HAL
open science

Stabilité des fluides incompressibles

Christophe Lacave

To cite this version:

Christophe Lacave. Stabilité des fluides incompressibles. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paris 7 - Denis Diderot, 2017. tel-01574511

HAL Id: tel-01574511

https://hal.science/tel-01574511v1

Submitted on 14 Aug 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire présenté à l'Université Paris-Diderot
pour l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches

Spécialité Mathématiques

Stabilité des fluides incompressibles :

perturbation de domaine pour les équations d'Euler et de Navier-Stokes

Présentée par

Christophe Lacave

Soutenue le 5 Juillet 2017, après avis de

Córdoba Gazolaz Diego	ICMAT, Consejo Superior de Investigaciones Científicas
Gallagher Isabelle	IMJ-PRG, Université Paris Diderot
Lannes David	IMB, Université de Bordeaux

devant le jury composé de

Dalibard Anne-Laure	LJLL, Université Pierre et Marie Curie
Gallagher Isabelle	IMJ-PRG, Université Paris Diderot
Gallay Thierry	IF, Université Grenoble Alpes
Iftimie Dragós	ICJ, Université Claude Bernard Lyon 1
Lannes David	IMB, Université de Bordeaux
Masmoudi Nader	CIMS, New-York University

Remerciements

Voici bien la page la plus compliquée à rédiger du mémoire, car il m'est difficile de trouver les mots adaptés à la gratitude que j'ai pour de nombreuses personnes.

Mes premiers remerciements reviennent naturellement à Isabelle Gallagher, pour un grand nombre de raisons. Tout d'abord pour son accueil à l'IMJ-PRG, puis pour sa présence durant ces sept années, pour tous ses conseils scientifiques/administratifs et finalement pour avoir accepté de rédiger un rapport sur ce mémoire.

Je remercie Diego Córdoba pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteur. De même, un grand merci à David Lannes qui a surmonté le conflit basco-béarnais en lisant attentivement l'HDR.

J'adresse également mes remerciements les plus sincères à Anne-Laure Dalibard, Thierry Gallay, Dragos Iftimie et Nader Masmoudi pour avoir accepté de participer au jury.

Outre l'HDR, ma gratitude va à mes camarades de tous les jours à Paris Diderot : Diogo Arsénio, Isabelle Gallagher, David Gérard-Varet et Matthieu Léautaud. Je n'ai jamais trainé les pieds pour venir au labo, et c'est très clairement grâce à votre bonne humeur. Je tiens aussi à remercier tous mes collègues de Paris Diderot que j'ai côtoyés pendant ces sept années, que cela soit pour parler recherche, enseignement, administratif ou tout autre sujet. J'en profite pour remercier aussi mes nouveaux collègues de Grenoble pour leur accueil chaleureux.

Plus généralement, je suis grandement reconnaissant à la communauté mathématiques, qui m'a intégré très rapidement dans les séminaires, groupes de travail, projet ANR, etc... J'ai été plongé dans la débordante activité française, et en particulier parisienne. Il m'est impossible de nommer tous les gens qui m'ont apporté scientifiquement et humainement, mais je garde en mémoire de nombreuses discussions enrichissantes.

Parmi les personnes qui m'ont tout de suite accueilli, je pense évidemment à mes collaborateurs. Chaque article est une aventure, avec ses hauts et ses bas. Je me considère très chanceux de pouvoir affirmer que tous mes collaborateurs sont des amis. Pour tout ce que vous m'avez apporté, pour toutes ces heures de travail et de détente, je vous en remercie : Diogo Arsénio, Virginie Bonnaillie-Noel, Marc Dambrine, Emmanuel Dormy, Sylvain Ervedoza, David Gérard-Varet, Olivier Glass, Matthieu Hillairet, Dragos Iftimie, Grzegorz Karch, Milton Lopes Filho, Nader Masmoudi, Anna Mazzucato, Evelyne Miot, Toan Nguyen, Helena Nussenzveig Lopes, Benoit Pausader, Frédéric Rousset, Franck Sueur, Takeo Takahashi et Chao Wang.

Enfin, je tiens à remercier de tout coeur mes amis et ma famille pour tous les bons moments passés à Paris ou pendant mes missions et vacances. Vous m'avez aidé à garder un équilibre, car sans vous, j'aurai passé tous mes week-ends au bureau. Par rapport à cette HDR, une pensée particulière revient à Evelyne qui a relu tout le mémoire et qui l'a grandement amélioré. Je remercie aussi par avance Benjamin, Camille et Camille pour l'aide à la préparation du pot que j'espère réussi.

Mes derniers mots de remerciements vont à ma femme et mon fils, pour leurs encouragements, leur patience infinie et leur bonne humeur au quotidien.

Stabilité des fluides incompressibles :

perturbation de domaine pour les équations d'Euler et de Navier-Stokes

Résumé

Nous rassemblons dans ce mémoire les résultats obtenus par l'auteur et ses collaborateurs, puis nous donnerons les idées principales de l'analyse mise en place pour leurs démonstrations.

Une première série de résultats concerne la convergence des solutions des équations d'Euler bi-dimensionnelles quand nous perturbons la géométrie du domaine. Selon la perturbation, nous obtiendrons de la stabilité ou une limite vérifiant une équation d'Euler modifiée. Le second regroupement de travaux traitera de la question de l'unicité pour ces systèmes limites perturbés.

Nous étudierons ensuite la stabilité des solutions des équations de Navier-Stokes. Tout d'abord, nous examinons le cas des petits obstacles, puis nous serons amenés à l'étude du comportement en temps long des solutions des équations de Navier-Stokes. Ces deux dernières questions étant en effet reliées par le changement d'échelle naturel pour les équations des fluides visqueux.

Mots-clés : champ de vecteurs à divergence nulle, convergence de domaine, comportement asymptotique, écoulement autour d'obstacle, solide en mouvement dans un fluide.

Stability for incompressible flows:

domain perturbation for the Euler and the Navier-Stokes equations

Abstract

We bring together in this thesis the results obtained by the author and his collaborators. We give here the main ideas of the analysis developed for their proofs.

Our concern in the first part is the convergence of solutions to the two-dimensional Euler equations when we perturb the domain geometry. Depending on the perturbation, we will get the stability or a limit verifying a modified system. We will discuss in the second part about the uniqueness issue for these perturbed systems.

We will also study the stability of solutions to the Navier-Stokes equations. First, we will mention the case of small obstacles. Next, we will focus on the long time behavior for the solutions. These two questions are in fact related through the scaling property of the equations governing viscous fluids.

Key-words: divergence free vector fields, convergence of domains, asymptotic behavior, flow around obstacles, motion of a solid inside a fluid.

Liste des travaux présentés

La désignation entre crochets sera utilisée tout le long du texte, et elle correspond à la référence de la bibliographie générale. Les trois articles publiés en 2009 (précédés par une étoile) étaient déjà présents dans le mémoire de thèse, et nous en parlons donc très peu dans ce mémoire.

Tous ces articles sont disponibles en format prépublication sur les serveurs ArXiv et HAL.

Fluides non-visqueux

Stabilité et existence pour les équations d'Euler 2D

* [Lac09a] C. Lacave. Two dimensional incompressible ideal flow around a thin obstacle tending to a curve. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(4) :1121–1148, 2009.

[Lac12] C. Lacave. Two Dimensional Incompressible Ideal Flow Around a Small Curve. *Comm. Partial Differential Equations*, 37(4) :690–731, 2012.

[GVL13] D. Gérard-Varet et C. Lacave. The Two-Dimensional Euler Equations on Singular Domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 209(1) :131–170, 2013.

[GLS14] O. Glass, C. Lacave, et F. Sueur. On the motion of a small body immersed in a two-dimensional incompressible perfect fluid. *Bull. Soc. Math. France*, 142(3) :489–536, 2014.

[BNLM15] V. Bonnaillie-Noël, C. Lacave, et N. Masmoudi. Permeability through a perforated domain for the incompressible 2D Euler equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 32(1) :159–182, 2015.

[GVL15] D. Gérard-Varet et C. Lacave. The Two Dimensional Euler Equations on Singular Exterior Domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 218(3) :1609–1631, 2015.

[GLS16] O. Glass, C. Lacave, et F. Sueur. On the motion of a small light body immersed in a two dimensional incompressible perfect fluid with vorticity. *Comm. Math. Phys.*, 341(3) :1015–1065, 2016.

[LM16a] C. Lacave et N. Masmoudi. Impermeability through a perforated domain for the incompressible two dimensional Euler equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 221(3) :1117–1160, 2016.

[LLFNL15] C. Lacave, M. C. Lopes Filho, et H. J. Nussenzveig Lopes. Asymptotic behavior of 2D incompressible ideal flow around small disks. *arXiv preprint arXiv :1510.05864*, 2015.

[ADL14] D. Arsénio, E. Dormy, et C. Lacave. The vortex method for 2d ideal flows in the exterior of a disk. In *Journées "Équations aux Dérivées Partielles" (Roscoff, 2014)*, Exp. No. 5. 2014.

Unicité pour les équations d'Euler 2D

* [LM09] C. Lacave et E. Miot. Uniqueness for the vortex-wave system when the vorticity is constant near the point vortex. *SIAM J. Math. Anal.*, 41(3) :1138–1163, 2009.

[LMW14] C. Lacave, E. Miot, et C. Wang. Uniqueness for the two-dimensional Euler equations on domains with corners. *Indiana Univ. Math. J.*, 63(6) :1725–1756, 2014.

[Lac15b] C. Lacave. Uniqueness for two-dimensional incompressible ideal flow on singular domains. *SIAM J. Math. Anal.*, 47(2) :1615–1664, 2015.

Autres modèles proches des fluides idéaux

[LNP14] C. Lacave, T. Nguyen, et B. Pausader. Topography influence on the lake equations in bounded domains. *J. Math. Fluid Mech.*, 16(2) :375–406, 2014.

[BNDL16] V. Bonnaillie-Noël, M. Dambrine, et C. Lacave. Interactions between moderately close inclusions for the two-dimensional Dirichlet-Laplacian. *Appl. Math. Res. Express. AMRX*, (1) :1–23, 2016.

Fluides visqueux

Stabilité pour les équations de Navier-Stokes

* [Lac09b] C. Lacave. Two-dimensional incompressible viscous flow around a thin obstacle tending to a curve. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 139(6) :1237–1254, 2009.

[Lac15a] C. Lacave. 3D viscous incompressible fluid around one thin obstacle. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(5) :2175–2191, 2015.

[LM16b] C. Lacave et A. Mazzucato. The vanishing viscosity limit in the presence of a porous medium. *Math. Ann.*, 365(3-4) :1527–1557, 2016.

[LT17] C. Lacave et T. Takahashi. Small moving rigid body into a viscous incompressible fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 223(3) :1307–1335, 2017.

[GVLNR17] D. Gérard-Varet, C. Lacave, T. Nguyen, et F. Rousset. The vanishing viscosity limit for 2D Navier-Stokes in a rough domain. *arXiv preprint : 1701.08808*, 2017.

Comportement en temps long des solutions aux équations de Navier-Stokes

[IKL11] D. Iftimie, G. Karch, et C. Lacave. Self-similar asymptotics of solutions to the Navier-Stokes system in two dimensional exterior domain. *arXiv preprint arXiv :1107.2054*, 2011.

[EHL14] S. Ervedoza, M. Hillairet, et C. Lacave. Long-time behavior for the two-dimensional motion of a disk in a viscous fluid. *Comm. Math. Phys.*, 329(1) :325–382, 2014.

[IKL14] D. Iftimie, G. Karch, et C. Lacave. Asymptotics of solutions to the Navier-Stokes system in exterior domains. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 90(3) :785–806, 2014.

Table des matières

1 Introduction générale **13**

1.1 Fluides incompressibles et motivation physique 14

1.1.1 L'équation dynamique du champ de vitesse 14

1.1.2 Domaine et imperméabilité 15

1.1.3 Les principales questions abordées 17

1.2 Fluides idéaux 18

1.2.1 Existence dans des domaines non réguliers et stabilité par rapport à la convergence des domaines 18

1.2.2 Domaine poreux 20

1.2.3 Petit solide 22

1.2.4 La méthode des points vortex 23

1.2.5 Unicité dans les domaines à coins 23

1.2.6 Autres modèles 25

1.3 Fluides visqueux 25

1.3.1 Stabilité par rapport à la convergence des domaines 25

1.3.2 Comportement en temps long 27

1.3.3 Quelques notations 27

2 Quelques outils **29**

2.1 Décomposition de Hodge-de Rham 30

2.2 γ-convergence et capacité H^1 33

2.3 Lien entre les fonctions harmoniques et holomorphes en dimension deux . . 36

2.3.1 Lemme de Blasius et comportement à l'infini 36

2.3.2 Noyau de Green et application conforme 37

2.4 Compacité pour les champs solénoïdaux 40

2.4.1 Lemme d'Aubin-Lions dans les sous-ensembles relativement compacts 40

2.4.2 Singularité effaçable et opérateurs de Bogovskiĭ 42

3 Stabilité pour les fluides idéaux **45**
3.1 Stabilité et existence 46
3.2 Les domaines perforés 48
3.3 Les petits solides 57
3.4 Méthode des points vortex 60
3.5 Perspectives 63
3.5.1 Cas critique pour les domaines perforés 63
3.5.2 Généralisation des petits solides 63
3.5.3 Méthode des points vortex 63

4 Unicité pour les fluides idéaux **65**
4.1 Preuves classiques d'unicité 66
4.1.1 Formulation eulerienne : preuve de Yudovich 67
4.1.2 Formulation lagrangienne : preuve de Marchioro et Pulvirenti . . . 67
4.2 Petits coins et estimation log-lipschitz 68
4.3 Grands coins et support du tourbillon 69
4.3.1 Vorticité constante au voisinage de la singularité du champ de vitesse 70
4.3.2 Contrôle du support de la vorticité 71
4.4 Perspectives 73

5 Stabilité pour les fluides visqueux **75**
5.1 Stabilité et singularité effaçable 76
5.2 Viscosité évanescente et perturbation du domaine 78
5.2.1 Domaine poreux 78
5.2.2 Domaine rugueux 80
5.3 Perspectives 83

6 Temps long pour les fluides visqueux **85**
6.1 Techniques classiques 86
6.1.1 Equation de convection diffusion sans pression 86
6.1.2 Résolution de la pression par la transformée de Fourier 87
6.1.3 Equation du tourbillon 87
6.2 Problème de Stokes 88
6.3 Décroissance pour les solutions des équations de Navier-Stokes 92
6.3.1 Système fluide-structure 92
6.3.2 Domaine fixe 93
6.4 Perspectives 94

1 Introduction

Résumé

Nous rappelons ici les équations d'Euler et de Navier-Stokes qui prescrivent le mouvement d'un fluide incompressible homogène et newtonien.

Dans une seconde partie de ce chapitre, nous décrirons (sans détail technique) les résultats obtenus concernant les fluides idéaux, tandis que la troisième partie concernera les fluides visqueux.

Les énoncés précis des théorèmes ainsi que les idées principales des preuves feront l'objet des chapitres suivants.

1.1 Fluides incompressibles et motivation physique

1.1.1 L'équation dynamique du champ de vitesse

Par son intérêt évident à diverses applications en ingénierie navale, aéronautique, météorologie, océanographie, ...etc... l'étude de la mécanique des fluides a traversé les civilisations et reste un sujet très actif de recherche en physique, mathématiques et mécanique. Nous pourrions remonter aux grecs (dont Archimède), en passant par Leonardo da Vinci, Newton, Bernoulli et D'Alembert, mais nous ne présenterons pas ici l'histoire de l'élaboration des équations décrivant le mouvement des fluides. Nous conseillons vivement la lecture de l'article sur internet d'Isabelle Gallagher [Gal10], destiné à un large public, où l'auteur détaille les principales étapes historiques de cette étude.

Soit Ω un domaine (c'est-à-dire un ensemble ouvert connexe) de $\mathbb{R}^d$, un fluide est décrit par sa vitesse $u : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ et sa pression $p : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$. Le fluide est dit incompressible si le volume de toute sous-partie de Ω est conservé le long du flot engendré par cette vitesse. Mathématiquement, ceci se traduit par

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{d} \partial_i u_i = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega,$$

où nous notons $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Nous ne parlerons que des cas $d = 2$ et $d = 3$, car le cas de la dimension un est trivial à cause de la condition précédente. La conservation de la masse se lit

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0,$$

où ρ est la densité du fluide.

La conservation de la quantité de mouvement se traduit par

$$\rho\Big(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u\Big) = \operatorname{div} \sigma(u, p) + F_{\text{ext}},$$

où σ est le tenseur des contraintes internes au fluide et F_{ext} correspond aux forces extérieures. Concernant les forces extérieures, nous pouvons penser à la gravité, aux forces de Coriolis ou électromagnétiques. Dans tous les travaux mentionnés, nous ne considèrerons pas de force extérieure

$$F_{\text{ext}} \equiv 0,$$

en sachant que la force de gravité peut être incluse dans la pression car $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = \nabla(-gx_3)$ et qu'il serait souvent facile d'ajouter des forces extérieurs, quitte à supposer assez de régularité sur F_{ext}.

Le tenseur des contraintes dépend de la nature du fluide. Pour un fluide newtonien non-visqueux (fluide dit idéal ou parfait), Euler trouva en 1755

$$\sigma(u, p) = -p \operatorname{Id},$$

tandis que le tenseur pour un fluide newtonien visqueux fut donné par Navier en 1820 et indépendamment par Stokes en 1845

$$\sigma(u,p) = -p\,\mathrm{Id} + 2\nu D(u), \quad \text{avec la notation} \quad D(u) = \frac{1}{2}\Big((\nabla u) + (\nabla u)^T\Big).$$

La dérivation du tenseur des contraintes est faite, par exemple, dans le livre de Boyer et Fabrie [BF06, Chap. 1].

De plus, nous ne traiterons ici que des fluides homogènes : $\rho|_{t=0}$ sera supposé constant, ce qui est une propriété conservée pour tout temps. Quitte à diviser ν et p par $\rho|_{t=0}$, nous prendrons cette densité égale à 1 dans tout le reste de ce mémoire.

Dans le domaine Ω rempli par le fluide (newtonien, homogène et incompressible), nous trouvons alors les équations d'Euler dans le cas non-visqueux :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u = -\nabla p, & t > 0, x \in \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, & t \geqslant 0, x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

et les équations de Navier-Stokes pour le cas visqueux :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u - \nu\Delta u = -\nabla p, & t > 0, x \in \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0, & t \geqslant 0, x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Remarque 1.1.1. Dans ces équations, les variables sont adimentionnées $u'(t,x) = \frac{1}{U}u(\frac{x}{L}, \frac{t}{T})$ avec $U = L/T$, où L et T sont la taille et le temps caractéristiques de l'expérience. Ainsi ν ne dépend pas que de la nature du fluide, mais aussi de l'échelle sur laquelle on étudie l'équation. A l'échelle d'un thon, l'eau a une viscosité $\nu \approx 10^{-7}$ alors qu'à l'échelle d'une baleine $\nu \approx 10^{-9}$, ce qui donne de l'intérêt aux équations d'Euler même pour décrire le mouvement de l'eau.

1.1.2 Domaine et imperméabilité

Il reste à déterminer les conditions aux bords. La plus naturelle est la condition d'imperméabilité des bords, ce qui se traduit par

$$u\cdot n = 0, \quad t \geqslant 0, x \in \partial\Omega \tag{1.1.3}$$

si le bord ne dépend pas du temps. Ici, n correspond au vecteur normal sortant du domaine du fluide Ω.

Dans certains travaux, nous considèrerons le cas d'un solide $\mathcal{S}(t)$ indéformable qui bouge sous l'influence d'un fluide 2D[1]. Dans ce cas là, le domaine fluide dépend du temps :

$$\Omega(t) = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}(t)$$

[1]Nous utiliserons tout le long du texte l'abréviation "2D" pour "dimension deux".

où $\mathcal{S}(t)$ se déduit de $\mathcal{S}(0) = \mathcal{S}^0$ par une translation de son centre de gravité $h(t)$ et d'une rotation d'angle $\theta(t)$, c'est-à-dire que

$$\mathcal{S}(t) := \{h(t) - h^0 + R_{\theta(t)}x,\ x \in \mathcal{S}^0\} \quad \text{avec} \quad R_{\theta(t)} := \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{pmatrix}, \tag{1.1.4}$$

où $(h(0), \theta(0)) = (h^0, 0)$ et $\mathcal{S}^0$ sera supposé être un sous-ensemble connexe, simplement connexe, compact et régulier de $\mathbb{R}^2$. La condition d'imperméabilité devient :

$$u \cdot n = (h'(t) + r(t)(x - h(t))^\perp) \cdot n, \quad t \geqslant 0, x \in \partial\mathcal{S}(t), \tag{1.1.5}$$

avec $r(t) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ la vitesse de rotation. En dimension deux, nous utiliserons régulièrement la notation

$$x^\perp := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Pour compenser l'ajout de ces deux inconnues, nous devons prendre en compte les équations de Newton du solide

$$mh''(t) = -\int_{\partial\mathcal{S}(t)} \sigma(u,p)n \,\mathrm{d}s \qquad \text{pour } t > 0, \tag{1.1.6}$$

$$\mathcal{J}r'(t) = -\int_{\partial\mathcal{S}(t)} (x - h(t))^\perp \cdot (\sigma(u,p)n) \,\mathrm{d}s \qquad \text{pour } t > 0, \tag{1.1.7}$$

avec m la masse du solide et $\mathcal{J}$ le moment d'inertie.

Pour les fluides visqueux, il nous faut rajouter une condition sur la partie tangentielle de la vitesse au bord. La plus naturelle est la condition de non-glissement :

$$u = 0, \quad t \geqslant 0, x \in \partial\Omega \tag{1.1.8}$$

si le domaine est fixe,

$$u = h'(t) + r(t)(x - h(t))^\perp, \quad t \geqslant 0, x \in \partial\mathcal{S}(t) \tag{1.1.9}$$

si un solide bouge sous l'influence du fluide.

Pour finir, si le domaine est non borné, nous supposerons que le fluide est au repos à l'infini

$$\lim_{|x|\to\infty} u(t,x) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{1.1.10}$$

Nous pouvons souvent remplacer 0 dans cette condition par n'importe quel vecteur constant v_∞ (voir la partie 3.4 de ma thèse [Lac08] pour l'extension de [Lac09a] dans ce cas-là).

Nous préciserons la donnée initiale $u(0,x) = u_0$ au moment opportun, mais la condition de compatibilité pour u_0 contiendra toujours la condition de divergence nulle et d'imperméabilité.

Même si ces équations décrivent des fluides physiquement très proches, les techniques et les résultats sont bien différents. Etant donné l'ajout du laplacien, les méthodes concernant le système de Navier-Stokes se rapprochent plus d'une analyse parabolique :

- étude du semi-groupe de Stokes : $t \mapsto S(t)u_0$ vérifiant les équations de Stokes, ce qui correspond aux équations de Navier-Stokes (1.1.2), (1.1.8) (ou (1.1.6)-(1.1.7), (1.1.9)), (1.1.10) où nous enlevons le terme non-linéaire $(u \cdot \nabla)u$. L'objectif est de montrer des phénomènes comparables au semi-groupe de la chaleur.
- contrôle du terme non-linéaire par une formule de Duhamel :

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)(u(s) \cdot \nabla)u(s)\,\mathrm{d}s.$$

Comme pour l'approximation de Galerkin, une autre approche classique pour les équations paraboliques consiste à

- obtenir des estimations uniformes à partir d'une (in)égalité d'énergie ;
- en déduire de la compacité par des outils d'analyse, du genre théorème de Banach-Alaoglu ou Ascoli (et ses corollaires : Rellich, Aubin-Lions, etc...).

Sans le laplacien, il faut chercher ailleurs une estimation d'une dérivée en espace pour le champ de vitesse. Pour les équations d'Euler 2D, la quantité clé est le tourbillon (aussi appelée vorticité ou rotationnel) :

$$\omega := \operatorname{rot} u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$$

car en prenant le rotationnel de l'équation de la conservation du mouvement, nous remarquons que ω vérifie une équation de transport

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \quad t > 0, x \in \Omega. \tag{1.1.11}$$

Par cette structure hyperbolique du premier ordre, il est naturel d'utiliser les techniques développées pour les équations de transport (méthode des caractéristiques) pour obtenir des propriétés sur ω. Ce problème reste néanmoins non-linéaire et une étape importante est de reconstruire le champ de vitesse u en fonction du tourbillon, ce qui nous amènera à utiliser des outils elliptiques (décomposition de Hodge-de Rham, γ convergence, fonction de Green et application conforme).

1.1.3 Les principales questions abordées

Il y a évidemment une large littérature concernant l'étude mathématique de ces deux systèmes et nous ne pourrons malheureusement pas référencer toutes les contributions. L'une des questions régulièrement abordée dans ce mémoire est de savoir comment réagit un fluide si nous perturbons (singulièrement) la géométrie du domaine. Ceci est un problème classique en EDP, mais qui fut surtout considéré pour des problèmes elliptiques. Il est néanmoins tout aussi naturel de se poser ce genre de question concernant les fluides :

- quel est le comportement d'un fluide au voisinage d'une singularité ? (par exemple, l'extérieur d'une aile d'avion)

- est-ce qu'un petit caillou ou un bâton génère de grosses perturbations dans une conduite d'eau ?
- en première approximation, à quoi l'écoulement d'un fluide dans un domaine poreux ressemble-t-il ?

Dans la suite de cette introduction, nous donnerons (sans énoncé précis) le contenu des résultats qui seront présentés dans le reste de ce mémoire.

1.2 Fluides idéaux

1.2.1 Existence dans des domaines non réguliers et stabilité par rapport à la convergence des domaines

L'existence de solution aux équations d'Euler dans les domaines réguliers étant bien connue (voir le Chapitre 3.1), les notions d'existence dans les domaines irréguliers et de stabilité sont reliées. En effet, nous verrons dans le Chapitre 2.2 qu'un domaine irrégulier Ω peut être approché (au sens de Hausdorff) par des domaines réguliers Ω_n. Ainsi l'existence de solution dans Ω sera une conséquence d'un résultat de convergence quand $n \to \infty$ de la solution u_n dans Ω_n vers un champ de vecteurs u qui vérifie l'équation d'Euler dans Ω (au sens faible).

En 2003, Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes [ILFNL03] ont débuté un programme concernant l'étude asymptotique du mouvement d'un fluide à l'extérieur d'un obstacle statique régulier[2] :

$$\Omega_\varepsilon := \mathbb{R}^2 \setminus \varepsilon\mathcal{C}$$

quand la taille ε de l'obstacle converge vers zéro. Ils obtiennent à la limite une solution aux équations d'Euler dans $\mathbb{R}^2$ où apparaît une masse de Dirac dans le tourbillon, localisée au point en lequel l'obstacle s'est contracté. La densité de cette masse de dirac correspond à la circulation initiale de la vitesse du fluide autour de l'obstacle. Une telle concentration de vorticité est appelée point vortex. Ce système mixte Euler-point vortex statique où la partie régulière de la vorticité est transportée par la vitesse associée à toute la vorticité (régulière et la masse de Dirac) fut déjà étudié par Marchioro [Mar90].

Dans l'article précédent et dans tous les travaux concernant la convergence de fonction quand le domaine varie, il est sous-entendu que nous étendons les fonctions à l'intérieur des obstacles (ou à l'extérieur de Ω_n), par exemple par 0. Les convergences seront parfois précisées dans les chapitres suivants, mais elles sont en générale faible-* dans $L^\infty(\mathbb{R}; L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^2))$ pour la vorticité (conséquence du théorème de Banach-Alaoglu) et fortes dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ pour la vitesse (conséquence de théorème de compacité du genre Ascoli).

Dans le premier article de ma thèse [Lac09a], nous avons étudié le cas de l'aplatissement de l'obstacle Ω_ε vers un arc de Jordan Γ. L'analyse est faite à partir d'une hypothèse sur la convergence des applications conformes quand l'obstacle se rétrécit. Nous présentons dans

[2] L'obstacle $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble compact, connexe, simplement connexe et régulier.

cet article un exemple de famille $(\Omega_\varepsilon)_\varepsilon$ où l'hypothèse est vérifiée, puis nous en déduisons la convergence vers une solution des équations d'Euler à l'extérieur de l'arc.

Ceci constitue l'un des tout premiers résultats concernant l'existence dans un domaine singulier pour les équations d'Euler 2D. En effet, le système d'Euler est relié à un problème elliptique $u = \nabla^\perp \Delta^{-1}\omega$ qui n'a de bonnes estimations que dans les domaines réguliers. Plus précisément, pour obtenir des estimations $W^{1,p}$ sur le champ de vitesse, il était utilisé systématiquement la continuité L^p de la transformée de Riesz sur Ω. Dans toutes les études antérieures concernant les équations d'Euler, il était donc important que le domaine soit supposé régulier (au moins $\partial\Omega \in C^{1,1}$). Une telle régularité est naturelle vis à vis des solutions fortes, mais c'est une grosse restriction pour les solutions faibles. En effet, dans de nombreuses situations, la singularité dans un fluide est créée par le domaine matériel, par exemple par un obstacle irrégulier. Par exemple, nous montrons dans [Lac09a] que la vitesse u explose près des deux extrémités de l'arc comme l'inverse de la racine carré de la distance. Nous obtenons aussi dans ce papier une formulation dans le plan entier, où nous voyons apparaître une mesure de Dirac sur l'arc, qui correspond au saut de la partie tangentielle de la vitesse. Au contraire du cas où l'obstacle se contracte vers un point, ce terme est toujours présent et est indispensable pour avoir la condition de tangence sur la courbe.

Dans [Lac12], nous avons exhibé des conditions géométriques pour lesquelles l'hypothèse de convergence des applications conformes (formulée dans [Lac09a]) est vérifiée. De tels résultats de stabilité des applications conformes remonte à Warschawski [War56] que nous pouvons aussi retrouver dans les livres de Pommerenke [Pom75, Pom92]. Dans cet article, nous faisons aussi le lien entre obstacle mince et petit obstacle, en considérant une solution à l'extérieur d'un arc de Jordan qui se contracte vers un point :

$$\Gamma_\varepsilon := \varepsilon\Gamma.$$

Cette limite engendre quelques difficultés techniques supplémentaires : les singularités du champ de vitesse près des extrémités z_ε de la forme $1/\sqrt{|x - z_\varepsilon|}$ se rajoutent pour donner à la limite une singularité de la forme $1/|x|$, ou se compensent. Nous retrouvons le résultat d'Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes [ILFNL03].

Le résultat concernant la convergence quand l'obstacle se rétrécit vers un arc [Lac09a] fut généralisé avec D. Gérard-Varet dans deux articles [GVL13]-[GVL15]. Dans ces articles, nous montrons que les équations d'Euler sont stables par perturbation du domaine (pour la topologie de Hausdorff). Plus précisément, si un domaine de la forme

$$\Omega = \widetilde{\Omega} \setminus \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{C}^j$$

où

- $\widetilde{\Omega}$ est un ouvert borné simplement connexe (cas traité dans [GVL13]) ou $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^2$ (cas traité dans [GVL15]) ;

- les $\mathcal{C}^j$ sont des compacts disjoints deux à deux, inclus dans $\widetilde{\Omega}$, connexes et contenant au moins deux points,

est approché au sens de Hausdorff par des domaines réguliers Ω_n ayant la "même forme" (voir le Chapitre 3.1 pour plus de détails), alors la solution des équations d'Euler 2D converge (à une sous-suite près) vers une solution d'Euler dans Ω. Il y a donc deux conséquences principales à ce résultat :

- si l'ensemble limite Ω est régulier et que la donnée initiale est assez régulière, alors par unicité des solutions aux équations d'Euler 2D, la convergence est vraie pour la suite entière, sans extraction. Ceci démontre la stabilité des équations d'Euler 2D, même si le bord est oscillant (de la forme $\varepsilon\beta(x/\varepsilon)$), ce qui n'est pas le cas des équations de Navier-Stokes. En effet, dans [CDFCS03a], les auteurs montrent que la condition de glissement de Navier devient à la limite une condition de non-glissement.

- l'existence de solution sans aucune hypothèse de régularité sur le bord. Ce bord peut être des fractales comme le flocon de neige de Koch.

Pour traiter les domaines non-réguliers, nous utilisons des notions générales qui seront présentées dans le prochain chapitre, comme par exemple : la décomposition de Hodge-de Rham, la γ-convergence, la convergence des applications conformes (théorème de Carathéodory) et la capacité H^1. La clé pour une théorie d'existence et stabilité est de travailler dans L^2 pour le champ de vitesse (i.e. H^1 pour la fonction courant[3]). Ceci ne requiert pas d'hypothèse de régularité sur les bords, si ce n'est d'avoir au moins deux points dans chaque $\mathcal{C}^j$ pour que l'obstacle soit visible dans cette topologie. Cette hypothèse est d'autant plus justifiée que la singularité obtenue quand un obstacle se contracte vers un point est de la forme $x^\perp/|x|^2$, ce qui n'est pas localement de carré intégrable en dimension deux (et sa fonction courant ψ n'est donc pas localement H^1).

Ces deux travaux étendent aussi l'article de Taylor [Tay00] qui considérait la stabilité et existence pour les domaines convexes. En effet, le problème de Laplace dans un domaine convexe admet une solution H^2, même si le bord est irrégulier. Néanmoins, nous remarquons dans [GVL13]-[GVL15] que l'espace adéquat pour montrer de l'existence et de la stabilité est H^1 et non H^2, ce qui permet de traiter des domaines plus généraux que les convexes.

1.2.2 Domaine poreux

Dans le cas de solide immobile, une autre extension naturelle des travaux à l'extérieur d'un obstacle se contractant vers un point [ILFNL03] est le cas où on augmente le nombre d'obstacles. Ce nombre tendant vers l'infini quand la taille tend vers zéro. Ceci est une question qui a été intensivement étudiée pour des problèmes de type elliptique : Cioranescu et Murat [CM82] pour l'équation de Laplace et Allaire [All90a, All90b] pour les équations de Navier-Stokes stationnaires (nous pouvons aussi citer [Con87a, Con87b, Mik91, SP82, SP85, Tar80] pour le comportement d'un fluide visqueux à travers un domaine perforé).

[3] La fonction courant associée u est une fonction telle que $\nabla^\perp\psi = u$.

Comme dans ces travaux, les outils d'homogénéisation (en particulier la convergence double échelles) furent utilisés par Mikelić et Paoli [MP99], puis Lions et Masmoudi [LM05] pour étudier une équation d'Euler faiblement non-linéaire

$$\partial_t u_\varepsilon + \varepsilon u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon = -\nabla p_\varepsilon,$$

quand les obstacles de taille ε espacés d'une distance ε recouvrent un domaine borné.

