



**HAL**  
open science

# Caractérisation de matériaux composites par problème inverse vibratoire

Thibault Wassereau

► **To cite this version:**

Thibault Wassereau. Caractérisation de matériaux composites par problème inverse vibratoire. Vibrations [physics.class-ph]. Université du Maine, 2016. Français. NNT: 2016LEMA1041 . tel-01578127v2

**HAL Id: tel-01578127**

**<https://hal.science/tel-01578127v2>**

Submitted on 15 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

**Thibault WASSEREAU**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
**grade de Docteur de l'Université du Maine**  
sous le sceau de L'Université Bretagne Loire

**École doctorale : SPIGA**

**Discipline : 60**

**Spécialité : Acoustique**

**Unité de recherche : Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine — UMR CNRS 6613**

**Soutenu le 5 Octobre 2016**

**Thèse N° : 2016LEMA1041**

## CARACTÉRISATION DE MATÉRIAUX COMPOSITES PAR PROBLÈME INVERSE VIBRATOIRE

### JURY

Rapporteurs : **Alain BERRY**, Professeur, GAUS, Université de Sherbrooke  
**Simon CHESNÉ**, Maître de Conférences HDR, LaMCoS, INSA Lyon

Examineurs : **Li CHENG**, Professeur, Université Polytechnique de Hong-Kong  
**Alexandre GARCIA**, Professeur, CNAM Paris

Invité : **Pascal AUDRAIN**, Docteur, IRT Jules Verne

Directeur de thèse : **Charles PÉZERAT**, Professeur, LAUM, Université du Maine

Co-directeur de thèse : **Jean-Louis GUYADER**, Professeur, LVA, INSA Lyon

Encadrant de thèse : **Frédéric ABLITZER**, Maître de Conférences, LAUM, Université du Maine



---

# Remerciements

En plus d'être une aventure scientifique, ces trois années ont également été une aventure humaine très enrichissante et je souhaite remercier toutes les personnes qui y ont contribué de près ou de loin.

En premier lieu je tiens à remercier Charles Pézerat, Jean-Louis Guyader et Frédéric Ablitzer, pour leur soutien, leurs vastes connaissances, leurs conseils, les innombrables discussions qui laissent parfois rêveur, leur sympathie et la confiance qu'ils m'ont accordée tout au long de la thèse.

Je remercie également les membres du jury, Alain Berry, Simon Chesné pour avoir accepté le rôle de rapporteurs de ce mémoire de thèse, ainsi que Li Cheng, Alexandre Garcia et Pascal Audrain pour leur consentement à juger ce travail.

Je souhaite remercier Bert Roozen, pour l'intérêt prononcé et immédiat qu'il a su manifester concernant l'identification de défauts. Cette collaboration n'a pu se prolonger par manque de temps, j'espère cependant qu'un projet futur permettra une association de nos travaux respectifs.

Mes remerciements s'adressent aussi à l'IRT Jules Verne ainsi qu'aux membres de la chaire VibroLeg (Alstom, Airbus, Cetim, Daher, DCNS, STX et Bureau Veritas) pour le suivi de la thèse et les échanges sur les potentielles applications industrielles.

Je remercie les Manceaux de l'IRT, Bertrand Lascoup, Pascal Audrain, Frédéric Faese et Sébastien Rolere, j'ai vraiment apprécié la sympathie de cette équipe locale, sa cohésion, le soutien mutuel, ses réunions qui ne manquaient jamais d'humour. À quand les bureaux sur le gazon ?

Je souhaite remercier le LAUM, l'ENSIM et l'IUT du Mans pour la mise à disposition des moyens de mesure et de fabrication. Merci également aux équipes de recherche, d'enseignement, d'administration, de maintenance informatique et d'instrumentation pour leur accueil, l'aide qui a pu m'être apportée et la convivialité qui y règne. À Mathieu Sécaïl, Nicolas Boissé et Julien Nicolas que j'ai régulièrement sollicité pour des soucis d'expérimentation, d'informatique ou de bricolage : merci pour votre patience ! Je remercie Khedidja Le Bail pour sa gentillesse permanente et pour m'avoir permis d'accéder au bureau quand j'oubliais mon badge, Axel Pitrou pour ses coups de mains sur la création de mon site web et tous les collègues de l'ENSIM pour ces repas communs dans une salle de pause pleine à craquer (on l'aura un



---

jour, cette véranda !), les discussions très variées, les viennoiseries, les gâteaux, les cartes postales plus ou moins absurdes...

Merci à Franck Velikonja, mon professeur de mathématiques en 1<sup>ère</sup> et T<sup>ale</sup>, qui a su me redonner goût aux mathématiques, à une période où je n’y voyais plus un grand intérêt. Sans cela je n’aurais peut-être pas pris le chemin des sciences pour mes études !

Un énorme merci à Charlie Bricault et Olfa Chaouch pour la superbe ambiance du bureau (qu’il s’agisse de travailler ou de disjoncter) et à Margaux Regniez, Julien Poittevin, Omar Aklouche, Charly Faure, Justine Carpentier, Océane Grosset, Sylvain Amailland, Vivien Denis, Jean-Michel Attendu, Arthur Monti, Antoine Sternberger, Balbine Maillou, Laurianne Barguet, Hélène Pichard, Cédric Faure, Florian Allein, Rodrigue Bouête, David Blon, Côme Olivier et Thibaut Devaux pour les soirées, les bonnes blagues, les blagues nulles, les sorties bowling/karting/24h, les parties de baby-foot, les pauses café, les fous rires en congrès et les précieux coups de main entre thésards.

Merci à Benjamin Trévisan et Valentin Meyer pour avoir eu l’idée d’un séjour commun en Croatie à la suite du congrès NOVEM, ce fut court mais vraiment enrichissant !

Je pense évidemment à Maxime Lafond et Corentin Chesnais qui ont migré vers Lyon pour leurs thèses après 5 ans d’études et de délires communs. Malgré l’éloignement, c’est comme si on avait été dans le même bureau pendant 3 ans, merci les gars et vive les mails !

Danke schön à Maxime Gensbeitel, Thomas Marcot et Nicolas Kohler pour le simple fait d’être des potes de longue date ! Je ne sais pas si ça m’a aidé pour mon doctorat mais maintenant vous pourrez dire que vous êtes cités dans une thèse en acoustique !

Arigatō à Arnaud, Simon, Audrey, Sylvain, Nicolas, Patrice, Gwen et Manu, le karaté avec vous a été un défouloir quotidien qui me manquera, merci à Philippe, Johan et Didier pour vos cours !

Un très gros merci à mes parents, Sophie, Cécile, Chiffon et toute la grande famille pour m’avoir toujours fait confiance dans mes études, même si vous pouviez parfois penser que je venais d’une autre planète...

Ma dernière pensée ira bien sûr à Emma, merci mille fois pour ton soutien permanent et ta joie débordante !

---

# Table des matières

<b>Nomenclature utilisée</b>	<b>XVII</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
Contexte de l'étude . . . . .	1
L'IRT Jules Verne . . . . .	1
Problématique et objectifs . . . . .	2
Démarche adoptée et organisation du manuscrit . . . . .	3
<b>1 État de l'art et positionnement du sujet</b>	<b>5</b>
1.1 Les matériaux composites . . . . .	5
1.2 Méthodes usuelles pour l'étude des matériaux . . . . .	7
1.3 La méthode RIFF : une approche inverse locale . . . . .	10
1.3.1 Principe original pour l'identification de sources vibratoires . . . . .	10
1.3.2 Développements connexes . . . . .	15
1.3.3 Caractérisation de matériaux . . . . .	16
1.4 Motivation des travaux . . . . .	18
1.5 Conclusions . . . . .	20
<b>2 Résolution Inverse : formulation de la méthode</b>	<b>21</b>
2.1 Modèles de poutres . . . . .	22
2.1.1 Poutre d'Euler-Bernoulli . . . . .	23
2.1.2 Poutre de Timoshenko . . . . .	24
2.1.3 Comparaison des modèles . . . . .	26
2.2 Synthèse du champ de déplacement par ondes forcées . . . . .	28
2.2.1 Généralités . . . . .	28
2.2.2 Conditions limites . . . . .	29
2.2.3 Raccordements . . . . .	29
2.2.4 Euler-Bernoulli . . . . .	30
2.2.5 Timoshenko . . . . .	31
2.2.6 Cas simple : poutre en appui de 2 morceaux homogènes . . . . .	33
2.2.7 Comparaison avec deux modèles numériques . . . . .	36

---

2.3	Principe de la méthode inverse . . . . .	40
2.3.1	Schéma aux différences finies . . . . .	40
2.3.2	Principe pour le modèle d'Euler-Bernoulli . . . . .	40
2.3.3	Principe pour le modèle de Timoshenko . . . . .	41
2.3.4	Méthode des moindres carrés . . . . .	42
2.4	Étude de faisabilité . . . . .	44
2.4.1	Configuration 1 non bruitée : poutre à plat . . . . .	46
2.4.2	Configuration 2 non bruitée : poutre sur champ . . . . .	48
2.5	Conclusions . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée</b>	<b>51</b>
3.1	Sensibilité au bruit . . . . .	51
3.2	Définition de la régularisation . . . . .	52
3.2.1	Fenêtrage global . . . . .	52
3.2.2	Filtrage local . . . . .	52
3.3	Instabilité du problème inverse pour Timoshenko . . . . .	54
3.3.1	Analyse mono-fréquentielle régularisée . . . . .	54
3.3.2	Description du phénomène d'instabilité . . . . .	55
3.3.3	Analyse multi-fréquentielle . . . . .	57
3.4	Optimisation de la régularisation . . . . .	60
3.4.1	Intervalle fréquentiel $\Delta_f$ . . . . .	60
3.4.2	Étude du nombre d'onde de coupure optimal . . . . .	62
3.4.3	Estimation du nombre d'onde propagatif $k_p$ . . . . .	72
3.5	Validations de la méthode . . . . .	76
3.5.1	Expérimentation sur une poutre épaisse en aluminium . . . . .	76
3.5.2	Application sur une poutre multicouche comportant une âme en cellules de nid d'abeille [6] . . . . .	79
3.6	Conclusions . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Résolution Inverse Corrigée</b>	<b>91</b>
4.1	Principe . . . . .	92
4.1.1	Schéma aux différences finies non corrigé . . . . .	92
4.1.2	Correction du schéma aux différences finies . . . . .	96
4.1.3	Pôles de $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$ . . . . .	96
4.1.4	Zéros de $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$ . . . . .	96
4.2	Optimisation de la méthode . . . . .	100
4.2.1	Terme correctif $\mu$ et analyse multi-fréquentielle . . . . .	100
4.2.2	Estimation du nombre d'onde propagatif $k_p$ . . . . .	104
4.2.3	Résolution optimale du maillage adaptatif . . . . .	106
4.2.4	Intervalle fréquentiel $\Delta_f$ . . . . .	109

---

---

4.3	Validation de la méthode RIC . . . . .	110
4.3.1	Maillage adaptatif . . . . .	110
4.3.2	Maillage fixe . . . . .	112
4.4	Conclusions . . . . .	116
<b>5</b>	<b>Détection et identification de défauts</b>	<b>119</b>
5.1	Concept : Analyse spatiale des caractéristiques du matériau . . . . .	119
5.2	Étude de faisabilité . . . . .	121
5.2.1	Discontinuité sur $E$ . . . . .	122
5.2.2	Discontinuité sur $G$ . . . . .	122
5.2.3	Discontinuité sur $L_z$ . . . . .	124
5.2.4	Discontinuité sur $\rho$ . . . . .	124
5.2.5	Bilan de l'étude . . . . .	125
5.3	Applications expérimentales . . . . .	126
5.3.1	Fabrication de matériau multicouche . . . . .	126
5.3.2	Poutres multicouches avec défauts . . . . .	128
5.3.3	Traitement des données et résultats . . . . .	129
5.4	Conclusions . . . . .	137
	<b>Conclusion générale</b>	<b>139</b>
	Bilan des travaux . . . . .	139
	Perspectives d'étude . . . . .	141
	<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>
<b>A</b>	<b>Décomposition en ondes forcées</b>	<b>155</b>
A.1	Forme de la matrice $[M_x^i]$ . . . . .	155
A.1.1	Euler-Bernoulli . . . . .	155
A.1.2	Timoshenko . . . . .	156
A.2	Forme de la matrice $[M_{\text{fin}}]$ . . . . .	157
A.3	Cas général : poutre quelconque de N morceaux . . . . .	158
<b>B</b>	<b>Résolution Inverse (non) Corrigée sur antenne de 7 points</b>	<b>161</b>
B.1	Schéma aux différences finies non corrigé . . . . .	161
B.1.1	Pôles de $\mathcal{E}_{\text{RI}}$ . . . . .	162
B.1.2	Zéros de $\mathcal{E}_{\text{RI}}$ . . . . .	162
B.2	Correction du schéma aux différences finies (non aboutie) . . . . .	165

---

---

---

# Table des figures

1.1	Exemples d'applications des matériaux composites en ingénierie. . . . .	5
1.2	Représentation de quelques matériaux composites. . . . .	6
1.3	Exemples de défauts typiques sur des matériaux composites. . . . .	7
1.4	Diagramme de quelques méthodes de caractérisation non destructive en fonction de la fréquence de travail. . . . .	9
1.5	Maillage d'une poutre. . . . .	11
1.6	Fenêtre de Tuckey. . . . .	12
1.7	Fenêtre de Hanning. . . . .	12
1.8	Réponse impulsionnelle du filtre local $H(x - x_i)$ . . . . .	13
1.9	Schéma d'une poutre appuyée subissant un effort tranchant $\vec{F}$ en $x = x_0$ . . . . .	14
1.10	Distributions de forces issues des résolutions inverses exacte ( $q_{ex}$ ), bruitée ( $q_{br}$ ) et filtrée fenêtrée ( $q_{RIF}$ ). . . . .	15
1.11	Résultats obtenus par la méthode RIC (CFAT) issus de [68] . . . . .	17
1.12	Identification de défaut obtenue sur une poutre de 36 cm présentant une entaille de 8 mm en $x_d = 26$ cm. . . . .	18
2.1	Cinématique élémentaire d'une poutre en fonction de la théorie utilisée. . . . .	22
2.2	Parties réelles (haut) et imaginaires (bas) des nombres d'onde de flexion $k_f$ , propagatif $k_p$ et évanescent $k_e$ pour une poutre en aluminium autorisant de faibles effets de cisaillement. . . . .	27
2.3	Parties réelles (haut) et imaginaires (bas) des nombres d'onde de flexion $k_f$ , propagatif $k_p$ et évanescent $k_e$ pour un matériau autorisant un fort potentiel de cisaillement. . . . .	27
2.4	Schéma de principe pour la décomposition en ondes forcées. . . . .	28
2.5	Schéma d'une poutre appuyée à ses extrémités, excitée par une force ponctuelle harmonique $\vec{F}$ en $x = x_{d,1} = x_0$ . . . . .	33
2.6	Géométrie réalisée sur <i>Comsol</i> <sup>®</sup> . . . . .	37
2.7	Maillage associé au modèle <i>Comsol</i> <sup>®</sup> . . . . .	37
2.8	Partie réelle du champ de déplacement pour $f = 700$ Hz. . . . .	39
2.9	Partie réelle du champ de déplacement pour $f = 3500$ Hz. . . . .	39
2.10	Spectre du champ de déplacement transverse en fonction de la fréquence (valeur RMS du champ de déplacement transverse en dehors des sources). . . . .	39

---

2.11	Schéma représentatif de la sur-information en fréquence. . . . .	43
2.12	Schéma représentatif de la sur-information en espace. . . . .	43
2.13	Poutre appuyée à plat. . . . .	45
2.14	Poutre appuyée sur champ. . . . .	45
2.15	Champ de déplacement obtenu pour la poutre épaisse appuyée à plat. . . . .	46
2.16	Cartographies des paramètres identifiés pour la poutre épaisse appuyée à plat. . . . .	47
2.17	Évolution fréquentielle des paramètres estimés pour la poutre épaisse appuyée à plat. . . . .	47
2.18	Champ de déplacement obtenu pour la poutre épaisse appuyée sur champ. . . . .	48
2.19	Cartographies des paramètres identifiés pour la poutre épaisse appuyée sur champ. . . . .	49
2.20	Évolution fréquentielle des paramètres estimés pour la poutre épaisse appuyée sur champ. . . . .	49
3.1	Champ de déplacement exact $W_{\text{ex}}$ et ses dérivées spatiales associées $\delta_{\text{ex}}^{2x}$ et $\delta_{\text{ex}}^{4x}$ . . . . .	53
3.2	Champ de déplacement bruité $W_{\text{br}}$ et ses dérivées spatiales associées $\delta_{\text{br}}^{2x}$ et $\delta_{\text{br}}^{4x}$ . . . . .	53
3.3	Paramètres élastiques et facteurs de pertes estimés à partir des variables régularisées. . . . .	54
3.4	Variables spatiales exactes et régularisées pour une fréquence unique. . . . .	56
3.5	Variables spatiales exactes et régularisées pour trois fréquences. . . . .	56
3.6	Paramètres élastiques et d'amortissements estimés par approche multi-fréquentielle pour $\Delta_f = 530$ Hz à partir de données bruitées et régularisées. . . . .	59
3.7	Paramètres élastiques et facteurs de pertes identifiés par le modèle de Timoshenko, en fonction de l'intervalle fréquentiel $\Delta_f$ et de la fréquence. . . . .	61
3.8	Fonction objective $\mathcal{O}_G$ obtenue pour différentes valeurs de $\Delta_f$ . . . . .	62
3.9	Nombre d'onde de coupure optimal en fonction du nombre d'onde de travail pour un niveau de bruit de 1%. . . . .	62
3.10	Nombre d'onde de coupure optimal en fonction du nombre d'onde de travail pour un niveau de bruit de 0.5%. . . . .	62
3.11	Module d'Young $E$ , amortissement structural $\eta_E$ , résidu $R$ et dérivée associée $\frac{\partial R}{\partial k_c}$ obtenus pour différents nombres d'onde de coupure $k_c$ . . . . .	63
3.12	Nombre d'onde de coupure optimal obtenu par divergence du résidu pour différents niveaux de bruit. . . . .	64
3.13	Résidus $R$ typiquement obtenus à partir des formulations d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko, à fréquence fixe. . . . .	65
3.14	Dérivées des résidus issus de la figure 3.13. . . . .	65
3.15	Rapport des résidus $R_{\text{TIMO}}/R_{\text{EB}}$ issus de la figure 3.13. L'écart important entre les résidus, observé pour $k_c = 62.6$ rad/m, témoigne d'un intérêt à utiliser le modèle de Timoshenko. Ceci laisse supposer la conservation d'effets de cisaillement après filtrage, on choisit alors $k_c^{\text{opt}} = 62.6$ rad/m. . . . .	66
3.16	Paramètres estimés pour un bruit de RSB = 30 dB en fonction du nombre d'onde de coupure optimal déduit par diverses procédures. . . . .	69

---

---

3.17 Paramètres estimés pour un bruit de RSB = 40 dB en fonction du nombre d'onde de coupure optimal déduit par diverses procédures. . . . .	70
3.18 Paramètres estimés pour un bruit de RSB = 50 dB en fonction du nombre d'onde de coupure optimal déduit par diverses procédures. . . . .	71
3.19 Paramètres élastiques et facteurs de pertes identifiés à $f = 1990$ Hz en utilisant l'approche multi-fréquentielle (avec $\Delta_f^{\text{opt}} = 530$ Hz) pour divers nombres d'onde de coupure $k_c$ . . . . .	73
3.20 Nombre d'onde propagatif estimé pour $f = 1990$ Hz à partir de l'analyse multi-fréquentielle (avec $\Delta_f^{\text{opt}} = 530$ Hz) en fonction du nombre d'onde de coupure $k_c$ . . . . .	73
3.21 Nombre d'onde de coupure optimal $k_c^{\text{opt}}$ déterminé en fonction de la fréquence. . . . .	74
3.22 Nombre d'onde évanescent déterminé en fonction de la fréquence après estimation optimisée des paramètres élastiques . . . . .	74
3.23 Nombre d'onde propagatif estimé pour $f = 1990$ Hz à partir de l'analyse multi-fréquentielle ( $\Delta_f^{\text{opt}}$ Hz) en fonction du nombre d'onde de coupure $k_c$ et du fenêtrage appliqué. . . . .	75
3.24 Montage expérimental pour la mesure du champ de déplacement de la poutre épaisse en aluminium. . . . .	77
3.25 Accéléromètre miniature fixé en $x_0 = 0.03$ m pour la mesure sur la poutre épaisse en aluminium. . . . .	77
3.26 Nombre d'onde de coupure optimal $k_c^{\text{opt}}$ déterminé en fonction de la fréquence $f$ et de l'intervalle fréquentiel $\Delta_f$ pour le cas expérimental d'une poutre épaisse en aluminium. . . . .	78
3.27 Nombre d'onde de coupure optimal $k_c^{\text{opt}}$ déterminé en fonction de la fréquence avec $\Delta_f^{\text{opt}} = 787.5$ Hz pour la poutre épaisse en aluminium. . . . .	78
3.28 Fonction objective $\mathcal{O}_G$ obtenue sur le cas expérimental d'une poutre épaisse en aluminium. . . . .	78
3.29 Paramètres élastiques et d'amortissements identifiés expérimentalement pour la poutre épaisse en aluminium, avec $\Delta_f^{\text{opt}} = 787.5$ Hz. . . . .	79
3.30 Orientation des cellules NIDA pour la poutre multicouche. . . . .	80
3.31 Montage expérimental pour la mesure du champ de déplacement de la poutre sandwich NIDA. . . . .	80
3.32 Nombre d'onde de coupure optimal $k_c^{\text{opt}}$ déterminé en fonction de la fréquence $f$ et de l'intervalle fréquentiel $\Delta_f$ pour la poutre sandwich NIDA. . . . .	81
3.33 Nombre d'onde de coupure optimal $k_c^{\text{opt}}$ déterminé en fonction de la fréquence avec $\Delta_f^{\text{opt}} = 312.5$ Hz pour la poutre sandwich NIDA. . . . .	81
3.34 Fonction objective $\mathcal{O}_G$ déterminée pour la validation sur une poutre sandwich NIDA. . . . .	82
3.35 Paramètres élastiques et facteurs de pertes identifiés pour la poutre sandwich NIDA par la méthode RIFF avec $\Delta_f^{\text{opt}} = 312.5$ Hz. . . . .	83
3.36 Montage expérimental pour l'essai de flexion 3 points. . . . .	84
3.37 Flèche $w$ mesurée au centre de la poutre en fonction de la charge $P$ appliquée et de la distance entre appuis $d$ . . . . .	84
3.38 Proportion déterminée entre la charge $P$ et la flèche $w$ en fonction de la distance $d$ entre appuis. . . . .	85

---



---

3.39 Montage expérimental pour la mesure du déplacement transverse local de la poutre sandwich NIDA avec conditions limites libres. . . . .	87
3.40 Réponses en fréquence (réceptance) de la poutre sandwich NIDA mesurée à l'extrémité de la structure et estimée par synthèse du déplacement transverse (modèle en éléments finis linéaires) utilisant les modules complexes déterminés par la méthode RIFF (figure 3.35). . . . .	88
4.1 Erreur $\mathcal{E}_{RI}$ associée à la discrétisation de l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko pour $\omega < \Omega_{lim}$ . . . . .	95
4.2 Erreur $\mathcal{E}_{RI}$ associée à la discrétisation de l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko pour $\omega > \Omega_{lim}$ . . . . .	95
4.3 Erreur $\mathcal{E}_{RIC}$ associée à la discrétisation corrigée de l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko pour $\omega < \Omega_{lim}$ , avec $\mu = \mu_1$ . . . . .	98
4.4 Erreur $\mathcal{E}_{RIC}$ associée à la discrétisation corrigée de l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko pour $\omega > \Omega_{lim}$ , avec $\mu = \mu_1$ . . . . .	98
4.5 Erreur $\mathcal{E}_{RIC}$ associée à la discrétisation corrigée de l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko pour $\omega > \Omega_{lim}$ , avec $\mu = \mu_4$ . . . . .	99
4.6 Erreur $\mathcal{E}_{RI}$ associée à la discrétisation de l'équation du mouvement, obtenue en considérant une analyse multi-fréquentielle, pour $\Delta_x$ constant (maillage fixe), sans application du terme correctif $\mu$ . . . . .	101
4.7 Erreur $\mathcal{E}_{RIC}$ associée à la discrétisation corrigée de l'équation du mouvement, en considérant une analyse multi-fréquentielle, pour $\Delta_x$ constant (maillage fixe), avec application d'un terme correctif $\mu$ identique pour tous les échantillons fréquentiels $[f - \Delta_f, f, f + \Delta_f]$ . . . . .	101
4.8 Erreur $\mathcal{E}_{RIC}$ associée à la discrétisation corrigée de l'équation du mouvement, en considérant une analyse multi-fréquentielle, pour $\Delta_x$ constant (maillage fixe), avec application d'un terme correctif $\mu$ adapté pour chaque échantillon fréquentiel $[f - \Delta_f, f, f + \Delta_f]$ . . . . .	101
4.9 Erreur $\mathcal{E}_{RI}$ associée à la discrétisation de l'équation du mouvement, en considérant une analyse multi-fréquentielle, pour $n$ constant (maillage adaptatif), sans application du terme correctif $\mu$ . . . . .	103
4.10 Erreur $\mathcal{E}_{RIC}$ associée à la discrétisation corrigée de l'équation du mouvement, en considérant une analyse multi-fréquentielle, pour $n$ constant (maillage adaptatif), avec application d'un terme correctif $\mu$ constant pour tous les échantillons fréquentiels $[f - \Delta_f, f, f + \Delta_f]$ . . . . .	103
4.11 Parties réelle (haut) et imaginaire (bas) du nombre d'onde propagatif déterminé par la méthode de McDaniel. . . . .	105
4.12 Champ de déplacement $W$ associé à la simulation 1 (arrière plan) et position des points conservés pour le maillage adaptatif avec $n \approx 3$ . . . . .	107
4.13 Erreur d'estimation du module de cisaillement $Err_G$ en fonction de la résolution de maillage $n$ et de la fréquence $f$ pour la simulation 1, avec $RSB = 35$ dB. . . . .	108

---

---

4.14	Erreur moyenne $\overline{\text{Err}}_G$ sur le module de cisaillement $G$ , obtenue à l'issue de l'analyse multi-fréquentielle pour la simulation 1, avec $\Delta_f = 540$ Hz, $n$ constant (maillage adaptatif) et application d'un terme correctif $\mu$ défini pour chaque échantillon fréquentiel $[f - \Delta_f, f, f + \Delta_f]$ .	108
4.15	Erreur moyenne $\overline{\text{Err}}_G$ sur le module de cisaillement $G$ , obtenue à l'issue de l'analyse multi-fréquentielle pour la simulation 2, avec $\Delta_f = 300$ Hz, $n$ constant (maillage adaptatif) et application d'un terme correctif $\mu$ défini pour chaque échantillon fréquentiel $[f - \Delta_f, f, f + \Delta_f]$ .	108
4.16	Nombre d'onde propagatif $k_p$ identifié par la méthode de McDaniel et une interpolation pour la poutre sandwich NIDA avec un maillage régulier de 133 points. . . . .	110
4.17	Champ de déplacement $W$ mesuré sur la poutre NIDA (arrière plan) et position des points conservés pour le maillage adaptatif avec $n \approx 2.8$ . . . . .	111
4.18	Fonction objective $\mathcal{O}_G$ obtenue pour la poutre NIDA par la méthode RIC avec un maillage adaptatif ( $n \approx 2.8$ ). . . . .	111
4.19	Paramètres élastiques et facteurs de pertes identifiés pour la poutre sandwich NIDA par la méthode RIC avec un maillage adaptatif ( $n \approx 2.8$ ) et $\Delta_f^{\text{opt}} = 322.3$ Hz. . . . .	112
4.20	Nombre d'onde propagatif $k_p$ déterminé par la méthode de McDaniel et une interpolation, pour la poutre sandwich NIDA avec un maillage régulier de 14 points. . . . .	113
4.21	Module de cisaillement $G$ identifié en fonction de l'intervalle fréquentiel $\Delta_f$ et de la fréquence $f$ , avec un maillage fixe de 14 points. . . . .	113
4.22	Fonction objective $\mathcal{O}_G$ obtenue pour la poutre NIDA par la méthode RIC avec un maillage fixe de 14 points ou 7 points. . . . .	114
4.23	Paramètres élastiques et facteurs de pertes identifiés pour la poutre sandwich NIDA par la méthode RIC avec maillage fixe de 14 points ( $\Delta_f^{\text{opt}} = 341.8$ Hz) et avec maillage fixe de 7 points ( $\Delta_f^{\text{opt}} = 322.3$ Hz). . . . .	115
5.1	Schéma de principe pour la détection de défauts par cartographie des paramètres du matériau.	120
5.2	Schéma de la poutre simulée, appuyée à ses extrémités et présentant une discontinuité sur $x \in [x_1; x_2]$ . . . . .	121
5.3	Cartographies des modules d'Young et de cisaillement, obtenues par la résolution inverse pour une poutre présentant une baisse de 10% du module d'Young $E$ en $x \in [0.2; 0.25]$ m.	123
5.4	Cartographies des modules d'Young et de cisaillement, obtenues par la résolution inverse pour une poutre présentant une baisse de 10% du module de cisaillement $G$ en $x \in [0.2; 0.25]$ m. . . . .	123
5.5	Cartographies des modules d'Young et de cisaillement, obtenues par la résolution inverse pour une poutre présentant une baisse de 10% de l'épaisseur $L_z$ en $x \in [0.2; 0.25]$ m. . . .	124
5.6	Cartographies des modules d'Young et de cisaillement, obtenues par la résolution inverse pour une poutre présentant une baisse de 10% de la masse volumique $\rho$ en $x \in [0.2; 0.25]$ m.	124
5.7	Schéma du procédé d'infusion pour la fabrication de peaux en fibres de verre. . . . .	126
5.8	Photographie de la plaque multicouche fabriquée. . . . .	127
5.9	Poutre composite multicouche présentant un défaut de collage. . . . .	128

---

---

5.10	Poutre composite multicouche présentant un défaut de rupture de fibres. . . . .	128
5.11	Orientation des cellules NIDA pour les poutres avec défauts. . . . .	129
5.12	Champ de déplacement $W$ et dérivées spatiales $\delta^{2x}$ et $\delta^{4x}$ bruts issus de la mesure sur la poutre multicouche présentant un défaut de collage. . . . .	130
5.13	Nombre d'onde propagatif estimé par la méthode de McDaniel pour la mesure sur la poutre multicouche présentant un défaut de collage, en fonction de la zone d'analyse. . . . .	131
5.14	Cartographies des paramètres élastiques et des facteurs de pertes identifiés pour la mesure sur la poutre multicouche présentant un défaut de collage. . . . .	132
5.15	Champ de déplacement $W$ et dérivées spatiales $\delta^{2x}$ et $\delta^{4x}$ bruts issus de la mesure sur la poutre multicouche présentant un défaut de rupture de fibres. . . . .	134
5.16	Nombre d'onde propagatif estimé par la méthode de McDaniel pour la mesure sur la poutre multicouche présentant une rupture de fibres, en fonction de la zone d'analyse. . . . .	135
5.17	Cartographies des paramètres élastiques et des facteurs de pertes identifiés pour la mesure sur la poutre multicouche présentant une rupture de fibres. . . . .	136
B.1	Erreur $\mathcal{E}_{RI}$ associée à la discrétisation de l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko pour $\omega < \Omega_{lim}$ avec un schéma aux différences finies de 7 points. . . . .	166
B.2	Erreur $\mathcal{E}_{RI}$ associée à la discrétisation de l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko pour $\omega > \Omega_{lim}$ avec un schéma aux différences finies de 7 points. . . . .	166

---

# Liste des tableaux

1.1	Paramètres de simulation pour l'exemple d'application de la méthode RIFF originale. . . . .	14
2.1	Configurations de poutres définies pour la comparaison des nombres d'onde issus des théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. . . . .	26
2.2	Résumé des conditions limites applicables aux extrémités d'une poutre et de leurs conséquences mathématiques. . . . .	29
2.3	Paramètres de simulation pour la comparaison entre la formulation en ondes forcées, le modèle en éléments finis linéaires et le modèle en éléments finis 3D <i>Comsol</i> <sup>®</sup> . . . . .	38
2.4	Paramètres de simulation pour le cas d'une poutre épaisse en aluminium. . . . .	45
3.1	Paramètres de simulation pour la comparaison des méthodes d'optimisation de filtrage. . . . .	67
3.2	Caractéristiques de la poutre épaisse en aluminium et configuration de la mesure établie pour la validation expérimentale. . . . .	76
3.3	Caractéristiques de la poutre composite sandwich NIDA et paramètres de mesure. . . . .	80
3.4	Comparaison des modules d'Young $E$ et de cisaillement $G$ estimés pour la poutre sandwich NIDA par la méthode RIFF, donnés dans la fiche technique <i>Plascore</i> <sup>®</sup> [116] et identifiés par le test de flexion 3 points. . . . .	86
4.1	Paramètres de simulation pour l'étude de la résolution de maillage optimale $n^{\text{opt}}$ . . . . .	106
4.2	Résolution de maillage $n$ entraînant une erreur moyenne $\overline{\text{Err}}_G$ la plus faible, pour les deux simulations établies, en fonction du Rapport Signal à Bruit. . . . .	109
4.3	Résumé des durées de post-traitement pour l'étude de la poutre multicouche NIDA en fonction de la méthode utilisée, à puissance de calcul équivalente. . . . .	117
5.1	Paramètres de simulation pour l'étude de faisabilité sur la détection et l'identification de défauts sur poutres composites. . . . .	121
5.2	Synthèse des variations locales dans la portion $x \in [x_1; x_2]$ du module d'Young $E$ et du module de cisaillement $G$ en fonction du défaut appliqué et de la théorie utilisée pour la résolution inverse. . . . .	125
5.3	Caractéristiques des poutres composites avec défaut de collage (DC) ou de rupture de fibres (RF) et paramètres de mesure. . . . .	129

---

A.1 Notation des lignes "exploitables" de la matrice  $M_x^i$  (relations 2.28 et 2.39) en fonction de la condition limite appliquée à l'extrémité en  $x = 0$  ou  $x = L_x$ . . . . . 158

---

# Nomenclature utilisée

Les tableaux suivant résument les notations utilisées dans ce manuscrit. Certaines variables à usage local ne sont pas répertoriées.

## Alphabet latin

Variable	Description	Unité
$d$	Distance entre appuis (banc de flexion)	m
$\mathcal{D}$	Rigidité de flexion	N.m <sup>2</sup>
$E$	Module d'Young	Pa
$\text{Err}_G$	Erreur relative d'estimation sur $G$	-
$\mathcal{E}$	Erreur du schéma aux différences finies	-
$F$	Force	N
$F_{\text{ext}}$	Effort tranchant appliqué à la poutre	N
$f$	Fréquence	Hz
$f_x$	Facteur de forme du filtre spatial	-
$G$	Module de cisaillement	Pa
$h$	Longueur élémentaire	m
$H$	Réponse impulsionnelle du filtre pour la régularisation	m <sup>-1</sup>
$I$	Moment d'inertie	m <sup>4</sup>
$k_c$	Nombre d'onde de coupure	rad.m <sup>-1</sup>
$k_f$	Nombre d'onde de flexion (Euler-Bernoulli)	rad.m <sup>-1</sup>
$k_p$	Nombre d'onde propagatif (Timoshenko)	rad.m <sup>-1</sup>
$k_{p,\text{fit}}$	Nombre d'onde propagatif déduit après lissage	rad.m <sup>-1</sup>
$k_e$	Nombre d'onde évanescent (Timoshenko)	rad.m <sup>-1</sup>
$k_{\text{MD}}$	Nombre d'onde estimé par la méthode de McDaniel	rad.m <sup>-1</sup>
$k_{\text{rd}}$	Nombre d'onde des pôles de l'erreur $\mathcal{E}_{\text{RI}}$	rad.m <sup>-1</sup>
$k_{\text{rn}}$	Nombre d'onde des zéros de l'erreur $\mathcal{E}_{\text{RI}}$	rad.m <sup>-1</sup>
$K_e$	Matrice de raideur élémentaire	-

---

Variable	Description	Unité
$L_x$	Longueur	m
$L_y$	Largeur	m
$L_z$	Épaisseur	m
$M_x^i$	Matrice des ondes forcées	-
$M_{CL}$	Matrice des conditions limites	-
$M_e$	Matrice de masse élémentaire	-
$\mathcal{M}$	Moment fléchissant	N.m
$\mathcal{M}_{\text{ext}}$	Moment fléchissant appliqué à la poutre	N.m
$n$	Résolution spatiale	-
$N_f$	Nombre de fréquences	-
$N_x$	Nombre de points de mesure	-
$\mathcal{N}$	Rigidité de cisaillement	N
$\mathcal{O}_G$	Fonction objective	Pa
$P$	Effort statique	N
$q$	Distribution de force	N.m <sup>-1</sup>
$Q$	Second membre de l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko	N.m <sup>-1</sup>
$R$	Résidu	*
$S$	Section de poutre	m <sup>2</sup>
$t_c$	Épaisseur de l'âme	m
$t_f$	Épaisseur de la peau	m
$\mathcal{T}$	Effort tranchant	N
$w$	Flèche	m
$W$	Déplacement transverse	m
$x_0$	Position de la source vibratoire	m
$x_d$	Vecteur des positions de discontinuités	m

\* Unité dépendante du problème étudié

---

## Alphabet grec

Variable	Description	Unité
$\gamma$	Angle de cisaillement pur	degrés
$\delta^{2x}$	Dérivée seconde du déplacement (approchée par différences finies)	$m^{-1}$
$\delta^{4x}$	Dérivée quatrième du déplacement (approchée par différences finies)	$m^{-3}$
$\Delta_f$	Intervalle fréquentiel	Hz
$\Delta_x$	Distance entre 2 points $x_i$ et $x_{i+1}$	m
$\Delta_y$	Distance entre 2 points $y_i$ et $y_{i+1}$	m
$\epsilon$	Allongement relatif	-
$\eta_E$	Facteur de perte en flexion	-
$\eta_G$	Facteur de perte en cisaillement	-
$\Theta$	Angle de flexion pure	degrés
$\lambda_c$	Longueur d'onde de coupure	m
$\mu$	Terme correctif de la méthode RIC	-
$\nu$	Coefficient de Poisson	-
$\rho$	Masse volumique	$kg.m^{-3}$
$\sigma$	Contrainte	Pa
$\psi$	Fenêtre pour la régularisation	-
$\omega$	Pulsation	$rad.s^{-1}$
$\Omega_{lim}$	Pulsation limite	$rad.s^{-1}$



---

## Indices et exposants

Symbole	Description
EB	Variable issue de la théorie d'Euler-Bernoulli
TIMO	Variable issue de la théorie de Timoshenko
opt	Variable optimisée
0	Variable associée à la source vibratoire
br	Variable bruitée
def	Variable associée à un défaut
ex	Variable exacte
fen	Variable fenêtrée
EF	Variable associée aux éléments finis
OF	Variable associée aux ondes forcées
RI	Variable issue de l'application de la résolution inverse seule
RIFF	Variable issue de l'application de la méthode RIFF
RIC	Variable issue de l'application de la méthode RIC
$x$	Variable associée à la direction $x$
$y$	Variable associée à la direction $y$
$z$	Variable associée à la direction $z$
$\sim$	Variable complexe
$\hat{\phantom{x}}$	Variable issue d'une transformée de Fourier spatiale
$\bar{\phantom{x}}$	Variable moyennée

---

## Sigles

<b>Sigle</b>	<b>Description</b>
BEM	Boundary Element Method
BVID	Barely Visible Impact Damage
CFAT	Corrected Force Analysis Technique
CND	Contrôle Non Destructif
DC	Défaut de Collage
DMA	Dynamic Mechanical Analysis
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques
EF	Éléments finis
FAT	Force Analysis Technique
FEM	Finite Element Method
NIDA	Structure en nid d'abeille
OF	Ondes forcées
RF	Rupture de Fibres
RI	Résolution Inverse
RIFF	Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée
RIC	Résolution Inverse Corrigée
RSB	Rapport Signal à Bruit
SHM	Structural Health Monitoring
SVD	Singular Value Decomposition
TMA	ThermoMechanical Analysis

---

# Introduction générale

L'objectif de cette étude est de développer une méthode vibratoire inverse pour la caractérisation de matériaux composites. Un intérêt particulier est accordé à l'estimation des paramètres élastiques et d'amortissements (module d'Young  $E$ , module de cisaillement  $G$ , ainsi que les facteurs de pertes associés  $\eta_E$  et  $\eta_G$ ), afin de pouvoir quantifier les performances dynamiques de ces nouveaux matériaux en fonction de la fréquence et détecter, puis éventuellement identifier, des défauts typiques.

## Contexte de l'étude

Confortés par leur légèreté et leurs propriétés mécaniques, les matériaux composites connaissent un essor croissant depuis la dernière décennie. La variété des alliages et l'évolution constante des procédés de fabrication facilitent l'utilisation des composites dans divers domaines industriels. Les industries du transport, quant à elles, sont généralement confrontées à un besoin de réduire les consommations d'énergies, passant par une stratégie de réduction de la masse des véhicules, avec la condition de conserver une bonne résistance des matériaux utilisés. Dans ce but, les matériaux composites se présentent alors comme un très bon compromis. En revanche, le comportement vibratoire de ces matériaux n'est pas parfaitement maîtrisé, d'autant plus que les propriétés des composites varient en fonction de l'échelle d'intérêt (microscopique, mésoscopique ou macroscopique).

## L'IRT Jules Verne

L'Institut de Recherche Technologique Jules Verne consiste en une mutualisation de compétences techniques et de connaissances académiques, répondant aux problématiques diverses des partenaires industriels associés à son financement. Cet institut est principalement centré sur l'innovation autour des matériaux composites et métalliques, il s'intéresse notamment à 5 thématiques clés : les procédés de fabrication, la robotisation, la simulation, la caractérisation et le suivi embarqué de structures.

Cette thèse s'inscrit au sein de la Chaire VibroLeg (Vibroacoustique des structures Légères), démarrée en 2012 et supportée par le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, Alstom, Airbus, Cetim, Daher, DCNS, STX et Bureau Veritas.

Ce projet allie des recherches sur deux thématiques majeures, englobant six thèses :

1. Diagnostic de structures
  - Mesure du champ vibratoire d’une structure par holographie optique numérique ultra-rapide [1–4]
  - Caractérisation de matériaux composites par problème inverse vibratoire [5, 6]
  - Caractérisation des sources aéroacoustiques sur structures légères [7]
2. Dispositifs de réduction innovants
  - Utilisation de trous noirs acoustiques pour la diminution des niveaux vibratoires de structures industrielles [8]
  - Diminution des vibrations et du bruit rayonné de paroi par contrôle distribué [9, 10]
  - Atténuation des vibrations dans des structures creuses par ajout de matériaux granulaires

Cette chaire présente un intérêt et un potentiel d’application forts, puisqu’elle émane directement d’une demande de la part d’acteurs industriels et académiques reconnus.

## Problématique et objectifs

Le panel des techniques actuellement disponibles pour le diagnostic de structures est minoritairement adapté à l’étude vibratoire des composites. Des contraintes liées à la mise en œuvre, à la complexité de modélisation ou la durée des procédures sont évoquées dans la littérature. Le développement de nouvelles méthodes de caractérisations est donc nécessaire.

Ces travaux se concentrent sur l’étude de poutres composites. Premièrement, l’hypothèse de structure mince (théorie d’Euler-Bernoulli) n’est plus vérifiée. La théorie de Timoshenko, qui prend en compte le cisaillement de la structure, est alors préférée. Deuxièmement, Ablitzer et al. ont mis en évidence la possibilité de caractériser un matériau par l’utilisation de la méthode RIFF (Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée) [11, 12]. Cette thèse consiste à étoffer cette technique afin de pouvoir estimer les modules d’Young  $E$  et de cisaillement  $G$ , ainsi que leurs facteurs de pertes associés  $\eta_E$  et  $\eta_G$  en fonction de la fréquence ou de l’espace.

Les structures composites sont ici considérées comme homogènes, donnant accès à des caractéristiques de matériaux équivalents. Cette représentation permet de simplifier grandement la complexité des modèles numériques. En revanche, la prévision du comportement dynamique de ces matériaux ne doit pas être dénaturée par cette homogénéisation. Enfin, le caractère local de la méthode RIFF est un avantage non négligeable. Les conditions limites de la structure peuvent être ignorées, d’une part, et l’établissement de cartographies pourrait permettre de détecter une variation spatiale des caractéristiques du matériau et/ou la présence de défauts, d’autre part. En complément, la signature d’un défaut typique des matériaux composites (délaminage, rupture de fibres, Barely Visible Impact Damage, défaut de collage, etc.) pourrait être déduite à travers l’analyse du comportement des paramètres élastiques et des facteurs de pertes.

## Démarche adoptée et organisation du manuscrit

A la suite de cette introduction, cinq chapitres sont développés :

- Le premier établit un état de l’art sur l’utilisation des structures composites et expose les limitations actuelles pour identifier les caractéristiques de matériaux composites. Une description générale de la méthode RIFF (Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée) et des évolutions réalisées depuis une vingtaine d’années s’ouvre sur les diverses motivations de ces travaux de thèse.
- Le second pose les bases théoriques des modèles de poutres mis en jeu, ainsi que la formulation inverse utilisée. Pour la résolution préalable du problème inverse, un intérêt particulier est porté sur la décomposition en ondes forcées, à partir de laquelle une expression analytique du champ de déplacement est obtenue, prenant en compte les effets de cisaillement.
- Le troisième traite de la réduction des incertitudes de mesure, un développement automatique de la régularisation est mis en œuvre. Deux essais expérimentaux permettent finalement de valider l’utilisation de la méthode RIFF pour l’étude de matériaux composites multicouches.
- Le quatrième décrit la méthode de Résolution Inverse Corrigé (RIC), utilisant le filtrage naturel induit par la mesure sur maillage discrétisé. Une comparaison avec la méthode RIFF prouve un intérêt particulier de la méthode RIC, dans le but de réduire fortement les durées de mesure et de post-traitement.
- Le cinquième chapitre introduit le concept de détection et d’identification de défauts typiques sur structures composites par la méthode RIFF. Une analyse théorique de faisabilité ainsi qu’une étude expérimentale, réalisée sur deux poutres présentant un défaut de collage ou de rupture de fibres, démontrent la possibilité de localiser des imperfections, dans un premier temps. À travers l’observation de cartographies des paramètres élastiques et des facteurs de pertes, estimés par le modèle de Timoshenko, l’identification de défauts est envisagée, dans un second temps.

Enfin, une conclusion générale résume le bilan des résultats obtenus au cours de ce travail de trois années. L’intérêt qu’ils constituent suscite plusieurs perspectives de développement.



# Chapitre 1

## État de l'art et positionnement du sujet

### 1.1 Les matériaux composites

Dans une démarche de réduction des consommations énergétiques de leurs véhicules, les industries du transport souhaitent diminuer la masse embarquée, c'est pourquoi elles se tournent principalement vers les matériaux composites, quelques exemples d'applications sont présentés en figure 1.1. Cette tendance s'est d'ailleurs généralisée dans des domaines très variés comme le bâtiment (béton à renfort de fibres), la protection individuelle (casque de moto, gilet pare-balle) ou les équipements sportifs (snowboard, cadres de vélo). En effet, les matériaux composites présentent généralement une forte résistance mécanique pour un poids très faible. Par exemple, un stratifié en fibres de carbone imprégné dans une résine epoxy peut offrir un module d'Young 2.5 fois supérieur à celui de l'aluminium, pour une masse volumique réduite de 40% par rapport à ce même matériau [13].

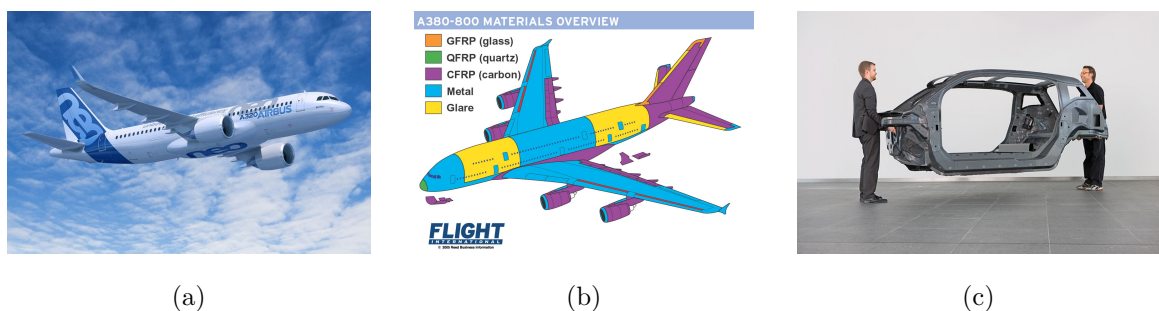


FIGURE 1.1 – Exemples d'applications des matériaux composites en ingénierie. (a) Avion de ligne *Airbus*<sup>®</sup> A320-NEO intégrant des matériaux composites (réduction des consommations en carburant de près de 15%). (b) Répartition des différents matériaux sur l'avion *Airbus*<sup>®</sup> A380. (c) Châssis de voiture électrique *BMW*<sup>®</sup> i3 en composite d'aluminium et fibres de carbone.



Les matériaux composites existent sous divers aspects (partiellement représentés en figure 1.2), allant du simple empilement de couches primaires, on parle alors de composite multicouche, à des géométries plus complexes comme les structures en nid d'abeille (NIDA) ou les composites tissés. Une réflexion approfondie sur les matériaux utilisés et le design de ces structures permet de leur induire des propriétés particulières afin de répondre à divers besoins dans des domaines variés (orthotropie mécanique, amortissement vibratoire, conduction thermique, isolation électrique) parfois inconciliables à partir de matériaux classiques.

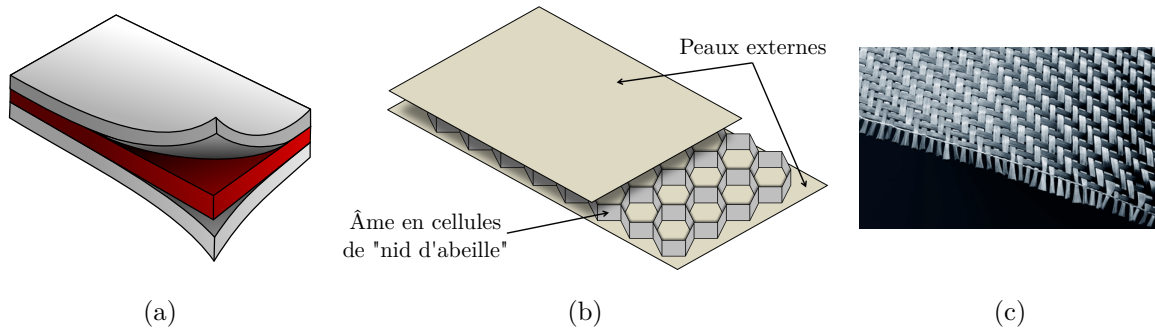


FIGURE 1.2 – Représentation de quelques matériaux composites. (a) Schéma d'un composite multicouche. (b) Empilement d'un matériau composite à âme en nid d'abeille (NIDA). (c) Photographie d'un tissage en fibres de carbone.

Bien que la variété des structures composites et les procédés de fabrication aient rapidement évolué, les approches de caractérisation non destructive dédiées spécifiquement pour ces nouveaux matériaux restent peu nombreuses. Une caractérisation fine des composites est pourtant nécessaire sur deux points clés.

Premièrement, la compréhension de la dynamique des structures composites reste encore limitée, les interactions entre les différentes couches entraînent des comportements vibratoires particuliers. Ces derniers doivent néanmoins être anticipés pour la modélisation et la simulation en ingénierie. De nouvelles formulations analytiques ont été développées dans ce sens mais ne répondent généralement qu'à un type de composite, il faudrait donc réaliser autant d'études qu'il existe de structures. Par ailleurs, un contrôle des propriétés élastiques du matériau fabriqué doit pouvoir être établi pour une comparaison avec les résultats de simulation. Or, les méthodes les plus courantes dans l'ingénierie font intervenir des éprouvettes dont le comportement peut différer selon l'organisation géométrique des multicouches. Des méthodes robustes et applicables sur diverses structures sont souhaitables.

Deuxièmement, les matériaux composites mettent en évidence de potentiels défauts et modes d'endommagement propres à la nature même de ces structures, deux exemples sont présentés en figure 1.3. Ces imperfections peuvent apparaître lors de la fabrication de la matrice (défaut de pli, rupture de fibres) de son assemblage avec d'autres éléments (inclusions, bulles d'air, défaut de collage) ou lors de son utilisation en conditions réelles (délaminage, Barely Visible Impact Damage, etc.).

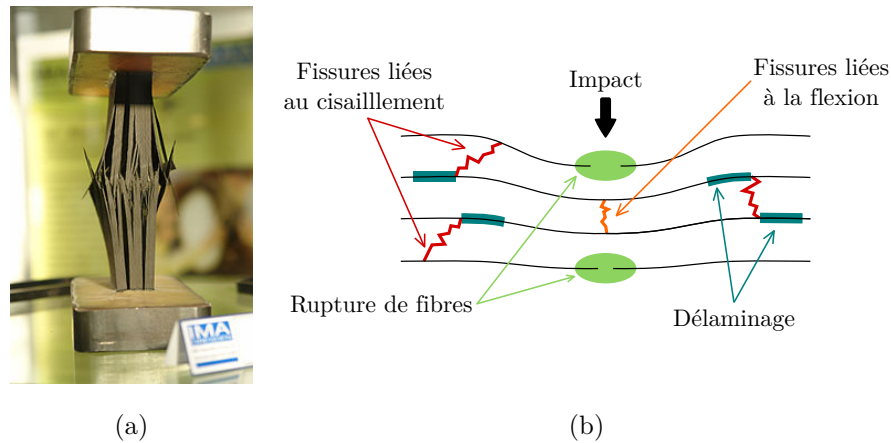


FIGURE 1.3 – Exemples de défauts visibles sur des matériaux composites. (a) Défaut de délaminage d'un composite en fibres de carbone après compression axiale. (b) Schématisation d'un défaut de type Barely Visible Impact Damage.

Le manque de méthodes dédiées à la caractérisation de ces nouvelles structures entraîne une utilisation des matériaux composites qui se limite le plus souvent aux pièces secondaires, représentant un risque relativement faible en cas de dégradation ou d'éventuelle rupture (capot de voiture, tableau de bord de voiture, dérives d'ailerons d'avions comme observé en figure 1.1(b), etc.).

## 1.2 Méthodes usuelles pour l'étude des matériaux : paramètres élastiques, amortissements et défauts

Le contrôle des structures concerne de nombreux domaines d'applications comme l'analyse de bois pour l'acoustique instrumentale [14, 15], le génie civil pour la résistance de fondations aux phénomènes sismiques [16–19] ou encore l'aérospatial [20–22]. C'est autour des années 1980 que les méthodes d'observation par ondes acoustiques commencent à se développer dans l'industrie pour la caractérisation non destructive des matériaux. Plusieurs approches émergent, parmi lesquelles on peut distinguer les méthodes ultrasonores, les procédés d'émission acoustique et les analyses mécaniques. Ces dernières sont particulièrement intéressantes puisqu'elles se basent justement sur l'utilisation des déformations de la structure elle-même. Ainsi, la durée de mesure, la complexité de mise en œuvre et son coût se réduisent significativement. L'éventail des méthodes pour déterminer les paramètres élastiques et les amortissements de structures est large, cependant les procédures développées sont ciblées pour certains types de matériaux ou de formes, avec des conditions de mesure spécifiques. Un référencement non exhaustif des procédures, de leurs avantages et inconvénients fait l'objet des paragraphes suivants.

Dans un premier temps, nous pouvons regrouper les méthodes dites statiques, quasi-statiques (de l'ordre du Hertz), ou très basses fréquences (quelques dizaines de Hertz), qui se basent sur la théorie élastique linéaire des matériaux, plus communément connue sous le nom de loi de Hooke. Les approches de TMA (ThermoMechanical Analysis) ou DMA (Dynamic Mechanical Analysis) sont appréciées pour

leur facilité d'application et font l'objet d'équipements de mesure dédiés [23, 24].

Un dispositif de traction-compression applique une élongation d'éprouvettes conçues spécialement pour ces tests. Un relevé de l'allongement relatif  $\epsilon$  en fonction de la contrainte  $\sigma$  appliquée donne connaissance du module d'Young  $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$  pour des fréquences de l'ordre de la dizaine de Hertz. La même approche en cisaillement entraîne des déformations axiale  $\epsilon_x$  et latérale  $\epsilon_y$  qui permettent d'exprimer le coefficient de Poisson  $\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}$  duquel on déduit le module de cisaillement  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  (dans le cas d'un matériau homogène isotrope).

Si la DMA apporte de bonnes estimations des paramètres élastiques pour des matériaux usuels comme l'aluminium, elle peut présenter ses limites lors de la caractérisation de structures plus complexes. Il est alors nécessaire de modifier le procédé de mesure (chargement intermittent par exemple), ce qui amène à une réflexion quant à la pertinence de ces méthodes selon le matériau étudié [25–27].

Une seconde grande famille de méthodes pour la caractérisation non destructive porte sur l'analyse modale [28]. Sous réserve de connaître son équation du mouvement, n'importe quelle structure peut être étudiée à ses résonances pour lesquelles le rapport de signal à bruit est le plus faible. La détermination des paramètres élastiques repose sur une vérification de la fréquence théorique des modes et l'étude du facteur de qualité (perte de 3 dB) permettant d'estimer l'amortissement vibratoire. Les méthodes modales ne sont valables que pour quelques fréquences, cependant leur utilisation reste largement répandue dans la littérature [29–34]. On peut notamment souligner l'existence de procédures standardisées se basant sur la vibration d'une poutre d'Oberst encastrée-libre, pour la caractérisation des paramètres élastiques de matériaux amortissants [35].

L'approche théorique est simplifiée et robuste, en revanche, plusieurs expériences mettent en avant des difficultés de mise en œuvre lors de l'application sur structures composites. La qualité de l'encastrement des éprouvettes induit une forte variabilité des résultats, d'autant plus que la réalisation de cette condition limite peut amener à une modification de la poutre d'essais [36–38]. Dans le cas de matériaux multicouches peu rigides l'encastrement peut entraîner un aplatissement local de l'éprouvette, nécessitant la création d'un insert métallique dans l'âme centrale. Enfin, les méthodes modales ne sont pas adaptées pour les structures très dissipatives, d'où la nécessité de développer d'autres algorithmes comme la technique d'analyse modale haute résolution ESPRIT [39–42] permettant d'estimer de forts amortissements.

Troisièmement, nous pouvons évoquer les méthodes de caractérisation de matériaux faisant intervenir la théorie des éléments finis (Finite Element Method) ou des éléments de frontière (Boundary Element Method) [43]. L'idée générale est de modéliser une structure de référence et de comparer ses déformées modales ou ses fréquences de résonances avec celles mesurées sur une structure réelle. Un recalage entre modèle théorique et expérimentation permet alors d'estimer les caractéristiques du matériau [44, 45].

Les approches numériques sont bien adaptées aux structures complexes mais nécessitent une connaissance parfaite de la structure de référence. Au delà de la compréhension de certains couplages (collages, conditions limites), leur modélisation peut s'avérer encore plus complexe [46]. La précision des résultats est élevée, néanmoins elle dépend du maillage de la structure étudiée, pouvant amener à des estimations incohérentes ou à des coûts numériques non-négligeables.

Enfin, différentes approches analytiques ont tenté de représenter la dynamique des structures composites. Ici encore, il est nécessaire de pouvoir comprendre la physique de chaque couche et de représenter la totalité des couplages mis en jeu. Ceci amènerait à créer autant de théories qu'il existe de matériaux composites. Pour ces raisons, la formulation zig-zag semble être l'une des méthodes les plus applicables, puisqu'elle se base sur une projection de la dynamique de la couche inférieure à celle qui se situe juste au dessus, et ainsi de suite, jusqu'à représenter un comportement vibratoire global du multicouche [47–52]. À partir de ce principe, une représentation des composites sous forme de matériaux homogénéisés est possible, les paramètres élastiques équivalents sont alors estimés [53, 54].

Concernant le diagnostic de défauts, la majorité des analyses repose sur la comparaison des dynamiques vibratoires entre une référence saine (préalablement contrôlée par une méthode d'imagerie fine) et une structure à caractériser. L'indicateur d'un potentiel défaut peut être un décalage des fréquences de résonance, l'apparition d'effets non linéaires, ou une modification des modes de la structure. L'utilisation d'approches modales ou éléments finis est récurrente pour ce type de diagnostic [55–58]. Ces dernières posent cependant la problématique d'une analyse globale de la structure dont la pertinence peut être remise en question dans le cas de défauts suffisamment petits pour ne pas changer les fréquences de résonance, ou dont l'influence sur les déformées modales est faible.

Le panel de méthodes existantes pour l'étude des matériaux composites est large. Néanmoins, la praticité, la faible durée de mesure, la réduction des coûts et le potentiel d'implantation sur une ligne de fabrication industrielle sont des contraintes souvent incompatibles. Sur la figure 1.4 on peut également constater le manque de techniques de caractérisation dans les moyennes fréquences (de l'ordre du kHz), où les théories modales ne sont plus fiables et les modèles éléments finis deviennent trop lourds. Le développement de procédures à large bande fréquentielle basées sur la mesure de phénomènes vibratoires locaux et n'utilisant pas les résonances des structures est souhaité. Pour ces raisons, la méthode RIFF (Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée) apparaît comme une approche pertinente pouvant répondre aux diverses contraintes soulevées précédemment.

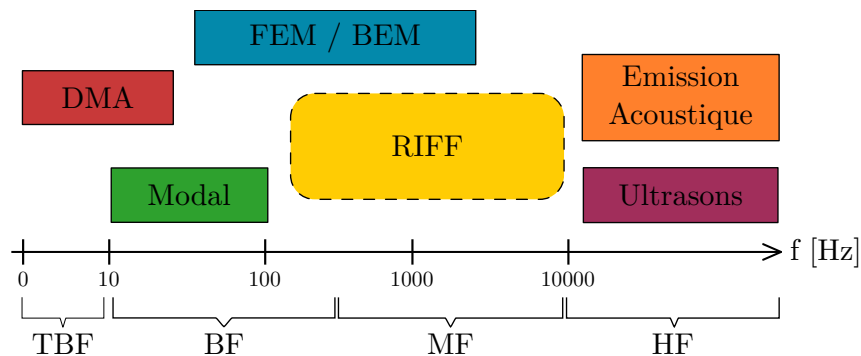


FIGURE 1.4 – Diagramme de quelques méthodes de caractérisation non destructive en fonction de la fréquence de travail.

### 1.3 La méthode RIFF : une approche inverse locale

Également connue sous son acronyme anglais FAT (Force Analysis Technique), la méthode RIFF (Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée) commence à être développée au cours des années 1990 par Pézerat et Guyader [59–63]. Basée sur une vérification locale de l'équation du mouvement, la technique RIFF a initialement été établie pour l'identification de sources vibratoires sur des structures dont on connaît le matériau.

L'originalité de la méthode RIFF lui confère plusieurs points d'intérêt. Elle se base sur une simple mesure du champ de déplacement transverse, sa résolution est locale et ne nécessite pas la connaissance de phénomènes extérieurs à la zone de mesure. En particulier, les conditions aux limites de la structure peuvent être ignorées. Par ailleurs, la formulation générale de la méthode RIFF permet l'identification de tout type de source vibratoire telle que des forces ponctuelles [60], des moments ponctuels [64], des pressions pariétales induites par une excitation acoustique [65], aéroacoustique [66], magnétique [67], etc. Sa mise en œuvre expérimentale est facilitée et la simplicité des équations mises en jeu a permis plus récemment une adaptation de la méthode RIFF pour d'autres objectifs tels que la caractérisation de matériaux [12, 68] et la détection de défauts [69–71].

Une première section rappellera le principe original de la méthode RIFF, initialement développée pour la localisation et la quantification de sources vibratoires. Nous énumérerons ensuite les nombreux développements qui en ont découlé. Enfin, le thème de la caractérisation de matériaux par la méthode RIFF sera abordé, afin de comprendre en quoi cette formulation peut être particulièrement adaptée pour le contrôle de structures composites.

#### 1.3.1 Principe original pour l'identification de sources vibratoires

Pour illustrer les propos à venir, nous considérons une poutre d'Euler-Bernoulli excitée en régime harmonique dont les vibrations sont régies par l'équation du mouvement :

$$\tilde{E}I \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} - \rho S \omega^2 W(x) = q(x), \quad (1.1)$$

avec  $\tilde{E} = E(1 + j\eta_E)$ ,  $E$  est le module d'Young du matériau,  $\eta_E$  le facteur de perte du matériau,  $I$  le moment quadratique de la section,  $W(x)$  le déplacement transverse harmonique de la poutre,  $S$  la section de la poutre,  $\rho$  la masse volumique du matériau,  $\omega$  la pulsation d'excitation et  $q(x)$  la distribution de force transverse harmonique appliquée à la poutre.

Le problème direct associé à l'équation 1.1 consiste à déterminer le champ de déplacement  $W(x)$  à partir de la connaissance de  $q(x)$ , des conditions limites et des caractéristiques du matériau. Dans le cas du problème inverse, on s'intéresse à l'obtention de  $q(x)$  à partir d'une mesure du champ de déplacement  $W(x)$  et de la connaissance des caractéristiques du matériau.

On peut ensuite déduire la valeur locale des efforts par le biais d'une intégration spatiale :

$$F(x) = \int q(x)dx. \quad (1.2)$$

Ce formalisme inverse permet de s'affranchir des conditions aux limites mais il est nécessaire de connaître la dérivée quatrième  $\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}$  du champ de déplacement. Cette dernière est estimée à l'aide d'un schéma aux différences finies du premier ordre et est notée  $\delta^{4x}$  (équation 1.3).

$$\delta^{4x}(x) = \frac{W(x - 2\Delta_x) - 4W(x - \Delta_x) + 6W(x) - 4W(x + \Delta_x) + W(x + 2\Delta_x)}{\Delta_x^4} \approx \frac{\partial^4 W}{\partial x^4}(x). \quad (1.3)$$

Une antenne de mesure de 5 points, espacés d'une distance  $\Delta_x$ , donne accès à toutes les variables nécessaires à la résolution du problème inverse au point central (voir figure 1.5). La distribution de force  $q_{RI}$  est obtenue par la résolution inverse de l'équation du mouvement discrétisée (relation 1.4).

$$q_{RI} = \tilde{E}I\delta^{4x} - \rho S\omega^2 W. \quad (1.4)$$

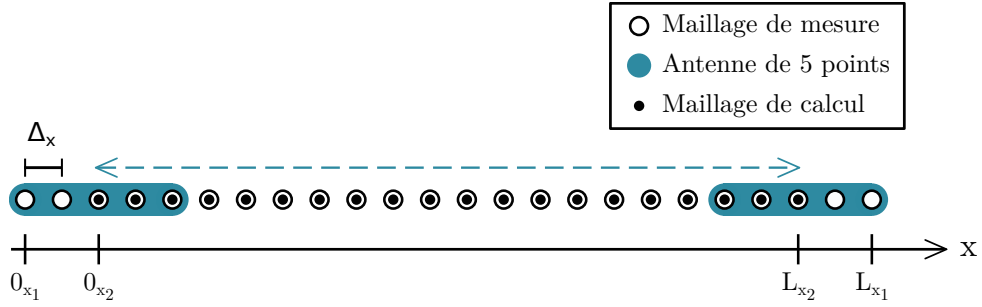


FIGURE 1.5 – Maillage d'une poutre. Le schéma aux différences finies entraîne la perte de 2 points aux extrémités de la structure. La résolution inverse de l'équation du mouvement est alors possible sur la portion  $[0_{x_2}; L_{x_2}]$

L'utilisation d'un schéma aux différences finies entraîne deux conséquences majeures. D'une part, la méthode est relativement locale, elle se base sur une antenne de mesure de 5 points pouvant être déplacée, ce qui la rend indépendante des phénomènes extérieurs à la zone d'analyse. Les conditions limites, les sources secondaires ou tout couplage indésirable avec une autre structure peuvent être simplement ignorés. D'autre part, la réalisation expérimentale repose uniquement sur l'estimation du champ de déplacement transverse, facilement accessible à l'aide d'un accéléromètre ou d'un vibromètre laser. La mise en œuvre de ce problème inverse est donc très simple pour déterminer des sources vibratoires, contrairement aux méthodes d'intensimétrie qui nécessitent la caractérisation des translations et rotations [72, 73].

