



**HAL**  
open science

# Modélisation de l'hystérésis dynamique dans les ferroélectriques

Benjamin Ducharne

► **To cite this version:**

Benjamin Ducharne. Modélisation de l'hystérésis dynamique dans les ferroélectriques. Sciences de l'ingénieur [physics]. L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et L'Université Claude Bernard Lyon I, 2015. tel-01566958

**HAL Id: tel-01566958**

**<https://hal.science/tel-01566958>**

Submitted on 21 Jul 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Présentée devant

L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Et

L'Université Claude Bernard Lyon I

Modélisation de l'hystérésis dynamique dans les ferroélectriques

PAR

DUCHARNE, Benjamin

Soutenue le 17/12/2015 devant la Commission d'Examen

JURY

Pr. Noel Burais

Dr. Manuel Collet (rapporteur)

Pr. Jean-François Deu

Pr. Patrick Dular (rapporteur)

Pr. Daniel Guyomar

Pr. Xavier Mininger (rapporteur)

Mcf Hdr Marie-Ange Raulet

Laboratoire de Génie Electrique et Ferroélectricité, INSA de Lyon



**TABLE DES MATIERES**

---



<b>INTRODUCTION</b>	<b>5</b>
<b>CURRICULUM VITAE</b>	<b>8</b>
<b>LISTE DES PUBLICATIONS</b>	<b>19</b>
<b>MODELE DE L'HYSTERESIS DIELECTRIQUE DANS UNE CERAMIQUE PIEZO ELECTRIQUE</b>	<b>26</b>
Modèle d'hystérésis quasi-statique diélectrique	30
Contribution dynamique	39
Dérivée fractionnaire	40
Prise en compte de la contrainte mécanique	45
Cas des lois d'échelles (évolution de l'aire du cycle en fonction de la fréquence)	47
<b>MODELE INVERSE : CONTROLE DE LA POLARISATION ET DU DEPLACEMENT SOUS CHAMP ELECTRIQUE ET SOUS CONTRAINTE MECANIQUE</b>	<b>54</b>
Modèle inverse	55
Contribution quasi-statique inverse	56
Contribution dynamique	57
Contrôle de la polarisation sous champ électrique	57
Contrôle de la déformation sous champ électrique	60
Contrôle de la polarisation sous contrainte mécanique	63
Cas du creep mécanique	67
<b>CARACTERISATION DES CERAMIQUES PIEZO-ELECTRIQUES</b>	<b>71</b>
<b>APPLICATION : RECUPERATION D'ENERGIE CYCLE D'ERICSSON</b>	<b>78</b>
Introduction de la technique et de ses applications	79
Technique des cycles d'Ericsson pour la récupération d'énergie, synchronisation champ électrique / contrainte mécanique	80
Simulation, résultats expérimentaux	81
Discussion et conclusion	84
<b>PROJET DE RECHERCHE</b>	<b>89</b>
Relation entre le modèle d'hystérésis fractionnaire et les modèles de la permittivité diélectrique de Cole-Cole et de Havriliak-Negami	90
Caractérisation des paramètres fractionnaires à l'impédance-mètre	95
Dynamique de pénétration du champ magnétique dans les ferromagnétiques doux à l'aide d'opérateurs fractionnaires	97
<b>CONCLUSION GENERALE</b>	<b>104</b>
<b>ANNEXE : Piézoélectricité et pyroélectricité</b>	<b>105</b>

***INTRODUCTION***

---

Mes activités de recherche concernent la caractérisation et la modélisation des couplages multi physiques dans les matériaux diélectriques. Pour être plus précis, c'est autour des matériaux ferroélectriques et piézoélectriques, que s'articulent mes recherches actuelles. Historiquement, les matériaux piézoélectriques ont, entre autres, fait l'objet de développements intensifs en tant que résonateurs et transducteurs pour l'acoustique sous-marine (sonars) et l'acoustique médicale (échographie). Depuis, de nombreux autres champs d'application se sont développés autour des capteurs (accéléromètres) et des actionneurs de précision. Plus récemment, une application potentielle concerne la récupération d'énergie pour l'auto alimentation des systèmes embarqués (systèmes sans batteries). Les matériaux piézoélectriques sont des céramiques, des monocristaux ou des polymères, chaque catégorie présentant des avantages et inconvénients en raison de leurs propriétés, leurs coûts, et leurs adaptabilités à leurs environnements (impédance acoustique par exemple). L'effet piézoélectrique se caractérise par la faculté qu'ont certaines familles de matériaux à générer des charges électriques lorsqu'on les soumet à une contrainte mécanique et à se déformer lorsqu'on leur applique une tension électrique. Seules les propriétés dites linéaires ont été utilisées pendant longtemps (déformation proportionnelle à la tension appliquée). Ce n'est plus le cas actuellement, en effet dans de nombreuses nouvelles applications de puissance comme la récupération d'énergie les niveaux de contraintes sont si forts que les non-linéarités ne peuvent plus être négligées. Ces non linéarités rendent les équations classiques de la piézoélectricité obsolètes et le besoin d'outils de modélisation et de compréhension nouveaux est important.

C'est en ce sens que j'ai été recruté au début de l'année 2005, avec comme cahier de charges la mise en place d'outils de simulation de l'hystérésis diélectrique à travers les céramiques piézoélectriques. Depuis la thèse de doctorat, mon activité a toujours été orientée autour de la modélisation des non linéarités dans les matériaux et plus particulièrement de l'hystérésis et de la dépendance en fréquence. J'ai soutenu ma thèse à la fin de l'année 2003 sous la direction du professeur J.P. Masson, celle-ci intitulée "Caractérisation et modélisation de circuits magnétiques: du global vers le local" s'orientait principalement autour de la modélisation de l'hystérésis dynamique à travers les tôles ferromagnétiques douces à l'origine des circuits magnétiques des dispositifs de conversion d'énergie. J'ai par la suite effectué cinq mois de post-doctorat à l'institut Montefiore de l'université de Liège en Belgique, sous la direction du directeur de recherche P. Dular et où j'ai eu

l'occasion de travailler sur l'intégration d'un modèle de l'hystérésis magnétique dans un logiciel de simulation électromagnétique par éléments finis.

La première partie de ce manuscrit est un Curriculum Vitae détaillé suivi de la liste complète de mes contributions en termes de publications et de participation à des conférences. Je présente ensuite mes apports à la thématique de la modélisation de l'hystérésis diélectrique statique et dynamique. Cette action de recherche a constitué le cœur de mon activité à l'INSA de Lyon depuis mon recrutement. Un troisième chapitre rassemble de façon condensée les principales autres thématiques auxquelles j'ai participé. Afin de rendre la lecture du manuscrit plus aisée, la partie scientifique de ce manuscrit ne comprend pas de premier chapitre général. Il a été préféré de renvoyer le lecteur à l'annexe I qui présente de façon générale les matériaux piézoélectriques. Enfin, une dernière partie présente mon futur projet de recherche.





## *CURRICULUM VITAE*

---

*Benjamin DUCHARNE*

MAITRE DE CONFERENCES A L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

#### ETAT CIVIL

**Date et lieu de naissance :** le 27 septembre 1978, à Roanne (Loire)

**Nationalité :** français

**Situation de famille :** marié, deux enfants

**Adresse personnelle :** 12 Avenue Piaton, 69100 Villeurbanne

**Adresse professionnelle :** INSA, 8 rue de la physique, 69621 Villeurbanne

**Téléphone professionnelle :** 04 72 43 88 33

**Mobile :** 06 75 38 78 93

**Adresse électronique :** benjamin.ducharne@insa-lyon.fr

9

#### CURSUS UNIVERSITAIRE

**2001-2003 :** Thèse de Doctorat de Génie Electrique, soutenue le 19 décembre 2003.

Sujet : « Caractérisation et modélisation de circuits magnétiques : du global vers le local »

Laboratoire : AMPERE, université Claude Bernard, Lyon 1.

Directeur de thèse : Jean-Pierre Masson, Professeur à l'université Claude Bernard Lyon1.

Jury : R. Barrué, Professeur à l'ENS Cachan.  
F. Fiorillo, Professeur à l'Instituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, Torino.  
JP. Masson, Professeur à l'UCB Lyon1.  
A. Kedous-Lebouc, Directeur de recherche au G2E Lab de Grenoble.  
M.A. Raulet, Maître de conférences à l'UCB Lyon1.  
T. Waeckerle, Ingénieur recherche, Aperam alloys Imphy.

**2001** DEA de Génie Electrique

Sujet : « Caractérisation des matériaux magnétiques doux du génie électrique, par le bruit de Barkhausen ».

Université Claude Bernard Lyon 1, mention B.

**2000** Maîtrise « Electronique Electrotechnique, Automatique ».

**1999** Licence « Ingénierie Electrique », mention AB.

**1998** DUT « Génie Industriel et Maintenance », mention AB.

**1996** Baccalauréat « Science de la vie et de la terre ».

## PARCOURS

**Depuis 2005** : **Maître de conférences** à l'Institut national des sciences appliquées de Lyon,  
Enseignement au département de Génie Electrique  
Recherche au laboratoire de Génie Electrique et Ferroélectricité.

**2004-2005** : **Post Doctorant** à l'institut Montefiore de Liège, Belgique.  
Sujet : « Intégration d'un modèle de circuit magnétique dans un logiciel de résolution numérique ».

**2001-2004** : **Moniteur** à l'université Claude Bernard Lyon1.

**1998-2001** : **Tuteur** à l'université Claude Bernard Lyon1.

## ACTIVITE D'ENSEIGNEMENT

**Depuis février 2005**, j'enseigne principalement au département de Génie Electrique de l'INSA de Lyon. J'interviens principalement en formation initiale, dans les domaines suivants :

- \_ Electrotechnique (TD/TP, 3<sup>ème</sup> année)
- \_ Transfert thermique (TD/TP, 3<sup>ème</sup> année)
- \_ Projet de réalisation technologique (4<sup>ème</sup> année)
- \_ Mesure automatique et productique (TP 3<sup>ème</sup> année)

Dans ce cadre, j'ai pris depuis 2010 la responsabilité du module Projet de réalisation technologique et j'ai animé un travail de réorganisation de cette matière avec l'équipe pédagogique.

Toujours à l'INSA de Lyon, et toujours au département de Génie Electrique, j'interviens dans la formation par alternance dans les domaines suivants :

- \_ Electrotechnique (TP)
- \_ Transfert thermique (TP)

Dans ce cadre, je suis le tuteur pédagogique de 3 étudiants alternants.

D'autre part et toujours à l'INSA de Lyon, j'interviens également au département du premier cycle, dans le cadre des travaux pratiques d'électromagnétisme et d'électrocinétique de première et deuxième année.

Depuis septembre 2009, je donne également à l'université Claude Bernard un cours intitulé « Dispositifs piézoélectriques, capteurs, actionneurs, moteurs piézoélectriques » dans le cadre du

master Contrôle et Supervision des Systèmes d'Energie ». Et Depuis septembre 2013, je donne un autre cours intitulé « Interfaçage des Capteurs » dans la même formation. Je participe également dans cette formation à des activités d'encadrement pédagogique d'étudiants alternants (2 à 4 étudiants / an).

**Période 2001-2004** : pendant ma thèse, j'ai occupé les fonctions de moniteur. Durant cette période, j'ai enseigné à l'université Claude Bernard où j'ai pu intervenir notamment dans les disciplines suivantes : Electronique, Electrotechnique, Physique, et Informatique. J'ai également participé à la mise en place d'un enseignement multimédia innovant en Génie Electrique (Clickelec) par la mise au point d'un module spécialisé.

L'enseignement a été donné principalement à des étudiants de niveau Bac+2, dans les formations suivantes :

- \_ Deug « Science et Technique pour l'Ingénieur «
- \_ Licence « Ingénierie Electrique »
- \_ Deug « Science de la matière »

Toujours dans le cadre du monitorat, j'ai également effectué des travaux pratiques d'électronique à L'Institut Universitaire de Technologie B « Génie Electrique et Informatique Industriel » de Villeurbanne.

**Période 1998-2001** : Pendant mes 3 années universitaires à l'université Claude Bernard Lyon1, j'ai participé à des activités de tutorat. Le tutorat est un service mis en place par l'université Claude Bernard Lyon1 pour venir en aide (soutien scolaire) aux étudiants de premier cycle. Tuteur pendant 2 ans, puis tuteur pilote pendant mon DEA je m'occupais entre autre de la répartition des heures d'enseignement.

#### ACTIVITES LIEES A L'ENSEIGNEMENT

Du 20 au 28 juin 2015, j'ai eu l'occasion de partir enseigner l'électrotechnique à l'université anglophone de Buéa au Cameroun. Cette semaine doit permettre la mise en place d'accord de coopération entre l'INSA et l'université de Buéa, je souhaite dans un futur proche m'impliquer fortement dans cette coopération.

Depuis 2010, je suis responsable du module d'enseignement 4<sup>ème</sup> année du département Génie Electrique de l'INSA de Lyon : « projet de réalisation technologique ».

Depuis 2010, je m'occupe des grilles de rotation de travaux pratiques des étudiants de 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> année du département de Génie Electrique de L'INSA de Lyon.

Depuis 2008, je suis président d'un jury de projet de fin d'étude 5<sup>ème</sup> année du département Génie Electrique de l'INSA de Lyon.

Depuis 2005, je participe activement aux entretiens de recrutement des étudiants de 1<sup>ère</sup> et 3<sup>ème</sup> année à l'INSA de Lyon.

Depuis 2005, je participe régulièrement à des salons à la promotion de l'INSA de Lyon.

#### ACTIVITES LIEES A LA RECHERCHE

De mars à juin 2015, j'ai accueilli le professeur G. Litak « professeur invité » de l'université technologique de Lublin. Cette collaboration a donné lieu à la soumission d'un article dans la revue internationale « Journal of applied physics » ainsi qu'à une participation dans une conférence internationale (Slovénie 2015).

En 2014 et 2015, je suis responsable de candidatures « Projet Hubert Curien », Utique (avec la faculté des sciences de Sfax (Tunisie), Maghreb (avec la faculté des sciences de Sfax (Tunisie), l'université Badji Mokhtar d'Annaba (Algérie), le laboratoire de la Matière Condensée et Nanostructures de Marrakech (Maroc)) et Polonium (avec l'université technologique de Lublin (Pologne)).

En 2013, je suis responsable d'un contrat de recherche « caractérisation vibratoire d'une cave à vin » avec la société Eurocave.

De 2008-2010, J'ai été fortement impliqué dans le projet de collaboration entre le LGEF et la faculté de Médecine de l'université Jean Monnet de Saint-Etienne, sur l'effet piézoélectrique des cellules ostéoformatrices. Ce projet a notamment donné lieu à la thèse de Virginie Dumas

En 2009, j'ai été membre de la commission de Spécialistes 63<sup>ème</sup> de l'INSA de Lyon.

## RESUME DES ACTIVITES D'ENCADREMENT

### *Thèses*

**Bin Zhang** (encadrement à 50%, Directeur : Daniel Guyomar).

« Model for coupled ferroelectric hysteresis using time fractional operators: Application to innovative energy harvesting. », soutenue le 2 juillet 2014.

Actuellement, Assistant Professor à Shandong University (Chine).

Production scientifique : 5 articles de revues internationales, 4 conférences internationales.

**Virginie Dumas** (encadrement à 25%, Directeurs : Laurence Vico et Daniel Guyomar)

« Réponse des ostéoblastes à des stimulations physiques basées sur des contraintes mécaniques basses amplitudes hautes fréquences. Implication en ingénierie tissulaire. » soutenue le 19 mars 2010. Production scientifique : 2 articles de revues internationales.

### *Stages Master recherche*

**Bin Zhang** (encadrement à 100%)

Master recherche, parcours Génie Electrique, INSA de Lyon.

« Characterization and modeling of a piezo ceramic under mechanical stress excitation. », soutenue le 1 septembre 2011.

**Cottinet Pierre-Jean** (encadrement à 50%)

Master recherche, parcours Acoustique, INSA de Lyon.

« Récupération d'énergie à l'aide de nano composite polymère. », soutenue le 3 septembre 2008.

## RESUME DES ACTIVITES DE RECHERCHE

Mes activités de recherche ont débuté dans le domaine de la caractérisation et la modélisation des tôles magnétiques douces. Durant ma thèse, de 2001 à 2004, j'ai mis au point de nouvelles techniques de modélisation de l'hystérésis statique et dynamique afin de rendre compte précisément des lois de matériaux dans des simulateurs de type « Spice » nécessaires au développement entre autre des disjoncteurs différentiels.

Lors de mon stage Post doctoral à l'Institut Montefiore de Liège en Belgique, j'ai pu continuer à travailler sur l'amélioration des modèles développés pendant ma thèse et à commencer leur intégration dans le logiciel de résolution par éléments finis GetdP.

Finalement depuis 2005 et mon intégration au laboratoire de Génie Electrique et Ferroélectricité de l'INSA de Lyon, j'ai travaillé entre autres sur la mise au point d'un modèle comportemental de l'hystérésis dynamique des céramiques piézoélectriques. J'ai travaillé également sur l'utilisation de la dérivation fractionnaire pour le développement de modèles à constantes localisés des matériaux diffusifs et relaxeurs (prise en compte de l'hystérésis dynamique). J'ai eu également l'occasion de travailler sur la mise au point de techniques non linéaire de récupération d'énergie et de compensation du facteur de puissance. Finalement, j'ai travaillé en partenariat avec le laboratoire de Biologie du Tissu Osseux, de l'université de Saint-Etienne à l'étude de l'influence des contraintes mécaniques basses fréquences sur les cellules ostéoblastes.

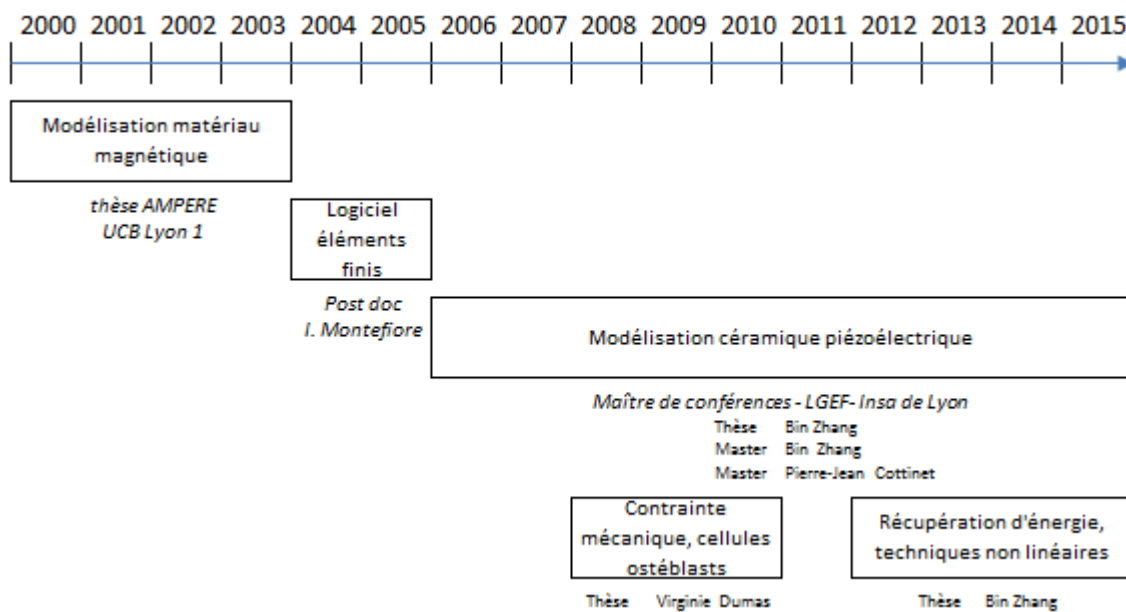


Figure 1. Historique de mes activités de recherche.

### **Modélisation et caractérisation des matériaux magnétiques doux.**

Mes activités de recherche ont débuté au laboratoire Ampère à l'université Claude Bernard Lyon1. J'y ai effectué mon stage de DEA en 2001, puis ma thèse entre 2001 et 2003, dans l'équipe matériaux magnétiques sous la direction du professeur Jean-Pierre Masson. Mon DEA a porté sur la caractérisation des tôles magnétiques douces grâce aux bruits hautes fréquences de Barkhausen, liée

aux mouvements des parois des domaines magnétiques. Le sujet de ma thèse était la modélisation et la caractérisation de l'hystérésis dans les matériaux magnétiques doux. La modélisation complète des systèmes électromagnétiques implique la prise en compte de l'ensemble des lois physiques qui régissent les phénomènes. L'utilisation de lois empiriques pour la représentation des circuits magnétiques est suffisante pour des études de dimensionnement des machines électriques. Cependant ces méthodes ne sont pas suffisamment rigoureuses pour le calcul des pertes et la reconstitution des formes d'ondes des grandeurs magnétiques et électriques. L'étude locale des circuits magnétiques est nécessaire quant à la détermination et à la prédiction des zones sensibles d'un circuit magnétique. J'ai proposé pendant mon doctorat une contribution à la caractérisation globale et locale des circuits magnétiques. Ces caractérisations ont comme objectif final le renseignement des modèles et la validation expérimentale de ceux-ci. En privilégiant dans la modélisation la représentation du comportement des matériaux magnétiques (hystérésis dynamique, diffusion...) par rapport aux considérations géométriques sur les circuits, nous recherchons des signatures électriques et magnétiques plus réalistes. Les résultats obtenus initialement pour des géométries très simplifiées, sont progressivement étendus à des formes plus complexes. Les résultats de mes travaux de thèse ont donné lieu à un article de revue internationale [26], deux articles de revue nationale [23][24] et six conférences internationales.

***Intégration des lois comportementales des matériaux magnétiques dans un logiciel du type éléments finis.***

J'ai, à la suite de ma thèse, effectué cinq mois de post doctorat, de septembre 2004 à janvier 2005, à l'institut Montefiore de Liège en Belgique, sous la direction du directeur de recherche Patrick Dular. Ce projet de recherche avait comme objectif l'intégration de l'hystérésis et des lois comportementales des matériaux magnétiques au sein d'un calculateur numérique par éléments finis. La modélisation dynamique précise temporelle et locale de l'induction magnétique dans les systèmes électromagnétiques est régie par les équations de Maxwell. Dès l'instant où des champs d'excitation magnétiques circulent dans des objets ferromagnétiques, le champ d'induction n'est plus relié linéairement au champ d'excitation et pour modéliser correctement les systèmes il faut tenir compte de l'ensemble des linéarités. De même, pour modéliser précisément et localement les pertes et donc les échauffements chaque nœud du maillage par élément fini doit présenter sa propre mémoire magnétique et donc son propre hystérésis dynamique.



Je n'ai malheureusement pas pu aller jusqu'au bout du projet lors de ce stage qui devait durer deux ans au départ mais qui a été écourté en raison de ma nomination comme maître de conférences à l'INSA de Lyon. Toutefois, les cinq mois effectués ont permis de bien amorcer le projet et ont donné lieu à deux articles dans le proceeding de conférences internationales, de plus mes travaux ont été repris quelques années plus tard et ont à nouveau donné lieu à un article dans le proceeding d'une autre conférence internationale.

### ***Modélisation de l'hystérésis diélectrique statique dans les céramiques piézoélectriques.***

A mon arrivée au laboratoire de Génie Electrique et Ferroélectricité de l'INSA de Lyon mon premier travail s'est focalisé sur la modélisation quasi-statique et sous champ électrique de l'hystérésis diélectrique des céramiques piézoélectriques. Cette modélisation est nécessaire dans le cas d'application du type asservissement précis de position type sondes microscopiques. En effet, dans la modélisation de ce type d'applications où les déplacements sont lents mais doivent être parfaitement maîtrisés, toutes les non-linéarités basses fréquences des matériaux doivent être prises en compte (hystérésis quasi-statique, creep ...). Un modèle basé sur l'analogie entre le mouvement des parois des domaines ferroélectriques et des frottements secs a été mis en place. Ces mouvements sont à l'origine des pertes par hystérésis quasi-statique à travers la céramique piézoélectrique. Le modèle développé permet une modélisation correcte de l'hystérésis obtenu sous des contraintes de fortes amplitudes. Il permet également de simuler l'évolution du coefficient de permittivité diélectrique en fonction du niveau de polarisation de la céramique. L'évolution de ce coefficient est obtenue en mesurant la variation de polarisation à travers la céramique excitée par de faibles amplitudes de champ électrique. Ces travaux ont donné lieu à deux articles de revues internationales [19][22] ainsi que deux articles dans le proceeding de conférence internationales.

### ***Effet de stimulations mécaniques et/ou électriques sur l'activité de cellules ostéoformatrices : Implication en Ingénierie tissulaire.***

Une année après mon arrivée au laboratoire du LGEF et en parallèle à mes activités de modélisation des céramiques piézoélectriques, il m'a été demandé d'encadrer la partie technique de la thèse de Virginie Dumas. L'objectif de cette étude était de démontrer que le tissu osseux possède des caractéristiques piézoélectriques, en effet il a été démontré pendant cette étude que la réponse ostéoblastique n'est pas seulement dépendante de stimuli séparés, déformation mécanique et champ électrique, mais d'un effet piézoélectrique couplant les deux stimulations. Le terme de cette étude est

de définir des biomatériaux ayant des propriétés piézoélectriques ou incluant des éléments piézoélectriques capables d'accélérer et de contrôler l'ostéogenèse par stimulation mécanique ou/et électrique. Cette étude a donné lieu à la publication d'un article dans une revue internationale [12].

### ***Modélisation de l'hystérésis diélectrique dynamique dans les céramiques piézoélectriques à l'aide de la dérivée fractionnaire.***

Au-delà de la limite quasi-statique, les matériaux ferroélectriques présentent un cycle d'hystérésis qui dépend fortement de la fréquence. Cette dépendance a été clairement considérée dans le passé par l'écriture de lois d'échelle donnant l'évolution de l'aire du cycle comme une fonction de la fréquence et de l'amplitude du champ d'excitation. Les effets dynamiques dans une céramique piézoélectrique sont généralement modélisés par le produit d'une constante et de la dérivée temporelle de la polarisation, malheureusement cette considération conduit à la surévaluation de l'aire du cycle dès lors que l'on dépasse de deux décades la limite de fréquence quasi-statique. En remplaçant la dérivée entière temporelle par une dérivée fractionnaire nous avons réussi à augmenter fortement la bande de fréquence de validité de notre modèle. Cette étude a débuté au début de l'année 2008, j'ai testé avec succès l'opérateur fractionnaire pour différents types d'excitations (forme d'onde, amplitude ...). Celui-ci, couplé au modèle d'hystérésis statique a permis le contrôle de position boucle ouverte via la mise au point d'un modèle inverse. Finalement, lors du master et de la thèse de Bin Zhang nous avons vérifié l'universalité de la dynamique diélectrique et de l'utilisation de l'opérateur fractionnaire en modélisant avec succès l'effet d'une contrainte dynamique mécanique sur la polarisation diélectrique. Cette thématique est toujours au cœur de mes préoccupations, je travaille actuellement à établir le lien entre notre modélisation fractionnaire fort champ et les modèles fractionnaires de permittivité diélectrique de Cole-Cole et Havriliak-Negami. Je travaille également à l'exportation du modèle fractionnaire à constantes localisées pour la modélisation de l'ensemble des systèmes diffusifs et relaxeurs, tels que la diffusion du champ magnétique dans les milieux ferromagnétiques ou les problèmes de relaxation dans les polymères électrostrictifs. De nombreux articles dans des revues industrielles ainsi que dans des proceedings de revues internationales ont été publiés sur cette thématique [8]-[11], [13]-[18].

### ***Récupération d'énergie vibratoire***

Finalement et en parallèle à l'ensemble de mes activités de recherches précédentes, j'ai eu l'occasion lors de l'encadrement de la thèse de M. Bin Zhang de travailler à la mise en place d'une

technique de récupération d'énergie vibratoire originale dite des « Cycles d'Ericsson ». Cette technique est basée sur l'analogie entre une conversion électromécanique d'un convertisseur piézoélectrique et le cycle vertueux thermodynamique dit « d'Ericsson ». Le principe consiste à venir adjoindre une source de champ électrique supplémentaire synchronisée sur la contrainte mécanique extérieure afin d'augmenter artificiellement le cycle de récupération d'énergie et donc le rendement de la conversion. Cette technique a été proposée pour augmenter les rendements dans des applications du type « route piézoélectrique » dont le principe est de récupérer de l'énergie suite au passage des véhicules. Deux articles dans des revues internationales ainsi que deux dans les proceedings de conférences internationales ont été publiés sur cette thématique [3]-[11].

## *LISTE DES PUBLICATIONS*

---

Les publications marquées avec la mention «(T)» correspondent à la période de thèse de doctorat. L'astérisque « \* » à côté d'un nom d'auteur indique le chercheur qui a présenté les travaux lors d'une conférence.

## BIBLIOGRAPHIE

### Conférences invitées :

[1] **B. Ducharne**, G. Sebald, D. Guyomar, "Model for coupled ferroelectric hysteresis using time fractional operators: application to innovative energy harvesting", EMN Meeting on Ceramics, Orlando USA, 2015.

[2] **B. Ducharne**, D. Guyomar, G. Sebald, "Modèle couplé de l'hystérésis dynamique ferroélectrique à base de dérivées fractionnaires. Illustration de son efficacité sur une méthode de récupération d'énergie innovante", International Conference on Electrical Energy and Systems ICEES 2014, Annaba Algérie, 2014.

### Articles dans des revues internationales à comité de lecture :

[1] M. Lallart, G. Sebald, J.F. Capsal, **B. Ducharne**, D. Guyomar, "Modeling of hysteretic behavior in ferroelectric polymers", Journal of Polymer Science, Part B: Polymer Physics, accepted sept. 2015.

[2] **B. Ducharne**, G. Sebald, D. Guyomar, G. Litak "Dynamics of magnetic field penetration into soft ferromagnets", Journal of Applied Physics, pp. 243907, 2015.

DOI : [10.1063/1.4923162](https://doi.org/10.1063/1.4923162)

[3] B. Zhang, **B. Ducharne**, G. Sebald, D. Guyomar, "Characterization of fractional order for high-frequency bandwidth model of dielectric ferroelectrics", Journal of intelligent material systems and structures JIMSS, 2015.

DOI : [10.1177/1045389X14563866](https://doi.org/10.1177/1045389X14563866)

[4] D. Guyomar, R. Belouadah, **B. Ducharne**, B. Guiffard, M.Q. Le, K. Yuse, "Strain in ferroelectric polymers under low-frequency electric fields: Experiments and modeling", Journal of intelligent material systems and structures JIMSS, Vol. 25, Iss. 11, pp. 1323-1330, 2014.

DOI: [10.1177/1045389X13505250](https://doi.org/10.1177/1045389X13505250)

[5] B. Zhang, **B. Ducharne**, D. Guyomar, "Inverse model of the piezoelectric ceramic polarization under wide bandwidth mechanical excitations with fractional derivative consideration", Optical and quantum electronics, Vol. 46, Iss. 1, pp. 104-110, 2014.

DOI: [10.1007/s11082-013-9710-4](https://doi.org/10.1007/s11082-013-9710-4)

[6] B. Zhang, **B. Ducharne**, D. Guyomar, "Energy harvesting based on piezoelectric Ericsson cycles in a piezoceramic material", European Physical Journal – Special Topics, Vol. 222, Iss. 7, pp. 1733-1743, 2013.

DOI: [10.1140/epjst/e2013-01958-0](https://doi.org/10.1140/epjst/e2013-01958-0)

[7] D. Guyomar, Y. Li, G. Sebald, P.J. Cottinet, **B. Ducharne**, J.F. Capsal, "Elastocaloric modeling of natural rubber", Applied Thermal Engineering, Vol. 57, Iss. 1-2, pp. 33-38, 2013.

DOI: [10.1016/j.applthermaleng.2013.03.032](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2013.03.032)

[8] **B. Ducharne**, L. Garbuio, M. Lallart, D. Guyomar, G. Sebald, J.Y. Gauthier, "Nonlinear technique for energy exchange optimization in piezoelectric actuators", IEEE Transactions on power electronics, Vol. 28, Iss. 8, pp. 3941-3948, 2013.

DOI: 10.1109/TPEL.2012.2227813

[9] **B. Ducharne**, B. Zhang, D. Guyomar, G. Sebald, "Fractional derivative operators for modeling piezoceramic polarization behaviors under dynamic mechanical stress excitation", *Sensors and Actuators A-Physical*, Vol. 189, pp. 74-79, 2013.

DOI: 10.1016/j.sna.2012.09.033

[10] D. Guyomar, **B. Ducharne**, G. Sebald, "High nonlinearities in Langevin transducer: A comprehensive model", *Ultrasonics*, Vol. 51, Iss. 8, pp. 1006-1013, 2011.

DOI: 10.1016/j.ultras.2011.05.017

[11] G. Sebald, H. Kuwano, D. Guyomar, and **B. Ducharne**, "Experimental Duffing oscillator for broadband piezoelectric energy harvesting," *Smart Materials and Structures*, Vol.20, Iss. 10, n°102001, 2011.

DOI:10.1088/0964-1726/20/10/102001

[12] G. Sebald, H. Kuwano, D. Guyomar, and **B. Ducharne**, "Simulation of a Duffing oscillator for broadband piezoelectric energy harvesting," *Smart Materials and Structures*, Vol. 20, Iss. 7, n° 075022, 2011.

DOI: 10.1088/0964-1726/20/7/075022

[13] V. Dumas, **B. Ducharne**, A. Perrier, C. Fournier, A. Guignandon, M. Thomas, S. Peyroche, D. Guyomar, L. Vico, A. Rattner, "Extracellular Matrix Produced by Osteoblasts Cultured Under Low-Magnitude, High-Frequency Stimulation is Favourable to Osteogenic Differentiation of Mesenchymal Stem Cells", *Calcified Tissue International*, vol. 87, iss. 4, pp. 351-364, 2010.

DOI: 10.1007/s00223-010-9394-8

[14] D. Guyomar, **B. Ducharne**, G. Sebald, "The use of fractional derivation in modeling ferroelectric dynamic hysteresis behavior over large frequency bandwidth", *Journal of Applied Physics*, Vol. 107, Iss. 11, n° 114108, 2010.