Avec M. Lopes Filho et H. Nussenzveig Lopes, nous avons étudié dans [LLFNL15] une situation homogénéisée pour les équations d'Euler (1.1.1), quand nous fixons les bonnes circulations initiales pour approcher n'importe quelle mesure bornée μ. A l'extérieur de N_ε obstacles circulaires, nous obtenons à la limite $\varepsilon \to 0$ (avec $N_\varepsilon \to \infty$) un terme additionnel qui se souvient de ces circulations non nulles : $(\omega_\varepsilon, u_\varepsilon)$ converge vers (ω, u), où ω est transporté par u, et u est un champ à divergence nulle telle que $\operatorname{rot} u = \omega + \mu$. Cette mesure additionnelle μ est indépendante du temps et est une réminiscence des circulations conservées autour des obstacles (théorème de Kelvin). Une conséquence intéressante est que nous ne pouvons pas approcher un obstacle mince (un arc de Jordan Γ) par une infinité de petits disques. Même si nous préparons bien la donnée initiale pour que la mesure μ corresponde à la mesure d'une vitesse initiale tangente, le fait quelle soit indépendante du temps empêche le transfert de vorticité d'une partie de l'arc à une autre, ce qui est nécessaire pour obtenir la condition de tangence en tout temps. La difficulté de ce résultat est due à l'incapacité de faire une analyse dans L^2, car comme dit précédemment, la capacité d'un point est zéro et le champ harmonique $\gamma x^\perp/(2\pi|x|^2)$ émanant d'une circulation γ non nulle n'est pas localement de carré intégrable. Comme il sera expliqué plus tard, nous avons développé une théorie L^p ($p < 2$) en renonçant à quelques outils spécifiques à L^2 (conservation de l'énergie et orthogonalité du projecteur de Leray). Nous perdons alors le contrôle de la distance entre les disques par rapport à la taille, ce qui est un paramètre important pour distinguer les différents régimes.

Il est pourtant crucial de comprendre si la limite dépend du rapport entre la distance d_ε séparant les obstacles et la taille ε des obstacles. Pour les équations de Laplace et Navier-Stokes, le régime critique où apparaît un terme homogénéisé à la limite (loi de type Brinkmann) est

$$d_\varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} \to C > 0$$

quand les obstacles recouvrent dans toutes les directions un domaine borné. De plus, Allaire démontre que nous n'avons pas d'influence du domaine poreux à la limite si les obstacles sont plus espacés (i.e. $d_\varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} \to \infty$), et que dans le cas peu espacé (i.e. $d_\varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} \to 0$, avec $d_\varepsilon \gg \varepsilon$) alors $u_\varepsilon/(d_\varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|})$ converge vers un champ u qui vérifie une loi de type Darcy. Si les obstacles ne sont distribués que sur une courbe de $\mathbb{R}^2$, un terme homogénéisé apparaît pour le régime critique suivant

$$d_\varepsilon |\ln \varepsilon| \to C > 0.$$

Hélas, les régimes plus serrés (i.e. $d_\varepsilon |\ln \varepsilon| \to 0$) ne sont pas traités dans ce cas, chose que nous expliquerons au Chapitre 3.3. Il n'est pas non plus étudié dans [All90a, All90b] le cas où $d_\varepsilon \ll \varepsilon$.

Dans cet esprit et sans rajout de circulation initiale bien préparée, nous avons étudié avec V. Bonnaillie-Noël et N. Masmoudi [BNLM15] et avec N. Masmoudi [LM16a] les différents régimes pour les équations d'Euler. Si les obstacles sont distribués sur un carré et que le fluide remplit l'extérieur $\mathbb{R}^2 \setminus \cup \mathcal{K}_\varepsilon^{i,j}$ alors nous montrons que

- si $d_\varepsilon \varepsilon \to \infty$ alors nous retrouvons à la limite la solution aux équations d'Euler dans $\mathbb{R}^2$, sans aucune influence du domaine poreux ;
- si $d_\varepsilon \varepsilon \to 0$ alors $(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ converge vers une solution aux équations d'Euler à l'extérieur du carré unité, où le domaine poreux est devenu imperméable.

Le cas critique $d_\varepsilon \varepsilon \to C$ est proche de la situation périodique traitée dans [LM05, MP99], mais ceci n'est pas encore rigoureusement établi pour les équations d'Euler non modifiées. Il est intéressant d'avoir obtenu un régime critique différent du cas visqueux, plus dense, ce qui paraît physiquement naturel. Nous avons aussi étudié le cas d'une distribution d'obstacles sur un segment, où le critère critique dépend de la géométrie des obstacles : $d_\varepsilon \varepsilon^3 \to 0$ ou ∞ si les obstacles sont circulaires, et $d_\varepsilon \varepsilon^2 \to 0$ ou ∞ si les obstacles sont "plats" sur les cotés proches des obstacles voisins (voir le Chapitre 3.2 pour une définition exacte).

Vu la différence des régimes critiques, il est naturel d'étudier la limite viscosité évanescente en même temps que la limite domaine poreux, ce qui a été fait en collaboration avec A. Mazzucato [LM16b]. Nous avons obtenu des critères où la limite vers la solution des équations d'Euler dans $\mathbb{R}^2$ est réalisée, incluant des régimes tel que

$$\varepsilon \ll d_\varepsilon \ll \frac{1}{\sqrt{|\ln \varepsilon|}},$$

c'est-à-dire des régimes fortement perturbants pour les équations de Navier-Stokes, mais pas pour celles d'Euler. Dans cet article, le cas de la distribution d'obstacles dans une seule direction est aussi considéré.

1.2.3 Petit solide

Si la circulation initiale γ autour d'un petit obstacle est non nulle, nous avons vu qu'une masse de Dirac (appelé point vortex) apparaît à la limite dans la vorticité. La question que nous avons étudiée avec O. Glass et F. Sueur [GLS14, GLS16] est de savoir quelle est la dynamique du centre du point vortex si nous supposons que le solide de taille ε se déplace sous l'influence des forces exercées par le fluide idéal (via la loi de Newton (1.1.6)-(1.1.7)). Cette question est donc différente de celles des travaux précédents où la position des obstacles ne dépendait pas du temps. Nous avons déterminé deux régimes possibles en fonction de la masse des solides :

- si la masse des solides est fixe : $m_\varepsilon = m_1$, ce que nous appelons une "particule massive", alors la trajectoire limite est accélérée par une poussée équivalente à la force de Joukowski pour les fluides potentiels :

$$m_1 h''(t) = \gamma \Big(h'(t) - K_{\mathbb{R}^2}[\omega](h(t)) \Big)^\perp.$$

- si la masse des solides tend vers zéro : $m_\varepsilon = \varepsilon^\alpha m_1$ ($\alpha > 0$), ce que nous appelons une "particule sans masse", alors le centre du point vortex de déplace à la vitesse exercée par la partie régulière de la vorticité :

$$h'(t) = K_{\mathbb{R}^2}[\omega](h(t)),$$

où $K_{\mathbb{R}^2}[\omega]$ est le champ de vecteurs associé à ω (voir le Chapitre 1.3.3 pour la définition précise). Ce système est connu sous le nom de système mixte Euler-point vortex (voir Marchioro et Pulvirenti [MP93, MP94]). Même si la limite semble plus simple, l'analyse est plus compliquée que dans le cas d'une particule massive, à cause du changement d'ordre en temps de l'équation du centre de masse : pour tout $\varepsilon > 0$ l'équation de Newton (1.1.6) est d'ordre deux, tandis que l'équation précédente est d'ordre un.

1.2.4 La méthode des points vortex

Pour simuler numériquement l'écoulement d'un fluide idéal sans avoir l'apparition de viscosité numérique, il a été développé des méthodes lagrangiennes. Pour cela, nous avons besoin de connaître la formule explicite de la loi de Biot-Savart dans $\mathbb{R}^2$ (loi donnant la vitesse en fonction du tourbillon). Mais à l'extérieur d'un obstacle $\mathcal{C}$, la vorticité ω est transportée par un champ de vitesse u qui est tangent au bord. Les formules qui donnent u en fonction de ω ne sont pas vraiment explicites car elles sont en fonction d'une application conforme qui ne l'est pas. La méthode des points vortex consiste à remarquer que $v := u - K_{\mathbb{R}^2}[\omega]$ est un champ associé à une nappe de tourbillon qui est supportée sur le bord et dont la densité est la seule fonction possible pour avoir la condition de tangence et de circulation. Cette nappe est alors approchée par une somme de masses de Dirac, les densités étant choisies pour que le champ $v_{\text{app}} := K_{\mathbb{R}^2}[\sum \gamma^i \delta_{z^i}]$ soit tangent au point milieu entre z^i et z^{i+1}. En collaboration avec D. Arsénio et E. Dormy [ADL14], nous avons justifié rigoureusement que cette méthode donne une bonne approximation de v, dans le cas particulier où le solide est un disque. L'extension à n'importe quel domaine extérieur est en voie de finalisation.

1.2.5 Unicité dans les domaines à coins

Si une théorie L^2 pour les champs de vitesse est suffisante pour établir l'existence, les preuves classiques d'unicité requièrent plus : $u \in W^{1,p}$ pour tout $p \in [1, \infty)$ avec une croissance de la forme $\|\nabla u\|_{L^p} \leqslant Cp$ (preuve de Yudovich [Yud63]), ou u log-lipschitz (aussi dit quasi-lipschitz), c'est-à-dire vérifiant

$$|u(x) - u(y)| \leqslant h(|x - y|), \text{ où } h(r) = r(1 + |\ln r|)$$

(preuve de Marchioro et Pulvirenti [MP94]). Dans les deux preuves, cette régularité paraît critique pour boucler une estimation de Gronwall.

Nous n'avions besoin d'aucune hypothèse sur la régularité du bord pour dire que la vitesse associée à une vorticité dans L^p ($p > 1$) appartenait à L^2, mais ceci est beaucoup plus compliqué si nous cherchons une estimation de type lipschitz. Il faut en effet garder en tête l'exemple de Jerison et Kenig [JK95] où il est construit Ω un ouvert borné connexe de classe C^1 et une fonction $\omega \in C^\infty$ tels que la dérivée du champ de vitesse associé $\nabla u = \nabla\nabla^\perp\Delta^{-1}\omega$ ne soit pas intégrable. Un autre exemple est l'extérieur du segment[4] : la formule de Biot-Savart utilisant l'application conforme de Joukowski assure que $u \in L^p \cap W^{1,q}$ seulement pour $p < 4$ et $q < 4/3$, ce qui est à nouveau très loin de la régularité nécessaire pour les preuves classiques.

Si le domaine est borné et simplement connexe (ou le complémentaire d'un compact simplement connexe), nous avons des formules explicites du champ de vitesse en fonction du tourbillon et de l'application conforme qui envoie Ω sur le disque unité (ou Ω sur le complémentaire du disque unité). Quand le bord est régulier sauf en un nombre fini de points (z^i) où nous avons un coin d'angle α^i, nous utilisons les estimations elliptiques dans les domaines à coins (une large littérature : par exemple Grisvard [Gri85] ou Kozlov, Maz'ya et J. Rossmann [KMR01]) pour obtenir des estimations près des coins. Nous observons en particulier que si tous les angles sont inférieurs ou égaux à $\pi/2$, alors la vitesse appartient à $W^{1,p}$ pour tout p. Néanmoins, en suivant la preuve de Grisvard, la croissance est de la forme $\|\nabla u\|_{L^p} \leqslant Cp^2$ ce qui n'est pas suffisant pour utiliser l'argument de Yudovich. Bardos, Di Plinio et Temam [BDPT13] ont démontré l'unicité dans le cas du carré (ou un domaine convexe avec des angles de la forme $\pi/2^k$) en obtenant une nouvelle estimation BMO par un argument de symétrie, ce qui impliqua une bonne croissance $\|\nabla u\|_{L^p} \leqslant Cp$. En collaboration avec E. Miot et C. Wang [LMW14], nous avons obtenu l'unicité pour tout domaine à coins si tous les angles sont inférieurs ou égaux à $\pi/2$. Pour cela, nous n'avons pas cherché à montrer une inégalité de type Calderón-Zygmund, mais plutôt une estimation de type log-lipschitz d'une transformation du champ de vitesse. Cette nouvelle estimation nous a permis d'adapter la preuve de Marchioro et Pulvirenti. Quelques temps plus tard, Di Plinio et Temam [DPT15] ont montré l'inégalité de Calderón-Zygmund pour ce genre de domaine, retrouvant ainsi notre résultat d'unicité, mais par l'approche de Yudovich.

A ma connaissance, la seule situation où l'unicité a été établie en dessous de la régularité classique[5] est le cas du système mixte Euler-point vortex. Il s'agit d'un modèle où la vorticité est composée d'une partie régulière (dans $L^1 \cap L^\infty$) et d'une somme finie de masse de Dirac. Ce système a été justifié rigoureusement par Marchioro et Pulvirenti [MP93]. Les auteurs démontrent que si la partie régulière est nulle au voisinage des points vortex, alors elle le reste pour tout temps. Ainsi, ils obtiennent l'unicité de ce système pour la formulation lagrangienne, ce que nous avons étendu à la formulation eulerienne avec E. Miot [LM09]. Il est crucial dans ces preuves d'unicité qu'il n'y ait pas de vorticité dans un voisinage du point vortex.

Dans un domaine à coins avec un angle plus grand que $\pi/2$, le champ de vitesse n'ap-

[4]Pour l'extérieur d'un segment, le bord est de classe C^∞ sauf aux extrémités où nous avons des "cusps" (coins d'angle 2π).

[5]Comme rappelé au début du Chapitre 1.2.5.

partient plus à $\cap_{p\in[2,\infty)}W^{1,p}$. Il n'est même pas borné si un angle est supérieur à π. Dans ce cas, si la vorticité initiale est de signe constant et à support compact, nous avons montré dans [Lac15b] que, pour tout temps, la vorticité reste nulle dans un voisinage du bord. La difficulté de ce résultat est de contrôler les trajectoires du champ de vitesse tandis que le champ n'est pas régulier dans tout le domaine. Comme dans le système mixte Euler-point vortex, nous n'avons donc pas de vorticité à l'endroit où la vitesse est singulière, ce qui nous permet d'obtenir l'unicité par une estimation de type Gronwall.

1.2.6 Autres modèles

Proches des équations d'Euler 2D, nous rassemblons ici deux travaux.

Avec T. Nguyen et B. Pausader, nous avons étudié l'équation des lacs :

$$\partial_t(bv) + \mathrm{div}(bv \otimes v) + b\nabla p = 0, \quad \mathrm{div}(bv) = 0, \tag{1.2.1}$$

où $v(t,x)$ est la composante 2D horizontale de la vitesse du fluide, $b(x)$ la profondeur du lac et $x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^2$ où Ω correspond à la surface du lac. Ces équations ont été introduites dans la littérature physique comme un modèle géophysique décrivant l'évolution de la moyenne verticale de la composante horizontale d'un fluide idéal incompressible, voir par exemple [Gre80, CHL96]. Il y avait eu quelques résultats mathématiques [LOT96a, LOT96b, BM06]. Dans [LNP14], nous avons adapté des résultats sur les équations d'Euler 2D à ces équations pour montrer une décomposition de type Hodge-de Rham (en cas de présence d'îles), existence et unicité globales (à la Yudovich), stabilité par perturbation du domaine (dans la topologie de Hausdorff) et existence de solution pour des lacs irréguliers (c'est-à-dire sans aucune propriété de régularité sur Ω et b).

De par le lien entre les équations d'Euler et les équations elliptiques, il n'est pas étonnant que l'on puisse se servir des outils mis en place pour donner des propriétés des solutions du problème de Laplace. Avec V. Bonnaillie-Noël et M. Dambrine [BNDL16], nous avons utilisé l'expression des formules de Green en fonction des applications conformes pour déterminer le développement asymptotique quand des petites obstacles se contractent vers des points.

1.3 Fluides visqueux

1.3.1 Stabilité par rapport à la convergence des domaines

Suite à leur premier article concernant les fluides parfaits, Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes ont traité le cas visqueux dans [ILFNL06]. En considérant la même donnée initiale que dans le cas idéal, ils font apparaître initialement une singularité. Mais même si initialement, nous n'avons besoin que de la condition de tangence pour construire une unique solution faible de Leray [Ler34], la condition de Dirichlet est vérifiée sur $\partial(\varepsilon\mathcal{C})$ pour tout temps $t > 0$. Ainsi, à la limite, il n'y a plus de terme singulier et les auteurs prouvent

que le champ de vitesse limite vérifie les équations de Navier-Stokes dans le plan entier, avec une vitesse initiale associée au tourbillon $\omega^0 + \gamma\delta$.

Durant ma thèse, nous avons aussi regardé le cas de l'obstacle se contractant vers un arc et il fut prouvé dans [Lac09b] que le champ de vitesse limite vérifiait l'équation de Navier-Stokes à l'extérieur de l'arc, avec condition de Dirichlet sur la courbe. Cette limite est moins singulière que dans le cas des fluides parfaits. D'ailleurs, l'existence et l'unicité des solutions de Leray dans des domaines singuliers avaient déjà été obtenues (voir par exemple [CDGG06]). La condition d'adhérence au bord est en effet encodée dans les espaces fonctionnels et nous n'avons besoin d'aucune régularité pour définir $H_0^1(\Omega)$.

En dimension trois (3D), Iftimie et Kelliher ont montré qu'un petit obstacle $\varepsilon\mathcal{C}$ n'avait aucune influence à la limite $\varepsilon \to 0$. Mais l'extension naturelle de la version 2D est d'étudier le cas où les obstacles se contractent vers une surface ou vers une courbe. La contraction vers une surface a été faite pendant la thèse et publiée dans [Lac15a], article contenant aussi le cas de la contraction vers une courbe. Comme attendu, nous montrons que la courbe est une singularité effaçable pour les équations de Navier-Stokes 3D, mais l'analyse mathématique est basée sur un nouvel argument pour corriger la condition au bord des champs à divergence nulle. En effet, la stratégie générale développée par Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes consistait à tronquer la fonction courant. Comme cette fonction est choisie à une constante près, nous la fixons telle que la fonction courant s'annule en 0 et elle est donc petite dans un ε voisinage. Un tel argument ne s'applique plus quand nous avons plusieurs obstacles ou quand l'obstacle limite est une courbe. Renonçant à cette méthode d'approximation, nous avons tronqué directement le champ de vitesse puis ajouté une correction grâce aux opérateurs de Bogovskiĭ [Bog79, Bog80]. Ces opérateurs ont été introduits pour construire des solutions aux problèmes $\operatorname{div} v = f$ vérifiant des bonnes estimations (voir le Chapitre 2.4, pour une étude approfondie voir [Gal11]). Une telle correction est proche des corrections construites en homogénéisation (voir par exemple [All90a]) et a aussi été une des clés dans [LM16b, LT17].

En effet, Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes utilisent à nouveau la méthode de troncature des fonctions courants dans [ILFNL09] pour étudier la limite simultanée d'un petit obstacle et de la viscosité évanescente. En utilisant la méthode basée sur les opérateurs de Bogovskiĭ puis en rajoutant des idées venant des domaines poreux, nous avons aussi suivi la preuve du critère de Kato [Kat84a] pour traiter avec A. Mazzucato [LM16b] la limite simultanée domaine poreux-viscosité évanescente. Les régimes considérés incluent des cas assez denses où des termes homogénéisés apparaissent pour une viscosité fixée. Concernant la limite simultanée viscosité évanescente et perturbation du domaine, nous avons aussi étudié avec D. Gérard-Varet, T. Nguyen et F. Rousset [GVLNR17] le cas d'un domaine rugueux pour les équations de Navier-Stokes avec condition de Navier. Nous avons cherché une condition suffisante (entre la viscosité et le paramètre d'oscillation du bord) pour retrouver à la limite les équations d'Euler dans le domaine plat. La principale difficulté ici est que la courbure du domaine explose et que les preuves classiques sont inutilisables. Nous avons alors construit une bonne approximation de la couche limite pour la solution d'Euler dans le domaine rugueux, puis nous avons établi des estimations de stabilité de cette approximation pour l'évolution de Navier-Stokes.

Le procédé d'approximation avec les opérateurs de Bogovskiĭ a aussi été utilisé avec T. Takahashi pour traiter dans [LT17] le cas d'un petit solide se déplaçant dans un fluide visqueux. La nouvelle difficulté ici est d'obtenir une estimation uniforme de la vitesse du petit solide. L'analyse standard pour les équations elliptiques à l'extérieur de petits obstacles procure des estimations bornées au mieux dans H^1, ce qui est l'espace limite où il n'y a pas d'injection dans L^∞ (en dimension deux). Mais vu que la taille du bord du solide tend vers zéro, c'est bien d'une estimation L^∞ que nous avons besoin pour localiser le petit solide et correctement placer la troncature. Cette estimation va découler de l'analogie des problèmes petit-obstacle/comportement en temps long, via le changement d'échelle qui laisse invariant les équations de Navier-Stokes :

$$u_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon^2} u_1(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon})$$

où u_1 vérifie les équations à l'extérieur du solide de taille 1. Ainsi, comprendre le comportement de u_ε quand la taille ε tend vers zéro est équivalent au problème de comportement en temps long de u_1. Comme expliqué dans le prochain paragraphe, une telle étude vient juste d'être réalisée dans [EHL14] et nous a permis de conclure pour le problème du petit solide.

1.3.2 Comportement en temps long

Cette relation entre le comportement en temps long et le problème de petits obstacles est le point de départ de mes travaux avec D. Iftimie et G. Karch [IKL11, IKL14]. Dans le même temps que l'article de Gallay et Maekawa [GM13], nous utilisons aussi le comportement en temps long du semi-groupe de Stokes qui fut établi par Maremonti et Solonnikov [MS97] et par Dan et Shibata [DS99a]. Nous en déduisons le comportement pour la solution de Navier-Stokes en contrôlant le terme non-linéaire par des techniques de point fixe.

Concernant le problème d'un solide se déplaçant dans un fluide, ces estimations du semi-groupe de Stokes n'étaient pas connues (à cause de la condition au bord non nulle). En collaboration avec S. Ervedoza et M. Hillairet, nous avons décomposé en coordonnée polaire le problème de Stokes à l'extérieur d'un solide circulaire et remarqué que seule l'équation du mode 1 contient des termes de pression et des termes de bords dynamiques. En résolvant l'équation du mode 1 de la pression, nous avons introduit une nouvelle inconnue du même ordre que le champ de vitesse et qui vérifie une condition au bord dissipative. Nous avons ainsi pu établir les estimations $L^p - L^q$ de type parabolique pour le problème de Stokes en dimension deux. Nous en avons aussi déduit des estimations en temps long pour la solution de Navier-Stokes.

1.3.3 Quelques notations

Nous essayons de garder les même notations tout le long de ce texte.

- Les champs de vitesse seront notés par u ou v, tandis que le tourbillon (aussi appelé le rotationnel ou la vorticité) par ω ou w.

- Le fluide remplit un domaine Ω qui est un sous-ensemble ouvert et connexe de $\mathbb{R}^2$.
- Le vecteur normal sera noté n et sera supposé dirigé vers l'extérieur de Ω.
- En dimension deux, la notation $\perp$ représente la rotation de $\pi/2$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{\perp} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^{\perp} f = (\nabla f)^{\perp} = \begin{pmatrix} -\partial_2 f \\ \partial_1 f \end{pmatrix}.$$

- La circulation d'un champ de vecteurs autour d'un obstacle (un ensemble compact connexe, simplement connexe $\mathcal{C}^j$) est définie par

$$\gamma^j[v] := \oint_{\mathcal{C}^j} v \cdot \tau \, \mathrm{d}s$$

où l'intégrale curviligne est prise dans le sens trigonométrique (c'est-à-dire que $\tau = -n^{\perp}$).

- Pour une fonction $\omega \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^2)$ $(p > 2)$, nous notons la loi de Biot-Savart dans $\mathbb{R}^2$ par

$$K_{\mathbb{R}^2}[\omega](x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^{\perp}}{|x-y|^2} \omega(y) \, \mathrm{d}y,$$

ce qui correspond à l'unique[6] solution du problème div-rot dans $\mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2, \quad \operatorname{rot} u = \omega \text{ dans } \mathbb{R}^2, \quad \lim_{x \to \infty} u(x) = 0.$$

- Quand nous considérons des suites d'ensembles ou de fonctions, nous noterons le paramètre n ou ε en indice, comme par exemple Ω_n, $\mathcal{S}_\varepsilon$ (solide de taille ε), u_n ou ω_ε. Si à n ou ε fixé, il y a une suite finie d'ensembles ou nombres, nous noterons le paramètre j ou i en exposant, comme par exemple $\mathcal{C}_n^j$ (le j-ième obstacle du domaine Ω_n) et $\gamma_\varepsilon^j[v]$ (la circulation de v autour de $\mathcal{C}_\varepsilon^j$). Les données initiales seront distinguées par un exposant 0, comme par exemple u_n^0 ou $\mathcal{S}_\varepsilon^0$.
- Nous utiliserons sans distinction mathématiques les mots "obstacle" (habituellement utilisé en mécanique des fluides), "inclusion" (utilisé en théorie elliptique) et "trou" (utilisé en homogénéisation), pour un ensemble compact, connexe et simplement connexe qui est indépendant du temps. Ils seront notés par $\mathcal{C}$. Le mot "solide" sera utilisé quand l'ensemble compact, connexe et simplement connexe se déplace sous l'influence du fluide, mais tout en restant indéformable (voir (1.1.4)). Il sera noté $\mathcal{S}$.

[6] Par exemple, dans la classe $C^0 \cap L^3(\mathbb{R}^2)$.

2

Quelques outils pour les fluides incompressibles

Résumé

Le tourbillon est une quantité fondamentale pour les équations d'Euler en dimension deux. Elle est transportée par le champ de vitesse u, et possède donc plusieurs propriétés de conservation. Il est alors nécessaire de reconstruire le champ de vitesse via le problème div-rot suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{rot} u = \omega & \text{dans } \Omega \\ u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'objectif de cette partie est de rassembler quelques propriétés sur ce problème div-rot, qui servent régulièrement dans les études concernant les fluides parfaits.

A la fin de ce chapitre, nous donnerons aussi quelques outils de compacité locale pour les champs à divergence nulle, et nous rappellerons la méthode d'approximation via les opérateurs de Bogovskiĭ.

2.1 Décomposition de Hodge-de Rham

Nous développons ici la théorie de reconstruction dans les domaines bornés réguliers, mais elle peut être adaptée dans les domaines extérieurs (voir par exemple [GVL15, LLFNL15]). Nous considérons des domaines Ω de la forme :

$$\Omega = \widetilde{\Omega} \setminus \bigcup_{k=1}^{N} \mathcal{C}^k \tag{2.1.1}$$

où $\widetilde{\Omega}$ est un sous-domaine, borné et simplement connexe de $\mathbb{R}^2$, et où les $\mathcal{C}^k$ sont des compacts connexes et simplement connexes inclus dans $\widetilde{\Omega}$, disjoints deux à deux ($N \in \mathbb{N}$).

Pour un champ à divergence nulle et tangent au bord, il découle du théorème de Stokes que l'intégrale le long des chemins de $u^\perp \cdot \tau$ entre deux points ne dépend pas du chemin choisi, et il est donc possible de construire une fonction courant $u = \nabla^\perp \psi := \begin{pmatrix} -\partial_2 \\ \partial_1 \end{pmatrix} \psi$ (même dans les domaines non simplement connexes). Le problème de div-rot s'écrit alors comme un problème de Laplace

$$\Delta \psi = \omega \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad \partial_\tau \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

La fonction courant étant choisie à une constante près, nous pouvons considérer la condition de Dirichlet sur une composante connexe du bord, mais pas sur les autres. Par conséquent, il est important d'étudier les champs de vecteurs harmoniques

$$\begin{aligned} \mathcal{H} :=& \{H,\ \operatorname{div} H = \operatorname{rot} H = 0 \text{ dans } \Omega,\ H \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\ =& \{\nabla^\perp \psi,\ \Delta\psi = 0 \text{ dans } \Omega,\ \psi = 0 \text{ sur } \partial\widetilde{\Omega},\ \partial_\tau \psi = 0 \text{ sur } \cup_{k=1}^N \partial\mathcal{C}^k\}, \end{aligned}$$

qui correspond au noyau de notre problème div-rot. Cet espace est de dimension N et la base la plus simple sont les $\{\nabla^\perp \phi^j\}_{j=1,\dots,N}$ où les fonctions harmoniques sont les uniques solutions de

$$\Delta \phi^j = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \phi^j = 1 \text{ sur } \partial\mathcal{C}^j, \quad \phi^j = 0 \text{ sur } \partial\widetilde{\Omega} \cup_{k \neq j} \partial\mathcal{C}^k.$$

Néanmoins, la trace de la fonction courant n'est pas une quantité qui a une signification physique intéressante, et il est plus judicieux d'introduire une base de $\mathcal{H}$ vérifiant une condition de circulation. Nous notons $\gamma^j[v]$ la circulation du champ v autour de l'obstacle $\mathcal{C}^j$:

$$\gamma^j[v] := \oint_{\mathcal{C}^j} v \cdot \tau \, \mathrm{d}s \tag{2.1.2}$$

où l'intégrale curviligne est prise dans le sens trigonométrique (c'est-à-dire que $\tau = -n^\perp$ avec n le vecteur normal sortant de Ω). De la même manière dont nous avons construit la fonction courant, nous pouvons construire une fonction potentiel $v = \nabla p$ si et seulement si $\operatorname{rot} v = 0$ et $\gamma^j[v] = 0$ pour tout $j = 1, \dots, N$. Ainsi, un champ harmonique qui est de

circulation nulle autour de chaque obstacle est nul car $\int |H|^2 = \int H \cdot \nabla p = 0$. Ceci permet de montrer que l'application linéaire suivante est injective :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \mathbb{R}^N \\ H & \mapsto & (\gamma^1[H], \dots, \gamma^N[H]) \end{array}$$

et donc bijective. Par conséquent, il existe une autre base $\{H^j\}_{j=1,\dots,N}$ de $\mathcal{H}$ où $H^j = \nabla^\perp \psi^j$ avec

$$\Delta \psi^j = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \psi^j = 0 \text{ sur } \widetilde{\Omega}, \quad \partial_\tau \psi^j = 0 \text{ sur } \cup_k \partial \mathcal{C}^k, \quad \gamma^k[\nabla^\perp \psi^j] = \delta_{jk} \ \forall k$$

où δ_{jk} correspond au symbole de Kronecker. La circulation autour d'un obstacle est une quantité plus intéressante, en partie grâce au théorème de Kelvin qui assure que c'est une quantité conservée pour les solutions des équations d'Euler.

S'il est évident par principe du maximum que les fonctions harmoniques ϕ^j sont bornées indépendamment du domaine, plus précisément :

$$0 < \phi^j < 1 \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

il sera intéressant de passer d'une base à une autre pour déduire de la compacité des ψ^j à partir de celle des ϕ^j. De par la définition des $\{\psi^j\}$ et $\{\phi^j\}$ il existe des uniques constantes $C_{i,j}$ telles que

$$\psi^i = \sum_{j=1}^N C_{i,j} \phi^j$$

et en calculant la circulation autour de $\mathcal{C}^k$ nous obtenons par intégration par partie

$$\delta_{ik} = \sum_{j=1}^N C_{i,j} \oint_{\mathcal{C}^k} \nabla^\perp \phi^j \cdot \tau \, \mathrm{d}s = -\sum_{j=1}^N C_{i,j} \int_\Omega \nabla \phi^j \cdot \nabla \phi^k$$

et donc

$$-I_N = \Big(C_{i,j}\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant N} \Big(\int_\Omega \nabla \phi^i \cdot \nabla \phi^j \Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant N}.$$

Comme nous avons

$$X^T \Big(\int_\Omega \nabla \phi^i \cdot \nabla \phi^j \Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant N} X = \Big| \sum_{j=1}^N x_j \nabla \phi^j \Big|^2$$

il est clair que la matrice de changement de base $\Big(C_{i,j}\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$ est symétrique définie négative et que son inverse est $-\Big(\int_\Omega \nabla \phi^i \cdot \nabla \phi^j \Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$.

Finalement, nous introduisons la solution du problème de Dirichlet résolvant $\operatorname{rot} u = \omega$: soit $\psi^0[\omega]$ l'unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ de

$$\Delta \psi^0[\omega] = \omega$$

et nous calculons sa circulation par une double intégration par partie :

$$\oint_{\mathcal{C}^k} \nabla^\perp \phi^0[\omega] \cdot \tau \, \mathrm{d}s = -\int_\Omega \nabla \phi^0[\omega] \cdot \nabla \phi^k - \int_\Omega \omega \phi^k = -\int_\Omega \omega \phi^k.$$

Nous avons donc montré la proposition suivante

Proposition 2.1.1. *Soit Ω un ensemble de la forme* (2.1.1)*. Soit $\omega \in L^p(\Omega)$ (pour un $p \in (1, \infty]$) et $\gamma = (\gamma^1, \cdots, \gamma^N) \in \mathbb{R}^N$. Il existe alors un unique champ de vitesse $u \in L^2(\Omega)$ tel que*[1]

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \operatorname{rot} u = \omega \text{ dans } \Omega, \quad u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$
$$\oint_{\mathcal{C}^k} u \cdot \tau \, \mathrm{d}s = \gamma^k \text{ pour tout } k = 1, \ldots, N.$$

Nous avons de plus la formule de décomposition suivante :

$$u = \nabla^\perp \psi^0[\omega] + \sum_{j=1}^N \alpha^j H^j, \tag{2.1.3}$$

où $\alpha^j = \gamma^j + \int_\Omega \omega \phi^j$.

Quand le domaine varie et converge au sens de Hausdorff, la stratégie consistera à passer à la limite dans chacun des termes de la décomposition précédente. Que cela soit pour passer à la limite ou pour avoir une définition que l'on puisse étendre au cas des domaines non réguliers, il sera très utile de donner une formulation faible pour la condition de tangence :

$$\int_\Omega u^0 \cdot \nabla h = 0 \quad \text{pour tout } h \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ tel que } \nabla h \in L^2(\Omega). \tag{2.1.4}$$

Cette définition fut introduite par Galdi [Gal11] et nous remarquons que ceci correspond exactement à la condition de divergence nulle et condition de tangence quand u^0 et Ω sont réguliers : en effet nous obtenons par une intégration par partie que

$$\int_\Omega u^0 \cdot \nabla h = \int_{\partial\Omega} u^0 \cdot n \, h - \int_\Omega \operatorname{div} u^0 \, h,$$

pour tout $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. La condition (2.1.4) implique donc que $\operatorname{div} u^0 = 0$ et $u^0 \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$. De même, nous devons définir la circulation au sens faible, et pour ceci nous introduisons des fonctions de troncatures régulières χ^j qui valent 1 dans un voisinage de $\mathcal{C}^j$ et 0 dans un voisinage de $\partial\widetilde{\Omega} \cup_{k \neq j} \mathcal{C}^k$, puis nous définissons la circulation faible pour tout $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tel que $\operatorname{rot} v \in L^1(\Omega)$ comme ceci :

$$\gamma^j[v] := -\int_\Omega \chi^j \operatorname{rot} v - \int_\Omega v \cdot \nabla^\perp \chi^j, \tag{2.1.5}$$

[1] La condition de tangence est définie au sens faible : voir (2.1.4).

ce qui revient à la définition classique (2.1.2) pour v et Ω réguliers.

