2010.
- [INT-CONF 13] C. Janssen*, A. Legay, A. Zilian. A rheological interface model for fluid-structure interaction and numerical investigation of controlled flow-induced vibrations. *IV European Conference on Computational Mechanics*. Paris, May 16-21, 2010.
- [INT-CONF 12] H. Schippke*, A. Zilian, A. Legay. Water jet stability at aerated overflow gates. *IV European Conference on Computational Mechanics*. Paris, May 16-21, 2010.
- [INT-CONF 11]  A. Legay*, A. Zilian. Modeling large motion of thin flexible structures immersed in a flow by the enriched space time method. *International Conference on Extended Finite Element Methods - Recent Developments and Applications (XFEM 2009)*. Aachen, September 28-30, 2009.
- [INT-CONF 10] A. Legay*, J.-F. Deü. Transient response of composite axisymmetric shells submitted to pyrotechnic shocks, application to a payload adapter. *8th World Congress on Computational Mechanics, 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*. Venice, 30 June - 4 July, 2008. 55
- [INT-CONF 9] A. Legay*, A. Kölke. Modeling large motion of thin flexible structures immersed in a flow by the Enriched Space Time method. *9th U.S. National Congress on Computational Mechanics*. San Francisco, California, July 22-26, 2007.
- [INT-CONF 8] A. Legay*, A. Kölke. An enriched space-time finite element method for fluid-structure interaction. *7th World Congress on Computational Mechanics*. Los Angeles, California, July 16-22, 2006.
- [INT-CONF 7]  A. Legay*, A. Kölke. An enriched space-time finite element method for fluid-structure interaction - Part I : Prescribed structural displacement. *III European Conference on Computational Mechanics*. Lisbon, June 5-8, 2006.

- [INT-CONF 6]  A. Kölke*, A. Legay. An enriched space-time finite element method for fluid-structure interaction - Part II : Thin flexible structures. *III European Conference on Computational Mechanics*. Lisbon, June 5-8, 2006.
- [INT-CONF 5] A. Legay*. An Eulerian-Lagrangian approach for fluid-structure coupled systems using X-FEM, *8th U.S. National Congress on Computational Mechanics*. Austin, USA, July 25-27, 2005.
- [INT-CONF 4] A. Legay*, T. Belytschko. A Fluid-Structure Interaction Method Using X-FEM and a Level-set, *7th U.S. National Congress on Computational Mechanics*. Albuquerque, July 27-31, 2003.
- [INT-CONF 3]  A. Combescure*, A. Legay. An efficient strategy for the evaluation of the reliability of 3D shells in case of non linear buckling. *Advances in shell structures ICASS'02*. Honk-Kong, December 9-11, 2002.
- [INT-CONF 2]  A. Legay*, A. Combescure, M. Lemaire. Conception fiable de structures susceptibles d'instabilités non-linéaires. *4th international conference on integrated design and manufacturing in mechanical engineering*. IDMME 2002, IFMA, Clermont-Ferrand, France.
- [INT-CONF 1] A. Legay*, A. Combescure. Reliability analysis of elastoplastic buckling of thin imperfect axisymmetric shells. *Euromech colloquim 424, Buckling predictions of imperfection sensitive shells*. Rolduc, Kerkrade, The Netherlands, September 2-5, 2001.

Thèses co-encadrées

- [THESE 3] Benjamin Morin. Modélisation de liaisons flexibles amortissantes en élastomère pour la prédiction du comportement de systèmes dynamiques complexes. *Thèse débutée en octobre 2012, directeur de thèse J.-F. Deü.* 9
- [THESE 2] Lucie Rouleau. Modélisation vibro-acoustique de structures munies de matériaux visco-élastiques. *Soutenue le 18 octobre 2013 au Cnam-Paris, directeur de thèse J.-F. Deü.* 9, 58, 63, 66, 70
- [THESE 1] Romain Rumpler. Efficient finite element approach for structural-acoustic applications including 3D modelling of sound absorbing porous materials. *Soutenue le 13 mars 2012 au Cnam-Paris, directeur de thèse J.-F. Deü, co-directeur de thèse P. Goransson.* 8, 38, 40, 41, 42

