HAL open science

Un cas particulier de la conjecture de Weinstein en grande dimension

Guillaume Roux

▶ To cite this version:

Guillaume Roux. Un cas particulier de la conjecture de Weinstein en grande dimension. Géométrie symplectique [math.SG]. Université de Nantes, 2017. Français. NNT : . tel-01574439

HAL Id: tel-01574439
https://hal.science/tel-01574439v1

Submitted on 14 Aug 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NoDerivatives 4.0 International License

Thèse de Doctorat

Guillaume Roux

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

École doctorale : Sciences et technologies de l'information et mathématiques

Discipline : Mathématiques, section CNU 25
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Soutenue le 11 juillet 2017

Un cas particulier de la conjecture de Weinstein en grande dimension

JURY

Président :	**M. Frédéric Bourgeois**, Professeur des universités, Université Paris-Sud
Rapporteur :	**M. Jean-François Barraud**, Professeur des universités, Institut de Mathématiques de Toulouse
Examinateurs :	**M. Baptiste Chantraine**, Maître de conférences, Université de Nantes
	M. François Laudenbach, Professeur émérite, Université de Nantes
	M. Klaus Niederkrüger, Professeur des universités, Université de Lyon 1
Directeur de thèse :	**M. Vincent Colin**, Professeur des universités, Université de Nantes

* * *

Rapporteur :	**M. Alexandru Oancea**, Professeur des universités, Université Pierre et Marie Curie

Table des matières

Remerciements **5**

Introduction **9**

Partie 1 – Notions de base **19**
1.1 Géométrie symplectique 19
1.2 Géométrie de contact 20
1.2.1 Généralités 20
1.2.2 Champ de Reeb 21
1.2.3 Projections frontales et lagrangiennes 22
1.2.4 Nœuds legendriens lâches 24
1.3 Variétés de Liouville et de Weinstein 26
1.3.1 Structures de Liouville 26
1.3.2 Structures de Weinstein 27
1.4 Chirurgie de contact 30
1.5 Structures presque complexes 31
1.6 Indice de Conley-Zehnder d'une orbite de Reeb 32
1.7 Courbes pseudo-holomorphes et espaces de modules 33
1.7.1 Généralités 34
1.7.2 Énergie 34
1.7.3 Asymptotes 35
1.7.4 Espaces de modules considérés 38
1.7.5 Compacité 41
1.7.6 Transversalité 42

Partie 2 – Attachement d'une anse critique **45**
2.1 Un disque holomorphe dans la carte lâche 45
2.1.1 Une petite corde de Reeb 46
2.1.2 Un petit disque holomorphe 47
2.2 Chirurgie critique et dynamique de Reeb 50
2.2.1 Notations 50
2.2.2 Dynamique de Reeb sur le bord de l'anse 52

2.2.3 Description du modèle local 53
2.2.4 Construction du cobordisme 54
2.2.5 Dynamique du flot de Reeb après chirurgie 57
2.3 Une courbe holomorphe particulière 60
2.4 Étude d'une famille de plans holomorphes dans W 63
2.4.1 Résultats préliminaires dans X 63
2.4.2 Ajout d'un remplissage W_0 70

Partie 3 – De la page au livre ouvert 73
3.1 Quelques définitions supplémentaires 73
3.1.1 Livres ouverts 73
3.1.2 Structures hamiltoniennes stables 75
3.1.3 Compléments sur les courbes holomorphes 75
3.2 Une famille de structures hamiltoniennes stables 79
3.2.1 Énoncé du résultat 79
3.2.2 Construction d'une structure hamiltonienne stable 81
3.2.3 Perturbation de la structure hamiltonienne stable 83
3.3 Construction d'un feuilletage holomorphe 84
3.4 Étude d'une famille de plans holomorphes dans $\mathbb{R} \times M$ 86
3.4.1 Cadre d'étude et énoncé du résultat 86
3.4.2 Calcul de l'indice 88
3.4.3 Transversalité 89
3.4.4 Un résultat de localisation 91
3.5 Démonstration du résultat principal 97

Perspectives 101

Table des figures 103

Références 108

Remerciements

Je remercie bien sûr tout d'abord mon directeur de thèse, Vincent Colin, qui a su se montrer tour à tour patient, confiant, encourageant, et m'apporter un peu de pression lorsque cela s'avérait nécessaire. Merci d'avoir guidé mon chemin avec optimisme et clairvoyance au cours de ces trois ans de thèse.

Je remercie Jean-François Barraud et Alexandru Oancea d'avoir accepté d'être mes rapporteurs. Merci à Jean-François Barraud pour les nombreux échanges de mails que nous avons eus et qui m'ont permis d'apporter des améliorations substantielles à ce manuscrit. Merci à Frédéric Bourgeois , Baptiste Chantraine, François Laudenbach et Klaus Niederkrüger d'avoir fait partie de mon jury ; merci notamment à François Laudenbach pour ses nombreux retours sur la première version de ce texte et pour avoir repéré les erreurs regrettables qui s'y étaient glissées.

Merci à tous les membres du laboratoire Jean Leray, à commencer par le secrétariat : Ana Paula, Anaïs, Annick, Brigitte, Colette, Dominique, Katrin et Stéphanie. Votre efficacité à canaliser et traiter le flux administratif quotidien me laisse toujours perplexe (et un peu admiratif). Merci à Claude, accueillant et heureux gardien du royaume des livres. Merci à Bertrand et Sophie pour le support caféiné – même si vous ne faites pas officiellement partie du laboratoire, c'est tout comme.

Merci à tous les membres de l'équipe TGA. En plus de ceux cités par ailleurs, je souhaiterais remercier Sylvain Gervais grâce à qui ce fût un plaisir de préparer mon premier TD, et Hossein Abbaspour qui m'a fait découvrir les potentialités mathématiques des tablettes tactiles (notamment Nebo).

Je remercie chaleureusement tous ceux qui, à un moment ou à un autre, m'ont procuré quelque aide mathématique : François Laudenbach pour toutes les enrichissantes conversations sur la route Nantes-Angers, et pour m'avoir fait prendre conscience de l'importance du choix de la trivialisation lors d'une chirurgie ; Paolo Ghiggini pour les cours du soir d'homologie de Floer sur l'île d'Houat, et pour les explications à propos de la théorie du gluing et du genre des surfaces projectives lors d'un long trajet en train vers Augsburg ; Frédéric Bourgeois, à qui je dois d'avoir compris (un peu) la théorie de la compacité, et qui m'a montré la voie à suivre lorsque j'étais aux prises avec un problème imprévu d'intersection de courbes et d'hypersurfaces holomorphes ; Baptiste Chantraine, qui a éclairé mon chemin dans le monde hermétique des courbes holomorphes, et m'a aidé à mieux appréhender ce qu'était un indice

de Conley-Zehnder ; Tobias Ekholm, au contact de qui j'ai pu enfin commencer à développer le deuxième chapitre de ce document ; Chris Wendl, pour un court échange à Berlin dont j'étais je l'avoue ressorti assez confus (j'ignorais alors que cet échange avait planté la graine de ce qui deviendrait le troisième chapitre de ce texte) ; Guillem, pour les conseils judicieux et les références qu'il m'a apportés en diverses occasion ; Gilberto, pour m'avoir aidé à « voir » le disque holomorphe qui me préoccupait tant ; enfin, Anne Vaugon, qui parle toujours si bien des attachements de rocade.

J'en viens maintenant à la formidable équipe des doctorants/postdocs/ATERs nantais. Je ne peux imaginer la vie au laboratoire sans vous ; merci d'avoir rendu chacun des jours que j'y ai passé aussi agréable. J'aimerais pouvoir citer quelque anecdote pour chacun d'entre vous, mais pour les plus jeunes et les plus anciens, cela m'est rendu difficile par le peu de temps que nous avons partagé (et, reconnaissons-le, par mon manque regrettable de sociabilité). J'espère que vous ne m'en tiendrez pas rigueur.

Merci d'abord à mes cobureaux, avec qui j'ai partagé les affres et les joies de la recherche pendant ces trois années. Merci Guogang, mon grand frère de thèse, pour l'aide que tu m'as plusieurs fois apportée, toujours avec discrétion et modestie. Merci Alberto pour ton énergie, et pour avoir initié avec bonheur un rangement/nettoyage/réaménagement complet de notre bureau : c'est beaucoup mieux depuis ! Enfin, merci Vytauté pour ton sourire et pour les (délicieux) gâteaux lituaniens.

Procédons à présent dans un ordre vaguement chronologique. Merci à Alexandre U, Céline, Vincent et Vivien pour votre accueil lors de mon arrivée au laboratoire, encore jeune stagiaire de M2. Merci à Alexandre Q de m'avoir tenu compagnie le soir au RU. Merci Antoine pour les regards désabusés que nous échangions parfois le midi, lorsque la conversation dérapait au cours du repas. Merci Virgile pour ta présence tranquille qui avait toujours un effet rassérénant. Merci Ilaria de m'avoir fait prendre conscience qu'il existait plus stressé que moi. Merci Moudhaffar, grâce à qui je ne suis pas celui qui arrive le plus tard au laboratoire. Merci Christophe pour la découverte du stunfest (grâce à toi je sais que le jdg et usul existent vraiment) et pour les animes que tu m'as fait découvrir. Les revisionnages réguliers de Baka to Test ont constitué un soutien moral inattendu au cours de ces dernières années. Merci à Thomas G pour tous nos débats, pour m'avoir initié à l'escalade, et pour avoir affiné mon goût en matière de crêpes (maintenant je prête attention à la qualité de la pâte).

J'en arrive aux doctorants dont l'année a précédé la mienne. Merci Victor MD pour ton rire que l'on entendait à travers le mur et qui illuminait nos journées. Désolé pour toutes les « badbox ». Merci Florian, exégète consciencieux de la parole de l'ED, et futur camarade Troyen. Merci Valentin pour nos conversations sur l'enseignement des mathématiques. Merci Damien pour les films que tu m'as fait découvrir, dont La Vague. Enfin, merci Pierre d'avoir le rire le plus communicatif que j'aie jamais connu : rien qu'en écrivant ces lignes et à sa seule pensée, je pouffe de rire tout seul devant mon écran.

Continuons avec ceux que j'ai le plus eu l'occasion de côtoyer dans les murs du laboratoire. Merci Noémie, camarade symplectitienne, pour le soutien psychologique que tu m'as apporté :

la géométrie, c'est plus facile à deux. Merci Thomas B de me prêter ta chaise de bureau un midi sur deux lorsque je suis à la recherche d'un peu de réseau. Merci à Victor VDR pour nos nombreuses conversations vidéoludiques (je n'avais pas idée de ce que signifiait réellement « finir un jeu à 100% » avant de te rencontrer). Je ne te remercie pas, en revanche, pour les incroyables remerciements sur lesquels s'ouvre ta thèse, et à côté desquels n'importe quels autres feraient pâle figure : si j'avais su, je me serais débrouillé pour soutenir avant toi ! Merci Radek pour avoir introduit les parties de Contact, les jeux sans aucun matériel sont chose rare et celui-ci est particulièrement sympathique. Merci Thomas W pour tout ce que tu m'as fait découvrir (notamment Fool Us, les Escape Games, et tant d'excellents jeux que je ne saurais tous les nommer). Te tenir compagnie lorsque tu arpentais les galeries de Hallownest fut une expérience inoubliable. Merci enfin à Olivier pour ta bonne humeur permanente, même lorsque tu devais traverser des calculs dont la seule vue me faisait blêmir.

Passons à la génération suivante. Merci Hala pour tous les (succulents) petits plats que tu nous as distribués avec tant de gentillesse. Merci Caroline V pour la gaieté et l'humour dont tu fais preuve au quotidien, et pour avoir pris la première l'initiative d'organiser un Escape Game.

Enfin, je remercie les récents arrivants Caroline R, Zeinab, Hélène, Solène, Côme et Matthieu pour avoir contribué à rendre la vie au sein de l'équipe doctorale si plaisante pendant cette dernière année. Merci en particulier à Côme et Matthieu pour les conversations géométriques, et à Hélène pour m'avoir donné l'idée d'acheter une tablette.

Je n'oublie bien entendu pas les postdoc/ATER : Claire, Gilberto, Guillem, Niccoloó, Simon, Victoria et Zoé, merci pour tous les échanges que nous avons eus.

Comme promis, je souhaiterais adresser des remerciements spéciaux à Olivier pour le rôle de conseiller administratif que je lui ai fait endosser pendant ces trois ans. Merci d'avoir enduré avec patience mes incessantes questions, aussi naïves fussent-elles, et d'y avoir systématiquement apporté des réponses éclairées et éclairantes. À partir de l'an prochain je devrai voler de mes propres ailes, et je dois dire que la perspective est un peu effrayante !

Je tiens également à remercier mes amis non-nantais ; même si j'aurais aimé vous voir davantage pendant ces trois ans, chaque entrevue a constitué pour moi une pause bienvenue et bienfaitrice. Merci donc à Thibault et Diego pour les week-ends jeux© parisiens. Merci Florent, en comparaison de tes mésaventures doctorales ma thèse semblait avancer sans la moindre anicroche. Merci Matthias pour ta proposition d'entre-motivation *via* Dropbox (même si l'idée n'a pas eu l'effet escompté, je crois toujours en son potentiel), et pour tes encouragements nourris.

Ces remerciements ne seraient pas complets sans mention de ma famille, et plus particulièrement de mes parents. Un grand merci à vous deux pour votre soutien moral indéfectible tout au long de ce périple. Merci d'avoir supporté vaillamment l'alternance caractéristique d'irritabilité et d'abattement dont je faisais preuve pendant chaque période de recherche. Enfin, merci à Guylaine pour son soutien administratif, vestimentaire et nutritionnel de chaque instant.

Introduction

Cette thèse a pour objet un cas particulier de la conjecture de Weinstein en grande dimension. En étudiant certaines familles de courbes holomorphes, on établit l'existence d'une orbite de Reeb contractile pour des variétés de contact présentées comme des livres ouverts dont la page est d'une forme particulière.

Une *structure de contact* sur une variété de dimension $2n+1$ est un champ d'hyperplans localement décrit par l'équation

$$dz - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i = 0,$$

voir la figure 1. Une telle structure est *coorientée* lorsqu'elle est donnée globalement comme le noyau d'une *forme de contact* α.

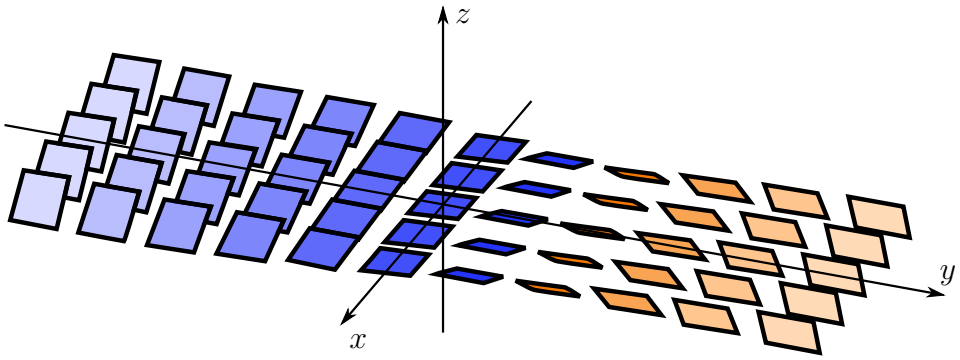


FIGURE 1 : Forme de contact standard sur $\mathbb{R}^3$. Les plans de contact sont invariants selon les directions x et z et tournent autour de l'axe des y quand on se déplace le long de cet axe, réalisant un demi-tour complet entre $-\infty$ et $+\infty$.

La conjecture de Weinstein se tient à la confluence de la géométrie de contact et de la dynamique des champs de vecteurs. Étant donné une variété M, on peut se demander à quel point la géométrie de M conditionne la dynamique des champs de vecteurs sur cette variété. En particulier, le flot de tout champ de vecteurs sur M admet-il nécessairement une trajectoire périodique ? Connue sous le nom de *conjecture de Seifert* dans le cas $M = S^3$, la

question de l'existence de telles *orbites* est épineuse. Une réponse négative a finalement été apportée par [Kup94], avant que G. et K. Kuperberg présentent dans [KK98] une procédure permettant de produire des champs de vecteurs sans orbite périodique sur n'importe quelle variété de dimension 3. Afin de garantir l'existence d'orbites, des hypothèses supplémentaires sur le champ de vecteurs sont donc nécessaires.

On peut associer à chaque forme de contact α sur M un champ de vecteurs R, dit *champ de Reeb*, caractérisé par les conditions $d\alpha(R,\cdot) = 0$ et $\alpha(R) = 1$. Il s'agit d'un champ de vecteurs transverse aux hyperplans $\xi = \ker\alpha$ de la structure de contact, et dont le flot préserve α. Dans l'exemple de la figure 1, il s'agit du champ vertical constant ∂_z.

La dynamique du champ de Reeb dépend fortement de la forme de contact à laquelle il est associé. Par exemple, à la forme de contact

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i dy_i - y_i dx_i$$

sur la sphère unité $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ correspond le champ de Reeb dont toutes les trajectoires sont périodiques et déterminent les fibres de la fibration de Hopf. On a représenté quelques-unes de ces orbites sur la figure 2 dans le cas de S^3, identifiée à $\mathbb{R}^3$ compactifié par un point à l'infini. En revanche, si l'on considère à la place de α_0 une perturbation

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i dy_i - y_i dx_i)$$

où les a_i sont rationnellement indépendants, alors seuls n orbites subsistent pour le nouveau flot de Reeb (chacune contenue dans un des plans (x_i, y_i)), toutes les autres trajectoires devenant ouvertes. Sur la figure 2, on a figuré les deux orbites survivantes en orange.

Comme le montre l'exemple de la figure 1, il existe également des situations où aucune trajectoire du flot de Reeb n'est fermée. Cependant aucun contre-exemple n'est connu sur une variété *close*, c'est-à-dire compacte et sans bord.

Conjecture de Weinstein. *Tout champ de Reeb sur une variété de contact close de dimension impaire possède une trajectoire fermée.*

De telles trajectoires périodiques sont appelées *orbites de Reeb*. Cette conjecture a originellement été énoncée par Weinstein [Wei79] dans le cas des hypersurfaces de type contact dans une variété symplectique (voir [Hut10] pour plus de détails sur le chemin qui a mené, depuis les premières considérations de dynamique hamiltonienne, à la formulation "moderne" de la conjecture). Plusieurs éléments semblent indiquer qu'une version plus forte de cette conjecture pourrait en fait être vraie.

Conjecture de Weinstein forte. *Soit M une variété close. Pour toute forme de contact sur M, il existe une famille finie et non vide d'orbites de Reeb $\gamma_1, ..., \gamma_n$ telle que*

$$[\gamma_1] + ... + [\gamma_n] = 0 \in H_1(M).$$

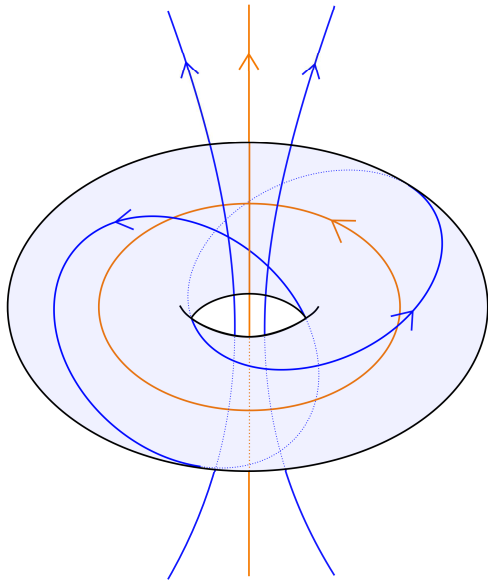


FIGURE 2 : Flot de Reeb sur la sphère de contact standard.

Avant que Taubes [Tau06] ne présente une preuve de la conjecture de Weinstein pour toute variété de dimension 3 en utilisant la théorie de Seiberg-Witten, de nombreux résultats partiels avaient été établis, dont le suivant.

Théorème 0.0.1 ([Hof])**.** *Soit (M^3, ξ) une variété de contact close de dimension 3. Si ξ est vrillée*[1] *ou $\pi_2(M) \neq 0$, alors pour toute forme de contact définissant ξ, il existe une orbite de Reeb contractile.*

L'idée fondamentale introduite dans [Hof] consiste à utiliser des courbes holomorphes pour détecter l'existence d'orbites de Reeb. Plus précisément, après avoir muni la *symplectisation* $(\mathbb{R}\times M, d(e^t\alpha))$ d'une variété de contact (M, α) d'une structure presque complexe J adaptée[2], on s'intéresse aux applications $\dot{\Sigma} \to (M, J)$ vérifiant les équations de Cauchy-Riemann ; ici $\dot{\Sigma}$ est une surface de Riemann Σ privée d'un certain nombre de points, appelés *perçures* dans la suite. Alors, sous de bonnes hypothèses, une telle *courbe J-holomorphe* approche $\{\pm\infty\}\times M$ au niveau de chaque perçure, tout en tendant asymptotiquement vers un cylindre $\mathbb{R} \times \{\gamma\}$ où γ est une orbite de Reeb de α. Ainsi l'existence d'une telle courbe holomorphe garantit l'existence d'une telle orbite. En l'occurrence, [Hof] construit une famille de disques holomorphes qui se "brise" à la limite en produisant un plan holomorphe, asymptote en $+\infty$ à l'orbite contractile recherchée.

En considérant des sphères holomorphes présentant cette fois un nombre quelconque de perçures, Abbas, Cieliebak et Hofer ont établi par la suite un autre cas particulier de la

[1] Voir [Gei, §4.5] pour la définition de *vrillée*, qui n'interviendra pas dans la suite.
[2] Voir la section 1.5 ci-dessous pour la définition précise.

conjecture de Weinstein forte, dans le cas de structures de contact supportées par un livre ouvert de forme particulière. Comme expliqué plus en détails dans la section 3.1.1 ci-dessous, un *livre ouvert* sur M est la donnée d'une sous-variété $B \subset M$ de codimension 2 (la *reliure*) et d'une fibration du complémentaire de B sur le cercle, de forme triviale au voisinage de B ; on appelle *page* toute fibre de cette fibration compactifiée par la reliure.

Théorème 0.0.2 ([ACH04])**.** *Soit (M^3, ξ) une 3-variété de contact close supportée par un livre ouvert dont les pages sont de genre 0. Alors pour toute forme de contact définissant ξ, il existe une famille finie et non vide d'orbites de Reeb $\gamma_1, ..., \gamma_n$ tels que*

$$[\gamma_1] + ... + [\gamma_n] = 0 \in H_1(M).$$

Parmi les autres résultats en dimension 3, citons également ceux d'Etnyre et Gay [Gay06]. Enfin, ceux de Colin et Honda [CH13] établissent la conjecture de Weinstein pour les structures de contact supportées par un livre ouvert de monodromie périodique, ainsi que dans plusieurs cas où la monodromie est pseudo-Anosov.

Nombre de ces travaux ont donné lieu par la suite à des généralisations en dimension supérieure. Albers et Hofer [AH09] ont adapté le cas vrillé du théorème 0.0.1, en étudiant le cas des structures de contact possédant un Plastikstufe[3]. Hutchings et Taubes ont généralisé dans [HT09] le résultat de [Tau06]. Enfin, Niederkrüger et Rechtman [NR11] ont travaillé sur une version en grande dimension du cas $\pi_2(M) \neq 0$ du théorème 0.0.1.

Cadre de l'étude et structure du manuscrit.

D'après Giroux [Gir02], toute variété de contact est portée par un livre ouvert dont la page est un *domaine de Weinstein*, voir la section 1.3 pour la définition. On fera dans ce document une hypothèse sur la forme de cette page, que l'on explicite à présent.

Le bord Y^{2n-1} d'un domaine de Weinstein W_0^{2n} est muni naturellement d'une forme de contact. Lorsque $\Lambda \subset Y$ est une $(n-1)$-sphère *legendrienne*, c'est-à-dire partout tangente aux hyperplans de contact, on peut attacher à W_0 une *anse critique* au niveau de Λ. Topologiquement, cela correspond à choisir un certain voisinage tubulaire $\Lambda \times \mathbb{D}^n$ de Λ dans Y, et à recoller $L \times \mathbb{D}^n$ à W_0 le long de $\Lambda \times \mathbb{D}^n$, où L est un n-disque recollé de telle sorte que $\partial L = \Lambda$. En choisissant le voisinage $\Lambda \times \mathbb{D}^n$ de façon approprié, la variété W ainsi obtenue admet une structure de domaine de Weinstein, et l'on dit que son bord Y_Λ est obtenu à partir de Y par *chirurgie de contact* le long de Λ. La figure 3 tente de représenter la situation lorsque $n = 2$, même si l'on n'a pas pu faire figurer l'une des dimension de Y, et qu'il faudrait "lisser les coins" pour obtenir une variété.

Le principal résultat de cette thèse est le théorème suivant. Comme pour les autres résultats énoncés dans cette introduction, la numérotation fait référence à la section à laquelle ce théorème est prouvé.

Théorème 3.5.1. *Soit (M^{2n+1}, ξ) une variété de contact close portée par un livre ouvert de page W. On suppose que W est un domaine de Weinstein obtenu à partir d'un autre domaine*

[3] La notion de Plastikstufe a été introduite dans [Nie06].

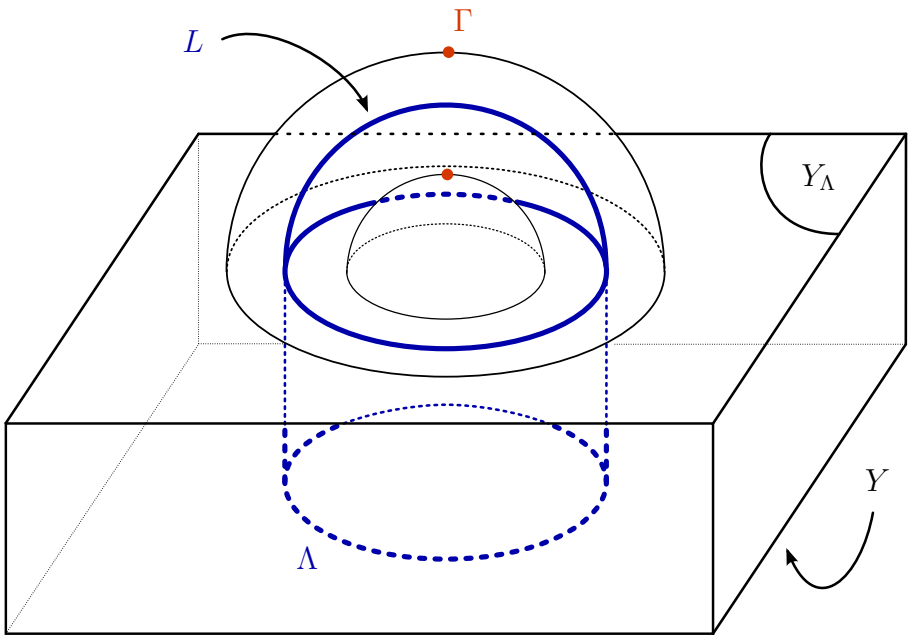


FIGURE 3 : Représentation de l'attachement d'une anse le long de Λ.

de Weinstein W_0 par attachement d'une anse le long d'une sphère legendrienne lâche[4] $\Lambda \subset \partial W_0$ *homologiquement triviale dans W_0. Alors pour toute forme de contact définissant ξ, le champ de Reeb associé possède une trajectoire fermée contractile.*

Remarque 0.0.3. L'hypothèse importante ici est celle portant sur la classe d'homologie de Λ. En effet, étant donné un domaine de Weinstein, on peut toujours introduire artificiellement une anse critique en faisant apparaître une paire de points critiques d'indice n et $n-1$, à l'aide de [CE12, Proposition 12.22]. La proposition 12.12 du même livre permet de plus de s'assurer que la sphère stable du point critique d'indice n est bien lâche. Cependant, avec une telle construction, la sphère stable n'est pas homologiquement triviale.

La stratégie adoptée afin d'établir le théorème 3.5.1 est la suivante. Le fait que $\Lambda \subset W_0$ soit homologiquement triviale permet de compléter l'âme L de l'anse en un n-cycle $\hat{L} \subset W$. On considère une forme de contact α définissant ξ adaptée au livre ouvert. Pour un certain choix de α, les hypothèses sur la page W permettent de trouver une petite orbite de Reeb $\tilde{c} \subset \partial W$ à laquelle est asymptote une famille de dimension $n-2$ de plans holomorphes contenus dans W. De plus cette famille est sans bord, et forme donc un n-cycle dont on montre qu'il intersecte non trivialement $\hat{L}$. Cette propriété d'intersection non triviale est conservée lorsque l'on passe de W à $\mathbb{R} \times M$ (la famille des plans holomorphes asymptotes à $\tilde{c}$ gagne alors deux dimensions : l'une donnée par la direction de la symplectisation, l'autre par

[4] voir la section 1.2.4 pour la définition de *lâche*.

la coordonnée angulaire dans le livre ouvert). Ici $\mathbb{R} \times M$ est muni d'une structure réalisant une homotopie entre α et une forme β arbitraire telle que $\xi = \ker \beta$. En envoyant $\hat{L}$ vers $-\infty$, on force alors la famille de plans holomorphes à se briser, produisant un plan holomorphe asymptote à une orbite de Reeb pour β.

Ce document est divisé en trois grandes parties. La première introduit précisément la plupart des concepts et des notations qui seront utiles dans la suite. La deuxième étudie la situation dans la page, en s'appuyant sur un article de Bourgeois, Ekholm et Eliashberg [BEE] encore non paru au moment de l'écriture de ces lignes. On en redétaille donc les idées essentielles à la preuve, avant d'en tirer des résultats sur le cardinal de certains espaces de courbes holomorphes. Enfin, la troisième partie généralise (partiellement) en grande dimension certains travaux de Wendl [Wen10b, Wena] sur les livres ouverts, et utilise ces résultats pour comprendre le comportement des courbes holomorphes dans $\mathbb{R} \times M$.

La suite de cette introduction présente un panorama rapide des parties 2 et 3.

Attachement d'anse critique et dynamique de Reeb.

Dans la deuxième partie de ce texte, on considère un domaine de Weinstein W^{2n} de la forme décrite dans le théorème 3.5.1 et représentée sur la figure 4 : W est obtenu en attachant à un domaine de Weinstein W_0 une anse critique X le long d'une sphère legendrienne lâche $\Lambda \subset Y = \partial W_0$. On note comme précédemment Y_Λ le bord de W et $L \simeq L \times \{0\} \subset L \times \mathbb{D}^n$ l'*âme* de l'anse.

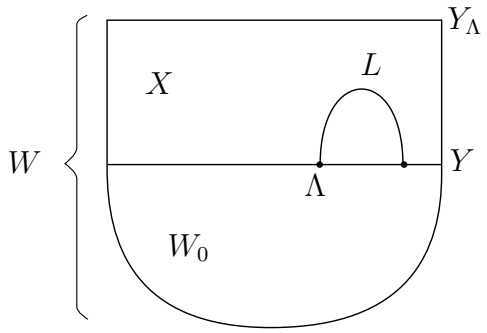


FIGURE 4 : Représentation schématique de l'attachement d'une anse.

La section 2.2 reprend la construction explicite donnée dans [BEE] d'une anse critique. Grâce à ce modèle, l'article décrit comment la chirurgie de contact le long de $\Lambda \subset Y$ affecte la dynamique du champ de Reeb : un peu comme pour l'attachement de rocades [Vau11], les nouvelles orbites créées par chirurgie sont en correspondance avec les mots cycliques en cordes de Reeb de Λ (une *corde de Reeb* de Λ est une trajectoire du flot de Reeb qui prend source et se termine sur Λ). La preuve de cette affirmation repose sur le fait que, sur le bord de l'anse $L \times \partial\mathbb{D}^n \simeq ST^*L$, le flot de Reeb se comporte comme le flot géodésique sur L ; cela permet de connecter dans l'anse différentes trajectoires de Reeb.

Proposition 2.1.1. *Quitte à la perturber, une sphère legendrienne lâche $\Lambda \subset Y$ possède une corde de Reeb c dont la longueur peut être rendue arbitrairement plus petite que les longueurs des autres cordes de Reeb de Λ et des orbites de Reeb de Y.*

Cette proposition, comme les énoncés suivants, sera énoncée à nouveau - éventuellement sous une forme plus précise - dans la section indiquée par sa numérotation. La correspondance démontrée dans [BEE] permet d'associer à la corde c de la proposition précédente une orbite $\tilde{c}$ de Y_Λ, de période arbitrairement petite. On va alors construire une famille de dimension $n-2$ de plans holomorphes dans la page asymptotes à $\tilde{c}$ en $+\infty$, telle que l'intersection de cette famille avec l'âme L de l'anse est non-triviale.

Après avoir choisi une structure presque complexe adaptée et suffisamment générique pour les besoins des preuves, on obtient les résultats suivants (dans les espaces de modules mentionnés par la suite, les applications représentent de plus certaines classes d'homologie fixées : on renvoie aux sections concernées pour davantage de détails).

Proposition 2.1.2. *Il existe un unique disque holomorphe Fredholm-régulier et rigide*

$$u_2 : (\mathbb{D} \setminus \{1\}, \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}) \to (Y \times \mathbb{R}, \Lambda \times \mathbb{R})$$

asymptote à c en $+\infty$.

Théorème 2.3.2. *L'espace de modules des cylindres holomorphes*

$$u_1 : (\mathbb{D} \setminus \{0,1\}, \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}) \to (X, L)$$

asymptotes à $\tilde{c}$ en $+\infty$ au niveau de 1 et à c en $-\infty$ au niveau de 0 est un ensemble fini, de cardinal impair.

Ce dernier énoncé découle d'un théorème de [BEE] (voir théorème 2.3.1 ci-dessous) qui montre l'unicité d'un disque holomorphe particulier, présentant le long de son bord quatre perçures : deux au niveau desquelles il tend vers c et $\tilde{c}$, et deux au niveau d'un même point d'intersection lagrangienne. En recollant le disque à lui-même au niveau de ces deux dernières perçures, on obtient une famille à un paramètre qui dégénère sur une courbe de la forme du théorème 2.3.2.

Pour le dernier résultat de la partie, on ajoute l'hypothèse selon laquelle Λ est homologiquement triviale dans W_0, et on complète L en un cycle $\hat{L} \in H_n(W)$.

Théorème 2.4.6. *L'espace de modules des plans holomorphes $u : \mathbb{C} \to W$ asymptotes à $\tilde{c}$ en $+\infty$ est une variété compacte sans bord de dimension $n-2$. De plus, la classe d'homologie dans $H_n(\overline{W}, \tilde{c})$ représentée par l'union de tous ces plans intersecte $\hat{L}$ de manière non triviale.*

Ce théorème combine la proposition 2.1.2 et le théorème 2.3.2. En recollant un cylindre u_1 comme dans le théorème 2.3.2 à u_2 au niveau de leur asymptote commune à c, on obtient un anneau holomorphe

$$u_0 : (\mathbb{D} \setminus \{0\}, \partial\mathbb{D}) \to (X, L)$$

positivement asymptote à $\tilde{c}$. Cet anneau appartient à une famille à un paramètre au sein de laquelle le bord de u_0 finit par dégénérer en un point, créant ainsi un plan holomorphe intersectant L en un point. Il reste à compter ces plans pour établir le théorème précédent.

Livres ouverts et feuilletages holomorphes.

Afin de démontrer le résultat principal de ce document, la dernière étape consiste à établir un énoncé similaire à celui du théorème 2.4.6, mais en remplaçant W par $\mathbb{R}\times M$ où M est une variété de contact supportée par un livre ouvert de page W. Le bord ∂W de la page est alors identifié à la reliure du livre ouvert, ce qui permet de voir l'orbite de Reeb $\tilde{c}$ comme incluse dans M, et de s'intéresser aux plans holomorphes dans $\mathbb{R}\times M$ qui lui sont asymptotes.

L'étude de ce passage de la page à la symplectisation du livre ouvert fait l'objet de la troisième partie, et nécessite de comprendre les liens qui unissent les pages du livre ouvert et les courbes holomorphes dans $\mathbb{R}\times M$. Une telle analyse a déjà été menée en dimension 3 par Wendl dans le cas des livres ouverts *planaires*, c'est-à-dire dont la page est de genre 0.

Théorème 0.0.4 ([Wen10b])**.** *Soit (M,ξ) une variété de contact supportée par un livre ouvert planaire, dont on note π la fibration sur le cercle associée. Alors après une isotopie de π, il existe une forme de contact définissant ξ et compatible avec le livre ouvert, ainsi qu'une structure presque complexe J compatible sur $\mathbb{R}\times M$ vérifiant la propriété suivante : il existe une famille lisse de dimension 2 et $\mathbb{R}$-invariante de plans holomorphes d'énergie finie, d'indice 2, et plongés dans $\mathbb{R}\times M$, dont les projections sur M constituent une famille de dimension 1 de plongements paramétrisant les pages du livre ouvert.*

Soulignons que ce résultat a été utilisé (entre autre) par Abbas, Cieliebak et Hofer afin de prouver le théorème 0.0.2 cité plus haut. L'hypothèse restrictive ici est celle portant sur le genre de la page. La construction de [Wen10b] emploie en effet une structure presque complexe compatible, non avec une forme de contact, mais avec une *structure hamiltonienne stable* (voir la section 3.1.2) que l'on déforme dans un second temps pour obtenir une structure de contact. Il s'agit alors de justifier que les propriétés intéressantes du feuilletage holomorphe obtenu dans un premier temps perdurent lors de cette déformation, ce qui pour des raisons d'indice n'est le cas que si les pages sont de genre 0.

En dimension supérieure, il est bien entendu illusoire d'espérer obtenir un énoncé strictement semblable au théorème 0.0.4, puisque par raison de dimension les pages ne peuvent être les projetés de courbes holomorphes. On contourne cette difficulté en montrant que pour la bonne structure presque complexe, les pages du livre ouvert se relèvent en des hypersurfaces holomorphes, et que chaque plan holomorphe asymptote à une orbite contenue dans la reliure est nécessairement contenu dans une des pages.

Proposition 3.2.1. *Soit M une variété portée par un livre ouvert. Considérons, hors d'un voisinage de la reliure, la distribution verticale λ_0 (i.e. le champ d'hyperplans tangents aux pages du livre ouvert). Alors on peut étendre λ_0 en un confeuilletage λ_0 sur M, qui est de contact au voisinage de la reliure, et vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Il existe une structure hamiltonienne* $\mathcal{H}_0 = (\lambda_0, X_0, \omega_0)$ *sur* M *compatible avec* λ_0.
2. *On peut perturber la structure précédente à travers une famille lisse* $(\lambda_\varepsilon, X_\varepsilon, \omega_\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ *de structures hamiltoniennes stables sur* M*, telle que* λ_ε *est une forme de contact pour* $\varepsilon > 0$.

Proposition 3.3.1. *Soit* M *une variété portée par un livre ouvert, et* $\mathcal{H}_0$ *la structure hamiltonienne stable sur* M *donnée par la proposition 3.2.1. Il existe une structure presque complexe* J_0 *sur* $\mathbb{R} \times M$ *compatible avec* $\mathcal{H}_0$*, telle que chaque page du livre ouvert se relève dans* $\mathbb{R} \times M$ *en une hypersurface* J_0*-holomorphe. La réunion de tous les translatés de ces relevés et de la symplectisation de la reliure forme un feuilletage* J_0*-holomorphe* $\mathbb{R}$*-invariant de codimension 2 de* $\mathbb{R} \times M$.

Proposition 3.4.5. *Sous les hypothèses de l'énoncé précédent, soit* u *un plan* J_0*-holomorphe asymptote à une orbite de Reeb contenue dans la reliure du livre ouvert. Alors l'image de* u *est contenue toute entière dans une des hypersurfaces holomorphes données par la proposition 3.3.1.*

La proposition 3.3.1 permet de voir l'âme (complétée) $\hat{L}$ comme un élément de $H_n(\mathbb{R}\times M)$. En combinant les deux dernières propositions au théorème 2.4.6 établi dans la deuxième partie, on obtient :

Lemme 3.5.3. *Quitte à perturber* J_0*, la réunion de tous les plans holomorphes* $u : \mathbb{C} \to (\mathbb{R} \times M, J_0)$ *asymptotes à* $\tilde{c}$ *en* $+\infty$ *forme un* $(n+2)$*-cycle qui intersecte* $\hat{L}$ *de manière non triviale.*

De plus le théorème 3.4.1, donné dans le corps du document, présente une description de cet espace de modules au voisinage du relevé d'une page "préférée" du livre ouvert. Il prouve également que les plans intersectant ce voisinage sont tous *Fredholm-réguliers* (voir la section 1.7.6), ce qui permet de conserver la propriété d'intersection non triviale avec $\hat{L}$ lors de la perturbation fournie par la proposition 3.3.1.

La proposition 3.4.5, conjuguée à une étude topologique menée à la section 2.4.1, permet également d'obtenir le résultat suivant, qui n'est d'aucune utilité à la démonstration du résultat principal mais pourrait présenter un intérêt propre.

