



HAL
open science

Constellations et propriétés algébriques des graphes topologiques

Alain Jacques

► **To cite this version:**

Alain Jacques. Constellations et propriétés algébriques des graphes topologiques. Mathématiques [math]. Faculté des Sciences, Université de Paris, 1969. Français. NNT: . tel-01591126

HAL Id: tel-01591126

<https://hal.science/tel-01591126>

Submitted on 20 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

A

THESE
présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

pour l'obtention

du DOCTORAT 3e CYCLE



Spécialité : STATISTIQUES

Mention : STATISTIQUE MATHEMATIQUE

par Monsieur JACQUES Alain

Sujet de la Thèse — Constellations et propriétés algébriques des
graphes topologiques

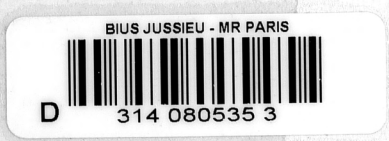
Soutenue le Janvier 1969 devant la Commission

composée de : Président M.C. CHEVALLEY

Examinateurs M. M.P. SCHUTZENBERGER

M. J.P. BENZECRI

Invité



S. 314.66.08

THESE
présentée à
LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS
pour l'obtention
du DOCTORAT 3e CYCLE

Spécialité : STATISTIQUES

Mention : STATISTIQUE MATHEMATIQUE

par Monsieur JACQUES Alain

Sujet de la Thèse Constellations et propriétés algébriques des
graphes topologiques

Soutenue le Janvier 1969 devant la Commission

composée de Président M.C. CHEVALLEY

Examineurs M. M.P. SCHUTZENBERGER

M. J.P. BENZECRI

Invité

Je remercie Monsieur le Professeur CHEVALLEY
de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Que Monsieur le Professeur SCHUTZENBERGER
veuille bien trouver ici l'expression de toute ma gratitude,
pour m'avoir dirigé et conseillé dans mon travail.

Je remercie aussi Monsieur le Professeur BENZECRI
d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Je tiens aussi à remercier Madame BERSTEL pour la
part qu'elle a eu dans l'édition de ce travail.



T A B L E D E S M A T I E R E S
=====

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I +++++	
1. <u>Rappel de définitions</u>	4
1.1) Graphes orientés	4
1.2) Graphes non orientés ou symétriques .	6
1.3) Graphes topologiques	7
1.4) Représentations topologiques de graphes	9
2. <u>Représentations topologiques simples et constellations</u>	11
2.1) Le théorème d'Edmonds	11
2.2) Les constellations	13
2.3) Constellations duales et genre	18
2.4) Exemples de constellations	21
3. <u>Propriétés algébriques des constellations et applications</u>	24
3.1) Algèbre des constellations	24
3.2) Groupe d'automorphismes des constellations de leur graphe	28

3.3) Théorème sur l'ordre du groupe d'automorphismes d'un graphe	30
3.4) Exemples	33

CHAPITRE II
+++++

1. <u>Les graphes de Cayley</u>	41
1.1) Définitions	41
1.2) Relations et circuits	42
1.3) Automorphismes d'un graphe de Cayley.	44
1.4) Caractérisation des graphes de Cayley	45
2. <u>Représentations topologiques des graphes de Cayley symétriques</u>	46
2.1) Constellation associée	46
2.2) Constellations-quotient	48
2.3) Constellation réduite	49
2.4) Théorème fondamental sur les faces ..	53
2.5) Exemples	55

3. <u>Représentations triangulaires des graphes</u>	
<u>de Cayley</u>	59
3.1) Théorème sur les représentations	
triangulaires	59
3.2) Constellation réduite	60
3.3) Exemples	62
4. <u>Graphes complets</u>	65
4.1) Le genre du graphe complet	65
4.2) La méthode de Gustin pour les	
triangulations	67
4.3) La méthode de Youngs : les vortex ...	72
5. <u>Le genre de certains graphes de Cayley</u>	76
5.1) Graphe de l'hypercube	76
5.2) }	
5.3) } Graphes du groupe symétrique	79
5.4) }	
BIBLIOGRAPHIE	89

I N T R O D U C T I O N

=====

L'étude des graphes topologiques remonte aux travaux d'EULER sur les polyèdres, mais débute réellement avec HEAWOOD (1890), puis HEFFTER (1891) qui ont, dans des conjectures célèbres, posé le problème des rapports entre le genre d'un graphe et le chromatisme des surfaces (Cf. BERGE [1], YOUNGS [18. b], RINGEL [12. a]).

Les graphes planaires, en liaison avec la très célèbre conjecture des quatre couleurs, ont été particulièrement étudiés (citons par exemple le théorème de KURATOWSKI, 1930).

La conjecture sur le genre du graphe complet a progressivement cédé ces dix dernières années aux efforts de RINGEL [12], GUSTIN [5] et YOUNGS [18]. Grâce à un théorème de J. EDMONDS (cf. YOUNGS [18. a]) et sous l'impulsion

de YOUNGS des éléments de théorie sont apparus qui ont permis la résolution de cette conjecture et qui nous ont conduit à étudier les propriétés algébriques des représentations topologiques simples des graphes.

Dans un premier chapitre, nous faisons l'étude des propriétés algébriques d'un objet dû à GUSTIN [5] que nous appelons constellation : cet objet permet, grâce au théorème de J. EDMONDS, de traduire les propriétés des graphes topologiques en termes purement algébriques et combinatoires.

Dans un deuxième chapitre, nous développons l'étude des représentations topologiques des graphes de CAYLEY (graphes associés à des groupes) : nous donnons une nouvelle caractérisation des graphes de CAYLEY (différente de celle donnée dans MAGNUS-KARRASS & SOLITAR [10]), puis grâce au concept de constellation, nous reprenons dans un cadre plus général la théorie développée par GUSTIN [5] et YOUNGS [18. b]. Ce chapitre se termine par la détermination du genre de plusieurs familles de graphes de CAYLEY du groupe symétrique.

CHAPITRE I

+++++

GRAPHES TOPOLOGIQUES

=====

ET CONSTELLATIONS

=====

1. RAPPEL DE DEFINITIONS.

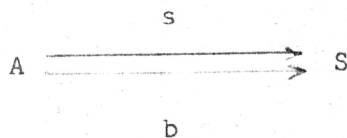
1.1) Graphes orientés.

Le lecteur pourra trouver dans les livres de C. BERGE [1] et O. ORE [11] l'exposé des concepts et résultats de la théorie des graphes. Ici, il ne sera fait appel qu'à quelques définitions élémentaires que nous allons donner.

Nous appelons graphe orienté (multigraphe orienté chez BERGE [1]) un quadruplet $G = (A, S, s, b)$ où

- A est un ensemble (fini) d'éléments appelés arcs,
- S est un ensemble (fini) d'éléments appelés sommets,
- s et b sont deux applications de A dans S définissant l'une le sommet source, l'autre le sommet but de l'arc considéré.

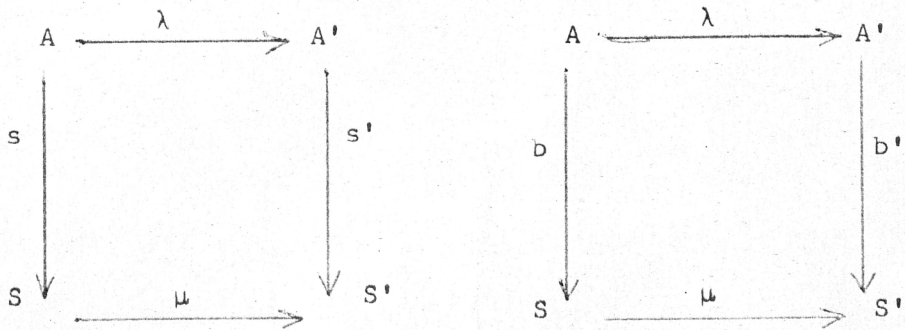
Nous résumons ces définitions dans le diagramme :



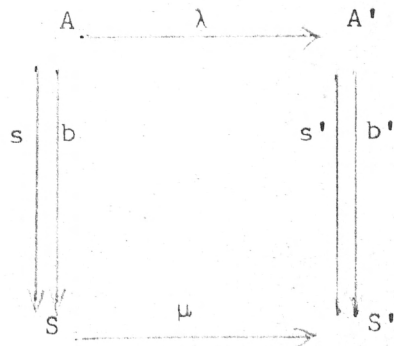
Deux graphes orientés $G = (A, S, s, b)$ et $G' = (A', S', s', b')$ sont dits isomorphes, s'il existe une bijection λ de A sur A' et une bijection μ de S sur S' telles que :

$$\begin{cases} s' \circ \lambda = \mu \circ s \\ b' \circ \lambda = \mu \circ b \end{cases} .$$

Ces propriétés traduisent la commutativité des diagrammes :



que nous pouvons résumer symboliquement dans le diagramme :

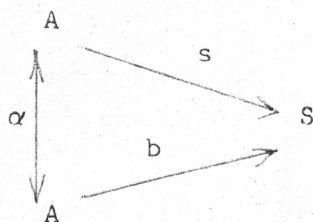


1.2) Graphes non orientés.

Nous appelons graphe non orienté ou encore graphe orienté symétrique un quadruplet $G = (A, S, \alpha, s)$ où

- α est une involution de l'ensemble A des arcs ;
- s est une application de A dans l'ensemble S des sommets.

En posant $b = s \circ \alpha$ (ou $s = b \circ \alpha$ puisque $\alpha^2 = \text{Id}_A$) nous obtenons le diagramme :



et donc un graphe orienté muni d'une "symétrie" due à l'involution α .

Deux graphes non orientés $G = (A, S, \alpha, s)$ et $G' = (A', S', \alpha', s')$ sont isomorphes si il existe une bijection λ de A sur A' et une bijection μ de S sur S' telles que :

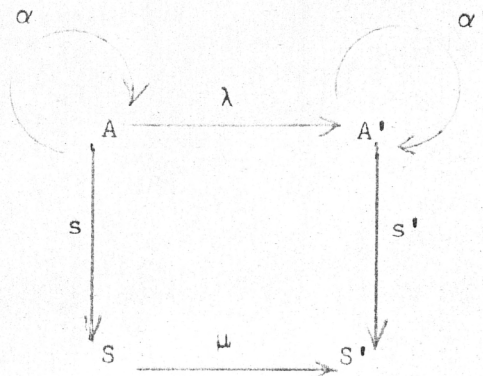
$$\begin{cases} \lambda \circ \alpha = \alpha' \circ \lambda \\ s' \circ \lambda = \mu \circ s \end{cases}$$

Ce qui implique que si $b = s \circ \alpha$ et $b' = s' \circ \alpha'$:

$$b' \circ \lambda = \mu \circ b$$

Nous traduisons ces conditions par la

commutativité du diagramme :



1.3) Graphes topologiques.

Pour les concepts topologiques, nous renvoyons le lecteur à LEFSCHETZ [8].

Etant donnée une surface Σ orientée et fermée (variété à deux dimensions), nous appelons graphe topologique (J.W.T. YOUNGS [18]) sur Σ un graphe $(A, S, s, b)_{\Sigma}$ défini par :

- un ensemble A d'arcs de JORDAN ouverts (images homéomorphes de $]0,1[$ dans Σ) deux à deux disjoints,
- l'ensemble S des extrémités des arcs de JORDAN,
- les applications s et b de A dans S telles que si $a \in A$ est l'image homéomorphe de $]0,1[$, $s(a)$ est l'image de 0 et $b(a)$ l'image de 1 :

$$h_a :]0,1[\longrightarrow \Sigma \text{ avec } a = h_a (]0,1[)$$

alors :

$$s(a) = h_a(0) \text{ et } b(a) = h_a(1) .$$

Deux graphes topologiques $(A, S, s, b)_\Sigma$ et $(A', S', s', b')_\Sigma$ sur la surface orientée Σ sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme $h : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ (homéomorphisme de surfaces orientées) et une bijection $\lambda : A \longrightarrow A'$ tels que :

$$\boxed{\forall a \in A \quad h'_{\lambda a} = h_a \cdot h} \quad \text{où}$$

$h_a :]0,1[\longrightarrow \Sigma$ est l'homéomorphisme qui définit $a \in A$, et $h'_{a'} :]0,1[\longrightarrow \Sigma$ celui qui définit $a' \in A'$.

Remarque :

Deux graphes topologiques homéomorphes sont aussi isomorphes en tant que graphes. La relation d'homéomorphisme entre deux graphes topologiques est une relation d'équivalence, et c'est en fait une classe de graphes topologiques homéomorphes que nous appellerons par abus de langage un graphe topologique.

1.4) Représentation topologique d'un graphe.

Etant donné un graphe $G = (A, S, s, b)$, on appelle représentation topologique de G sur la surface orientée Σ un graphe topologique sur Σ isomorphe à G en tant que graphe.

Sur une surface Σ donnée, un graphe peut admettre aucune, une ou plusieurs représentations topologiques ; mais si un graphe G admet une représentation topologique sur une surface Σ de genre g , il admet une représentation topologique sur toute surface Σ' de genre $g' \geq g$ (il suffit d'ajouter à la surface Σ des "anses", cf. RINGEL [12]).

Pour tout graphe G , il existe donc un entier positif ou nul $g(G)$ (appelé le genre du graphe), tel que si G admet une représentation topologique sur une surface orientée de genre g alors $g \geq g(G)$. Une représentation topologique de G de genre $g(G)$ est dite minimale.

Un graphe G admettant une représentation topologique de genre $g(G) = 0$ est dit planaire : les graphes planaires sont les graphes qui admettent une représentation topologique sur toutes les surfaces orientées.

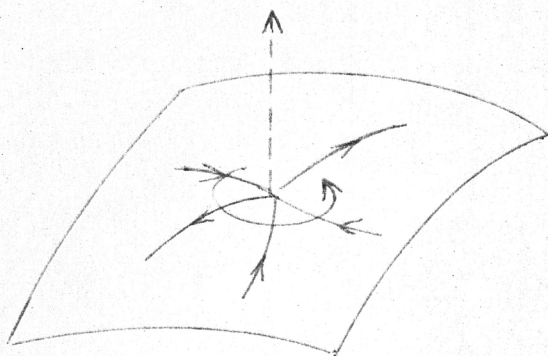
Considérons l'union des arcs de Jordan fermés d'une représentation topologique : c'est un fermé K de la surface Σ ; alors $\Sigma \setminus K$ est un ouvert qui se décompose en ouverts connexes disjoints appelés faces de la représentation topologique. Nous dirons que la représentation topologique est simple (2-cell imbedding dans la terminologie anglaise) si les faces sont toutes des ouverts simplement connexes (homéomorphes à un disque plan).

Il résulte d'un théorème de J.W.T. YOUNGS [18] que toute représentation topologique minimale est simple.

2. REPRESENTATIONS TOPOLOGIQUES SIMPLES ET CONSTELLATIONS.

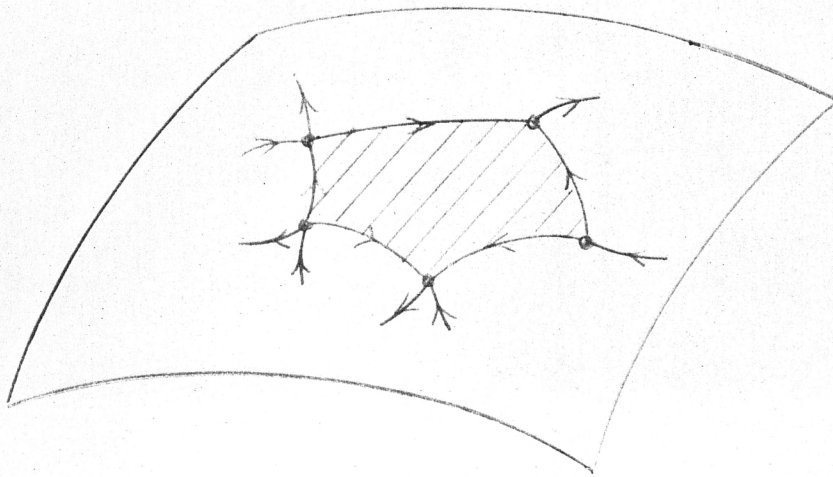
2.1) Le théorème d'EDMONDS;

Toute représentation topologique d'un graphe sur une surface orientée définit en chaque sommet une permutation circulaire des arcs incidents à ce sommet, en considérant la rotation dans le sens positif autour de la normale orientée à la surface.



