HAL
open science

Géométrie des espaces de tenseurs, application à l'élasticité anisotrope classique et généralisée

Nicolas Auffray

To cite this version:

Nicolas Auffray. Géométrie des espaces de tenseurs, application à l'élasticité anisotrope classique et généralisée. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Paris-Est, 2017. tel-01576384

HAL Id: tel-01576384

https://hal.science/tel-01576384v1

Submitted on 23 Aug 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST

École Doctorale SIE

Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle

HDR

Nicolas Auffray

Géométrie des espaces de tenseurs, application à l'élasticité anisotrope classique et généralisée

Spécialité : Mécanique

Soutenue le 02 Février 2017 devant un jury composé de :

Rapporteur	**B. Desmorat**	(Maître de Conférences - HDR, UPMC)
Rapporteur	**S. Forest**	(Directeur de Recherche, MINES ParisTech)
Rapporteur	**J.F. Ganghoffer**	(Professeur des Universités, Université de Lorraine)
Examinateur	**G. Geymonat**	(Directeur de Recherche, École Polytechnique)
Examinateur	**Q.-C. He**	(Professeur des Universités, UPEM)
Examinateur	**F. dell'Isola**	(Professeur des Universités, Sapienza - Università di Roma)
Examinatrice	**E. Rouhaud**	(Maître de Conférences - HDR, UTT)
Examinateur	**K. Sab**	(Directeur de Recherche, École des Ponts ParisTech)

HDR effectuée au sein du **Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle**

de l'Université Paris-Est Marne-la-vallée

HDR bientôt disponible en crème de jour

Table des matières

I Synthèse Professionnelle **ix**

I.1 Curriculum Vitae et volet administratif **1**

1.1 État Civil et Situation Professionnelle 1

1.2 Formation 1

1.3 Postes 2

1.4 Activités d'enseignement 2

I.2 Description des activités de recherche **7**

2.1 Résumé des travaux de recherche 7

2.1.1 Modélisation des milieux architecturés par des modèles généralisés . . . 9

2.1.2 Représentation de groupe et milieux continus 11

2.2 Activités de recherche 12

2.3 Production scientifique 15

II Détail des contributions **19**

II.1 Classes de symétrie des tenseurs de comportement **21**

1.1 Problématique 22

1.2 Symétrie physique vs. symétrie matérielle 26

1.2.1 Classe de symétrie 27

1.2.2 Les sous-groupes fermés de $\mathrm{O}(3)$ 28

1.2.3 Symétrie tensorielle 33

1.2.4 Classe de symétrie physique 35

1.3 Algèbre des lois de comportement 36

1.4 Décomposition harmonique des tenseurs 38

1.4.1 Représentations irréductibles de $\mathrm{SO}(3)$ 38
1.4.2 Représentations irréductibles de $\mathrm{O}(3)$ 41
1.4.3 Décomposition harmonique de l'espace $\mathbb{E}\mathrm{la}$ 42
1.4.4 Formules de Clebsch-Gordan 46
1.5 Opérations de *Clips* 47

II.2 Autour des invariants du tenseur d'élasticité 53

2.1 Problématique initiale 54
2.2 La théorie des invariants dans une coquille de noix 55
2.3 Reconstruction invariante du tenseur d'élasticité 2D 63
2.3.1 Décomposition harmonique 63
2.3.2 Base d'intégrité 64
2.3.3 Classes de symétrie et invariants 65
2.3.4 Interprétation mécanique 68
2.3.5 Reconstruction du tenseur d'élasticité 70
2.4 Extension à l'élasticité 3D 78
2.4.1 $\mathbb{H}^4$: invariants et stratification 79
2.4.2 Base d'intégrité de $\mathbb{E}\mathrm{la}$ 83

II.3 Application à la mécanique des matériaux architecturés 85

3.1 Une observation numérique 87
3.2 Construction d'un milieu continu généralisé 89
3.2.1 Élasticité micromorphe 91
3.2.2 Élasticité à gradient de déformation 94
3.3 Analyse de l'élasticité à gradient 2D 97
3.3.1 Retour sur les classes de symétrie 2D 97
3.3.2 Classes de symétrie 2D 98
3.3.3 Nature des couplages 101
3.4 Propagation d'onde dans un milieu élastique à gradient 103
3.4.1 Tenseur acoustique généralisé 107
3.4.2 Conservation de l'énergie, vecteur de Poynting et vitesse de l'énergie . . 108
3.4.3 Vitesse de groupe 109
3.4.4 Applications numériques 109

Conclusion et travaux à venir **115**

3.5 Conclusion 115

3.6 Directions à explorer 116

3.6.1 Conception optimale 116

3.6.2 Base fonctionnelle pour le tenseur d'élasticité 117

3.6.3 Extension à la dynamique 118

3.6.4 En bref 119

A Notations **121**

B Construction des matrices anisotropes **125**

C Dictionnaire entre les différentes notations cristallographiques **131**

Bibliography **144**

Partie I

Synthèse Professionnelle

Chapitre I.1

Curriculum Vitae et volet administratif

1.1 État Civil et Situation Professionnelle

Nicolas AUFFRAY
né à Marseille le 20/03/1981
Maître de Conférences, Université Paris-Est Marne-La Vallée
Équipe de Mécanique, Laboratoire MSME (UMR-CNRS 8208)
5, Boulevard Descartes
77454, Marne-la-Vallée Cedex 2
Nicolas.Auffray@univ-mlv.fr
tel: +33 (0) 1 60 95 77 81
fax: +33 (0) 1 60 95 77 99

1.2 Formation

2005-2008 Doctorat de l'INP Grenoble, Spécialité Mécanique

Soutenance 17 Décembre 2008 à Châtillon.

Titre *Comportement des matériaux cellulaires : élaboration, caractérisation et modélisation prédictive des propriétés*

Directeur Yves Bréchet;

Président Denis Gratias;

Rapporteurs Pierre Gilormini et Giuseppe Geymonat;

Examinateurs Samuel Forest et Régis Bouchet.

2004-2005 Master 2 Recherche : Matériaux et Procédés de Fabrication ENS Cachan, ENSAM Paris, Paris 6

Sujet *Contribution à l'étude du comportement d'un acier inoxydable austénitique en vue de la simulation numérique de l'usinage* ;

Encadrants René Billardon et Han Zhao;

2001-2004 École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

1999-2001 CPGE PTSI/PT⋆; Lycée Jean Perrin, Marseille

1.3 Postes

2016-2017 Chercheur en demi-délégation CNRS au laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Échelle, Université Paris-Est Marne-La Vallée;

2011- **Maître de conférence** Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Échelle, Université Paris-Est Marne-La Vallée;

2010-2011 **Attaché temporaire d'enseignement et de recherche** Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Échelle, Université Paris-Est Marne-La Vallée;

2008-2010 **Chercheur en post-doctorat** Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique, *Identification d'une distribution de sources de chaleur à partir de mesures par thermographie infrarouge du champ de température surfacique.*

1.4 Activités d'enseignement

Responsabilité pédagogique

2016- Responsable du M2 Ingénierie de Projet en Génie Civil, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Cours magistraux, travaux dirigés et pratiques

Universitaire

L'ensemble de mon service universitaire a été effectué dans l'UFR ESIPE-MLV, à l'Institut Francilien des Sciences Appliquées (IFSA) et à l'IUT de Marne-la-Vallée.

Mathématique

- Statistiques et Probabilités, TD à l'ESIPE-MLV (Génie Mécanique (GM) 1ère Année, Génie Civil (GC) 1ère Année)
- Séries et Transformée de Fourier, CM + TD à l'ESIPE-MLV (GM 1ère Année)
- Équations aux dérivées partielles, CM + TD +TP à l'ESIPE-MLV (GM 2ère Année)

Mécanique

- Mécanique des structures, TD en IUT, L1
- Initiation à la Mécanique, TD en Licence Sciences Physiques, L1
- Mécanique des structures à base de poutres, CM + TD +TP en Licence Sciences Physiques, L3
- Mécanique des solides déformables, CM + TD en Licence Sciences Physiques, L3
- Équations de Lagrange, CM + TD en Licence Sciences Physiques, L3
- Élasticité en grandes transformations, CM + TD en Master de Mécanique et Génie Civil, M1

Cours niveau recherche

J'ai été invité en tant qu'enseignant dans 2 écoles d'été sur mes thématiques de recherche:

- *Material Symmetries and Tensor Decomposition* pour l'école "Mechanics of generalized continua and their applications to engineering materials and structures" à Arpino (Italie) en Juillet 2015;
- *Matériaux et Symétries, Décomposition harmonique des tenseurs* pour l'école "MatSyMat" à Nantes en Septembre 2014.

Encadrements

Hors recherche

- Encadrement d'environ 12 projets disciplinaires en Licence Sciences Physiques, L3;
- Encadrement d'environ 6 apprentis au cours de leur formation à l'ESIPE-MLV.

M2 Recherche

M.-T. Le *Exploration des conditions de Dirichlet harmoniques*, Université Paris-Est Marne-la-Vallée (2015);

H.-T. Bui *Calcul des invariants du tenseur piézo-électrique*, Université Paris-Est Marne-la-Vallée (2014);

N. Bhavsar *Détermination du comportement anisotrope des matériaux*, Université Paris-Est Marne-la-Vallée (2014);

R. Pochez *Effets des invariances dans les milieux généralisés*, Laboratoire Navier, École des Ponts (2013), Coencadrement avec Arthur Lebée (Laboratoire Navier);

R. Bui *Analyse des tenseurs harmoniques composant le tenseur d'élasticité*, Université Paris-Est Marne-la-Vallée (2013);

Q.-M. Bui *Couplages multiphysiques dans les multi-matériaux architecturés*, Université Paris-Est Marne-la-Vallée (2012).

Thèses

M. Olive *Géométrie des espaces de tenseurs, une approche effective appliquée à la mécanique des milieux continus*

Direction: Boris Kolev (I2M, Université Aix-Marseille); **Codirection**: Nicolas Auffray (MSME, Université Paris-est Marne-la-Vallée)

Thèse Mathématique et Mécanique ;

Soutenue le 19/11/2014 ;

Résumé : Plusieurs lois de comportement mécanique possèdent une formulation tensorielle, c'est le cas notamment de l'élasticité où intervient un espace de tenseurs d'ordre 4, noté $\mathbb{E}\mathrm{la}$. La classification des matériaux élastiques passe par la description de l'espace des orbites $\mathbb{E}\mathrm{la}/\mathrm{SO}(3)$. Plus généralement, on étudie la géométrie d'un espace de tenseurs sur $\mathbb{R}^3$ via l'action du groupe $\mathrm{O}(3)$. Cette géométrie est caractérisée par des classes d'isotropie, ou encore classes de symétrie. Tout espace de tenseurs possède en effet un nombre fini de classes d'isotropie. Nous proposons alors une méthode originale et générale pour déterminer ces classes. Nous avons ainsi pu obtenir pour la première fois les classes d'isotropie d'un espace de tenseurs d'ordre 8 intervenant en théorie de l'élasticité linéaire du second-gradient de la déformation. Pour une représentation réelle d'un groupe compact, l'algèbre des polynômes invariants sépare les orbites, d'où la recherche d'une famille génératrice minimale de cette algèbre. Pour cela, on exploite le lien entre les espaces de tenseurs et les espaces de formes binaires. Nous avons ainsi repris et ré-interprété les approches effectives de cette théorie développées par Gordan au 19ième siècle. Cette ré-interprétation nous a permis d'obtenir de nombreux résultats, dont une famille génératrice minimale d'invariants pour l'élasticité mais aussi pour la piézoélectricté. Nous avons pu retrouver d'une façon simple les séries de Gordan, ainsi que des relations plus récentes d'Abdesselam–Chipalkatti sur les transvectants de formes binaires.

Prix: Ce travail a été lauréat de 2 prix:

- Prix spécial de thèse au CFM15 à Lyon ;
- Prix de thèse Université Aix-Marseille 2014.

H. Nassar *Elastodynamic homogenization of periodic media* (MSME, Marne-la-Vallée)

Direction: Qi-Chang He (MSME, Université Paris-est Marne-la-Vallée) ; **Codirection**: Nicolas Auffray (MSME, Université Paris-est Marne-la-Vallée)

Thèse Mécanique ;

Soutenue le 01/10/2015

Résumé : La problématique récente de la conception de métamatériaux a renouvelé l'intérêt dans les théories d'homogénéisation en régime dynamique. Plus précisément, la

théorie de Willis a reçu une attention toute particulière suite à des travaux sur l'invisibilité élastique. La présente thèse reformule la théorie de Willis dans le cas des milieux périodiques, examine ses implications et évalue sa pertinence physique au sens de quelques "conditions d'homogénéisabilité" qui sont suggérées. En se basant sur les résultats de cette première partie, des développements asymptotiques approximatifs de la théorie de Willis sont explorés en relation avec les théories à gradient. Une condition nécessaire de convergence montre alors que toutes les branches optiques de la courbe de dispersion sont omises quand des développements asymptotiques de Taylor de basse fréquence et de longue longueur d'onde sont déployés. Enfin, une nouvelle théorie de l'homogénéisation est proposée. On montre qu'elle généralise la théorie de Willis et qu'elle l'améliore en moyenne fréquence de sorte qu'on retrouve certaines branches optiques omises auparavant. On montre également que le milieu homogène effectif défini par la nouvelle théorie est un milieu généralisé dont les champs satisfont une version élastodynamique généralisée du lemme de Hill-Mandel.

Post-Doc

S. Turcaud *Aphorisme. Approche holiste de la chiralité dans les métamatériaux architecturés*

Financement Coup de Pouce F2M, 2015-2016

Encadrement N. Auffray (MSME), J. Dirrenberger (PIMM), M. Poncelet (LMT)

Résumé : La chiralité est une propriété d'asymétrie géométrique aux conséquences multiples en sciences physiques ; du spin de l'électron aux galaxies spirales en passant par l'organisation du vivant et la chimie moléculaire. En mécanique aussi la chiralité n'est pas sans conséquences, notamment lorsqu'il s'agit de décrire le comportement mécanique de certains matériaux à coefficient de Poisson négatif (ou auxétiques). Les approches classiques d'homogénéisation en mécanique reposent sur l'utilisation de milieux de substitution de type Cauchy, or ceux-ci ne sont pas assez riches pour rendre compte des effets de chiralité et se révèlent insuffisants pour décrire le comportement de certains matériaux. Des modèles de milieux continus généralisés ont été proposés par le passé, mais ni la puissance de calcul, ni les moyens expérimentaux appropriés n'étaient disponibles pour conclure quant au rôle réel joué par la chiralité en mécanique. Le projet APHORISME vise par une approche trilatérale (expérimentale, théorique et numérique) à répondre à la question de la pertinence des modèles de milieux généralisés. Pour répondre à cette question, on s'intéressera à la cellule hexachirale (HC) afin de maximiser les effets non-standards de différents modèles généralisés, i.e. anisotropie d'un milieu à symétrie hexagonale, sensibilité à la chiralité, propriétés auxétiques. Un dispositif expérimental spécifique a été développé au LMT-Cachan pour étudier le comportement mécanique d'échantillons constitués de cellules à des conditions aux limites riches. La comparaison entre mesures de champs cinéma-

tiques, calculs de référence en champs complets et homogénéisation numérique à l'aide de milieux homogènes équivalents enrichis, nous permettra d'étudier la validité des différentes théories de milieux continus généralisés, leur lien avec la chiralité et le rôle des groupes de symétrie, ainsi que d'envisager de nouvelles applications, notamment dans le domaine des métamatériaux et de la propagation d'ondes.

Chapitre I.2

Description des activités de recherche

2.1 Résumé des travaux de recherche

Le thème principal de mes travaux est l'étude et la détermination des propriétés effectives des matériaux architecturés. Même si il n'existe pas de définition officielle de ce qu'est un matériau architecturé, pour ma part je considère la définition suivante:

Un matériau sera dit architecturé si :

1. Il présente, entre sa microstructure et sa macrostructure, une à plusieurs autres échelles d'organisation de la matière ;
2. Si les échelles d'organisation intermédiaires sont commensurables à celles de la microstructure et/ou de la macrostructure.

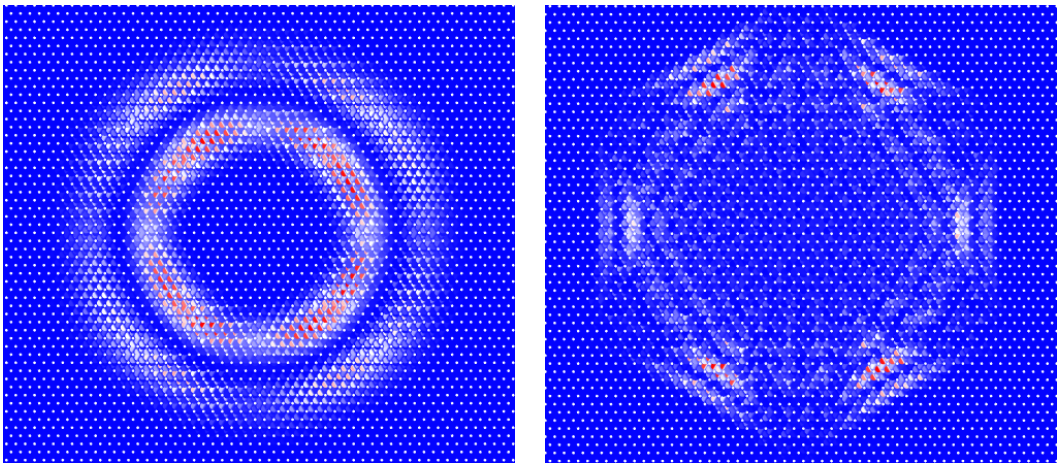
De fait, la notion d'architecture n'est pas propre à une échelle donnée, mais elle est plutôt définie par les rapports relatifs des différentes longueurs caractéristiques d'un milieu. Les matériaux biologiques sont d'excellents exemples de cela. Une des caractéristiques des biomatériaux est que leur multifonctionnalité est la résultante de l'organisation de la matière sur plusieurs échelles différentes.

Les caractéristiques de tels milieux sont donc:

1. Présence de longueurs internes;
2. Propagation d'ondes dispersives;
3. Forte anisotropie.

Si l'on veut modéliser de tels milieux en utilisant un milieu homogène équivalent classique, ou milieu de Cauchy, les effets liés à la présence de longueurs internes vont disparaître. En effet dans leur formulation classique les équations de l'élastodynamique sont invariantes par changement d'échelle et ne peuvent donc pas modéliser les effets liés à la présence d'une microstructure. En

conséquence de quoi la propagation des ondes élastiques dans un milieu homogène n'est pas dispersive. De même, dans sa formulation standard, les effets liés à l'anisotropie de la microstructure vont être gommés par rapport à ce qui peut être observé numériquement et expérimentalement (Figure I.2.1)



(a) Propagation à basse fréquence, la propagation est isotrope

(b) Propagation à haute fréquence, l'isotropie est perdue

Figure I.2.1: Évolution de l'anisotropie de la propagation d'onde en fonction de la fréquence

De fait, l'approche classique n'est pas suffisante car les caractéristiques essentielles des milieux architecturés seront perdues. A l'opposé, la prise en compte de l'ensemble de l'architecture n'est pas souhaitable non plus car trop riche et numériquement coûteuse en Degrés De Libertés (DDL). De plus, intellectuellement cette approche n'est pas satisfaisante car elle n'arrive pas à faire émerger de l'ensemble des informations celles qui sont juste nécessaires à la description d'une situation physique donnée. Le point de départ de mes travaux de recherche s'intéresse à cette question de la définition d'un milieu homogène équivalent permettant de remplacer le matériau architecturé tout en garantissant la conservation d'un certain nombre de caractéristiques physiques du milieu original.

L'objectif de cette démarche est d'aboutir, à terme, sur la problématique inverse: la détermination d'une architecture locale produisant un comportement déterminé au préalable. Une telle approche s'ancre dans la mouvance actuelle liée à la détermination et réalisation de *métamatériaux*.

Mes axes de travail se déclinent selon deux thématiques interconnectées:

1. **Modélisation des milieux architecturés par des modèles généralisés**: cette thématique se subdivise en une partie statique dans la continuation de mes travaux de thèse, et une extension plus récente à la dynamique. L'idée principale est de déterminer des milieux de substitutions conservant de manière continue des aspects du comportement discret. Cette

détermination est à deux niveaux. Le premier consiste en le choix d'un milieu de substitution adapté, le deuxième en la détermination pratique des coefficients de ce modèle. La première question ne saurait être négligée car il existe une multitude de milieux généralisés. Selon une taxonomie que l'on introduira plus en détail au Chapitre II.3 ces milieux peuvent être locaux, non locaux, à gradient(s), ou encore à DDL enrichis. De fait il est intéressant de pouvoir déterminer des critères permettant de décider, pour une situation donnée, quel est le type de milieu de substitution adapté. La deuxième problématique consiste, quant-à-elle, à générer les coefficients de la loi de comportement retenue à partir de la connaissance de la microstructure et du matériau constitutif.

2. **Représentation de groupe et milieux continus**: cette thématique, plus fondamentale, considère les problèmes de mécanique au travers d'un prisme plus mathématique. L'objectif de cette approche est de développer des outils généraux pour la manipulation des objets tensoriels. Les questions qui nous ont intéressé jusqu'alors sont (1) la détermination des classes de symétrie d'un opérateur linéaire donné; (2) le calcul d'une base d'invariants tensoriels polynomiaux (base d'intégrité). Les réponses à ces questions permettent, en lien avec la première thématique, une meilleure compréhension des phénomènes pouvant, ou non, être modélisés par les milieux généralisés. Elles permettent également une analyse plus fine de l'élasticité linéaire classique dans le cas anisotrope.

Les sections à venir vont détailler ces deux axes.

2.1.1 Modélisation des milieux architecturés par des modèles généralisés

Mes travaux doctoraux ont concerné l'étude de structures de type *nid d'abeilles* devant, en plus de leur fonction structurale, assurer une fonction de dissipation acoustique. Dans de tels matériaux, la dissipation de l'énergie se réalise par frottement visco-thermique dans le réseau de pores du matériau. La taille caractéristique des pores est déterminée en fonction du spectre d'absorption acoustique recherché. Cette échelle caractéristique du matériau ne peut pas être considérée comme infiniment petite devant la longueur d'onde des chargements mécaniques macroscopiques. De fait, cela empêche l'utilisation des résultats classiques d'homogénéisation. Nous avons donc considéré le milieu macroscopique résultant comme étant un milieu continu généralisé du type *strain-gradient*.

En m'appuyant sur des résultats théoriques que j'ai préalablement établis, j'ai construit l'ensemble des opérateurs anisotropes liés au tenseur d'ordre 6 de l'élasticité à gradient (en 2D) [ABB09a]. Ce travail a été ensuite étendu à la 3D dans [ALH13], et plus récemment aux tenseurs 2D d'ordre 5 [ADR15]. En plus des résultats proprement dits, dans ces études nous introduisons des notations tensorielles rigoureuses. Ces résultats, ainsi que certains autres établis de manière théorique, révèlent certaines spécificités de l'élasticité à gradient:

- anisotropie de tous les pavages périodiques du plan;

- apparition de classes de symétrie non cristallographiques (la classe icosaèdrale notamment);
- une sensibilité à la chiralité du milieu.

Il est à noter que la sensibilité à la chiralité qui apparaît est non-standard, elle est liée aux sous-groupes chiraux de O(2) et peut se manifester également dans un milieu centro-symétrique. Il convient alors de distinguer centrosymétrie et chiralité, ces situations sont parfaitement distinctes et peuvent être produites indépendamment l'une de l'autre. Une discussion sur ce point là peut être trouvée dans [ALH13] ainsi que dans [ADR15].

Récemment, via un collaboration avec G. Rosi ainsi que le co-encadrement de thèse de H. Nassar je me suis intéressé à l'homogénéisation dynamique. Les milieux effectifs qui sont obtenus sont généralement non-locaux en espace et en temps [NHA15]. Sous certaines hypothèses, ces milieux peuvent être approchés par des milieux à gradient [NHA16a], voire des milieux de type micromorphe [NHA16b]. Cette dérivation théorique rigoureuse permet de justifier la forme et la présence de certains termes (tenseurs de micro-inertie) dans des formulations traditionnellement phénoménologiques.

Dans un travail récent sur la propagation d'onde dans un nid d'abeille mené avec G. Rosi (MSME) et J. Dirrenberger (PIMM) [RAD15a,RA16], il a été montré que de tels milieux permettaient de reproduire une transition de symétrie observée expérimentalement. A basse fréquence la propagation est isotrope, et devient ensuite anisotrope (à symétrie hexagonale) quand ω augmente. Par opposition, cette transition ne peut pas être reproduite par un milieu de Cosserat. Ce genre d'observations peut servir de critère dans le choix d'un modèle généralisé. Toutefois, cette approche ne permet pas de modéliser les band-gaps.

La question centrale dans toutes ces approches est la détermination des coefficients des modèles généralisés à partir de la cellule élémentaire. Dans une première approche, un schéma d'homogénéisation basé sur l'utilisation de conditions de contour quadratiques a été utilisé [ABB10]. Un des résultats de ce travail montre que la dérivation d'un opérateur isotrope (en 2D) du second ordre à partir d'une cellule circulaire conduit à un opérateur singulier. Cette construction est généralement celle qui est proposée dans la littérature. De manière plus fondamentale, la construction d'un milieu du second gradient isotrope à partir d'une cellule périodique n'a pas grand sens, les cellules produisant l'isotropie (resp. isotrope transverse) ne pouvant pas paver l'espace. Le schéma d'homogénéisation utilisé dans [ABB10] est assez naïf et les résultats sont bien trop raides. Cependant on retrouve bien les différentes matrices d'anisotropie prévues dans [ABB09a] et, bien que raide, le schéma respecte les symétries. Dans [TJA+12] ce problème est étudié, on y compare les modules obtenus à partir de différents types de conditions de contour. On y montre clairement que les conditions de périodicité classiques ne résolvent pas le problème, il y a toujours d'importants effets de bord induits par les conditions aux limites non-homogènes.

La question des bonnes conditions à imposer sur le bord de la cellule demeure ouverte.

2.1.2 Représentation de groupe et milieux continus

En complément de ce premier thème de recherche, je m'intéresse à l'étude des objets mathématiques de la mécanique des milieux continus. Plus précisément, de manière à étudier les liens entre symétrie et comportement effectif, j'utilise et développe des outils théoriques issus de la théorie de représentation de groupe. L'intérêt de ce travail est que les objets obtenus sont suffisamment généraux pour être utilisés dans d'autres contextes, je pense notamment aux couplages multi-physiques, à l'endommagement anisotrope, à l'élasticité non-linéaire, aux fonctions seuils pour la plasticité à gradient...

Une partie de mes travaux a concerné la détermination des classes de symétrie d'un espace de tenseurs ainsi que la dimension de chacune de ces classes. Les classes de symétrie d'un tenseur donné s'étudient à partir de la décomposition de ce tenseur en éléments irréductibles sous l'action du groupe orthogonal de l'espace physique de travail (2D ou 3D). La technique classiquement utilisée, un algorithme dû à Spencer, pour réaliser cette décomposition est lourde à mettre en œuvre. Dans [Auf08a], je propose une technique de décomposition alternative qui est, quant à elle, extrêmement rapide à effectuer. Cette technique, issue de la mécanique quantique, ne semblait pas connue de la communauté mécanicienne. Connaissant cette décomposition, la dimension de tous les opérateurs anisotropes d'un tenseur donné peut être calculée simplement [Auf10,Auf14].

La question de la détermination des classes de symétrie est sensiblement différente. Une méthode de détermination a été proposée par Forte et Vianello en 1996 dans un article où ils prouvent, pour la première fois, qu'il n'existe que 8 types d'anisotropie pour l'élasticité. La méthode initialement proposée est très laborieuse. De plus, elle ne fournit pas de résultats généraux. Dans le cadre de la thèse de M. Olive (I2M) nous sommes revenus sur ce problème. En combinant géométrie et décomposition de tenseurs, nous avons publié deux articles [OA13, OA14a] qui résolvent la question pour tous les tenseurs pairs et impairs en 3D. Nous avons également traité le cas des tenseurs 2D [AKO16a].

En parallèle, dans le cadre d'une collaboration avec B. Kolev (I2M), mathématicien, et M. Petitot (LIFL), informaticien, je me suis intéressé à la question des invariants tensoriels. Dans [AKP14], nous considérons le problème de l'identification des symétries d'un tenseur d'élasticité déterminé expérimentalement dans un repère quelconque. Pour traiter ce problème, nous nous intéressons aux relations polynomiales existants entre 9 invariants du tenseur d'élasticité 3D et établissons les égalités polynomiales satisfaites par ces invariants pour diverses classes de symétrie. Ceci nous donne un ensemble de conditions nécessaires pour qu'un tenseur d'élasticité soit dans une classe de symétrie donnée. Cette approche est alternative à l'approche spectrale généralement utilisée. Par rapport à cette dernière elle présente l'avantages de pouvoir être généralisée aux tenseurs non-symétriques, notamment aux tenseurs de couplage.

Toujours dans cette thématique, avec M. Olive nous avons déterminé la base d'intégrité des tenseurs d'ordre 3 complètement symétriques [OA14b], ainsi qu'une base d'intégrité pour les tenseurs d'élasticité [AKO16b]. La détermination d'une telle base répond à une question posée par Boehler et al. en 1994, et ouverte depuis lors.

Dans le cadre de la 2D le problème des invariants du tenseur d'élasticité est plus simple et est résolu depuis les années 1990. Toutefois, les applications pratiques de ce résultat théorique sont encore peu nombreuses. Dans le cadre du projet MatSyMat porté par M. Francois (GeM), des travaux sont réalisés dans le but d'intégrer ces invariants dans des modèles mécaniques. Avec P. Ropars (GeM), nous avons proposé des expériences numériques permettant de directement évaluer ces invariants (5 en 2D), l'intérêt de cela serait d'intégrer cette mesure directe des invariants dans les techniques de mesure de champ [AR16]. Ces travaux sont actuellement en cours.

2.2 Activités de recherche

Intérêts scientifiques

- Homogénéisation dynamique;
- Propagation d'ondes dans des milieux à microstructure;
- Milieux continus généralisés;
- Anisotropie en mécanique des milieux continus;
- Milieux architecturés;
- Symétries des lois de comportement;
- Problèmes inverses.

Séjours de recherche dans des institutions´étrangères

5 séjours d'une semaine entre 2012 et 2014 à Cisterna di Latina, invité par le professeur Francesco dell'Isola, professeur à La Sapienza.

Participation à des projets

GDR META Métamatériaux acoustiques pour l'ingénierie

Porteur: Anne-Christine Hladky (EIMN)

Période: 2016-2020

Metamorph PEPS CNRS INSIS

Porteur: Julien Réthoré (INSA-Lyon)

Période: 2015-2016

Coss&Vita Generalized continua and their applications to engineering materials and structures

Porteur: Francesco dell'Isola (MeMOCS, Sapienza), Samuel Forest (Centre des Matériaux, École des Mines de Paris)

Financement: CNRS

Période: 2015-2019

Aphorisme Approche holiste de la chiralité dans les métamatériaux architecturés

Porteur: Nicolas Auffray (MSME), Justin Dirrenberger (PIMM), Martin Poncelet (LMT)

Financement: Coup de Pouce, F2M-msp

Période: 2015-2016

MatSyMat Matériaux et symétries matérielles

Porteur: Marc Francois (GEM-Nantes)

Financement: Région des Pays de la Loire

Période: 2013-2016

Invariants en élasticité PEPS CNRS Invariants en élasticité

Porteur: Boris Kolev (I2M-Marseille)

Période: 2008-2010

GDR 2519 Mesures de champs et identification en mécanique des solides

Groupe Calorimétrie quantitative en mécanique des matériaux

Période: 2008-2010

Prix et distinctions

- Prix Jean Mandel 2015 de l'École des Mines de Paris et de l'École Polytechnique.

Organisation de rencontres nationales et internationales

2017 *ECCOMAS Thematic Conference on Computational modeling of Complex Materials across the Scales*, 7 et 9 Novembre 2017, Paris; Membre du comité d'organisation.

2016 *Summer School on Elastic Metamaterials: From Theory to Applications*, 22-29 Mai 2016, Alghero, Italie; Organisateur.

2015 *First MetaMaterial Workshop*, 14 Avril 2015, Marne-la-Vallée; Organisateur.

2012 *Beijing-Paris Workshop on Micromechanics and Nanomechanics*, 6 et 7 Septembre 2012, Marne-la-Vallée; Membre du comité d'organisation.

2008 *Journée thématique MECAMAT "Mécanique des matériaux à longueur interne"*, 20 Mars 2008, École des Mines de Paris; Organisateur.

Responsabilité administrative

2015- Coordinateur français du thème: Generalized continua and Metamaterials, Laboratoire International Associé Coss&Vita.

Rapporteur pour des revues internationales

- European Journal of Mechanics - A/Solids;
- International Journal of Solids and Structures;
- Comptes Rendus Mécanique;
- Journal of Mathematical Physics;
- Mathematics and Mechanics of Solids;
- Journal of Composite;
- Composites Part B: Engineering;
- Nonlinearity.

Participation à des jurys de thèse

H. Nassar *Elastodynamic homogenization of periodic media*

Université Université Paris-Est, Marne-la-Vallée

Encadrement Qi-Chang He (Directeur), Nicolas Auffray (Co-directeur)

Jury Samuel Forest, Jean-Jacques Marigo, Claude Boutin, Pierre Seppecher

Soutenance MSME, le 01/10/2015

M. Olive *Géométrie des espaces de tenseurs, une approche effective appliquée à la mécanique des milieux continus*

Université Aix-Marseille Université

Encadrement Boris Kolev (Directeur), Nicolas Auffray (Co-directeur)

Jury Samuel Forest, Aziz Hamdouni, Joël Merker, Christophe Ritzenthaler,Erwan Rousseau, Pierre Seppecher

Soutenance CMI, le 19/11/2014

C. Besse *Development and optimization of a formable sandwich sheet*

Université École Polytechnique

Encadrement Gérard Gary (Directeur), Dirk Mohr (Co-directeur)

Jury Nicolas Auffray, Vincent Grolleau, Geneviève Inglebert

Soutenance École Polytechnique, le 06/04/2012

Séminaires invités

Mai 2017 LMT, ENS-Cachan;
Janvier 2016 Laboratoire Navier, École des Ponts ParisTech;
Avril 2015 Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano;
Mars 2015 Lamcos, INSA Lyon;
Février 2014 LMA, Marseille;
Février 2014 Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma;
Mars 2011 LMS, École Polytechnique;
Mars 2011 Centre des Matériaux, Ecole des Mines de Paris;
Mars 2009 Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino.

Écoles d'été (enseignant)

Juil. 2015 Mechanics of generalized continua and their applications to engineering materials and structures, *Material Symmetries and Tensor Decomposition*, Arpino, Italie;
Sept. 2014 Ecole MatSyMat: Matériaux et Symétries, Décomposition harmonique des tenseurs, Nantes;

2.3 Production scientifique

Articles parus dans des revues à comité de lecture (23)

AKO16 **N. Auffray**, B. Kolev, M. Olive, *Handbook of bi-dimensional tensors: Part I: Harmonic decomposition and symmetry classes*, Mathematics and Mechanics of Solids (2016), 1081286516649017;

AR16 **N. Auffray**, P. Ropars, *Invariant-based reconstruction of bidimensionnal elasticity tensors*, International Journal of Solids and Structures (2016), 87, pp. 183-193;

NHA16 H. Nassar, Q.-C. He, **N. Auffray**, *On asymptotic elastodynamic homogenization approaches for periodic media*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids (2016), 88, pp.274-290;

NHA16a H. Nassar, Q.-C. He, **N. Auffray**, *A generalized theory of elastodynamic homogenization for periodic media*, International Journal of Solids and Structures (2016), 84, pp.139-146;

RA16 G.Rosi, **N. Auffray**, *Anisotropic and dispersive wave propagation within strain-gradient framework*, Wave motion (2016), 63, pp.120–134;

Auf15 **N. Auffray**, *On the isotropic moduli of 2D strain-gradient elasticity*, Continuum Mechanics and Thermodynamics (2015), 27 (1), pp. 5-19;

ADR15 **N. Auffray**, J. Dirrenberger, G. Rosi, *A complete description of bi-dimensional anisotropic strain-gradient elasticity*, International Journal of Solids and Structures (2015), 69–70, pp.195-206;

NHA15 H. Nassar, Q.-C. He, **N. Auffray**, *Willis elastodynamic homogenization theory revisited for periodic media*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids (2015), 77, pp.158-178;

Auf14 **N. Auffray**, *Analytical expressions for odd-order anisotropic tensor dimension*, Comptes Rendus Mécanique (2014), 342 (5), pp.284-291;

AKP14 **N. Auffray**, B. Kolev, M. Petitot, *On anisotropic polynomial relations for the elasticity tensor*, *Journal of Elasticity* (2014), 115 (1), pp. 77-103;

OA14a M. Olive, **N. Auffray**, *Symmetry classes for odd-order tensors*, Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik, (2014),94 (5), pp. 421-447;

OA14b M. Olive, **N. Auffray**, *Isotropic invariants of a completely symmetric third-order tensor*, Journal of Mathematical Physics, (2014), 55 (9), pp.1.4895466;

Auf13a **N. Auffray**, *On the algebraical structure of isotropic generalized elasticity theories*, Mathematics and Mechanics of Solids (2013), On-line;

ALH13 **N. Auffray**, H. Le Quang, Q.-C. He, *Matrix representations for 3D strain-gradient elasticity*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids (2013),61, pp. 1202-122;

AMP13 **N. Auffray**, M. Bonnet, S. Pagano, *Identification of transient heat sources using the reciprocity gap*, Inverse Problems in Science and Engineering (2013) 21, pp. 721-738;

AIE+13 **N. Auffray**, F. dell'Isola, V. Eremeyev, A. Madeo and G. Rosi, *Analytical continuum mechanics à la Hamilton-Piola: least action principle for second gradient continua and capillary fluids*, Mathematics and Mechanics of Solids (2013), On-Line First;

OA13 M. Olive, **N. Auffray**, *Symmetry classes for even-order tensors*, Mathematics and Mechanics of Complex Systems (2013), 1 (2), pp. 177-210;

TJA+12 D.-K. Trinh, R. Jänicke, **N. Auffray**, S. Diebels, S. Forest, *Evaluation of generalized continuum substitution models for heterogeneous materials*,International Journal for Multiscale Computational Engineering (2012), 10 (6), pp. 527-549;

Auf10 **N. Auffray**, *Analytical expressions for anisotropic tensor dimension*, Comptes Rendus Mécanique (2010), 338 (5), pp. 260-265;

ABB10 **N. Auffray**, R. Bouchet, Y. Bréchet, *Strain gradient elastic homogenization of bidimensional cellular media*, International Journal of Solids and Structures (2010), 47 (13), pp. 1698-1710;

ABB09a **N. Auffray**, R. Bouchet, Y. Bréchet, *Derivation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain-gradient elasticity behavior*, International Journal of Solids and Structures (2009), 46 (2), pp. 440-454;

Auf08a **N. Auffray** *Décomposition harmonique des tenseurs -Méthode spectrale-*, Comptes Rendus Mécanique (2008), 336 (4), pp. 370-375;

Auf08b **N. Auffray** *Démonstration du théorème d'Hermann à partir de la méthode Forte-Vianello*, Comptes Rendus Mécanique (2008), 336 (5), pp. 458-463.

Articles soumis dans des revues à comité de lecture (1)

AKO15 **N. Auffray**, M. Olive, B. Kolev, *A minimal integrity basis for the elasticity tensor*, Archive for Rational Mechanics and Analysis.

Communications dans des conférences avec actes (7)

OKA15 M. Olive, B. Kolev, **N. Auffray**, Les invariants du tenseur d'élasticité, *22ème Congrès Français de Mécanique*, Août 2015, Lyon, France.

RAD15a G. Rosi, **N. Auffray**, J. Dirrenberger, Wave propagation in the framework of strain gradient continua: the example of hexachiral materials, *22ème Congrès Français de Mécanique*, Août 2015, Lyon, France;

OKA13 M. Olive, B. Kolev, **N. Auffray**, Espace de tenseurs et théorie classique des invariants, *21ème Congrès Français de Mécanique*, Août 2013, Bordeaux, France;

ABP11 **N. Auffray**, M. Bonnet, S. Pagano, Identification de sources de chaleur dans le contexte de la thermographie infrarouge, *10e colloque national en calcul des structures*, Mai 2011, Giens, France;

ABB09b **N. Auffray**, R. Bouchet, Y. Bréchet, Représentation graphique des coefficients d'anisotropie des milieux élastiques généralisés, *19ème Congrès Français de Mécanique*, Août 2009, Marseille, France;

ABB08 **N. Auffray**, R. Bouchet, Y. Bréchet, Derivation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain-gradient elasticity behavior, *11th Euromech-Mecamat Conference*, Mai 2008, Turin, Italie;

ABB07 **N. Auffray**, R. Bouchet, Y. Bréchet, Modèles d'acoustique phénoménologiques -Application à la conception de matériau sur mesure-, *17ème Congrès Français de Mécanique*, Août 2007, Grenoble, France.

Communications dans des conférences sans actes (10)

ADP16 **N. Auffray**, J. Dirrenberger, M.Poncelet, Approche holiste de la chiralité dans les métamatériaux architecturés, *Rencontres Franciliennes de Mécanique*, Juin 2016, Dammary Les Lys, France;

AR15 **N. Auffray**, G. Rosi, Wave propagation in the framework of strain gradient continua, *Workshop on Extended continuum theories for the numerically efficient modeling of multiscale phenomena*, Sep. 2015, Bochum, Allemagne;

RAD15b G. Rosi, **N. Auffray**, J. Dirrenberger, Wave propagation in hexachiral lattices modeled as strain gradient continua, *European Solid Mechanics Conference (ESMC15)*, Madrid 2015, Espagne;

RAD15c G. Rosi, **N. Auffray**, J. Dirrenberger, Wave propagation in hexachiral lattices modeled as strain gradient continua, *Premier Workshop Métamatériaux, LIA Coss'&Vita*, Avr. 2015, France;

NHA15d H. Nassar, Q.-C. He, **N. Auffray**, Des éléments d'une théorie exacte de l'homogénéisation élastodynamique de milieux périodiques, *Premier Workshop Métamatériaux, LIA Coss'&Vita*, Avr. 2015, France;

NHA14 H. Nassar, Q.-C. He, **N. Auffray**, Toward an understanding of elastodynamic homogenization, *Multi-physics modeling of solids, (MPMS14)*, Oct. 2014, France;

ALH12 **N. Auffray**, H. Le Quang, Q.-C. He, Matrix representations for 3D strain-gradient elasticity, *Beijing-Paris Workshop on Micromechanics and Nanomechanics*, Sep. 2012, France;

Auf12 **N. Auffray**, A Geometrical Picture of Third-Order Tensors, *Generalized Continua as Models for Materials Generalized Continua as Models for Materials*, Sep. 2012, Wittenberg, Allemagne;

AO12 **N. Auffray**, M. Olive, Anisotropy of higher-orders gradient elasticity, *Workshop on "Second Gradient and Generalized Continua"*, Mars 2012, Cisterna di Latina, Italie;

ABP10 **N. Auffray**, M. Bonnet, S. Pagano, Parabolic reciprocity gap for heat source identification, *European Conference on Computational Mechanics (ECCM 2010)*, Mai 2010, Paris, France.

Chapitres dans des ouvrages scientifiques (2)

Auf13b **N. Auffray**, Geometrical Picture of Third-Order Tensors, *Generalized Continua as Models for Materials, Advanced Structured Materials* (2013), pp. 17-40;

ABB09c **N. Auffray**, R. Bouchet, Y. Bréchet, Class-jump phenomenon for physical symmetries in bi-dimensional space, *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics* (2009), pp. 1-11.

Brevets (2)

ABB+11 **N. Auffray**, M.-P. Bacos, R. Bouchet, V. Marcadon, S. Mercier, P. Josso, SOUND ABSORPTION DEVICE, *WO/2011/048323* (28/04/2011);

RAB+11 A. Rafray, **N. Auffray**, R. Bouchet, P. Josso, J. Lozat, V. Marcadon, METHOD FOR PREPARING A CELLULAR MATERIAL BASED ON HOLLOW METAL BEADS AND CELLULAR MATERIAL, *EP2285561* (28/12/2011).

Mémoire de thèse

Auf08c **N. Auffray**, Comportement des matériaux cellulaires: élaboration, caractérisation et modélisation prédictive des propriétés, 17 Déc. 2008.

Partie II

Détail des contributions

Chapitre II.1

Classes de symétrie des tenseurs de comportement

Ce premier chapitre se base essentiellement sur les publications [9, 11, 13, 29, 115, 116]. Ce sont des travaux initiés au cours de ma thèse et qui se prolongent actuellement via une collaboration avec des mathématiciens, notamment B. Kolev (I2M). Ce chapitre ainsi que le suivant, couvre la thèse de M. Olive, thèse de Mathématique et Mécanique co-encadrée avec B. Kolev. Ce chapitre, outre présenter nos résultats, va nous permettre d'introduire les outils mathématiques qui nous serons utiles par la suite. Les principales notations sont définie en Chapitre A.

En théorie des comportements physiques linéaires, les propriétés du milieu étudié sont modélisées par des champs de tenseurs sur la configuration de référence k_0 du body $\mathcal{B}$ plongé dans $\mathbb{E}^d$ $(d = 2, 3)$, l'espace Euclidien de dimension d. Dans le cadre d'un matériau homogène occupant le domaine k_0, ce champ est résumé par la donnée d'un unique tenseur appartenant à un espace vectoriel donné.

On désignera par la suite par ETC l'Espace des Tenseurs de Comportement retenu pour modéliser la physique de notre problème. Nous en donnerons une construction algébrique dans la suite de ce chapitre (section 1.3).

Pour un comportement linéaire donné, c'est-à-dire pour le choix d'un ETC, on peut légitimement se poser plusieurs questions:

1. Quels sont les différents types de comportements anisotropes qui peuvent être décrits ?
2. Comment, au regard de cette propriété, *étiqueter* de manière unique chaque matériau ?
3. Comment, connaissant les composantes d'un tenseur dans une orientation arbitraire, identifier le type d'anisotropie du tenseur ?

Dans ce premier chapitre, nous nous intéresserons à la première de ces trois questions dans le cas de $\mathbb{E}^3$. Les deux questions suivantes seront envisagées dans le chapitre II.2. Comme nous allons le voir, l'analyse de ces questions, quoique différentes, nécessite l'utilisation d'un outil

mathématique commun la *décomposition harmonique* qui est le fondement de l'étude géométrique des propriétés tensorielles. Cet outil nous servira au Chapitre II.3 pour l'étude de l'élasticité des milieux architecturés.

Avant d'énoncer nos différents apports quant à la résolution de la première de ces questions, il nous paraît intéressant de motiver notre étude autour de quelques exemples bien connus, avant de présenter brièvement l'historique de ces problèmes.

1.1 Problématique

Considérons un comportement modélisé par tenseur symétrique d'ordre 2. Ce cadre est commun à de nombreuses lois physiques comme la loi de Fick (diffusion), la loi de Fourier (thermique), la conduction électrique,. . . Pour fixer les idées, nous considérerons la loi de Fourier, auquel cas la conduction thermique s'écrit:

$$\underline{q} = -\underset{\sim}{\lambda}\underline{\nabla T},$$

avec $\underline{q}$ le vecteur du flux thermique, $\underline{\nabla T}$ le vecteur gradient de la température, et $\underset{\sim}{\lambda}$ un tenseur symétrique d'ordre 2 décrivant les propriétés de conduction thermique du milieu. Selon les symétries du milieu sur lequel est défini le comportement, $\underset{\sim}{\lambda}$ peut avoir plusieurs formes différentes. Quelles sont ces différentes formes ?

