



HAL
open science

Nouvelle méthodologie électrique pour la détection à distance autour des trous de forage

Nicolas Florsch

► **To cite this version:**

Nicolas Florsch. Nouvelle méthodologie électrique pour la détection à distance autour des trous de forage. Géophysique [physics.geo-ph]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1986. Français. NNT: . tel-01582983

HAL Id: tel-01582983

<https://hal.science/tel-01582983>

Submitted on 6 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE GÉOLOGIE APPLIQUÉE
ET DE PROSPECTION MINIÈRE DE NANCY

THÈSE

présentée devant

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR de l'I.N.P.L.

MATIÈRES PREMIÈRES MINÉRALES ET ÉNERGÉTIQUES
(GÉOPHYSIQUE)

par

Nicolas FLORSCH

NOUVELLE METHODOLOGIE ELECTRIQUE
POUR LA DETECTION A DISTANCE
AUTOUR DES TROUS DE FORAGE

Soutenue publiquement le 20 mai 1986 devant la Commission d'Examen

JURY

MM. J.C. SAMAMA

Président

PHAM VAN NGOC

Examineurs

J. BONNIN

M. GABETTE

Y. BABOT

Nicolas

aux miens.

Remerciements

Pham Van Ngoc m'a accueilli dans son laboratoire. Je le remercie de m'avoir d'emblée accordé sa confiance, tant pour la conduite de cette recherche que par la mise à disposition de moyens importants. Sans lui, cette thèse n'aurait pu voir le jour.

Monsieur Jean Claude Samama, professeur de métallogénie à l'E.N.S.G., a bien voulu se charger de la présidence de mon jury. Je l'en remercie, en faisant remarquer qu'il est pertinent que le jury soit présidé par un géologue minier. En effet, c'est lui qui est l'utilisateur final des résultats des méthodes géophysiques.

Jean Bonnin est professeur à l'I.P.G.S.. Il a été mon principal enseignant à Strasbourg. Il possède l'art et la manière d'aiguiser le sens critique (donc scientifique) de ses interlocuteurs et je lui dois beaucoup.

Messieurs Michel Gabette, Chef de la Section Géophysique à la COGEMA, et Yves Babot, Directeur du Service Géologique Régional, apportent le point de vue indispensable des industriels. Je les remercie pour leur présence et leur contribution.

Le travail de terrain n'aurait pas été possible sans l'accueil des sociétés et de leurs ingénieurs. Nous sommes reconnaissants envers leurs dirigeants et les "hommes de terrain" qui nous ont facilité la tâche sur les différents sites:

Christian Chapey, de la S.N.E.A.P.

Monsieur Cogny, de la COGEMA

Jean-Marc Feroul de la Société Minière Dong-Trieu

Monsieur Mayot, du B.R.G.M.-S.G.R.Lorraine

Monsieur Tijani, du B.R.P.M. (Maroc).

Les moyens financiers qui ont permis l'achat du matériel et les

expéditions de terrain proviennent de la C.C.E..

Au sein du laboratoire, Daniel Doucet s'est révélé être un collaborateur précieux. Travailler avec lui fut véritablement motivant. Nathalie Paugain et Lahcen Hmaidouch ont également été mes compagnons de terrain. Leur amitié me fut tout aussi précieuse. Paul Allé m'a souvent donné un coup de main. Pierre Therme m'a fait bénéficier de son expérience et les nombreuses discussions que nous avons partagées ont enrichi mes connaissances. Au cours de ses visites trop brèves, Luc Fromaigeat a toujours réussi à m'encourager.

Marie a supporté mes horaires fantaisistes en fin de rédaction et Frédéric y a mis un échantillon de sa plume.

RESUME

Après un rappel des principes fondamentaux de la prospection électrique, nous effectuons un tour d'horizon des publications portant sur le problème de la prospection à l'aide de trous de forage. On y remarque comment le comportement particulier du coefficient géométrique rend les méthodes en forage globalement plus délicates à mettre en oeuvre que les méthodes de surface.

Une nouvelle méthodologie est proposée. Fondée sur l'emploi d'un dispositif symétrique d'injection du courant en surface et sur la mesure du champ électrique vertical dans le forage, elle nécessite l'abandon de la notion de résistivité apparente.

Nous présentons ensuite l'outillage mathématique destiné à prévoir le comportement du potentiel électrique au voisinage de structures diverses. L'approche analytique permet de traiter les cas de la sphère et des ellipsoïdes de révolution. D'autre part, un algorithme numérique, par éléments finis, autorise l'abord de situations plus complexes.

Après cet exposé, nous analysons les possibilités de la méthode, mais aussi ses limites intrinsèques. Le cas d'une structure sphérique non intersectée par le forage est vu en détail. On montre notamment qu'il est possible de déterminer sa position et son rayon minimal. Nous proposons ensuite une méthode d'interprétation quantitative complète pour le cas de la sphère.

Pour traiter les données brutes acquises sur le terrain, un procédé par filtrage linéaire peut convenir. Il permet une séparation partielle des anomalies d'origines différentes. Puis nous présentons l'instrumentation spécifique que nous avons mis au point.

Afin d'éprouver l'ensemble des résultats théoriques, nous avons entrepris plusieurs expéditions sur le terrain. Bien que les sites auxquels nous avons pu accéder ne font pas partie, sensu stricto, du champ d'application de notre méthode, des résultats encourageants ont été obtenus. Ils ont permis de mieux définir les limites des méthodes de détection à distance des forages lorsque le contexte géo-électrique est hétérogène et ont montré la nécessité de compléter les mesures de prospection par des diagraphies électriques traditionnelles.

Pour finir, de nouveaux axes de recherche sont proposés.

SOMMAIRE

page

INTRODUCTION

I. GENERALITES SUR LES METHODES ET LES DIAGRAPHIES ELECTRIQUES

4

I.1. Equation fondamentale.

4

I.2. Notion de résistivité apparente.

6

I.3. Diagraphies de résistivité.

7

II. TRAVAUX ANTERIEURS

II.1. Généralités sur les méthodes de prospection en forage.

9

II.2. Présentation des publications antérieures.

12

II.3. Synthèse des travaux antérieurs.

19

III. LE DISPOSITIF SYMETRIQUE DE PROSPECTION EN FORAGE (DSPF)

20

III.1. Présentation du dispositif.

20

III.2. Emploi de la résistivité apparente en forage.

21

III.3. Exemple de réponse du dispositif à une sphère.

23

III.4. Effet directionnel.

24

III.5. Cas du forage incliné.

24

III.6. Distance optimale des électrodes d'émission.

26

III.7. Atténuation naturelle du champ avec la profondeur.

27

III.8. Fonction de transfert du dipôle de mesure.

28

III.9. Conclusion sur le "DSPF".

29

IV. THEORIE ET MODELES

30

IV.1. Modèles analytiques.

30

IV.1.1. Sphère dans un espace uniforme
(champ polaire).

34

IV.1.2. Sphère dans un espace uniforme
(champ homogène).

40

IV.1.3. Sphère dans un demi-espace uniforme (champ polaire et méthode des images).	41
IV.1.4. Sphère dans un demi-espace uniforme (champ polaire et solution exacte).	43
IV.1.5. Sphéroïde aplati dans un espace uniforme (champ polaire).	48
IV.1.6. Sphéroïde allongé dans un espace uniforme (champ polaire).	53
IV.1.7. Sphéroïdes dans un demi-espace (champ polaire et méthode des images).	54
IV.1.8. Changement de coordonnées pour les sphéroïdes	55
 IV.2. Modélisation numérique.	 58
IV.2.1. Panorama rapide des méthodes disponibles.	58
IV.2.2. Formulation des éléments finis.	60
IV.2.3. Résolution par la méthode du gradient conjugué.	68
IV.2.4. Application au problème électrique en forage.	69
 <u>V. RESULTATS DES MODELISATIONS ET MOYENS POUR L'INTERPRETATION.</u>	 73
V.1. Caractères de l'anomalie due à une sphère dans un champ uniforme.	73
V.2. Limites concernant la détermination des paramètres d'une structure (et remarques sur les méthodes inverses).	77
V.3. Contenu spectral d'une "anomalie élémentaire".	83
V.4. Propriétés des anomalies en champ bipolaire.	86
V.5. Interprétation à l'aide d'abaques pour le modèle sphérique.	86
V.6. Modèles sphéroïdaux.	92
V.7. Effets des morts-terrains et effets topographiques.	93
 <u>VI. MISE EN FORME ET TRAITEMENTS DES DONNEES EXPERIMENTALES.</u>	 95
VI.1. Unités utilisées.	95
VI.2. Traitement par filtrage. Avantages et inconvénients.	95
VI.3. Tests de différents traitements.	103
VI.4. Compensation de l'atténuation naturelle.	104

VI.5. "cross-over" et points d'inflexion.	105
<u>VII. INSTRUMENTATION</u>	107
VII.1. Emetteur TSQ4.	107
VII.2. Emetteur pour la diagraphie.	108
VII.3. Synchronisation de l'émission et de la réception.	108
VII.4. Récepteur.	109
VII.5. Le treuil et les sondes.	112
<u>VIII. RESULTATS EXPERIMENTAUX ET INTERPRETATIONS</u>	114
VIII.1 Missions préliminaires	114
VIII.1.1. Site de Vittel.	114
VIII.1.2. Site de Carling.	115
VIII.2. Mission sur le site des Gouttes (Limousin).	116
VIII.3. Mission sur le site de Margnac (Limousin).	120
VIII.4. Mission sur le site de St-Symphorien de Marmagne (Morvan).	123
VIII.5. Synthèse et conclusion.	124
<u>IX. PERSPECTIVES DE LA METHODES. DISCUSSION.</u>	127
<u>CONCLUSION</u>	131
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	
<u>ANNEXE 1</u> : Calcul des fonctions de Legendre (formulaire).	
<u>ANNEXE 2</u> : Démonstration des formules de l'annexe 1.	
<u>ANNEXE 3</u> : Suppression des termes complexes (sphéroïde aplati).	
<u>LISTE DES FIGURES ET TABLES</u>	

Quelques notations

[35]: référence bibliographique.

\ln : logarithme népérien.

ch et sh : cosinus et sinus hyperboliques.

$d(A,B)$: distance du point A au point B.

P_n^m et Q_n^m : fonctions associées de Legendre de première et deuxième espèces.

\bar{P}_n^m et \bar{Q}_n^m : fonctions dérivées de P_n^m et Q_n^m .

$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \frac{n!}{p! (n-p)!} .$$

K_n : fonction de Bessel de deuxième espèce.

Γ : fonction gamma d'Euler.

INTRODUCTION

Jusqu'à récemment, les techniques usuelles d'investigation du sous-sol ont permis la découverte et finalement l'exploitation de la plupart des gisements miniers superficiels ou enfouis peu profondément. Aujourd'hui, la nécessité se fait ressentir de développer des méthodes qui autorisent l'exploration à des profondeurs plus importantes. Malheureusement, la nature physique des phénomènes qui permettent la détection à partir de la surface impose une limite intrinsèque à la profondeur d'investigation. Dans la plupart des cas, en effet, il est impossible de détecter, sinon de délimiter un gisement dont la profondeur est largement supérieure à la taille (en ordre de grandeur). La mise en oeuvre de nombreux forages est alors nécessaire pour connaître et évaluer les réserves d'un prospect. Elle intervient en tant que phase tactique et succède aux méthodes d'exploration stratégiques que sont la géochimie, l'analyse structurale etc.

Durant cette phase tactique, les méthodes géo-électriques sont largement mises à contribution. Après avoir discuté avec le géologue, le géophysicien propose l'application des méthodes qui lui semblent le plus adaptées au problème posé. Une fois la prospection effectuée, le géophysicien interprète ses résultats et tâche de fournir un maximum de renseignements susceptibles d'aider le géologue à implanter les forages. Bien souvent, hélas, les premiers sondages mécaniques ne rencontrent pas la structure visée. En effet, l'existence éventuelle de plusieurs corps, la présence d'une couverture trop conductrice ou tout simplement la profondeur de la cible viennent souvent compliquer l'interprétation des mesures. Même si le corps a été découvert, on ignore généralement son extension et son orientation.

Pour affiner leurs résultats, les géophysiciens ont pensé très tôt à exploiter le forage lui-même. N'offre-t-il pas la possibilité d'étendre le champ d'investigation des méthodes de surface puisqu'il permet d'enfouir des électrodes d'exploration? Les frères Schlumberger les premiers ont cherché à mettre en oeuvre cette idée: ils ont créé la méthode de "mise-à-la-masse". Puis d'autres géophysiciens se sont

attachés à cette recherche et ont entrepris l'étude des possibilités de nombreux dispositifs. Ce n'est pourtant qu'après les années 70 qu'éclate vraiment le succès -essentiellement théorique pour l'instant- des méthodes de forage. En effet, jusqu'à cette époque, nombre de problèmes ont freiné la progression: absence d'appareillage, mais aussi et surtout absence de moyens de modélisation adaptés aux problèmes de prospection en forage. Malgré les possibilités actuelles (calculateurs puissants, méthodes numériques performantes), les méthodes de prospection en forage ne sont pas encore familières aux prospecteurs. D'autres difficultés sont apparues qui n'ont pas permis à l'une ou l'autre méthode de se généraliser. Pourtant, tous les auteurs ayant étudié ces questions s'accordent sur les possibilités réelles de ces procédés: tous affirment qu'un corps conducteur ou résistant doit pouvoir être détecté à une distance du forage égale en ordre de grandeur à la dimension du corps.

Les efforts se poursuivent dans les laboratoires de nombreux pays pour vaincre les ultimes difficultés. L'enjeu est de taille: il s'agit d'économiser le nombre de forages habituellement nécessaire pour découvrir puis délimiter les gisements miniers conducteurs (sulfures par exemple).

Notre travail s'inscrit dans cette démarche globale. Le premier chapitre rappelle quelques notions fondamentales: principe des méthodes électriques, diagraphies ... Le chapitre 2 résume les publications portant sur le sujet. On y découvrira comment la notion de résistivité apparente, mal adaptée à l'investigation en forage, a, par l'intermédiaire du comportement du coefficient géométrique, posé de nombreuses difficultés aux chercheurs. Au chapitre suivant, nous proposons une approche et un dispositif de prospection particulier qui fournissent une solution élégante aux problèmes posés. Dans le chapitre 4, nous abordons les outils mathématiques qui permettront de juger de l'efficacité théorique de notre méthode. Ceci est l'objet du chapitre 5 puisque nous y proposons la première méthode d'interprétation quantitative pour des résultats obtenus en forage. Elle est relative au modèle simple de la sphère et utilise un jeu d'abaques. Le chapitre VI est consacré à la mise en forme des données expérimentales. L'instrumentation est développée dans le chapitre suivant. Enfin, des

résultats de terrain sont détaillés au chapitre VIII. Les sites auxquels nous avons eu accès ne présentaient malheureusement pas les caractéristiques qui auraient permis de démontrer tout le potentiel de la méthode proposée. Plus précisément, il ne s'y trouvait pas de cible conductrice se distinguant, électriquement parlant, des très nombreuses hétérogénéités. Dans un tel contexte, les méthodes de surface ne sont elles-mêmes guère opérationnelles, quelque soit la profondeur de la cible "économique". Cependant, certains résultats semblent malgré tout significatifs. Un dernier chapitre contient quelques propositions d'orientation des futures recherches.

I. GENERALITES SUR LES METHODES ET LES DIAGRAPHIES ELECTRIQUES.

On entend généralement par "méthodes électriques" celles qui utilisent comme sources des courants continus artificiels. L'usage veut qu'on y inclue d'autres techniques, telles que la "polarisation provoquée" (ou "induite") ou la "polarisation spontanée": nous ne mentionnerons ces dernières qu'exceptionnellement.

I.1. Equation fondamentale.

Les courants électriques sont injectés dans le sous-sol à l'aide d'électrodes métalliques (piquets, plaques etc...) et la théorie montre qu'à l'échelle habituelle, on peut assimiler ces "sources" à des distributions de Dirac.

L'équation différentielle (cad locale) qui gouverne le comportement du potentiel électrique dans un milieu de conductivité (σ) variable peut se déduire des équations de Maxwell ou plus directement des lois expérimentales bien connues: loi d'Ohm, de conservation de la charge etc... Elle a la forme:

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} V) = - \sum_i I_i \delta_i \quad (1)$$

où: σ est la conductivité du milieu (unité: le Siemens/mètre)

I_i est l'intensité de la source numéro i

δ_i est la distribution de Dirac à l'endroit de la source numéro i .

L'équation ci-dessus est valable pour un milieu isotrope. Lorsque ce n'est pas le cas, σ doit être remplacé par le tenseur des conductivités. Nous ne considérerons dans ce travail que des milieux isotropes.

Dans un milieu homogène et isotrope et en l'absence de source, cette relation se ramène à l'équation de Laplace (ou équation harmonique):

$$\Delta V = 0 . \quad (2)$$

L'équation (1) est souvent qualifiée de "quasi-harmonique". Des procédés mathématiques pour la résoudre sont exposés au chapitre IV.

Pour un demi-espace uniforme et lorsque les sources sont situées sur la limite de ce domaine, le potentiel en tout point P du demi-espace vaut:

$$V_P = \frac{\rho}{2\pi} \sum_i \frac{I_i}{d(P, S_i)} . \quad (3)$$

I_i est l'intensité du courant à la source désignée par S_i ;
 $\rho = 1/\sigma$ est la résistivité (Ohm.m) et d la distance usuelle.

Des exigences métrologiques font que quatre électrodes sont pratiquement nécessaires pour l'exploitation expérimentale de cette relation. Deux électrodes servent à l'émission du courant tandis que deux autres permettent la mesure d'une différence de potentiel (lequel n'est alors défini qu'à une constante additive près). Rien n'interdit à ces deux couples d'électrodes de coïncider: c'est le cas pour les "ohm-mètres" du commerce. Cependant, en géophysique, elles sont le plus souvent distinctes. On les désigne habituellement par (A,B) ou (C_1, C_2) pour l'émission et (M,N) ou (P_1, P_2) pour la réception. Selon l'écartement et la mobilité des électrodes, on parle pratiquement de dispositif polaire (une électrode est isolée ou fixe), bipolaire (deux électrodes séparées par une distance moyenne), ou dipolaire (deux électrodes très rapprochées). Dans cette terminologie, les parties d'émission et de réception sont distinguées. Un "pôle-pôle" désigne par exemple un couple de deux électrodes dont l'une est émettrice de courant et l'autre réceptrice de potentiel. Un bipole désigne deux électrodes d'émission ou de réception.

Ces différentes électrodes sont positives (courant positif ou mesure positive du potentiel) ou négatives (l'inverse): les définitions de signe sont purement conventionnelles. A ou C_1 et M ou P_1 désignent le plus souvent les pôles positifs.

Un dispositif de prospection, assez général, est représenté sur la figure 1. Il emploie justement quatre électrodes. Aux points M et N, les potentiels sont:

$$V_M = \frac{\rho I}{2 \pi} \left[\frac{1}{d(M,A)} - \frac{1}{d(M,B)} \right]$$

$$V_N = \frac{\rho I}{2 \pi} \left[\frac{1}{d(N,A)} - \frac{1}{d(N,B)} \right]$$

La quantité mesurée par un appareillage est la différence:

$$\Delta V = V_M - V_N = \frac{\rho I}{2 \pi} \left[\frac{1}{d(M,A)} - \frac{1}{d(M,B)} - \frac{1}{d(N,A)} + \frac{1}{d(N,B)} \right] \quad (4)$$

I.2. Notion de résistivité apparente.

Pour peu que la quantité entre crochets ne soit pas nulle (ou trop petite en pratique), on peut déduire de ΔV la résistivité:

$$\rho = \frac{\Delta V}{I} \left[\frac{2 \pi}{\frac{1}{d(M,A)} - \frac{1}{d(M,B)} - \frac{1}{d(N,A)} + \frac{1}{d(N,B)}} \right] = K \frac{\Delta V}{I} \quad (5)$$

K est appelé le "coefficient géométrique": il ne dépend que de la disposition des électrodes.

Cette équation est constamment utilisée pour la prospection électrique: elle permet, à partir des mesures de ΔV et I, d'estimer la résistivité du terrain. Dans le cas où une (ou plusieurs...) électrode est très éloignée des autres, on peut ne pas en tenir compte dans le calcul: l'inverse de la distance correspondante est négligeable par

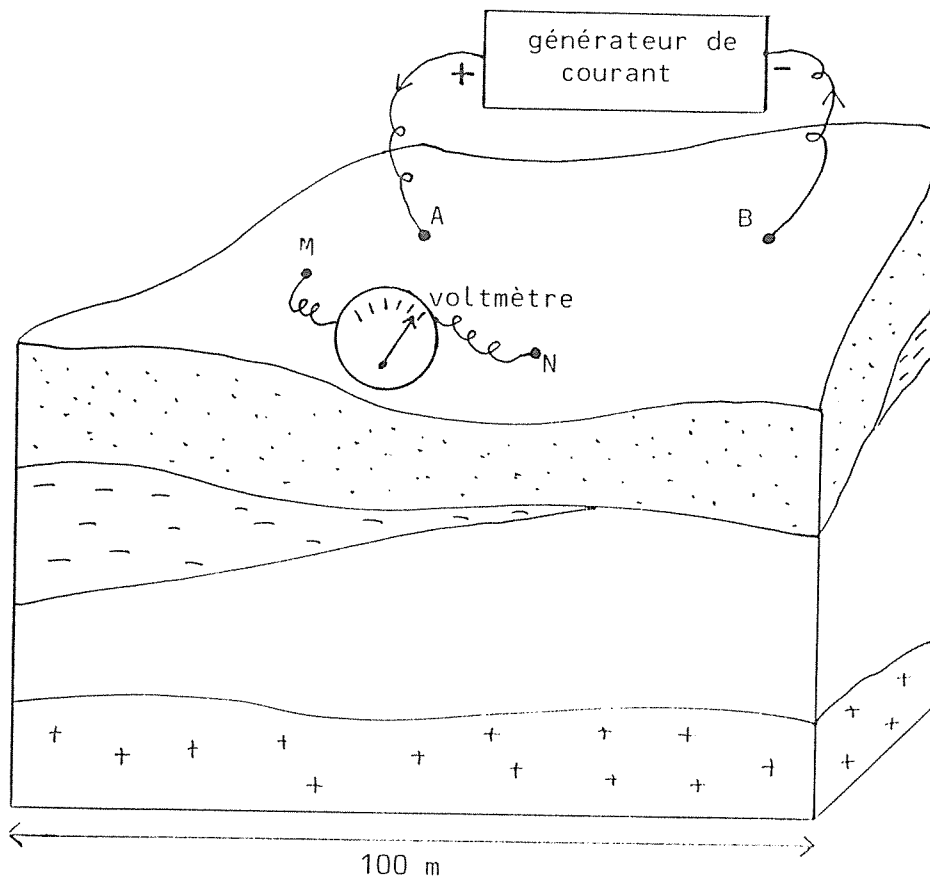


Figure 1: Un dispositif général de prospection électrique.
 A et B sont les électrodes d'émission, tandis que
 M et N désignent les électrodes de mesure (réception).

rapport aux autres distances. Selon la disposition relative des quatre électrodes, différentes appellations sont entrées dans les usages: dispositifs Schlumberger, Wenner, dipole-dipole etc.

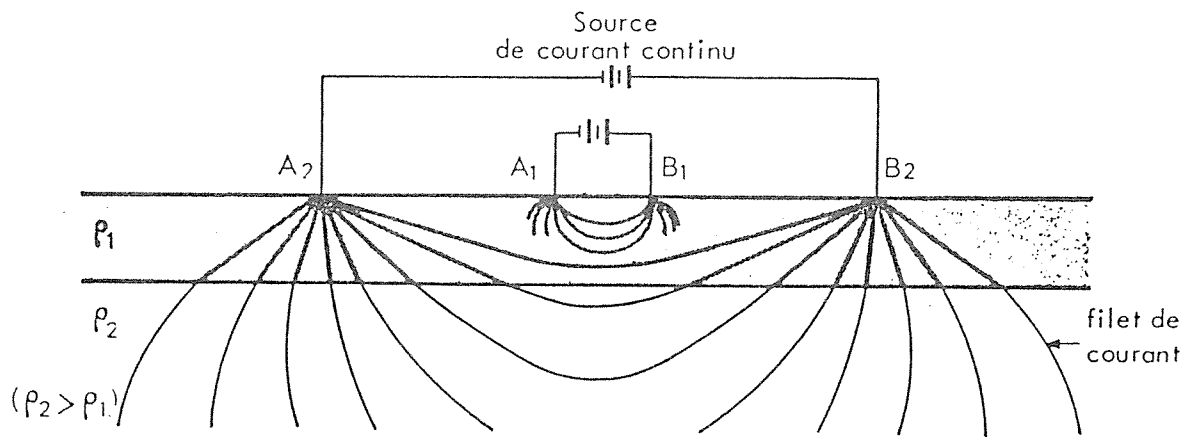
Sur le terrain, la résistivité n'est pas constante. Son estimation à partir de la formule ci-dessus donne une grandeur appelée "résistivité apparente" (notée ρ_a). Cette notion s'avère très pratique à l'usage car elle possède (généralement!) de bonnes propriétés. La figure 2 l'illustre bien. Le dispositif présenté est du type "Wenner". Le coefficient géométrique vaut $2\pi a$, où (a) est la distance entre les électrodes. Pour une petite valeur de (a), le courant ne pénètre que dans le premier terrain si bien que la résistivité apparente est très proche de la résistivité de la première couche. Pour (a) grand, au contraire, le terrain superficiel n'intervient plus beaucoup et la résistivité apparente approche la résistivité du deuxième terrain. On peut ainsi mesurer la résistivité apparente en fonction de (a) et déduire de cette courbe les deux résistivités ainsi que la profondeur de la transition. On remarque de plus que l'évolution de la résistivité apparente est monotone entre ses deux extrêmes. Cela justifie davantage encore son emploi et la terminologie adoptée.

Ces bonnes propriétés sont cependant en défaut lorsque le coefficient géométrique vient à s'annuler. Nous y reviendrons au chapitre IV.

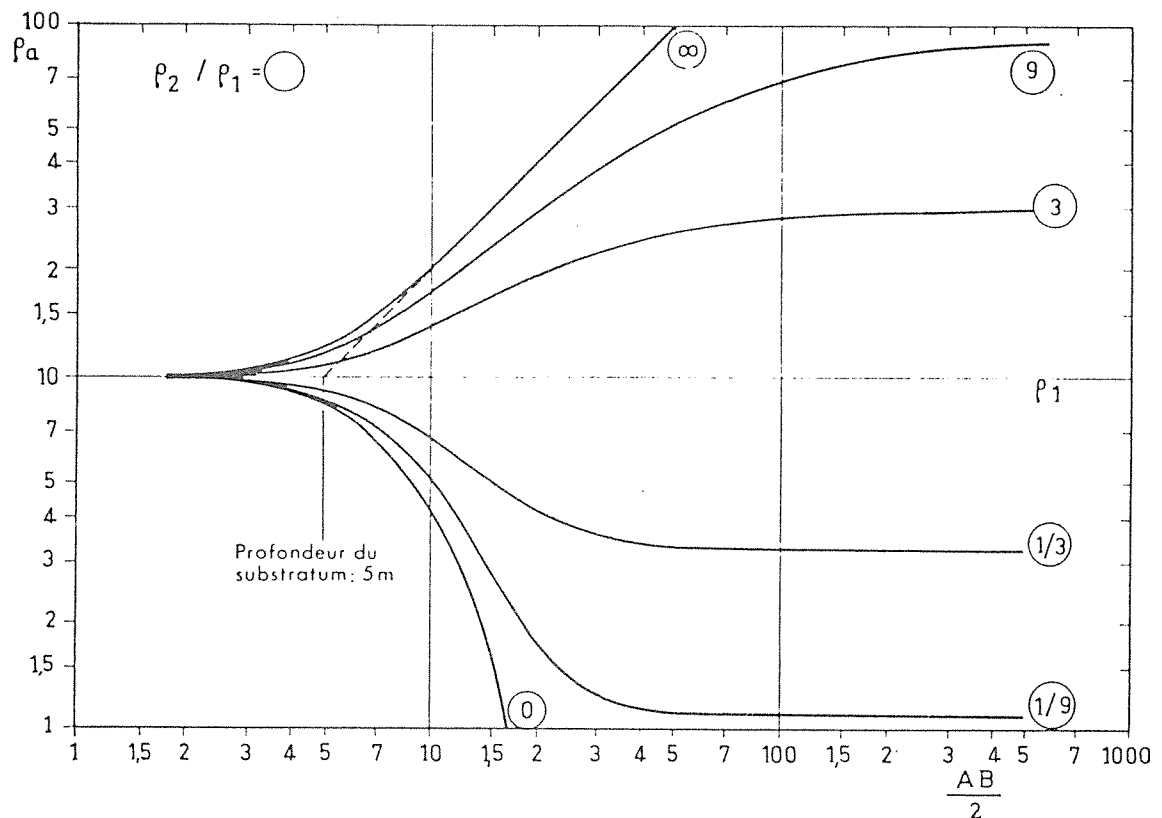
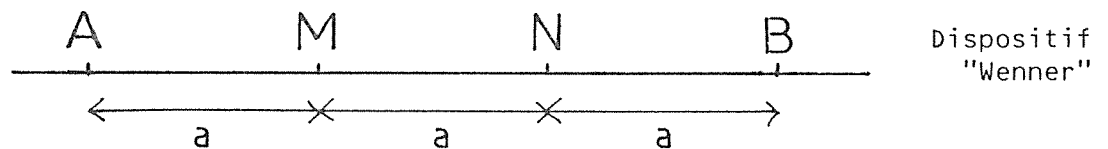
I.3. Diagraphies de résistivité.

Le terme de diagraphie est employé relativement à la mesure de paramètres physiques (résistivité, porosité, vitesse des ondes, radioactivité etc) le long de trous de forage lorsque l'investigation latérale reste faible: de l'ordre de un mètre au maximum. Nous nous intéressons ici aux mesures des paramètres électriques seulement, bien qu'il ne serait pas inutile d'aborder les autres domaines. En réalité, le domaine des diagraphies n'est pas notre sujet: si nous en parlons, c'est qu'il nous est nécessaire, pour entreprendre une prospection autour de trous de forage, de connaître les terrains traversés. Cette exploration est précisément l'objet des mesures diagraphiques.

Un débat académique existe autour de la terminologie employée en diagraphie. L'usage des termes anglo-saxons s'est largement répandu dans



— La profondeur d'investigation augmente avec la distance AB.



— Exemples de sondages électriques deux terrains.

Figure 2: Principe du sondage électrique. Selon l'écartement des électrodes d'émission, la mesure dépend de la résistivité de terrains plus ou moins profonds. La "résistivité apparente" est particulièrement adaptée à la représentation des résultats. (Extrait de Astier).

notre milieu et l'on emploie plus couramment le terme de "log" électrique pour désigner une diagraphie de résistivité que le correspondant français de "carottage" électrique. L'origine de ce mot est probablement à rapprocher du "log" marin (loch, en français), qui suggère un enregistrement continu d'une grandeur spatiale, à moins qu'il ne soit fait référence à l'analogie entre la sonde diagraphique (qui porte des électrodes) et la corde de loch (qui porte des noeuds).

Différents dispositifs sont exploités en diagraphie électrique. Ils comportent parfois un grand nombre d'électrodes et les procédés les plus récents développés par la société Schlumberger permettent l'établissement de véritables cartes de résistivité sur toute la surface intérieure du trou. Ces dépenses de moyens et de matière grise sont justifiées par le coût très élevé du sondage mécanique dont on essaye de tirer le maximum d'information. Dans le cadre moins spectaculaire qui sera le nôtre, seuls sont couramment utilisés les deux dispositifs représentés sur la figure 3a: ils s'agit d'un dispositif "pôle-pôle", la "normale" et d'un dispositif "pôle-dipole", le pôle étant relatif à l'émission et le dipole à la réception: la "latérale". Comme l'illustre bien la figure 3b, la réponse de la "normale" est plus simple de forme que la réponse de la "latérale": on évitera d'utiliser cette dernière, bien qu'elle présente pour la délimitation des couches résistantes des avantages sur le dispositif "normale". Notons, et c'est plus évident sur les réponses de la "latérale", que la résistivité apparente peut sortir de l'intervalle des résistivité réelles. Les mesures diagraphiques présentent bien d'autres artefacts. L'un d'eux est relatif à l'"effet de trou" qui concerne, comme son nom l'indique, l'influence sur la mesure de l'existence du "tube" d'eau conductrice constitué par le forage. La figure 4 donne un exemple du biais dû au diamètre du trou.

Le domaine des diagraphies est particulièrement vaste. On pourra consulter à ce propos [37] ou [11].

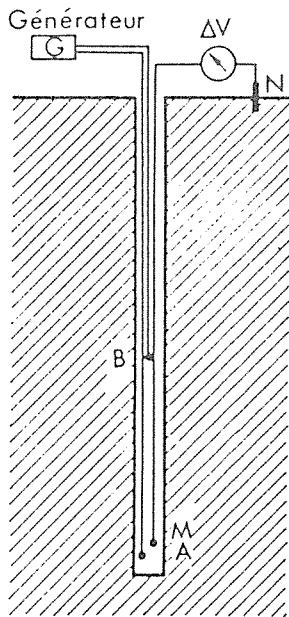


FIG. 184.

Sonde normale.

$$\rho_{11} = 4 \pi AM \frac{\Delta V}{i}$$

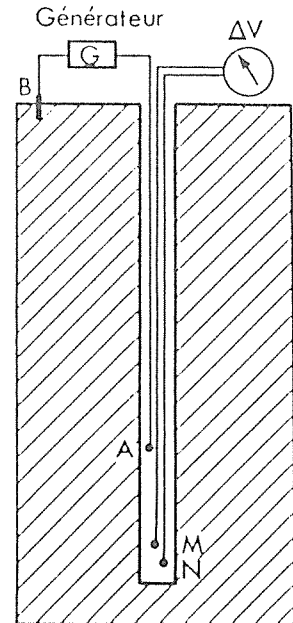


FIG. 188.

Sonde latérale.

$$\rho_{11} = 4 \pi \frac{AM \cdot AN}{MN} \frac{\Delta V}{i}$$

Figure 3a: Dispositifs classiques de diagrapie électrique: sondes "normale" et "latérale". (Extrait de Astier).

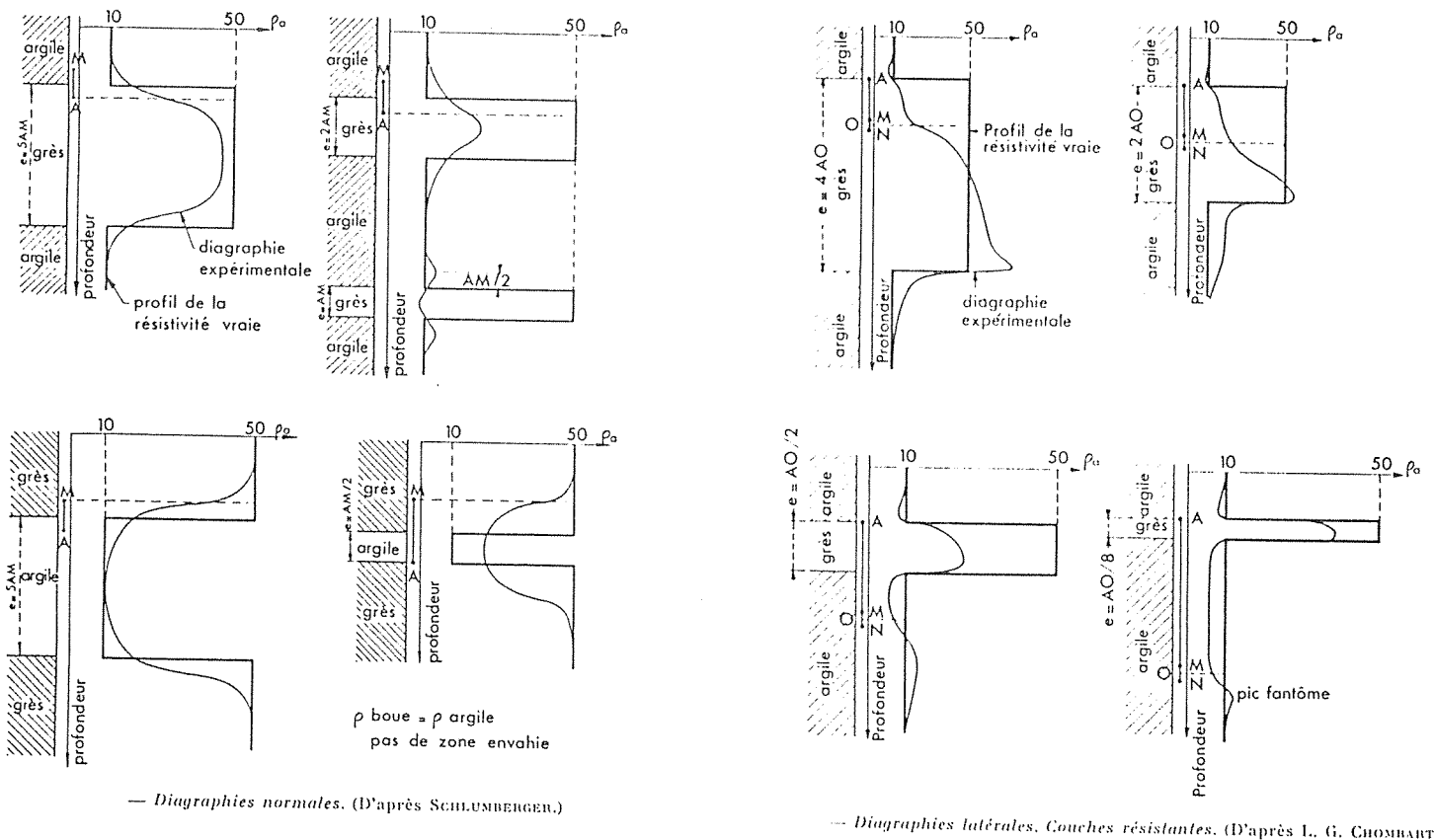


Figure 3b: Exemples de réponses des sondes normale et latérales. (Extrait de Astier)

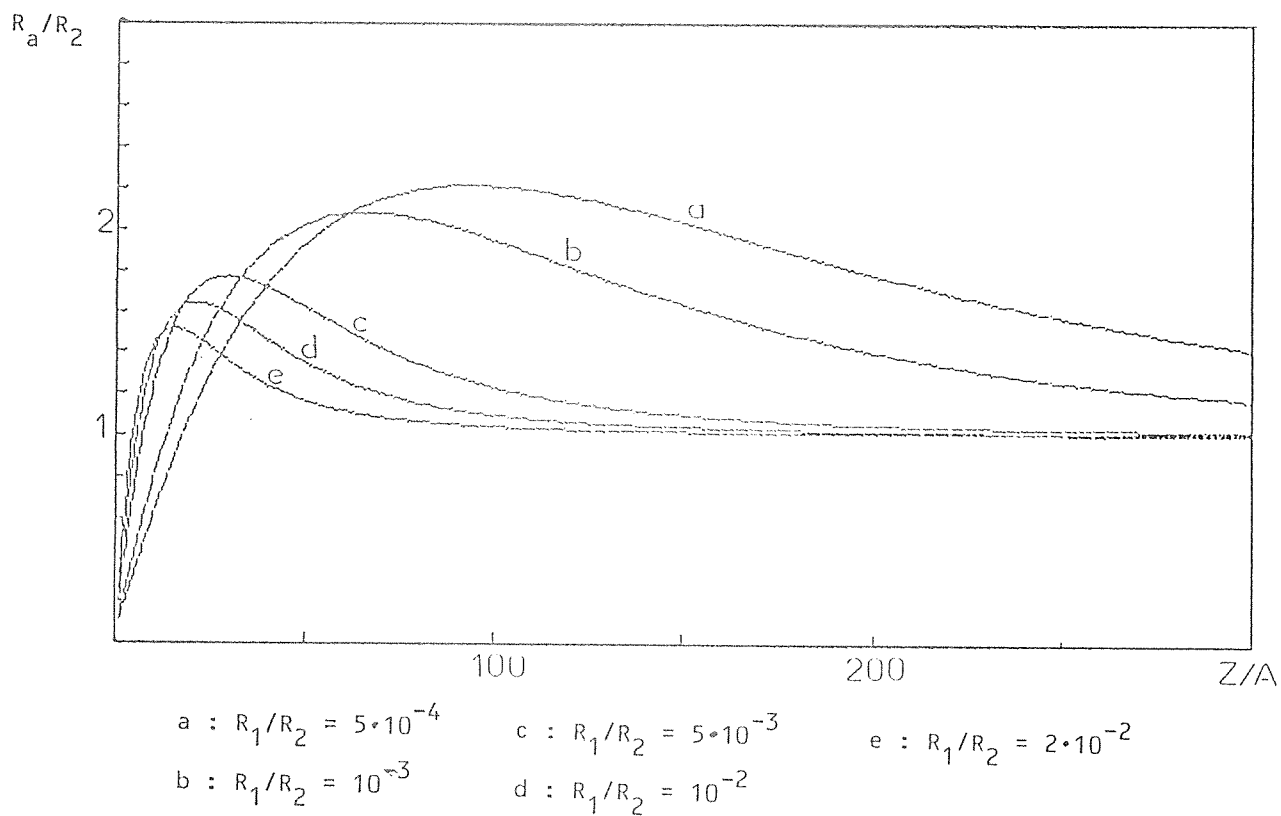


Figure 4: Effet du trou de forage sur la résistivité apparente mesurée en terrain homogène avec un dispositif pôle-pôle (type "normale"). L'eau du forage est ici 50 à 200 fois plus conductrice que le milieu.

R_1 : résistivité de l'eau du forage

R_2 : résistivité du milieu

R_a : résistivité apparente

A : rayon du trou de forage

z : écartement des électrodes

II. TRAVAUX ANTERIEURS.

II.1. Généralités sur les méthodes utilisées pour la prospection en forage.

L'idée d'exploiter l'opportunité, offerte par les forages, d'enfouir des électrodes d'exploration afin d'étendre le domaine d'investigation des méthodes de surface, n'est évidemment pas nouvelle. Dans une certaine mesure, la très ancienne "mise-à-la-masse" (toujours utilisée) des frères Schlumberger a inauguré l'exploitation des sondages mécaniques pour l'exploration électrique des gisements profonds. Cependant, les progrès ont été très lents dans ce domaine. On peut y trouver plusieurs explications. La première est d'ordre technologique: ce n'est que depuis peu que l'on dispose d'émetteurs de courant à la fois performants et puissants. Les systèmes de réception, qui doivent mesurer des d.d.p. très faibles, ont également beaucoup évolué durant les toutes dernières décennies. Une deuxième raison est à chercher dans l'absence, dans le passé, de moyens de modélisation adaptés aux problèmes à trois dimensions. Il se trouve en effet que des modèles à deux dimensions sont totalement inadaptés pour représenter les comportements des champs au voisinage des structures "3D" recherchées au voisinage des forages (Doucet [14]). Enfin, la "troisième dimension" autorise un certain foisonnement des dispositifs de prospection possibles, ce qui ne facilite pas la mise en commun d'un savoir faire comme il en existe pour les méthodes devenues traditionnelles de la prospection de surface.

Un tour d'horizon des différentes méthodes utilisées en prospection de forage a été entrepris en 1985 par Dyck et Young [15]. Ces auteurs opèrent une classification des procédés selon la nature de l'équation différentielle qui gouverne le phénomène physique exploité: équation des ondes, de diffusion ou de Laplace. Dans le cadre des méthodes géoélectriques classiques, (donc en excluant les techniques radar), la dérivée seconde par rapport au temps dans l'équation la plus générale peut être négligée. Il est équivalent de considérer que les longueurs d'onde sont considérablement plus importantes que les dimensions des domaines concernés par la prospection minière. Par ailleurs, les

"courants de déplacement" (lié, dans le sens commun, a des effets capacitifs), sont souvent également négligeables et il est inutile de tenir compte des constantes diélectriques dans les équations. Dès lors, il ne reste que deux phénomènes fondamentaux, que l'on qualifie le plus souvent des termes "galvanique" et "inductif". L'effet galvanique correspond au courant continu et ne peut se transmettre dans un milieu infiniment résistant. Sa phénoménologie relève de l'équation "quasi-harmonique" introduite au chapitre I. Elle est à relier à la loi d'Ohm:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (6)$$

L'effet inductif est également connu sous la forme de la loi de Lenz. On peut résumer cette dernière en disant qu'un champ magnétique variable dans le temps "induit" dans les conducteurs un courant tel que le champ magnétique dû à ce dernier tend à s'opposer au champ magnétique originel. L'équation simple à relier au phénomène d'induction est bien connue comme l'une des équations de Maxwell:

$$\vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \quad (7)$$

L'équation, plus générale, qui gouverne les effets inductifs est semblable à celle qui décrit les phénomènes physiques de diffusion (chaleur, ions en solution etc...) et pour cette raison est appelée "équation de diffusion".

La figure 5 reprend une table proposée par Dyck et Young et où sont regroupées diverses méthodes et références.

Avant de passer en revue les différents travaux déjà publiés dans le cadre des méthodes galvaniques qui est le nôtre, il n'est pas inutile de préciser les différences qualitatives entre les procédés qui reposent les uns sur l'effet galvanique et les autres sur l'effet inductif. Ces différences peuvent être caractérisées à partir des équations fondamentales. Ainsi, pour le domaine galvanique, c'est l'équation de Laplace (ou équation harmonique) qu'il convient de considérer:

Table 1. Categorization of methods.			
Electric potential	EM induction	Wave propagation	
$\nabla^2 V = 0$	$\nabla^2 A - \sigma \mu \frac{\partial A}{\partial t} = 0$	$\nabla^2 W - k^2 \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$	
(1) Single-hole resistivity (and induced polarization)	(1) Single-hole EM (dipole-dipole FEM)	(1) Single-hole seismic	
(2) Hole-hole, surface-hole, hole-surface resistivity (and induced polarization)	(2) Surface-hole FEM, TEM (large-loop transmitter, single-component magnetic sensor)	(2) Single-hole EM (RADAR)	
(3) Mise-à-la-masse [special case of (2)] with one current electrode buried within inhomogeneity	(3) Three-component magnetic sensor with large-loop transmitter	(3) Cross-hole seismic	
(4) Magnetometric resistivity (MNR), detection of anomaly by measurement of magnetic fields		(4) Cross-hole EM	

Table 2. Applications and examples of references (with cross reference to Table 1).			
Application	Electric potential	EM induction	Wave propagation
Geothermal resources	3 Bartel et al. (1976)		3 Fehler and Pearson (1984)
Mineral exploration	1, 2 Wagg and Seigel (1963) 3 Parasnis (1967) 3 Mwenifumbo (1980) 4 Nabighian et al. (1984) 2 Scott et al. (1975) 1, 2 Clark and Salt (1951)	1 Drinkrow and Duffin (1978) 2 Woods and Crone (1980) 2 Boyd and Wiles (1984) 2 Dyck and West (1984) 3 Worthington et al. (1981) 3 Pantze et al. (1983)	
Mine development			4 Buselli (1980)
Engineering (mine and civil)			3 Cosma et al. (1984) 3 McCann et al. (1975)
In-situ energy extraction	1 Dobecki (1980) 3 Bartel (1977)		4 Somerstein et al. (1984) 4 Daily (1984)
Cavity detection	2 Daniels and Dyck (1984)		4 Lytle et al. (1979)
Radioactive waste containment	2 Daniels (1982)	2 Hayles and Dyck (1985)	3 King and Paulsson (1982) 3 Wong et al. (1984) 4 Davis et al. (1984) 2 Wright and Watts (1982) 3 Gustavsson et al. (1982) 3 Paulsson et al. (1985)
Groundwater investigations			3 Levine et al. (1984)
Hydrocarbon exploration and reservoir development	4 Chemali et al. (1984)		3 Baker and Harris (1984) 2 Holser et al. (1972)

Figure 5: Table de classification des méthodes utilisées en forage. Elle est extraite d'un article de Dyck et Young. Nous donnons également leur bibliographie en annexe de la nôtre. Notre travail rentre dans le cadre des méthodes "surface-to-hole".

$$\Delta V = 0 \quad (8)$$

alors que pour le domaine inductif c'est l'équation de la diffusion:

$$\vec{\Delta A} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 . \quad (9)$$

Le fait qu'il s'agisse d'une équation vectorielle portant sur un "potentiel vecteur" importe peu. D'autre part, il n'est pas nécessaire de tenir compte de μ (perméabilité magnétique) qui varie peu dans les milieux que nous rencontrerons. Le deuxième terme de cette équation comporte d'une part une partie proportionnelle à la conductivité et d'autre part une dérivée par rapport au temps qui implique également la proportionnalité par rapport à la fréquence du champ considéré. On en déduit immédiatement les deux caractéristiques qui distinguent les méthodes "inductives" des méthodes "galvaniques": les méthodes inductives sont bien plus sensibles aux très bons conducteurs que les méthodes galvaniques. Ce point est d'autant plus marqué, par ailleurs, que la fréquence est plus importante.

A priori, la méthode inductive offre plus de possibilités de détection que la méthode galvanique. A posteriori aussi, d'autant plus que l'aspect galvanique peut être considéré comme un sous produit du procédé inductif. En réalité, cad dans la pratique, les deux méthodes sont plutôt complémentaires. En effet, en comportant un terme d'équation supplémentaire, le procédé inductif complique considérablement la modélisation, l'interprétation et la mise en oeuvre de la mesure sur le terrain. On comprendra qu'avec le surcroît de coût qu'elle impose, la méthode inductive ne sera utilisée que pour compléter justement des résultats galvaniques en autorisant la détection sélective des très bons conducteurs. Par contre, elle présente l'avantage de pouvoir s'appliquer même si les forages sont tubés avec des substances isolantes au travers desquels le champ magnétique est mesurable. Quant on sait la difficulté qu'il y a en France pour trouver des forages qui soient à la fois non éboulés et non tubés, on saisit l'importance de cet aspect "expérimental".

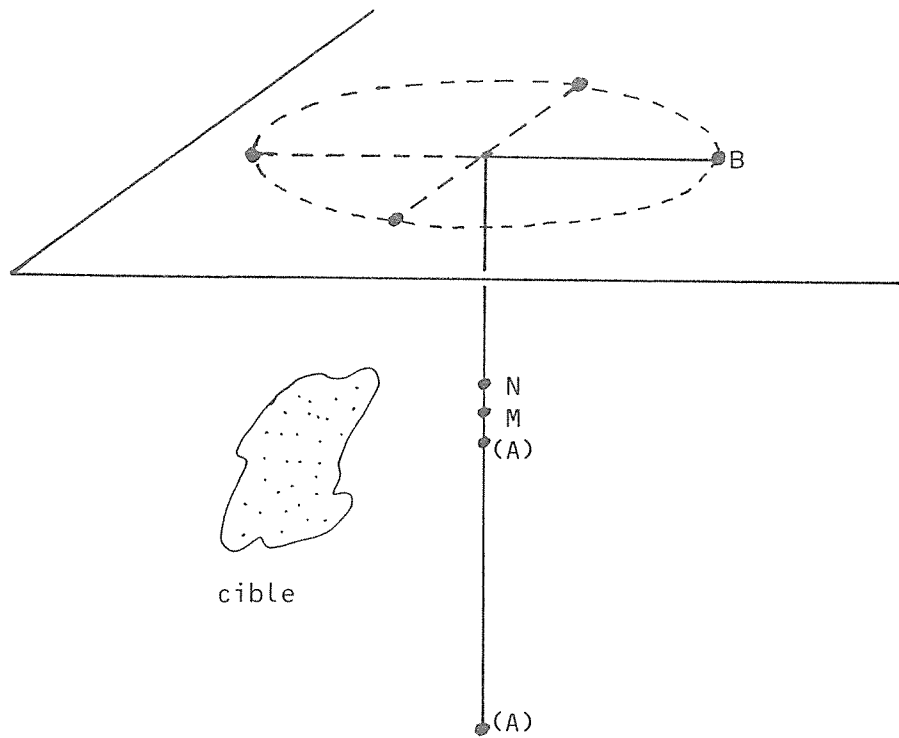


Figure 6: Dispositif de prospection proposé par Clarke et Salt. L'électrode A peut être fixe au fond du trou ou bien être déplacée avec le bipole de mesure MN. L'électrode B est successivement placée aux quatre points cardinaux.

Pour compléter la documentation sur les méthodes géophysiques dans les trous de forage, nous avons reproduit la bibliographie donnée par Dyck et Young. On la trouvera à la suite de celle qui nous est propre. On citera en outre un travail effectué dans notre laboratoire par Fromaigeat, en collaboration la Société Elf-Aquitaine [18].

Pour notre part, nous ne nous intéresserons dans la suite qu'au phénomène galvanique.

II.2. Présentation des travaux antérieurs.

Les travaux antérieurs sont resumés dans ce paragraphe, en adoptant un ordre chronologique. La longueur de chacun des résumés est fonction de l'intersection du contenu avec nos propres travaux.

II.2.1. Article de Clark et Salt (1951). [6].

Titre: The investigation of earth-resistivity in the vicinity of a diamond drill-hole.

En utilisant le dispositif décrit sur la figure 6, les auteurs obtiennent un effet directionnel. Appuyés par un modèle de sphère conductrice, ils étudient un cas de terrain et démontrent la validité d'une telle méthode. De leurs mesures, ils parviennent en effet à déduire la position de leur cible.

Ils représentent leurs résultats aussi bien directement en terme de potentiel mesuré qu'en utilisant la notion de résistivité apparente.

Cet article historique montre les possibilités de détection des conducteurs à distance des trous. Il insiste donc d'emblée sur l'avantage qu'il y a à profiter de l'opportunité qu'offre le forage pour étendre la profondeur d'investigation des méthodes électriques. Pourtant limités par le savoir-faire de l'époque en matière de modélisation 3D, les auteurs parviennent à des conclusions optimistes quant au potentiel réel de ces procédés.

II.2.2 Brevet de Koulomzine et Geoffroy (1958). [23].

Dans ce brevet est décrite une technique d'investigation où deux forages voisins sont employés. Le dispositif est décrit par la figure 7. L'injection du courant se fait soit par le couple A_1B_1 , soit par A_2B_2 : un effet directionnel est prévu. Plusieurs électrodes de réception sont descendues simultanément dans les deux forages. L'idée directrice repose sur l'obtention au voisinage des forages d'un champ électrique primaire relativement homogène et horizontal, de sorte à améliorer la détectivité et à simplifier l'interprétation. La grandeur mesurée est la composante du gradient du champ dans le plan des deux forages. Les auteurs mentionnent le cas où un seul forage est disponible: ils proposent dans ce cas la mesure de la composante verticale du gradient du potentiel. Appuyés eux aussi par le modèle sphérique, ils montrent que l'on peut obtenir la position de la structure par rapport au(x) forage(s).

II.2.3. Article de Merkel (1971). [31].

Titre: Resistivity analysis for plane-layer half-space models with buried current sources.

Le dispositif utilisé, appliqué à des modèles tabulaires 2 ou 3 couches, est représenté sur la figure 8a. Quoique l'auteur ne s'intéresse pas ici à la reconnaissance de structures 3D, son approche des modèles à couches présente de l'intérêt pour notre étude. En particulier, Merkel souligne le comportement problématique du coefficient géométrique qui tend vers $\pm\infty$ pour certaines configurations (figure 8b). Il remarque en outre que le gain en sensibilité est notable par rapport aux méthodes de surface, mais que l'interprétation, même qualitative, est bien plus difficile.

II.2.4. Article de Merkel et Alexander (1971). [32].

Titre: Resistivity analysis for models of a sphere in half-space with buried current source.

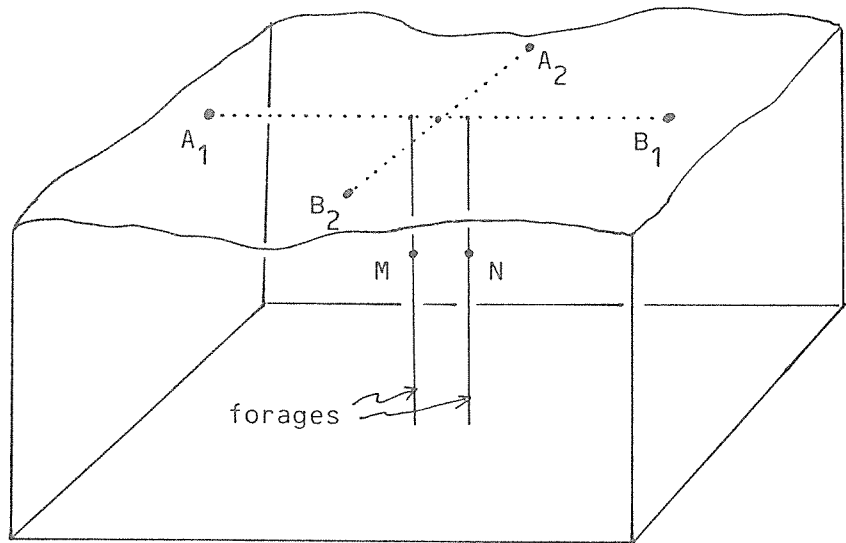


Figure 7: Dispositif proposé par Koulomzine et Geoffroy.
L'injection se fait successivement selon A_1B_1
puis A_2B_2 .
On estime le champ électrique horizontal avec MN.

$$K(N) = \frac{2\pi}{\frac{I}{[\gamma^2 + N^2]^{1/2}} - \frac{I}{\zeta + N} - \frac{I}{[\gamma^2 + (N + I)^2]^{1/2}} + \frac{I}{\zeta + N + I}}$$

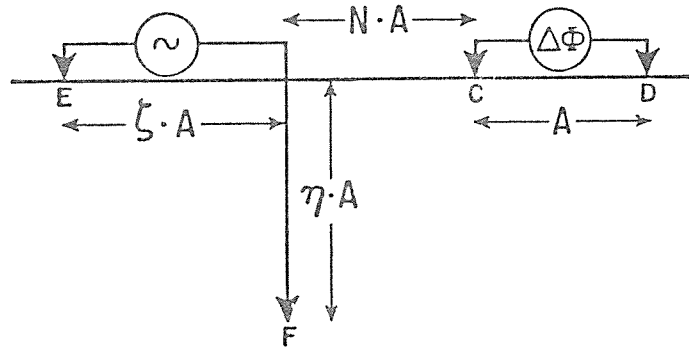
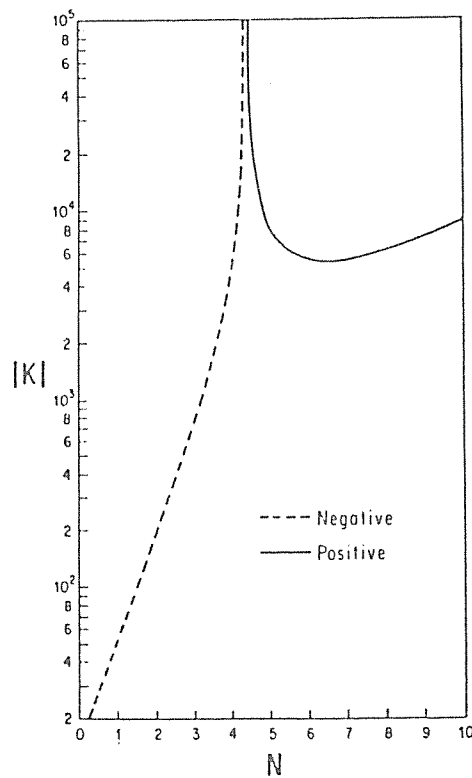


Figure 8a: Dispositif et coefficient géométrique utilisés par Merkel.



Plot of the singular behavior of the geometry factor for $\zeta = 1$ and $\eta = 2.6$.

Figure 8b: Singularité du coefficient géométrique du dispositif de Merkel.

Un analyse semblable en tout point à la précédente est menée ici, mais elle concerne le modèle de la sphère enfouie. La figure 9 donne un exemple de résultat théorique.

II.2.5. Article de Snyder et Merkel (1973). [39].

Titre: Analytic models for the interpretation of electrical surveys using buried current electrodes.

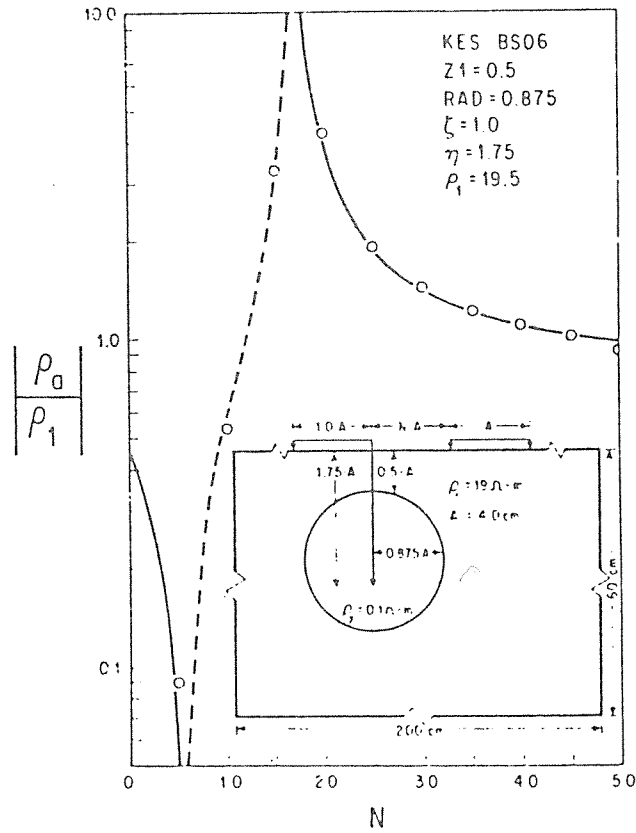
En faisant usage, d'une part d'un modèle à trois couches, d'autre part de la sphère en terrain homogène, les auteurs étudient les anomalies de résistivité apparente obtenues avec le dispositif décrit sur la figure 10a. Leur objectif est de montrer l'intérêt de l'exploration à l'aide de trous de forage. La figure 10b donne un exemple des résultats qu'ils obtiennent pour le modèle sphérique.

En insistant sur l'avantage qu'il y a à enfouir des électrodes, notamment en présence d'une couverture conductrice, Snyder et Merkel argumentent en faveur de tels procédés. Le dispositif qu'ils préconisent est analysé en détail. Les anomalies qu'ils mettent en évidence n'ont pas de formes élémentaires. Les auteurs fournissent toutefois une règle empirique pour déterminer la profondeur de la sphère.

II.2.6. Thèse de Doucet (1977). [14].

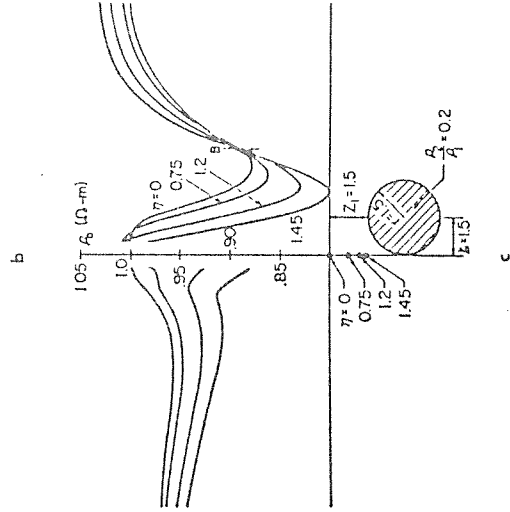
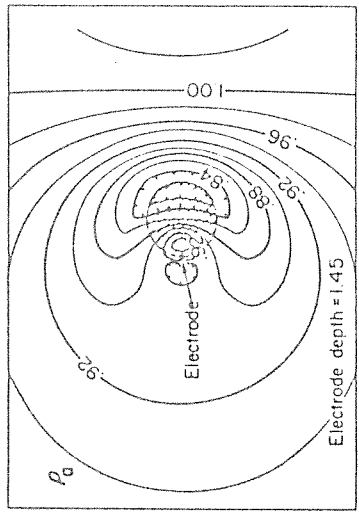
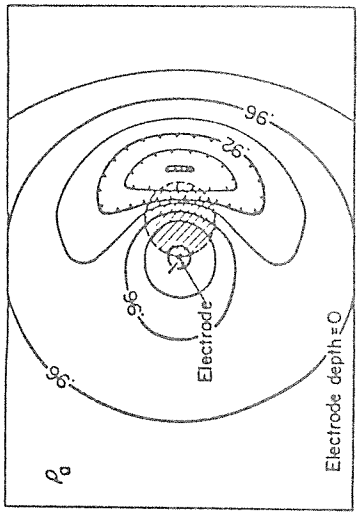
Titre: Prospection minière par méthode électrique à l'aide de trous de forage.

Dans son travail, Doucet expose tout d'abord une méthode de calcul numérique pour la résolution de l'équation quasi-harmonique. De la formulation des éléments finis, il retient la "forme faible" qui facilite l'application des conditions aux limites. Ses équations ont la même forme qu'en différences finies car il emploie un pavage parallépipédique sur lequel les dérivées sont exprimées sous forme de différences finies. Dans un deuxième temps, il utilise cet outil pour déduire les réponses à différents cas de figure de plusieurs dispositifs de diagraphie. Enfin, il s'intéresse au problème de la détection de corps non intersectés. Pour

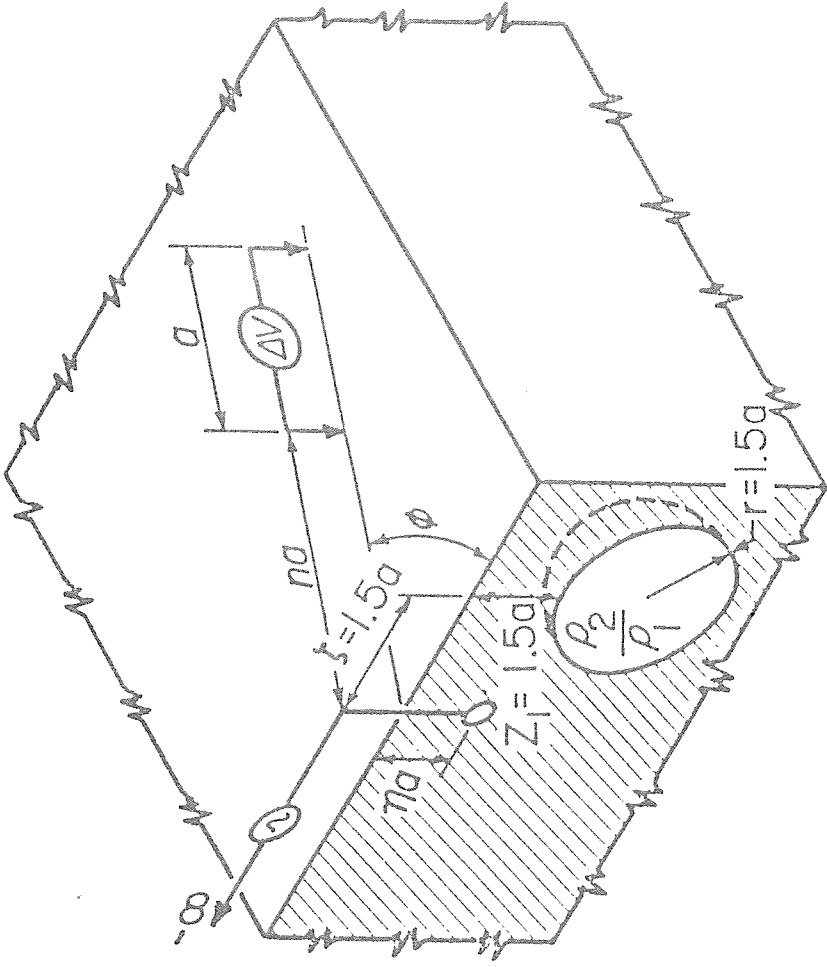


Superposition of analog and digital results for a model with the buried current electrode in the sphere. The dashed section denotes negative apparent resistivity. The analog sphere was made of a salt saturated gelatine solution in a porous sponge-rubber sphere.

Figure 9: Exemple d'anomalie présenté par Merkel et Alexander. Le dispositif est le même que sur la figure 8. On retrouve l'effet parasite dû à la singularité du coefficient géométrique.



Normalized apparent resistivity ($\rho_2/\rho_1 = 0.2$) over the conductive buried sphere model using the offset buried pole-dipole array: (a) electrode at surface, (b) electrode buried at $\eta = 1.45$, and (c) center-line profiles.



Electrode array geometry and illustration of the buried sphere for the case where the buried electrode is offset from the axis of the sphere.

Figure 10a: Dispositif étudié par Snyder et Merkel.

Figure 10b: Exemple d'anomalies obtenues avec le dispositif de Snyder et Merkel.

ce faire, il suggère l'emploi d'un dispositif bipolaire d'injection en surface avec mesure du gradient vertical du potentiel dans le forage. Les modèles dont il étudie les réponses sont des parallélépipèdes. Doucet montre en outre la nécessité d'employer des corps 3D pour la modélisation des anomalies dues aux cibles minières en trou de forage. La figure 11 montre l'incapacité d'un modèle 2D à représenter une anomalie due effectivement à une structure 3D.

Quelques résultats de terrain sont présentés: ils illustrent le succès de la méthode (figure 12).

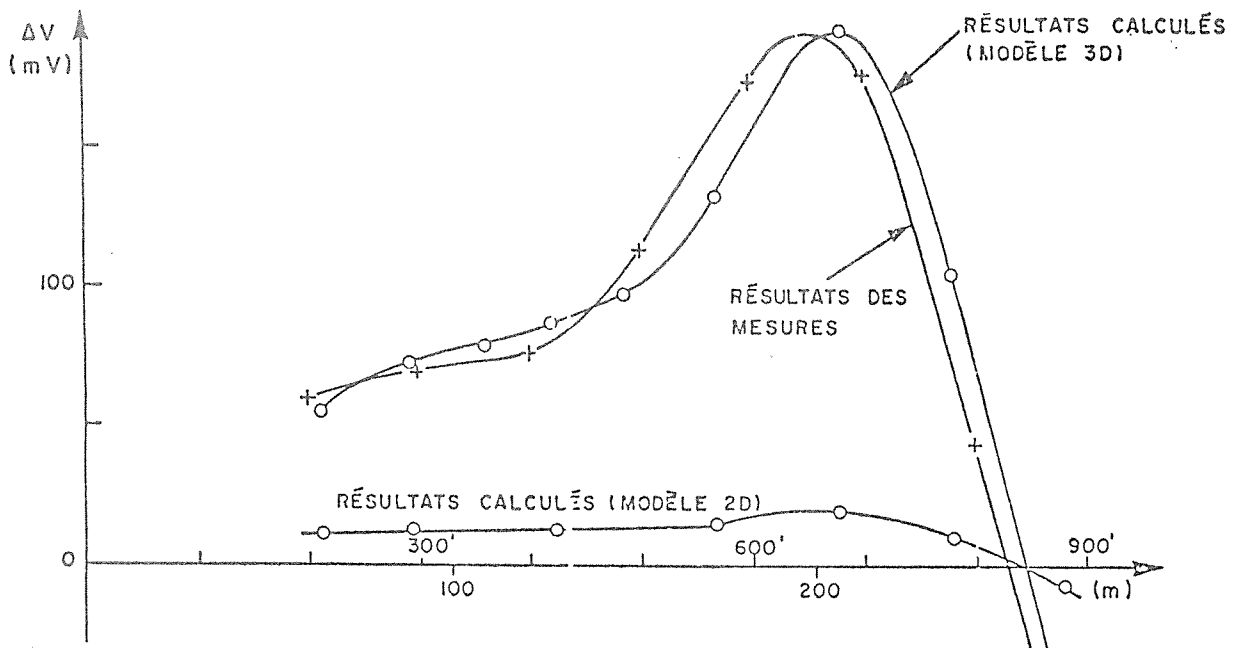
II.2.7. Article de Daniels (1977). [8].

Titre: Three-dimensional resistivity and induced-polarization modeling using buried electrodes.

Daniels applique la technique de modélisation par intégrales de surface (décrite par Barnett [4]) pour comparer la sensibilité de nombreux dispositifs en présence d'une sphère ou d'un ellipsoïde conducteurs.

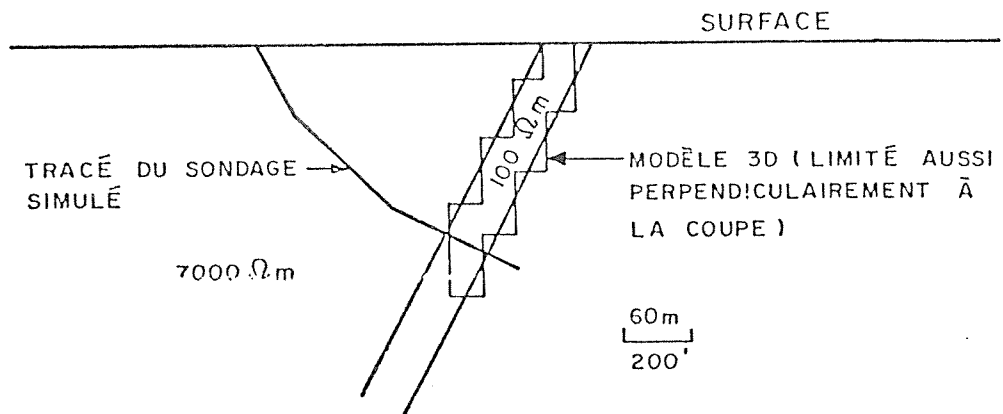
Il passe en revue six configurations différentes:

- 1) forage à forage (hole-to-hole) avec un bipole d'émission fixe et un bipole de réception de position variable.
- 2) forage à forage, avec un bipole d'émission de position variable et un bipole de réception de position variable.
- 3) forage à forage, avec une source de position variable et un bipole de réception de position variable.
- 4) forage à forage, avec un bipole d'émission fixe (dont un pôle est en surface) et un bipole de réception de position variable.
- 5) surface à forage (surface-to-hole), avec une source en surface et un bipole de réception dans le forage, de position variable.

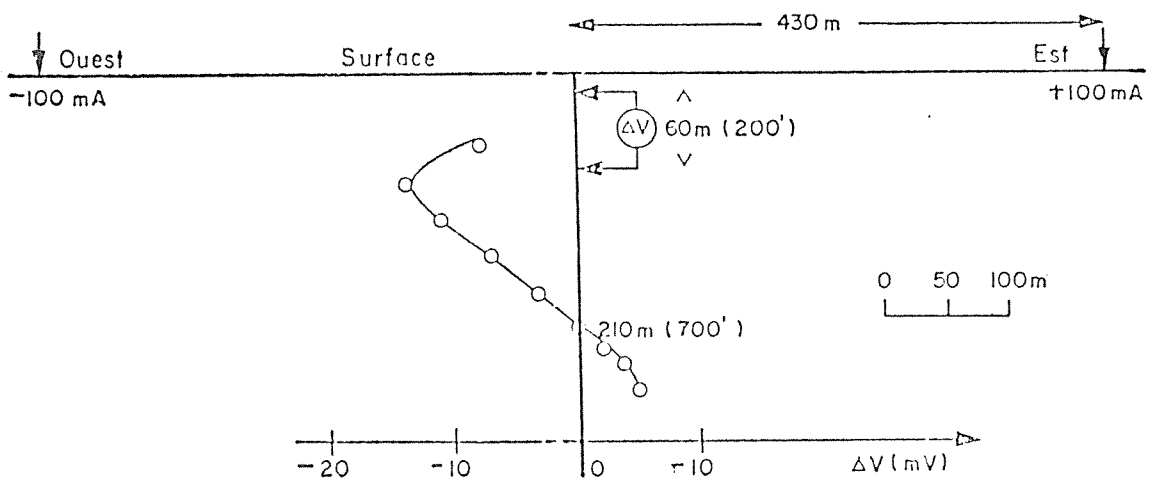


- Anomalie associée à la source "Nord" (Lingwick, forage #34). Comparaison des résultats des mesures et des résultats calculés (modèles 2D et 3D) -

Figure 11: Empruntée à Doucet, elle démontre la nécessité de la modélisation 3-D pour les méthodes de forage. Le modèle 2-D, identique au modèle 3-D mais d'extension latérale infinie, ne rend pas compte de l'anomalie mesurée. La structure modélisée est représentée sur la figure 12. Le dispositif utilisé ici comporte deux électrodes d'émission dont une à la tête du puit. Le bipole de mesure est dans le forage.



- Simulation Lingwick (forage #34): modèles 2D et 3D utilisés (Doucet, 1977).



- Anomalie déduite des mesures de résistivité "directionnelle". (Lingwick, forage #34) (Doucet, 1977).

Figure 12: Exemple de terrain présenté par Doucet. Le dispositif d'émission comporte deux électrodes implantées symétriquement par rapport à la tête du forage. Le modèle 3-D de la figure supérieure explique bien l'anomalie mesurée.

6) forage à surface (hole-to-surface), avec une source enterrée, fixe, et un bipole de réception en surface, de position variable.

7) forage seul (single hole), avec un bipole d'émission et un bipole de réception qui se déplacent tous deux dans le forage.

Après une étude détaillée de nombreux cas correspondant à ces divers dispositifs, Daniels conclue qu'il n'existe pas de "meilleur procédé", chacun possédent des avantages et des inconvénients en fonction de la cible, du contraste de résistivité etc....

Il note par ailleurs le problème posé par le coefficient géométrique qui peut prendre, pour certaines configurations, une valeur infinie. (il suffit pour cela que les électrodes de réception soient disposées sur une équipotentielle en terrain homogène). Il montre comment ce cas de figure, lorsqu'il est approché, peut induire de véritables fausses anomalies: la figure 13 en donne un exemple. Daniels fait également remarquer que le nombre de paramètres intervenant complique la comparaison objective des différentes méthodes.

L'auteur cerne nombre de problèmes qui se rencontrent en méthodes de forage. Il suggère l'emploi d'arrangements qui évitent les singularités du coefficient géométrique.

II.2.8. Article de Dobecki (1980). [13].

Titre: Borehole resistivity curves near spheroidal masses.

Dobecki s'intéresse à la détection de sphéroides non intersectés par le forage. Il utilise un dispositif pôle-pôle placé dans le forage, dispositif qui revient à une "normale" de diagraphie, mais avec un écartement bien plus important (6.1 m et 15.24 m). Aucun effet directionnel ne peut être obtenu de la sorte. Il trace un certain nombre de réponses typiques et note certaines ambiguïtés qui peuvent apparaître dans l'interprétation, notamment en ce qui concerne la détermination de la forme de la structure.

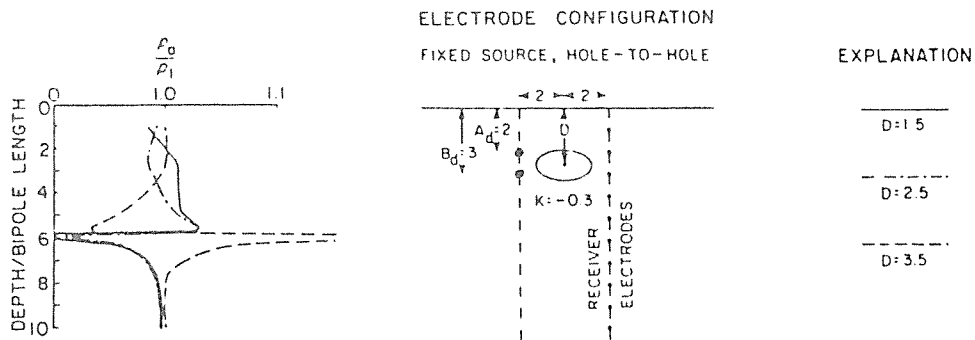


Figure 13: Exemple de fausse anomalie due à une singularité du coefficient géométrique. Les trois courbes correspondent à trois profondeurs de la sphère comprises entre 1.5 et 3.5 unités. La forte variation du signal au voisinage de la profondeur 6 est due à la singularité. (Article de Daniels).

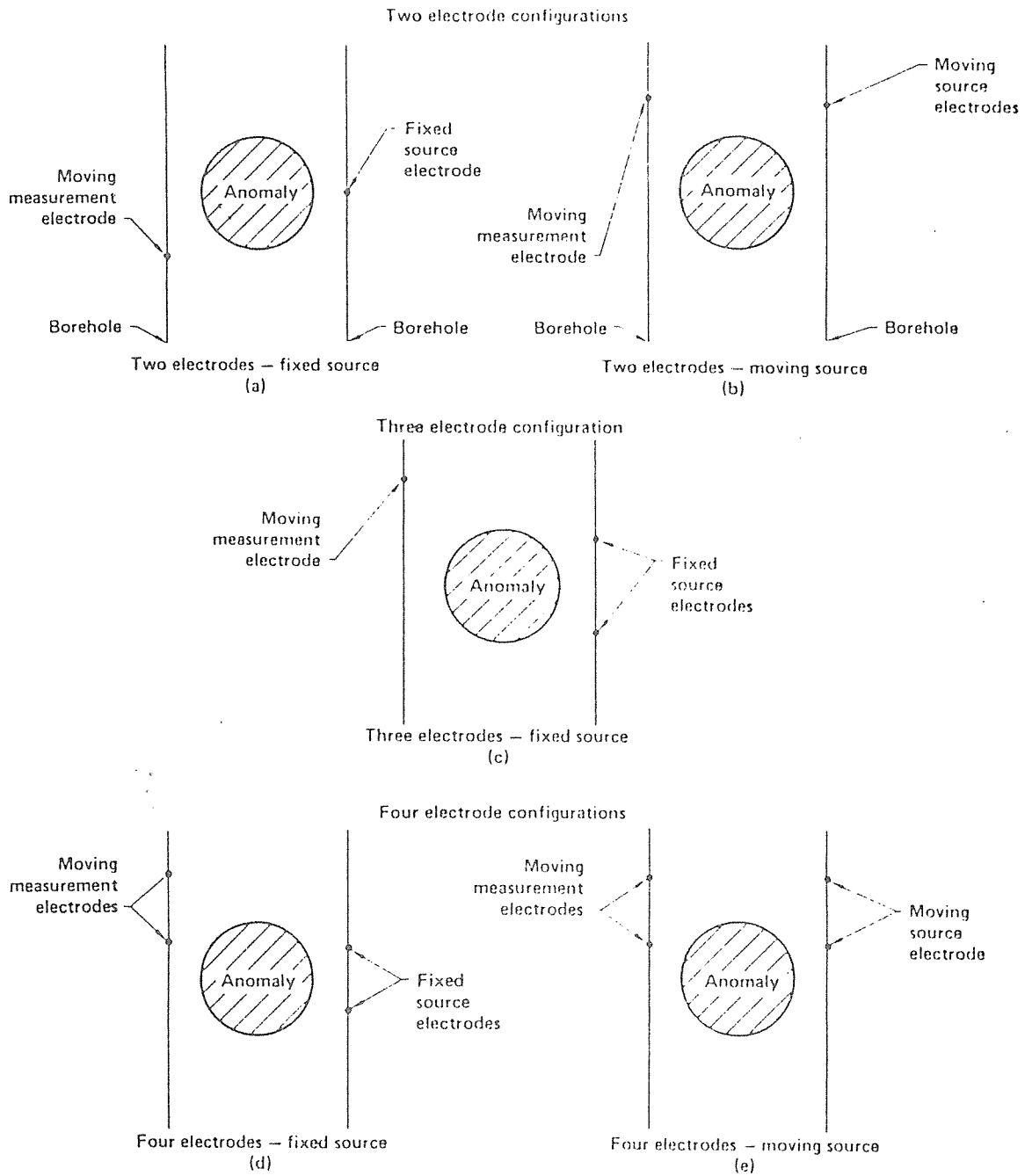


Figure 14: Les dispositifs de forage à forage (hole-to-hole) étudiés par Lytle et Hanson.

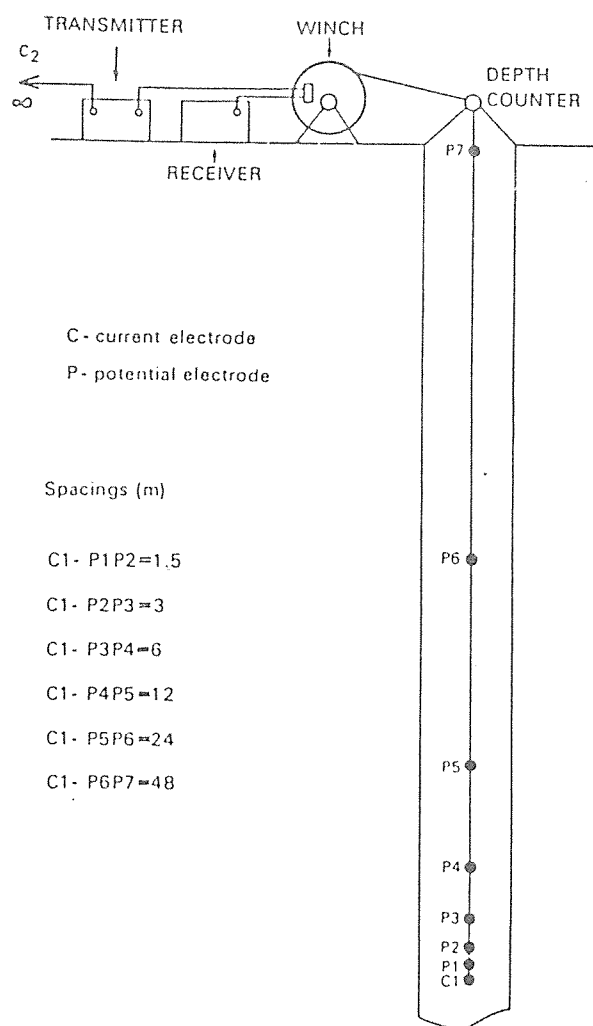


Figure 15: Dispositif utilisé par Ogilvy et par Busby et Dabeck. Il s'apparente à un dispositif de diagraphe avec cependant des espacements bien plus importants. Plusieurs combinaisons sont possibles.

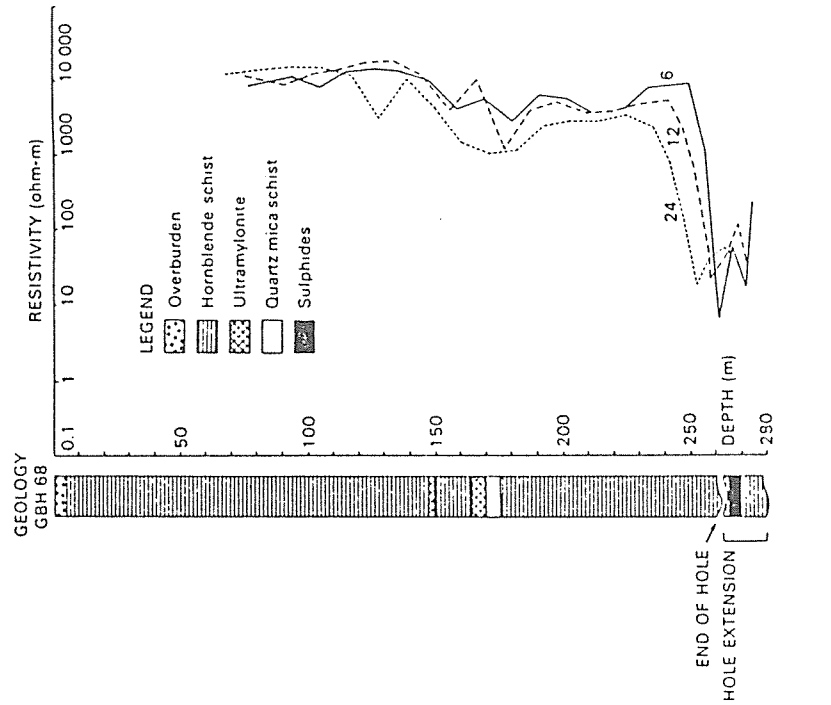


Figure 16: Cas de découverte présenté par Ogilvy. Le forage initial ne traversait pas la cible, mais une anomalie en fond de trou incitait à le prolonger. La minéralisation fut effectivement rencontrée quelques mètres plus bas.

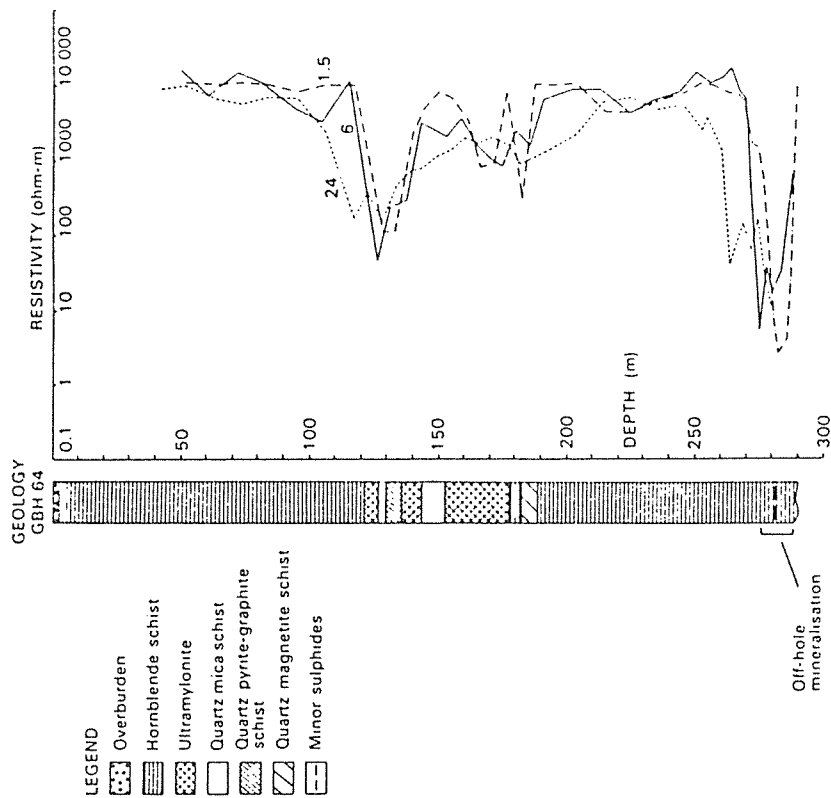
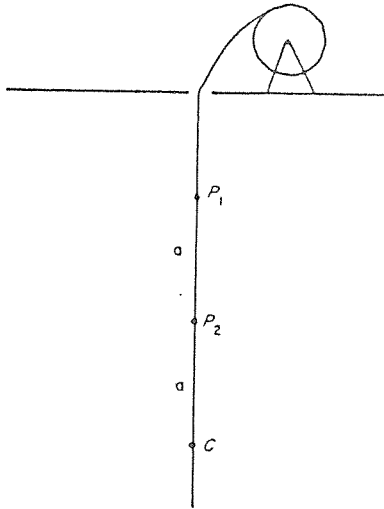


Figure 17: Exemple de structure non intersectée et produisant une anomalie notable (Ogilvy).



The in-hole three-array. C is the current electrode, P are the potential electrodes and a is the array spacing.

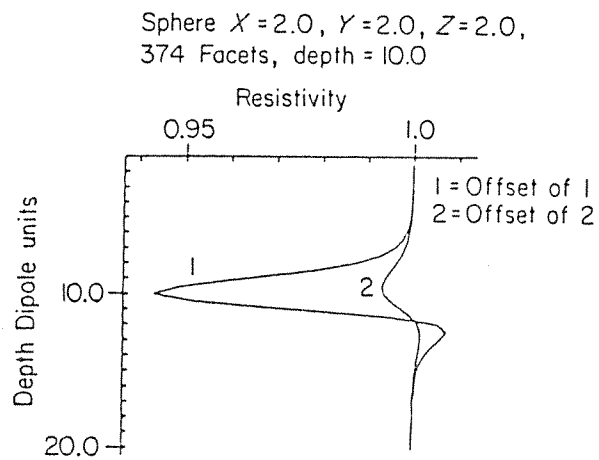


Figure 18: Dispositif et exemples d'anomalies dues à une sphère (Busby et Dabeck). Les deux courbes correspondent à deux distances entre la sphère et le forage.

II.2.9. Article de Lytle et Hanson (1983). [28].

Titre: Electrode configuration influence on resistivity measurements about a spherical anomaly.

Uniquement centré sur les méthodes de forage à forage, ce travail contient l'analyse de plusieurs dispositifs (figure 14). Les anomalies typiques sont éditées pour chaque cas et les auteurs discutent, à partir de ces résultats, des sensibilités obtenues.

II.2.10. Article de Ogilvy (1985). [34].

Titre: Down-hole IP/resistivity prospecting in mineral drill-holes. Some illustrative field examples.

Le dispositif est représenté sur la figure 15: il s'agit d'un pôle-bipôle. L'auteur présente des résultats de terrain particulièrement intéressants. La figure 16 est en effet relative à un cas de découverte: un forage initial n'intercepte pas de minéralisation, mais une anomalie de fond de trou en indique la présence. Une reprise du forage a permis la rencontre avec la minéralisation quelques mètres plus bas. La figure 17 montre quant à elle un exemple de minéralisation non intersectée et produisant une anomalie notable.

L'auteur note par ailleurs que les résultats de résistivité sont plus faciles à comprendre que ceux relatifs aux effets de polarisation provoquée.

II.2.11. Article de Busby et Dabeck (1985). [5].

Titre: Resistivity and IP modeling of a three-array down-hole prospecting technique.

Le dispositif est un pôle-bipôle représenté sur la figure 15. La méthode numérique de Barnett [4], par intégrales de surface, est appliquée pour des structures simples: parallélépipèdes, ellipsoïdes... La figure 18 donne un exemple d'anomalie.

II.2.12. Article de Yang et Ward (1985-(1)). [44].

Titre: Single-borehole and cross-borehole resistivity anomalies of thin ellipsoids and spheroids.

Les auteurs utilisent la méthode de Barnett précédemment citée pour étudier les anomalies pouvant être dues à des fractures conductrices, en s'appuyant sur des modèles d'ellipsoïdes minces. Un ou deux pôle-pôle constituent le système de mesure selon qu'un seul ou que deux forages voisins sont accessibles. La figure 19 donne deux exemples d'anomalies théoriques: dans certains cas l'orientation et la taille des cibles peuvent être déterminées.

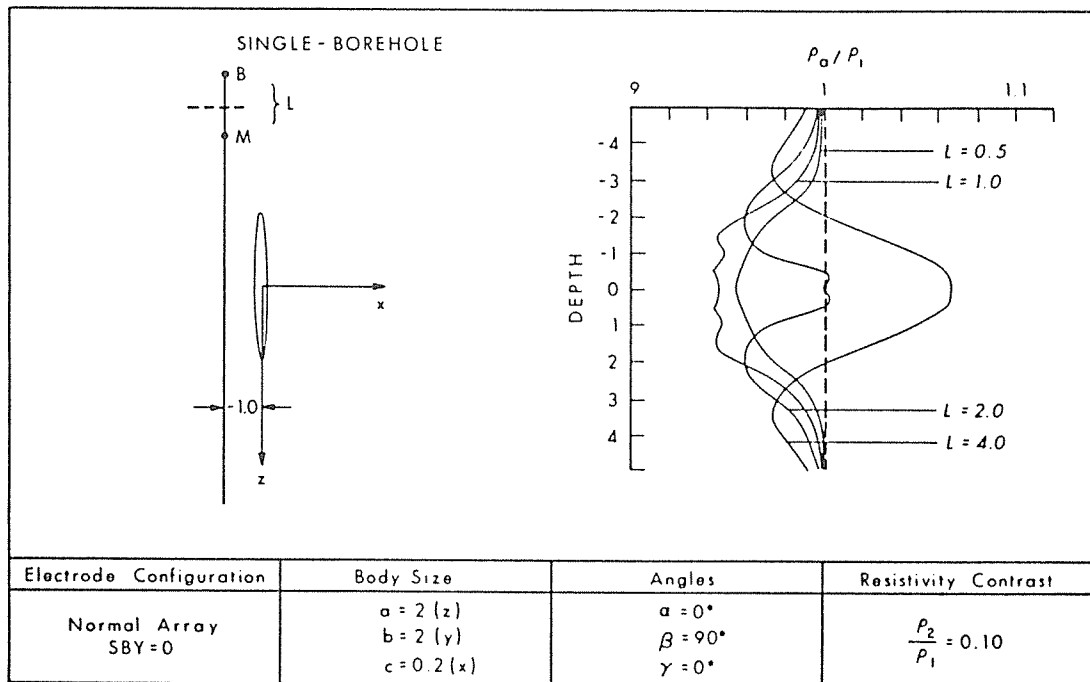
Lorsque la cible est placée quelque part entre les deux forages, la supériorité des mesures inter-forage est largement démontrée. Enfin, il est souvent possible d'estimer la profondeur du centre de la structure avec une précision convenable.

II.2.13. Article de Yang et Ward (1985-(2)). [45].

Titre: On sensitivity of surface-to-hole borehole resistivity measurements to the attitude and the depth to center of a three-dimensionnal spheroid.

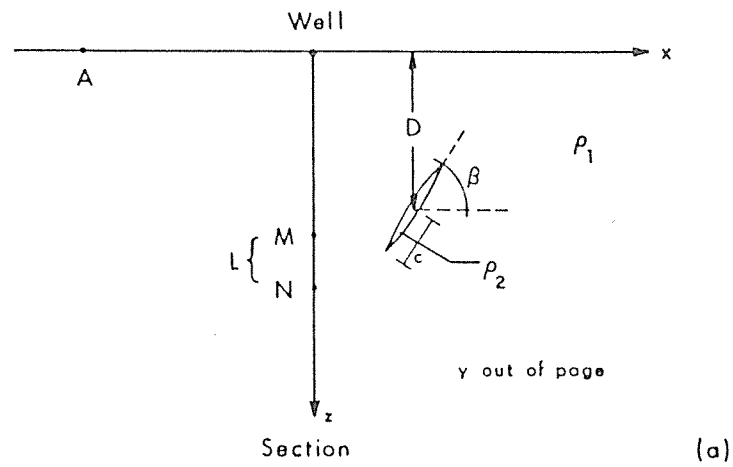
Avec le dispositif pôle-bipôle décrit sur la figure 20, les auteurs proposent une méthode directionnelle. Ce procédé est proche de celui que nous étudions plus loin dans notre travail.

L'interprétation procède de deux étapes. La première permet la détermination de l'azimut de la structure par rapport au forage: trois séries de mesures sont nécessaires avec trois localisations de l'électrode A (figure 21a). De l'allure des courbes de résistivité apparente, Yang et Ward montrent comment l'on obtient une idée du pendage de la structure. La deuxième étape consiste à effectuer plusieurs mesures le long du forage, en correspondance avec différentes positions alignées de l'électrode A (figure 21b). Là encore, grâce à une classification des formes d'anomalies, ils montrent comment déduire la profondeur de la cible.

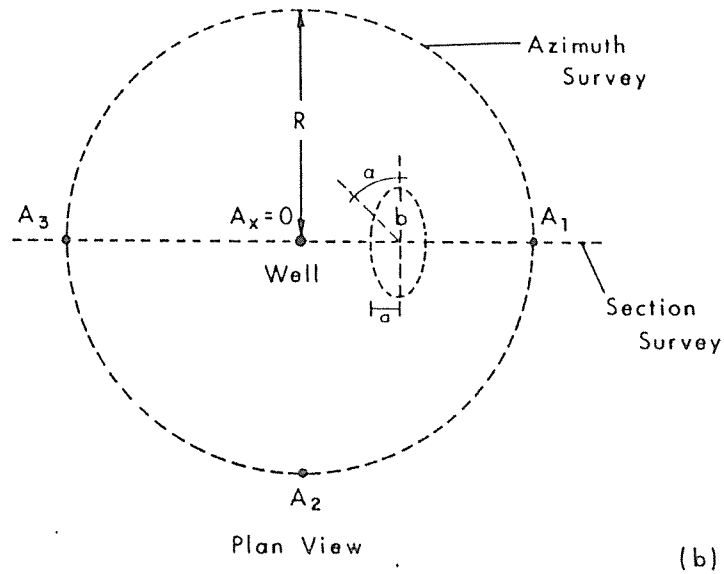


Effect of L -spacing for a vertical spheroid in single-borehole, widely spaced, reversed, *normal array* measurements. All parameters are indicated in the figure. The plotting point of the measurement is midway between the source and potential electrode.

Figure 19: Exemples d'anomalies dues à un sphéroïde avec des dispositifs "pôle-pôle" (Yang et Ward).

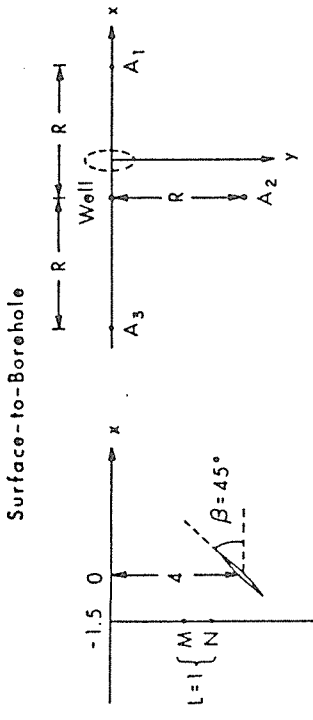


The 3-D oblate spheroid used in studies of the surface-to-borehole resistivity measurements. A is the surface current source, L is the spacing between downhole electrodes M and N , while D is the depth of the center of the body.

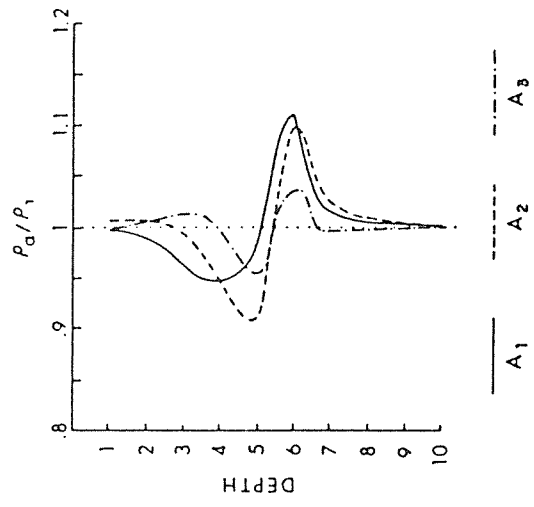


Schematic diagram showing the methods of azimuth survey and section survey. The A_i are the locations of the near-current electrode.

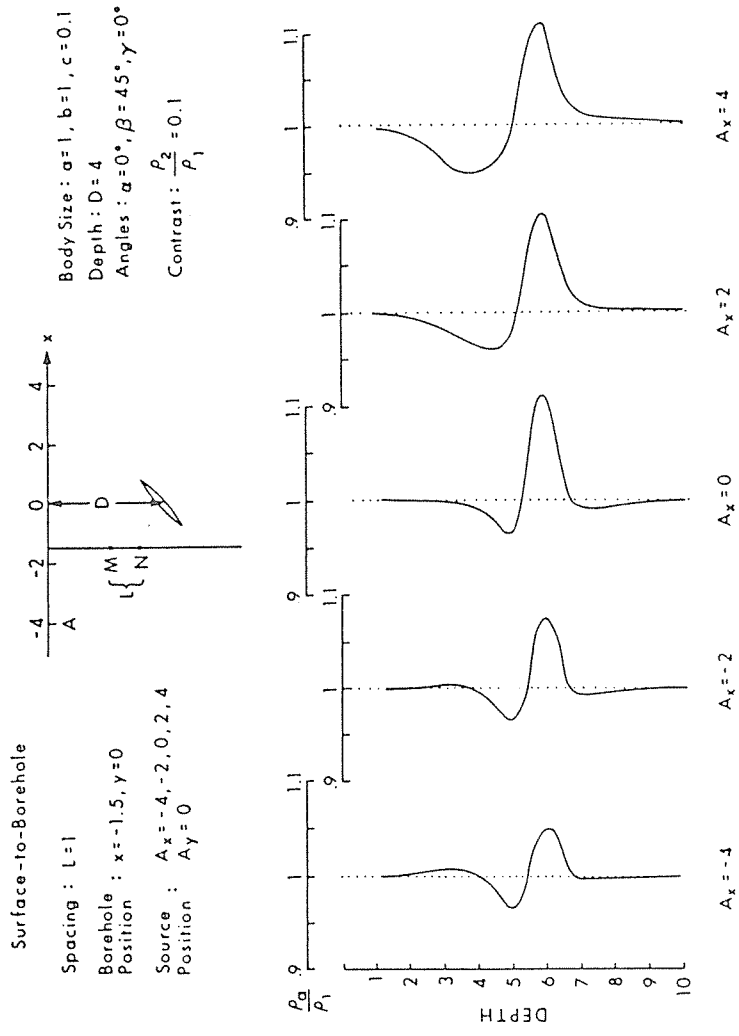
Figure 20: Dispositif proposé par Yang et Ward. L'électrode d'injection est déplacée en cercle ou linéairement. Pour une position de cette électrode, la mesure est effectuée le long du forage à l'aide du dipôle MN.