Cependant, il y a une infinité de représentations topologiques d'un graphe sur une surface orientée qui admettent la même famille de permutations circulaires des arcs incidents

à chaque sommet : il suffit à partir d'une représentation topologique d'adjoindre des "anses" à la surface, sans modifier les arcs représentés. Une telle classe de représentations topologiques d'un graphe admet un représentant de genre minimum qui est unique : ce représentant a ses faces parfaitement définies par les contours "polygonaux" obtenus en suivant un arcs (selon son sens ou non) et en tournant autour d'un sommet selon la permutation qui y est définie.



Ce représentant est de genre minimum puisque toutes ses faces sont simplement connexes et donc en nombre maximum.

Ainsi la classe des représentations topologiques d'un graphe qui admettent la même famille de permutations circulaires des arcs incidents à chaque sommet, est caractérisée par la représentation topologique simple qui appartient à cette classe.

Ce théorème très important dû à J. EDMONDS (cf. YOUNGS [18.a]) s'énonce :

Toute représentation topologique simple d'un graphe sur une surface orientée est caractérisée par ladonnée, en chaque sommet, d'une permutation circulaire des arcs incidents à ce sommet.

2.2) Les constellations.

Si l'on considère un graphe orientée symétrique (cf. I.1.2) et si l'on convient de représenter les arcs opposés (ceux qui se correspondent dans l'involution) par des arcs de Jordan aussi voisins que l'on veut, alors on peut se restreindre à prendre en chaque sommet des permutations circulaires des arcs sortants (GUSTIN [5]). Ainsi pour une représentation topologique d'un graphe orienté symétrique, chaque

arc appartient à une permutation circulaire et une seule : la représentation topologique définit une permutation de tous les arcs dont la restriction à chacun de ses cycles est circulaire sur les arcs sortant d'un sommet.

Soit $G = (A, S, \alpha, s)$ un graphe symétrique défini par l'involution α sur A et l'application "source" qui à chaque arc $a \in A$ fait correspondre le sommet source $s(a) \in S$; toute représentation topologique de G définit donc une permutation σ de A dont l'équivalence de transitivité (σ) est l'équivalence d'application de s . En vertu du théorème d'EDMONDS, toute représentation topologique simple de G est caractérisée par une permutation σ de A dont l'équivalence de transitivité (σ) est l'équivalence d'application de s . Mais on peut identifier S à l'ensemble des classes de transitivité de la permutation σ , et l'application s à la surjection canonique de A sur l'ensemble quotient $A/(\sigma) = S$.

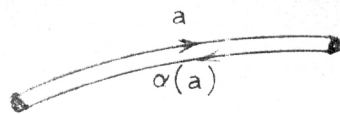
Ainsi à toute représentation topologique simple d'un graphe symétrique $G = (A, S, \alpha, s)$, on peut faire correspondre le triplet (A, α, σ) que nous appelons constellation.

Réciproquement, à toute constellation

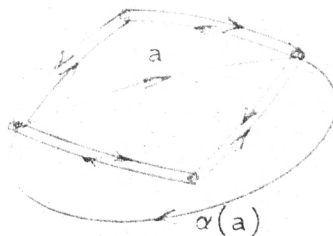
$C = (A, \alpha, \sigma)$ où α est une involution et σ une permutation de A , on peut faire correspondre un graphe $G = (A, S, \alpha, s)$ où S est l'ensemble quotient $A/(\sigma)$ de A par l'équivalence de transitivité de σ et s la surjection canonique de A sur $A/(\sigma)$; de plus, en vertu du théorème d'EDMONDS, la constellation C définit une représentation topologique simple du graphe G sur une surface orientée.

Remarque 1.

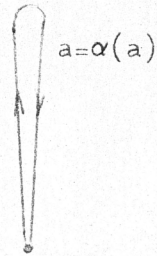
Notre construction qui permet d'associer une constellation à une représentation topologique simple d'un graphe symétrique, suppose que deux arcs opposés soient contigus sur la surface :



ce qui interdit, par exemple, la figure ci-dessous :



Pour les arcs qui sont leurs propres opposés (joints fixes de l'involution α), cela suppose qu'ils soient représentés ainsi :



Remarque 2.

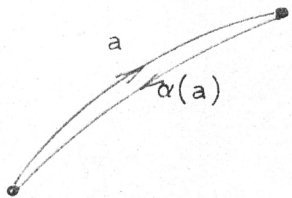
On convient généralement de représenter un graphe symétrique par un graphe non-orienté, c'est-à-dire de remplacer les arcs opposés par une arête :



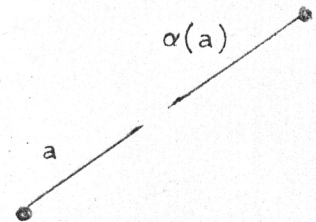
devenant



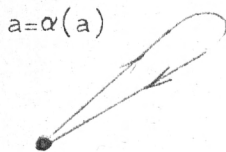
Nous proposons, cependant, une autre façon de représenter un graphe symétrique : nous remplaçons un couple d'arcs opposés par deux demi-arêtes, que nous nommerons "brins".



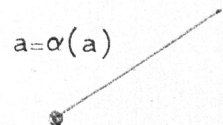
devient alors



Les boucles qui sont leur propre opposé dans l'involution α , deviennent des "arêtes singulières" réduites à un seul brin :



se transforme
en

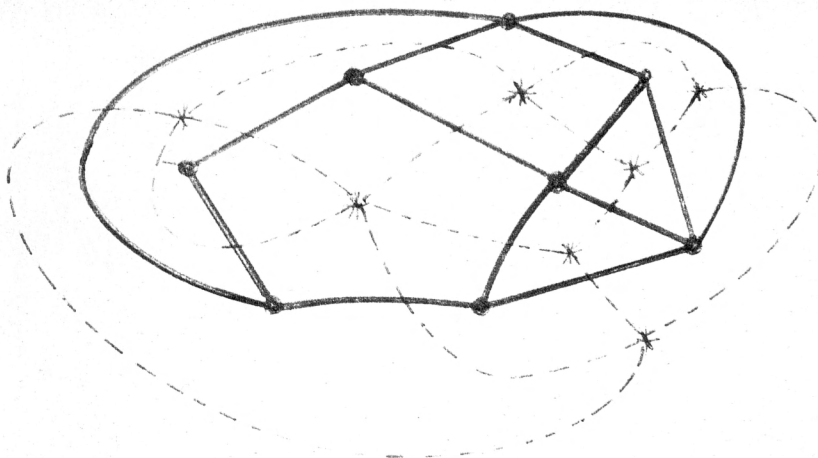


Remarque 3.

Il est clair que si le graphe est connexe, le groupe de permutations $[\sigma, \alpha]$ engendré par σ et α est transitif. De façon générale, les classes de transitivité du groupe $[\sigma, \alpha]$ définissent les composantes connexes du graphe associé à la constellation (A, α, σ) , nous supposons cependant, sauf mention explicite du contraire, que le graphe est connexe, c'est-à-dire que le groupe $[\sigma, \alpha]$ est transitif.

2.3) Constellation duale et genre.

A toute représentation topologique d'un graphe sur une surface orientée on peut faire correspondre un graphe topologique dual (BERGE [1]) :



Mais les faces de la représentation topologique simple s'obtiennent aisément sur la constellation $C = (A, \alpha, \sigma)$: il suffit en effet de considérer les orbites de la permutation $\varphi = \sigma\alpha$ (GUSTIN [5], YOUNGS [18. a,b]). Il est clair alors que la constellation associée au graphe topologique dual est $C^* = (A, \alpha, \varphi)$ et que nous avons bien une dualité puisque :

$$\sigma = \varphi\alpha \quad .$$

Nous appellerons donc constellation duale de $C = (A, \alpha, \sigma)$ la constellation $C^* = (A, \alpha, \varphi = \sigma\alpha)$.

Mais une représentation topologique simple d'un graphe étant une décomposition cellulaire d'une surface orientée, la caractéristique d'Euler- Poincaré de la surface (LEFSCHETZ [8] , COXETER [4]) est :

$$\chi = N - M + F$$

où N est le nombre de sommets du graphe, M le nombre d'arêtes et F le nombre de faces. Dans le cas d'une surface orientée, le genre g est lié à la caractéristique χ par la relation :

$$\chi = 2 - 2g \quad \text{ou} \quad g = 1 - \frac{\chi}{2} \quad .$$

D'où le genre de la surface pour une représentation topologique simple :

$$g = 1 + \frac{M - N - F}{2} .$$

Nous définissons donc le genre d'une constellation par l'entier positif ou nul :

$$g = z(\sigma, \alpha) + \frac{z(\epsilon) - z(\alpha) - z(\sigma) - z(\sigma\alpha)}{2} ,$$

où $z(\sigma, \alpha)$ désigne le nombre de classes de transitivité du groupe $[\sigma, \alpha]$; $z(\alpha)$, $z(\sigma)$, $z(\sigma\alpha)$ et $z(\epsilon)$ désignent les nombres de classes de transitivité de $\alpha, \sigma, \sigma\alpha$ et $\epsilon = \text{Id}_A$.
En effet, si l'on considère que le graphe associé à la constellation est connexe alors $z(\sigma, \alpha) = 1$; d'autre part, il est clair que :

$$N = z(\sigma) , M = z(\epsilon) - z(\alpha) \text{ et } F = z(\sigma\alpha) .$$

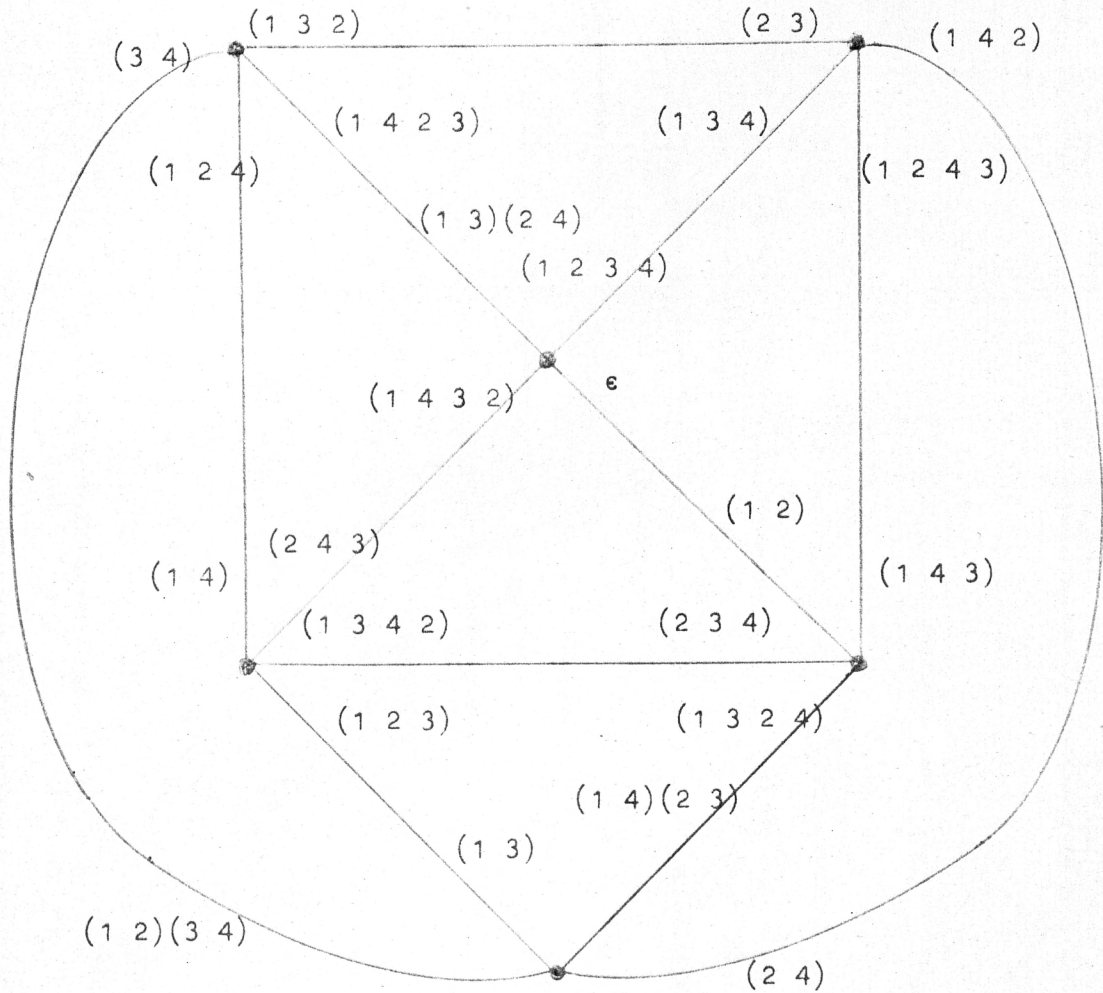
Pour une démonstration algébrique du fait que le nombre g précédemment défini est un entier non négatif, nous renvoyons le lecteur à une publication que nous avons faite et dans laquelle nous généralisons cette inégalité : JACQUES [6] .

Il est clair sur la formule qu'une constellation et sa duale ont même genre, car le groupe $[\sigma, \alpha]$ est identique au groupe $[\sigma\alpha, \alpha]$. Pour une constellation dont le graphe associé n'est pas connexe, le genre est la somme des genres des constellations définies par les classes de transitivité du groupe $[\sigma, \alpha]$.

2.4) Exemples de constellations.

Pour définir une constellation, il suffit de se donner un ensemble, une involution et une permutation de cet ensemble.

Ainsi, on peut prendre pour ensemble A le groupe S_4 , engendré par la permutation circulaire $\gamma = (1\ 2\ 3\ 4)$ et la transposition $\nu = (1\ 2)$; les translations à droite définies par γ et ν nous fournissent la permutation σ des éléments de S_4 et l'involution α . Nous obtenons alors pour constellation l'octaèdre suivant :



Les faces de la constellation sont obtenues par la translation

à droite φ définie par le produit

$$\alpha\gamma = (1\ 2)(1\ 2\ 3\ 4) = (2\ 3\ 4) .$$

En prenant l'ensemble

$$A = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} ,$$

l'involution α peut être définie par le changement de signe avec

la règle habituelle, et la permutation σ peut être par exemple :

$$\sigma = (1 \ -6 \ 7)(-1 \ 8 \ 2)(-2 \ -9 \ 3)(-3 \ -7 \ 4)(-4 \ -8 \ 5)(-5 \ 9 \ 6)$$

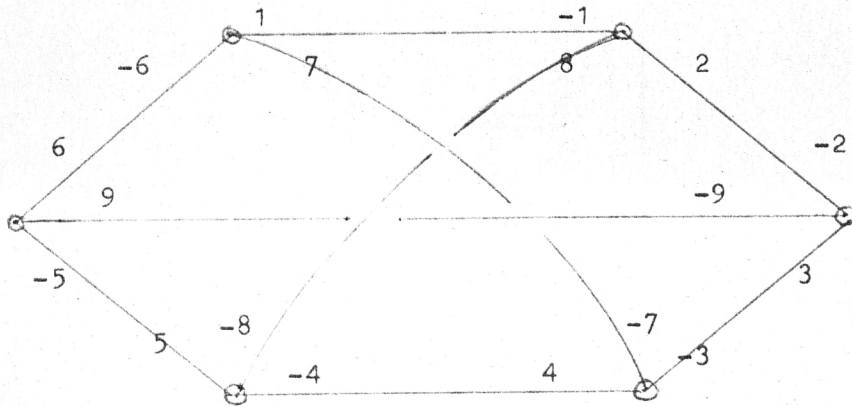
La constellation C ainsi définie a 6 sommets et ses faces sont obtenues par la permutation :

$$\varphi = \sigma\alpha = (1 \ 8 \ 5 \ 9 \ 3 \ -7)(2 \ -9 \ 6 \ 7 \ 4 \ -8)(-1 \ -6 \ -5 \ -4 \ -3 \ -2).$$

La constellation C a donc 3 faces et son genre est alors

$$g = 1 + \frac{M - N - F}{2} = 1 + \frac{9 - 6 - 3}{2} = 1 : \text{ la constellation C}$$

correspond donc à une représentation topologique sur le tore :



3. PROPRIETES ALGEBRIQUES DES CONSTELLATIONS ET APPLICATIONS.

3.1) Algèbre des constellations.