Corollaire 3.4.6. *Soit* W *un domaine de Weinstein de dimension 4 obtenu à partir d'un autre domaine de Weinstein* W_0 *par attachement d'une anse le long d'une sphère legendrienne lâche. Alors si* $\Psi : W \to W$ *est un symplectomorphisme égal à l'identité près du bord,* Ψ *laisse fixe la classe d'homologie (relative) de la co-âme de l'anse.*

1

Notions de base

On commence par quelques rappels de topologie de contact et topologie symplectique. La principale référence utilisée ici est le livre de Geiges [Gei], complété pour la partie symplectique par le livre de McDuff et Salamon [MS98].

1.1 Géométrie symplectique

Définition 1.1.1. On appelle *variété symplectique* tout couple (M, ω), où M est une variété, et ω une 2-forme différentielle fermée sur M et non dégénérée sur chaque espace tangent (i.e. ω définit une structure d'espace vectoriel symplectique sur chaque espace tangent). On dit que ω est une *forme symplectique* sur M.

On appelle *fibré vectoriel symplectique* sur une variété M tout couple (E, ω), où E est un fibré vectoriel sur M, et ω une section lisse du fibré $\Lambda^2 E^* \to M$ munissant chaque fibre de E d'une structure d'espace vectoriel symplectique (i.e. ω est non dégénérée sur chaque fibre).

Une forme symplectique ω a toujours localement la même forme : un théorème de Darboux [MS98, Théorème 3.15] assure qu'au voisinage de tout point, il existe des coordonnées $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ dans lesquelles ω coïncide avec la forme symplectique standard

$$\omega_{st} = dx \wedge dy := \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Définition 1.1.2. Soient (M, ω_M) et (N, ω_N) des variétés symplectiques. Un *symplectomorphisme* est un difféomorphisme $f : M \to N$ tel que $f^*\omega_N = \omega_M$. Quand une telle application existe, on dit que que M et N sont *symplectomorphes*.

Une immersion $i : L \hookrightarrow M$ dans une variété symplectique (M^{2n}, ω) de dimension $2n$ est dite *isotrope* si $i^*\omega = 0$. Dans ce cas on a nécessairement $\dim L \leq n$; quand la dimension de L est égale à n, on parle d'immersion *lagrangienne*. On dira qu'une sous-variété $L \subset M$ est *isotrope* (resp. *lagrangienne*) si L est l'image d'un plongement isotrope (resp. lagrangien).

Exemple 1.1.3 (Fibré cotangent). Soit L une variété de dimension n. On note $\pi : T^*L \to L$ la projection associée au fibré cotangent de L. On définit alors une 1-forme λ sur T^*L, dite *forme de Liouville*, par $\lambda_u = u \circ d\pi$ pour $u \in T^*L$. La situation est résumée sur le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} TT^*L \arrow[r, "d\pi"] \arrow[d] & TL \arrow[r, "u"] \arrow[d] & \mathbb{R} \\ T^*L \arrow[r, "\pi"] & L & \end{tikzcd}$$

Localement, si on note $x = (x_1, ..., x_n)$ des coordonnées sur L et $y = (y_1, ..., y_n)$ les coordonnées duales sur les fibres de T^*L, on voit par un simple calcul que λ s'écrit

$$\lambda = ydx := \sum_i y_i dx_i.$$

Dès lors, $d\lambda$ munit T^*L d'une structure de variété symplectique : cette 2-forme est clairement fermée, et s'écrit dans les coordonnées qui précèdent

$$d\lambda = dy \wedge dx,$$

d'où il ressort qu'elle est également non dégénérée. On appelle $d\lambda$ la *forme symplectique standard* sur T^*L. La forme ω_{st} sur $\mathbb{R}^{2n}$ est un cas particulier de cette construction, dans le cas $L = \mathbb{R}^n$.

1.2 Géométrie de contact

1.2.1 Généralités

Une *structure de contact* (coorientée) sur une variété M^{2n+1} de dimension $2n+1$ est la donnée d'un champ d'hyperplans $\xi = \ker \alpha$ totalement non-intégrable, au sens où la 1-forme α le définissant satisfait $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ en tout point. Par un théorème de Darboux [Gei, Théorème 2.5.1], c'est équivalent au fait qu'au voisinage de tout point, α est conjuguée à la forme de contact standard

$$\alpha_{st} = dz - ydx := dz - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i$$

où l'on note $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, z)$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^{2n+1}$. Voir la figure 1.

Dans une *variété de contact* $(M^{2n+1}, \xi = \ker \alpha)$, les sous-variétés tangentes à ξ (dites *isotropes*) sont de dimension au plus n ; on parle de sous-variété *legendrienne* dans le cas

d'une sous-variété tangente à ξ et de dimension égale à n. Une immersion $i : \Lambda \looparrowright M$ sera dite *isotrope* (respectivement *legendrienne* quand $\dim \Lambda = n$) si son image l'est ou, de manière équivalente, si $i^*\alpha = 0$.

Définition 1.2.1. Soient $(M, \xi_M = \ker \alpha_M)$ et $(N, \xi_N = \ker \alpha_N)$ des variétés de contact. On dit qu'une application $f : M \to N$ est *de contact* si $df(\xi_M) = \xi_N$. Cela revient à dire qu'il existe $\lambda : M \to \mathbb{R}^*$ telle que $f^*\alpha_N = \lambda\alpha_M$.

Si de plus f est un difféomorphisme, on parle de *contactomorphisme*, et on dit que (M, ξ_M) et (N, ξ_N) sont *contactomorphes*.

Enfin, on dit que f est un *contactomorphisme strict* si f est un difféomorphisme vérifiant $f^*\alpha_N = \alpha_M$.

Exemple 1.2.2 (Espace des jets). Étant donné une variété L de dimension n, on définit son *espace des 1-jets* $J^1L = T^*L \times \mathbb{R}$. En notant z la coordonnée selon $\mathbb{R}$ et λ la forme de Liouville sur T^*L, on pose alors $\alpha_{jet} = dz - \lambda$. La 1-forme α_{jet} munit J^1L d'une structure de contact $\xi_{jet} = \ker(\alpha_{jet})$.

On peut voir L comme un partie $L \subset J^1L$ à l'aide de la section nulle. Alors, dans les coordonnées précédentes, $L = \{y = 0, z = 0\}$, ce qui fait apparaître que L est une sous-variété legendrienne de (J^1L, ξ_{jet}).

La structure de contact standard λ_{st} sur $\mathbb{R}^{2n+1}$ constitue un cas particulier de cette construction, dans le cas $L = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.3. Soit (X, ω) une variété symplectique. Un *champ de Liouville* est un champ de vecteurs v tel que $\mathcal{L}_v\omega = \omega$.

Une hypersurface $H \subset X$ est dite *de type contact* s'il existe un champ de Liouville v au voisinage de H qui lui est transverse. La 1-forme $\iota_v\omega$ se restreint alors en une forme de contact sur H.

1.2.2 Champ de Reeb

Soit (M, ξ) une variété de contact. Une 1-forme α définissant $\xi = \ker \alpha$ est appelée *forme de contact*. On lui associe un champ de vecteurs R défini uniquement par $\iota_R d\alpha = 0$ et $\alpha(R) = 1$, appelé *champ de Reeb*.

On appelle *orbite de Reeb* une trajectoire périodique du flot de Reeb, et *corde de Reeb* une trajectoire de R commençant et se terminant sur une sous-variété legendrienne $\Lambda \subset M$. Dans toute la suite de ce document, étant donné une corde c, on notera c^- son point de départ et c^+ son point d'arrivée. Pour c une corde ou une orbite de Reeb, on définit son *action* (ou *période* pour une orbite) :

$$\mathcal{A}(c) = \int_c \alpha.$$

Si Λ est une sous-variété legendrienne close générique, elle n'admet qu'un nombre fini de cordes d'action inférieure à une borne donnée. Enfin, une orbite de Reeb est dite *simple* si elle n'est pas le revêtement multiple d'une autre orbite de Reeb.

Exemple 1.2.4. Dans le cas de la forme de contact standard $dz - ydx$ sur $\mathbb{R}^{2n+1}$, le champ de Reeb est juste le champ constant ∂_z. L'action d'une corde de Reeb c est alors la différence entre les z-coordonnées de c^+ et c^-.

Non-dégénérescence

On note ici ϕ_t le flot du champ de Reeb associé à α. On rappelle que ce flot préserve $\xi = \ker \alpha$.

Soit γ une orbite de Reeb de période T, et x_0 un point dans l'image de γ. On dit que γ est *non-dégénérée* si la différentielle de l'application de premier retour

$$d\phi_T : \xi_{x_0} \to \xi_{x_0}$$

n'admet pas 1 comme valeur propre. D'après [Bou03, Lemme 2], pour un choix générique de α, toutes les orbites de Reeb sont non-dégénérées (et en nombre fini si M est compacte et si on borne leur période).

Il existe également une notion de non-dégénérescence pour les cordes de Reeb. Étant donné c une corde d'une sous-variété legendrienne close (i.e. compacte et sans bord) Λ, de longueur T, on dira que c est *non-dégénérée* si $d\phi_T(T_{c^-}\Lambda)$ est transverse à $T_{c^+}\Lambda$. Là encore, par une perturbation générique de Λ, on peut garantir que les cordes de Λ d'action inférieure à une borne donnée sont en nombre fini et toutes non-dégénérées.

1.2.3 Projections frontales et lagrangiennes

Dans cette section, on considère $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa structure de contact standard. Les coordonnées sont notées comme précédemment par convention $(x, y, z) = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, z)$. On définit les projections lagrangiennes et frontales Π_L et Π_F :

$$\begin{aligned} \Pi_L : &\quad (x, y, z) \mapsto (x, y), \\ \Pi_F : &\quad (x, y, z) \mapsto (x, z). \end{aligned}$$

On considère aussi pour le reste de cette section une sous-variété legendrienne Λ^n de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Projection lagrangienne.

L'application $\Pi_L|_\Lambda$ est toujours une immersion lagrangienne exacte. Notons que les points d'auto-intersection de $\Pi_L(\Lambda)$ correspondent exactement aux cordes de Reeb de Λ.

Réciproquement, étant donné une immersion lagrangienne exacte $\phi : \Lambda \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, on peut trouver une immersion legendrienne $\tilde{\phi} : \Lambda \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ qui relève ϕ, unique à translation près selon l'axe des z. La coordonnée z est obtenue par intégration : étant donnés deux points $p_0, p_1 \in \Lambda$, et un chemin $\gamma \subset \Lambda$ reliant p_0 à p_1,

$$z(p_1) = z(p_0) + \sum_{i=1}^{n} \int_\gamma y_i dx_i.$$

Projection frontale.

Le *front* $\Pi_F(\Lambda)$ d'une sous-variété legendrienne Λ générique est une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}$, lisse en-dehors d'un lieu singulier Σ de codimension 1 dans Λ. Il existe de plus un sous-ensemble $\Sigma' \subset \Sigma$ de codimension 2 dans Λ tel que sur $\Sigma \setminus \Sigma'$, $\Pi_F(\Lambda)$ ne présente que des singularités cuspidales semi-cubiques, dites *cusps* : au voisinage d'un point lisse de $\Sigma \setminus \Sigma'$, il existe des coordonnées $(t_1, ..., t_n)$ sur Λ et $(\xi_1, ..., \xi_n, z)$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ dans lesquelles $\Pi_F(\Lambda)$ est de la forme

$$\{(x_1^2, x_2, ..., x_n, \delta x_1^3 + \beta x_1^2 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n)\}$$

où $\delta = \pm 1$ et $\beta, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sont des constantes réelles. On renvoie à [AG01, p.115] pour de plus amples détails.

Sur $\Lambda \setminus \Sigma$, le front de Λ est composé de plusieurs portions de graphes au-dessus de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. On récupère les coordonnées y de Λ à partir des pentes du front :

$$y_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}.$$

Ainsi les points d'auto-intersection de Λ correspondent exactement aux points d'auto-tangence dans le front. Un front comme celui représenté en figure 1.1, présentant un cusp et point d'auto-intersection transverse, se relève par exemple en une sous-variété legendrienne (plongée) de $(\mathbb{R}^3, \xi_{st})$. En projection frontale, les cordes de Reeb apparaissent comme des trajectoires verticales connectant deux points du front ayant même espace vectoriel tangent.

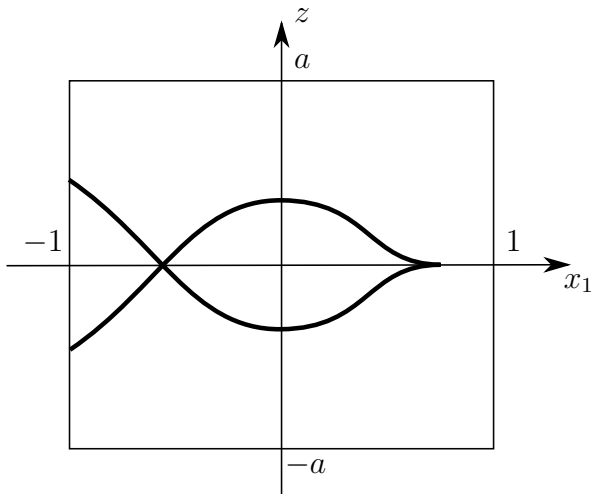


FIGURE 1.1 : Projection frontale de λ_0.

1.2.4 Nœuds legendriens lâches

Le but de cette section est de définir le concept de legendrien lâche, originellement introduit par Murphy dans [Mur]. Il s'agit d'une sous-variété legendrienne présentant, dans une certaine carte de Darboux dite *carte lâche*, une forme particulière.

Soit λ_0 l'arc legendrien dans $(\mathbb{R}^3, \xi_{st})$ dont la projection frontale est décrite par la figure 1.1 pour un certain $a > 0$. Ici on suppose que les pentes au niveau du point d'auto-intersection valent $+1$ et -1, et que la pente n'excède jamais 1 en valeur absolue. Ainsi λ_0 est inclus dans la boîte

$$Q_a := \{|x_1|, |y_1| \leq 1,\ |z| \leq a\}$$

et $\partial\lambda_0 \subset \partial Q_a$.

À présent on va étendre ce modèle en un modèle produit en dimension supérieure. Pour cela, on voit $(\mathbb{R}^{2n+1}, dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i)$ comme le produit de $(\mathbb{R}^3, dz - y_1 dx_1)$ par $(\mathbb{R}^{2n-2}, -\sum_{i=2}^n y_i dx_i)$. On pose $x' := (x_2, ..., x_n)$ et $y' := (y_2, ..., y_n)$. On définit alors, pour $b > 0$:

$$\begin{array}{rcl} P_b & := & \{|x'| \leq b,\ |y'| \leq b\} \subset \mathbb{R}^{2n-2}, \\ D_b & := & \{|x'| \leq b, y' = 0\} \subset P_b, \\ R_{ab} & := & Q_a \times P_b = \{|x_1|, |y_1| \leq 1,\ |z| \leq a,\ |x'|, |y'| \leq b\} \subset \mathbb{R}^{2n+1}, \\ \Lambda_0 & := & \lambda_0 \times D_b \subset R_{ab}. \end{array}$$

Remarquons que l'on a $\partial\Lambda_0 \subset \partial R_{ab}$. Le cylindre Λ_0 ainsi construit est legendrien, et son front (i.e. sa projection frontale) est également un cylindre de base le front de λ_0, comme représenté sur la figure 1.2.

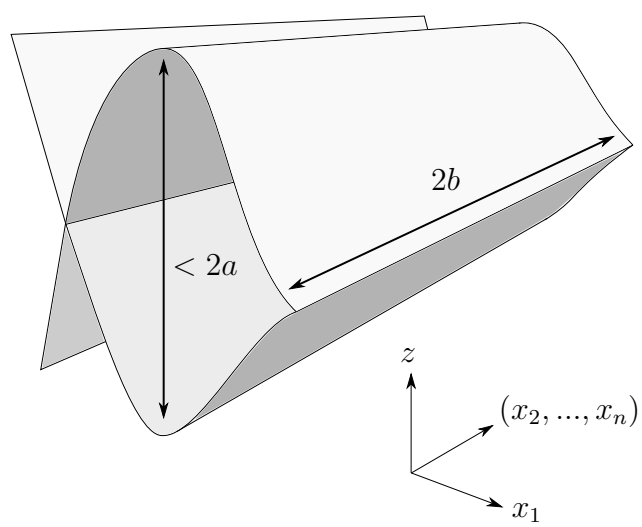


FIGURE 1.2 : Projection frontale de Λ_0.

On appelle la paire (R_{ab}, Λ_0) une *carte lâche standard* si la condition suivante est respectée :

$$a < b^2.$$

Dans la définition suivante, on reprend la terminologie de [Mur], en désignant par *nœud* une sous-variété close (compacte sans bord) et connexe.

Définition 1.2.5. Soit Λ un nœud legendrien dans une variété de contact (Y^{2n+1}, ξ). On dit que Λ est un *nœud legendrien lâche* s'il existe une carte de Darboux U dans Y telle que $(U, \Lambda \cap U)$ est isomorphe (par un isomorphisme de contact) à une carte lâche standard (R_{ab}, Λ_0).

Dans cette définition, le point fondamental est la condition $a < b^2$. En effet, elle permet de rendre le nœud arbitrairement étroit au niveau de la carte lâche. Plus précisément :

Proposition 1.2.6. *Dans une carte lâche standard (R_{ab}, Λ), on peut toujours trouver une autre carte lâche $(R_{a'b'}, \Lambda')$ telle que le rapport $\frac{a'}{b'^2}$ est arbitrairement petit.*

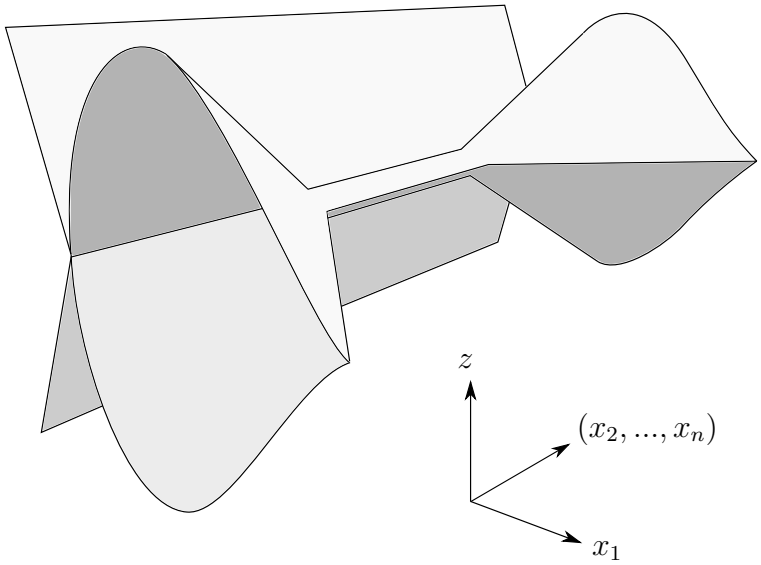


FIGURE 1.3 : Étrécissement d'une carte lâche.

Démonstration. Quitte à redimensionner l'ensemble du problème par le contactomorphisme $(x, y, z) \mapsto (tx, ty, t^2 z)$, on peut supposer que $b = 1$, le rapport $\frac{a}{b^2}$ restant inchangé. On a donc $a < 1$. On opère alors comme représenté sur la figure 1.3, en étrécissant le milieu de la carte lâche en projection frontale. Cet étrécissement est opéré en gardant toutes les pentes $\frac{dz}{dx_i}$ bornées par 1, de sorte que ces modification se relèvent bien en des modifications

de Λ supportées dans la carte lâche R_{ab} (en particulier, on ne crée pas de points d'auto-intersection). On obtient ainsi une nouvelle carte lâche $(R_{a'b'}, \Lambda')$, avec $b' \geq (1-a)/2$ et a' arbitrairement petit. On voit que la condition de flexibilité $a < 1$ intervient pour garantir que b' ne tend pas vers 0 au cours de ce procédé.

On conclut par extension des isotopies legendriennes ([Gei, Théorème 2.6.2]). □

1.3 Variétés de Liouville et de Weinstein

Dans cette section, on introduit les notions de structures de Liouville et de Weinstein sur une variété symplectique, et on présente les propriétés élémentaires de ces objets. La terminologie employée est assez variable à travers la littérature (voir par exemple [BEE12, Section 1]) ; on choisit ici de reprendre les conventions de [CE12, Chapitre 11].

1.3.1 Structures de Liouville

Soit (X, ω) une variété symplectique. On dit que (X, ω) est *exacte* s'il existe une 1-forme différentielle λ sur X, dite *forme de Liouville*, telle que $d\lambda = \omega$. On peut alors définir un champ de vecteurs v par $\iota_v \omega = \lambda$. Il s'agit d'un champ de Liouville : en effet, $\mathcal{L}_v \omega = d(\iota_v \omega) + \iota_v(d\omega) = \omega$ car ω est fermée.

Remarque 1.3.1. Il est équivalent de se donner une primitive λ de ω ou un champ de Liouville v de ω. On notera donc indifféremment (X, λ) ou (X, ω, v) pour parler de la variété symplectique exacte X.

Définition 1.3.2. Soient (X, λ), (Y, μ) deux variétés symplectiques exactes.

Un symplectomorphisme $f : X \to Y$ est dit *exact* si la 1-forme fermée $f^*\mu - \lambda$ est exacte.

Une sous-variété isotrope $L \subset X$ est dite *exacte* si la 1-forme fermée $\lambda\,|_L$ est exacte.

Une immersion isotrope $i : L \looparrowright X$ est dite *exacte* si la 1-forme fermée $i^*\lambda$ est exacte.

Exemple 1.3.3.

- T^*L muni de la forme de Liouville définie à l'exemple 1.1.3 est une variété exacte. De plus $L \subset T^*L$ en est une sous-variété lagrangienne exacte.
- Si $H_1(L) = 0$, tout immersion isotrope $L \looparrowright X$ est exacte.

Définition 1.3.4. Un *cobordisme de Liouville* est un cobordisme (compact) muni d'une structure symplectique exacte (X, ω, v) tel que v est transverse à $\partial X = \partial_- X \sqcup \partial_+ X$, entrant au niveau de $\partial_- X$, et sortant au niveau de $\partial_+ V$. On appelle $\partial_- X$ le *bord concave* de X, et $\partial_+ X$ son *bord convexe*.

Un *domaine de Liouville* est un cobordisme de Liouville (X, ω, v) tel que $\partial_- X = \emptyset$.

Soit $(\overline{X}, \lambda)$ un cobordisme de Liouville, et notons $V_\pm = \partial_\pm \overline{X}$. Ces deux bords sont des hypersurfaces de type contact, et λ s'y restreint donc en une forme de contact $\alpha_\pm$. Le flot de v dilatant λ par un facteur exponentiel, on peut trouver un voisinage de V_- dans $\overline{X}$ de la forme $[0, \varepsilon] \times V_-$ dans lequel $\lambda = e^t \alpha_-$ (voir la proposition 1.3.9 plus bas). On peut alors recoller à $\overline{X}$ la demi-symplectisation $(]-\infty, 0] \times V_-, e^t \alpha_-)$. De même V_+ possède un voisinage de la forme $([-\varepsilon, 0] \times V_+, e^t \alpha_+)$, auquel on peut recoller $([0, +\infty[\times V_+, e^t \alpha_+)$. On obtient ainsi une variété symplectique exacte dite *cobordisme de Liouville complété*.

Une procédure similaire permet, à partir d'un domaine de Liouville, d'obtenir un *domaine de Liouville complété*.

Remarque 1.3.5. Dans la suite, étant donné un domaine ou cobordisme $\overline{X}$, on notera X le domaine ou cobordisme complété associé. On fera de plus l'abus de notation $\partial_\pm X$ pour désigner $\partial_\pm \overline{X}$. Enfin, quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on emploiera les termes de cobordisme et domaine de Liouville pour désigner indifféremment la version compacte ou complétée de ces objets.

Modèle intrinsèque de cobordisme complété

On présente ici une autre manière de concevoir un cobordisme complété, qui s'avérera utile par la suite. On reprend les notations précédentes. Soient $U_- \cong [0, 1] \times V_-$, $U_+ \cong [-1, 0] \times V_+$ des voisinages disjoints de V_- et V_+ dans $\overline{X}$. On note de plus $E_- =]-\infty, 0] \times V_-$ et $E_+ = [0, +\infty[\times V_+$ les extrémités cylindriques de X.

Pour $\delta \in]0, 1[$, prenons une fonction lisse, croissante et concave

$$g_+^\delta : [-\delta, +\infty[\to [-\delta, 0[, \quad g^\delta(t) = \begin{cases} t & \text{près de } -\delta \\ -\frac{\delta}{2} e^{-t} & \text{pour } t \geq 0. \end{cases}$$

On définit de même, de manière symétrique, une fonction $g_-^\delta :]-\infty, \delta] \to]0, \delta]$. Enfin, on pose $U_-^\delta = [0, \delta] \times V_- \subset U_-$ et $U_+^\delta = [-\delta, 0] \times V_+ \subset U_+$. On peut alors construire un difféomorphisme

$$G^\delta : X \xrightarrow{\sim} \mathring{\overline{X}}, \quad G^\delta(w) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \overline{X} \setminus (U_-^\delta \cup U_+^\delta) \\ (g_-^\delta(t), v) & \text{si } x = (t, v) \in E_- \cup U_-^\delta \\ (g_+^\delta(t), v) & \text{si } x = (t, v) \in E_+ \cup U_+^\delta. \end{cases}$$

1.3.2 Structures de Weinstein

On rappelle qu'une *fonction de Morse* sur une variété W est une fonction $\phi : M \to \mathbb{R}$ n'admettant que des points critiques non dégénérés (i.e. en chaque point critique, la Hessienne calculée dans des coordonnées quelconques au voisinage du point est non dégénérée). Une telle condition est générique. Selon le lemme de Morse [Mil63, Lemme 2.2], une fonction de Morse est, au voisinage d'un de ses points critiques p, conjuguée à une forme quadratique de signature égale au nombre de valeurs propres négatives de sa Hessienne en ce point. On

appelle ce nombre l'*indice* de p, et on le note $\mathrm{ind}(p)$. Un système de coordonnées dans lequel ϕ revêt une telle forme est désigné sous le nom de *coordonnées de Morse*.

Définition 1.3.6. Un *cobordisme de Weinstein* (resp. *domaine de Weinstein*) (W, ω, v, ϕ) est la donnée d'un cobordisme (resp. domaine) de Liouville (W, ω, v) et d'une fonction de Morse $\phi : W \to \mathbb{R}$ constante sur $\partial_{\pm} W$ et dont v est un *pseudo-gradient*, c'est-à-dire :

1. $d\phi(v) > 0$ en-dehors des points critiques de ϕ ;
2. en coordonnées Z au voisinage d'un point critique $p = \{Z = 0\}$, il existe $\beta > 0$ tel que $d\phi(v(Z)) \geq \beta |Z|^2$, où $|\cdot|$ est une métrique sur X.

Un *cobordisme de Weinstein complété* (resp. *domaine de Weinstein complété*) (W, ω, v, ϕ) est la donnée d'un cobordisme (resp. domaine) de Liouville complété (W, ω, v) et d'une fonction de Morse $\phi : W \to \mathbb{R}$ dont v est un *pseudo-gradient*, et qui, dans les extrémités cylindriques, ne dépend que de la direction de symplectisation.

Enfin, on dit qu'un cobordisme de Weinstein (W, ω, v, ϕ) est *élémentaire* s'il n'existe aucune trajectoire du flot de v reliant deux points critiques de ϕ.

Remarque 1.3.7.

- Quand v est un pseudo-gradient pour ϕ, on dit aussi que ϕ est une *fonction de Liapunov* pour v. Dans une telle situation, les zéros de X coïncident avec les points critiques de ϕ.
- La construction d'un complété décrite à la section précédente pour les cobordismes de Liouville s'adapte directement pour les cobordismes de Weinstein. Comme dans le cas des structures de Liouville, on emploiera parfois la même terminologie pour parler des espaces compacts ou de leur version complétée.
- On peut définir une notion plus large de cobordisme de Weinstein en retirant l'hypothèse de compacité, mais en demandant que hors d'un voisinage des points critiques de ϕ, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $d\phi(v) \geq \varepsilon$. Tout ce qui suit reste valable dans ce cadre d'étude.

Exemple 1.3.8. Si (V, α) est une variété de contact compacte, $([0,1] \times V, d(e^t \alpha), \partial_t, \phi(t) = t)$ est un cobordisme de Weinstein de (V, ξ) vers lui-même (où l'on note t la coordonnée sur $[0,1]$). Son complété $([0,1] \times V, d(e^t \alpha))$ est appelé la *symplectisation* de V.

Plus précisément, si β est une autre forme de contact définissant ξ, alors il existe $\varepsilon > 0$ et un cobordisme de Weinstein de $(V, \varepsilon\alpha)$ vers (V, β). En effet, pour ε suffisamment petit, il existe $f : V \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que $\beta = e^f(\varepsilon\alpha)$. Alors

$$W := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times V \mid t \in [0, f(x)]\}$$

muni de la forme de Liouville $e^t \varepsilon \alpha$ constitue le cobordisme souhaité.

Soit $(W, \omega = d\lambda, v, \phi)$ un cobordisme de Weinstein, non nécessairement compact. Si $a \in \mathbb{R}$ est une valeur régulière de ϕ, alors $\phi^{-1}(c)$ est une hypersurface de W transverse à v par le premier point de la remarque précédente et le premier point de la définition. La forme de Liouville λ se restreint donc en une forme de contact sur $\phi^{-1}(c)$. Pour des raisons similaires, si $b > a$ est une autre valeur régulière de ϕ, alors $\phi^{-1}([a, b])$ est un cobordisme de Weinstein (compact), pour la structure induite par celle de (W, ω, v, ϕ).

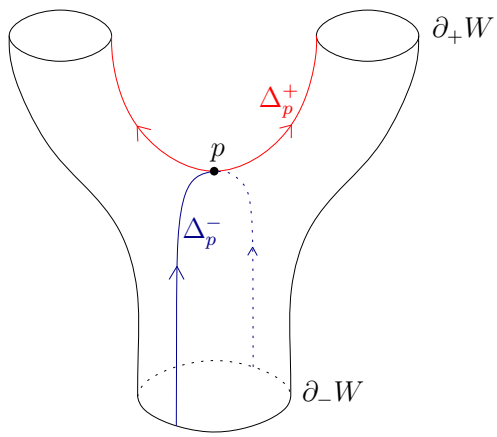


FIGURE 1.4 : Exemple de cobordisme de Weinstein avec un unique point critique.

Proposition 1.3.9. *Soit $(W, \omega = d\lambda, v, \phi)$ un cobordisme de Weinstein de V_- à V_+ tel que ϕ ne possède pas de points critiques. Notons $\alpha := \lambda|_{V_-}$ la forme de contact induite par λ sur V_-. Pour chaque $x \in V_-$, on peut définir $f(x)$ comme le temps que met le flot $\Phi_v^t(x)$ de v, partant de x, pour atteindre V_+. Alors le flot Φ_v^t réalise un symplectomorphisme*

$$\begin{array}{rccc} F: & U \subset (\mathbb{R} \times V_-, d(e^t\alpha)) & \to & (W, \omega) \\ & (t, x) & \mapsto & \Phi_v^t(x), \end{array}$$

où $U = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times V_- \mid t \in [0, f(x)]\}$. En particulier, le flot de v induit un contactomorphisme de (V_-, λ) sur (V_+, λ).

Démonstration. Puisque ϕ ne possède pas de points critiques, le pseudo-gradient v ne s'annule pas sur W ; sa norme est même minorée par une constante $\varepsilon > 0$ puisque W est compact. On peut donc définir une fonction lisse et bornée $f : V_- \to \mathbb{R}^+$ par la formule $\Phi_v^{f(x)}(x) \in V_+$. L'application F de la proposition est donc bien définie et est un difféomorphisme. De plus F envoie les lignes de flot du champ de Liouville ∂_t sur les lignes de flot de v ; par [Gei, 5.2.4], F est donc un symplectomorphisme. □

Soit (W, ω, v, ϕ) un cobordisme de Weinstein et p un zéro de v. Comme on l'a vu plus haut, p est aussi un point critique de ϕ. On définit la *variété stable* Δ_p^- de p comme la sous-variété

de W donnée par :

$$\Delta_p^- := \{x \in W \mid \lim_{t \to +\infty} \Phi_v^t(x) = p\}.$$

De même on introduit la *variété instable* de p :

$$\Delta_p^+ := \{x \in W \mid \lim_{t \to -\infty} \Phi_v^t(x) = p\}.$$

La figure 1.4 donne un exemple de cobordisme W, avec $\partial_- W \cong S^1$ et $\partial_+ W \cong S^1 \sqcup S^1$. On a fait figurer les variétés stable et instable d'un point critique p d'indice 1. Ici la fonction ϕ est implicitement définie comme la fonction hauteur, et le champ de vecteurs associé est le gradient de ϕ pour la métrique riemannienne canonique héritée de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$.

Les variétés stable et instable Δ_p^- et Δ_p^+ sont de dimension respective $\mathrm{ind}(p)$ et $\dim(W) - \mathrm{ind}(p)$, et s'intersectent transversalement en p.

Si W est un cobordisme élémentaire, alors pour tout point critique p de ϕ, Δ_p^- de p est un disque, qui intersecte $\partial_- W$ en une sphère appelée *sphère stable* ; de même, Δ_p^+ est un disque qui intersecte $\partial_+ W$ en une sphère appelée *sphère instable*.

Proposition 1.3.10 ([CE12, Lemme 11.13])**.** *Soit $(W, \omega = d\lambda, v, \phi)$ un cobordisme de Weinstein, et $p \in W$ un point critique de ϕ. La variété stable Δ_p^- de p vérifie $\lambda|_{\Delta_p^-} = 0$. En particulier, Δ_p^- est isotrope pour la structure symplectique donnée par ω, et son intersection $\Delta_p^- \cap \phi^{-1}(c)$ avec toute tranche de niveau régulière est isotrope dans la variété de contact $(\phi^{-1}(c), \lambda|_{\phi^{-1}(c)})$. On a donc toujours $\mathrm{ind}(p) \leq \frac{1}{2} \dim W$.*

Si de plus $\mathrm{ind}(p) = \frac{1}{2} \dim W$, alors la variété instable Δ_p^+ de p est lagrangienne, et son intersection $\Delta_p^+ \cap \phi^{-1}(c)$ avec toute tranche de niveau régulière est legendrienne dans la variété de contact $(\phi^{-1}(c), \lambda|_{\phi^{-1}(c)})$.

1.4 Chirurgie de contact

Soit (Y^{2n-1}, ξ) une variété de contact et $S^{k-1} \subset Y$ une sphère isotrope.

Définition 1.4.1. On dit qu'une variété de contact (Y', ξ') est obtenue à partir de (Y, ξ) par *chirurgie de contact* le long de S si il existe un cobordisme de Weinstein X de (Y, ξ) à (Y', ξ') possédant un unique point critique p d'indice k dont S est la sphère stable.

Supposons de plus que Y est le bord convexe d'un cobordisme de Weinstein W. On dit que le cobordisme composé $W \# X$ est obtenu à partir de W par *attachement d'une anse* d'indice k le long de $S \subset \partial_+ W$. Le disque stable de p (vivant dans X) est appelé l'*âme* de l'anse, et son bord S la *sphère d'attachement*. Enfin, Le disque instable de p est appelé *co-âme*, et la sphère instable la *co-sphère*.

Lorsque $k = n$, on dit que l'anse attachée est une *anse critique* ; dans le cas contraire $(k < n)$, on parle d'*anse sous-critique*.

Exemple 1.4.2. Sur $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$, on définit la fonction de Morse $\phi(x,y) = x^2 - \frac{1}{2}y^2$, où x^2 définit le carré scalaire de $x = (x_1, ..., x_n)$. La fonction ϕ possède un unique point critique situé à l'origine et d'indice n. Soit $v = 2x\partial_x - y\partial_y$ le gradient de ϕ pour la métrique euclidienne standard ; on vérifie aisément que v est un champ de Liouville pour ω. Il induit donc sur les hypersurfaces $V_{\pm\varepsilon} := \phi^{-1}(\pm\varepsilon)$ une forme de contact

$$\alpha := \iota_v(\omega_{st}) = 2xdy + ydx.$$

Ainsi $(V_{+\varepsilon}, \alpha)$ est obtenue à partir de $(V_{-\varepsilon}, \alpha)$ par chirurgie d'indice n le long de la sphère legendrienne

$$\Lambda = \{(0,y) \mid y^2 = \sqrt{2}\varepsilon\}.$$

La figure 2.4, plus bas dans ce document, montre la situation en dimension 2.

1.5 Structures presque complexes

On considère dans cette section un fibré vectoriel symplectique (E, ω) au-dessus d'une variété M.

Définition 1.5.1. On appelle *structure complexe* sur E un automorphisme de fibrés $J : E \to E$ au-dessus de l'identité, tel que $J^2 = -Id$. On dit alors que J est *compatible* avec ω si $\omega(\cdot, J\cdot)$ définit un produit scalaire sur chaque fibre.

Dans le cas $E = TM$, on dit que J est une *structure presque complexe* sur M.

Exemple 1.5.2. Dans $\mathbb{R}^{2n} \approx \mathbb{C}^n$, la multiplication par i sur chaque coordonnée définit une structure presque complexe J_0 compatible avec la forme symplectique standard ω_{st}.

Notons $\mathcal{J}(\omega)$ l'ensemble des structures complexes sur E compatibles avec ω et $\mathcal{G}$ l'ensemble des métriques riemanniennes sur E. Notons qu'il existe une inclusion naturelle de $\mathcal{J}(\omega)$ dans $\mathcal{G}$. La preuve de [Gei, Proposition 1.3.10] permet alors d'établir :

Proposition 1.5.3. *Il existe une rétraction par déformation de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{J}(\omega)$. En particulier, $\mathcal{J}(\omega)$ est non vide et contractile.*

Remarque 1.5.4. Il convient de souligner l'existence d'une autre démonstration (fort jolie) du caractère contractile de $\mathcal{J}(\omega)$, due à Bruno Sévennec. On peut par exemple en trouver une version dans [AL94, §II.1.1]

Remarque 1.5.5. L'espace $\mathcal{G}$ étant convexe, il est facile de définir des métriques "par morceaux", en les recollant par une partition de l'unité. La propostion précédente implique que l'on peut procéder de façon similaire avec les structures complexes, ce qui permet par exemple d'étendre sur M tout entière une structure complexe précédemment définie seulement au-dessus d'un ouvert donné.

Structures presque complexes adaptées

Soit $(V, \xi = \ker \alpha)$ une variété de contact. Une structure presque complexe J sur la symplectisation $(\mathbb{R} \times V, d(e^t \alpha))$ est dite *cylindriquement adaptée*[1] si :

- J est invariante selon la direction t de symplectisation ;
- $J(\partial_t) = R_\alpha$, où R_α est le champ de Reeb associé à α ;
- ξ est stable par J, et $J|_\xi$ est compatible avec $d\alpha$.

Soit $(X, \omega = d\lambda, v)$ un cobordisme de Liouville complété. Une structure presque complexe J sur X est dite *adaptée* si :

- J est compatible avec ω ;
- dans les extrémités cylindriques $[0, +\infty[\times \partial_+ X$ et $]-\infty, 0] \times \partial_- X$, J coïncide hors d'un domaine compact avec une structure presque complexe cylindriquement adaptée.

1.6 Indice de Conley-Zehnder d'une orbite de Reeb

On note dans cette section Sp_{2n} le groupe des matrices symplectiques $2n \times 2n$, ω_{st} la forme symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$, et J_0 la structure complexe standard.

Conley et Zehnder ont introduit dans [CZ83] un indice qui assigne un entier $\mathrm{CZ}(\psi)$ à chaque chemin $\psi : [0,1] \to \mathrm{Sp}_{2n}$ tel que $\psi(0) = \mathrm{Id}$ et $\det(\mathrm{Id} - \psi(1)) \neq 0$. On donne ici, en s'appuyant sur [Gut], une définition plus générale qui s'affranchit des ces deux dernières conditions et coïncide avec la définition classique (cf. [Sal99, RS93]) lorsque ces deux conditions sont vérifiées. Outre les références précédentes, on renvoie également à [Lau04] pour plus de précisions sur la topologie du groupe symplectique.

Soit $\psi : [0,1] \to \mathrm{Sp}_{2n}$ un chemin lisse de matrices symplectiques. Un *croisement* est un $t \in [0,1]$ tel que $\det(\psi_t - \mathrm{Id}) = 0$. Pour tout $t \in [0,1]$, on définit la *forme de croisement*

$$\Gamma(\psi, t) : \ker(\psi(t) - \mathrm{Id}) \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \omega_{st}(v, \dot{\psi}(t)v).$$

Le croisement est dit *régulier* quand cette forme quadratique est non dégénérée.