Section Plan View
 Body Size : $a = 1, b = 1, c = 0.1$ Borehole Position : $x = -1.5, y = 0$
 Angles : $\alpha = 0^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 0^\circ$ $R = 5.5$
 Contrast : $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 0.1$



Model result for a dipping conductive oblate spheroid ($\beta = 45$ degrees) with azimuth survey.



The apparent resistivity responses versus the position of current source for a dipping conductive oblate spheroid ($\beta = 45$ degrees) with section survey.

Figure 21b: Anomalies obtenues avec le dispositif de Yang et Ward ("section survey").

Figure 21a: Anomalies obtenues avec le dispositif de Yang et Ward ("azimuth survey")

II.3. Synthèse des travaux antérieurs.

Dès l'origine des études les concernant, les méthodes de prospection au voisinage de forages sont considérées unanimement comme potentiellement efficaces. Pourtant, il est manifeste -et la rareté des exemples de terrain comme l'esprit des travaux théoriques le montre bien-, qu'elles ne sont guère employées jusqu'à présent. Si l'absence, dans le passé, de moyens de modélisation est en partie responsable de cet état de fait, d'autres facteurs existent qui sont la cause de la lenteur des progrès. On peut tout d'abord remarquer que le nombre de dispositifs essayés ou à essayer encore est particulièrement important. Le choix de l'un d'eux en tant que "meilleur dispositif possible" est d'autant moins facile qu'il n'existe pas nécessairement de panacée.... D'autre part, de nombreux auteurs ont souligné les délicats problèmes posés par le comportement du coefficient géométrique. L'emploi quasi universel de la notion de résistivité apparente, auquel ils adhèrent, est à l'origine de cette difficulté.

III. LE DISPOSITIF SYMETRIQUE DE PROSPECTION EN FORAGE (DSPF).

Nous avons vu dans le chapitre consacré aux travaux antérieurs que le géophysicien se heurte aux difficultés posées par le comportement particulier du coefficient géométrique. Cet écueil est en réalité lié à l'emploi de la résistivité apparente: celle-ci convient mal à la représentation des résultats de mesure lorsque le coefficient géométrique est sujet à des variations trop importantes.

III.1. Présentation du Dispositif Symétrique de Prospection en Forage (DSPF).

L'idée de base est d'utiliser un dispositif dont le coefficient géométrique est infini. Le dispositif que nous préconisons est représenté sur la figure 24a. Deux électrodes d'émission sont disposées symétriquement par rapport à la tête du forage (supposé vertical, pour l'instant) et restent fixes durant la mesure. Deux électrodes de réception sont placées l'une au-dessus de l'autre avec un écartement constant et constituent la partie mobile dans le forage. Elles permettent l'estimation de la composante verticale du champ électrique (gradient vertical du potentiel). Nous résumons dans les remarques qui suivent les caractéristiques essentielles de ce dispositif.

- en forage vertical et pour un sous-sol présentant une symétrie axiale par rapport au forage, le gradient vertical est nul. Un sous-sol tabulaire, par exemple, ne fournit aucun signal.
- le champ mesuré, s'il n'est pas nul, ne peut être dû qu'à des écarts à cette symétrie. On peut donc dire que l'on mesure un champ secondaire (le champ primaire étant celui qui est dû à la partie symétrique par rapport au forage de la distribution de résistivité).
- il en résulte une bonne sensibilité du dispositif, puisque le champ primaire, considéré comme inintéressant en tant que tel, ne se superpose pas au signal mesuré.

- la résistivité apparente n'est pas définie puisque le coefficient géométrique est infini.

Dans le chapitre II, on aura remarqué la tendance qu'ont les auteurs à éviter ce dernier cas de figure: le rattachement à l'emploi de la résistivité apparente en est la raison. Les configurations pour lesquelles les variations du coefficient géométrique sont importantes sont soigneusement évitées.

Dans le paragraphe suivant, nous analysons cette difficulté avec un point de vue différent.

III.2. Emploi de la résistivité apparente en forage.

Le facteur géométrique et la résistivité apparente sont définis au chapitre I. La résistivité apparente peut être considéré de deux manières:

- 1) c'est la résistivité vraie lorsque le terrain est homogène.
- 2) c'est un moyen de normaliser les mesures par rapport à l'échelle du dispositif et au courant émis.

Dans le domaine de la prospection de surface, ces deux aspects ne sont pas, sauf dans quelques cas, fondamentalement différents. La figure 22 donne un exemple de dispositif de surface pour lequel la résistivité apparente n'est pas définie. En terrain homogène ou même tabulaire, la ligne de mesure MN coïncide avec une équipotentielle: $V_M - V_N$ s'annule. Le coefficient géométrique est :

$$K = \frac{1}{\frac{1}{d(A,M)} - \frac{1}{d(B,M)} - \frac{1}{d(A,N)} + \frac{1}{d(B,N)}} \quad (10)$$

Lorsque $d(AM) = d(BM) = d(AN) = d(BN) = a$, il devient infini.

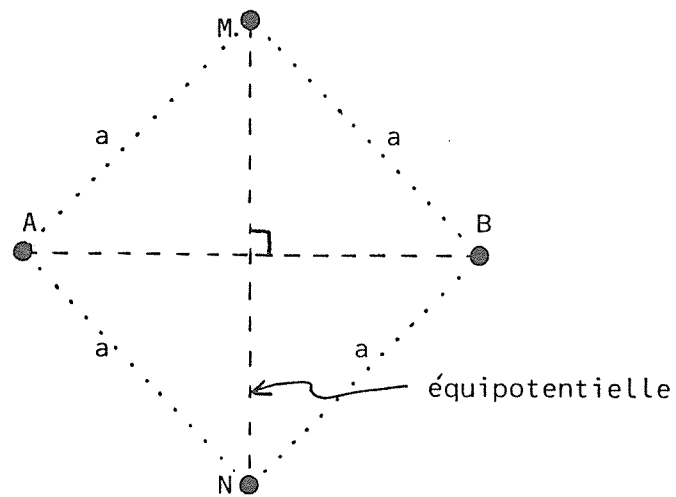
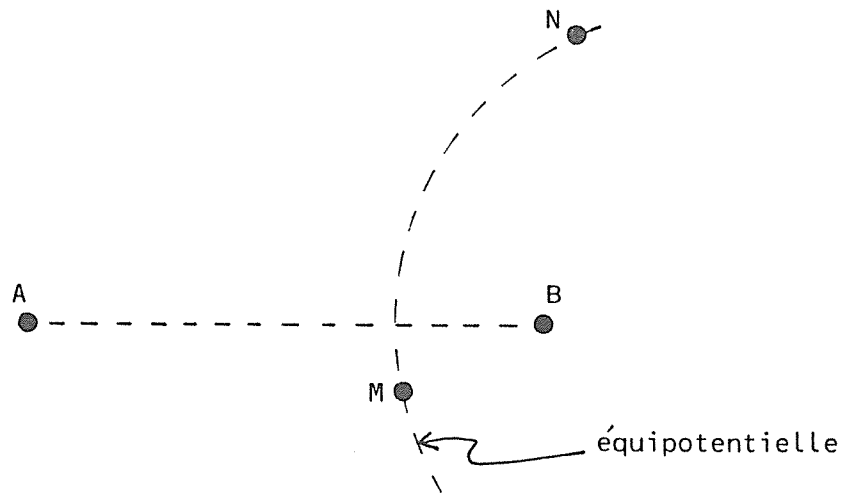


Figure 22: Exemples de dispositifs de surface pour lesquels la résistivité apparente n'est pas définie. Lorsque les électrodes de mesure sont sur une équipotentielle en terrain uniforme, le coefficient géométrique est infini. La figure du bas correspond au calcul présenté dans le texte (électrodes équidistantes).

Imaginons que toutes les distances entre ces électrodes ne soient pas strictement égales:

$$\left| \begin{array}{l} d(A,M) = a + \varepsilon(A,M) \\ d(B,M) = a + \varepsilon(B,M) \\ d(A,N) = a + \varepsilon(A,N) \\ d(B,N) = a + \varepsilon(B,N). \end{array} \right.$$

K vaut alors:

$$K = \frac{1}{\frac{1}{a + \varepsilon(A,M)} - \frac{1}{a + \varepsilon(B,M)} - \frac{1}{a + \varepsilon(A,N)} + \frac{1}{a + \varepsilon(B,N)}} \quad (11)$$

Comme les ε sont petits, on peut faire un développement limité. Il donne:

$$K \approx \frac{a^2}{-\varepsilon(A,M) + \varepsilon(B,M) + \varepsilon(A,N) - \varepsilon(B,N)} \quad (12)$$

Pour peu que le dénominateur ne s'annule pas, K n'est pas infini mais grand. Dans le cas d'un terrain homogène pour lequel:

$$\rho = K \frac{\Delta V}{I}, \quad (13)$$

on voit que la d.d.p. mesurée (ΔV) est petite puisque ρ est borné.

Imaginons à présent l'existence d'une inhomogénéité dans le sous-sol. Celle-ci va être la cause d'une déformation des équipotentiels et va créer une d.d.p. additionnelle $\Delta V'$, positive ou négative, qui peut être bien plus importante en valeur absolue que la d.d.p. ΔV initiale. Avec K très grand, la résistivité "apparente" calculée à l'aide de la formule

ci-dessus va prendre des valeurs aberrantes: elle peut devenir négative si par exemple $\Delta V' + \Delta V < 0$ et $K > 0$.

Le même problème est bien entendu rencontré en forage. Il est même plus aigu du fait que les différentes électrodes évoluent dans l'espace à trois dimensions.

La figure 23 donne un exemple de résistivité apparente négative en forage. Quatre cas sont étudiés en correspondance avec deux résistivités différentes pour la sphère et deux positions de l'électrode de mesure N.

Il existe une solution élémentaire pour éviter les difficultés ainsi liées à l'emploi de la résistivité apparente: ne pas utiliser cette dernière...

C'est la démarche que nous voulons défendre en proposant le "DSPF" décrit dans le précédent paragraphe. Au lieu de la résistivité apparente, on considère directement la mesure de différence de potentiel.

III.3. Exemple de réponse du dispositif à une sphère enfouie.

La figure 24b montre l'anomalie due à une sphère conductrice non-intersectée par le forage. Nous pouvons d'emblée faire les remarques suivantes:

- la forme de l'anomalie est simple. Elle présente un "cross-over" (passage à zéro) à une profondeur voisine du centre de la sphère.
- la distance entre les deux extrema de la courbe semble voisine de la distance de la sphère au forage.

III.4. Effet directionnel.

Il est clair aussi que, par symétrie, l'anomalie s'annule lorsque la sphère se situe dans le plan médiateur des deux électrodes d'émission. Une deuxième mesure, effectuée alors selon une ligne d'injection perpendiculaire à la précédente, permettrait de retrouver l'anomalie.

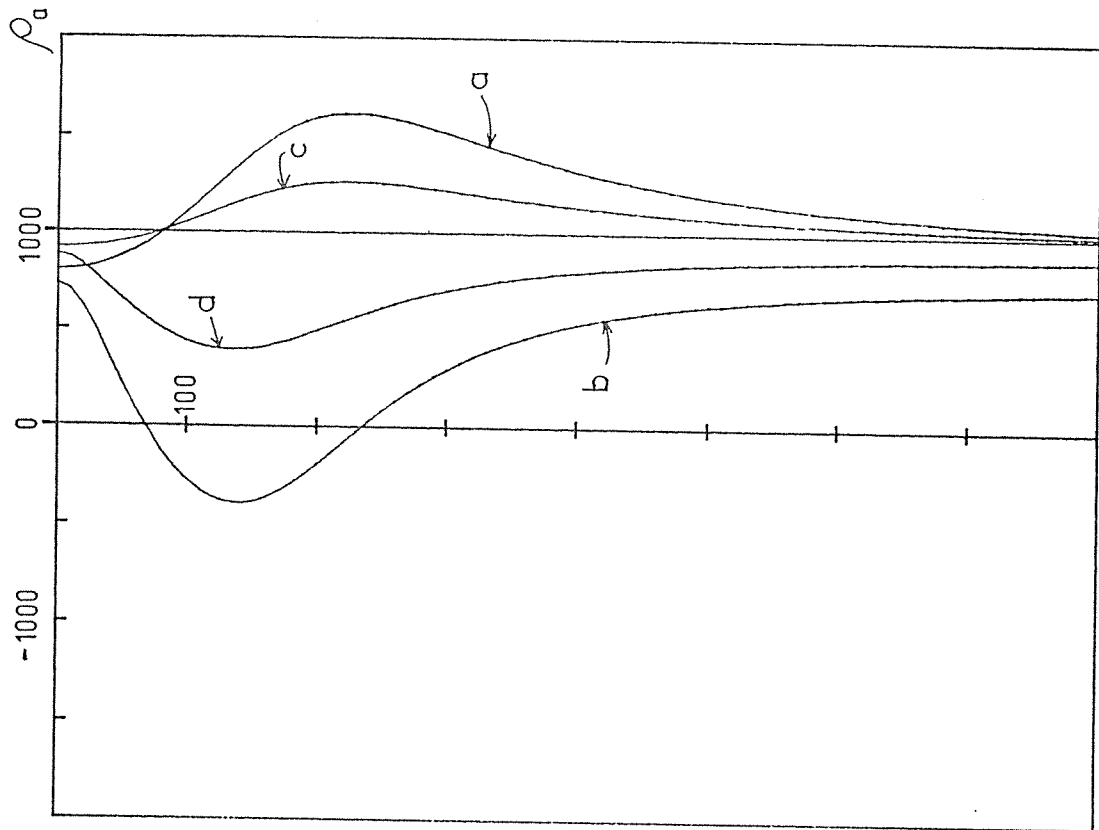
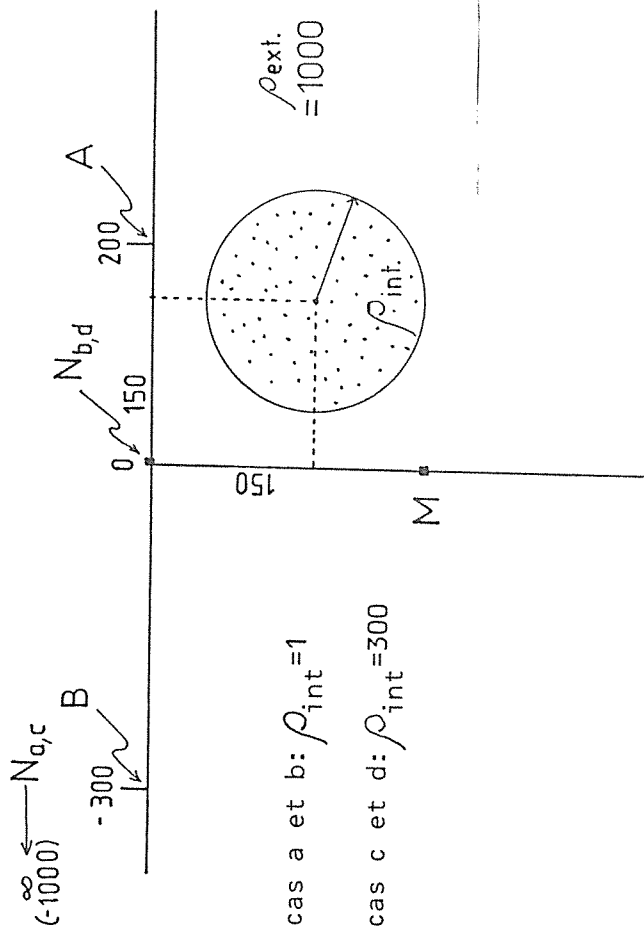


Figure 23: Exemples de résistivités apparentes pour des dispositifs de forage: elles varient dans des proportions importantes et peuvent même être négatives. Dans ce cas de figure, pourtant, le coefficient géométrique ne présente pas de singularité.

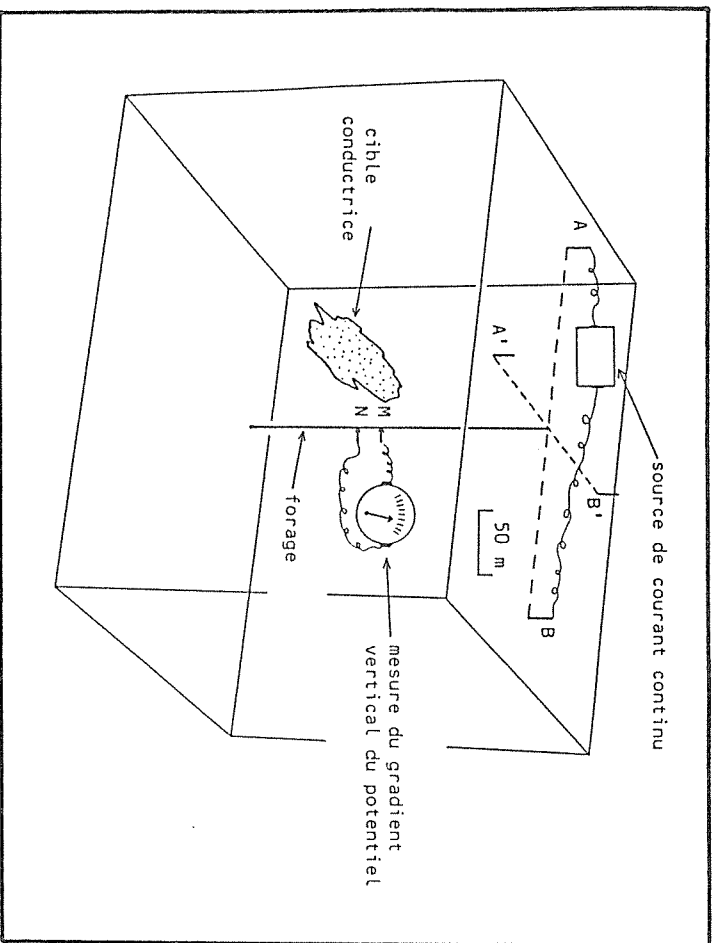


Figure 24a: Dispositif Symétrique de Prospection en Forage (DSPF). Le coefficient géométrique est infini et la résistivité apparente non définie. La mesure présente un effet directionnel: deux directions perpendiculaires de la ligne d'injection (A-B) puis (A'-B') font l'objet de deux enregistrements complémentaires.

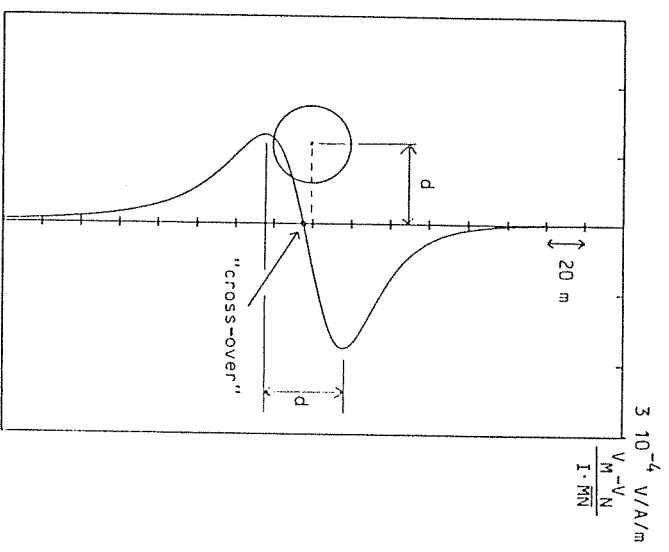
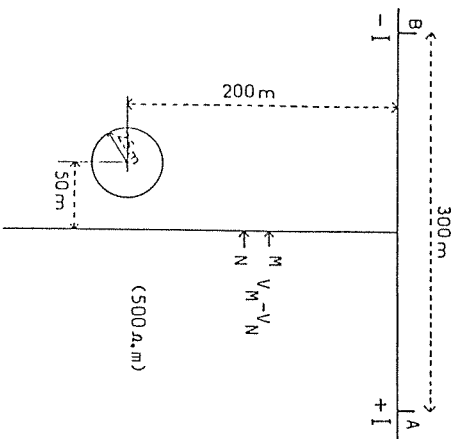


Figure 24b: Exemple de réponse typique due à une sphère parfaitement conductrice avec le dispositif "DSPF" de la figure 24a.

Ainsi, en effectuant deux séries de mesures avec deux lignes d'injection perpendiculaires, il est certainement possible d'obtenir une information sur l'azimuth de la sphère par rapport au forage.

Nous reviendrons largement sur ces différents points dans le chapitre V.

III.5. Cas du forage incliné.

Lorsque le forage n'est pas vertical, les remarques des paragraphes précédents (surtout celles qui concernent le coefficient géométrique) ne sont plus valables. Cependant, il est possible de conserver le même point de vue, moyennant quelques concessions mineures.

Remarquons d'abord qu'il est un peu équivalent de discuter de l'influence de l'inclinaison du forage ou d'un dispositif non strictement symétrique: dans les deux cas, la composante du champ électrique primaire dans le forage ne s'annule plus. Il faut souligner cependant qu'elle présente une évolution lente par rapport à celle qui serait rencontrée au voisinage d'une structure proche du forage.

D'autre part, ce signal "parasite" est très facile à modéliser et donc à éliminer. La figure 105 du chapitre VIII donne un exemple.

Enfin, dans la plupart des cas, l'ordre de grandeur de la profondeur de la cible est connue à l'avance. On peut alors ajuster le dispositif de surface de sorte à minimiser la composante du champ électrique primaire le long du forage au voisinage de cette profondeur.

Pour obtenir ce résultat, un calcul simple suffit (voir la figure 25).

Au point P, le potentiel mesuré est:

$$V(z) = \frac{\rho I}{2 \pi} \left[\frac{1}{d(P,A)} - \frac{1}{d(P,B)} \right]. \quad (14)$$

On peut ne pas tenir compte dans ce calcul de la constante $(\rho I)/(2 \pi)$.

$$\text{On a: } \left\{ \begin{array}{l} d(P,A) = \left[x_1^2 + z^2 - 2 x_1 z \sin(\alpha) \right]^{1/2} \\ d(P,B) = \left[x_2^2 + z^2 + 2 x_2 z \sin(\alpha) \right]^{1/2} \end{array} \right. \quad (15)$$

La nullité de la composante du champ électrique le long du forage équivaut à:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

$$\text{On a: } \frac{\partial V}{\partial z} = - \frac{z - x_1 \sin(\alpha)}{(x_1^2 + z^2 - 2 x_1 z \sin(\alpha))^{3/2}} + \frac{z + x_2 \sin(\alpha)}{(x_2^2 + z^2 + 2 x_2 z \sin(\alpha))^{3/2}} \quad (16)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \text{ définit une relation entre } z, x_1, x_2 \text{ et } \alpha.$$

Normalisons par rapport à x_1 , cad posons:

$$\lambda = z/x_1 \quad \text{et} \quad \mu = x_2/x_1 \quad . \quad (17)$$

On obtient l'équation:

$$\frac{\lambda + \mu \sin(\alpha)}{(\mu^2 + \lambda^2 + 2 \lambda \mu \sin(\alpha))^{3/2}} = \frac{\lambda - \sin(\alpha)}{(1 + \lambda^2 - 2 \lambda \sin(\alpha))^{3/2}} \quad . \quad (18)$$

Le graphe de cette équation (obtenu par la méthode de Newton-Raphson) est représenté sur la figure 26. Cette abaque est effectivement utilisée sur le terrain.

III.6. Distance optimale des électrodes d'émission.

On pourrait penser, a priori, qu'il convient de placer les électrodes d'émission le plus loin possible de la tête du forage de sorte que les lignes de courant pénètrent le plus possible en profondeur. En réalité, lorsque la distance croît, cet effet est bien obtenu, mais la densité de

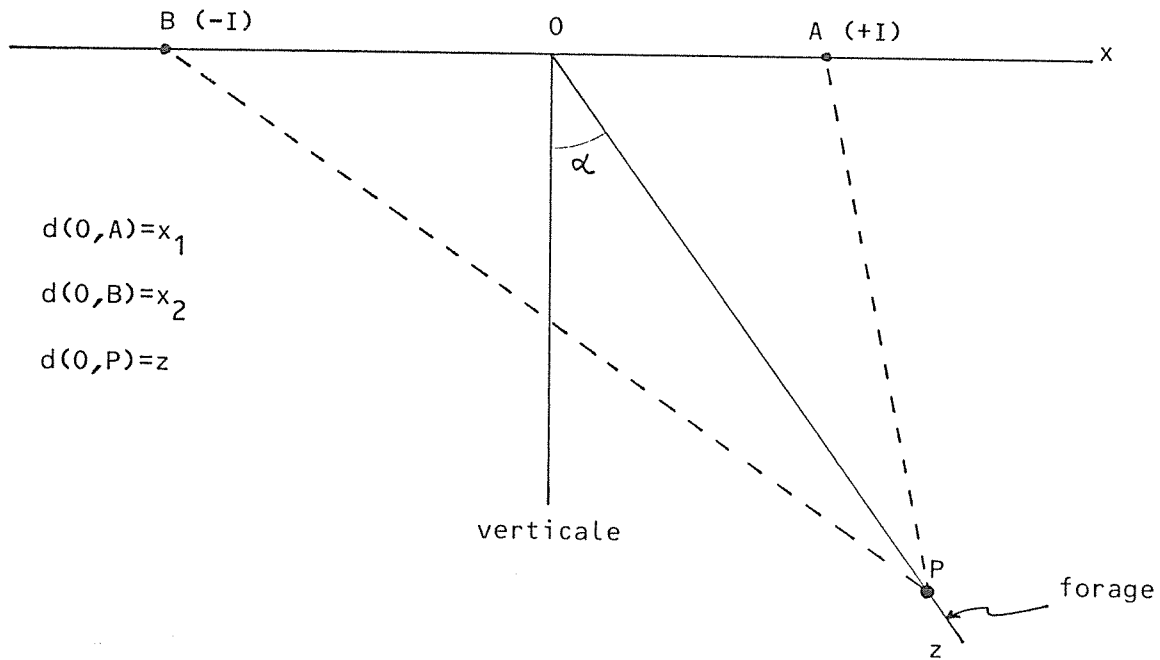


Figure 25: Géométrie pour le calcul des positions optimales des électrodes d'émission de sorte à minimiser la composante du champ normale au forage à une profondeur donnée.

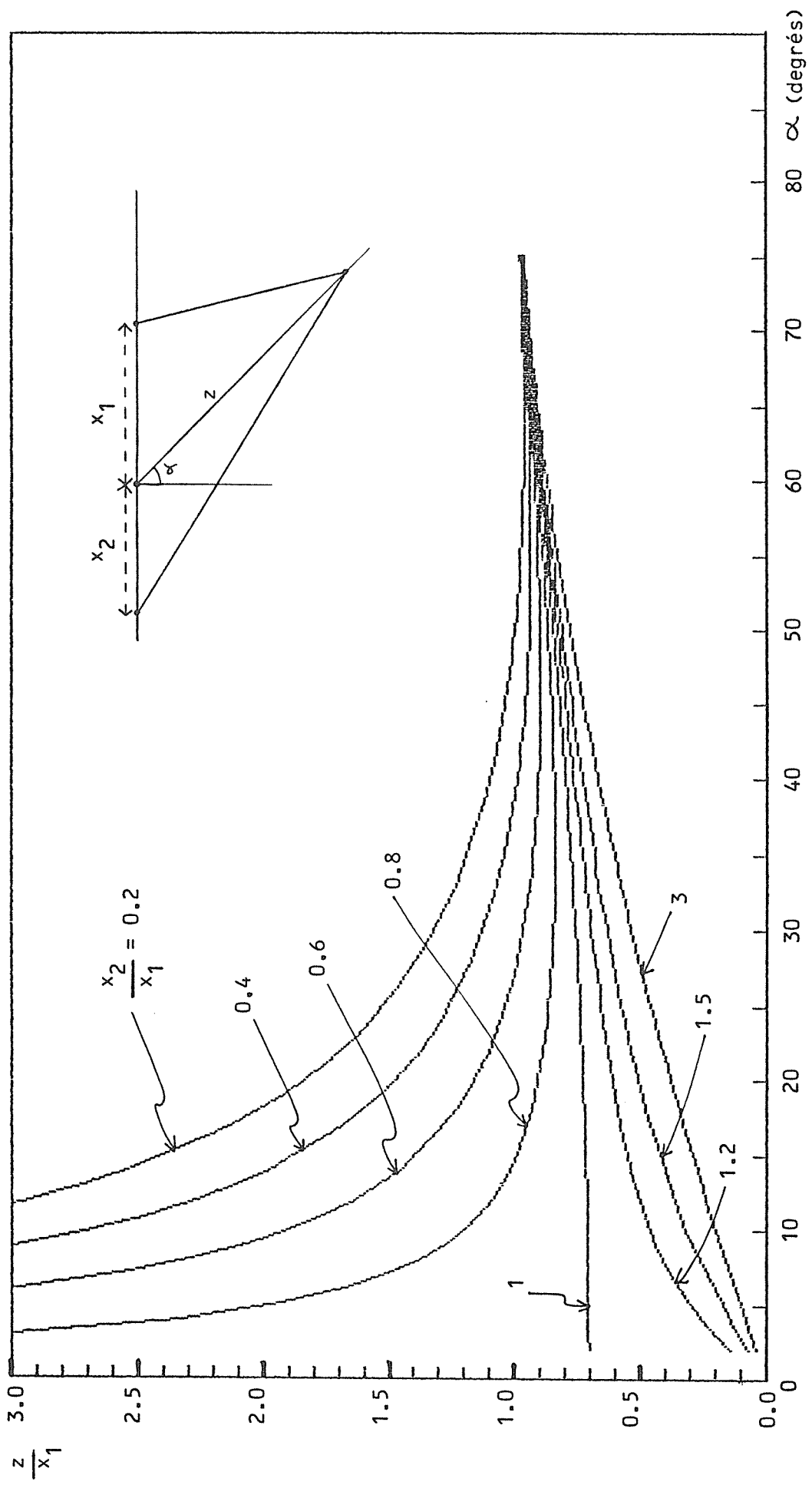


Figure 26: Abaque pour le choix du couple (x_1, x_2) de sorte à minimiser la composante du champ électrique parallèle au forage à une profondeur donnée.

courant (proportionnelle au champ électrique) est alors diminuée. Inversement, si les électrodes d'émission sont trop rapprochées, la densité de courant n'est importante que dans le confinement de ces électrodes. Il existe donc une distance optimale, à déterminer, pour obtenir le meilleur résultat possible. Considérons la figure 27. A une constante près, le champ au point P vaut:

$$\frac{\vec{E}_+}{r^2} + \frac{\vec{E}_-}{r^2} . \quad (19)$$

On peut supposer \vec{E}_+ et \vec{E}_- unitaires. Le module de cette grandeur est clairement $(2 \sin(\vartheta))/r^2$. Comme par ailleurs on a $\sin(\vartheta) = a/r$, on en déduit:

$$|\vec{E}| = \frac{2a}{r^3} = \frac{2a}{(d^2 + a^2)^{3/2}} . \quad (20)$$

Le maximum de cette quantité, en fonction de a, est obtenu en annulant sa dérivée par rapport à a. On obtient:

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}} . \quad (21)$$

III.7. Atténuation naturelle du champ avec la profondeur.

Le champ primaire, horizontal au voisinage du forage, est maximum à la surface et décroît notablement avec la profondeur. Le champ secondaire pouvant être causé, le cas échéant, par l'existence d'un conducteur voisin du forage subit évidemment la même décroissance. Cette "atténuation naturelle" est parfaitement visible sur les enregistrements de terrain, comme nous le verrons au chapitre VIII. Il faut en tenir compte lors de l'examen qualitatif des signaux mesurés sur le terrain: il est même judicieux de la compenser dans un but d'homogénéisation des

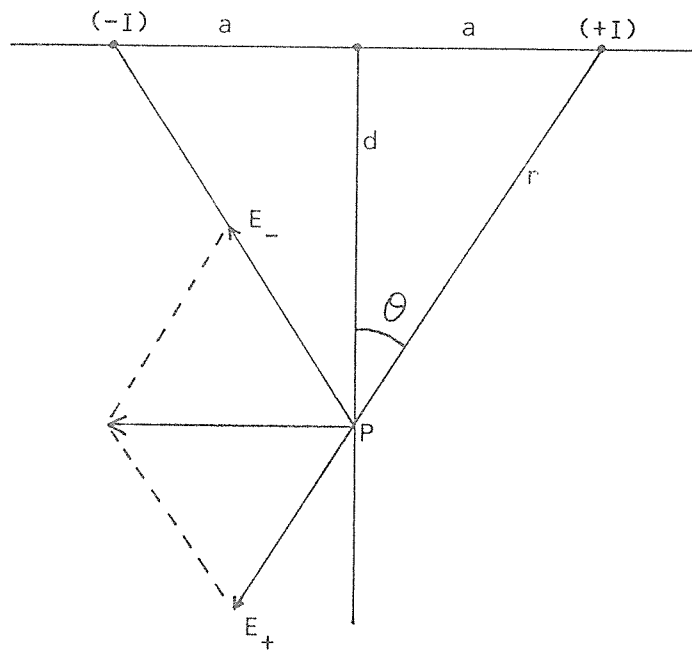


Figure 27: Géométrie pour le calcul de la distance optimale entre les électrodes d'émission de sorte à maximiser le champ primaire à la profondeur d.

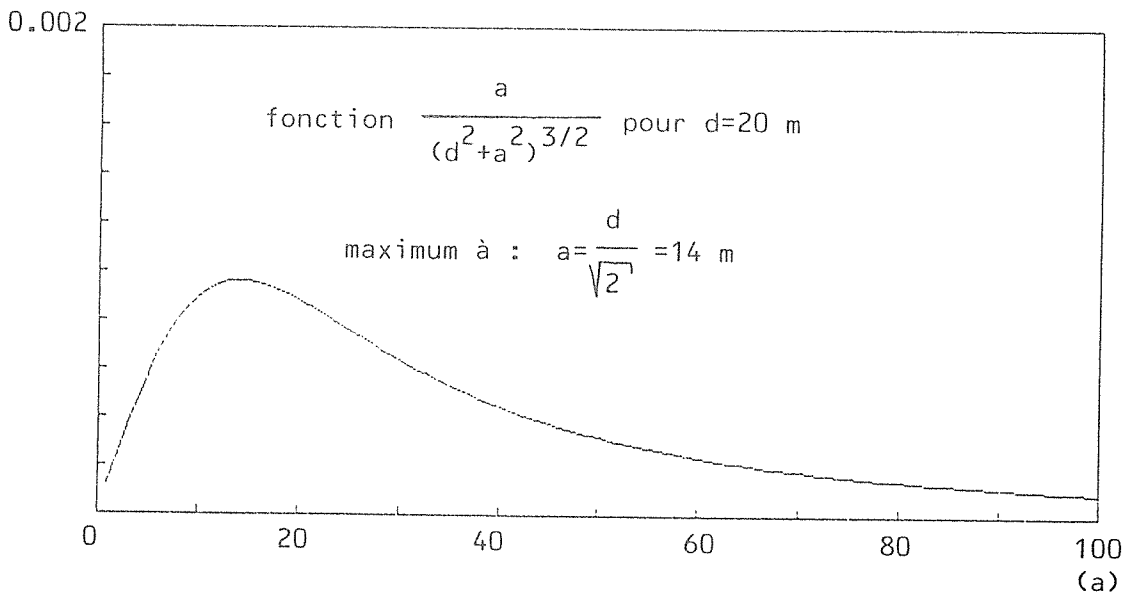


Figure 27bis: Variations du champ primaire à une profondeur donnée lorsque la distance entre les électrodes d'injection varie. Il existe un optimum.

(Cette figure n'est pas citée dans le texte).

mesures. Le champ électrique primaire a déjà fait l'objet d'une évaluation dans le précédent paragraphe. Nous le recalculons ici directement en fonction du potentiel.

Avec les mêmes notations que sur la figure 28a, le potentiel au point P vaut:

$$V(x,z) = \frac{\rho I}{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a+x)^2 + z^2}} \right] \quad (22)$$

On en déduit la valeur du champ horizontal au voisinage du forage et à la profondeur z:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]_{x=0} = \frac{\rho I a}{\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (23)$$

La figure 28b donne le graphe de cette fonction.

Pour corriger les mesures de cette atténuation, il suffit de les multiplier par le coefficient:

$$\frac{(a^2 + z^2)^{3/2}}{a^3} \quad (24)$$

Il est choisi de sorte qu'en surface il vaille 1.

III.8. Fonction de transfert du dispositif de mesure.

La mesure que l'on veut effectuer est celle de la composante verticale du champ électrique. On obtient une approximation de cette grandeur par la mesure effective d'une différence de potentiel entre deux électrodes. Le propos de ce paragraphe est l'estimation de l'erreur due à cet

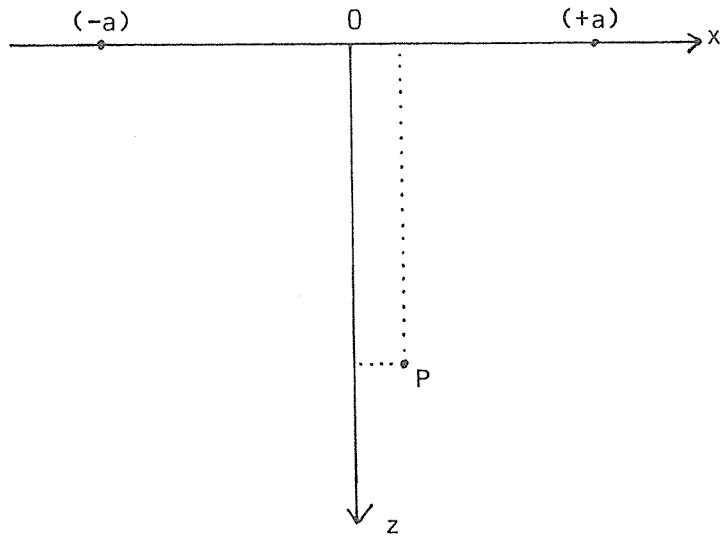


Figure 28a: Géométrie pour le calcul de l'atténuation naturelle du champ avec la profondeur.

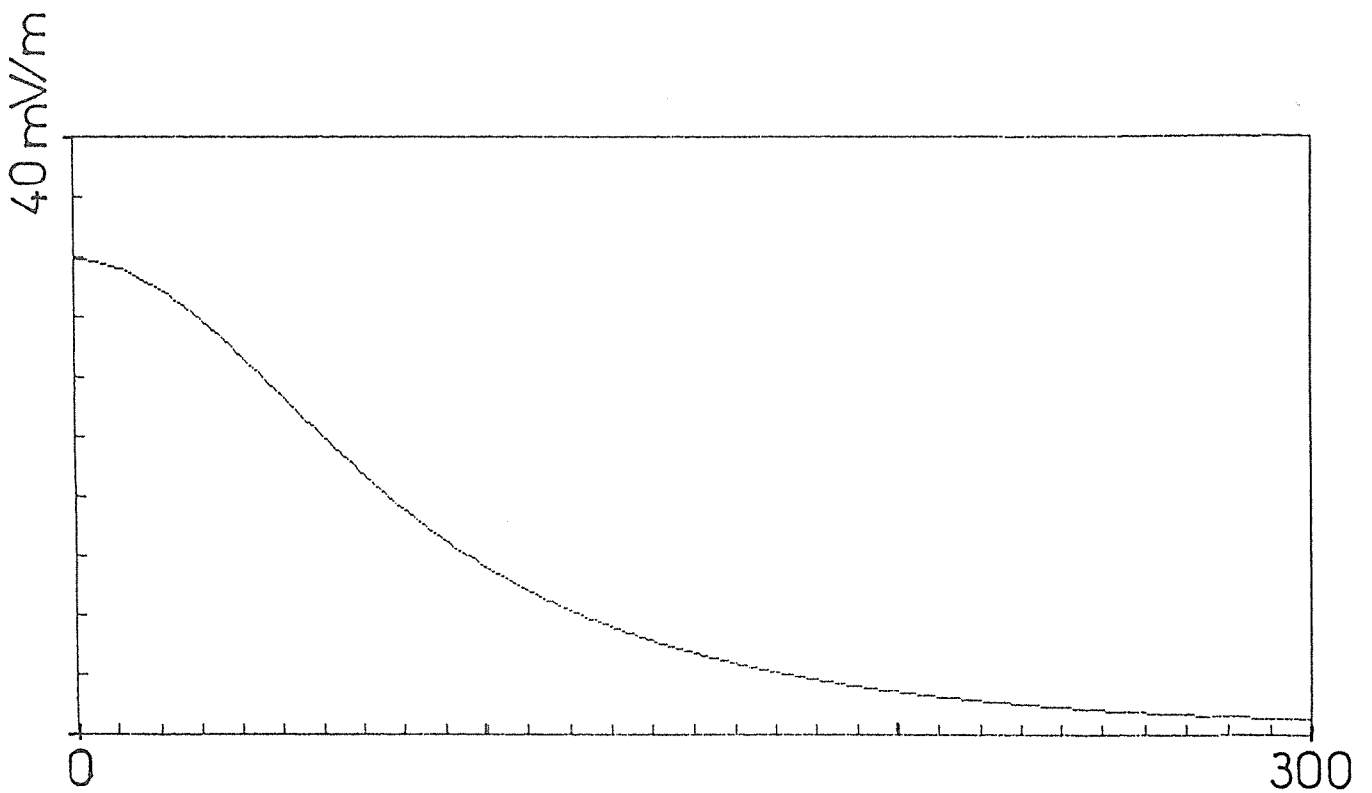


Figure 28b: Atténuation naturelle du champ primaire (horizontal) au voisinage d'un forage . La fonction tracée est : $\frac{\rho I a}{\pi (a^2+z^2)^{3/2}}$ avec $\begin{cases} a=100\text{m} \text{ et } \rho = 1000 \Omega \cdot \text{m} \\ I=1 \end{cases}$

artifice imposé par la technologie instrumentale.

Au sens des distributions, la mesure devrait correspondre à la quantité:

$$E_z = \frac{\partial V}{\partial z} = V * \delta' \quad . \quad (25)$$

δ est la distribution de Dirac et l'étoile désigne la convolution.

En réalité, on ne sait mesurer que:

$$\frac{1}{a} V * \left[\delta(z + a/2) - \delta(z - a/2) \right] \quad (26)$$

Cette grandeur tend évidemment vers E_z lorsque a (qui est la distance entre les deux électrodes de réception) tend vers zéro.

La fonction de transfert par rapport au potentiel de l'opérateur de dérivation idéal δ' est bien connue: elle vaut $i\omega$. Avec l'opérateur approximatif défini ci-dessus, la fonction de transfert devient:

$$\frac{1}{a} \left[\exp(i\omega a/2) - \exp(-i\omega a/2) \right] = \frac{2i}{a} \sin(\omega a/2) \quad . \quad (27)$$

Lorsque $a\omega \ll 1$ (condition vérifiée si $a \ll \lambda_m$, où λ_m est la plus petite longueur d'onde spatiale contenue dans le signal), cette fonction vaut asymptotiquement $i\omega$: on retrouve bien l'opérateur de dérivation idéal.

La figure 29 donne le graphe de cette fonction de transfert (plus précisément de la fonction $\sin(\omega a/2)$). L'échelle est linéaire en $\lambda = 2\pi/\omega$ et les valeurs de a sont celles que nous utilisons sur le terrain. Il est clair que l'information située avant le dernier zéro de la fonction n'est guère exploitable. La figure 30a montre l'altération d'une anomalie d'une

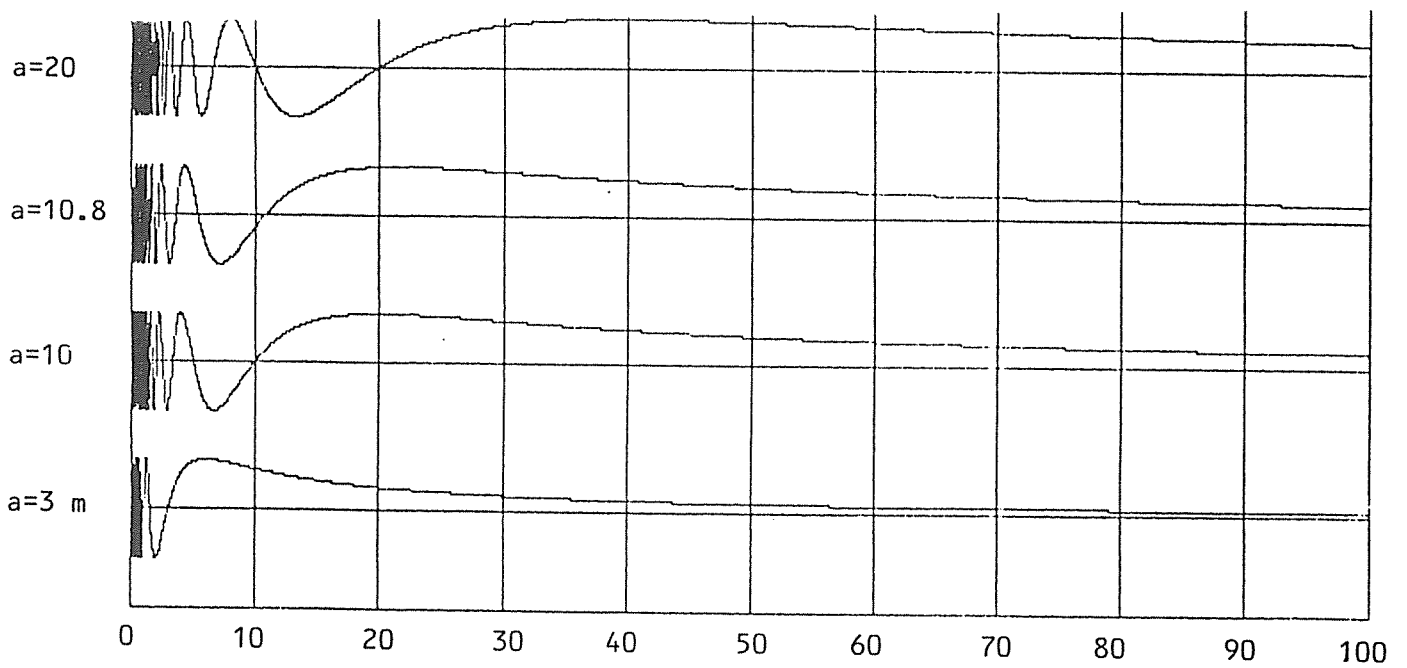


Figure 29: Fonction de transfert du bipole de mesure par rapport au potentiel.
 En abscisse, l'échelle est linéaire en λ .
 Les différentes valeurs de a (écartement des électrodes) correspondent à celles qui sont effectivement utilisées sur le terrain.

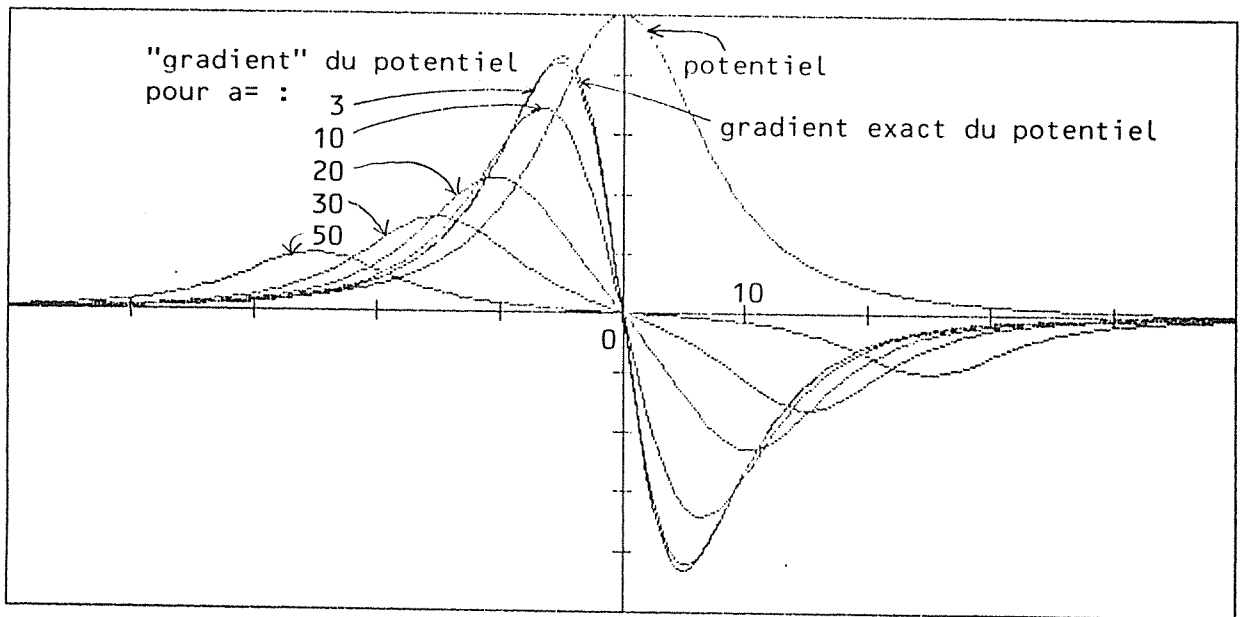


Figure 30a: Altération de l'anomalie due à une sphère lorsque divers écartements du bipole de mesure sont employés. La sphère est située à 10 m du forage. A partir de $a=10$ m, l'erreur devient très importante.

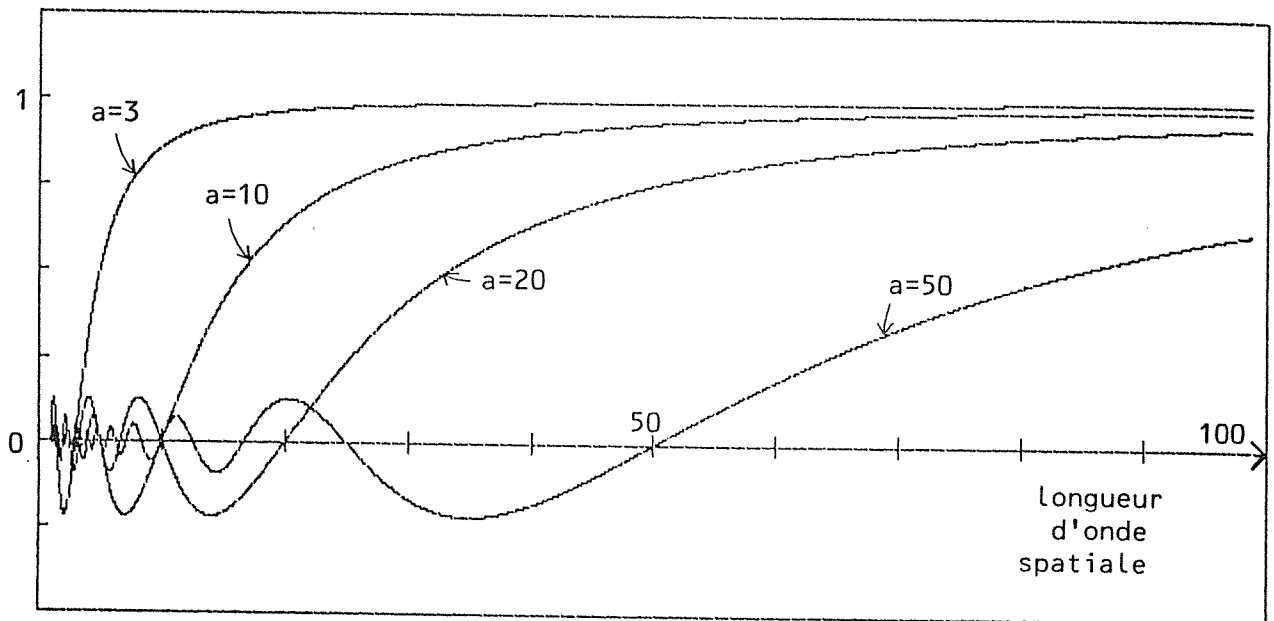


Figure 30b: Fonction de transfert du dispositif de mesure par rapport au gradient vrai et pour diverses valeurs de l'écartement a . Les grands écartements induisent des erreurs très importantes et doivent, autant que faire ce peut, être évités. L'écartement minimum requis dépend de l'échelle globale du dispositif et de la résistivité de l'enceinte.

sphère placée à une dizaine de mètres d'un forage. Au-delà de $a=15\text{m}$, la fonction est fortement modifiée.

Enfin, la figure 30b donne l'allure de la fonction de transfert du dispositif mais par rapport à l'opérateur de dérivation idéal. Il s'agit plus précisément du rapport:

$$\frac{\frac{2 i}{a} \sin \left[\frac{\omega a}{2} \right]}{i \omega} . \quad (28)$$

III.9. Conclusion sur le DSPF.

Conjointement à l'abandon de l'usage de la résistivité apparente, le DSPF peut présenter certains avantages sur d'autres dispositifs de prospection en forage. Il constitue un choix très particulier et semble déjà, à ce stade de l'étude, posséder des propriétés avantageuses:

- il mesure le seul champ secondaire
- la forme des anomalies est simple
- il présente un effet directionnel.

Le chapitre V permettra d'appuyer ces arguments.

CHAPITRE IV. THEORIE DES MODELES.

Modélisation analytique et modélisation numérique.

Le terme de solution analytique s'emploie habituellement lorsque l'on a su, suite à un certain nombre de calculs littéraux, expliciter les inconnues d'une équation en fonction des divers paramètres. Une solution numérique, par contre, ne correspond pas à une expression explicite de la solution. Elle procède d'opérations effectuées sur des chiffres et le calcul doit être recommencé chaque fois qu'un paramètre est modifié. Le calcul, purement numérique, consiste souvent en une suite d'opérations élémentaires. La solution ne peut être qu'approchée. Cependant, elle peut être aussi précise que l'on veut, pour peu que l'on s'en donne les moyens.

Le nombre de problèmes solubles analytiquement est très faible. Seuls certains cas simples peuvent être abordés de la sorte, et l'on montre souvent qu'il ne peut pas en être autrement. Les méthodes numériques permettent en revanche d'aborder une classe très étendue de problèmes. Elles nécessitent cependant des moyens de calcul très importants.

IV.I. Modèles analytiques.

Le calcul du potentiel au voisinage d'une structure par une méthode analytique n'est possible que si l'on sait remplir les deux conditions suivantes:

- il faut disposer d'un système de coordonnées tel que les "lignes de coordonnée" décrivent les surfaces délimitant les structures.
- il faut que l'équation de Laplace soit au moins "partiellement séparable" dans ce système de coordonnées.

Avant de rentrer plus en détail dans ces différentes questions, notons que pour les modèles 3D intervenant en géophysique, seuls sont abordés ici:

- la sphère en terrain uniforme (coord. sphériques)
- la sphère dans un demi-espace uniforme (coord. bisphériques)
- les ellipsoïdes de révolution, appelés sphéroïdes (coor. sphéroïdales).

Morse et Feshbach [33] fournissent une liste exhaustive des systèmes de coordonnées dans lesquels l'équation de Laplace est soluble. Certains, comme le système toroïdal, sont dénués d'intérêt pour nous. D'autres, comme le système conique, peuvent être utiles dans certains cas.

On peut penser, a priori, que le faible nombre de structures abordables par des méthodes analytiques (ajouté au faible nombre de degrés de liberté associé à ces structures) limite considérablement l'intérêt de leur emploi. Il n'en est cependant rien. En effet:

- un calcul analytique est particulièrement rapide. On peut donc se permettre d'étudier un grand nombre de cas de figure.
- les structures simples sont souvent suffisantes pour modéliser en pratique des structures géologiques réelles. Cela tient au caractère "spatio-convolutif" des phénomènes physiques: tout se passe, mathématiquement et physiquement comme si l'espace se comportait comme un filtre passe-bas. Loin d'une structure, les détails de celle-ci perdent toute influence sur la mesure effectuée: on ne peut deviner que les "grandes lignes" du corps responsable de l'anomalie.
- sur calculateur, la mémoire requise pour un calcul analytique est faible. On peut facilement implanter des algorithmes sur "micro-ordinateur", voire sur une simple calculatrice programmable.

Présentons à présent plus en détail les techniques de résolution de l'équation quasi-harmonique .

Résolution de l'équation quasi-harmonique par les méthodes analytiques.

En réalité, c'est l'équation de Laplace que l'on cherche à résoudre dans chaque partie uniforme du domaine. Les solutions sont "connectées" entre elles par l'intermédiaire de conditions aux limites valables sur les interfaces séparant les différentes régions. Nous reprenons dans la

suite le résumé du procédé tel que le décrivent Cook et Van Nostrand [7]:

** choix du système de coordonnées approprié. On doit pouvoir décrire les limites des structures par des expressions simples de ces coordonnées (par exemple: $r = \text{constante}$ décrit la sphère en coord. sphériques).

** établir la forme de l'équation de Laplace dans ce système et calculer sa solution. C'est un travail qui a été fait par les mathématiciens et qui est exposé dans les bons ouvrages (voir par exemple Angot [1]).

** trouver l'expression dans la base de fonction où s'exprime la solution de la distance (dite "distance réciproque") entre deux points quelconques.

** résolution finale. On introduit les conditions aux limites dans les solutions de Laplace des différents domaines de l'espace.

Ces conditions, au nombre de cinq, sont les suivantes:

1) au voisinage de la source, le potentiel doit valoir asymptotiquement:

$$\frac{\rho I}{4 \pi R} \text{ (espace complet) } \quad \text{ou} \quad \frac{\rho I}{2 \pi R} \text{ (demi-espace)}$$

ρ est la résistivité

I le courant

R la distance à la source (supposée ponctuelle).

C'est l'application de cette condition qui nécessite l'expression de la "distance réciproque".

2) à grande distance de la source, le potentiel varie comme $1/R$

3) le potentiel doit être partout continu (sauf à la source).

4) sur un interface, la composante normale de la densité de courant:

$$J_n = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial n}$$

doit être continue.

5) sauf à la source, la solution doit partout être bornée.

Ces différentes étapes ne sont pas toujours explicites dans la littérature. Cependant, l'usage de certaines simplifications n'enlève rien à leur caractère général. Pour notre part, nous ne détaillerons le calcul complètement que dans un seul cas: celui de la sphère en terrain homogène. Pour l'ellipsoïde aplati, on détaillera, également à titre d'exemple, la manière d'appliquer les conditions aux interfaces.

Remarque sur les aspects mathématiques.

Nous avons traité les modèles sphériques et sphéroïdaux dans un espace ou un demi-espace uniforme. Ils font largement appel aux fonctions de Legendre (voir Robin [36]).

Habituellement, ces dernières sont évaluées par interpolation à partir de tables. Nous n'avons pas retenu cette solution pour les raisons suivantes:

- l'ordre et le degré des fonctions est limité.
- le stockage des tables en mémoire machine pose des problèmes.

Jugeons ce dernier point. Pour $m \leq M$ et $n \leq N$, on compte

$$\frac{(N+1)(N+2)}{2} - \frac{(N-M)(N-M+1)}{2} \quad \text{fonctions à tabuler.}$$

(Cela correspond par exemple aux fonctions P_n^m).

Pour $N = 10$ et $M = 4$, on obtient 45 fonctions. A raison d'une centaine de points par fonction, il faut 4500 valeurs en mémoire. Pour certains

modèles, quatre types différents de fonctions sont nécessaires ! Nous avons préféré avoir à calculer ces fonctions directement. Les annexes 1 et 2 contiennent d'une part un formulaire pratique pour ces calculs, d'autre part les démonstrations des résultats donnés dans le formulaire. (Nous n'avons pas trouvé dans la littérature classique concernant les fonctions de Legendre (Robin [36], Hobson [20]) de formulaire équivalent).

IV.1.1 Sphère dans un espace uniforme (champ polaire).

Nous présentons pour ce modèle l'ensemble du processus de résolution de l'équation de Laplace.

On utilise naturellement le système de coordonnées sphériques:

$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{cases} \quad (29)$$

L'équation de Laplace s'écrit, dans ce système:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right] + \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\sin(\vartheta) \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right] + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (30)$$

Pour la résoudre, on utilise la méthode de séparation des variables. Elle consiste à supposer que la solution peut s'écrire comme le produit de trois fonctions ne dépendant chacune que d'une variable. La justification d'un tel procédé est a posteriori: elle repose sur la complétude de la solution obtenue.

$$\text{On écrit donc:} \quad U = R(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi). \quad (31)$$

En substituant dans l'équation précédente:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{\Theta \sin(\vartheta)} \frac{d}{d\vartheta} \left[\sin(\vartheta) \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right] + \frac{1}{\Phi \sin^2(\vartheta)} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0 \quad (32)$$

Le premier terme ne contient que la variable r , tandis que les deux autres ne contiennent que ϑ et φ .

Si cette somme de trois termes est nulle alors que l'on peut faire varier le premier terme indépendamment des deux autres, c'est que ce premier terme reste constant. Par commodité, cette constante est prise égale à $n(n+1)$. On obtient donc:

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR_n}{dr} \right] - n(n+1) R_n = 0 \quad (33)$$

(R dépendant de n , on le note R_n . On montre que n peut être un entier).

Sa solution est:

$$R_n = A_n r^n + B_n r^{-n-1} . \quad (34)$$

Laissant maintenant de côté le premier terme de l'équation 32 pour nous intéresser aux deux autres. En appliquant le même raisonnement, (après multiplication par $\sin^2(\vartheta)$), on obtient une première équation en prenant la constante égale à $(-m^2)$:

$$\frac{d^2 \Phi_m}{d\varphi^2} + m^2 \Phi_m = 0. \quad (35)$$

On en déduit: $\Phi_m = C_m \cos(m \varphi) + D_m \sin(m \varphi).$ (36)

Cette solution doit clairement être périodique en φ : m est donc un entier. Par ailleurs, on remarque que par symétrie, la solution doit être paire. Il est donc suffisant de ne conserver que le terme en cosinus et les valeurs positives de m .

Injectons à présent les expressions déjà obtenues pour Φ et R dans l'équation de départ. On obtient:

$$\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{d}{d\vartheta} \left[\sin(\vartheta) \frac{d\Theta_{mn}}{d\vartheta} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2(\vartheta)} \right] \Theta_{mn} = 0 \quad (37)$$

La solution de cette équation, moins élémentaire, est de la forme:

$$\Theta_{mn} = E_{mn} P_n^m(\cos \vartheta) + F_{mn} Q_n^m(\cos \vartheta). \quad (38)$$

Les P_n^m et Q_n^m sont les fonctions associées de Legendre de première et deuxième espèce respectivement. Notons que, mais sans rentrer dans les détails, que les propriétés de ces fonctions imposent ici:

$$0 \leq m \leq n$$

m est entier

De plus, lorsque $\vartheta \rightarrow k\pi$, on a $\cos(\vartheta) \rightarrow \pm 1$ et alors $Q_n^m(\cos \vartheta) \rightarrow \pm \infty$.

Comme dans le "produit de Laplace" $R(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi)$, aucun terme ne vient compenser cette croissance, il faut nécessairement $F_n^m = 0$.

La solution générale s'écrit alors:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{mn} r^n + B_{mn} r^{-n-1}) P_n^m(\cos \vartheta) \cos(m \varphi). \quad (39)$$

On peut, sans perte de généralité, placer la source sur l'axe des z .

La solution est alors indépendante de φ . Elle vaut:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n^0(\cos \vartheta). \quad (40)$$

($P_n^0 = P_n$ sont les polynômes de Legendre).

(Ce résultat peut d'ailleurs s'obtenir directement de l'équation initiale si on néglige tout de suite la dépendance en φ).

Dans toute la suite, R représente la distance réciproque et non plus un terme du produit de Laplace. Estimons cette distance sur la base des polynômes de Legendre.

Sur la figure 31, on a:

$$R = \left[r^2 + z_o^2 - 2 r z_o \cos(\vartheta) \right]^{1/2}$$

ou encore:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{z_o} \left[1 + \left[\frac{r}{z_o} \right]^2 - \frac{2 r}{z_o} \cos(\vartheta) \right]^{-1/2} \quad (42)$$

C'est la célèbre "fonction génératrice" des polynômes de Legendre (voir par exemple Hobson [20]). On peut écrire:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{z_o} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{r}{z_o} \right]^n P_n(\cos \vartheta) . \quad (43)$$

Pour assurer la convergence de la série, il faut ici $r < z_o$. Lorsque $r > z_o$, il convient de prendre:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z_o}{r} \right]^n P_n(\cos \vartheta) . \quad (44)$$

Cherchons à présent le potentiel au voisinage d'une sphère de rayon a et de résistivité ρ_2 dans un terrain uniforme de résistivité ρ_1 .

Le potentiel est de la forme (équation 40):

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n(\cos \vartheta) . \quad (45)$$

Supposons dans un premier temps que la source de courant se trouve à l'extérieur de la sphère ($z_o > a$). Il convient alors d'ajouter à U ci-dessus le terme $(I \rho_1)/(4 \pi R)$. Ce dernier garantit un bon comportement asymptotique du potentiel au voisinage de la source. Si on

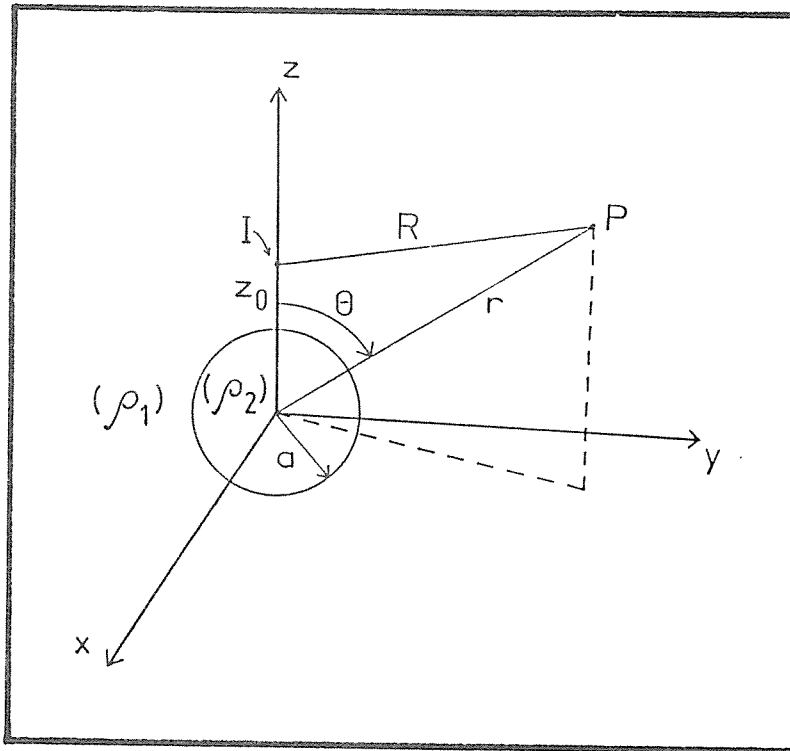


Figure 31: Paramètres et géométrie pour le modèle de la sphère dans un espace uniforme.

suppose également que le point de mesure est à l'extérieur de la sphère, cad dans le domaine où r peut tendre vers l'infini, il ne faut pas inclure dans l'expression du potentiel le facteur comportant r^n , sinon $U \rightarrow \infty$ lorsque $r \rightarrow \infty$. Il reste donc, pour $r > a$ et $z_0 > a$:

$$V_{\text{ext}} = V_1 = \frac{I \rho_1}{4 \pi R} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta). \quad (46)$$

A l'intérieur de la sphère, le terme $(I \rho_1)/(4 \pi R)$ est inutile et seul le facteur comportant r^n doit être conservé (car $r^{-n-1} \rightarrow \infty$ au centre de la sphère):

$$V_{\text{in}} = V_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n P_n(\cos \vartheta). \quad (47)$$

Appliquons à présent les conditions aux limites habituelles pour les courants continus:

$$\text{en } r = a, \text{ on a : } \left| \begin{array}{l} V_1 = V_2 \\ \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial r} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_2}{\partial r} \end{array} \right. \quad (48)$$

Avec (46) et (47), ces conditions impliquent:

$$\left| \begin{array}{l} A_n = \frac{I \rho_1}{4 \pi} \frac{a^{2n+1}}{z_0^{n+1}} \frac{n (\rho_2 - \rho_1)}{n \rho_1 + (n+1) \rho_2} \\ B_n = \frac{I \rho_1}{4 \pi} \frac{1}{z_0^{n+1}} \frac{(2n+1) \rho_2}{n \rho_1 + (n+1) \rho_2} \end{array} \right. \quad (49)$$

Ceci complète la solution lorsque la source est à l'extérieur de la sphère.

Donnons, sans démonstration, la valeur du potentiel pour une source de courant placée à l'intérieur de la sphère. On a (voir par exemple Wait [41]):

$$\left| \begin{aligned} V_{\text{ext}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta) \\ V_{\text{in}} &= \frac{I \rho_2}{4 \pi R} + \sum_{n=0}^{\infty} S_n r^n P_n(\cos \vartheta) \end{aligned} \right. \quad (50)$$

avec:

$$\left| \begin{aligned} T_n &= \frac{(2n+1) \rho_1 z_0^n}{(n+1) \rho_2 + n \rho_1} \frac{I \rho_2}{4 \pi} \\ S_n &= \frac{I \rho_2}{4 \pi} \frac{(n+1)(\rho_1 - \rho_2)}{(n+1) \rho_2 + n \rho_1} \frac{z_0^n}{a^{2n+1}} \end{aligned} \right. \quad (51)$$

Champ lorsque la source est à grande distance de la sphère.

Ce cas correspond à $a \ll z_0$. (46) peut s'approximer par:

$$V_{\text{ext}} = \frac{I \rho_1}{4 \pi R} + \frac{A_1}{r^2} \cos(\vartheta) \quad ; \quad \text{avec: } A_1 = \frac{I \rho_1}{4 \pi} \frac{a^3}{z_0^2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + 2\rho_2} \quad (52)$$

On peut encore écrire:

$$V_{\text{ext}} = \frac{I \rho_1}{4 \pi R} + \frac{(\rho_1 - \rho_2) a^3 E_0 \cos(\vartheta)}{\rho_1 + 2\rho_2 r^2} \quad ; \quad \text{avec: } E_0 = \frac{-\rho_1 I}{4 \pi z_0^2} \quad (53)$$

Au voisinage de la sphère, le premier terme de cette expression varie plus lentement que le second. Par ailleurs, E_0 peut s'identifier à un champ électrique primaire qui existerait dans la direction $\vartheta = 0$ en l'absence de structure. D'une manière générale, le deuxième terme constituera la partie prépondérante de l'anomalie créée par une sphère.

Il nous permet de caractériser aisément cette anomalie. Ainsi:

- l'anomalie varie comme le volume de la sphère
- le terme anomalique varie géométriquement comme $\cos(\vartheta)/r^2$: la sphère se comporte comme un dipôle.
- le moment dudit dipôle serait $a^3(\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + 2\rho_2)$

On voit que, dans l'espace des paramètres, sur une hyper-surface d'équation $a^3(\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + 2\rho_2) = \text{constante}$, l'anomalie ne dépend que des autres termes de la série. C'est un point important sur lequel nous reviendrons.

IV.1.2. Sphère dans un espace uniforme (champ homogène).

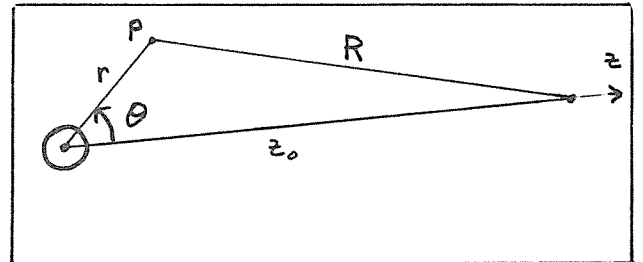
Le cas du champ primaire homogène est obtenu en éloignant la source à l'infini. Il est intéressant en pratique du fait de sa simplicité. Dans l'étude précédente, pour laquelle on avait pris $a \ll z_0$, nous avons obtenu l'expression:

$$V_{\text{ext}} = \frac{I \rho_1}{4 \pi R} + \frac{(\rho_1 - \rho_2) a^3 E_0 \cos(\vartheta)}{\rho_1 + 2\rho_2 r^2}; \text{ avec: } E_0 = \frac{-\rho_1 I}{4 \pi z_0^2} \quad (54)$$

Sur la figure, on voit que pour R très grand, on a:

$$R \approx z_0 - r \cos(\vartheta) \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où: } \frac{I \rho_1}{4 \pi R} &\approx \frac{I \rho_1}{4 \pi z_0 (1 - r \cos(\vartheta)/z_0)} \\ &\approx \frac{I \rho_1}{4 \pi z_0} (1 + r \cos(\vartheta)/z_0) \end{aligned} \quad (56)$$



$$\text{Ainsi: } V_{\text{ext}} = \frac{I \rho_1}{4 \pi z_0} + \frac{I \rho_1 r \cos(\vartheta)}{4 \pi z_0^2} + \frac{(\rho_2 - \rho_1) a^3 \cos(\vartheta) r I \rho_1}{(\rho_1 + 2\rho_2) r^3 4 \pi z_0^2}. \quad (57)$$

Le premier des termes est constant: on peut ne pas en tenir compte dans l'expression d'un potentiel. Il reste:

$$V_{\text{ext}} = - E_0 r \cos(\vartheta) \left[1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + 2 \rho_2} \left[\frac{a}{r} \right]^3 \right]. \quad (58)$$

Cette expression donne le potentiel au voisinage d'une sphère soumise à un champ primaire homogène parallèle à l'axe des z. Elle permet de se faire une première idée sur la forme de l'anomalie que l'on va rencontrer avec le modèle sphérique.

IV.1.3. Sphère dans un demi-espace uniforme.

(Champ polaire et méthode des images).

La "méthode des images" est largement décrite par Cook et Van Nostrand [7]. Nous utiliserons une version simplifiée de ce procédé.

La présence de l'interface sol-air introduit une condition aux limites supplémentaire: aucun courant ne peut traverser la surface. Mathématiquement, cela s'écrit:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]_{z=0} = 0. \quad (59)$$

La méthode des images simplifiée revient à obtenir cette condition en imposant à la solution une symétrie par rapport à la surface. Avec la configuration de la figure 32a, les équipotentielles sont nécessairement orthogonales à la surface.

En principe, il faut résoudre l'équation quasi-harmonique en tenant compte des deux structures et notamment de leur interaction. Dans la méthode simplifiée, on néglige cette dernière: on additionne simplement

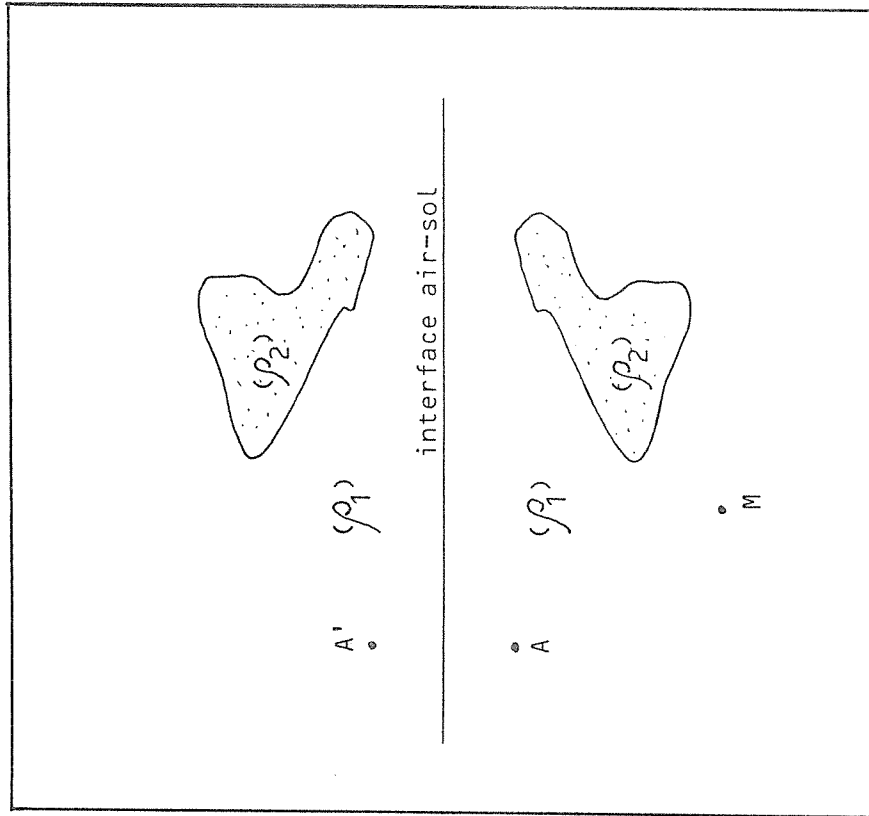


Figure 32a: Configuration permettant l'application de la méthode des images. L'interface air-sol devient plan de symétrie des distributions de sources et de résistivité. Par symétrie, aucun courant ne peut traverser l'interface; la condition naturelle est vérifiée.

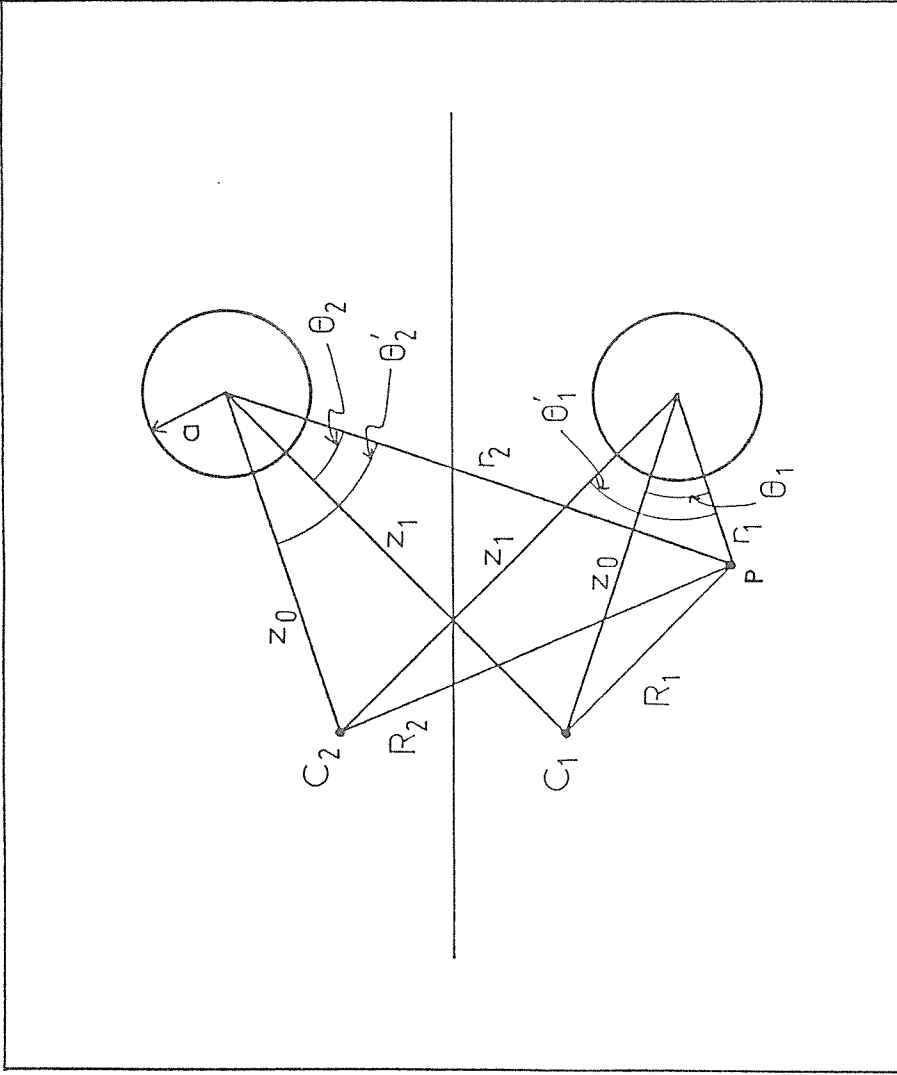


Figure 32b: Géométrie et notations pour résoudre le problème de la sphère dans un demi-espace par la méthode des images.

les contributions de chacune des structures comme si elles étaient indépendantes. L'approximation qui en résulte est valable sauf lorsque le corps est à la fois très conducteur et proche de la surface. La géométrie du problème, figure 32b, permet de déduire l'expression du potentiel. En effet, posons tout d'abord:

$$b_n = \frac{a^{2n+1} n (\rho_2 - \rho_1)}{n \rho_1 + (n+1) \rho_2} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{(2n+1) \rho_2}{n \rho_1 + (n+1) \rho_2} \quad (60)$$

Cas a): le point de mesure est à l'extérieur de la sphère.

Potentiel dû à C1:

$$V_{C1} = \frac{I \rho_1}{4 \pi} \left[\frac{1}{R_1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \left[\frac{P_n(\cos \vartheta_1)}{(z_0 r_1)^{n+1}} + \frac{P_n(\cos \vartheta_2)}{(z_1 r_2)^{n+1}} \right] \right] \quad (61)$$

Potentiel dû à C2:

$$V_{C2} = \frac{I \rho_1}{4 \pi} \left[\frac{1}{R_2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \left[\frac{P_n(\cos \vartheta'_1)}{(z_1 r_1)^{n+1}} + \frac{P_n(\cos \vartheta'_2)}{(z_0 r_2)^{n+1}} \right] \right] \quad (62)$$

Le cas qui nous intéresse est celui où la source est en surface: faisons tendre C1 vers C2. Simultanément:

$$R_1 \longrightarrow R_2 ; z_0 \longrightarrow z_1 ; \vartheta'_1 \longrightarrow \vartheta_1 ; \vartheta'_2 \longrightarrow \vartheta_2$$

d'où:

$$V_{\text{ext}} = \frac{I \rho_1}{2 \pi} \left[\frac{1}{R_1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{b_n}{z_0^{n+1}} \left[\frac{P_n(\cos \vartheta_1)}{r_1^{n+1}} + \frac{P_n(\cos \vartheta_2)}{r_2^{n+1}} \right] \right] \quad (63)$$

Cas b): le point de mesure est à l'intérieur de la sphère. On a alors:

$$V_{C1} = \frac{I \rho_1}{4 \pi} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \frac{P_n(\cos \vartheta_2)}{(z_1 r_2)^{n+1}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \frac{r_1^n P_n(\cos \vartheta_1)}{z_0^{n+1}} \right] \quad (64)$$

$$V_{C2} = \frac{I \rho_1}{4 \pi} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \frac{P_n(\cos \vartheta'_2)}{(z_0 r_2)^{n+1}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \frac{r_1^n P_n(\cos \vartheta'_1)}{z_1^{n+1}} \right] \quad (65)$$

et lorsque $C1 \rightarrow C2$:

$$V_{in} = \frac{I \rho_1}{2 \pi} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \frac{P_n(\cos \vartheta_2)}{(z_0 r_2)^{n+1}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \frac{r_1^n P_n(\cos \vartheta_1)}{z_0^{n+1}} \right] \quad (66)$$

IV.1.4. Sphère dans un demi-espace uniforme.

(Champ polaire et solution exacte).

Ce problème est résolu en coordonnées bi-sphériques. Large [25] donne une formulation particulièrement adaptée à l'implantation sur ordinateur. Nous la ferons nôtre.

Le système bisphérique est défini par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2 + y^2 + (z + b)^2}{x^2 + y^2 + (z - b)^2} \right] \quad ; \quad 0 \leq \sigma \leq \infty \\ T = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{2 b (x^2 + y^2)^{1/2}}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2} \right] \quad ; \quad 0 \leq T \leq \pi \\ \varphi = \operatorname{tg}^{-1}(y/x) \quad ; \quad 0 \leq \varphi \leq 2 \pi \end{array} \right. \quad (67)$$

Inversement:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{b \sin T \cos \varphi}{\operatorname{ch} \sigma - \cos T} \\ y = \frac{b \sin T \sin \varphi}{\operatorname{ch} \sigma - \cos T} \\ z = \frac{b \operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{ch} \sigma - \cos T} \end{array} \right. \quad (68)$$

Sans perte de généralité, la source est placée sur l'axe des x. Avec les notations de la figure 33, on a :

* surface du sol décrite par: $\sigma = z = 0$

* surface de la sphère décrite par : $\sigma = \sigma_1$

$$* b = (D^2 - a^2)^{1/2} \quad (69)$$

$$* \sigma_1 = \ln \left[b/a + (1 + (b/a)^2)^{1/2} \right] \quad (70)$$

Large suppose que la source est située sur la surface (en particulier, elle est à l'extérieur de la structure).

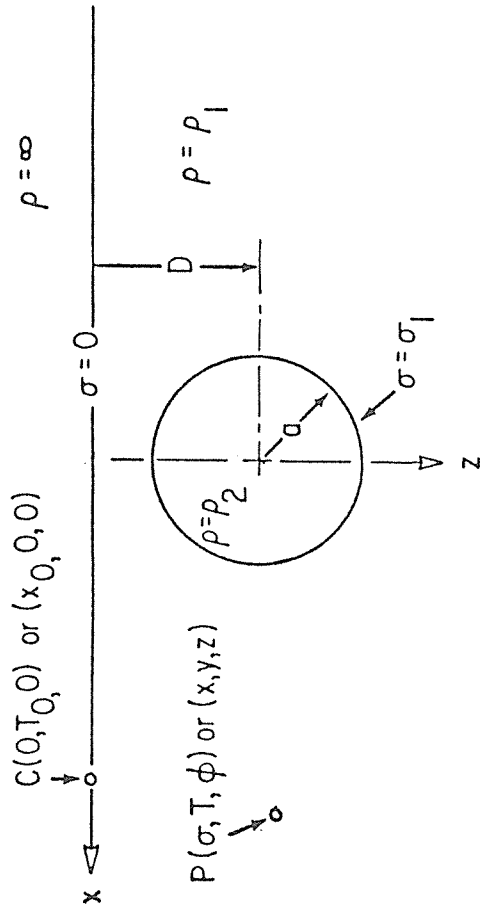
On pose $\bar{N} = n + 1/2$ et $\Omega = \rho_1/\rho_2$. Le potentiel est donné par:

$$V_{\text{ext}} = \frac{\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{R} + \frac{(1-\cos T_0)^{1/2} (\text{ch } \sigma - \cos T)^{1/2}}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{mn} A_n^m \text{ch}(\bar{N} \sigma) P_n^m(\cos T_0) P_n^m(\cos T) \cos(m \varphi) \right] \quad (71)$$

$$V_{\text{in}} = \frac{\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{R} + \frac{(1-\cos T_0)^{1/2} (\text{ch } \sigma - \cos T)^{1/2}}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{mn} A_n^m \exp(-\bar{N} \sigma) \left[\frac{1 + \exp(2\bar{N} \sigma_1)}{2} \right] P_n^m(\cos T_0) P_n^m(\cos T) \cos(m \varphi) \right]$$

En pratique, il est suffisant de limiter la sommation à $m \leq n \leq N = 10$.

Comme l'équation de Laplace n'est ici que partiellement séparable, les constantes d'intégration ne sont pas totalement explicites: on les



spherical body in a conducting half-space. The current source is at C and the potential point at P .

Figure 33: Géométrie et notations pour la méthode de Large.

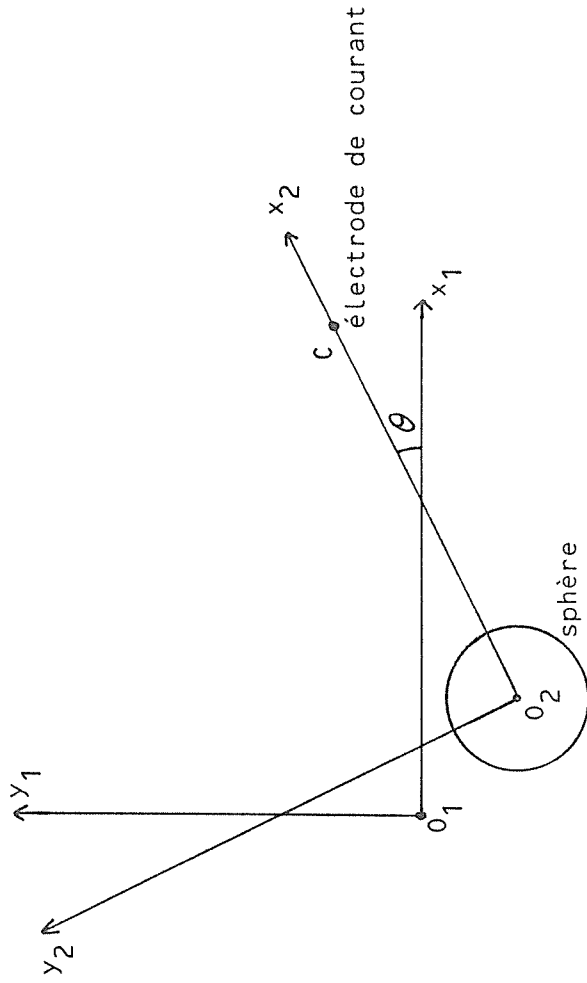


Figure 34: Vue de haut montrant les repères utilisés avec la formulation de Large pour la sphère dans un demi-espace uniforme. (O_1, x_1, y_1) est le repère "terrain". (O_2, x_2, y_2) est le repère associé à la sphère et à la source et dans lequel s'effectue le calcul du potentiel.

obtient en résolvant des systèmes linéaires.

On calcule tout d'abord:

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_j^m, \quad m \leq j \leq N-1 \\ \beta_j^m, \quad m \leq j \leq N \\ \gamma_j^m, \quad m+1 \leq j \leq N \\ b_{jm}, \quad m \leq j \leq N \end{array} \right.$$

ce, à l'aide des formules suivantes:

$$\alpha_{j-1}^m = \frac{2(j+m)(2-\delta_m)(j-1/2)}{(4j^2-1)} P_{j-1}^m(\cos T_o) \left[\text{sh}[\sigma_1(j-1/2)] + \Omega \text{ch}[\sigma_1(j-1/2)] \right] \quad (72)$$

$$\beta_j^m = \frac{2(2-\delta_m)}{2j+1} P_j^m(\cos T_o) \left[\frac{\text{sh}(\sigma_1)}{2} \text{ch}[\sigma_1(j+1/2)] (\Omega-1) - (j+1/2) \text{ch}(\sigma_1) \left[\text{sh}[\sigma_1(j+1/2)] + \Omega \text{ch}[\sigma_1(j+1/2)] \right] \right] \quad (73)$$

$$\gamma_{j+1}^m = \frac{2(j+1-m)(2-\delta_m)(j+3/2)}{4(j+1)^2-1} P_{j+1}^m(\cos T_o) \left[\text{sh}[\sigma_1(j+3/2)] + \Omega \text{ch}[\sigma_1(j+3/2)] \right] \quad (74)$$

$$\begin{aligned} b_{jm} &= \frac{2(j+m)(2-\delta_m)(j-1/2)}{4j^2-1} \exp[-\sigma_1(j-1/2)] P_{j-1}^m(\cos T_o) (1-\Omega) + \\ &+ \frac{2(2-\delta_m)}{2j+1} P_j^m(\cos T_o) \left[\frac{\text{sh}(\sigma_1)}{2} - \frac{(j+1)}{2} \text{ch}(\sigma_1) \right] (1-\Omega) + \\ &+ \frac{2(j+1-m)(2-\delta_m)(j+3/2)}{4(j+1)^2-1} \exp[-\sigma_1(j+3/2)] P_{j+1}^m(\cos T_o) (1-\Omega) . \end{aligned} \quad (75)$$

Le calcul des A_n^m s'effectue ensuite par la résolution des N systèmes linéaires suivants, pour m allant de 0 à N . Au rang m , on obtient:

$N-m+1$ coefficients A_j^m , $j = m, \dots, N$.

Un système s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \beta_m^m & \alpha_{m+1}^m & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_m^m & \beta_{m+1}^m & \alpha_{m+2}^m & & \\ 0 & \alpha_{m+1}^m & \beta_{m+2}^m & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{N-1}^m & \beta_N^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_m^m \\ A_{m+1}^m \\ \vdots \\ \vdots \\ A_N^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{mm} \\ b_{m+1,m} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{Nm} \end{bmatrix} \quad (76)$$

Le problème du changement de repère.

Les référentiels utilisés sont représentés sur la figure 34.

On utilise tout d'abord un repère R_1 associé au terrain et dans lequel sont repérées la projection de la sphère en surface et les électrodes. Le repère R_2 est associé de manière spécifique à chaque électrode: c'est dans celui-ci que sont valables les expressions du potentiel. En effet, la source doit se trouver sur son axe des x tandis que le centre de la sphère coïncide avec $x_2=y_2=0$. Pour le calcul, il est nécessaire de connaître $x_2(C)$. On a:

$$x_2(C) = d(O_2, C) = \sqrt{(x_1(C) - x_1(O_2))^2 + (y_1(C) - y_1(O_2))^2} \quad (77)$$

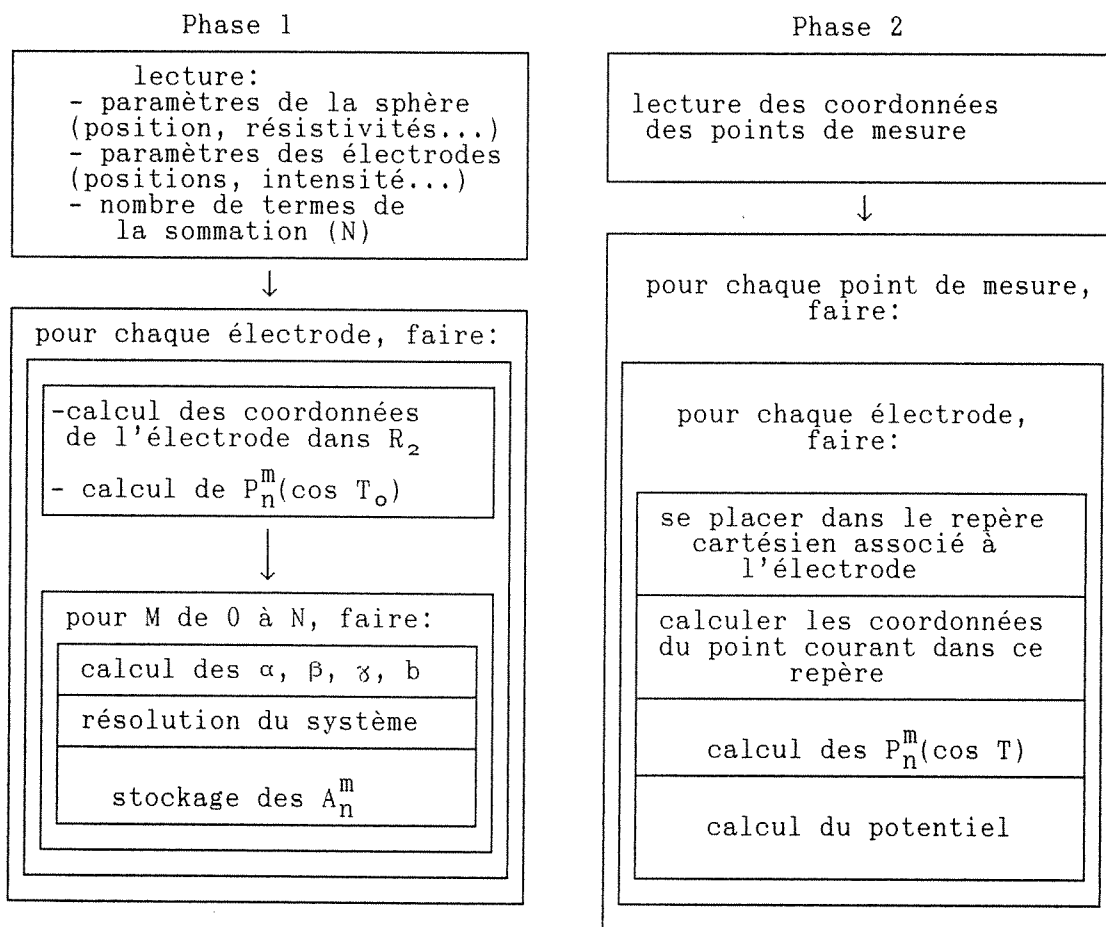
par ailleurs:
$$\operatorname{tg}(\vartheta) = \frac{y_1(C) - y_1(O_2)}{x_1(C) - x_1(O_2)} ; \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi . \quad (78)$$

Le passage d'un repère à l'autre est élémentaire:

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_1(O_2) \\ y_1 - y_1(O_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Remarques sur la programmation.

Le calcul comporte deux phases bien distinctes qui résultent de la forme mathématique de la solution. La première phase concerne le calcul des constantes d'intégration qui ne dépendent que de la géométrie du milieu (positions de la sphère et des électrodes). C'est au cours de la deuxième phase que l'on calcule le potentiel en un point quelconque. L'ordinogramme ci-dessous résume les étapes calculatoires.



IV.1.5. Sphéroïde aplati dans un espace uniforme.

(Champ polaire)

Pour l'étude des sphéroïdes, nous reprenons la formulation de Dobecki [13]. Dans tous les cas, l'axe des z du repère cartésien associé au sphéroïde coïncide avec son axe de symétrie.

Rappelons quelques notations:

I désigne l'intensité de la source.

ρ_1 et ρ_2 sont les résistivités externes et internes à la structure.

δ_m est le symbole de Kronecker. $\left. \begin{array}{l} \delta_m = 1 \text{ pour } m = 0 \\ = 0 \text{ pour } m \neq 0 \end{array} \right\}$

P_n^m et Q_n^m sont les fonctions associées de Legendre de première et deuxième espèce respectivement.

$\bar{P}(z) = \partial P(z) / \partial z$ (idem pour les autres fonctions).

ϑ, η, φ désignent les coordonnées sphéroïdales du point courant; avec l'indice (s), ils désignent les coordonnées de la source.

Les expressions des fonctions de Legendre et de leur dérivée sont données dans l'annexe 1.

Le système de coordonnées associé à l'ellipsoïde de révolution aplati est donné par:

$$\left| \begin{array}{l} x = c \operatorname{ch} \eta \sin \vartheta \cos \varphi \quad ; \quad 0 \leq \eta \leq \infty \\ y = c \operatorname{ch} \eta \sin \vartheta \sin \varphi \quad ; \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ z = c \operatorname{sh} \eta \cos \vartheta \quad ; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right. \quad (80)$$

$$\text{Soit: } \left\{ \begin{array}{l} a \text{ le demi-grand axe} \\ b \text{ le demi petit axe} \end{array} \right\} \text{ alors: } c^2 = a^2 - b^2 \text{ et} \quad (81)$$

$$\eta_0 = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + b/a}{1 - b/a} \right]. \quad (82)$$

La surface du sphéroïde est décrite par l'équation: $\eta = \eta_0$.

La transformation inverse est indispensable. Elle correspond à la séquence de calculs suivante (sa démonstration ne présente pas de difficulté majeure):

$$\text{Soit: } \left\{ \begin{array}{l} \bar{\vartheta} = \frac{1}{2} \left[-z^2 - c^2 + x^2 + y^2 + \left[(x^2 + y^2 - z^2 - c^2)^2 + 4 z^2 (x^2 + y^2) \right]^{1/2} \right] \\ \bar{\vartheta} = \frac{\vartheta}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \hat{\vartheta} = \vartheta / z^2 \end{array} \right\} \quad (83)$$

$$\text{Alors: } \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow \varphi = \text{tg}^{-1}(y/x) \\ x < 0 \Rightarrow \varphi = \text{tg}^{-1}(y/x) + \pi \end{array} \right. \\ \eta = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + (\bar{\vartheta})^{1/2}}{1 - (\bar{\vartheta})^{1/2}} \right] \\ \left| \begin{array}{l} z \geq 0 \Rightarrow \vartheta = \text{tg}^{-1} \left[\hat{\vartheta}^{1/2} \right] \\ z < 0 \Rightarrow \vartheta = -\text{tg}^{-1} \left[\hat{\vartheta}^{1/2} \right] + \pi \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (84)$$

Selon Dobecki, la solution s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{\text{ext}} = \frac{I \rho_1}{4 \pi R} + V_1 \\ = \frac{I \rho_1}{4 \pi R} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_n^m \cos(m \varphi) P_n^m(\cos \vartheta) Q_n^m \left[i \text{sh}(\eta) \right] \\ V_{\text{in}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n B_n^m \cos(m \varphi) P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m \left[i \text{sh}(\eta) \right] \end{array} \right. \quad (85)$$

Nous ne donnons pas la procédure complète qui permet d'établir ces solutions. Par contre, et à titre d'exemple, nous allons déduire les constantes A_n^m et B_n^m des conditions aux limites.

On choisit pour le développement de la distance réciproque l'expression suivante (Cook et Van Nostrand [7]):

$$\frac{1}{R} = \frac{i}{c} \sum_{m \leq n} (-1)^m F_n^m Q_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_s)] P_n^m [i \operatorname{sh}(\eta)] P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta_s) \cos(m \varphi) \quad (86)$$

$$\text{avec: } F_n^m = (2 - \delta_m)(2n + 1) \left[\frac{(n - m)!}{(n + m)!} \right]^2 .$$

En écrivant que sur le sphéroïde ($\eta = \eta_0$) on a continuité du potentiel:

$$V_{in} = V_{ext},$$

et en égalant terme à terme après simplification par $\cos(m \varphi) P_n^m(\cos \vartheta)$,

il vient:

$$\begin{aligned} (-1)^m \frac{I \rho_1}{4 \pi} \frac{i}{c} F_n^m Q_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_s)] P_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_0)] P_n^m(\cos \vartheta_s) + A_n^m Q_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_0)] &= \\ &= B_n^m P_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_0)] . \end{aligned} \quad (87)$$

Ecrivons à présent la condition valable sur le sphéroïde ($\eta = \eta_0$):

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_{ext}}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_{in}}{\partial \eta} \quad \left(\text{on utilise ensuite: } \frac{\partial}{\partial \eta} = i \operatorname{ch}(\eta) \frac{\partial}{\partial (i \operatorname{sh}(\eta))} \right). \quad (88)$$

On obtient (une barre au-dessus des symboles désigne la dérivation):

$$\begin{aligned} (-1)^m \frac{I}{4 \pi} \frac{i}{c} F_n^m Q_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_s)] \bar{P}_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_0)] P_n^m(\cos \vartheta_s) + \frac{A_n^m}{\rho_1} \bar{Q}_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_0)] &= \\ &= \frac{B_n^m}{\rho_2} \bar{P}_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_0)] . \end{aligned} \quad (89)$$

En identifiant les B_n^m entre (87) et (89), il vient:

$$\begin{aligned}
 & (-1)^m \frac{I \rho_1}{4 \pi} \frac{i}{c} F_n^m Q_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_s)] P_n^m(\cos \vartheta_s) + A_n^m \frac{Q_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_o)]}{P_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_o)]} = \\
 & = (-1)^m \frac{I \rho_2}{4 \pi} \frac{i}{c} F_n^m Q_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_s)] P_n^m(\cos \vartheta_s) + \frac{\rho_2}{\rho_1} A_n^m \frac{\bar{Q}_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_o)]}{\bar{P}_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_o)]} \quad (90)
 \end{aligned}$$

d'où finalement:

$$\left| \begin{aligned}
 A_n^m &= \frac{I i (-1)^m}{4 \pi c} F_n^m Q_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_s)] P_n^m(\cos \vartheta_s) (\rho_2 - \rho_1) \left[\begin{aligned} & \frac{Q_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_o)]}{P_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_o)]} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\bar{Q}_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_o)]}{\bar{P}_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_o)]} \end{aligned} \right]^{-1} \\
 B_n^m &= \frac{I i (-1)^m \rho_1}{4 \pi c} F_n^m Q_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_s)] P_n^m(\cos \vartheta_s) + A_n^m \frac{Q_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_o)]}{P_n^m [i \operatorname{sh}(\eta_o)]} \quad (91)
 \end{aligned} \right.$$

ce qui achève le calcul de ces constantes.