Considérons la structure algébrique définie par les trois opérations unaires σ , $\bar{\sigma}$ et α liées par les identités :

$$\begin{cases} \alpha\alpha x = x \\ \sigma\bar{\sigma}x = \bar{\sigma}\sigma x = x \end{cases}$$

Nous appellerons constellations, les algèbres définies par cette structure algébrique (ce sont encore des automates dont l'alphabet d'entrée est l'ensemble $\{\sigma, \bar{\sigma}, \alpha\}$). Soit C une constellation, il est clair que σ et α sont des permutations de C , et que la donnée de la structure de constellation sur C est équivalente à la donnée d'un homomorphisme du produit libre $Z * Z/2$ dans \mathcal{G}_C .

Nous pouvons donc introduire de la façon habituelle les concepts traditionnels de l'algèbre générale : sous-algèbre, algèbre quotient, homomorphisme, etc ...



Remarques élémentaires :

1) La constellation C est monogène si et seulement si le groupe de permutations $[\sigma, \alpha]$ engendré par σ et α est transitif sur C . Alors tout élément de C est générateur.

2) Toute constellation est union de constellations monogènes disjointes, ce qui détermine toutes les sous-constellations d'une constellation.

3) Une congruence d'une constellation monogène a pour classes un système d'imprimitivité du groupe $[\sigma, \alpha]$ et réciproquement. Les classes d'une congruence ont donc toutes même cardinal.

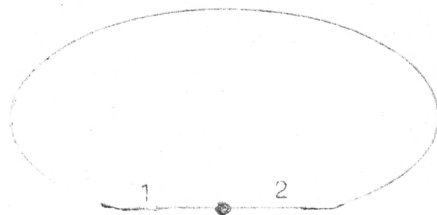
4) Le groupe d'automorphismes d'une constellation monogène est "fixed-point free" (ou semi-régulier, WIELANDT [17]). On peut aussi remarquer que ce groupe est le centralisateur de $[\sigma, \alpha]$ et utiliser un théorème de KUHN (WIELANDT [17] p. 9). Il s'en suit le résultat suivant qui généralise un théorème de TUTTE & HARARY [14] :

L'ordre du groupe d'automorphisme d'une constellation monogène finie divise le cardinal de la constellation.

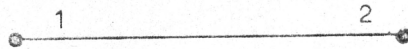
Rappelons que le nombre de classes de transitivité du groupe $[\sigma, \alpha]$ est aussi le nombre de composantes connexes du graphe associé à la constellation. En particulier, une constellation est monogène si et seulement si son graphe associé est connexe (aussi parlerons-nous de constellation connexe au lieu de constellation monogène).

Nous verrons dans le chapitre II à propos des représentations topologiques de graphes de CAYLEY une application des concepts de congruence et de constellation-quotient. On peut employer le concept d'homomorphisme pour formuler quelques propriétés élémentaires des constellations et de leur graphe associé :

- a) le graphe associé à une constellation C a tous ses sommets de degré pair si et seulement si il existe un homomorphisme de C sur la constellation définie par l'ensemble $\{1, 2\}$ et les permutations $\alpha = \sigma = (1 \ 2)$:



b) par dualité nous avons : le graphe associé à une constellation C a toutes ses faces de longueur paire si et seulement si il existe un homomorphisme de C sur la constellation définie par l'ensemble $\{1,2\}$ et les permutations $\alpha = (1\ 2)$ et $\sigma = (1)(2)$:



c) le graphe associé à une constellation C a tous ses sommets pairs et toutes ses faces paires si et seulement si il existe un homomorphisme de C sur la constellation définie par l'ensemble $\{1,2\}$ et les permutations $\alpha = (1)(2)$ $\sigma = (1\ 2)$:



3.2) Groupes d'automorphismes des constellations et de leur graphe.

Etant donnée une constellation $C = (A, \alpha, \sigma)$ nous avons vu (en 3.1) que le groupe des automorphismes de C est le centralisateur du groupe $[\sigma, \alpha]$ dans \mathfrak{S}_A :

$$\text{Aut}(A, \alpha, \sigma) = Z[\sigma, \alpha] = Z(\sigma) \cap Z(\alpha) .$$

Nous allons chercher quels liens lient ce groupe au groupe des automorphismes du graphe associé à la constellation.

Si $G = (A, S, \alpha, s)$ est un graphe symétrique nous avons vu en 1.2 que ses automorphismes sont les couples

$$(\lambda, \mu) \in \mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_S \text{ tels que}$$

$$\begin{cases} \lambda\alpha = \alpha\lambda \\ \mu s = s\lambda \end{cases} .$$

Cependant si (λ, μ) et (λ, μ') sont deux automorphismes ayant même première coordonnée, on a alors ;

$$\mu s = s\lambda = \mu' s ,$$

et comme μ et μ' sont inversibles cela entraîne :

$$\mu = \mu' .$$

Ainsi le groupe $\text{Aut}G$ des automorphismes d'un graphe

$G = (A, S, \alpha, s)$ est isomorphe au groupe $\text{Aut}_A G$ des permu-

tations $\lambda \in \mathcal{G}_A$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda\alpha = \alpha\lambda \\ x, y \in A, sx = sy \implies s\lambda x = s\lambda y \end{array} \right. .$$

Nous considérons maintenant les automorphismes du graphe G comme opérant sur A , c'est-à-dire appartenant au groupe $\text{Aut}_A G$.

Considérons alors la constellation $C = (A, \alpha, \sigma)$, les permutations $\lambda \in \text{Aut}_A G$ sont telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda\alpha = \alpha\lambda \\ x, y \in A : x \equiv y \pmod{\sigma} \implies \lambda x = \lambda y \pmod{\sigma} \end{array} \right. ;$$

mais cette deuxième condition traduit que :

$$\lambda [\sigma] \lambda^{-1} = [\sigma]$$

où $[\sigma]$ note le groupe engendré par σ .

Le groupe $\text{Aut}_A G$ des automorphismes du graphe G associé à la constellation $C = (A, \alpha, \sigma)$ est l'intersection du centralisateur de α et du normalisateur du groupe $[\sigma]$ dans \mathcal{G}_A :

$$\text{Aut}_A G = Z(\alpha) \cap N[\sigma] .$$

Le centralisateur d'un groupe étant un sous-groupe distingué de son normalisateur (cf. KUROSH [7] vol. I, p. 84) , le groupe d'automorphismes d'une constellation C est un sous-groupe distingué du groupe d'automorphismes de son graphe associé G :

$$\text{Aut } C = Z(\alpha) \cap Z(\sigma) \subset Z(\alpha) \cap N[\sigma] = \text{Aut}_A G .$$

3.3) Théorème sur l'ordre du groupe d'automorphismes d'un graphe.

Etant donné un graphe $G = (A, S, \alpha, s)$, toutes ses représentations topologiques simples sont obtenues par les constellations $C = (A, \alpha, \sigma)$ telles que σ ait pour équivalence de transitivité l'équivalence d'application de s .
 Considérons une telle constellation C , ses conjuguées par les permutations $\omega \in \text{Aut}_A G$ sont :

$$\omega^{-1} C \omega = (A, \alpha, \omega^{-1} \sigma \omega) .$$

Le nombre de ces conjuguées est égal à l'ordre du groupe-quotient $\text{Aut}_A G / \text{Aut } C$. D'autre part, toutes ces constel-

lations conjuguées ont le graphe G pour graphe associé puisque $\omega \in \text{Aut}_A G$, et de plus elles ont même genre (puisque conjuguées par une permutation). Par conséquent, l'ensemble des constellations de genre g associées à un même graphe G se décompose en classes de cardinal :

$$\left| \text{Aut}_A G / \text{Aut} C \right| \quad \text{où } C \text{ est un représentant}$$

de chaque classe.

Soit N_g le nombre de représentations topologiques simples du graphe G sur une surface orientée de genre g , et soit γ l'ordre du groupe $\text{Aut}_A G$ des automorphismes du graphe G , alors :

$$N_g = \sum_{i \in I} \left| \frac{\text{Aut}_A G}{\text{Aut} C_i} \right| = \gamma \sum_{i \in I} \frac{1}{|\text{Aut} C_i|} .$$

Mais nous avons établi en 3.1 que l'ordre du groupe d'automorphismes d'une constellation divise le cardinal de A :

$$|A| = k_i |\text{Aut} C_i| .$$

D'où le nombre N_g :

$$N_g = \frac{\gamma}{|A|} \sum_{i \in I} k_i .$$

Nous énonçons le :

THEOREME :

L'ordre γ du groupe d'automorphismes d'un
graphe divise le produit du cardinal de
l'ensemble A de ses arcs par le nombre N_g
de ses représentations topologiques simples
sur une surface orientée de genre g :

$$\gamma \mid N_g \cdot \text{Card}A \quad .$$

Corollaire : γ divise le produit du cardinal de A par le
PGCD des nombres N_g , pour tout $g \geq 0$.

Application aux graphes planaires.

Pour les graphes planaires, le nombre N_0
a été déterminé par Mc LANE [9] qui a donné son expression
sous la forme d'un produit de factorielles entièrement déter-
minées par la décomposition du graphe en sous-graphes maxi-

maux triplement connexes.

Pour les graphes planaires triplement connexes, il résulte d'un théorème classique de WHITNEY [16] qu'ils n'admettent que deux représentations planaires se déduisant l'une de l'autre par changement de l'orientation de la sphère (ou du plan).

Nous retrouvons alors le résultat de TUTTE & HARARY [14] (cf. aussi WEINBERG [15]) :

L'ordre du groupe d'automorphismes d'un graphe planaire triplement connexe divise $4M$ (M est le nombre d'arêtes, ou encore $2M$ est le nombre d'arcs).

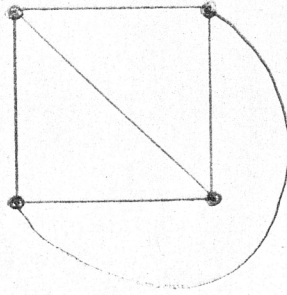
3.4) Exemples.

Nous avons réalisé un programme pour calculer sur machines toutes les représentations topologiques simples d'un graphe, lorsque ce graphe est cubique et a moins de 20 sommets.

Nous donnons ci-dessous les résultats obtenus pour les nombres N_g et la valeur de l'ordre du groupe

d'automorphismes de quelques graphes.

a) le graphe complet à 4 sommets.



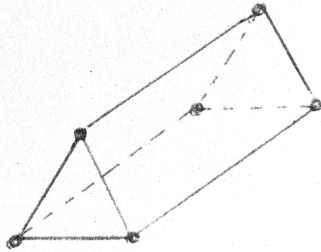
Nous avons trouvé :

$$N_0 = 2 \quad N_1 = 14 \quad N_2 = N_3 = \dots = 0$$

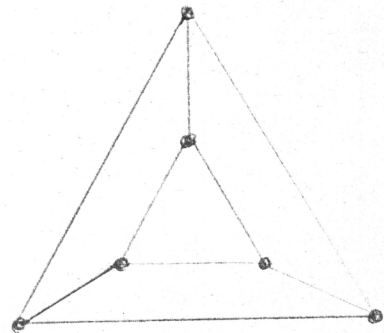
L'ordre du groupe d'automorphismes est $4! = 24$ et

$$2M.N_0 = 2 \times 6 \times 2 = 24 .$$

b) le prisme.



ou encore



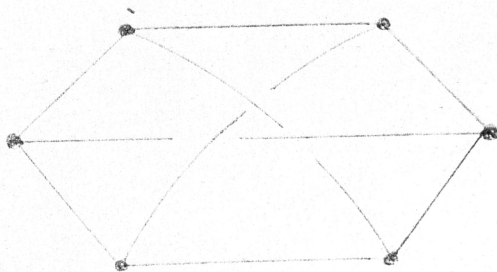
Nous avons trouvé :

$$N_0 = 2, N_1 = 38, N_2 = 24, N_3 = N_4 = \dots = 0.$$

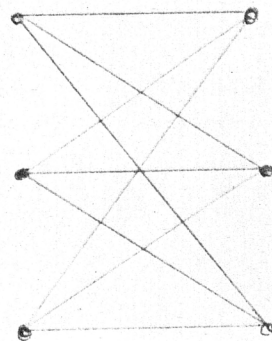
L'ordre du groupe d'automorphisme doit diviser

$$2MN_0 = 2 \times 9 \times 2 = 36, \text{ et cet ordre est } \gamma = 2 \times 3! = 12.$$

c) le graphe de Thompson.



ou encore



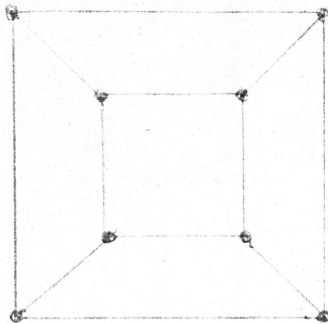
Nous avons trouvé :

$$N_0 = 0, N_1 = 40, N_2 = 24, N_3 = N_4 = \dots = 0.$$

L'ordre du groupe d'automorphismes doit diviser

$2M$. $\text{PGCD}(40,24) = 2 \times 9 \times 8 = 144$, et cet ordre est exactement $2 \times 3! \times 3! = 72$.

d) le cube.



Nous avons trouvé :

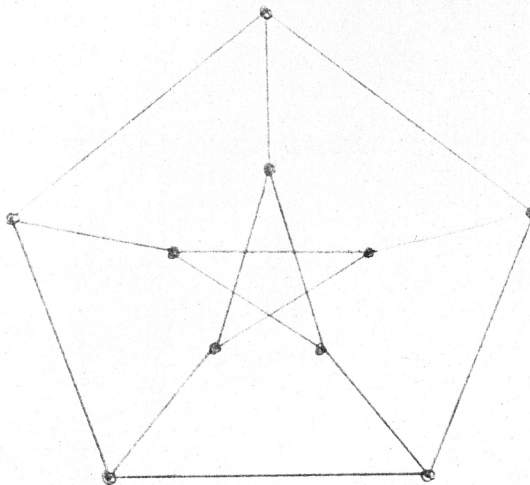
$$N_0 = 2 \quad , \quad N_1 = 54 \quad , \quad N_2 = 200 \quad , \quad N_3 = N_4 = \dots = 0 \quad .$$

L'ordre du groupe d'automorphismes doit diviser

$2M.N_0 = 2 \times 12 \times 2 = 48$, et cet ordre est exactement

$2 \times 24 = 48$.

e) Le graphe de Petersen.



Nous avons trouvé :

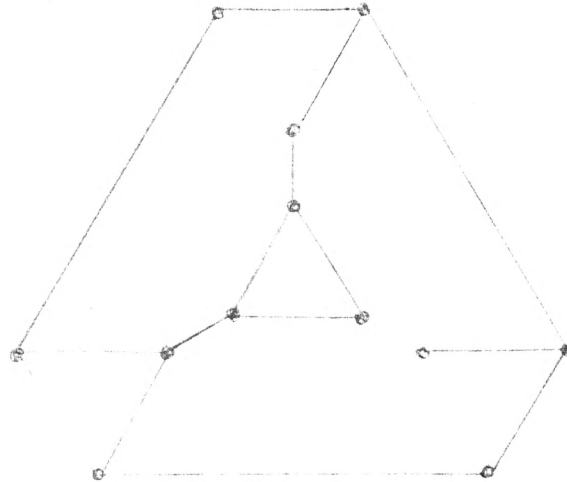
$$N_0 = 0 \quad , \quad N_1 = 40 \quad , \quad N_2 = 664 \quad , \quad N_3 = 320 \quad , \quad N_4 = N_5 = \dots = 0 \quad .$$

L'ordre du groupe d'automorphismes doit diviser

$$2M.PGCD(40, 664, 320) = 2 \times 15 \times 8 = 240, \text{ et cet ordre est}$$

égal à 120 (cf. ORE [11]).

f) la pyramide tronquée.