Définition 1.6.1. Soit $\psi : [0,1] \to \mathrm{Sp}_{2n}$ un chemin lisse de matrices symplectiques dont tous les croisements sont réguliers. On définit son *indice de Robbin-Salamon* par

$$\mu_{RS}(\psi) = \frac{1}{2} \operatorname{Sign} \Gamma(\psi, 0) + \sum_{\text{croisement } t \in]0,1[} \operatorname{Sign} \Gamma(\psi, t) + \frac{1}{2} \operatorname{Sign} \Gamma(\psi, 1),$$

où Sign désigne la signature, i.e. le nombre de valeurs propres positives moins le nombre de valeurs propres négatives.

Lorsque $\psi(0) = \mathrm{Id}$ et $\det(\psi(1) - \mathrm{Id}) \neq 0$, on appelle cet indice *indice de Conley-Zehnder*, et on le note $\mathrm{CZ}(\psi)$.

[1] Cela correspond aux structures *cylindriques symétriques ajustées* dans la terminologie de [BEH+03].

Il existe une définition alternative, en considérant le chemin des graphes associés, qui permet d'éviter de devoir formuler une hypothèse de régularité (cf. [Gut, Définition 46]). Elle ne sera néanmoins pas utile ici.

La preuve de la proposition 52 de [Gut] montre le résultat suivant (voir [MS98, Théorème 2.29] pour la définition de l'indice de Maslov d'un lacet de matrices symplectiques) :

Proposition 1.6.2. *Si $\phi : [0,1] \to \mathrm{Sp}_{2n}$ est un lacet tel que $\phi(0) = \phi(1) = \mathrm{Id}$, alors*

$$\mu_{RS}(\phi\psi) = \mu_{RS}(\psi) + 2\mu(\phi)$$

où $\mu(\phi)$ désigne l'indice de Maslov de ϕ, et $\phi\psi$ le produit des deux matrices symplectiques.

Soit à présent un cobordisme de Liouville (X, λ, v) de bord Y. On note R le champ de Reeb associé à λ dans Y, et ϕ_t son flot. On étend la différentielle du flot $d\phi_t : TY \to TY$ en un morphisme de fibrés $F_t : T_Y X \to T_Y X$ en posant $F_t(v) = v$.

Soit $\gamma \subset Y$ une orbite de Reeb de période T. On choisit une trivialisation Φ de $(TX, d\lambda)$ le long de γ ; le chemin $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$ est alors représenté par un chemin de matrices symplectiques. On définit l'indice de Conley-Zehnder $\mathrm{CZ}^{\Phi}(\gamma)$ de γ comme l'indice de Robbin-Salamon de ce chemin. Lorsque γ est non dégénérée et que la trivialisation est choisie adaptée à $\ker(\lambda|_Y) \oplus \langle R \rangle \oplus \langle v \rangle$, on retrouve la définition classique de l'indice de Conley-Zehnder puisqu'alors la contribution selon $\langle R, v \rangle$ vaut 0. Notons qu'en général $\mathrm{CZ}^{\Phi}(\gamma)$ prend *a priori* des valeurs demi-entières ; néanmoins, lorsque γ est non-dégénérée, la proposition précédente montre que cet indice est bien un entier (puisque l'indice de Conley-Zehnder classique l'est).

Si $\gamma \subset X$ est homologiquement triviale le choix d'une surface $\Sigma \subset X$ de bord γ détermine à homotopie près une trivialisation de $(TX, d\lambda)$ le long de γ (cf. [MS98], proposition 2.66, lemme 2.71, et théorème 2.35). La valeur $\mathrm{CZ}^{\Sigma}(\gamma)$ de l'indice dans cette trivialisation ne dépend alors (outre γ et λ) que de la classe d'homologie relative de la surface ainsi choisie. Plus précisément, à l'aide de la proposition 1.6.2, de la définition de la première classe de Chern donnée dans [MS98, §2.6], et de l'invariance de l'indice de Robbin-Salamon par homotopie d'extrémités fixées [Gut, Théorème 55], on établit sans mal le résultat suivant :

Proposition 1.6.3. *Soit $A \in H_2(X; \mathbb{Z})$. Alors*

$$\mathrm{CZ}^{\Sigma \# A}(\gamma) = \mathrm{CZ}^{\Sigma}(\gamma) + \langle c_1(TX), A \rangle$$

où $c_1(TX)$ est la première classe de Chern du fibré symplectique TX.

1.7 Courbes pseudo-holomorphes et espaces de modules

On regroupe ici quelques définitions et propriétés fondamentales des courbes pseudo-holomorphes, avant d'introduire plus en détail les espaces de modules qui nous intéresseront par la suite. Les principales références utilisées dans toute cette section sont [MS12] et [Wen15] pour les résultats généraux et les problèmes de transversalité, et [BEH+03] et [Abb14] pour les différentes notions d'énergie et les résultats de compacité.

1.7.1 Généralités

Définition 1.7.1. Une *courbe pseudo-holomorphe* (ou *courbe J-holomorphe*, ou plus simplement *courbe holomorphe*) est une application lisse $u : \dot{\Sigma} \to W$ dont la différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire :

$$du \circ j = J(u) \circ du,$$

et où :

- (Σ, j) est une surface de Riemann compacte, éventuellement à bord ;
- $\dot{\Sigma} = \Sigma \setminus Z$, dite surface *épointée*, est obtenue à partir de Σ en retirant un ensemble fini Z de points, appelés *perçures* ;
- J est une structure presque complexe sur une variété W.

Dans la suite W sera souvent munie d'une forme symplectique ω, auquel cas on demande que J soit compatible avec ω. Quand $\partial\Sigma \neq \emptyset$, on demande de plus que u vérifie une condition de bord lagrangienne, i.e. $u(\partial\Sigma) \subset L$ pour une sous-variété lagrangienne de W. On notera plus simplement $u : (\dot{\Sigma}, \partial\Sigma \setminus Z) \to (W, L)$.

Remarque 1.7.2. La littérature anglophone emploie le terme de "puncture" pour désigner un point ôté d'une surface. N'ayant pas connaissance d'un consensus sur la traduction française de ce mot, on a fait le choix d'employer ici le terme désuet de *perçure*, dont le seul autre usage connu consiste à désigner les fentes pratiquées à l'avant des heaumes et des armets pour permettre la vision. On espère que son utilisation dans ce document contribuera à lui offrir une seconde vie, moins chevaleresque et plus mathématique.

Définition 1.7.3. Soit Σ une surface de Riemann et Z un ensemble de perçures sur Σ. On appelle *éclatement orienté* de Σ la surface Σ^Z obtenue à partir de $\dot{\Sigma}$ en attachant naturellement au niveau de chaque perçure $z \in Z$ le cercle $(T_z\Sigma \setminus \{0\})/\mathbb{R}^{+*}$ (si $z \in \partial\Sigma$, on remplace $T_z\Sigma$ par un demi-espace, ce qui correspond à n'attacher qu'un demi-cercle).

1.7.2 Énergie

La finitude de l'énergie est une condition fondamentale pour obtenir des résultats de compacité, comme on le verra plus bas dans la section éponyme. Cependant la définition classique de l'énergie comme l'intégrale de $u^*\omega$ sur $\dot{\Sigma}$, c'est-à-dire comme l'aire de la courbe holomorphe, n'est pas adaptée dans le cas d'une courbe à image non compacte ; en fait, dans ce cas l'aire est même systématiquement infinie. Il faut donc introduire une autre notion d'énergie, comme dans [BEH+03].

Symplectisations

Soit (V, α) une variété de contact et J une structure presque complexe adaptée sur sa symplectisation $(\mathbb{R} \times V, \omega = d(e^t\alpha))$. Soit une courbe J-holomorphe $u = (a, f) : \dot{\Sigma} \to \mathbb{R} \times V$. On

définit son ω-énergie

$$E_\omega(u) = \int_{\dot{\Sigma}} f^*(d\alpha)$$

et son α-énergie

$$E_\alpha(u) = \sup_{\phi \in \mathcal{C}} \int_{\dot{\Sigma}} (\phi \circ a) da \wedge f^*\alpha,$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions lisses $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ de support compact et d'intégrale égale à 1. On définit finalement l'*énergie* de u par

$$E(u) = E_\omega(u) + E_\alpha(u).$$

Toutes ces énergies sont toujours positives.

Cobordismes

Soit $(X, \omega = d\lambda, v)$ un cobordisme de Liouville complété, J une structure presque complexe adaptée sur X, et $u : \dot{\Sigma} \to X$ une courbe J-holomorphe. Dans les extrémités cylindriques $E_- =]-\infty, 0] \times \partial_- X$ et $E_+ = [0, +\infty[\times \partial_+ X$, on écrira comme dans la section précédente $u = (a_\pm, f_\pm)$. L'ω-énergie est alors définie comme

$$E_\omega(u) = \int_{u^{-1}(\overline{X})} u^*\omega + \int_{u^{-1}(E_-)} f_-^*(d\lambda|_{\partial_- X}) + \int_{u^{-1}(E_+)} f_+^*(d\lambda|_{\partial_+ X})$$

et la λ-énergie comme

$$E_\lambda(u) = \sup_{\phi_\pm \in \mathcal{C}} \left(\int_{u^{-1}(E_-)} (\phi_- \circ a_-) da_- \wedge f_-^*\lambda + \int_{u^{-1}(E_+)} (\phi_+ \circ a_+) da_+ \wedge f_+^*\lambda \right),$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions lisses $\phi_\pm : \mathbb{R}_\pm \to \mathbb{R}^+$ de support compact et d'intégrale égale à 1. On pose enfin comme précédemment

$$E(u) = E_\omega(u) + E_\alpha(u).$$

Là encore, ces énergies sont toujours positives.

1.7.3 Asymptotes

Soient (Σ, j) une surface de Riemann compacte, $(X, \omega = d\lambda, v)$ un cobordisme de Liouville complété muni d'une structure presque complexe adaptée, et γ_-, γ_+ des orbites de Reeb de $(V_- = \partial_- X, \lambda)$ et $(V_+ = \partial_+ X, \lambda)$ respectivement. On note T_-, T_+ leur période respective. Enfin, soit z_0 une perçure intérieure de Σ. On dit qu'une courbe holomorphe $u : \dot{\Sigma} \to X$ est asymptote à γ_+ en z_0 si :

- u envoie un voisinage épointé U de z_0 dans $[0, +\infty[\times V_+$, de sorte que dans ce voisinage on peut écrire $u = (a, f)$;

- $\lim_{z\to z_0} a(z) = +\infty$;
- en coordonnées polaires holomorphes (ρ, θ) centrées sur z_0, il existe un choix d'origine pour γ_+ tel que
$$\lim_{\rho\to 0} u(\rho,\theta) = \gamma_+\left(-\frac{T_+}{2\pi}\theta\right).$$

De même on dit que u est asymptote à γ_- en z_0 si :

- u envoie un voisinage épointé U de z_0 dans $]-\infty, 0]\times V_-$, de sorte que dans ce voisinage on peut écrire $u = (a, f)$;
- $\lim_{z\to z_0} a(z) = -\infty$;
- en coordonnées polaires holomorphes (ρ, θ) centrées sur z_0, il existe un choix d'origine pour γ_- tel que
$$\lim_{\rho\to 0} u(\rho,\theta) = \gamma_-\left(\frac{T_-}{2\pi}\theta\right).$$

Les deux cas que l'on vient de décrire correspondent respectivement à une perçure *positive* (resp. *négative*). Notons que le troisième point ne dépend pas du choix de coordonnées polaires holomorphes. En effet, deux choix différents de coordonnées induisent la même paramétrisation de l'orbite asymptote (modulo le choix de l'origine) : il suffit de constater que cette paramétrisation est entièrement déterminée par l'action de j sur $T_{z_0}\Sigma$.

On considérera également dans la suite des asymptotes vers des cordes de Reeb. Soient $\Lambda_\pm$ un noeud legendrien de $V_\pm$ et $c_\pm$ une corde de Reeb de $\Lambda_\pm$ d'action $T_\pm$. Soit z_1 une perçure au bord de Σ. On dit qu'une courbe holomorphe $u : \dot{\Sigma} \to X$ est asymptote à c_+ en z_1 si :

- u envoie un voisinage épointé U de z_1 dans $[0, +\infty[\times V_+$, de sorte que dans ce voisinage on peut écrire $u = (a, f)$;
- $\lim_{z\to z_1} a(z) = +\infty$;
- en coordonnées polaires holomorphes $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times [-\pi, 0]$ centrées sur z_1 (où $\partial\Sigma$ correspond à $\theta = -\pi, 0$),
$$\lim_{\rho\to 0} u(\rho,\theta) = c_+\left(-\frac{T_+}{\pi}\theta\right).$$

De même on dit que u est asymptote à c_- en z_1 si :

- u envoie un voisinage épointé U de z_1 dans $]-\infty, 0]\times V_-$, de sorte que dans ce voisinage on peut écrire $u = (a, f)$;
- $\lim_{z\to z_1} a(z) = -\infty$;
- en coordonnées polaires holomorphes $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times [0, \pi]$ centrées sur z_1 (où $\partial\Sigma$ correspond à $\theta = 0, \pi$),
$$\lim_{\rho\to 0} u(\rho,\theta) = c_-\left(\frac{T_-}{\pi}\theta\right).$$

D'après [BEH+03, Proposition 5.6], si toutes les orbites de Reeb de $V_\pm$ sont non-dégénérées, alors au niveau d'une perçure intérieure non-artificielle, une courbe holomorphe d'énergie finie est toujours asymptote à une orbite de Reeb. On désigne ici par *non-artificielle* une perçure au voisinage de laquelle l'image de la courbe holomorphe n'est pas bornée.

On dispose d'un résultat similaire pour les perçures au bord lorsque les cordes de Reeb sont toutes non-dégénérées, en vertu de [Ekh08, Lemme B.1]. Dans ce cas, il faut supposer que la courbe holomorphe est à bord sur une sous-variété lagrangienne connexe exacte $L \subset X$ et *d'extrémités cylindriques*, i.e. de la forme $[0, +\infty[\times\Lambda_+$ (resp. $]-\infty, 0] \times \Lambda_-$) dans l'extrémité $[0, +\infty[\times V_+$ (resp. $]-\infty, 0] \times V_-$), où $\Lambda_\pm$ est un noeud legendrien de $V_\pm$.

On peut donc énoncer dans ce cadre une version plus générale de [BEH+03, Proposition 6.2]. On rappelle la fonction G^δ introduite en 1.3.1.

Proposition 1.7.4. *Soit $u : \Sigma \setminus Z \to X$ une courbe holomorphe d'énergie finie et sans perçures artificielles. Sous les hypothèses énoncées dans les paragraphes précédents, l'application $u^\delta = G^\delta \circ u : \Sigma \setminus Z \to \mathring{\overline{X}}$ s'étend en une application lisse $\overline{u}^\delta : \Sigma^Z \to \overline{X}$. Cette application envoie les cercles (resp. arcs) ajoutés par éclatement orienté sur des orbites (resp. cordes) de Reeb dans $\partial\overline{X}$.*

Remarque 1.7.5. La proposition précédente permet de parler de la classe d'homologie (relative) représentée par u, vue comme un élément de $H_2(\overline{X}, \mathcal{C})$, où $\mathcal{C} \subset \partial\overline{X}$ est la réunion des orbites et cordes auxquelles u est asymptote. Dans le cas "à bord", on compactifie $G^\delta(L)$ par l'addition de $\Lambda_-, \Lambda_+ \subset \partial\overline{X}$, pour obtenir une sous-variété $\overline{L}^\delta$ de $\overline{X}$; la classe d'homologie représentée par u est alors un élément de $H_2(\overline{X}, \mathcal{C} \cup \overline{L}^\delta)$. Remarquons que pour un choix approprié des voisinages de $\partial_\pm X$ lors de la construction de G^δ, on peut de plus supposer que $\overline{L}^\delta \equiv L|_{\overline{X}}$; on parlera donc plus simplement de $H_2(\overline{X}, \mathcal{C} \cup L)$.

Toujours sous les hypothèses précédentes, on cite le résultat suivant.

Proposition 1.7.6 ([Ekh08, Lemme B.3])**.** *Si les asymptotes positives de u sont les cordes ou orbites c_1^+, ..., c_p^+, et les asymptotes négatives les cordes ou orbites c_1^-, ..., c_q^-, alors on a*

$$E_\omega(u) = \sum_{j=1}^{p} \mathcal{A}(c_j^+) - \sum_{k=1}^{q} \mathcal{A}(c_k^-),$$

$$E_\lambda(u) \leq 2\sum_{j=1}^{p} \mathcal{A}(c_j^+).$$

où l'on rappelle que $\mathcal{A}(c)$ désigne l'action de c.

En particulier, on a la majoration

$$E(u) \leq 3\sum_{j=1}^{p} \mathcal{A}(c_j^+) \tag{1.1}$$

qui sera utile par la suite pour garantir que les courbes considérées sont d'énergie bornée.

Le cas d'une courbe holomorphe dans une symplectisation est plus simple : une application du théorème de Stokes montre directement qu'alors

$$E(u) = 2\sum_{j=1}^{p} \mathcal{A}(c_j^+) - \sum_{k=1}^{q} \mathcal{A}(c_k^-).$$

En particulier, la borne donnée en (1.1) est encore valable.

1.7.4 Espaces de modules considérés

On passe ici en revue les différents *espaces de modules* intervenant dans la suite. Il s'agit d'ensembles de courbes holomorphes définies sur un même domaine, représentant la même classe d'homologie, possédant les mêmes asymptotes et le même nombre de points marqués, et considérées à reparamétrisation près. Plus précisément, on identifiera deux courbes $u : (\dot{\Sigma}, j) \to (W, J)$ et $u' : (\dot{\Sigma}, j') \to (W, J)$ s'il existe une biholomorphisme $\varphi : (\Sigma, j) \to (\Sigma, j')$ qui envoie perçures sur perçures et points marqués sur points marqués en préservant leur ordre, et tel que $u = u' \circ \varphi$. Pour les courbes holomorphes à image dans une symplectisation, on quotiente en plus par l'action des translations selon la direction de la symplectisation.

On considère une variété de contact (V, α) contenant un nœud legendrien Γ, ainsi qu'un cobordisme de Weinstein $(X^{2n}, \omega, v, \phi)$ de bords $V_\pm = \partial_\pm X$. On suppose que ϕ admet un unique point critique, d'indice n, et l'on note L (resp. C) sa variété stable (resp. instable). Remarquons que L et C sont d'après 1.3.10 des sous-variétés lagrangiennes de X d'extrémités cylindriques. Enfin, on note $\Lambda_- = L \cap V_-$ la sphère stable et $\Lambda_+ = C \cap V_+$ la sphère instable, qui sont des sous-variétés legendriennes par la même proposition .

Enfin, on note $\mathbb{D}$ le disque unité (fermé) de $\mathbb{C}$, muni de la structure complexe standard.

Disques holomorphes dans $\mathbb{R}^{2n}$

On suppose ici que $V = (\mathbb{R}^{2n+1}, \alpha_{st})$, et on rappelle que l'on note $\Pi_L : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n}$ la projection lagrangienne qui oublie la coordonnée selon z. On munit $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ de la structure complexe standard.

Une corde c de Γ est envoyée par Π_L sur un point d'auto-intersection c^* de $\Pi_L(\Gamma)$. Un disque holomorphe avec une perçure vers c^* est par définition une application continue

$$u : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (\mathbb{R}^{2n}, \Pi_L(\Gamma))$$

holomorphe sur l'intérieur de $\mathbb{D}$, telle que $u(1) = c^*$. Une telle perçure est dite *positive* si, en parcourant $\partial\mathbb{D}$ dans le sens direct au voisinage de 1, on passe de (la projection d'une) branche de Γ à une autre branche de Γ de coordonnée selon z inférieure. On rappellera dans la section 2.1.2 divers résultats liés à cette catégorie de courbes holomorphes, mais l'on renvoie également à [EES05b, §2.4] pour de plus amples détails à leur sujet.

Plans holomorphes dans un cobordisme

Soit γ une orbite de Reeb de V_+. On note $\mathcal{M}_A^X(\gamma)$ l'espace de module des applications holomorphes $u : \mathbb{C} \to X$ asymptote à γ en $+\infty$, et représentant la classe d'homologie $A \in H_2(\overline{X}, \gamma)$.

D'après [Wen10a], la dimension virtuelle de $\mathcal{M}_A^X(\gamma)$ est donnée $n - 3 + \mathrm{CZ}(\gamma)$, où l'indice de Conley-Zehnder est calculé dans la trivialisation symplectique induite par le disque $\overline{u}^\delta$ bordant γ (voir la proposition 1.7.4 pour la notation).

Lorsque les circonstances seront ambiguës, on utilisera plutôt la notation $\mathcal{M}_A^X(\gamma, J)$ pour indiquer la structure presque complexe employée. Enfin, on considérera également les variantes $\mathcal{M}_{A,1}^X(\gamma)$ et $\mathcal{M}_{A,2}^X(\gamma)$ avec un et deux points marqués, où l'on note ev_1, ev_2 les applications d'évaluation associées.

Cylindres holomorphes dans une symplectisation

Soient γ une orbite de Reeb de V, et c' une corde de Γ. On note $\mathcal{M}_A^{V,\Gamma}(c'; \gamma)$ l'espace de modules des applications holomorphes

$$u : (\mathbb{D} \setminus \{0, 1\}, \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}) \to (\mathbb{R} \times V, \mathbb{R} \times \Gamma)$$

asymptotes à c' en $+\infty$ au niveau de 1, à γ en $-\infty$ au niveau de 0, et représentant la classe $A \in H_2([-\infty, +\infty] \times V, \gamma \cup c' \cup ([-\infty, +\infty] \times \Gamma))$. Voir la figure 1.5.

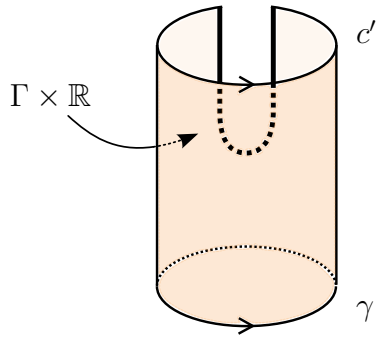


FIGURE 1.5 : Un élement de $\mathcal{M}_A^{V,\Gamma}(c'; \gamma)$.

Cylindres holomorphes dans un cobordisme

Soient γ une orbite de Reeb de V_+, c' une corde de Λ_+, et c une corde de Λ_-.

On note $\mathcal{M}_A^{X,L}(\gamma)$ l'espace de modules des applications holomorphes

$$u : (\mathbb{D} \setminus \{0\}, \partial\mathbb{D}) \to (X, L)$$

asymptotes à γ en $+\infty$ au niveau de 0, et représentant la classe $A \in H_2(\overline{X}, \gamma \cup L)$.

Étant donné $u \in \mathcal{M}_A^{X,L}(\gamma)$, choisissons une trivialisation de $(u^*TX, u^*\omega)$ le long de son bord dans laquelle TL est constante. Étendons ensuite cette trivialisation en une trivialisation Φ sur le domaine de u tout entier. On peut réaliser cette opération de sorte que Φ induise une trivialisation de (TX, ω) le long de γ. Alors, d'après [Wen10a], la dimension virtuelle de $\mathcal{M}_A^{X,L}(\gamma)$ est donnée par $\mathrm{CZ}^\Phi(\gamma)$. En effet, le choix de trivialisation effectué ici annule les contributions de la première classe de Chern et de l'indice de Maslov du bord lagrangien.

On note $\mathcal{M}_A^{X,L}(\gamma; c)$ l'espace de modules des applications holomorphes

$$u : (\mathbb{D} \setminus \{0, 1\}, \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}) \to (X, L)$$

asymptotes à γ en $+\infty$ au niveau de 0, à c en $-\infty$ au niveau de 1, et représentant la classe $A \in H_2(\overline{X}, \gamma \cup c \cup L)$.

Pour un choix cohérent de trivialisations (par exemple comme pour l'espace de modules précédent), la dimension virtuelle de $\mathcal{M}_A^{X,L}(\gamma; c)$ est d'après [BEE12, §2.9] donnée par $\mathrm{CZ}(\gamma) - \mathrm{CZ}(c) + 1$.

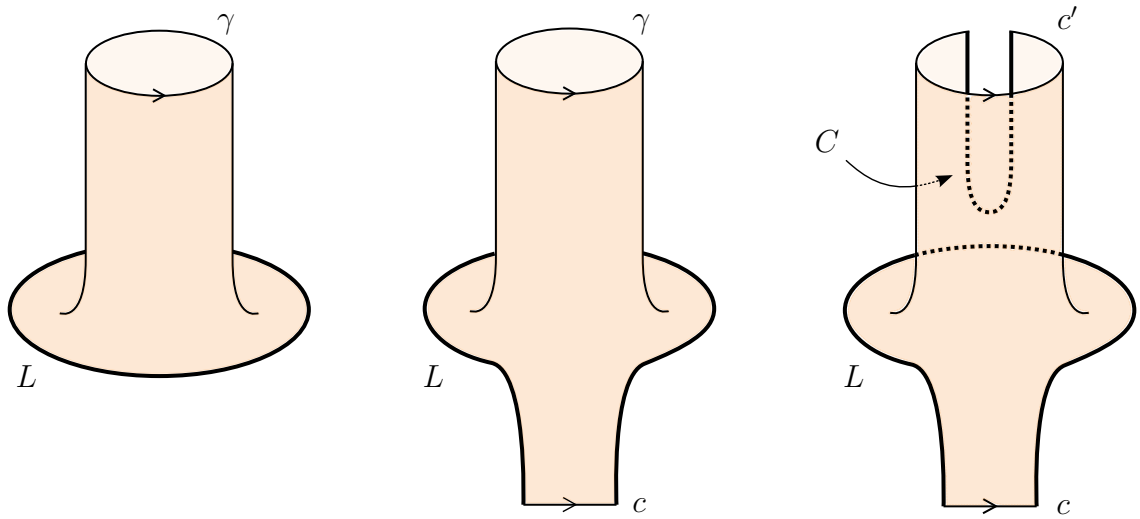


FIGURE 1.6 : De gauche à droite : $\mathcal{M}_A^{X,L}(\gamma)$, $\mathcal{M}_A^{X,L}(\gamma; c)$, et $\mathcal{M}_A^{X,(L,C)}(c'; c)$.

Enfin, on note $\mathcal{M}_A^{X,(L,C)}(c'; c)$ l'espace de modules des anneaux holomorphes u tels que :

- un des bords de l'anneau est envoyé sur C, et présente une perçure au niveau de laquelle u est asymptote positivement à c' ;
- l'autre bord de l'anneau est envoyé sur L, et présente une perçure au niveau de laquelle u est asymptote négativement à c ;
- u représente la classe $A \in H_2(\overline{X}, c' \cup c \cup L \cup C)$.

La figure 1.6 représente l'aspect de ces différentes courbes holomorphes.

1.7.5 Compacité

Lorsque les courbes d'un espace de modules sont d'énergie uniformément bornée, cet espace peut être muni d'une métrique pour laquelle il admet une compactification naturelle. Cette compactification est entièrement décrite dans [Abb14, BEH+03] dans les cas avec et sans bord respectivement. L'objectif n'est pas de faire ici une présentation détaillée de cette théorie de la compacité, puisque l'on ne ferait alors que répéter l'introduction donnée sur ce sujet dans [BEH+03]. On réalise donc plutôt une brève description des courbes « dégénérées » qu'il faut ajouter aux espaces de modules afin d'obtenir la compacité, en renvoyant aux articles précédents pour les énoncés précis.

Les dégénérescences susceptibles de survenir au bord d'un espace de modules sont de deux ordres :

- des dégénérescences « intrinsèques », affectant le domaine Σ de la courbe holomorphe. Il s'agit là du cadre décrit par la compactification de Deligne-Mumford : un lacet tracé sur Σ peut dans certaines conditions se contracter en un point, entraînant la formation d'une *surface nodale* (cas (I) sur la figure 1.7). Lorsque $\partial\Sigma \neq \emptyset$, le même phénomène peut se produire pour un arc à bord sur $\partial\Sigma$ (figure 1.8). Remarquons qu'avec cette terminologie, une dégénérescence de type (IIa) peut aussi être vue comme de type (I), où l'une des deux composantes de la surface nodale obtenue est constante. Afin d'éviter les confusions dans la suite, on considérera qu'un tel cas relève exclusivement du type (IIa).

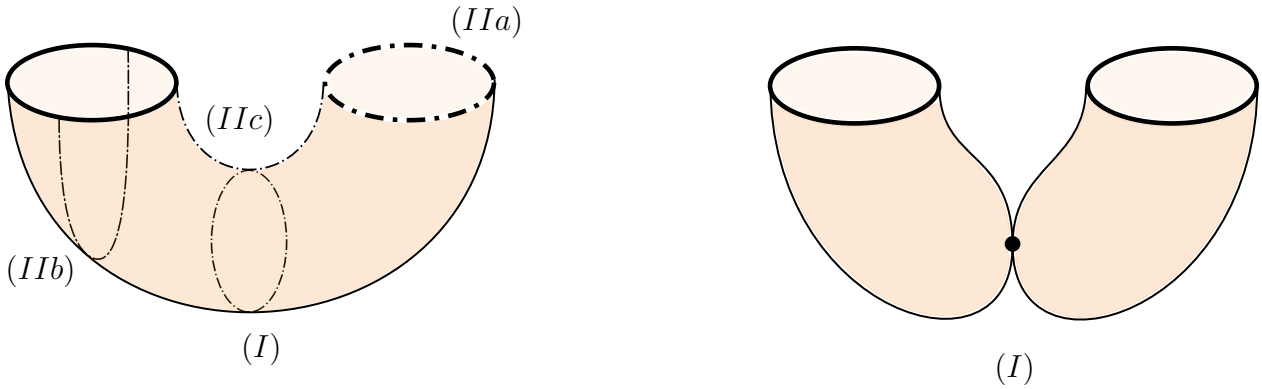
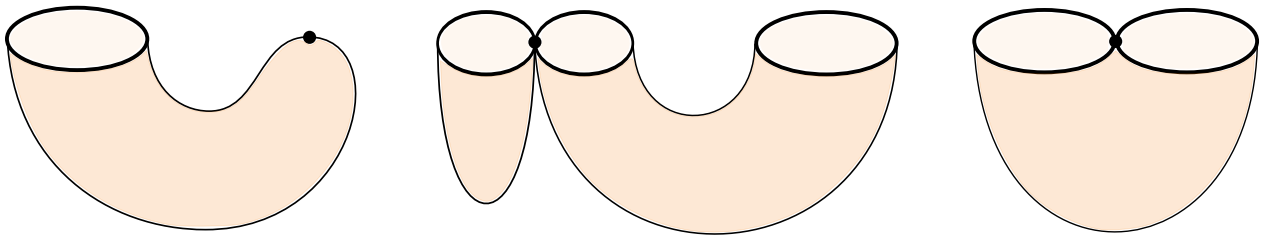


FIGURE 1.7 : Dégénérescence intérieure : apparition d'un nœud.

- des dégénérescences liées au fait que la variété d'arrivée n'est pas compacte. Dans le cas d'une symplectisation ou d'un cobordisme, il peut arriver qu'une partie de l'énergie parte à l'infini dans une des extrémités cylindriques. On exprime ce fait en disant que la courbe se brise en un *bâtiment holomorphe*, l'énergie fugitive donnant naissance à une courbe holomorphe vivant dans un étage supplémentaire (figure 1.9), situé au-dessus



(IIa) (IIb) (IIc)

FIGURE 1.8 : Les trois types de dégénérescence possibles au bord.

ou en-dessous de l'étage de départ. Tous les étages du bâtiment ainsi obtenu sont des copies de symplectisations, à l'exception de l'étage de départ. Les brisures, quant à elles, se font le long d'asymptotes à des orbites de Reeb ou, dans le cas à bord, de cordes de Reeb. La figure 1.9 représente les deux types de brisure (comme dans tout le reste de ce document, les bords lagrangiens apparaissent en gras).

1.7.6 Transversalité

Soit W une variété munie d'une structure presque complexe J.

Une application lisse $u : \dot{\Sigma} \to W$ est dite *quelque part injective* si elle admet un *point injectif*, c'est-à-dire un point $z \in \dot{\Sigma}$ tel que $d_z u$ est injective et $u^{-1}(u(z)) = \{z\}$.

D'après la théorie classique, les éléments d'un espace de modules peuvent être vus comme les zéros d'une section d'un certain fibré de Banach

$$\overline{\partial}_J : \mathcal{B} \to \mathcal{E},\ (j, u) \mapsto du + J(u) \circ du \circ j,$$

où $\mathcal{B}$ est la somme, d'une part, d'un espace de Banach composé d'applications $\dot{\Sigma} \to W$ de classe $W^{1,p}_{\text{loc}}$ et admettant des asymptotes exponentielles au niveau des perçures, et d'autre part, d'une "tranche de Teichmüller" qui prend en compte les variations de la structure complexe j sur la source. On donnera dans la section 3.1.3 une définition précise de toutes ces notions dans le cas des courbes sans bord, puisque seul ce cas nécessitera des considérations plus avancées.

Une courbe holomorphe u est dite *Fredholm-régulière* si, au niveau de u, $\overline{\partial}_J$ est transverse à la section nulle, i.e. si sa linéarisation $\mathbf{D}_{(j,u)} : T_{(j,u)}\mathcal{B} \to \mathcal{E}_{(j,u)}$ est surjective. Quand u est quelque-part injective (ou, plus généralement, de groupe d'automorphisme nul), l'espace de modules considéré s'identifie au voisinage de u à $\overline{\partial}_J^{-1}(0)$; si u est Fredholm-régulière, l'espace de module admet donc au voisinage de u une structure de variété, de dimension égale à sa *dimension virtuelle*.

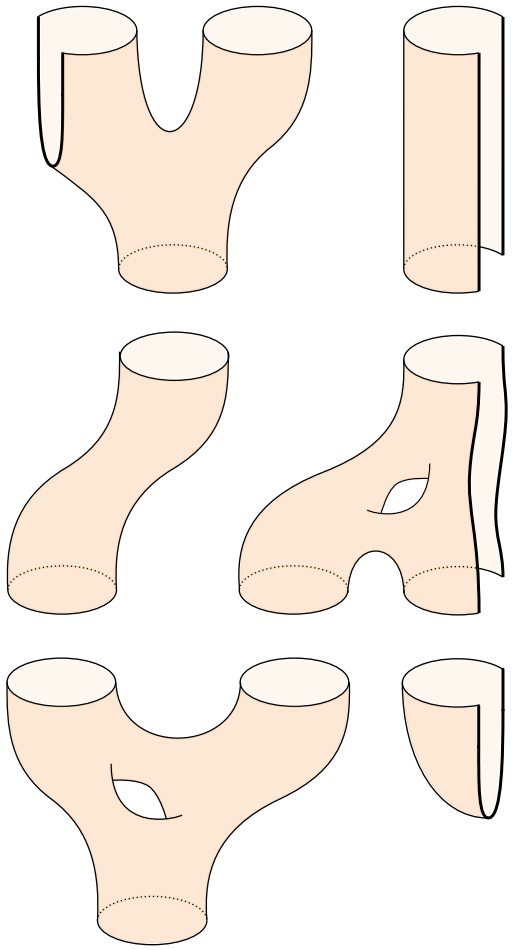


FIGURE 1.9 : Bâtiment holomorphe à trois étages.

Suppposons dorénavant que toutes les courbes considérées envoient un point injectif dans un certain domaine compact fixe (ce qui sera bien le cas dans ce qui suit). Alors [Dra03, Wen15] montrent qu'une perturbation générique de J dans un voisinage compact des (images des) points injectifs suffit à assurer la transversalité. Lorsque l'espace de modules considéré comprend des points marqués, il est également possible par le même genre de perturbation de rendre l'application d'évaluation transverse à n'importe quelle sous-variété préalablement fixée [Wen15, Théorème 4.6.1]. Enfin, il sera très utile par la suite de disposer de versions "paramétriques" de ces résultats, dans le cas où l'on autorise la structure presque complexe sur W à varier. Les théorèmes 4.5.1 et 4.5.3 de [Wen15] impliquent alors que si l'on a une famille lisse $(J_t)_{t\in[0,1]}$ telle que les courbes J_0 et J_1-holomorphes sont régulières (dans un sens à préciser suivant le type de transversalité souhaité), une perturbation générique de $(J_t)_{t\in[0,1]}$ sur un voisinage compact des points injectifs suffit à garantir la transversalité recherchée.

Remarque 1.7.7. Les résultats précédents sont énoncés dans [Wen15] dans le cas de courbes ayant un domaine clos. Comme expliqué dans [Wenb, §7.1], cependant, ils restent valides pour des courbes admettant des asymptotes cylindriques.

D'autre part, les perturbations de J mentionnées précédemment ont lieu dans des domaines compacts, ce qui peut s'avérer insuffisant lorsque des courbes sont confinées dans une des extrémités cylindriques d'un cobordisme. Lorsque les courbes considérées sont simples (i.e. ne sont pas le revêtement multiple d'une autre courbe), [Wenb, Remarque 7.6] explique néanmoins que la transversalité peut être obtenue en réalisant une perturbation générique de J parmi l'ensemble des structures presque complexes adaptées au cobordisme. Cette hypothèse de simplicité sera toujours satisfaite dans la suite de ce document, puisque toutes les courbes considérées admettront au moins une asymptote vers une corde de Reeb ou une orbite de Reeb simple.

2

Attachement d'une anse critique

On étudie dans cette partie certaines familles de courbes holomorphes contenues dans un domaine de Weinstein W^{2n}, $n \geq 2$, de la forme décrite sur la figure 4 donnée dans l'introduction : W est obtenu en attachant à un domaine de Weinstein W_0 une anse X le long d'une sphère legendrienne lâche $\Lambda^{n-1} \subset Y^{2n-1} = \partial W_0$. Rappelons que sur cette figure L désigne l'âme de l'anse, et que le bord Y_Λ de W est une variété de contact obtenue à partir de Y par chirurgie de contact le long de Λ.

La section 2.1 présente quelques considérations dans la carte lâche de Λ : on y observe une petite corde de Reeb et un petit disque holomorphe asymptote à cette corde, dont on étudie les propriétés. La section 2.2 détaille ensuite la construction de Y_Λ et du cobordisme X, à l'aide d'un modèle explicite. Enfin, les sections 2.3 et 2.4 s'intéressent à différentes familles de courbes holomorphes vivant dans X ou W. Le résultat principal est le théorème 2.4.6, qui sera d'une grande utilité dans la partie suivante.

2.1 Un disque holomorphe dans la carte lâche

On rappelle ici pourquoi il existe au sein d'une carte lâche générique une unique corde de Reeb c. On définit ensuite un disque holomorphe rigide asymptote positivement à cette corde, dont l'on justifie l'unicité et le caractère Fredholm-régulier.

Afin d'alléger un peu certaines notations, on suppose, pour le temps de cette section uniquement, que Y est de dimension $2n+1$ (et non $2n-1$ comme dans le reste du document).

2.1.1 Une petite corde de Reeb

Proposition 2.1.1. *Quitte à la perturber par une isotopie legendrienne, la sphère legendrienne lâche $\Lambda \subset (Y, \alpha)$ possède une corde de Reeb c, contenue dans une carte lâche R_{ab}, et dont l'action peut être rendue arbitrairement petite (notamment, plus petite que les actions des autres cordes de Reeb de Λ et des orbites de Reeb de Y).*

Pour toute la suite de ce document, on remplace Λ par une telle perturbation, et on note c cette corde particulière de très petite action. Quitte à perturber Λ davantage, on supposera en outre que cette sphère legendrienne ne possède qu'un nombre fini de cordes de Reeb.

Démonstration. Soit (R_{ab}, Λ_0) une carte lâche standard. Comme dans la preuve de la proposition 1.2.6, on altère cette carte lâche en étrécissant sa projection frontale selon la direction z ; cependant on le fait ici sans réaliser de "plat", mais en s'assurant au contraire que l'étrécissement est d'autant important que $x_2, ...x_n$ sont proches de 0, comme sur la figure 2.1.

Il est alors clair que Λ_0 admet une unique corde de Reeb, contenue dans $\{x_2 = 0, ..., x_n = 0\}$. La figure 2.2 montre l'intersection du front avec les plans contenant c et dirigés respectivement selon les coordonnées (x_1, z) et (x_n, z), $n \geq 2$.