La présence de termes complexes dans ces expressions est une complication inutile. On démontre, dans l'annexe 3, qu'il est possible de les éliminer.

$$\begin{array}{l}
 \text{Si on pose:} \\
 \text{avec } \mu \in \mathbb{R}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 P_n^m(i\mu) = i^n \hat{P}_n^m(i\mu) \\
 Q_n^m(i\mu) = i^{n+1} \hat{Q}_n^m(i\mu) \\
 \bar{P}_n^m(i\mu) = i^{n-1} \hat{P}_n^m(i\mu) \\
 \bar{Q}_n^m(i\mu) = i^n \hat{Q}_n^m(i\mu)
 \end{array}
 \right. \quad (92)$$

tous les termes surmontés d'un $\hat{}$ sont réels. On en déduit:

$$\left|
 \begin{array}{l}
 V_{\text{ext}} = \frac{I \rho_1}{4 \pi R} + V_1 \\
 = \frac{I \rho_1}{4 \pi R} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^{n+1} \hat{\Lambda}_n^m \cos(m\varphi) P_n^m(\cos\vartheta) \hat{Q}_n^m[i \operatorname{sh}(\eta)] \\
 V_{\text{in}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-1)^{n+1} \hat{B}_n^m \cos(m\varphi) P_n^m(\cos\vartheta) \hat{P}_n^m[i \operatorname{sh}(\eta)]
 \end{array}
 \right. \quad (93)$$

avec:

$$\left|
 \begin{array}{l}
 \hat{A}_n^m = \frac{I (-1)^m}{4 \pi c} F_n^m \hat{Q}_n^m[i \operatorname{sh}(\eta_s)] P_n^m(\cos\vartheta_s) (\rho_2 - \rho_1) \\
 \left[\frac{\hat{Q}_n^m[i \operatorname{sh}(\eta_o)]}{\hat{P}_n^m[i \operatorname{sh}(\eta_o)]} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\hat{Q}_n^m[i \operatorname{sh}(\eta_o)]}{\hat{P}_n^m[i \operatorname{sh}(\eta_o)]} \right]^{-1} \\
 \hat{B}_n^m = \frac{I (-1)^m \rho_1}{4 \pi c} F_n^m \hat{Q}_n^m[i \operatorname{sh}(\eta_s)] P_n^m(\cos\vartheta_s) + \hat{A}_n^m \frac{\hat{Q}_n^m[i \operatorname{sh}(\eta_o)]}{\hat{P}_n^m[i \operatorname{sh}(\eta_o)]}
 \end{array}
 \right. \quad (94)$$

IV.1.6. Sphéroïde allongé dans un espace uniforme.

(champ polaire).

Le système de coordonnées est ici:

$$\left| \begin{array}{l} x = c \operatorname{sh} \eta \sin \vartheta \cos \varphi \quad ; \quad 0 \leq \eta \leq \infty \\ y = c \operatorname{sh} \eta \sin \vartheta \sin \varphi \quad ; \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ z = c \operatorname{ch} \eta \cos \vartheta \quad ; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right. \quad (95)$$

Désignant par a le demi-grand axe et par b le demi-petit axe, η_0 décrit le sphéroïde et on a:

$$\eta_0 = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + b/a}{1 - b/a} \right] \quad ; \quad c^2 = a^2 - b^2 \quad . \quad (96)$$

La transformation inverse peut correspondre à la séquence suivante:

$$\text{soit: } \left| \begin{array}{l} u = (z^2 - y^2 - x^2 - c^2)/(2 z^2) \\ v = \frac{\left[(y^2 + x^2 + c^2 - z^2)^2 + 4 z^2 (x^2 + y^2) \right]^{1/2}}{(2 z^2)} \\ \zeta = u + v \quad ; \quad \zeta' = -u + v \end{array} \right. \quad (97)$$

$$\text{alors: } \left| \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow \varphi = \operatorname{tg}^{-1}(y/x) \\ x < 0 \Rightarrow \varphi = \operatorname{tg}^{-1}(y/x) + \pi \end{array} \right. \\ \eta = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + \zeta^{1/2}}{1 - \zeta^{1/2}} \right] \\ \left| \begin{array}{l} z \geq 0 \Rightarrow \vartheta = \operatorname{tg}^{-1} \left[(\zeta')^{1/2} \right] \\ z < 0 \Rightarrow \vartheta = -\operatorname{tg}^{-1} \left[(\zeta')^{1/2} \right] + \pi \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (98)$$

Pour une source placée à l'extérieur de la structure, les potentiels sont:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{ext}} &= \frac{I \rho_1}{4 \pi R} + V_1 \\
 &= \frac{I \rho_1}{4 \pi R} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_n^m \cos(m \varphi) P_n^m(\cos \vartheta) Q_n^m[\text{ch}(\eta)] \\
 V_{\text{in}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n B_n^m \cos(m \varphi) P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m[\text{ch}(\eta)] \quad (99)
 \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned}
 A_n^m &= \frac{I (-1)^m}{4 \pi c} F_n^m Q_n^m[\text{ch}(\eta_s)] P_n^m(\cos \vartheta_s) (\rho_2 - \rho_1) \left[\frac{Q_n^m[\text{ch}(\eta_o)]}{P_n^m[\text{ch}(\eta_o)]} - \frac{\rho_2 \bar{Q}_n^m[\text{ch}(\eta_o)]}{\rho_1 \bar{P}_n^m[\text{ch}(\eta_o)]} \right]^{-1} \\
 B_n^m &= \frac{I (-1)^m \rho_1}{4 \pi c} F_n^m Q_n^m[\text{ch}(\eta_s)] P_n^m(\cos \vartheta_s) + A_n^m \frac{Q_n^m[\text{ch}(\eta_o)]}{P_n^m[\text{ch}(\eta_o)]} \quad (100)
 \end{aligned}$$

IV.1.7. Sphéroïdes dans un demi-espace.

(champ polaire et méthode des images).

La méthode décrite au IV.1.3. s'applique pour n'importe quelle structure et peut être employée pour connaître approximativement le potentiel au voisinage d'un sphéroïde enfoui. L'erreur faite en négligeant l'interaction entre le corps et son image n'est importante que lorsqu'il est proche de la surface.

IV.1.8. Le problème du changement de repère.

Dans les paragraphes qui précèdent, on a donné le potentiel en fonction des coordonnées sphéroïdales du point courant. La transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées sphéroïdales a également été décrite, mais seulement lorsque le repère cartésien est tel que:

- 1) l'axe des z coïncide avec l'axe de révolution du sphéroïde
- 2) la source de courant se trouve dans le plan (xOz) et x_s est positif.

Du repère-terrain où sont données, en pratique, les points où l'on désire connaître le potentiel, il faut donc passer au repère associé au sphéroïde et qui vient d'être caractérisé.

La figure 35 est relative à ce changement de référentiel.

Le repère terrain est choisi indirect: les axes Ox et Oy, en surface, sont orientés directement, mais Oz est vers le bas. O_1 désigne le centre du corps. (O_1, x_1, y_1, z_1) est un repère cartésien parallèle à $(O, x, y, -z)$. On passe facilement d'un repère à l'autre:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_3 \end{bmatrix} ; \text{ où } \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \text{ sont les coordonnées du centre } O_1 \text{ du sphéroïde dans le repère-terrain.} \quad (101)$$

Le repère final, disons (O_1, x_4, y_4, z_4) , doit être tel que (figure 35a):

- la source est dans le plan $O_1 x_4 z_4$ avec x_4 (source) positif
- z_4 est l'axe de révolution de l'ellipsoïde.

On repère cet axe de symétrie à l'aide de ses angles sphériques (θ, φ) dans le repère (O_1, x_1, y_1, z_1) .

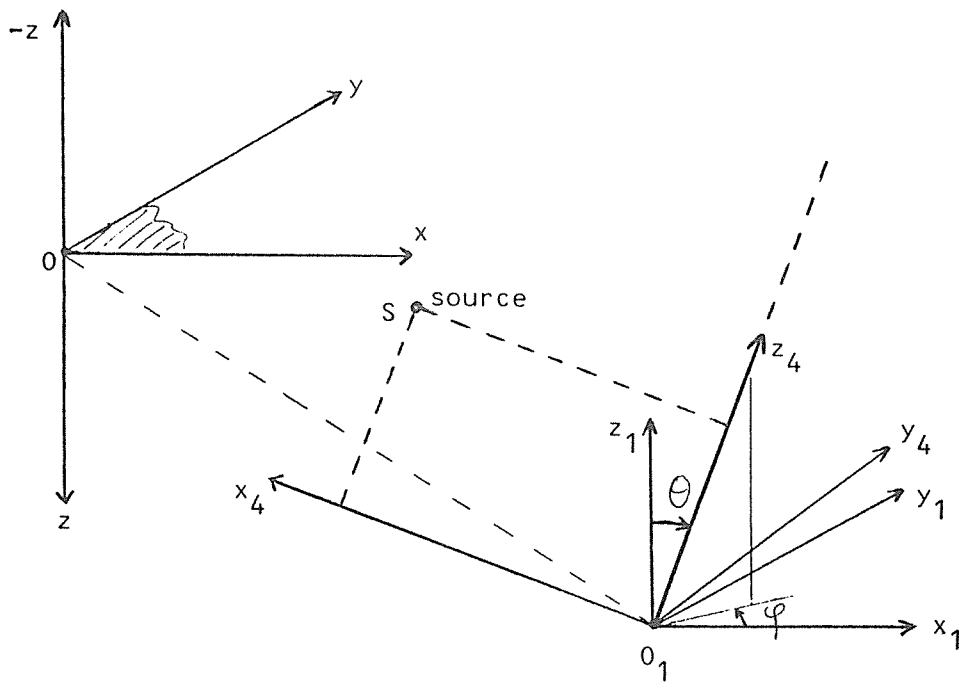


Figure 35a

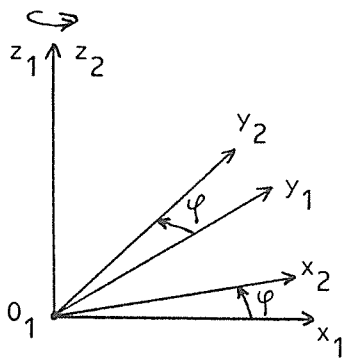


Figure 35b

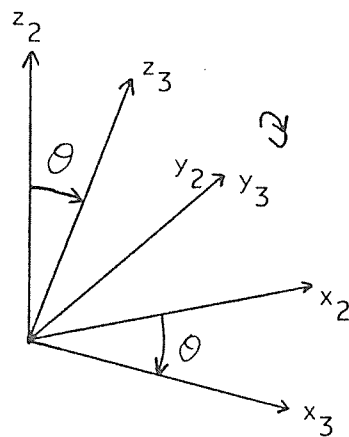


Figure 35c

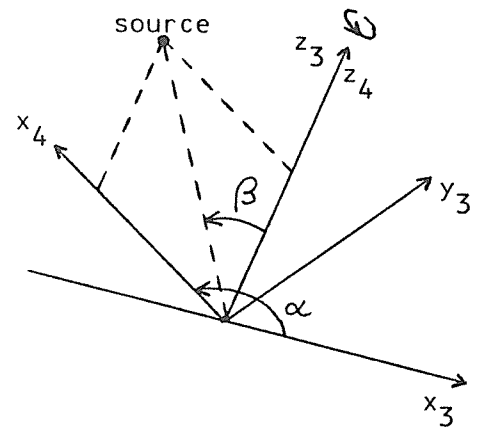


Figure 35d

Figure 35: Les différents référentiels utilisés pour établir les formules de passage entre le système "terrain" et le repère associé au sphéroïde.

z_4 coïncide avec l'axe de révolution du sphéroïde
 la source est dans le plan (O_1, x_4, z_4) et $x_4(s) > 0$.

Pour trouver les formules de passage, nous utilisons deux repères intermédiaires (O_1, x_2, y_2, z_2) et (O_1, x_3, y_3, z_3) . Le premier est obtenu par rotation d'angle φ du repère (O_1, x_1, y_1, z_1) autour de z_1 (figure 35b); on a:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (102)$$

On effectue ensuite une rotation d'angle ϑ autour de $y_2 \equiv y_3$ (figure 35C); ainsi:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (103)$$

Ces deux rotations ont fait coïncider l'axe $O_1 z_3$ avec l'axe du sphéroïde. Une dernière rotation, d'angle α autour de z_3 , amène la source dans le plan $x_4 O_1 z_4$ avec x_4 positif. Pour la source, on peut écrire:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_S \quad (104)$$

On voit sur la figure 35d que:

$$\sin \beta = (1 - \cos^2 \beta)^{1/2} = \left[1 - (z_3(S)/d(O_3, S))^2 \right]^{1/2} \quad (105)$$

($\sin \beta$ est positif puisque β est compris entre 0 et π).

On voit également que: $\left| \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{x_3(S)}{d(O_3, S) \sin \beta} \\ \sin \alpha = \frac{y_3(S)}{d(O_3, S) \sin \beta} \end{array} \right.$ d'où l'on déduit α . (106)

Ainsi, la dernière rotation est telle que:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (107)$$

Résumé des étapes de calcul pour le changement de repère.

1) détermination de la transformation

On calcule tout d'abord:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(S) - v_1 \\ y(S) - v_2 \\ -z(S) + v_3 \end{bmatrix} \quad (108)$$

puis: $\sin \beta = \left[1 - (z_3(S)/d(O_3, S))^2 \right]^{1/2}$ (109)

puis:

$$\left| \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{x_3(S)}{d(O_3, S) \sin \beta} \\ \sin \alpha = \frac{y_3(S)}{d(O_3, S) \sin \beta} \end{array} \right. \quad \text{d'où l'on déduit } \alpha. \quad (110)$$

2) Formule de passage.

On a:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -v_1 \\ y & -v_2 \\ -z & +v_3 \end{bmatrix} \quad (111)$$

IV.2. Modélisation numérique.

IV.2.1. Revue rapide des méthodes utilisées.

Il existe principalement trois grands procédés permettant la résolution numérique des équations aux dérivées partielles:

- 1) la méthode des "différences finies"
- 2) la méthode par "intégrales de surface"
- 3) la méthode des "éléments finis".

Les trois approches reposent sur la possibilité d'associer aux équations initiales un problème discrétisé: les solutions sont recherchées dans une base de vecteurs finie. Par exemple, on cherche à trouver les valeurs du potentiel en certains points de l'espace seulement.

En général, on démontre que plus le nombre de paramètres introduits dans cette recherche est grand, plus la solution est précise. C'est d'ailleurs ainsi qu'une classe de méthodes peut être justifiée.

Presque tous les procédés se ramènent finalement à la résolution d'un système d'équations (souvent linéaires).

Caractérisons rapidement les trois procédés nommés ci-dessus.

- 1) La méthode des différences finies [38] est de loin la plus simple, du moins dans son principe: elle consiste à remplacer les dérivées partielles par leurs approximations "aux différences". Contrairement à

une idée répandue, la méthode des différences finies est opérationnelle même si le maillage n'est pas rectangulaire. En réalité, ses limites proviennent des difficultés à exprimer correctement les conditions aux limites sur les dérivées (conditions de Neumann): le type de discrétisation employé ne s'y prête guère.

2) La méthode par "intégrales de surface" utilise une transformation mathématique qui permet d'exprimer une intégrale de volume par des intégrales de surface (voir par exemple [43]). De la sorte, la recherche du potentiel dans le volume est remplacée par celle d'une certaine fonction sur les surfaces des structures (en courant continu, cette fonction est une densité de charge). Très séduisante a priori puisqu'elle permet une réduction considérable du nombre d'inconnues, cette méthode présente plusieurs inconvénients. Le principal est l'accroissement prohibitif de la complexité du système lorsque le nombre de structures augmente (les systèmes à résoudre sont de taille raisonnable, mais contrairement aux autres méthodes, les matrices obtenues sont pleines).

3) Dans la méthode des éléments finis ([46] ou [12]), l'espace est divisé en petits morceaux (les éléments finis). Ces derniers peuvent avoir une forme quelconque. La fonction inconnue présente un comportement simple sur chaque élément (par exemple linéaire) et s'exprime en fonction des valeurs aux "noeuds" du réseau. Ces dernières sont les inconnues réellement recherchées. La puissance du procédé provient de ce que, moyennant quelque transformation mathématique, il est possible d'exprimer facilement les conditions aux limites. De plus, le maillage peut épouser correctement les formes des corps. Si la méthode des éléments finis est la plus avantageuse quant aux résultats qu'elle permet et à la souplesse qu'elle présente, elle est cependant la plus difficile à programmer. L'élaboration du maillage est souvent laborieux, qu'il se fasse automatiquement ou à la main.

Il existe des méthodes qui allient les avantages (et les inconvénients) de deux ou plusieurs de ces méthodes. Un exemple en est donné par l'approche utilisée par Doucet [14]. Ce dernier exploite la "forme faible" qui facilite l'introduction des conditions aux limites mais

exprime les dérivées à l'aide de différences finies.

Nous utiliserons la méthode des éléments finis et plus précisément nous exploiterons la "formulation variationnelle" de celle-ci. Cette dernière est identique à la "méthode de Galerkin" qui permet la meilleure approximation. Il n'est pas question, dans le cadre de ce travail, de détailler abondamment notre démarche. Si besoin est, les ouvrages [46] et [12] constitueront de bonnes références.

IV.2.2. Formulation des éléments finis.

Nous décrivons d'abord la méthode telle qu'elle s'applique avantageusement au problème de Poisson:

$$\Delta u - f_v = 0. \quad (112)$$

u est le potentiel électrique et f_v le terme de source (production de courant par unité de volume).

On le remplace traditionnellement par le problème équivalent:

$$\forall \psi, W = \int_V \psi (\Delta u - f_v) dV = 0. \quad (113)$$

Pour faciliter l'introduction des conditions aux limites, il est procédé à une intégration par parties. On obtient la "forme faible":

$$W = - \int_V \left[\langle \vec{\nabla} \psi, \vec{\nabla} u \rangle + \psi f_v \right] dV + \int_{S_f} \psi \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{S_u} \psi \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0. \quad (114)$$

$\frac{\partial u}{\partial n}$ est la dérivée normale (selon \vec{n}) de u sur la surface S délimitant V .

La surface S se compose de deux parties S_f et S_n où s'explicitent deux

types de conditions aux limites:

$$\left| \begin{array}{l} \text{sur } S_f: \left[\frac{\partial}{\partial n} + \alpha \right] u = f_s \\ \text{sur } S_u: u = u_s \end{array} \right. \quad (115)$$

En imposant $\psi = 0$ sur S_u , l'intégrale sur S_u disparaît. D'autre part, la condition $(\partial u / \partial n) = f_s - \alpha u$ permet d'écrire:

$$\int_{S_f} \psi \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{S_f} \psi (f_s - \alpha u) dS. \quad (116)$$

La forme faible s'écrit alors:

$$W = \int_V \left[\langle \vec{\nabla} \psi, \vec{\nabla} u \rangle + \psi f_v \right] dV + \int_{S_f} \psi (\alpha u - f_s) dS = 0. \quad (117)$$

La méthode de Galerkin correspond au choix: $\psi = \delta u$.

Ainsi:

$$W = \int_V \left[\langle \vec{\nabla}(\delta u), \vec{\nabla} u \rangle + \delta u f_v \right] dV + \int_{S_f} \delta u (\alpha u - f_s) dS = 0. \quad (118)$$

Si on définit la fonctionnelle Ξ par:

$$\Xi \left[u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \int_V \left[\frac{1}{2} \langle \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} u \rangle + u f_v \right] dV + \int_{S_f} \left[\frac{1}{2} \alpha u^2 - u f_s \right] dS, \quad (119)$$

on voit que l'équation précédente est identique à l'équation d'Euler du problème variationnel $\delta \Xi \equiv 0$.

Dans le cas qui nous intéresse, nous introduirons seulement la condition à la surface libre du sol: $(\partial u / \partial n) = 0$. On suppose donc $\alpha = f_s = 0$ et il

reste le problème:

$$\text{rendre minimum la quantité: } \Xi = \int_V \left[\frac{1}{2} \langle \vec{\nabla}u, \vec{\nabla}u \rangle + u f_v \right] dV \quad . \quad (120)$$

L'équation quasi-harmonique complète correspond à la fonctionnelle:

$$\Xi = \int_V \left[\frac{\sigma}{2} \langle \vec{\nabla}u, \vec{\nabla}u \rangle + u f_v \right] dV \quad (121)$$

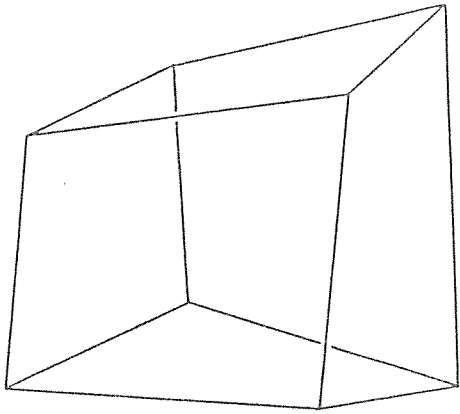
σ étant la conductivité.

L'intégrande est, on le voit, la densité d'énergie. La méthode de Galerkin, équivalente à cette formulation variationnelle, possède cette propriété de se déduire directement d'un "principe de moindre énergie": ces équations ont un sens physique bien établi.

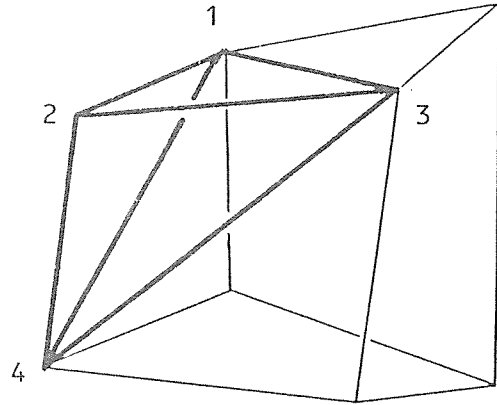
Discrétisation et maillage.

Les dérivées exprimées dans la fonctionnelle sont du premier ordre. Il est donc suffisant d'employer une fonction inconnue dont l'évolution sur une maille est linéaire. Pratiquement, les mailles tétraédriques font l'affaire. Le pavage de l'espace à trois dimensions à l'aide de tétraèdres n'est pas, a priori, facile à mettre en oeuvre. Une manière élégante de le réaliser consiste à utiliser un "sur-maillage" hexaédrique. En effet, il y a plusieurs façons élémentaires pour remplir un hexaèdre à l'aide de tétraèdres. La figure 36 montre celle que nous utilisons. La numérotation des mailles et des noeuds est considérablement simplifiée si de plus le domaine de modélisation est lui-même composé d'une juxtaposition appropriée des "sur-éléments" hexaédriques. Les noeuds sont repérés de façon naturelle comme s'ils étaient les éléments d'un tableau (une matrice) à trois dimensions: le repérage utilise des triplés (i,j,k). La figure 37 vaut mieux que de longs discours.

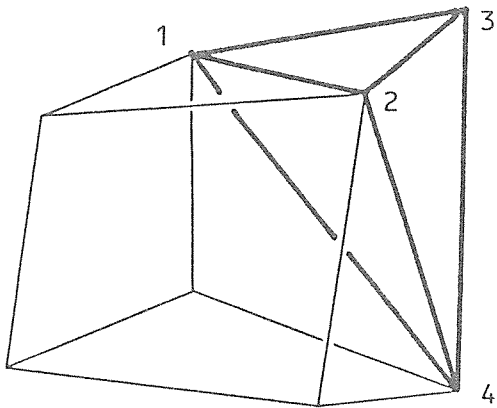
Nous désignons les inconnues, qui sont les valeurs du potentiel aux



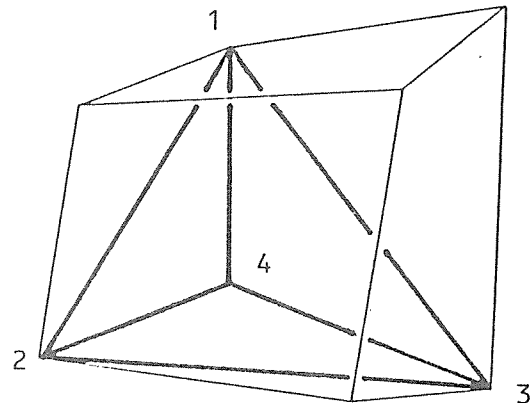
hexaèdre



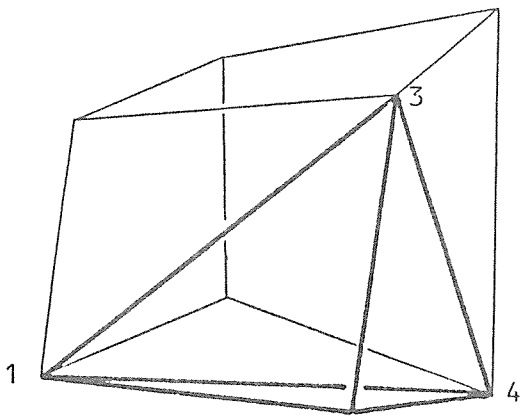
tétraèdre 1



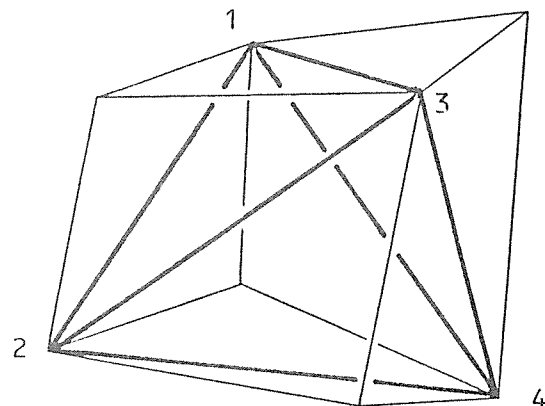
tétraèdre 2



tétraèdre 3



tétraèdre 4



tétraèdre 5

Figure 36: Une manière de "paver" un hexaèdre à l'aide de 5 tétraèdres. Le nombre de noeuds reste égal au nombre d'hexaèdres. Les tétraèdres sont numérotés et orientés.

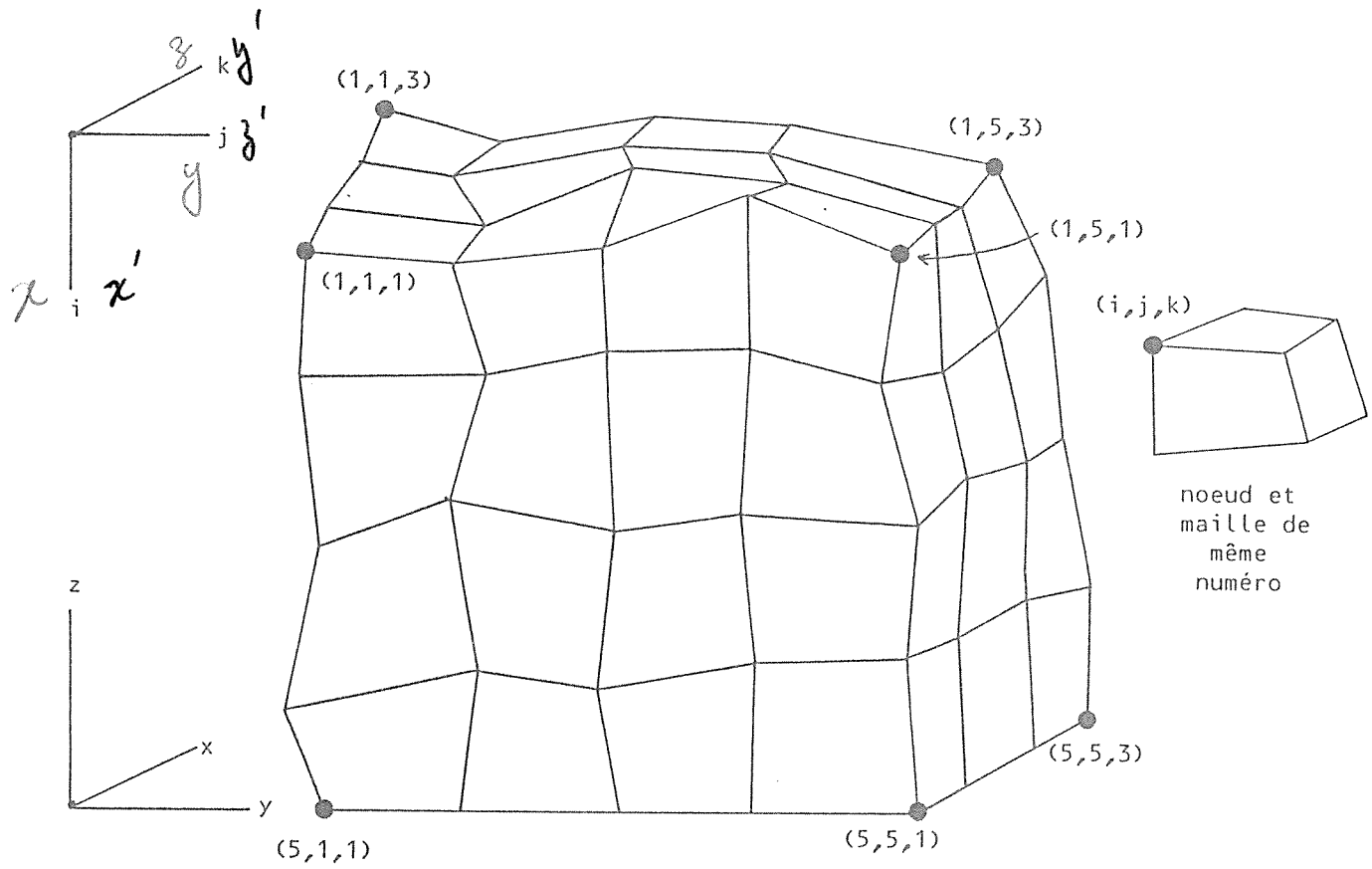


Figure 37: Système de numérotation naturel pour un domaine composé d'hexaèdres et pouvant être obtenu par déformation d'un domaine cubique. On compte autant de noeuds que d'hexaèdres, ce qui autorise la même numérotation pour ces deux entités.

noeuds du réseau, par $u_{i,j,k}$ lorsqu'un noeud quelconque du réseau est considéré, et par a_1, a_2, a_3 , ou a_4 lorsque l'on se réfère à un tétraèdre orienté d'un hexaèdre donné.

Comme on l'a déjà dit, l'évolution du potentiel sur une maille est supposée linéaire. Cela signifie que l'on peut écrire pour ce tétraèdre:

$$u = (1 - \xi - \eta - \zeta) a_4 + \xi a_1 + \eta a_2 + \zeta a_3. \quad (122)$$

Les paramètres ξ, η et ζ varient entre 0 et 1 et s'identifient aux coordonnées tétraédriques (figure 38).

La fonctionnelle Ξ est décomposée en somme d'intégrales ne portant chacune que sur un élément.

On a:

$$\Xi = \sum_{i,j,k} \left(\overset{i,j,k}{\Xi_1} + \overset{i,j,k}{\Xi_2} + \overset{i,j,k}{\Xi_3} + \overset{i,j,k}{\Xi_4} + \overset{i,j,k}{\Xi_5} \right). \quad (123)$$

$\overset{i,j,k}{\Xi_l}$ est la contribution à la fonctionnelle globale du l-ième tétraèdre appartenant au sur-élément repéré par le triplet (i,j,k) .

On utilise en effet la même numérotation pour les hexaèdres que pour les noeuds (figure 37).

Calcul des dérivées de la fonctionnelle.

Le problème à résoudre est de trouver le minimum de la fonctionnelle Ξ , cad de résoudre le système d'équation:

$$\frac{\partial \Xi}{\partial u_{l,m,n}} = 0 \quad \text{pour } l,m,n \text{ décrivant tout le domaine où le}$$

potentiel est à déterminer.

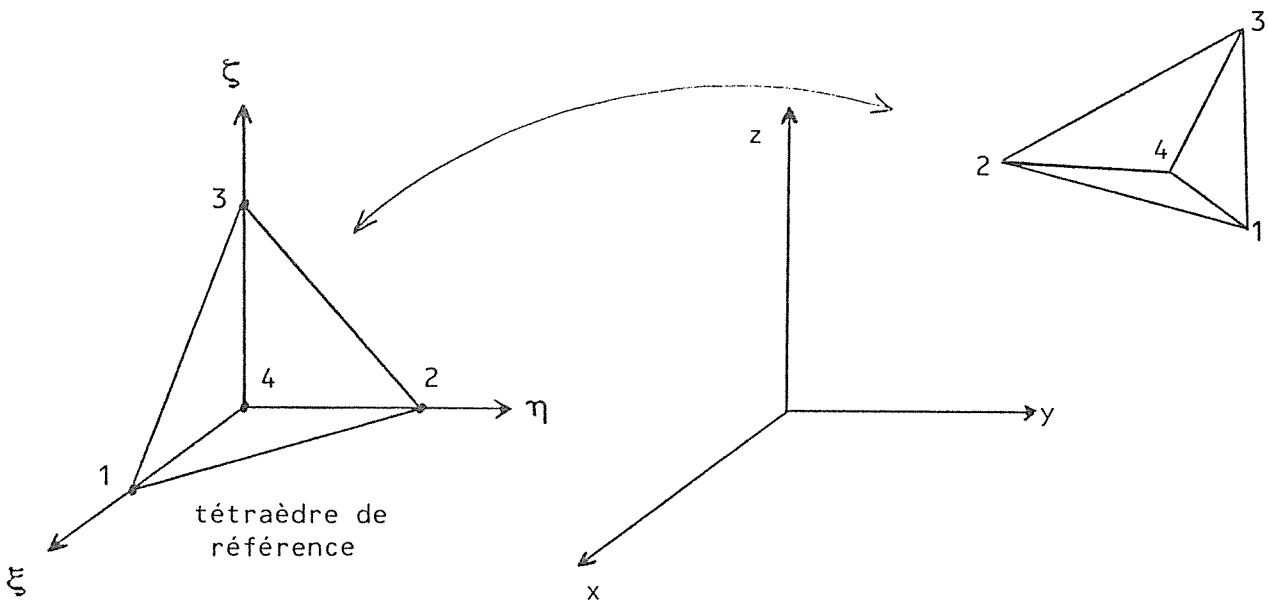


Figure 38: Tétraèdre de référence dans son espace paramétrique naturel et tétraèdre en place dans l'espace cartésien courant.

Ainsi, il est nécessaire de calculer:

$$\frac{\partial \Xi}{\partial u_{\ell, m, n}} = \sum_{i, j, k} \frac{\partial}{\partial u_{\ell, m, n}} \left[\frac{i, j, k}{\Xi_1} + \frac{i, j, k}{\Xi_2} + \frac{i, j, k}{\Xi_3} + \frac{i, j, k}{\Xi_4} + \frac{i, j, k}{\Xi_5} \right]. \quad (124)$$

Pour que $\frac{\partial \frac{i, j, k}{\Xi_r}}{\partial u_{\ell, m, n}}$ ne soit pas nul, il faut que, simultanément:

$$\left| \begin{array}{l} i \leq l \leq i+1 \\ j \leq m \leq j+1 \\ k \leq n \leq k+1 \end{array} \right. \quad (125)$$

Cela revient à exprimer que le noeud (l, m, n) appartient effectivement à l'hexaèdre concerné par le terme de la somme. La figure 39 permet d'y voir plus clair.

Les conditions ci-dessus montrent que huit "cubes" (plus exactement huit hexaèdres) interviennent dans l'expression de la composante (l, m, n) du gradient.

Ces huit cubes sont répertoriés ci-dessous:

	i	j	k
1	l-1	m-1	n-1
2	l	m-1	n-1
3	l-1	m	n-1
4	l-1	m-1	n
5	l	m	n-1
6	l	m-1	n
7	l-1	m	n
8	l	m	n

Il reste:

$$\frac{\partial \Xi}{\partial u_{\ell, m, n}} = \sum_{i=l-1}^l \sum_{j=m-1}^m \sum_{k=n-1}^n \sum_{r=1}^5 \frac{\partial \frac{i, j, k}{\Xi_r}}{\partial u_{\ell, m, n}}. \quad (126)$$

Bien entendu, les tétraèdres de ces huit cubes ne comportent pas tous le point (l, m, n) . Il convient de faire une liste exhaustive des mailles concernées.

Cette liste est reproduite tableau 1. Sur les 5x8 tétraèdres de ces huit hexaèdres, une vingtaine possèdent le point (l,m,n) pour sommet. Par exemple, dans le cube N° 8, seul le tétraèdre N° 1 inclut le point. Il est le N° 2 de ce tétraèdre.

Revenons à présent au problème de l'intégration sur un élément. L'utilisation d'un "élément de référence" simplifie la formulation. Un élément de référence est un élément placé dans son système paramétrique naturel (figure 38).

L'intégrale sur un élément donné peut se ramener à l'intégrale sur l'élément de référence moyennant un changement de variable. Ainsi, pour une fonction g quelconque, on a :

$$\int_{V_e} g(\vec{x}) dx dy dz = \int_{V_{\text{réf.}}} g(\vec{x}(\vec{\xi})) \det(J) d\xi d\eta d\zeta . \quad (127)$$

Lorsque le changement de variable est linéaire, ce que l'on suppose ici, J est la matrice Jacobienne de la transformation et det(J) est son déterminant.

Ici, cette matrice Jacobienne vaut :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{où les } x, y, z \text{ sont les coordonnées} \\ \text{des quatre sommets du tétraèdre.} \end{array} \quad (128)$$

Notre fonctionnelle (sur un élément) est :

$$\Xi_e = \int_{V_e} \left[\frac{\sigma}{2} \langle \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} u \rangle + u f_v \right] dV_e . \quad (129)$$

Après le changement de variable, elle devient :

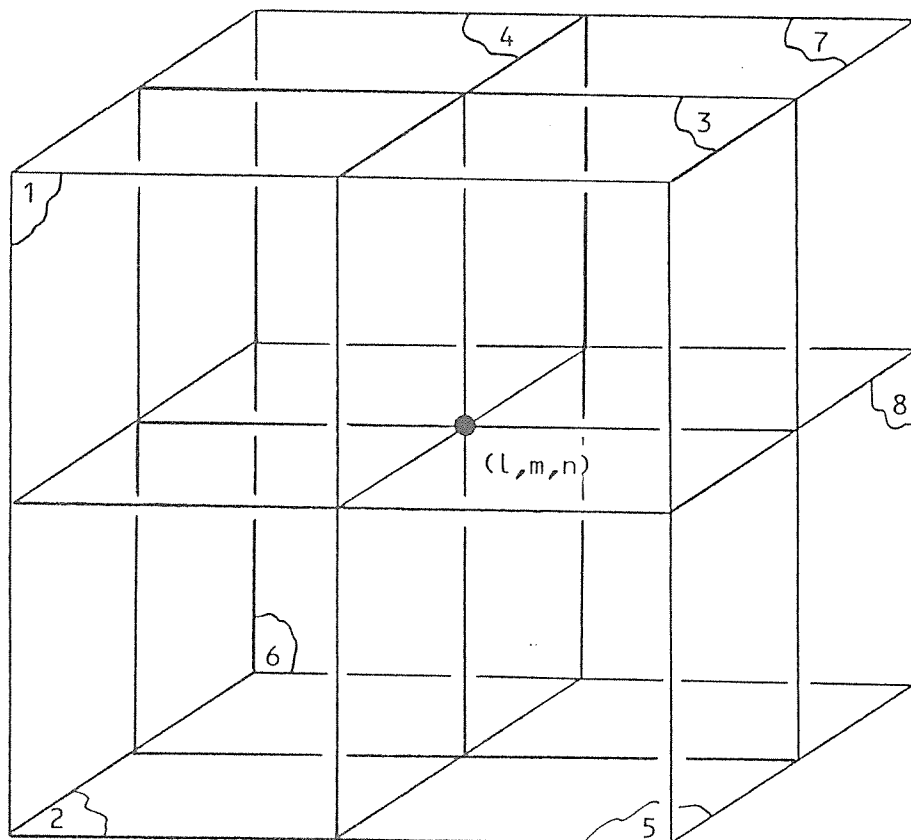


Figure 39: Huit hexaèdres sont "connectés" au noeud (l, m, n) . Seuls certains des tétraèdres de ces hexaèdres interviennent dans le calcul de la dérivée de la fonctionnelle par rapport au potentiel en (l, m, n) : ceux qui sont également connectés au noeud (l, m, n) . La liste en est donnée sur le tableau 1.

voir les figures 37 et 39

numéro du tétraèdre dans le cube (fig. 36)

numéro du point dans le tétraèdre (fig. 38)

indices des 4 points du tétraèdre

point par rapport auquel la dérivée est effectuée

cube 1 $i=1-1$ $j=m-1$ $k=n-1$					
2	1	1-1	m-1	n	
	2	1-1	m	n-1	
	3	1-1	m	n	
	4	1	m	n	*
3	1	1-1	m-1	n	
	2	1	m-1	n-1	
	3	1	m	n	*
	4	1	m-1	n	
4	1	1	m-1	n-1	
	2	1	m	n-1	
	3	1-1	m	n-1	
	4	1	m	n	*
5	1	1-1	m-1	n	
	2	1	m-1	n-1	
	3	1-1	m	n-1	
	4	1	m	n	*

cube 2 $i=1$ $j=m-1$ $k=n-1$					
2	1	1	m-1	n	
	2	1	m	n-1	
	3	1	m	n	*
	4	1+1	m	n	

cube 5 $i=1$ $j=m$ $k=n-1$					
1	1	1	m	n	*
	2	1	m	n-1	
	3	1	m+1	n-1	
	4	1+1	m	n-1	
2	1	1	m	n	*
	2	1	m+1	n-1	
	3	1	m+1	n	
	4	1+1	m+1	n	
3	1	1	m	n	*
	2	1+1	m	n-1	
	3	1+1	m+1	n	
	4	1+1	m	n	
5	1	1	m	n	*
	2	1+1	m	n-1	
	3	1	m+1	n-1	
	4	1+1	m+1	n	

cube 6 $i=1$ $j=m-1$ $k=n$					
1	1	1	m-1	n+1	
	2	1	m-1	n	
	3	1	m	n	*
	4	1+1	m-1	n	
2	1	1	m-1	n+1	
	2	1	m	n	*
	3	1	m	n+1	
	4	1+1	m	n+1	
4	1	1+1	m-1	n	
	2	1+1	m	n	
	3	1	m	n	*
	4	1+1	m	n+1	
5	1	1	m-1	n+1	
	2	1+1	m-1	n	
	3	1	m	n	*
	4	1+1	m	n+1	

cube 7 $i=1-1$ $j=m$ $k=n$					
1	1	1-1	m	n+1	
	2	1-1	m	n	
	3	1-1	m+1	n	
	4	1	m	n	*
3	1	1-1	m	n+1	
	2	1	m	n	*
	3	1	m+1	n+1	
	4	1	m	n+1	
4	1	1	m	n	*
	2	1	m+1	n	
	3	1-1	m+1	n	
	4	1	m+1	n+1	
5	1	1-1	m	n+1	
	2	1	m	n	*
	3	1-1	m+1	n	
	4	1	m+1	n+1	

cube 4 $i=1-1$ $j=m-1$ $k=n$					
4	1	1	m-1	n	
	2	1	m	n	*
	3	1-1	m	n	
	4	1	m	n+1	

cube 3 $i=1-1$ $j=m$ $k=n-1$					
3	1	1-1	m	n	
	2	1	m	n-1	
	3	1	m+1	n	
	4	1	m	n	*

cube 8 $i=1$ $j=m$ $k=n$					
1	1	1	m	n+1	
	2	1	m	n	*
	3	1	m+1	n	
	4	1+1	m	n	

Tableau 1: Liste des 20 tétraèdres qui interviennent dans la dérivée de la fonctionnelle par rapport au potentiel au point $1,m,n$.

$$\int_{V_{\text{réf}}} \left[\frac{\sigma}{2} \langle [J^{-1}] \vec{\nabla} u, [J^{-1}] \vec{\nabla} u \rangle + u f_v \right] \det(J) d\xi d\eta d\zeta . \quad (130)$$

Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que la conductivité σ est constante sur un tétraèdre.

Puisque:

$$u = (1 - \xi - \eta - \zeta) a_4 + \xi a_1 + \eta a_2 + \zeta a_3 , \quad (131)$$

on a:

$$\vec{\nabla} u = \begin{bmatrix} a_1 - a_4 \\ a_2 - a_4 \\ a_3 - a_4 \end{bmatrix} . \quad (132)$$

Notons: $b_w = a_w - a_4$; $w = 1, 2$ ou 3

$$\text{et } [J^{-1}] = \{ \alpha_{ij} \}_{1 \leq i, j \leq 3}$$

On a alors:

$$\langle [J^{-1}] \vec{\nabla} u, [J^{-1}] \vec{\nabla} u \rangle = \sum_{v=1}^3 \left[\sum_{w=1}^3 \alpha_{vw} b_{vw} \right]^2 \quad (133)$$

Pour continuer, séparons l'intégrale en deux termes $\Xi^{(1)}$ et $\Xi^{(2)}$. Le premier comporte le carré scalaire ci-dessus et le deuxième le terme de source f_v .

Dans le premier, l'intégrande ne contient plus les variables d'intégration. Plus précisément:

$$\Xi_e^{(1)} = \frac{\det(J) \sigma}{2} \int_{V_{\text{réf}}} \sum_{v=1}^3 \left[\sum_{w=1}^3 \alpha_{vw} b_{vw} \right]^2 d\xi d\eta d\zeta , \quad (134)$$

$$\text{soit: } \Xi_e^{(1)} = \frac{\det(J) \sigma}{12} \sum_{v=1}^3 \left[\sum_{w=1}^3 \alpha_{vw} b_w \right]^2 \quad (135)$$

(le volume du tétraèdre de référence vaut 1/6).

On en déduit facilement:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \Xi_e^{(1)}}{\partial a_r} = \frac{\det(J) \sigma}{6} \sum_{v=1}^3 \alpha_{vr} \sum_{w=1}^3 \alpha_{vw} b_w, \text{ pour } r = 1, 2 \text{ ou } 3 \\ \frac{\partial \Xi_e^{(1)}}{\partial a_4} = - \frac{\det(J) \sigma}{6} \sum_{v=1}^3 \left[\sum_{w=1}^3 \alpha_{vw} \right] \left[\sum_{w=1}^3 \alpha_{vw} b_w \right]. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{OK} \\ \text{OK!} \end{array} \quad (136)$$

Passons maintenant au terme de source. Nous choisissons d'assimiler les électrodes à des points. Pour bien représenter la source, il faut recourir aux distributions de Dirac (ou "Dirac", plus simplement). Il n'est pas très restrictif de placer ces sources en des noeuds. Le noeud (i,j,k) coïncide avec le sommet N°2 du tétraèdre N°1 dans l'hexaèdre (i,j,k). Les coordonnées paramétriques de ce point sont:

$$\xi = \zeta = 0 \text{ et } \eta = 1.$$

Lorsque l'intégrande comporte une fonction de Dirac, le déterminant se simplifie. Cela provient de la généralisation de la relation bien connue: $\delta(ax) = \delta(x)/(|a|)$. Il faut bien entendu prendre garde au signe; ici l'orientation du tétraèdre est telle que $\det(J) > 0$.

L'expression du deuxième terme de l'intégrale sur un élément est alors:

$$\Xi_e^{(2)} = \int_{V_{\text{réf}}} \left[(1-\xi-\eta-\zeta)a_4 + \xi a_1 + \eta a_2 + \zeta a_3 \right] I \delta(0,1,0) dV = I a_2 \quad (137)$$

I désigne le courant à cette source.

Les dérivées sont particulièrement simples:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{E}_e^{(2)}}{\partial a_r} = 0, \text{ pour } r = 1, 3 \text{ ou } 4 \\ \\ \frac{\partial \mathcal{E}_e^{(2)}}{\partial a_2} = I. \end{array} \right. \quad (138)$$

IV.2.3. Résolution par la méthode du gradient conjugué.

Le plus souvent, le problème $\delta \mathcal{E} = 0$ est écrit sous forme matricielle. La matrice de ce système est plutôt vide: dans notre cas, elle comporterait sur une ligne vingt termes non nuls et relatifs aux vingt tétraèdres "connectés" à un noeud.

Ce système peut être résolu par une méthode directe (élimination de Gauss, par exemple) et nécessite alors le stockage en mémoire de la matrice complète (mais pas nécessairement de ses zéros selon les performances du programme). On peut également le résoudre à l'aide d'une méthode itérative (Gauss-Seidel avec sur-relaxation), auquel cas il peut être nécessaire de ne stocker qu'une ligne, voir aucun élément de la matrice si l'algorithme est conçu en fonction de cette charge.

Nous avons opté pour un procédé complètement différent et qui allie peut-être les avantages de ces deux méthodes sans en présenter tous les inconvénients: il s'agit de la méthode du gradient conjugué.

Cet algorithme est en réalité destiné à la minimisation (recherche du minimum) de fonctions convexes. Lorsque la fonction est de surcroît quadratique, la version la plus élémentaire du procédé est très performante. Bien qu'il procède de manière itérative, il donne la solution mathématique au problème posé en un nombre fini d'étapes, nombre égal à la dimension de l'espace des inconnues. Nous ne rentrerons pas davantage dans les détails des caractéristiques de cet algorithme. On pourra consulter à son propos [42] ou [17]. Nous résumons ci-dessous son utilisation pour notre problème particulier.

Remarquons tout d'abord que la fonctionnelle est fonction quadratique des inconnues $u_{i,j,k}$. De plus, sa forme indique son caractère défini positif. Ces deux propriétés font de la méthode du gradient conjugué un algorithme idéal pour la minimisation directe de la fonctionnelle. Il est inutile d'écrire ou de stocker la matrice du système: l'algorithme ne demande pour fonctionner que la valeur du gradient que l'on a calculé dans le paragraphe précédent. Par ailleurs, la connection entre les mailles et les noeuds est simplifiée par notre méthode de numérotation. Pour chaque composante (i,j,k) du gradient, on additionne les différentes contributions des tétraèdres dont la liste a été donnée sur le tableau 1. En ce qui concerne les conditions aux limites, celles de Neumann portant sur la composante verticale du champ électrique sur la surface (composante qui doit être nulle) sont vérifiées par la formulation même des éléments finis telle qu'elle a été décrite (forme faible). Pour les conditions de Dirichlet (qui imposent la valeur du potentiel sur une partie de la surface délimitant le domaine), il suffit d'initialiser ces points aux valeurs voulues et de ne pas inclure ces points dans la liste des variables.

L'ordinogramme figure 40 décrit l'algorithme du gradient conjugué tel que nous l'avons programmé avec succès et en application pour notre algorithme de modélisation.

IV.2.4. Application au problème électrique en forage.

Initialement, nous avons conçu un programme destiné spécifiquement au problème de l'effet topographique. Dans cette optique, la conductivité est constante sur l'ensemble du domaine de modélisation et on étudie l'influence de la surface topographique (dôme, talweg etc...). Il n'est pas rare, en effet, que les forages soient implantés en zone semi-montagneuse, ou dans l'ancien lit d'une rivière... Nous consacrons un paragraphe du chapitre V à ces différents aspects.

Fabrication du maillage.

Il est avantageux de générer le maillage de façon automatique. Les

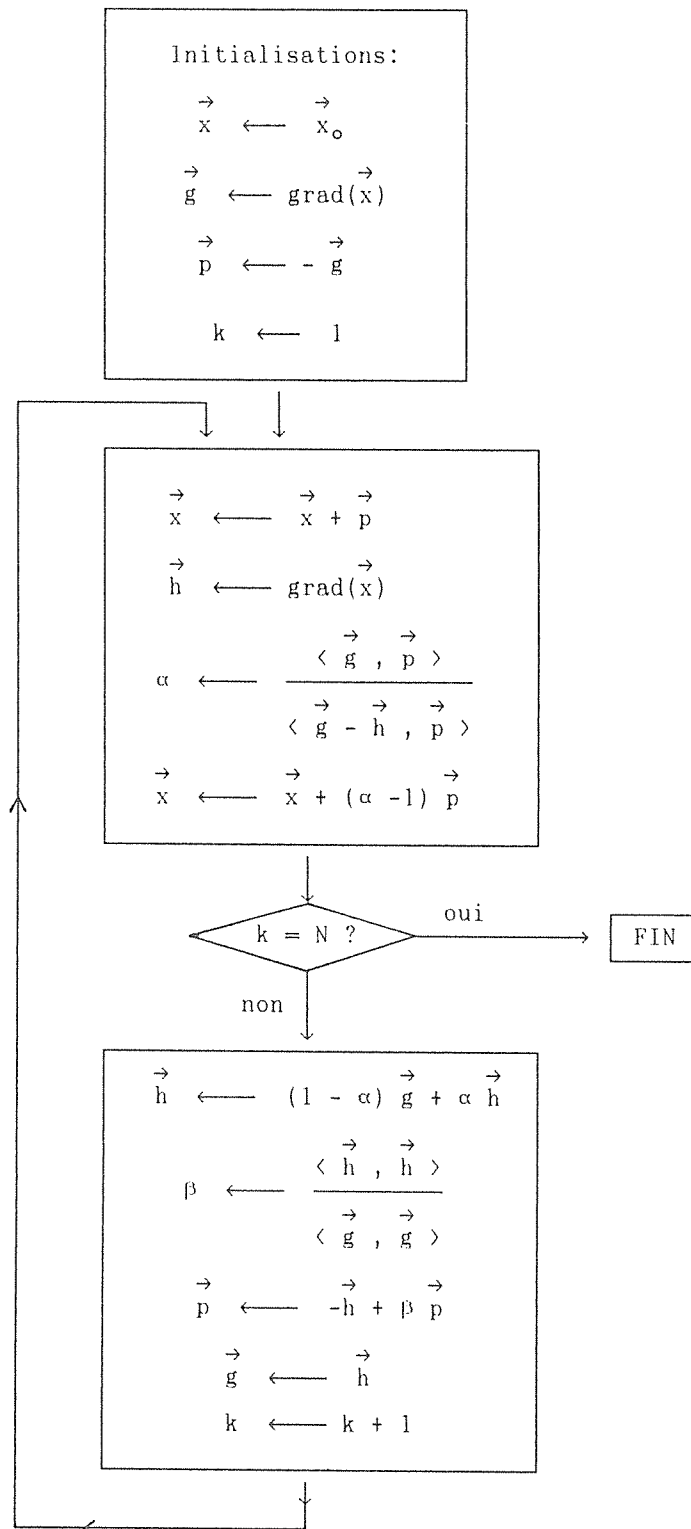


Figure 40: Algorithme du "gradient conjugué". Souvent, une solution satisfaisante est obtenue avant la fin du processus ($k \ll N$). Un seul calcul du gradient est nécessaire à chaque itération. (grad est le gradient de la fonction à minimiser).

principales données pour celui-ci sont les cotes des noeuds en surface ainsi que les dimensions du domaine. On a également introduit la possibilité d'incliner le réseau de sorte à pouvoir tenir compte d'un forage non vertical.

On ne raisonnera, dans la suite, que sur le sur-maillage hexaédrique.

Le réseau est horizontalement régulier en surface: celle-ci est découpée en mailles rectangulaires. Par contre, afin de profiter d'une meilleure précision, le découpage vertical est choisi de sorte que les intervalles soient en progression géométrique. La figure 41 illustre un tel réseau.

L'axe vertical est décomposé en N_Z-1 intervalles: il comporte N_Z points. Si le réseau était régulier, on aurait:

$$\Delta z = z_{i+1,j,k} - z_{i,j,k} = \text{constante} = z_{1,j,k}/(N_Z-1) \quad (139)$$

(on suppose la cote du niveau inférieur du domaine nulle: $z_{N_Z,j,k} = 0$)

Posons plutôt $z_{1,j,k} - z_{2,j,k} = a < z_{1,j,k}/(N_Z-1)$, cad que le réseau en surface est plus serré que s'il était régulier. Proposons alors que les intervalles verticaux successifs soient en progression géométrique de raison supérieure à 1:

$$z_{i,j,k} - z_{i+1,j,k} = \lambda (z_{i-1,j,k} - z_{i,j,k}) \quad (140)$$

On en déduit facilement:

$$z_{1,j,k} = a \frac{\lambda^{N_Z-1} - 1}{\lambda - 1} \quad (141)$$

Pour trouver λ , il faut résoudre l'équation algébrique ci-dessus.

Pour ce faire, on met cette expression sous la forme récurrente "contractante":

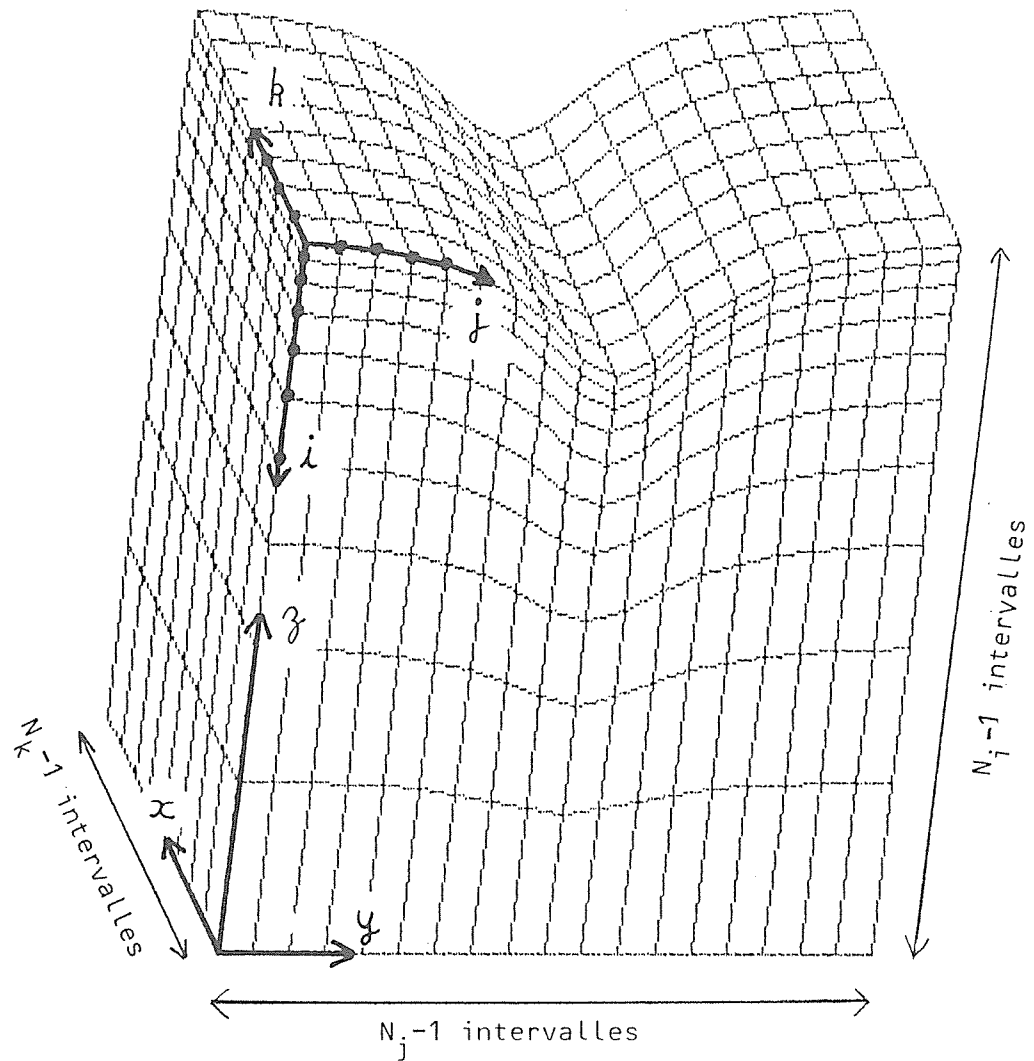


Figure 41: Réseau utilisé pour la modélisation par éléments finis de l'effet topographique. Les intervalles selon l'axe des (z) sont en progression géométrique. Le réseau en (x) et (y) est régulier.

$$\lambda^{(\ell+1)} = \left[\frac{z_{1,j,k} (\lambda^{(\ell)} - 1)}{a} + 1 \right]^{\frac{1}{N_Z - 1}} \quad (142)$$

(Rappelons qu'une forme contractante est une relation de la forme:

$x^{(\ell+1)} = \varphi(x^{(\ell)})$ avec $|\varphi'| < 1$. On montre que l'application de cette

forme récurrente converge vers la solution de l'équation: $x = \varphi(x)$).

Avec un λ initial grand quelconque (100 par exemple), la convergence demande moins de vingt itérations.

Ce détail nous étant acquis, remarquons maintenant que si on pose:

$$a = \frac{z_{1,j,k}}{\mu (N_Z - 1)} \quad (\text{avec } \mu > 1 \text{ puisque } a < \frac{z_{1,j,k}}{N_Z - 1}) \quad (143)$$

alors l'équation en λ peut s'écrire:

$$\lambda^{(\ell+1)} = \left[\mu (N_Z - 1) (\lambda^{(\ell)} - 1) + 1 \right]^{1/(N_Z - 1)} \quad (144)$$

λ ne dépend ainsi plus de $z_{1,j,k}$: on peut le calculer une fois pour toute.

Finalement, la cote du point $z_{i,j,k}$ se détermine à l'aide de la relation:

$$z_{i,j,k} = z_{1,j,k} \left[1 - \frac{1}{\mu (N_Z - 1)} \frac{\lambda^{i-1} - 1}{\lambda - 1} \right] \quad (145)$$

Afin de pouvoir tenir compte de l'éventuelle inclinaison du réseau, il est utile d'incliner ce dernier. La figure 42 montre comment. *frage!*
En surface, aucune coordonnée n'est affectée par cette opération.

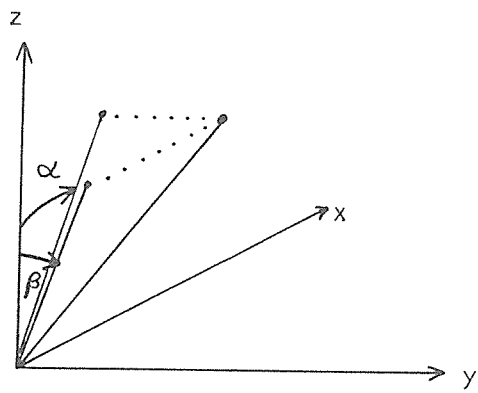
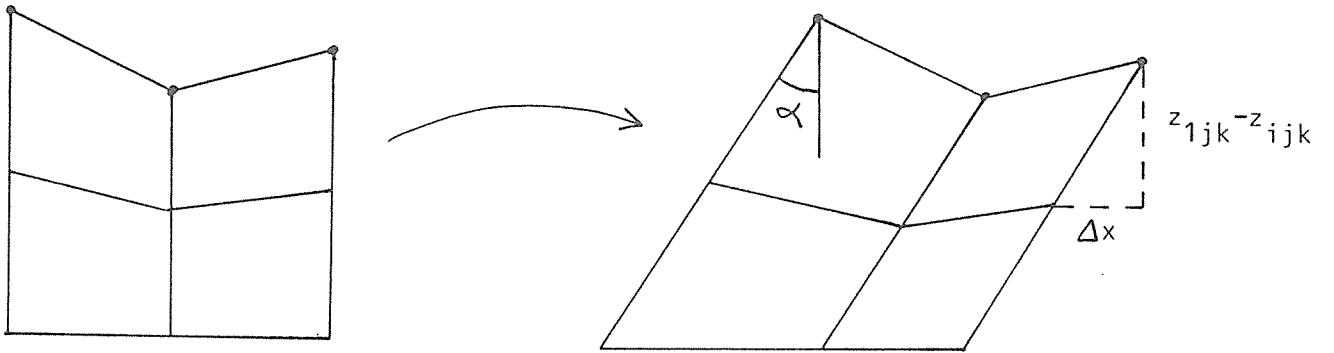


Figure 42: Inclinaison du réseau initial. Les points de la surface ne sont pas affectés par l'opération. Toutes les cotes sont également invariantes.

Désignant par $x'_{i,j,k}$ la nouvelle valeur de $x_{i,j,k}$, on voit que l'on a :

$$x'_{i,j,k} = x_{i,j,k} + \Delta x_{i,j,k} \quad \text{avec} \quad \text{tg}(\alpha) = \frac{\Delta x_{i,j,k}}{z_{1,j,k} - z_{i,j,k}} \quad (146)$$

Avec un pas Δx régulier tel que $\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N_x - 1} = \frac{x_{\max}}{N_x - 1}$, (147)

on obtient :

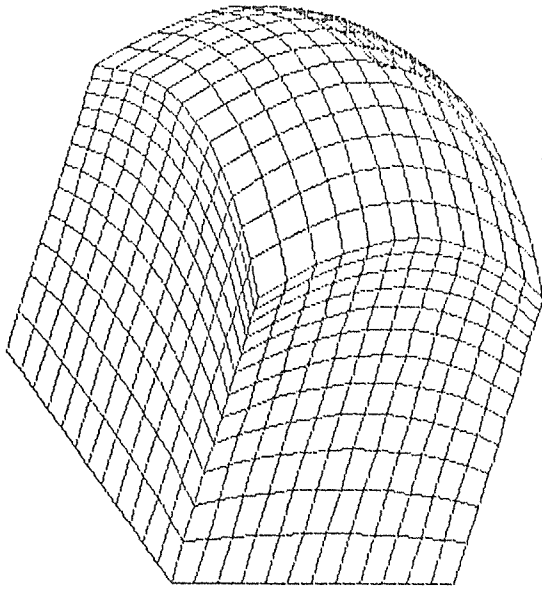
$$x'_{i,j,k} = (k - 1)\Delta x + \text{tg}(\alpha) (z_{1,j,k} - z_{i,j,k}). \quad (148)$$

La même procédure est suivie sans problème pour l'inclinaison selon y .

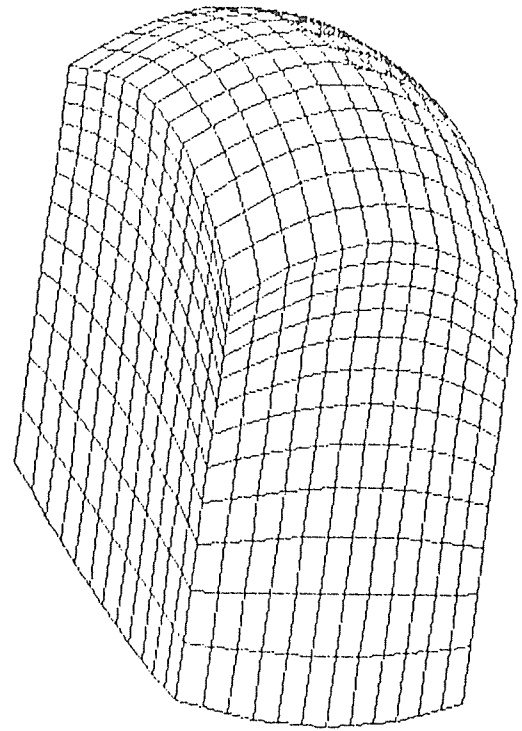
La figure 43 donne un exemple de réseau incliné.

Test du programme.

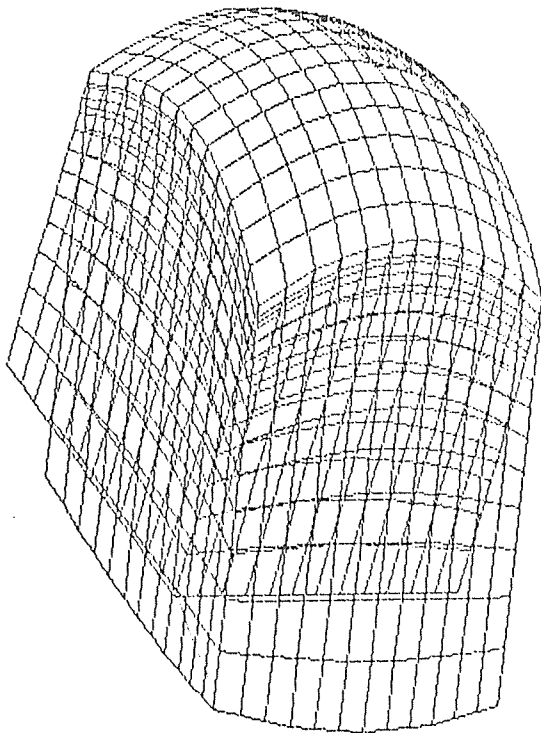
Le programme a été testé sur des cas simples pour lesquels la solution analytique est connue. Un exemple de ces tests est présenté sur la figure 44.



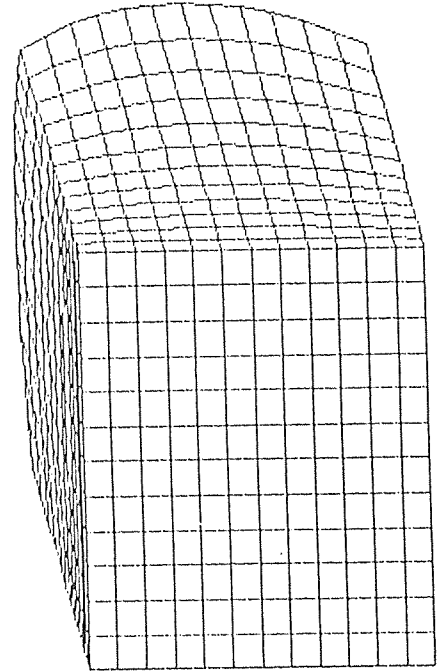
Modèle initial non incliné



Modèle incliné (vers l'observateur)



Modèles initial et incliné superposés.
La surface topographique n'est pas affectée.
De fait, toutes les cotes restent invariantes.



Modèle incliné vu de haut.

Figure 43: Exemple de maillage. (Seul le sur-maillage hexaédrique est représenté). Les graduations selon x et y sont régulières avant l'inclinaison du domaine. Le maillage vertical est en progression géométrique.

différence entre les solutions analytique et numérique, exprimée en %

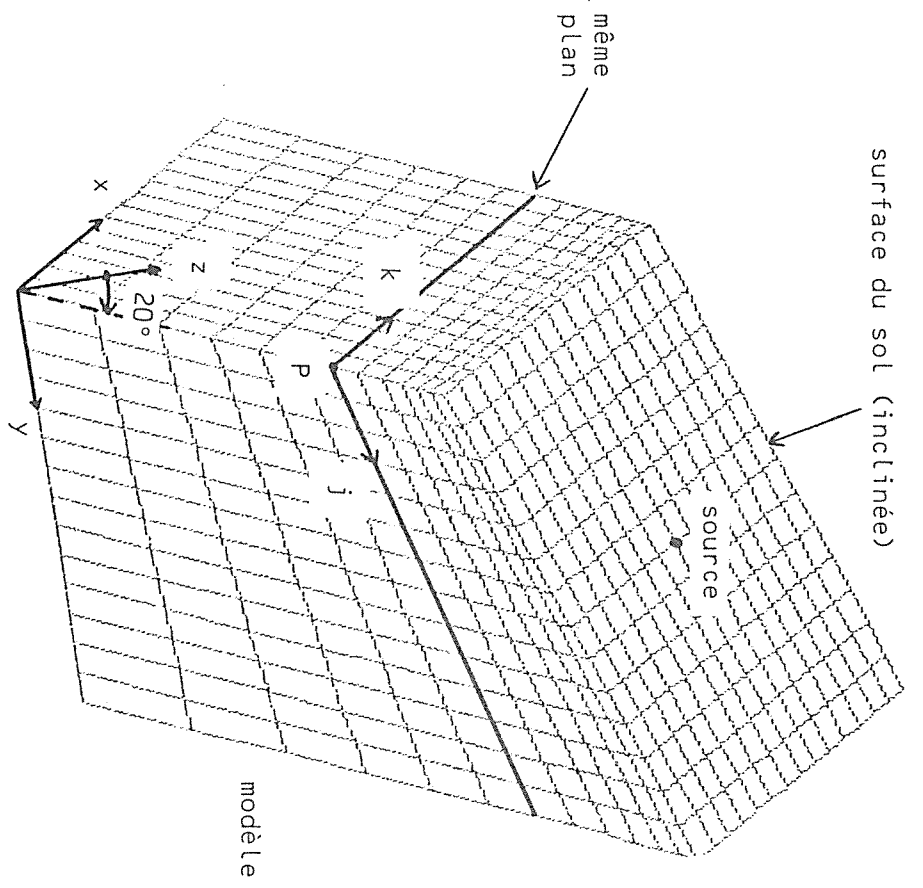
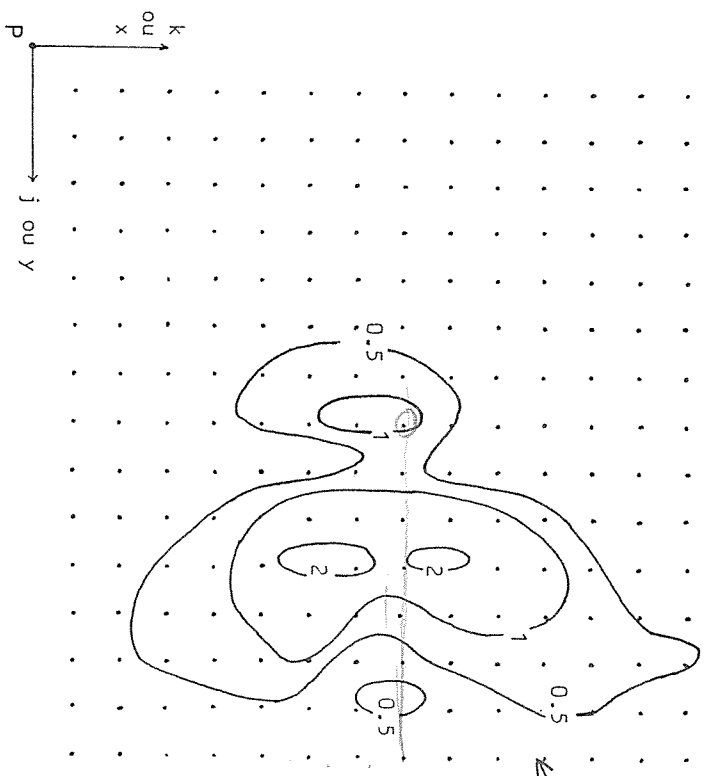


Figure 44: "Patch-test" du programme de modélisation par éléments finis. Les mailles ne sont pas des parallélépipèdes. La solution analytique est connue puisque la surface est plane. La différence relative entre les solutions analytique et numérique atteint 2% pour les points du plan d'étude les plus proches de la source. La figure 44bis, non citée dans le texte, illustre la convergence de l'algorithme numérique.

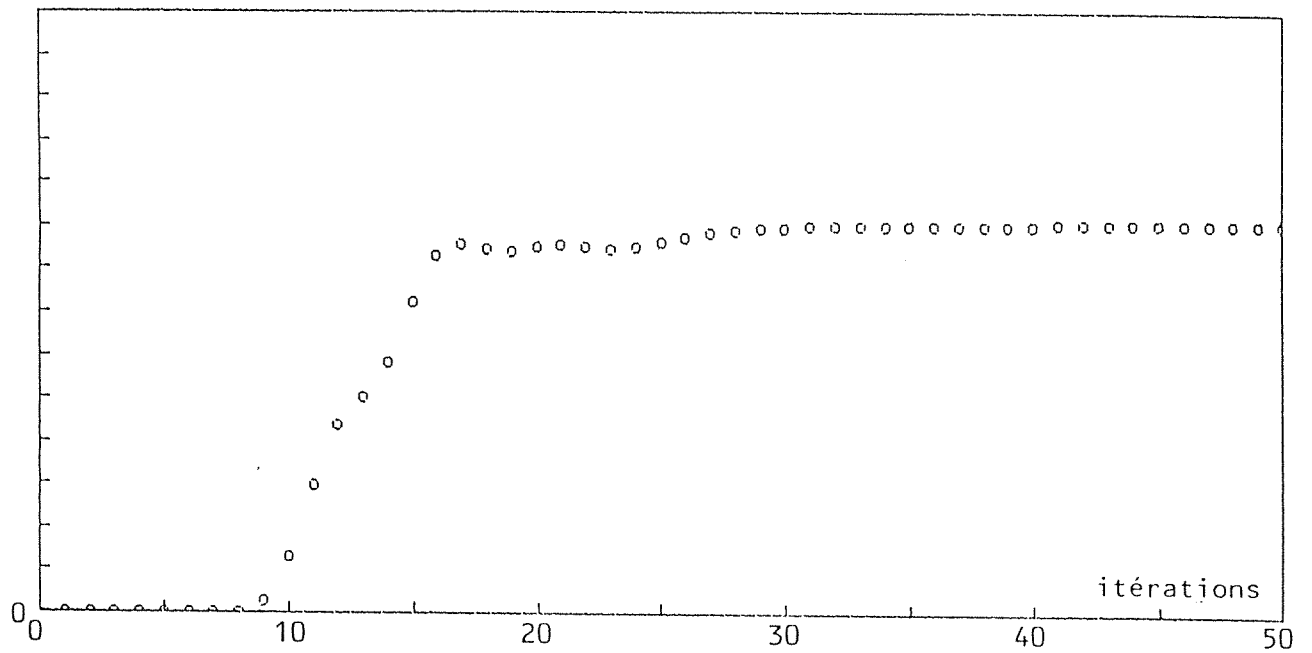


Figure 44bis: Convergence au point central du plan de la figure 44 de l'algorithme du gradient conjugué. La solution est satisfaisante à partir de l'itération 40. Sur le domaine, le potentiel est initialisé à 0. Sur les bords du domaine, le potentiel est fixé par sa valeur analytique (laquelle est dans ce cas la valeur exacte).

Cette figure n'est pas citée dans le texte.

V. RESULTATS DES MODELISATIONS ET MOYENS DE L'INTERPRETATION.

V.1. Caractères de l'anomalie due à une sphère dans un champ uniforme.

Avec l'utilisation du DSPF, le champ primaire est sensiblement homogène et horizontal au voisinage du forage. L'approximation "champ homogène" présentée dans ce paragraphe autorise une approche correcte des caractères de ce que nous appelons une "anomalie élémentaire", à savoir l'anomalie due à une sphère non intersectée et plongée dans un champ presque homogène.

Nous reprenons le résultat du chapitre IV, formule 58. Conformément à la figure 45, le potentiel peut s'écrire:

$$V = -E_o r \cos(\vartheta) \left[1 - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + 2\rho_2} \frac{a^3}{r^3} \right]. \quad (149)$$

a est le rayon de la sphère
 ρ_1 est la résistivité externe
 ρ_2 interne.

Si on suppose que le centre de la sphère, le forage et le champ électrique primaire sont coplanaires, on peut écrire:

$$V = -E_o x \left[1 - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + 2\rho_2} \frac{a^3}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \right]. \quad (150)$$

Dans le forage, le terme $E_o x$ est constant. Puisque V est un potentiel, il est inutile d'en tenir compte. Nous retenons le potentiel sous la forme:

$$V = L \frac{x}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{avec } L = E_o \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + 2\rho_2} a^3. \quad (151)$$

Le gradient le long du forage est:

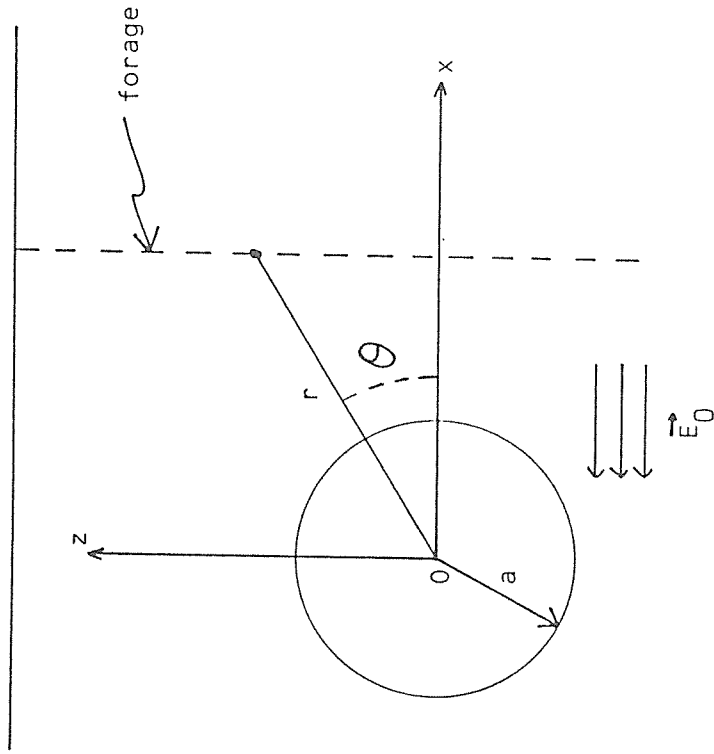


Figure 45: Géométrie pour la sphère plongée dans un champ homogène horizontal.

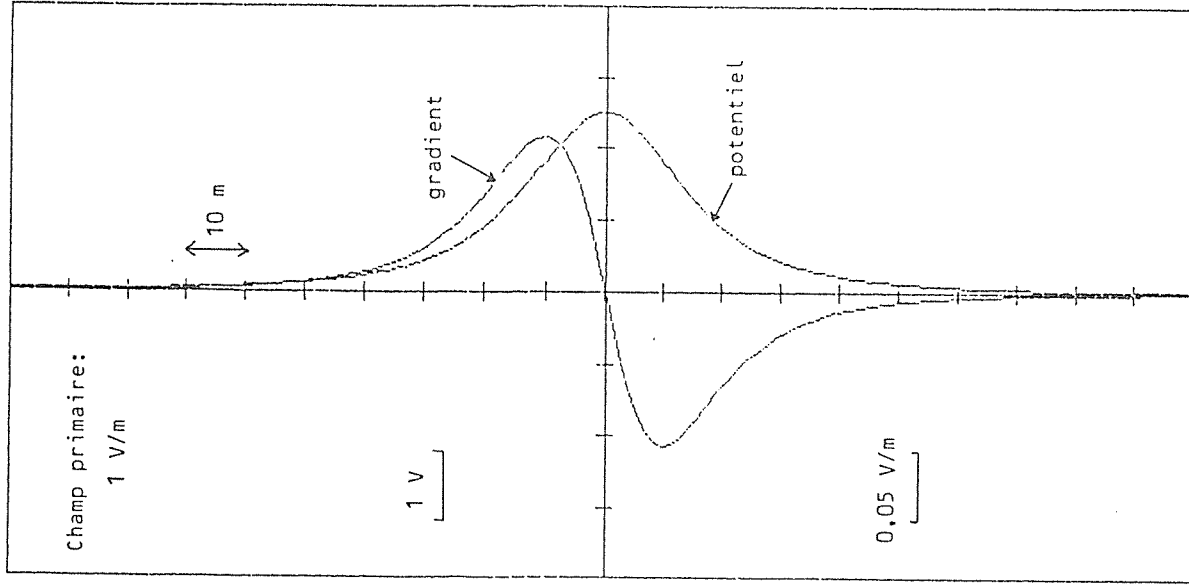


Figure 46: Allures du potentiel et de son gradient au voisinage d'une sphère parfaitement conductrice de 10 m de rayon. Le forage est situé à 20 m du centre de la sphère. ($x=-20$)

$$g(z) = \frac{\partial V}{\partial z} = L \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{x}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \right] = -3 L \frac{x z}{(x^2 + z^2)^{5/2}} . \quad (152)$$

Les allures de ce potentiel et de son gradient sont données sur la figure 46.

La calcul des positions des extrema de $g(z)$ est élémentaire. Il donne cette relation fondamentale:

$$z = \pm \frac{x}{2} . \quad (153)$$

Ainsi, la distance entre les deux extrema est égale à la distance x séparant le centre de la sphère du forage.

Supposons dans un deuxième temps un cas plus général où le forage n'est plus dans le plan défini par le champ primaire et le centre de la sphère. La figure 47 se rapporte à cette situation.

ϑ est l'angle entre \vec{E}_0 et \vec{OP} . Dans le repère (O, x, y, z) , les composantes de ces deux vecteurs sont:

$$\vec{E}_0 : \begin{bmatrix} -E_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{OP} : \begin{bmatrix} d \cos(\varphi) \\ d \sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix} . \quad (154)$$

d désigne la distance entre le centre de la sphère et le forage.

$$\text{D'autre part: } \cos(\vartheta) = \frac{\langle \vec{E}_0, \vec{OP} \rangle}{|\vec{E}_0| |\vec{OP}|} = \frac{-E_0 d \cos(\varphi)}{E_0 (d^2 + z^2)} = - \frac{d \cos(\varphi)}{r} \quad (155)$$

$$\text{Le potentiel s'écrit maintenant: } V = L \cos(\varphi) \frac{d}{(d^2 + z^2)^{3/2}} . \quad (156)$$

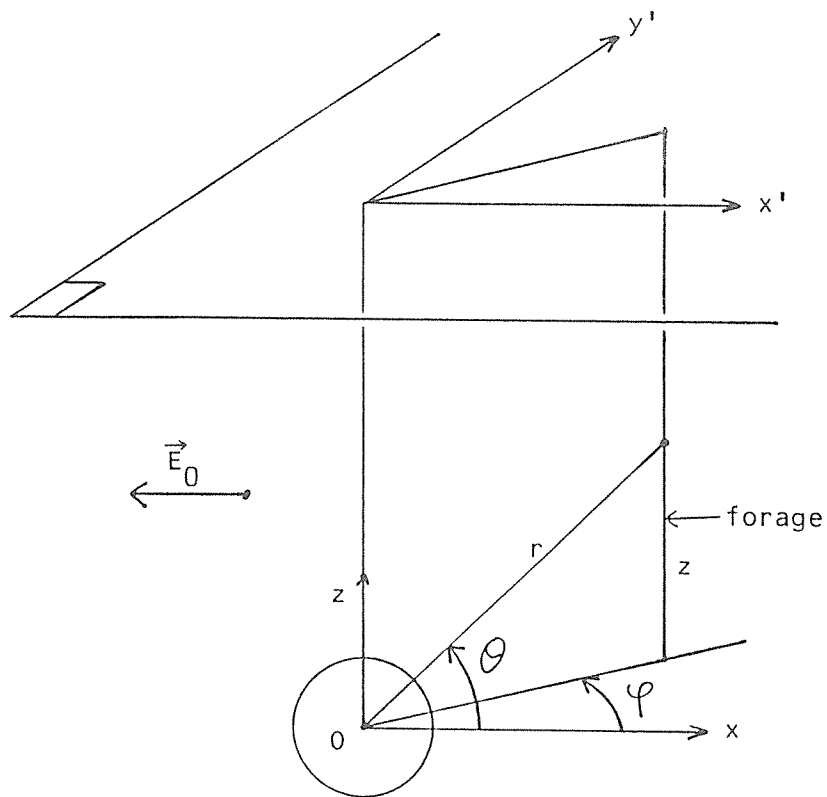


Figure 47: Configuration du problème de la sphère en champ homogène lorsque le forage n'est pas dans le plan défini par le centre de la sphère et la direction du champ primaire.

Il est évident que le gradient est multiplié par le même facteur $\cos(\varphi)$.

On peut, inversement à ce qui vient d'être fait, laisser le forage fixe et faire tourner la sphère autour de lui: le résultat serait le même. On peut énoncer cette deuxième règle importante:

L'amplitude de l'anomalie varie comme le cosinus de l'azimuth de la sphère par rapport au forage.

Avec le DSPF, la direction du champ primaire est contrôlée. Alors, en effectuant deux mesures correspondant à deux directions perpendiculaires de la ligne d'injection (ligne comprenant les deux électrodes de courant et le forage), il est possible de déterminer l'azimuth. Il faut noter cependant que le signe de l'anomalie dépend du sens du contraste de résistivité. Il existe donc une ambiguïté de 180° lorsque ce sens n'est pas connu. La plupart du temps, cette limitation est sans gravité puisque la plupart des cibles électriques sont des gisements conducteurs.

Terminons notre étude de la sphère en champ homogène par des considérations sur le terme d'amplitude:

$$\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + 2\rho_2} a^3.$$

Plaçons-nous dans l'espace des paramètres (ρ_1, ρ_2, a) et faisons les remarques suivantes:

- l'amplitude de l'anomalie est proportionnelle au volume de la sphère.
- l'amplitude de l'anomalie est proportionnelle à $(\rho_1 - \rho_2) / (\rho_1 + 2\rho_2)$.

Si on définit $x = \rho_1 / \rho_2$ comme étant le contraste de résistivité, il est intéressant de tracer la fonction suivante:

$$f(x) = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + 2\rho_2} = \frac{x - 1}{x + 2}, \text{ pour } x \in [1, +\infty[. \quad (157)$$

Le graphe, qui caractérise l'amplitude en fonction du contraste de résistivité, est représenté sur la figure 48.

Pour x devenant très grand, $f(x)$ tend vers 1. A partir de quelle valeur peut-on considérer que $f(x)$ est très proche de 1? Pour répondre à cette question, il suffit de résoudre:

$$f(x) > 1 - \varepsilon. \quad (158)$$

Il vient: $x > 3/\varepsilon - 2$.

On vérifie facilement que pour un contraste passant de 30 à l'infini, la variation de l'amplitude n'est plus que de 10%.

Or, souvent, la résistivité des cibles n'est pas connue à mieux qu'un facteur 10 et on ne fait pas une erreur importante en supposant un contraste de résistivité infini... dès que le contraste a dépassé, disons: vingt.

- sur une "hyper-surface" d'équation:

$$\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + 2\rho_2} a^3 = \text{constante}, \quad (159)$$

l'amplitude de l'anomalie ne varie pas. Il est donc impossible de déterminer simultanément et les deux résistivités et le rayon. Même lorsque la résistivité de l'encaissant est connue par ailleurs (ce qui est souvent le cas), il reste une ambiguïté totale pour a et ρ_2 . Cette remarque garde sa validité lorsque le champ primaire n'est plus supposé uniforme. En effet, le terme examiné ici constituera toujours la partie prépondérante de l'anomalie, et si l'ambiguïté mathématique disparaît, les ordres de grandeurs physiques, les bruits géologiques etc... empêcherons une bonne estimation de ces paramètres. La figure 49, qui

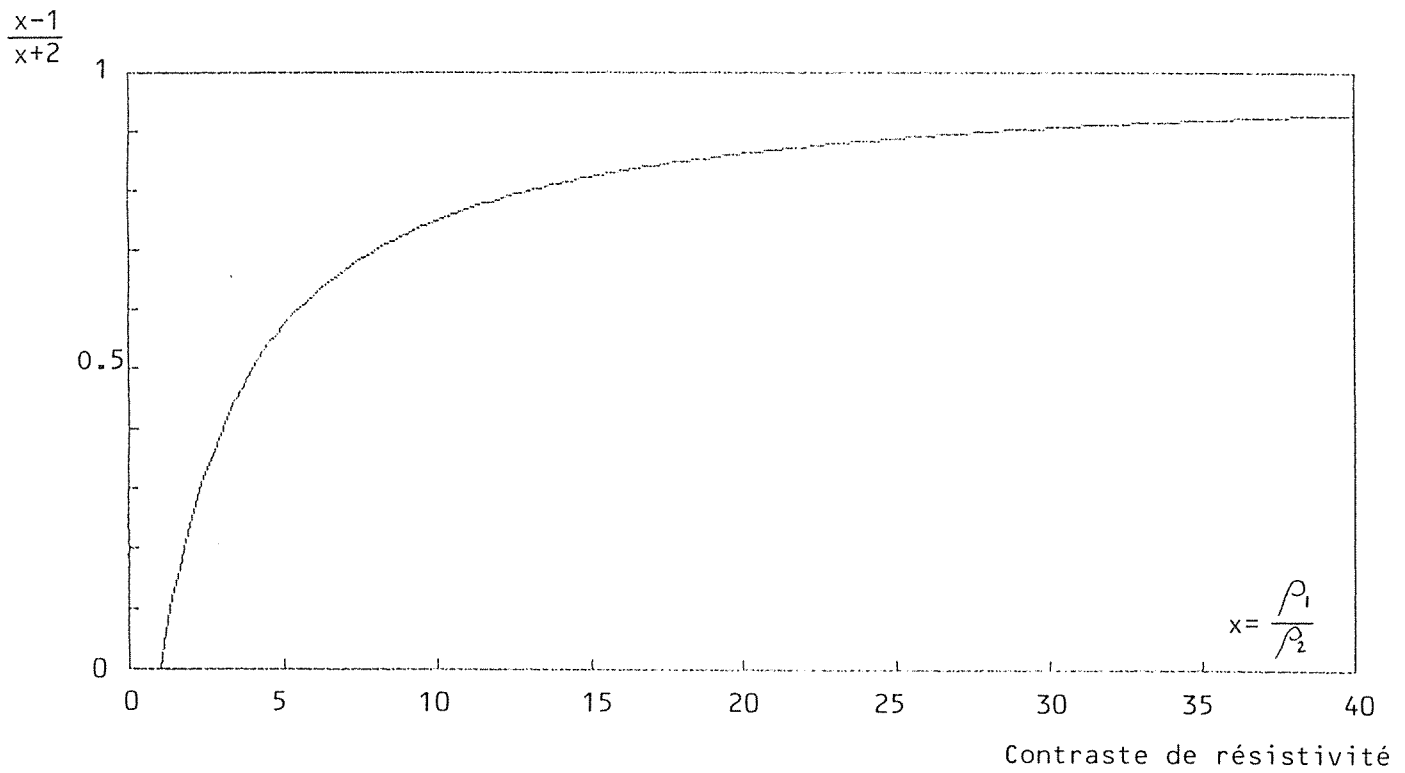


Figure 48: Terme d'amplitude de l'anomalie dépendant du contraste de résistivité x . La valeur asymptotique de la fonction est rapidement atteinte.

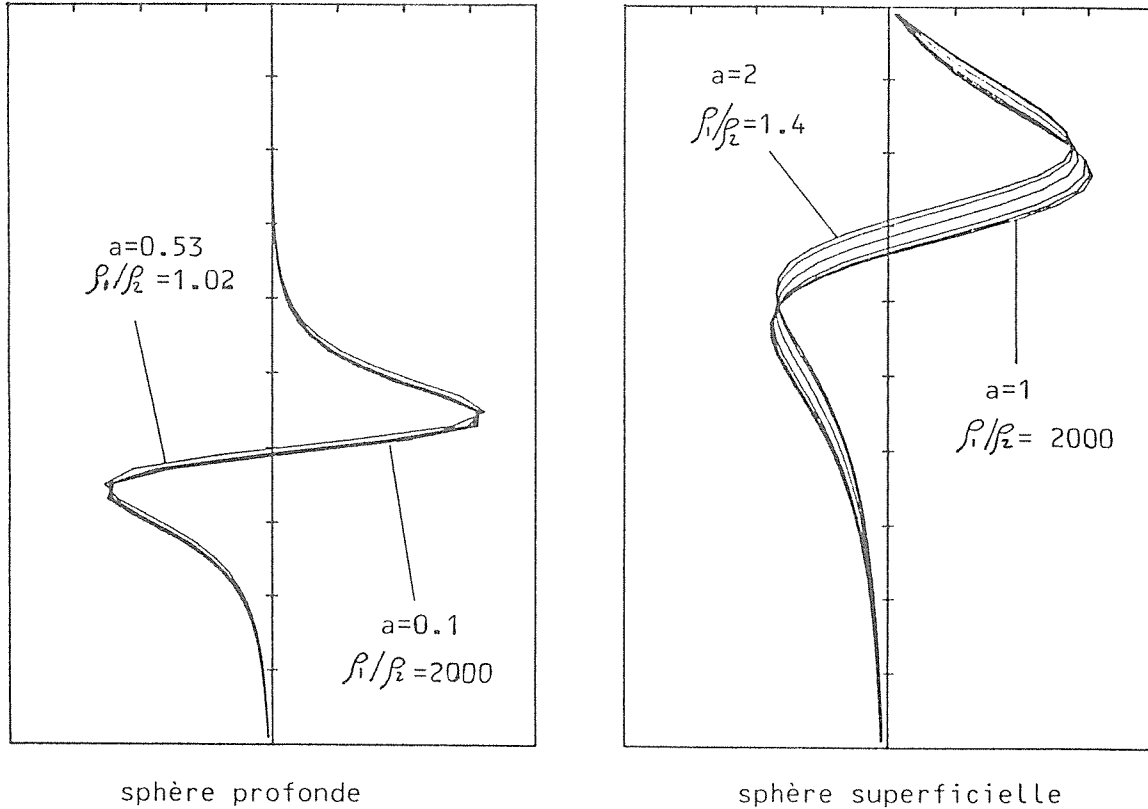


Figure 49: Anomalies dues à une sphère pour différents triplets de rayon et de résistivités tels que la quantité:

$$\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + 2\rho_2} a^3 \text{ reste constante.}$$

En pratique, il est impossible de déterminer à la fois le rayon et la résistivité interne.

illustre cette difficulté, le montre bien.

- malgré ces considérations, il est souvent possible d'estimer au moins le rayon. On a vu que la grandeur expérimentalement accessible est:

$$M = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + 2\rho_2} a^3 . \quad (160)$$

En fonction du contraste $x = \rho_1 / \rho_2$, on en tire facilement:

$$a = \left[M \frac{1 + 2/x}{1 - 1/x} \right]^{1/3} = a(x) . \quad (161)$$

Lorsque x est grand, il reste avec une bonne approximation:

$$a \approx M^{1/3} . \quad (162)$$

Enfin, le rayon obtenu en supposant un contraste infini est un rayon minimum. Cela résulte de l'inégalité suivante:

$$\forall x > 1, \quad a(x) > a(\infty) . \quad (163)$$

V.2. Limites concernant la détermination des paramètres d'une structure

(et remarques sur les méthodes inverses).

Lorsque le champ n'est pas homogène, les règles déduites dans le paragraphe précédent restent valables en première approximation. Résumons les résultats obtenus concernant le modèle sphérique.

- la profondeur et l'azimut de la sphère ont une forte influence sur l'anomalie: on peut déterminer ces deux paramètres. Il existe cependant un ambiguïté de 180° si le sens du contraste de résistivité est inconnu.

- s'il est possible d'attribuer une résistivité à l'encaissant, on peut

donner une estimation du rayon minimum de la sphère. Par contre, on ne peut pas trouver le rayon exact ni la résistivité interne. Cependant, ce point n'est pas très gênant en pratique. En effet, les cibles minières, telles que des gisements de pyrite, présentent des résistivités très inférieures à celle de leur encaissant et la détermination précise de ces résistivités est relativement dénuée d'intérêt (du fait de leur très grande variabilité en fonction d'autres facteurs). De plus, dès lors que le contraste est important, le rayon minimum est voisin du rayon vrai.

Une structure différente de la sphère va produire évidemment une anomalie différente de celle que nous avons étudiée. Malgré cela, on peut s'attendre à ce que toutes les considérations faites précédemment restent valables dans leurs grandes lignes. L'ambiguïté sur le couple (ρ_2, a) peut être rapprochée des principes d'équivalences bien connus en prospection électrique de surface et la généralité de telles lois est une chose bien admise.

Remarques sur les méthodes inverses.

Lorsque l'on voudra inverser des résultats expérimentaux, ces lois d'équivalence se feront particulièrement remarquer. Toutes les approches mathématiques de l'inversion reposent sur l'idée naturelle de la recherche d'un modèle pour lequel la "mesure théorique" coïncide le mieux possible avec la mesure expérimentale. Toutes les méthodes, donc, reviennent plus ou moins directement au problème de la minimisation d'une quantité de la forme:

$$J = d(\text{mesure expérimentale} , \text{"mesure théorique"})$$

d est une distance (souvent la distance euclidienne) qui caractérise l'écart entre les deux grandeurs.

L'analyse des possibilités de l'inversion n'a pas qu'un intérêt calculatoire. L'interpréteur, même (ou surtout!) s'il se passe de machine, rencontrera les mêmes limites qu'un bon programme.

Pour comprendre les difficultés auxquelles nous serons confrontés, choisissons, pour fixer les idées, la norme euclidienne.

On a le problème:

trouver les paramètres $\{a_i\}_{i=1, \dots, N}$ du modèle qui rende minimale la quantité:

$$J(\{a_i\}) = \sum_{j=1}^M \left[E_j - M_j(\{a_i\}) \right]^2 \quad (164)$$

$\{E_j\}$ sont les M données expérimentales

$\{M_j\}$ représentent les données synthétiques relatives au modèle physique simulant le phénomène et dépendant de divers paramètres.

Pour prendre un exemple concret, $\{E_j\}$ peut être la suite des tensions mesurées dans un forage à des profondeurs $\{z_j\}$; $\{M_j\}$ sont les mêmes grandeurs (théoriques) que l'on détermine par le calcul. Si le modèle retenu est la sphère, les paramètres $\{a_i\}$ sont ses coordonnées, sa résistivité et son rayon.

Il existe deux grandes classes de méthodes pour résoudre le problème posé ci-dessus:

1) on cherche directement le minimum de J par des techniques dites d'"optimisation".

2) on le remplace par le problème mathématiquement équivalent:

$$\vec{\nabla} J \equiv 0. \quad (165)$$

Dans tous les cas, l'analyse qualitative de la forme de J est d'un grand intérêt. Cette forme peut être définie par la forme des "courbes de niveau" (courbes iso-valeurs) de J dans l'espace à N dimension où il

évolue. Une telle approche permet, comme on va le voir, de prédire le comportement des algorithmes d'inversion classiques lorsque l'on va les mettre en oeuvre pour déterminer des paramètres. Cherchons à caractériser les courbes iso-valeurs (l'ensemble de ces courbes est appelé "épigraphe" par les mathématiciens).

Revenons au cas de la sphère en champ homogène. On peut sans problème porter le raisonnement sur le potentiel comme sur son gradient.

Au début du chapitre, on a pu mettre le potentiel sous la forme (formule 151):

$$V = L \frac{x}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{avec } L = E_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + 2\rho_2} a^3 . \quad (166)$$

E_0 est une grandeur connue. On a vu par ailleurs que le seul terme "problématique" est:

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + 2\rho_2} a^3 .$$

Réduisons, pour simplifier, l'espace des paramètres inconnus et dont dépend J , aux deux variables (ρ_2, a) . (On suppose donc ρ_1 également connu).

Lorsque ρ_2 et a évoluent sur une courbe d'équation:

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + 2\rho_2} a^3 = \text{constante} , \quad (167)$$

l'anomalie n'en est pas affectée. Cela signifie que J ne dépend pas de ces variables et reste constant sur cette courbe, ou, autrement dit encore, que cette courbe est une courbe de niveau.

Supposons que l'on ait pu atteindre le minimum de J . Il est possible de

faire varier ρ_2 et a sur une courbe dont l'équation est donnée ci-dessus sans toujours affecter la "fonctionnelle" J.

On en conclut:

- 1) le minimum de J n'est pas unique
- 2) il existe en réalité une infinité de minima
(toute la courbe définie par l'équation (167)).

Il est clair, d'autre part, que si l'on modifie les paramètres en s'éloignant du minimum, la fonctionnelle augmente rapidement. L'épigraphe ressemble donc à une sorte de vallée (on dit souvent un ravin) qui suit la courbe des minima et n'a aucune raison d'être rectiligne. Ce dernier fait, a priori anodin et souvent rencontré en géophysique (parce que dû à une loi d'équivalence) est la source de nombreuses difficultés et la faillite de nombreuses méthodes d'inversion.

Pour le comprendre, imaginons un observateur humain situé dans un terrain montagneux dont les courbes de niveau seraient homothétiques de celles de notre fonctionnelle. Imaginons également qu'il fasse un temps de brouillard et demandons à notre candide où se trouve le point le plus bas de la région. En s'aidant du voisinage proche, il ne va pouvoir indiquer que la direction de plus grande pente. Or il est parfaitement clair que celle-ci n'a aucune raison de coïncider avec la direction vraie du minimum. Qui plus est, notre observateur est incapable de savoir à quelle distance se trouve ce point le plus bas. Imaginons enfin, pour finir, qu'il entreprenne la recherche pédestre de cet objectif. Il peut très bien arrêter sa course dans une vulgaire doline, à quelques pas seulement d'un ravin plus profond: il n'a trouvé qu'un "minimum local".

Ce n'est pas gratuitement que nous avons donné cet exemple; les algorithmes d'inversion se comportent exactement de cette manière: ils ne tiennent compte que des variations locales de la fonctionnelle.

Il faut retenir les points suivants:

- le minimum n'est pas nécessairement unique. On peut croire avoir trouvé

une solution et passer à côté d'une autre bien meilleure (et complètement différente).

- la conception d'algorithmes performants est difficile.

Nous avons essayé plusieurs méthodes en les appliquant sur une fonctionnelle artificielle censée présenter les mêmes propriétés que celles que l'on rencontre dans notre problème, à savoir qu'elles présentent des "ravins" non rectilignes. Il n'est pas question de présenter ici en détail tous les algorithmes: un livre n'y suffirait pas. Nous nous contenterons de quelques exemples.