Il reste à noter que lorsque le champ de déplacement est bruité, l'estimation des dérivées spatiales amplifie très fortement les erreurs, ce qui dégrade nettement la qualité des résultats et rend donc impossible toute localisation d'un effort. Une régularisation du problème inverse est donc nécessaire. Celle-ci est réalisée par le biais d'un fenêtrage spatial et d'un filtrage passe-bas de la distribution de force  $q_{RI}$ .

### Fenêtrage

Le fenêtrage consiste à limiter les effets de bords induits par la troncature spatiale de la zone de mesure. Le déplacement transverse n'est pas nécessairement nul aux extrémités du maillage, ce qui peut amener à de fortes erreurs lors du filtrage. On utilise ici une fenêtre de Tuckey définie par la relation 1.5 et présentée en figure 1.6, où  $\lambda_c$  correspond à la longueur de coupure du filtre défini ci-après. Le fenêtrage global s'applique par une multiplication de la fenêtre et de la distribution de force, soit  $q_{fen} = q_{RI} \cdot \psi$ .

$$\psi(x) = \begin{cases} 0.5 \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi x}{\lambda_c} \right) \right] & \text{pour } x \in [0_{x_2}; \lambda_c], \\ 1 & \text{pour } x \in ]\lambda_c; L_{x_2} - \lambda_c[, \\ 0.5 \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi(x - L_{x_2} + 2\lambda_c)}{\lambda_c} \right) \right] & \text{pour } x \in [L_{x_2} - \lambda_c; L_{x_2}], \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (1.5)$$

avec  $0_{x_2}$  et  $L_{x_2}$  définis en figure 1.5.

Cependant, si la condition  $L_{x_2} > 2\lambda_c$  ne peut être remplie, la fenêtre de Tuckey est alors remplacée par une fenêtre de Hanning définie en relation 1.6 et présentée en figure 1.7.

$$\psi(x) = \begin{cases} 0.5 \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi x}{L_{x_2}} \right) \right] & \text{pour } x \in [0_{x_2}; L_{x_2}], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (1.6)$$

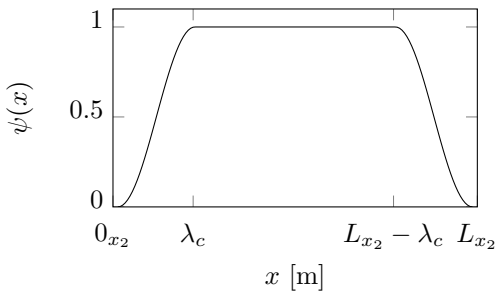


FIGURE 1.6 – Fenêtre de Tuckey.

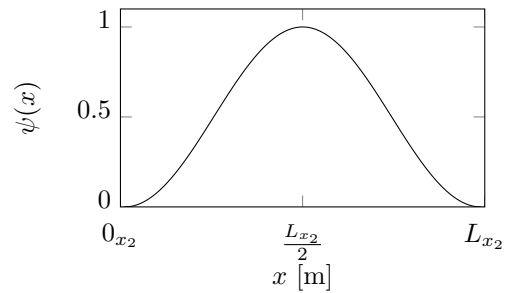


FIGURE 1.7 – Fenêtre de Hanning.

### Filtrage

Le filtrage permet de réduire le bruit présent dans les hauts nombres d'onde. On définit alors un filtre passe-bas à réponse impulsionnelle finie  $H(x)$  exprimée par la relation 1.7 et représentée en figure 1.8.

$$H(x) = \frac{1}{\lambda_c} \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi x}{\lambda_c}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{\beta_x}\right)\right), \text{ pour } x \in [-\beta_x; \beta_x], \quad (1.7)$$

avec  $\beta_x = f_x \lambda_c$ ,  $\lambda_c$  correspond à la longueur d'onde de coupure du filtre et  $f_x$  représente son facteur de forme.

La longueur d'onde de coupure  $\lambda_c$  est, à l'origine, définie de sorte que le nombre d'onde de coupure soit proportionnel au nombre d'onde de flexion, tel que  $k_c = a.k_f$  avec  $a$  un facteur défini en fonction du niveau de bruit.

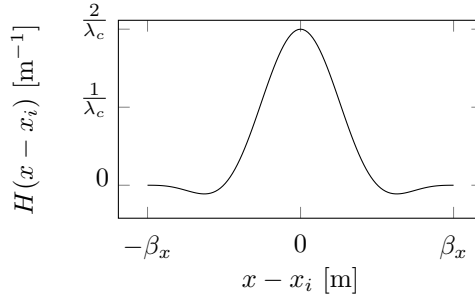


FIGURE 1.8 – Réponse impulsionnelle du filtre local  $H(x - x_i)$ .

Le filtrage s'applique par une convolution entre la distribution de force fenêtrée et la réponse impulsionnelle du filtre :

$$q_{\text{RIFF}}(x) = (q_{\text{fen}} * H)(x). \quad (1.8)$$

Le filtrage spatial est considéré local, car il utilise un filtre à réponse finie, contrairement aux filtres à réponse infinie ou à un filtrage réalisé dans le domaine dual des nombres d'onde grâce à l'utilisation d'une transformée de Fourier. Par ailleurs, le facteur de forme  $f_x$  est proportionnel à la largeur de la réponse impulsionnelle : plus  $f_x$  est élevé, plus  $H(x)$  sera large, le filtrage sera plus abrupt dans le domaine des nombres d'onde mais il sera moins local.

En tenant compte du fait que la convolution et la multiplication sont toutes deux distributives sur l'addition, l'équation 1.8 peut se réécrire sous la forme :

$$q_{\text{RIFF}} = (q_{\text{RI}} \cdot \psi) * H = \tilde{E}I [(\delta^{4x} \cdot \psi) * H] - \rho S \omega^2 [(W \cdot \psi) * H] = \tilde{E}I \delta_{\text{RIFF}}^{4x} - \rho S \omega^2 W_{\text{RIFF}}. \quad (1.9)$$

La régularisation peut s'appliquer soit sur  $q_{\text{RI}}$ , soit sur  $W$  et  $\delta^{4x}$ . En revanche, il y a une différence importante entre appliquer la régularisation à  $\delta^{4x}$  et calculer  $\delta^{4x}$  à partir de  $W_{\text{RIFF}}$ . Bien que les opérations de dérivation et de convolution soient commutatives analytiquement, ce n'est pas le cas numériquement. Il faut donc dériver en premier lieu puis régulariser afin d'éviter tout effet de bord.



**Exemple d'application**

Considérons les vibrations de flexion d'une poutre appuyée à ses extrémités (voir figure 1.9), définie par les paramètres décrits dans le tableau 1.1. Après calcul du champ de déplacement transverse  $W$  par une décomposition en ondes forcées [74], la relation 1.4 est appliquée à partir du déplacement exact (noté  $W_{\text{ex}}$ ), puis à partir du déplacement bruité (noté  $W_{\text{br}}$ ). Sur la figure 1.10 l'ajout de bruit au champ de déplacement influe considérablement sur la localisation des efforts. Néanmoins, après application des procédures de fenêtrage et de filtrage de la distribution de force, il est possible de retrouver la position à laquelle la source est appliquée. Une intégration spatiale de la distribution de force permet de remonter à l'amplitude de la source vibratoire (relation 1.2).

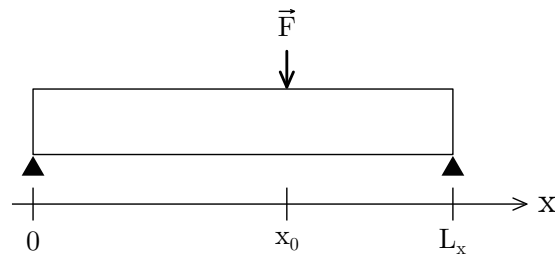


FIGURE 1.9 – Schéma d'une poutre appuyée subissant un effort tranchant  $\vec{F}$  en  $x = x_0$ .

Paramètre	Valeur
Longueur $L_x$	1 m
Largeur $L_y$	2 cm
Épaisseur $L_z$	2 mm
Nombre de points $N_x$	161
Masse volumique $\rho$	7800 kg.m <sup>-3</sup>
Module d'Young $E$	210 GPa
Facteur de perte $\eta_E$	10 <sup>-4</sup>
Fréquence $f$	650 Hz
Rapport Signal à Bruit	30 dB
Force $F$	1 N
Position de la source $x_0$	0.6 m
Facteur de forme $f_x$	1

TABLEAU 1.1 – Paramètres de simulation pour l'exemple d'application de la méthode RIFF originale.

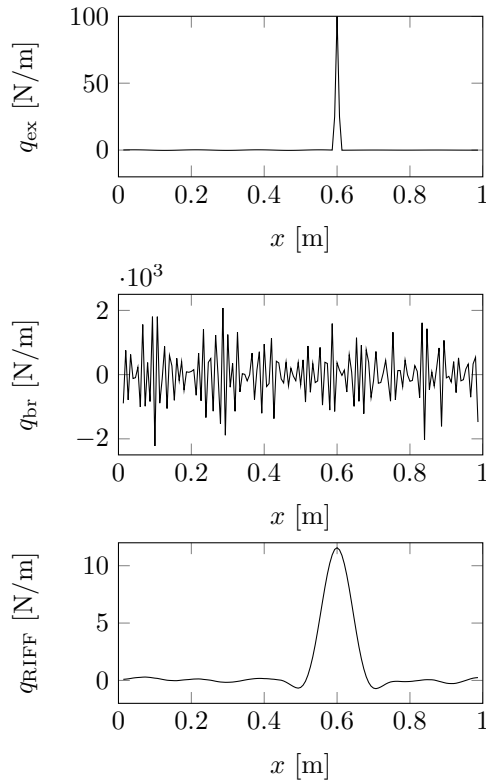


FIGURE 1.10 – Distributions de forces issues des résolutions inverses exacte ( $q_{\text{ex}}$ ), bruitée ( $q_{\text{br}}$ ) et filtrée fenêtrée ( $q_{\text{RIFF}}$ ).

### 1.3.2 Développements connexes

De part son approche locale ne nécessitant pas la connaissance des conditions limites, ce formalisme inverse s'est progressivement développé pour d'autres applications. La méthode RIFF peut être vue plus généralement comme une résolution du système suivant :

$$\text{Efforts} = \mathcal{F}(\text{Opérateur de structure, Champ de déplacement, Paramètres du matériau}). \quad (1.10)$$

L'origine de la méthode RIFF est donc issue d'une connaissance de l'opérateur de structure (équation du mouvement analytique de poutre ou de plaque) ainsi que du matériau mis en jeu et de la mesure du champ de déplacement, entraînant l'identification des sources vibratoires. Le principe a par la suite été étendu aux coques [75, 76], aux structures complexes en utilisant un opérateur éléments finis [69, 77, 78] et à l'identification des efforts aux limites [79, 80]. Des études plus récentes s'orientent sur la localisation de sources vibratoires en faisant usage de formulations bayésiennes [81–86].

Une autre approche s'intéresse à l'identification de l'opérateur de structure [59, 87, 88]. Il arrive très fréquemment que l'ingénierie utilise des formes qui ne puissent être ramenées aux modèles académiques de plaques, poutres, coques, etc. Dans cette version utilisant une mesure du champ de déplacement, il est

possible de remonter aux coefficients liés aux dérivées spatiales et donc à l'équation du mouvement, sous réserve de connaître le matériau mis en jeu.

Un volet majeur de la méthode RIFF porte sur la caractérisation de matériaux. Une structure est sollicitée par une source vibratoire contrôlée et le champ de déplacement est mesuré en dehors de la zone d'excitation. La portion analysée est donc supposée vierge de tout effort ce qui autorise l'estimation des rigidités spécifiques et amortissements, sous l'hypothèse d'un opérateur de structure connu de plaque isotrope [11, 12] ou orthotrope [89–91].

Le même type d'approche a mis en évidence la potentialité de détecter des défauts [69–71]. En effet, lorsqu'une imperfection est présente en dehors des sources vibratoires, elle se manifeste par l'apparition d'un effort résiduel dans le second membre de l'équation du mouvement. Cette version de la méthode RIFF est abordée plus en détail dans la section suivante.

Étant donné que la résolution inverse n'utilise que le champ de déplacement transverse, elle a également pu être combinée avec diverses techniques de mesures, telles que l'holographie acoustique en champ proche [92], la déflectométrie [93] ou en mesurant la courbure [94, 95] dans le but de réduire les erreurs lors de l'estimation des différences finies. Une combinaison avec une mesure par holographie numérique optique est également envisagée [1–4].

De nombreux travaux parallèles ont également permis d'étoffer le panel d'utilisation de cette technique de résolution inverse. La réduction des incertitudes liées à la mesure du champ vibratoire est abordée à plusieurs reprises, de par une utilisation astucieuse du filtrage naturel du schéma aux différences finies [68, 96], grâce à l'interpolation du déplacement transverse à l'aide de fonctions polynomiales [80, 97], ou à l'aide de la méthode des champs virtuels [98]. Enfin, il apparaît que la méthode RIFF, bien que développée initialement pour la caractérisation de sources solidiennes, puisse faire office d'antenne en acoustique dans le but de localiser des sources sonores [76] ou d'identifier des champs de pressions pariétales dans le cas d'une excitation par une couche limite turbulente [7, 66, 99–101].

### 1.3.3 Caractérisation de matériaux

Ablitzer et al. [11, 12] ont récemment mis en évidence la possibilité d'identifier les caractéristiques élastiques et d'amortissements d'une plaque composite isotrope munie de patches viscoélastiques amortissants, à l'aide d'une vérification locale de l'équation de mouvement. Cette approche autorise la cartographie de la rigidité spécifique et de l'amortissement de la structure, en fonction de la fréquence. Un développement plus poussé, basé sur le filtrage naturel induit par le schéma aux différences finies (méthode RIC - Résolution Inverse Corrigée - ou CFAT - Corrected Force Analysis Technique), permet l'analyse de paramètres élastiques d'une plaque, des facteurs de pertes, de sources vibratoires, de conditions limites locales et d'une zone avec traitement amortissant, comme le montre la figure 1.11 issue de [68].

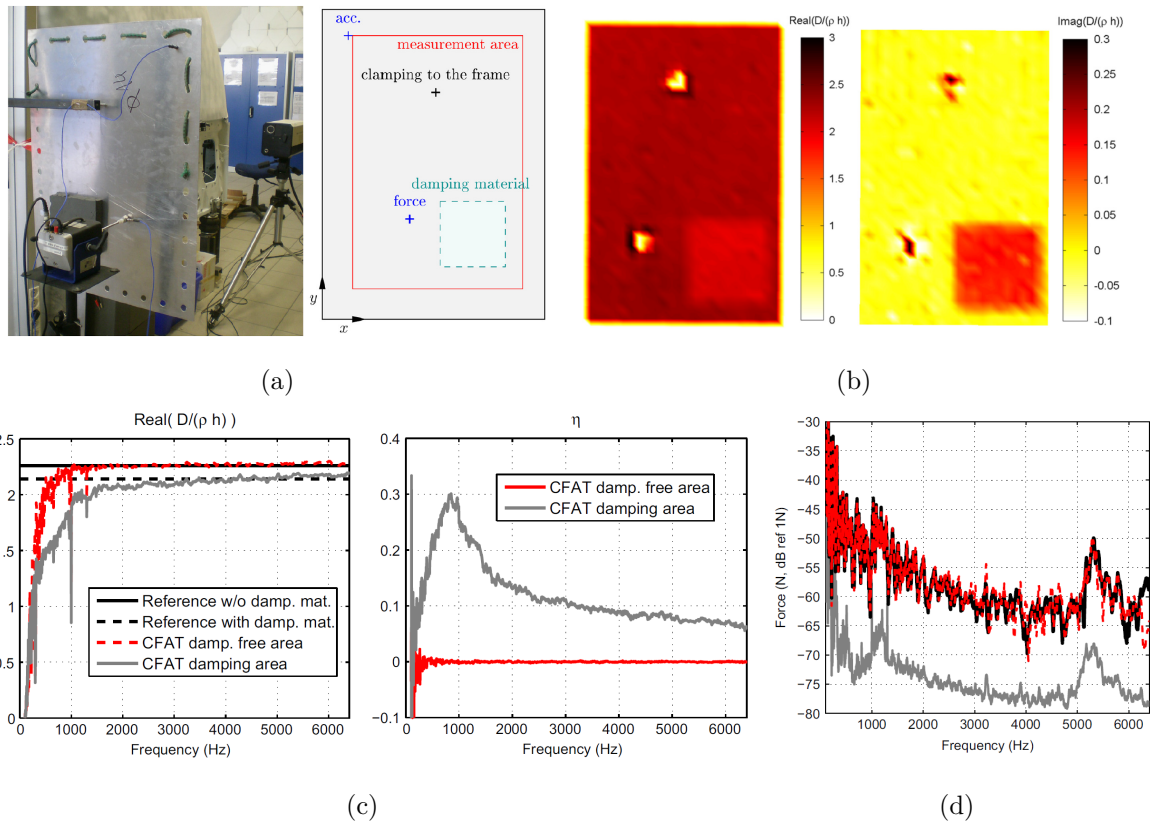


FIGURE 1.11 – Résultats obtenus par la méthode RIC (CFAT) issus de [68]. (a) Photographie et schéma de la plaque étudiée. (b) Cartographie de la rigidité spécifique en parties réelle et imaginaire. (c) Caractérisation fréquentielle de la rigidité spécifique et de l'amortissement structural dans deux zones munies ou non d'un revêtement amortissant. (d) Niveau de la source vibratoire référence (noir), estimé autour de la source (rouge) et estimé en dehors de la source (gris).

La caractérisation locale présente un fort potentiel pour la détection de défauts, qui a d'ailleurs été exploité à plusieurs reprises [69–71]. Toujours basé sur le formalisme RIFF, une mesure du champ de déplacement est établie en dehors des sources d'excitation. La présence d'une imperfection induit un déséquilibre dans l'équation du mouvement de la structure, supposée sans défaut, et fait apparaître un effort résiduel. Un indicateur issu de ce résidu autorise une analyse précise de la position du défaut (figure 1.12).

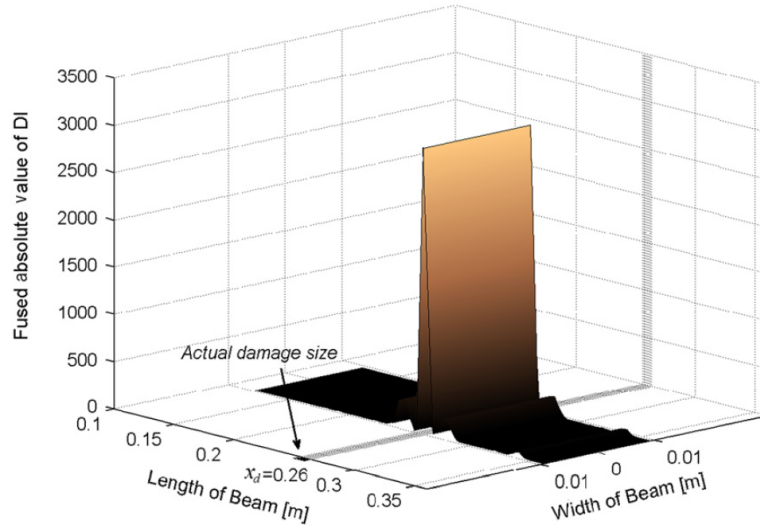


FIGURE 1.12 – Identification de défaut obtenue sur une poutre de 36 cm présentant une entaille de 8 mm en  $x_d = 26$  cm. Figure issue de [70].

## 1.4 Motivation des travaux

À travers les différentes techniques résumées précédemment, il apparaît que l'analyse de matériaux par méthodes vibratoires usuelles n'est pas forcément applicable à toutes les structures composites. La littérature évoque des difficultés récurrentes portant sur la mise en œuvre des méthodes, la fiabilité de modélisation en éléments finis, ou encore la complexité des théories à développer. De plus, les analyses en moyennes fréquences sont peu nombreuses, ce qui limite la compréhension de la dynamique des structures composites aux seules basses fréquences, ou engendre des durées de mesure conséquentes en hautes fréquences (ultrasons).

Notre approche consiste donc à développer la méthode RIFF pour la caractérisation de matériaux composites et la détection de défauts typiques. Cette volonté est par ailleurs confortée par la demande industrielle de diagnostics rapides et dont la mise en œuvre puisse être adaptée sur une ligne de production. La stratégie adoptée porte sur l'association de trois axes de recherche.

### 1 - Adaptation de la méthode RIFF

L'utilisation de la méthode RIFF semble pertinente puisqu'elle repose sur une mesure du champ de déplacement, aisément accessible. Son aspect local lui confère un intérêt particulier ayant permis son application dans de nombreuses thématiques en vibroacoustique. Des preuves de concept ont montré la possibilité de caractériser les paramètres élastiques et d'amortissements, ou de détecter un défaut, sur matériau isotrope. La transition vers les matériaux composites et l'identification de défauts typiques de ces structures constitue donc un prolongement évident aux développements déjà existants.

### 2 - Prise en compte de structures épaisses avec cisaillement non négligeable

Les éprouvettes utilisées dans l'ingénierie pour l'étude de matériaux sont pour la plupart des poutres d'Euler-Bernoulli, ce qui est également le cas dans les procédures normalisées. En revanche, la nature même des matériaux composites multicouches entraîne certaines limitations pour appliquer les méthodes de mesure, voire des résultats erronés, en raison des simplifications considérées sur le plan théorique. Ce constat donne naissance à notre deuxième axe d'amélioration, visant à utiliser la théorie de Timoshenko. En effet, la prise en compte du cisaillement autorise une représentation plus cohérente des poutres composites. L'intérêt du modèle de Timoshenko en comparaison à la théorie usuelle d'Euler-Bernoulli a pu être mis en avant [102, 103] et il est souvent utilisé pour la modélisation de poutres multicouches à âme souple en raison du cisaillement important de la couche viscoélastique [52] pouvant entraîner des amortissements vibratoires importants [32]. On peut également souligner l'existence de quelques approches pour la description analytique de défauts [104] ou bien leur détection, en étudiant la variation des fréquences de résonance théoriques d'une poutre de Timoshenko [105, 106]. À notre connaissance, aucune méthode ne permet l'estimation du cisaillement sur de larges bandes fréquentielles, ce qui semble pourtant nécessaire pour les matériaux multicouches. Quelques auteurs relèvent même le manque de littérature sur le coefficient de Poisson (lié au module de cisaillement), obligeant à le définir arbitrairement pour certains matériaux [27, 30, 31].

### 3 - Identification des paramètres élastiques et d'amortissements

La caractérisation de matériaux constitue le troisième axe d'intérêt, qui se décline sous deux aspects. D'une part, l'analyse fréquentielle quantitative des paramètres élastiques et des facteurs de pertes permet de mieux décrire les vibrations de matériaux composites. Ablitzer et al. ont mis en évidence la possibilité de caractériser des propriétés élastiques sur une large bande fréquentielle [11, 12]. L'originalité de notre approche réside dans l'extraction de paramètres équivalents. Les structures composites sont considérées comme des matériaux monocouches homogénéisés. C'est tout le matériau sandwich qui est caractérisé, ce qui simplifie grandement leur intégration dans des logiciels de modélisation en éléments finis. Cette approche établie analytiquement par Guyader et al. [53, 54] est également vérifiée par Rak et al. dans un article s'intéressant à l'identification du nombre d'onde et de l'amortissement d'une poutre sandwich avec âme viscoélastique, en se basant sur une approche ondulatoire inverse appliquée à la théorie d'Euler-Bernoulli [107]. Le même principe étendu aux plaques composites a été confirmé par Ichchou et al. [108]. D'autre part, l'estimation des caractéristiques du matériau peut également être utilisée pour détecter de potentiels défauts. Une étude spatiale de la raideur [55] ou de l'amortissement structural peut mettre

en évidence une brusque variation de l'état d'un matériau. Sur la figure 1.11(b) on distingue nettement l'intérêt d'un contrôle de structure à l'aide d'une cartographie du facteur de perte, constat qui a été confirmé dans d'autres travaux [109, 110]. Le fait d'inclure la théorie de Timoshenko donne accès à une propriété supplémentaire pour détecter des défauts propres aux matériaux composites. Non seulement le cisaillement constitue une évolution pour le contrôle non destructif, mais il induit la possibilité d'identifier le type de défaut. Par exemple, dans le cas d'un délaminage, une discontinuité devrait se remarquer principalement dans l'identification spatiale du module de cisaillement complexe.

### 1.5 Conclusions

Ce chapitre a permis d'établir un état de l'art concernant les méthodes de diagnostic disponibles pour les matériaux composites. Au vu des contraintes induites par les diverses approches existantes (fiabilité des résultats, mise en œuvre, coûts...) l'objectif de recherche est défini. Ce dernier porte sur la caractérisation de matériaux composites à l'aide d'un formalisme vibratoire inverse (méthode RIFF) utilisant la théorie de Timoshenko. Par le biais d'une analyse fréquentielle et spatiale des paramètres élastiques et d'amortissements, ce travail de thèse vise à représenter la dynamique des structures composites à travers une considération de matériaux homogènes équivalents et à identifier de potentiels défauts sur des structures fabriquées avec ces nouveaux matériaux.

## Chapitre 2

# Résolution Inverse : formulation de la méthode

Les travaux réalisés concernent la vibration de poutres, ces structures simples limitent au maximum les hypothèses qui pourraient biaiser la qualité des résultats. Néanmoins, le but à terme étant de caractériser des matériaux composites, la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli pourrait s'avérer insuffisante. C'est pourquoi ce nouveau développement de la méthode RIFF est également établi à partir de la théorie de Timoshenko, faisant intervenir le cisaillement de la poutre.

Ce chapitre a pour objet de définir les équations mises en jeu et de constater les différences entre les théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. Dans un premier temps, une analyse des nombres d'onde permet de distinguer les différences entre les modèles théoriques. La seconde section s'intéresse à la formulation analytique du champ de déplacement, basée sur une résolution en ondes forcées pour les deux théories de poutre, qui servira ensuite de référence pour développer la technique RIFF appliquée à l'étude des matériaux composites. Une troisième partie détaille le principe mathématique permettant une caractérisation spatiale et/ou fréquentielle du module d'Young  $E$ , du module de cisaillement  $G$  et de leurs facteurs de pertes respectifs  $\eta_E$  et  $\eta_G$ . Enfin, une dernière section consiste en une simulation sans ajout de bruit, afin de constater la faisabilité de la méthode.



## 2.1 Modèles de poutres

Même si les relations suivantes sont écrites avec la dépendance temporelle, nous considérons ici un régime harmonique. La dissipation est modélisée par un amortissement structural linéaire qui se traduit alors par l'expression d'un module d'Young complexe  $\tilde{E} = E(1 + j\eta_E)$  et d'un module de cisaillement complexe  $\tilde{G} = G(1 + j\eta_G)$ . L'hypothèse d'une poutre homogène est également considéré, les dimensions de la structure et le matériau sont invariants spatialement.

L'équation du mouvement d'une poutre en flexion excitée par une source  $q(x, t)$  est régie par des effets de rotation des sections droites et de cisaillement dans l'épaisseur. Ces derniers s'expriment à travers la pente  $\frac{\partial W}{\partial x}$ , l'angle de flexion pure  $\Theta$  et l'angle de cisaillement pur  $\gamma$ , représentés sur la figure 2.1.

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = \Theta(x, t) + \gamma(x, t). \quad (2.1)$$

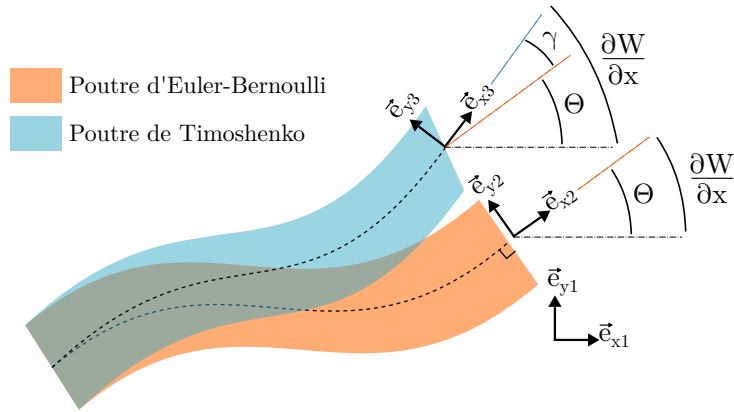


FIGURE 2.1 – Cinématique élémentaire d'une poutre en fonction de la théorie utilisée. L'angle de flexion pure  $\Theta$  est représenté par  $(\vec{e}_{x1}, \vec{e}_{x2})$  et l'angle de cisaillement pur  $\gamma$  correspond à  $(\vec{e}_{x2}, \vec{e}_{x3})$ .

Comme représenté en figure 2.1, la théorie d'Euler-Bernoulli considère une section élémentaire orthogonale à la fibre moyenne, le cisaillement est nul et la pente vaut dans ce cas  $\frac{\partial W}{\partial x} = \Theta$ . La théorie de Timoshenko autorise une rotation libre de la section élémentaire, traduite par l'angle de cisaillement  $\gamma$ . Ce modèle de poutre est donc plus souple, l'expression de la pente est alors  $\frac{\partial W}{\partial x} = \Theta + \gamma$ .

L'écriture des équilibres dynamiques en rotation de la structure est traduit par les équations couplées détaillées ci-dessous :

$$\begin{cases} \rho S \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial \mathcal{T}(x, t)}{\partial x} = q(x, t), & (2.2a) \\ \frac{\partial \mathcal{M}(x, t)}{\partial x} + \mathcal{T}(x, t) - \rho I \frac{\partial^2 \Theta(x, t)}{\partial t^2} = 0, & (2.2b) \end{cases}$$

où  $W(x, t)$  représente le déplacement transverse,  $\Theta(x, t)$  l'angle de flexion pure,  $\mathcal{M}(x, t)$  le moment fléchissant,  $\mathcal{T}(x, t)$  l'effort tranchant et  $\gamma(x, t)$  l'angle de cisaillement pur.

Dans le cas général des poutres en flexion, le moment fléchissant s'exprime :

$$\mathcal{M}(x, t) = \tilde{E}I \frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial x}. \quad (2.3)$$

### 2.1.1 Poutre d'Euler-Bernoulli

#### Théorie générale

Le modèle d'Euler-Bernoulli suppose, d'une part, que la contribution du cisaillement est négligeable ( $\gamma(x, t) = 0$ ), ce qui est valable pour une poutre de faible épaisseur en regard de sa longueur. D'autre part, l'inertie rotationnelle est également négligée ( $\rho I \frac{\partial^2 \Theta(x, t)}{\partial t^2} = 0$ ). Ces deux conséquences se traduisent mathématiquement par la pente (equation 2.1), le moment fléchissant (expression 2.3) et l'effort tranchant (issu de la relation 2.2b), qui prennent respectivement la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta(x, t) = \frac{\partial W(x, t)}{\partial x}, \\ \mathcal{M}(x, t) = \tilde{E}I \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2}, \\ \mathcal{T}(x, t) = -\tilde{E}I \frac{\partial^3 W(x, t)}{\partial x^3}. \end{array} \right. \quad (2.4a)$$

$$\mathcal{M}(x, t) = \tilde{E}I \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.4b)$$

$$\mathcal{T}(x, t) = -\tilde{E}I \frac{\partial^3 W(x, t)}{\partial x^3}. \quad (2.4c)$$

En introduisant l'expression 2.4c dans 2.2a on obtient alors :

$$\rho S \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \tilde{E}I \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \right) = q(x, t). \quad (2.5)$$

#### Application à la vibration harmonique hors des sources

En considérant une excitation harmonique de type  $e^{j\omega t}$ , les variables  $W$ ,  $\Theta$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{T}$ ,  $\gamma$  et  $q$  sont ré-exprimées en omettant d'indiquer leur dépendance temporelle, afin de simplifier l'écriture des équations suivantes ( $W(x, t) \mapsto W(x)$ ). En dehors des sources vibratoires, l'expression 2.5 de la flexion de poutre en variable déplacement devient, selon la théorie d'Euler-Bernoulli :

$$-\rho S \omega^2 W(x) + \tilde{E}I \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} = 0, \quad (2.6)$$

dont la solution générale s'écrit :

$$W(x) = A \sin(k_f x) + B \cos(k_f x) + C \operatorname{sh}(k_f x) + D \operatorname{ch}(k_f x). \quad (2.7)$$

avec  $k_f$  le nombre d'onde de flexion :

$$k_f = \sqrt[4]{\frac{\rho S}{\tilde{E}I}} \omega^2. \quad (2.8)$$

### 2.1.2 Poutre de Timoshenko

#### Théorie générale

Dans la théorie de Timoshenko les effets de cisaillement et d'inertie rotationnelle sont conservés. Dans ce cas, l'effort tranchant s'exprime de la façon suivante [111, 112] :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x, t) &= \tilde{G}S\gamma(x, t) \\ &= \tilde{G}S \left( \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} - \Theta(x, t) \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

Le système 2.2 devient alors :

$$\begin{cases} \rho S \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} - \tilde{G}S \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} + \tilde{G}S \frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial x} = q(x, t), & (2.10a) \\ \tilde{E}I \frac{\partial^2 \Theta(x, t)}{\partial x^2} + \tilde{G}S \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} - \left( \tilde{G}S + \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Theta(x, t) = 0. & (2.10b) \end{cases}$$

D'une part, la relation 2.10a est ré-exprimée sous la forme :

$$\frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\tilde{G}S} \left( q(x, t) + \tilde{G}S \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} - \rho S \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} \right). \quad (2.11)$$

D'autre part, l'équation 2.10b est dérivée par rapport à l'espace :

$$\tilde{E}I \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial x} \right) + \tilde{G}S \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} - \tilde{G}S \frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial x} + \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.12)$$

Enfin, en utilisant 2.11 dans 2.12, on obtient l'équation de Timoshenko en variable déplacement :

$$\begin{aligned} \tilde{E}I \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4} - \rho I \left( \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \right) \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial t^4} + \rho S \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} \\ = q(x, t) - \frac{\tilde{E}I}{\tilde{G}S} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\rho I}{\tilde{G}S} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

#### Application à la vibration harmonique hors des sources

Nous développons le problème en régime harmonique ( $W(x, t) \mapsto W(x)$ ). Dans les zones sans excitation, la relation 2.13 prend la forme :

$$\tilde{E}I \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} + \rho I \omega^2 \left( \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \right) \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} + \left( \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega^4 - \rho S \omega^2 \right) W(x) = 0, \quad (2.14)$$

à laquelle on associe l'équation caractéristique 2.15 dont les solutions sont exprimées par 2.16 :

$$\tilde{E}I r^4 + \rho I \omega^2 \left( \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \right) r^2 + \left( \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega^4 - \rho S \omega^2 \right) = 0, \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} r_1 = k_e & (2.16a) \\ r_2 = -r_1 = -k_e & (2.16b) \\ r_3 = jk_p & (2.16c) \\ r_4 = -r_3 = -jk_p & (2.16d) \end{cases}$$

Ces dernières permettent d'accéder aux expressions des nombres d'onde propagatif  $k_p$  et évanescent  $k_e$ , correspondant respectivement aux relations 2.17 et 2.18 :

$$k_p = \sqrt{\frac{\rho I \omega^2 \left(1 + \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}}\right) + \sqrt{\Delta}}{2\tilde{E}I}}, \quad (2.17)$$

$$k_e = \sqrt{\frac{-\rho I \omega^2 \left(1 + \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}}\right) + \sqrt{\Delta}}{2\tilde{E}I}}, \quad (2.18)$$

où  $\Delta$  est la quantité définie par :

$$\Delta = \rho^2 I^2 \omega^4 \left(1 - \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}}\right)^2 + 4\tilde{E}I\rho S\omega^2. \quad (2.19)$$

La solution générale s'écrit alors :

$$W(x) = A \sin(k_p x) + B \cos(k_p x) + C \operatorname{sh}(k_e x) + D \operatorname{ch}(k_e x). \quad (2.20)$$

On remarque que pour  $\tilde{E}$  et  $\tilde{G}$  purement réels ( $\eta_E = \eta_G = 0$ ), le nombre d'onde propagatif  $k_p$  est réel  $\forall \omega$ , en revanche le nombre d'onde évanescent  $k_e$  peut être réel ou imaginaire en fonction de la valeur de  $\omega$ . Par une recherche des racines de  $k_e^2$ , on distingue alors 2 types de propagations autour d'une pulsation limite notée  $\Omega_{\text{lim}}$ .

$$\Omega_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{S\tilde{G}}{\rho I}}. \quad (2.21)$$

$\omega < \Omega_{\text{lim}}$ :	$k_p$ réel $k_e$ réel	L'onde vibratoire est la somme d'une onde propagative associée à $k_p$ et d'une onde évanescente liée à $k_e$ .
$\omega > \Omega_{\text{lim}}$ :	$k_p$ réel $k_e$ imaginaire	L'onde vibratoire est purement propagative.

**Nota bene :** La valeur de  $\Omega_{\text{lim}}$  n'est jamais atteinte dans des configurations expérimentales "réalistes". Par exemple, pour constater la disparition des ondes évanescentes au delà de  $f = 5000$  Hz, une poutre de section rectangulaire devrait présenter une épaisseur de 34 cm pour de l'aluminium, de 36 cm pour de l'acier, ou de 8 cm pour un matériau en nid d'abeille ( $\rho = 90 \text{ kg/m}^3$  et  $G = 50 \text{ MPa}$ ).

### 2.1.3 Comparaison des modèles

La différence majeure entre les modèles d'Euler-Bernoulli et Timoshenko réside dans l'expression des nombres d'onde qui régissent la vibration des poutres (équations 2.8, 2.17 et 2.18). Selon le type de structure (matériau, dimensions) ou la fréquence de travail, les nombres d'onde de flexion  $k_f$  (Euler-Bernoulli), propagatif  $k_p$  ou évanescent  $k_e$  (Timoshenko) peuvent converger vers une même valeur ou présenter de forts écarts.

Ce comportement est mis en évidence à l'aide de deux structures. La première présente les caractéristiques typiques d'une poutre en aluminium, la seconde correspond à un matériau de faible masse volumique et autorisant d'importants effets de cisaillement. Les paramètres de simulation sont détaillés dans le tableau 2.1. Les nombres d'onde sont déterminés pour les deux configurations et tracés en parties réelles et imaginaires sur les figures 2.2 et 2.3.

Paramètre	Configuration	
	Aluminium	Arbitraire
Largeur $L_y$	1 cm	
Épaisseur $L_z$	1 cm	
Masse volumique $\rho$	2700 kg.m <sup>-3</sup>	270 kg.m <sup>-3</sup>
Module d'Young $E$	70 GPa	10 GPa
Module de cisaillement $G$	26 GPa	50 MPa
Facteur de perte $\eta_E$	1%	
Facteur de perte $\eta_G$	1%	
Fréquence $f$	[0; 3000] Hz	

TABLEAU 2.1 – Configurations de poutres définies pour la comparaison des nombres d'onde issus des théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko.

L'allure des nombres d'onde est similaire pour la première configuration. Cette dernière limite les effets de cisaillement, la théorie de Timoshenko n'est donc pas indispensable dans ce cas. En revanche, la seconde structure, qui présente un fort potentiel de cisaillement, met en avant les limites du modèle d'Euler-Bernoulli. En effet, le nombre d'onde de flexion  $k_f$  est quasiment identique pour ces deux poutres, en raison d'une faible variation du terme  $\sqrt{\rho/E}$ . La théorie d'Euler-Bernoulli ne peut dissocier ces deux configurations, le modèle de Timoshenko est alors nécessaire.

Par ailleurs, la partie réelle du nombre d'onde propagatif  $k_p$  est toujours supérieure à celle du nombre d'onde évanescent  $k_e$ , comportement vérifié par les expressions 2.17 et 2.18. Enfin, selon le cas étudié, le comportement du nombre d'onde propagatif diffère. Ce dernier présente une tendance du type  $\sqrt{\omega}$  sur la poutre en aluminium et une évolution quasiment linéaire lorsque les effets de cisaillement sont plus importants.

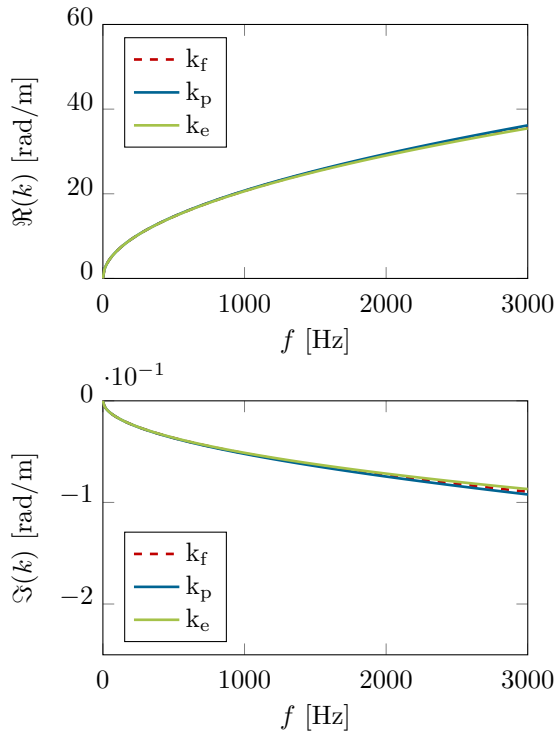


FIGURE 2.2 – Parties réelles (haut) et imaginaires (bas) des nombres d’onde de flexion  $k_f$ , propagatif  $k_p$  et évanescent  $k_e$  pour une poutre en aluminium autorisant de faibles effets de cisaillement. Les nombres d’onde issus des théories d’Euler-Bernoulli ou de Timoshenko sont quasiment confondus.

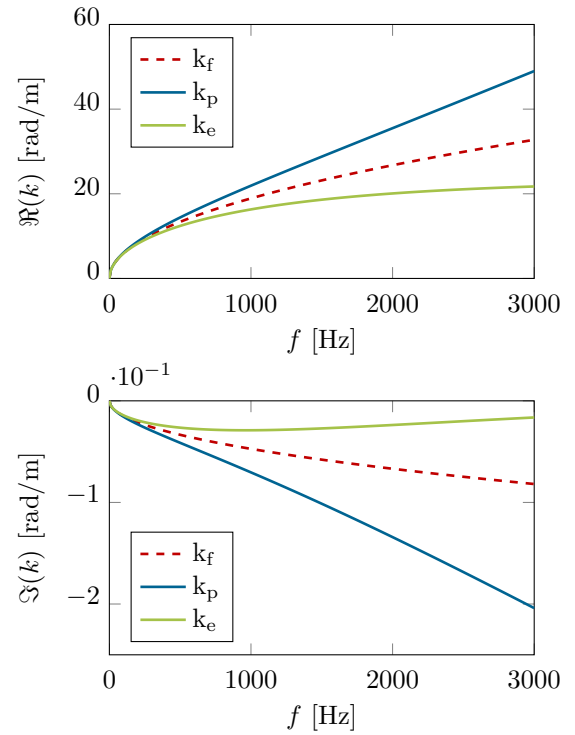


FIGURE 2.3 – Parties réelles (haut) et imaginaires (bas) des nombres d’onde de flexion  $k_f$ , propagatif  $k_p$  et évanescent  $k_e$  pour un matériau autorisant un fort potentiel de cisaillement. Les nombres d’onde issus des théories d’Euler-Bernoulli ou de Timoshenko diffèrent rapidement.

## 2.2 Synthèse du champ de déplacement par ondes forcées

Avant de s'intéresser à la résolution du problème inverse, il est nécessaire de résoudre le problème direct dans un premier temps, afin de pouvoir réaliser des simulations maîtrisées. En d'autres termes, il faut pouvoir synthétiser un champ de déplacement  $W(x)$  issu des formalismes d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko.

Aucune solution analytique générale ne permet de déterminer le champ de déplacement d'une poutre en fonction de sa géométrie, de ses propriétés de matériau, de ses conditions limites et de la théorie choisie (Euler-Bernoulli ou Timoshenko). Pour obtenir un tel champ de déplacement l'utilisation d'une décomposition en ondes forcées est proposée, dont les développements mathématiques inspirés de Guyader [74] et Majkut [112] sont détaillés dans les sections suivantes. Un code analytique réalisé sous *Mathematica*<sup>®</sup> donne accès à un champ de déplacement transverse selon les théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. Cette procédure est appliquée à une poutre appuyée, excitée par un effort ponctuel harmonique. Un raisonnement similaire pour une poutre quelconque de  $N$  morceaux est disponible en annexe A.3. En complément, une comparaison des champs de déplacement issus du modèle analytique, d'une formulation en éléments finis linéaires, ou obtenus sous *Comsol*<sup>®</sup> est établie.

### 2.2.1 Généralités

Le développement en ondes forcées permet d'obtenir un champ de déplacement sur une structure monodimensionnelle excitée par diverses sources ponctuelles harmoniques, à partir d'une expression générale de la cinématique mise en jeu. Les différentes discontinuités appliquées (force, moment, changement d'épaisseur, etc.) sont vues comme des conditions de raccordements. La structure est discrétisée en  $N$  morceaux de longueurs variables séparés par les points de discontinuités. Chaque portion possède son propre champ de déplacement, les conditions de raccordements permettent de faire le lien entre ces différents morceaux. Le champ de déplacement global  $W(x)$  s'écrit donc comme l'assemblage de tous les déplacements  $W_i(x)$  :

$$W(x) = \bigcup_{i=1}^N W_i(x), \quad \forall x \in ]x_{d,i-1}, x_{d,i}[, \quad (2.22)$$

où  $x_d$  est le vecteur des positions auxquelles une discontinuité est présente, il contient les abscisses faisant la frontière entre 2 portions de la structure, comme présenté sur la figure 2.4.

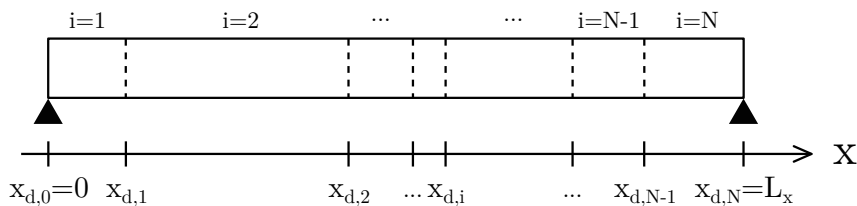


FIGURE 2.4 – Schéma de principe pour la décomposition en ondes forcées.

Les notations suivantes sont utilisées pour chaque portion  $i$  :  $W_i(x)$  le déplacement transverse,  $\Theta_i(x)$  l'angle de flexion pure,  $\mathcal{M}_i(x)$  le moment fléchissant et  $\mathcal{T}_i(x)$  l'effort tranchant. L'expression de ces 4 derniers termes varie en fonction du modèle de poutre utilisé (Euler-Bernoulli ou Timoshenko).

### 2.2.2 Conditions limites

Les relations mathématiques liées aux conditions aux limites d'une poutre sont résumées dans le tableau 2.2 ci-dessous. Les cellules en gras correspondent aux conditions limites "exploitables", c'est à dire à des annulations d'une variable cinématique ou d'un effort interne donnant lieu à une équation qui peut être résolue. On peut alors établir une partie du système d'équations permettant d'obtenir le champ de déplacement de toute la structure.

$x = x_{d,0} = 0$	Encastrée	Libre	Appuyée	Guidée	$x = x_{d,N} = L_x$
$W_1(0)$	<b>0</b>	$\neq 0$	<b>0</b>	$\neq 0$	$W_N(L_x)$
$\Theta_1(0)$	<b>0</b>	$\neq 0$	$\neq 0$	<b>0</b>	$\Theta_N(L_x)$
$\mathcal{M}_1(0)$	$\neq 0$	<b>0</b>	<b>0</b>	$\neq 0$	$\mathcal{M}_N(L_x)$
$\mathcal{T}_1(0)$	$\neq 0$	<b>0</b>	$\neq 0$	<b>0</b>	$\mathcal{T}_N(L_x)$

TABLEAU 2.2 – Résumé des conditions limites applicables aux extrémités d'une poutre et de leurs conséquences mathématiques.

### 2.2.3 Raccordements

Posons  $\mathcal{M}_{\text{ext}}(x_{d,r})$  et  $\mathcal{F}_{\text{ext}}(x_{d,r})$  correspondants aux efforts extérieurs (moment fléchissant et effort tranchant) appliqués à la structure aux positions de raccordement  $x_{d,r}$  avec  $r = 1, 2, \dots, N-1$ . On peut alors écrire les relations de continuités suivantes :

$$\forall r = 1, 2, \dots, N-1 \left\{ \begin{array}{l} W_{r+1}(x_{d,r}) - W_r(x_{d,r}) = 0, \\ \Theta_{r+1}(x_{d,r}) - \Theta_r(x_{d,r}) = 0, \\ \mathcal{M}_{r+1}(x_{d,r}) - \mathcal{M}_r(x_{d,r}) = \mathcal{M}_{\text{ext}}(x_{d,r}), \\ \mathcal{T}_{r+1}(x_{d,r}) - \mathcal{T}_r(x_{d,r}) = F_{\text{ext}}(x_{d,r}). \end{array} \right. \begin{array}{l} (2.23a) \\ (2.23b) \\ (2.23c) \\ (2.23d) \end{array}$$

Les expressions 2.23c et 2.23d représentent les relations de discontinuités du moment fléchissant et de l'effort tranchant. Néanmoins, si  $\mathcal{M}_{\text{ext}}(x_{d,r}) = 0$  (ou  $F_{\text{ext}}(x_{d,r}) = 0$ ) la relation 2.23c (ou 2.23d) se ramène à une relation de continuité du moment fléchissant (ou de l'effort tranchant).



### 2.2.4 Euler-Bernoulli

Le champ de déplacement de chaque portion  $i$  doit être solution de l'équation du mouvement, en dehors des discontinuités. Dans le cas d'une poutre d'Euler-Bernoulli, l'équation du mouvement harmonique ( $W(x, t) \mapsto W(x)$ ) en dehors des sources s'écrit :

$$-\rho_i S_i \omega^2 W_i(x) + \tilde{E}_i I_i \frac{\partial^4 W_i(x)}{\partial x^4} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \forall x \in ]x_{d,i-1}, x_{d,i}[, \quad (2.24)$$

dont la forme de solution est :

$$W_i(x) = A_i \sin(k_{f_i} x) + B_i \cos(k_{f_i} x) + C_i \operatorname{sh}(k_{f_i} x) + D_i \operatorname{ch}(k_{f_i} x), \quad (2.25a)$$

$$\frac{\partial W_i(x)}{\partial x} = A_i k_{f_i} \cos(k_{f_i} x) - B_i k_{f_i} \sin(k_{f_i} x) + C_i k_{f_i} \operatorname{ch}(k_{f_i} x) + D_i k_{f_i} \operatorname{sh}(k_{f_i} x), \quad (2.25b)$$

$$\frac{\partial^2 W_i(x)}{\partial x^2} = -A_i (k_{f_i})^2 \sin(k_{f_i} x) - B_i (k_{f_i})^2 \cos(k_{f_i} x) + C_i (k_{f_i})^2 \operatorname{sh}(k_{f_i} x) + D_i (k_{f_i})^2 \operatorname{ch}(k_{f_i} x), \quad (2.25c)$$

$$\frac{\partial^3 W_i(x)}{\partial x^3} = -A_i (k_{f_i})^3 \cos(k_{f_i} x) + B_i (k_{f_i})^3 \sin(k_{f_i} x) + C_i (k_{f_i})^3 \operatorname{ch}(k_{f_i} x) + D_i (k_{f_i})^3 \operatorname{sh}(k_{f_i} x), \quad (2.25d)$$

avec :

$$k_{f_i} = \sqrt[4]{\frac{\rho_i S_i}{\tilde{E}_i I_i} \omega^2}. \quad (2.26)$$

Pour chaque portion d'une poutre d'Euler-Bernoulli, les expressions de l'angle de flexion pure  $\Theta_i(x)$ , du moment fléchissant  $\mathcal{M}_i(x)$  et de l'effort tranchant  $\mathcal{T}_i(x)$  sont les suivantes :

$$i = 1, 2, \dots, N \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_i(x) = \frac{\partial W_i(x)}{\partial x}, \\ \mathcal{M}_i(x) = \tilde{E}_i I_i \frac{\partial^2 W_i(x)}{\partial x^2}, \\ \mathcal{T}_i(x) = -\tilde{E}_i I_i \frac{\partial^3 W_i(x)}{\partial x^3}. \end{array} \right. \quad (2.27a)$$

$$(2.27b)$$

$$(2.27c)$$

La combinaison des systèmes 2.25 et 2.27 permet l'écriture matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_x^i(1,1) & M_x^i(1,2) & M_x^i(1,3) & M_x^i(1,4) \\ M_x^i(2,1) & M_x^i(2,2) & M_x^i(2,3) & M_x^i(2,4) \\ M_x^i(3,1) & M_x^i(3,2) & M_x^i(3,3) & M_x^i(3,4) \\ M_x^i(4,1) & M_x^i(4,2) & M_x^i(4,3) & M_x^i(4,4) \end{bmatrix}}_{[M_x^i]} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_i(x) \\ \Theta_i(x) \\ \mathcal{M}_i(x) \\ \mathcal{T}_i(x) \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

dont le détail de  $[M_x^i]$  est disponible en annexe A.1.1.

### 2.2.5 Timoshenko

Hors des discontinuités, le champ de déplacement doit être solution de l'équation du mouvement. L'équation du mouvement harmonique ( $W(x, t) \mapsto W(x)$ ) de la poutre de Timoshenko en dehors des sources s'écrit :

$$\tilde{E}_i I_i \frac{\partial^4 W_i(x)}{\partial x^4} + \rho_i I_i \omega^2 \left( \frac{\tilde{E}_i}{\tilde{G}_i} + 1 \right) \frac{\partial^2 W_i(x)}{\partial x^2} + \left( \frac{\rho_i^2 I_i}{\tilde{G}_i} \omega^4 - \rho_i S_i \omega^2 \right) W_i(x) = 0, \quad (2.29)$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad \forall x \in ]x_{d,i-1}, x_{d,i}[,$$

dont la solution prend la forme suivante :

$$W_i(x) = A_i \sin(k_{p_i} x) + B_i \cos(k_{p_i} x) + C_i \operatorname{sh}(k_{e_i} x) + D_i \operatorname{ch}(k_{e_i} x), \quad (2.30a)$$

$$\frac{\partial W_i(x)}{\partial x} = A_i k_{p_i} \cos(k_{p_i} x) - B_i k_{p_i} \sin(k_{p_i} x) + C_i k_{e_i} \operatorname{ch}(k_{e_i} x) + D_i k_{e_i} \operatorname{sh}(k_{e_i} x), \quad (2.30b)$$

$$\frac{\partial^2 W_i(x)}{\partial x^2} = -A_i (k_{p_i})^2 \sin(k_{p_i} x) - B_i (k_{p_i})^2 \cos(k_{p_i} x) + C_i (k_{e_i})^2 \operatorname{sh}(k_{e_i} x) + D_i (k_{e_i})^2 \operatorname{ch}(k_{e_i} x), \quad (2.30c)$$

$$\frac{\partial^3 W_i(x)}{\partial x^3} = -A_i (k_{p_i})^3 \cos(k_{p_i} x) + B_i (k_{p_i})^3 \sin(k_{p_i} x) + C_i (k_{e_i})^3 \operatorname{ch}(k_{e_i} x) + D_i (k_{e_i})^3 \operatorname{sh}(k_{e_i} x), \quad (2.30d)$$

avec :

$$k_{p_i} = \sqrt{\frac{\rho_i I_i \omega^2 \left( 1 + \frac{\tilde{E}_i}{\tilde{G}_i} \right) + \sqrt{\Delta_i}}{2 \tilde{E}_i I_i}}, \quad (2.31)$$

$$k_{e_i} = \sqrt{\frac{-\rho_i I_i \omega^2 \left( 1 + \frac{\tilde{E}_i}{\tilde{G}_i} \right) + \sqrt{\Delta_i}}{2 \tilde{E}_i I_i}}, \quad (2.32)$$

et :

$$\Delta_i = \rho_i^2 I_i^2 \omega^4 \left( 1 - \frac{\tilde{E}_i}{\tilde{G}_i} \right)^2 + 4 \tilde{E}_i I_i \rho_i S_i \omega^2. \quad (2.33)$$

Pour une poutre de Timoshenko, dans le cadre d'une vibration harmonique ( $W(x, t) \mapsto W(x)$ ) en dehors des sources, le système 2.10 s'écrit :

$$\begin{cases} -\rho S \omega^2 W(x) - \tilde{G} S \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} + \tilde{G} S \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x} = 0, & (2.34a) \\ \tilde{E} I \frac{\partial^2 \Theta(x)}{\partial x^2} + \tilde{G} S \frac{\partial W(x)}{\partial x} - (\tilde{G} S - \rho I \omega^2) \Theta(x) = 0. & (2.34b) \end{cases}$$

De 2.34a on déduit trivialement 2.35a et 2.35b. Cette dernière expression utilisée dans 2.34b entraîne 2.35c :

$$\frac{\partial \Theta(x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} + \frac{\rho \omega^2}{\tilde{G}} W(x), \quad (2.35a)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 W(x)}{\partial x^3} + \frac{\rho \omega^2}{\tilde{G}} \frac{\partial W(x)}{\partial x}, \quad (2.35b)$$

$$\Theta(x) = \frac{1}{\tilde{G}S - \rho I \omega^2} \left[ \tilde{E}I \frac{\partial^3 W(x)}{\partial x^3} + \left( \tilde{E}I \frac{\rho \omega^2}{\tilde{G}} + \tilde{G}S \right) \frac{\partial W(x)}{\partial x} \right]. \quad (2.35c)$$

Après quelques développements de 2.3 et 2.9, on obtient les expressions du moment fléchissant  $\mathcal{M}(x)$  et de l'effort tranchant  $\mathcal{T}(x)$  en fonction du déplacement transversal  $W(x)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}(x) = \tilde{E}I \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} + \tilde{E}I \frac{\rho \omega^2}{\tilde{G}} W(x), \\ \mathcal{T}(x) = \frac{-\tilde{G}S}{\tilde{G}S - \rho I \omega^2} \left[ \tilde{E}I \frac{\partial^3 W(x)}{\partial x^3} + \rho I \omega^2 \left( 1 + \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} \right) \frac{\partial W(x)}{\partial x} \right]. \end{array} \right. \quad (2.36a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}(x) = \tilde{E}I \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} + \tilde{E}I \frac{\rho \omega^2}{\tilde{G}} W(x), \\ \mathcal{T}(x) = \frac{-\tilde{G}S}{\tilde{G}S - \rho I \omega^2} \left[ \tilde{E}I \frac{\partial^3 W(x)}{\partial x^3} + \rho I \omega^2 \left( 1 + \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} \right) \frac{\partial W(x)}{\partial x} \right]. \end{array} \right. \quad (2.36b)$$

Les expressions condensées de l'angle de flexion pure  $\Theta_i(x)$ , du moment fléchissant  $\mathcal{M}_i(x)$  et de l'effort tranchant  $\mathcal{T}_i(x)$  sont finalement obtenues pour chaque portion de poutre  $i$  :

$$i = 1, 2, \dots, N \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_i(x) = \frac{1}{c_{T_i} - d_{T_i}} \left[ a_{T_i} \frac{\partial^3 W_i(x)}{\partial x^3} + (b_{T_i} + c_{T_i}) \frac{\partial W_i(x)}{\partial x} \right], \\ \mathcal{M}_i(x) = a_{T_i} \frac{\partial^2 W_i(x)}{\partial x^2} + b_{T_i} W_i(x), \\ \mathcal{T}_i(x) = \frac{-c_{T_i}}{c_{T_i} - d_{T_i}} \left[ a_{T_i} \frac{\partial^3 W_i(x)}{\partial x^3} + (d_{T_i} + b_{T_i}) \frac{\partial W_i(x)}{\partial x} \right], \end{array} \right. \quad (2.37a)$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_i(x) = \frac{1}{c_{T_i} - d_{T_i}} \left[ a_{T_i} \frac{\partial^3 W_i(x)}{\partial x^3} + (b_{T_i} + c_{T_i}) \frac{\partial W_i(x)}{\partial x} \right], \\ \mathcal{M}_i(x) = a_{T_i} \frac{\partial^2 W_i(x)}{\partial x^2} + b_{T_i} W_i(x), \end{array} \right. \quad (2.37b)$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_i(x) = \frac{1}{c_{T_i} - d_{T_i}} \left[ a_{T_i} \frac{\partial^3 W_i(x)}{\partial x^3} + (b_{T_i} + c_{T_i}) \frac{\partial W_i(x)}{\partial x} \right], \\ \mathcal{T}_i(x) = \frac{-c_{T_i}}{c_{T_i} - d_{T_i}} \left[ a_{T_i} \frac{\partial^3 W_i(x)}{\partial x^3} + (d_{T_i} + b_{T_i}) \frac{\partial W_i(x)}{\partial x} \right], \end{array} \right. \quad (2.37c)$$

avec les coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{T_i} = \tilde{E}_i I_i, \\ b_{T_i} = \tilde{E}_i I_i \frac{\rho_i \omega^2}{\tilde{G}_i}, \\ c_{T_i} = \tilde{G}_i S_i, \\ d_{T_i} = \rho_i I_i \omega^2. \end{array} \right. \quad (2.38a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{T_i} = \tilde{E}_i I_i, \\ b_{T_i} = \tilde{E}_i I_i \frac{\rho_i \omega^2}{\tilde{G}_i}, \end{array} \right. \quad (2.38b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{T_i} = \tilde{G}_i S_i, \end{array} \right. \quad (2.38c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{T_i} = \rho_i I_i \omega^2. \end{array} \right. \quad (2.38d)$$

La combinaison des systèmes 2.30 et 2.37 permet l'écriture matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_x^i(1,1) & M_x^i(1,2) & M_x^i(1,3) & M_x^i(1,4) \\ M_x^i(2,1) & M_x^i(2,2) & M_x^i(2,3) & M_x^i(2,4) \\ M_x^i(3,1) & M_x^i(3,2) & M_x^i(3,3) & M_x^i(3,4) \\ M_x^i(4,1) & M_x^i(4,2) & M_x^i(4,3) & M_x^i(4,4) \end{bmatrix}}_{[M_x^i]} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_i(x) \\ \Theta_i(x) \\ \mathcal{M}_i(x) \\ \mathcal{T}_i(x) \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

dont le détail de  $[M_x^i]$  est donné en annexe A.1.2.

### 2.2.6 Cas simple : poutre en appui de 2 morceaux homogènes

Pour illustrer la méthode en ondes forcées, prenons l'exemple d'une poutre homogène appuyée à ses extrémités et excitée par une force ponctuelle harmonique  $\vec{F} = -F\vec{e}_z$  en  $x = x_{d,1} = x_0$ . La poutre est discrétisée en 2 morceaux puisqu'elle ne présente qu'une seule discontinuité. Les développements qui suivent sont valables pour une poutre d'Euler-Bernoulli ou de Timoshenko, seuls les termes de la matrice  $[M_x^i]$  diffèrent et sont donnés en annexes A.1 et A.2 respectivement.

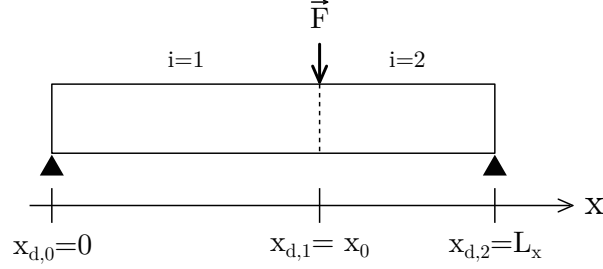


FIGURE 2.5 – Schéma d'une poutre appuyée à ses extrémités, excitée par une force ponctuelle harmonique  $\vec{F}$  en  $x = x_{d,1} = x_0$ .

La poutre est homogène ce qui permet de poser  $\tilde{E}_i = \tilde{E}$ ,  $I_i = I$ ,  $S_i = S$ ,  $\rho_i = \rho$  et  $k_{f_i} = k_f$ . Pour une poutre de Timoshenko on y ajoute  $\tilde{G}_i = \tilde{G}$ ,  $k_{p_i} = k_p$ ,  $k_{e_i} = k_e$ ,  $a_{T_i} = a_T$ ,  $b_{T_i} = b_T$ ,  $c_{T_i} = c_T$  et  $d_{T_i} = d_T$ . Les conditions limites d'appui impliquent  $W_1(0) = 0$ ,  $\mathcal{M}_1(0) = 0$ ,  $W_2(L_x) = 0$  et  $\mathcal{M}_2(L_x) = 0$ . En utilisant l'écriture matricielle 2.28 (ou 2.39) les conditions limites se traduisent mathématiquement par les relations 2.40 et 2.41 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_0^1(1,1) & M_0^1(1,2) & M_0^1(1,3) & M_0^1(1,4) \\ M_0^1(2,1) & M_0^1(2,2) & M_0^1(2,3) & M_0^1(2,4) \\ M_0^1(3,1) & M_0^1(3,2) & M_0^1(3,3) & M_0^1(3,4) \\ M_0^1(4,1) & M_0^1(4,2) & M_0^1(4,3) & M_0^1(4,4) \end{bmatrix}}_{[M_0^1]} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Theta_1(0) \\ 0 \\ \mathcal{T}_1(0) \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{L_x}^2(1,1) & M_{L_x}^2(1,2) & M_{L_x}^2(1,3) & M_{L_x}^2(1,4) \\ M_{L_x}^2(2,1) & M_{L_x}^2(2,2) & M_{L_x}^2(2,3) & M_{L_x}^2(2,4) \\ M_{L_x}^2(3,1) & M_{L_x}^2(3,2) & M_{L_x}^2(3,3) & M_{L_x}^2(3,4) \\ M_{L_x}^2(4,1) & M_{L_x}^2(4,2) & M_{L_x}^2(4,3) & M_{L_x}^2(4,4) \end{bmatrix}}_{[M_{L_x}^2]} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Theta_2(L) \\ 0 \\ \mathcal{T}_2(L) \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Au point  $x_{d,1} = x_0$  la continuité du déplacement, de l'angle de flexion, du moment fléchissant et la discontinuité de l'effort tranchant amènent à écrire :

$$\begin{cases} W_2(x_{d,1}) - W_1(x_{d,1}) = 0, & (2.42a) \\ \Theta_2(x_{d,1}) - \Theta_1(x_{d,1}) = 0, & (2.42b) \\ \mathcal{M}_2(x_{d,1}) - \mathcal{M}_1(x_{d,1}) = \mathcal{M}_{\text{ext}}(x_{d,1}) = 0, & (2.42c) \\ \mathcal{T}_2(x_{d,1}) - \mathcal{T}_1(x_{d,1}) = F_{\text{ext}}(x_{d,1}) = -F, & (2.42d) \end{cases}$$

que l'on peut ramener sous forme matricielle (d'après les relations 2.28 ou 2.39) :

$$\begin{bmatrix} M_{x_{d,1}}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{x_{d,1}}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

L'homogénéité de la poutre entraîne  $[M_{x_{d,1}}^1] = [M_{x_{d,1}}^2] = [M_{x_{d,1}}^{1,2}]$ , soit :

$$\begin{bmatrix} M_{x_{d,1}}^{1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 - A_1 \\ B_2 - B_1 \\ C_2 - C_1 \\ D_2 - D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

On peut constater que dans les expressions de  $M_0^1$  et  $M_{L_x}^2$  (relations 2.40 et 2.41), seulement certaines lignes sont "exploitables". En effet, dans le cadre de conditions limites de type appui, seules les lignes 1 et 3 des matrices  $[M_0^1]$  et  $[M_{L_x}^2]$  fournissent des équations que l'on peut résoudre. Ces lignes sont notées  $M_0^1(\{1, 3\}, :)$  et  $M_{L_x}^2(\{1, 3\}, :)$  (lignes 1 et 3, toutes les colonnes), notation similaire à celle que l'on pourrait écrire sous *Matlab*<sup>®</sup>.