D'après la section précédente, la carte lâche peut être choisie arbitrairement petite ; il est donc possible de rendre l'action de c arbitrairement petite. □

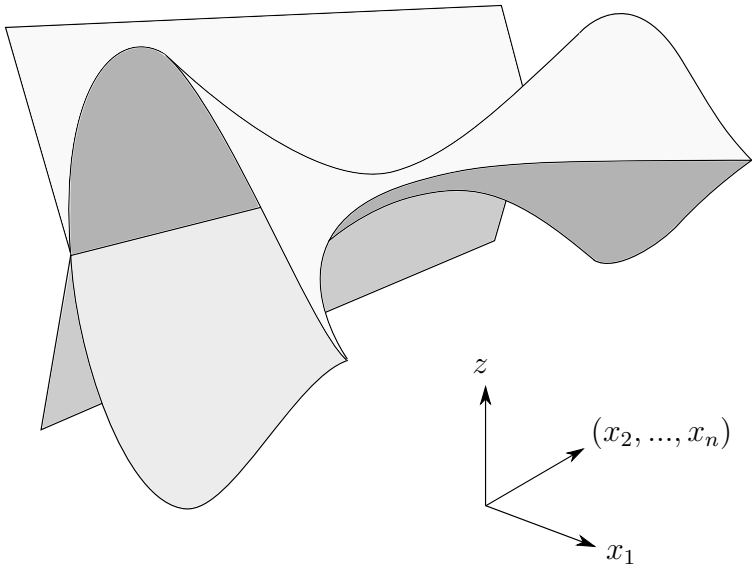


FIGURE 2.1 : Perturbation générique d'une carte lâche.

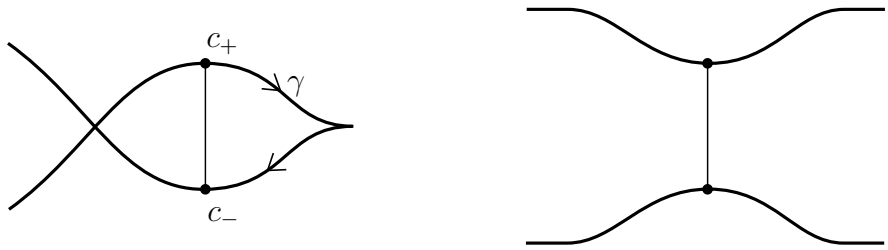


FIGURE 2.2 : Front de Λ dans la carte lâche perturbée.

2.1.2 Un petit disque holomorphe

Dans toute cette section, on raisonne uniquement au niveau de la carte lâche ; on fera donc comme si la situation avait lieu dans $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$, en précisant s'il y a lieu comment faire le lien avec Y. Cela permet notamment d'appliquer les théories développées dans [EES05b] et [DR16]. On note comme précédemment Π_F la projection frontale et Π_L la projection lagrangienne. On notera abusivement $\Pi_L(\Lambda)$ pour désigner la projection lagrangienne de l'intersection de Λ avec la carte lâche.

La projection lagrangienne induit un symplectomorphisme $d\Pi_L : \xi \to \mathbb{R}^{2n}$. Cela permet de définir dans la carte lâche une structure complexe J sur ξ, en posant

$$J = (d\Pi_L)^{-1} \circ J_0 \circ d\Pi_L$$

où J_0 est la structure complexe standard sur $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$. On étend ensuite cette structure de manière arbitraire en une structure complexe sur ξ tout entier, comme expliqué à la remarque 1.5.5. Cela induit une structure presque complexe cylindriquement adaptée sur la symplectisation $(Y \times \mathbb{R}, d(e^t\alpha))$, que l'on note toujours J.

Proposition 2.1.2. *Si l'action de c est suffisamment petite, il existe un unique disque J-holomorphe Fredholm-régulier et rigide*

$$u_2 : (\mathbb{D} \setminus \{1\}, \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}) \to (Y \times \mathbb{R}, \Lambda \times \mathbb{R})$$

asymptote à c en $+\infty$.

Rappelons qu'une courbe holomorphe est *rigide* si l'espace de modules auquel elle appartient est de dimension virtuelle nulle. Pour établir cette proposition, commençons par observer l'existence d'un certain disque holomorphe dans la projection lagrangienne, que l'on relèvera ensuite dans la symplectisation pour obtenir le disque souhaité. On note $c^* = \Pi_L(c)$.

Proposition 2.1.3. *Il existe un unique disque J_0-holomorphe Fredholm-régulier et rigide à translation près*

$$v_2 : (\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}) \to (\mathbb{R}^{2n}, \Pi_L(\Lambda))$$

possédant en 1 une perçure positive, avec $v_2(1) = c^*$.

On aura besoin pour la démonstration de la proposition 2.1.3 des lemmes suivants.

Lemme 2.1.4 ([EES05b, Lemme 3.4])**.** *Au voisinage des extrémités c^- et c^+ de la corde de Reeb c de Λ, le front $\Pi_F(\Lambda)$ est le graphe de fonctions $h_{c^+}, h_{c^-} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; on pose $h = h_{c^+} - h_{c^-}$. On définit de plus $q \in \mathbb{R}^n$ le point sur lequel $\Pi_F(c)$ se projette selon la direction z.*

Alors si γ est un chemin générique sur Λ connectant c^+ à c^-,

$$\mathrm{CZ}_\gamma(c) = D(\gamma) - U(\gamma) + \mathrm{ind}_q(d^2h),$$

où $D(\gamma)$ et $U(\gamma)$ désignent respectivement le nombre de cusps descendants et ascendants que rencontre $\Pi_F(\gamma)$.

L'indice de Conley-Zehnder $\mathrm{CZ}_\gamma(c)$ d'une corde de Reeb est défini dans [EES05b, §2.3]. On n'utilisera néanmoins pas cette définition ici, se servant plutôt du lemme précédent pour obtenir simplement la valeur de $\mathrm{CZ}_\gamma(c)$. L'intérêt de cette quantité dans la suite est de permettre le calcul de la dimension virtuelle de l'espace de modules contenant v_2 : cette dernière est donnée d'après [EES05b, Proposition 2.2] par $\mu(A) + \mathrm{CZ}_\gamma(c) - 1$, où $\mu(A)$ est l'indice de Maslov du lacet obtenu en concaténant γ au relevé sur Λ du bord de v_2. En l'occurrence on va voir que ce relevé n'est autre que le chemin inverse $\overline{\gamma}$; ce lacet est donc homotopiquement trivial, ce qui entraîne $\mu(A) = 0$ (voir [EES05b, §2.2] pour la définition précise du concept d'indice de Maslov, qui n'interviendra plus dans la suite).

Lemme 2.1.5. *Soit $\gamma \subset \Lambda$ le chemin contenu dans la carte lâche dont la projection frontale est représentée sur la figure 2.2. Alors $\mathrm{CZ}_\gamma(c) = 2$.*

Démonstration. Le chemin $\Pi_F(\gamma)$ traverse un unique cusp descendant, et aucun cusp ascendant. D'autre part, au vu de la figure 2.2, h admet en q un maximum local selon la direction x_1, et un minimum local selon les directions $x_2, ..., x_n$: ainsi $\mathrm{ind}_q(d^2h) = 1$. On conclut par le lemme précédent. □

Démonstration de la proposition 2.1.3. La figure 2.3 représente à gauche l'intersection de $\Pi_L(\Lambda)$ avec le plan (x_1, y_1), et à droite, en gris, la projection de Λ sur un plan (x_n, y_n), $n \geq 2$. Sur ce dernier dessin, le trait épais correspond à l'intersection de $\Pi_L(\Lambda)$ avec ce même plan.

On définit v_2 comme le disque holomorphe contenu dans le plan (x_1, y_1), et représenté en orange, à gauche, sur cette figure.

Notons que la situation décrite ici est "split", c'est-à-dire que v_2 vit dans un plan complexe (x_1, y_1), et que le long du bord de v_2, le fibré tangent $T\Pi_L(\Lambda)$ est produit de $T\partial v_2$ et d'un lagrangien constant $\langle \partial_{x_2}, ..., \partial_{x_n} \rangle \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{2n-2}$. Par conséquent, d'après [EES05a, Lemme 7.25] (voir aussi [EES05b, Proposition 2.4] pour une formulation équivalente), le disque v_2 est automatiquement Fredholm-régulier.

Pour montrer que v_2 est rigide, on utilise la formule donnée dans [EES05b, Proposition 2.2]. Le choix de γ rend ici le premier terme nul, la dimension recherchée est donc

$$|c| - 1 = \mathrm{CZ}_\gamma(c) - 2 = 0$$

d'après le lemme 2.1.5.

Il reste à prouver l'unicité de v_2. Soit v_2' un disque holomorphe possédant comme v_2 une perçure positive en c^*. Remarquons que pour la structure presque complexe standard J_0, la projection dans un plan (x_n, y_n) est holomorphe. En particulier, la projection de v_2' dans un plan (x_n, y_n), $n \geq 2$, est un disque holomorphe dont le bord est inclus dans la zone grisée sur la figure 2.3. Ce disque étant compact, il est donc entièrement contenu dans la zone grisée (si ce n'était pas le cas, il intersecterait le domaine extérieur non borné, et le recouvrirait donc entièrement, ce qui contredit la compacité). Cela implique que ce disque holomorphe est nécessairement constant, puisque dans le cas contraire c^* serait alors une perçure négative pour v_2'. Ainsi v_2' est inclus dans le plan contenant c^* et dirigé selon (x_1, y_1). On raisonne à présent dans ce plan (à gauche sur la figure 2.3). Là encore, le seul domaine compact délimité par $\Pi_L(\Lambda)$ est celui contenu dans la boucle, à savoir v_2. Les deux disques v_2' et v_2 coïncident donc bien à reparamétrisation près. □

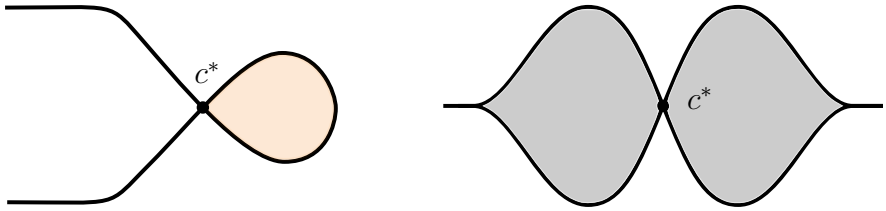


FIGURE 2.3 : Projection lagrangienne de Λ dans la carte lâche perturbée.

Démonstration de la proposition 2.1.2. Il suffit de relever le disque v_2 construit précédemment en utilisant [DR16, Théorème 2.1]. Notons que ce théorème donne directement la rigidité et le caractère Fredholm-régulier du relevé u_2.

Afin de prouver l'unicité, considérons un disque holomorphe u_2' satisfaisant les mêmes hypothèses que u_2. En vertu de la proposition 1.7.6, l'énergie de ce disque est majorée par $3\mathcal{A}(c)$ et peut donc être considérée arbitrairement petite. Un argument classique de monotonie (voir [BEH$^+$03, Lemme 5.2]) montre alors que u_2' est nécessairement inclus dans la symplectisation de la carte lâche. L'unicité de u_2 découle donc de celle de v_2, toujours en vertu de [DR16, Théorème 2.1]. □

2.2 Chirurgie critique et dynamique de Reeb

On détaille dans cette section la construction d'un cobordisme de Weinstein $(X, \omega = d\beta)$ entre (Y, α) et la variété (Y_Λ, α') obtenue à partir de Y par chirurgie le long de la sphère legendrienne Λ. On reprend ici le modèle de [BEE], qui introduit une anse particulière, "étroite" selon une des dimensions. Cet article étudie entre autre la dynamique du flot de Reeb dans la zone de chirurgie ; on verra ainsi qu'à la corde $c \subset Y$ correspond une orbite de Reeb $\tilde{c} \subset Y_\Lambda$, traversant la zone de chirurgie, et de très petite action. D'autre part, en munissant l'anse d'une structure presque complexe particulière, on peut voir facilement un certain cylindre holomorphe asymptote à c et $\tilde{c}$. Le caractère étroit de l'anse garantit alors l'unicité de certaines courbes holomorphes, ce qui permettra d'établir le théorème 2.3.2 dans la section suivante.

2.2.1 Notations

Le modèle local de l'anse est développé dans $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$, où l'on note les coordonnées $(x; y) = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. On privilégie de plus une direction, en écrivant $x + iy = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$.

On fera de plus, comme précédemment, la convention qu'un produit de deux n-uplets (de scalaires, de vecteurs ou de formes linéaires) est égal à la somme des produits terme à terme. Ainsi par exemple,

$$dx \wedge dy := (dx_1, ..., dx_n) \wedge (dy_1, ..., dy_n) := \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Soient $\varepsilon > 0$, $p > 5$ un entier, et q, s des entiers tels que $\frac{1}{10}p < s < \frac{1}{5}p$ et $p - s < q < p$. Soit également une fonction palier $\chi_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{l} \chi_\varepsilon(r) = 0 \text{ pour } r \in [0, \varepsilon^q], \\ \chi_\varepsilon(r) = 1 \text{ pour } r \geq 2\varepsilon^q, \\ \mid d^{(k)}\chi_\varepsilon \mid = \mathcal{O}(\varepsilon^{-kq}). \end{array}$$

Enfin on pose $r_2 := \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$. On définit alors l'anse comme la région délimitée par les deux hypersurfaces

$$V_{\pm\varepsilon} := \left\{(x; y) \in \mathbb{C}^n \mid 2x_1^2 - y_1^2 + \chi_\varepsilon(r_2)\varepsilon^{2s}(2x_2^2 - y_2^2) = \pm\varepsilon^{2p}\right\}. \tag{2.1}$$

Il s'agit d'une déformation du modèle d'anse critique présenté dans l'exemple 1.4.2. Plus précisément, cette anse est obtenue à partir de celle délimitée par les hypersurfaces

$$\left\{(x; y) \in \mathbb{C}^n \mid 2x_1^2 - y_1^2 + \varepsilon^{2s}(2x_2^2 - y_2^2) = \pm\varepsilon^{2p}\right\}.$$

en aplatissant ces hypersurfaces près du plan $\{x_2 = 0, y_2 = 0\}$. Cela montre que le modèle considéré ici admet une structure de cobordisme de Weinstein. En effet, le modèle non aplati

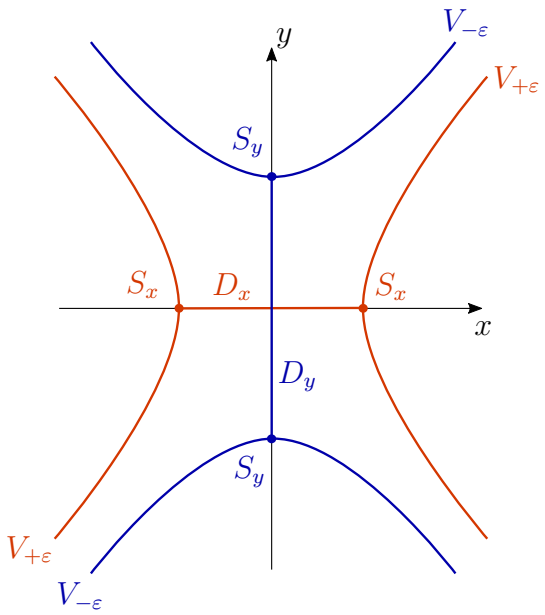


FIGURE 2.4 : Modèle de l'anse.

est un cobordisme de Weinstein, comme dans l'exemple 1.4.2. On voit sans mal que notre modèle d'anse s'obtient à partir du modèle non aplati par une homotopie de cobordismes de Liouville : il suffit de faire apparaître χ_ε progressivement (la structure symplectique et le champ de Liouville restent constants). D'après [CE12, Proposition 11.8], il existe donc un symplectomorphisme exact entre les deux modèles. Il reste à se servir de ce symplectomorphisme pour transporter la fonction de Morse du modèle non aplati vers notre modèle, obtenant ainsi une structure de Weinstein sur ce dernier.

Remarque 2.2.1. Dans la définition de $V_{\pm\varepsilon}$, il faut penser à ε comme étant un très petit réel (on précisera dans la suite ce que "petit" signifie ici). Le choix d'un tel modèle pour l'anse présente plusieurs avantages qui seront présentés au cours des sections suivantes. Le fait que l'anse soit "petite" garantit que les orbites de Reeb traversant la zone de chirurgie sont très proches de concaténations de cordes de Reeb de Λ, et permet d'établir une correspondance entre les deux (proposition 2.2.6). D'autre part, grâce au fait que l'anse est plus étroite selon (x_1, y_1) que selon les autres coordonnées, on peut contrôler le comportement de certaines courbes holomorphes, et démontrer notamment des résultats d'unicité à l'aide d'arguments de monotonie (théorème 2.3.1).

Il sera utile dans la suite d'avoir les notations suivantes.

$$\begin{array}{lcl} D_x(r) & := & \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \varepsilon^{2s} x_2^2 \leq r^2\}, \\ S_x(r) & := & \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \varepsilon^{2s} x_2^2 = r^2\}, \\ D_y(r) & := & \{y \in i\mathbb{R}^n \mid y_1^2 + \varepsilon^{2s} y_2^2 \leq r^2\}, \\ S_y(r) & := & \{y \in i\mathbb{R}^n \mid y_1^2 + \varepsilon^{2s} y_2^2 = r^2\}. \end{array}$$

Dans ce modèle, l'âme et la sphère d'attachement correspondent respectivement à $D_y(\varepsilon^p)$ et $S_y(\varepsilon^p)$, tandis que la co-âme et la co-sphère correspondent à $D_x(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^p)$ et $S_x(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^p)$. La situation est représentée sur les figures 2.4 et 2.5.

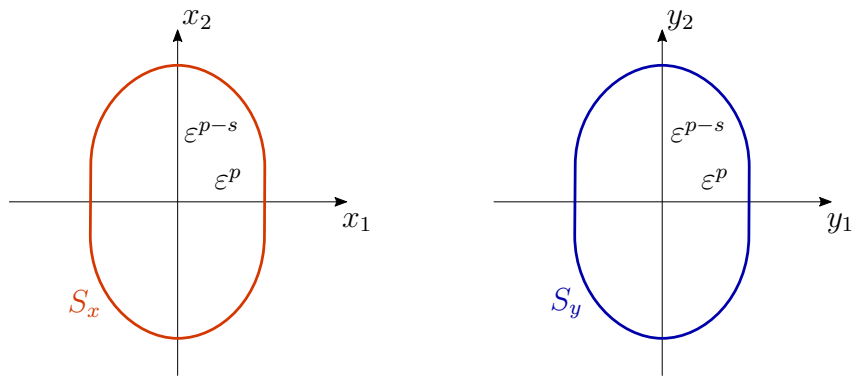


FIGURE 2.5 : La co-sphère S_x et la sphère S_y.

On introduit encore deux notations :

$$N_{-\varepsilon}(r) := (D_x(r) \times i\mathbb{R}^n) \cap V_{-\varepsilon}$$

voisinage tubulaire de la sphère d'attachement, et

$$N_{+\varepsilon}(r) := (\mathbb{R}^n \times D_y(r)) \cap V_{+\varepsilon}$$

voisinage tubulaire de la co-sphère.

2.2.2 Dynamique de Reeb sur le bord de l'anse

On équipe $\mathbb{C}^n$ de la forme symplectique standard $\omega_{st} = dx \wedge dy$. Il est alors aisé de vérifier que le champ de vecteurs

$$v := 2x\partial_x - y\partial_y$$

est un champ de Liouville pour ω_{st}, de forme de Liouville

$$\beta_0 := \iota_v(\omega_{st}) = 2xdy + ydx. \tag{2.2}$$

Puisque v est transverse aux hypersurfaces $V_{\pm\varepsilon}$, β_0 induit sur celles-ci une forme de contact. Le champ de Reeb associé est

$$R = \frac{1}{N(x;y)}\Big(2x_1\partial y_1 + y_1\partial x_1 + \varepsilon^{2s}\chi_\varepsilon(r_2)(2x_2\partial y_2 + y_2\partial x_2)\Big)$$

où $N(x;y) = 4x_1^2 + y_1^2 + \varepsilon^{2s}\chi_\varepsilon(r_2)(4x_2^2 + y_2^2)$.

Les équations du flot de Reeb (avec une vitesse modifiée, en oubliant le facteur $N(x;y)$) sont donc

$$\begin{cases} x_1' &= y_1, \\ y_1' &= 2x_1, \\ x_2' &= \varepsilon^{2s}\chi_\varepsilon(r_2)y_2, \\ y_2' &= 2\varepsilon^{2s}\chi_\varepsilon(r_2)x_2. \end{cases} \tag{2.3}$$

2.2.3 Description du modèle local

On construit à présent un modèle modifié de l'anse introduite en 2.2.1, qui coïncide avec ce modèle près de l'âme et de la co-âme, et qui loin de ces objets est déformé de sorte à pouvoir être recollé à un cobordisme trivial hors d'un voisinage de la sphère d'attachement. Voir la figure 2.6.

Notons Ω^t le flot au temps t du champ de Liouville v défini précédemment. On considère également un entier l tel que

$$5s + 5 < l < p.$$

On va remplacer $V_{+\varepsilon}$ par une hypersurface $\tilde{V}_{+\varepsilon}$ qui lui est proche[1], de la manière suivante. Soit T le temps que prend le flot de Liouville pour atteindre $V_{+\varepsilon}$, en partant d'un point $(x;y) \in V_{-\varepsilon}$ vérifiant[2] $x_1^2 + \varepsilon^{2s}x_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{s+1} - 10\varepsilon^l$. Soit également

$$E_- := \left\{ (x;y) \in V_{-\varepsilon} \mid \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{s+1} - 5\varepsilon^l \leq x_1^2 + \varepsilon^{2s}x_2^2 \right\}.$$

On définit alors $\tilde{V}_{+\varepsilon}$ comme une hypersurface coïncidant avec

$$E_+ := \Omega^T(E_-)$$

et coïncidant, hors d'un petit voisinage de E_+, avec $V_{+\varepsilon}$. On renvoie à [BEE] pour les estimations précises, et à la figure 2.6 pour une représentation de la situation.

Notons que l'on peut alors définir une application

$$F : \begin{array}{ccc} E_- & \to & E_+ \\ (x;y) & \mapsto & \Omega^T((x;y)). \end{array}$$

Remarque 2.2.2. Au vu de la définition de la forme de contact α, et le flot de Liouville dilatant la forme symplectique par un facteur exponentiel, on a

$$F^*(\alpha) = e^T\alpha.$$

[1] plus précisément, $\mathcal{O}(\varepsilon^{2p-5s-4+l})$ $\mathcal{C}^2$-proche.

[2] Ce temps T est indépendant du choix d'un tel point. Voir [BEE, Lemme 3.2].

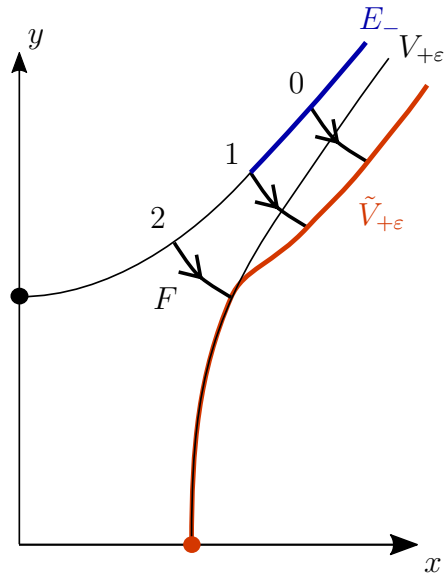


FIGURE 2.6 : Déformation de l'anse. Les points marqués $j = 0, 1, 2$ correspondent à l'ensemble des points vérifiant $x_1^2 + \varepsilon^{2s} x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{s+1} - 5j\varepsilon^l$.

2.2.4 Construction du cobordisme

On a à présent à notre disposition tous les objets nécessaire pour construire Y_Λ et un cobordisme X entre Y et Y_Λ. Rappelons les notations : (Y_Λ, α') est la variété de contact obtenue à partir de la variété de contact (Y, α) en effectuant une chirurgie de contact le long de la sphère legendrienne Λ.

Construction de Y_Λ.

D'après [BEE, Lemme 2.3], il existe un isomorphisme de contact strict permettant d'identifier un voisinage de Λ dans Y au voisinage $N_{-\varepsilon}(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{s+1})$ de $S_y(\varepsilon^p)$ dans $(V_{-\varepsilon}, \alpha)$. On a toute latitude pour choisir l'identification de Λ à $S_y(\varepsilon^p)$ induit par cet isomorphisme, ce choix n'affectant aucunement le reste de la construction. On demande donc que :

- les extrémités $c_\pm$ de la corde c correspondent aux points $(x; y_1, y_2) = (0; \pm\varepsilon^p, 0)$; en particulier, la portion de c contenue dans l'anse est incluse dans le plan $\{x_2 = 0, y_2 = 0\}$.
- le chemin γ introduit dans la section 2.1.2 corresponde à un chemin inclus dans le plan dirigé selon les deux premières coordonnées de $i\mathbb{R}^n$. Plus précisément, en notant $y_2 = (y^{(2)}, ..., y^{(n)})$, on demande que :

$$\gamma \subset \left\{x = 0, y^{(2)} \geq 0, y^{(3)} = ... = y^{(n)} = 0\right\}.$$

- pour la métrique euclidienne standard, le chemin décrit au point précédent est de vitesse constante égale à 1.

Remarque 2.2.3. L'identification donnée dans [BEE] entre un voisinage de Λ dans Y et $N_{-\varepsilon}(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{s+1})$ est telle qu'au niveau de $c_\pm$, la direction orthogonale à $\Pi_L(\Lambda) \subset \mathbb{R}^{2n}$ dans la carte lâche correspond à la direction x_2 dans le modèle de l'anse (la direction y_2 étant la direction tangente à Λ). D'autre part, à cause de la forme aplatie de l'anse (2.1) au voisinage du plan $\{x_2 = 0, y_2 = 0\}$, et au vu de la forme de contact (2.2), les hyperplans de contact de $V_{-\varepsilon}$ le long de $V_{-\varepsilon} \cap \{x_2 = 0, y_2 = 0\}$ sont dirigés par x_2, y_2. Les remarques précédentes, conjuguées à la forme particulière de Λ dans la carte lâche décrite à la fin de la section 2.1.2, montrent que la différentielle du flot de Reeb le long de c exécute une rotation d'un quart de tour dans chaque plan $(x^{(i)}, y^{(i)})$, $i \geq 2$ (où l'on note $x_2 = (x^{(2)}, ..., x^{(n)})$).

Pour effectuer la chirurgie, on retire

$$\hat{N}_{-\varepsilon} := N_{-\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{s+1} - 5\varepsilon^l\right) \subset N_{-\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{s+1}\right)$$

et on se sert de l'application F définie précédemment pour recoller un voisinage de la co-sphère dans $\tilde{V}_{+\varepsilon}$. Plus précisément, on pose

$$Y_\Lambda := (Y \setminus \hat{N}_{-\varepsilon}) \cup_F \left(\tilde{V}_{+\varepsilon} \setminus F\left(E_- \setminus N_{-\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{s+1}\right)\right)\right)$$

où le recollement se fait sur $N_{-\varepsilon}(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{s+1}) \setminus \hat{N}_{-\varepsilon}$. Voir la figure 2.7.

Dans la suite, on notera Γ la co-sphère $S_x(\varepsilon^p)$ vue dans Y_Λ.

Construction du cobordisme $(X, \omega = d\beta)$**.**

Considérons la partie non-triviale de l'anse $H_\varepsilon \subset \mathbb{C}^n$, définie comme le domaine de $\mathbb{C}^n$ borné par les trois hypersurfaces $V_{-\varepsilon}$, $\tilde{V}_{+\varepsilon}$ et le bord latéral

$$\bigcup_{0 \leq t \leq T} \Omega^t\left(\partial N_{-\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{s+1}\right)\right).$$

Par construction de $\tilde{V}_{+\varepsilon}$, H_ε est symplectomorphe[3] dans un voisinage de cette troisième hypersurface à $[0, T] \times U \subset \mathbb{R} \times Y$, où $U \subset N_{-\varepsilon}(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{s+1})$ est un voisinage de $\partial N_{-\varepsilon}(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{s+1})$, et où $\mathbb{R} \times Y$ est la symplectisation de Y. On peut donc attacher naturellement à H_ε la symplectisation $[0, T] \times (Y \setminus \hat{N}_{-\varepsilon})$, ce qui produit un cobordisme de Weinstein $\overline{X}$ de bord concave Y et de bord convexe Y_Λ.

Comme décrit à la section 1.3, on complète $\overline{X}$ en lui attachant deux demi-symplectisations, pour obtenir un cobordisme complété X. On note $\omega = d\beta$ la forme symplectique sur ce cobordisme, où β coïncide avec β_0 dans l'anse H_ε, et avec $e^t\alpha$ au niveau de la symplectisation $\mathbb{R} \times (Y \setminus \hat{N}_{-\varepsilon})$.

[3] *via* le flot de Liouville - voir la proposition 1.3.9.

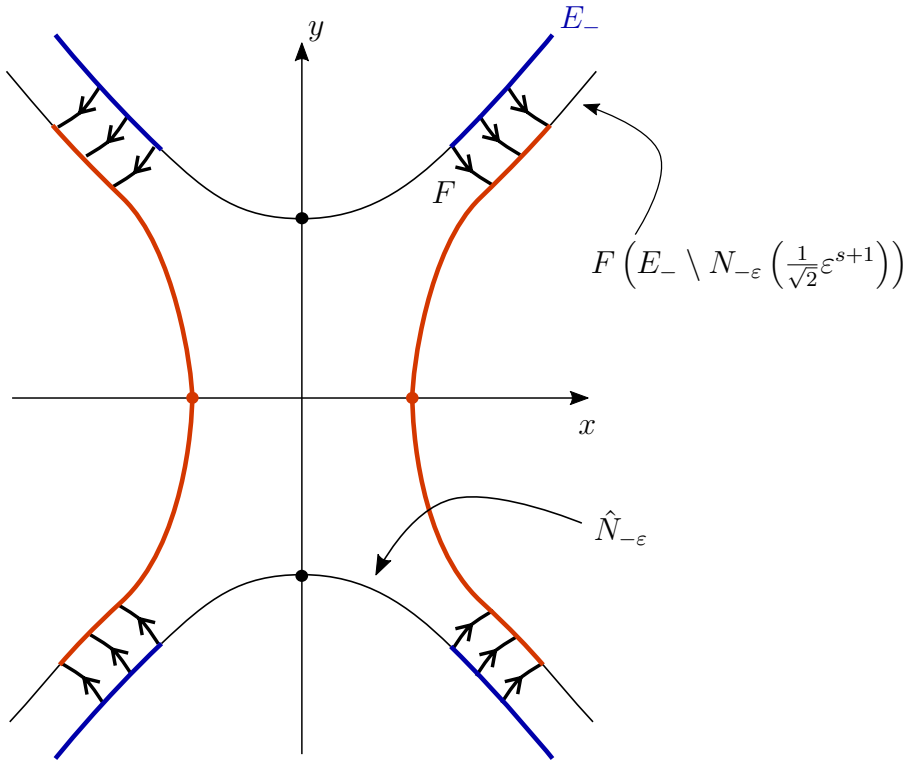


FIGURE 2.7 : Construction de Y_Λ par recollement.

Remarque 2.2.4. La forme de contact α' sur Y_Λ obtenue par cette construction est $\alpha' := \beta|_{Y_\Lambda}$. D'après la remarque 2.2.2, hors de la zone de chirurgie, on a donc $\alpha' = e^T\alpha$. Cela n'affecte néanmoins pas les considérations d'action faites par la suite, puisque T peut être rendu arbitrairement petit en diminuant ε. On a en fait plus précisément, d'après [BEE, Lemme 3.2] : $T = \mathcal{O}(\varepsilon^{2p-2s-2})$.

Définition 2.2.5. On définit deux sous-variétés lagrangiennes de (X, ω) qui coïncident respectivement dans l'anse avec $i\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$:

- $L = D_y(\varepsilon^p) \cup (]-\infty, 0] \times \Lambda)$ l'*âme* de l'anse ;
- $C = D_x(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^p) \cup ([T, +\infty[\times\Gamma)$ la *co-âme*.

On munit ([BEE, Section 5.4]) le cobordisme (X, ω) d'une structure presque complexe J adaptée et vérifiant les propriétés suivantes :

- J coïncide dans un voisinage de c avec la structure presque complexe définie en 2.1.2 ;
- J préserve le plan (x_1, y_1) dans l'anse H_ε ;
- au niveau de $H_\varepsilon \cap \{x_2 = 0, y_2 = 0\}$, J préserve l'espace (x_2, y_2).

Pour ce faire, l'idée consiste à étendre la structure presque complexe définie en 2.1.2 à un voisinage de $\{x_2 = 0, y_2 = 0\}$ dans H_ε, en altérant la structure complexe standard dans cette région ; puis on l'étend à nouveau, arbitrairement, sur le reste du cobordisme.

2.2.5 Dynamique du flot de Reeb après chirurgie

En effectuant une chirurgie le long de Λ, les orbites de Reeb de Y sont modifiés d'une façon très similaire à ce que l'on observe lors d'un attachement de rocade ([Vau11]). Plus précisément, on a la correspondance suivante.

Proposition 2.2.6 ([BEE, Lemme 4.1])**.** *Soit $a_0 > 0$ un réel qui n'est pas l'action d'une corde de Λ. Il existe ε_0 tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, il existe une bijection naturelle*

$$\mathcal{P}_{a_0}(Y_\Lambda) \leftrightsquigarrow \mathcal{P}_{a_0}(Y) \cup \widetilde{\mathcal{C}}^*_{a_0}(\Lambda)$$

où $\mathcal{P}_{a_0}$ désigne l'ensemble des orbites de Reeb[4] *d'action inférieure à a_0, et $\widetilde{\mathcal{C}}^*_{a_0}(\Lambda)$ désigne l'ensemble des mots cycliques en les cordes de Reeb de Λ dont la somme des actions est inférieure à a_0.*

Un *mot cyclique* en cordes de Reeb est une classe d'équivalence de mots abstraits $c_1 ... c_n$, où l'on identifie les mots qui diffèrent par permutation circulaire de leurs lettres.

L'idée de la démonstration est la suivante. Quitte à prendre ε suffisamment petit, la chirurgie a lieu dans un voisinage de Λ évitant les orbites de Reeb de Y. Le sens direct de la bijection s'obtient alors facilement : en faisant tendre ε vers 0, l'anse "dégénère" et les orbites de Reeb de Y_Λ qui traversaient l'anse[5] convergent vers des concaténations de cordes de Reeb de Λ.

Pour définir le sens réciproque de la bijection, il faut établir qu'une corde de Reeb de Λ peut, quitte à la perturber un peu, être refermée en suivant le flot de Reeb dans l'anse (l'argument est similaire dans le cas de plusieurs cordes, on montre alors que l'on peut les connecter les unes aux autres par des trajectoires traversant l'anse). Une telle opération est possible car dans l'anse, le flot de Reeb se comporte comme un flot géodésique ; plus précisément, en voyant l'anse comme le fibré en disques $D^*L \subset T^*L$ avec L l'âme, le flot de Reeb sur le bord S^*L coïncide[6] avec le flot géodésique sur le disque L (cf. [Bou11, Section 3]). Par conséquent, en perturbant légèrement le point d'entrée dans l'anse d'une trajectoire de Reeb, on modifie la direction de propagation à l'intérieur de l'anse, ce qui altère drastiquement le point de sortie. Cela permet de réaliser les connexions souhaitées.

[4] Rappelons que (Y_Λ, α') dépend de ε.

[5] Pour éviter de trop lourdes formulations, on réalise ici un abus en utilisant le terme d'*anse*. Il faudrait plutôt parler de *bord de l'anse*, ou encore de *zone de chirurgie*.

[6] On ignore ici l'étape de lissage des coins, nécessaire après attachement de l'anse, et qui perturbe le flot de Reeb sans en changer cependant le type de dynamique.

Remarque 2.2.7. Dans le modèle de [BEE], le flot géodésique n'apparaît pas clairement, à cause de la forme du bord de l'anse. On a néanmoins bien un comportement similaire à celui attendu, comme l'illustre [BEE, Lemme 2.1]. Pour rendre cette dynamique plus évidente, il faut considérer une version aplatie du modèle, où $\tilde{V}_{+\varepsilon}$ coïncide avec le cylindre $S_x(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^p) \times i\mathbb{R}^n$ dans la région centrale de l'anse, comme sur la figure 2.8. Le flot de Reeb dans la zone aplatie est alors donné par

$$\begin{cases} x_1' &= 0, \\ y_1' &= 2x_1, \\ x_2' &= 0, \\ y_2' &= 2\varepsilon^{2s}x_2 \end{cases}$$

ce qui correspond aux équations d'un flot géodésique. Hors de la zone aplatie, le flot de Reeb n'est que très peu altéré par la chirurgie, et conserve donc une dynamique globale de type hyperbolique.

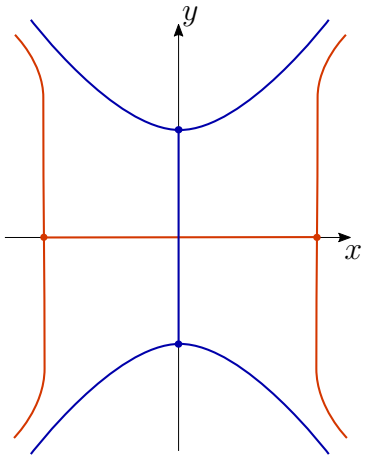


FIGURE 2.8 : Modèle d'une anse aplatie.

La proposition 2.2.6 permet d'associer à la corde c une orbite $\tilde{c}$ de Y_Λ. Avec la proposition 2.1.1 et la remarque 2.2.3, on obtient sans difficultés la proposition suivante.

Proposition 2.2.8. *Si ε est suffisamment petit, il existe une orbite de Reeb non dégénérée $\tilde{c}$ dans Y_Λ dont l'action est plus petite que les actions des autres orbites de Reeb de Y et Y_Λ et des cordes de Reeb de Λ et Γ.*

On fera par la suite le choix d'un tel ε.

Remarque 2.2.9. Au vu de la forme explicite (2.3) du flot de Reeb dans la zone de chirurgie, les intersections de $V_{-\varepsilon}$ et $\tilde{V}_{+\varepsilon}$ avec le plan $\{x_2 = y_2 = 0\}$ sont stables par le flot de Reeb. En outre, on a choisi la paramétrisation de Λ de sorte que les extrémités $c_\pm$ de c appartiennent à ce plan. Grâce à ce choix particulier de paramétrisation, il est donc aisé de voir en quoi

consiste l'orbite $\tilde{c}$: elle coïncide avec c hors de la zone de chirurgie et, dans la zone de chirurgie, avec la trajectoire de Reeb contenue dans le plan $\{x_2 = y_2 = 0\}$. Voir la figure 2.9.

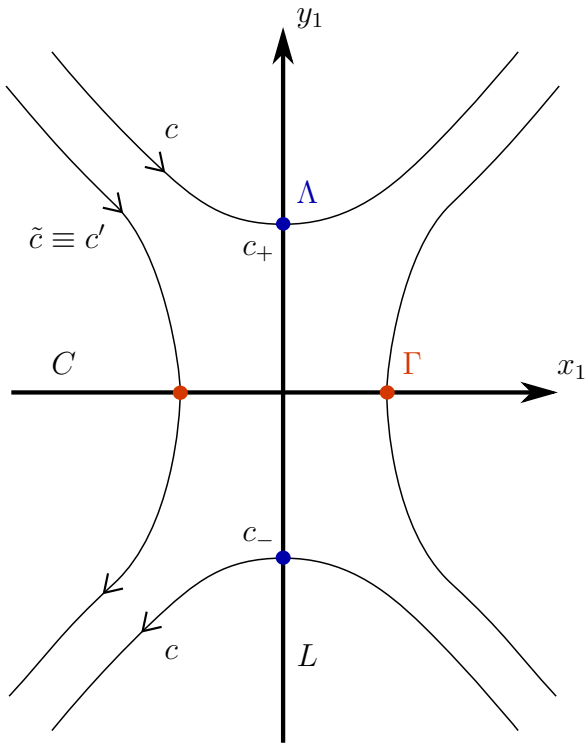


FIGURE 2.9 : L'orbite $\tilde{c}$ et les cordes c, c'.

On dispose d'un équivalent de la proposition 2.2.6 pour les cordes de la co-sphère $\Gamma \subset Y_\Lambda$. L'idée de la preuve est similaire, bien que plus simple.

Proposition 2.2.10 ([BEE, Lemme 4.2])**.** *Soit $a_0 > 0$ un réel qui n'est pas l'action d'une corde de Λ. Il existe ε_0 tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, il existe une bijection naturelle*

$$\mathcal{C}_{a_0}(\Gamma) \leftrightsquigarrow \mathcal{C}^*_{a_0}(\Lambda)$$

où $\mathcal{C}_{a_0}(\Gamma)$ désigne l'ensemble des cordes de Reeb de Γ d'action inférieure à a_0, et $\mathcal{C}^*_{a_0}(\Lambda)$ désigne l'ensemble des mots (non cycliques) en les cordes de Reeb de Λ dont la somme des actions est inférieure à a_0.

Dans la suite, on notera c' la corde de Reeb de Γ associée à c à travers cette correspondance (quitte à diminuer ε). On peut faire au sujet de cette corde les mêmes remarques que celle faites précédemment au sujet de $\tilde{c}$; notamment, grâce au choix particulier de paramétrisation fait pour Λ, c' coïncide avec $\tilde{c}$.