Une fonctionnelle test simple mais réputée mettre de nombreux algorithmes en échec est la fonction de deux variables:

$$F(x,y) = 5 (x - y^2)^2 + (1 - y)^2 \quad (168)$$

Son épigraphe est représenté sur la figure 50a.

La figure 50b représente un résultat obtenu par la méthode directe (sans calcul de gradient) de Hookes et Jeeves [21]. La convergence de cet algorithme sur ce cas de figure est très mauvaise. La figure 50c illustre la méthode décrite par Marquardt [29]: la convergence est ici bien meilleure, même si en fin de calcul elle n'est pas totale. Il faut souligner que l'on peut construire des variantes plus ou moins sophistiquées de ces algorithmes; mais que nous en avons utilisé les versions les plus simples. On pourra consulter [10], [16], [35], [22] et [30].

Le temps nous a manqué pour appliquer tous ces algorithmes à nos problèmes de prospection en forage. La méthode de Hookes et Jeeves a été utilisée pour inverser les résultats d'un site Canadien étudié par Doucet [14]. La figure 51 montre qu'un succès certain a été obtenu. Lorsque l'on a essayé d'autres procédés, des difficultés inattendues sont apparues:

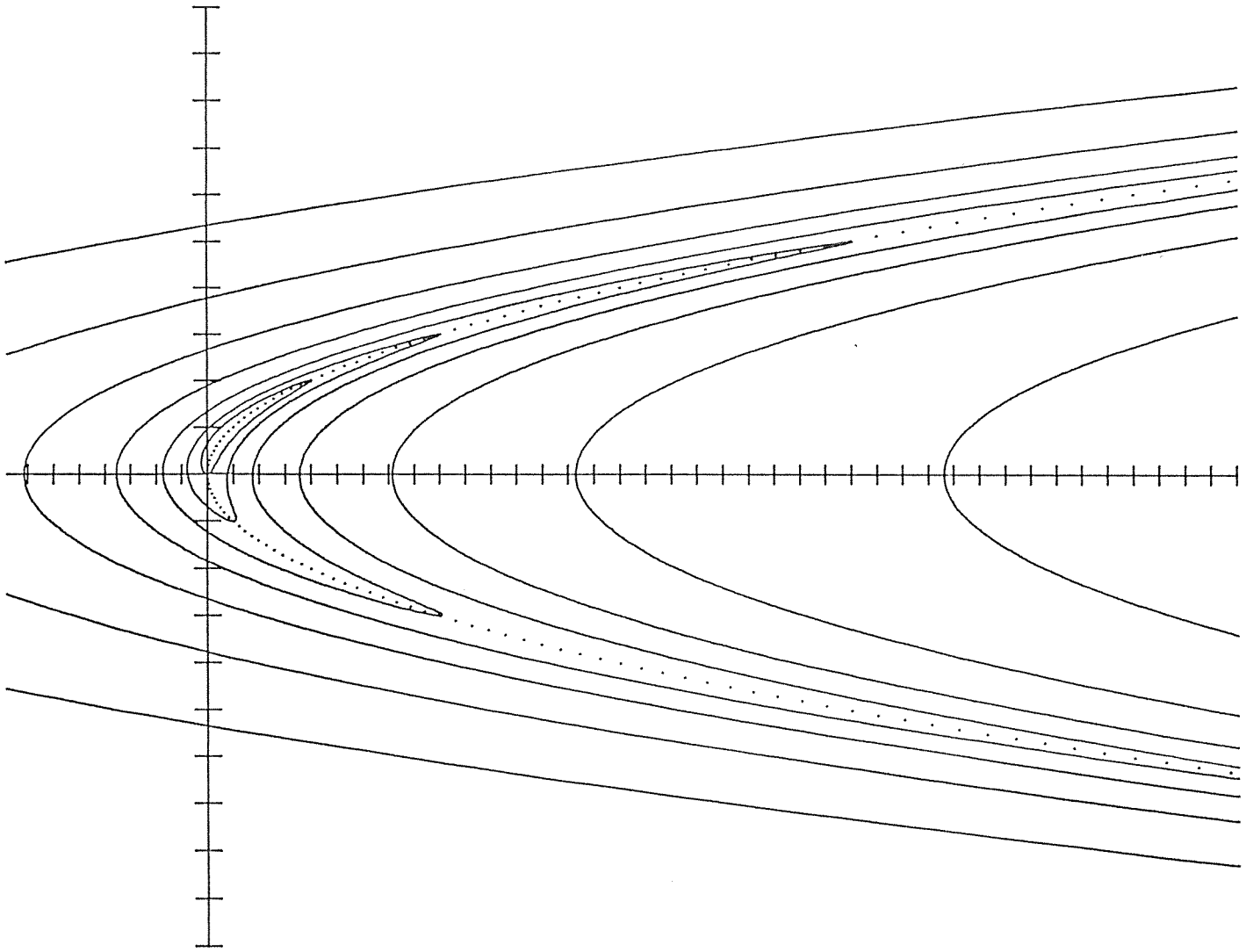


Figure 50a: Epigraphe (courbes de niveau) de la fonction $f(x,y)=5(x-y^2)^2+(1-y)^2$. L'allure de cette fonction est de même nature que celle de beaucoup de fonctionnelles rencontrées dans les problèmes inverses en géophysique. Cette fonction est un bon test pour les algorithmes de problème inverse. La ligne suit le "ravine" .

Les iso-valeurs vont de 1 à 5096 par progression géométrique de raison 4.
 Le minimum, trivial, est au point (1,1).

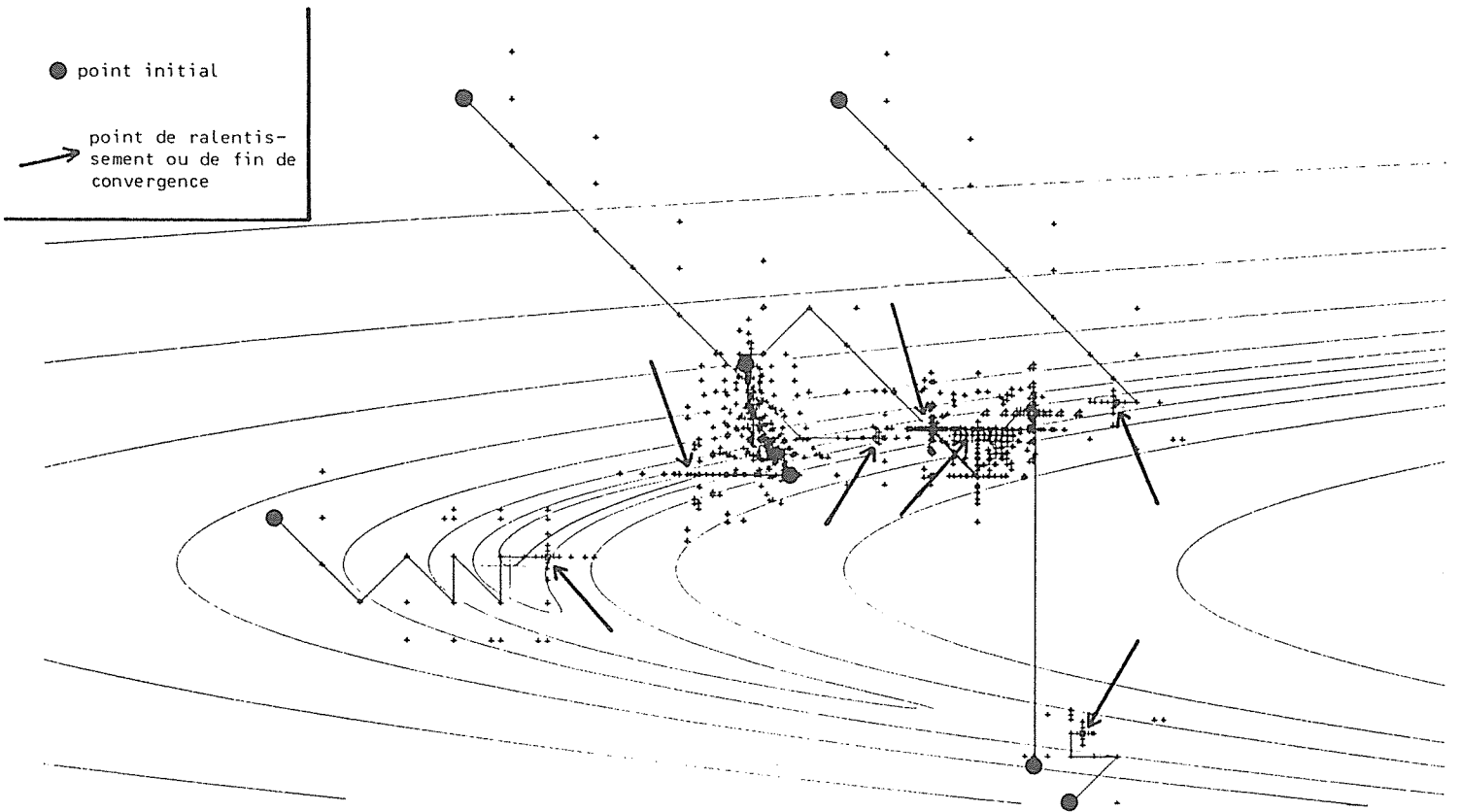
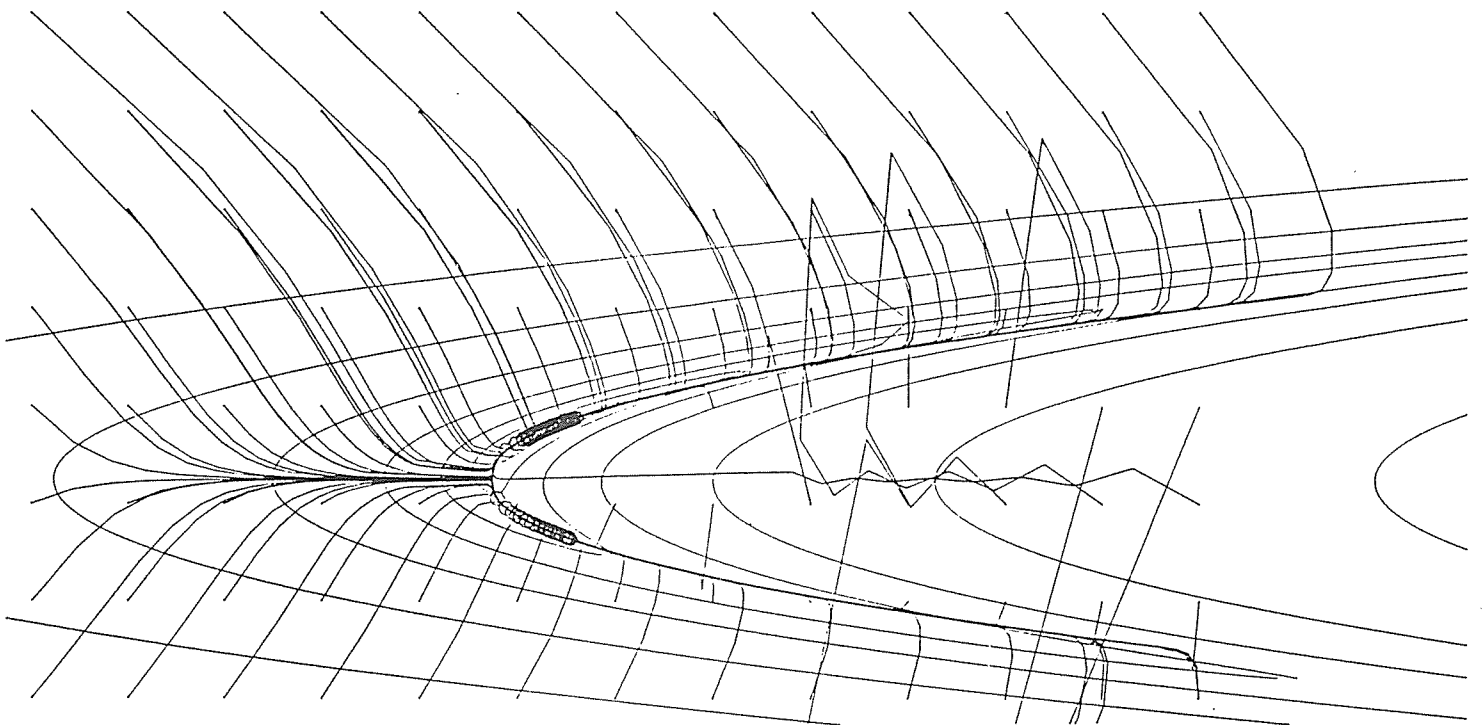


Figure 50b: Convergence de l'algorithme de Hookes et Jeeves sur la fonctionnelle de la figure 50a. Le processus ne converge pratiquement plus dès que le point courant a atteint le fond d'un "ravin".



○ points où la convergence est très ralentie

Figure 50c: Convergence de l'algorithme de Marquardt sur la fonctionnelle test de la figure 50a. Un grand nombre de points initiaux ont été testés.

Modèle du corps de Lingwick
proposé par Doucet.

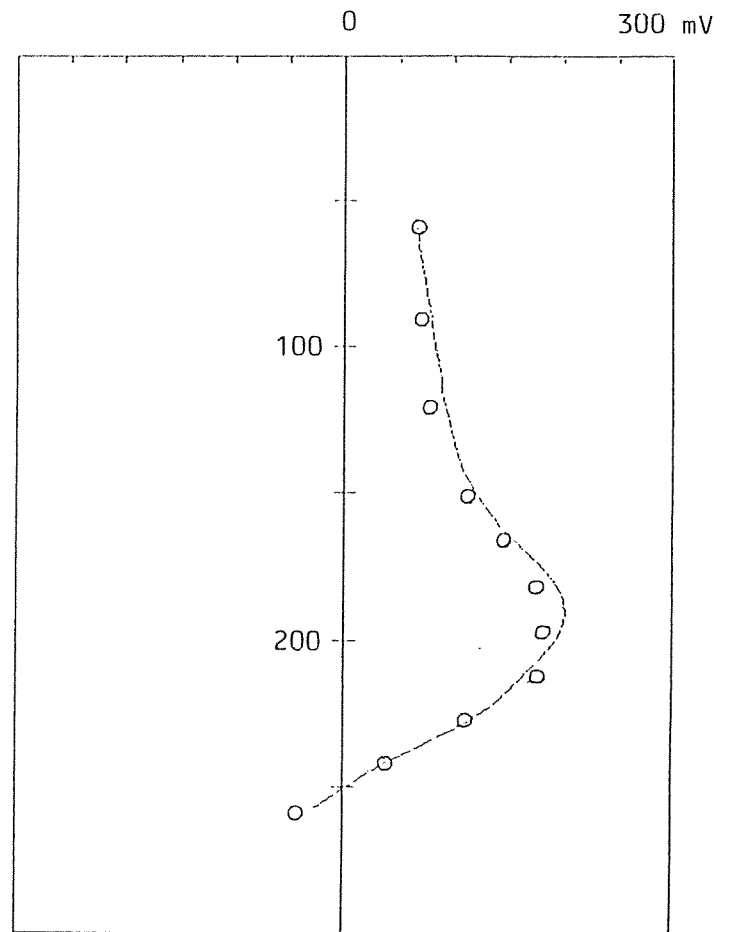
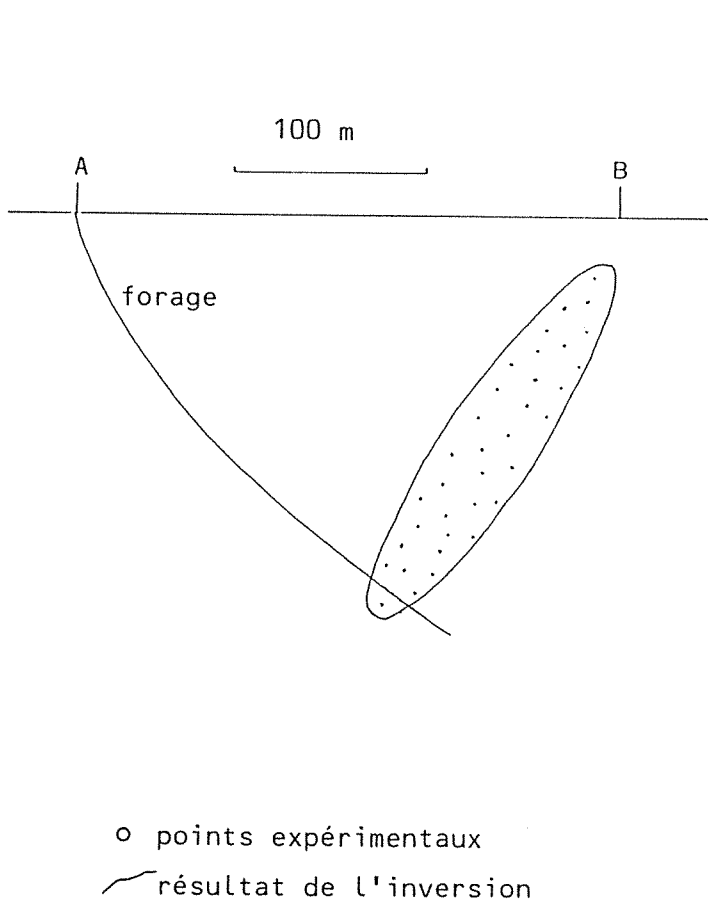
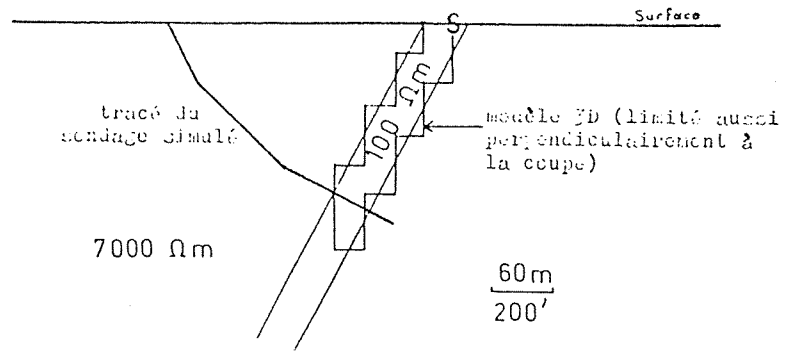


Figure 51: Résultat d'une inversion sur l'anomalie de Lingwick (Canada). La figure supérieure montre le modèle obtenu par ailleurs par Doucet. Le forage traverse la structure, ce qui confère à la fonctionnelle le caractère de non-différentiabilité. L'algorithme que nous avons utilisé ici ne nécessite pas le calcul du gradient de la fonctionnelle (méthode de Hookes et Jeeves). Les résistivités externe et interne sont respectivement de 7000 et $100 \Omega.m$.

- le calcul du gradient est problématique. Pour le faire de manière analytique, il faudrait programmer le calcul de N expressions aussi complexes que celles qui permettent l'estimation du potentiel (N étant le nombre de paramètres à déterminer). D'autre part, l'estimation numérique du gradient par différences finies s'est heurté à des problèmes numériques (erreurs de chute).

- la fonctionnelle n'est pas partout différentiable: cela résulte de la non-dérivabilité du potentiel lui-même à la traversée des interfaces des structures. Il existe des procédés efficaces dans ces cas de figures (elles utilisent la notion de sous-gradient; voir par exemple [3]). Nous ne les avons pas programmés.

V.3. Contenu spectral d'une anomalie élémentaire.

On entend par anomalie élémentaire celle qui est due à une sphère proche d'un forage vertical et associée à un champ électrique primaire supposé uniforme et horizontal. Cette notion permet une approche élémentaire de nombreux aspects et correspond à une formulation mathématique facile, tout en constituant une bonne approximation dans un grand nombre de cas.

Le spectre de cette anomalie, lui, n'est pas élémentaire. Le potentiel dû à la sphère le long du forage varie comme:

$$V(z) = \frac{1}{(d^2 + z^2)^{3/2}} \quad (169)$$

où d est la distance au forage et z la profondeur.

Sa transformée de Fourier, compte tenu de la parité de cette fonction, ne comporte que la transformée en cosinus:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i \omega x}}{(d^2 + x^2)^{3/2}} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{(d^2 + x^2)^{3/2}} dx . \quad (170)$$

Dans l'ouvrage [19], édition 1969, on trouve à la page 429 la formule:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m} \cos(\omega x)}{(\beta^2 + x^2)^{n+1/2}} dx = \frac{(-1)^m \sqrt{\pi}}{2^n \beta^n \Gamma(n+1/2)} \frac{d^{2m}}{da^{2m}} \left[a^n K_n(a \beta) \right]; \quad (171)$$

elle est valable pour : $a > 0$

$$\operatorname{Re}(\beta) > 0 \quad (172)$$

$$0 \leq m < n+1/2$$

Γ est la fonction d'Euler

K_n est la fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre n .

Nous appliquons cette formule avec :

$$\left. \begin{array}{l} m = 0 \\ n = 1 \\ a = \omega \\ \beta = d \end{array} \right\}$$

d'où :

$$I/2 = \int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{(d^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{\sqrt{\pi} \omega}{2 d \Gamma(3/2)} K_1(\omega d) \quad (173)$$

$$\Gamma(3/2) \text{ vaut } \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ d'où } I = \frac{\omega}{d} K_1(\omega d). \quad (174)$$

Estimons $K_1(\omega d)$. Page 961 du même ouvrage, on trouve:

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k! (z/2)^{n-2k}} + \quad (175)$$

$$+ (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2k}}{k! (n+k)!} \left[\ln(z) - \frac{1}{2} \psi(k+1) - \frac{1}{2} \psi(n+k+1) \right]$$

Ψ est une fonction d'Euler bien connue: $\Psi(n+1) = -C + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (176)
avec C: constante d'Euler = 0.577215664901532....

Appliquons cette formule avec $n = 1$. Il vient:

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2^{2k+1} k! (1+k)!} \left[\ln(z/2) - \frac{1}{2} \left[\Psi(k+1) + \Psi(k+2) \right] \right] \quad (177)$$

$$\text{or } \Psi(k+1) + \Psi(k+2) = -C + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} - C + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j} = 2 \Psi(k+2) - 1/(k+1) \quad (178)$$

d'où:

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2^{2k+1} k! (1+k)!} \left[\ln(z/2) - \Psi(k+2) + \frac{1}{2(k+1)} \right] \quad (179)$$

On a finalement:

$$F(\omega) = \frac{2 \omega}{d} \left[\frac{1}{\omega d} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega d)^{2k+1}}{2^{2k+1} k! (1+k)!} \left[\ln \left(\frac{\omega d}{2} \right) - \Psi(k+2) + \frac{1}{2(k+1)} \right] \right] \quad (180)$$

Le spectre d'amplitude du potentiel, $F(\omega)$, et du gradient du potentiel, qui vaut $\omega F(\omega)$, sont représentés sur la figure 52. Pour $d = 1$, valeur prise pour cette représentation, on situe le maximum de ce spectre proche de $\omega = 1.332$, valeur qui correspond à la longueur d'onde λ suivante:

$$\boxed{\lambda = 4.717 d} \quad (181)$$

Cette valeur situe le maximum spectral de l'anomalie élémentaire due à une sphère située à une distance (d) du forage.

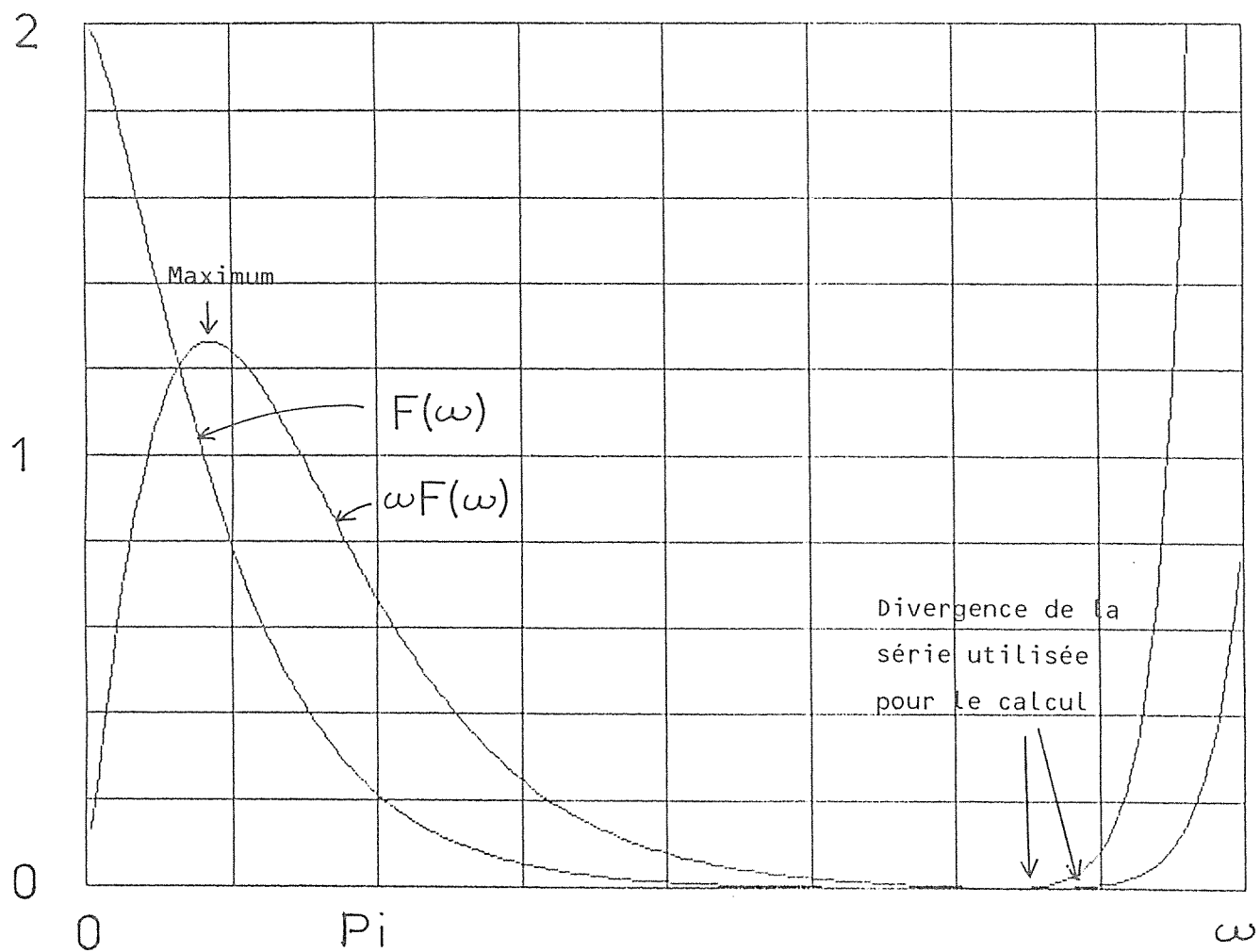


Figure 52: Spectres d'amplitudes du potentiel ($F(\omega)$) et du gradient du potentiel ($\omega F(\omega)$) pour une anomalie élémentaire. On a pris $d=1$. Le maximum du spectre du gradient a été précisé à la valeur $\lambda = 4.717 d$.

V.4. Propriétés des anomalies en champ bipolaire.

On a analysé les propriétés des anomalies dues à une sphère lorsque le champ primaire est relatif au bipole d'injection placé en surface (DSPF). Il s'avère que les résultats de l'étude faite au paragraphe V.1 restent valides dans leurs grandes lignes. Certes, la forme des anomalies est modifiée notablement, notamment lorsque la sphère est proche de la surface ou éloignée du forage. Sur la figure 53, on voit par exemple que le "cross-over" est situé plus bas que le centre de la sphère. Par contre, sa profondeur ne dépend guère de l'azimuth de la structure. La distance entre les deux extrema de l'anomalie, égale à la distance au forage dans le cas du champ homogène, respecte ici la même loi, sauf lorsque la sphère est vraiment proche de la surface (figure 54). Si la liste des paramètres que l'on peut déduire des anomalies reste la même que celle définie au V.I., le protocole d'interprétation doit être revu. L'invariance (approximative) de la distance entre les extrema de l'anomalie lorsque la position de la sphère varie, l'invariance, d'autre part, de la profondeur du "cross-over" avec l'azimuth, et enfin le fait que la variation de l'amplitude de l'anomalie avec l'azimuth reste grossièrement cosinusoïdale permettent une déduction immédiate de l'azimuth et de la distance de la sphère au forage. Ces opérations reviennent en fin de compte à une diminution du nombre de paramètres à déterminer, de sorte qu'il a été possible de construire une méthode d'interprétation par abaques. Cette méthode, ainsi que la description complète d'un protocole d'interprétation, font l'objet du paragraphe suivant.

V.5. Interprétation à l'aide d'abaques pour le modèle sphérique.

Les calculs des abaques utilisés dans ce paragraphe ont été entrepris à partir de la formulation de Large [25] qui donne le potentiel au voisinage d'une sphère dans un demi-espace uniforme (ces calculs sont explicités au IV.1.4.).

La méthode décrite ci-dessous est applicable lorsque le DSPF est utilisé et en présence d'un forage vertical. Elle est approximative et d'autant

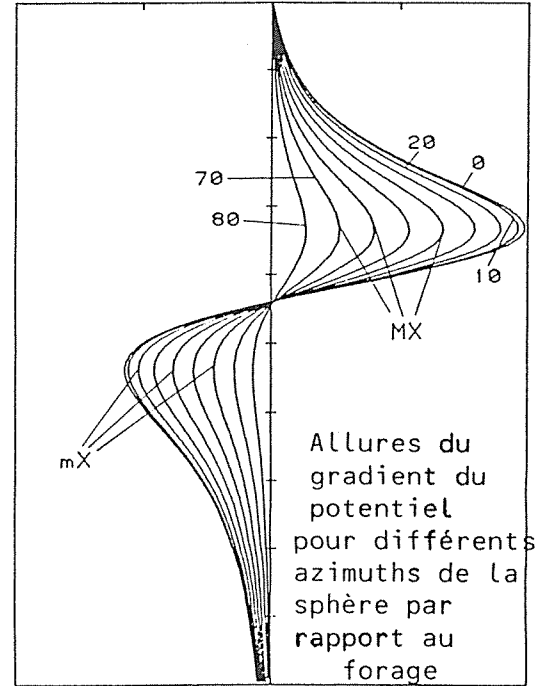
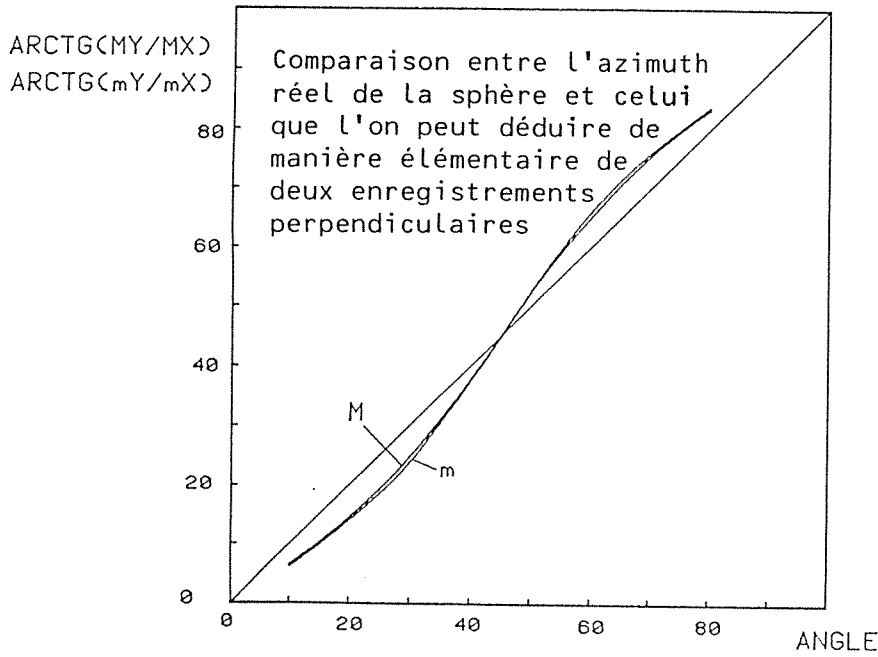
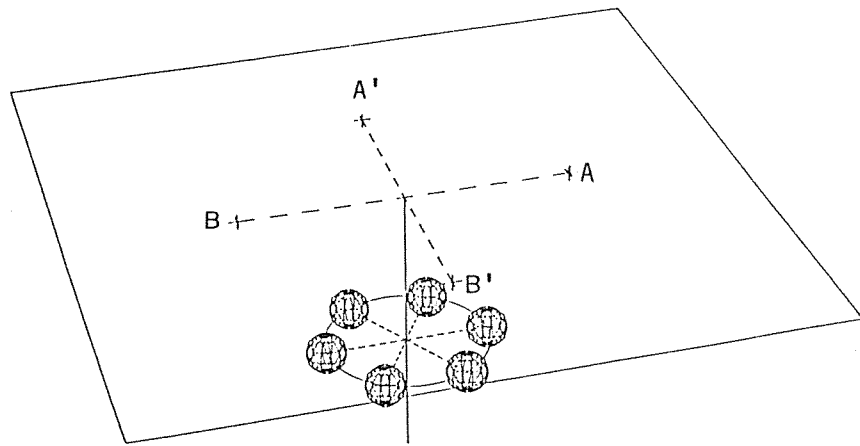


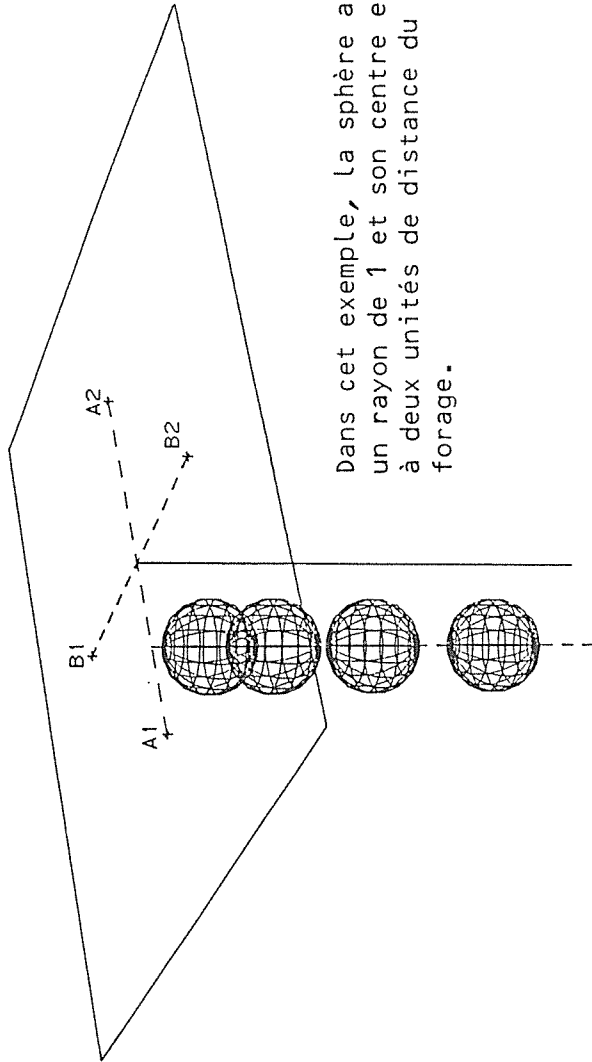
Figure 53: Evolution du gradient vertical du potentiel au voisinage d'une sphère que l'on fait tourner autour du forage. Tandis que la cote du "cross-over" reste pratiquement invariante pour les différentes positions de la sphère, l'amplitude de l'anomalie présente une variation quasi-cosinoïdale en fonction de l'azimuth de la structure par rapport au forage,

DISTANCE
MAX-MIN

Sauf au voisinage immédiat de la surface, la distance entre les deux extrema de l'anomalie est égale à la distance du centre de la sphère au forage.

2.2
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0

0 2 4 6 8 10 12 PROF.



Dans cet exemple, la sphère a un rayon de 1 et son centre est à deux unités de distance du forage.

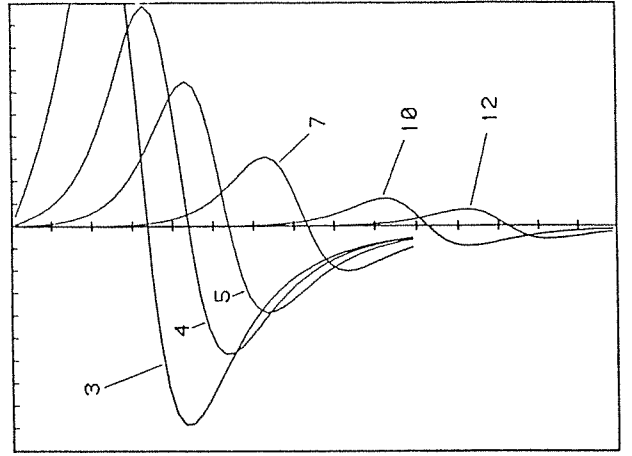
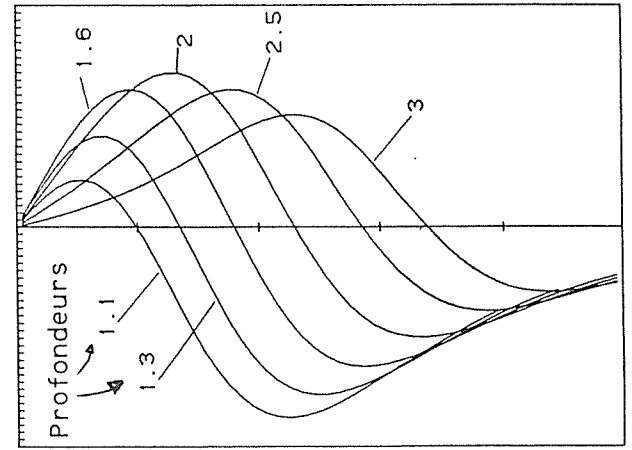


Figure 54: Evolution de la forme du gradient du potentiel avec la profondeur de la sphère.

plus précise que les hypothèses suivantes, qui en définissent le domaine de validité, sont mieux vérifiées.

Hypothèses.

1) la profondeur du centre de la sphère est supérieure à la moitié de la distance du forage aux électrodes.

2) la distance entre le centre de la sphère et le forage ne dépasse pas 0,8 fois la distance du forage aux électrodes.

Dans ce contexte, on peut résumer les propriétés des anomalies de la façon suivante:

a) le "cross-over" de la réponse se trouve à une profondeur supérieure à celle du centre de la sphère. Cette profondeur est indépendante de l'azimth de la sphère par rapport au forage.

b) la distance verticale entre les deux extrema est égale à la distance entre le centre de la sphère et le forage.

c) l'amplitude de l'anomalie varie comme le cosinus de l'azimuth de la sphère par rapport au forage.

d) pour une position donnée de la sphère, l'amplitude de l'anomalie est proportionnelle à $a^3(\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + 2\rho_2)$.

(a est le rayon et (ρ_1, ρ_2) sont les résistivités externes et internes).

e) lorsque le contraste de résistivité (ρ_1/ρ_2) croît de trente à l'infini, la variation de l'amplitude de l'anomalie ne varie que de dix pour cent: si on suppose que le contraste est élevé (>20), l'amplitude ne dépend pratiquement que du rayon de la sphère. Notons que l'erreur faite en sur-évaluant le contraste de résistivité conduit à une valeur de rayon qui est une valeur minimum.

Pour l'interprétation, deux types d'abaques sont employés (abaques de type A et B). Les différentes étapes, décrites ci-dessous, font référence à la figure 55 et aux figures 56a à 56h.

1) détermination de l'azimuth.

On doit prendre garde au signe de l'anomalie pour cette détermination. Deux séries de mesures sont effectuées selon deux directions d'injection perpendiculaires (nord-sud et est-ouest, pour fixer les idées).

Nous supposons que:

- les sources positives sont au Nord et à l'ouest
- négatives Sud l'est.
- l'électrode de mesure positive est la moins profonde.

Soit \bar{A}_{NS} l'anomalie extrême supérieure selon l'axe N-S et \bar{A}_{EW} pour la direction E-O. On a alors:

$$\left| \begin{array}{l} \bar{A}_{NS} \approx \bar{A} \cos \vartheta \\ \bar{A}_{EW} \approx \bar{A} \sin \vartheta \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{où } \vartheta \text{ est l'azimuth cherché et} \\ \text{où } \bar{A} = (\bar{A}_{NS}^2 + \bar{A}_{EW}^2)^{1/2} \end{array} \quad (182)$$

On en déduit ϑ par le calcul de l'arc-tangente entre 0 et 2π .

L'erreur sur ϑ est d'autant plus petite que:

- la sphère est enfouie plus profondément
- la sphère est plus proche du forage
- ϑ est plus proche de $(k\pi/4)$, $k=0,1,\dots,8$

Dans tous les cas, elle n'excède pas 10° .

2) pour la suite, on considère une anomalie résultante $A(z)$ telle que:

$$A(z) = \left[A_{NS}^2(z) + A_{EW}^2(z) \right]^{1/2} \quad (183)$$

3) distance au forage: d

d est égal à la distance verticale entre les deux extrema de l'anomalie.

4) on effectue à présent la lecture de la valeur absolue de l'extremum supérieur de l'anomalie, en volt par mètre . Désignons par \bar{A} cette valeur.

5) on effectue la lecture de la profondeur du "cross-over": c

6) on choisit, figures 56a à 56h, les abaques de type A et B correspondant à la valeur présente de d/L, L étant la distance totale entre les deux électrodes d'injection.

7) reporter sur ces deux abaques:

$$\text{en abscisse: } \frac{\bar{A} L^2}{\rho_1 I} \quad ; \quad \text{en ordonnée: } \frac{c}{L} \quad . \quad (184)$$

8) rayon de la sphère: r

Il est donné par le paramètre (r/L) lu sur l'abaque de type A.

9) profondeur du centre de la sphère: p

Elle est donnée par le paramètre (c/p) lu sur l'abaque de type B.

Exemple d'interprétation.

On utilise les données artificielles de la figure 57.

(L = 200 m ; I = 1 A ; $\rho_1 = 1000 \Omega.m$).

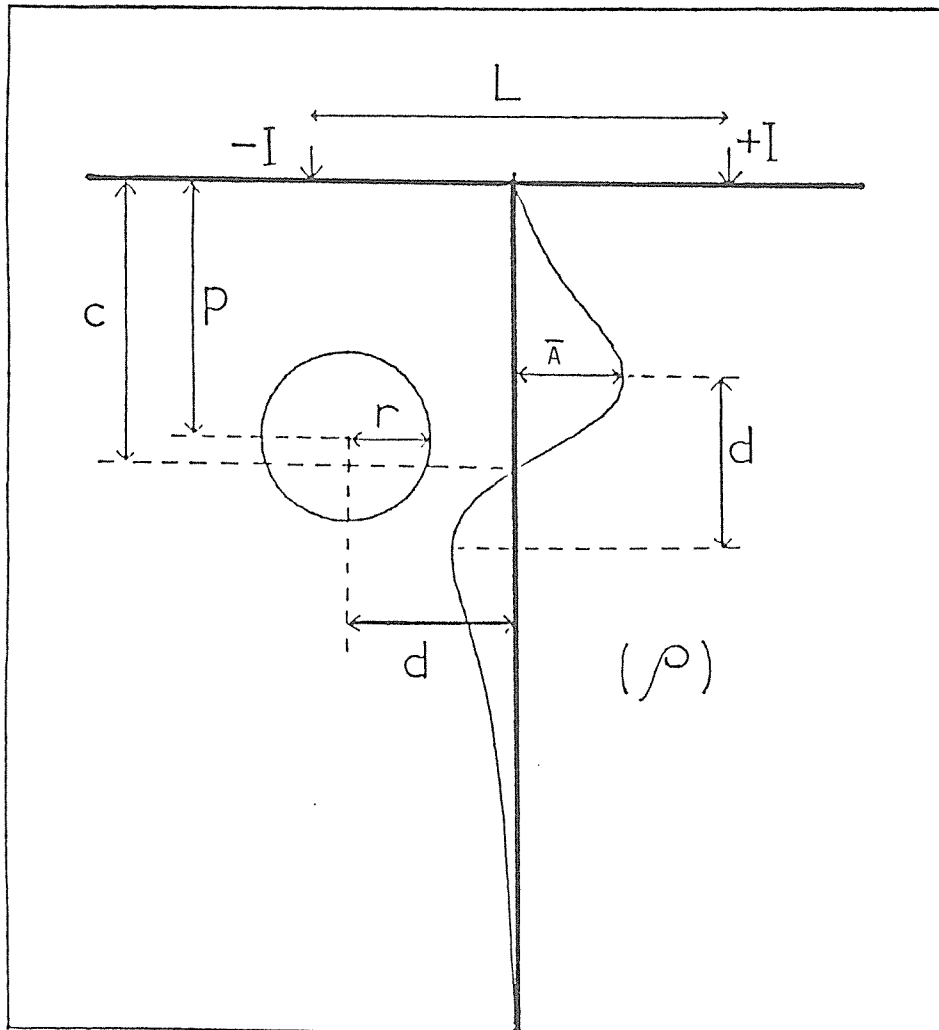


Figure 55: Paramètres utilisés pour l'interprétation en terme de structure sphérique, à l'aide d'abaques.

- \bar{A} est l'amplitude maximum de la partie supérieure de l'anomalie
- p est la profondeur du centre de la sphère (à déterminer)
- r est le rayon de la sphère (supposée parfaitement conductrice)
- d est la distance entre les deux extrema (égale à la distance entre le centre de la sphère et le forage)
- L est la distance totale entre les électrodes d'émission
- ρ est la résistivité de l'encaissant
- I est le courant.

Figure 56a: Abaques d'interprétation pour le modèle sphérique.

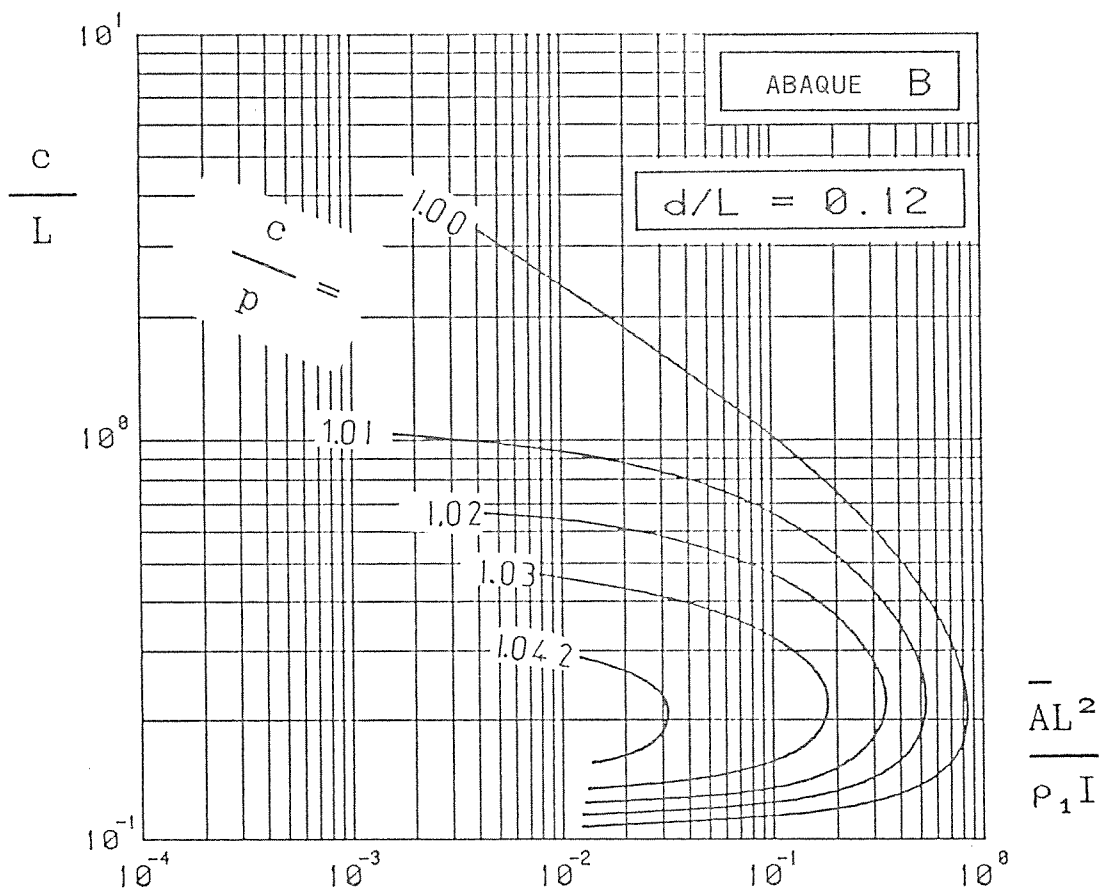
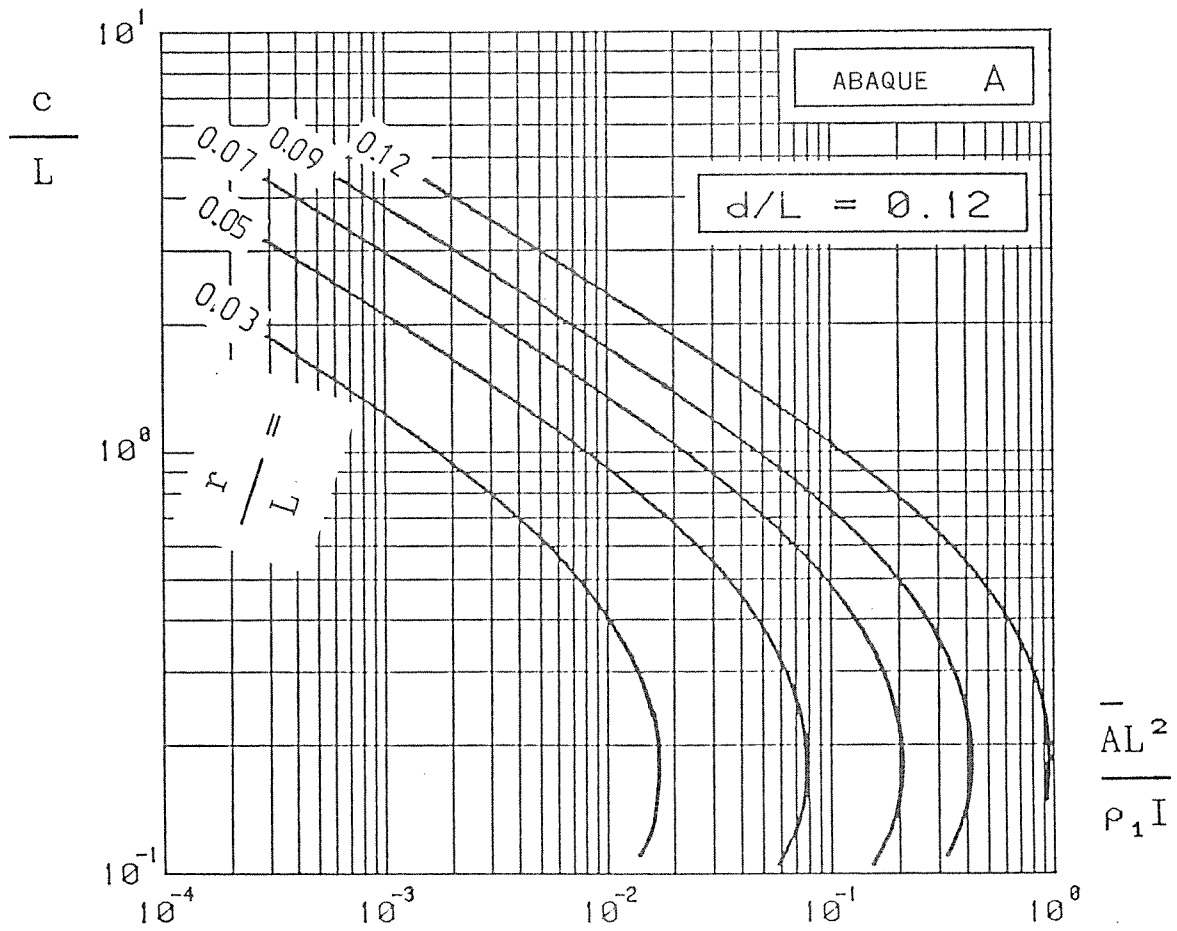


Figure 56b: Abaques d'interprétation pour le modèle sphérique.

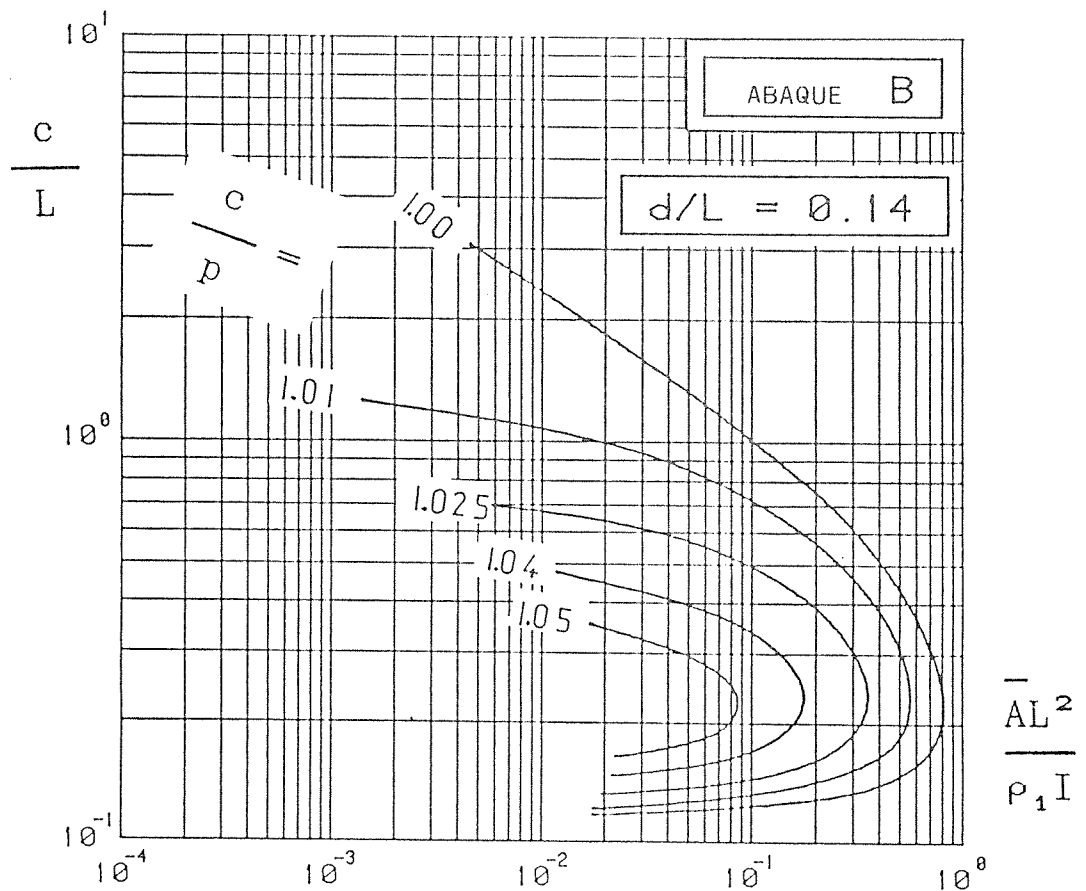
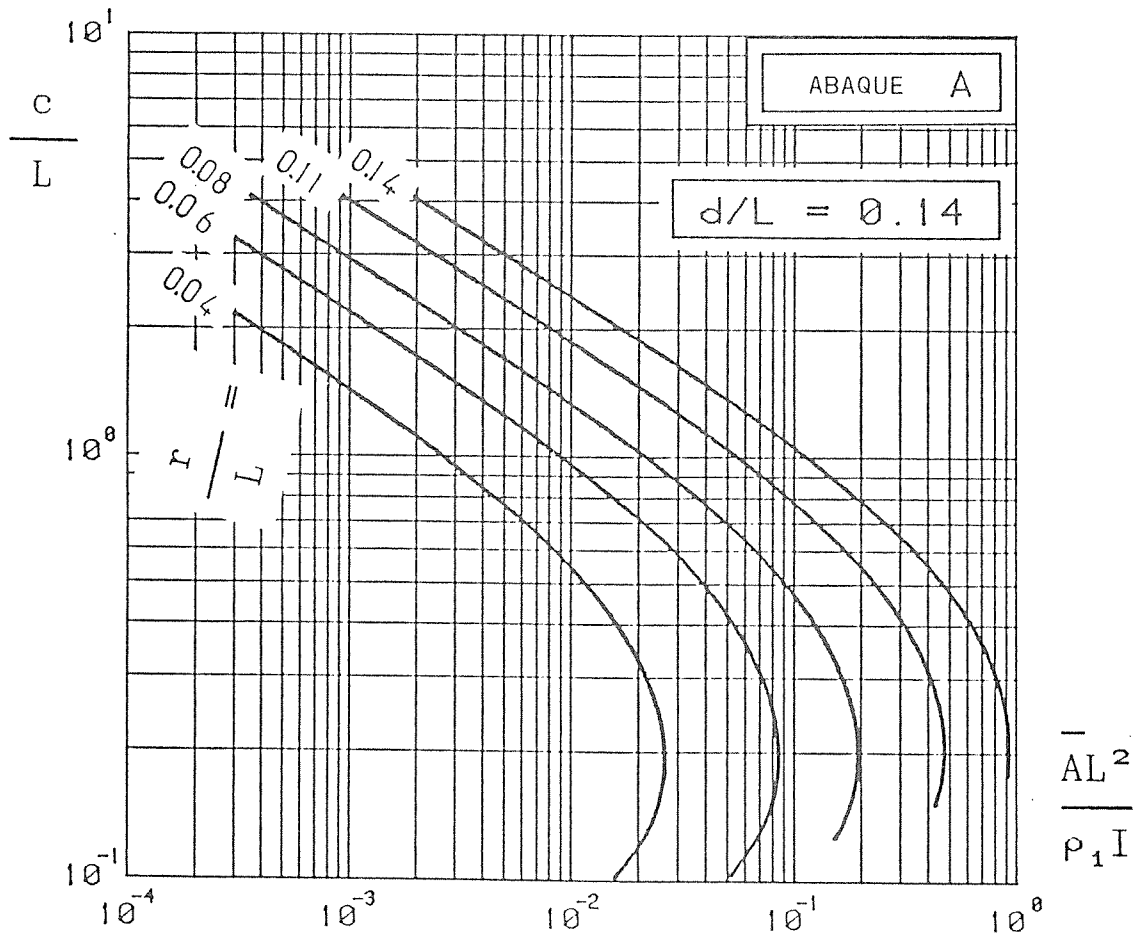


Figure 56c: Abaques d'interprétation pour le modèle sphérique.

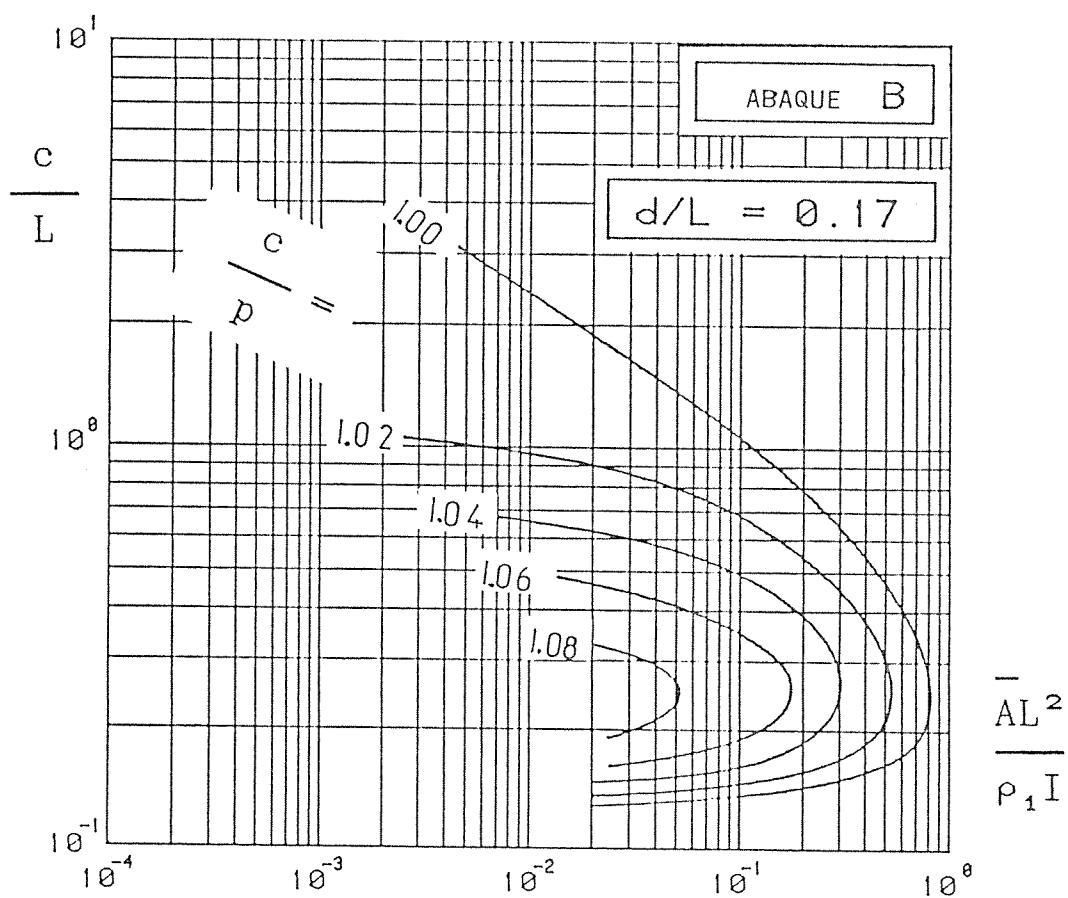
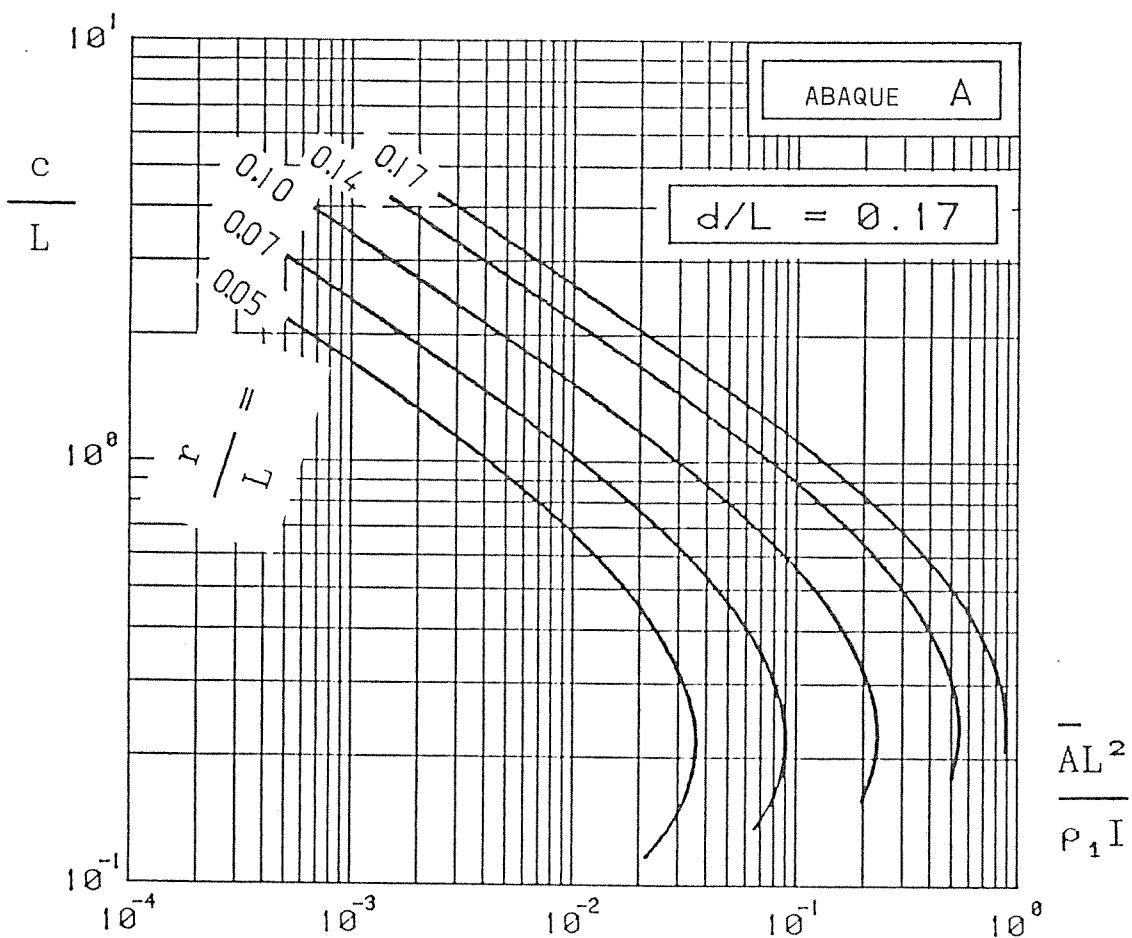


Figure 56d: Abaqués d'interprétation pour le modèle sphérique.

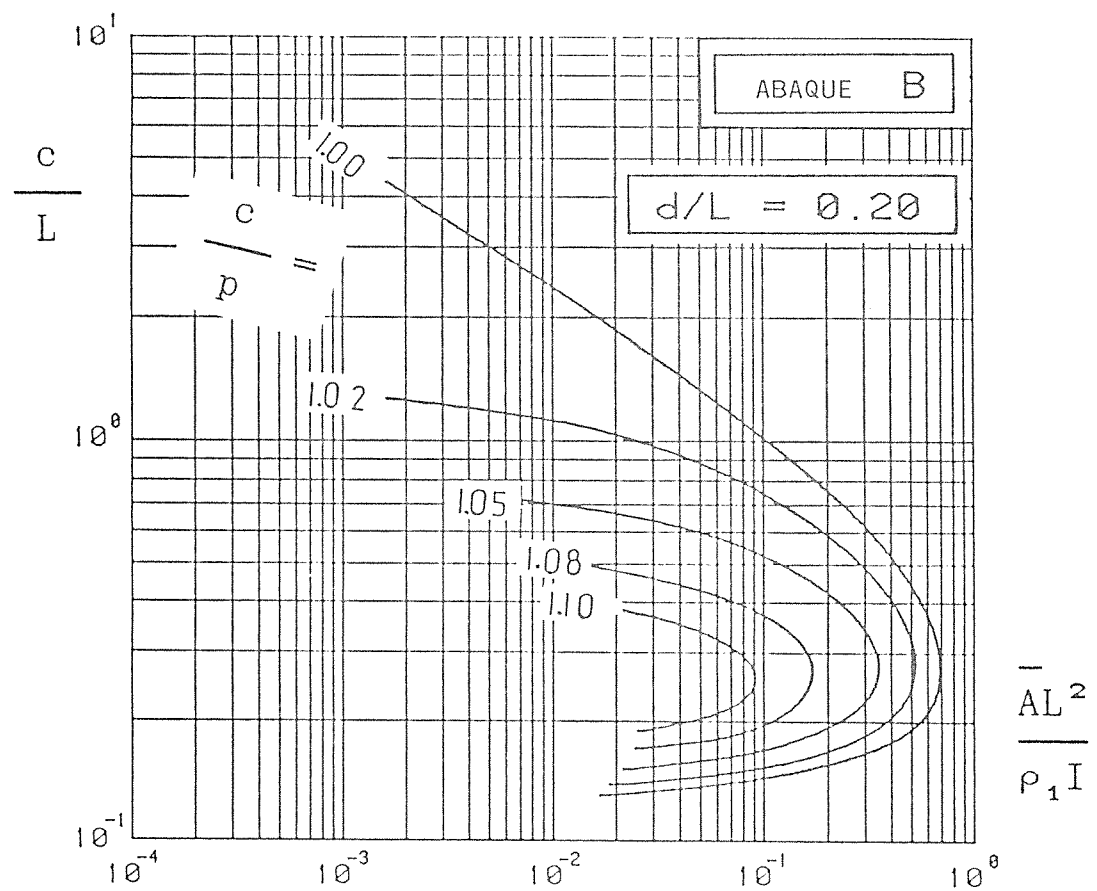
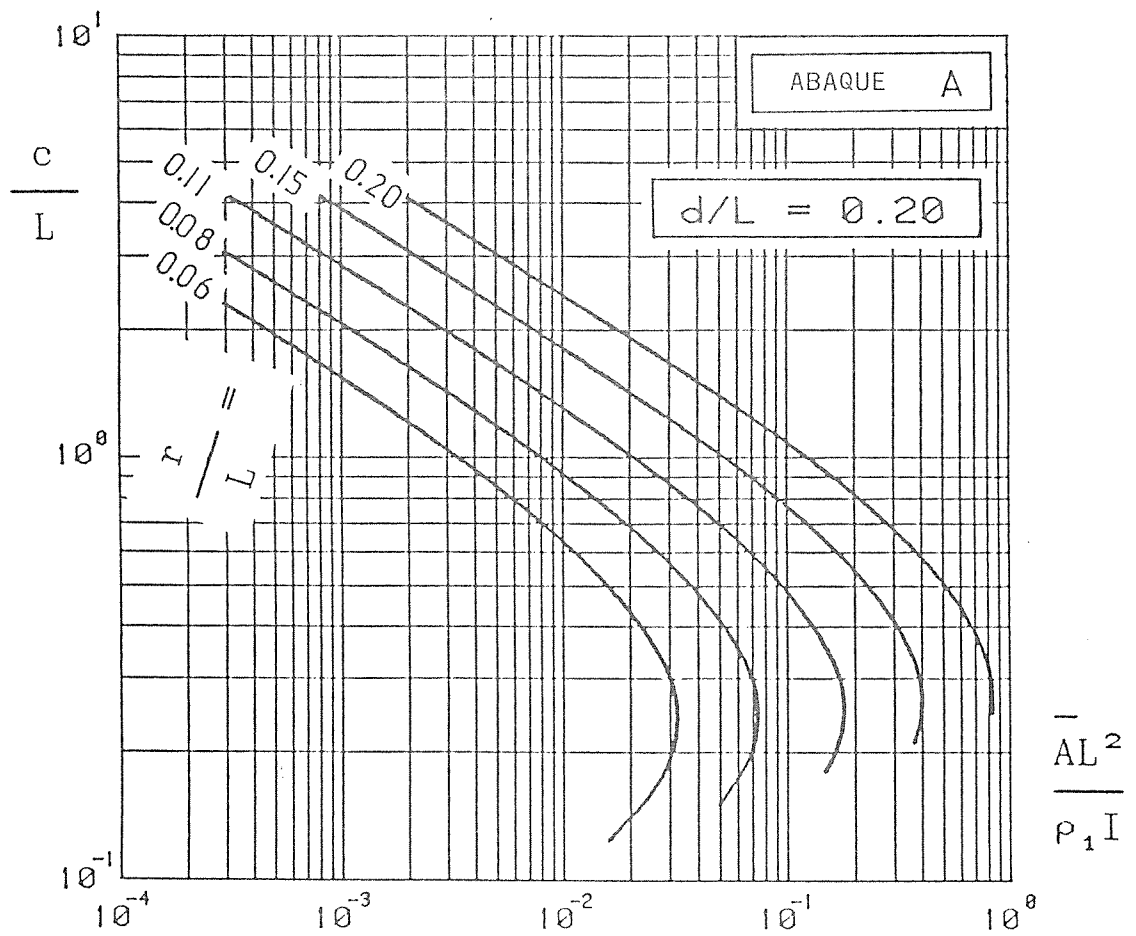


Figure 56e: Abaques d'interprétation pour le modèle sphérique.

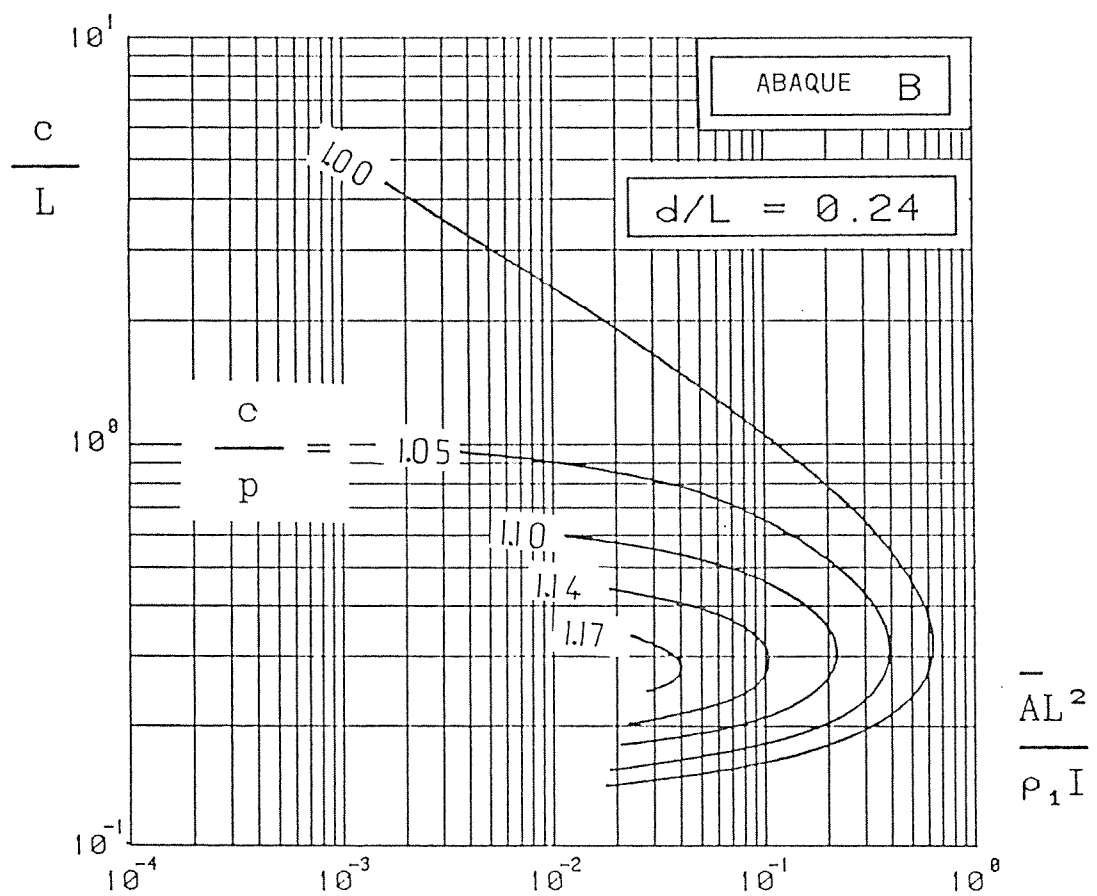
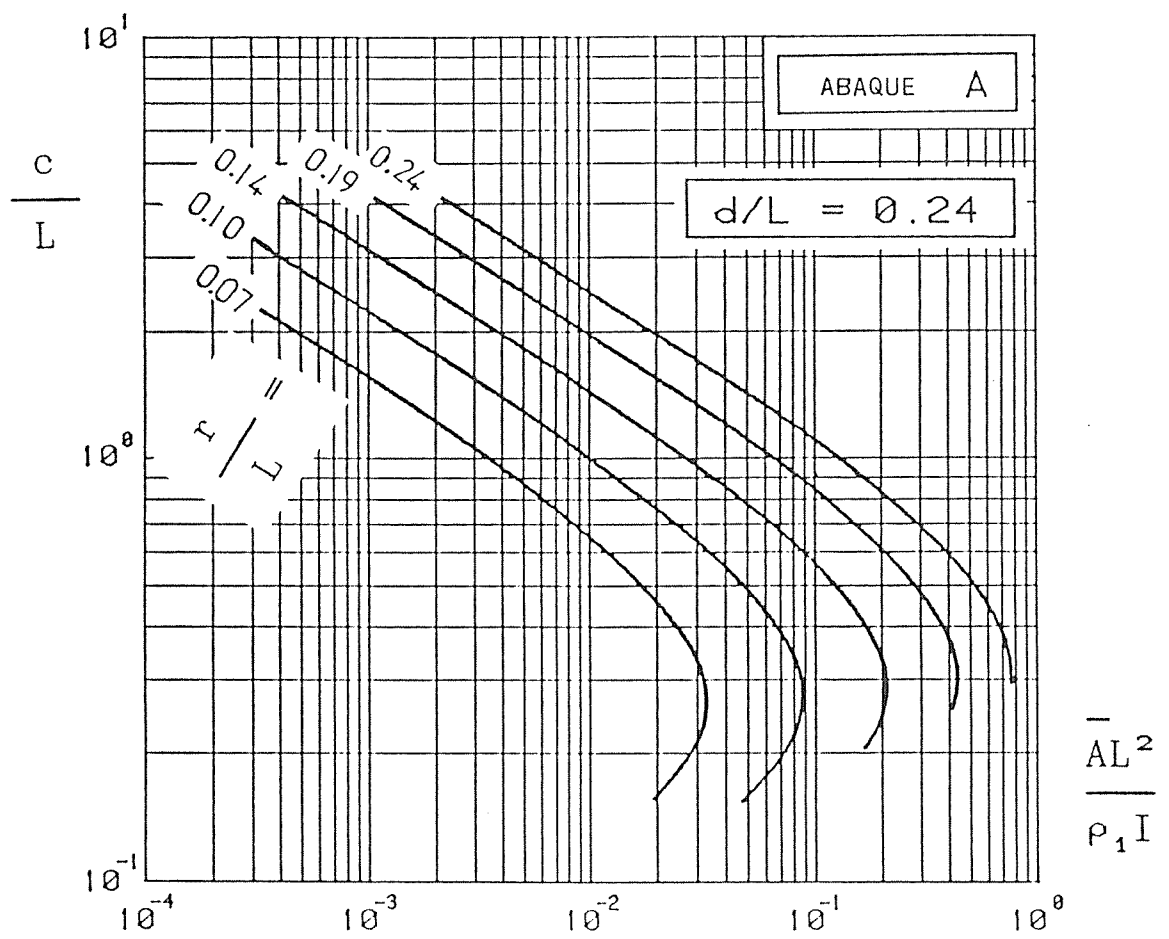


Figure 56f: Abaques d'interprétation pour le modèle sphérique.

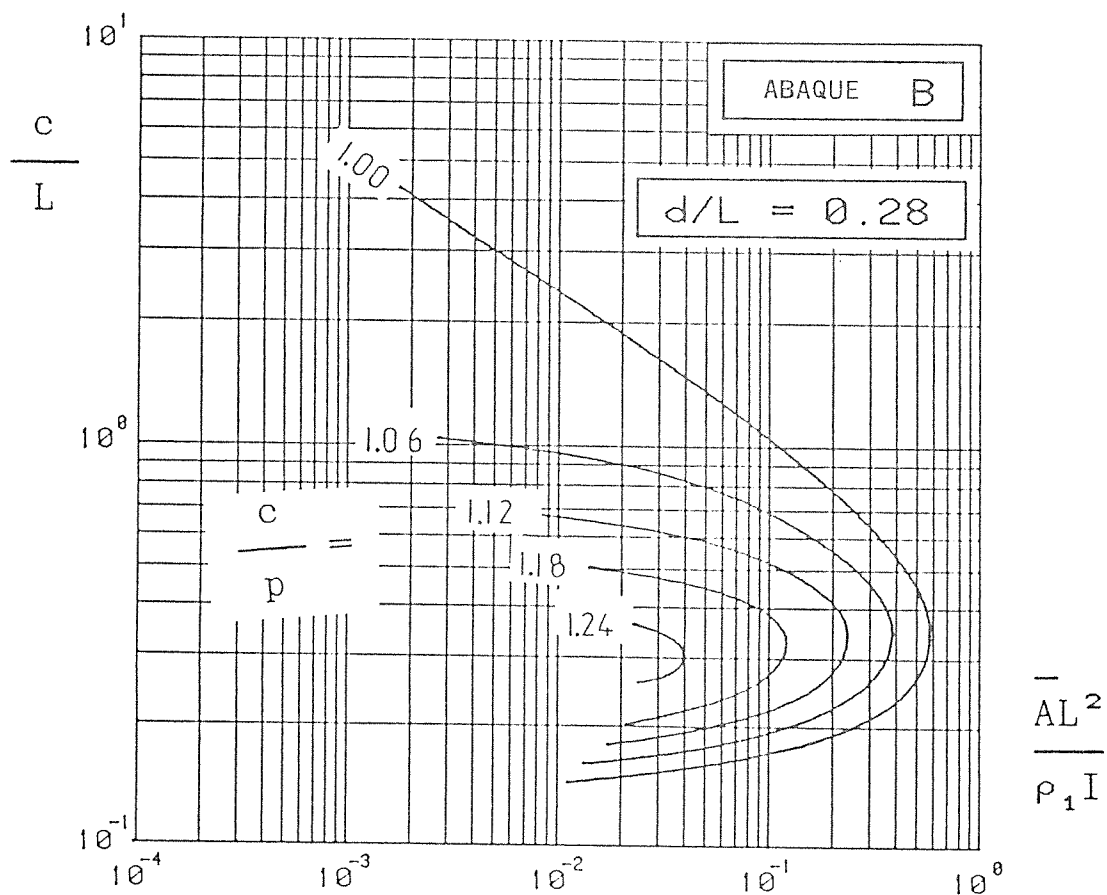
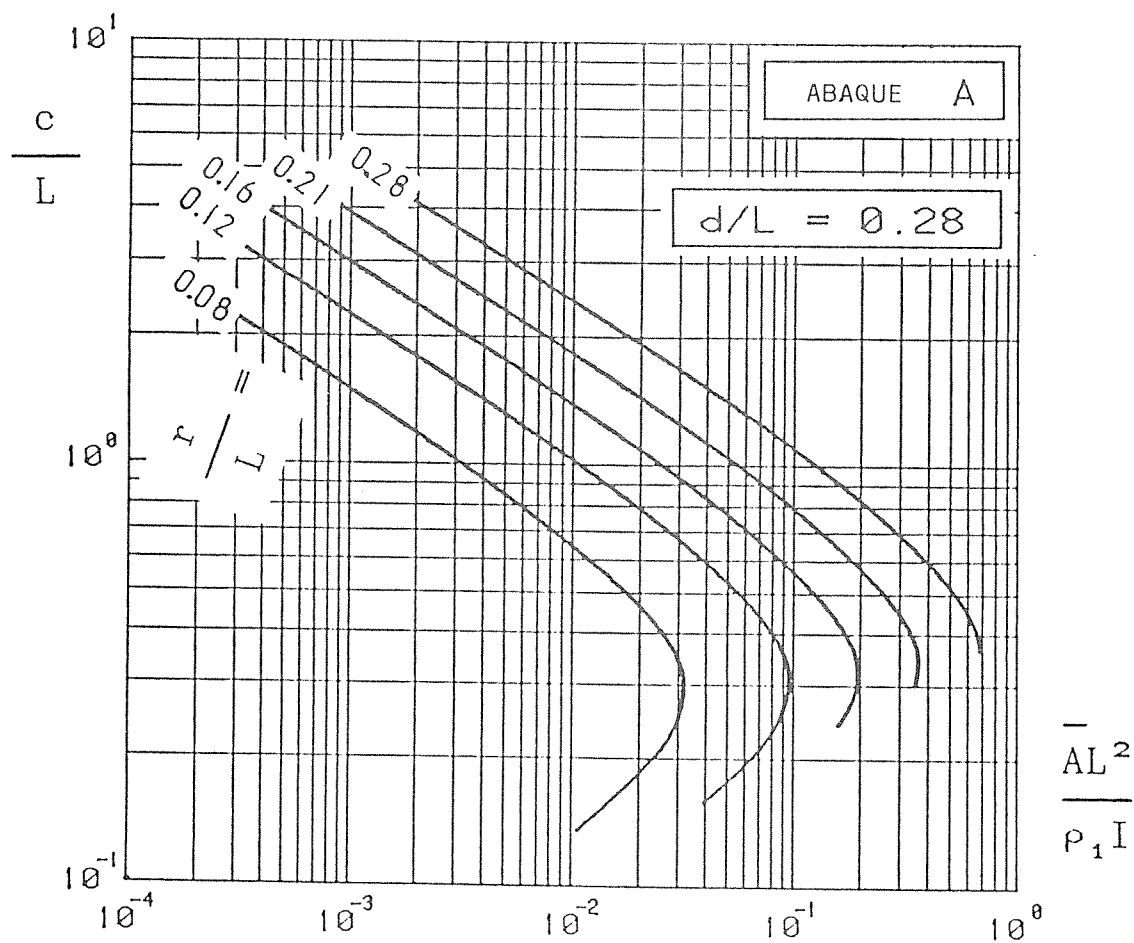


Figure 56g: Abaques d'interprétation pour le modèle sphérique.

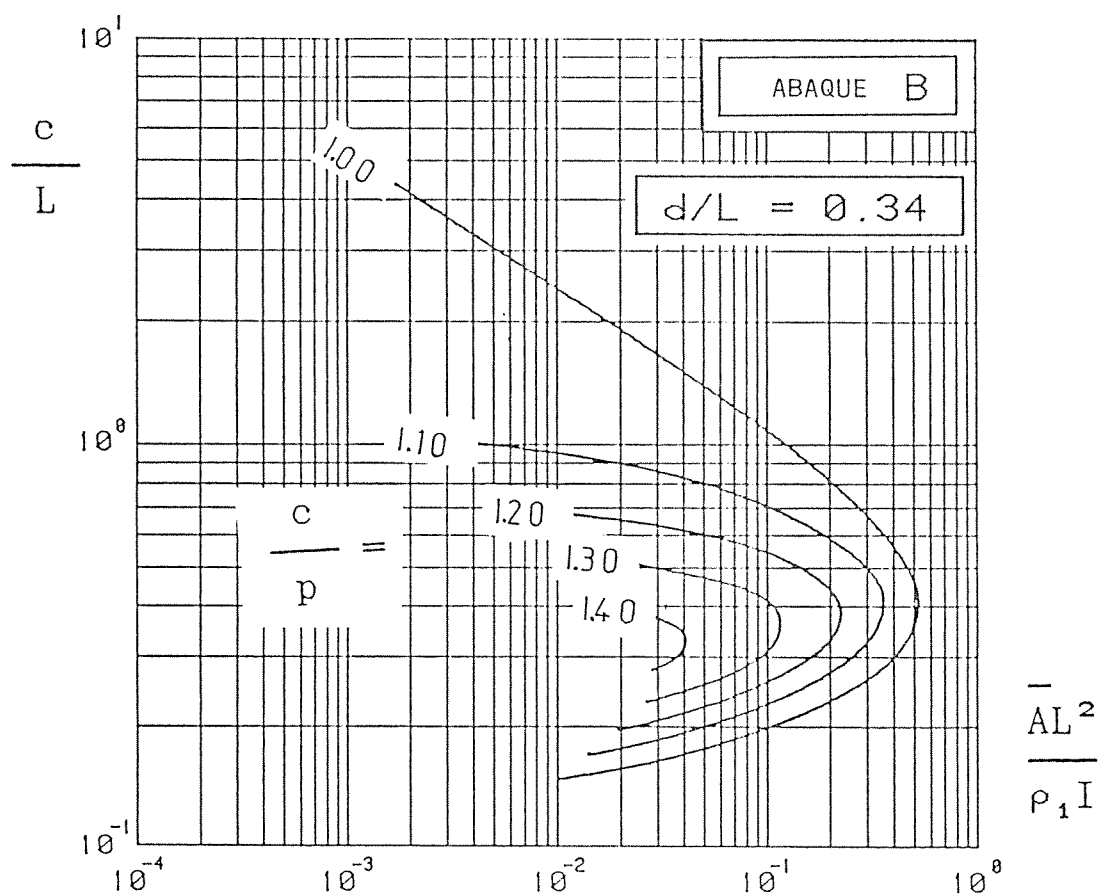
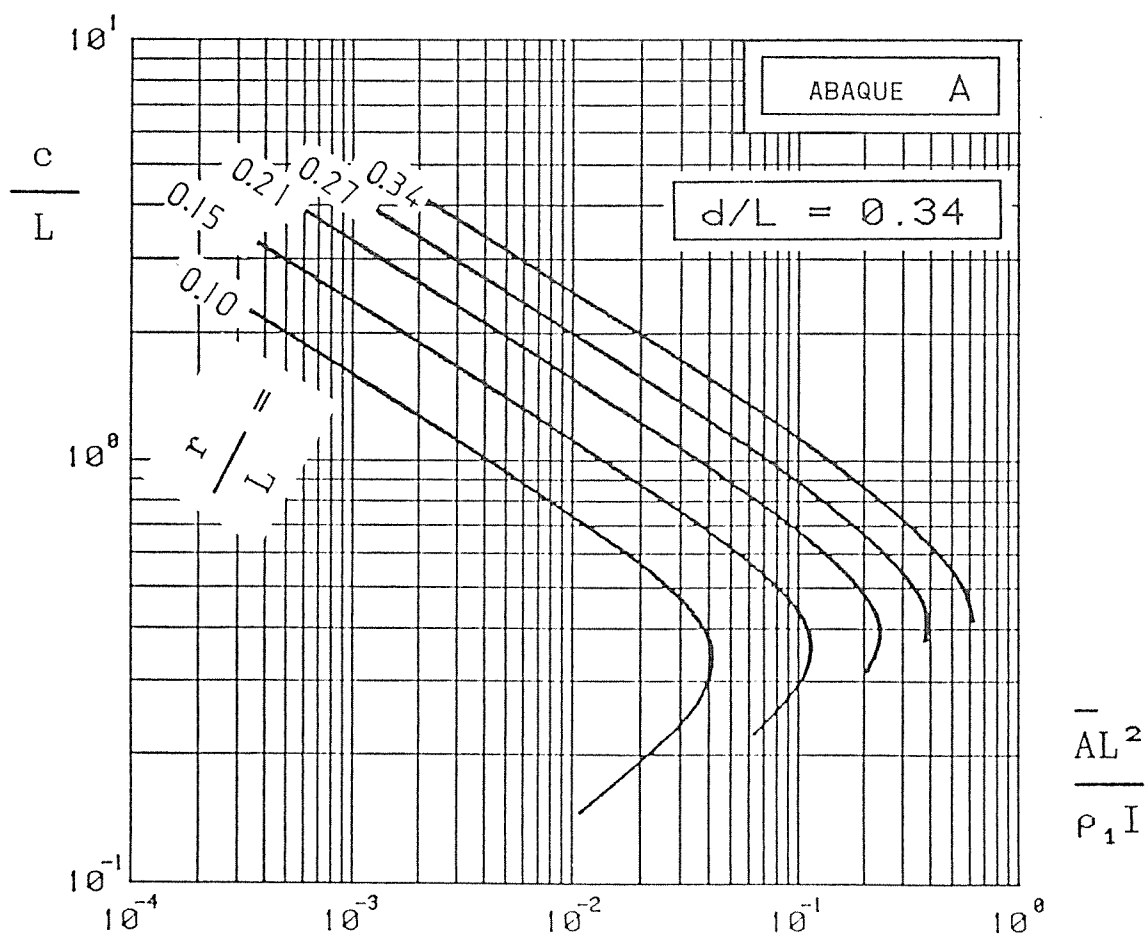
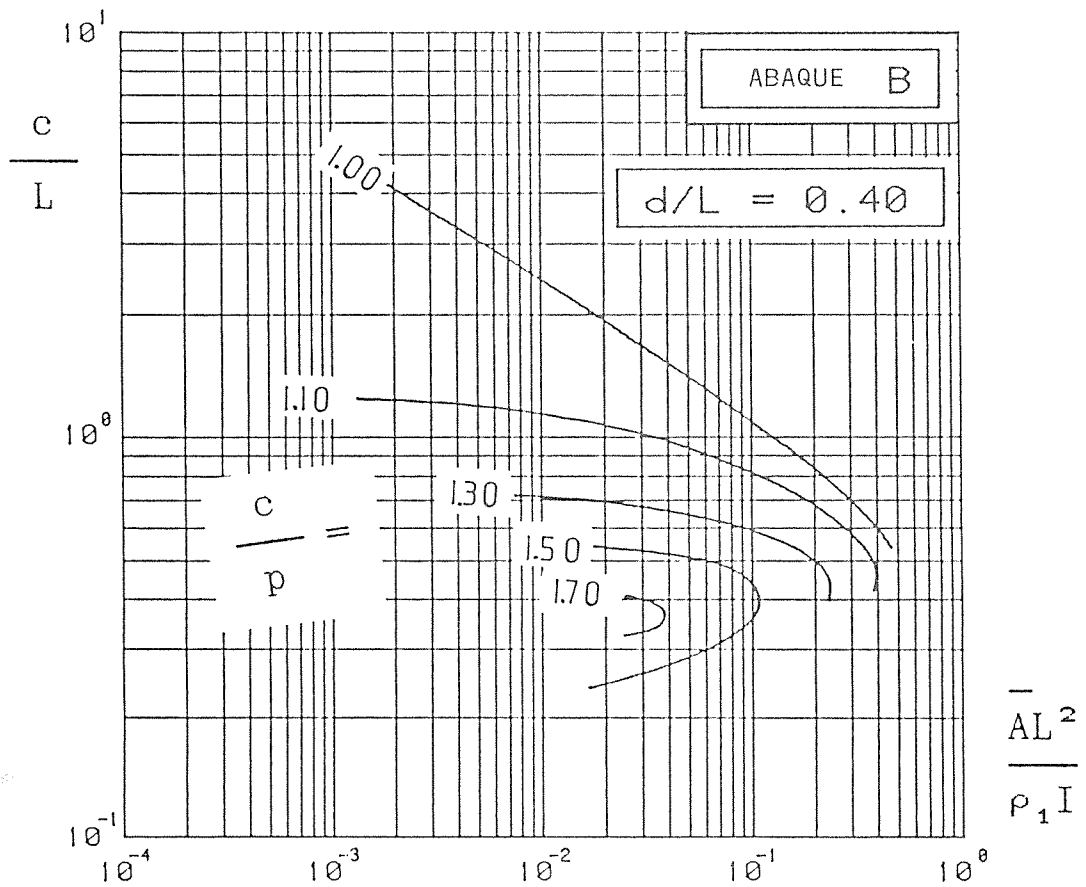
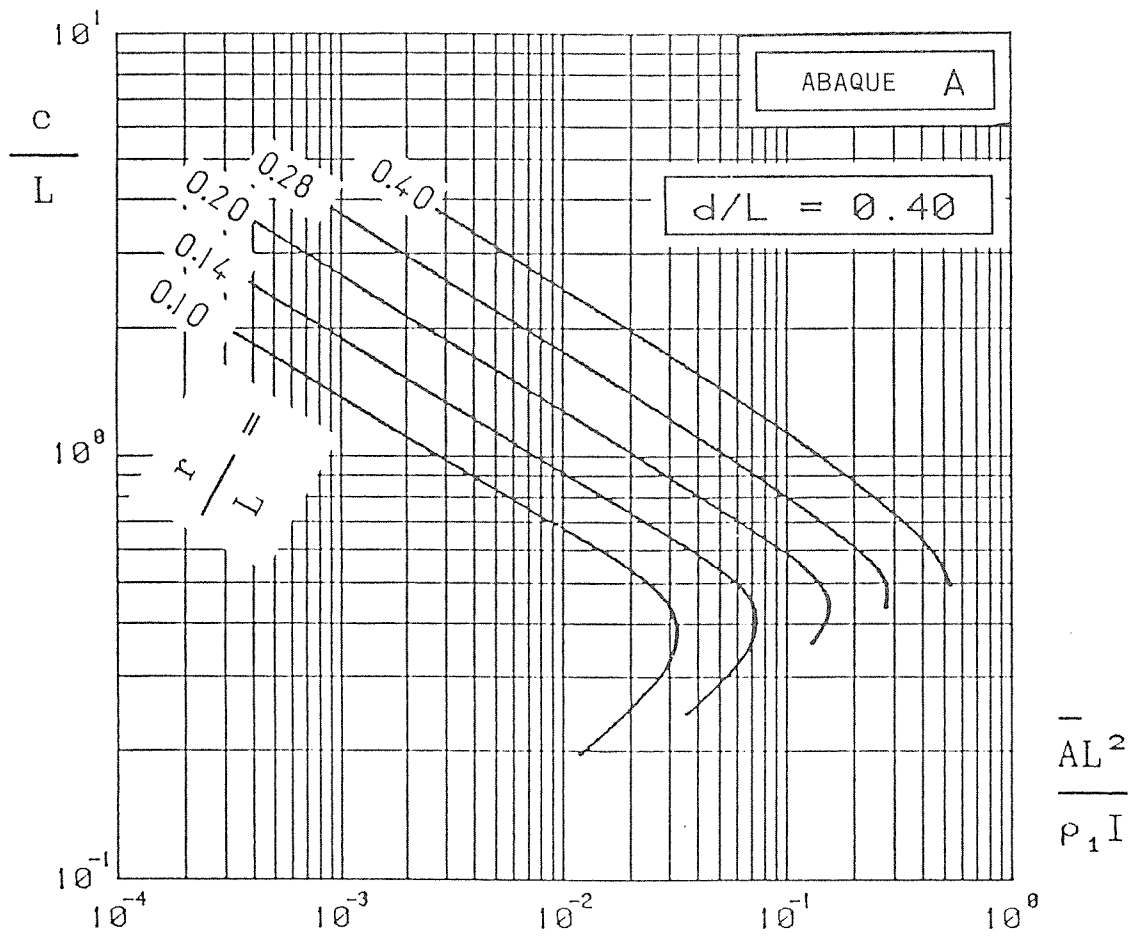


Figure 56h: Abaques d'interprétation pour le modèle sphérique.



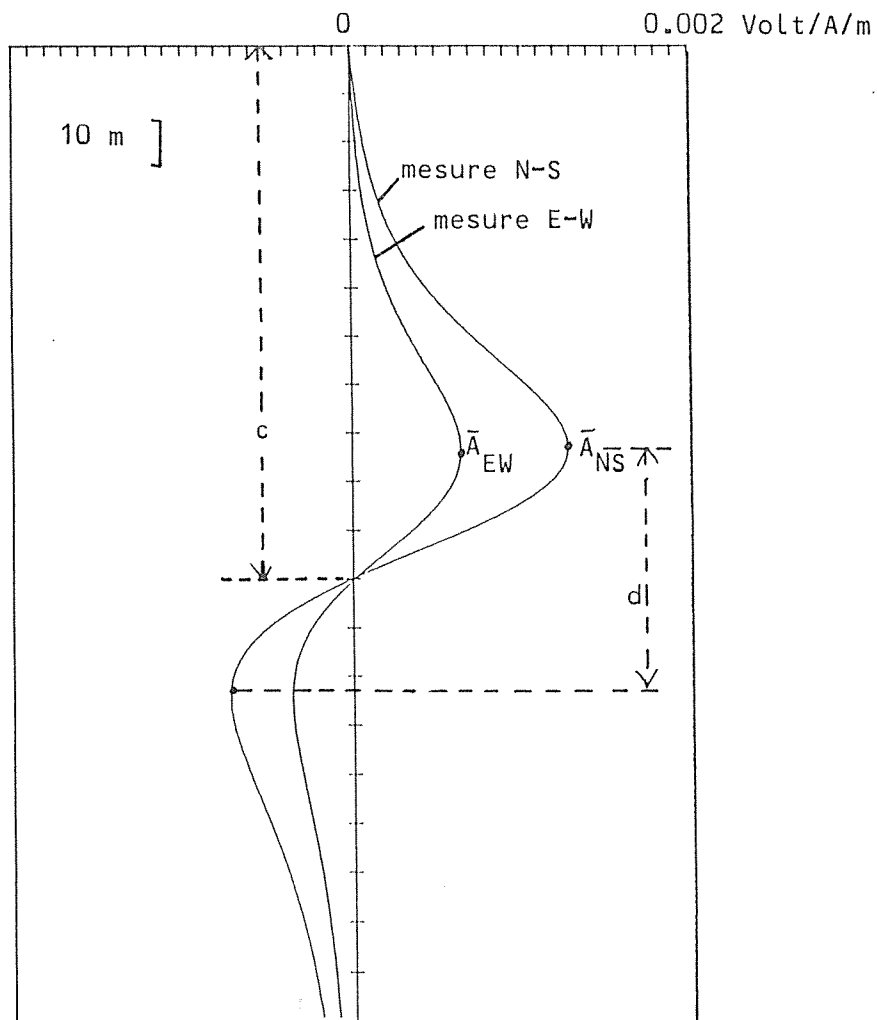


Figure 57: Exemple synthétique d'anomalies dues à une sphère et permettant d'illustrer la méthode d'interprétation à l'aide d'abaques.

Azimuth

$\vartheta = \text{tg}^{-1}(6.5/12.75) = 27^\circ$. La valeur exacte est 30° .

Distance au forage

On mesure 50 m. C'est également la valeur exacte.

Utilisation des abaques

On mesure $\bar{A}_{NS} \approx 12.75 \cdot 10^{-4}$ et $\bar{A}_{EW} \approx 6.5 \cdot 10^{-4}$, d'où $\bar{A} \approx 1.43 \cdot 10^{-3}$.

On a $d/L = 0.25 \longrightarrow$ on choisit l'abaque correspondant à $d/L = 0.24$.

En abscisse, on reporte $(\bar{A}L^2/\rho_1 I) = 0.057$ et en ordonnée, $c/L = 0.55$.

Sur l'abaque A, le paramètre vaut $r/L = 0.12$ d'où le rayon: $r = 24$ m.

La valeur exacte est 25 m. Sur l'abaque B, $c/p = 1.09$ d'où $p = 101$ m.

La valeur exacte de la profondeur est de 100 m.

Interprétation lorsque d/L est inférieur à 0.1.

Lorsque cette condition est vérifiée, on peut considérer que le champ est bien homogène au voisinage de la structure. La formule 58 donne le potentiel à une constante près:

$$V = \frac{a^3 \cdot E_0 \cos \vartheta}{r^2} \quad . \quad (185)$$

On peut supposer sans faire une erreur significative que le cross-over

est exactement à la profondeur de la sphère, que la variation de l'amplitude de l'anomalie en fonction de l'azimuth est exactement cosinusoidale etc....

Avec les notations de la figure 58, le champ vaut:

$$\vec{E}_o = \frac{I \rho_1 \vec{u}_1}{2 \pi R_1^2} + \frac{I \rho_1 \vec{u}_2}{2 \pi R_2^2} . \quad (186)$$

Par symétrie, $|E_o| = \frac{I \rho_1}{R} \cos(\alpha)$. Avec $\cos(\alpha) = \frac{L}{2 R}$, on obtient $E_o = \frac{I \rho_1 L}{2 \pi R^3}$ (187)

soit :

$$E_o = \frac{I \rho_1 L}{2 [(L/2)^2 + p^2]^{3/2}} . \quad (188)$$

Cette expression donne la valeur du champ à la profondeur p et au voisinage du forage lorsque le DSPF est utilisé. On peut placer l'origine des z à la profondeur de la sphère. On sait alors que les maxima de l'anomalie sont atteints pour $z = \pm d/2$. Avec l'expression 185, on en tire facilement:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]_{z=d/2} = \frac{3 a^3 E_o d^2}{2 [d^2 + (d/2)^2]^{5/2}} . \quad (189)$$

Cette quantité est précisément l'amplitude maximum de l'anomalie à laquelle on accède expérimentalement: $\bar{A} \equiv (\bar{A}_{NS}^2 + \bar{A}_{EW}^2)^{1/2}$.