Il a ainsi été montré dans [GVL13] que la Proposition 2.1.1 reste vraie pour les domaines irréguliers en considérant ces formulations faibles pour les conditions de tangence et de circulation.

Cette proposition et ces définitions peuvent être adaptées dans les domaines extérieurs (voir par exemple [GVL15, LLFNL15]), avec quelques subtilités venant du fait que les champs de vitesse ne sont pas (en général) de carré intégrable à l'infini et que $\{\phi^j\}$ ne peut plus être une base pour $\mathcal{H}$ car $\sum_{j=1}^N \phi^j \equiv 1$.

Une telle décomposition a aussi été adaptée pour l'équation des lacs dans [LNP14] où il fallait résoudre

$$\operatorname{div}(bv) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \operatorname{rot} v = b\omega \text{ dans } \Omega, \quad bv \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

où nous rappelons que b correspond à la profondeur du lac. Comme b peut s'annuler près du bord, ceci nous ramène à l'étude d'une équation elliptique avec des coefficients dégénérés : $\operatorname{div}(b^{-1}\nabla\psi) = b\omega$ (comme par exemple dans [BCM86]).

Dans le problème fluide structure (où les solides se déplacent sous l'influence des forces exercées par le fluide (1.1.6)-(1.1.7)), une autre adaptation a été utilisée dans les travaux [GLS14, GLS16] pour prendre en compte $u \cdot n = (\ell^j + r^j(x - h^j)^\perp) \cdot n$ sur $\partial\mathcal{C}^j$:

$$u = \nabla^\perp \psi^0[\omega] + \sum_{j=1}^N \Big(\alpha^j H^j + \ell_1^j \nabla\Phi^{1,j} + \ell_2^j \nabla\Phi^{2,j} + r^j \nabla\Phi^{3,j}\Big), \tag{2.1.6}$$

où les $\Phi^{p,j}$ sont les potentiels de Kirchoff, c'est-à-dire les uniques solutions (à une constante près) de :

$$\Delta\Phi^{p,j} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \partial_n \Phi^{p,j} = 0 \text{ sur } \partial\widetilde{\Omega} \cup_{k\neq j} \partial\mathcal{C}^k, \quad \partial_n \Phi^{p,j} = n^{p,j} \text{ sur } \partial\mathcal{C}^j \tag{2.1.7}$$

avec $n^{p,j} = n_p = n \cdot e_p$ pour $p = 1, 2$ et $n^{3,j} = (x - h^j)^\perp \cdot n$.

2.2 γ-convergence et capacité H^1

Le résultat de la stabilité pour les solutions d'Euler sera établi par rapport à la convergence des domaines pour la topologie de Hausdorff :

$$d_H(K_1, K_2) \;:=\; \max\left(\rho(K_1, K_2), \rho(K_2, K_1)\right), \quad \rho(K, K') \;:=\; \sup_{x\in K} d(x, K')$$

avec K_1, K_2 des ensembles compacts (voir [GVL13, App. B] pour les principales propriétés et [HP05] pour plus de détails). Nous adaptons cette définition aux ensembles ouverts confinés (inclus dans un compact K) en posant

$$d_H(\Omega_1, \Omega_2) \;:=\; d_H(K \setminus \Omega_1, K \setminus \Omega_2).$$

Une propriété intéressante de cette distance est que l'on peut approcher les domaines singuliers par des domaines réguliers. Plus précisément, nous avons montré dans [GVL13, Prop. 1] qu'un domaine du type

$$\Omega = \widetilde{\Omega} \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{C}^i \Big), \quad N \in \mathbb{N} \tag{2.2.1}$$

$$\begin{aligned} &\text{où} \quad \widetilde{\Omega} \text{ est un domaine borné simplement connexe} \\ &\text{et} \quad \mathcal{C}^1, \dots, \mathcal{C}^N \text{ sont des sous-ensembles compacts de } \widetilde{\Omega}\text{, disjoints, connexes} \\ &\qquad\quad \text{et non réduits à un point} \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

est la limite d'une suite

$$\Omega_n := \widetilde{\Omega}_n \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{N} \overline{O_n^i} \Big)$$

où $\widetilde{\Omega}_n$ et O_n^i sont des domaines réguliers de Jordan, tels que $\widetilde{\Omega}_n$ et $\overline{O_n^i}$ convergent vers $\widetilde{\Omega}$ et $\mathcal{C}^i$ pour la topologie de Hausdorff. Aucune régularité n'est supposée sur Ω qui peut donc être très irrégulier comme une fractale.

Grâce aux conservations des normes L^p de la vorticité, nous déduirons du théorème de Banach-Alaoglu une convergence faible-$*$ dans $L^\infty(0,T;L^p(D))$, avec D un ouvert assez grand tel que Ω_n soit inclus dans D pour tout n. Ici et dans tous les théorèmes de convergence sur des domaines dépendant de n ou ε, nous étendons les fonctions à l'extérieur par zéro. L'objectif de la γ-convergence est de trouver une limite forte des fonctions intervenant dans la loi de Biot-Savart (2.1.3).

Définition 2.2.1. *On dit que $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γ-converge vers $\Omega \subset D$ si pour tout $f \in H^{-1}(D)$, la suite des solutions $\psi_n \in H_0^1(\Omega_n)$ de*

$$-\Delta\psi_n = f \ \ \textit{dans} \ \ \Omega_n, \quad \psi_n|_{\partial\Omega_n} = 0$$

converge dans $H_0^1(D)$ vers la solution $\psi \in H_0^1(\Omega)$ de

$$-\Delta\psi = f \ \ \textit{dans} \ \ \Omega, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0.$$

Ici, $H_0^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega_n)$ sont vus comme des sous-ensemble de $H_0^1(D)$, via l'extension par zero. De manière duale, $H^{-1}(D)$ est vu comme le sous-ensemble de $H^{-1}(\Omega_n)$ et $H^{-1}(\Omega)$. La notion de γ-convergence est étudiée en détail dans [HP05]. Le premier exemple de γ-convergence est la suite croissante :

Proposition 2.2.2. *Si $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante dans D, elle γ-converge vers $\Omega = \cup\Omega_n$. Plus généralement, si $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est inclus dans Ω et converge vers Ω au sens de Hausdorff, alors elle γ-converge vers Ω.*

Il est en effet facile par une estimation d'énergie et par l'inégalité de Poincaré dans Ω de déduire que $\{\psi_n\}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Nous passons ensuite d'une convergence faible à une convergence forte par un argument de type lemme de div-rot :

$$\|\nabla\psi_n\|^2_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega \psi_n f \to -\int_\Omega \psi f = \|\nabla\psi\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Dans la dernière intégration par partie, nous avons utilisé le fait que ψ vérifie la condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$ ce qui est évident quand Ω_n est inclus dans Ω. Sans cette hypothèse, la convergence de Hausdorff n'implique pas forcément la γ-convergence. Nous trouverons un contre-exemple dans [HP05], avec des domaines Ω_n qui ont de plus en plus de trous quand n tend vers l'infini. Ce genre de contre-exemple vient des problèmes d'homogénéisation, mais c'est le seul possible en dimension deux, comme le montre Sverak [Šve93] :

Proposition 2.2.3. *Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^2$, inclus dans D. Supposons que le nombre de composantes connexes de $D \setminus \Omega_n$ est uniformément borné en n. Si $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Hausdorff vers Ω, alors elle γ-converge vers Ω.*

Nous pouvons aussi caractériser la γ-convergence en terme de la Mosco-convergence de $H_0^1(\Omega_n)$ vers $H_0^1(\Omega)$. Précisément :

Proposition 2.2.4. *$(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γ-converge vers Ω si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $H_0^1(\Omega_n)$ qui converge fortement vers ψ.*
2. *Pour toute suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\psi_n \in H_0^1(\Omega_n)$, convergeant faiblement vers ψ dans $H_0^1(D)$, on a $\psi \in H_0^1(\Omega)$.*

Nous finissons ce paragraphe sur la γ-convergence en précisant que cette notion est reliée à la notion plus habituelle de Γ-convergence au sens de Di Giorgi. Pour simplifier, Ω_n γ-converge vers Ω si la fonctionnelle d'énergie correspondante J_{Ω_n} Γ-converge vers J_Ω : voir [HP05, Chap. 7.1.1] pour les détails.

Une dernière caractéristique géométrique qui est cruciale pour une théorie H^1 sur les fonctions courants (c'est-à-dire une théorie L^2 pour les champs de vitesse) est la capacité de Sobolev des obstacles. La capacité de Sobolev H^1 d'un ensemble compact $E \subset \mathbb{R}^2$ est défini par

$$\mathrm{cap}(E) := \inf\{\|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)},\ v \geq 1 \text{ p.p. dans un voisinage de } E\},$$

avec la convention $\mathrm{cap}(E) = +\infty$ si l'ensemble à droite est vide. Les premières propriétés sont listées dans [GVL13, App. A] et nous renvoyons à [HP05] pour une étude approfondie de cette notion. En particulier, la capacité d'un point est nulle et nous avons démontré qu'un compact connexe contenant au moins deux points est de capacité strictement positive (voir [GVL15, Prop. 2.2]).

La notion de capacité strictement positive nous a été importante pour donner un sens au champ harmonique limite H^j. Nous pouvons en effet remarquer que le champ harmonique dans une couronne $\Omega_n := B(0,1)\backslash\overline{B(0,\frac{1}{n})}$ est $x^\perp/(2\pi|x|^2)\mathbb{1}_{\Omega_n}$ ce qui n'est pas uniformément borné dans L^2. L'étude des petits obstacles ne rentre donc pas directement dans une étude L^2, alors que les obstacles fins se contractant vers des courbes sont inclus. Un exemple d'application de la notion de capacité non nulle est l'obtention d'une inégalité de Poincaré uniforme (qui a été utile pour étudier les domaines extérieurs dans [GVL15]) :

Lemme 2.2.5. *[GVL13, Lem. 1] Soit $\mathcal{C}$ un ensemble connexe compact de $\mathbb{R}^2$ non réduit à un point, et soient $\overline{O_n}$ la fermeture de domaines réguliers de Jordan, convergeant vers $\mathcal{C}$ au sens de Hausdorff. Pour tout $\rho > 0$ tel que $\mathcal{C} \subset B(0,\rho)$, il existe C_ρ et N_ρ tels que*

$$\|\varphi\|_{L^2(B(0,\rho)\backslash O_n)} \leqslant C_\rho \|\nabla\varphi\|_{L^2(B(0,\rho)\backslash O_n)},\ \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{O_n}),\ \forall n \geqslant N_\rho.$$

2.3 Lien entre les fonctions harmoniques et holomorphes en dimension deux

Un outil extrêmement utile en dimension deux est l'analyse complexe. En effet, nous rappellerons qu'une fonction holomorphe est un bon changement de variable pour le problème de Laplace et qu'il est intéressant d'utiliser le théorème de l'application conforme. Mais nous commençons par remarquer qu'à un champ harmonique $v = \nabla^\perp\psi$ (c'est-à-dire à divergence et rotationnel nuls) sur un ouvert U, est associé une fonction

$$\widehat{v}\ :\ z = x_1 + ix_2\ \mapsto\ v_1(x_1,x_2) - iv_2(x_1,x_2)\ (= -\partial_{x_2}\psi(x_1,x_2) - i\partial_{x_1}\psi(x_1,x_2))$$

qui est holomorphe sur U (par les relations de Cauchy-Riemann).

2.3.1 Lemme de Blasius et comportement à l'infini

L'holomorphie des fonctions associées au champ harmonique nous est par exemple utile pour déterminer le comportement à l'infini et ainsi contrôler les termes qui apparaissent dans les intégrations par parties sur des domaines extérieurs. Dans [GLS14, GLS16] nous avons dû calculer les deux premiers moments des potentiels de Kirchoff (2.1.7), c'est-à-dire les premiers termes dans le développement de Laurent. En plus du théorème des résidus, nous utilisons régulièrement le lemme de Blasius concernant les champs de vecteurs tangents au bord (pour une démonstration, voir par exemple [MP94] ou [GLS14]) :

Lemme 2.3.1. *Soit $\mathcal{C}$ une courbe de Jordan régulière dans le plan, $f := (f_1, f_2)$ et $g := (g_1, g_2)$ deux champs de vecteurs réguliers tangents sur $\mathcal{C}$. Alors*

$$\int_{\mathcal{C}} (f\cdot g)n\,\mathrm{d}s = i\overline{\int_{\mathcal{C}} \widehat{f}\widehat{g}\,\mathrm{d}z},$$
$$\int_{\mathcal{C}} (f\cdot g)(x^\perp\cdot n)\,\mathrm{d}s = \Re\left(\int_{\mathcal{C}} z\widehat{f}\widehat{g}\,\mathrm{d}z\right).$$

Il est aussi aisé de relier $\int_{\mathcal{C}} \widehat{f}$ avec le flux et la circulation de f

$$\int_{\mathcal{C}} \widehat{f}\,\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}} f \cdot \tau\,\mathrm{d}s - i \int_{\mathcal{C}} f \cdot n\,\mathrm{d}s,$$

ce qui nous permet par exemple de déduire que les fonctions $\widehat{H^j}$ associées aux champs harmoniques H^j dans (2.1.3) admettent une décomposition en série de Laurent à l'infini et que

$$\widehat{H^j}(z) = \frac{1}{2i\pi z} + \mathcal{O}(1/z^2) \quad \text{pour } z \to \infty,$$

c'est-à-dire

$$H^j(x) = \frac{x^\perp}{2\pi|x|^2} + \mathcal{O}(1/|x|^2) \quad \text{pour } |x| \to \infty.$$

Ceci permet aussi de montrer que les potentiels de Kirchoff admettent aussi une décomposition en série de Laurent à l'infini, que $\widehat{\nabla\Phi^{p,j}} = \mathcal{O}(1/z^2)$ et donc que $\nabla\Phi^{p,j}$ appartient à $L^2(\Omega)$ (dans les domaines extérieurs, c'est-à-dire quand $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^2$).

2.3.2 Noyau de Green et application conforme

Pour résoudre le problème de Laplace

$$\Delta\psi^0 = \omega \text{ dans } \Omega, \quad \psi^0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

nous pouvons aussi faire intervenir les noyaux de Green $G_\Omega :\ \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ tels que

$$G_\Omega(x,y) = G_\Omega(y,x)\ \forall (x,y) \in \Omega^2, \quad \Delta_x G_\Omega(x,y) = \delta(x-y)\ \forall (x,y) \in \Omega^2,$$
$$G_\Omega(x,y) = 0\ \forall (x,y) \in \Omega \times \partial\Omega,$$

où δ correspond au dirac en zéro, pour écrire :

$$\psi^0(x) = \int_\Omega G_\Omega(x,y)\omega(y)\,\mathrm{d}y.$$

Le noyau de Green est bien connu dans le plan entier $G_{\mathbb{R}^2}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln|x-y|$ et nous obtenons la loi de Biot-Savart dans $\mathbb{R}^2$:

$$\psi^0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \ln|x-y|\omega(y)\,\mathrm{d}y \text{ et } K_{\mathbb{R}^2}[\omega](x) := \nabla^\perp\psi^0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\omega(y)\,\mathrm{d}y.$$

Il existe aussi une formule explicite des noyaux de Green pour l'intérieur (ou l'extérieur) du disque unité :

$$G_{B(0,1)}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x-y|}{|x-y^*||y|}$$

avec la notation $z^* = \frac{z}{|z|^2}$, appelé point image de z. Les conditions de symétrie et de Dirichlet se vérifient aisément en considérant le carré des modules. A l'intérieur du disque, nous avons alors

$$K_{B(0,1)}[\omega](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{x-y}{|x-y|^2} - \frac{x-y^*}{|x-y^*|^2}\Big)^{\perp}\omega(y)\,\mathrm{d}y.$$

Pour l'extérieur du disque unité, il faut rajouter le champ harmonique

$$H(x) = \nabla^{\perp}\frac{1}{2\pi}\ln|x|$$

et nous obtenons la formule de représentation suivante :

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{x-y}{|x-y|^2} - \frac{x-y^*}{|x-y^*|^2}\Big)^{\perp}\omega(y)\,\mathrm{d}y + \frac{\gamma+\int\omega}{2\pi}\frac{x^{\perp}}{|x|^2},$$

où γ est la circulation de u autour du disque unité.

Il est ensuite possible d'en déduire une formule pour l'intérieur (ou l'extérieur) de domaine simplement connexe Ω. En effet, par le théorème de Riemann, nous savons qu'il existe une application conforme $\mathcal{T}$ entre Ω et $B(0,1)$, et les relations de Cauchy-Riemann disent que $D\mathcal{T}$ (en voyant $\mathcal{T}$ comme une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et donc que $D\mathcal{T}^T D\mathcal{T} = D\mathcal{T}D\mathcal{T}^T = \det D\mathcal{T} I_2 = |\det D\mathcal{T}| I_2$. Ce genre de relation sert régulièrement dans les changements de variables, en particulier pour montrer que :

$$G_\Omega(x,y) = G_{B(0,1)}(\mathcal{T}(x),\mathcal{T}(y)).$$

Nous obtenons ainsi la formule dans les ouverts simplement connexes :

$$K_\Omega[\omega](x) = \frac{1}{2\pi}D\mathcal{T}^T(x)\int_\Omega\Big(\frac{\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)}{|\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)|^2} - \frac{\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)^*}{|\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)^*|^2}\Big)^{\perp}\omega(y)\,\mathrm{d}y.$$

Dans un domaine extérieur $\Omega = \mathbb{R}^2\backslash\mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est un ensemble compact, connexe et simplement connexe, il existe un unique biholomorphisme entre Ω et $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(0,1)}$ tel que

$$\mathcal{T}(\infty) = \infty \quad \text{et} \quad \mathcal{T}'(\infty) > 0$$

(au sens où $\mathcal{T}(z) = \beta z + \mathcal{O}(1)$ à l'infini avec $\beta \in \mathbb{R}_*^+$ qui est appelé en anglais "transfinite diameter" ou "logarithmic capacity"). Ceci nous permet de définir le champ harmonique

$$H(x) = \nabla^{\perp}\frac{1}{2\pi}\ln|\mathcal{T}(x)|$$

et d'obtenir la formule de Biot-Savart suivante

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}D\mathcal{T}^T(x)\int_\Omega\Big(\frac{\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)}{|\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)|^2} - \frac{\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)^*}{|\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)^*|^2}\Big)^{\perp}\omega(y)\,\mathrm{d}y + \frac{\gamma+\int\omega}{2\pi}D\mathcal{T}^T(x)\frac{\mathcal{T}(x)^{\perp}}{|\mathcal{T}(x)|^2}.$$

La question de la convergence du champ de vecteurs quand le domaine varie peut donc se réécrire via un problème de convergence des applications conformes. Dans le cas d'un petit obstacle se contractant homothétiquement vers 0 :

$$\Omega_\varepsilon := \mathbb{R}^2 \setminus \varepsilon\mathcal{C}$$

nous utilisons que

$$\mathcal{T}_\varepsilon(x) = \mathcal{T}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)$$

et nous cherchons des estimations sur u_ε uniforme en ε grâce à la formule de Biot-Savart (argument utilisé dans tous les problèmes de petits obstacles [ILFNL03, GLS14, BNLM15, LLFNL15, GLS16, LM16a, BNDL16]).

Pour les obstacles fins, nous avons utilisé dans [Lac09a] l'application de Joukowski $z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ qui envoie l'extérieur du disque unité sur l'extérieur du segment $[-1, 1] \times \{0\}$ pour construire une application conforme $\mathcal{T}$ entre l'extérieur d'un arc de Jordan et l'extérieur du disque unité. Puis nous avons considéré la suite

$$\Omega_\varepsilon := \mathcal{T}^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(0, 1 + \varepsilon)})$$

qui se contracte vers l'extérieur de l'arc.

En fait, il existe une théorie développée par Caratheodory qui définit une convergence des domaines "au sens des noyaux"[2] permettant de montrer la convergence des applications conformes uniformément sur tout compact (voir [GVL13, Prop. 15] pour un énoncé précis et le livre de Pommerenke pour une étude détaillée [Pom75]).

Dans [Lac12], nous avons utilisé les travaux de Warschawski [War56] (voir aussi [Pom92]) pour déterminer des conditions géométriques afin que $(\mathcal{T}_n^{-1})'$ converge jusqu'au bord, et retrouver ainsi un critère pour que la convergence établie dans [Lac09a] s'applique.

Plus tard, nous avons remarqué dans [GVL13] que la convergence sur les compacts est en fait suffisante pour construire une théorie de stabilité pour un obstacle se contractant vers une courbe, au sens de Hausdorff.

Un autre intérêt de la formule de Biot-Savart via les applications conformes est l'utilisation des résultats de régularité de $\mathcal{T}$ pour en déduire des propriétés sur le champ de vitesse. Nous utilisons régulièrement le théorème de Kellogg-Warschawski (voir [Pom92, Theo. 3.6]) qui dit qu'une application conforme sur un domaine de classe $C^{k,\alpha}$ ($\alpha > 0$) est de classe C^k jusqu'au bord. L'application conforme peut donc ne pas être C^1 si le bord n'est que de classe C^1 et la vitesse peut être infinie près du bord. Dans [GVL13, GVL15], nous montrons que la vitesse est quand même de carré intégrable près du bord, ce qui est suffisant pour une théorie d'existence.

Ceci n'est pas suffisant pour l'unicité, et nous avons utilisé le comportement précis de $\mathcal{T}$ près d'un coin (étude classique pour les problèmes elliptiques, voir le "shift theorem" et [Gri85, KMR01]) pour :

- déduire une régularité log-lipschitz du champ de vitesse associé, pour les coins avec angles aigus [LMW14] ;

[2] La convergence au sens de Hausdorff implique la convergence au sens des noyaux.

- construire des fonctionnelles de Liapounov qui contrôlent les trajectoires, pour les coins avec angles obtus [Lac15b].

2.4 Compacité pour les champs solénoïdaux

Pour les équations d'Euler, la condition au bord n'est pas très difficile à récupérer car il s'agit d'une condition linéaire (2.1.4) et une limite faible $u_n \rightharpoonup u$ est donc suffisante pour l'établir. Pour les équations de Navier-Stokes, la condition de Dirichlet se lira dans les espaces fonctionnels $u \in L^2(0,T;\mathcal{V}(\Omega))$ où on définit pour tout ouvert régulier $\mathcal{O}$:

- $V(\mathcal{O}) := \Big\{\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{O}) \mid \operatorname{div}\varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{O}\Big\}$;
- $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ la fermeture de $V(\mathcal{O})$ pour la norme L^2 :
$$\mathcal{H}(\mathcal{O}) = \Big\{\varphi \in L^2(\mathcal{O}) \mid \operatorname{div}\varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{O},\ \varphi\cdot n = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}\Big\};$$
- $\mathcal{V}(\mathcal{O})$ la fermeture de $V(\mathcal{O})$ pour la norme H^1 :
$$\mathcal{V}(\mathcal{O}) = \Big\{\varphi \in H_0^1(\mathcal{O}) \mid \operatorname{div}\varphi = 0 \text{ dans } \mathcal{O}\Big\}$$
et $\mathcal{V}'(\mathcal{O})$ son espace dual par rapport à $\mathcal{H}(\mathcal{O})$.

2.4.1 Lemme d'Aubin-Lions dans les sous-ensembles relativement compacts

En revanche, pour passer à la limite dans les termes non-linéaires $\int(u_n \otimes u_n) : \nabla\Phi$ ou $\int(u_n\omega_n)\cdot\nabla\varphi$, il est naturel de chercher une convergence forte de u_n sur le support des fonctions tests. Nous n'avons donc besoin d'une convergence forte seulement sur les ensembles relativement compacts de Ω. Il y a cependant une légère difficulté venant du fait que u_n ne vérifie pas de bonne condition au bord de ces sous-ensembles, c'est-à-dire que u_n n'appartient pas à $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ pour $\mathcal{O}$ un ouvert relativement compact dans Ω. Il faut faire attention quand on utilise le lemme d'Aubin-Lions, car l'estimation en temps se fait souvent dans $\mathcal{V}'(\mathcal{O})$ (pour éliminer la pression), mais $L^2(\mathcal{O})$ ne s'injecte pas dans $\mathcal{V}'(\mathcal{O})$ (en effet, $\|\nabla\varphi\|_{\mathcal{V}'(\mathcal{O})} = 0$ même pour φ harmonique telle que $\|\nabla\varphi\|_{L^2} \neq 0$). Une possibilité pourrait être d'estimer la pression et chercher une estimation temporelle dans H^{-1}, mais la procédure générale consiste (plus simplement) à montrer la convergence forte que de la projection de Leray de u_n. L'argument suivant fut introduit par Lions et Masmoudi [LM99], mais aussi utilisé dans [BFNW08a] pour les équations de Navier-Stokes dans les domaines rugueux et régulièrement dans mes articles [GVL13, LNP14, GVL15, Lac15a, LM16a, LT17]. Tout d'abord, nous écrivons la décomposition d'Helmholtz-Weyl pour u_n :

$$u_n = \mathbb{P}_{\mathcal{O}} u_n + \nabla q_n,$$

où $\mathbb{P}_{\mathcal{O}}$ est le projecteur de Leray sur $\mathcal{H}(\mathcal{O})$. Cette projection est orthogonale dans L^2 et par une estimation classique du problème de Laplace avec condition de Neumann, nous en déduisons l'existence d'une constante $C_{\mathcal{O}} > 0$ telle que

$$\|\mathbb{P}_{\mathcal{O}} u_n\|_{L^2(\mathcal{O})} \leqslant \|u_n\|_{L^2(\mathcal{O})} \quad \text{et} \quad \|\mathbb{P}_{\mathcal{O}} u_n\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{\mathcal{O}} \|u_n\|_{H^1(\mathcal{O})}.$$

En utilisant les estimations a priori pour les équations d'Euler ou Navier-Stokes, nous en déduirons une estimation du type

$$(\mathbb{P}_{\mathcal{O}} u_n, \nabla q_n)_n \quad \text{borné dans } L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{O})) \cap L^2(0,T;H^1(\mathcal{O})).$$

En particulier, nous avons par le théorème de Banach-Alaoglu que

$$\mathbb{P}_{\mathcal{O}} u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbb{P}_{\mathcal{O}} u \quad \text{dans } L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{O})) \cap L^2(0,T;H^1(\mathcal{O})),$$
$$\nabla q_n \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla q = u - \mathbb{P}_{\mathcal{O}} u \quad \text{dans } L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{O})) \cap L^2(0,T;H^1(\mathcal{O})).$$

En fait, le théorème donne l'existence d'une sous-suite qui converge faible-*, mais comme nous pouvons vérifier que la limite est unique (et vaut $\mathbb{P}_{\mathcal{O}} u$), la convergence a lieu pour toute la suite.

Ensuite, nous utilisons à nouveau l'équation pour dériver une estimation temporelle de $\mathbb{P}_{\mathcal{O}} u_n$: pour toutes fonctions tests $\psi(t,\cdot) \in \mathcal{V}(\mathcal{O})$, nous écrivons

$$\langle \partial_t \mathbb{P}_{\mathcal{O}} u_n, \psi \rangle_{L^2(0,T;\mathcal{V}(\mathcal{O})'),L^2(0,T;\mathcal{V}(\mathcal{O}))} = -\int_0^T \int_{\mathcal{O}} \mathbb{P}_{\mathcal{O}} u_n \cdot \partial_t \psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\int_0^T \int_{\mathcal{O}} u_n \cdot \partial_t \psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$
$$\left| \langle \partial_t \mathbb{P}_{\mathcal{O}} u_n, \psi \rangle_{L^2(0,T;\mathcal{V}(\mathcal{O})'),L^2(0,T;\mathcal{V}(\mathcal{O}))} \right| \leqslant C \|\psi\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}(\mathcal{O}))}.$$

Par conséquence, $(\partial_t \mathbb{P}_{\mathcal{O}} u_n)_n$ est borné dans $L^2(0,T;\mathcal{V}(\mathcal{O})')$, et le lemme d'Aubin-Lions dans $H^1 \cap \mathcal{H}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^4 \cap \mathcal{H}(\mathcal{O}) \hookrightarrow \mathcal{V}'(\mathcal{O})$ nous permettra d'extraire une sous-suite qui converge fortement :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{O}} u_n \to \mathbb{P}_{\mathcal{O}} u \quad \text{fortement dans } L^2(0,T;L^4(\mathcal{O})).$$

Encore par unicité de la limite, nous n'avons pas besoin d'extraire de sous-suite.

Nous avons donc une limite forte pour $\mathbb{P}_{\mathcal{O}} u_n$, une limite faible pour ∇q_n, ce qui est suffisant pour passer à la limite dans les deux premiers termes de la décomposition suivante :

$$(u_n \otimes u_n) : \nabla\Phi = (\mathbb{P}_{\mathcal{O}} u_n \otimes u_n) : \nabla\Phi + (\nabla q_n \otimes \mathbb{P}_{\mathcal{O}} u_n) : \nabla\Phi + (\nabla q_n \otimes \nabla q_n) : \nabla\Phi.$$

Pour le dernier terme, nous remarquons que pour toute fonction harmonique $\tilde{q}$ (i.e. $\Delta\tilde{q} = 0$), nous avons la relation suivante :

$$\int_{\mathcal{O}} (\nabla\tilde{q} \otimes \nabla\tilde{q}) : \nabla\Phi = -\int_{\mathcal{O}} \operatorname{div}(\nabla\tilde{q} \otimes \nabla\tilde{q}) \cdot \Phi = -\int_{\mathcal{O}} \left(\frac{1}{2} \nabla |\nabla\tilde{q}|^2 \cdot \Phi + \Delta\tilde{q} \nabla\tilde{q} \cdot \Phi \right) = 0,$$

car nous supposons ici que Φ est à divergence nulle et à support dans $\mathcal{O}$. En utilisant cette relation pour q_n et q, ceci nous permet de passer à la limite dans le terme non-linéaire de la formulation en vitesse.

2.4.2 Singularité effaçable et opérateurs de Bogovskiĭ

Pour démontrer qu'un obstacle de capacité H^1 nulle (un point en dimension deux ou une courbe en dimension trois) est effaçable pour les équations de Navier-Stokes, nous devons montrer que le champ de vitesse limite vérifie la formulation faible pour des fonctions tests Φ dont le support peut toucher la singularité. Le problème est que Φ n'est pas une fonction test admissible pour le problème dans Ω_n, car elle ne s'annule pas forcément sur le petit/fin obstacle. Une étape cruciale est donc de construire une fonction test corrigée Φ_η qui est compatible (c'est-à-dire à divergence nulle et s'annulant dans un η-voisinage de la singularité). Ensuite, pour η fixé, nous passons à la limite $n \to \infty$ loin du solide (comme dans le chapitre précédent) et nous prouvons que u vérifie les équations de Navier-Stokes dans cette région. Finalement, nous passons à la limite $\eta \to 0$ pour montrer que l'équation est aussi vérifiée au voisinage de la singularité.

Dans le cas d'un seul obstacle se contractant vers un point P, l'approximation de la fonction test peut se faire en tronquant la fonction courant associée. Précisément, soit Φ une fonction test sur $\mathbb{R}^2$ à divergence nulle et à support compact, alors il existe une fonction courant[3] ψ qui s'annule en P, et il suffit de poser

$$\Phi_\eta(x) = \nabla^\perp\left(\Big[1-\chi\Big(\frac{|x-P|}{\eta}\Big)\Big]\psi(x)\right) = \Big[1-\chi\Big(\frac{|x-P|}{\eta}\Big)\Big]\Phi - \frac{(x-P)^\perp}{\eta|x-P|}\chi'\Big(\frac{|x-P|}{\eta}\Big)\psi(x)$$

où $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $]-\infty, 1]$ et $\chi \equiv 0$ sur $[2, +\infty[$. Il est évident que c'est une fonction compatible, et comme $\psi(x) = \psi(x) - \psi(P) = \mathcal{O}(\eta)$ sur le support de $\chi'\Big(\frac{|\cdot - P|}{\eta}\Big)$, on vérifie que Φ_η vérifie les même estimations que si on avait multiplié directement Φ par la fonction de troncature, en particulier $\Phi_\eta \rightharpoonup \Phi$ faiblement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Ce fut la stratégie dans [ILFNL06, ILFNL09, IK09].

Tronquer la fonction courant ne fonctionne pas si la singularité est une courbe en dimension trois ou si nous avons plusieurs petits obstacles, car nous ne pouvons plus dire que ψ est petit sur le support de χ', et une telle méthode nous fait perdre une puissance en η (c'est-à-dire une dérivée).

L'alternative utilisée dans [Lac15a, LM16b, LT17] est de tronquer directement la fonction Φ puis de rajouter une correction qui restaure la condition de divergence nulle. Précisément, nous posons

$$\Phi_\eta(x) = \Big[1 - \chi\Big(\frac{|x-P|}{\eta}\Big)\Big]\Phi(x) + g_\eta$$

où $g_\eta \in H^1_0(B(P, 2\eta) \setminus \overline{B(P,\eta)})$ est une solution du problème

$$\operatorname{div} g_\eta(x) = \chi'\Big(\frac{|x-P|}{\eta}\Big)\Big]\frac{x-P}{\eta|x-P|} \cdot \Phi(x).$$

Il y a une infinité de g_η vérifiant cette équation, mais les opérateurs de Bogovskiĭ [Bog79, Bog80] produisent une solution qui satisfait des estimations qui sont du même ordre que

[3] C'est-à-dire vérifiant $\nabla^\perp \psi = \Phi$.

$\chi\left(\frac{|\cdot - P|}{\eta}\right)\Phi$. Ainsi, en suivant les résultats de Galdi [Gal11] (par exemple, Theorem III.3.1), il est possible de construire Φ_η qui est admissible et qui converge faiblement vers Φ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ (voir par exemple [LM16b, Lem. 2.1] ou [LT17, Prop. 4.1]).