La conduction thermique étant modélisée par un élément de $S^2(\mathbb{R}^d)$, il existe une base de $\mathbb{R}^d$ telle que la matrice du tenseur de comportement est diagonale. Il suffit donc d'étudier la multiplicité des valeurs propres. De cette première constatation découle le fait que le nombre et type d'anisotropies dépendent de la dimension de l'espace physique. Comme résumé sur le diagramme ci-après, cela donne 2 possibilités[1] en 2D, et 3 en 3D.

En 2D:

$$\begin{array}{c} \text{Isotrope} : [\mathrm{O}(2)] \\ \downarrow \\ \text{Orthotrope} : [\mathrm{D}_2] \end{array}$$

En 3D:

$$\begin{array}{c} \text{Isotrope} : [\mathrm{SO}(3)] \\ \downarrow \\ \text{Isotrope Transverse} : [\mathrm{O}(2)] \\ \downarrow \\ \text{Orthotrope} : [\mathrm{D}_2] \end{array}$$

Figure II.1.1: Classes de symétrie de la conduction thermique en 2D et 3D.

[1] Les notations de groupe sont introduites à la subsection 1.2.2.

Dans le cas de l'élasticité, les choses se compliquent. On a la relation:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\approx}{\mathrm{C}} : \underset{\sim}{\varepsilon},$$

avec $\underset{\approx}{\mathrm{C}}$ appartenant à l'espace vectoriel $\mathbb{E}\mathrm{la}$ défini comme suit:

$$\mathbb{E}\mathrm{la} = \{C_{ijkl} \in \mathbb{G}^4 | C_{\underline{(ij)}\ \underline{(kl)}}\}.$$

On pourra également noter $\mathbb{E}\mathrm{la}$ comme $S^2\left(S^2\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ pour insister sur sa construction à partir de $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, l'argument précédent sur la diagonalisation ne marche plus. En effet, ce qui nous intéresse est de classifier les tenseurs en fonction de leurs propriétés d'invariance par rapport à l'action de $\mathrm{O}(d)$. L'approche spectrale appliquée à l'élasticité revient à considérer $\underset{\approx}{\mathrm{C}}$ comme un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}^{\frac{d(d+1)}{2}}$. De fait, la diagonalisation, si elle est toujours loisible, se fait alors via le groupe $\mathrm{SO}(\frac{d(d+1)}{2})$. En utilisant une autre stratégie, on établit les résultats suivants[2]:

$$\begin{tikzcd}
\text{Isotrope} : [\mathrm{O}(2)] \arrow[d] \\
\text{Tétragonale} : [\mathrm{D}_4] \arrow[d] \\
\text{Orthotrope} : [\mathrm{D}_2] \arrow[d] \\
\text{Monoclinique} : [\mathrm{Z}_2]
\end{tikzcd}$$

Figure II.1.2: Classes de symétrie de l'élasticité 2D pour l'action de $\mathrm{O}(2)$

[2]Les flèches indiquent une inclusion en tant que sous-groupe.

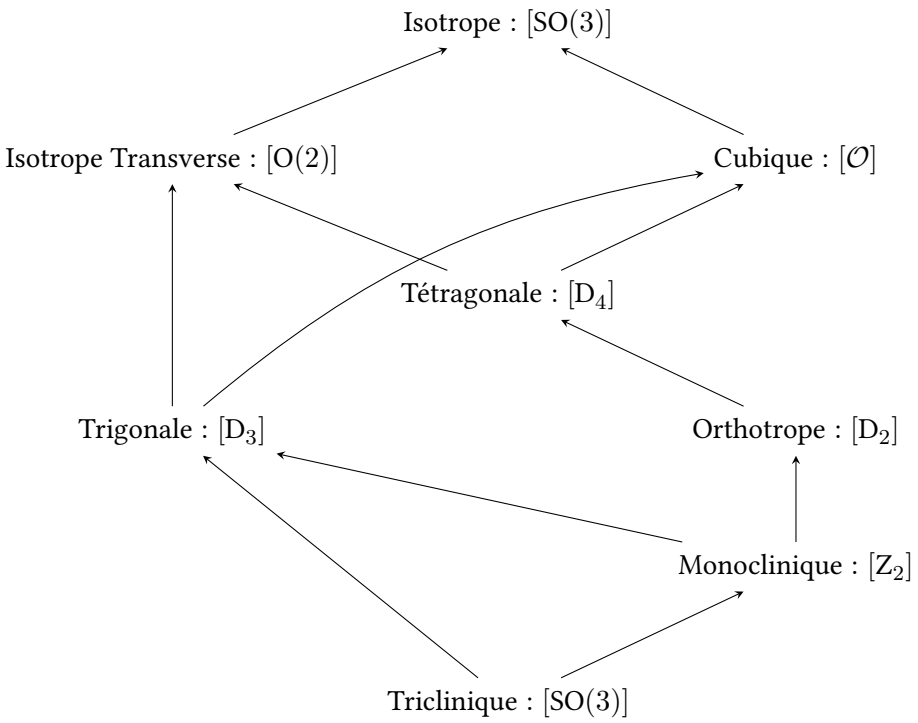


Figure II.1.3: Classes de symétrie de l'élasticité 3D pour l'action de SO(3)

Sur ces exemples, on constate que le nombre et le type d'anisotropie, ou *classe de symétrie* dans la suite, varient tant avec l'ordre du tenseur qu'avec la dimension de l'espace. Pour ces comportements les résultats étaient connus depuis longtemps [64], au moins empiriquement. Toutefois, qu'en est-il pour des comportements plus complexes et moins usuels ? Y a-t-il plus de classes de symétrie si l'on considère à présent l'élasticité à gradient de déformation ? Et comment ce résultat se compare-t-il à celui pour un milieu élastique de Cosserat ?

J'ai traité le cas de l'élasticité à gradient dans le cadre de ma thèse [8, 21] sans pour autant apporter une vraie démonstration (au sens mathématique du terme) de mon résultat. Depuis, j'ai pu revenir sur ce point [115] pour proposer une démonstration plus rigoureuse et générale de ce résultat. J'ai traité plus récemment du cas des milieux de Cosserat [16] pour le comparer à celui des milieux du premier gradient de la déformation. Les résultats que nous avons obtenus sont importants, en pratique, vis-à-vis:

1. *Du choix d'un modèle généralisé.* Comme nous le verrons au Chapitre II.3, un milieu à gradient peut reproduire l'évolution de l'anisotropie que l'on observe sur la Figure I.2.1 tandis qu'un milieu de Cosserat en est incapable. De fait, les arguments de symétrie permettent, ce qui est très important, d'invalider des modèles. De manière duale, ils permettent de déterminer les enrichissements minimaux permettant de reproduire certains effets.
2. *De la validation d'un schéma d'homogénéisation.* Ces études nous permettent également de déterminer le nombre de paramètres indépendants pour chaque type d'anisotropie possible

[11, 14], ainsi que la structure de la matrice associée [24, 28]. Ces résultats fournissent des critères pour valider des schémas d'homogénéisation [85].

3. *De la conception a priori d'architectures.* L'existence ou l'absence de couplage est une conséquence des propriétés de symétrie de la matière. De fait, l'analyse, *a priori*, d'un modèle de comportement nous indique les couplages pouvant exister. Cela nous permet, selon les besoins, de déterminer des microstructures activant, ou évitant, ces couplages.

Avant de détailler nos résultats, précisons le contexte historique de la question qui nous intéresse.

Contexte des travaux sur les classes de symétrie

La détermination des différentes classes de symétrie que peuvent avoir les éléments d'un espace de tenseur consiste, en termes mathématiques, en la détermination des classes d'isotropie[3] d'une G-représentation[4]. Dans notre cas, la représentation est notre ETC, et les groupes sont soit $\mathrm{SO}(d)$ soit $\mathrm{O}(d)$ qui sont des groupes de Lie compacts. La première formulation rigoureuse de ce problème, appliqué à l'espace des tenseurs d'élasticité, est due à Forte and Vianello [64][5]. Dans leur article, ils déterminent pour la première fois le nombre et le type des classes de symétrie de l'élasticité 3D. Au delà du simple résultat, ils introduisent les outils géométriques permettant de traiter de nombreux problèmes du même type[6]. De fait, suite à leur publication, et suivant leur méthode, d'autres déterminations de classes de symétrie ont suivi: photoélasticité [65], piézoélectricité [72], ou bien encore flexoélasticité [94].

Toutefois, la démarche proposée par Forte et Vianello est calculatoire et lourde à mettre en œuvre, sa complexité étant croissante avec l'ordre du tenseur étudié. Au cours de ma thèse, j'ai proposé un outil permettant de raccourcir certains de leurs calculs [8] et introduit une méthode graphique pour déterminer les classes de symétrie planes d'un tenseur de comportement [22]. Cependant, ces approches ne permettent pas d'obtenir de résultats généraux. Dans le cadre de la thèse de M. Olive, nous sommes revenus sur cette question avec pour objectif d'obtenir une réponse complète. C'est ce que nous avons fait dans Olive and Auffray [115, 116] où nous obtenons des théorèmes généraux pour les tenseurs d'ordres pair et impair en 3D. La différence entre ces deux situations provient de la nature du groupe d'action: on considère en effet $\mathrm{O}(3)$ et ses sous-groupes dans le cas d'un tenseur impair, et juste $\mathrm{SO}(3)$ dans le cas pair[7].

Dans Auffray et al. [29], nous nous sommes intéressés à la même question en 2D. Les classes de symétrie de l'élasticité 2D ont été étudiées dans de nombreuses publications [37, 54, 68, 78, 150]. Ces travaux ont souvent été menés par des techniques calculatoires différentes quoiqu'intrinsèquement

[3] Dans la littérature mathématique ce que l'on appelle classe de symétrie est appelé classe d'isotropie.

[4] Dans notre cas un espace vectoriel sur lequel est définie une action du groupe G.

[5] Ces problématiques sont bien connues des physiciens des hautes énergies[1, 2].

[6] En toute rigueur, la décomposition harmonique des tenseurs d'élasticité avait été utilisée auparavant par d'autres auteurs. On peut notamment citer Backus [33], Baerheim [34] ou Boehler et al. [40] (et probablement d'autres auteurs également).

[7] En dimension impaire, l'inversion est dans le groupe de symétrie de tous les tenseurs pairs, le quotient de $\mathrm{O}(3)$ par cet élément nous donne donc un nouveau groupe $\mathrm{SO}(3)$ dont l'action est fidèle et c'est celle-ci que nous considérons.

identiques. Ceci a conduit à une situation un peu confuse, due aux multiples dénominations utilisées par les différents auteurs. En 2014, Forte et Vianello [68] ont publié un article de synthèse montrant que les différentes approches sont identiques. De même que pour l'élasticité 3D, d'autres comportements 2D ont également été étudiés dans la littérature: piézoélectricité [146], élasticité à gradient [21, 28], élasticité de Cosserat [16, 99]. L'étude de la situation 2D est intéressante car elle présente quelques différences par rapport à la 3D. De plus, il est important de noter que pour l'étude des milieux généralisés, l'étude de la situation 2D est un compromis intéressant entre la modélisation 1D pour laquelle de nombreux phénomènes vont dégénérer; et la situation 3D qui est, quant à elle, trop complexe. De plus, cette situation 2D trouve naturellement des applications aux théories de plaques enrichies [95, 96]

Une dernière étape après la dérivation théorique des différentes classes de symétrie est la construction explicite des opérateurs de comportements associés. En appliquant une méthode utilisée par Mehrabadi and Cowin [102] dans le cadre de l'élasticité, nous avons déterminé les opérateurs de l'élasticité à gradient dans le cadre 2D général [21, 28], et en 3D centro-symétrique [24]. La connaissance de ces opérateurs a de multiples intérêts: ils permettent de réaliser des calculs par éléments finis au second gradient dans le cadre anisotrope [52, 127], de chercher des solutions analytiques [141], de vérifier des résultats d'homogénéisation [31, 85, 95, 142] et ont plus récemment été appliqués à de la corrélation d'image [124]. Nous traiterons de cela au chapitre II.3 quand nous nous intéresserons à la mécanique des milieux continus généralisés.

Dans les sections qui vont suivre, nous allons nous intéresser à la détermination des classes de symétrie d'une loi de comportement linéaire. Par soucis de concision, nous nous concentrerons sur le cas 3D pour les tenseurs pairs [115]. L'analyse des autres situations pourra être trouvée dans les références suivantes [29, 116]. Dans la section 1.2 nous posons le problème et distinguons les notions de symétrie matérielle et de symétrie physique. Cela nous permettra ensuite de s'intéresser à la structure des ETC (section 1.3) et de voir comment ceux-ci se décomposent (section 1.4). De manière à lier la connaissance de la structure des tenseurs de comportement à leurs classes de symétrie, nous introduisons à la section 1.5 l'opération de clips. Cet outil nous permet de formuler des théorèmes généraux.

1.2 Symétrie physique vs. symétrie matérielle

Dans la suite de ce chapitre, nous considérerons comme modèle pour l'espace physique $\mathbb{E}^3$ l'espace Euclidien de dimension 3. On considérera le body comme une variété 3D compact $\mathcal{B}$ plongée dans $\mathbb{E}^3$ et ayant attaché à chacun de ses points $P \in \mathcal{B}$ une microstructure[8]. Cette microstructure décrit l'organisation locale de la matière à une échelle inférieure à celle retenue pour la description continue. Selon la nature du matériau considéré, cette microstructure peut être un

[8]Dans le cas qui nous intéresse, nous n'assignons pas de comportement mécanique à cette microstructure. Toutefois, cela est possible et est une manière de définir la mécanique des milieux à microstructure [60, 101, 104] ayant des degrés de liberté internes supplémentaires.

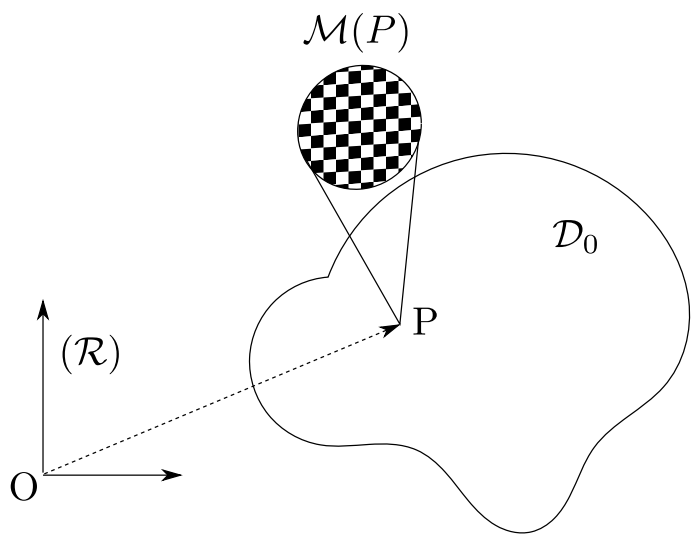


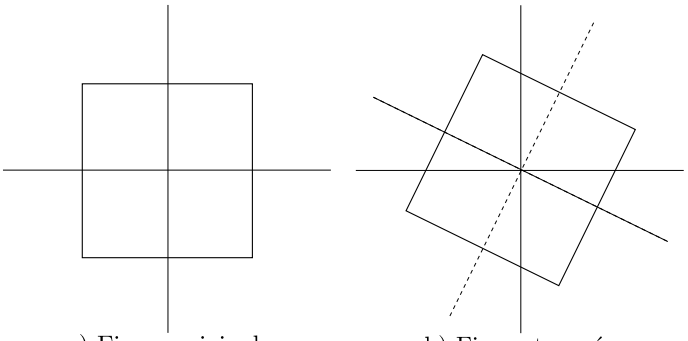
Figure II.1.4: Qu'est ce qui est caché sous le point matériel ?

réseau cristallin, l'organisation de chaînes polymères, l'armure d'un tissé ...

A l'instar des cristaux, la microstructure peut présenter des propriétés d'invariance par rapport à des transformations orthogonales $\mathrm{Q} \in \mathrm{O}(3)$. Ainsi, au-dessus de chaque point matériel P, l'ensemble de ces transformations de symétrie forme un groupe ponctuel, le groupe de symétrie matériel que nous noterons $\mathrm{G}_{\mathcal{M}}(P) \subset \mathrm{O}(3)$. A l'échelle du milieu continu la description précise de l'organisation de la microstructure est perdue, seule persiste $\mathrm{G}_{\mathcal{M}}(P)$. Dans le cas d'un matériau homogène[9], la dépendance au point matériel disparaît et $\mathrm{G}_{\mathcal{M}}(P) = \mathrm{G}_{\mathcal{M}}$.

1.2.1 Classe de symétrie

Comme illustrée sur la figure fig.II.1.5, la dépendance du groupe à l'orientation dans l'espace n'est pas satisfaisante pour parler, de manière intrinsèque, de la symétrie d'un objet.



a) Figure originale b) Figure tournée

Figure II.1.5: Les figures a) et b) sont identiques mais du fait de leur orientation les groupes de symétrie diffèrent.

[9]Un traitement de ce qui se passe entre plusieurs points différents du milieu peut se faire au travers de la notion d'isomorphisme matériel [59].

De fait, tant d'un point de vue mathématique que physique, la bonne notion pour définir la symétrie d'un objet est la notion de *classe* de symétrie.

La classe de symétrie d'un sous-groupe $\mathrm{G} \subset \mathrm{O}(3)$ est définie comme l'ensemble des sous-groupes de $\mathrm{O}(3)$ conjugué à G:

$$[\mathrm{G}] = \left\{\mathrm{H} = \mathrm{QGQ}^T \subset \mathrm{O}(3), \mathrm{Q} \in \mathrm{O}(3)\right\}. \tag{1.2.1}$$

En d'autres termes, la classe de symétrie d'un groupe correspond à son groupe de symétrie modulo son orientation dans $\mathrm{O}(3)$. De plus, on sait que dans le cas d'un groupe compact, il n'existe qu'un nombre fini de classes de symétrie [43], et que ces classes sont conjuguées à un sous-groupe fermé de $\mathrm{O}(3)$. Le groupe de symétrie matérielle étant conjugué à un sous-groupe fermé de $\mathrm{O}(3)$, il est nécessaire d'introduire leur classification[10].

1.2.2 Les sous-groupes fermés de $\mathrm{O}(3)$

La classification des sous-groupes de $\mathrm{O}(3)$ est un résultat classique dont l'énoncé, ainsi que la démonstration, peuvent être trouvées dans de nombreuses références [82, 137]:

Lemme 1.2.1. *Tout sous-groupe fermé de* $\mathrm{O}(3)$ *est conjugué à précisément un groupe appartenant à l'une des 3 familles suivantes:*

1. *Sous-groupes fermés de* $\mathrm{SO}(3)$*:* $1,\ \mathrm{Z}_n,\ \mathrm{D}_n,\ \mathcal{T},\ \mathcal{O},\ \mathcal{I},\ \mathrm{SO}(2),\ \mathrm{O}(2),\ \mathrm{SO}(3)$*;*
2. $\tilde{K} := K \oplus \mathrm{Z}_2^c$*, où* K *est un sous-groupe fermé de* $\mathrm{SO}(3)$ *et* $\mathrm{Z}_2^c = \{1, -1\}$*;*
3. *Sous-groupes fermés ne contenant pas* -1 *et non contenu dans* $\mathrm{SO}(3)$*:*

$$\mathrm{Z}_{2n}^{-}\ (n \geq 1),\ \mathrm{D}_n^v\ (n \geq 2),\ \mathrm{D}_{2n}^h\ (n \geq 2),\ \mathcal{O}^{-} \text{ or } \mathrm{O}(2)^{-}$$

Sous-groupes de type I

Les sous-groupes de type I sont des sous-groupes de $\mathrm{SO}(3)$ et ne contiennent donc que des rotations, ce sont donc des sous-groupes chiraux[11] de $\mathrm{O}(3)$. Parmi les sous groupes fermés de $\mathrm{SO}(3)$, on peut distinguer:

Groupes plans : $\{1,\ \mathrm{Z}_n,\ \mathrm{D}_n,\ \mathrm{SO}(2),\ \mathrm{O}(2)\}$, qui sont des sous-groupes fermés de $\mathrm{O}(2)$;

Groupes exceptionnels : $\{\mathcal{T}, \mathcal{O}, \mathcal{I}, \mathrm{SO}(3)\}$, qui sont les groupes des rotations laissant invariants les solides platoniciens et la sphère.

[10] L'ensemble de ce qui nous intéresse se situant au niveau du point matériel, nous ne considérons ici que le groupe ponctuel de symétrie de la microstructure. De fait, nous ne regarderons pas la combinaison des symétries d'orientation avec les translations laissant la microstructure invariante, ce qui nous donnerait la notion de groupe d'espace. En conséquence de quoi nous pouvons obtenir dans nos classifications des groupes ponctuels de symétrie incompatibles avec l'invariance par translation (groupes non cristallographiques).

[11] Une figure est achirale si et seulement si son groupe de symétrie contient au moins une isométrie de renversement d'orientation. Ce qui n'est pas le cas des sous-groupes de $\mathrm{SO}(3)$ dont tous les éléments sont de déterminant $+1$.

Détaillons la désignation des groupes plans. Soit $(\underline{i}; \underline{j}; \underline{k})$ une base de $\mathbb{R}^3$, $Q(\underline{v}; \theta) \in SO(3)$ une rotation autour de $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ et d'angle $\theta \in [0; 2\pi[$ alors

- 1 est l'identité;
- Z_n $(n \geq 2)$ est le groupe cyclique d'ordre n engendré par la rotation d'ordre n que nous noterons $Q(\underline{k}; \theta = \frac{2\pi}{n})$. Géométriquement, en 2D, Z_n est le groupe de symétrie d'un polygone chiral à n cotés;
- D_n $(n \geq 2)$ est le groupe diédral d'ordre $2n$ engendré par $Q(\underline{k}; \theta = \frac{2\pi}{n})$ et $Q(\underline{i}; \pi)$. En 2D D_n est le groupe de symétrie d'un n-gone régulier[12];
- $SO(2)$ est le groupe des rotations $Q(\underline{k}; \theta)$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$;
- $O(2)$ le groupe orthogonal généré par $Q(\underline{k}; \theta)$ et $Q(\underline{i}; \pi)$.

En ce qui concerne la situation 3D, les objets représentés sur la Figure II.1.6 sont respectivement Z_4- et D_4-invariantes:

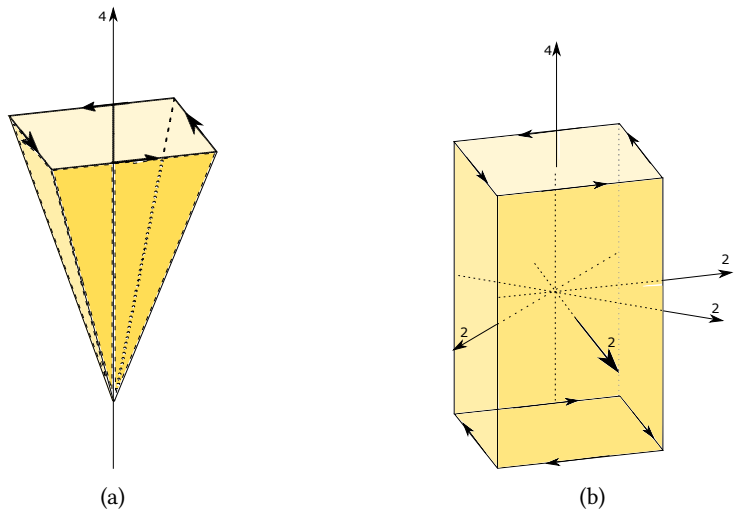
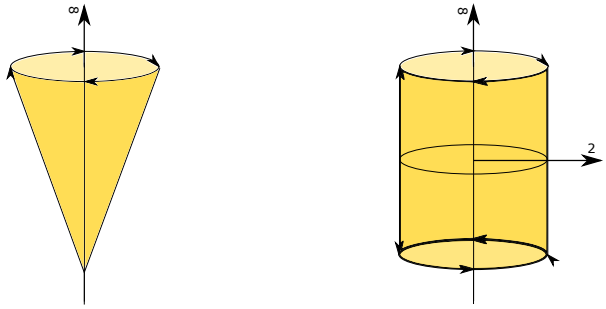


Figure II.1.6: Deux figures ayant un groupe de symétrie de Type I. (a) est Z_4-invariante, (b) est D_4-invariante.

Sur la Figure II.1.6 les flèches de rotation indiquent le *spin* des figures, ce spin est dû à l'absence de symétrie miroir et donc au caractère chiral de ces groupes. On peut également illustrer les 2 groupes de Curie suivants:

[12]Attention en 2D et en 3D les générateurs de D_n ne sont pas les mêmes. En 3D, le groupe diédral est un sous-groupe de $SO(3)$, de fait il est engendré par 2 rotations d'axes orthogonaux. En 2D, la rotation hors plan n'étant plus possible cette transformation est remplacée par une symétrie miroir le long d'un axe , et donc les générateurs 2D sont $Q(\theta = \frac{2\pi}{n})$ et σ_x.



(a) (b)

Figure II.1.7: Deux figures ayant un groupe de symétrie de Type I. (a) est $\mathrm{SO}(2)$-invariante, (b) est $\mathrm{O}(2)$-invariante.

L'invariance de type $\mathrm{SO}(2)$ correspond au groupe de symétrie d'une hélice. En fonction de son spin, cette hélice peut avoir un pas à droite ou à gauche. L'invariance de type $\mathrm{O}(2)$ correspond au groupe de symétrie du chargement de torsion.

Les groupes exceptionnels sont:

- $\mathcal{T}$, le groupe tétraédrique d'ordre 12 des rotations fixant le tétraèdre;
- $\mathcal{O}$, le groupe octaédrique d'ordre 24 des rotations fixant le cube et l'octaèdre;
- $\mathcal{I}$, le groupe octaédrique d'ordre 60 des rotations fixant l'icosaèdre et le dodécaèdre.

Figure II.1.8: Les solides platoniciens [155]

Sous-groupes de type II

Les groupes de type II sont les sous-groupes centro-symétriques de $\mathrm{O}(3)$ et sont de la forme $\tilde{K} := K \oplus \mathrm{Z}_2^c$, où K est un sous-groupe fermé de $\mathrm{SO}(3)$. Des exemples de figures possédant ce type d'invariance sont les suivants:

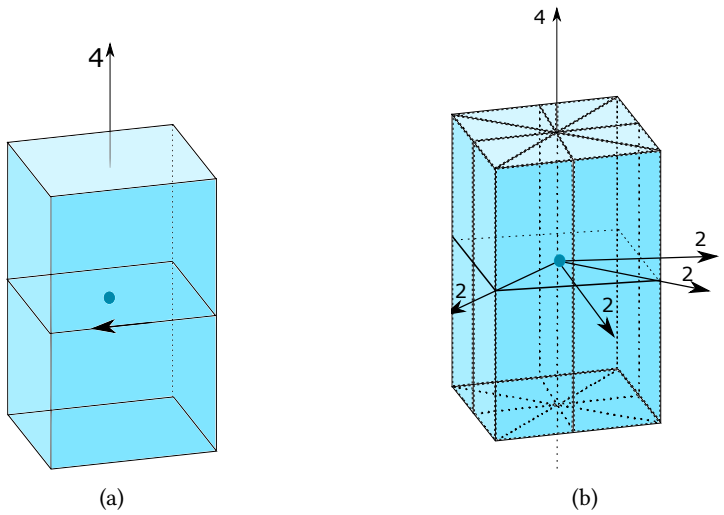


Figure II.1.9: Deux figures ayant un groupe de symétrie de Type II. (a) est $Z_4 \oplus Z_2^c$-invariante, (b) est $D_4 \oplus Z_2^c$-invariante.

Sur ces figures, l'inversion est indiquée par un point, et les plans de symétrie sont indiqués par des plans de coupe. On peut observer sur la Figure II.1.9 (a) que l'invariance centrale n'empêche pas l'existence d'un spin global. Toutefois l'existence d'un plan de symétrie exclut la possibilité de torsion. Dans le cas des groupes limites, on a :

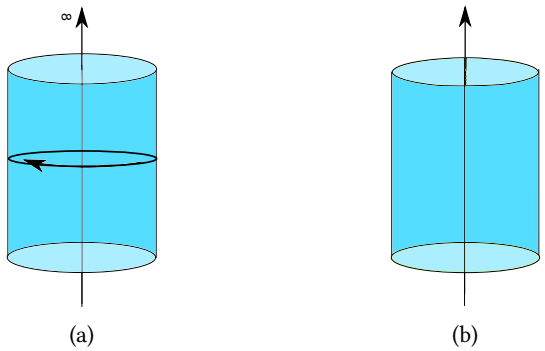


Figure II.1.10: Deux figures ayant un groupe de symétrie de Type II. (a) est $SO(2) \oplus Z_2^c$-invariante, on a un unique plan de symétrie perpendiculaire à l'axe de rotation; (b) est $O(2) \oplus Z_2^c$-invariante, on a un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe de rotation et une infinité de plans contenant cet l'axe.

Sous-groupes de type III

La construction des groupes de type III est un peu plus compliquée, on peut retrouver le détail de leur construction dans les références [116, 137]. Ces groupes sont non centro-symétriques mais possèdent des plans de symétrie.

On notera $\mathrm{P}_{\underline{n}} \in \mathrm{O}(3)$ la réflexion au travers d'un plan de normale $\underline{n}$. On définit les groupes suivants:

- Z_2^- est le groupe d'ordre 2 généré par $\mathrm{P}_{\underline{n}}$;
- Z_{2n}^- $(n \geq 2)$ est le groupe d'ordre $2n$ généré par la rotoréflexion d'ordre $2n$, $\mathrm{Q}\left(\underline{k}; \dfrac{\pi}{n}\right) \cdot \mathrm{P}_{\underline{k}}$;
- D_{2n}^h $(n \geq 2)$ est le groupe prismatique d'ordre $4n$ généré par Z_{2n}^- et $\mathrm{Q}(\underline{i}, \pi)$. Dans la dénomination, l'exposant h indique la présence de miroirs horizontaux. Quand n est impair, il s'agit du groupe de symétrie d'un prisme régulier, et quand n est pair, c'est celui d'un anti-prisme régulier;
- D_n^v $(n \geq 2)$ est le groupe pyramidal d'ordre $2n$ généré par Z_n et $\mathrm{P}_{\underline{i}}$. Dans la dénomination, l'exposant v indique la présence de miroirs verticaux;
- $\mathrm{O}(2)^-$ est le groupe limite de D_n^v pour une rotation continue. Il est généré par $\mathrm{Q}(\underline{k}; \theta)$ et $\mathrm{P}_{\underline{i}}$. Il s'agit du groupe de symétrie d'un cône.

Des exemples de figures possédant ce type d'invariance sont les suivants:

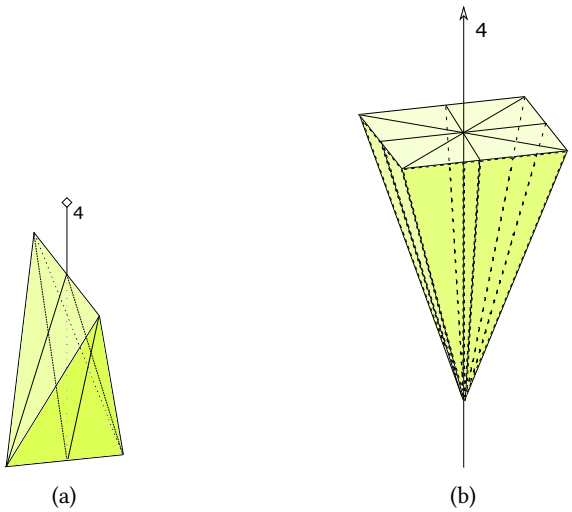


Figure II.1.11: Deux figures ayant un groupe de symétrie de Type III. (A) est Z_4^--invariante, (B) est D_4^v-invariante.

Sur ces figures, l'axe avec un diamant indique un axe de rotoréflexion. On a dans cette situation un seul groupe limite:

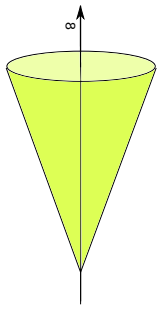


Figure II.1.12: Figure $\mathrm{O}(2)^-$-invariante, tous les plans contenant l'axe de rotation sont des plans de symétrie

Ces groupes "planaires" sont complétés par le groupe tétrahèdral achiral $\mathcal{O}^-$ d'ordre 24. Ce groupe possède les mêmes symétries de rotation que le groupe $\mathcal{T}$ complétées par 6 plans de symétrie. La dénomination de groupe que nous utilisons est différente de celles utilisées en cristallographie (Hermann-Mauguin, Schoenflies). Un dictionnaire faisant la correspondance entre les differents systèmes pourra être trouvé en appendice B.

1.2.3 Symétrie tensorielle

Comme nous nous intéressons à des lois de comportement linéaires, les propriétés physiques sont modélisées par des tenseurs. Plus précisément, un tenseur $\mathrm{T}(P)$ est défini au dessus de chaque point P de $\mathcal{M}$, ceci résultant en un champ de tenseurs T pas nécessairement continu (on peut penser, par exemple, à un polycristal). Si le matériau est homogène ce champ de tenseur est constant et est décrit par un unique élément. En général, la physique impose des symétries indicielles et les tenseurs $\mathrm{T}(P)$ appartiennent à un sous-espace $\mathbb{T}^n$ de l'ensemble $\mathbb{G}^n$ des tenseurs d'ordre n. L'action de $\mathrm{O}(3)$ sur un élément de $\mathbb{G}^n$ est définie[13]:

$$(\mathrm{Q} \star \mathrm{T})_{i_1 i_2 \ldots i_n} := \mathrm{Q}_{i_1 j_1} \ldots \mathrm{Q}_{i_n j_n} \mathrm{T}_{j_1 \ldots j_n}.$$

Dans le cadre de nos hypothèses, le groupe de symétrie d'une propriété physique décrite par T est défini comme l'ensemble des opérations laissant ce tenseur invariant. Le groupe de symétrie de $\mathrm{T}(P)$ est:

$$\mathrm{G}_{\mathrm{T}(P)} := \{\mathrm{Q} \in \mathrm{O}(3) | \mathrm{Q} \star \mathrm{T}(P) = \mathrm{T}(P)\}.$$

Si nous nous limitons à l'étude de tenseurs d'ordre pair, ce que nous ferons par soucis de simplicité dans la suite, nous pouvons restreindre cette définition à $\mathrm{SO}(3)$. En effet, en 3D, l'inversion -1 est dans le groupe de symétrie de tous les tenseurs pairs[14]. De fait, en considérant $\mathrm{SO}(3)$ on rend,

[13] Cette opération qui correspond à l'action tensorielle standard, est quelques fois désignée (essentiellement dans la littérature allemande) sous le terme de produit de Rayleigh.

[14] Ce qui n'est pas le cas dans un espace de dimension paire où l'inversion est une opération propre [28].

dans ce cas là, l'action effective:

$$\mathrm{G}_{\mathrm{T}(P)} := \{\mathrm{Q} \in \mathrm{SO}(3) | \mathrm{Q} \star \mathrm{T}(P) = \mathrm{T}(P)\}.$$

Il est important de noter, et pour éviter tout malentendu, que contrairement à l'approche suivie par Cowin [48, 51], une telle classification n'est pas basée sur le nombre et la disposition de plans de symétrie matérielle[15]. La coïncidence des résultats dans le cas de l'élasticité linéaire [48] est un coup de chance dû à la structure harmonique très particulière du tenseur d'élasticité. En général, l'approche par plans de symétrie va rater un certain nombre de classes de symétrie.

Comme les tenseurs de comportement sont censés décrire les propriétés physiques de la matière les groupes de symétrie matérielle et physique doivent être liés. Ce lien s'exprime par le principe de Curie [163]:

Principe 1.2.2 (Principe de Curie). *En tout point matériel $P \in \mathcal{M}$ pour une propriété physique $\mathcal{P}$ décrite par $\mathrm{T}(P) \in \mathbb{T}^n$, toute symétrie matérielle[16] est une symétrie physique, i.e.:*

$$\mathrm{G}_{\mathcal{M}}(P) \subset \mathrm{G}_{\mathrm{T}(P)}.$$

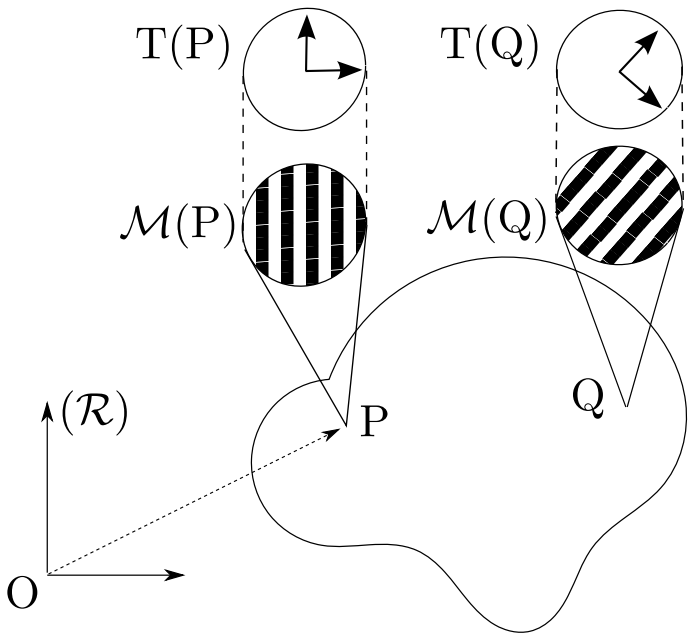


Figure II.1.13: Principe de Curie

Cela signifie notamment qu'une propriété physique peut être plus symétrique que ne l'est la

[15] On peut observer que les opérations de réflexion ne forment pas un groupe. En effet le produit de 2 réflexions est une rotation et donc pas une réflexion.

[16] Pour éviter tout paradoxe il faut noter que la symétrie matérielle est l'intersection des symétries de la géométrie et de la répartition des propriétés physiques au sein de cette géométrie. Si pour un monomatériau ceci n'a pas d'importance, cela est crucial pour un multi-matériau.

microstructure. Deux exemples classiques de cela sont le fait qu'un milieu à symétrie hexagonale est élastiquement isotrope transverse [41] et que pour la thermique un milieu cubique est vu comme isotrope. A la limite, un milieu peut n'avoir aucune symétrie matérielle et être isotrope.

Il est important de souligner que dans la notion de groupe de symétrie l'orientation des éléments de symétrie par rapport à une référence est importante. Dans notre cas, ces notions contiennent des informations relatives à l'orientation de la microstructure et de la propriété physique par rapport à un repère donné.

1.2.4 Classe de symétrie physique

La classe de symétrie d'un tenseur $\mathrm{T} \in \mathbb{T}^n$ ayant $\mathrm{G_T}$ comme groupe de symétrie est définie comme l'ensemble des sous-groupes de $\mathrm{SO}(3)$ conjugué à $\mathrm{G_T}$:

$$[\mathrm{G_T}] = \left\{\mathrm{Q}\mathrm{G_T}\mathrm{Q}^T \subset \mathrm{SO}(3), \mathrm{Q} \in \mathrm{SO}(3)\right\}. \tag{1.2.2}$$

En d'autres termes, la classe de symétrie de T correspond à son groupe de symétrie modulo son orientation dans $\mathrm{SO}(3)$. De plus, on sait que dans le cas d'un groupe compact, il n'existe qu'un nombre fini de classes de symétrie [43], et que ces classes sont conjuguées à un sous-groupe fermé de $\mathrm{SO}(3)$. La classification des sous-groupes fermés de $\mathrm{SO}(3)$ a été donnée précédemment.

Il reste à voir le lien entre les symétries matérielles qui sont conjuguées à des sous-groupes de $\mathrm{O}(3)$ et les symétries physiques qui sont conjuguées à des sous-groupes de $\mathrm{SO}(3)$. Le lien est établi en regardant comment les générateurs des sous-groupes impropres sont vus par un tenseur d'ordre pair.

Soit Q une opération impropre, il existe R une rotation telle que:

$$\mathrm{Q} = -1 \cdot \mathrm{R}.$$

Les sous-groupes de type II se distinguent de ceux de type I par l'adjonction de l'inversion dans les générateurs. La rotation associée à l'inversion est l'identité. De fait, une symétrie matérielle de type II est vue comme la symétrie matérielle de type I associée. Regardons les groupes de type III. Z_2^- est généré par $\mathrm{P}_{\underline{\mathrm{n}}}$. On peut écrire

$$\mathrm{P}_{\underline{\mathrm{n}}} = -1 \cdot \mathrm{Q}(\underline{\mathrm{n}}; \pi).$$

Par conséquent Z_2^- est vu comme un Z_2. Z_{2n}^- $(n \geq 2)$ est généré par la rotoréflexion d'ordre $2n$, $\mathrm{Q}\left(\underline{\mathrm{k}}; \theta = \dfrac{\pi}{n}\right) \cdot \mathrm{P}_{\underline{\mathrm{k}}}$, en conséquence de quoi Z_{2n}^- est vu comme un Z_{2n}, D_{2n}^h est vu comme D_{2n}, D_n^v est vu comme D_n, $\mathrm{O}(2)^-$ est vu comme $\mathrm{O}(2)$ et, pour finir, $\mathcal{O}^-$ est vu comme $\mathcal{O}$.

Dans le cas du tenseur d'élasticité, le tableau suivant relie les classes de symétrie matérielle aux classes de symétrie physique[17].

[17] On peut lire que pour le tenseur d'élasticité la présence de deux plans de symétrie orthogonaux implique la

Classe de symétrie physique	Classe de symétrie matérielle		
	Type I	Type II	Type III
1	1	$1 \oplus \mathrm{Z}_2^c$	
Z_2	Z_2	$\mathrm{Z}_2 \oplus \mathrm{Z}_2^c$	Z_2^-
D_2	D_2	$\mathrm{D}_2 \oplus \mathrm{Z}_2^c$	D_2^v
D_3	Z_3 D_3	$\mathrm{Z}_3 \oplus \mathrm{Z}_2^c$ $\mathrm{D}_3 \oplus \mathrm{Z}_2^c$	D_3^v
D_4	Z_4 D_4	$\mathrm{Z}_4 \oplus \mathrm{Z}_2^c$ $\mathrm{D}_4 \oplus \mathrm{Z}_2^c$	Z_4^-, D_4^h D_4^v
$\mathrm{O}(2)$	$\mathrm{Z}_{k\geq 5}$ $\mathrm{D}_{k\geq 5}$	$\mathrm{Z}_{k\geq 5} \oplus \mathrm{Z}_2^c$ $\mathrm{D}_{k\geq 5} \oplus \mathrm{Z}_2^c$	$\mathrm{Z}_{2k,k\geq 3}^-$, $\mathrm{D}_{2k,k\geq 3}^h$ $\mathrm{O}(2)^-$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{T}$ $\mathcal{O}$	$\mathcal{T} \oplus \mathrm{Z}_2^c$ $\mathcal{O} \oplus \mathrm{Z}_2^c$	$\mathcal{O}^-$
$\mathrm{SO}(3)$	$\mathcal{I}$ $\mathrm{SO}(3)$	$\mathcal{I} \oplus \mathrm{Z}_2^c$ $\mathrm{O}(3)$	

Tableau II.1.1: Liens entre les classes de symétrie matérielle et les classes de symétrie physique dans le cas du tenseur d'élasticité.

Maintenant que ces notions ont été introduites, nous allons nous intéresser à présent à la structure des tenseurs de comportement. La section suivante est adaptée des références Auffray et al. [29], Olive and Auffray [115, 116].

1.3 Algèbre des lois de comportement

Pour étudier les classes de symétrie de tenseurs de comportement, il est nécessaire d'étudier comment ceux-ci se structurent. Cette question de la géométrie des théories physiques a été au centre des travaux E. Tonti [139]. On trouve également sur le web un document de B. Nayroles traitant de cette problématique vis-à-vis de la mécanique des structures [110]. La structure abstraite d'une théorie de mécanique des milieux continus est codée par le diagramme suivant:

présence d'un troisième plan de symétrie orthogonal aux deux premiers. Les choses se passent ainsi, le produit de deux réflexions par rapport à deux plans orthogonaux est une rotation et non une réflexion. En termes de groupes, la présence de 2 réflexions orthogonales n'impliquent pas l'existence de la symétrie miroir annoncée. A l'opposé, le produit de deux rotations d'angle π et d'axe orthogonaux est une rotation d'angle π dont l'axe est orthogonal aux deux premiers. Ce résultat concernant les réflexions est uniquement dû au fait que celles-ci sont vues par un tenseur d'ordre pair comme des rotations et non des réflexions.

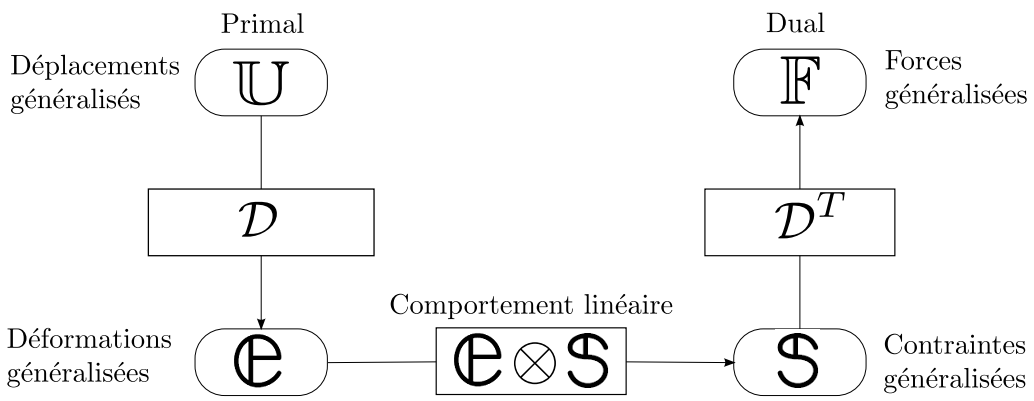


Figure II.1.14: Structure générale des théories mécaniques continues

Un tel diagramme est dit de Tonti. De son coté B. Nayroles parle de dualité à 4 espaces[18]. Dans ce diagramme, la notation $\mathcal{D}$ indique un opérateur de dérivation et $\mathcal{D}^T$ son adjoint qui engendre les relations d'équilibre. Présentement nous ne nous intéresserons pas à la partie haute du diagramme, mais à sa partie basse avec les espaces $\mathbb{e}$ et $\mathbb{s}$, respectivement de déformations et de contraintes généralisées.

Les espaces $\mathbb{e}$ et $\mathbb{s}$ sont tensoriels. De manière à prendre en compte les comportements couplés qui ne sont pas représentés dans le diagramme précédent, nous n'identifierons pas $\mathbb{s}$ et $\mathbb{e}^*$. Nous supposerons que $\mathbb{e}$ est un espace de tenseurs d'ordre m_1 possédant des symétries indicielles, ainsi $\mathbb{e} = \mathbb{T}^{m_1} \subset \mathbb{G}^{m_1}$ et $\mathbb{s} = \mathbb{T}^{m_2} \subset \mathbb{G}^{m_2}$. Cette définition[19] garantit que $\mathbb{S}^n$, l'espace des tenseurs symétriques d'ordre n est un sous espace de $\mathbb{T}^n$.

L'espace des tenseurs de comportement est l'espace des applications linéaires de $\mathbb{e}$ dans $\mathbb{s}$, noté $\mathcal{L}(\mathbb{T}^{m_1}, \mathbb{T}^{m_2})$, qui s'identifie à $\mathbb{s} \otimes \mathbb{e}^*$ et donc simplement à $\mathbb{s} \otimes \mathbb{e}$ dans le cas euclidien avec la métrique standard.

En suivant une procédure introduite dans [115, 116], les espaces de tenseurs de comportement (ETC) sont construits selon la procédure suivante:

- Soient deux objets physiques décrits par des éléments des espaces $\mathbb{T}^{m_1}$ et $\mathbb{T}^{m_2}$ et tels que

$$\mathbb{S}^{m_i} \subset \mathbb{T}^{m_i} \subset \mathbb{G}^{m_i}, \quad i = 1, 2.$$

  Une loi de comportement linéaire est donnée par un élément de l'espace de tenseurs

$$\mathbb{T}^n = \mathcal{L}(\mathbb{T}^{m_1}, \mathbb{T}^{m_2}) \simeq \mathbb{T}^{m_1} \otimes \mathbb{T}^{m_2},$$

  qui, par construction, vérifie:

$$\mathbb{S}^n \subset \mathbb{T}^n \subset \mathbb{G}^n.$$

[18] Il est à noter que les 2 auteurs arrivent au même résultat par des approches mathématiques très différentes.
[19] Cette définition ne prend pas en compte les opérations d'anti-symétrisation Λ.