Ces conditions limites "exploitables" ainsi que l'expression 2.43 sont regroupées dans une matrice finale, notée  $[M_{\text{fin}}]$ , détaillée en annexe A.2, dont l'inversion permet de déterminer les inconnues  $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2$  et  $D_2$  comme le montre la relation 2.45 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_0^1(\{1, 3\}, :) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_{L_x}^2(\{1, 3\}, :) \\ -M_{x_{d,1}}^1 & M_{x_{d,1}}^2 \end{bmatrix}}_{[M_{\text{fin}}]} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

L'inversion de la matrice  $[M_{\text{fin}}]$  est réalisée sous le logiciel de calcul formel *Mathematica*<sup>®</sup>. Les expressions analytiques du champ de déplacement obtenues selon les théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko pour la structure présentée en figure 2.5 sont données dans les relations 2.46 et 2.47 respectivement. Ces équations donnent accès au champ de déplacement transverse d'une poutre homogène appuyée à ses extrémités et excitée par une source ponctuelle harmonique en  $x = x_0$ .

$$W^{\text{EB}}(x) = \begin{cases} \frac{F}{2k_f^3 \tilde{E}I} \left[ \frac{\sin(k_f x) \sin(k_f(L_x - x_0))}{\sin(k_f L_x)} - \frac{\text{sh}(k_f x) \text{sh}(k_f(L_x - x_0))}{\text{sh}(k_f L_x)} \right], & \text{pour } x \in [x; x_0[ \\ \frac{F}{2k_f^3 \tilde{E}I} \left[ \frac{\sin(k_f x_0) \sin(k_f(L_x - x))}{\sin(k_f L_x)} - \frac{\text{sh}(k_f x_0) \text{sh}(k_f(L_x - x))}{\text{sh}(k_f L_x)} \right], & \text{pour } x \in [x_0; L_x[ \end{cases} \quad (2.46)$$

$$W^{\text{TIMO}}(x) = \begin{cases} \frac{F}{\tilde{G}^2 S \tilde{E}I k_e k_p (k_e^2 + k_p^2)} \left[ k_e (\tilde{G}^2 S + \tilde{G} k_e^2 \tilde{E}I + \tilde{E}I \rho \omega^2) \frac{\sin(k_p x) \sin(k_p(L_x - x_0))}{\sin(k_p L_x)} - k_p (\tilde{G}^2 S - \tilde{G} k_p^2 \tilde{E}I + \tilde{E}I \rho \omega^2) \frac{\text{sh}(k_e x) \text{sh}(k_e(L_x - x_0))}{\text{sh}(k_e L_x)} \right], & \text{pour } x \in [x; x_0[ \\ \frac{F}{\tilde{G}^2 S \tilde{E}I k_e k_p (k_e^2 + k_p^2)} \left[ k_e (\tilde{G}^2 S + \tilde{G} k_e^2 \tilde{E}I + \tilde{E}I \rho \omega^2) \frac{\sin(k_p x_0) \sin(k_p(L_x - x))}{\sin(k_p L_x)} - k_p (\tilde{G}^2 S - \tilde{G} k_p^2 \tilde{E}I + \tilde{E}I \rho \omega^2) \frac{\text{sh}(k_e x_0) \text{sh}(k_e(L_x - x))}{\text{sh}(k_e L_x)} \right], & \text{pour } x \in [x_0; L_x[ \end{cases} \quad (2.47)$$

**Nota Bene :** Un développement en ondes forcées pour le cas général (poutre quelconque de  $N$  morceaux) est présenté en annexe A.3.

### 2.2.7 Comparaison avec deux modèles numériques

Une comparaison des champs de déplacement analytiques (relations 2.46 et 2.47) est établie avec une formulation en éléments finis linéaires ainsi qu'un modèle *Comsol*<sup>®</sup>. La concordance obtenue entre les trois méthodes est quasiment parfaite.

#### Formulation en éléments finis

Les relations suivantes sont issues de sources diverses [43, 74, 111, 113] mais ne seront pas développées afin de ne pas alourdir le propos. En utilisant les équations du mouvement respectives des théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko, ainsi que des fonctions d'interpolation d'ordre 3, on obtient les matrices de masse et de raideur élémentaires (notées  $M_e$  et  $K_e$  respectivement), données ci-dessous. Les exposants <sup>EB</sup> et <sup>TIMO</sup> stipulent l'utilisation des théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko.

$$M_e^{\text{EB}} = \frac{\rho S h}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 22h & 4h^2 & 13h & -3h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -3h^2 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix}, \quad (2.48a)$$

$$K_e^{\text{EB}} = \frac{\tilde{E}I}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{bmatrix}, \quad (2.48b)$$

$$M_e^{\text{TIMO}} = M_e^{\text{EB}} + \frac{\rho I}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3h & -36 & 3h \\ 3h & 4h^2 & -3h & -h^2 \\ -36 & -3h & 36 & -3h \\ 3h & -h^2 & -3h & 4h^2 \end{bmatrix}, \quad (2.49a)$$

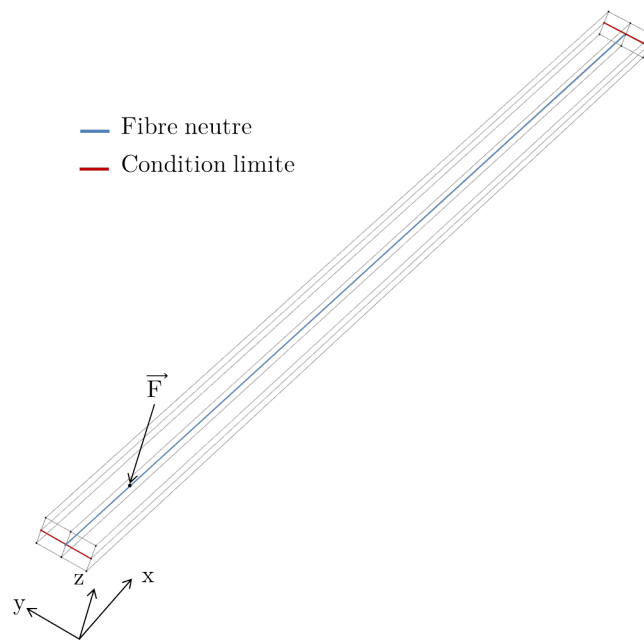
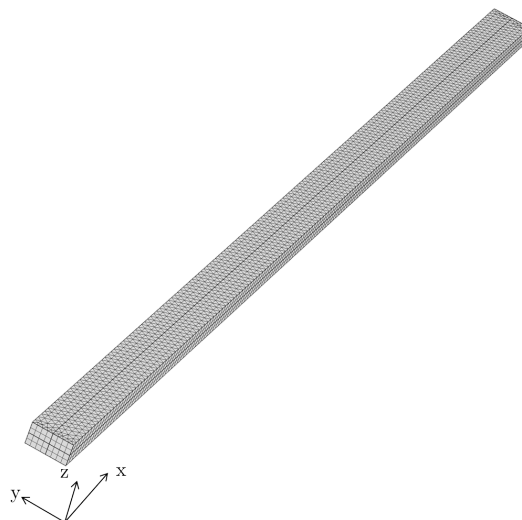
$$K_e^{\text{TIMO}} = \frac{\tilde{E}I}{(1+a_y)h^3} \begin{bmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & (4+a_y)h^2 & -6h & (2-a_y)h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & (2-a_y)h^2 & -6h & (4+a_y)h^2 \end{bmatrix}, \quad (2.49b)$$

avec  $a_y = \frac{12\tilde{E}I}{\tilde{G}Sh^2}$ .

L'assemblage des matrices élémentaires permet de réécrire les équations du mouvement sous la forme d'un système matriciel du type  $(K - \omega^2 M)U = \mathcal{F}_{\text{ext}}$ . Connaissant les conditions limites de la structure ainsi que le vecteur des efforts extérieurs appliqués  $\mathcal{F}_{\text{ext}}$ , on obtient le vecteur des déplacements  $U$  duquel le champ de déplacement  $W$  est déduit.

**Modèle éléments finis 3D *Comsol*<sup>®</sup>**

Pour représenter la déformation d'une poutre sous *Comsol*<sup>®</sup>, une étude 3D est établie dans laquelle la source (force ponctuelle harmonique) et les conditions d'appuis (définies par un déplacement nul sur l'arête) sont appliquées sur la fibre neutre de la structure (figure 2.6). Le module de mécanique du solide est ensuite utilisé pour une étude dans le domaine fréquentiel. Un maillage surfacique constitué de triangles libres est distribué sur 4 épaisseurs amenant à un maillage global formé d'environ 11000 éléments prismes (figure 2.7). Au terme du calcul, le champ de déplacement transverse est récupéré sur la fibre centrale de la poutre.

FIGURE 2.6 – Géométrie réalisée sur *Comsol*<sup>®</sup>.FIGURE 2.7 – Maillage associé au modèle *Comsol*<sup>®</sup>.



### Comparaison des modèles

La comparaison entre les modèles en ondes forcées, éléments finis 1D et éléments finis 3D *Comsol*<sup>®</sup>, est réalisée sur une poutre en flexion définie avec les paramètres arbitraires donnés dans le tableau 2.3.

Paramètre	Valeur
Longueur $L_x$	50 cm
Largeur $L_y$	2 cm
Épaisseur $L_z$	1.1 cm
Masse volumique $\rho$	2020 kg.m <sup>-3</sup>
Module d'Young $E$	100 GPa
Facteur de perte $\eta_E$	10%
Module de cisaillement $G$	30 GPa
Facteur de perte $\eta_G$	5%
Fréquence $f$	700 ou 3500 Hz
Conditions limites	Appui-Appui
Force $F$	1 N
Position de la source $x_0$	0.05 m

TABLEAU 2.3 – Paramètres de simulation pour la comparaison entre la formulation en ondes forcées, le modèle en éléments finis linéaires et le modèle en éléments finis 3D *Comsol*<sup>®</sup>.

Le champ de déplacement obtenu pour chaque formulation et pour chaque théorie (Euler-Bernoulli ou Timoshenko) est présenté ci-dessous pour deux configurations fréquentielles différentes ( $f = 700$  Hz sur la figure 2.8 et  $f = 3500$  Hz sur la figure 2.9). Les résultats en ondes forcées ou en éléments finis sont indiqués par un indice <sub>OF</sub> et <sub>EF</sub> respectivement, les exposants <sup>EB</sup> et <sup>TIMO</sup> stipulent l'utilisation des théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko.

À la fréquence la plus basse (figure 2.8), tous les modèles se superposent car les effets de cisaillement et d'inertie rotationnelle sont négligeables. La théorie d'Euler-Bernoulli est alors suffisante pour représenter les déformations engendrées. En revanche, lorsque la fréquence augmente les théories de Timoshenko et d'Euler-Bernoulli divergent progressivement, comme constaté en figure 2.9 pour  $f = 3500$  Hz.

Dans tous les cas, les champs de déplacement obtenus par la décomposition en ondes forcées ou par les modèles en éléments finis linéaires (pour une théorie équivalente) sont presque identiques. Il en est de même pour les champs de déplacement obtenus par *Comsol*<sup>®</sup> qui coïncident avec ceux rendus par la théorie de Timoshenko. Ces observations peuvent également être confirmées à travers les spectres de déplacement présentés en figure 2.10.

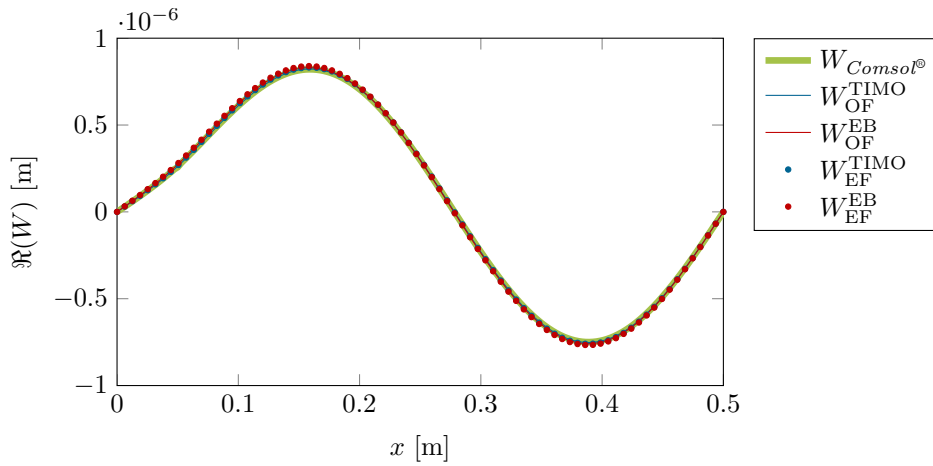
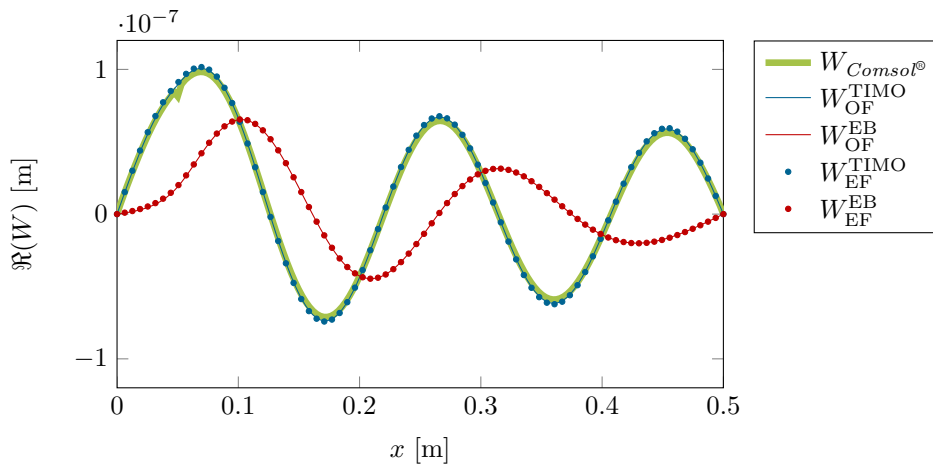
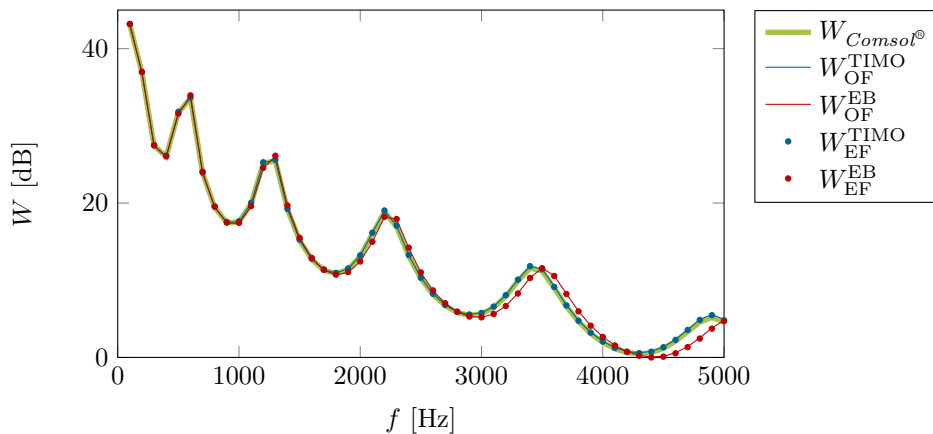

 FIGURE 2.8 – Partie réelle du champ de déplacement pour  $f = 700$  Hz.

 FIGURE 2.9 – Partie réelle du champ de déplacement pour  $f = 3500$  Hz.


FIGURE 2.10 – Spectre du champ de déplacement transverse en fonction de la fréquence (valeur RMS du champ de déplacement transverse en dehors des sources).

## 2.3 Principe de la méthode inverse

Dans les sections précédentes nous avons pu constater que l'équation de Timoshenko comporte deux termes complexes notés  $\tilde{E}$  et  $\tilde{G}$  amenant à 4 variables réelles  $E$ ,  $\eta_E$ ,  $G$  et  $\eta_G$ . Le but étant d'obtenir tous les paramètres matériau sans le moindre a priori sur l'un d'eux, une séparation des variables est nécessaire, ce qui constitue l'objet de cette section.

### 2.3.1 Schéma aux différences finies

Comme observé dans les équations du mouvement en régime harmonique et en dehors des sources (relations 2.6 pour la théorie d'Euler Bernoulli et 2.14 pour la théorie de Timoshenko), l'identification des paramètres du matériau repose sur la connaissance du champ de déplacement  $W$  et de ses dérivées spatiales  $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}$ . Bien que le champ de déplacement  $W$  soit aisément mesurable par divers capteurs (accéléromètre, vibromètre...), les dérivées spatiales ne sont pas directement accessibles. Dans la version originale de la méthode RIFF ces dernières sont approximées par un schéma aux différences finies centrées d'ordre 2 et notées  $\delta^{2x} \approx \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$  et  $\delta^{4x} \approx \frac{\partial^4 W}{\partial x^4}$  (relations 2.50a et 2.50b). Les intérêts de cette approximation sont l'aspect local de la méthode (résolution de l'équation en 1 point à partir de seulement 5 points de maillage) mais également sa robustesse face au bruit grâce aux faibles coefficients utilisés.

$$\delta_i^{2x} = \frac{1}{\Delta_x^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{i-1} & W_i & W_{i+1} \end{bmatrix}^t, \quad (2.50a)$$

$$\delta_i^{4x} = \frac{1}{\Delta_x^4} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{i-2} & W_{i-1} & W_i & W_{i+1} & W_{i+2} \end{bmatrix}^t. \quad (2.50b)$$

Néanmoins, pour l'équation de Timoshenko, la détermination des modules complexes  $\tilde{E}$  et  $\tilde{G}$  dépend des deux dérivées spatiales. Il est donc souhaitable d'accroître la précision d'estimation de ces dernières. C'est pourquoi une évaluation de  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$  par différences finies d'ordre 4 est également proposée (relations 2.51a et 2.51b), impliquant alors 7 points de mesure. Le caractère local de la méthode reste faiblement modifié et les coefficients mis en jeu n'altèrent pas significativement la stabilité de l'estimation des dérivées.

$$\delta_i^{2x} = \frac{1}{12\Delta_x^2} \begin{bmatrix} -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{i-2} & W_{i-1} & W_i & W_{i+1} & W_{i+2} \end{bmatrix}^t, \quad (2.51a)$$

$$\delta_i^{4x} = \frac{1}{6\Delta_x^4} \begin{bmatrix} -1 & 12 & -39 & 56 & -39 & 12 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{i-3} & W_{i-2} & W_{i-1} & W_i & W_{i+1} & W_{i+2} & W_{i+3} \end{bmatrix}^t. \quad (2.51b)$$

### 2.3.2 Principe pour le modèle d'Euler-Bernoulli

L'équation du mouvement d'Euler-Bernoulli en régime harmonique et en dehors des sources (relation 2.6), est exprimée sous forme numérisée dans l'expression 2.52a, faisant usage des différences finies. Cette dernière ne présente pas de difficulté particulière pour déterminer le module d'Young  $E$  et l'amortissement associé  $\eta_E$  puisque chaque couple fréquence/espace ne présente qu'un unique module complexe  $\tilde{E}$  à

déterminer, une simple division terme à terme suffit alors. L'équation 2.52a est réécrite sous forme matricielle 2.52b et sera traitée par une inversion au sens des moindres carrés (section 2.3.4) :

$$\tilde{E} = E(1 + j\eta_E) = \frac{\rho S \omega^2 W}{I \delta^{4x}}, \quad (2.52a)$$

$$\begin{bmatrix} I \delta^{4x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho S \omega^2 W \end{bmatrix}. \quad (2.52b)$$

### 2.3.3 Principe pour le modèle de Timoshenko

L'équation du mouvement de Timoshenko en régime harmonique et en dehors des sources 2.14 est réécrite sous forme discrète (relation 2.53a) utilisant les différences finies ( $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$ ) et peut être exprimée en formulation matricielle (équation 2.53b).

$$0 = \tilde{E} I \delta^{4x} + \rho I \omega^2 \left( \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \right) \delta^{2x} + \left( \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega^4 - \rho S \omega^2 \right) W, \quad (2.53a)$$

$$\begin{bmatrix} I \delta^{4x} & \rho I \omega^2 \delta^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \rho S \omega^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega^4 \right) W \end{bmatrix}. \quad (2.53b)$$

La relation 2.53b présente un second membre qui dépend du module de cisaillement  $\tilde{G}$  recherché. Cette difficulté est contournée à l'aide d'un modèle itératif détaillé dans les équations 2.54. Dans un premier temps, le terme  $\frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega^4$  est négligé afin d'estimer une première valeur de  $\tilde{E}$  et  $\tilde{G}$  que nous noterons  $\tilde{E}_1$  et  $\tilde{G}_1$ . Ce module de cisaillement complexe  $\tilde{G}_1$  est alors injecté dans le second membre afin de déterminer  $\tilde{E}_2$  et  $\tilde{G}_2$ . Puis  $\tilde{G}_2$  servira à obtenir  $\tilde{E}_3$  et  $\tilde{G}_3$ , et ainsi de suite jusqu'à atteindre une variation de  $\tilde{G}$  inférieure à 0.1% entre deux itérations successives, ce qui est généralement atteint au bout de 4 itérations.

**Initialisation :**

$$\begin{bmatrix} I \delta^{4x} & \rho I \omega^2 \delta^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \rho S \omega^2 - \frac{\rho^2 I}{\cancel{\tilde{G}}} \omega^4 \right) W \end{bmatrix}. \quad (2.54a)$$

**Itération 1 :**

$$\begin{bmatrix} I \delta^{4x} & \rho I \omega^2 \delta^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 \\ \frac{\tilde{E}_1}{\tilde{G}_1} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho S \omega^2 W \end{bmatrix}. \quad (2.54b)$$

**Itération 2 :**

$$\begin{bmatrix} I \delta^{4x} & \rho I \omega^2 \delta^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_2 \\ \frac{\tilde{E}_2}{\tilde{G}_2} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \rho S \omega^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}_1} \omega^4 \right) W \end{bmatrix}. \quad (2.54c)$$

**Itération n :**

$$\begin{bmatrix} I \delta^{4x} & \rho I \omega^2 \delta^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_n \\ \frac{\tilde{E}_n}{\tilde{G}_n} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \rho S \omega^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}_{n-1}} \omega^4 \right) W \end{bmatrix}. \quad (2.54d)$$

Les relations 2.53a à 2.54d comportent toujours 2 inconnues complexes pour une unique équation. Pour remédier à ce problème il nous faut utiliser une inversion au sens des moindres carrés comme détaillé en section 2.3.4).

### 2.3.4 Méthode des moindres carrés

Comme stipulé précédemment, la relation 2.53b présente deux inconnues complexes  $\tilde{E}$  et  $\tilde{G}$  pour une seule équation. Il est donc indispensable pour le modèle de Timoshenko d'utiliser de l'information supplémentaire pour déduire les caractéristiques du matériau. Cette approche n'est pas indispensable pour la théorie d'Euler-Bernoulli sur le plan mathématique (relations 2.52), mais sera néanmoins mise en œuvre afin de comparer les modèles de poutre à partir d'une même base.

Le déplacement transverse ainsi que les dérivées spatiales dépendent à la fois de la position sur la structure mais également de la fréquence. En revanche, pour une structure homogène, sur les plans macroscopique et mésoscopique,  $\tilde{E}$  et  $\tilde{G}$  sont indépendants de l'espace et considérés faiblement dépendants de la fréquence. Il est donc possible de "créer" plusieurs équations (en fonction de l'espace ou de la fréquence) pour deux inconnues  $\tilde{E}$  et  $\tilde{G}$  quasiment constantes. On peut distinguer deux cas de figures :

- soit on s'intéresse à une sur-information en fréquence pour une même coordonnée spatiale, ce qui permet d'obtenir une cartographie de chaque paramètre  $E$ ,  $\eta_E$ ,  $G$  et  $\eta_G$ ,
- soit on exploite une sur-information spatiale pour une même fréquence dans une région bornée de la structure afin d'en déduire l'évolution fréquentielle des paramètres.

#### Sur-information en fréquence : cartographie des paramètres du matériau

Les relations matricielles 2.52b et 2.53b sont interprétées pour un nombre défini de fréquences  $N_f$  amenant aux équations 2.55 pour le modèle d'Euler-Bernoulli et 2.56 pour celui de Timoshenko. La division matricielle est obtenue au sens des moindres carrés, on accède alors à une valeur unique de  $\tilde{E}$  et  $\tilde{G}$ . La procédure est ensuite répétée pour chaque point du maillage. Un schéma de principe est présenté en figure 2.11.

$$\begin{bmatrix} I\delta^{4x}(\omega_1) & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ I\delta^{4x}(\omega_j) & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ I\delta^{4x}(\omega_{N_f}) & \vdots \end{bmatrix} [\tilde{E}] = \begin{bmatrix} \rho S \omega_1^2 W(\omega_1) \\ \vdots \\ \rho S \omega_j^2 W(\omega_j) \\ \vdots \\ \rho S \omega_{N_f}^2 W(\omega_{N_f}) \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

$$\begin{bmatrix} I\delta^{4x}(\omega_1) & \rho I \omega_1^2 \delta^{2x}(\omega_1) \\ \vdots & \vdots \\ I\delta^{4x}(\omega_j) & \rho I \omega_j^2 \delta^{2x}(\omega_j) \\ \vdots & \vdots \\ I\delta^{4x}(\omega_{N_f}) & \rho I \omega_{N_f}^2 \delta^{2x}(\omega_{N_f}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \rho S \omega_1^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega_1^4 \right) W(\omega_1) \\ \vdots \\ \left( \rho S \omega_j^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega_j^4 \right) W(\omega_j) \\ \vdots \\ \left( \rho S \omega_{N_f}^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega_{N_f}^4 \right) W(\omega_{N_f}) \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

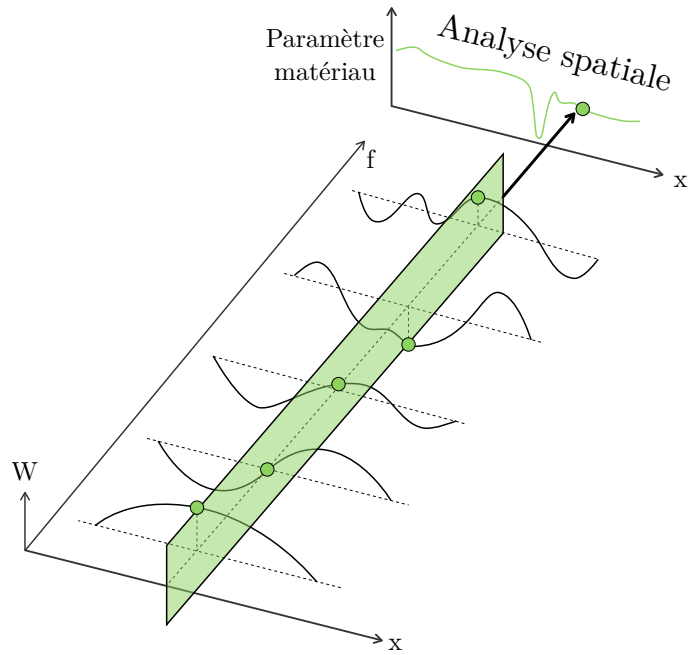


FIGURE 2.11 – Schéma représentatif de la sur-information en fréquence. Cette procédure donne accès à 4 cartographies de  $E$ ,  $\eta_E$ ,  $G$  et  $\eta_G$ .

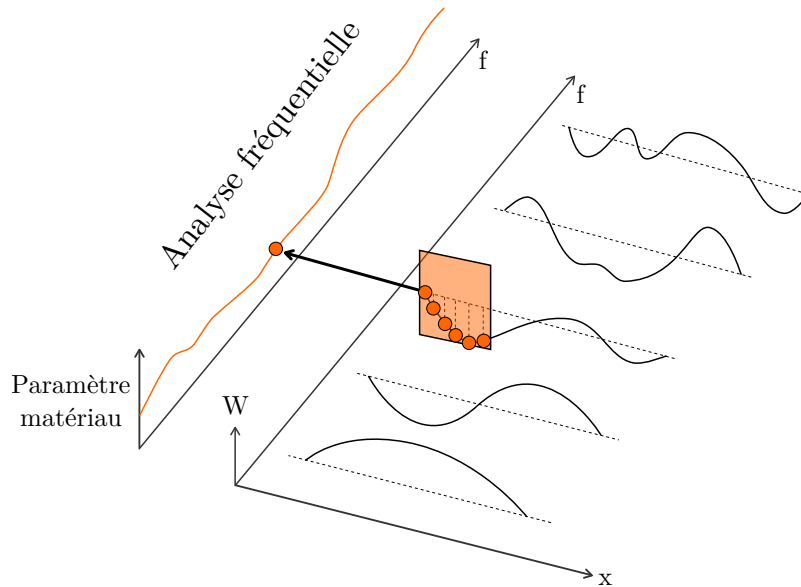


FIGURE 2.12 – Schéma représentatif de la sur-information en espace. Cette procédure donne accès à l'évolution fréquentielle de  $E$ ,  $\eta_E$ ,  $G$  et  $\eta_G$  dans une région bornée de la structure.

### Sur-information en espace : comportement fréquentiel des paramètres du matériau

Les expressions 2.52b et 2.53b sont interprétées pour  $N_x$  points sur une portion de la structure, amenant aux équations 2.57 pour la théorie d'Euler-Bernoulli et 2.58 pour celle de Timoshenko. La division matricielle est obtenue au sens des moindres carrés, donnant accès à une valeur unique de  $\tilde{E}$  et  $\tilde{G}$ . La procédure est ensuite réitérée pour chaque fréquence. Un schéma de principe est présenté en figure 2.12.

$$\begin{bmatrix} I\delta^{4x}(x_1) \\ \vdots \\ I\delta^{4x}(x_i) \\ \vdots \\ I\delta^{4x}(x_{N_x}) \end{bmatrix} [\tilde{E}] = \begin{bmatrix} \rho S\omega^2 W(x_1) \\ \vdots \\ \rho S\omega^2 W(x_i) \\ \vdots \\ \rho S\omega^2 W(x_{N_x}) \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

$$\begin{bmatrix} I\delta^{4x}(x_1) & \rho I\omega^2 \delta^{2x}(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ I\delta^{4x}(x_i) & \rho I\omega^2 \delta^{2x}(x_i) \\ \vdots & \vdots \\ I\delta^{4x}(x_{N_x}) & \rho I\omega^2 \delta^{2x}(x_{N_x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{G} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\rho S\omega^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega^4\right) W(x_1) \\ \vdots \\ \left(\rho S\omega^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega^4\right) W(x_i) \\ \vdots \\ \left(\rho S\omega^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega^4\right) W(x_{N_x}) \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

## 2.4 Étude de faisabilité

Considérons une poutre en aluminium de section rectangulaire appuyée à ses extrémités et légèrement amortie. Les caractéristiques de simulation sont définies dans le tableau 2.4. Deux configurations sont étudiées dans des cas non bruités, afin de mettre en évidence l'intérêt de l'équation de Timoshenko. La première est réalisée avec la structure à plat, les conditions limites et la source sont appliquées sur sa tranche la plus large (figure 2.13). La structure présente ici peu d'effets de cisaillement. La seconde configuration concerne la poutre sur champ, la source et les conditions d'appuis sont appliquées sur la tranche la plus étroite (figure 2.14). Dans ce cas, les effets de cisaillement ne sont plus négligeables et la théorie d'Euler-Bernoulli devrait donc présenter ses limites.

Le champ de déplacement transverse est obtenu à l'aide de la relation 2.47, le problème direct est donc issu de la théorie de Timoshenko. Les paramètres du matériau sont ensuite déduits soit à chaque position spatiale, en faisant usage d'une sur-information utilisant tout le domaine fréquentiel (relations 2.57 et 2.58), soit à chaque fréquence, à l'aide d'une sur-information en espace (équations 2.55 et 2.56) basée sur toute la portion de poutre située en dehors des sources ( $x \in [0.1; 1]$  m).

Paramètre	Valeur
Longueur $L_x$	1 m
Largeur $L_y$	5 mm ou 3 cm
Épaisseur $L_z$	3 cm ou 5 mm
Nombre de points $N_x$	300
Masse volumique $\rho$	2700 kg.m <sup>-3</sup>
Module d'Young $E$	70 GPa
Facteur de perte $\eta_E$	0.03
Module de cisaillement $G$	26 GPa
Facteur de perte $\eta_G$	0.05
Fréquence $f$	1000 à 4000 Hz
Force $F$	1 N
Position de la source $x_0$	0.05 m

TABLEAU 2.4 – Paramètres de simulation pour le cas d'une poutre épaisse en aluminium.

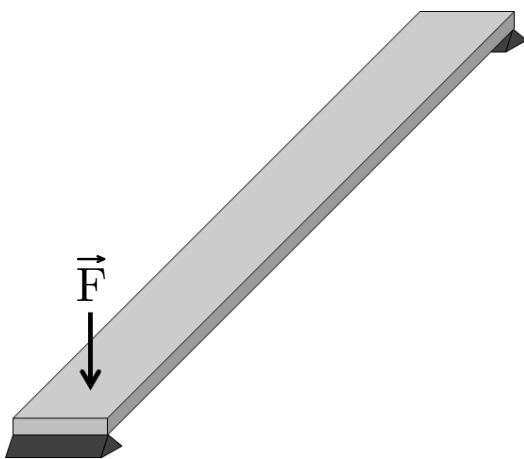


FIGURE 2.13 – Poutre appuyée à plat.

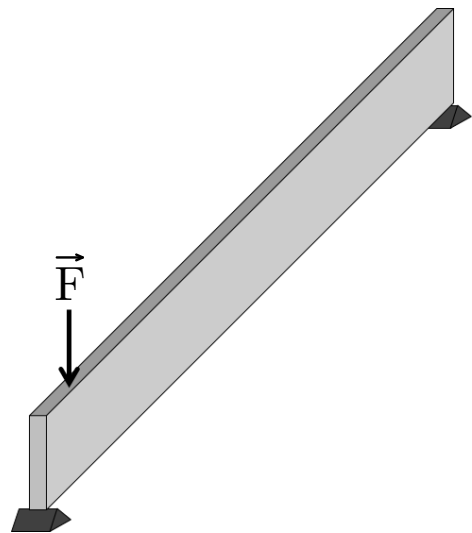


FIGURE 2.14 – Poutre appuyée sur champ.



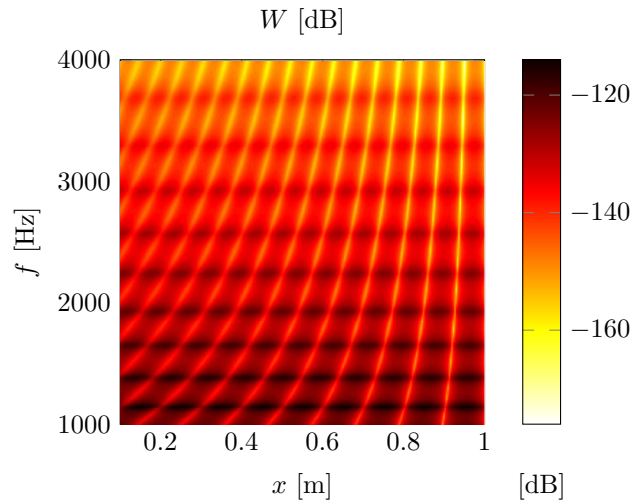


FIGURE 2.15 – Champ de déplacement obtenu pour la poutre épaisse appuyée à plat.

### 2.4.1 Configuration 1 non bruitée : poutre à plat

Le champ de déplacement exact présenté en figure 2.15 est utilisé pour déterminer les dérivées à partir d'une antenne de 5 ou 7 points et aucune régularisation n'est appliquée. Les cartographies des paramètres obtenus sont données en figure 2.16, pour les théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko, l'évolution fréquentielle des paramètres élastiques et des facteurs de pertes est présentée en figure 2.17.

Concernant les cartographies, une discontinuité forte est présente sur tous les paramètres estimés autour de  $x = 0.05$  m, quelle que soit la théorie utilisée. Cette position correspond à celle de la source d'excitation vibratoire. En effet, les développements mathématiques utilisés se basent sur l'hypothèse d'une analyse en dehors des sources vibratoires, le second membre est donc supposé nul. Toutefois, si un effort résiduel est effectivement présent il se manifeste naturellement par un déséquilibre de l'équation du mouvement, ce qui engendre une singularité locale des paramètres.

De manière générale, qu'il s'agisse des analyses spatiales ou fréquentielles, les valeurs de module d'Young  $E$  et du facteur de perte  $\eta_E$  sont obtenues précisément, indépendamment du schéma aux différences finies (5 ou 7 points) et de la théorie utilisée (Timoshenko ou Euler-Bernoulli). Ceci prouve que les effets de cisaillement ne sont pas significatifs dans cette configuration, l'équation de Timoshenko n'est pas indispensable. En revanche, le module de cisaillement  $G$  et l'amortissement associé  $\eta_G$  présentent une forte variation en fonction de l'antenne utilisée. Les différences finies d'ordre 4 entraînent des estimations nettement plus précises que les différences finies d'ordre 2, bien que la résolution spatiale soit d'au moins 31 points par longueur d'onde. Il est évident qu'en augmentant la résolution du maillage les dérivées d'ordre 2 pourraient amener à une bonne caractérisation de  $G$  et  $\eta_G$ . Cependant, le fait d'utiliser un maillage d'une densité moyenne pourra s'avérer très utile lors d'une étude de structure réelle, les durées de mesure et de calcul se verront réduites. L'utilisation de différences finies d'ordre 4, basées sur une antenne de 7 points, sera donc conservée par la suite.

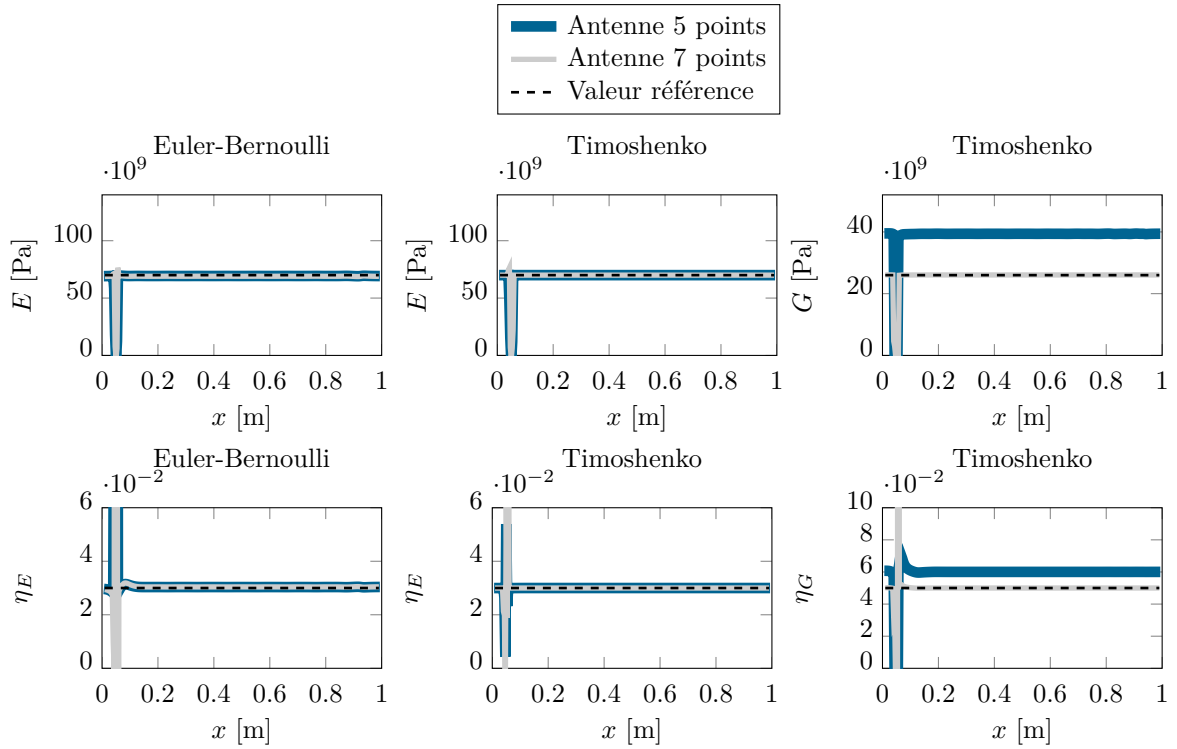


FIGURE 2.16 – Cartographies des paramètres identifiés pour la poutre épaisse appuyée à plat.

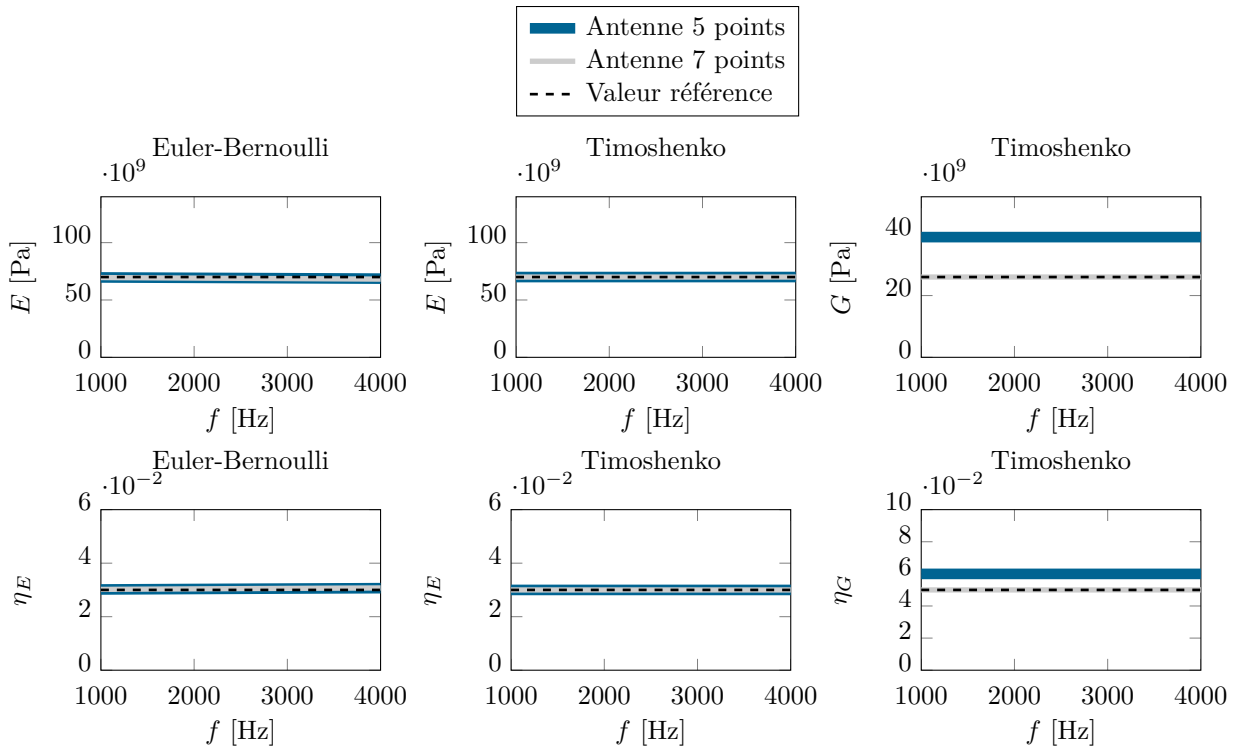


FIGURE 2.17 – Évolution fréquentielle des paramètres estimés pour la poutre épaisse appuyée à plat.

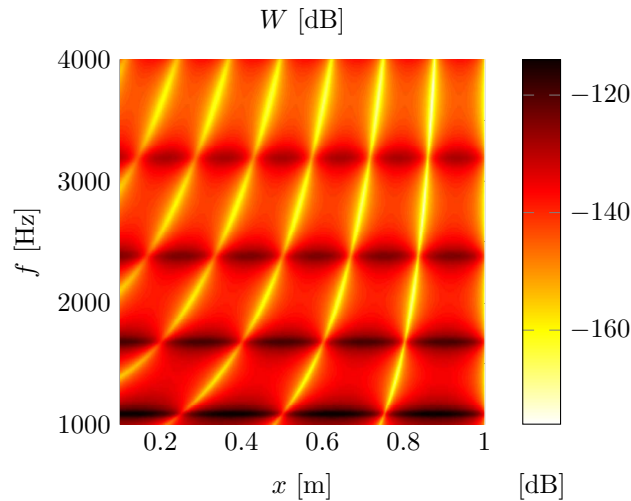


FIGURE 2.18 – Champ de déplacement obtenu pour la poutre épaisse appuyée sur champ.

### 2.4.2 Configuration 2 non bruitée : poutre sur champ

Dans cette seconde configuration, l'épaisseur est nettement plus importante. Le champ de déplacement correspondant est montré en figure 2.18. Ici encore, les dérivées sont estimées à partir d'une antenne de 5 points (différences finies d'ordre 2) ou de 7 points (différences finies d'ordre 4). Les résultats obtenus après application des sur-informations fréquentielle et spatiale sont présentés sur les figures 2.19 et 2.20 respectivement.

Les cartographies mettent toujours en avant une discontinuité locale des paramètres élastiques et d'amortissements, aux alentours de  $x = 0.05$  m. L'apparition de singularités ne dépend donc ni de la structure étudiée, ni de la théorie utilisée, puisque ces dernières sont inhérentes à un déséquilibre dans les équations du mouvement sans second membre.

Vis-à-vis des analyses fréquentielles, le modèle d'Euler-Bernoulli présente ici ses limites à travers un module d'Young sous-estimé et un facteur de perte  $\eta_E$  sur-estimé au fur et à mesure que la fréquence augmente. Ce comportement s'explique par un cisaillement plus important, que la théorie d'Euler-Bernoulli interprète comme un assouplissement progressif de la structure. De même, les cartographies issues de la théorie d'Euler-Bernoulli mettent en évidence un biais par rapport aux valeurs de référence. Quant au modèle de Timoshenko, il permet de déterminer tous les paramètres précisément. Il faut également souligner le fait que la taille de l'antenne pour les différences finies n'influence plus la précision des résultats sur  $G$  et  $\eta_G$ . La résolution spatiale étant ici comprise entre 156 et 75 points par longueur d'onde sur toute la bande fréquentielle d'étude, on peut donc supposer que l'antenne de 7 points n'est primordiale que lorsque les effets de cisaillement sont faibles ou que le nombre de points par longueur d'onde est réduit.

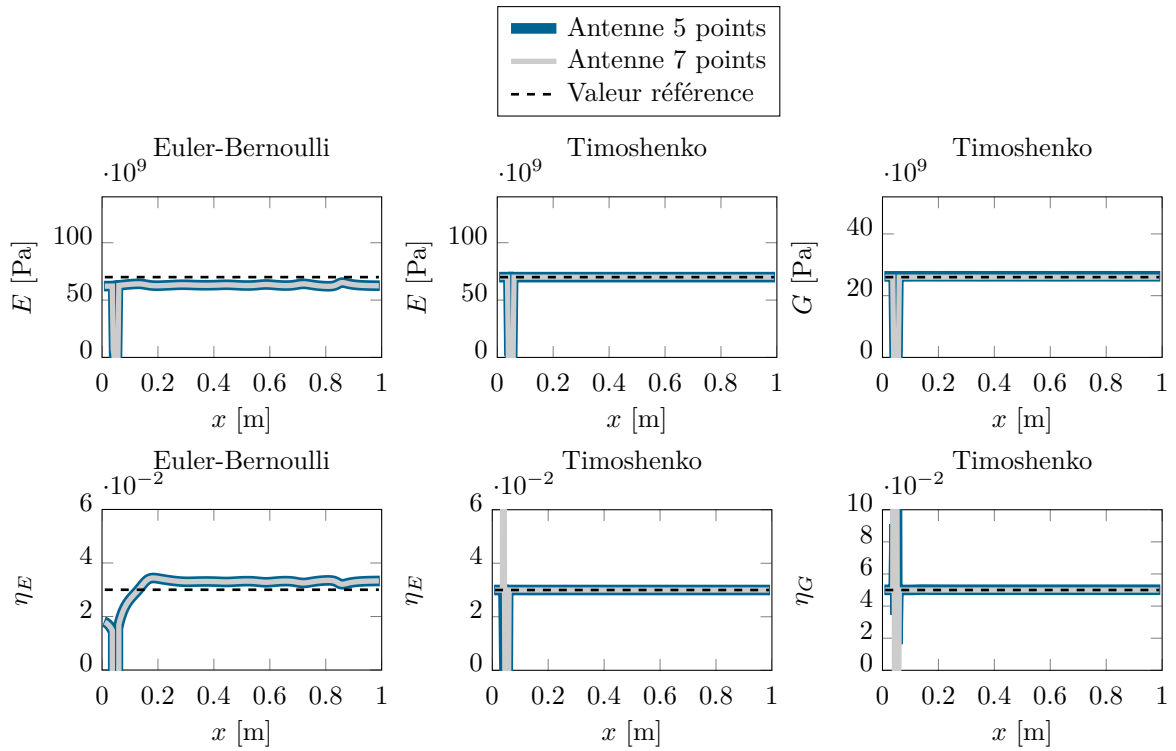


FIGURE 2.19 – Cartographies des paramètres identifiés pour la poutre épaisse appuyée sur champ.

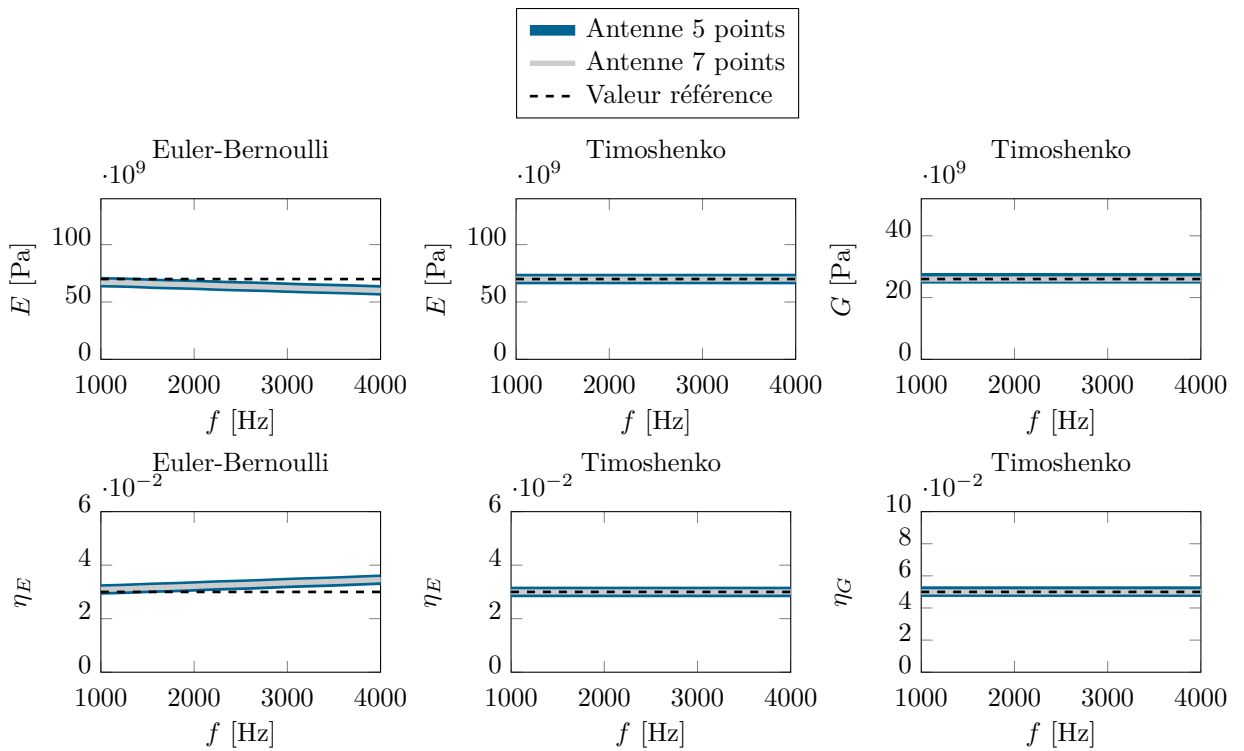


FIGURE 2.20 – Évolution fréquentielle des paramètres estimés pour la poutre épaisse appuyée sur champ.

## 2.5 Conclusions

Ce chapitre pose les bases du problème étudié. Le développement théorique met en évidence les différences entre les modèles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko, notamment à travers l'expression des nombres d'onde de flexion  $k_f$ , propagatif  $k_p$  et évanescent  $k_e$ , qui présentent des écarts plus ou moins marqués en fonction de l'importance des effets de cisaillement. Un développement en ondes forcées a permis de définir une expression analytique du champ de déplacement d'une poutre appuyée à ses extrémités selon les deux théories. Une comparaison avec des modèles en éléments finis linéaires ou éléments finis 3D sous *Comsol*<sup>®</sup>, atteste de la cohérence de la formulation analytique, qui sera utilisée dans la suite du développement de la méthode RIFF pour l'étude de matériaux composites. Enfin, la formulation matricielle du problème inverse établie, pour les théories d'Euler Bernoulli et Timoshenko, autorise l'étude fréquentielle ou spatiale des paramètres  $E$ ,  $\eta_E$ ,  $G$  et  $\eta_G$  du matériau, à l'aide d'une inversion matricielle au sens des moindres carrés, ce qui est vérifié à travers une étude de faisabilité. De cette manière, il est alors possible d'analyser le comportement fréquentiel du matériau ou d'établir des cartographies des modules complexes afin de détecter de potentiels défauts. Ces objectifs font l'objet des chapitres suivants.

## Chapitre 3

# Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée

La présence de perturbations est désormais prise en compte, amenant logiquement à des problématiques de traitement du signal. Les problèmes inverses sont particulièrement sensibles au bruit, qui entraîne des erreurs très importantes sur les résultats souhaités, un filtrage précis des données d'entrée est alors nécessaire.

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la manière d'appliquer la résolution inverse dans des cas réalistes présentant un bruit plus ou moins important. Plusieurs réflexions sont menées sur la meilleure façon de traiter le champ de déplacement et les dérivées spatiales. Par ailleurs, le problème inverse appliqué à l'équation de Timoshenko induit une instabilité spécifique, le post-traitement des informations comporte un degré de complexité supplémentaire basée sur une analyse multi-fréquentielle de la structure. Une régularisation automatique est également définie, supprimant alors toute décision subjective qui pourrait affecter la fiabilité des résultats. Enfin, des validations expérimentales de la méthode sont mises en œuvre sur une poutre épaisse en aluminium ainsi que sur une poutre composite sandwich présentant une âme en nid d'abeille.

### 3.1 Sensibilité au bruit

Reprenons l'exemple précédent mettant en jeu la vibration d'une poutre épaisse en aluminium appuyée sur champ (définie au tableau 2.4 et présentée en figure 2.14). Le déplacement transverse est entaché d'un bruit, défini par la relation 3.1 issue de [114] :

$$W_{\text{br}} = W_{\text{ex}} + 10^{\frac{-\text{RSB}}{20}} \left( \xi e^{j\theta} W_{\text{ex}} + \zeta e^{j\Phi} \sqrt{\frac{\|W_{\text{ex}}\|^2}{N_x}} \right), \quad (3.1)$$

où  $W_{\text{br}}$  est le champ de déplacement bruité,  $W_{\text{ex}}$  représente le champ de déplacement exact, RSB est le rapport signal à bruit,  $\xi$  et  $\zeta$  sont des variables issues d'un tirage aléatoire gaussien de moyenne nulle et de variance unitaire,  $\theta$  et  $\Phi$  sont des variables issues d'un tirage aléatoire uniforme dans la fenêtre  $[0, 2\pi]$ , et  $N_x$  est le nombre d'échantillons présents dans le signal exact.

La perturbation définie comporte un bruit additif comparable à un bruit de fond, ainsi qu'un bruit multiplicatif qui peut être assimilé à des erreurs de quantification, elles-mêmes proportionnelles à la dynamique du signal. La formulation utilisée permet également d'avoir un rapport signal à bruit constant en fonction de la fréquence.

Un bruit présentant un rapport signal à bruit de 40 dB est appliqué sur le champ de déplacement. Ce dernier ainsi que ses dérivées spatiales associées ne sont conservés qu'en dehors de la source vibratoire ( $x > 0.1$  m) et sont présentés en figures 3.1 et 3.2 pour les variables exactes et bruitées respectivement. Le champ de déplacement bruité ne présente qu'une faible variation de l'ordre de 1% et n'est pas perceptible sur la cartographie. En revanche, l'allure des dérivées spatiales est très fortement altérée et la variation de dynamique (augmentation de 40 à 60 dB) met en évidence l'extrême amplification du bruit lors de la dérivation du champ de déplacement.

Les paramètres du matériau estimés à partir de ces données bruitées ne sont pas présentés car ils n'apportent aucune information. Une telle dégradation des variables d'entrée entraîne trivialement une incohérence des résultats de sortie, une étape de régularisation est donc indispensable.

## 3.2 Définition de la régularisation

La forte sensibilité face aux incertitudes est une contrainte récurrente dans tous types de problèmes inverses [115]. Bien que la méthode RIFF ne fasse pas intervenir d'inversion matricielle (potentiellement sujette à des problèmes de mauvais conditionnement) il est intéressant de noter que l'amplification des erreurs de mesure est tout de même présente à travers l'estimation des dérivées spatiales par différences finies. En présence de matrices mal conditionnées, la régularisation est généralement établie à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières (plus connue sous le nom de SVD).

Dans notre cas, les variables à régulariser sont le champ de déplacement  $W$  ainsi que les dérivées spatiales  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$ . La réduction des perturbations est simplement réalisée au moyen d'un fenêtrage global (suppression des effets de bords) et d'un filtrage local (diminution du bruit contenu dans les hauts nombres d'onde).

### 3.2.1 Fenêtrage global

La fenêtre permettant de limiter les effets de bords est représentée par la variable  $\psi(x)$ . Dans la version originale de la méthode RIFF,  $\psi(x)$  correspond à une fenêtre de Tuckey décrite précédemment dans la section 1.3.1 et exprimée par la relation 1.5. Pour l'identification de paramètres, nous ferons plutôt usage d'une fenêtre de Hanning (équation 1.6) pour des raisons qui seront explicitées dans la suite du document.

### 3.2.2 Filtrage local

La réponse impulsionnelle du filtre local est représentée par  $H(x)$  et demeure identique à celle définie par la relation 1.7.

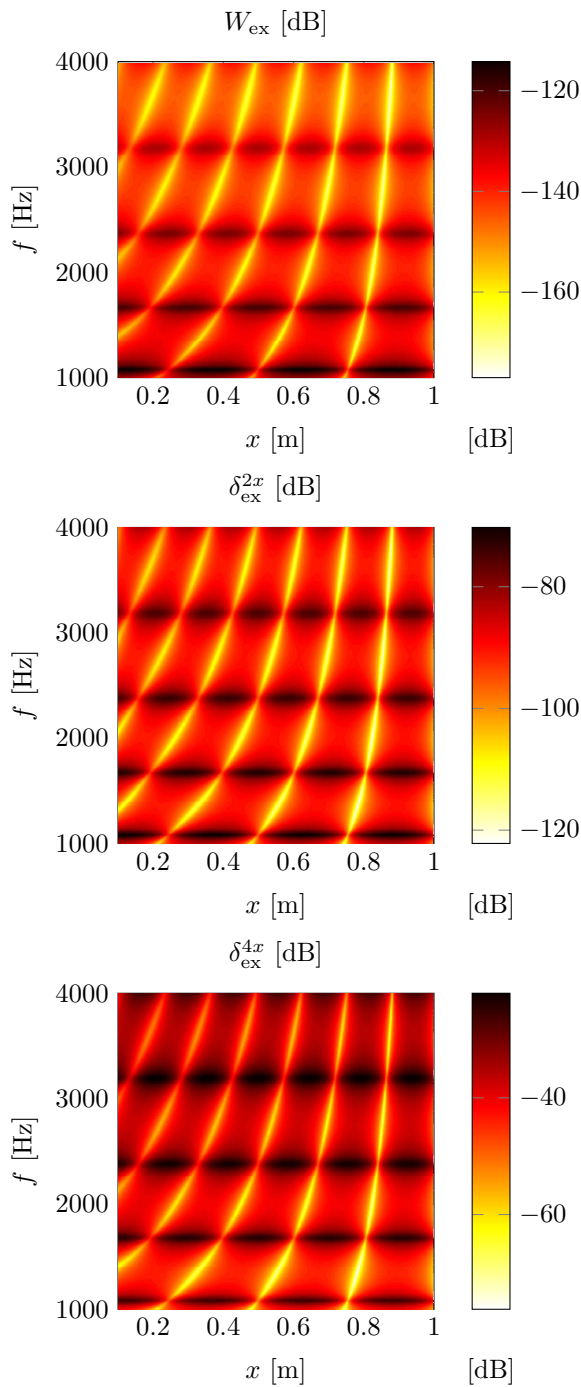


FIGURE 3.1 – Champ de déplacement exact  $W_{\text{ex}}$  et ses dérivées spatiales associées  $\delta_{\text{ex}}^{2x}$  et  $\delta_{\text{ex}}^{4x}$ .

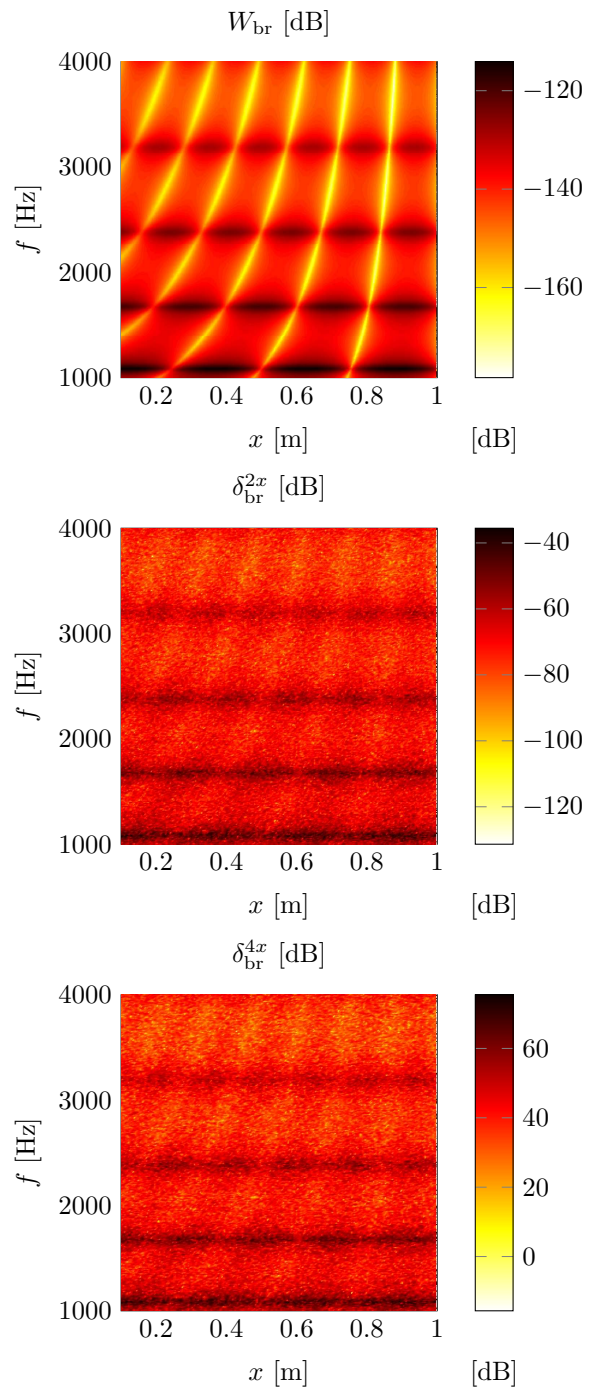


FIGURE 3.2 – Champ de déplacement bruité  $W_{\text{br}}$  et ses dérivées spatiales associées  $\delta_{\text{br}}^{2x}$  et  $\delta_{\text{br}}^{4x}$ . L'altération de l'allure et l'augmentation de la dynamique témoignent de la forte amplification du bruit lors de l'application des différences finies.



### 3.3 Instabilité du problème inverse pour Timoshenko

#### 3.3.1 Analyse mono-fréquentielle régularisée

Les variables bruitées  $W_{\text{br}}$ ,  $\delta_{\text{br}}^{2x}$  et  $\delta_{\text{br}}^{4x}$ , considérées en dehors des sources vibratoires, sont maintenant régularisées au moyen des relations 3.2 permettant d'obtenir les variables filtrées et fenêtrées  $W_{\text{RIFF}}$ ,  $\delta_{\text{RIFF}}^{2x}$  et  $\delta_{\text{RIFF}}^{4x}$ . Le facteur de forme est fixé à  $f_x = 1$  et le nombre d'onde de coupure du filtre choisi correspond au nombre d'onde propagatif de la structure soit  $k_c = k_p$ .

$$W_{\text{RIFF}}(x) = ([W_{\text{br}}\psi] * H)(x). \quad (3.2a)$$

$$\delta_{\text{RIFF}}^{2x}(x) = ([\delta_{\text{br}}^{2x}\psi] * H)(x). \quad (3.2b)$$

$$\delta_{\text{RIFF}}^{4x}(x) = ([\delta_{\text{br}}^{4x}\psi] * H)(x). \quad (3.2c)$$

Le champ de déplacement et les dérivées spatiales régularisés sont ensuite insérés dans les relations 2.57 et 2.58 afin d'en déduire les paramètres élastiques et facteurs de pertes issus des modèles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko pour chaque fréquence individuelle. Les résultats associés sont présentés en figure 3.3.

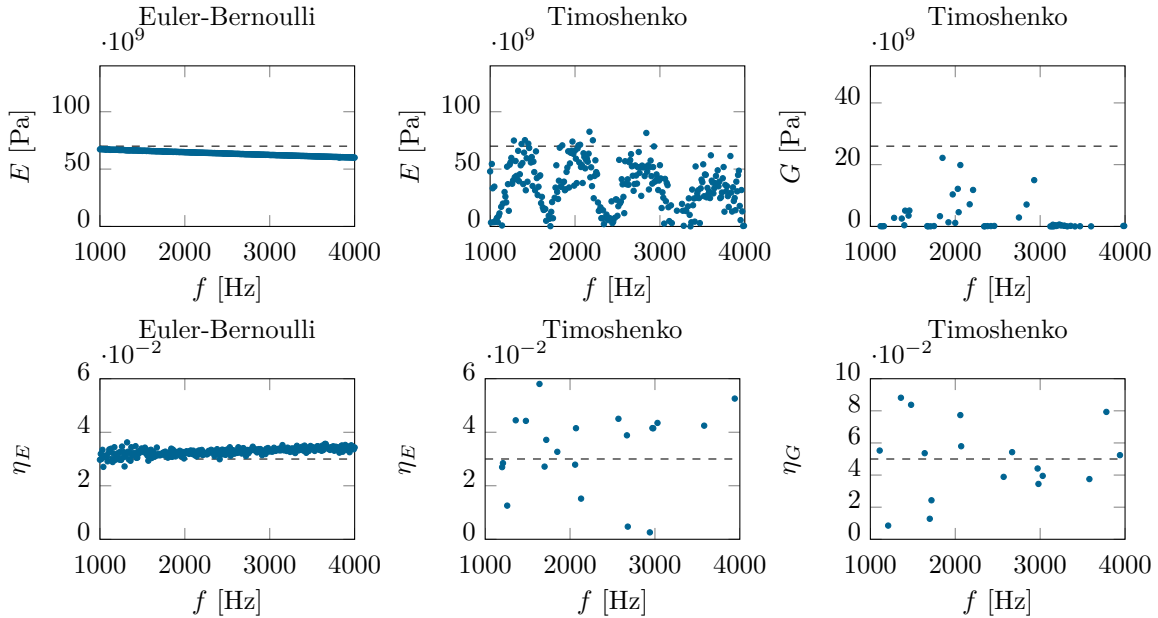


FIGURE 3.3 – Paramètres élastiques et facteurs de pertes estimés à partir des variables régularisées.

Malgré l'application de la régularisation, le modèle de Timoshenko ne permet pas d'identifier les caractéristiques du matériau. Hormis quelques fréquences d'anti-résonance (voir figure 3.1) auxquelles le module d'Young estimé est assez fiable, les résultats obtenus sont incohérents pour la très grande majorité des fréquences analysées. En revanche, la méthode inverse appliquée à la théorie d'Euler-Bernoulli met en avant des analyses similaires à celles observées en figure 2.20 sur cas non bruité. Une diminution du module d'Young  $E$ , accompagnée d'une hausse du facteur de perte  $\eta_E$ , est visible lorsque la fréquence augmente. L'instabilité du problème inverse est donc propre au modèle de Timoshenko, un traitement spécifique doit être développé.