DOI: 10.1063/1.3393814

[15] D. Guyomar, **B. Ducharne**, G. Sebald, "High frequency bandwidth polarization and strain control using a fractional derivative inverse model", *Smart Materials and Structures*, Vol. 19, Iss. 4, n °045010, 2010.

DOI: 10.1088/0964-1726/19/4/045010

[16] R. Belouadah, D. Kendil, E. Bousbiat, **B. Ducharne**, D. Guyomar, B. Guiffard, "Modeling of hysteresis phenomena in ferroelectric polymers in a low frequency Electric field", *Journal of Intelligent material systems and structures*, Vol. 20, Iss. 6, pp. 733-739, 2009.

DOI: 10.1177/1045389X08096257

[17] D. Guyomar, **B. Ducharne**, G. Sebald, D. Audigier, "Fractional derivative operator for modeling dynamical polarization behaviour as a function of frequency and electric field amplitude", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectricity and Frequency Control*, Vol. 56, Iss. 3, pp.437-443, 2009.

DOI: 10.1109/TUFFC.2009.1062

[18] D. Guyomar, **B. Ducharne**, G. Sebald, "Dynamical model of ferroelectric ceramics based on fractional derivation", *Revue internationale de Genie Electrique*, Vol. 12, n°4, pp. 501-514, 2009.

DOI: 27615, 35400017113417.0070

[19] **B. Ducharne**, G. Sebald, D. Guyomar, "Time fractional derivative for frequency effect in ferroelectrics", *Proceedings of the 18<sup>th</sup> IEEE International Symposium on the Applications of Ferroelectrics, ISAF 2009*, pp. 43-46, Xi'an China, 2009.

DOI: 10.1109/ISAF.2009.5307619

[20] D. Guyomar, **B. Ducharne**, G. Sebald, "Time fractional derivatives for voltage creep in ferroelectric materials: theory and experiment", *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 41, Iss. 12, 125410, 2008.

DOI: 10.1088/0022-3727/41/12/125410.

[21] D. Guyomar, **B. Ducharne**, G. Sebald, "Dynamical Model of ferroelectric ceramics based on fractional derivations: Synthesis", *REE Revue de l'électricité et de l'électronique*, pp. 82-89, 2008.

DOI: 135, 35400017132771.0080

[22] D. Guyomar, **B. Ducharne**, G. Sébald, "Dynamical hysteresis model of ferroelectric ceramics under electric field using fractional derivatives", *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 40, Iss. 19, pp. 6048-6054, 2007.

DOI: 10.1088/0022-3727/40/19/042

[23] **B. Ducharne**, D. Guyomar, G. Sebald, "Low frequency modelling of hysteresis behaviour and dielectric permittivity in ferroelectric ceramics under electric field", *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 40, iss. 2, pp. 551-555, 2007.

DOI: 10.1088/0022-3727/40/2/032

[24] Y. Bernard, H. Maalej, L. Lebrun, **B. Ducharne**, "Preisach modelling of ferroelectric behavior", *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, vol. 25, Iss. 1-4, pp. 729-733, 2007.

[25](T) P. Lagonotte, J.P. Masson, A. Kedous-Lebouc, R. Glises, **B. Ducharne**, and Y. Bertin, "Caractérisation du comportement magnétomécanique d'aciers électriques", *Revue Internationale de Génie Electrique - RIGE*, vol. 8, p. 185 à 203, 2005.

DOI :27615, 35400012493707.0010

[26](T) **B. Ducharne**, M.A. Raulet, and J.P. Masson, "Modélisation de circuits magnétiques inhomogènes : Cas d'une tôle à section variable", *Revue internationale de génie électrique*, vol. 8, no. 1, pp. 87-95, 2005.

DOI : 27615, 35400012571015.0070

[27](T) M. A. Raulet, **B. Ducharne**, J.P. Masson, and G. Bayada, "The magnetic field diffusion equation including dynamic hysteresis: a linear formulation of the problem", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 40, n° 2, pp. 872 – 875, 2004.

DOI: 10.1109/TMAG.2004.824816

**Conférences internationales :**

- [1] **B. Ducharne**, G. Sebald, D. Guyomar, G. Litak, "Dynamics of magnetic field penetration into the conducting magnet", International Symposium on Strong Nonlinear Vibronic and Electronic Interactions in Solids, Tartu, Estonia, 2015.
- [2] G. Litak, **B. Ducharne**, G. Sebald, "Responses of nonlinear energy harvester by means of recurrences", The sixth international recurrence plot symposium, Grenoble, France, 2015.
- [3] B. Zhang\*, **B. Ducharne**, G. Sebald, D. Guyomar, "Energy harvesting based on piezoelectric Ericsson Cycles in a Piezoceramic Material", International Symposium on the Applications of Ferroelectric ISAF, Pennsylvania USA, 2014.
- [4] **B. Ducharne\***, B. Zhang, G. Sebald, D. Guyomar, "Fractional operator for hysteresis and complexe Dielectric permittivity", International Symposium on the Applications of Ferroelectric ISAF, Pennsylvania USA, 2014.
- [5] **B. Ducharne\***, B. Zhang, G. Sebald, D. Guyomar, "High frequency bandwidth model for dielectric ferroelectrics", International Symposium on the Applications of Ferroelectric ISAF, Pennsylvania USA, 2014.
- [6] B. Zhang\*, **B. Ducharne**, D. Guyomar, "Inverse model of the piezoelectric ceramic polarization under wide bandwidth mechanical excitations with fractional derivative consideration", AMPSECA 2012, El Jadida Maroc, 2012.
- [7] R. Scorretti\*, R. Sabariego, F. Sixdenier, **B. Ducharne**, M.A. Raulet. "Integration of a new hysteresis model in the Finite Elements method". Computational Electromagnetics COMPUMAG 2011, Sydney Australia, 2011.
- [8] T. Chailloux\*, M.A. Raulet, C. Martin, C. Joubert, **B. Ducharne**, "Dynamic modelling of nanocrystalline material using fractional calculus taking into account temperature dependency", Soft magnetic materials, Kos Island, Greece, Septembre 2011.
- [9] G. Sebald, H. Kuwano\*, D. Guyomar, **B. Ducharne**, "Nonlinear dynamics for broadband piezoelectric energy harvesting", The 11th International Workshop on Micro and Nanotechnology for Power Generation and Energy Conversion Applications POWERMEMS 2011, Seoul South Korea, 2011.
- [10] G. Sebald, H. Kuwano\*, D. Guyomar, **B. Ducharne**, "Nonlinear dynamics for broadband piezoelectric energy harvesting", POWERMEMS 2011, Seoul South Korea, 2011.
- [11] **B. Ducharne**, G. Sebald, D. Guyomar\*, " Time fractional derivative for frequency effect in ferroelectrics", Proceedings of the 18th IEEE International Symposium on the Applications of Ferroelectrics, ISAF 2009, pp. 43-46, Xi'an China, 2009.
- DOI: [10.1109/ISAF.2009.5307619](https://doi.org/10.1109/ISAF.2009.5307619)
- [12] M.A. Raulet\*, **B. Ducharne**, D. Guyomar, "A novel mathematical approach using fractional derivatives to represent excess losses in magnetic materials", Soft Magnetic Materials 2009, Turin Italie, Septembre 2009.
- [13] **B. Ducharne\***, D. Guyomar, G. Sebald, L. Lebrun, K. Yuse, J. Qiu, "Modeling of ferroelectric materials: Stress/electrical field relationships on major and minor hysteretic loops", 16th International Conference on Adaptive Structures and Technologies ICAST, Paris France, 2005 (oral)
- [14] **B. Ducharne**, M.A. Raulet, J.P. Masson, P. Dular\*, "Local losses distribution through a 2D cross section", Computational Electromagnetics COMPUMAG 2005, Shenyang Chine, juin 2005.



[15] **B. Ducharne**, M.A. Raulet, J.P. Masson, P. Dular\*, “Local losses distribution through a 2D magnetic core cross section”, Computational Electromagnetics COMPUMAG 2005, Shenyang China, Juin 2005.

[16] H. Yahoui\*, A. Mouhoumed, **B. Ducharne**, S. Mylvaganam, F. Sixdenier, “Diagnostic of interturn defect in three phase system by studing hysteresis magnetic harmonics signatures”, ICEM International Conference on Electrical Machines, Cracow Pologne, Septembre 2004

[17] **B. Ducharne\***, J.P. Masson, R. Scoretti, B. Lefebvre, “Modélisation of a current sensor”, International Conference on Applied Electromagnetics and Mechanics, ISEM, Versailles France, Mai 2003.

[18] **B. Ducharne**, J.P. Masson\*, “A new magnetic structural characterization based on the Barkhausen technique”, Soft magnetic materials, SMM, Düsseldorf Germany, Septembre 2003.

[19] **B. Ducharne**, J.P. Masson\*, “Inversion of a magnetic field diffusion model”, Soft magnetic materials, SMM, Düsseldorf Germany, Septembre 2003.

[20] **B. Ducharne**, J.P. Masson\*, “B imposed characterization of the homogeneous magnetic circuits without feedback control”, Soft magnetic materials, SMM, Düsseldorf Germany, Septembre 2003.

[21] M. A. Raulet, **B. Ducharne\***, J.P. Masson, and G. Bayada, “The magnetic field diffusion equation including dynamic hysteresis: a linear formulation of the problem”, COMPUMAG, Saratoga Springs New-York USA, Juillet 2003.

[22] F. Sixdenier\*, **B. Ducharne**, L. Morel, J.P. Masson, “Coupled programming: finite elements – dynamical hysteresis flux tubes for non-homogeneous circuit modeling”, COMPUMAG, Saratoga Springs New-York USA, Juillet 2003.

[23] M.A. Raulet, **B. Ducharne\***, J.P. Masson, “Evaluation de cycles dynamiques locaux en tout point d’une section droite de tôle magnétique fonctionnant à flux imposé”, NUMELEC, Toulouse France, octobre 2003.

#### Conférences nationales :

[1] **B. Ducharne\***, B. Zhang, D. Guyomar, “Relation entre les opérateurs fractionnaires pour la modélisation de la polarisation diélectrique dynamique champ fort et de la permittivité diélectrique complexe”, Symposium de Génie Electrique MGE, Cachan France, 2014.

[2] B. Zhang\*, **B. Ducharne**, D. Guyomar, G. Sebald, “Energy harvesting based on Ericsson loop”, Quatrièmes Journées Nationales sur la Récupération et le Stockage d’Energie (JNRSE 2014), Annecy France, 2014.

[3] **B. Ducharne\***, D. Guyomar, G. Sebald, “Contrôle large bande de la déformation d’une céramique ferroélectrique en régime temporel par modèle inverse fractionnaire”, Matériaux du Génie Electrique MGE, Montpellier France, 2010.

[4] **B. Ducharne\***, D. Guyomar, G. Sebald, “Dynamical model of ferroelectric ceramics based on fractional derivation”, Conference on Materials for Electrical Engineering MGE, Toulouse France, 2008.

[5] **B. Ducharne**, D. Guyomar\*, G. Sebald, “Modélisation basse fréquence de l’hystérésis et de la permittivité diélectrique dans les céramiques ferroélectriques sous champ électrique”, Matériaux 2006, Dijon France, 2006.

[6] **B. Ducharne\***, D. Guyomar, “Modélisation basse fréquence des phénomènes d’hystérésis dans les céramiques piézoélectriques sous champ et sous contraintes”, Matériaux du Génie Electrique, Lyon France, 2005.

[7] **B. Ducharne\***, J.P. Masson, L. Model, M.A. Raulet, “Observation des possibilités de détermination d’un grand nombre d’information unique : le cycle majeur”, Matériaux du Génie Electrique, Grenoble France, 2003.

[8] **B. Ducharne\***, “Modélisation dynamique de circuits magnétiques – Synthèse”, Sixième conférence des jeunes chercheurs en Génie Électrique JCGE, Saint-Nazaire France, 2003.

*MODELE DE L'HYSTERESIS DIELECTRIQUE DANS UNE CERAMIQUE PIEZO-ELECTRIQUE*

---

## MODELE DE L'HYSTERESIS DIELECTRIQUE DANS UNE CERAMIQUE PIEZO-ELECTRIQUE

Dans la plupart des applications industrielles basées sur une conversion piézoélectrique, les niveaux d'excitations sont suffisamment faibles pour considérer comme linéaire les procédés de conversion et les comportements physiques. Pour de si faibles niveaux d'excitations, une céramique piézoélectrique est caractérisée par ces coefficients tensoriels : la permittivité, la compliance élastique et les coefficients piézoélectriques. Huit équations de couplage (quatre liées à l'effet direct et quatre à l'effet inverse) permettent de modéliser le comportement d'une céramique piézoélectrique dans de telles conditions :

$$\begin{aligned}
 D_m &= \varepsilon_{mk}^T E_k + d_{mi} T_i \\
 E_m &= b_{mk}^T D_k - g_{mi} T_i \\
 D_m &= \varepsilon_{mk}^S E_k + e_{mi} S_i \\
 E_m &= b_{mk}^S D_k - h_{mi} S_i \\
 S_i &= s_{ij}^E T_j + d_{mi}^t E_m \\
 S_i &= s_{ij}^D T_j + g_{mi}^t D_m \\
 T_i &= c_{ij}^E S_j - e_{mi}^t E_m \\
 T_i &= c_{ij}^D S_j - h_{mi}^t D_m
 \end{aligned} \tag{1}$$

(Le détail de ces équations ainsi que des informations complémentaires concernant les généralités sur la piézoélectricité sont donnés dans l'annexe 1 de ce compte-rendu).

Ces équations fournissent une bonne modélisation du comportement statique et sous de faibles contraintes d'excitations. Dès lors, que l'on atteint des contraintes d'ordre supérieur (fréquences supérieures à la limite quasi-statique ou fortes amplitudes d'excitation électriques et mécaniques) des non linéarités apparaissent et la description linéaire et rapidement inefficace. Dans les applications industrielles habituelles des actionneurs piézoélectriques, les champs électriques peuvent atteindre rapidement des valeurs supérieures à la centaine de Volt/mm. Le comportement observé est alors fortement divergent par rapport à celui décrit par les équations précédentes, les différences entre les déplacements prévus et mesurés peuvent atteindre des niveaux supérieurs à 100% [1].

Dans des applications de type système de récupération d'énergie, une bonne maîtrise des non linéarités est nécessaire. En particulier celles liées à la dynamique de l'excitation car celles-ci peuvent

fortement réduire les taux d'énergie récupérés et donc les rendements prévus initialement. De même, une bonne prise en compte des lois de matériaux est primordiale dans des applications du type : contrôle de positionnement, actionneur de puissance.

Dans la plupart de ces applications, les équations linéaires sont rapidement inefficaces et doivent être remplacées par une solution plus élaborée : une modélisation complète de l'hystérésis tenant compte de la saturation et de la dépendance fréquentielle. Le modèle de l'hystérésis diélectrique que nous souhaitons développer doit pouvoir fonctionner quel que soit le type d'excitation (électrique, mécanique ou thermique), et doit fournir de nombreuses informations quant à la compréhension des relations physiques et du comportement de la céramique piézoélectrique.

Basé sur des considérations expérimentales, nous allons développer un modèle précis de l'hystérésis diélectrique, évolution de la polarisation diélectrique en fonction du champ électrique ou de la contrainte mécanique  $P(E, T)$  (le cas de la contrainte thermique étant toujours en cours d'étude).

Les modèles de l'hystérésis diélectrique décrits dans la littérature scientifique peuvent être classés selon trois catégories :

- \_ Les modèles macroscopiques basés sur des observations phénoménologiques [2, 3].
- \_ Les modèles microscopiques basés sur des principes quantiques, des relations électromagnétiques ou des lois thermodynamiques [4, 5].
- \_ Les modèles semi-macroscopiques qui correspondent à une combinaison des deux précédents [6, 7].

La première catégorie de modèles se concentre sur le phénomène et les résultats empiriques en laissant de côté les mécanismes microscopiques intrinsèques. Dans cette catégorie de modèle, la dépendance en fréquence est en général un développement du type second ordre de l'équation piézoélectrique. Cette prise en compte permet de partiellement décrire les non linéarités observées pour des transducteurs de puissance à la résonance mais n'est efficace qu'à travers de très restrictives conditions de fonctionnement.

La deuxième catégorie de modèles, va beaucoup plus profondément dans la constitution de la matière. A partir d'équations décrivant les mécanismes microscopiques, des considérations statistiques et des hypothèses on cherche à remonter au comportement macroscopique global. Cependant, dans un matériau ferroélectrique, de nombreuses interactions et combinaisons entre ces mécanismes quantiques restent incertaines rendant ce type de modélisation hasardeuse. Les

phénomènes de polarisation sont des procédés extrêmes complexes mettant en jeu de nombreuses variables, une modélisation complète tenant compte de l'ensemble de ces variables est malheureusement impossible.

Pour obtenir de bons résultats de simulation et être au plus proche de la réalité physique des phénomènes, l'idéal se situe dans un compromis entre les deux catégories de modèle décrites à l'instant. C'est dans cet esprit que nous avons développé un modèle fondé sur des principes physiques appuyés de considérations phénoménologiques. Fort de ce compromis, le modèle que nous avons développé délivre une très bonne précision, et permet des prédictions de fonctionnement qui vont au-delà des limites expérimentales [8, 9].

Historiquement, ce modèle a dans un premier temps était développé pour simuler le comportement diélectrique de la céramique piézoélectrique, évolution de la polarisation diélectrique sous contrainte de champ électrique  $P(E)$ . Il a par la suite était étendu à des contraintes de type mécanique  $P(T)$ . Il a également était inversé  $E(P)$ ,  $E(S)$  afin de contrôler la polarisation et par conséquence le déplacement pour des applications du type asservissement de position.

Dans la suite de ce chapitre, nous proposons une description détaillée du modèle, la contribution quasi-statique dans un premier temps, puis comment l'utilisation de la dérivation fractionnaire a permis d'augmenter fortement la précision de la contribution dynamique. Je présenterai ensuite en détail dans les chapitres suivant comment nous l'avons inversé et finalement les résultats concrets de l'utilisation du modèle dans une application de type récupération d'énergie.

## Modèle d'hystérésis quasi-statique diélectrique

Il est bien connu que pour des fréquences d'excitation inférieures à quelques hertz, le phénomène d'hystérésis à travers les matériaux ferroélectriques est principalement dû aux mouvements des parois des domaines de Bloch macroscopiques. Il existe différentes théories quant à la définition et à la description de ces mouvements, toujours est-il que ceux-ci ont une influence fondamentale dans la mise en place de la polarisation diélectrique. Les murs de domaines séparent les domaines ferroélectriques. Chaque domaine est caractérisé par une orientation privilégiée de la polarisation ( $90^\circ$  ou  $180^\circ$ ). Dès lors que le matériau est soumis à une excitation extérieure, et quelle qu'en soit sa nature, ces domaines vont se déformer et les parois qui les délimitent vont commencer à bouger. Les impuretés et les inclusions (défauts) présentes dans le matériau fonctionnent comme des points d'ancrage pour la paroi, affectant plus ou moins son mouvement [10]. Pour surmonter l'obstacle créé par la présence d'un défaut, un certain potentiel énergétique est nécessaire, celui-ci est fourni par l'excitation extérieure. Si celui-ci est suffisant, le passage de l'obstacle se traduit par un saut soudain de la paroi et un léger changement de la polarisation moyenne au sein du domaine. Si la contrainte externe n'est pas suffisante pour surmonter l'obstacle la paroi reste clampée sur celui-ci et des mouvements de vibration peuvent être observés autour du point d'ancrage. Différents types de mouvements ont déjà été observés : de la vibration, de la translation et du renversement. Les vibrations correspondent à des mouvements réversibles autour d'une position d'équilibre (ceux-ci apparaissent pour de faibles niveaux d'excitation, champs électriques de l'ordre du V/mm). Pour de faibles niveaux de contraintes, les propriétés diélectriques sont principalement attribuées à ce type de mouvements (cas de la mesure des coefficients tensoriels caractéristique d'une céramique piézoélectrique : la permittivité, la compliance élastique et le coefficient piézoélectrique ...). En revanche dans le cas de mouvements de type translation ou renversement, l'amplitude de la contrainte externe est beaucoup plus élevée. D'un point de vue de la modélisation, on peut considérer tous ces mouvements comme ayant la même origine et qu'ils ne dépendent en réalité que de l'amplitude de la contrainte externe. Qu'il soit réversible ou pas, chaque mouvement présentera une certaine contribution dans la valeur finale de la polarisation.

Pour de faibles niveaux de fréquence ( $f \ll 1\text{Hz}$ ) et pour des niveaux d'amplitude importants, un cycle d'hystérésis est observé quand on trace l'évolution de la polarisation en fonction du champ électrique  $E$ . Pour de tel niveau de fréquence, on suppose que les mouvements des parois de domaine se comportent comme des frottements secs mécaniques.

Décrivons rapidement le frottement pour une meilleure compréhension des phénomènes :

L'élément de modélisation est composé d'un frottement sec et d'un ressort de rappel. Le fonctionnement de l'ensemble peut-être décrit par le schéma donné à la figure n°2. La force résistive du frottement sec est toujours opposée au mouvement :

Si  $du / dt > 0$  rien ne se passe tant que  $F_{\text{ext}} < \text{seuil de frottement sec} + f(S)$

Si  $du/dt < 0$  rien ne se passe tant que  $F_{\text{ext}} > \text{seuil de frottement sec} - f(S)$

Tant que la force appliquée est insuffisante, l'objet ne se déplace pas. Dès qu'on dépasse la force critique, l'objet se met en mouvement en comprimant le ressort de rappel. Si on ôte la force incidente, l'objet s'immobilise dans une position différente de la position initiale. Il ne reviendra en arrière que lorsqu'on appliquera une force qui, ajoutée à la force de rappel du ressort, sera supérieure à la force critique. Le système considéré possède dès lors une infinité de positions stables.  $f$  est la fonction qui donne l'évolution de la force incidente en fonction de la force extérieur dès lors que le seuil de frottement sec est surpassé.

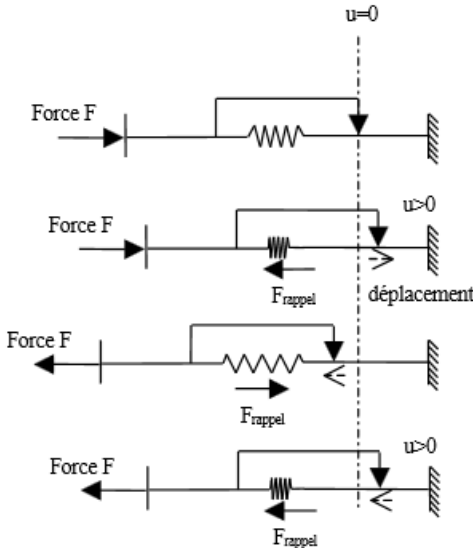


Figure 2. Mode de fonctionnement d'un frottement sec mécanique.

Une équation statique (indépendante de la fréquence) basée sur l'analogie entre le forttement sec mécanique décrit précédement et le mouvement de parois de domaine a été mise en place. Dans



cette analogie le champ extérieur est équivalent à la force appliquée, et la polarisation à la force incidente, le seuil du frottement sec est équivalent au champ coercitif lu sur le cycle d'hystérésis obtenue après un cycle complet de mouvement de parois équivalent. En effet, une bonne approximation du cycle d'hystérésis majeur  $P(E)$  peut être obtenue par la translation d'une courbe anhystérétique (cette translation à comme amplitude  $E_c$  (norme des champs coercitifs), et son signe dépend de la dérivée temporelle de la polarisation). Le figure n°3 donne une illustration de l'obtention d'un cycle majeur à partir des translations précédemment décrites.

$$P_i(t) = f\left(E(t) - E_{c_i} \text{sign}\left(\frac{dP_i(t)}{dt}\right)\right) \quad (2)$$

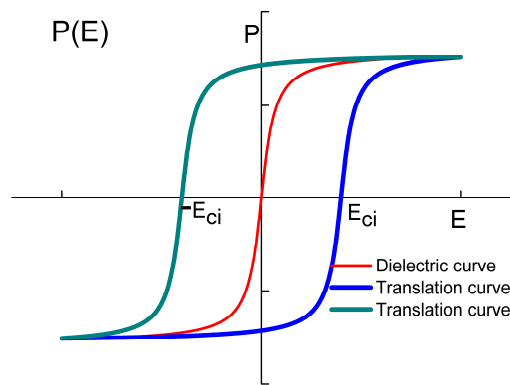


Figure 3. Illustration de l'obtention d'un cycle majeur par translation d'une courbe anhystérétique.

Dans l'équation n°2,  $f(E)$  (réciproquement  $f^{-1}(P)$ ) représente le comportement d'un diélectrique non linéaire. Cette caractéristique anhystérétique d'un pure diélectrique qui sature donnant l'évolution du champ de polarisation en fonction du champ électrique peut-être décrite mathématiquement à l'aide d'une fonction arctangente (equation n°3). Celle-ci correspond au cycle de polarisation d'un matériau dont la présence de défaut serait inexistante [11].

$$f(E) = \sigma \cdot \tan^{-1}\left(\frac{E}{\gamma}\right) \quad f^{-1}(P) = \gamma \cdot \tan\left(\frac{P}{\sigma}\right) \quad (3)$$

Cette fonction ainsi que les paramètres  $(\gamma, \sigma)$ , peuvent être obtenus par comparaison entre la courbe anhystérétique simulée et celle obtenue à partir de la mesure. Nous avons développé à l'aide de la toolbox « curve fitting » de Matlab un programme d'optimisation spécial pour permettre l'identification de ces paramètres. La courbe anhystérétique est obtenue à partir de la mesure du cycle majeur, pour une polarisation donnée, le champ électrique correspondant est calculé à partir de la valeur moyenne des champs électriques correspondant à cette polarisation dans la partie croissante et décroissante

de la courbe  $E_{anh} = (E_{mont} + E_{desc}) / 2$ . L'équation n°2 correspondant à un mouvement de parois donne une description correcte du cycle d'hystérésis majeur observé lors de régimes permanents pour des excitations de fortes amplitudes centrées autour de zéro ( $E_{max} \gg E_c$ ). En revanche, celle-ci est inefficace quant à la modélisation des régimes transitoires (courbe de première polarisation, courbes de renversements, cycles d'hystérésis mineurs, etc ...). En effet à la lecture de cette équation, on observe que de l'état dépolarisé de la céramique, la présence d'un champ extérieur d'amplitude inférieur à la norme des champs coercitifs, ne modifie en rien le niveau de polarisation résiduelle, ce qui est absolument faux d'un point de vue expérimental. Cette restriction n'en est plus une dès lors que l'on introduit une distribution de mouvements de parois (spectre), défini par l'équation n°1 et caractérisé par leur propres champs coercitifs et leurs propres poids dans la reconstitution finale du cycle d'hystérésis.

$$\sum_{i=1}^k spectrum(i) \cdot P_i = P \quad (4)$$

Si l'on considère que chaque domaine ferroélectrique d'une céramique piézoélectrique se comporte d'un point de vue de sa polarisation comme un diélectrique parfait. Chaque paroi de domaine est caractérisée par sa propre énergie d'ancrage. Les parois de ces domaines vont vibrer ou basculer pour des niveaux de champ d'excitation qui vont varier d'un domaine à l'autre. C'est à partir de cette propriété que nous avons établi notre modèle définitif, en considérant le cycle d'hystérésis diélectrique comme la superposition de mouvements de parois définis par l'équation n°1, chacun étant caractérisé par sa propre énergie d'ancrage et par son propre poids dans la reconstitution du cycle final. Les figures n°4 et 5 donnent une illustration de ce principe. Figure n°4 présente comment chaque cycle élémentaire est obtenu en translatant la courbe anhystérétique. A partir de ces différentes translations, on obtient des cycles caractérisés par différentes valeurs de champ coercitif, ce qui à l'échelle macroscopique correspond à différents niveaux d'ancrage de la paroi. Dans la reconstitution finale chaque cycle élémentaire est affecté d'un gain particulier et aura un poids qui lui est propre.

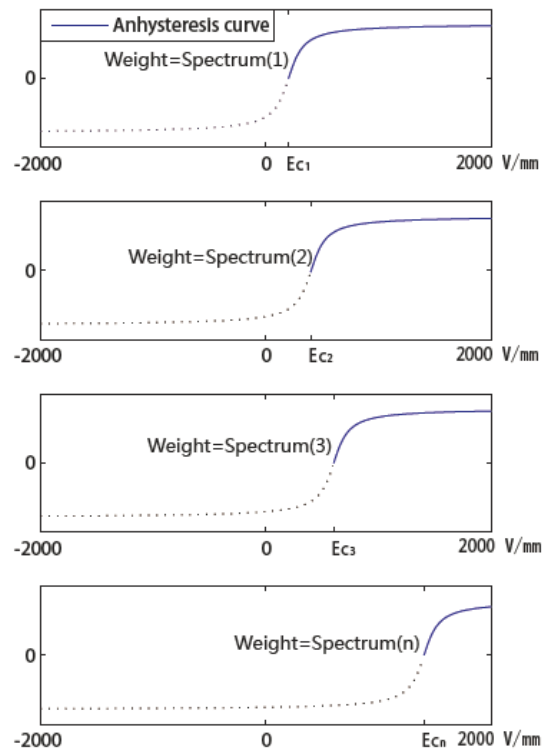


Figure 4. Illustration de l'obtention d'un cycle majeur par translation d'une courbe anhystérétique.

Dès lors, chaque cycle élémentaire correspondant à chaque courbe de polarisation diélectrique anhystérétique décalée aura sa propre contribution dans la reconstitution finale de la polarisation (comme illustré sur la figure n°5).

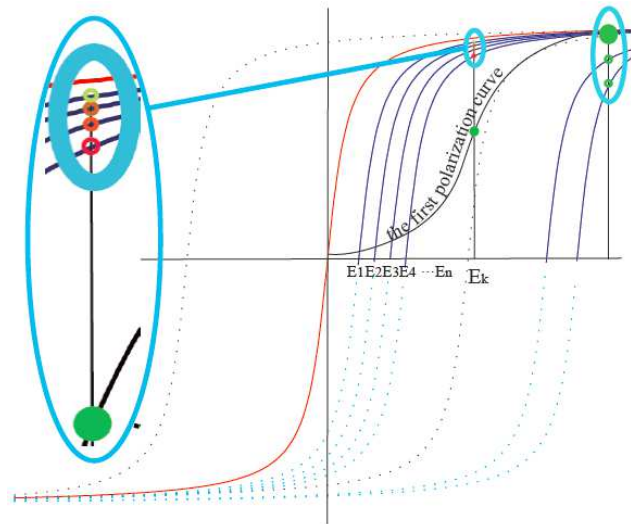


Figure 5. Illustration de la reconstitution du cycle d'hystérésis à partir des contributions élémentaires.

Nous appelons spectre(i) la fonction qui représente la distribution du poids de chacun de ses mouvements de parois dans la reconstitution finale de la polarisation. Un protocole spécifique a été établi pour obtenir cette fonction. Ce protocole nécessite l'obtention de la courbe anhystérétique du matériau, celle-ci est déterminée en utilisant la méthode précédemment décrite. Le spectre est par la suite calculé en faisant la déconvolution de la courbe expérimentale de première aimantation par la courbe anhystérétique déterminée à partir du cycle majeur. A partir de ce procédé, il devient possible de systématiser l'obtention des paramètres statiques du matériau. La Figure n°3 montre le spectre obtenu pour une distribution de 50 mouvements de parois, chacun étant séparé par un pas de champ coercitif de 40V/mm. Ce nombre de mouvements de parois semble suffisant pour décrire correctement l'hystérésis statique de l'échantillon testé y compris les régimes transitoires donnant naissance aux cycles mineurs (figure n°4). De nombreux articles traitant ou faisant références à cette modélisation ont été publiés pendant mes premières années au LGEF, pour plus de résultats je vous renvoie vers les références suivantes [9, 11].

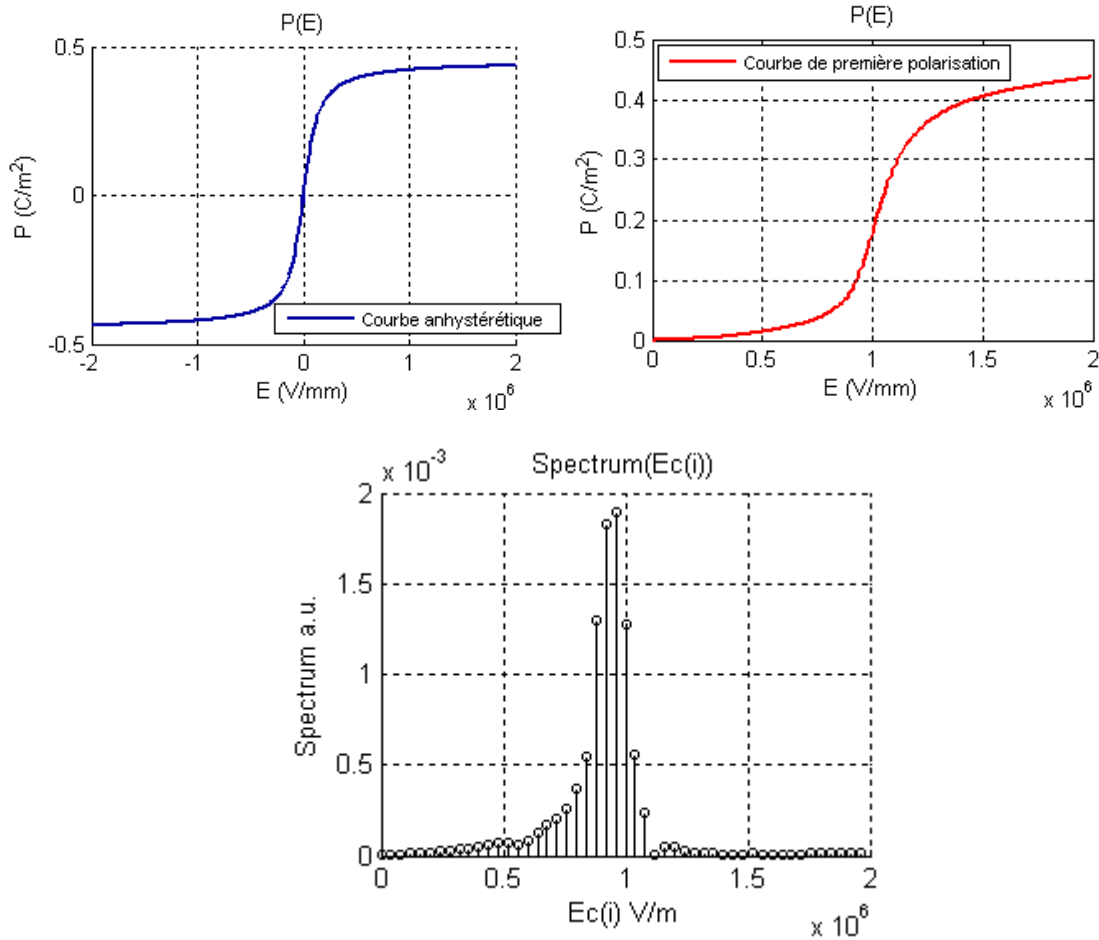


Figure 6. Spectre de distribution des contributions élémentaires.