De l'expression du champ électrique E_o donnée ci-dessus, on tire le rayon (a) de la sphère équivalente:

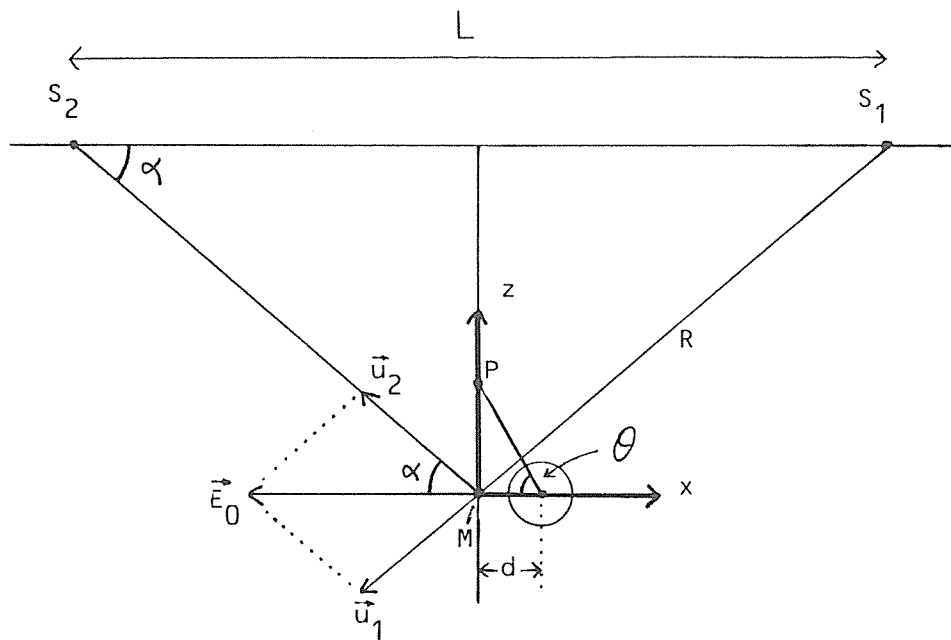


Figure 58: Géométrie du problème de la sphère proche du forage.
 On peut considérer que le champ primaire au voisinage de la sphère n'est pas très différent du champ au point M.

$$a = \left[\left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]_{z=d/2} \frac{4 \pi}{3} \frac{(5/4)^{5/2} d^3 \left[(L/2)^2 + p^2 \right]^{3/2}}{I \rho_1 L} \right]^{1/3} \quad (190)$$

On peut également effectuer le calcul du rayon à partir de mesures "corrigées de l'atténuation naturelle" (voir III.7 et VI.4.).

Le terme correctif valant: $\frac{\left[(L/2)^2 + p^2 \right]^{3/2}}{(L/2)^3}$, on utilise alors l'expression:

$$a = \left[\left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]_{z=d/2}^{\text{corr.}} \frac{\pi L^2 (5/4)^{5/2} d^3}{6 I \rho_1} \right]^{1/3} \quad (191)$$

V.6. Modèles sphéroïdaux.

Pour cette étude, les méthodes des paragraphes IV.1.5., IV.1.6. et IV.1.7. ont été mises en oeuvre.

L'augmentation du nombre de paramètres caractérisant la structure, par rapport au modèle sphérique, complique notablement le problème de l'interprétation. Trois nouvelles grandeurs interviennent:

- le rapport grand-axe sur petit-axe
- les deux angles sphériques qui définissent l'orientation de l'axe du sphéroïde.

En général, il sera nécessaire de procéder à des modélisations et/ou à des inversions pour déterminer tous les paramètres.

Nous nous contenterons ici de présenter un certain nombre d'anomalies.

La figure 59 montre la configuration géométrique des modèles étudiés. Le centre de la structure est toujours dans le plan xOz, de sorte que la

Fig.	Cas	x_e	b	θ°	φ°
60a	a	50	6	45	0
	b	50	12	45	0
	c	50	18	45	0
	d	50	24	45	0
60b	a	50	5	90	0
	b	50	5	90	30
	c	50	5	90	60
	d	50	5	90	90
60c	a	50	6	0	0
	b	50	12	0	0
	c	50	18	0	0
	d	50	24	0	0
60d	a	50	5	0	0
	b	50	5	30	0
	c	50	5	60	0
	d	50	5	90	0
60e	a	50	5	45	0
	b	50	5	45	30
	c	50	5	45	60
	d	50	5	45	90
60f	a	12	5	0	0
	b	25	5	0	0
	c	50	5	0	0
61a	a	50	10	90	0
	b	50	10	90	30
	c	50	10	90	60
61b	a	50	10	0	0
	b	50	10	30	0
	c	50	10	60	0
	d	50	10	90	0

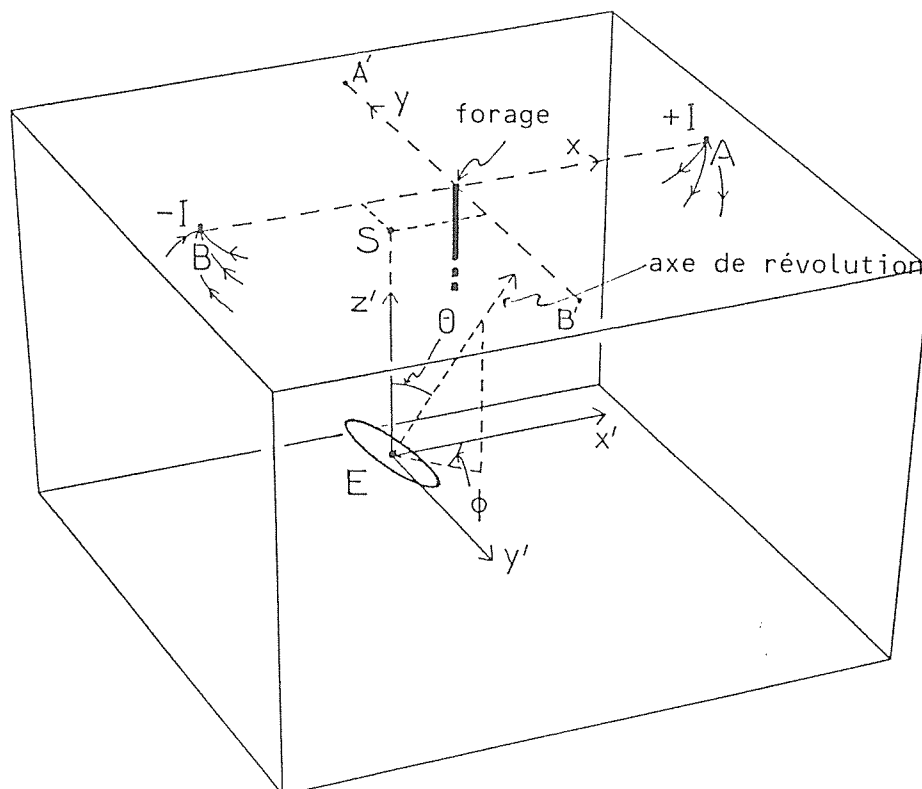
Tableau 2 : Valeurs numériques relatives aux modèles des figures 60a à 61b. Les paramètres qui ne sont pas indiqués dans la table sont :

pour la figure 60: demi-grand axe 25 m
pour la figure 61: demi-grand axe 40 m
dans tous les cas :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 y_e = 0 \text{ m} \\
 z_e = 100 \text{ m} \\
 \rho_{\text{int.}} = 0 \text{ } \Omega \cdot \text{m} \\
 \rho_{\text{ext.}} = 1000 \text{ } \Omega \cdot \text{m} \\
 x_s = +100 \text{ m (source +I)} \\
 x_s = -100 \text{ m (source -I)} \\
 y_s = z_s = 0 \text{ m}
 \end{array} \right.$$

L'indice e est relatif au centre du corps tandis que l'indice s est relatif aux sources.

Figure 59: Notations et géométrie pour les résultats présentés figures 60a à 61b. Les valeurs numériques des modèles sont données dans le tableau 2.



mesure effectuée selon une direction EW s'annule lorsque $\varphi=0$ ou $\vartheta=0$. Le tableau 2 donne tous les paramètres des modèles pour lesquels nous avons effectué un calcul. Les figures 60a à 60f illustrent l'influence de divers ellipsoïdes aplatis sur le gradient du potentiel. La plupart du temps, ces anomalies sont très semblables à celles obtenues avec le modèle sphérique. Cependant, spécialement lorsque le corps est presque parallèle à une surface équipotentielle du champ primaire, le résultat est très différent (figure 60c, cas c et d). Pour les autres cas, une interprétation en terme de structure sphérique fournirait une position qui correspond à la partie du sphéroïde la plus proche du forage. Notons d'autre part que l'anomalie "EW", lorsqu'elle ne s'annule pas du fait de la symétrie, reste toujours relativement faible. Sur la figure 60f, le forage traverse la structure. Lorsque le centre de celle-ci se rapproche du forage, l'amplitude du signal décroît. En effet, la géométrie de l'ensemble voit sa symétrie augmenter et l'on sait que dans ce cas l'anomalie disparaît.

Pour finir, les figures 61a et 61b montrent des anomalies dues à des sphéroïdes allongés.

V.7. Effet d'un mort-terrain et effets topographiques.

L'effet d'un mort-terrain a été étudié par Doucet, à l'aide de son programme par éléments finis. La présence d'une telle couche conductrice en surface a bien évidemment pour effet de diminuer le champ primaire en profondeur, puisque le courant est largement canalisé aux faibles profondeurs. Ainsi, dans un terrain de $1000 \Omega.m$ et pour une couche conductrice en surface d'une cinquantaine de mètres d'épaisseur et de résistivité $10 \Omega.m$, le champ horizontal est-il divisé d'un facteur 10 environ. La forme générale des anomalies n'est pas considérablement affectée par la présence du mort-terrain. Si les caractéristiques de ce dernier sont connues (épaisseur et résistivité), le calcul du champ horizontal primaire à une profondeur donnée ne présente pas de difficulté majeure (voir par exemple [9]). Une interprétation quantitative approchée est alors réalisable à l'aide du procédé décrit à la fin du paragraphe V.5. (interprétation lorsque $d/L < .1$) à la condition de substituer à E_0 la bonne valeur. Dans des cas plus complexes, il faut recourir à la

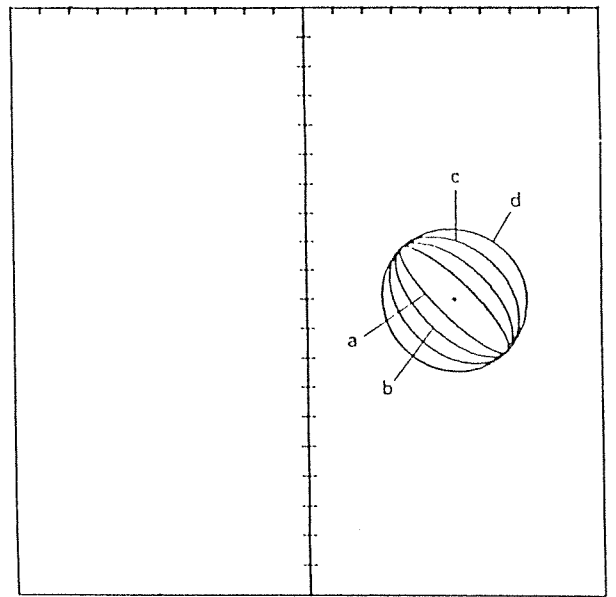
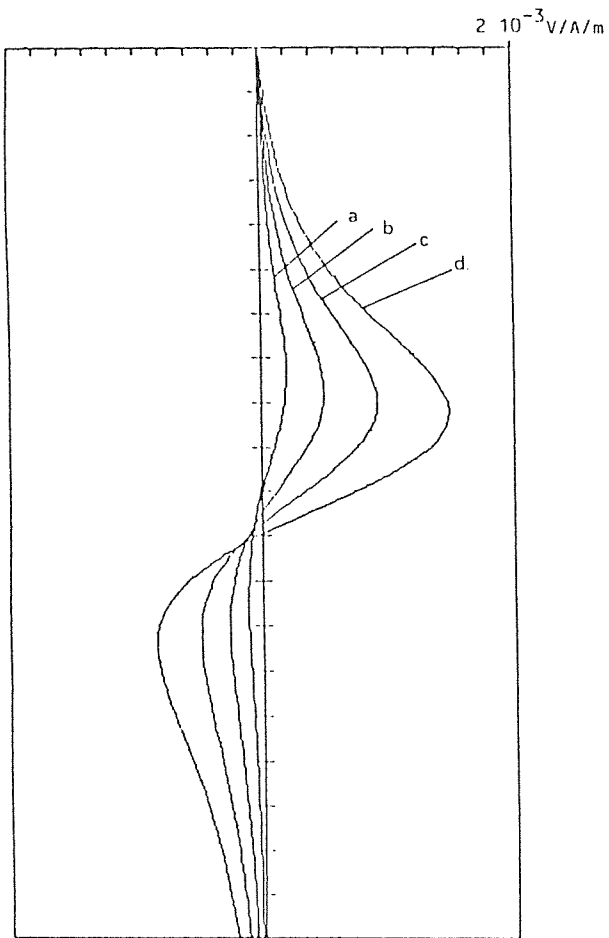


Figure 60a: Anomalies dues à des sphéroïdes aplatis pour quatre valeurs du petit axe.

Voir table 2 et figure 59.

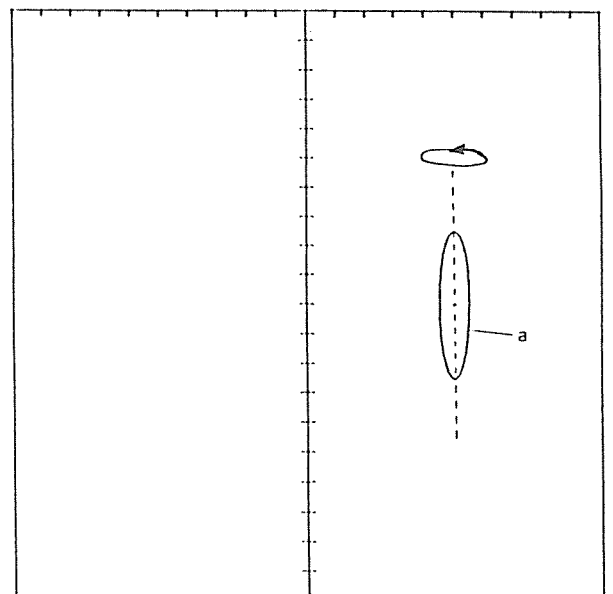
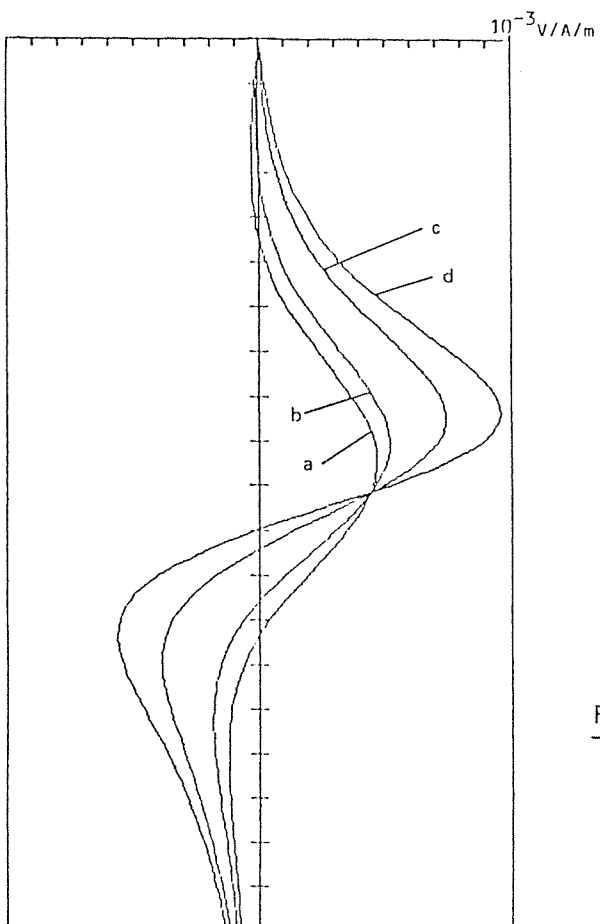


Figure 60b: Anomalies dues à des sphéroïdes aplatis pour φ variant entre 0° et 90° . Ici $\theta = 90^\circ$.

Voir table 2 et figure 59.

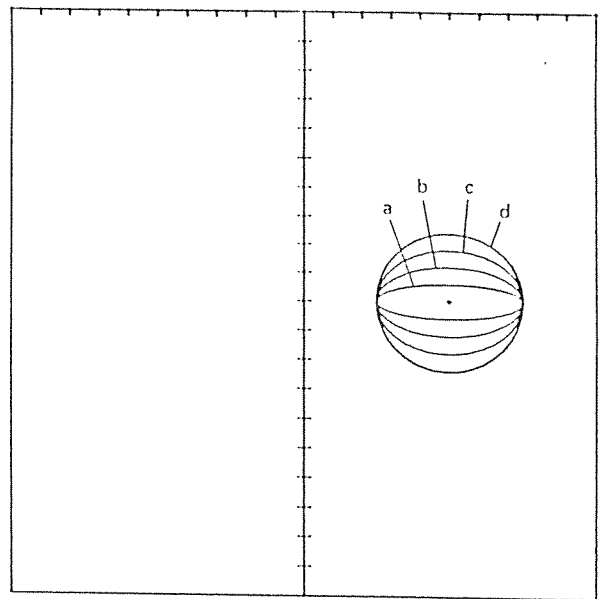
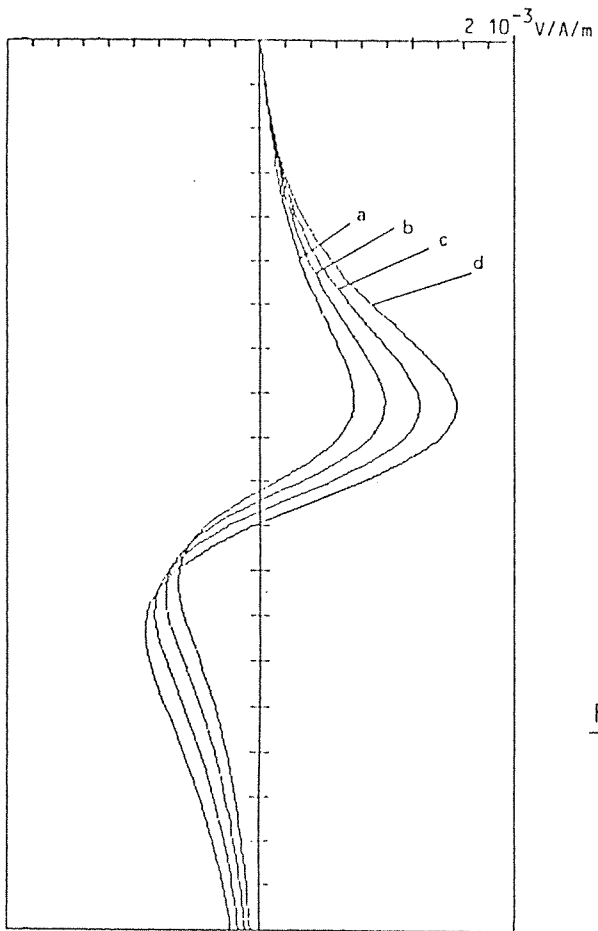


Figure 60c: Anomalies dues à des sphéroïdes aplatis horizontaux pour différentes valeurs du petit axe.

Voir table 2 et figure 59.

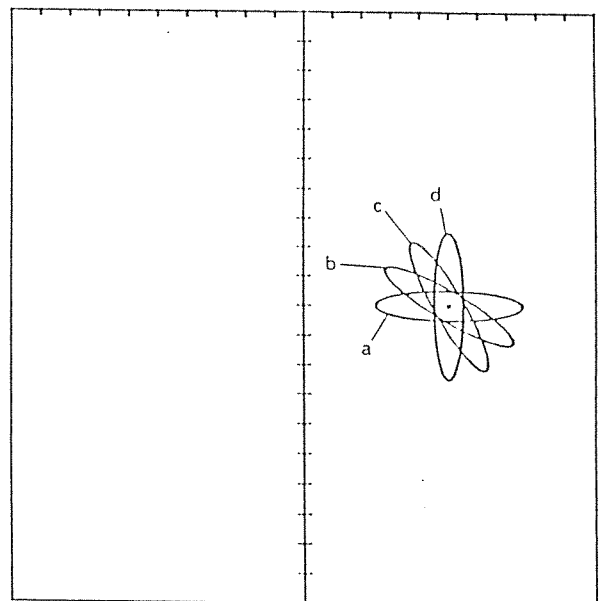
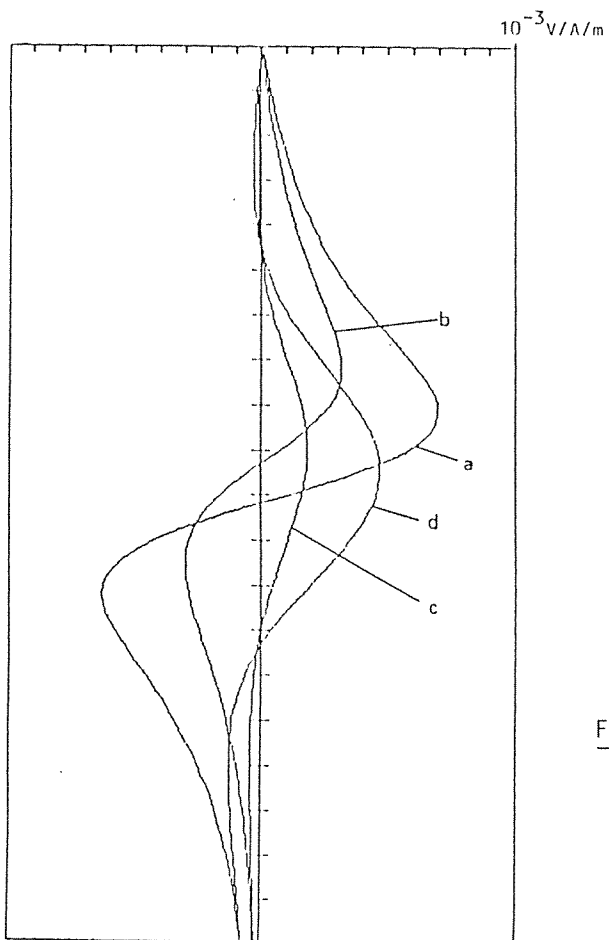


Figure 60d: Anomalies dues à des sphéroïdes aplatis pour différentes valeurs de θ .

Voir table 2 et figure 59.

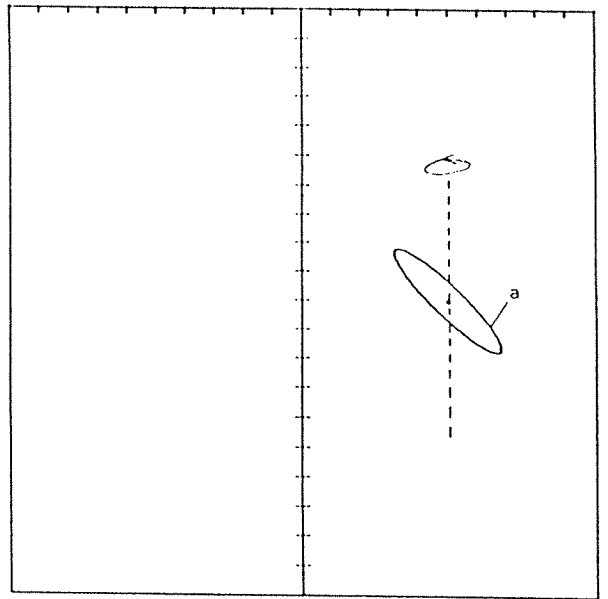
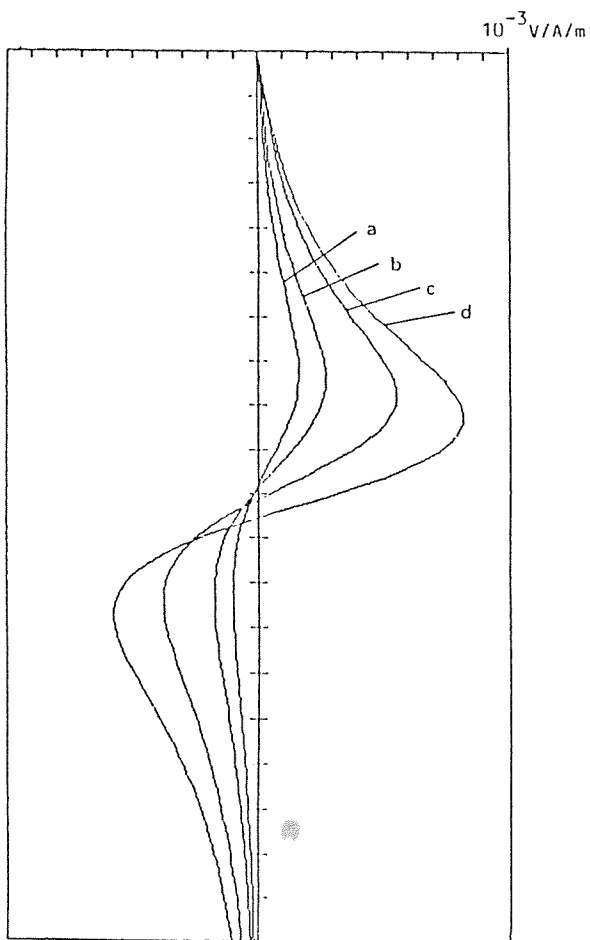


Figure 60e: Anomalies dues à des sphéroïdes aplatis et inclinés pour différentes valeurs de φ .
Voir table 2 et figure 59.

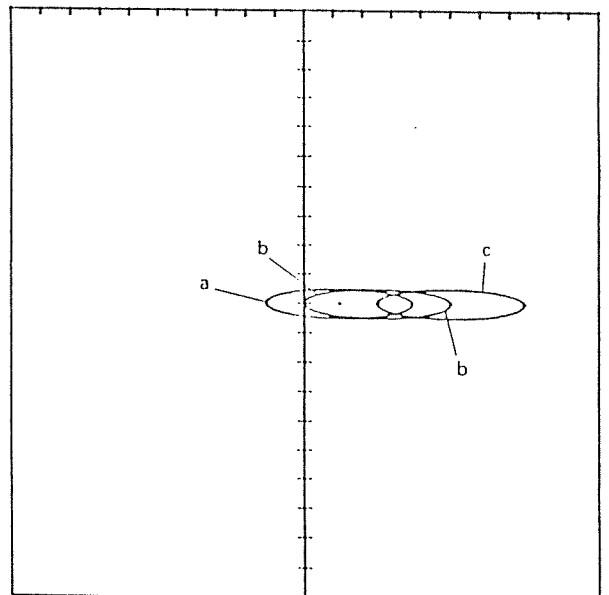
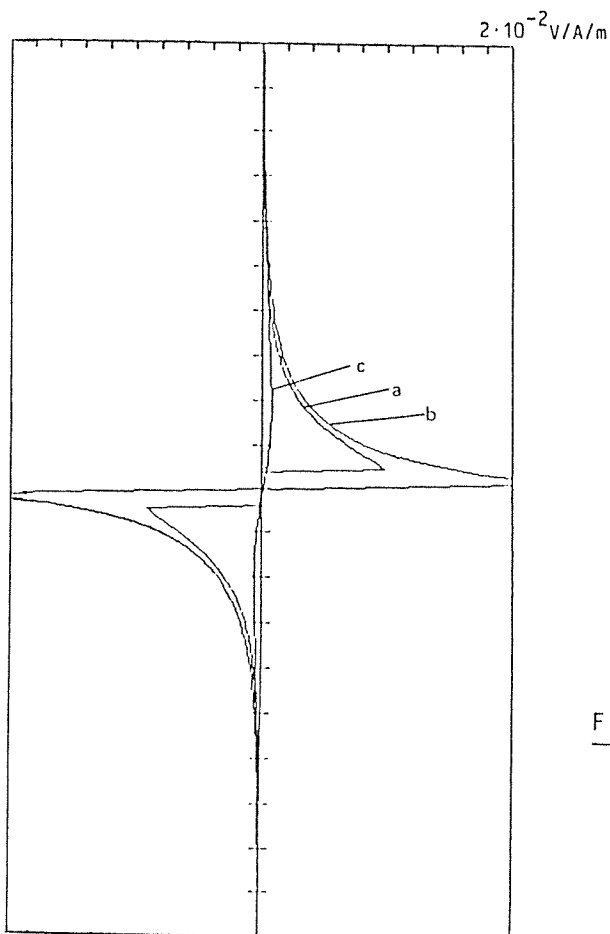


Figure 60f: Anomalies dues à des sphéroïdes aplatis pour différentes distances au forage.
Voir table 2 et figure 59.

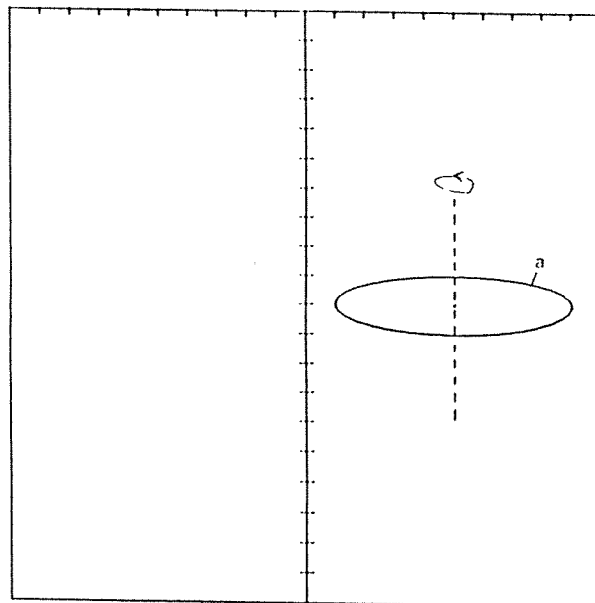
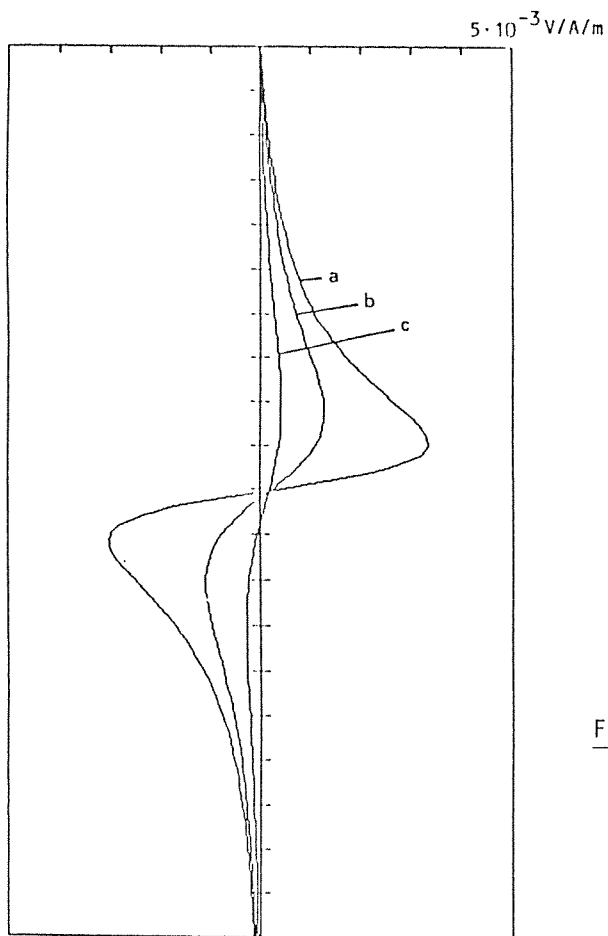


Figure 61a: Anomalies dues à des sphéroïdes allongés pour différentes valeurs de φ .
Voir table 2 et figure 59.

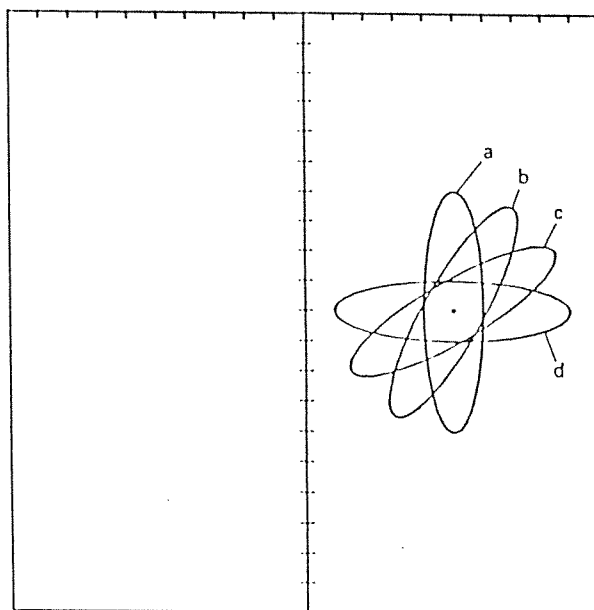
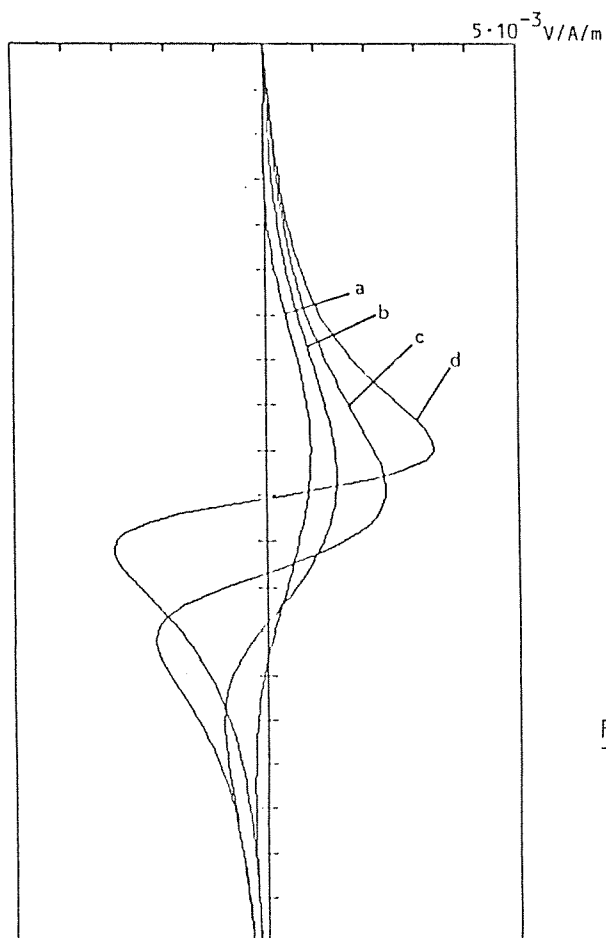
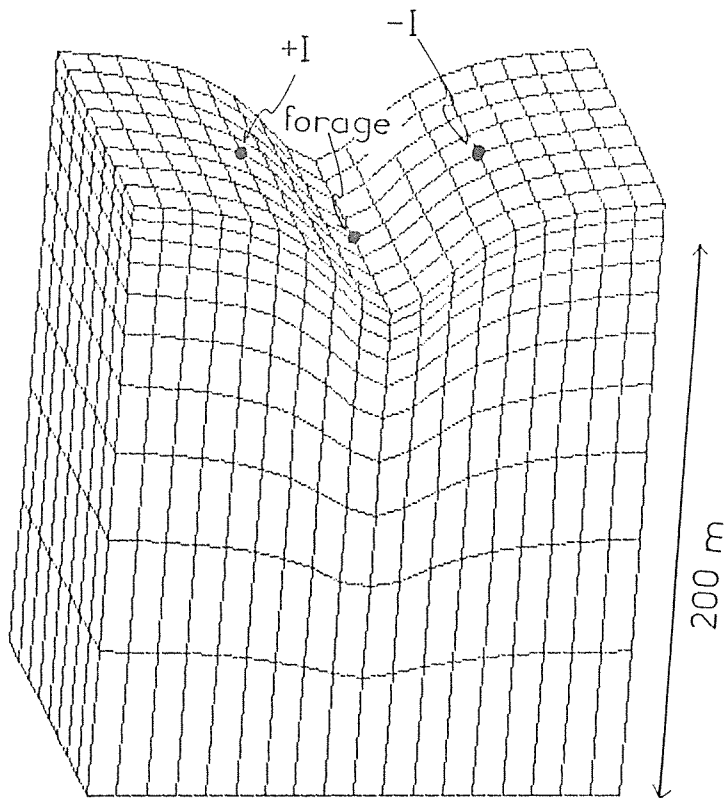


Figure 61b: Anomalies dues à des sphéroïdes allongés pour différentes valeurs de θ .
Voir tableau 2 et figure 59.

modélisation numérique.

L'application de notre programme d'éléments finis a permis par ailleurs de montrer que l'influence d'une topographie mouvementée est faible. Généralement, en prospection de surface, les effets topographiques ne sont pas du tout négligeables. En effet, le champ électrique au voisinage de la surface peut être considérablement affecté par de petits accidents topographiques. Cependant, ces mêmes accidents n'auront qu'une influence très faible sur le champ en profondeur. Certaines configurations, comme celle qui est décrite sur la figure 62, peuvent néanmoins modifier notablement la valeur du champ primaire (et donc également celle du champ secondaire). Dans l'exemple donné, un facteur deux est atteint. Malgré cela, l'effet topographique n'est pas très gênant car le rayon d'une sphère, calculé à partir d'une anomalie expérimentale, varie comme la racine cubique de l'amplitude de l'anomalie. Même avec une erreur sur l'anomalie atteignant un facteur 2, l'erreur sur le rayon n'atteint que $2^{1/3}$ soit environ 25%.



Le modèle correspond au cas d'un forage situé dans l'axe d'un talweg. Les électrodes sont à mis-pente.

Résistivité: $1000 \Omega \cdot m$

0.15 V/m

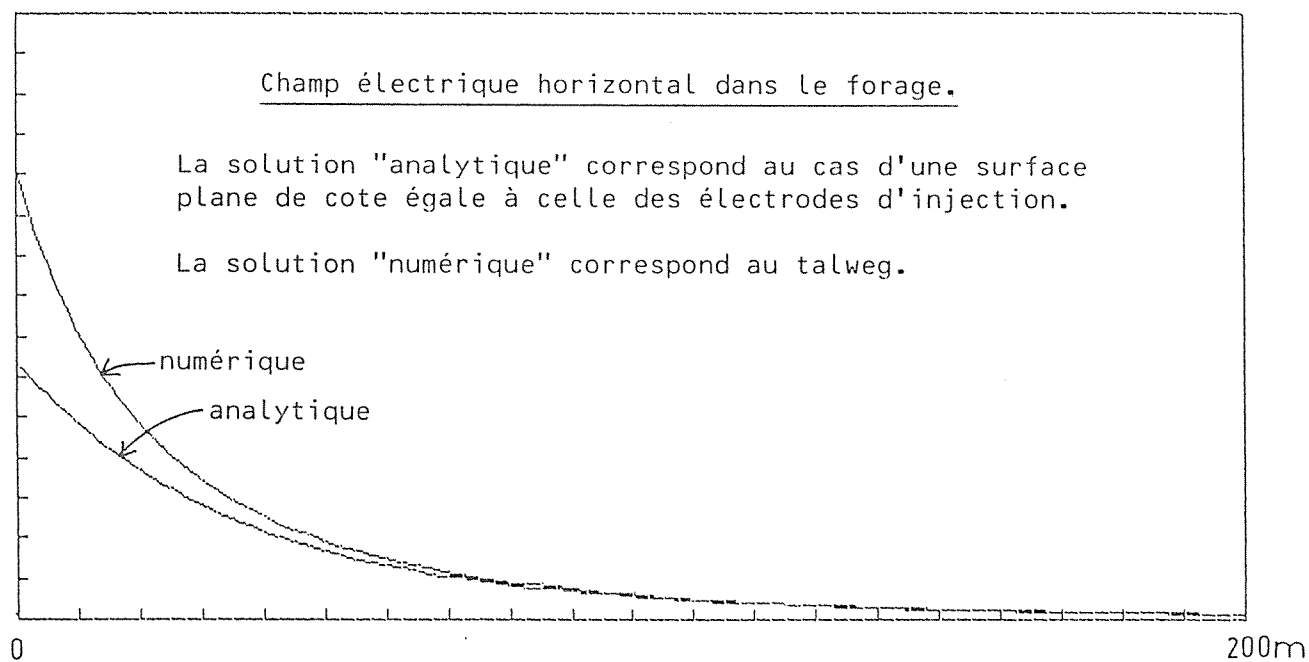


Figure 62: Exemple de modélisation d'un effet topographique par éléments finis. La concentration des lignes de courant au voisinage de la surface implique un renforcement du champ électrique horizontal (primaire) dans le forage (facteur voisin de 2 dans cet exemple).

VI. MISE EN FORME ET TRAITEMENTS DES DONNEES EXPERIMENTALES.

VI.1. Unités utilisées.

Les mesures brutes sont exprimées dans l'unité naturelle du champ électrique: le volt par mètre ($V.m^{-1}$). En pratique, il est avantageux de normaliser les mesures au moins par le courant injecté (d'autant plus que ce dernier varie au cours d'une même mesure!). Il suffit de diviser la tension mesurée par le courant injecté et l'unité est alors le volt par mètre pour un ampère ($V.m^{-1}.A^{-1}$). D'autres normalisations peuvent être mises en oeuvre: par rapport à l'échelle géométrique, à la résistivité de l'encaissant etc.... Cependant, ces paramètres peuvent ne pas être clairement définis (dispositif non symétrique, résistivité mal connue ou trop variable etc....). Nous en resterons donc là.

VI.2. Traitement par filtrage. Avantages et inconvénients.

Au paragraphe 3 du chapitre V, nous avons montré qu'une anomalie élémentaire présente un spectre en forme de bosse dont le maximum est à la longueur d'onde spatiale $\lambda_m = 4.717 d$, où (d) est la distance entre le centre de la sphère au forage. L'idée vient immédiatement de séparer des anomalies de différentes longueurs d'onde (donc des corps situés à des distances différentes du forage) au moyen de filtres linéaires. Une technique de ce genre est d'ailleurs largement utilisée en méthodes gravimétrique et magnétique, pour la séparation des anomalies d'origines plus ou moins profondes.

Insistons d'emblée sur les points suivants:

- le spectre d'une anomalie élémentaire est "mou": il couvre une bande de fréquences importante. Un filtrage même sélectif, centré sur le maximum spectral d'une anomalie, laissera passer une bonne partie de l'énergie du signal d'une anomalie dont le maximum spectral se situerait en-dehors de ladite bande. On ne peut donc sélectionner ni éliminer strictement les anomalies.

- plus un filtre passe-bande est sélectif, plus sa propension au "pédalage" (terme parlant pour désigner le phénomène de Gibbs) est importante. Un filtre trop sélectif (à bande trop étroite) sera à l'origine d'oscillations parasites qui gêneront la discrimination et la localisation de l'anomalie ("ambiguïté temps-fréquence", ou "principe d'incertitude").

Précisons davantage l'intérêt du filtrage. Puisque l'anomalie élémentaire créée par une sphère présente un maximum spectral à la longueur d'onde spatiale $\lambda = \lambda_m = 4.717 d$, un filtrage centré sur cette longueur d'onde permettra de sélectionner les anomalies dues à des sources situées à la distance (d) du forage. À l'aide de divers filtres, il est possible d'obtenir une sorte de cartographie des corps anomaliques. Il faut garder à l'esprit l'importance capitale des deux assertions suivantes:

- la présence de hautes fréquences spatiales dans le signal indique avec certitude la présence de structures proches du forage. En effet, l'anomalie créée par une structure éloignée ne peut produire qu'un signal dont l'évolution spatiale est relativement lente.
- par contre, les basses fréquences spatiales n'impliquent nullement que leurs sources soient éloignées du forage. En effet, une évolution lente de la résistivité des terrains proches ou même traversés par le forage crée également des basses fréquences. Pis encore, l'amplitude du signal de cette origine peut bien être beaucoup plus importante que celle d'un signal qui aurait une origine plus lointaine.

Nous verrons comment, plus loin, le filtrage intervient comme aide à la représentation et à l'interprétation qualitative des signaux, plutôt qu'à l'interprétation quantitative sensu stricto.

Le calcul des filtres.

Nous avons choisi d'utiliser des filtres récursifs: ils sont faciles

à calculer et rapides à la mise en oeuvre. Malheureusement, ils présentent un déphasage non nul. Cependant, en appliquant deux fois le filtre au signal, il est possible d'annuler ce déphasage. Cette opération de double filtrage peut s'effectuer au moins de deux manières.

Désignons par:

Désignons par:	x_n le signal à filtrer	(192)
	y_n le signal filtré	
	h_n le filtre	
	$X(e^{j\omega})$ la T.F. de x_n	
	$Y(e^{j\omega})$ la T.F. de y_n	
	$H(e^{j\omega})$ la T.F. de h_n	

Un premier procédé correspond à la suite d'opérations suivante:

$$\begin{aligned}
 1) \quad x_n &\longrightarrow \boxed{h_n} \longrightarrow g_n = x_n * h_n \\
 2) \quad x_{-n} &\longrightarrow \boxed{h_n} \longrightarrow r_n = x_{-n} * h_n \\
 3) \quad y_n &= g_n + r_{-n}
 \end{aligned}
 \tag{193}$$

L'équivalent dans le domaine spectral est:

$$\begin{aligned}
 1) \quad X(e^{j\omega}) &\longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow G(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) \\
 2) \quad X(e^{-j\omega}) &\longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow R(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) H(e^{j\omega}) \\
 3) \quad Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) \left[H(e^{j\omega}) + H(e^{-j\omega}) \right] \\
 &= 2 X(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})| \cos[\arg(H(e^{j\omega}))]
 \end{aligned}
 \tag{194}$$

La phase de la fonction de transfert résultante est bien nulle, mais son amplitude est modulée par le cosinus. Ce résultat n'est pas satisfaisant.

Le deuxième procédé est meilleur. Il correspond à la séquence:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & x_n \longrightarrow \boxed{h_n} \longrightarrow g_n = x_n * h_n \\
 2) \quad & g_{-n} \longrightarrow \boxed{h_n} \longrightarrow r_n = g_{-n} * h_n \\
 3) \quad & y_n = r_{-n}
 \end{aligned} \tag{195}$$

Dans le domaine spectral, l'équivalent est:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & X(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow G(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) \\
 2) \quad & G(e^{-j\omega}) \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow R(e^{j\omega}) = G(e^{-j\omega}) H(e^{j\omega}) \\
 3) \quad & Y(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}) \\
 & = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}) \\
 & = X(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2
 \end{aligned} \tag{196}$$

La fonction de transfert est cette fois-ci égale à la norme du carré de la fonction de transfert du filtre initial. On obtient une phase nulle et un doublement de l'ordre du filtre.

Pour le calcul explicite des coefficients des filtres, nous nous sommes inspiré de [24]. Aussi cherchera-t-on les justifications des calculs qui suivent dans cet ouvrage.

Notre choix s'est porté sur un filtre elliptique de Caer du troisième ordre. L'ouvrage cité donne seulement les coefficients du filtre passe-bas et de fréquence de coupure unité dans l'espace de Laplace, mais indique comment synthétiser d'autres filtres à partir de celui-ci.

Le filtre initial est de la forme:

$$C(p) = \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3} \quad \text{avec:} \quad \left| \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = 0.1038 \\ a_3 = 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} b_1 = 2.0235 \\ b_2 = 1.6404 \\ b_3 = 1.3228 \end{array} \right| \tag{197}$$

Pour obtenir l'expression équivalente dans l'espace des "transformées en z", on utilise la substitution:

$$p \longmapsto \frac{z - 1}{z + 1} \quad (198)$$

Tous calculs faits, le filtre s'écrit:

$$F(z) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \alpha_3 z^{-3}}{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \beta_3 z^{-3}} \quad (198)$$

avec:

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_0 = 1 + a_1 + a_2 + a_3 \\ \alpha_1 = 3 + a_1 - a_2 - 3a_3 \\ \alpha_2 = 3 - a_1 - a_2 + 3a_3 \\ \alpha_3 = 1 - a_1 + a_2 - a_3 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \beta_0 = 1 + b_1 + b_2 + b_3 \\ \beta_1 = 3 + b_1 - b_2 - 3b_3 \\ \beta_2 = 3 - b_1 - b_2 + 3b_3 \\ \beta_3 = 1 - b_1 + b_2 - b_3 \end{array} \right. \quad (200)$$

Dans la suite, $\left| \begin{array}{l} f_e \text{ désigne la fréquence d'échantillonnage} \\ f_c \text{ désigne la fréquence de coupure} \end{array} \right.$

Synthèse d'un filtre passe-bas.

Il faut effectuer la substitution:

$$z^{-1} \longmapsto \frac{z^{-1} - k}{1 - kz^{-1}} \quad \text{avec: } k = \frac{\sin(\pi/4 - \vartheta_c/2)}{\sin(\pi/4 + \vartheta_c/2)} \quad \text{et } \vartheta_c = \frac{2 \pi f_c}{f_e} \quad (201)$$

Le filtre devient:

$$F(z^{-1}) = \frac{u_0 + u_1 z^{-1} + u_2 z^{-2} + u_3 z^{-3}}{v_0 + v_1 z^{-1} + v_2 z^{-2} + v_3 z^{-3}} \quad (202)$$

Après un calcul laborieux mais facile:

$$\left[\begin{array}{l} u_0 = \alpha_0 - k\alpha_1 + k^2\alpha_2 - k^3\alpha_3 \\ u_1 = -3k\alpha_0 + (1+2k^2)\alpha_1 + (-2k-k^3)\alpha_2 - 3k^2\alpha_3 \\ u_2 = 3k^2\alpha_0 + (-2k-k^3)\alpha_1 + (1+2k^2)\alpha_2 + 3k\alpha_3 \\ u_3 = -k^3\alpha_0 + k^2\alpha_1 - k\alpha_2 + \alpha_3 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{les expressions pour} \\ v_{0,1,2,3} \text{ sont identiques} \\ \text{en fonction de } \beta_{0,1,2,3} \end{array} \right. \quad (203)$$

Synthèse d'un filtre passe-haut.

La substitution est ici:

$$z^{-1} \longmapsto \frac{k - z^{-1}}{1 - kz^{-1}} \quad \text{avec: } k = \frac{\cos(\pi/4 + \vartheta_c/2)}{\cos(\pi/4 - \vartheta_c/2)} \quad \text{et } \vartheta_c = \frac{2\pi f_c}{f_e} \quad (204)$$

et on obtient:

$$\left[\begin{array}{l} u_0 = \alpha_0 + k\alpha_1 + k^2\alpha_2 + k^3\alpha_3 \\ u_1 = -(3k\alpha_0 + (1+2k^2)\alpha_1 + (2k+k^3)\alpha_2 + 3k^2\alpha_3) \\ u_2 = 3k^2\alpha_0 + (2k+k^3)\alpha_1 + (1+2k^2)\alpha_2 + 3k\alpha_3 \\ u_3 = -(k^3\alpha_0 + k^2\alpha_1 + k\alpha_2 + \alpha_3) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{les expressions pour} \\ v_{0,1,2,3} \text{ sont identiques} \\ \text{en fonction de } \beta_{0,1,2,3} \end{array} \right. \quad (205)$$

Synthèse d'un filtre passe-bande.

Lorsque la bande à obtenir n'est pas très étroite, il est avantageux de construire ces filtres par multiplication d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut. Le filtre final est alors du sixième ordre.

Normalisation des filtres.

Les filtres obtenus doivent être normalisés de sorte que leur fonction de transfert vaille:

1 à la fréquence zéro pour un filtre passe-bas
 1 de Nyquist ($f_e/2$) pour un filtre passe-haut
 1 au centre de la bande pour un filtre passe-bande.

La fonction de transfert s'écrit:

$$F(z^{-1}) = F \left[\exp \left[\frac{-j 2 \pi f}{f_e} \right] \right] = \frac{\sum u_i z^{-i}}{\sum v_i z^{-i}} \quad (206)$$

Le filtre normalisé est simplement:

$$F_n(z^{-1}) = \frac{\sum u_i' z^{-i}}{\sum v_i z^{-i}} \quad , \quad \text{avec} \quad u_i' = \frac{u_i}{|F(z_n^{-1})|} \quad (207)$$

z_n^{-1} correspond à la fréquence pour laquelle le filtre doit valoir 1.

Enfin, pour obtenir la forme récursive définitive, le filtre est mis sous la forme:

$$F_{\text{final}}(z^{-1}) = \frac{\sum_{i=0}^N \bar{u}_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N \bar{v}_i z^{-i}} \quad , \quad \text{avec:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_i = \frac{u_i'}{v_0} \\ \bar{v}_i \equiv \frac{v_i}{v_0} \end{array} \right. \quad (208)$$

Choix des filtres pour les mesures en forage.

Ces choix sont nécessairement arbitraires. Les passe-bande doivent être pris assez larges, de sorte à éviter de faire osciller le signal.

Nous savons que le maximum spectral de l'anomalie due à une sphère située à la distance (d) du forage est atteint pour $f=1/(4.717 d)$. Il est naturel de caractériser les filtres non par leurs fréquences de coupure ni même par les longueurs d'onde qui leur correspondent, mais précisément par les distance (d) des anomalies qu'ils sélectionnent.

Les filtres que nous proposons n'ont pas tous le même rôle. Ils sont décrits sur les figures 63 à 65 et ci-dessous.

- filtre passe-bas ($d > 64$ m)

il permet d'extraire ce qu'il est convenu d'appeller une dérive, cad les parties "TBF" du signal. Ces basses fréquences peuvent avoir les origines suivantes:

- 1) une disposition non symétrique des électrodes d'émission
- 2) la non verticalité du forage
- 3) des variations spatiales lentes de la résistivité du terrain
- 4) une topographie non plane.

- filtres passe-bande

Deux filtres sont prévus: $16 \text{ m} < d < 64 \text{ m}$
 $4 \text{ m} < d < 16 \text{ m}$

Ils ont pour but d'opérer une sélection partielle des anomalies de différentes longueurs d'onde. En fait, leur utilité est de faciliter la mise en évidence de formes difficiles à distinguer dans les signaux bruts.

- filtre passe-bande ($4 < d < 64$)

ce filtre qui englobe les deux bandes des filtres précédents élimine la dérive et les plus hautes fréquences. Il sert à "enjoliver" le signal pour un examen qualitatif.

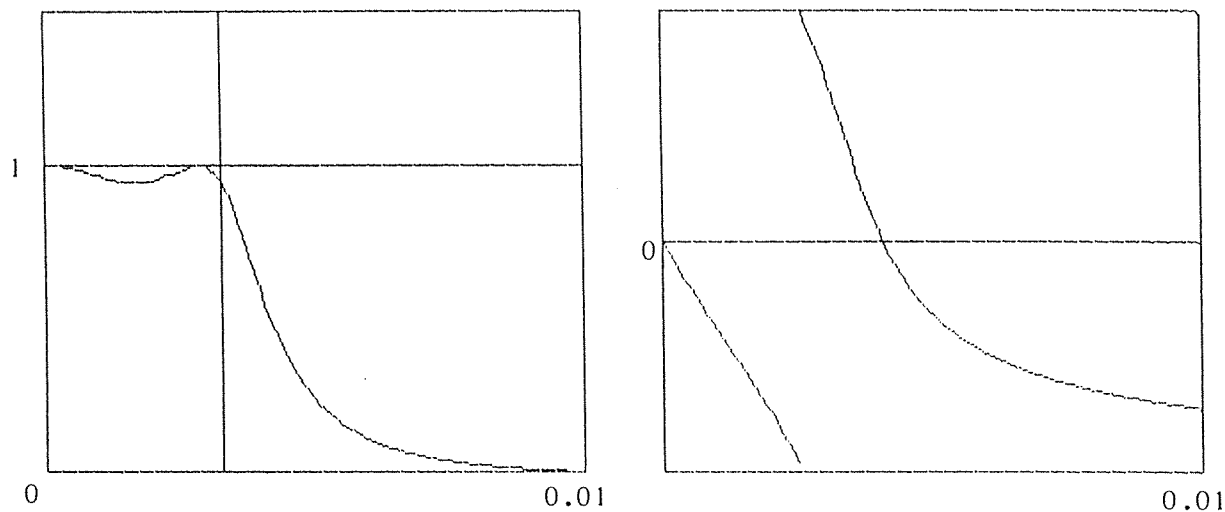
fréq. ech. = 1

fréq. de coupure = .0033

amplitude entre 0 et 1.5

phase entre $-\pi/2$ et $\pi/2$

(abscisse entre 0 et .01)



Forme réursive de ce filtre :

$$S(n) = u_0 * E(n) + u_1 * E(n-1) + u_2 * E(n-2) + u_3 * E(n-3) \\ - v_1 * S(n-1) - v_2 * S(n-2) - v_3 * S(n-3)$$

les coefficients sont :

$u_0 =$	8.082354147408187D-04	$v_1 =$	-2.973962689059803
$u_1 =$	-8.049190421048833D-04	$v_2 =$	2.948584495855417
$u_2 =$	-8.049080982572883D-04	$v_3 =$	-.9746151631064948
$u_3 =$	8.082354147408187D-04		

Figure 63: Filtre passe-bas ($d > 64$ m) destiné à extraire la "dérive" .

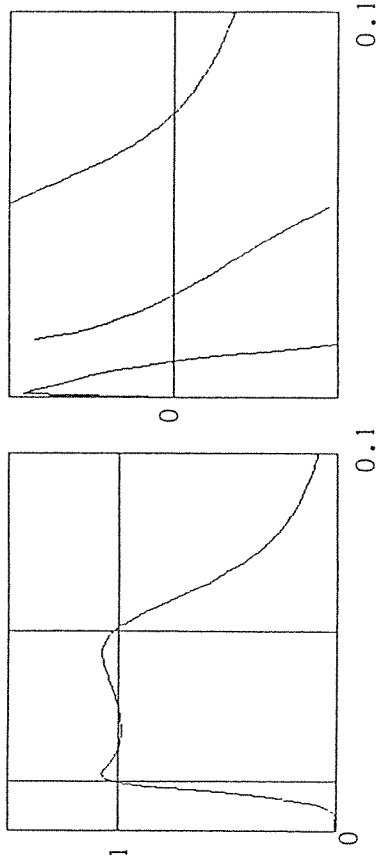
fréq. ech. = 1

fréq. de coupure = .0132 .053

amplitude entre 0 et 1.5

(abscisse entre 0 et .1

phase entre -pi/2 et pi/2



Forme récursive de ce filtre :

$$S(n) = u_0 * E(n) + u_1 * E(n-1) + u_2 * E(n-2) + u_3 * E(n-3) + u_4 * E(n-4) + u_5 * E(n-5) + u_6 * E(n-6) - v_1 * S(n-1) - v_2 * S(n-2) - v_3 * S(n-3) - v_4 * S(n-4) - v_5 * S(n-5) - v_6 * S(n-6)$$

les coefficients sont :

u0 =	1.358969806984019D-02	v1 =	-5.347673575511684
u1 =	-4.272171596766437D-02	v2 =	12.00233747464122
u2 =	4.468268163860762D-02	v3 =	-14.47502944583401
u3 =	-1.952862544621281D-08	v4 =	9.89388814438886
u4 =	-8.8446826554863196	v5 =	-3.63328875969295
u5 =	4.272170964148328D-02	v6 =	.5597828709718989
u6 =	-1.358969806984019D-02		

(4 < d < 16)

Figure 64: Les deux filtres passe-bande. Ils permettent d'obtenir des signaux plus faciles à "lire" et interpréter que les signaux bruts.

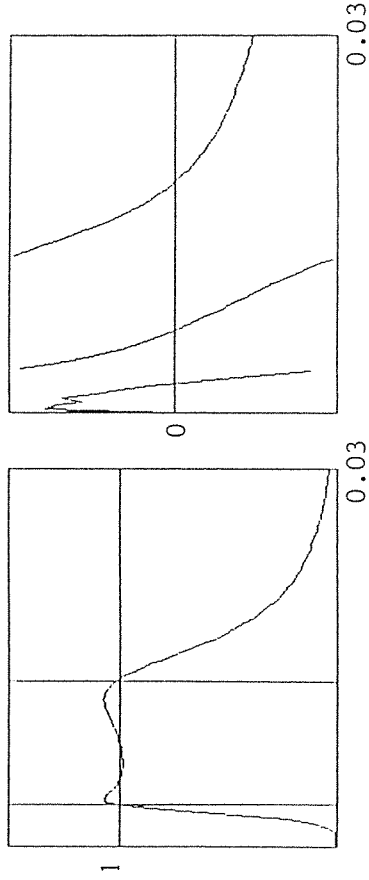
fréq. ech. = 1

fréq. de coupure = .0033 .0132

amplitude entre 0 et 1.5

(abscisse entre 0 et .03

phase entre -pi/2 et pi/2



Forme récursive de ce filtre :

$$S(n) = u_0 * E(n) + u_1 * E(n-1) + u_2 * E(n-2) + u_3 * E(n-3) + u_4 * E(n-4) + u_5 * E(n-5) + u_6 * E(n-6) - v_1 * S(n-1) - v_2 * S(n-2) - v_3 * S(n-3) - v_4 * S(n-4) - v_5 * S(n-5) - v_6 * S(n-6)$$

les coefficients sont :

u0 =	3.397289501375774D-03	v1 =	-5.850286922788116
u1 =	-1.336696283179632D-02	v2 =	14.26726068913483
u2 =	1.654231781954987D-02	v3 =	-18.56523244049372
u3 =	-2.982801848358942D-08	v4 =	13.59582829381881
u4 =	-1.65422731798268D-02	v5 =	-5.311966996686381
u5 =	1.336695295663614D-02	v6 =	.8651973816788461
u6 =	-3.397289501375774D-03		

(16 < d < 64)

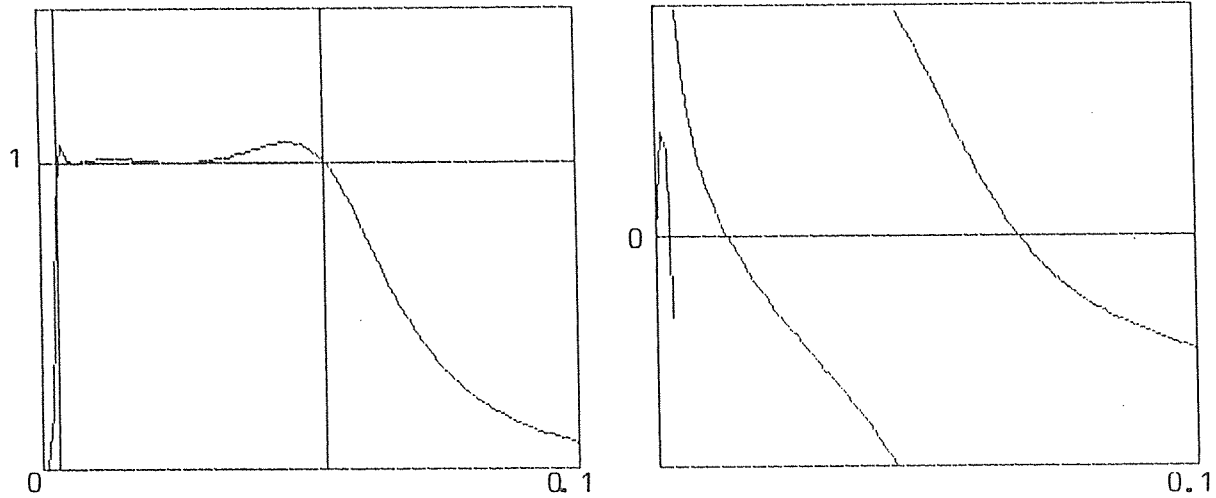
fréq. ech. = 1

fréq. de coupure = .0033 .053

amplitude entre 0 et 1.5

phase entre $-\pi/2$ et $\pi/2$

(abscisse entre 0 et .1)



Forme récursive de ce filtre :

$$\begin{aligned} S(n) = & u_0 * E(n) + u_1 * E(n-1) + u_2 * E(n-2) + u_3 * E(n-3) \\ & + u_4 * E(n-4) + u_5 * E(n-5) + u_6 * E(n-6) \\ & - v_1 * S(n-1) - v_2 * S(n-2) - v_3 * S(n-3) \\ & - v_4 * S(n-4) - v_5 * S(n-5) - v_6 * S(n-6) \end{aligned}$$

les coefficients sont :

$u_0 =$	1.395632611266802D-02	$v_1 =$	-5.471299982386331
$u_1 =$	-4.388366026775716D-02	$v_2 =$	12.54954493862763
$u_2 =$	4.589888148127898D-02	$v_3 =$	-15.45476608778919
$u_3 =$	-2.005536984744975D-08	$v_4 =$	10.78111155726949
$u_4 =$	-4.589885460570309D-02	$v_5 =$	-4.039586493617263
$u_5 =$	4.388365379590849D-02	$v_6 =$.634996339115287
$u_6 =$	-1.395632611266802D-02		

Figure 65: Filtre large-bande ($4 < d < 64$ m). Il élimine la dérive et les plus hautes fréquences.

Le défaut dans la courbe de phase est dû à des erreurs de chute.

Ces divers filtres seront largement utilisés dans le chapitre consacré aux résultats de terrain.

VI.3. Tests de différents traitements.

Bien que le traitement par filtrage soit globalement satisfaisant, nous avons entrepris quelques tests à l'aide de méthodes différentes. Le problème posé est toujours celui de la séparation des anomalies: les enregistrements effectués sur le terrain montrent un enchevêtrement complexes de ce que nous avons convenu d'appeler des "anomalies élémentaires".

Toutes les méthodes essayées reposent sur une hypothèse simplificatrice qui n'est que grossièrement vérifiée: les anomalies répondent à un principe de superposition linéaire. Ce principe est évidemment faux dans la réalité, mais son usage apporte une grande simplification dans les traitements.

Extraction des anomalies par projection ou inter-corrélation.

On considère le signal comme un vecteur d'un espace vectoriel dont la base est constituée par des anomalies élémentaires de largeur et de position (ou phase) données. Nous pouvons projeter (à l'aide du produit scalaire pour les fonctions) ce signal sur les vecteurs de base: c'est la procédure habituelle pour en obtenir les composantes, cad la participation au vecteur initial de chaque vecteur de base. Ce point de vue ne diffère que sur la forme des analyses par inter-corrélation du signal avec des anomalies élémentaires. On peut aussi le rapprocher des techniques de filtrage puisque l'inter-corrélation a son pendant multiplicatif dans le domaine spectral. En effet, si x et y sont deux signaux et C_{xy} leur inter-corrélation, on a:

$$TF(C_{xy}) = TF(x) TF^*(y) \quad (* \text{ est le conjugué complexe}). \quad (209)$$

Ces techniques sont donc en fin de compte équivalentes aux techniques par filtrage et, à quelques détails près, présenteront les mêmes propriétés.

En particulier, la discrimination totale des anomalies demeure impossible à réaliser.

Extraction des anomalies par déconvolution.

Le signal est considéré comme le résultat de la convolution de signaux élémentaires par une suite de "Dirac(s)" répartis le long du forage aux cotes de sphères hypothétiques:

$$s = \sum_i a_i * t \quad (210)$$

signal mesuré ↑ anomalie élémentaire pour d=1 ← filtre terrain: suite de "Diracs" situés aux cotes des sphères.

Des essais de déconvolution de cette équation ont été entrepris: aucun résultat satisfaisant n'a été obtenu. Plus précisément, ils ont présenté un bruit rédibitoire. Nous n'avons cependant pas approfondi cette approche.

Discussion.

Toutes les techniques étudiées procèdent de l'hypothèse de validité du principe de superposition linéaire, hypothèse que l'on sait être inexacte puisqu'il existe une interaction entre les structures. Le seul moyen de tenir compte de cette interaction passe par une modélisation numérique complexe. Par ailleurs, les procédés discutés sont tous équivalents à une opération mutiplicative dans le domaine spectral et l'on démontre dans ce cas, que même si l'interaction n'existait pas, il n'est pas possible de séparer totalement les anomalies. Dans la panoplie mathématique existante, certaines alternatives seraient à étudier. On pense à l'orthogonalisation des vecteurs de base dont nous avons parlé ou à des philosophies plus statistiques du traitement du signal (décomposition des variogrammes ect...).

VI.4. Compensation de l'atténuation naturelle.

Le phénomène d'atténuation naturelle a été défini et décrit au chapitre III. Pour un examen qualitatif des anomalies, il est avantageux de compenser l'affaiblissement inévitable de l'amplitude du signal avec la profondeur.

De la sorte, les différentes anomalies sont convenablement relativisées. La compensation sera systématiquement appliquée sur les signaux filtrés entre $d=4m$ et $d=64m$. Ces derniers serviront de points de repères pour l'interprétation.

VI.5. "Cross-over" et points d'inflexion.

Pour une anomalie bien définie, bien formée et bien isolée, le pointage du "cross-over" définissant la profondeur de la cible ne présente aucune difficulté. Comme on le verra au chapitre suivant, les enregistrements que nous avons ramenés de nos expéditions sur le terrain ne présentent jamais d'anomalie isolée. Cela tient à la nature des sites auxquels nous avons accédé durant la période où ce travail a été entrepris et il faut se garder en conséquence de la moindre généralisation. Toujours est-il que l'interprétation est rendue plus ardue par l'enchevêtrement complexe d'"anomalies élémentaires" et qu'il a fallu adapter, in situ en quelque sorte, notre point de vue originel.

Lorsque plusieurs anomalies s'enchevêtrent, il est impossible d'identifier le "cross-over" de chacune d'entre elles. La notion de "cross-over" elle-même, en tant que "passage à zéro", perd sa signification lorsque le signal n'est pas centré. Pour la remplacer, on peut recourir au concept plus vaste de point d'inflexion. Sur une anomalie élémentaire, il existe trois points d'inflexion. Le point central coïncide avec le cross-over: pour des anomalies enchevêtrées, chaque point d'inflexion est candidat à l'identification avec un "cross-over". On préférera donc pointer les points d'inflexion, quitte à rechercher a posteriori s'ils coïncident ou non avec de véritables "cross over". Dans le cas le plus général il n'est d'ailleurs pas possible, en pratique, de parvenir à des conclusions définitives. Cependant, sur les

sites que nous avons visités, nous avons pu explorer des forages très proches les uns des autres et l'on s'attend alors à ce que, dans la liste des anomalies répertoriées, celles dont l'interprétation se corréle d'un forage à l'autre correspondent à des cibles bien réelles.

VII. INSTRUMENTATION.

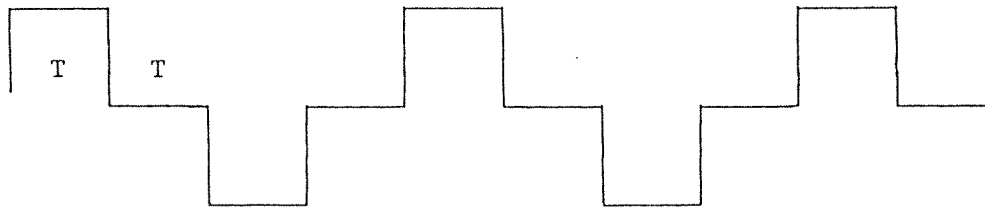
VII.1. Emetteur TSQ4.

Cet appareil puissant est destiné à l'injection du courant dans le sol. Avec notre méthode utilisant le dispositif symétrique de prospection en forage, l'énergie requise est plutôt importante, et ce n'est que depuis peu que le marché propose un matériel adapté à nos besoins. Le "TSQ4", de marque Scintrex, autorise une puissance maximum de 10 kW. Il est prévu pour la méthode de "polarisation provoquée": le courant qu'il génère n'est pas continu mais alterné. La figure 66 montre les deux types de signaux qui sont couramment utilisés en P.P... Nous utilisons pour notre part le signal "time domain" avec une période de 8 secondes. Cette dernière est choisie de sorte que l'on puisse considérer qu'en fin de chaque quart de cycle (précisément durant la dernière seconde), les effets P.P. sont éliminés et la condition de stationnarité des tensions mesurées pratiquement atteinte.

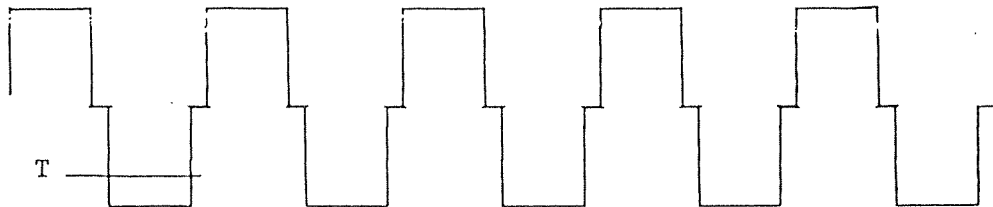
Selon les résistances de prises de terre, le courant peut varier entre 200 mA au minimum et 20 A au maximum. La gamme des tensions s'échelonne entre 500 et 3300 volts, ce qui ne va pas sans poser de très difficiles problèmes de sécurité sur le terrain. Certes, de nombreuses protections électroniques ont été prévues, mais elles réagissent mieux à une rupture des cables (par un tracteur, par exemple) qu'à la curiosité gastronomique d'une vache en mal de broussaille et qui viendrait goûter le dit cable. Du côté des humains, il est d'usage d'avertir les autochtones du danger des manipulations. En outre, les électrodes d'injection (des piquets en métal) sont signalées par des bandes fluorescentes de chantier et un panneau avertit de l'existence d'une haute tension. Cela ne met pas à l'abri un enfant inconscient et curieux. De toute façon, dès que cela est rendu possible par la topographie ou la présence de personnels supplémentaires, la surveillance de l'ensemble du dispositif d'injection est de mise.

L'émetteur lui-même est alimenté par un groupe électrogène ad hoc,

Time Domain: $T = 1, 2, 4, 8, 16$ or 32 seconds, switch selectable.



Frequency Domain: $T = \frac{1}{f}$ and $f = 0.1, 0.3, 1.0$ or 3.0 Hz



TSQ-4 Output Waveforms

Figure 66: Extrait de la notice de l'émetteur TSQ4: Les deux types de signaux "P.P." que cet appareil peut fournir; diverses fréquences sont disponibles.

conçu autour d'un moteur à essence ordinaire de marque ONAN et d'un alternateur (400 Hz) d'aviation.

La figure 67 montre l'appareillage en place sur le terrain. La figure 68 donne une idée de la face avant de l'émetteur ainsi que des diverses fonctions accessibles.

L'engin fournit un courant régulé tant que la charge reste dans une fenêtre de largeur relative égale à 25%. Le réglage du courant pour l'amener dans cette fenêtre est le seul point délicat de la manipulation: il demande couramment plusieurs minutes. Au cours de l'émission, la résistance de prise n'est d'ailleurs pas constante. Il convient d'arroser copieusement les électrodes d'un électrolyte quelconque, afin de limiter ces variations (trop importantes, ces dernières font disjoncter l'émetteur). L'eau salée convient bien à cet usage. L'acide sulfurique dilué donne de meilleurs résultats, mais lui sont associés des effets secondaires indésirables (sur les jeans, entre autres). Nous n'avons jamais pu effectuer de mesure sans employer un électrolyte et sans multiplier le nombre de piquets sur chaque site d'injection. Ces détails sont donc particulièrement importants.

VII.2. Emetteur pour la diagraphie.

Habituellement, on emploie en diagraphie électrique un courant alternatif (de l'ordre de 10 Hz) et le système de réception mesure la tension efficace du signal résultant. Or notre chaîne de réception est adaptée à la forme du signal P.P. de l'émetteur TSQ4. Nous avons donc conçu un émetteur P.P. de très faible puissance pour effectuer nos diagraphies électriques. Le schéma de cet appareil est sur la figure 69. Une alimentation par pile est bien suffisante. La commutation du courant est assurée par des relais "reed" et pilotée par une horloge à quartz.

VII.3. Synchronisation de l'émission et de la réception.

Afin d'éviter d'inclure des effets P.P. ou électromagnétiques dans les mesures, il faut s'assurer que la stationnarité est bien atteinte.

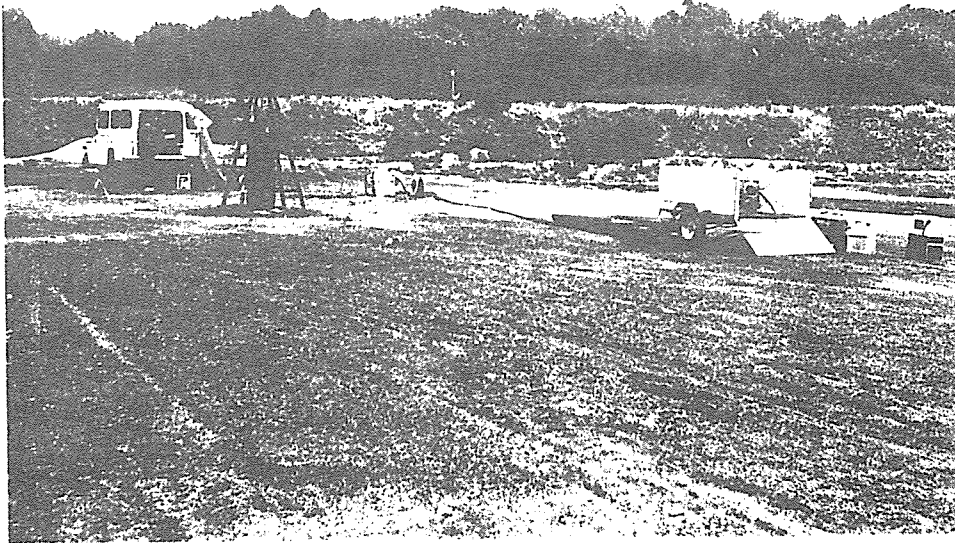


Figure 67: L'appareillage en place sur le terrain.

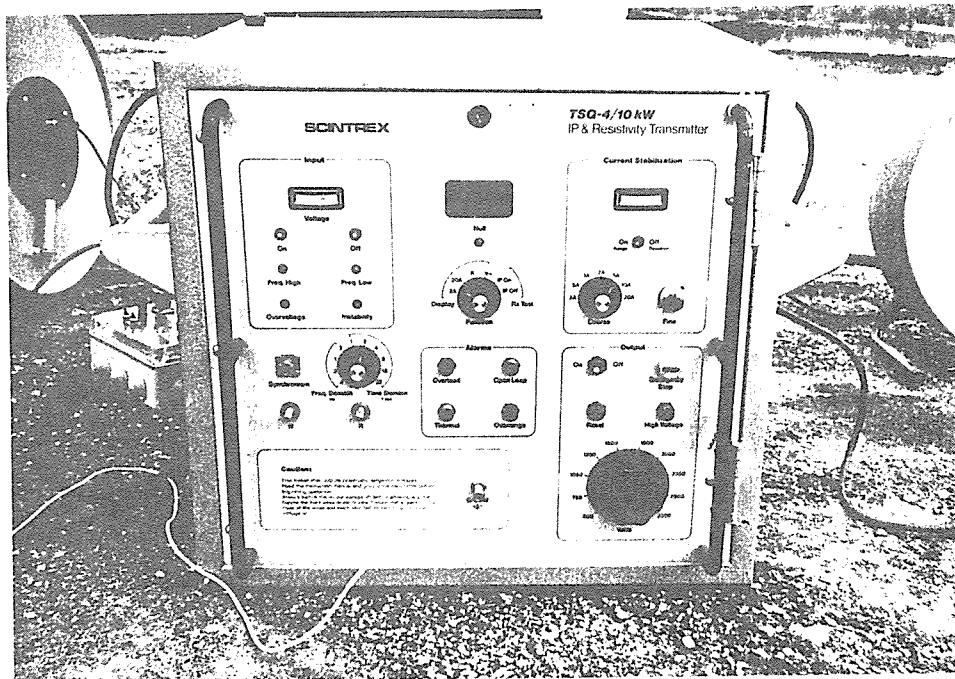


Figure 68: Face avant de l'émetteur "Scintrex TSQ4".

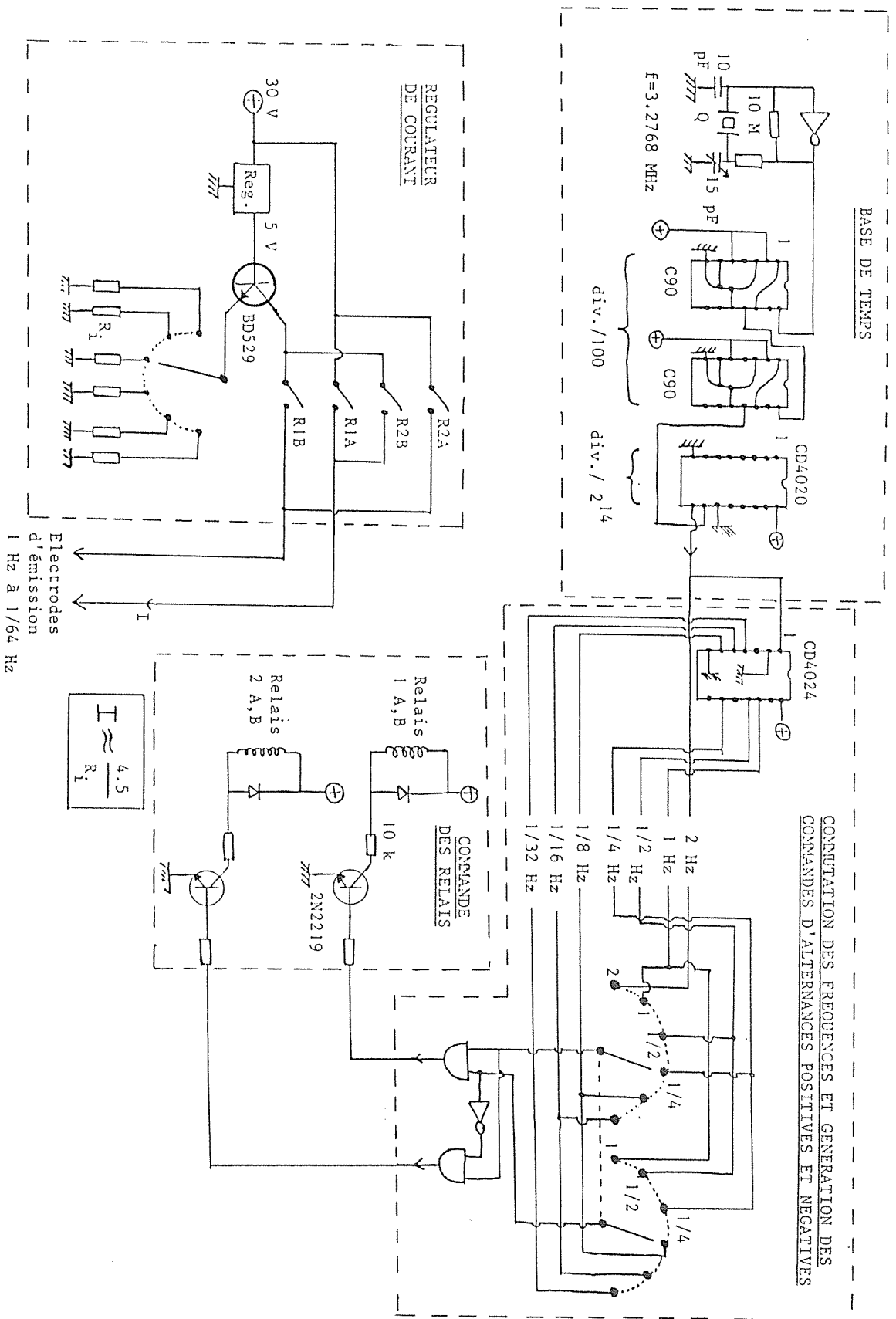


Figure 69: Electronique de l'émetteur "P.P." de faible puissance destiné aux mesures de diagraphies.

Pour cette raison, la différence de potentiel entre les électrodes de réception doit être mesurée à la fin des périodes d'injection du courant. Cela nécessite la synchronisation du récepteur sur le courant émis. A cet usage, une "boîte de synchronisation", traversée par le courant émis, produit un signal de synchronisation qui est amené jusqu'au récepteur. Ce signal est de nature logique à trois états: courant dans un sens, courant dans l'autre sens, et pas de courant. En principe, un simple shunt suffirait pour remplir cette fonction (associé éventuellement à un système de "clamping" pour calibrer le signal). En pratique, des motifs de sécurité d'une part et la dynamique traditionnelle de l'électronique d'autre part exigent une isolation galvanique entre l'émetteur et le récepteur. Des coupleurs optiques, bien adaptés à cet usage, constituent la solution électronique de ce problème. Ceux que nous employons sont sûrs jusqu'à 3 kV. Cependant, par temps humide, des fuites viennent parfois perturber le fonctionnement de l'ensemble. Ce phénomène est simple à comprendre: l'impédance d'entrée du récepteur est supérieure au $M\Omega$ et on ne peut dépasser une tension supérieure à 10 V en pratique entre l'"entrée synchro" et la terre. Avec une tension à l'émission pouvant atteindre 3000 V, il est facile de voir que la résistance d'isolation doit avoisiner les 6000 $M\Omega$

Un modèle complet du problème de fuite est délicat à établir, mais ces ordres de grandeurs donnent une idée du caractère critique de l'isolation galvanique. Notons que l'emploi de fibres optiques permettrait de résoudre définitivement cette difficulté.

La figure 70 donne le schéma de la version actuelle de ce petit appareil.

VII.4. Le récepteur.

Il repose, pour l'instant, sur un dispositif analogique.

Nous avons déjà souligné la nécessité de ne mesurer la tension qu'en fin de période d'injection. Le procédé employé relève ainsi du principe suivant: une seconde après le début de l'injection du courant de l'alternance positive (dont la durée totale est de 2 secondes), la

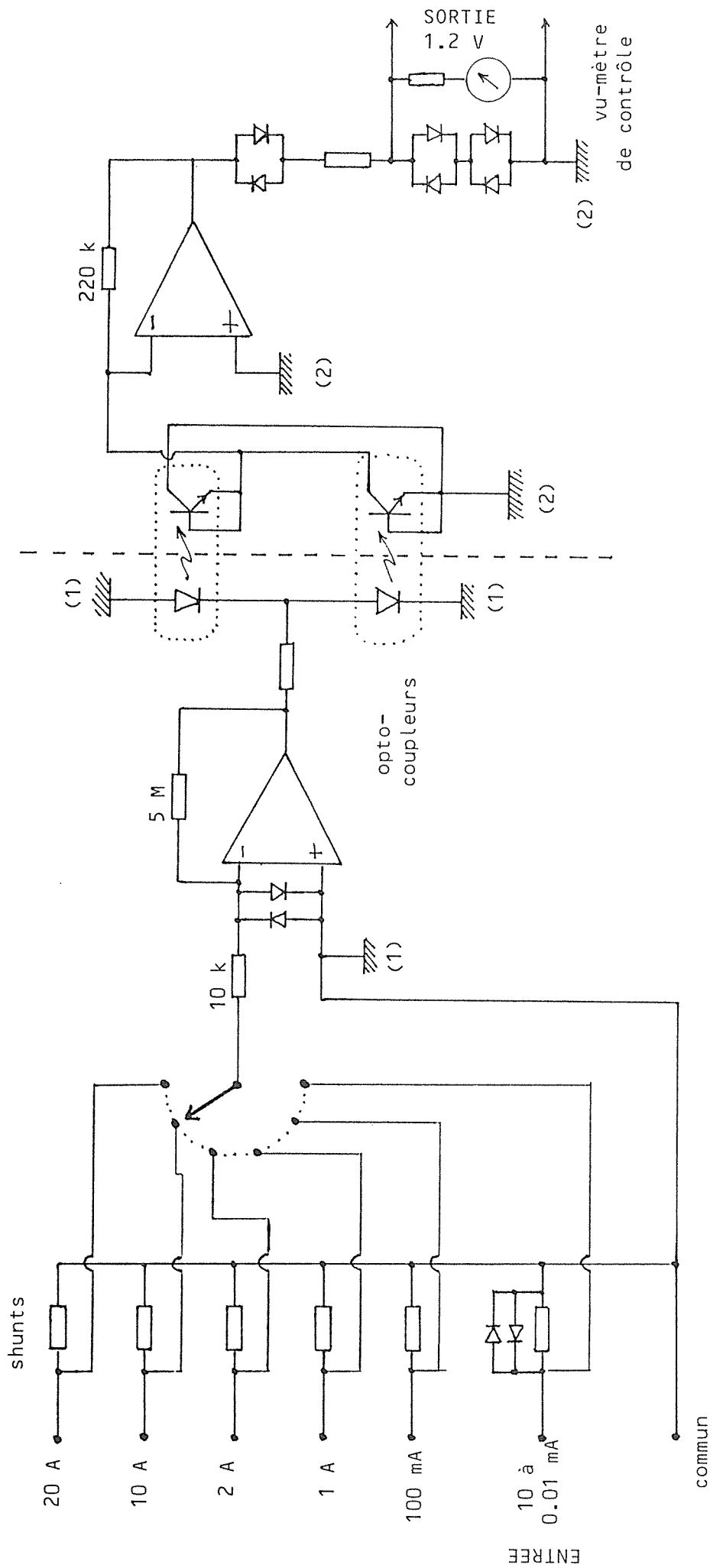


Figure 70: Schéma de la "boîte de synchronisation". Noter l'emploi des opto-coupleurs qui assurent l'isolation galvanique. Les deux masses électriques (1) et (2) sont indépendantes. Les alimentations (piles) des deux parties sont également distinctes.

tension inter-électrodes est lue et stockée dans une mémoire analogique A. La même opération est recommencée durant l'alternance négative avec dispatching sur une mémoire B. Le signal de sortie est la différence entre les deux mémoires A et B et correspond à la valeur crête-crête du signal P.P..

Le temps de réponse d'un tel système est de 4 secondes. A la vitesse de remontée du dipole de mesure, de l'ordre du mètre par minute, ce retard est négligeable.

L'existence de la polarisation spontanée (P.S.) vient compliquer malheureusement la mesure. La P.S. peut être supérieure de deux ordres de grandeur au signal utile, et, comme le démontre le calcul suivant, être à l'origine d'une erreur inadmissible.

Désignons par:

v : la demi-amplitude crête-crête du signal (c'est la grandeur à mesurer)

u : la P.S.

g_A : le gain de la mémoire A (alternance positive)

g_B : le gain de la mémoire B (alternance négative)

Le signal en sortie de l'étage différentiateur en aval des mémoires est:

$$\Delta V = (u+v) g_A - (u-v) g_B . \quad (211)$$

Si g_A et g_B ne sont pas strictement égaux (ce qui est toujours le cas), on peut écrire: $g_B = g_A(1+\epsilon)$. La mesure vaut alors:

$$\Delta V = \Delta V_i = g_A [u + v - u + v - \epsilon(u-v)] = g_A (2v + \epsilon v - \epsilon u) \quad (212)$$

au lieu de la mesure idéale ($\epsilon=0$):

$$\Delta V = 2 v g_A . \quad (213)$$

L'erreur relative due à ce biais est:

$$\left| \frac{\Delta V_i - \Delta V_o}{\Delta V_o} \right| = \left| \frac{\epsilon (v - u) gA}{2 v gA} \right| = \left| \frac{\epsilon (v - u)}{2 v} \right|. \quad (214)$$

Lorsque le niveau u de la P.S. est bien inférieur au niveau du signal, l'erreur est certainement inférieure à ϵ (ce dernier est peut-être de l'ordre du pour cent, au mieux). Si par contre $v \ll u$ (et c'est presque toujours le cas), l'erreur est de l'ordre de $\epsilon u/v$ et peut donc atteindre des valeurs inacceptables.

Une bonne façon de remédier à cette difficulté consiste à réinjecter la P.S. en opposition et en amont des deux mémoires. La mesure de la P.S. est effective durant la deuxième seconde du temps de repos où aucun courant n'est injecté. La précision de l'opposition est assurée par un asservissement intégral, procédé qui est courant en automatisme. Le schéma du circuit réalisant cette fonction est représenté sur la figure 71. Le calcul de la fonction de transfert de l'ensemble ne présente pas de difficulté. Lorsque $R_1=R_2=R_3=R$, la fonction de transfert prend la valeur:

$$\Phi = \frac{V_s}{V_o} = \frac{-p C R}{1 + p C R}. \quad (215)$$

Son module, en fonction de la pulsation, est:

$$|\Phi(\omega)| = \frac{\omega R C}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (216)$$

En particulier, on a:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |\Phi| = 1 \quad \text{et} \quad \left[\frac{d\Phi}{d\omega} \right]_{\omega=0} = R C. \quad (217)$$

Le module de Φ est représenté sur la figure 72. En réalité, il faut dilater la courbe d'un facteur 4 puisque l'asservissement ne fonctionne que durant un quart de cycle.

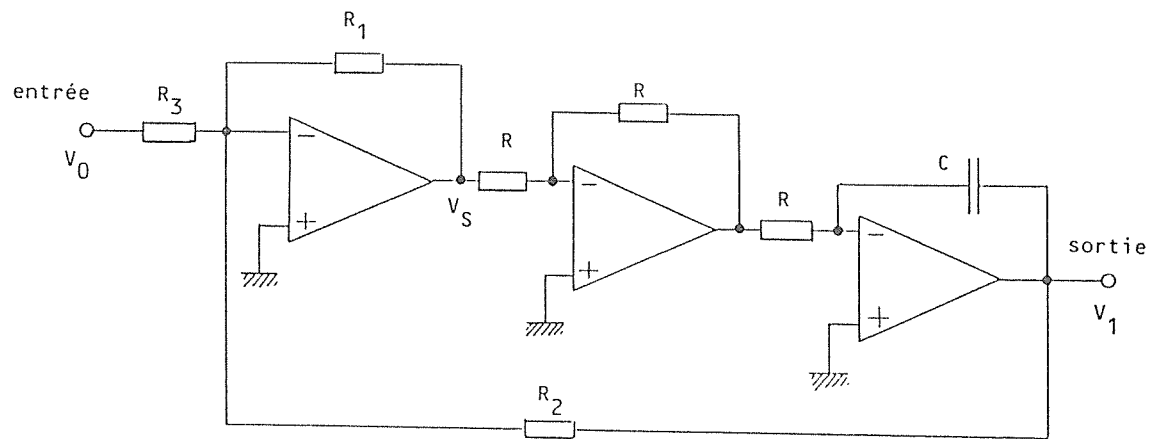


Figure 71: Schéma équivalent de l'asservissement élémentaire qui permet la compensation en opposition de la "P.S."

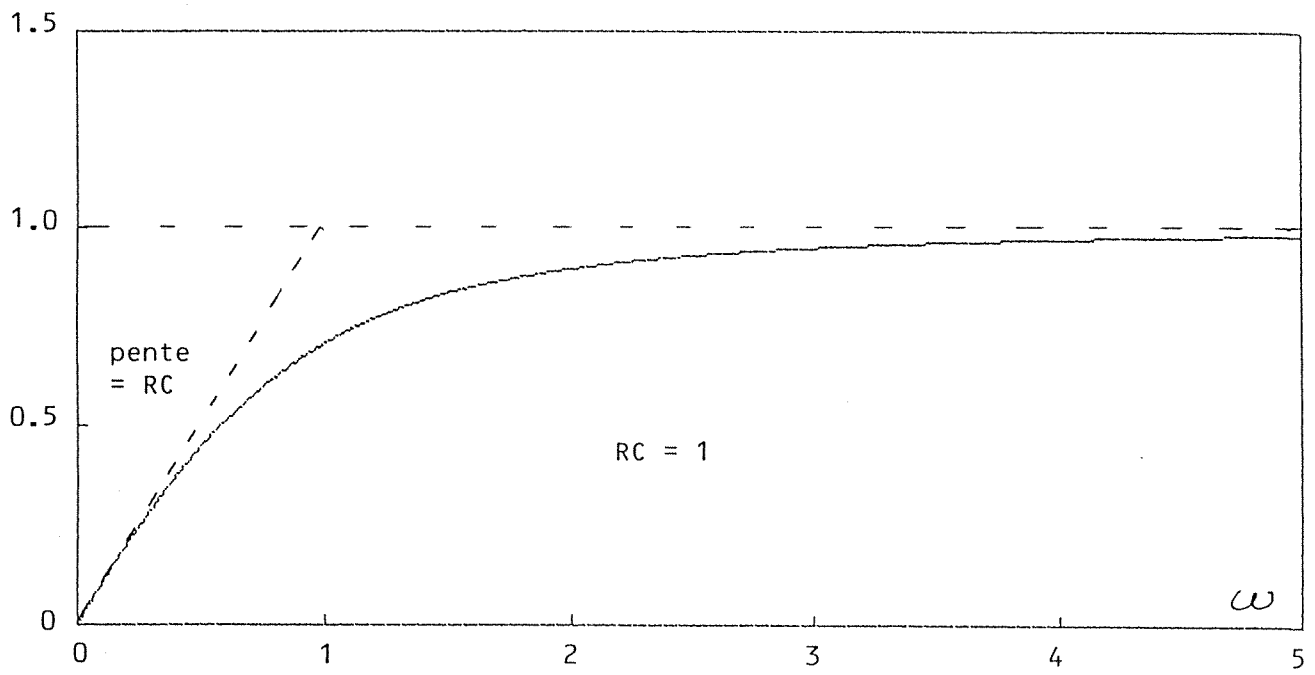


Figure 72: Fonction de transfert du système de compensation de la P.S..
Elle s'apparente à celle d'un filtre coupe-bas.

Les figures 73 et 74 donnent respectivement le synopsis et le schéma détaillé de la chaîne de mesure. La figure 75 illustre pour finir le comportement des signaux en divers points de la chaîne.

VII.5. Le treuil et les sondes.

La société G.Pierson (Tours) nous a construit spécialement ce treuil, dont la figure 76 montre quelques aspects. Il est alimenté par deux batteries de voiture, ce qui lui confère une autonomie pratique d'une journée. Il est possible de faire varier la vitesse, par paliers, entre 0.5 m.mn^{-1} et 15 m.mn^{-1} . Un répartiteur permet un enroulement régulier du câble autour du tambour. Un compteur, piloté par un codeur optique solidaire d'une poulie, indique la profondeur avec une sensibilité de 10 cm.

Le câble principal est long de 600 m. Son âme est en "Kevlar" (fibre de carbone), matériau dont la résistance à la traction est, à poids égal, supérieure à celle de l'acier. Il comporte cinq conducteurs utiles (plus un blindage) qui donnent l'accès à cinq électrodes installées le long de rallonges que l'on branche au "pied de câble". Ces dernières et un "outil" (figures 77 et 78) permettent une gamme étendue de dispositifs. En effet, deux commutateurs installés sur l'enregistreur donnent accès à n'importe quel couple d'électrodes, pour peu qu'elles soient effectivement reliées à des conducteurs du câble principal. Les écartements utilisés en pratique pour les mesures en "DSPF" vont de 3 m à 50 m. Il y a intérêt à utiliser le bipole le plus petit possible, pour minimiser l'effet du filtrage du dispositif, mais en terrain conducteur, le faible niveau du signal peut nécessiter l'usage de grands écartements. Par ailleurs, la figure 79 décrit huit dispositifs de diagraphie possibles. Le principal argument orientant le choix d'un dispositif de diagraphie est relatif à la limitation de l'"effet de trou" décrit au I.3..

La manipulation du câble requiert quelques précautions. La gaine externe est fragile (il eût été impossible de la faire en métal pour des mesures

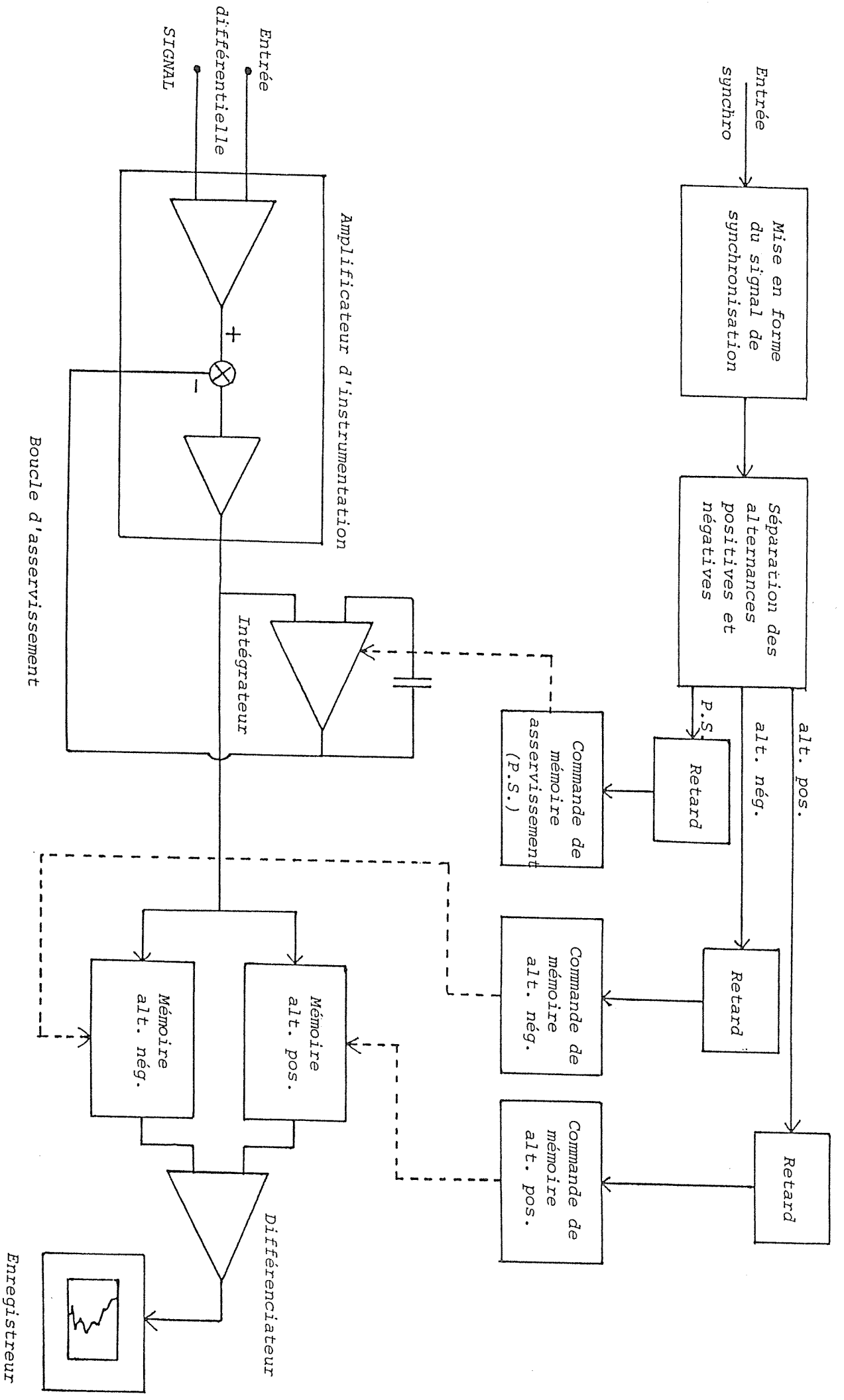


Figure 73: Schéma synoptique de la chaîne de mesure pour les méthodes en forage.