2.3 Une courbe holomorphe particulière

Grâce au fait que J préserve le plan (x_1, y_1) dans l'anse H_ε, on peut voir dans X un disque J-holomorphe $v_1 : (\dot{\mathbb{D}}, \partial\dot{\mathbb{D}}) \to (X, L \cup C)$ percé de 4 points sur son bord et vérifiant les propriétés asymptotiques suivantes :

- v_1 est asymptote positivement à c' ;
- v_1 est asymptote négativement à c ;
- v_1 tend vers le point critique $L \cap C$ au niveau des deux autres perçures, dites *d'intersection lagrangienne*.

Ce disque coïncide dans l'anse avec les deux quadrants du demi-plan $\{x_2 = 0, y_2 = 0, x_1 \leq 0\}$, et hors de l'anse avec une bande holomorphe triviale au-dessus de c (voir la figure 2.10). On a identifié ici, via le flot de Liouville, les parties des demi-symplectisations $]-\infty, 0] \times Y$ et $[T, +\infty[\times Y_\Lambda$ au-dessus de H_ε avec les domaines correspondant dans le modèle local. À travers cette identification, l'âme L (complétée par $]-\infty, 0] \times \Lambda$) est ainsi simplement $i\mathbb{R}^n$, et la co-âme C est donnée par $\mathbb{R}^n$.

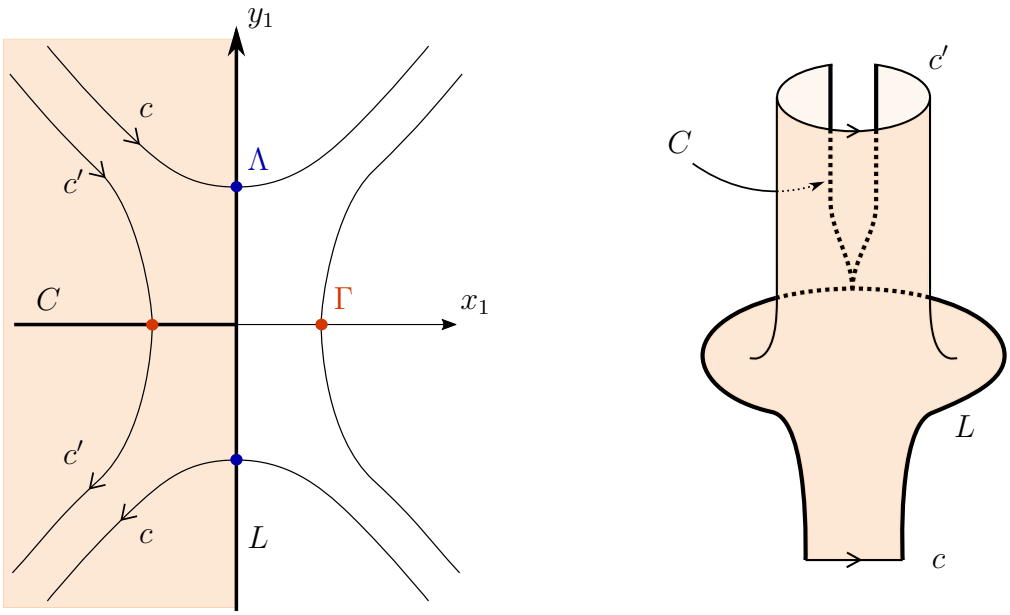


FIGURE 2.10 : Le disque holomorphe v_1.

Les lemmes 6.2 et 6.4 de [BEE] impliquent alors le résultat suivant.

Théorème 2.3.1. *Si ε est suffisamment petit, alors le disque holomorphe v_1 est Fredholm-régulier et unique dans l'espace de modules auquel il appartient.*

Classes d'homologie.

On s'intéressera dans la suite à la famille des anneaux holomorphes obtenus en rattachant v_1 à lui-même au niveau des deux perçures d'intersection lagrangienne, comme sur la figure 2.11 plus bas. Notons $A' \in H_2(\overline{X}, c' \cup c \cup C \cup L)$ la classe d'homologie relative représentée par un tel anneau.

Rappelons en outre que l'orbite $\tilde{c}$ et la corde c' coïncident. En recollant v_1 à lui-même, non juste au point $L \cap C$, mais tout le long du demi-axe x_1, on obtient donc un anneau holomorphe asymptote à $\tilde{c}$ en $+\infty$, à c en $-\infty$, et à bord uniquement sur L (voir la courbe en bas à droite de la figure 2.11). Notons $A \in H_2(\overline{X}, \tilde{c} \cup c \cup L)$ la classe d'homologie relative correspondante.

Transversalité.

Toutes les courbes holomorphes qui interviennent dans la suite de cette partie présentent une unique asymptote positive, vers c, c', ou $\tilde{c}$. D'après la majoration (1.1) établie en 1.7.3, l'énergie de ces courbes est donc bornée par une quantité ne dépendant que des actions de c, c' et $\tilde{c}$; tous les espaces de modules concernés admettent donc une compactification naturelle comme décrit en 1.7.5. Dans le reste de ce document, on supposera systématiquement que les espaces de modules ont été préalablement compactifiés.

D'autre part, l'orbite $\tilde{c}$ étant simple, toutes ces courbes sont simples. En vertu des résultats classiques de transversalité (voir la remarque de la section 1.7.6), une perturbation générique de J parmi les structures presque complexes adaptées à X garantit que tous les espaces de modules considérés sont donc des variétés de dimension égale à leur dimension virtuelle. En réalisant une telle perturbation de J, on peut également garantir que les applications d'évaluation ev_1 et $(\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_2)$ associées à certains espaces de courbes avec des points marqués sont transverses à L et $L \times L$; en effet, une intersection dénombrable de sous-espaces de Baire est encore un sous-espaces de Baire, et en particulier est encore dense.

On fait à partir de maintenant un choix d'une telle perturbation générique, que l'on note encore J. Puisque la courbe v_1 est Fredholm-régulière, elle survit à la perturbation de J, et garde bien son caractère unique (pourvu que la perturbation de J ait été choisie suffisamment petite). On note encore v_1 la courbe obtenue après perturbation.

Théorème 2.3.2. *L'espace de modules $\mathcal{M}_A^{X,L}(\tilde{c}; c)$ est un ensemble fini, de cardinal impair.*

Démonstration. Considérons l'espace de modules $\mathcal{M}_{A'}^{X,(L,C)}(c'; c)$. Grâce à la perturbation générique de J réalisée précédemment, cet espace de modules est une variété. En outre, un recollement de v_1 à elle-même au niveau des deux perçures d'intersection lagrangienne fournit un élément de $\mathcal{M}_{A'}^{X,(L,C)}(c'; c)$; puisque v_1 est rigide, on en déduit que cet espace de modules est de dimension 1 (toutes ses composantes connexes ont bien la même dimension, car on a pris soin de fixer la classe d'homologie). Enfin, $\mathcal{M}_{A'}^{X,(L,C)}(c'; c)$ est compact par la discussion faite plus haut.

Décrivons le bord de $\mathcal{M}_{A'}^{X,(L,C)}(c'; c)$. On y trouve bien évidemment v_1, qui est engendrée

par une dégénérescence de type (IIc)[7]. Étudions les autres cas possibles. Tout d'abord, une dégénérescence de type (IIa) ne peut survenir en l'absence de composante de bord circulaire. Une dégénérescence de type (IIb) est également impossible puisqu'elle conduirait soit à l'apparition d'un disque holomorphe à bord sur L ou C (et donc forcément constant par le théorème de Stokes puisque L et C sont lagrangiennes exactes) soit à la formation d'un anneau avec une seule asymptote, vers c en $-\infty$ (et donc d'énergie négative d'après la proposition 1.7.6). Enfin, une dégénérescence de type (I) provoquerait l'apparition d'une courbe holomorphe sans asymptote positive, mais avec une asymptote négative vers c : cela ne se peut car une telle courbe serait d'énergie négative. La seule possibilité restante pour une courbe du bord de $\mathcal{M}_{A'}^{X,(L,C)}(c';c)$ est donc celle d'un bâtiment holomorphe. Or les actions de c, c' et $\tilde{c}$ sont inférieures aux actions de toutes les autres cordes et orbites de Λ, Γ et Y et Y_Λ. En utilisant l'expression de E_ω donnée à la proposition 1.7.6, et le fait que E_ω est toujours positive, on voit que ces inégalités d'actions contraignent fortement la structure d'un tel bâtiment holomorphe : l'unique possibilité est une brisure le long de $\tilde{c}$. On a donc montré :

$$\partial\mathcal{M}_{A'}^{X,(L,C)}(c';c) = v_1 \sqcup \left(\mathcal{M}_{A}^{X,L}(\tilde{c};c) \times \mathcal{M}_{A''}^{Y_\Lambda,\Gamma}(c';\tilde{c})\right),$$

où la classe A'' est choisie de sorte que le recollement avec A le long de $\tilde{c}$ produise A'. Sur la figure 2.11 on a représenté la composante connexe de $\mathcal{M}_{A'}^{X,(L,C)}(c';c)$ contenant v_1 : c'est une famille à 1-paramètre reliant v_1 à un bâtiment holomorphe à deux étages du type décrit précédemment.

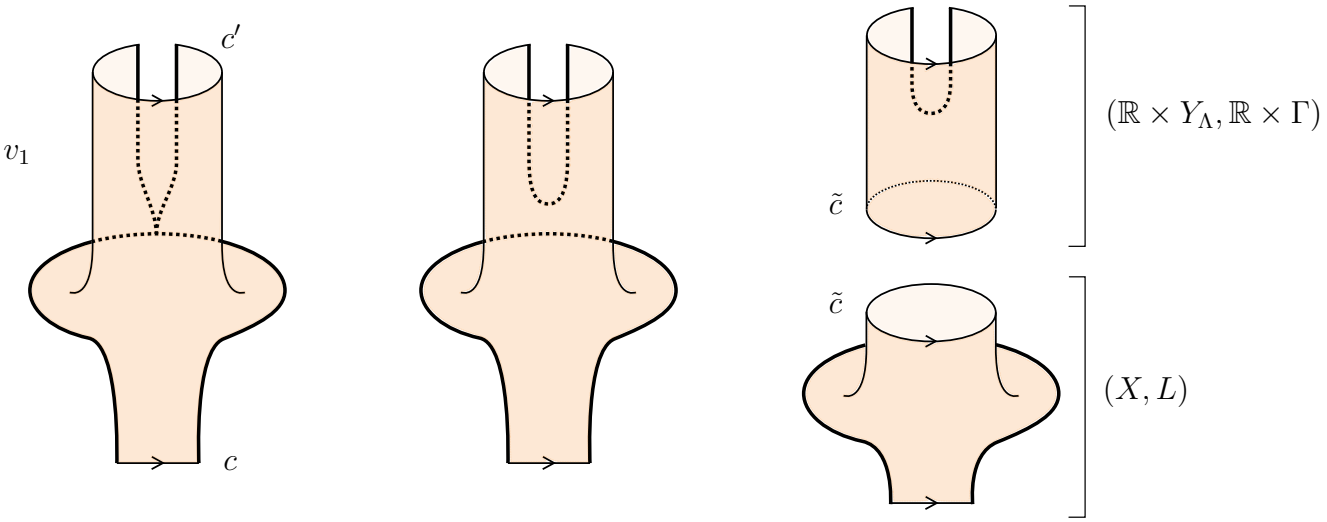


FIGURE 2.11 : Segment de $\mathcal{M}_{A'}^{X,(L,C)}(c';c)$ contenant v_1. On a représenté les deux extrémités et une courbe intermédiaire.

Pour conclure, il reste à utiliser le fait qu'une variété compacte de dimension 1 est un

[7]On rappelle la terminologie introduite en 1.7.5.

union disjointe d'un nombre fini de segments et de cercles ; son bord est donc de cardinal pair. La description donnée de $\partial\mathcal{M}_{A'}^{X,(L,C)}(c';c)$ entraîne par conséquent

$$\#\mathcal{M}_A^{X,L}(\tilde{c};c) \times \#\mathcal{M}_{A''}^{Y_\Lambda,\Gamma}(c';\tilde{c}) \equiv 1\,[2],$$

et en particulier $\#\mathcal{M}_A^{X,L}(\tilde{c};c) \equiv 1\,[2]$. □

2.4 Étude d'une famille de plans holomorphes dans W

2.4.1 Résultats préliminaires dans X

Rappelons la classe d'homologie $A \in H_2(\overline{X}, \tilde{c} \cup c \cup L)$ introduite au début de la section précédente. Soit $B' \in H_2(\overline{X}, \tilde{c} \cup L)$ la classe d'homologie obtenue par recollement, le long de c, de A et de la classe représentée par le disque u_2 introduit à la proposition 2.1.2. Puisque $L \cong \mathbb{R}^n$ est contractile, B' correspond naturellement à une classe $B \in H_2(\overline{X}, \tilde{c})$. Voir la figure 2.12.

Théorème 2.4.1. *L'espace de modules $\mathcal{M}_B^X(\tilde{c})$ est une variété compacte sans bord de dimension $n-2$. De plus seul un nombre fini et impair de plans de $\mathcal{M}_B^X(\tilde{c})$ intersectent L. Pour chacun de ces plans :*

- *si $n = 2$, le nombre algébrique d'intersection avec L dans $(\overline{X}, \partial\overline{X})$ vaut 1 ;*
- *si $n > 2$, le plan intersecte L en exactement un point.*

Par conséquent, la classe d'homologie dans $H_n(\overline{X}, \tilde{c})$ représentée par l'union de tous les plans de $\mathcal{M}_B^X(\tilde{c})$ intersecte de manière non triviale celle représentée par L.

On aura besoin pour établir ce théorème de plusieurs résultats préliminaires. On commence par un lemme purement topologique ; rappelons que l'anse H_ε a été définie à la section 2.2.4. On fait ici un léger abus en écrivant C au lieu de $D_x(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^p)$.

Lemme 2.4.2. *Il existe une rétraction par déformation de H_ε sur C telle que :*

- *dans $D_x(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^p) \times i\mathbb{R}^n$, la rétraction est donnée par la projection dans la direction (y_1, y_2) ;*
- *la rétraction se restreint en une rétraction par déformation de $\tilde{V}_{+\varepsilon}$ sur Γ ;*
- *la rétraction se restreint en une rétraction par déformation de $H_\varepsilon \setminus L$ sur $C \setminus \{0\}$.*

Démonstration.

Il suffit de s'aider d'un champ de vecteurs radial selon (y_1, y_2) pour contracter H_ε sur $C \cup (H_\varepsilon \cap \tilde{V}_{+\varepsilon})$, comme sur la figure 2.13. En utilisant le fait que $\tilde{V}_{+\varepsilon}$ est un graphe au-dessus du cylindre $\Gamma \times i\mathbb{R}^n$ *via* le champ de vecteurs $x\partial_x$, on rétracte alors $H_\varepsilon \cap \tilde{V}_{+\varepsilon}$ sur Γ. □

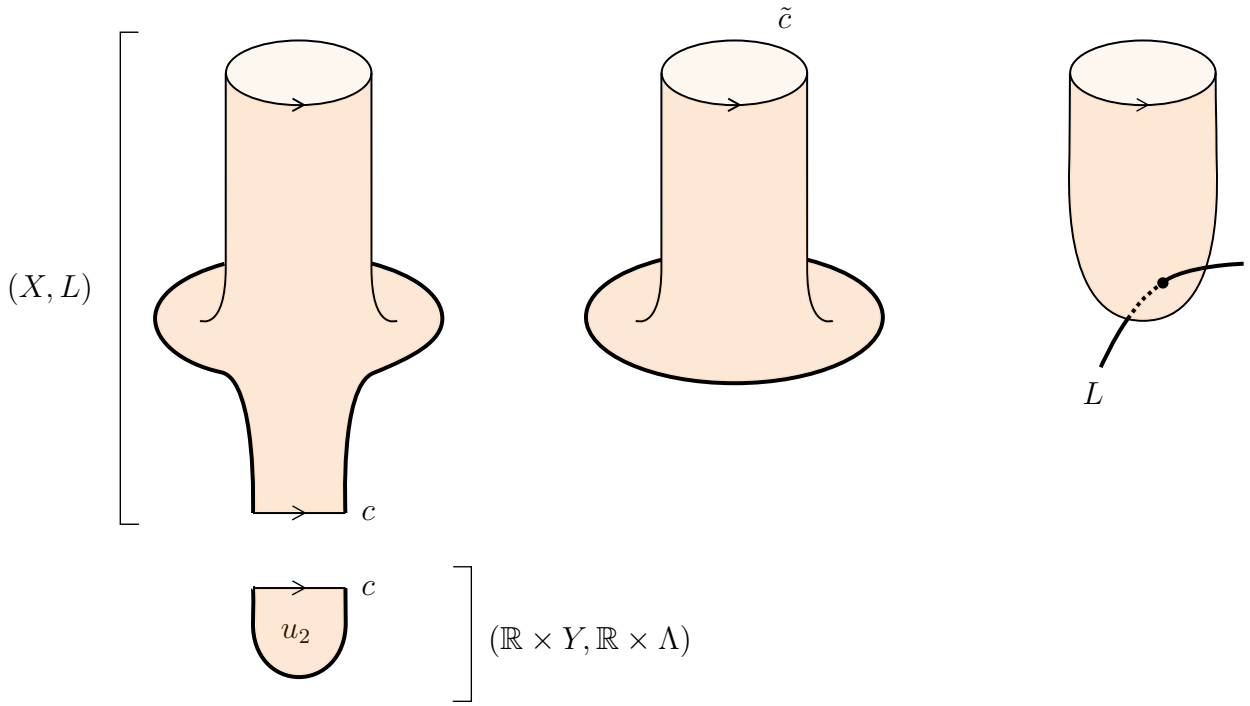


FIGURE 2.12 : Un segment de $\mathcal{M}_{B'}^{X,L}(\tilde{c})$. On a représenté les deux extrémités et une courbe intermédiaire.

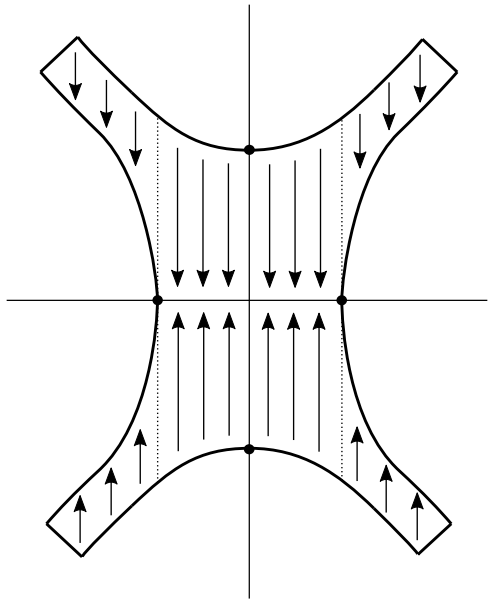


FIGURE 2.13 : Rétraction de l'anse sur $C \cup (H_\varepsilon \cap \tilde{V}_{+\varepsilon})$.

Lemme 2.4.3. *Supposons $n = 2$. Alors la classe B, vue comme élément de $H_2(\overline{X}, Y_\Lambda)$, est égale à la classe représentée par la co-âme C.*

Démonstration.
Soit $\Sigma' \subset \overline{X}$ la surface obtenue en recollant le long de $c \subset Y$:

- Σ_2 la projection sur Y de l'image du disque u_2 ;
- Σ_1 la restriction à $\overline{X}$ de l'image de l'anneau u_1 introduit à la section précédente.

Cette surface est représentée sur la figure 2.14. Les deux chemins qui y figurent en rouge correspondent à c (en bas) et $\tilde{c}$ (en haut). L'âme de l'anse est en bleu.

Orientée par les coordonnées holomorphes, la surface Σ' représente la classe B'. Elle possède deux composantes de bord, l'une donnée par $\tilde{c} \subset Y_\Lambda$, et l'autre constituée de la concaténation de γ et d'un chemin $\delta : [-1, 1] \to L$ tel que $y_1(t) = \varepsilon^p t$ et $x(t) = 0$, $y_2(t) = 0$. On referme ce bord le long de L, en recollant à Σ' un disque D contenu dans L et interpolant entre γ et l'inverse $\overline{\delta}$ de δ (il suffit de ramener la coordonnée y_2 de γ sur 0 ; le disque D est la zone balayée par l'homotopie utilisée). On obtient ainsi un disque $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup D$ bordé par $\tilde{c}$ et représentant la classe B.

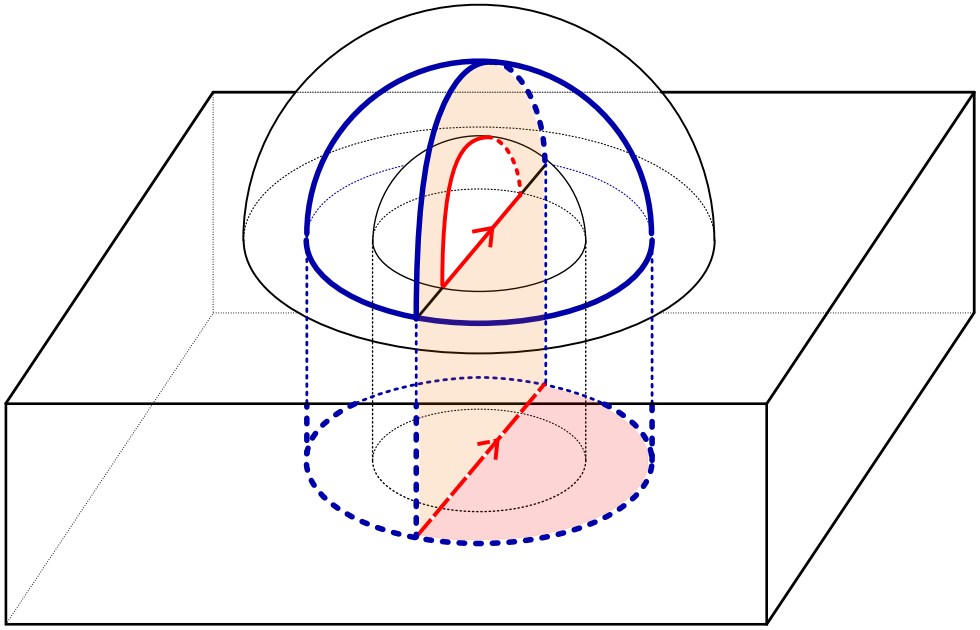


FIGURE 2.14 : La surface $\Sigma' = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$: Σ_1 est en orange, Σ_2 en rouge. Les trajectoires fléchées rouges correspondent à c (en bas) et $\tilde{c}$ (en haut).

On va montrer que ce disque peut être déformé continûment dans $(\overline{X}, Y_\Lambda)$ de sorte à être entièrement inclus dans l'anse H_ε. On pourra alors utiliser le fait que l'anse se rétracte sur

la co-âme, ce qui impliquera que la classe d'homologie de Σ est entièrement déterminée par la classe d'homologie de $\partial\Sigma$ dans Y_Λ. On étudiera cette classe d'homologie, en montrant que $\partial\Sigma$ est homotope à Γ, ce qui impliquera que Σ est homotope à C.

Découpons c en trois parties c_1, $\mathring{c}$ et c_2 (voir figure 2.15), où c_1 et c_2 correspondent aux parties de c qui pénètrent dans le voisinage de chirurgie $\hat{N}_{-\varepsilon}$ de Λ. On définit également $\gamma' : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ un arc legendrien dans la carte lâche (en bleu sur la figure 2.15), contenu dans $\hat{N}_{-\varepsilon}$, et dont $\mathring{c}$ est une corde. En projection frontale, on voit facilement une homotopie γ'_s reliant $\gamma'_0 = \mathring{c}$ à $\gamma'_1 = \gamma'$ par un chemin d'arcs legendriens (sauf pour $s = 0$) d'extrémités fixées. On déforme alors Σ comme suit.

- Il existe un disque holomorphe dans la projection lagrangienne bordé par γ et γ' : il est représenté à droite sur la figure 2.15. Ce disque possède deux perçures vers les cordes c_1 et c_2. On utilise [DR16, Théorème 2.1] pour relever ce disque en un disque dans $\mathbb{R} \times Y$, que l'on projette ensuite pour obtenir un disque $\tilde{\Sigma}_2 \subset Y$. En utilisant l'homotopie γ'_s, on peut rétracter de manière continue Σ_2 sur $\tilde{\Sigma}_2$.
- Au-dessus de $\mathring{c}$, Σ_1 coïncide avec une bande holomorphe triviale $[0,T] \times \mathring{c}$. On peut alors "suivre" la déformation de Σ_2, en considérant la famille de bandes au-dessus de γ'_s :
$$\bigcup_{\substack{u \in [0,1] \\ t \,|\, \Omega^t(\gamma'_s(u)) \in \overline{X}}} \Omega^t(\gamma'_s(u)),$$
où l'on rappelle que Ω^t désigne le flot de Liouville. En-dehors de cette bande que l'on déforme, Σ_1 est laissée fixe. On obtient ainsi une surface $\tilde{\Sigma}_1$.
- On a ainsi déformé continûment $(\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup D, \partial\Sigma)$ dans $(\overline{X}, Y_\Lambda)$ en un disque $(\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}_1 \cup \tilde{\Sigma}_2 \cup D, \partial\tilde{\Sigma}) \subset (H_\varepsilon, H_\varepsilon \cap \tilde{V}_{+\varepsilon})$ entièrement contenu dans l'anse.

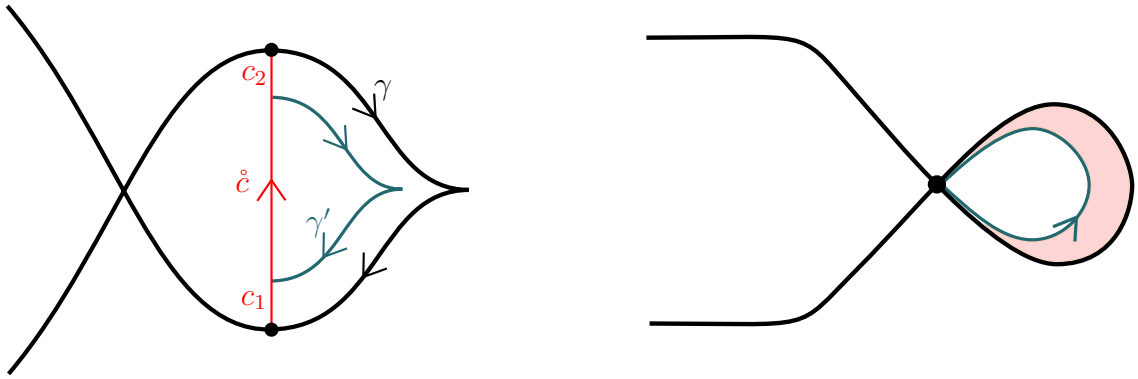


FIGURE 2.15 : Projections frontale et lagrangienne dans la carte lâche.

En utilisant le lemme 2.4.2, on peut déformer $(\tilde{\Sigma}, \partial\tilde{\Sigma}) \subset (H_\varepsilon, H_\varepsilon \cap \tilde{V}_{+\varepsilon})$ en un disque contenu dans C et à bord sur Γ. Pour montrer que $\tilde{\Sigma}$ est homotope à C, il suffit donc de montrer que $\partial\tilde{\Sigma}$ est homotope à Γ.

Étendant la définition faite en 2.2.3, on définit $F : Y \setminus \Lambda \to Y_\Lambda \setminus \Gamma$ qui à un point de $Y \setminus \Lambda$ associe le premier point de Y_Λ rencontré en suivant le flot de Liouville - point qui existe toujours puisque $(0;0)$ est le seul point critique du cobordisme X. Posons $\gamma'' = F(\gamma')$ (voir figure 2.16 plus bas). Le chemin $\gamma'' \subset Y_\Lambda$ est un arc legendrien d'extrémités contenues dans le demi-plan (x_1, y_1), $x_1 \leq 0$, et on peut donc refermer $\overline{\gamma''}$ par une portion d de $\tilde{c}$. Par construction, la surface déformée $\tilde{\Sigma}$ a pour bord $d\#\overline{\gamma''}$.

Soit $N\gamma$ la restriction à γ du fibré normal de Λ dans Y. On l'identifie au fibré engendré par les vecteurs $J(\dot{\gamma})$ et R. Notamment, en coordonnées (t_1, t_2) dans la trivialisation donnée par ces deux vecteurs, il existe un voisinage $\mathcal{N}\gamma \subset N\gamma$ de γ tel que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}\gamma & \hookrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (t_1, t_2)_{\gamma(t)} & \mapsto & t_1 J(\dot{\gamma}(t)) + t_2 \partial_z \end{array}$$

est un plongement ($\mathbb{R}^3$ correspond ici à la carte lâche contenant γ). Puisque l'on ne s'intéresse à partir de maintenant qu'à la classe d'homologie de $\partial\tilde{\Sigma} = d\#\overline{\gamma''}$ dans Y_Λ, il n'est pas gênant de supposer γ' arbitrairement proche de Λ, et en particulier entièrement contenu dans ce voisinage trivialisé de γ. Cela permet de projeter γ' sur la fibre de $N\gamma$:

$$\pi \circ \gamma' : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Observons, à l'aide de la figure 2.15, que $\pi \circ \gamma'(0) \in \{0\} \times \mathbb{R}^-$, $\pi \circ \gamma'(1) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+$, et que pour tout $t \in [0,1]$, $\pi \circ \gamma'(t) \notin \mathbb{R}^- \times \{0\}$: en effet, rappelons que par construction, la projection lagrangienne de J n'est autre que la structure complexe standard. À homotopie d'extrémités fixées près, $\pi \circ \gamma'$ effectue donc un demi-tour dans le sens direct.

Regardons à présent γ comme le chemin dans l'anse contenu dans le plan (y_1, y_2) :

$$\gamma \subset \left\{ y_1^2 + \chi_\varepsilon(y_2)\varepsilon^{2s} y_2^2 = \varepsilon^{2p},\ y_2 \geq 0 \right\}.$$

Le long de γ, la forme de contact, le champ de Reeb, et le champ de Liouville admettent des écritures simplifiées :

$$\begin{aligned} \alpha|_\gamma &= y_1 dx_1 + y_2 dx_2 \\ R|_\gamma &= \frac{1}{N(x;y)} \left(y_1 \partial_{x_1} + \varepsilon^{2s} \chi_\varepsilon(y_2) y_2 \partial_{x_2} \right) \\ v|_\gamma &= -y_1 \partial_{y_1} - y_2 \partial_{y_2}. \end{aligned}$$

L'arc γ est legendrien donc $J(\dot{\gamma}) \in \ker \alpha = \langle \partial_{x_1}, \partial_{x_2} \rangle$. Les deux vecteurs $J(\dot{\gamma})$ et R sont donc tous deux combinaisons linéaires de ∂_{x_1} et ∂_{x_2}, et puisqu'ils ne sont pas colinéaires, on en déduit

$$\langle \partial_{x_1}, \partial_{x_2} \rangle = \langle J(\dot{\gamma}), R \rangle.$$

Comparons ces deux trivialisations de $N\gamma$. On peut déjà constater qu'elles sont orientées similairement : il suffit pour cela de regarder en un point de γ, par exemple en $\gamma(0) = (0; \varepsilon^p, 0)$.

En ce point, $\dot{\gamma} = \partial_{y_2}$ et $R = \varepsilon^p \partial_{x_1}$. Puisque J est adaptée au cobordisme X, $(v, R, \dot{\gamma}, J(\dot{\gamma}))$ est une base directe de TX (orienté par ω^2). Avec les formules données plus haut, cela montre le caractère direct de $(-\partial_{y_1}, \partial_{x_1}, \partial_{y_2}, J(\partial_{y_2}))$. Puisque la base canonique $(\partial_{x_1}, \partial_{y_1}, \partial_{x_2}, \partial_{y_2})$ est également directe, cela prouve que les deux trivialisation de $N\gamma$ données plus haut sont bien de même orientation.

Il reste à constater, à l'aide de l'expression de $R|_\gamma$ donnée plus haut, que le long de γ le champ R effectue un demi-tour dans le sens direct dans la trivialisation $(\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$. D'autre part on a vu plus haut que γ' réalise dans la trivialisation $(J(\dot{\gamma}), R)$ un demi-tour dans le sens direct, allant d'un multiple positif de $-R$ à un multiple positif de R. Par conséquence, γ' effectue dans la trivialisation $(\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ un tour complet dans le sens direct.

Lors de la construction de γ' expliquée plus haut, il n'est pas restrictif de demander que les actions des deux cordes c_1 et c_2 entre γ' et γ soient égales. Grâce à cette hypothèse, les deux points $\gamma'(0)$ et $\gamma'(1)$ ne diffèrent dans l'anse que par leur coordonnée y_1 : on peut ainsi refermer γ' par une trajectoire verticale ascendante d', comme sur la figure 2.16. Rappelons à présent que par construction γ'' s'obtient en poussant γ' par le flot de Liouville. Le flot de Liouville permet donc de déformer $d\#\overline{\gamma''}$ sur $d'\#\overline{\gamma'}$, par une homotopie dans $H_\varepsilon \setminus L$. On poursuit l'homotopie à l'aide du lemme 2.4.2, en projetant $d'\#\overline{\gamma'}$ sur C : ce faisant, d' est envoyé sur un point, et γ' sur un lacet dans $C \setminus \{0\}$ qui par l'étude précédente réalise précisément un tour autour de 0. On a ainsi démontré que $\partial\hat{\Sigma} = d\#\overline{\gamma''}$ est homotope dans $H_\varepsilon \setminus L$ à Γ.

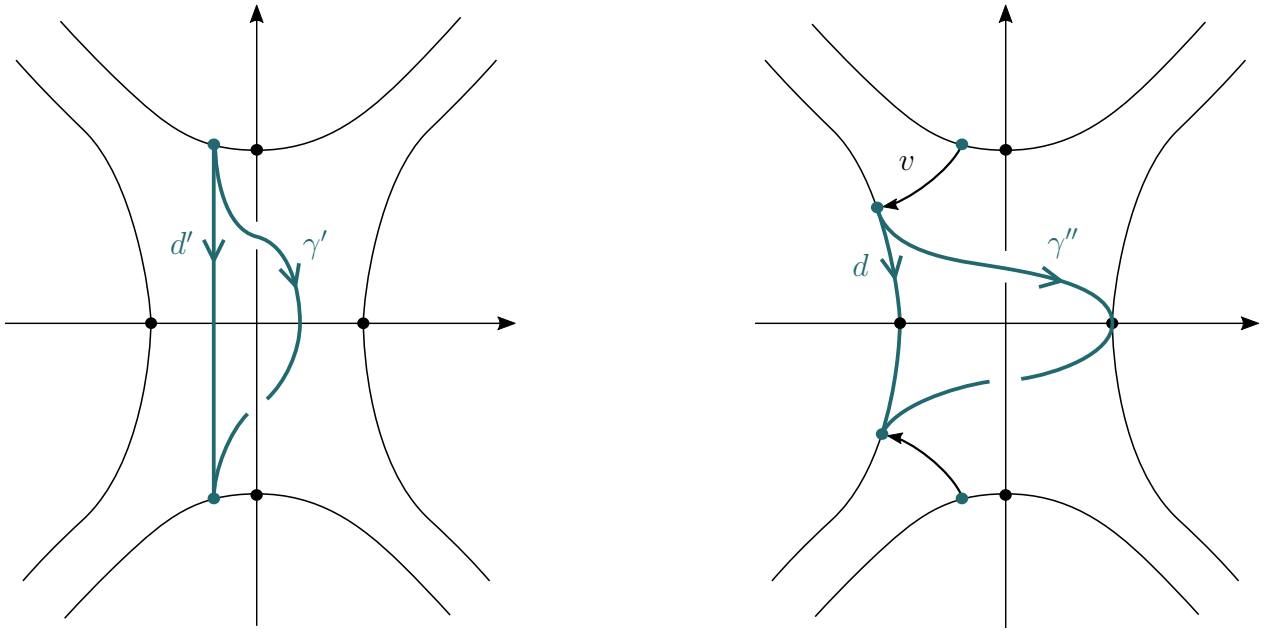


FIGURE 2.16 : Étude de $\partial\Sigma$ à homotopie près dans $H_\varepsilon \setminus L$.

Pour conclure la preuve, il reste à justifier que cette homotopie peut être modifiée en une

homotopie contenue dans $\tilde{V}_{+\varepsilon}$. Mais comme dans le lemme 2.4.2, on peut voir à l'aide du champ de vecteur $x\partial_x$ que $H_\varepsilon \setminus L$ se rétracte par déformation sur $\tilde{V}_{+\varepsilon} \cap H_\varepsilon$. □

Lemme 2.4.4. *Dans la trivialisation Φ induite par B, on a $\mathrm{CZ}^\Phi(\tilde{c}) = 1$.*

Démonstration. Il s'agit essentiellement de suivre les dimensions des différents espaces de modules considérés. On a vu à la section précédente que $\mathcal{M}_{A'}^{X,(L,C)}(c';c)$ est de dimension 1. Puisque le recollement d'un élément de $\mathcal{M}_A^{X,L}(\tilde{c};c)$ et d'un élément de $\mathcal{M}_{A''}^{Y_\Lambda,\Gamma}(c';\tilde{c})$ produit un élément de $\mathcal{M}_{A'}^{X,(L,C)}(c';c)$, on sait par les théorèmes classiques de recollement que $\mathcal{M}_A^{X,L}(\tilde{c};c)$ est un espace de modules rigide. Enfin, recollant un élément de $\mathcal{M}_A^{X,L}(\tilde{c};c)$ au disque rigide u_2, on obtient un élément de $\mathcal{M}_{B'}^{X,L}(\tilde{c})$, qui est donc de dimension 1.

Soit $u \in \mathcal{M}_{B'}^{X,L}(\tilde{c})$. Choisissons une trivialisation de $(u^*TX, u^*\omega)$ le long de son bord pour laquelle TL est constante. Comme on l'a expliqué en 1.7.4, ce choix induit une trivialisation Φ de (TX,ω) le long de $\tilde{c}$, pour laquelle $1 = \dim \mathcal{M}_{B'}^{X,L}(\tilde{c}) = \mathrm{CZ}^\Phi(\tilde{c})$. Or par définition de B, la trivialisation induite le long de $\tilde{c}$ par B est précisément Φ, d'où le résultat. □

Démonstration du théorème 2.4.1. D'après la section 1.7.4 et le lemme 2.4.4, $\mathcal{M}_B^X(\tilde{c})$ est une variété de dimension $n - 3 + \mathrm{CZ}(\tilde{c}) = n - 2$, compacte par les arguments habituels. De plus le bord de $\mathcal{M}_B^X(\tilde{c})$ est vide. En effet, d'une part, un bâtiment holomorphe ne peut se former car on obtiendrait un cylindre holomorphe reliant $\tilde{c}$ en $+\infty$ à une autre orbite en $-\infty$, ce qui est impossible : l'énergie d'une courbe holomorphe étant positive, cette dernière orbite devrait être d'action moindre que $\tilde{c}$. D'autre part, une dégénérescence de type (I) conduirait à l'apparition d'une sphère holomorphe (on parle de *bubbling de sphère*), or une telle sphère dans une variété symplectique exacte est nécessairement constante. On a donc prouvé la première partie du théorème.

Considérons à présent l'espace de modules $\mathcal{M}_{B'}^{X,L}(\tilde{c})$. D'après la section 1.7.4, le lemme 2.4.4, et le lien entre B et B', c'est une variété de dimension 1, compacte par les arguments habituels.

Décrivons son bord. Une dégénérescence de type (IIc) est exclue ici, et une dégénérescence de type (I) ou (IIb) est impossible par le même argument que dans la preuve du théorème 2.3.2. Il reste comme possibilités une dégénérescence complète du bord en un point, ou la formation d'un bâtiment holomorphe. Pour cette dernière éventualité, des raisonnements d'actions et d'énergies comme dans la démonstration du théorème 2.3.2 montrent que seule une brisure le long de c peut avoir lieu. Dans un tel bâtiment holomorphe, le disque de l'étage inférieur est le disque u_2 construit en 2.1.2, en vertu de l'unicité obtenue à la proposition 2.1.2. On a donc montré (voir la figure 2.12) :

$$\partial \mathcal{M}_{B'}^{X,L}(\tilde{c}) = \mathcal{M}_A^{X,L}(\tilde{c};c) \sqcup \mathcal{M}_0,$$

où $\mathcal{M}_0$ est le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{B,1}^X(\tilde{c})$ constitué des plans u tels que $\mathrm{ev}_1(u) \in L$. Grâce à la perturbation générique de J réalisée plus haut, ev_1 est transverse à L, donc $\mathcal{M}_0$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_{B,1}^X(\tilde{c})$ de dimension

$$\dim \mathcal{M}_0 = \dim \mathcal{M}_{B,1}^X(\tilde{c}) - n = \dim \mathcal{M}_B^X(\tilde{c}) + 2 - n = 0.$$

Puisque le bord d'une variété compacte de dimension 1 est de cardinal pair, et puisque $\mathcal{M}_A^{X,L}(\tilde{c};c)$ est de cardinal impair d'après le théorème 2.3.2, $\mathcal{M}_0$ est donc également de cardinal impair.