Finalement, et dans sa version finale l'expression mathématique du modèle quasi-statique diélectrique est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(t)_i = f \left( E(t) - Ec_i \cdot \text{sign} \left( \frac{dP(t)_i}{dt} \right) \right) \\ \sum_{i=1}^k \text{Spectrum}(i) \cdot P_i = P \end{array} \right. \quad (5)$$

Ici,  $P_i$  peut être assimilé à un élément local de polarisation (polarisation d'un domaine ferroélectrique par exemple).  $P_i$  est obtenu à partir de l'équation du mouvement de parois d'indice  $i$ .  $P$  est la résultante de polarisation, correspondant à la somme de l'ensemble des contributions.

Le modèle est expérimentalement validé à 2mHz (à ce niveau de fréquence, nous supposons que la céramique piézoélectrique fonctionne dans un état quasi-statique parfait, et que la dépendance en fréquence est nulle). Des comparaisons simulations/mesures sont présentées sur la figure n°6.

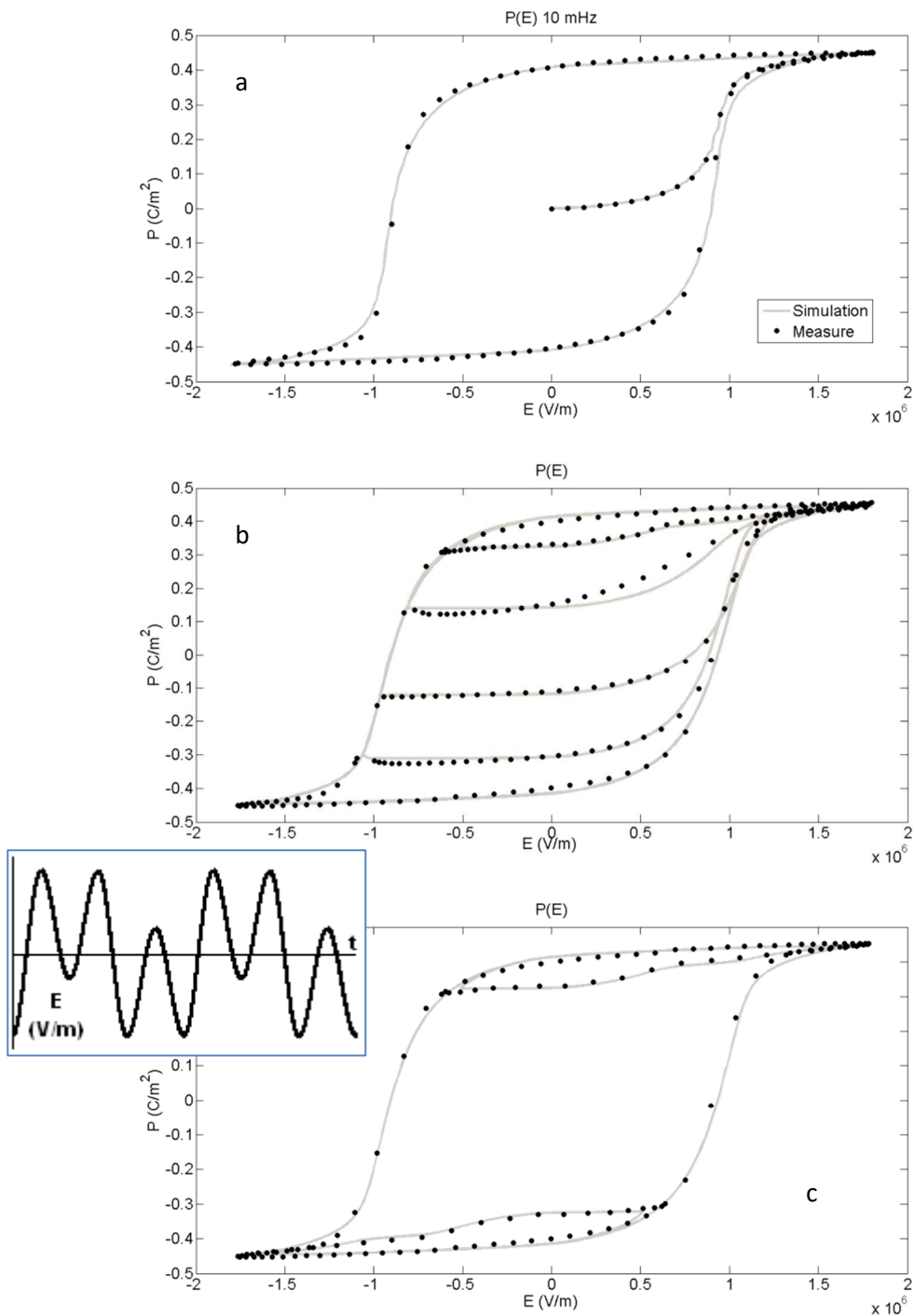


Figure 7. Comparaison simulation/mesure sous contraintes quasi-statiques de fréquence.

La figure n°7.a présente une comparaison simulation/mesure pour une forme d'onde du type : cycle majeur et courbe de première aimantation. La figure n°7.b présente la même comparaison pour des courbes de renversement et la figure n°7.c présente le cas de cycle mineurs. Les bons résultats de simulations obtenus dans chacune de ces comparaisons fournissent une bonne preuve de l'efficacité et de la précision de notre modèle

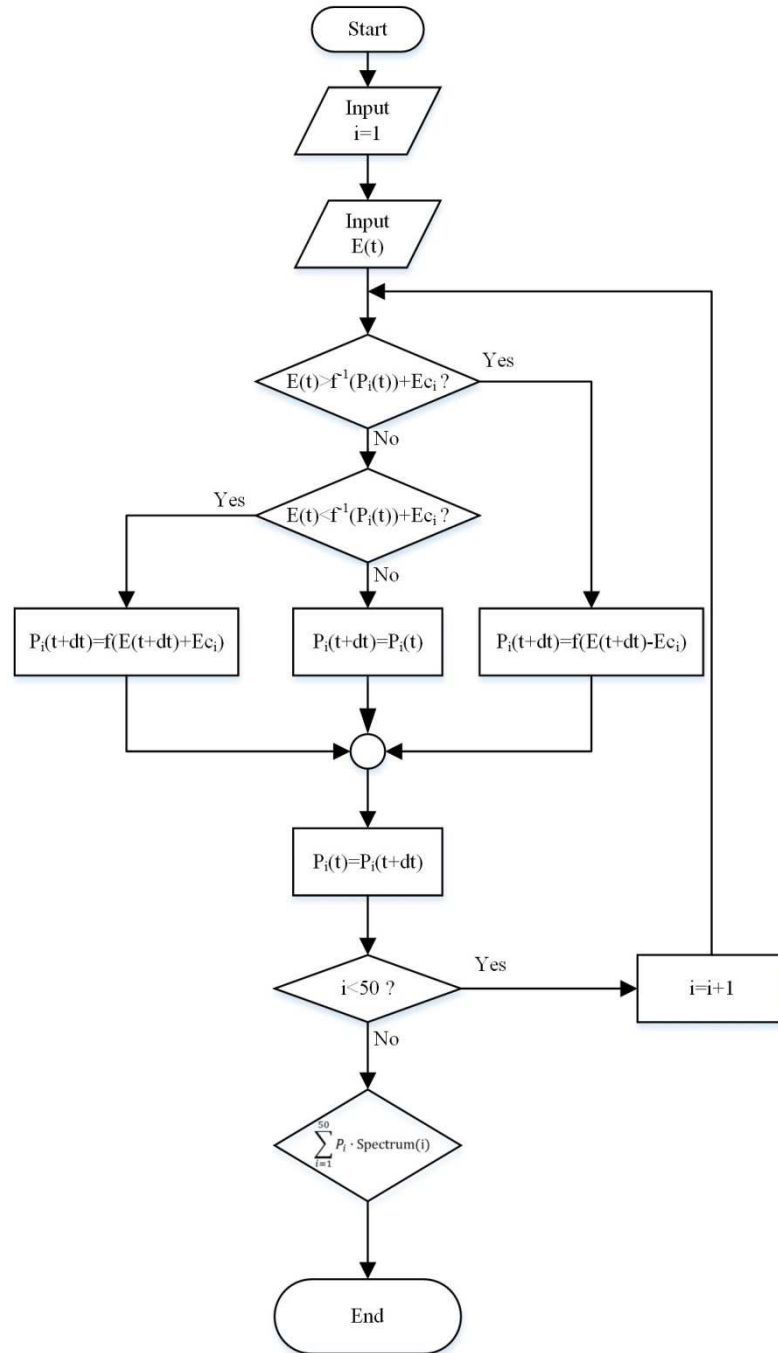


Figure 8. Algorithme de résolution du modèle quasi-statique.

La figure n°8 présente, pour une meilleure compréhension, l'algorithme utilisé pour la programmation du modèle quasi-statique

## Contribution dynamique

Au-delà de la limite fréquentielle quasi-statique, les matériaux ferroélectriques présentent des cycles d'hystérésis fortement dépendants de la dynamique de l'excitation. Cette observation a été fréquemment commentée dans la littérature. De nombreux articles relatent la mise en place de lois d'échelle donnant l'évolution de l'aire du cycle d'hystérésis comme une fonction de l'amplitude et de la fréquence du champ d'excitation  $\langle A \rangle \propto f^\alpha E_0^\beta$  (ici  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres réels dépendant de la géométrie et de la nature du système). Ces lois d'échelles donnent des informations intéressantes mais ne peuvent en aucun cas fournir l'évolution temporelle de l'hystérésis nécessaire dans la plupart des applications industrielles (contrôle de position ...). D'autres articles considèrent la contribution dynamique comme une contribution dissipative équivalente issue d'une résistivité  $\rho$  caractéristique du matériau. L'effet dynamique est alors introduit dans le modèle par le produit d'une constante  $\rho$  et de la dérivée temporelle de la polarisation (équation n°8).

$$E - E_c \cdot \text{sign}\left(\frac{dP}{dt}\right) + \rho \cdot \frac{dP}{dt} = f^{-1}(P) \quad (6)$$

Malheureusement, comme expliqué dans les articles suivants [12, 14], même si l'on ajuste correctement le paramètre  $\rho$ , cette prise en compte semble précise lorsque la dynamique ne s'éloigne pas trop de la limite quasi-statique, celle-ci conduit à une surestimation de l'aire du cycle d'hystérésis (pertes) dès lors que l'on augmente un peu trop la fréquence d'excitation.



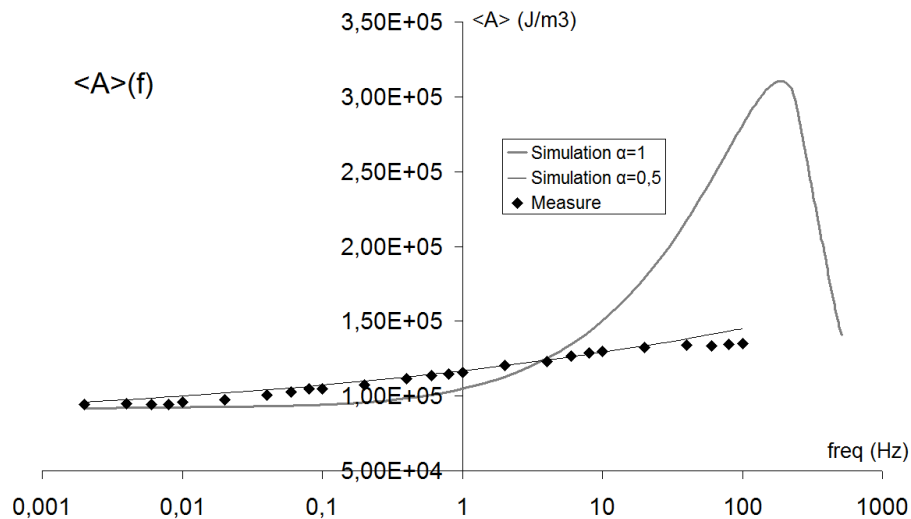


Figure 9. Comparaison mesure/simulation ( $n=1$ ;  $n=0.5$ ) de l'évolution de l'aire du cycle en fonction de la fréquence.

Pour corriger ce problème, il nous faudrait des opérateurs mathématiques dont la gestion de la dépendance fréquentielle soit différente de celle obtenue par une simple dérivée temporelle. Ce type d'opérateur existe dans le domaine du calcul fractionnaire, on les appelle les dérivées non-entières ou dérivées fractionnaires.

### Dérivée fractionnaire

Le calcul fractionnaire est la branche mathématique de l'analyse qui étend les opérateurs différentiels entiers à des ordres non entiers réels ou même complexes [15, 17]. Si l'on considère les fonctions puissances, il est facile de comprendre que  $a=b^3$  signifie que  $a$  est égale au produit de  $b$  par son carré  $b^2$ .  $b^2$  étant lui-même égale au produit de  $b$  par lui-même. Du coup, comment comprendre  $a= b^{2.25}$ , en utilisant ce type de formalisme? Pour autant le calcul est effectué très simplement de façon numérique par n'importe quelle calculatrice aussi basique soit-elle. De la même façon, dans le domaine des opérateurs différentiels  $D^n$ , il est naturel de considérer  $n$  comme un entier, la signification physique d'une différentielle entière est clairement identifiée. Du coup, que signifie  $n$  réel voir complexe ? et que deviennent les dimensions dans les équations présentant des opérateurs de type fractionnaire ?

La généralisation de la définition usuelle de la dérivation d'après Grünwald-Letnikov peut être expliquée de la façon suivante :

La définition classique de la dérivée entière est donnée par :

$$D^1 f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (7)$$

Pour obtenir des ordres supérieurs, une dérivée nième signifie d'itérer n-1 fois l'équation 9. La généralisation de la fonction dérivée à des ordres entiers devient :

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x + (n-k)h) \quad (8)$$

Avec

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (9)$$

Dans l'équation n°9, n et k sont classiquement des entiers positifs. La fonction combinaison peut être généralisée à l'aide de la fonction Gamma. Si n est un entier positif,

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (10)$$

La fonction gamma est définie pour l'ensemble des complexes à l'exception du zéro et des entiers négatifs où elle présente des pôles. Pour un nombre complexe à partie réelle positive, la fonction gamma est définie par,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (11)$$

L'évolution de la fonction Gamma le long de l'axe réel est tracé figure 10.

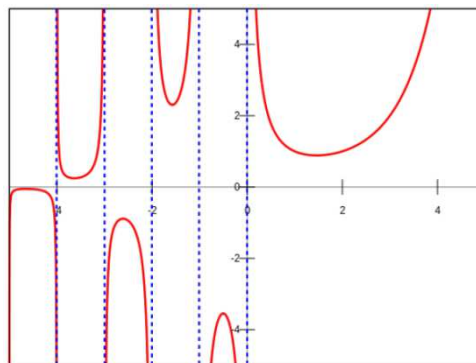


Figure 10. Fonction gamma.

Par conséquence, l'écriture d'une combinaison peut être réécrite en utilisant la fonction Gamma

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} \quad (12)$$

La définition de la combinaison peut être étendue à des ordres complexes, en remplaçant  $n$  par un nombre arbitraire  $\alpha$  à l'aide de la relation suivante :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} \quad (13)$$

Pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha$  est un nombre arbitraire. La définition du binôme de Newton pour des nombres entiers est donnée par :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (14)$$

En combinant les équations 13 et 14, la généralisation à des nombres non entiers du binôme de Newton devient :

$$(a+b)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha-n+1)} a^{\alpha-n} b^n \quad (15)$$

A partir de cette expression, le calcul de la dérivée fractionnaire de la fonction exponentielle devient envisageable.

$$\begin{aligned} D^\alpha e^{\alpha x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha} (-1)^k \binom{\alpha}{k} e^{a(x+(\alpha-k)h)} \\ &= e^{\alpha x} \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} (e^{ah} - 1)^\alpha \\ &= a^\alpha e^{\alpha x} \end{aligned} \quad (16)$$

Dans l'équation 16  $\alpha$  peut prendre n'importe quelle valeur complexe. Du coup on peut étendre ce calcul de dérivée au fonction trigonométrique

$$\begin{aligned} D^\alpha \cos(x) + iD^\alpha \sin(x) &= D^\alpha e^{ix} = i^\alpha e^{ix} = e^{\frac{\alpha\pi i}{2}} e^{ix} \\ &= e^{ix(x+\frac{\alpha\pi}{2})} = \cos(x+\frac{\alpha\pi}{2}) + i\sin(x+\frac{\alpha\pi}{2}) \end{aligned} \quad (17)$$

Les équations précédentes donnent la solution analytique de la dérivée fractionnaire d'une simple fonction trigonométrique (sinus ou cosinus).

D'un point de vue spectral, la dérivation fractionnaire signifie que le spectre fréquentiel  $f(\omega)$  de la fonction temporelle  $f(t)$  sera simplement multiplié par  $(j\omega)^n$  en lieu et place de  $(j\omega)$  pour une dérivée entière. Ce terme de dérivée fractionnaire fréquentielle est également souvent expliqué et modélisé via ce que l'on appelle un élément à phase constante. L'admittance de l'élément à phase constante (CPE) est donnée par  $Y=a.(j\omega)^n$  avec  $(0<n<1)$ . Quand  $n$  est proche de 1, le comportement du CPE est assimilable à celui d'une capacité, l'angle de phase est constant est proche de  $90^\circ$ . Si  $n$  est proche de 0 le CPE se comporte comme une résistance. Dans l'analogie entre un circuit électrique et notre modèle d'hystérésis, le courant électrique est équivalent à la polarisation diélectrique et la tension au champ électrique. Dans cette analogie, l'admittance de notre terme fractionnaire n'est pas celle dans CPE mais peut s'écrire  $Y=a.(j\omega)^{1-n}$  ce composant spécifique est caractérisé par un comportement opposé au CPE classique, en effet si  $n$  est proche de 0 le composant réagit comme une capacité et si  $n$  est proche de 1 comme une résistance.

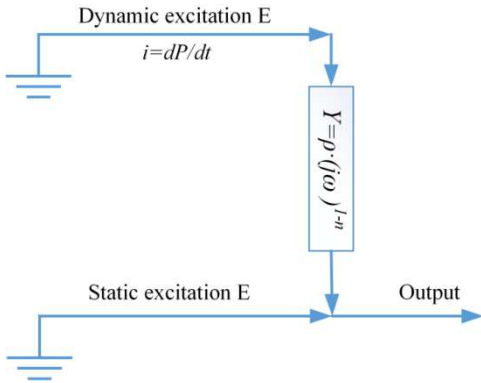


Figure 11. Elément « Phase constante » circuit électrique équivalent.

Dès lors que la fréquence augmente est surpassée la limite quasi-statique ( $f > 1\text{Hz}$ ), l'aire du cycle d'hystérésis va commencer à augmenter (cette augmentation est une des premières manifestations des effets de fréquence). Nous avons au préalable traité de la contribution quasi-statique, regardons maintenant en détail la contribution dynamique. Le modèle d'hystérésis quasi-statique décrit dans la première partie de ce paragraphe fournit la contribution quasi-statique de l'hystérésis. Comme la considération classique de la contribution dynamique (produit d'une constante par la dérivée entière de la polarisation) est divergente dès lors que l'on s'éloigne fortement de la limite quasi-statique, nous avons décidé de remplacer cette dérivée entière par une dérivée fractionnaire. L'ordre de la dérivée est à la fois un paramètre caractéristique du matériau et un degré de liberté supplémentaire pour l'utilisateur du modèle [13, 14, 18]. Dans le modèle, la contribution dynamique produit d'une constante

$\rho$  et de la dérivée fractionnaire temporelle de la dérivation est introduite dans l'équation n°3 comme un champ électrique équivalent :

$$E_{dyn} = \rho \cdot \frac{d^n P}{dt^n} \quad (18)$$

Après introduction de la contribution dynamique, l'équation du modèle sous sa forme algorithmique devient :

44

$$\begin{aligned}
 &\text{Si} \quad E(t) > f^{-1}(P_i(t)) + Ec_i + \rho_1 \cdot \frac{d^n P_i(t)}{dt^n} \\
 &\quad P_i(t+dt) > f \left( E(t+dt) - Ec_i - \rho_1 \cdot \frac{d^n P_i(t)}{dt^n} \right) \\
 &\text{Si} \quad E(t) > f^{-1}(P_i(t)) - Ec_i - \rho_1 \cdot \frac{d^n P_i(t)}{dt^n} \\
 &\quad P_i(t+dt) > f \left( E(t+dt) + Ec_i + \rho_1 \cdot \frac{d^n P_i(t)}{dt^n} \right) \\
 &\text{Si} \quad f^{-1}(P_i(t)) - Ec_i - \rho_1 \cdot \frac{d^n P_i(t)}{dt^n} < E(t) < f^{-1}(P_i(t)) + Ec_i + \rho_1 \cdot \frac{d^n P_i(t)}{dt^n} \\
 &\quad P_i(t+dt) = P_i(t) \\
 &\quad \sum_{i=1}^k \text{Spectrum}(i) \cdot P_i = P \quad (19)
 \end{aligned}$$

Il existe plusieurs définitions possibles de la dérivation fractionnaire. Parmi toutes ces définitions, celle de Grünwald-Letnikov semble particulièrement bien adaptée à une implémentation numérique. La dérivée fractionnaire de la fonction  $f$  au sens de Grünwald-Letnikov est donnée par :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh) \quad (20)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \quad (21)$$

$h$  est associé à l'échantillonnage et  $n$  correspond à l'ordre de la dérivée. L'introduction de l'opérateur fractionnaire selon Grünwald-Letnikov dans l'équation n°5 conduit à :

$$\rho \cdot \left( \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{k=t/h} (-1)^k \binom{n}{k} P(t - kh) \right) = E - \left[ f^{-1}(P) + Ec \cdot \text{sign} \left( \frac{dP}{dt} \right) \right] \quad (22)$$

Sur la figure suivante, nous effectuons des comparaisons mesures/simulations sur des cycles d'hystérésis champ fort pour des niveaux de fréquence compris entre 2mHz et 1Hz. Deux types de modélisation ont été effectués, le premier pour un ordre de dérivée temporelle égale à 1 et le second pour une dérivée temporelle non entière d'ordre 0,5. La comparaison est assez équivoque même si les modélisations sont assez proches pour le premier cycle basse fréquence, les différences sont énormes à 1Hz.

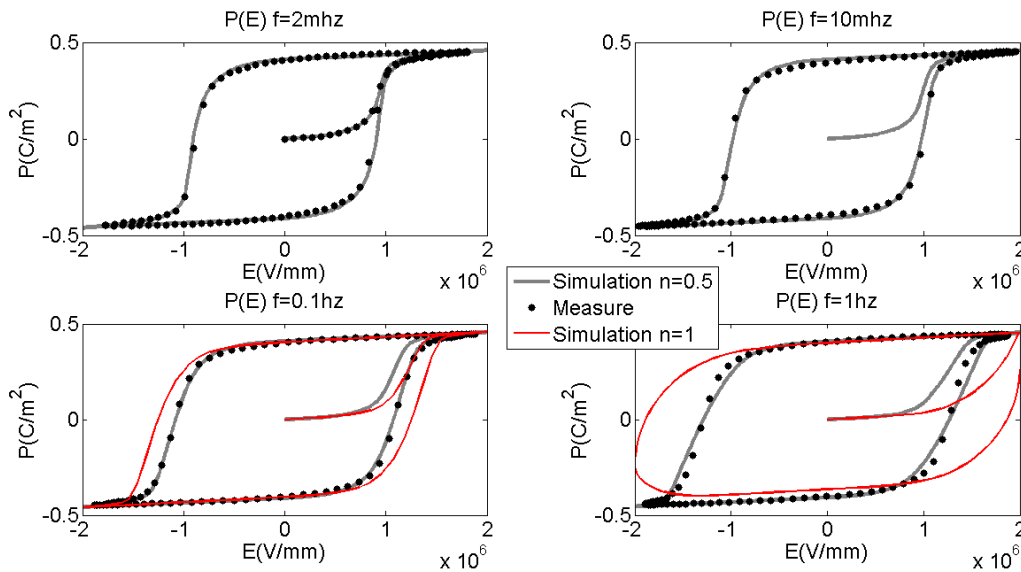


Figure 12. Comparaison mesure/simulation de l'évolution du cycle d'hystérésis pour différentes fréquences de champ électrique.

### Prise en compte de la contrainte mécanique

Nous venons de voir que le modèle d'hystérésis diélectrique dynamique fractionnaire  $P(E)$  donne de bons résultats de simulation. Il constitue la base d'une modélisation plus généralisée qui inclut d'autres natures d'excitations et notamment une excitation du type contrainte mécanique. Cette modélisation étendue est particulièrement intéressante dans le cas d'application du type récupération d'énergie ou les systèmes sont couplés. Les contraintes sur les matériaux ne sont pas seulement d'ordre mécanique, en effet des contraintes thermiques peuvent apparaître dans le cas de fonctionnement en milieux extrêmes mais également des contraintes de type champ électrique peuvent être adjointe à la contrainte mécanique pour optimiser les rendements. L'étude de la non-linéarité des propriétés diélectriques dans les céramiques piézoélectriques sous contraintes mécaniques a été relativement peu étudiée. La raison principale à ce manque d'attention tient au fait que dans la plupart des applications industrielles, même pour des niveaux de contrainte mécanique

important le fonctionnement de la céramique reste linéaire. Ceci n'est malheureusement plus le cas dès lors que l'on couple cette excitation mécanique à une excitation champ électrique pour optimiser les performances. Une loi d'échelle spécifique reliant le champ électrique  $E$ , et la contrainte mécanique  $T$ , est utilisée pour introduire ce nouveau paramètre dans le modèle d'origine. La loi d'échelle lie les trois grandeurs suivantes : le champ électrique  $E$ , la contrainte mécanique  $T$  et la polarisation diélectrique  $P$  en une seule et unique équation. Cette loi d'échelle a été établie à partir d'observations expérimentales et plus précisément sur l'influence symétrique physique du champ électrique et de la contrainte mécanique. Les résultats expérimentaux montrent que le niveau de polarisation diélectrique chute sous l'effet d'une contrainte de compression mécanique, cette contrainte induit une dégradation des propriétés piézoélectriques due un a réarrangement des domaines ferroélectriques. Pour des raisons de symétrie, un champ électrique génère une variation de polarisation  $\Delta P$  dont le signe ne dépend pas du signe de la polarisation  $P$ . En revanche, une variation du niveau de contrainte mécanique conduit à une variation de polarisation de signe opposé à celui de  $P$ . En d'autres mots, sous l'effet d'une contrainte mécanique quelque soit le signe de la polarisation ceci se traduira obligatoirement par un effet de dépolarisation. Par conséquence, la symétrie  $P/-P$  ne tient pas dans le cas d'un champ électrique (quantité vectorielle) mais est conservé dans le cas de la contrainte mécanique (quantité tensorielle) [19, 20].

La contrainte mécanique sera introduite dans notre modèle via le produit de cette contrainte et d'une fonction  $h(P)$  permettant la prise en compte de l'observation décrite précédemment. Ce produit  $h(P).T$  est équivalent à un champ électrique.  $h(P)$  est une fonction paire de la polarisation. La plus simple a été choisie :  $h(P)=\alpha.P$ .

Finalement :

$$E_{eq}(t) = \alpha T(t)P(t) \quad (23)$$

$\alpha$  est une caractéristique du matériau indépendant de sa géométrie et déterminé par comparaison avec la mesure. Dans sa version définitive, le modèle complet incluant une excitation de type contrainte mécanique devient :

Pour illustrer la bonne tenue du modèle sous l'effet d'une contrainte mécanique, nous l'avons testé sous des contraintes mécaniques de fréquences et d'amplitudes variables.

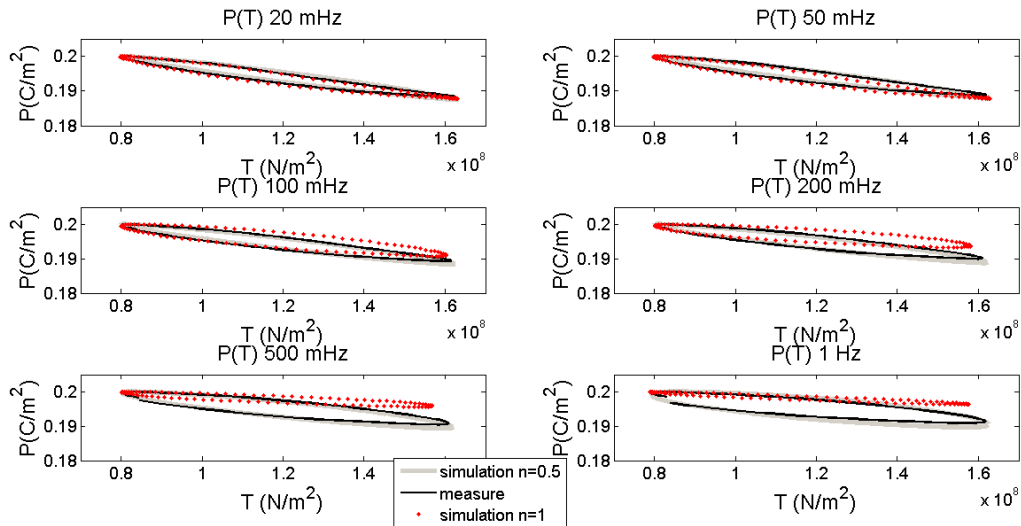


Figure 13. Comparaison mesure/simulation de l'évolution du cycle d'hystérésis pour différentes fréquences de contrainte mécanique.

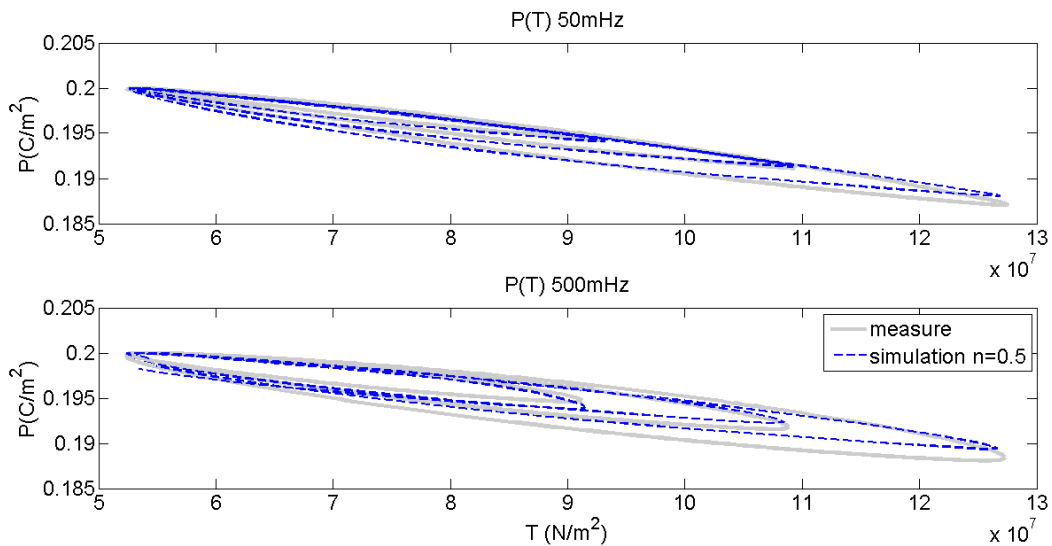


Figure 14. Comparaison mesure/simulation de l'évolution du cycle d'hystérésis pour différentes amplitudes de contrainte mécanique.

### **Cas des lois d'échelles (évolution de l'aire du cycle en fonction de la fréquence)**

Nous venons de présenter une modélisation originale de l'hystérésis ferroélectrique  $P(E)$  qui présente de bons résultats de simulation. La prise en compte fractionnaire de la dépendance en fréquence



permet de largement augmenter la bande passante du modèle. Si l'on observe la littérature scientifique traitant du sujet, on s'aperçoit rapidement que de nombreuses équipes ont préféré opter pour l'étude de l'évolution de l'aire du cycle en fonction de la fréquence plutôt que de s'intéresser à l'évolution temporelle des grandeurs physiques. Elles ont alors proposé des lois d'échelles donnant l'évolution de l'aire du cycle d'hystérésis comme proportionnelle à la fréquence et à la valeur maximale du champ électrique  $\langle A \rangle \propto f^\alpha E_0^\beta$  ( $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres réels dépendants de la géométrie et de la nature du système). Ces lois d'échelles sont intéressantes car elles confirment une dépendance de l'aire du cycle d'hystérésis non entière en fréquence. Par contre, la bande passante de validité de la loi d'échelle est toujours limitée car elle implique que la dérivée de l'évolution de l'aire du cycle en fonction de la fréquence est toujours du même signe. Pour lutter contre cette observation Rao et al. [21][22], ont proposé non plus une mais deux lois d'échelle afin de traiter l'évolution du cycle dans les deux sens de la fréquence :

$$\langle A \rangle \propto f^{1/3} E_0^{2/3} \quad \text{as } f \rightarrow 0 \quad (24)$$

$$\langle A \rangle \propto f^{-1} E_0^2 \quad \text{as } f \rightarrow \infty \quad (25)$$

D'autres lois d'échelle ont été proposées par Yimnirun [23][24] notamment, ou d'autres sources de contraintes extérieures telles que les contraintes mécaniques et thermiques ont été rajoutées. L'aire du cycle est alors proportionnelle à la fréquence, et aux valeurs maximales des champs électriques, mécaniques et thermiques.