### 3.3.2 Description du phénomène d'instabilité

Pour faciliter la compréhension de l'instabilité mise en jeu et les explications associées, le cas précédent est réutilisé en considérant des variables purement réelles. Les pertes induites sur le champ de déplacement sont donc considérées comme nulles ( $\eta_E = \eta_G = 0$ ).

L'équation de Timoshenko donnée dans l'expression 2.53b peut être reformulée par la relation 3.3 et interprétée comme l'équation décrivant un plan dans le référentiel  $(W, \delta^{4x}, \delta^{2x})$ , avec  $A$  et  $B$  correspondant aux pentes, elles-mêmes dépendantes de  $E$  et  $G$ .

$$W = A\delta^{4x} + B\delta^{2x}. \quad (3.3)$$

Les variables exactes  $W$ ,  $\delta^{4x}$  et  $\delta^{2x}$  obtenues en dehors des sources à la fréquence  $f = 1530$  Hz sont tracées en figure 3.4 dans l'espace tri-dimensionnel  $(W, \delta^{4x}, \delta^{2x})$  (courbe noire) et sont également projetées sur les axes  $(W, \delta^{4x})$  (courbe jaune),  $(W, \delta^{2x})$  (courbe verte) et  $(\delta^{2x}, \delta^{4x})$  (courbe bleue).

Le regroupement d'information en différentes positions sur la structure forme une ligne incurvée faisant partie d'un plan, comme prédit par la relation 3.3. Cependant, l'étape de régularisation des données atténue très fortement cette courbure. Sans même considérer la présence de bruit potentiel, le filtrage passe-bas dégrade à lui seul la planéité des données d'entrée. De manière schématisée, le modèle de Timoshenko tente de déduire une équation de plan à partir d'informations qui se regroupent sur une simple ligne. L'estimation des pentes  $A$  et  $B$  est alors totalement dépendante du bruit résiduel, entraînant une identification incohérente des modules  $E$  et  $G$ .

Le modèle d'Euler-Bernoulli est en revanche insensible à cette modification des données liée à la régularisation, car il ne dépend que de 2 variables  $W$  et  $\delta^{4x}$  et représente globalement l'équation d'une droite (relation 2.52b). La projection des variables spatiales sur  $(W, \delta^{4x})$  met en évidence une faible variation des données d'entrée entre les cas exact et régularisé, le module d'Young  $E$  reste donc stable. La détérioration induite sur les données par la procédure de régularisation semble agir principalement sur la dérivée seconde  $\delta^{2x}$ , comme le prouve l'altération des projections sur  $(W, \delta^{2x})$  (courbe verte) et  $(\delta^{4x}, \delta^{2x})$  (courbe bleue). C'est pour cette raison que les résultats issus de la formulation Euler-Bernoulli apparaissent moins impactés. Afin de contourner cette instabilité propre à la formulation de Timoshenko, une approche multi-fréquentielle est suggérée dans la section suivante.

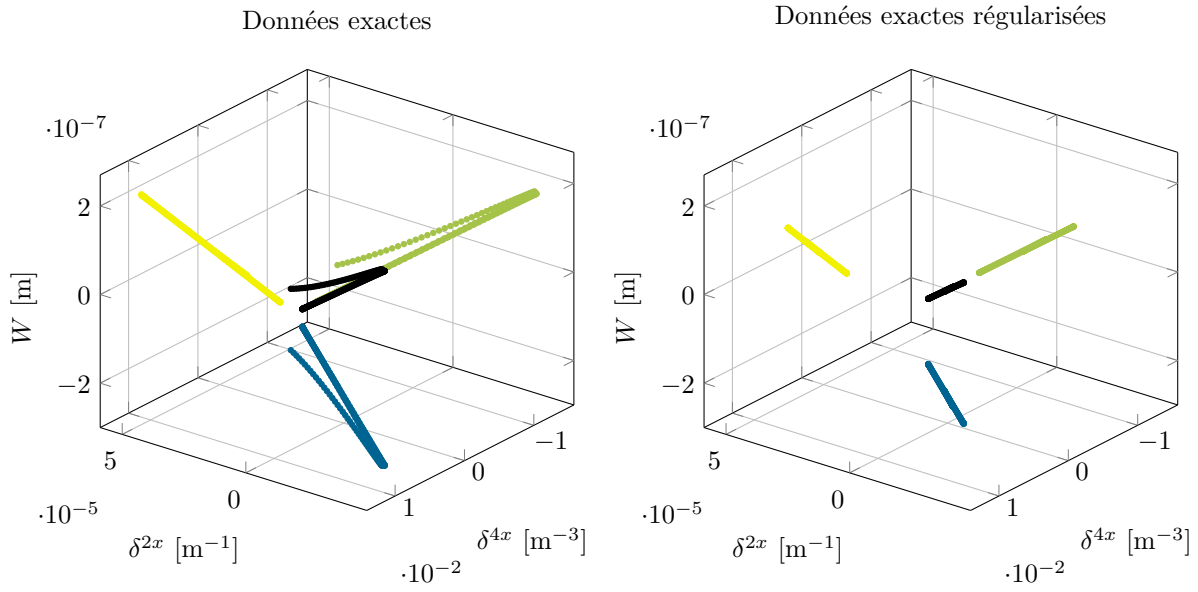


FIGURE 3.4 – Variables spatiales exactes et régularisées pour une fréquence unique  $f = 1530$  Hz dans le référentiel  $(W, \delta^{4x}, \delta^{2x})$ . • Données complètes et projections sur  $\bullet (W, \delta^{4x})$ ,  $\bullet (W, \delta^{2x})$  et  $\bullet (\delta^{4x}, \delta^{2x})$ . Les données exactes forment une ligne incurvée autorisant l’identification d’un plan, mais les données régularisées rendent une ligne droite empêchant l’identification d’une équation de plan.

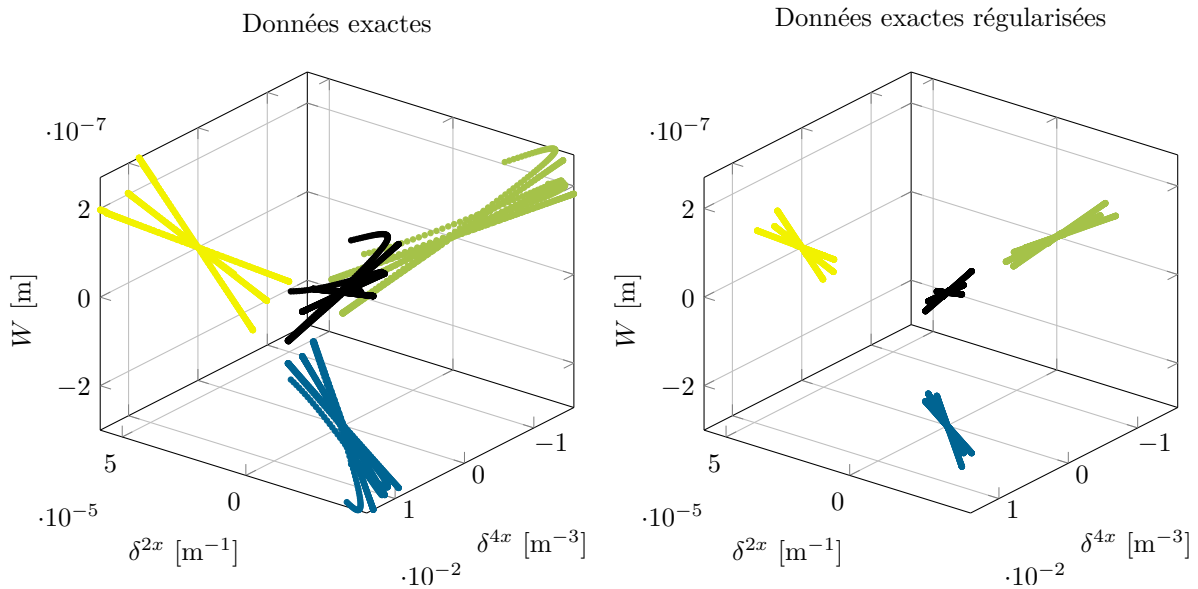


FIGURE 3.5 – Variables spatiales exactes et régularisées pour trois fréquences  $f = [1230, 1530, 1830]$  Hz dans le référentiel  $(W, \delta^{4x}, \delta^{2x})$ . • Données complètes et projections sur  $\bullet (W, \delta^{4x})$ ,  $\bullet (W, \delta^{2x})$  et  $\bullet (\delta^{4x}, \delta^{2x})$ . Le regroupement d’information à plusieurs fréquences permet de déterminer une équation de plan au sens des moindres carrés.

### 3.3.3 Analyse multi-fréquentielle

À la suite de plusieurs analyses il s'avère que la manière la plus efficace pour retrouver une estimation stable des paramètres issus de la théorie de Timoshenko est de rassembler de l'information à différentes fréquences rapprochées  $f - \Delta_f$ ,  $f$  et  $f + \Delta_f$ .

La figure 3.5 présente les variables spatiales exactes et régularisées pour  $f = [1230, 1530, 1830]$  Hz. L'augmentation de la fréquence est accompagnée d'une rotation progressive des données, qui appartiennent à un même plan. Cette particularité constitue le point clé de l'approche multi-fréquentielle. Lorsque les données regroupées à ces différentes fréquences sont régularisées, l'allure est altérée mais les données restent néanmoins réparties sur un plan dont l'équation est accessible au sens des moindres carrés. L'estimation des pentes  $A$  et  $B$  (relation 3.3) et donc des modules  $E$  et  $G$  est alors possible.

Les relations matricielles 2.57 et 2.58 pour l'analyse fréquentielle des modules complexes sont ré-exprimées par les équations 3.4 et 3.5 en faisant usage de ce regroupement d'informations à différentes fréquences.

L'identification des paramètres  $E$ ,  $G$ ,  $\eta_E$  et  $\eta_G$  est désormais établie en utilisant ce principe d'analyse multi-fréquentielle et les résultats sont présentés en figure 3.6.

Premièrement, il convient de noter que l'approche multifréquentielle induit une réduction de l'axe fréquentiel d'analyse de  $2\Delta_f$ . Une mesure établie sur la bande  $[f_1, f_2]$  autorise une identification sur la bande fréquentielle  $[f_1 + \Delta_f, f_2 - \Delta_f]$ . Sur la figure 3.6 l'intervalle fréquentiel est  $\Delta_f = 530$  Hz et les champs  $W$ ,  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$  ont été déterminés pour  $f \in [1000; 4000]$  Hz. L'identification des caractéristiques élastiques par analyse multi-fréquentielle est donc obtenue pour  $f \in [1530; 3470]$  Hz.

Deuxièmement, le modèle d'Euler-Bernoulli ne subit pas de variation importante entre l'étude mono-fréquentielle (figure 3.3) et l'analyse multi-fréquentielle. En effet, comme observé en figure 3.5 la rotation de  $W$  et  $\delta^{4x}$  pour les fréquences  $f \pm \Delta_f$  est symétriquement distribuée autour des données obtenues à la fréquence  $f$ . Ainsi la division matricielle au sens des moindres carrés est neutre vis à vis des fréquences latérales.

Troisièmement, l'identification des paramètres élastiques et des facteurs de pertes déterminés par le modèle de Timoshenko se retrouve grandement améliorée. Le module d'Young  $E$  est en très bon accord avec celui défini dans le problème direct, il en est de même pour le module de cisaillement  $G$  et le facteur de perte  $\eta_E$  associé à la flexion, malgré une variance plus élevée. En revanche, le facteur de perte en cisaillement  $\eta_G$  n'est pas satisfaisant en raison de son faible impact dans l'équation du mouvement. Ce paramètre ne représente que 5% du module de cisaillement  $G$ , qui fournit lui-même une contribution relativement faible dans la dynamique de cette poutre épaisse en aluminium,  $\eta_G$  est simplement noyé dans la contribution de bruit.

$$\begin{bmatrix} I\delta_{x_1, f-\Delta_f}^{4x} \\ I\delta_{x_1, f}^{4x} \\ I\delta_{x_1, f+\Delta_f}^{4x} \\ \vdots \\ I\delta_{x_i, f-\Delta_f}^{4x} \\ I\delta_{x_i, f}^{4x} \\ I\delta_{x_i, f+\Delta_f}^{4x} \\ \vdots \\ I\delta_{x_{N_x}, f-\Delta_f}^{4x} \\ I\delta_{x_{N_x}, f}^{4x} \\ I\delta_{x_{N_x}, f+\Delta_f}^{4x} \end{bmatrix} [\tilde{E}] = \begin{bmatrix} \rho S\omega_{f-\Delta_f}^2 W_{x_1, f-\Delta_f} \\ \rho S\omega_f^2 W_{x_1, f} \\ \rho S\omega_{f+\Delta_f}^2 W_{x_1, f+\Delta_f} \\ \vdots \\ \rho S\omega_{f-\Delta_f}^2 W_{x_i, f-\Delta_f} \\ \rho S\omega_f^2 W_{x_i, f} \\ \rho S\omega_{f+\Delta_f}^2 W_{x_i, f+\Delta_f} \\ \vdots \\ \rho S\omega_{f-\Delta_f}^2 W_{x_{N_x}, f-\Delta_f} \\ \rho S\omega_f^2 W_{x_{N_x}, f} \\ \rho S\omega_{f+\Delta_f}^2 W_{x_{N_x}, f+\Delta_f} \end{bmatrix} . \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} I\delta_{x_1, f-\Delta_f}^{4x} & \rho I\omega_{f-\Delta_f}^2 \delta_{x_1, f-\Delta_f}^{2x} \\ I\delta_{x_1, f}^{4x} & \rho I\omega_f^2 \delta_{x_1, f}^{2x} \\ I\delta_{x_1, f+\Delta_f}^{4x} & \rho I\omega_{f+\Delta_f}^2 \delta_{x_1, f+\Delta_f}^{2x} \\ \vdots & \vdots \\ I\delta_{x_i, f-\Delta_f}^{4x} & \rho I\omega_{f-\Delta_f}^2 \delta_{x_i, f-\Delta_f}^{2x} \\ I\delta_{x_i, f}^{4x} & \rho I\omega_f^2 \delta_{x_i, f}^{2x} \\ I\delta_{x_i, f+\Delta_f}^{4x} & \rho I\omega_{f+\Delta_f}^2 \delta_{x_i, f+\Delta_f}^{2x} \\ \vdots & \vdots \\ I\delta_{x_{N_x}, f-\Delta_f}^{4x} & \rho I\omega_{f-\Delta_f}^2 \delta_{x_{N_x}, f-\Delta_f}^{2x} \\ I\delta_{x_{N_x}, f}^{4x} & \rho I\omega_f^2 \delta_{x_{N_x}, f}^{2x} \\ I\delta_{x_{N_x}, f+\Delta_f}^{4x} & \rho I\omega_{f+\Delta_f}^2 \delta_{x_{N_x}, f+\Delta_f}^{2x} \end{bmatrix} \left[ \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \right] = \begin{bmatrix} \left( \rho S\omega_{f-\Delta_f}^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega_{f-\Delta_f}^4 \right) W_{x_1, f-\Delta_f} \\ \left( \rho S\omega_f^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega_f^4 \right) W_{x_1, f} \\ \left( \rho S\omega_{f+\Delta_f}^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega_{f+\Delta_f}^4 \right) W_{x_1, f+\Delta_f} \\ \vdots \\ \left( \rho S\omega_{f-\Delta_f}^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega_{f-\Delta_f}^4 \right) W_{x_i, f-\Delta_f} \\ \left( \rho S\omega_f^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega_f^4 \right) W_{x_i, f} \\ \left( \rho S\omega_{f+\Delta_f}^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega_{f+\Delta_f}^4 \right) W_{x_i, f+\Delta_f} \\ \vdots \\ \left( \rho S\omega_{f-\Delta_f}^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega_{f-\Delta_f}^4 \right) W_{x_{N_x}, f-\Delta_f} \\ \left( \rho S\omega_f^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega_f^4 \right) W_{x_{N_x}, f} \\ \left( \rho S\omega_{f+\Delta_f}^2 - \frac{\rho^2 I}{\tilde{G}} \omega_{f+\Delta_f}^4 \right) W_{x_{N_x}, f+\Delta_f} \end{bmatrix} . \quad (3.5)$$

Pour conclure sur cette approche multi-fréquentielle, il est évident que son application améliore grandement la fiabilité des résultats en comparaison à ceux obtenus par l'analyse mono-fréquentielle. Le rassemblement d'information à différentes fréquences ne semble pas indispensable pour  $W$  et  $\delta^{4x}$ , mais il apporte une stabilisation importante de  $\delta^{2x}$ .

Enfin, il est important de souligner un potentiel effet de lissage fréquentiel dans l'identification des paramètres. En effet, si ces derniers s'avèrent être dépendants de la fréquence, l'utilisation de l'analyse multi-fréquentielle aura tendance à atténuer leurs variations. Pour cette raison, l'intervalle fréquentiel  $\Delta_f$  doit être étudié de manière à obtenir une identification stable des caractéristiques du matériau, sans pour autant perdre trop d'information sur leur dépendance fréquentielle. Cet aspect sera discuté dans la section 3.4.1.

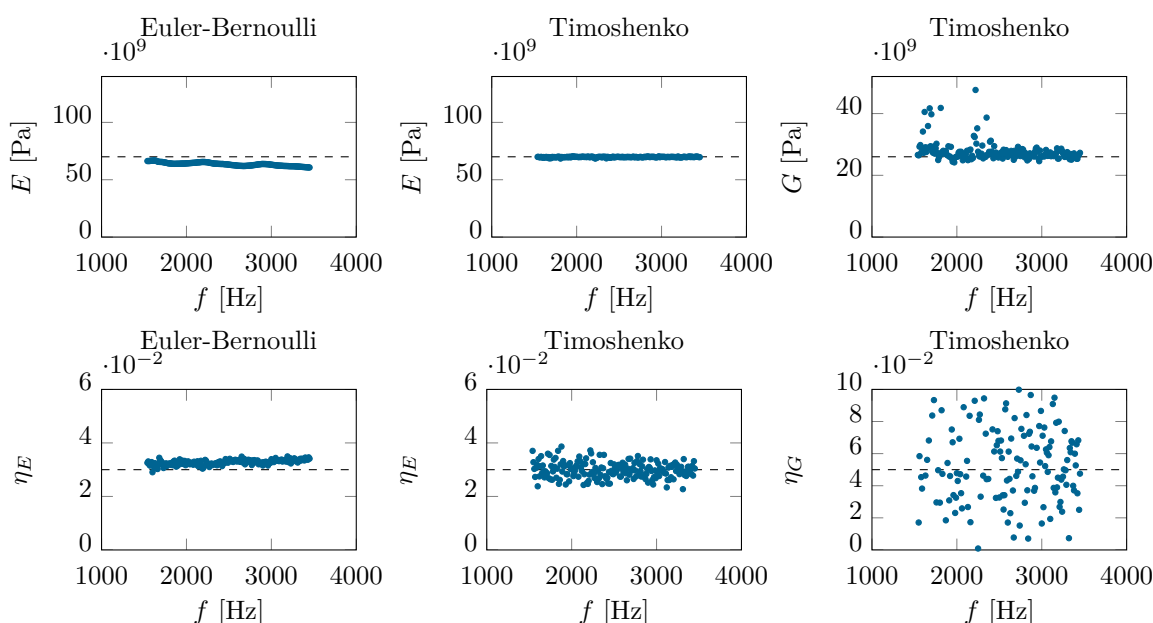


FIGURE 3.6 – Paramètres élastiques et d'amortissements estimés par approche multi-fréquentielle pour  $\Delta_f = 530$  Hz à partir de données bruitées et régularisées. Le modèle de Timoshenko est désormais stabilisé et autorise une identification fiable des paramètres.

### 3.4 Optimisation de la régularisation

Les sections précédentes ont mis en évidence la nécessité d'appliquer une régularisation spécifique aux données bruitées.

D'une part, l'approche multi-fréquentielle, indispensable pour la formulation de Timoshenko, apporte une réflexion supplémentaire quant à la définition de l'intervalle fréquentiel  $\Delta_f$ . Si ce dernier est trop petit, la stabilité du modèle de Timoshenko ne sera pas suffisante. À l'inverse, s'il est trop important, le lissage en fréquence des modules complexes sera fort et la bande fréquentielle d'analyse en sortie de procédure se verra réduite.

D'autre part, le nombre d'onde de coupure du filtre passe-bas  $k_c$  doit être piloté finement. Une coupure prématurée dans le domaine des nombres d'onde ( $k_c$  faible) supprime les informations utiles, tandis qu'un filtrage trop large ( $k_c$  grand) limite la réduction du bruit contenu dans les hauts nombres d'onde.

Ces points clés font l'objet des paragraphes suivants, une optimisation automatique de la régularisation est proposée.

#### 3.4.1 Intervalle fréquentiel $\Delta_f$

Afin de stabiliser le problème inverse associé au modèle de Timoshenko, à l'aide d'une analyse multi-fréquentielle, sans trop lisser les variations fréquentielles des paramètres du matériau, un compromis doit être fait sur l'intervalle fréquentiel  $\Delta_f$ . Cette partie concerne uniquement le modèle de Timoshenko puisque le modèle d'Euler-Bernoulli ne requiert pas l'approche multi-fréquentielle.

Le filtrage est défini avec un nombre d'onde de coupure  $k_c = k_p$ , le nombre d'onde propagatif défini dans le problème direct est donc considéré comme connu dans cette partie.

Les modules complexes sont identifiés pour tous les intervalles fréquentsiels  $\Delta_f$  disponibles pour  $[f - \Delta_f, f, f + \Delta_f]$  avec  $f \in [1000; 4000]$  Hz. Par exemple, à  $f = 1800$  Hz, l'analyse multi-fréquentielle peut être établie pour  $\Delta_f \leq 800$  Hz, sans quoi des échantillons fréquentsiels non disponibles seraient nécessaires en  $f \leq 1000$  Hz. De manière similaire à  $f = 3400$  Hz il faut  $\Delta_f \leq 600$  Hz de sorte que les fréquences latérales se limitent aux échantillons existants, soit  $f + \Delta_f \leq 4000$  Hz.

Les paramètres élastiques et d'amortissement sont représentés en figure 3.7. Le module d'Young  $E$  et son facteur de perte  $\eta_E$  convergent rapidement lorsque  $\Delta_f$  augmente. Le module de cisaillement  $G$  est plus perturbé pour de faibles valeurs de  $\Delta_f$ , et l'amortissement associé  $\eta_G$  met en évidence un comportement quasi-aléatoire pour les raisons expliquées précédemment (contribution trop faible dans l'équation du mouvement) et ne sera pas pris en compte dans le choix de l'intervalle fréquentiel.

Concernant les résultats déterminés pour  $G$ , d'importantes variations sont observables aux faibles valeurs de  $\Delta_f$  et une stabilité acceptable est obtenue pour  $\Delta_f > 600$  Hz. Néanmoins, l'amélioration de stabilité, observée quand  $\Delta_f$  augmente, est accompagnée d'un effet de lissage fréquentiel des résultats et d'une importante réduction de la bande fréquentielle d'analyse. L'utilisation d'un critère automatisé est souhaité afin d'éviter à l'utilisateur de devoir répondre à ce compromis à chaque nouvelle étude.

Une fonction objective  $\mathcal{O}_G$  est définie en relation 3.6 afin de répondre au compromis entre stabilité de la méthode et pertinence de l'analyse fréquentielle. L'objectif étant de réaliser une identification fiable des paramètres élastiques et des facteurs de pertes, sur une bande fréquentielle importante, cette fonction objective  $\mathcal{O}_G$  doit dépendre de la dispersion des résultats du module de cisaillement  $G$  (raison pour laquelle la théorie de Timoshenko est utilisée) et du nombre de fréquences disponibles  $N_f(\Delta_f)$  en sortie de l'analyse multifréquentielle :

$$\mathcal{O}_G(\Delta_f) = \frac{\|G(\Delta_f)\|}{N_f(\Delta_f)}. \quad (3.6)$$

Une illustration de cette fonction objective est disponible en figure 3.8. Une zone transitoire, visible pour  $\Delta_f < 400$  Hz, est suivie d'une lente augmentation qui finit par diverger. L'intervalle fréquentiel optimal  $\Delta_f^{\text{opt}}$  est considéré comme celui qui minimise  $\mathcal{O}_G$ , en dehors de la zone transitoire. Dans le cas présent  $\Delta_f^{\text{opt}} = 530$  Hz, ce qui amène aux résultats déjà présentés en figure 3.6.

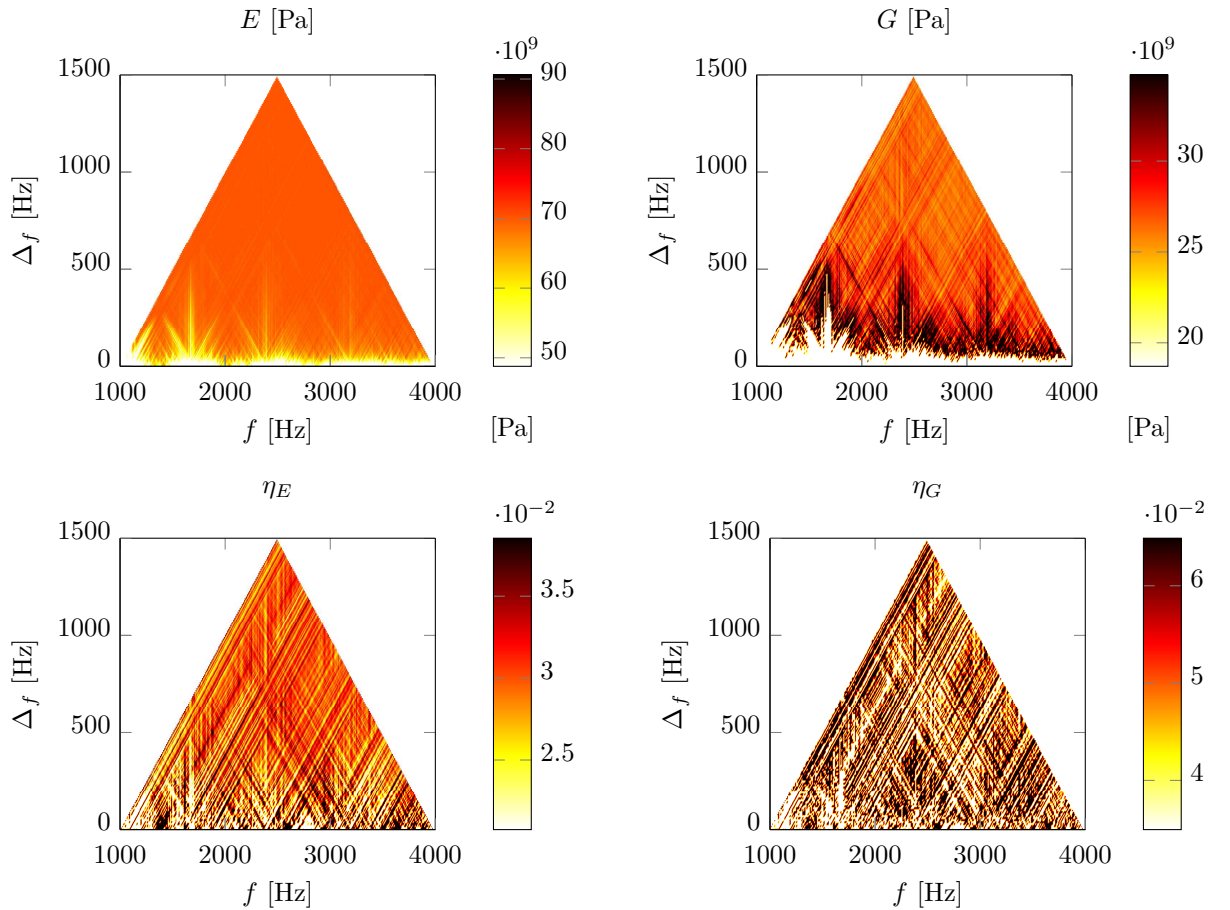


FIGURE 3.7 – Paramètres élastiques et facteurs de pertes identifiés par le modèle de Timoshenko, en fonction de l'intervalle fréquentiel  $\Delta_f$  et de la fréquence. La stabilité de l'estimation augmente avec  $\Delta_f$  mais la bande fréquentielle d'analyse se réduit progressivement.



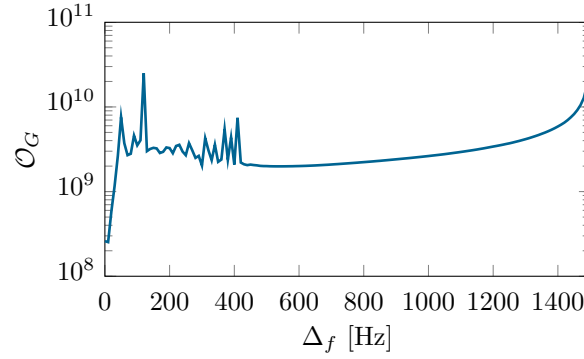


FIGURE 3.8 – Fonction objective  $\mathcal{O}_G$  obtenue pour différentes valeurs de  $\Delta_f$ . La minimisation de  $\mathcal{O}_G$  (en dehors de la zone transitoire) amène à l’intervalle fréquentiel optimal  $\Delta_f^{\text{opt}} = 530$  Hz.

### 3.4.2 Étude du nombre d’onde de coupure optimal

Version originale ( $k_c^{\text{opt}} = ak_p$ )

Telle que développée au départ, la méthode RIFF s’intéresse à la caractérisation de sources vibratoires sur structure connue, le nombre d’onde naturel de flexion est donc déduit aisément. Il a été montré que le nombre d’onde de coupure idéal est proportionnel au nombre d’onde de flexion  $k_c^{\text{opt}} = ak_f$  et varie en fonction du niveau de bruit [59]. Le coefficient de coupure est défini empiriquement par  $a = 4$  pour des mesures très peu perturbées,  $a = 2$  avec des données légèrement bruitées (mesures en laboratoire) ou  $a = 1$  lors d’essais fortement pollués (environnement industriel). Un exemple issu de [60] est présenté en figures 3.9 et 3.10.

Dans le cas d’une caractérisation de matériau, le nombre d’onde naturel de la structure n’est pas connu à l’avance, il faut donc que le niveau de régularisation puisse être ajusté sans connaître  $k_f$  a priori.

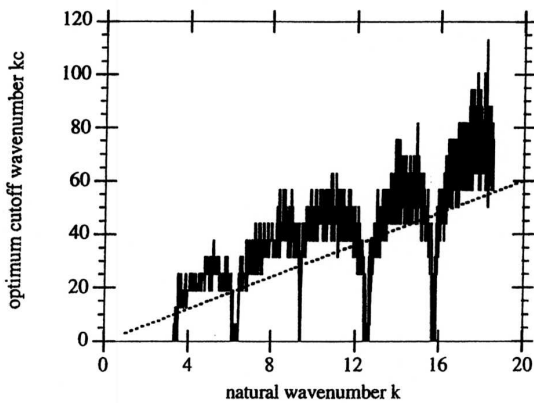


FIGURE 3.9 – Nombre d’onde de coupure optimal en fonction du nombre d’onde de travail pour un niveau de bruit de 1%. La tendance de régularisation est du type  $k_c^{\text{opt}} = 3k_f$ , soit  $a = 3$ . Figure issue de [60].

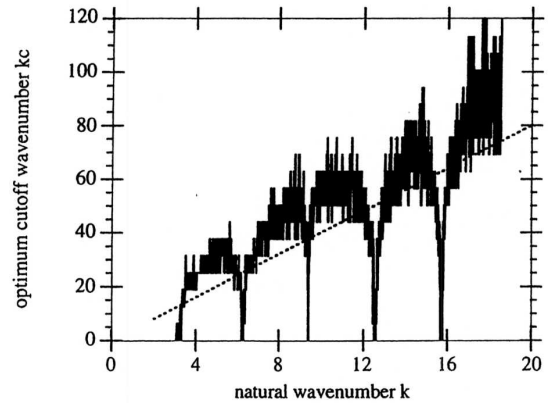


FIGURE 3.10 – Nombre d’onde de coupure optimal en fonction du nombre d’onde de travail pour un niveau de bruit de 0.5%. La tendance de régularisation est du type  $k_c^{\text{opt}} = 4k_f$ , soit  $a = 4$ . Figure issue de [60].

### Variation du résidu ( $\partial R/\partial k_c$ )

La première méthode d'optimisation du filtrage sans connaissance du nombre d'onde de flexion a été proposée par Ablitzer et al. [12] dont les travaux s'intéressent à la caractérisation du module d'Young  $E$  et de l'amortissement  $\eta$  par la méthode RIFF. La détermination du nombre d'onde de coupure optimal se fait à l'aide de la dérivée du résidu.

Lors d'une résolution au sens des moindres d'un système matriciel du type  $Ax = b$ , un écart est toujours observé entre la solution exacte et la solution approchée. Ce dernier se traduit par le résidu de la solution, exprimé par  $R = \|Ax - b\|^2$ .

Une fréquence fixe quelconque est considérée. Un vecteur de nombres d'onde de coupure candidat est défini et tous les filtrages associés sont appliqués au déplacement  $W$  ainsi qu'à ses dérivées spatiales. La résolution du problème inverse pour chaque valeur du nombre d'onde de coupure donne lieu à un résidu plus ou moins important.

La figure 3.11 met en évidence une perte de stabilité sur l'estimation des paramètres pour  $k_c \approx 3k_f$ , accompagnée d'une nette augmentation du résidu. Cette dernière est détectée en considérant la pente normalisée du résidu, à l'aide d'un seuil défini arbitrairement par l'utilisateur à 5%. La dernière valeur de  $k_c$  se situant sous le seuil avant l'accroissement important du résidu est alors considérée comme le nombre d'onde de coupure optimal et est noté  $k_c^{\text{opt}}$ .

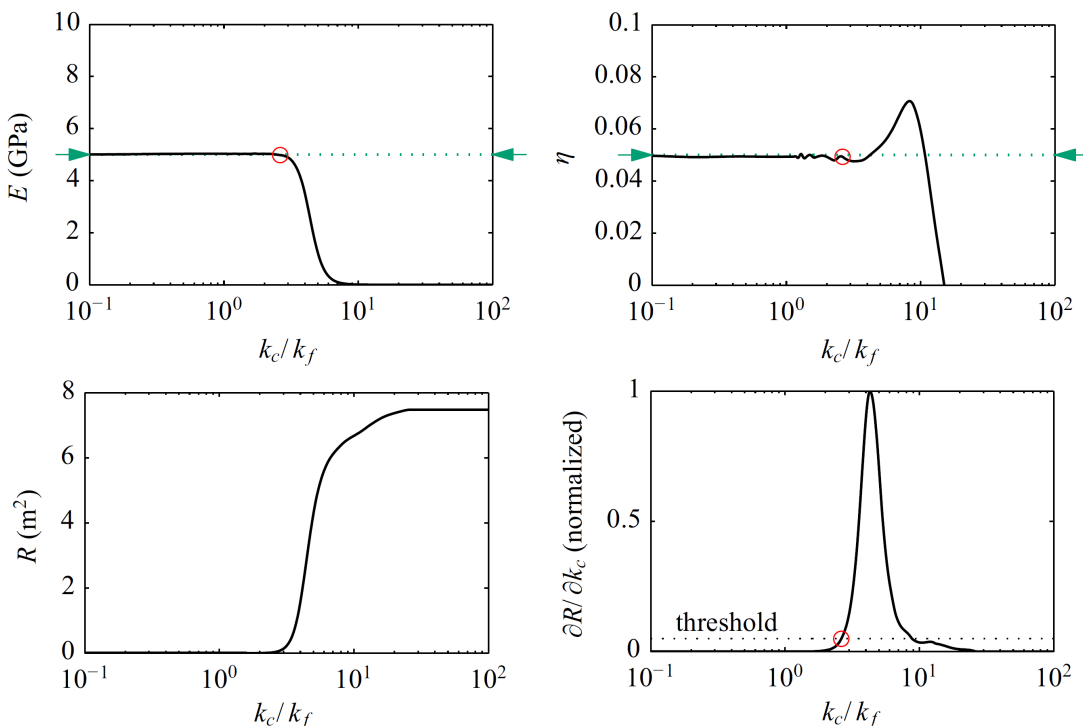


FIGURE 3.11 – Module d'Young  $E$ , amortissement structural  $\eta_E$ , résidu  $R$  et dérivée associée  $\frac{\partial R}{\partial k_c}$  obtenus pour différents nombres d'onde de coupure  $k_c$  ; les flèches vertes indiquent les paramètres définis dans le problème direct. La première coïncidence entre  $\partial R/\partial k_c$  et le seuil (threshold) permet de définir le nombre d'onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$ . Figures issues de [12].

Ce critère de régularisation tend à sélectionner le filtrage le moins important possible (correspondant au nombre d'onde de coupure  $k_c$  le plus grand) pour lequel le problème inverse reste stable. Ce comportement est d'ailleurs remarquable par la brusque variation de  $E$  et  $\eta_E$  en figure 3.11.

Le nombre d'onde de coupure optimal est comparé pour différents niveaux de bruits et présenté en figure 3.12. On constate que ce dernier est quasiment proportionnel au nombre d'onde de flexion soit  $k_c^{\text{opt}} = ak_f$ , ce qui est en accord avec la régularisation originale expliquée précédemment.

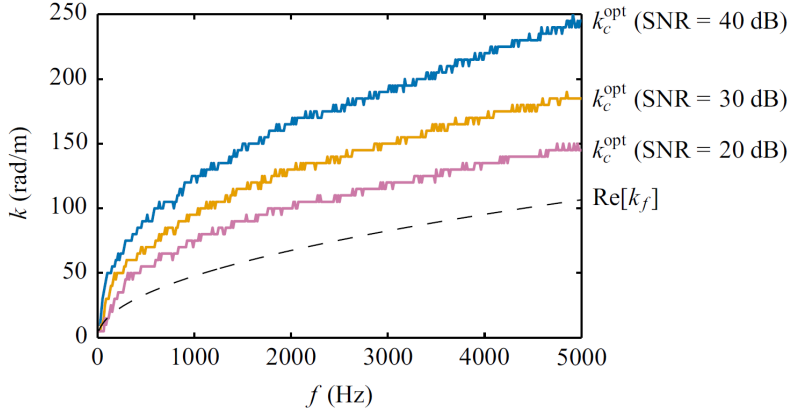


FIGURE 3.12 – Nombre d'onde de coupure optimal obtenu par divergence du résidu pour différents niveaux de bruit. Le nombre d'onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$  est quasiment proportionnel au nombre d'onde de flexion  $k_f$ . Figure issue de [12].

### Minimisation du résidu

Les divisions matricielles établies au sens des moindres carrés (équations 3.4 et 3.5) permettent l'obtention d'un résidu témoignant de l'écart entre la solution approchée et les données d'entrée. Il pourrait être supposé qu'une minimisation du résidu entraîne la meilleure estimation possible des modules complexes. Or, le résidu est lié au système matriciel à résoudre et non pas aux inconnues recherchées. Pour cette raison, le filtre amenant au résidu le plus faible, à fréquence fixée, est trivialement celui qui annule l'expression soit  $k_c \rightarrow 0$  comme représenté en figure 3.13.

**Nota Bene :** Les résidus présentés en figure 3.13 sont dérivés par rapport au nombre d'onde de coupure  $k_c$ , les résultats  $\partial R^{\text{EB}}/\partial k_c$  et  $\partial R^{\text{TIMO}}/\partial k_c$  sont tracés en figure 3.14. Une régularisation basée sur la variation des résidus issus des modèles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko sera également proposée. On remarque notamment que pour un seuil défini à 5%, le modèle de Timoshenko tend à sélectionner un nombre d'onde de coupure inférieur à celui obtenu par le modèle d'Euler-Bernoulli.

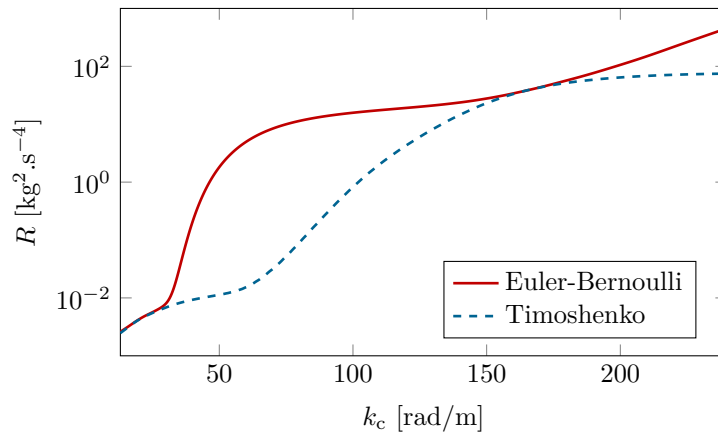


FIGURE 3.13 – Résidus  $R$  typiquement obtenus à partir des formulations d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko, à fréquence fixe. Le résidu le plus faible est obtenu lorsque le filtre est le plus restrictif soit  $k_c \rightarrow 0$ , ce qui revient à annuler l'équation du mouvement.

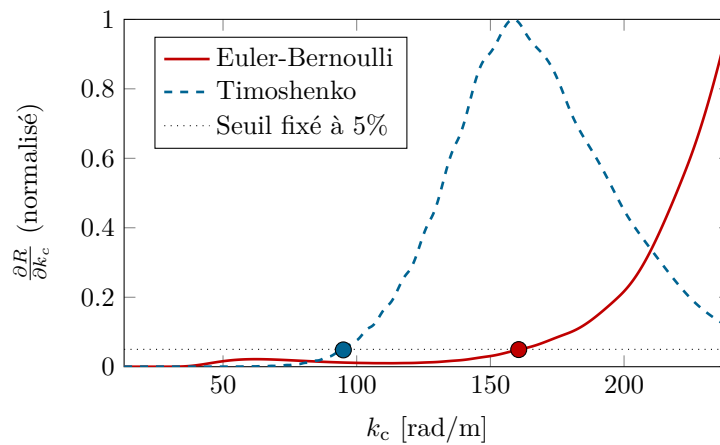


FIGURE 3.14 – Dérivées des résidus issus de la figure 3.13. L'utilisation d'un filtrage défini par dépassement de seuil (fixé à 5%) entraîne un nombre d'onde de coupure optimal plus faible pour le modèle de Timoshenko que pour le modèle d'Euler-Bernoulli.

**Rapport des résidus ( $R_{\text{TIMO}}/R_{\text{EB}}$ )**

La résolution du problème inverse associée aux modèles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko aboutit à des résidus plus ou moins différents en fonction du nombre d'onde de coupure. Le principe ici est de se baser sur cet écart des résidus pour trouver le nombre d'onde de coupure optimal. Les figures 3.13 et 3.15 seront prises en exemple pour illustrer les propos suivants.

Considérons une fréquence fixe quelconque. Le rapport de résidus  $R_{\text{TIMO}}/R_{\text{EB}}$  présente 2 maxima locaux (figure 3.15). Lorsque  $k_c$  est très faible, les champs de déplacement résultants sont majoritairement constitués de très bas nombres d'onde, configuration dans laquelle les théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko sont équivalentes, l'information utile permettant de les différencier est trop filtrée. En augmentant  $k_c$ , le bruit devient de plus en plus important amenant les deux théories vers des résidus similaires, phénomène observé autour de  $k_c = 170 \text{ rad.m}^{-1}$  sur la figure 3.13. Ces deux configurations entraînent donc un rapport de résidus proche de 1. Pour un nombre d'onde de coupure supérieur à 170  $\text{rad.m}^{-1}$ , l'information utile se retrouve noyée dans le bruit et les résidus augmentent.

Mais le rapport de résidus comporte également un minima local en  $k_c = 62.6 \text{ rad.m}^{-1}$ . Les résidus individuels s'éloignent, le modèle d'Euler-Bernoulli n'est pas capable de traduire les phénomènes de cisaillement. Son résidu est donc nettement plus important que celui du modèle de Timoshenko, entraînant un rapport de résidus  $R_{\text{TIMO}}/R_{\text{EB}}$  proche de 0. On peut donc supposer que l'écartement local des résidus traduit la présence d'effets de cisaillement important et donc une régularisation idéale pour le problème de Timoshenko. Pour cette fréquence, on déduit alors  $k_c^{\text{opt}} = 62.6 \text{ rad.m}^{-1}$ .

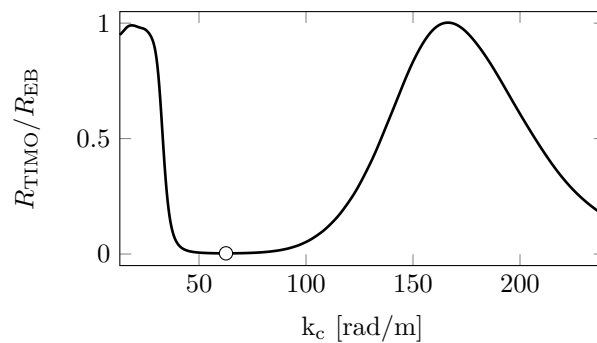


FIGURE 3.15 – Rapport des résidus  $R_{\text{TIMO}}/R_{\text{EB}}$  issus de la figure 3.13. L'écart important entre les résidus, observé pour  $k_c = 62.6 \text{ rad/m}$ , témoigne d'un intérêt à utiliser le modèle de Timoshenko. Ceci laisse supposer la conservation d'effets de cisaillement après filtrage, on choisit alors  $k_c^{\text{opt}} = 62.6 \text{ rad/m}$ .

### Comparaison des critères de régularisation

Les méthodes d'optimisation de régularisation détaillées précédemment sont comparées dans une même simulation définie par les paramètres du tableau 3.1. Les nombres d'onde  $k_p$ ,  $k_e$  et le champ de déplacement  $W$  sont synthétisés par le problème direct (relations 2.17, 2.18 et 2.47). Une contribution de bruit est ajoutée à  $W$ , conformément à la relation 3.1, le schéma aux différences finies est ensuite appliqué pour estimer les dérivées seconde et quatrième du champ de déplacement, en dehors des sources ( $x > 0.1$  m). Après avoir concaténé les champs  $W$ ,  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$  pour l'analyse multifréquentielle (regroupement des données bruitées en  $f - \Delta_f$ ,  $f$  et  $f + \Delta_f$ ), le filtrage est appliqué pour un nombre d'onde de coupure candidat  $k_c$ . Il est important de remarquer que l'application de l'analyse multifréquentielle engendre un filtrage identique pour les 3 échantillons fréquentiels en  $f - \Delta_f$ ,  $f$  et  $f + \Delta_f$ . Le premier échantillon en  $f - \Delta_f$  sera donc légèrement plus bruité que celui en  $f$  et le dernier échantillon en  $f + \Delta_f$  présentera une coupure relative anticipée dans le domaine des nombres d'onde. Cette manière de procéder pour l'étude du nombre d'onde de coupure optimal est inévitable puisqu'il faut stabiliser le modèle de Timoshenko par analyse multifréquentielle, sans laquelle les résultats en sortie de la méthode inverse seront irrationnels, indépendamment du filtrage appliqué, comme constaté précédemment. Dans la suite de ce chapitre, le nombre d'onde de coupure  $k_c$  sera comparé au nombre d'onde propagatif  $k_p$  de l'échantillon fréquentiel central  $f$ .

Paramètre	Valeur
Longueur $L_x$	0.7 m
Largeur $L_y$	2 cm
Épaisseur $L_z$	5 mm
Nombre de points $N_x$	200
Masse volumique $\rho$	2700 kg.m <sup>-3</sup>
Module d'Young $E$	70 GPa
Facteur de perte $\eta_E$	0.05
Module de cisaillement $G$	0.5 GPa
Facteur de perte $\eta_G$	0.08
Fréquence $f$	200 à 3500 Hz
Force $F$	1 N
Position de la source $x_0$	0.05 m
Zone d'étude	$x \in [0.1; 0.7]$ m
Rapport Signal à Bruit	30 dB, 40 dB ou 50 dB
Intervalle fréquentiel $\Delta_f$	300 Hz

TABLEAU 3.1 – Paramètres de simulation pour la comparaison des méthodes d'optimisation de filtrage.

Les résultats obtenus après régularisation optimisée sont présentés dans les figures 3.16, 3.17 et 3.18 correspondant respectivement à des rapports de signal à bruit de 30 dB, 40 dB et 50 dB. L'intervalle fréquentiel est défini arbitrairement à  $\Delta_f = 300$  Hz, des simulations établies avec d'autres valeurs de  $\Delta_f$  ont montré des résultats similaires et ne sont pas présentés ici.

Tout d'abord, le nombre d'onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$  estimé par seuillage de la dérivée du résidu du modèle d'Euler-Bernoulli ( $\partial R_{\text{EB}}/\partial k_c$ , courbe jaune) se situe entre  $2k_p$  et  $3k_p$  selon la contribution de bruit. Comme observé en figure 3.14 ce critère de régularisation est moins sensible au bruit pour le modèle d'Euler-Bernoulli, le filtrage est moins restrictif que celui déterminé par formulation de Timoshenko ( $\partial R_{\text{TIMO}}/\partial k_c$ , courbe grise), qui rend un  $k_c^{\text{opt}}$  allant de  $k_p$  à  $1.8k_p$  en fonction du niveau de bruit. Concernant l'optimisation par rapport de résidus  $R_{\text{TIMO}}/R_{\text{EB}}$  (courbe noire) on peut noter que le nombre d'onde de coupure optimal oscille aux alentours de  $1k_p$  indépendamment du niveau de bruit. Il semblerait que la régularisation de type  $k_c = 1k_p$  (courbe verte) soit efficace quels que soient la fréquence et le niveau de bruit. Cette tendance peut s'expliquer par le fait que la structure filtre naturellement l'énergie vibratoire, qui se concentre alors autour de  $k_p$ . Dans le cas le plus critique (figure 3.16 avec RSB = 30 dB), il est clair que le filtrage doit être réglé finement autour de  $1k_p$ , ce qui est notamment visible sur l'estimation en hautes fréquences des modules  $E$  et  $G$  issus du modèle de Timoshenko. En effet, lorsque la régularisation est définie à  $k_c = 0.6k_p$  (courbe rouge), l'information utile est trop filtrée. Quant au filtrage à  $k_c = 1.4k_p$  (courbe bleue), il conserve une contribution de bruit qui devient trop importante. On remarque également que pour un RSB de 30 dB ou 40 dB, les indicateurs du type  $\partial R_{\text{TIMO}}/\partial k_c$  et  $R_{\text{TIMO}}/R_{\text{EB}}$  entraînent  $k_c^{\text{opt}} > 0.6k_p$  en basses fréquences et  $0.6k_p < k_c^{\text{opt}} < 1.4k_p$  en hautes fréquences.

Ces observations amènent à penser que le filtrage le plus fiable se vérifie pour  $k_c^{\text{opt}} = 1k_p$ . L'indicateur basé sur le rapport des résidus  $R_{\text{TIMO}}/R_{\text{EB}}$  pourrait être utilisé pour définir une régularisation adaptée. Cependant, ce critère de régularisation présente de légères variations autour de  $k_p$  qui pourraient altérer la précision du filtrage et des paramètres identifiés. Néanmoins, le rapport de résidus semble donner une information sur la cinématique de poutre conservée après filtrage. Lorsque les résidus issus des formulations d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko sont semblables, les effets de cisaillement seraient a priori indiscernables à travers l'observation du champ de déplacement. Par opposition, la présence d'un résidu faible pour le modèle de Timoshenko, en regard de celui obtenu par le modèle d'Euler-Bernoulli, témoignerait de la conservation des effets de cisaillement et donc d'un intérêt à utiliser le modèle de Timoshenko. Ce cas particulier se manifeste toujours pour  $k_c \approx k_p$ , indépendamment du niveau de bruit. En se basant sur ce raisonnement, il est indispensable de définir un nouvel indicateur de régularisation permettant de filtrer de manière optimale, soit  $k_c^{\text{opt}} = k_p$ . Cette problématique est discutée dans la section suivante.

**Nota Bene :** Une analyse du nombre d'onde de coupure optimal a été établie dans des études similaires pour différentes valeurs de  $\Delta_f$ . Les résultats obtenus ne sont pas présentés ici car ils amènent aux mêmes conclusions. L'obtention d'une régularisation optimale pour  $k_c = k_p$  semble donc indépendante de l'intervalle fréquentiel  $\Delta_f$ .

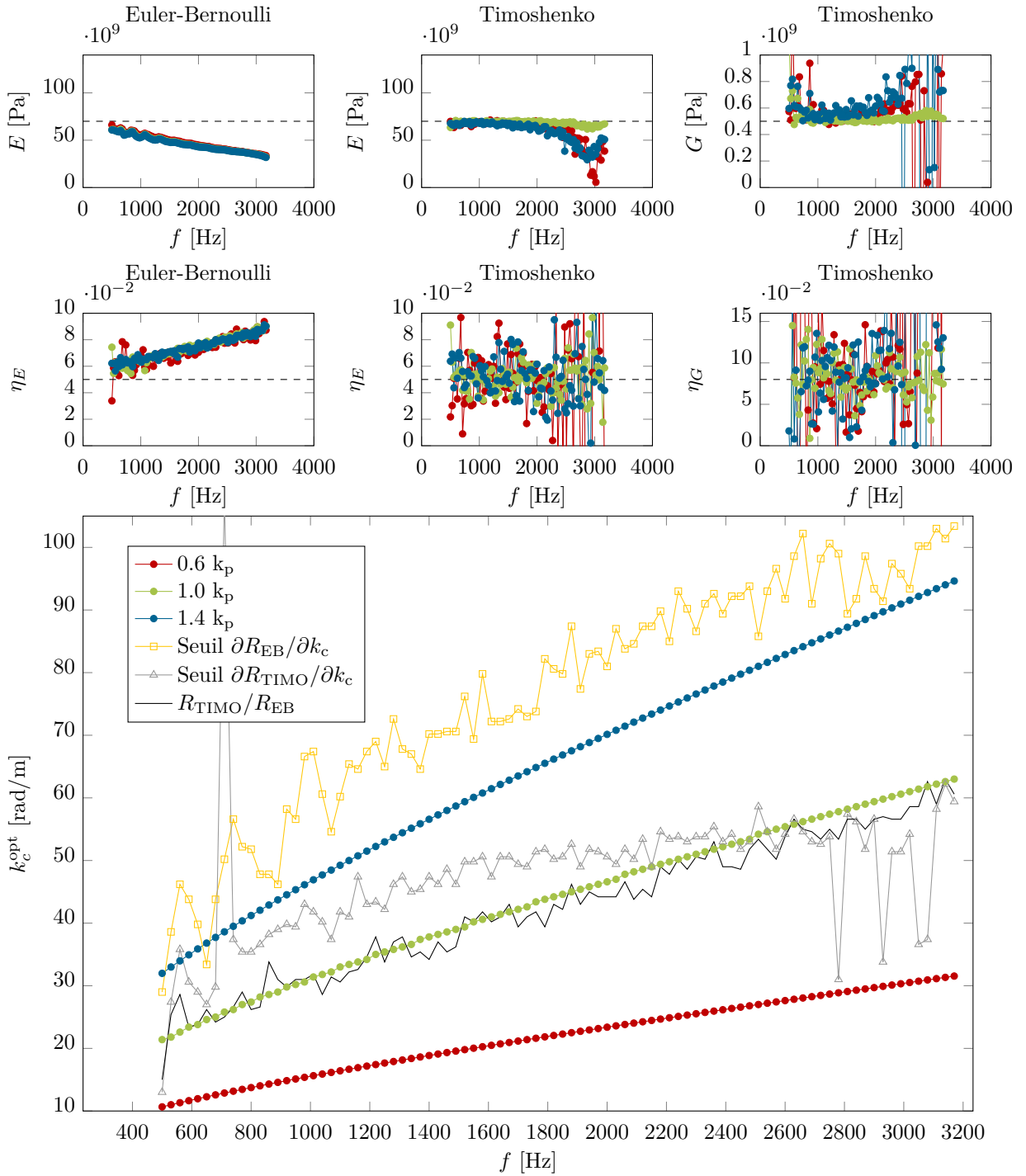


FIGURE 3.16 – Paramètres estimés pour un bruit de RSB = 30 dB en fonction du nombre d'onde de coupe optimal déduit par diverses procédures (coupe de type  $k_c = ak_p$ , divergence du résidu  $\partial R/\partial k_c$  et rapport des résidus  $R_{\text{TIMO}}/R_{\text{EB}}$ ).



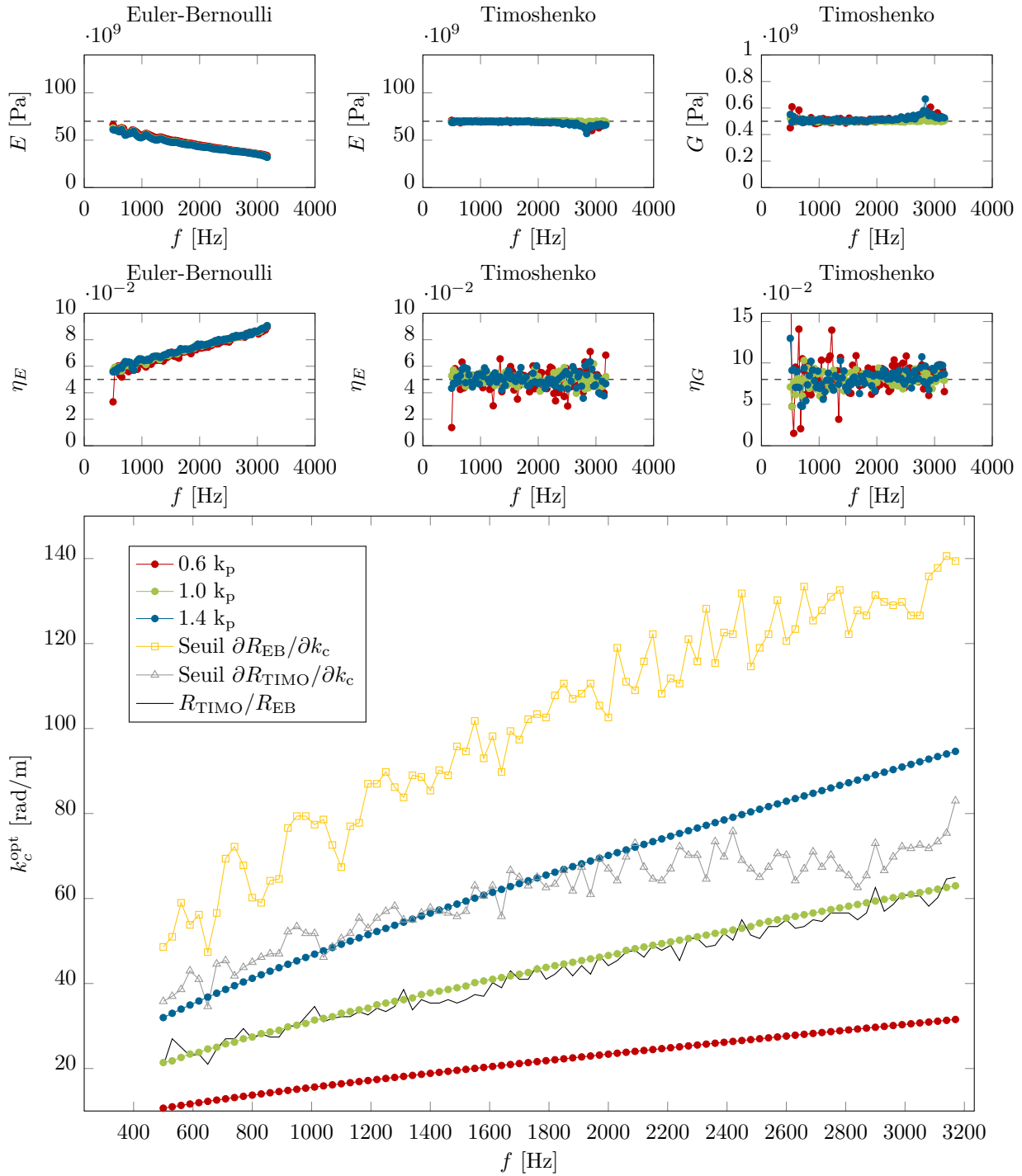


FIGURE 3.17 – Paramètres estimés pour un bruit de RSB = 40 dB en fonction du nombre d'onde de coupure optimal déduit par diverses procédures (coupure de type  $k_c = ak_p$ , divergence du résidu  $\partial R/\partial k_c$  et rapport des résidus  $R_{\text{TIMO}}/R_{\text{EB}}$ ).

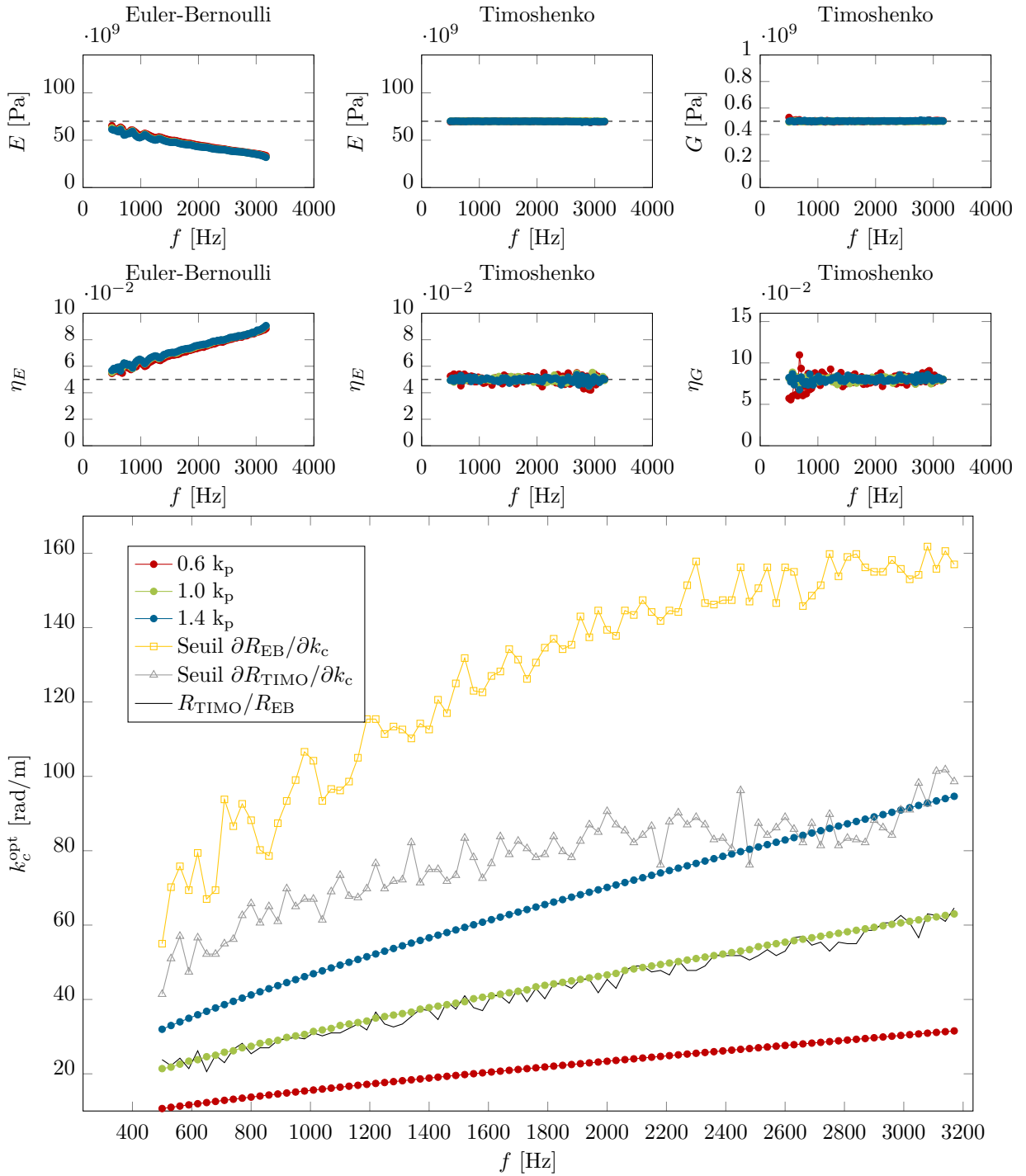


FIGURE 3.18 – Paramètres estimés pour un bruit de RSB = 50 dB en fonction du nombre d’onde de coupe optimal déduit par diverses procédures (coupe de type  $k_c = ak_p$ , divergence du résidu  $\partial R/\partial k_c$  et rapport des résidus  $R_{\text{TIMO}}/R_{\text{EB}}$ ).

### 3.4.3 Estimation du nombre d'onde propagatif $k_p$

La section précédente a mis en évidence la nécessité de régulariser avec un nombre d'onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$  égal au nombre d'onde propagatif  $k_p$ . Or, ce dernier n'est pas accessible directement puisqu'il dépend des modules complexes à identifier. Pour contourner ce manque d'information sur le nombre d'onde naturel de la structure, la procédure suivante est proposée.

Considérons une fréquence fixe arbitraire. Les données d'entrée bruitées ( $W$ ,  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$ ) sont regroupées pour 3 fréquences  $f - \Delta_f$ ,  $f$  et  $f + \Delta_f$ . Les champs sont alors filtrés pour divers nombres d'onde de coupure  $k_c$  candidats, puis les paramètres du matériau sont identifiés pour chaque filtrage. Ces derniers sont ensuite réinjectés dans la relation 2.17 afin d'obtenir une estimation du nombre d'onde propagatif  $k_p$  qui sera comparé au nombre d'onde de coupure appliqué initialement. Lorsque le cas particulier  $k_p = k_c$  est constaté, le nombre d'onde propagatif estimé est identique au nombre d'onde de coupure choisi lors du filtrage, témoignant d'une régularisation optimale soit  $k_c^{\text{opt}} = k_c = k_p$ . Ce cas particulier est considéré comme le meilleur ajustement de filtre, les paramètres élastiques et facteurs de pertes associés seront donc conservés, et cette procédure est répétée pour chaque fréquence distincte.

Reprenons l'exemple de la poutre épaisse en aluminium, cas pour lequel l'analyse s'était arrêtée à la figure 3.6. Une illustration de l'estimation du nombre d'onde propagatif  $k_p$  est présentée dans les figures 3.19 et 3.20 correspondant respectivement aux modules complexes et au nombre d'onde propagatif identifiés pour  $f = 1990$  Hz, en fonction du nombre d'onde de coupure  $k_c$ . Environ 400 nombres d'onde de coupure candidats compris entre 12 et 48 rad/m sont testés pour filtrer les champs  $W$ ,  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$  bruités.

Les résultats issus de la théorie d'Euler-Bernoulli dépendent très peu du nombre d'onde de coupure  $k_c$ , ce qui démontre une faible sensibilité au filtrage, comme il a été observé dans les figures 3.16 à 3.18 mais également dans les travaux de Pézerat [59] et Ablitzer [11].

Le modèle de Timoshenko est en revanche beaucoup plus sensible à la précision du filtrage, notamment pour l'identification du module de cisaillement  $G$  et de son facteur de perte associé  $\eta_G$ . Cependant, même si les paramètres ne sont pas correctement estimés, leur réutilisation entraîne une identification du nombre d'onde propagatif étonnamment stable, qui peut s'expliquer par une compensation des modules. Un écart sur le module d'Young  $E$  peut être contre-balançé par une déviation plus importante du module de cisaillement  $G$ . Il peut également être noté que  $k_p$  et  $k_c$  se croisent en une position marquée par un cercle vert. Cette coïncidence traduit l'optimisation du filtrage. En effet, comme le confirme la figure 3.19, il s'agit du seul nombre d'onde de coupure pour lequel la totalité des paramètres est bien estimée. De plus, cette zone de stabilité pour  $G$  et  $\eta_G$  est très étroite, ce qui confirme l'importance d'un filtrage efficace et précis.