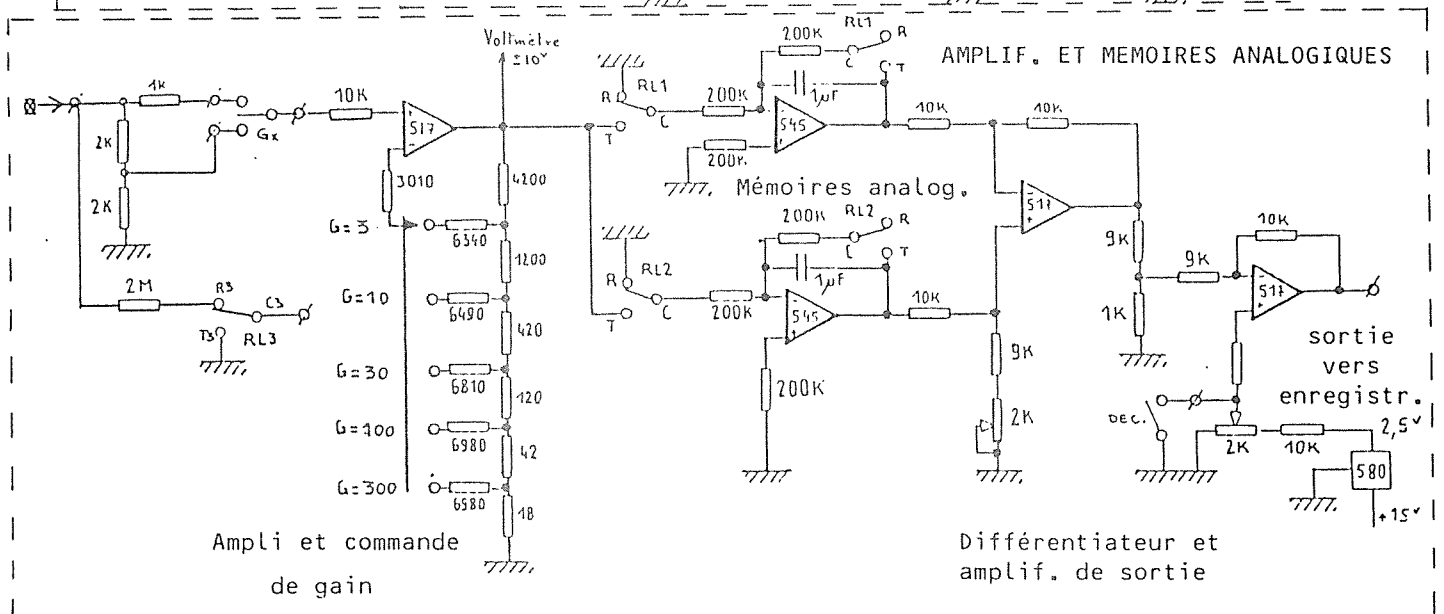
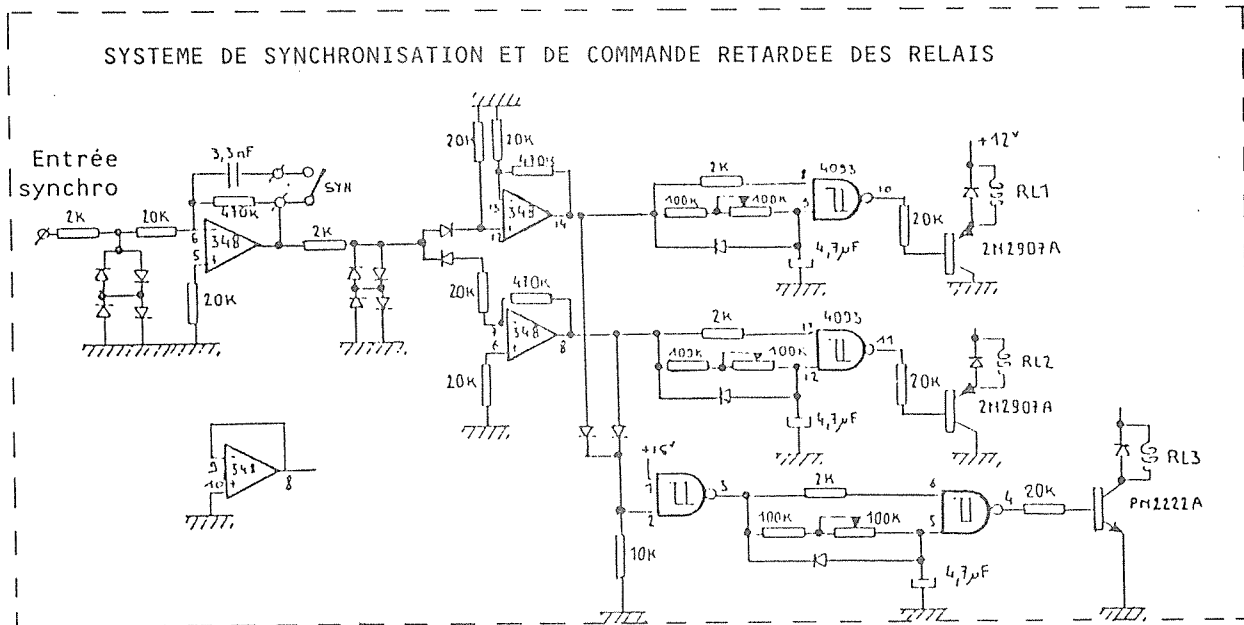
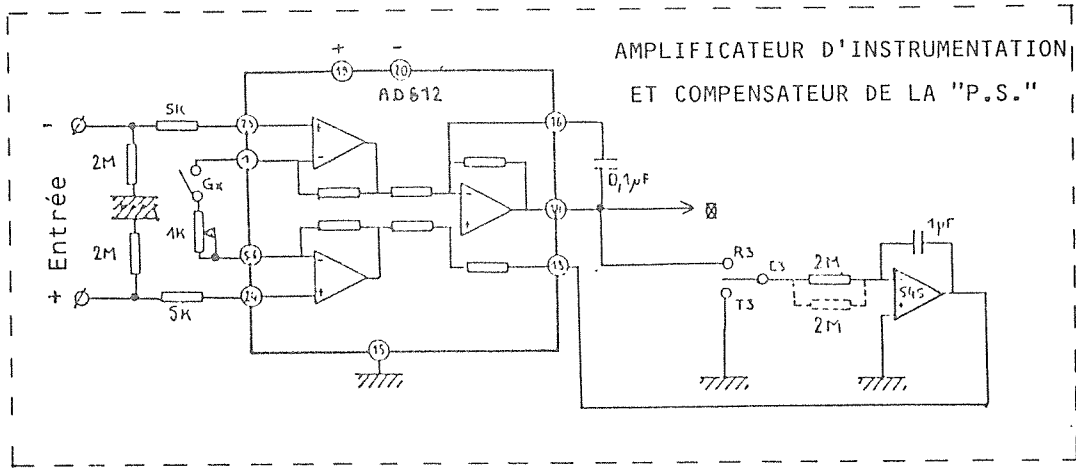


Figure 74: Schéma du récepteur destiné aux mesures en forage. La sensibilité de ce système est meilleure que 10micro-volt.

L'appareil a été construit par la Société G. Pierson (Tours) à partir d'un prototype que nous avons fourni.

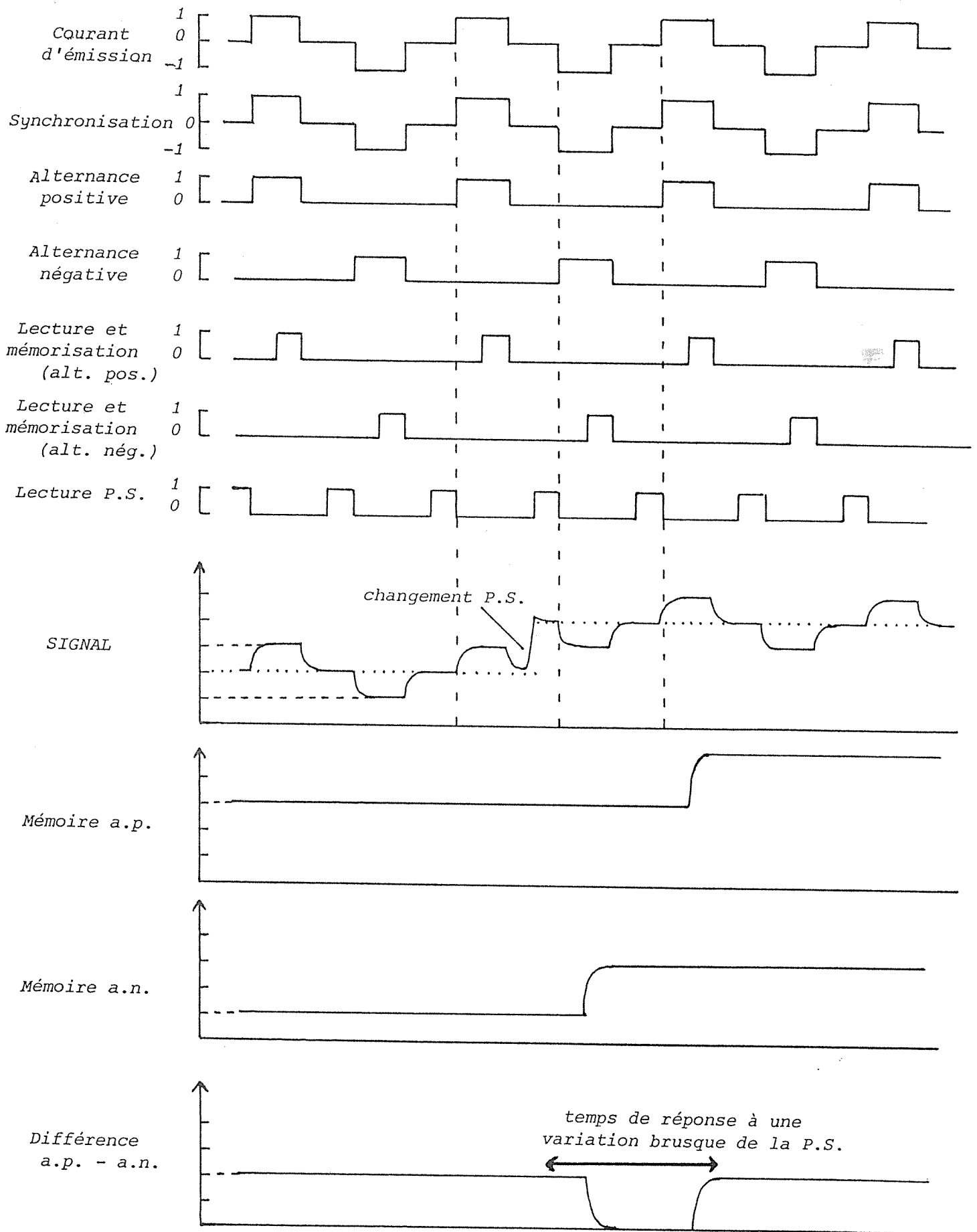


Figure 75: Analyse des signaux dans l'enregistreur.
 Il n'est pas tenu compte du système de compensation de la P.S. .

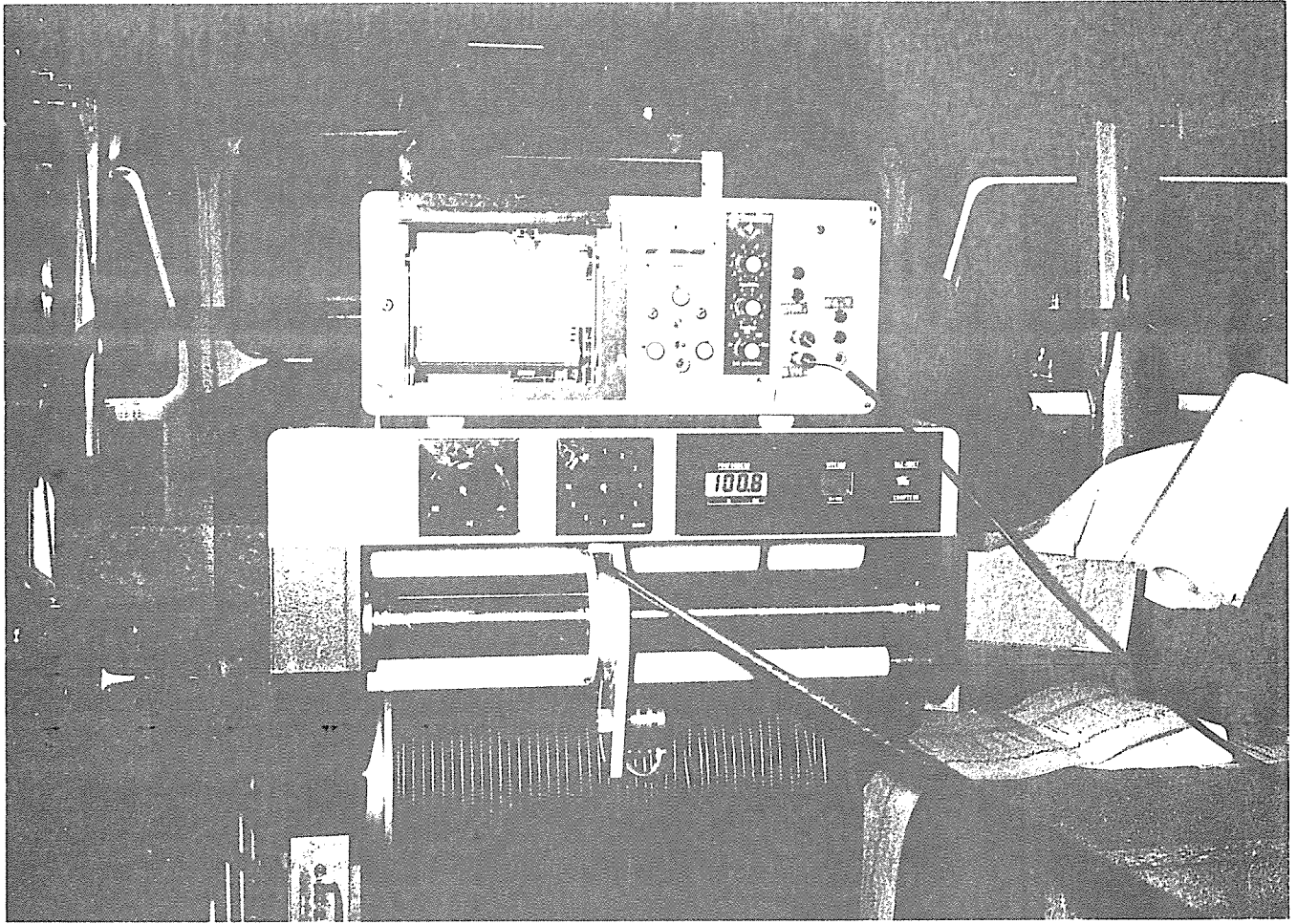


Figure 76: Le treuil et l'enregistreur analogique.

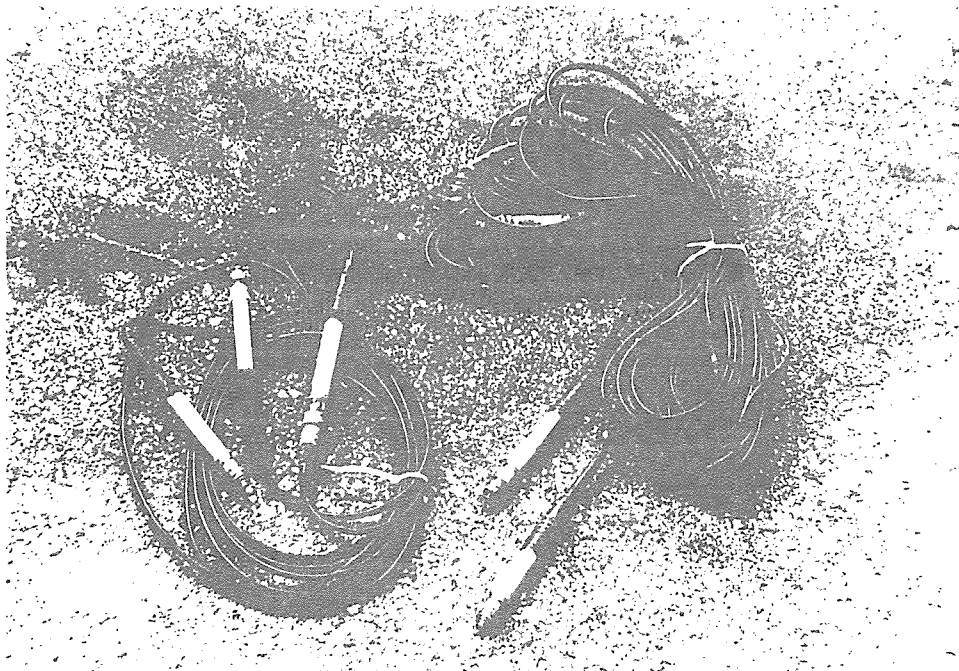


Figure 77: Les rallonges porte-électrodes. Elles permettent de nombreux écartements du bipole de mesure (jusqu'à 50 m).

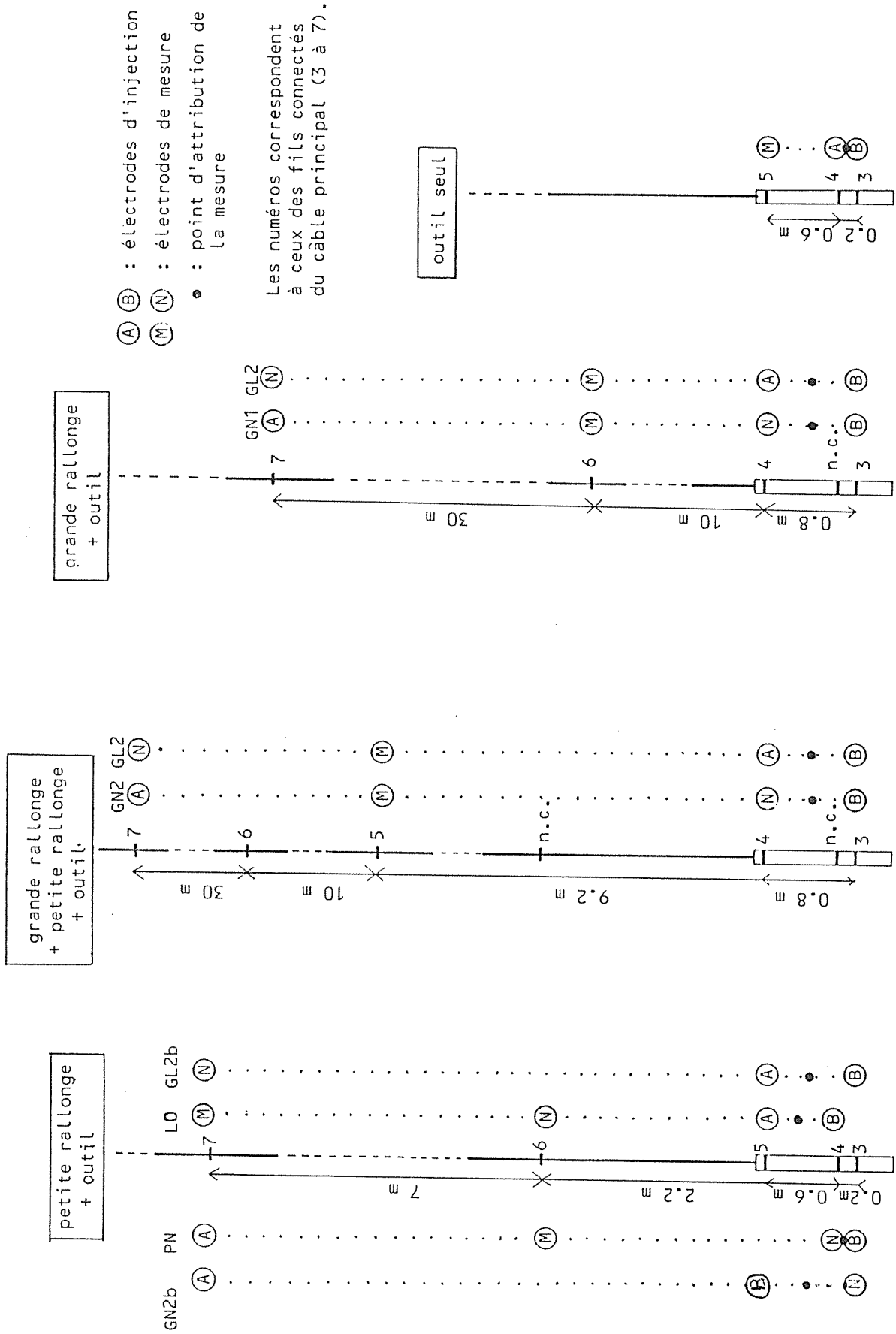


Figure 79: Quelques-unes des combinaisons possibles de diagraphie électrique que l'on peut mettre en oeuvre avec notre système de mesure. Les électrodes non citées sont placées en surface.

G:grande P:petite L:latérale N:normal (par ex. GN2 est une "grande normale")

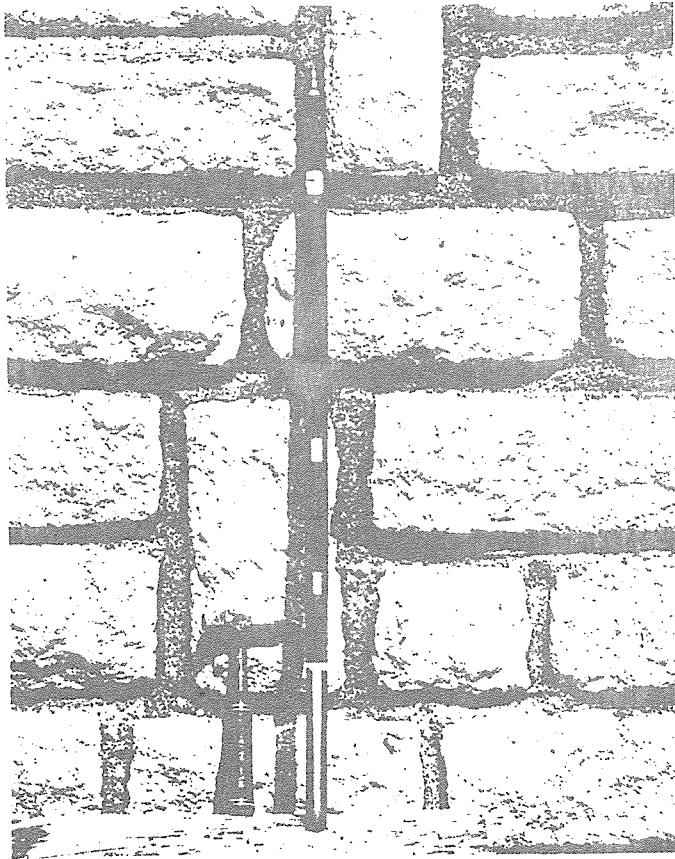


Figure 78: L'outil de diagraphie. Il supporte trois électrodes.

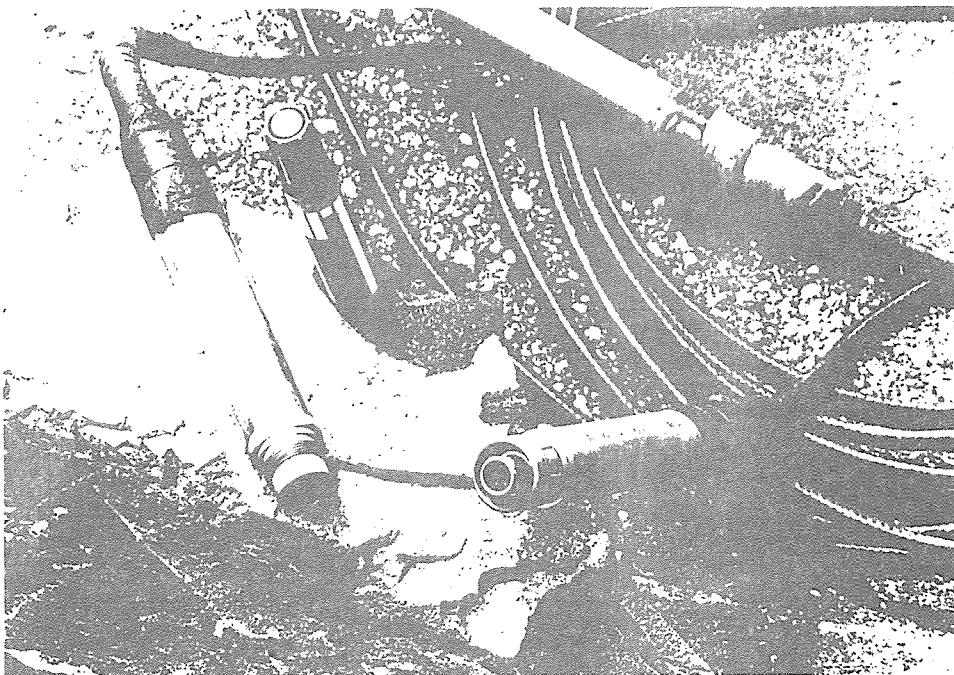


Figure 80: Détails des connecteurs "Jupiter". Ils sont garantis pour 110 bars.

électriques!). La figure 80 donne quelques détails des connecteurs "Jupiter" qui relient les divers éléments. Ils sont garantis jusqu'à 110 atmosphères (environ 1000 m d'eau). Un connecteur mal fermé, un accroc sur la gaine, et l'eau pénètre dans le câble, remontant rapidement à l'intérieur de celui-ci: le "Kevlar" agit comme une véritable mèche. Il est alors urgent d'éliminer la partie imbibée du câble. Cette opération, qui nécessite plusieurs heures de travail, doit pouvoir être effectuée sur le terrain. L'isolation des divers conducteurs doit être vérifiée après chaque journée de travail. La capacité entre les fils est également très sensible à la présence d'eau dans le câble et constitue un bon critère de contrôle.

VIII. RESULTATS EXPERIMENTAUX ET INTERPRETATIONS

VIII.1. Missions préliminaires.

Les premières missions furent destinées aux vérifications du bon fonctionnement de nos appareils. Les sites étudiés ont été choisis en fonction de leur proximité géographique et ne constituent pas un véritable test pour notre méthode.

VIII.1.1 Site de Vittel.

Le forage en question est destiné à l'alimentation en eau de la commune de La Neuveville-Sous-Monfort. Profond de 275 m, il traverse d'abord des séries calcaires, puis des marnes et enfin les grès vosgiens où se trouvent les aquifères. Un tubage métallique le consolide jusqu'à 155 m. Les figures 81 et 82 présentent des fragments des enregistrements bruts obtenus avec un dispositif de diagraphie (grande normale 80 cm ou 32 pouces) et avec un dispositif de prospection (électrodes de courant en surface à 300 m de part et d'autre du trou de forage, écartement de 40 m des électrodes de mesure dans le trou). Sur la diagraphie, on remarque la traversée d'un conglomérat résistant qui a nécessité un changement de gain. Les anomalies conductrices correspondent à des zones argileuses.

L'enregistrement de prospection présente l'intérêt de mettre en évidence les limites de notre système de compensation de la P.S.. On n'observe aucune anomalie mais seulement une lente dérive peut-être due au tubage. Le niveau du signal est extrêmement faible: le gradient du potentiel est vers le fond du trou de 0.7 mV seulement sur 40 m. Le niveau de la P.S. est ici de l'ordre de 30 fois supérieur au signal. Cette P.S. varie lentement en général mais aussi parfois brusquement lorsqu'une électrode frotte sur les parois du trou. Nous avons indiqué que le système de compensation de la P.S. avait une constante de temps de l'ordre d'un cycle du courant injecté. Ici, la P.S. est si importante par rapport au signal que les reliquats non compensés de ses variations peuvent être observés sur l'enregistrement sous forme de petites oscillations carrées d'amplitude 80 μ V environ. Cette amplitude devient

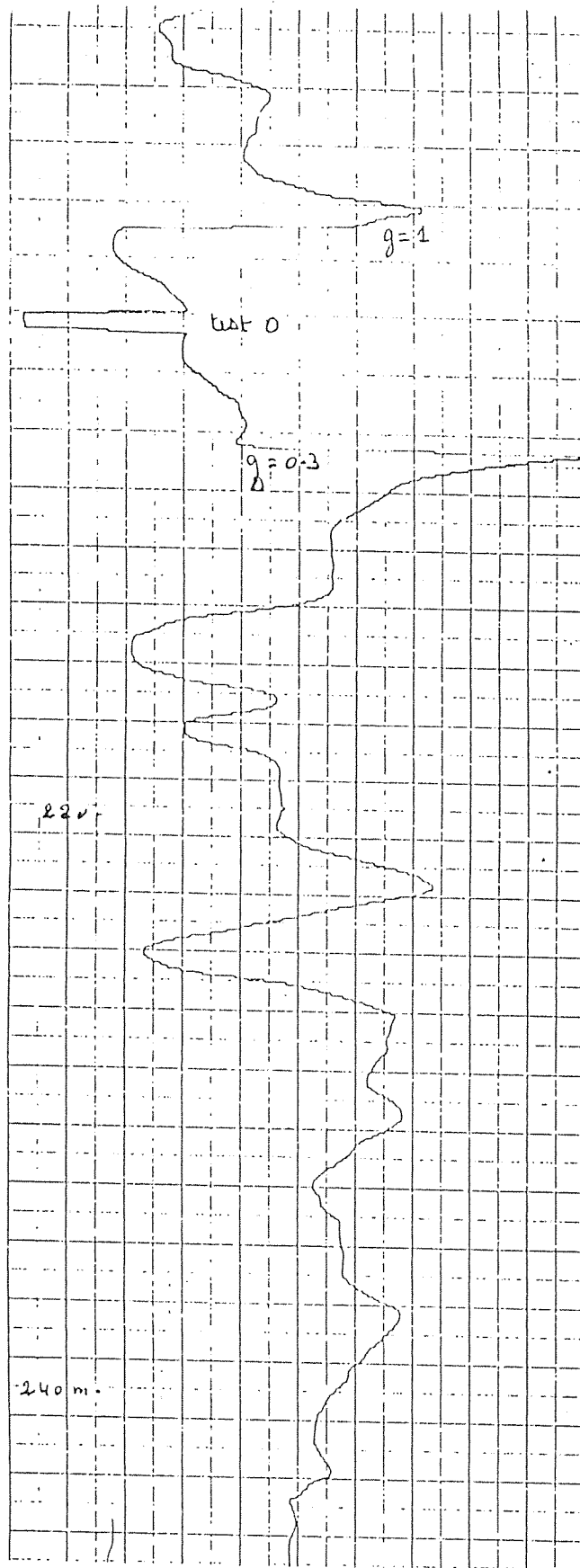


Figure 81: Fragment de l'enregistrement brut de diagraphie "grande normale" réalisé sur le site proche de Vittel.

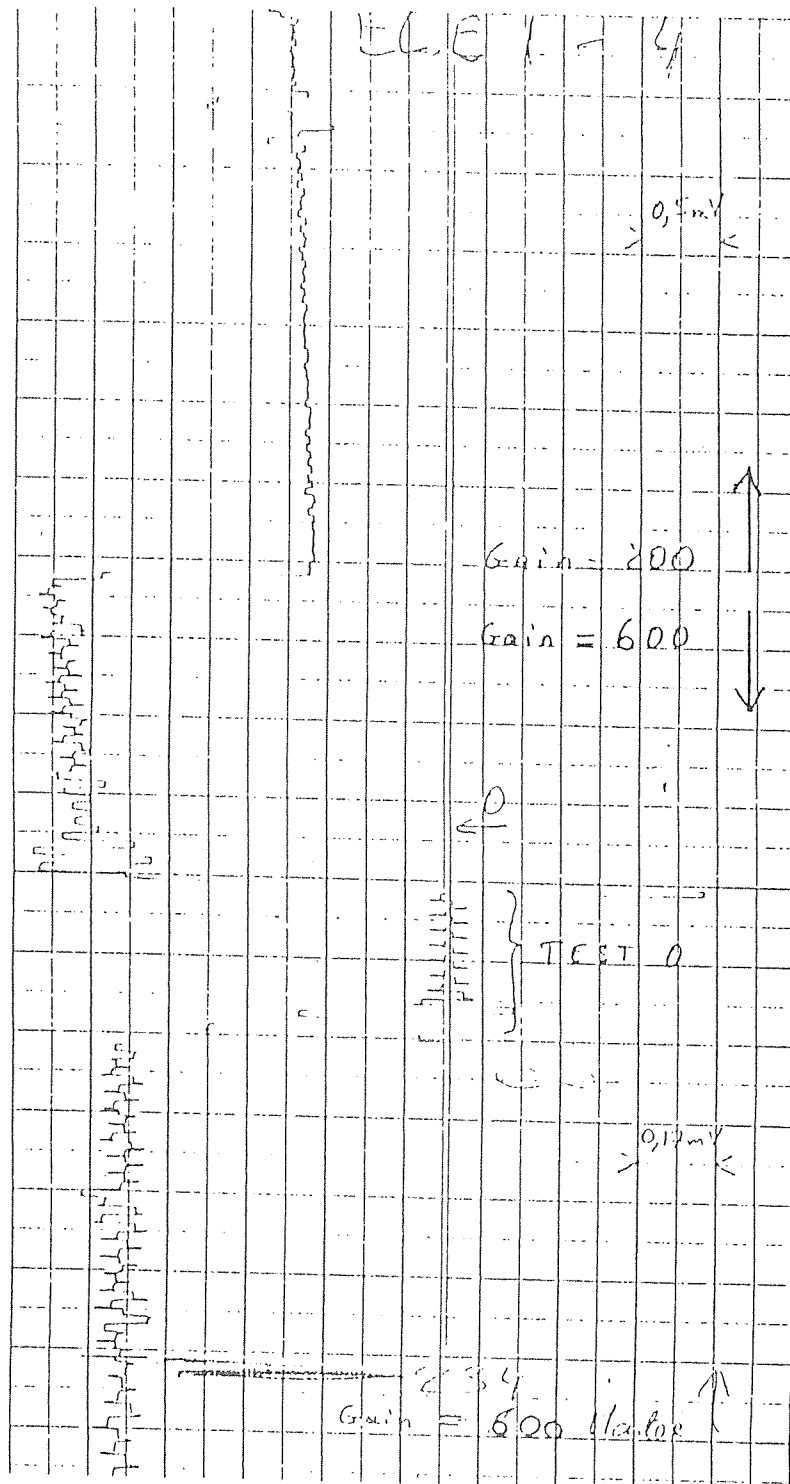


Figure 82: Fragment brut de l'enregistrement "DSPF" réalisé sur le site proche de Vittel. Il n'existe pas d'anomalie notable (le terrain est tabulaire). Avec un gain de 600 (gain maximum), 1 mm représente 16 micro-volt.

plus importante pendant 2 ou 3 cycles après les variations brusques de P.S..

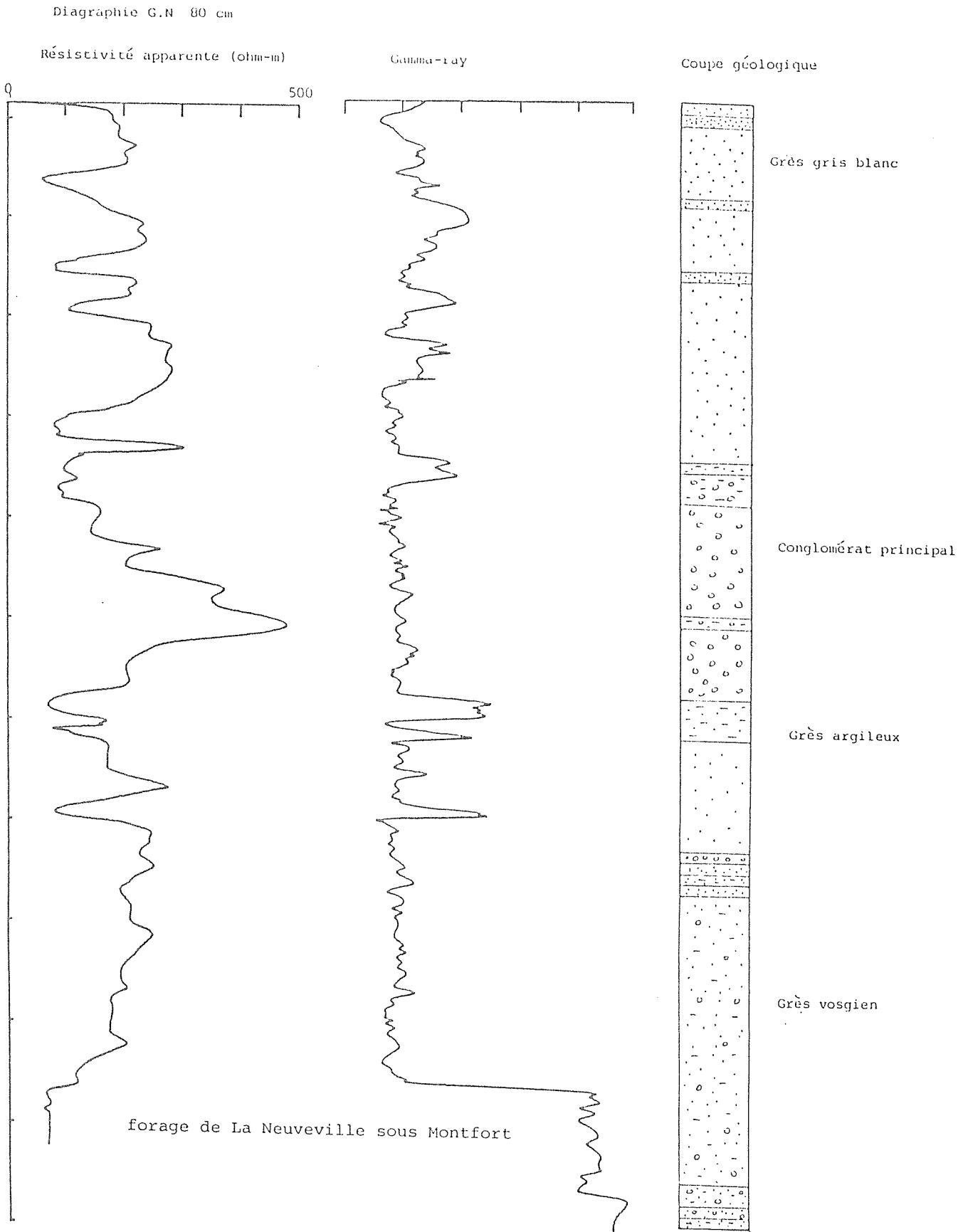
Nous disposons d'un enregistrement "γ-ray" et d'un "log" géologique approximatif puisque réalisé d'après cutting. Ces deux documents sont présentés sur la figure 83, parallèlement à notre diagraphie. La résistivité apparente a été corrigée de l'effet du trou. On observe sur cette figure une bonne correspondance entre les anomalies négatives de notre diagraphie et les anomalies positives du gamma. Ces réponses correspondent aux niveaux argileux. On a déjà indiqué que notre grande normale délimite bien le conglomérat résistant. Un léger décalage existe localement entre les réponses: il a pour origine un défaut de jeunesse du système de comptage de la profondeur sur notre enregistreur.

VIII.1.2 Site de Carling.

Ce site présente des particularités qui le rendent intéressant à plusieurs titres. Le forage est situé dans le voisinage immédiat d'une usine carbo-chimique et il est destiné à la décontamination d'une nappe polluée par les rejets de l'usine. La diagraphie électrique effectuée par un organisme spécialisé est malheureusement difficile à interpréter: la taille du dispositif utilisé n'a pas permis d'obtenir une pénétration suffisante pour dépasser électriquement la zone envahie par l'eau minéralisée du forage. La résistivité obtenue décroît lentement et régulièrement de 12 à 3 Ω .m.

Nous avons effectué deux enregistrements avec les dispositifs décrits sur les figures 84a et 84b. Le premier s'apparente à une normale (pôle-pôle) de grand écartement (10 m). Le second est un dispositif de prospection avec électrodes de courant en surface. A cause des structures industrielles voisines, nous avons dû utiliser un dispositif dissymétrique et l'une des électrodes est près du trou en surface.

Les figures 85a et 85b présentent les enregistrements obtenus. Seuls les tracés exprimés en résistivité apparente sont relatifs aux vraies profondeurs. On note la présence d'anomalies nettes. Ceci tend à prouver que, contrairement à l'enregistrement précédent, le rayon d'investigation de nos dispositifs a pu dépasser la zone envahie. Le dispositif de prospection étant dissymétrique, on a pu définir une résistivité



Site proche de Vittel.

Figure 83: Comparaison de notre diagraphie de résistivité avec un enregistrement gamma et la coupe géologique (d'après cutting).

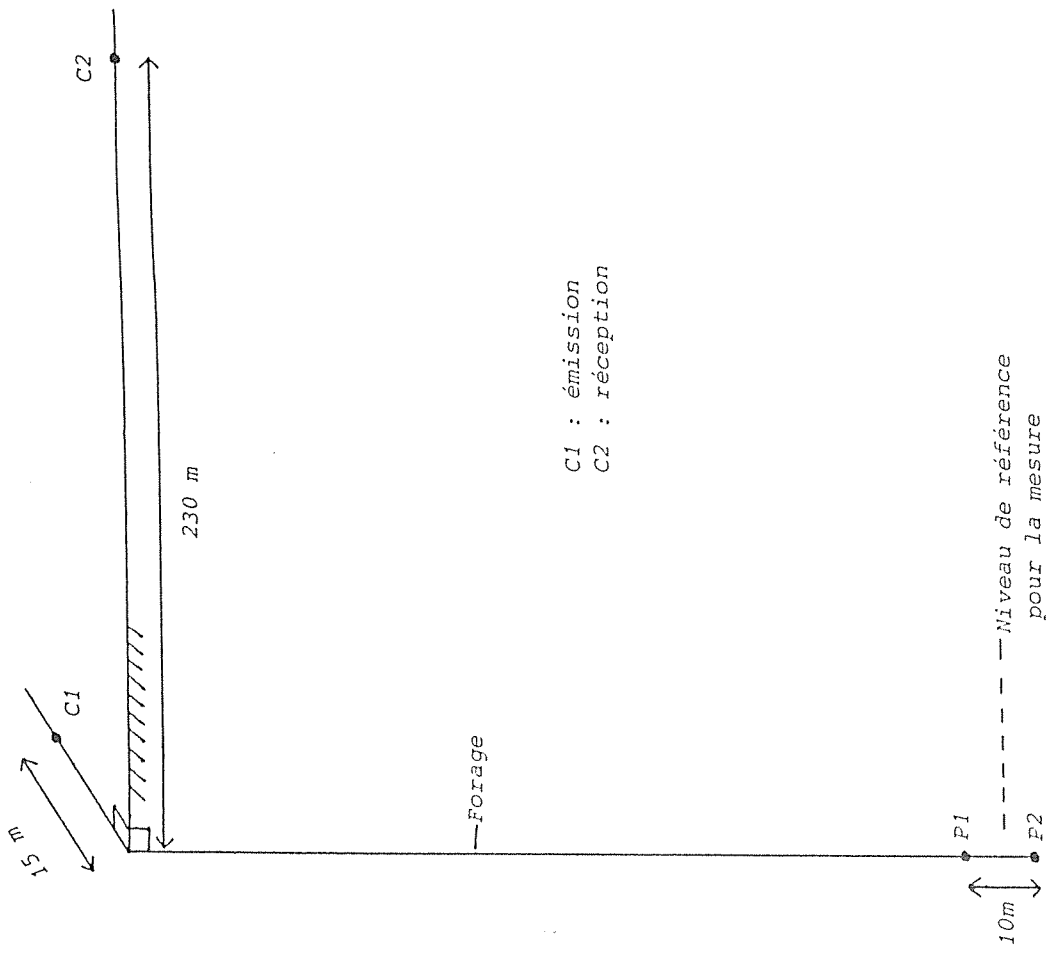


Figure 84b: Dispositif de prospection utilisé sur le site de Carling. Il n'a pas été possible de disposer les électrodes d'émission symétriquement par rapport à la tête du puit.

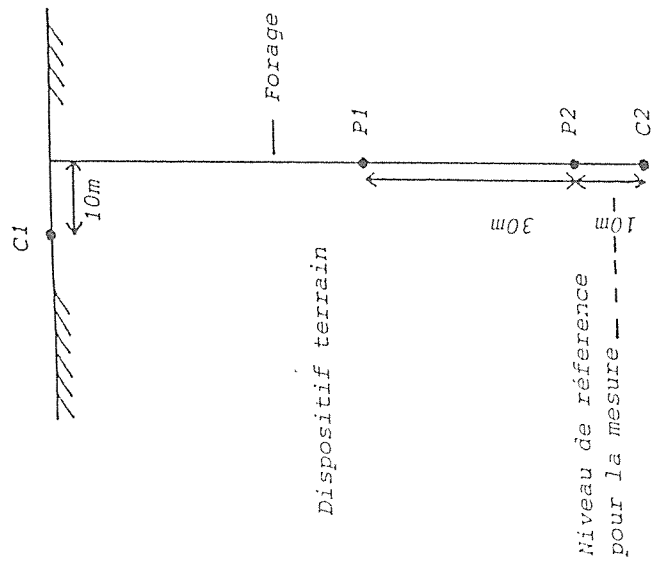
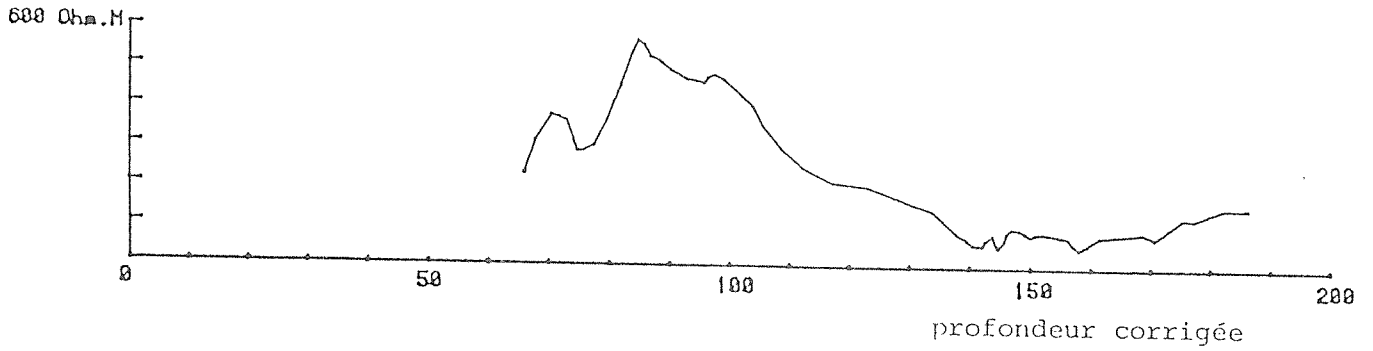


Figure 84a: Dispositif de diagraphie électrique adopté sur le site de Carling. Il s'apparente à une "normale" agrandie.

résistivité apparente



enregistrement brut digitalisé

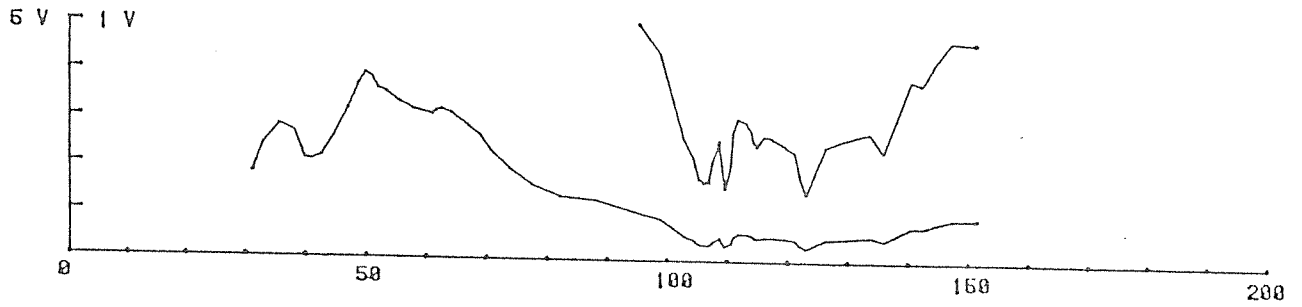
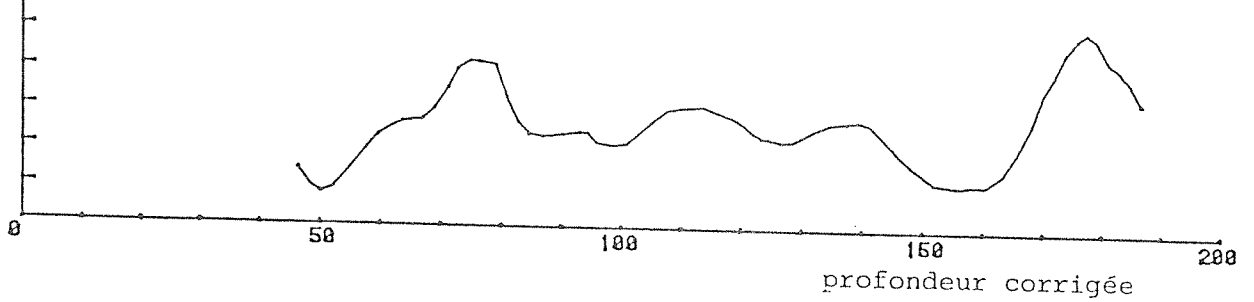


Figure 85a: Diagraphie "normale agrandie" obtenue sur le site de Carling.
(Les enregistrements bruts ne sont pas calés en profondeur).

60 Ohm.M

résistivité apparente



enregistrement brut digitalisé

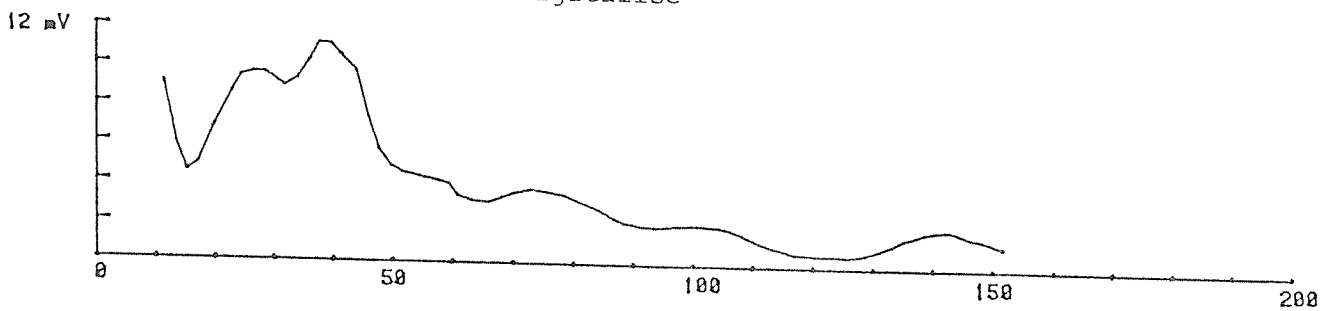


Figure 85b Enregistrement de prospection obtenu sur le site de Carling.

apparente. Elle est cependant non significative car fortement abaissée par la présence en surface d'une épaisse couche de remblais très conducteurs qui "court-circuitent" les électrodes d'injection. On peut cependant localiser aisément sur les deux enregistrements la réponse conductrice d'un grès peu consolidé situé entre 142 et 162 m selon la coupe géologique. L'interprétation n'a pas été poussée plus loin sur ce site destiné aux essais de l'appareillage.

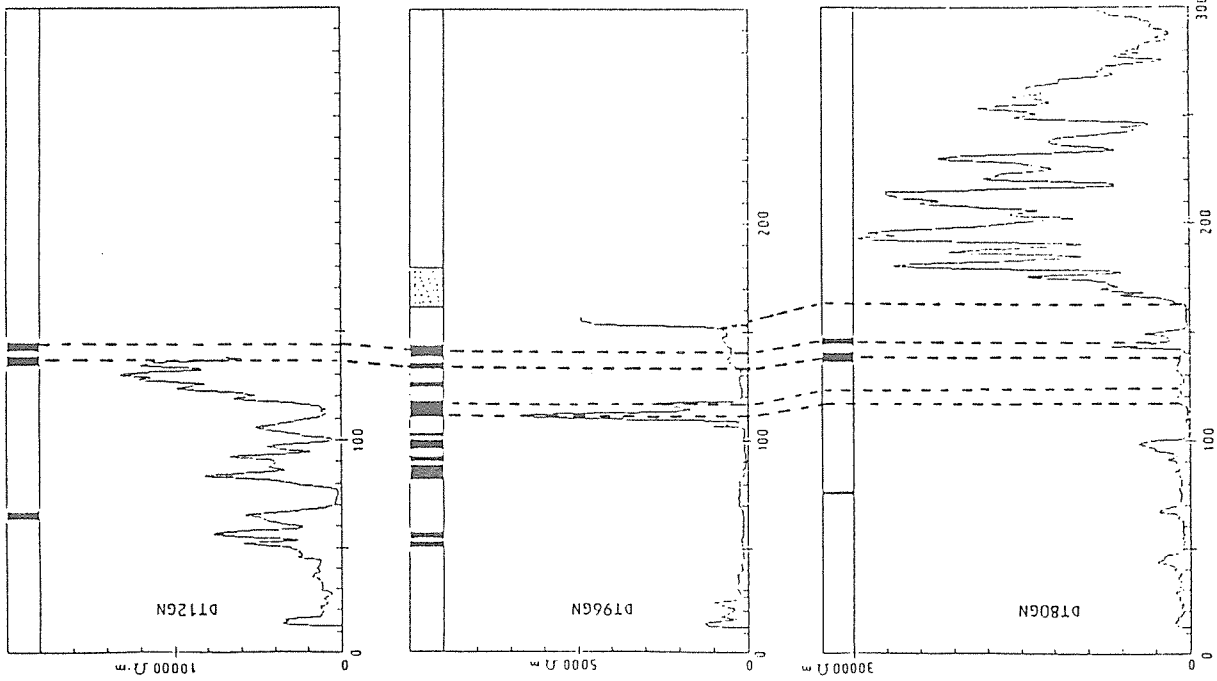
VIII.2. Mission sur le site des Gouttes.

Ce prospect appartient à la Société Minière Dong-Trieu qui nous en a autorisé l'accès pour nos expériences. Le lieu-dit des Gouttes se trouve au nord de Limoges, dans le Limousin. Cette région est réputée pour ses gisements d'uranium, et c'est précisément ce minéral qui fait l'objet d'une recherche dans ce secteur.

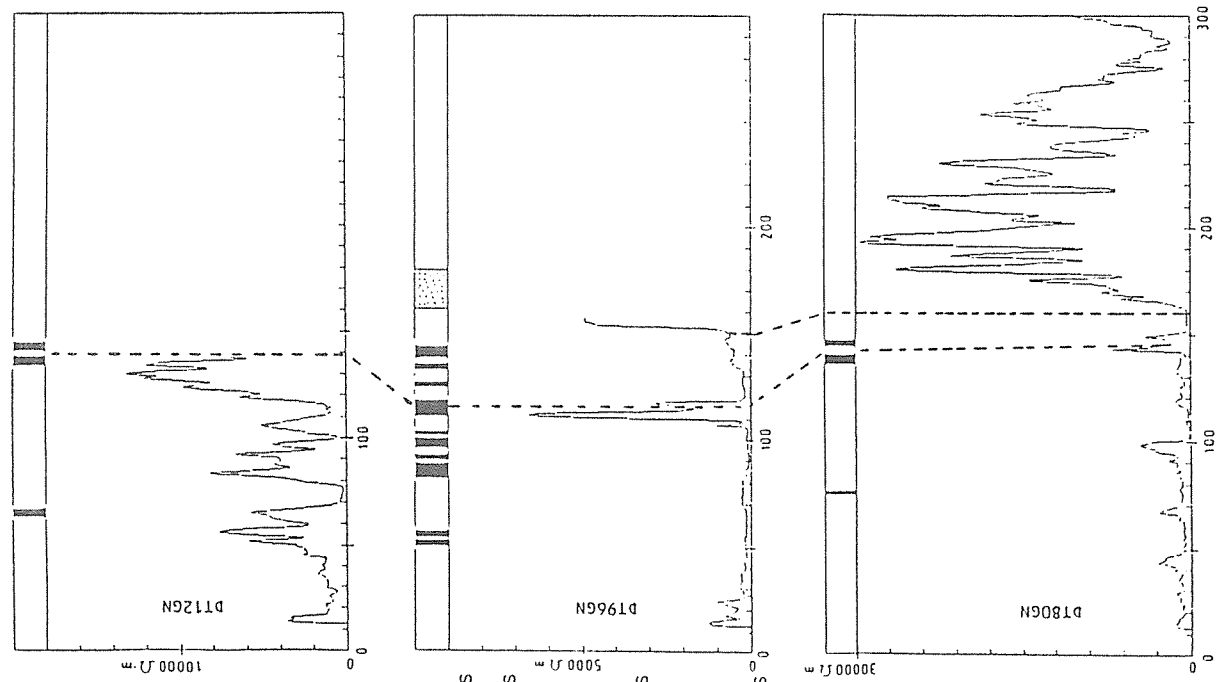
Sur le site, granitique, l'uranium se trouve dans des zones épisynétisées. Ces dernières coïncident le plus souvent avec des intersections de failles et ont une forte chance de correspondre à des conducteurs relatifs. Cependant, l'association uranium-conducteur est statistiquement incertaine: un remplissage important, par le précieux minéral, des vacuoles laissées par le quartz, peut être la cause d'une résistivité plus importante que celle du granite simplement altéré et saturé d'eau. De fait, ce site ne possède pas les caractères qui en ferait un cas d'école: il eût même été difficile de trouver pire, comme nous le verrons plus loin.

Les trois forages étudiés, distants de 16 m, sont alignés. Ils sont verticaux et aucun effet topographique n'est à craindre. Le Dispositif Symétrique de Prospection en Forage (DSPF) que nous préconisons s'applique donc sans biais. La proximité des trois forages permet d'éprouver la méthode puisque si structure il y a, son influence doit être effective et cohérente dans les trois forages.

Les trois diagraphies de résistivité réalisées dans les forages (ces derniers étant désignés par DT80, DT96 et DT12) montrent des différences qualitatives importantes (figure 86). Le DT96 rencontre des terrains



Diagraphies de résistivité (grande normale)



Diagraphies de résistivité (grande normale)

Figure 86: Diagraphies de résistivité dans les forages DT80, DT12 et DT96. On a également reporté les principales passées radio-actives.

Le forage DT96, le plus conducteur et radio-actif, traverse une épisyénite.

principales anomalies gamma-ray

A droite et à gauche, deux corrélations possibles.

nettement plus conducteurs que les deux autres. La radioactivité naturelle (γ -ray) y est également plus importante. Ce forage traverse effectivement une épisyénite allongée dans la direction verticale (forme de cigare). Notons le niveau relativement résistant vers 110-220 m: il est nettement associé à une zone minéralisée. Cela illustre bien qu'il n'existe pas de relation stricte entre résistivité et minéralisation (sur le reste de l'enregistrement, l'uranium se rencontre plutôt en milieu conducteur). La figure 86 montre en outre des corrélations possibles -parmi d'autres- entre les trois forages (encore que ce genre d'opération, appliqué à ce genre de site, peut être dénuée de sens).

Les géologues travaillant sur ce gisement s'interrogent sur l'extension en profondeur de l'épisyénite. Les forages DT96 et DT12 n'ont été forés que jusqu'aux environs de 150 m. Le DT80 l'a été jusqu'à plus de 300 m, dans l'espoir de recouper la minéralisation plus en profondeur. Or ce forage ne rencontre plus de zone radio-active au-delà de 160 m. En outre, il fixe, du point de vue électrique, une limite évidente vers 160 m: passé cette profondeur, la résistivité est notablement plus importante que dans la partie supérieure. Cette dichotomie semble également s'initier dans les autres forages, mais sans certitude. On la retrouve ainsi, quoique de façon moins évidente, sur l'enregistrement intitulé DT80SP (SP pour spécial), sur la figure 87. Nous avons entrepris cette mesure dans le but explicite d'obtenir des informations sur l'extension en profondeur de la cible. Le dispositif utilisé est décrit sur la même figure: injection non symétrique en surface (une électrode à la tête du puits et l'autre loin) et mesure du gradient vertical du potentiel dans le forage. La résistivité apparente a été choisie comme mode de représentation des résultats, mais il ne faut pas accorder trop de crédit aux valeurs obtenues: l'éventuelle présence en surface d'une couche conductrice canalisant le courant induirait une diminution des champs plus profonds. Dans ce cas, la résistivité apparente est sous-estimée. A cette réserve près, on peut considérer que cet enregistrement fournit le même type d'information qu'une diagraphie traditionnelle, avec cependant un pouvoir séparateur moindre et un rayon d'investigation plus important. On peut y délimiter, du reste, les mêmes unités que sur la diagraphie DT80GN.

Les figures 88, 89 et 90 donnent les enregistrements bruts de "DSPF" dans les trois forages. Les électrodes d'injection ont été disposées comme indiqué sur la figure 91.

Ce qui frappe en premier lieu l'observateur qui examine ces enregistrements, c'est le nombre important (ou l'absence, comme on voudra) d'anomalies notables. Les spectres d'amplitude de ces signaux, représentés sur les mêmes figures, présentent un aspect que l'on peut qualifier d'aléatoire. Il est bien difficile de discerner et d'isoler sur ces courbes des anomalies significatives.

Nous avons entrepris un recensement systématique des points d'inflexion (qui coïncident pour certains avec d'éventuels vrais "cross-over"). S'il existe une structure non intersectée (qui doit produire une anomalie visible dans les trois forages), elle est nécessairement recensée de la sorte. En reportant, comme nous le faisons plus loin, les centres des "sphères équivalentes" sur une carte, on doit pouvoir trancher sur l'existence d'une structure initialement hypothétique.

Les figures 92, 93 et 94 reprennent chaque forage isolément, et représentent chaque fois la diagraphie de résistivité et les deux enregistrements perpendiculaires de "DSPF" (notés NS, pour nord-sud et EW pour est-ouest). Les mesures ont été spatialement filtrées à l'aide du filtre large-bande. Par ailleurs, l'atténuation naturelle a été compensée. Pour la lecture précise des amplitudes, on utilise les courbes brutes ou éventuellement filtrées, mais qui n'ont pas subi cette compensation. Les figures 95, 96 et 97 montrent les enregistrements traités avec les deux filtres ($4 < D < 16$) et ($16 < D < 64$). Le pointage des points d'inflexion se fait avec l'aide de tous les signaux: bruts, compensés et filtrés. Bon nombre de ces points coïncident avec des événements électriques visibles sur les diagraphies. Nous reviendrons plus tard sur ce point. Quelques anomalies, extraites par la pensée et figurées en tirets gras, ont été représentées. La figure 97 montre un exemple d'artefact dû à la technique de filtrage. La courbe DT80, filtrée pour ($16 < D < 64$), contient une belle anomalie typique. La distance mesurée entre les deux extrema, de l'ordre de 50 m, ne correspond en fait à rien: c'est le filtre utilisé qui "laisse passer" une partie de l'énergie d'un certain signal dont on lit sur l'enregistrement brut, figure 90, qu'il correspond en réalité à $D = 22$. Le filtrage a donc

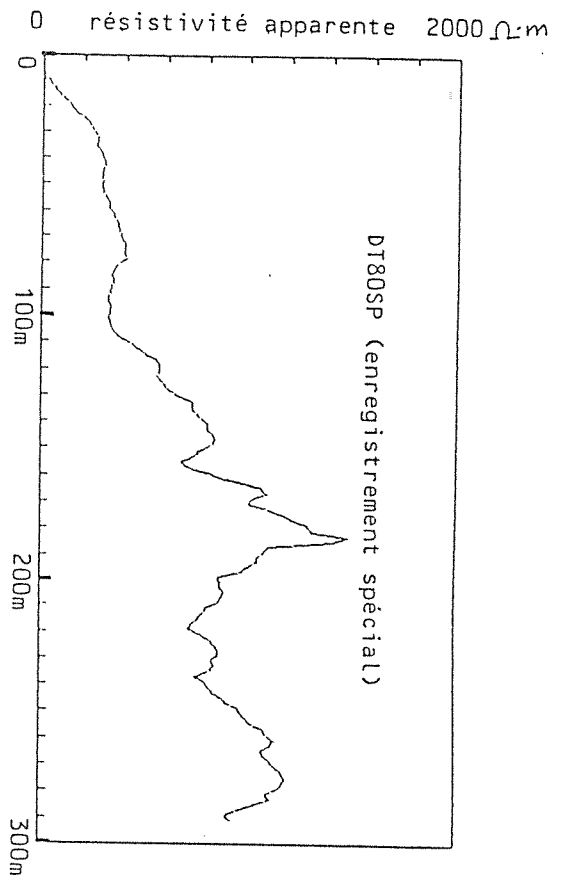
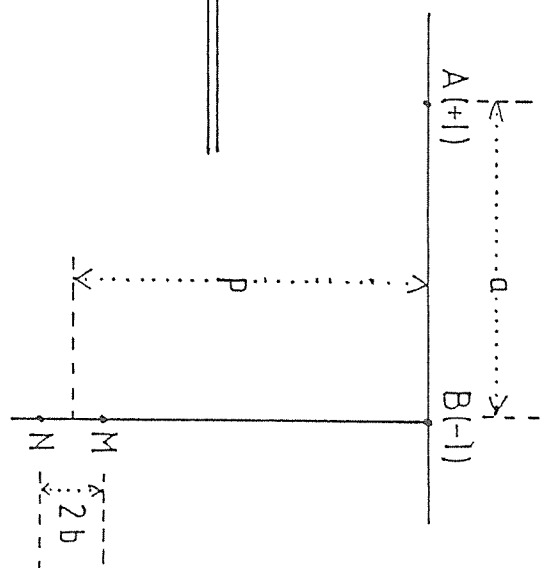


Figure 87: Forage DT80. Dispositif spécial représenté en haut à droite. Les valeurs de la résistivité apparente peuvent être très affectées par l'existence (probable) d'une couche conductrice en surface. Cette mesure confirme l'existence d'une importante transition vers 160 m (voir la diagraphie , Fig. 86).



Calcul de la résistivité apparente pour le dispositif spécial non symétrique .

$$P_a = K \frac{\Delta V_{MN}}{I}$$

$$\text{avec } K = \frac{2 \pi}{1/AM - 1/AN - 1/BM + 1/BN}$$

$$\text{et : } AM = [a^2 + (p - b)^2]^{1/2}$$

$$AN = [a^2 + (p + b)^2]^{1/2}$$

$$BM = p - b$$

$$BN = p + b$$

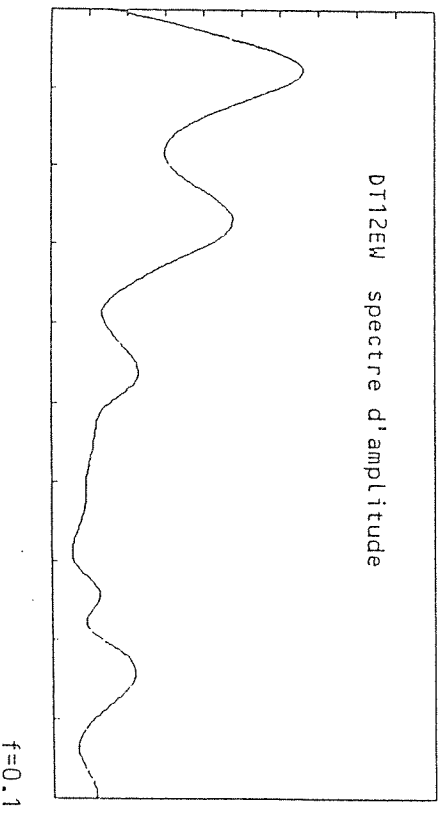
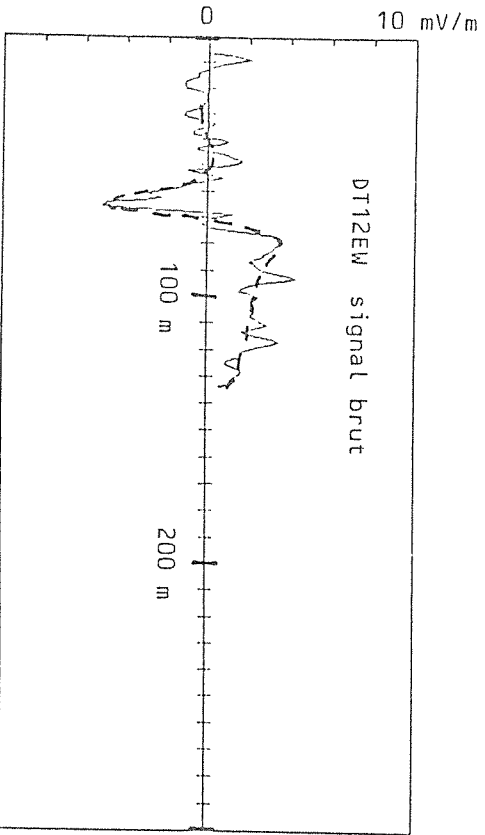
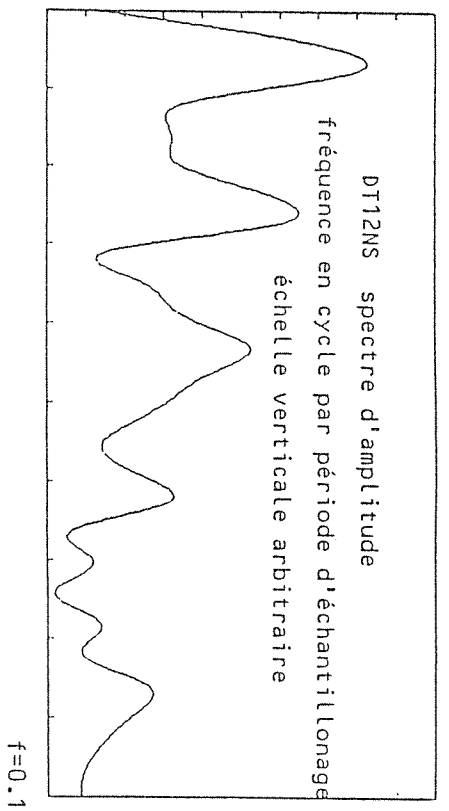
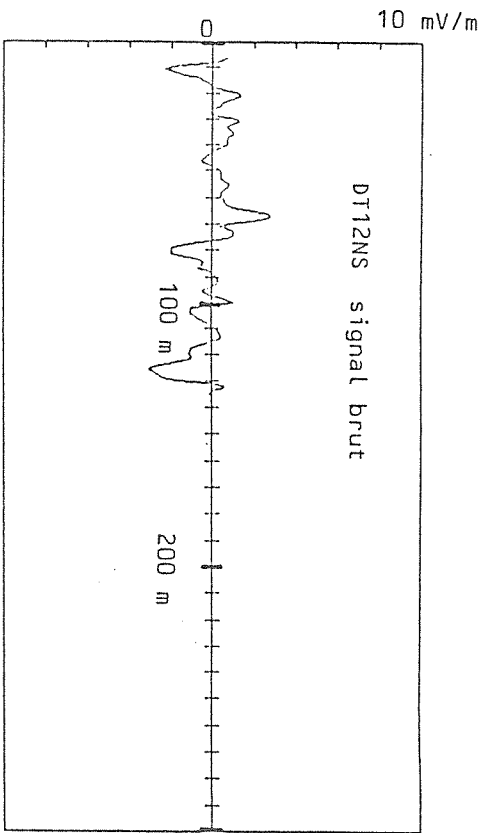


Figure 88: Forage DT12: signaux bruts et leur spectre d'amplitude. Le pointillé reprend une forme pouvant être due à la traversée d'une couche conductrice inclinée. (voir Figure 99.)

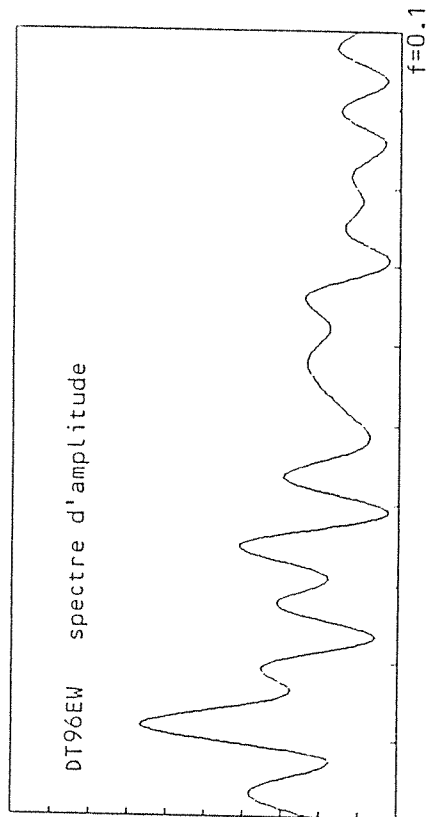
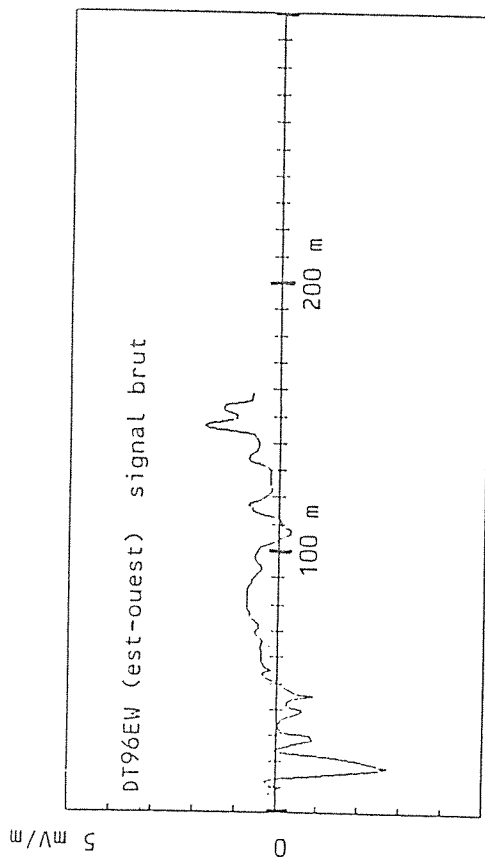
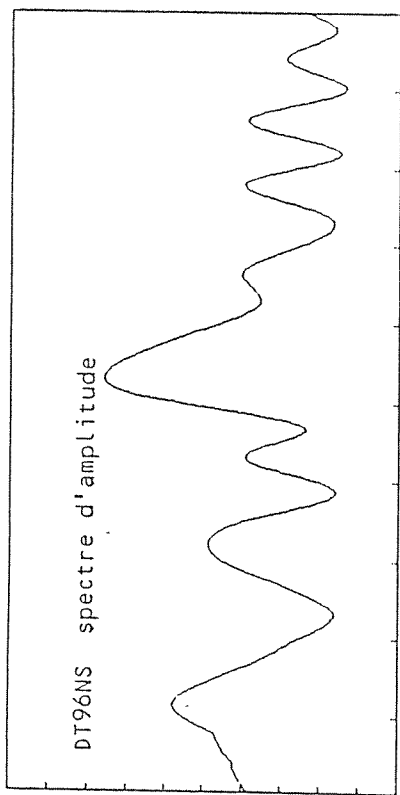
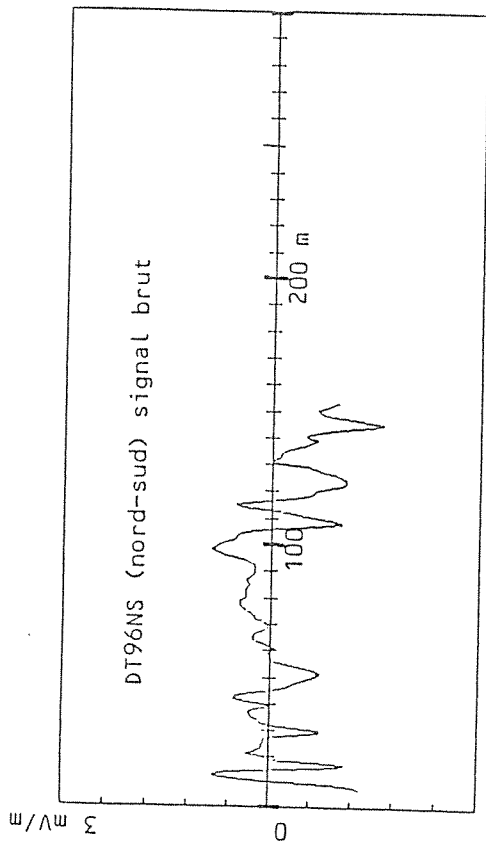


Figure 89: Forage DT96 - Mesures "DSPF" brutes et leur spectre d'amplitude. La fréquence est exprimée en cycles par unité de temps d'échantillonnage. L'échelle verticale sur les spectres est arbitraire.

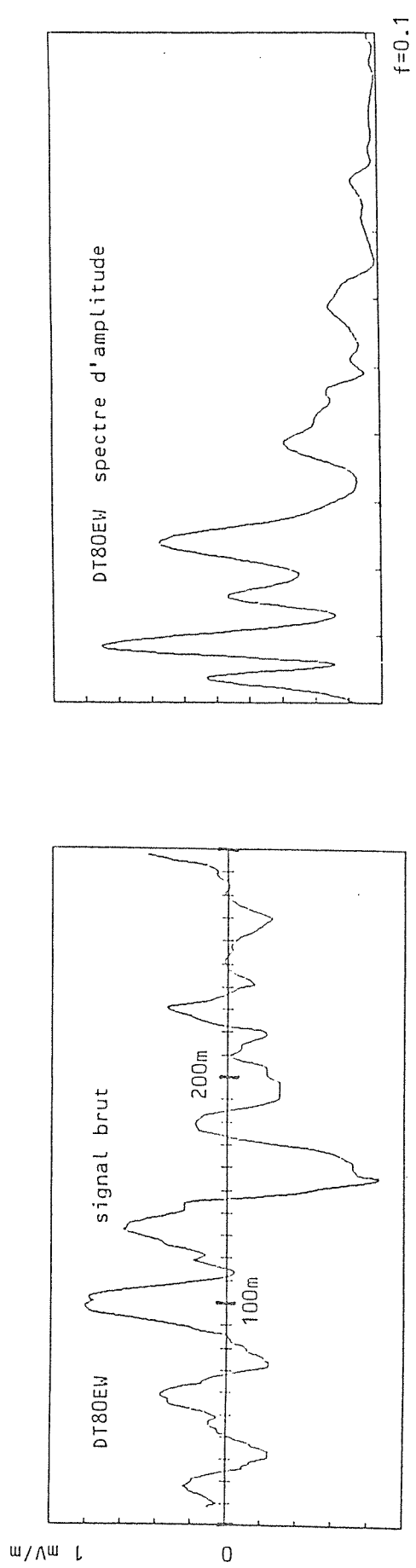
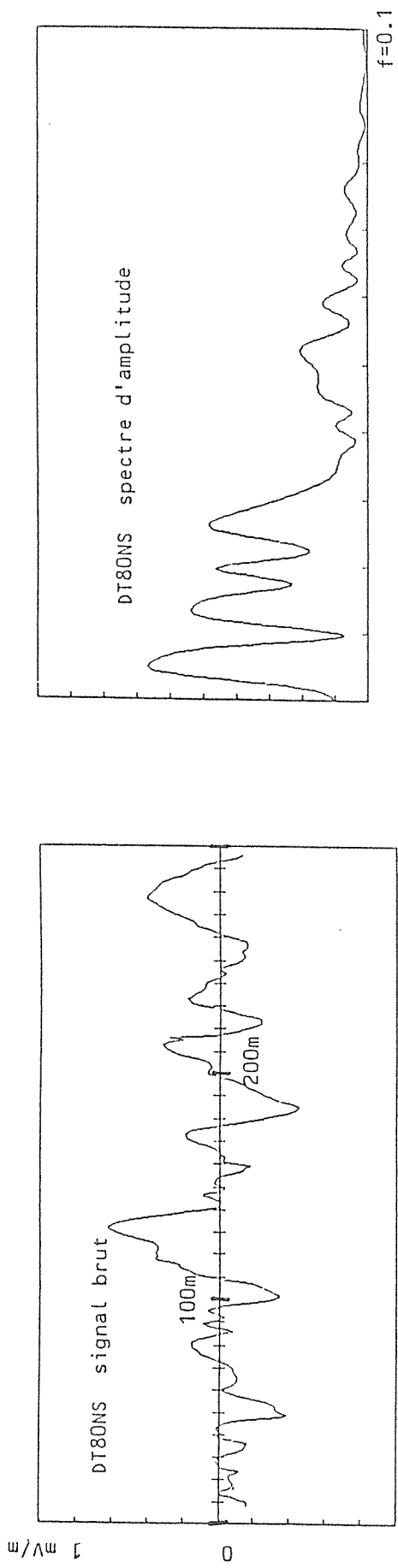


Figure 90: Forage DT80: signaux bruts et leur spectre d'amplitude (fréquence en cycle par intervalle de temps d'échantillonnage / échelle verticale arbitraire).

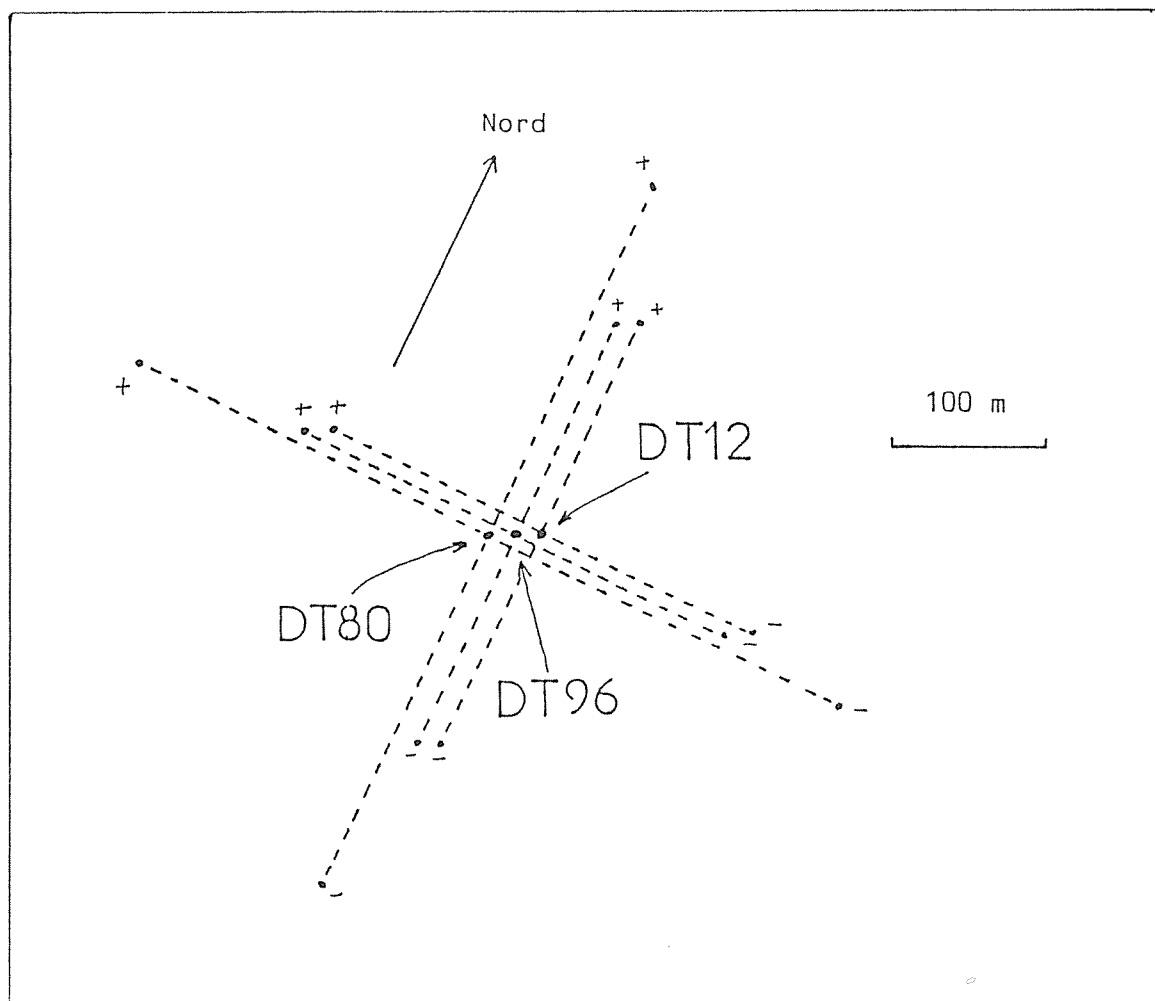


Figure 91: Implantation des forages et des électrodes sur le site Dong-Trieu. Les trois forages sont espacés de 16 m.

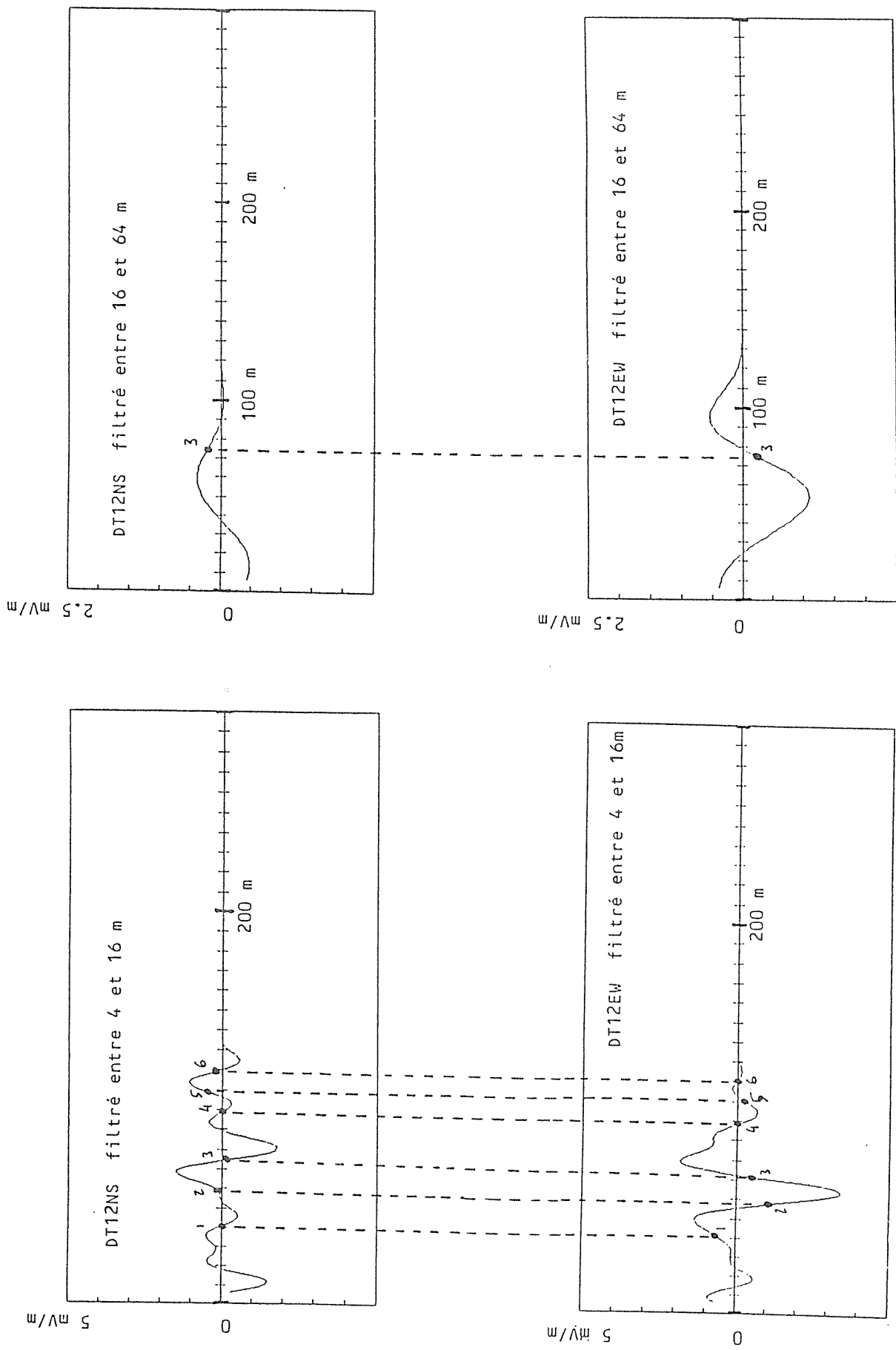


Figure 95: Forage DT12: signaux filtrés. Ce traitement facilite le pointage des anomalies. La corrélation entre les enregistrements selon les deux directions contribue également.

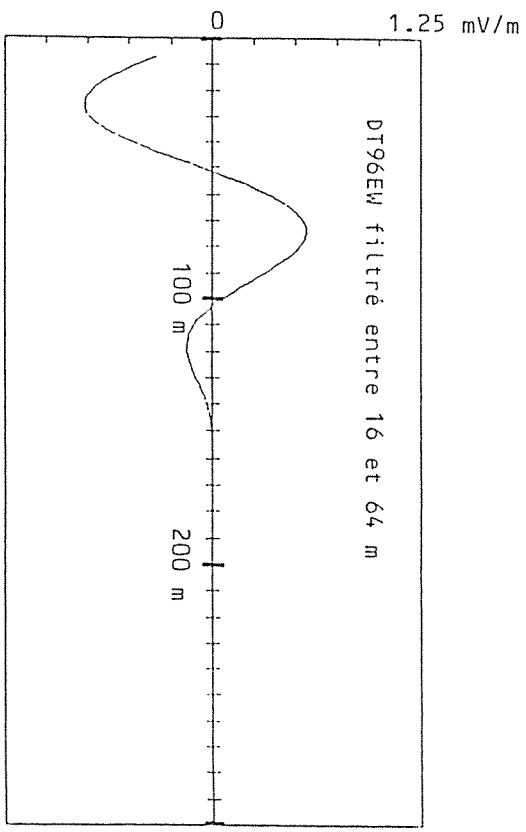
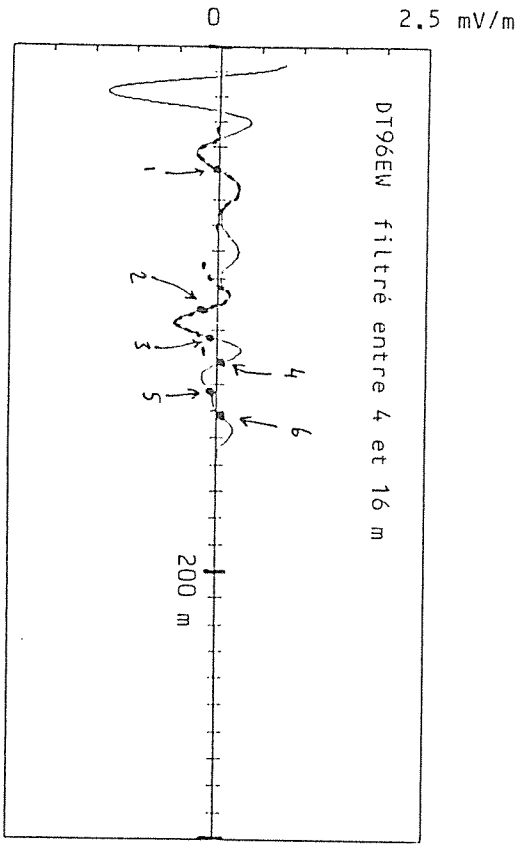
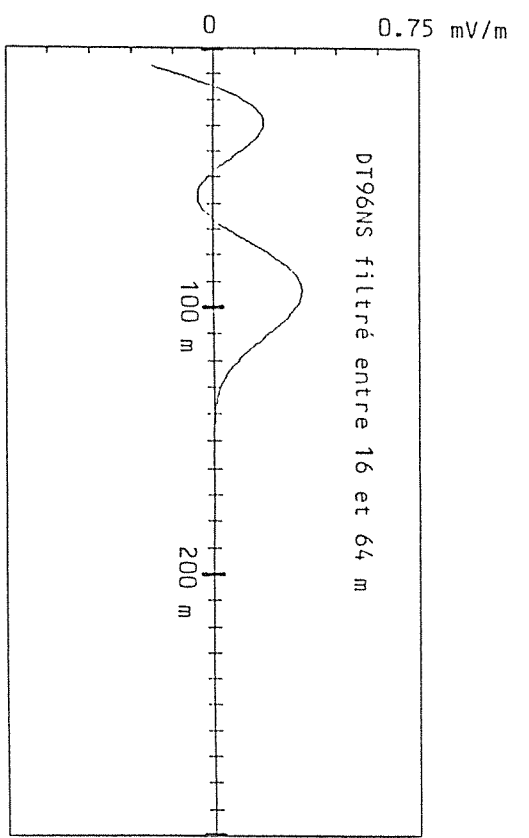
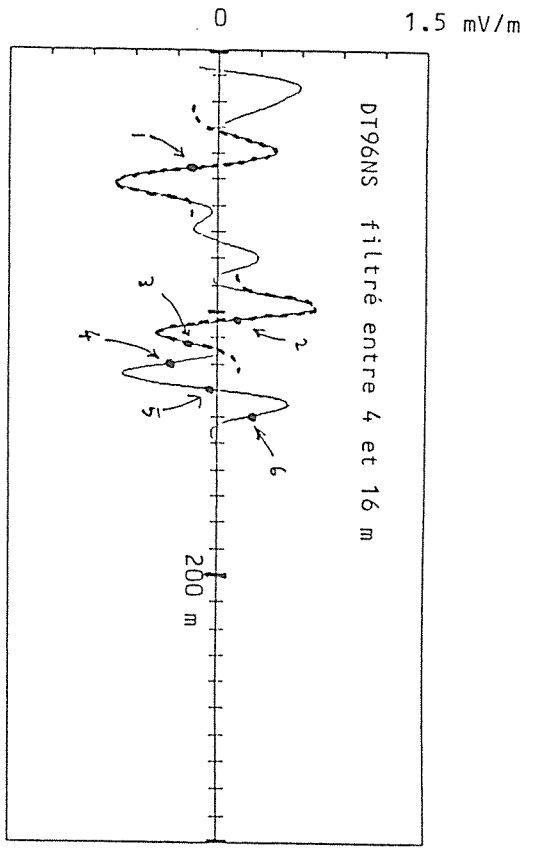


Figure 96: Forage DT96: signaux filtrés. Ce traitement facilite le pointage des points d'inflexion. Quelques anomalies, "extraites par la pensée", ont été soulignées. L'allure des courbes filtrées entre 16 et 64 m n'est probablement significative que des artefacts du filtrage: il ne faut pas trop y voir de vraies anomalies.

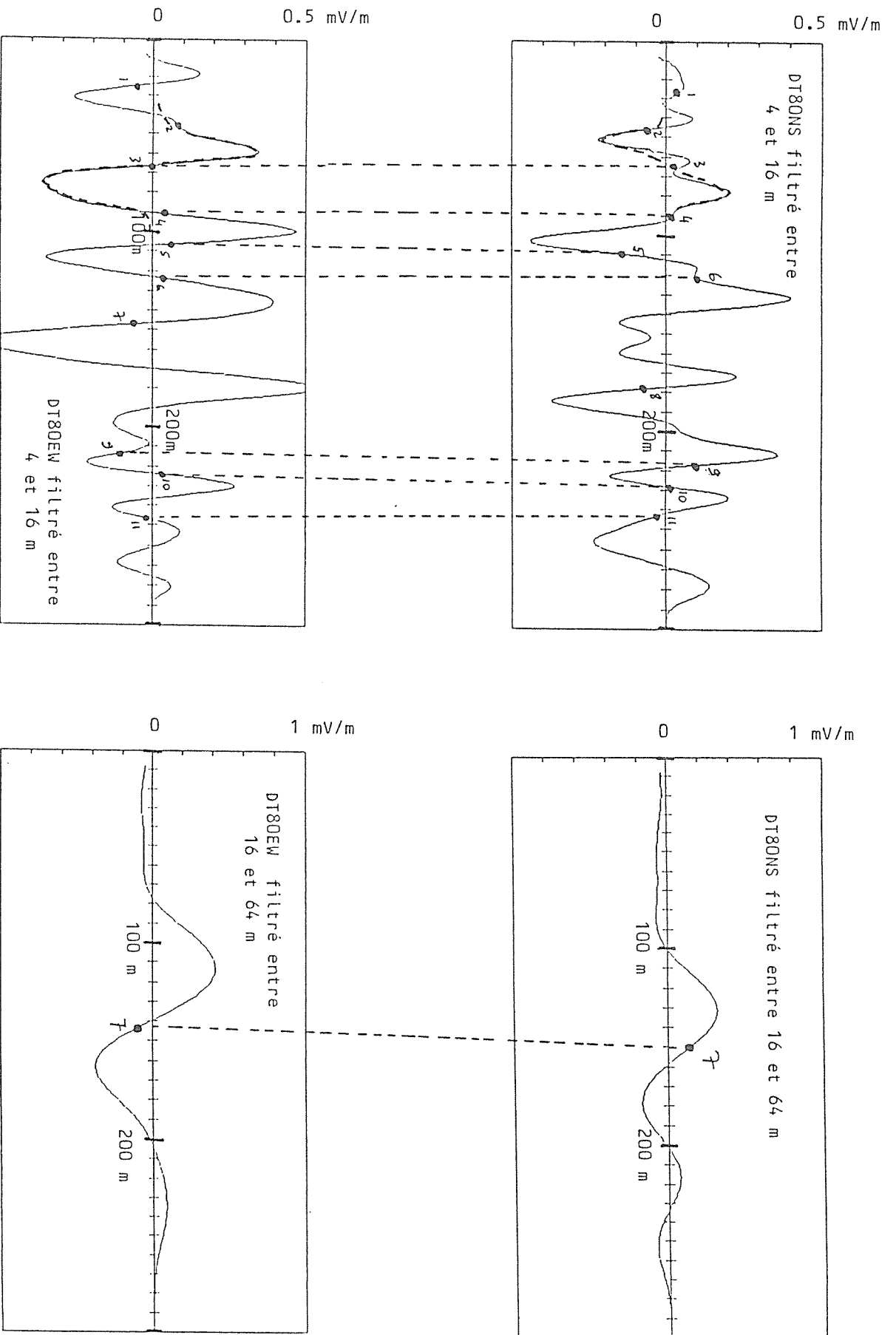


Figure 97: Forage DT80: signaux filtrés. La "fausse" anomalie, en bas à droite, correspond effectivement à une importante transition conducteur-résistant bien visible sur la diagraphe.

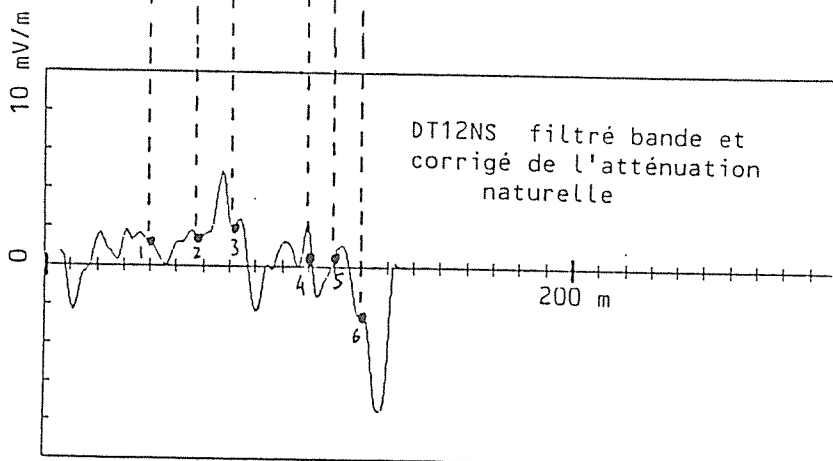
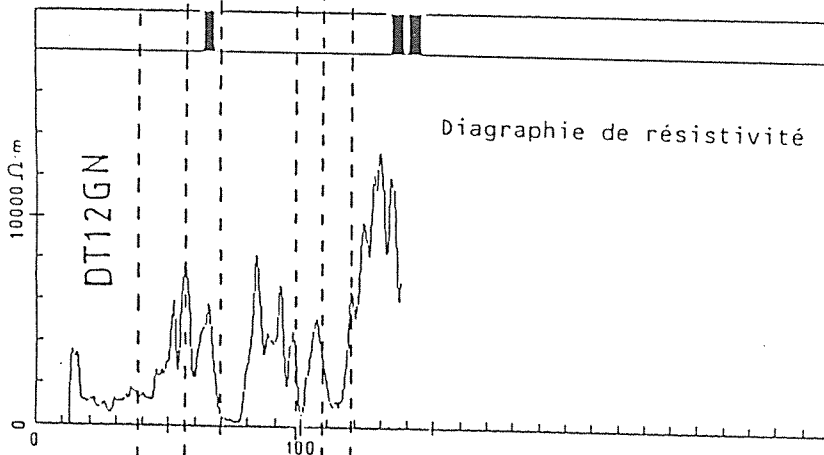
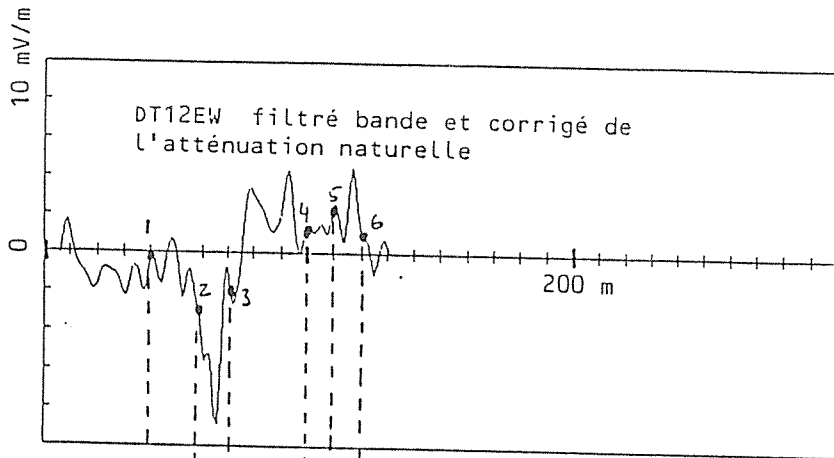


Figure 92: Forage DT12 .
 Diagraphie de résistivité et
 mesures "DSPF" corrigées de
 l'atténuation naturelle. Pour
 le pointage des points d'in-
 flexion, on s'est largement
 aidé des courbes filtrées de
 la figure 95. L'anomalie n° 3
 voit son point d'inflexion se
 situer au toit de la couche
 conductrice (70 à 80 m) visible
 sur la diagraphie.

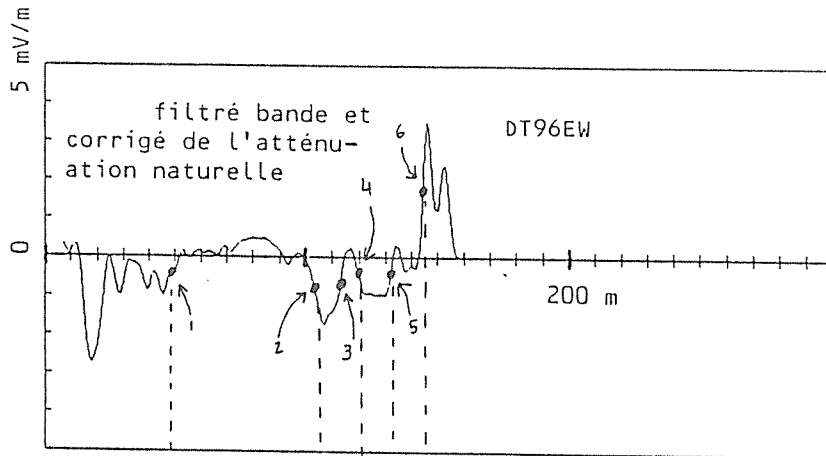
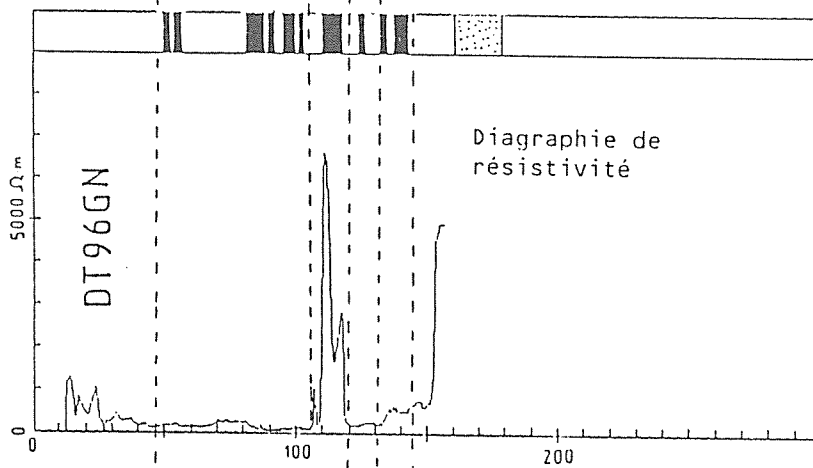
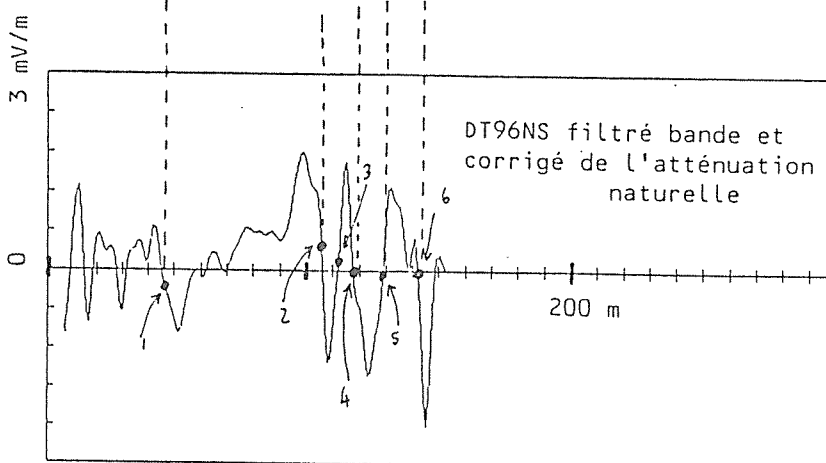


Figure 93: Forage DT96.
Diagraphies de résistivité et mesures "DSPF" corrigées de l'atténuation naturelle.