Masters encadrés

- [MASTER 8] ^{70%} S. Defrance. Prédiction du comportement aux chocs de structures spatiales en matériaux composites. Développement d'un outil de simulation numérique par éléments finis en séries de Fourier. *Mémoire d'ingénieur Cnam, Cnam-Paris, 22 octobre 2013.* 55
- [MASTER 7] ^{50%} L. Rouleau. Modélisation du comportement vibratoire et dissipatif de structures métalliques avec couche visco-élastique. *Mémoire de Master Recherche, École Centrale de Nantes, Nantes, 1er octobre 2010.*
- [MASTER 6] ^{50%} B. Tedde. Comparaisons calculs-essais de réponses aux chocs d'une structure composite multicouche de type adaptateur charge utile du lanceur Ariane. *Mémoire d'ingénieur Cnam, Cnam-Paris, 7 juin 2010.* 55, 61
- [MASTER 5] ^{50%} J. Maurel. Développement d'éléments finis axisymétriques en formulation mixte pour simuler la réponse dynamique de structures de révolution incompressibles en matériau visco-élastique. *Mémoire d'ingénieur Cnam, Cnam-Paris, 22 janvier 2009.* 61
- [MASTER 4] ^{50%} C. Oulerich. Développement d'éléments finis hybrides et de lois de comportement hyperélastique pour la modélisation non-linéaire de structures. Application aux lanceurs spatiaux à propulsion solide. *Mémoire d'ingénieur Cnam, Cnam-Paris, 13 mars 2009.* 61
- [MASTER 3] ^{30%} H. Schippke. Water jet stability at aerated overflow gates. *Master thesis, TU-Braunschweig, Germany, 2009.*
- [MASTER 2] ^{30%} C. Janssen. Sensitivity of fluid-structure interaction systems to coupling conditions on the basis of rheological models. *Master thesis, TU-Braunschweig, Germany, 2007.*
- [MASTER 1] ^{100%} J. Cabirol. Éléments finis espace-temps enrichis pour l'interaction fluide structure mince. *Mémoire de master 1, ENS-Cachan, 4 septembre 2007*

Références

- [1] J. F. Allard. *Sound propagation in porous media : modelling sound absorbing materials*. Elsevier, London, 1993. 38
- [2] I. Babuska and J.M. Melenk. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :727–758, 1997. 15
- [3] E. Balmès. Parametric families of reduced finite element models. theory and applications. *Mechanical Systems and Signals Processing* 10, 4 :381–394, 1996. 70
- [4] E. Balmès. Superelements representation of a model with frequency dependent properties. *In Proceedings of the 21st International Seminar on Modal Analysis*, 1996. 70
- [5] E. Balmès and A. Bobillot. Analysis and design tools for structures damped by viscoelastic materials. *In Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference*, 2002. 70
- [6] M.C.C. Bampton and R.R. Craig. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA journal*, 6(7) :1313–1319, 1968. 40, 71
- [7] A. Barbarulo, P. Ladevèze, H. Riou, and L. Kovalevsky. Proper Generalized Decomposition applied to linear acoustic : a new tool for broad band calculation. *Journal of Sound and Vibration*, 333(11) :2422–2431, 2014. 81
- [8] J.L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis. Vol. 3, Coques*. HERMES, 1992. 49, 55
- [9] T. Belytschko, N. Moës, S. Usui, and C. Parimi. Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(4) :993–1013, 2001. 12

- [10] A. Bermúdez, L. Hervella-Nieto, and R. Rodríguez. Finite element computation of the vibrations of a plate-fluid system with interface damping. *In Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference*, 190(24-25) :3021–3038, 2001. 38
- [11] S. Besset and L. Jézéquel. Dynamic substructuring based on a double modal analysis. *Journal of Vibration and Acoustics*, 130(1), 2008. 76
- [12] S. Besset and L. Jézéquel. Optimization of characteristics of porous materials based on a modal synthesis method. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 28(1) :102–109, 2009. 38
- [13] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a Fluid-Saturated porous solid. I. Low-Frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28 :168–178, 1956. 38
- [14] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2) :179–191, 1956. 38
- [15] A. Bobillot. *Méthodes de réduction pour le recalage. Application au cas d’Ariane 5*. PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 2002. 70
- [16] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrange multipliers. *R.A.I.R.O. Analyse Numérique*, 8(2) :129–151, 1974. 28
- [17] D. Brizard, S. Besset, L. Jézéquel, and B. Troclet. Design and test of a friction damper to reduce engine vibrations on a space launcher. *Archive of Applied Mechanics*, 83(5) :799–815, 2013. 74
- [18] E. Chahine, P. Laborde, and Y. Renard. An improvement within XFEM of the bonding between the enrichment area and the classical finite elements. *European Journal of Computational Mechanics*, 19(1-3) :177–187, 2010. 24
- [19] E. Chahine, P. Laborde, and Y. Renard. A non-conformal eXtended Finite Element approach : Integral matching Xfem. *Applied Numerical Mathematics*, 61(3) :322–343, 2011. 24