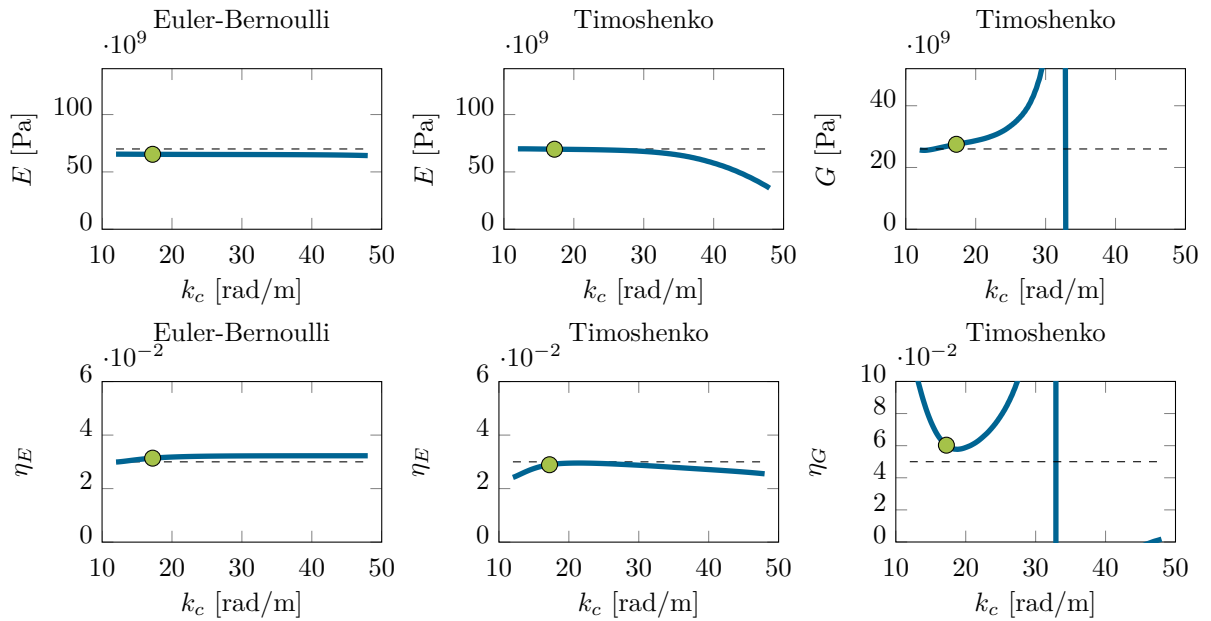


FIGURE 3.19 – Paramètres élastiques et facteurs de pertes identifiés à  $f = 1990$  Hz en utilisant l’approche multi-fréquentielle (avec  $\Delta_f^{\text{opt}} = 530$  Hz) pour divers nombres d’onde de coupure  $k_c$ . Dans ce cas précis, la seule valeur de  $k_c$  permettant une estimation cohérente de tous les paramètres correspond au nombre d’onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}} = k_p = 17.2$  rad/m.

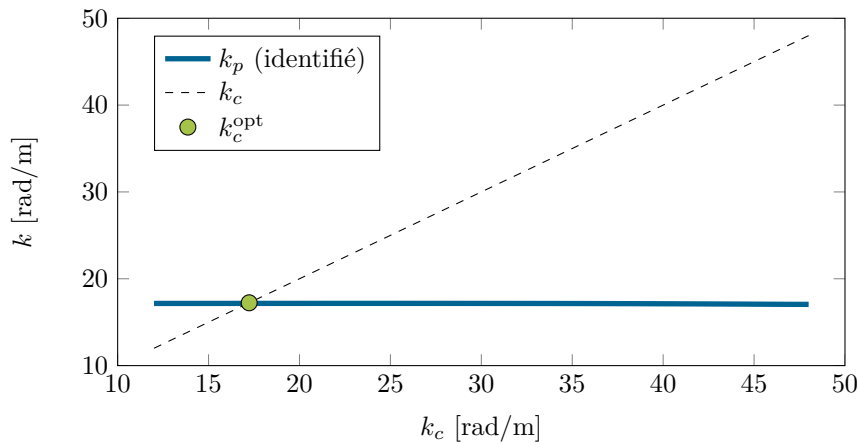


FIGURE 3.20 – Nombre d’onde propagatif estimé pour  $f = 1990$  Hz à partir de l’analyse multi-fréquentielle (avec  $\Delta_f^{\text{opt}} = 530$  Hz) en fonction du nombre d’onde de coupure  $k_c$ . La coïncidence entre  $k_p$  et  $k_c$  (ligne tiretée) correspond au nombre d’onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$ , le filtrage est idéal.

Le nombre d'onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$  déterminé pour toutes les fréquences est tracé en figure 3.21 et comparé avec le nombre d'onde propagatif donné dans le problème direct. La superposition des courbes témoigne de la robustesse de la définition du nombre d'onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$ .

Un raisonnement similaire peut-être établi sur le nombre d'onde évanescent  $k_e$  qui peut être estimé à l'aide de la relation 2.18, après obtention des caractéristiques du matériau issues du filtrage optimal. Sur la figure 3.22, la précision d'estimation met en évidence un potentiel pour identifier des nombres d'onde de poutre.

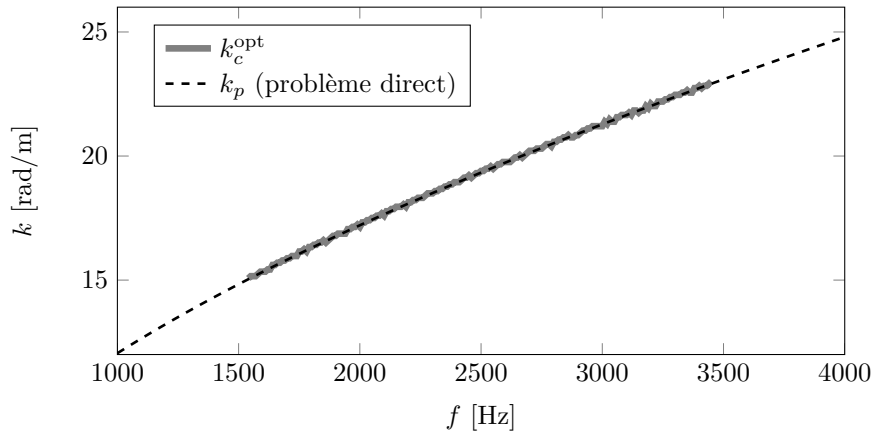


FIGURE 3.21 – Nombre d'onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$  déterminé en fonction de la fréquence. Sa superposition avec le nombre d'onde propagatif  $k_p$  défini dans le problème direct témoigne de la robustesse de l'estimation de  $k_c^{\text{opt}}$ .

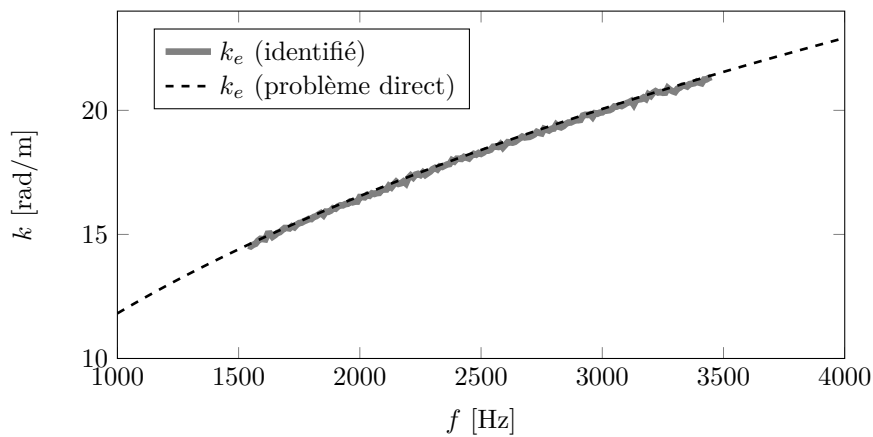


FIGURE 3.22 – Nombre d'onde évanescent déterminé en fonction de la fréquence après estimation optimisée des paramètres élastiques. La superposition avec le nombre d'onde évanescent  $k_e$  défini dans le problème direct met en évidence une nouvelle approche pour l'estimation de nombres d'onde.

**Nota bene :** Une estimation du nombre d'onde propagatif est également disponible en figure 3.23, à partir d'une régularisation faisant usage de différents fenêtrages  $\psi$ . L'utilisation d'une fenêtre de Tuckey induit des discontinuités dans l'identification du nombre d'onde  $k_p$ , ce qui n'est pas le cas avec l'emploi d'une fenêtre de Hanning.

Comme expliqué dans la section 3.4.2, le fenêtrage de Tuckey (relation 1.5) présente un plateau unitaire dès que la zone de mesure est au moins deux fois plus grande que la longueur d'onde de coupure, sinon une fenêtre de Hanning est appliquée (relation 1.6). Dans le cas présent, il faut  $2\lambda_c < L_x = 1$  m soit  $k_c > 4\pi \approx 12.57$  rad/m. Ce nombre d'onde de coupure, à partir duquel une fenêtre de Tuckey est effectivement réalisable, atteste d'une séparation des courbes de la figure 3.23. Le fenêtrage de Tuckey semble toujours contenir de légers effets de bords qui entraînent une variabilité dans l'estimation du nombre d'onde propagatif.

Pour cette raison, la fenêtre de Hanning est préférée dans toutes les procédures de régularisation, indépendamment de la longueur d'onde de coupure ou de la taille de la zone de mesure.

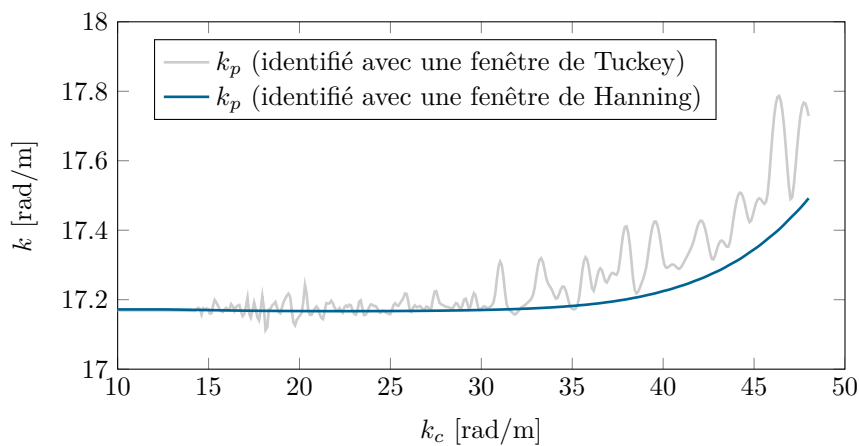


FIGURE 3.23 – Nombre d'onde propagatif estimé pour  $f = 1990$  Hz à partir de l'analyse multi-fréquentielle ( $\Delta_f^{\text{opt}} = 530$  Hz) en fonction du nombre d'onde de coupure  $k_c$  et du fenêtrage appliqué. L'utilisation d'une fenêtre de Tuckey lors de la régularisation met en évidence des variations nettement plus importantes qu'en faisant usage d'une fenêtre de Hanning.

### 3.5 Validations de la méthode

Afin de confirmer les observations établies précédemment, deux expérimentations sont mises en œuvre. La première concerne une poutre épaisse en aluminium dont les paramètres sont bien connus dans la littérature. La seconde étude porte sur une poutre multicouche présentant des peaux en fibres de verre et une âme en cellules de nid d'abeille.

#### 3.5.1 Expérimentation sur une poutre épaisse en aluminium

Cette étude porte sur une poutre épaisse en aluminium illustrée dans les figures 3.24 et 3.25, dont les caractéristiques sont données dans le tableau 3.2. Bien qu'il s'agisse d'une structure académique connue, elle constitue une étape évidente dans le processus de validation de la méthode. Enfin, il convient de noter que le module de cisaillement de ce matériau est élevé, cependant la géométrie de la structure favorise le cisaillement.

Paramètre	Valeur
Longueur $L_x$	1.5 m
Largeur $L_y$	1 cm
Épaisseur $L_z$	5 cm
Masse volumique $\rho$	2681 kg.m <sup>-3</sup>
Fréquence $f$	100 à 5500 Hz
Position de la source $x_0$	0.03 m
Zone d'étude	$x \in [0.1; 1.4]$ m
Nombre de points de mesure $N_x$	141

TABLEAU 3.2 – Caractéristiques de la poutre épaisse en aluminium et configuration de la mesure établie pour la validation expérimentale.

#### Montage de mesure

La structure est suspendue par un fil de nylon, les conditions aux limites sont supposées libres. La poutre est excitée, au moyen d'un marteau d'impact PCB 086C03 (sensibilité nominale de 2.25 mV/N), en 141 points régulièrement espacés sur  $x \in [0.1; 1.4]$  m et un accéléromètre PCB 352C23 (sensibilité de 5.23 mV/g) mesure le déplacement transverse en une position fixe  $x_0 = 0.03$  m. D'après le principe de réciprocité, cette mesure est équivalente à celle où un marteau d'impact serait fixe en  $x_0 = 0.03$  m et l'accéléromètre serait déplacé en chaque point du maillage.

Une moyenne basée sur 3 mesures est réalisée afin de limiter le bruit. Les signaux d'excitation et de mesure sont transmis à une carte d'acquisition *LMS*<sup>®</sup> SCADAS Mobile 01 puis traités sur le logiciel *LMS Test Lab*<sup>®</sup>. Le champ de déplacement transverse  $W$  est alors obtenu sur la portion  $x \in [0.1; 1.4]$  m avec une résolution spatiale de  $\Delta_x = 1$  cm.



FIGURE 3.24 – Montage expérimental pour la mesure du champ de déplacement de la poutre épaisse en aluminium. Un marteau d’impact mobile sollicite la structure en différents points d’un maillage régulier. L’amplitude vibratoire est mesurée par un accéléromètre miniature.

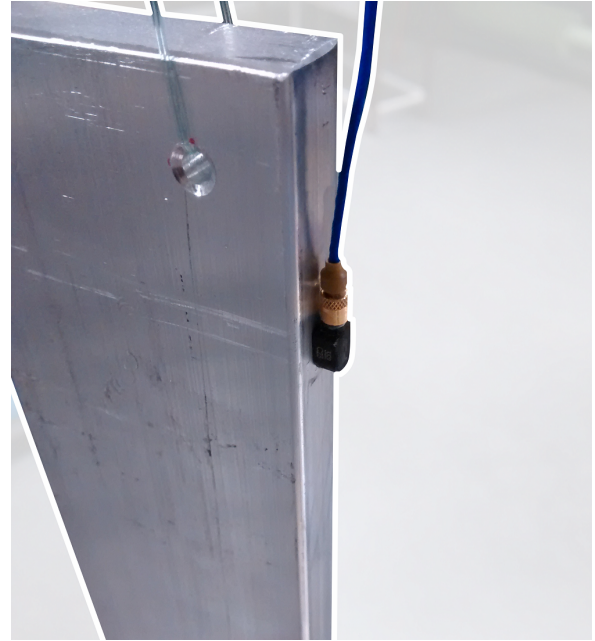


FIGURE 3.25 – Accéléromètre miniature fixé en  $x_0 = 0.03$  m pour la mesure sur la poutre épaisse en aluminium.

### Optimisation de la régularisation

Après application du schéma aux différences finies, les variables spatiales  $W$ ,  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$  sont filtrées pour 400 nombres d’onde de coupure candidats  $k_c \in [4; 42]$  rad/m. L’analyse multifréquentielle est établie comme stipulée dans les équations 3.4 et 3.5 afin d’en déduire les paramètres  $E$ ,  $\eta_E$ ,  $G$  et  $\eta_G$  pour toutes les combinaisons possibles de  $(f, \Delta_f, k_c)$ .

Le nombre d’onde de coupure optimal est déterminé pour tous les couples  $(f, \Delta_f)$  et présenté en figure 3.26. Hormis quelques configurations pour lesquelles la reconstruction du nombre d’onde propagatif n’est pas fiable, il apparaît clairement que l’optimisation du filtrage ne dépend pas de l’intervalle fréquentiel  $\Delta_f$ . Le nombre d’onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$  obtenu pour  $\Delta_f = 787.5$  Hz est montré en figure 3.27 et présente un profil de type  $\sqrt{f}$ , en accord avec l’allure théorique de  $k_p$  vue précédemment en figure 2.2. Concernant la définition de l’intervalle fréquentiel optimal  $\Delta_f^{\text{opt}}$ , la procédure décrite en section 3.4.1 est mise en œuvre. La fonction objective associée  $\mathcal{O}_G$  est illustrée en figure 3.28. En dehors de la zone transitoire ( $\Delta_f < 600$  Hz), un minimum est vérifié pour  $\Delta_f^{\text{opt}} = 787.5$  Hz.



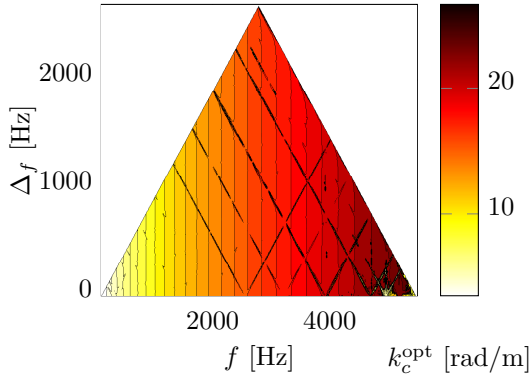


FIGURE 3.26 – Nombre d’onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$  déterminé en fonction de la fréquence  $f$  et de l’intervalle fréquentiel  $\Delta_f$  pour le cas expérimental d’une poutre épaisse en aluminium. Hormis quelques fréquences entraînant une mauvaise estimation de  $k_c^{\text{opt}}$ , le nombre d’onde de coupure optimal ne dépend pas de  $\Delta_f$ .

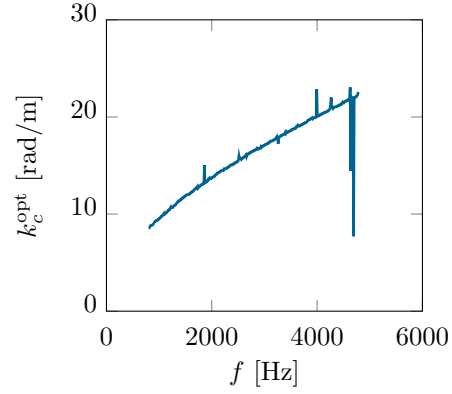


FIGURE 3.27 – Nombre d’onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$  déterminé en fonction de la fréquence avec  $\Delta_f^{\text{opt}} = 787.5$  Hz pour la poutre épaisse en aluminium. Le comportement en  $\sqrt{f}$  du nombre d’onde est typique d’une poutre présentant une rigidité de cisaillement importante.

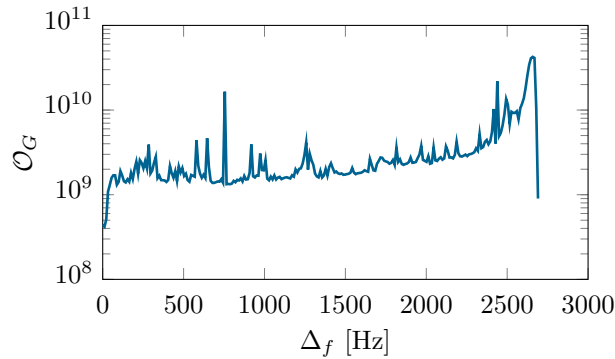


FIGURE 3.28 – Fonction objective  $\mathcal{O}_G$  obtenue sur le cas expérimental d’une poutre épaisse en aluminium. La minimisation de  $\mathcal{O}_G$  (en dehors de la zone transitoire) amène à l’intervalle fréquentiel optimal  $\Delta_f^{\text{opt}} = 787.5$  Hz.

### Caractéristiques du matériau

En faisant usage de  $\Delta_f^{\text{opt}} = 787.5$  Hz et du filtrage optimal, les paramètres élastiques et les facteurs de pertes présentés en figure 3.29 sont obtenus. Les lignes noires tiretées indiquent les valeurs typiques que l’on trouve dans la littérature pour l’aluminium ( $E = 70$  GPa et  $G = 26$  GPa). Les amortissements n’ont en revanche pas de comparatif théorique, leur valeur étant très faible et difficilement vérifiable, la littérature les donne généralement autour de  $10^{-3}$ .

Comme observé dans les précédentes simulations, l’épaisseur importante de la structure induit un cisaillement que la théorie d’Euler-Bernoulli interprète comme une diminution du module d’Young  $E$ .

Ce dernier présente une allure plutôt constante lorsqu'il est estimé à l'aide de la théorie de Timoshenko, grâce à la prise en compte du module de cisaillement  $G$  dont l'identification est également satisfaisante. Concernant les amortissements, seule la théorie d'Euler-Bernoulli permet une estimation fiable puisque  $\eta_E$  se situe dans l'ordre de grandeur attendu de  $10^{-3}$ . En revanche, la séparation des effets dissipatifs n'est pas possible à l'aide de la théorie de Timoshenko, leur contribution respective est vraisemblablement indiscernable du bruit de mesure.

Le module d'Young  $E$  et le module de cisaillement  $G$  sont relativement bien identifiés et l'intérêt du modèle de Timoshenko par rapport à celui d'Euler-Bernoulli est vérifié. Cette première validation expérimentale sur une poutre épaisse en aluminium permet donc de confirmer l'efficacité du modèle développé pour identifier simultanément les modules d'Young et de cisaillement.

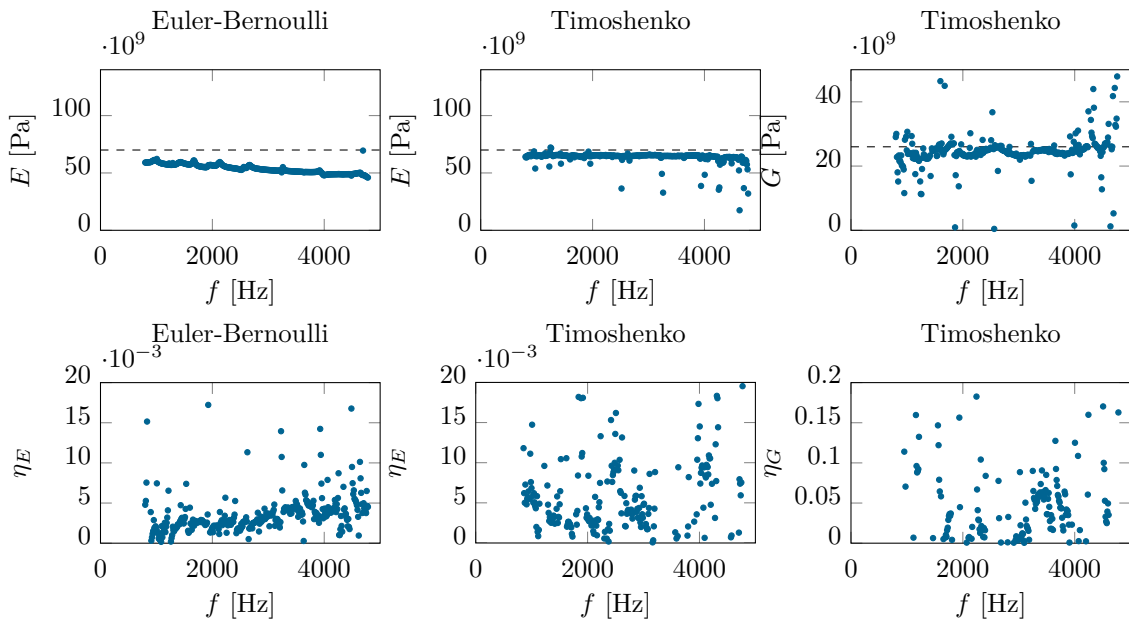


FIGURE 3.29 – Paramètres élastiques et d'amortissements identifiés expérimentalement pour la poutre épaisse en aluminium, avec  $\Delta_f^{\text{opt}} = 787.5$  Hz.

### 3.5.2 Application sur une poutre multicouche comportant une âme en cellules de nid d'abeille [6]

Une seconde validation expérimentale est réalisée sur une poutre sandwich composite (fournie par l'INSA de Lyon) comportant une âme en cellules de nid d'abeille, appelée NIDA dans la suite du document, dont l'orientation des cellules est indiquée en figure 3.30. Les caractéristiques générales de la structure sont données dans le tableau 3.3. Les peaux extérieures d'une épaisseur de  $t_f = 0.5$  mm sont en fibres de verre (0/90) imprégnées dans une résine epoxy. L'âme est constituée d'un matériau *Plascore*<sup>®</sup> PN1-1/8-6.0 [116] en fibres d'aramide d'épaisseur  $t_c = 9$  mm et de masse volumique  $\rho_c = 96$  kg.m<sup>-3</sup>. La poutre complète pèse  $54.04 \times 10^{-3}$  kg, ce qui amène à une masse volumique globale de  $\rho = 276.7$  kg.m<sup>-3</sup>.

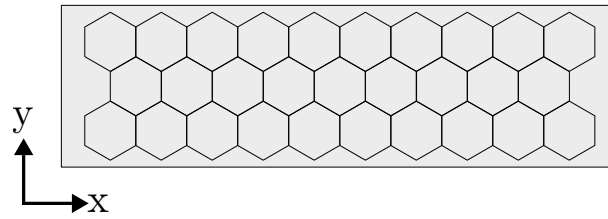


FIGURE 3.30 – Orientation des cellules NIDA pour la poutre multicouche.

Paramètre	Valeur
Longueur $L_x$	65.1 cm
Largeur $L_y$	3 cm
Épaisseur $L_z$	1 cm
Masse volumique $\rho$	276.7 kg.m <sup>-3</sup>
Fréquence $f$	200 à 4000 Hz
Position de la source $x_0$	0.048 m
Nombre de points $N_x \times N_y$	157 $\times$ 7

TABLEAU 3.3 – Caractéristiques de la poutre composite sandwich NIDA et paramètres de mesure.



FIGURE 3.31 – Montage expérimental pour la mesure du champ de déplacement de la poutre sandwich NIDA. La structure est montée sur un pot vibrant en  $x_0 = 0.048$  m et un vibromètre laser à balayage mesure le champ de déplacement transverse.

### Montage expérimental

La poutre est montée sur un pot vibrant *Bruël & Kjaer*<sup>®</sup> LDS V201 (voir figure 3.31) qui sollicite la structure en  $x_0 = 0.048$  m, avec un signal de type chirp ( $f \in [200; 4000]$  Hz). Le champ de déplacement est mesuré sur un maillage de  $7 \times 157 = 1099$  points avec une résolution spatiale de  $\Delta_x = \Delta_y = 4.1$  mm, au moyen d'un vibromètre laser à balayage *Polytech*<sup>®</sup> PSV-500 et de son système d'acquisition.

### Optimisation de la régularisation

Le champ de déplacement n'est conservé que pour la portion  $x > 0.1$  m, afin se placer en dehors de la source vibratoire. Une moyenne est établie dans la direction  $y$  dans le but de limiter au maximum la contribution des effets de torsion, principalement observables aux basses fréquences ( $f < 1500$  Hz). Les dérivées spatiales du champ de déplacement sont estimées par différences finies utilisant une antenne de 7 points. Les champs  $W$ ,  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$  sont ensuite régularisés pour 400 nombres d'onde de coupure candidats compris entre 12 et 118 rad/m et réinjectés dans les équations 3.4 et 3.5.

Les paramètres élastiques et les facteurs de pertes sont déterminés pour tous les arrangements  $(f, \Delta_f, k_c)$ . Le nombre d'onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$  est obtenu pour chaque itération et ne dépend pas de  $\Delta_f$  comme le montre la figure 3.32. Une coupe établie à  $\Delta_f = 312.5$  Hz, présentée en figure 3.33, met en évidence une évolution quasiment linéaire du nombre d'onde avec la fréquence. Hormis une erreur d'estimation à  $f = 1390$  Hz, due à un couplage entre un mode de torsion et un mode de flexion que la théorie de poutre utilisée ne peut interpréter, le comportement du nombre d'onde de coupure est typique d'une poutre présentant de forts effets de cisaillement (vu précédemment en figure 2.3).

Quant à l'intervalle fréquentiel optimal, le calcul de la fonction objective  $\mathcal{O}_G$  tracée en figure 3.34 met en évidence un minimum pour  $\Delta_f^{\text{opt}} = 312.5$  Hz (en dehors de la zone transitoire pour  $\Delta_f < 125$  Hz).

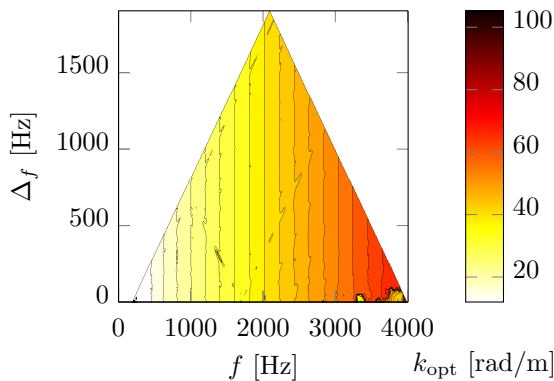


FIGURE 3.32 – Nombre d'onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$  déterminé en fonction de la fréquence  $f$  et de l'intervalle fréquentiel  $\Delta_f$  pour la poutre sandwich NIDA. Le nombre d'onde de coupure optimal ne dépend pas de  $\Delta_f$ .

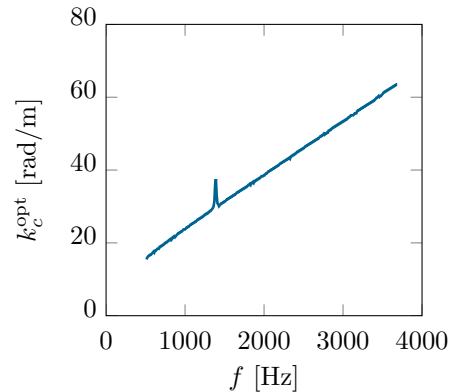


FIGURE 3.33 – Nombre d'onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$  déterminé en fonction de la fréquence avec  $\Delta_f^{\text{opt}} = 312.5$  Hz pour la poutre sandwich NIDA. Le comportement linéaire du nombre d'onde est typique d'une poutre présentant de forts effets de cisaillement.

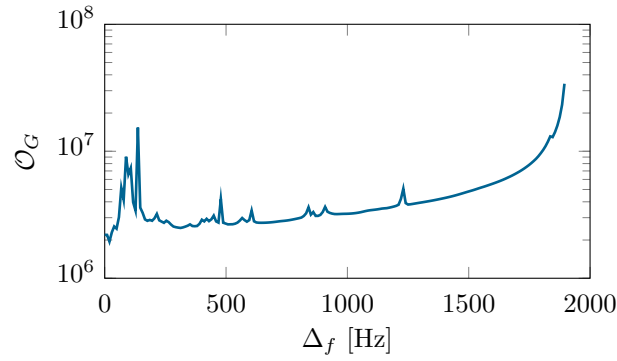


FIGURE 3.34 – Fonction objective  $\mathcal{O}_G$  déterminée pour la validation sur une poutre sandwich NIDA. L'intervalle fréquentiel optimal est obtenu pour  $\Delta_f^{\text{opt}} = 312.5$  Hz.

### Caractéristiques du matériau

A partir de cette configuration optimisée ( $\Delta_f^{\text{opt}} = 312.5$  Hz), les modules complexes de la poutre homogène équivalente sont calculés et présentés en figure 3.35.

Le module d'Young estimé par le modèle d'Euler-Bernoulli diminue rapidement de 6 GPa à 1 GPa et l'amortissement associé augmente progressivement de 1 % à 4 % avec la fréquence. Les résultats issus du modèle de Timoshenko présentent de plus faibles variations. Le module d'Young se situe aux alentours de 7.5 GPa pour finalement diminuer vers 3000 Hz. Le facteur de perte associé  $\eta_E$  est en revanche difficilement quantifiable, ce qui peut être dû à une dissipation dont la contribution en flexion pure est trop faible pour se distinguer du bruit de mesure. Le module de cisaillement complexe est quant à lui quasiment constant à 45 MPa sur toute la bande fréquentielle d'analyse. L'amortissement respectif  $\eta_G$  est également mieux identifié et augmente légèrement de 1 % à 4 %.

Une singularité est également visible sur le module de cisaillement et le module d'Young pour  $f = 1390$  Hz, en raison du couplage entre flexion et torsion. L'estimation du nombre d'onde propagatif étant biaisée à cette fréquence (figure 3.33), l'estimation des paramètres est nécessairement affectée.

La tendance des modules complexes obtenus pour cette poutre sandwich permettent trois observations. Premièrement, le modèle d'Euler-Bernoulli montre clairement que sa simplicité ne permet plus d'identifier les paramètres matériau d'une telle structure composite sandwich. L'importante diminution du module d'Young traduit la présence de forts effets de cisaillements (faible valeur de  $G$ ) interprété par une perte progressive de la rigidité de flexion.

Deuxièmement, les facteurs de pertes  $\eta_E$  et  $\eta_G$  obtenus par le modèle de Timoshenko mettent en évidence la principale contribution de l'âme dans la dissipation de l'énergie vibratoire, alors que le modèle d'Euler-Bernoulli ne peut donner qu'une information d'un amortissement globalisé dans l'épaisseur de la structure. Troisièmement, le module d'Young déterminé par le problème inverse de Timoshenko tend à diminuer en hautes fréquences, bien que le module de cisaillement demeure stable. Ce comportement pourrait s'expliquer par l'apparition d'ondes qui solliciteraient majoritairement l'âme de la poutre sandwich, la faible dynamique des peaux en fibres de verre entrainerait alors une identification plus faible de la rigidité en traction-compression.

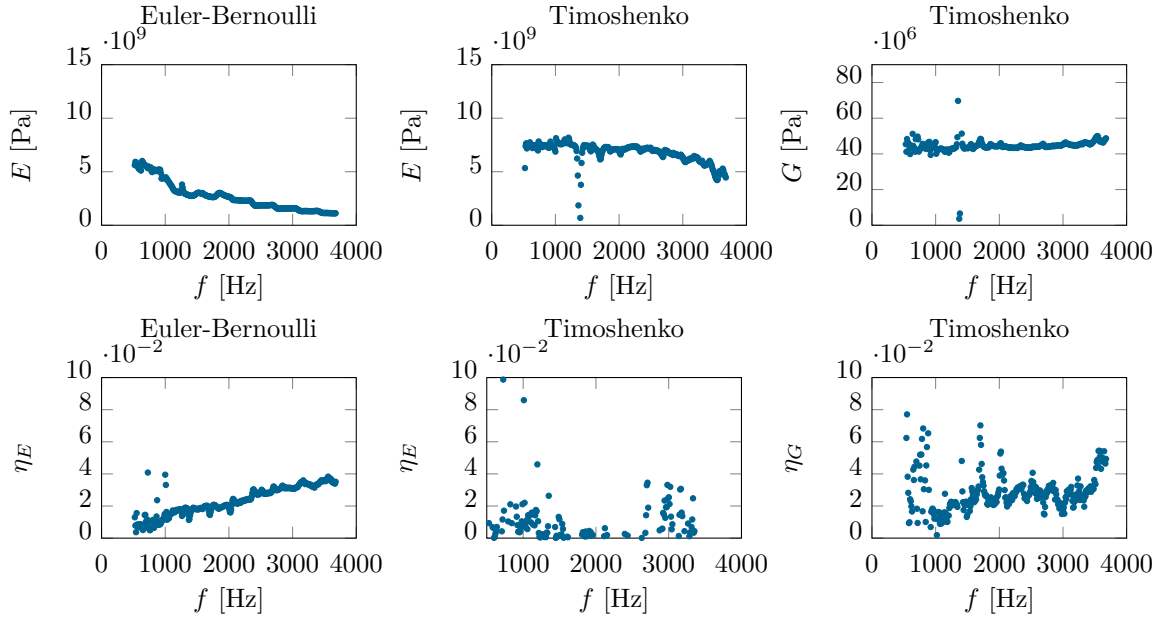


FIGURE 3.35 – Paramètres élastiques et facteurs de pertes identifiés pour la poutre sandwich NIDA par la méthode RIFF avec  $\Delta_f^{\text{opt}} = 312.5$  Hz.

### Comparaison avec des méthodes statiques

L'identification des modules par le modèle de Timoshenko est ici confrontée à des méthodes conventionnelles utilisant un essai de flexion 3 points. La poutre sandwich est placée sur un banc de flexion statique *INSTRON*<sup>®</sup> 8801 illustré en figure 3.36. Un effort statique  $P$  croissant (de 0 à 25 N) est appliqué au centre de la poutre et mesuré par un capteur de force *INSTRON*<sup>®</sup> 10 kN. La flèche  $w$  est relevée au centre de la structure par un capteur *INSTRON*<sup>®</sup> LVDT. Les mesures sont établies pour 6 écartements entre appuis, cette distance entre supports notée  $d$  est augmentée de 15 cm à 25 cm.

Les résultats de mesure sont présentés sur la figure 3.37. Les variables  $w$ ,  $P$  et  $d$  sont insérées dans l'équation 3.7 issue de [13, 117, 118] :

$$w = \frac{Pd^3}{48D} + \frac{Pd}{\mathcal{N}}, \quad (3.7)$$

avec  $D$  et  $\mathcal{N}$  correspondant respectivement aux rigidités de flexion et de cisaillement. La pente  $\frac{w}{P}$  obtenue pour chaque essai de flexion statique est déterminée par l'interpolation d'une fonction linéaire. Le rapport  $\frac{w}{Pd}$  est alors obtenu par la relation 3.8 et présenté en figure 3.38 :

$$\frac{w}{Pd} = \frac{d^2}{48D} + \frac{1}{\mathcal{N}}. \quad (3.8)$$



FIGURE 3.36 – Montage expérimental pour l’essai de flexion 3 points. La poutre est simplement appuyée sur deux cylindres, un effort statique  $P$  dont l’amplitude augmente progressivement est appliqué au centre de la structure, la flèche  $w$  est mesurée à la même position.

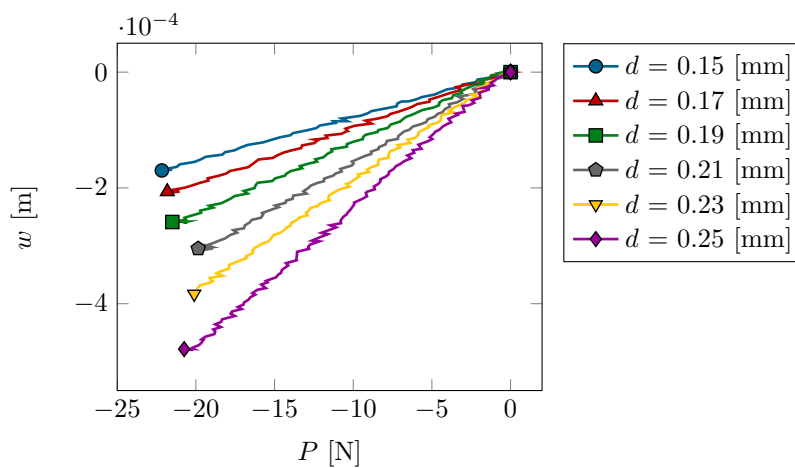


FIGURE 3.37 – Flèche  $w$  mesurée au centre de la poutre en fonction de la charge  $P$  appliquée et de la distance entre appuis  $d$ . Une proportion linéaire entre  $w$  et  $P$  est visible quel que soit l’écartement entre les supports.

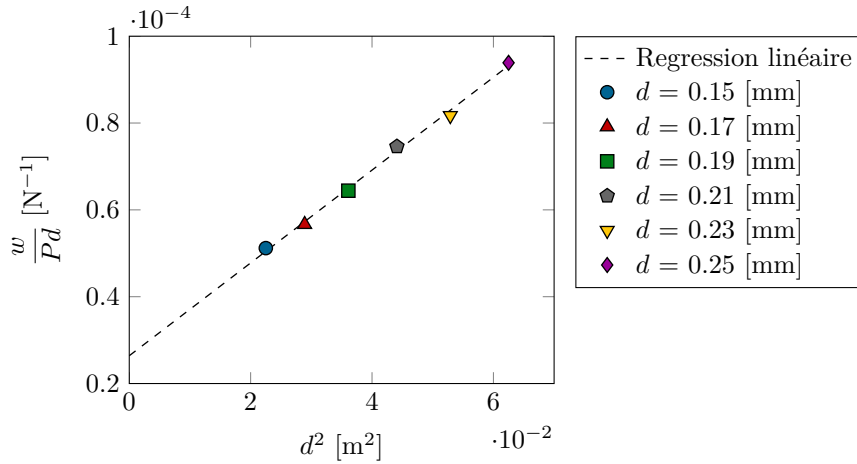


FIGURE 3.38 – Proportion déterminée entre la charge  $P$  et la flèche  $w$  en fonction de la distance  $d$  entre appuis. Les points obtenus sont répartis sur une droite dont l'équation permet de remonter aux rigidités de flexion  $\mathcal{D}$  et de cisaillement  $\mathcal{N}$ .

Le rapport  $\frac{w}{Pd}$  est donc proportionnel à  $d^2$ , les différentes mesures rendent un coefficient directeur  $\frac{w}{P}$  dont les tracés appartiennent à une même droite sur la figure 3.38. Cette régression linéaire dont l'équation est déterminée au sens des moindres carrés, doit présenter une pente  $\frac{1}{48\mathcal{D}}$  permettant d'accéder à la rigidité de flexion et une ordonnée à l'origine valant  $\frac{1}{\mathcal{N}}$ , à partir de laquelle la rigidité de cisaillement est déduite.

Si l'estimation des rigidités  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{N}$  se base sur la même formulation, leur lien avec les paramètres élastiques  $E$  et  $G$  diffère selon la littérature utilisée. Les relations établies par Berthelot [13], qui considère un matériau homogène équivalent, Zenkert [117] et la norme française NF T 54-606 sur les essais de flexion pour les matériaux sandwichs [118], sont données dans les équations 3.9 et 3.10. Ces dernières sont valables sous l'hypothèse de peaux plus minces et plus raides que l'âme du composite, soit  $t_f \ll t_c$  et  $E_c \gg E_f$  respectivement, ce qui a priori vérifié pour cette poutre sandwich NIDA.

$$E = \begin{cases} \frac{\mathcal{D}}{I}, & \text{d'après Berthelot} & (3.9a) \\ \frac{2\mathcal{N}}{L_y t_f t_c^2}, & \text{selon Zenkert} & (3.9b) \end{cases}$$

$$G = \begin{cases} \frac{\mathcal{N}}{S}, & \text{d'après Berthelot} & (3.10a) \\ \frac{\mathcal{N} t_c}{L_y (t_f + t_c)^2}, & \text{selon Zenkert et la NF T 54-606} & (3.10b) \end{cases}$$



Le tableau 3.4 présente les résultats obtenus, ces derniers sont comparés à ceux déterminés par la méthode RIFF appliquée à la théorie de Timoshenko. Les valeurs du module de cisaillement  $G$  issues de 3.10a et 3.10b sont situées dans le même ordre de grandeur, mais le modèle de Timoshenko identifie une valeur présentant le meilleur accord avec celle donnée dans la fiche technique du matériau NIDA [116]. Concernant le module d'Young  $E$ , le modèle de Zenkert est cohérent vis à vis des peaux en fibres de verre et matrice epoxy. La méthode RIFF estime logiquement une rigidité plus faible puisqu'elle considère un matériau homogène équivalent. Le module d'Young équivalent est donc diminué par la présence d'une âme souple, ce qui est cohérent avec le modèle homogène de Berthelot.

Méthode	$E$ [GPa]	$G$ [MPa]
RIFF Timoshenko	$\approx 7.5$ (homogène)	$\approx 45$ (homogène)
Berthelot	7.8 (homogène)	31.6 (homogène)
Zenkert	28.8 (peaux)	31.5 (âme)
NF 54-606		31.5 (âme)
<i>Plascore</i> <sup>®</sup> : fiche technique		49 (âme)

TABLEAU 3.4 – Comparaison des modules d'Young  $E$  et de cisaillement  $G$  estimés pour la poutre sandwich NIDA par la méthode RIFF, donnés dans la fiche technique *Plascore*<sup>®</sup> [116] et identifiés par le test de flexion 3 points utilisant différentes approches : le modèle de Berthelot [13] (matériau homogène équivalent), le modèle de Zenkert [117] (module d'Young des peaux et module de cisaillement de l'âme), et la méthode standardisée NF 54-606 [118] (module de cisaillement de l'âme).

### Homogénéisation et reconstruction du déplacement transverse

Pour confirmer la validité de la méthode inverse proposée, appliquée à la théorie de Timoshenko, les modules complexes identifiés précédemment sont réutilisés de manière à synthétiser le déplacement transverse à l'extrémité d'une poutre homogène équivalente en conditions libres. Ce dernier est obtenu à l'aide de la formulation en éléments finis linéaires dont les matrices de masse et de raideur (Euler-Bernoulli ou Timoshenko) sont issues des travaux de Zienkiewicz [113] et disponibles dans les équations 2.48a à 2.49b. La résolution en élément finis est réalisée pour chaque fréquence discrète, les paramètres  $E^{\text{EB}}(f)$ ,  $\eta_E^{\text{EB}}(f)$ ,  $E^{\text{TIMO}}(f)$ ,  $\eta_E^{\text{TIMO}}(f)$ ,  $G^{\text{TIMO}}(f)$  et  $\eta_G^{\text{TIMO}}(f)$ , ainsi que les caractéristiques de la structure  $(L_x, L_y, L_z, \rho, S, I)$  sont directement repris de la figure 3.35 et du tableau 3.3.

Parallèlement, une mesure du déplacement transverse est établie à l'extrémité de la poutre sandwich NIDA en conditions libres comme représenté en figure 3.39. Un accéléromètre PCB 352C23 d'une sensibilité de 5.23 mV/g est placé à l'extrémité de la structure et un marteau d'impact miniature PCB 086E80 d'une sensibilité de 23.76 mV/N excite la structure à la même position. Les capteurs sont connectés à une carte d'acquisition National Instruments USB 4431 et une réponse fréquentielle est mesurée à l'aide du logiciel PAFI (Plateforme d'Aide à la Fabrication Instrumentale) développé au LAUM [119].



FIGURE 3.39 – Montage expérimental pour la mesure du déplacement transverse local de la poutre sandwich NIDA avec conditions limites libres. Un marteau d'impact miniature excite la structure à proximité d'un accéléromètre miniature.

Les réponses en fréquence issues de la mesure et de la synthèse par éléments finis linéaires sont tracées en figure 3.40. Le modèle d'Euler-Bernoulli ne coïncide pas avec la mesure en raison de sa simplicité. En effet, le cisaillement est interprété à travers une rigidité de flexion plus faible mais cela n'est pas suffisant pour représenter le comportement de la structure. En revanche, une superposition très satisfaisante est observée entre la mesure et le modèle homogène équivalent de Timoshenko sur la bande fréquentielle  $f \in [500; 2700]$  Hz. Une erreur autour de  $f = 1390$  Hz est visible et s'explique par les singularités déjà présente sur l'estimation des paramètres du matériau (voir figure 3.35). Par ailleurs, une séparation progressive des résultats apparait pour  $f > 2800$  Hz que l'on peut interpréter par un manque de réalisme des éléments finis 1D (malgré une résolution d'au moins 40 points par longueur d'onde sur toute la bande fréquentielle), par la présence de l'accéléromètre dans le cas expérimental qui pourrait légèrement altérer la dynamique en hautes fréquences, ou encore par l'apparition des premières limites du modèle de Timoshenko, l'utilisation d'une équation de mouvement plus complexe serait alors à envisager.

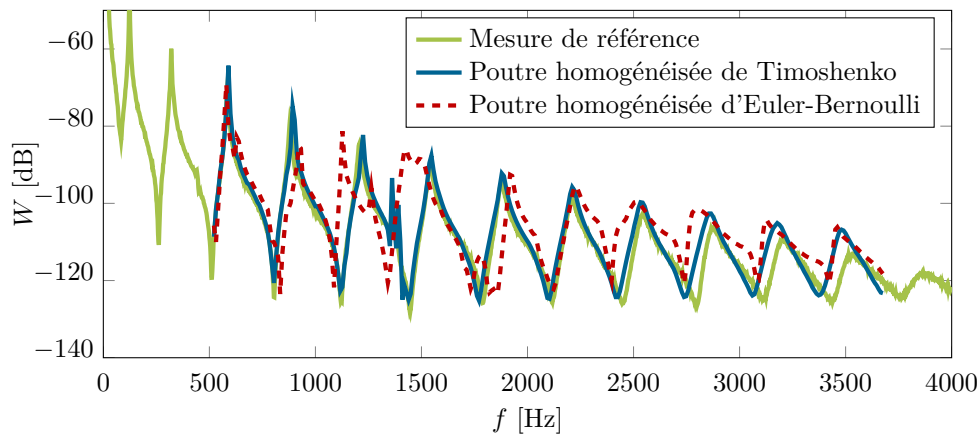


FIGURE 3.40 – Réponses en fréquence (réceptance) de la poutre sandwich NIDA mesurée à l'extrémité de la structure et estimée par synthèse du déplacement transverse (modèle en éléments finis linéaires) utilisant les modules complexes déterminés par la méthode RIFF (figure 3.35).

Cette seconde validation expérimentale a permis de mettre en avant le potentiel d'homogénéisation de structures composites à l'aide d'un modèle équivalent. L'estimation des paramètres élastiques et des facteurs de pertes est cohérente avec la poutre sandwich étudiée et la reconstruction du champ de déplacement prouve l'intérêt de l'identification du cisaillement par la méthode RIFF, appliquée au modèle de Timoshenko. Son indépendance aux conditions limites, sa mise en œuvre simple et la considération de paramètres homogénéisés permet de s'affranchir d'une caractérisation complexe de chaque couche, l'approche proposée facilite tout le processus d'analyse des propriétés de matériaux sandwichs. La réduction du nombre de degrés de libertés est également un atout, l'utilisation de modèles équivalents sous logiciels d'éléments finis permet de réduire les temps de calcul.

### 3.6 Conclusions

Ce chapitre a porté sur l'application de la méthode RIFF pour la caractérisation de structures épaisses et/ou composites sandwichs. Les problématiques de bruit, de régularisation et de stabilisation du problème inverse utilisant l'équation de Timoshenko ont pu y être abordées et les méthodes de régularisation proposées ont été vérifiées à travers deux validations expérimentales.

Premièrement, la présence de bruit nécessite une attention particulière dans la mise en œuvre de problèmes inverses, en raison de leur forte sensibilité [115]. Une régularisation indispensable est mise en œuvre au moyen d'un fenêtrage spatial et d'un filtrage local du champ de déplacement  $W$  et de ses dérivées spatiales  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$ .

Deuxièmement, malgré la régularisation, la formulation de la méthode RIFF pour la théorie de Timoshenko présente une instabilité qui lui est propre, le filtrage établi dénature majoritairement la seconde dérivée spatiale  $\delta^{2x}$ . Pour contourner cette difficulté une approche multifréquentielle est proposée, la formulation développée pour la poutre de Timoshenko est alors stabilisée mais dépend nécessairement de l'intervalle fréquentiel  $\Delta_f$ . Ce dernier doit être optimisé, tout comme le nombre d'onde de coupure  $k_c$  du filtrage qui constitue un élément prédominant dans la régularisation de la méthode.

Troisièmement, une procédure d'optimisation automatique du filtrage a été proposée afin de supprimer toute décision subjective de l'utilisateur. Une étude de différents critères de régularisation a montré que le filtrage idéal est celui pour lequel  $k_c^{\text{opt}} = k_p$ . Un léger biais sur l'estimation du nombre d'onde de coupure optimal altère fortement l'identification du module de cisaillement  $G$  et du facteur de perte associé  $\eta_G$ . Une procédure permettant de satisfaire cette régularisation optimisée sans connaissance a priori du nombre d'onde naturel  $k_p$  a été développée et s'avère robuste face aux incertitudes de mesure. Par ailleurs, l'intervalle fréquentiel  $\Delta_f$  doit également être sélectionné de sorte que la stabilité du problème de Timoshenko soit possible, sans pour autant limiter la bande fréquentielle d'analyse. La minimisation d'une fonction objective  $\mathcal{O}_G$  est alors définie pour déterminer l'intervalle fréquentiel optimal  $\Delta_f^{\text{opt}}$ .

Enfin, des validations expérimentales sont établies pour vérifier la possibilité d'une identification simultanée des modules d'Young et de cisaillement par la méthode RIFF.

L'expérimentation sur une poutre épaisse en aluminium prouve la fiabilité de la méthode, en comparant les paramètres élastiques identifiés par rapport à ceux donnés couramment dans la littérature. L'épaisseur de la structure met en difficulté la théorie d'Euler-Bernoulli puisque les effets de cisaillement ne sont plus négligeables. Le module d'Young  $E$  et le module de cisaillement  $G$  déterminés par le modèle de Timoshenko sont cohérents, en revanche, la faible contribution des facteurs de pertes  $\eta_E$  et  $\eta_G$  les rend impossibles à quantifier.

Une mesure réalisée sur une poutre sandwich composée de peaux en fibres de verre et d'une âme en cellule de nid d'abeille (NIDA) accroît l'intérêt de ce nouveau développement de la méthode RIFF. La complexité de cette structure engendre des difficultés de caractérisation par des techniques usuelles, mais la méthode inverse appliquée à la poutre de Timoshenko rend des paramètres de matériau satisfaisants. L'ordre de grandeur du module d'Young est en accord avec les résultats issus de méthodes de caractérisation statiques

et le module de cisaillement est cohérent avec celui fourni dans la documentation de l'âme NIDA. Il est également possible de dissocier les mécanismes de dissipation, majoritairement attribués aux effets de cisaillement de la couche centrale. De plus, la bonne reconstruction de la réponse en fréquence locale, utilisant les paramètres identifiés, prouve l'utilité d'une homogénéisation pour ce type de structure. La caractérisation des modules complexes ainsi que la modélisation dans des logiciels de calculs s'avèrent simplifiées. Le matériau sandwich n'est plus décrit couche par couche, mais est désormais considéré dans sa globalité.

Une dernière critique peut cependant être relevée au regard du temps de calcul. En effet, la nécessité d'analyser toutes les combinaisons de régularisation et de stabilisation  $(k_c, \Delta_f)$  pour chaque fréquence engendre un traitement des données de mesures pouvant durer plusieurs heures. Des améliorations pourront faire l'objet d'études futures, notamment par rapport à l'estimation du nombre d'onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$  qui ne présente pas de dépendance forte vis à vis de  $\Delta_f$ , une diminution importante des temps de post-traitements est envisageable.

Afin de réduire fortement les temps de calcul et de mesure, un développement de la méthode RIC (Résolution Inverse Corrigée), utilisant le filtrage naturel du schéma aux différences finies et nécessitant très peu de points de mesure, est proposé dans le chapitre suivant.

## Chapitre 4

# Résolution Inverse Corrigée

Développée initialement par Leclère et al. [96] pour les poutres et plaques minces (Euler-Bernoulli et Kirchoff-Love), la méthode de Résolution Inverse Corrigée (RIC) émane d'une comparaison entre l'équation du mouvement théorique et sa version discrétisée. La discrétisation est ici vue comme un biais de mesure, représentatif d'un filtrage appliqué à l'équation du mouvement analytique. L'idée générale de la méthode RIC est donc de modifier ce filtre afin de ne conserver que l'information souhaitée tout en supprimant le bruit contenu dans les hauts nombres d'onde.

Dans une première partie, le principe de la Résolution Inverse Corrigée est détaillé et appliqué à l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko. Une réflexion est notamment portée sur la définition du terme correctif qui permettra de piloter finement la régularisation.

L'optimisation du maillage de mesure fait l'objet d'une seconde section, afin de répondre au compromis entre efficacité de filtrage et altération des champs  $W$ ,  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$ . Un intérêt particulier accordé à la résolution spatiale donne également lieu à la création de maillages dits "fixe" ou "adaptatif" en fonction de la fréquence.

Le troisième axe met enfin en évidence la validité de la Résolution Inverse Corrigée, en comparant les modules complexes estimés sur une poutre sandwich NIDA avec ceux obtenus par la méthode RIFF dans le chapitre précédent. Des résultats équivalents sont observés avec l'avantage de durées de mesure et de calcul très fortement diminuées dans cette nouvelle approche.

**Nota Bene :** Les développements mathématiques de ce chapitre sont établis uniquement en considérant des dérivées spatiales établies par un schéma aux différences finies du second ordre, nécessitant une antenne de mesure de 5 points. La section 2.4 a démontré l'intérêt d'estimer les dérivées spatiales  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$  à l'aide d'un schéma aux différences finies d'ordre 4, faisant usage d'une antenne de mesure de 7 points. Néanmoins, comme expliqué en annexe B, l'application de la méthode RIC n'est pas possible en utilisant un tel schéma de dérivation.

## 4.1 Principe

Afin de synthétiser l'équation du mouvement en régime harmonique de la poutre de Timoshenko (relation 2.13), le second membre est exprimé par la variable  $Q(x)$  :

$$Q(x) = q(x) - \frac{\tilde{E}I}{\tilde{G}S} \frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} - \frac{\rho I \omega^2}{\tilde{G}S} q(x). \quad (4.1)$$

L'équation du mouvement en régime harmonique de la poutre de Timoshenko est réexprimée en relation 4.2a, qui, après application d'une transformée de Fourier spatiale, devient 4.2b.

$$Q(x) = \left[ \tilde{E}I \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \rho I \omega^2 \left( \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{\rho^2 I \omega^4}{\tilde{G}} - \rho S \omega^2 \right) \right] W(x), \quad (4.2a)$$

$$\hat{Q}(k) = \left[ \tilde{E}I k^4 - \rho I \omega^2 \left( \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \right) k^2 + \left( \frac{\rho^2 I \omega^4}{\tilde{G}} - \rho S \omega^2 \right) \right] \hat{W}(k). \quad (4.2b)$$

### 4.1.1 Schéma aux différences finies non corrigé

Sous forme discrétisée, l'équation de Timoshenko prend la forme :

$$Q_{\text{RI}}(x) = \tilde{E}I \delta^{4x} + \rho I \omega^2 \left( \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \right) \delta^{2x} + \left( \frac{\rho^2 I \omega^4}{\tilde{G}} - \rho S \omega^2 \right) W(x). \quad (4.3)$$

Pour le cas d'une antenne de 5 points, les différences finies s'expriment comme stipulé dans les relations 2.50a et 2.50b. Dans le domaine de Fourier ces dérivées spatiales approchées sont définies par les équations 4.4a et 4.4b.

$$\begin{aligned} \hat{\delta}^{2x} &= \frac{1}{\Delta_x^2} (2 \cos(k\Delta_x) - 2) \hat{W}(x) \\ &= \kappa^2 \hat{W}(x). \end{aligned} \quad (4.4a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}^{4x} &= \frac{1}{\Delta_x^4} (2 \cos(2k\Delta_x) - 8 \cos(k\Delta_x) + 6) \hat{W}(x) \\ &= \frac{1}{\Delta_x^4} (2 \cos(k\Delta_x) - 2)^2 \hat{W}(x) \\ &= \kappa^4 \hat{W}(x). \end{aligned} \quad (4.4b)$$

Dans le domaine des nombres d'onde, la relation 4.3 devient :

$$\hat{Q}_{\text{RI}}(k) = \left[ \tilde{E}I \kappa^4 + \rho I \omega^2 \left( \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \right) \kappa^2 + \left( \frac{\rho^2 I \omega^4}{\tilde{G}} - \rho S \omega^2 \right) \right] \hat{W}(k). \quad (4.5)$$

On peut alors exprimer l'erreur  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  issue du schéma aux différences finies par un rapport des expressions discrétisée 4.5 et analytique 4.2b :

$$\mathcal{E}_{\text{RI}}(k) = \frac{\hat{Q}_{\text{RI}}(k)}{\hat{Q}(k)} = \frac{A\kappa^4 + B\kappa^2 + C}{Ak^4 - Bk^2 + C}, \quad (4.6)$$

avec :

$$\begin{cases} A = \tilde{E}I, & (4.7a) \\ B = \rho I \omega^2 \left( \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \right), & (4.7b) \\ C = \frac{\rho^2 I \omega^4}{\tilde{G}} - \rho S \omega^2. & (4.7c) \end{cases}$$

### Pôles de $\mathcal{E}_{\text{RI}}$

Une recherche des racines du dénominateur met en évidence une singularité sur  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  pour 4 valeurs notées  $k_{\text{rd}}$ , coïncidant avec les nombres d'onde propagatif et évanescent :

$$k_{\text{rd}1} = \sqrt{\frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A}} = k_p, \quad (4.8a)$$

$$k_{\text{rd}2} = -\sqrt{\frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A}} = -k_p, \quad (4.8b)$$

$$k_{\text{rd}3} = \sqrt{\frac{B - \sqrt{\Delta}}{2A}} = jk_e, \quad (4.8c)$$

$$k_{\text{rd}4} = -\sqrt{\frac{B - \sqrt{\Delta}}{2A}} = -jk_e, \quad (4.8d)$$

où  $\Delta = B^2 - 4AC = \rho^2 I \omega^4 \left( \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} - 1 \right)^2 + 4\tilde{E}I\rho S \omega^2$ .

En se focalisant sur la plage des nombres d'onde positifs  $k > 0$  on remarque deux cas particuliers qui se distinguent en fonction de la fréquence de travail (l'expression de  $\Omega_{\text{lim}}$  est donnée en relation 2.21) :

$$\mathcal{E}_{\text{RI}}(k) \mapsto +\infty \text{ pour } \begin{cases} k = k_p \quad \forall \omega, \\ k = \Im(k_e) \quad \forall \omega > \Omega_{\text{lim}}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Pour  $\eta_E = \eta_G = 0$ , le comportement des nombres d'onde propagatif  $k_p$  et évanescent  $k_e$  est tel que :

$$\begin{cases} k_p \in \mathbb{R} \quad \forall \omega, & (4.10a) \\ k_p > k_e \quad \forall \omega, & (4.10b) \\ k_e \in \mathbb{R} \quad \forall \omega < \Omega_{\text{lim}}, & (4.10c) \\ k_e \in \mathbb{C} \quad \forall \omega > \Omega_{\text{lim}}. & (4.10d) \end{cases}$$

L'erreur  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  diverge en  $k = k_{\text{rd}} = k_p$  indépendamment de la pulsation  $\omega$ . En revanche, quand  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$  une seconde singularité est observée pour  $k = k_{\text{rd}} = \Im(k_e)$ , mais comme expliqué en section 2.1.2 cette condition a peu de chance d'être satisfaite en pratique.



**Zéros de  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$** 

L'erreur  $\mathcal{E}_{\text{RI}}(k)$  s'annule quand le numérateur atteint ses racines notées  $k_{\text{rn}}$  données ci dessous :

$$k_{\text{rn}} = \pm \frac{1}{\Delta_x^2} \left[ \arccos \left( \frac{-B \pm \sqrt{\Delta} \Delta_x^2 + 2}{2A} \right) + p2\pi \right], \text{ avec } p \in \mathbb{N}. \quad (4.11)$$

De part la présence d'une fonction trigonométrique, les racines  $k_{\text{rn}}$  doivent vérifier :

$$-1 < \frac{-B \pm \sqrt{\Delta} \Delta_x^2 + 2}{2A} < 1 \quad (4.12)$$

soit :

$$-4 < \frac{-B \pm \sqrt{\Delta} \Delta_x^2}{2A} < 0 \quad (4.13)$$

$$-4 < \frac{-B - \sqrt{\Delta} \Delta_x^2}{2A} < 0 \quad (4.14)$$

$$-4 < -k_p^2 \Delta_x^2 < 0 \quad (4.15)$$

Le pas spatial est positif ( $\Delta_x > 0$ ) et le nombre d'onde propagatif est réel ( $k_p \in \mathbb{R} \forall \omega$ ). La condition  $-k_p^2 \Delta_x^2 < 0$  est vraie  $\forall \omega$ , il reste à vérifier :

$$-4 < -k_p^2 \Delta_x^2. \quad (4.16)$$

Définissons  $n$ , le nombre de points par longueur d'onde. Étant donné que  $k_p > k_e \forall \omega$  alors  $\lambda_p < \lambda_e$ . On choisit  $n$  pour le cas le plus défavorable soit :

$$n = \frac{\lambda_p}{\Delta_x} = \frac{2\pi}{\Delta_x k_p}. \quad (4.17)$$

En insérant la relation 4.17 dans la condition 4.16, il vient après quelques simplifications :

$$n > \pi. \quad (4.18)$$

L'existence d'une racine telle que  $\mathcal{E}_{\text{RI}}(k_{\text{rn}}) = 0$  n'est donc possible que si la discrétisation du champ de déplacement est d'au moins  $\pi$  points par longueur d'onde  $\lambda_p$ .

$$-4 < \frac{-B + \sqrt{\Delta} \Delta_x^2}{2A} < 0 \quad (4.19)$$

$$-4 < k_e^2 \Delta_x^2 < 0 \quad (4.20)$$

Pour  $\omega < \Omega_{\text{lim}}$ , le pas spatial est positif ( $\Delta_x > 0$ ) et le nombre d'onde évanescent est purement réel ( $k_e \in \mathbb{R}$ ). Donc  $k_e^2 \Delta_x^2 > 0$ , il n'y a pas de solution telle que  $-4 < k_e^2 \Delta_x^2 < 0$ .

Pour  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$ , le pas spatial est positif ( $\Delta_x > 0$ ) et le nombre d'onde évanescent est imaginaire pur ( $k_e \in \mathbb{C}$ ). Donc  $k_e^2 \Delta_x^2 < 0$ , il reste à vérifier :

$$-4 < k_e^2 \Delta_x^2. \quad (4.21)$$

En insérant la relation 4.17 dans la condition 4.21, et sachant que  $n > 0$  et  $k_p > 0$ , il vient après quelques opérations :

$$n > \pi \sqrt{\frac{-k_e^2}{k_p^2}}. \quad (4.22)$$

Cette dernière condition permet l'existence d'une seconde racine lorsque  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$ . Étant donné que  $k_p > k_e$ , si  $n > \pi$  et  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$  il y aura donc obligatoirement 2 racines.

**Nota Bene :** La relation 4.11 montre que la position des zéros de  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  est périodique. Dans la suite du document, la notation  $k_{\text{rn}} \gtrsim k_p$  ou  $k_{\text{rn}} \gtrsim \Im(k_e)$  sera utilisée, correspondant respectivement à la première racine située après le pôle  $k_{\text{rd}} = k_p$  ou  $k_{\text{rd}} = \Im(k_e)$ . Les autres zéros ne seront pas considérés.

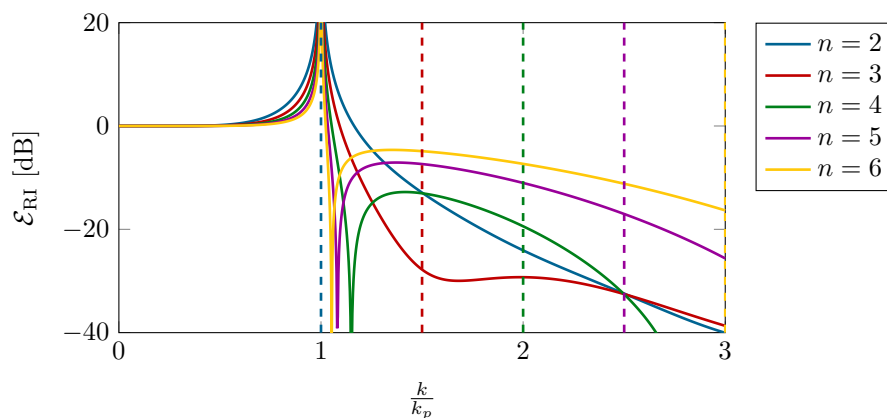


FIGURE 4.1 – Erreur  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  associée à la discrétisation de l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko pour  $\omega < \Omega_{\text{lim}}$ . Les lignes verticales indiquent les limites de Shannon. Un pôle est observé en  $k_{\text{rd}} = k_p$  et un zéro se manifeste pour  $k_{\text{rn}} \gtrsim k_p$  à la condition d'avoir  $n > \pi$ .

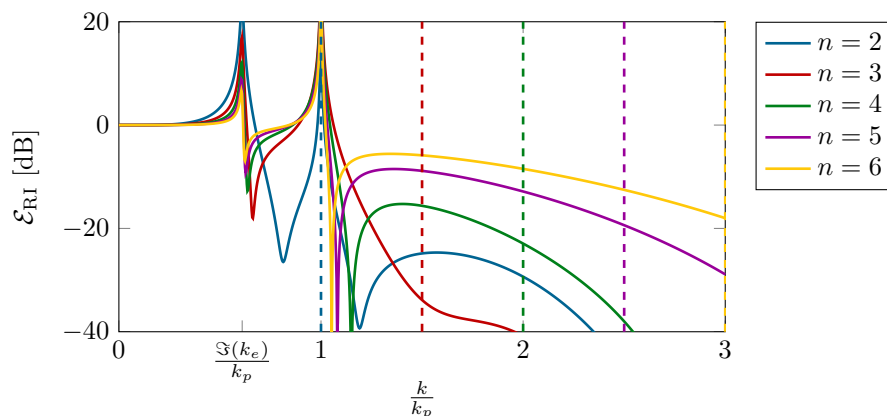


FIGURE 4.2 – Erreur  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  associée à la discrétisation de l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko pour  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$ . Les lignes verticales indiquent les limites de Shannon. Deux pôles sont observés en  $k_{\text{rd}} = k_p$  et en  $k_{\text{rd}} = \Im(k_e)$ . Deux zéros sont présents en  $k_{\text{rn}} \gtrsim \Im(k_e)$  si  $n > \pi \sqrt{\frac{-k_e^2}{k_p^2}}$  et en  $k_{\text{rn}} \gtrsim k_p$  si  $n > \pi$ .