Supposons $n > 2$. Soit $u \in \mathcal{M}_B^X(\tilde{c})$, et supposons que u intersecte L en au moins deux points distincts. On peut alors voir u comme un élément de $\mathcal{M}_{B,2}^X(\tilde{c})$ tel que $(\mathrm{ev}_1(u), \mathrm{ev}_2(u)) \in L \times L$. Or puisque $(\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_2)$ est transverse à $L \times L$, le sous-ensemble

$$\left\{ v \in \mathcal{M}_{B,2}^X(\tilde{c}) \mid (\mathrm{ev}_1(u), \mathrm{ev}_2(u)) \in L \times L \right\}$$

est une variété de dimension

$$\dim \mathcal{M}_{B,2}^X(\tilde{c}) - 2n = (n - 2 + 4) - 2n = 2 - n < 0,$$

ce qui est absurde. Ainsi chaque plan de $\mathcal{M}_B^X(\tilde{c})$ intersecte L au plus une fois.

Le cas $n = 2$ résulte quant à lui immédiatement du lemme 2.4.3. La fin du théorème est une conséquence directe des points précédents. □

2.4.2 Ajout d'un remplissage W_0

On suppose dorénavant que (Y, α) est la bord convexe d'un domaine de Weinstein W_0, et que $\Lambda \subset Y$ est homologiquement triviale dans W_0. On attache alors *via* le flot de Liouville le cobordisme X à W_0, en intercalant entre les deux un morceau de symplectisation. Plus précisément, pour $\tau > 0$, on pose

$$W^\tau := W_0 \bigcup_{(-\tau)\times Y} [-\tau, \tau] \times Y \bigcup_{\tau \times Y} \overline{X} \bigcup_{Y_\Lambda} [0, +\infty[\times Y_\Lambda.$$

On obtient ainsi une famille de domaines de Weinstein W^τ. On les munit d'une famille de structures presque complexes J_τ adaptées, coïncidant avec J sur X, avec une structure presque complexe fixe J_0 sur W_0, et cylindriquement adaptées[8] sur $[-\tau, \tau] \times Y$.

Proposition 2.4.5. *Lorsque τ est suffisamment grand, aucun plan de $\mathcal{M}_B^{W^\tau}(\tilde{c})$ ne pénètre dans la partie inférieure W_0 de W^τ.*

Démonstration. La preuve repose essentiellement sur un argument d'étirement du cou (*stretching of the neck* en anglais). Par l'absurde, supposons qu'il existe des suites $\tau_n \to +\infty$ et $u_n \in \mathcal{M}_B^{W^{\tau_n}}(\tilde{c})$ telles que pour tout n, u_n pénètre dans W_0. Lorsque n tend vers $+\infty$, par compacité, u_n doit se briser en un bâtiment holomorphe comme sur la figure 2.17 : l'étage supérieur est inclus dans X, tandis que l'étage inférieur du bâtiment vit dans (le complété de) W_0. Il peut également exister des étages intermédiaires dans des copies de $\mathbb{R} \times Y$; voir [BEH+03, Théorème 10.3] pour l'énoncé précis du résultat de compacité. On obtient alors une absurdité, car par positivité de l'énergie d'une courbe holomorphe, cela entraînerait l'existence d'une orbite $\gamma \subset Y$ d'action inférieure à $\tilde{c}$. □

[8] Pour être exact, on ne suppose J_τ cylindriquement adaptée que sur $[-\tau + \varepsilon, \tau - \varepsilon] \times Y$ pour un petit $\varepsilon > 0$ fixe, afin d'éviter des problèmes de lissité.

Fixons dorénavant $\tau > 0$ tel que dans la proposition 2.4.5. Pour simplifier les notations, on notera dans toute la suite $W = W^\tau$. La proposition 2.4.5, le théorème 2.4.1 et le fait que $\Lambda \subset W_0$ soit homologiquement triviale impliquent immédiatement le résultat suivant.

Théorème 2.4.6. *L'espace de modules $\mathcal{M}_B^W(\tilde{c})$ est une variété compacte sans bord de dimension $n-2$. De plus on peut compléter L en un cycle $\hat{L} \in H_n(\overline{W})$ tel que la classe d'homologie dans $H_n(\overline{W}, \tilde{c})$ représentée par l'union de l'image de tous les plans de $\mathcal{M}_B^W(\tilde{c})$ intersecte $\hat{L}$ de manière non triviale.*

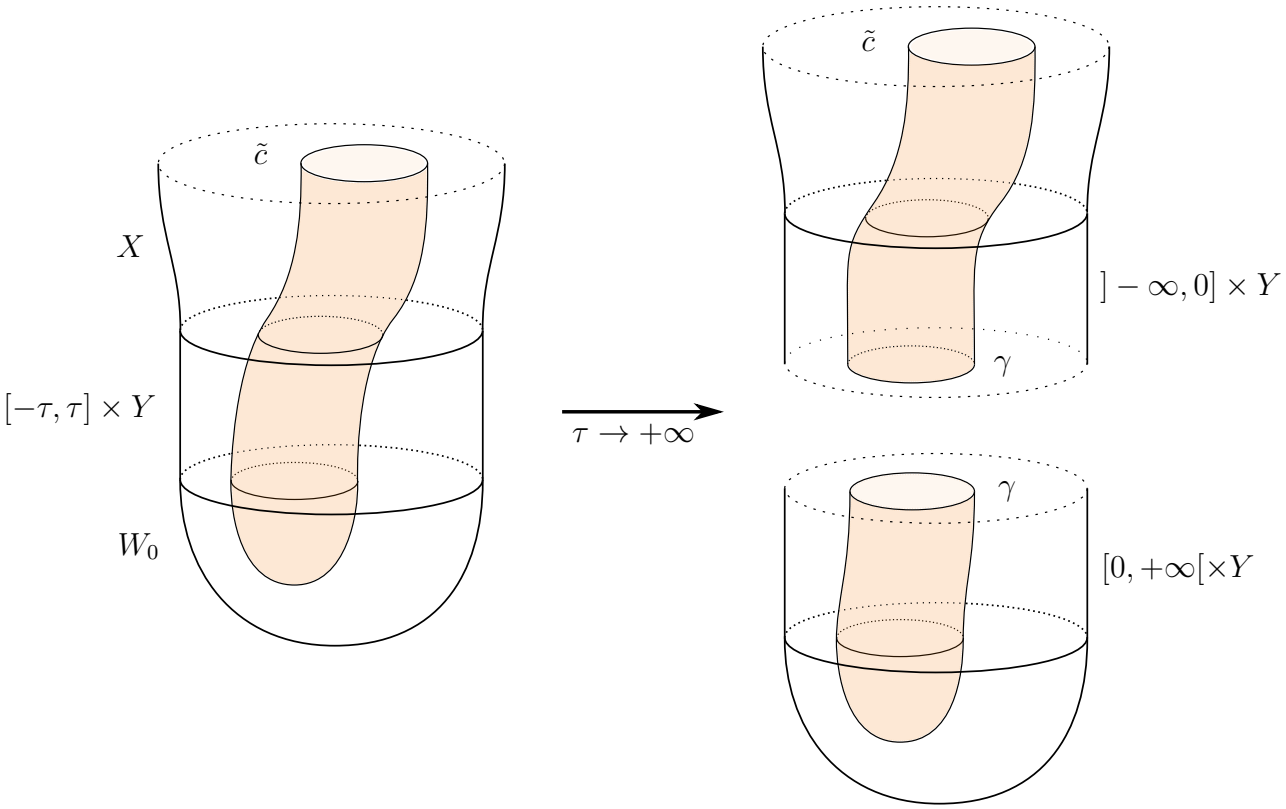


FIGURE 2.17 : Procédure d'étirement du cou.

3

De la page au livre ouvert

On complète dans cette partie la preuve du théorème 3.5.1. Après avoir introduit quelques notions dans la section 3.1, on prouve dans les sections 3.2 et 3.3 des résultats qui généralisent (partiellement) en grande dimension les propositions 2 et 3 de [Wen10b]. Les sections qui suivent s'attellent à la preuve du théorème 3.5.1 proprement dite.

On oublie pour les premières sections les notations introduites au cours de la partie précédente ; elles ne seront à nouveau utilisées (en partie) qu'à partir de la section 3.4.

Dans l'ensemble de cette partie, on identifie implicitement S^1 à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

3.1 Quelques définitions supplémentaires

3.1.1 Livres ouverts

Dans cette section on rappelle quelques notions de [Gir02], complétées par les sections 4.4.2 et 7.3 de [Gei].

On définit un livre ouvert pour une variété close et orientable M comme la donnée des objets suivants :

- une sous-variété close $B \subset M$ de codimension 2 à fibré normal trivial, appelée la *reliure* du livre ouvert ;
- une fibration $\pi : M \setminus B \to S^1$ sur le cercle qui coïncide avec l'application coordonnée angulaire dans un voisinage de B.

La compactification d'une fibre quelconque par ajout de B est appelée une *page* du livre ouvert.

Une autre manière, plus visuelle, de définir un livre ouvert est la suivante. Étant donné une variété orientée compacte à bord W et un difféomorphisme Ψ de W égal à l'identité près du bord, on définit le mapping tore

$$W_\Psi := (W \times [0,1])/(x,1) \sim (\Psi(x),0).$$

Puisque $\Psi|_{\partial W} = \mathrm{Id}$, on a $\partial W_\Psi \cong \partial W \times S^1$. En attachant de manière naturelle $\partial W \times \mathbb{D}^2$ à W_Ψ le long de leurs bords respectifs, on obtient alors une variété M qui possède un livre ouvert (la reliure est $B = \partial W \times \{0\} \subset \partial W \times \mathbb{D}^2$ et les pages sont difféomorphes à W). L'application Ψ par laquelle on recolle la "dernière" page à la "première" page est appelée *monodromie*. La situation est schématisée sur la figure 3.1.

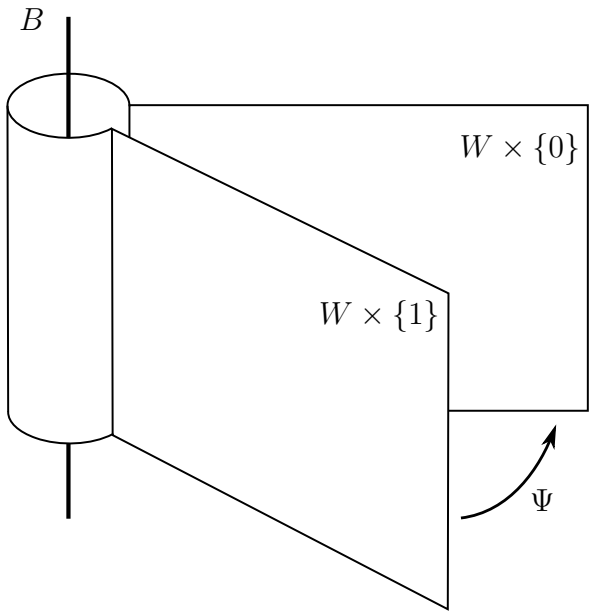


FIGURE 3.1 : Livre ouvert de page W, reliure B, et monodromie Ψ.

E. Giroux établit dans [Gir02] le lien entre les livres ouverts et les structures de contact, en proposant de dire qu'une structure de contact ξ sur M^{2n+1} est *portée* par un livre ouvert (B,π) si elle admet une équation $\xi = \ker\alpha$ telle que :

- $d\alpha$ induit sur chaque page une forme symplectique ;
- α induit une forme de contact sur B ;
- l'orientation de B donnée par α coïncide avec celle de B vu comme bord d'une page orientée par $d\alpha$. En d'autres termes, une base directe pour $(\pi^{-1}(\phi),(d\alpha)^n)$ est obtenue en ajoutant une normale sortante à une base directe pour $(B,\alpha\wedge(d\alpha)^{n-1})$.

Proposition 3.1.1 ([Gir02, Proposition 9 et Théorème 10])**.** *Toute structure de contact possède un livre ouvert porteur dont la fibre est un domaine de Weinstein. De plus, deux structures de contact portées par un même livre ouvert et qui induisent sur ses pages des structures symplectiques ayant des complétions isotopes sont isotopes.*

3.1.2 Structures hamiltoniennes stables

Les structures hamiltoniennes stables sont considérées depuis [BEH+03] comme le cadre naturel - et plus général que celui des structures de contact - dans lequel on dispose de résultats de compacité en théorie symplectique des champs. Ces structures jouent également un rôle dans plusieurs résultats liés à la conjecture de Weinstein, comme dans [HZ11] (où le concept est apparu pour la première fois) et plus récemment dans la preuve en dimension 3 de Hutchings et Taubes [HT09].

On reprend ici l'approche de [Wen10a], et on renvoie à [CV15] pour plus de détails.

Définition 3.1.2. Soit M une variété de dimension $2n+1$. Une *structure hamiltonienne stable* sur M est la donnée $\mathcal{H} = (\xi, X, \omega)$, où :

- $\xi \subset TM$ est un champ d'hyperplans coorientable ;
- X est un champ de vecteurs sur M, dit *champ de Reeb*, transverse à ξ et dont le flot préserve ξ ;
- ω est une 2-forme fermée sur M telle que $\iota_X \omega \equiv 0$ et qui se restreint en une forme symplectique sur ξ.

On dira qu'une structure presque complexe J sur $\mathbb{R} \times M$ est *cylindriquement adaptée* à $\mathcal{H}$, et on notera $J \in \mathcal{J}(\mathcal{H})$, si :

- J est $\mathbb{R}$-invariante ;
- $J(\partial_a) = X$ (où a désigne la coordonnée selon $\mathbb{R}$) ;
- ξ est stable par J et $J|_\xi$ est compatible avec ω.

On peut associer à une structure hamiltonienne stable (ξ, X, ω) une 1-forme λ définie uniquement par les conditions $\lambda(X) \equiv 1$ et $\ker(\lambda) = \xi$. On a alors toujours $\iota_X d\lambda \equiv 0$. De plus $\lambda \wedge \omega^n$ est une forme volume sur M ; lorsque M est déjà orientée, on demande que l'orientation ainsi obtenue sur M coïncide avec l'orientation originelle.

Exemple 3.1.3. Si λ est une forme de contact de flot de Reeb R, alors $(\ker(\lambda), R, d\lambda)$ est une structure hamiltonienne stable.

3.1.3 Compléments sur les courbes holomorphes

On reprend dans cette section la présentation faite dans [Wen10a].

Généralités

Soit (Σ, j) une surface de Riemann close, de genre g, et possédant une perçure (positive) z. Ce qui suit se généralise immédiatement au cas de plusieurs perçures (cf. [Wen10a], qui inclut également la possibilité d'un bord non vide), mais ce cas général n'étant pas utile dans la suite, on s'abstient de l'aborder ici par souci de simplicité. Soit U un voisinage de z dans $\dot{\Sigma}$ biholomorphe au demi-cylindre $Z_+ = [0, +\infty[\times S^1$. On notera dans ce qui suit $(s,t) \in [0, +\infty[\times S^1$ les coordonnées dans U. Avec cette identification, l'éclatement orienté $\overline{\Sigma}$ de Σ selon z s'obtient en ajoutant un cercle à l'infini $C = \{+\infty\} \times S^1$.

Soit $E \to \overline{\Sigma}$ un fibré complexe de rang n, qui se restreint sur C et sur $\dot{\Sigma}$ en un fibré lisse, et qui admet une structure hermitienne au-dessus de U. On appelle *trivialisation admissible* au voisinage de z un isomorphisme unitaire de fibrés $\Phi : E|_U \to Z_+ \times \mathbb{C}^n$ au-dessus de $U \tilde{\to} Z_+$, qui s'étend continûment en une trivialisation unitaire $E|_C \to S^1 \times \mathbb{C}^n$.

Un *opérateur asymptotique* en z est un opérateur $\mathbb{R}$-linéaire borné $\mathbf{A} : H^1(E|_C) \to L^2(E|_C)$ qui, dans n'importe quelle trivialisation admissible, est de la forme

$$H^1(S^1, \mathbb{C}^n) \to L^2(S^1, \mathbb{C}^n),\ v \mapsto -J_0\dot{v} - Sv$$

où J_0 est la structure complexe standard sur $\mathbb{C}^n$ et $S = S(t)$ est un lacet lisse de matrices symétriques $2n \times 2n$. On dit qu'un tel opérateur est *non-dégénéré* si son spectre ne contient pas 0.

Opérateurs de Cauchy-Riemann

Un *opérateur de Cauchy-Riemann réel* sur E est une application $\mathbb{R}$-linéaire

$$\mathbf{D} : \Gamma(E|_{\dot{\Sigma}}) \to \Gamma\left(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\dot{\Sigma}, E|_{\dot{\Sigma}})\right)$$

où les éléments de $\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}$ sont des application $\mathbb{C}$-antilinéaires, et telle que :

$$\forall v \in \Gamma(E|_{\dot{\Sigma}}), \forall f \in C^\infty(\dot{\Sigma}, \mathbb{R}),\ \mathbf{D}(fv) = (\overline{\partial} f)v + f(\mathbf{D}v),$$

où $\overline{\partial} f = df + i\, df \circ j$ est l'opérateur standard. On dit que $\mathbf{D}$ est *asymptote* à un opérateur asymptotique $\mathbf{A}$ en z si, dans une trivialisation admissible Φ au voisinage de z, $\mathbf{D}$ est de la forme

$$(\mathbf{D}v)(s,t) = \partial_s v(s,t) + J_0 \partial_t v(s,t) + S(s,t)v(s,t)$$

où $S(s,t) \in M_{2n}(\mathbb{R})$ converge uniformément quand $s \to +\infty$ vers un lacet lisse $S(t)$ de matrices symétriques telles que, dans la trivialisation Φ, l'opérateur $\mathbf{A}$ s'écrive $-J_0 \frac{d}{dt} - S(t)$.

Supposons à présent $\mathbf{D}$ asymptote à un opérateur asymptotique $\mathbf{A}$ en z. Pour $\delta \in \mathbb{R}$, on peut voir $\mathbf{D}$ comme l'opérateur borné

$$\mathbf{D} : W^{1,p,\delta}(E) \to L^{p,\delta}(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\dot{\Sigma}, E)).$$

Ici $W^{1,p,\delta}(E)$ désigne l'espace des section $v : \dot{\Sigma} \to E$ de classe $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ telles que dans n'importe quelle trivialisation admissible près de z, v correspond à une application $v : Z_+ \to \mathbb{R}^{2n}$ telle que $(s,t) \mapsto e^{\delta s} v(s,t)$ est de classe $W^{1,p}$. On définit de même $L^{p,\delta}(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\dot{\Sigma}, E))$, en remarquant qu'une trivialisation admissible de E près de z induit une trivialisation admissible de $\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\dot{\Sigma}, E)$.

On suppose dorénavant que $\mathbf{A}$ est non-dégénéré, et on fixe une trivialisation admissible Φ. L'application définie ci-dessus est alors un opérateur de Fredholm, et pour δ suffisamment proche de 0 son indice est donné par :

$$\mathrm{ind}(\mathbf{D}) = \dim\ker(\mathbf{D}) - \dim\mathrm{coker}(\mathbf{D}) = n\chi(\dot{\Sigma}) + 2c_1^{\Phi}(E) + \mathrm{CZ}^{\Phi}(\mathbf{A}). \tag{3.1}$$

Les différents termes de cette formule sont définis comme suit.

- Soit Φ' une trivialisation complexe de $E|_{\dot{\Sigma}\setminus\mathring{U}}$. La différence $\Psi = (\Phi')^{-1}\Phi$ entre les deux trivialisations au-dessus de $\partial U \cong \{0\} \times S^1$ est un chemin de matrices complexes inversibles, et la *première classe de Chern relative* $c_1^{\Phi}(E)$ est par définition l'indice de l'application
$$f : \partial U \to S^1, \quad \theta \mapsto \frac{\det_{\mathbb{C}} \Psi(q)}{|\det_{\mathbb{C}} \Psi(q)|}.$$
- Dans la trivialisation Φ, $\mathbf{A}$ est de la forme $-J_0\partial_t - S(t)$, et donne naissance à un flot hamiltonien dans $\mathbb{R}^{2n}$ *via* $\dot{v}(t) = J_0 S(t) v(t)$. Par définition, l'*indice de Conley-Zehnder* de $\mathbf{A}$, $\mathrm{CZ}^{\Phi}(\mathbf{A})$, est l'indice de Conley-Zehnder du chemin de matrices symplectiques associé, au sens de la section 1.6.

Dans le cas où E est de dimension complexe 1, on dispose d'un critère très utile pour obtenir la surjectivité de $\mathbf{D}$. En combinant la proposition 2.2 et l'équation (2.5) de [Wen10a], on peut exprimer cette condition ainsi :

Proposition 3.1.4. *On suppose que* $\dim_{\mathbb{C}} E = 1$, $\mathrm{ind}(\mathbf{D}) \geq 0$, *et* $\mathrm{ind}(\mathbf{D}) + \chi(\Sigma) > \#\Gamma_0$, *où* $\#\Gamma_0$ *désigne le nombre de perçures d'indice de Conley-Zehnder pair. Alors* $\mathbf{D}$ *est surjectif.*

Courbes holomorphes et opérateur normal

On considère dans cette section une variété M munie d'une structure hamiltonienne stable $\mathcal{H} = (\xi, X, \omega)$. Soit λ la 1-forme associée. On munit $W := \mathbb{R} \times M$ d'une structure presque complexe cylindriquement adaptée. Soit enfin $\gamma \subset M$ une orbite non-dégénérée de X, de période T. On décrit dans la suite de cette section, toujours en s'appuyant sur [Wen10a], un cadre d'étude originellement développé dans [Dra03, Bou02].

On associe à γ un opérateur asymptotique $\mathbf{A}_\gamma$ de la manière suivante. Soit $x : S^1 \to M$ une paramétrisation de γ telle que $\lambda(\dot{x}) \equiv T$. On définit une métrique $\widetilde{g}$ sur $\mathbb{R} \times M$ par :

$$\widetilde{g}((a,h),(b,k)) = ab + \lambda(h)\lambda(k) + \omega(\pi h, J\pi k) \tag{3.2}$$

où π est la projection sur ξ parallèlement à X. Soit ∇ la connexion de Levi-Civita associée à cette métrique. On pose :

$$\mathbf{A}_\gamma : \Gamma(x^*\xi) \to \Gamma(x^*\xi), \quad v \mapsto -J(\nabla_t v - T\nabla_v X).$$

Puisque γ est non-dégénérée, $\mathbf{A}_\gamma$ l'est également, et les indices de Conley-Zehnder de ces deux objets coïncident.

Fixons dorénavant $p > 2$, $\delta > 0$. On définit l'espace de Banach $\mathcal{B}$ des applications $u : \dot{\Sigma} \to W$ de classe $W^{1,p}_{\text{loc}}$ et exponentiellement asymptotes à γ en z. Cette dernière condition signifie que pour une trivialisation admissible au voisinage de z, il existe un choix de paramétrisation $x : S^1 \to M$ de γ et une constante s_0 telle que pour s assez grand,

$$u(s + s_0, t) = \exp_{\tilde{x}(s,t)} h(s, t),$$

où $\tilde{x}(s, t) := (Ts, x(t)) \in W = \mathbb{R} \times M$ et $h \in \Gamma(\tilde{x}^*TW)$ est de classe $W^{1,p,\delta}$ sur U. On voit alors que pour $u \in \mathcal{B}$,

$$T_u\mathcal{B} = W^{1,p,\delta}(u^*TW) \oplus V_\gamma,$$

où V_γ est un espace vectoriel de dimension 2 composé de sections $\dot{\Sigma} \to u^*TW$ supportées près de z, et asymptotiquement égales à un champ de vecteurs constant pour un certain choix de coordonnées $\mathbb{R}$-invariantes près de γ. Plus précisément, les champs de vecteurs composant V_γ sont tangents près de z au cylindre trivial $\tilde{x}$ au-dessus de γ.

On définit un fibré de Banach $\mathcal{E} \to \mathcal{B}$ en posant

$$\mathcal{E}_u := L^{p,\delta}\left(\overline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\dot{\Sigma}, u^*TW)\right).$$

Les courbes holomorphes $(\dot{\Sigma}, j) \to (W, J)$ asymptotes à γ en z apparaissent alors comme les zéros de la section

$$\overline{\partial}_J : \mathcal{B} \to \mathcal{E}, \ (j, u) \mapsto du + J(u) \circ du \circ j.$$

On fixe jusqu'à la fin de cette section une courbe holomorphe $u \in \overline{\partial}_J^{-1}(0)$. La linéarisation de $\overline{\partial}_J$ en u

$$\mathbf{D}_u : \Gamma(u^*TW) \to \Gamma\left(\overline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\dot{\Sigma}, u^*TW)\right)$$

est définie comme suit. Soit $\eta \in \Gamma(u^*TW)$. On choisit une famille lisse d'applications $(u_\tau)_{\tau\in]-1,1[}$ telle que $u_0 = u$ et $\partial_\tau u_\tau|_{\tau=0} = \eta$. Soient enfin $x \in \dot{\Sigma}$ et $X \in T_x\Sigma$. Ainsi $(\overline{\partial}_J u_\tau(X))_{\tau\in]-1,1[}$ est une famille de vecteurs dans TW au-dessus du chemin $(u_\tau(x))_{\tau\in]-1,1[}$. On définit alors $(\mathbf{D}_u\eta)(X)$ comme la dérivée covariante de $(\overline{\partial}_J u_\tau(X))_{\tau\in]-1,1[}$ en 0 :

$$(\mathbf{D}_u\eta)(X) := \nabla_\tau(\overline{\partial}_J u_\tau(X))_{\tau=0} \in T_{u(z)}W.$$

Comme dans la section précédente, on verra alternativement $\mathbf{D}_u$ comme un opérateur de Fredholm

$$\mathbf{D}_u : W^{1,p,\delta}(u^*TW) \oplus V_\gamma \to L^{p,\delta}\left(\overline{\text{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\dot{\Sigma}, u^*TW)\right).$$

Lorsque l'espace de Teichmüller de $\dot{\Sigma}$ est trivial (ce qui sera la cas dans la suite, puisque l'on ne s'intéressera qu'au cas $\dot{\Sigma} = \mathbb{C}$), on dit que u est *Fredholm-régulière* si $\mathbf{D}_u$ est surjectif. Dans le cas général, il faut préalablement étendre $\mathbf{D}_u$ en un opérateur prenant en compte les variations de la structure complexe sur Σ (cf. [Wen10a, §3.2]).

Opérateur de Cauchy-Riemann normal
Soit $N_u \to \dot{\Sigma}$ un *fibré normal généralisé*. Il s'agit d'un sous-fibré de u^*TW tel que :

- $u^*TW = T_u \oplus N_u$, où T_u est le *fibré tangent généralisé* de u, qui coïncide avec $\mathrm{im}(du)$ hors des points critiques de u (cf. [Wen10a, §3.3] pour la définition détaillée) ;
- N_u coïncide avec ξ sur le voisinage cylindrique U de z.

La décomposition en somme directe permet de considérer la projection π_N sur N_u parallèlement à T_u. On pose alors

$$\mathbf{D}_u^N := \pi_N \circ \mathbf{D}_u : W^{1,p,\delta}(N_u) \to L^{p,\delta}\left(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\dot{\Sigma}, N_u)\right).$$

Il s'agit là encore d'un opérateur de Fredholm, dit *opérateur de Cauchy-Riemann normal* en u. Cet opérateur est asymptote à $\mathbf{A}_\gamma$ en z. On dispose alors du résultat essentiel suivant :

Théorème 3.1.5 ([Wen10a, Corollaire 3.13])**.** *La courbe holomorphe u est Fredholm-régulière si et seulement si $\mathbf{D}_u^N$ est surjectif.*

3.2 Une famille de structures hamiltoniennes stables

3.2.1 Énoncé du résultat

On établit dans cette section la généralisation suivante, en grande dimension, de la proposition 2 de [Wen10b]. Le schéma de la preuve est globalement similaire, mais certains points requièrent un soin supplémentaire. Notamment, la construction d'une forme de contact adaptée à un livre ouvert est plus complexe en grande dimension : voir [Gei, §7.3].

Proposition 3.2.1. *Soit $(W, \omega = d\beta)$ un domaine de Liouville compact, et $\Psi : W \to W$ un symplectomorphisme exact de W égal à l'identité près du bord. Soit M la variété obtenue en rattachant $\partial W \times \mathbb{D}^2$ au mapping tore W_Ψ de (W, Ψ). On peut étendre la distribution verticale sur W_Ψ en un confeuilletage λ_0 sur M, qui est de contact au voisinage de la reliure $\partial W \times \{0\}$, et vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Il existe une structure hamiltonienne stable $\mathcal{H}_0 = (\lambda_0, X_0, \omega_0)$ sur M compatible avec λ_0.*
2. *On peut perturber la structure précédente à travers une famille lisse $(\lambda_\varepsilon, X_\varepsilon, \omega_\varepsilon)_{0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0}$ de structures hamiltoniennes stables sur M, telle que λ_ε est une forme de contact pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$.*

La notion de *confeuilletage* a été introduite dans [ET98] pour faire le lien entre feuilletages et structures de contact. Dire que λ_0 est un confeuilletage signifie qu'il existe une structure complexe J sur $\ker \lambda_0$ telle que pour tout $X \in \ker \lambda_0$, on ait $d\lambda_0(X, JX) \geq 0$. Notre situation est en réalité bien plus restrictive : on verra dans la preuve qu'en-dehors du domaine où λ_0 est de contact, on a $d\lambda_0 \equiv 0$.

Après avoir détaillé la construction de M dans les paragraphes suivants, on démontrera la proposition 3.2.1 en construisant d'abord la structure hamiltonienne stable $\mathcal{H}_0$ (section 3.2.2) puis sa perturbation (section 3.2.3). Si la construction de $\mathcal{H}_0$ est une généralisation directe de [Wen10b] à la dimension supérieure, la perturbation en revanche est plus difficile à définir en grande dimension. Cela vient du fait qu'en dimension 2, les formes d'aire sur une surface définissant une même orientation forment un ensemble convexe ; en utilisant cela, on peut définir assez simplement une forme de contact portée par un livre ouvert donné en dimension 3 (voir [Gei, Lemme 4.4.6]). Il s'agit donc naturellement de l'approche employée dans [Wen10b]. En dimension supérieure, cependant, il n'existe pas de résultat de convexité similaire, et il faut procéder différemment, en utilisant astucieusement le caractère exact de la monodromie [Gei, §7.3]. C'est cette méthode qui est suivie dans la section 3.2.3.

Détaillons à présent la construction de M. Soient $(W^{2n}, \omega = d\beta)$ et Ψ comme dans la proposition précédente. La coordonnée angulaire $\phi : W_\Psi \to S^1$ est une fibration symplectique au-dessus du cercle, et définit une *distribution verticale* $\xi_0 := \ker d\phi \subset TW_\Psi$. Notons de plus $(B, \alpha) := (\partial W, \beta|_{\partial W})$. À l'aide du champ de Liouville, choisissons un voisinage $\mathcal{U}$ de B dans W difféomorphe à $B \times [1-\delta, 1+\delta[$, et tel qu'à travers cette identification β correspond à $e^{1-\delta-\rho}\alpha$, où $\rho \in [1-\delta, 1+\delta[$. On choisit $\delta > 0$ suffisamment petit pour que $\Psi|_{\mathcal{U}} \equiv \mathrm{Id}$.

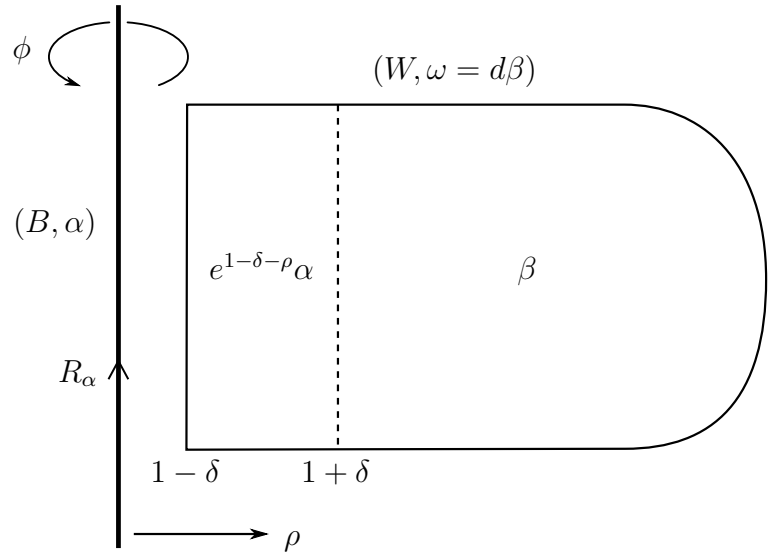


FIGURE 3.2 : Construction du livre ouvert (W, Ψ).

Puisque Ψ est exact, il existe une fonction $F : W \to \mathbb{R}$ telle que $\Psi^*\beta = \beta + dF$. Quitte à ajouter à F une constante suffisamment grande, on peut supposer que cette fonction est strictement positive. Puisque Ψ coïncide avec l'identité près du bord, il existe une fonction C localement constante telle que $F|_{\mathcal{U}} \equiv C$. Cela permet également d'identifier ∂W_Ψ à $B \times [1-\delta, 1+\delta[\times S^1$, où l'on note (ρ, ϕ) les coordonnées selon les deux derniers termes.

On utilise ce modèle pour recoller à W_Ψ un voisinage $B \times \mathbb{D}$ de ce qui deviendra la reliure. Plus précisément, en notant $(\rho, \phi) \in [0, 1] \times S^1$ les coordonnées polaires sur le disque unité $\mathbb{D}$, on recolle $B \times \mathbb{D}$ à W_Ψ par l'identité sur $B \times [1-\delta, 1] \times S^1$, pour former

$$M := W_\psi \bigcup_{\partial W_\Psi} (B \times \mathbb{D}).$$

Dans la suite, on identifiera B à la reliure $B \times \{0\} \subset B \times \mathbb{D} \subset M$. La figure 3.2 offre un résumé des notations introduites dans les paragraphes précédents.

3.2.2 Construction d'une structure hamiltonienne stable

La coordonnée angulaire ϕ définit une fibration $\pi : M \setminus B \to S^1$. Soit $\lambda_0 := d\pi|_{W_\Psi}$; on va étendre λ_0 en une 1-forme sur M qui sera contact pour $\rho < 1 - \delta$. Pour cela, on définit λ_0 pour $\rho < 1 + \delta$ par

$$\lambda_0 = f(\rho)\alpha + g(\rho)d\phi$$

où $f, g : [0, 1 + \delta] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions lisses vérifiant :

1. Le chemin $\rho \mapsto (f(\rho), g(\rho)) \in \mathbb{R}^2$ parcourt le premier quadrant de $(f(0), g(0)) = (b, 0)$ à $(f(1+\delta), g(1+\delta)) = (0, 1)$, où b est un petit réel positif. De plus ce chemin est constant pour $\rho \geq 1 - \delta$.
2. La fonction
$$D(\rho) := f(\rho)g'(\rho) - f'(\rho)g(\rho)$$
est strictement positive pour $\rho \in]0, 1 - \delta[$, et $g''(0) > 0$.
3. Il existe un petit $\delta'' > \delta$ tel que $g(\rho) = 1$ pour tout $\rho \geq 1 - \delta''$.
4. Les fonctions $(\rho, \phi) \mapsto f(\rho)$ et $(\rho, \phi) \mapsto g(\rho)/\rho^2$ sont lisses en l'origine.
5. La fonction g est croissante, et f vérifie $f'(\rho) < 0$ pour tout $\rho \in]0, 1 - \delta[$.
6. Pour $\rho > 0$ suffisamment petit, $f'(\rho)/g'(\rho)$ est constant, égal à un petit irrationnel.

L'allure d'un tel chemin (f, g) est représentée à gauche sur la figure 3.3. La condition 4 assure que λ_0 est bien lisse en $\rho = 0$. La seconde garantit quant à elle que λ_0 est une forme de contact pour $\rho < 1 - \delta$: en effet,

$$\lambda_0 \wedge (d\lambda_0)^n = nf(\rho)^{n-1}D(\rho)\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \wedge d\rho \wedge d\phi > 0. \tag{3.3}$$

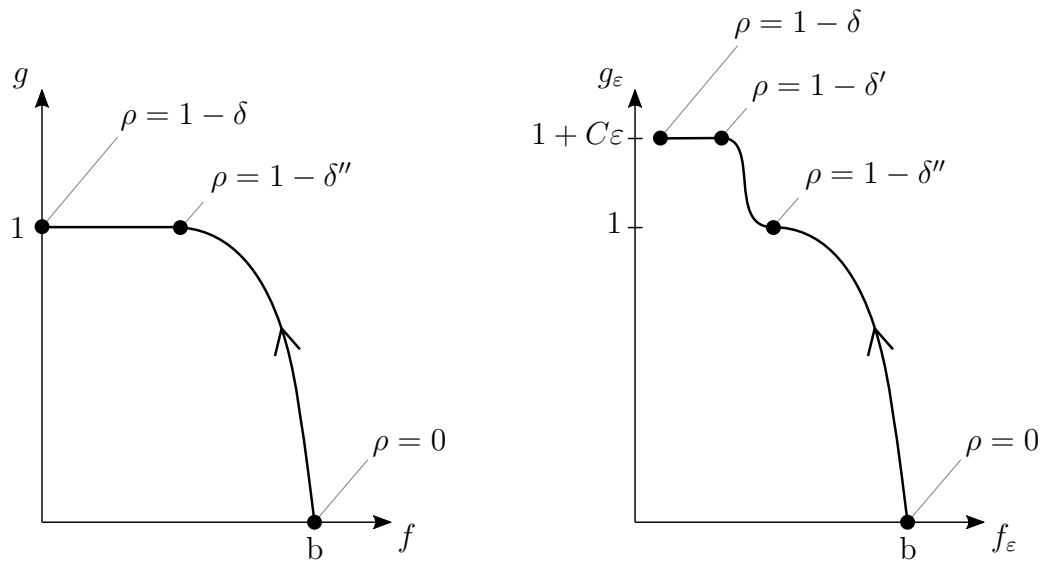


FIGURE 3.3 : À gauche, le chemin (f, g). À droite, sa perturbation $(f_\varepsilon, g_\varepsilon)$.

Le champ de Reeb associé est donné par

$$X_0 = \frac{1}{D(\rho)}(g'(\rho)R_\alpha - f'(\rho)\partial_\phi) \tag{3.4}$$

pour $\rho \in]0, 1-\delta[$, et $X_0 = \frac{1}{b}R_\alpha$ pour $\rho = 0$. Notons que pour $\rho \in [1-\delta'', 1-\delta[$, $X_0 \equiv \partial_\phi$, ce qui permet de prolonger X_0 sur W_Ψ en posant $X_0 := \partial_\phi$ sur ce domaine. Pour obtenir une structure hamiltonienne stable sur M, il reste alors à construire une 2-forme ω_0 adaptée à $\xi_0 := \ker \lambda_0$ et X_0.

À cette fin, posons $\delta' := \frac{\delta+\delta''}{2}$, et considérons une fonction lisse $\tilde{f} : [0, 1+\delta] \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes.

1. La fonction $\tilde{f}$ coïncide avec f pour $\rho \leq 1-\delta'$.
2. Pour $\rho \geq 1-\delta$, $\tilde{f}(\rho) = \varepsilon_0 e^{1-\delta-\rho}$ où $\varepsilon_0 > 0$ est une petite constante.
3. La fonction $\tilde{f}$ est strictement décroissante.

On définit alors

$$\omega_0 := \begin{cases} d\lambda_0 & \text{pour } \rho < 1-\delta', \\ d(\tilde{f}\alpha) & \text{pour } \rho \in [1-\delta', 1+\delta[, \\ \varepsilon_0 d\beta & \text{sur } W_\Psi. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que $\mathcal{H}_0 := (\xi_0, X_0, \omega_0)$ constitue une structure hamiltonienne stable, en utilisant le fait que λ_0 est de contact pour $\rho < 1-\delta$, et que $X_0 \equiv \partial_\phi$ pour $\rho \geq 1-\delta''$. Le fait que $\omega_0|_{\xi_0}$ soit une forme symplectique pour $\rho \in [1-\delta', 1+\delta[$ s'obtient en calculant

$$\omega_0^n = -n\tilde{f}'(\rho)\tilde{f}(\rho)^{n-1}\alpha \wedge d\rho \wedge (d\alpha)^{n-1} \neq 0.$$

3.2.3 Perturbation de la structure hamiltonienne stable

On va à présent construire une perturbation lisse $(\lambda_\varepsilon, X_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ de $(\lambda_0, X_0, \omega_0)$, telle que λ_ε est une forme de contact sur M pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$.