- Ces inclusions peuvent être raffinées sous les hypothèses suivantes:
  - pour une loi de comportement auto-adjointe, on a $m_1 = m_2 = m$ et l'espace $\mathbb{T}^n$ est construit à partir du produit tensoriel symétrique

    $$\mathbb{T}^n := S^2\left(\mathbb{T}^m\right).$$

    L'utilisation du produit symétrisé est la conséquence de l'existence d'un potentiel. L'espace des tenseurs d'élasticité est un cas d'une telle situation.
  - dans le cas d'une loi de couplage, l'espace $\mathbb{T}^n$ est obtenu à partir du produit tensoriel standard

    $$\mathbb{T}^n := \mathbb{T}^{m_1} \otimes \mathbb{T}^{m_2}.$$

    Cette situation est celle des tenseurs de couplage présents dans les modèles multi-physiques (ex: tenseurs piézoélectrique, fléxoéléctrique,. . . .).

Au final, nous avons 3 situations différentes :

- pour des comportements auto-adjoints:

$$S^2\left(\mathbb{S}^m\right) \subset S^2\left(\mathbb{T}^m\right) \subset S^2\left(\mathbb{G}^m\right); \tag{1.3.1}$$

- pour des comportements couplés, il y a 2 cas selon que m_1 et m_2 sont, ou non, de même parité.

$$\mathbb{S}^{m_1} \otimes \mathbb{S}^{m_2} \subset \mathbb{T}^{m_1} \otimes \mathbb{T}^{m_2} \subset \mathbb{G}^{m_1+m_2}. \tag{1.3.2}$$

Dans le cas des tenseurs de comportement pairs, m_1 et m_2 ont la même parité, les tenseurs impairs ne concernent que les couplages entre espaces de parités différentes.

Même si on a précisé leur structure, les espaces de tenseurs de comportement ne sont pas encore sous une forme sur laquelle on peut travailler. Pour ce faire, il va nous falloir décomposer nos espaces en une somme directe d'espaces élémentaires irréductibles sous l'action du groupe $\mathrm{SO}(3)$.

1.4 Décomposition harmonique des tenseurs

Dans ce paragraphe nous introduisons rapidement les notions de décompositions irréductibles des tenseurs par rapport aux groupes $\mathrm{SO}(3)$ et $\mathrm{O}(3)$. Une présentation plus générale peut être trouvée dans les références suivantes [113, 137].

1.4.1 Représentations irréductibles de $\mathrm{SO}(3)$

$\mathrm{SO}(3)$ étant compact, on sait que toute représentation de dimension finie est complètement réductible [43, 137]; c'est-à-dire qu'elle se décompose en une somme directe de sous-espaces irré-

ductibles.

Pour mémoire, un espace $\mathbb{V}$ est dit G-irréductible si $\mathbb{V}$ et $\varnothing$ sont distincts et sont les deux seuls sous-espaces G-stables. En d'autres termes, tous les éléments de $\mathbb{V}$ se transforment de la même manière.

Nous allons préciser ici deux modèles d'espace $\mathrm{SO}(3)$-irréductible, à savoir les espaces de polynômes harmoniques et ceux des tenseurs harmoniques[20]. La décomposition harmonique d'un espace de tenseurs est alors sa décomposition en espaces irréductibles.

Notons $\mathcal{Q}^n$ le $\mathrm{SO}(3)$–espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n sur $\mathbb{R}^3$. Il existe sur $\mathcal{Q}^n$ une action naturelle de $\mathrm{SO}(3)$, notée ρ_n, donnée par:

$$(\rho_n(g)(\mathbf{p}))(\underline{\mathrm{v}}) := \mathbf{p}(g^{-1} \cdot \underline{\mathrm{v}}) \text{ pour } \mathbf{p} \in \mathcal{Q}^n$$

On note ensuite $\mathcal{H}^n \subset \mathcal{Q}^n$ le sous-espace des polynômes harmoniques de degré n sur $\mathbb{R}^3$; c'est-à-dire des polynômes dont le laplacien est nul. Un tel espace est de dimension $2n+1$. Nous avons alors [74]:

Théorème 1.4.1. *La représentation $(\mathcal{H}^n, \rho_n)$ de $\mathrm{SO}(3)$ est irréductible. De plus, toute représentation irréductible de $\mathrm{SO}(3)$ est équivalente à une représentation $(\mathcal{H}^n, \rho_n)$ pour un certain entier n.*

Un autre modèle pour les représentations irréductibles de $\mathrm{SO}(3)$ est donné par l'espace des tenseurs harmoniques. L'action naturelle de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\mathbb{G}^n$, notée $\tilde{\rho}_n$, est donnée par:

$$(\tilde{\rho}_n(\mathrm{T}))(\mathbf{v}_1, \cdots, \underline{\mathrm{v}}_n) := \mathrm{T}\left(g^{-1}\underline{\mathrm{v}}_1, \cdots, g^{-1}\underline{\mathrm{v}}_n\right), \quad \forall g \in \mathrm{SO}(3)$$

On note ensuite $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{T}^n$ l'espace des tenseurs totalement symétriques sur $\mathbb{R}^3$, isomorphes à $\mathcal{Q}^n$. Il n'existe sur $\mathbb{S}^n$ qu'une seule trace, comme par exemple:

$$\mathrm{tr}_{12}(\mathrm{T})(\underline{\mathrm{v}}_1, \underline{\mathrm{v}}_2, \cdots, \underline{\mathrm{v}}_{n-2}) := \sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i, \underline{\mathrm{v}}_1, \underline{\mathrm{v}}_2, \cdots, \underline{\mathrm{v}}_{n-2}).$$

où $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Notons qu'une telle formule ne dépend pas du choix d'une telle base.

Définition 1.4.2. L'espace des tenseurs harmoniques, noté $\mathbb{H}^n$, est l'espace des tenseurs d'ordre n totalement symétriques et de trace nulle.

Corollaire 1.4.3. *Toute représentation irréductible de $\mathrm{SO}(3)$ est équivalente à $(\mathbb{H}^n, \tilde{\rho}_n)$ pour un certain entier n, toutes deux étant de dimension $2n+1$.*

Nous obtenons alors :

[20] Tout ce qui est introduit ici dans le cas de $\mathrm{SO}(3)$ et de $\mathbb{R}^3$ se restreint directement au cas de la dimension 2.

Proposition 1.4.4 (Décomposition harmonique sous SO(3)). *Pour toute représentation linéaire de dimension finie* $(\mathbb{V}, \rho)$ *de* SO(3)*, il existe un isomorphisme* SO(3) *équivariant*[21] *entre* $\mathbb{V}$ *et*

$$\bigoplus_{i=0}^{l} (\mathbb{H}^{n_i})^{\oplus \alpha_i}$$

Remarque 1.4.5. En notant $(\mathbb{V}, \rho)$ une représentation linéaire d'un groupe de Lie, on peut écrire

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_1^{\oplus n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{V}_r^{\oplus n_r}$$

où chaque $\mathbb{V}_i$ est une représentation irréductible de G. Dans cette décomposition, on dit que $\mathbb{V}_i^{\oplus n_i}$ est la composante isotypique de $\mathbb{V}_i$. La décomposition harmonique est donc une application particulière de ce résultat. Les composantes isotypiques sont déterminées par des sommes directes d'espaces de tenseurs harmoniques de même ordre.

Exemple 1.4.6. On considère le cas de l'action naturelle de SO(3) sur l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2, c'est-à-dire sur $S^2(\mathbb{R}^3)$. Soit q la métrique euclidienne standard de $\mathbb{R}^3$. Dans une base orthonormée, on a:

$$\mathrm{q}_{ij} := \delta_{ij},$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. Pour tout tenseur $\underset{\sim}{\mathrm{T}} \in S^2(\mathbb{R}^3)$, on a la décomposition classique:

$$T_{ij} = D_{ij} + \frac{\alpha}{3}\delta_{ij} \quad \text{avec} \quad D_{ij} := T_{ij} - \frac{\alpha}{3}\delta_{ij} \in \mathbb{H}^2, \alpha = T_{pp} \in \mathbb{H}^0$$

Cette décomposition, qui est unique, donne explicitement l'isomorphisme entre $S^2(\mathbb{R}^3)$ et $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0$. Ce que nous venons de faire consiste en la décomposition classique d'un tenseur d'ordre 2 symétrique en une partie déviatorique ($\underset{\sim}{\mathrm{D}} \in \mathbb{H}^2$) et une partie sphérique ($\alpha \in \mathbb{H}^0$).

[21] Un isomorphisme ψ entre deux espaces $\mathbb{V}$ et $\mathbb{W}$ est dit G-équivariant si:

$$\forall \underline{\mathrm{v}} \in \mathbb{V}, \text{et } g \in \mathrm{G} \quad \psi(g \cdot \underline{\mathrm{v}}) = g \cdot \psi(\underline{\mathrm{v}})$$

Ce qui signifie que la diagramme suivant est commutatif pour tout $g \in$ G:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{W} \arrow[d, "g"] \\ \mathbb{V} \arrow[r, "\psi"'] & \mathbb{W} \end{tikzcd}$$

1.4.2 Représentations irréductibles de $\mathrm{O}(3)$

L'extension de ce qui vient d'être dit pour l'action de $\mathrm{SO}(3)$ à la situation de $\mathrm{O}(3)$ est directe. L'action tensorielle naturelle sur un espace de tenseur d'ordre n est notée ρ_n et est définie:

$$\rho_n(\mathrm{Q}) \star \mathrm{T} = Q_{i_1 j_1} \dots Q_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}, \quad \mathrm{Q} \in \mathrm{O}(3), \mathrm{T} \in \mathbb{T}^n.$$

Quand on considère $\mathrm{SO}(3)$, c'est la seule situation à prendre en compte. Toutefois, dans le cas $\mathrm{O}(3)$, on a également une autre action:

$$\rho_n^*(\mathrm{Q}) = \det(\mathrm{Q})\rho_n(\mathrm{Q}).$$

On remarque que si $\mathrm{Q} \in \mathrm{SO}(3)$, alors $\det(\mathrm{Q}) = 1$ est donc $\rho_n^*(\mathrm{Q}) = \rho_n(\mathrm{Q})$. C'est pourquoi il n'y a qu'une seule situation pour $\mathrm{SO}(3)$. Dans le cas $\mathrm{O}(3)$, l'existence de transformations impropres rend ces deux actions disjointes. Si l'on considère une telle transformation alors deux situations se distinguent en fonction de la parité de n:

$$\begin{cases} \rho_{2p}(-1) = -\rho_{2p}^*(-1) = 1, & \text{si } n = 2p \\ \rho_{2p+1}(-1) = -\rho_{2p+1}^*(-1) = -1,, & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

Les espaces harmoniques avec l'action standard seront notés $\mathbb{H}^n$, tandis que ceux équipés de l'action ρ_n^* seront notés $\mathbb{H}^{*n}$. On a la règle suivante:

Tenseurs: $n = 2p$, les harmoniques pairs (resp. impairs) sont du type $\mathbb{H}^{2p}$ (resp. $\mathbb{H}^{*2p+1}$);

$n = 2p+1$, les harmoniques pairs (resp. impairs) sont du type $\mathbb{H}^{*2p}$ (resp. $\mathbb{H}^{2p+1}$);

Pseudo-tenseurs: $n = 2p$, les harmoniques pairs sont du type (resp. impairs) $\mathbb{H}^{*2p}$ (resp. $\mathbb{H}^{2p+1}$);

$n = 2p+1$, les harmoniques pairs sont du type (resp. impairs) $\mathbb{H}^{2p}$ (resp. $\mathbb{H}^{*2p+1}$).

La décomposition harmonique est la généralisation à des tenseurs d'ordre quelconque de la décomposition déviatorique que l'on connaît classiquement[22]. L'intérêt de cette décomposition quant à l'étude des propriétés de symétrie d'un espace de tenseurs est contenu dans la propriété suivante:

Proposition 1.4.7. *Soit* $\mathrm{T} \in \mathbb{T}$ *un tenseur et* (H_i) *l'ensemble de ses composantes harmoniques, on a:*

$$\mathrm{G}_\mathrm{T} = \bigcap_i \mathrm{G}_{\mathrm{H}_i}.$$

En d'autres termes, le groupe de symétrie d'un tenseur est défini comme l'intersection des groupes de symétrie des tenseurs harmoniques le constituant. Ce résultat met en avant l'importance de

[22] Chez certains auteurs, déviatorique signifie simplement un tenseur de trace nulle. Cette définition est d'un intérêt assez limité. Pour notre part, nous préférons designer par déviateur d'ordre n un tenseur harmonique d'ordre n.

la décomposition harmonique vis-à-vis de la détermination des symétries d'un objet. Toutefois, il nous faut encore passer de la notion de groupe à celle de classe et étendre cette approche à l'ensemble des éléments de $\mathbb{T}$ pour conclure. C'est ce travail que nous avons effectué dans la thèse de M. Olive [115, 116], travail qui nécessite la définition d'un nouvel opérateur, l'opérateur de clips, que nous introduirons au §.1.5 de ce chapitre.

Mais avant cela, faisons un détour par la détermination explicite d'un isomorphisme réalisant la décomposition harmonique. Nous traiterons de cette question autour de l'exemple du tenseur d'élasticité 3D. Les résultats de cette partie seront utilisés au chapitre suivant.

1.4.3 Décomposition harmonique de l'espace $\mathbb{E}\mathrm{la}$

L'espace $\mathbb{E}\mathrm{la}$ des tenseurs d'élasticité est l'espace de tenseurs d'ordre 4 vérifiant les symétries indicielles suivantes[23]:

$$\mathbb{E}\mathrm{la} = \{C_{ijkl} \in \mathbb{G}^4 | C_{\underline{(ij)}\ \underline{(kl)}}\}$$

On peut également le définir comme $S^2(S^2(\mathbb{R}^3))$. La décomposition harmonique[24] de l'espace $\mathbb{E}\mathrm{la}$ a été effectuée par de nombreux auteurs dont les noms commencent par B dont Backus [33], Barheim [34], Boelher [40]. Sa structure est la suivante:

Lemme 1.4.8. *Il existe des isomorphismes* $\mathrm{SO}(3)$*-équivariants tels que:*

$$\mathbb{E}\mathrm{la} \simeq \mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0.$$

Il est important de noter que, quand la décomposition harmonique contient plusieurs espaces de même ordre, il existe plusieurs isomorphismes réalisant cette décomposition. Ce cas se produit pour l'espace des tenseurs d'élasticité car 2 espaces $\mathbb{H}^2$ et 2 espaces $\mathbb{H}^0$ sont présents. Ceci n'est pas choquant, il est en effet bien connu car la présence des espaces $\mathbb{H}^0$ conduit aux multiples couples possibles pour les invariants isotropes. De fait, et naturellement, on va retrouver dans la littérature différentes expressions explicites de la décomposition harmonique.

En 3D[25], on peut distinguer dans la littérature les décompositions suivantes[26] :

la $\mathrm{GL}(3)$**-invariante** : Cette décomposition à une structure particulière qui la rend plus géométrique que les autres. C'est celle que l'on retrouve notamment dans le papier initial de Backus [33]

[23] En pratique, il est également nécessaire d'ajouter la condition de définie positivité pour obtenir un tenseur d'élasticité. Toutefois, cette condition supplémentaire ne modifie rien quant aux questions auxquelles nous nous intéressons.

[24] Il s'agit d'une des première décomposition harmonique effectuée en mécanique des milieux continus.

[25] En 2D la situation est plus simple car on a qu'un seul espace d'ordre 2 dans la décomposition. En conséquent, le seul choix possible concerne les composantes isotropes.

[26] Les noms que nous donnons aux diverses décompositions nous sont propres, il n'y a pas de classification consacrée de ces différentes formes.

et celui de Baerheim [34].

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_{ijkl} &= \mathrm{D}_{ijkl} + (\delta_{ij}\mathrm{f}_{kl} + \delta_{kl}\mathrm{f}_{ij} + \delta_{ik}\mathrm{f}_{jl} + \delta_{jl}\mathrm{f}_{ik} + \delta_{il}\mathrm{f}_{jk} + \delta_{jk}\mathrm{f}_{il}) \\ &+ (\delta_{ij}\mathrm{g}_{kl} + \delta_{kl}\mathrm{g}_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\mathrm{g}_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{jl}\mathrm{g}_{ik} - \frac{1}{2}\delta_{il}\mathrm{g}_{jk} - \frac{1}{2}\delta_{jk}\mathrm{g}_{il}) \\ &+ \alpha(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \beta(\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{il}\delta_{jk}).\end{aligned}$$

Pour obtenir cette décomposition, nous considérons dans un premier temps la décomposition de $\mathbb{E}\mathrm{la}$ en espaces $\mathrm{GL}(3)$-irréductibles, et nous décomposons ensuite chacun de ces composantes en espaces $\mathrm{SO}(3)$-irréductibles. Cette procédure est d'ailleurs générale pour tout espace de tenseurs. Les espaces de tenseurs $\mathrm{GL}(3)$-irréductibles[27] sont donnés par des modules de Weyl [138, 154]. Ces derniers sont caractérisés par certaines symétries indicielles caractérisées par des tableaux de Young [70].

Cette procédure est résumée dans le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & \underset{\approx}{\mathrm{C}} \in \mathbb{E}\mathrm{la} \arrow[dl, "\mathrm{Sym}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Asym}=\mathrm{Id}-\mathrm{Sym}"] & \\
\mathbb{S}_4 \arrow[d, "\mathcal{H}"] & & \mathbb{S}^a_{(2,2)} \arrow[d, "\mathcal{H}"] \\
(\underset{\approx}{\mathrm{D}}, \underset{\sim}{\mathrm{f}}, \alpha) \in \mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0 & & (\underset{\sim}{\mathrm{g}}, \beta) \in \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0
\end{tikzcd}$$

Les notations Sym, Id et $\mathcal{H}$ indiquent respectivement les opérations de : symétrisation indicielle complète, identité, et retrait des traces. Les espaces intermédiaires $\mathbb{S}_4$ et $\mathbb{S}^a_{(2,2)}$ sont $\mathrm{GL}(3)$-invariants [83, 84], leurs symétries indicielles sont codées par des diagrammes de Young [19, 137][28].

Les symétries indicielles de l'espace $\mathbb{S}_4$ sont caractérisées par le tableau de Young:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

et celles de $\mathbb{S}^a_{(2,2)}$ par le tableau:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Lemme 1.4.9. *La décomposition de l'espace* $\mathbb{E}\mathrm{la}$ *en composantes irréductibles sous l'action de*

[27] C'est par la dualité de Schur–Weyl qu'on peut déterminer les représentations irréductibles du groupe linéaire [137].

[28] La partie complètement symétrique correspond à l'élasticité dite de Cauchy en référence à une dispute classique de l'histoire de la mécanique qui opposa l'école française de mécanique (Navier, Cauchy) à l'école anglaise (Green) sur le nombre de constantes définissant le comportement élastique linéaire [123].

$\mathrm{GL}(3)$ *est donnée par:*

$$\mathbb{E}\mathrm{la} = \mathbb{S}_4 \oplus \mathbb{S}^a_{(2,2)},$$

les éléments $\underset{\approx}{\mathrm{S}} \in \mathbb{S}^4$ *et* $\underset{\approx}{\mathrm{R}} \in \mathbb{S}^a_{(2,2)}$ *sont définis par:*

$$S_{ijkl} = \frac{1}{3}(C_{ijkl} + C_{kjil} + C_{ljki}), \quad R_{ijkl} = \frac{1}{3}(2C_{ijkl} - C_{kjil} - C_{ljki}).$$

Dans la décomposition précédente le tenseur $\underset{\approx}{\mathrm{R}}$ vérifie la relation[29]:

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{ikjl} = 0.$$

Une fois cette première décomposition effectuée, il reste à décomposer les espaces $\mathbb{S}^4$ et $\mathbb{S}^a_{(2,2)}$ en espaces $\mathrm{SO}(3)$-irréductibles. En termes de tenseurs harmoniques, cela nous donne:

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{ijkl} &= \mathrm{D}_{ijkl} + (\delta_{ij}\mathrm{f}_{kl} + \delta_{kl}\mathrm{f}_{ij} + \delta_{ik}\mathrm{f}_{jl} + \delta_{jl}\mathrm{f}_{ik} + \delta_{il}\mathrm{f}_{jk} + \delta_{jk}\mathrm{f}_{il}) + \alpha(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\
\mathrm{R}_{ijkl} &= (\delta_{ij}\mathrm{g}_{kl} + \delta_{kl}\mathrm{g}_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\mathrm{g}_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{jl}\mathrm{g}_{ik} - \frac{1}{2}\delta_{il}\mathrm{g}_{jk} - \frac{1}{2}\delta_{jk}\mathrm{g}_{il}) + \beta(\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{il}\delta_{jk})
\end{aligned}$$

d'où la décomposition obtenue par Backus [33]. Cette décomposition possède un sens physique quant à la propagation des ondes [83, 84]. Elle apparaît également naturellement en mécanique de l'endommagement [55, 88, 119]. Malgré cela, et peut être à cause de son expression compliquée, son utilisation s'est effacée au profit de la décomposition compacte.

La compacte : Cette version est la plus compacte. Les termes de la décomposition $\mathrm{GL}(3)$-invariante sont exprimés à partir de produits tensoriels simples entre tenseurs harmoniques et deltas de Kronecker. Il s'agit de la généralisation anisotrope des modules de Lamé.

$$\mathrm{C}_{ijkl} = \mathrm{D}_{ijkl} + (\delta_{ij}\mathrm{a}_{kl} + \delta_{kl}\mathrm{a}_{ij}) + \delta_{ik}\mathrm{b}_{jl} + \delta_{jl}\mathrm{b}_{ik} + \delta_{il}\mathrm{b}_{jk} + \delta_{jk}\mathrm{b}_{il} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

C'est cette expression que l'on retrouve dans le publications de Boehler et al. [40] et de Forte and Vianello [64]. Toutefois, au sein des composantes isotypiques, les composantes ne sont pas orthogonales entre elles et, à l'instar du λ de Lamé, les différentes composantes n'ont pas de sens physique. Malgré ses faiblesses, il s'agit toutefois de l'expression la plus courante que l'on puisse trouver.

L'orthogonalisée de FV : Cette version pallie le défaut d'orthogonalité au sein des composantes isotypiques. On trouve cette expression dans un travail plus récent de Forte et Vianello

[29] C'est-à-dire que $\underset{\approx}{\mathrm{R}}$ a les symétries du tenseur de courbure de Riemann.

[67].

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_{ijkl} &= \mathrm{D}_{ijkl} + (\delta_{ij}\mathrm{a}_{kl} + \delta_{kl}\mathrm{a}_{ij}) + (\delta_{ik}\mathrm{c}_{jl} + \delta_{jl}\mathrm{c}_{ik} + \delta_{jk}\mathrm{c}_{il} - \delta_{ij}\mathrm{c}_{kl} - \delta_{kl}\mathrm{c}_{ij}) \\ &\quad + K\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}).\end{aligned}$$

Dans cette expression, les différentes composantes de même type sont orthogonales, cependant son sens mécanique semble assez faible.

L'orthogonalisée Sph-Dev : Une alternative que nous n'avons pas trouvée dans la littérature (ce qui ne veut pas dire qu'elle n'y figure pas quelque part) est la suivante:

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_{ijkl} &= \mathrm{D}_{ijkl} + (\delta_{ij}\mathrm{a}_{kl} + \delta_{kl}\mathrm{a}_{ij}) + (\delta_{ik}\mathrm{c}_{jl} + \delta_{jl}\mathrm{c}_{ik} + \delta_{jk}\mathrm{c}_{il} + \delta_{il}\mathrm{c}_{jk} - \frac{4}{3}\delta_{ij}\mathrm{c}_{kl} - \frac{4}{3}\delta_{kl}\mathrm{c}_{ij}) \\ &\quad + K\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}).\end{aligned}$$

Nous pouvons regrouper de la manière suivante:

$$\begin{aligned}D_{ijkl} &= \mathrm{H}_{ijkl} + (\delta_{ik}\mathrm{c}_{jl} + \delta_{jl}\mathrm{c}_{ik} + \delta_{jk}\mathrm{c}_{il} + \delta_{il}\mathrm{c}_{jk} - \frac{4}{3}\delta_{ij}\mathrm{c}_{kl} - \frac{4}{3}\delta_{kl}\mathrm{c}_{ij}) + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}) \\ B_{ijkl} &= \mathrm{a}_{ij}\delta_{kl} \\ S_{ijkl} &= K\delta_{ij}\delta_{kl}\end{aligned}$$

Cette approche consiste en la décomposition harmonique de l'endomorphisme autoadjoint $\mathcal{E}^s(\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0)$ de la manière suivante:

$$\mathcal{E}^s(\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0) = \mathcal{E}^s(\mathbb{H}^2) \oplus \mathcal{E}^s(\mathbb{H}^0) \oplus \mathcal{L}(\mathbb{H}^2, \mathbb{H}^0).$$

De manière explicite:

- $\underset{\approx}{\mathrm{D}}$ est un élément $\mathcal{E}^s(\mathbb{H}^2)$, l'espace des endomorphismes symétriques de $\mathbb{H}^2$;
- $\underset{\approx}{\mathrm{B}}$ est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{H}^2, \mathbb{H}^0)$, l'espace des applications linéaires de $\mathbb{H}^2$ dans $\mathbb{H}^0$;
- $\underset{\approx}{\mathrm{S}}$ est un élément de $\mathcal{E}^s(\mathbb{H}^0)$, l'espace des endomorphismes symétriques de $\mathbb{H}^0$.

Ceci nous permet également de récrire le comportement élastique sous la forme:

$$\begin{pmatrix}\sigma^d_{ij} \\ \sigma^s_{ij}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}D_{ijkl} & B_{ijkl} \\ B^T_{ijkl} & S_{ijkl}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon^d_{kl} \\ \varepsilon^s_{kl}\end{pmatrix}.$$

Cette décomposition a un sens physique et permet de déterminer des comportements anisotropes ayant des propriétés non standards en statique. De plus, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, on peut concevoir à partir d'elle des expériences de pensées permettant, au moins théoriquement, la mesure des différentes composantes harmoniques du tenseur d'élasticité. Un dernier intérêt théorique est que l'on peut également exprimer

le complément de Schur de cette décomposition de manière à étudier les liens qu'il existe entre la décomposition harmonique du tenseur d'élasticité et celle du tenseur de souplesse [18].

Il reste ensuite à exprimer les différents termes de la représentation choisie en fonction du tenseur d'élasticité initial. Ceci se réalise en considérant les 2 traces indépendantes (C_{ijpp}, C_{ipjp}) du tenseur d'élasticité. A partir d'une représentation, les autres s'en déduisent par recombinaison.

En fait, la principale difficulté est d'obtenir, pour un tenseur donné, une représentation explicite. Le cas de l'élasticité est un cas simple où on peut s'en sortir à la main mais la complexité opératoire croît vite avec l'ordre du tenseur. On trouve quelques algorithmes de construction dans la littérature [136, 164, 165], mais leur utilisation n'est pas très aisée. On ne sait pas bien quelles sont les propriétés de la décomposition que l'on obtient à la fin. Il serait intéressant de proposer de nouveaux algorithmes plus géométriques basés sur la décomposition Schur-Weyl et les produits de Kulkarni–Nomizu d'une part, et la décomposition de l'endomorphisme par blocs d'autres part. Toutefois, comme montré dans [9, 115, 116], dans un certain nombre d'applications on n'a pas besoin de décomposer explicitement l'espace des tenseurs que l'on étudie, la connaissance de la structure de la décomposition est suffisante. C'est notamment le cas lorsque l'on veut déterminer les classes d'anisotropie d'un espace de tenseurs. Or, si le calcul de la décomposition explicite n'est pas aisé (et, comme vu ci-dessus, nécessite de faire des choix quant au sens que l'on va donner à chacun des facteurs), la détermination de sa structure, via les formules de Clesbsch-Gordan, est directe.

1.4.4 Formules de Clebsch-Gordan

Lemme 1.4.10. *Le produit tensoriel de 2 espaces harmoniques est réductible et se décompose selon:*

$$\mathbb{H}^i \otimes \mathbb{H}^j = \bigoplus_{k=|i-j|}^{i+j} \mathbb{H}^k.$$

Dans le cas où les espaces sont identiques, le produit tensoriel peut se décomposer en un produit symétrisé (S^2) et un produit anti-symétrisé (Λ^2):

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{H}^n \otimes \mathbb{H}^n = S^2\left(\mathbb{H}^n\right) \oplus \Lambda^2\left(\mathbb{H}^n\right).$$

De fait, la formule précédente peut être complétée dans ce cas là par les formules suivantes:

Lemme 1.4.11. *Pour tout $n \geq 1$, on a les formules de Clebsch-Gordan suivantes [30, 86]:*

$$S^2\left(\mathbb{H}^n\right) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{H}^{2k} \quad ; \quad \Lambda^2\left(\mathbb{H}^n\right) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{H}^{2k-1}.$$

Exemple 1.4.12. Si l'on considère $S^2(\mathbb{R}^3)$, l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2, celui ci est engendré par $S^2(\mathbb{H}^1)$. A partir du Lemme 1.4.11, on obtient:

$$S^2(\mathbb{H}^1) \simeq \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0.$$

C'est-à-dire que l'espace $S^2(\mathbb{R}^3)$ se décompose en un espace de dimension 5, l'espace des déviateurs, et un espace de dimension 1, celui des tenseurs sphériques.

Exemple 1.4.13. Considérons le cas de l'espace des tenseurs d'élasticité $\mathbb{E}\mathrm{la} = \mathbb{T}_{\underline{(ij)}\,\underline{(kl)}}$. Cet espace peut être vu comme $S^2(S^2(\mathbb{R}^2))$ [5]:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\mathrm{la} \simeq S^2(S^2(\mathbb{R}^2)) &\simeq S^2(\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0) \simeq S^2(\mathbb{H}^2) \oplus S^2(\mathbb{H}^0) \oplus (\mathbb{H}^2 \otimes \mathbb{H}^0) \\ &\simeq \mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{H}^4 \oplus 2\mathbb{H}^2 \oplus 2\mathbb{H}^0.\end{aligned}$$

Et ainsi nous retrouvons la structure de l'espace des tenseurs d'élasticité sans faire aucun calcul.

Revenons à présent à la question initiale de la détermination des classes de symétrie. A partir de la connaissance de cette structure harmonique, nous avons déterminé dans [29, 115, 116] comment obtenir l'ensemble des classes de symétrie de l'espace de tenseurs étudié. Pour cela, nous avons combiné des résultats de la littérature concernant les classes de symétrie des espaces irréductibles via l'opération de clips définie par M. Olive au cours de sa thèse. L'utilisation de cet outil nous a permis ensuite d'obtenir des résultats très généraux sur les classes de symétrie des tenseurs de comportement. La section suivante est adaptée de [115].

1.5 Opérations de *Clips*

La démonstration de nos théorèmes généraux se base sur l'introduction et l'utilisation d'une opération baptisée *Clips*.

Lemme 1.5.1. *Soit* $\mathbb{V}$ *une représentation d'un groupe* G *qui se décompose en la somme directe de deux sous-espaces* G*-invariants:*

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \text{ où } g \cdot \mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}_1 \text{ et } g \cdot \mathbb{V}_2 \subset \mathbb{V}_2, \quad \forall g \in \mathrm{G}.$$

Si $\mathfrak{I}$ *est l'ensemble des classes de symétrie de* $\mathbb{V}$, $\mathfrak{I}_i$ *celles de* $\mathbb{V}_i$ *(*$i = 1, 2$*), alors* $[\mathrm{H}] \in \mathfrak{I}$ *si et seulement si il existe* $[\mathrm{H}_1] \in \mathfrak{I}_1$ *et* $[\mathrm{H}_2] \in \mathfrak{I}_2$ *tels que* $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2$.

Le lemme 1.5.1 montre que les classes de symétrie d'une représentation en somme directe sont liées aux intersections des groupes de symétrie des éléments de cette somme. Toutefois, la notion d'intersection de classes n'a pas de sens, et l'on ne peut pas directement étendre ce résultat. L'opérateur de clips permet de résoudre ce problème. Cet outil a été introduit dans [115] où les

principaux théorèmes le concernant ont été démontrés. Il a ensuite été étendu et utilisé dans [29, 116].

L'opération de clips permet de déterminer le produit de 2 classes de symétrie. Ainsi à partir de la connaissance de la décomposition harmonique d'un espace de tenseurs, et connaissant les classes de symétrie de chaque espace irréductible, l'opération de clips permet de déterminer les classes de l'espace étudié.

Définition 1.5.2 (Opération de clips). Soit deux classes de symétrie $[\mathrm{H}_1]$ et $[\mathrm{H}_2]$, on définit l'opération de clips entre $[\mathrm{H}_1]$ et $[\mathrm{H}_2]$, notée $[\mathrm{H}_1] \circledcirc [\mathrm{H}_2]$, par:

$$[\mathrm{H}_1] \circledcirc [\mathrm{H}_2] := \{[\mathrm{H}_1 \cap g\mathrm{H}_2 g^{-1}] \quad \text{pour tout } g \in \mathrm{G}\}.$$

Le résultat est un ensemble de classes de symétrie.

On a les propriétés immédiates :

Proposition 1.5.3. *L'opération de clips est commutative.*

Proposition 1.5.4. *Pour tout classe de symétrie* $[\mathrm{H}]$ *d'un groupe* G *on a:*

$$[1] \circledcirc [\mathrm{H}] = \{[1]\} \textit{ et } [\mathrm{G}] \circledcirc [\mathrm{H}] = \{[\mathrm{H}]\}.$$

On a également le corollaire suivant du lemme 1.5.1.

Corollaire 1.5.5. *Soit* $\mathbb{V}_1$ *et* $\mathbb{V}_2$ *deux* G*-représentations, si* $\mathfrak{I}_k$ *est l'ensemble des classes de symétrie de* $\mathbb{V}_k$ *for* $k = 1, 2$*, alors*

$$\mathfrak{I}_1 \circledcirc \mathfrak{I}_2 := \bigcup_{[\mathrm{H}_1]\in\mathfrak{I}_1, [\mathrm{H}_2]\in\mathfrak{I}_2} [\mathrm{H}_1] \circledcirc [\mathrm{H}_2]$$

est l'ensemble des classes de symétrie de $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$.

Théorème 1.5.6. *Pour tout couple de sous-groupes (stricts) fermés de* $\mathrm{SO}(3)$ Σ_1 *et* Σ_2*, on a* $1 \in [\Sigma_1] \circledcirc [\Sigma_2]$. *Les autres classes de symétrie résultant de l'opération* $[\Sigma_1] \circledcirc [\Sigma_2]$ *sont données dans le tableau II.1.2*

Tableau II.1.2: Opération de clips sur les sous-groupes de SO(3)

$\circledcirc$	$[\mathrm{Z}_n]$	$[\mathrm{D}_n]$	$[\mathcal{T}]$	$[\mathcal{O}]$	$[\mathcal{I}]$	$[\mathrm{SO}(2)]$	$[\mathrm{O}(2)]$
$[\mathrm{Z}_m]$	$[\mathrm{Z}_d]$						
$[\mathrm{D}_m]$	$[\mathrm{Z}_{d_2}]$ $[\mathrm{Z}_d]$	$[\mathrm{Z}_{d_2}]$ $[\mathrm{Z}_{d'_2}]$, $[\mathrm{Z}_{dz}]$ $[\mathrm{Z}_d]$, $[\mathrm{D}_d]$					
$[\mathcal{T}]$	$[\mathrm{Z}_{d_2}]$ $[\mathrm{Z}_{d_3}]$	$[\mathrm{Z}_2]$ $[\mathrm{Z}_{d_3}]$, $[\mathrm{D}_{d_2}]$	$[\mathrm{Z}_2]$ $[\mathrm{Z}_3]$ $[\mathbb{T}]$				
$[\mathcal{O}]$	$[\mathrm{Z}_{d_2}]$ $[\mathrm{Z}_{d_3}]$ $[\mathrm{Z}_{d_4}]$	$[\mathrm{Z}_2]$ $[\mathrm{Z}_{d_3}]$, $[\mathrm{Z}_{d_4}]$ $[\mathrm{D}_{d_2}]$, $[\mathrm{D}_{d_3}]$ $[\mathrm{D}_{d_4}]$	$[\mathrm{Z}_2]$ $[\mathrm{Z}_3]$ $[\mathbb{T}]$	$[\mathrm{Z}_2]$ $[\mathrm{D}_2]$, $[\mathrm{Z}_3]$ $[\mathrm{D}_3]$, $[\mathrm{Z}_4]$ $[\mathrm{D}_4]$, $[\mathcal{O}]$			
$[\mathcal{I}]$	$[\mathrm{Z}_{d_2}]$ $[\mathrm{Z}_{d_3}]$ $[\mathrm{Z}_{d_5}]$	$[\mathrm{Z}_2]$ $[\mathrm{Z}_{d_3}]$, $[\mathrm{Z}_{d_5}]$ $[\mathrm{D}_{d_2}]$ $[\mathrm{D}_{d_3}]$, $[\mathrm{D}_{d_5}]$	$[\mathrm{Z}_2]$ $[\mathrm{Z}_3]$ $[\mathbb{T}]$	$[\mathrm{Z}_2]$ $[\mathrm{Z}_3]$, $[\mathrm{D}_3]$ $[\mathbb{T}]$	$[\mathrm{Z}_2]$ $[\mathrm{Z}_3]$, $[\mathrm{D}_3]$ $[\mathrm{Z}_5]$, $[\mathrm{D}_5]$ $[\mathcal{I}]$		
$[\mathrm{SO}(2)]$	$[\mathrm{Z}_n]$	$[\mathrm{Z}_2]$ $[\mathrm{Z}_n]$	$[\mathrm{Z}_2]$ $[\mathrm{Z}_3]$	$[\mathrm{Z}_2]$ $[\mathrm{Z}_3]$, $[\mathrm{Z}_4]$	$[\mathrm{Z}_2]$ $[\mathrm{Z}_3]$, $[\mathrm{Z}_5]$	$[\mathrm{SO}(2)]$	
$[\mathrm{O}(2)]$	$[\mathrm{Z}_{d_2}]$ $[\mathrm{Z}_n]$	$[\mathrm{Z}_2]$ $[\mathrm{D}_n]$	$[\mathrm{D}_2]$ $[\mathrm{Z}_3]$	$[\mathrm{D}_2]$ $[\mathrm{D}_3]$, $[\mathrm{D}_4]$	$[\mathrm{D}_2]$ $[\mathrm{D}_3]$, $[\mathrm{D}_5]$	$[\mathrm{Z}_2]$ $[\mathrm{SO}(2)]$	$[\mathrm{D}_2]$ $[\mathrm{O}(2)]$

Notations

$\mathrm{Z}_1 := \mathrm{D}_1 := 1$ $\quad d_2 := gcd(n,2)$ $\quad d_3 := gcd(n,3)$ $\quad d_5 := gcd(n,5)$

$d'_2 := gcd(m,2)$ $\quad dz := 2$ si $d = 1, dz = 1$ sinon

$$d_4 := \begin{cases} 4 \text{ si } 4 \mid n \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Avant de donner les résultats généraux dans le cas des tenseurs pairs[30], nous allons rapidement illustrer les opérations de clips sur le cas particulier du tenseur d'élasticité. Comme établi plus tôt l'espace des tenseurs d'élasticité se décompose en espaces harmoniques de la manière suivante:

$$\mathbb{E}\mathrm{la} \simeq \mathbb{H}^4 \oplus 2\mathbb{H}^2 \oplus 2\mathbb{H}^0.$$

On connaît les classes de symétrie des espaces $\mathbb{H}^k$, celles-ci ont été établies par [82]. On a notamment

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(\mathbb{H}^2) &= \{[\mathrm{D}_2], [\mathrm{O}(2)], [\mathrm{SO}(3)]\}; \\
\mathfrak{I}(\mathbb{H}^4) &= \{[1], [\mathrm{Z}_2], [\mathrm{D}_2], [\mathrm{D}_3], [\mathrm{D}_4], [\mathrm{O}(2)], [\mathcal{O}], [\mathrm{SO}(3)]\} \\
&.
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats de la table II.1.2 et les théorèmes précédents, on calcule itérativement:

$$\mathfrak{I}(\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2) = \mathfrak{I}(\mathbb{H}^2) \circledcirc \mathfrak{I}(\mathbb{H}^2) = \{[1], [\mathrm{Z}_2], [\mathrm{D}_2], [\mathrm{O}(2)], [\mathrm{SO}(3)]\},$$

puis

$$\mathfrak{I}(\mathbb{E}\mathrm{la}) = \mathfrak{I}(\mathbb{H}^4) \circledcirc \mathfrak{I}(\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2) = \{[1], [\mathrm{Z}_2], [\mathrm{D}_2], [\mathrm{D}_3], [\mathrm{D}_4], [\mathrm{O}(2)], [\mathcal{O}], [\mathrm{SO}(3)]\}.$$

A partir de la décomposition harmonique des espaces $\mathbb{S}^{2n}$ et $\mathbb{G}^{2n}$ et en utilisant le tableau de clips précédemment introduit, nous déterminons dans [115] les classes de symétrie des espaces $\mathbb{S}^{2n}$ et $\mathbb{G}^{2n}$.

Lemme 1.5.7. *Les classes de symétrie $\mathbb{S}^{2n}$ sont :*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(\mathbb{S}^2) &= \{[\mathrm{D}_2], [\mathrm{O}(2)], [\mathrm{SO}(3)]\}; \\
\mathfrak{I}(\mathbb{S}^4) &= \{[1], [\mathrm{Z}_2], [\mathrm{D}_2], [\mathrm{D}_3], [\mathrm{D}_4], [\mathrm{O}(2)], [\mathcal{O}], [\mathrm{SO}(3)]\}; \\
n \geq 3,\ \mathfrak{I}(\mathbb{S}^{2n}) &= \{[1], [\mathrm{Z}_2], \cdots, [\mathrm{Z}_{2(n-1)}], [\mathrm{D}_2], \cdots, [\mathrm{D}_{2n}], [\mathrm{O}(2)], [\mathcal{T}], [\mathcal{O}], [\mathcal{I}], [\mathrm{SO}(3)]\}.
\end{aligned}$$

Lemme 1.5.8. *Les classes de symétrie $\mathbb{G}^{2n}$ sont :*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(\mathbb{G}^2) &= \{[1], [\mathrm{Z}_2], [\mathrm{D}_2], [\mathrm{SO}(2)], [\mathrm{O}(2)], [\mathrm{SO}(3)]\}; \\
\mathfrak{I}(\mathbb{G}^4) &= \{[1], [\mathrm{Z}_2], \cdots, [\mathrm{Z}_4], [\mathrm{D}_2], \cdots, [\mathrm{D}_4], [\mathrm{SO}(2)], [\mathrm{O}(2)], [\mathcal{T}], [\mathcal{O}], [\mathrm{SO}(3)]\}; \\
n \geq 3,\ \mathfrak{I}(\mathbb{G}^{2n}) &= \{[1], [\mathrm{Z}_2], \cdots, [\mathrm{Z}_{2n}], [\mathrm{D}_2], \cdots, [\mathrm{D}_{2n}], [\mathrm{SO}(2)], [\mathrm{O}(2)], [\mathcal{T}], [\mathcal{O}], [\mathcal{I}], [\mathrm{SO}(3)]\}.
\end{aligned}$$

[30] On rappelle que les espaces considérés sont définis comme des sous-espaces de $\mathbb{G}^n$ générés à partir de $\mathbb{R}^d$ par une combinaison finie d'opérations $\otimes^p$ et S^q.

Ce qui nous donne le décompte suivant:

n	1	2	≥ 3
$\#\mathfrak{I}(\mathbb{S}^{2n})$	3	8	$2(2n+1)$
$\#\mathfrak{I}(\mathbb{G}^{2n})$	6	12	$4n+5$

On arrive ensuite à montrer qu'en fait, si on prend un espace de tenseur $\mathbb{T}^{2n}$ quelconque, il se comporte vis-à-vis de ses classes soit comme $\mathbb{S}^{2n}$, soit comme $\mathbb{G}^{2n}$.

Théorème 1.5.9. *Soit $\mathbb{T}^{2n}$ un espace de tenseur alors soit $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^{2n}) = \mathfrak{I}(\mathbb{S}^{2n})$, soit $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^{2n}) = \mathfrak{I}(\mathbb{G}^{2n})$.*

En d'autres termes, les classes sont identiques à celles de:

- $\mathbb{S}^{2n}$ et, dans ce cas, le nombre de classe est minimal;
- $\mathbb{G}^{2n}$ et, dans ce cas, le nombre de classe est maximal;

Si on prend en considération maintenant le fait que l'espace de tenseurs que l'on considère n'est pas quelconque mais obtenu selon le procédé décrit à la section 1.3, alors le nombre de classes est généralement toujours maximal. Plus précisément:

Comportements couplés

Théorème 1.5.10. *Soit $\mathbb{T}^{2n}$ l'espace des tenseurs de couplage entre $\mathbb{T}^{n_1}$ et $\mathbb{T}^{n_2}$, si $n_1 \geq 1$ et $n_2 \geq 1$ alors $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^{2n}) = \mathfrak{I}(\mathbb{G}^{2n})$.*

Comportements auto-adjoints

Théorème 1.5.11. *Soit $\mathbb{T}^{2n}$, l'espace des tenseurs de comportement auto-adjoints sur $\mathbb{T}^{n}$, si $n \geq 3$ alors $\mathfrak{I}(\mathbb{T}^{2n}) = \mathfrak{I}(\mathbb{G}^{2n})$.*

Remarque 1.5.12. Les cas exceptionnels sont donc au nombre de 2:

$n = 1$ qui correspond, par exemple, à l'espace des tenseurs de conduction thermique;
$n = 2$ et si l'on prend pour $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_{(ij)}$, on obtient l'espace des tenseurs d'élasticité.

Pour chacune de ces situations, le nombre de classes est minimal. Ce sont les seuls cas où cette situation se produit. On peut conclure de cela que la structure de l'espace des tenseurs d'élasticité est exceptionnelle[31].

Pour compléter ce travail, nous nous sommes intéressés au cas des tenseurs impairs dans [116]. La principale différence dans ce cas est que l'on ne peut plus restreindre le problème aux sous-groupes fermés de $\mathrm{SO}(3)$. Il faut considérer l'ensemble des sous-groupes fermés de $\mathrm{O}(3)$. Il a fallu déterminer les opérations de clips dans ce cas là. Le résultat général est du même acabit, deux situations peuvent se produire et selon le nombre de classes peut, ou non, être maximal.

[31] Le coté exceptionnel de l'espace des tenseurs d'élasticité vient du fait que celui-ci ne contient que des espaces harmoniques d'ordre pair.

Chapitre II.2

Autour des invariants du tenseur d'élasticité

Ce chapitre est bâti principalement autour des articles suivants [20, 25, 30, 117]. Ce sont des travaux menés en collaboration avec des mathématiciens, notamment B. Kolev (I2M) et qui concerne la thèse de M. Olive. L'application pratique de ces travaux a été l'objet du projet MatSyMat porté par M. François (GEM).

En introduction du Chapitre II.1 nous avions posé, pour un comportement linéaire donné, les questions suivantes:

1. Quels sont les différents types de comportements anisotropes qui peuvent être décrits ?
2. Comment, au regard de cette propriété *étiqueter*, de manière unique chaque matériau ?
3. Comment, connaissant les composantes d'un tenseur dans une orientation arbitraire, identifier le type d'anisotropie du tenseur ?