3

Stabilité pour les fluides idéaux

Résumé

Nous rassemblons dans ce chapitre les résultats de convergence des solutions aux équations d'Euler 2D quand la géométrie du domaine varie. Une conséquence d'une telle convergence sera l'existence d'une solution vérifiant l'équation dans le domaine limite. Tout d'abord, nous étudierons la stabilité vis à vis de la convergence des domaines au sens de Hausdorff, quand les obstacles limites ne sont pas réduits à des points. Le cas des domaines perforés sera présenté dans un second sous-chapitre. Enfin, nous parlerons des petits solides qui peuvent se déplacer sous l'influence du fluide. Nous finirons ce chapitre avec la justification rigoureuse de la méthode des points vortex dans les domaines extérieurs.

Inclus dans les articles [Lac12, GVL13, GVL15, LNP14], [BNLM15, LM16a, LLFNL15], [GLS14, GLS16] et [ADL14].

3.1 Stabilité et existence

La construction de solutions pour les équations d'Euler 2D a été un sujet constant du siècle dernier. Commençons par mentionner le papier fondateur de Wolibner [Wol33] pour les solutions classiques dans des domaines bornés réguliers (voir aussi Temam [Tem75] et Kato [Kat84b]). Parmi d'autres, nous pouvons penser au travail de McGrath [McG67], resp. Kikuchi [Kik83] pour l'existence de solutions régulières dans le plan entier, resp. dans les domaines extérieurs réguliers. Evidemment, la clé pour montrer des résultats globaux en temps est l'utilisation de la vorticité qui vérifie l'équation de transport par un champ à divergence nulle (1.1.11) et qui a donc ses normes L^p conservées (pour $p \in [1, \infty]$). Ainsi, pour passer du local au global, il est crucial de construire une théorie en fonction de la régularité de la vorticité. Dans cette direction, le résultat le plus célèbre est certainement celui de Yudovich [Yud63] : il prouve l'existence et l'unicité de solution globale pour une vorticité initiale appartenant à $L^1 \cap L^\infty(\Omega)$, voir aussi Bardos [Bar72] pour une autre preuve d'existence, puis Marchioro et Pulvirenti [MP94] pour une version lagrangienne. Concernant l'existence, des notions de solutions plus faibles ont été ensuite développées : solutions avec une vorticité dans $L^1 \cap L^p$ (pour $p \in (1, \infty)$) par DiPerna et Majda [DM87], ou avec une vorticité étant une mesure signée dans H^{-1} par Delort [Del91].

Au contraire des équations de Navier-Stokes, nous observons que dans toutes les études précédentes concernant le système d'Euler, il est important que le domaine soit supposé régulier. Ceci est dû à l'utilisation de la continuité L^p de la transformée de Riesz sur Ω pour obtenir une estimation $W^{1,p}$ sur le champ de vitesse $u = \nabla^\perp \Delta^{-1} \omega$.

L'un des rares travaux avec un domaine moins régulier est celui de Taylor [Tay00], qui établit l'existence de solution faible dans les ouverts bornés convexes. L'hypothèse de convexité assure que le problème de Laplace $\Delta\psi = \omega$, avec condition de Dirichlet, admet la propriété suivante $\omega \in L^2(\Omega) \Rightarrow \psi \in H^2(\Omega)$. Ceci correspond à la continuité dans L^2 de la transformée de Riesz et permet d'adapter les preuves classiques d'existence de solution faible (voir aussi [BDPT13] pour des résultats plus fins sur les domaines bornés convexes).

Durant ma thèse, nous avons établi dans [Lac09a] l'existence de solution faible pour des tourbillons initiaux dans $L^\infty_c(\Omega)$ quand le domaine est l'extérieur d'un arc de Jordan. Ce résultat d'existence a été obtenu par l'approximation de la courbe par une suite de compacts réguliers se contractant vers la courbe. Nous avons pour cela utilisé la formulation explicite en fonction des applications conformes $\mathcal{T}_n$ (voir Chapitre 2.3.2) et construit une famille de compacts $\mathcal{C}_n$ qui implique des bonnes estimations pour le champ de vitesse associé. Plus tard, nous avons travaillé dans [Lac12] pour trouver des conditions géométriques sur la convergence des compacts pour que ces estimations soient vérifiées. Mais pour obtenir des estimations de $(\mathcal{T}_n^{-1})'$ valables jusqu'au bord, nous avons écrit des hypothèses compliquées sur la convergence des vecteurs tangents (résultats obtenus grâce aux travaux de Warschawski [War56], voir aussi [Pom92]). Néanmoins, il est remarqué que le champ de vitesse à l'extérieur d'un arc de Jordan $u = \nabla^\perp \psi$ n'appartient à $L^p \cap W^{1,q}(\Omega)$ que pour $p < 4$ et $q < 4/3$, en particulier, il n'est pas H^1 comme dans les domaines convexes.

Ce résultat d'existence [Lac09a] a été étendu en collaboration avec D. Gérard-Varet à une grande classe de domaines irréguliers :

- domaines bornés [GVL13] :

$$\Omega = \widetilde{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{C}^i, \quad N \in \mathbb{N}$$

où $\widetilde{\Omega}$ est un domaine borné simplement connexe, et $\mathcal{C}^i$ sont des obstacles disjoints ;

- domaines extérieurs [GVL15] :

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{C}^i \Big), \quad N \in \mathbb{N}$$

avec $\mathcal{C}^i$ sont des obstacles disjoints.

Par obstacles disjoints, nous voulons dire des ensembles compacts, disjoints deux à deux et non réduits à des points.

Le premier argument dans ces papiers est l'approximation de ces domaines par une suite de domaines réguliers Ω_n (au sens de Hausdorff), ainsi que la donnée initiale. Nous démontrons alors que les équations d'Euler 2D sont stables vis à vis de la convergence de Hausdorff des domaines. Pour ceci, nous écrivons la décomposition de Hodge-de Rham des solutions fortes (voir la Proposition 2.1.1), nous dérivons des estimations L^2 uniformes pour des obstacles $\mathcal{C}^i$ ayant une capacité H^1 non nulle (avec, entre autres, des inégalités de Poincaré de type Lemme 2.2.5), puis nous en déduisons de la compacité forte grâce à la γ-convergence (voir le Chapitre 2.2), la convergence des applications conformes (dû à Caratheodory, voir le Chapitre 2.3.2) ainsi que le lemme d'Aubin-Lions sur les sous-ensembles relativement compacts (voir le Chapitre 2.4.1).

En plus du résultat de stabilité, la conséquence de ces articles est l'existence de solution faible globale aux équations d'Euler pour les données initiales vérifiant

$$u^0 \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad \operatorname{rot} u^0 \in L^1 \cap L^p(\Omega)$$

pour un $p \in (1, \infty]$, qui vérifie la condition faible de divergence nulle et de tangence (2.1.4).

Théorème 3.1.1. *Soit $p \in (1, \infty]$ et u^0 vérifiant les hypothèses précédentes. Il existe*

$$u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})), \quad \textit{avec} \quad \operatorname{rot} u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1 \cap L^p(\Omega))$$

qui est une solution faible globale des équations d'Euler (1.1.1) *et* (1.1.3) *au sens faible, c'est-à-dire*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}\left([0, +\infty) \times \Omega\right) \ \textit{avec} \ \operatorname{div} \varphi = 0, \quad \int_0^\infty \int_\Omega (u \cdot \partial_t \varphi + (u \otimes u) : \nabla \varphi) = - \int_\Omega u^0 \cdot \varphi(0, \cdot),$$

et

$$\int_\Omega u(t, \cdot) \cdot \nabla h = 0, \quad \forall h \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \ \textit{tel que} \ \nabla h \in L^2(\Omega) \ \textit{et} \ h(x) = 0 \ \textit{pour} \ x \ \textit{grand},$$

pour presque tout t.

De plus, cette solution admet une décomposition de Hodge-de Rham, les circulations faibles (2.1.5) sont conservées, et nous avons les deux estimations suivantes :

$$\|\operatorname{rot} u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,L^p(\Omega))} \leqslant \|\operatorname{rot} u^0\|_{L^p}, \quad \|\operatorname{rot} u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,L^1(\Omega))} \leqslant \|\operatorname{rot} u^0\|_{L^1}. \tag{3.1.1}$$

Si $p \geqslant 4/3$, cette solution vérifie aussi l'équation en vorticité (1.1.11) au sens des distributions, précisément :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}\left([0,+\infty)\times\Omega\right), \quad \int_0^\infty \int_\Omega (\omega\partial_t\psi + \omega u\cdot\nabla\psi) = -\int_\Omega \omega^0\psi(0,\cdot).$$

En effet, pour tout $\psi \in \mathcal{D}\left([0,+\infty)\times\Omega\right)$, $\varphi := \nabla^\perp\psi$ est une fonction test admissible pour la formulation en vitesse. Comme u est uniformément de carré intégrable sur le support de φ et $\operatorname{rot} u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^{4/3}(\Omega))$, les estimations elliptiques standard impliquent que u appartient à $W^{1,4/3}$ et donc à L^4 sur le support de φ, ainsi $\omega u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Une intégration par partie permet alors de passer d'une formulation à l'autre.

La conclusion de ces travaux est que pour des résultats d'existence et stabilité, il suffit de développer une théorie L^2 pour le champ de vitesse, ce qui ne requiert aucune régularité sur le domaine.

Une telle approche fut adaptée aux équations des lacs (1.2.1) avec T. Nguyen et B. Pausader [LNP14]. Dans ce papier, nous construisons la décomposition de Hodge-de Rham associée au problème elliptique $\operatorname{div}(b^{-1}\nabla\psi) = b\omega$ avec b la profondeur qui peut s'annuler au bord du lac. Nous y redémontrons aussi la théorie de Cauchy pour les lacs réguliers.

3.2 Les domaines perforés

Dans le chapitre précédent, nous avons supposé que les obstacles n'étaient pas réduits à des points, et la capacité de Sobolev H^1 nous a permis de développer une théorie L^2 pour le champ de vitesse $u = \nabla^\perp\psi$ (H^1 pour les fonctions courants ψ).

Si un obstacle se contracte vers un point

$$\Omega_\varepsilon := \mathbb{R}^2 \setminus \varepsilon\mathcal{C},$$

le champ harmonique vérifiant la condition de circulation se comporte comme $\dfrac{x^\perp}{2\pi|x|^2}\mathbb{1}_{\Omega_\varepsilon}$ ce qui n'est pas uniformément borné dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Ainsi, si nous considérons une donnée initiale vérifiant :

$$\operatorname{div} u^0_\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \quad \operatorname{rot} u^0_\varepsilon = \omega^0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \quad u^0_\varepsilon\cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\varepsilon,$$
$$\lim_{|x|\to\infty} u^0_\varepsilon(x) = 0, \quad \oint_{\partial\varepsilon\mathcal{C}} u^0_\varepsilon\cdot\tau\,\mathrm{d}s = \gamma^0,$$

où $\omega^0 \in C^\infty_c(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ et $\gamma^0 \in \mathbb{R}$ sont supposés indépendant de ε, Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes démontrent dans [ILFNL03] que la solution d'Euler $(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ converge

vers $(u + \gamma^0 \frac{x^\perp}{2\pi|x|^2}, \omega)$ où

$$u(t,x) = K_{\mathbb{R}^2}[\omega(t,\cdot)](x) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega(t,y)\,\mathrm{d}y$$

est l'unique champ de vecteurs à divergence nulle dont le rotationnel vaut ω dans $\mathbb{R}^2$ et qui tend vers zéro à l'infini. Le tourbillon limite vérifie l'équation de transport pour le champ de vitesse modifié :

$$\partial_t \omega + \operatorname{div}\Big(\Big(u + \gamma^0 \frac{x^\perp}{2\pi|x|^2}\Big)\omega\Big) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^2.$$

Autrement dit, le rotationnel de la vitesse limite est composée d'une masse de dirac centrée en zéro de densité γ^0 et d'une partie régulière ω qui est transportée par cette vitesse.

Cette singularité à la limite vient de la condition initiale, où on suppose que la circulation est γ^0 même si la taille de l'obstacle tend vers 0. La circulation autour d'un obstacle étant une quantité conservée (Théorème de Kelvin), la masse de Dirac indépendante du temps peut être vue comme la réminiscence de cet obstacle évanescent.

Dans ce résultat, il était important que l'obstacle $\mathcal{C}$ soit régulier. En effet, à l'extérieur d'un arc de Jordan Γ, le champ de vitesse n'est plus régulier et explose près des extrémités comme l'inverse de la racine carré de la distance. Dans [Lac12], nous avons démontré que la solution d'Euler dans $\mathbb{R}^2 \setminus \varepsilon\Gamma$ (construite dans [Lac09a] et retrouvée dans [GVL13]) converge bien vers une solution de l'équation d'Euler modifiée comme ci-dessus. Comme dans [ILFNL03], nous avons une formule explicite de la loi de Biot-Savart en fonction de l'application conforme (voir le Chapitre 2.3.2), mais il faut tenir en compte la singularité de l'application conforme et changer l'argument de compacité.

Ensuite, nous nous sommes demandés si un grand nombre de petits obstacles bien répartis pouvait avoir le même effet qu'un mur imperméable. En effet, à l'extérieur d'un arc de Jordan, il a été montré dans [Lac09a] que la solution d'Euler vérifiait

$$\partial_t \omega + \operatorname{div}\Big(u\omega\Big) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^2,$$

où le champ de vitesse u vérifie dans $\mathbb{R}^2$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \operatorname{rot} u = \omega + g_{\omega,\gamma^0}\delta_\Gamma.$$

La fonction g_{ω,γ^0} correspond au saut de la partie tangentielle de la vitesse. Cette mesure additionnelle dans la vorticité est nécessaire pour que $u = K_{\mathbb{R}^2}[\omega + g_{\omega,\gamma^0}\delta_\Gamma]$ soit tangent sur l'arc.

Nous avons alors voulu approcher n'importe quelle mesure de Radon bornée à support compact $\mu \in \mathcal{M}_c(\mathbb{R}^2)$ par une limite de petits obstacles circulaires. Plus précisément, en collaboration avec M. Lopes Filho et H. Nussenzveig Lopes, nous avons démontré dans [LLFNL15] le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. *Soit $\omega^0 \in L^{p_0}_c(\mathbb{R}^2)$ fixé, pour un $p_0 \in (2,\infty]$. Posons $R_0 > 0$ tel que $\operatorname{supp}\omega^0 \subset B(0,R_0)$. Soit $\{\omega^0_k\} \subset C^\infty_c(B(0,R_0))$ tel que*

$$\omega^0_k \rightharpoonup \omega^0 \text{ faiblement dans } L^{p_0}(\mathbb{R}^2).$$

Considérons $\{\gamma^i_k\}_{i=1\dots N_k} \subset \mathbb{R}$, $\{z^i_k\}_{i=1\dots N_k} \subset B(0,R_0)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{N_k} \gamma^i_k \delta_{z^i_k} \rightharpoonup \mu \text{ faible-}* \text{ dans } \mathcal{M}(\mathbb{R}^2), \text{ quand } k \to \infty,$$

pour un certain $\mu \in \mathcal{M}_c(\mathbb{R}^2)$.

Il existe alors une sous-suite, encore notée par k, une suite $\{\varepsilon_k\} \subset \mathbb{R}^*_+$, avec $\varepsilon_k \to 0$, un champ de vecteurs $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ pour tout $p \in [1,2)$, et une fonction $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1 \cap L^{p_0}(\mathbb{R}^2))$, tels que la solution (u_k,ω_k) des équations d'Euler dans

$$\Omega_k = \mathbb{R}^2 \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{N_k} \overline{B(z^i_k,\varepsilon_k)}\Big),$$

pour une vorticité initiale $\omega^0_k|_{\Omega_k}$ et des circulations initiales (γ^i_k) autour des disques, vérifie :

(a) $u_k \to u$ fortement dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ pour tout $p \in [1,2)$;

(b) $\omega_k \rightharpoonup \omega$ faible-$*$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^q(\mathbb{R}^2))$ pour tout $q \in [1,p_0]$;

(c) la paire (u,ω) vérifie le système suivant au sense des distributions :

$$\begin{cases} \partial_t\omega + \operatorname{div}(u\omega) = 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } [0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \\ \operatorname{rot} u = \omega + \mu & \text{dans } [0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \\ \lim\limits_{x\to\infty} |u| = 0 & \text{pour } t \in [0,\infty) \\ \omega(0,x) = \omega^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Ainsi, nous avons démontré que le comportement asymptotique de la solution (u_k,ω_k) dans le domaine perforé est décrit par une solution d'une équation d'Euler modifiée : la vorticité ω est ici transportée par un champ à divergence nulle satisfaisant $\operatorname{rot} u = \omega + \mu$. Le terme additionnel μ est la réminiscence des circulations autour des petits disques. Nous remarquons que la mesure μ ne dépend pas du temps, et qu'elle n'est pas forcément signée, au contraire du travail de Delort [Del91]. En particulier, une conséquence de ce travail est l'existence d'une solution pour cette équation d'Euler contenant une mesure fixe additionnelle. Il est en effet aisé d'approcher n'importe quelle mesure $\mu \in \mathcal{M}_c(\mathbb{R}^2)$ par $\sum_{i=1}^{N_k} \gamma^i_k \delta_{z^i_k}$, en discrétisant par exemple sur une grille.

Pour revenir sur la question de l'approximation d'un mur Γ par une infinité de petits disques, il est facile de bien construire la donnée initiale en choisissant les circulations

telles que $\sum_{i=1}^{N_k} \gamma_k^i \delta_{z_k^i} \rightharpoonup g_{\omega^0,\gamma^0}\delta_\Gamma$ avec z_k^i régulièrement répartis sur Γ, mais la limite vérifie $\operatorname{rot} u = \omega + g_{\omega^0,\gamma^0}\delta_\Gamma$ alors que le rotationnel de la solution d'Euler à l'extérieur de Γ vaut $\omega + g_{\omega(t),\gamma^0}\delta_\Gamma$. La différence paraît minime mais elle a de grosses conséquences : $g_{\omega(t),\gamma^0}$ est une fonction dépendant du temps (d'intégrale constante et égale à γ^0) pour faire en sorte de corriger la partie normale de $K_{\mathbb{R}^2}[\omega(t,\cdot)]$. En découpant l'arc en une infinité de points, nous avons empêché le transfert de vorticité d'une partie à une autre de la courbe, transfert qui est nécessaire pour cette correction en tout temps. En effet, la circulation est conservée autour de chaque disque (théorème de Kelvin), et il paraît naturel que la mesure engendrée par un problème de petit obstacle soit indépendant du temps. Ainsi, nous avons bien préparé la donnée initiale afin que la vitesse initiale soit tangente à Γ, mais la condition d'imperméabilité ne sera plus vérifiée pour $t > 0$.

D'un point de vue technique, nous avons écrit la décomposition de Hodge-de Rham dans les domaines extérieurs à plusieurs obstacles, puis dérivé des estimations uniformes en utilisant le principe du maximum après s'être ramenés au domaine borné par la fonction harmonique[1] $\mathbf{i}(x) := x/|x|^2$. Les estimations uniformes ne sont que dans les L^p pour $p \in [1,2)$, à cause des champs harmoniques et des circulations non nulles. La méthode utilisée est inspirée des techniques d'homogénéisation : nous construisons une correction de $K_{\mathbb{R}^2}[f]$ dans un problème cellule, c'est-à-dire un champ tangent au bord à l'extérieur d'un seul obstacle qui soit proche dans L^p de $K_{\mathbb{R}^2}[f]$. Du fait de la circulation non nulle, f peut être de la forme $\gamma^i\delta_{z^i}$, ce qui correspond à un champ de vitesse $\gamma^i \frac{(x-z^i)^\perp}{2\pi|x-z^i|^2}$. La dernière étape consiste à passer à la limite grâce à ces estimations uniformes, sans pouvoir utiliser quelques techniques dédiées à L^2, comme l'orthogonalité du projecteur de Leray.

Le fait que la limite obtenue dans le théorème précédent ne correspond pas aux équations d'Euler à l'extérieur d'un arc imperméable peut être dû à un rayon des disques ε_k trop petit par rapport à la distance entre les centres des obstacles. Le contrôle du rapport entre la taille et la distance est trop difficile à obtenir ici, mais c'est pourtant un élément fondamental dans la détermination de la nature des domaines poreux.

En collaboration avec V. Bonnaillie-Noel et N. Masmoudi [BNLM15, LM16a], nous avons étudié cette question dans le cas où toutes les circulations initiales sont nulles, afin de pouvoir travailler dans L^2. Dans le cas de circulations nulles (et donc $\mu = 0$), le théorème précédent dit qu'il existe ε_k tel que (u_k, ω_k) converge vers l'unique solution des équations d'Euler dans $\mathbb{R}^2$.

Bien que très naturelle, l'étude des équations d'Euler dans les domaines poreux fut le sujet de très peu d'articles. La majorité des travaux se focalise sur l'équation de Laplace [CM82], de Stokes ou de Navier-Stokes [SP80, Tar80, All90a, Mik91]. Récemment, il y a eu des études en homogénéisation sur d'autres modèles fluides, comme les équations de Navier-Stokes compressible [Día99, Mas02] et un système acoustique [DAM12, BFPT13].

Mais pour les fluides parfaits, la condition de tangence est plus difficile à appréhender que la condition de Dirichlet. Deux exceptions notables sont les travaux [MP99, LM05] concernant une équation d'Euler faiblement non-linéaire à travers une grille périodique

[1] $\Delta\mathbf{i} = 0$ en dehors de zéro (quitte à faire une translation, nous supposerons que l'origine est à l'intérieur d'un des disques).

(obstacles circulaires de rayon ε séparés d'une distance ε). Dans cette situation, les auteurs peuvent utiliser la convergence double échelle et obtiennent une limite homogénéisée quand ε tend vers zero. Dans ce qui suit, nous allons considérer des obstacles plus généraux que des disques : soit $\mathcal{C} \subset [-1,1]^2$ un compact simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ tel que $\partial\mathcal{C} \in C^{1,\beta}$ (avec $\beta > 0$) est une courbe de Jordan. Nous supposerons que tous les obstacles ont la même forme :

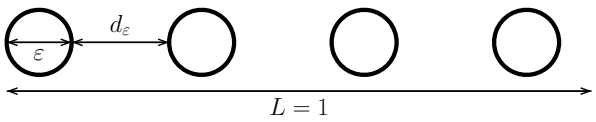
$$\mathcal{C}_\varepsilon^{i,j} := z_\varepsilon^{i,j} + \tfrac{\varepsilon}{2}\mathcal{C},$$

où les points $z_\varepsilon^{i,j} \in \mathbb{R}^2$ sont placés de sorte que les inclusions soient disjointes, séparées d'une distance d_ε :

$$z_\varepsilon^{i,j} := (\tfrac{\varepsilon}{2} + (i-1)(\varepsilon + d_\varepsilon), (j-1)(\varepsilon + d_\varepsilon)) = (\tfrac{\varepsilon}{2}, 0) + (\varepsilon + d_\varepsilon)(i-1, j-1),$$

avec $i, j \in \mathbb{Z}$.

Dans la direction horizontale, nous répartissons le nombre maximal possible d'inclusions sur le segment unité $[0,1]$,



d'où

$$i = 1, \dots, N_\varepsilon, \quad \text{avec} \quad N_\varepsilon = \left[\frac{1 + d_\varepsilon}{\varepsilon + d_\varepsilon}\right]$$

(où $[x]$ correspond à la partie entière de x). Dans la direction verticale, nous considérons deux situations :

- des inclusions recouvrant le carré unité, c'est-à-dire $j = 1, \dots, N_\varepsilon$;
- des inclusions concentrés sur le segment unité, c'est-à-dire $j = 1$.

Pour les fluides parfaits à travers des obstacles distribués seulement dans une direction, la distance critique est bien plus petite que la taille, et la géométrie du bord latéral des inclusions va jouer un rôle crucial. Pour simplifier, nous supposons que le bord $\partial\mathcal{C}$ est localement paramétré autour de $(\pm 1, 0)$ par

$$x = \pm(1 - \rho|y|^{1+\gamma}) \tag{3.2.1}$$

avec $\rho, \gamma > 0$, où γ est appelé l'exposant de tangence dans [CNS09, MR14]. Cet exposant joue un rôle important dans les problèmes de collision d'un solide tombant dans une cavité (voir aussi [GVH12]). Plus généralement, nous supposons que l'on est proche d'un paramétrage comme ceci (voir [LM16a] pour la condition générale), mais gardons à l'esprit que $\gamma = 0$ correspond à un coin, $\gamma = 1$ correspond au disque, et $\gamma = \infty$ correspond à un solide localement plat.

Ainsi, le domaine fluide est

$$\Omega_\varepsilon^2 := \mathbb{R}^2 \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon}\bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} \mathcal{C}_\varepsilon^{i,j}\Big) \quad \text{ou} \quad \Omega_\varepsilon^1 := \mathbb{R}^2 \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} \mathcal{C}_\varepsilon^{i,1}\Big).$$

L'objectif est donc de se donner une vorticité initiale $\omega^0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ indépendante de ε et d'étudier le comportement asymptotique de la solution d'Euler quand $(\varepsilon, d_\varepsilon) \to (0,0)$, et de déterminer la distance critique qui caractérise la nature de la limite.

Ordre deux avec condition de Dirichlet

Pour les problèmes de Laplace, Stokes et Navier-Stokes, la distance critique est facile à trouver : par une estimation d'énergie, on trouve que u_ε est uniformément bornée dans H^1, puis on désire passer à la limite dans la formulation faible pour toute fonction test Φ de $\mathbb{R}^2$. Le problème est que cette fonction test n'est pas admissible dans le domaine perforé, et nous la corrigeons en multipliant par une fonction de troncature $\chi_\varepsilon = 1 - \sum_{i,j} \varphi_\varepsilon(x - z_\varepsilon^{i,j})$ qui s'annule au voisinage des trous. Nous voulons ainsi passer à la limite dans des termes tels que $\int \Phi \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \chi_\varepsilon$. Trouver φ_ε qui minimise $\|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^2}$ est un problème standard en optimisation, et il est bien connu que le minimiseur est la solution de $\Delta \varphi_\varepsilon = 0$. Dans l'anneau $B(0, d_\varepsilon) \setminus B(0, \varepsilon)$, la solution est

$$\frac{\ln \frac{|x|}{d_\varepsilon}}{\ln \frac{\varepsilon}{d_\varepsilon}}.$$

Si les inclusions recouvrent le carré et pour $d_\varepsilon \gg \varepsilon$, nous avons $\mathcal{O}(d_\varepsilon^{-2})$ obstacles et

$$\|\nabla \chi_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{d_\varepsilon}\Big(\ln \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{-1/2} \leqslant \frac{C}{d_\varepsilon |\ln \varepsilon|^{1/2}}.$$

Le comportement dépend donc la limite de $d_\varepsilon |\ln \varepsilon|^{1/2}$, et il est aisé de montré que u_ε converge vers la solution dans $\mathbb{R}^2$ pour des grandes distances, c'est-à-dire telle que $d_\varepsilon |\ln \varepsilon|^{1/2} \to \infty$. Nous n'avons dans ce cas aucune influence du domaine poreux à la limite. Si $d_\varepsilon |\ln \varepsilon|^{1/2} \to C > 0$, la fonction troncature ne converge que faiblement dans H^1, comme u_ε, ce qui pose de sérieux problèmes pour passer à la limite. Dans ce cas, un système homogénéisé a été obtenu à la limite, par Cioranescu-Murat [CM82] pour l'équation de Laplace et par Allaire [All90a] pour les systèmes de Stokes et Navier-Stokes stationnaires. A noter que la correction est plus compliquée pour les fluides incompressibles car les fonctions tests corrigées doivent aussi être à divergence nulle pour être admissibles. Pour les distances plus petites que cette distance critique, c'est-à-dire dans le régime $d_\varepsilon |\ln \varepsilon|^{1/2} \to 0$, Allaire supposa que les obstacles recouvrent tout un domaine borné, que u_ε est petit, et il montra que $\dfrac{u_\varepsilon}{d_\varepsilon |\ln \varepsilon|^{1/2}}$ converge vers une fonction vérifiant une loi de Darcy. Mais même dans ce cas, il a besoin de supposer que la distance entre les trous est grande par rapport à la taille des obstacles (voir [All90b, Eq. (3.4.2)]).

Quand les obstacles sont concentrés sur une courbe, le nombre d'inclusions est $N_\varepsilon \leqslant C/d_\varepsilon$ et si $d_\varepsilon \gg \varepsilon$ nous avons alors

$$\|\nabla \chi_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant \frac{C}{\sqrt{d_\varepsilon}}\Big(\ln \frac{d_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{-1/2} \leqslant \Big(\frac{C}{d_\varepsilon|\ln \varepsilon|}\Big)^{1/2}.$$

Le critère dans ce cas là dépend donc de la limite $d_\varepsilon|\ln \varepsilon|$. Il est facile de montrer que si cette limite est l'infini, alors il n'y a pas d'influence à la limite. Si $d_\varepsilon|\ln \varepsilon| \to C > 0$, Allaire exhiba dans [All90b] un phénomène homogénéisé (une loi de type Brinkmann). Le cas $d_\varepsilon|\ln \varepsilon| \to 0$ n'a pas été résolu.

Pour des obstacles distribués sur une courbe, il y a aussi quelques travaux dans le cas périodique $d_\varepsilon = \varepsilon$ (fluide visqueux à travers des grilles, passoires ou mur poreux), nous nous référons par exemple à [SP82, Con87a, Con87b].

Fluide parfait et obstacles distribués sur un carré

Les distances critiques obtenues pour les équations d'ordre deux sont très grandes par rapport à la taille des trous. Physiquement, il paraît naturel que cette distance critique soit inférieure pour les fluides parfaits, car la condition de tangence est moins contraignante que celle de non-glissement. Ceci n'est pas si clair mathématiquement, car on pourrait relier le champ de vitesse $u_\varepsilon = \nabla^\perp \psi_\varepsilon$ d'Euler à l'équation de Laplace $\Delta \psi_\varepsilon = \omega^0$, puis remarquer qu'une convergence L^2 du champ de vitesse revient à une convergence H^1 de la solution du problème de Laplace, ce qui nous ramènerait aux critères précédents. Néanmoins, la condition au bord est différente et nous obtenons des distances critiques bien inférieures.

En collaboration avec V. Bonnaillie-Noel et N. Masmoudi [BNLM15, LM16a], nous avons le théorème suivant quand les obstacles sont répartis dans les deux directions.

Théorème 3.2.2. *Soit $\omega^0 \in L^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ et $(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ la solution des équations d'Euler sur Ω^2_ε, avec vorticité initiale $\omega^0|_{\Omega^2_\varepsilon}$ et circulations initiales nulles autour des obstacles.*

(i) Si

$$\frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \to \infty \quad \textit{pour une suite } \varepsilon \to 0$$

alors

- *$u_\varepsilon \to u$ fortement dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ et $\omega_\varepsilon \rightharpoonup \omega$ faible $*$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$;*
- *le couple limite (u, ω) est l'unique solution des équations d'Euler dans le plan entier $\mathbb{R}^2$, avec vorticité initiale ω^0.*

(ii) Si

$$\frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \to 0 \quad \textit{pour une suite } \varepsilon \to 0$$

et que $(\pm 1, 0), (0, \pm 1) \in \partial\mathcal{C}$, alors il existe une sous-suite telle que

- *$u_\varepsilon \rightharpoonup u$ faible $*$ dans $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2_{\text{loc}}(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus [0,1]^2}))$ et $\omega_\varepsilon \rightharpoonup \omega$ faible $*$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^2 \setminus [0,1]^2))$;*
- *le couple limite (u, ω) est une solution faible des équations d'Euler dans $\mathbb{R}^2 \setminus [0,1]^2$ (au sens faible, voir le Théorème 3.1.1), avec $u \cdot n(t, \cdot) = 0$ pour presque tout t et partout sur le bord sauf aux coins, avec une vorticité initiale ω^0 et circulation initiale nulle autour du carré.*

La condition de tangence est vérifiée là où n est défini, c'est-à-dire sur le bord du carré excepté les coins. Ceci n'implique pas que la vitesse est nulle près des coins, car elle n'est pas continu et explose comme l'inverse de la racine cubique de la distance.

La situation

$$\frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \to C > 0$$

est reliée au problème considéré dans [MP99, LM05], où les auteurs obtiennent dans le cas périodique $d_\varepsilon = \varepsilon$ un système homogénéisé pour une équation d'Euler faiblement non-linéaire.

Nous notons que c'est le premier résultat qui inclut le cas des distances plus petites que la taille des obstacles.

Fluide parfait et obstacles distribués sur un segment

Dans le résultat précédent et comme pour les équations de Stokes et Laplace, la distance critique ne dépend pas de la géométrie de l'obstacle. Pour les fluides parfaits à travers une passoire, les distances sont bien plus petites que la taille des obstacles, et la valeur critique va alors dépendre de l'exposant γ du bord latéral de l'obstacle. Précisément, nous avons montré le résultat suivant :

Théorème 3.2.3. *Supposons que le bord latéral est localement du type* (3.2.1) *avec $\gamma \in (0, \infty]$. Soit $\omega^0 \in L^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ et $(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ la solution des équations d'Euler sur Ω^1_ε, avec vorticité initiale $\omega^0|_{\Omega^1_\varepsilon}$ et circulations initiales nulles autour des obstacles.*

(i) Si

$$\frac{d_\varepsilon}{\varepsilon^{2+\frac{1}{\gamma}}} \to \infty \qquad \textit{pour une suite } \varepsilon \to 0$$

alors

- *$u_\varepsilon \to u$ fortement dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ et $\omega_\varepsilon \rightharpoonup \omega$ faible $*$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$;*
- *le couple limite (u, ω) est l'unique solution des équations d'Euler dans le plan entier $\mathbb{R}^2$, avec vorticité initiale ω^0.*

(ii) Si

$$\frac{d_\varepsilon}{\varepsilon^{2+\frac{1}{\gamma}}} \to 0 \qquad \textit{pour une suite } \varepsilon \to 0,$$

alors il existe une sous-suite telle que

- *$u_\varepsilon \rightharpoonup u$ faible $*$ dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times \{0\})}))$ et $\omega_\varepsilon \rightharpoonup \omega$ faible $*$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times \{0\})))$;*
- *le couple limite (u, ω) est une solution faible des équations d'Euler dans $\mathbb{R}^2 \setminus ([0,1] \times \{0\}))$ (au sens faible, voir le Théorème 3.1.1), avec $u \cdot n(t, \cdot) = 0$ pour presque tout t et partout sur le bord sauf aux extrémités, avec une vorticité initiale ω^0 et circulation initiale nulle autour du segment.*

La condition de tangence est vérifiée des deux côtés du segment et la vitesse explose près des extrémités comme l'inverse de la racine carrée de la distance.