Nous avons trouvé :

$$N_0 = 2 \quad , \quad N_1 = 158 \quad , \quad N_2 = 1984 \quad , \quad N_3 = 1952 \quad ,$$

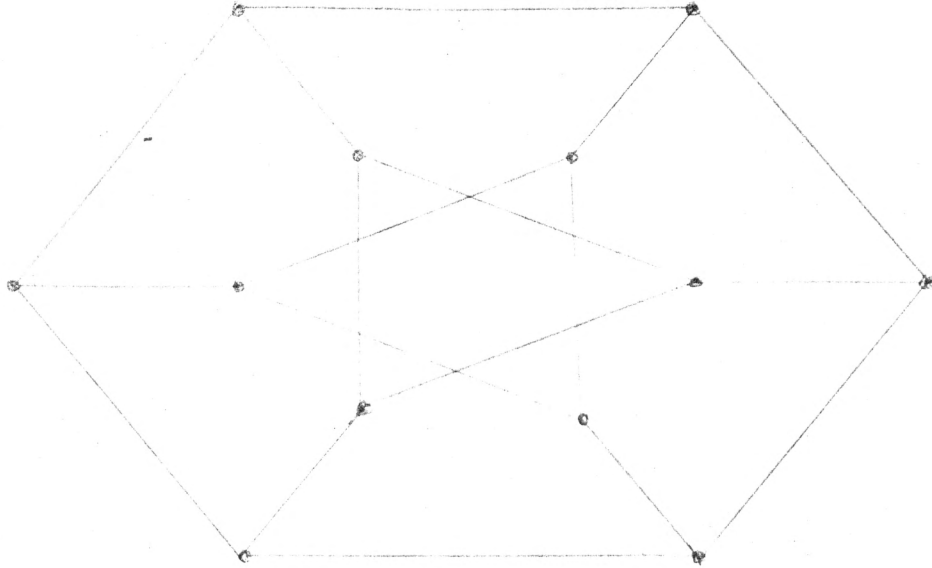
$$N_4 = N_5 = \dots = 0 \quad .$$

L'ordre du groupe d'automorphismes doit diviser

$$2MN_0 = 2 \times 18 \times 2 = 72 \quad , \quad \text{et cet ordre est égal à}$$

$$4! = 24 \quad .$$

g) un graphe à 12 sommets.



Nous avons trouvé :

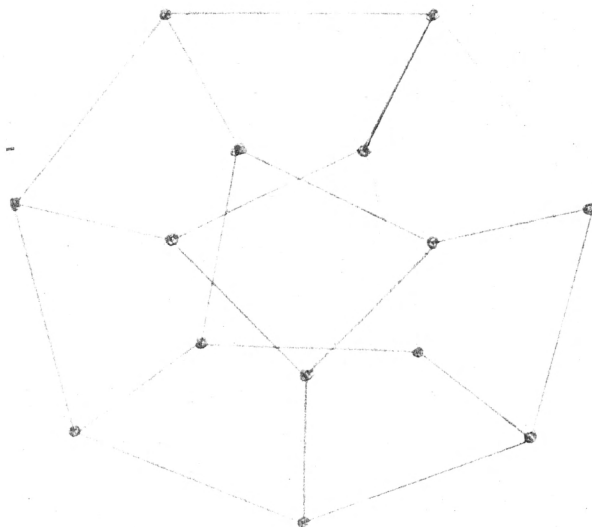
$$N_0 = 2 \quad , \quad N_1 = 102 \quad , \quad N_2 = 1496 \quad , \quad N_3 = 2496 \quad ,$$

$$N_4 = N_5 = \dots = 0 \quad .$$

L'ordre du groupe d'automorphismes doit diviser

$$2M.N_0 = 2 \times 18 \times 2 = 72 \quad , \quad \text{et cet ordre est égal à } 12 \quad .$$

h) un graphe à 14 sommets.



Nous avons trouvé :

$$N_0 = 0 \quad , \quad N_1 = 14 \quad , \quad N_2 = 1274 \quad , \quad N_3 = 10616 \quad ,$$

$$N_4 = 4480 \quad , \quad N_5 = N_6 = \dots = 0 \quad .$$

L'ordre du groupe d'automorphismes doit diviser

$$2M.PGCD(14,1274,10616,4480) = 2 \times 21 \times 2 = 84 \quad , \quad \text{et cet}$$

ordre est égal à 14 .

CHAPITRE II

+++++

REPRESENTATIONS TOPOLOGIQUES

=====

DES GRAPHES DE CAYLEY

=====

Dans ce chapitre, nous commençons par introduire les graphes de CAYLEY et quelques unes de leurs propriétés ; nous en donnons ensuite une caractérisation nouvelle en termes de groupe d'automorphismes de graphes avant d'aborder l'étude de leurs représentations topologiques. Du à CAYLEY [] le concept de graphe associé à un groupe a été essentiellement utilisé dans l'étude des groupes par générateurs et relations : BURNSIDE [2], COXETER & MOSER [4], MAGNUS-KARRASS & SOLITAR [10]. Les propriétés bien connues (ORE [11]) de régularité de ces graphes, jouent un rôle important pour leurs représentations topologiques (GUSTIN [5]). L'intérêt principal pour cette étude des représentations topologiques des graphes de CAYLEY a été historiquement la conjecture sur le genre du graphe complet en liaison avec la conjecture de HEFFTER (RINGEL [12] et YOUNGS [18]).

1) GRAPHES DE CAYLEY.

1.1) DEFINITION.

Nous appelons graphe de CAYLEY d'un groupe Γ par rapport à un sous-ensemble Δ de Γ le

graphe défini de la manière suivante (ORE [11]

p. 242, COXETER & MOSER [4] p. 21) :

- l'ensemble des sommets est l'ensemble des éléments du groupe,

- un couple (g, g') est un arc si et seulement si $g^{-1} g' \in \Delta$.

Remarques :

a) Tout arc (g, g') est valué par l'élément $g^{-1} g'$ de Δ qui est appelé le courant porté par l'arc (ou encore la couleur).

b) Soit e l'élément neutre de Γ , si $e \in \Delta$ tout sommet possède une boucle, sinon aucun sommet n'en possède.

c) L'ensemble des arcs sortants d'un sommet (resp. entrants dans un sommet) est en bijection avec l'ensemble Δ : le graphe est homogène de degré (intérieur ou extérieur) $d = \text{Card } \Delta$.

d) Un graphe de CAYLEY est symétrique si et seulement si Δ est stable par rapport à l'inverse : $\Delta = \Delta^{-1}$.

1.2) Relations et circuits.

A tout chemin dans le graphe on peut faire correspondre un mot sur l'alphabet Δ en prenant les courants portés

par les arcs dans l'ordre du cheminement : à ce mot correspond un élément unique de Γ obtenu par produit dans Γ . Soit $g_1, g_2, g_3, \dots, g_p$ une suite de sommets du graphe formant un chemin, il lui correspond le mot :

$$(g_1^{-1} g_2)(g_2^{-1} g_3) \dots (g_{p-1}^{-1} g_p) .$$

Par produit dans le groupe, on obtient l'élément $g_1^{-1} g_p$: cet élément est égal à e si et seulement si le chemin est un circuit.

Réciproquement, à tout élément g du groupe et à toute relation de la forme $h_1 h_2 \dots h_p = e$ avec $h_i \in \Delta$ pour $i = 1, 2, \dots, p$, correspond dans le graphe un circuit passant par le sommet g ; on construit en effet le circuit de la manière suivante :

$$g_1 = g, g_2 = g_1 h_1, \dots, g_{p+1} = g_p h_p = g_1 h_1 h_2 \dots h_p = g_1 .$$

Remarque :

Les composantes connexes du graphe de CAYLEY d'un groupe Γ par rapport à un sous-ensemble Δ de Γ sont les classes à gauche de Γ par rapport au sous-groupe engendré par Δ . Un sous-ensemble Δ d'un groupe Γ est donc un système de générateurs du groupe si et seulement si le graphe de CAYLEY associé est connexe.

1.3) Automorphismes d'un graphe de CAYLEY.

Le groupe d'automorphismes d'un graphe de CAYLEY s'écrit :

$$\mathcal{A} = \{ \alpha \in \mathcal{S}_\Gamma \mid g^{-1} g' \in \Delta \Leftrightarrow \alpha(g') [\alpha(g)]^{-1} \in \Delta \}$$

soit encore :

$$\mathcal{A} = \{ \alpha \in \mathcal{S}_\Gamma \mid \alpha(\Delta g) = \Delta \alpha(g) \}.$$

La représentation régulière gauche du groupe Γ forme de façon évidente un sous-groupe du groupe d'automorphismes \mathcal{A} du graphe (ORE [11] p. 243) ; ce sous-groupe régulier de \mathcal{A} a de plus la propriété de respecter la valuation des arcs, propriété qui le caractérise si le graphe est connexe (ORE [11] p. 243).

Le groupe d'automorphismes d'un graphe de CAYLEY est donc transitif sur les sommets.

De plus les automorphismes du groupe Γ qui laissent stable Δ forment un sous-groupe du groupe d'automorphismes du graphe de CAYLEY. En particulier les automorphismes intérieurs de Γ engendrés par le normalisateur de Δ forment un sous-groupe du groupe d'automorphismes du graphe de CAYLEY.

1.4) Caractérisation des graphes de CAYLEY.

Nous avons vu que le groupe d'automorphismes d'un graphe de CAYLEY admet un sous-groupe régulier, nous allons montrer maintenant que la réciproque est vraie.

Soit G un graphe dont le groupe d'automorphismes admet un sous-groupe Γ régulier ; on peut identifier Γ à sa représentation régulière gauche (SCOTT [13] p. 264), c'est-à-dire identifier l'ensemble X des sommets du graphe et l'ensemble des éléments de Γ de la manière suivante : soit $x_0 \in X$, identifions x_0 et e l'élément neutre de Γ , alors pour tout $x \in X$ il existe un et un seul élément g de Γ tel que $g(x_0) = x$; on peut donc identifier x et g et noter $h(g) = hg$ (SCOTT [13] p. 403). Posons $\Delta = \{g^{-1}g' \mid (g, g') \in U\}$ où U est l'ensemble des arcs du graphe, le graphe G est alors le graphe de CAYLEY du groupe par rapport au sous-ensemble Δ : en effet, soit un couple (g, g') de sommets du graphe. Nous allons montrer que $g^{-1}g' \in \Delta$ entraîne que (g, g') est un arc ; si $g^{-1}g' = h \in \Delta$ alors il existe par définition un arc (g_0, g'_0) tel que $g_0^{-1}g'_0 = h$, mais Γ étant régulier, il existe un élément f de Γ tel que $f(g_0) = fg_0 = g$ d'où $g' = gh = fg_0h = fg'_0 = f(g'_0)$; f étant un automorphisme du graphe il en résulte que le couple $(f(g_0), f(g'_0)) = (g, g')$ est un arc. Nous énonçons :

THEOREME :

Un graphe est un graphe de CAYLEY si et seulement si son groupe d'automorphismes admet un sous-groupe régulier.

Notre caractérisation des graphes de CAYLEY est essentiellement différente de celle exposée dans MAGNUS-KARRASS & SOLITAR [10] sec. 1.6., pp. 56-67.

2. REPRESENTATIONS TOPOLOGIQUES DES GRAPHES DE CAYLEY

SYMETRIQUES.

2.1) Constellation associée.

A toute représentation topologique simple d'un graphe de CAYLEY on peut associer une constellation

$C, C = (V, \sigma, \alpha)$, définie par (cf. GUSTIN [5]) :

{	$V = \Gamma \times \Delta$	où $\Delta = \Delta^{-1}$	est un ensemble de générateurs du groupe Γ ,
	$\alpha(g, h) = (gh, h^{-1})$		h est appelé le courant porté par le brin (g, h) ,
	$\sigma(g, h) = (g, \sigma_g h)$		où (σ_g) est une famille de permutations circulaires de Δ indexée par Γ et définie par la représentation topologique.

En vertu de ce que nous avons dit à propos des circuits et des relations (§1.2), le produit des courants des brins pris le long d'une face de la constellation est égal à e l'élément neutre de Γ . La constellation duale $C^* = (V, \varphi, \alpha)$, définie par $\varphi = \sigma \alpha$, vérifie ce que YOUNGS (cf. [18]) appelle la loi de KIRCHHOFF : le produit des courants pris sur les brins associés à un même sommet (dans l'ordre correspondant à la rotation positive autour de la normale orientée à la surface) est égal à e , l'élément neutre de Γ .

Considérons la permutation φ ; elle opère sur un brin (g, h) de la manière suivante :
 $\varphi(g, h) = (gh, \varphi_{gh} h)$ en posant $\varphi_g h = \sigma_g h^{-1}$. La famille de permutations (φ_g) définit la même équivalence d'application que la famille (σ_g) puisque :

$$\sigma_g = \sigma_{g'} \iff \varphi_g = \varphi_{g'} .$$

Nous noterons Σ cette équivalence d'application :

$$g \equiv g' \pmod{\Sigma} \iff \sigma_g = \sigma_{g'} \iff \varphi_g = \varphi_{g'} .$$

2.2) Constellations quotients.

Toute équivalence sur Γ induit une équivalence sur V de la manière suivante :

$$(g, h) \sim (g', h') \iff g \sim g' \quad \text{et} \quad h = h' .$$

Une telle équivalence sur V est une congruence de constellation si et seulement si :

$$(g, h) \sim (g', h) \implies \begin{cases} \alpha (g, h) \sim \alpha (g', h) \text{ soit } gh \sim g'h \\ \sigma (g, h) \sim \sigma (g', h) \text{ soit } \sigma_g h = \sigma_{g'} h \end{cases}$$

Une équivalence sur Γ induit donc une congruence de constellation si et seulement si : pour tout $h \in \Delta$, $g \sim g' \implies gh \sim g'h$ et $\sigma_g = \sigma_{g'}$. Or Δ est un ensemble de générateurs de Γ , il en résulte donc que l'équivalence sur Γ doit être régulière à droite :

THEOREME :

Une équivalence sur Γ induit une congruence de constellation si et seulement si elle est régulière à droite et est plus fine que l'équivalence \mathcal{E} .

On peut donc définir une constellation-quotient pour tout sous-groupe Ω de Γ tel que :

$$g \cdot g'^{-1} \in \Omega \implies \sigma_g = \sigma_{g'} .$$

Remarques :

1. Un tel sous-groupe Ω de Γ existe toujours puisque $\Omega = \{ e \}$ vérifie la condition ci-dessus ; mais alors la constellation-quotient est identique à la constellation initiale, le plus grand sous-groupe Ω de Γ vérifiant la condition est appelé l'ouverture régulière droite de l'équivalence \mathcal{E} .

2. La constellation-quotient définie par un sous-groupe Ω de Γ donne une représentation topologique simple du graphe de SCHREIER associé aux classes de Γ modulo Ω (cf. COXETER & MOSER [4] , GUSTIN [5]) .

2.3) Constellation réduite.