La première de ces questions a été l'objet du chapitre précédent. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser, dans le cas de l'élasticité linéaire, aux deux questions suivantes. Au cœur de cette problématique se situe la détermination des invariants du tenseur d'élasticité et l'utilisation que l'on peut en faire. L'objectif de ce chapitre est de présenter nos travaux concernant cette thématique et qui concernent les aspects suivants:

1. Construction d'une base d'intégrité;
2. Stratification des classes de symétrie;
3. Interprétation mécanique des invariants;
4. Reconstruction des tenseurs.

Nous décrirons tout cela avec plus de précision par la suite mais nous pouvons dès à présent donner les idées qui sont derrières. La première étape consiste à trouver, pour un espace de tenseurs donné, une liste de quantités invariantes pour l'action du groupe des isométries et permettant

de caractériser complètement l'orbite du tenseur étudié. Si en 2D ce problème est relativement direct, sa complexité croit rapidement avec la dimension de l'espace et le problème 3D est considérablement plus difficile.

Une fois un jeu d'invariants à disposition, il est possible (au moins en théorie) d'établir des relations polynomiales entre eux caractérisant les différentes classes de symétrie de l'espace tensoriel. Outre cet aspect théorique, se pose la question de la mesure de ces invariants et donc de leur sens physique. En 2D, une telle interprétation est possible et permet, au moins théoriquement, de concevoir des essais permettant de directement mesurer ces quantités. La même problématique se pose pour la 3D également, avec encore une fois un niveau de difficultés bien supérieur. Le but de tout cela est la reconstruction du tenseur à partir de la mesure de ses invariants.

Ce chapitre s'organise de la manière suivante. Nous présenterons dans un premier temps la problématique de la détermination des invariants du tenseur d'élasticité. De manière à se donner un cadre de travail précis, et pour éviter toute ambiguïté, nous introduirons ensuite un certain nombre de définitions techniques. Avant de traiter l'élasticité en 3D, nous considérerons le cas de la 2D. Le problème est plus simple et l'on peut le résoudre intégralement. Cela donne une bonne idée de ce que l'on désire réaliser en 3D. Finalement, nous parlerons du problème des invariants de l'élasticité 3D et présenterons des résultats nouveaux obtenus ces dernières années [25, 30]. Comme nous le verrons, même si des progrès ont été faits, il reste encore pas mal de travail pour clore la question. Avant de commencer, il est à noter que tout ce qui va être présenté ici dans le cas de l'élasticité linéaire peut s'étendre à tout autre type de comportement linéaire.

2.1 Problématique initiale

Un milieu élastique homogène est défini par la donnée d'un tenseur d'élasticité constant[1]. Ce tenseur décrit donc le matériau élastique qui occupe ledit milieu. Si peut associer à tout matériau un tenseur $\underset{\approx}{\mathrm{C}} \in \mathbb{E}\mathrm{la}$, cette correspondance n'est pas unique. En effet, une rotation du milieu élastique par rapport au laboratoire (c.f. figure II.2.1) ne change pas la nature du matériau mais lui associe un nouveau tenseur élasticité. Plus précisément, par rapport à un référentiel, le changement d'orientation du matériau correspond à une transformation $\mathrm{Q} \in \mathrm{SO}(3)$ et donc à un nouveau placement du body $\mathcal{B}$ dans l'espace ambiant. Ceci correspond à l'opération:[2]

$$C_{ijkl} \mapsto Q_{ip}\, Q_{jq}\, Q_{kr}\, Q_{ls}\, C_{pqrs}, \tag{2.1.1}$$

[1]Comme dans la suite on ne sortira pas du cadre de l'hypothèse d'homogénéité, on ne la rappellera plus.

[2]Comme vu précédemment, le groupe d'invariance de la microstructure est conjugué à un sous-groupe fermé de $\mathrm{O}(3)$. Par contre, un expérimentateur manipulant un échantillon de matériau ne peut opérer dessus que via des rotations et de fait via $\mathrm{SO}(3)$. Cette remarque n'a pas d'importance pour les tenseurs d'ordre pair, mais en a pour ceux d'ordre impair.

avec $\mathrm{Q} = (Q_{ip}) \in \mathrm{SO}(3)$. Ceci définit une représentation de $\mathrm{SO}(3)$ sur l'espace $\mathbb{E}$la, que l'on écrira simplement:

$$\underset{\approx}{\mathrm{C}}' = Q \star \underset{\approx}{\mathrm{C}}.$$

De cette manière, différents tenseurs peuvent être associés au milieu relativement à la même base et au même matériau[3].

Cette situation est invisible pour un matériau isotrope mais prend de l'importance à mesure que les symétries matérielles décroissent. Dans le cas d'un matériau triclinique, si on évalue les coefficients du tenseur d'élasticité dans deux laboratoires distincts, les mesures faites selon des orientations différentes conduiront à des tenseurs d'élasticité distincts. Comment conclure alors sur l'identité, ou non, des matériaux testés ?

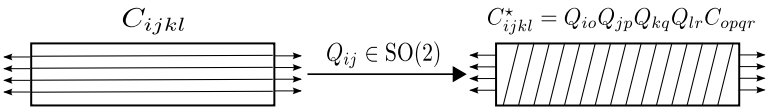


Figure II.2.1: Différents échantillons extraits du même matériau. Entre l'échantillon de droite et celui de gauche seule l'orientation de la microstructure a changé. Les chargements extérieurs sont eux identiques.

D'un point de vue mathématique, les différentes orientations d'un même matériau élastique définissent un ensemble de tenseurs d'élasticité:

$$\mathcal{O}(\underset{\approx}{\mathrm{C}}) = \left\{ \underset{\approx}{\mathrm{C}}' = \mathrm{Q} \star \underset{\approx}{\mathrm{C}};\ \mathrm{Q} \in \mathrm{SO}(3) \right\}.$$

Cet ensemble est l'orbite de $\underset{\approx}{\mathrm{C}}$ pour l'action du groupe des rotations $\mathrm{SO}(3)$. Du point de vue de élasticité linéaire, parler d'un matériau élastique de manière intrinsèque, c'est-à-dire indépendamment de son orientation, revient à parler de son $\mathrm{SO}(3)$-orbite. Étiqueter les différents matériaux élastiques, c'est se donner une fonction qui soit constante sur les orbites et prenne des valeurs différentes sur des orbites différentes.

Pour préciser les idées précédentes il nous faut à présent introduire quelques définitions de théorie des invariants.

2.2 La théorie des invariants dans une coquille de noix

Premier point, il faut noter que parler d'invariants en tant que tel n'a pas grand sens. Il convient tout d'abord de définir le groupe des transformations considérées. En effet, pour un tenseur

[3]Ceci n'est pas en opposition avec le caractère intrinsèque des tenseurs. En effet, il ne s'agit pas d'un changement de base, auquel cas l'objet géométrique tenseur reste inchangé même si ses coordonnées rapport à la nouvelle base ne sont plus les mêmes. Il s'agit d'une transformation active et donc d'un nouveau tenseur. En coordonnées, les composantes changeraient mais rapport à une même base.

donné, ses invariants différeront selon que l'on considère l'action des groupes $\mathrm{GL}(d)$, $\mathrm{O}(d)$ ou $\mathrm{SO}(d)$. Quoique fondamentale, cette précision est souvent absente des publications de mécanique.

Une fonction scalaire G-invariante W est définie par:

$$\forall \mathrm{T} \in \mathbb{T},\ W(\mathrm{T}) = W(g \star \mathrm{T}), \forall g \in \mathrm{G}.$$

Deux tenseurs T_1 et T_2 sont reliés par une transformation dans G, si il existe un $g \in \mathrm{G}$ tel que $\mathrm{T}_2 = g \star \mathrm{T}_1$. Si elle existe, cette équivalence sera notée $\mathrm{T}_1 \approx \mathrm{T}_2$. L'ensemble de tous les éléments $\mathrm{T} \in \mathbb{T}$ équivalents à T_1 est la G-orbite de T_1:

$$\mathcal{O}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_1) := \{\mathrm{T} = g \star \mathrm{T}_1 \mid g \in \mathrm{G}\}$$

De ces définitions il en résulte qu'une fonction G-invariante est une fonction qui est constante sur les G-orbites[4].

La propriété *être sur la même orbite* est une relation d'équivalence. On peut donc définir un espace quotient, l'espace d'orbites, où chaque point correspond à une orbite. De fait, reconnaître un élément de $\mathbb{T}$ modulo l'action de G, c'est se donner un paramétrage de l'espace des orbites $\mathbb{T}/\mathrm{G}$. Une fonction G-invariante étant constante sur les orbites, il va donc falloir trouver un ensemble de ces fonctions qui permet de *séparer* les orbites. Ce concept est celui d'une base fonctionnelle [38, 40, 157].

Définition 2.2.1. Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur lequel agit un groupe G. Un ensemble fini $s_1, \ldots, s_k$ de fonctions G-invariantes sur $\mathbb{V}$ est dit être une base fonctionnelle si et seulement si:

$$s_i(v_1) = s_i(v_2),\ \forall i = 1, \ldots, n \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in \mathrm{G},\ v_1 = g.v_2.$$

Une base fonctionnelle est dite *irréductible* si aucun de ses éléments ne peut s'exprimer comme une fonction des autres. Dans cette définition les fonctions de base sont *a priori* quelconques mais, en pratique, les éléments de base sont souvent choisis sous forme polynomiale [38, 39, 133, 151, 152]. Le problème est qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de générer de telles bases de manière minimale. Les approches géométriques utilisées par Wang [151, 152] et Smith [133] pour construire des bases fonctionnelles pour des familles de tenseurs jusqu'à l'ordre 2 s'appuient sur des raisonnements géométriques difficilement généralisables[5] au delà des tenseurs d'ordre 2.

[4] Une excellente introduction à la géométrie des espaces d'orbites peut être trouvée dans l'article Abud and Sartori [2].

[5] Pour être plus spécifique, l'approche de Wang se base sur l'utilisation de "droites" caractéristiques pour paramétrer l'espace d'orbite; tandis que Smith procède par l'établissement du nombre minimal de quantités à connaître pour reconstruire, en coordonnées et dans une configuration donnée, l'ensemble des composante des différents tenseurs. La première approche nécessite de pouvoir associer des éléments géométriques caractéristiques aux espaces $\mathbb{H}^{k>2}$, ce qui n'est pas immédiat du fait de l'absence de "vecteurs propres" pour ces espaces. L'approche de Smith qui est, au moins en apparence, plus algébrique et moins géométriques, nécessite l'analyse de tous les cas de dégénérescences possibles au sein de la famille des tenseurs étudiés. Cette analyse n'est pas aisée pour les espaces $\mathbb{H}^{k>2}$ du fait de la perte de vision géométrique de ces espaces ainsi que de la multiplication du nombre de dégénérescences

Un autre type de base est également fréquemment rencontré en théorie des invariants, il s'agit des bases d'intégrité.

Définition 2.2.2. Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur lequel agit un groupe G. Un ensemble fini $p_1, \ldots, p_k$ de polynômes G-invariants sur $\mathbb{V}$ est dit être une base d'intégrité si et seulement si tout polynôme G-invariant pour $\mathbb{V}$ peut s'exprimer de façon polynomiale en les éléments $p_1, \ldots, p_k$.

En d'autres termes, si P est un polynôme G-invariant, alors on peut le récrire:

$$\forall, \phi \in \mathbb{V}, \quad \mathrm{P}(\phi) = \hat{\mathrm{P}}(p_1(\phi), \ldots, p_k(\phi)),$$

avec $\hat{\mathrm{P}}$ une fonction polynomiale, et $(p_1, \ldots, p_k)$ les éléments de la base d'intégrité.

Une base d'intégrité est dite *irréductible* si aucun de ses éléments ne peut s'exprimer polynômialement en les autres. Toutefois il n'est pas exclu qu'il existe des relations polynomiales entre les éléments de cette base. Ces relations qui sont présentes dans la plupart des algèbres sont désignées sous le nom de *syzygies*, leur détermination peut être un problème difficile.

Plusieurs remarques sont à faire:

1. Un résultat classique de la théorie des invariants nous dit que l'algèbre des polynômes G-invariants sur $\mathbb{V}$ est finiment engendrée si G est un groupe compact, ce qui est le cas de $\mathrm{O}(d)$ et $\mathrm{SO}(d)$;
2. Le choix d'une base d'intégrité impose la contrainte de polynomialité sur les invariants de bases ainsi que sur les relations génératrices. Cette contrainte conduit à des bases de cardinal généralement supérieures à celles bases fonctionnelles [118];
3. Dans le cas d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, les éléments d'une base d'intégrité séparent les orbites[6];
4. Il existe des algorithmes pour construire des bases d'integrités [29, 114, 118].

Dans le cas réel, une base d'intégrité est une base fonctionnelle, mais la réciproque est fausse. Une base d'intégrité génère l'algèbre des polynômes invariants ce que ne fait pas la base fonctionnelle. Vis-à-vis de la séparation des orbite, une base d'intégrité, même minimale, peut contenir de l'information superflue. En revanche, la construction de base d'intégrité est l'objet d'un domaine bien balisé en mathématique, la *théorie classique des invariants*. De fait, parmi tous les types de fonctions invariantes possibles, on va se restreindre aux fonctions polynomiales.

Exemple 2.2.3. On considère le groupe $\mathrm{Z}_2^{\underline{\mathrm{n}}}$ généré par la rotation $\mathbf{Q}(\pi, \underline{\mathrm{n}})$ et qui agit par conjugaison sur $S^2(\mathbb{R}^3)$. Si on se place en coordonnées vis-à-vis de la base orthonormée $(\underline{\mathrm{n}}, \underline{\mathrm{t}_1}, \underline{\mathrm{t}_2})$ on

possibles. Une lecture attentive de Boehler et al. [40] semble montrer que les auteurs ont tenté cette approche avant de capituler devant le nombre de situations dégénérées à considérer.

[6] C'est une conséquence du théorème de Stone-Weirstrass.

a:

$$\mathbf{Q}(\pi,\underline{\mathrm{n}})\mathbf{M}\mathbf{Q}^T(\pi,\underline{\mathrm{n}}) = \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{12} & -m_{13} \\ -m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ -m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix}$$

On en déduit:

- 4 invariants de degré 1:

$$I_1 = \underline{\mathrm{n}} \cdot \mathbf{M} \cdot \underline{\mathrm{n}} \; ; \; J_1 = \underline{\mathrm{t}_1} \cdot \mathbf{M} \cdot \underline{\mathrm{t}_1} \; ; \; K_1 = \underline{\mathrm{t}_2} \cdot \mathbf{M} \cdot \underline{\mathrm{t}_2} \; ; \; L_1 = \underline{\mathrm{t}_1} \cdot \mathbf{M} \cdot \underline{\mathrm{t}_2};$$

- 3 invariants de degré 2:

$$I_2 = \left(\underline{\mathrm{n}} \cdot \mathbf{M} \cdot \underline{\mathrm{t}_1}\right)^2 \; ; \; J_2 = \left(\underline{\mathrm{n}} \cdot \mathbf{M} \cdot \underline{\mathrm{t}_2}\right)^2 \; ; \; K_2 = \left(\underline{\mathrm{n}} \cdot \mathbf{M} \cdot \underline{\mathrm{t}_1}\right)\left(\underline{\mathrm{n}} \cdot \mathbf{M} \cdot \underline{\mathrm{t}_2}\right).$$

Ces éléments constituent une base d'intégrité pour les fonctions polynomiales sur $S^2(\mathbb{R}^3)$ Z_2-invariantes[7] [39]. On remarque que:

1. on a 7 invariants pour 6 composantes tensorielles;
2. les invariants de degrés 2 sont reliés entre eux par la syzygie: $K_2^2 - I_2 J_2 = 0$.

Cette dernière relation montre que le dernier invariant K_2 s'obtient en fonction des autres. Toutefois, comme on va le montrer juste après, si on ne le prend pas en compte la propriété de séparation des orbites de la famille est perdue. Considérons la matrice suivante:

$$\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Sa $\mathrm{Z}_2^{\underline{\mathrm{n}}}$-orbite est constituée de 2 points:

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Z}_2^{\underline{\mathrm{n}}}}(\mathrm{M}_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Cette orbite est caractérisée par le jeu d'invariants suivant:

$$I_1 = 1 \; ; \; J_1 = 4 \; ; \; K_1 = 6 \; ; \; L_1 = 5 \; ; \; I_2 = 4 \; ; \; J_2 = 9 \; ; \; K_2 = 6$$

Ces invariants satisfont la syzygie $K_2^2 - I_2 J_2 = 0$. L'équation précédente admet aussi $K_2 = -6$

[7] Cette base peut également être trouvée en cherchant les invariants isotropes d'un tenseur d'ordre 2 complété par des tenseurs de structure $\mathrm{Z}_2^{\underline{\mathrm{n}}}$-invariants.

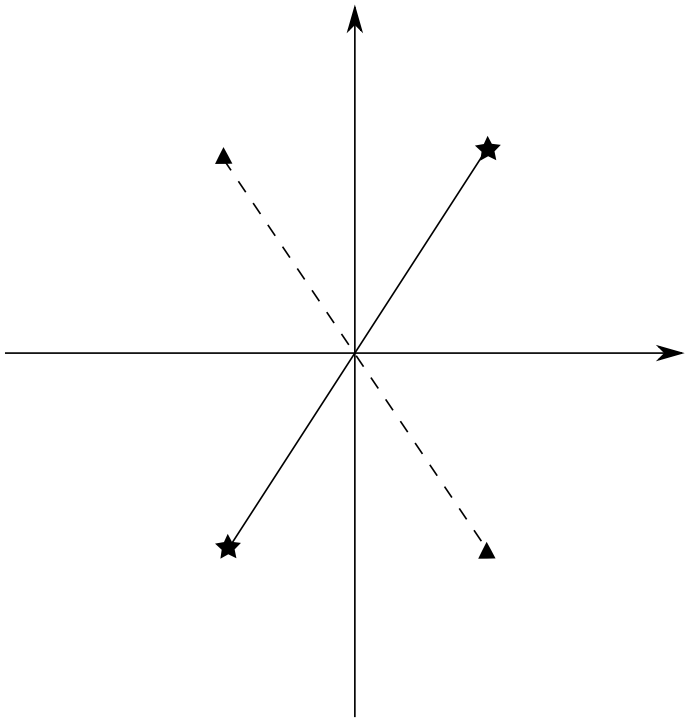


Figure II.2.2: Les points représentés par des étoiles et ceux représentés par des triangles appartiennent à deux Z_2-orbites distinctes. Ces deux orbites partagent le même jeu d'invariants primaires, mais diffèrent quant à l'invariant secondaire.

comme solution. Cette solution correspond à l'orbite

$$\mathcal{O}_{Z_2^n}(\mathrm{M}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \right\}$$

qui est distincte de la précédente. Les 2 orbites ont les mêmes invariants primaires, mais diffèrent quant à la valeur de l'invariant secondaire. On ne peut pas réduire le nombre de séparants polynomiaux à moins de 7 éléments[8].

Les espaces dont l'étude nous intéresse sont généralement réductibles. Ils sont constitués d'une collection de tenseurs irréductibles de différents ordres. La première étape consiste à établir cette décomposition. Dans le cas SO(d), on retrouve alors la décomposition harmonique telle qu'on l'a introduite au chapitre précédent. A partir de cette collection d'espaces irréductibles on va obtenir 2 types d'invariants:

Les invariants propres , ce sont les invariants qui concernent chacune des composantes irré-

[8]On pourrait se demander quelle est la transformation qui manque pour lever la sygyzie, c'est-à-dire pour que les 4 matrices soient dans la même orbite. On voit que pour cela il faudrait une opération qui transforme m_{12} en son opposé, de même pour m_{13}. Ces opérations sont de déterminant -1, c'est-à-dire des éléments de O(6) qui n'ont aucune préimage dans SO(3).

ductibles considérées séparément. On peut les voir comme des normes.

Les invariants joints , ce sont des invariants qui concernent plus d'une composante irréductible à la fois. On peut les voir comme des grandeurs caractérisant l'orientation relative des différents composantes harmoniques.

Exemple 2.2.4. En 3D, l'espace $\mathbb{E}\mathrm{la}$ des tenseurs d'élasticité admet la décomposition harmonique suivante:

$$\mathbb{E}\mathrm{la} \simeq 2\mathbb{H}^0 \oplus 2\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^4 \tag{2.2.1}$$

On a alors:

Les invariants propres , on a des invariants propres pour les 2 espaces $\mathbb{H}^0$, pour les 2 espaces $\mathbb{H}^2$ et l'espace $\mathbb{H}^4$;

Les invariants joints , on a des invariants joints liés aux couples $\mathbb{H}^2_a \oplus \mathbb{H}^2_b$, $\mathbb{H}^2_a \oplus \mathbb{H}^4$, $\mathbb{H}^2_b \oplus \mathbb{H}^4$ ainsi qu'au triplet $\mathbb{H}^2_a \oplus \mathbb{H}^2_b \oplus \mathbb{H}^4$.

Exemple 2.2.5. De manière plus explicite, on peut regarder le cas suivant qui est contenu dans celui du tenseur d'élasticité[9]. On considère l'action de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$:

$$g \star (\underset{\sim}{\mathrm{A}}, \underset{\sim}{\mathrm{B}}) := (g \star \underset{\sim}{\mathrm{A}}, g \star \underset{\sim}{\mathrm{B}})$$

On note qu'un élément de $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$ est de dimension 10, et un calcul montre que l'espace d'orbite $(\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2)/\mathrm{SO}(3)$ dépend de 7 "paramètres".

Dans ce cas, on sait (voir Smith [132], Young [160]) qu'une base d'intégrité est donnée par les 8 invariants suivants:

$$\begin{aligned}
&I_2 := \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\mathrm{A}}^2), \quad J_2 := \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\mathrm{B}}^2), \quad K_2 := \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\mathrm{A}}\underset{\sim}{\mathrm{B}}) \\
&I_3 := \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\mathrm{A}}^3), \quad J_3 := \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\mathrm{B}}^3), \quad K_3 := \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\mathrm{A}}^2\underset{\sim}{\mathrm{B}}), \quad L_3 := \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\mathrm{A}}\underset{\sim}{\mathrm{B}}^2) \\
&I_4 := \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\mathrm{A}}^2\underset{\sim}{\mathrm{B}}^2)
\end{aligned}$$

Les invariants I_2, I_3, J_2, J_3 sont des invariants propres et les restants sont des invariants joints. On a, de plus, la *syzygie* suivante:

$$\begin{aligned}
&-144I_4^3 + (180I_2J_2 + 36K_2^2)I_4^2 \\
&+ (-72I_2^2J_2^2 - 36I_2J_2K_2^2 - 72I_2J_3K_3 + 72I_2L_3^2 - 72J_2I_3L_3 + 72J_2K_3^2 + 72K_2I_3J_3 - 72K_2K_3L_3)I_4 \\
&+ 9I_2^3J_2^3 + 2I_2^3J_3^2 + 9I_2^2J_2^2K_2^2 + 24I_2^2J_2J_3K_3 - 18I_2^2J_2L_3^2 - 12I_2^2K_2J_3L_3 \\
&+ 24I_2J_2^2I_3L_3 - 18I_2J_2^2K_3^2 - 24I_2J_2K_2I_3J_3 + 24I_2K_2^2J_3K_3 + 2J_2^3I_3^2 - 12J_2^2K_2I_3K_3 \\
&+ 24J_2K_2^2I_3L_3 - 16K_2^3I_3J_3 - 12I_3^2J_3^2 + 72I_3J_3K_3L_3 - 48I_3L_3^3 - 48J_3K_3^3 + 36K_3^2L_3^2 = 0
\end{aligned}$$

[9] Cet exemple est issu de [112].

Cette relation montre que l'invariant I_4 s'obtient en fonction des autres. De fait, I_4 dépend des 7 "paramètres": $(I_2, J_2, K_2, I_3, J_3, K_3, L_3)$ via la relation polynomiale précédente. Toutefois, de la même manière que dans l'exemple précédent, on peut construire des exemples explicites montrant que l'on ne peut se passer de I_4 pour distinguer les orbites.

Remarque 2.2.6. Une remarque fréquemment entendue est qu'il existe 18 invariants pour le tenseur d'élasticité. L'argument est que la dimension d'$\mathbb{E}$la moins les 3 paramètres de $\mathrm{SO}(3)$ donne 18. Il est à noter que l'espace d'orbite $\mathbb{E}\mathrm{la}/\mathrm{SO}(3)$ n'est pas une variété différentielle. Les éléments $\mathbb{E}$la ayant différents types d'isotropie, la dimension de l'espace tangent n'est pas la même en tout point (c.f. Figure II.2.3 pour la représentation graphique dans le cas 2D). Par exemple, la strate générique de $\mathbb{E}\mathrm{la}/\mathrm{SO}(3)$ est de dimension 18 tandis que la strate isotrope est de dimension 2.

Pour éviter ces problèmes on peut se restreindre à l'espace d'orbite des éléments de la strate générique (matériaux tricliniques). Les éléments ont tous la même isotropie, l'espace quotient est une variété différentiable. Localement (espace tangent), cette variété ressemble à $\mathbb{R}^{18}$, et la donnée de 18 quantités permet de paramétrer *localement* les orbites.

Pour avoir un système de coordonnées *globales* il faut trouver un espace euclidien dans lequel plonger notre variété. La borne optimale de Whitney nous dit que l'on peut avoir besoin de 36 dimensions pour cela. De manière plus imagée la sphère est une variété à 2 dimensions, localement on a besoin que de 2 informations mais son espace de plongement minimal nécessite une troisième dimension[10] Dans le cas de l'espace d'orbite, la situation est aggravée du fait qu'il ne s'agit pas d'une variété différentiable mais d'une variété stratifiée, un orbitfold [2]. On ne connaît pas la dimension minimale de l'espace de plongement, mais il est sûr qu'elle n'est pas de 18[11].

État de l'art en mécanique des milieux continus

Dans $\mathbb{R}^3$, des bases d'intégrité et fonctionnelles sont connues pour des fonctions tensorielles à valeurs scalaires d'un nombre arbitraire de vecteurs, et de tenseurs d'ordre 2 antisymétriques et symétriques [39, 98, 161], c'est-à-dire pour des tenseurs jusqu'à l'ordre 2. Aux ordres supérieurs, les résultats sont rares et restreints à des situations particulières[12]. La raison est que les approches géométriques qui sont utilisées pour les tenseurs d'ordre 2 ne fonctionnent plus. Même si cela n'est jamais clairement énoncé dans les publications classiques du domaine, ce point était clair à leurs auteurs [40, 131, 134]. De fait, dès qu'il s'agit d'obtenir des résultats pour des tenseurs d'ordre supérieur à 2, il est nécessaire de revenir à une approche mathématique et de travailler avec la *théorie classique des invariants*.

La première référence à l'étude des invariants du tenseur d'élasticité semble remonter à la publi-

[10] Voire de 4 dimensions dans le cas de la bouteille de Klein.
[11] Le calcul de la série d'Hilbert-Poincaré nous montre que l'algèbre est liée.
[12] L'action n'est alors pas $\mathrm{O}(3)$ mais $\mathrm{O}(2)$ (ou un sous-groupe)[66, 90], ou encore $\mathrm{O}(6)$ (ou un sous-groupe)[39, 162].

cation de Tsai et Pagano en 1968 [143] qui a ensuite inspiré d'autres travaux sur cette thématique dans les années 70 [76, 148, 159]. Ces travaux concernent essentiellement l'élasticité plane même si les auteurs essaient ensuite d'étendre les résultats 2D à la 3D. Peut être pour des questions de communauté, ces travaux seront ensuite redécouverts à de nombreuses reprises [37, 150, 161]. Récemment Forte and Vianello [68] ont proposé une revue de ces différentes approches dans un formalisme (déjà utilisé en 1997 [150]) qui utilise la décomposition de $\mathbb{E}$la en irréductibles. La question de la 3D est plus complexe. Dans les années 80, Betten [35, 36, 162] s'attelle à la tache de dériver les invariants du tenseur 3D. L'approche se base sur l'utilisation d'un polynôme caractéristique généralisé associé à la représentation matricielle en 6D du tenseur d'élasticité[13]. Zheng et Betten [162] annoncent la résolution de la question dans un article à venir, article qui ne verra pas le jour. Cette approche est toutefois ambiguë car si les coefficients du polynôme caractéristique sont bien des invariants, la question de savoir *de quoi* n'est jamais précisé. En pratique, ce sont des invariants pour $\mathrm{O}(6)$, ils sont donc invariants pour $\mathrm{SO}(3)$, mais le contraire étant faux ils ne peuvent constituer une base d'intégrité pour $\mathrm{SO}(3)$. De même, toutes les approches basées sur la décomposition de Kelvin sont intrinsèquement basées sur la géométrie de $\mathrm{O}(6)$ et non sur celle de $\mathrm{SO}(3)$.

Le flambeau sera ensuite repris par Boehler et al. en 1994 [40] avec un changement radical de stratégie. Au lieu de considérer le tenseur d'élasticité en tant qu'application linéaire (géométrie de $\mathrm{O}(6)$) ils le considèrent comme un objet géométrique en tant que tel et établissent sa décomposition $\mathrm{SO}(3)$-irréductible. De fait, la question des invariants du tenseur de d'élasticité devient celle des invariants des éléments $(\lambda, \mu, \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\approx}{D})$ de sa décomposition harmonique. En effectuant un retour à la *théorie classique des invariants* ils établissent pour la première fois en mécanique une base d'intégrité de $\mathbb{H}^4$ qui contient 9 éléments. Toutefois, en plus des invariants propres de $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$ et $\underset{\approx}{D}$, il faut déterminer leurs invariants joints. Si une base d'intégrité pour les invariants joints de $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$ était bien connue, celles pour ceux de $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^4$ et $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^4$ ne l'étaient pas. Estimant que la détermination de ces bases n'était pas possible avec leur technique de calcul, ils se sont restreints à la détermination d'une base d'intégrité dans une situation particulière du problème. Toutefois, cette base, dite faible, ne sépare qu'un sous-ensemble des matériaux élastiques tricliniques et est donc d'un intérêt pratique très limité.

A l'opposé, la situation dans $\mathbb{R}^2$ est relativement simple. De fait, nous pouvons mener une étude complète de la reconstruction du tenseur d'élasticité à partir de ses invariants. Cet exemple que nous avons récemment publié [20] illustre les possibilités de l'approche.

[13] Cette approche a été utilisée par Verchery en 1978, ce que semble ignorer Betten vu qu'il utilise en 1982 une version classique du polynôme caractéristique.

2.3 Reconstruction invariante du tenseur d'élasticité 2D

Dans cette section, nous allons considérer l'ensemble du problème formulé dans un espace 2D. Nous allons successivement présenter la décomposition harmonique de l'espace de travail, les invariants associés ainsi que les relations polynomiales qui caractérisent les différentes classes de symétrie. Dans un deuxième temps, nous regarderons le sens mécanique des invariants du tenseur d'élasticité et nous proposerons finalement une méthode de reconstruction du tenseur à partir de ces quantités.

2.3.1 Décomposition harmonique

De manière à différencier l'espace vectoriel des tenseurs 2D de celui des tenseurs 3D, nous le noterons de la manière suivante $\mathbb{E}\mathrm{la}^\flat$. La décomposition harmonique cette espace est la suivante:

$$\mathbb{E}\mathrm{la}^\flat \simeq 2\mathbb{K}_0 \oplus \mathbb{K}_2 \oplus \mathbb{K}_4.$$

Les espaces $\mathbb{K}^k$ sont les équivalents 2D des espaces $\mathbb{H}^k$ que nous avons introduit au chapitre précédent. Ils sont $\mathrm{O}(2)$-irréductibles et ont comme caractéristique de contenir les tenseurs complètement symétriques et de trace nulle. La différence principale réside dans leur dimension[14]:

$$\dim \mathbb{K}^k = \begin{cases} 2, & k \geq 1 \\ 1, & k = 0, -1 \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Ils sont de dimensions constantes, tandis qu'en 3D la dimension croît avec l'ordre du tenseur.

Pour tout $n \geq 1$, l'action de $\mathrm{O}(2)$ sur $\mathbb{K}^n$ est donnée par ρ_n:

$$\rho_n(r_\theta) := \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}, \quad \rho_n(\sigma_x) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

avec r_θ une rotation d'angle θ et σ_x la réflexion par rapport à l'axe des abscisses. L'action sur $\mathbb{K}^0$ est l'identité et celle sur $\mathbb{K}^{-1}$ est donnée par le déterminant de la transformation.

En 2D, on a un seul espace harmonique d'ordre 2 présent dans la décomposition. En conséquence, le choix d'un isomorphisme explicite se réduit au choix des paramètres isotropes. Nous considérerons par la suite la décomposition suivante qui sépare les contributions déviatoriques des contributions sphériques:

$$C_{ijkl} = \mathrm{D}_{ijkl} + \frac{1}{6}(\delta_{ij}\mathrm{a}_{kl} + \delta_{kl}\mathrm{a}_{ij} + \delta_{ik}\mathrm{a}_{jl} + \delta_{jl}\mathrm{a}_{ik} + \delta_{jk}\mathrm{a}_{il} + \delta_{il}\mathrm{a}_{jk}) + K\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ij}\delta_{kl}).$$

[14] L'espace unidimensionnel $\mathbb{K}^{-1}$ contient les pseudo-scalaires, i.e. des quantités scalaires dont le signe change en fonction de l'orientation de l'espace.

2.3.2 Base d'intégrité

Des bases d'intégrité pour l'action de SO(2) et de O(2) sont connues depuis la seconde moitié des années 90 [37, 150, 161]. Même si leurs expressions diffèrent un peu dans ces publications, ces bases sont constituées des invariants polynomiaux suivants:

- 4 invariants simples: 2 de degré 1 et 2 de degré 2

$$I_1 = K, \quad J_1 = G, \quad I_2 = a_{pq}a_{pq}, \quad J_2 = D_{pqrs}D_{pqrs},$$

- 2 invariants joints de degré 3

$$I_3 = a_{pq}D_{pqrs}a_{rs}, \quad J_3 = R_{pq}a_{qr}D_{prst}a_{st},$$

  avec

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux invariants joints ne sont pas indépendants mais liés par la relation polynomiale, ou *syzygie*, suivante:

$$2I_3^2 + 2J_3^2 - I_2^2 J_2 = 0.$$

A partir de ces invariants on peut démontrer que[15]:

- $(I_1, J_1, I_2, J_2, I_3)$ est une base d'intégrité pour l'action de O(2);
- $(I_1, J_1, I_2, J_2, I_3, J_3)$ est une base d'intégrité pour l'action de SO(2).

Dans le premier cas, l'algèbre est libre, avec toutefois l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante : $2I_3^2 - I_2^2 J_2 \geq 0$. Dans le cas de l'action de SO(2), l'algèbre n'est plus libre, la syzygie précédemment évoquée liant les invariants I_3 et J_3.

Les démonstrations peuvent être trouvées dans [150]. Un autre jeu d'invariants du tenseur d'élasticité peut également être rencontré dans la littérature sous la désignation d'invariants polaires [68, 145, 148]. Ces invariants sont relativement utilisés dans le domaine de la mécanique des plaques, notamment pour l'optimisation de stratifiés [87]. Contrairement aux éléments de nos bases d'intégrité, les invariants polaires ne sont pas polynomiaux mais sont des fonctions non polynomiales de ces éléments. On peut construire l'ensemble d'invariants non-polynomiaux suivant:

- 4 invariants simples de degré 1:

$$i_1 = K, \quad j_1 = G, \quad i_2 = \sqrt{I_2}, \quad j_2 = \sqrt{J_2},$$

[15] Le choix d'un groupe plutôt qu'un autre dépend des règles du jeu que l'on se fixe. A-t-on seulement le droit de tourner l'échantillon ? ou bien peut-on également le pivoter ?

- 2 invariants joints de degré 1:

$$i_3 = \frac{\sqrt{2}I_3}{I_2\sqrt{J_2}}, \quad j_3 = \frac{\sqrt{2}J_3}{I_2\sqrt{J_2}}$$

Ces dernières quantités vérifient la relation:

$$i_3^2 + j_3^2 = 1$$

Exprimée ainsi la syzygie précédente devient claire, et on peut interpréter les invariants joints i_3 et j_3 comme les cos et sin d'un certain *angle* de décalage entre $\underset{\sim}{\mathrm{a}}$ et $\underset{\approx}{\mathrm{D}}$. Cet angle est alors obtenu comme $\phi = \arctan(\frac{j_3}{i_3})$. On retrouve ainsi les invariants *polaires* de Verchery [56, 148].

2.3.3 Classes de symétrie et invariants

Comme montré dans de nombreuses publications [29, 68, 78, 150], pour l'action de $\mathrm{O}(2)$, l'espace des tenseur d'élasticité 2D est divisé en 4 strates[16]:

$$\mathbb{E}\mathrm{la}^\flat = \Sigma_{[\mathrm{Z}_2]} \cup \Sigma_{[\mathrm{D}_2]} \cup \Sigma_{[\mathrm{D}_4]} \cup \Sigma_{[\mathrm{O}(2)]}$$

où la notation $\Sigma_{[\mathrm{G}]}$ indique l'ensemble des tenseurs dont le groupe de symétrie est conjugué à G. A priori, la structure du diagramme de bifurcation est, dans ce cas linéaire:

$$\Sigma_{[\mathrm{Z}_2]} \longrightarrow \Sigma_{[\mathrm{D}_2]} \longrightarrow \Sigma_{[\mathrm{D}_4]} \longrightarrow \Sigma_{[\mathrm{O}(2)]}$$

L'annulation des invariants de la base d'intégrité pilote l'évolution entre les différentes classes de symétrie. Le diagramme suivant indique ces transitions en fonction des relations entre les différents invariants:

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma_{[\mathrm{Z}_2]} \arrow[dl, "J_2=0"'] \arrow[dr, "J_3=0,\ J_2\neq 0"] & \\
\Sigma^d_{[\mathrm{D}_2]} \arrow[ddr, "I_2=0"'] & & \Sigma^g_{[\mathrm{D}_2]} \arrow[d, "I_2=0"] \\
 & & \Sigma_{[\mathrm{D}_4]} \arrow[dl, "J_2=0"] \\
 & \Sigma_{[\mathrm{O}(2)]} &
\end{tikzcd}$$

[16] Si on considère à la place l'action de $\mathrm{SO}(2)$, nous n'aurons plus que trois strates $\Sigma_{[\mathrm{Z}_2]}$, $\Sigma_{[\mathrm{Z}_4]}$, $\Sigma_{[\mathrm{SO}(2)]}$.

Sur ce diagramme, nous avons découpé la strate $\Sigma_{[\mathrm{D}_2]}$ en 2 sous-strates[17]:

$$\Sigma_{[\mathrm{D}_2]} = \Sigma^g_{[\mathrm{D}_2]} \cup \Sigma^d_{[\mathrm{D}_2]}$$

$\Sigma^g_{[\mathrm{D}_2]}$ Les éléments de cet ensemble sont des tenseurs orthotropes *génériques*. Ces tenseurs sont obtenus à partir d'éléments tricliniques génériques en imposant les restrictions liées à la symétrie orthotrope. Dans cette situation les classes de symétrie des tenseurs $\underset{\approx}{\mathrm{D}}$ et $\underset{\sim}{a}$ sont respectivement $[\mathrm{D}_4]$ et $[\mathrm{D}_2]$.

$\Sigma^d_{[\mathrm{D}_d]}$ Les éléments de cet ensemble sont des tenseurs orthotropes *non-génériques*. Ils sont obtenus en imposant des contraintes supplémentaires par rapport à la seule contrainte d'invariance orthotrope. Ces tenseurs correspondent à ce que Vannucci appelle la R_0-orthotropie [144]. Dans cette situation non générique, les classes de symétrie de $\underset{\approx}{\mathrm{D}}$ et $\underset{\sim}{a}$ sont, respectivement, $[\mathrm{O}(2)]$ et $[\mathrm{D}_2]$.

Dans le cas de l'action du groupe $\mathrm{O}(2)$, l'espace des orbites a la structure géométrique suivante:

[17] La notion de "sous-strate" est ici clairement abusive, nous l'avons désignée ainsi faute de mieux. Une description géométrique propre de ces "sous-strates" est à définir proprement.

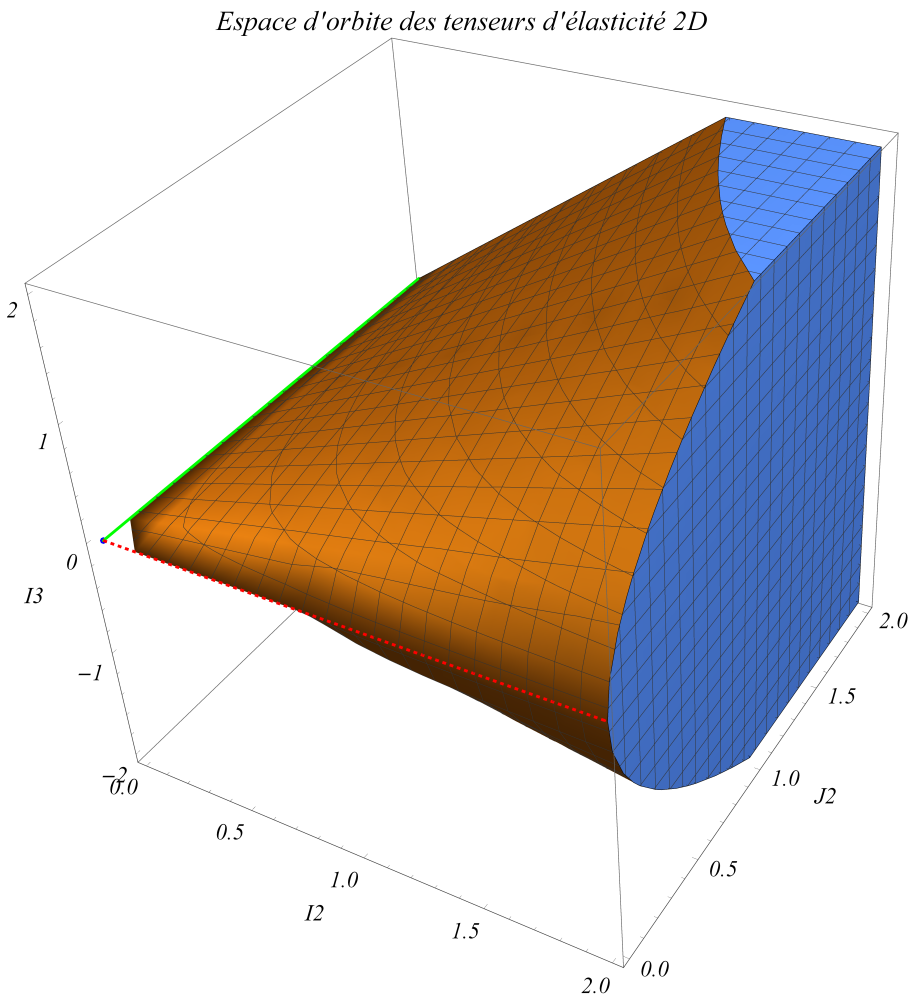


Figure II.2.3: *Espace des* $\mathrm{O}(2)$*-orbites.* Chaque point de cet espace stratifié correspond à une $\mathrm{O}(2)$-orbite, c'est-à-dire à un matériau élastique. La strate générique des matériaux monocliniques est l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ contenu sous la surface. La surface gauche limitant le domaine précédent constitue la strate des matériaux orthotropes. La ligne en pointillés rouge sur cette surface correspond aux lieux des matériaux orthotropes dégénérés. La ligne verte quant à elle est la strate des matériaux tétragonaux. Finalement le point correspond aux matériaux isotropes.

Il est à noter que si dans le cas 2D il n'existe qu'une seule situation dégénérée, en 3D ce nombre monte à 117 [17]. L'étude systématique de ces situations dégénérées est un sujet d'étude encore relativement vierge. Son étude pourrait avoir des intérêts tant pratiques (conception de matériaux aux propriétés atypiques [77, 128]) que théoriques vis-à-vis de la construction de bases fonctionnelles pour le tenseur d'élasticité. On reviendra sur ces point en ouverture de ce manuscrit en Chapitre 3.4.4.

2.3.4 Interprétation mécanique

Dans cette section, nous allons essayer de donner un sens mécanique aux éléments intervenant dans la décomposition harmonique du tenseur d'élasticité. Pour ce faire, nous allons définir des observables du tenseur d'élasticité ayant un sens mécanique. La première observable, scalaire, sera l'énergie de déformation élastique W, et la seconde, tensorielle, le tenseur des contraintes[18] $\underset{\sim}{\sigma}$.

Observation de la contrainte

On décompose $\underset{\sim}{\varepsilon}$ en sa partie déviatorique et sphérique:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^d_{ij} + \varepsilon^s_{ij} \quad \text{avec} \quad \varepsilon^d_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{pp}}{2}\delta_{ij}, \quad \varepsilon^s_{ij} = \frac{\varepsilon_{pp}}{2}\delta_{ij}$$

et on calcule $\underset{\sim}{\sigma}$:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon^d_{kl} + \frac{1}{6}\left(a_{kl}\varepsilon^d_{kl}\delta_{ij} + 2(a_{ip}\varepsilon^d_{pj} + a_{jp}\varepsilon^d_{pi})\right) + 2G\varepsilon^d_{ij} + \varepsilon_{pp}\left(\frac{1}{2}a_{ij} + K\delta_{ij}\right),$$

en séparant, les parties déviatorique et sphérique[19]:

$$\begin{cases} \sigma^d_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon^d_{kl} + 2G\varepsilon^d_{ij} + \frac{1}{2}\varepsilon_{pp}a_{ij} \\ \sigma^s_{ij} = \left(\frac{1}{2}a_{pq}\varepsilon^d_{pq} + K\varepsilon_{pp}\right)\delta_{ij} \end{cases}.$$

Matriciellement, cela donne:

$$\begin{pmatrix} \sigma^d_{ij} \\ \sigma^s_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{ijkl} & G_{ijkl} \\ G^T_{ijkl} & S_{ijkl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^d_{kl} \\ \varepsilon^s_{kl} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} H_{ijkl} &= \mathrm{D}_{ijkl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ij}\delta_{kl}); \\ G_{ijkl} &= \frac{1}{2}\mathrm{a}_{ij}\delta_{kl}; \\ S_{ijkl} &= K\delta_{ij}\delta_{kl}. \end{aligned}$$

Cette approche consiste en la décomposition harmonique de l'endomorphisme autoadjoint $\mathcal{E}^s(\mathbb{K}^2 \oplus \mathbb{K}^0)$ de la manière suivante:

$$\mathcal{E}^s(\mathbb{K}^2 \oplus \mathbb{K}^0) = \mathcal{E}^s(\mathbb{K}^2) \oplus \mathcal{E}^s(\mathbb{K}^0) \oplus \mathcal{L}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^0).$$

[18] On aurait tout aussi bien pu prendre $\underset{\sim}{\varepsilon}$ comme observable. Dans ce cas, on observerait les invariants du tenseur des souplesses.

[19] Les calculs font apparaître le terme $\frac{1}{3}\left(a_{ip}\varepsilon^d_{pj} + a_{jp}\varepsilon^d_{pi} - a_{kl}\varepsilon^d_{kl}\delta_{ij}\right)$ qui est identiquement nul.

De manière explicite:

- $\underset{\approx}{\mathrm{H}}$ est un élément de $\mathcal{E}^s(\mathbb{K}^2)$, l'espace des endomorphismes symétriques de $\mathbb{K}^2$;
- $\underset{\approx}{\mathrm{G}}$ est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^0)$, l'espace des applications linéaires de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}^0$;
- $\underset{\approx}{\mathrm{S}}$ est un élément de $\mathcal{E}^s(\mathbb{K}^0)$, l'espace des endomorphismes symétriques de $\mathbb{K}^0$.

Ceci nous montre que le tenseur $\underset{\approx}{\mathrm{D}} \in \mathbb{K}^4$ est lié à la partie anisotrope du cisaillement et que $\underset{\sim}{\mathrm{a}} \in \mathbb{K}^2$ couple les composantes sphérique et déviatorique des tenseurs. De fait, l'invariant I_2 mesure l'intensité de ce couplage, tandis que J_2 est le carré de la norme de la composante anisotrope du cisaillement.