Nous renvoyons au Chapitre 4 pour plus de détails sur la régularité de la vitesse dans les domaines à coins, mais les champs sont ici assez réguliers pour avoir une trace intégrable, et donc une condition de circulation au sens classique.

La principale innovation dans ce résultat est que la distance critique dépend de la géométrie de l'obstacle : elle vaut ε^3 dans le cas de disque et ε^2 dans le cas d'obstacle localement plat. Il est en effet logique qu'un fluide passe plus facilement entre deux disques qu'entre deux carrés. Les distances obtenues sont bien plus petites que pour les fluides visqueux, et il est clair qu'il y a des régimes où le domaine poreux est négligeable pour les solutions d'Euler mais fortement perturbant pour celles de Navier-Stokes. Il est alors intéressant de regarder la limite simultanée faible viscosité et domaine poreux (voir le Chapitre 5.2).

L'extraction de sous-suite vient des théorèmes généraux de compacité, comme le théorème de Banach-Alaoglu pour le tourbillon. Quand on montre la convergence vers la solution d'Euler dans $\mathbb{R}^2$, par le théorème d'unicité de Yudovich, on conclut que la suite entière converge vers l'unique limite.

Dans une première partie de [LM16a], nous dérivons quelques estimations a priori qui nous permet de passer à la limite loin du domaine poreux (en partie avec des idées du Chapitre 2.4.1). Ensuite nous écrivons deux propositions clés sur le comportement des champs de vecteurs à divergence nulle dans un domaine poreux. Le coeur de l'analyse est la preuve de ces deux propositions, où les quantités $\frac{d_\varepsilon}{\varepsilon}$ (pour le carré) et $\frac{d_\varepsilon}{\varepsilon^{2+\frac{1}{\gamma}}}$ (pour le segment) apparaissent naturellement comme la quantité critique pour obtenir la perméabilité versus l'imperméabilité.

Concernant la proposition de perméabilité pour des distances assez grandes, la stratégie est en quelque sorte reliée aux idées d'homogénéisation. Le problème cellule est l'extérieur d'une seule inclusion où la vitesse est tangente au bord. Nous introduisons une correction $v_\varepsilon[f]$ des champs $K_{\mathbb{R}^2}[f]$ de $\mathbb{R}^2$ grâce à la formule du noyau de Green via les applications conformes (voir le Chapitre 2.3.2). Ensuite, pour localiser notre correction près de l'obstacle, nous devons tronquer les fonctions courants par une fonction de troncature qui optimise un problème différent que pour le problème de Laplace, afin que $\|K_{\mathbb{R}^2}[f] - v_\varepsilon[f])\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \to 0$ quand la distance est assez grande. Ce problème vient des estimations obtenues pour notre correction, où il apparaît clairement qu'il est moins contraignant de corriger pour être tangent plutôt que pour être nul au bord. Par contre, la condition de tangence est plus compliquée à obtenir mathématiquement et fait intervenir les applications conformes. Pour

la perméabilité, nous travaillons dans L^2, car il est utilisé que le projecteur de Leray est orthogonal, quelque soit le domaine, c'est-à-dire qu'il est remarqué que pour tout ε

$$\|u_\varepsilon[f] - v_\varepsilon[f]\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \|\mathbb{P}(K_{\mathbb{R}^2}[f] - v_\varepsilon[f])\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant \|K_{\mathbb{R}^2}[f] - v_\varepsilon[f]\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Pour les domaines poreux, il a été prouvé dans [LM16a, Sect. 5.3] que le projecteur de Leray n'est pas uniformément continu dans les L^p pour $p < 2$, d'où l'intérêt d'avoir supposé des circulations initiales nulles pour éliminer les termes singuliers à la limite.

Pour la condition d'imperméabilité pour des distances petites, l'objectif n'est plus de passer à la limite forte dans le voisinage du domaine poreux, mais plutôt d'obtenir la condition de tangence à la limite. Cette condition linéaire (de type (2.1.4)) est obtenue grâce à un argument L^2 et un calcul précis de l'aire comprise entre deux obstacles, ce qui dépend de γ.

3.3 Les petits solides

Jusqu'à présent, tous les obstacles et domaines ne dépendaient pas du temps. Quand un seul solide de taille ε peut se déplacer sous l'influence d'un fluide parfait (par la loi de Newton (1.1.6)-(1.1.7)), le théorème de Yudovich peut être adapté pour avoir l'existence et l'unicité de solution faible quand la vorticité initiale est dans L^∞_c (voir [GLS14]). Se pose alors la question du comportement asymptotique de $(u_\varepsilon, \omega_\varepsilon, h_\varepsilon)$ quand $\varepsilon \to 0$. Ici aussi, nous nous donnons une vorticité ω^0 et une circulation γ initiales indépendantes de la taille, et nous nous attendons à voir apparaître une masse de dirac d'intensité γ dans le rotationnel du champ de vitesse limite. La principale difficulté ici est de comprendre comment se déplace cette masse de dirac, c'est-à-dire comment passer à la limite dans les lois de Newton quand la taille du bord tend vers zéro.

Il se trouve que la limite va dépendre de l'hypothèse que l'on fait sur la masse du petit solide. Nous avons étudié deux régimes :

- le cas où le solide tend vers *une particule massive* [GLS14] :

$$m_\varepsilon = m_1 \text{ et } \mathcal{J}_\varepsilon = \varepsilon^2 \mathcal{J}_1,$$

- le cas où le solide tend vers *une particule sans masse* [GLS16] :

$$m_\varepsilon = \varepsilon^\alpha m_1 \text{ et } \mathcal{J}_\varepsilon = \varepsilon^{\alpha+2} \mathcal{J}_1,$$

avec $\alpha, m^1, \mathcal{J}^1 > 0$ sont fixés. Le cas $\alpha = 2$ correspond à une densité du solide indépendante de la taille.

En collaboration avec O. Glass et F. Sueur, nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème 3.3.1. *Soient $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(\ell^0, r^0) \in \mathbb{R}^3$, $\omega^0 \in L^\infty_c(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ fixés. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous considérons u^0_ε la vitesse associée aux quantités précédentes, pour $(h_\varepsilon, h'_\varepsilon)|_{t=0} = (0, \ell^0)$. Nous considérons alors l'unique solution du système fluide parfait-structure $(h_\varepsilon, \theta_\varepsilon, u_\varepsilon)$.*

Alors, pour tout $T > 0$ et $\varepsilon \to 0^+$, nous pouvons extraire une sous-suite telle que

- *h_ε converge vers h faible-$*$ dans $W^{1,\infty}(0,T;\mathbb{R}^2)$,*
- *ω_ε converge vers ω dans $C^0([0,T];L^\infty(\mathbb{R}^2)-$ faible-$*)$,*
- *u_ε converge vers $u=\tilde{u}+\dfrac{\gamma}{2\pi}\dfrac{(x-h(t))^\perp}{|x-h(t)|^2}$ dans $C^0([0,T];L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2))$ pour $q<2$, où $\tilde{u}(t,x)$ est associé à ω dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire*

$$\tilde{u}(t,x):=K_{\mathbb{R}^2}[\omega(t,\cdot)](x).$$

De plus, $(\tilde{u},\omega,h)$ satisfait

L'équation fluide :

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\left[\tilde{u}+\frac{\gamma}{2\pi}\frac{(x-h(t))^\perp}{|x-h(t)|^2}\right]\omega\right)=0 \quad \textit{dans} \quad [0,T]\times\mathbb{R}^2, \tag{3.3.1}$$

avec la condition initiale $\omega|_{t=0}=\omega^0$.

L'équation de la particule :

- *dans le cas de la particule massive :*

$$m_1h''(t)=\gamma\Big(h'(t)-\tilde{u}(t,h(t))\Big)^\perp \quad \textit{dans} \quad [0,T], \tag{3.3.2}$$

  avec la condition initiale $(h,h')|_{t=0}=(0,\ell^0)$;

- *dans le cas de la particule sans masse :*

$$h'(t)=\tilde{u}(t,h(t)) \quad \textit{dans} \quad [0,T], \tag{3.3.3}$$

  avec la condition initiale $h|_{t=0}=0$.

Comme dans tous les résultats de convergence, nous avons étendu dans le solide ω_ε par 0 (par exemple) et u_ε par $(h_\varepsilon)'+r_\varepsilon(x-h_\varepsilon)^\perp$.

Le système (3.3.1) et (3.3.3) correspond au système mixte Euler-points vortex introduit par Marchioro et Pulvirenti dans [MP94]. L'équation (3.3.1) traduit le fait que ω est transporté par un champ u à divergence nulle tel que le rotationnel est la somme du tourbillon fluide ω et d'un point vortex d'intensité γ et de centre $h(t)$, endroit où le solide s'est contracté. Dans (3.3.3), le point vortex est transporté par la vitesse associée à la vorticité régulière ω. Dans [MP94], ce système avait été obtenu comme limite quand nous concentrons une partie de la vorticité en un point. Le théorème précédent est donc une dérivation du même système, mais vu comme une limite de petit solide. Nous renvoyons au Chapitre 4 pour l'unicité des solutions du système mixte Euler-points vortex.

Quand la particule est massive, l'équation (3.3.2) traduit une accélération par une force similaire à la force de poussée de Kutta-Joukowski qui a été établie dans une théorie irrotationnelle.

Un tel théorème a aussi été obtenu par Glass, Munnier et Sueur [GMS14] quand le fluide est irrotationnel ($\omega^0 \equiv 0$) mais que le solide se déplace dans une cavité (domaine borné simplement connexe).

Dans le cas du théorème précédent, l'hypothèse que le solide se déplace dans $\mathbb{R}^2$ simplifie l'analyse, car nous pouvons travailler dans le repère du solide, qui est alors indépendant du temps. Evidemment, ceci rajoute quelques termes dans l'équation de vorticité, mais la difficulté reste de dériver des estimations uniformes sur $h'_\varepsilon(t)$ et de passer à la limite dans les relations de Newton.

Le cas d'une particule massive est un peu plus simple, car une estimation de type énergie nous donne un contrôle uniforme de la vitesse de translation du solide. Ce cas fut traité dans [GLS14] où nous nous sommes concentrés sur la loi de Newton quand la taille du bord du solide tend vers zéro.

Dans [GLS16], nous avons étudié la particule sans masse, avec une analyse bien plus délicate car l'équation d'ordre deux (1.1.6) dégénère en une équation d'ordre un (3.3.3). La clé de l'analyse consiste à remplacer l'estimation d'énergie (qui n'est plus suffisante ici) par une estimation *d'énergie modulée*. Mais avant cela, nous avons du réécrire le système fluide parfait-solide sous une *forme normale*, comme expliqué dans le reste de ce chapitre.

Tout d'abord, nous avons introduit la vitesse du solide dans le repère tournant

$$\ell_\varepsilon(t) = R^T_{\theta_\varepsilon(t)}\, h'_\varepsilon(t),$$

où R_{θ_ε} est la matrice de rotation d'angle θ_ε. La vitesse modulée est définie par

$$\tilde{\ell}_\varepsilon(t) := \ell_\varepsilon(t) - K_{\mathbb{R}^2}[w_\varepsilon](t,0) - \varepsilon DK_{\mathbb{R}^2}[w_\varepsilon](t,0)\cdot\xi, \tag{3.3.4}$$

où $\xi \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur constant associé à la géométrie du solide $\mathcal{S}^0$ (ξ est appelé le centre conforme, voir [GLS16] pour une définition précise) et w_ε est le tourbillon dans le référentiel du solide, c'est-à-dire

$$w_\varepsilon(t,x) := \omega_\varepsilon(t, R_{\theta_\varepsilon(t)}x + h_\varepsilon(t)).$$

Ensuite, nous définissons l'inconnue modulée $\tilde{p}_\varepsilon := \begin{pmatrix} \tilde{\ell}_\varepsilon \\ \varepsilon r_\varepsilon \end{pmatrix}$, la matrice d'inertie $\mathcal{M}_g := \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} \xi^\perp \\ -1 \end{pmatrix}$. Nous avons aussi besoin de l'application bilinéaire symétrique $\Lambda_g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3, \quad \langle \Lambda_g, p_1, p_2\rangle = \frac{1}{2} m_1 r_1 \begin{pmatrix} \ell_2^\perp \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} m_1 r_2 \begin{pmatrix} \ell_1^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } p_k = \begin{pmatrix} \ell_k \\ r_k \end{pmatrix}, \ k = 1,2,$$

qui vérifie une propriété de type orthogonalité :

$$\forall p \in \mathbb{R}^3, \quad \langle \Lambda_g, p, p\rangle \cdot p = 0.$$

La forme normale s'écrit alors comme ceci :

Proposition 3.3.2. *Il existe une matrice symétrique positive $\mathcal{M}_a \in S_3^+(\mathbb{R})$ et une application bilinéaire symétrique $\Lambda_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dépendant seulement de la forme de $\mathcal{S}^0$, satisfaisant $\langle \Lambda_a, p, p\rangle \cdot p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}^3$, tels que nous avons la propriété suivante.*

Soit $\rho > 1$ fixé. Il existe $C > 0$ et $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ tels que : si pour un $T > 0$ et un $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ donné, on ait pour tout $t \in [0, T]$:

$$\operatorname{supp} w_\varepsilon(t) \subset B(0, \rho) \setminus B(0, 1/\rho),$$

alors il existe une fonction $G = G(\varepsilon, t) : (0, 1) \times [0, T] \to \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\left| \int_0^t \tilde{p}_\varepsilon(s) \cdot G(\varepsilon, s)\, \mathrm{d}s \right| \leqslant \varepsilon C \left(1 + t + \int_0^t |\tilde{p}_\varepsilon(s)|^2\, \mathrm{d}s \right),$$

et une fonction $F = F(\varepsilon, t) : (0, 1) \times [0, T] \to \mathbb{R}^3$ satisfaisant

$$|F(\varepsilon, t)| \leqslant C \left(1 + |\tilde{p}_\varepsilon(t)| + \varepsilon |\tilde{p}_\varepsilon(t)|^2 \right),$$

tels que l'on ait sur $[0, T]$:

$$\left[\varepsilon^\alpha \mathcal{M}_g + \varepsilon^2 \mathcal{M}_a\right](\tilde{p}_\varepsilon)' + \langle \varepsilon^{\alpha-1} \Lambda_g + \varepsilon \Lambda_a, \tilde{p}_\varepsilon, \tilde{p}_\varepsilon \rangle = \gamma \tilde{p}_\varepsilon \times \mathbf{B} + \varepsilon \gamma G(\varepsilon, t) + \varepsilon^{\min(\alpha,2)} F(\varepsilon, t).$$

Dans la démonstration de cette proposition, nous obtenons des formules explicites pour $\mathcal{M}_a$, Λ_a et G. On appelle la matrice $\mathcal{M}_a$ la matrice de masse ajoutée, les applications Λ_g et Λ_a des *termes gyroscopiques*, la fonction G un *terme faiblement gyroscopique* et la fonction F un *terme faiblement non-linéaire*. La principale partie de l'article [GLS16] consiste à démontrer cette proposition. Tout d'abord en remplaçant la pression dans les lois de Newton en utilisant l'équation d'Euler (1.1.1), puis en écrivant la décomposition de Biot-Savart (voir (2.1.6) avec le Chapitre 2.3.2), et comprendre quels sont les termes principaux en cherchant des développements asymptotiques à l'ordre 2 des différentes fonctions (en particulier, en utilisant le lien avec l'analyse complexe, voir le Chapitre 2.3.1).

Avec cette forme normale à disposition, il n'est plus très dur de montrer que la vitesse du solide est uniformément bornée, ce qui nous permet de passer à la limite sur un petit intervalle de temps, c'est-à-dire tant que le support de la vorticité reste loin du solide (hypothèse nécessaire pour utiliser la forme normale). Or, le système mixte Euler-point vortex vérifie la propriété que le support reste éloigné du point vortex pour tout temps. Ainsi, par un argument de bootstrap, nous arrivons à montrer la convergence sur tout intervalle de temps $[0, T]$.

3.4 Méthode des points vortex

Les méthodes numériques standard sur l'équation d'Euler (1.1.1) génèrent une "viscosité numérique inhérente", ce qui fait décroître les quantités qui sont censées être conservées. Grâce à l'équation de transport du tourbillon, la bonne alternative consiste à utiliser

la formulation lagrangienne en utilisant que la vorticité est transportée le long des caractéristiques. Ainsi, la méthode des points vortex dans $\mathbb{R}^2$ consiste à approcher $\omega(t) \approx \sum_{i=1}^N \gamma_N^i \delta_{x_N^i(t)}$ où les centres $\{x_N^i\}_{i=1}^N$ vérifient un système d'EDOs :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_N^i}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{j \neq i} \gamma_N^j \dfrac{(x_N^i(t) - x_N^j(t))^\perp}{|x_N^i(t) - x_N^j(t)|^2}, \\ x_N^i(0) = x_N^{i,0}, \end{cases} \tag{3.4.1}$$

c'est-à-dire que le point vortex $\gamma_N^i \delta_{x_N^i(t)}$ bouge sous l'influence du champ de vitesse produit par les autres points vortex. Cette méthode est bien plus aisée à implémenter numériquement et converge bien vers la solution d'Euler quand $N \to \infty$ (voir [GHL90] pour des données initiales régulières, [Sch96] pour les solutions faibles, et le livre [CK00]).

Cependant, tous ces travaux utilisent la loi de Biot-Savart dans le plan entier, où la vitesse $\frac{(x-x^i)^\perp}{2\pi|x-x^i|^2}$ est identifiée à $K_{\mathbb{R}^2}[\delta_{x^i}]$. Dans les domaines extérieurs, la loi de Biot-Savart est bien plus compliquée, et il n'est plus facile d'écrire le champ de vitesse à divergence nulle, tangent au bord et associé à une vorticité du type δ_{x^i} (si ce n'est à l'extérieur d'un disque).

Dans le cas de solide imperméable, la stratégie consiste à remplacer le bord par une collection de point vortex $\sum_{i=1}^N \frac{\gamma_N^i(t)}{N} \delta_{x_N^i}$, où les positions des vortex $\{x_N^i\}_{i=1}^N$ sont fixés sur $\partial\Omega$ mais avec des densités $\{\gamma_N^i\}_{i=1}^N$ qui dépendent du temps. Elles sont choisies telles que le champ de vitesse associé soit tangent en des points situés entre les x_N^i. Une telle approche est présente dans différents ouvrages de physique et d'aéronautique, et notre objectif est de justifier rigoureusement l'existence et l'unicité de $\{\gamma_N^i\}_{i=1}^N$ vérifiant une telle hypothèse, puis la convergence vers les équations d'Euler quand $N \to \infty$.

Plus précisément, pour $\omega \in C_c^1(\Omega)$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ donnés, nous cherchons à reconstruire le champ $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ vérifiant le problème div-rot usuel :

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \operatorname{rot} u = \omega \text{ dans } \Omega, \quad u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$
$$u \to 0 \text{ quand } x \to \infty, \quad \oint_{\partial\Omega} u \cdot \tau \, \mathrm{d}s = \gamma,$$

où $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ (avec $\mathcal{C}$ un compact simplement connexe régulier). Nous introduisons alors la loi de Biot-Savart dans $\mathbb{R}^2$

$$u_P := K_{\mathbb{R}^2}[\omega] \in C^1(\mathbb{R}^2) \subset C^1(\overline{\Omega}),$$

et nous notons u_R la différence de ces deux champs de vecteur :

$$u_R := u - u_P \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega).$$

Comme ω est à support compact dans Ω, nous remarquons par la formule de Stokes que la circulation de u_P est nulle et que u_R résout

$$\operatorname{div} u_R = \operatorname{rot} u_R = 0 \text{ dans } \Omega, \quad u_R \cdot n = -u_P \cdot n \text{ sur } \partial\Omega,$$
$$u_R \to 0 \text{ quand } x \to \infty, \quad \oint_{\partial\Omega} u_R \cdot \tau \, \mathrm{d}s = \gamma.$$

L'objectif de la méthode des points vortex est de donner une formule explicite qui approche u_R, ce qui donnera une approximation explicite de u. Pour cela nous répartissons $\left(x_N^1, x_N^2, \dots, x_N^N\right)$ sur le bord $\partial\Omega$, ainsi que des points intermédiaires $(\tilde{x}_N^i)$: $x_N^i = l(s_N^i)$, $\tilde{x}_N^i = l(\tilde{s}_N^i)$ avec l un paramétrage du bord et $s_N^i < \tilde{s}_N^i < s_N^{i+1}$, puis nous cherchons les densités à imposer pour que

$$u_N^{\mathrm{app}}(x) := \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\frac{\gamma_N^j}{N}\frac{(x-x_N^j)^\perp}{|x-x_N^j|^2} = K_{\mathbb{R}^2}\Big[\sum_{j=1}^{N}\frac{\gamma_N^j}{N}\delta_{x_N^j}\Big],$$

soit une bonne approximation de u_R. En collaboration avec D. Arsénio et E. Dormy, nous avons d'abord justifié cette motivation physique qui consiste à interpréter un bord imperméable comme une nappe de tourbillon.

Comme u_N^{app} est évidemment de divergence et rotationnel nuls, nous cherchons $\gamma_N = (\gamma_N^1, \dots, \gamma_N^N) \in \mathbb{R}^N$ qui résout les N équations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\frac{\gamma_N^j}{N}\frac{(\tilde{x}_N^i-x_N^j)^\perp}{|\tilde{x}_N^i-x_N^j|^2}\cdot n(\tilde{x}_N^i) = -[u_P\cdot n](\tilde{x}_N^i), \quad \text{pour tout } i=1,\dots,N-1,\\
&\sum_{i=1}^{N}\frac{\gamma_N^i}{N} = \gamma.
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Nous avons démontré que si les points été uniformément répartis (par rapport à la longueur d'arc) alors le système précédent est inversible, et le champ u_R^{app} ainsi construit est une bonne approximation. Plus précisément :

Théorème 3.4.1. *Soit $\omega \in L_c^1(\Omega)$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ donnés. Il existe N_0 (indépendant de ω et γ) tel que pour tout $N \geqslant N_0$ et pour une "bonne répartition des points", le système* (3.4.2) *admet une unique solution $\gamma_N \in \mathbb{R}^N$. De plus, pour tout ensemble fermé $K \subset \Omega$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de N, K, ω and γ telle que*

$$\begin{aligned}
&\|u_R - u_N^{\mathrm{app}}\|_{L^\infty(K)}\\
&\qquad\leqslant \frac{C}{N^2}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(K,\partial\Omega)} + \frac{1}{\operatorname{dist}(K,\partial\Omega)^4}\right)\\
&\qquad\quad\times\left(\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\omega,\partial\Omega)} + \frac{1}{\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\omega,\partial\Omega)^3}\right)\|\omega\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + |\gamma|\right).
\end{aligned}$$

Ce théorème a été démontré dans [ADL14] dans le cas plus simple où le solide est un disque et quand les points sont uniformément répartis. Une clé dans cet article est de noter que le problème continu peut s'interpréter comme l'inversion de la transformée d'Hilbert. La justification de la méthode des points vortex consiste alors à montrer la convergence de la transformée d'Hilbert discrète, ce qui est possible si les points sont bien répartis. En effet, vu la singularité des fonctions, nous avons besoin de symétrie pour approcher une valeur principale.

A noter que nous obtenons bien numériquement une décroissance avec un taux de $1/N^2$.

3.5 Perspectives

Nous donnons ici une liste non exhaustive des questions ouvertes concernant ce chapitre.

3.5.1 Cas critique pour les domaines perforés

Dans le Chapitre 3.2, le dernier cas non résolu est le cas critique :

- quand $\frac{d_\varepsilon}{\varepsilon} \to C > 0$ pour une distribution d'obstacles sur un carré ;
- quand $\frac{d_\varepsilon}{\varepsilon^{2+\frac{1}{\gamma}}} \to C > 0$ pour une distribution d'obstacles sur un segment.

Nous nous attendons à ce que la limite soit un système homogénéisé similaire aux études classiques pour les équations d'ordre deux avec condition de Dirichlet ou pour le sytème d'Euler faiblement non-linéaire. Mais ici, la condition au bord rend difficile l'utilisation directe des outils développés dans la littérature.

3.5.2 Généralisation des petits solides

Suite aux travaux présentés dans le Chapitre 3.3, il serait intéressant d'unifier les différentes approches pour savoir traiter le cas général suivant :

- N solides se déplaçant dans un fluide idéal avec une vorticité non-nulle et dans un domaine borné (avec $N = N_1 + N_2 + N_3$) ;
- N_1 solides se contractent homothétiquement vers des particules massives ;
- N_2 solides se contractent homothétiquement vers des particules sans masses ;
- N_3 solides ne changent pas de taille.

3.5.3 Méthode des points vortex

Dans le Chapitre 3.4, la méthode des points vortex a été rigoureusement justifiée pour une répartition uniforme de points sur le bord d'un obstacle circulaire.

Il est alors important d'obtenir une version plus générale qui inclus des obstacles réguliers simplement connexes tels que les points vortex soient bien répartis (proche d'une répartition uniforme par rapport à la longueur d'arc). Là encore, il sera crucial de comprendre la formule de représentation du problème continu, et d'établir des liens avec les intégrales de Cauchy et la formule de Poincaré-Bertrand. La compréhension précise des opérateurs présents dans ces formules nous guidera, dans la partie discrète, pour démontrer que le système linéaire est inversible. Ensuite, nous prouverons que $(u_R - u_N^{\text{app}}) \cdot n|_{\partial\Omega}$ converge faiblement vers zero, puis nous en déduirons la convergence forte sur les fermés de Ω.

Un des corollaires de ce genre de théorème pourra être une version dépendant du temps : établir l'existence et l'unicité d'une fonction ω_N qui est transportée par $u_N^{\text{app}}[\omega_N, \gamma]$ (c'est-à-dire construit en chaque temps par la méthode des points vortex), puis montrer que ω_N est une bonne approximation de ω :

$$\left\|\omega - \omega^N\right\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)} = \mathcal{O}\left(N^{-2}\right).$$

Ensuite, plusieurs directions sont possibles :

- *L'unification des différentes méthodes de points vortex :* c'est à dire en approchant
  - la partie régulière de la vorticité par une somme de masses de dirac (de densités fixes et dont les centres se déplacent par le système point vortex) ;
  - le bord des obstacles par des points vortex comme expliqué au Chapitre 3.4 (de positions fixes mais de densités recalculées en tout temps).

  Pour justifier complètement le code numérique, il faudrait même considérer la discrétisation en temps et la régularisation du noyau $K_{\mathbb{R}^2}$ (pour éviter le problème de collision des points de vortex mobiles) et démontrer que la solution numérique reste proche de la solution d'Euler pour un petit pas de temps, un petit paramètre de régularisation et un grand nombre de points vortex.

- *Etude des domaines à coins :* (comme par exemple une aile d'avion) dans ce cas les formules de Plemelj sont plus compliquées car elles dépendent de l'angle près du point du bord que l'on considère. Elles seront donc inchangées sur tout le bord, sauf au coin. Autre preuve de la difficulté de ce cas, quelques articles mettent en évidence un comportement spectral singulier pour les opérateurs intervenant dans la formule de Poincaré-Bertrand.

  Une autre étude intéressante dans ce cas là est le modèle de Kutta-Joukowski qui reflète l'observation expérimentale d'une modification de la circulation autour de l'obstacle et d'une émission de points vortex près du point de fuite de l'aile d'avion. Ce phénomène est justifié par la création de couche limite générée par les grandes vitesses près du coin.

- *Adaptation de cette méthode numérique pour d'autres modèles sans viscosité :* la méthode des points vortex peut être utilisée dès que l'on veut reconstruire un champ à divergence nulle qui vérifie la condition de tangence. Un exemple typique est l'équation des vagues (appelée en anglais "water-waves") avec fond : nous pouvons simuler numériquement le comportement d'une vague quand le fond varie.

4

Unicité pour les fluides idéaux

Résumé

Les preuves standard pour l'unicité des solutions des équations d'Euler requièrent beaucoup plus de régularité que pour l'existence. Nous rappellerons brièvement les deux preuves classiques (preuve de Yudovich pour la formulation eulerienne, preuve de Marchioro et Pulvirenti pour la formulation lagrangienne). Ces deux preuves sont principalement basées sur une estimation de type Gronwall et sont aux mêmes niveaux de régularité. Une telle régularité n'est en général pas satisfaite dans les domaines irréguliers.

Une première extension sera alors présentée dans les domaines à coins avec des angles aigus. Nous montrerons que l'analyse elliptique dans les domaines à coins peut être utilisée pour atteindre la régularité nécessaire à une preuve d'unicité sans condition sur le support de la vorticité.

Pour des angles plus grands, il est sûr que nous n'avons pas la bonne régularité. Il est néanmoins possible de montrer l'unicité tant que la vorticité ne rencontre pas la zone où la vitesse est singulière. Nous présenterons alors les différentes méthodes pour contrôler la distance entre le support et cette région.

Inclus dans les articles [LMW14, Lac15b].

Dans l'introduction nous avons présenté les équations d'Euler en formulation vitesse (1.1.1) qui est équivalente à la formulation tourbillon (1.1.11) (en rajoutant le problème div-rot pour reconstruire u en fonction de ω). L'existence de solution faible globale a été établie pour une donnée initiale $\omega^0 \in L^1 \cap L^p$ avec $p \in (1, \infty]$ que cela soit dans les domaines réguliers ou non. Comme expliqué dans le chapitre précédent, cette régularité suffit pour développer une analyse L^2 pour le champ de vitesse u.

Pour l'unicité, nous rappellerons les deux preuves classiques (de Yudovich [Yud63], puis de Marchioro et Pulvirenti [MP94]) qui nécessitent beaucoup plus de régularité sur le champ de vitesse. Cette régularité a été obtenue pour $\omega^0 \in L^1 \cap L^\infty$ et Ω régulier. En effet, grâce à l'équation de transport, nous savons que les normes L^1 et L^∞ de ω sont conservées, et nous cherchons une borne de type lipschitz pour la vitesse qui ne fait intervenir que ces deux quantités. Il a été remarqué que si Ω est régulier (au moins de classe $C^{1,1}$) alors u vérifie :

- $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $p \in (1, \infty)$, et qu'il existe C indépendant de p tel que
$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \underbrace{C\Big(p + \frac{1}{p-1}\Big)}_{=:C(p,\Omega)} \|\omega\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{(inégalité de Calderón-Zygmund).}$$
- u est log-lipschitz (aussi appelé quasi-lipschitz), c'est-à-dire qu'il existe C tel que pour tout $x, y \in \Omega$ on a
$$|u(x) - u(y)| \leqslant C\|\omega\|_{L^1 \cap L^\infty(\Omega)} h(|x-y|), \quad \text{avec } h(r) = \begin{cases} r(1 - \ln r) & \text{si } r \in (0,1] \\ r & \text{si } r > 1 \end{cases}.$$

Dans les deux cas, nous concluons que si ω est $L^1 \cap L^\infty$, alors le champ de vitesse est presque lipschitz (i.e. presque $W^{1,\infty}$) et que le défaut est controlé : $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \mathcal{O}(p)$ quand $p \to \infty$ dans Calderón-Zygmund, et par une erreur de type $\ln|x-y|$ dans l'estimation log-lipschitz. Nous verrons dans le chapitre suivant que ces deux défauts n'empêchent pas l'obtention d'un résultat d'unicité.

Il est remarquable que la question d'unicité ou non-unicité est toujours une question ouverte quand $\omega^0 \in L^1 \cap L^p$ (avec $p \in (1, \infty)$) mais $\omega^0 \notin L^{p+N}$ ($N \in (0, \infty)$), même pour p et N arbitrairement grand. Le seul exemple de non-unicité pour les équations d'Euler a été établi pour des champs de vitesse tellement oscillants que la vorticité n'est même pas intégrable [DLS09].

L'hypothèse de régularité du domaine est aussi fondamentale : Jerison et Kenig [JK95] ont construit un ensemble Ω ouvert borné (connexe et simplement connexe) de classe C^1 et une fonction $\omega \in C^\infty(\Omega)$ tel que le gradient de la vitesse associée $\nabla u = \nabla\nabla^\perp\Delta^{-1}\omega$ ne soit pas intégrable. On est donc très loin de la régularité requise pour les preuves d'unicité.

4.1 Preuves classiques d'unicité

Nous reproduisons ici très brièvement les deux preuves classiques d'unicité pour les équations d'Euler (pour plus de détails, voir les livres [MP94, MB02]). L'objectif est d'illus-

trer l'importance que u ne soit pas trop loin de la régularité lipschitz pour utiliser un argument de type Gronwall (soit avec une constante de la forme Cp dans l'inégalité de Calderón-Zygmund, soit avec un contrôle du module de continuité par $r|\ln r|$).

4.1.1 Formulation eulerienne : preuve de Yudovich

Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles globales de l'équation d'Euler (1.1.1) pour la même donnée initiale u^0 (telle que $\omega^0 \in L^1 \cap L^\infty(\Omega)$). Dans un domaine régulier, nous remarquons que le champ $\tilde{u} := u_1 - u_2$ appartient à $W^{1,p}$ pour tout $p \in (1, \infty)$, ce qui permet d'obtenir une bonne estimation sur $\partial_t \tilde{u}$, d'en déduire que l'on a le droit de prendre $\tilde{u}$ comme fonction test et de conclure que $\tilde{u} \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$. Ceci justifie l'estimation d'énergie suivante pour tout $T \in \mathbb{R}^+$

$$\|\tilde{u}(T)\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\int_0^T \langle \partial_t \tilde{u}, \tilde{u}\rangle_{L^{\frac{5}{4}} \times L^5} \,\mathrm{d}s \leqslant 2\int_0^T \int_\Omega |\tilde{u}(s,x)||\nabla u_2(s,x)||\tilde{u}(s,x)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}s.$$

Une estimation de Gronwall classique consisterait à estimer le terme de droite par $\|\tilde{u}\|^2_{L^2}\|\nabla u_2\|_{L^\infty}$, ce que nous ne pouvons pas faire car en général $\nabla u_2 \notin L^\infty$. Mais presque. Ainsi, Yudovich utilisa l'inégalité de Calderón-Zygmund pour considérer la norme L^p de ∇u_2 (avec p grand, car $\omega_2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1 \cap L^\infty)$), et faire ensuite tendre $p \to \infty$. Précisément, il écrivit que par interpolation de $L^{2p/(p-2)}$ entre L^2 et L^∞ ($\tilde{u}$ étant uniformément borné), nous avons :

$$\|\tilde{u}(T,\cdot)\|^2_{L^2} \leqslant 2Cp \int_0^T \|\tilde{u}\|^{2-2/p}_{L^2} \,\mathrm{d}s.$$

Par un argument de type Gronwall, ceci implique

$$\|\tilde{u}(T,\cdot)\|^2_{L^2} \leqslant (2CT)^p, \qquad \forall p \geqslant 2,$$

avec C la constante de Calderón-Zygmund, qui est indépendante de p. En prenant la limite $p \to \infty$, nous concluons que $\|\tilde{u}(T,\cdot)\|_{L^2} = 0$ pour tout $T < 1/(2C)$. Par un argument d'itération, nous en déduisons l'unicité sur $[0, \infty)$.