On a pointé quelques points d'inflexion qui peuvent être les "cross-over" d'anomalies élémentaires.

Noter la corrélation des mesures de prospection avec des "événements" diagraphiques.



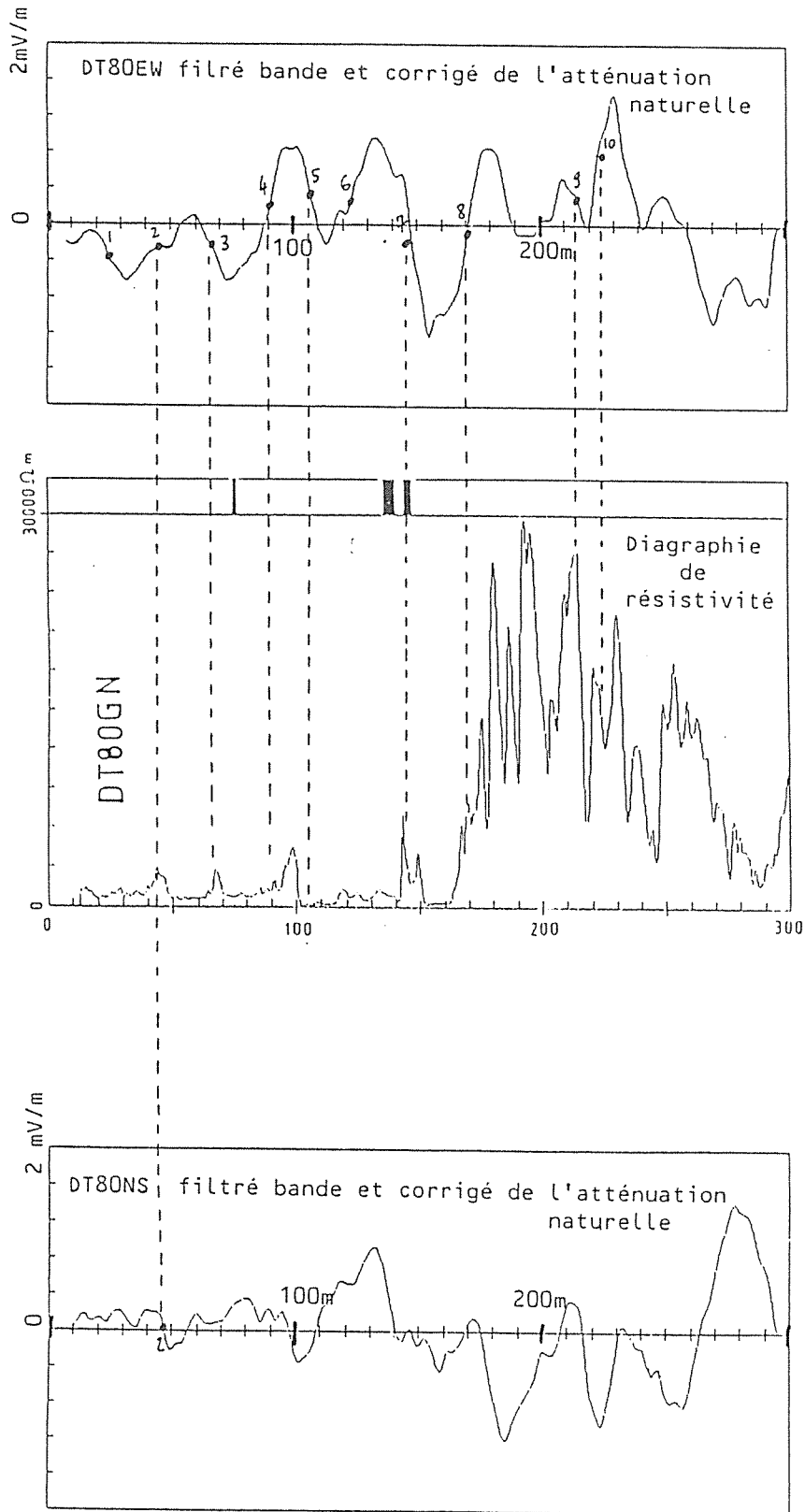


Figure 94: Forage DT80. Diagraphie de résistivité et mesures de prospection en forage ("DSPF") corrigées de l'atténuation naturelle. Pour le pointage des points d'inflexion, on s'est aidé des enregistrements filtrés (figure 97). Noter les corrélations entre les mesures de prospection et la diagraphie: par exemple, les points 4 et 5 entourent le niveau résistant au voisinage de 100 m .

dilaté l'anomalie originale.

La carte où sont reportées les interprétations en terme de structure sphérique est donnée figure 98. On n'y trouve aucun point qui soit commun aux trois forages: la distribution semble aléatoire. L'explication de ce résultat non probant n'est pas difficile à trouver: un examen attentif des enregistrements permet d'associer, comme on l'a déjà remarqué, chaque point d'inflexion à un évènement diagraphique (zone résistante ou conductrice). Par conséquent, il semble certain que l'on recueille en réalité la signature des terrains traversés. De fait, le caractère aléatoire de nos enregistrements est à rapprocher du caractère particulièrement hétérogène du milieu, bien mis en évidence par les diagraphies. Une analyse plus fine permet par ailleurs de reconnaître quelques formes semblables à celles dues à des couches inclinées et pour lesquelles le cross-over se localise au toit (figure 99). La forme relevée sur la figure 88, qui en donne un bon exemple, indique la présence d'une couche dont le toit serait vers 70 m. Cette "couche" est bien visible sur la diagraphie correspondante, figure 92. Les relations entre les différents paramètres de ce genre de modèle (contraste de résistivité, épaisseur, extension etc...) et les grandeurs anomaliques, n'ont pas fait l'objet d'une étude systématique. Cela peut constituer une étape future. Au plus peut-on annoncer que le conducteur penche vers l'est.

Que faut-il conclure de ces résultats en ce qui concerne cette méthode de prospection en forage? Qu'elle ne permet pas, ou difficilement, la localisation de conducteurs non intersectés lorsque le milieu n'est lui-même qu'un ensemble confus de conducteurs et de résistants relatifs. L'on pouvait s'en douter par avance... Une expérience, numérique celle-ci, termine ce commentaire. La méthode par éléments finis, décrite au paragraphe IV.2, a permis de la conduire. Le domaine de modélisation est un parallélépipède que la figure 100a illustre. On y a réparti des résistivités, une par cube, de façon aléatoire (loi uniforme entre 0 et 2000 $\Omega.m$). La figure 101, figuré (o) montre le résultat. Son aspect, malgré une résolution moindre, rappelle celui des mesures récoltées sur le terrain. Dans une deuxième partie de cette expérience, on a cette fois-ci fixé toutes les résistivités à

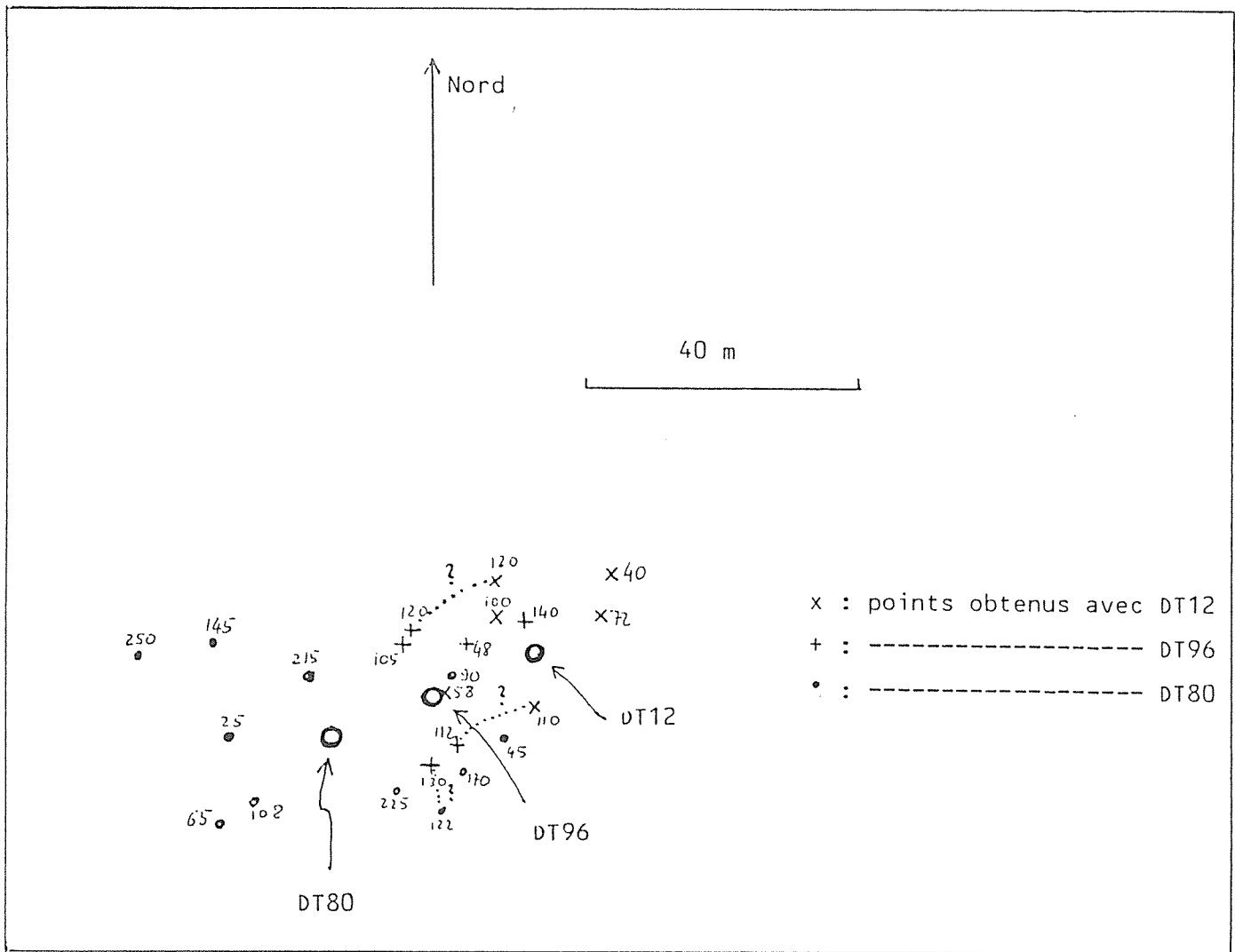


Figure 98: Carte des points relevés dans l'interprétation en termes de structures sphériques sur le site Dong-Trieu. Les chiffres correspondent aux côtes des anomalies relevées (profondeur). A part quelques cas statistiquement peu significatifs, les points semblent disposés de manière aléatoire.

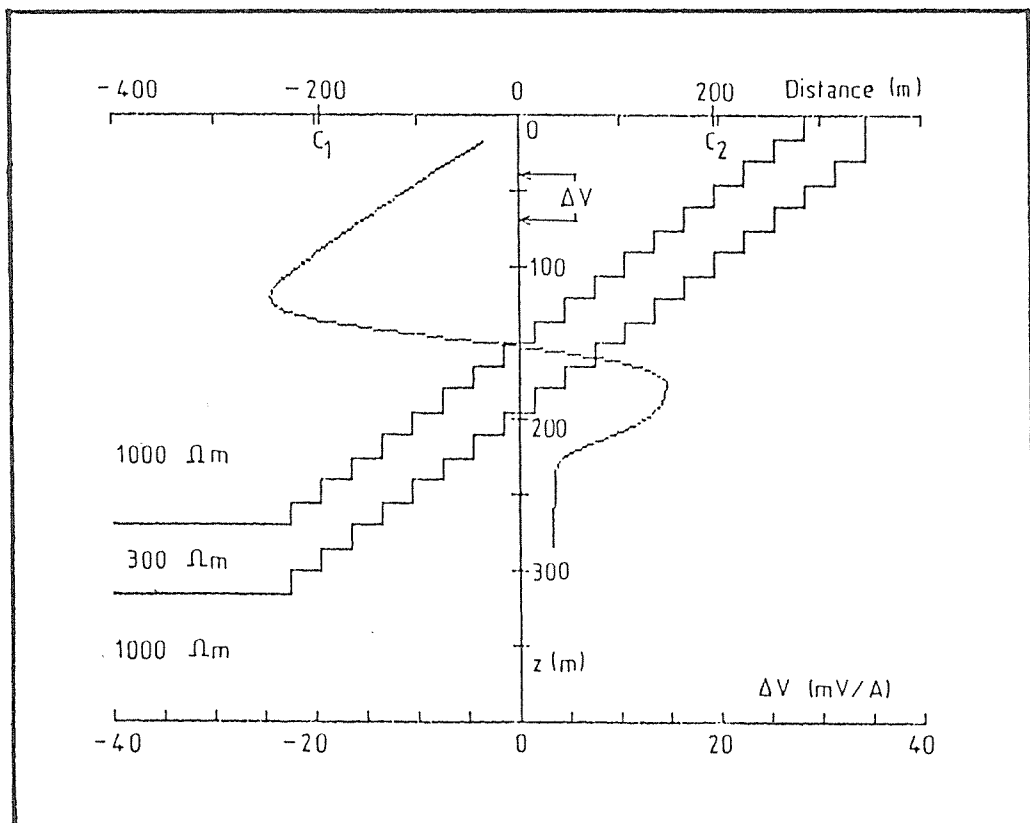


Figure 99: Réponse anormale d'une couche inclinée. Elle ne se distingue de l'anomalie due à une structure 3D non-intersectée que par sa partie inférieure où le signal ne s'annule pas aussi rapidement que pour une sphère.
Ce calcul a été réalisé par Doucet à l'aide de son algorithme mixte.

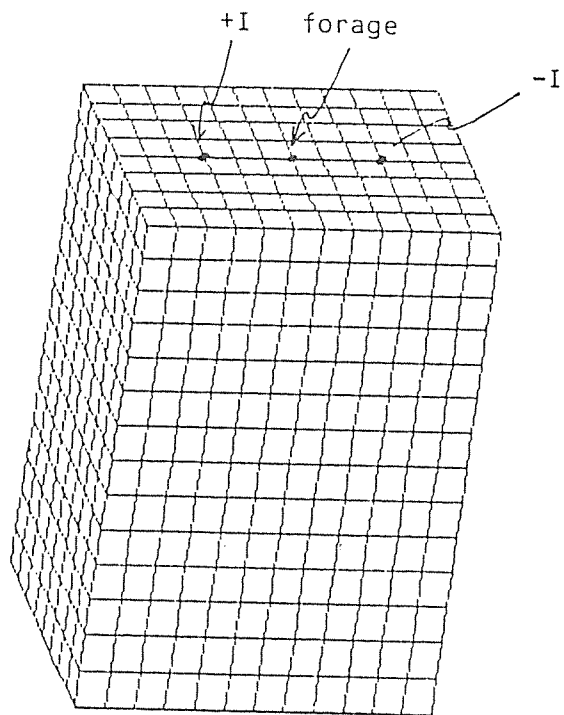


Fig. 100a

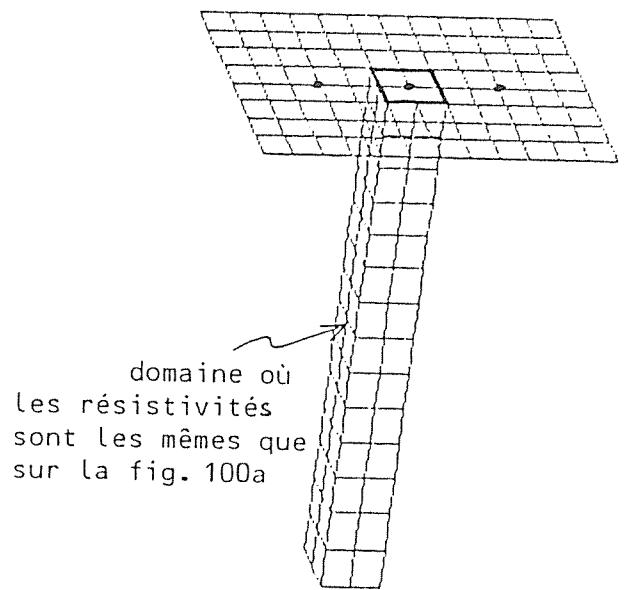


Fig. 100b

Figure 100: Modèle utilisé pour l'expérience numérique. Dans la première partie de l'expérience, fig.100a, toutes les résistivités sont aléatoires. Dans un deuxième temps, fig.100b, les résistivités valent $1000\Omega\cdot m$, sauf dans la partie centrale (cubes connectés au forage) où on a conservé les valeurs précédentes.

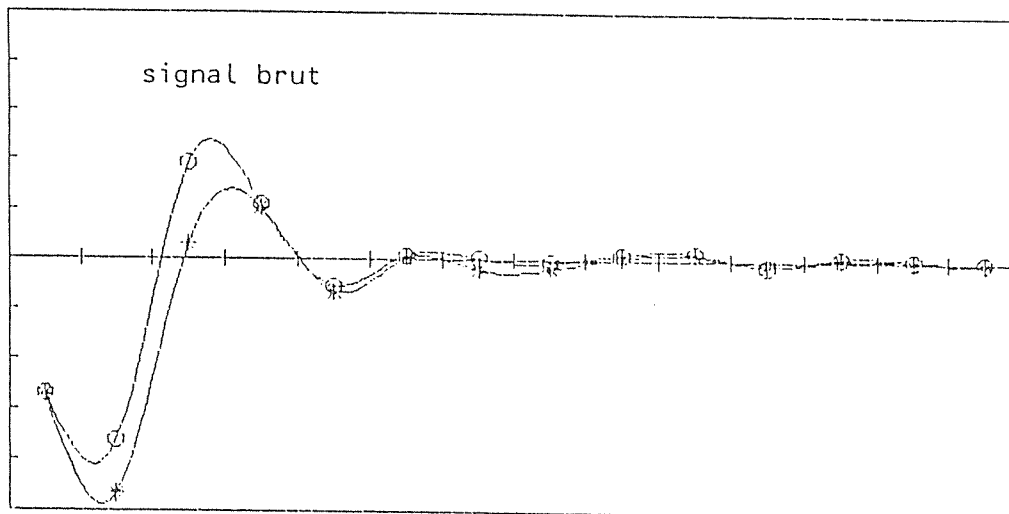
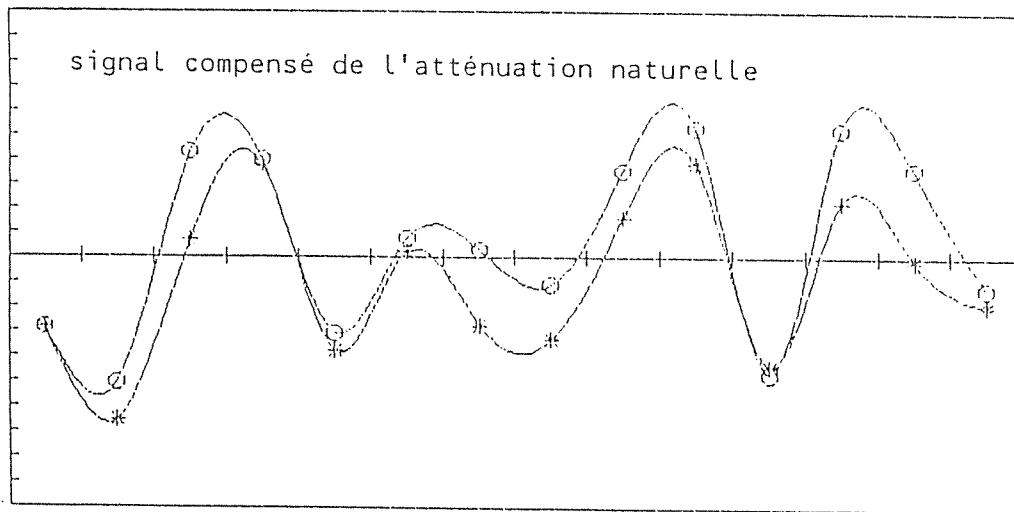


Figure 101: Résultats de l'expérience numérique avec un domaine où la résistivité est aléatoire. L'allure générale des courbes correspond à un terrain très hétérogène.

- modèle où la résistivité est partout aléatoire
- * modèle où la résistivité $\left\{ \begin{array}{l} \text{vaut 1000 en général} \\ \text{est aléatoire seulement autour du forage.} \end{array} \right.$

(Voir également la figure 100).

1000 Ω .m, sauf pour les cubes connectés au forage, pour lesquels les résistivités attribuées au cours de la première phase ont été conservées (figure 100b). Le résultat, figure 101, figuré (*), est très proche du précédent (sauf dans les TBF). Ainsi, dans ce type de terrain hétérogène, la mesure est-elle essentiellement influencée par le voisinage immédiat du forage et les régions traversées.

Notre objectif étant principalement la détection et la délimitation de cibles a priori non intersectées, l'étude que nous pourrions entreprendre éventuellement pour une analyse plus quantitative de ces résultats ne doit être comprise que dans le sens de l'élimination de ces "parasites". Cependant, il est certain qu'il y a ici matière à approfondir pour la cartographie électrique du voisinage des forages. On pense notamment aux problèmes liés à la fracturation: nous y reviendrons dans le dernier chapitre.

VIII.3. Mission sur le site de Margnac.

Situé dans le Limousin, le prospect appartient à la Compagnie Générale des Matières (COGEMA). Les cibles sont ici aussi des épi-syénites uranifères. Nous avons pu effectuer nos mesures dans trois forages dont deux sont voisins: les M38 et M39. La zone de travail est représentée sur la figure 102, avec les implantations des forages et des électrodes d'émission. Si un profil topo relevé selon une direction NE-SW laisse à penser que les perturbations dues à la topographie sont mineures, il faut souligner que les forages sont très inclinés (45° vers le sud-est). La présence de ce plongement complique certainement la localisation des conducteurs.

La figure 103 montre les trois diagraphies enregistrées: "petite normale" dans les forages M38 et M39 (noter la saturation instrumentale; ce problème sera résolu pour les missions futures) et "grande normale" pour le M43 (dispositif GN2b, voir rapport numéro 1). Sont jointes également les anomalies remarquables de γ -ray et neutron.

Il est inutile de revenir sur les difficultés rencontrées sur le site

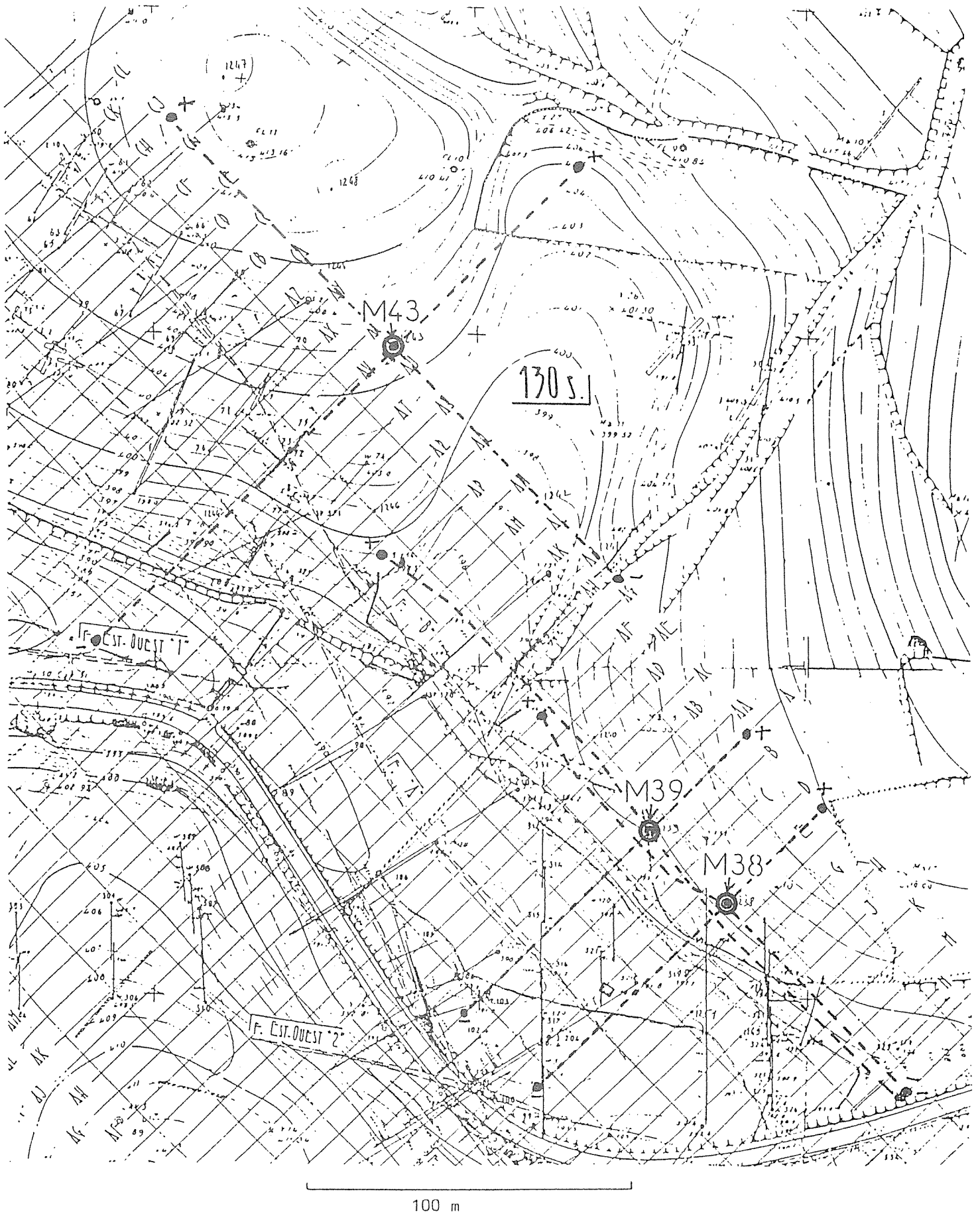


Figure 102: Site de Margnac (COGEMA). Implantation des forages et des électrodes. Le Nord est en haut de la figure.

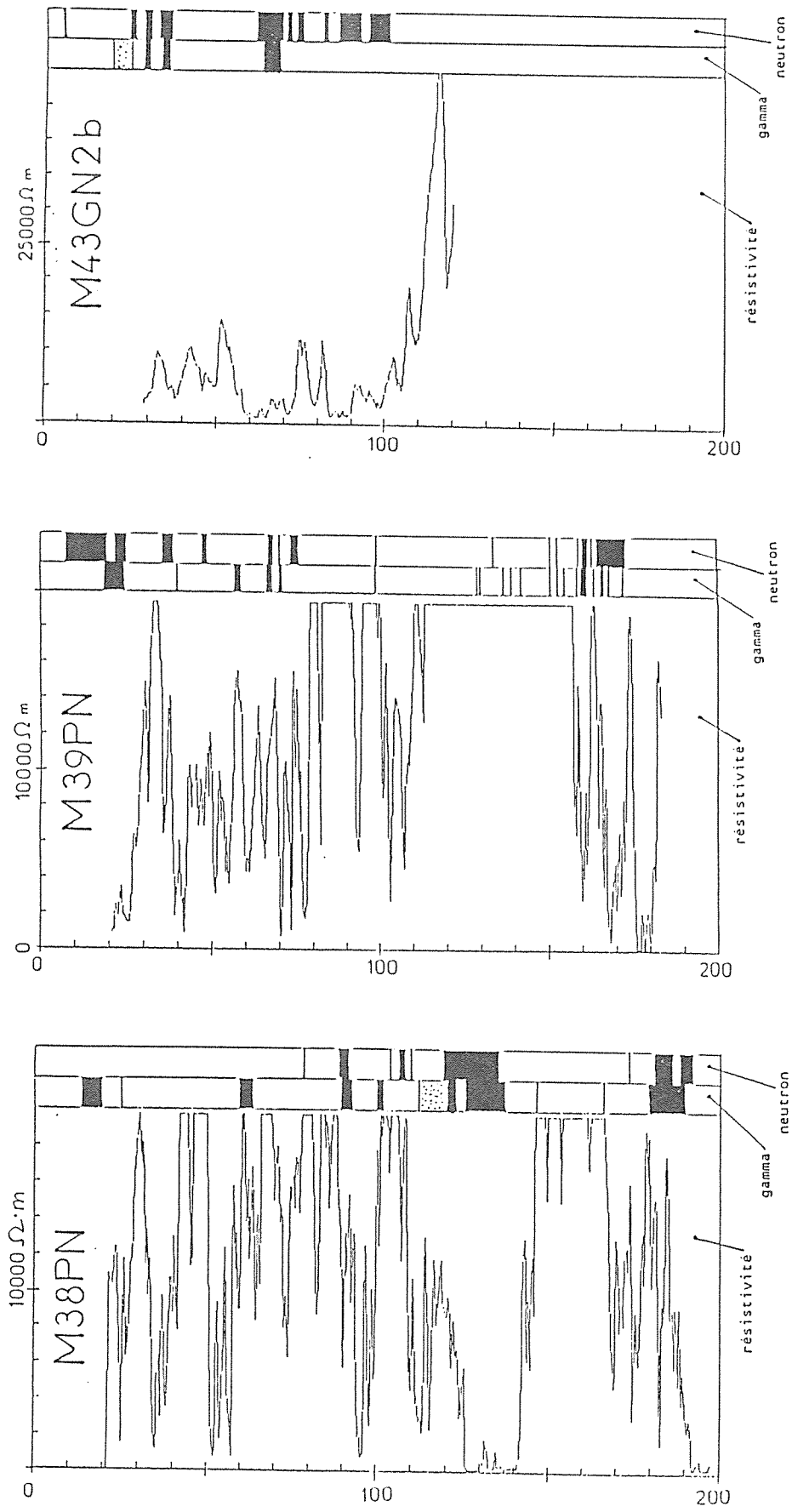


Figure 103: Les trois diagraphies de résistivité sur le site de Margnac. On a également représenté les principales anomalies en "gamma-ray" et "neutron". Le forage M38 est le seul à traverser une épisyénite (125 à 140 m environ). Les phénomènes de saturation sont de nature instrumentale.

précédemment étudié: le milieu est ici, à nouveau, particulièrement hétérogène. On évitera en conséquence l'inflation des anomalies pour n'en discuter que l'une ou l'autre.

Forage M38

La figure 104 donne les deux enregistrements NW-SE et SW-NE. On note la dérive très importante, visible sur la courbe brute SW-NE et extraite par filtrage ($D > 64$ m, cad fréq. $< 1/300$). Le filtre est un peu trop sélectif pour bien représenter les effets de l'inclinaison du trou: une "dérive" calculée de façon élémentaire (en fonction de la seule géométrie du dispositif et d'une résistivité moyenne), figure 105, contient plus de hautes fréquences et suit mieux l'évolution TBF du signal.

La figure 106 reprend la diagraphie de résistivité. On y distingue quatre unités électriques notables:

- 20 à 125 m : résistant hétérogène
- 125 à 140 m : très conducteur: le forage traverse ici l'épisyénite
- 140 à 165 m : très résistant (saturation des appareils)
- 165 à 190 m : résistant et hétérogène

Les deux enregistrements perpendiculaires, légèrement filtrés et dont les amplitudes ont été compensées de l'atténuation naturelle, illustrent bien la complexité du milieu. On y retrouve cette corrélation, gênante pour notre objectif, entre les hétérogénéités traversées, visibles sur la diagraphie, et les variations sur les sondages "DSPF". On peut noter l'extraction spectaculaire du point d'inflexion au voisinage de 145 m, lié à une transition de résistivité (courbe NWSE): cette anomalie se devine à peine sur la courbe brute et montre l'intérêt de la compensation de l'atténuation naturelle avec la profondeur (courbe brute; figure 104).

Forage M39

Voisin du précédent, ce forage ne traverse pas l'épisyénite conductrice. Entre les cotes 125 m et 140 m, figure 107, nous rencontrons

au contraire un niveau particulièrement résistant.

L'examen des courbes M39SEW et M39SWNE, figure 107 et 108, donne une anomalie, assez distincte, au voisinage de 130 m. Sa longueur d'onde est plus importante sur l'enregistrement SEW. Du fait de cette différence, on préfère ne pas associer ces deux occurrences, malgré leur profondeur identique. L'anomalie vers 128 m, enregistrement M39SEW est interprétée de la manière habituelle. On obtient:

distance au forage : 40 m

azimut : direction du forage M38

rayon de la sphère équivalente : 18 m (pour ρ encaissant = 20000 Ω .m)

Or, la structure traversée par le forage M38, à cette même profondeur, correspond bien à ces résultats. Ainsi, selon toute probabilité, et ce, malgré les incertitudes diagraphiques dues à la saturation, c'est bien ce conducteur que l'on détecte, à distance, sur l'enregistrement M39SEW.

Quant à l'anomalie que l'on remarque sur le M39SWNE, elle se situe environ à la même profondeur, mais à 15 m du forage. On trouve ici un rayon équivalent de 14 m. La source, si elle existe et est un conducteur, se trouve au nord-est du forage (à cette profondeur).

Forage M43

Il est isolé des deux précédents. On ne peut, dans l'état actuel des choses, trop chercher à y sélectionner des anomalies. Sur la figure 109, qui montre les enregistrements bruts, on remarque un événement important en fin de trou: une remontée importante du signal. La diagraphie électrique fait état d'un niveau résistant à cette profondeur (figure 105). Un modèle de couche résistante horizontale produit une anomalie de signe contraire de celle rencontrée sur la figure 109 (M43SWNE). Par contre, une même "couche", disposée verticalement, permet de retrouver la même allure, encore que l'absence d'une suite au signal ne permette pas de certitude. Remarquer que le filtrage ($4 < D < 16$) crée une belle anomalie typique, mais bien "artefactuelle" (figure 110).

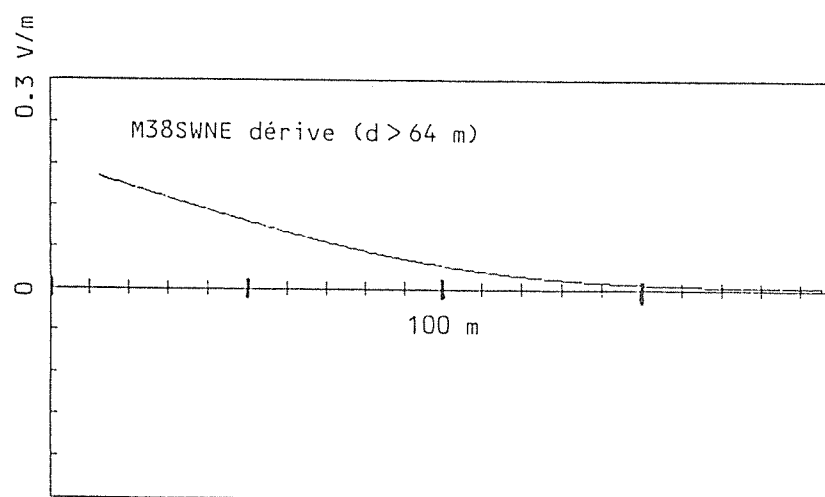
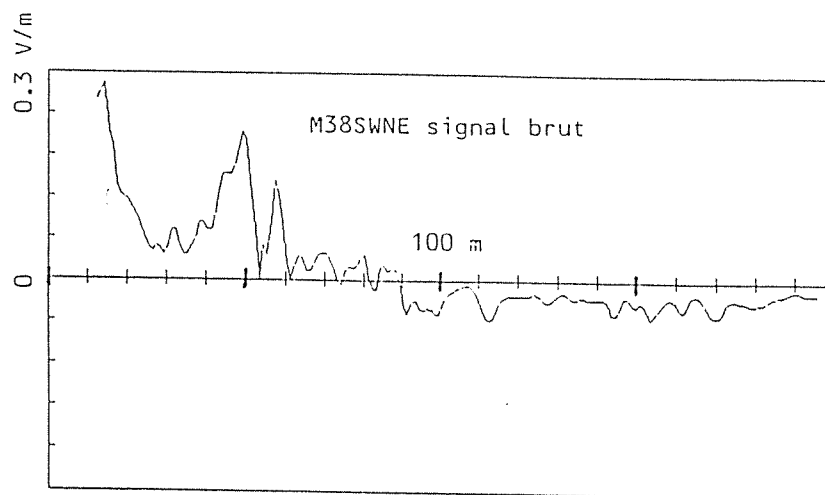
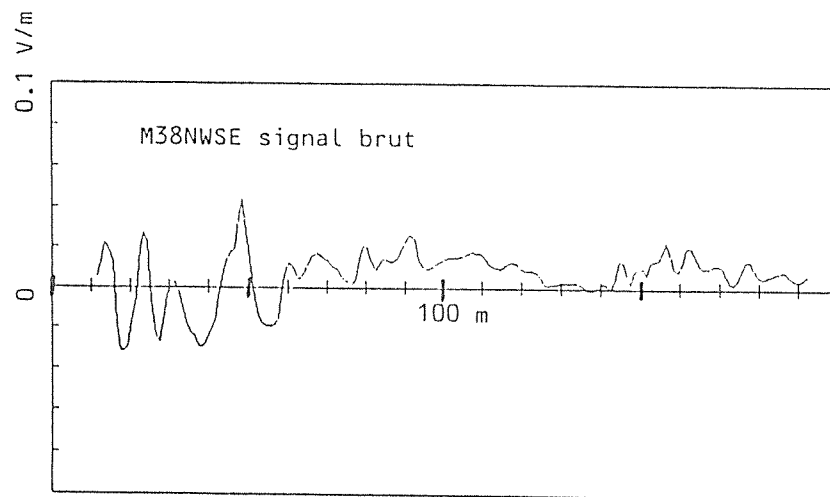
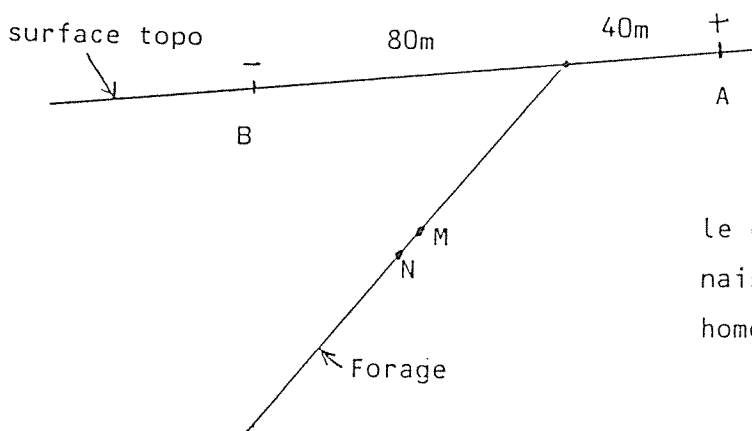
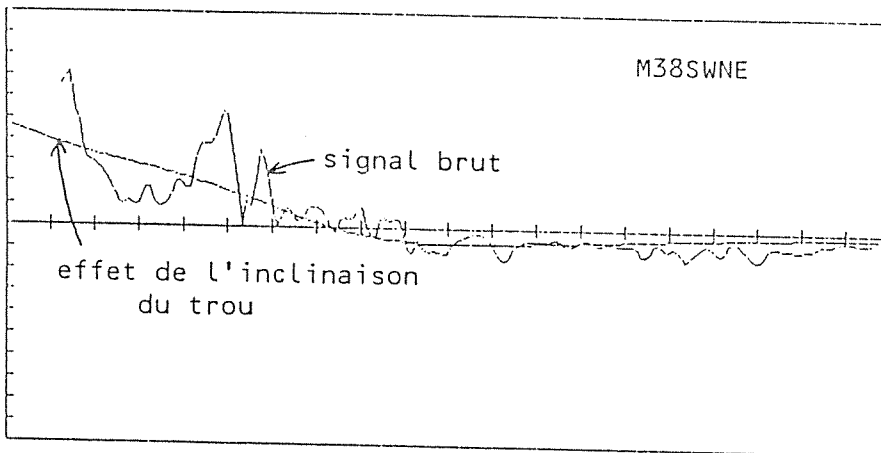


Figure 104: Forage M38: signaux bruts et une dérive. Comparer la dérive avec celle obtenue de façon élémentaire, Fig.105.



Géométrie pour le calcul de l'effet d'inclinaison. On suppose le terrain homogène et isotrope.

Figure 105: Effet sur le gradient du potentiel de l'inclinaison du forage et de la disposition des électrodes. La "dérive" calculée de façon élémentaire représente bien les variations basses-fréquences du signal. On a pris ici $\rho = 2000 \Omega m$.

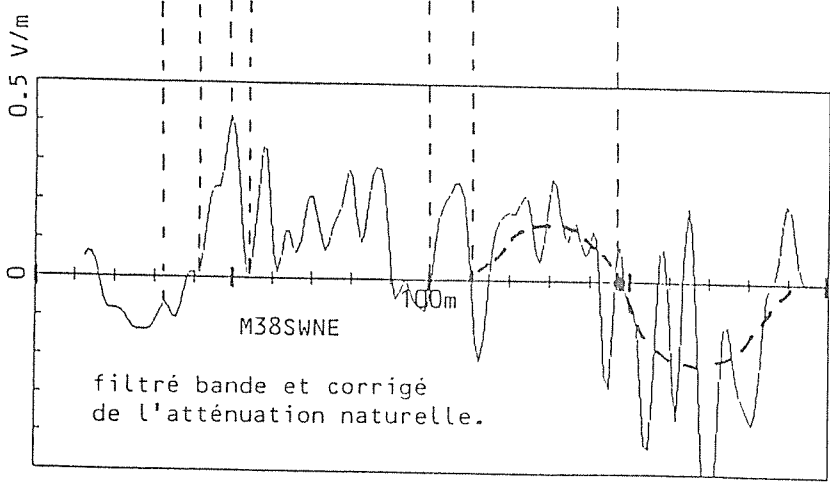
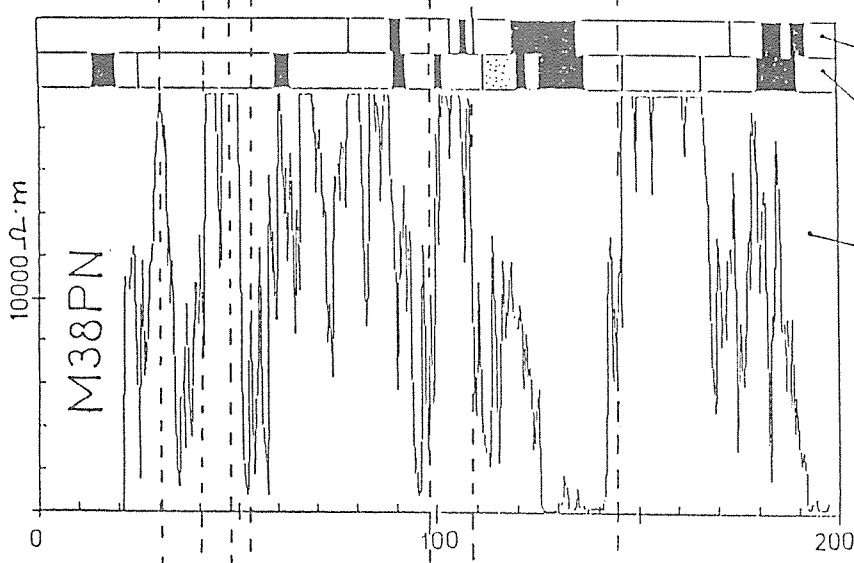
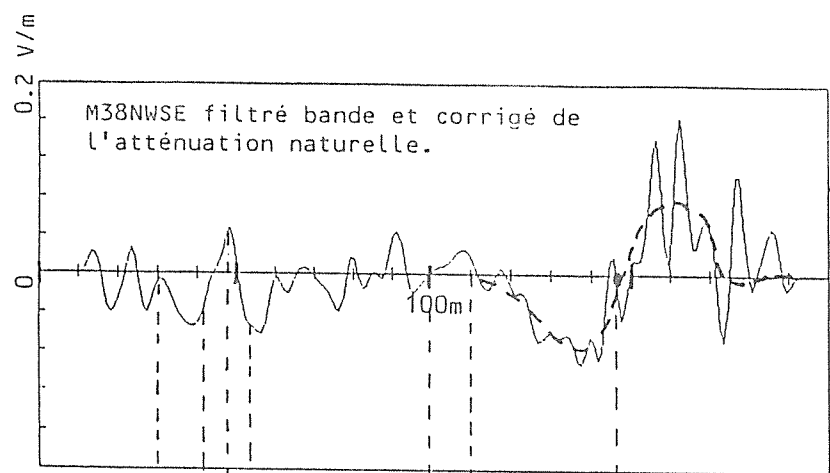
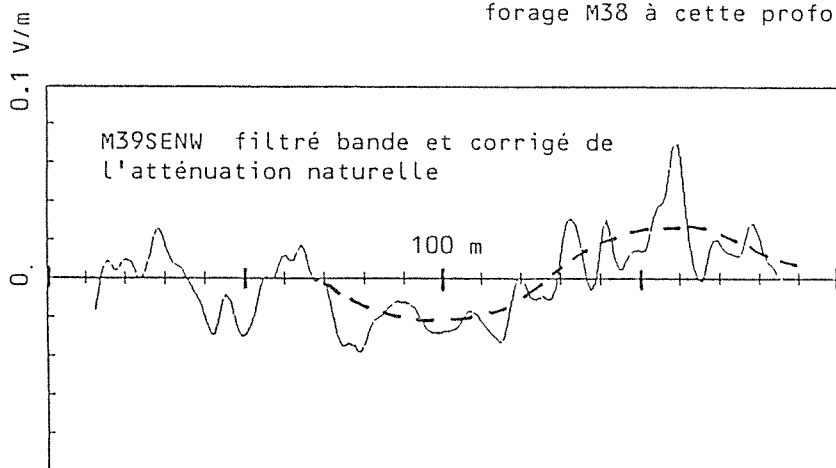


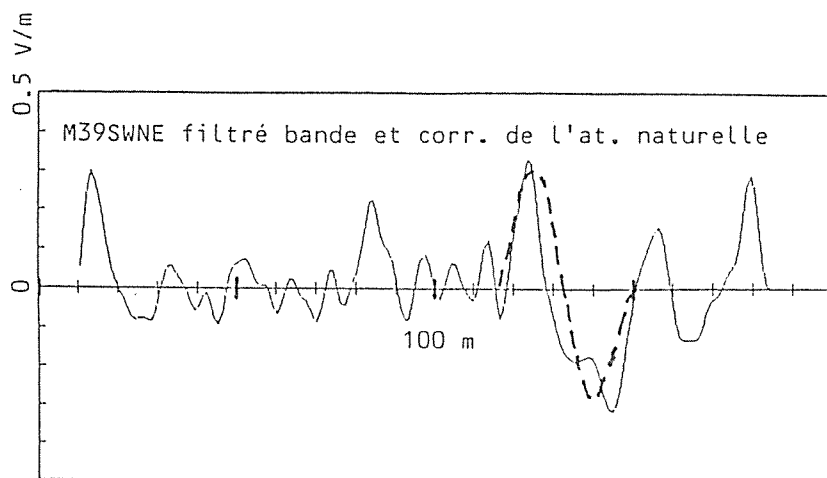
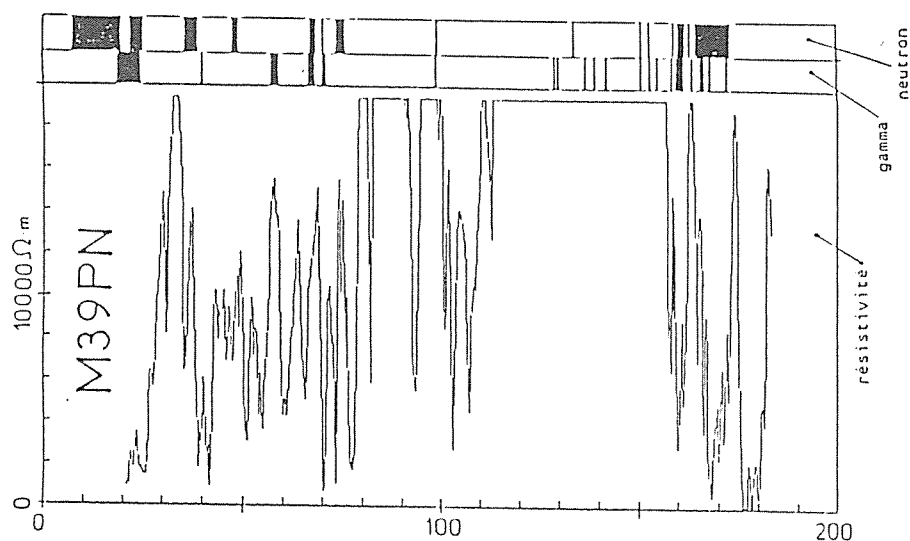
Figure 106: Forage M38. Diagramme de résistivité et mesures "DSPF" corrigées de l'atténuation naturelle. Ce forage traverse une épisyénite entre 125 et 140 m.

Noter la remarquable corrélation entre la diagramme et les mesures de prospection en forage.

Figure 107: Forage M39. Diagraphie de résistivité et mesures "DSPF". L'anomalie extraite sur le M43SENW peut correspondre à l'épisyénite traversée par le forage M38 à cette profondeur. L'absence de détail sur la diagraphie (due à la saturation instrumentale) ne permet cependant pas de trancher avec certitude.



L'anomalie relevée sur le M39SWNE peut correspondre à un autre conducteur ou au même: il conviendra de faire un modèle.



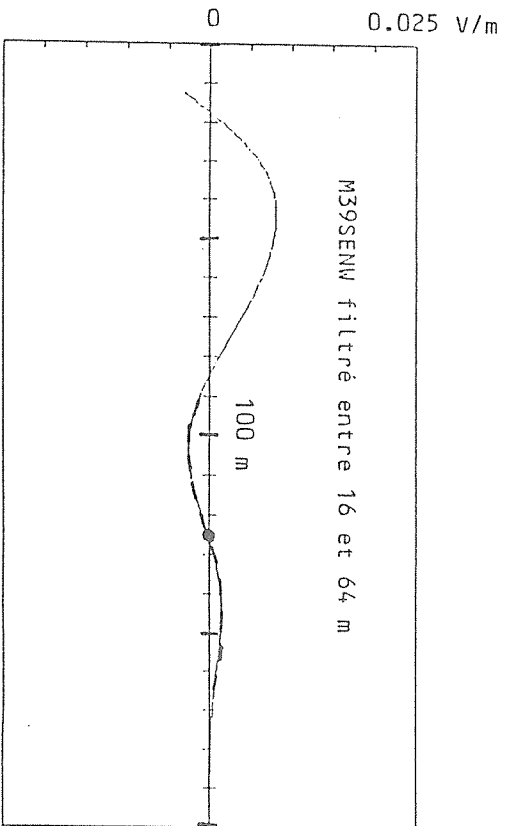
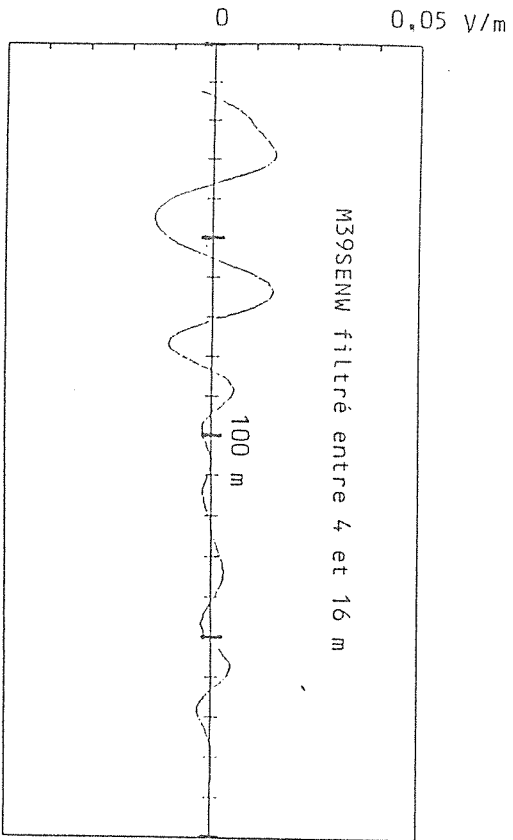
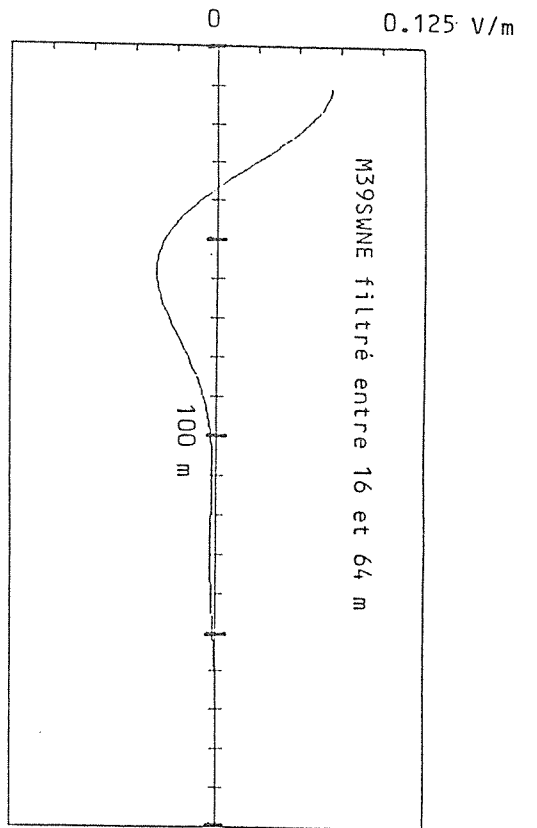
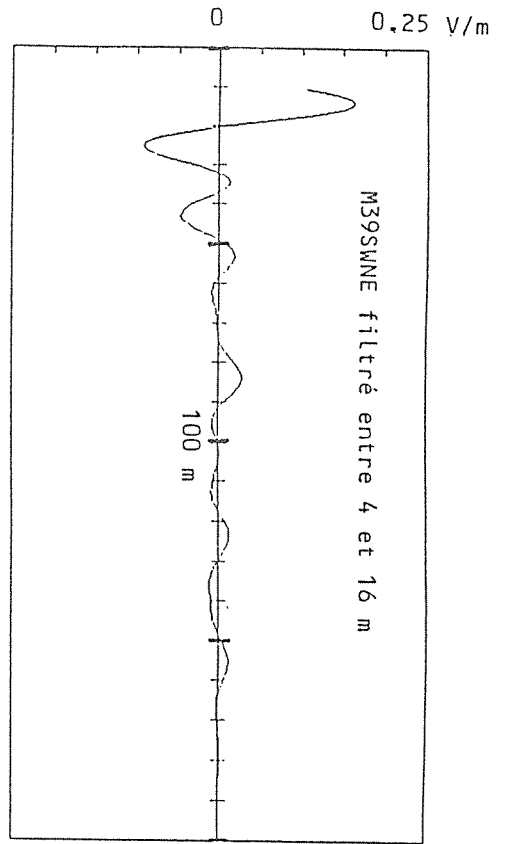
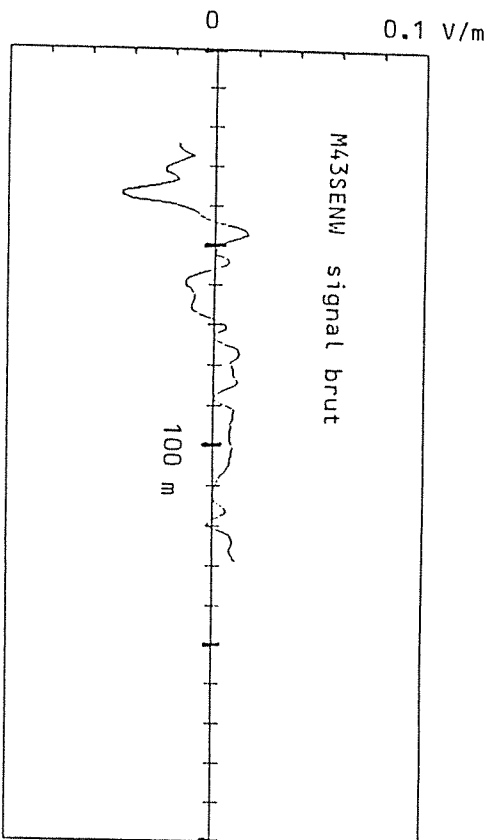
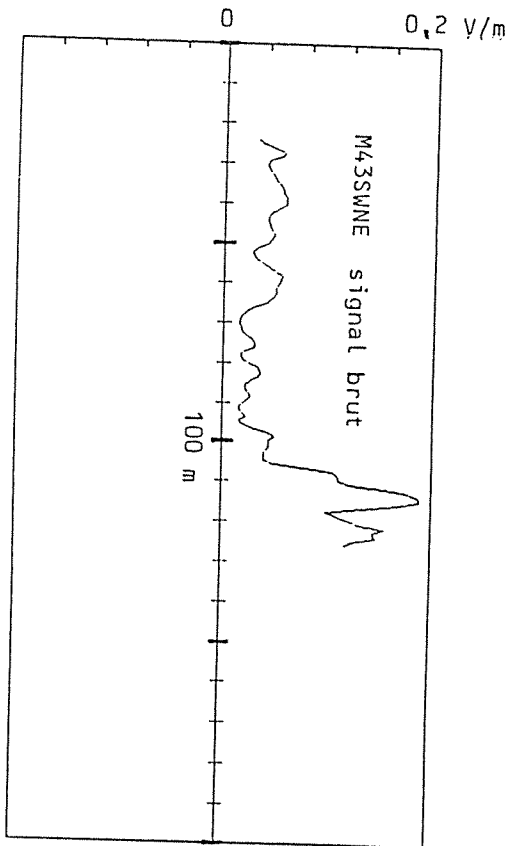
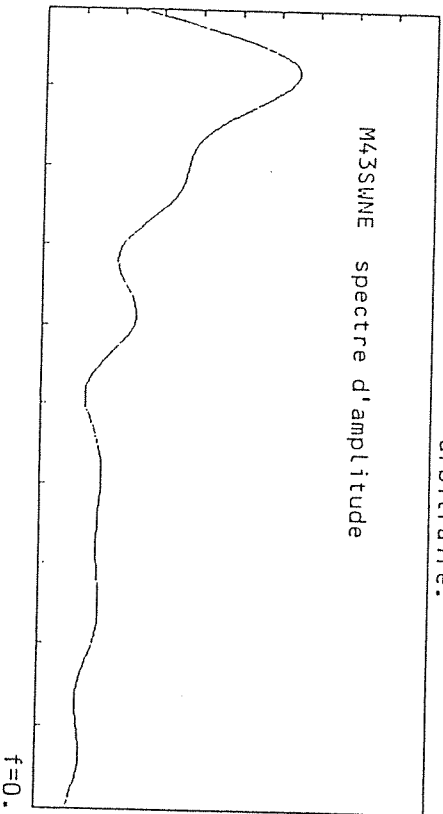


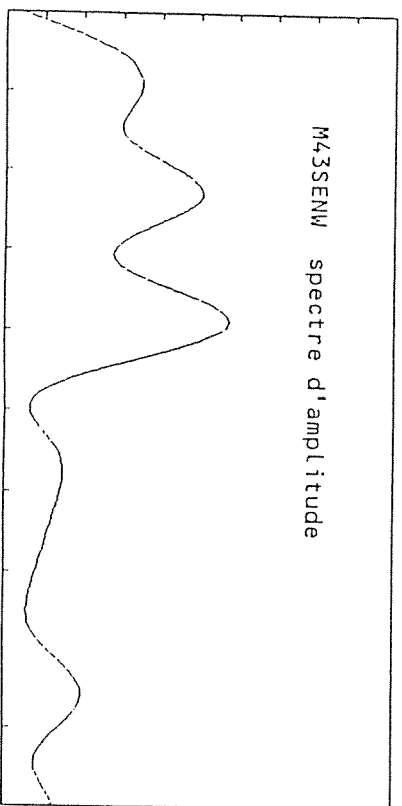
Figure 108: Forage M39: signaux filtrés. L'anomalie centrée vers 125 m, en bas à droite, peut correspondre à l'épisyénite traversée par le forage voisin M38.



Sur les spectres, la fréquence est en cycles par période d'échantillonnage. L'échelle en y est arbitraire.



f=0.1



f=0.1

Figure 109: Forage M43. Mesures de prospection: signaux bruts et leurs spectres d'amplitude. La forme sur la fin de l'enregistrement M43SWNE se modélise bien par une transition de résistivité (voir par ailleurs la diagraphie de ce forage, fig.103).

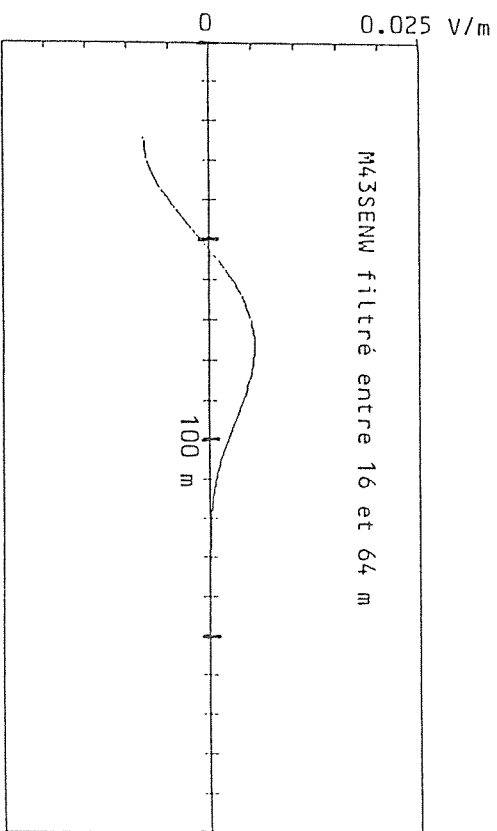
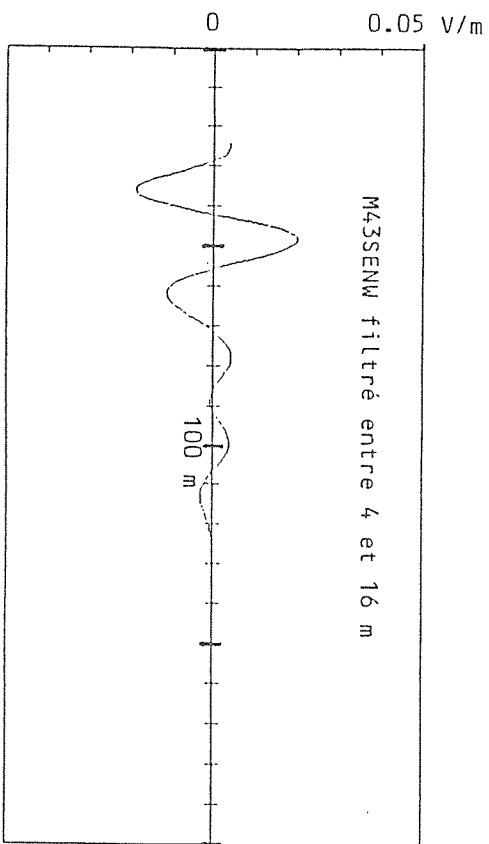
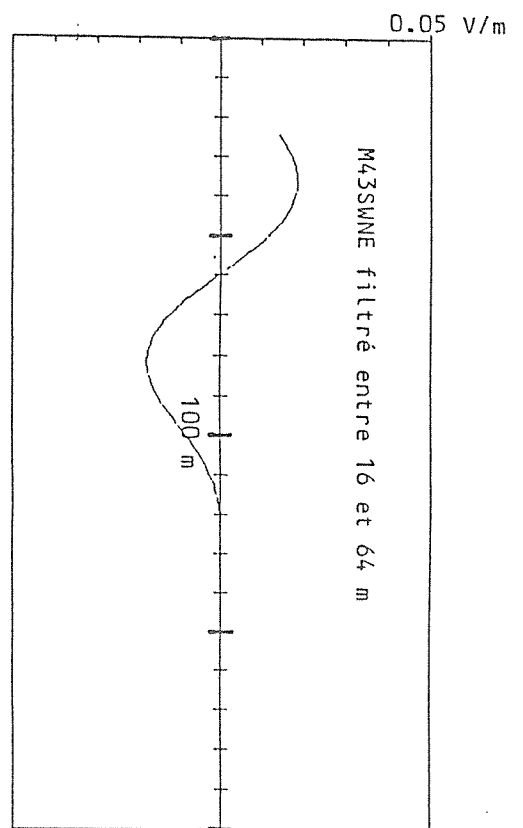
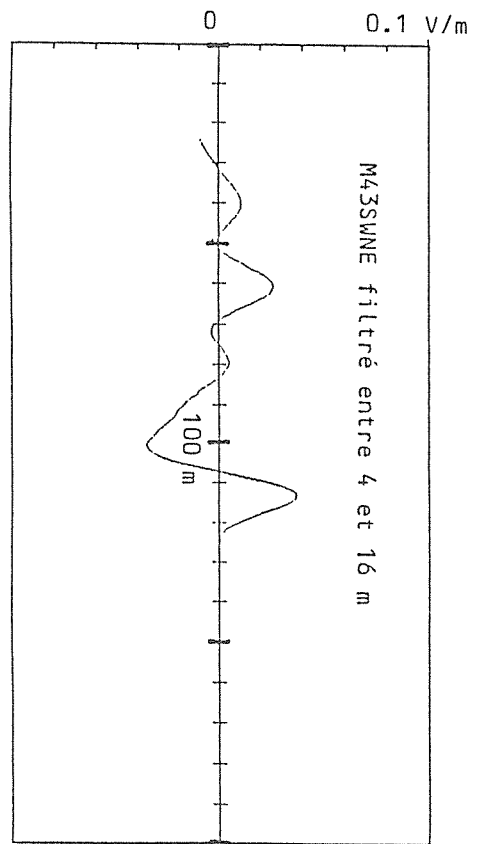


Figure 110: Forage M43. Enregistrements filtrés. Noter l'anomalie vers 110 m de la courbe M43SWNE (entre 4 et 16 m). Elle correspond à la transition conducteur-résistant visible sur la diagraphie de ce forage (Fig.103).

VIII.4. Mission sur le site de St-Symphorien-de-Marmagne.

S'il est toujours question d'uranium dans le granite pour ce site du Morvan, le géo-système diffère ici notablement des deux précédents. Le granite est particulièrement hétérogène: on y rencontre des zones chloritisées, hématisées, des leptynolites (roches du métamorphisme de contact), des mylonites (zones de fracture où la roche a été broyée), etc...

Les trois forages que nous avons pu explorer, avec l'aimable autorisation de la Société Elf-Aquitaine, sont verticaux et voisins. La figure 111 montre leur implantation sur un fond topographique. Les trois diagraphies de résistivité effectuées dans ces trois forages sont représentées sur la figure 112, conjointement aux "logs" géologiques simplifiés établis par le géologue local et aux principales anomalies de radioactivité naturelle. Les relations entre la géologie et la résistivité ne sont pas évidentes. Les zones "commercialement" minéralisées (uranium) sont fréquemment associées à l'hématisation. Un niveau de base, leptynolitique, se corrèle bien d'un forage à l'autre. Il constitue une limite géologique admise (les forages d'exploration s'arrêtent d'ailleurs à la profondeur correspondante).

Forage SY86

La figure 113 donne les courbes brutes de DSPF ainsi que les dérivées obtenues par filtrage. Ces dérivées s'expliquent aisément, mais non de façon exacte, par la dissymétrie du dispositif utilisé (laquelle est ici intentionnelle), et par les effets topographiques.

La figure 114 reprend la diagraphie de résistivité effectuée sur ce forage. On y trouve également les enregistrements "DSPF" filtrés à l'aide du filtre large-bande et corrigés de l'atténuation naturelle. Des quelques points d'inflexion qui ont été relevés (parmi d'autres possibles), celui qui porte le numéro 3 est digne d'intérêt. En effet, il est difficile de le rattacher à un événement diagraphique et peut donc correspondre à une structure réelle non intersectée. Un conducteur existe à cette profondeur: on peut le relever sur la diagraphie du forage voisin SY87.

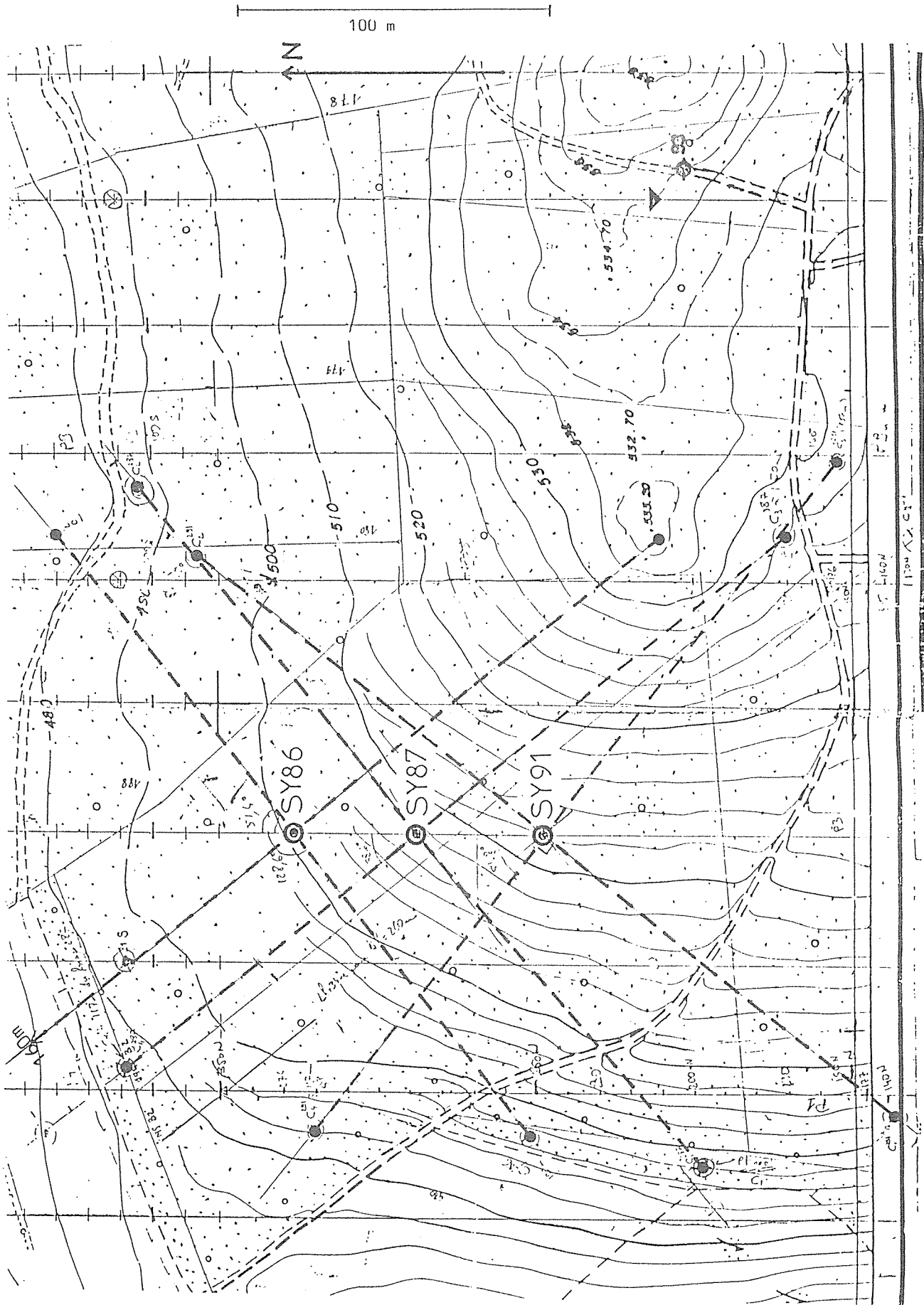


Figure 111: Implantations des forages SY86, SY87 et SY91, ainsi que des électrodes d'injection du courant sur le site de St-Symphorien de Marmagne.

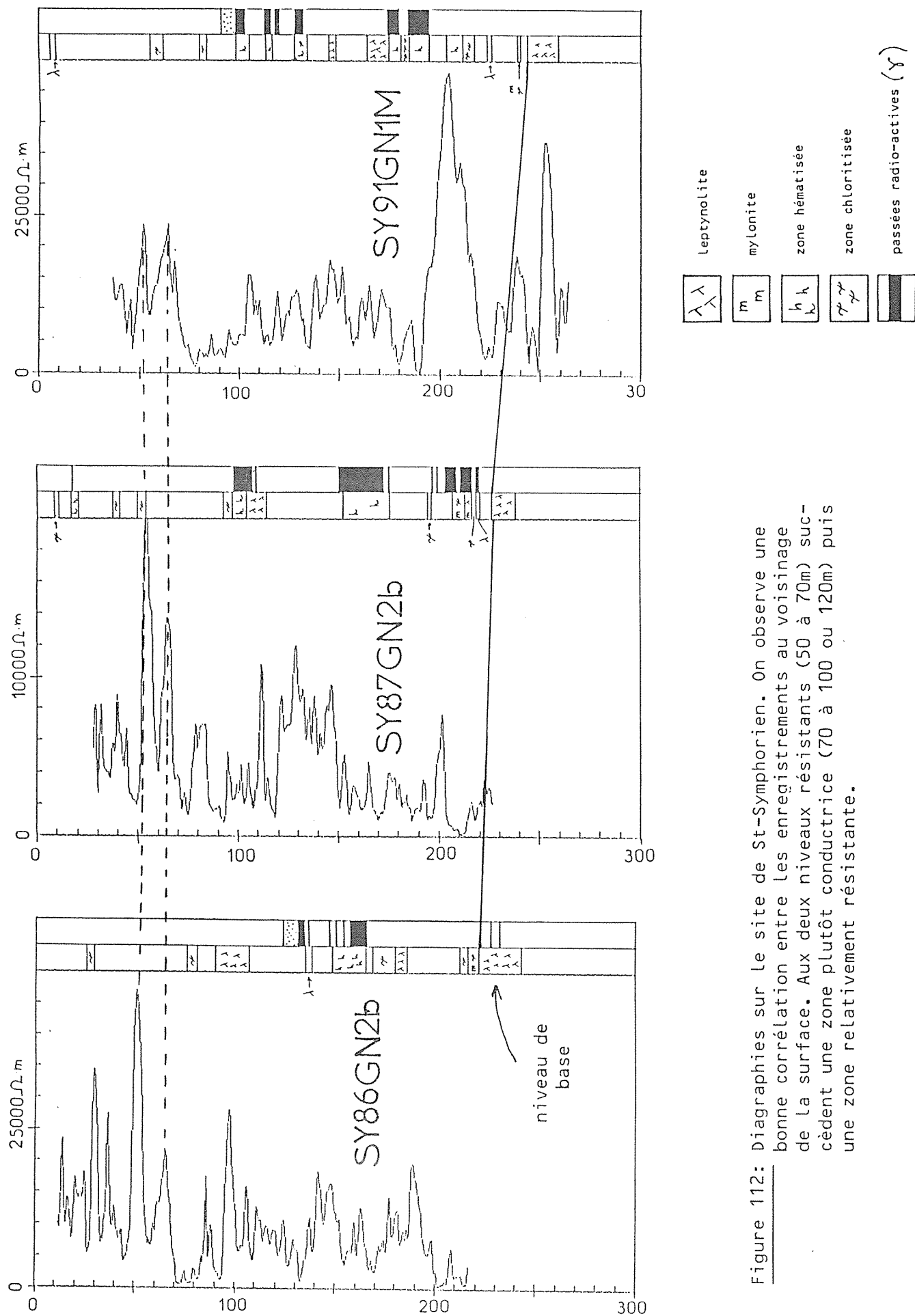


Figure 112: Diagraphies sur le site de St-Symphorien. On observe une bonne corrélation entre les enregistrements au voisinage de la surface. Aux deux niveaux résistants (50 à 70m) succèdent une zone plutôt conductrice (70 à 100 ou 120m) puis une zone relativement résistante.

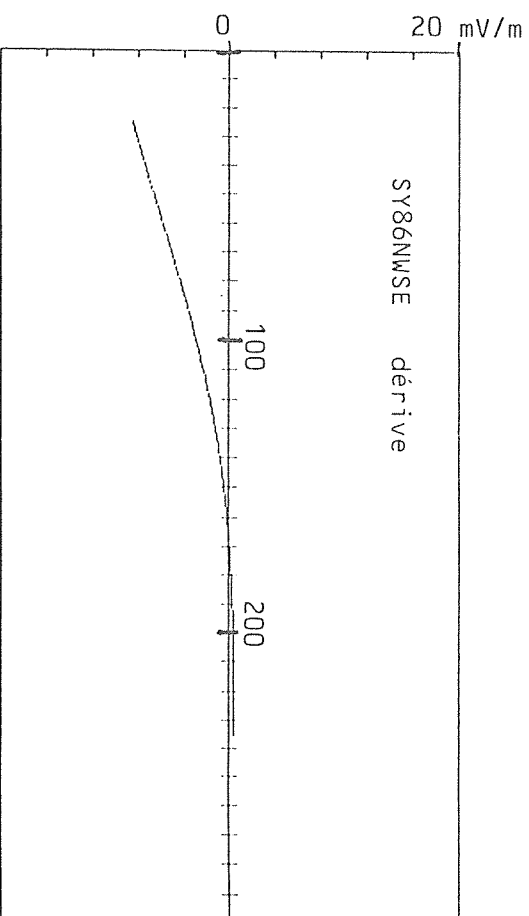
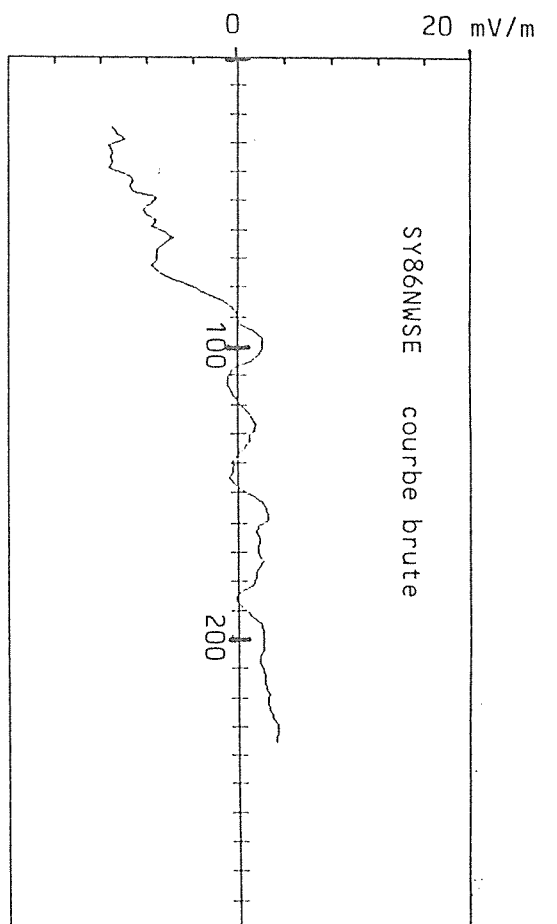
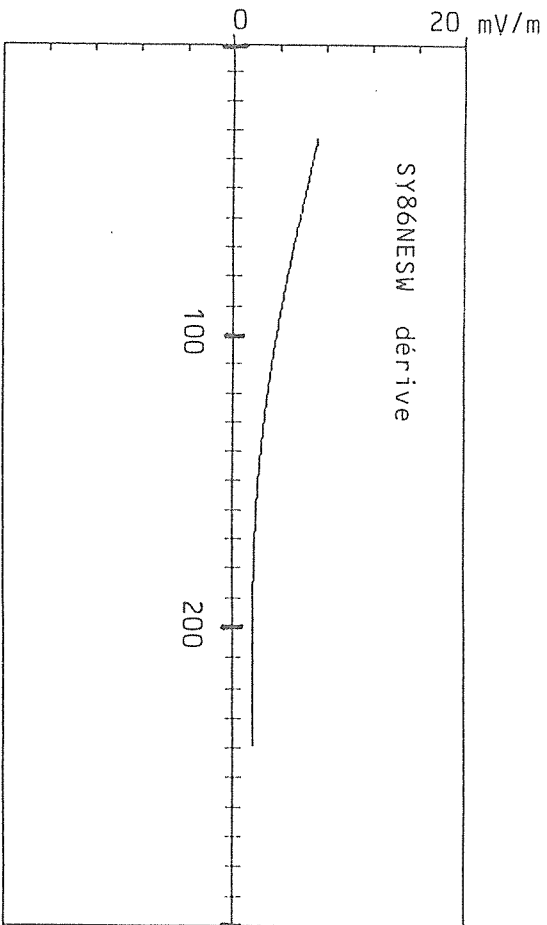
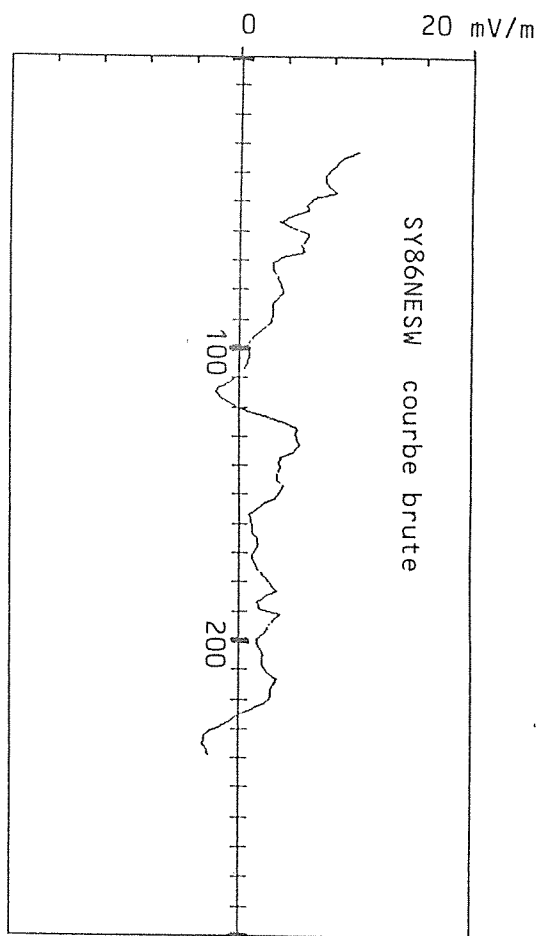


Figure 113: Forage SY86. Courbes brutes et dérivées.

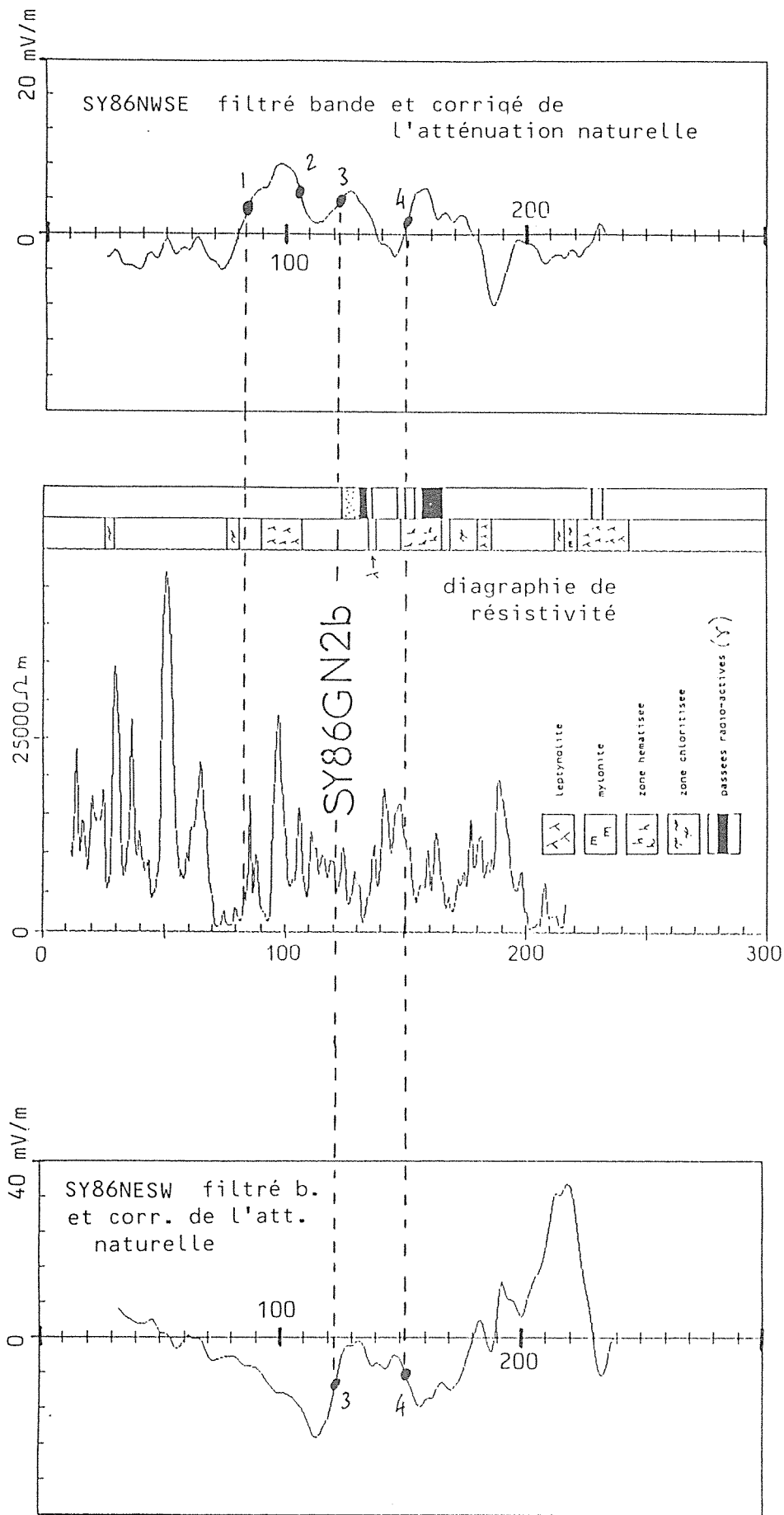


Figure 114: Forage SY86. Diagraphie de résistivité et signaux compensés de l'atténuation naturelle.

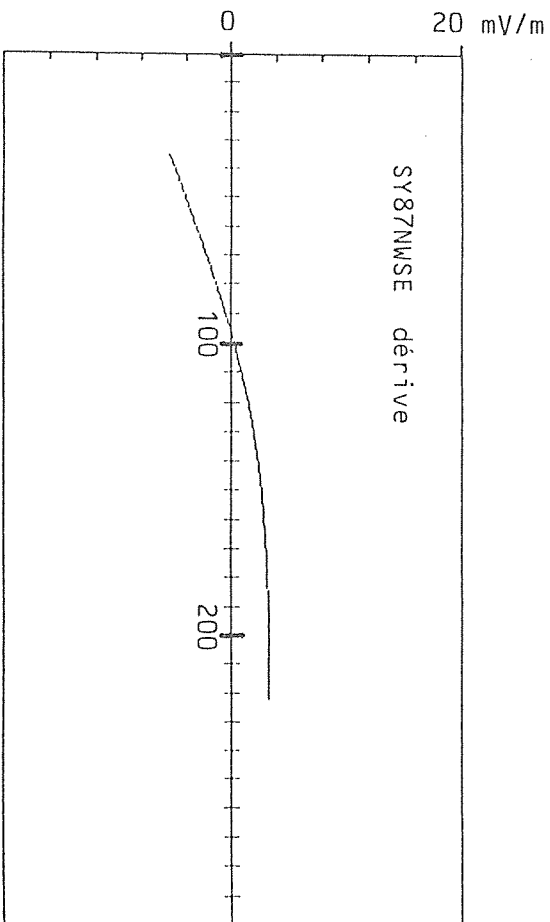
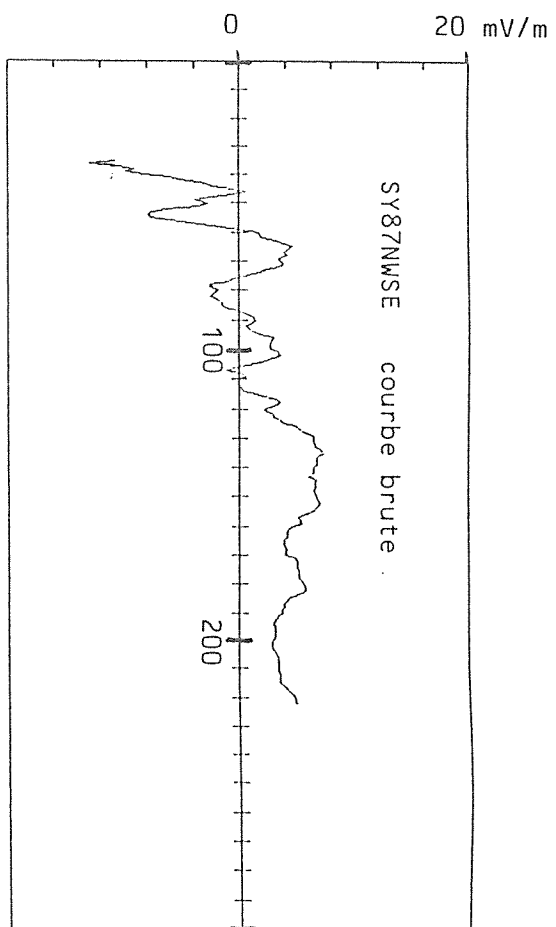
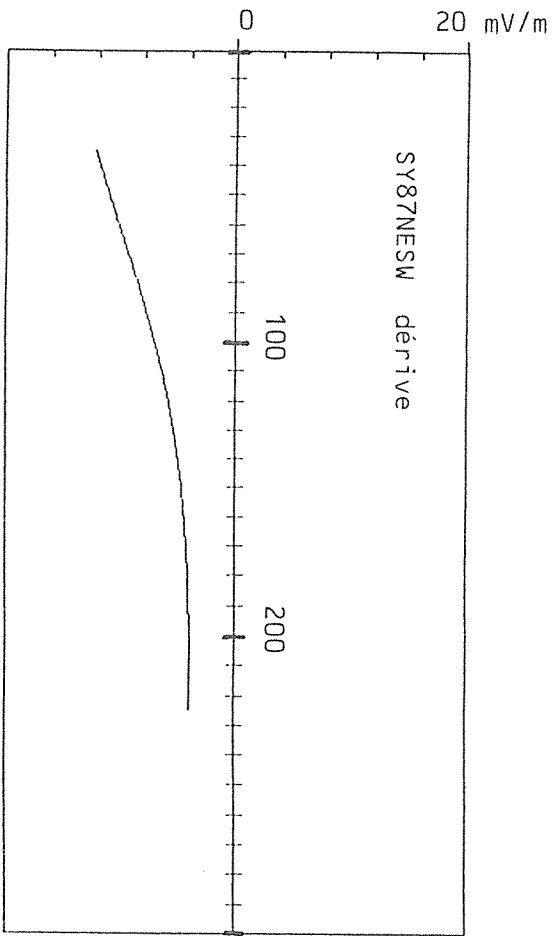
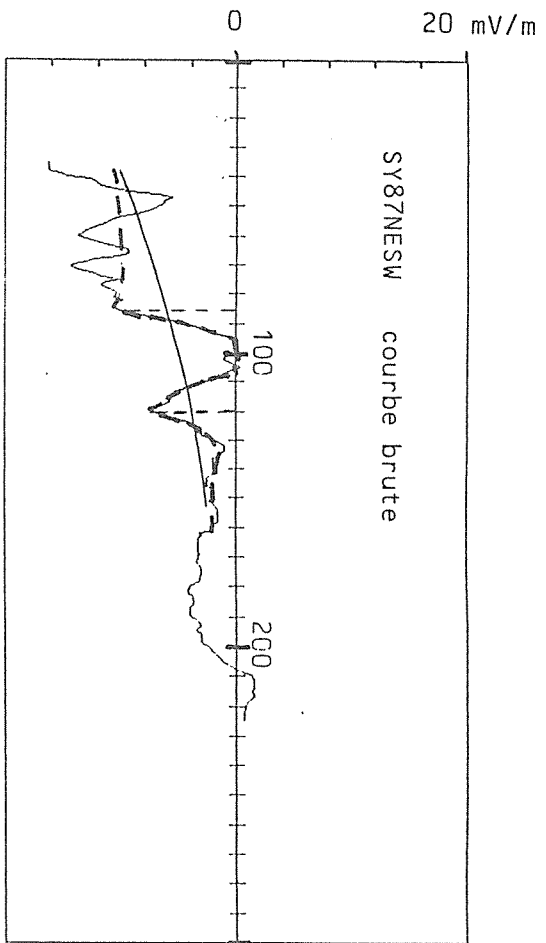


Figure 115: Forage SY87. Courbes brutes et dérivées. L'anomalie en pointillés correspond à une zone conductrice bien visible sur la diagraphie (fig. 116), entre 85 et 120 m. Sa forme est à rapprocher de celle du modèle représenté sur la figure 120.

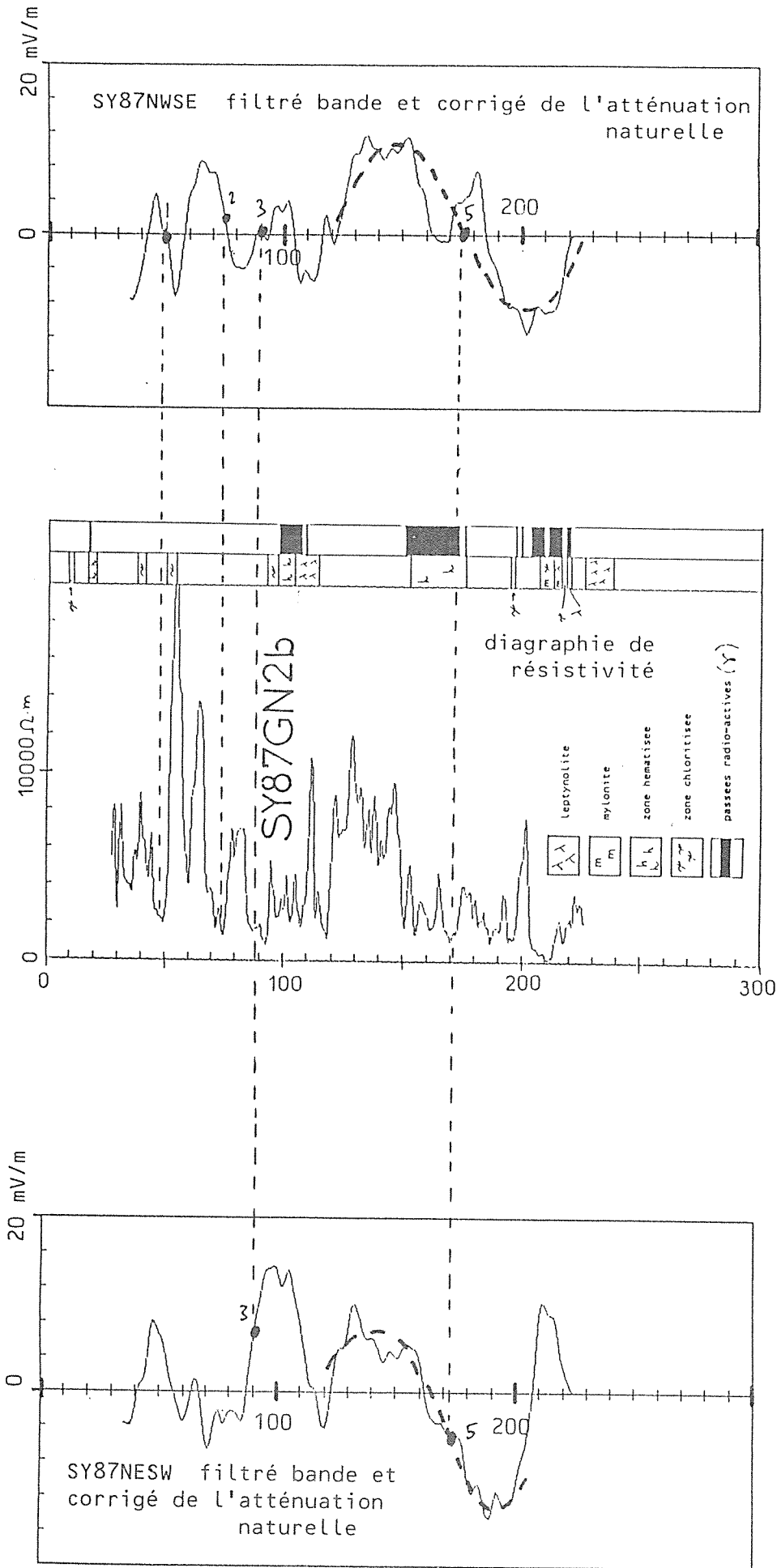


Figure 116: Forage SY87. Diagraphie de résistivité et mesures "DSPF" compensées de l'atténuation naturelle. Les points d'inflexion 1,2 et 3 coïncident bien avec des conducteurs relatifs. Une interprétation en terme de sphère de l'anomalie 5 situerait une structure à proximité du forage SY86. En fait, il semble plus probable que cette anomalie soit associée à la transition entre la zone relativement résistante (120 à 150 m) et la zone relativement conductrice (au-delà de 150 m).

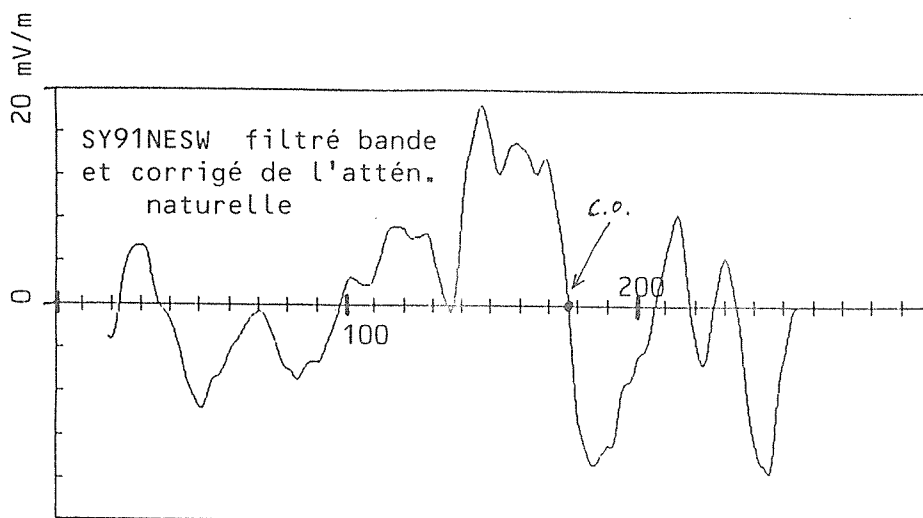
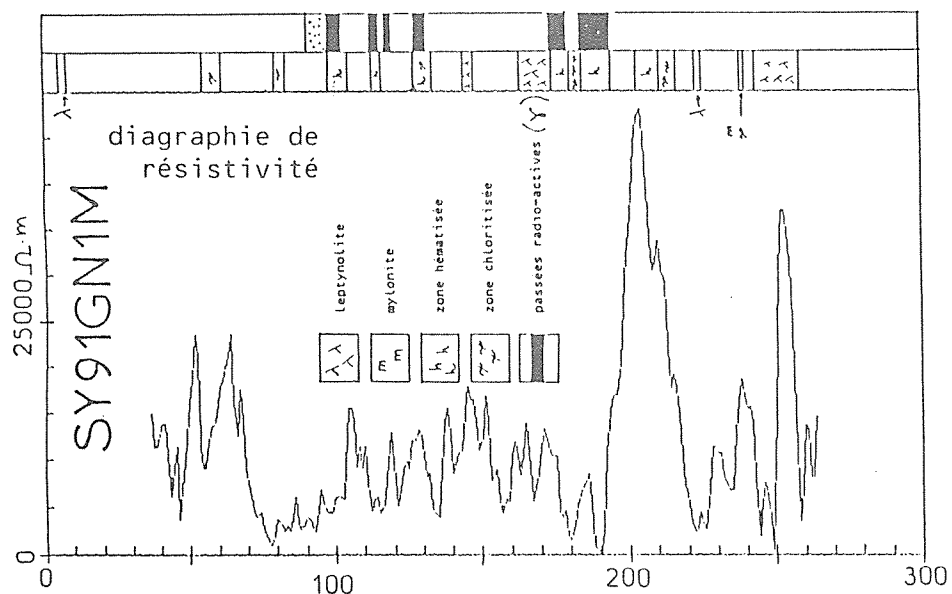
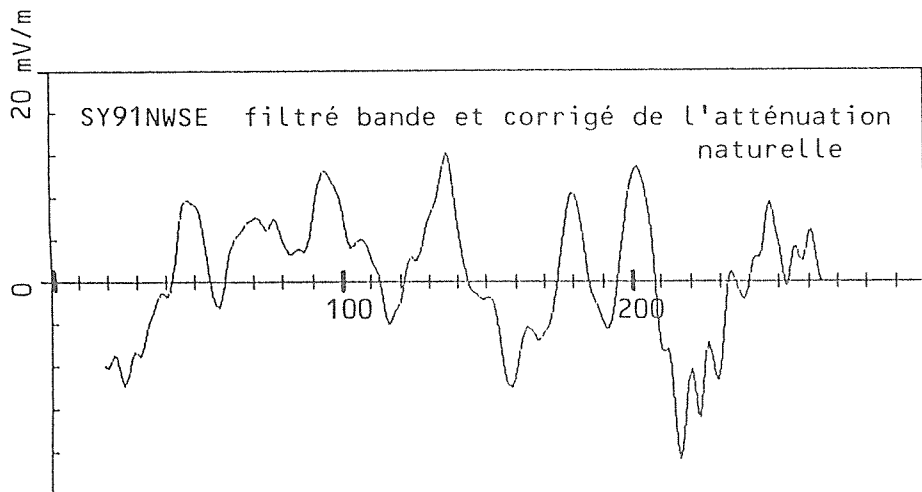


Figure 117: Forage SY91. Diagraphie de résistivité et signaux compensés de l'atténuation naturelle. Le "cross-over" voisin de 180 m sur le signal NESW est très probablement lié à la transition entre le niveau conducteur (175 à 190 m) et le niveau résistant (190 à 220 m).