- [20] K.W. Cheng and T.-P. Fries. A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 82(5) :564–590, 2010. 24
- [21] J. Chessa and T. Belytschko. An extended finite element method for two-phase fluids. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 70(1) :10–17, 2003. 12
- [22] J. Chessa, H. Wang, and T. Belytschko. On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(7) :1015–1038, 2003. 18, 30
- [23] A. Combescure and G.D Galletly. Plastic buckling of complete toroidal shells of elliptical cross-section subjected to internal pressure. *Thin-Walled Structures*, 34(2) :135–146, 1999. 55
- [24] G. Cordier. Le dépôt de l'âge du Bronze final des Châtelliers à Amboise (indre-et-loire) / The late Bronze Age deposit "Les Châtelliers" at Amboise (indre-et-loire). *Revue archéologique du Centre de la France*, 41, 2002. 83
- [25] W. Dauksher and A.F. Emery. Accuracy in modeling the acoustic wave equation with chebyshev spectral finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 26(2) :115–128, 1997. 19
- [26] V. Decouvreur, P. Ladevèze, and Ph. Bouillard. Updating 3D acoustic models with the constitutive relation error method : A two-stage approach for absorbing material characterization. *Journal of Sound and Vibration*, 310(4-5) :985–997, 2008. 41
- [27] J.-F. Deü, W. Larbi, and R. Ohayon. Vibration and transient response of structural acoustic interior coupled systems with dissipative interface. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(51-52) :4894–4905, 2008. 38
- [28] NOVA documentary. "Building Pharaoh's Chariot", 2013. 84
- [29] K. Dréau, N. Chevaugeon, and N. Moës. Studied X-FEM enrichment to handle material interfaces with higher order finite element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(29-32) :1922–1936, 2010. 24

- [30] T.-P. Fries. Higher-order XFEM for curved strong and weak discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(5) :503–532, 2008. 18, 30
- [31] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331, 2009. 57
- [32] M. Géradin and D. J. Rixen. *Mechanical Vibrations : Theory and Applications to Structural Dynamics*. Wiley, 2015. 71
- [33] G.A. Holzapfel. On large strain viscoelasticity : Continuum formulation and finite element applications to elastomeric structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(22) :3903–3926, 1996. 74
- [34] B.-G. Hu, M. Dokaishi, and W. Mansour. A modified MSE method for viscoelastic systems : a weighted stiffness matrix approach. *Transactions of the ASME*, 117 :226–231, 1995. 70
- [35] C.S Jog. A 27-node hybrid brick and a 21-node hybrid wedge element for structural analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41(11-12) :1209–1232, 2005. 61
- [36] C.S Jog and R. Annabattula. The development of hybrid axisymmetric elements based on the Hellinger-Reissner variational principle. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(13) :2279–2291, 2006. 61
- [37] A.D. Johnson and D.A. Kienholz. Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers. *AIAA journal*, 20(9) :1284–1290, 1982. 70
- [38] M. Kaliske and H. Rothert. Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. *Computational Mechanics*, 19(3) :228–239, 1997. 74
- [39] G. Karniadakis and S. Sherwin. Spectral/hp element methods for computational fluid dynamics, 2nd edition. OXFORD University press, 2005. 19, 20
- [40] R. Lin and M. Lim. Complex eigensensitivity-based characterization of structures with viscoelastic damping. *Journal of the Acoustical Society of America*, 100(5) :3182–3191, 1996. 70

- [41] I. Lubowiecka, J. Armesto, P. Arias, and H. Lorenzo. Historic bridge modelling using laser scanning, ground penetrating radar and finite element methods in the context of structural dynamics. *Engineering Structures*, 31(11) :2667–2676, 2009. 83
- [42] F. Magoulès, R. Cerise, and P. Callet. A beam-tracing domain decomposition method for sound holography in church acoustics. In *Proceedings of the 12th International Symposium on Distributed Computing and Applications to Business, Engineering and Science (DCABES), Kingston, London, UK, IEEE Computer Society, September 2nd-4th*, 2013. 83
- [43] R. Mark, J.F. Abel, and K. O’Neill. Photoelastic and finite-element analysis of a quadripartite vault. *Experimental Mechanics*, 13(8) :322–329, 1996. 83
- [44] J.M. Melenk and I. Babuska. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139 :289–314, 1996. 12, 15
- [45] N. Merlette, E. Pagnacco, and A. Ladier. Recent developments in Code Aster to compute FRF and modes of VEM with frequency dependent properties. In *Proceedings of the Acoustics 2012 Nantes Conference*, 2012. 70
- [46] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1) :131–150, 1999. 12, 17
- [47] A.T. Patera. A spectral element method for fluid dynamics : Laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54(3) :468–488, 1999. 19, 20
- [48] A.-S. Plouin and E. Balmès. Pseudo-modal representations of large models with viscoelastic behavior. In *Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference*, 1998. 70
- [49] A.-S. Plouin and E. Balmès. Steel-viscoelastic-steel sandwich shells computational methods and experimental validation. In *Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference*, 2000. 70
- [50] E. Priolo and G. Seriani. A numerical investigation of Chebyshev spectral element method for acoustic wave propagation. In *Proceedings of the 13th IMACS World Congress on Computation and Applied Mathematics, Dublin, 2* :551-556, 1991. 19