Nous remarquons ici que la preuve de Yudovich fonctionne car la constante dans l'inégalité de Calderón-Zygmund est de la forme Cp (pour p grand), et qu'une telle preuve ne marche plus si nous avions eu $C(p, \Omega) = Cp^\alpha$ pour $\alpha > 1$, car l'estimation de Gronwall aurait donné $(2CTp^{\alpha-1})^p \to \infty$ quand $p \to \infty$, pour tout $T > 0$.

4.1.2 Formulation lagrangienne : preuve de Marchioro et Pulvirenti

L'approche de Marchioro et Pulvirenti n'utilise pas l'inégalité de Calderón-Zygmund. Grâce à l'estimation log-lipschitz (qui est bien plus facile à établir), ils montrent l'existence et l'unicité de la formulation lagrangienne. Cette formulation est basée sur le fait que le

tourbillon est constant le long des caractéristiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Phi(t,x)}{\mathrm{d}t} = u(t,\Phi(t,x)) \text{ pour } t>0, \\ \Phi(0,x) = x, \end{cases}$$

pour tout $x \in \Omega$, où $\omega(t,x) = \omega^0(\Phi_t^{-1}(x))$ et u est reconstruit en fonction de ω par le problème usuel de div-rot (formule de Biot-Savart). En effet, si nous considérons deux solutions (Φ_j, ω_j, u_j) $j = 1,2$ dans un domaine Ω borné (pour simplifier), nous écrivons

$$\begin{aligned} F(T) :=& \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |\Phi_1(T,x) - \Phi_2(T,x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \Big|\int_0^T \Big(u_1(t,\Phi_1(t,x)) - u_2(t,\Phi_2(t,x))\Big)\,\mathrm{d}t\Big|\,\mathrm{d}x \\ \leqslant& \frac{1}{|\Omega|}\int_0^T\int_\Omega \Big|u_1(t,\Phi_1(t,x)) - u_1(t,\Phi_2(t,x))\Big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{1}{|\Omega|}\int_0^T\int_\Omega \Big|u_1(t,z) - u_2(t,z)\Big|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

où nous avons fait le changement de variable $z = \Phi_2(t,x)$ (changement qui laisse invariant la mesure de Lebesgue). Le premier terme est facilement majorable en utilisant l'estimation log-lipschitz, et pour le second, nous écrivons la loi de Biot-Savart de u_j en fonction de $\omega_j = \omega^0(\Phi_j^{-1})$, puis par changement de variable et une autre inégalité de type log-lipschitz, nous démontrons que

$$F(T) \leqslant \frac{C}{|\Omega|}\int_0^T\int_\Omega h(|\Phi_1(t,y) - \Phi_2(t,y)|)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

ce qui donne par concavité de h

$$F(T) \leqslant C\int_0^T h(F(t))\,\mathrm{d}t.$$

L'unicité découle d'un argument de type Gronwall, où il est crucial que h soit de la forme $r|\ln r|$. En effet, si au lieu de $r|\ln r|$ le module de continuité avait été borné par r^α pour un $\alpha < 1$, alors nous n'aurions pas obtenu l'unicité par un tel argument.

4.2 Petits coins et estimation log-lipschitz

Comme nous le remarquons dans les deux preuves précédentes, il est fondamental que u soit presque lipschitz, et l'exemple de Jerison et Kenig nous indique qu'il est impossible d'atteindre ce genre de régularité quand le domaine n'est pas mieux que C^1.

Un exemple de domaine non régulier qui a été intensivement étudié pour les problèmes elliptiques est le cas d'un domaine régulier $C^{1,1}$, sauf en un nombre fini de points où nous avons des coins (voir par exemple [Gri85, KMR01, BK06]). Dans ce cas là, le théorème "shift" donne le comportement près du coin, en fonction de l'angle du coin $\theta \in (0, 2\pi]$. Il est aisé d'anticiper ce résultat, car en redressant le coin par l'application $\varphi_\theta \ : \ z \mapsto z^{\pi/\theta}$, et définissant $\tilde{\psi} = \psi \circ \varphi_\theta^{-1}$ où ψ est la solution du problème de Laplace dans le domaine à

coins, nous remarquons que $\tilde{\psi}$ est une solution de Laplace dans un domaine régulier. Nous nous attendons à ce que

$$\psi = \tilde{\psi} \circ \varphi_\theta = \mathcal{O}(r^{\frac{\pi}{\theta}}), \quad u = \nabla^\perp \psi = \mathcal{O}(r^{\frac{\pi}{\theta}-1}), \quad \nabla u = D^2\psi = \mathcal{O}(r^{\frac{\pi}{\theta}-2}),$$

où r est la distance au coin, c'est-à-dire que u soit borné seulement pour des angles $\theta \leqslant \pi$ et que u soit lipschitz seulement pour $\theta \leqslant \pi/2$. Ceci est exactement la conclusion du théorème shift, pour un terme source $\omega \in C^\infty$. Cette théorie nous suggère que l'unicité devrait être possible si tous les angles sont inférieurs ou égaux à $\pi/2$.

Evidemment, nous ne pouvons pas espérer u lipschitz quand la vorticité n'appartient qu'à $L^1 \cap L^\infty$, mais il semble envisageable de chercher une inégalité de Calderón-Zygmund dans les domaines avec des coins aigus. Ainsi Bardos, Di Plinio et Temam ont remarqué que la preuve de Grisvard [Gri85] donne une constante de la forme $C(p, \Omega) = C(\Omega)p^2$, ce qui n'est pas suffisant pour adapter l'argument de Yudovich. Ils ont alors procédé différemment quand le domaine est un carré [BDPT13] (ou un convexe avec des angles $\theta_k = \pi/m_k$, $m_k \in \mathbb{N}, m_k \geqslant 2$) : par un argument de réflexion (pour se ramener à un ensemble régulier), ils ont établi une nouvelle estimation de type BMO, ce qui implique l'inégalité de Calderón-Zygmund avec $C(p, \Omega) = C(\Omega)p$, et donc l'unicité par la preuve de Yudovich.

En collaboration avec E. Miot et C. Wang [LMW14], nous avons fourni une preuve pour les domaines bornés simplement connexes (pas forcément convexes), et avec des coins $\theta \in (0, \pi/2]$. Notre stratégie consiste à introduire l'application conforme $\mathcal{T}$ qui envoie Ω sur le disque unité $B(0, 1)$. Nous avons ensuite établi une estimation de type log-lipschitz du poussé en avant de u vers le disque unité :

$$U(t, y) := D\mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}(y))u(\mathcal{T}^{-1}(y)).$$

Pour cela, nous avons dû utiliser le comportement précis de l'application conforme près du coin. Avec cette estimation, il a été finalement possible d'adapter la preuve de Marchioro et Pulvirenti, pour obtenir l'unicité des solutions globales pour les équations d'Euler.

A noter qu'un an plus tard, Di Plinio et Temam [DPT15] sont finalement arrivés à démontrer l'inégalité de Calderón-Zygmund avec $C(p, \Omega) = C(\Omega)p$ dans ce genre de domaine, retrouvant ainsi notre résultat d'unicité, mais par la preuve de Yudovich.

4.3 Grands coins et support du tourbillon

Pour des angles $\theta > \pi/2$, la vitesse n'est plus log-lipschitz et n'appartient pas non plus à $\cap_{p \geqslant 2} W^{1,p}$. Elle se comporte près du coin comme $r^{\frac{\pi}{\theta}-1}$ et elle n'est même pas bornée pour $\theta > \pi$. Dans le cas d'un "cusp" ($\theta = 2\pi$), la vitesse n'appartient à $L^p \cap W^{1,q}$ que pour $p < 4$ et $q < \frac{4}{3}$, ce qui est très loin de la régularité des preuves classiques d'unicité.

Il existe néanmoins un cas particulier où l'unicité a été démontrée : quand il n'y a pas de vorticité à l'endroit où la vitesse est singulière.

4.3.1 Vorticité constante au voisinage de la singularité du champ de vitesse

Pour le système mixte Euler-point vortex (voir (3.3.1) avec (3.3.3)), Marchioro et Pulvirenti démontrèrent l'unicité en formulation lagrangienne tant que le support de la vorticité ω ne rencontre pas la masse de Dirac centrée en $h(t)$ [MP94]. Même si la vitesse totale est singulière à l'endroit où il y a la masse de Dirac, elle est bien régulière (i.e. log-lipschitz) à l'endroit où se trouve la vorticité. Il est alors possible d'adapter la preuve de Marchioro et Pulvirenti en montrant l'unicité des caractéristiques transportant la vorticité (qui se déplacent à la vitesse $K_{\mathbb{R}^2}[\omega] + \frac{\gamma}{2\pi}\frac{(x-h(t))^\perp}{|x-h(t)|^2}$ qui est donc log-lipschitz sur le support de ω) et de la trajectoire du point vortex (qui se déplace à la vitesse $K_{\mathbb{R}^2}[\omega]$ qui est donc irrotationnelle au voisinage de $h(t)$). La clé de leur résultat d'unicité globale est donc de démontrer que la vorticité ne rencontre jamais le point vortex en temps fini (voir le chapitre suivant).

Pendant ma thèse et en collaboration avec E. Miot, nous avons étendu dans [LM09] ce résultat d'unicité aux solutions faibles de la formulation eulerienne. Il est possible de montrer que la vitesse est assez régulière pour dire que le tourbillon est une solution renormalisée (au sens de DiPerna-Lions [DL89, Des96]) de l'équation de transport (1.1.11), et de retrouver ainsi les propriétés classiques de conservation : les normes L^p de la vorticité pour $p \in [1, \infty]$, la masse totale $\int_\Omega \omega(t, \cdot)$ et la conservation de la circulation s'il s'agit d'un domaine extérieur. De plus, en choisissant bien les fonctions tests (inspirées de la preuve avec les caractéristiques), il est aussi possible de déduire de la définition des solutions renormalisées que le tourbillon reste bien loin du point vortex. Ensuite, nous introduisons $v_j := K_{\mathbb{R}^2}[\omega_j]$, nous écrivons l'équation vérifiée par $\tilde{v} = v_1 - v_2$, puis nous faisons une estimation d'énergie comme dans la preuve de Yudovich. La nouveauté est que nous avons cette fois des termes de la forme $\int_{\mathbb{R}^2} |w_1||\tilde{v}||\nabla\tilde{v}|$ avec $w_1 = \gamma\dfrac{(x-h_1)^\perp}{2\pi|x-h_1|^2}$ ce qui correspond à la vitesse associée à la masse de dirac $\gamma\delta_{h_1(t)}$. L'idée générale est de séparer l'intégrale en deux parties : dans U un petit voisinage du point vortex où nous avons prouvé qu'il n'y a pas de vorticité (voir le chapitre suivant) et sur $\mathbb{R}^2 \setminus U$ où la vitesse w_1 est régulière. Loin du point vortex, nous suivons l'argument de Yudovich (en mettant la dérivée sur w_1 car elle appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus U)$), et près du bord nous calculons

$$\int_U |w_1||\tilde{v}||\nabla\tilde{v}| \leqslant \|w_1\|_{L^1(U)}\|\tilde{v}\|_{L^\infty(U)}\|\nabla\tilde{v}\|_{L^\infty(U)}.$$

En effet, w_1 est quand même intégrable, et comme $\tilde{v}$ est harmonique sur U ($\operatorname{div}\tilde{v} = \operatorname{rot}\tilde{v} = 0$), alors nous avons par la formule de la moyenne

$$\int_U |w_1||\tilde{v}||\nabla\tilde{v}| \leqslant C\|\tilde{v}\|_{L^2}^2.$$

Ceci nous permet de conclure l'estimation de type Gronwall.

Pour résumer, même si le champ de vitesse total est singulier, il est quand même intégrable, et si nous montrons qu'il n'y a pas de vorticité au voisinage du point vortex,

nous pouvons majorer la norme L^∞ de $\tilde{v}$ (ainsi que la norme L^∞ du gradient) par sa norme L^2. L'harmonicité est fondamentale pour ce genre d'estimation.

Dans [LM09], nous avons aussi obtenu l'existence d'un flot lagrangien et l'équivalence des formulations.

Une telle preuve d'unicité a été adaptée dans les domaines à coins dans [Lac15b] : le seul endroit où la vitesse est singulière est près du coin, mais elle est quand même intégrable. Si nous montrons qu'il n'y a pas de vorticité dans un voisinage du bord, nous avons alors l'unicité par harmonicité de $\tilde{v} = K_{\mathbb{R}^2}[\omega_1 - \omega_2]$ dans ce voisinage.

4.3.2 Contrôle du support de la vorticité

Dans cette partie, nous présentons les différentes méthodes pour contrôler le support de la vorticité, les avantages de chacune, et pourquoi elles sont spécifiques au cas étudié. Même si le champ de vitesse n'est pas toujours assez régulier pour définir des caractéristiques, nous supposerons qu'elles existent et qu'elles sont différentiables. La preuve rigoureuse se fait ensuite grâce aux solutions renormalisées, avec des fonctions tests inspirées des calculs suivants.

Le système mixte Euler-point vortex dans $\mathbb{R}^2$. Le système mixte Euler-points vortex a été introduit pour modéliser un tourbillon composé d'une partie régulière et d'une masse de Dirac centrée au point $h(t)$:

$$\begin{cases} v(t,\cdot) = K_{\mathbb{R}^2}[\omega(t,\cdot)], \\ \dot{h}(t) = v(t,h(t)), \\ \dot{\phi}_x(t) = v(t,\phi_x(t)) + \frac{\gamma(\phi_x(t)-h(t))^\perp}{2\pi|\phi_x(t)-h(t)|^2}, \\ \phi_x(0) = x,\ x \neq h_0, \\ \omega(t,\phi_x(t)) = \omega_0(x), \end{cases}$$

ce qui signifie que le point $h(t)$ se déplace sous l'influence de la vitesse v produite par la partie régulière du tourbillon ω, alors que la partie régulière et le point vortex génèrent un flot le long du quel ω est constant. Pour montrer que la partie régulière ne rencontre jamais le point vortex, Marchioro et Pulvirenti [MP94] ont introduit la quantité suivante :

$$L(t) := -\ln|\phi_x(t) - h(t)|,$$

pour $x \neq h_0$ fixé. Nous remarquons que L tend vers $+\infty$ si et seulement si $\phi_x(t) \to h(t)$, et nous cherchons donc à montrer que L reste borné. Nous calculons

$$L'(t) = -\frac{(\phi_x(t)-h(t))\cdot(\dot{\phi}_x(t)-\dot{h}(t))}{|\phi_x(t)-h(t)|^2} = -\frac{(\phi_x(t)-h(t))\cdot(v(t,\phi_x(t))-v(t,h(t)))}{|\phi_x(t)-h(t)|^2}.$$

Nous utilisons ensuite que la partie régulière v est log-lipschitz, ce qui nous permet de conclure par une inégalité de type Gronwall. Pour résumer, nous remarquons dans cette analyse que les points importants sont :

$$L(t) \to \infty \text{ ssi } \phi_x(t) \to h(t) \quad \text{et} \quad (\phi_x(t)-h(t))\cdot\frac{(\phi_x(t)-h(t))^\perp}{2\pi|\phi_x(t)-h(t)|^2} \equiv 0$$

supprimant ainsi la partie singulière de la la vitesse.

Le système mixte Euler-point vortex fixe dans $\mathbb{R}^2$. Marchioro étudia dans [Mar90] le même problème que précédemment, excepté que la masse de Dirac ne se déplace plus. En conséquence, la preuve précédente ne fonctionne pas, car nous n'avons plus la différence de deux vitesses, et nous ne pouvons pas utiliser la régularité log-lipschitz. Dans [Mar90], l'auteur introduisit la fonction suivante :

$$L(t) := -\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\ln|\phi_x(t)-y|\Big)\omega(t,y)\,\mathrm{d}y - \gamma \ln|\phi_x(t)-h_0|,$$

où la première intégrale correspond à la fonction courant associée à $v = K_{\mathbb{R}^2}[\omega]$. La première étape consiste à monter que cette intégrale est bornée, ce qui implique que L tend vers $+\infty$ si et seulement si $\phi_x(t) \to h_0$. Ensuite, nous calculons

$$\begin{aligned} L'(t) &= -\Big(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\phi_x(t)-y}{|\phi_x(t)-y|^2}\omega(t,y)\,\mathrm{d}y + \gamma\frac{\phi_x(t)-h_0}{|\phi_x(t)-h_0|^2}\Big)\cdot\dot{\phi}_x(t) - \int_{\mathbb{R}^2}\Big(\ln|\phi_x(t)-y|\Big)\partial_t\omega(t,y)\,\mathrm{d}y \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} \nabla\Big(\ln|\phi_x(t)-y|\Big)\cdot\Big(v(t,y)+\frac{\gamma(y-h_0)^\perp}{2\pi|y-h_0|^2}\Big)\omega(t,y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

La dernière étape consiste à montrer une bonne estimation de la dernière l'intégrale pour conclure par un lemme de Gronwall. En choisissant une fonction L reliée à la fonction courant, nous avons passé le terme singulier à l'intérieur d'une intégrale, ce qui est borné. Dans ce cas, les points importants sont donc :

$$L(t) \to \infty \text{ ssi } \phi_x(t) \to h_0 \quad \text{et} \quad \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\phi_x(t)-y}{|\phi_x(t)-y|^2}\omega(t,y)\,\mathrm{d}y + \gamma\frac{\phi_x(t)-h_0}{|\phi_x(t)-h_0|^2}\Big)\cdot\dot{\phi}_x(t) \equiv 0.$$

Intérieur d'un domaine simplement connexe. Dans le cas d'un domaine borné simplement connexe à coins, la vitesse explose près des coins et nous cherchons à faire apparaître une simplification comme dans dans la méthode précédente, afin de passer la singularité à l'intérieur d'une intégrale. Pour ceci, nous utilisons les formules explicites de la loi de Biot-Savart (Chapitre 2.3.2) pour introduire la fonction courant associée à la vitesse :

$$L_1(t,x) := \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \ln\Big(\frac{|\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)|}{|\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)^*||\mathcal{T}(y)|}\Big)\omega(t,y)\,\mathrm{d}y.$$

Cependant, cette fonction tend vers zéro (au lieu de ∞) quand $x \to \partial\Omega$, et nous rajoutons donc un logarithme :

$$L(t) := -\ln|L_1(t,\phi_x(t))|,$$

et l'objectif est de démontrer que L reste borné. Comme les caractéristiques vérifient $\dot{\phi}_x(t) = (\nabla^\perp L_1)(t,\phi_x(t))$, nous calculons

$$L'(t) = -\frac{\partial_t L_1(t,\phi_x(t))}{|L_1(t,\phi_x(t))|}.$$

Il faut démontrer que $\partial_t L_1$ converge vers zéro aux endroits où L_1 s'annule et comparer les taux. Grâce à la forme précise de l'application conforme près du coin, nous avons démontré dans [Lac15b] que $\partial_t L_1(t,x)$ s'annule bien quand $x \to \partial\Omega$ à une vitesse $h(|L_1(t,x)|)$ (où $h(r) = r(1 - \ln r)$ si $r \in (0,1]$ et $h(r) = r$ sinon). Afin de conclure, nous avons supposé que ω^0 est de signe constant, ce qui permet de montrer que le bord est le seul endroit où L_1 s'annule. Sans cette condition de signe, il est possible que L_1 s'annule en plein milieu du domaine, et il n'est pas clair que $\partial_t L_1(t,x)$ s'annule au même endroit. Nous concluons enfin par une estimation de type Gronwall. Le théorème principal de [Lac15b] s'écrit alors

Théorème 4.3.1. *Soit Ω un domaine (borné simplement connexe) avec des angles supérieurs à $\pi/2$. Si $\operatorname{rot} u_0 \in L^\infty_c(\Omega)$ est positif (respectivement négatif), alors il existe une unique solution faible globale aux équations d'Euler dans Ω vérifiant*

$$u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)),\ \operatorname{rot} u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1 \cap L^\infty(\Omega)).$$

Cet article contient aussi une version dans les domaines extérieurs.

La partie difficile de cet article est donc la preuve que le tourbillon ne touche jamais le bord, qui est l'endroit où la vitesse n'est pas régulière.

4.4 Perspectives

Suite au dernier résultat, une des questions abordables est la nécessité de la condition de signe sur la vorticité pour démontrer que son support ne rencontre pas le bord en temps fini. Autrement dit, nous aimerions construire des exemples de domaine avec un coin d'angle supérieur à $\pi/2$ et de tourbillon initialement à support compact qui touche le coin en temps fini.

5

Stabilité pour les fluides visqueux

Résumé

Avec les conditions de non-glissement, la stabilité des équations de Navier-Stokes par rapport à la convergence des domaines (au sens de Hausdorff, et en conservant le même nombre d'obstacles) est bien plus facile à obtenir que pour les équations d'Euler. Nous discuterons de quels sont les obstacles qui sont effaçables et du lien avec leur capacité de Sobolev H^1. En particulier, nous étudierons le comportement asymptotique quand les obstacles se contractent vers des points en dimension deux (pour les obstacles fixes ou pour les solides se déplaçant sous l'influence du fluide), ou des courbes en dimension trois. Nous étudierons la limite simultanée viscosité évanescente et convergence de domaine, avec une application au domaine poreux et rugueux.

Inclus dans les articles [Lac15a, LM16b, LT17, GVLNR17].

5.1 Stabilité et singularité effaçable

La stabilité des équations vis à vis de l'approximation des domaines au sens de Hausdorff était difficile pour les équations d'Euler, car le contrôle d'une dérivée de la vitesse vient des bonnes propriétés du tourbillon, ce qui pose alors les problèmes de reconstruire la vitesse (loi de Biot-Savart) et de contrôler tous les termes dans cette décomposition (en particulier tous les champs harmoniques).

Au contraire, pour les équations de Navier-Stokes, le contrôle d'une dérivée de la vitesse vient de l'estimation d'énergie, et quitte à bien construire la donnée initiale, il est évident que les champs de vitesse u_n dans Ω_n sont uniformément bornés dans l'espace $L^\infty(0,T;L^2(\Omega_n)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega_n))$. Ainsi, si un domaine de la forme

$$\Omega_n := \widetilde{\Omega}_n \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{N} \overline{O_n^i}\Big)$$

converge vers

$$\Omega := \widetilde{\Omega} \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{C}^i\Big)$$

(voir le Chapitre 2.2) alors l'unique solution de Leray dans Ω_n converge vers l'unique solution de Leray dans Ω. En effet, l'estimation d'énergie permet d'avoir une limite faible-$*$, puis il suffit de montrer une convergence forte sur les supports des fonctions tests, c'est-à-dire sur les ensembles relativement compacts de Ω (voir le Chapitre 2.4.1). Une telle procédure a été écrite en détail dans [Lac15a] dans le cas d'un obstacle convergeant vers un autre obstacle en dimension trois, mais l'extension à plusieurs obstacles et/ou au domaine borné en dimension 2 ou 3 est directe. Cette stabilité est d'ailleurs moins étonnante, car l'existence et l'unicité dans les domaines irréguliers pour les solutions de Leray étaient déjà connues (voir [CDGG06]).

Si l'obstacle a une capacité de Sobolev H^1 strictement positive (voir le Chapitre 2.2), alors il est visible pour la topologie H^1, et en montrant que le champ de vitesse est dans H^1_0 de l'extérieur de l'obstacle, nous avons une vraie condition d'adhérence au bord du solide.

Par contre, si l'obstacle se contracte vers un compact qui a une capacité nulle, nous cherchons à montrer que les équations de Navier-Stokes sont vérifiées au voisinage de cet ensemble, c'est-à-dire que la singularité est effaçable (invisible) pour les fluides visqueux. En dimension deux, Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes ont bien démontré dans [ILFNL06] qu'un obstacle se contractant vers un point n'avait pas d'effet à la limite. Iftimie et Kelliher [IK09] ont généralisé à la dimension trois quand un petit obstacle se contracte vers un point.

Pour montrer qu'une singularité est effaçable, l'étape cruciale consiste à corriger les fonctions tests à support dans $\mathbb{R}^d$ pour quelles soient admissibles dans Ω_n puis d'avoir une bonne limite (dans H^1) quand on fait tendre le paramètre de correction vers zéro. Nous référons au Chapitre 2.4.2 pour les détails, mais nous rappelons que la procédure dans les deux articles précédents étaient de tronquer la fonction courant ψ qui s'annule au point où

l'obstacle se contracte, puis d'utiliser que ψ est petit dans un petit voisinage du point. Une telle procédure ne fonctionne pas dans le cas d'un arc de Jordan en dimension trois ou le cas de plusieurs obstacles en dimension deux ou trois.

Dans [Lac15a], nous avons tronqué directement les fonctions tests, puis ajouté une correction afin de récupérer la condition de divergence nulle. Grâce aux opérateurs de Bogovskiĭ (voir le Chapitre 2.4.2), nous savons qu'il existe des corrections qui vérifient des bonnes estimations H^1, ce qui nous a permis de montrer qu'une courbe compacte de $\mathbb{R}^3$ est aussi une singularité effaçable pour les équations de Navier-Stokes.

Comme expliqué dans le Chapitre 2.4.2, ce type de preuve se fait en trois étapes :

- construire une fonction test Φ_η qui est une approximation compatible d'une fonction test Φ ;
- à η fixé, passer à la limite $n \to \infty$ dans les équations de Naviers-Stokes pour cette fonction test Φ_η (par des techniques expliquées dans le Chapitre 2.4.1), et ainsi démontrer que le champ limite vérifie les équations de Navier-Stokes loin de la singularité ;
- passer à la limite $\eta \to 0$ et montrer que les équations de Navier-Stokes sont aussi vérifiées au voisinage de la singularité.

En collaboration avec T. Takahashi, nous avons étudié le cas d'un petit solide se déplaçant dans un fluide visqueux (l'équivalent du problème étudié dans le Chapitre 3.3 pour les équations d'Euler). Pour débuter la procédure précédente, il faut localiser la position du solide pour pouvoir corriger les fonctions tests au bon endroit. Nous devons donc d'abord établir une convergence de h_ε (le centre de masse du solide). Si la particule est massive (c'est-à-dire $m_\varepsilon = m_1$), l'inégalité d'énergie donne directement une estimation uniforme de h'_ε et par conséquent une convergence forte dans $C([0,T])$ de h_ε vers h. Si la densité du solide est fixe, la masse tend vers zéro et l'estimation d'énergie ne suffit plus. Dans [LT17], nous avons relié le problème du petit solide au comportement en temps long d'un solide de taille 1 dans un fluide visqueux, via la propriété de changement d'échelle pour les équations de Navier-Stokes $u^\varepsilon(t,x) = \varepsilon^{-1}u^1(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x)$. Comme expliqué dans le Chapitre 6, le comportement en temps long dans le cas d'un solide circulaire a été étudié en collaboration avec S. Ervedoza et M. Hillairet [EHL14]. Dans cet article, nous obtenons les estimations optimales de décroissance du semi-groupe de Stokes, c'est-à-dire, avec des taux correspondant au noyau de la chaleur (qui sont invariants par rapport au changement d'échelle parabolique). Avec T. Takahashi, nous avons alors montré par une méthode de point fixe que ces estimations uniformes sur l'opérateur de Stokes s'appliquaient aux solutions de Navier-Stokes pour un solide circulaire de taille ε, ce qui nous a enfin permis d'obtenir la convergence de h_ε. Nous avons finalement suivi la méthode expliquée ci-dessus pour montrer qu'un petit disque qui se contracte vers un point n'a pas d'influence à la limite sur un fluide visqueux, c'est-à-dire que u_ε converge vers l'unique solution de Leray dans $\mathbb{R}^2$.

5.2 Viscosité évanescente et perturbation du domaine

D'un point de vue physique, il est important d'étudier les fluides dans les domaines poreux ou près des bords rugueux, dans le régime de grands nombres de Reynolds : $\mathrm{Re} = \frac{1}{\nu} \gg 1$. Loin des bords, l'effet de la viscosité est négligeable sur de tels fluides, mais près des bords, des couches limites visqueuses apparaissent et peuvent déstabiliser le fluide. Comme nous le verrons, les limites faibles viscosités et domaine poreux ou rugueux ne commutent pas. Il est alors crucial d'identifier les régimes où il est possible de négliger ces couches limites et d'utiliser les solutions d'Euler comme approximation.

5.2.1 Domaine poreux

Nous reprenons la configuration du domaine poreux considérée dans le Chapitre 3.2 : nous avons dans la direction horizontale N_ε obstacles de taille ε, à distance d_ε et répartis sur le segment unité $[0,1] \times \{0\}$, tandis que dans la direction verticale, nous traiterons les cas où :

- on a une seul ligne d'obstacle, c'est-à-dire que les inclusions sont concentrées sur le segment unité ;
- on a le même nombre dans les deux directions, c'est-à-dire que les inclusions recouvrent le carré unité.

Nous considérons $u_{\nu,\varepsilon}$ la solution de Navier-Stokes pour viscosité ν dans le domaine perforé Ω_ε avec condition de non-glissement ($u_{\nu,\varepsilon} = 0$ au bord).

Comme expliqué dans le Chapitre 3.2, un domaine poreux a plus facilement un impact sur un fluide visqueux que sur un fluide idéal. En particulier pour $\varepsilon \ll d_\varepsilon$ (seul cas traité pour le système de Navier-Stokes), le domaine poreux n'a pas d'influence pour le problème d'Euler tandis que pour celui de Navier-Stokes, il peut apparaître des systèmes de type Darcy-Brinkman. Ainsi, prendre d'abord la limite $\varepsilon \to 0$ donne des correcteurs linéaires, et le passage viscosité vers zéro est possible [KTW11, HW14]. Si le domaine poreux est encore plus espacé ($d_\varepsilon \gg |\ln \varepsilon|^{-1/2}$ si les inclusions sont distribuées sur le carré et $d_\varepsilon \gg |\ln \varepsilon|^{-1}$ si elles sont concentrées sur le segment), alors nous retrouvons la solution de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^2$ quand $\varepsilon \to 0$, et la limite des solutions de Navier-Stokes vers les solutions d'Euler quand $\nu \to 0$ est connue depuis longtemps (voir [Swa71, Kat72, Kat86, Mas07]). Au contraire, la limite $\nu \to 0$ pour ε fixé est un problème ouvert classique, relié à l'instabilité de l'équation de Prandtl (parmi une grande littérature, voir par exemple [Gre00, GVD10, GN11, GVN12, Mae14, GGN16] et les références dans ces articles).

Les limites viscosités évanescentes et domaine poreux ne commutent donc pas, et nous cherchons une condition suffisante où il est possible de prévenir la formation de fortes couches limites. Pour plus de motivation physique concernant la limite simultanée $\varepsilon, \nu \to 0$, nous conseillons les introductions de [MP99] et [ILFNL09]. Mathématiquement, nous pouvons espérer que le passage à limite soit faisable si $\varepsilon \ll \nu$, c'est-à-dire que le domaine poreux disparaît plus vite que n'apparaît les couches limites.

En suivant la preuve du critère de Kato[1] [Kat84a, TW97, Wan01], Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes [ILFNL09] ont montré la convergence vers la solution des équations d'Euler dans $\mathbb{R}^2$ dans le cas d'un obstacle se contractant vers un point, à la condition $\varepsilon \lesssim \nu$. Ici aussi, ils ont utilisé la technique de troncature de la fonction courant, ce qui ne peut fonctionner que pour un seul petit obstacle.

En collaboration avec A. Mazzucato, nous avons généralisé à plusieurs obstacles, en cherchant un critère faisant intervenir d_ε et ε. Le principal théorème est le suivant, où μ est un paramètre qui vaut 1 dans le cas où les inclusions sont distribuées sur le carré unité, et vaut 0 si elles sont concentrées sur le segment unité.

Théorème 5.2.1. *Soit $\omega^0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, et u_E la solution des équations d'Euler dans le plan entier avec vitesse initiale $u^0 = K_{\mathbb{R}^2}[\omega^0]$. Soit $u_{\nu,\varepsilon}$ la solution des équations de Navier-Stokes dans le domaine perforé Ω_ε (pour $\varepsilon \lesssim d_\varepsilon$) avec vitesse initiale u_ε^0 (associée au tourbillon ω^0 et circulations nulles). Alors, il existe une constante A dépendant seulement de $\mathcal{C}$ (la forme de l'obstacle) telle que si*

$$\frac{\varepsilon}{d_\varepsilon^{(1+\mu)/2}} \leqslant \frac{A\nu}{\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^2)}},$$

et si ω^0 est supporté dans Ω_ε, alors pour tout $T > 0$ nous avons

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u_{\nu,\varepsilon} - u_E\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant B_T \frac{\sqrt{\nu}}{d_\varepsilon^{(1+\mu)/2}}, \tag{5.2.1}$$

où B_T est une constante qui ne dépend que de T, $\|\omega^0\|_{L^1\cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}$ et $\mathcal{C}$.

Dans le cas d'un nombre fini d'obstacles se contractant vers des points arbitrairement placés (c'est-à-dire $d_\varepsilon = \mathcal{O}(1)$), nous retrouvons la condition suffisante $\varepsilon \lesssim \nu$ pour obtenir la convergence vers la solution d'Euler dans le plan.

Dans les domaines poreux, le facteur additionnel $\frac{1}{d_\varepsilon^{(1+\mu)/2}}$ dans (5.2.1) peut être vu comme un effet de l'homogénéisation (relié à la norme L^2 et le nombre d'obstacles).

Dans le cas des obstacles distribués sur le carré ($\mu = 1$), si nous prenons $d_\varepsilon = 1/\sqrt{|\ln\varepsilon|}$ qui est la distance critique où il apparaît des termes homogénéisés pour le système de Navier-Stokes, et si la viscosité ν satisfait $C\varepsilon\sqrt{|\ln\varepsilon|} \leqslant \nu \ll 1/|\ln\varepsilon|$ (par exemple : $\nu = \varepsilon^\alpha$ avec $\alpha \in (0,1)$), alors nous avons la convergence de $u_{\nu,\varepsilon} \to u_E$. Nous avons la même conclusion pour des distances plus petites que la distance critique : nous avons convergence vers la solution d'Euler si $\varepsilon \ll d_\varepsilon^3$ (par exemple : $d_\varepsilon = \varepsilon^\alpha$ avec $\alpha < 1/3$ et $\varepsilon^{1-\alpha} \leqslant \nu \ll \varepsilon^{\alpha/2}$).