D'un point de vue expérimental et pour des raisons qui sont évidentes il est difficile d'obtenir l'évolution de l'aire du cycle au-delà de 100Hz. Cette limitation est due à l'amplificateur de tension qui n'est plus capable de délivrer le courant nécessaire à la polarisation de la céramique. Lui et al. qui ont travaillé avec des couches minces piézoélectriques, ont pu vérifier que sur une large bande passante, la courbe  $\langle A \rangle(\text{freq})$  présente un pic dont les pentes à la montée et à la descente diffèrent et dont la position dépend de la valeur maximale du champ électrique.

Par simulation et à l'aide de notre modèle, nous avons pu confirmer ces observations. Les figures 15 a, b et c présentent l'influence des paramètres « amplitude du champ électrique », « ordre fractionnaire  $n$  » et « coefficient  $p$  » sur l'évolution de l'aire du cycle en fonction de la fréquence.

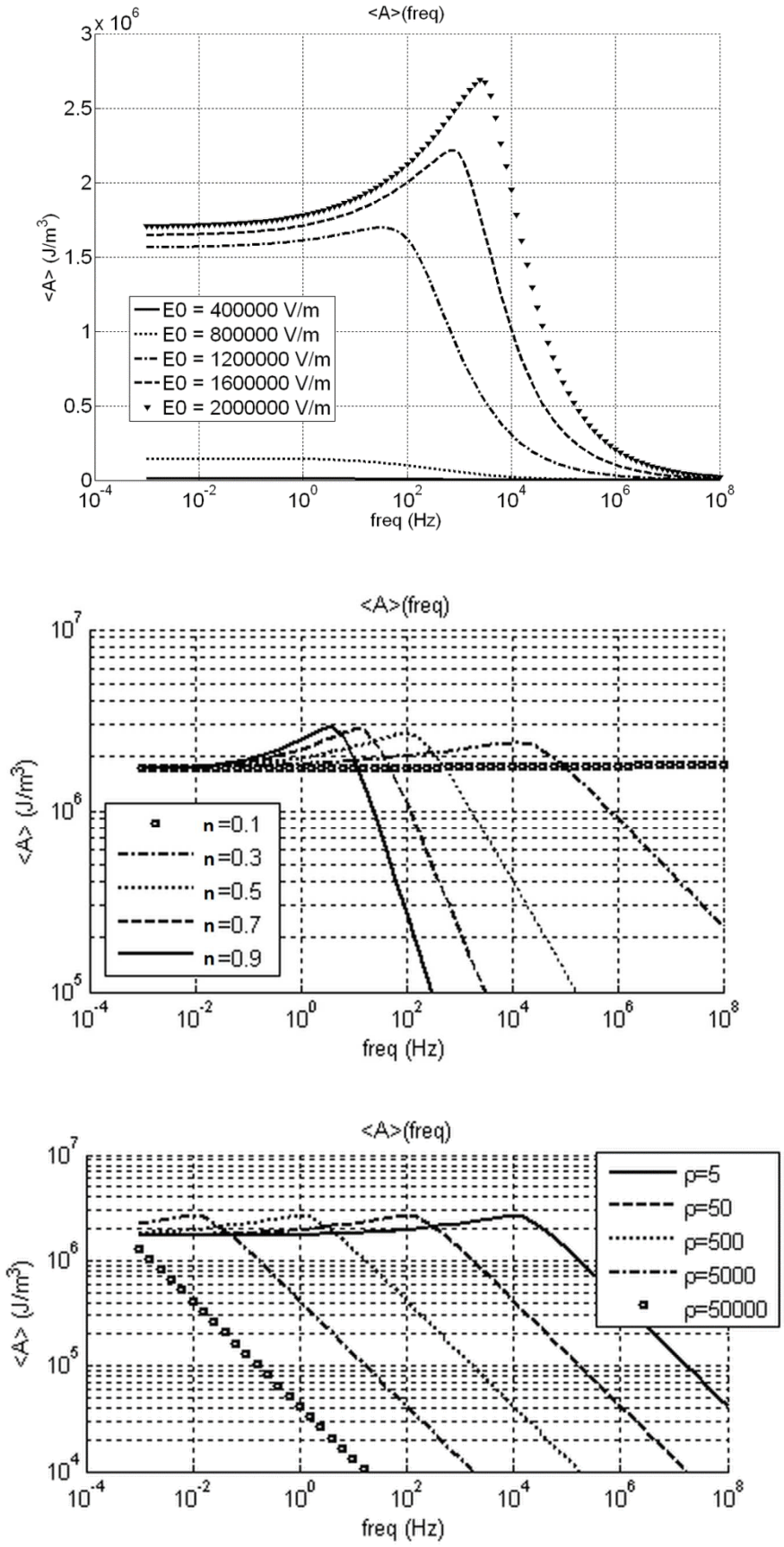


Figure 15. Evolution de la courbe  $\langle A \rangle(\text{freq})$  pour différentes valeurs d'amplitude maximale du champ électrique, de  $n$  et de  $\rho$ .

La figure 15.b montre que pour une diminution de  $n$  l'ordre fractionnaire, le pic de l'aire du cycle  $\langle A \rangle$  et moins marqué et apparait à des fréquences supérieures. De même, une augmentation de  $\rho$  se manifeste comme une translation en fréquence de la courbe  $\langle A \rangle(\text{freq})$ .

Comme ultime validation de notre modèle, une comparaison a été réalisée entre les résultats expérimentaux obtenus par Liu et al. [25] et le modèle fractionnaire. Les mesures ont été réalisées sur des couches minces des  $\text{Bi}_4\text{Ti}_3\text{O}_{12}$ . Les champs électriques sont calibrés entre 100 et 400kV/cm et la caractérisation a été réalisée à l'aide d'un circuit Sawyer-Tower. Comme la forme de l'hystérésis et les comportements physiques de la couche mince sont différents des matériaux précédemment testé de nouveaux paramètres de simulation ont été déterminés. Les meilleurs résultats sont obtenus pour  $n=0.4$ , et  $\rho=7.10^5$ . Ce travail sur les couches minces permet de tester le modèle sur de très large bandes de fréquence ( $>5$  décades).

La figure 16 présente les comparaisons simulation/expérience. Deux sets de paramètres ont été testés. Dans le premier en rouge sur la figure,  $n=1$ , les résultats correspondent à une prise en compte premier ordre de la dynamique du système. Dans le deuxième, les paramètres optimisés ont été utilisés. De très bons résultats de simulation sont obtenus alors. L'amplitude, la largeur et la position du pic de  $\langle A \rangle(\text{freq})$  est correctement pris en compte confirmant le bon comportement fractionnaire sur de très larges bandes de fréquence.

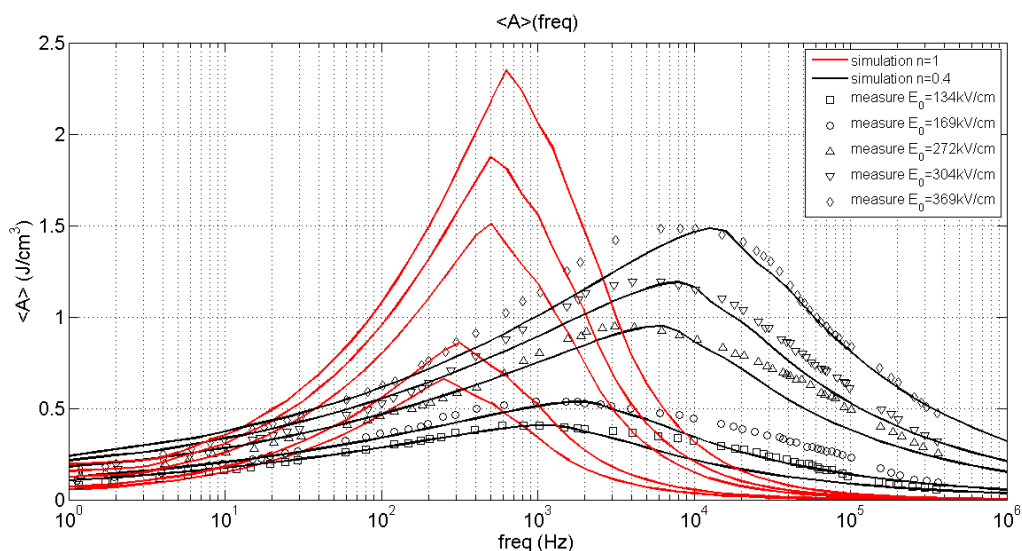


Figure 16. Evolution de la courbe  $\langle A \rangle(\text{freq})$  pour différentes valeurs d'amplitude maximale du champ électrique, de  $n$  et de  $\rho$ .

## Bibliographie

[1] D.A. Hall, "Review Nonlinearity in piezoelectric ceramics", *Journal of Material Science*, vol. 36, pp. 4575-4601, 2001.

DOI : [10.1023/A:1017959111402](https://doi.org/10.1023/A:1017959111402)

[2] V. Hassani, T. Tjahjowidodo and T .N. Do, "A survey on hysteresis modeling, identification and control", *Mech. Syst. Sig. Proc.*, Vol. 49, pp. 209-233 (2014).

DOI : [10.1016/j.ymsp.2014.04.012](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2014.04.012)

[3] M. A. Krasnosel'Skii and A. Pokrovskii, "Systems with Hysteresis", Springer-Verlag (1989).

[4] R. C. Smith and C. L. Hom, "A Domain Wall Model for Ferroelectric Hysteresis", Technical Report CRSC-TR99-07, Center for Research in Scientific Computation (1999).

DOI : [10.1.1.54.8147](https://doi.org/10.1.1.54.8147)

[5] A. Ramesh, D. C. Jiles and J. M. Roderick, "A model of anisotropic anhysteretic magnetization", *IEEE Trans.on Magnetics*, vol. 32(5), pp. 4234- 4236 (1996).

DOI : [10.1109/20.539344](https://doi.org/10.1109/20.539344)

[6] F. Preisach, "Über die magnetische nachwirkung", *Zeitschrift fur Physik*, vol. 94, pp. 277-302 (1935).

[7] D. C. Jiles and D. L. Atherton, "Theory of the Magnetisation Process in Ferromagnets and its Application to the Magnetomechanical Effect", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 17, pp. 1265-1281 (1984).

DOI : [0022-3727/17/6/023/](https://doi.org/0022-3727/17/6/023/)

[8] G. Sebald, E. Boucher and D. Guyomar, "A model based on dry friction for modeling hysteresis in ferroelectric materials," *Journal of Applied Physics*, vol. 96, pp. 2785-2791, 2004.

DOI : [10.1063/1.1769093](https://doi.org/10.1063/1.1769093)

[9] **B. Ducharne**, D. Guyomar, G. Sebald, "Low frequency modelling of hysteresis behaviour and dielectric permittivity in ferroelectric ceramics under electric field", *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 40, iss. 2, pp. 551-555, 2007.

DOI: [10.1088/0022-3727/40/2/032](https://doi.org/10.1088/0022-3727/40/2/032)

[10] R. C. Miller and A. Savage, "Motion of 180 Degree; Domain Walls in Metal Electroded Barium Titanate Crystals as a Function of Electric Field and Sample Thickness," *Journal of Applied Physics*, vol. 31, pp. 662-669, 1960.

[11] D. Guyomar, **B. Ducharne**, G. Sebald, "The use of fractional derivation in modeling ferroelectric dynamic hysteresis behavior over large frequency bandwidth", *Journal of Applied Physics*, Vol. 107, Iss. 11, n° 114108, 2010.

DOI: [10.1063/1.3393814](https://doi.org/10.1063/1.3393814)

[12] **B. Ducharne**, G. Sebald, D. Guyomar, "Time fractional derivative for frequency effect in ferroelectrics", Proceedings of the 18<sup>th</sup> IEEE International Symposium on the Applications of Ferroelectrics, ISAF 2009, pp. 43-46, Xi'an China, 2009.

DOI: [10.1109/ISAF.2009.5307619](https://doi.org/10.1109/ISAF.2009.5307619)

[13] D. Guyomar, **B. Ducharne**, G. Sebald, "Dynamical Model of ferroelectric ceramics based on fractional derivations: Synthesis", REE Revue de l'électricité et de l'électronique, pp. 82-89, 2008.

DOI: [135, 35400017132771.0080](https://doi.org/10.135/35400017132771.0080)

[14] D. Guyomar, **B. Ducharne**, G. Sébald, "Dynamical hysteresis model of ferroelectric ceramics under electric field using fractional derivatives", Journal of Physics D: Applied Physics, vol. 40, Iss. 19, pp. 6048-6054, 2007.

DOI: [10.1088/0022-3727/40/19/042](https://doi.org/10.1088/0022-3727/40/19/042)

[15] A. Syta, G. Litak, S. Lenci, M. Scheffer, "Chaotic vibrations of the duffing system with fractional damping", Chaos 24, 013107, 2014.

DOI: [10.1063/1.4861942](https://doi.org/10.1063/1.4861942)

[16] I. Podlubny, Fractional Differential Equations (Academic Press, San Diego, 1999).

[17] I. Petras, Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation (Springer, New York, 2010).

[18] A.K. Grünwald, "Ueber begrenzte derivationen und deren Anwendung", Zeitschrift für mathematik und physik, XII(6), pp.441-480, 1867.

[19] B.Riemann, "Gesammelte werke", 1892.

[20] J.Liouville, "Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques", J. Ecole Polytech. , vol.13(21), pp. 71-162, 1832.

[21] **B. Ducharne**, G. Sebald, D. Guyomar\*, " Time fractional derivative for frequency effect in ferroelectrics", Proceedings of the 18th IEEE International Symposium on the Applications of Ferroelectrics, ISAF 2009, pp. 43-46, Xi'an China, 2009.

DOI: [10.1109/ISAF.2009.5307619](https://doi.org/10.1109/ISAF.2009.5307619)

[22] B. Zhang, **B. Ducharne**, D. Guyomar, "Inverse model of the piezoelectric ceramic polarization under wide bandwidth mechanical excitations with fractional derivative consideration", Optical and quantum electronics, Vol. 46, Iss. 1, pp. 104-110, 2014.

DOI: [10.1007/S11082-013-9710-4](https://doi.org/10.1007/S11082-013-9710-4)

[23] D. Guyomar, A. Hajjaji, G. Sebald, K. Yuse, "Stress/electrical scaling in ferroelectrics," Journal of Applied Physics, Vol. 105, p. 124103-124103, 2009.

DOI: [10.1063/1.3142364](https://doi.org/10.1063/1.3142364)

[24] M. Rao, H.R. Krishnamurthy, R. Pandit, "Magnetic Hysteresis in two Model Spin Systems", Phys. Rev. B 42, 1990, pp.856-884.

DOI: [10.1063/PhysRevB.42.856](https://doi.org/10.1063/PhysRevB.42.856)

[25] M. Rao, H.R. Krishnamurthy, and R. Pandit, Phys. Rev. B 42, 1990, pp.856.

[26] R.Yimnirun, Y.Laosiritaworn, S.Wongsaenmai, and S.Ananta, "Scaling behavior of dynamic hysteresis in soft lead zirconate titanate bulk ceramics", Appl. Phys. Lett., 2006, vol.89, pp.162901-1;162901-3.

DOI: [10.1063/1.2363143](https://doi.org/10.1063/1.2363143)

[27] R.Yimnirun, R.Wongmaneerung, S.Wongsaenmai, A.Ngamjarurojana, S.Ananta, and Y.Laosiritaworn, "Dynamic hysteresis and scaling behavior of hard lead zirconate titanate bulk ceramics", Appl. Phys. Lett., 2007, vol.90, pp.112908-1;112908-3.

DOI: [10.1063/1.2713769](https://doi.org/10.1063/1.2713769)

[28] J.M.Liu, B.Pan, H.Yu, and S.T.Zhang, "Dynamic hysteresis dispersion scaling of ferroelectric Nd-substituted  $\text{Bi}_4\text{Ti}_3\text{O}_{12}$  thin films", J. Phys.:Condens. Matter., 2004, vol.16, pp.1189-1195.

DOI: [10.1088/0953-8984/16/8/005](https://doi.org/10.1088/0953-8984/16/8/005)

***MODELE INVERSE: CONTROLE DE LA POLARISATION ET DU DEPLACEMENT  
SOUS CHAMP ELECTRIQUE ET SOUS CONTRAINTE MECANIQUE***

---

# MODELE INVERSE : CONTROLE DE LA POLARISATION ET DU DEPLACEMENT SOUS CHAMP ELECTRIQUE ET SOUS CONTRAINTE MECANIQUE

## Modèle inverse

Dans la section précédente, l'hystérésis diélectrique statique et dynamique a été étudiés et modélisés. Nous nous sommes focalisé sur l'évolution du modèle direct  $P(E, T)$  (Polarisation diélectrique comme une fonction du champ électrique et de la contrainte mécanique) à travers la céramique piézoélectrique. L'objectif principal de ce travail est de monitorer et de prévoir les caractéristiques et réponses des matériaux sous diverses situations de fonctionnement (application de type récupération d'énergie, actionneurs piézoélectriques, micro positionnement ...). Les applications industrielles des actionneurs piézoélectriques sont variées, cela va du contrôle du bruit et des vibrations, au nano positionnement et même des systèmes de positionnement aérospatiales [26-28]. Le contrôle extrêmement précis du déplacement par ce type d'actionneur est exploité pour des applications de type SPM : microscopie à sonde locale [27]. C'est une technique de microscopie permettant de cartographier le relief (nano-topographie) ou une autre grandeur physique en balayant la surface à imager à l'aide d'une pointe très fine (la pointe est idéalement un cône se terminant par un seul atome). Malheureusement, les très bonnes performances en termes de précision de ce type de système peuvent être considérablement réduites dès lors que les matériaux actifs commencent à présenter des non-linéarités dans leurs comportements. Hystérésis, creep et saturation sont autant de facteurs limitant que leur connaissance et maîtrise temporelle sont nécessaires pour conserver d'excellentes performances [29-32]. Il est possible lorsque les non-linéarités restent faibles d'améliorer les performances grâce à des techniques d'insertion de capacité. Mais si l'on veut utiliser ces matériaux actifs sur de très larges bandes de fonctionnement une solution du type contrôle du déplacement par asservissement est envisageable [33-38]. Cette solution présente en générale de bons résultats mais nécessite un arsenal électronique assez lourd car il faut être capable de contrôler et mesurer le déplacement en temps réel. Dans ce mémoire, nous proposons d'utiliser la bonne précision de notre modèle pour prévoir une forme d'onde permettant d'anticiper le déplacement d'actionneur en boucle ouverte. Pour cela, il va falloir dans un premier temps établir une loi reliant la polarisation au déplacement puis inverser le modèle  $E(P)$  afin de déterminer le champ électrique nécessaire à la polarisation imposée [39]. Comme dans le cas du modèle direct, le modèle inverse est



composé de deux contributions : une contribution quasi-statique inverse et une contribution dynamique fractionnaire dépendante de la fréquence de la polarisation.

### Contribution quasi-statique inverse

L'objectif ici est de déterminer le champ électrique nécessaire à l'obtention d'une forme d'onde de polarisation déterminée. L'inversion du modèle statique tel qu'il est décrit dans la première partie de ce mémoire est possible mais fastidieuse car il faut séparer et inverser chaque contribution élémentaire. Dans ce mémoire, nous avons décidé de ne travailler que dans des régimes de type permanent, ainsi en excluant toute forme transitoire (cycles dissymétriques) il est possible d'inverser simplement le modèle en ne considérant qu'une unique contribution. Le modèle inverse nécessite la connaissance du signe de la dérivée de la polarisation, cette information est calculée à partir de la polarisation excitation imposée. Si  $dP/dt > 0$ , le modèle décrit la partie croissante du cycle d'hystérésis, en revanche quand  $dP/dt < 0$ , la partie décroissante est décrite. Le modèle inverse peut être résumé à partir du système d'équation suivant :

Si 
$$\frac{dP}{dt} > 0$$

$$P(t + dt) = f(E(t + dt) - Ec) \quad (26)$$

Si 
$$\frac{dP}{dt} < 0$$

$$P(t + dt) = f(E(t + dt) + Ec) \quad (27)$$

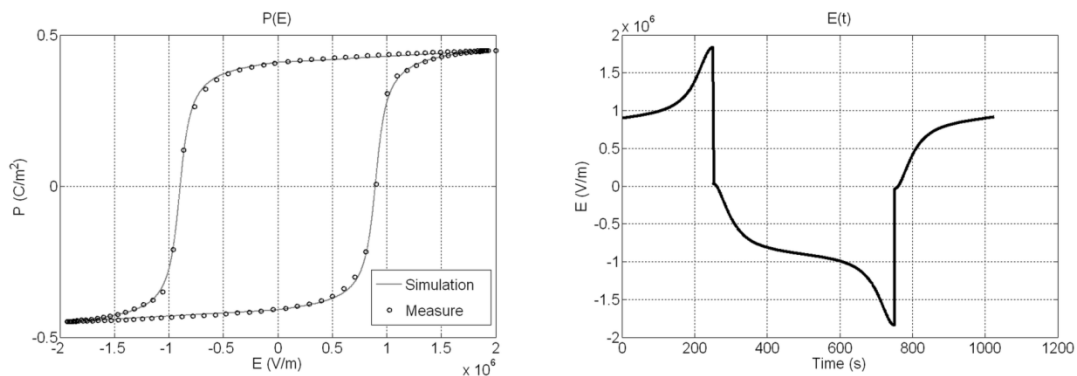


Figure 17. Illustration de l'obtention du cycle d'hystérésis majeur à partir du modèle inverse.

A noter qu'il est également possible d'obtenir la contribution inverse à partir du modèle direct asservi. Dans ce cas de figure, l'asservissement et les correcteurs utilisés doivent être réglés très précisément car le modèle diverge rapidement en raison des fortes non-linéarités intrinsèques à l'hystérésis.

## Contribution dynamique

Dans le modèle inverse, la polarisation dynamique est imposée. Le champ électrique dynamique est obtenu en additionnant le champ électrique dynamique équivalent (c'est à dire, le produit de la constante  $\rho$  et de la dérivée fractionnaire de la polarisation) à la contribution quasi-statique de champ électrique. Le champ quasi-statique électrique est calculé à partir du modèle inverse quasi-statique présenté dans II.1. La contribution fractionnaire  $\rho \cdot d^\alpha P / dt^\alpha$  est calculée de façon analytique quand ceci est possible (polarisation imposée sinusoïdale) ou numériquement en utilisant le schéma numérique de Grünwald (voir paragraphe sur la dérivation fractionnaire).

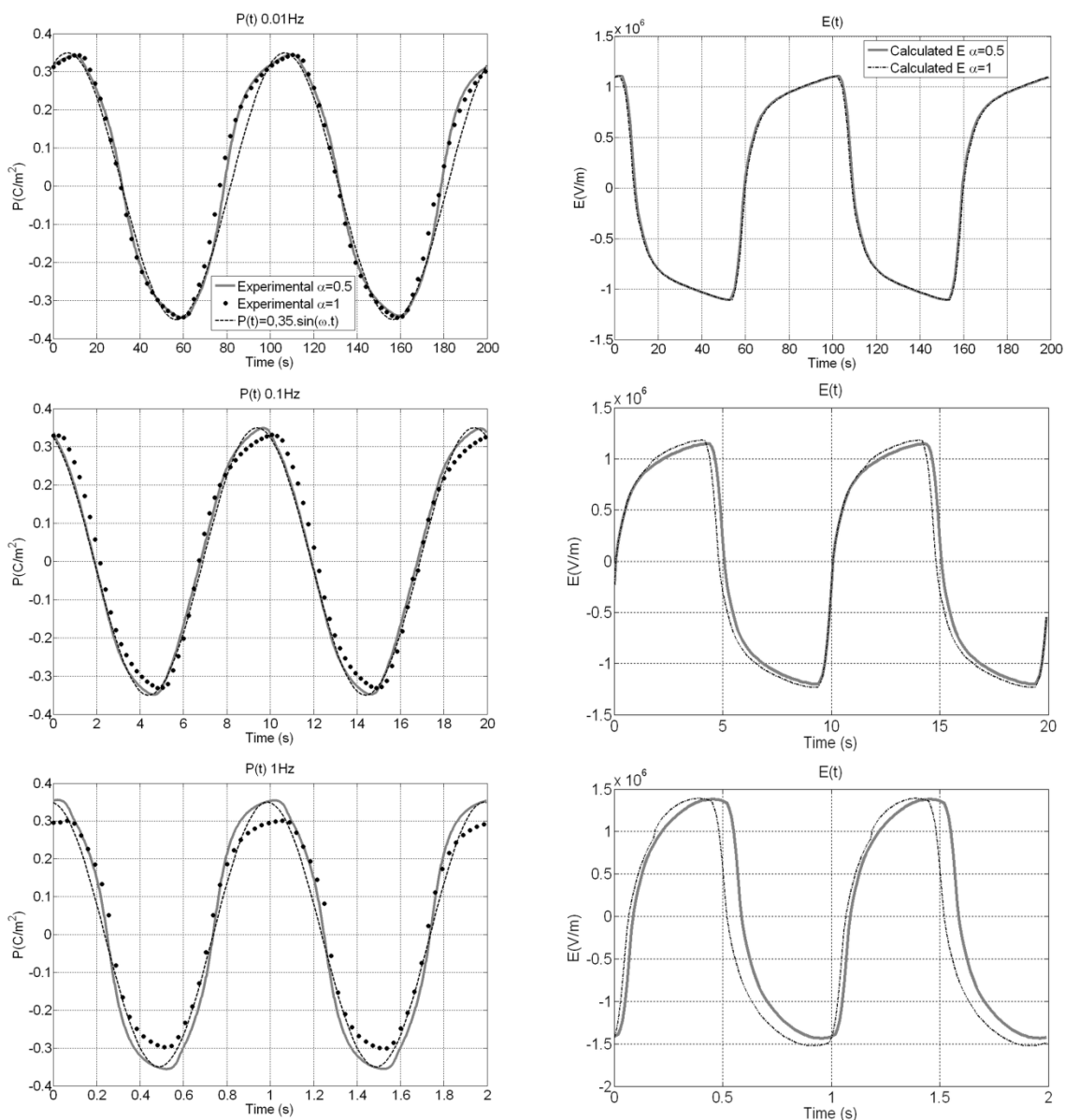
57

## Contrôle de la polarisation sous champ électrique

Si l'on souhaite contrôler la polarisation ce qui revient à travailler à polarisation imposée, le champ électrique nécessaire est obtenu par addition à la contribution quasi-statique, la contribution fractionnaire dynamique :

$$E = E_{static} + \rho \cdot \frac{d^\alpha P}{dt^\alpha} \quad (28)$$

La somme des deux contributions est réalisée sous Matlab. Le fichier de point E(t) résultant est transféré au générateur basse fréquence qui contrôle l'amplificateur haute tension de notre banc de caractérisation.



**Figure 18. Polarisation imposée sinusoïdale pour différentes fréquences.**

La figure n°18 illustre à nouveau les bons résultats obtenus à l'aide du modèle fractionnaire qui parvient à fournir une forme d'onde de champ électrique capable de reconstituer proprement la polarisation sinusoïdale imposée lorsque l'on fait varier la fréquence.

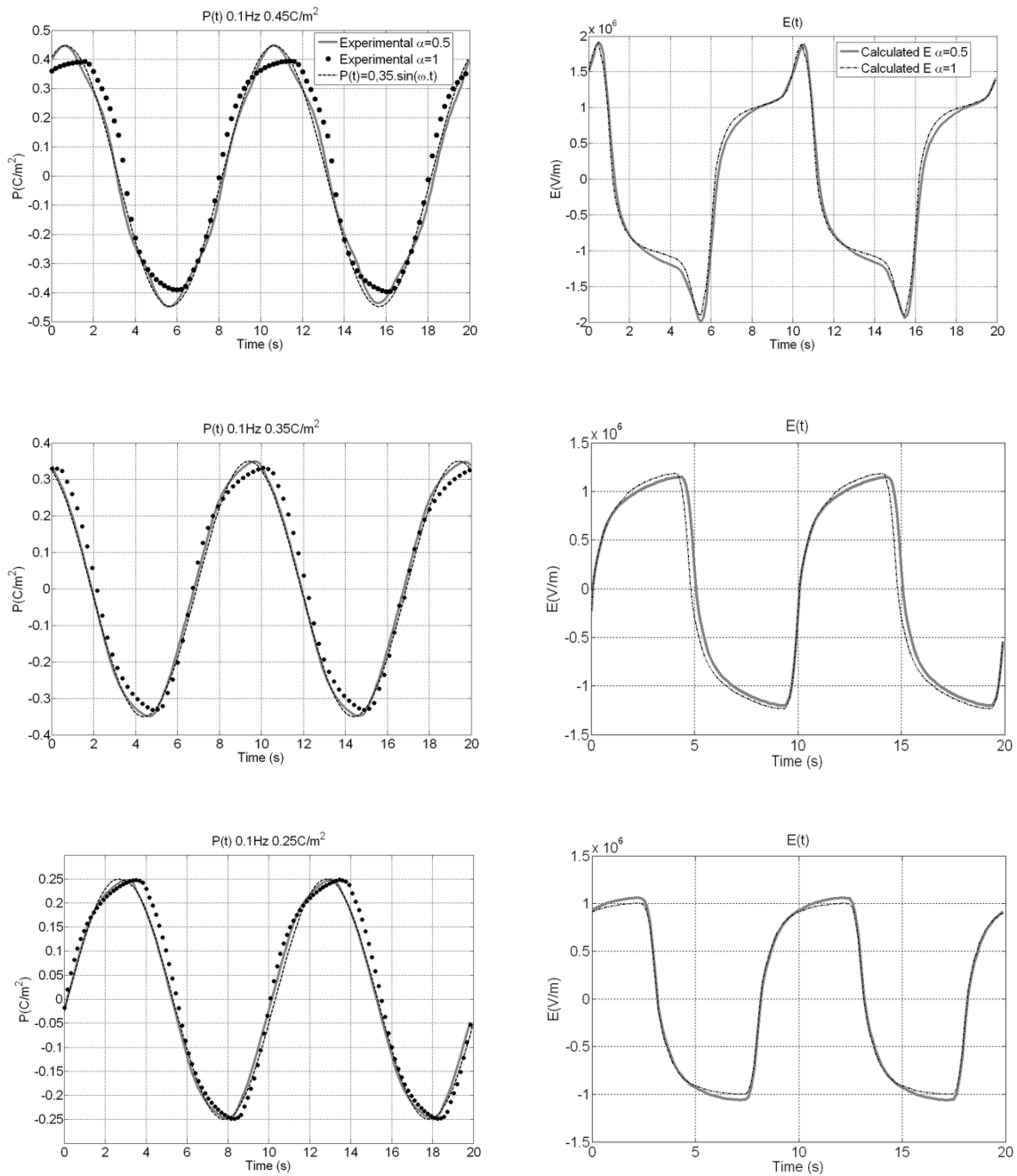


Figure 19. Polarisation imposée sinusoïdale pour différentes amplitudes.

La figure n°19 présente les mêmes comparaisons, dans le cas où l'on fait varier l'amplitude.

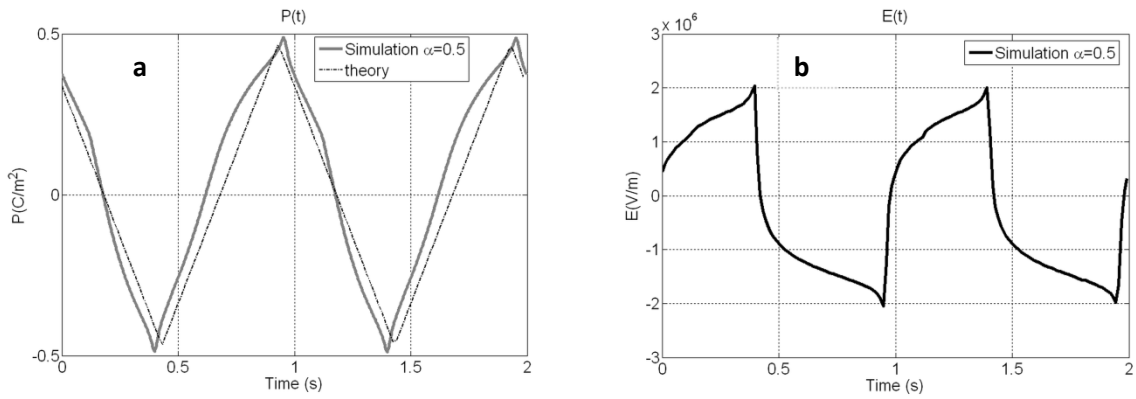


Figure 20. Cas de la polarisation triangulaire imposée.

Finalement, figure n°20 nous testons une forme d'onde différente, en l'occurrence la polarisation imposée est de forme triangulaire.

**Contrôle de la déformation sous champ électrique**

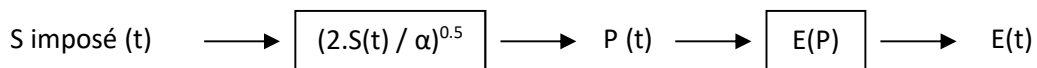
Pour contrôler la déformation ferroélectrique en utilisant le modèle précédent, une relation entre la déformation mécanique S et le champ de polarisation est nécessaire. Dans le cas des matériaux électrostrictifs pour lesquels la polarisation est supposée linéaire au champ électrique, il est d'usage de considérer la déformation comme une fonction quadratique du champ.