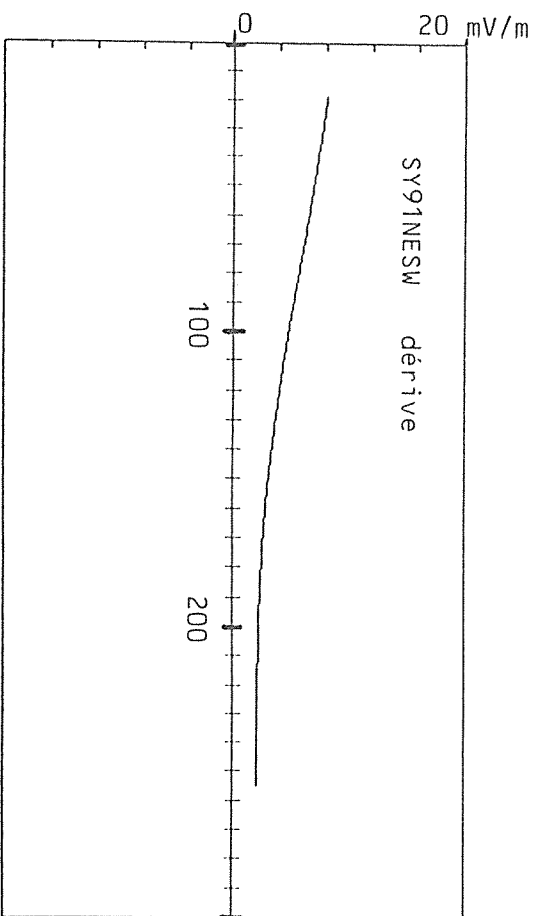
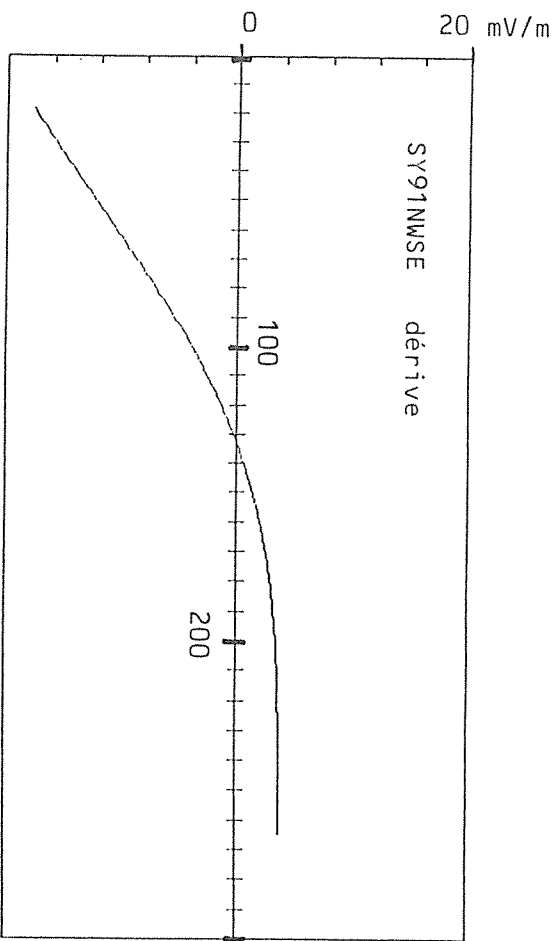
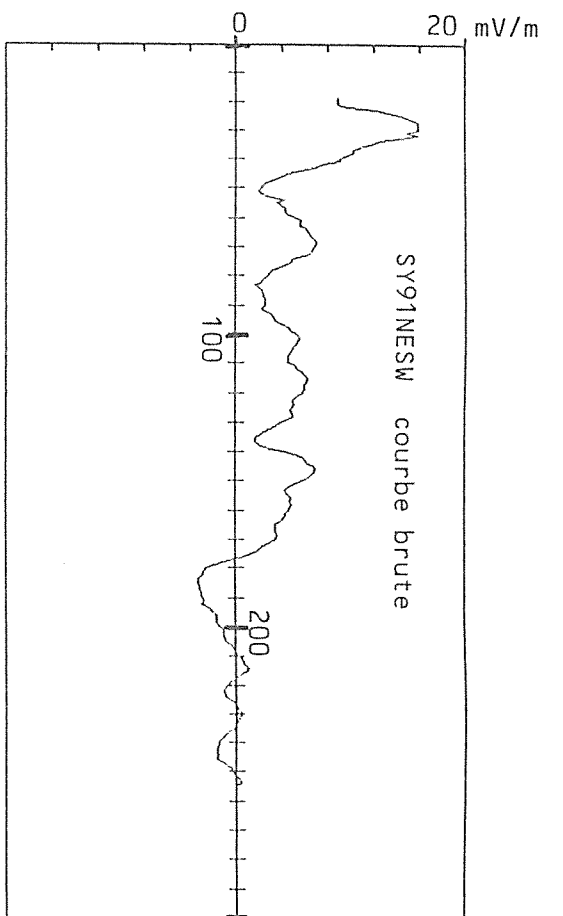
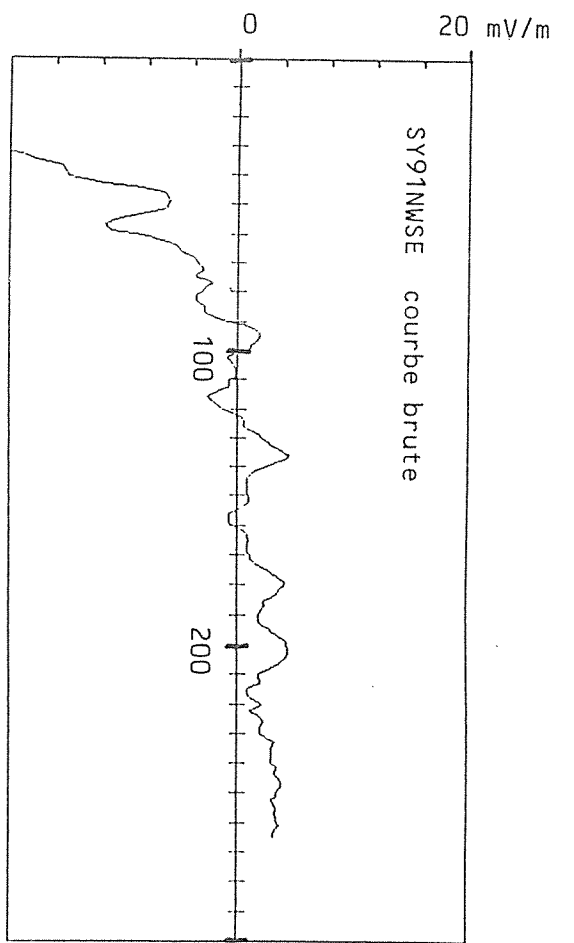


Figure 118: Forage SY91. Courbes brutes et dérivées.

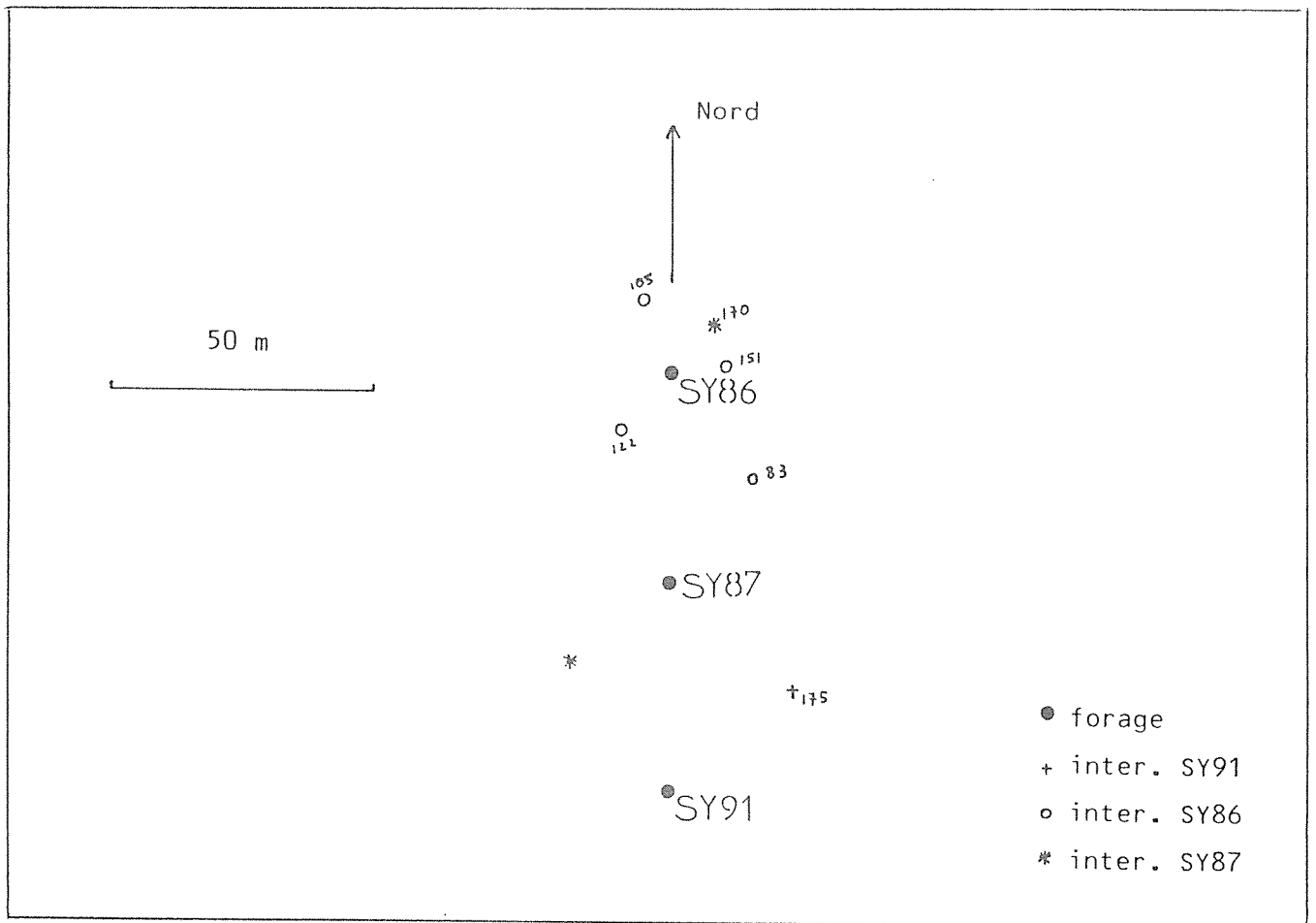


Figure 119: Carte des anomalies interprétées en terme de structure sphérique sur le site de St-Symphorien. Comme pour le site "DT", il n'existe guère de point qui soit obtenu de plusieurs forages à la fois. Ici encore, les "anomalies" sont dues aux terrains traversés et voisins des forages.

10 mV/m

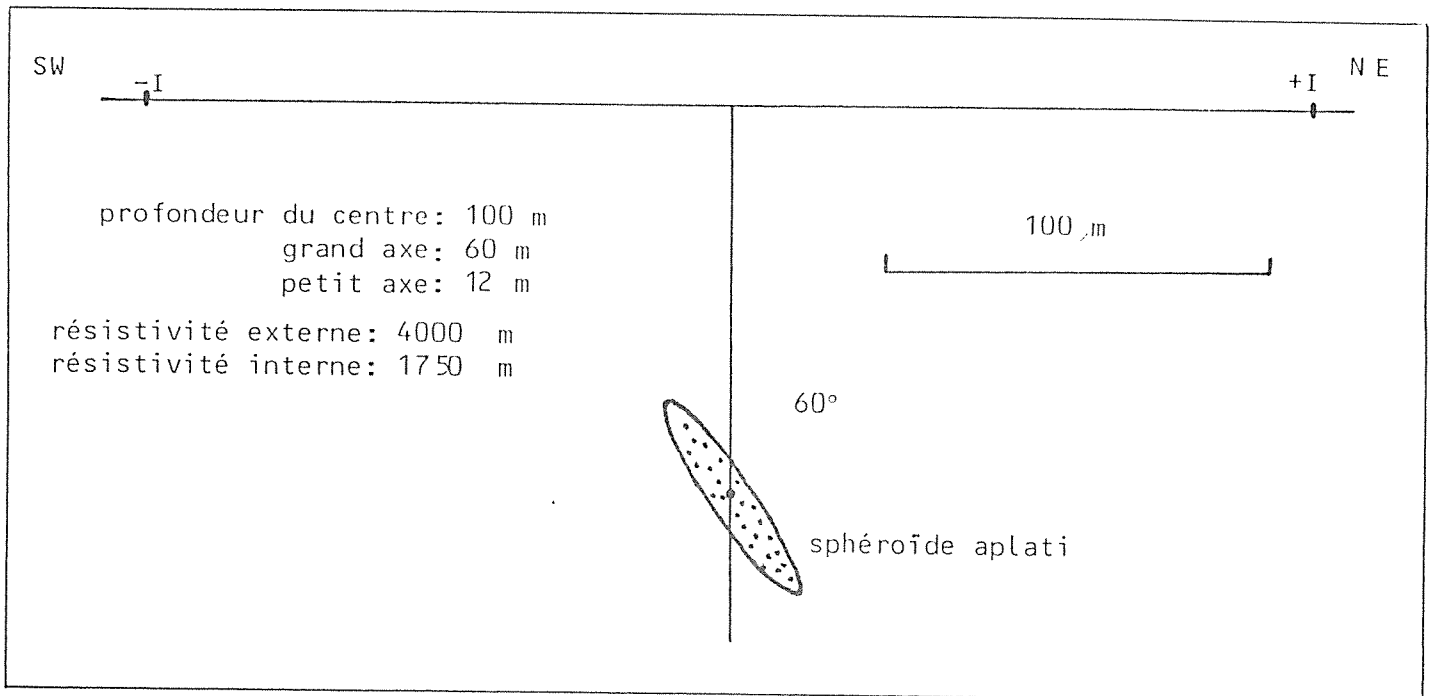
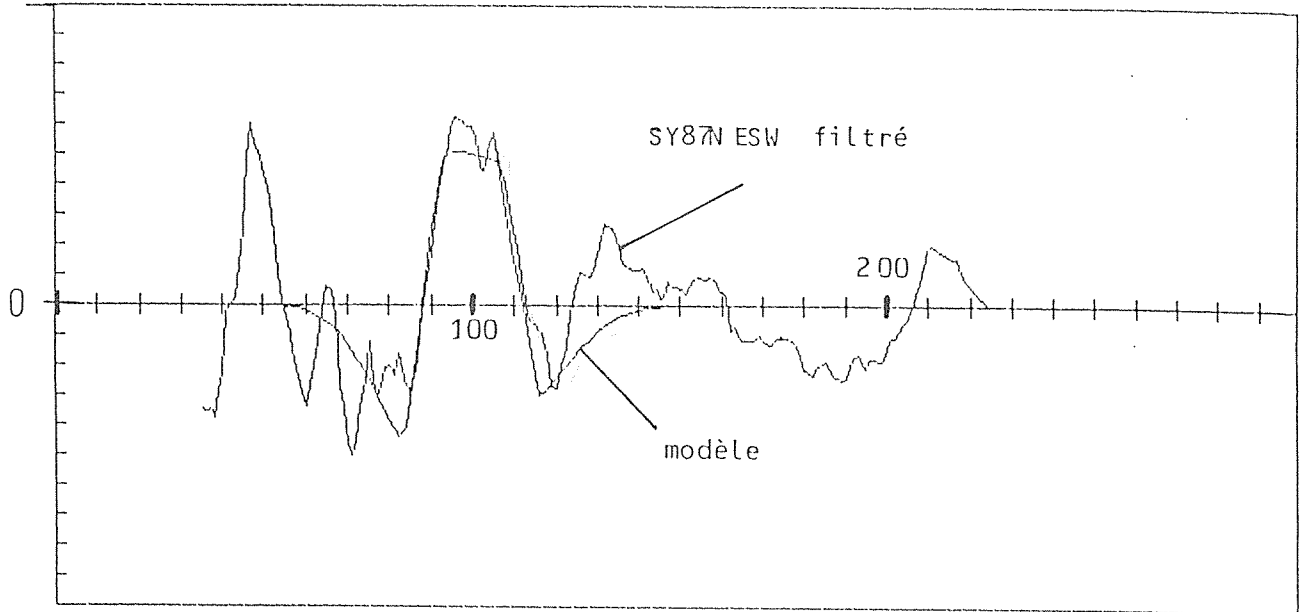


Figure 120: Un exemple de modèle pouvant expliquer la forme d'anomalie relatée sur la figure 115, courbe SY87N ESW. Le signal expérimental a été filtré de sorte qu'il ne reste que les fréquences spatiales comprises entre 2 et 200 m. Ce modèle est loin d'être la seule solution possible. Son extension et son inclinaison sont difficile à préciser.

Forage SY87

La figure 115 représente les signaux bruts et les dérives des mesures effectuées dans ce forage. La forme relevée sur l'enregistrement SY87NESW peut-être mise en rapport avec celle donnée par le modèle présenté sur la figure 120. Sur la figure 116 où sont reportées la diagraphie et les mesures corrigées de l'atténuation naturelle, une anomalie majeure, numérotée 5, a été mise en valeur. Elle est sans conteste à rattacher à la transition entre le résistant (120 à 160 m) et le conducteur (>160 m).

Forage SY91

L'examen des courbes correspondantes n'apporte pas d'élément nouveau. Les figures 117 et 118 sont relatives à ce forage et présentent les enregistrements que nous avons obtenus.

Bilan des résultats sur le site de St-Symphorien.

On a reporté sur une carte de synthèse, et comme il avait été fait pour le site des Gouttes, un certain nombre d'interprétations en terme de structure sphérique .

A nouveau les résultats ne sont pas très probants... Les points semblent distribués de manière aléatoire, comme sur l'autre site cité (figure 119).

VIII.5. Synthèse et conclusions.

Il n'aura pas échappé au lecteur que la complexité géologique des trois sites étudiés n'ont pas permis de procéder à une interprétation sûre et univoque des résultats expérimentaux obtenus. Le problème auquel nous nous sommes heurté est de même nature dans les trois cas: l'influence des hétérogénéités traversées et distribuées de façon quelconque, est prépondérante. Les sites ne correspondent pas aux cas types du champ d'application de notre méthode. Compte tenu de la nature très hétérogène des terrains rencontrés, il est nécessaire de réviser le

concept même de champ primaire. En effet, en présence d'hétérogénéités nombreuses le comportement du champ électrique "primaire" est complexe. Il existe bien évidemment une composante verticale qui induit une réponse des terrains traversés. Celle-ci présente des ressemblances avec les réponses obtenues en diagraphie électrique traditionnelle, puisque dans ce cas c'est précisément la composante quasi-verticale du champ qui est exploitée. Nous ne considérons absolument pas ces commentaires comme un constat d'échec. Qu'il ne soit pas possible de détecter un conducteur distant du forage lorsque le milieu n'est qu'un rassemblement d'hétérogénéités ne se distinguant pas électriquement de la cible elle-même est tout à fait prévisible. Le problème est d'ailleurs le même en prospection de surface. En fait, et durant la période couvrant ce travail, nous n'avons pu accéder à un site plus prometteur. Les raisons en sont multiples:

- les gisements miniers, en France, sont souvent encaissés par des terrains fragiles (schistes): ou bien la tenue du trou est assurée par un tubage qui interdit toute mesure électrique, ou bien le trou est effondré....

- l'exploration minière est pratiquement nulle aujourd'hui en France. Il est difficile de trouver des forages frais, je veux dire: non éboulés.

Comme on le voit, la situation hexagonale n'est pas propice à nos recherches. C'est une question de géologie et de conjoncture.

Une tentative a été faite au Maroc. Un seul forage était disponible. Protégé par un tubage métallique dans sa partie supérieure, il pénétrait ensuite en plein dans un énorme amas sulfuré massif. La taille et la conductivité du gisement étaient telles qu'aucun signal significatif n'a pu être détecté dans le corps. Là encore, notre objectif qui concerne la détection et la délimitation de cibles conductrices non-intersectées ne correspondait pas à la nature du gisement. De nouvelles missions sont actuellement prévues pour tester le DSPF dans des contextes plus adaptés, notamment en Suède en collaboration avec l'université de Lulea et la Compagnie Boliden.

Il faut noter par ailleurs que les informations expérimentales acquises pourraient faire l'objet d'études intéressantes. Les dispositifs que nous avons employés possèdent un rayon d'investigation plus important que les diagraphies électriques traditionnelles et un plus par rapport à ces dernières: l'effet directionnel. Nous en discuterons dans le dernier chapitre.

IX. PERSPECTIVES DE LA METHODE. DISCUSSION.

Il semble naturel, à présent, de distinguer d'emblée les deux situations suivantes:

- 1) la cible minière est un bon conducteur bien délimité dans un terrain relativement homogène.
- 2) on s'intéresse à la "cartographie" d'innombrables hétérogénéités ou fractures que rien ne permet de singulariser entre elles.

Dans le premier cas, nous avons établi un protocole d'interprétation adapté au modèle sphérique. Les nouveaux objectifs peuvent concerner le modèle plus complexe du sphéroïde. Nous nous sommes contenté de fournir quelques exemples d'anomalies, alors qu'il est certainement possible de procéder comme pour la sphère. Bien entendu, les questions posées sont plus complexes. On peut cependant effectuer la démarche suivante, qui eût été valable également pour la sphère:

lorsque la dimension la plus grande de la structure est bien inférieure à l'échelle du dispositif, plus précisément lorsque l'on peut considérer que dans la partie de l'espace occupée par la structure, le champ primaire est grossièrement homogène, il est justifié de procéder dans le cadre d'un champ homogène. Bien entendu, ce dernier n'est pas horizontal, et ce caractère est à l'origine de la non-symétrie, par rapport au point d'inflexion, de l'anomalie due à une petite sphère. Or la distance de la structure au forage se déduit rapidement de l'anomalie: même lorsque la structure n'est pas une sphère, une estimation correcte peut en être faite. Il est alors possible de déduire l'inclinaison globale du champ primaire au voisinage de la structure. Nous voilà dans une situation analogue en bien des points à celle qui est rencontrée dans le domaine de la prospection magnétique:

- par rapport à la ligne de mesure, le champ primaire se présente sous une certaine incidence
- le champ anomalique d'une structure élémentaire (la sphère) est de type dipolaire.

On songe immédiatement aux techniques de réduction au pôle qui permettent de déterminer la forme d'une anomalie magnétique comme si elle avait été obtenue avec un champ présentant une incidence normale par rapport à la ligne de mesure... Ces techniques peuvent bien s'appliquer ici, quoique de façon plus approximative puisque le champ primaire n'est que grossièrement homogène dans l'espace occupé par la structure. Dès lors, il devient suffisant d'entreprendre le calcul d'abaques ou d'établir des formules simples en analysant la forme des anomalies dans un champ homogène horizontal: on se souvient des propriétés très élémentaires obtenues pour la sphère.

Le rôle du calcul dans l'espace de Fourier apparaît bien ici. On peut encore l'utiliser à d'autres tâches: l'analyse des formes du spectre d'une anomalie, notamment du spectre de phase (le spectre d'amplitude semble relativement insensible à la forme et l'orientation de la structure), permettent très probablement une discrimination des paramètres qui vient compléter celle faite par ailleurs dans le domaine spatial. En bref, on peut espérer obtenir sans trop de peine des moyens élémentaires pour l'interprétation en terme de structure sphéroïdale.

En ce qui concerne la séparation d'anomalies imbriquées, il convient d'aborder des processus non linéaires. En effet, toutes les techniques reposant sur un principe de superposition simple sont mathématiquement équivalentes à un comportement convolutif des signaux (lequel représente un des processus linéaires des plus généraux), et la limite traditionnelle du pouvoir séparateur ne saurait être franchie de la sorte. Il y a peu d'espoir, par exemple, à ce que l'analyse krigeante apporte quelque progrès dans ce domaine puisqu'elle relève, elle aussi, d'une philosophie linéaire. Malheureusement, et bien que des techniques d'analyse non linéaires commencent à être utilisées par-ci, par-là, dans d'autres disciplines (l'analyse spectrale par maximum d'entropie, par exemple), on ne voit pas trop comment procéder ici.

Voilà qui justifie un regain d'intérêt pour les méthodes d'inversion. C'est certainement dans ce cadre qu'il convient maintenant d'orienter les recherches. En effet, la question de la linéarité ne se pose plus lorsque l'on adopte cette démarche. La manière d'opérer ne saurait cependant être élémentaire. En effet, la plupart des algorithmes procèdent d'un calcul

séquentiel dans l'espace de configuration des variables cherchées (variables qui peuvent être généralisées), et il n'est jamais exclu que le point courant s'égaré dans les régions non-différentiables de la fonctionnelle. Finalement, et compte tenu des remarques faites au chapitre V, un schéma inverse appliqué aux modèles sphériques ou sphéroïdaux doit répondre aux charges suivantes:

- 1) il doit posséder un bon comportement sur des fonctionnelles non convexes
- 2) il doit converger même lorsque les valeurs propres locales s'étendent sur plusieurs ordres de grandeurs (problème du "ravin")
- 3) il doit être opérationnel pour des fonctionnelles non-différentiables

Quiconque est un habitué du problème inverse saisira la difficulté du sujet: il est nécessaire de faire appel aux programmes les plus élaborés. Nous n'avons pas pris le temps d'approfondir ces questions, mais il est sûr que les difficultés rencontrées sont abordables.

Passons maintenant au deuxième cas, celui relatif aux terrains très hétérogènes.

On peut considérer qu'il est démontré qu'aucun espoir ne subsiste, dans le cas général, de détecter à distance des conducteurs "économiques" qui n'ont pas la vertu de se distinguer, électriquement parlant, des nombreuses hétérogénéités du sous-sol. Manifestement, d'autres objectifs semblent pouvoir être atteints, mais qui sortent du cadre initial de notre travail. Il nous semble opportun d'en présenter quelques aspects. Le dispositif symétrique de prospection en forage (DSPF) produit un champ électrique qui baigne tout le voisinage du forage. Les anomalies que l'on peut enregistrer dans ce dernier sont caractéristiques des hétérogénéités entourant le forage, et ce à différentes échelles. En particulier, il a été discuté le fait que le contenu "haute fréquence" des enregistrements est à relier aux parties d'hétérogénéités immédiatement voisines dudit forage. Le contenu "moyenne" et "basse fréquence", s'il n'est plus

question de le rattacher à des structures éloignées, est alors relatif aux grandes structures intersectées. Ainsi doit-il être possible de caractériser ces dernières à partir des anomalies dont elles sont responsables. Oui mais, se dira-t-on, autant entreprendre des mesures diagraphiques traditionnelles en employant toutefois un écartement accru entre les électrodes: cela est bien plus simple à mettre en oeuvre, et le rayon d'investigation peut être important. C'est oublier un avantage majeur du dispositif d'injection en surface: l'effet directionnel.

Un des prototypes de corps d'extension importante pouvant être intersecté par un forage est la faille. Electriquement parlant, celle-ci est le plus souvent conductrice (sauf si elle a subi un remplissage par le quartz...auquel cas elle devient un filon résistant). Les diagraphies de résistivité permettent aisément de reconnaître les failles dans les milieux granitiques (pour ne citer que ce cas de figure), et la plupart des intersections conductrices que l'on rencontre sur les diagraphies que nous avons effectuées correspondent à des zones faillées. Nous n'avons pas cherché à relier la forme des anomalies dues aux failles à l'orientation ou à l'extension de ces dernières. Cependant, il nous semble évident qu'il est possible de trouver un ordre de grandeur (minimal) de l'extension d'une fracture ainsi que de bonnes informations sur son orientation dans l'espace. Le BRGM, au cours de travaux qui ont donné lieu à plusieurs publications internes (Le Masne [26] et [27], Vallat [40]), a fait d'intéressantes analyses sur les possibilités de grands dispositifs pour la caractérisation de la fracturation en terrain granitique. Il reste encore de nombreux points à préciser, mais il ne fait aucun doute que ce type d'investigation possède des propriétés qui le feront largement appliquer dans un avenir proche.

CONCLUSION

La notion de résistivité apparente est mal adaptée aux mesures utilisant des électrodes en forage. En effet, les variations importantes du coefficient géométrique sont à l'origine de fausses anomalies, ce qui remet en cause -pour ce type de mesure- le bien fondé de ce mode de représentation des résultats expérimentaux.

Une nouvelle méthodologie a été développée. Elle repose sur l'emploi d'un dispositif d'injection symétrique, disposé en surface, et sur l'estimation de la composante verticale du champ électrique dans le forage. Le coefficient géométrique de cet arrangement est infini et l'usage de la résistivité apparente doit être abandonné. Ce dispositif présente certains avantages. Il permet la mesure du seul champ secondaire, ce qui confère à la méthode une sensibilité et une dynamique accrues. De plus, il possède un effet directionnel qui peut être largement exploité.

Les propriétés de cette méthode sont analysées à l'aide de divers outils mathématiques de modélisation. On a montré que les formes des anomalies dues à des structures élémentaires sont particulièrement simples, ce qui facilite le travail d'interprétation et a finalement permis d'établir un protocole complet d'interprétation quantitative pour le cas de la sphère conductrice non intersectée. On a clairement montré qu'il est possible de préciser la position d'une telle structure ainsi que son rayon minimal.

Quelques traitements simples des données expérimentales brutes autorisent par ailleurs l'abord de situations plus complexes. La technique de filtrage permet une séparation partielle des anomalies. L'analyse spectrale de ces dernières complète avantageusement l'étude des structures dans le domaine spatial.

S'il n'a pas été possible d'accéder à des sites expérimentaux caractéristiques du champ d'application de la méthode, des résultats prometteurs ont tout de même été obtenus. L'instrumentation spécifique que nous avons développée s'est, à cette occasion, avérée parfaitement opérationnelle.

Enfin, nous suggérons quelques orientations pour les recherches

futures. La réalisation d'un procédé simple d'interprétation pour les modèles sphéroïdaux est certainement possible dans l'hypothèse d'un champ primaire uniforme (mais non horizontal). Enfin, le choix d'algorithmes directs ou adaptés aux fonctionnelles non différentiables autorisera la mise en oeuvre du problème inverse pour les cas difficiles. Ces améliorations à venir devraient permettre de fournir au géologue un outil d'investigation du sous-sol nouveau et puissant.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Angot, A., 1949, Compléments de mathématiques; Edts Masson, Paris.
- [2] Astier, J.L., 1971, Géophysique appliquée à l'hydrogéologie; Edts Masson, Paris.
- [3] Auslender, A., 1976, Optimisation; Edts Masson, Paris.
- [4] Barnett, C.T., 1972, Theoretical modeling of induced polarization effects due to arbitrarily shaped bodies; Ph.D. Thesis, Colorado School of Mines.
- [5] Busby, J.P., and Dabeck, Z.K., 1986, Resistivity and I.P. modeling of a three-array down-hole prospecting technique; Geophysical Prospecting, v.34, p.130-140.
- [6] Clark, A.R., and Salt, D.J., 1951, The investigation of earth resistivity in the vicinity of a diamond drill hole; Geophysics, v.16, p.659-665.
- [7] Cook, K.L., and Van Nostrand, R.G., 1966, Interpretation of resistivity data; U.S.G.S. Prof. Paper 499, U.S. Gvt. Printing Office, Washington.
- [8] Daniels, J.J., 1977, Three-dimensional resistivity and induced polarization modelling using buried electrodes; Geophysics, v.42, p.1006-1019.
- [9] Daniels, J.J., 1978, Interpretation of buried electrode resistivity data using a layered earth model; Geophysics, v.43, p.988-1001.
- [10] Davidon, W.C., 1959, Variable metric method for minimization; Argonne National Laboratory, Report ANL-5990.

- [11] Desbrandes, R., 1978, Théorie et interprétation des diagraphies; Edts Technip, Paris.
- [12] Dhatt, G., et Touzot, G., 1984, Une présentation de la méthode des éléments finis; Edts Maloine, Paris.
- [13] Dobecki, T.L., 1980, Borehole resistivity curves near spheroidal masses; Geophysics, v.45, p.1513-1522.
- [14] Doucet, D., 1977, Prospection minière par méthode électrique à l'aide des trous de forage; Thèse M. Sc. A., Ecole Polytechnique de Montréal.
- [15] Dyck, A.V., and Young, R., 1985, Physical characterization of rocks masses using borehole methods; Geophysics, v.50, p.2530-2541.
- [16] Fletcher, R., and Powell, M.J.D., 1963, A rapidly convergent descent method for minimization; The Computer Journal, v.6, p163-168.
- [17] Fletcher, R., and Reeves, C.M., 1964, Function minimization by conjugate gradients; The Computer Journal, v.7, p.149-154.
- [18] Fromaigeat, L., 1985, Méthode électromagnétique en forage: application de la mesure des 3 composantes magnétiques en exploration minière; Thèse I.N.P.L., Nancy.
- [19] Gradshteyn, I.S., and Ryzhik, I.M., 1969, Table of integrals, series and products; Academic Press.
- [20] Hobson, E.W., 1955, The theory of spherical and ellipsoidal harmonics; Chelsea Publishing Company, New York.
- [21] Hookes, R., and Jeeves, T.A., 1961, 'Direct search' solution of numerical and statistical problems; J.A.C.M., v.8, p.212-229.

- [22] Jupp, D.L.B., and Vozoff, K., 1975, Stable iterative methods for the inversion of geophysical data; *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, v.42, p.957-976.
- [23] Koulomzine, T., and Geoffroy, P.R., 1958, Method of geophysical exploration through the use of bore holes; Canada Patent N° 560863.
- [24] Labarrère, M., Krief, J.P., et Ginnet, B., 1978, Le filtrage et ses applications; Cepadues Edts, Toulouse.
- [25] Large, D.B., 1971, Electrical potential near a spherical body in a conducting half-space; *Geophysics*, v.36, p.763-767.
- [26] Le Masne, D., 1983, Développement d'une méthodologie géophysique à partir des forages pour l'étude des sites de stockage en formation granitique; B.R.G.M. 83 SGN 212 GPH.
- [27] Le Masne, D., 1984, Poursuite du développement d'une méthodologie géophysique à partir des forages pour l'étude des sites de stockage en formation granitique; B.R.G.M. 84 SGN 044 GPH.
- [28] Lytle, R.J., and Hanson, J.M., 1983, Electrode configuration influence on resistivity measurements about a spherical anomaly; *Geophysics*, v.48, p.1113-1119.
- [29] Marquardt, D.W., 1963, An algorithm for least-squares estimation of non linear parameters; *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, v.11, p.431-441.
- [30] Marquardt, D.W., 1970, Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation, and non linear estimation; *Tecnometrics*, v.12, p.591-611.
- [31] Merkel, R.H., 1971, Resistivity analysis for plane-layer half-space models with buried current sources; *Geophys. Prosp.*, v.19, p.620-639.

- [32] Merkel, R.H., and Alexander, S.S., 1971, Resistivity analysis for models of a sphere in a half-space with buried current source, *Geophys. Prosp.*, v.19, p.640-651.
- [33] Morse, P.M., and Feshbach, H., 1953, *Methods of theoretical physics*, (2 tomes); McGraw Hill.
- [34] Ogilvy, R.D., 1985, Down-hole IP/resistivity prospecting in mineral drill-holes, some illustrative field examples; *Geoexploration*, v.23, p.257-273.
- [35] Powell, M.J.D., 1964, An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives; *The Computer Journal*, v.7, p.155-162.
- [36] Robin, L., 1957, *Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales*, (3 tomes); Edts Gauthier-Villars.
- [37] Serra, O., 1979, *Diagraphies différées - bases de l'interprétation*, (2 tomes); Bull. Cent. Rech. Explor.-Prod., Elf-Aquitaine.
- [38] Smith, G.D., 1978, *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*; Clarendon Press, Oxford .
- [39] Snyder, D.D., and Merkel, R.M., 1973, Analytic models for the interpretation of electrical surveys using buried current electrodes; *Geophysics*, v.38, p.513-529.
- [40] Vallat., D., 1984, *Etude des mesures électriques en forage et entre forages pour la caractérisation des fractures conductrices dans un encaissant résistant*; Mémoire de fin d'études, I.P.G. Strasbourg.
- [41] Wait, J.R., 1982, *Geo-electromagnetism*; Academic Press.

- [42] Walsh, G.R., 1975, Methods of optimization; John Wiley & Sons, Chichester.
- [43] Wannamaker, P.E., Hohmann, G.W., and SanFilipo, W.A., 1984, Electromagnetic modeling of three-dimensional bodies in layered earth using integral equations; Geophysics, v.49, p.60-74.
- [44] Yang, F.W., and Ward, S.H., 1985-(1), Single borehole and cross-borehole resistivity anomalies of thin ellipsoids and spheroids; Geophysics, v v.50, p.637-655.
- [45] Yang, F.W., and Ward, S.H., 1985-(2), On sensitivity of surface-to-hole borehole resistivity measurements to the attitude and the depth to center of a three-dimensional spheroid; Geophysics, v.50, p.1173-1178.
- [46] Zienkiewicz, O.C., 1973, La méthode des éléments finis; Edts Ediscience, Paris.

Bibliographie complémentaire
empruntée à Dyck et Young [15].

Elle concerne toutes les
méthodes géophysiques
qui s'appliquent en forage.

- Alfano, L., 1962, Geoelectric prospecting with underground electrodes: *Geophys. Prosp.*, 10, 290-303.
- Aminzadeh, F., and Mendel, J. M., 1985, Synthetic vertical seismic profiles for nonnormal incidence plane waves: *Geophysics*, 50, 127-141.
- Baker, J., and Harris, J. N., 1984, Cross-borehole seismic imaging: Presented at 54th Ann. Internat. Mtg. and Expos., Soc. Explor. Geophys., Atlanta.
- Baltosser, R. W., and Lawrence, H. W., 1970, Application of well logging techniques in metallic mineral mining: *Geophysics*, 35, 143-152.
- Bartel, L. C., 1977, Mapping of the reaction zone in an in situ coal gasification experiment using an electrical technique: Presented at 47th Ann. Internat. Mtg. and Expos., Soc. Explor. Geophys., Calgary.
- Bartel, L. C., McCann, R. P., and Keck, L. J., 1976, Use of potential gradients in massive hydraulic fracture mapping and characterization: 51st Tech. Conf. of Soc. Petr. Eng., Am. Inst. Min. Metal. Petr. Eng., New Orleans.
- Bertacchi, P., Carabelli, E., and Sampaolo, A., 1966, A contribution to the use of geophysical methods for investigation of rock masses: Proc. Symp. of 1st Cong. of Int. Soc. for Rock Mechanics, Lisbon, 45-53.
- Bois, P., Laporte, M., Lavergne, M., and Thomas, G., 1972, Well-to-well seismic measurements: *Geophysics*, 37, 471-480.
- Boyd, G. W., and Wiles, C. J., 1984, The Newmont drill-hole electromagnetic pulse system—Examples from eastern Australia: *Geophysics*, 49, 949-956.
- Buselli, G., 1980, Electrical geophysics in the U.S.S.R (A report): *Geophysics*, 45, 1551-1562.
- Butler, D. K., and Curro, J. R., 1981, Cross-hole seismic testing—Procedures and pitfalls: *Geophysics*, 46, 23-29.
- Carroll, R. D., and Scott, J. H., 1966, Uphole seismic measurements as an indication of stress relief in granite rock tunnels: U.S. Geol. Surv. Prof. Paper 550-D, 138-143.
- Chemali, R., Gianzero, S., and Nekut, A., 1984, The response of the Elrec sonde to a salt dome or regional dip: Presented at the 54th Ann. Internat. Mtg. and Expos., Soc. Explor. Geophys., Atlanta.
- Clark, A. R., 1956, The determination of the long dimension of conducting ore bodies: *Geophysics*, 21, 470-478.
- Clark, A. R., and Salt, D. J., 1951, The investigation of earth resistivities in the vicinity of a diamond drill hole: *Geophysics*, 16, 659-665.
- Cosma, K., Ihalainen, M., and Korhonen, R., 1984, The cross-hole seismic method: report of phase two of development program: Geotek Oy, Helsinki.
- Crampin, S., 1985, Evaluation of anisotropy by shear-wave splitting: *Geophysics*, 50, 142-152.
- Daily, W., 1984, Underground oil-shale retort monitoring using geotomography: *Geophysics*, 49, 1701-1707.
- Daniels, J. J., 1977, Three-dimensional resistivity and induced polarization modeling using buried electrodes: *Geophysics*, 42, 1006-1019.
- , 1982, Hole-to-surface resistivity measurements at Gibson Dome (drillhole gD-1), Paradox Basin, Utah: U.S.G.S. open-file rep., 82-320.
- , 1983, Hole-to-surface resistivity measurements: *Geophysics*, 48, 87-97.
- Daniels, J. J., and Dyck, A. V., 1984, Borehole resistivity and electromagnetic methods applied to mineral exploration: *Trans. Inst. Electr. and Electron. Eng., Geosci. and Remote Sensing*, GE-22, 80-87.
- Davis, J. L., Annan, A. P., Vaughan, C., and Killey, R. W. D., 1984, Surface and borehole ground-probing RADAR surveys at Chalk River, Ontario: National Water Well Assn./Environmental Protection Agency Conf. on Surface and Borehole Geophysical Methods in Groundwater Investigations, San Antonio, 681-713.
- Dines, K. A., and Lytle, R. J., 1981, Analysis of electrical conductivity imaging: *Geophysics*, 46, 1025-1036.
- Dobacki, T. L., 1980, Borehole resistivity curves near spheroidal masses: *Geophysics*, 45, 1513-1522.
- Drinkrow, R. L., 1975, Scale model studies of a down-hole electromagnetic probe: Commonwealth Scientific and Industrial Research Org. Mineral Research Laboratories, Investigation Rep. 108.
- Hayles, J. G., and Dyck, A. V., 1985, Drill-hole electromagnetic surveys as an aid to structural mapping, Chalk River, Ontario—a feasibility study, *m*, Thomas, M. D., and Dixon, D. E., Eds., geophysical and related geoscientific research at Chalk River, Ontario: Atomic Energy Canada Ltd. report.
- Hober, W. T., Brown, R. J. S., Roberts, E. A., Fredriksson, O. A., and Unterberger, R. R., 1972, RADAR logging of a salt dome: *Geophysics*, 37, 889-906.
- Huang, C. F., and Hunter, J. A., 1982, The tube-wave method of estimating in situ rock fracture permeability in fluid-filled boreholes: Proc. Workshop on Geophysical Investigations in connection with geological disposal of radioactive waste, Nuclear Energy Agency Org. for Economic Cooperation & Development, Ottawa, 173-189.
- Ivansson, S., 1985, A study of methods for tomographic velocity estimations in the presence of low-velocity zones: *Geophysics*, 50, 969-988.
- King, M. S., and Paulsson, B. N. P., 1982, Acoustic borehole logging in a granitic rock mass subjected to heating: Proc. 23rd U.S. Symp. on Rock Mechanics, Berkeley, 39-46.
- King, M. S., Stauffer, M. R., and Pandit, B. I., 1978, Quality of rock masses by acoustic borehole logging: Proc. Symp. of III Int. Cong., Int. Assn. of Engineering Geologists, 1, 156-164.
- Koerperich, E. A., 1978, Investigation of acoustic boundary waves and interference patterns as techniques for detecting fractures: *J. Petr. Tech.*, 30, 1199-1207.
- Knopoff, L., 1957, Seismic scattering: 2nd Ann. Proj. Rep., Inst. of Geophysics, Univ. of Calif.
- Kuhl, D. E., and Edwards, R. Q., 1968, Reorganizing data from transverse section scans of the brain using digital processing: *Radiology*, 91, 975-981.
- Lajoie, J., and West, G. F., 1976, The electromagnetic response of a conductive inhomogeneity in a layered earth: *Geophysics*, 41, 1133-1156.
- Levine, E. N., Cybriwsky, Z. A., and Toksöz, M. N., 1984, Detection of permeable rock fractures and estimation of hydraulic conductivity and yield by 3-D vertical seismic profiling, *m*, Nielsen, D. M., and Cui, M., Eds., Nat. Water Well Assn./Environmental Protection Agency Conference on surface and borehole geophysical methods in groundwater investigations, Nat. Water Well Ass'n, 853-876.
- Levy, G. M., and McNeill, J. D., 1983, Transient electromagnetic borehole logging: Internat. Sympos. and Workshop, Borehole geophysics for mining and geotechnical applications, Can. Explor. Geophys. Soc./Geol. Surv. Can., Toronto.

- Drinkrow, R. L., and Dullin, R. H., 1976, Scale model type curves for down-hole electromagnetic logging in a conductive environment: Commonwealth Scientific & Industrial Research Org. Mineral Research Laboratories, Investigation Rep. 120.
- 1978, Scale model results for inductive logging in the region of single and multiple conductive bodies: *Geophysics*, 43, 804-818.
- Dyck, A. V., Ed., 1975, Borehole geophysics applied to metallic mineral prospecting: A review: *Geol. Surv. Can.*, Paper 75-31.
- 1981, A method for quantitative interpretation of wideband, drill-hole EM surveys in mineral exploration: Ph.D. thesis, Univ. of Toronto; available as Research in Applied Geophysics 23, Geophysics Lab., Dept. of Physics, Univ. of Toronto.
- 1984, Report of preliminary results, drill-hole pulse EM surveys, Ruttan Mine, 1983: unpublished rep.
- Dyck, A. V., and West, G. F., 1984, The role of simple computer models in interpretations of wide-band, drill-hole electromagnetic surveys in mineral exploration: *Geophysics*, 49, 957-980.
- Dziban, I. P., 1970, Elastic wave propagation in fractured and vuggy media: *Izvestiya Earth Physics*, 10.
- Eaton, P. A., and Hohmann, G. W., 1984, The influence of a conductive host on two-dimensional borehole transient electromagnetic responses: *Geophysics*, 49, 861-869.
- Eloranto, E., 1984, A method for calculating mise-à-la-masse anomalies in the case of high conductivity contrast by the integral equation technique: *Geoxpl.*, 22, 77-88.
- Fehler, M., and Pearson, C., 1984, Cross-hole seismic surveys: Applications for studying subsurface fracture systems at a hot dry rock geothermal site: *Geophysics*, 49, 37-45.
- Glenn, W. E., and Nelson, P. H., 1979, Borehole logging techniques applied to base metal ore deposits. in Hood, P. J., Ed., *Geophysics and geochemistry in the search for metallic ores: Geol. Surv. Can., Econ. Geol. Rep.* 31, 273-294.
- Goodman, R. E., 1976, *Methods of geological engineering in discontinuous rocks*: West Publishing Co.
- Grant, F. S., and West, G. F., 1965, *Interpretation theory in applied geophysics*: McGraw-Hill Book Co.
- Gustavsson, M., Israelson, H., Ivansson, S., Morén, P., and Pihl, J., 1982, Seismic crosshole experiment in crystal and rock: Proc. of Workshop on geophysical investigations in connection with geological disposal of radioactive waste, Nuclear Energy Agency/Org. for Economic Cooperation & Development, Ottawa, 147-156.
- Elastic-wave velocities and attenuation in an underground granitic repository for nuclear waste: *Geophysics*, 50, 551-570.
- Peterson, J. E., Paulsson, B. N. P., and McEvelly, T. V., 1985, Applications of ART to cross-hole seismic data: *Geophysics*, 50, in press.
- Ramirez, A. L., Dadrack, F. J., and Lytle, R. J., 1982, Cross-borehole fracture mapping using electromagnetic geotomography: *Univ. Calif. Res. Lab., Rep.* 53255.
- Ross, H. P., and Ward, S. H., 1984, Borehole electrical geophysical methods, A review of the state-of-the-art and preliminary evaluation of the application to fracture mapping in geothermal systems: *Univ. of Utah Res. Inst., Earth Sci. Lab., Rep.* DOE/SAN/12196-2.
- Scott, J. H., Daniels, J. J., Hasbrouck, W. P., and Guu, J. Y., 1975, Hole-to-hole geophysical measurements research for mineral exploration: *Trans. 16th Ann. Logging Symp., Soc. Prof. Well Log Analysts*, Paper KK.
- Seigel, H. O., 1952, Ore body size determination in electrical prospecting: *Geophysics*, 17, 907-914.
- Somerstein, S. F., Berg, M., Chang, D., Chung, H., Johnson, H., Richardson, B., Pizzicari, J., and Salisbury, W. W., 1984, Radio-frequency geotomography for remotely probing the interiors of operating mini- and commercial-sized oil-shale retorts: *Geophysics*, 49, 1288-1300.
- Snyder, D. D., and Fleming, D. B., 1985, Well logging—A 25 year perspective: *Geophysics*, 50, this issue, 2504-2529.
- Snyder, D. D., and Merkel, R. M., 1973, Analytical models for the interpretation of electrical surveys using buried current electrodes: *Geophysics*, 38, 513-529.
- Stokoe, K. H., and Hoar, R. J., 1978, Field measurements of shear-wave velocity by cross-hole and downhole seismic methods, in Borm, G. W., Ed., *Rock dynamics and geophysical aspects: Balkema*, 115-138.
- Thill, R. E., 1978, Acoustic cross-borehole apparatus for determining in situ elastic properties and structural integrity of rock masses: *Proc. 19th U.S. Sympos. on Rock Mechanics*, Stateline, 2, 121-129.
- Ursin, B., 1983, Review of elastic and electromagnetic wave propagation in horizontally layered media: *Geophysics*, 48, 1063-1081.
- Wagg, D. M., and Seigel, H. O., 1963, Induced polarization in drill-holes: *Can. Min. J.*, 84, 54-59.
- West, G. F., Macnae, J. C., and Lamontagne, Y., 1984, A time-domain system measuring the step response of the ground: *Geophysics*, 49, 1010-1026.
- Whan, W. J., and Daniels, J. J., 1982, Numerical modeling of three-dimensional surface topography for buried electrode resistivity surveys: Presented at 52nd Ann. Mtg. and Expos., Soc. Explor. Geophys., Dallas.
- Wong, J., Hurley, P., and West, G. F., 1983, Cross-hole seismology and seismic imaging in crystalline rocks, *Geophys. Res. Lett.*, 10, 686-689.
- 1984, Cross-hole audio-frequency seismology in granitic rocks using piezoelectric transducers as sources and detectors: *Geoxpl.*, 22, 261-279.
- Woods, D. V., 1975, A model study of the Crone borehole pulse electromagnetic (PEM) system: M.Sc. thesis, Queen's Univ. at Kingston.
- Woods, D. V., and Crone, J. D., 1980, Scale model study of a borehole pulse electromagnetic system: *Can. Min. and Metall. Bull.*, May.
- Worthington, M. H., Kuckes, A., and Oristaglio, M., 1981, Borehole induction procedure for investigating electrical conductivity within the broad vicinity of a hole: *Geophysics*, 46, 65-67.
- Wright, D. L., and Watts, R. D., 1982, A single-hole short-pulse borehole RADAR system: Proc. of Workshop on geophysical investigations in connection with geological disposal of radioactive waste, Nuclear Energy Agency/Org. for Economic Cooperation and Development, Ottawa, 267-281.
- Wyllie, M. R. J., Gregory, A. R., and Gardner, L. W., 1958, An experimental investigation of factors affecting elastic wave velocities in porous media: *Geophysics*, 23, 459-493.
- Yang, F. W., and Ward, S. H., 1985a, Single-borehole and cross-borehole resistivity anomalies of thin ellipsoids and spheroids: *Geophysics*, 50, 637-655.
- 1985b, On sensitivity of surface-to-borehole resistivity measurements to the attitude and the depth to the center of a 3-D oblate spheroid: *Geophysics*, 50, 1173-1178.
- Young, R. P., and Hill, J. J., 1984, Monitoring fragmentation efficiency of mine blasting using seismic spectroscopy: Presented at 54th Ann. Internat. Mtg. and Expos., Soc. Explor. Geophys., Atlanta.
- Lytle, R. J., Fanne, F. E., Lager, D. L., and Davis, D. J., 1979, Cross-borehole electromagnetic probing to locate high contrast anomalies: *Geophysics*, 44, 1667-1676.
- Lytle, R. J., and Hanson, J. M., 1983, Electrode configuration influence on resistivity measurements about a spherical anomaly: *Geophysics*, 48, 1113-1119.
- McCann, D. M., Grainger, P., and McCann, C., 1975, Inter-borehole acoustic measurements and their use in engineering geology: *geophys. Prosp.*, 23, 50-69.
- McMechan, G., 1983, Seismic tomography in boreholes: *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 74, 601-612.
- McNeill, J. D., Edwards, R. N., and Levy, G. M., 1984, Approximate calculations of the transient electromagnetic response from buried conductors in a conductive half-space: *Geophysics*, 49, 918-924.
- Morris, R. L., Grime, D. R., and Arkfeld, T. E., 1964, Using compressional and shear acoustic amplitudes for the location of fractures: *J. Petr. Tech.*, 16, 623-632.
- Mwenfumbo, C. J., 1980, Interpretation of mise-à-la-masse data for vein-type bodies: Ph.D. thesis, Univ. of Western Ontario.
- Nabighian, M. N., 1979, Quasi-static transient response of a conducting half-space - An approximate representation: *Geophysics*, 44, 1700-1705.
- Nabighian, M. N., Oppliger, G. L., Edwards, R. N., I.o, B. B. H., and Cheesman, S. J., 1984, Cross-hole magnetometric resistivity (MMR): *Geophysics*, 49, 1313-1326.
- Ohloft, G. R., 1985, Low-frequency electrical properties: *Geophysics*, 50, this issue, 000-000.
- Oppliger, G. L., 1984, Three-dimensional terrain corrections for mise-à-la-masse and magnetometric resistivity surveys: *Geophysics*, 49, 1718-1729.
- Paillet, F. L., and White, J. E., 1982, Acoustic modes of propagation in the borehole and their relationship to rock properties: *Geophysics*, 47, 1215-1228.
- Pantze, R., Malmqvist, L., and Kristensson, G., 1983, Directional EM measurements in boreholes: Internat. Sympos. and Workshop, Borehole geophysics for mining and geotechnical applications, Can. Explor. Geophys. Soc./Geol. Surv. Can., Toronto.
- Parasnis, D. S., 1967, Three-dimensional electric mise-à-la-masse survey of an irregular lead-zinc-copper deposit in Central Sweden: *Geophys. Prosp.*, 15, 407.
- Paulsson, B. N. P., Cook, N. G. W., and McEvelly, T. V., 1985,

ANNEXE 1DU CALCUL DES FONCTIONS ASSOCIEES DE LEGENDRE

La modélisation analytique d'anomalies dues à des sphères et des sphéroïdes nécessite le calcul numérique des fonctions associées de Legendre de première et de deuxième espèces de la variable réelle ou imaginaire pure. Souvent, des tables sont utilisées pour cela: stockées en mémoire du calculateur et associées à des routines d'interpolations, elles permettent ces estimations. Nous n'avons pas retenu cette solution pour diverses raisons:

- les tables ne dépassent généralement pas $n = 10$ et $m = 4$
(pour P_n^m ou Q_n^m).
- la précision des interpolations est limitée. Elle peut s'avérer tout à fait insuffisante pour certaines applications comme le problème inverse.
- l'emploi de table nécessite une taille mémoire trop importante pour autoriser l'implantation sur micro-ordinateur.

La sommation qui donne les valeurs du potentiel peut souvent se limiter à un nombre de termes tel que $m \leq n \leq 10$, voire moins encore:

$$V = \sum_{n=0}^{10} \sum_{m=0}^n \dots\dots\dots$$

Pour le calcul des fonctions P_n^m et Q_n^m , il est avantageux d'utiliser des formules de récurrence de la forme:

$$f (P_n^{m+1}, P_n^m, P_n^{m-1}) = 0 \quad (\text{idem pour } Q)$$

La structure de ces relations et l'expérience que nous en avons eu nous a permis de montrer que le processus est bien plus stable lorsqu'il est mis en oeuvre par valeurs décroissantes de m . Ainsi, dans un premier temps, on effectuera le calcul explicite des quantités:

$$P_n^n \text{ et } P_n^{n-1} \text{ ou } Q_n^n \text{ et } Q_n^{n-1}.$$

Après quoi, on appliquera des relations de la forme:

$$P_n^m = f (P_n^{m+1}, P_n^{m+2})$$

La table suivante résume les différentes fonctions nécessaires pour chaque modèle. Elle donne en référence les numéros des définitions et formules qui sont données dans la suite.

fonction	$P_n(x)$	$P_n^m(x)$	$P_n^m(x)$	$P_n^m(z)$	$Q_n^m(x)$	$Q_n^m(z)$	$\bar{P}_n^m(z)$	$\bar{P}_n^m(x)$	$\bar{Q}_n^m(z)$	$\bar{Q}_n^m(x)$
domaine	$x \in \mathbb{R}$ $ x < 1$	$x \in \mathbb{R}$ $ x < 1$	$x \in \mathbb{R}$ $ x > 1$	$z \in i \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$ $ x > 1$	$z \in i \mathbb{R}$	$z \in i \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$ $ x > 1$	$z \in i \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R}$ $ x > 1$
modèle										
sphère espace uniforme	*									
sphère demi- espace		*								
ell. aplati espace uniforme			*		*			*		*
ell. allon. espace uniforme				*		*	*		*	
définition	A	B	C	C	D	D	E	E	E	E
formules	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8	A 9	A10

Les définitions dont nous faisons usage sont les plus répandues et sont conseillées par le N.B.S. (National Bureau of Standard). L'ouvrage [19] nous a souvent servi de point de départ. Les démonstrations de certaines des relations présentées sont données dans l'annexe 2.

Définition A

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}$$

Définition B

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad \text{pour } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ |x| < 1 \end{cases}$$

Définition C

$$P_n^m(u) = (u^2-1)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u) \quad \text{pour } \begin{cases} u \in \mathbb{R} \\ |u| > 1 \end{cases} \quad \text{ou } u \in i \mathbb{R}$$

Définition D

$$Q_n^m(u) = (u^2-1)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} Q_n(u) \quad \text{pour } \begin{cases} u \in \mathbb{R} \\ |u| > 1 \end{cases} \quad \text{ou } u \in i \mathbb{R}$$

(voir la définition F pour le calcul de Q_n)

Définition E

$$\bar{P}_n^m(z) = \frac{d}{dz} P_n^m(z) \quad ; \quad \bar{Q}_n^m(z) = \frac{d}{dz} Q_n^m(z) \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}$$

Définition F

$$Q_n(u) = \frac{1}{2} P_n(u) \ln \left[\frac{u+1}{u-1} \right] - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} P_{k-1}(u) P_{n-k}(u)$$

pour $\begin{cases} u \in \mathbb{R} \\ |u| > 1 \end{cases}$ ou $u \in i \mathbb{R}$

Pour la suite, définissons \hat{P} , \hat{Q} , \bar{P} , \bar{Q} pour $\mu \in \mathbb{R}$ par:

$$\left| \begin{array}{l} P_n^m(i\mu) = i^n \hat{P}_n^m(i\mu) \\ Q_n^m(i\mu) = i^{n+1} \hat{Q}_n^m(i\mu) \\ \bar{P}_n^m(i\mu) = i^{n-1} \bar{\hat{P}}_n^m(i\mu) \\ \bar{Q}_n^m(i\mu) = i^n \bar{\hat{Q}}_n^m(i\mu) \end{array} \right.$$

A.1 Calcul de $P_n(z)$, $z \in \mathbb{C}$

$$\text{Initialisation : } \left| \begin{array}{l} P_0(z) = 1 \\ P_1(z) = z \end{array} \right.$$

$$\text{Formule de récurrence: } P_{n+2}(z) = \frac{1}{n+2} \left[(2n+3) z P_{n+1}(z) - (n+1) P_n(z) \right]$$

A.2 Calcul de $P_n^m(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$

$$\text{Initialisation : } \left| \begin{array}{l} P_n^n(x) = \frac{(-1)^n (1-x^2)^{n/2} (2n)!}{2^n n!} \\ P_n^{n-1}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (1-x^2)^{(n-1)/2} (2n)! x}{2^n n!} \end{array} \right.$$

$$\text{Formule de récurrence: } (m-n)(n+m+1) P_n^m(x) = \frac{2(m+1)x}{\sqrt{1-x^2}} P_n^{m+1}(x) + P_n^{m+2}(x)$$

A.3 Calcul de $P_n^m(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 1$

$$\text{Initialisation: } \left| \begin{array}{l} P_n^n(x) = \frac{(x^2-1)^{n/2} (2n)!}{2^n n!} \\ P_n^{n-1}(x) = \frac{(x^2-1)^{(n-1)/2} (2n)! x}{2^n n!} \end{array} \right.$$

$$\text{Formule de récurrence: } (n-m)(n+m+1) P_n^m(x) = \frac{2(m+1)x}{\sqrt{x^2-1}} P_n^{m+1}(x) + P_n^{m+2}(x)$$

A.4 Calcul de $P_n^m(u)$, $u \in i\mathbb{R}$

Soit: $u = i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$

$$\text{Initialisation: } \left\{ \begin{array}{l} P_n^n(i\mu) = \frac{i^n (\mu^2+1)^{n/2} (2n)!}{2^n n!} \\ P_n^{n-1}(i\mu) = \frac{i^n (\mu^2+1)^{(n-1)/2} (2n)! \mu}{2^n n!} \end{array} \right.$$

$$\text{Formule de récurrence: } (n-m)(n+m+1) P_n^m(i\mu) = \frac{2(m+1)\mu}{\sqrt{\mu^2+1}} P_n^{m+1}(i\mu) + P_n^{m+2}(i\mu)$$

A.4.bis Calcul de $\hat{P}_n^m(i\mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$

$$\text{Initialisation: } \left\{ \begin{array}{l} \hat{P}_n^n(i\mu) = \frac{(\mu^2+1)^{n/2} (2n)!}{2^n n!} \\ \hat{P}_n^{n-1}(i\mu) = \frac{(\mu^2+1)^{(n-1)/2} (2n)! \mu}{2^n n!} \end{array} \right.$$

Formule de récurrence: identique à A.4 avec \hat{P} au lieu de P .

A.5 Calcul de $Q_n^m(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 1$

Initialisation:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_n^n(x) = \frac{(x^2-1)^{-n/2}}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (x^2-1)^{j/2} P_n^j(x) (n-j-1)! (-1)^{n-j} \left[(x+1)^{n-j} - (x-1)^{n-j} \right] + \frac{P_n^m(x)}{2} \ln \left[\frac{x+1}{x-1} \right] \\ Q_n^{n-1}(x) = \frac{(x^2-1)^{(1-n)/2}}{2} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} (x^2-1)^{j/2} P_n^j(x) (n-2-j)! (-1)^{n-j} \left[(x-1)^{n-1-j} - (x+1)^{n-1-j} \right] + \frac{P_n^{n-1}(x)}{2} \ln \left[\frac{x+1}{x-1} \right] \\ - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{1}{j+1} P_n^j(x) P_{n-j-1}^{n-j-1}(x) \end{array} \right.$$

Formule de récurrence: identique à A.3 avec Q au lieu de P .

A.6 Calcul de $Q_n^m(u)$, $u \in i\mathbb{R}$

(Voir A.6.ter. pour les grandes valeurs de $|u|$)

$$\text{Soit: } \begin{cases} u = i\mu, & \mu \in \mathbb{R} \\ \vartheta = \text{tg}^{-1}(\mu), & -\pi/2 < \vartheta < \pi/2 \end{cases}$$

Initialisation:

$$\begin{aligned} Q_n^n(i\mu) &= i \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} P_n^j(i\mu) (n-j-1)! (-1)^{n-j} \sin[(\vartheta-\pi/2)(n-j)] \\ &\quad + i(\vartheta-\pi/2) P_n^n(i\mu) \\ Q_n^{n-1}(i\mu) &= i \sum_{j=0}^{n-2} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} P_n^j(i\mu) (n-j-2)! (-1)^{n-j-1} \sin[(\vartheta-\pi/2)(n-j-1)] \\ &\quad + i(\vartheta-\pi/2) P_n^{n-1}(i\mu) - \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \frac{1}{j+1} P_j^j(i\mu) P_{n-j-1}^{n-j-1}(i\mu) \end{aligned}$$

Formule de récurrence: identique à A.4 avec Q au lieu de P

A.6.bis Calcul de $\hat{Q}_n^m(i\mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$

(valable pour $|\mu| < 10$)

$$\text{soit: } \vartheta = \text{tg}^{-1}(\mu), \quad -\pi/2 < \vartheta < \pi/2$$

Initialisation:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_n^n(i\mu) &= \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \hat{P}_n^j(i\mu) (n-j-1)! (-1)^{n-j} \sin[(\vartheta-\pi/2)(n-j)] \\ &\quad + (\vartheta-\pi/2) \hat{P}_n^n(i\mu) \\ \hat{Q}_n^{n-1}(i\mu) &= \sum_{j=0}^{n-2} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \hat{P}_n^j(i\mu) (n-j-2)! (-1)^{n-j-1} \sin[(\vartheta-\pi/2)(n-j-1)] \\ &\quad + (\vartheta-\pi/2) \hat{P}_n^{n-1}(i\mu) + \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \frac{1}{j+1} \hat{P}_j^j(i\mu) \hat{P}_{n-j-1}^{n-j-1}(i\mu) \end{aligned}$$

Formule de récurrence: identique à A.4 avec \hat{Q} au lieu de P

A.6.ter. Calcul de $Q_n^m(z)$ et $\hat{Q}_n^m(i\mu)$ lorsque $|z|$ ou $|\mu| > 10$

Les deux dernières formules sont numériquement instables pour des grandes valeurs de $|z|$ ou $|\mu|$: cela résulte du fait que Q_n^m doit tendre vers 0 alors qu'il se compose de la différence de termes qui tendent chacun vers l'infini...

Pour un résultat satisfaisant dans ce cas de figure, il vaut mieux employer les expressions données ci-dessous. Elles ne seront utilisées que pour les initialisations habituelles, les récurrences n'amenant pas de complication.

A appliquer avec $m = n$ et $m = n-1$, les nouvelles formules sont:

$$Q_n^m(z) = \frac{(-1)^m 2^n (n+m)!}{z^{n+1}} (1-z^{-2}) \left[\frac{n!}{(2n+1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k)! (n-m+2k)!}{(2n+2k+1)! (n-m)! z^{2k} k!} \right]$$

$$\hat{Q}_n^m(i\mu) = \frac{(-1)^{m+n+1} 2^n (n+m)!}{\mu^{m+1}} (1+\mu^{-2})^{-m/2} \left[\frac{n!}{(2n+1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+k)! (n-m+2k)!}{(2n+2k+1)! (n-m)! \mu^{2k} k!} \right]$$

En pratique, 4 à 6 termes de sommation sont suffisants.

A.7 Calcul de $\bar{P}_n^m(u)$, $u \in i\mathbb{R}$

Soit: $u = i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$

On a: $i(\mu^2+1) \bar{P}_n^m(i\mu) = (n+m)(n-m+1) \sqrt{\mu^2+1} P_n^{m-1}(i\mu) - m\mu P_n^m(i\mu)$

Pour $m = 0$, on doit utiliser: $\bar{P}_n^0(i\mu) = (\mu^2+1)^{-1/2} P_n^1(i\mu)$

A.7.bis. Calcul de $\widehat{P}_n^m(i\mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$

On a: $(\mu^2+1) \widehat{P}_n^m(i\mu) = (n+m)(n-m+1) \sqrt{\mu^2+1} \widehat{P}_n^{m-1}(i\mu) - m\mu \widehat{P}_n^m(i\mu)$

Pour $m = 0$, on doit utiliser: $\widehat{P}_n^0(i\mu) = (\mu^2+1)^{-1/2} \widehat{P}_n^1(i\mu)$

A.8 Calcul de $\overline{P}_n^m(x)$, $|x| > 1$, $x \in \mathbb{R}$

On a: $(x^2-1) \overline{P}_n^m(x) = (n+m)(n-m+1) \sqrt{x^2-1} \overline{P}_n^{m-1}(x) - mx \overline{P}_n^m(x)$

Pour $m = 0$, on a: $\overline{P}_n^0(x) = (x^2-1)^{-1/2} \overline{P}_n^1(x)$

A.9 Calcul de $\overline{Q}_n^m(u)$, $u \in i\mathbb{R}$

Les expressions de A.7 sont applicables, avec \overline{Q}_n^m au lieu de \overline{P}_n^m

et Q_n^m au lieu de P_n^m

A.9.bis Calcul de $\widehat{Q}_n^m(i\mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$

Les formules de A.7.bis s'appliquent ici avec \widehat{Q}_n^m et \widehat{Q}_n^m au lieu de \widehat{P}_n^m et \widehat{P}_n^m .

A.10 Calcul de $\overline{Q}_n^m(x)$, $|x| > 1$, $x \in \mathbb{R}$

Le calcul est identique à A.8 avec \overline{Q}_n^m et Q_n^m au lieu de \overline{P}_n^m et P_n^m .

Pour finir, indiquons que tous les calculs doivent être effectués en double précision. Dans certains quotients où interviennent des produits de factorielles au numérateur et au dénominateur, il convient d'opérer dans un ordre précis. Par exemple, il peut être impossible de calculer $(n! p!)/(m! q!)$ alors qu'il se peut que le calcul de $(n!/m!) \times (p!/q!)$ ne présente pas de difficulté.

ANNEXE 2DEMONSTRATION DES FORMULES DE L'ANNEXE 1Démonstration de la formule A2.

D'après les définitions, on a :

$$\left| \begin{array}{l} P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \\ P_n^n(x) = \frac{(-1)^n (1-x^2)^{n/2}}{2^n n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n \end{array} \right.$$

Dans le développement par le binôme de Newton de $(x^2-1)^n$, le terme de degré le plus élevé est x^{2n} . Après $2n$ dérivations, il correspond au seul terme non nul.

Puisque : $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n = (2n)!$, il reste :

$$P_n^n(x) = \frac{(-1)^n (1-x^2)^{n/2} (2n)!}{2^n n!} \quad \text{cqfd.}$$

D'autre part, on a :

$$P_n^{n-1}(x) = (-1)^{n-1} (1-x^2)^{(n-1)/2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} P_n(x).$$

Remplaçons P_n par sa valeur et développons la dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} (x^2-1)^n &= \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{2j} (-1)^{n-j} \\ &= \sum_{j \in I} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} 2^j (2j-1) \dots (2j-2n+2) x^{2j-2n+1} \end{aligned}$$

I est un intervalle tel que $2j-2n+1 \geq 0$, cad tel que $j \geq n-1/2$, soit finalement tel que $j \geq n$. Il ne reste donc que $j=n$.

Ce terme unique vaut $(2n)!x$. On en déduit:

$$P_n^{n-1}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (1-x^2)^{(n-1)/2} (2n)! x}{2^n n!} \quad \text{cqft.}$$

Les démonstrations de A3, A4, et A4bis sont similaires, en usant bien entendu des définitions correspondantes.

Démonstration de la formule A5.

Les expressions qui suivent sont valables pour $z \in \mathbb{C} - [-1, 1]$.

$$\text{On a: } \left\{ \begin{array}{l} Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} P_{k-1}(z) P_{n-k}(z) \\ Q_n^m(z) = (z^2-1)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} Q_n(z) \end{array} \right.$$

Calculons $Q_n^n(z)$. Dans la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $Q_n(z)$, le produit $P_{k-1} P_{n-k}$ disparaît puisqu'il est de degré $n-1$. Il reste donc:

$$Q_n^n(z) = \frac{(z^2-1)^{n/2}}{2} \frac{d^n}{dz^n} \left[P_n(z) \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] \right]$$

Utilisons la formule de Leibniz pour développer cette dérivée. On a:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n} \left[P_n(z) \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] \right] &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{d^j P_n(z)}{dz^j} \frac{d^{n-j}}{dz^{n-j}} \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{d^j}{dz^j} P_n(z) \frac{d^{n-j}}{dz^{n-j}} \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] + \binom{n}{n} \frac{d^n}{dz^n} P_n(z) \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (z^2-1)^{-j/2} P_n^j(z) \left[\frac{d^{n-j-1}}{dz^{n-j-1}} \left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1} \right] \right] + (z^2-1)^{-n/2} P_n^n(z) \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{1}{z+1} \right] = \frac{m! (-1)^m}{(z+1)^{m+1}} \quad \text{et} \quad \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{1}{z-1} \right] = \frac{m! (-1)^m}{(z-1)^{m+1}}$$

La quantité calculée vaut :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (z^2-1)^{-j/2} P_n^j(z) (n-j-1)! (-1)^{n-j-1} \left[\frac{1}{(z+1)^{n-j}} - \frac{1}{(z-1)^{n-j}} \right] \\ & \quad + (z^2-1)^{-n/2} P_n^n(z) P_n^n(z) \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] \\ = & \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (z^2-1)^{-j/2} P_n^j(z) (n-j-1)! (-1)^{n-j-1} \left[\frac{(z+1)^{n-j} - (z-1)^{n-j}}{(z^2-1)^{n-j}} \right] \\ & \quad + (z^2-1)^{-n/2} P_n^n(z) P_n^n(z) \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] \end{aligned}$$

d'où finalement :

$$\begin{aligned} Q_n^n(z) = & \frac{(z^2-1)^{-n/2}}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (z^2-1)^{-j/2} P_n^j(z) (n-j-1)! (-1)^{n-j} \left[(z+1)^{n-j} - (z-1)^{n-j} \right] \\ & + \frac{P_n^n(z)}{2} \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] \quad \text{cqfd.} \end{aligned}$$

Calculons à présent $Q_n^{n-1}(z)$. On a :

$$\left| \begin{aligned} Q_n^{n-1}(z) &= (z^2-1)^{-(n-1)/2} \frac{d^{n-1} Q_n(z)}{dz^{n-1}} \\ \text{avec: } Q_n(z) &= \frac{1}{2} P_n(z) \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} P_{k-1}(z) P_{n-k}(z) \end{aligned} \right.$$

Estimons la dérivée du premier terme. On a :

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[P_n(z) \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] \right] &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d^j}{dz^j} P_n(z) \frac{d^{n-1-j}}{dz^{n-1-j}} \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] = \\ & \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} (z^2-1)^{-j/2} P_n^j(z) \frac{d^{n-2-j}}{dz^{n-2-j}} \left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1} \right] + \binom{n-1}{n-1} (z^2-1)^{-(n-1)/2} P_n^{n-1}(z) \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} (z^2-1)^{-j/2} P_n^j(z) (n-2-j)! (-1)^{n-j} \left[\frac{1}{(z+1)^{n-1-j}} - \frac{1}{(z-1)^{n-1-j}} \right] + \\ + (z^2-1)^{-(n-1)/2} P_n^{n-1}(z) \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right]$$

Pour la dérivée du deuxième terme, on a :

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} P_{k-1}(z) P_{n-k}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{d^j}{dz^j} P_{k-1}(z) \frac{d^{n-1-j}}{dz^{n-1-j}} P_{n-k}(z)$$

Les seuls termes non nuls correspondent à $\left| \begin{array}{l} j \leq k-1 \text{ et} \\ n-1-j \leq n-k \end{array} \right| \Rightarrow k = j+1$

$$\text{Il reste pour ce terme: } \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-j}{j} \frac{1}{j+1} \frac{d^j P_j(z)}{dz^j} \frac{d^{n-1-j}}{dz^{n-1-j}} P_{n-j-1}(z) \\ = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-j}{j} \frac{1}{j+1} (z^2-1)^{(1-n)/2} P_j^j(z) P_{n-j-1}^{n-j-1}(z)$$

$$\text{d'où: } Q_n^{n-1}(z) = (z^2-1)^{(n-1)/2} \left[\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{1} (z^2-1)^{-j/2} P_n^j(z) (n-2-j)! (-1)^{n-j} \right. \\ \left. \left[\frac{1}{(z+1)^{n-1-j}} - \frac{1}{(z-1)^{n-1-j}} \right] + \frac{1}{2} (z^2-1)^{-(n-1)/2} P_n^{n-1}(z) \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] + \right. \\ \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{1}{j+1} (z^2-1)^{(1-n)/2} P_j^j(z) P_{n-j-1}^{n-j-1}(z) \right]$$

Ainsi, finalement:

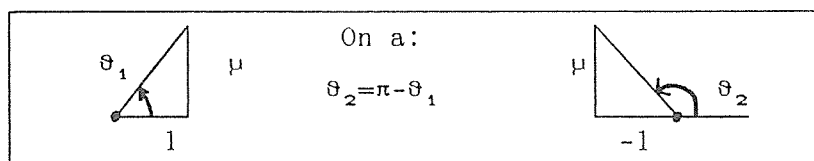
$$Q_n^{n-1}(z) = \frac{(z^2-1)^{(1-n)/2}}{2} \sum_{j=0}^{n-2} \left[\begin{matrix} n-1 \\ j \end{matrix} \right] (z^2-1)^{j/2} P_n^j(z) (n-2-j)! (-1)^{n-j} \left[(z-1)^{n-1-j} - (z+1)^{n-1-j} \right] + \frac{P_n^{n-1}(z)}{2} \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] + \sum_{j=0}^{n-1} \begin{matrix} n-1 \\ j \end{matrix} \frac{1}{j+1} P_j^j(z) P_{n-j-1}^{n-j-1}(z) \quad \text{cqft.}$$

Démonstration de la formule A6.

Pour le calcul de $Q_n^n(i\mu)$ et $Q_n^{n-1}(i\mu)$, on utilise les formules que l'on vient d'obtenir. Estimons d'abord $Q_n^n(i\mu)$.

Calculons, pour $z=i\mu$, la quantité $(z+1)^{n-j} - (z-1)^{n-j}$. Elle vaut:

$$\begin{aligned} (i\mu+1)^{n-j} - (i\mu-1)^{n-j} &= (\mu^2+1)^{(n-j)/2} \left[\exp[i\vartheta_1(n-j)] - \exp[i\vartheta_2(n-j)] \right] \\ &= (\mu^2+1)^{(n-j)/2} \exp[i\pi(n-j)/2] \left[\exp[i(\vartheta_1-\pi/2)(n-j)] - \exp[i(\pi/2-\vartheta_1)(n-j)] \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= (\mu^2+1)^{(n-j)/2} \exp[i\pi(n-j)/2] 2i \sin[(\vartheta_1-\pi/2)(n-j)] \\ &= \left[-(\mu^2+1) \right]^{(n-j)/2} 2i \sin[(\vartheta_1-\pi/2)(n-j)] . \end{aligned}$$

ϑ_1 est la détermination de $\text{tg}^{-1}(\mu)$ comprise entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

Estimons d'autre part $\ln\left[\frac{z+1}{z-1}\right]$. Cette quantité vaut:

$$\ln \left[\exp\left[i(\vartheta_1 - \vartheta_2)\right] \right] = \ln \left[\exp(2i\vartheta_1 - i\pi) \right] = i(2\vartheta_1 - \pi). \text{ On peut donc écrire:}$$

$$\begin{aligned} Q_n^n(i\mu) &= \frac{i^n}{2} (\mu^2+1)^{-n/2} \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} i^j (\mu^2+1)^{j/2} P_n^j(i\mu) (n-j-1)! (-1)^{n-j} \\ &\quad i^{n-j} (\mu^2+1)^{(n-j)/2} 2 i \sin\left[(\vartheta_1 - \pi/2)(n-j)\right] + i(\vartheta_1 - \pi/2) P_n^n(\mu) \\ &= i \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} P_n^j(i\mu) (n-j-1)! (-1)^{n-j} \sin\left[(\vartheta_1 - \pi/2)(n-j)\right] + i(\vartheta_1 - \pi/2) P_n^n(i\mu) \\ &\quad \text{cqft.} \end{aligned}$$

On trouve de même et sans problème:

$$\begin{aligned} Q_n^{n-1}(i\mu) &= i \sum_{j=0}^{n-2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} P_n^j(i\mu) (n-j-2)! (-1)^{n-j-1} \sin\left[(\vartheta_1 - \pi/2)(n-j-1)\right] + \\ &\quad + i(\vartheta_1 - \pi/2) P_n^{n-1}(i\mu) - \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \frac{1}{j+1} P_j^j(i\mu) P_{n-j-1}^{n-j-1}(i\mu). \end{aligned}$$

La démonstration de la formule A6bis ne présente pas de difficulté particulière.

Démonstration de la formule A6ter.

Les formules qui nous servent de point de départ proviennent de l'ouvrage [19]. Elles font appel aux développements des fonctions associées de Legendre sur des bases de fonctions hypergéométriques.

On a, pour z complexe:

$$Q_n^m(z) = \frac{e_{im\pi}}{2^{n+1}} \frac{\sqrt{\pi} (n+m)! (1-z^{-2})^{m/2}}{(n+1/2)! z^{n+1}} \Gamma \left[\frac{n+m+1}{2}, \frac{n+m+2}{2}; \frac{2n+3}{2}; z^{-2} \right]$$

Pour la factorielle non entière, utilisons la "formule du dédoublement":

$$\Gamma(x+1/2) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2x)}{2^{2x-1} \Gamma(x)} .$$

On obtient:

$$Q_n^m(z) = \frac{(-1)^m 2^n (n+m)! n! (1-z^{-2})^{m/2}}{(2n+1)! z^{n+1}} \Gamma \left[\frac{n+m+1}{2}, \frac{n+m+2}{2}; \frac{2n+3}{2}; z^{-2} \right]$$

Par ailleurs, on a la formule:

$$\Gamma(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k) \Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)} \frac{z^k}{k!} .$$

Cette série ne converge que lorsque : $(c-a-b > -1$ et $z=1)$ ou $(c-a-b > 0)$.

Or, ici, $\frac{2n+3}{2} - \frac{n+m+1}{2} - \frac{n+m+2}{2} = -m$, donc il y a divergence.

Pour obtenir la convergence, utilisons la propriété suivante:

$$\Gamma(a,b;c;z^{-2}) = (1-z^{-2})^{c-a-b} \Gamma(c-a,c-b;c;z^{-2}) . \text{ Il vient:}$$

$$\Gamma \left[\frac{n+m+1}{2}, \frac{n+m+2}{2}; \frac{2n+3}{2}; z^{-2} \right] = (1-z^{-2})^{-m} \Gamma \left[\frac{n+2-m}{2}, \frac{n-1-m}{2}; \frac{2n+3}{2}; z^{-2} \right] .$$

Ici, $\frac{2n+3}{2} - \frac{n+2-m}{2} - \frac{n-1-m}{2} = m$ et on a bien convergence. $Q_n^m(z)$ peut s'écrire:

$$\frac{(-1)^m 2^n (n+m)! n! (1-z^{-2})^{m/2}}{(2n+1)! z^{n+1}} (1-z^{-2})^{-m} \Gamma \left[\frac{n-m}{2} + \frac{1}{2}, \frac{n-m}{2} + 1; \frac{2n+3}{2}; z^{-2} \right]$$

Ecrivons à présent la série sous la forme:

$$\Gamma(a, b; c; z^{-2}) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \left[\frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(c)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k) \Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)} \frac{z^{-2k}}{k!} \right]$$

Avec les substitutions: $a \longmapsto \frac{n-m}{2} + \frac{1}{2}$

$b \longmapsto \frac{n-m}{2} + \frac{1}{2}$

$c \longmapsto \frac{2n+3}{2}$, on obtient pour cette série:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+1/2)}{\Gamma(n+1+1/2+k)} \frac{\Gamma\left[\frac{n-m}{2} + k + \frac{1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n-m}{2} + \frac{1}{2}\right]} \frac{\Gamma\left[\frac{n-m}{2} + k + 1\right]}{\Gamma\left[\frac{n-m}{2} + 1\right]} \frac{z^{-2k}}{k!} \quad (S)$$

Le premier des trois quotients de cette expression se simplifie. En effet:

$$\Gamma(n+1+1/2) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2n+2)}{2^{2(n+1)-1} \Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi} (2n+1)!}{2^{2n+1} n!}$$

et $\Gamma(n+1+k+1/2) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2n+2k+2)}{2^{2(n+1+k)-1} \Gamma(n+k+1)} = \frac{\sqrt{\pi} (2n+2k+1)!}{2^{2n+2k+1} (n+k)!}$

(S) vaut donc:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} n!} \frac{(n+k)!}{(2n+2k+1)!} \frac{\Gamma\left[\frac{n-m}{2} + k + \frac{1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n-m}{2} + \frac{1}{2}\right]} \frac{\Gamma\left[\frac{n-m}{2} + k + 1\right]}{\Gamma\left[\frac{n-m}{2} + 1\right]} \frac{z^{-2k}}{k!}$$

Pour expliciter davantage encore cette série, nous distinguons deux cas.

premier cas : $\frac{n-m}{2}$ est un entier. Posons alors: $j = \frac{n-m}{2} + 1$.

On a: $(j-1/2) \Gamma(j-1/2) = \Gamma(j+1/2)$

et $(j+k-1/2) \Gamma(j+k-1/2) = \Gamma(j+k+1/2)$. La série (S) vaut:

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{(2n+1)!}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} (n+k)! \Gamma(j+k+1/2) (j-1/2) \Gamma(j+k) z^{-2k}}{(2n+2k+1)! \Gamma(j+1/2) (j+k-1/2) \Gamma(j) k!} \\
 = & 1 + \frac{(2n+1)!}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} (n+k)! \pi^{1/2} \Gamma(2j+2k) 2^{2j-1} \Gamma(j) (j-1/2) \Gamma(j+k) z^{-2k}}{(2n+2k+1)! 2^{2j+2k-1} \Gamma(j+k) \pi^{1/2} \Gamma(2j) (j+k-1/2) \Gamma(j) k!} \\
 = & 1 + \frac{(2n+1)!}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k)! (2j+2k-1)! (j-1/2) z^{-2k}}{(2n+2k+1)! (2j-1)! (j+k-1/2) k!}
 \end{aligned}$$

En remplaçant j par sa valeur, on obtient l'expression complète de $Q_n^m(z)$:

$$\begin{aligned}
 Q_n^m(z) = & \frac{(-1)^m 2^n (n+m)! n! (1-z^{-2})^{-m/2}}{(2n+1)! z^{n+1}} + \\
 & + \frac{(-1)^m 2^n (n+m)! (1-z^{-2})^{-m/2}}{z^{n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k)! (n-m+2k+1)! \left[\frac{n-m+1}{2} \right] z^{-2k}}{(2n+2k+1)! (n-m+1)! \left[\frac{n-m+1}{2} + k \right] k!}
 \end{aligned}$$

soit, finalement:

$$\begin{aligned}
 Q_n^m(z) = & \frac{(-1)^m 2^n (n+m)! n! (1-z^{-2})^{-m/2}}{(2n+1)! z^{n+1}} + \\
 & + \frac{(-1)^m 2^n (n+m)! (1-z^{-2})^{-m/2}}{z^{n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k)! (n-m+2k)! z^{-2k}}{(2n+2k+1)! (n-m)! k!} \quad \text{cqft.}
 \end{aligned}$$

deuxième cas : $\frac{n-m}{2}$ est demi entier. On pose: $j = \frac{n-m}{2} + \frac{1}{2}$.

Un calcul analogue au précédent doit être effectué. Il donne exactement le même résultat.

Par ailleurs, le calcul de $Q_n^m(i\mu)$ ne présente aucune difficulté: il suffit de substituer $(i\mu)$ à z .

ANNEXE 3

POSSIBILITE DE SUPPRESSION DES TERMES COMPLEXES DANS
L'EXPRESSION DU POTENTIEL POUR LE SPHEROIDE APLATI

Le problème posé est celui de la légitimité des transformations:

$$\left. \begin{aligned}
 P_n^m(i\mu) &= i^n \hat{P}_n^m(i\mu) \\
 Q_n^m(i\mu) &= i^{n+1} \hat{Q}_n^m(i\mu) \\
 \bar{P}_n^m(i\mu) &= i^{n-1} \bar{\hat{Q}}_n^m(i\mu) \\
 \bar{Q}_n^m(i\mu) &= i^n \bar{\hat{P}}_n^m(i\mu)
 \end{aligned} \right\} (\mu \in \mathbb{R})$$

avec \hat{P} , \hat{Q} , $\bar{\hat{P}}$ et $\bar{\hat{Q}}$ réels.

Examinons la première de ces relations.

A partir de l'expression de $P_n^m(z)$, $z \in \mathbb{C}$, on tire facilement:

$$\left. \begin{aligned}
 P_n^m(i\mu) &= i^n (\mu^2+1)^{n/2} \frac{(2n)!}{2^n n!} \\
 P_n^{n-1}(i\mu) &= \frac{i^n (\mu^2+1)^{(n-1)/2} (2n)! \mu}{2^n n!}
 \end{aligned} \right\}$$

La formule de récurrence qui permet le calcul des P_n^m pour $m \leq n$ conserve le facteur i^n .

Ainsi, tous les $\hat{P}_n^m = i^{-n} P_n^m$ sont réels.

La dérivation de P par rapport à son argument ($i\mu$) amène une puissance de i supplémentaire. Il est donc immédiat que:

$$\text{les } \widehat{P}_n^m = i^{-n+1} \widehat{P}_n^m \text{ sont également réels.}$$

Voyons maintenant la démonstration pour les fonctions de deuxième espèce.

Q_n^n s'exprime en fonction de P_n^n de manière linéaire:

$$Q_n^n(i\mu) = i F \left[P_n^n(i\mu) \right] \text{ où } F \text{ est linéaire.}$$

On a:

$$Q_n^n(i\mu) = i F \left[i^n \widehat{P}_n^n(i\mu) \right] = i^{n+1} F \left[\widehat{P}_n^n(i\mu) \right].$$

Il est naturel de poser alors:

$$\widehat{Q}_n^n = F(\widehat{P}_n^n) \text{ et } Q_n^n = i^{n+1} \widehat{Q}_n^n \text{ avec } \widehat{Q}_n^n \text{ réel.}$$

Le problème est plus délicat pour Q_n^{n-1} . On peut écrire:

$$Q_n^{n-1} = i G(P_n^n),$$

mais la fonction G n'est pas linéaire. En effet, il comporte une sommation telle que:

$$\sum_j \dots \dots P_j^j P_{n-j-1}^{n-j-1} .$$

On peut écrire:

$$Q_n^{n-1}(i\mu) = i G_1(P_n^{n-1}(i\mu)) - \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{1}{j+1} P_j^j(i\mu) P_{n-j-1}^{n-j-1}(i\mu)}_{\text{non linéaire}}$$

\updownarrow
 linéaire

\downarrow
 non linéaire

Or, avec les définitions:
$$P_j^j = i^j \hat{P}_j^j$$

$$P_{n-j-1}^{n-j-1} = i^{n-j-1} \hat{P}_{n-j-1}^{n-j-1} ,$$

on montre facilement que l'on peut écrire:

$$Q_n^{n-1}(i\mu) = i^{n+1} \left[G_1(P_n^{n-1}(i\mu)) + \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \frac{1}{j+1} \hat{P}_j^j(i\mu) \hat{P}_{n-j-1}^{n-j-1}(i\mu) \right] .$$

Le terme entre crochets est réel, ce qui justifie la transformation:

$$Q_n^{n-1}(i\mu) = i^{n+1} \hat{Q}_n^{n-1}(i\mu) , \text{ où } \hat{Q}_n^{n-1} \text{ est réel.}$$

Pour les autres valeurs de l'ordre m , la relation de récurrence montre que le facteur i^{n+1} se conserve. La transformation est donc toujours légitime. Il en est de même pour les dérivées: le raisonnement déjà fait pour les fonctions de première espèce s'applique pareillement.

LISTE DES FIGURES

Cette liste est destinée à simplifier la recherche d'une figure. Les légendes ont été résumées.

- Fig.1: Un dispositif général de prospection électrique.
- Fig.2: Principe du sondage électrique.
- Fig.3: Exemples de réponses des sondes normale et latérale.
- Fig.4: Effet du trou de forage sur la résistivité apparente.
- Fig.5: Table de classification des méthodes utilisées en forage.
- Fig.6: Dispositif de prospection proposé par Clark et Salt.
- Fig.7: Dispositif proposé par Koulomzine et Geoffroy.
- Fig.8a: Dispositif et coefficient géométrique utilisés par Merkel.
- Fig.8b: Singularité du coefficient géométrique du dispositif de Merkel.
- Fig.9: Exemple d'anomalie présenté par Merkel et Alexander.
- Fig.10a: Dispositif étudié par Snyder et Merkel.
- Fig.10b: Anomalies obtenues avec le dispositif de Snyder et Merkel.
- Fig.11: Nécessité de la modélisation 3-D en forage (empruntée à Doucet).
- Fig.12: Exemple de terrain présenté par Doucet.
- Fig.13: Exemple de fausse anomalie due à une singularité du coef. géom.
- Fig.14: Les dispositifs de forage à forage de Lytle et Hanson.
- Fig.15: Dispositif utilisé par Ogilvy, Busby et Dabeck.
- Fig.16: Cas de découverte présenté par Ogilvy.
- Fig.17: Exemple d'anomalie due à une structure non intersectée (Ogilvy).
- Fig.18: Dispositif et anomalie due à une sphère (Busby et Dabeck).
- Fig.19: Anomalies dues à un sphéroïde, dispositif pôle-pôle (Yang et Ward).
- Fig.20: Dispositif proposé par Yang et Ward.
- Fig.21a: Anomalies obtenues avec le dispositif de Yang et Ward.
- Fig.21b: Anomalies obtenues avec le dispositif de Yang et Ward.

Fig.22: Dispositifs de surface pour lesquels ρ_a n'est pas défini.

Fig.23: Résistivités apparentes pour des dispositifs de forage.

Fig.24a: Dispositif Symétrique de Prospection en Forage (DSPF).

Fig.24b: Réponse d'une sphère avec le DSPF.

Fig.25: Calcul des positions optimales des électrodes (forage incliné).

Fig.26: Abaque pour le positionnement des électrodes (forage incliné).

Fig.27: Calcul de la distance optimale entre les électrodes d'émission.

Fig.27bis: Champ primaire à une profondeur donnée. (Non citée dans le texte).

Fig.28a-b: Atténuation naturelle du champ primaire avec la profondeur.

Fig.29: Fonction de transfert du bipole de mesure par rapport au potentiel.

Fig.30a: Altération des anomalies pour les grands dipôles de mesure.

Fig.30b: Fonction de transfert du bipole de mesure par rapport au gradient.

Fig.31: Paramètres pour le modèle sphérique dans un espace uniforme.

Fig.32a: Configuration pour la méthode des images.

Fig.32b: Le cas de la sphère par la méthode des images.

Fig.33: Géométrie et notations pour la méthode de Large.

Fig.34: Repères utilisés pour la formulation de Large.

Fig.35: Changements de repères pour les sphéroïdes.

Fig.36: Pavage de l'hexaèdre à l'aide de cinq tétraèdres.

Fig.37: Numérotation naturelle du maillage.

Tableau 1: Liste des vingt tétraèdres connectés au noeud (l,m,n).

Fig.38: Tétraèdre de référence.

Fig.39: Les huit hexaèdres connectés au noeud (l,m,n).

Fig.40: Ordinogramme de l'algorithme du gradient conjugué.

Fig.41: Réseau utilisé pour modéliser un effet topographique.

Fig.42: Principe d'inclinaison du réseau.

Fig.43: Exemple de maillage et de réseau incliné.

Fig.44: "Patch-test" du programme d'éléments finis.

Fig.44.bis: Convergence du "gradient conjugué". (Non citée dans le texte).

Fig.45: Géométrie pour la sphère dans un champ homogène.

Fig.46: Anomalie due à une sphère en champ homogène.

Fig.47: Sphère en champ homogène, forage non coplanaire.

Fig.48: Amplitude de l'anomalie en fonction du contraste de résistivité.

Fig.49: Impossibilité de déterminer à la fois le rayon et la résistivité.

Fig.50a: Epigraphe de la fonction-test pour les algorithmes d'inversion.

Fig.50b-c: Comportement des algorithmes de Hookes et Jeeves et de Marquardt.

Fig.51: Inversion de l'anomalie de Lingwick.

Fig.52: Spectre d'une anomalie élémentaire.

Fig.53: Gradient du potentiel lorsque l'azimuth de la sphère varie.

Fig.54: Gradient du potentiel lorsque la profondeur de la sphère varie.

Fig.55: Paramètres expérimentaux de l'anomalie en vue de l'interprétation.

Fig.56a à h: Catalogue d'abaques pour l'interprétation.

Fig.57: Exemple synthétique d'interprétation.

Fig.58: Calcul pour le cas de la sphère proche du forage.

Tableau 2: Valeurs numériques pour le modèles des figure 60 et 61.

Fig.59: Notations et géométrie pour les modèles sphéroïdaux.

Fig.60a à f: Anomalies dues aux sphéroïdes aplatis.

Fig.61a-b: Anomalies dues aux sphéroïdes allongés.

Fig.62: Exemple d'effet topographique.

Fig.63: Filtre passe-bas.

Fig.64: Filtres passe-bande.

Fig.65: Filtre large-bande.

Fig.66: Les deux types usuels de signaux "P.P.".

Fig.67: L'appareillage en place sur le terrain.

Fig.68: Face avant de l'émetteur TSQ-4 de Scintrex.

Fig.69: Electronique de l'émetteur "P.P." de faible puissance.

Fig.70: "Boite de synchronisation".

Fig.71: Principe de l'asservissement destiné à éliminer la "P.S.".

Fig.72: Fonction de transfert du système de compensation de la "P.S.".

Fig.73: Synopsis de la chaine de mesure.

Fig.74: Electronique de la chaine de mesure.

Fig.75: Analyse des signaux dans la chaine de mesure.

Fig.76: Le treuil et ses fonctions.

Fig.77: Les "rallonges" porte-électrodes.

Fig.78: L'"outil" de diagraphie.

Fig.79: Combinaisons possibles des électrodes: dispositifs de diagraphie.

Fig.80: Les connecteurs "Jupiter".

Fig.81: Fragment de l'enregistrement brut de diagraphie, site de Vittel.

Fig.82: Fragment brut de l'enregistrement "DSPF", site de Vittel.

Fig.83: Diagraphie électrique, " γ -ray" et "cutting", site de Vittel.

Fig.84a-b: Dispostifs utilisés sur le site de Carling.

Fig.85a-b: Enregistrements obtenus à Carling.

Fig.86: Diagraphies obtenues sur le site "Dong-Trieu".

Fig.87: Dispostif spécial utilisé sur le site "Dong-Trieu".

Fig.88: Signaux bruts, forage DT12.

Fig.89: Signaux bruts, forage DT96.

Fig.90: Signaux bruts, forage DT80.

Fig.91: Implantation des électrodes, site "Dong-Trieu".

Fig.92: Signaux large-bande et diagraphie, forage DT12.

Fig.93: Signaux large-bande et diagraphie, forage DT96.

Fig.94: Signaux large-bande et diagraphie, forage DT80.

Fig.95: Signaux filtrés, forage DT12.

Fig.96: Signaux filtrés, forage DT96.

Fig.97: Signaux filtrés, forage DT80.

Fig.98: Repport des résultats de l'interprétation sur le site "Dong-Trieu".

Fig.99: Modèle d'un couche inclinée.

Fig.100: Modèle de résistivité aléatoire pour l'expérience numérique.

Fig.101: Résultats de l'expérience numérique.

Fig.102: Implantation des forages et des électrodes sur le site de Margnac.

Fig.103: Diagraphies obtenues sur le site de Margnac.

Fig.104: Signaux bruts, forage M38.

Fig.105: Modélisation de la dérive, forage M38.

Fig.106: Signaux large-bande et diagraphie, forage M38.

Fig.107: Signaux large-bande et diagraphie, forage M39.

Fig.108: Signaux filtrés, forage M39.

Fig.109: Signaux bruts, forage M43.

Fig.110: Signaux filtrés, forage M43.

Fig.111: Implantations des électrodes et des forages, site de St-Symphorien.

Fig.112: Diagraphies obtenues sur le site de St-Symphorien.

Fig.113: Signaux bruts, forage SY86.

Fig.114: Signaux large-bande et diagraphie, forage SY86.

Fig.115: Signaux bruts, forage SY87.

Fig.116: Signaux large-bande et diagraphie, forage SY87.

Fig.117: Signaux large-bande et diagraphie, forage SY91.

Fig.118: Signaux bruts, forage SY91.

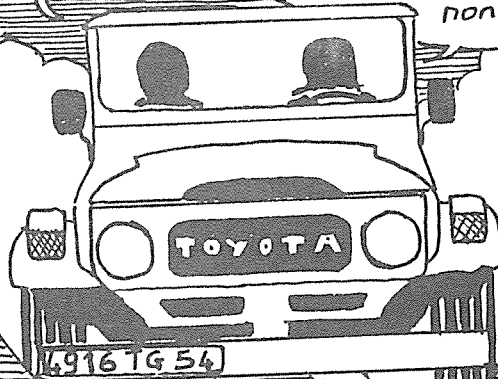
Fig.119: Repport des résultats de l'interprétation sur le site St-Symph..

Fig.120: Modèle pour l'anomalie de l'enregistrement SY87NESW.

IL ÉTAIT UNE FOIS DANS L'OUED.

probablement
des sulfures...

bizarre cette
anomalie isolée
en plein désert
non?



SCENARIO: N. FLORSCH

DESSINS: F. HENNETON

En tout cas, leur
forage est passé
à côté!



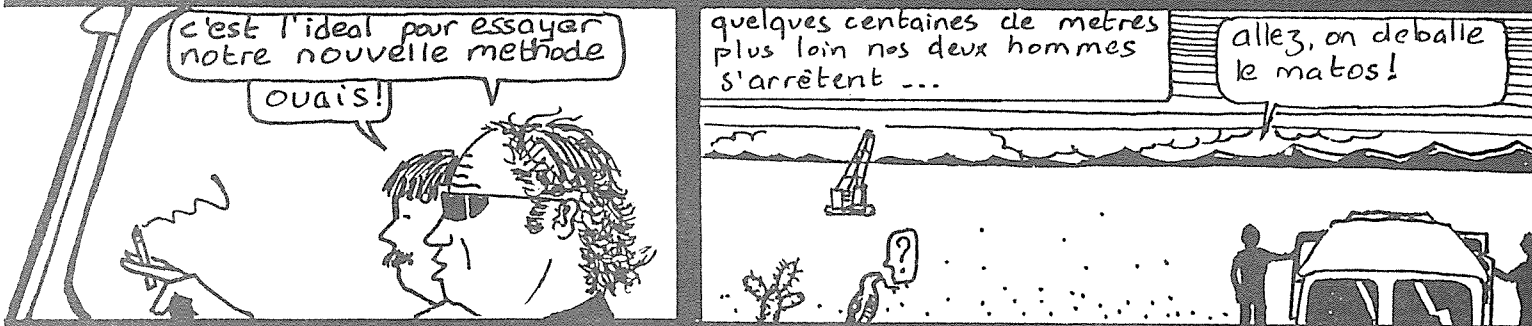
VROOOOP

c'est l'idéal pour essayer
notre nouvelle méthode

ouais!

quelques centaines de mètres
plus loin nos deux hommes
s'arrêtent ...

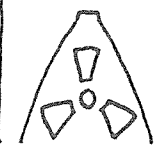
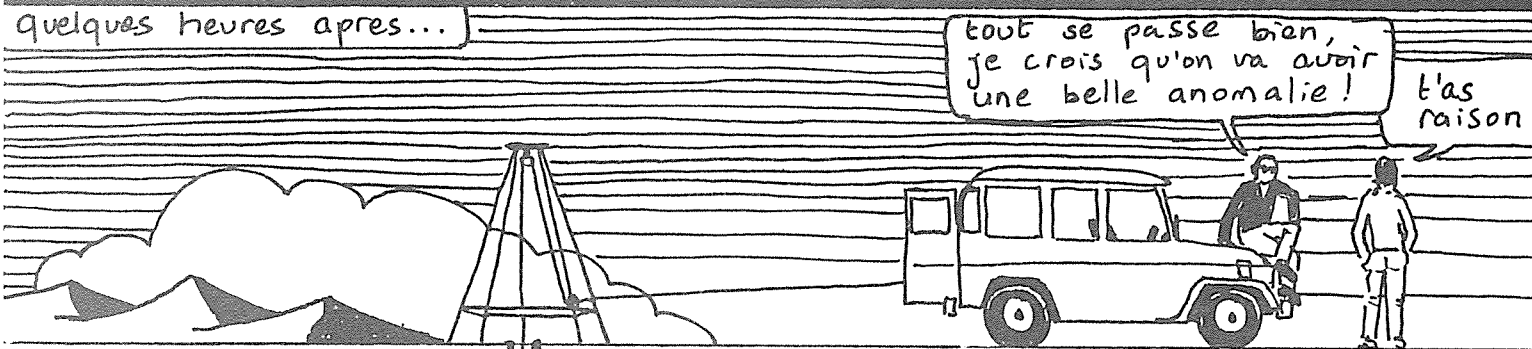
allez, on déballe
le matos!



quelques heures après...

tout se passe bien,
je crois qu'on va avoir
une belle anomalie!

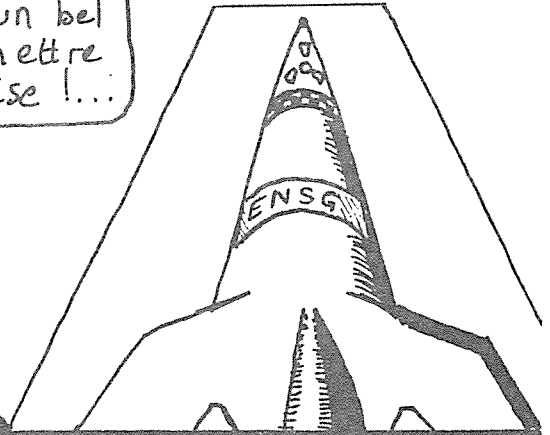
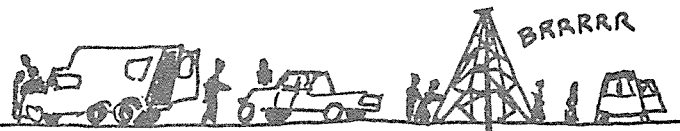
t'as
raison



en effet, le lendemain...



Je vais avoir un bel exemple à mettre dans ma thèse !...

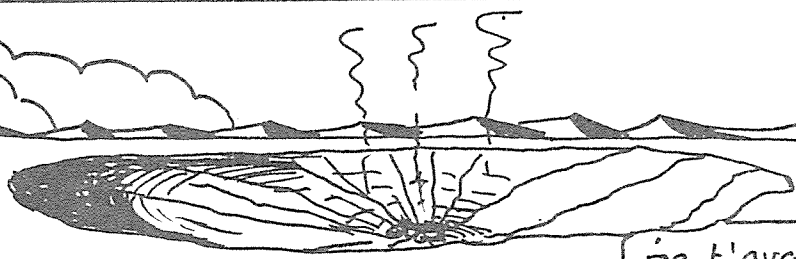


mais, soudain...

VLA OUM

c'est pas vrai !?!

NOM DE ... !



je t'avais dit qu'il cassait tout sur le terrain celui là !...



deja?

FIN