Comme dans le critère de Kato, l'objectif est de corriger la solution d'Euler pour qu'elle vérifie la condition de Dirichlet sur le bord de Ω_ε. Cette correction est encore construite à l'aide des opérateurs de Bogovskiĭ. Le champ de vitesse ainsi modifié s'annule donc au bord, ce qui nous permet de dériver une estimation d'énergie sur la différence entre la solution de Navier-Stokes et cette correction. La preuve du théorème découle alors d'une estimation fine des termes venant de la correction.

[1] qui implique la limite vers la solution d'Euler quand $\nu \to 0$.

5.2.2 Domaine rugueux

Il est aussi physiquement intéressant de comprendre l'interaction entre les fluides peu visqueux et les surfaces rugueuses. La rugosité est modélisée par un domaine avec un bord oscillant de la forme :

$$\Omega_\varepsilon := \{x = (x_1, x_2), \quad x_1 \in \mathbb{T},\ x_2 > \varepsilon^{1+\alpha}\eta(x_1/\varepsilon)\}$$

où $\eta = \eta(y_1)$ est une fonction positive régulière de $y_1 \in \mathbb{T}$. Dans cette théorie, nous avons besoin de solutions très régulières, et il est laborieux de construire un ensemble de données initiales qui convergent quand $\varepsilon \to 0$ et qui engendrent des solutions régulières pour chaque ε. Pour simplifier, nous supposons que la donnée initiale est nulle et que nous avons une force extérieure commune pour tous les ε

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}, H^\infty(\Omega^0)), \quad f|_{t<0} = 0,$$

qui génère le déplacement :

$$\begin{aligned} \partial_t u_{\nu,\varepsilon} + u_{\nu,\varepsilon} \cdot \nabla u_{\nu,\varepsilon} + \nabla p_{\nu,\varepsilon} - \nu \Delta u_{\nu,\varepsilon} &= f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \operatorname{div} u_{\nu,\varepsilon} &= 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_{\nu,\varepsilon} \cdot n^\varepsilon = 0, \quad D(u_{\nu,\varepsilon}) n^\varepsilon \cdot \tau_\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ u_{\nu,\varepsilon}|_{t<0} &= 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon. \end{aligned}$$

De par l'incompatibilité de la condition de non-glissement (Dirichlet) et les grands nombres de Reynolds, nous considérons ici la condition au bord usuelle de type Navier : la première condition traduit l'imperméabilité du bord, et la seconde exprime que la contrainte de cisaillement est nulle où $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$ est le tenseur de déformation. Nous pourrions aussi considérer des conditions de Navier plus générales.

Dans le cas des conditions de Navier, il y a quand même des couches limites, mais d'amplitudes inférieures à celles de Prandtl. La limite $\nu \to 0$ (à ε fixé) vers la solution des équations d'Euler peut être établie, soit par des estimations d'énergie directes sur $u_{\nu,\varepsilon} - u_{E,\varepsilon}$, soit en considérant le tourbillon. En effet, la condition de Navier peut s'écrire $\omega_{\nu,\varepsilon}|_{\partial\Omega} = \kappa_\varepsilon u_{\nu,\varepsilon} \cdot \tau|_{\partial\Omega}$, avec κ_ε la courbure du bord. Ceci permet de contrôler $\omega_{\nu,\varepsilon}$ grâce à des principes du maximum (voir [CMR98, IS11, MR12] pour plus de détails). Nous pouvons remarquer ici que ces méthodes vont échouer à décrire la limite simultanée $(\nu, \varepsilon) \to 0$, car la courbure dans notre cas est

$$\kappa_\varepsilon = \frac{\varepsilon^{\alpha-1}\eta''}{(1 + \varepsilon^\alpha \eta')^{3/2}},$$

qui est non bornée quand $\varepsilon \to 0$ (pour $\alpha \in (0, 1)$). Dans ce cas, nous avons donc une vorticité $\omega_{\nu,\varepsilon}$ qui n'est pas uniformément bornée près du bord rugueux.

Une observation qui traduit la difficulté du problème est que pour $\alpha = 0$, les limites $\nu \to 0$ et $\varepsilon \to 0$ ne commutent pas. Si nous considérons $\nu \to 0$ pour ε fixé, nous retrouvons la solution d'Euler dans le domaine rugueux Ω_ε. Or Ω_ε converge au sens de Hausdorff vers le domaine plat Ω_0 et nous avons alors vu dans le Chapitre 3.1 que ceci implique la

convergence vers la solution d'Euler dans Ω_0. Au contraire, si nous considérons d'abord la limite $\varepsilon \to 0$ pour ν fixé, alors le système limite est le problème de Navier-Stokes dans Ω_0, *avec la condition de non-glissement sur* $\partial\Omega_0$ (voir [CDFCS03b, BFNW08b, DGV11, BB12]. Nous retombons sur le problème classique si nous essayons ensuite de faire tendre ν vers zero. A l'opposé des domaines poreux, nous nous attendons à une possible limite quand $\nu \ll \varepsilon$.

Pour une dernière motivation par rapport aux profils des couches limites, nous renvoyons à l'article original [GVLNR17].

Ainsi, en collaboration avec D. Gérard-Varet, T. Nguyen et F. Rousset, nous avons considéré α de la forme

$$\alpha = \frac{1}{N_0}, \qquad \text{avec } N_0 \text{ un nombre entier arbitrairement grand,} \tag{5.2.2}$$

et comme $\alpha < 1$, nous sommes exactement dans le cas où la courbure explose quand $\varepsilon \to 0$.

Nous avons tout d'abord construit une bonne approximation des équations d'Euler dans le domaine Ω_ε, faisant intervenir des couches limites dues à la rugosité.

Proposition 5.2.2. *Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, H^\infty(\Omega_0))$ avec $f|_{t<0} = 0$, et $u_E \in C^\infty(\mathbb{R}, H^\infty(\Omega_0))$ la solution des équations d'Euler dans le domaine plat Ω_0. Soient s, M des nombres arbitrairement grands. Il existe alors une vitesse et une pression approchées*

$$u^{\text{app}} = u_E + u^{\text{app}}_{\text{int}} + u^{\text{app}}_{\text{bl}}, \qquad p^{\text{app}} = p_E + p^{\text{app}}_{\text{int}} + p^{\text{app}}_{\text{bl}}$$

satisfaisant les équations

$$\begin{aligned}
\partial_t u^{\text{app}} + (u^{\text{app}} \cdot \nabla) u^{\text{app}} + \nabla p^{\text{app}} &= f + R^{\text{app}}_{\text{int}} + R^{\text{app}}_{\text{bl}} && \textit{dans } \Omega_\varepsilon, \\
\operatorname{div} u^{\text{app}} &= 0 && \textit{dans } \Omega_\varepsilon, \\
u^{\text{app}} \cdot n^\varepsilon &= 0 && \textit{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\
u^{\text{app}}|_{t<0} &= 0 && \textit{dans } \Omega_\varepsilon,
\end{aligned}$$

ainsi que les estimations suivantes, pour tout $T_0 > 0$, $\gamma \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{Z}^2$ avec $|\beta| \leqslant s$:

$$\begin{cases}
\sup\limits_{t\in[0,T_0]} \|\partial^\beta u^{\text{app}}_{\text{int}}\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} + \|\partial^\beta u^{\text{app}}_{\text{int}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \lesssim \varepsilon^{\alpha+1}, \quad \sup\limits_{t\in[0,T_0]} \|e^{\gamma x_2/\varepsilon}\varepsilon^{|\beta|}\partial^\beta u^{\text{app}}_{\text{bl}}\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \lesssim \varepsilon^{\alpha}, \\
\sup\limits_{t\in[0,T_0]} \|e^{\gamma x_2/\varepsilon}\varepsilon^{|\beta|}\partial^\beta u^{\text{app}}_{\text{bl}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \lesssim \varepsilon^{\alpha+\frac{1}{2}}, \quad \sup\limits_{t\in[0,T_0]} \|e^{\gamma x_2/\varepsilon}\varepsilon^{|\beta|}\partial^\beta \operatorname{rot} u^{\text{app}}_{\text{bl}}\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \lesssim \varepsilon^{M}, \\
\sup\limits_{t\in[0,T_0]} \|\partial^\beta R^{\text{app}}_{\text{int}}\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} + \|\partial^\beta R^{\text{app}}_{\text{int}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \lesssim \varepsilon^{M}, \\
\sup\limits_{t\in[0,T_0]} \|e^{\gamma x_2/\varepsilon}\varepsilon^{|\beta|}\partial^\beta R^{\text{app}}_{\text{bl}}\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \lesssim \varepsilon^{\alpha+1}, \quad \sup\limits_{t\in[0,T_0]} \|e^{\gamma x_2/\varepsilon}\varepsilon^{|\beta|}\partial^\beta R^{\text{app}}_{\text{bl}}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \lesssim \varepsilon^{\alpha+\frac{3}{2}}.
\end{cases}$$

Cette proposition est cohérente avec les résultats de stabilité du Chapitre 3.1, où nous rappelons la convergence de la solution d'Euler $u_{E,\varepsilon}$ dans Ω_ε vers la solution d'Euler u_E dans Ω_0, pour la topologie L^2 (pour tout $\alpha \geq 0$). Mais ici, nous utilisons la structure

spéciale du bord rugueux pour obtenir une description plus précise : $u_{\text{int}}^{\text{app}}$ est une correction macroscopique de u_E, tandis que $u_{\text{bl}}^{\text{app}}$ décrit la couche limite qui est presque de rotationnel nul.

La seconde étape de notre approche consiste à dériver des estimations de stabilité de l'approximation précédente par l'évolution de Navier-Stokes. Comme l'approximation a un gradient non borné quand $\varepsilon \to 0$, cette stabilité ne vient pas d'une estimation d'énergie standard et d'un lemme de Gronwall sur $v = u_{\nu,\varepsilon} - u^{\text{app}}$. Dans l'estimation L^2 du champ de vitesse v, nous écrivons le "mauvais" terme comme

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (v \cdot \nabla u^{\text{app}}) \cdot v = \int_{\Omega_\varepsilon} v \cdot (u^{\text{app}})^\perp \operatorname{rot} v$$

ce qui est borné par le produit des normes L^2 de la vitesse et du tourbillon. Ceci nous oblige donc à chercher une estimation L^2 sur la vorticité, ce qui n'est pas évident car la condition au bord explose quand la courbure tend vers l'infini. Nous évitons alors ces mauvaises conditions au bord en développant des estimations à poids, avec un poids qui est de type couche limite et qui s'annule au bord. Dans cette estimation, la petitesse de $\operatorname{rot} u_{\text{bl}}^{\text{app}}$ est cruciale. La combinaison de ces deux estimations L^2 donne un résultat de stabilité, *sous une hypothèse de petitesse de* ∇v dans L^∞. Nous démontrons dans la dernière partie de [GVLNR17] que cette hypothèse est vraie sur tout intervalle de temps $[0, T]$, en combinant un principe du maximum pour les équations paraboliques, des estimations des dérivées temporelles et des inégalités harmoniques dans les domaines rugueux. En prêtant bien attention à toutes les dépendances en ε dans ces inégalités et dans les injections de Sobolev, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 5.2.3. *Soient f, u_E, $(u^{\text{app}}, p^{\text{app}})$ comme dans la Proposition 5.2.2. Soit $T_0 > 0$, $N_1 \in \mathbb{N}^*$ arbitrairement grand. Il existe ε_0 tel que pour tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, et tout ν vérifiant*

$$\varepsilon^{N_1} \lesssim \nu \lesssim \varepsilon^7, \tag{5.2.3}$$

l'unique solution $u_{\nu,\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}, H^\infty(\Omega_\varepsilon))$ des équations de Navier-Stokes vérifie

$$\sup_{0 \leq t \leqslant T_0} \left(\varepsilon^{-1/2} \|(u_{\nu,\varepsilon} - u^{\text{app}})(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|(u_{\nu,\varepsilon} - u^{\text{app}})(t)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon \|\operatorname{rot}(u_{\nu,\varepsilon} - u^{\text{app}})(t)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \right) \lesssim \varepsilon^\alpha.$$

La condition (5.2.3) nous est nécessaire pour fermer notre argument de bootstrap (voir l'article pour l'argument technique).

Le corollaire principal est la convergence vers la solution d'Euler dans le domaine plat :

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T_0} \left(\|u_{\nu,\varepsilon} - u_E\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u_{\nu,\varepsilon} - u_E\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \right) \to 0,$$

quand $(\varepsilon, \nu) \to 0$, dans le régime $\varepsilon^{N_1} \lesssim \nu \lesssim \varepsilon^7$.

5.3 Perspectives

Dans le cas d'un petit solide se déplaçant dans un fluide visqueux, nous avons bien la convergence des trajectoires vers une trajectoire limite $h^\varepsilon \to h$, mais nous ne pouvons pas prétendre que celle si correspond à la vitesse du fluide (c'est-à-dire que nous ne savons pas démonter que $h'(t) = u(t, h(t))$ où u est la solution de Leray dans $\mathbb{R}^2$). Ceci est une grosse différence par rapport aux travaux pour les équations d'Euler (voir le Chapitre 3.3), où un tourbillon dans L^p donne des estimations $W^{1,p}$ pour le champ de vitesse, ce qui s'injecte dans L^∞ quand $p > 2$. Pour les équations d'ordre deux, l'espace critique pour étudier les petits obstacles est H^1 en dimension deux, ce qui est l'espace limite où nous n'avons pas l'injection dans L^∞. Pourtant, quand la longueur du bord tend vers zéro, c'est bien d'une estimation continue que nous avons besoin. Une piste intéressante est l'article de Chemin et Gallagher [CG06] où il est remarqué que la non-linéarité dans les équations de Navier-Stokes permet d'assurer que la solution de Leray u n'appartient pas seulement à $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^2))$, mais aussi à $L^2(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^2))$. Ceci est exactement ce que nous avons besoin, mais cet argument est basé sur une analyse de Fourier dans $\mathbb{R}^2$. L'adaptation au problème fluide structure ne paraît donc pas si évidente, car il faudrait de plus démontrer l'uniformité de cette estimation quand la taille du disque tend vers zéro.

Une autre question ouverte suite aux travaux présentés dans ce chapitre est le cas $\alpha = 0$ pour la limite simultanée faible viscosité-rugosité (voir le Chapitre 5.2.2). Même si dans le résultat actuel $\alpha = 1/N_0$ avec $N_0 \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand, nous utilisons régulièrement que $\varepsilon^\alpha \ll 1$ pour contrecarrer les diverses constantes et pertes logarithmiques qui apparaissent dans les injections. En effet, pour fermer les estimations du genre

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{N}_{\nu,\varepsilon}}{\mathrm{d}t} + \nu\|\nabla u_{\nu,\varepsilon}\|_{L^2}^2 \leqslant C_1\mathcal{N}_{\nu,\varepsilon} + C_2\nu\varepsilon^\alpha|\ln(\varepsilon^{K_1}\nu^{K_2})|\|\nabla u_{\nu,\varepsilon}\|_{L^2}^2,$$

nous utilisons que $C_2\varepsilon^\alpha|\ln(\varepsilon^{K_1}\nu^{K_2})| \leqslant 1/2$ pour ε assez petit (à condition que $\nu \geqslant \varepsilon_1^N$). Par conséquent, le cas $\alpha = 0$ rajoutera de nombreuse difficultés techniques et nécessitera des nouveaux arguments.

6

Comportement en temps long pour les fluides visqueux

Résumé

Par le changement d'échelle parabolique

$$u_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon^2} u_1(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon})$$

nous observons que u_ε vérifie les équations de Navier-Stokes à l'extérieur de $\varepsilon\mathcal{C}$ si et seulement si u_1 vérifie les équations de Navier-Stokes à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Et ceci, même pour le problème fluide-solide, en considérant $m_\varepsilon = \varepsilon^2 m_1$ et $\mathcal{J}_\varepsilon = \varepsilon^4 \mathcal{J}_1$. Ainsi, le problème petit obstacle/petit solide est relié au problème de comportement en temps long des solutions de Navier-Stokes à l'extérieur d'un compact de taille un.

Nous reprenons dans ce chapitre quelques techniques classiques pour déterminer le terme prépondérant de u_1 dans la limite $t \to \infty$.

Inclus dans les articles [IKL11, EHL14, IKL14].

Pour les problèmes paraboliques dans $\mathbb{R}^d$ ou dans les domaines extérieurs, la stratégie générale dans l'étude du comportement en temps grand est de bien comprendre la décroissance du semi-groupe associé au problème linéaire, puis d'essayer de contrôler le terme non-linéaire en le voyant comme un terme source dans la formule de Duhamel.

Dans une première partie, nous rappelons quelques méthodes standard pour obtenir les taux de décroissance $L^p - L^q$ optimaux, c'est-à-dire les taux correspondant à la solution de la chaleur :

$$\|G(t) * u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant K_1(p,q)(\nu t)^{\frac{d}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}, \qquad \forall 1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$$
$$\|\nabla G(t) * u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant K_2(p,q)(\nu t)^{\frac{d}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}\|u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}, \qquad \forall 1 < q \leqslant p < \infty,$$

avec $G(t,x) = (4\pi\nu t)^{-d/2}e^{-\frac{|x|^2}{4\nu t}}$.

6.1 Techniques classiques

6.1.1 Equation de convection diffusion sans pression

Une première partie de la littérature concerne les équations de la forme transport diffusion :

$$\partial_t u - \nu\Delta u + a \cdot \nabla u = 0,$$

où $\operatorname{div} a = 0$. A priori, nous pouvons multiplier cette équation par $|u|^{p-2}u$ pour obtenir que toutes les normes L^p sont décroissantes si $u_0 \in L^p$:

$$\frac{d}{dt}\left(\|u\|_{L^p}^p\right) + \frac{4(p-1)}{p}\int |\nabla(|u|^{p/2})|^2 \leqslant 0.$$

En fait, nous pouvons aller même plus loin : par injection de Sobolev et interpolation, nous avons en dimension deux

$$\|Y\|_{L^2}^4 \leqslant C\|Y\|_{L^1}^2\|\nabla Y\|_{L^2}^2,$$

ci qui donne pour $Y = |u|^q$

$$\left(\|u\|_{L^{2q}}^{2q}\right)^2 \leqslant C\left(\|u\|_{L^q}^q\right)^2\|\nabla(|u|^q)\|_{L^2}^2.$$

Nous injectons ceci dans l'estimation a priori pour $p = 2q$, et nous utilisons le fait que la norme L^q de u décroit :

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|_{L^{2q}}^{2q}\right) + \frac{2q-1}{8Cq\|u_0\|_{L^q}^{2q}}\left(\|u(t)\|_{L^{2q}}^{2q}\right)^2 \leqslant 0.$$

Il existe donc C indépendant de $q \in [1,\infty)$ tel que

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|_{L^{2q}}^{2q}\right) + \frac{1}{C\|u_0\|_{L^q}^{2q}}\left(\|u(t)\|_{L^{2q}}^{2q}\right)^2 \leqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$t\|u(t)\|_{L^{2q}}^{2q} \leqslant C\left(\|u_0\|_{L^q}^q\right)^2.$$

Ceci correspond à l'estimation $L^p - L^q$ pour $p = 2q$ (en dimension deux). Un argument d'itération de Véron [Vér79] permet d'en déduire que

$$t^{1/q}\|u(t)\|_{L^\infty} \leqslant C\|u_0\|_{L^q}, \quad t > 0.$$

Par interpolation de L^p entre L^q et L^∞, nous concluons que u vérifie les même estimations $L^p - L^q$ que la solution de la chaleur. La dimension $d \geqslant 3$ se fait de la même manière suite à l'interpolation de L^2 entre L^1 et L^{2^*}, où 2^* est l'exposant dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.

Cette méthode de multiplicateur (due à Nash [Nas58]) fut utilisée pour l'équation de transport-diffusion par Escobedo et Zuazua [EZ91], pour les domaines poreux par Vázquez [Váz03], pour un modèle fluide particule 1D par Vázquez et Zuazua [VZ03, VZ06] (en considérant l'équation de Burger visqueux) et pour un modèle chaleur-solide en dimension $d \geqslant 2$ par Munnier et Zuazua [MZ05] (ressemblant au problème fluide-solide, mais sans terme non-linéaire et sans pression).

En effet, ces méthodes ne s'appliquent pas directement aux fluides incompressibles à cause du terme de pression. Pour L^2, nous pouvons écrire que $\int \nabla p \cdot u = 0$ grâce à la condition de divergence nulle, mais cette simplification ne marche pas pour $q \neq 2$ et l'intégrale $\int \nabla p \cdot (|u|^{q-2}u)$ est la principale obstruction à cette méthode.

6.1.2 Résolution de la pression par la transformée de Fourier

Il y a aussi de nombreux travaux sur le comportement en temps long des solutions des équations de Navier-Stokes dans le plan entier. Une des approches est d'écrire la divergence de l'équation du mouvement :

$$\operatorname{div}(u \cdot \nabla u) = -\Delta p$$

et d'utiliser la décomposition de Fourier pour déduire des estimations sur la pression. L'objectif est de mettre la pression et le terme non-linéaire comme un terme source de l'équation de la chaleur pour écrire une formule de Duhamel :

$$u(t) = G(t) * u_0 - \int_0^t G(t-s) * [(\mathrm{Id} + \nabla\Delta^{-1}\operatorname{div})u \cdot \nabla u](s)\,\mathrm{d}s$$

et d'en déduire que l'intégrale tend plus vite vers 0 que la solution de la chaleur (voir Schonbek [Sch85], Wiegner [Wie87] et Carpio [Car94]).

Une telle approche est hélas difficile à étendre dans des domaines à bord.

6.1.3 Equation du tourbillon

L'autre méthode classique pour éliminer la pression est de considérer l'équation en tourbillon :

$$\partial_t\omega + u \cdot \nabla\omega - \nu\Delta\omega = 0.$$

Dans le plan entier, cette équation de convection diffusion donne la décroissance de toutes les normes L^p de la vorticité. Ainsi, pour $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, telle que $\int \omega_0 \neq 0$, Gallay et Wayne ont montré dans [GW05] que le tourbillon se comporte en temps grand comme le noyau de la chaleur :

$$\left(\int \omega_0\right) G(t,x).$$

Si ω_0 est régulier et à support compact, alors le champ de vitesse associé est d'énergie infinie, car

$$u_0(x) = K_{\mathbb{R}^2}[\omega_0] = \frac{\int \omega_0}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2} + \mathcal{O}_{|x|\to\infty}\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big).$$

Nous sommes dans le cas où $u_0 \in L^{2,\infty} \cap L^p(\mathbb{R}^2)$ pour tout $p > 2$, où $L^{2,\infty}$ est l'espace de Marcinkiewicz. En fait, Gallay et Wayne ont aussi montré que la vitesse converge en grand temps vers $(\int \omega_0) u_{LB}$, où u_{LB} est le champ de vecteurs de Lamb-Oseen (qui correspond à $K_{\mathbb{R}^2}[G(t,\cdot)]$) :

$$u_{LB}(t,x) := \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}\Big(1 - e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\Big) \tag{6.1.1}$$

ce qui n'est jamais d'énergie finie.

Néanmoins, dans un domaine à bord, la condition aux bords sur la vorticité est mauvaise : de type condition de Robin avec des coefficients non dissipatifs. Par conséquent, l'utilisation de la vorticité est difficile dans les domaines extérieurs, par exemple, il n'est toujours pas clair que les normes L^p du tourbillon restent bornées.

6.2 Problème de Stokes

Dans un domaine extérieur, nous conservons la pression dans le problème linéaire, et nous écrirons la formule de Duhamel associée au semi-groupe de Stokes plutôt que celui de la chaleur.

Nous commençons par écrire ce problème de Stokes pour le problème fluide-solide, quand le mobile est un disque qui bouge sous l'influence du fluide visqueux (le cas d'un obstacle fixe est le cas particulier où $h(t) = h_0$ et $r(t) = 0$). Pour les solides circulaires $B_0 := \overline{B(0,1)}$, Takahashi et Tucsnak [TT04] ont travaillé dans le référentiel du solide

$$v(t,x) = u(t, x - h(t)), \qquad \tilde{p}(t,x) = p(t, x - h(t)), \qquad \ell(t) = h'(t).$$

Ainsi le système de fluide-structure s'écrit dans ces nouvelles variables

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Big((v-\ell)\cdot\nabla\Big)v - \nu\Delta v + \nabla\tilde{p} = 0 \qquad \text{pour } (t,x) \in (0,\infty)\times\mathcal{F}_0, \tag{6.2.1}$$

$$\operatorname{div} v = 0 \qquad \text{pour } (t,x) \in (0,\infty)\times\mathcal{F}_0, \tag{6.2.2}$$

$$v(t,x) = \ell(t) + r(t)x^\perp \qquad \text{pour } (t,x) \in (0,\infty)\times\partial B_0, \tag{6.2.3}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} |v(t,x)| = 0, \qquad \text{pour } t \in (0,\infty), \tag{6.2.4}$$

$$m\ell'(t) = -\int_{\partial B_0} \Sigma n \, \mathrm{d}s, \qquad \text{pour } t \in (0,\infty), \tag{6.2.5}$$

$$\mathcal{J} r'(t) = -\int_{\partial B_0} x^\perp \cdot \Sigma n \, \mathrm{d}s, \qquad \text{pour } t \in (0,\infty), \tag{6.2.6}$$

$$v|_{t=0} = v_0 \qquad \text{pour } x \in \mathcal{F}_0, \tag{6.2.7}$$

$$\ell(0) = \ell_0,\ \omega(0) = \omega_0, \tag{6.2.8}$$

où $\mathcal{F}_0 := \mathbb{R}^2 \setminus B_0$ et $\Sigma = -\tilde{p}\,\mathrm{Id} + 2\nu D(v)$.

Ici, le système linéarisé de Stokes s'écrit comme le système précédent où on remplace (6.2.1) par l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \nabla \tilde{p} = 0 \text{ pour } (t,x) \in (0,\infty) \times \mathcal{F}_0. \tag{6.2.9}$$

Dans un domaine extérieur fixe, le problème de Stokes s'écrit plus simplement, sous la forme (6.2.9) avec (6.2.2), (6.2.4) et la condition de non glissement $v(t,x) = 0$ pour $(t,x) \in (0,\infty) \times \partial B_0$. Avec cette condition de Dirichlet, les estimations optimales de décroissance $L^p - L^q$ ont été obtenues par des méthodes de résolvante par Maremonti et Solonnikov [MS97] puis Dan et Shibata [DS99a, DS99b]. Malheureusement, ces estimations n'avaient pas encore été établies pour le problème fluide-structure, car les conditions au bord ne sont plus identiquement nulles.

En collaboration avec S. Ervedoza et M. Hillairet, nous avons décomposé le champ de vitesse $v = \nabla^\perp \psi$ (où $\psi(x) = \frac{1}{2}\omega|x|^2 + \ell \cdot x^\perp$ dans B_0) en harmonique sphérique :

$$\psi(\rho,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(\rho)\cos(k\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(\rho)\sin(k\theta), \quad \forall (\rho,\theta) \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi).$$

Puis nous avons défini

$$v = w e_\theta + \nabla^\perp[\psi\cos(\theta)] + \nabla^\perp[\phi\sin(\theta)] + v_R. \tag{6.2.10}$$

Nous avons alors remarqué que le reste ne voyait pas la condition au bord non nulle, c'est-à-dire que v_R vérifie le problème de Stokes avec condition de Dirichlet dans le domaine fixe $\mathcal{F}_0$. Les estimations $L^p - L^q$ découlent donc des travaux précédents [MS97, DS99a, DS99b]. Nous avons ensuite montré que le mode zéro ne voyait pas la pression, c'est-à-dire que w vérifie une équation de type chaleur sans terme de pression (avec une condition au bord dynamique dissipative). Nous appliquons la méthode des multiplicateurs (voir le Chapitre 6.1.1) pour prouver que cette partie vérifie aussi les estimations $L^p - L^q$ optimales. Les termes difficiles

sont les modes un, qui mélangent la pression et des conditions aux bords non nulles :

$$\begin{aligned}
\partial_t\psi + \nu\left(-\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho\psi) + \frac{1}{\rho^2}\psi\right) &= -\rho\partial_\rho q_1 \qquad t \geqslant 0,\ \rho \geqslant 1;\\
\partial_t\partial_\rho\psi + \nu\partial_\rho\left(-\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho\psi) + \frac{1}{\rho^2}\psi\right) &= -\frac{q_1}{\rho} \qquad t \geqslant 0,\ \rho \geqslant 1;\\
\psi(t,1) = \partial_\rho\psi(t,1) &= \ell_2(t) \qquad t \geqslant 0;\\
\frac{m}{\pi}\ell_2'(t) = -q_1(t,1) - \nu(-\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho\psi) + \frac{1}{\rho^2}\psi)(t,1) &\qquad t \geqslant 0.
\end{aligned}$$

L'idée naturelle est d'éliminer la pression en multipliant la seconde égalité par ρ, puis de la dériver par rapport à ρ et d'y soustraire la première équation. Une telle procédure nous amène à une équation de type chaleur avec une condition au bord de type Robin avec des coefficients non dissipatifs. Nous retombons sur la difficulté de l'équation en vorticité, et le procédé précédent revient en fait à considérer le rotationnel de l'équation en vitesse (ce qui élimine bien la pression...). Notre approche consiste à "éliminer la vitesse", en dérivant la première équation par rapport à ρ puis en y soustrayant la seconde équation. Nous trouvons alors une équation sur la pression (équivalent de $\Delta\tilde{p} = 0$ puisqu'il n'y a pas le terme non-linéaire dans le système de Stokes), ce qui se résout facilement car il n'y a que le mode 1 : $q_1 = A\rho + \dfrac{B}{\rho}$. Sachant que la pression doit tendre vers zéro à l'infini, il est clair que $q_1 = B/\rho$. Pour éliminer la pression, il suffit donc de diviser par ρ la première équation et de rajouter la seconde. Ainsi, nous vérifions que la fonction

$$z(\rho) := \partial_\rho\psi(\rho) + \frac{\psi(\rho)}{\rho} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho[\rho\psi(\rho)], \quad \forall\rho \in (1,\infty)$$

vérifie une équation de type chaleur, sans terme de pression et avec des conditions au bord dissipatives. Cette nouvelle inconnue n'est pas une dérivée du champ de vitesse, mais une bonne combinaison de ses composantes. La méthode des multiplicateurs nous donne les estimations $L^p - L^q$ pour z. Suite à des lemmes elliptiques, nous en déduisons les estimations pour les modes un (ψ, ϕ). Les estimations du gradient du semi-groupe demande un peu plus de travail, mais elles sont toujours basées sur la décomposition (6.2.10) et l'utilisation de la nouvelle inconnue z.

Pour énoncer le résultat principal, nous introduisons l'espace fonctionnel

$$\mathcal{L}^p = \{V \in L^p(\mathbb{R}^2),\ \operatorname{div} V = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2,\ D(V) = 0 \text{ dans } B_0\}, \quad (p \in [1,\infty]),$$

équipé de la norme (pour $p < \infty$)

$$\|V\|_{\mathcal{L}^p}^p = \int_{\mathcal{F}_0} |V|^p + \frac{m}{\pi}\int_{B_0} |V|^p.$$

Il est facile de vérifier que, si $V \in \mathcal{L}^p$, alors $V = \ell_V + r_V x^\perp$ dans B_0, où

$$\ell_V = \frac{1}{\pi}\int_{B_0} V(x)\,\mathrm{d}x, \quad r_V = \frac{2}{\pi}\int_{B_0} V(x)\cdot x^\perp\,\mathrm{d}x,$$

et que la composante normale de V est continue à travers ∂B_0. Nous munissons naturellement $\mathcal{L}^\infty$ de la norme $\|V\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$. Ainsi pour tout $p \in [1,\infty]$, nous avons

$$\|V\|_{\mathcal{L}^p} \approx \max\left\{\|v\|_{L^p(\mathcal{F}_0)}, |\ell_V|, |r_V|\right\}.$$

Notre premier résultat établit les estimations optimales $L^p - L^q$ pour le semi-groupe de Stokes.

Théorème 6.2.1. *Pour tout $q \in (1,\infty)$, l'opérateur de Stokes du problème linéaire* (6.2.9) *avec* (6.2.2)-(6.2.8) *génère un semigroupe $S(t)$ sur $\mathcal{L}^q$ qui satisfait les estimations suivantes :*

- *Pour $p \in [q,\infty]$, il existe $K_1 = K_1(p,q) > 0$ tel que pour tout $V_0 \in \mathcal{L}^q$:*

$$\|S(t)V_0\|_{\mathcal{L}^p} \leqslant K_1(\nu t)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|V_0\|_{\mathcal{L}^q} \qquad \textit{pour tout} \quad t > 0. \tag{6.2.11}$$

- *Si $q \leqslant 2$, pour $p \in [q,2]$, il existe $K_2 = K_2(p,q) > 0$ tel que pour tout $V_0 \in \mathcal{L}^q$,*

$$\|\nabla S(t)V_0\|_{L^p(\mathcal{F}_0)} \leqslant K_2(\nu t)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|V_0\|_{\mathcal{L}^q} \qquad \textit{pour tout} \quad t > 0. \tag{6.2.12}$$

- *Pour $p \in [\max\{2,q\},\infty)$, il existe $K_3 = K_3(p,q) > 0$ tel que pour tout $V_0 \in \mathcal{L}^q$,*

$$\|\nabla S(t)V_0\|_{L^p(\mathcal{F}_0)} \leqslant \begin{cases} K_3(\nu t)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|V_0\|_{\mathcal{L}^q} & \textit{pour tout} \quad 0 < t < \frac{1}{\nu}, \\ K_3(\nu t)^{-\frac{1}{q}}\|V_0\|_{\mathcal{L}^q} & \textit{pour tout} \quad t \geqslant \frac{1}{\nu}. \end{cases} \tag{6.2.13}$$

Tous ces taux correspondent à ceux de la chaleur dans $\mathbb{R}^2$, sauf la dernière où il y a une perte due à la présence du bord. Elle est quand même optimale, même pour la chaleur dans les domaines extérieurs.

Nous pouvons même déterminer le terme prépondérant en temps long, pour les données initiales bien localisées :

Théorème 6.2.2. *Pour tout $p \in [2,\infty]$, et $V_0 \in \mathcal{L}^1 \cap L^2(\mathbb{R}^2, \exp(|x|^2/4)\,\mathrm{d}x)$, en posant*

$$\vec{\mathcal{M}} = (m-\pi)\ell_0,$$

nous avons

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-1/p}\left\|S(t)V_0 - U_{\vec{\mathcal{M}}}(t,\cdot)\right\|_{L^p(\mathcal{F}_0)} = 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} t\left|\ell_{S(t)V_0} - \frac{\vec{\mathcal{M}}}{8\pi\nu t}\right| = 0,$$
$$\limsup_{t\to\infty} t^2\left|\omega_{S(t)V_0}\right| < +\infty,$$

où

$$U_{\vec{\mathcal{M}}}(t,x) = \nabla^\perp\left[\frac{1-e^{-\frac{|x|^2}{4\nu t}}}{2\pi|x|^2}\vec{\mathcal{M}}\cdot x^\perp\right].$$

Si $M \neq 0$, le champ U est bien le terme prépondérant car pour tout $p > 1$,

$$0 < \liminf_{t\to\infty} t^{1-1/p}\|U_{\vec{\mathcal{M}}}(t,\cdot)\|_{L^p(\mathcal{F}_0)} = \limsup_{t\to\infty} t^{1-1/p}\|U_{\vec{\mathcal{M}}}(t,\cdot)\|_{L^p(\mathcal{F}_0)} = \|U_{\vec{\mathcal{M}}}(1,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} < \infty.$$

Ce champ de vecteurs se comporte à l'infini comme $1/|x|$ et appartient donc à $L^{1,\infty} \cap L^p$ pour tout $p > 1$. Comme V_0 est d'énergie finie, la vorticité associée est de moyenne nulle, et nous retrouvons le champ de vitesse associé au premier moment du noyau de la chaleur : $K_{\mathbb{R}^2}\left[\vec{\mathcal{M}} \cdot \nabla G(t,\cdot)\right]$.

6.3 Décroissance pour les solutions des équations de Navier-Stokes

Avec les décroissances optimales de l'opérateur de Stokes, il est alors possible de voir le terme non-linéaire comme un terme source et de chercher à contrôler la décroissance de la solution de Navier-Stokes par des méthodes de type point fixe.

6.3.1 Système fluide-structure

Le comportement en temps grand pour les solutions des équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^2$ ou dans les domaines extérieurs dépend de l'intégrabilité de la donnée initiale. Si la donnée initiale est d'énergie finie (c'est-à-dire appartenant à L^2), alors le terme non-linéaire décroit plus vite et le comportement asymptotique est donné par le semi-groupe de Stokes. Ceci a été démontré par Kato [Kat84a], et en adaptant sa méthode de type point fixe, nous montrons que les solutions du problème fluide-structure vérifient les même taux de décroissance en temps que la solution de la chaleur pour $V_0 \in L^q$ avec $q > 1$:

Théorème 6.3.1. *Soit $q \in (1,2]$. Il existe $\lambda_0(q) > 0$ tel que, pour toute donnée initiale $V_0 \in \mathcal{L}^q \cap \mathcal{L}^2$ satisfaisant la condition de petitesse*

$$\|V_0\|_{\mathcal{L}^2} \leqslant \lambda_0(q),$$

l'unique solution V du système fluide visqueux-solide circulaire avec la donnée initiale V_0 satisfait les estimations suivantes

- *pour tout $p \in [2,\infty)$, il existe $H(p,q,V_0)$ tel que*

$$\sup_{t>0}\{t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|V(t)\|_{\mathcal{L}^p}\} \leqslant H(p,q,V_0).$$

- *il existe $H_\ell(q,V_0)$ tel que*

$$\sup_{t>0}\{t^{\frac{1}{q}}|\ell_V(t)|\} \leqslant H_\ell(q,V_0).$$

La fonction $q \mapsto \lambda_0(q)$ est une fonction croissante par rapport à $q \in (1,2]$ qui tend vers zero quand $q \to 1$.

Plus précisément, nous montrons que le terme prépondérant est le semi-groupe de Stokes :

$$\begin{aligned}
\sup_{t>2}\{t^{1-\frac{1}{p}}\|V(t)-S(t)V_0\|_{\mathcal{L}^p}\} &\leqslant C(p,q,V_0), && \text{si } q \in (1,4/3),\\
\sup_{t>2}\left\{\tfrac{t^{1-\frac{1}{p}}}{\log(t)}\|V(t)-S(t)V_0\|_{\mathcal{L}^p}\right\} &\leqslant C(p,q,V_0), && \text{si } q = 4/3,\\
\sup_{t>2}\{t^{\frac{2}{q}-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|V(t)-S(t)V_0\|_{\mathcal{L}^p}\} &\leqslant C(p,q,V_0) && \text{si } q \in (4/3,2],
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sup_{t>2}\{t|\ell_V(t)-\ell_{S(t)V_0}|\} &\leqslant C_\ell(q,V_0), && \text{si } q \in (1,4/3),\\
\sup_{t>2}\left\{\tfrac{t}{\log(t)}|\ell_V(t)-\ell_{S(t)V_0}|\right\} &\leqslant C_\ell(q,V_0), && \text{si } q = 4/3,\\
\sup_{t>2}\{t^{\frac{2}{q}-\frac{1}{2}}|\ell_V(t)-\ell_{S(t)V_0}|\} &\leqslant C_\ell(q,V_0). && \text{si } q \in (4/3,2].
\end{aligned}$$

En combinant le théorème, les inégalités précédentes et en choisissant $\lambda_0 = \lambda_0(5/4)$, nous déduisons de la croissance de $q \mapsto \lambda_0(q)$ que pour tout $q \in (1,2]$ et $V_0 \in \mathcal{L}^q \cap \mathcal{L}^2$ vérifiant $\|V_0\|_{\mathcal{L}^2} \leqslant \lambda_0$, alors

$$\sup_{t>2}\{t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|V(t)\|_{\mathcal{L}^p}\} < \infty.$$

Ceci se généralise à $q = 1$ si V_0 est bien localisé, c'est-à-dire si $V_0 \in \mathcal{L}^1 \cap L^2(\mathbb{R}^2, \exp(|x|^2/4)\,\mathrm{d}x)$ avec $\|V_0\|_{\mathcal{L}^2} \leqslant \lambda_0(5/4)$, alors

$$\sup_{t>2} t^{1-\frac{1}{p}}\|V(t)\|_{\mathcal{L}^p} < \infty.$$

6.3.2 Domaine fixe

Quand le domaine est fixe, les estimations $L^p - L^q$ de l'opérateur de Stokes sont déjà établies (voir [MS97, DS99a, DS99b]).

Mais quand la donnée initiale n'est pas de carré intégrable, le terme non-linéaire n'est plus négligeable car ne décroit pas plus vite que la solution de Stokes. Dans la littérature, des solutions des équations de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^d$ ont été construites dans les espaces invariant d'échelle, comme les espaces de Besov homogènes ou $L^{d,\infty}$ (voir l'article de revue par Cannone [Can04] et le livre de Lemarié-Rieusset [LR02] pour plus de détails et références). En particulier, les solutions auto-similaires décrivent le comportement en temps long pour les solutions de Navier-Stokes dans $\mathbb{R}^d$, et le terme non-linéaire décroit à la même vitesse que l'opérateur de Stokes. Même si en général, les solutions du problème de Stokes ne décrivent plus le comportement asymptotique, le champ de vitesse de Lamb-Oseen u_{LB} (6.1.1) est un cas particulier car pour des raisons de symétrie nous avons que le terme non-linéaire est un gradient : $(u_{LB} \cdot \nabla)u_{LB} \equiv \nabla p_{BL}$ et peut donc être inclus dans la pression. En utilisant des propriétés fines de symétrie qui ne s'appliquent qu'à Lamb-Oseen, nous

avons montré, en collaboration avec D. Iftimie et G. Karch [IKL11] que le comportement asymptotique de la solution de Navier-Stokes dans un domaine extérieur, avec une donnée initiale proche[1] de la vitesse initiale de Lamb-Oseen, est donné par le champ de vitesse de Lamb-Oseen u_{LB}. Ce théorème contenait une condition de petitesse qui a été améliorée par Gallay et Maekawa [GM13] : dans cet article, la condition de petitesse peut être choisie indépendante de la perturbation initiale, quitte à supposer un peu plus de localisation (en rajoutant l'hypothèse que la perturbation est dans $L^q(\Omega)$ pour un $q < 2$). Ce dernier résultat utilise de manière encore plus poussée la symétrie particulière de u_{BL}.

Sans cette symétrie et pour des données initiales plus générales, nous avons comparé la solution dans un domaine extérieur et la solution dans $\mathbb{R}^d$. Ainsi, si les données initiales sont proches, alors les deux solutions se comportent de la même manière quand $t \to \infty$. Précisément, nous avons montré en collaboration avec D. Iftimie et G. Karch [IKL14] le théorème suivant

Théorème 6.3.2. *Soit $v_0 \in L^{d,\infty}(\mathbb{R}^d)$ et $u_0 \in L^{d,\infty}(\Omega)$ tel que $u_0 - v_0 \in L^{q_0}(\Omega)$ pour un $q_0 \in (1, d]$. Il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que si $\|v_0\|_{L^{d,\infty}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon_1$ et $\|u_0\|_{L^{n,\infty}(\Omega)} \leqslant \varepsilon_1$, alors les solutions correspondantes dans $\mathbb{R}^d$ et Ω vérifient*

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2p}} \|u(t) - v(t)\|_{L^p(\Omega)} = 0, \quad \forall p \in (n, \infty).$$

Il est alors possible d'utiliser les résultats connus sur $\mathbb{R}^d$ pour écrire explicitement le comportement asymptotique de u. Il est aussi possible d'étendre ce résultat à une classe de grandes données initiales (voir [IKL14] pour plus de détails). Pour ce résultat de stabilité, nous définissons la notion de données initiales "comparables à l'infini", au sens où la différence est un peu mieux que $L^{d,\infty}$, puis nous écrivons le problème vérifié par $v - u$. Nous montrons que les termes du second membre dans la formule de Duhamel décroissent plus vite, grâce encore aux estimations $L^p - L^q$ du semi-groupe de Stokes.

6.4 Perspectives

Pour le problème fluide-solide, plusieurs questions restent ouvertes. La principale étant de déterminer le terme prépondérant pour la solution du sytème non-linéaire en temps long. Ceci n'est pas facile car le terme non-linéaire décroit a priori à la même vitesse que le semi-groupe de Stokes. Une telle difficulté n'est visible que dans les domaines à bord car l'estimation du gradient (6.2.13) dans le Théorème 6.2.1 donne une décroissance plus lente que le noyau de la chaleur dans $\mathbb{R}^2$ (pour certaines paires (p, q), en particulier pour $q = 1$ et $p = 4$). Nous rappelons que cette estimation est pourtant optimale dans les domaines à bord, mais elle ne suffit pas à adapter les travaux réalisés dans $\mathbb{R}^d$. Il faut donc étudier précisément la structure de la non-linéarité via notre décomposition en harmonique sphérique pour chercher une décroissance plus rapide.

Il serait aussi intéressant d'enlever la condition de petitesse dans le Théorème 6.3.1 en montrant que la norme L^2 de $V(t)$ tend vers zéro quand $t \to \infty$, ce qui a été fait pour les

[1] Par exemple une vitesse associée à un tourbillon de moyenne non nulle et appartenant à C_c^∞.

solutions de Leray dans $\mathbb{R}^2$ (en particulier par une analyse de Fourier, voir par exemple [Wie87]) mais qui n'est pas encore obtenu pour le problème fluide visqueux-solide.

L'extension à des solides non circulaires est bien sûr une question fondamentale mais compliquée, car notre approche est basée sur la décomposition en harmonique sphérique (6.2.10).

Bibliographie

[ADL14] D. Arsénio, E. Dormy, and C. Lacave. The vortex method for 2D ideal flows in the exterior of a disk. *Journées "Équations aux Dérivées Partielles" (Roscoff)*, Exp. No. 5, 2014.

[All90a] G. Allaire. Homogenization of the Navier-Stokes equations in open sets perforated with tiny holes. I. Abstract framework, a volume distribution of holes. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 113(3) :209–259, 1990.

[All90b] G. Allaire. Homogenization of the Navier-Stokes equations in open sets perforated with tiny holes. II. Noncritical sizes of the holes for a volume distribution and a surface distribution of holes. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 113(3) :261–298, 1990.

[Bar72] C. Bardos. Existence et unicité de la solution de l'équation d'Euler en dimension deux. *J. Math. Anal. Appl.*, 40 :769–790, 1972.

[BB12] M. Bonnivard and D. Bucur. The uniform rugosity effect. *J. Math. Fluid Mech.*, 14(2) :201–215, 2012.

[BCM86] P. Bolley, J. Camus, and G. Métivier. Estimations de Schauder et régularité höldérienne pour une classe de problèmes aux limites singuliers. *Comm. Partial Differential Equations*, 11(11) :1135–1203, 1986.

[BDPT13] C. Bardos, F. Di Plinio, and R. Temam. The Euler equations in planar nonsmooth convex domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 407(1) :69–89, 2013.

[BF06] F. Boyer and P. Fabrie. *Éléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, volume 52 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[BFNW08a] D. Bucur, E. Feireisl, Š. Nečasová, and J. Wolf. On the asymptotic limit of the Navier-Stokes system on domains with rough boundaries. *J. Differential Equations*, 244(11) :2890–2908, 2008.

[BFNW08b] D. Bucur, E. Feireisl, Š. Nečasová, and J. Wolf. On the asymptotic limit of the Navier-Stokes system on domains with rough boundaries. *J. Differential Equations*, 244(11) :2890–2908, 2008.

[BFPT13] A. Bendali, M. Fares, E. Piot, and S. Tordeux. Mathematical justification of the Rayleigh conductivity model for perforated plates in acoustics. *SIAM J. Appl. Math.*, 73(1) :438–459, 2013.

[BK06] M. Borsuk and V. Kondratiev. *Elliptic boundary value problems of second order in piecewise smooth domains*, volume 69 of *North-Holland Mathematical Library*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[BM06] D. Bresch and G. Métivier. Global existence and uniqueness for the lake equations with vanishing topography : elliptic estimates for degenerate equations. *Nonlinearity*, 19(3) :591–610, 2006.

[BNDL16] V. Bonnaillie-Noël, M. Dambrine, and C. Lacave. Interactions between moderately close inclusions for the two-dimensional Dirichlet-Laplacian. *Appl. Math. Res. Express. AMRX*, (1) :1–23, 2016.

[BNLM15] V. Bonnaillie-Noël, C. Lacave, and N. Masmoudi. Permeability through a perforated domain for the incompressible 2D Euler equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 32(1) :159–182, 2015.

[Bog79] M. E. Bogovskiĭ. Solution of the first boundary value problem for an equation of continuity of an incompressible medium. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 248(5) :1037–1040, 1979.

[Bog80] M. E. Bogovskiĭ. Solutions of some problems of vector analysis, associated with the operators div and grad. In *Theory of cubature formulas and the application of functional analysis to problems of mathematical physics*, volume 1980 of *Trudy Sem. S. L. Soboleva, No. 1*, pages 5–40, 149. Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel., Inst. Mat., Novosibirsk, 1980.

[Can04] M. Cannone. Harmonic analysis tools for solving the incompressible Navier-Stokes equations. In *Handbook of mathematical fluid dynamics. Vol. III*, pages 161–244. North-Holland, Amsterdam, 2004.

[Car94] A. Carpio. Asymptotic behavior for the vorticity equations in dimensions two and three. *Comm. Partial Differential Equations*, 19(5-6) :827–872, 1994.

[CDFCS03a] J. Casado-Díaz, E. Fernández-Cara, and J. Simon. Why viscous fluids adhere to rugose walls : a mathematical explanation. *J. Differential Equations*, 189(2) :526–537, 2003.

[CDFCS03b] J. Casado-Díaz, E. Fernández-Cara, and J. Simon. Why viscous fluids adhere to rugose walls : a mathematical explanation. *J. Differential Equations*, 189(2) :526–537, 2003.

[CDGG06] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, and E. Grenier. *Mathematical geophysics*, volume 32 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006. An introduction to rotating fluids and the Navier-Stokes equations.

[CG06] J.-Y. Chemin and I. Gallagher. On the global wellposedness of the 3-D Navier-Stokes equations with large initial data. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 39(4) :679–698, 2006.

[CHL96] R. Camassa, D. D. Holm, and C. D. Levermore. Long-time effects of bottom topography in shallow water. *Phys. D*, 98(2-4) :258–286, 1996. Nonlinear phenomena in ocean dynamics (Los Alamos, NM, 1995).

[CK00] G.-H. Cottet and P. D. Koumoutsakos. *Vortex methods*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Theory and practice.

[CM82] D. Cioranescu and F. Murat. Un terme étrange venu d'ailleurs. In *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. II (Paris, 1979/1980)*, volume 60 of *Res. Notes in Math.*, pages 98–138, 389–390. Pitman, Boston, Mass., 1982.

[CMR98] T. Clopeau, A. Mikelić, and R. Robert. On the vanishing viscosity limit for the 2D incompressible Navier-Stokes equations with the friction type boundary conditions. *Nonlinearity*, 11(6) :1625–1636, 1998.

[CNS09] G. Cardone, S. A. Nazarov, and J. Sokolowski. Asymptotics of solutions of the Neumann problem in a domain with closely posed components of the boundary. *Asymptot. Anal.*, 62(1-2) :41–88, 2009.

[Con87a] C. Conca. Étude d'un fluide traversant une paroi perforée. I. Comportement limite près de la paroi. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 66(1) :1–43, 1987.

[Con87b] C. Conca. Étude d'un fluide traversant une paroi perforée. II. Comportement limite loin de la paroi. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 66(1) :45–70, 1987.

[DAM12] J. Diaz-Alban and N. Masmoudi. Asymptotic analysis of acoustic waves in a porous medium : initial layers in time. *Commun. Math. Sci.*, 10(1) :239–265, 2012.

[Del91] J.-M. Delort. Existence de nappes de tourbillon en dimension deux. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(3) :553–586, 1991.

[Des96] B. Desjardins. A few remarks on ordinary differential equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 21(11-12) :1667–1703, 1996.

[DGV11] A.-L. Dalibard and D. Gérard-Varet. Effective boundary condition at a rough surface starting from a slip condition. *J. Differential Equations*, 251(12) :3450–3487, 2011.

[Día99] J. I. Díaz. Two problems in homogenization of porous media. In *Proceedings of the Second International Seminar on Geometry, Continua and Microstructure (Getafe, 1998)*, volume 14, pages 141–155, 1999.

[DL89] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Invent. Math.*, 98(3) :511–547, 1989.

[DLS09] C. De Lellis and L. Székelyhidi, Jr. The Euler equations as a differential inclusion. *Ann. of Math. (2)*, 170(3) :1417–1436, 2009.

[DM87] R. J. DiPerna and A. J. Majda. Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flow. *Comm. Pure Appl. Math.*, 40(3) :301–345, 1987.

[DPT15] F. Di Plinio and R. Temam. Grisvard's Shift Theorem Near L^∞ and Yudovich Theory on Polygonal Domains. *SIAM J. Math. Anal.*, 47(1) :159–178, 2015.

[DS99a] W. Dan and Y. Shibata. On the L_q–L_r estimates of the Stokes semigroup in a two-dimensional exterior domain. *J. Math. Soc. Japan*, 51(1) :181–207, 1999.

[DS99b] W. Dan and Y. Shibata. Remark on the L_q-L_∞ estimate of the Stokes semigroup in a 2-dimensional exterior domain. *Pacific J. Math.*, 189(2) :223–239, 1999.

[EHL14] S. Ervedoza, M. Hillairet, and C. Lacave. Long-time behavior for the two-dimensional motion of a disk in a viscous fluid. *Comm. Math. Phys.*, 329(1) :325–382, 2014.

[EZ91] M. Escobedo and E. Zuazua. Large time behavior for convection-diffusion equations in $\mathbf{R}^N$. *J. Funct. Anal.*, 100(1) :119–161, 1991.

[Gal10] I. Gallagher. Autour des équations de navier-stokes. *Images des Mathématiques, CNRS*, 2010. `http://images.math.cnrs.fr/Autour-des-equations-de-Navier.html`.

[Gal11] G. P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2011. Steady-state problems.

[GGN16] E. Grenier, Y. Guo, and T. T. Nguyen. Spectral instability of characteristic boundary layer flows. *Duke Math. J.*, 165(16) :3085–3146, 2016.

[GHL90] J. Goodman, T. Y. Hou, and J. Lowengrub. Convergence of the point vortex method for the 2-D Euler equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 43(3) :415–430, 1990.

[GLS14] O. Glass, C. Lacave, and F. Sueur. On the motion of a small body immersed in a two-dimensional incompressible perfect fluid. *Bull. Soc. Math. France*, 142(3) :489–536, 2014.

[GLS16] O. Glass, C. Lacave, and F. Sueur. On the motion of a small light body immersed in a two dimensional incompressible perfect fluid with vorticity. *Comm. Math. Phys.*, 341(3) :1015–1065, 2016.

[GM13] T. Gallay and Y. Maekawa. Long-time asymptotics for two-dimensional exterior flows with small circulation at infinity. *Anal. PDE*, 6(4) :973–991, 2013.

[GMS14] O. Glass, A. Munnier, and F. Sueur. Dynamics of a point vortex as limits of a shrinking solid in an irrotational fluid. *arXiv preprint*, 2014. arXiv :1402.5387.

[GN11] Y. Guo and T. Nguyen. A note on Prandtl boundary layers. *Comm. Pure Appl. Math.*, 64(10) :1416–1438, 2011.

[Gre80] H. P. Greenspan. *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1980. Reprint of the 1968 original, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.

[Gre00] E. Grenier. On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 53(9) :1067–1091, 2000.

[Gri85] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[GVD10] D. Gérard-Varet and E. Dormy. On the ill-posedness of the Prandtl equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 23(2) :591–609, 2010.

[GVH12] D. Gérard-Varet and M. Hillairet. Computation of the drag force on a sphere close to a wall : the roughness issue. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 46(5) :1201–1224, 2012.

[GVL13] D. Gérard-Varet and C. Lacave. The Two-Dimensional Euler Equations on Singular Domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 209(1) :131–170, 2013.

[GVL15] D. Gérard-Varet and C. Lacave. The Two Dimensional Euler Equations on Singular Exterior Domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 218(3) :1609–1631, 2015.

[GVLNR17] D. Gérard-Varet, C. Lacave, T. Nguyen, and F. Rousset. The vanishing viscosity limit for 2D Navier-Stokes in a rough domain. *arXiv preprint : 1701.08808*, 2017.

[GVN12] D. Gérard-Varet and T. Nguyen. Remarks on the ill-posedness of the Prandtl equation. *Asymptot. Anal.*, 77(1-2) :71–88, 2012.

[GW05] T. Gallay and C. E. Wayne. Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation. *Comm. Math. Phys.*, 255(1) :97–129, 2005.

[HP05] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et optimisation de formes*, volume 48 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer, Berlin, 2005. Une analyse géométrique. [A geometric analysis].

[HW14] D. Han and X. Wang. Initial-boundary layer associated with the nonlinear Darcy-Brinkman system. *J. Differential Equations*, 256(2) :609–639, 2014.

[IK09] D. Iftimie and J. P. Kelliher. Remarks on the vanishing obstacle limit for a 3D viscous incompressible fluid. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(2) :685–694, 2009.

[IKL11] D. Iftimie, G. Karch, and C. Lacave. Self-similar asymptotics of solutions to the Navier-Stokes system in two dimensional exterior domain. *arXiv preprint*, 2011. arXiv :1107.2054.

[IKL14] D. Iftimie, G. Karch, and C. Lacave. Asymptotics of solutions to the Navier-Stokes system in exterior domains. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 90(3) :785–806, 2014.

[ILFNL03] D. Iftimie, M. C. Lopes Filho, and H. J. Nussenzveig Lopes. Two dimensional incompressible ideal flow around a small obstacle. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(1-2) :349–379, 2003.

[ILFNL06] D. Iftimie, M. C. Lopes Filho, and H. J. Nussenzveig Lopes. Two-dimensional incompressible viscous flow around a small obstacle. *Math. Ann.*, 336(2) :449–489, 2006.

[ILFNL09] D. Iftimie, M. C. Lopes Filho, and H. J. Nussenzveig Lopes. Incompressible flow around a small obstacle and the vanishing viscosity limit. *Comm. Math. Phys.*, 287(1) :99–115, 2009.

[IS11] D. Iftimie and F. Sueur. Viscous boundary layers for the Navier-Stokes equations with the Navier slip conditions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 199(1) :145–175, 2011.

[JK95] D. Jerison and C. E. Kenig. The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, 130(1) :161–219, 1995.

[Kat72] T. Kato. Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbf{R}^3$. *J. Functional Analysis*, 9 :296–305, 1972.

[Kat84a] T. Kato. Remarks on zero viscosity limit for nonstationary Navier-Stokes flows with boundary. In *Seminar on nonlinear partial differential equations (Berkeley, Calif., 1983)*, volume 2 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 85–98. Springer, New York, 1984.

[Kat84b] T. Kato. Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbf{R}^m$, with applications to weak solutions. *Math. Z.*, 187(4) :471–480, 1984.

[Kat86] T. Kato. Remarks on the Euler and Navier-Stokes equations in $\mathbf{R}^2$. In *Nonlinear functional analysis and its applications, Part 2 (Berkeley, Calif., 1983)*, volume 45 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 1–7. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[Kik83] K. Kikuchi. Exterior problem for the two-dimensional Euler equation. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 30(1) :63–92, 1983.

[KMR01] V. A. Kozlov, V. G. Maz′ya, and J. Rossmann. *Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations*, volume 85 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[KTW11] J. P. Kelliher, R. Temam, and X. Wang. Boundary layer associated with the Darcy-Brinkman-Boussinesq model for convection in porous media. *Phys. D*, 240(7) :619–628, 2011.

[Lac08] C. Lacave. *Flow around thin obstacle*. Theses, Université Claude Bernard - Lyon I, December 2008.

[Lac09a] C. Lacave. Two dimensional incompressible ideal flow around a thin obstacle tending to a curve. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(4) :1121–1148, 2009.

[Lac09b] C. Lacave. Two-dimensional incompressible viscous flow around a thin obstacle tending to a curve. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 139(6) :1237–1254, 2009.

[Lac12] C. Lacave. Two Dimensional Incompressible Ideal Flow Around a Small Curve. *Comm. Partial Differential Equations*, 37(4) :690–731, 2012.

[Lac15a] C. Lacave. 3D viscous incompressible fluid around one thin obstacle. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(5) :2175–2191, 2015.

[Lac15b] C. Lacave. Uniqueness for two-dimensional incompressible ideal flow on singular domains. *SIAM J. Math. Anal.*, 47(2) :1615–1664, 2015.

[Ler34] J. Leray. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, 63(1) :193–248, 1934.

[LLFNL15] C. Lacave, M. C. Lopes Filho, and H. J. Nussenzveig Lopes. Asymptotic behavior of 2D incompressible ideal flow around small disks. *arXiv preprint*, 2015. arXiv :1510.05864.

[LM99] P.-L. Lions and N. Masmoudi. Une approche locale de la limite incompressible. (french) [a local approach to the incompressible limit]. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 329(5) :387–392, 1999.

[LM05] P.-L. Lions and N. Masmoudi. Homogenization of the Euler system in a 2D porous medium. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 84(1) :1–20, 2005.

[LM09] C. Lacave and E. Miot. Uniqueness for the vortex-wave system when the vorticity is constant near the point vortex. *SIAM J. Math. Anal.*, 41(3) :1138–1163, 2009.

[LM16a] C. Lacave and N. Masmoudi. Impermeability through a perforated domain for the incompressible two dimensional Euler equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 221(3) :1117–1160, 2016.

[LM16b] C. Lacave and A. L. Mazzucato. The vanishing viscosity limit in the presence of a porous medium. *Math. Ann.*, 365(3-4) :1527–1557, 2016.

[LMW14] C. Lacave, E. Miot, and C. Wang. Uniqueness for the two-dimensional Euler equations on domains with corners. *Indiana Univ. Math. J.*, 63(6) :1725–1756, 2014.

[LNP14] C. Lacave, T. Nguyen, and B. Pausader. Topography influence on the lake equations in bounded domains. *J. Math. Fluid Mech.*, 16(2) :375–406, 2014.

[LOT96a] C. D. Levermore, M. Oliver, and E. S. Titi. Global well-posedness for models of shallow water in a basin with a varying bottom. *Indiana Univ. Math. J.*, 45(2) :479–510, 1996.

[LOT96b] C. D. Levermore, M. Oliver, and E. S. Titi. Global well-posedness for the lake equation. *Physica D*, 98(2–4) :492–509, 1996.

[LR02] P. G. Lemarié-Rieusset. *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, volume 431 of *Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.

[LT17] C. Lacave and T. Takahashi. Small moving rigid body into a viscous incompressible fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 223(3) :1307–1335, 2017.

[Mae14] Y. Maekawa. On the inviscid limit problem of the vorticity equations for viscous incompressible flows in the half-plane. *Comm. Pure Appl. Math.*, 67(7) :1045–1128, 2014.

[Mar90] C. Marchioro. On the Euler equations with a singular external velocity field. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 84 :61–69 (1991), 1990.

[Mas02] N. Masmoudi. Homogenization of the compressible Navier-Stokes equations in a porous medium. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 8 :885–906, 2002. A tribute to J. L. Lions.

[Mas07] N. Masmoudi. Remarks about the inviscid limit of the Navier-Stokes system. *Comm. Math. Phys.*, 270(3) :777–788, 2007.

[MB02] A. J. Majda and A. L. Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*, volume 27 of *Cambridge Texts in Applied Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[McG67] F. J. McGrath. Nonstationary plane flow of viscous and ideal fluids. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 27 :329–348, 1967.

[Mik91] A. Mikelić. Homogenization of nonstationary Navier-Stokes equations in a domain with a grained boundary. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 158 :167–179, 1991.

[MP93] C. Marchioro and M. Pulvirenti. Vortices and localization in Euler flows. *Comm. Math. Phys.*, 154(1) :49–61, 1993.

[MP94] C. Marchioro and M. Pulvirenti. *Mathematical theory of incompressible non-viscous fluids*, volume 96 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[MP99] A. Mikelić and L. Paoli. Homogenization of the inviscid incompressible fluid flow through a 2D porous medium. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(7) :2019–2028, 1999.

[MR12] N. Masmoudi and F. Rousset. Uniform regularity for the Navier-Stokes equation with Navier boundary condition. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 203(2) :529–575, 2012.

[MR14] A. Munnier and K. Ramdani. Asymptotic analysis of a neumann problem in a domain with cusp. application to the collision problem of rigid bodies in a perfect fluid. *arXiv preprint*, 2014. arXiv :1405.5446.

[MS97] P. Maremonti and V. A. Solonnikov. On nonstationary Stokes problem in exterior domains. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 24(3) :395–449, 1997.

[MZ05] A. Munnier and E. Zuazua. Large time behavior for a simplified N-dimensional model of fluid-solid interaction. *Comm. Partial Differential Equations*, 30(1-3) :377–417, 2005.

[Nas58] J. Nash. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *Amer. J. Math.*, 80 :931–954, 1958.

[Pom75] C. Pommerenke. *Univalent functions.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975. With a chapter on quadratic differentials by Gerd Jensen, Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher, Band XXV.

[Pom92] C. Pommerenke. *Boundary behaviour of conformal maps*, volume 299 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Sch85] M. E. Schonbek. L^2 decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 88(3) :209–222, 1985.

[Sch96] S. Schochet. The point-vortex method for periodic weak solutions of the 2-D Euler equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 49(9) :911–965, 1996.

[SP80] E. Sánchez-Palencia. *Nonhomogeneous media and vibration theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[SP82] E. Sánchez-Palencia. Boundary value problems in domains containing perforated walls. In *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. III (Paris, 1980/1981)*, volume 70 of *Res. Notes in Math.*, pages 309–325. Pitman, Boston, Mass., 1982.

[SP85] E. Sánchez-Palencia. Problèmes mathématiques liés à l'écoulement d'un fluide visqueux à travers une grille. In *Ennio De Giorgi colloquium (Paris, 1983)*, volume 125 of *Res. Notes in Math.*, pages 126–138. Pitman, Boston, MA, 1985.

[Šve93] V. Šverák. On optimal shape design. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 72(6) :537–551, 1993.

[Swa71] H. S. G. Swann. The convergence with vanishing viscosity of nonstationary Navier-Stokes flow to ideal flow in R_3. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 157 :373–397, 1971.

[Tar80] L. Tartar. Incompressible fluid flow in a porous medium : convergence of the homogenization process. *in Nonhomogeneous media and vibration theory (E. Sánchez-Palencia)*, pages 368–377, 1980.

[Tay00] M. E. Taylor. Incompressible fluid flows on rough domains. In *Semigroups of operators : theory and applications (Newport Beach, CA, 1998)*, volume 42 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 320–334. Birkhäuser, Basel, 2000.

[Tem75] R. Temam. On the Euler equations of incompressible perfect fluids. *J. Functional Analysis*, 20(1) :32–43, 1975.

[TT04] T. Takahashi and M. Tucsnak. Global strong solutions for the two-dimensional motion of an infinite cylinder in a viscous fluid. *J. Math. Fluid Mech.*, 6(1) :53–77, 2004.

[TW97] R. Temam and X. Wang. On the behavior of the solutions of the Navier-Stokes equations at vanishing viscosity. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 25(3-4) :807–828 (1998), 1997. Dedicated to Ennio De Giorgi.

[Váz03] J. L. Vázquez. Asymptotic beahviour for the porous medium equation posed in the whole space. *J. Evol. Equ.*, 3(1) :67–118, 2003. Dedicated to Philippe Bénilan.

[Vér79] L. Véron. Effets régularisants de semi-groupes non linéaires dans des espaces de Banach. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5)*, 1(2) :171–200, 1979.

[VZ03] J. L. Vázquez and E. Zuazua. Large time behavior for a simplified 1D model of fluid-solid interaction. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(9-10) :1705–1738, 2003.

[VZ06] J. L. Vázquez and E. Zuazua. Lack of collision in a simplified 1D model for fluid-solid interaction. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 16(5) :637–678, 2006.

[Wan01] X. Wang. A Kato type theorem on zero viscosity limit of Navier-Stokes flows. *Indiana Univ. Math. J.*, 50(Special Issue) :223–241, 2001. Dedicated to Professors Ciprian Foias and Roger Temam (Bloomington, IN, 2000).

[War56] S. E. Warschawski. On the distortion in conformal mapping of variable domains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82 :300–322, 1956.

[Wie87] M. Wiegner. Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on $\mathbf{R}^n$. *J. London Math. Soc. (2)*, 35(2) :303–313, 1987.

[Wol33] W. Wolibner. Un theorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long. *Math. Z.*, 37(1) :698–726, 1933.

[Yud63] V. I. Yudovič. Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 3 :1032–1066, 1963.

Univ Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité,
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche,
UMR 7586, CNRS,
Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06,
F-75013, Paris, France.
Adresse E-mail : christophe.lacave@imj-prg.fr