Appelons constellation réduite la constellation duale de la constellation-quotient définie par un sous-groupe Ω de Γ . Cette constellation réduite C' , $C' = (V', \sigma' , \alpha')$ est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} V' = (\Gamma : \Omega) \times \Delta \text{ où } \Gamma : \Omega \text{ est l'ensemble des classes à} \\ \text{droite,} \\ \alpha' (\Omega g, h) = (\Omega gh, h^{-1}) , \\ \sigma' (\Omega g, h) = (\Omega gh, \varphi_{\Omega gh} h) . \end{array} \right.$$



Posons de plus $\varphi'(\Omega g, h) = (\Omega gh, \sigma_{\Omega g} h)$. La famille $(\sigma_{\Omega g})$ de permutations circulaires de Δ indexée par $\Gamma : \Omega$ est liée à la famille $(\varphi_{\Omega g})$ par la relation :

$$\varphi_{\Omega g} h = \sigma_{\Omega g} h^{-1} .$$

La constellation réduite vérifie les 5 propriétés suivantes :

- a) chaque brin porte un courant prenant ses valeurs dans Δ .
- b) deux brins opposés v et αv portent des courants inverses (si $v = \alpha v$, le courant est alors nécessairement d'ordre 2).
- c) les faces sont bijectivement associées aux classes à droite de Γ par rapport à Ω .
- d) les courants apparaissant sur une face sont en bijection avec Δ .
- e) si un brin v appartient à une face associée à Ωg et son conjugué αv à une face $\Omega g'$, alors le courant porté par v appartient à l'ensemble $g'\Omega g$ (donc à l'ensemble $g'\Omega g \cap \Delta$).

Montrons que réciproquement si nous avons une constellation "réduite" définie par un sous-groupe Ω d'un groupe Γ et par un ensemble Δ de générateurs de Γ , constellation réduite vérifiant les 5 propriétés ci-dessus, alors il existe une représentation topologique simple du graphe de CAYLEY associé au groupe Γ et à l'ensemble Δ de générateurs telle

que la constellation réduite apparaisse comme la duale de la constellation-quotient induite par la représentation topologique.

Soit $C' = (V', \sigma', \alpha')$ la constellation réduite vérifiant les 5 conditions ci-dessus, notons C'^* la constellation duale de C' . La constellation C'^* est donc définie par $C'^* = (V', \sigma', \varphi')$ avec $\sigma'^* = \varphi' = \sigma' \alpha'$. Chaque brin de C'^* porte un courant en vertu de la condition a), appartient à un sommet étiqueté par les classes à droite de Γ par rapport à Ω , en vertu de la condition c), et est caractérisée autour de ce sommet par son courant, en vertu de la condition d). Un brin de C'^* peut donc s'écrire sous la forme $(\Omega g, h)$. Le brin $(\Omega g, h)$ a pour conjugué un brin $(\Omega g', h')$: $h' = h^{-1}$ en vertu de la condition b), et $h \in g^{-1} \Omega g'$ en vertu de la condition e) ; d'où il résulte que $\Omega g' = \Omega g h$ et donc que :

$$\alpha'(\Omega g, h) = (\Omega g h, h^{-1}) .$$

Quant à σ'^* , nous avons : $\sigma'^*(\Omega g, h) = \varphi(\Omega g, h) = (\Omega g, \sigma_{\Omega g} h)$ si nous notons $\sigma_{\Omega g}$ la permutation circulaire de Δ définie par la condition d).

En résumé, la constellation C'^* duale de la constellation réduite peut être définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} V' = (\Gamma:\Omega) \times \Delta \\ \alpha'(\Omega g, h) = (\Omega g h, h^{-1}) \\ \sigma'^*(\Omega g, h) = (\Omega g, \sigma_{\Omega g} h). \end{array} \right.$$

Posons maintenant $\sigma_g = \sigma_{\Omega g}$ pour tout $g \in \Gamma$, nous obtenons une famille de permutations circulaires de Δ indexée par Γ . Alors la constellation C , définie par $C = (V, \sigma, \alpha)$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \Gamma \times \Delta \\ \alpha(g, h) = (gh, h^{-1}) \\ \sigma(g, h) = (g, \sigma_g h) \end{array} \right.$$

fournit une représentation topologique simple du graphe de CAYLEY et de plus la duale de son quotient est bien la constellation réduite. Nous énonçons donc :

THEOREME :

Toutes les représentations topologiques simples d'un graphe de CAYLEY associé à un groupe Γ et à un ensemble de générateurs $\Delta = \Delta^{-1}$, peuvent s'obtenir en considérant un sous-groupe Ω de Γ tel que la constellation réduite associée vérifie les 5 conditions ci-dessus définies.

Remarque :

Le théorème n'a d'intérêt que si on peut trouver une constellation réduite pour un sous-groupe Ω qui n'est pas $\{e\}$, c'est-à-dire uniquement dans le cas où l'ouverture régulière droite de Σ n'est pas triviale.

2.4) Théorème fondamental sur les faces d'une représentation topologique d'un graphe de CAYLEY engendrée par une constellation réduite.

Nous allons tout d'abord établir le lemme suivante :

LEMME :

Si l'orbite modulo φ d'un brin (g,h) d'une constellation de CAYLEY est d'ordre q alors l'orbite modulo φ' du brin $(\Omega g,h)$ de la constellation quotient est d'ordre k , k divisant q .

En effet, $\varphi(g,h) = (gh, \varphi_{gh} h) \implies \varphi'(\Omega g,h) = (\Omega gh, \varphi_{\Omega gh} h)$
donc $\varphi^q(g,h) = (g,h) \implies \varphi'^q(\Omega g,h) = (\Omega g,h)$. Si donc $\varphi'^k(\Omega g,h) = (\Omega g,h)$ cela entraîne que k divise q .

Soit π le produit des courants autour d'un sommet de la constellation réduite : nous dirons que ce sommet est de valence p si l'élément π est d'ordre p dans le groupe Γ .

Nous dirons que la loi de KIRCHHOFF est réalisée en un sommet de la constellation réduite si sa valence est 1.

Soit dans la constellation réduite un sommet de degré k et de valence p , cela signifie que dans la constellation-quotient nous avons une face de longueur k_k et dont le produit π des courants est d'ordre p : $\varphi^{k,k}(\Omega g, h) = (\Omega g, h)$ avec

$$\prod_{i=1}^k h_i = \pi \quad \text{où } h_i \text{ désigne les courants le long de la face.}$$

En vertu du lemme, il existe k' tel que $\varphi^{kk'}(g', h) = (g', h)$

pour $g' \in \Omega g$. Le produit des courants le long de la face

de (g', h) est nécessairement de la forme $\pi^{k'}$, mais comme π

est d'ordre p il en résulte que k' est un multiple de p .

Mais la relation $\pi^p = e$ qui s'écrit à l'aide des éléments h_i

entraîne que les arêtes de la face du brin (g', h) prises

de 1 à kp forment un cycle qui se trouve donc nécessairement

confondu avec la face. La face du brin (g', h) est donc de

longueur kp . Mais sur cette face on trouve exactement p brins

de la forme (g'', h') avec $g'' \in \Omega g$ car $\varphi^k(\Omega g, h) = (\Omega g, h)$. Ainsi

le sommet de la constellation réduite engendre $\frac{\omega}{p}$ faces de

longueur kp dans la constellation de CAYLEY, si nous posons

$$\omega = \text{Card } \underline{\Omega}.$$

THEOREME :

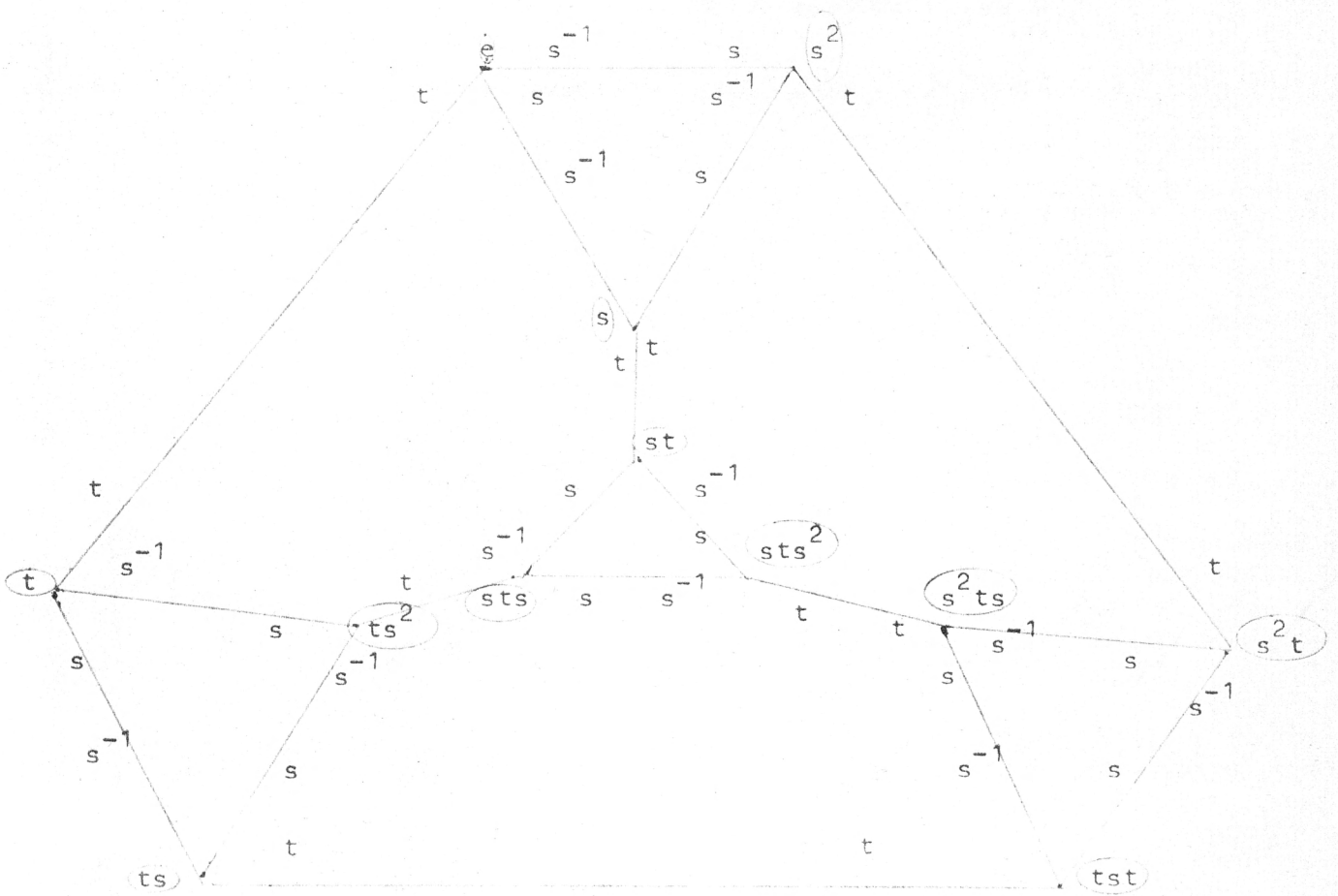
Chaque sommet de degré k et de valence p de la
constellation réduite engendre $\frac{w}{p}$ faces de
longueur kp dans la constellation de CAYLEY.

2.5) Exemples.

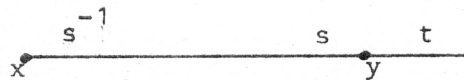
Considérons le groupe tétraédral (groupe alterné \mathcal{A}_4),
il est défini par générateurs et relations de la manière suivante
(cf. COXETER & MOSER [4]) :

$$s^3 = t^2 = (st)^3 = e .$$

Prenons pour ensemble de générateurs
 $\Delta = \{ s, s^{-1}, t \}$ et considérons la représentation topologique du
graphe de CAYLEY associé à \mathcal{A}_4 et Δ :



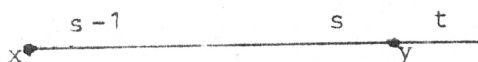
On voit que sur cette représentation les permutations circulaires de Δ associées aux sommets sont toutes égales à la permutation circulaire $(s \ s^{-1} \ t)$. On peut donc prendre pour sous-groupe Ω le groupe tout entier Γ , et la constellation réduite a pour ensemble de brins l'ensemble Δ , la conjugaison sur les brins étant alors le passage à l'inverse ; la permutation sur l'unique face est alors la permutation circulaire $(s \ s^{-1} \ t)$. D'où la représentation topologique de la constellation réduite :



Le sommet x étant de degré 1 et de valence 3 (puisque $(s^{-1})^3 = e$), il engendre $\frac{n}{3} = \frac{12}{3} = 4$ faces de longueur 3 dans la représentation initiale.

Le sommet y étant de degré 2 et de valence 3 (puisque $(st)^3 = e$), il engendre $\frac{n}{3} = 4$ faces de longueur 6.

Considérons la même constellation réduite :



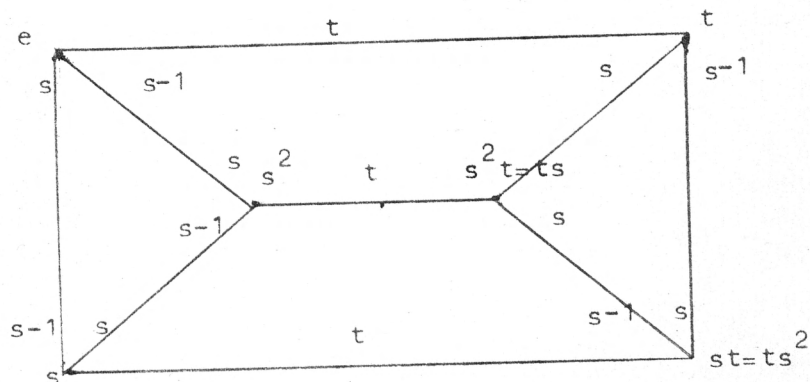
mais prenons les éléments s et t dans un autre groupe défini par les mêmes générateurs mais avec des relations différentes :
 par exemple : $\Gamma = \mathcal{G}_3$ qui est défini par :

$$s^3 = t^2 = (st)^2 = e .$$

Cette constellation réduite fournit une représentation topologique du graphe de CAYLEY de \mathcal{G}_3 par rapport au système de générateurs $\Delta = \{ s, s^{-1}, t \}$. Le sommet x étant de degré 1 et de valence 3, il engendre donc dans la représentation topologique cherchée 2 faces de longueur 3. Le sommet y de degré 2 et de valence 2 engendre donc 3 faces de longueur 4. La représentation topologique cherchée est donc planaire puisque :

$$g = \left[(M - N + 1) - (F - 1) \right] / 2 = 0 .$$

La permutation circulaire définie en chaque sommet du graphe de CAYLEY est partout la même puisque $\Omega = \Gamma$ et s'écrit : $(s \ s^{-1} \ t)$. La représentation topologique du graphe de CAYLEY est donc la suivante :



3) REPRESENTATIONS TRIANGULAIRES.

3.1) Théorème sur les représentations triangulaires.

Une représentation triangulaire d'un graphe est une représentation topologique dont toutes les faces sont des triangles. Dans le cas des représentations triangulaires d'un graphe de CAYLEY cela signifie que toutes les orbites modulo φ des brins de la constellation sont d'ordre 3. Considérons une face de la constellation constituée des brins : (g, h) , (g_1, h_1) et (g_2, h_2) , nous avons alors les relations :

$$\varphi (g, h) = (g_1, h_1)$$

$$\varphi (g_1, h_1) = (g_2, h_2)$$

$$\varphi (g_2, h_2) = (g, h)$$

d'où nous tirons :

$$g_1 = gh, g_2 = g_1 h_1 = gh h_1, g = g_2 h_2 = gh h_1 h_2 \quad .$$

Nous avons la relation $h \cdot h_1 \cdot h_2 = e$ qui exprime que le produit des courants le long d'une face est bien égal à e . D'autre part, nous avons :

$$h_1 = \varphi_{gh} h, \quad h_2 = \varphi_{g_1 h_1} h_1 \quad \text{et} \quad h = \varphi_{g_2 h_2} h_2 = \varphi_g h_2 \quad ;$$

nous tirons donc :

$$h_1 = \varphi_{gh} h \quad \text{et} \quad h_2 = \varphi_g^{-1} h \quad ,$$

soit en reportant dans la relation $h.h_1.h_2 = e$:

$$h.(\varphi_{gh}h).(\varphi_g^{-1}h) = e .$$

Si $\varphi_g = \varphi_{g'}$, il résulte de la formule ci-dessus que $\varphi_{gh} = \varphi_{g'h}$, pour tout h appartenant à Δ ; Δ étant un ensemble de générateurs, il en résulte que l'équivalence d'application \mathfrak{E} définie par les familles (σ_g) et (φ_g) est régulière à droite. Nous énonçons donc :

THEOREME :

Pour toute représentation triangulaire d'un graphe de CAYLEY, la famille (σ_g) de permutations circulaires de Δ définie par la représentation a une équivalence d'application \mathfrak{E} qui est régulière à droite.