Commençons par définir λ_ε sur W_Ψ. On a pour cela besoin d'introduire un modèle plus général pour W_Ψ : étant donné une fonction $\overline{\phi} : W \to \mathbb{R}^{+*}$ constante près du bord, on définit le *mapping tore généralisé* $W_\Psi(\overline{\phi})$ comme le quotient de

$$\{(x, \phi) \in W \times \mathbb{R} \,|\, 0 \leq \phi \leq \overline{\phi}(x)\}$$

par la relation $(x, \overline{\phi}(x)) \sim (\Psi(x), 0)$. Notons que le mapping tore classique W_Ψ s'obtient en prenant $\overline{\phi}$ constante égale à 1. D'autre part $W_\Psi(\overline{\phi})$ est toujours difféomorphe à W_Ψ, par

$$\Phi_{\overline{\phi}} : \, [x, \phi] \mapsto \left[x, \overline{\phi}(x)\phi\right].$$

Considérons à présent la forme $\alpha_\varepsilon := \varepsilon\beta + d\phi$ sur $W \times \mathbb{R}$. Puisque $\Psi^*\beta = \beta + dF$, cette forme est invariante sous la transformation

$$(x, \phi) \mapsto (\Psi(x), \phi - (1 + \varepsilon F(x)))$$

et induit donc une forme (encore notée α_ε) sur $W_\Psi(1 + \varepsilon F)$. C'est de plus une forme de contact car

$$\alpha_\varepsilon \wedge (d\alpha)^n = \varepsilon^{n+1} d\phi \wedge (d\beta)^n > 0.$$

Reste à tirer en arrière cette forme en une forme de contact sur W_Ψ :

$$\lambda_\varepsilon := \Phi^*_{1+\varepsilon F}(\alpha_\varepsilon) = \varepsilon\left[\beta + d(F\phi)\right] + d\phi.$$

Remarquons que $d\lambda_\varepsilon = \varepsilon d\beta$, et que près du bord, $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\beta + (1 + \varepsilon C)d\phi$. Cette forme simple permet d'étendre λ_ε en une forme sur M, en procédant comme suit.

Soit $\sigma : [0, 1 + \delta] \to \mathbb{R}$ une fonction lisse, croissante, telle que $\sigma(\rho) = 0$ pour $\rho \leq 1 - \delta''$ et $\sigma(\rho) = 1$ pour $\rho \geq 1 - \delta'$. Posons (voir le graphe de droite sur la figure 3.3) :

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(\rho) &:= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\tilde{f}(\rho) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) f(\rho), \\ g_\varepsilon(\rho) &:= g(\rho) + \varepsilon C\sigma(\rho). \end{aligned}$$

On définit alors λ_ε sur $B \times \mathbb{D}$ par

$$\lambda_\varepsilon = f_\varepsilon(\rho)\alpha + g_\varepsilon(\rho)d\phi.$$

Pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, f_ε est strictement décroissante sur $[0, 1 + \delta]$ (car $\tilde{f}$ l'est et f est décroissante), donc

$$D_\varepsilon(\rho) := f_\varepsilon(\rho)g'_\varepsilon(\rho) - f'_\varepsilon(\rho)g_\varepsilon(\rho) > 0$$

ce qui montre avec une équation similaire à (3.3) que λ_ε est une forme de contact sur M tout entier. Son champ de Reeb est donné par

$$X_\varepsilon = \frac{1}{D_\varepsilon(\rho)}(g'_\varepsilon(\rho)R_\alpha - f'_\varepsilon(\rho)\partial_\phi)$$

sur $B \times \mathbb{D}$, et par $X_\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon C}\partial_\phi$ sur W_Ψ (cette dernière égalité est en fait vérifiée dès que $\rho \geq 1-\delta'$). Cela prouve en particulier que les familles $(\lambda_\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ et $(X_\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ sont lisses. Il reste donc, pour conclure la preuve de la proposition 3.2.1, à construire une famille de formes $(\omega_\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ compatibles. Posons :

$$\omega_\varepsilon := \begin{cases} d\lambda_\varepsilon & \text{pour } \rho < 1-\delta', \\ d(\tilde{f}\alpha) & \text{pour } \rho \in [1-\delta', 1+\delta[, \\ \varepsilon_0 d\beta & \text{sur } W_\Psi. \end{cases}$$

Lorsque ε est suffisamment petit, on obtient ainsi une structure hamiltonienne stable $(\lambda_\varepsilon, X_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$. En effet, d'une part, pour $\rho \leq 1-\delta'$ il s'agit simplement d'une structure de contact. D'autre part, quand $\rho \geq 1-\delta'$, X_ε est colinéaire à X_0 et $\omega_\varepsilon \equiv \omega_0$, donc $\iota_{X_\varepsilon}\omega_\varepsilon \equiv 0$; de plus λ_ε étant très proche de λ_0, $\omega_\varepsilon \equiv \omega_0$ reste positif sur $\ker \lambda_\varepsilon$. Cela clôt ainsi la preuve de la proposition 3.2.1. □

Remarque 3.2.2. Contrairement à [Wen10b], la fonction g_ε n'est pas constante pour $\rho \geq 1-\delta''$. Cela est du, comme expliqué dans la section précédente, aux difficultés supplémentaires qui surviennent en grande dimension lors de la définition d'une forme de contact portée par un livre ouvert. Le fait que g'_ε ne soit pas nulle pour $\rho \geq 1-\delta''$ empêche l'expression de X_ε de se simplifier dans ce domaine, ce qui complique malheureusement la définition d'une forme ω_ε compatible. Afin de palier ce problème, on a introduit ici une « étape intermédiaire » $\rho = 1-\delta'$ entre $1-\delta''$ et $1-\delta$, qui n'était pas présente (car inutile) dans [Wen10b].

3.3 Construction d'un feuilletage holomorphe

Pour $\phi \in S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on note dans toute la suite $P_\phi := \pi^{-1}(\phi) \subset M \setminus B$ la page correspondante, $\overline{P}_\phi := W \times \{\phi\} \subset W_\Psi$ la "partie compacte" de la page, et $B_\phi := \partial\overline{P}_\phi \subset M$ son bord (difféomorphe à la reliure).

On démontre dans cette section le résultat suivant, que l'on peut voir comme une généralisation en dimension supérieure de la proposition 3 de [Wen10b].

Proposition 3.3.1. *Soient (W, Ψ), M et $\mathcal{H}_0$ comme dans la proposition 3.2.1. Soit J une structure presque complexe compatible avec ω et telle que dans un voisinage de ∂W symplectomorphe à $([0,\eta] \times \partial W, e^{-t}\alpha)$, J est cylindriquement adaptée.*

Alors il existe une structure presque complexe $J_0 \in \mathcal{J}(\mathcal{H}_0)$, coïncidant avec J sur chaque page $\overline{P}_\phi$ pour $\phi \in [1/4, 3/4]$, et telle que chaque page du livre ouvert se relève dans $\mathbb{R} \times M$ en une hypersurface holomorphe. La réunion de tous les translatés de ces relevés et de la

symplectisation de la reliure forme un feuilletage J_0-holomorphe $\mathbb{R}$-invariant de codimension 2 de $\mathbb{R} \times M$.

Afin de construire une structure presque complexe J_0 adaptée, il suffit de définir une structure complexe sur ξ_0 compatible avec ω_0 : J_0 s'obtient alors immédiatement en ajoutant la condition $J_0(\partial_a) = X_0$. Commençons par définir J_0 sur W_Ψ : puisque chaque page $\overline{P}_\phi$ est tangente à ξ_0, on peut demander que pour $\phi \in [1/4, 3/4]$, $J_0|_{\overline{P}_\phi} = J$. Pour $\phi \in [-1/4, 1/4]$, on procède en choisissant une famille de structures presque complexes compatibles avec ω et reliant J à $\Psi^* J$. Puisque Ψ est l'identité près du bord, on peut supposer que cette famille est constante près du bord, ce qui va permettre de l'étendre sur M tout entier comme suit.

Pour $0 < \rho < 1 + \delta$, on peut écrire

$$\xi_0 = \xi_\alpha \oplus \langle \partial_\rho, v \rangle, \quad v := -g(\rho) R_\alpha + f(\rho) \partial_\phi \tag{3.5}$$

où $\xi_\alpha := \ker \alpha \subset TB$. On étend J_0 sur $B \times \mathbb{D}$ en la gardant constante sur ξ_α et en posant $J_0(v) = -\chi(\rho)\partial_\rho$, où χ est une fonction lisse égale à 1 hors d'une voisinage de 0, et telle que $\chi(\rho) = \rho$ pour ρ suffisamment petit. Ce choix permet d'étendre J_0 de manière lisse en $\rho = 0$. Cela complète la construction de J_0.

Définissons à présent un champ de vecteurs $V := -J_0(R_\alpha)$ sur $B \times \mathbb{D}$. En utilisant $J_0(v) = -\chi(\rho)\partial_\rho$ et $J_0(\partial_a) = X_0$, on dérive l'expression suivante pour V, lorsque $\rho < 1 - \delta$:

$$V = f(\rho)\partial_a + \chi(\rho)\frac{f'(\rho)}{D(\rho)}\partial_\rho. \tag{3.6}$$

Pour $\rho \geq 1 - \delta$, on a $V \equiv -\partial_\rho$. Notons d'autre part que la condition 6 demandée lors de la définition de f et g implique que lorsque $\rho \to 0$, V tend vers $\frac{1}{b}\partial_a$, le deuxième terme de (3.6) convergeant linéairement vers 0. Ces deux constats permettent de définir de manière légitime, pour $\phi \in S^1$ et $a \in \mathbb{R}$:

$$\hat{P}^a_\phi := \Big(\{a\} \times \overline{P}_\phi\Big) \cup \left(\bigcup_{t \geq 0} \varphi^V_t(\{a\} \times B_\phi)\right)$$

où φ^V_t désigne le flot de V au temps t. Par construction, $\hat{P}^a_\phi \subset \mathbb{R} \times M$ est une hypersurface J_0-holomorphe qui se projette dans M sur P_ϕ et est exponentiellement asymptote à B en $+\infty$. La famille constituée de $\mathbb{R} \times B$ et des $\hat{P}^a_\phi$, $(a, \phi) \in \mathbb{R} \times S^1$, forme alors le feuilletage holomorphe annoncé dans la proposition 3.3.1. La figure 3.4 donne une représentation schématique de la situation.

Remarque 3.3.2. Dans le cas d'une variété de dimension 3, la construction précédente produit exactement le même feuilletage que celui de [Wen10b]. La méthode mise en œuvre est cependant différente : [Wen10b] définit les relèvements holomorphes des pages *via* un système d'équations différentielles exprimant les conditions de Cauchy-Riemann. Cette approche semblait délicate en dimension supérieure à cause du nombre accru de variables à considérer, on a donc préféré procéder ici en utilisant le flot d'un champ de vecteurs.

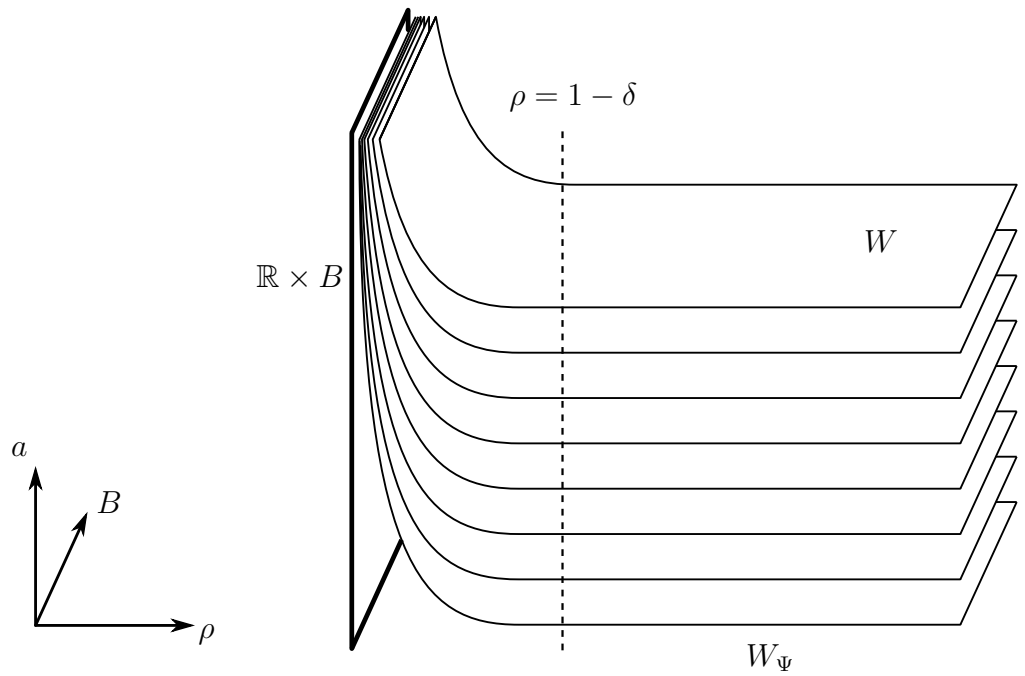


FIGURE 3.4 : Feuilletage holomorphe de $\mathbb{R}\times M$. Chaque hypersurface holomorphe est contenue dans un domaine $\phi =$ constante. La composante selon $\mathbb{R}$ est constante sur W_Ψ, et tend vers $+\infty$ lorsque l'hypersurface s'approche de la reliure B.

3.4 Étude d'une famille de plans holomorphes

3.4.1 Cadre d'étude et énoncé du résultat

A partir de cette section, on désigne à nouveau par $(W^{2n}, \omega = d\beta)$ le domaine de Weinstein défini à la section 2.4.2, muni de la structure presque complexe adaptée J. Son bord est $\partial W = Y_\Lambda$ muni de la forme de contact α'. On rappelle également les notations $\tilde{c} \subset Y_\Lambda$ et $\hat{L} \in H_n(\overline{W})$ pour l'orbite de Reeb et la complétion de l'âme L, introduites à la proposition 2.2.8 et au théorème 2.4.6 respectivement. Enfin, on abandonne la notation B pour la reliure, afin d'utiliser cette lettre pour désigner la classe d'homologie relative introduite à la section 2.4.1.

Soit $\Psi : \overline{W} \to \overline{W}$ un symplectomorphisme exact égal à l'identité près du bord. On mène à partir de $\overline{W}$, Ψ et J la construction détaillée dans les sections précédentes, obtenant ainsi une variété M présentée comme un livre ouvert de page W et munie d'une famille de structures hamiltoniennes stables $\mathcal{H}_\varepsilon = (\xi_\varepsilon = \ker \lambda_\varepsilon, X_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. On note J_0 une structure presque complexe sur $\mathbb{R} \times M$ cylindriquement adaptée à $\mathcal{H}_0$ fournie par la proposition 3.3.1.

On remplace dorénavant la condition 6 imposée lors de la définition de f et g par les

conditions plus restrictives suivantes (voir la figure 3.5) :

(6a) Il existe une petite constante $\eta > 0$ telle que pour tout $\rho \in]0, 1+\delta[$,

$$-\frac{g'(\rho)}{f'(\rho)} \leq \frac{1}{b} + \eta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

avec égalité pour $\rho \leq \frac{2}{3}$.

(6b) Pour $\rho \geq \frac{2}{3}$, on a $g(\rho) \geq \frac{2}{3}$ et $f(\rho) \leq \frac{b}{3}$.

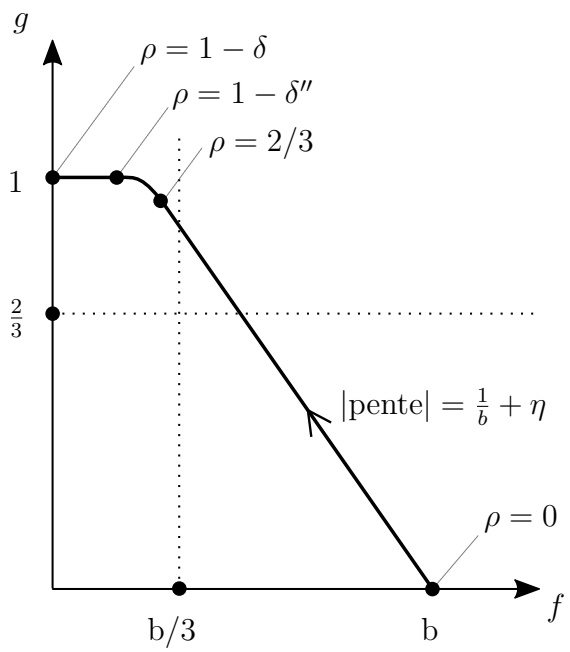


FIGURE 3.5 : Le chemin (f, g) vérifiant les conditions plus restrictives (6a) et (6b).

Sous ces conditions, dans un voisinage de la reliure Y_Λ, il n'existe d'autres orbites pour X_0 que les α'-orbites de Reeb de Y_Λ, et ces orbites sont non-dégénérées. De plus, quitte à choisir b suffisamment petit lors de la définition de f et g, on peut garantir[1] que ces orbites contenues dans la reliure sont de période plus petite que n'importe quelle autre orbite de X_0. En particulier, $\tilde{c} \subset Y_\Lambda$ est de période T plus petite que toutes les autres orbites de Reeb de (Y_Λ, α').

L'objectif de cette section est d'établir, dans le cadre de $\mathbb{R} \times M$, un résultat similaire au théorème 2.4.6. Afin de pouvoir réemployer les résultats établis à la section 2.4.2, on va

[1] On renvoie à la démonstration de [Wena, Lemme 2.8] pour davantage de détails. L'article étudie la situation en dimension 3, mais les arguments se transposent sans changement en dimension quelconque.

identifier (W, J) à une hypersurface holomorphe de $\mathbb{R}\times M$. Pour cela notons P la page relevée $\hat{P}^0_{1/2}$ définie à la section 3.3 ; on note toujours J_0 la restriction de la structure presque complexe à P. Par construction, il existe un difféomorphisme naturel $P\tilde{\to}W$ envoyant $\{0\}\times\overline{P}_{1/2}$ sur $\overline{W}$ et J_0 sur J. En tirant en arrière par ce difféomorphisme la classe B introduite à la section 2.4.1, on obtient une classe $B\in H_2([-\infty,+\infty]\times M,\{+\infty\}\times\tilde{c})$ que l'on note encore B par souci de simplicité. De même, on se sert de ce difféomorphisme pour voir $\hat{L}$ comme un élément de $H_n([-\infty,+\infty]\times M)$.

De même que l'on peut identifier naturellement (W, J) et $(\hat{P}^0_{1/2}, J_0)$, il existe des bijections conformes naturelles entre W et $\hat{P}^a_\phi$ pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\phi\in[1/4,3/4]$, au vu de la forme de J_0 donnée dans la proposition 3.3.1. Ces applications se recollent en une bijection

$$\{1/4\le\phi\le 3/4\}\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}\times W\times[1/4,3/4] \tag{3.7}$$

qui donne une description utile d'un voisinage de P dans $(\mathbb{R}\times M)\setminus(\mathbb{R}\times Y_\Lambda)$.

La démonstration du théorème suivant et de son corollaire fait l'objet des trois sections qui suivent. On rappelle que par définition de $\mathcal{M}^{\mathbb{R}\times M}_{B,1}(\tilde{c},J_0)$, on considère ici $\mathbb{R}\times M$ comme un cobordisme : on ne quotiente pas par l'action des translations.

Théorème 3.4.1. *La dimension virtuelle de $\mathcal{M}^{\mathbb{R}\times M}_B(\tilde{c},J_0)$ vaut n. Tout plan de $\mathcal{M}^{\mathbb{R}\times M}_B(\tilde{c},J_0)$ qui pénètre dans le domaine $\{1/4\le\phi\le 3/4\}$ est Fredholm-régulier ; de plus, dans la description de ce domaine donnée par (3.7), tout élément de $\mathcal{M}^{\mathbb{R}\times M}_B(\tilde{c},J_0)$ est de la forme*

$$(a,u,\phi),\quad u\in\mathcal{M}^W_B(\tilde{c}),\ (a,\phi)\in\mathbb{R}\times[1/4,3/4].$$

L'idée est grossièrement la suivante : en passant de la page W de M à la symplectisation $\mathbb{R}\times M$, l'espace de modules $\mathcal{M}^W_B(\tilde{c})$ "gagne" deux dimensions (l'une donnée par la coordonnée angulaire, l'autre par la direction de symplectisation). La situation au voisinage de P étant une situation produit, les propriétés d'intersection de l'espace de modules avec $\hat{L}$ restent inchangées, et le résultat recherché découle alors du théorème 2.4.6. Le fait que la page P admette un fibré normal trivial permet également de déduire le caractère Fredholm-régulier des éléments de $\mathcal{M}^{\mathbb{R}\times M}_B(\tilde{c},J_0)$ de celui des éléments de $\mathcal{M}^W_B(\tilde{c})$ (voir section 3.4.3).

La principale difficulté de la preuve consiste à justifier que tous les éléments de $\mathcal{M}^{\mathbb{R}\times M}_B(\tilde{c},J_0)$ qui pénètre dans le domaine $\{1/4\le\phi\le 3/4\}$ proviennent bien d'éléments de $\mathcal{M}^W_B(\tilde{c})$. À cette fin, la sous-section 3.4.4 s'attache à montrer que dès qu'un plan holomorphe de $\mathcal{M}^{\mathbb{R}\times M}_B(\tilde{c},J_0)$ rencontre P, il est nécessairement contenu dans P.

3.4.2 Calcul de l'indice

On détermine ici la dimension virtuelle de $\mathcal{M}^{\mathbb{R}\times M}_B(\tilde{c},J_0)$. On tire pour cela profit du fait qu'au niveau de la reliure, ξ_0 se décompose (cf. équation (3.5)) comme suit :

$$\xi_0=\xi_{\alpha'}\oplus\langle v_{1/2},v_{3/4}\rangle, \tag{3.8}$$

où $v_{1/2}, v_{3/4} \in Y_\Lambda \times T_0\mathbb{D} \subset T(Y_\Lambda \times \mathbb{D})$ sont tels que $v_{1/2}$ pointe vers la direction $\phi = 1/2$, $v_{3/4}$ vers la direction $\phi = 3/4$, et $J_0(v_{1/2}) = v_{3/4}$.

Remarquons qu'au vu de la forme de X_0 dans le voisinage $Y_\Lambda \times \mathbb{D}$ de la reliure (cf. équation 3.4), la linéarisation du flot de X_0 laisse stable chacun des deux sous-espaces dans la décomposition (3.8). Plus précisément, notons φ_t le flot de X_0. Dans $\langle v_{1/2}, v_{3/4}\rangle$, $d\varphi_t$ réalise une rotation d'angle

$$-\frac{t}{b}\frac{f'}{g'} = \frac{t}{1+\eta b}.$$

D'autre part, dans $\xi_{\alpha'}$, $d\phi_t$ se comporte comme la linéarisation du flot de Reeb de $R_{\alpha'}$, ralenti d'un facteur b.

On a introduit au lemme 2.4.4 une trivialisation du fibré (TX, ω) au-dessus de $\tilde{c}$. Au-dessus de cette orbite, ce fibré se décompose comme somme de TY_Λ et de la droite dirigée par le champ de Liouville. Dans le cas de $\mathbb{R} \times M$, ce champ est ∂_a, de sorte que Φ induit une trivialisation (toujours notée Φ) de $TY_\Lambda \oplus \langle \partial_a \rangle$. On étend cette trivialisation par $v_{1/2}, v_{3/4}$ pour obtenir une trivialisation Φ de $T(\mathbb{R} \times M)$ au-dessus de $\tilde{c}$.

Lemme 3.4.2. *Dans la trivialisation Φ induite naturellement par B, on a $\mathrm{CZ}^\Phi(\tilde{c}) = 2$.*

Démonstration. Au vu des considérations précédentes, il suffit pour trouver cet indice de sommer les contributions selon $\xi_{\alpha'}$ et $\langle v_{1/2}, v_{3/4}\rangle$; or la première a pour indice de Conley-Zehnder 1 en vertu du lemme 2.4.4, tandis que la seconde a pour indice de Conley-Zehnder 1 pour peu que b ait été choisi suffisamment petit lors de la définition de f et g. □

Ainsi d'après la formule donnée à la section 1.7.4, la dimension virtuelle de $\mathcal{M}_B^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)$ vaut $(n+1) - 3 + 2 = n$.

3.4.3 Transversalité

À travers l'identification $P \tilde{\to} W$, tout plan $u \in \mathcal{M}_B^W(\tilde{c})$ peut être vu comme un plan holomorphe $u : \mathbb{C} \to (\mathbb{R} \times M, J_0)$. On montre dans cette section que le caractère Fredholm-régulier de u dans W implique sa régularité dans $\mathbb{R} \times M$:

Lemme 3.4.3. *Soit $u \in \mathcal{M}_B^W(\tilde{c})$, vu comme un plan holomorphe $u : \mathbb{C} \to (\mathbb{R} \times M, J_0)$. Alors ce plan holomorphe est Fredholm-régulier.*

Remarque 3.4.4. On a vu dans la section 3.4.1 que l'on peut identifier $(\hat{P}_\phi^a, J_0)$ à (W, J) de la même manière que l'on identifie $P = \hat{P}_{1/2}^0$ à W. Un élement $u \in \mathcal{M}_B^W(\tilde{c})$ peut alors être vu comme un plan holomorphe de $\mathcal{M}_B^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)$ dont l'image est contenue dans $\hat{P}_\phi^a$, et une démonstration en tout points similaire à celle du lemme précédent établit qu'un tel plan est alors lui aussi Fredholm-régulier.

Pour établir ce lemme, on va utiliser la théorie présentée dans la section 3.1.3, en montrant que l'opérateur de Cauchy-Riemann normal de u est surjectif. À cette fin, on a tout d'abord besoin d'introduire un fibré normal généralisé.

Commençons par choisir un champ de vecteurs lisse X sur $\mathbb{R} \times (M \setminus Y_\Lambda)$ tel que :

- dans un proche voisinage de la reliure, $X \equiv v = -g(\rho)R_{\alpha'} + f(\rho)\partial_\phi$;
- hors du domaine $\{\rho \leq 1 - \delta''\}$, $X \equiv \partial_\phi$;
- en tout point, $X \in \langle R_{\alpha'}, \partial_\phi \rangle$, et la composante de X selon ∂_ϕ est strictement positive.

La dernière condition implique en particulier que X n'est jamais tangent à P ; cette dernière hypersurface étant holomorphe, il en va de même pour $J_0(X)$, et on peut donc définir un fibré normal de P dans $\mathbb{R} \times M$ par

$$N_2 := \langle X, J_0(X) \rangle.$$

Considérons d'autre part un fibré normal généralisé N_1 (comme décrit à la fin de la section 3.1.3) de u dans W. A travers l'identification $P \tilde{\to} W$, on peut voir $N_1 \subset T(\mathbb{R} \times M)$, et ainsi définir

$$N_u := N_1 \oplus N_2.$$

Il s'agit par construction d'un fibré normal généralisé de u dans $\mathbb{R} \times M$. Notons $\mathbf{D}_u^N$ l'opérateur de Cauchy-Riemann normal de u associé :

$$\mathbf{D}_u^N := W^{1,p,\delta}(N_u) \to L^{p,\delta}\left(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\mathbb{C}, N_u)\right).$$

Comme dans la section 3.1.3, définissons également

$$\mathbf{A} : \Gamma(\xi_0|_{\tilde{c}}) \to \Gamma(\xi_0|_{\tilde{c}}), \quad v \mapsto -J_0(\nabla_t v - T\nabla_v X_0)$$

un opérateur asymptotique associé à $\tilde{c}$, de sorte que $\mathbf{D}_u^N$ est asymptote à $\mathbf{A}$. Au vu de la situation produit au voisinage de la reliure, de la forme (3.2) de la métrique choisie, et du fait que ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à cette métrique, l'opérateur $\mathbf{A}$ laisse stables chacun des deux sous-espaces dans la décomposition (3.8). Notons $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ les restrictions correspondantes ; d'après l'étude menée à la section précédente, on a $\mathrm{CZ}^\Phi(\mathbf{A}_1) = 1$ et $\mathrm{CZ}^\Phi(\mathbf{A}_2) = 1$.

L'opérateur $\mathbf{D}_u^N$ présente lui aussi une forme adaptée à cette décomposition. Plus précisément, relativement aux décompositions

$$W^{1,p,\delta}(N_u) = W^{1,p,\delta}(N_1) \oplus W^{1,p,\delta}(N_2)$$

et

$$L^{p,\delta}\left(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\mathbb{C}, N_u)\right) = L^{p,\delta}\left(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\mathbb{C}, N_1)\right) \oplus L^{p,\delta}\left(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\mathbb{C}, N_2)\right),$$

$\mathbf{D}_u^N$ présente une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_{1,2} \\ 0 & \mathbf{D}_2 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Pour le voir, on revient à la définition de la linéarisation de $\overline{\partial}_J$ en u. Soit $\eta \in \Gamma(u^* N_1)$. On choisit une famille lisse d'applications $(u_\tau)_{\tau \in]-1,1[}$ telle que $u_0 = u$ et $\partial_\tau u_\tau|_{\tau=0} = \eta$. L'astuce ici consiste à remarquer que puisque $N_1 \subset TP$, on peut choisir les u_τ comme étant à image dans P. Soient à présent $x \in \mathbb{C}$ et $X \in T_x\mathbb{C}$. Alors :

$$(\mathbf{D}_u \eta)(X) := \nabla_\tau (\overline{\partial}_J u_\tau(X))_{\tau=0} \in T_{u(z)}P.$$

Ainsi en projetant sur N_u, on obtient un élément de N_1, d'où le terme nul dans (3.9).

Montrons à présent que $\mathbf{D}_u^N$ est surjectif : cela établira le caractère Fredholm-régulier de u par le théorème 3.1.5. Commençons par mentionner le fait que les opérateurs

$$\mathbf{D}_i : W^{1,p,\delta}(N_i) \to L^{p,\delta}\left(\overline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(T\mathbb{C}, N_i)\right),$$

$i = 1, 2$, sont des opérateurs de Fredholm asymptotes à $\mathbf{A}_i$. Puisque u est Fredholm-régulière lorsque vue comme un élément de $\mathcal{M}_B^W(\tilde{c})$, l'opérateur $\mathbf{D}_1$ est surjectif par le théorème 3.1.5. On établit que $\mathbf{D}_2$ est également surjectif en utilisant la proposition 3.1.4 : en effet, $\dim_{\mathbb{C}} N_2 = 1$, et d'après (3.1) on a $\mathrm{ind}(\mathbf{D}_1) = 1 + 0 + 1 = 2$. La condition

$$\mathrm{ind}(\mathbf{D}_1) + \chi(S^2) > \#\Gamma_0 = 1$$

est donc bien vérifiée.

Ainsi, au vu de (3.9), $\mathbf{D}_u^N$ est surjectif, et le lemme 3.4.3 s'ensuit.

3.4.4 Un résultat de localisation

On démontre dans cette section un résultat "d'unicité" qui généralise [Wena, Proposition 2.14] en grande dimension. La preuve, inspirée de celle de [Wena], emploie des arguments de théorie holomorphe des intersections, telle que développée dans [Sie11, Sie08].

Proposition 3.4.5. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $\phi \in S^1$ et $u \in \mathcal{M}_B^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)$. Si u intersecte un des hyperplans holomorphes $\hat{P}_\phi^a$ définis à la section 3.3, alors l'image de u est contenue toute entière dans $\hat{P}_\phi^a$.*

Avant de passer à la démonstration de cette proposition, expliquons en quoi ce résultat, conjugué à ceux des deux sections précédentes et au théorème 2.4.6, clôt la preuve du théorème 3.4.1.

Démonstration du théorème 3.4.1. Soit $u \in \mathcal{M}_B^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)$ pénétrant dans le domaine $\{1/4 \leq \phi \leq 3/4\}$. En vertu de la proposition précédente, il existe $a \in \mathbb{R}$, $\phi \in [1/4, 3/4]$ tels que u soit à image dans $\hat{P}_\phi^a$. L'espace de modules $\mathcal{M}_B^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)$ a donc bien dans $\{1/4 \leq \phi \leq 3/4\}$ la forme produit annoncée dans le théorème, et la remarque 3.4.4 garantit le caractère Fredholm-régulier des courbes contenues dans ce domaine. Enfin, la dimension virtuelle de $\mathcal{M}_B^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)$ a été déterminée à la section 3.4.2. □

La proposition 3.4.5 implique également, avec le lemme 2.4.3, le fait intéressant suivant. Notons qu'il est inutile ici de faire d'hypothèse sur la classe d'homologie de Λ dans W_0.

Corollaire 3.4.6. *Soit W un domaine de Weinstein de dimension 4 obtenu à partir d'un autre domaine de Weinstein W_0 par attachement d'une anse le long d'une sphère legendrienne lâche. Alors si $\Psi : W \to W$ est un symplectomorphisme égal à l'identité près du bord, Ψ laisse fixe la classe d'homologie (relative) de la co-âme de l'anse.*

Remarque 3.4.7. On retrouve avec ce corollaire le fait qu'une sphère legendrienne lâche ne peut border un disque lagrangien [Mur, §8]. En effet, si tel était le cas, la complétion $\hat{L}$ pourrait être construite en utilisant ce disque, et serait donc une sphère lagrangienne ; un twist de Dehn généralisé le long de cette sphère serait alors un symplectomorphisme de W ne préservant pas la classe d'homologie de la co-âme.

Le reste de cette section s'attelle à la preuve de la proposition 3.4.5. Les choix de ϕ et a ne changeant en rien la démonstration, on prendra dans la suite $\phi = 1/2$ et $a = 0$ de sorte à pouvoir parler de $P = \hat{P}_{1/2}^0$. Le principal argument consiste à regarder les propriétés d'intersection d'un plan holomorphe avec P ; on fait pour cela usage de la théorie développée dans [Sie11, Sie08] pour les intersections de courbes holomorphes. Même si la situation étudiée ici est en plus grande dimension, la forme produit de J_0 et P au voisinage de $\mathbb{R} \times Y_\Lambda$ permet d'adapter directement les arguments employés en dimension 4. On donne dans ce qui suit une présentation des notions et résultats utiles, en renvoyant à [Sie11, Sie08] pour les détails manquants.

On munit M de la métrique g définie par

$$g(h, k) = \lambda_0(h)\lambda_0(k) + \omega_0(p(h), J_0 p(k))$$

où p est la projection sur ξ_0 parallèlement à X_0.

♦ **Applications asymptotiquement cylindriques.**

Commençons par introduire quelques éléments de terminologie de [Sie11]. Soit (Σ, j) une surface de Riemann close (dans la preuve qui suit on aura $\Sigma = S^2$) et $z \in \Sigma$. On note comme d'habitude $\dot{\Sigma} := \Sigma \setminus \{z\}$. Soit également γ une orbite simple de X_0 de période τ, $x : S^1 \to M$ une paramétrisation de γ telle que $\lambda_0(\dot{x}) \equiv \tau$, et

$$\widetilde{x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times S^1 & \to & \mathbb{R} \times M \\ (s, t) & \mapsto & (\tau s, x(t)) \end{array}$$

une paramétrisation J_0-holomorphe du cylindre trivial au-dessus de γ. Une application lisse

$$u = (a, f) : \dot{\Sigma} \to \mathbb{R} \times M$$

est une *application asymptotiquement γ-cylindrique* s'il existe un plongement holomorphe

$$\varphi : [R, +\infty[\times S^1 \subset \mathbb{C}/i\mathbb{Z} \to \dot{\Sigma}$$

vérifiant $\lim_{s\to+\infty} \varphi(s,t) = z$ et tel que les applications

$$v_d : \begin{array}{ccc} [R, +\infty[\times S^1 & \to & \mathbb{R} \times M \\ (s,t) & \mapsto & (a(\varphi(s+d,t)) - \tau d, f(\varphi(s+d,t))). \end{array}$$

satisfont

$$\lim_{d\to+\infty} v_d = \widetilde{x}|_{[R,+\infty[\times S^1} \text{ dans } \mathcal{C}^1([R, +\infty[\times S^1, \mathbb{R} \times M).$$

Lorsque u est asymptotiquement γ-cylindrique, il existe $R > 0$, un plongement $\psi : [R, +\infty[\to \dot{\Sigma}$ et une application $U : [R, +\infty[\times S^1 \to x^*\xi_0$ tels que :

- $\lim_{s\to+\infty} \psi(s,t) = z$;
- lorsque $s \to +\infty$, le quotient $\partial_s\psi(s,0)/|\partial_s\psi(s,0)|$ converge vers un vecteur non nul de $T_z\Sigma$;
- pour tout $(s,t) \in [R, +\infty[\times S^1$, $U(s,t) \in (\xi_0)_{x(t)}$;
- pour tout $(s,t) \in [R, +\infty[\times S^1$,

$$u(\psi(s,t)) = (\tau s, \exp_{x(t)} U(s,t)).$$

Une telle paire (U, ψ) est appelée un *représentant asymptotique* de u.

♦ Nombre d'intersection relatif.

Soit $u : \dot{\Sigma} \to \mathbb{R} \times M$ une application asymptotiquement $\tilde{c}$-cylindrique en $z \in \Sigma$. On choisit comme précédemment une paramétrisation x de $\tilde{c}$ telle que $\lambda_0(\dot{x}) \equiv T$. On s'intéresse à présent aux propriétés d'intersection de u avec l'hyperplan holomorphe P. Les résultats dont on a besoin ici sont des généralisations immédiates de ceux de [Sie11] concernant les intersections de deux courbes holomorphes ; on en donne à présent une présentation rapide.

Soit (U, ψ) une représentant asymptotique de u. Étant donné une trivialisation $\Phi : S^1 \times \mathbb{C}^n \to x^*\xi_0$ de ξ_0 le long de $\tilde{c}$, on définit le nombre d'intersection relatif de u et P relativement à Φ en perturbant u au voisinage de z dans une direction Z donnée par Φ, puis en calculant le nombre algébrique d'intersection de cette application perturbée $\widetilde{u}_{\Phi,Z,\varepsilon}$ avec P. Plus précisément, on choisit une fonction palier $\chi : \Sigma \to [0,1]$ supportée dans $\mathrm{im}(\psi) \cup \{z\}$ et égale à 1 sur un voisinage de z, et on définit $\widetilde{u}_{\Phi,Z,\varepsilon}$ comme l'application coïncidant avec u hors de $\mathrm{im}(\psi)$ et vérifiant

$$\widetilde{u}_{\Phi,Z,\varepsilon}(\psi(s,t)) = \left(\tau s, \exp_{\gamma(t)} (U(s,t) + \varepsilon\chi(\psi(s,t))Z(t))\right),$$

où l'on a choisi arbitrairement $Z(t) \in \xi_0(x(t)) \setminus \{0\}$ un champ de vecteurs constant dans la trivialisation Φ. Il existe alors $R' > 0$ et $\varepsilon_1 > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, $\widetilde{u}_{\Phi,Z,\varepsilon} \circ \psi([R', +\infty[\times S^1)$ et P ne s'intersectent pas. On peut donc bien définir le nombre d'intersection relatif $i^\Phi(u, P)$ de u et P relativement à Φ comme le nombre d'intersection algébrique

$$i^\Phi(u, P) := \mathrm{int}(\widetilde{u}_{\Phi,Z,\varepsilon}, P).$$

En effet, ce nombre est indépendant des choix effectués, à l'exception de celui de la classe d'homotopie de Φ. Des arguments classiques de transversalité et d'invariance par homotopie montrent de plus que cette quantité est invariante par homotopie de u parmi les applications asymptotiquement $\tilde{c}$-cylindriques, et par homotopie de P au sein de la famille des $\hat{P}^a_\phi$, $a \in \mathbb{R}$, $\phi \in S^1$.

♦ **Preuve de la proposition 3.4.5.**

Soit $u \in \mathcal{M}_B^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)$ intersectant P. Puisque u est d'énergie finie et que $\tilde{c}$ est non-dégénérée, u est asymptotiquement $\tilde{c}$-cylindrique, et on peut donc appliquer la théorie qui précède. On fixe dans la suite un représentant asymptotique (U, ψ) de u, avec $\psi : [R, +\infty[\times S^1 \to \mathbb{C} \cong S^2 \setminus \{z\}$ où R est un "grand" réel (dans un sens précisé dans la suite).

Fixons également une trivialisation Φ de ξ_0 le long de $\tilde{c}$ adaptée à la décomposition

$$\xi_0|_{\tilde{c}} = \xi_{\alpha'}|_{\tilde{c}} \oplus \langle v_{1/2}, v_{3/4}\rangle, \tag{3.10}$$

introduite à la section 3.4.2. En particulier, $v_{1/2}|_{\tilde{c}}$ et $v_{3/4}|_{\tilde{c}}$ sont constants dans la trivialisation Φ, avec $v_{1/2}$ pointant dans la direction de P et $v_{3/4}$ orthogonal à la direction de P.