Les figures 4.1 et 4.2 mettent en évidence l'erreur associée à la discrétisation de l'équation du mouvement pour  $\omega < \Omega_{\text{lim}}$  et  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$  respectivement. Diverses valeurs de discrétisation allant de  $n = 2$  à  $n = 6$  sont présentées, les lignes verticales indiquent les limites de Shannon associées, situées en  $\frac{k}{k_p} = \frac{n}{2}$ , à partir desquelles un repliement est attendu.

Sur la figure 4.1 ( $\omega < \Omega_{\text{lim}}$ ), un pôle est visible en  $k_{\text{rd}} = k_p$ , indépendamment de la valeur de  $n$ . Concernant les racines en  $k_{\text{rn}} \gtrsim k_p$ , elles ne sont observées que pour  $n > \pi$  et sont effectivement absentes pour  $n = 2$

et  $n = 3$ . Par ailleurs, plus  $n$  est grand, plus les singularités sont étroites. Dans le cas de la méthode RIFF, ces erreurs sont donc présentes mais sont très faibles de par la présence d'un maillage dense.

La figure 4.2 présente l'erreur  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  pour  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$ . Un pôle est présent en  $k_{\text{rd}} = \mathfrak{S}(k_e)$  comme attendu pour une telle pulsation  $\omega$ . Le pic en  $k_{\text{rd}} = k_p$  est également observé car il ne dépend pas de la fréquence. Un zéro est constaté en  $k_{\text{rn}} \gtrsim \mathfrak{S}(k_e)$  lorsque  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$ , à condition d'avoir  $n > \pi \sqrt{\frac{-k_e^2}{k_p^2}}$ , ce qui est vérifié pour  $n \in [2, 6]$  dans le cas présent. Enfin, une seconde racine est également visible en  $k_{\text{rn}} \gtrsim k_p$  si  $n > \pi$ , mais elle ne dépend pas de la fréquence, comme il a déjà été constaté en figure 4.1 pour  $\omega < \Omega_{\text{lim}}$ . Il reste à noter qu'un antipic est visible en  $k \gtrsim k_p$  avec  $n = 2$ , mais correspond en réalité à un repliement symétrique de l'antipic en  $k_{\text{rn}} \gtrsim \mathfrak{S}(k_e)$ .

La discrétisation de l'équation du mouvement peut être vue comme un filtrage de l'équation analytique tel que  $\hat{Q}_{\text{RI}}(k) = \mathcal{E}_{\text{RI}}(k)\hat{Q}(k)$ . Comme constaté dans les figures 4.1 et 4.2, la discrétisation des dérivées spatiales entraîne d'importantes erreurs d'estimation autour de  $k_p$ , quelle que soit la fréquence mais également aux alentours de  $\mathfrak{S}(k_e)$  si  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$ .

### 4.1.2 Correction du schéma aux différences finies

L'introduction d'un schéma aux différences finies induit une erreur systématique  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  mettant en évidence l'existence de maxima fixes en  $k_{\text{rd}} = k_p$  et  $k_{\text{rd}} = \mathfrak{S}(k_e)$  (pôles de  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$ ), ainsi que la présence de racines (zéros de  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$ ), permettant de filtrer les hauts nombres d'onde, et dont la position  $k_{\text{rn}}$  dépend du schéma aux différences finies. L'idée générale de la méthode RIC consiste à déplacer la position  $k_{\text{rn}}$  des zéros. En les faisant coïncider avec les pôles en  $k_{\text{rd}} = k_p$  et  $k_{\text{rd}} = \mathfrak{S}(k_e)$ , une compensation entre les pics et antipics de  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  est attendue. La correction du schéma aux différences finies est établie à l'aide d'un terme correctif  $\mu$  introduit tel que :

$$\hat{Q}_{\text{RIC}}(k) = \left[ \tilde{E}I\mu^4\kappa^4 + \rho I\omega^2 \left( \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \right) \mu^2\kappa^2 + \left( \frac{\rho^2 I\omega^4}{\tilde{G}} - \rho S\omega^2 \right) \right] \hat{W}(k), \quad (4.23)$$

amenant à l'erreur  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  issue du schéma aux différences finies corrigé :

$$\mathcal{E}_{\text{RIC}}(k) = \frac{\hat{Q}_{\text{RIC}}(k)}{\hat{Q}(k)} = \frac{A\mu^4\kappa^4 + B\mu^2\kappa^2 + C}{Ak^4 - Bk^2 + C}. \quad (4.24)$$

### 4.1.3 Pôles de $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$

Le dénominateur de  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  est identique à celui de  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$ , la position des pôles est donc inchangée.

### 4.1.4 Zéros de $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$

Les valeurs pour lesquelles le numérateur de  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  s'annule vérifient :

$$\kappa_{\text{rn}}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A\mu^4} = \frac{1}{\Delta_x^2} (2 \cos(\Delta_x k_{\text{rn}}) - 2). \quad (4.25)$$

Le terme correctif  $\mu$  est alors paramétré de manière à faire coïncider les pôles et les zéros de la fonction d'erreur  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$ , ce qui revient à définir  $k_{\text{rn}} = k_{\text{rd}}$ . L'équation 4.25 à résoudre devient alors :

$$\mu^2 = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta} \Delta_x^2}{2A} \cdot \frac{1}{2 \cos(\Delta_x k_{\text{rd}}) - 2} . \quad (4.26)$$

Pour  $\underline{\omega} < \Omega_{\text{lim}}$ ,  $k_{\text{rd}} = k_p$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1^2 = \frac{-k_p^2 \Delta_x^2}{2 \cos(\Delta_x k_p) - 2} , \quad (4.27a) \\ \mu_2^2 = \frac{k_e^2 \Delta_x^2}{2 \cos(\Delta_x k_p) - 2} . \quad (4.27b) \end{array} \right.$$

Étant donné que  $k_p \in \mathbb{R} \forall \omega$ , la condition  $-1 < \cos(k_p \Delta_x) < 1$  est vérifiée,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont solutions.

Pour  $\underline{\omega} > \Omega_{\text{lim}}$ ,  $k_{\text{rd}} = \{\Im(k_e), k_p\}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1^2 = \frac{-k_p^2 \Delta_x^2}{2 \cos(\Delta_x k_p) - 2} , \quad (4.28a) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_2^2 = \frac{k_e^2 \Delta_x^2}{2 \cos(\Delta_x k_p) - 2} , \quad (4.28b) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_3^2 = \frac{-k_p^2 \Delta_x^2}{2 \cos(\Delta_x \Im(k_e)) - 2} , \quad (4.28c) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_4^2 = \frac{k_e^2 \Delta_x^2}{2 \cos(\Delta_x \Im(k_e)) - 2} . \quad (4.28d) \end{array} \right.$$

Comme montré précédemment,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont solutions  $\forall \omega$ . Par ailleurs,  $k_e \in \mathbb{C}$  si  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$ . La condition  $-1 < \cos(\Im(k_e) \Delta_x) < 1$  est donc vérifiée,  $\mu_3$  et  $\mu_4$  sont également solutions.

L'erreur  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  associée au schéma aux différences finies corrigé à l'aide du terme  $\mu = \mu_1$  est présenté dans les figures 4.3 et 4.4 pour  $\omega < \Omega_{\text{lim}}$  et  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$  respectivement. La figure 4.5 présente l'erreur  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  déterminée en utilisant le terme correctif  $\mu = \mu_4$ , pour  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$ .

L'application du terme correctif  $\mu_1$  permet d'éliminer la singularité en  $k_p$ . Sur la figure 4.3, le profil de l'erreur  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  est équivalent à un filtre passe-bas dont la coupure dépend de la résolution du maillage  $n$ . Un avantage très intéressant découle de cette propriété puisque plus le nombre de points sur le maillage de mesure est faible, plus la coupure sera importante. Une étude de la résolution optimale est proposée dans la section suivante.

La figure 4.4 met également en évidence cette suppression de la singularité en  $k_p$ , mais celle en  $\Im(k_e)$  est toujours présente pour  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$ . En effet, les racines qui étaient présentes en  $k_{\text{rd}} \gtrsim \Im(k_e)$  ont été décalées par la correction comme souhaité, mais trop fortement, elles se retrouvent alors en  $k \lesssim \Im(k_e)$ .

Enfin, l'erreur  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  obtenue pour  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$  en utilisant le terme correctif  $\mu_4$  est tracée en figure 4.5. Dans ce cas, c'est la singularité présente en  $\Im(k_e)$  qui est éliminée, celle en  $k_p$  est toujours présente. Aucun des termes correctifs  $\mu$  obtenus dans les relations 4.28 ne permet d'éliminer simultanément les deux singularités. Cependant, il convient de rappeler que le cas particulier  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$  est inaccessible en pratique comme expliqué en section 2.1.2.

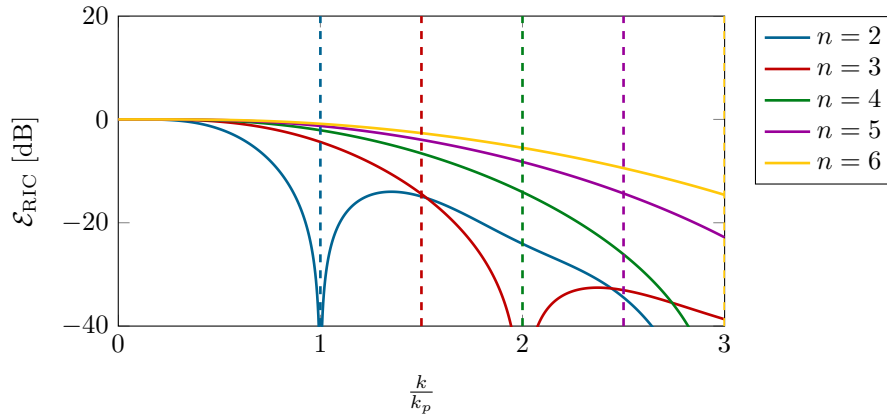


FIGURE 4.3 – Erreur  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  associée à la discrétisation corrigée de l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko pour  $\omega < \Omega_{\text{lim}}$ , avec  $\mu = \mu_1$ . Les lignes verticales indiquent les limites de Shannon. La singularité précédemment observée en  $k_p$  sur la figure 4.1 est désormais éliminée, l'erreur prend l'allure d'un filtre passe-bas.

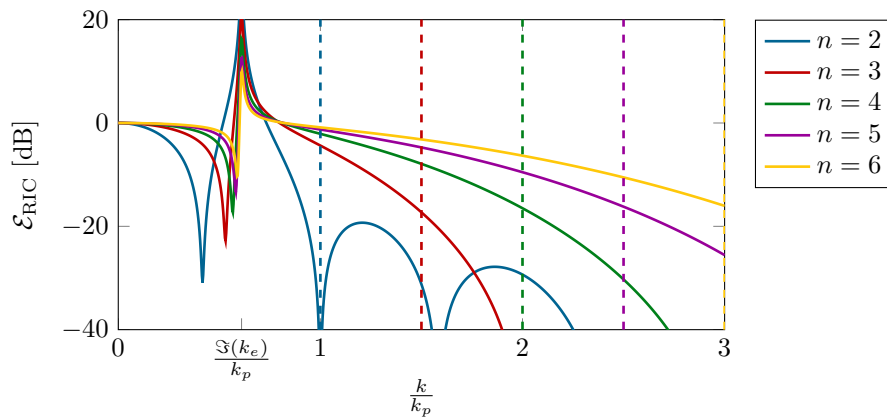


FIGURE 4.4 – Erreur  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  associée à la discrétisation corrigée de l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko pour  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$ , avec  $\mu = \mu_1$ . Les lignes verticales indiquent les limites de Shannon. La singularité précédemment observée en  $k_p$  sur la figure 4.2 est éliminée, mais celle constatée en  $\mathfrak{I}(k_e)$  est toujours présente.

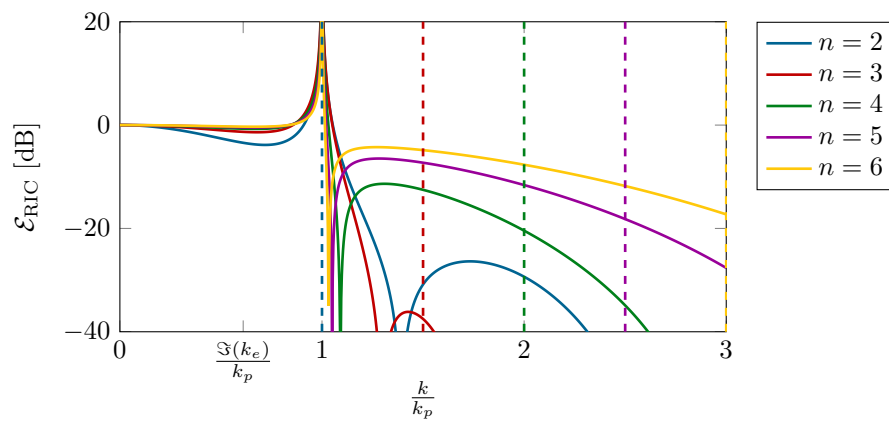


FIGURE 4.5 – Erreur  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  associée à la discrétisation corrigée de l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko pour  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$ , avec  $\mu = \mu_4$ . Les lignes verticales indiquent les limites de Shannon. Seule la singularité précédemment observée en  $\mathfrak{S}(k_e)$  sur la figure 4.2 est éliminée, celle constatée en  $k_p$  est toujours présente.

## 4.2 Optimisation de la méthode

Le terme correctif  $\mu$  est défini par :

$$\mu^2 = \frac{-k_p^2 \Delta_x^2}{2 \cos(\Delta_x k_p) - 2}. \quad (4.29)$$

Ce dernier correspond au terme  $\mu_1$  donné précédemment en relation 4.27. L'utilisation du terme  $\mu_2$  amène à des résultats comparables, toutefois, ce dernier nécessite la connaissance de  $k_p$  et de  $k_e$ . Le fait de devoir estimer 2 nombres d'onde simultanément pourrait altérer la précision de calcul de  $\mu$ .

Tout comme dans la méthode RIFF, la régularisation dépend du nombre d'onde propagatif  $k_p$ . Dans l'approche initiale de filtrage et fenêtrage, le nombre d'onde de coupure optimal est défini tel que  $k_e^{\text{opt}} = k_p$ . Pour la méthode RIC, le terme correctif  $\mu$  nécessite également la connaissance du nombre d'onde propagatif  $k_p$ .

En appliquant l'approche multi-fréquentielle permettant de stabiliser le problème de Timoshenko, la méthode RIFF utilise un filtrage identique de coupure  $k_p(f)$  pour les 3 fréquences  $f - \Delta_f$ ,  $f$  et  $f + \Delta_f$ . Le premier échantillon comporte donc toujours un léger bruit dans les nombres d'onde  $k > k_p(f - \Delta_f)$ , la fréquence centrale est idéalement filtrée en  $k_p(f)$ , et le dernier échantillon présente une coupure anticipée en  $k_p(f) < k_p(f + \Delta_f)$ . L'estimation des modules complexes demeure cependant satisfaisante, l'utilisation d'un même filtre de coupure identique  $k_p(f)$  n'est pas rédhibitoire.

### 4.2.1 Terme correctif $\mu$ et analyse multi-fréquentielle

La méthode RIC est plus exigeante quant au paramétrage du terme correctif  $\mu$ , son utilisation pour une analyse multi-fréquentielle nécessite une définition précise de  $\mu$  pour chaque fréquence. Deux études sont proposées présentant soit un maillage fixe, soit un maillage adaptatif en fonction de la fréquence. L'analyse est établie avec une poutre arbitraire étudiée pour  $f = 1000$  Hz,  $\Delta_f = 300$ Hz, et définie telle que  $k_p(f - \Delta_f) = 7.82$  rad.m<sup>-1</sup>,  $k_p(f) = 9.39$  rad.<sup>-1</sup>,  $k_p(f + \Delta_f) = 10.76$  rad.m<sup>-1</sup>.

#### Maillage fixe : $\Delta_x$ constant ( $n$ variable)

Considérons dans un premier temps que le maillage de mesure soit fixe et indépendant de la fréquence considérée. Le pas spatial entre 2 points de mesure est défini à  $\Delta_x = 0.17$  m. La résolution spatiale du maillage est donc inversement proportionnelle au nombre d'onde propagatif (voir relation 4.17), avec  $n(f - \Delta_f) = 4.8$ ,  $n(f) = 4$  et  $n(f + \Delta_f) = 3.5$ . La figure 4.6 présente l'erreur  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  associée à la discrétisation pour une étude multi-fréquentielle. L'application de cette dernière implique nécessairement la présence de 3 singularités autour de  $k_p(f - \Delta_f)$ ,  $k_p(f)$  et  $k_p(f + \Delta_f)$  lorsqu'aucune correction n'est mise en œuvre. De plus, l'allure de l'erreur dépend de la résolution fréquentielle  $n$  comme observé précédemment en figure 4.1, et donc de la fréquence dans le cas présent.

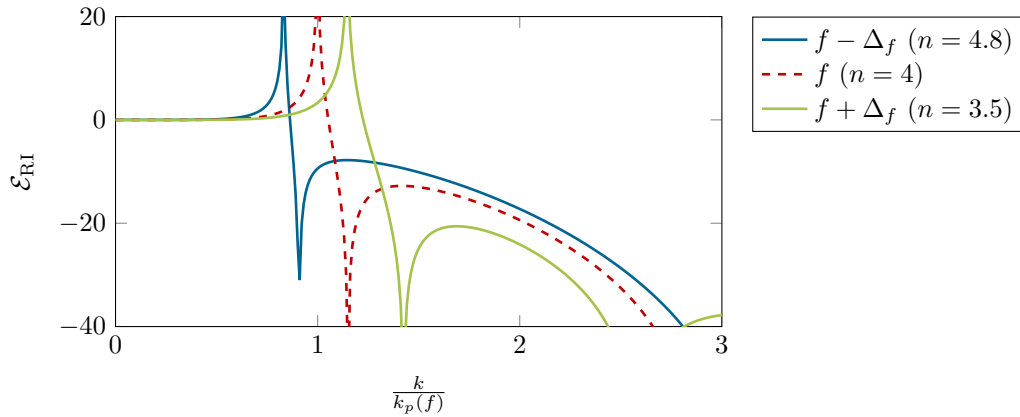


FIGURE 4.6 – Erreur  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  associée à la discrétisation de l'équation du mouvement, obtenue en considérant une analyse multi-fréquentielle, pour  $\Delta_x$  constant (maillage fixe), sans application du terme correctif  $\mu$ .

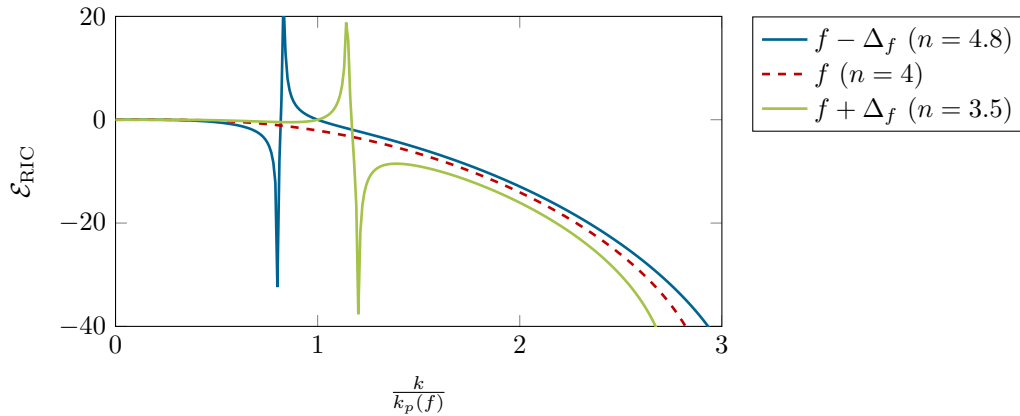


FIGURE 4.7 – Erreur  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  associée à la discrétisation corrigée de l'équation du mouvement, en considérant une analyse multi-fréquentielle, pour  $\Delta_x$  constant (maillage fixe), avec application d'un terme correctif  $\mu$  identique pour tous les échantillons fréquentiels  $[f - \Delta_f, f, f + \Delta_f]$ .

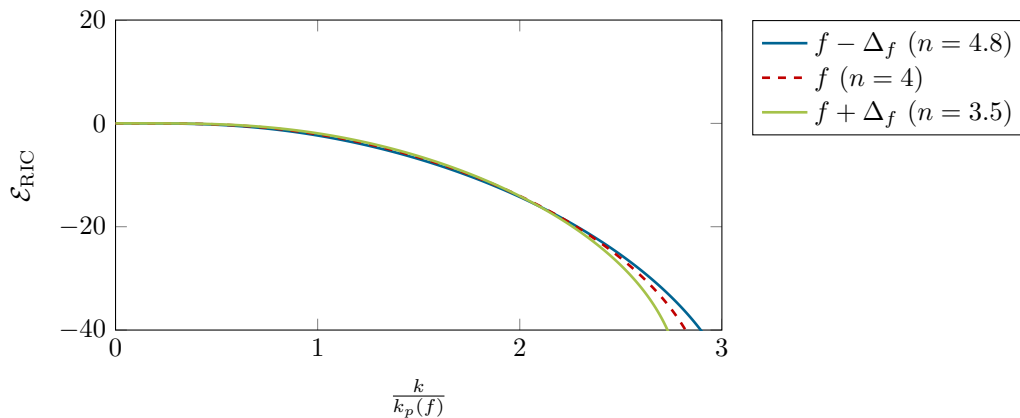


FIGURE 4.8 – Erreur  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  associée à la discrétisation corrigée de l'équation du mouvement, en considérant une analyse multi-fréquentielle, pour  $\Delta_x$  constant (maillage fixe), avec application d'un terme correctif  $\mu$  adapté pour chaque échantillon fréquentiel  $[f - \Delta_f, f, f + \Delta_f]$ .



Sur la figure 4.7, une correction unique  $\mu$ , accordée sur la fréquence centrale  $f$ , est appliquée telle que  $\mu(f - \Delta_f) = \mu(f) = \mu(f + \Delta_f)$ . Cette configuration a pour effet de corriger les singularités à la fréquence  $f$ , mais celles présentes en  $f \pm \Delta_f$  ont seulement été décalées vers les bas nombres d'onde. L'application d'une correction identique pour les 3 échantillons fréquentiels n'est donc pas possible.

Le terme correctif  $\mu$  est maintenant accordé pour chaque fréquence individuelle de sorte que  $\mu(f - \Delta_f) \neq \mu(f) \neq \mu(f + \Delta_f)$ . L'erreur corrigée en résultant est tracée en figure 4.8. Les singularités sont alors toutes corrigées et  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  prend l'allure d'un filtre passe-bas de coupure  $k_p(f)$  identique pour les 3 échantillons fréquentiels, tel qu'existant dans la méthode RIFF.

#### Maillage adaptatif : $n$ constant ( $\Delta_x$ variable)

Cette seconde configuration est établie de manière à ce que la résolution du maillage soit  $n = 4$  pour toutes les fréquences. Le maillage est dit adaptatif, le pas spatial  $\Delta_x$  est redéfini pour chaque fréquence avec :

$$\Delta_x(f) = \frac{2\pi}{nk_p(f)}. \quad (4.30)$$

Dans cette façon de procéder, le nombre d'onde propagatif  $k_p$  doit donc être connu avant même de définir le maillage adaptatif. Ce point sera discuté dans la section 4.2.2, le nombre d'onde  $k_p$  est considéré comme connu d'avance pour l'instant.

Si aucune correction n'est mise en œuvre, l'erreur  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  présentée en figure 4.9 met en évidence des singularités en  $k_p(f - \Delta_f)$ ,  $k_p(f)$  et  $k_p(f + \Delta_f)$ . Contrairement à ce qui a été constaté en 4.6, les allures de  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  sont identiques les unes aux autres puisque  $n$  est constant dans le cas présent. Le profil d'erreur est toujours le même et est simplement décalé le long de l'axe des nombres d'onde.

Étant donné que  $\Delta_x(f)$  est adapté en fonction de  $k_p(f)$  afin de garder  $n$  constant, la relation 4.29 peut être réécrite sous la forme :

$$\mu^2 = - \left( \frac{2\pi}{n} \right)^2 \frac{1}{2 \cos \left( \frac{2\pi}{n} \right) - 2}. \quad (4.31)$$

Cette dernière relation permet de constater que si le maillage est adaptatif ( $n$  constant) alors le terme correctif  $\mu$  est constant et ne dépend plus de la fréquence. En appliquant une telle correction on obtient les résultats présentés en figure 4.10. L'erreur corrigée  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  est similaire à trois filtres passe-bas identiques pour les 3 contributions fréquentielles, dont les nombre d'onde de coupure sont accordés en  $k_p(f - \Delta_f)$ ,  $k_p(f)$  et  $k_p(f + \Delta_f)$  respectivement.

**Nota bene :** L'unicité du terme correctif donné en relation 4.31 pour un maillage adaptatif est vérifiée théoriquement. Néanmoins, la discrétisation ne permet pas de paramétrer exactement le maillage adaptatif, ce dernier sera forcément approché lors d'une mesure, la résolution  $n$  ne pourra être identique à chaque fréquence. Pour cette raison, l'utilisation du terme correctif défini en relation 4.29 est préférée en pratique.

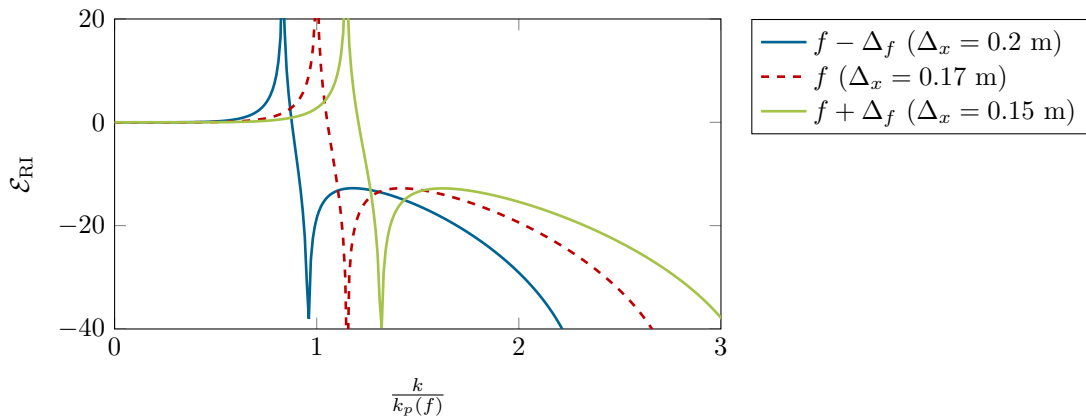


FIGURE 4.9 – Erreur  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  associée à la discrétisation de l'équation du mouvement, en considérant une analyse multi-fréquentielle, pour  $n$  constant (maillage adaptatif), sans application du terme correctif  $\mu$ .

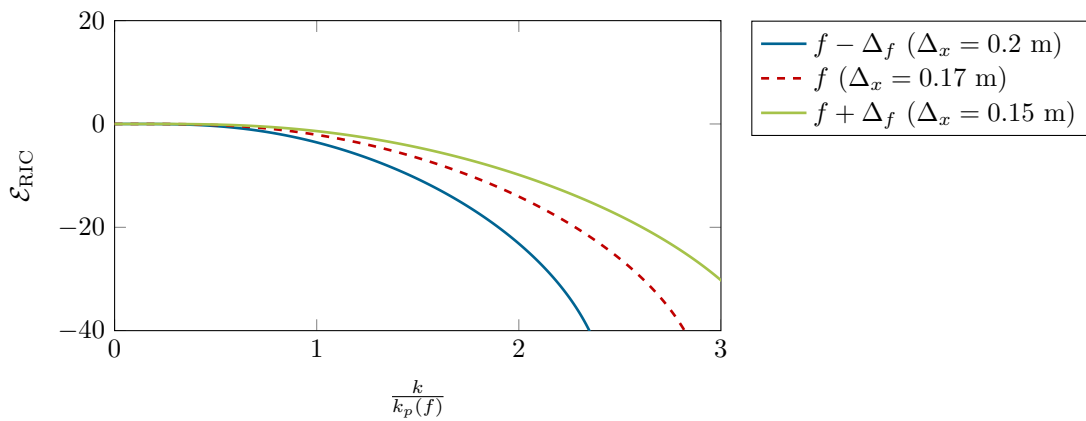


FIGURE 4.10 – Erreur  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  associée à la discrétisation corrigée de l'équation du mouvement, en considérant une analyse multi-fréquentielle, pour  $n$  constant (maillage adaptatif), avec application d'un terme correctif  $\mu$  constant pour tous les échantillons fréquentiels  $[f - \Delta_f, f, f + \Delta_f]$ .

### 4.2.2 Estimation du nombre d'onde propagatif $k_p$

Dans la méthode RIFF, après application de l'approche multi-fréquentielle avec  $[f - \Delta_f, f, f + \Delta_f]$ , il est possible de déduire le nombre d'onde propagatif de la fréquence centrale  $k_p(f)$  puis d'appliquer un filtrage identique aux données d'entrée tel que  $k_c(f - \Delta_f) = k_c(f) = k_c(f + \Delta_f) = k_p(f)$ . Quant à la méthode RIC, quel que soit le choix réalisé pour le maillage (fixe ou adaptatif), il est essentiel de connaître précisément la valeur du nombre d'onde propagatif  $k_p$  pour chaque la fréquence. En effet, la méthode RIC repose soit sur la définition d'un terme correctif  $\mu$  accordé en fonction de la fréquence, soit sur le paramétrage d'un pas spatial  $\Delta_x$  permettant d'adapter un maillage propre à chaque fréquence étudiée. Il est donc indispensable de pouvoir estimer  $k_p$ , et ce avant même d'appliquer l'approche multi-fréquentielle.

Pour ce faire, il est suggéré d'utiliser une méthode d'interpolation du champ de déplacement (souvent citée sous l'équivalent anglais "wavenumber fitting"), issue des travaux de McDaniel et al. [120]. De nombreuses méthodes d'interpolation spatiale, temporelle, ou fréquentielle, existent dans la littérature [108, 121–124] faisant le plus souvent usage d'une base polynomiale comme proposé initialement par De Prony [125]. Cependant, l'approche suggérée par McDaniel présente l'avantage non négligeable d'être efficace même lorsque le maillage est grossier ou irrégulier.

A fréquence fixée, le champ de déplacement de la structure, mesuré en dehors des sources, est approché par une somme de fonctions exponentielles utilisant le nombre d'onde propagatif  $k_p$ . Ce champ interpolé noté  $W_{MD}$  est défini par :

$$W_{MD}(x) = c_1 e^{k_p x} + c_2 e^{-k_p x} + c_3 e^{ik_p x} + c_4 e^{-ik_p x} \approx W(x). \quad (4.32)$$

Les constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  et  $c_4$  sont déduites par une inversion au sens des moindres carrés entre la base d'exponentielles et  $W$ , pour diverses valeurs candidates de  $k_p$ . Une minimisation du résidu  $R = \sum_{i=1}^{N_x} |W_{MD}(x_i) - W(x_i)|^2$  permet d'en déduire le nombre d'onde propagatif complexe  $k_p(f)$ . Cette procédure est ensuite réitérée pour chaque fréquence.

Pour illustrer l'efficacité de cette méthode d'estimation du nombre d'onde  $k_p$ , l'exemple de la poutre épaisse en aluminium définie dans le tableau 2.4 est réutilisé. Le champ de déplacement en dehors des sources vibratoires est constitué de 270 points. Un bruit présentant un RSB de 30 dB est ensuite ajouté puis 3 configurations de maillage sont essayées pour  $x \in [0.1; 1]$  m. La première présente une discrétisation spatiale régulière avec 270 points, soit  $\Delta_x = 3.3$  mm. Un second maillage est établi à partir de 30 points espacés régulièrement de  $\Delta_x = 30$  mm. La dernière configuration consiste en une répartition aléatoire de 40 points.

Les nombres d'onde propagatifs estimés sont présentés en figure 4.11 pour les trois types de maillage. La formulation de McDaniel permet une excellente identification de la partie réelle de  $k_p$ , le nombre de points de mesure et la régularité de leur espacement ne modifie pas les résultats. En revanche, une variabilité plus importante est observée vis à vis de la partie imaginaire de  $k_p$ . Cette dernière est plus difficile à estimer et ce de façon inversement proportionnelle à la densité du maillage. Un lissage du nombre d'onde propagatif obtenu par la méthode de McDaniel est proposé au moyen de l'expression 4.33, basée sur un

développement de la relation 2.17 en une somme de racines  $n^{\text{ème}}$ , dont la convergence est nettement plus efficace qu'une interpolation polynômiale :

$$k_{p,\text{fit}}(\omega) = \sum_{i=1}^4 A_i \sqrt[i]{\omega}. \quad (4.33)$$

Les courbes intitulées "McDaniel + lissage" présentées en figure 4.11 sont obtenues après application de ce lissage sur le nombre d'onde  $k_p$  déduit par le modèle de McDaniel. Une superposition satisfaisante est obtenue avec le nombre d'onde propagatif défini dans le problème direct, indépendamment de la partie observée (réelle ou imaginaire) et du maillage utilisé.

Ces étapes d'interpolation par la méthode de McDaniel et de lissage des résultats autorisent une estimation robuste du nombre d'onde propagatif complexe  $k_p$ . La connaissance de ce dernier sera primordiale pour paramétrer la Résolution Inverse Corrigée de manière efficace.

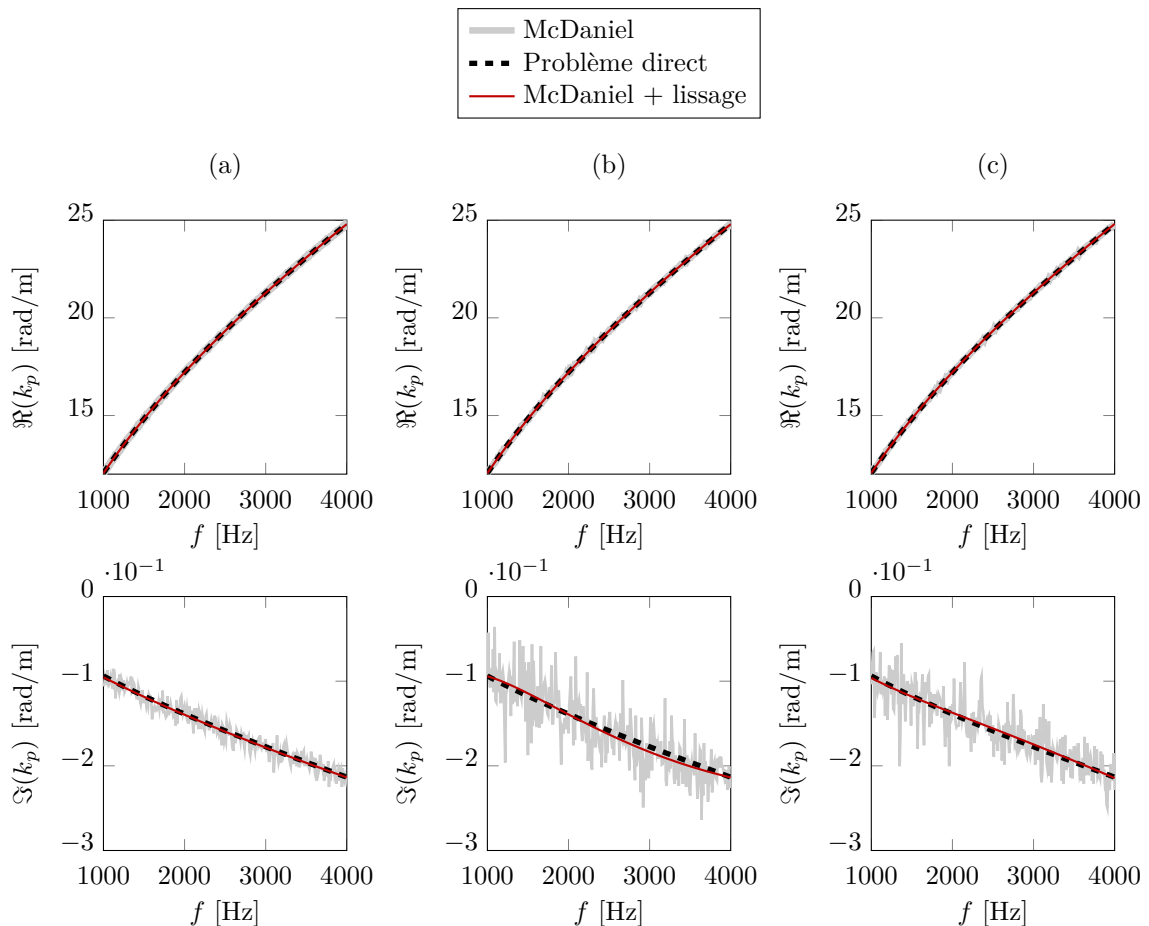


FIGURE 4.11 – Parties réelle (haut) et imaginaire (bas) du nombre d'onde propagatif déterminé par la méthode de McDaniel avec un maillage (a) régulier de 270 points, (b) régulier de 30 points, ou (c) irrégulier de 40 points.

### 4.2.3 Résolution optimale du maillage adaptatif

Dans le cadre d'un maillage adaptatif, la résolution  $n$  est constante et indépendante de la fréquence. Néanmoins, la valeur de  $n$  pilote la forme du filtre passe-bas qui résulte de la méthode RIC (voir figure 4.3). Pour la méthode RIFF il a été observé que le filtre idéal est obtenu avec  $k_c^{\text{opt}} = k_p$ . De la même manière, il est intéressant de connaître la valeur optimale  $n^{\text{opt}}$  qui permette de minimiser les erreurs d'identification des caractéristiques du matériau. Dans ce but, deux simulations mettant en jeu des structures différentes (dont les effets de cisaillement sont plus ou moins prononcés) sont établies avec divers niveaux de bruit. Les configurations réalisées sont résumées dans le tableau 4.1, les champs de déplacement sont obtenus à l'aide de la relation 2.47.

Paramètre	Valeur	
	Simulation 1	Simulation 2
Longueur $L_x$		1 m
Largeur $L_y$	5 mm	3 cm
Épaisseur $L_z$	3 cm	1 cm
Nombre de points $N_x$		300
Masse volumique $\rho$	2700 kg.m <sup>-3</sup>	2000 kg.m <sup>-3</sup>
Module d'Young $E$	70 GPa	40 GPa
Facteur de perte $\eta_E$		0.03
Module de cisaillement $G$	26 GPa	1 GPa
Facteur de perte $\eta_G$		0.05
Fréquence $f$		1000 à 4000 Hz
Force $F$		1 N
Position de la source $x_0$		0.05 m
Zone d'étude		$x \in [0.1; 1]$ m
Rapport Signal à Bruit		25 à 60 dB
Résolution finale $n$	2 à 7 points par longueur d'onde	

TABLEAU 4.1 – Paramètres de simulation pour l'étude de la résolution de maillage optimale  $n^{\text{opt}}$ .

Un maillage initial est établi avec 300 points présentant un pas spatial de  $\Delta_x = 3.3$  mm. Pour chaque fréquence, certains points du maillage sont conservés afin de respecter au mieux une résolution de  $n$  points par longueur d'onde. Une illustration donnée en figure 4.12 montre le champ de déplacement transverse obtenu sur 300 points avec la simulation 1, ainsi que les positions des échantillons conservés afin d'obtenir un maillage adaptatif tel que la résolution soit  $n \approx 3$ . Ce principe de maillage adaptatif est réalisé à partir de diverses valeurs de  $n = [2; 7]$  et ce pour les deux simulations. Les dérivées spatiales  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$  sont estimées sur maillage adapté à l'aide d'un schéma aux différences finies de 5 points.

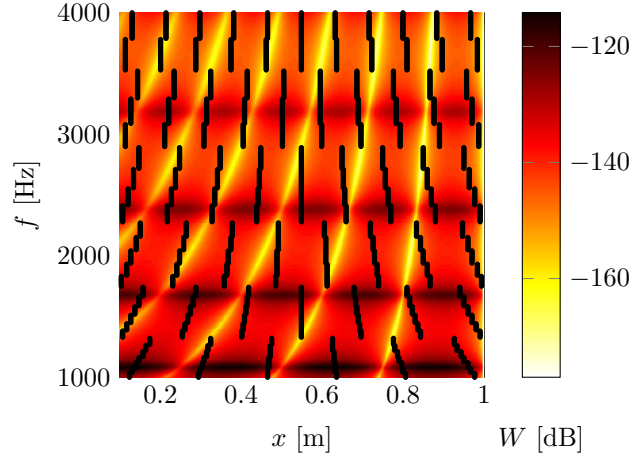


FIGURE 4.12 – Champ de déplacement  $W$  associé à la simulation 1 (arrière plan) et position des points conservés pour le maillage adaptatif avec  $n \approx 3$ .

Les paramètres élastiques et les facteurs de pertes sont ensuite obtenus par le problème inverse de Timoshenko appliqué en dehors des sources, soit  $x \in [0.1; 1]$  m. L'approche multifréquentielle est mise en œuvre (relation 3.5) avec  $\Delta_f = 540$  Hz pour la simulation 1 et  $\Delta_f = 300$  Hz pour la simulation 2. La précision issue de chaque maillage est quantifiée par un calcul d'erreur entre le module de cisaillement  $G$  estimé par la méthode RIC et celui défini dans le problème direct, comme donné en équation 4.34 :

$$\text{Err}_G = \frac{|G_{\text{RIC}} - G|}{G}. \quad (4.34)$$

Le maillage est adaptatif et le bruit défini présente un rapport signal à bruit constant vis à vis du champ de déplacement transverse  $W$ . L'erreur est donc faiblement dépendante de la fréquence, comme confirmé par la figure 4.13 présentant l'erreur  $\text{Err}_G$  avec un rapport signal à bruit de 35 dB pour la simulation 1, en fonction de la résolution du maillage  $n$  et de la fréquence  $f$ . L'erreur minimale se situe globalement autour de  $n = 3$  quelque soit la fréquence, cette tendance est vérifiée indépendamment du niveau de bruit. Une moyenne de cette erreur est donc établie dans la direction  $f$ , amenant aux résultats présentés en figures 4.14 et 4.15 pour les simulations 1 et 2 respectivement.

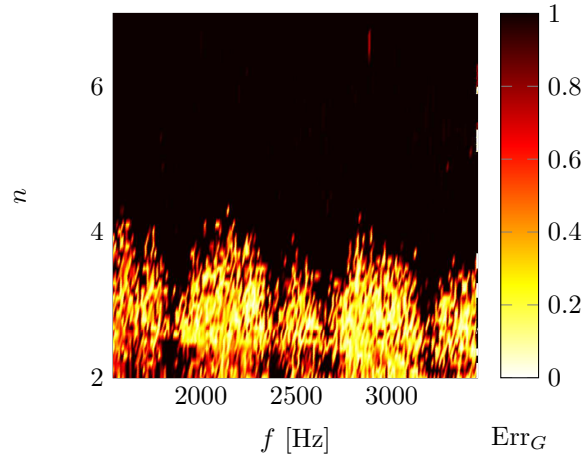


FIGURE 4.13 – Erreur d’estimation du module de cisaillement  $Err_G$  en fonction de la résolution de maillage  $n$  et de la fréquence  $f$  pour la simulation 1, avec  $RSB = 35$  dB.

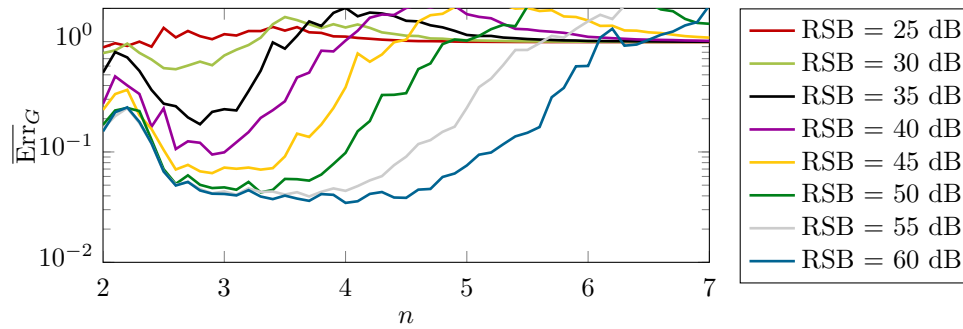


FIGURE 4.14 – Erreur moyenne  $\overline{Err}_G$  sur le module de cisaillement  $G$ , obtenue à l’issue de l’analyse multi-fréquentielle pour la simulation 1, avec  $\Delta_f = 540$  Hz,  $n$  constant (maillage adaptatif) et application d’un terme correctif  $\mu$  défini pour chaque échantillon fréquentiel  $[f - \Delta_f, f, f + \Delta_f]$ .

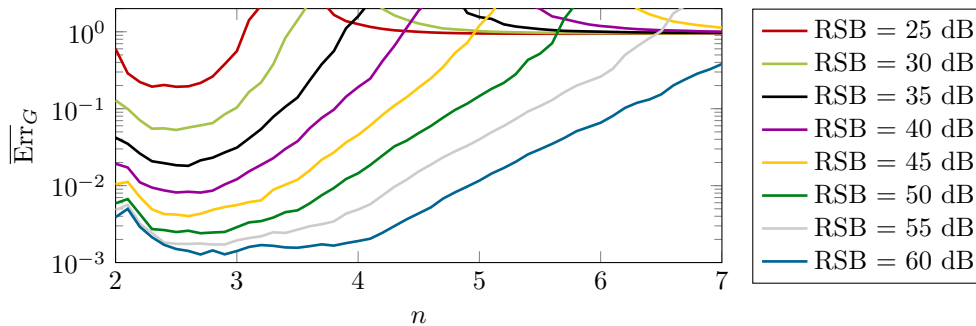


FIGURE 4.15 – Erreur moyenne  $\overline{Err}_G$  sur le module de cisaillement  $G$ , obtenue à l’issue de l’analyse multi-fréquentielle pour la simulation 2, avec  $\Delta_f = 300$  Hz,  $n$  constant (maillage adaptatif) et application d’un terme correctif  $\mu$  défini pour chaque échantillon fréquentiel  $[f - \Delta_f, f, f + \Delta_f]$ .

Les profils d'erreur obtenus en figures 4.14 et 4.15 présentent globalement un minimum situé autour de  $n = 3$ , indépendamment du niveau de bruit et de la simulation considérés. Le tableau 4.2 donne la résolution  $n$  permettant de minimiser l'erreur moyenne sur le module de cisaillement  $G$ , pour les deux simulations établies et pour tous les niveaux de bruits testés. À la suite de ces observations, il est décidé que l'utilisation d'un maillage adaptatif impliquera de paramétrer la résolution spatiale à  $n^{\text{opt}} = 2.8$ , valeur pour laquelle l'erreur est toujours relativement faible. Des résultats tout à fait comparables ont été obtenus avec différentes valeurs de  $\Delta_f$  sur chacune de ces deux simulations, les erreurs d'estimation varient mais la position de leurs minima reste inchangée.

Pour finir, il convient de noter que cette approche nécessite l'existence préalable d'un maillage de mesure dense (300 points ici) pour définir un maillage adapté dans un second temps. L'avantage majeur réside dans la rapidité des calculs puisque les inversions matricielles se basent alors sur très peu de coordonnées spatiales (2 à 7 points après application des différences finies). Par ailleurs, l'application d'un filtre n'est plus nécessaire puisqu'il est contenu dans la formulation même de la méthode RIC.

<b>RSB</b>	<b>Simulation 1</b>	<b>Simulation 2</b>
25 dB	$n = 2.1$	$n = 2.5$
30 dB	$n = 2.6$	$n = 2.5$
35 dB	$n = 2.8$	$n = 2.6$
40 dB	$n = 2.9$	$n = 2.7$
45 dB	$n = 2.9$	$n = 2.6$
50 dB	$n = 3.3$	$n = 2.7$
55 dB	$n = 3.7$	$n = 2.8$
60 dB	$n = 4.0$	$n = 2.7$

TABLEAU 4.2 – Résolution de maillage  $n$  entraînant une erreur moyenne  $\overline{\text{Err}}_G$  la plus faible, pour les deux simulations établies, en fonction du Rapport Signal à Bruit.

#### 4.2.4 Intervalle fréquentiel $\Delta_f$

La façon de déduire l'intervalle fréquentiel optimal  $\Delta_f^{\text{opt}}$  est équivalente à celle définie en section 3.4.1 utilisant une minimisation de la fonction  $\mathcal{O}_G(\Delta_f)$ .



### 4.3 Validation de la méthode RIC

Afin de confirmer l'intérêt de la méthode RIC, l'expérimentation sur la poutre composite avec une âme en nid d'abeille (NIDA) précédemment établie en 3.5.2 est réemployée. Le champ de déplacement initialement mesuré sur un maillage de 133 points (en dehors des sources) avec  $\Delta_x = 4.1$  mm est utilisé dans deux différentes configurations de la méthode RIC. Une première fait usage d'un maillage adaptatif, la seconde emploie un maillage grossier invariant.

#### 4.3.1 Maillage adaptatif

Dans cette version de la méthode RIC, le maillage de mesure initial de 133 points est utilisé afin d'en déduire le nombre d'onde propagatif  $k_p$  à partir de la méthode de McDaniel, présenté en figure 4.16. Une estimation fiable est obtenue pour  $f = [250; 2900]$  Hz, cette portion est ensuite utilisée pour établir une interpolation comme stipulé en relation 4.33. Le nombre d'onde propagatif estimé présente une allure quasiment linéaire, comme attendu d'un matériau à fort potentiel de cisaillement. Connaissant désormais le nombre d'onde propagatif sur toute la bande fréquentielle, quelques points du maillage initial sont conservés de manière à définir un maillage adaptatif à résolution constante avec (relation 4.30)  $n \approx 2.8$ . Ce dernier est représenté en figure 4.17, sur laquelle on constate effectivement une variation du pas spatial  $\Delta_x$  en fonction de la fréquence. Le terme correctif  $\mu$  est accordé conformément à la relation 4.29.

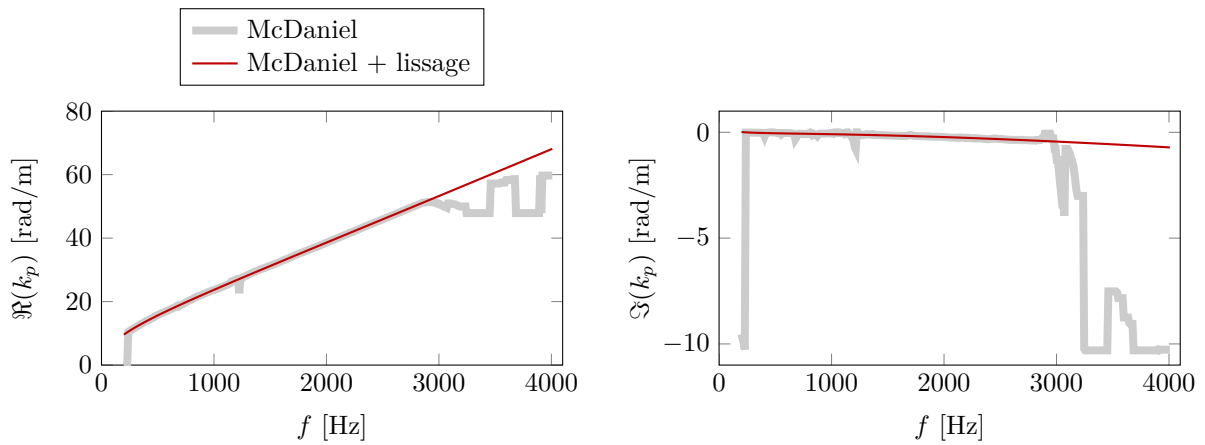


FIGURE 4.16 – Nombre d'onde propagatif  $k_p$  identifié par la méthode de McDaniel pour la poutre sandwich NIDA avec un maillage régulier de 133 points et une interpolation basée sur la bande fréquentielle  $f = [250; 2900]$  Hz. L'allure est cohérente avec l'estimation du nombre d'onde établie par la méthode RIFF en figure 3.33.

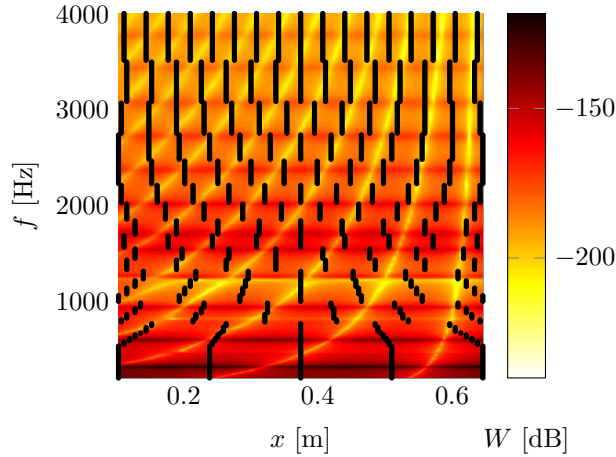


FIGURE 4.17 – Champ de déplacement  $W$  mesuré sur la poutre NIDA (arrière plan) et position des points conservés pour le maillage adaptatif avec  $n \approx 2.8$ .

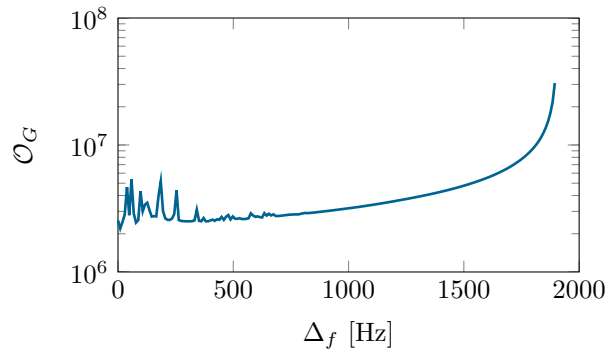


FIGURE 4.18 – Fonction objective  $\mathcal{O}_G$  obtenue pour la poutre NIDA par la méthode RIC avec un maillage adaptatif ( $n \approx 2.8$ ). La minimisation de  $\mathcal{O}_G$  (en dehors de la zone transitoire) amène à l'intervalle fréquentiel optimal  $\Delta_f^{\text{opt}} = 322.3$  Hz.

L'analyse multi-fréquentielle est mise en œuvre pour diverses valeurs de  $\Delta_f$ . La minimisation de la fonction objective  $\mathcal{O}_G(\Delta_f)$ , issue de l'équation 3.6, est disponible en figure 4.18 et permet d'en déduire l'intervalle fréquentiel optimal, déterminé ici à  $\Delta_f^{\text{opt}} = 322.3$  Hz, ce qui est cohérent avec l'intervalle fréquentiel optimal obtenu par la méthode RIFF sur ce même cas expérimental ( $\Delta_f^{\text{opt}} = 312.5$  Hz). Cette configuration est donc conservée pour l'analyse multi-fréquentielle, les paramètres élastiques et les facteurs de pertes identifiés sont montrés en figure 4.19. La tendance générale est en parfait accord avec les résultats obtenus par la méthode RIFF, disponibles en figure 3.35. Les modules  $E$  et  $G$  estimés par le modèle de Timoshenko sont globalement stables en fréquence, l'allure des facteurs de pertes  $\eta_E$  et  $\eta_G$  laisse supposer une part importante de l'âme NIDA dans les mécanismes de dissipation de l'énergie vibratoire. Le modèle d'Euler-Bernoulli ne distingue qu'un amortissement global, et le cisaillement est vu comme une perte de rigidité en flexion de la structure quand  $f$  augmente.

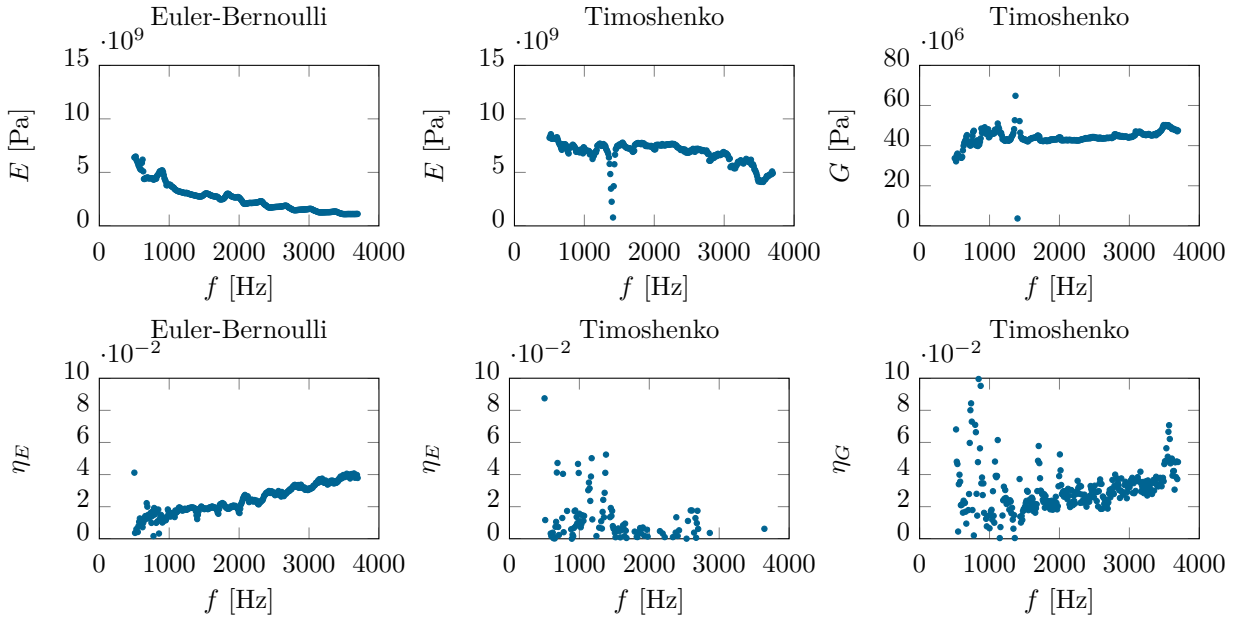


FIGURE 4.19 – Paramètres élastiques et facteurs de pertes identifiés pour la poutre sandwich NIDA par la méthode RIC avec un maillage adaptatif ( $n \approx 2.8$ ) et  $\Delta_f^{\text{opt}} = 322.3$  Hz.

### 4.3.2 Maillage fixe

Dans cette nouvelle configuration, seulement 14 points de mesure sont conservés avec un pas spatial de  $\Delta_x = 41.2$  mm, comme si la mesure avait été directement réalisée sur maillage grossier. Une estimation du nombre d'onde propagatif  $k_p$  est mise en œuvre comme décrit en section 4.2.2. Ce dernier est tracé en figure 4.20 et présente une tendance quasiment linéaire entre 250 et 2900 Hz, comme obtenu précédemment en figure 4.16. Une interpolation du nombre d'onde  $k_p$  est établie sur cette portion stable à l'aide de la relation 4.33, qui permet une estimation fiable de  $k_p$  sur toute la bande fréquentielle d'étude.

L'approche multifréquentielle est utilisée pour déterminer les modules complexes pour toutes les combinaisons de  $(f, \Delta_f)$ . Le module de cisaillement  $G$  associé, visible en figure 4.21, met en évidence une importante variabilité sur la bande fréquentielle  $f = [0; 1700]$  Hz, indépendamment de la valeur de  $\Delta_f$ . Ceci peut s'expliquer par la présence d'une résolution du maillage trop élevée en basses fréquences. En effet, lorsque le nombre de points par longueur d'onde est important, le filtrage associé à la méthode RIC induit une coupure plus haute dans le domaine des nombres d'onde (voir figure 4.3). Le bruit est moins filtré, amenant à de fortes erreurs dans l'estimation de  $G$ . Il est donc supposé que le maillage régulier de 14 points est intéressant pour des fréquences supérieures à 2000 Hz.

Afin de bénéficier d'un effet de filtrage efficace aux basses fréquences, une réduction du maillage, consistant à conserver un point sur deux, est proposée. Un maillage de 7 points est ainsi obtenu avec un pas spatial doublé ( $\Delta_x = 82.4$  mm). Le nombre d'onde propagatif  $k_p$  obtenu en figure 4.20 reste valable, une estimation de  $k_p$  sur le maillage de 7 points n'est pas nécessaire.

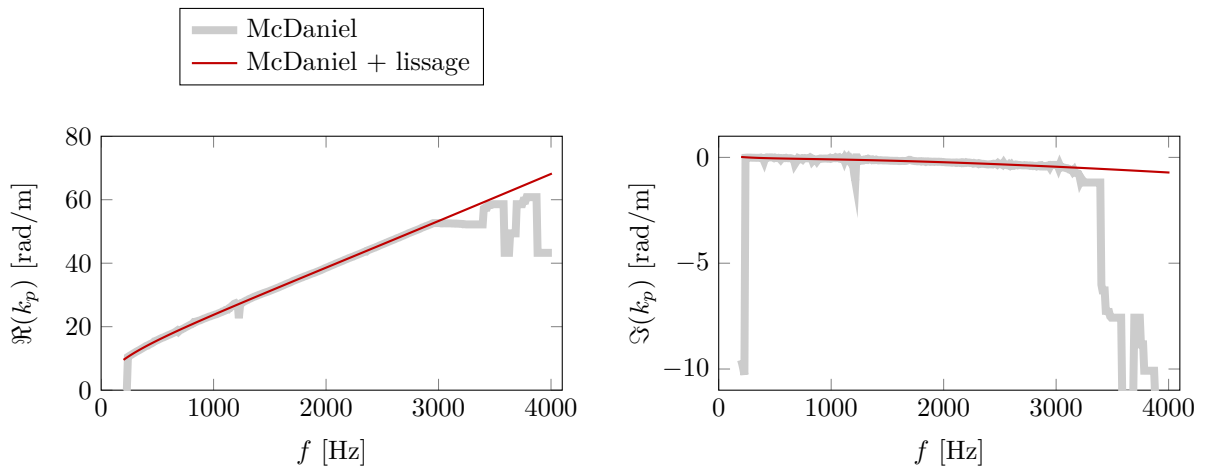


FIGURE 4.20 – Nombre d’onde propagatif  $k_p$  déterminé par la méthode de McDaniel pour la poutre sandwich NIDA avec un maillage régulier de 14 points et une interpolation basée sur la bande fréquentielle  $f = [250; 2900]$  Hz. L’allure générale est en accord avec les estimations du nombre d’onde établies par la méthode RIFF (figure 3.33) et par la méthode de McDaniel sur maillage de 133 points (figure 4.16).

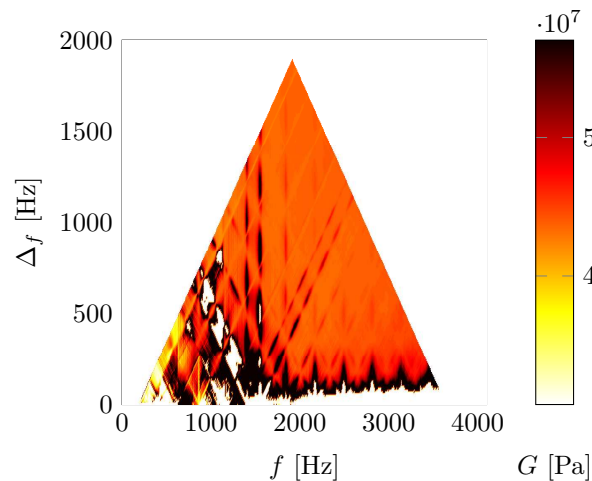


FIGURE 4.21 – Module de cisaillement  $G$  identifié en fonction de l’intervalle fréquentiel  $\Delta_f$  et de la fréquence  $f$ , avec un maillage fixe de 14 points. Une variabilité forte observée pour  $f < 2000$  Hz laisse supposer une résolution spatiale trop importante pour les fréquences basses, le filtrage associé n’est pas assez restrictif.

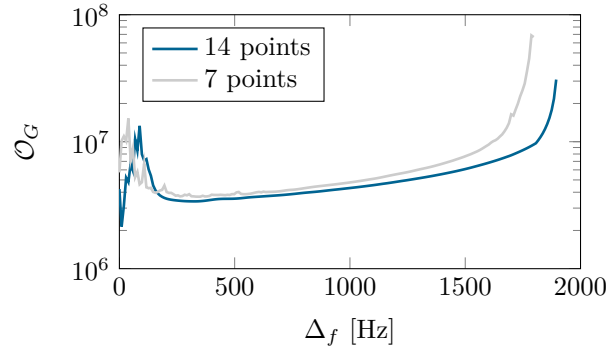


FIGURE 4.22 – Fonction objective  $\mathcal{O}_G$  obtenue pour la poutre NIDA par la méthode RIC avec un maillage fixe de 14 points ou 7 points. La minimisation de  $\mathcal{O}_G$  (en dehors de la zone transitoire) amène à l'intervalle fréquentiel optimal  $\Delta_f^{\text{opt}} = 341.8$  Hz ou  $\Delta_f^{\text{opt}} = 322.3$  Hz respectivement.

Le calcul de l'intervalle fréquentiel optimal  $\Delta_f^{\text{opt}}$  est réalisé pour les deux maillages grossiers utilisés pour 2 bandes fréquentielles isolées. Le maillage de 14 points (ou 7 points) établit une minimisation de  $\mathcal{O}_G$  pour  $f > 2000$  Hz (ou  $f < 2000$  Hz). On en déduit alors  $\Delta_f^{\text{opt}} = 341.8$  Hz et  $\Delta_f^{\text{opt}} = 322.3$  Hz pour les maillages de 14 points et 7 points respectivement. Il est intéressant de noter que cet intervalle fréquentiel optimal dépend très peu de la bande fréquentielle d'étude, ce qui prouve que le problème de stabilisation du modèle de Timoshenko est indépendant de la fréquence.

Après application de l'analyse multi-fréquentielle, les caractéristiques du matériau présentées en figure 4.23 sont obtenues à l'aide d'un maillage de 14 ou 7 points. Le modèle d'Euler-Bernoulli met toujours en évidence un effet de compensation du module d'Young  $E$  et du facteur de perte associé  $\eta_E$ . Par ailleurs, les paramètres déduits du modèle d'Euler-Bernoulli sont similaires, quelque soit le maillage utilisé, malgré le fait que la résolution du maillage  $n$  induise un filtrage plus ou moins restrictif. En effet, il a été vu en section 3.4.2 que le modèle d'Euler-Bernoulli est peu sensible au nombre d'onde de coupure, d'où sa faible dépendance au maillage utilisé dans la méthode RIC.

Le modèle de Timoshenko démontre en revanche l'existence de bandes fréquentielles d'analyse fiables dépendantes du maillage. Cette particularité se distingue majoritairement sur  $E$  et  $G$  dont l'identification est à mettre en doute pour  $f < 2000$  Hz avec un maillage de 14 points. Une chute brutale est également visible autour de  $f > 3000$  Hz avec un maillage de 7 points. Néanmoins, un recouvrement important est observé dans la bande  $f = [2000; 3000]$  Hz. En négligeant les zones fréquentielles instables, une continuité existe entre les estimations établies à partir de ces deux maillages grossiers. Les paramètres élastiques et les facteurs de pertes peuvent être identifiés sur toute la bande fréquentielle à partir d'une unique mesure établie sur un maillage de 14 points, réduit à 7 points lors de l'identification en basses fréquences par la méthode RIC.