Observation de l'énergie élastique

Si on injecte l'expression de la décomposition harmonique dans l'énergie élastique, et en séparant les contributions sphérique et déviatorique[20]:

$$2W = D_{ijkl}\varepsilon^d_{ij}\varepsilon^d_{kl} + 2G\varepsilon^d_{pq}\varepsilon^d_{pq} + a_{pq}\varepsilon^d_{pq}\varepsilon_{rr} + K\varepsilon_{pp}\varepsilon_{qq} \tag{2.3.2}$$

L'énergie élastique se décompose finalement en 3 parties:

$$W = W^d + W^c + W^s$$

- Une énergie déviatorique de cisaillement:

$$2W^d = D_{ijkl}\varepsilon^d_{ij}\varepsilon^d_{kl} + 2G\varepsilon^d_{pq}\varepsilon^d_{pq}$$

- Une énergie de couplage entre cisaillement et variation de volume:

$$2W^c = a_{pq}\varepsilon^d_{pq}\varepsilon_{rr}$$

- Une énergie sphérique de compressibilité:

$$2W^s = K\varepsilon_{pp}\varepsilon_{qq}$$

On peut constater que l'énergie sphérique est toujours isotrope, tandis que l'énergie de couplage est toujours anisotrope et donc nulle dans le cas isotrope. L'énergie déviatorique, quant à elle, se décompose en une contribution anisotrope et une partie isotrope. De fait:

- J_1 est le module de cisaillement isotrope, et J_2 le carré de la norme du tenseur de cisaillement anisotrope;

[20] Dans le calcul un terme proportionnel à $a_{ip}\varepsilon^d_{pj}\varepsilon^d_{ij}$ apparaît. Ce terme est nul en 2D, mais pas en 3D.

- I_1est le module de compressibilité;
- I_2 est le carré de la norme du tenseur de couplage entre cisaillement et compression.

Les deux derniers invariants, I_3 et J_3, sont plus durs à interpréter...On en verra une construction plus loin.

Les différents types d'anisotropie peuvent donc être classés en fonction de ces différents effets:

	Cisaillement	Couplage	Compressibilité	Déphasage
$\Sigma_{[\mathrm{Z}_2]}$	Anisotrope : $[\mathrm{D}_4]$	Oui : $[\mathrm{D}_2]$	Isotrope: $[\mathrm{O}(2)]$	ϕ
$\Sigma^g_{[\mathrm{D}_2]}$	Anisotrope: $[\mathrm{D}_4]$	Oui : $[\mathrm{D}_2]$	Isotrope: $[\mathrm{O}(2)]$	$\phi = \{0, \pi\}$
$\Sigma^d_{[\mathrm{D}_2]}$	Isotrope: $[\mathrm{O}(2)]$	Oui: $[\mathrm{D}_2]$	Isotrope: $[\mathrm{O}(2)]$	$\times$
$\Sigma_{[\mathrm{D}_4]}$	Anisotrope: $[\mathrm{D}_4]$	Non: $[\mathrm{O}(2)]$	Isotrope : $[\mathrm{O}(2)]$	$\times$
$\Sigma_{[\mathrm{O}(2)]}$	Isotrope: $[\mathrm{O}(2)]$	Non: $[\mathrm{O}(2)]$	Isotrope: $[\mathrm{O}(2)]$	$\times$

$\times$ indique que ce paramètre n'a pas de sens dans ce cas là. Les classes $[\mathrm{D}_4]$ et $[\mathrm{O}(2)]$ sont caractérisées par la nullité du terme de couplage[21]. De fait, pour ces classes, la nature de l'état de contrainte est identique à celui de la déformation. Les éléments dégénérés appartenant à la $\Sigma^d_{[\mathrm{D}_2]}$ se situent à mi-chemin entre les comportements orthotrope et isotrope car ils se comportent comme des tenseurs isotropes présentant un comportement couplé. Notamment, dans ce cas, le module de Young est isotrope [77], et ce type de comportement serait caractéristique du papier [120, 147].

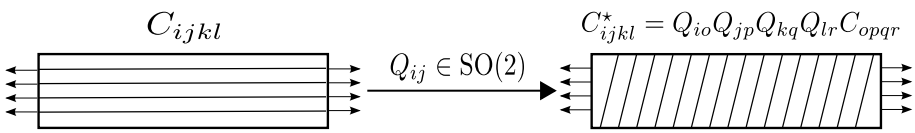
2.3.5 Reconstruction du tenseur d'élasticité

Dans le cas 2D, il est facile d'imaginer, au moins théoriquement, des expériences pour mesurer directement les invariants.

Mesure

On considère un repère fixe de l'espace ainsi qu'un matériau homogène anisotrope que l'on désire tester. On suppose que l'on ne connaît rien de sa microstructure, les seuls informations que l'on peut avoir sur le matériau sont des résultats d'expériences. Un premier échantillon est prélevé avec une orientation quelconque dans la matière. L'orientation de cet échantillon servira de référence pour les prélèvements ultérieurs. A partir de ce premier prélèvement, on en effectue un deuxième dont l'orientation diffère d'un angle θ par rapport au premier. Les différents échantillons sont ensuite testés dans un dispositif d'essai fixe. Ainsi, seule change l'orientation du matériau entre 2 expériences.

[21] La même situation se produit en 3D vis-à-vis des classes $[\mathcal{O}]$ et $[\mathrm{SO}(3)]$.



On introduit les fonctions suivantes qui expriment le tenseur des contraintes et l'énergie élastique en fonction de θ et de $\underset{\sim}{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\sigma}(\theta; \underset{\sim}{\varepsilon}) = \underset{\sim}{\sigma}(\theta; \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}) &= \underset{\approx}{\mathrm{C}}(\theta) : \underset{\sim}{\varepsilon}; \\ W(\theta; \underset{\sim}{\varepsilon}) = W(\theta; \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}) &= \frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\approx}{\mathrm{C}}(\theta) : \underset{\sim}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

avec:

$$\underset{\approx}{\mathrm{C}}(\theta) = Q \star \underset{\approx}{\mathrm{C}}(0).$$

On peut alors montrer que I_1 est l'énergie élastique associée à une déformation équibiaxiale:

$$I_1 = K = \frac{1}{2}W(0; 1, 1, 0)$$

Pour mesurer J_1 il nous faut isoler la partie isotrope de l'énergie élastique associée à un essai de cisaillement simple. Pour ce faire, il suffit de réaliser 2 mesures pour 2 échantillons différents d'une rotation de $\frac{\pi}{4}$:

$$J_1 = G = \frac{1}{4}\left(W(0; 0, 0, 1) + W(\frac{\pi}{4}; 0, 0, 1)\right)$$

Les autres invariants étant associés à des caractéristiques anisotropes, leur mesure implique l'utilisation du tenseur des contraintes:

$$I_2 = \left\|\underset{\sim}{\sigma}^d(0; 1, 1, 0)\right\|^2 \quad ; \quad J_2 = \frac{1}{2}\left(\left\|\underset{\sim}{\sigma}^d(0; 0, 0, 1)\right\|^2 + \left\|\underset{\sim}{\sigma}^d\left(\frac{\pi}{4}; 0, 0, 1\right)\right\|^2\right) - 8J_1^2$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme de Frobenius. On observe que la quantité $J_2 + 8J_1^2$ est une norme du tenseur de *cisaillement* du matériau.

En ce qui concerne les invariants joints, leur calcul se fait en plusieurs étapes. Dans un premier temps, on détermine l'expression de a_{pq} pensée comme un tenseur de contrainte déviatorique[22]:

$$\underset{\sim}{\mathrm{a}} = \underset{\sim}{\sigma}^d(0; 1, 1, 0),$$

et on l'insère, en tant que déformation, dans l'énergie élastique:

$$2W(0, a_1, -a_1, a_2) = \underset{\sim}{\mathrm{a}} : \underset{\sim}{\sigma}(0; a_1, -a_1, a_2) = D_{ijkl}a_{ij}a_{kl} + Ga_{pq}a_{pq}$$

[22] On fait abstraction des unités pour cela.

et donc:

$$I_3 = 2W(0, \underset{\sim}{a}) - J_1 I_2.$$

La quantité $J_1 I_2$ est l'énergie de déformation élastique d'un matériau isotrope chargé en déformation par $\underset{\sim}{a}$:

$$2W(0, \underset{\sim}{a})^{\mathrm{O}(2)} = J_1 I_2.$$

Donc

$$I_3 = 2\left(W(0, \underset{\sim}{a}) - W(0, \underset{\sim}{a})^{\mathrm{O}(2)}\right)$$

ce qui donne un sens physique à I_3. Il mesure, dans un chargement par $\underset{\sim}{a}$, la partie anisotrope de l'énergie de déformation élastique.

Le calcul de J_3 est similaire:

$$\underset{\sim}{a}^\star : \underset{\sim}{\sigma}(0; \underset{\sim}{a}) = R_{ip} a_{pj} D_{ijkl} a_{kl} + G R_{ip} a_{pj} a_{ij} = J_3$$

avec $\underset{\sim}{a}^\star = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{a}$, et la propriété $\underset{\sim}{a}^\star : \underset{\sim}{a} = 0$ signifiant que $\underset{\sim}{a}^\star$ est orthogonal à $\underset{\sim}{a}$. D'un point de vue pratique, l'imposition expérimentale d'un état de déformation associé à $\underset{\sim}{a}$ ne semble pas évident. Numériquement, on s'en sort simplement via l'application de conditions en déplacements homogènes au contour [80, 89].

Remarque 2.3.1. La réalisation d'essais mécaniques permettant, en pratique, la mesure de ces invariants est loin d'être triviale. Le développement de conditions de contour enrichies dans le cadre expérimental serait d'un grand intérêt pratique. Dans le cadre d'un collaboration avec M. Poncelet du LMT Cachan [26], nous regardons actuellement comment concevoir de tels essais. De même, il pourrait être intéressant de pouvoir piloter les essais en force plutôt qu'en déplacement, ceci de manière à imposer un état de contrainte homogène. L'avantage serait alors de pouvoir mesurer les champs de déformation. De fait, ce qu'on observerait serait les invariants du tenseur des souplesses et non ceux du tenseur d'élasticité.

Remarque 2.3.2. Ici les résultats sont présentés dans le cas d'un matériau homogène inconnu dont on cherche à retrouver les propriétés élastiques. C'est d'ailleurs pour cela que l'on parle de conditions de contour homogènes. En effet, l'homogénéité du matériau fait que l'on n'a pas de soucis de convergence. On pourrait également appliquer la même méthode à la cellule élémentaire d'un matériau hétérogène périodique chargé à partir de conditions periodiques, auquel cas on obtiendrait les invariants du tenseur d'élasticité effectif.

A partir de la mesure de ces 6 quantités, il nous reste maintenant à reconstruire le tenseur d'élasticité dans un repère adapté.

Reconstruction tensorielle

La reconstruction du tenseur se fait en 2 étapes. Tout d'abord, il nous faut reconstruire une forme normale de ce tenseur, c'est-à-dire obtenir une représentation matricielle de celui-ci dans une base particulière. Généralement, cette base particulière est celle qui va maximiser le nombre de zéros dans la matrice associée. Pour les classes de symétrie $[\mathrm{D}_k]$, ces bases coïncident avec les éléments de symétrie de la microstructure. Dans les cas $[\mathrm{Z}_k]$, l'absence de ligne miroir rend le choix d'une forme normale un peu plus arbitraire, mais néanmoins possible. Il est important de noter que les formes normales sont généralement non-uniques, de fait il y a un certain arbitraire dans ce choix.

A priori, l'orientation de la base de la forme normale diffère de celle de l'essai. Il convient donc, dans un second temps, de déterminer le positionnement angulaire relatif des deux bases.

Dans cette partie, le tenseur d'élasticité $\underset{\approx}{\mathrm{C}}$ d'ordre 4 dans $\mathbb{R}^2$ sera représenté par $\underset{\sim}{\mathrm{C}}$ un tenseur d'ordre 2 dans $\mathbb{R}^3$. Les détails de cette construction pourront être trouvés dans l'appendice A.

Classe monoclinique: $[\mathrm{Z}_2]$. Dans une base orthonormale quelconque nous pouvons exprimer le tenseur d'élasticité en fonction de ses composantes ou à partir de ses composantes harmoniques (dans la même base):

$$[\underset{\sim}{\mathrm{C}}] = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & \sqrt{2}c_{1112} \\ & c_{2222} & \sqrt{2}c_{2212} \\ & & 2c_{1212} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K+G+a_1+d_1 & K-G-d_1 & \sqrt{2}\frac{a_2+2d_2}{2} \\ & K+G-a_1+d_1 & \sqrt{2}\frac{a_2-2d_2}{2} \\ & & 2G-2d_1 \end{pmatrix}.$$

On va choisir, comme forme normale[23] pour un tenseur monoclinique, la condition $a_2 = 0$ et $a_1 > 0$.

Graphiquement, la situation peut être représentée de la manière suivante:

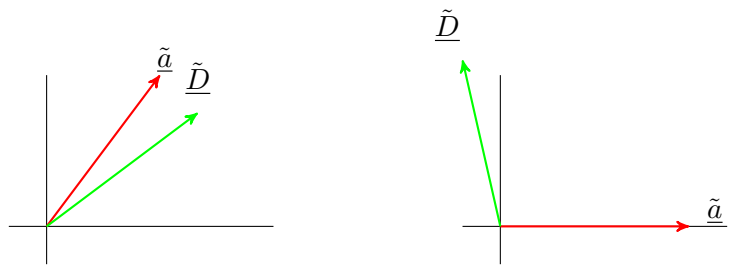


Figure II.2.4: A gauche, un tenseur $[\mathrm{Z}_2]-$invariant brut et, à droite, le même mis sous sa forme normale. Les composantes a_1 et d_1 sont les projections de $\underline{\mathrm{a}}$ et $\underline{\mathrm{D}}$ sur l'axe des abscisses, et a_2 et d_2 sont les projections sur les ordonnées.

[23] On peut toujours trouver une rotation telle que $a_2 = 0$ et $a_1 > 0$. Cette rotation positionne de manière unique le vecteur $\underline{\mathrm{D}}$. Si à l'opposé on positionne $\underline{\mathrm{D}}$ tel que $d_2 = 0$ et $d_1 > 0$, alors on se retrouve avec 2 positions possibles de $\underline{\mathrm{a}}$ sur la même SO(2)-orbite.

Cette représentation graphique peut être justifiée rigoureusement [68].

Ce choix ne fait pas apparaître de 0 dans la représentation matricielle de notre tenseur. Toutefois il est l'un des choix les plus logiques par rapport à sa structure harmonique. De fait, on considère la forme normale suivante[24]:

$$[\underset{\sim}{\mathrm{C}}]^{\mathrm{Z}_2} = \begin{pmatrix} K+G+a_1+d_1 & K-G-d_1 & \sqrt{2}d_2 \\ & K+G-a_1+d_1 & -\sqrt{2}d_2 \\ & & 2G-2d_1 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons à présent évaluer l'expression de nos invariants sur cette forme. Un calcul direct nous donne:

$$I_2 = 2a_1^2, \quad J_2 = 8(d_1^2 + d_2^2), \quad I_3 = 4a_1^2 d_1, \quad J_3 = -4a_1^2 d_2.$$

En considérant le choix $a_1 > 0$, l'inversion du système nous permet d'identifier les différentes composantes harmoniques:

$$a_1 = \frac{\sqrt{2I_2}}{2}, \quad d_1 = \frac{I_3}{2I_2} \quad d_2 = -\frac{J_3}{2I_2}.$$

Et donc, on obtient la forme normale en fonction des invariants mesurés:

$$[\underset{\sim}{\mathrm{C}}]^{\mathrm{Z}_2} = \begin{pmatrix} I_1+\frac{J_1}{2}+\frac{\sqrt{2I_2}}{2}+\frac{I_3}{2I_2} & I_1-\frac{J_1}{2}-\frac{I_3}{2I_2} & -\frac{\sqrt{2}J_3}{2I_2} \\ & I_1+\frac{J_1}{2}-\frac{\sqrt{2I_2}}{2}+\frac{I_3}{2I_2} & \frac{\sqrt{2}J_3}{2I_2} \\ & & J_1-\frac{I_3}{I_2} \end{pmatrix}.$$

On constate que l'on a pas utilisé dans cette reconstruction l'invariant J_2. Cette situation est intéressante. Si l'on avait utilisé J_2 on aurait obtenu pour d_2 l'expression suivante:

$$d_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{J_2 I_2^2 - 2I_3^2}{I_2^2}}.$$

Ce qui, du fait de la syzygie,

$$J_2 I_2^2 - 2I_3^2 - 2J_3^2 = 0$$

est équivalent à:

$$d_2 = \frac{\sqrt{J_3^2}}{2I_2}$$

On a donc une ambiguïté quant au choix de la racine pour J_3^2. Dans le cas d'une SO(2)-action, les deux racines correspondent à deux SO(2)-orbites distinctes. De fait, le signe de J_3 permet de distinguer ces deux orbites. Mais si, à la place de SO(2), on considère plutôt une O(2)-action,

[24] On rappelle que si l'on fait tourner le tenseur $\underset{\approx}{\mathrm{C}}$ de θ, les composantes $\underset{\sim}{\mathrm{a}}$ et $\underset{\approx}{\mathrm{D}}$ tournent respectivement de 2θ et 4θ.

c'est-à-dire si on s'autorise à retourner l'échantillon, les deux racines de J_3 désigne la même $\mathrm{O}(2)$-orbite. Ainsi si on s'intéresse à l'orbite selon $\mathrm{O}(2)$ les 2 ensembles suivants, complétés de I_1 et J_1, sont séparants: (I_2, J_2, I_3), (I_2, I_3, J_3), tandis que pour $\mathrm{SO}(2)$ ce choix se réduit à (I_2, I_3, J_3).

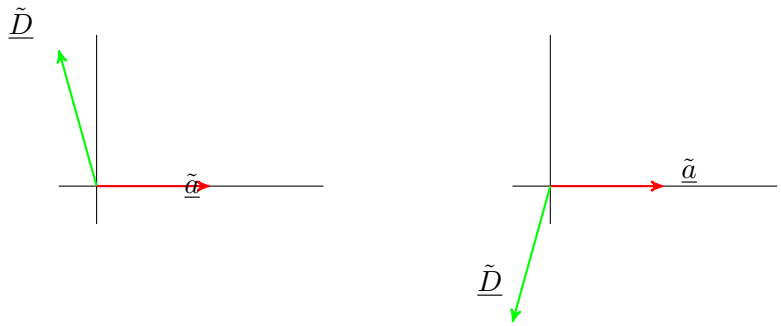


Figure II.2.5: Pour $\mathrm{O}(2)$, les 2 configurations sont dans la même orbite, mais dans 2 orbites différentes pour $\mathrm{SO}(2)$.

On remarque ainsi que, pour le cas $\mathrm{SO}(2)$, on peut diminuer de 1 le nombre d'invariants nécessaires à la séparation des orbites génériques. Toutefois, il est important de noter que nous effectuons ici une reconstruction par classe et non une reconstruction globale.

Classe orthotrope $[\mathrm{D}_2]$. Pour cette classe nous choisissons une forme normale compatible avec la précédente avec $a_2 = d_2 = 0$. Dans ce cas, les composantes *verticales* de $\underline{\mathbf{a}}$ et $\underline{\mathbf{D}}$ sont nulles. En fonction de leur signe respectif, cela nous conduit à 4 formes normales pour le couple (a_1, d_1):

$$(+,+) \quad , \quad (+,-), \quad (-,-), \quad (-,+)$$

En réalité, comme représenté sur les figures fig.II.2.6 et fig.II.2.7, ces 4 situations correspondent à 2 orbites différentes en fonction du signe de d_1 qui est défini par I_3. De fait, la condition supplémentaire $a_1 > 0$ est ajoutée pour obtenir, pour chacune des situations, une forme normale privilégiée, la deuxième étant obtenue par une rotation matérielle de $\frac{\pi}{2}$.

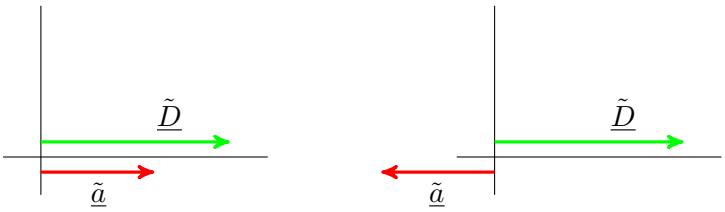


Figure II.2.6: Deux configurations sur la même orbite définie par $I_3 > 0$. Ces configurations sont reliées par une rotation matérielle de $\frac{\pi}{2}$.

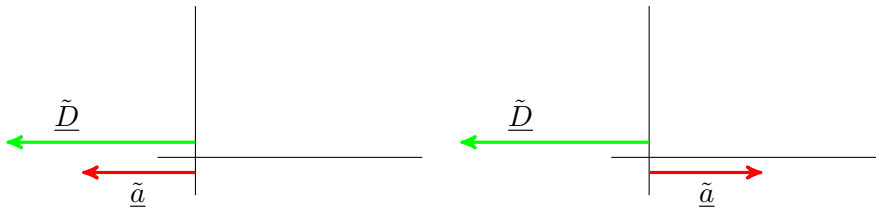


Figure II.2.7: Deux configurations sur la même orbite définie par $I_3 < 0$. Ces configurations sont reliées par une rotation matérielle de $\frac{\pi}{2}$.

L'évaluation des invariants sur cette forme normale donne le système suivant:

$$\begin{cases} I_2 = 2a_1^2 \\ J_2 = 8d_1^2 \\ I_3 = 4a_1^2 d_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = \frac{I_3}{2I_2} \\ a_1 = \frac{\sqrt{2I_2}}{2} \end{cases} .$$

En conséquence de quoi:

$$[\underset{\sim}{\mathrm{C}}]^{\mathrm{D}_2} = \begin{pmatrix} K+G+a_1+d_1 & K-G-d_1 & 0 \\ & K+G-a_1+d_1 & 0 \\ & & 2G-2d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1+\frac{J_1}{2}+\frac{\sqrt{2I_2}}{2}+\frac{I_3}{2I_2} & I_1-\frac{J_1}{2}-\frac{I_3}{2I_2} & 0 \\ & I_1+\frac{J_1}{2}-\frac{\sqrt{2I_2}}{2}+\frac{I_3}{2I_2} & 0 \\ & & J_1-\frac{I_3}{I_2} \end{pmatrix} .$$

Il peut être observé que l'ensemble (I_2, J_2) ne peut étiqueter de manière unique un matériau orthotrope car les orbites représentées sur les fig.II.2.6 et fig.II.2.7 ne peuvent être distinguées. En revanche, cette distinction peut être faite à partir de l'ensemble (I_2, I_3). La procédure de reconstruction proposée fonctionne tant pour les tenseurs orthotropes génériques que pour les dégénérés.

Classe tétragonale $[\mathrm{D}_4]$. Pour $[\mathrm{D}_4]$ la situation est différente car le covariant $\underset{\sim}{\mathrm{a}}$ est nul. On choisira, dans ce cas là, $d_2 = 0, d_1 > 0$. De fait:

$$[\underset{\sim}{\mathrm{C}}]^{\mathrm{D}_4} = \begin{pmatrix} K+G+d_1 & K-G-d_1 & 0 \\ & K+G+d_1 & 0 \\ & & 2G-2d_1 \end{pmatrix} .$$

L'évaluation des invariants dans cette situation donne

$$I_2 = I_3 = 0, \quad J_2 = 8d_1^2$$

Et en choisissant la racine positive de J_2:

$$[\underset{\sim}{\mathrm{C}}]^{\mathrm{D}_4} = \begin{pmatrix} I_1+\frac{J_1}{2}+\frac{\sqrt{8J_2}}{8} & I_1-\frac{J_1}{2}-\frac{\sqrt{8J_2}}{8} & 0 \\ & I_1+\frac{J_1}{2}+\frac{\sqrt{8J_2}}{8} & 0 \\ & & J_1-\frac{\sqrt{8J_2}}{4} \end{pmatrix}.$$

Le choix de la racine négative aurait défini une autre forme normale sur la même orbite obtenue par une rotation matérielle de $\frac{\pi}{4}$.

On remarque que contrairement aux classes précédentes pour lesquelles l'invariant J_2 n'était pas nécessaire, il est ici primordial.

Classe isotrope $[\mathrm{O}(2)]$. Cette dernière situation est triviale.

Il nous reste à présent à définir l'orientation relative entre la forme normale et le dispositif d'essai. Pour les classes $[\mathrm{Z}_2]$ et $[\mathrm{D}_2]$, les formes normales sont définies par la condition $a_2 = 0$. Cette information peut être obtenue grâce aux composantes du tenseur $\underset{\sim}{\mathrm{a}}$ dans le repère d'essai:

$$\underset{\sim}{\mathrm{a}} = \underset{\sim}{\sigma}^d(0;1,1,0) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

De fait:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$$

et donc:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}a_1}{\sqrt{I_2}}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}a_2}{\sqrt{I_2}}.$$

Comme $\underset{\sim}{\mathrm{a}} \in \mathbb{K}^2$ lors d'une rotation matérielle de θ, $\underset{\sim}{\mathrm{a}}$ tourne de 2θ. De fait, la base de la forme normale diffère de celle de l'essai par un angle de $\frac{\alpha}{2}$.

Dans le cas tétragonal $[\mathrm{D}_4]$, le covariant $\underset{\sim}{\mathrm{a}}$ est nul et la base pour la forme normale est définie par la condition $d_2 = 0$. On peut obtenir de l'information sur $\underset{\approx}{\mathrm{D}}$ de la manière suivante

$$\underset{\sim}{\sigma}^d\left(0;0,0,\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} d_2 & G-d_1 \\ G-d_1 & -d_2 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{8}d_1}{\sqrt{J_2}}, \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{8}d_2}{\sqrt{J_2}}.$$

Comme $\underset{\approx}{\mathrm{D}} \in \mathbb{K}^4$ lors d'une rotation matérielle de θ, $\underset{\approx}{\mathrm{D}}$ est tournée de 4θ. De fait la base de la forme normale diffère de celle de l'essai par un angle de $\frac{\beta}{4}$.

Synthèse. On a proposé ci-dessus un processus de reconstruction des tenseurs d'élasticité par classe. On peut noter que si, dans le cas des orbites sous l'action de $\mathrm{SO}(2)$, la base fonctionnelle dans chacune des classes peut être réduite, on ne peut pas la réduire globalement. De même, la distinction entre les $\mathrm{SO}(2)$- et $\mathrm{O}(2)$-orbites ne concerne que les éléments de la strate générique[25].

2.4 Extension à l'élasticité 3D

Revenons à présent au problème 3D. On rappelle que l'on a décomposition suivante:

$$\mathbb{E}\mathrm{la} \simeq 2\mathbb{H}^0 \oplus 2\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^4. \tag{2.4.1}$$

En 3D, la situation est nettement plus compliquée et on n'a, pour l'instant, que des résultats partiels. Comme indiqué à la section 2.2, quand nous avons commencé nos travaux la base d'intégrité d'$\mathbb{E}$la, de même que son cardinal, étaient inconnus. La grande difficulté réside dans l'analyse de l'espace $\mathbb{H}^4$ et le calcul des invariants joints qui l'implique. Contrairement au cas 2D pour lequel la dimension des espaces harmoniques est constant, dans le cas 3D nous avons $\dim \mathbb{H}^k = 2k+1$.

De fait, jusqu'à Boheler [40], seule l'analyse du couple $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$ pouvait être menée. En utilisant des résultats issues de la *théorie classique des invariants* Bohler et al. vont établir pour la première fois[26] une base d'intégrité de $\mathbb{H}^4$. Toutefois, l'absence de recours à l'informatique ne leur permettra pas d'aller plus loin et de déterminer les invariants joints de de $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^4$ et $\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^4$.

Nous sommes revenus sur ces questions via une collaboration avec des mathématiciens B. Kolev (I2M) et M. Olive (I2M) et un informaticien M. Petitot (LIFL). Au cours d'une première collaboration, nous nous sommes intéressés à la géométrie de l'espace $\mathbb{H}^4$. Nous avons ainsi pu aboutir à l'établissement d'un diagramme de bifurcation où les transitions entre les différentes strates sont codées par des relations polynomiales entre les invariants. Des formules de reconstructions sont également proposées pour les classes de symétrie orthotrope et supérieures. Ces travaux seront détaillés dans la subsection 2.4.1. Dans le cadre de la thèse de M. Olive [113, 114], nous avons déterminé une base d'intégrité pour les tenseurs d'élasticité. Pour ce faire, le problème a été reformulé en termes de formes binaires[27], et via l'utilisation de logiciels de calculs formels, une base d'intégrité minimale de 297 éléments a été établie. Ces travaux seront détaillés dans la subsection 2.4.2.

[25] Ce qui peut se comprendre car les éléments de celle-ci sont Z_2-invariants, c'est-à-dire strictement dans $\mathrm{SO}(2)$, tandis que les éléments des autres classes sont de type D_k donc dans $\mathrm{O}(2)$.

[26] Faisant semblant d'ignorer le travail de Boehler et al. [40], Smith and Bao [131] vont rétablir ce même résultat 3 ans plus tard. Les invariants constituant la base d'intégrité sont les mêmes dans les deux cas.

[27] Les formes binaires désignent des polynômes homogènes en $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

2.4.1 $\mathbb{H}^4$: invariants et stratification

En exploitant des résultats de mathématique obtenu par Shioda [129], Boehler et al. [40] ont déterminé une base d'intégrité de l'espace $\mathbb{H}^4$:

Proposition 2.4.1. *Les* 9 *invariants propres de* $\mathbb{H}^4$ *sont donnés par:*

$$J_k := \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\mathrm{d}}_{\mathrm{k}}), \qquad k = 2, \ldots, 10.$$

avec:

$$\underset{\sim}{\mathrm{d}}_2 = \mathrm{tr}_{13}(\underset{\approx}{\mathrm{D}}^2), \quad \underset{\sim}{\mathrm{d}}_3 = \mathrm{tr}_{13}(\underset{\approx}{\mathrm{D}}^3), \quad \underset{\sim}{\mathrm{d}}_4 = \underset{\sim}{\mathrm{d}}_2^2, \quad \underset{\sim}{\mathrm{d}}_5 = \underset{\sim}{\mathrm{d}}_2\underset{\approx}{\mathrm{D}}\underset{\sim}{\mathrm{d}}_2, \quad \underset{\sim}{\mathrm{d}}_6 = \underset{\sim}{\mathrm{d}}_2^3,$$
$$\underset{\sim}{\mathrm{d}}_7 = \underset{\sim}{\mathrm{d}}_2^2\underset{\approx}{\mathrm{D}}\underset{\sim}{\mathrm{d}}_2, \quad \underset{\sim}{\mathrm{d}}_8 = \underset{\sim}{\mathrm{d}}_2^2\underset{\approx}{\mathrm{D}}^2\underset{\sim}{\mathrm{d}}_2, \quad \underset{\sim}{\mathrm{d}}_9 = \underset{\sim}{\mathrm{d}}_2^2\underset{\approx}{\mathrm{D}}\underset{\sim}{\mathrm{d}}_2^2, \quad \underset{\sim}{\mathrm{d}}_{10} = \underset{\sim}{\mathrm{d}}_2^2\underset{\approx}{\mathrm{D}}^2\underset{\sim}{\mathrm{d}}_2^2.$$

Remarque 2.4.2. Les 6 premiers invariants $J_2, \ldots, J_7$ sont algébriquement indépendants, tandis que les 3 derniers J_8, J_9, J_{10} sont liés aux premiers par des relations polynomiales. Ces *sygyzies* ont été déterminées par Shioda [129].

On rappelle que le produit de deux tenseurs $\underset{\approx}{\mathrm{D}}$ et $\underset{\approx}{\mathrm{C}}$ d'ordre 4 est un tenseur d'ordre 4 donné par:

$$(\underset{\approx}{\mathrm{D}}\underset{\approx}{\mathrm{C}})_{ijkl} := D_{ijpq}C_{pqkl}.$$

On a donc, par exemple:

$$(\underset{\sim}{\mathrm{d}}_2)_{ij} := D_{kipq}D_{kjpq}$$

On peut donner une forme graphique à ces invariants. Le principe est de représenter un tenseur d'ordre 4 par un atome de valence 4. Chaque arête représente une opération de trace sur ce tenseur. La figure II.2.8 donne les invariants $J_2, \cdots, J_{10}$ sous forme graphique.

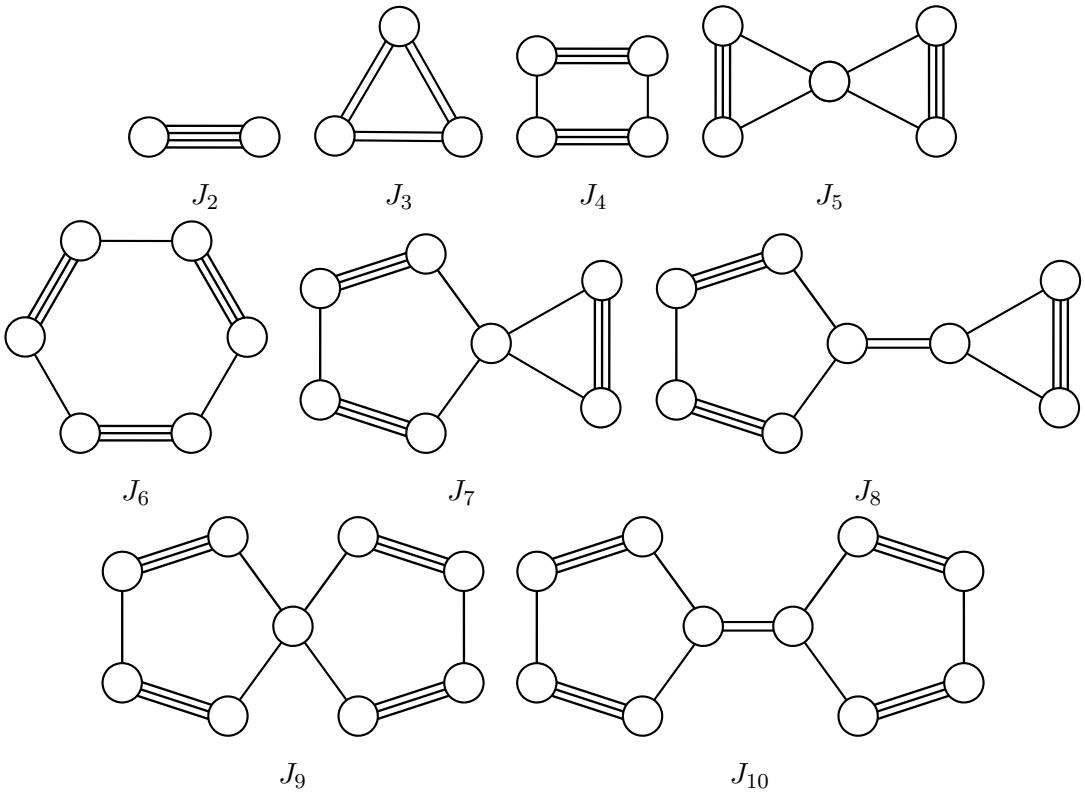


Figure II.2.8: Invariants moléculaires de $\mathbb{H}^4$

Cette famille d'invariants étant connue, elle permet d'obtenir des relations définissant les classes d'isotropie de $\mathbb{H}^4$. Cette question est au centre de l'article Auffray et al. [25] dont nous allons extraire l'exemple traitant de la classe cubique.

On considère, pour commencer, la forme matricielle suivante du tenseur élasticité:

$$\underset{\sim}{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \sqrt{2}c_{14} & \sqrt{2}c_{15} & \sqrt{2}c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & \sqrt{2}c_{24} & \sqrt{2}c_{25} & \sqrt{2}c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & \sqrt{2}c_{34} & \sqrt{2}c_{35} & \sqrt{2}c_{36} \\ \sqrt{2}c_{14} & \sqrt{2}c_{24} & \sqrt{2}c_{34} & 2\ c_{44} & 2\ c_{45} & 2\ c_{46} \\ \sqrt{2}c_{15} & \sqrt{2}c_{25} & \sqrt{2}c_{35} & 2\ c_{45} & 2\ c_{55} & 2\ c_{56} \\ \sqrt{2}c_{16} & \sqrt{2}c_{26} & \sqrt{2}c_{36} & 2\ c_{46} & 2\ c_{56} & 2\ c_{66} \end{pmatrix},$$

pour laquelle les composantes c_{mn} sont reliées aux composantes tensorielles via la renumérotation standard:

m	1	2	3	4	5	6
ij	11	22	33	23	13	12

On note $\underset{\sim}{\mathrm{D}}$ l'opérateur linéaire symétrique associé à $\underset{\approx}{\mathrm{D}} \in \mathbb{H}^4$. $\underset{\sim}{\mathrm{D}}$ a la représentation matricielle suivante:

$$\underset{\sim}{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} D_{11} & \sqrt{2}\, D_{12} \\ \sqrt{2}\, D_{12}^T & 2\, D_{22} \end{pmatrix},$$

avec

$$D_{11} = \begin{pmatrix} -h_9 - h_8 & h_9 & h_8 \\ h_9 & -h_9 - h_7 & h_7 \\ h_8 & h_7 & -h_8 - h_7 \end{pmatrix}, \qquad D_{12} = \begin{pmatrix} -h_5 - h_6 & h_2 & h_1 \\ h_5 & -h_2 - h_4 & h_3 \\ h_6 & h_4 & -h_1 - h_3 \end{pmatrix},$$

et

$$D_{22} = \begin{pmatrix} h_7 & -h_1 - h_3 & -h_2 - h_4 \\ -h_1 - h_3 & h_8 & -h_5 - h_6 \\ -h_2 - h_4 & -h_5 - h_6 & h_9 \end{pmatrix}.$$

A partir de cette paramétrisation, on a les conditions suffisantes suivantes sur les composantes de $\underset{\sim}{\mathrm{D}}$ pour que celui-ci soit:

1. Z_2-invariant si $h_2 = h_4 = h_5 = h_6 = 0$,
2. D_2-invariant si $h_k = 0$ pour $1 \leq k \leq 6$,
3. D_3-invariant si $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_6 = 0$ et $h_7 = h_8 = -4h_9$,
4. D_4-invariant si $h_k = 0$ pour $1 \leq k \leq 6$ et $h_7 = h_8$,
5. $\mathrm{O}(2)$-invariant si $h_k = 0$ pour $1 \leq k \leq 6$ et $h_7 = h_8 = -4h_9$,
6. $\mathcal{O}$-invariant si $h_k = 0$ pour $1 \leq k \leq 6$ et $h_7 = h_8 = h_9$,
7. $\mathrm{SO}(3)$-invariant ssi $h_k = 0$ pour $1 \leq k \leq 9$.

De fait, un tenseur cubique $\underset{\approx}{\mathrm{D}} \in \mathbb{H}^4$ se représente:

$$\underset{\sim}{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} 8\,\delta & -4\,\delta & -4\,\delta & 0 & 0 & 0 \\ -4\,\delta & 8\,\delta & -4\,\delta & 0 & 0 & 0 \\ -4\,\delta & -4\,\delta & 8\,\delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8\,\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8\,\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8\,\delta \end{pmatrix} \tag{2.4.2}$$

avec $\delta \in \mathbb{R}$. L'évaluation des 9 invariants sur cette tranche donne:

$$\begin{aligned} &J_2 = 480\,\delta^2, && J_3 = 1920\,\delta^3, && J_4 = 76800\,\delta^4, \\ &J_5 = 0, && J_6 = 12288000\,\delta^6, && J_7 = 0, \\ &J_8 = 0, && J_9 = 0, && J_{10} = 0. \end{aligned}$$

On note, sur la tranche, la définition de l'invariant rationnel $4\delta = J_3/J_2$.

Proposition 2.4.3. *Un tenseur* $\underset{\approx}{\mathrm{D}} \in \mathbb{H}^4$ *est dans la strate fermée* $\overline{\Sigma}_{[\mathcal{O}]}$ *si et seulement si les invariants* $J_2(D) \cdots J_{10}(D)$ *satisfont les relations suivantes*

$$: \begin{array}{cccc} 3\,J_4 = {J_2}^2, & J_5 = 0, & 30\,{J_3}^2 = {J_2}^3, & 9\,J_6 = {J_2}^3, \\ J_7 = 0, & J_8 = 0, & J_9 = 0, & J_{10} = 0. \end{array} \tag{2.4.3}$$

$\underset{\approx}{\mathrm{D}}$ *est dans la classe* $[\mathcal{O}]$ *si de plus* $J_2(D) \neq 0$. *Dans ce cas, il admet la forme normale* (2.4.2) *avec* $4\delta := J_3(D)/J_2(D)$.

On observe que $\forall J_2, J_3 \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}$. De fait on n'a pas à rajouter d'inégalité au système de syzygies (2.4.3) pour garantir que δ soit réel. Pour des strates de plus basses symétries de telles conditions devront être rajoutées.

Remarque 2.4.4. Tout tenseur de $\mathbb{H}^2$ covariant à $\underset{\approx}{\mathrm{D}}$ est nul. Ceci nous donne une autre caractérisation de la classe cubique

Corollaire 2.4.5. *Un tenseur* $\underset{\approx}{\mathrm{D}} \in \mathbb{H}^4$ *est dans la strate fermée* $\overline{\Sigma}_{[\mathcal{O}]}$ *si et seulement si il existe* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ *tels que:*

$$\underset{\sim}{\mathrm{d}_2} = \alpha\,\underset{\sim}{\mathrm{I}}, \quad \underset{\sim}{\mathrm{d}_3} = \beta\,\underset{\sim}{\mathrm{I}} \quad \textit{and} \quad 10\,\beta^2 - \alpha^3 = 0. \tag{2.4.4}$$

avec $\underset{\sim}{\mathrm{I}}$ le tenseur identité. Dans Auffray et al. [25], nous traitons également les classes $[\mathrm{D}_2]$, $[\mathrm{D}_3]$,$[\mathrm{D}_4]$,$[\mathrm{O}(2)]$. Pour l'ensemble de ces classes on s'aperçoit que parmi les 9 invariants de $\underset{\approx}{\mathrm{D}}$ seuls les 6 premiers sont nécessaires et suffisants pour séparer les orbites au sein de chacune des classes.

Théorème 2.4.6. *Soit* $\underset{\approx}{\mathrm{D}} \in \mathbb{H}^4$, *pour les classes d'isotropie suivantes: cubique, isotrope transverse, trigonale, tetragonale les 4 premiers invariants* $(J_2, \ldots, J_5)$ *séparent les orbites par classe. Pour la classe orthotrope, les 6 premiers invariants* $(J_2, \ldots, J_7)$ *séparent les orbites dans la classe.*

En conclusion, nous établissons le schéma de bifurcation suivant:

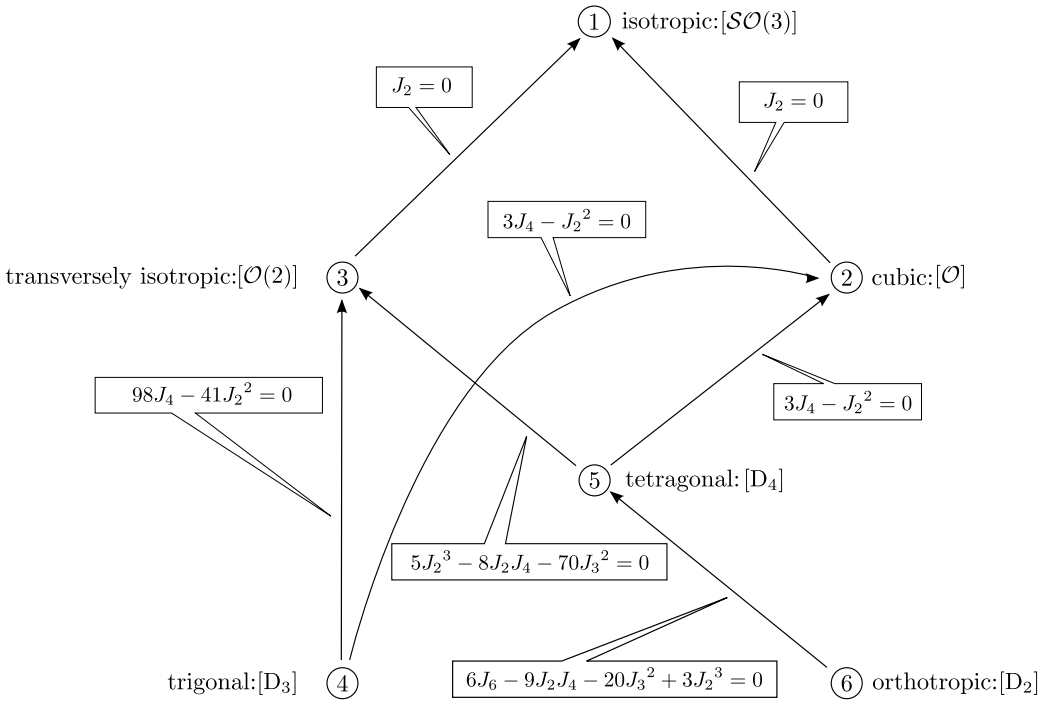


Figure II.2.9: Chemins de bifurcation pour les classes d'isotropie d'un élément de $\mathbb{H}^4$.

Dans ce schéma, nous indiquons de la même manière que sur le diagramme de l'élasticité 2D, les conditions polynomiales permettant de passer d'une classe de symétrie à une autre. Ainsi, si nous considérons un élément $\underset{\approx}{\mathrm{D}} \in \mathbb{H}^4$ dans la classe $[\mathrm{D}_3]$, la condition supplémentaire:

$$3J_4 - J_2^2 = 0, \quad J_2 \neq 0$$

rend cet élément $\mathcal{O}$-invariant.

2.4.2 Base d'intégrité de $\mathbb{E}$la

La détermination de la base d'intégrité de $\mathbb{E}$la repose sur la reformulation du problème initial en termes de formes binaires. Cette reformulation permet de recourir à l'utilisation de théorèmes puissants de la *théorie classique des invariants*, notamment l'algorithme dit de Gordan qui permet de construire des bases d'intégrités nouvelles à partir de base d'intégrité déjà connues [114]. Le lien entre les tenseurs et les formes binaires se fait via un processus de complexification que nous ne détaillerons pas ici, nous renvoyons à Auffray et al. [30] pour plus de détails. Ce processus est lié à la théorie des spineurs de $\mathbb{R}^3$ telle qu'introduite par Élie Cartan [46, 81]. Le résultat essentiel de cet article est le théorème suivant:

Théorème 2.4.7. *La base d'intégrité minimale de l'espace* $\mathbb{E}$la *pour l'action de* $\mathrm{SO}(3)$ *est constituée de 297 éléments. Le nombre, le type et le degré de ces éléments sont résumés dans le tableau suivant:*

degree	$\mathbb{H}^4$	$\mathbb{H}^2$	$\mathbb{H}^0$	$\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$	$\mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2$	$\mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$	Σ
1	–	–	1	–	–	–	2
2	1	1	–	1	–	–	4
3	1	1	–	2	2	1	10
4	1	–	–	1	4	6	16
5	1	–	–	–	7	18	33
6	1	–	–	–	10	36	57
7	1	–	–	–	11	53	76
8	1	–	–	–	10	45	66
9	1	–	–	–	5	10	21
10	1	–	–	–	2	2	7
11	–	–	–	–	1	3	5
Tot	9	2×2	2×1	4	2×52	174	297

Tableau II.2.1: Structure de la base d'intégrité minimale de l'espace des tenseurs d'élasticité.

Nous avons ainsi obtenu pour la première fois une base d'intégrité pour le tenseur d'élasticité. Ce résultat clôt la question posée par Boehler et al. [40]. Toutefois, la base que nous avons obtenue est d'un intérêt plus académique que pratique. Les invariants que l'on a obtenus répondent à une question algébrique à savoir, la génération de l'algèbre des polynômes $\mathrm{SO}(3)$-invariants du tenseur d'élasticité. Des travaux sont actuellement en cours pour arriver à construire un système de séparants de l'élasticité.