3.2) Constellation réduite dans le cas triangulaire.

Dans le cas des représentations triangulaires, les conditions sur la constellation réduite s'écrivent :

a) chaque brin de la constellation porte un courant prenant ses valeurs dans Δ , Δ étant un système de générateurs du groupe Γ .

b) deux brins conjugués v et αv portent des courants inverses (si $v = \alpha v$ le courant est nécessairement d'ordre 2).

c) les faces sont bijectivement associées aux classes à droite de Γ par rapport à un sous-groupe Ω de Γ .

d) les courants apparaissant sur une face forment une permutation circulaire de Δ .

e) si un brin v appartient à une face associée à Ωg et son conjugué à une face $\Omega g'$, alors le courant porté par v appartient à l'ensemble $g' \Omega g$.

f) tout sommet de la constellation réduite est de degré 1 ou 3.

g) le produit des courants autour d'un sommet de degré 3 est égal à e (loi de KIRCHHOFF).

h) en un sommet de degré 1 le courant porté est d'ordre 3.

Les conditions f), g) et h) proviennent du théorème sur les faces engendrées par une constellation réduite (2.4). C'est par de telles constellations réduites que GUSTIN [5] a trouvé des représentations triangulaires du graphe complet dans les

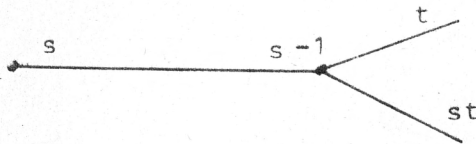
cas $N \equiv 3, 4$ et $7 \pmod{12}$. Par la même méthode, mais avec des groupes non-abéliens TERRY, WELCH et YOUNGS ont déterminés des représentations triangulaires du graphe complet pour $N \equiv 0 \pmod{12}$ [] .

3.3) Exemples.

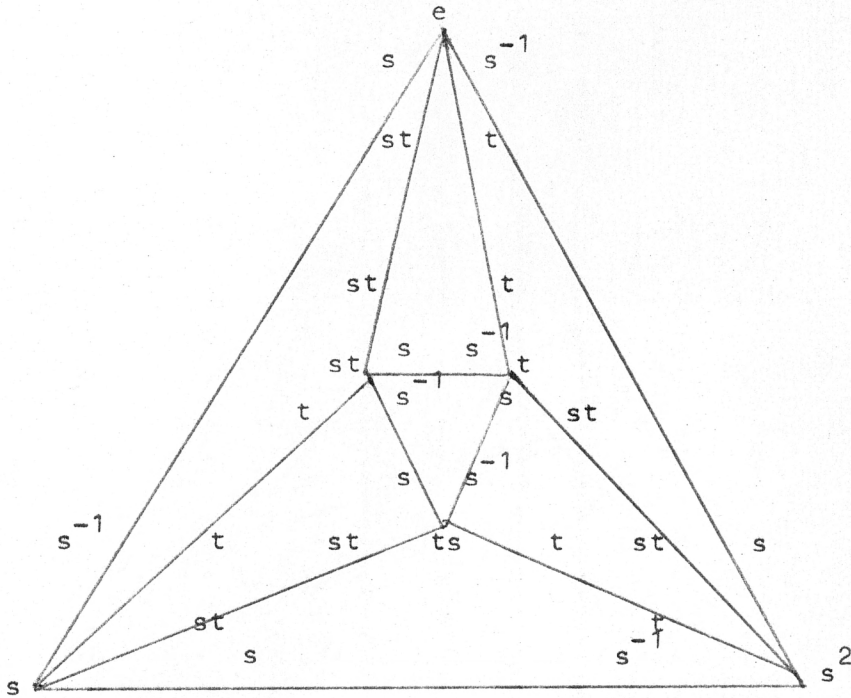
Considérons le groupe $\Gamma = \mathfrak{S}_3$ défini par générateurs et relations de la façon suivante :

$$s^3 = t^2 = (st)^2 = e .$$

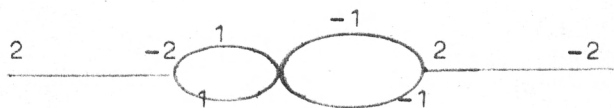
Prenons pour ensemble de générateurs $\Delta = \{ s, s^{-1}, t, st \}$ et considérons la constellation :



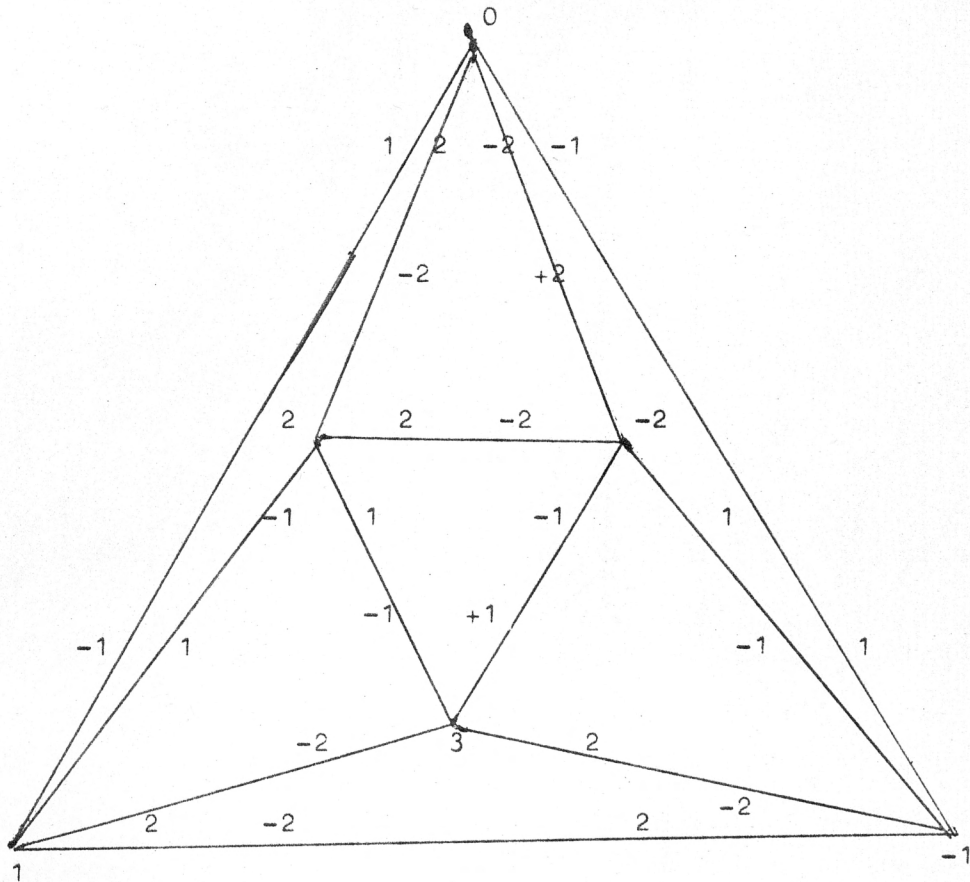
Cette constellation n'a qu'une seule face, elle forme bien une constellation réduite du cas triangulaire avec pour sous-groupe Ω le groupe Γ tout entier. En chaque sommet de la représentation triangulaire du graphe de CAYLEY la permutation des courants est la suivante : $(s \ st \ t \ s^{-1})$. La représentation obtenue est donc la suivante :



Si nous considérons maintenant le groupe $\Gamma = \mathbb{Z}/6$ et l'ensemble de générateurs $\Delta = \{ 1, -1, 2, -2 \}$, la constellation suivante forme pour le sous-groupe Ω des éléments pairs une constellation réduite du cas triangulaire :



Chacune des deux faces forme une permutation circulaire des éléments de Δ , soient : $(1\ 2\ -2\ -1)$ et $(1\ -1\ -2\ 2)$.
 La représentation topologique du graphe de CAYLEY de $Z/6$ avec pour ensemble de générateurs Δ est donc la suivante :



Nous voyons sur ces deux exemples que des groupes différents mais de même ordre peuvent fournir avec des constellations réduites fort différentes des représentations topologiques homéomorphes du graphe de CAYLEY.

4. GRAPHE COMPLETS.

4.1) Le genre du graphe complet.

On appelle représentation minimale une représentation topologique du graphe de genre minimal. YOUNGS [18] a montré que toute représentation minimale d'un graphe est simple, c'est-à-dire que toutes les faces sont des ouverts simplement connexes (homéomorphes à un disque plan).

Une représentation minimale du graphe complet étant simple, on peut lui appliquer la formule d'EULER. Soit F_k le nombre de faces d'ordre k , alors le nombre total de faces est :

$$F = \sum_{k \geq 3} F_k \quad \text{dès que } N \geq 3 .$$

Mais la somme des arêtes de toutes les faces est égal à $2.M$ où M est le nombre d'arêtes :

$$2.M = \sum_{k \geq 3} k.F_k = N(N-1) .$$

D'où le genre du graphe complet :

$$g(K_N) = \frac{(M - N + 1) - (F - 1)}{2} = \frac{2M - 6N + 12}{12} + \frac{1}{6}(2M - 3F)$$

$$\text{soit donc : } g(K_N) = \frac{(N - 3)(N - 4)}{12} + \frac{1}{6} \sum_{k \geq 3} (k - 3)F_k .$$

On voit donc qu'une triangulation n'est possible que pour $(N - 3)(N - 4) \equiv 0 \pmod{12}$, c'est-à-dire pour $N \equiv 0, 3, 4$ ou $7 \pmod{12}$.

La conjecture depuis longtemps formulée sur le graphe complet est que le genre du graphe complet d'ordre N est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{(N - 3)(N - 4)}{12}$.

Historiquement la conjecture fut posée par HEFFTER (1891) et établie par lui dans le cas où N est congru à 7 modulo 12 avec $q = \frac{N + 2}{3}$ premier et lorsque l'ordre de 2 dans le groupe multiplicatif des entiers modulo q est soit $q-1$ soit $\frac{q-1}{2}$.

Ce problème du genre du graphe complet a été attaqué depuis une dizaine d'années essentiellement par RINGEL, GUSTIN et YOUNGS, et n'a complètement cédé que tout récemment (RINGEL & YOUNGS, Mans. 1968, communication personnelle).

Des méthodes de résolution assez générales ont été trouvées utilisant la propriété des graphes complets d'être des graphes de CAYLEY (où $\Delta = \Gamma \setminus \{e\}$). Notre travail sur les représentations topologiques des graphes de CAYLEY n'est qu'une extension de ces méthodes au cas général, extension facilitée par le concept de constellation.

Nous voudrions ici insister sur la difficulté que représentait cette conjecture sur le graphe complet, car si nous pouvons donner des méthodes générales, il n'en reste pas moins qu'il faut pour chaque cas exhiber une famille de constellations réduites répondant au problème.

Nous sommes heureux de rendre ici hommage à ce travail de titan entrepris et mené à bien par RINGEL et YOUNGS essentiellement.

4.2) Cas des triangulations : la méthode de GUSTIN.

La méthode de GUSTIN consiste à rechercher une représentation minimale du graphe complet par la méthode des constellations réduites que nous avons indiqué au paragraphe 3.2) ; cette méthode fut d'ailleurs indiquée de façon très voisine de celle que nous avons donné, mais pour des représentations topologiques régulières (toutes les façons étant des polygones ayant même nombre de cotés) de graphes de CAYLEY.

Par cette méthode, GUSTIN [5] a donné le genre des graphes complets K_N pour $N \equiv 3, 4$ ou 7 modulo 12 , et TERRY-WELCH & YOUNGS [] pour le cas plus difficile où $N \equiv 0$ modulo 12 .

Nous ne reprendrons pas l'exposé de cette méthode et nous renvoyons le lecteur au paragraphe 3.2) ; nous ferons seulement quelques remarques qui proviennent du fait qu'ici l'ensemble de générateurs Δ est $\Gamma - \{e\}$.

Remarques :

1) Le nombre total de brins singuliers de la constellation réduite est $\frac{N}{\omega}$ fois le nombre d'éléments d'ordre 2 du sous-groupe Ω ($\omega = \text{Card } \Omega$).

En effet, $(\Omega g, h)$ est un brin singulier si et seulement si : $\alpha(\Omega g, h) = (\Omega g, h)$ ie $(\Omega g h, h^{-1}) = (\Omega g, h)$ soit encore : $\Omega g = \Omega g h$ et $h = h^{-1}$; un brin $(\Omega g, h)$ est singulier si et seulement si h est un élément d'ordre 2 appartenant à l'ensemble $g^{-1}\Omega g$. Si donc g est un élément fixe, les brins singuliers de la face associée à Ωg correspondent bijectivement aux éléments d'ordre 2 de $g^{-1}\Omega g$. Mais il y a bijection entre les éléments d'ordre 2 de $g^{-1}\Omega g$ et ceux de Ω , d'où le résultat annoncé.

2) Si x représente le nombre d'éléments d'ordre 2 du sous-groupe Ω et y le nombre de sommets de degré 1 de la constellation réduite, alors la formule d'EULER fournit la condition de compatibilité suivante :

$$\frac{N}{\omega}(N - 7 - 3x) - 4y \equiv 0 \pmod{12} .$$

En effet, le nombre total de brins non singuliers est $\frac{N}{\omega}(N - 1 - x)$ dans la constellation réduite. Si nous transformons la constellation réduite en adjoignant un sommet et un brin à chaque brin singulier de façon à avoir une arête, la nouvelle constellation a même genre que la constellation réduite ; soient N' , M' et F' les nombres de sommets, d'arêtes et de faces dans cette constellation, nous avons alors :

$$3(N' - \frac{N}{\omega}x - y) + (\frac{N}{\omega}x + y) = 2M' = \frac{N}{\omega}(N - 1 + x) \quad \text{et} \quad F' = \frac{N}{\omega} .$$

D'où le genre de la constellation :

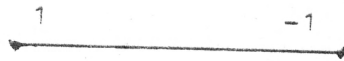
$$g = 1 + \left[\frac{N}{\omega}(N - 7 - 3x) - 4y \right] / 12 .$$

Nous avons donc bien la condition annoncée.

Exemples :

1) Le genre de K_3 .

Considérons le groupe $Z/3$ la constellation réduite suivante :

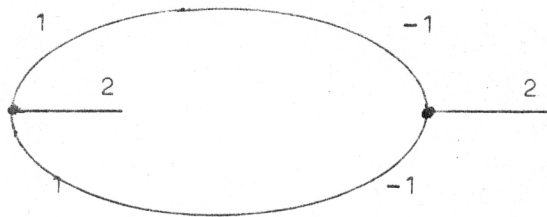


fournit bien une représentation topologique triangulaire de K_3 ayant deux faces de longueur 3.

2) Le genre de K_4 .

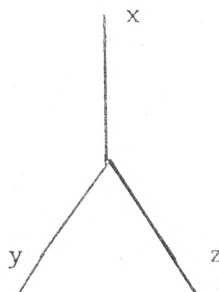
Nous avons deux groupes possibles : le groupe cyclique et le groupe de KLEIN. Nous allons donner un exemple avec chacun de ces groupes.

a) supposons $\Gamma = \mathbb{Z}/4$, alors on ne peut pas prendre pour sous-groupe Ω le groupe tout entier car la somme des éléments non nuls est égale à 2 ; mais avec le sous-groupe des éléments pairs nous trouvons la constellation réduite suivante :



Cette constellation réduite fournit une représentation topologique triangulaire de K_4 sur la sphère (ou le plan).