Cette relation provient de l'intégrale du champ électrique équivalent le long du cycle d'hystérésis:

$$S = \int_0^{P(E)} \alpha P dP$$

$$S = \frac{\alpha}{2} P^2 \tag{29}$$

$\alpha$  est le coefficient d'électrostriction. Dans le cas des matériaux ferroélectriques, on peut considérer que le matériau est électro-strictif intrinsèquement et devient piézoélectrique grâce à la déformation rémanente induite par l'hystérésis. La relation (25) est donc cohérente avec les relations classiques de la piézoélectricité. On pourra dans ce qui suit considérer l'évolution de la déformation comme linéairement reliée au carré de la polarisation. Le champ électrique nécessaire à l'obtention d'un déplacement peut être déterminé grâce à la procédure suivante :



A partir de la variation temporelle de la déformation imposée, on détermine grâce à la relation n°25

l'évolution de polarisation correspondante. Le modèle inverse  $P(E)$  décrit précédemment permet de déterminer le champ électrique correspondant. D'un point de vue expérimental, le fichier de point  $E(t)$  résultant de la simulation précédente est transféré au générateur basse fréquence qui contrôle l'amplificateur haute tension du banc de caractérisation. Le déplacement peut être mesuré à l'aide d'un vibromètre laser si l'encombrement le permet ou grâce à un capteur capacitif dans le cas échéant. Dans les résultats de simulation qui suivent (figure n°18) nous avons testé l'influence du paramètre fréquence, l'amplitude du déplacement est fixée à 3.3 mm/m et 3 fréquences sont testées (10mHz, 100mHz et 1 Hz), il nous est difficile d'aller au-delà du hertz d'un point de vue expérimental en raison de la limitation en courant de notre amplificateur haute tension.

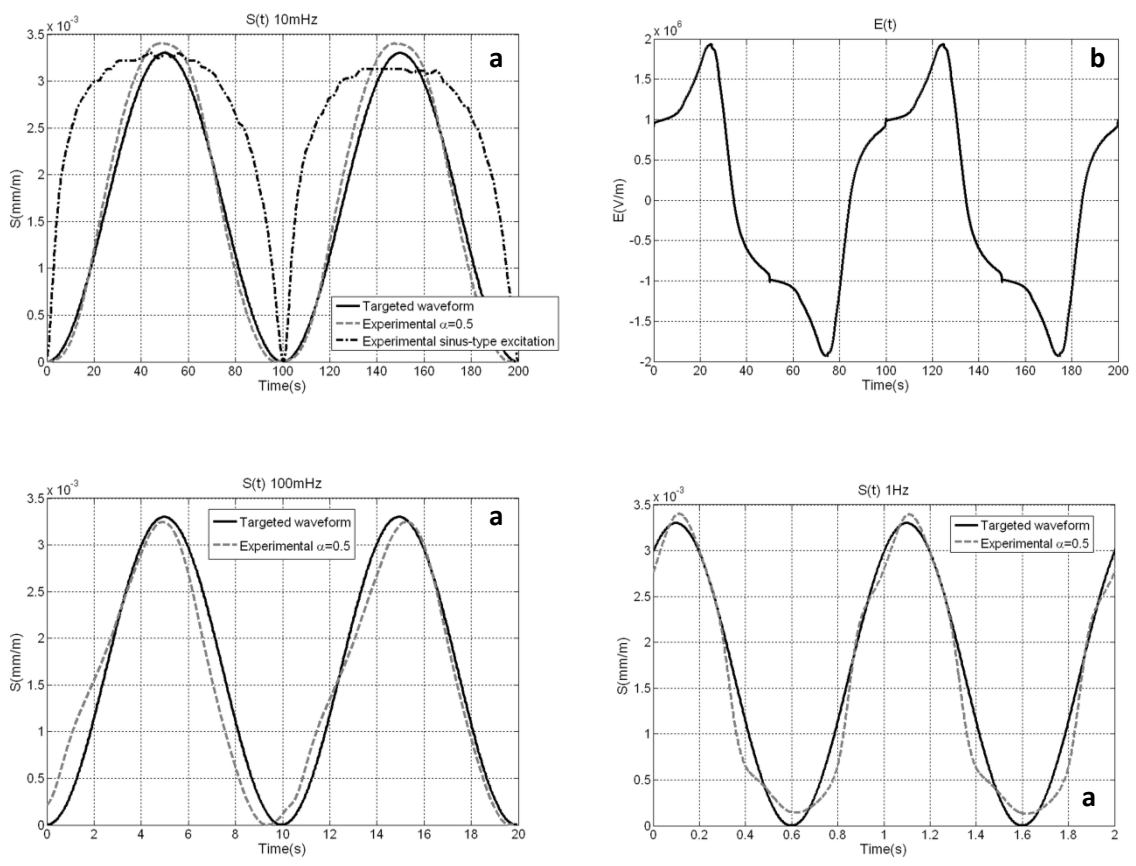


Figure 21. Comparaison déplacement cible / déplacement obtenus pour différents niveaux de fréquence.

De bons résultats expérimentaux peuvent être observés quant à la dépendance en fréquence de notre système boucle ouverte. L'influence de l'amplitude de déplacement est testée ensuite, la fréquence est fixée à 100 mHz et trois niveaux d'amplitude (0.33, 0.3 et 0.27 mm/m) sont testés.

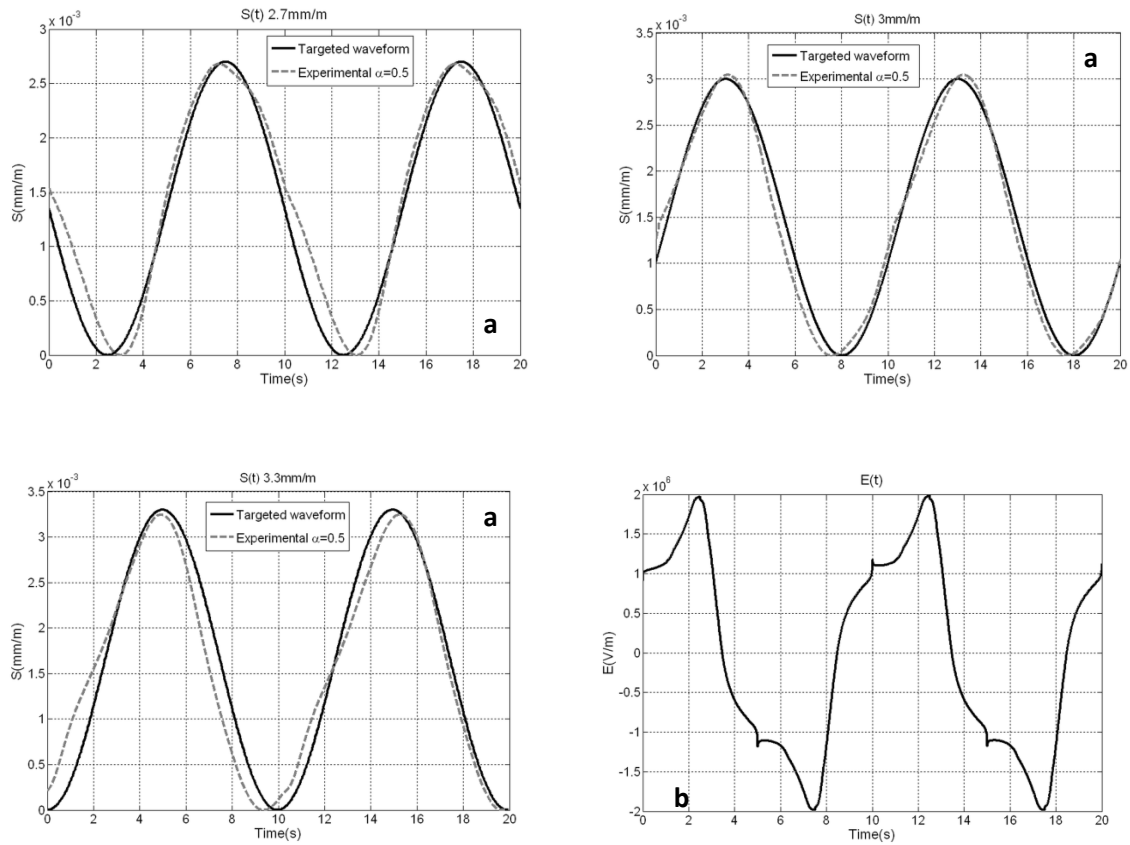


Figure 22. Comparaison déplacement cible / déplacement obtenus pour différents niveaux d'amplitude.

A nouveau de bons résultats expérimentaux sont observés. Finalement et comme ultime validation, une déformation du type triangulaire est testée avec succès (figure n°22)

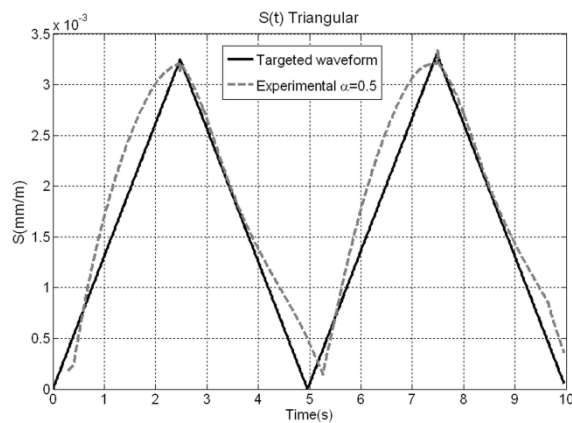


Figure 23. Comparaison déplacement cible / déplacement obtenus pour une forme d'onde de type triangulaire.

**Contrôle de la polarisation sous contrainte mécanique**

Le contrôle de la déformation sous contrainte mécanique est bien évidemment impossible en raison du clamping lié au support mécanique nécessaire à la transmission de cette contrainte. En revanche, le contrôle de la polarisation sous contrainte, permet dans le cadre de certaines applications du type récupération d'énergie de parvenir à la forme d'onde de polarisation optimale conduisant aux meilleurs rendements. La relation d'échelle liant le champ électrique E, et la contrainte mécanique T, est utilisée pour le couplage électromécanique. On considère dans cette relation le produit  $\alpha TP$  comme un champ électrique équivalent. A partir de la polarisation imposée, il nous faut dans un premier temps déterminer la contribution statique de champ électrique. Ceci est fait par l'intermédiaire du modèle d'hystérésis quasi-statique P(E), d'un asservissement et d'un correcteur proportionnel intégral. Le cycle n'est pas parcouru entièrement, il est donc impossible d'utiliser la technique d'inversion dite « régime permanent » utilisée dans le chapitre précédent. En réalité, de faibles zones du cycle sont parcourues, ce qui minimise les non-linéarités et rend la technique par asservissement possible. La contribution de champ électrique équivalente est calculée de façon numérique à partir de la consigne de polarisation. Finalement, on fait la somme des deux contributions et la loi d'échelle liant le champ électrique la polarisation et la contrainte mécanique permet d'obtenir la forme d'onde optimale d'excitation mécanique. La figure n°24 résume à l'aide d'un schéma bloc le modèle inverse T(P).

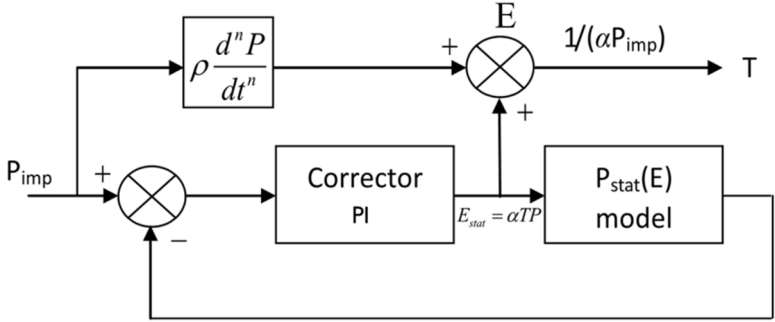


Figure 24. Schéma bloc du modèle inverse T(P).

Pour vérifier ces résultats de simulation un actionneur piézoélectrique est utilisé pour générer la contrainte mécanique. L'ensemble bâti mécanique, actionneur, électrode est monté serré de sorte que les contraintes mécaniques soient entièrement transmises à la céramique. Nous vérifions au préalable que l'actionneur piézoélectrique renvoie une contrainte linéairement liée à sa tension d'alimentation. De nombreux détails concernant le banc de caractérisation utilisé lors de cette



manipulation sont fournis dans la partie expérimentale de ce rapport

De même que pour le contrôle sous champ électrique, nous testons dans un premier temps la dépendance en fréquence sur trois décades pour des fréquences variant de 0,1 à 10Hz. La polarisation cible s'écrit :

$$P(t) = 0.024 + 0.002 \cos(\omega t) \quad (30)$$

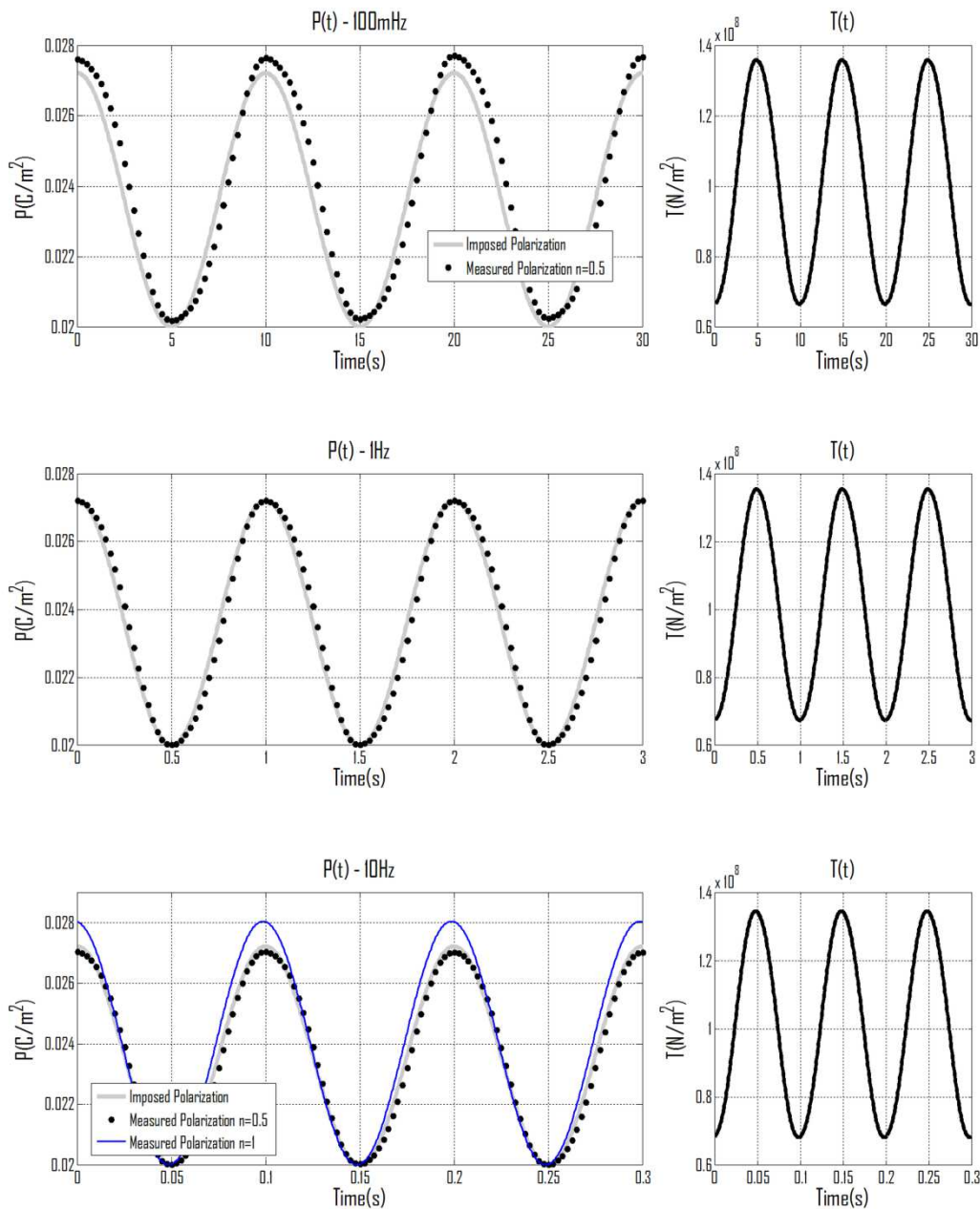
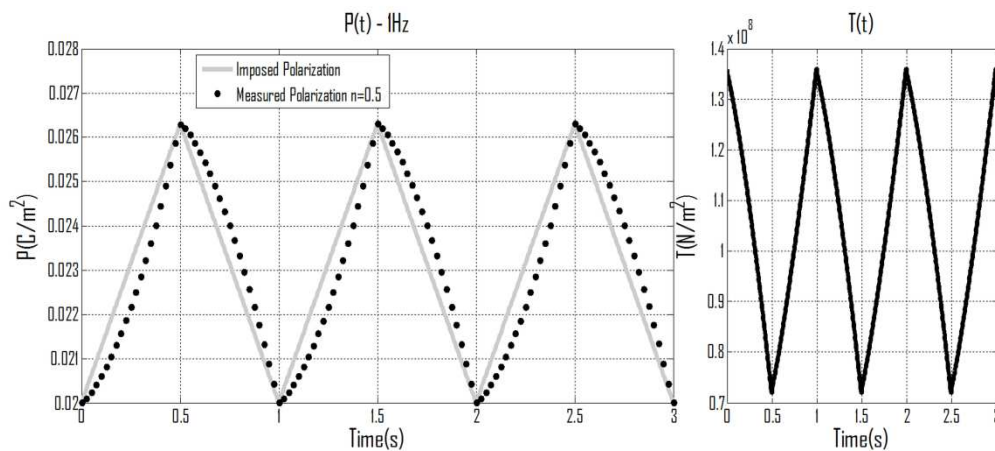


Figure 25. Comparaison entre la polarisation cible et la polarisation mesurée (à gauche). Allure de la contrainte correspondante (à droite)

A noter qu'avant toute mesure, la polarisation rémanente à travers la céramique piézoélectrique est proche de  $0,027C/m^2$ . Comme illustré figure n°25, pour une contrainte d'amplitude constante et une

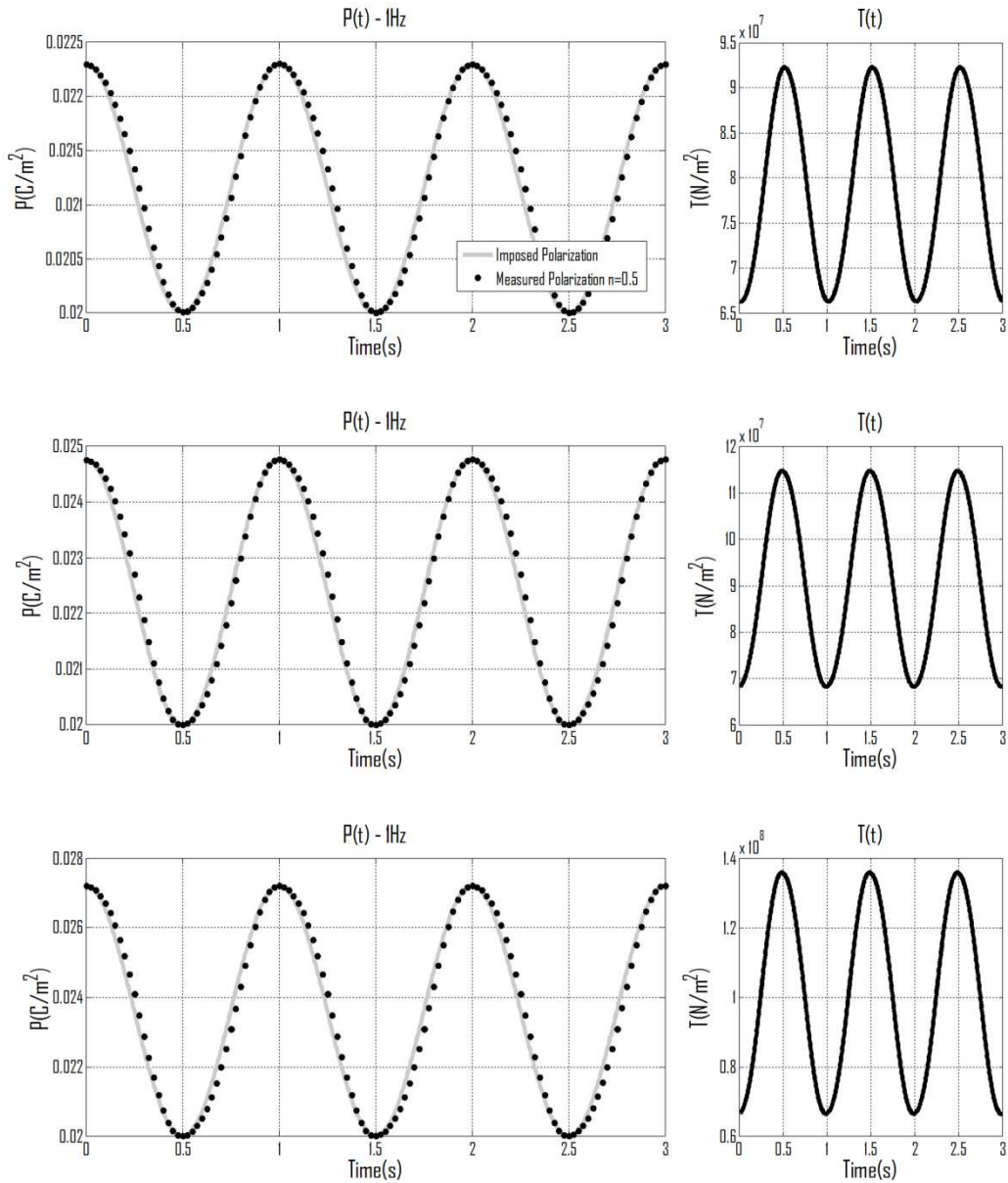
fréquence croissante, les mesures du champ de polarisation sont très proches de celles espérées. Dans les 2 cas ( $n=0.5$  and  $n=1$ ), les paramètres de simulation ont été déterminés par comparaison entre simulation et résultats expérimentaux. Les résultats expérimentaux obtenus pour une valeur de dérivation première ne sont pas exposés ici car la différence avec ceux obtenus lorsque  $n=0.5$  est très faible. Cependant, quand la fréquence augmente ( $> 1$  Hz), des différences significatives commencent à apparaître.

Dans l'étape suivante, une forme d'onde du type triangulaire a été testée pour vérifier la capacité du modèle à répondre à une excitation non harmonique. De bons résultats ont été obtenus (figure n°26).



**Figure 26. Comparaison entre la polarisation cible et la polarisation mesurée (à gauche). Allure de la contrainte correspondante (à droite), pour une excitation de type triangulaire.**

La dernière figure de ce paragraphe (figure n°27) montre les mêmes comparaisons pour différentes amplitudes d'excitation à fréquence constante. Nous observons ici l'influence de l'amplitude de l'excitation sur la précision du modèle inverse. La fréquence a été fixée à 1 Hz et les trois amplitudes testées sont 0.023, 0.025 et 0.027  $C/m^2$ .



**Figure 27. Comparaison entre la polarisation cible et la polarisation mesurée (à gauche). Allure de la contrainte correspondante (à droite), pour différentes amplitudes d'excitation.**

Pour conclure avec cette partie expérimentale, nous pouvons affirmer que la polarisation mesurée est très proche de la polarisation cible. Le modèle inverse donne de bons résultats quelles que soient les variations d'amplitudes et de fréquence de l'excitation. Il donne également de bons résultats sous des contraintes plus exotiques tel que l'excitation triangle illustré figure n°23.

## Cas du creep mécanique

Le creep mécanique correspond à une dérive de la déformation de la céramique piézoélectrique sous contrainte de champ électrique constante. Ici, la dynamique basse voir très basse fréquence est sollicitée. Le phénomène de creep est une non linéarité intrinsèque au fonctionnement même de la céramique piézoélectrique. Le creep mécanique a été beaucoup moins étudié que l'hystérésis et pourtant il constitue une limitation majeure dans des applications du type micro-positionnement, traitement de surface [40, 45].

Dans les chapitres précédents, il a été démontré la bonne prise en compte de la dynamique de la céramique piézoélectrique par le modèle fractionnaire. De larges bandes de fréquence ont été testées et les évolutions de la polarisation et du déplacement ont correctement été reproduites. Pour une simulation précise sur une large échelle de temps, et dans le cas d'une réponse indicielle en déplacement, le champ électrique nécessaire est en générale supérieur aux champs coercitifs du matériau. Plus on s'éloigne du temps de départ et plus la contribution statique est importante, il est important de soigner la partie champ fort du spectre de distribution caractéristique du modèle d'hystérésis statique. Même si dans le cadre de la reconstitution des cycles d'hystérésis standards le poids de cette partie du spectre est faible dans le cadre du creep, elle revêt une importance fondamentale [46, 48]. Les simulations montrent que 80% des premiers éléments de cette distribution sont instantanément saturés et que 95% des éléments le sont à la fin de la première seconde. Dès lors, seule la partie de distribution restante va influencer sur l'allure et l'évolution du creep.

Sur la figure n°28, il est présenté la comparaison entre l'évolution simulée et mesurée du courant à travers la céramique piézoélectrique pour un échelon de champ électrique de  $1,5 \text{ kV}\cdot\text{mm}^{-1}$ . Sur les deux courbes, le courant présente une forme en double piques séparés d'états permanents, ces résultats sont consistants avec des résultats précédemment publiés [25]. La déformation simulée est déterminée à partir du courant fournit par le modèle puis est comparée à la déformation expérimentale mesurée à l'aide d'un vibromètre laser (figure n°29). La déformation atteint 85% de sa valeur finale instantanément. Une prise en compte des pertes dynamiques du type premier ordre est soit trop sensible, soit trop lente pour rendre compte correctement de toute la réponse indicielle du système. En revanche la réponse fractionnaire qui présente un comportement dynamique différent permet une bonne prise en compte de la partie rapide de la déformation (85% de la valeur finale) ainsi que la lente évolution de 15% restants correspondant au creep de la céramique.

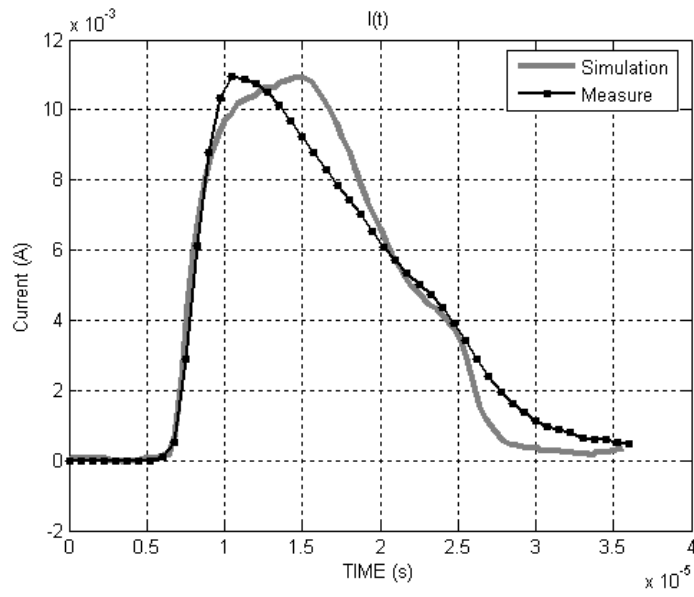


Figure 28. Comparaison simulation/mesure, évolution du courant en fonction du temps.

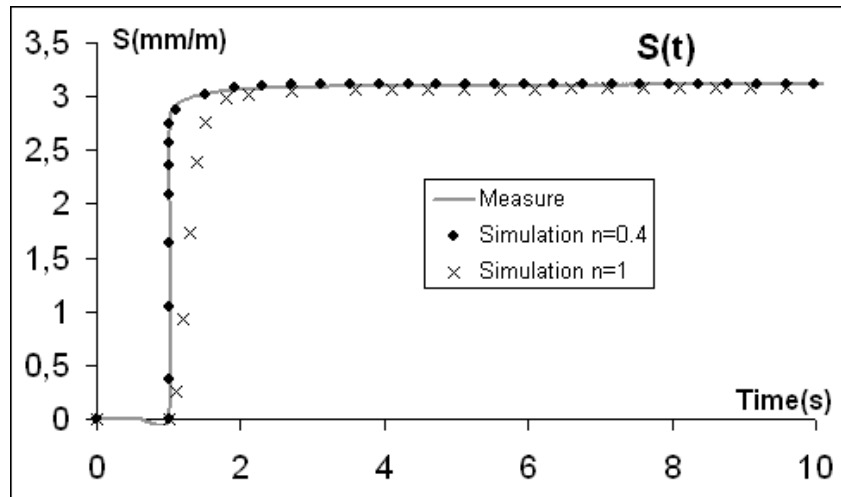


Figure 29. Comparaison simulation/mesure, évolution de la déformation en fonction du temps.

## Bibliographie

[26] S.Choi, S.Cho, and Y.Park, "Vibration and position tracking control of piezoceramic-based smart structures via qft", ASME J. Dyn. Syst. Meas. Cont., 1999, vol.121, pp.27-33.

DOI: [10.1115/1.2802438](https://doi.org/10.1115/1.2802438)

[27] R.Wiesendanger, "Scanning Probe Microscopy and Spectroscopy", Cambridge University Press, 1994, Cambridge, UK.

[28] R.Barret, "Active plate and missile wing development using directionally attached piezoelectric elements", AIAA J., 1994, vol.32 n°3, pp.601-609.

DOI: [10.2514/3.12027](https://doi.org/10.2514/3.12027)

[29] P.Ge and M.Jouaneh, "Tracking control of a piezoceramic actuator", IEEE Trans. Control Syst. Techno., 1996, vol.4 n°3, pp.209-216.

DOI: [10.1109/87.491195](https://doi.org/10.1109/87.491195)

[30] R.S.Robinson, "Interactive computer correction of piezoelectric creep in scanning tunneling microscopy images", J.Comput.-Assist. Microsc., 1996, vol.2 n°1, pp.53-58.

DOI: [10.4236/mme.2013.31001](https://doi.org/10.4236/mme.2013.31001)

[31] D. Guyomar, **B. Ducharne**, G. Sebald, "Time fractional derivatives for voltage creep in ferroelectric materials: theory and experiment", Journal of Physics D: Applied Physics, Vol. 41, Iss. 12, 125410, 2008.

DOI: [10.1088/0022-3727/41/12/125410](https://doi.org/10.1088/0022-3727/41/12/125410)

[32] H.Kaizuka, "Application of capacitor insertion method to scanning tunneling microscopy", Rev. Sci. Instrum., vol.62, pp.3119-3122.

DOI: [10.1063/1.1140588](https://doi.org/10.1063/1.1140588)

[33] D.Croft, G.Shed, S.Devasia, "Creep, hysteresis, and vibration compensation for piezoactuators: Atomic Force Microscopy Application", J. Dyn. Syst. Meas. And Cont., 2001, vol.123, pp.35-43.

DOI: [10.1109/ACC.2000.879576](https://doi.org/10.1109/ACC.2000.879576)

[34] R.C. Smith, M.V. Salapaka, A. Hatch, J. Smith and T.De "Model development and inverse compensator design for high speed nanopositioning" Proceedings of the 41st IEEE Conference on Dec. and Control, Las Vegas, NV, 2002.

DOI: [10.1109/CDC.2002.1184930](https://doi.org/10.1109/CDC.2002.1184930)

[35] A.Badel, J.Qiu, T.Nakano, "Self-sensing force control of a piezoelectric actuator", IEEE Trans. on Ultrason, Ferr. and Freq. Cont, vol.55, pp.2571-2581, 2008.

DOI: [10.1109/TUFFC.2008.973](https://doi.org/10.1109/TUFFC.2008.973)

[36] Y.C.Yu, M.K.Lee, "Sliding mode control of a piezoelectric actuator with a neural network compensating rate-dependent hysteresis", IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, Barcelona, Spain, 2005, pp.3641-3645.

DOI: [10.1109/ROBOT.2005.1570674](https://doi.org/10.1109/ROBOT.2005.1570674)

[37] J.M. Cruz-Hernandez, V.Hayward, "Phase control approach to hysteresis reduction", IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., 2001, vol. 9, n°1, pp. 17-26.

DOI: [10.1109/87.896742](https://doi.org/10.1109/87.896742)

[38] A.Badel, J.Qiu, T.Nakano, "A new simple asymmetric hysteresis operator and its application to inverse control of piezoelectric actuators", 2008, vol.55, pp. 1086-1094.

DOI: [10.1109/TUFFC.2008.761](https://doi.org/10.1109/TUFFC.2008.761)

[39] D. Guyomar, **B. Ducharne**, G. Sebald, "High frequency bandwidth polarization and strain control using a fractional derivative inverse model", Smart Materials and Structures, Vol. 19, Iss. 4, n °045010, 2010.

DOI: [10.1088/0964-1726/19/4/045010](https://doi.org/10.1088/0964-1726/19/4/045010)

[40] A.Slocum, Precision Machine Design, Prentice-hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992, pp. 666-674.

[41] P.Chen, and S. Montgomery, Ferroelectrics 23, 199 (1980).

[42] M.W.J. Prins, S.E. Zinnemers, J.F.M. Cillessen, J.B. Giesberg, "Depletion-type thin-film transistors with a ferroelectric insulator", Appl. Phys. Lett., vol.70, pp. 458-460, Jan. 1997.

DOI: [10.1063/1.118180](https://doi.org/10.1063/1.118180)

[43] T.K. Yong, S.S. Dong, "Memory window of Pt/SrBi<sub>2</sub>Ta<sub>2</sub>O<sub>9</sub>/CeO<sub>2</sub>/SiO<sub>2</sub>/Si structure for metal ferroelectric insulator", Appl. Phys. Lett., vol.71, pp. 3507-3509, Dec. 1997.

DOI: [10.1063/1.120374](https://doi.org/10.1063/1.120374)

[44] K. Dimmler, M. Parris, D. Butler, S. Eaton, B. Pouligny, J.F. Scott, Y. Ishibashi, "Switching kinetics in KNO<sub>3</sub> ferroelectric thin-film memories", J. Appl. Phys., vol.61, pp. 5467-5470, Jun. 1987.

DOI: [10.1063/1.338237](https://doi.org/10.1063/1.338237)

[45] G.Robert, D. Damjanovic, N. Setter, "Preisach modeling of piezoelectric nonlinearity in ferroelectric ceramics". J.Appl. Phys., vol.89, pp.5067-5074, 2001.

DOI: [10.1063/1.1359166](https://doi.org/10.1063/1.1359166)

[46] L. Cima, E. Laboure, "A model of ferroelectric behaviour based on a complete switching density", J.Appl. Phys., vol.95, pp.2654-2659, 2004.

DOI: [10.1063/1.1644894](https://doi.org/10.1063/1.1644894)

[47] S.C. Hwang, C.S. Lynch, R.M. McMeeking, "Ferroelectric/ferroelastic interactions and a polarization switching model", Acta. Metall. Mater., vol.95, pp.2654-2659, 2004.