Chapitre II.3

Application à la mécanique des matériaux architecturés

Ce chapitre est bâti principalement autour des articles suivants [15, 21, 23, 24, 28, 29, 108, 109, 127, 142]. Cette thématique prend son origine dans mes travaux de thèse [21, 23], et a été poursuivie à MSME notamment via la thèse d'H. Nassar co-encadrée avec Q.C. He [107–109]. Il est également le fruit de ma collaboration avec G. Rosi (MSME), auteur de nombreuses figures présentes dans ce chapitre, ainsi qu'avec J. Dirrenberger (PIMM) et M. Poncelet (LMT) sur la mécanique des matériaux architecturés via le Projet "Coup de pouce" F2M - APHORISME (Approche holiste de la chiralité dans les métamatériaux architecturés).

Nous parlerons dans ce dernier chapitre de l'application des méthodes et outils introduits précédemment à l'étude de l'élasticité des milieux architecturés. Par milieux architecturés, nous entendons des milieux présentant entre l'échelle de la structure et celle de la microstructure du matériau constitutif une à plusieurs échelles d'organisation intermédiaires. En outre ces échelles intermédiaires sont d'un ordre de grandeur comparable à celui du chargement s'appliquant à la structure.

Les exemples paradigmatiques de telles architectures sont les biomatériaux. Ces matériaux, organisés sur plusieurs échelles, satisfont à un "cahier des charges" multiobjectif et multiphysique en optimisant tant la quantité de matière que le nombre d'éléments chimiques les constituant [69]. Un exemple classique est l'aile du papillon Morpho menelaus qui est constitué d'un matériau micro-percé. Ce matériau assure en plus de sa fonction de structure, l'hydrophobie des ailes ainsi que leur couleur par iridescence [97].

Cette idée de faire de la conception de matériaux "sur-mesure", du *material-by-design*, est devenue ces dernières années le nouveau credo de la recherche en sciences des matériaux [7, 42]. Cette tendance est soutenue par le développement des technologies de fabrication additive, technologies rendant aujourd'hui possible des architectures jusqu'alors irréalisables. En parallèle, on peut également noter le développement des techniques d'optimisation de forme et d'optimisation topologique qui permettent de déterminer des architectures comme solution d'un

problème d'optimisation [4, 92]. Ces différentes avancées, croisées avec un intérêt industriel croissant, notamment vis-à-vis de l'allégement et de l'optimisation des structures, ont permis un développement significatif de ces thématiques ces dernières années.

Cette tendance n'est pas propre à la mécanique, une approche similaire s'est également développée dans le domaine de l'électro-magnétisme avec l'engouement pour les métamatériaux [130, 149]. Si le terme est actuellement utilisé dans de multiples contextes, il concernait initialement la réalisation de matériaux artificiels pour la propagation d'ondes Électro-Magnétiques (EM). Les idées derrières les métamatériaux EM ont ensuite été étendues aux ondes acoustiques et, plus récemment, aux ondes élastiques [103]. Si initialement la notion de métamatériaux concernait le comportement dynamique de matériaux artificiels, son champ d'application s'est élargi également à la statique [3]. Actuellement par métamatériaux on entend le design de matériaux satisfaisants à un modèle de comportement, généralement non-standard, choisi *a priori* et pour lequel aucun matériau naturel n'existe. On a ainsi, d'une certaine manière, rejoint l'approche *material-by-design* précédente.

La question est maintenant de savoir comment étudier les matériaux architecturés. On peut envisager les approches suivantes:

Calcul complet On modélise l'ensemble de la microstructure pour faire un calcul par éléments finis en champ complet. Si la structure est grande et l'architecture fine et complexe cette solution est potentiellement très coûteuse en degrés de liberté. De plus que peut on déduire d'un tel calcul ? On a en un sens trop d'informations et il n'est pas simple de filtrer, *a posteriori*, les contributions dominantes des autres. D'autres part, il parait difficile d'établir des résultats généraux par cette approche.

Milieu homogène équivalent Une alternative est de définir un milieu homogène de substitution pour remplacer le milieu hétérogène initial. Toutefois l'approche standard utilise un milieu continu classique (ou milieu de Cauchy) comme milieu de substitution. Cette approche, qui est justifiée quand on a une grande séparation d'échelle entre la microstructure et le chargement, est ici inadéquate, les effets d'architecture que l'on désire modéliser n'étant pris en compte. L'idée sera alors de remplacer le milieu de Cauchy classique par un milieu généralisé dont les enrichissements permettront de modéliser ces effets d'architecture [62]. Les questions qui se posent alors concernent le choix des enrichissements à prendre en compte, ainsi que la détermination des paramètres associés [142].

L'approche que nous allons suivre sera la seconde, et nous nous aiderons de calculs en champ complet pour choisir au mieux les enrichissements à considerer dans notre modèle généralisé. Nous verrons que, dans cette démarche, les outils de théorie des groupes introduits dans les chapitres précédents vont nous permettre:

1. d'invalider certains modèles;
2. de prévoir certains effets/couplages;

3. de construire les opérateurs de comportement associés.

Ce chapitre va être organisé de la manière suivante. Dans un premier temps (section 3.1) nous présenterons une simulation numérique en champ complet qui va nous fournir un critère qui devra être respecté par tout milieu continu généralisé de substitution. Nous présenterons ensuite des manières d'enrichir la mécanique des milieux continus standards (section 3.2). La décomposition harmonique présentée au Chapitre II.1 nous permettra de montrer que les milieux de Cosserat sont inadaptés pour reproduire les effets recherchés. Nous nous tournerons alors vers les milieux à gradient, cette alternative étant plus économique en termes de coefficients que l'approche micromorphe complète. La section 3.3 présentera nos résultats quant à la construction explicite, en 2D, de l'ensemble des opérateurs anisotropes de cette théorie. Nous détaillerons uniquement le cas 2D pour des raisons de concision[1]. La section 3.4, issue d'un travail récent mené avec G. Rosi [127], s'intéresse à la propagation d'ondes dans ces milieux, et montrent que l'on arrive, par cette approche, à décrire des phénomènes non classiques.

3.1 Une observation numérique

De manière à dégager un critère physique devant être conservé dans une approche continue, nous allons nous intéresser à la propagation d'une onde dans un milieu à symétrie hexagonale. Dans cette situation, la séparation des échelles est contrôlée par le rapport de la longueur d'onde sur la taille de la microstructure. Dans le cas de l'élasticité classique, il est connu qu'un milieu invariant par une rotation d'ordre 6 est isotrope transverse en 3D, et isotrope en 2D. On impose des sollicitations de cisaillement de durées variables sur un nœud de la structure[2] et on observe la propagation de l'énergie mécanique totale dans le milieu.

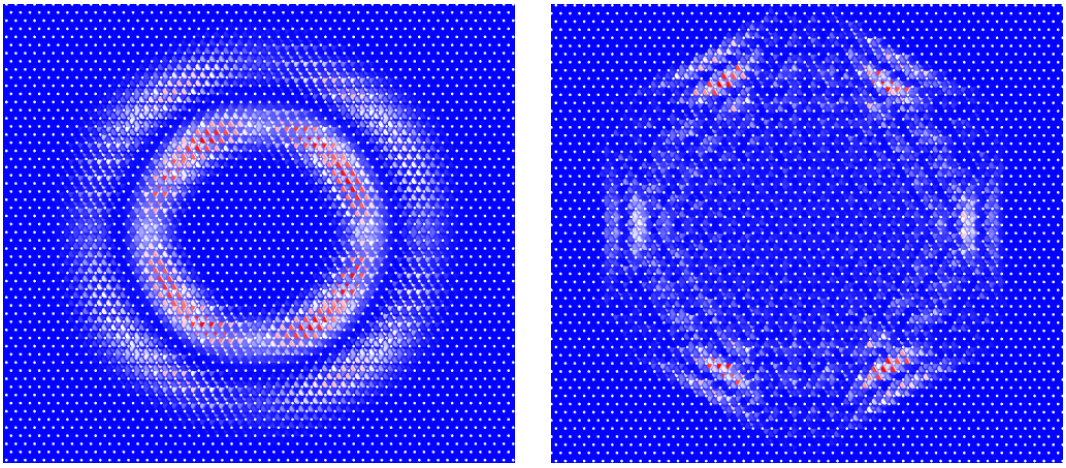
La propagation de l'énergie mécanique est capturée à un instant donné sur la figure Fig.II.3.1 pour deux fréquences d'excitation. A basse fréquence, l'énergie se propage de manière isotrope comme prévu par la théorie classique de l'élasticité. Quand on augmente la fréquence, l'onde commence à interagir avec la microstructure et la propagation devient anisotrope à symétrie hexagonale[3]. Cette sensibilité par rapport à une symétrie d'ordre 6 ne peut pas être modélisée classiquement. Il est à noter que cette transition a également été observée expérimentalement [47].

Ce phénomène peut avoir des applications pratiques intéressantes quant au contrôle de la propagation d'onde. Considérons l'exemple numérique suivant où l'on a raccordé le long d'une in-

[1] La situation 3D, hormis un plus grand nombre de cas, ne présente pas de difficultés supplémentaires. Les résultats s'y rapportant pourront être trouvés dans les références [16, 24].

[2] Le calcul est réalisé par la méthode des éléments finis et le modèle mécanique est un assemblage de poutres de Timoshenko encastrées les unes aux autres.

[3] Cette transition est visible car l'élasticité classique ne peut pas "voir" la symétrie hexagonale. Si on considérait à la place un réseau tétragonal, c'est-à-dire dont le groupe ponctuel est conjugué à D_4, on ne verrait pas de transition. Des transitions de plus haut degrés peuvent être imaginées, mais nécessiteraient l'étude de la propagation d'onde dans des milieux quasi-périodiques.

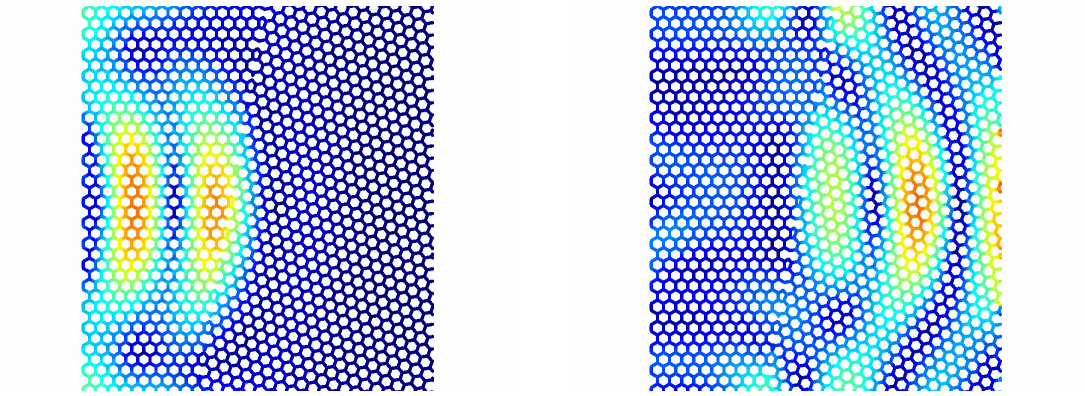


(a) A basse fréquence, la propagation est isotrope (b) A haute fréquence, l'isotropie est perdue

Figure II.3.1: Évolution de l'anisotropie de la propagation de l'énergie mécanique en fonction de la longueur d'onde.

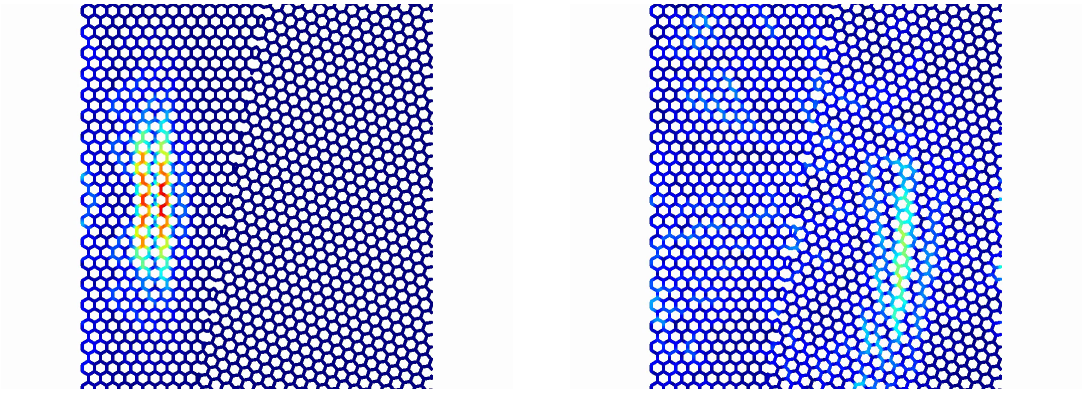
terface deux milieux à symétrie hexagonale dont l'orientation relative diffère [126]. A basse fréquence (Figure II.3.2), le front d'onde ne voit pas la discontinuité et l'onde se propage sans être perturbée. A haute fréquence (Figure II.3.3), l'onde voit l'interface, sa direction de propagation est changée.

Maintenant que nous avons un critère à notre disposition, regardons comment construire un milieu continu généralisé et quelle est, dans cette construction, l'ingrédient qui permet de modéliser l'effet que nous venons de mettre en lumière.



(a) Avant l'interface (b) Après l'interface

Figure II.3.2: Propagation basse fréquence



(a) Avant l'interface (b) Après l'interface

Figure II.3.3: Propagation haute fréquence

3.2 Construction d'un milieu continu généralisé

Nous allons présenter dans cette section comment enrichir, de manière générale, un milieu continu classique. Nous préciserons ensuite cette construction dans le cas particulier du milieu micromorphe.

Il y a plusieurs manières d'enrichir la mécanique des milieux continus classique [61, 104–106, 140]:

Milieux d'ordre supérieur. Une première option consiste à étendre le nombre et le type de degrés de liberté. L'exemple le plus connu de cette approche est le milieu de Cosserat [50] pour lequel les rotations des points matériels sont ajoutées aux degrés de liberté en déplacement. Cette approche est un cas particulier de la théorie micromorphe dans laquelle d'autres modes de déformation de microstructure sont pris en compte[4] [71, 75, 104]. Dans une perspective dynamique, il est important de noter que les théories d'ordre supérieur peuvent modéliser des branches optiques. Elles sont de fait essentielles pour l'étude des band-gaps. Cette approche est similaire à celle qui prévaut à la construction, en 1D, de la cinématique de la poutre de Timoshenko et, en 2D, de la plaque de Reissner-Mindlin[5].

Milieux à gradients. Une deuxième option consiste à conserver le même nombre de degrés de liberté mais à prendre en compte leurs gradients d'ordre supérieur dans la formulation én-

[4]La question de savoir quel mode ajouter est ouverte. L'approche micromorphe classique postule une cinématique additionnelle décrite par un champ de tenseurs d'ordre 2. Toutefois, rien n'indique que le premier mode d'architecture apparaissant soit adéquatement décrit par ces descripteurs. De plus, l'analyse de la littérature tend à montrer que la nature des modes est liée de manière assez sensible aux paramètres géométriques et matériaux [135]. Il semble que l'enrichissement adéquat soit difficile à anticiper et dépende spécifiquement de chaque situation[109].

[5]Une différence essentielle est à pointer, les poutres comme les plaques sont des variétés linéaires de dimension 1 ou 2 plongées dans $\mathbb{R}^3$, de fait la dimension de l'espace normal est non nulle en tout point. En d'autres termes il y a de la "place" dans $\mathbb{R}^3$ pour courber ces variétés. Dans le cas d'un milieu 3D, l'espace normal est réduit à un point et la question de savoir dans quoi on "courbe" le milieu se pose....

ergétique. L'exemple le plus connu de cette approche est le modèle d'élasticité à gradient de Mindlin [104, 106]. Les milieux à gradient peuvent être vus comme des approximations basses fréquences/grandes longueurs d'onde des milieux micromorphes [104]. On peut également les obtenir en restreignant la cinématique des milieux d'ordre supérieur par l'imposition d'une contrainte. Les modèles de poutres d'Euler-Bernoulli et de plaques de Kirchhoff-Love sont des exemples de cette approche. Notons que, contrairement aux milieux d'ordre supérieur, les théories à gradients ne permettent pas de modéliser les branches optiques.

Remarque 3.2.1. On peut préciser 2 choses supplémentaires:

- Les deux approches précédentes ne sont pas exclusives, elles peuvent être combinées pour donner une théorie du n-ième gradient d'un milieu micromorphe d'ordre m.
- Une autre possibilité, que nous ne détaillerons pas ici, est le recours à des milieux non-locaux[6]. Comme montré dans le cas dynamique [108], l'approximation locale d'un comportement non-local implique l'utilisation d'un milieu à gradients.

On peut résumer schématiquement cette situation par le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & \textit{Rotation}: & \textit{Dilatation+Rotation+Cisaillement}: \\
 & \text{Cosserat} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \text{Micromorphe} \arrow[d, "\gamma"] \\
\text{Milieu Classique} \arrow[ur, "\text{Ordre supérieur}"] \arrow[dr, "\text{Gradient supérieur}"'] & & \\
 & \text{Koiter} \arrow[r] & \text{Gradient de déformation}
\end{tikzcd}$$

Tableau II.3.1: Extension classique d'un milieu continu de Cauchy. De gauche à droite, les *rotations* puis les *dilatations et cisaillements* sont ajoutés à la cinématique classique. Pour les milieux d'ordre supérieur ces extensions sont des degrés de liberté indépendants. Les milieux à gradients sont obtenus via l'imposition d'une contrainte cinématique (γ).

Précisons à présent tout cela plus en détail.

[6] Contrairement à ce qui peut être lu, les milieux à gradients sont des milieux locaux l'ensemble des dérivées pouvant être calculé sur un voisinage infinitésimal du point de référence. Les milieux non-locaux ont, quant à eux, une formulation intégro-différentielle.

3.2.1 Élasticité micromorphe

Dans l'approche micromorphe[7], on étend les degrés de liberté en considérant, en plus du champ de déplacement, la donnée d'un champ de tenseurs d'ordre 2 non-symétriques décrivant la micro-déformation de la matière [71, 104]. On obtient une théorie mécanique ayant les degrés de liberté suivants:

$$\text{DDL} = \{\underline{\mathrm{u}}, \underset{\sim}{\chi}\} \quad ; \quad (\underline{\mathrm{u}}, \underset{\sim}{\chi}) \in \mathbb{R}^d \times \otimes^2 \mathbb{R}^d$$

Le champ de microdéformation décrit par $\underset{\sim}{\chi}$ n'est généralement pas compatible. Les variables d'état associées à cette cinématique sont les suivantes:

$$\text{PSV} = \{\underline{\mathrm{u}} \otimes \underline{\nabla}, \underset{\sim}{\chi} \otimes \underline{\nabla}\}$$

avec $\underline{\nabla}$ l'opérateur nabla classique. La description mécanique ne nécessite que le calcul de la dérivée première des degrés de liberté. On a donc une théorie enrichie du type premier gradient. En un point matériel, la déformation est définie par la donnée des trois mesures de déformation suivantes:

- $\underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon_{(ij)}$: la déformation standard;
- $\underset{\sim}{\mathrm{e}} = \underline{\mathrm{u}} \otimes \underline{\nabla} - \underset{\sim}{\chi}$: la déformation relative;
- $\underset{\simeq}{\kappa} = \underset{\sim}{\chi} \otimes \underline{\nabla}$: le gradient de la micro-déformation;

La première mesure de déformation est le tenseur de déformation standard, elle est décrite par un champ de tenseurs de $S^2(\mathbb{R}^d)$. Le tenseur de déformation relatif mesure de combien la micro-déformation diffère du gradient du champ de déplacement, c'est un champ de tenseurs de $\otimes^2(\mathbb{R}^d)$. Finalement, le gradient de micro-déformation est défini par un champ de tenseurs d'ordre 3 n'ayant pas de symétries particulières, i.e. appartenant à $\otimes^3(\mathbb{R}^d)$. Les mesures de contrainte associées par dualité sont les suivantes:

- $\underset{\sim}{\sigma} = \sigma_{(ij)}$: les contraintes de Cauchy;
- $\underset{\sim}{\mathrm{s}} = s_{ij}$: les contraintes relatives;
- $\underset{\simeq}{\mathrm{S}} = S_{ijk}$: les hypercontraintes.

En supposant une relation linéaire entre contraintes et déformations, on obtient la loi de comportement suivante:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\sigma} = \underset{\approx}{\mathrm{C}} : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\approx}{\mathrm{B}} : \underset{\sim}{\mathrm{e}} + \underset{\approx}{\mathrm{M}} \therefore \underset{\simeq}{\kappa} \\ \underset{\sim}{\mathrm{s}} = \underset{\approx}{\mathrm{B}}^T : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\approx}{\mathrm{D}} : \underset{\sim}{\mathrm{e}} + \underset{\approx}{\mathrm{E}} \therefore \underset{\simeq}{\kappa} \\ \underset{\simeq}{\mathrm{S}} = \underset{\approx}{\mathrm{M}}^T : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\approx}{\mathrm{E}}^T : \underset{\sim}{\mathrm{e}} + \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}}} \therefore \underset{\simeq}{\kappa} \end{cases}$$

Ce comportement est défini par la donnée de :

[7] On devrait dire micromorphe de rang 1 pour être plus exact [71, 75].

- 3 tenseurs d'ordre 4 ayant les symétrie indicielles suivantes: $C_{\underline{(ij)}\ \underline{(lm)}}$; $B_{(ij)lm}$; $D_{\underline{ij}\ \underline{lm}}$;
- 2 tenseurs d'ordre 5 ayant les symétrie indicielles suivantes: $M_{(ij)klm}$; E_{ijklm};
- 1 tenseur d'ordre 6 ayant les symétrie indicielles suivantes: $A_{\underline{ijk}\ \underline{lmn}}$.

A cette modification de la cinématique sont associées des modifications des équations d'équilibre ainsi que des conditions aux limites. Toutefois nous ne considérerons pas ces modifications dans ce chapitre, les détails pourront être trouvés dans les références suivantes [27, 62, 104, 106].

Regardons la décomposition en irréductibles des DDL que l'on a ajoutés[8]:

$$\underset{\sim}{\chi} \in \otimes^2\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^{*1} \oplus \mathbb{H}^2$$

En n'ajoutant pas, comme degrés de liberté, l'ensemble de $\underset{\sim}{\chi}$ mais uniquement certaines de ses parties, on obtient toute une famille de modèles intermédiaires:

Modèle	$\underset{\sim}{\chi}$	degrés de liberté
Cauchy	$\varnothing$	3
Microdilatation	$\mathbb{H}^0$	4
Cosserat	$\mathbb{H}^{*1}$	6
Microstrech	$\mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^{*1}$	7
Microstrain incompressible	$\mathbb{H}^2$	8
Microstrain	$\mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^2$	9
Micromorphe incompressible	$\mathbb{H}^{*1} \oplus \mathbb{H}^2$	11
Micromorphe	$\mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^{*1} \oplus \mathbb{H}^2$	12

Tableau II.3.2: Différents modèles d'ordre supérieur obtenus en fonction des composantes irréductibles choisies pour l'extension cinématique.

et on retrouve ainsi la classification faite par Forest et Sievert dans [63]. Le choix d'un type de degré de liberté par rapport à un autre va avoir des conséquences sur la structure des mesures de déformation et, par conséquent, sur la loi de comportement. En utilisant la règle de Clebsch-Gordan introduite au Chapitre II.1, on peut regarder comment chacune des parties irréductibles de $\underset{\sim}{\chi}$ contribue au gradient.

[8] En 2D, on aurait:

$$\underset{\sim}{\chi} \in \otimes^2\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{K}^{-1} \oplus \mathbb{K}^0 \oplus \mathbb{K}^2$$

En dehors des différences de dimension des espaces irréductibles, les conclusions sont identiques en 2D et 3D.

	$\underset{\sim}{\chi}$	$\underset{\sim}{\chi} \otimes \nabla$
Scalaire	$\mathbb{H}^0$	$\mathbb{H}^1$
Pseudo-vecteur	$\mathbb{H}^{*1}$	$\mathbb{H}^{*2} \oplus \mathbb{H}^1 \oplus \mathbb{H}^0$
Déviateur	$\mathbb{H}^2$	$\mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^{*2} \oplus \mathbb{H}^1$

Tableau II.3.3: Structure harmonique des gradients des différentes composantes irréductibles.

Nous avons introduit au Chapitre II.1 un processus de construction des espaces de tenseurs de comportement par produit tensoriel symétrique des espaces de déformation et de contrainte associés. A partir de cela, et du tableau précédent, on peut déduire la composante harmonique dominante du tenseur $\underset{\sim}{\underset{\approx}{\mathrm{A}}}$ de la loi de l'élasticité linéaire micromorphe dans chacun des cas précédents. L'intérêt de ceci vient du théorème de Hermann [10, 79] que l'on peut énoncer ainsi:

Théorème 3.2.2. *Soit un milieu matériel possédant un plan invariant par une rotation d'ordre n. On considère un tenseur* T *défini sur ce milieu et dont le terme harmonique de plus haut degré est un élément de $\mathbb{H}^m$. Si $n > m$ alors* T *est au moins hémitrope transverse dans le plan d'invariance.*

On en déduit pour le tenseur $\underset{\sim}{\underset{\approx}{\mathrm{A}}}$ l'anisotropie maximale qui peut être décrite. Au delà de cette limite le comportement est isotrope transverse

Modèle	$\underset{\sim}{\chi}$	Anisotropie plane maximale
Microdilatation	$\mathbb{H}^0$	Orthotrope
Cosserat	$\mathbb{H}^{*1}$	Tetragonale
Microstrech	$\mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^{*1}$	Tetragonale
Microstrain incompressible	$\mathbb{H}^2$	Hexagonale
Microstrain	$\mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^2$	Hexagonale
Micromorphe incompressible	$\mathbb{H}^{*1} \oplus \mathbb{H}^2$	Hexagonale
Micromorphe	$\mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^{*1} \oplus \mathbb{H}^2$	Hexagonale

Tableau II.3.4: Anisotropie plane maximale de différents modèles continus d'ordre supérieur.

Le phénomène de propagation hexatrope que nous avons identifié à la section 3.1 nécessite des DDL de type $\mathbb{H}^2$ et ne peut pas donc pas décrit par des milieux de type Microdilatation, Cosserat et Microstrech[9]. Ce résultat est intéressant du fait de l'importance des modèles de type Cosserat utilisés dans la littérature pour la modélisation des milieux architecturés. Pour nos problématiques, il nous faut donc au minimum considérer un milieu de type Microstrain incompressible.

[9] La conclusion est la même en 2D.

Un calcul rapide nous montre qu'en 3D un tel modèle est défini par 351 coefficients en triclinique et 9 pour l'isotropie. Si on accepte de sacrifier les branches optiques, on peut simplifier, un peu, le problème en pénalisant le micromorphe pour le faire dégénérer en un modèle d'élasticité du premier gradient (300 coefficients en triclinique et 5 en isotrope).

3.2.2 Élasticité à gradient de déformation

On peut penser le modèle micromorphe comme une généralisation 3D de la cinématique de la poutre de Timoshenko. Dans ce modèle, on a également 2 types de degré de liberté: un champ de déplacement $\underline{\mathrm{u}}$ et un champ de rotation $\underline{\phi}$. Les mesures de déformation sont alors la déformation normale, la déformation de cisaillement et le gradient de la rotation. La déformation de cisaillement ($\varepsilon_{t_2} = u_{t_1,n} - \phi_{t_2}$) est l'analogue du tenseur des déformations relatives du modèle micromorphe.

Si l'on impose comme contrainte cinématique la nullité de la contrainte relative, ce qui est l'équivalent 3D de l'hypothèse de Navier-Bernoulli, on obtient:

$$\underset{\sim}{\mathrm{e}} = \underline{\mathrm{u}} \otimes \underline{\nabla} - \underset{\sim}{\chi} = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{\chi} = \underline{\mathrm{u}} \otimes \underline{\nabla}$$

La micro-déformation devient le gradient du déplacement. Les degrés de liberté se limitent alors au champ de déplacement et les mesures de déformation précédentes deviennent:

- $\underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon_{(ij)}$;
- $\underset{\simeq}{\kappa} = \underline{\mathrm{u}} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla}$: le deuxième gradient du déplacement;

La contrainte cinématique dégénère le modèle micromorphe en modèle d'élasticité à gradient. Il est à noter que $\underset{\simeq}{\kappa}$ n'est plus un élément de $\otimes^3(\mathbb{R}^d)$ mais, à présent, de $\mathbb{R}^d \otimes S^2(\mathbb{R}^d)$.

Comme montré par Mindlin [104, 106], du fait de la compatibilité des déformations, il existe 3 formulations équivalentes de l'élasticité à gradient:

Formulation de type I. La mesure de déformation est le second gradient du champ de déplacement $\underset{\simeq}{\kappa} = \underline{\mathrm{u}} \otimes \underline{\nabla} \otimes \underline{\nabla}$;

Formulation de type II. La mesure de déformation est le gradient du champ de déformation $\underset{\simeq}{\eta} = \underset{\sim}{\varepsilon} \otimes \underline{\nabla}$;

Formulation de type III. La mesure de déformation est divisée en 2 tenseurs d'ordre 3, un champ de tenseurs complètement symétriques et le gradient de la rotation $\omega_i = \epsilon_{ijk} u_{j,k}$.

Nous nous intéresserons dans la suite à la théorie exprimée en fonction de la formulation II. Dans la théorie linéaire associée, la loi de comportement est la suivante:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\sigma} = \underset{\approx}{\mathrm{C}} : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\approx}{\mathrm{M}} \therefore \underset{\simeq}{\eta} \\ \underset{\simeq}{\tau} = \underset{\approx}{\mathrm{M}}^T : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\underset{\sim}{\approx}}{\mathrm{A}} \therefore \underset{\simeq}{\eta} \end{cases}$$

En plus du tenseur d'élasticité standard, ce comportement est défini par la donnée d'un tenseur d'ordre 5, $M_{(ij)(kl)m}$, et d'un tenseur d'ordre 6, $A_{\underline{(ij)k}\ \underline{(lm)n}}$, dont les espaces vectoriels respectifs seront désignés par $\mathbb{C}$ou et $\mathbb{S}$tr.

Le tenseur gradient de la déformation $\underset{\simeq}{\eta}$ se décompose de la manière suivante en 2D et en 3D.

$$\underset{\simeq}{\eta} \in \begin{cases} S^2(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{K}^3 \oplus 2\mathbb{K}^1, & \text{en 2D} \\ S^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^{*2} \oplus 2\mathbb{H}^1, & \text{en 3D} \end{cases}$$

On observe que, tant en 2D qu'en 3D, le terme dominant est d'ordre 3; de fait, l'opérateur de comportement $\underset{\underset{\sim}{\approx}}{\mathrm{A}}$ possède une harmonique d'ordre 6 et peut donc reproduire la propagation hexatrope observée numériquement.

On peut regarder la signification cinématique de cet espace $\mathbb{H}^3$ qui est nécessaire à la description de la propagation anisotrope. Pour cela il est intéressant de décomposer $\underset{\simeq}{\eta}$ de deux manières différentes. Nous avons conduit cette analyse dans les références suivantes [12, 15]. Elle a été ensuite reprise par Glüge et al. [73] et par Lazar [93]. On peut tout d'abord décomposer $\underset{\simeq}{\eta}$ en une partie complètement symétrique et une partie complémentaire avant de procéder à la décomposition harmonique.

1ère décomposition: gradient d'élongation et gradient de rotation

On considère le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{T}_{(ij)k} \arrow[dl, "\mathrm{Sym}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Asym=Id-Sym}"] & \\ \mathbb{S}_4 \arrow[d, "\mathcal{H}"] & & \mathbb{S}^a_{(2,1)} \arrow[d, "\mathcal{H}"] \\ \mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^1_S & & \mathbb{H}^{\sharp 2} \oplus \mathbb{H}^1_R \end{tikzcd}$$

Les espaces intermédiaires $\mathbb{S}_3$ et $\mathbb{S}^a_{(2,1)}$ sont GL(3)-invariants. Les symétries indicielles de l'espace $\mathbb{S}_3$ sont caractérisées par le tableau de Young:

$$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$$

et celles de $\mathbb{S}^a_{(2,2)}$ par le tableau:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

On décompose $\eta_{(ij)k}$ en sa partie symétrique $\underset{\simeq}{S} \in \mathbb{S}_3$ et le terme complémentaire $\underset{\sim}{R} \in \mathbb{S}^a_{(2,2)}$

$$\eta_{(ij)k} = S_{ijk} + \frac{1}{3}\left(\epsilon_{jkl}R_{li} + \epsilon_{ikl}R_{lj}\right)$$

L'espace des tenseurs complètement symétriques, $\mathbb{S}_3$, est de dimension 10, tandis que l'espace complémentaire, $\mathbb{S}^a_{(2,2)}$, est de dimension 8. On retrouve la décomposition de la formulation de Mindlin type III [104]. La partie complètement symétrique est reliée au gradient d'élongation:

$$S_{(ijk)} = \frac{1}{3}(\eta_{(ij)k} + \eta_{(ki)j} + \eta_{(jk)i}).$$

La partie complémentaire:

$$R_{ij} = \epsilon_{ipq}\eta_{(jp)q}$$

est un pseudo tenseur d'ordre 2 décrivant le gradient de rotation de $\eta_{(ij)k}$. La théorie de gradient de Koiter, également appelée *constrained couple-stress* réduit la formulation à cette composante. Cela correspond à un milieu de Cosserat contraint. On retrouve ici ce que l'on avait déjà indiqué à la sous section précédente, l'anisotropie d'ordre 6 n'est pas liée à une cinématique (contrainte ou non) de rotation. On voit ici qu'elle est liée au gradient d'élongation. Comme indiqué sur le diagramme, on peut ensuite procéder à la décomposition harmonique de ces espaces:

- $\underset{\simeq}{S}$ se décompose en un déviateur d'ordre 3 ($\dim \mathbb{H}^3 = 7$) ainsi qu'un vecteur ($\dim \mathbb{H}^1_S = 3$);
- $\underset{\sim}{R}$ se décompose en un pseudo-déviateur d'ordre 2 ($\dim \mathbb{H}^{\sharp 2} = 5$) ainsi qu'un vecteur ($\dim \mathbb{H}^1_R = 3$).

La décomposition harmonique de $\underset{\simeq}{\eta}$ dans une interprétation de type III donne

$$\mathbb{T}_{(ij)k} = \left(\mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^1_S\right)_{|\mathrm{GL}(3)} \oplus \left(\mathbb{H}^{\sharp 2} \oplus \mathbb{H}^1_R\right)_{|\mathrm{GL}(3)}.$$

Mais on peut également interpréter le déviateur d'ordre 3 par rapport à la formulation de type II.

$2^{\text{ème}}$ décomposition: Gradient de distorsion et Gradient de dilatation

La deuxième construction consiste à analyser ce qui dans $\underset{\simeq}{\eta}$ provient du gradient de la partie déviatorique de $\underset{\sim}{\varepsilon}$ et ce qui provient du gradient de sa partie sphérique. Cette deuxième construction

est formalisée dans le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{T}_{(ij)} \arrow[dl, "\mathcal{H}"'] \arrow[dr, "\mathcal{H}"] & \\
\mathbb{H}^2 \arrow[d, "\otimes\underline{\nabla}"] & & \mathbb{H}^0 \arrow[d, "\otimes\underline{\nabla}"] \\
\mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^{\sharp 2} \oplus \mathbb{H}^{\sharp 1}_{\nabla dev} & & \mathbb{H}^{\sharp 1}_{\nabla sph}
\end{tikzcd}$$

Et donc la décomposition harmonique de $\underset{\simeq}{\eta}$ dans une interprétation de type II donne:

$$\mathbb{T}_{(ij)k} = \mathbb{T}_{(ij)} \otimes \underline{\nabla} = \left(\mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^{\sharp 2} \oplus \mathbb{H}^1_{\nabla dev}\right)_{|\mathbb{H}^2 \otimes \underline{\nabla}} \oplus \left(\mathbb{H}^1_{\nabla sph}\right)_{\mathbb{H}^0 \otimes \underline{\nabla}}.$$

Le premier terme entre parenthèses correspond au gradient de la distorsion, le second terme au gradient de dilatation. Les espaces $\mathbb{H}^3$ et $\mathbb{H}^{\sharp 2}$ étant présents avec une multiplicité de 1, leur décomposition explicite est uniquement définie, ils ont donc la même expression dans la décomposition de type II et celle de type III. Les parties vecteurs, quant à elles, diffèrent dans les deux constructions (c.f. Auffray [12, 15]) Au final, on peut conclure que la partie de $\underset{\simeq}{\eta}$ appartenant à $\mathbb{H}^3$ est la partie du gradient d'élongation généré par le gradient de la distorsion. L'analyse qui a été conduite précédemment en 3D, ainsi que ses conclusions, se transposent directement à la situation 2D. Pour plus de simplicité, et par soucis de concision, nous allons nous restreindre dans la suite de chapitre à la 2D [21, 23, 28]. Les résultats concernant la 3D peuvent être trouvés dans les références [16, 24].

3.3 Analyse de l'élasticité à gradient 2D

3.3.1 Retour sur les classes de symétrie 2D

On se place donc dans un espace physique à 2 dimensions. Le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ est le groupe $\mathrm{O}(2)$, ses sous-groupes fermés sont conjugués à un élément de la liste suivante [6]:

$$\{1, \mathrm{Z}_2^{\sigma_x}, \mathrm{Z}_k, \mathrm{D}_k, \mathrm{SO}(2), \mathrm{O}(2)\}_{k\geq 2}.$$

Dans cette liste Z_k est le groupe cyclique à k éléments. Il est engendré par la rotation de $\frac{2\pi}{k}$, et $\mathrm{Z}_2^{\sigma_x}$ est le groupe cyclique à 2 éléments engendré par la réflexion par rapport à l'axe des abscisses. De fait, même si il s'agit dans les deux cas de groupes cycliques, Z_k contient des transformations propres tandis que $\mathrm{Z}_2^{\sigma_x}$ contient une opération impropre. Le groupe diédral D_k est généré par Z_k et $\mathrm{Z}_2^{\sigma_x}$, c'est-à-dire composé de rotations et de miroirs.

Les figures dont la classe de symétrie est $[\mathrm{Z}_k]$ ne possèdent pas de symétrie miroir et sont dites

chirales, tandis que celles dont la classe de symétrie est $[\mathrm{D}_k]$ sont achirales. Regardons maintenant le statut de la centro-symétrie. En 3D c'est une opération impropre, mais pas en 2D où elle est équivalente à r_π, une rotation de π. De fait, dès qu'un groupe contient Z_2 comme sous-groupe il est centro-symétrique.

Dans la suite, un groupe sera dit chiral ($\mathcal{C}$), si il contient un groupe conjugué à σ_x et centro-symetrique ($\mathcal{I}$), si il contient l'inversion $i = r_\pi$. Il y a donc 4 situations possibles:

	$\mathcal{I}$	$\overline{\mathcal{I}}$
$\mathcal{C}$	Z_{2k}, $\mathrm{SO}(2)$	Z_{2k+1}
$\overline{\mathcal{C}}$	D_{2k},$\mathrm{O}(2)$	Z_2^π, D_{2k+1}

Tableau II.3.5: Classification des sous-groupes de $\mathrm{O}(2)$ en fonction des transformations les constituant.

3.3.2 Classes de symétrie 2D

Quand nous nous sommes intéressés à ces questions, seul l'espace $\mathbb{E}\mathrm{la}$ avait été étudié [64, 78, 102] et concernant les autres tenseurs, seules les expressions isotropes étaient alors disponibles [104, 106].

En 2D (et en 3D), il nous a fallu de fait répondre aux questions suivantes:

1. Quel sont le nombre et le type de classes de symétrie des espaces $\mathbb{C}\mathrm{ou}$ et $\mathbb{S}\mathrm{tr}$?
2. Pour chacune des classes de symétrie de ces espaces de combien de paramètres indépendants avons nous besoin ?
3. Quelle est, pour chacune des classes de symétrie précédente, la forme des matrices associées dans une base orthonormale adaptée ?

L'approche mise en œuvre au cours du chapitre II.1 nous a permis de répondre à la première question tant en 2D [29] qu'en 3D [115, 116].

Dans le cadre de la 2D, on a les structures harmoniques suivantes pour les espaces de tenseurs du second gradient [29]:

$$\mathbb{C}\mathrm{ou}^\flat \simeq \mathbb{K}^5 \oplus 3\mathbb{K}^3 \oplus 5\mathbb{K}^1, \quad \mathbb{S}\mathrm{tr}^\flat \simeq \mathbb{K}^6 \oplus 2\mathbb{K}^4 \oplus 5\mathbb{K}^2 \oplus 4\mathbb{K}^0 \oplus \mathbb{K}^{-1}.$$

On remarque ici plusieurs choses:

- L'espace $\mathbb{S}\mathrm{tr}^\flat$ contient comme sous espaces $4\mathbb{K}^0 \oplus \mathbb{K}^{-1}$. C'est-à-dire que l'on a 4 coefficients isotropes et 1 coefficient hémitrope. On constate que la dimension de l'espace isotrope diffère en 2D et en 3D, et que le comportement, via $\mathbb{K}^{-1}$, est sensible à la chiralité.
- La structure de ces espaces est nettement plus compliquée que celle de $\mathbb{E}\mathrm{la}^\flat$. Actuellement, sauf erreur de ma part, il n'y a pas de décomposition harmonique explicite de ces

tenseurs. Notons que, du fait de la présence de plusieurs espaces de même type, il existe beaucoup de décompositions différentes possibles. L'établissement d'une telle décomposition serait utile pour mettre en place une démarche par invariants identique à celle que l'on a présentée au Chapitre II.2. Une telle approche mettrait en lumière le rôle joué par chaque composante irréductible;

A partir de la connaissance de la décomposition harmonique des espaces $\mathbb{C}\mathrm{ou}^\flat$ et $\mathbb{S}\mathrm{tr}^\flat$, et via l'utilisation de formules de trace [11, 14, 74], le nombre de paramètres indépendants est ensuite facilement obtenu. En ce qui concerne la construction explicite des matrices de comportement associées, celles-ci ont été obtenues dans le cadre 2D dans Auffray et al. [21] et Auffray et al. [28]. Dans le cas de la 3D, nous avons construit ces matrices pour $\mathbb{S}\mathrm{tr}$ dans Auffray et al. [24], la construction de celles pour $\mathbb{C}\mathrm{ou}$ est à finaliser. Elles nous seront prochainement utiles pour l'étude de la propagation d'onde dans un milieu construit à partir de gyroïdes. Concernant la 2D, nous avons donc les résultats suivants:

• *Élasticité classique*: La classification a été effectuée par He and Zheng [78]:

Nom	Digonale	Orthotrope	Tetragonale	Isotrope
$[\underset{\approx}{G_C}]$	$[Z_2]$	$[D_2]$	$[D_4]$	$[O(2)]$
$\#_{\mathrm{indep}}(\underset{\approx}{C})$	6 (5)	4	3	2

Tableau II.3.6: Classes de symétrie et nombre de coefficients indépendants de l'espace $\mathbb{E}\mathrm{la}^\flat$. Le nombre entre parenthèses indique le nombre minimal de coefficients dans une base adaptée.

• *Élasticité du second ordre*: La classification a été faite dans Auffray et al. [21, 29]:

Nom	Digonale	Orthotrope	Tetrachirale	Tetragonale
$[\underset{\approx}{G_A}]$	$[Z_2]$	$[D_2]$	$[Z_4]$	$[D_4]$
$\#_{\mathrm{indep}}(\underset{\approx}{A})$	21 (20)	12	9 (8)	6

Nom	Hexachirale	Hexagonale	Hemitrope	Isotrope
$[\underset{\approx}{G_A}]$	$[Z_6]$	$[D_6]$	$[SO(2)]$	$[O(2)]$
$\#_{\mathrm{indep}}(\underset{\approx}{A})$	7 (6)	5	5	4

Tableau II.3.7: Classes de symétrie et nombre de coefficients indépendants de l'espace $\mathbb{S}\mathrm{tr}^\flat$. Le nombre entre parenthèses indique le nombre minimal de coefficients dans une base adaptée.

• *Élasticité de couplage*: La classification a été faite dans Auffray et al. [28, 29]:

Nom	Oblique	Rectangulaire	Trichirale	Trigonale	Pentachirale	Pentagonale	Isotrope
$[\underset{\approx}{G_M}]$	$[1]$	$[Z_2^\pi]$	$[Z_3]$	$[D_3]$	$[D_5]$	$[D_5]$	$[O(2)]$
$\#_{\text{indep}}(\underset{\approx}{M})$	18 (17)	9	6 (5)	3	2 (1)	1	0

Tableau II.3.8: Classes de symétrie et nombre de coefficients indépendants de l'espace $\mathbb{C}\text{ou}^\flat$. Le nombre entre parenthèses indique le nombre minimal de coefficients dans une base adaptée.

Au final en combinant ces résultats, nous obtenons 14 classes de symétrie distinctes pour l'élasticité à gradient en 2D:

Nom	Oblique	Rectangulaire	Digonale	Orthotropique	Trichirale	Trigonale	Tétrachirale	Tétragonale
$[G_{\mathcal{L}}]$	$[1]$	$[Z_2^\pi]$	$[Z_2]$	$[D_2]$	$[Z_3]$	$[D_3]$	$[Z_4]$	$[D_4]$
$\#_{\text{indep}}(\mathcal{L})$	45 (44)	27	36 (35)	16	15 (14)	10	13 (12)	9
Nom	Pentachirale	Pentagonale	Hexachirale	Hexagonale	Hemitropique	Isotropique		
$[G_{\mathcal{L}}]$	$[Z_5]$	$[D_5]$	$[Z_6]$	$[D_6]$	$[SO(2)]$	$[O(2)]$		
$\#_{\text{indep}}(\mathcal{L})$	9 (8)	7	9 (8)	7	7	6		

Tableau II.3.9: Classes de symétrie et nombre de coefficients indépendants de l'élasticité à gradient en 2D. Le nombre entre parenthèses indique le nombre minimal de coefficients dans une base adaptée.

Dans chacune de ces classes la loi de comportement a la forme synthétique suivante[10]:

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathrm{C}_{\mathrm{Z}_2}} & \underset{\cong}{\mathrm{M}_1} \\ \underset{\cong}{\mathrm{M}^{T_1}} & \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}_{\mathrm{Z}_2}}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathcal{L}_{\mathrm{Z}_2^\pi} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathrm{C}_{\mathrm{Z}_2}} & \underset{\cong}{\mathrm{M}_{\mathrm{Z}_2^\pi}} \\ \underset{\cong}{\mathrm{M}_{\mathrm{Z}_2^\pi}}^T & \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}_{\mathrm{Z}_2}}} \end{pmatrix} \tag{3.3.1}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Z}_2} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathrm{CZ}_2} & 0 \\ 0 & \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}_{\mathrm{Z}_2}}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathcal{L}_{\mathrm{D}_2} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathrm{C}_{\mathrm{D}_2}} & 0 \\ 0 & \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}_{\mathrm{D}_2}}} \end{pmatrix} \tag{3.3.2}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Z}_3} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathrm{C}_{\mathrm{O}(2)}} & \underset{\cong}{\mathrm{M}_{\mathrm{Z}_3}} \\ \underset{\cong}{\mathrm{M}_{\mathrm{Z}_3}}^T & \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}_{\mathrm{Z}_6}}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathcal{L}_{\mathrm{D}_3} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathrm{C}_{\mathrm{O}(2)}} & \underset{\cong}{\mathrm{M}_{\mathrm{D}_3}} \\ \underset{\cong}{\mathrm{M}_{\mathrm{D}_3}}^T & \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}_{\mathrm{D}_6}}} \end{pmatrix} \tag{3.3.3}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Z}_4} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathrm{C}_{\mathrm{D}_4}} & 0 \\ 0 & \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}_{\mathrm{Z}_4}}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathcal{L}_{\mathrm{D}_4} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathrm{C}_{\mathrm{D}_4}} & 0 \\ 0 & \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}_{\mathrm{D}_4}}} \end{pmatrix} \tag{3.3.4}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Z}_5} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathrm{C}_{\mathrm{O}(2)}} & \underset{\cong}{\mathrm{M}_{\mathrm{D}_5}} \\ \underset{\cong}{\mathrm{M}_{\mathrm{D}_5}}^T & \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}_{\mathrm{SO}(2)}}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathcal{L}_{\mathrm{D}_5} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathrm{C}_{\mathrm{O}(2)}} & \underset{\cong}{\mathrm{M}_{\mathrm{D}_5}} \\ \underset{\cong}{\mathrm{M}_{\mathrm{D}_5}}^T & \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}_{\mathrm{O}(2)}}} \end{pmatrix} \tag{3.3.5}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Z}_6} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathrm{C}_{\mathrm{O}(2)}} & 0 \\ 0 & \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}_{\mathrm{Z}_6}}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathcal{L}_{\mathrm{D}_6} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathrm{C}_{\mathrm{O}(2)}} & 0 \\ 0 & \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}_{\mathrm{D}_6}}} \end{pmatrix} \tag{3.3.6}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{SO}(2)} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathrm{C}_{\mathrm{O}(2)}} & 0 \\ 0 & \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}_{\mathrm{SO}(2)}}} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathcal{L}_{\mathrm{O}(2)} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathrm{C}_{\mathrm{O}(2)}} & 0 \\ 0 & \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}_{\mathrm{O}(2)}}} \end{pmatrix} \tag{3.3.7}$$

Détaillons à présent, et en fonction des types de symétrie, les différents couplages qui peuvent se produire pour l'élasticité du second gradient 2D.