- [51] J.-F. Deü R. Rumpfer, P. Göransson. A residue-based mode selection and sorting procedure for efficient poroelastic modeling in acoustic finite element applications. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 134(6) :4730–4741, 2013. 38
- [52] A. Rovetta, I. Nasry, and A. Helmi. The chariots of the Egyptian Pharaoh Tut Ankh Amun in 1337 B.C. : kinematics and dynamics. *Mechanism and Machine Theory*, 35(7) :1013–1031, 2000. 84
- [53] B. I. Sandor. Tutankhamun’s chariots : secret treasures of engineering mechanics. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 27(7) :637–646, 2004. 84
- [54] A. Schokker, S. Sridharan, and A. Kasagi. Dynamic buckling of composite shells. *Computers and Structures*, 59(1) :43–53, 1996. 82
- [55] J. Segurado and J. Llorca. A new three-dimensional interface finite element to simulate fracture in composites. *International Journal of Solids and Structures*, 41(11-12) :2977–2993, 2004. 63
- [56] G. Seriani and E. Priolo. Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media. *Finite Elements in Analysis and Design*, 16(3-4) :337–348, 1994. 19
- [57] M. Shariyat. Nonlinear thermomechanical dynamic buckling analysis of imperfect viscoelastic composite/sandwich shells by a double-superposition global-local theory and various constitutive models. *Composite Structures*, 93(11) :2833–2843, 2011. 82
- [58] N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :6183–6200, 2001. 12, 17
- [59] M. Trindade, A. Benjeddou, and R. Ohayon. Modeling of frequency-dependent viscoelastic materials for active-passive vibration damping. *Journal of Vibration and Acoustics*, 122(2) :169–174, 2000. 70
- [60] C. Vasques, R. Moreira, and J. Rodrigues. Viscoelastic damping technologies - part I : modeling and finite element implementation. *Research in Mechanical Engineering*, 1(2) :76–95, 2010. 70

- [61] G. Ventura. On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite-Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(5) :761–795, 2006. 17
- [62] O. H. Yeoh. Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 66(5) :754–771, 1993. 74
- [63] S. Zhang and H. Chen. A study on the damping characteristics of laminated composites with integral viscoelastic layers. *Composite Structures*, 74(1) :63–69, 2006. 70

Résumé

Ce mémoire fait état des recherches effectuées depuis ma thèse en 2002. Ces recherches portent principalement sur des modèles simplifiés et/ou réduits pour des problèmes touchant à la réduction des vibrations acoustiques et/ou structurelles.

Dans un premier temps, un travail mené sur la méthode des éléments finis étendus (XFEM) est présenté. La méthode est appliquée à des éléments finis spectraux puis à des problèmes d'interaction fluide-structure.

Dans un deuxième temps, on s'intéresse à la réduction du bruit dans les cavités acoustiques par utilisation de matériaux poreux. La présence de structures minces dans la cavité acoustique est modélisée par la méthode XFEM. Le modèle numérique associé est réduit par des méthodes de décomposition de domaine et de synthèse modale dans le domaine fréquentiel.

Enfin, plusieurs modèles simplifiés de structures amorties sont développés. Des structures de révolution sont calculées en décomposant le déplacement en séries de Fourier. Des éléments finis d'interface sont développés pour modéliser la couche de matériau amortissant des structures sandwich munies de matériaux visco-élastique à cœur. Des bases de projections sont proposées pour réduire la taille de ces problèmes. Des extensions aux liaisons élastomère en grandes transformations sont en cours.

Abstract

This thesis describes the researches I have done since my PhD defense in 2002. These researches mainly concern simplified and/or reduced models for damped structures and/or vibro-acoustic problems.

In a first part, a work on the eXtended Finite Element Method (XFEM) is presented. The method is applied to spectral finite elements and to fluid-structure interaction.

In a second part, the reduction of sound level in acoustic cavities by using porous material is investigated. The XFEM is used to model thin flexible structures immersed in the acoustic fluid. Reduced basis of the vibro-acoustic problem are built, they are based on domain decomposition techniques as well as modal synthesis methods.

Finally, several simplified models of damped structures are proposed for axisymmetric structures and for sandwich structures with a visco-elastic core. An extension to non-linear rubber devices between two structures is currently investigated.