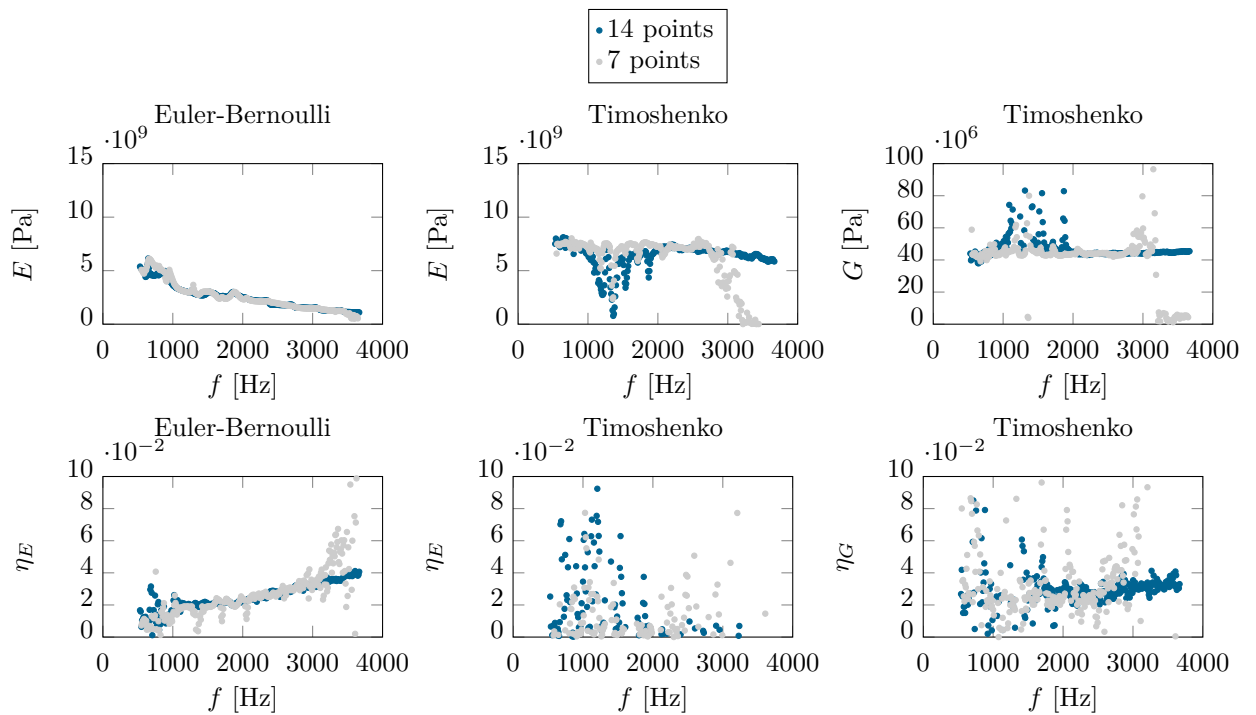


FIGURE 4.23 – Paramètres élastiques et facteurs de pertes identifiés pour la poutre sandwich NIDA par la méthode RIC avec maillage fixe de 14 points ( $\Delta_f^{\text{opt}} = 341.8$  Hz) et avec maillage fixe de 7 points ( $\Delta_f^{\text{opt}} = 322.3$  Hz).

## 4.4 Conclusions

La Résolution Inverse Corrigée originalement proposée par Leclère et al. [96] constitue une extension importante de la méthode RIFF. La régularisation des données de mesure ne se fait plus à travers un filtrage mais par le biais d'une correction du schéma aux différences finies.

Le principe général de la méthode RIC repose sur un rapport entre les expressions analytique et discrétisée de l'équation du mouvement. La discrétisation de cette dernière, entraîne d'importantes erreurs d'analyse autour du nombre d'onde naturel de la structure. L'introduction d'un terme correctif  $\mu$  permet alors d'accorder les singularités afin de les compenser mutuellement. L'erreur initiale entre l'équation du mouvement analytique et sa version discrétisée devient alors un simple filtre passe-bas.

Le nombre d'onde propagatif doit cependant être connu avant de déterminer les paramètres élastiques et d'amortissements. La méthode de McDaniel permet de répondre à cette problématique, y compris lorsque le maillage de mesure est grossier. L'optimisation de la méthode RIC consiste alors à définir soit un maillage adaptatif avec un terme correctif  $\mu$  constant, permettant d'avoir un filtrage identique pour toutes les fréquences, soit un maillage constant en fréquence, impliquant une définition précise du terme correctif  $\mu$  à chaque fréquence. Par ailleurs, la coupure du filtre résultant est pilotée par la résolution du maillage de mesure. Il a été constaté qu'une résolution constante à  $n \approx 2.8$  permet la meilleure identification des caractéristiques du matériau.

Enfin, une validation sur cas expérimental d'une poutre sandwich NIDA met en évidence l'intérêt de la méthode RIC. En utilisant nettement moins de points de mesure, les modules complexes obtenus restent très cohérents au regard de ceux estimés par la méthode RIFF. Par ailleurs, les temps de mesure et de calcul sont nettement réduits, comme le montre le tableau 4.3. Une analyse complète par la méthode RIC est alors possible en moins de 2 minutes contre plus de 3 heures pour la méthode RIFF, à puissance de calcul équivalente (ordinateur portable *HP*<sup>®</sup> ProBook 4540s, Intel Core i7, 2.20 GHz, 8 Go de RAM). Néanmoins, l'importante durée de post-traitement impliqué par l'application de la méthode RIFF est majoritairement due au calcul du nombre d'onde de coupure optimal  $k_c^{\text{opt}}$ , déterminé pour chaque intervalle fréquentiel  $\Delta_f$ . Cette procédure pourrait également être accélérée grâce à l'application de la méthode de McDaniel en amont du calcul de l'intervalle fréquentiel optimal  $\Delta_f^{\text{opt}}$ .

	RIFF	RIC		
		Maillage adaptatif	Maillage fixe	
			14 points	7 points
Estimation de $k_p$ par la méthode de McDaniel		73 s	40 s	
Réduction du maillage		40 ms	30 ms	23 ms
Régularisation pour chaque $k_c$ candidat	33 s			
Estimation de $k_c^{\text{opt}} = k_p$ pour chaque valeur de $\Delta_f$	3.5 h			
Calcul de $\Delta_f^{\text{opt}}$		16 s	17 s	14 s
Résolution inverse	1.8 s	0.2 s	0.18 s	0.18 s
Durée totale	$\approx 3.5$ h	$\approx 90$ s	$\approx 72$ s	

TABLEAU 4.3 – Résumé des durées de post-traitement pour l'étude de la poutre multicouche NIDA en fonction de la méthode utilisée, à puissance de calcul équivalente (ordinateur portable *HP*<sup>®</sup> ProBook 4540s, Intel Core i7, 2.20 GHz, 8 Go de RAM). La rapidité de la méthode RIC réside essentiellement dans l'usage de la méthode de McDaniel pour estimer le nombre d'onde propagatif  $k_p$ .





## Chapitre 5

# Détection et identification de défauts

La mise en œuvre des méthodes inverses vibratoires RIFF et RIC autorise jusqu'ici la caractérisation fréquentielle de poutres composites. Au moyen d'une sur-information spatiale, les paramètres  $E$ ,  $G$ ,  $\eta_E$  et  $\eta_G$  du matériau peuvent être identifiés précisément sur une large bande fréquentielle.

A l'exception de quelques techniques (ultrasons, rayons X, etc.) permettant de visualiser les imperfections et donc de les interpréter, la majorité des méthodes de contrôle non destructif repose sur l'étude d'un indicateur unique. La réponse associée signale généralement l'absence ou la présence d'un défaut, donnant éventuellement un niveau de sévérité, sans pour autant informer l'utilisateur sur le type de défaut. Pourtant, une meilleure connaissance des discontinuités permettrait de cibler d'éventuelles failles dans un procédé de fabrication (défaut de collage récurrent, par exemple) et de prendre une décision sur les corrections à établir. Certaines imperfections pourraient amener à une étape de réparation de la structure mise en jeu.

Par ailleurs, l'industrialisation de pièces composites et l'augmentation permanente des cadences de production nécessitent des méthodes de caractérisation rapides pouvant opérer sur de grandes structures composites. Pour exemple, en milieu industriel l'utilisation de méthodes ultrasonores requiert une quinzaine d'heures de mesure pour étudier une aile d'avion d'environ 8 mètres.

L'objectif de ce chapitre est de montrer les capacités de la méthode RIFF pour cartographier les paramètres élastiques et les facteurs de pertes d'une structure, afin de répondre à ces deux problématiques d'identification de défaut et de rapidité d'analyse.

### 5.1 Concept : Analyse spatiale des caractéristiques du matériau

Les analyses précédentes se sont focalisées sur le comportement fréquentiel des paramètres élastiques et d'amortissements. Comme le montrent divers travaux s'appuyant sur l'étude de la raideur [55, 56] ou de l'amortissement structural [109], l'établissement de cartographies des caractéristiques du matériau pourrait compléter le panel actuel des méthodes pour le contrôle non destructif. Dans la méthode RIFF, la structure étudiée est supposée sans défaut. Cependant, la présence d'une imperfection agit comme un

déséquilibre dans les équations du mouvement, qui se manifeste soit dans le résidu de l'équation [69–71], soit comme une discontinuité dans l'identification de paramètres du matériau [68], comme schématisé sur la figure 5.1. Par ailleurs, les cartographies du module d'Young, du module de cisaillement et de leurs amortissements associés pourraient traduire la "signature" d'un défaut. En effet, la chute locale du module de cisaillement  $G$  indiquerait plutôt la présence d'un délaminage, alors qu'une rupture de fibres se manifesterait principalement par une perte de rigidité de flexion et donc une diminution plus importante du module d'Young  $E$ . De manière similaire, un défaut de collage induirait des frottements importants, soit une hausse locale des facteurs de pertes  $\eta_E$  ou  $\eta_G$ . L'aspect local de la méthode RIFF ainsi que sa facilité d'application en font a priori une alternative intéressante pour la caractérisation de défauts. De plus, la rapidité de mesure et d'analyse peuvent répondre à l'étude de structures de grande taille. Une pré-localisation de zones susceptibles de présenter des défauts, scannées dans un second temps par une technique ultrasonore, suscite un intérêt de la part des industries.

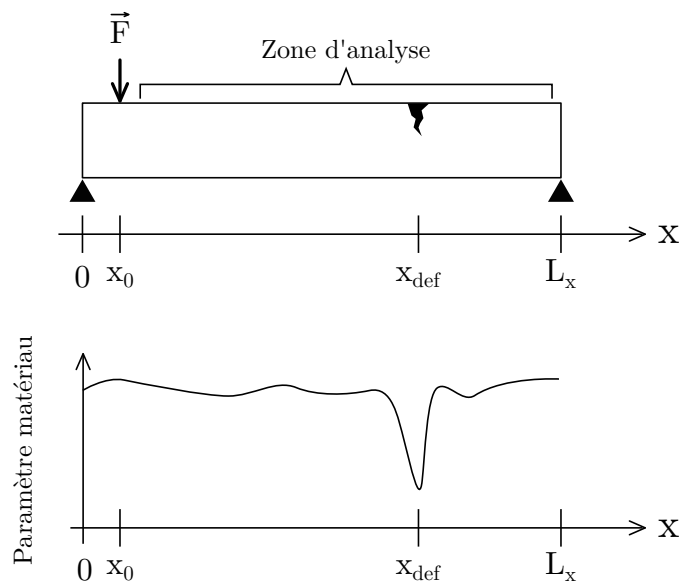


FIGURE 5.1 – Schéma de principe pour la détection de défauts par cartographie des paramètres du matériau.

Pour un champ de déplacement obtenu en fonction de l'espace  $x$  et de la fréquence  $f$ , une sur-information fréquentielle est établie de manière à estimer les modules complexes équivalents en une position donnée. Cette procédure est réalisée par les expressions 2.55 et 2.56 pour les modèles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko respectivement, puis réitérée en chaque point de l'espace.

L'utilisation d'une sur-information sur large bande fréquentielle implique nécessairement des imprécisions pour l'estimation des paramètres  $E$ ,  $G$ ,  $\eta_E$  et  $\eta_G$ . Néanmoins, le but n'est pas ici de quantifier ces derniers, mais d'observer une variation qualitative franche de l'un d'eux lorsqu'un défaut sera présent sur la structure.

## 5.2 Étude de faisabilité

Pour étudier le potentiel d'identification des défauts sur pièces composites, une étude de faisabilité est réalisée. L'intérêt est de voir si la résolution inverse permet de trouver des signatures pour diverses discontinuités simples. La portion de poutre  $x \in [x_1; x_2]$  présentée en figure 5.2 est sujette à une baisse de 10% du module d'Young  $E$ , du module de cisaillement  $G$ , de l'épaisseur  $L_z$  ou de la masse volumique  $\rho$ . Les paramètres de simulation utilisés sont définis dans le tableau 5.1. Le champ de déplacement est synthétisé par éléments finis linéaires selon la théorie de Timoshenko avec des conditions aux limites d'appui (les matrices élémentaires sont disponibles en page 36), aucun bruit n'est appliqué dans cette configuration. Les modules réels  $E$  et  $G$  sont obtenus par les relations 2.55 et 2.56, les facteurs de pertes ne sont pas considérés ici.

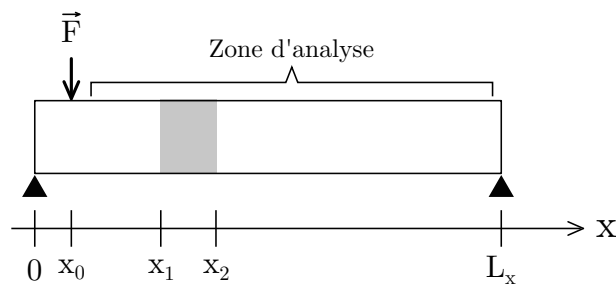


FIGURE 5.2 – Schéma de la poutre simulée, appuyée à ses extrémités et présentant une discontinuité sur  $x \in [x_1; x_2]$ .

Paramètre	Valeur
Longueur $L_x$	70 cm
Largeur $L_y$	3 cm
Épaisseur $L_z$	1 cm
Nombre d'éléments $N_e$	200
Masse volumique $\rho$	2700 kg.m <sup>-3</sup>
Module d'Young $E$	40 GPa
Module de cisaillement $G$	1 GPa
Fréquence $f$	1000 à 4000 Hz
Force $F$	1 N
Position de la source $x_0$	0.05 m
Zone d'étude	$x \in [0.1; 0.7]$ m
Discontinuité	Réduction de 10%
Début de la discontinuité $x_1$	0.2 m
Fin de la discontinuité $x_2$	0.25 m

TABLEAU 5.1 – Paramètres de simulation pour l'étude de faisabilité sur la détection et l'identification de défauts sur poutres composites.

### 5.2.1 Discontinuité sur $E$

La réduction locale du module d'Young amène aux résultats présentés en figure 5.3.

Le module d'Young  $E$  déduit par le modèle d'Euler-Bernoulli est nettement inférieur à la valeur d'entrée. Cet écart est dû à une interprétation du cisaillement de la poutre comme une baisse de la rigidité de flexion. Les oscillations visibles sont dues à l'utilisation de toute la bande fréquentielle pour la résolution inverse. En effet, le modèle d'Euler-Bernoulli interprète le cisaillement comme un assouplissement de la structure. Selon la position spatiale et la fréquence, les effets de cisaillement sont plus ou moins prononcés. L'inversion au sens des moindres carrés, utilisant toute la bande fréquentielle de mesure, engendre donc des résultats légèrement variables en fonction de la position sur la structure. Une diminution du module d'Young est en revanche observée pour  $x \in [x_1; x_2]$ , de l'ordre de 10%, relativement à la valeur moyenne estimée à 20 GPa. Cette observation confirme le fait qu'une analyse qualitative suffit à évaluer la présence d'un défaut. L'identification de  $E$  est erronée mais la variation locale est cohérente avec la discontinuité appliquée.

Le modèle de Timoshenko permet une estimation plus fiable des paramètres élastiques. Le module d'Young  $E$  estimé est fidèle aux données d'entrées, de même pour le module de cisaillement  $G$ . De plus, la singularité induite par la discontinuité sur  $x \in [x_1; x_2]$  ne se distingue que sur  $E$ . Ce premier défaut engendre donc une "signature" dans le champ de déplacement que la théorie de Timoshenko est capable d'interpréter.

Il reste à souligner que le module de cisaillement  $G$  caractérisé se situe légèrement sous la valeur définie dans le problème direct. Ceci s'explique par une différence de convergence entre le modèle en éléments finis linéaires utilisé pour la synthèse du champ de déplacement et le modèle analytique appliqué pour le problème inverse, malgré une résolution spatiale d'au moins 30 points par longueur d'onde. Une étude de faisabilité sur une poutre sans défaut avait pourtant montré une très bonne stabilité lorsque le modèle analytique est utilisé dans les problèmes direct et inverse (section 2.4). Une légère erreur de convergence réside donc dans la synthèse du problème direct par éléments finis linéaires. Ces écarts d'estimation en sortie de la résolution inverse sont donc attendus pour les 3 autres simulations.

### 5.2.2 Discontinuité sur $G$

La figure 5.4 montre les résultats issus d'une simulation établie avec une discontinuité sur le module de cisaillement  $G$ . Les valeurs moyennes des paramètres élastiques restent identiques à celles estimées précédemment, seule l'allure au sein de la discontinuité varie. Le module d'Young issu du modèle d'Euler-Bernoulli met à nouveau en évidence une baisse relative de 10% alors que ce paramètre élastique est constant dans le problème direct. Des diminutions locales du module de cisaillement ou du module d'Young ne sont pas dissociables à partir de la théorie d'Euler-Bernoulli. En revanche, le modèle de Timoshenko répond parfaitement aux attentes, seule la cartographie de  $G$  présente une chute de 10%, le module d'Young identifié reste identique tout au long de la structure.

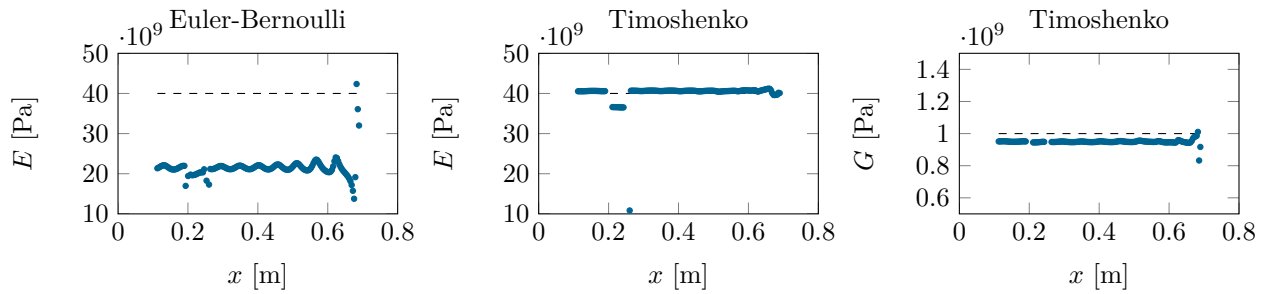


FIGURE 5.3 – Cartographies des modules d’Young et de cisaillement, obtenues par la résolution inverse pour une poutre présentant une baisse de 10% du module d’Young  $E$  en  $x \in [0.2; 0.25]$  m.

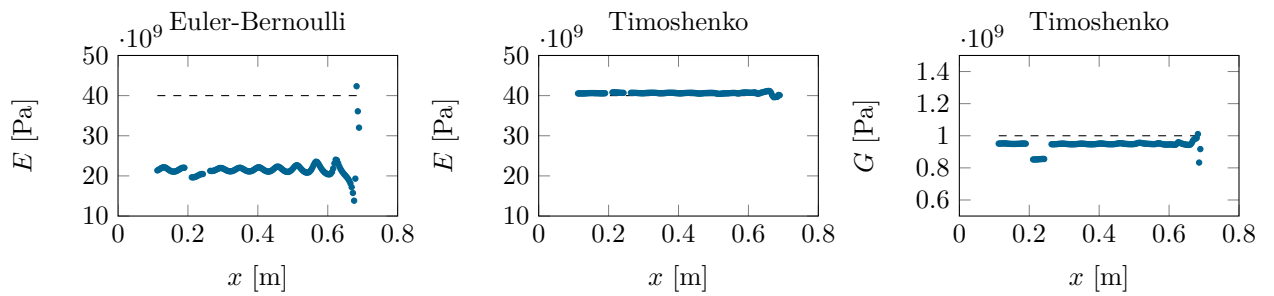


FIGURE 5.4 – Cartographies des modules d’Young et de cisaillement, obtenues par la résolution inverse pour une poutre présentant une baisse de 10% du module de cisaillement  $G$  en  $x \in [0.2; 0.25]$  m.

### 5.2.3 Discontinuité sur $L_z$

La création d'une entaille équivalente à 10% de l'épaisseur  $L_z$  engendre une estimation de  $E$  et  $G$  disponible en figure 5.5. Le module d'Young atteste d'une diminution de l'ordre de 15% pour le modèle Euler-Bernoulli et de 20% pour celui de Timoshenko, le module de cisaillement reste intact. Ce comportement est cohérent, puisque l'absence partielle de matière entraîne nécessairement une rigidité amoindrie. Cependant, cette allure est similaire à celle obtenue pour une discontinuité sur le module d'Young  $E$  (figure 5.3). Il n'est donc a priori pas possible de savoir si le défaut mis en jeu consiste en un assouplissement de la structure ou en la présence d'une entaille, à partir de la seule étude des modules.

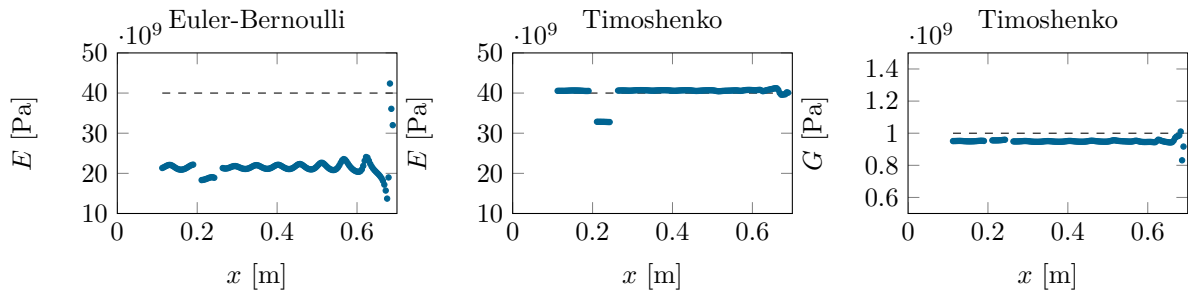


FIGURE 5.5 – Cartographies des modules d'Young et de cisaillement, obtenues par la résolution inverse pour une poutre présentant une baisse de 10% de l'épaisseur  $L_z$  en  $x \in [0.2; 0.25]$  m.

### 5.2.4 Discontinuité sur $\rho$

L'application d'une diminution locale de la masse volumique  $\rho$  entraîne une estimation des paramètres élastiques tracés en figure 5.6. Dans ce cas, tous les modules inférés des deux théories augmentent de 10%. Ce comportement est propre à une variation de la masse volumique au regard des autres défauts étudiés.

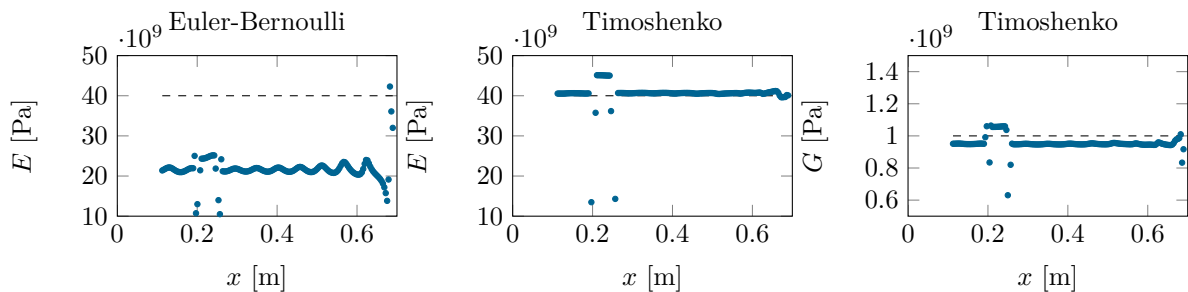


FIGURE 5.6 – Cartographies des modules d'Young et de cisaillement, obtenues par la résolution inverse pour une poutre présentant une baisse de 10% de la masse volumique  $\rho$  en  $x \in [0.2; 0.25]$  m.

### 5.2.5 Bilan de l'étude

La totalité des résultats obtenus précédemment est résumée dans le tableau 5.2 ci-après.

En comparant les observations issues des différents défauts étudiés, il en ressort que le modèle d'Euler-Bernoulli réagit de manière quasiment identique pour un défaut sur  $E$ ,  $G$  ou  $L_z$ . L'étude du seul module d'Young limite inévitablement les combinaisons d'analyses, mais une variation plus franche aurait pu être attendue en fonction du type de discontinuité.

Le modèle de Timoshenko met en évidence des variations locales plus facilement exploitables. En conclusion de cette étude de faisabilité, trois signatures typiques peuvent être ciblées selon les cartographies obtenues. Une diminution du seul module d'Young peut être assimilée à une rupture de fibres ou à la présence d'une entaille, la diminution unique du module de cisaillement pourrait indiquer la présence d'un défaut de délaminage, une variation simultanée des modules traduirait alors une altération de la masse volumique (inclusions, présence de bulles...).

		Défaut ( $\searrow$ 10%)				
		$E$	$G$	$L_z$	$\rho$	
Variation	Euler-Bernoulli	$E$	$\searrow$ 10%	$\searrow$ 10%	$\searrow$ 15%	$\nearrow$ 10%
	Timoshenko	$E$	$\searrow$ 10%		$\searrow$ 20%	$\nearrow$ 10%
		$G$		$\searrow$ 10%		$\nearrow$ 10%

TABLEAU 5.2 – Synthèse des variations locales dans la portion  $x \in [x_1; x_2]$  du module d'Young  $E$  et du module de cisaillement  $G$  en fonction du défaut appliqué et de la théorie utilisée pour la résolution inverse.



## 5.3 Applications expérimentales

### 5.3.1 Fabrication de matériau multicouche

Les poutres multicouches présentant une âme en nid d'abeille étudiées par la méthode RIFF (section 3.5.2) et méthode RIC (section 4.3) ont été fournies par l'INSA de Lyon. Dans le cadre d'un développement de la méthode RIFF pour la détection de défauts, il est souhaité de pouvoir créer des imperfections contrôlées dès la fabrication. La réalisation de ces structures composites avec défauts s'est faite à l'IUT du Mans, disposant des moyens techniques nécessaires. Deux étapes principales sont établies : la fabrication de peaux en fibres de verre et le collage entre les peaux et l'âme.

#### Procédé d'infusion pour les peaux

Le principe général de la procédure de fabrication des peaux composites est donné dans les paragraphes suivants, une description plus rigoureuse peut être consultée dans les travaux de Monti et al. [126].

Deux couches d'un tissage en fibres de verre (0/90) sont placées au centre d'une superposition de différents éléments (bâches plastiques, tissus d'arrachage, tissu drainant et gaines) comme présenté en figure 5.7. Le complexe résultant (posé sur une table pour obtenir une peau plane) est vidé de son air par le biais d'une gaine branchée sur une pompe à vide, tandis qu'une résine vinylester thermodurcissable (300 g de résine + 9 g de durcisseur) est injectée par l'autre gaine. L'infusion de la résine est stoppée lorsque la totalité de l'espace entre les gaines est imprégnée. Le processus de polymérisation de la résine prend fin au bout de quelques heures, la séparation des tissus d'arrachages permet de récupérer la peau en fibres de verre. Ce procédé d'infusion est ensuite réitéré pour la réalisation d'une seconde peau.

Les peaux fabriquées, d'une épaisseur de  $t_f = 0.6$  mm, se limitent à des dimensions de  $L \times l = 55 \times 35$  cm<sup>2</sup>, en raison d'un compromis entre vitesse d'imprégnation de la résine entre les plis et rapidité de polymérisation. La réalisation de peaux plus grandes implique des procédures de fabrication plus difficiles à maîtriser.

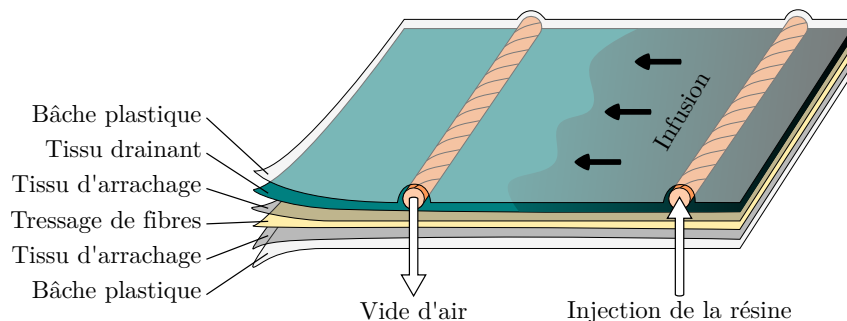


FIGURE 5.7 – Schéma du procédé d'infusion pour la fabrication de peaux en fibres de verre. Les bâches en plastique situées aux extrémités sont collées entre elles afin d'assurer le vide d'air au sein de l'ensemble des tissus.

### Collage des différentes couches

Une âme en nid d'abeille *Plascore*<sup>®</sup> PN1-1/8-6.0 [116] en fibres d'aramide est découpée à des dimensions légèrement supérieures à celles des peaux. Une colle constituée de 100 g de résine époxy et 33 g de durcisseur, est appliquée au pinceau sur une peau en fibres de verre, l'âme NIDA est ensuite posée par-dessus et maintenue par des poids répartis sur toute sa surface jusqu'à séchage de la colle.

Le même principe est appliqué pour coller la seconde peau, à la différence près qu'une double épaisseur de bâche plastique est insérée entre l'âme et la couche de colle, afin de créer un défaut de collage sur une zone de  $5 \times 10 \text{ cm}^2$ .

La plaque multicouche résultante de ces opérations est présentée en figure 5.8. Quelques hétérogénéités sont visibles en raison des moyens de fabrication disponibles à l'échelle du laboratoire. On remarque notamment la présence de zones sombres correspondant à une répartition de la colle de part et d'autre de la peau. Ceci peut être dû à un remplissage partiel du tressage de fibres par la résine, la présence de canaux capillaires facilite le passage de la colle à travers la peau. Cet effet n'affecte pas la qualité structurale du multicouche mais crée un aspect visuel transparent. Des zones plus claires sont également visibles, il s'agit de défauts de collages. L'une d'elle est rectangulaire et correspond au défaut de collage contrôlé, en revanche, les autres sont involontaires et émanent d'une répartition de colle non maîtrisée car appliquée au pinceau.

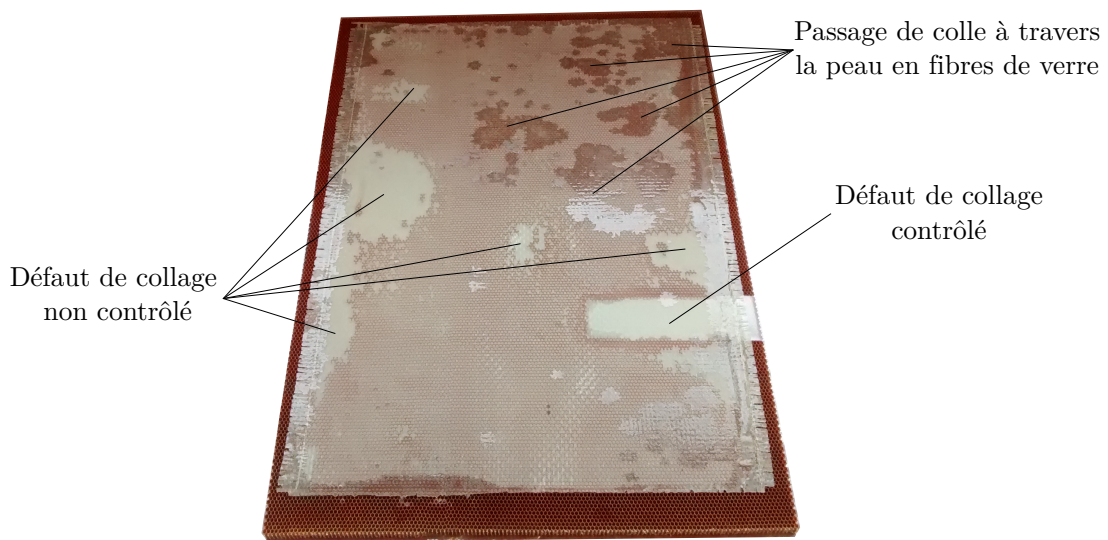


FIGURE 5.8 – Photographie de la plaque multicouche fabriquée.

### 5.3.2 Poutres multicouches avec défauts

La plaque multicouche présentée en figure 5.8 est découpée afin d'obtenir des poutres multicouches, un soin particulier y est accordé de manière à ce qu'elles ne soient composées d'aucun défaut de collage non désiré. Deux poutres d'essais sont conservées et illustrées sur les figures 5.9 et 5.10 présentant respectivement un défaut de collage et une rupture de fibres (la peau est coupée sur toute la largeur de la poutre à l'aide d'un cutter).



FIGURE 5.9 – Poutre composite multicouche présentant un défaut de collage.

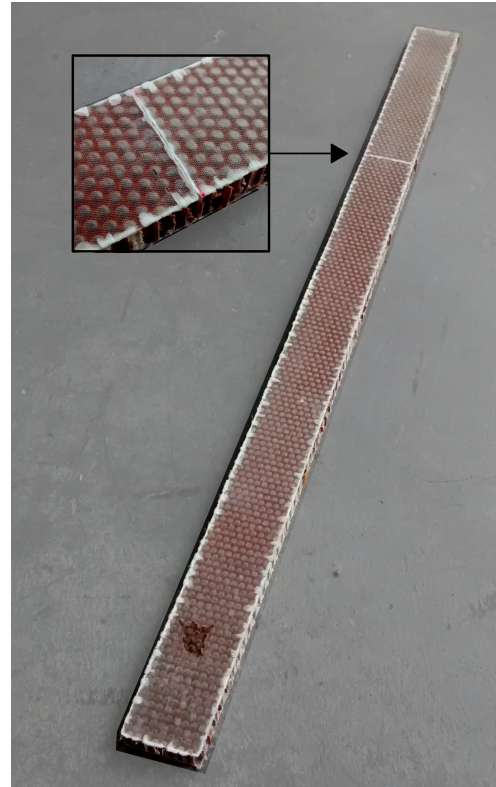


FIGURE 5.10 – Poutre composite multicouche présentant un défaut de rupture de fibres.

Les cellules NIDA de l'âme sont orientées comme indiqué en figure 5.11. La poutre multicouche étudiée par la méthode RIFF en section 3.5.2 comporte la même âme en nid d'abeille, mais l'orientation des cellules NIDA diffère. Ces dernières étant hexagonales, la rigidité de cisaillement n'est pas la même pour des directions orthogonales. Dans le premier cas, les bords des cellules sont en partie orthogonaux à la direction de propagation des ondes de flexion. Dans ce nouveau cas, les bords des cellules sont en partie colinéaires à la direction de propagation des ondes de flexion, apportant un renfort le long de la poutre et donc une rigidité plus importante. Le module de cisaillement de ces poutres avec défauts devrait en toute rigueur être supérieur à 45 MPa.

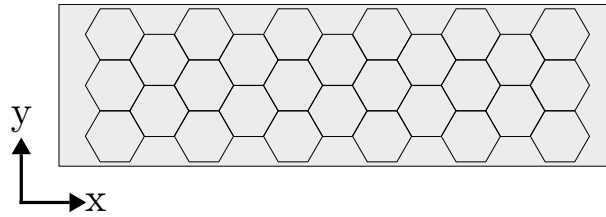


FIGURE 5.11 – Orientation des cellules NIDA pour les poutres avec défauts.

### 5.3.3 Traitement des données et résultats

L'étude vibratoire des poutres multicouches avec défauts est établie avec le même matériel de mesure que celui utilisé pour l'étude de la poutre NIDA saine en section 3.5.2. Les caractéristiques des structures analysées ainsi que les configurations de mesure sont données dans le tableau 5.3, les sigles DC et RF sont associés aux poutres avec défaut de collage ou de rupture de fibres respectivement.

Paramètre	Valeur	
	Poutre DC	Poutre RF
Longueur $L_x$	52.75 cm	52.7 cm
Largeur $L_y$	3.1 cm	
Épaisseur $L_z$	1.14 cm	
Masse volumique $\rho$	284.7 kg.m <sup>-3</sup>	284.6 kg.m <sup>-3</sup>
Fréquence $f$	200 à 6000 Hz	
Position de la source $x_0$	0.03 m	
Position du défaut $x_{\text{def}}$	[0.345; 0.405] m	0.37 m
Nombre de points $N_x \times N_y$	135 × 7	137 × 7

TABLEAU 5.3 – Caractéristiques des poutres composites avec défaut de collage (DC) ou de rupture de fibres (RF) et paramètres de mesure.

La mesure vibratoire est réalisée du côté où la peau présente le défaut. Pour la poutre avec rupture de fibres, le maillage est défini afin que le laser ne se situe pas sur la discontinuité mais autour d'elle. Le champ de déplacement est moyenné dans la direction  $y$  afin de limiter au maximum les potentiels effets de torsion principalement présents pour  $f < 3000$  Hz. La zone d'étude est par la suite réduite à  $x > 0.1$  m afin d'utiliser le déplacement transverse en dehors de la source vibratoire.

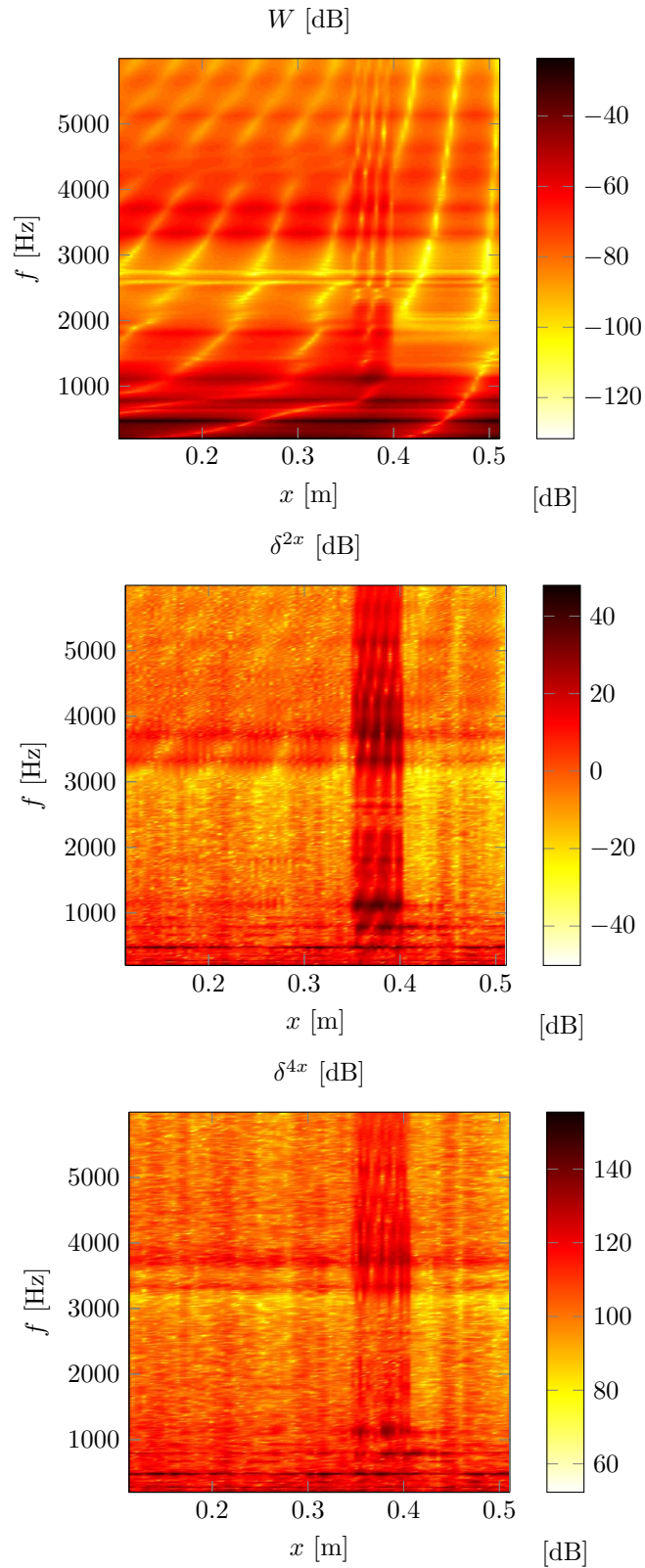


FIGURE 5.12 – Champ de déplacement  $W$  et dérivées spatiales  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$  bruts issus de la mesure sur la poutre multicouche présentant un défaut de collage.

### Défaut de collage peau/âme

Le champ de déplacement brut mesuré sur la poutre présentant un défaut de collage ainsi que les dérivées spatiales  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$  associées, sont présentés en figure 5.12. Ces dernières mettent en évidence une singularité pour  $x \in [0.34; 0.41]$  m, attestant d'une modification locale des vibrations mises en jeu. Trois zones d'analyses sont alors proposées : avant la singularité ( $x < 0.34$  m), autour du défaut ( $x \in [0.34; 0.41]$  m) et après la singularité ( $x > 0.41$  m).

Afin de diminuer la contribution du bruit, une régularisation des champs doit être établie avec un nombre d'onde de coupure optimal défini tel que  $k_c^{\text{opt}} = k_p$ . Une estimation du nombre d'onde  $k_p$  est mise en œuvre par application de la méthode de McDaniel, complétée par un lissage des résultats, comme proposé en section 4.2.2. Ce dernier est présenté en figure 5.13 pour les trois zones d'analyses choisies précédemment.

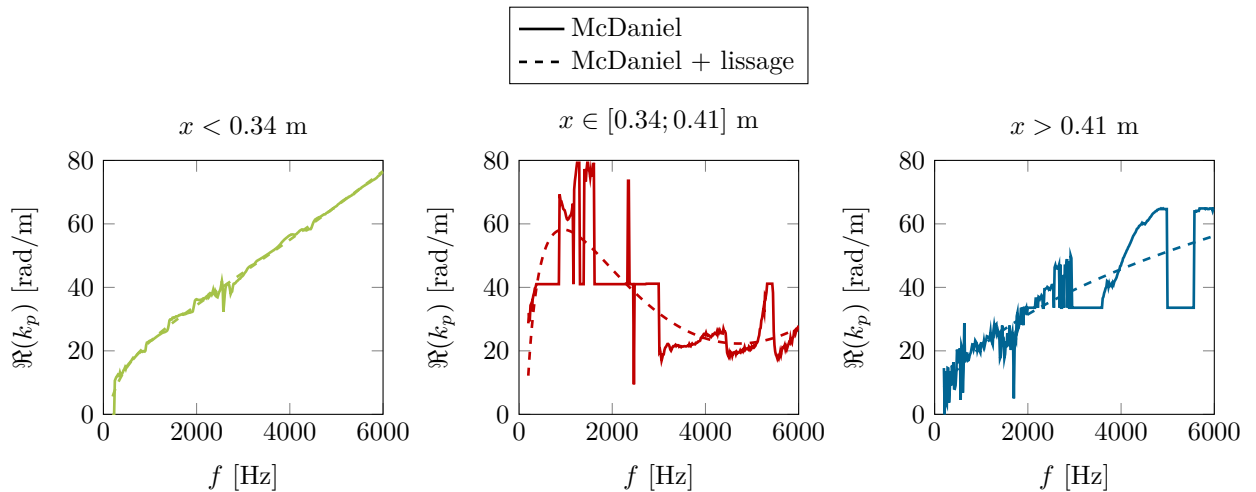


FIGURE 5.13 – Nombre d'onde propagatif estimé par la méthode de McDaniel pour la mesure sur la poutre multicouche présentant un défaut de collage, en fonction de la zone d'analyse.

On constate que le nombre d'onde estimé dans la portion de poutre  $x < 0.34$  m est quasiment linéaire, ce qui traduit la présence d'un cisaillement important. L'identification de  $k_p$  au sein du défaut n'est pas fiable en raison d'une cinématique très particulière qui ne peut être interprétée par la méthode de McDaniel. Enfin, le nombre d'onde déterminé en aval de la discontinuité est légèrement bruité pour  $f < 3000$  Hz puis présente d'importantes variations pour les fréquences supérieures à 3000 Hz. Ce comportement peut être interprété par un filtrage, impliqué par la présence du défaut de collage. En effet, ce dernier semble absorber une partie de l'énergie vibratoire avant qu'elle n'atteigne l'extrémité de la structure. Le déplacement transverse se voit alors amoindri pour  $x > 0.41$  m, le rapport signal à bruit y est plus faible, ce qui expliquerait les variations constatées sur l'estimation du nombre d'onde propagatif pour  $f < 3000$  Hz. Au delà de cette fréquence,  $k_p$  présente des erreurs marquées qui suggèrent l'apparition d'une forte dissipation d'énergie ou de couplages entre la zone de défaut et l'extrémité de la poutre.



A l'issue de cette application de la méthode de McDaniel, il est choisi de filtrer le champ de déplacement  $W$  et les dérivées  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$  avec un nombre d'onde de coupure  $k_c^{\text{opt}}$  égal au nombre d'onde propagatif  $k_p$  déterminé sur la portion de poutre  $x < 0.34$  m, qui est la moins impactée par la présence du défaut.

Les paramètres élastiques et les facteurs de pertes sont déterminés en utilisant les relations 2.55 et 2.56. La totalité de la bande fréquentielle est utilisée pour l'inversion matricielle, l'étude de l'intervalle fréquentiel  $\Delta_f$  n'est donc pas requise. Les résultats obtenus sont présentés en figure 5.14 pour les trois portions de poutre  $x < 0.34$  m (courbes vertes),  $x \in [0.34; 0.41]$  m (courbes rouges), et  $x > 0.41$  m (courbes bleues).

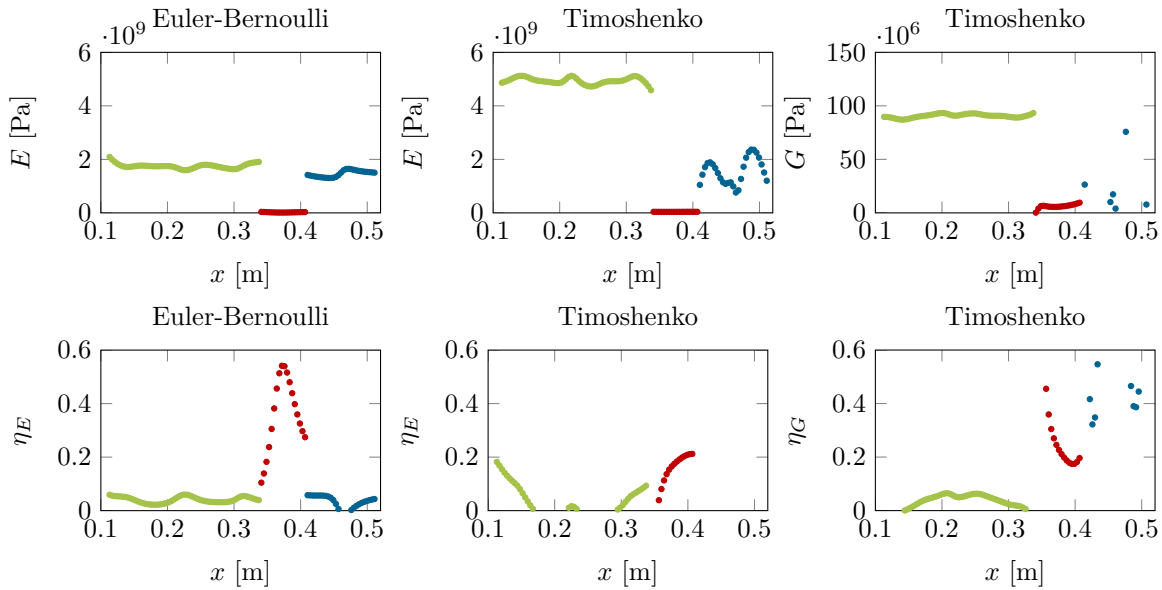


FIGURE 5.14 – Cartographies des paramètres élastiques et des facteurs de pertes identifiés pour la mesure sur la poutre multicouche présentant un défaut de collage.

Les cartographies obtenues en amont du défaut sont relativement stables, à l'exception des facteurs de pertes  $\eta_E$  et  $\eta_G$  estimés avec le modèle de Timoshenko qui oscillent dans des gammes d'amplitudes de  $[0; 0.2]$  et  $[0; 0.07]$  respectivement. Le module d'Young  $E$  identifié d'après le modèle de Timoshenko se situe aux alentours de 5 GPa, ce qui semble assez faible pour une poutre sandwich composé de 2 tressages en fibres de verre. Une comparaison avec une mesure réalisée sur banc de flexion, utilisant la théorie de Berthelot, serait souhaitable pour confirmer cette valeur, mais n'a pu être réalisée. Quant au module de cisaillement  $G$ , il est quantifié à 90 MPa, ce qui est en très bon accord avec celui fourni dans la documentation de *Plascoré*<sup>®</sup>, donné à 84 MPa pour une telle orientation de cellules NIDA. Ce point met en évidence l'intérêt de la méthode RIFF puisque la résolution locale de l'équation du mouvement autorise simultanément la localisation de défauts et la caractérisation des paramètres élastiques du matériau. Enfin, les identifications obtenues par le modèle d'Euler-Bernoulli présentent un module d'Young sous estimé à 2 GPa (le cisaillement est interprété comme un assouplissement de la structure) et un facteur de perte  $\eta_E$  valant environ 0.05.

L'étude des paramètres élastiques et des facteurs de pertes en aval du défaut ( $x > 0.41$  m) ne sont pas possibles pour le modèle de Timoshenko, en raison d'un rapport signal à bruit trop faible comme supposé précédemment. Le modèle d'Euler-Bernoulli, moins sensible au bruit, permet tout de même une identification similaire à celle réalisée dans la portion  $x < 0.34$  m.

Les modules identifiés dans la zone défectueuse subissent une forte diminution, les modules d'Young sont estimés à 25 MPa et 40 MPa pour les modèles d'Euler-Bernoulli et Timoshenko respectivement. Le module de cisaillement est identifié à 7 MPa environ. Ces comportements difficilement interprétables ne permettent pas a priori d'en déduire le type de défaut, contrairement à ce qui pouvait être supposé à l'issue de l'étude de faisabilité (section 5.2). L'étude des facteurs de pertes semble néanmoins renseigner sur la cinématique mise en jeu au sein du défaut. Le modèle d'Euler-Bernoulli présente une hausse de l'amortissement comme constaté sur la cartographie de  $\eta_E$ . Le modèle de Timoshenko a la capacité supplémentaire de séparer les contributions de dissipation de l'énergie vibratoire, majoritairement attribuée à  $\eta_G$ . En effet, le facteur de perte de flexion  $\eta_E$  reste dans les mêmes ordres de grandeur que ceux constatés dans la portion en amont du défaut, alors que le facteur de perte en cisaillement  $\eta_G$  passe de 10% à plus de 20%. Ceci amène à penser que la dissipation de l'énergie dans la zone défectueuse s'établit principalement par cisaillement. Dans le cas d'un défaut de collage, les frottements entre la peau et l'âme sont favorisés, d'où l'augmentation de pertes par cisaillement. Ces hypothèses sont néanmoins à relativiser, l'étude d'une seule poutre avec défaut de collage ne permet pas d'en déduire une tendance généralisée mais le comportement du facteur de perte en cisaillement  $\eta_G$  suggère la réalisation d'études plus fournies.



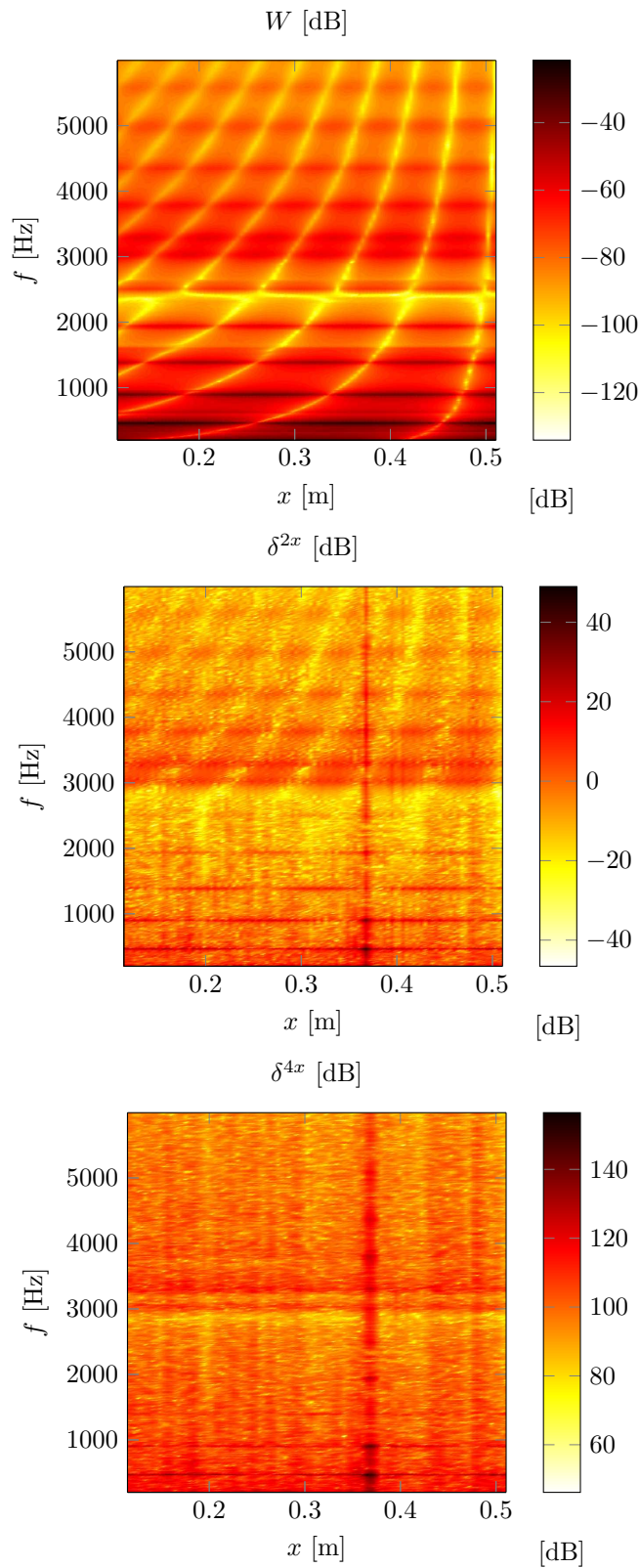


FIGURE 5.15 – Champ de déplacement  $W$  et dérivées spatiales  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$  bruts issus de la mesure sur la poutre multicouche présentant un défaut de rupture de fibres.

### Défaut de rupture de fibres

Les champs bruts  $W$ ,  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$  sont montrés en figure 5.15. Le champ de déplacement transverse  $W$  ne semble pas fortement affecté par la rupture de fibres située en  $x = 0.37$  m. En revanche, cette dernière est facilement visualisée grâce aux dérivées  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$ . Au vu de ces variations, trois zones d'analyses sont à nouveau choisies en amont de la singularité ( $x < 0.36$  m), autour du défaut ( $x \in [0.36; 0.38]$  m) et dans l'extrémité restante ( $x > 0.38$  m).

Les nombres d'onde identifiés par la méthode de McDaniel sont présentés en figure 5.16. Comme dans le cas précédent (poutre avec défaut de collage), le nombre d'onde propagatif déduit sur la portion  $x < 0.36$  m est cohérent avec la cinématique d'une poutre permettant un cisaillement important. L'estimation de  $k_p$  établie sur l'extrémité de la structure (après le défaut) est légèrement plus bruitée pour  $f < 5000$  Hz, puis incohérente au delà de cette fréquence. La rupture de fibres semble également filtrer l'énergie vibratoire, mais cet effet se manifeste à des fréquences plus hautes que pour le défaut de collage, en raison de la taille de l'imperfection, plus petite pour la rupture de fibres. Le modèle de McDaniel est en revanche incapable de déterminer un nombre d'onde cohérent dans la zone  $x \in [0.36; 0.38]$  m, cette dernière est trop étroite pour qu'une interpolation fiable du champ de déplacement soit possible.

La régularisation des champs  $W$ ,  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$  est établie avec un nombre d'onde de coupure fixé à la valeur du nombre d'onde propagatif  $k_p$  identifié dans la zone en amont du défaut.

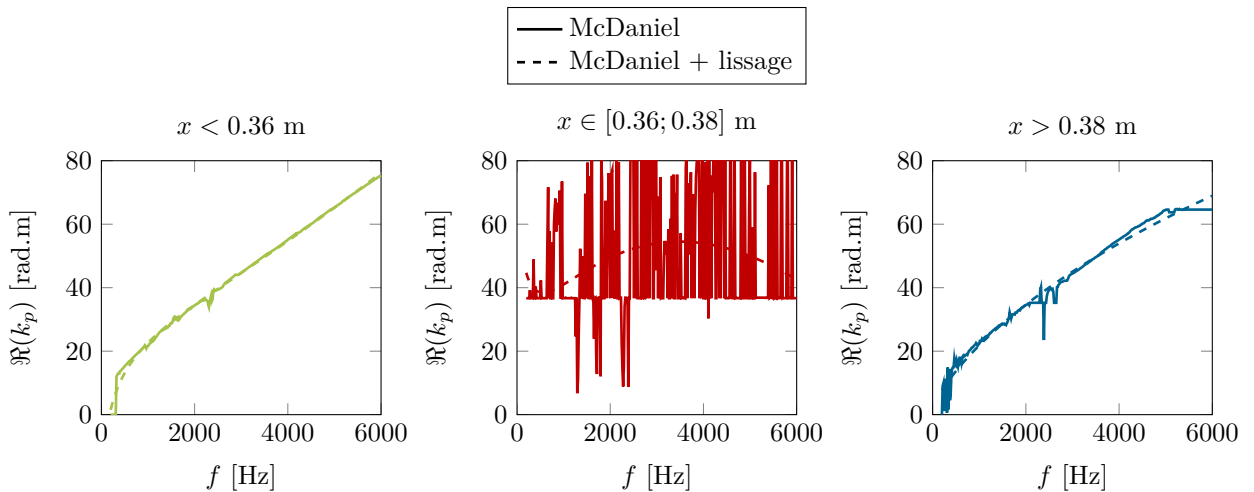


FIGURE 5.16 – Nombre d'onde propagatif estimé par la méthode de McDaniel pour la mesure sur la poutre multicouche présentant une rupture de fibres, en fonction de la zone d'analyse.

L'inversion de la matrice définie dans les relations 2.55 et 2.56 est réalisée pour en déduire les modules complexes, en utilisant toute la bande fréquentielle de mesure. La figure 5.17 présente les résultats obtenus pour chaque portion de la poutre.

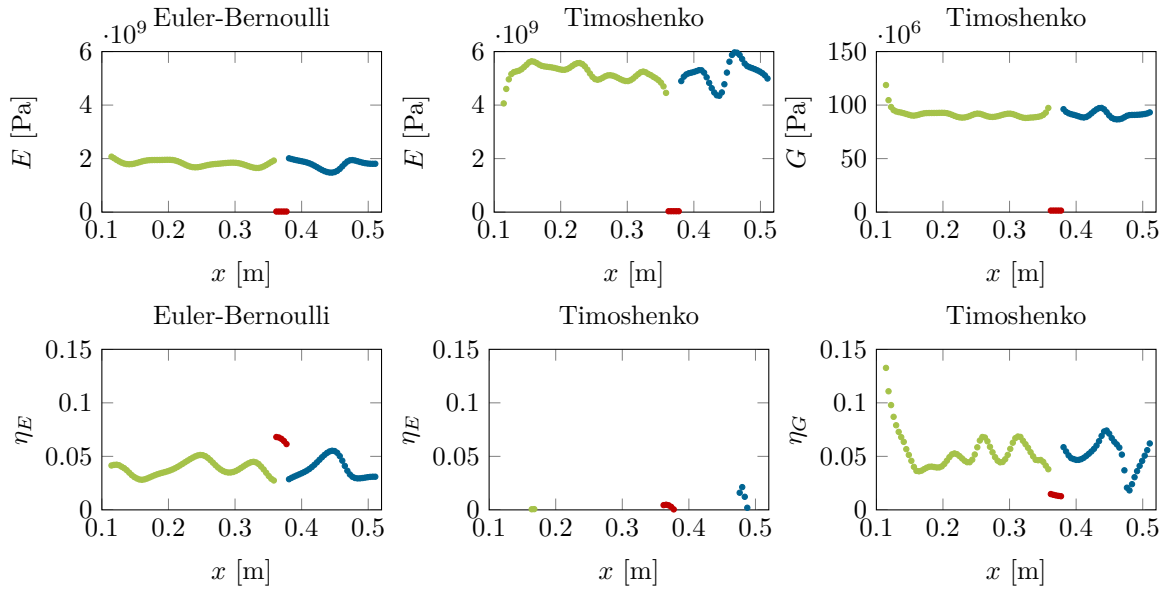


FIGURE 5.17 – Cartographies des paramètres élastiques et des facteurs de pertes identifiés pour la mesure sur la poutre multicouche présentant une rupture de fibres.

A l'exception du facteur de perte  $\eta_E$  déduit du modèle de Timoshenko, dont les valeurs sont visiblement trop faibles pour se distinguer du bruit de mesure, tous les paramètres présentent des valeurs cohérentes en dehors de la zone de défaut. Les modules se situent autour des valeurs déterminées auparavant. Le fait que la portion en aval de la rupture de fibres permette d'identifier des valeurs stables témoigne d'une dissipation d'énergie plus faible au cœur du défaut qu'avec un défaut de collage. Les facteurs de pertes identifiés sont effectivement plus faibles sur cette poutre, aux alentours de 5% pour  $\eta_E$  (Euler-Bernoulli) et  $\eta_G$  (Timoshenko), ce qui est probablement dû à une épaisseur de colle plus faible pour cette poutre. Ces analyses prouvent néanmoins que le caractère local de la méthode RIFF permet simultanément de détecter un défaut et de caractériser la poutre multicouche.

La zone où se situe le défaut entraîne à nouveau une estimation fortement diminuée des modules d'Young et de cisaillement. Ces derniers sont identifiés à 22 MPa pour le module d'Young issu du modèle d'Euler-Bernoulli, 33 MPa pour celui déduit du modèle de Timoshenko et le module de cisaillement est égal à 1.5 MPa. Il est impossible de statuer sur le type de défaut mis en jeu à la seule observation des modules. Mais les amortissements présentent à nouveau un comportement particulier. Le facteur de perte  $\eta_E$  obtenu par le modèle d'Euler-Bernoulli indique une augmentation de l'amortissement. Celui déduit par le modèle de Timoshenko demeure très faible et le facteur de perte en cisaillement  $\eta_G$  présente une forte diminution. Aucune explication n'a été trouvée au stade actuel des études pour décrire cette contradiction entre les deux théories, cependant le comportement de  $\eta_G$  peut être interprété pour la détection d'une rupture de fibres. En effet, cette dernière autorise localement une déformation importante de l'âme puisqu'elle n'est plus contrainte par l'une des deux peaux. La couche centrale est donc libre de cisaillement, les pertes associées sont donc fortement diminuées. Ces suppositions restent à vérifier à travers des études plus poussées, mais le comportement particulier du facteur de perte en cisaillement suggère des perspectives intéressantes pour la détection et l'identification de défauts sur structures composites.

## 5.4 Conclusions

Ce chapitre a développé le principe de détection de défauts par cartographie des modules complexes et présenté quelques prémices encourageants pour la localisation et l'identification de défauts propres aux structures composites.

Une étude de faisabilité montre la possibilité théorique de pouvoir identifier des défauts à travers l'observation des paramètres élastiques, grâce à l'utilisation du modèle de Timoshenko et de la méthode RIFF, qui constitue un atout supplémentaire de part sa résolution locale.

Une validation expérimentale a également été mise en œuvre avec des poutres multicouches présentant un défaut de collage ou une rupture de fibres sur l'une des peaux.

Premièrement, la seule analyse du champ de déplacement brut et de ses dérivées spatiales  $\delta^{2x}$  et  $\delta^{4x}$  suffit à constater la présence d'un défaut qui induit un déséquilibre de l'équation du mouvement. Cette approche déjà constatée par Renzi [69] ainsi que Xu et al. [70, 71] pour les poutres et plaques minces, pourrait être étoffée en utilisant la dérivée seconde  $\delta^{2x}$ . Cette dernière met en évidence une singularité importante et est nécessairement moins bruitée que la dérivée quatrième  $\delta^{4x}$ .

Deuxièmement, l'estimation des modules complexes est possible localement dans les zones sans défauts, à condition que le rapport signal à bruit ne soit pas trop impacté par un potentiel filtrage dû à la présence de l'imperfection. Une analyse du matériau fiable est donc envisageable, y compris sur structure imparfaite, ce qui n'est pas possible avec les méthodes usuelles globales de poutres d'Oberst ou d'essais en traction-compression.

Enfin, un comportement particulier du facteur de perte  $\eta_G$  est observé selon le type d'imperfection. Au sein d'un défaut de collage,  $\eta_G$  tend à augmenter fortement, mais diminue localement lorsqu'il s'agit d'une rupture de fibres.

La dissipation locale d'énergie vibratoire a déjà été utilisée en tant qu'indicateur de la présence de défauts par Montalvao et al. [127], la possibilité de les identifier par analyse de l'amortissement lié au cisaillement est une perspective forte.

Les travaux établis dans ce chapitre nécessitent cependant une étude plus approfondie, utilisant un panel de structures important. La variété de défauts identifiables, leurs tailles, leurs influences en fonction de leurs sévérités et les bandes fréquentielles à étudier constituent des investigations à mener dans le futur.

D'autres améliorations doivent également être développées. L'application d'une régularisation par une inversion de Tikhonov est aussi envisageable [128, 129]. La limitation de l'étalement des données, issu du filtrage, pourrait aussi être traitée par déconvolution [69], ou en utilisant des méthodes parcimonieuses combinées à une formulation bayésienne [81–86, 130]. Un développement d'indicateurs plus marqués, basés sur le facteur de perte en cisaillement, permettrait également une meilleure identification spatiale des défauts.



# Conclusion générale

L'utilisation croissante des matériaux composites dans l'industrie nécessite le développement de nouvelles méthodes de caractérisation. Les techniques usuelles sont rarement adaptées aux matériaux composites pour des questions de mise en œuvre, de modélisation ou de fiabilité des résultats. Ces nouveaux matériaux mettent également en évidence des défauts qui leur sont propres. L'identification et la quantification du degré de sévérité de ces imperfections, sont des points difficilement maîtrisés à l'heure actuelle. L'industrialisation de structures en matériaux composites s'améliore constamment mais le manque de connaissances et de techniques d'analyse restreint leur emploi pour des pièces secondaires dont la détérioration ne présente pas de risque majeur.

Ces travaux de thèse portent sur le développement des méthodes RIFF (Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée) [59–65, 67, 92] et RIC (Résolution Inverse Corrigée) [68, 96] appliquées à la théorie des poutres de Timoshenko pour l'étude des matériaux composites, à partir d'une mesure du champ de déplacement transverse. Le choix d'une représentation homogénéisée des composites permet de déterminer le module d'Young  $E$ , le module de cisaillement  $G$  ainsi que les facteurs de pertes associés  $\eta_E$  et  $\eta_G$ , d'un matériau équivalent. La compréhension de ces matériaux ainsi que leur modélisation en éléments finis sont alors simplifiées et la dynamique vibratoire demeure cohérente.

La formulation inverse établie autorise une analyse des paramètres en fonction de la fréquence, permettant de décrire le matériau étudié, ou en fonction de l'espace, dans le but de constater de potentielles variations locales des caractéristiques du matériau ou de détecter un défaut. L'analyse cartographique des paramètres élastiques et des facteurs de pertes peut alors apporter un renseignement sur la signature d'une imperfection afin de l'identifier.

## Bilan des travaux

A l'issue de ce travail de trois ans, plusieurs observations démontrent la possibilité de caractériser des matériaux composites multicouches par les méthodes RIFF ou RIC appliquées à la théorie de Timoshenko, de nombreux points marquants sont à noter.

L'utilisation de la théorie de Timoshenko induit un degré de sensibilité supplémentaire de la méthode RIFF lorsque la mesure est entachée de bruit. L'application d'une régularisation est commune à tous les problèmes inverses, mais cette dernière, établie par filtrage et fenêtrage des signaux bruités, dégrade la dérivée seconde  $\delta^{2x}$ . La résolution inverse reste instable, l'utilisation d'une analyse multi-fréquentielle

est alors requise pour déterminer les caractéristiques du matériau. Une telle particularité n'a jamais été rencontrée dans les précédents travaux associés à la technique RIFF.

Par ailleurs, une optimisation de la régularisation a permis de constater que la méthode fonctionne idéalement lorsque le nombre d'onde de coupure  $k_c$  est égal au nombre d'onde naturel de la structure  $k_p$ , et ce indépendamment du niveau de bruit présent sur les signaux de mesure. Une nouvelle méthode de détermination du nombre d'onde naturel est proposée et s'avère efficace, une procédure automatisée de la régularisation est également développée.