3.3.3 Nature des couplages

La nature des couplages est liée à la classification des types de sous-groupe de $\mathrm{O}(2)$ en 4 sous-ensembles telle que proposée à la subsection 3.3.1. Si la microstructure du milieu est centro-symétrique le tenseur de couplage d'ordre 5 est identiquement nul. Il est intéressant de remarquer qu'en dimension paire l'inversion est une transformation propre. L'annulation de ce couplage n'est pas liée à la chiralité du milieu.

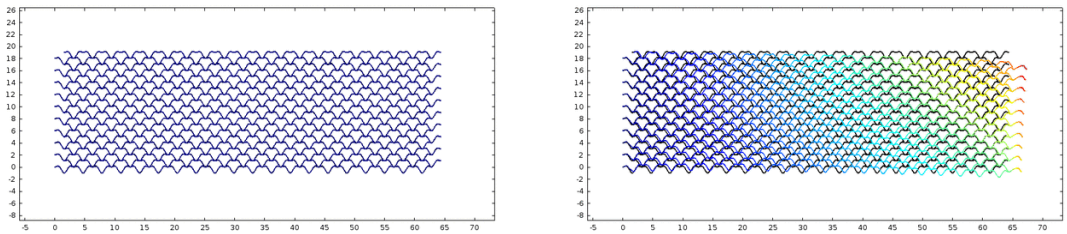
[10] La construction des opérateurs est détaillée dans l'appendice A.

On a deux types de couplages distincts:

Milieux non-centrosymétriques Le tenseur $\underset{\approx}{\mathrm{M}}$ d'ordre 5 couple contrainte et gradient de déformation, c'est-à-dire des contraintes standard et une cinématique d'ordre supérieure. Il s'agit d'un couplage du premier ordre. En 2D ce type de couplage est présent pour des milieux dont la classe de symétrie est du type $[\mathrm{Z}_{2k+1}]$ ou $[\mathrm{D}_{2k+1}]$. Une autre manière d'envisager ce type de couplage est de penser, non à la loi d'élasticité du second ordre, mais à la loi inverse des souplesses généralisées:

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\varepsilon} \\ \underset{\simeq}{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathrm{S}} & \underset{\approx}{\mathrm{N}} \\ \underset{\approx}{\mathrm{N}} & \underset{\approx}{\mathrm{B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\sigma} \\ \underset{\simeq}{\tau} \end{pmatrix}$$

Dans cette situation là on voit que l'absence de symétrie centrale a pour conséquence qu'une contrainte de Cauchy engendre des gradients de déformation. Cet effet, qui est illustré Fig.II.3.4, est non-standard et ne peut pas être décrit par une approche homogène classique.



(a) Au repos (b) En charge

Figure II.3.4: Déformation d'un milieu architecturé non-centrosymétrique soumis à une contrainte uni-axiale [26].

Dans l'exemple représenté, la cellule de base possède un plan de symétrie mais pas de symétrie de rotation, le motif est achiral et non-centro symétrique, son groupe de symétrie est conjugué à Z_2^{π}. Numériquement, on réalise un essai contrôlé en force en imposant une traction constante le long de son bord gauche, tandis que le bord droit est encastré, les autres bords sont laissées libres. La déformation résultante n'est pas homogène et des gradients de déformation se développent dans l'épaisseur de l'échantillon qui va fléchir.

Milieux chiraux Si les couplages liés à la centro-symétrie sont décrits exclusivement par le tenseur d'ordre 5, les couplages chiraux, quant à eux, sont décrits par les tenseurs d'ordre 5 et d'ordre 6 [28]. Nous nous concentrerons ici plus particulièrement sur les couplages liés au tenseur d'ordre 6, c'est-à-dire aux couplages chiraux dans les milieux centro-symétriques. Ces couplages se produisent pour les milieux dont le groupe ponctuel est conjugué à $[\mathrm{Z}_k]$. Il s'agit d'un couplage spatial du second ordre. Regardons ce qui se passe dans le cas le

plus simple de l'hémitropie transverse, la loi de comportement a alors la forme suivante:

$$\mathcal{L}_{SO(2)} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{C_{O(2)}} & 0 \\ 0 & \underset{\underset{\sim}{\approx}}{A_{SO(2)}} \end{pmatrix}$$

avec la représentation matricielle[11] suivante pour le tenseur $\underset{\underset{\sim}{\approx}}{A_{SO(2)}}$

$$\begin{pmatrix} \tau_{111} \\ \tau_{221} \\ \sqrt{2}\tau_{122} \\ \tau_{222} \\ \tau_{112} \\ \sqrt{2}\tau_{121} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{a_{11}-a_{22}}{\sqrt{2}} - a_{23} & 0 & a_{15} & -\frac{a_{15}}{\sqrt{2}} \\ & a_{22} & a_{23} & -a_{15} & 0 & -\frac{a_{15}}{\sqrt{2}} \\ & & \frac{a_{11}+a_{22}}{2} - a_{12} & \frac{a_{15}}{\sqrt{2}} & \frac{a_{15}}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & a_{11} & a_{12} & \frac{a_{11}-a_{22}}{\sqrt{2}} - a_{23} \\ & & & & a_{22} & a_{23} \\ & & & & & \frac{a_{11}+a_{22}}{2} - a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{111} \\ \eta_{221} \\ \sqrt{2}\eta_{122} \\ \eta_{222} \\ \eta_{112} \\ \sqrt{2}\eta_{121} \end{pmatrix}$$

Le couplage est encodée par la matrice antisymétrique suivante:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{15} & -\frac{a_{15}}{\sqrt{2}} \\ -a_{15} & 0 & -\frac{a_{15}}{\sqrt{2}} \\ \frac{a_{15}}{\sqrt{2}} & \frac{a_{15}}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

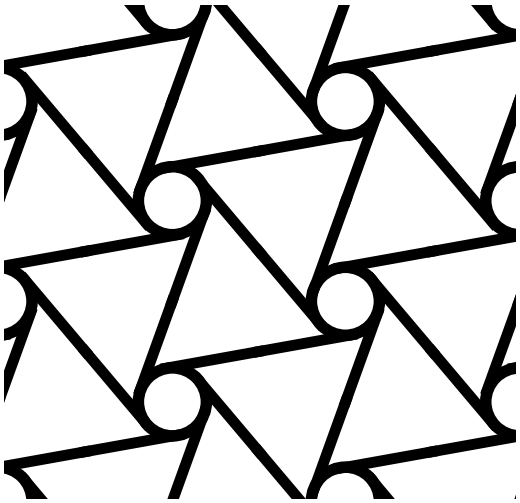
qui est nulle dans le cas achiral: $O(2)$. Cet effet, qui couple ensemble des termes du second ordre, est similaire à celui de la flexion asymétrique qui se produit dans les poutres sans plan de symétrie.

3.4 Propagation d'onde dans un milieu élastique à gradient

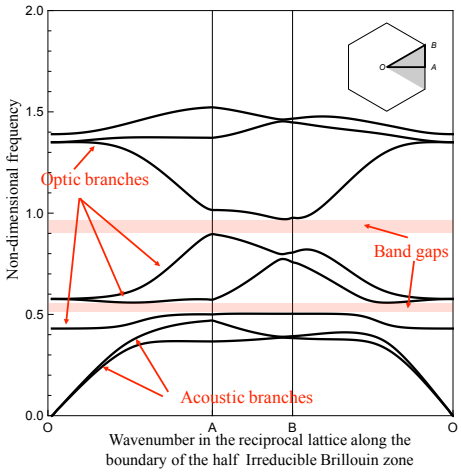
Revenons à présent au point de départ de ce chapitre, et considérons la propagation d'onde dans un milieu élastique à gradient. Nous traiterons ici le cas particulier du milieu hexachiral dont la géométrie et le diagramme de dispersion sont rappelés sur la Figure II.3.5.

Comme précisé lors de la section 3.2 le choix d'un milieu à gradient a pour conséquence la disparition des branches optiques. On ne pourra pas étudier la structure des band-gaps via cette approche. Toutefois, cette modélisation améliore la description de la branche acoustique, l'élasticité ainsi modélisée devient dispersive [57, 100, 104]. Pour plus de clarté, nous avons identifié sur la figure suivante les domaines de validité approximatifs des différentes théories.

[11] Le choix de l'agencement des composantes permettant cette écriture est analysé dans [24].



(a) Réseau hexachiral



(b) Courbe de dispersion du milieu hexachiral

Figure II.3.5: Géométrie et courbe de dispersion d'un milieu hexachiral

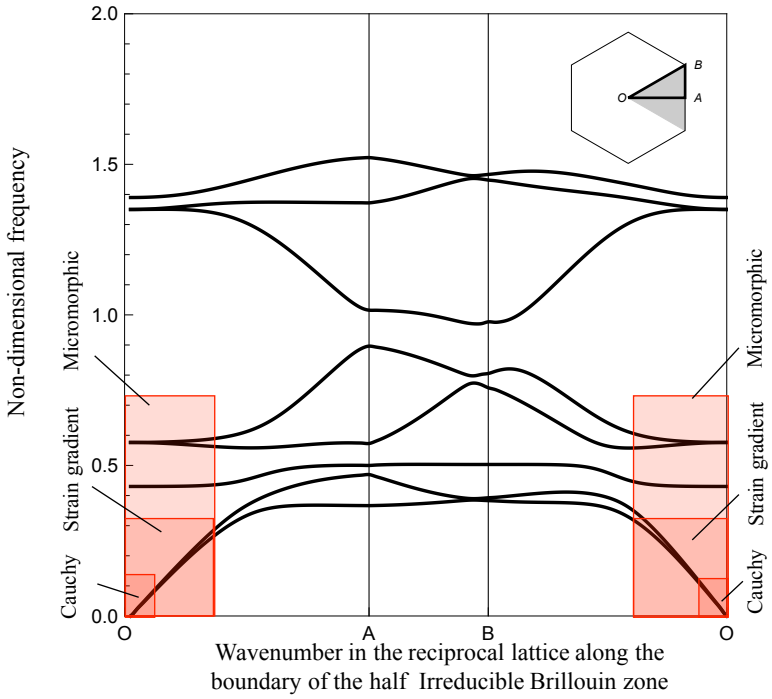


Figure II.3.6: Courbes de dispersion pour un matériau hexachiral avec les domaines de validité de différents modèles continus.

Dans le cadre d'un modèle d'élasticité à gradient, les densités d'énergies cinétiques et potentielles, notées respectivement $\mathcal{K}$ et $\mathcal{P}$, sont des fonctions du déplacement et de ses gradients jusqu'à

l'ordre 2:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} p_i v_i + \frac{1}{2} q_{ij} v_{i,j}, \qquad \mathcal{P} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \tau_{ijk} \eta_{ijk},$$

avec les grandeurs cinétiques suivantes:

- p_i et q_{ij}, les quantités de mouvement d'ordre 1 et 2;
- v_i et $v_{i,j}$ la vitesse ($v_i = \dot{u}_i$) et son gradient.

En négligeant les doubles forces volumiques, l'équation de la dynamique s'écrit alors [104]:

$$s_{ij,j} = \dot{p}_i - \dot{q}_{ij,j} \tag{3.4.1}$$

avec s_{ij}, le tenseur des contraintes effectives défini de la manière suivante:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \tau_{ijk,k}$$

La loi de comportement peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathrm{p}} \\ \underset{\sim}{\mathrm{q}} \\ \underset{\sim}{\sigma} \\ \underset{\simeq}{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \underset{\sim}{\mathrm{I}} & \underset{\simeq}{\mathrm{K}} & 0 & 0 \\ \underset{\simeq}{\mathrm{K}}^T & \underset{\approx}{\mathrm{J}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underset{\approx}{\mathrm{C}} & \underset{\approx}{\mathrm{M}} \\ 0 & 0 & \underset{\approx}{\mathrm{M}}^T & \underset{\approx}{\underset{\sim}{\mathrm{A}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathrm{v}} \\ \underset{\sim}{\nabla \mathrm{v}} \\ \underset{\sim}{\varepsilon} \\ \underset{\simeq}{\eta} \end{pmatrix}$$

avec les nouvelles quantités:

- $\rho I_{(ij)}$, la densité de masse macroscopique;
- K_{ijk}, le tenseur d'inertie de couplage;
- J_{ijqr}, le tenseur d'inertie du second ordre.

Cette structure est ici postulée de manière phénoménologique, toutefois on peut également l'obtenir par homogénéisation dynamique [31, 107, 108, 111, 156].

La modélisation de la propagation d'onde dans ce formalisme nécessite de connaître la forme des opérateurs d'élasticité généralisée ainsi que celles des opérateurs d'inertie généralisée pour toutes les classes de symétrie. Nous venons de voir dans les sections précédentes comment construire les tenseurs d'élasticité généralisée. En ce qui concerne le deuxième point, à part dans certaines situations spécifiques [32, 153], peu de choses sont connues concernant l'anisotropie des opérateurs d'inertie du second ordre. En dépit de son intérêt, nous ne considérerons pas cette problématique ici.

Pour revenir à l'élasticité à gradient, il serait nécessaire pour traiter complètement la question de prendre en compte les tenseurs de couplage d'ordre 5. Ces tenseurs, qui sont non-nuls uniquement dans le cas de milieux non-centraux symétriques, génèrent en dynamique un tenseur gy-

roacoustique [158][12]. La liste de ces différents tenseurs ainsi que leur forme sont disponibles dans la référence [28]. Par soucis de simplicité, nous nous placerons pour la suite de cette section dans le cas de matériaux centrosymétriques.

Classiquement, nous allons chercher les solutions des équations de la dynamique (3.4.1) sous forme d'ondes planes:

$$\underline{\mathrm{u}} = \underline{\mathrm{F}}\left(\omega t - \underline{\mathrm{k}} \cdot \underline{\mathrm{x}}\right), \tag{3.4.2}$$

où $\underline{\mathrm{F}}$ est une fonction vectorielle, ω la pulsation, $\underline{\mathrm{k}}$ le vecteur d'onde et $\underline{\mathrm{x}}$ le vecteur position.

La description de la propagation d'une onde implique l'utilisation de plusieurs types de vitesse. Selon les situations, ces différentes quantités peuvent, ou non, être confondues. On peut distinguer, *a priori*, 3 notions de vitesse [44]:

vitesse de phase $\underline{\mathrm{v}}^p$ cette quantité est définie comme le ratio de la pulsation ω sur le vecteur d'onde $\underline{\mathrm{k}}$:

$$\underline{\mathrm{v}}^p = \frac{\omega}{k}\hat{\underline{\xi}}$$

où $k = \left\|\underline{\mathrm{k}}\right\|$ est le nombre d'onde associé à $\underline{\mathrm{k}}$, et $\hat{\underline{\xi}}$ le vecteur unitaire dans la direction de $\underline{\mathrm{k}}$ de telle manière à ce que $\underline{\mathrm{k}} = k\hat{\underline{\xi}}$. C'est une vitesse sécante décrivant la vitesse de propagation du front d'onde d'une unique onde harmonique se propageant dans la direction $\hat{\underline{\xi}}$.

vitesse de groupe $\underline{\mathrm{v}}^g$ cette vitesse qui est tangente décrit, en 1-D, la modulation du signal:

$$\underline{\mathrm{v}}^g = \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\mathrm{k}}} = \nabla_{\underline{\mathrm{k}}}\omega$$

Cette vélocité est liée à la modulation du paquet d'onde, c'est une sorte de vitesse d'une particule associée.

vitesse de l'énergie $\underline{\mathrm{v}}^e$ elle représente la propagation du flot d'énergie à travers le milieu, elle est définie à partir du vecteur de Poynting $\underline{\mathrm{P}}$:

$$\underline{\mathrm{v}}^e = \frac{\underline{\mathrm{P}}}{\mathcal{E}}$$

avec $\mathcal{E} = \mathcal{K} + \mathcal{P}$ l'énergie mécanique totale, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle précédemment introduites.

Dans la situation la plus simple d'un milieu isotrope linéaire, homogène, non-dispersif et non-dissipatif ces notions sont confondues. Toutefois, dès qu'une de ces hypothèses est modifiée, cette égalité n'est plus nécessairement vraie. Dans le cas d'un milieu anisotrope (toutes les autres hypotheses restant inchangées), la vitesse de phase va différer des 2 autres:

$$\underline{\mathrm{v}}^p \neq \underline{\mathrm{v}}^g = \underline{\mathrm{v}}^e$$

[12] Ces tenseurs ont été étudiés dans la littérature physicienne et sont responsables de l'activité acoustique des cristaux. Si la nature de cet effet est assez clair en 3D, son interprétation en 2D est plus incertaine.

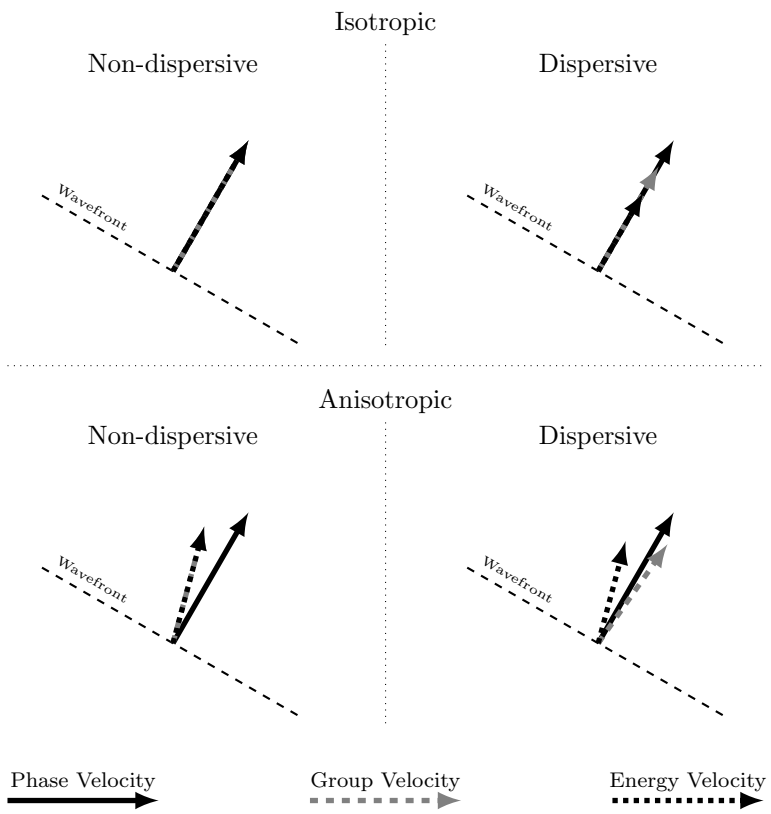


Figure II.3.7: Représentation graphique des vitesse de phase, groupe et énergie dans diverses situations.

On trouvera un résumé des différentes relations entre les vitesses de phase, groupe et énergie dans différentes situations sur la Figure II.3.7. Dans le cas d'un milieu dispersif, les vitesses de groupe et d'énergie ne sont plus égales entre elles. Nous allons voir que ces propriétés sont vérifiées analytiquement et numériquement dans le cas d'un milieu élastique à gradient.

3.4.1 Tenseur acoustique généralisé

Pour obtenir les vitesses associées à la propagation d'une onde plane, considérons l'ansatz suivant, qui est équivalent à (3.4.2):

$$u_i = U_i \mathcal{A} \exp\left[\imath\omega\left(t - \frac{1}{V}\hat{\xi}_i x_i\right)\right], \tag{3.4.3}$$

avec $V = \left\|\underline{\mathrm{v}}^p\right\|$ la norme de la vitesse de phase du front d'onde. Dans cette expression, U_i est un vecteur unitaire réel représentant la polarisation et $\mathcal{A}$, une amplitude complexe. Ces quantités sont indépendantes de x_i et t. La vitesse de phase et le vecteur d'onde peuvent être condensés

dans une unique quantité, le vecteur de lenteur ξ_i:

$$\xi_i = \frac{1}{V}\hat{\xi}_i.$$

L'insertion de l'ansatz (3.4.3) dans l'équation d'équilibre (3.4.1) donne

$$\hat{Q}_{il}U_l = \rho V^2 U_i, \tag{3.4.4}$$

avec $\hat{Q}_{il}$ le tenseur acoustique généralisé défini:

$$\hat{Q}_{il} = \left(C_{ijlm} - \omega^2 J_{ijlm}\right)\hat{\xi}_j\hat{\xi}_m + \frac{\omega^2}{V^2}A_{ijklmn}\hat{\xi}_j\hat{\xi}_k\hat{\xi}_m\hat{\xi}_n. \tag{3.4.5}$$

On observe que la définition usuelle (i. e. $Q_{il} = C_{ijlm}\hat{\xi}_j\hat{\xi}_m$) est retrouvée dans les situations suivantes:

- quand les tenseurs A_{ijklmn} et J_{ijlm} sont nuls, c'est-à-dire pour un milieu classique;
- quand $\omega \to 0$, c'est-à-dire à basse fréquence.

A partir de la solution du problème aux valeurs propres associé à l'équation (3.4.4), il est possible d'obtenir des informations concernant la vitesse de phase et la polarisation des ondes planes se propageant dans la direction $\hat{\xi}_i$.

3.4.2 Conservation de l'énergie, vecteur de Poynting et vitesse de l'énergie

Dans les milieux non-dispersifs, il est classique de confondre vitesse de l'énergie et vitesse de groupe. A priori cette équivalence n'est pas vérifiée pour un milieu dispersif, et les deux notions doivent alors être distinguées. Calculons dans notre situation, la vitesse à laquelle l'énergie véhiculée par une onde plane se propage.

Comme nous tavaillons en harmonique, la vitesse de l'énergie $\underline{v}^e$ est définie par la relation:

$$v_i^e = \frac{\langle P_i \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle}$$

avec la définition suivante pour l'opérateur de moyenne sur une période T:

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cdot \, \mathrm{d}t.$$

La forme locale de la conservation de l'énergie s'écrit:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + P_{i,i} = 0.$$

Tout calcul fait, on aboutit à l'expression suivante:

$$v_j^e = \frac{Q_{ijl}^{\flat} U_l U_i}{V\left(\rho\delta_{ik} + \frac{\omega^2}{V^2} J_{ijkl}\hat{\xi}_j\hat{\xi}_l\right) U_k U_i}. \tag{3.4.6}$$

avec

$$Q_{ijl}^{\flat} = \left(C_{ijlm} - \omega^2 J_{ijlm}\right)\hat{\xi}_m - \frac{\omega^2}{V^2} A_{ijklmn}^{\flat}\hat{\xi}_k\hat{\xi}_m\hat{\xi}_n, \quad A_{ijklmn}^{\flat} = \left(A_{ijklmn} - A_{ikjlmn}\right).$$

3.4.3 Vitesse de groupe

La vitesse de groupe est définie de la manière suivante:

$$\underline{\mathrm{v}}^g = \frac{\partial\omega}{\partial\underline{\mathrm{k}}}.$$

A partir de l'équation (3.4.5) on obtient:

$$v_j^g = \frac{Q_{ijl}^{\sharp} U_l U_i}{V\left(\rho\delta_{ik} + \frac{\omega^2}{V^2} J_{ijkl}\hat{\xi}_j\hat{\xi}_l\right) U_k U_i} \tag{3.4.7}$$

avec

$$Q_{ijl}^{\sharp} = \left(C_{ijlm} - \omega^2 J_{ijlm}\right)\hat{\xi}_m + \frac{\omega^2}{V^2} A_{ijklmn}^{\sharp}\hat{\xi}_k\hat{\xi}_m\hat{\xi}_n, \quad A_{ijklmn}^{\sharp} = \left(A_{ikjlmn} + A_{ijklmn}\right)$$

On observe bien que l' expression de la vitesse de groupe, Eq. (3.4.7), diffère de celle de l'énergie, Eq. (3.4.6). De plus, on peut facilement exprimer leur différence:

$$v_j^g - v_j^e = \frac{2\omega^2}{V^3\left(\rho\delta_{ik} + \frac{\omega^2}{V^2} J_{ijkl}\hat{\xi}_j\hat{\xi}_l\right) U_k U_i} A_{ijklmn} U_l U_i \hat{\xi}_n\hat{\xi}_k\hat{\xi}_m$$

Cette expression met en avant le fait que dans le cas d'un milieu centro-symétrique, la différence entre vitesse de phase et vitesse de groupe est directement reliée au tenseur d'élasticité du second ordre $\underset{\approx}{\mathrm{A}}$. On constate que l'égalité est bien retrouvée à basse fréquence.

3.4.4 Applications numériques

De manière à conclure ce chapitre, nous allons revenir une dernière fois sur l'exemple du milieu hexachiral (II.3.5a). Son groupe de symétrie est conjugué à Z_6 [28], tandis que celui d'un nid-d'abeilles classique est conjugué à D_6. Comme montré section 3.3, dans le cas d'un milieu

élastique à gradient, le comportement diffère dans ces 2 situations:

$$\mathcal{L}_{Z_6} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{C_{O(2)}} & 0 \\ 0 & \underset{\approx}{\underset{\sim}{A_{Z_6}}} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{L}_{D_6} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{C_{O(2)}} & 0 \\ 0 & \underset{\approx}{\underset{\sim}{A_{D_6}}} \end{pmatrix}$$

avec les matrices suivantes:

$$\underset{\approx}{C_{O(2)}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ & c_{11} & 0 \\ & & c_{11} - c_{12} \end{pmatrix};$$

$$\underset{\approx}{\underset{\sim}{A_{Z_6}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{a_{11}-a_{22}}{\sqrt{2}} - a_{23} & 0 & a_{15} & -\frac{a_{15}}{\sqrt{2}} \\ & a_{22} & a_{23} & -a_{15} & 0 & -\frac{a_{15}}{\sqrt{2}} \\ & & \frac{a_{11}+a_{22}}{2} - a_{12} & \frac{a_{15}}{\sqrt{2}} & \frac{a_{15}}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & a_{44} & a_{11}-a_{44}+a_{12} & \frac{3a_{11}-a_{22}}{\sqrt{2}} - a_{23} - \sqrt{2}a_{44} \\ & & & & a_{22}+a_{44}-a_{11} & \sqrt{2}(a_{44}-a_{11})+a_{23} \\ & & & & & \frac{-3a_{11}+a_{22}}{2} - a_{12} + 2a_{44} \end{pmatrix};$$

$$\underset{\approx}{\underset{\sim}{A_{D_6}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{a_{11}-a_{22}}{\sqrt{2}} - a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{a_{11}+a_{22}}{2} - a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{44} & a_{11}-a_{44}+a_{12} & \frac{3a_{11}-a_{22}}{\sqrt{2}} - a_{23} - \sqrt{2}a_{44} \\ & & & & a_{22}+a_{44}-a_{11} & \sqrt{2}(a_{44}-a_{11})+a_{23} \\ & & & & & \frac{-3a_{11}+a_{22}}{2} - a_{12} + 2a_{44} \end{pmatrix}.$$

Dans nos calculs nous avons considéré les tenseurs d'inertie isotropes, et nous les avons remplacés par le scalaire ζ[13].

De nombreuses informations peuvent être obtenues à partir des diagrammes polaires des vitesses de phase, groupe et énergie. Ces quantités sont représentées sur la Fig.II.3.9 pour un milieu Z_6-invariant, et sur la Fig.II.3.10 dans le cas D_6-invariant, et ceci pour chaque mode. Sur ces graphiques, trois fréquences spécifiques sont considérées[14]: $\Omega_1 = 0.01\,\Omega_0$, $\Omega_2 = 0.8\,\Omega_0$, $\Omega_3 = 1.3\,\Omega_0$. Par soucis de simplification, toutes les vitesses ont été normalisées par rapport à la valeur basse fréquence de la vitesse de phase du premier mode. Il peut être observé que, quelque soit la symétrie, à basse fréquence toutes les vitesses sont isotropes (lignes continues grises sur Figs. II.3.9 et II.3.10).

A plus haute fréquence, l'isotropie est brisée et les caractéristiques anisotropes de chaque classe apparaissent. En particulier sur les courbes à Ω_3 (lignes continues noires) la symétrie hexago-

[13] Le détail de la procédure de calcul peut être trouvé dans Rosi and Auffray [127].

[14] La pulsation a été normalisée par rapport à la fréquence de résonance $\Omega_0 = 10.48 \times 10^3$ rad/s d'une branche de la cellule hexachirale.

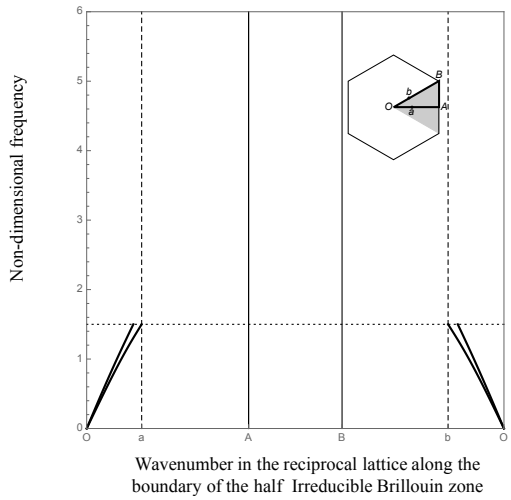


Figure II.3.8: Courbes de dispersion pour le matériau hexachiral décrit par un milieu à gradient.

Hexagonal D_6		
Paramètres	Valeur	Unité
c_{11}	7.3×10^7	Pa
c_{12}	-3.8×10^7	Pa
a_{11}	1.51×10^3	Pa
a_{12}	1.00×10^3	Pa· m
a_{22}	3.52×10^3	Pa· m
a_{15}	0	Pa· m
a_{23}	-0.72×10^3	Pa· m
a_{44}	12.96×10^3	Pa· m
ζ	0.0648	kg· m
ρ	249.32	kg/m^3

Hexachiral Z_6		
Paramètres	Valeur	Unité
c_{11}	6.58×10^7	Pa
c_{12}	-3.5×10^7	Pa
a_{11}	1.14×10^3	Pa
a_{12}	0.75×10^3	Pa· m
a_{22}	2.64×10^3	Pa· m
a_{15}	-0.84×10^3	Pa· m
a_{23}	-0.54×10^3	Pa· m
a_{44}	9.72×10^3	Pa· m
ζ	0.0648	kg· m
ρ	249.32	kg/m^3

Tableau II.3.10: Valeurs des paramètres utilisés dans la simulation dans les cas hexagonal D_6 (gauche) et hexachiral Z_6 (droite).

nale apparaît clairement. Pour la géométrie hexachirale, on peut observer un léger effet de la chiralité le graphe ayant perdu ses symétries miroirs. Cet effet n'est néanmoins par très marqué, peut-être à cause de l'évaluation imprécise des coefficients[15]. Les résultats sont néanmoins en accord qualitatif avec ceux de la littérature obtenus à partir d'une analyse de Bloch de la cellule élémentaire [135]. En ce qui concerne la géométrie D_6, le diagramme de la vitesse de l'énergie est en adéquation avec ce que l'on observe numériquement sur la Fig II.3.1. Ces résultats sont encore une fois consistants avec ceux obtenus à partir d'une analyse de Bloch [47]. On remarque également que les diagrammes des vitesses de groupe et d'énergie diffèrent, confirmant ce que l'on a montré analytiquement précédemment.

[15]L'évaluation numérique des coefficients d'ordre supérieur est toujours une question ouverte [141]. Ici les coefficients ont été évalués à partir de conditions de contour quadratiques en suivant la procédure décrite dans Auffray et al. [23]. On sait que les modules trouvés, bien que trop raides, respectent qualitativement les propriétés de symétrie du milieu.

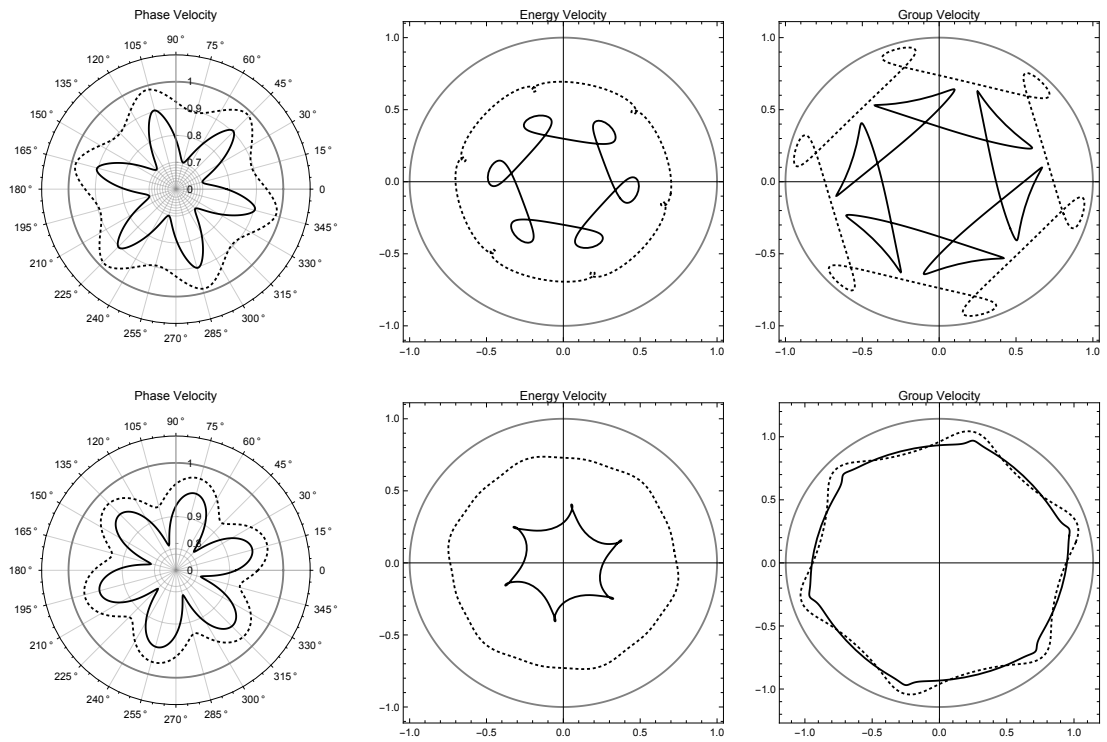


Figure II.3.9: Diagramme polaire des vitesses de phase, groupe et d'énergie pour un milieu Z_6-invariant à trois fréquence: Ω_1 (gris continu), Ω_2 (pointillés), Ω_3 (noire continu) pour les mode 1 (en-haut) et 2 (en-bas).

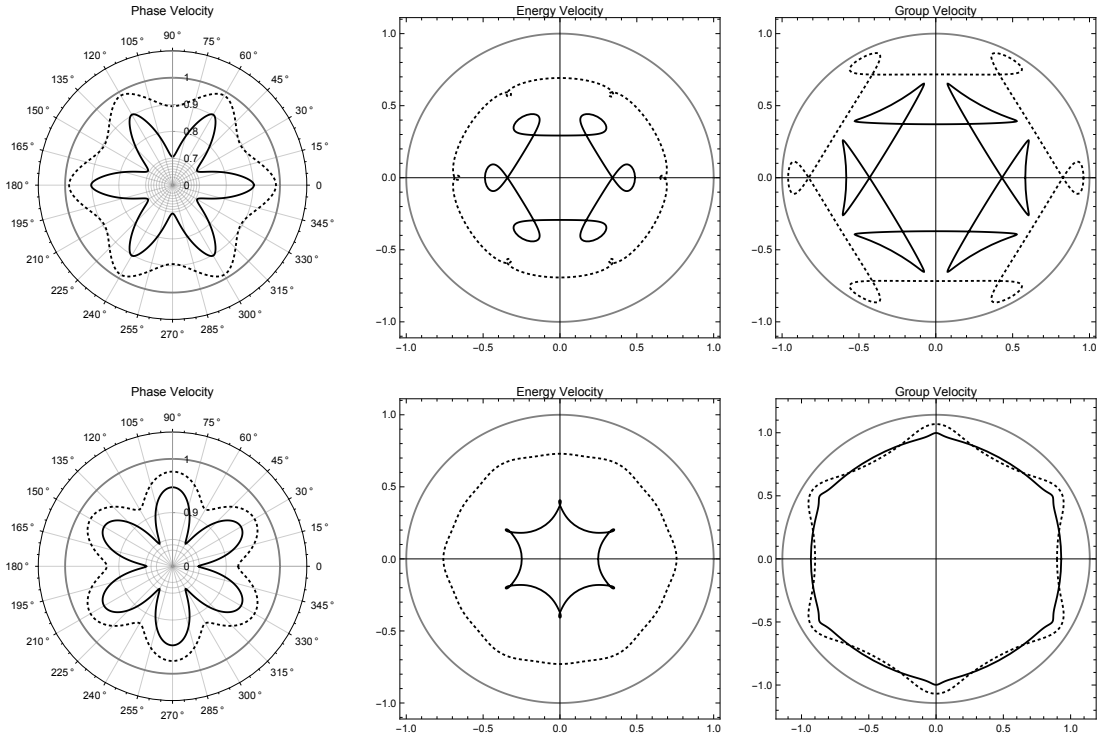


Figure II.3.10: Diagramme polaire des vitesses de phase, groupe et d'énergie pour un milieu D_6-invariant à trois fréquence: Ω_1 (gris continu), Ω_2 (pointillés), Ω_3 (noire continu) pour les mode 1 (en-haut) et 2 (en-bas).

Conclusion et travaux à venir

3.5 Conclusion

L'ensemble des travaux présentés dans ce mémoire couvre une période de 8 ans entre le premier et le plus dernier article publiés.

Durant cette période, j'ai pu continuer les travaux débutés au cours de ma thèse sur la modélisation du comportement statique des milieux architecturés. A coté de cela, et grâce à une collaboration avec des mathématiciens, j'ai développé un axe de recherche consacré à la géométrie des espaces de tenseurs. Mes travaux les plus récents font la synthèse de ces approches en appliquant à l'étude des milieux architecturés les résultats théoriques obtenus.

Nos résultats importants sur cette période sont les suivants:

1. **Construction des opérateurs anisotropes de l'élasticité à gradient**. Les résultats que nous avons publiés sur ce sujet sont d'une grande utilité pratique. Les formes des opérateurs ont été utilisées en corrélation d'image pour déterminer expérimentalement des modules d'ordre supérieur [89] et pour vérifier des résultats homogénéisation [31, 85, 121, 122].
2. **Détermination de l'ensemble des classes de symétrie d'un tenseur donné**. Nous avons obtenu des théorèmes généraux sur les classes de symétrie d'un tenseur d'ordre pair et impair en dimension 2 et 3. Ces résultats généralisent le travail de Forte and Vianello [64] à des tenseurs quelconques.
3. **Construction d'une base d'intégrité pour le tenseur d'élasticité**. Nous avons pu répondre à la question formulée par Boehler et al. [40] et obtenir, pour la première fois, une base d'intégrité du tenseur d'élasticité. Toutefois, comme détaillé ci-après, il reste encore du travail pour construire un résultat d'intérêt pratique, mais c'est un premier résultat important.

Ces résultats sont tout autant pratiques, comme l'établissement de la liste des opérateurs anisotropes du second gradient, que méthodologiques, en introduisant des outils d'analyse basés sur les représentations d'actions de groupe. Cette approche, qui montre son intérêt quand la situation à analyser devient complexe, met en lumière le fait que l'objet de base n'est pas le tenseur, comme on pourrait le penser naturellement, mais ses composantes irréductibles, véritables briques de

base que l'on peut ajouter, supprimer ou combiner pour décrire les effets recherchés de manière minimale. Comme montré dans le Chapitre II.3, la mécanique des milieux à microstructure est un domaine dans lequel l'intérêt de ces approches est indéniable.

3.6 Directions à explorer

Les outils que nous avons introduits étant assez généraux, ils peuvent s'appliquer à de nombreuses problématiques de mécanique. Nous allons détailler ci-après trois directions de travail qui nous paraissent importantes et qui découlent directement des travaux présentés dans ce manuscrit [16]:

3.6.1 Conception optimale

Dans l'optique de la conception d'un matériau sur mesure, le choix d'une microstructure est une étape fondamentale qui va déterminer les propriétés résultantes du matériau. L'évolution rapide de la thématique des métamatériaux montre qu'à partir de certaines microstructures des effets non-standards peuvent être obtenus macroscopiquement. On peut obtenir de tels effets sans nécessairement recourir à des descriptions par milieux continus généralisés. L'analyse de la structure du tenseur d'élasticité révèle que derrière les 8 classes d'élasticité se cache une forêt de situations non-standards pouvant potentiellement présenter des intérêts mécaniques.

Pour être plus précis, nous avons vu dans le Chapitre II.2 qu'il existe, dans le cas de l'élasticité 2D, 2 types d'orthotropie: une standard, ou générique, et une deuxième dégénérée nommée R_0-orthotrope par Vanucci. En revenant à l'analyse des classes de symétrie de l'élasticité 2D, et en inversant l'opération de Clips introduite au Chapitre II.1, on s'aperçoit que ce cas dégénéré apparaît naturellement. Ceci est confirmé par l'étude des annulations des invariants de la base d'intégrité de l'élasticité 2D (c.f. Chapitre II.2). Cette analyse montre par la même occasion qu'il s'agit, en 2D, du seul cas de dégénérescence possible. Il est possible de réaliser des matériaux ayant cette orthotropie non standard: le papier possède cette propriété [147], de même que certains laminés [144].

En ce qui concerne l'élasticité 3D, He [77] s'est intéressé aux matériaux anisotropes pouvant avoir des modules d'Young, de cisaillement ou d'aire isotrope. Pour ce faire, le matériau ne peut être qu'orthotrope ou isotrope transverse avec pour composante dans $\mathbb{H}^4$ le tenseur nul. Cette situation est la généralisation 3D de la R_0-orthotropie. Les conditions particulières recherchées sont satisfaites par des tenseurs anisotropes "non-génériques". Quant à la réalité physique de cette anisotropie, elle a été observée dans le comportement mécanique de l'os trabéculaire [49]. De la même manière, nous avons établi des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un matériau triclinique se déforme comme un milieu isotrope (ou cubique) lorsqu'il est soumis à une pression

[16] Bien entendu ce choix n'est pas exclusif.

hydrostatique [17]. En d'autres termes, la nature anisotrope de la matière est invisible pour certain type de chargement. Il existe une approche équivalente dans le cadre de l'élastodynamique qui s'intéresse aux matériaux anisotropes pour lesquels les ondes longitudinales se propagent comme dans un matériau isotrope [83, 128].

On s'aperçoit que la simple notion de classe de symétrie n'est pas suffisante pour définir, nommer et prévoir ces différents types de comportement élastique. Plusieurs questions se posent alors:

1. Quelle est la définition mathématique précise de ces strates anisotropes non-génériques ?
2. Combien existe-t-il de telles "sous-classes" ?
3. Parmi ces "sous-classes" lesquelles ont des conséquences mécaniques intéressantes ?
4. Comment réaliser en pratique les microstructures produisant ces effets ?

En utilisant les opérations de Clips de manière inverse, on peut montrer qu'il existe, pour une interprétation de la décomposition harmonique donnée[17], 117 situations dégénérées en 3D. Une fois des configurations intéressantes identifiées, il serait intéressant d'utiliser les critères retenus sur les invariants pour obtenir les microstructures correspondantes par optimisation topologique.

3.6.2 Base fonctionnelle pour le tenseur d'élasticité

Dans le cadre de la thèse de M. Olive, nous avons obtenu pour la première fois une base d'intégrité pour le tenseur d'élasticité. Ce résultat clôt la question posée par Boehler et al. [40]. Toutefois, la base que nous avons obtenue est d'un intérêt plus académique que pratique:

1. Elle est minimale au sens des bases d'intégrité mais contient pas moins de 297 éléments. Il est donc important d'en extraire une base fonctionnelle minimale. Ce faisant, nous perdrons la propriété de générer l'algèbre des polynômes invariants mais nous garderons celle de séparer les orbites et de générer des fonctions séparantes. Toutefois, comme montré sur les exemples du Chapitre II.2, la base fonctionnelle conservera des sygyzies et ne sera sûrement pas de petite taille[18]. Dans tous les cas, ce travail reste à faire, et il nous faudra pour cela améliorer notre compréhension géométrique des espaces harmoniques. L'analyse de l'ensemble des dégénérescences que nous avons évoqué à la sous-section précédente devrait probablement jouer un rôle dans ce travail.
2. Les invariants que l'on a obtenus répondent à une question algébrique à savoir, la génération de l'algèbre des polynômes $\mathrm{SO}(3)$-invariants du tenseur d'élasticité. Sous leurs formes actuelles, ces quantités n'ont, *a priori*, pas de sens physique. Un travail intéressant serait

[17] Se donner une interprétation de la décomposition harmonique revient à distinguer les 2 espaces $\mathbb{H}^2$.

[18] Pour les adeptes du raisonnement *"21-3 ça fait 18"*, il est à noter qu'il est possible d'extraire un système de 18 paramètres. Toutefois, comme illustré précédemment, ce système de paramètres ne sépare pas les orbites mais génère un système d'équations polynomiales dont les autres invariants sont racines. En d'autres termes, la donnée des 18 invariants d'un système de paramètres désigne un ensemble discret d'orbites. Problème supplémentaire, il ne semble pas qu'il y ait de méthode automatique pour extraire un système de paramètres d'une base d'intégrité (surtout quand celle-ci est de cardinal élevé).

d'identifier les combinaisons d'invariants qui ont un sens mécanique. Cette démarche aiderait à la détermination d'une base fonctionnelle à partir de la base d'intégrité.

3.6.3 Extension à la dynamique

Rapidement abordé, à la fin de ce manuscrit, l'élastodynamique des milieux architecturés est un domaine d'intérêt personnel plus récent. Cette thématique est issue d'un collaboration avec G. Rosi sur la propagation d'onde dispersive en élasticité, ainsi que du co-encadrement de la thèse d'H. Nassar sur l'homogénéisation dynamique des milieux periodiques. L'approche conduite au cour de cette thèse montre que:

1. la loi de comportement effective est non-locale en espace et en temps [107];
2. il y a apparition de couplages non-standard espace-temps [107] ;
3. les approximations locales impliquent des milieux à gradient d'ordre n et requiert la présence de termes d'inertie d'ordre supérieur [109].

.