DOI: [10.1016/0956-7151\(94\)00379-V](https://doi.org/10.1016/0956-7151(94)00379-V)

[48] J.E. Huber, N.A. Fleck, C.M. Landis, R.M. McMeeking, "A constitutive model for ferroelectric polycrystals", J. Mech. Phys. Solids, vol.44, pp.1663-1697, 1999.

DOI: [10.1016/S0022-5096\(98\)00122-7](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(98)00122-7)





# CARACTERISATION DES CERAMIQUES PIEZO-ELECTRIQUES

Les céramiques piézo-électriques sont communément regroupées en deux familles. Nous distinguons les céramiques douces caractérisées par une grande mobilité des parois de domaines et une polarisation facile, des céramiques dures présentant une grande stabilité en polarisation et de faibles pertes diélectriques [50, 54].

La plupart des résultats expérimentaux présentés dans les chapitres précédents de ce manuscrit sont issus de la même famille de céramique. Nous avons opté pour une céramique douce Saint-Gobain type Navy II présentant des effets dynamiques importants et dont les caractéristiques fournies par le constructeur sont résumées dans le tableau suivant :

Parameters	Symbol	Units	Typical values
Density	$\rho$	$10^3 \text{ kg.m}^{-3}$	7.7
Poisson's constant	$\sigma$		0.3
Curie point	$T_c$	$^{\circ}\text{C}$	340
Dielectric permittivity	$\varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0$		1850
Piezoelectric coefficient	$d_{33}$	$\text{pC/N}$	425

Tableau 2. Principale caractéristique d'une céramique standard P188 d'après le constructeur

Cette céramique est particulièrement bien adaptée à notre étude, en effet les comportements non linéaires sont facilement accessibles et la dépendance en fréquence est fortement marquée. Les spécimens cylindriques ( $\phi$  6.3 mm) provenant du fabricant sont coupés pour atteindre la hauteur adéquate (1, 2, ou 5mm en fonction de l'application), puis enduis sur les faces latérales de peinture d'argent qui joue le rôle de l'électrode.

Un banc de caractérisation classique illustré figure n°30 a été utilisé pour évaluer la dépendance en fréquence sous champ électrique (cas du modèle P(E)). Ce banc de caractérisation offre l'option du contrôle de la tension imposée, et par conséquent le contrôle du champ électrique. Il nous a permis de valider les modèles inverses E(P), E(S).

La déformation est mesurée à l'aide d'un capteur capacitif Fogale MC 940. Les échantillons testés sont positionnés sur un disque d'acier relié à la masse de l'amplificateur de tension. Un autre disque

métallique placé au-dessus de la céramique et relié à la sortie positive permet de créer le champ électrique. L'amplificateur haute-tension est un modèle 10/10 TrekInc. Cet amplificateur est contrôlé par un générateur basse fréquence Agilent 33220A programmable. La polarisation est déterminée par intégration numérique du courant, lui-même mesuré grâce à un amplificateur de courant Keithley 5011. Finalement l'ensemble des signaux, tension imposée, courant mesuré sont monitorés à l'aide d'un oscilloscope Lecroy 44XS.

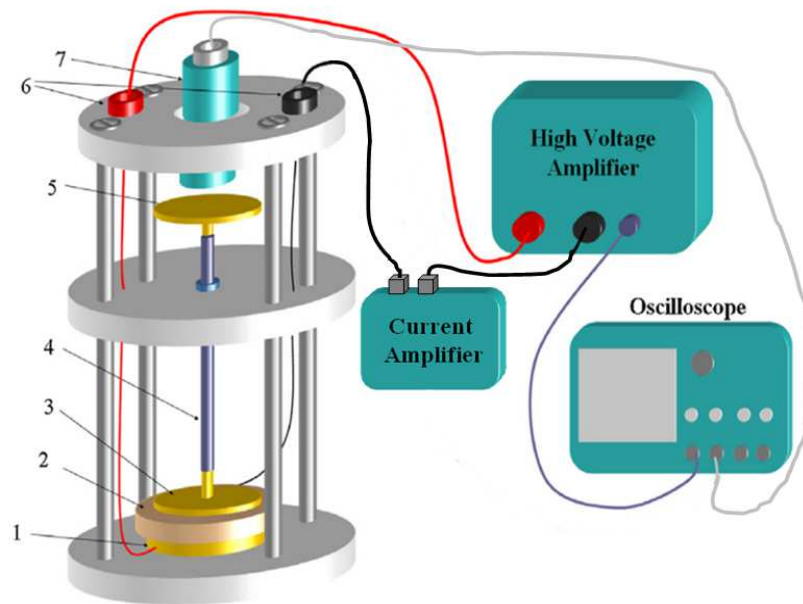


Figure 30. Banc de caractérisation sous contrainte de champ électrique.

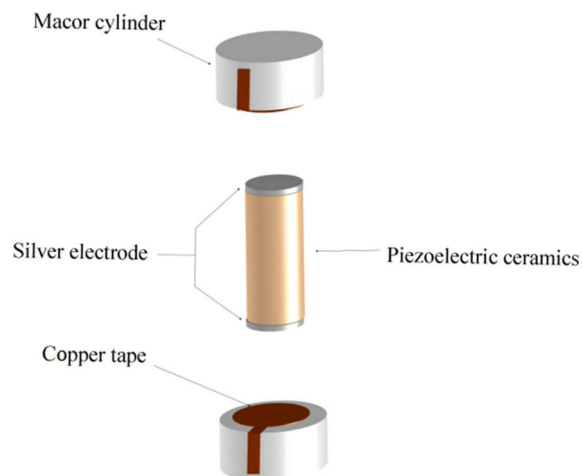
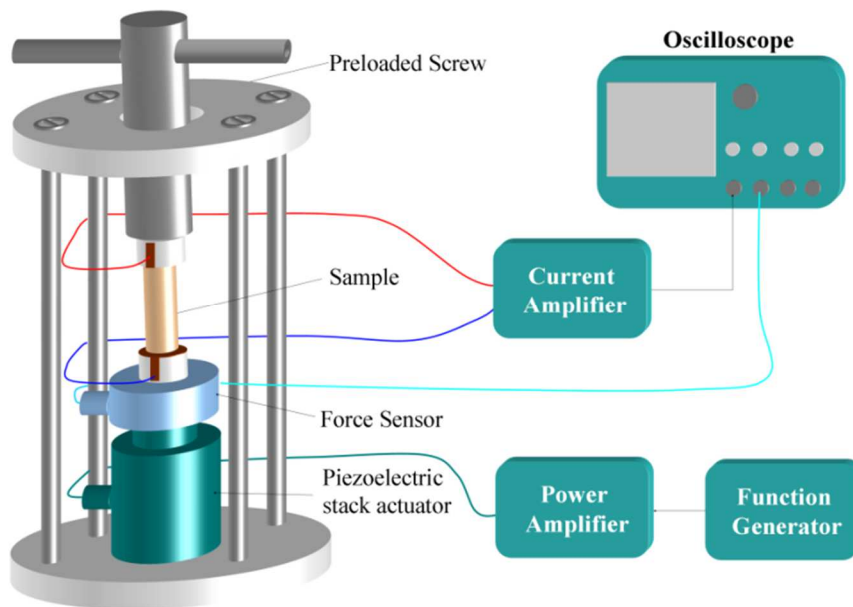
Ce premier banc de caractérisation donne de précieuses informations quant à l'évolution de la polarisation sous champ électrique, les deux étant dans la même direction.

Dans la validation des modèles P(T) et T(P) un autre banc de caractérisation a été développé. Ce banc doit permettre la transmission de la contrainte mécanique ainsi que le monitoring en temps réel de la polarisation.

Dans ce nouveau banc de caractérisation, un stack piézoélectrique (P-246 PI Ceramic Company, Germany) contrôlé par un générateur de fonction (Agilent, 33220A) et alimenté par un amplificateur de puissance (HVPZT Ceramic Company) génère la contrainte mécanique. Un capteur de force XFC200R monté entre le stack piézoélectrique et la céramique permet de mesurer la contrainte longitudinale. Le tout est monté serré à l'aide d'un châssis en acier dont la rigidité est supposée très grande devant les autres éléments du montage. Deux pièces en macor ( $\phi 6 \times 3$  mm) assurent l'isolation diélectrique entre la céramique et le reste du banc de caractérisation. Finalement, du scotch

de cuivre conducteur double face collé sur les électrodes de la céramique est utilisé pour la mesure du courant de polarisation

74



**Figure 31. Banc de mesure de l'évolution de la polarisation diélectrique sous contrainte mécanique.**

Ce banc de caractérisation permet également des caractérisations croisées en couplant contrainte mécanique et électrique. Les deux éléments de scotch de cuivre conducteur double face collés sur les électrodes de la céramique servent alors comme support de la tension électrique à l'origine du champ électrique.

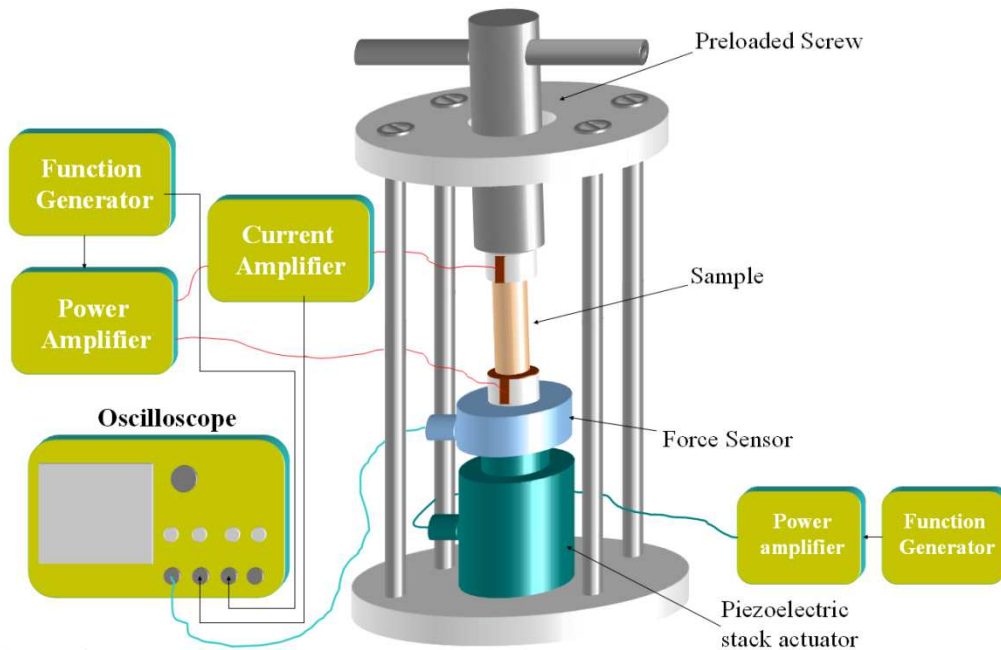


Figure 32. Banc de caractérisation croisée contrainte mécanique / champ électrique.

Les deux générateurs basses fréquences qui contrôlent la contrainte mécanique et le champ électrique peuvent être synchronisés et permettre également des mesures de type alterné.

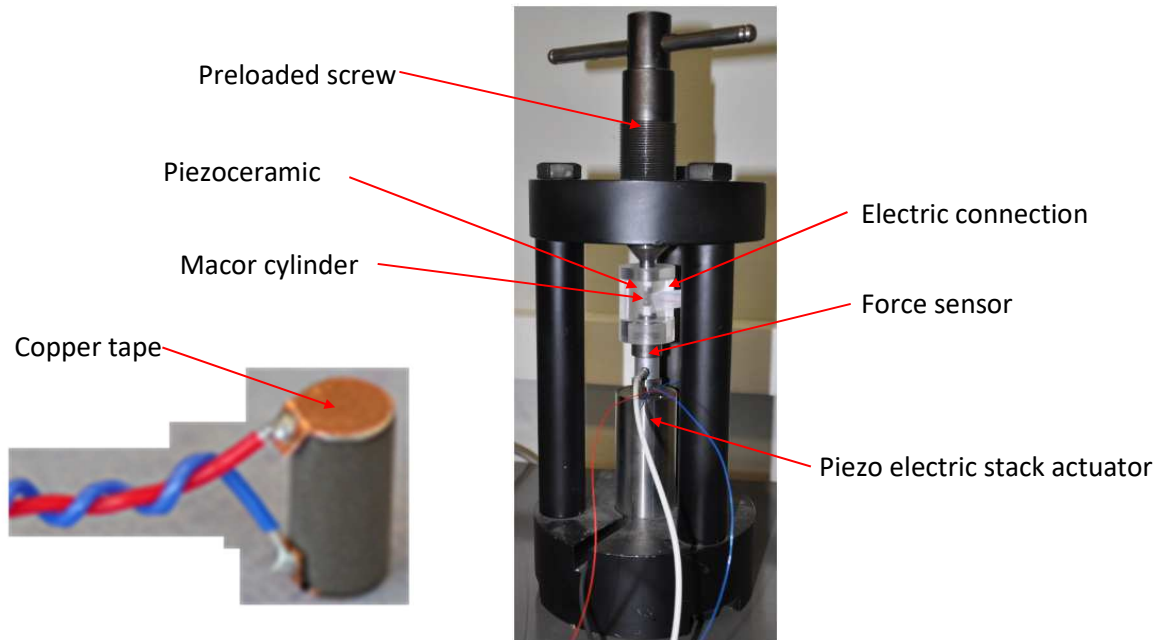
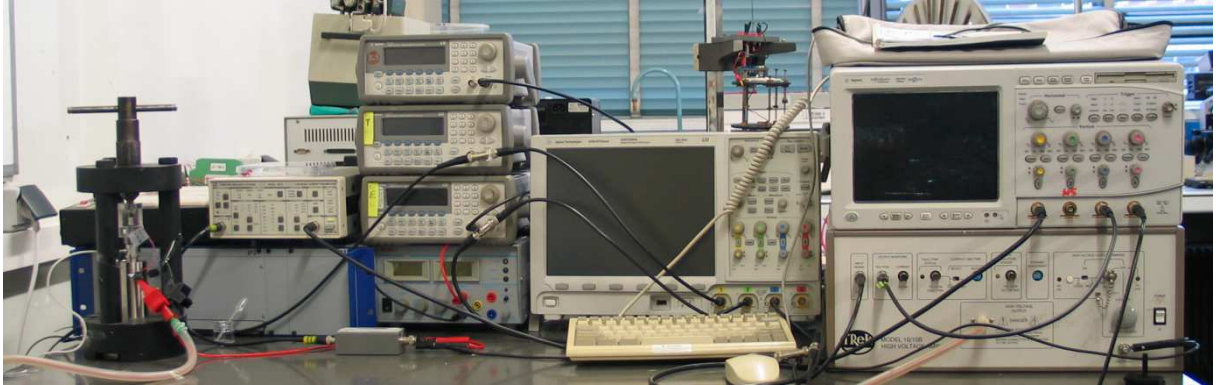


Figure 33. Banc de caractérisation croisée contrainte mécanique / champ électrique.

## Bibliographie

[50] David A Hall, Paul J Stevenson, "High field dielectric behaviour of ferroelectric ceramics", *Ferroelectrics*, 228(1):139–158, 1999.

DOI: [10.1080/00150199908226132](https://doi.org/10.1080/00150199908226132)

[51] Piezoelectric Ceramics: Principles and Applications. APC International, Ltd., December 2011.

[52] FUJI Ceramics corporation. Piezoelectric Ceramics.

[53] Burfoot J C and Taylor G W 1979 Polar Dielectric and their Applications (London: Macmillan)

[54] Damjanovic D., Ferroelectric, dielectric and piezoelectric properties of ferroelectric thin films and ceramics, 1998 Rep. Prog. Phys. 61 1267

DOI: [0034-4885/61/9/002](https://doi.org/10.1088/0034-4885/61/9/002)

***APPLICATION : RECUPERATION D'ENERGIE CYCLE D'ERICSSON***

---

# APPLICATION : RECUPERATION D'ENERGIE CYCLE D'ERICSSON

## Introduction de la technique et de ses applications

De nombreuses équipes de recherche s'intéressent à la récupération d'énergie vibratoire mécanique [55, 62]. L'idée est de fournir des micro générateurs capables d'alimenter de petits dispositifs électroniques déportés [63, 72]. Dans les chapitres précédents, nous avons proposé un modèle complet (direct et inverse) de l'évolution de la polarisation diélectrique sous contraintes externes de natures, d'amplitudes et de fréquences aléatoires. De nombreuses applications industrielles mettent en action des systèmes piézoélectriques présentant des performances améliorées lorsque ces excitations de nature différentes sont combinées. Dans ce paragraphe, nous présentons une technique de récupération d'énergie vibratoire pour laquelle la combinaison de l'excitation mécanique naturelle associée à une excitation externe artificielle de champ électrique permet d'augmenter fortement l'efficacité du système. L'utilisation des modèles précédemment décrits permet ici de déterminer précisément l'allure (forme d'onde, amplitude et fréquence) du champ électrique optimal ainsi que le rendement du système. Cette technique de récupération d'énergie est particulièrement appropriée à l'illustration des modèles définis dans ce compte-rendu. En effet l'excitation combinée de la céramique piézo-électrique donne naissance à des comportements fortement non-linéaires et le coté aléatoire de la contrainte vibratoire mécanique impose une modélisation sur de très larges bandes de fréquence. La bonne prise en compte par le modèle des pertes diélectriques est fondamentale car le rendement du système est fortement dépendant de celles-ci [73, 74].

La façon la plus simple de récupérer de l'énergie suite à une excitation du type vibration mécanique nécessite l'utilisation d'un interrupteur contrôlé. L'idée est de court-circuiter la céramique piézoélectrique dès lors que la contrainte mécanique maximale est atteinte. Le cycle diélectrique  $P(T)$  subi par l'échantillon définit une boucle dans le sens horaire et dont l'aire est égale au maximum d'énergie disponible. Pour illustrer cette affirmation, prenons l'exemple de la route piézoélectrique, où l'excitation mécanique est due au passage des véhicules. Les échantillons de céramique sont noyés dans l'asphalte et chaque passage de véhicule donne naissance à une excitation mécanique.



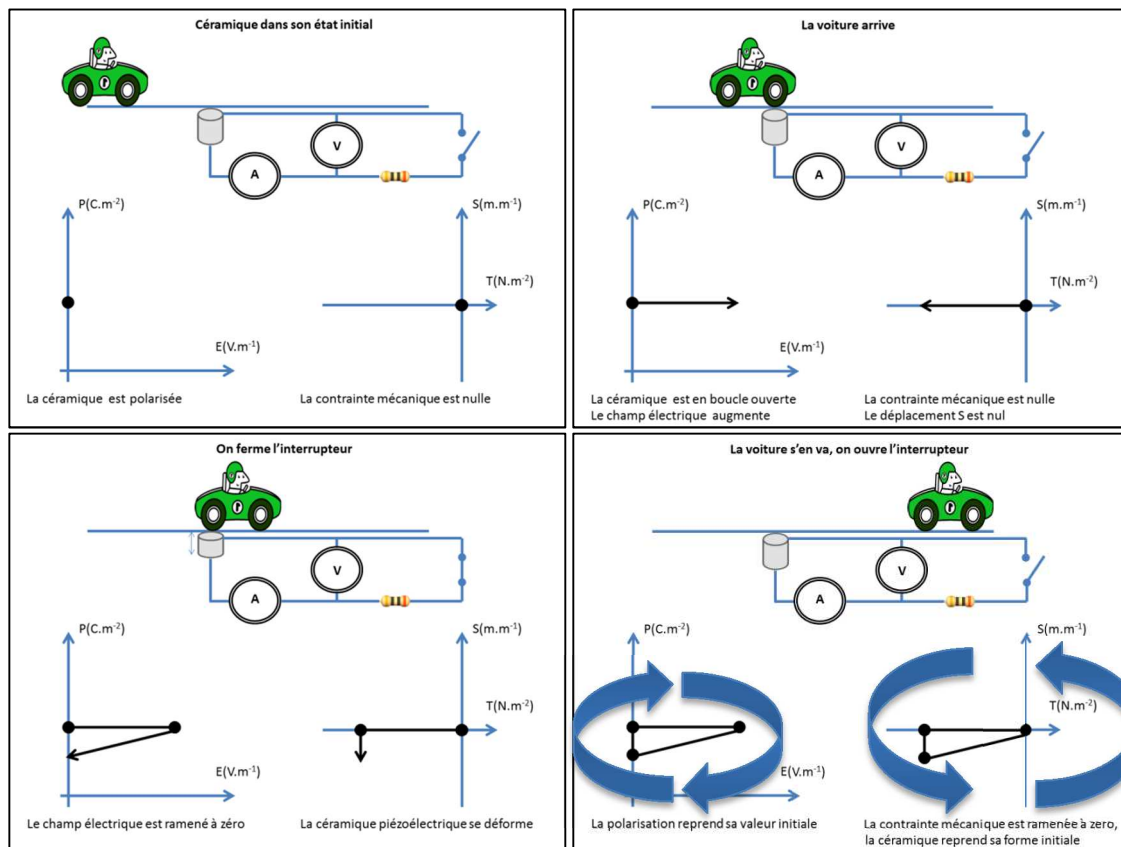


Figure 34. Illustration de la technique la plus simple de récupération d'énergie suite au passage d'un véhicule.

### Technique des cycles d'Ericsson pour la récupération d'énergie, synchronisation champ électrique / contrainte mécanique

Pour améliorer les performances en terme de récupération d'énergie, nous proposons une technique qui couple les deux excitations externes, électrique et mécanique. L'idée est d'augmenter l'aire du cycle vertueux  $P(E)$  illustrée précédemment figure n°34, ceci est rendu possible par l'adjonction synchronisée à la contrainte mécanique d'un champ électrique d'excitation externe. La technique ainsi développée est analogue à la technique bien connue dans le domaine de la thermodynamique dite « des cycles d'Ericsson ». Deux transformations isobares et deux transformations isothermes sont réalisées de façon synchronisée afin d'augmenter le rendement des moteurs thermiques. Dans notre cas deux transformations iso-contrainte et deux transformations iso-champ électrique permettent une augmentation conséquente du cycle vertueux de récupération d'énergie. Pour obtenir des cycles de larges amplitudes, des céramiques pré-polarisées sont nécessaires. Le champ électrique ainsi que la contrainte mécanique sont imposés en respectant les chronogrammes de la figure n°35. Dans la

première étape de la boucle, la contrainte mécanique est nulle, le champ électrique croit jusqu'à atteindre une valeur maximale. Le champ électrique est ensuite maintenu à sa valeur maximale pendant toute la deuxième étape du processus, celle-ci ne se termine que lorsque la contrainte mécanique a atteint son maximum. Commence alors la troisième étape, la contrainte est maintenue constante et l'on diminue progressivement la valeur du champ électrique jusqu'à ce que celui-ci s'annule. Dans la dernière étape, sous champ électrique nulle la contrainte mécanique est progressivement diminuée jusqu'à ce qu'elle s'annule. Une fois que la contrainte mécanique a totalement disparu un autre cycle peut commencer

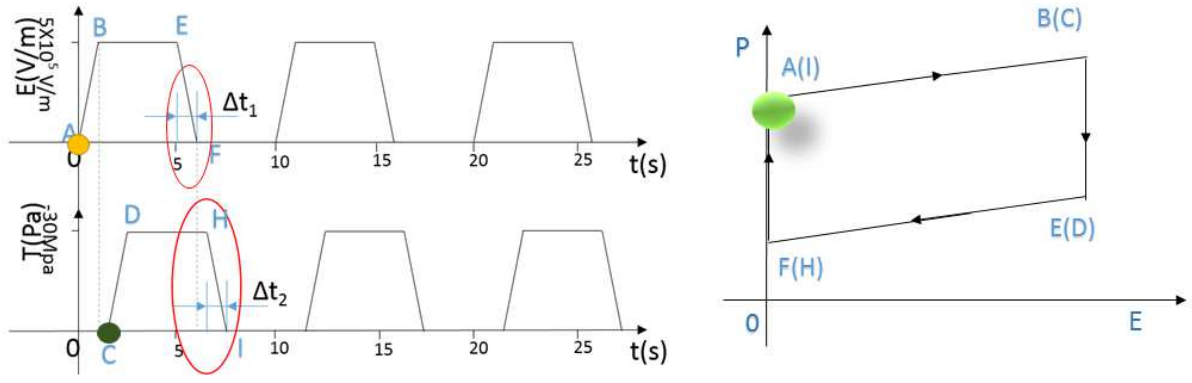


Figure 35. Evolution temporelle de la contrainte mécanique et du champ électrique, cycle P(E) associé.

**Simulation, résultats expérimentaux**

Dans le cas de la route piézo-électrique la contrainte mécanique est issue du mouvement des véhicules sur le bitume. Ce mouvement aléatoire peut être fortement approximé par une sinusoïdale d'amplitude décroissante (figure n°36)

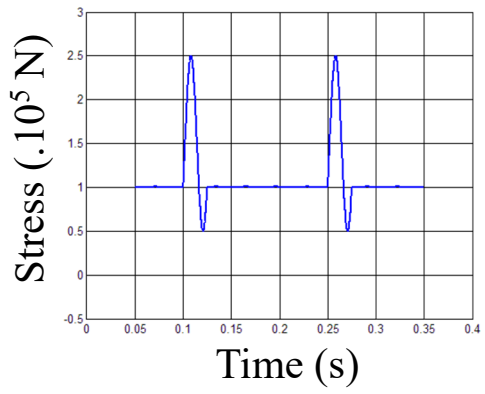


Figure 36. Evolution temporelle de la contrainte mécanique, passage d'un véhicule.

La fréquence est comprise entre quelques mHz et une centaine de Hz, celle-ci est directement liée à la vitesse du véhicule. La figure n°37 présente une première comparaison simulation/mesure pour un

cycle d'Ericsson. La mesure a été obtenue à l'aide du banc de caractérisation présenté dans le chapitre précédent. La simulation quant à elle provient du modèle fractionnaire décrit dans la première partie de ce manuscrit. Pour cette première comparaison, nous avons opté pour les conditions d'excitation moyenne, un champ électrique d'amplitude  $3 \cdot 10^5 \text{V/m}$ , une fréquence de  $0,1 \text{Hz}$ , et une contrainte mécanique d'amplitude de  $50 \text{MPa}$ . Nous présentons cette figure pour illustrer la bonne corrélation temporelle entre les cycles d'Ericsson mesurés et simulés. Dans la suite, nous nous concentrons uniquement sur l'évolution de l'aire du cycle qui reste le paramètre clef dans cette étude

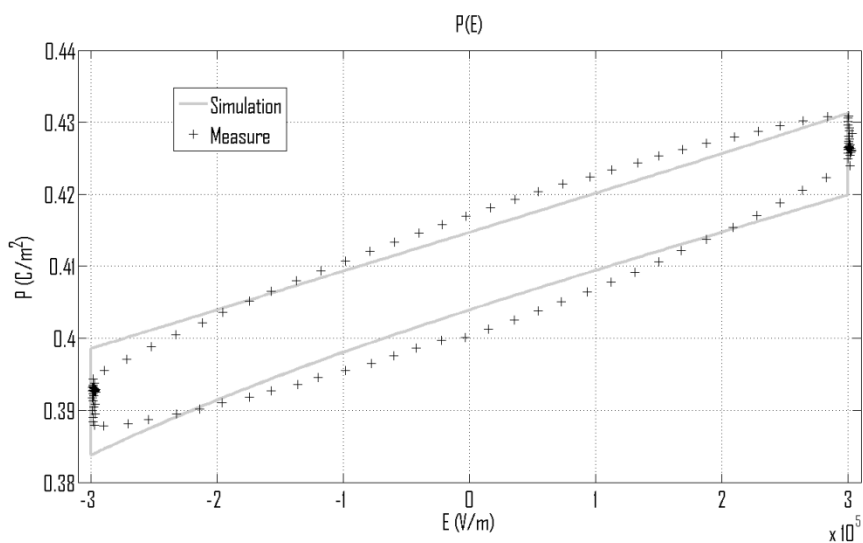


Figure 37. Comparaison cycle d'Ericsson mesuré/simulé.

Finalement, nous présentons des comparaisons simulation/mesure donnant l'évolution de l'aire du cycle d'Ericsson. Différents paramètres sont testés, en prenant soin de ne faire varier qu'un paramètre à la fois.

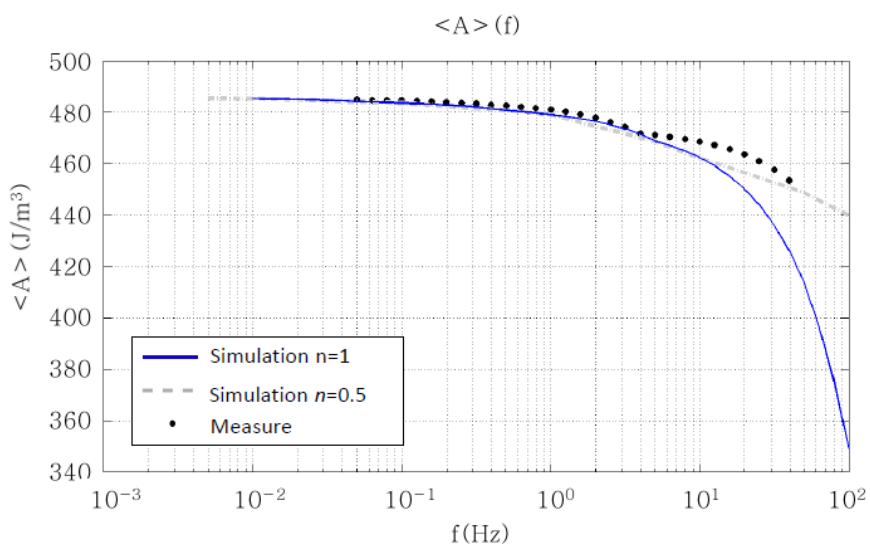


Figure 38. Comparaison mesure/simulation, influence du paramètre fréquence du champ électrique.

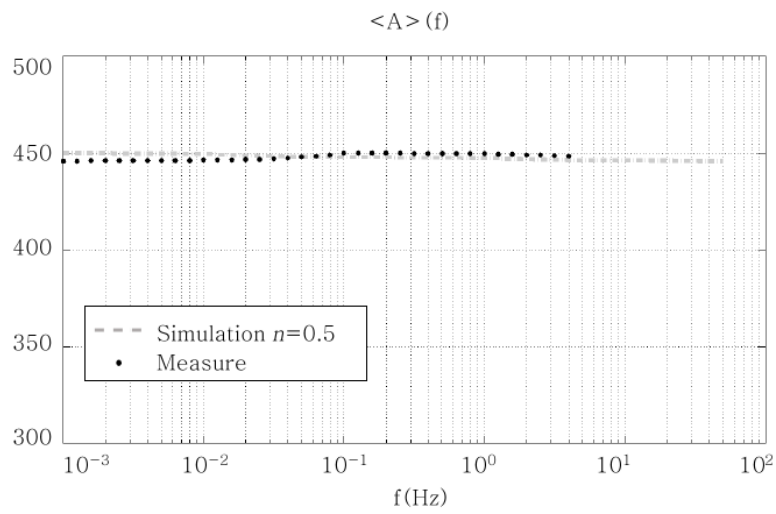


Figure 39. Comparaison mesure/simulation, influence du paramètre fréquence de la contrainte mécanique.

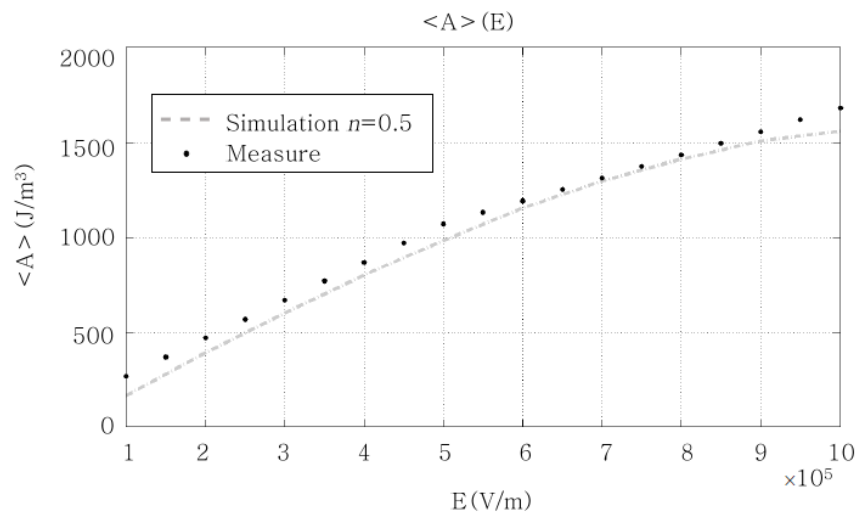


Figure 40. Comparaison mesure/simulation, influence du paramètre amplitude du champ électrique.

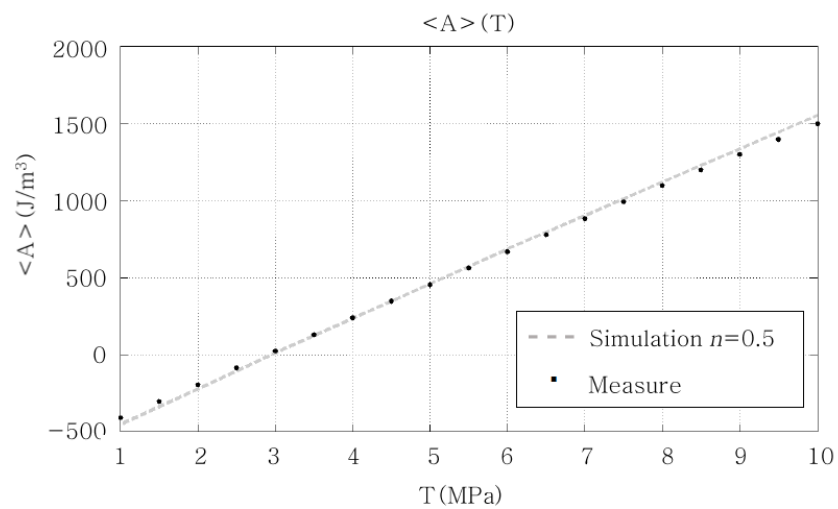


Figure 41. Comparaison mesure/simulation, influence du paramètre amplitude de la contrainte mécanique.