Des expérimentations ont prouvé l'applicabilité de cette nouvelle extension de la méthode RIFF. Une première validation sur une poutre épaisse en aluminium et une seconde sur une poutre multicouche présentant une âme en nid d'abeille [6], démontrent la possibilité d'identifier précisément le module d'Young  $E$  et le module de cisaillement  $G$  de manière simultanée. De plus, les phénomènes d'amortissement peuvent être séparés en deux contributions associées à la flexion ou au cisaillement, grâce à l'estimation des facteurs de pertes  $\eta_E$  et  $\eta_G$ .

Les résultats obtenus, confrontés avec des essais sur banc de flexion, démontrent une excellente précision d'analyse par la méthode RIFF. Ce constat est également confirmé par une forte concordance entre deux réponses en fréquence, l'une mesurée, l'autre synthétisée à partir des caractéristiques homogènes équivalentes estimées par la méthode inverse.

Un développement de la méthode RIC, toujours appliquée à la théorie de Timoshenko, a également été mis en œuvre. Grâce à l'emploi d'un terme correctif dans l'équation du mouvement, il est possible de déterminer les paramètres du matériau à partir d'une mesure du champ de déplacement sur un maillage grossier. La faible résolution spatiale induit un filtrage naturel du signal, l'étape de régularisation n'est plus nécessaire.

Par le passé la méthode RIC a toujours été appliquée sur un maillage fixe [68, 96]. La considération d'un maillage adaptatif est également établie dans ces travaux. Enfin une comparaison des résultats expérimentaux issus des méthodes RIFF et RIC atteste d'une fiabilité d'analyse identique. La technique RIC bénéficie cependant d'une réduction importante des durées de mesure et de calcul.

La détection de défauts par la méthode RIFF appliquée au modèle de Timoshenko est également possible, grâce à l'établissement de cartographies des paramètres. Des études antérieures ont prouvé la capacité de localisation de défauts sur structures homogènes et isotropes minces [69–71]. Cependant, l'extension aux structures composites et l'emploi de la théorie de Timoshenko suggèrent la possibilité d'identifier le type de défaut, à travers l'analyse du comportement local des paramètres élastiques et des facteurs de pertes.

Une étude de faisabilité a montré ce potentiel sur un plan théorique, toutefois les interprétations issues d'essais expérimentaux sont plus mitigés. Les cartographies des paramètres, obtenues sur des poutres présentant un défaut de collage (entre la peau et l'âme NIDA) ou une rupture de fibres, laissent entrevoir une réaction locale particulière du facteur de perte en cisaillement  $\eta_G$ . Ce dernier augmente dans le cas d'un défaut de collage (augmentation des frottements par cisaillement) mais diminue lorsqu'il s'agit d'une

rupture de fibres (diminution des contraintes subies par l'âme NIDA).

Ces observations sont à relativiser au regard du faible nombre d'éprouvettes étudiées. Néanmoins, le concept général d'une identification de défauts établie à travers l'analyse des propriétés du matériau est à développer. Le caractère local et la facilité de mise en œuvre de la méthode, ainsi que le principe d'homogénéisation de matériaux composites sont des atouts à valoriser pour le contrôle non destructif.

## Perspectives d'étude

Le développement des méthodes RIFF et RIC, appliquées à la théorie de Timoshenko, peut être amélioré sur divers aspects. Plusieurs leviers sont envisagés à des échéances variables, une combinaison de cette nouvelle technique de caractérisation des matériaux composites avec d'autres procédures est également souhaitée.

La régularisation optimale de la méthode RIFF appliquée à la théorie de Timoshenko doit être finement paramétrée. Le fait que cette approche fonctionne exclusivement lorsque le nombre d'onde de coupure est égal au nombre d'onde propagatif, soit  $k_c = k_p$ , ouvre la possibilité d'une nouvelle approche pour identifier les nombres d'onde naturels sur matériaux composites. En effet, la procédure d'estimation des paramètres du matériau permet de déterminer le nombre d'onde propagatif complexe  $k_p$ , mais également le nombre d'onde évanescent  $k_e$ , particulièrement difficile d'accès. Une étude de ce potentiel est à comparer avec une méthode récente d'identification de nombre d'onde, proposée par Bert Roozen. La perspective d'un travail commun est en discussion.

La nécessité actuelle d'utiliser une analyse multi-fréquentielle pour stabiliser le problème inverse de Timoshenko est un point à améliorer, puisqu'elle induit un lissage fréquentiel des caractéristiques du matériau. La régularisation actuellement mise en œuvre semble dégrader fortement la dérivée spatiale  $\delta^{2x}$ . La réalisation d'une correction spécifique à la théorie de Timoshenko, une régularisation de Tikhonov [128, 131] ou l'application de méthodes de complétion de données [129] sont des axes d'amélioration à envisager.

L'utilisation de la méthode RIFF en tant que nouvelle technique de caractérisation de matériaux composites suscite diverses poursuites de ces travaux de thèse :

1. La première perspective immédiate serait de démontrer la fiabilité des caractéristiques issues de la méthode RIFF, à partir de mesures établies sur une pièce industrielle. Les limitations fréquentielles de la méthode constituent un questionnement qu'il faudrait également approfondir.
2. Le second développement envisagé à court terme concerne l'extension de la méthode pour l'étude des plaques composites. À l'image de la théorie de Timoshenko, plus pertinente que le modèle d'Euler-Bernoulli lorsque l'on s'intéresse à des poutres composites, un développement sur plaques composites nécessitera a priori l'utilisation de la théorie de Mindlin, à comparer avec le modèle de Love-Kirchhoff.



3. L'identification de sources vibratoires sur coques a déjà été étudiée par Djamaa [75, 76, 132], un prolongement de ces travaux pour la caractérisation de coques composites est également prévu. L'application d'un opérateur de coque mince (modèle de Donnell), adapté pour inclure les effets de courbure, est envisagé à travers le projet RICTUS de l'IRT Jules Verne portant sur la "caractérisation de matériaux composites sur géométries complexes industrielles par méthode vibratoire inverse". L'intérêt ici est de comprendre comment la courbure du matériau peut modifier l'identification de ses caractéristiques homogénéisées. Une extension aux coques épaisses est également à réfléchir, en utilisant un opérateur développé dans les travaux de Leissa [133, 134].
4. Les travaux de Renzi [69, 77, 78] ont porté sur le développement d'un opérateur réduit, basé sur la théorie des éléments finis, pour l'identification de sources vibratoires. On peut donc entrevoir la possibilité de caractériser des matériaux sur pièces industrielles mises en forme. Cet aspect est particulièrement intéressant puisque les matériaux composites sont souvent façonnés dès leur fabrication, prenant immédiatement la forme de la structure finale. Il n'existe donc pas d'étape intermédiaire permettant d'estimer les caractéristiques du matériau avant moulage. Ce développement de la méthode RIFF est également prévu dans le projet RICTUS de l'IRT Jules Verne.
5. Cette thèse a été établie en considérant un modèle d'amortissement linéaire. Dans le cas de matériaux composites, il se pourrait que la dissipation énergétique soit en réalité bien plus complexe. Les interfaces et les différents matériaux constitutifs peuvent potentiellement induire des mécanismes de pertes particuliers. La mise en œuvre d'une formulation de la méthode RIFF, basée sur des équations prenant en compte des paramètres d'amortissements non linéaires, serait une originalité attrayante. Cette idée fait l'objet d'un nouveau projet dans lequel l'IRT Jules Verne serait partenaire.

Concernant la détection et l'identification de défauts, une campagne d'essais sur un large panel de structures composites est à réaliser. Les observations constatées pour les poutres avec défaut de collage ou de rupture de fibres sont encourageantes mais doivent être confirmées. Le procédé de fabrication des poutres composites établi dans notre étude n'est pas optimisé, il pourrait être judicieux de faire appel à des prestataires spécialisés dans la réalisation de structures composites. Par ailleurs, la taille des défauts créés dans cette thèse est volontairement exagérée. Une meilleure connaissance des procédés d'établissement des imperfections est souhaitable, afin de pouvoir reproduire des défauts réalistes.

Enfin, une recherche doit également être menée quant à la capacité de détection et d'identification des défauts. La taille, le type ou encore la sévérité des imperfections sont des éléments importants auxquels une étude détaillée devra répondre. Le dimensionnement d'indicateurs spécifiques utilisant une fusion des données [70, 71], l'application d'une analyse en composantes principales [135], ou la mise en œuvre de méthodes bayésiennes, peut permettre une détection plus franche des imperfections, notamment pour les défauts localisés, grâce à l'utilisation d'une information a priori parcimonieuse dans le problème inverse [81–86, 130].

Le contrôle non destructif est une thématique importante pour les industries ayant recours aux matériaux composites. L'une des demandes fortement exprimées concerne l'analyse des matériaux en sortie du processus de fabrication, ainsi que le suivi embarqué de ces derniers. Les problématiques majeures sont les suivantes :

1. Les industries automobiles et aéronautiques requièrent des cadences de production importantes. La méthode RIFF présente l'avantage de se baser sur peu d'information (seul le champ de déplacement est nécessaire) et de ne comporter aucune inversion mathématique lourde. L'utilisation de l'holographie optique numérique ultra-rapide [1–4], également développée dans le cadre de la Chaire VibroLeg, peut-être une véritable voie originale de développement. D'une part, l'importante résolution spatiale offerte par cette technique de mesure autoriserait l'obtention de cartographies précises des caractéristiques du matériau. D'autre part, la possibilité d'une mesure quasiment immédiate permettrait de distinguer un potentiel défaut de fabrication directement lié à un dysfonctionnement de la chaîne de production. Dans cet objectif d'une analyse rapide, une combinaison de la technique RIFF avec une méthode de retournement temporel est également à envisager. Cette technique, récemment brevetée par les sociétés Sonorhc et ACOEM [136], pourrait amener à une localisation des défauts à partir d'une mesure ne nécessitant que 2 capteurs.
2. Le contrôle de pièces composites de grande taille est une problématique rencontrée principalement par les industries aéronautiques, navales, ou encore dans les domaines des énergies renouvelables (éoliennes, hydroliennes, etc.). La diminution des temps de caractérisation de grandes structures (typiquement de la taille d'une aile d'avion, d'une coque de bateau, ou d'une pale d'éolienne) est souhaitée. Les techniques ultrasonores offrent une précision de mesure fortement appréciée, mais les ondes associées se propagent sur de courtes distances. Les capteurs et actionneurs doivent donc être déplacés, le développement de méthodes sans contact est actuellement en étude (projet LUCITA de l'IRT Jules Verne par exemple). La stratégie d'un contrôle non destructif par la méthode RIFF, couplée aux techniques ultrasonores intéresse fortement les industriels. La possibilité d'une analyse vibratoire en basses et moyenne fréquences autorise la localisation de défauts sur maillage grossier. Si une portion de la structure est susceptible de comporter un défaut, une seconde analyse par ultrasons est alors envisagée, non plus sur toute la structure mais uniquement dans la zone suspectée, pré-localisée par la méthode RIFF.
3. Le contrôle de structure embarqué, ou Structural Health Monitoring (SHM) concerne toutes les industries nécessitant une connaissance de la pérennité des matériaux. La difficulté principale porte actuellement sur l'intégration d'un réseau de capteurs au sein même des structures, permettant de témoigner de leur état de santé. L'utilisation de patches piézoélectriques distribués ou de fibres optiques, placés au cœur du matériau, est une voie très prometteuse. Dans cet axe de recherche, la méthode RIFF devra évidemment être adaptée à la quantité mesurée (déformation longitudinale dans le cas de patches piézoélectriques), des travaux ont été démarrés dans ce sens [79]. La contrainte actuelle de mise en œuvre de procédés SHM réside dans le coût de telles intégrations, mais le développement de ce type de technologies n'en est qu'à ses débuts.

---

---

# Bibliographie

- [1] J. Poittevin, P. Picart, C. Faure, F. Gautier, C. Pézerat. Multi-point vibrometer based on high-speed digital in-line holography. *Applied Optics*, 54 (11) : p. 3185 (2015).
- [2] J. Poittevin, P. Picart, F. Gautier, C. Pézerat. Quality assessment of combined quantization-shot-noise-induced decorrelation noise in high-speed digital holographic metrology. *Optics Express*, 23 (24) : p. 30917 (2015).
- [3] J. Poittevin. *Mesure du champ vibratoire d'une structure par holographie optique ultra-rapide*. Ph.D. thesis, Université du Maine (2015).
- [4] J. Poittevin, F. Gautier, C. Pézerat, P. Picart. High-speed holographic metrology : principle, limitations, and application to vibroacoustics of structures. *Optical Engineering*, 55 (12) : p. 121717 (2016).
- [5] T. Wassereau, C. Pézerat, J.-L. Guyader, F. Ablitzer. Characterization of materials and flaw detection using force analysis technique. In *Noise and Vibrations, Emerging Technologies*. Dubrovnik, Croatia (2015).
- [6] T. Wassereau, F. Ablitzer, C. Pézerat, J.-L. Guyader. Experimental identification of flexural and shear complex moduli by inverting the Timoshenko beam problem. *Journal of Sound and Vibration*, 399 : pp. 86–103 (2017).
- [7] O. Grosset, J.-H. Thomas, F. Ablitzer, C. Pézerat. Identification of the acoustic wall pressure of a turbulent flow exciting structures. In *23rd International Congress on Sound and Vibration*. Athens, Greece (2016).
- [8] O. Aklouche, A. Pelat, S. Maugeais, F. Gautier. Scattering of flexural waves by a pit of quadratic profile inserted in an infinite thin plate. *Journal of Sound and Vibration*, 375 : pp. 38–52 (2016).
- [9] C. Bricault, C. Pézerat, M. Collet. Semi-passive control of acoustic vibrations and radiation waves with a periodic lattice of piezoelectric patches. In *Noise and Vibrations, Emerging Technologies*. Dubrovnik, Croatia (2015).
- [10] C. Bricault. *Diminution des vibrations et du bruit rayonné de paroi par contrôle distribué*. Ph.D. thesis, Université du Maine, Le Mans, France (2017).
- [11] F. Ablitzer, J.-M. Génevaux, C. Pézerat. Caractérisation de matériaux composites intégrant la fonction amortissement. Technical report, LAUM, Le Mans, France (2012).

- 
- [12] F. Ablitzer, C. Pézerat, J.-M. Génevaux, J. Bégué. Identification of stiffness and damping properties of plates by using the local equation of motion. *Journal of Sound and Vibration*, 333 (9) : pp. 2454–2468 (2014).
- [13] J.-M. Berthelot. *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures*. Tec & Doc, Paris, France, 3e edition (1999).
- [14] A. Chaigne, J. Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, Paris, France (2008).
- [15] I. Brémaud. Acoustical properties of wood in string instruments soundboards and tuned idiophones : Biological and cultural diversity a). *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131 (1) : pp. 807–818 (2012).
- [16] I. Roelens, F. Nuytten, I. Bosmans, G. Vermeir. In situ measurement of the stiffness properties of building components. *Applied Acoustics*, 52 (3–4) : pp. 289–309 (1997).
- [17] A. Strauss, E. Apostolidi, T. Zimmermann, U. Gerhaher, S. Dritsos. Experimental investigations of fiber and steel reinforced elastomeric bearings : Shear modulus and damping coefficient. *Engineering Structures*, 75 : pp. 402–413 (2014).
- [18] D. Zonta, A. Elgamal, M. Fraser, M. J. Nigel Priestley. Analysis of change in dynamic properties of a frame-resistant test building. *Engineering Structures*, 30 (1) : pp. 183–196 (2008).
- [19] Z. Y. Ai, Z. X. Li. Dynamic analysis of a laterally loaded pile in a transversely isotropic multilayered half-space. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 54 : pp. 68–75 (2015).
- [20] B. Ehrhart, B. Valeske, C. Bockenheimer. 9 - Non-destructive evaluation (NDE) of aerospace composites : methods for testing adhesively bonded composites. In V. M. Karbhari, editor, *Non-Destructive Evaluation (NDE) of Polymer Matrix Composites*, pp. 220–237. Woodhead Publishing (2013).
- [21] D. K. Hsu. 15 - Non-destructive evaluation (NDE) of aerospace composites : ultrasonic techniques. In V. M. Karbhari, editor, *Non-Destructive Evaluation (NDE) of Polymer Matrix Composites*, pp. 397–422. Woodhead Publishing (2013).
- [22] S. Becz, J. Hurtado, I. Lapczyk. Analysis of Barely Visible Impact Damage for aerospace structures. In *16th International Conference on Composite Materials*. Kyoto, Japan (2007).
- [23] K. P. Menard. *Dynamic Mechanical Analysis : A Practical Introduction*. CRC Press, 2nd edition (2008).
- [24] Dynamic Mechanical Analysis : A beginner’s guide. Technical report, PerkinElmer (2008).
- [25] T. G. Nieh, D. J. Chellman. Modulus measurements in discontinuous reinforced aluminum composites. *Scripta Metallurgica*, 18 (9) : pp. 925–928 (1984).
- [26] G. Knapp, G. Oreski, G. Pinter. Method to characterize the damping behavior of thin passively constrained layer laminates using dynamic mechanical analysis (DMA) in shear mode. *Polymer Testing*, 42 : pp. 215–224 (2015).
- [27] J. E. Zorzi, C. A. Perottoni. Estimating Young’s modulus and Poisson’s ratio by instrumented indentation test. *Materials Science and Engineering : A*, 574 : pp. 25–30 (2013).

- 
- [28] D. J. Ewins. *Modal Testing : theory, practice and application*. Research Studies Pre, Baldock, Hertfordshire, England ; Philadelphia, PA, 2nd edition (2000).
- [29] Y. Wang, M. Masoumi, M. Gaucher-Petitdemange. Damping analysis of a flexible cantilever beam containing an internal fluid channel : Experiment, modeling and analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 340 : pp. 331–342 (2015).
- [30] A. Hauert, A. Rossoll, A. Mortensen. Young’s modulus of ceramic particle reinforced aluminium : Measurement by the Impulse Excitation Technique and confrontation with analytical models. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 40 (4) : pp. 524–529 (2009).
- [31] S. Tognana, W. Salgueiro, A. Somoza, A. Marzocca. Measurement of the Young’s modulus in particulate epoxy composites using the impulse excitation technique. *Materials Science and Engineering : A*, 527 (18–19) : pp. 4619–4623 (2010).
- [32] M. Assarar, A. El Mahi, J.-M. Berthelot. Analyse de l’amortissement des composites sandwichs. In *16e Journées Nationales sur les Composites*. AMAC, Toulouse, France (2009).
- [33] B. Wang, M. Yang. Damping of honeycomb sandwich beams. *Journal of Materials Processing Technology*, 105 (1–2) : pp. 67–72 (2000).
- [34] R. Zhou, M. Crocker. Effects of thickness on damping in foam-filled honeycomb-core sandwich beams. Orlando, USA (2007).
- [35] ASTM International, 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959, United States. *Standard test method for measuring vibration-damping properties of materials*.
- [36] D. Montalvão, R. A. L. D. Cláudio, A. M. R. Ribeiro, J. Duarte-Silva. Experimental measurement of the complex Young’s modulus on a CFRP laminate considering the constant hysteretic damping model. *Composite Structures*, 97 : pp. 91–98 (2013).
- [37] Y. Liao, V. Wells. Estimation of complex modulus using wave coefficients. *Journal of Sound and Vibration*, 295 (1–2) : pp. 165–193 (2006).
- [38] Y. Liao, V. Wells. Estimation of complex Young’s modulus of non-stiff materials using a modified Oberst beam technique. *Journal of Sound and Vibration*, 316 (1–5) : pp. 87–100 (2008).
- [39] R. Roy, T. Kailath. ESPRIT - Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on acoustics speech and signal processing*, 37 (7) : pp. 984–995 (1989).
- [40] R. Badeau, B. David, G. Richard. Selecting the modeling order for the ESPRIT high resolution method : an alternative approach. In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, volume 2, pp. 1025–1028. Montréal, Québec, Canada (2004).
- [41] J. Lozada, X. Boutillon, B. David. Analyse modale sans transformée de Fourier. In *8e Congrès Français d’Acoustique*. Grenoble, France (2006).
- [42] K. Ege, X. Boutillon, J. Lozada, B. David. Estimation modale haute résolution. In *18e Congrès Français de Mécanique*. Grenoble, France (2007).
- [43] M. Géradin, D. J. Rixen. *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Masson, Paris, France (1996).

- 
- [44] M. Matter, T. Gmür, J. Cugnoni, A. Schorderet. Numerical-experimental identification of the elastic and damping properties in composite plates. *Composite Structures*, 90 (2) : pp. 180–187 (2009).
- [45] E. N. Barkanov, M. I. Chebakov. Inverse technique for characterisation of elastic and dissipative properties of materials used in a composite repair of pipelines. In *Advanced Problems in Mechanics*. St Petersburg, Russia (2014).
- [46] F. E. Penado. Effective Elastic Properties of Honeycomb Core with Fiber-Reinforced Composite Cells. *Open Journal of Composite Materials*, 03 (04) : pp. 89–96 (2013).
- [47] E. Carrera. On the use of the Murakami’s zig-zag function in the modeling of layered plates and shells. *Computers & Structures*, 82 (7–8) : pp. 541–554 (2004).
- [48] E. Carrera, M. Filippi, E. Zappino. Laminated beam analysis by polynomial, trigonometric, exponential and zig-zag theories. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 41 : pp. 58–69 (2013).
- [49] L. Demasi. Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part IV : Zig-zag theories. *Composite Structures*, 87 (3) : pp. 195–205 (2009).
- [50] L. Demasi. Partially zig-zag advanced higher order shear deformation theories based on the Generalized Unified Formulation. *Composite Structures*, 94 (2) : pp. 363–375 (2012).
- [51] L. Demasi. Partially layer wise advanced zig-zag and HSDT models based on the Generalized Unified Formulation. *Engineering Structures*, 53 : pp. 63–91 (2013).
- [52] N. Jacques, E. Daya, M. Potier-Ferry. Vibrations non linéaires de poutres sandwich viscoélastiques. In *18e Congrès Français de Mécanique*. Grenoble, France (2007).
- [53] J.-L. Guyader, C. Cacciolati. Viscoelastic properties of single layer plate material equivalent to multi-layer composites plate. In *Inter-noise*. Istanbul, Turkey (2007).
- [54] J.-L. Guyader, C. Cacciolati, E. Guyader. Prediction of vibroacoustic behaviour of multilayered structures using equivalent bi-materials. In *Inter-noise*. Shangai, China (2008).
- [55] J. Maeck, M. Abdel Wahab, B. Peeters, G. De Roeck, J. De Visscher, W. P. De Wilde, J. M. Ndambi, J. Vantomme. Damage identification in reinforced concrete structures by dynamic stiffness determination. *Engineering Structures*, 22 (10) : pp. 1339–1349 (2000).
- [56] J. Maeck, G. De Roeck. Damage assessment using vibration analysis on the z24-bridge. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17 (1) : pp. 133–142 (2003).
- [57] S. Keye. Improving the performance of model-based damage detection methods through the use of an updated analytical model. *Aerospace Science and Technology*, 10 (3) : pp. 199–206 (2006).
- [58] U. Polimeno, M. Meo. Detecting barely visible impact damage detection on aircraft composites structures. *Composite Structures*, 91 (4) : pp. 398–402 (2009).
- [59] C. Pézerat. *Méthode d’identification des efforts appliqués sur une structure vibrante, par résolution et régularisation du problème inverse*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, France (1996).
- [60] C. Pézerat, J.-L. Guyader. Two inverse methods for localization of external sources exciting a beam. *Acta Acustica*, 3 : pp. 1–10 (1995).

- 
- [61] C. Pézerat, J.-L. Guyader. Force analysis technique : Reconstruction of force distribution on plates. *Acustica - Acta acustica*, 86 : pp. 322–332 (2000).
- [62] C. Pézerat, J.-L. Guyader. Identification of vibration sources. *Applied Acoustics*, 61 (3) : pp. 309–324 (2000).
- [63] C. Pézerat, T. Loyau, J.-L. Guyader. Characterisation of vibration sources on a set of plates using the RIFF technique. *Noise Control Engineering Journal*, 50 (2) : pp. 50–57 (2002).
- [64] C. Pézerat, J.-L. Guyader. Localisation d’efforts appliqués sur des structures minces ; régularisation du problème inverse. *Revue Française de Mécanique*, pp. 49–55 (1996).
- [65] C. Pézerat, T. Loyau, J.-L. Guyader. Power Source Characterisation Using the RIFF Test Bench. In *Euronoise*. Patra, Greece (2001).
- [66] D. Lecoq, C. Pézerat, J.-H. Thomas, W. P. Bi. Extraction of the acoustic component of a turbulent flow exciting a plate by inverting the vibration problem. *Journal of Sound and Vibration*, 333 (12) : pp. 2505–2519 (2014).
- [67] C. Pézerat, J.-L. Guyader, P. Gonzales, F. Bessac. Détermination des efforts injectés par un composant sur un ensemble de plaques standardisées. In *Concevoir plus silencieux : comment choisir ses composants*. Nancy, France (1999).
- [68] Q. Leclère, F. Ablitzer, C. Pézerat. Practical implementation of the corrected force analysis technique to identify the structural parameter and load distributions. *Journal of Sound and Vibration*, 351 : pp. 106–118 (2015).
- [69] C. Renzi. *Identification expérimentale de sources vibratoires par résolution du problème inverse modélisé par un opérateur éléments finis local*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, France (2011).
- [70] H. Xu, L. Cheng, Z. Su, J.-L. Guyader. Identification of structural damage based on locally perturbed dynamic equilibrium with an application to beam component. *Journal of Sound and Vibration*, 330 (24) : pp. 5963–5981 (2011).
- [71] H. Xu, L. Cheng, Z. Su, J.-L. Guyader. Damage visualization based on local dynamic perturbation : Theory and application to characterization of multi-damage in a plane structure. *Journal of Sound and Vibration*, 332 (14) : pp. 3438–3462 (2013).
- [72] G. Pavić. Measurement of structure borne wave intensity, Part I : Formulation of the methods. *Journal of Sound and Vibration*, 49 (2) : pp. 221–230 (1976).
- [73] D. U. Noiseux. Measurement of Power Flow in Uniform Beams and Plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 47 (1B) : pp. 238–247 (1970).
- [74] J.-L. Guyader. *Vibrations des milieux continus*. Hermes, Paris, France (2002).
- [75] M.-C. Djamaa, N. Ouelaa, C. Pézerat, J.-L. Guyader. Reconstruction of a distributed force applied on a thin cylindrical shell by an inverse method and spatial filtering. *Journal of Sound and Vibration*, 301 (3–5) : pp. 560–575 (2007).
- [76] M. C. Djamaa, N. Ouelaa, C. Pézerat, J. L. Guyader. Sound source localization by an inverse method using the measured dynamic response of a cylinder. *Applied Acoustics*, 88 : pp. 22–29 (2015).



- 
- [77] C. Renzi, C. Pézerat, J.-L. Guyader. Vibratory source identification by using the Finite Element Model of a subdomain of a flexural beam. *Journal of Sound and Vibration*, 332 (3) : pp. 545–562 (2013).
- [78] C. Renzi, C. Pézerat, J.-L. Guyader. Local force identification on flexural plates using reduced Finite Element models. *Computers & Structures*, 144 : pp. 75–91 (2014).
- [79] S. Chesné, C. Pézerat. Distributed piezoelectric sensors for boundary force measurements in Euler–Bernoulli beams. *Smart Materials and Structures*, 20 (7) : p. 075009 (2011).
- [80] S. Chesné. Indirect boundary force measurements in beam-like structures using a derivative estimator. *Journal of Sound and Vibration*, 333 (24) : pp. 6438–6452 (2014).
- [81] M. Aucejo. Structural source identification using a generalized Tikhonov regularization. *Journal of Sound and Vibration*, 333 (22) : pp. 5693–5707 (2014).
- [82] M. Aucejo, O. De Smet. Bayesian source identification using local priors. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 66–67 : pp. 120–136 (2016).
- [83] C. Faure, C. Pézerat, J. Antoni, F. Ablitzer. Identification of vibration sources from measurements of transverse displacement, from a bayesian point of view. In *Noise and Vibrations, Emerging Technologies*. Dubrovnik, Croatia (2015).
- [84] C. Faure, F. Ablitzer, C. Pézerat, J. Antoni. Vibration source characterization using force analysis technique and a bayesian regularization. In *23rd International Congress on Sound and Vibration*. Athens, Greece (2016).
- [85] C. Faure. *Approches Bayésiennes appliquées à l’identification d’efforts vibratoires par la méthode de Résolution Inverse*. Ph.D. thesis, Université du Maine, Le Mans, France (2017).
- [86] C. Faure, F. Ablitzer, J. Antoni, C. Pézerat. Empirical and fully Bayesian approaches for the identification of vibration sources from transverse displacement measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 94 : pp. 180–201 (2017).
- [87] M. Ruzek. *Identification expérimentale de l’équation du mouvement de milieux vibroacoustiques*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, France (2013).
- [88] M. Ruzek, J.-L. Guyader, C. Pézerat. Experimental identification of the bending equation of beams from the vibration shape measurements. *Journal of Sound and Vibration*, 332 (16) : pp. 3623–3635 (2013).
- [89] B. Lascoup, T. Wassereau, F. Ablitzer, C. Pézerat. Identification des propriétés mécaniques d’un composite par méthode RIFF. In *JNC*. Lyon, France (2015).
- [90] B. Lascoup, F. Ablitzer, C. Pézerat. Mechanical properties identification of composite materials using Force Analysis Technique. In *Dyncomp*. Arles, France (2015).
- [91] F. Ablitzer, C. Pézerat, B. Lascoup, J. Brocaïl. Identification of the flexural stiffness parameters of an orthotropic plate from the local dynamic equilibrium without a priori knowledge of the principal directions. *Journal of Sound and Vibration*, 404 : pp. 31–46 (2017).

- 
- [92] C. Pézerat, Q. Leclère, N. Totaro, M. Pachebat. Identification of vibration excitations from acoustic measurements using near field acoustic holography and the force analysis technique. *Journal of Sound and Vibration*, 326 (3–5) : pp. 540–556 (2009).
- [93] C. Devivier, F. Pierron, M. R. Wisnom. Impact damage detection in composite plates using deflectometry and the Virtual Fields Method. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 48 : pp. 201–218 (2013).
- [94] E. Guillemain. Détection de défauts dans une structure vibrante - Application d'un réseau de capteurs. Technical report, INSA, Lyon, France (2010).
- [95] E. Guillemain, S. Chesné. Improved Forces Identification Techniques Using Curvatures Sensors : Application to Damage Detection. In *9th International Conference on Damage Assessment of Structures*, p. 012090. Oxford, United Kingdom (2011).
- [96] Q. Leclère, C. Pézerat. Vibration source identification using corrected finite difference schemes. *Journal of Sound and Vibration*, 331 (6) : pp. 1366–1377 (2012).
- [97] C. Chochol, S. Chesné, D. Remond. An original differentiation tool for identification on continuous structures. *Journal of Sound and Vibration*, 332 (13) : pp. 3338–3350 (2013).
- [98] A. Berry, O. Robin, F. Pierron. Identification of dynamic loading on a bending plate using the Virtual Fields Method. *Journal of Sound and Vibration*, 333 (26) : pp. 7151–7164 (2014).
- [99] F. Chevillotte, Q. Leclère, N. Totaro, C. Pézerat, P. Souchotte, G. Robert. Identification d'un champ de pression pariétale induit par un écoulement turbulent à partir de mesures vibratoires. In *10ème Congrès Français d'Acoustique*. Lyon, France (2010).
- [100] D. Lecoq, C. Pézerat, J.-H. Thomas, W. P. Bi. Turbulent wall pressure measurement in low wavenumber using the flow-induced vibrations. In *MEDYNA*. Marrakech, Morocco (2013).
- [101] J. Carpentier, J.-H. Thomas, C. Pézerat, C. Bailly, A. Berry. Comprehension of phenomena generating acoustic noise inside the passenger compartment of cars : sources identification and simulation. In *23rd International Congress on Sound and Vibration*. Athens, Greece (2016).
- [102] A. Labuschagne, N. F. J. van Rensburg, A. J. van der Merwe. Comparison of linear beam theories. *Mathematical and Computer Modelling*, 49 (1–2) : pp. 20–30 (2009).
- [103] C. W. Lim, C. M. Wang, S. Kitipornchai. Timoshenko curved beam bending solutions in terms of Euler-Bernoulli solutions. *Archive of Applied Mechanics*, 67 (3) : pp. 179–190 (1997).
- [104] C. Mei, Y. Karpenko, S. Moody, D. Allen. Analytical approach to free and forced vibrations of axially loaded cracked Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 291 (3–5) : pp. 1041–1060 (2006).
- [105] A. Dixit. Single-beam analysis of damaged beams : Comparison using Euler–Bernoulli and Timoshenko beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, 333 (18) : pp. 4341–4353 (2014).
- [106] T. Saito, R. D. Parbery, S. Okuno, S. Kawano. Parameter Identification for aluminium honeycomb sandwich panels based on orthotropic Timoshenko beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, 208 (2) : pp. 271–287 (1997).

- 
- [107] M. Rak, M. Ichchou, J. Holnicki-Szulc. Identification of structural loss factor from spatially distributed measurements on beams with viscoelastic layer. *Journal of Sound and Vibration*, 310 (4–5) : pp. 801–811 (2008).
- [108] M. N. Ichchou, O. Bareille, J. Berthaut. Identification of effective sandwich structural properties via an inverse wave approach. *Engineering Structures*, 30 (10) : pp. 2591–2604 (2008).
- [109] D. Montalvão, A. M. R. Ribeiro, J. Duarte-Silva. A method for the localization of damage in a CFRP plate using damping. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 (6) : pp. 1846–1854 (2009).
- [110] C. Kyriazoglou, B. H. Le Page, F. J. Guild. Vibration damping for crack detection in composite laminates. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 35 (7–8) : pp. 945–953 (2004).
- [111] D. L. Thomas, J. M. Wilson, R. R. Wilson. Timoshenko beam finite elements. *Journal of Sound and Vibration*, 31 (3) : pp. 315–330 (1973).
- [112] L. Majkut. Free and forced vibrations of Timoshenko beams described by single difference equation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 47 (1) : pp. 193–210 (2009).
- [113] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 2. Butterworth-Heinemann, Oxford, United Kingdom, 5th edition (2000).
- [114] A. Pereira, J. Antoni, Q. Leclère. Empirical Bayesian regularization of the inverse acoustic problem. *Applied Acoustics*, 97 : pp. 11–29 (2015).
- [115] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial & Applied Mathematics, Philadelphia, PA (2005).
- [116] Plascore. *PN1 Commercial Grade Aramid Fiber Honeycomb*.
- [117] D. Zenkert. *Introduction to Sandwich Construction*. Engineering Materials Advisory Services Ltd., Cradley Heath, England (1995).
- [118] NF T 54-606. *Structures sandwich à base de plastiques : Essais de flexion*.
- [119] F. Gautier, F. Ablitzer, G. Paiva, B. David, M. Curtit, M. Sécail-Géraud, E. Bresseur, G. Michelin. Vibroacoustique des instruments à cordes : synthèse sonore par modèle hybride adaptée pour l'aide à la facture instrumentale. In *Congrès Français d'Acoustique*. Le Mans, France (2016).
- [120] J. G. McDaniel, W. S. J. Shepard. Estimation of structural wave numbers from spatially sparse response measurements. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 108 (4) : pp. 1674–1682 (2000).
- [121] R. Kumaresan, D. Tufts. Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 30 (6) : pp. 833–840 (1982).
- [122] K. Gosh, E. G. Williams. Complex wave-number decomposition of structural vibrations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 93 (2) : pp. 836–848 (1993).

- 
- [123] T. J. Plona, B. K. Sinha, S. Kostek, S.-K. Chang. Axisymmetric wave propagation in fluid-loaded cylindrical shells. II : Theory versus experiment. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 92 (2) : pp. 1144–1155 (1992).
- [124] B. K. Sinha, T. J. Plona, S. Kostek, S.-K. Chang. Axisymmetric wave propagation in fluid-loaded cylindrical shells. I : Theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 92 (2) : pp. 1132–1143 (1992).
- [125] R. de Prony. Essai expérimental et analytique sur les lois de la dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alcool à différentes températures. *Journal de l'Ecole Polytechnique Floréal et Plairial*, 1 (22) : pp. 24–76 (1795).
- [126] A. Monti, A. El Mahi, Z. Jendli, L. Guillaumat. Mechanical behaviour and damage mechanisms analysis of a flax-fibre reinforced composite by acoustic emission. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 90 : pp. 100–110 (2016).
- [127] D. Montalvão, J. M. M. Silva. An alternative method to the identification of the modal damping factor based on the dissipated energy. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 54–55 : pp. 108–123 (2015).
- [128] M. Melon, O. De La Rochefoucauld, A. Garcia. Regularization methods for the determination of the transient acceleration of an aluminium plate from NAH measurements. In *International Congress on Sound and Vibration*. Stockholm, Sweden (2003).
- [129] A. Garcia, C. Langrenne. Data completion method for the characterization of sound source in confined domain. In *Acoustics 2012*. Nantes, France (2012).
- [130] Q. Leclère, A. A. Pereira, J. Antoni. Une approche bayésienne de la parcimonie pour l'identification de sources acoustiques. In *Congrès Français d'Acoustique*. Poitiers, France (2014).
- [131] A. Garcia, Y. Braikia, C. Langrenne, E. Bavu, M. Melon. Source identification in small spaces using field separation method : application to a car trunk. In *Acoustics 2012*. Nantes, France (2012).
- [132] M.-C. Djamaa. *Résolution du problème inverse de rayonnement d'une coque cylindrique finie et bafflée avec écoulement interne*. Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar, Anaba, Algeria (2006).
- [133] A. W. Leissa, J.-H. Kang. Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick Shells of Revolution. *Journal of Engineering Mechanics*, 125 (12) : pp. 1365–1371 (1999).
- [134] A. W. Leissa, M. S. Qatu. *Vibrations of Continuous Systems*. McGraw-Hill (2011).
- [135] C. M. Bishop. *Pattern recognition and machine learning*. Springer, New York, Etats-Unis d'Amérique (2006).
- [136] J.-L. Guyader, G. Guyader. Dispositif et procédé pour l'acquisition et le traitement de signaux acoustiques ou vibratoires (2015).

---

## Annexe A

# Décomposition en ondes forcées

### A.1 Forme de la matrice $[M_x^i]$

#### A.1.1 Euler-Bernoulli

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x^i(1, 1) = \sin(k_{f_i} x), \\ M_x^i(1, 2) = \cos(k_{f_i} x), \\ M_x^i(1, 3) = \text{sh}(k_{f_i} x), \\ M_x^i(1, 4) = \text{ch}(k_{f_i} x), \\ M_x^i(2, 1) = k_{f_i} \cos(k_{f_i} x), \\ M_x^i(2, 2) = -k_{f_i} \sin(k_{f_i} x), \\ M_x^i(2, 3) = k_{f_i} \text{ch}(k_{f_i} x), \\ M_x^i(2, 4) = k_{f_i} \text{sh}(k_{f_i} x), \\ M_x^i(3, 1) = -\tilde{E}_i I_i (k_{f_i})^2 \sin(k_{f_i} x), \\ M_x^i(3, 2) = -\tilde{E}_i I_i (k_{f_i})^2 \cos(k_{f_i} x), \\ M_x^i(3, 3) = \tilde{E}_i I_i (k_{f_i})^2 \text{sh}(k_{f_i} x), \\ M_x^i(3, 4) = \tilde{E}_i I_i (k_{f_i})^2 \text{ch}(k_{f_i} x), \\ M_x^i(4, 1) = \tilde{E}_i I_i (k_{f_i})^3 \cos(k_{f_i} x), \\ M_x^i(4, 2) = -\tilde{E}_i I_i (k_{f_i})^3 \sin(k_{f_i} x), \\ M_x^i(4, 3) = -\tilde{E}_i I_i (k_{f_i})^3 \text{ch}(k_{f_i} x), \\ M_x^i(4, 4) = -\tilde{E}_i I_i (k_{f_i})^3 \text{sh}(k_{f_i} x). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(A.1a)} \\ \text{(A.1b)} \\ \text{(A.1c)} \\ \text{(A.1d)} \\ \text{(A.1e)} \\ \text{(A.1f)} \\ \text{(A.1g)} \\ \text{(A.1h)} \\ \text{(A.1i)} \\ \text{(A.1j)} \\ \text{(A.1k)} \\ \text{(A.1l)} \\ \text{(A.1m)} \\ \text{(A.1n)} \\ \text{(A.1o)} \\ \text{(A.1p)} \end{array}$$

## A.1.2 Timoshenko

$$\left\{ \begin{array}{l}
 M_x^i(1, 1) = \sin(k_{p_i} x), \quad (\text{A.2a}) \\
 M_x^i(1, 2) = \cos(k_{p_i} x), \quad (\text{A.2b}) \\
 M_x^i(1, 3) = \text{sh}(k_{e_i} x), \quad (\text{A.2c}) \\
 M_x^i(1, 4) = \text{ch}(k_{e_i} x), \quad (\text{A.2d}) \\
 M_x^i(2, 1) = \frac{1}{c_{T_i} - d_{T_i}} [(b_{T_i} + c_{T_i}) k_{p_i} - a_{T_i} (k_{p_i})^3] \cos(k_{p_i} x), \quad (\text{A.2e}) \\
 M_x^i(2, 2) = \frac{1}{c_{T_i} - d_{T_i}} [-(b_{T_i} + c_{T_i}) k_{p_i} + a_{T_i} (k_{p_i})^3] \sin(k_{p_i} x), \quad (\text{A.2f}) \\
 M_x^i(2, 3) = \frac{1}{c_{T_i} - d_{T_i}} [(b_{T_i} + c_{T_i}) k_{e_i} + a_{T_i} (k_{e_i})^3] \text{ch}(k_{e_i} x), \quad (\text{A.2g}) \\
 M_x^i(2, 4) = \frac{1}{c_{T_i} - d_{T_i}} [(b_{T_i} + c_{T_i}) k_{e_i} + a_{T_i} (k_{e_i})^3] \text{sh}(k_{e_i} x), \quad (\text{A.2h}) \\
 M_x^i(3, 1) = [b_{T_i} - a_{T_i} (k_{p_i})^2] \sin(k_{p_i} x), \quad (\text{A.2i}) \\
 M_x^i(3, 2) = [b_{T_i} - a_{T_i} (k_{p_i})^2] \cos(k_{p_i} x), \quad (\text{A.2j}) \\
 M_x^i(3, 3) = [b_{T_i} + a_{T_i} (k_{e_i})^2] \text{sh}(k_{e_i} x), \quad (\text{A.2k}) \\
 M_x^i(3, 4) = [b_{T_i} + a_{T_i} (k_{e_i})^2] \text{ch}(k_{e_i} x), \quad (\text{A.2l}) \\
 M_x^i(4, 1) = \frac{-c_{T_i}}{c_{T_i} - d_{T_i}} [(d_{T_i} + b_{T_i}) k_{p_i} - a_{T_i} (k_{p_i})^3] \cos(k_{p_i} x), \quad (\text{A.2m}) \\
 M_x^i(4, 2) = \frac{-c_{T_i}}{c_{T_i} - d_{T_i}} [-(d_{T_i} + b_{T_i}) k_{p_i} + a_{T_i} (k_{p_i})^3] \sin(k_{p_i} x), \quad (\text{A.2n}) \\
 M_x^i(4, 3) = \frac{-c_{T_i}}{c_{T_i} - d_{T_i}} [(d_{T_i} + b_{T_i}) k_{e_i} + a_{T_i} (k_{e_i})^3] \text{ch}(k_{e_i} x), \quad (\text{A.2o}) \\
 M_x^i(4, 4) = \frac{-c_{T_i}}{c_{T_i} - d_{T_i}} [(d_{T_i} + b_{T_i}) k_{e_i} + a_{T_i} (k_{e_i})^3] \text{sh}(k_{e_i} x). \quad (\text{A.2p})
 \end{array} \right.$$

A.2 Forme de la matrice  $[M_{\text{fin}}]$ 

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cccccccc}
 M_0^1(1,1) & M_0^1(1,2) & M_0^1(1,3) & M_0^1(1,4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 M_0^1(3,1) & M_0^1(3,2) & M_0^1(3,3) & M_0^1(3,4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & M_{L_x}^2(1,1) & M_{L_x}^2(1,2) & M_{L_x}^2(1,3) & M_{L_x}^2(1,4) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & M_{L_x}^2(3,1) & M_{L_x}^2(3,2) & M_{L_x}^2(3,3) & M_{L_x}^2(3,4) \\
 -M_{x_{d,1}}^1(1,1) & -M_{x_{d,1}}^1(1,2) & -M_{x_{d,1}}^1(1,3) & -M_{x_{d,1}}^1(1,4) & M_{x_{d,1}}^2(1,1) & M_{x_{d,1}}^2(1,2) & M_{x_{d,1}}^2(1,3) & M_{x_{d,1}}^2(1,4) \\
 -M_{x_{d,1}}^1(2,1) & -M_{x_{d,1}}^1(2,2) & -M_{x_{d,1}}^1(2,3) & -M_{x_{d,1}}^1(2,4) & M_{x_{d,1}}^2(2,1) & M_{x_{d,1}}^2(2,2) & M_{x_{d,1}}^2(2,3) & M_{x_{d,1}}^2(2,4) \\
 -M_{x_{d,1}}^1(3,1) & -M_{x_{d,1}}^1(3,2) & -M_{x_{d,1}}^1(3,3) & -M_{x_{d,1}}^1(3,4) & M_{x_{d,1}}^2(3,1) & M_{x_{d,1}}^2(3,2) & M_{x_{d,1}}^2(3,3) & M_{x_{d,1}}^2(3,4) \\
 -M_{x_{d,1}}^1(4,1) & -M_{x_{d,1}}^1(4,2) & -M_{x_{d,1}}^1(4,3) & -M_{x_{d,1}}^1(4,4) & M_{x_{d,1}}^2(4,1) & M_{x_{d,1}}^2(4,2) & M_{x_{d,1}}^2(4,3) & M_{x_{d,1}}^2(4,4)
 \end{array} \right] \begin{array}{l} A1 \\ B1 \\ C1 \\ D1 \\ A2 \\ B2 \\ C2 \\ D2 \end{array} \\
 & = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} - F
 \end{aligned} \tag{A.3}$$



### A.3 Cas général : poutre quelconque de N morceaux

Dans cette partie on considère une poutre quelconque présentant l'une des conditions limites du tableau 2.2 en chacune de ses extrémités. Cette poutre peut être discontinue selon son épaisseur  $L_z$ , sa largeur  $L_y$ , ses propriétés de matériau  $(E, I, \rho)$ . Par ailleurs, elle peut être animée d'une ou plusieurs contraintes de type effort tranchant et/ou moment fléchissant. La poutre se discrétise alors en  $N$  morceaux séparés par les  $N - 1$  discontinuités (voir figure 2.4).

#### Généralisation des conditions limites

Nous avons pu observer dans le tableau 2.2 ainsi que dans les relations 2.40 et 2.41, que pour chaque condition limite seulement 2 lignes sont exploitables sur le plan mathématique car elles amènent à des expressions permettant de résoudre le système d'équations. À l'inverse, les autres lignes présentent des valeurs indéterminées. On peut donc généraliser l'extraction des lignes utiles sous la forme de 2 matrices  $[M_{CL1}]$  (lignes exploitables de la condition limite 1 en  $x = x_{d,0} = 0$ ) et  $[M_{CL2}]$  (lignes exploitables de la condition limite 2 en  $x = x_{d,N} = L_x$ ) :

Condition limite	Lignes utiles de $[M_0^1]$ en $x = x_{d,0} = 0$	Lignes utiles de $[M_{L_x}^N]$ en $x = x_{d,N} = L_x$
Encastrée	$[M_{CL1}] = M_0^1(\{1, 2\}, :)$	$[M_{CL2}] = M_{L_x}^N(\{1, 2\}, :)$
Libre	$[M_{CL1}] = M_0^1(\{3, 4\}, :)$	$[M_{CL2}] = M_{L_x}^N(\{3, 4\}, :)$
Appuyée	$[M_{CL1}] = M_0^1(\{1, 3\}, :)$	$[M_{CL2}] = M_{L_x}^N(\{1, 3\}, :)$
Guidée	$[M_{CL1}] = M_0^1(\{2, 4\}, :)$	$[M_{CL2}] = M_{L_x}^N(\{2, 4\}, :)$

TABLEAU A.1 – Notation des lignes "exploitables" de la matrice  $M_x^i$  (relations 2.28 et 2.39) en fonction de la condition limite appliquée à l'extrémité en  $x = 0$  ou  $x = L_x$ .

#### Généralisation des raccordements

Pour les raccordements, le système d'équations 2.23 reste valable dans le cas d'une poutre quelconque de  $N$  morceaux.

#### Généralisation de la matrice $[M_{fin}]$

Le rassemblement des 4 équations liées aux 2 conditions limites et des  $4(N - 1)$  relations de raccordements est résumé par  $[M_{fin}]$ , dans l'expression A.4, qui après inversion, permet l'obtention des  $4N$  inconnues.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{CL1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & M_{CL2} \\ -M_{x_{d,1}}^1 & M_{x_{d,1}}^2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -M_{x_{d,i}}^{i-1} & M_{x_{d,i}}^i & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -M_{x_{d,N-1}}^{N-1} & M_{x_{d,N-1}}^N \end{bmatrix}}_{M_{\text{fin}}} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ B_{i-1} \\ C_{i-1} \\ D_{i-1} \\ A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \\ \vdots \\ A_{N-1} \\ B_{N-1} \\ C_{N-1} \\ D_{N-1} \\ A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{M}_{\text{ext}}(x_{d,1}) \\ F_{\text{ext}}(x_{d,1}) \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{M}_{\text{ext}}(x_{d,i}) \\ F_{\text{ext}}(x_{d,i}) \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{M}_{\text{ext}}(x_{d,N-1}) \\ F_{\text{ext}}(x_{d,N-1}) \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

---

## Annexe B

# Résolution Inverse (non) Corrigée sur antenne de 7 points

La section 2.4 a mis en évidence l'intérêt d'utiliser des différences fines d'ordre 4 (basées sur une antenne de mesure de 7 points) pour estimer les dérivées spatiales du champ de déplacement. Cependant, la méthode RIC développée au chapitre 4 emploie un schéma aux différences finies de 5 points, aucune correction n'a pu être établie à partir du schéma de 7 points, comme détaillé ci-après.

### B.1 Schéma aux différences finies non corrigé

En utilisant un schéma de dérivation en 7 points, les différences finies s'expriment comme stipulé dans les relations 2.51a et 2.51b. Par application d'une transformée de Fourier, ces dernières deviennent :

$$\begin{aligned}\hat{\delta}^{2x}(x) &= \frac{1}{6\Delta_x^2} (-\cos(2k\Delta_x) + 16\cos(k\Delta_x) - 15) \hat{W}(x) \\ &= \frac{1}{6\Delta_x^2} (-2\cos^2(k\Delta_x) + 16\cos(k\Delta_x) - 14) \hat{W}(x) \\ &= \xi^2 \hat{W}(x),\end{aligned}\tag{B.1a}$$

et :

$$\begin{aligned}\hat{\delta}^{4x}(x) &= \frac{1}{3\Delta_x^4} (-\cos(3k\Delta_x) + 12\cos(2k\Delta_x) - 39\cos(k\Delta_x) + 28) \hat{W}(x) \\ &= \frac{1}{3\Delta_x^4} (-4\cos^3(k\Delta_x) + 24\cos^2(k\Delta_x) - 36\cos(k\Delta_x) + 16) \hat{W}(x) \\ &= \chi^4 \hat{W}(x).\end{aligned}\tag{B.1b}$$

Dans le domaine des nombres d'onde, la relation 4.3 devient :

$$\hat{Q}_{\text{RI}}(k) = \tilde{E}I\chi^4 + \rho I\omega^2 \left( \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \right) \xi^2 + \left( \frac{\rho^2 I\omega^4}{\tilde{G}} - \rho S\omega^2 \right) \hat{W}(k).\tag{B.2}$$

On peut alors exprimer l'erreur issue du schéma aux différences finies par un rapport entre des expressions numérisée B.2 et analytique 4.2b :

$$\mathcal{E}_{\text{RI}}(k) = \frac{\hat{Q}_{\text{RI}}(k)}{\hat{Q}(k)} = \frac{A\chi^4 + B\xi^2 + C}{Ak^4 - Bk^2 + C}, \quad (\text{B.3})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \tilde{E}I, \end{array} \right. \quad (\text{B.4a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \rho I \omega^2 \left( \frac{\tilde{E}}{\tilde{G}} + 1 \right), \end{array} \right. \quad (\text{B.4b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \frac{\rho^2 I \omega^4}{\tilde{G}} - \rho S \omega^2. \end{array} \right. \quad (\text{B.4c})$$

### B.1.1 Pôles de $\mathcal{E}_{\text{RI}}$

Les racines  $k_{\text{rd}}$  du dénominateur de  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  ne dépendent pas de l'antenne de mesure et sont donc les mêmes que celles données pour le schéma à 5 points. Tous les propos énoncés dans le paragraphe "Pôles de  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$ " (page 93) restent valables.

### B.1.2 Zéros de $\mathcal{E}_{\text{RI}}$

L'erreur  $\mathcal{E}_{\text{RI}}(k)$  s'annule quand le numérateur atteint ses racines  $k_{\text{rn}}$  :

$$A\chi_{\text{rn}}^4 + B\xi_{\text{rn}}^2 + C = 0, \quad (\text{B.5})$$

qui, après quelques développements, devient :

$$\begin{aligned} & \frac{-4A}{3\Delta_x^4} \cos^3(k_{\text{rn}}\Delta_x) + \left[ \frac{24A}{3\Delta_x^4} - \frac{2B}{6\Delta_x^2} \right] \cos^2(k_{\text{rn}}\Delta_x) \\ & + \left[ \frac{16B}{6\Delta_x^2} - \frac{36A}{3\Delta_x^4} \right] \cos(k_{\text{rn}}\Delta_x) + \frac{16A}{3\Delta_x^4} - \frac{14B}{6\Delta_x^2} + C = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

soit :

$$-4\alpha X_{\text{rn}}^3 + (24\alpha - 2\beta)X_{\text{rn}}^2 + (16\beta - 36\alpha)X_{\text{rn}} + 16\alpha - 14\beta + C = 0, \quad (\text{B.7})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{24A}{3\Delta_x^4}, \end{array} \right. \quad (\text{B.8a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{2B}{6\Delta_x^2}, \end{array} \right. \quad (\text{B.8b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{\text{rn}} = \cos(k_{\text{rn}}\Delta_x). \end{array} \right. \quad (\text{B.8c})$$

La résolution de l'équation B.7 est établie sous *Mathematica*<sup>®</sup> et amène à trois solutions données dans les relations B.9, B.10 et B.11.

$$k_{rn1} = \pm \frac{1}{\Delta_x^2} \left[ \arccos \left\{ \frac{12\alpha - \beta}{6\alpha} \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{-144\alpha^2 - 96\alpha\beta - 4\beta^2}{6 \times 2^{2/3}\alpha \left[ -3456\alpha^3 - 3456\alpha^2\beta + 576\alpha\beta^2 + 16\beta^3 - 432\alpha^2C + \sqrt{4(-144\alpha^2 - 96\alpha\beta - 4\beta^2)^3 + (-3456\alpha^3 - 3456\alpha^2\beta + 576\alpha\beta^2 + 16\beta^3 - 432\alpha^2C)^2} \right]^{1/3}} \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{\left[ -3456\alpha^3 - 3456\alpha^2\beta + 576\alpha\beta^2 + 16\beta^3 - 432\alpha^2C + \sqrt{4(-144\alpha^2 - 96\alpha\beta - 4\beta^2)^3 + (-3456\alpha^3 - 3456\alpha^2\beta + 576\alpha\beta^2 + 16\beta^3 - 432\alpha^2C)^2} \right]^{1/3}}{12 \times 2^{1/3}\alpha} \right. \right. \\
 \left. \left. \right\} + p2\pi \right], \text{ avec } p \in \mathbb{N} \tag{B.9}$$

$\left. \right\} + p2\pi \right], \text{ avec } p \in \mathbb{N}$

$$k_{rn2} = \pm \frac{1}{\Delta_x^2} \left[ \arccos \left\{ \frac{12\alpha - \beta}{6\alpha} \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{-144\alpha^2 - 96\alpha\beta - 4\beta^2}{12 \times 2^{2/3}\alpha \left[ -3456\alpha^3 - 3456\alpha^2\beta + 576\alpha\beta^2 + 16\beta^3 - 432\alpha^2C + \sqrt{4(-144\alpha^2 - 96\alpha\beta - 4\beta^2)^3 + (-3456\alpha^3 - 3456\alpha^2\beta + 576\alpha\beta^2 + 16\beta^3 - 432\alpha^2C)^2} \right]^{1/3}} \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\left[ -3456\alpha^3 - 3456\alpha^2\beta + 576\alpha\beta^2 + 16\beta^3 - 432\alpha^2C + \sqrt{4(-144\alpha^2 - 96\alpha\beta - 4\beta^2)^3 + (-3456\alpha^3 - 3456\alpha^2\beta + 576\alpha\beta^2 + 16\beta^3 - 432\alpha^2C)^2} \right]^{1/3}}{24 \times 2^{1/3}\alpha} \right. \right. \\
 \left. \left. \right\} + p2\pi \right], \text{ avec } p \in \mathbb{N} \tag{B.10}$$

$$k_{\text{rn}3} = \pm \frac{1}{\Delta_x^2} \left[ \arccos \left\{ \frac{12\alpha - \beta}{6\alpha} \right. \right.$$

$$\left. \frac{-144\alpha^2 - 96\alpha\beta - 4\beta^2}{12 \times 2^{2/3}\alpha \left[ -3456\alpha^3 - 3456\alpha^2\beta + 576\alpha\beta^2 + 16\beta^3 - 432\alpha^2C + \sqrt{4(-144\alpha^2 - 96\alpha\beta - 4\beta^2)^3 + (-3456\alpha^3 - 3456\alpha^2\beta + 576\alpha\beta^2 + 16\beta^3 - 432\alpha^2C)^2} \right]^{1/3}} \right. \\ \left. + \frac{[-3456\alpha^3 - 3456\alpha^2\beta + 576\alpha\beta^2 + 16\beta^3 - 432\alpha^2C + \sqrt{4(-144\alpha^2 - 96\alpha\beta - 4\beta^2)^3 + (-3456\alpha^3 - 3456\alpha^2\beta + 576\alpha\beta^2 + 16\beta^3 - 432\alpha^2C)^2}]^{1/3}}{24 \times 2^{1/3}\alpha} \right]$$

} + p2\pi], avec p \in \mathbb{N}

(B.11)

L'erreur  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  est tracée sur les figures B.1 et B.2 correspondant respectivement aux cas où  $\omega < \Omega_{\text{lim}}$  et  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$ . Deux remarques sont à noter, en comparaison aux figures 4.1 et 4.2. Premièrement, les singularités sont moins marquées avec une antenne de 7 points, en raison d'une meilleure estimation des différences finies. L'erreur  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$  est donc plus faible, la pente des filtres associés est moins restrictive. Deuxièmement, lorsque le schéma aux différences finies se base sur une antenne de 5 points, la présence d'une racine en  $k_{\text{rn}} \gtrsim k_p$  est conditionnée par  $n > \pi$ . Avec une antenne de 7 points cette condition diffère, puisqu'une racine est présente en  $k_{\text{rn}} \gtrsim k_p$  pour  $n = 3$ , mais pas pour  $n = 2$ . Cependant, ce dernier constat est difficilement vérifiable analytiquement en raison de la complexité de la solution  $k_{\text{rn}}$ .

## B.2 Correction du schéma aux différences finies (non aboutie)

On introduit désormais le terme correctif  $\mu$  tel que :

$$\mathcal{E}_{\text{RIC}}(k) = \frac{\hat{Q}_{\text{RIC}}(k)}{\hat{Q}(k)} = \frac{A\mu^4\chi^4 + B\mu^2\xi^2 + C}{Ak^4 - Bk^2 + C}, \quad (\text{B.12})$$

et l'on cherche les racines de  $\mathcal{E}_{\text{RI}}(k)$  :

$$-4\alpha_\mu X_{\text{rn}}^3 + (24\alpha_\mu - 2\beta_\mu)X_{\text{rn}}^2 + (16\beta_\mu - 36\alpha_\mu)X_{\text{rn}} + 16\alpha_\mu - 14\beta_\mu + C = 0, \quad (\text{B.13})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_\mu = \frac{24\mu^4 A}{3\Delta_x^4}, \\ \beta_\mu = \frac{2\mu^2 B}{6\Delta_x^2}, \\ X_{\text{rn},\mu} = \cos(k_{\text{rn},\mu}\Delta_x). \end{array} \right. \quad (\text{B.14a})$$

$$(\text{B.14b})$$

$$(\text{B.14c})$$

Les solutions de l'équation B.13 sont notées  $k_{\text{rn1},\mu}$ ,  $k_{\text{rn2},\mu}$  et  $k_{\text{rn3},\mu}$ , et sont équivalentes à  $k_{\text{rn1}}$ ,  $k_{\text{rn2}}$  et  $k_{\text{rn3}}$  à la différence près que les termes  $\alpha$  et  $\beta$  sont remplacés par  $\alpha_\mu$  et  $\beta_\mu$  respectivement. Une recherche de  $\mu$  permettant d'avoir  $k_{\text{rn},\mu} = k_p$  (coïncidence des pôles et zéros de  $\mathcal{E}_{\text{RIC}}$ ) a été réalisée sous *Mathematica*<sup>®</sup>. Aucune solution n'a pu être déterminée au bout de 72 heures de calcul, il est donc supposé que la correction du schéma aux différences finies de 7 points n'est pas possible.



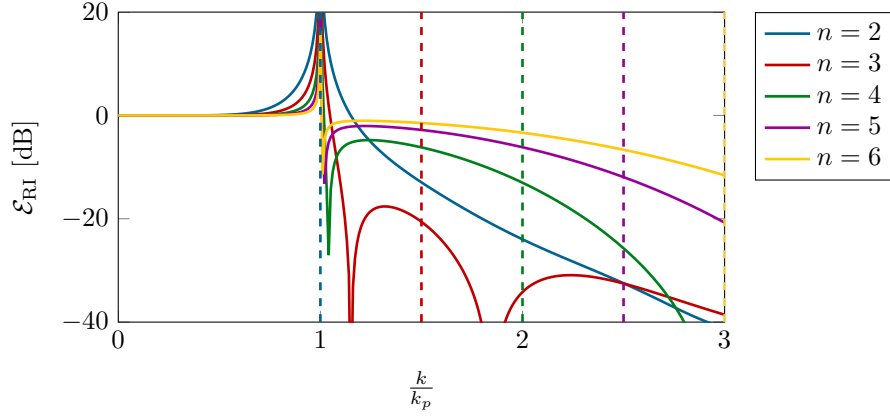


FIGURE B.1 – Erreur  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  associée à la discrétisation de l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko pour  $\omega < \Omega_{\text{lim}}$  avec un schéma aux différences finies de 7 points. Les lignes verticales indiquent les limites de Shannon. Un pôle est observé en  $k_{\text{r,d}} = k_p$  et un zéro se manifeste pour  $k_{\text{r,n}} \gtrsim k_p$  si  $n \geq 3$ .

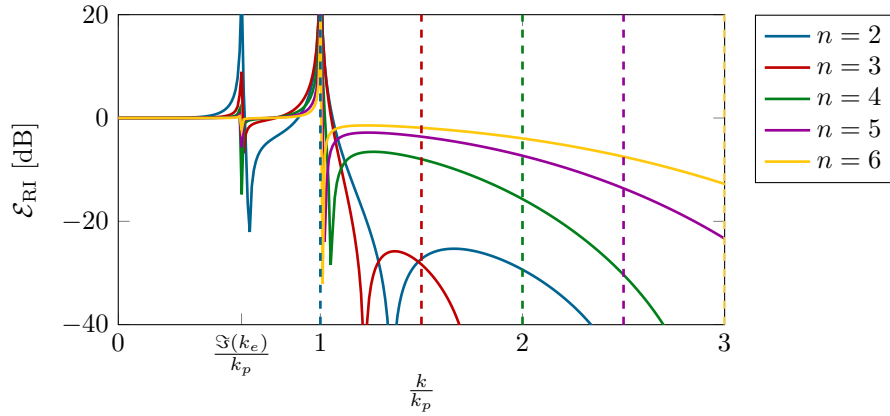


FIGURE B.2 – Erreur  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  associée à la discrétisation de l'équation du mouvement de la poutre de Timoshenko pour  $\omega > \Omega_{\text{lim}}$  avec un schéma aux différences finies de 7 points. Les lignes verticales indiquent les limites de Shannon. Deux pôles sont observés en  $k_{\text{r,d}} = k_p$  et en  $k_{\text{r,d}} = \mathfrak{S}(k_e)$ . Les zéros de  $\mathcal{E}_{\text{RI}}$  sont présents en  $k_{\text{r,n}} \gtrsim \mathfrak{S}(k_e) \forall n$  et  $k_{\text{r,n}} \gtrsim k_p$  si  $n \geq 3$ .



# THÈSE DE DOCTORAT

Thibault WASSEREAU

## Caractérisation de matériaux composites par problème inverse vibratoire

Characterisation of composite materials using an inverse vibratory method

### Résumé

L'usage croissant des matériaux composites dans l'industrie induit de nouvelles problématiques dans des domaines variés, notamment pour la caractérisation non destructive. Les méthodes courantes comme l'analyse modale ou les éléments finis sont rarement adaptées pour représenter la dynamique vibratoire complexe des structures composites ou quantifier leurs caractéristiques viscoélastiques, de nouvelles approches sont nécessaires.

Les travaux concernent le développement et l'application d'un formalisme vibratoire inverse local, la méthode RIFF (Résolution Inverse Filtrée Fenêtrée), pour l'étude des matériaux composites multicouches. Ces derniers sont considérés comme homogènes à l'aide de la théorie de Timoshenko, prenant en compte le cisaillement non négligeable de ces matériaux. Une caractérisation fréquentielle et/ou spatiale des paramètres équivalents (modules d'Young  $E$  et de cisaillement  $G$ , et facteurs de pertes associés  $\eta_E$  et  $\eta_G$ ) est alors possible, permettant de traduire fidèlement le comportement dynamique des composites et de simplifier leur modélisation en éléments finis.

Une seconde approche utilisant un schéma aux différences finies corrigé (méthode RIC) autorise une analyse similaire à partir d'un maillage grossier diminuant fortement les temps de mesure et de post-traitement des données.

Enfin, une perspective de détection et d'identification de défauts est envisagée. Grâce à des cartographies des paramètres élastiques et d'amortissements, il semble possible de pouvoir déduire la signature d'un défaut typique. Une discontinuité du module de cisaillement témoignerait de la présence d'un délaminage, la diminution du module d'Young traduirait une rupture de fibres, etc.

### Mots clés

Composite multicouche, cisaillement, méthode RIFF, modèle de Timoshenko, homogénéisation, défauts.

### Abstract

The increasing use of composite materials in the industry leads to new challenges in various areas, including non-destructive evaluation. Common methods such as modal analysis or finite elements are rarely appropriated to represent the complex vibratory dynamic of composite structures or quantify their viscoelastic properties, new approaches are then needed.

This thesis deals with the development and application of a local inverse vibratory method, called the Force Analysis Technique (FAT), in order to the study multilayer composites. The latter are considered to be homogeneous using the Timoshenko beam theory, which takes shear effects into account, usually significant for such structures. A frequency and/or spatial characterization of the equivalent elastic parameters (Young's modulus  $E$ , shear modulus  $G$  and their associated loss factors  $\eta_E$  and  $\eta_G$ ) is then possible to accurately interpret the dynamical behaviour of composite materials and also simplify their implementation in finite element software.

A second approach using a corrected finite difference scheme (CFAT method) allows a similar analysis using a coarse mesh, reducing the durations of measurement and post-processing.

Finally, a perspective of detection and identification of defects is considered. By mean of cartographies of the elastic parameters, it seems possible to infer a signature related to a kind of flaw. A discontinuity of the shear modulus would attest the presence of delamination while a reduced Young's modulus could indicate a fibre breakage, etc.

### Key Words

Multi-layer composite, shear effects, Force Analysis Technique, Timoshenko model, homogenization, defects.