L'approche par groupe telle que nous avons pu la conduire jusqu'à présent n'est pas, dans son formalisme actuel, directement applicable à l'étude de lois de comportement non locales. Les techniques d'homogénéisation à la Willis se basent sur des développements en ondes planes. Le problème qui est local dans l'espace de Fourier (vecteur d'onde $\underline{k}$, pulsation ω) devient non local quand on repasse dans l'espace physique (vecteur position $\underline{x}$, temps t). Ainsi, dans l'espace de Fourier, on n'a pas un tenseur unique décrivant le comportement effectif mais une fonction tensorielle dépendant de $(\underline{k}, \omega)$. Les résultats d'homogénéisation classiques se retrouve quand $\|\underline{k}\| \to 0$ et $\omega \to 0$. Dans cette limite, le groupe de symétrie du problème "coïncide" avec le groupe de symétrie du motif périodique. Dès que $\|\underline{k}\| \neq 0$, le groupe de symétrie du phénomène est l'intersection du groupe de symétrie de $\underline{k}$ et de celui de la géométrie $\mathcal{T}$. De plus, il est important de noter que dans le cas d'un pavage périodique, les nombres d'onde $\underline{k}$ à tester sont contenus dans la première zone de Brillouin et que, parmi eux, ceux associés aux points de hautes symétries sont d'une importance particulière.

De la même manière que l'on avait étudié les liens entre symétries matérielles et physiques dans le cas local, il serait important de comprendre ces liens dans le cas non local. Ceci implique, comme expliqué plus haut, de définir proprement les notions de symétries (physiques et matérielles) exprimées, non plus dans l'espace physique, mais dans l'espace de Fourier. Une telle exploration ne semble pas avoir été entreprise en mécanique des milieux continus, et peut réutiliser à bon escient des outils de théorie des groupes jusqu'alors utilisés en physique de la matière condensée [58]. Cette étude peut s'inspirer, comme point de départ, de ce qui a été fait dans le domaine de électromagnétisme [45]. En effet contrairement à la mécanique, l'utilisation de comportements non-locaux y est plus fréquente [91].

Ce travail peut avoir plusieurs implications pratiques importantes. Les calculs numériques nécessaires à la détermination du comportement dynamique effectif non-local sont lourds à mener [53]. On peut espérer que les résultats d'une telle étude permettent d'optimiser le nombre et type de mesures (ou de calculs) nécessaires pour identifier (ou simuler) le comportement dynamique dans une certaine plage de fréquences. De plus, en termes de conception, la compréhension du lien entre symétries matérielles et comportement effectif est un outil permettant de déterminer, pour une application donnée, la microstructure permettant de générer les effets désirés.

3.6.4 En bref

Parmi les thématiques non détaillées vis-à-vis desquelles les outils discutés dans ce manuscrit peuvent être pertinents on peut évoquer, pèle-mêle:

Grandes transformations. La formulation des lois en grandes transformations requiert l'utilisation de bases fonctionnelles. L'obtention de bases incluant des tenseurs d'ordre supérieur à 2 est intéressante pour la modélisation des classes de symétrie nécessitant des tenseurs de structure d'ordre supérieur.

Lois seuils. De manière similaire, nos outils permettent la modélisation de fonctions seuils dans des situations un peu exotiques, par exemple le seuil plastique pour des milieux micromorphes.

Modèles réduits. L'analyse en composantes irréductibles permet de simplifier des lois de comportement en n'y conservant que la physique minimale que l'on veut décrire.

Homogénéisation . Il s'agit d'un point important à améliorer car actuellement les méthodes de calcul des modules d'ordre supérieur ne sont pas satisfaisantes [141]. Dans une approche par conditions de contour enrichies, le choix du polynôme à imposer sur le bord doit pouvoir bénéficier des outils introduits [125].

Identification expérimentale. Ce point est lié au précédent et vise au développement d'essais permettant de mesurer physiquement les modules d'ordre supérieur de matériaux architecturés. Des développements sont en cours au LMT-Cachan avec le travail de M. Poncelet [26] sur les conditions de contour riches (c.f. Figure II.3.11).

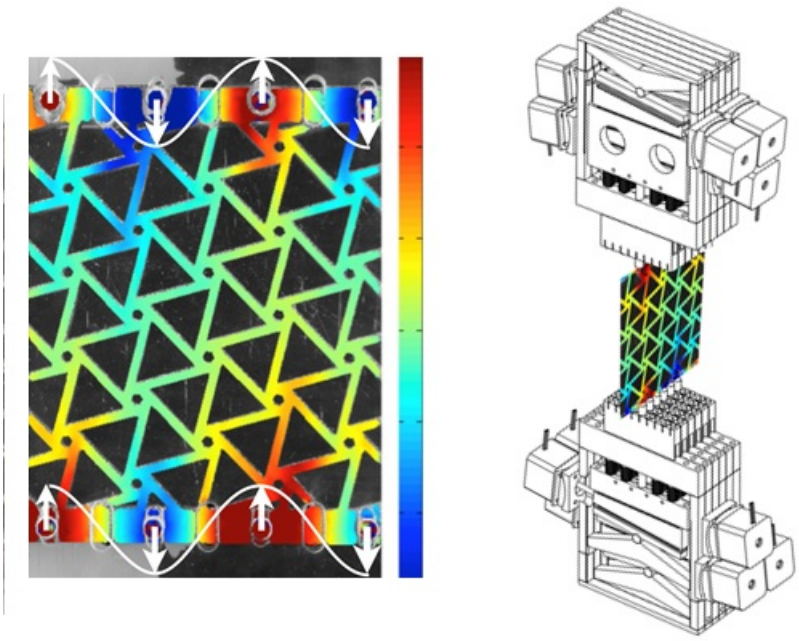


Figure II.3.11: Travaux préliminaires sur le dimensionnement d'une machine d'essai capable de produire des conditions aux limites enrichies

Annexe A

Notations

Nous introduisons ici les notations principales qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Les notations plus spécifiques seront introduites au cours du texte, en fonction des besoins.

Groupes

Nous considérerons les groupes de Lie suivants :

- $\mathrm{GL}(d)$, le groupe des transformations linéaires inversibles de $\mathbb{R}^d$, i.e. $\mathrm{F} \in \mathrm{GL}(d)$ ssi $\det(\mathrm{F}) \neq 0$;
- $\mathrm{O}(d)$, le groupe orthogonal des isométries de $\mathbb{R}^d$ i.e. $\mathrm{Q} \in \mathrm{O}(d)$ ssi $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}(d)$ et $\mathrm{Q}^{-1} = \mathrm{Q}^T$, l'exposant ^{T} indique la transposition;
- $\mathrm{SO}(d)$, le groupe spécial orthogonal des rotations de $\mathbb{R}^d$ i.e. $\mathrm{Q} \in \mathrm{SO}(d)$ ssi $\mathrm{Q} \in \mathrm{O}(d)$ et $\det \mathrm{Q} = 1$;

Le groupe $\mathrm{O}(2)$ est généré par les éléments suivants:

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ 0 \leq \theta < 2\pi, \quad \text{and} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

où r_θ est une rotation d'angle θ et σ_x la réflexion d'axe x[1];

$[\mathrm{H}]$ indique la classe de conjugaison d'un groupe H;

Espaces vectoriels

On considérera les espace suivants :

- $\mathcal{Q}^n$, l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n sur $\mathbb{R}^3$;

[1] Le choix d'une réflexion par rapport à un autre axe aurait tout aussi bien fait l'affaire.

- $\mathcal{H}^n \subset \mathcal{Q}^n$, le sous-espace des polynômes harmoniques de degré n sur $\mathbb{R}^3$;
- $\mathbb{G}^n(\mathbb{R}^d) := \otimes^n \mathbb{R}^d$, l'espace général des tenseurs d'ordre n sur $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire sans symétrie indicielle. On se permettra de ne pas préciser $\mathbb{R}^d$ quant le contexte sera suffisamment clair pour éviter tout malentendu;
- $\mathbb{S}^n := S^n(\mathbb{R}^d)$, le sous-espace de $\mathbb{G}^n$ des tenseurs symétriques par rapport à la permutation de l'ensemble de leurs indices;
- $\mathbb{T}^n$, un sous-espace de $\mathbb{G}^n$ contenant $\mathbb{S}^n$; il est généré à partir de $\mathbb{R}^d$ par une combinaison finie de produits $\otimes^p$ et S^q;
- $\mathbb{H}^k$, l'espace des tenseurs harmoniques d'ordre k sur $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire des tenseurs complètements symétriques et de trace nulle;
- $\mathbb{K}^k$, l'espace des tenseurs harmoniques d'ordre k sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire des tenseurs complètements symétriques et de trace nulle.

Dans le cas des espaces de tenseurs de comportement, les espaces sur $\mathbb{R}^2$ seront distingués de ceux sur $\mathbb{R}^3$ par l'adjonction d'un $^\flat$. Par exemple $\mathbb{E}\mathrm{la}$ désigne l'espace des tenseurs d'élasticité dans $\mathbb{R}^3$, tandis que $\mathbb{E}\mathrm{la}^\flat$ désigne ceux sur $\mathbb{R}^2$.

Notations tensorielles

Nous noterons les tenseurs d'ordre 1 à 6 de la manière suivante:

$$\underline{\mathrm{T}} \quad ; \quad \underset{\sim}{\mathrm{T}} \quad ; \quad \underset{\simeq}{\mathrm{T}} \quad ; \quad \underset{\approx}{\mathrm{T}} \quad ; \quad \underset{\cong}{\mathrm{T}} \quad ; \quad \underset{\underset{\sim}{\approx}}{\mathrm{T}}.$$

Quand un tenseur est d'un ordre quelconque on le notera simplement T. Les contractions indicielles simple et double seront notées, respectivement $\cdot$ et $:$.

A moins d'indication contraire, la convention d'Einstein sur la sommation des indices répétés sera appliquée.

Quand nous aurons besoin de les préciser, nous noterons les symétries indicielles de la manière suivante:

- $(..)$ indique l'invariance du tenseur par rapport à la permutation des termes entre parenthèses;
- $\underline{..}\ \underline{..}$ indique l'invariance du tenseur par rapport à la permutation des blocs soulignés;
- $\overline{..}\ \underline{..}$ indique l'antisymétrie par rapport à la permutation des blocs sur- et soulignés.

En ce qui concerne les produits tensoriels, nous utiliserons les notations classiques suivantes:

- $\otimes$, le produit tensoriel standard et $\otimes^n$, sa puissance n-ième;
- S^2, le produit tensoriel symétrisé et S^n, son extension à n éléments;
- $\wedge^2$, le produit tensoriel antisymétrisé.

$\underline{\nabla}$, désignera l'opérateur nabla classique.

On utilisera également les notations suivantes:

- $\Sigma_{[\mathrm{H}]}$, la strate ouverte des tenseurs dont la classe de symétrie est exactement $[\mathrm{H}]$;
- $\overline{\Sigma}_{[\mathrm{H}]}$, la strate fermée des tenseurs dont la classe de symétrie est au moins $[\mathrm{H}]$.

Annexe B

Construction des matrices anisotropes

On présente ici brièvement la manière dont sont construites les représentations matricielles des tenseurs d'élasticité du premier et du second ordre et ce dans le cadre de la 2D [21]. La construction de l'élasticité de couplage suit le même principe et pourra etre retrouvé dans Auffray et al. [28], tandis que la 3D est traitée dans Auffray et al. [24]. Initialement cette stratégie a été développée dans le cadre de l'élasticité classique par Mehrabadi and Cowin [102].

Base orthonormale et rangement des composantes

On considère les espaces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_{(ij)} &= \{\mathrm{T} \in \mathbb{T}_{ij} | \mathrm{T} = \sum_{i,j=1}^{2} T_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j,\ T_{ij} = T_{ji}\}; \\
\mathbb{T}_{(ij)k} &= \{\mathrm{T} \in \mathbb{T}_{ijk} | \mathrm{T} = \sum_{i,j,k=1}^{2} T_{ijk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k,\ T_{ijk} = T_{jik}\}.
\end{aligned}$$

dont les dimensions sont, en 2D, respectivement de 3 et 6.

- Le tenseur d'élasticité classique $\underset{\approx}{\mathrm{C}}$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{T}_{(ij)}$;
- Le tenseur d'élasticité du second-ordre $\underset{\approx}{\mathrm{A}}$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{T}_{(ij)k}$.

On va, d'une part, exprimer le tenseur de Cauchy $\underset{\sim}{\sigma}$ et celui de déformation $\underset{\sim}{\varepsilon}$ comme un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et, d'autre part, exprimer les tenseurs η et τ comme des vecteurs de $\mathbb{R}^6$. On introduit pour cela les bases orthonormales suivantes:

$$\begin{aligned}
\underline{\widetilde{\mathrm{e}}}_I &= \left(\frac{1-\delta_{ij}}{\sqrt{2}} + \frac{\delta_{ij}}{2}\right)\left(\underline{\mathrm{e}}_i \otimes \underline{\mathrm{e}}_j + \underline{\mathrm{e}}_j \otimes \underline{\mathrm{e}}_i\right), \quad 1 \leq I \leq 3; \\
\underline{\widehat{\mathrm{e}}}_\alpha &= \left(\frac{1-\delta_{ij}}{\sqrt{2}} + \frac{\delta_{ij}}{2}\right)\left(\underline{\mathrm{e}}_i \otimes \underline{\mathrm{e}}_j + \underline{\mathrm{e}}_j \otimes \underline{\mathrm{e}}_i\right) \otimes \underline{\mathrm{e}}_k, \quad 1 \leq \alpha \leq 6.
\end{aligned}$$

Dans ces bases on a:

$$\underset{\sim}{\widetilde{\varepsilon}} = \sum_{I=1}^{3} \widetilde{\varepsilon}_I \underline{\widetilde{\mathbf{e}}}_I, \quad \underset{\sim}{\widetilde{\sigma}} = \sum_{I=1}^{3} \widetilde{\sigma}_I \underline{\widetilde{\mathbf{e}}}_I, \quad \underset{\simeq}{\widehat{\eta}} = \sum_{\alpha=1}^{6} \widehat{\eta}_\alpha \underline{\widehat{\mathbf{e}}}_\alpha, \quad \underset{\simeq}{\widehat{\tau}} = \sum_{\alpha=1}^{6} \widehat{\tau}_\alpha \underline{\widehat{\mathbf{e}}}_\alpha$$

On peut alors exprimer $\underset{\approx}{\mathrm{C}}$, $\underset{\approx}{\mathrm{C}}$ et $\underset{\sim}{\underset{\approx}{\mathrm{A}}}$ comme des matrices 3×3, 3×6 et 6×6:

$$\widetilde{\mathbf{C}} = \sum_{I,J=1,1}^{3,3} \widetilde{C}_{IJ} \widetilde{\mathbf{e}}_I \otimes \widetilde{e}_J \quad \overline{\mathbf{M}} = \sum_{I,\alpha=1,1}^{3,6} \overline{M}_{I\alpha} \widetilde{\mathbf{e}}_I \otimes \widehat{\mathbf{e}}_\alpha, \quad \widehat{\mathbf{A}} = \sum_{\alpha,\beta=1,1}^{6,6} \widehat{A}_{\alpha\beta} \widehat{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \widehat{\mathbf{e}}_\beta,$$

A partir de cela, la relation de comportement de l'élasticité à gradient peut se récrire:

$$\begin{cases} \widetilde{\sigma}_I = \widetilde{C}_{IJ} \widetilde{\varepsilon}_J + \overline{M}_{I\alpha} \widehat{\eta}_\alpha \\ \widehat{\tau}_\alpha = \overline{M}_{\alpha J} \widetilde{\varepsilon}_J + \widetilde{A}_{\alpha\beta} \widehat{\eta}_\beta \end{cases}$$

Les relations entre les composantes matricielles de $\widetilde{\varepsilon}_I$ et ε_{ij} ainsi que de $\widehat{\eta}_\alpha$ et η_{ijk} sont données par:

$$\widetilde{\varepsilon}_I = \begin{cases} \varepsilon_{ij} \ \text{ si } \ i = j, \\ \sqrt{2}\varepsilon_{ij} \ \text{ si } \ i \neq j; \end{cases} \qquad \widehat{\eta}_\alpha = \begin{cases} \eta_{ijk} \ \text{ si } \ i = j, \\ \sqrt{2}\eta_{ijk} \ \text{ si } \ i \neq j; \end{cases}$$

se même pour les composantes des contraintes classiques et généralisées. Cela implique les relations suivantes pour les opérateurs de comportement:

$$\widetilde{C}_{IJ} = \begin{cases} C_{ijkl} \ \text{ si } \ i = j \text{ et } k = l, \\ \sqrt{2}C_{ijkl} \ \text{ si } \ i \neq j \text{ et } k = l \text{ or } i = j \text{ et } k \neq l, \\ 2C_{ijkl} \ \text{ si } \ i \neq j \text{ et } k \neq l. \end{cases}$$

$$\overline{M}_{I\alpha} = \begin{cases} M_{ijklm} \ \text{ si } \ i = j \text{ et } k = l, \\ \sqrt{2}M_{ijklm} \ \text{ si } \ i \neq j \text{ et } k = l \text{ or } i = j \text{ et } k \neq l, \\ 2M_{ijklm} \ \text{ si } \ i \neq j \text{ et } k \neq l. \end{cases}$$

$$\widehat{A}_{\alpha\beta} = \begin{cases} A_{ijklmn} \ \text{ si } \ i = j \text{ et } l = m, \\ \sqrt{2}A_{ijklmn} \ \text{ si } \ i \neq j \text{ et } l = m \text{ or } i = j \text{ et } l \neq m, \\ 2A_{ijklmn} \ \text{ si } \ i \neq j \text{ et } l \neq m. \end{cases}$$

Pour finir, il reste à choisir une correspondance entre les indices ij et I, ainsi qu'entre ijk et α. Pour les variables classiques, on utilisera la correspondance usuelle:

I	1	2	3
ij	11	22	12

Tableau B.1: Convention de renumérotation des variables classiques

En ce qui concerne les variables d'ordre supérieure, on utilisera le système suivant:

α	1	2	3
ijk	111	221	122
α	4	5	6
ijk	222	112	121

Tableau B.2: Convention de renumérotation des variables généralisées

Le choix de cette correspondance a été fait de manière à rendre la représentation matricielle de $\underset{\sim}{\underset{\sim}{A}}$ diagonale par blocs pour les classes diédrales[1].

Expression des opérateurs de comportement

Représentations matricielles de C

$$C_{\mathrm{Z}_{(2)}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ & c_{22} & c_{23} \\ & & c_{33} \end{pmatrix}, \; C_{\mathrm{D}_{(2)}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ & c_{22} & 0 \\ & & c_{33} \end{pmatrix},$$

$$C_{\mathrm{Z}_{(4)}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ & c_{11} & -c_{13} \\ & & c_{33} \end{pmatrix}, \; C_{\mathrm{D}_{(4)}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ & c_{11} & 0 \\ & & c_{33} \end{pmatrix},$$

$$C_{\mathrm{O}(2)} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ & c_{11} & 0 \\ & & c_{11} - c_{12} \end{pmatrix}.$$

[1] Ce choix est détaillé dans Auffray et al. [24].

Représentations matricielles de A

$$A_{\mathrm{Z}_{(2)}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{pmatrix}, \; A_{\mathrm{D}_{(2)}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & & a_{66} \end{pmatrix},$$

$$A_{\mathrm{Z}_{(4)}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{23} & -a_{15} & 0 & a_{26} \\ & & a_{33} & -a_{16} & -a_{26} & 0 \\ & & & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & & & & a_{22} & a_{23} \\ & & & & & b_{55} \end{pmatrix}, \; A_{\mathrm{D}_{(4)}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & & & & a_{22} & a_{23} \\ & & & & & b_{55} \end{pmatrix},$$

$$A_{\mathrm{Z}_6} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{a_{11}-a_{22}}{\sqrt{2}} - a_{23} & 0 & a_{15} & -\frac{a_{15}}{\sqrt{2}} \\ & a_{22} & a_{23} & -a_{15} & 0 & -\frac{a_{15}}{\sqrt{2}} \\ & & \frac{a_{11}+a_{22}}{2} - a_{12} & \frac{a_{15}}{\sqrt{2}} & \frac{a_{15}}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & a_{44} & a_{11}-a_{44}+a_{12} & \frac{3a_{11}-a_{22}}{\sqrt{2}} - a_{23} - \sqrt{2}a_{44} \\ & & & & a_{22}+a_{44}-a_{11} & \sqrt{2}(a_{44}-a_{11})+a_{23} \\ & & & & & \frac{-3a_{11}+a_{22}}{2} - a_{12} + 2a_{44} \end{pmatrix},$$

$$A_{\mathrm{D}_6} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{a_{11}-a_{22}}{\sqrt{2}} - a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{a_{11}+a_{22}}{2} - a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{44} & a_{11}-a_{44}+a_{12} & \frac{3a_{11}-a_{22}}{\sqrt{2}} - a_{23} - \sqrt{2}a_{44} \\ & & & & a_{22}+a_{44}-a_{11} & \sqrt{2}(a_{44}-a_{11})+a_{23} \\ & & & & & \frac{-3a_{11}+a_{22}}{2} - a_{12} + 2a_{44} \end{pmatrix},$$

$$A_{\mathrm{SO}(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{a_{11}-a_{22}}{\sqrt{2}} - a_{23} & 0 & a_{15} & -\frac{a_{15}}{\sqrt{2}} \\ & a_{22} & a_{23} & -a_{15} & 0 & -\frac{a_{15}}{\sqrt{2}} \\ & & \frac{a_{11}+a_{22}}{2} - a_{12} & \frac{a_{15}}{\sqrt{2}} & \frac{a_{15}}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & a_{11} & a_{12} & \frac{a_{11}-a_{22}}{\sqrt{2}} - a_{23} \\ & & & & a_{22} & a_{23} \\ & & & & & \frac{a_{11}+a_{22}}{2} - a_{12} \end{pmatrix},$$

$$A_{\mathrm{O}(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \frac{a_{11}-a_{22}}{\sqrt{2}} - a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{a_{11}+a_{22}}{2} - a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{11} & a_{12} & \frac{a_{11}-a_{22}}{\sqrt{2}} - a_{23} \\ & & & & a_{22} & a_{23} \\ & & & & & \frac{a_{11}+a_{22}}{2} - a_{12} \end{pmatrix}.$$

Annexe C

Dictionnaire entre les différentes notations cristallographiques

Sous-groupes de type I

Hermann-Maugin	Schonflies	Group
1	Z_1	1
2	Z_2	Z_2
222	D_2	D_2
3	Z_3	Z_3
32	D_3	D_3
4	Z_4	Z_4
422	D_4	D_4
6	Z_6	Z_6
622	D_6	D_6
∞	Z_∞	SO(2)
$\infty 2$	D_∞	O(2)
23	T	$\mathcal{T}$
432	O	$\mathcal{O}$
532	I	$\mathcal{I}$
$\infty\infty$		SO(3)

Sous-groupes de type II

Hermann-Maugin	Schonflies	Group
$\bar{1}$	Z_i	Z_2^c
$2/m$	Z_{2h}	$Z_2 \oplus Z_2^c$
mmm	D_{2h}	$D_2 \oplus Z_2^c$
$\bar{3}$	$S_6,\ Z_{3i}$	$Z_3 \oplus Z_2^c$
$\bar{3}m$	D_{3d}	$D_3 \oplus Z_2^c$
$4/m$	Z_{4h}	$Z_4 \oplus Z_2^c$
$4/mmm$	D_{4h}	$D_4 \oplus Z_2^c$
$6/m$	Z_{6h}	$Z_6 \oplus Z_2^c$
$6/mmm$	D_{6h}	$D_6 \oplus Z_2^c$
$m\bar{3}$	T_h	$\mathcal{T} \oplus Z_2^c$
$m\bar{3}m$	O_h	$\mathcal{O} \oplus Z_2^c$
$\bar{5}\bar{3}m$	I_h	$\mathcal{I} \oplus Z_2^c$
∞/m	$Z_{\infty h}$	$SO(2) \oplus Z_2^c$
∞/mm	$D_{\infty h}$	$O(2) \oplus Z_2^c$
$\infty/m\infty/m$		$O(3)$

Sous-groupes de type III

Hermann-Maugin	Schonflies	Group
m	Z_s	Z_2^-
$2mm$	Z_{2v}	D_2^v
$3m$	Z_{3v}	D_3^v
$\bar{4}$	S_4	Z_4^-
$4mm$	Z_{4v}	D_4^v
$\bar{4}2m$	D_{2d}	D_4^h
$\bar{6}$	Z_{3h}	Z_6^-
$6mm$	Z_{6v}	D_6^v
$\bar{6}2m$	D_{3h}	D_6^h
$\bar{4}3m$	T_d	$\mathcal{O}^-$
∞m	$Z_{\infty v}$	$O(2)^-$

Références

[1] M. Abud and G. Sartori. The geometry of orbit-space and natural minima of Higgs potentials. *Physics Letters. B*, 104(2):147–152, 1981.

[2] M. Abud and G. Sartori. The geometry of spontaneous symmetry breaking. *Annals of Physics*, 150(2):307–372, 1983.

[3] J.-J. Alibert, P. Seppecher, and F. dell'Isola. Truss modular beams with deformation energy depending on higher displacement gradients. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 8(1): 51–73, 2003.

[4] G. Allaire and M. Schoenauer. *Conception optimale de structures*, volume 58. Springer, 2007.

[5] J.M. Ansemil and K. Floret. The symmetric tensor product of a direct sum of locally convex spaces. *Studia Mathematica*, 129(3):285–295, 1998.

[6] M.A. Armstrong. *Groups and symmetry*. Springer, 1983.

[7] M.F. Ashby and Y. Brechet. Designing hybrid materials. *Acta materialia*, 51(19):5801–5821, 2003.

[8] N. Auffray. *Comportement des matériaux cellulaires: élaboration, caractérisation et modélisation prédictive des propriétés*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 2008.

[9] N. Auffray. Décomposition harmonique des tenseurs - Méthode spectrale. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(4):370–375, 2008.

[10] N. Auffray. Démonstration du théorčme d'hermann ą partir de la méthode forte–vianello. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(5):458–463, 2008.

[11] N. Auffray. Analytical expressions for anisotropic tensor dimension. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(5):260–265, 2010.

[12] N. Auffray. Geometrical picture of third-order tensors. In *Generalized Continua as Models for Materials*, pages 17–40. Springer, 2013.

[13] N. Auffray. On the algebraical structure of isotropic generalized elasticity theories. *Mathematics and Mechanics of Solids*, page 1081286513507941, 2013.

[14] N. Auffray. Analytical expressions for odd-order anisotropic tensor dimension. *Comptes Rendus Mécanique*, 342(5):284–291, 2014.

[15] N. Auffray. On the isotropic moduli of 2d strain-gradient elasticity. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 27(1-2):5–19, 2015.

[16] N. Auffray. Symmetry classes and matrix representation for cosserat elasticity. Notes de travail, 2016.

[17] N. Auffray. Note on non-generic anisotropic elasticity tensors. Travaux en cours, 2016.

[18] N. Auffray. On harmonic decompositions of elasticity tensors. Travaux en cours, 2016.

[19] N. Auffray and R. Bouchet. Considérations sur les symétries indicielles et matérielles d'un tenseur: Application à l'élasticité du second-gradient. 2008.

[20] N. Auffray and P. Ropars. Invariant-based reconstruction of bidimensionnal elasticity tensors. *International Journal of Solids and Structures*, 87:183–193, 2015.

[21] N. Auffray, R. Bouchet, and Y. Bréchet. Derivation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain-gradient elasticity behavior. *International Journal of Solids and Structures*, 46(2):440–454, 2009.

[22] N. Auffray, R. Bouchet, and Y. Brechet. Représentation graphique des coefficients d'anisotropie des milieux élastiques généralisés. In *19ème Congrès Francais de Mécanique*, pages 1–2, 2009.

[23] N. Auffray, R. Bouchet, and Y. Brechet. Strain gradient elastic homogenization of bidimensional cellular media. *International Journal of Solids and Structures*, 47(13):1698–1710, 2010.

[24] N. Auffray, H. Le Quang, and Q.C. He. Matrix representations for 3d strain-gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61(5):1202–1223, 2013.

[25] N. Auffray, B. Kolev, and M. Petitot. On anisotropic polynomial relations for the elasticity tensor. *Journal of Elasticity*, 115:77–103, 2014.

[26] N. Auffray, J. Dirrenberger, and M. Poncelet. Aphorisme (approche holiste de la chiralité dans les métamatériaux architecturés). Technical report, Projet "Coup de pouce" F2M -, 2014-2016.

[27] N. Auffray, F. dell'Isola, V.A. Eremeyev, A. Madeo, and G. Rosi. Analytical continuum mechanics á la hamilton–piola least action principle for second gradient continua and capillary fluids. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 20(4):375–417, 2015.

[28] N. Auffray, J. Dirrenberger, and G. Rosi. A complete description of bi-dimensional anisotropic strain-gradient elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 69–70:195–206, 2015.

[29] N. Auffray, B. Kolev, and M. Olive. Handbook of bidimensional tensors: Part i: Decomposition and symmetry classes. *Mathematics and Mechanics of Solids*, page 1081286516649017, 2016.

[30] N. Auffray, B. Kolev, and M. Olive. A complete integrity basis for the elasticity tensor. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, Under review:–, 2016.

[31] A. Bacigalupo and L. Gambarotta. Homogenization of periodic hexa-and tetrachiral cellular solids. *Composite Structures*, 116:461–476, 2014.

[32] A. Bacigalupo and L. Gambarotta. Second-gradient homogenized model for wave propagation in heterogeneous periodic media. *International Journal of Solids and Structures*, 51 (5):1052–1065, 2014.

[33] G. Backus. A geometrical picture of anisotropic elastic tensors. *Reviews of Geophysics*, 8 (3):633–671, 1970.

[34] R. Baerheim. Harmonic decomposition of the anisotropic elasticity tensor. *Quart. J. Mech. Appl. Math*, 46(3):391–418, 1993.

[35] J. Betten. Integrity basis for a second-order and a fourth-order tensor. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 5(1):87–96, 1982.

[36] J. Betten. Irreducible invariants of fourth-order tensors. *Mathematical Modelling*, 8:29–33, 1987.

[37] A. Blinowski, J. Ostrowska-Maciejewska, and J. Rychlewski. Two-dimensional hooke's tensors – isotropic decomposition, effective symmetry criteria. *Archives of Mechanics*, 48: 325–345, 1996.

[38] J.-P. Boehler. On irreducible representations for isotropic scalar functions. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 57:323–327, 1977.

[39] J.-P. Boehler. *Application of tensor functions in solid mechanics.* CISM Courses and Lectures. Springer-Verlag, Wien, 1987.

[40] J.-P. Boehler, A.A. Kirillov, Jr., and E.T. Onat. On the polynomial invariants of the elasticity tensor. *Journal of Elasticity*, 34(2):97–110, 1994.

[41] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques.* Hermes Science, 2001.

[42] O. Bouaziz, Y. Brechet, and J.D. Embury. Heterogeneous and architectured materials: a possible strategy for design of structural materials. *Advanced Engineering Materials*, 10 (1-2):24–36, 2008.

[43] G.E. Bredon. *Introduction to compact transformation groups.* Academic Press, New York, 1972. Pure and Applied Mathematics, Vol. 46.

[44] L. Brillouin. Wave propagation and group velocity. 1959.

[45] F. Capolino. *Theory and phenomena of metamaterials.* CRC press, 2009.

[46] E. Cartan and A. Mercier. *Leçons sur la théorie des spineurs: Les spineurs de l'espace a trois dimensions.* Hermann, 1938.

[47] P. Celli and S. Gonella. Laser-enabled experimental wavefield reconstruction in two-dimensional phononic crystals. *Journal of Sound and Vibration*, 333(1):114–123, 2014.

[48] P. Chadwick, M. Vianello, and S.C. Cowin. A new proof that the number of linear elastic symmetries is eight. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(11):2471–2492, 2001.

[49] W. Chang, T. Christensen, T. Pinilla, and T. Keaveny. Uniaxial yield strains for bovine trabecular bone are isotropic and asymmetric. *Journal of Orthopaedic Research*, 17(4):582–585, 1999.

[50] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des corps déformables.* 1909.

[51] S.C. Cowin. *Continuum mechanics of anisotropic materials.* Springer Science & Business Media, 2013.

[52] M.V. d'Agostino, I. Giorgio, L. Greco, A. Madeo, and P. Boisse. Continuum and discrete models for structures including (quasi-) inextensible elasticae with a view to the design and modeling of composite reinforcements. *International Journal of Solids and Structures*, 59:1–17, 2015.

[53] T.T. Dang. *Méthodes numériques pour l'homogénéisation élastodynamique des matériaux hétérogènes périodiques.* PhD thesis, Université Paris-Est, 2015.

[54] G. de Saxcé and C. Vallée. Invariant measures of the lack of symmetry with respect to the symmetry groups of 2d elasticity tensors. *Journal of Elasticity*, 111:21–39, 2013.

[55] B. Desmorat and R. Desmorat. Second order tensorial framework for 2d medium with open and closed cracks. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 58:262–277, 2016.

[56] B. Desmorat and P. Vannucci. An alternative to the kelvin decomposition for plane anisotropic elasticity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(1):164–175, 2015.

[57] D.P. DiVincenzo. Dispersive corrections to continuum elastic theory in cubic crystals. *Physical Review B*, 34(8):5450, 1986.

[58] M.S. Dresselhaus, G. Dresselhaus, and A. Jorio. *Group theory: application to the physics of condensed matter*. Springer Science & Business Media, 2007.

[59] M. Epstein. *The geometrical language of continuum mechanics*. Cambridge University Press, 2010.

[60] M. Epstein. *Differential Geometry: Basic Notions and Physical Examples*. Springer, 2014.

[61] A.C. Eringen. Mechanics of micromorphic continua. In *Mechanics of generalized continua*, pages 18–35. Springer, 1968.

[62] S. Forest. *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*. Presses des MINES, 2006.

[63] S. Forest and R. Sievert. Nonlinear microstrain theories. *International Journal of Solids and Structures*, 43:7224–7245, 2006.

[64] S. Forte and M. Vianello. Symmetry classes for elasticity tensors. 43(2):81–108, 1996.

[65] S. Forte and M. Vianello. Symmetry classes and harmonic decomposition for photoelasticity tensors. *International Journal of Engineering Science*, 35(14):1317 – 1326, 1997.

[66] S. Forte and M. Vianello. Functional bases for transversely isotropic and transversely hemitropic invariants of elasticity tensors. *International Journal of Engineering Science*, 51:543–552, 1998.

[67] S. Forte and M. Vianello. Restricted invariants on the space of elasticity tensors. *Math. Mech. of Solids*, 11(1):48–82, 2006.

[68] S. Forte and M. Vianello. A unified approach to invariants of plane elasticity tensors. *Meccanica*, 49(9):2001–2012, 2014.

[69] P. Fratzl and R. Weinkamer. Nature's hierarchical materials. *Progress in Materials Science*, 52(8):1263–1334, 2007.

[70] W. Fulton. *Young tableaux. With applications to representation theory and geometry*, volume 35 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[71] P. Germain. The method of virtual power in continuum mechanics. part 2: Microstructure. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 25(3):556–575, 1973.

[72] G. Geymonat and T. Weller. Symmetry classes of piezoelectric solids. *Comptes Rendus Mathématique*, 335(10):847–852, 2002.

[73] R. Glüge, J. Kalisch, and A. Bertram. The eigenmodes in isotropic strain gradient elasticity. In *Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials*, pages 163–178. Springer, 2016.

[74] M. Golubitsky, I. Stewart, and D.G. Schaeffer. *Singularities and groups in bifurcation theory. Vol. II*, volume 69 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[75] A.E. Green and R.S. Rivlin. Multipolar continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17:113–147, 1964.

[76] H.T. Hahn. A derivation of invariants of fourth rank tensors. *Journal of Composite Materials*, 8(1):2–14, 1974.

[77] Q.-C. He. Characterization of the anisotropic materials capable of exhibiting an isotropic young or shear or area modulus. *International Journal of Engineering Science*, 42(19):2107–2118, 2004.

[78] Q.-C. He and Q.-S. Zheng. On the symmetries of 2d elastic and hyperelastic tensors. *Journal of elasticity*, 43:203–225, 1996.

[79] B. Herman. Some theorems of the theory of anisotropic media. *Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. URSS*, 48(2):89–92, 1945.

[80] R. Hill. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11:357–372, 1963.

[81] J. Hladik and C. Latrémolière. *Les spineurs en physique: avec exercices corrigés*. Masson, 1996.

[82] E. Ihrig and M. Golubitsky. Pattern selection with $\mathrm{O}(3)$ symmetry. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 13(1-2):1–33, 1984.

[83] Y. Itin and F. W. Hehl. The constitutive tensor of linear elasticity: its decompositions, cauchy relations, null lagrangians, and wave propagation. *Journal of Mathematical Physics*, 54(4):042903, 2013.

[84] Y. Itin and F.W. Hehl. Irreducible decompositions of the elasticity tensor under the linear and orthogonal groups and their physical consequences. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 597, page 012046. IOP Publishing, 2015.

[85] Admal N.C.and Marian J. and Po G. The atomistic representation of first strain-gradient elastic tensors. *Arxiv preprint cond-mat*, 2016. URL https://arxiv.org/pdf/1608.00637v1.pdf.

[86] J. Jerphagnon, D. Chemla, and R. Bonneville. The description of the physical properties of condensed matter using irreducible tensors. *Advances in Physics*, 27:609–650, 1978.

[87] A. Jibawy, C. Julien, B. Desmorat, A. Vincenti, and F. Léné. Hierarchical structural optimization of laminated plates using polar representation. *International Journal of Solids and Structures*, 48(18):2576–2584, 2011.

[88] K.-I. Kanatani. Distribution of directional data and fabric tensors. *International Journal of Engineering Science*, 22(2):149–164, 1984.

[89] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, and D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13):3647–3679, 2003.

[90] E. Kiral and G.F. Smith. On the constitutive relations for anisotropic materials⊠: Triclinic, monoclinic, rhombic, tetragonal and hexagonal crystal systems. *International Journal of Engineering Science*, 12:471–490, 1974.

[91] L.D. Landau, J.S. Bell, M.J. Kearsley, L.P. Pitaevskii, E.M. Lifshitz, and J.B. Sykes. *Electrodynamics of continuous media*, volume 8. elsevier, 2013.

[92] L. Laszczyk. *Homogénéisation et optimisation topologique de panneaux architecturés*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2011.

[93] M. Lazar. Irreducible decomposition of strain gradient tensor in isotropic strain gradient elasticity. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2016.

[94] H. Le Quang and Q.-C. He. The number and types of all possible rotational symmetries for flexoelectric tensors. 467(2132):2369–2386, 2011. doi: 10.1098/rspa.2010.0521. URL http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/467/2132/2369.abstract.

[95] A. Lebée and K. Sab. A bending-gradient model for thick plates. part I: Theory. *International Journal of Solids and Structures*, 48(20):2878–2888, 2011.

[96] A. Lebée and K. Sab. A bending-gradient model for thick plates, part II: Closed-form solutions for cylindrical bending of laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 48(20):2889–2901, 2011.

[97] F. Liu, Y. Liu, L. Huang, X. Hu, B. Dong, W. Shi, Y. Xie, and X. Ye. Replication of homologous optical and hydrophobic features by templating wings of butterflies morpho menelaus. *Optics Communications*, 284(9):2376–2381, 2011.

[98] I. Liu. On representations of anisotropic invariants. *International Journal of Engineering Science*, 20:1099–1109, 1982.

[99] X.N. Liu, G.L. Huang, and G.K. Hu. Chiral effect in plane isotropic micropolar elasticity and its application to chiral lattices. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(11): 1907–1921, 2012.

[100] R. Maranganti and P. Sharma. A novel atomistic approach to determine strain-gradient elasticity constants: Tabulation and comparison for various metals, semiconductors, silica, polymers and the (ir) relevance for nanotechnologies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(9):1823–1852, 2007.

[101] J.E. Marsden and T. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity*. Courier Corporation, 1994.

[102] M. M. Mehrabadi and S.C. Cowin. Eigentensors of linear anisotropic elastic materials. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 43:15–41, 1990.

[103] G. Milton, M. Briane, and J. Willis. On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form. *New Journal of Physics*, 8(10):248, 2006.

[104] R.D. Mindlin. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16(1), 1964.

[105] R.D. Mindlin. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1(4):417–438, 1965.

[106] R.D. Mindlin and N.N. Eshel. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 4(1):109–124, 1968.

[107] H. Nassar, Q.-C. He, and N. Auffray. Willis elastodynamic homogenization theory revisited for periodic media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 77:158–178, 2015.

[108] H. Nassar, Q.-C. He, and N. Auffray. A generalized theory of elastodynamic homogenization for periodic media. *International Journal of Solids and Structures*, 84:139–146, 2016.

[109] H. Nassar, Q.-C. He, and N. Auffray. On asymptotic elastodynamic homogenization approaches for periodic media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 88:274–290, 2016.

[110] B. Nayroles. Mécanique des structures et dualité. 2011.

[111] A.N. Norris and A.L. Shuvalov. Elastic cloaking theory. *Wave Motion*, 48(6):525–538, 2011.

[112] M. Olive. Notes invariants. Notes de travail.

[113] M. Olive. *Géométrie des espaces de tenseurs-Une approche effective appliquée à la mécanique des milieux continus*. PhD thesis, Aix Marseille université, 2014.

[114] M. Olive. About Gordan's algorithm for binary forms. *ArXiv e-prints*, 2014.

[115] M. Olive and N. Auffray. Symmetry classes for even-order tensors. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, 1:177–210, 2013.

[116] M. Olive and N. Auffray. Symmetry classes for odd-order tensors. *ZAMM-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 94:421–447, 2014.

[117] M. Olive and N. Auffray. Isotropic invariants of completely symmetric third-order tensors. *Journal of Mathematical Physic*, 55:092901, 2014.

[118] P.J. Olver. *Classical invariant theory*, volume 44 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[119] E.T. Onat. Effective properties of elastic materials that contain penny shaped voids. *International Journal of Engineering Science*, 22(8):1013–1021, 1984.

[120] M. Ostoja-Starzewski and D.C Stahl. Random fiber networks and special elastic orthotropy of paper. *Journal of Elasticity*, 60(2):131–149, 2000.

[121] L. Placidi, U. Andreaus, A. Della Corte, and T. Lekszycki. Gedanken experiments for the determination of two-dimensional linear second gradient elasticity coefficients. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 66(6):3699–3725, 2015.

[122] L. Placidi, U. Andreaus, and I. Giorgio. Identification of two-dimensional pantographic structure via a linear d4 orthotropic second gradient elastic model. *Journal of Engineering Mathematics*, pages 1–21, 2016.

[123] H. Poincaré. *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, volume 12. G. Carré, 1892.

[124] J. Réthoré, C. Kaltenbrunner, T.B.T. Dang, P. Chaudet, and M. Kuhn. Gradient-elasticity for honeycomb materials: Validation and identification from full-field measurements. *International Journal of Solids and Structures*, 72:108–117, 2015.

[125] G.J. Rodin. Higher-order macroscopic measures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(6):1103–1119, 2007.

[126] G. Rosi. Notes de travail. Communication personnelle.

[127] G. Rosi and N. Auffray. Anisotropic and dispersive wave propagation within strain-gradient framework. *Wave Motion*, 63:120–134, 2016.

[128] J. Rychlewski. Elastic waves under unusual anisotropy. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(11):2651–2666, 2001.

[129] T. Shioda. On the graded ring of invariants of binary octavics. *American Journal of Mathematics*, 89:1022–1046, 1967.

[130] D. Smith, J. Pendry, and M. Wiltshire. Metamaterials and negative refractive index. *Science*, 305(5685):788–792, 2004.

[131] G. F. Smith and G. Bao. Isotropic invariants of traceless symmetric tensors of orders three and four. *International Journal of Engineering Science*, 35(15):1457–1462, 1997.

[132] G.F. Smith. On isotropic integrity bases. *Archive for rational mechanics and analysis*, 18(4): 282–292, 1965.

[133] G.F. Smith. On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. *International Journal of Engineering Science*, 9:899–916, 1971.

[134] G.F. Smith. *Constitutive Equations for Anisotropic and Isotropic Materials*. North-Holland, Amsterdam, 1994.

[135] A. Spadoni, S. Ruzzene, M.and Gonella, and F. Scarpa. Phononic properties of hexagonal chiral lattices. *Wave motion*, 46(7):435–450, 2009.

[136] A.J.M. Spencer. A note on the decomposition of tensors into traceless symmetric tensors. *International Journal of Engineering Science*, 8:475–481, 1970.

[137] S. Sternberg. *Group theory and physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. ISBN 0-521-24870-1.

[138] B. Sturmfels. *Algorithms in invariant theory*. Texts and Monographs in Symbolic Computation. SpringerWienNewYork, Vienna, second edition, 2008.

[139] E. Tonti. *The mathematical structure of classical and relativistic physics*. Springer, 2013.

[140] R. A. Toupin. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11:385–414, 1962.

[141] D.-K. Trinh. *Méthodes d'homogénéisation d'ordre supérieur pour les matériaux architecturés*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2011.

[142] D. K. Trinh, R. Janicke, N. Auffray, S. Diebels, and S. Forest. Evaluation of generalized continuum substitution models for heterogeneous materials. *International Journal for Multiscale Computational*, 10(6), 2012.

[143] S.W. Tsai and N.J. Pagano. Invariant properties of composite materials. Technical report, DTIC Document, 1968.

[144] P. Vannucci. A special planar orthotropic material. *Journal of Elasticity*, 67:81–96, 2002.

[145] P. Vannucci. Plane anisotropy by the polar method. *Meccanica*, 40(4-6):437–454, 2005.

[146] P. Vannucci. The polar analysis of a third order piezoelectricity-like plane tensor. 44: 7803–7815, 2007.

[147] P. Vannucci. On special orthotropy of paper. *Journal of Elasticity*, 99(1):75–83, 2010.

[148] G. Verchery. Les invariants des tenseurs d'ordre 4 du type de l'élasticité. In *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids/Comportment Méchanique des Solides Anisotropes*, pages 93–104. Springer, 1982.

[149] V. Veselago. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of and? *Soviet physics uspekhi*, 10(4):509, 1968.

[150] M. Vianello. An integrity basis for plane elasticity tensors. *Archives of Mechanics*, 49: 197–208, 1997.

[151] C.-C. Wang. A new representation theorem for isotropic functions: An answer to professor g.f. smith's criticism of my papers on representations for isotropic functions, part I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 36:166–197, 1970.

[152] C.-C. Wang. A new representation theorem for isotropic functions: An answer to professor g.f. smith's criticism of my papers on representations for isotropic functions, part II. 36: 198–223, 1970.

[153] Z.-P. Wang and C.T. Sun. Modeling micro-inertia in heterogeneous materials under dynamic loading. *Wave motion*, 36(4):473–485, 2002.

[154] H. Weyl. *The classical groups*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Their invariants and representations, Fifteenth printing, Princeton Paperbacks.

[155] Wikipedia. Solides platoniciens, 2016. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Solide_de_Platon. [Online; Août 2016].

[156] J.R. Willis. Dynamics of composites. In *Continuum micromechanics*, pages 265–290. Springer, 1997.

[157] A. Wineman and A. Pipkin. Material symmetry restrictions on constitutive equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17:184–214, 1964.

[158] J.P Wolfe. *Imaging phonons: acoustic wave propagation in solids*. Cambridge University Press, 2005.

[159] E. M. Wu. 4th-order tensor invariants and geometric representation. Technical report, DTIC Document, 1970.

[160] A. Young. The irreducible concomitants of any number of binary quartics. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1:290–30, 1898.

[161] Q.-S. Zheng. Theory of representations for tensor functions - a unified invariant approach to constitutive equations. *Applied Mechanics Reviews*, 47:545–587, 1994.

[162] Q.-S. Zheng and J. Betten. On the tensor function representation of 2nd-order and 4th-order tensors. part i. *ZAMM -Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 75: 269–281, 1995.

[163] Q.-S. Zheng and J.-P. Boehler. The description, classification, and reality of material and physical symmetries. *Acta Mechanica*, 102(1-4):73–89, 1994.

[164] Q.-S. Zheng and W.-N. Zou. Irreducible decompositions of physical tensors of high orders. *Journal of engineering mathematics*, 37(1-3):273–288, 2000.

[165] W.-N. Zou, Q.-S. Zheng, D.-X. Du, and J. Rychlewski. Orthogonal irreducible decompositions of tensors of high orders. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 6(3):249–267, 2001.