A noter que le modèle dynamique fractionnaire donne des résultats de simulation très satisfaisants. La fréquence du champ électrique est un paramètre clef. La figure suivante ne présente que des résultats de simulation. Nous avons balayé sur de larges bandes, les paramètres amplitude et fréquence afin d'évaluer quels sont ceux qui donnent les meilleurs rendements, en terme de récupération d'énergie. Logiquement ces surfaces 3D se décale vers le bas (traduisant une récupération moindre dès lors que la fréquence augmente). La vitesse à laquelle se produit ce décalage est directement liée au coefficient fractionnaire  $n$  de notre modèle.

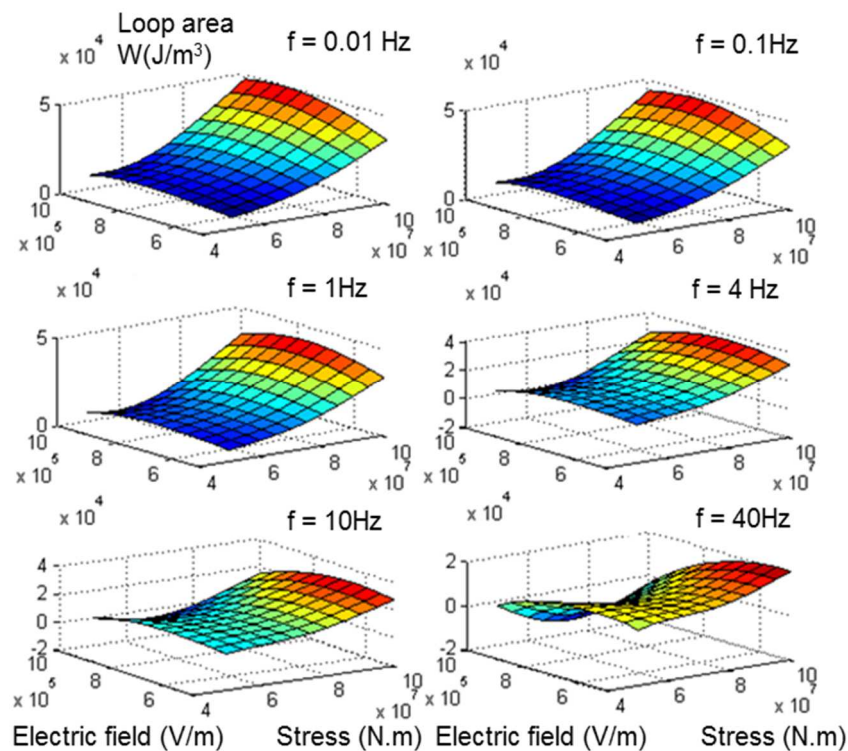


Figure 42. Comparaison mesure/simulation, influence du paramètre amplitude de la contrainte mécanique.

### Discussion et conclusion

Les vibrations mécaniques sont naturellement accessibles partout autour de nous, c'est une ressource qui semble illimitée (vent, vague, déplacement). La possibilité de recycler cette énergie ambiante et de donner naissance à des générateurs électriques illimités dans le temps présente un intérêt majeur. En synchronisant le champ électrique et la contrainte mécanique suivant le schéma d'Ericsson, l'amplitude de l'énergie récupérée peut être fortement augmentée. Dans un monde parfait, sans non-linéarités, cette augmentation n'aurait pas de limite, en réalité les pertes diélectriques et les non-linéarités créées par le matériau limitent fortement cette augmentation et ceci est d'autant plus vrai que les niveaux d'excitation sont élevés.

Cette étude sur la technique de récupération d'énergie dite « des cycles d'Ericsson » constitue une bonne validation du modèle dynamique fractionnaire [75]. En effet, pour estimer correctement l'énergie récupérée, le modèle doit être précis sur une très large bande de fréquence et d'amplitude. L'excitation mécanique environnante s'apparente à un bruit blanc dont les fréquences sont largement distribuées. A noter que même si ceci n'apparaît pas dans ce compte-rendu, d'autres méthodes de récupération d'énergie ont été modélisées à l'aide des mêmes dispositifs, ainsi la modélisation de la technique SSD « single switch damping » a permis une évaluation bien plus précise des rendements. En effet, ici aussi les matériaux sont fortement excités et les pertes diélectriques ne peuvent être négligées.

## Bibliographie

[55] H.A. Sodano and D.J. Inman, "A review of power harvesting from vibration using piezoelectric materials", *Shock Vib. Dig.*, 2004, vol.36, pp.197-205.

DOI: [10.101177/0583102404043275](https://doi.org/10.101177/0583102404043275)

[56] L. Collins, "Harvesting for the world: energy harvesting techniques", *IEEE Power Eng.*, 2006, vol.20, pp.34-7.

DOI: [10.1049/pe:20060106](https://doi.org/10.1049/pe:20060106)

[57] G. Park, T. Rosing, M.D. Todd, C.R. Farrar and W. Hodgkiss, "Energy harvesting for structural health monitoring sensor networks", *ASCE J. Infrastruct. Syst.*, 2008, vol. 14, pp. 64-79.

DOI: [10.1061/\(ASCE\)1076-0342\(2008\)14:1\(64\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1076-0342(2008)14:1(64))

[58] X. Tang and L. Zuo, "Towards MESO and macro scale energy harvesting of vibration" *Proc. 2009 ASME Int.Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2009, (Florida).

DOI: [10.1115/IMECE2009-10902](https://doi.org/10.1115/IMECE2009-10902)

[59] J. Paradiso and T. Starner, "Energy scavenging for mobile and wireless electronics", *IEEE Pervasive Comput.*, 2009, vol.4, pp. 18–26.

DOI: [10.1109/MPRV.2005.9](https://doi.org/10.1109/MPRV.2005.9)

[60] Y. Kawamoto, Y. Suda, H. Inoue and T. Kondo, "Electro-mechanical suspension system considering energy consumption and vehicle manoeuvre", *Veh. Syst. Dyn.*, 2008, vol. 46, pp.1053–63.

DOI: [10.1080/00423110802056263](https://doi.org/10.1080/00423110802056263)

[61] L. Zuo, B. Scully, J. Shetani and Y. Zhou, "Design and characterization of an electromagnetic energy harvester for vehicle suspensions", *Smart Mater. Struct.*, 2010, vol.19, pp. 045003.

DOI: [10.1088/0964-1726/19/4/045003](https://doi.org/10.1088/0964-1726/19/4/045003)

[62] J.T. Scruggs and W.D. Iwan, "Structural control with regenerative force actuation networks", *Struct. Control. Health. Monit.* , 2005, vol.50, pp. 25–45.

DOI: [10.1002/stc.50](https://doi.org/10.1002/stc.50)

[63] T. Ni, L. Zuo and A. Kareem, "Assessment of energy potential and vibration mitigation of regenerative tuned mass dampers on wind excited tall buildings", *ASME Design Engineering Technical Conf.*, Washington DC, 28–31 Aug. 2011.

DOI: [10.1115/DETC2011-48728](https://doi.org/10.1115/DETC2011-48728)

[64] X. Tang and L. Zuo, "Self-powered active control of structures with TMDs", *IMAC XXVIII Conf. and Exposition on Structural Dynamics: Structural Dynamics and Renewable Energy*, Florida, 2010.

DOI: [10.1007/978-1-4419-9716-6\\_21](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9716-6_21)

[65] X. Tang and L. Zuo, "Regenerative semi-active control of tall building vibration with series TMDs", *Proc. America Control Conf.*, Baltimore, MD, June 30–July 2, 2010.

DOI: [10.1109/ACC.2010.5530485](https://doi.org/10.1109/ACC.2010.5530485)

[66] E. Lefeuve, G. Sebald, D. Guyomar, M. Lallart and C. Richard, "Materials structures and power interfaces for efficient piezoelectric energy harvesting", *J. Electroceram.*, 2009, vol.22, pp. 171-179.

DOI: [10.1007/s10832-007-9361-6](https://doi.org/10.1007/s10832-007-9361-6)

[67] D. Guyomar, Y. Jayet, L. Petit, E. Lefeuve, T. Monnier, C. Richard, M. Lallart, "Synchronized switch harvesting applied to self-powered smart systems: piezoactive microgenerators for autonomous wireless transmitters", *Sens. Actuators A: Phys.*, 2007, vol. 138, pp. 151–160.

DOI: [10.1016/j.sna.2008.04.006](https://doi.org/10.1016/j.sna.2008.04.006)

[68] J.A. Paradiso and T. Starner, "Energy scavenging for mobile and wireless electronics", *IEEE Pervasive Comput.*, 2005, vol.4, pp.18–27.

DOI: [10.1109/MPRV.2005.9](https://doi.org/10.1109/MPRV.2005.9)

[69] P. Glynne-Jones, S.P. Beeby and N.M. White, "Towards a piezoelectric vibration-powered microgenerator", *IEE Proc.Sci. Meas. Technol.*, 2001, vol.148, pp.68–72.

DOI: [10.1049/ip-smt:20010323](https://doi.org/10.1049/ip-smt:20010323)

[70] G.Sebald, H. Kuwano, D. Guyomar, B. Ducharne, "Experimental duffing oscillator for broadband piezoelectric energy harvesting", *Smart Mat. & Struct.*, 2011, Vol. 20, Iss. 10,Art. Num. 102001.

DOI: [10.1088/0964-1726/20/10/102001](https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/10/102001)

[71] T.W. Ma, "Opportunities for using non-linear oscillators to enhance energy harvesting from impulsively loaded structures", *Proceedings of the institution of mechanical engineers part I – Journal of systems and control engineering*, 2011, Vol. 225, Iss. I4, pp. 467-474.

DOI: [10.1177/2041304110394563](https://doi.org/10.1177/2041304110394563)

[72] R. Ramlan, M.J. Brennan, B.R. Mace, S.G. Burrow, "On the performance of a dual-mode non-linear vibration energy harvesting device", *Journal of intelligent material systems and structures*, 2012, vol. 23, Iss. 13, pp. 1423-1432.

DOI: [10.1177/1045389X12443017](https://doi.org/10.1177/1045389X12443017)

[73] Cottone F., Vocca H., and Gammaitoni L., "Nonlinear energy harvesting", *Physical Review Letters* 102, 080601 (2009).

DOI: [10.1103/102.080601](https://doi.org/10.1103/102.080601)

[74] Litak G., Friswell M.I., and Adhikari S., "Magnetopiezoelastic energy harvesting driven by random excitations", *Applied Physics Letters* 96, 214103 (2010).

DOI: [10.1063/1.346553](https://doi.org/10.1063/1.346553)

[75] B. Zhang, **B. Ducharne**, D. Guyomar, "Energy harvesting based on piezoelectric Ericsson cycles in a piezoceramic material", *European Physical Journal – Special Topics*, Vol. 222, Iss. 7, pp. 1733-1743, 2013.

DOI: [10.1140/epjst/e2013-01958-0](https://doi.org/10.1140/epjst/e2013-01958-0)



***PROJET DE RECHERCHE***

---

## PROJET DE RECHERCHE

Mon projet de recherche peut être découpé en deux parties. La première s'inscrit dans la continuité des activités de recherches actuelles. Je souhaite établir le lien entre le modèle d'hystérésis fractionnaire présenté dans la première partie de ce compte-rendu et les modèles traitant de la dépendance fréquentielle de permittivité diélectrique de Cole-Cole et de Havriliak-Negami. Ces modèles qui sont également des modèles fractionnaires rendent compte de la dépendance en fréquence de l'évolution de la permittivité sous des contraintes de champ électrique très bas niveaux. On s'absout alors de tout effet de saturation et de non linéarités liés à de l'hystérésis et on ne se concentre que sur l'influence de la fréquence. Ces modèles ont fait l'objet de nombreuses études scientifiques qui ont permis de mieux comprendre des phénomènes physiques telle que la relaxation diélectrique. En établissant le lien entre notre modèle et les modèles de Cole-Cole et Havriliak-Negami, il semble possible de mieux comprendre la physique de la dépendance fréquentielle fractionnaire de notre modèle et donc de justifier physiquement sont utilisation. Je souhaite également toujours grâce au lien entre la modélisation champs forts et les modélisations et caractérisation champs faibles vérifier que mon terme de pertes fractionnaires ne dépend pas du niveau d'amplitude mais uniquement de la nature du matériau. Ceci permettrait d'envisager des caractérisations et des identifications de paramètres faciles sur de large bande de fréquence grâce à des mesures de permittivité à l'impédance-mètre. Une fois, les paramètres établis grâce à la caractérisation bas niveau, ceux-ci peuvent être conservés dans notre modèle d'hystérésis dynamique champ fort.

Dans la deuxième partie de mon projet de recherche, je souhaite exporter les modélisations mise en place sur les céramiques piézoélectriques à d'autres types de matériaux. Je pense notamment aux polymères électro-strictifs, qui font l'objet de nombreuses études au sein de notre laboratoire et qui présentent des dépendances en fréquence importantes. Le modèle fractionnaire donne de bons résultats pour la prise en compte de la dynamique des champs de polarisation et électrique à travers une céramique piézoélectrique, il rend compte correctement des phénomènes de relaxation de la polarisation. La relaxation diélectrique traduit un retard correspondant au temps d'établissement de la polarisation à travers la céramique. Son dual existe au sein des matériaux magnétiques, il correspond à la diffusion du champ magnétique qui n'est pas instantané et qui dépend fortement de la fréquence. Il semble particulièrement intéressant d'établir le lien entre la modélisation fractionnaire et la diffusion

du champ magnétique à travers des tôles magnétiques. En effet ceci permet d'établir des modèles macroscopiques de pertes magnétiques tenant compte de la diffusion du champ d'excitation à travers le matériau. En exportant et vérifiant la bonne tenue du modèle fractionnaire pour la modélisation de l'hystérésis dynamique magnétique ceci permettrait de valider l'universalité de la modélisation fractionnaire à l'ensemble des problèmes diffusifs.

### **Relation entre le modèle d'hystérésis fractionnaire et les modèles de la permittivité diélectrique de Cole-Cole et de Havrilaik Nagami**

Les matériaux piézoélectriques et ferroélectriques d'un point de vue général sont largement utilisés dans de nombreux domaines d'applications scientifiques et technologiques. Les capteurs basés sur une conversion piézoélectrique transforment une contrainte mécanique en un signal électrique, et peuvent être utilisés comme accéléromètres, ou pour des mesures de pressions et de vibrations [76, 78]. A l'exception des applications de type mémoire, qui fonctionnent grâce au retournement de la polarisation diélectrique au sein des céramiques piézoélectriques, l'hystérésis et les non-linéarités associées sont à prescrire si l'on souhaite converger vers des capteurs ou des actionneurs de haute précision. L'origine et les mécanismes de l'hystérésis piézoélectriques sont complexes et se manifestent sous des formes diverses (hystérésis diélectriques, non-linéarités des pics de résonances, non-linéarités des coefficients piézoélectriques). Un cycle d'hystérésis idéal est symétrique, les champs coercitifs et les polarisations rémanentes positives et négatives, présentent les mêmes valeurs absolues [79]. Ces paramètres caractéristiques de la forme du cycle d'hystérésis peuvent être affectés par plusieurs facteurs (l'épaisseur de l'échantillon, la présence de défauts chargés, les contraintes de découpage résiduelles ou encore les traitements thermiques et de conditionnement). L'aire et la forme des cycles d'hystérésis sont fortement dépendantes de la fréquence de l'excitation. Les principales conséquences d'une augmentation de la fréquence sont :

- \_ Une augmentation des champs coercitifs.
- \_ Une diminution des polarisations rémanentes.
- \_ Une variation de l'aire du cycle d'hystérésis.

De nombreuses approches [80, 84] ont été adoptées pour expliquer la dépendance caractéristique en fréquence des matériaux ferroélectriques. Dans la première partie de ce compte-rendu nous avons

vérifié que les opérateurs fractionnaires sont particulièrement bien adaptés pour modéliser l'hystérésis diélectrique des matériaux ferroélectriques. Là, où les opérateurs à dérivée entière sont en règle générale limités à des bandes de fréquence relativement restreintes, une approche à base de dérivées fractionnaires fournit une bonne précision entre mesure et simulation bien au-delà des limites physiques des systèmes piézoélectriques classiques. Le comportement des céramiques piézoélectriques à bas niveau de champ électrique est habituellement décrit par des relations linéarisées autour d'un point de fonctionnement. Le comportement de la céramique lorsque la fréquence augmente également appelée relaxation diélectrique donne des informations importantes sur la constitution de l'échantillon ainsi que sur les relations physiques à l'origine de la polarisation. Cette caractéristique est en générale mesurée à l'aide d'un analyseur de spectre (impédance-mètre). L'analyseur permet de mesurer l'évolution de la capacité parallèle équivalente ainsi que l'angle de pertes  $\tan\delta$  en fonction de la fréquence. La relaxation diélectrique est en générale définie comme un retard élémentaire de la polarisation diélectrique  $P$  d'un matériau. Cette relaxation est habituellement décrite dans l'équation donnant l'évolution de la permittivité en fonction de la fréquence, ce qui pour les systèmes idéaux est donné par l'équation de Debye:

$$\epsilon^*(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\Delta\epsilon}{1+i\omega\tau} \tag{31}$$

$\epsilon_\infty$ , correspond à la permittivité à très grande fréquence,  $\Delta\epsilon = \epsilon_s - \epsilon_\infty$  avec  $\epsilon_s$  la permittivité dite quasi-statique obtenue à très faible fréquence.  $\tau$  est le temps de relaxation caractéristique du matériau testé. Dans le cas des céramiques piézoélectriques classiques, l'équation de Debye (dépendance fréquentielle de la permittivité) est étendue au modèle dit de Cole-Cole pour une meilleure précision, et une utilisation sur une bande de fréquence plus large [85, 86].

$$\epsilon^*(\omega) = \epsilon'(\omega) - j\epsilon''(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\Delta\epsilon}{1+(i\omega\tau)^\alpha} \tag{32}$$

$\epsilon'(\omega)$  et  $\epsilon''(\omega)$  sont respectivement la partie réelle et imaginaire de la permittivité.  $\alpha$  est relié à la distribution des temps de relaxation comprise entre 0 et 1. Le modèle de Cole-Cole présente une dépendance fractionnaire de la permittivité en fonction de la fréquence. Notre objectif ici est d'établir le lien entre l'opérateur fractionnaire utilisé dans un modèle d'hystérésis diélectrique fort champ et le

modèle fractionnaire de Cole-Cole, bien adapté pour la modélisation large bande de la dépendance en fréquence de la permittivité.

A température ambiante et sous contrainte de champ électrique faible, il est connu que la partie réelle  $\varepsilon'(\omega)$  et la partie imaginaire  $\varepsilon''(\omega)$  de la permittivité diélectrique complexe mesurées autour d'un point de fonctionnement sont fortement dépendantes de la fréquence. Parties réelle et imaginaire de la permittivité complexe sont reliées entre elles par les relations bien connues de Kramers-Kronig. Le modèle de Debye a été le premier modèle proposé pour prendre en compte la relaxation diélectrique (dépendance en fréquence de la permittivité complexe). Mais les premiers résultats expérimentaux ont rapidement montré qu'une correction de ce modèle simple serait nécessaire. Le modèle de Cole-Cole introduit une première correction via la considération non plus d'un temps de relaxation comme c'est le cas du modèle de Debye mais d'une distribution de temps de relaxation. Cette correction est possible grâce à l'extension à un ordre non entier du modèle de Debye. Le modèle de Cole-Cole présente en effet une dépendance fractionnaire de l'évolution de la permittivité complexe.

Issu du modèle de Cole-Cole  $\varepsilon'(\omega)$  et  $\varepsilon''(\omega)$  peuvent être écrites comme:

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \left( \frac{\Delta\varepsilon'}{2} \right) \left\{ 1 - \frac{\sinh(\beta z)}{\cosh(\beta z) + \cos\left(\beta \frac{\pi}{2}\right)} \right\} \quad (33)$$

$$\varepsilon''(\omega) = \left( \frac{\Delta\varepsilon'}{2} \right) \left\{ \frac{\sinh\left(\beta \frac{\pi}{2}\right)}{\cosh(\beta z) + \cos\left(\beta \frac{\pi}{2}\right)} \right\} \quad (34)$$

Ici  $z = \ln(\omega\tau)$ ,  $\Delta\varepsilon' = \varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}$  et  $\beta = (1-\alpha)$ , avec  $\alpha$  à l'origine de la déformation du demi arc de cercle dans les tracés Cole-Cole (c'est-à-dire l'angle entre l'axe des  $\varepsilon'$  et le centre du demi arc de cercle).  $\varepsilon'(\omega)$  est reliée à l'énergie stockée dans un matériau,  $\varepsilon''(\omega)$  est lié à l'énergie dissipée à travers celui-ci.

Selon le modèle Cole-Cole, la permittivité complexe peut-être écrite comme :

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\Delta\varepsilon}{1 + (i\omega\tau)^{\alpha}} \quad (35)$$

avec  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}$  et  $0 < \alpha = 1 - 2\sigma/\pi \leq 1$ .  $\sigma$  est l'angle de déformation du demi arc de cercle, de nombreuses méthodes existent pour déterminer cet angle.

Si l'on part du modèle d'hystérésis dynamique, et si l'on considère une excitation de faible amplitude et suffisamment basse pour supposer une relation de linéarité entre la polarisation  $P$  et le champ électrique  $E$  et si la polarisation est cosinusoidale  $P(t) = P_0 \cdot \cos(\omega t)$ , la contribution statique de  $E$  est donnée par :

$$E_{stat}(t) = \frac{P_0 \cdot \cos(\omega t)}{\epsilon_{static}} \quad (36)$$

Lorsque la fréquence augmente la contribution dynamique est obtenue à partir de la relation fractionnaire:

$$E_{dynamic}(t) = \rho \cdot \frac{d^\alpha P}{dt^\alpha} \quad (37)$$

Comme  $P$  est de type harmonique, cette contribution possède une solution analytique:

$$E_{dynamic}(t) = \rho \cdot P_0 \cdot \omega^\alpha \cdot \cos(\omega t + \alpha \cdot \frac{\pi}{2}) \quad (38)$$

Finalement, pour des fréquences supérieures, le champ électrique incluant toutes les contributions est donnée par :

$$E(t) = \rho \cdot P_0 \cdot \omega^\alpha \cdot \cos(\omega t + \alpha \cdot \frac{\pi}{2}) + \frac{P_0 \cdot \cos(\omega t)}{\epsilon_{static}} \quad (39)$$

Ce qui permet en complexe après simplification de revenir sur l'équation de Cole-Cole :

$$R\{\underline{E}(t)\} = E(t)$$

$$\underline{E}(t) = P_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot \left[ \frac{1}{\epsilon_{stat}} + \rho \cdot \omega^\alpha \cdot e^{j\alpha \frac{\pi}{2}} \right] \quad (40)$$

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_{stat}} + \rho \cdot \omega^\alpha \cdot e^{j\alpha \frac{\pi}{2}}} \quad (41)$$

$$\underline{\epsilon} = \frac{\epsilon_{stat}}{1 + (\tau \cdot \omega \cdot j)^\alpha} \quad (42)$$

$$\text{Avec } \tau^\alpha = \varepsilon_{stat} \cdot \rho \quad (43)$$

Si l'on suppose enfin que  $\varepsilon(0) \gg \varepsilon_\infty$ , la relation entre le modèle de Cole-Cole et le modèle d'hystérésis fractionnaire fort champ est alors évidente :

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon(0) - \varepsilon_\infty}{1 + (j \cdot \omega \cdot \tau)^\gamma} \approx \frac{\varepsilon_{stat}}{1 + (\tau \cdot \omega \cdot j)^\alpha} \quad (44)$$

94

Le modèle de la permittivité diélectrique complexe de Havriliak-Negami correspond à une modification empirique des modèles de la relaxation diélectrique de Cole-Cole et de Debye. Cette modification permet de prendre en compte la dissymétrie qui apparait dans certains matériaux lorsque l'on trace l'évolution de la partie imaginaire de la permittivité en fonction de sa partie réelle. Le modèle de Havriliak-Negami a dans un premier temps été utilisé pour décrire la relaxation diélectrique dans les polymères. Il est décrit par l'équation suivante :

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon(0) - \varepsilon_\infty}{\left(1 + (j \cdot \omega \cdot \tau)^\alpha\right)^\beta} \quad (45)$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres non entiers. De la même façon qu'il est possible d'établir un lien entre notre modèle d'hystérésis champ fort et le modèle de permittivité diélectrique de Cole-Cole, un lien existe avec le modèle de Havriliak-Negami. Pour établir ce lien, il faut partir de l'équation de l'évolution de la permittivité en fonction de la fréquence selon Havriliak-Negami puis développer le dénominateur de la fraction à l'aide du binôme de Newton généralisé à des ordres non entiers :

$$(x + y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{r-k} y^k \quad (46)$$

A noter que pour que cette série converge, il faut que  $|y| < |x|$ , ou encore :

$$(1 + z)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} z^k \quad (47)$$

De même pour avoir convergence il faut  $|z| < 1$

Le dénominateur du modèle de Havriliak-Negami devient alors :

$$(1 + (j.\omega.\tau)^\alpha)^\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} ((j.\omega.\tau)^\alpha)^k \quad (48)$$

Ceci correspond à une série de termes fractionnaires dont le poids dans la reconstitution finale de la solution diminue lorsque l'ordre de dérivation augmente. Ceci identifié à notre modèle d'hystérésis champ fort correspondrait à une série de termes dynamiques d'ordre fractionnaire croissant et de poids décroissants

$$E(t) = \rho_1.P_0.\omega^\alpha.\cos(\omega t + \alpha.\frac{\pi}{2}) + \rho_2.P_0.\omega^\beta.\cos(\omega t + \beta.\frac{\pi}{2}) + \dots + \rho_n.P_0.\omega^m.\cos(\omega t + m.\frac{\pi}{2}) + \frac{P_0.\cos(\omega t)}{\epsilon_{static}} \quad (49)$$

Avec  $\alpha < \beta < \dots < n$  et  $\rho_1 < \rho_2 < \dots < m$ .

### Caractérisation des paramètres fractionnaires à l'impédance-mètre

Les opérateurs fractionnaires sont particulièrement bien adaptés à la modélisation des pertes diélectriques dans les matériaux ferroélectriques. Dans la partie précédente nous avons établi le lien entre la modélisation champ fort de l'hystérésis dynamique et la modélisation bas niveau de la permittivité diélectrique complexe. Cette relation permet d'attribuer la même origine physique à la dépendance en fréquence et par conséquent l'utilisation des mêmes paramètres dynamiques. Cette notion est particulièrement intéressante car elle permet de limiter la caractérisation dynamique d'un matériau nouveau à l'utilisation de l'impédance mètre et de conserver les paramètres lors des simulations haut niveau.

L'impédance-mètre fournit un signal AC sinusoïdale de fréquence variable et dont l'amplitude est proche de 1V. Il fonctionne comme une source de tension parfaite. Le courant qui circule à travers les morts de l'appareil est monitoré en temps réel. Entre le courant enregistré et la tension imposée l'appareil donne l'évolution de la capacité parallèle équivalente et l'angle de pertes diélectriques de l'échantillon testé.

Si l'on repart de l'équation n°50



$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{stat}} + \rho \cdot \omega^\alpha \cdot e^{j\alpha \frac{\pi}{2}}} \quad (50)$$

La permittivité sous sa forme algébrique est donnée par l'équation suivante:

$$\varepsilon = \frac{\left( \frac{1}{\varepsilon_{stat}} + \rho \cdot \omega^\alpha \cdot \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \right) - j \cdot \left( \rho \cdot \omega^\alpha \cdot \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \right)}{\left( \frac{1}{\varepsilon_{stat}} + \rho \cdot \omega^\alpha \cdot \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \right)^2 + \left( \rho \cdot \omega^\alpha \cdot \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \right)^2} \quad (51)$$

Par identification avec  $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$ , ceci devient:

$$\varepsilon' = \frac{\left( \frac{1}{\varepsilon_{stat}} + \rho \cdot \omega^\alpha \cdot \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \right)}{\left( \frac{1}{\varepsilon_{stat}} + \rho \cdot \omega^\alpha \cdot \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \right)^2 + \left( \rho \cdot \omega^\alpha \cdot \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \right)^2}$$

$$\varepsilon'' = \frac{\rho \cdot \omega^\alpha \cdot \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)}{\left( \frac{1}{\varepsilon_{stat}} + \rho \cdot \omega^\alpha \cdot \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \right)^2 + \left( \rho \cdot \omega^\alpha \cdot \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \right)^2} \quad (52)$$

A partir des parties réelles et imaginaires de la permittivité, ainsi que des caractéristiques géométriques, il est possible d'avoir accès à l'évolution de la capacité parallèle équivalente ainsi qu'à l'angle de pertes en fonction de la fréquence. Ces courbes peuvent être comparées à celle fournit par l'analyseur.

$$Cp = \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} \cdot \frac{A}{th} \quad (53)$$

$$\tan \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \quad (54)$$

Ici, A est la surface de la céramique piézoélectrique et th son épaisseur. Par identification numérique et optimisation il est envisageable à partir de la mesure de la capacité parallèle et de l'angle de pertes sur une bande de fréquence importante grâce à l'impédance mètre de remonter aux paramètres  $\alpha$  et  $\rho$  de notre modèle fractionnaire.

## Dynamique de pénétration du champ magnétique dans les ferromagnétiques doux à l'aide d'opérateurs fractionnaires

Nous nous intéressons ici à l'exportation des modèles et des opérateurs fractionnaires présentés dans ce manuscrit à d'autres type de matériaux à hystérésis et notamment les matériaux ferromagnétiques doux. De nombreuses équipes scientifiques s'intéressent au couplage magnétique des lois de matériaux et des équations de Maxwell [87]. L'intégration de modèle d'hystérésis dans les problèmes magnétostatiques et magnétodynamiques implique obligatoirement des techniques de résolution non-linéaire telle que la méthode du point fixe [88]. Il a été démontré dans le passé qu'une bonne corrélation simulation/mesure peut être obtenue en couplant l'équation de diffusion du champ magnétique à un modèle d'hystérésis dynamique [91, 94]. Dans ce type de modélisation l'équation de diffusion est reliée aux courants de Foucault macroscopiques et le modèle d'hystérésis aux courants de Foucault microscopiques [95, 98]. Ces courants microscopiques proviennent du mouvement des parois de Bloch. Notre objectif ici est d'essayer de remplacer le modèle couplé : équation de diffusion et hystérésis dynamique par un simple modèle à constante localisée mais dont la dynamique est régie par des opérateurs fractionnaires [99].

Dans cette étude on s'intéresse en particulier au cas d'une tôle magnétique du type Fer Silicium telle que celle rencontré dans les transformateurs de tensions. Supposons dans un premier temps que l'induction  $B$  et le champ d'excitation de surface  $H$  sont linéairement reliés par une valeur de perméabilité relative  $\mu_0\mu_r$ . Si l'on considère que la largeur et la longueur de la tôle sont grandes devant son épaisseur, une modélisation 1D de la diffusion du champ magnétique semble raisonnable. En supposant une excitation harmonique, le rapport entre le champ d'excitation de surface et l'intégrale du champ d'induction magnétique donne une perméabilité qui varie en fonction de la fréquence.

Equation de diffusion 1D, dans le domaine temporel :

$$\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \mu\sigma \frac{\partial B}{\partial t} \quad (55)$$

Même équation dans le domaine fréquentiel :

$$\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = j\omega\mu\sigma B \quad (56)$$

Les solutions de cette équation s'écrivent sous la forme :

$$B = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx) \quad (57)$$

98

$$\text{Avec : } k^2 = -j\omega\mu\sigma \quad k = \frac{1-j}{\delta} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

En intégrant sur la surface :

$$B_{app} = \frac{\int_{-e/2}^{e/2} B(y).dy}{e} \quad (58)$$

Finalement l'évolution de la perméabilité s'écrit :

$$\mu_{app} = \frac{2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \tan\left(k \cdot \frac{e}{2}\right)}{e \cdot k} \quad (59)$$

Les courants de Foucault microscopiques peuvent être ajoutés dans cette modélisation en modifiant la loi de matériau par une loi dynamique, en considérant le produit d'une constante et de la dérivée temporelle du champ d'induction comme un champ d'excitation équivalent :

$$B = \mu \cdot \left( H - \rho \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \right) \quad (60)$$

Dès lors la perméabilité devient :

$$\mu_{app} = \frac{2 \cdot \frac{\mu}{1 + \mu \cdot \gamma \cdot j\omega} \cdot \tan\left(k \cdot \frac{e}{2}\right)}{e \cdot k} \quad (61)$$

Considérons maintenant l'expression de la perméabilité magnétique à l'aide du modèle à constante localisée fractionnaire avec (équation n°65) ou sans les courants de Foucault microscopiques

(équation n°63). Dans ce modèle, le terme fractionnaire produit d'une constante et de la dérivée fractionnaire temporelle du champ d'induction magnétique est équivalent à un champ d'excitation magnétique.

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \left( H - \rho \cdot \frac{\partial^n B}{\partial t^n} \right) \quad (62)$$

$$B \cdot (1 + \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \rho \cdot (j\omega)^n) = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H \quad (63)$$

$$B = \left( \frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{1 + \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \rho \cdot (j\omega)^n} \right) \cdot H \quad (64)$$

$$\mu_{app} = \left( \frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{1 + \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \rho \cdot (j\omega)^n} \right) \quad (65)$$

Si l'on tient compte des mouvements de parois, un terme supplémentaire du type premier ordre (produit d'une constante et de la dérivée entière première de l'induction magnétique) est ajouté.

$$B = \mu \cdot \left( H - \rho \cdot \frac{\partial B}{\partial t} - \rho \cdot \frac{\partial^n B}{\partial t^n} \right) \quad (66)$$

$$B \cdot (1 + \mu \cdot \rho \cdot (j\omega)^n + \mu \cdot \rho \cdot (j\omega)) = \mu \cdot H \quad (67)$$

$$B = \left( \frac{\mu}{1 + \mu \cdot \rho \cdot (j\omega)^n + \mu \cdot \rho \cdot (j\omega)} \right) \cdot H \quad (68)$$

C'est dans ce dernier cas de figure que les comparaisons de l'évolution de la perméabilité calculées à partir de l'équation de diffusion et calculée à l'aide de l'opérateur fractionnaire donnent les meilleurs résultats.

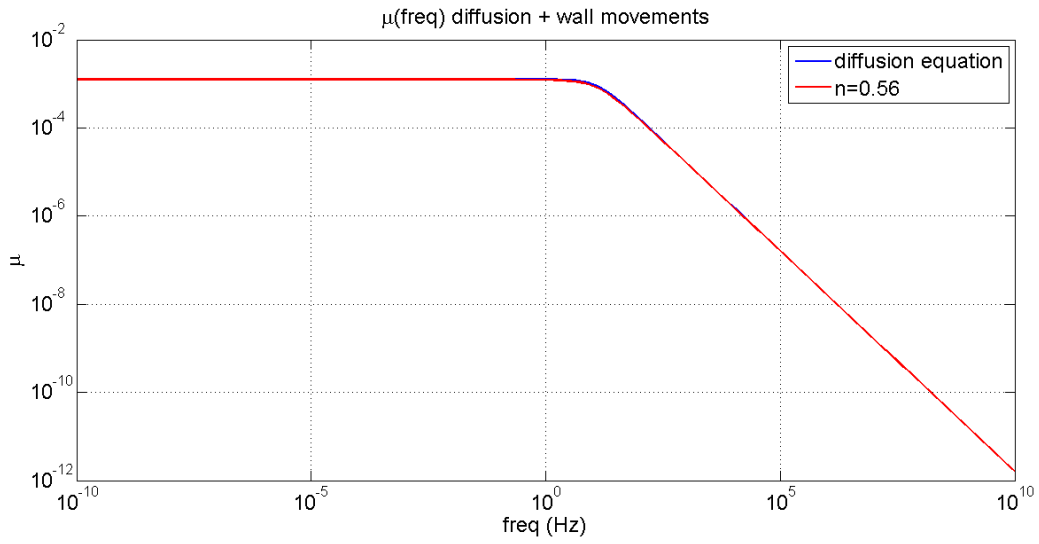


Figure 43. Evolution de la perméabilité en fonction de la fréquence. Comparaison entre le modèle fractionnaire (n=0.56) et la résolution numérique de l'équation de diffusion dans le cas d'un échantillon de faible épaisseur (e=5mm).

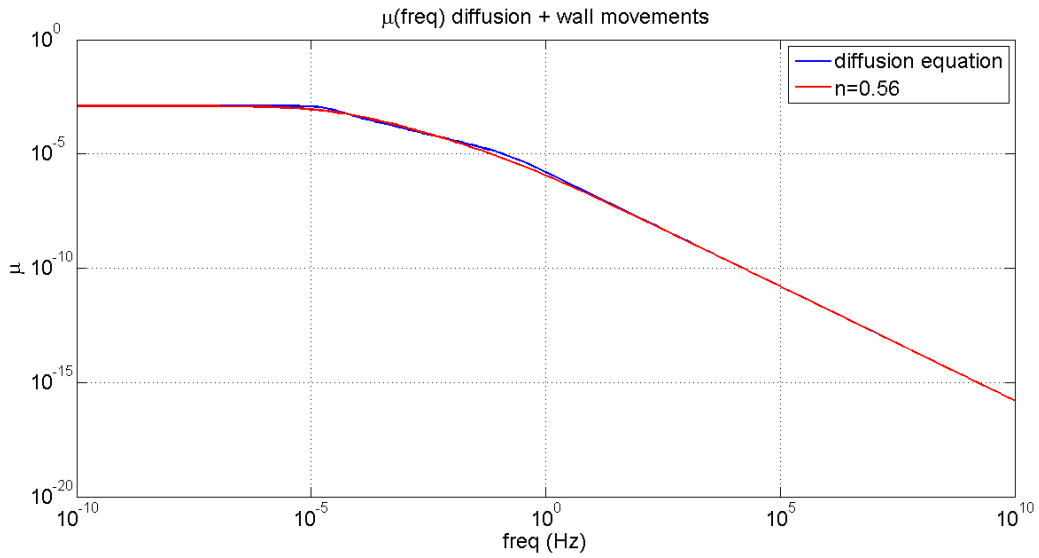


Figure 44. Evolution de la perméabilité en fonction de la fréquence. Comparaison entre le modèle fractionnaire (n=0.56) et la résolution numérique de l'équation de diffusion dans le cas d'un échantillon de large épaisseur (e=5m).

## Bibliographie

[76] J.F.M. Cillessen, J.B. Giesbers, R.P. Weening, and R.M. Wolf, "A ferroelectric transparent thin-film transistor", *Appl. Phys. Lett.*, vol.68, pp. 3650-3652, Jun. 1996.

DOI: [10.1063/1.115759](https://doi.org/10.1063/1.115759)

[77] M.W.J. Prins, S.E. Zinnemers, J.F.M. Cillessen, and J.B. Giesberg, "Depletion-type thin-film transistors with a ferroelectric insulator", *Appl. Phys. Lett.*, vol.70, pp. 458-460, Jan. 1997.

DOI: [10.1063/1.118180](https://doi.org/10.1063/1.118180)

[78] T.K. Yong and S.S. Dong, "Memory window of Pt/SrBi<sub>2</sub>Ta<sub>2</sub>O<sub>9</sub>/CeO<sub>2</sub>/SiO<sub>2</sub>/Si structure for metal ferroelectric insulator", *Appl. Phys. Lett.*, vol.71, pp. 3507-3509, Dec. 1997.

DOI: [10.1063/1.120374](https://doi.org/10.1063/1.120374)

[79] K. Dimmler, M. Parris, D. Butler, S. Eaton, B. Pouligny, J.F. Scott, and Y. Ishibashi, "Switching kinetics in KNO<sub>3</sub> ferroelectric thin-film memories", *J. Appl. Phys.*, vol.61, pp. 5467-5470, Jun. 1987.

DOI: [10.1063/1.338237](https://doi.org/10.1063/1.338237)

[80] O. Boser, "Statistical theory of hysteresis in ferroelectric materials", *J. Appl. Phys.*, vol.62, pp. 1344-1348, Aug. 1987.

DOI: [10.1063/1.339636](https://doi.org/10.1063/1.339636)

[81] T. Morita, Y. Ishii, and I. Fukai, "hysteresis model using distribution susceptibility", *J. Appl. Phys.*, vol.73, pp. 7025-7029, Jun. 1993.

DOI: [10.1063/1.352419](https://doi.org/10.1063/1.352419)

[82] B.G. Potter, Jr., V. Tikare, and B.A. Tuttle, "Monte carlo simulation of ferroelectric phase transition", *J. Appl. Phys.*, vol.87, pp. 4415-4424, May. 2000.

DOI: [10.1016/S0378-4371\(02\)00973-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)00973-1)

[83] A.T. Bartic, D.J. Wouters, H.E. Maes, J.T. Rickes, and R.M. Waser, "Preisach model for the simulation of ferroelectric capacitors", *J. Appl. Phys.*, vol.89, pp.3420-3425, Mar.2001.

DOI: [10.1063/1.1335639](https://doi.org/10.1063/1.1335639)

[84] S. Sivasubramanian, A. Widom, Y. Strivastava, "Equivalent Circuit and Simulations for the Landau-Khalatnikov model of ferroelectric hysteresis", *IEEE Trans. on Ultras., Ferro., and Freq. Cont.*, vol.50, n°8, Aug. 2003.

DOI: [10.1109/TUFFC.2003.1226538](https://doi.org/10.1109/TUFFC.2003.1226538)

[85] L. Rouleau, J.F. Deu, A. Legay, F. Le Lay, "Application of Kramers-Kronig relations to time-temperature superposition for viscoelastic materials", *Mechanics of materials*, vol. 65, pp. 66-75, Oct. 2013.

DOI: [10.1016/j.mechmat.2013.06.001](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.06.001)

[86] DQ. Nguyen, T. Lebey, P. Castelan, V. Bley, M. Boulos, S. Guillemet-Fritsch, C. Combetten, B. Durand, "Electrical and physical characterization of bulk ceramics and thick layers of barium titanate manufactured using nanopowders" *J. Mat. Eng. And Perf*, vol. 16, Iss. 5, pp. 626-634, Jun 2007.

DOI: [10.1007/s11665-007-9110-7](https://doi.org/10.1007/s11665-007-9110-7)

[87] F. Ossart and V. Ionita, "Convergence de la méthode du point fixe modifié pour le calcul de champ magnétique avec hystérésis". *Eur. Phys. Journal Applied Physics*, vol. AP-5, pp 63-69, 1999.

DOI: [10.1051/epjap :1999105](https://doi.org/10.1051/epjap :1999105)

[88] J. Saitz, "Newton-Raphson Method and Fixed-Point Technique in Finite Element Computation of magnetic Fields Problems in Media with Hysteresis". *IEEE Trans. on Mag.*, vol.35, NO. 3, May 1999, pp 1398-1401.

DOI: [10.1109/20.767225](https://doi.org/10.1109/20.767225)

[89] F Henrotte, "Modelling ferromagnetic materials in 2D finite element problems using Preisach's model". *IEEE Transaction on magnetics*, Vol. 28, n°5, September 1992.

DOI: [10.1109/20.179574](https://doi.org/10.1109/20.179574)

[90] F. Preisach, "Über die Magnetische Nachwirkung", *Z.Phys.* 94 (1935), 277-302.

[91] D.C.Jiles, D.L. Atherton, "theory of ferromagnetic hysteresis", *Journal of Applied Physic*, n°55, PP 2115-2120, 1984.

DOI: [10.1016/0304-8853\(86\)90066-1](https://doi.org/10.1016/0304-8853(86)90066-1)

[92] G. Biorci, D. Pescetti, "Analytical Theory of the behaviour of ferromagnetic materials", *Il Nuovo Cimento*, vol .7, n°6, pp 829-843, 1958.

DOI: [10.1007/BF02745588](https://doi.org/10.1007/BF02745588)

[93] F. Marthouret, J.P. Masson, H. Fraisse. "Modeling of a non-linear conductive magnetic circuit," *IEEE International Magnetism Conference (INTERMAG 95)*, San Antonio Texas, 1995.

DOI: [10.1109/20.489864](https://doi.org/10.1109/20.489864)

[94] Bertotti, Giorgio.General, "Properties of power losses in soft ferromagnetic materials." *IEEE Transactions on magnetics*. 1988, Vol. 24, 1, pp. 621-630.

DOI: [10.1109/20.43994](https://doi.org/10.1109/20.43994)

[95] R.H.Pry, C.P. Bean, "Calculation of the energy loss in magnetic sheet materials using a domain mode." *Journal of applied physics*. 1958, Vol. 29, 3, pp. 532-533.

DOI: [10.1063/1.1723212](https://doi.org/10.1063/1.1723212)

[96] H.J. Williams, W. Shockley, and C. Kittel, "Studies of the propagation velocity of a ferromagnetic domain boundary." *Physical review*. 1950, Vol. 80, 6, pp. 1090-1094.

DOI: [10.1103/PhysRev.80.1090](https://doi.org/10.1103/PhysRev.80.1090)

[97] M.A. Raulet, B. Ducharne, JP. Masson, G. Bayada, "The magnetic field diffusion equation including dynamic hysteresis: A linear formulation of the problem." *IEEE Transactions on magnetics*. 2004, Vol. 40, 2, pp. 872-875.

DOI: 10.1109/TMAG.2004.824816

[98] M. Rao, H.R. Krishnamurthy, R. Pandit, "Magnetic Hysteresis in two Model Spin Systems", Phys. Rev. B 42, 1990, pp.856-884.

DOI: 10.1103/PhysRevB.42.856

[99] **B. Ducharne**, G. Sebald, D. Guyomar, G. Litak "Dynamics of magnetic field penetration into soft ferromagnets", Journal of Applied Physics, pp. 243907, 2015.

DOI : 10.1063/1.4923162



***CONCLUSION GENERALE***

---

La recherche que j'ai effectuée ces dernières années concerne les systèmes et matériaux dit « intelligents », en particulier les matériaux piézoélectriques et ferroélectriques. J'ai dans un premier temps travaillé, sur la caractérisation et la modélisation des matériaux magnétiques durant la thèse de doctorat, j'ai effectué ensuite un post-doctorat où j'ai mené des travaux sur l'intégration et la prise en compte de lois de matériaux non linéaires (hystérésis dynamique) dans un logiciel du type éléments finis. Depuis que j'ai été recruté en tant que Maître de conférences à l'INSA de Lyon en 2005, mon activité s'est alors tournée vers la modélisation de l'hystérésis dynamique dans les matériaux électro actifs tels que les céramiques piézo-électriques. Les résultats encourageant obtenus à l'aide des opérateurs fractionnaires ont offert de nouveaux champs d'investigation, tel que celui de la diffusion dans les matériaux magnétiques ou de la dynamique diélectrique des polymères électro-strictifs.

Pour confirmer expérimentalement ces bons résultats de modélisation, nous avons mis en place une technique originale de récupération d'énergie dont le gisement énergétique vibratoire est issu de l'environnement (vent, véhicules ...). Cette ressource est du type bruit blanc avec des fréquences distribuées dans une bande très large. Comme la technique impose de synchroniser le champ électrique sur le maximum de contrainte mécanique, on se retrouve à devoir imposer le champ électrique à des fréquences importantes. Ces fréquences élevées associées à des amplitudes importantes se traduisent par des pertes diélectriques fortes qu'il est nécessaire de considérer pour connaître précisément les rendements de la méthode et justifier son utilisation.

Les perspectives que j'entrevois pour donner suite à l'ensemble de ces travaux sont nombreuses:

- \_ Je pense travailler dans un premier temps à la compréhension physique des bons résultats de simulation obtenus par les opérateurs fractionnaires. Le lien entre notre modèle et les modèles de la permittivité diélectrique (Cole-Cole) semble également une piste intéressante.
- \_ Nous devons ensuite progresser quant à l'obtention des paramètres du modèle (utilisation de l'impédance-mètre). L'extension du modèle dynamique à d'autres systèmes diffusifs telle que la diffusion du champ magnétique donne aussi des résultats prometteurs.
- \_ Finalement, d'autres applications telle que la récupération d'énergie liée aux mouvements des vagues semble une extension intéressante pour la technique des cycles d'Ericsson.

**ANNEXE**

---

## Annexe : Piézoélectricité et pyroélectricité

L'effet piézoélectrique direct est la capacité d'un matériau à générer une tension électrique suite à l'application d'une force mécanique. L'effet inverse correspond à la déformation résultante d'une tension appliquée. L'origine de l'effet piézoélectrique réside dans la structure cristalline des matériaux. Pour être piézoélectrique un cristal doit être non centro symétrique, c'est-à-dire que les barycentres des charges positives et négatives doivent être décalés dans l'espace au sein de la maille cristalline (Figure n°45).

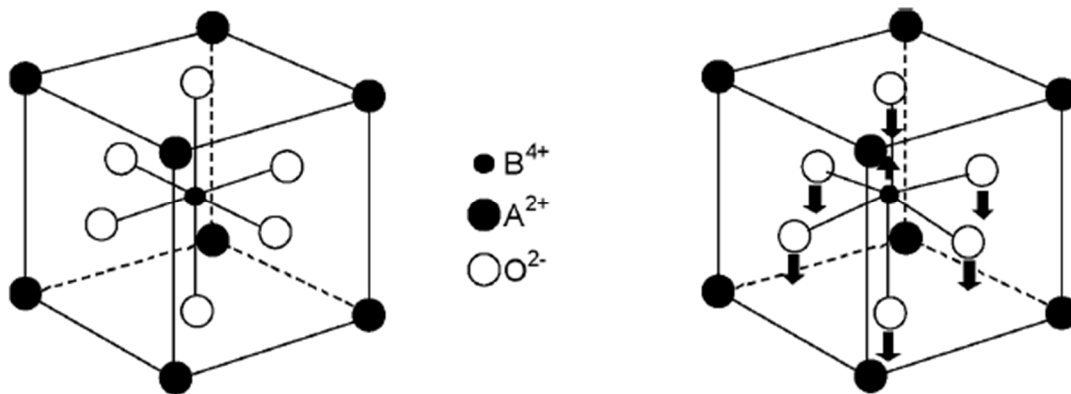


Figure 45. Maille non centro-symétrique, exemple du titanate de baryum avec A=Ba, B=Ti.

Ainsi, en l'absence de champ électrique le matériau présente une polarisation spontanée générée par un moment dipolaire  $p=qd$ ,  $q$  étant la charge électrique de chaque barycentre et  $d$  la distance entre les barycentres. L'application d'un champ électrique augmente la distance entre les deux barycentres, générant ainsi une déformation de la maille cristalline responsable d'une déformation macroscopique et donc de l'effet piézoélectrique inverse. De même, une contrainte mécanique de compression diminue la distance  $d$  en libérant des charges électriques. En circuit ouvert, ces charges sont stockées dans la capacité électrique que représente le matériau engendrant ainsi un champ électrique. Enfin la température peut modifier la polarisation spontanée. Dans ce dernier cas le matériau est dit pyroélectrique. Parmi les 32 classes cristallines seules 20 sont piézoélectriques dont 10 pyroélectriques. Au sein des matériaux piézoélectriques, les matériaux ferroélectriques présentent la particularité d'avoir une polarisation macroscopique différente de la polarisation spontanée microscopique, qui peut être inversée par l'action d'un champ électrique, c'est-à-dire que leur axe polaire est mobile sous l'action d'un champ. L'application d'un champ électrique a un diélectrique

parfait engendre une variation de polarisation proportionnelle au champ appliqué. Cette variation responsable de l'effet capacitif est parfaitement réversible avec le champ électrique.

On décrit le phénomène par les équations suivantes :

$P = \epsilon \cdot E$  avec  $P$ , polarisation (C/m<sup>2</sup>),  $\epsilon$ , la permittivité diélectrique du matériau et  $E$ , le champ électrique appliqué.

Si on considère les dimensions de l'isolant diélectrique, on peut alors écrire :

$Q = CV$  avec  $Q = P \cdot S$ ,  $V = E / \ell$ ,  $S$  étant la surface de l'échantillon et  $\ell$  sa longueur. «  $C$  » est alors la capacité en Farads. Les matériaux ferroélectriques ont à l'inverse un comportement hystérétique marqué et ne peuvent donc être décrits par cette équation linéaire comme le montre la Figure 39. Ainsi la variation de polarisation ne dépend plus uniquement de la variation de champ électrique. Pour des raisons de minimisation de l'énergie interne, les matériaux ferroélectriques sont structurés en domaines de polarisation spontanée uniforme (à l'instar des matériaux ferromagnétiques). D'un domaine à l'autre la direction de la polarisation spontanée est différente, la frontière entre deux domaines étant appelée « mur de domaine ». Les directions que peuvent prendre la polarisation spontanée sont déterminées par la symétrie cristalline du matériau qui dépend de la température, du champ électrique et de la contrainte mécanique.

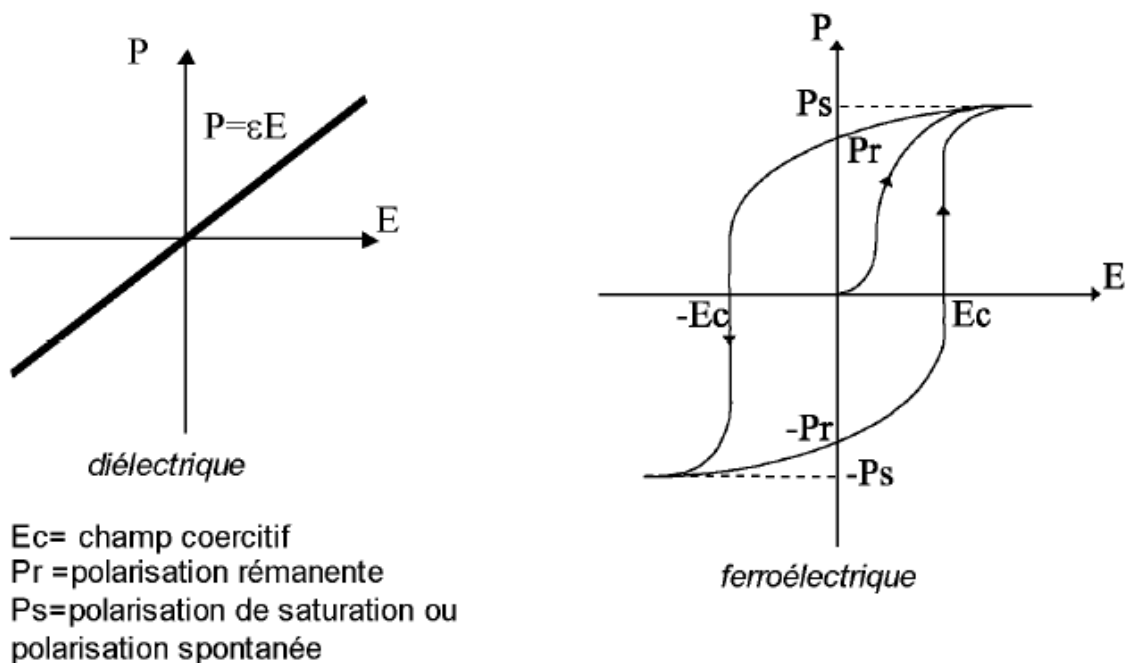


Figure 46. Hystérésis caractéristique d'un matériau ferroélectrique avec  $E_c$ , champ coercitif,  $P_r$ , polarisation rémanente, et  $P_s$ , polarisation de saturation.

Examinons par exemple le cas du titanate de baryum. En température décroissante (et à champ électrique nul et contrainte nulle) ce matériau passe successivement par les phases cubique, quadratique, orthorhombique et enfin rhomboédrique. Sur ces 4 phases, seules les trois dernières sont ferroélectriques (la phase cubique est centro symétrique). Les transitions de phase successives induisent une variation importante de la permittivité diélectrique en fonction de la température. Les températures de transition peuvent être estimées par les maxima locaux de la permittivité (Figure n°47).

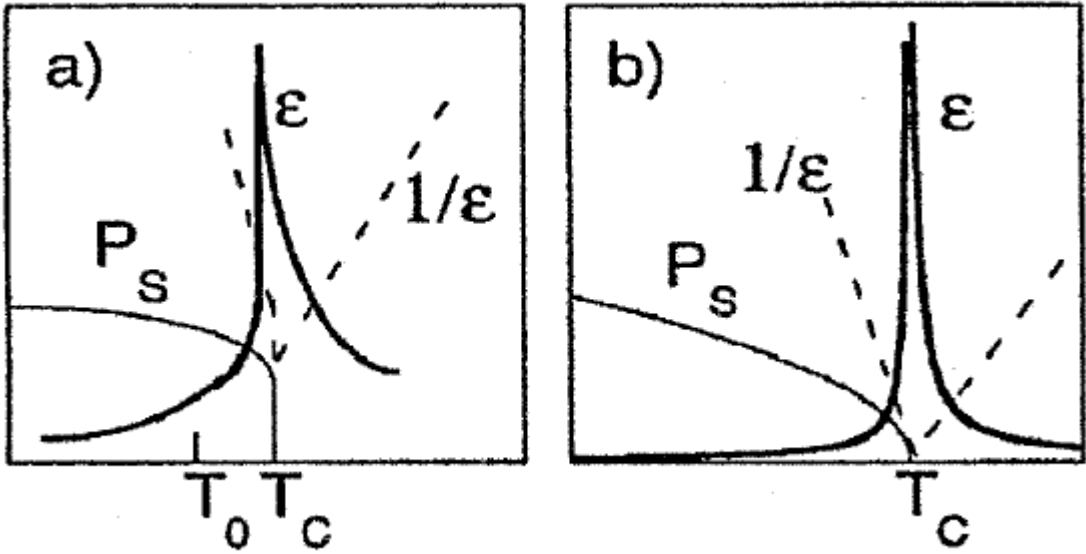


Figure 47. Permittivité diélectrique en fonction de la température, a) 1<sup>er</sup> ordre et b) 2<sup>ème</sup> ordre.

Malgré une hystérésis forte de la polarisation et de la déformation en fonction du champ électrique, les matériaux ferroélectriques se comportent de façon linéaire lorsqu'ils sont excités à bas niveau. Sur le cycle d'hystérésis, cela se traduit par des petites variations de la polarisation autour de la position  $E=0V/mm, P=Pr$  (C/m<sup>2</sup>).

Les grandeurs fondamentales de la piézoélectricité et de la pyroélectricité sont pour la partie électrique le champ  $E$  et l'induction  $D$ , pour la partie mécanique la déformation  $S$  et la contrainte  $T$ , et pour la partie thermique la température  $q$  et l'entropie  $G$ . La démonstration qui suit traite de la linéarisation à l'ordre 1 du potentiel thermodynamique et permet de définir les équivalences entre les coefficients linéaires. Ces six grandeurs peuvent être décrites comme les dérivées partielles du potentiel thermodynamique de Gibbs :

$$G = U - T_{ij} S_{ij} - E_k D_k - \Theta \Gamma$$

U est l'énergie interne

Pour une transformation réversible, on a :

$$dU = -T_{ij} dS_{ij} - E_k dD_k - \Gamma d\theta$$

$$\text{D'où, } dG = -S_{ij} dT_{ij} - D_k dE_k - \Gamma d\theta$$

110

En développant le potentiel de Gibbs au premier ordre, on peut écrire :

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial T_{ij}} \right)_{E,\theta} dT_{ij} - \left( \frac{\partial G}{\partial E_k} \right)_{T,\theta} dE_k - \left( \frac{\partial G}{\partial \theta} \right)_{E,T} d\theta$$

Ce qui par identification donne

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial T_{ij}} \right)_{E,\theta} dT_{ij} - \left( \frac{\partial G}{\partial E_k} \right)_{T,\theta} dE_k - \left( \frac{\partial G}{\partial \theta} \right)_{E,T} d\theta$$

Ainsi, si on exprime les dérivées totales de la déformation, de l'induction et de l'entropie, on obtient :

$$dS_{ij} = - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial T_{ij} \partial E_k} \right) dE_k - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial T_{ij} \partial T_{kl}} \right) dT_{kl} - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial T_{ij} \partial \theta} \right) d\theta$$

$$dD_k = - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial E_k \partial E_n} \right) dE_n - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial E_k \partial T_{ij}} \right) dT_{ij} - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial E_k \partial \theta} \right) d\theta$$

$$d\Gamma = - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial E_n} \right) dE_n - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial T_{kl}} \right) dT_{kl} - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} \right) d\theta$$

On définit les coefficients linéaires de la piézoélectricité et de la pyroélectricité comme étant dans ce cas-ci :

$$d_{ijk} = - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial E_k \partial T_{ij}} \right), p_k = - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \theta \partial E_k} \right)_{T,\theta}, \lambda_{ij} = - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial T_{ij} \partial \theta} \right)$$

$$s_{ijkl} = - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial T_{ij} \partial T_{kl}} \right), \epsilon_{ij} = - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial E_i \partial E_j} \right), c \times \theta = - \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} \right)$$

Ce qui réduit alors les équations à :

$$dD_k = \varepsilon_{ij} dE_j + d_{klm} dT_{lm} + p_k d\theta$$

$$dS_{ij} = d_{ijn} dE_n + s_{ijkl} dT_{kl} + \lambda_{ij} d\theta$$

$$d\Gamma = p_n dE_n + \lambda_{ij} dT_{ij} + \frac{cd\theta}{\theta}$$

Cette double dérivation du potentiel de Gibbs impose une relation entre les dérivées :

$$\left. \frac{\partial D_n}{\partial T_{ij}} \right|_{E,\theta} = \left. \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_n} \right|_{T,\theta} = d_{ijk}, \left. \frac{\partial D_n}{\partial \theta} \right|_{E,\theta} = \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial E_n} \right|_{T,\theta} = p_n, \left. \frac{\partial S_{ij}}{\partial \theta} \right|_{E,T} = \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial T_{ij}} \right|_{E,\theta} = \lambda_{ij}$$



### Unités des variables et coefficients

$T$ (N/m <sup>2</sup> )	Contrainte mécanique
$S$ (m/m)	Déformation relative
$E$ (V/m)	Champ électrique
$D$ (C/m <sup>2</sup> )	Déplacement électrique ou induction
$s$ (m <sup>2</sup> /N)	Compliance ou susceptibilité élastique
$\epsilon$ (F/m)	Permittivité diélectrique
$d$ (C/N ou m/V)	Constante piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la contrainte à champ constant ou nul.
$\lambda$ (K <sup>-1</sup> )	Coefficient de dilatation thermique
$p$ (C.m <sup>-2</sup> .K <sup>-1</sup> )	Coefficient pyroélectrique qui traduit la proportionnalité entre l'induction électrique et la température
$c$ (J.m <sup>-3</sup> .K <sup>-1</sup> )	Capacité calorifique à champ constant ou nul

Dans ces équations,  $E$  et  $D$  sont des vecteurs de dimension 3 (les trois directions du repère orthonormé) tandis que  $S$  et  $T$  sont des tenseurs de dimension 6 (trois déformations/contraintes longitudinales et trois déformations/contraintes de cisaillement) si on adopte la notation contractée.

Les variables thermiques  $q$  et  $G$  sont des scalaires. Par conséquent, les coefficients décrits ci-dessus sont des tenseurs dont les dimensions varient selon les grandeurs qu'ils lient.

### Cas de la détermination des tenseurs piézoélectriques

La détermination des tenseurs peut être faite de différentes manières. Tout d'abord, le tenseur élastique peut être caractérisé par la mesure des vitesses acoustiques dans le matériau.

On peut aussi exciter les fréquences de résonance acoustique du matériau en utilisant l'effet piézoélectrique inverse : suivant la géométrie de l'échantillon considéré, différents modes pourront être privilégiés comme le montre le Tableau n°3.

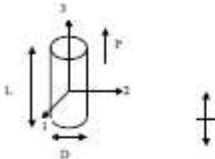
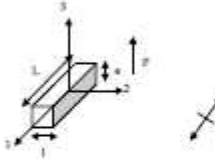
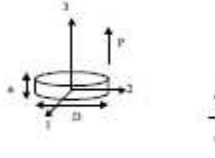
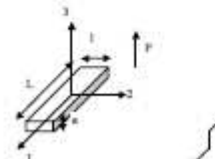
Echantillon	Déformation	Dimensions		Constantes mesurées	
		I.R.E	Usuelles en mm	Piézoélectriques et diélectriques	et Mécaniques
Barreau		$D < L/5$	$L = 15$ $D = 6.35$	$k_{33}$ $d_{33}$ $g_{33}$ $\epsilon_{33}^T$ $\epsilon_{33}^S$	$S_{33}^D$ $S_{33}^E$ $Q_{33}$
Latéral		$l < \frac{L}{3}$ $e < \frac{L}{5}$	$L = 25$ $l = 5$ $e = 5$	$k_{31}$ $d_{31}$ $g_{31}$	$S_{11}^D$ $S_{11}^E$ $Q_{31}$
Epaisseur		$D \gg e$	idem	$k_t$ $e_{33}$ $h_{33}$ $\epsilon_{33}^S$	$C_{33}^D$ $C_{33}^E$ $Q_t$
Cisaillement		$L > 8e$	$L = 10$ $l = 5$ $e = 1$	$k_{15}$ $d_{15}$ $g_{15}$ $\epsilon_{11}^T$ $\epsilon_{11}^S$	$C_{55}^D$ $C_{55}^E$ $S_{55}^D$ $S_{55}^E$ $Q_{15}$

Tableau 3. Mode de résonance pour la détermination des coefficients

*RESUME*

---

## Modélisation de l'hystérésis dynamique dans les ferroélectriques

Historiquement, les matériaux piézoélectriques ont, entre autre, fait l'objet de développements intensifs en tant que résonateurs et transducteurs pour l'acoustique sous-marine (sonars) et l'acoustique médicale (échographie). Depuis, de nombreux autres champs d'application se sont développés autour des capteurs (accéléromètres) et des actionneurs de précision. Plus récemment, une application potentielle concerne la récupération d'énergie pour l'auto alimentation des systèmes embarqués (systèmes sans batteries). Les matériaux piézoélectriques sont des céramiques, des monocristaux ou des polymères, chaque catégorie présentant des avantages et inconvénients en raison de leurs propriétés, leurs coûts, et leur adaptabilité à leurs environnements (impédance acoustique par exemple). Seules les propriétés dites linéaires ont été utilisées pendant longtemps (déformation proportionnelle à la tension appliquée). Ce n'est plus le cas actuellement, où dans de nombreuses nouvelles applications de puissance (comme la récupération d'énergie, par exemple) les niveaux de sollicitations sont si forts que les non-linéarités ne peuvent plus être négligées. Ces non linéarités rendent les équations classiques de la piézoélectricité obsolètes et le besoin de nouveaux outils de modélisation important. Dans les deux premiers chapitres de ce manuscrit, est proposé un modèle de l'hystérésis dynamique dans les matériaux électro actifs tels que les céramiques piézo-électriques. Le modèle prend en compte deux contributions :

- \_ Une contribution statique établie à partir de l'analogie entre un frottement sec mécanique et le déplacement des murs de domaines lors de la variation de la polarisation au sein du matériau.
- \_ Une contribution dynamique mettant en œuvre des opérateurs à dérivées fractionnaires et permettant une bonne prise en compte du comportement dynamique de la polarisation.

Pour confirmer expérimentalement ces résultats de modélisation, dans la dernière partie de ce manuscrit est présentée une technique originale de récupération d'énergie dont le gisement vibratoire est issu de l'environnement (vent, véhicules ...). Cette ressource est de type bruit blanc avec des fréquences distribuées dans une bande très large. Comme la technique impose de synchroniser le champ électrique sur le maximum de contrainte mécanique, on se retrouve à devoir imposer le champ électrique à des fréquences importantes. Ces fréquences élevées associées à des amplitudes de champ importantes se traduisent par des pertes diélectriques fortes qu'il est nécessaire de considérer pour connaître précisément les rendements de la méthode et justifier son utilisation.

Dans le futur, les résultats encourageant obtenus à l'aide des opérateurs fractionnaires offrent de nouveaux champs d'investigations, tel que celui de la diffusion du champ magnétique dans les matériaux magnétiques ou de la dynamique diélectrique des polymères électro-strictifs.