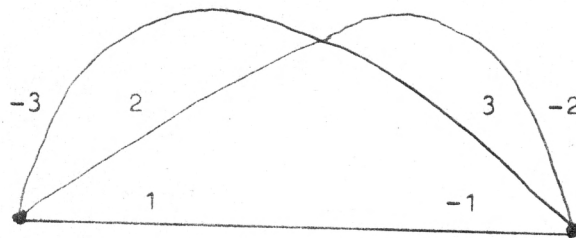
b) supposons $\Gamma = (\mathbb{Z}/2)^2$, alors on peut prendre comme sous-groupe Ω le groupe tout entier car le produit des éléments différents de e est égal à e . Nous trouvons alors la constellation réduite suivante :



$$\begin{cases} x^2 = y^2 = z^2 = e \\ xyz = e \end{cases}$$

3) Le genre de K_7 .

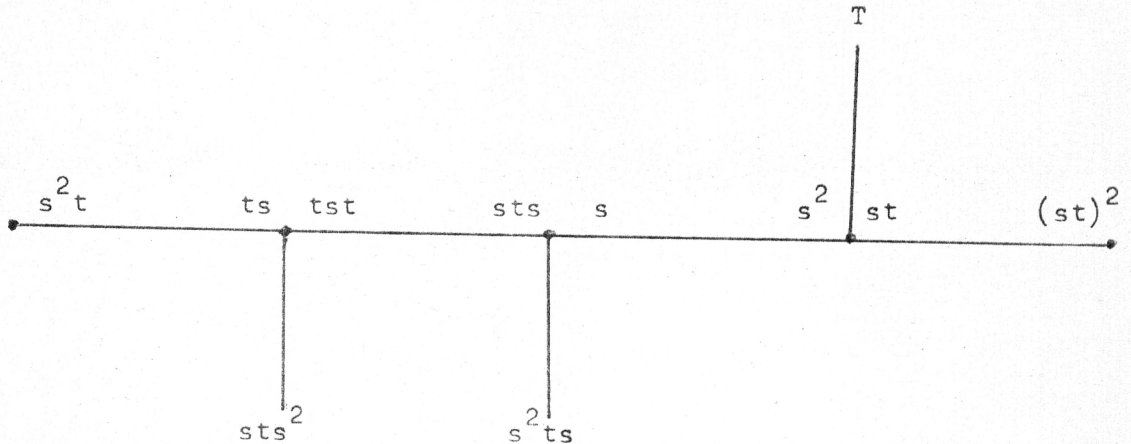
L'ordre du groupe étant premier le seul groupe Γ est donc $\mathbb{Z}/7$. Pour sous-groupe, nous n'avons pas le choix : il faut prendre $\Omega = \mathbb{Z}/7$ si on veut que le quotient ne soit pas trivial. Il nous faut donc trouver une constellation réduite ayant 6 brins et n'ayant qu'une seule face. Il est aisé alors de trouver la constellation suivante :



4) Le genre de K_{12} .

Pour obtenir le genre 6 fourni par la conjecture, il nous faut obtenir, dans le cas triangulaire, une représentation topologique ayant 44 faces. S'il existe une solution avec $\Omega = \Gamma$, alors chaque sommet de la constellation réduite qui est de degré 3 engendre 12 faces et chaque sommet de degré 1 engendre 4 faces : la solution avec le plus petit nombre de sommets de degré 1 doit comporter 3 sommets de degré 3 et 2 sommets de degré 1.

Avec le groupe tétraédral \mathcal{A}_4 une solution est possible avec la constellation réduite :



En effet, le groupe \mathcal{A}_4 est défini par : $s^3 = t^2 = (st)^3 = e$.
 Les éléments d'ordre 2 du groupe sont : t, sts^2 et s^2ts . Les autres éléments sont d'ordre 3 : $s, s^2, st, ts, s^2t, ts^2, sts, tst$.

4.3) La méthode de YOUNGS : les vortex.

YOUNGS appelle excès en un sommet d'une constellation réduite le produit des courants autour de ce sommet et appelle vortex un sommet où l'excès n'est pas e . Il appelle d'autre part vortex propre un vortex de la constellation réduite qui engendre

pour la représentation topologique du graphe complet une face de longueur N ; dans notre terminologie cela signifie que le sommet est de degré k et de valence p avec $kp = N$.

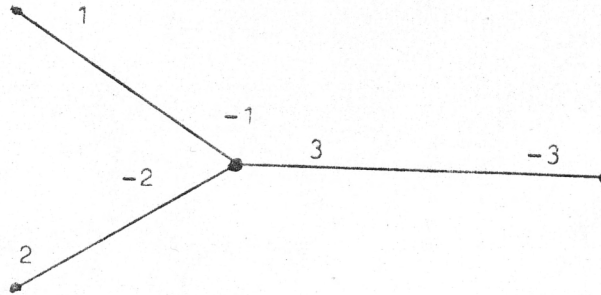
YOUNGS cherche alors des constellations réduites qui engendrent soit des faces de longueur 3 soit des faces de longueur N . En sélectionnant un point intérieur de chaque face de longueur N et en reliant par des arêtes chacun d'eux aux sommets du contour de leur face, il obtient une représentation topologique d'un nouveau graphe dont il ne reste plus qu'à relier entre eux les points sélectionnés initialement pour obtenir un graphe complet. Il suffira de déterminer le plus petit nombre "d'anses" à rajouter à la surface pour que ces nouvelles arêtes ne se coupent pas : on obtient de cette manière une représentation topologique qui peut dans certain cas être minimale, mais qui si elle ne l'est pas conduit à une borne supérieure du genre du graphe complet.

C'est par cette méthode que GUSTIN et YOUNGS ont établi que le genre du graphe complet est au plus égal à celui de la conjecture augmenté de un, pour $N = 8$ ou 11 modulo 12 .

Exemples :

1) Le genre de K_{10} .

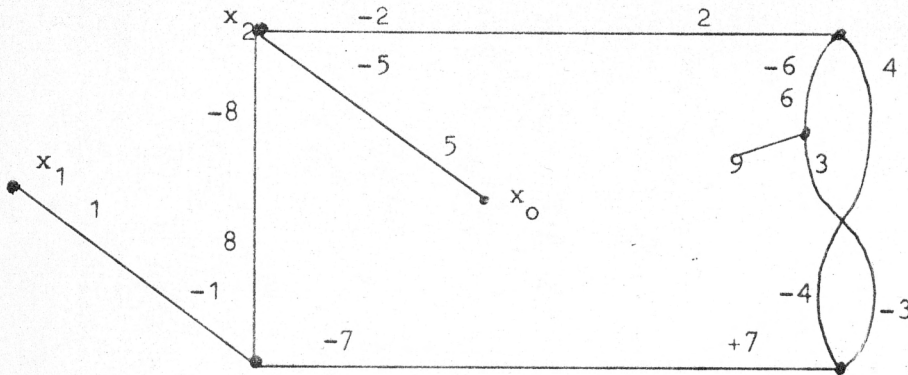
La constellation réduite suivante :



associée au groupe $Z/7$ et à son sous-groupe $Z/7$, fournit une représentation topologique du graphe complet K_7 dans laquelle il y a 7 triangles et 3 faces d'ordre 7 : le genre de cette représentation est donc 3. Ajoutons trois sommets, un à l'intérieur de chaque face de longueur 7 , et joignons ces sommets à ceux du contour de leur face : le graphe obtenu est représenté triangulairement. Mais RINGEL a démontré (cf. RINGEL [12]) que ces trois sommets peuvent être joints entre eux en adjoignant une seule anse à la surface : nous obtenons alors une représentation topologique de K_{10} de genre $3 + 1 = 4$. Ce genre étant celui fourni par la conjecture, il est donc minimal : le genre de K_{10} est donc 4 .

2) Le genre de K_{23} .

Considérons le groupe $Z/18$ et la constellation réduite suivante associée au sous-groupe $\Omega = Z/18$:



Il y a trois "vortex propres" x_0 , x_1 et x_2 qui engendrent au total 5 faces d'ordre 18, les autres sommets engendrant 72 triangles : nous obtenons donc une représentation topologique de K_{18} de genre 30. Nous introduisons 5 sommets supplémentaires dans les faces d'ordre 18 et nous les joignons aux sommets des contours de leur face. Pour joindre les 5 derniers sommets entre eux il est nécessaire d'ajouter 3 anses à la surface : nous obtenons ainsi une représentation topologique de K_{23} qui est de genre 33. A cause de la formule d'EULER nous avons donc :

$$32 \leq g(K_{23}) \leq 33 .$$

5.) LE GENRE DE CERTAINS GRAPHS DE CAYLEY.

5.1) Graphe de l'hypercube.

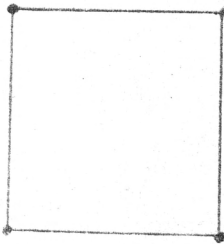
Nous désignerons par Q_n le graphe de l'hypercube à n dimensions :

Q_0 est le graphe réduit à m point ,

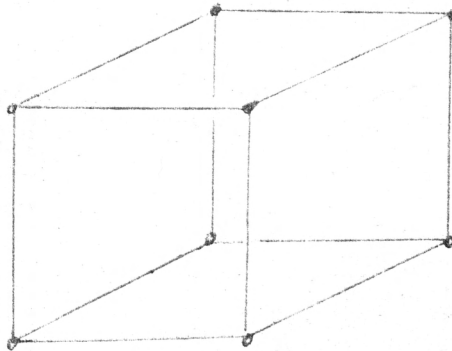
Q_1 est le graphe réduit à 1 arête :



Q_2 est le graphe du carré ,



Q_3 est le graphe du cube .



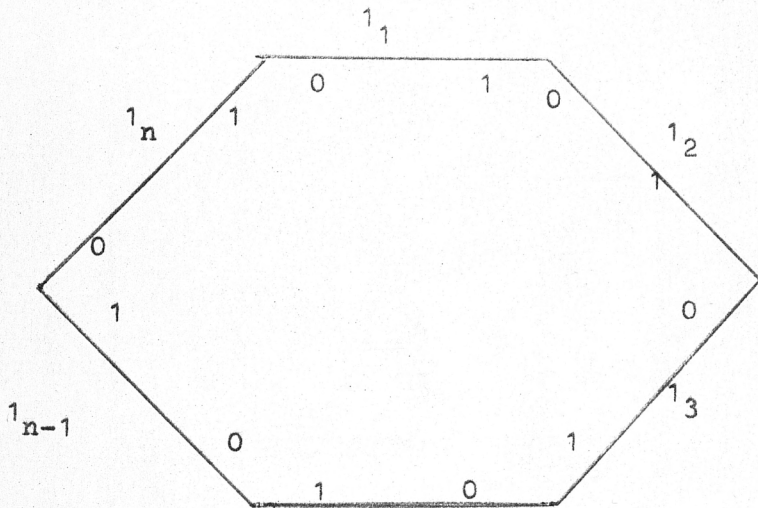
De façon générale, Q_n a $N_n = 2^n$ sommets et $M_n = n2^{n-1}$ arêtes ; son genre a été déterminé pour tout n par RINGEL [12] :

$$g(Q_n) = 1 + (n-4)2^{n-3} .$$

Nous nous proposons de retrouver ce résultat en appliquant la théorie que nous avons développée. En effet, Q_n est le graphe de CAYLEY du groupe $\Gamma = (\mathbb{Z}/2)^n$ par rapport à sa base canonique $\Delta = \{ 1_i \mid i = 1, \dots, n \}$ où 1_i est le n -uplet $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ avec le 1 en i -ème position.

Q_n a tous ses cycles pairs bichromatiques car la somme d'éléments de Δ ne peut être nulle que si les éléments apparaissent un nombre pair de fois dans la somme. Une représentation topologique de Q_n dont toutes les faces sont d'ordre 4 sera donc minimale. Montrons que pour tout n une pareille représentation topologique existe.

Considérons le sous-groupe $\Omega = (\mathbb{Z}/2)^{n-1}$ alors $\Gamma/\Omega \cong \mathbb{Z}/2$; la constellation suivante :



polygone de longueur n
(dans la figure $n = 6$).

dont les brins sont les éléments de $\mathbb{Z}/2 \times \Delta$ est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(\epsilon, 1_i) = (1 + \epsilon, 1_i) \\ \sigma(0, 1_i) = (1, 1_{i-1}) \\ \sigma(1, 1_i) = (0, 1_{i+1}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \epsilon \in \mathbb{Z}/2, 1_i \in \Delta \\ \text{avec } 1_0 \equiv 1_n \\ \text{avec } 1_{n+1} \equiv 1_0 \end{array}$$

Cette constellation est bien une constellation réduite ; chaque

sommet étant de degré 2 et de valence 2 engendre

$\frac{\omega}{2} = \frac{2^{n-1}}{2} = 2^{n-2}$ faces de longueur 4 : nous trouvons donc

$n \times 2^{n-2}$ faces de longueur 4, d'où le genre de Q_n en appli-

quant la formule d'Euler :

$$g = 1 + \frac{M - N + F}{2} = 1 + \frac{2M - 2N - 2F}{4}$$

$$g = 1 + \frac{4F - 2N - 2F}{4} = 1 + \frac{F - N}{2} = 1 + \frac{n2^{n-2} - 2^n}{2}$$

$$\underline{\underline{g = 1 + (n - 4)2^{n-3}}}$$

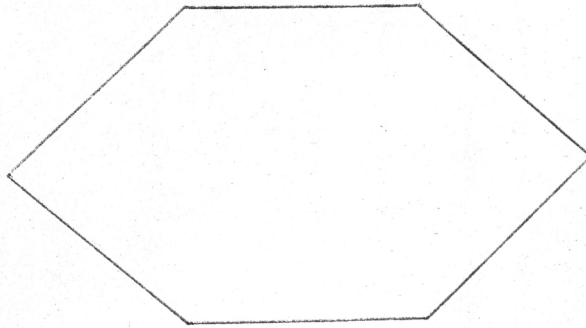
5.2) Graphe de CAYLEY Π_n associé au groupe symétrique.

Au groupe symétrique S_n engendré par les transpositions $(i \ i + 1)$, pour $i = 1, \dots, n-1$, on peut associer un graphe de CAYLEY Π_n (COXETER & MOSER [4] p. 65) .

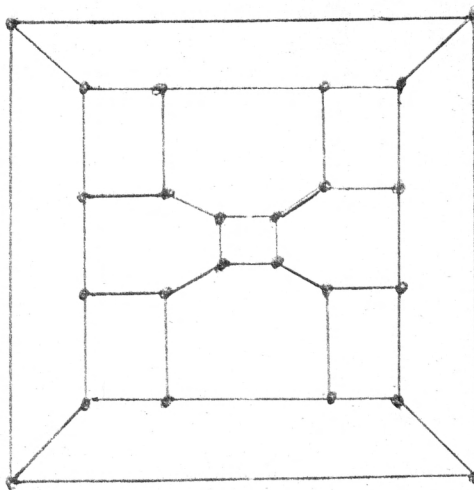
Π_1 est réduit à un point ,

Π_2 est réduit à une arête ,

Π_3 est un hexagone ,



Π_4 est un octaèdre tronqué ,



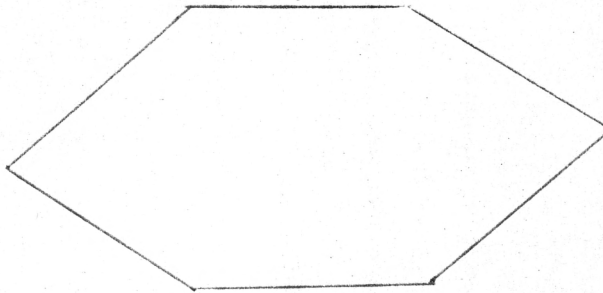
De façon générale Π_n est le graphe de CAYLEY de S_n par rapport à $\Delta = \{(i \ i+1) \mid i = 1, \dots, n-1\}$.

Nous nous proposons de trouver, pour tout n , le genre de ce graphe.

Ce graphe a tous ses cycles pairs car bichromatique (les deux classes sont a_n et $S_n \setminus a_n$), donc une représentation topologique dont toutes les faces sont d'ordre 4 est minimale.

Considérons le sous-groupe $\Omega = a_n$ et la constellation réduite constituée d'un cycle de longueur $n-1$:

$n = 7$

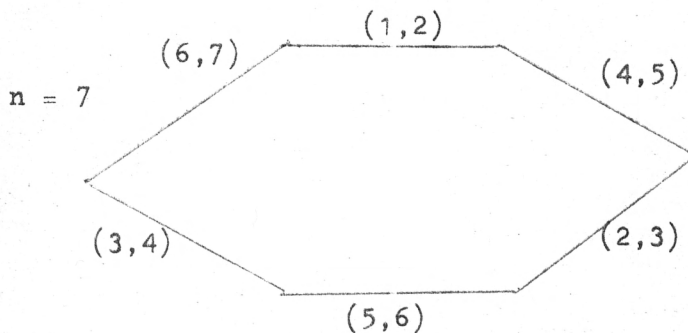
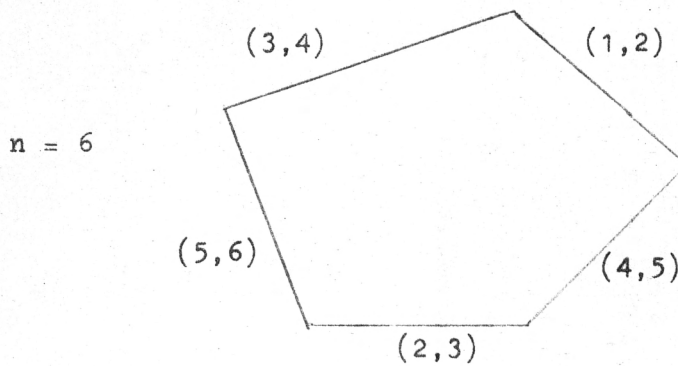


S'il est possible de valuer les arêtes par les $(n-1)$ transpositions de Δ de façon que deux arêtes consécutives aient des transpositions disjointes, alors la valence de chaque sommet de la constellation réduite est 2 ; dans ce cas, nous trouverons donc au total $(n-1) \frac{\omega}{2} = (n-1) \frac{n!}{4}$ faces d'ordre 4 ,

d'où
$$g = 1 + \frac{M - N - F}{2}$$

soit
$$g = 1 + \frac{\frac{(n-1)n!}{2} - n! - \frac{(n-1)n!}{4}}{2} = 1 + n! \frac{n-5}{8}$$
 .

L'expression de g nous montre qu'il n'est pas possible pour $n < 5$ de valuer les arêtes d'un polygone à $(n-1)$ cotés de la manière définie ci-dessus. Mais il est clair que pour $n \geq 6$ cela est toujours possible : en effet, si $(n-1)$ est impair, on value les arêtes de deux en deux par des transpositions consécutives, et si $(n-1)$ est pair on procède de même pour chacune des deux classes ; ainsi par exemple :

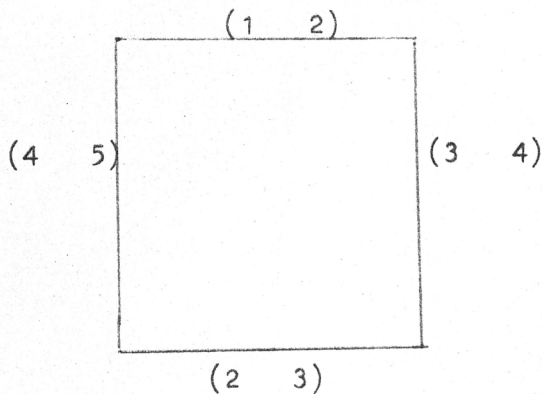


Pour $n = 5$, il suffit de remarquer que Π_5 n'a que 90 cycles de longueur 4 : en effet, chaque sommet est de degré 4 et seules deux arêtes valuées par des transpositions disjointes (seul cas où $xyzt = 1$, $x, y, z, t \in \Delta$) appartiennent à un cycle de longueur 4 ; en chaque sommet de Π_5 passent donc 3 cycles de longueur 4, soit au total

$$\frac{3 \times 5!}{4} = 3 \times \frac{120}{4} = 3 \times 30 = 90 \text{ cycles de}$$

longueur 4 .

La constellation réduite



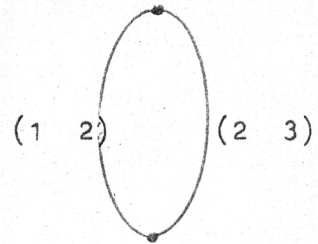
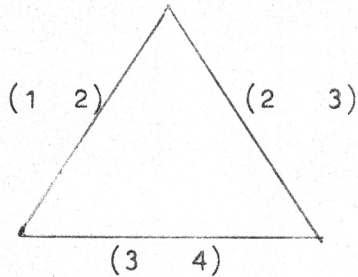
(avec $\Omega = \mathcal{P}_n$)

possède 3 sommets de valence 2 et un sommet de valence 3, ce qui fournit 90 faces d'ordre 4 et 20 faces d'ordre 6. D'où le genre de Π_5 :

$$g_5 = 6 .$$

Pour $n = 4$ et $n = 3$.

les constellations réduites :



fournissent des représentations planaires de Π_4 et Π_3 .

En conclusion, le genre de Π_n est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} g = 0 & \text{pour } n \leq 4 \\ g = 6 & \text{pour } n = 5 \\ g = 1 + n! \frac{n-5}{8} & \text{pour } n \geq 6 \end{array} \right.$$

5.3) Graphe de CAYLEY Π'_n .

Notons Π'_n le graphe de CAYLEY de S_n par rapport à l'ensemble de générateurs

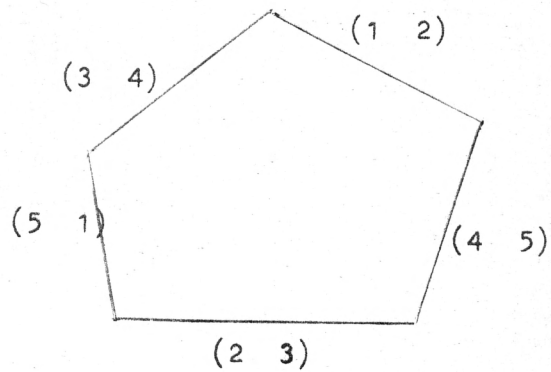
$$\Delta = \{(1 \ 2), (2 \ 3), \dots, (n-1 \ n), (n \ 1)\}.$$

Pour ce cas peu différent du précédent, nous remarquons que la constellation réduite formée d'un polygone à n cotés permet

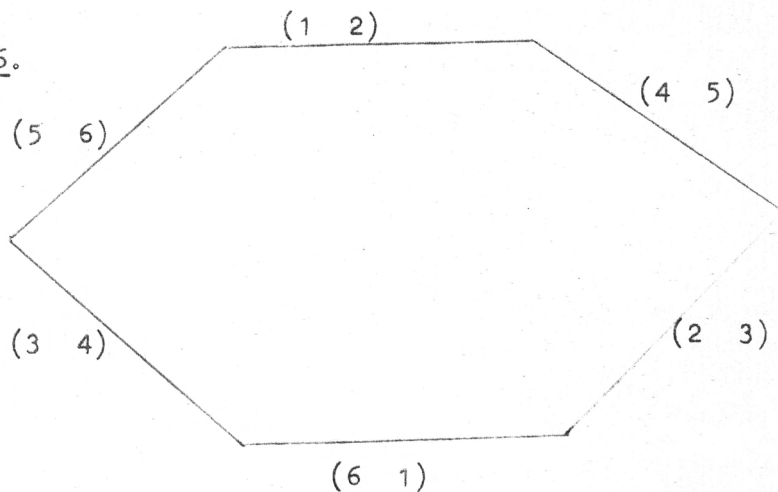
pour $n > 5$ de trouver une représentation minimale (toutes les faces d'ordre 4) de Π'_n : il suffit de valuer les cotés en sorte que deux cotés consécutifs portent des transpositions disjointes.

Par exemple :

$n = 5$.



$n = 6$.



Ainsi chaque sommet du polygone engendre $\frac{\omega}{2} = \frac{n!}{4}$ faces d'ordre 4,
d'où

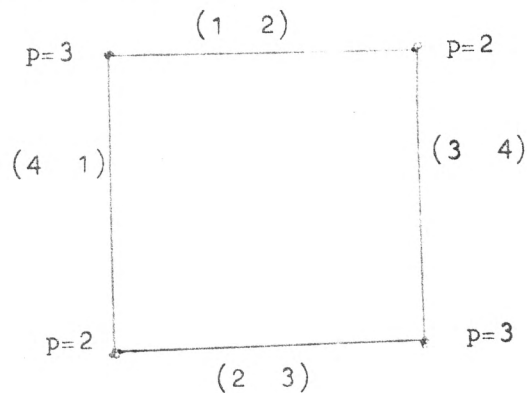
$$\left\{ \begin{array}{l} g(\Pi'_n) = 1 + \frac{\frac{n \cdot n!}{2} - n! - n \frac{n!}{4}}{2} = 1 + n! \frac{n-4}{8} \\ n \geq 5 \end{array} \right.$$

Pour $n = 4$, l'équation $xyzt = 1$ avec $x, y, z, t \in \Delta$, n'admet
que les solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = t \\ xy = yx \end{array} \right.$$

le graphe Π'_4 a donc exactement $\frac{2 \cdot x \cdot 24}{4} = 12$ cycles d'ordre 4.

La constellation réduite :

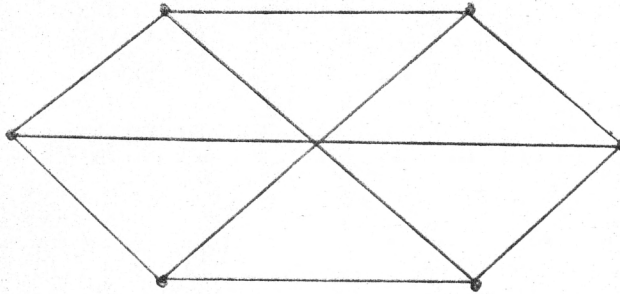


possède 2 sommets de valence $p = 2$ et 2 sommets de valence $p = 3$.
Elle engendre donc $2\frac{\omega}{2} = 12$ faces d'ordre 4 et $2\frac{\omega}{3} = 8$ faces
d'ordre 6 .

D'où :

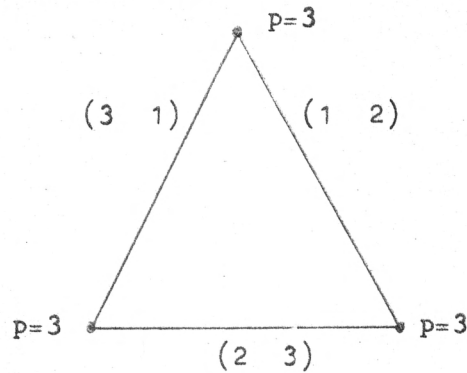
$$g(\Pi'_4) = 3 .$$

Pour $n_1 = 3$, le graphe Π'_3 est le classique graphe de Thompson :



dont le genre est 1.

La constellation réduite :



fournissant $3 \binom{6}{3} = 3$ faces d'ordre 6, on trouve :

$$g(\Pi'_3) \leq 1 + \frac{9 - 6 - 3}{2} = 1 .$$

En conclusion, le genre de Π'_n est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} g = 1 & n = 3 \\ g = 3 & n = 4 \\ g = 1 + n! \frac{n-4}{8} & n \geq 5 \end{array} \right. .$$

5.4) Le genre de Π''_n .

Considérons maintenant le graphe de CAYLEY Π''_n du graphe symétrique S_n par rapport à l'ensemble des générateurs $\Delta = \{(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)\}$. Π''_n est bichromatique (tous ses cycles sont pairs), mais ne contient pas de cycles de longueur 4, car l'équation $xyzt = 1$, pour $x, y, z, t \in \Delta$, n'admet que la solution $z=y, t=x$ car $(1\ i)(1\ j) = (1\ k)(1\ l)$ entraîne $i=k$ et $j=l$. Une représentation minimale de Π''_n aura donc des faces de longueur supérieure ou égale à 6. La constellation réduite (avec $\Omega = \mathcal{C}_n$) composée d'un cycle de longueur $(n-1)$ valué par

les transpositions de Δ , fournit alors

$(n-1) \frac{n!}{2} \cdot \frac{1}{3}$ faces de longueur 6 (chacun des $n-1$ sommets engendre $\frac{\omega}{3} = \frac{n!}{2} \cdot \frac{1}{3}$ faces de longueur $2 \times 3 = 6$).

D'où le genre de Π_n'' :

$$g = 1 + n! \cdot \frac{n-4}{6} .$$

B I B L I O G R A P H I E

=====

1. BERGE, C. Théorie des graphes et ses applications.
Dunod, Paris, 1963.
2. BURNSIDE, W. Theory of Groups of Finite Order.
Réédité Dover Publ., New-York, 1955.
3. COXETER, H.S.M. Regular Polytopes.
Deuxième Ed., Macmillan, New-York, 1963.
4. COXETER, H.S.M. & MOSER, W.O.J. Generators and
Relations for Discrete Groups.
Ergebnisse der Mathematik und ihrer
Grenzgebiete-Neue Folge, N° 14, (Springer, 1964).
5. GUSTIN, W. Orientable Embeddings of Cayley Graphs.
Bull. Amer. Math. Soc. v. 69 (1963) p. 272/5.
6. JACQUES, A. Sur le genre d'une paire de substitutions.
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 267, p. 625/7,
(28 Oct. 1968).

7. KUROSH, A.G. Theory of Groups.
Traduit du russe, Chelsea, New-York, 1955.

8. LEFSCHETZ, S. a) Introduction to Topology.
Princeton University Press, 1949 ;
b) Topology.
Deuxième Ed., Chelsea, New-York, 1956.

9. MAC LANE, S. a) A Combinatorial Condition for Planar
Graphs.
Fund. Math. v. 28 (1937), p. 22/32.
b) A Structural Characterisation of Planar
Combinatorial Graphs.
Duke Math. J. v. 3 (1937), p. 340/472.

10. MAGNUS, W. - KARRASS, A. & SOLITAR, D.
Combinatorial Group Theory : Presentation of
Groups in terms of generators and relations.
Interscience Publ., J. Wiley & Sons, New-York,
1966.

11. ORE, O. Theory of Graphs.
Amer. Math. Soc, Colloquium Publ. vol. 38,
1962.
12. RINGEL, G. a) Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen.
Verb. deutscher Verlag der Wissenschaften,
Berlin, 1959 ;
b) Über das Problem der Nachbargebiete auf
orientierbaren Flächen.
Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, v. 25, p. 105/27,
1961.
c) Über drei kombinatorische Probleme am
n-dimensionalen Würfel und Würfelgitter.
Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, v. 20, 1955,
p. 10/9.
13. SCOTT, W.R. Group Theory.
Prentice-Hall, New-Jersey, 1964.
14. TUTTE, W.T. & HARARY, F. On the Order of the Group of a
Planar Map.
J. Combinatorial Theory v. 1, N° 3, (1966),
p. 394/5.

15. WEINBERG, L. On the maximum Order of the Automorphism Group of a Planar Triply connected Graph. J. Siam Appl. Math. v. 14, N° 4, (1966), p. 729/38.

16. WHITNEY, H. Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs. Amer. J. Math. v. 54, (1932), p. 150/68.

17. WIELANDT, H. Finite Permutation Groups. Academic Press, New-York, 1964.

18. YOUNGS, J.W.T. a) Minimal Imbeddings and the Genus of a graph. J. Math. Mech. v. 12, (1963), p. 303/15.
b) The Heawood map coloring conjecture. chapitre 12 in Graph Theory and Theoretical Physics. Academic Press, New-York, 1967.