On déforme alors u par une homotopie d'applications asymptotiquement $\tilde{c}$-cylindriques de sorte à obtenir une application u' coïncidant dans le domaine $\{a \geq 0\}$ avec le cylindre trivial au-dessus de $\tilde{c}$, comme sur la figure 3.6. Puisque $i^\Phi(u, P)$ est invariant sous de telles homotopies, on a

$$i^\Phi(u, P) = i^\Phi(u', P) = 0. \tag{3.11}$$

En effet, puisque P est contenu dans le domaine $\{a \geq 0\}$ et que, dans ce domaine, u' coïncide avec $\mathbb{R}\times\tilde{c}$, on voit que $\widetilde{u'}_{\Phi,v_{3/4},\varepsilon}$ et P sont d'images disjointes (quitte éventuellement à remplacer P par un de ses translatés vers le haut). Par conséquent $i^\Phi(u', P) = \mathrm{int}(\widetilde{u'}_{\Phi,v_{3/4},\varepsilon}, P) = 0$.

Raisonnons à présent par l'absurde en supposant que l'image de u n'est pas contenue entièrement dans P, et montrons qu'alors $i^\Phi(u, P) > 0$. En vertu du théorème de Sard, quitte à considérer à la place de P un des hyperplans holomorphes $\hat{P}^a_\phi$ voisins, on peut supposer que u et P s'intersectent en un nombre non nul d'intersections transverses. Puisque u et P sont holomorphes, ces intersections sont de surcroît positives d'après [Wen15, Théorème 2.10.2]. Notons que ce fait seul ne suffit pas à obtenir une absurdité puisque la perturbation $\widetilde{u}_{\Phi,v_{3/4},\varepsilon}$ de u pourrait introduire des points d'intersection supplémentaires négatifs.

Pour des raisons techniques, on suppose à présent que $u\circ\psi(\{R\}\times S^1)\cap P = \emptyset$, ce qui peut toujours être réalisé quitte à remplacer R par un autre réel plus grand (puisque l'ensemble des points fixes est discret).

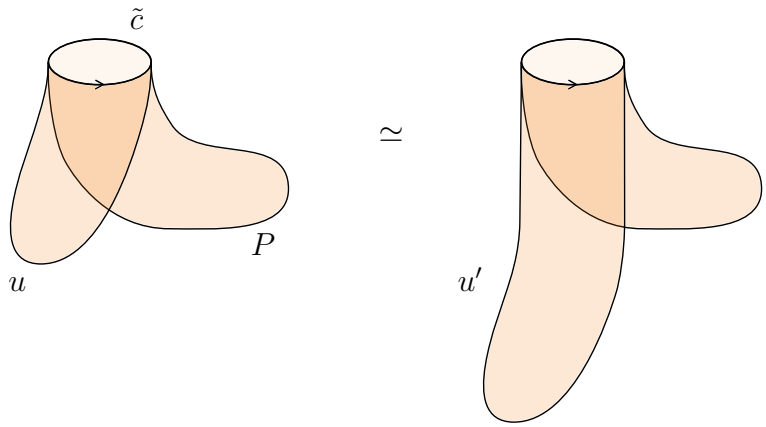


FIGURE 3.6 : Homotopie de u permettant de réduire le calcul de $i^{\Phi}(u, P)$ à celui du nombre d'intersections de P avec un cylindre trivial au-dessus de $\tilde{c}$.

Au vu de la construction de P donnée dans la section 3.3, il existe une fonction lisse et strictement décroissante $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ et telle que $P \cap \{a \geq 1\}$ coïncide[2] avec l'image de

$$\Pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times Y_\Lambda & \to & \mathbb{R} \times M \\ (s, y) & \mapsto & \Big(Ts, \exp_y(h(s) v_{1/2}(y))\Big) . \end{array} \tag{3.12}$$

Lemme 3.4.8. *Soit π_2 la projection sur le deuxième facteur dans l'équation (3.10). On note aussi p_2 la projection sur $\mathbb{C}$ associée dans la trivialisation Φ. Pour $i = 1/2, 3/4$, posons $\mathfrak{v}_i := p_2(\Phi^{-1} v_i) \in \mathbb{C}$, qui est un vecteur constant par construction. Alors on a*

$$\operatorname{int}(\widetilde{u}_{\Phi, v_{3/4}, \varepsilon} \circ \psi, P) = -\operatorname{wind}\Big(p_2 \Phi^{-1} U(R, \cdot), h(R) \mathfrak{v}_{1/2}\Big)$$

où wind *désigne le nombre d'enlacement (ici, de $\pi_2 U(R, \cdot)$ autour de $h(R) \pi_2 v_{1/2}$ dans Φ). De plus, cette dernière quantité est positive si R est suffisamment grand.*

Remarquons que ce lemme, une fois établi, clôt la preuve : avec les considérations qui précèdent il montre en effet que

$$i^{\Phi}(u, P) = \operatorname{int}(\widetilde{u}_{\Phi, v_{3/4}, \varepsilon}, P) > 0$$

ce qui contredit l'équation (3.11).

Démonstration du lemme 3.4.8. Si R a été choisi suffisamment grand, l'image de

$$\widetilde{u}_{\Phi, v_{3/4}, \varepsilon}(\psi(s, t)) = \Big(Ts, \exp_{x(t)}(U(s, t) + \varepsilon \chi(\psi(s, t)) v_{3/4}(t))\Big) ,$$

[2] La forme particulière de la métrique dans $\mathbb{R} \times Y_\Lambda \times \mathbb{D}$, notamment son caractère ϕ-invariant, implique que les trajectoires radiales sont des géodésiques ; l'application exponentielle se comporte donc bien ici comme on se l'imagine.

est contenue dans le domaine $\{a \geq 1\}$, de sorte que ses points d'intersections avec P sont donnés par les (s,t) tels que

$$\pi_2\left(U(s,t) + \varepsilon\chi(\psi(s,t))v_{3/4}(t)\right) = \pi_2\left(h(s)v_{1/2}(x(t))\right)$$

ce qui se ré-écrit

$$\pi_2(U(s,t)) + \varepsilon\chi(\psi(s,t))\Phi(t)\mathfrak{v}_{3/4} = h(s)\Phi(t)\mathfrak{v}_{1/2}.$$

Les points d'intersection de $u \circ \psi$ avec P correspondent ainsi aux zéros de la fonction $F : [R, +\infty[\times S^1 \to \mathbb{C}$ définie par

$$F(s,t) = \Phi(t)^{-1}\left(\pi_2 U(s,t)\right) + \varepsilon\chi(\psi(s,t))\mathfrak{v}_{3/4} - h(s)\mathfrak{v}_{1/2} \in \mathbb{C}.$$

Puisque $\lim_{s\to+\infty} F(s,t) = \varepsilon\mathfrak{v}_{3/4} \neq 0$, tous les zéros de F sont contenus dans un compact $[R, R'] \times S^1$. Le compte (algébrique) de ces zéros est donc égal à la différence d'enlacement autour de 0 des lacets $t \mapsto F(R,\cdot)$ et $t \mapsto F(R_2,\cdot)$, $R_2 \geq R'$. Or pour ε suffisamment petit et R_2 suffisamment grand, ce dernier enlacement est nul, donc

$$\operatorname{int}(\widetilde{u}_{\Phi,v_{3/4},\varepsilon} \circ \psi, P) = -\operatorname{wind}(F(R,\cdot),0) = -\operatorname{wind}\left(p_2\Phi^{-1}U(R,\cdot), h(R)\mathfrak{v}_{1/2}\right)$$

puisque $\chi(\psi(R,t)) = 0$.

Il reste à montrer que le membre de droite de cette équation est positif. Un soin supplémentaire lors de la détermination de h dans (3.12) montre que h décroit de manière asymptotiquement exponentielle, et que $v_{1/2}$ est un vecteur propre de l'opérateur $\mathbf{A}_2$ défini en 3.4.3. Ceci, combiné avec l'expression de la forme normale asymptotique d'une courbe holomorphe [Sie08, Théorème 2.3], permet de montrer que

$$\pi_2 U(s,t) - h(s)\pi_2 v_{1/2} = e^{\lambda s}\left(e(t) + r(s,t)\right)$$

où e est un vecteur propre de $\mathbf{A}_2$ de valeur propre $\lambda < 0$ et où $\lim_{s\to+\infty} r(s,\cdot) = 0$. En particulier, si R est suffisamment grand, $u \circ \psi([R, +\infty[) \cap P = \emptyset$. On suppose dorénavant que tel est le cas. Alors comme expliqué dans [Sie11],

$$\begin{aligned}
\operatorname{wind}\left(p_2\Phi^{-1}U(R,\cdot), h(R)\mathfrak{v}_{1/2}\right) &= \max\left\{\operatorname{wind}\left(p_2\Phi^{-1}U(R,\cdot),0\right), \operatorname{wind}\left(h(R)\mathfrak{v}_{1/2},0\right)\right\} \\
&= \operatorname{wind}\left(p_2\Phi^{-1}U(R,\cdot),0\right) \\
&\leq \alpha^{\Phi}(\mathbf{A}_2)
\end{aligned}$$

où $\alpha^{\Phi}(\mathbf{A}_2)$ désigne le nombre d'enlacement (autour de 0, selon Φ) d'un vecteur propre de $\mathbf{A}_2$ associé à la plus grande valeur propre strictement négative de $\mathbf{A}_2$. En outre, toujours d'après [Sie11],

$$\mathrm{CZ}^{\Phi}(\mathbf{A}_2) = 2\alpha^{\Phi}(\mathbf{A}_2) + 1.$$

Or d'après l'étude menée à la section 3.4.2, $\mathrm{CZ}^{\Phi}(\mathbf{A}_2) = 1$, ce qui implique $\alpha^{\Phi}(\mathbf{A}_2) = 0$, et finalement

$$\operatorname{wind}\left(p_2\Phi^{-1}U(R,\cdot), h(R)\mathfrak{v}_{1/2}\right) \leq \alpha^{\Phi}(\mathbf{A}_2) = 0$$

ce qui conclut la démonstration du lemme. □

3.5 Démonstration du résultat principal

Cette section est consacrée à la preuve du résultat principal de ce document, dont on rappelle l'énoncé :

Théorème 3.5.1. *Soit (M^{2n+1}, ξ) une variété de contact close portée par un livre ouvert (W, Ψ). On suppose que W est un domaine de Weinstein obtenu à partir d'un autre domaine de Weinstein W_0 par attachement d'une anse le long d'une sphère legendrienne lâche $\Lambda \subset \partial W_0$ homologiquement triviale dans W_0. Alors pour toute forme de contact définissant ξ, le champ de Reeb associé possède une trajectoire fermée contractile.*

On poursuit les considérations menées à la section 3.4. Dans la section 3.2.3, on a construit sur M une famille de structures hamiltoniennes stables $\mathcal{H}_\varepsilon = (\xi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon, X_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon \leq \nu$, où $\nu < \varepsilon_0$ est suffisamment petit. Pour $\varepsilon > 0$, λ_ε est une forme de contact sur M portée par un livre ouvert de page W et de monodromie Ψ. Au vu de la proposition 3.1.1 et du théorème de stabilité de Gray [Gei, Théorème 2.2.2], on peut donc supposer que $\xi = \ker \lambda_\nu$. Soit alors μ une autre forme telle que $\xi = \ker \mu$; démontrer le théorème 3.5.1 revient à établir que le champ de Reeb associé à μ possède une trajectoire fermée contractile.

Définition 3.5.2. Une structure presque complexe J sur $\mathbb{R} \times M$ est dite *régulière* si toutes les courbes de $\mathcal{M}_B^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J)$ sont Fredholm-régulières.

♦ **Étape 1 : étude de l'intersection de $\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)$ avec $\hat{L}$.**

En vertu de [Wenb, Théorème 8.1], une perturbation générique de J_0 parmi les structures presque complexes cylindriquement adaptées à $\mathcal{H}_0$ rend Fredholm-réguliers tous les éléments de $\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)$. On fait à présent le choix d'une telle perturbation régulière, que l'on note encore J_0 par souci de simplicité. L'espace de modules $\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)$ admet ainsi une structure naturelle de variété de dimension $n+2$ d'après le théorème 3.4.1. Les arguments habituels d'énergie, combinés au fait que $\tilde{c}$ possède la plus petite période, montrent alors que le bord de (la compactification de) $\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)$ est donné par

$$\partial \mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0) = \mathcal{M}_{B,1}^{M}(\tilde{c}, J_0) := \mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)/\mathbb{R}$$

où l'on quotiente par l'action des translation selon la direction de symplectisation.

D'autre part, le caractère régulier de J_0 implique que l'application d'évaluation

$$\mathrm{ev}_1 : \mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0) \to \mathbb{R} \times M$$

est lisse (cf. [Wen15, Théorème 4.3.6]). Son image peut donc être vue comme un $(n+2)$-cycle, et l'on note

$$[\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)] \in H_{n+2}([-\infty, +\infty] \times M, \{-\infty, +\infty\} \times M)$$

la classe correspondante en homologie.

Lemme 3.5.3. *L'intersection de $[\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)]$ avec $\hat{L}$ est non triviale.*

Démonstration. C'est essentiellement une conséquence des théorèmes 2.4.6 et 3.4.1. La perturbation de J_0 réalisée précédemment n'altère pas les propriétés d'intersection de $\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)$ avec $\hat{L}$: d'une part, tous les plans holomorphes au voisinage de $\hat{L}$ étaient déjà réguliers avant perturbation d'après le théorème 3.4.1 ; d'autre part, quitte à prendre une perturbation suffisamment petite, il ne peut apparaître de nouveaux plans holomorphes dans le domaine $\{1/4 \leq \phi \leq 3/4\}$. □

♦ **Étape 2 : déformation de $\mathcal{H}_0$ sur $(\lambda_\nu, R_\nu, d\lambda_\nu)$.**

On sait déjà que la famille $(\mathcal{H}_\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq\nu}$ constitue une homotopie lisse de structures hamiltoniennes stables. D'autre part, on dispose d'une homotopie entre $\mathcal{H}_\nu = (\lambda_\nu, R_\nu, \omega_\nu)$ et la structure de contact $(\lambda_\nu, R_\nu, d\lambda_\nu)$, obtenue en reliant ω_ν à $d\lambda_\nu$ à l'aide de combinaisons barycentriques. Il s'agit bien d'une homotopie de structure hamiltoniennes stables :

- hors du domaine $1-\delta' < \rho < 1+\delta$, les 2-formes ω_ν et $d\lambda_\nu$ ne diffèrent que d'une constante ;
- pour $1-\delta' < \rho < 1+\delta$,
$$\begin{aligned} \omega_\nu = d(\tilde{f}\alpha') &= \tilde{f}d\alpha' + \tilde{f}'d\rho\wedge\alpha' \\ d\lambda_\nu &= f_\nu d\alpha' + f_\nu d\rho\wedge\alpha' \end{aligned}$$
donc une combinaison barycentrique de ω_ν et $d\lambda_\nu$ est encore une 2-forme fermée non-dégénérée sur ξ_ν, pourvu que ν ait été choisi suffisamment petit.
- pour $1-\delta' < \rho < 1+\delta$, le champ de Reeb associé à une combinaison barycentrique de ω_ν et $d\lambda_\nu$ est égal à R_ν (qui dans ce domaine est un multiple constant de ∂_ϕ).

En concaténant $(\mathcal{H}_\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq\nu}$ à l'homotopie précédemment écrite, on obtient une homotopie $(\mathcal{H}_s)_{0\leq s\leq 1}$ entre $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1 := (\lambda_\nu, R_\nu, d\lambda_\nu)$. Notons $\mathcal{H}_s = (\lambda_s, R_s, \omega_s)$.

Étant donné $J \in \mathcal{J}(\mathcal{H}_1)$, considérons une perturbation régulière J_1 de J parmi les éléments de $\mathcal{J}(\mathcal{H}_1)$. Choisissons alors une famille lisse $(J_s)_{0\leq s\leq 1}$ reliant J_0 à J_1 telle que pour tout s, $J_s \in \mathcal{J}(\mathcal{H}_s)$. Notons que, puisque $(\mathcal{H}_s)$ est constante (selon s) dans le domaine $\rho \leq 1-\delta''$, on peut supposer $J_s \equiv J_0$ sur un voisinage de $\mathbb{R}\times Y_\Lambda$. De plus (J_s) est d'extrémités régulières ; on peut donc la perturber en une famille $(\widetilde{J}_s)$ telle que

1. $\widetilde{J}_0 = J_0$, $\widetilde{J}_1 = J_1$;
2. pour tout s, $\widetilde{J}_s \in \mathcal{J}(\mathcal{H}_s)$;
3. pour tout s, $\widetilde{J}_s \equiv J_0$ sur un voisinage de $\mathbb{R}\times Y_\Lambda$;
4. l'espace
$$\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}\left(\tilde{c}, (\widetilde{J}_s)_{0\leq s\leq 1}\right) := \left\{(s,u) \mid s\in[0,1], u \in \mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, \widetilde{J}_s)\right\}$$
admet une structure naturelle de variété[3] de dimension $n+3$ et de bord $\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0) \sqcup \mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_1)$;

[3]Le fait que $\mathcal{H}_s \equiv \mathcal{H}_0$, $J_s \equiv J_0$ sur un voisinage de $\mathbb{R}\times Y_\Lambda$ joue un rôle important ici, pour pouvoir appliquer la version classique du théorème des fonctions implicites pour les courbes holomorphes.

5. l'application
$$\mathrm{ev}_1 : \mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}\left(\tilde{c}, (\widetilde{J}_s)_{0\leq s\leq 1}\right) \to \mathbb{R}\times M$$
qui à (s,u) associe $\mathrm{ev}_1(u)$ est lisse.

Les deux dernières conditions impliquent que $\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}\left(\tilde{c}, (\widetilde{J}_s)_{0\leq s\leq 1}\right)$ réalise un cobordisme entre les deux cycles représentés par $\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)$ et $\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_1)$. Par conséquent les classes d'homologie associées $[\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_0)]$ et $[\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_1)]$ sont égales, et en particulier $[\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_1)]$ intersecte non trivialement $\hat{L}$ d'après le lemme 3.5.3.

♦ **Étape 3 : déformation de la symplectisation de (M,λ_ν) en un cobordisme de (M,μ) vers (M,λ_ν).**

Puisque J_1 est cylindriquement adaptée à $\mathcal{H}_1 = (\lambda_\nu, R_\nu, d\lambda_\nu)$, elle est aussi adaptée à $\mathbb{R}\times M$ vu comme symplectisation de la forme de contact λ_ν. En particulier, J_1 est adaptée à $(\mathbb{R}\times M, d(e^a\lambda_\nu))$ vu comme cobordisme trivial. Le terme *adapté* fait ici référence à la notion définie à la section 1.5 : en particulier, on demande seulement que la structure presque complexe soit de forme cylindrique en-dehors d'un certain domaine compact.

Dans cette étape de la preuve on note $\omega_1 := d(e^a\lambda_\nu)$ la forme symplectique sur $\mathbb{R}\times M$ associée à λ_ν. Puisque les formes λ_ν et μ définissent la même structure de contact, on peut écrire $\lambda_\nu = e^f\mu$ où $f : M \to \mathbb{R}$ est lisse. Quitte à multiplier μ par une constante suffisamment petite, ce qui n'affecte pas la dynamique de son champ de Reeb, on peut supposer que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Enfin, soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse, croissante, telle que $\sigma(a) = 0$ pour $a \leq 0$ et $\sigma(a) = 1$ pour $a \geq 1$. Pour $s \in [1,2]$, on définit
$$\omega_s := d(e^{g_s}\mu), \quad g_s(a,x) := a + (2 - s + (s-1)\sigma(a))f(x).$$
Un calcul simple montre que
$$\omega_s^n = ne^{ng_s}(1 + (s-1)\sigma'(t)f(x))da \wedge \mu \wedge (d\mu)^{n-1} > 0.$$
Ainsi $(\omega_s)_{1\leq s\leq 2}$ est un chemin de formes symplectiques coïncidant avec ω_1 sur le domaine $a \geq 1$. De plus $(\mathbb{R}\times M, \omega_2)$ est un cobordisme de (M,μ) vers (M,λ_ν).

Considérons à présent un chemin lisse $(J_s)_{1\leq s\leq 2}$ de structures presque complexes reliant J_1 à une structure régulière J_2, et telles que pour tout s, J_s est adaptée au cobordisme $(\mathbb{R}\times M, \omega_s)$. Après une perturbation d'extrémités J_1, J_2 fixées, on obtient un chemin $(\widetilde{J}_s)_{1\leq s\leq 2}$ de structures presque complexes adaptées, et un argument similaire à l'étape précédente prouve que $[\mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_2)]$ intersecte non trivialement $\hat{L}$.

♦ **Étape 4 : argument de compacité.**

On conclut à présent en utilisant les propriétés d'intersection de $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{B,1}^{\mathbb{R}\times M}(\tilde{c}, J_2)$ avec $\hat{L}$ pour forcer une suite d'éléments de cet espace de modules à se briser en $-\infty$. Notons $\pi_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}\times M \to \mathbb{R}$ la projection sur le premier facteur.

Par construction, le n-cycle $\hat{L} \in H_1([-\infty, +\infty] \times M)$ est l'image d'un élément de $H_1(M)$ par l'inclusion $M \cong \{0\} \times M \hookrightarrow \mathbb{R} \times M$. Pour chaque $a \in \mathbb{R}$, on peut donc se représenter $\hat{L}$ comme contenu dans $\{a\} \times M$. Puisque $[\mathcal{M}]$ intersecte non trivialement $\hat{L}$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in \mathcal{M}$ tel que $\pi_{\mathbb{R}}(\mathrm{ev}_1(u_n)) = -n$. Alors, par compacité, la suite (u_n) se brise lorsque $n \to +\infty$ en un bâtiment holomorphe : la figure 3.7 représente une configuration possible. On met ainsi en évidence un certain nombre d'orbites de Reeb pour le champ de Reeb associé à μ, dont au moins une est contractile (γ sur la figure) car possédant un plan holomorphe lui étant asymptote dans $\mathbb{R} \times M$.

Cela conclut la preuve du théorème 3.5.1. □

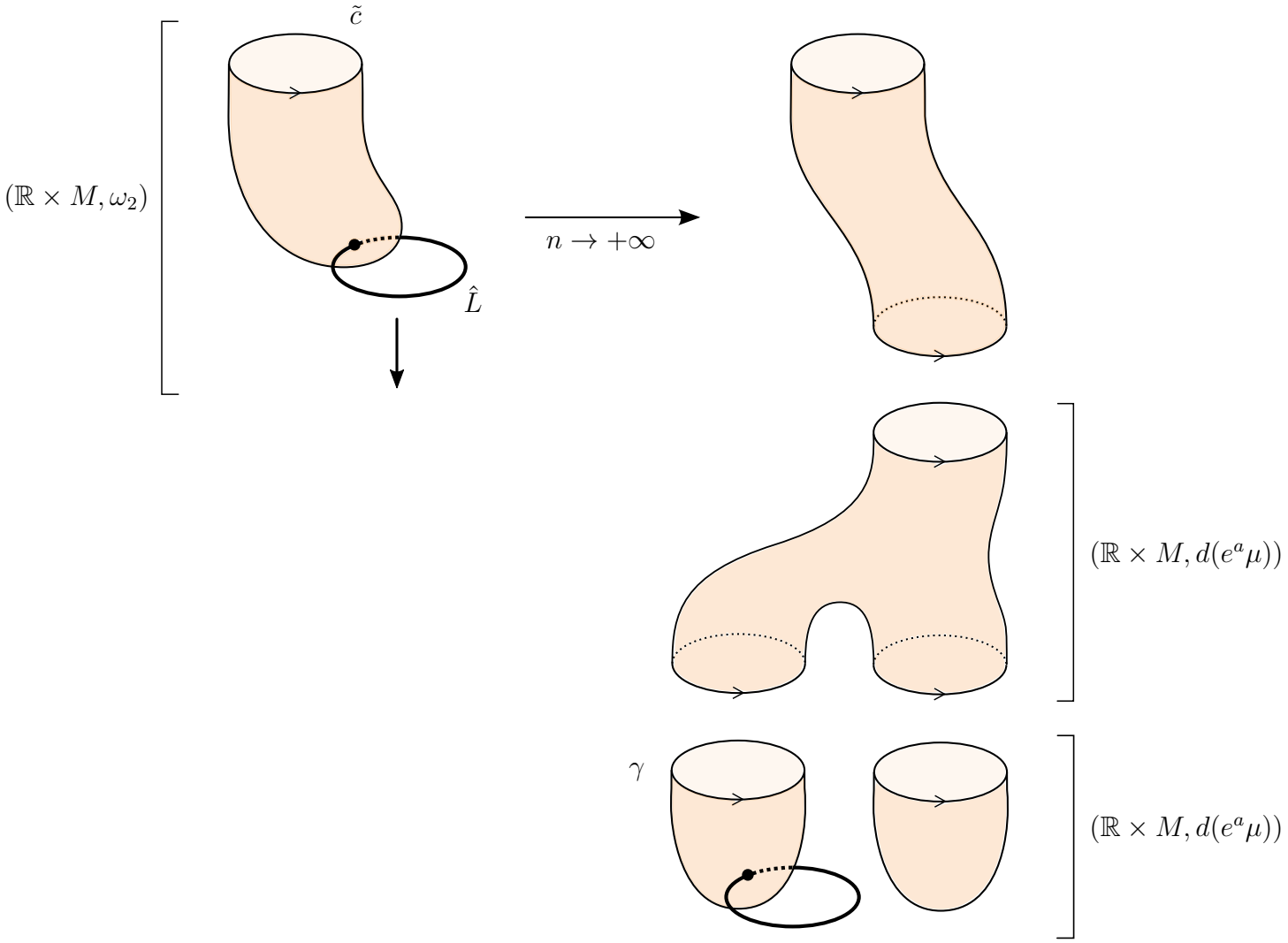


FIGURE 3.7 : En envoyant $\hat{L}$ vers $-\infty$, on obtient une suite de plans holomorphes qui se brise le long d'une orbite de Reeb contractile γ pour μ.

Perspectives

Lorsque la monodromie d'un livre ouvert se décompose comme produit de twists de Dehn positifs, une variété de contact portée par ce livre ouvert est symplectiquement remplissable, et en particulier tendue. Ainsi le théorème 3.5.1, qui n'impose aucune condition sur la monodromie, s'applique à une catégorie de variétés de contact jusque-là non étudiées dans la littérature sur la conjecture de Weinstein. Il faut cependant souligner que la démonstration présentée dans les pages précédentes n'a que peu de chances de pouvoir être adaptée en une preuve de la conjecture générale, puisque les orbites de Reeb qu'elle produit sont systématiquement contractiles.

Afin de mieux saisir la portée du théorème 3.5.1, il pourrait s'avérer fructueux de chercher à comprendre quelles sont les variétés de contact satisfaisant ses hypothèses, ou du moins d'en trouver des exemples connus. On peut aussi se demander comment l'attachement d'une anse critique sur le bord de la page modifie la variété de contact, par exemple lorsque l'on étend la monodromie par l'identité sur l'anse.

Le corollaire 3.4.6 ouvre également des pistes de réflexion intéressantes. L'essentiel des moyens connus pour déplacer la co-âme emploient en effet des twists de Dehn symplectiques ; il semble donc pertinent de s'interroger sur l'existence de symplectomorphismes Ψ préservant la classe d'homologie de la co-âme C, mais tels qu'il n'existe pas d'isotopie hamiltonienne reliant C à $\Psi(C)$.

Table des figures

1 Forme de contact standard sur $\mathbb{R}^3$ 9
2 Flot de Reeb sur la sphère de contact standard. 11
3 Représentation de l'attachement d'une anse le long de Λ. 13
4 Représentation schématique de l'attachement d'une anse. 14

1.1 Projection frontale de λ_0. 23
1.2 Projection frontale de Λ_0. 24
1.3 Étrécissement d'une carte lâche. 25
1.4 Exemple de cobordisme de Weinstein avec un unique point critique. 29
1.5 Un élement de $\mathcal{M}_A^{V,\Gamma}(c';\gamma)$. 39
1.6 Des éléments de $\mathcal{M}_A^{X,L}(\gamma)$, $\mathcal{M}_A^{X,L}(\gamma;c)$, et $\mathcal{M}_A^{X,(L,C)}(c';c)$. 40
1.7 Dégénérescence intérieure : apparition d'un nœud. 41
1.8 Les trois types de dégénérescence possibles au bord. 42
1.9 Bâtiment holomorphe à trois étages. 43

2.1 Perturbation générique d'une carte lâche. 46
2.2 Front de Λ dans la carte lâche perturbée. 47
2.3 Projection lagrangienne de Λ dans la carte lâche perturbée. 49
2.4 Modèle de l'anse. 51
2.5 La co-sphère S_x et la sphère S_y. 52
2.6 Déformation de l'anse. 54
2.7 Construction de Y_Λ par recollement. 56
2.8 Modèle d'une anse aplatie. 58
2.9 L'orbite $\tilde{c}$ et les cordes c, c'. 59
2.10 Le disque holomorphe v_1. 60
2.11 Segment de $\mathcal{M}_{A'}^{X,(L,C)}(c';c)$ contenant v_1. 62
2.12 Un segment de $\mathcal{M}_{B'}^{X,L}(\tilde{c})$. 64
2.13 Rétraction de l'anse sur $C \cup (H_\varepsilon \cap \tilde{V}_{+\varepsilon})$. 64
2.14 La surface $\Sigma' = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. 65
2.15 Projections frontale et lagrangienne dans la carte lâche. 66
2.16 Étude de $\partial\Sigma$ à homotopie près dans $H_\varepsilon \setminus L$. 68
2.17 Procédure d'étirement du cou. 71

3.1 Représentation schématique d'un livre ouvert. 74
3.2 Construction du livre ouvert (W, Ψ). 80
3.3 Le chemin (f, g) et sa perturbation $(f_\varepsilon, g_\varepsilon)$. 82
3.4 Feuilletage holomorphe de $\mathbb{R} \times M$ 86
3.5 Le chemin (f, g) vérifiant les conditions plus restrictives (6a) et (6b). 87
3.6 Homotopie de deux applications asymptotiquement cylindriques. 95
3.7 Brisure la long d'une orbite de Reeb contractile. 100

Bibliographie

[Abb14] Casim Abbas. *An introduction to compactness results in symplectic field theory.* Springer, Heidelberg, 2014. 33, 41

[ACH04] C. Abbas, K. Cieliebak, and H. Hofer. The Weinstein Conjecture for Planar Contact Structures in Dimension Three. *ArXiv Mathematics e-prints*, September 2004. 12

[AG01] V. I. Arnol′d and A. B. Givental′. Symplectic geometry [MR0842908 (88b :58044)]. In *Dynamical systems, IV*, volume 4 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 1–138. Springer, Berlin, 2001. 23

[AH09] Peter Albers and Helmut Hofer. On the Weinstein conjecture in higher dimensions. *Comment. Math. Helv.*, 84(2) :429–436, 2009. 12

[AL94] Michèle Audin and Jacques Lafontaine, editors. *Holomorphic curves in symplectic geometry*, volume 117 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. 31

[BEE] Frédéric Bourgeois, Tobias Ekholm, and Yakov Eliashberg. Critical weinstein handle attachment and low energy holomorphic curves. *Ã paraître.* 14, 15, 50, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60

[BEE12] Frédéric Bourgeois, Tobias Ekholm, and Yasha Eliashberg. Effect of Legendrian surgery. *Geom. Topol.*, 16(1) :301–389, 2012. With an appendix by Sheel Ganatra and Maksim Maydanskiy. 26, 40

[BEH+03] F. Bourgeois, Y. Eliashberg, H. Hofer, K. Wysocki, and E. Zehnder. Compactness results in symplectic field theory. *Geom. Topol.*, 7 :799–888, 2003. 32, 33, 34, 37, 41, 49, 70, 75

[Bou02] Fréderic Bourgeois. *A Morse-Bott approach to contact homology.* ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2002. Thesis (Ph.D.)–Stanford University. 77

[Bou03] Frédéric Bourgeois. *Introduction to contact homology.* Lecture notes, 2003. 22

[Bou11] Frédéric Bourgeois. Lectures on symplectic and contact homology. In *Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2010*, pages 1–20. Int. Press, Somerville, MA, 2011. 57

[CE12] Kai Cieliebak and Yakov Eliashberg. *From Stein to Weinstein and back*, volume 59 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. Symplectic geometry of affine complex manifolds. 13, 26, 30, 51

[CH13] Vincent Colin and Ko Honda. Reeb vector fields and open book decompositions. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 15(2) :443–507, 2013. 12

[CV15] Kai Cieliebak and Evgeny Volkov. First steps in stable Hamiltonian topology. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(2) :321–404, 2015. 75

[CZ83] C. C. Conley and E. Zehnder. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnol′d. *Invent. Math.*, 73(1) :33–49, 1983. 32

[DR16] Georgios Dimitroglou Rizell. Lifting pseudo-holomorphic polygons to the symplectisation of $P \times \mathbb{R}$ and applications. *Quantum Topol.*, 7(1) :29–105, 2016. 47, 49, 66

[Dra03] Dragomir Lefterov Dragnev. *Fredholm theory and transversality for noncompact pseudoholomorphic curves in symplectizations*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2003. Thesis (Ph.D.)–New York University. 43, 77

[EES05a] Tobias Ekholm, John Etnyre, and Michael Sullivan. The contact homology of Legendrian submanifolds in $\mathbb{R}^{2n+1}$. *J. Differential Geom.*, 71(2) :177–305, 2005. 48

[EES05b] Tobias Ekholm, John Etnyre, and Michael Sullivan. Non-isotopic Legendrian submanifolds in $\mathbb{R}^{2n+1}$. *J. Differential Geom.*, 71(1) :85–128, 2005. 38, 47, 48, 49

[Ekh08] Tobias Ekholm. Rational symplectic field theory over $\mathbb{Z}_2$ for exact Lagrangian cobordisms. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 10(3) :641–704, 2008. 37

[ET98] Yakov M. Eliashberg and William P. Thurston. *Confoliations*, volume 13 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. 80

[Gay06] David T. Gay. Four-dimensional symplectic cobordisms containing three-handles. *Geom. Topol.*, 10 :1749–1759, 2006. 12

[Gei] Hansj Geiges. *An introduction to contact topology*. 11, 19, 20, 26, 29, 31, 73, 79, 80, 97

[Gir02] E. Giroux. Géométrie de contact : de la dimension trois vers les dimensions supérieures. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, II (Beijing, 2002), 2002. 12, 73, 74, 75

[Gut] Jean Gutt. The conley-zehnder index for a path of symplectic matrices. *arXiv : 1201.3728*. 32, 33

[Hof] H. Hofer. Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the weinstein conjecture in dimension three. *Inventiones mathematicae*, 114(1) :515–563. 11

[HT09] Michael Hutchings and Clifford Henry Taubes. The Weinstein conjecture for stable Hamiltonian structures. *Geom. Topol.*, 13(2) :901–941, 2009. 12, 75

[Hut10] Michael Hutchings. Taubes's proof of the Weinstein conjecture in dimension three. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 47(1) :73–125, 2010. 10

[HZ11] Helmut Hofer and Eduard Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2011. Reprint of the 1994 edition. 75

[KK98] G. Kuperberg and K. Kuperberg. Generalized counterexamples to the Seifert conjecture. *ArXiv Mathematics e-prints*, February 1998. 10

[Kup94] Krystyna Kuperberg. A smooth counterexample to the Seifert conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 140(3) :723–732, 1994. 10

[Lau04] François Laudenbach. Symplectic geometry and Floer homology. In *Symplectic geometry and Floer homology. A survey of the Floer homology for manifolds with contact type boundary or symplectic homology*, volume 7 of *Ensaios Mat.*, pages 1–50. Soc. Brasil. Mat., Rio de Janeiro, 2004. 32

[Mil63] J. Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963. 27

[MS98] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, 1998. 19, 33

[MS12] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *J-holomorphic curves and symplectic topology*, volume 52 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2012. 33

[Mur] Emmy Murphy. Loose Legendrians embeddings in high dimensional contact manifolds. *arXiv : 1201.2245*. 24, 25, 92

[Nie06] Klaus Niederkrüger. The plastikstufe—a generalization of the overtwisted disk to higher dimensions. *Algebr. Geom. Topol.*, 6 :2473–2508, 2006. 12

[NR11] Klaus Niederkrüger and Ana Rechtman. The Weinstein conjecture in the presence of submanifolds having a Legendrian foliation. *J. Topol. Anal.*, 3(4) :405–421, 2011. 12

[RS93] Joel Robbin and Dietmar Salamon. The Maslov index for paths. *Topology*, 32(4) :827–844, 1993. 32

[Sal99] Dietmar Salamon. Lectures on Floer homology. In *Symplectic geometry and topology (Park City, UT, 1997)*, volume 7 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 143–229. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. 32

[Sie08] Richard Siefring. Relative asymptotic behavior of pseudoholomorphic half-cylinders. *Comm. Pure Appl. Math.*, 61(12) :1631–1684, 2008. 91, 92, 96

[Sie11] Richard Siefring. Intersection theory of punctured pseudoholomorphic curves. *Geom. Topol.*, 15(4) :2351–2457, 2011. 91, 92, 93, 96

[Tau06] C. H. Taubes. The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture. *ArXiv Mathematics e-prints*, October 2006. 11, 12

[Vau11] Anne Vaugon. *Étude dynamique des champs de Reeb et propriétés de croissance de l'homologie de contact*. Thèse de doctorat, 2011. 14, 57

[Wei79] Alan Weinstein. On the hypothesis of rabinowitz' periodic orbit theorems. *J. Differential Equations*, 33 :353–358, 1979. 10

[Wena] Chris Wendl. Holomorphic curves in blown up open books. *arXiv : 1001.4109*. 14, 87, 91

[Wenb] Chris Wendl. Lectures on symplectic field theory. *arXiv : 1612.01009v2*. 44, 97

[Wen10a] Chris Wendl. Automatic transversality and orbifolds of punctured holomorphic curves in dimension four. *Comment. Math. Helv.*, 85(2) :347–407, 2010. 39, 40, 75, 76, 77, 79

[Wen10b] Chris Wendl. Open book decompositions and stable Hamiltonian structures. *Expo. Math.*, 28(2) :187–199, 2010. 14, 16, 73, 79, 80, 84, 85

[Wen15] Chris Wendl. Lectures on Holomorphic Curves in Symplectic and Contact Geometry (version 3.3). 2015. 33, 43, 44, 94, 97

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

UNIVERSITÉ DE NANTES

Thèse de Doctorat

Guillaume Roux

Un cas particulier de la conjecture de Weinstein en grande dimension

A particular case of the high-dimensional Weinstein conjecture

Résumé
Cette thèse étudie la conjecture de Weinstein dans le cas de certaines variétés de contact de dimension supérieure ou égale à 5. Cette conjecture, qui affirme que tout champ de Reeb sur une variété close orientée possède une trajectoire périodique, a été démontrée par Taubes pour toute variété de dimension 3. Dans ce texte, on en présente une preuve pour les variétés de contact portées par un livre ouvert dont la page est obtenue, à partir d'un certain domaine de Weinstein, en attachant une anse le long d'une sphère legendrienne lâche et homologiquement triviale.
Dans une première partie, on examine la situation dans la page. L'attachement d'une anse correspond à effectuer une chirurgie de contact sur le bord, ce qui provoque l'apparition d'une petite orbite de Reeb pour une forme de contact particulière. On s'intéresse alors aux propriétés d'une famille de plans holomorphes asymptotes à cette orbite.
Dans une deuxième partie, on prouve que les pages du livre ouvert se relèvent en un feuilletage de la symplectisation par des hyperplans holomorphes, relativement à une structure hamiltonienne stable adaptée. On montre ensuite que cette dernière se déforme en une structure de contact portée par le livre ouvert. Cela permet d'obtenir une description des plans holomorphes au voisinage d'une page donnée, puis de montrer que ces plans se brisent le long d'une orbite de Reeb contractile.

Mots clés
Géométrie de contact, Conjecture de Weinstein, Champ de Reeb, Attachement d'anse, Livre ouvert, Sphère legendrienne lâche, Feuilletage holomorphe, Plans holomorphes.

Abstract
We study the Weinstein conjecture for some high dimensional contact manifolds. This conjecture asserts that every Reeb vector field on a closed oriented manifold has a closed orbit, and was proved by Taubes for every three manifold. We show that this statement holds for contact manifolds supported by an open book decomposition, when the page is obtained from a Weinstein domain by attaching a Weinstein handle along a loose, Legendrian, homologically trivial sphere. Attaching such a handle performs a contact surgery on the boundary of the domain, which leads to the creation of a small Reeb orbit for some particular contact form. In a first part, we study the properties of a family of holomorphic planes asymptotic to this orbit.
In a second part, we show that the open book decomposition gives rise to a foliation of the symplectisation by holomorphic hypersurfaces, with respect to a suitable stable Hamiltonian structure. The latter can be perturbed into a contact structure supported by the open book decomposition. It allows us to describe a family of holomorphic planes near a given page, thus showing that these planes break along a contractible Reeb orbit.

Key Words
Contact geometry, Weinstein conjecture, Reeb vector field, Handle attachment, Open book decomposition, Loose Legendrian sphere, Holomorphic foliation, Holomorphic planes.

L'UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE