



**HAL**  
open science

# Une description fonctorielle des $K$ -théories de Morava des 2-groupes abéliens élémentaires

Le Chi Quyet Nguyen

► **To cite this version:**

Le Chi Quyet Nguyen. Une description fonctorielle des  $K$ -théories de Morava des 2-groupes abéliens élémentaires. Topologie algébrique [math.AT]. Université d'Angers, 2017. Français. NNT : 2017ANGE0032 . tel-01565626v2

**HAL Id: tel-01565626**

**<https://hal.science/tel-01565626v2>**

Submitted on 2 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

Quyêt NGUYEN LE CHI

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de Docteur de l'Université d'Angers  
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Mathématiques et leurs interactions, section CNU 25

Unité de recherche : Laboratoire Angevin de Recherche en Mathématiques (LAREMA)

Soutenue le 07 juillet 2017

## Une description fonctorielle des K-théories de Morava des 2-groupes abéliens élémentaires

### JURY

Rapporteurs : **M. Minh Ha LE**, Professeur étranger, Université nationale du Vietnam, Hanoï  
**M. Antoine TOUZÉ**, Professeur des universités, Université de Lille 1

Examineurs : **M<sup>me</sup> Muriel LIVERNET**, Professeur des universités, Université Paris 7  
**M. Volodya ROUBTSOV**, Professeur des universités, Université d'Angers  
**M<sup>me</sup> Christine VESPA**, Maître de conférences HDR, Université de Strasbourg

Directeur de thèse : **M. Geoffrey POWELL**, Directeur de recherche CNRS, Université d'Angers  
Co-directeur de thèse : **M. Lionel SCHWARTZ**, Professeur émérite, Université Paris 13



UNIVERSITÉ D'ANGERS

Laboratoire Angevin de Recherche en Mathématiques, UMR CNRS 6093

## THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ANGERS**

sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

Discipline : **Mathématiques et leurs interactions**

présentée par

**NGUYỄN LÊ CHÍ QUYẾT**

---

# Une description fonctorielle des K-théories de Morava des 2-groupes abéliens élémentaires

---

soutenue le 07 juillet 2017 devant le jury composé de :

<b>M. LÊ Minh Hà</b>	Professeur étranger, Université nationale du Vietnam, Hanoï	Rapporteur
<b>M. Antoine TOUZÉ</b>	Professeur des universités, Université de Lille 1	Rapporteur
<b>M<sup>me</sup> Muriel LIVERNET</b>	Professeur des universités, Université Paris 7	Examineur
<b>M. Volodya ROUBTSOV</b>	Professeur des universités, Université d'Angers	Examineur
<b>M<sup>me</sup> Christine VESPA</b>	Maître de conférences HDR, Université de Strasbourg	Examineur
<b>M. Geoffrey POWELL</b>	Directeur de recherche CNRS, Université d'Angers	Directeur de thèse
<b>M. Lionel SCHWARTZ</b>	Professeur émérite, Université Paris 13	Co-directeur de thèse



---

# Remerciements

---

J'aimerais tout d'abord adresser mes plus sincères remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur Geoffrey Powell, et mon co-directeur de thèse, Monsieur Lionel Schwartz, qui ont dirigé mes recherches depuis mon stage de Master 2 au LAGA (Université Paris 13) en 2012. Malgré mes connaissances éparses dans la spécialité et aussi du français, ils ont toujours été patients, et m'ont toujours fait confiance. Leur générosité, leur grande disponibilité, leurs encouragements et bien sûr leurs immenses qualités scientifiques m'ont apporté une aide précieuse durant les quatre années de cette thèse, notamment durant la rédaction de ce manuscrit. Je suis très honoré et reconnaissant d'avoir eu la chance de travailler avec eux.

J'aimerais aussi remercier Monsieur Christian Ausoni et Monsieur Lê Minh Hà pour avoir été des membres du comité de suivi de ma thèse pendant ces longues années.

Je remercie également Monsieur Antoine Touzé et Monsieur Lê Minh Hà pour avoir accepté d'être rapporteurs de mon travail. Leur lecture attentive et leurs suggestions judicieuses m'ont véritablement aidé à améliorer le manuscrit. Leur présence dans le jury, ainsi que celle de Madame Christine Vespa, Madame Muriel Livernet et Monsieur Volodya Roubtsov est pour moi à la fois un très grand plaisir et un immense honneur.

Je tiens à remercier mon université au Vietnam, l'université pédagogique de Ho Chi Minh ville, pour m'avoir permis de poursuivre mes études dans de bonnes conditions. Je remercie Campus France pour son accueil et son aide pour ma vie en France. Particulièrement, ce travail n'aurait pas été possible sans le soutien du gouvernement vietnamien grâce à sa bourse d'études. Par ailleurs, il m'est impossible d'oublier Monsieur Nguyễn Hà Thanh et Monsieur Đỗ Đức Thái qui m'ont donné beaucoup de conseils durant mes études au Vietnam et qui ont aussi orienté mes études vers la France.

Je souhaiterais adresser mes remerciements aux membres du LAREMA, notamment l'équipe de topologie algébrique, de m'avoir accueilli. J'ai beaucoup étudié au travers de ses activités scientifiques. Je tiens à remercier Madame Alexandra Le Petitcorps et Madame Caroline Chalumeau : toutes les démarches administratives ont été simples grâce à vous. J'ai également eu le plaisir de travailler au sein du LAGA (Université Paris 13) et du VIASM (Hanoi, Vietnam), dont je remercie ici tous les membres.

Mes sincères remerciements vont en particulier à Nguyễn Đặng Hồ Hải qui a guidé mes premiers pas sur la topologie algébrique. J'ai aussi eu des discussions mathématiques

intéressantes avec Nguyễn Thế Cường, Phạm Văn Tuấn et Phạm Việt Cường. Je remercie également tous mes collègues ou anciens collègues pour leur soutien tout au long de ma thèse. Je remercie plus personnellement Delphine Pol, Mohamed Benzerga, Johan Leray et notamment Benjamin Couéraud pour m'avoir beaucoup aidé dans la vie de thésard.

Je voudrais ensuite remercier mes amis vietnamiens que j'ai eu la chance de rencontrer, avec qui j'ai pu discuter, et avoir de bons souvenirs en France : anh chị Ben-Ánh, anh Tài, chị Châu, bạn Loan, em Phương, anh chị Phong-Chi, anh chị Quân-Yến, em Nguyễn, em Trâm, chị Quyên, anh Chiến, em Ân, và nhiều anh chị em khác.

Au terme de ce parcours, je remercie enfin ma famille qui, malgré la distance, a réellement su me réconforter dans les moments les plus difficiles : leurs attentions et encouragements m'ont accompagnés tout au long de ces années. Je suis redevable à mes parents Nguyễn Trọng Hạ – Lê Thị Khiết, et mon frère Nguyễn Lê Chí Tâm, pour leur soutien moral et matériel, et leur confiance indéfectible dans mes choix. Mes plus chaleureux remerciements vont à ma chère épouse, Trần Nhung, pour sa patience, son courage, et ces sept années de jeunesse sacrifiées sans moi à ses côtés.

Con cảm ơn ba mẹ đã sinh ra con và luôn ủng hộ bước đường con đi. Cảm ơn vợ đã không ngừng chờ đợi và tin tưởng anh. Cảm ơn Pi, nguồn động lực mới của ba.

*À ma famille.*

*Gửi về gia đình thân thương của tôi.*

*Gửi đến thế hệ tương lai. Ba yêu con, con trai!*





---

# Conventions de notation

---

On fixe ici quelques notations générales dont on fera usage dans cette thèse. Voir la page [161](#) pour l'index des notations plus spécifiques.

$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}^\times$	l'ensemble des entiers positifs $\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	l'ensemble des entiers
$ z $	la valeur absolue de $z \in \mathbb{Z}$
$ X $	le cardinal de l'ensemble $X$
$X \sqcup Y$	la réunion disjointe des ensembles $X$ et $Y$
$\mathbb{Z}/n$	le groupe cyclique d'ordre $n$
$\mathfrak{S}_n$	le groupe symétrique d'indice $n$
$p$	un nombre premier
$\mathbb{F}_p$	le corps à $p$ éléments
$V^\sharp$	le dual linéaire de l'espace vectoriel $V$
$F^\sharp$	le dual fonctoriel du foncteur $F$
$\langle -, - \rangle$	la fonction d'évaluation
$\delta_{ij}$	le symbole de Kronecker
$\binom{n}{k}$	le coefficient binomial de $k$ parmi $n$
$\mathbb{R}P^\infty$	l'espace projectif réel infini
$\mathbb{C}P^\infty$	l'espace projectif complexe infini
$\hookrightarrow$	un morphisme injectif
$\twoheadrightarrow$	un morphisme surjectif
$A := B$	la définition de $A$ en termes de l'expression $B$

Soit  $M$  un objet gradué par l'ensemble  $I$ . On désigne la  $i$ -ième composante de  $M$  ( $i \in I$ ) soit par  $M^i$  (indexation cohomologique), soit  $M_i$  (indexation homologique). La notation  $x \in M$  sans autre indication signifie que  $x$  est un élément homogène de  $M$ . On désigne par  $|x|$  le degré de  $x$ .



---

# Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Conventions de notation</b>	<b>9</b>
<b>Table des matières</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>15</b>
Motivations . . . . .	15
Plan de la thèse . . . . .	16
<b>1 Préliminaires</b>	<b>21</b>
1.1 La catégorie $\mathcal{F}$ . . . . .	22
1.1.1 Définitions et exemples . . . . .	22
1.1.2 Foncteurs polynomiaux et foncteurs analytiques . . . . .	26
1.1.3 Foncteurs simples et séries de composition . . . . .	30
1.2 La catégorie des modules instables $\mathcal{U}$ . . . . .	35
1.2.1 Définitions et exemples . . . . .	35
1.2.2 La relation avec la catégorie $\mathcal{F}$ . . . . .	37
1.3 Les algèbres instables et les algèbres de Hopf instables . . . . .	38
1.3.1 Les algèbres instables . . . . .	38
1.3.2 Les algèbres de Hopf instables . . . . .	39
1.3.3 Les algèbres de Hopf instables primitivement engendrées . . . . .	40
1.4 Les modules instables à droite et les coalgèbres instables . . . . .	43
1.4.1 La catégorie des modules instables à droite $\mathcal{U}^\sharp$ . . . . .	44
1.4.2 Les coalgèbres instables . . . . .	45
1.5 Loi de groupe formel . . . . .	46
1.5.1 Définitions et exemples . . . . .	46
1.5.2 La catégorie des lois de groupe formel . . . . .	49
1.5.3 Une classification des lois de groupe formel commutatif . . . . .	51

<b>2</b>	<b><i>K</i>-théories de Morava des 2-groupes abéliens élémentaires</b>	<b>53</b>
2.1	Introduction . . . . .	54
2.2	Nature du foncteur $V \mapsto K(n)^{\overline{*}}(BV^{\#})$ . . . . .	56
2.2.1	La loi de groupe formel associée à $K(n)^{\overline{*}}(-)$ . . . . .	56
2.2.2	Reconstruction du foncteur $V \mapsto K(n)^{\overline{*}}(BV^{\#})$ . . . . .	58
2.2.3	Quelques applications . . . . .	60
2.3	Structure du foncteur $\mathcal{K}_2$ . . . . .	63
2.3.1	Les sous-foncteurs $K_{p,q}$ du foncteur $\mathcal{K}_2$ . . . . .	64
2.3.2	La filtration décroissante du foncteur $\mathcal{K}_2$ . . . . .	69
2.3.3	La bi-filtration du foncteur $\mathcal{K}_2$ . . . . .	71
2.4	Auto-dualité du foncteur $\mathcal{K}_2$ . . . . .	77
2.4.1	Foncteur auto-dual . . . . .	77
2.4.2	La forme bilinéaire $\langle -, - \rangle : \mathcal{K}_2(V) \times \mathcal{K}_2(V^{\#}) \rightarrow \mathbb{F}_2$ . . . . .	78
2.4.3	Calcul des valeurs et exemples . . . . .	82
2.4.4	L'existence de la forme bilinéaire $\langle -, - \rangle$ . . . . .	86
2.4.5	Non dégénérescence de la forme bilinéaire $\langle -, - \rangle$ . . . . .	87
2.4.6	Démonstration du théorème 2.4.3 . . . . .	89
<b>3</b>	<b>Calcul de <math>\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)</math></b>	<b>91</b>
3.1	Préliminaires . . . . .	92
3.1.1	Le foncteur exponentiel de Hopf $S_4^*$ . . . . .	92
3.1.2	Les foncteurs bigradués $\Lambda^{*,*}$ et $S_4^{*,*}$ . . . . .	94
3.1.3	Rappels sur les suites spectrales d'hypercohomologie . . . . .	97
3.2	Les algèbres de Hopf $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$ . . . . .	97
3.3	Le module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$ . . . . .	102
3.3.1	$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$ est un module libre sur $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$ . . . . .	103
3.3.2	Un système de générateurs du module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$ . . . . .	104
3.3.3	Premiers résultats sur $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2^l})$ . . . . .	105
3.3.4	Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h})$ avec $h \geq 1$ . . . . .	107
3.3.5	Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h})$ avec $h \geq 1$ . . . . .	108
3.3.6	Résultat principal et conséquences . . . . .	110
3.4	Le module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$ . . . . .	112
3.4.1	Premiers résultats sur $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, S_4^{2^l})$ . . . . .	113
3.4.2	Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, S_4^{2^h})$ avec $h \geq 1$ . . . . .	113
3.4.3	Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h})$ avec $h \geq 1$ . . . . .	115
3.4.4	Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^{h+1}})$ avec $h \geq 1$ . . . . .	119
3.4.5	Résultat principal et conséquences . . . . .	126
3.4.6	$\mathcal{K}_2$ et foncteurs polynomiaux stricts . . . . .	128

<b>4</b>	<b>Relation entre le foncteur <math>\mathcal{K}_2</math> et l'anneau de Hopf <math>H_*\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}}</math></b>	<b>129</b>
4.1	Rappels sur les anneaux de Hopf . . . . .	130
4.1.1	Définitions et exemples . . . . .	130
4.1.2	Le foncteur anneau de Hopf libre . . . . .	131
4.1.3	Le morphisme de Frobenius et le morphisme Verschiebung . . . . .	132
4.2	L'homologie d'un $\Omega$ -spectre . . . . .	134
4.2.1	Structure d'anneau de Hopf de $E_*\underline{G}_*$ . . . . .	134
4.2.2	Relation principale . . . . .	135
4.2.3	Modèle algébrique de $E_*\underline{G}_*$ . . . . .	136
4.3	Structures de $H_*\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}}$ . . . . .	137
4.3.1	Structure d'anneau de Hopf de $H_*\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}}$ . . . . .	137
4.3.2	La relation principale pour $H_*\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}}$ et quelques conséquences . . . . .	139
4.3.3	Structure de coalgèbre instable de $H_*\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}}$ . . . . .	140
4.4	Liens avec le foncteur $\mathcal{K}_2$ . . . . .	141
4.4.1	Relation entre $H^*\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}}$ et le foncteur $\mathcal{K}_2$ . . . . .	141
4.4.2	Relation entre $H_*\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}}$ et le foncteur $\mathcal{K}_2$ . . . . .	142
4.5	Résultats sur le modèle algébrique $H_*^R\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}}$ . . . . .	144
4.5.1	Structure de module instable à droite sur $Q(H_*^R\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}})$ et relation avec les sous-foncteurs $K_{p,q}$ . . . . .	144
4.5.2	Démonstration du théorème 4.5.3 . . . . .	147
4.5.3	Le module des primitifs $P(H_*^R\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}})$ et quelques conséquences . . . . .	149
<b>A</b>	<b>Foncteurs exponentiels de Hopf</b>	<b>153</b>
A.1	Foncteurs exponentiels Hopf . . . . .	154
A.2	Foncteurs gradués exponentiels de Hopf . . . . .	155
A.3	Les groupes d'extensions dans la catégorie $\mathcal{F}$ . . . . .	156
A.4	Sur les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^m(\Lambda^I, \Lambda^J)$ . . . . .	158
	<b>Index des notations</b>	<b>161</b>
	<b>Index</b>	<b>163</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>165</b>



---

# Introduction

---

## Motivations

Les  $K$ -théories de Morava modulo un premier  $p$  fixé forment une famille des théories cohomologiques généralisées munies d'une orientation complexe :  $\{K(n)^*(-) \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Elles jouent un rôle important en théorie d'homotopie stable moderne. La théorie  $K(n)^*(-)$  est périodique de période  $2(p^n - 1)$ . L'anneau de coefficients  $K(n)^* = \mathbb{F}_p[\nu_n, \nu_n^{-1}]$ , avec  $|\nu_n| = 2 - 2p^n$ , est un corps gradué : tous les modules sur  $K(n)^*$  sont libres. Grâce à cette propriété, toutes les  $K$ -théories de Morava modulo  $p$  satisfont à la formule de Künneth. La loi de groupe formel  $F_n$  associée à  $K(n)^*(-)$  est la loi de Honda de hauteur  $n$  dont la  $p$ -série est donnée par  $[p]_{F_n}(x) = \nu_n x^{p^n}$ .

L'objectif de cette thèse est l'étude, d'un point de vue fonctoriel, des  $K$ -théories de Morava modulo 2 des 2-groupes abéliens élémentaires  $K(n)^*(BV)$ . En particulier, on étudie la relation entre le foncteur  $V \mapsto K(2)^*(BV)$  et la structure d'anneau de Hopf de l'homologie du  $\Omega$ -spectre associé à la théorie  $K(2)^*(-)$  (cf. [Wil84]).

Considérons le cas d'un espace vectoriel de dimension 1, *i.e.*  $V = \mathbb{Z}/2$ . La suite exacte de Gysin associée à la fibration  $S^1 \rightarrow B\mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$  induit la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow K(n)^{*-2}(\mathbb{C}P^\infty) \xrightarrow{[2]_{F_n}(-)} K(n)^*(\mathbb{C}P^\infty) \longrightarrow K(n)^*(B\mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0,$$

qui nous donne l'isomorphisme de  $K(n)^*$ -modules :

$$K(n)^*(B\mathbb{Z}/2) \cong K(n)^*[x]/(x^{2^n}),$$

où  $x \in K(n)^2(B\mathbb{Z}/2)$  est l'image de l'orientation complexe  $x^{K(n)} \in K(n)^2(\mathbb{C}P^\infty)$ . Donc, la structure de  $K(n)^*$ -module sur  $K(n)^*(BV^\sharp)$  est complètement comprise grâce à la formule de Künneth.

Soit  $\text{End}(V)$  l'anneau des endomorphismes du  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $V$ . Tout morphisme  $\varphi \in \text{End}(V)$  induit un morphisme en cohomologie

$$\varphi^* : K(n)^*(BV) \longrightarrow K(n)^*(BV).$$

Cela fournit une action canonique de l'anneau  $\text{End}(V)$  sur  $K(n)^*(BV)$ . Cette action est



déterminée par la loi de groupe formel  $F_n$  mentionnée plus haut. Considérons un exemple de Brunetti [Bru96] sur le module  $K(n)^*(B\mathbb{Z}/2 \times B\mathbb{Z}/2) \cong K(n)^*[x, y]/(x^{2^n}, y^{2^n})$ . Considérons l'endomorphisme  $\varphi$  de  $V = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$  caractérisé par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, l'action de  $\varphi^*$  sur les générateurs  $x, y$  est donnée par la multiplication (sur  $F_n$ ) des matrices :

$$\begin{pmatrix} \varphi^*(x) \\ \varphi^*(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{F_n} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Cela veut dire que

$$\begin{aligned} \varphi^*(x) &= [1]_{F_n}(x) +_{F_n} [0]_{F_n}(y) = x, \text{ et} \\ \varphi^*(y) &= [1]_{F_n}(x) +_{F_n} [1]_{F_n}(y) = x +_{F_n} y = x + y + \dots \end{aligned}$$

Pour les définitions et notations concernant les lois de groupe formel, on renvoie au chapitre 1 de cette thèse. Donc, l'isomorphisme de Künneth ne donne pas une équivalence au niveau des foncteurs qui dépend forcément de la loi de groupe formel associée. C'est la raison pour l'étude du foncteur (covariant)  $V \mapsto K(n)^*(BV^\sharp)$ . Dans cette thèse,  $\sharp$  désigne le dual linéaire. On note que, par la périodicité, il suffit de considérer le foncteur  $\mathbb{Z}/(2^{n+1}-2)$ -gradué  $V \mapsto K(n)^{\bar{*}}(BV^\sharp)$ .

Le cas de la première  $K$ -théorie de Morava ( $\mathbb{Z}/2$ -graduée)  $V \mapsto K(1)^{\bar{*}}(BV^\sharp)$  résulte directement du travail de M. Atiyah sur la  $K$ -théorie topologique (cf. [Ati61]). En passant au produit tensoriel  $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} -$ , le résultat d'Atiyah donne une équivalence de foncteurs

$$\mathbb{F}_2[V] \xrightarrow{\cong} K(1)^{\bar{*}}(BV^\sharp),$$

où le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $V$  est concentré en degré  $\bar{2}$ . Le foncteur  $V \mapsto K(1)^{\bar{*}}(BV^\sharp)$  est donc *coanalytique* et ne possède aucun sous-foncteur polynomial non-constant. Il est très différent du cas  $n > 1$  où les foncteurs  $V \mapsto K(n)^{\bar{*}}(BV^\sharp)$  s'avèrent être analytiques.

## Plan de la thèse

Le **premier chapitre** est consacré au rappel des définitions et des résultats importants qui seront utilisés dans les chapitres suivants. Au *premier paragraphe*, on rappelle la catégorie des foncteurs  $\mathcal{F}$  en décrivant ses objets particuliers : les foncteurs polynomiaux, analytiques et les foncteurs simples. On introduit dans le *second paragraphe* la catégorie des modules instables à gauche  $\mathcal{U}$  et son quotient par la sous-catégorie pleine des modules nilpotents  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ . On y rappelle l'équivalence entre la catégorie  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  et la sous-catégorie pleine  $\mathcal{F}_\omega$  de  $\mathcal{F}$  des foncteurs analytiques. Le *troisième paragraphe* est consacré à la catégorie

des algèbres instables  $\mathcal{K}$ . Dans ces sections, la cohomologie singulière modulo 2  $H^*V$  d'un groupe abélien élémentaire a une place essentielle. Au cours du *quatrième paragraphe*, on rappelle la catégorie des modules instables à droite (de type fini)  $\mathcal{U}^\sharp$  en relation avec la catégorie  $\mathcal{U}$  des modules instables à gauche (de type fini). La *fin de ce chapitre* est consacrée aux lois de groupe formel, qui occupent une place essentielle dans cette thèse.

L'objectif du **chapitre 2** est d'étudier le foncteur  $V \mapsto K(n)^\overline{*}(BV^\sharp)$  en tant qu'objet de la catégorie  $\mathcal{F}$ . Dans *un premier temps*, on donne une version de ce foncteur plus commode pour le calcul. Soit  $J(V)$  l'idéal d'augmentation de l'algèbre de groupe  $\mathbb{F}_2[V]$ . Notons que  $J(V)$  est un  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel, de dimension  $|V|-1$ , engendré par les éléments  $(u) = [u]-[0]$  pour tous éléments  $u \in V$  (en observant que  $(0) = 0$ ). Soit  $\mathcal{K}_n(V)$  le quotient de l'algèbre symétrique  $S^*(J(V))$  par les relations

$$(u + v) = (u) + (v) + (u)^{2^{n-1}}(v)^{2^{n-1}} \quad (1)$$

pour tous  $u, v \in V$ . Considérons  $\mathcal{K}_n(V)$  comme un  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $\mathbb{Z}/(2^{n+1}-2)$ -gradué, où  $J(V)$  est concentré en degré  $\overline{2}$ .

**Théorème 1 (2.2.9, page 59).** — *On a un isomorphisme de  $\mathbb{F}_2$ -algèbres  $\mathbb{Z}/(2^{n+1}-2)$ -graduées, naturel en  $V$  :*

$$\begin{aligned} \vartheta: \mathcal{K}_n(V) &\longrightarrow K(n)^\overline{*}(BV^\sharp) \\ (u) &\longmapsto \mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}), \end{aligned}$$

où  $\mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$  est la classe d'Euler du complexifié du fibré en droite réelle de base  $BV^\sharp$  associé à  $u$ .

Pour démontrer ce théorème, on utilise une approximation (modulo les degrés assez grands) de la loi de groupe formel  $\overline{F}_n$  associée à la théorie  $K(n)^\overline{*}(-)$  :

$$\overline{F}_n(x, y) \equiv x + y + x^{2^{n-1}}y^{2^{n-1}} \pmod{\deg(2^{n+1}-1)}.$$

Cette approximation induit une relation entre les classes d'Euler

$$\mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) + \mathbf{e}(v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) + (\mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))^{2^{n-1}}(\mathbf{e}(v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))^{2^{n-1}}$$

qui nous permet de démontrer le théorème 1.

Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème 1 : la propriété exponentielle provient de l'isomorphisme de Künneth pour les  $K$ -théories de Morava, le coproduit est induit par la loi de groupe formel  $\overline{F}_n$ .

**Théorème 2 (2.2.10 et 2.2.11, page 60).** — *Le foncteur  $\mathcal{K}_n$  est exponentiel de Hopf :*

1. *On a une équivalence naturelle en  $V$  et  $W$  :  $\mathcal{K}_n(V \oplus W) \cong \mathcal{K}_n(V) \otimes \mathcal{K}_n(W)$ .*
2. *Le coproduit est donné par  $\delta((u)) = (u) \otimes 1 + 1 \otimes (u) + (u)^{2^{n-1}} \otimes (u)^{2^{n-1}}$ .*

Retournons aux relations (1). On en déduit la propriété importante suivante qui fait les foncteurs  $\mathcal{K}_n$  ( $n \geq 2$ ) différents du foncteur  $\mathcal{K}_1$  :

$$(u + v)^{2^i} = (u)^{2^i} + (v)^{2^i}, \text{ pour tout } i \geq 1. \quad (2)$$

En utilisant ces relations, on montre que le troisième terme  $J_3$  de la filtration décroissante unique du foncteur  $J$  se projette trivialement sur  $\mathcal{K}_n$  si  $n \geq 2$ . Donc, dans ce cas, le projection canonique de  $S^* \circ J$  dans  $\mathcal{K}_n$  se factorise à travers  $S^* \circ \Gamma^2$ . On obtient le résultat :

**Théorème 3 (2.2.17, page 62).** — *Le foncteur  $\mathcal{K}_n$  est analytique si et seulement si  $n \geq 2$ .*

La deuxième partie du **chapitre 2** est consacrée à l'étude des sous-foncteurs et des foncteurs quotients du foncteur  $\mathcal{K}_2$  en particulier. Grâce aux relations (2), on obtient une inclusion d'algèbres (naturelle en  $V$ ), de l'algèbre extérieure  $\Lambda^*(V)$  dans  $\mathcal{K}_2(V)$ , en envoyant tout élément  $u \in V$  sur  $(u)^2 \in \mathcal{K}_2(V)$ . Pour  $p, q$  quelconques dans  $\mathbb{N}$ , on définit par  $K_{p,q}$  l'image du morphisme naturel de  $(S^p \circ \Gamma^2) \otimes \Lambda^q$  dans  $\mathcal{K}_2$ . Considérons sur  $\mathbb{N}^2$  l'ordre partiel :  $(i, j) \preceq (p, q)$  si et seulement s'il existe  $m, n \in \mathbb{N}$  tels que  $(p, q) = (i, j) + m(2, -1) + n(1, -2)$ . Voici les résultats de cette partie :

**Théorème 4 (§2.3, page 63).** — *On a :*

1. *Le foncteur  $K_{p,q}$  est polynomial de degré inférieur ou égal à  $(2p + q)$ .*
2. *Le foncteur  $\mathcal{K}_2$  est la limite inductive des  $K_{p,q}$ .*
3. *En posant  $\mathcal{D}_k = \sum_{p+2q \geq k} K_{p,q}$ , on obtient une filtration décroissante convergente  $\mathcal{D}_*$  du foncteur  $\mathcal{K}_2$  dont le quotient successif  $\mathcal{D}_k/\mathcal{D}_{k+1}$  est isomorphe à la puissance symétrique tronqué  $S_4^k$ , où  $S_4^k$  est défini par le quotient de la puissance symétrique  $S^k$  par les puissances quatrièmes.*
4. *Le foncteur  $K_{p,q}$  admet une filtration finie dont le gradué est  $\bigoplus_{(i,j) \preceq (p,q)} \Lambda^i \otimes \Lambda^j$ .*
5. *Le foncteur  $\mathcal{K}_2$  admet une filtration dont le gradué est  $\bigoplus_{i,j} \Lambda^i \otimes \Lambda^j$ .*

L'objectif de la dernière partie du **chapitre 2** est de démontrer le résultat suivant :

**Théorème 5 (2.4.3, page 78).** — *Le foncteur  $\mathcal{K}_2$  est auto-dual.*

On démontre ce théorème en construisant une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée  $\langle -, - \rangle_V : \mathcal{K}_2(V) \times \mathcal{K}_2(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$ . Cette forme est déterminée par des évaluations initiales et sa compatibilité à la structure de foncteur exponentiel de Hopf de  $\mathcal{K}_2$ . L'isomorphisme naturel  $\gamma_{\mathcal{K}_2} : \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{K}_2^\sharp$  défini par  $(\gamma_{\mathcal{K}_2})_V(x)(\alpha) := \langle x, \alpha \rangle_V$  fait de  $\mathcal{K}_2$  un foncteur auto-dual. Ici,  $\sharp$  est le dual au sens de Kuhn [Kuh94a].

Le **chapitre 3** est consacré au calcul du premier groupe d'extension  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$ . Une motivation pour ce chapitre provient de la filtration décroissante  $\mathcal{D}_*$  du foncteur  $\mathcal{K}_2$  qui a les puissances symétriques tronquées  $S_4^n$  pour quotients successifs. La structure des sous-objets et des sous-quotients du foncteur  $\mathcal{K}_2$  étudiée dans le chapitre 2 dit qu'il existe un sous-quotient  $\mathcal{E}_k$  de  $\mathcal{K}_2$  qui est une extension non triviale de  $S_4^k$  par  $S_4^{k+3}$ . Le foncteur  $\mathcal{K}_1$  (qui

correspond au cas de la  $K$ -théorie complexe modulo 2) est isomorphe au projectif standard  $P_{\mathbb{F}_2}$  de la catégorie  $\mathcal{F}$  ; l'idéal d'augmentation  $J^\natural$  de son dual  $I_{\mathbb{F}_2}$  est unisériel : ses facteurs de composition sont les  $\Lambda^n$ , de plus le groupe d'extension  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^i, \Lambda^j)$  est isomorphe à  $\mathbb{F}_2$  si  $|i - j| = 1$ , et trivial sinon. On peut se demander si un phénomène analogue a lieu pour  $\mathcal{K}_2$ . Pour répondre à cette question, il faut calculer les groupes  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^k, S_4^{k+3})$  pour  $k \geq 1$ , et plus généralement le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$  en relation avec la structure d'algèbre de Hopf tri-graduée de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, S_4^*)$  (cf. [FFSS99]). Voici un résultat principal de ce chapitre :

**Théorème 6 (3.2.1 page 97, et 3.4.1 page 112).** — *On a :*

1. *En tant que  $\mathbb{F}_2$ -algèbre bigraduée,*

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*) \cong \bigotimes_k \Lambda(b_{[2^k, 2^k]}) \bigotimes_l \Lambda(b_{[2^l, 2^{l+1}]}),$$

où  $b_{[m, n]}$  est le générateur du  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel de dimension une  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^m, S_4^n)$ .

2. *En tant que module sur  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$  est librement engendré par les classes  $\epsilon_{[1,4]}$ ,  $\epsilon_{[4,1]}$ ,  $\epsilon_{[2,4]}$  et  $\epsilon_{[4,2]}$  qui sont respectivement le générateur des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels de dimension une  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^1, S_4^4)$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^1)$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, S_4^4)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^2)$ .*

Comme conséquence directe du théorème 6, le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^n, S_4^{n+3})$  est librement engendré par au moins deux générateurs  $b_{[n-1, n-1]\epsilon_{[1,4]}}$  et  $b_{[n-2, n-1]\epsilon_{[2,4]}}$  (pour  $n \geq 3$ ), donc on n'a pas l'unicité d'extension. On montre que le sous-quotient  $\mathcal{E}_n$  de  $\mathcal{K}_2$  représente la classe  $b_{[n-1, n-1]\epsilon_{[1,4]}}$ .

La démonstration du théorème 6 repose essentiellement sur deux techniques. La structure d'algèbre de Hopf tri-graduée de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^*, A^*)$  (pour  $A^*$  un foncteur  $\mathbb{N}$ -graduée exponentiel de Hopf), due à Franjou, Friedlander, Scorichenko et Suslin [FFSS99], nous permet de ramener le calcul de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^k, S_4^l)$  aux cas particuliers  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2^l})$  avec  $k, l \in \mathbb{N}$ . Pour calculer ces cas particuliers, on utilise les suites spectrales d'hypercohomologie associées aux complexes de cochaines obtenus à partir du foncteur bigradué  $S_4^{*,*}$ . Cette technique a été utilisée par Franjou, Lannes et Schwartz [FLS94] pour calculer le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\text{Id}, S^*)$ .

On a besoin de plus de calculer le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$ .

**Théorème 7 (3.2.2 page 98, et 3.3.1 page 102).** — *On a :*

1. *En tant que  $\mathbb{F}_2$ -algèbre bigraduée,*

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*) \cong \bigotimes_k \Lambda(\tilde{b}_{2^k}),$$

où  $\tilde{b}_m$  est le générateur du  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel de dimension une  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^m, \Lambda^n)$ .

2. *En tant que module sur  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$  est librement engendré par les classes  $\tilde{\epsilon}_{[1,2]}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{[4,1]}$  et  $\tilde{\epsilon}_{[2,2]}$  qui sont respectivement le générateur des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels de dimension une  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^1, \Lambda^2)$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, \Lambda^1)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, \Lambda^2)$ .*

Dans le **chapitre 4**, la structure d'anneau de Hopf de l'homologie

$$H_*\underline{K}(2)_{\overline{*}} := \bigoplus_{\overline{k} \in \mathbb{Z}/6} H_*\underline{K}(2)_{\overline{k}},$$

dûe à Wilson [Wil84], est utilisée pour étudier le module instable correspondant au foncteur analytique  $\mathcal{K}_2$  par l'équivalence de catégories entre  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  et  $\mathcal{F}_\omega$ , où  $K(2) = \{\underline{K}(2)_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in \mathbb{Z}/6}$  est le  $\Omega$ -spectre "périodique" associé à la  $K$ -théorie de Morava  $\mathbb{Z}/6$ -gradué  $K(2)^{\overline{*}}(-)$ .

Les propriétés de l'homologie singulière  $H_*(-)$  et de la  $K$ -théorie de Morava  $K(2)^{\overline{*}}(-)$  (tous les deux sont à coefficients  $\mathbb{F}_2$ ) font de  $H_*\underline{K}(2)_{\overline{*}}$  un anneau de Hopf engendré par les classes  $a_i \in H_i\underline{K}(2)_{\overline{1}}$  (avec  $0 \leq i \leq 5$ ) et les classes  $b_j \in H_{2j}\underline{K}(2)_{\overline{2}}$  (pour  $j \geq 0$ ). Les classes  $a_i$  sont détectées dans  $H_*(\mathbb{R}P^\infty)$  et  $b_j$  dans  $H_*(\mathbb{C}P^\infty)$ ; l'action à droite de l'algèbre de Steenrod sur  $H_*\underline{K}(2)_{\overline{*}}$  est induite par les structures de coalgèbre instable sur  $H_*(\mathbb{R}P^\infty)$  et  $H_*(\mathbb{C}P^\infty)$ . Le modèle algébrique  $H_*^R\underline{K}(2)_{\overline{*}}$  de  $H_*\underline{K}(2)_{\overline{*}}$ , qui est engendrée par les classes  $b_i$ , est un anneau de Hopf et de plus une coalgèbre instable, ces structures sont compatibles. Voici le résultat principal de ce chapitre :

**Théorème 8 (4.4.9, page 144).** — *Pour tout  $\overline{k} \in \mathbb{Z}/6$ , on a l'isomorphisme naturel de foncteurs :*

$$f \left( Q \left( H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{k}} \right)^\sharp \right) \cong \mathcal{K}_2^{\overline{6-k}},$$

où  $Q(-)$  désigne le module des indécomposables.

Le produit  $\bullet$  dans la structure d'anneau de Hopf de  $H_*^R\underline{K}(2)_{\overline{*}}$ , qui correspond à celui de  $H_*\underline{K}(2)_{\overline{*}}$  induit par la structure multiplicative du spectre  $K(2)$ , induit un produit sur les indécomposables

$$Q \left( H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{*}} \right) := \bigoplus_{\overline{k} \in \mathbb{Z}/6} Q \left( H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{k}} \right),$$

que l'on note aussi  $\bullet$ . Par ailleurs, l'étude de l'action à droite de l'algèbre de Steenrod  $\mathcal{A}_2$  sur le module  $Q \left( H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{*}} \right)$  montre que le sous- $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel de ce module engendré par les éléments  $b_{(i_1)} \bullet \cdots \bullet b_{(i_s)} \bullet b_{(j_1)}^2 \bullet \cdots \bullet b_{(j_t)}^2$  pour tout  $(s, t) \preceq (p, q)$ , que l'on désigne par  $K_{p,q}^Q$ , est un module instable à droite ( $b_{(k)} := b_{2^k}$ , l'ordre partiel  $\preceq$  sur  $\mathbb{N}^2$  est défini plus haut). L'isomorphisme du théorème 8 fournit une correspondance entre le produit  $\bullet$  de  $Q \left( H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{*}} \right)$  et le produit de  $\mathcal{K}_2$ , mais au niveau dual. On obtient le résultat suivant :

**Théorème 9 (4.5.3, page 145).** — *On a une équivalence de foncteurs*

$$f \left( (K_{p,q}^Q)^\sharp \right) \cong K_{p,q}^\natural.$$


L'**appendice A** contient quelques rappels sur les foncteurs exponentiels qui sont utiles au chapitre 3. On y présente notamment la structure d'algèbre de Hopf tri-graduée sur les groupes d'extensions entre deux foncteurs exponentiels de Hopf.

# CHAPITRE 1

---

## Préliminaires

---

ANS CE CHAPITRE, on rappelle la catégorie des foncteurs  $\mathcal{F}$  (pour un premier  $p$  quelconque), la catégorie des modules instables à gauche  $\mathcal{U}$  (au cas particulier  $p = 2$ ), et notamment l'équivalence de catégories entre  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  et  $\mathcal{F}_\omega$ . Le rappel des algèbres de Hopf instables sera utile dans le chapitre 4. La fin de ce chapitre est consacrée aux lois de groupe formel qui occupent une place essentielle dans cette thèse.

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>La catégorie <math>\mathcal{F}</math></b> . . . . .	<b>22</b>
1.1.1	Définitions et exemples . . . . .	22
1.1.2	Foncteurs polynomiaux et foncteurs analytiques . . . . .	26
1.1.3	Foncteurs simples et séries de composition . . . . .	30
<b>1.2</b>	<b>La catégorie des modules instables <math>\mathcal{U}</math></b> . . . . .	<b>35</b>
1.2.1	Définitions et exemples . . . . .	35
1.2.2	La relation avec la catégorie $\mathcal{F}$ . . . . .	37
<b>1.3</b>	<b>Les algèbres instables et les algèbres de Hopf instables</b> . . . . .	<b>38</b>
1.3.1	Les algèbres instables . . . . .	38
1.3.2	Les algèbres de Hopf instables . . . . .	39
1.3.3	Les algèbres de Hopf instables primitivement engendrées . . . . .	40
<b>1.4</b>	<b>Les modules instables à droite et les coalgèbres instables</b> . . . . .	<b>43</b>
1.4.1	La catégorie des modules instables à droite $\mathcal{U}^\sharp$ . . . . .	44
1.4.2	Les coalgèbres instables . . . . .	45
<b>1.5</b>	<b>Loi de groupe formel</b> . . . . .	<b>46</b>
1.5.1	Définitions et exemples . . . . .	46
1.5.2	La catégorie des lois de groupe formel . . . . .	49
1.5.3	Une classification des lois de groupe formel commutatif . . . . .	51

---

## 1.1 La catégorie $\mathcal{F}$

Dans cette section, on rappelle la définition de la catégorie  $\mathcal{F}$  pour un nombre premier  $p$ , et quelques opérations dans  $\mathcal{F}$ . On définit aussi des objets importants de cette catégorie.

### 1.1.1 Définitions et exemples

Soit  $\mathbb{F}_p$  le corps à  $p$  éléments.

**Notation 1.1.1.** — On désigne par **Vect** la catégorie des  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels, par  $\mathcal{V}$  la sous-catégorie pleine de **Vect** dont les objets sont de dimension finie.

**Définition 1.1.2.** — La catégorie  $\mathcal{F}$  est la **catégorie des foncteurs** covariants de  $\mathcal{V}$  vers **Vect** dont les morphismes sont les transformations naturelles.

**Définition 1.1.3** ([Gab62]). — Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie abélienne quelconque. Soit  $I$  un ensemble ordonné filtrant, *i.e.*  $\forall(i, j) \in I^2, \exists k \in I$  tel que  $i \leq k$  et  $j \leq k$ . On désigne par  $\mathcal{C}_I$  la catégorie abélienne des systèmes inductifs dans  $\mathcal{C}$  indexés par  $I$ . Alors, on dit que  $\mathcal{C}$  est une **catégorie avec limites inductives filtrantes exactes** si le foncteur limite inductive de  $\mathcal{C}_I$  vers  $\mathcal{C}$  est exact pour tout ensemble ordonné filtrant  $I$ .

**Exemple 1.1.4.** — La catégorie **Vect** est une catégorie abélienne avec limites inductives filtrantes exactes et limites projectives, tandis que la catégorie abélienne  $\mathcal{V}$  ne possède pas toutes les limites (inductives ou projectives).

La proposition suivante est une conséquence directe des résultats de MacLane [ML71, Chapter V, §3] (cf. [Dja06, Corollaire 3.1.9]). On note que le résultat de Gabriel [Gab62, Chapter II, Proposition 1] est plus faible, il ne fonctionne que sur les catégories des foncteurs additifs.

**Proposition 1.1.5.** — *La catégorie  $\mathcal{F}$  est une catégorie abélienne avec limites inductives exactes et avec limites projectives.*

**Remarque 1.1.6.** — La structure de catégorie abélienne sur  $\mathcal{F}$  provient de celle de **Vect** : une suite de foncteurs  $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$  est exacte si et seulement si, pour tout  $V \in \mathcal{V}$ , la suite d'espaces vectoriels  $0 \rightarrow F(V) \rightarrow G(V) \rightarrow H(V) \rightarrow 0$  est exacte.

**Exemples 1.1.7.** — On donne ici quelques exemples classiques d'objets de  $\mathcal{F}$ .

1. On note  $\mathbb{F}_p$  le foncteur constant qui associe à tout  $V \in \mathcal{V}$  l'espace vectoriel  $\mathbb{F}_p$ , et à tout morphisme dans  $\mathcal{V}$  l'identité de  $\mathbb{F}_p$ .
2. On note  $\text{Id}$  le foncteur inclusion de  $\mathcal{V}$  dans **Vect**, qui envoie les objets et morphismes de  $\mathcal{V}$  sur eux-mêmes.

### 1.1. La catégorie $\mathcal{F}$

---

3. La  $n$ -ième puissance tensorielle  $T^n$  est le foncteur qui associe à tout  $V \in \mathcal{V}$  le produit tensoriel  $V^{\otimes n}$ , et à toute application linéaire  $\varphi: V \rightarrow W$  le morphisme

$$\begin{aligned} \varphi^n: \quad T^n(V) &\longrightarrow T^n(W), \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n &\longmapsto \varphi(v_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(v_n). \end{aligned}$$

On observe que le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  agit naturellement sur  $T^n$  par permutation des facteurs du produit tensoriel.

4. La  $n$ -ième puissance divisée  $\Gamma^n$  est le sous-foncteur des invariants de  $T^n$  sous l'action de  $\mathfrak{S}_n$ , *i.e.* il associe à chaque  $V$  l'espace des invariants  $\Gamma^n(V) = (V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ .
5. La  $n$ -ième puissance symétrique  $S^n$  est le foncteur quotient des coinvariants de  $T^n$  sous l'action de  $\mathfrak{S}_n$ . Il envoie l'espace vectoriel  $V$  sur l'espace des orbites  $(V^{\otimes n})_{\mathfrak{S}_n}$ . On note  $v_1 \cdots v_n$  l'image de  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in T^n(V)$  dans  $S^n(V)$ .
6. Soit  $k$  un entier naturel non nul quelconque, la  $n$ -ième puissance symétrique tronquée  $S_{p^k}^n$  est le foncteur qui associe à tout  $V \in \mathcal{V}$  le quotient de  $S^n(V)$  par la relation  $v^{p^k} = 0$  pour tout  $v \in V$ .
7. La  $n$ -ième puissance extérieure  $\Lambda^n$  est le foncteur qui envoie  $V \in \mathcal{V}$  sur le quotient de  $T^n(V)$  par la relation  $v \otimes v = 0$ , pour tout  $v \in V$ . On note  $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$  l'image de  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in T^n(V)$  dans  $\Lambda^n(V)$ .

On observe que la relation  $\{v \otimes v = 0 \text{ pour tout } v \in V\}$  implique la relation  $\{u \otimes v = -v \otimes u \text{ pour tous } u, v \in V\}$ . Alors, en caractéristique 2, le foncteur  $\Lambda^n$  est isomorphe au foncteur puissance symétrique tronquée  $S_2^n$ .

8. On note que  $T^0 = \Gamma^0 = S^0 = S_k^0 = \Lambda^0 = \mathbb{F}_2$  et  $T^1 = \Gamma^1 = S^1 = S_k^1 = \Lambda^1 = \text{Id}$ .

**Définition 1.1.8 (Opérations dans  $\mathcal{F}$ ).** — Soient  $F$  et  $G$  deux objets de  $\mathcal{F}$ .

1. Le **produit tensoriel**  $\otimes: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  est défini par  $(F \otimes G)(V) = F(V) \otimes G(V)$ . Il est commutatif et associatif. Par exemple,  $T^n = \text{Id}^{\otimes n}$ .
2. La **composée**  $F \circ G$  est encore un objet de  $\mathcal{F}$  en définissant  $(F \circ G)(V)$  par la limite inductive  $\text{colim}_{U \subset G(V), U \text{ fini}} F(U)$ . On observe que, si  $G$  est à valeurs dans  $\mathcal{V}$ , alors cette définition est compatible avec le sens usuel de la composition des foncteurs, *i.e.*  $(F \circ G)(V) = F(G(V))$ .
3. Le **dual**  $F^\natural$  de  $F$  est défini par  $F^\natural(V) = F(V^\natural)^\natural$  où  $\natural$  désigne le dual linéaire.

**Proposition 1.1.9.** — On a

1.  $(\mathcal{F}, \otimes, \mathbb{F}_p)$  est une catégorie symétrique monoïdale.
2. Le foncteur dualité  $\natural: \mathcal{F}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{F}$  qui envoie  $F$  sur son dual  $F^\natural$  est exact.

*Démonstration.* — L'exactitude du foncteur  $\natural$  découle de celle du dual linéaire  $\natural$ . Pour le premier point, voir [Dja06, Proposition 4.1.1].  $\square$

**Proposition 1.1.10.** — On a les isomorphismes naturels :



1.  $(F \otimes G) \circ H \cong (F \circ H) \otimes (G \circ H)$ ,
2.  $(F \otimes G)^\natural \cong F^\natural \otimes G^\natural$ ,
3.  $(F \circ G)^\natural \cong F^\natural \circ G^\natural$  si  $G$  est à valeurs dans  $\mathcal{V}$ ,
4.  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(F, G^\natural) \cong \text{Hom}_{\mathcal{F}}(G, F^\natural)$ . De plus, le foncteur  $F$  prend des valeurs dans  $\mathcal{V}$  si et seulement si l'unité de l'adjonction  $\eta_F: F \rightarrow (F^\natural)^\natural$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* — La première propriété provient de la commutativité entre le produit tensoriel et la limite inductive (cf. [Dja06, Corollaire 1.3.18]).

L'isomorphisme d'adjonction  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(F, G^\natural) \cong \text{Hom}_{\mathcal{F}}(G, F^\natural)$  est démontré par Kuhn [Kuh94a, §3.4].

Les autres propriétés se déduisent directement de la définition du foncteur dual.  $\square$

**Remarque 1.1.11.** — L'isomorphisme d'adjonction

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(F, G^\natural) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{F}}(G, F^\natural)$$

envoie un morphisme naturel  $\gamma: F \rightarrow G^\natural$  vers le morphisme  $\tilde{\gamma}: G \rightarrow F^\natural$  défini par

$$\tilde{\gamma}_V(x)(y) := \gamma_{V^\natural}(y)(x)$$

pour tout  $V \in \mathcal{V}$ ,  $x \in G(V)$  et  $y \in F(V^\natural)$ . Posons  $G = F$ . Un morphisme  $\gamma: F \rightarrow F^\natural$  est dit **invariant par l'isomorphisme d'adjonction** si  $\gamma = \tilde{\gamma}$ . Cette condition est équivalente à  $\gamma_V(x)(y) = \tilde{\gamma}_V(x)(y) = \gamma_{V^\natural}(y)(x)$  pour tout  $V \in \mathcal{V}$ ,  $x \in F(V)$  et  $y \in F(V^\natural)$ .

**Définition 1.1.12.** — Un foncteur  $F$  est appelé **auto-dual** s'il existe une équivalence naturelle  $\gamma_F: F \xrightarrow{\cong} F^\natural$  qui est invariante par l'isomorphisme d'adjonction de la quatrième assertion de la proposition 1.1.10 (en posant  $G = F$ ) :

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(F, F^\natural) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{F}}(F, F^\natural).$$

**Remarque 1.1.13.** — Un foncteur auto-dual  $F$  prend forcément des valeurs de dimension finie, le morphisme  $\eta_F$  est ainsi une équivalence naturelle (cf. la proposition 1.1.10). Alors, l'invariabilité par l'isomorphisme d'adjonction est équivalente au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\gamma_F} & F^\natural \\ & \searrow \eta_F & \nearrow \gamma_F^\natural \\ & & (F^\natural)^\natural \end{array} .$$

**Lemme 1.1.14.** — Si  $(F, \gamma_F)$  et  $(G, \gamma_G)$  sont auto-duaux, alors  $(F \otimes G, \gamma_F \otimes \gamma_G)$  est aussi auto-dual.

*Démonstration.* — Le résultat se déduit directement de la proposition 1.1.10.  $\square$

**Exemples 1.1.15.** — On a :

### 1.1. La catégorie $\mathcal{F}$

---

1.  $(S^n)^\natural \cong \Gamma^n$  et  $(\Gamma^n)^\natural \cong S^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Le foncteur  $\text{Id}$  est auto-dual, alors les puissances tensorielles  $T^n$  sont également auto-duales, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Les puissances extérieures  $\Lambda^n$  sont auto-duales. Ceci implique la même propriété pour les produits tensoriels  $\Lambda^{n_1} \otimes \cdots \otimes \Lambda^{n_k}$ .

**Définition 1.1.16.** — On introduit les **projectifs standard** et les **injectifs standard** de la catégorie  $\mathcal{F}$  :

1. Pour tout  $W \in \mathcal{V}$ , on désigne par  $P_W$  le foncteur qui envoie tout  $V \in \mathcal{V}$  sur l'espace vectoriel  $\mathbb{F}_p[\text{Hom}(W, V)]$  dont la base est l'ensemble fini  $\text{Hom}(W, V)$ , et envoie toute application linéaire  $\varphi: V \rightarrow V'$  sur l'extension linéaire de l'application  $\text{Hom}(W, \varphi)$ .
2. On définit le foncteur  $I_W$  par le dual de  $P_W$ . Autrement dit,

$$I_W(V) := P_W(V^\natural)^\natural \cong \text{Map}(\text{Hom}(W, V^\natural), \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p^{\text{Hom}(W, V^\natural)}.$$

De plus, on note  $P = P_{\mathbb{F}_p}$  et  $I = I_{\mathbb{F}_p}$ , et on observe que  $P(V) = \mathbb{F}_p[V]$  et  $I(V) = \mathbb{F}_p^{V^\natural}$ .

**Proposition 1.1.17.** — On a les isomorphismes naturels en  $W$  et en  $F$  :

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(P_W, F) \cong F(W),$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(F, I_W) \cong F^\natural(W).$$

Alors, le foncteur  $P_W$  est projectif et le foncteur  $I_W$  est injectif pour tout  $W \in \mathcal{V}$ . De plus, on a les isomorphismes naturels  $P_{W_1 \oplus W_2} \cong P_{W_1} \otimes P_{W_2}$  et  $I_{W_1 \oplus W_2} \cong I_{W_1} \otimes I_{W_2}$ .

*Démonstration.* — Soit  $F$  un objet quelconque de la catégorie  $\mathcal{F}$ . On peut le considérer comme un foncteur à valeurs dans la catégorie des ensembles **Ens**. On désigne par **Ens** $^{\mathcal{V}}$  la catégorie des foncteurs de  $\mathcal{V}$  dans **Ens**. Grâce au lemme de Yoneda, on a

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(P_W, F) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Ens}^{\mathcal{V}}}(\text{Hom}(W, -), F) = F(W).$$

On en déduit que  $P_W$  est projectif.

L'isomorphisme naturel  $P_{W_1 \oplus W_2} = P_{W_1} \otimes P_{W_2}$  se déduit des isomorphismes naturels  $\text{Hom}(W_1 \oplus W_2, V) \cong \text{Hom}(W_1, V) \times \text{Hom}(W_2, V)$  et  $\mathbb{F}_p[X \times Y] \cong \mathbb{F}_p[X] \otimes \mathbb{F}_p[Y]$  (pour  $X, Y$  des ensembles finis quelconques).

Par dualité, on obtient les résultats pour  $I_W$ . □

**Définition 1.1.18** ([[Gab62](#)]). — Un ensemble  $\mathcal{G}$  d'objets d'une catégorie abélienne est appelé un **ensemble de générateurs** (resp. **ensemble de cogénérateurs**) si pour toute flèche non triviale  $A \rightarrow B$ , il existe un objet  $G \in \mathcal{G}$  et une flèche  $G \rightarrow A$  (resp.  $B \rightarrow G$ ) telle que la composée  $G \rightarrow A \rightarrow B$  (resp.  $A \rightarrow B \rightarrow G$ ) est non-triviale.

**Proposition 1.1.19.** — Les projectifs standard  $P_W$  (resp. injectifs standard  $I_W$ ), où  $W$  parcourt un squelette de  $\mathcal{V}$ , forment un ensemble de générateurs (resp. cogénérateurs). En particulier, la catégorie  $\mathcal{F}$  a assez de projectifs et assez d'injectifs.

*Démonstration.* — Pour tout objet  $F \in \mathcal{F}$ , on peut construire :

- La surjection  $\bigoplus_{W \in \mathcal{V}} \bigoplus_{\varphi \in F(W)} P_W^\varphi \twoheadrightarrow F$ , où  $P_W^\varphi = P_W$  et le morphisme  $P_W^\varphi \rightarrow F$  correspond à  $\varphi \in F(W)$  par l'équivalence  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(P_W, F) \cong F(W)$ .
- L'inclusion  $F \hookrightarrow \prod_{W \in \mathcal{V}} \prod_{\varphi \in F^\natural(W)} I_W^\varphi$ , où  $I_W^\varphi = I_W$  et le morphisme  $F \rightarrow I_W^\varphi$  correspond à  $\varphi \in F^\natural(W)$  par l'équivalence  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(F, I_W) \cong F^\natural(W)$ .

La proposition s'ensuit. □

### 1.1.2 Foncteurs polynomiaux et foncteurs analytiques

Un des outils importants que nous utilisons pour étudier les objets de la catégorie  $\mathcal{F}$  est le foncteur différence  $\Delta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ , défini par :

**Définition 1.1.20.** — Le **foncteur différence**  $\Delta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  est défini par

$$(\Delta F)(V) := \text{Ker}(F(V \oplus \mathbb{F}_p) \longrightarrow F(V)),$$

où le morphisme  $F(V \oplus \mathbb{F}_p) \rightarrow F(V)$  est induit par la projection canonique  $V \oplus \mathbb{F}_p \rightarrow V$ .

**Remarque 1.1.21.** — Observons que, pour tout foncteur  $F \in \mathcal{F}$  et pour tout  $V \in \mathcal{V}$ , l'espace vectoriel  $F(V)$  est canoniquement un facteur direct de  $F(V \oplus \mathbb{F}_p)$ . Alors, l'inclusion canonique de  $V$  dans  $V \oplus \mathbb{F}_p$  induit un isomorphisme  $F(V \oplus \mathbb{F}_p) \cong F(V) \oplus (\Delta F)(V)$ . Cela signifie encore que

$$(\Delta F)(V) \cong \text{Coker}(F(V) \longrightarrow F(V \oplus \mathbb{F}_p)),$$

où le morphisme  $F(V) \rightarrow F(V \oplus \mathbb{F}_p)$  est induit par l'inclusion canonique  $V \hookrightarrow V \oplus \mathbb{F}_p$ .

**Proposition 1.1.22.** —  $F = 0$  si et seulement si  $\Delta F = 0$  et  $F(0) = 0$ .

*Démonstration.* — Si  $\Delta F = 0$ , on en déduit que  $F(V \oplus \mathbb{F}_p) = F(V)$  pour tout  $V \in \mathcal{V}$ . Il en résulte que  $F(V) = \dots = F(\mathbb{F}_p) = F(0) = 0$ . La réciproque est triviale. □

**Remarque 1.1.23.** — Soit  $A^*$  un *foncteur exponentiel* (cf. l'appendice A). Rappelons que nous disposons de l'isomorphisme naturel suivant :

$$A^n(V \oplus W) = \bigoplus_{i=0}^n A^i(V) \otimes A^{n-i}(W). \quad (1.1)$$

On utilise cet isomorphisme pour calculer le foncteur différence des foncteurs exponentiels. En effet, on a le résultat suivant :

## 1.1. La catégorie $\mathcal{F}$

---

**Proposition 1.1.24.** — Pour tout foncteur exponentiel  $A^*$ , on a

$$\Delta A^n = \bigoplus_{i=0}^{n-1} A^i \otimes A^{n-i}(\mathbb{F}_2).$$

*Démonstration.* — En posant  $W = \mathbb{F}_p$  dans l'isomorphisme (1.1), on obtient que

$$A^n(V \oplus \mathbb{F}_p) = \bigoplus_{i=0}^n A^i(V) \otimes A^{n-i}(\mathbb{F}_p).$$

On observe de plus que le morphisme  $A^n(V \oplus \mathbb{F}_p) \rightarrow A^n(V)$  qui est induit par la projection  $V \oplus \mathbb{F}_p \rightarrow V$  s'identifie à la projection  $\bigoplus_{i=0}^n A^i(V) \otimes A^{n-i}(\mathbb{F}_p) \rightarrow A^n(V) \otimes A^0(\mathbb{F}_p) \cong A^n(V)$ . La proposition s'ensuit.  $\square$

**Corollaire 1.1.25.** — On a :

1.  $\Delta S^n = \bigoplus_{i=0}^{n-1} S^i$ .
2.  $\Delta \Gamma^n = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \Gamma^i$ ,
3.  $\Delta \Lambda^n = \Lambda^{n-1}$ ,
4.  $\Delta S_{p^k}^n = \bigoplus_{i=\max\{0, n-p^k+1\}}^{n-1} S_{p^k}^i$ .

*Démonstration.* — On observe que

1.  $S^i(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p, \forall i \in \mathbb{N}$ .
2.  $\Gamma^i(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p, \forall i \in \mathbb{N}$ .
3.  $\Lambda^i(\mathbb{F}_p) = \begin{cases} \mathbb{F}_p & \text{si } 0 \leq i \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
4.  $S_{p^k}^i(\mathbb{F}_p) = \begin{cases} \mathbb{F}_p & \text{si } 0 \leq i < p^k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Le corollaire découle de la proposition 1.1.24 puisque les foncteurs  $S^*, \Gamma^*, \Lambda^*$  et  $S_{p^k}^*$  sont exponentiels (cf. l'appendice A et §3.1.1).  $\square$

**Proposition 1.1.26.** —  $\Delta I = I^{\oplus(p-1)}$ , où  $I = I_{\mathbb{F}_p}$  est l'injectif standard.

*Démonstration.* — On dispose de l'isomorphisme  $I(V \oplus W) = I(V) \otimes I(W)$ . De plus, on a  $I(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p^{\oplus p}$ . La proposition s'ensuit.  $\square$

**Proposition 1.1.27.** — Le foncteur différence satisfait les propriétés suivantes :

1.  $\Delta$  est exact.
2.  $\Delta$  commute au foncteur dualité, i.e.  $\Delta(F^\natural) = (\Delta F)^\natural$ .
3.  $\Delta(F \otimes G) = (\Delta F \otimes G) \oplus (F \otimes \Delta G) \oplus (\Delta F \otimes \Delta G)$ .

*Démonstration.* — La preuve de l'exactitude du foncteur différence est classique. En effet, toute suite exacte courte de foncteurs  $0 \rightarrow F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \rightarrow 0$  induit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & F(V \oplus \mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\alpha_1} & G(V \oplus \mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\beta_1} & H(V \oplus \mathbb{F}_p) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 & & \downarrow p_3 \\
 0 & \longrightarrow & F(V) & \xrightarrow{\alpha_2} & G(V) & \xrightarrow{\beta_2} & H(V) \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

où  $\alpha_1 = \alpha_{V \oplus \mathbb{F}_2}$ ,  $\beta_1 = \beta_{V \oplus \mathbb{F}_2}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_V$  et  $\beta_2 = \beta_V$ . On fait une chasse au diagramme ci-dessus pour montrer que la suite induite  $0 \rightarrow (\Delta F)(V) \rightarrow (\Delta G)(V) \rightarrow (\Delta H)(V) \rightarrow 0$  est exacte. Les détails sont faciles à vérifier.

La commutativité entre  $\Delta$  et  $\natural$  est déduite des définitions de ces foncteurs. On considère la suite exacte courte scindée

$$0 \rightarrow (\Delta F)(V^\sharp) \rightarrow F(V^\sharp \oplus \mathbb{F}_p) \rightarrow F(V^\sharp) \rightarrow 0.$$

Par dualité, on obtient la suite exacte courte scindée suivante

$$0 \rightarrow F(V^\sharp)^\sharp \rightarrow F(V^\sharp \oplus \mathbb{F}_p)^\sharp \rightarrow (\Delta F)^\natural(V) \rightarrow 0,$$

qui affirme que  $(\Delta F)^\natural = \Delta(F^\natural)$ .

Pour la dernière propriété, on considère l'identité suivante :

$$\begin{aligned}
 (F \otimes G)(- \oplus \mathbb{F}_p) &= (F \oplus \Delta F) \otimes (G \oplus \Delta G) \\
 &= (F \otimes G) \oplus (\Delta F \otimes G) \oplus (F \otimes \Delta G) \oplus (\Delta F \otimes \Delta G).
 \end{aligned}$$

On observe encore que le morphisme de  $(F \otimes G)(V \oplus \mathbb{F}_p)$  dans  $(F \otimes G)(V)$ , qui est induit par la projection canonique  $V \oplus \mathbb{F}_p \rightarrow V$ , s'identifie à la projection sur le facteur direct  $F \otimes G$  dans l'identité ci-dessus. Le résultat s'ensuit.  $\square$

**Exemple 1.1.28.** — Grâce à la proposition ci-dessus, on peut calculer le foncteur différence de la  $n$ -ième puissance tensorielle  $T^n$  par récurrence. On obtient que  $\Delta T^n = \bigoplus_{i=0}^{n-1} (T^i)^{\oplus \binom{n}{i}}$ .

**Définition 1.1.29.** — Un foncteur  $F \in \mathcal{F}$  est dit **polynomial** s'il existe un entier naturel  $n$  tel que  $\Delta^n F = 0$ . Le **degré** d'un foncteur polynomial non nul  $F$ , que l'on note  $\deg F$ , est le plus grand entier naturel  $n$  tel que  $\Delta^n F \neq 0$ ; on convient que  $\deg 0 = -\infty$ . On dit que  $F$  est **homogène** de degré  $n$  s'il est de degré  $n$  et ne contient pas de sous-foncteur non nul de degré inférieur ou égal à  $(n - 1)$ .

**Définition 1.1.30.** — Un foncteur  $F$  est dit **analytique** s'il est la limite inductive de ses sous-foncteurs polynomiaux. On désigne par  $\mathcal{F}_\omega$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}$  dont les objets sont les foncteurs analytiques.

## 1.1. La catégorie $\mathcal{F}$

**Exemple 1.1.31.** — D’après corollaire 1.1.25 et l’exemple 1.1.28, les foncteurs  $T^n$ ,  $S^n$ ,  $\Gamma^n$ ,  $S_{p^k}^n$  et  $\Lambda^n$  sont polynomiaux de degré  $n$ .

**Définition 1.1.32.** — Soit  $F$  un foncteur quelconque dans  $\mathcal{F}$ . Le  $n$ -ième **foncteur de Taylor** de  $F$ , que l’on note  $t_n(F)$ , est défini par son plus grand sous-foncteur polynomial de degré inférieur ou égal à  $n$ . Les foncteurs de Taylor de  $F$  fournissent une filtration naturelle de  $F$ , appelée **filtration polynomiale** :

$$0 \subset t_0(F) \subset t_1(F) \subset \cdots \subset t_{n-1}(F) \subset t_n(F) \subset \cdots \subset F.$$

Cette filtration est convergente si et seulement si  $F$  est analytique.

**Proposition 1.1.33** (Cf. [HLS93] et [Tro02, §1.6.]) — *L’injectif standard  $I$  est analytique. Les foncteurs de Taylor de  $I$  sont déterminés par*

$$t_n(I) = \bigoplus_{i=0}^n S^i / (x^p = x).$$

Leurs quotients successifs sont  $t_n(I)/t_{n-1}(I) = S_p^n$ .

**Proposition 1.1.34** ([Pir95, Proposition 1.3.5]). —  $\Delta(t_n(I)) = \bigoplus_{i=1}^{p-1} t_{n-i}(I)$ .

**Corollaire 1.1.35.** — *Lorsque  $p = 2$ , on a :*

1.  $\Delta I = I$ ,
2.  $\Delta(t_n(I)) = t_{n-1}(I)$ ,
3.  $t_n(I)/t_{n-1}(I) = \Lambda^n$ ,
4. *La suite exacte courte  $0 \longrightarrow \Lambda^n \longrightarrow t_{n+1}(I)/t_{n-1}(I) \longrightarrow \Lambda^{n+1} \longrightarrow 0$  n’est pas scindée pour tout  $n \geq 1$ .*

*Démonstration.* — Il reste à démontrer le dernier résultat. En appliquant le foncteur  $\Delta$  aux suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow t_{n-1}(I) \longrightarrow t_{n+1}(I) \longrightarrow t_{n+1}(I)/t_{n-1}(I) \longrightarrow 0,$$

on obtient que  $\Delta(t_{n+1}(I)/t_{n-1}(I)) = t_n(I)/t_{n-2}(I)$ . On en déduit qu’il suffit de montrer le résultat pour  $n = 1$ ; en effet, si la suite exacte dans l’énoncé est scindée, on lui applique  $(n-1)$  fois le foncteur  $\Delta$  pour obtenir que la suite exacte pour le cas  $n = 1$  est aussi scindée.

Pour conclure la preuve, on note que  $t_0(I) = \mathbb{F}_2$  et  $t_2(I) = \mathbb{F}_2 \oplus S^2$ , il faut donc démontrer que la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \Lambda^1 \longrightarrow S^2 \longrightarrow \Lambda^2 \longrightarrow 0$$

n’est pas scindée. Ceci découle du fait que  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S^2, \Lambda^1) = 0$  (cf. [FFSS99]). □

### 1.1.3 Foncteurs simples et séries de composition

On rappelle d'abord les définitions d'objets simples, semi-simples et d'objets finis dans une catégorie abélienne quelconque.

**Définition 1.1.36.** — Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie abélienne. Un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  est dit :

- **simple** s'il est non nul et sans autres sous-objets que 0 et lui-même,
- **semi-simple** s'il est somme directe de sous-objets simples.

**Définition 1.1.37.** — Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie abélienne et  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Une **série de composition** de  $X$  est une filtration croissante dans  $\mathcal{C}$  :

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset X$$

telle que les quotients  $F_i/F_{i-1}$  sont simples pour tout  $i \geq 1$ . Ces quotients simples sont dit les **facteurs de composition** de  $X$ .

**Définition 1.1.38.** — Un objet  $X$  d'une catégorie abélienne  $\mathcal{C}$  est dit :

- **fini** s'il a une série de composition finie.
- **unisériel** s'il a une unique série de composition.

**Exemple 1.1.39.** — Considérons la catégorie  $\mathcal{F}$  pour le premier  $p = 2$ . Soit  $J$  le foncteur qui associe à chaque  $V \in \mathcal{V}$  l'idéal d'augmentation de l'algèbre du groupe  $\mathbb{F}_2[V] = \{ \sum_{u \in V} \varepsilon_u [u] \mid \varepsilon_u \in \mathbb{F}_2 \}$ . Le foncteur  $J$  est un objet de  $\mathcal{F}$ . Il n'a pas de série de composition, mais le foncteur  $J^\natural$  est unisériel grâce à la proposition suivante :

**Proposition 1.1.40.** — *Le foncteur  $J$  admet une unique filtration convergente décroissante  $J = J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset J_k \supset J_{k+1} \supset \dots$  telle que  $J_k/J_{k+1} \cong \Lambda^k$ . Le foncteur  $J^\natural$  est unisériel.*

*Démonstration.* — Voir le corollaire 1.1.35 et [Kuh00, §6] pour une discussion détaillée du résultat pour  $J^\natural$  comme  $\mathbb{I}_{\mathbb{F}_2} = J^\natural \oplus \mathbb{F}_2$ . Dans le cas dual, soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie quelconque, le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $J(V)$  est librement engendré par les éléments de la forme  $(u) := [u] - [0]$  pour tout  $u \in V$ . Le sous- $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $J_k(V)$  de  $J(V)$  est engendré par les éléments de la forme

$$\sum_{j=1}^k \left( \sum_{1 \leq i_m < i_n \leq k \text{ si } 1 \leq m < n \leq j} (u_{i_1} + \dots + u_{i_j}) \right)$$

pour  $u_1, \dots, u_k$  quelconques dans  $V$ . □

On a le résultat suivant qui identifie les foncteurs polynomiaux aux objets finis dans la catégorie  $\mathcal{F}$  (cf. [HLS93], [Kuh94a] et [Sch03]).

**Proposition 1.1.41.** — *Soit  $F \in \mathcal{F}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le foncteur  $F$  est fini.*

## 1.1. La catégorie $\mathcal{F}$

---

2. Le foncteur  $F$  est à valeurs dans  $\mathcal{V}$ , et  $F$  est polynomial.
3.  $n \mapsto \dim F(\mathbb{F}_p^n)$  est une fonction polynomiale.

**Exemple 1.1.42.** — Les foncteurs  $\Lambda^n$  sont simples pour tout  $n \geq 0$ . En effet, on va le démontrer par récurrence sur  $n$ . On suppose que  $\Lambda^n$  est simple.

Soit  $F$  un sous-objet quelconque de  $\Lambda^{n+1}$ . Alors, puisque  $\Delta F$  est un sous-objet de  $\Lambda^n$ , il est soit 0 soit  $\Lambda^n$ .

- Si  $\Delta F = 0$ , d'après la proposition 1.1.22,  $F = 0$ .
- Si  $\Delta F = \Lambda^n$ , l'exactitude de  $\Delta$  dit que  $\Delta(\Lambda^{n+1}/F) = \Lambda^n/\Delta F = 0$ . On obtient ainsi que  $\Lambda^{n+1}/F = 0$ , i.e.  $F = \Lambda^{n+1}$ .

Le foncteur  $\Lambda^{n+1}$  est donc simple.

**Exemple 1.1.43.** — Pour le cas  $p = 2$ , les extensions non triviales  $t_{n+1}(\mathbb{I})/t_{n-1}(\mathbb{I})$  de  $\Lambda^{n+1}$  par  $\Lambda^n$  sont finies (cf. le corollaire 1.1.35).

**Exemple 1.1.44.** — Tout objet simple  $S$  de  $\mathcal{F}$  est un foncteur polynomial homogène. En effet, il existe un espace vectoriel  $V$  tel que  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S, I_V) = S^\sharp(V) \neq 0$ . On en déduit que  $S$  est analytique puisqu'il est inclus dans  $I_V$ . Le foncteur  $S$  est alors polynomial homogène de degré  $n$  qui est le plus petit entier tel que  $t_n(S) \neq 0$ .

### Construction des objets simples de $\mathcal{F}$

Rappelons d'abord que  $\Lambda^*$  est un foncteur exponentiel de Hopf, muni des produits et coproduits naturels (voir la section A.2). Considérons le foncteur  $\Lambda^a \otimes \Lambda^b$ . On définit le morphisme  $\psi_{a,b,k}$  ( $1 \leq k \leq b$ ) par la composée

$$\Lambda^a \otimes \Lambda^b \longrightarrow \Lambda^a \otimes \Lambda^k \otimes \Lambda^{b-k} \longrightarrow \Lambda^{a+k} \otimes \Lambda^{b-k}$$

qui est induit par le coproduit  $\Lambda^b \rightarrow \Lambda^k \otimes \Lambda^{b-k}$  et le produit  $\Lambda^a \otimes \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{a+k}$  sur  $\Lambda^*$ .

**Définition 1.1.45.** — Soit  $n$  un entier naturel.

- Une **partition**  $\lambda$  de  $n$  est une suite finie décroissante d'entiers naturels  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  telle que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots = n$ . Elle est dite de **longueur**  $r$  si  $r$  est le plus grand nombre tel que  $\lambda_r \neq 0$ . On convient que  $\lambda_k = 0$  si  $k$  est supérieur à la longueur de  $\lambda$ , et que toutes les partitions de 0 sont de longueur 0.
- Une partition  $\lambda$  est dite  **$p$ -régulière** si elle ne contient pas  $p$  termes égaux successifs.
- Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions de  $n$ . On notera  $\lambda \leq \mu$  si pour tout  $k \geq 1$ , on a :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \sum_{i=1}^k \mu_i.$$



Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  une partition quelconque. On désigne par  $\Lambda^\lambda$  ou  $\Lambda^{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}$  le produit tensoriel  $\Lambda^{\lambda_1} \otimes \dots \otimes \Lambda^{\lambda_r}$ . On désigne encore par  $\Lambda^{\bar{\lambda}}$  la somme directe suivante :

$$\bigoplus_{\substack{1 \leq k \leq \lambda_{i+1} \\ 1 \leq i \leq r-1}} \Lambda^{(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i+k, \lambda_{i+1}-k, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_r)}.$$

Les morphismes  $\psi_{a,b,k}$  ci-dessus nous permettent de définir le morphisme

$$\psi_\lambda = \bigoplus_{\substack{1 \leq k \leq \lambda_{i+1} \\ 1 \leq i \leq r-1}} \text{id} \otimes \psi_{\lambda_i, \lambda_{i+1}, k} \otimes \text{id} : \Lambda^\lambda \longrightarrow \Lambda^{\bar{\lambda}}.$$

**Définition 1.1.46.** — Le **foncteur de Weyl** associé à la partition  $\lambda$ , que l'on note  $W_\lambda$ , est défini par  $W_\lambda = \text{Ker } \psi_\lambda \subset \Lambda^\lambda$ . On définit ensuite le foncteur  $S_\lambda$  par l'image de la composée  $W_\lambda \hookrightarrow \Lambda^\lambda \cong (\Lambda^\lambda)^\natural \twoheadrightarrow (W_\lambda)^\natural$ , où la surjection est duale à l'inclusion canonique.

**Théorème 1.1.47** (Cf. [Kuh94b], [Pir95] et [PS98]). — *Pour toute partition  $p$ -régulière  $\lambda$  d'un entier naturel quelconque  $n$ , on a :*

- $S_\lambda$  est équivalent à  $W_\lambda / (W_\lambda \cap \text{Im } \psi_\lambda^\natural)$ , où  $\psi_\lambda^\natural : \Lambda^{\bar{\lambda}} \rightarrow \Lambda^\lambda$  est le morphisme dual de  $\psi_\lambda$  ;
- $S_\lambda$  est simple, auto-dual et polynomial homogène de degré  $n$  ;
- $S_\lambda$  est l'unique facteur de composition supérieur du foncteur de Weyl  $W_\lambda$ .

Ces foncteurs forment un système de représentants des objets simples de la catégorie  $\mathcal{F}$ , i.e. pour tout foncteur simple  $S$ , il existe une unique partition  $p$ -régulière  $\lambda$  telle que  $S \cong S_\lambda$ .

### Les facteurs de composition du foncteur fini $\Lambda^m \otimes \Lambda^n$

Le théorème ci-dessus fournit tous les objets simples de la catégorie  $\mathcal{F}$  pour un nombre premier  $p$  quelconque. Dans ce paragraphe, **on ne considère que le premier  $p = 2$** . On va déterminer les sous-quotients simples du foncteur  $\Lambda^m \otimes \Lambda^n$  où  $m \geq n$ . Tous les résultats ci-dessous sont établis dans [Pir97].

En utilisant les morphismes  $\psi_{a,b,k}$  du paragraphe précédent, on définit les sous-objets  $W_{(m,n)}^{(i)}$  (avec  $0 \leq i \leq n$ ) du foncteur  $\Lambda^m \otimes \Lambda^n$  :

$$W_{(m,n)}^{(i)} := \text{Ker} \left( \bigoplus_{0 \leq k < i} \psi_{m,n,n-k} : \Lambda^m \otimes \Lambda^n \rightarrow \bigoplus_{0 \leq k < i} \Lambda^{m+n-k} \otimes \Lambda^k \right).$$

**Proposition et définition 1.1.48.** — Le foncteur  $\Lambda^m \otimes \Lambda^n$  admet une filtration, que l'on appelle **filtration de Weyl** :

$$0 = W_{(m,n)}^{(n+1)} \subset W_{(m,n)}^{(n)} \subset W_{(m,n)}^{(n-1)} \subset \dots \subset W_{(m,n)}^{(1)} \subset W_{(m,n)}^{(0)} = \Lambda^m \otimes \Lambda^n,$$

dont le sous-quotient  $W_{(m,n)}^{(i)} / W_{(m,n)}^{(i+1)}$  est le foncteur de Weyl  $W_{(m+n-i,i)}$  pour tout  $0 \leq i \leq n$ .

## 1.1. La catégorie $\mathcal{F}$

---

**Remarque 1.1.49.** — On déduit directement de la définition du foncteur de Weyl que  $W_{(m,0)} = \Lambda^m$ . Ceci implique encore que le foncteur  $S_{(m,0)}$  s'identifie à  $\Lambda^m$ .

**Remarque 1.1.50.** — Le foncteur  $S_{(m,m)}$  est isomorphe à la puissance extérieure  $\Lambda^m$ . On note ici que la partition  $(m, m)$  n'est pas 2-régulière.

**Théorème 1.1.51.** — *Les facteurs de composition du foncteur  $\Lambda^m \otimes \Lambda^n$  (resp.  $W_{(m,n)}$ ) sont les foncteurs simples  $S_{(m+i,n-i)}$  pour  $0 \leq i \leq n$ . En particulier, la multiplicité du facteur  $S_{(m,n)}$  est 1.*

*Démonstration.* — On fait une récurrence sur  $n$  pour les deux foncteurs susmentionnés. Dans le cas  $n = 0$ , nous avons  $\Lambda^m \otimes \Lambda^0 = W_{(m,0)} = \Lambda^m$  pour tout  $m$ . Supposons que le théorème soit vrai pour  $n < k$ . On va montrer qu'il est vrai pour  $n = k$ .

En effet, la filtration de Weyl de  $\Lambda^m \otimes \Lambda^k$  montre que les facteurs de composition de  $\Lambda^m \otimes \Lambda^k$  sont ceux des sous-quotients  $W_{(m,k)}, W_{(m+1,k-1)}, \dots, W_{(m+k-1,1)}, W_{(m+k,0)}$ . Par hypothèse de récurrence, il suffit de travailler sur le sous-objet  $W_{(m,k)}$  de  $\Lambda^m \otimes \Lambda^k$ .

On considère la surjection  $W_{(m,k)} \rightarrow S_{(m,k)}$  qui est définie par la composée

$$W_{(m,k)} \xrightarrow{i} \Lambda^m \otimes \Lambda^k \xrightarrow{\simeq} (\Lambda^m \otimes \Lambda^k)^\natural \xrightarrow{i^\natural} (W_{(m,k)})^\natural.$$

On observe que le noyau de cette surjection est inclus dans le noyau de  $i^\natural$  par l'inclusion  $i$ . De plus, d'après la définition de  $W_{(m,k)}$ ,  $\text{Ker } i^\natural \cong \text{Coker } i$  est inclus dans  $\bigoplus_{i < k} \Lambda^{m+k-i} \otimes \Lambda^i$ . Donc, par hypothèse de récurrence, le théorème est démontré.  $\square$

### Diagrammes de Loewy

Soit  $X$  un objet fini quelconque d'une catégorie abélienne  $\mathcal{C}$ . En général,  $X$  admet beaucoup de suites de composition, mais l'ensemble fini des facteurs de composition de  $X$  est unique, à isomorphisme près. On utilise un graphe orienté pour représenter la relation entre ces facteurs de composition.

**Définition 1.1.52.** — Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie abélienne et  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$ .

- Le **socle** de  $X$ , que l'on note  $\text{soc } X$ , est le plus grand sous-objet semi-simple de  $X$ .
- Le **cosocle** de  $X$  est le plus grand objet quotient semi-simple. On le note  $\text{cosoc } X$ .

On définit  $\text{soc}_0 X = 0$  et  $\text{soc}_n X = p_{n-1}^{-1}(\text{soc}(X/\text{soc}_{n-1} X))$  où  $p_{n-1}: X \rightarrow X/\text{soc}_{n-1} X$  est la projection canonique. On obtient une filtration de  $X$

$$0 = \text{soc}_0 X \subset \text{soc}_1 X \subset \text{soc}_2 X \subset \dots \subset \text{soc}_{n-1} X \subset \text{soc}_n X \subset \dots \subset X.$$

où  $\text{soc}_n X/\text{soc}_{n-1} X = \text{soc}(X/\text{soc}_{n-1} X)$ . Elle est appelée la **filtration des socles** de  $X$ . On observe que la filtration des socles est fonctorielle en  $X$  et que la longueur de cette filtration est finie si  $X$  est un objet fini. Les facteurs directs des quotients  $\text{soc}_n X/\text{soc}_{n-1} X$  forment l'ensemble des facteurs de composition de  $X$ .

**Définition 1.1.53.** — Le **diagramme de Loewy** associé à un objet fini  $X$  est le graphe orienté donné par le suivant :

- Les sommets sont les facteurs de composition de  $X$  (avec multiplicité) qui sont arrangés par la filtration des socles. Cela signifie que, pour tout  $n$ , on écrit les facteurs directs de  $\text{soc}_n X / \text{soc}_{n-1} X$  en  $n$ -ième ligne.
- Soient  $S$  et  $S'$  deux facteurs de composition en  $n$ -ième ligne et en  $(n + 1)$ -ième ligne respectivement. On décrit une flèche de  $S$  vers  $S'$  s'il existe un sous-quotient  $Q$  de  $\text{soc}_{n+1} X / \text{soc}_{n-1} X$  tel que  $\text{soc } Q = S$  et  $Q/S \cong S'$ .

On convient de numéroter les lignes de bas en haut dans l'ordre croissant. On utilise donc des segments au lieu de flèches puisqu'il n'y a aucun risque de confusion de directions.

**Remarque 1.1.54.** —  $X$  est dit **indécomposable** s'il n'est pas isomorphe à une somme directe de deux sous-objets non nuls. Le diagramme de Loewy associé à  $X$  est un graphe connexe si et seulement si  $X$  est indécomposable.

Les exemples suivants sont considérés dans la catégorie  $\mathcal{F}$  pour le premier  $p = 2$ . De plus, on convient que les foncteurs  $S_\lambda$  seront représentés par  $\lambda$ . Par exemple, la somme directe  $S_{(2k+1)} \oplus S_{(2k,1)}$  sera souvent représentée sous la forme  $(2k + 1) \oplus (2k, 1)$ .

**Exemple 1.1.55.** — On considère la filtration polynomiale de l'injectif standard  $\mathbf{I}$ . Le quotient  $t_{n+1}(\mathbf{I})/t_{n-1}(\mathbf{I})$  est représenté par le diagramme de Loewy

$$\begin{array}{c} (n + 1) \\ | \\ (n) \end{array} .$$

**Exemple 1.1.56.** — Le diagramme de Loewy associé au foncteur  $\Lambda^{2k} \otimes \Lambda^1$  est

$$(2k + 1) \oplus (2k, 1) ;$$

tandis que le foncteur  $\Lambda^{2k-1} \otimes \Lambda^1$  est unisériel, son diagramme de Loewy étant

$$\begin{array}{c} (2k) \\ | \\ (2k - 1, 1) \\ | \\ (2k) \end{array} .$$

**Exemple 1.1.57 (Cf. le lemme 3.4.21).** — Si  $h = 1$ ,  $\Lambda^2 \otimes \Lambda^1 \cong \Lambda^3 \oplus S_{(2,1)}$ . Si  $h \geq 2$ , les facteurs de composition du foncteur  $\Lambda^{2h-1} \otimes \Lambda^2$  sont  $\Lambda^{2h+1}$ ,  $S_{(2^h,1)}$  et  $S_{(2^h-1,2)}$ . De plus,

## 1.2. La catégorie des modules instables $\mathcal{U}$

---

l'apparition de ces facteurs dans  $\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2$  est donnée par le diagramme de Loewy

$$\begin{array}{ccc} & (2^h + 1) & \\ & | & \\ & (2^h - 1, 2) & \\ & | & \\ (2^h + 1) & \oplus & (2^h, 1). \end{array}$$

Cela signifie que  $\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2 \cong S_{(2^h,1)} \oplus F$  où  $F$  est unisériel, il admet la filtration des socles

$$0 = \text{soc}_0 F \subset \text{soc}_1 F \subset \text{soc}_2 F \subset \text{soc}_3 F = F$$

avec  $\text{soc}_1 F = \text{soc } F = \Lambda^{2^h+1}$ ,  $\text{soc}_2 F / \text{soc}_1 F = S_{(2^h-1,2)}$  et  $\text{soc}_3 F / \text{soc}_2 F = \Lambda^{2^h+1}$ . En particulier,  $\text{soc}_2 F$  est le foncteur de Weyl  $W_{(2^h-1,2)}$ .

## 1.2 La catégorie des modules instables $\mathcal{U}$

Cette partie donne des rappels sur la catégorie  $\mathcal{U}$  des **modules instables à gauche** et les liens avec la catégorie  $\mathcal{F}$  des foncteurs. On traitera ici du cas  $p = 2$  et on renvoie à [HLS93] et [Sch94] pour le cas général et pour les démonstrations.

### 1.2.1 Définitions et exemples

L'**algèbre de Steenrod**  $\mathcal{A}_2$  est le quotient de la  $\mathbb{F}_2$ -algèbre  $\mathbb{N}$ -graduée engendrée sur  $\mathbb{F}_2$  par les symboles  $\{Sq^i : |Sq^i| = i, i \in \mathbb{N}\}$  par les relations d'Adem

$$Sq^i Sq^j = \sum_{k=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \binom{j-k-1}{i-2k} Sq^{i+j-k} Sq^k,$$

et

$$Sq^0 = 1,$$

où  $\lfloor i/2 \rfloor$  est la partie entière de  $i/2$ , et les coefficients binomiaux sont interprétés modulo 2.

**Définition 1.2.1.** — Un  $\mathcal{A}_2$ -module  $M$  est dit **instable** si  $Sq^i x = 0$  pour tout  $x \in M$  et  $|x| < i$ .

**Exemple 1.2.2.** — La cohomologie singulière (modulo 2)  $H^*X$  est un  $\mathcal{A}_2$ -module instable, pour  $X$  un espace topologique quelconque. En particulier, l'action de  $\mathcal{A}_2$  sur la cohomologie de l'espace projectif réel  $H^*(\mathbb{R}P^\infty) = H^*(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{F}_2[\tau]$  (où  $|\tau| = 1$ ) est déterminée par  $Sq^i \tau^n = \binom{n}{i} \tau^{n+i}$ .

**Exemple 1.2.3.** — Le sous- $\mathcal{A}_2$ -module de  $H^*(\mathbb{R}P^\infty)$  engendré par l'élément  $\tau$  de degré 1 est un module instable. On le désigne par  $F(1)$ . En tant que  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel gradué,  $F(1)$  admet une base  $\{\tau, \tau^2, \dots, \tau^{2^k}, \dots\}$ .

**Définition 1.2.4.** — L'algèbre de Steenrod  $\mathcal{A}_2$  est une algèbre de Hopf dont le coproduit est déterminé par le formule  $Sq^i \mapsto \sum_j Sq^j \otimes Sq^{i-j}$ . On peut donc définir sur le produit tensoriel  $M \otimes N$  de deux modules instables  $M$  et  $N$  une structure de  $\mathcal{A}_2$ -module qui est instable. Elle est déterminée par la formule de Cartan

$$Sq^i(x \otimes y) = \sum_{j=0}^i Sq^j x \otimes Sq^{i-j} y.$$

**Exemple 1.2.5.** — Pour  $n \geq 1$ , le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  agit sur le module instable  $F(1)^{\otimes n}$  par permutation des coordonnées. On obtient alors le module instable

$$F(n) := \Gamma^n(F(1)) = (F(1)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}.$$

Il est engendré par son unique élément non nul de degré  $n$ .

**Définition 1.2.6.** — La catégorie  $\mathcal{U}$  est la **catégorie des modules instables** sur l'algèbre de Steenrod  $\mathcal{A}_2$ , les morphismes sont les applications  $\mathcal{A}_2$ -linéaires de degré 0.

**Définition 1.2.7.** — Soit  $\mathcal{V}^*$  la catégorie des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels gradués, les morphismes sont les applications linéaires de degré zéro. Considérons le foncteur  $\Phi: \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}^*$  défini par :

$$(\Phi M)^i = \begin{cases} M^{i/2} & \text{si } 2 \mid i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il induit alors un foncteur  $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  en définissant l'action de l'algèbre  $\mathcal{A}_2$  sur  $\Phi M$  par

$$Sq^i(\Phi x) = \begin{cases} Sq^{i/2} x & \text{si } 2 \mid i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exemple 1.2.8.** — La cohomologie de l'espace projectif complexe  $H^*(\mathbb{C}P^\infty)$  est isomorphe à  $\Phi H^*(\mathbb{R}P^\infty)$ . Le module  $\Phi F(1)$ , librement engendré par  $\left\{ \tau, \tau^2, \dots, \tau^{2^k}, \dots \mid |\tau| = 2 \right\}$  en tant que  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel gradué, est un sous-module instable de  $H^*(\mathbb{C}P^\infty)$ .

**Définition 1.2.9.** — Un module instable  $M$  est dit **nilpotent** si pour tout  $x \in M$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $Sq_0^k x = 0$  où  $Sq_0 x := Sq^{|x|} x$ . On définit par  $\mathcal{N}il$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{U}$  dont les objets sont les modules nilpotents.

**Exemple 1.2.10.** — Le *décalage de degré*  $\Sigma F(1)$  défini par

$$(\Sigma F(1))^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0, \\ F(1)^{i-1} & \text{si } i \geq 1, \end{cases}$$

est un module nilpotent.

## 1.2. La catégorie des modules instables $\mathcal{U}$

---

**Exemple 1.2.11** ([Sch03, Lemme 11.12]). — Le quotient de  $F(1)^{\otimes n}$  par le sous-module instable engendré par la classe  $\tau \otimes \tau^2 \otimes \dots \otimes \tau^{2^{n-1}}$  est nilpotent.

**Définition 1.2.12.** — Un module instable  $M$  est dit **réduit** si le groupe  $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(N, M)$  est trivial pour tout  $N \in \mathcal{N}il$ . Il est dit  **$\mathcal{N}il$ -fermé** si les groupes  $\text{Ext}_{\mathcal{U}}^i(N, M)$ ,  $i = 0, 1$ , sont triviaux pour tout  $N \in \mathcal{N}il$ .

### 1.2.2 La relation avec la catégorie $\mathcal{F}$

Rappelons que  $\mathcal{F}$  est la catégorie dont les objets sont les foncteurs de la catégorie des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels de dimension finie dans la catégorie des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels et dont les morphismes sont les transformations naturelles. On considère le foncteur  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$  qui associe à  $M \in \mathcal{U}$  le foncteur  $f(M): V \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, H^*V)'$ . Ici,  $H^*V$  est la cohomologie singulière modulo 2 du 2-groupe abélien élémentaire  $V$ , et  $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, H^*V)'$  désigne le dual topologique de  $\text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, H^*V)$  muni de sa structure de  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel profini

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, H^*V) \cong \varinjlim_i \text{Hom}_{\mathcal{U}}(M_i, H^*V),$$

où on prend la limite sur les sous-modules instables de  $M$  ayant un nombre fini de générateurs en tant que module instable (cf. [Sch03, 11.3]). On a :

**Théorème 1.2.13** ([HLS93]). — *Le foncteur  $f$  est exact. Il préserve les limites inductives et le produit tensoriel.*

**Définition 1.2.14.** — Soient  $M, N$  deux modules instables et soit  $\varphi$  un morphisme de  $M$  dans  $N$ . Le morphisme  $\varphi$  est appelé un  **$\mathcal{N}il$ -isomorphisme** si son noyau et son conoyau sont des modules nilpotents.

On a le théorème suivant :

**Théorème 1.2.15** ([LS89]). — *Le morphisme  $\varphi: M \rightarrow N$  de  $\mathcal{U}$  est un  $\mathcal{N}il$ -isomorphisme si et seulement si  $f(\varphi): f(M) \rightarrow f(N)$  est un isomorphisme dans  $\mathcal{F}$ .*

Soit  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  la localisation de la catégorie  $\mathcal{U}$  par rapport à la classe des  $\mathcal{N}il$ -isomorphismes, ce qui est équivalent à prendre le quotient par la sous-catégorie localisante  $\mathcal{N}il$  (cf. [Gab62]). Grâce au théorème ci-dessus, le foncteur  $f$  induit un foncteur de la catégorie  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  vers la catégorie  $\mathcal{F}$ .

**Proposition 1.2.16.** — *Si  $M \in \mathcal{U}$  est un  $\mathcal{A}_2$ -module finiment engendré, le foncteur  $f(M)$  est polynomial. Donc,  $f(M)$  est analytique pour tout  $M \in \mathcal{U}$ .*

Soit  $\mathcal{F}_{\omega}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}$  dont les objets sont les foncteurs analytiques. Le foncteur  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$  se factorise en :

$$\mathcal{U} \xrightarrow{r} \mathcal{U}/\mathcal{N}il \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{F}_{\omega} \xrightarrow{i} \mathcal{F},$$

où  $r$  est la localisation, et  $i$  est le foncteur d'oubli. Le foncteur  $f$  a un adjoint à droite  $m$  qui est caractérisé par

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(f(M), F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, m(F)). \quad (1.2)$$

Le foncteur  $m$  est donné par la formule  $m(F) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, F) = \bigoplus_n \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^n, F)$ . L'action de l'algèbre de Steenrod provient de celle des opérateurs dans  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, \Gamma^*)$  (voir à ce propos [Kuh94a] ou [Sch03]). On note  $\tilde{m}$  le foncteur composé  $r \circ m \circ i: \mathcal{F}_\omega \rightarrow \mathcal{U}/\mathcal{N}il$ .

**Théorème 1.2.17** (Cf. [HLS93] et [Kuh94a]). — *Les foncteurs  $\tilde{f}$  et  $\tilde{m}$  induisent une équivalence de catégories entre  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  et  $\mathcal{F}_\omega$  :*

1. Si  $F \in \mathcal{F}_\omega$ , on a l'isomorphisme  $(f \circ m)(F) \cong F$  dans  $\mathcal{F}$ .
2. Pour tout  $M \in \mathcal{U}$ , le morphisme naturel  $M \rightarrow (m \circ f)(M)$  est un isomorphisme dans la catégorie  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ .

**Remarque 1.2.18.** — Le module instable  $(m \circ f)(M)$  est  $\mathcal{N}il$ -fermé pour tout  $M \in \mathcal{U}$ . On appelle  $(m \circ f)(M)$  la  $\mathcal{N}il$ -fermeture de  $M$  (voir [Gab62, Chap. III, §2, Lemme 2] et [LZ86, Proposition et Définition 6.2.1] où la terminologie est un peu différente).

On a le résultat suivant :

**Lemme 1.2.19** ([LZ86]). — *Soit  $\varphi: M \rightarrow N$  un morphisme de modules instables. Si  $M$  est  $\mathcal{N}il$ -fermé et  $N$  est réduit, alors  $\varphi$  est un isomorphisme dans  $\mathcal{U}$  si et seulement s'il est un isomorphisme dans  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ .*

*Démonstration.* — On observe que  $\mathrm{Ker} \varphi$  est trivial puisque  $M$  est réduit. On a alors la suite exacte courte dans  $\mathcal{U}$

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow \mathrm{Coker} \varphi \longrightarrow 0$$

où  $\mathrm{Coker} \varphi \in \mathcal{N}il$ . Elle se scinde puisque  $M$  est  $\mathcal{N}il$ -fermé. On en déduit que  $\mathrm{Coker} \varphi$  est trivial car  $N$  est réduit. Le lemme s'en suit.  $\square$

**Corollaire 1.2.20.** — *Le morphisme naturel  $M \rightarrow (m \circ f)(M)$  est un isomorphisme dans  $\mathcal{U}$  si et seulement si le module instable  $M$  est  $\mathcal{N}il$ -fermé.*

## 1.3 Les algèbres instables et les algèbres de Hopf instables

Dans cette section, tous les modules instables considérés sont à gauche.

### 1.3.1 Les algèbres instables

**Définition 1.3.1.** — Une  $\mathcal{A}_2$ -algèbre instable  $K$  est un  $\mathcal{A}_2$ -module instable muni d'un produit  $K \otimes K \rightarrow K$  commutatif, unitaire,  $\mathcal{A}_2$ -linéaire et tel que  $Sq_0(x) = x^2$  pour tout  $x \in K$  (axiome de restriction).

### 1.3. Les algèbres instables et les algèbres de Hopf instables

---

**Définition 1.3.2.** — On désigne par  $\mathcal{K}$  la **catégorie des algèbres instables** sur l'algèbre de Steenrod  $\mathcal{A}_2$ , les morphismes sont les morphismes d'algèbres  $\mathcal{A}_2$ -linéaires.

**Exemple 1.3.3.** — La cohomologie singulière (modulo 2) d'un espace topologique  $X$ ,  $H^*X$ , est une  $\mathcal{A}_2$ -algèbre instable dont la structure d'algèbre est fournie par le cup produit.

On a le résultat suivant sur les images des algèbres instables par le foncteur  $f$ . Rappelons qu'une  $\mathbb{F}_2$ -algèbre de Boole est une  $\mathbb{F}_2$ -algèbre commutative dans laquelle on a  $x^2 = x$  pour tout élément  $x$ .

**Théorème 1.3.4** ([LZ87]). — *Pour tout  $K \in \mathcal{K}$ , le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $f(K)(V)$  est naturellement isomorphe à l'algèbre de Boole des fonctions continues de l'ensemble profini  $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*V)$  dans le corps  $\mathbb{F}_2$ . Ici,  $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*V)$  est muni de la structure d'ensemble profini*

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*V) \cong \varinjlim \text{Hom}_{\mathcal{K}}(K_i, H^*V),$$

où on prend la limite sur les sous-algèbres instables de  $K$  ayant un nombre fini de générateurs en tant qu'algèbre instable.

Ce théorème est appelé le *théorème de linéarisation* de Lannes.

**Notation 1.3.5.** — On désigne par  $g(K)$  le foncteur contravariant, de la catégorie  $\mathcal{V}$  vers la catégorie des ensembles profinis, donné par  $V \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*V)$ . Pour les propriétés du foncteur  $g$ , voir [HLS93].

Le théorème peut alors s'exprimer comme suit : le foncteur  $f(K)$  est naturellement équivalent au foncteur  $V \mapsto \text{Map}(g(K)(V), \mathbb{F}_2) =: \mathbb{F}_2^{g(K)(V)}$ . On notera ici le corollaire suivant, dont une démonstration est donnée indépendamment dans [AGM85] et [LZ87].

**Corollaire 1.3.6** (Adams - Gunawardena - Miller). — *Le morphisme canonique*

$$\mathbb{F}_2[\text{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*W, H^*V)] \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*W, H^*V)$$

*est un isomorphisme pour  $V, W$  des espaces vectoriels de dimension finie quelconques.*

#### 1.3.2 Les algèbres de Hopf instables

Dans cette sous-section et la suivante, afin de simplifier la présentation, l'ensemble  $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*V)$  sera toujours supposé **fini** pour tout  $V \in \mathcal{V}$  (à l'exception de l'exemple 1.3.9).

**Définition 1.3.7.** — Une  $\mathcal{A}_2$ -**algèbre de Hopf** est une  $\mathbb{F}_2$ -algèbre de Hopf telle que le produit et le coproduit sont  $\mathcal{A}_2$ -linéaires. Une  $\mathcal{A}_2$ -algèbre de Hopf  $K$  est dite **instable** si l'algèbre sous-jacente est une algèbre instable.



**Proposition 1.3.8.** — Si  $K$  est une algèbre de Hopf instable, alors  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*V)$  est un groupe. Réciproquement, si  $K$  est une algèbre instable telle que

$$g(K): V \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*V)$$

soit un foncteur à valeurs dans les groupes, alors  $(m \circ f)(K)$  est une algèbre de Hopf instable.

*Démonstration.* — Le résultat se déduit de ce que  $K$  est un objet cogroupe de  $\mathcal{K}$  : la diagonale  $K \rightarrow K \otimes K$  détermine la loi de groupe  $g(K)(V) \times g(K)(V) \rightarrow g(K)(V)$ .

Supposons maintenant que  $V \mapsto g(K)(V)$  soit à valeurs dans la catégorie des groupes. Alors, grâce au théorème 1.3.4, on obtient un morphisme  $f(K) \rightarrow f(K) \otimes f(K)$  et donc une diagonale  $(m \circ f)(K) \rightarrow (m \circ f)(K) \otimes (m \circ f)(K)$  puisque le foncteur  $m$  préserve le produit tensoriel.

Les détails sont faciles à vérifier. □

**Exemple 1.3.9.** — Soient  $U(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , les groupes unitaires. On considère l'espace topologique  $BU$  qui est la limite inductive du système des espaces classifiants  $\{BU(n)\}_n$ . Sa cohomologie singulière module 2 est engendrée polynomialement par les classes de Chern  $c_i$ , *i.e.*

$$H^*(BU) \cong \mathbb{F}_2[c_1, c_2, c_3, \dots]$$

où  $|c_i| = 2i$ . C'est une algèbre de Hopf instable mais qui n'est pas primitivement engendrée puisque la formule de Whitney dit que  $\delta(c_i) = \sum_j c_j \otimes c_{i-j}$ .

D'autre part, considérons le foncteur

$$V \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*(BU), H^*V).$$

D'après [Lan92, Section 1.11], on a  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*(BU), H^*V) \cong [BV, BU] \cong KU^0(BV)$ , où  $KU^*(-)$  est la  $K$ -théorie complexe réduite. Par ailleurs, d'après [AS69], on sait que

$$V \mapsto KU^0(BV)$$

est un complété de l'algèbre de groupe  $\mathbb{Z}[V]$ , en particulier on observe qu'il n'est pas à valeurs dans les  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels. On notera aussi que sa réduction modulo 2 est isomorphe à  $\mathbb{F}_2[V]$ .

### 1.3.3 Les algèbres de Hopf instables primitivement engendrées

Considérons dans cette sous-section le cas des algèbres de Hopf instables primitivement engendrées. Commençons par une définition :

**Définition 1.3.10 (Cf. [Ste62]).** — Le **foncteur de Steenrod-Epstein**  $U: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{K}$  est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli de  $\mathcal{K}$  dans  $\mathcal{U}$ , *i.e.* on a l'identité

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(U(M), K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, K) \tag{1.3}$$

### 1.3. Les algèbres instables et les algèbres de Hopf instables

---

pour tout  $M \in \mathcal{U}$  et tout  $K \in \mathcal{K}$ .

Remarquons que pour tout module instable  $M$ , l'algèbre symétrique  $S^*(M)$  est un module instable : en effet,  $S^n(M) \in \mathcal{U}$  puisque le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  agit sur  $M^{\otimes n}$  par des morphismes de  $\mathcal{U}$ . L'algèbre instable  $U(M)$  est le quotient de  $S^*(M)$  par l'idéal engendré par les éléments de la forme  $Sq_0x - x^2$  pour tout  $x \in M$ .

**Proposition 1.3.11.** —  $U(M)$  est une algèbre de Hopf instable pour tout  $M \in \mathcal{U}$ . Le module des éléments primitifs  $P(U(M))$  est isomorphe à  $M$ .

*Démonstration.* — On dispose de l'isomorphisme  $U(M \oplus N) \cong U(M) \otimes U(N)$ . Le coproduit  $U(M) \rightarrow U(M) \otimes U(M)$  est induit par la diagonale  $M \rightarrow M \oplus M$ .  $\square$

Rappelons que  $U(M)$  admet la filtration primitive  $\{\mathcal{F}_k(U(M))\}_k$ , où  $\mathcal{F}_k(U(M))$  est défini par l'image du morphisme de modules instables  $S^k(M) \rightarrow U(M)$ . Les quotients successifs  $\mathcal{F}_k(U(M))/\mathcal{F}_{k-1}(U(M))$  sont isomorphes, dans  $\mathcal{U}$ , aux  $\Lambda^k(M)$ .

**Lemme 1.3.12** ([LZ86]). — Si  $M$  est un module Nil-fermé, le module  $\Lambda^k(M)$  l'est aussi pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Corollaire 1.3.13.** — Si  $M$  est un module Nil-fermé, le module  $U(M)$  l'est aussi.

*Démonstration.* — On observe que :

- Soit  $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$  est une suite exacte courte des modules instables, si  $N'$  et  $N''$  sont Nil-fermés,  $N$  l'est aussi.
- Une limite directe de modules Nil-fermés est Nil-fermée (cf. [LZ86]).

La proposition est démontrée en appliquant ceci à la filtration primitive de  $U(M)$ .  $\square$

**Lemme 1.3.14.** — Soit  $K$  une algèbre de Hopf instable primitivement engendrée. Alors l'application canonique  $\theta: U(P(K)) \rightarrow K$  est un isomorphisme d'algèbres de Hopf instables, où  $P(K)$  désigne le module des primitifs de  $K$ .

*Démonstration.* — L'application  $\theta$  est évidemment un morphisme d'algèbres de Hopf grâce au diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} U(P(K)) & \xrightarrow{\delta} & U(P(K)) \otimes U(P(K)) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \otimes \theta \\ K & \xrightarrow{\delta'} & K \otimes K \end{array} ,$$

où  $\delta$  et  $\delta'$  sont les coproduits. Elle est surjective puisque  $K$  est primitivement engendrée. De plus, d'après [MM65, Proposition 3.9], elle est injective. Le lemme est démontré.  $\square$

Dans ce cas, on sait déjà que le foncteur  $g(K)$  prend naturellement valeurs dans la catégorie des groupes. Mais de plus :

**Proposition 1.3.15.** — Soit  $K$  une algèbre de Hopf instable primitivement engendrée. Alors, le foncteur  $g(K)$  est à valeurs dans la catégorie des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels.

*Démonstration.* — A la suite du lemme 1.3.14, on a

$$g(K)(V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(U(P(K)), H^*V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(P(K), H^*V).$$

Les structures de groupe de  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*V)$  et  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(P(K), H^*V)$  coïncident puisque le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} U(P(K)) & \xrightarrow{\delta} & U(P(K)) \otimes U(P(K)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ P(K) & \xrightarrow{\delta} & [P(K) \otimes \mathbb{F}_2] \oplus [\mathbb{F}_2 \otimes P(K)]. \end{array}$$

Le résultat s'ensuit. □

Rappelons que le symbole  $\sharp$  désigne le dual gradué  $\mathbb{F}_2$ -linéaire. On a le résultat réciproque de la proposition ci-dessus.

**Proposition 1.3.16.** — Soit  $K$  une algèbre instable telle que

$$g(K): V \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*V)$$

soit un foncteur à valeurs dans les  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels de dimension finie et de plus

$$g(K)^\sharp: V \longmapsto (\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*V))^\sharp$$

soit un foncteur analytique. Alors  $(m \circ f)(K)$  est une algèbre de Hopf instable primitivement engendrée.

*Démonstration.* — D'après le théorème 1.3.4, on a  $f(K)(V) \cong \mathbb{F}_2^{g(K)(V)}$ . On obtient alors une inclusion canonique  $g(K)^\sharp \hookrightarrow f(K)$  dans  $\mathcal{F}$  qui fournit un morphisme dans  $\mathcal{U}$

$$m(g(K)^\sharp) \longrightarrow (m \circ f)(K)$$

en appliquant le foncteur  $m$ . Grâce à l'adjonction (1.3), on obtient ensuite un morphisme d'algèbres instables

$$\vartheta: U(m(g(K)^\sharp)) \longrightarrow (m \circ f)(K).$$

De plus, puisque  $U(m(g(K)^\sharp))$  est une algèbre instable, on a

$$f(U(m(g(K)^\sharp))) \cong \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(U(m(g(K)^\sharp)), H^*(-))} \cong \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(m(g(K)^\sharp), H^*(-))}.$$

D'après l'hypothèse de la proposition :  $g(K)$  est à valeurs dans les  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels de

#### 1.4. Les modules instables à droite et les coalgèbres instables

---

dimension finie, et  $g(K)^\sharp$  est un foncteur analytique ; on obtient que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(m(g(K)^\sharp), H^*(-)^\sharp) \cong f(m(g(K)^\sharp)) = (f \circ m)(g(K)^\sharp) \cong g(K)^\sharp.$$

On en déduit que

$$f(U(m(g(K)^\sharp))) \cong \mathbb{F}_2^{g(K)} \cong f(K).$$

A la suite du théorème 1.2.15,  $\vartheta$  est un isomorphisme dans la catégorie  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ .

On note que  $m(g(K)^\sharp)$  est  $\mathcal{N}il$ -fermé ([Gab62]). Il suite de la proposition 1.3.13 que  $U(m(g(K)^\sharp))$  est un module  $\mathcal{N}il$ -fermé. Le lemme 1.2.19 dit que  $\vartheta$  est un isomorphisme d'algèbres instables. La proposition se déduit du lemme suivant qui montre que le morphisme d'algèbres instables  $\vartheta$  est compatible avec la structure d'algèbre de Hopf sur  $U(m(g(K)^\sharp))$  et  $(m \circ f)(K)$ .  $\square$

**Lemme 1.3.17.** — *Le morphisme*

$$\vartheta: U(m(g(K)^\sharp)) \longrightarrow (m \circ f)(K)$$

*est un morphisme d'algèbres de Hopf.*

*Démonstration.* — Puisque  $U(m(g(K)^\sharp))$  est une algèbre de Hopf primitivement engendrée :  $P(U(m(g(K)^\sharp))) \cong m(g(K)^\sharp)$ , il suffit de montrer que l'image de  $m(g(K)^\sharp)$  par  $\vartheta$  est incluse dans  $P((m \circ f)(K))$ . Autrement dit, il faut démontrer que  $\delta(\vartheta(x)) = \vartheta(x) \otimes 1 + 1 \otimes \vartheta(x)$  pour tout  $x \in m(g(K)^\sharp)$ , où  $\delta$  est le coproduit de  $(m \circ f)(K)$ .

En effet, ce résultat découle du fait que le coproduit  $\delta$  envoie un élément quelconque  $\alpha \in (m \circ f)(K) \cong m(\mathbb{I}_{\mathbb{F}_2} \circ g(K)^\sharp) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^*, \mathbb{I}_{\mathbb{F}_2} \circ g(K)^\sharp)$  sur  $\varphi_{g(K)^\sharp} \circ \alpha$ . Ici,  $\varphi$  est le coproduit naturel du foncteur exponentiel de Hopf  $\mathbb{I}_{\mathbb{F}_2}$ , défini par la composée suivante, pour tout  $V \in \mathcal{V}$  :

$$\mathbb{I}_{\mathbb{F}_2}(V) \longrightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{F}_2}(V \oplus V) \xrightarrow{\cong} \mathbb{I}_{\mathbb{F}_2}(V) \otimes \mathbb{I}_{\mathbb{F}_2}(V),$$

où le premier morphisme est induit par la diagonale  $V \rightarrow V \oplus V$ . Le reste est facilement vérifié par calculs directs.  $\square$

**Remarque 1.3.18.** — On considère le cas plus général. Soit  $F \in \mathcal{F}$  tel que  $F(V)$  est de dimension finie pour tout  $V$ . On déduit de la démonstration ci-dessus que le morphisme naturel de  $U(m(F))$  vers  $m(\mathbb{I}_{\mathbb{F}_2} \circ F)$  est également un morphisme d'algèbres de Hopf instable. Il est un isomorphisme si et seulement si  $F$  est analytique.

## 1.4 Les modules instables à droite et les coalgèbres instables

Pour simplifier la présentation, on suppose que tous les modules sont de **type fini**, *i.e.* de dimension finie en chaque degré. On peut alors utiliser la dualité pour induire une

équivalence de catégories entre la catégorie  $\mathcal{U}$  des modules instables à gauche de type fini et la catégorie  $\mathcal{U}^\sharp$  de ceux à droite.

### 1.4.1 La catégorie des modules instables à droite $\mathcal{U}^\sharp$

**Définition 1.4.1.** — Un  $\mathcal{A}_2$ -module à droite  $M$  est dit **instable** si  $\alpha Sq^i = 0$  pour tout  $\alpha \in M$  et  $|\alpha| < 2i$ . Soit  $\mathcal{U}^\sharp$  la **catégorie des modules instables à droite** sur l'algèbre de Steenrod  $\mathcal{A}_2$ .

**Exemple 1.4.2.** — L'action à droite de l'algèbre de Steenrod  $\mathcal{A}_2$  sur l'homologie d'un espace topologique  $H_*X$  est déterminée grâce à la structure de module instable à gauche de la cohomologie  $H^*X$ . En effet, elle est donnée par :

$$(\alpha Sq^i)(x) := \alpha(Sq^i x)$$

pour tout  $\alpha \in H_n X \cong \text{Hom}_{\mathbb{F}_2}(H^n X, \mathbb{F}_2)$ , et tout  $x \in H^{n-i} X$ . La condition d'instabilité sur  $H_*X$  se déduit de celle du module  $H^*X$ .

**Exemple 1.4.3.** — Rappelons que  $H_*(\mathbb{R}P^\infty)$  est un  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel librement engendré par les classes  $\rho_i \in H_i(\mathbb{R}P^\infty)$ , où  $\langle \tau^i, \rho_j \rangle = \delta_{ij}$  pour tout  $i, j \geq 0$  (pour la notation  $\tau$ , on renvoie à l'exemple 1.2.2). Sa structure de module instable à droite est donnée par  $\rho_n Sq^i = \binom{n-i}{i} \rho_{n-i}$ . Le dual gradué  $F(1)^\sharp$  du module instable à gauche  $F(1)$  (cf. l'exemple 1.2.3) est un module instable à droite. Il est le quotient du module  $H_*(\mathbb{R}P^\infty)$  par les relations  $\rho_{2^k} Sq^i = 0$  pour tout  $0 < i < 2^{k-1}$ .

**Définition 1.4.4.** — Grâce à la structure d'algèbre de Hopf de  $\mathcal{A}_2$ , de manière analogue aux modules instables à gauche (cf. la définition 1.2.4), on peut définir sur le produit tensoriel  $M \otimes N$  de deux modules instables à droite  $M$  et  $N$  une structure  $\mathcal{A}_2$ -module à droite qui est instable. Elle est déterminée par la formule de Cartan

$$(x \otimes y)Sq^i = \sum_{j=0}^i xSq^j \otimes ySq^{i-j}.$$

**Exemple 1.4.5.** — En tant que modules instables à gauche,  $F(n) \cong \Gamma^n(F(1))$  (cf. l'exemple 1.2.5). Par dualité, on obtient un isomorphisme de modules instables à droite

$$F(n)^\sharp \cong S^n(F(1)^\sharp) := ((F(1)^\sharp)^{\otimes n})_{\mathfrak{S}_n}.$$

**Définition 1.4.6.** — Le foncteur  $\Phi: \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}^*$  (cf. la définition 1.2.7) induit un foncteur  $\Phi: \mathcal{U}^\sharp \rightarrow \mathcal{U}^\sharp$ , où la structure de module instable à droite de  $\Phi M$  est définie par

$$(\Phi x)Sq^i = \begin{cases} xSq^{i/2} & \text{si } 2 \mid i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

## 1.4. Les modules instables à droite et les coalgèbres instables

---

**Remarque 1.4.7.** — Soit  $M$  un module instable à gauche. On a l'isomorphisme canonique suivant de modules instables à droite :

$$\Phi(M^\sharp) \cong (\Phi M)^\sharp.$$

Par exemple, on  $H_*(\mathbb{C}P^\infty) \cong \Phi H_*(\mathbb{R}P^\infty)$ .

**Définition 1.4.8.** — Un module instable à droite  $M$  est appelé **réduit** (resp. **nilpotent**, **Nil-fermé**) si son dual gradué, le module instable à gauche  $M^\sharp$ , est réduit (resp. nilpotent, Nil-fermé).

On déduit de cette définition la conséquence suivante :

**Proposition 1.4.9.** — *Un module instable à droite  $M$  est réduit si et seulement si pour tout  $\alpha \in M$ , il existe  $\beta \in M$  tel que  $\alpha = \beta S_{q_0}$ , où  $\beta S_{q_0} := \beta S_{q_0}^{|\beta|/2}$ .*

*Démonstration.* — On observe d'abord que l'action à droite de l'opérateur  $S_{q_0}$  sur  $M$  :

$$S_{q_0}: M \longrightarrow \Phi M$$

est le dual de l'action à gauche  $S_{q_0}: \Phi M^\sharp \rightarrow M^\sharp$ . Par ailleurs, le module instable à gauche  $M^\sharp$  est réduit si et seulement si l'action à gauche de  $S_{q_0}$  sur  $M^\sharp$  est injective (cf. les définitions 1.2.9 et 1.2.12). Par dualité, l'action à droite de  $S_{q_0}$  sur  $M$  est surjective. La proposition s'ensuit.  $\square$

De manière analogue, on obtient les résultats :

**Proposition 1.4.10.** — *Un module instable à droite  $M$  est nilpotent si et seulement si le groupe  $\text{Hom}_{\mathcal{M}^\sharp}(R, M)$  est trivial pour tout module instable à droite réduit  $R$ .*

**Proposition 1.4.11.** — *Un module instable à droite  $M$  est Nil-fermé si et seulement si  $M$  est réduit, et le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{M}^\sharp}^1(M, N)$  est trivial pour tout module nilpotent  $N$ .*

### 1.4.2 Les coalgèbres instables

Rappelons d'abord que, pour  $(C, \delta)$  une coalgèbre graduée cocommutative quelconque, le morphisme Verschiebung  $V: C \rightarrow \Phi C$  est défini par

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{V} & \Phi C \\ & \searrow \delta & \nearrow \tilde{V} \\ & \Gamma^2(C) & \end{array},$$

où  $\tilde{V}(a \otimes b + b \otimes a) := 0$  et  $\tilde{V}(a \otimes a) := \Phi a$  pour tout  $a, b \in C$ .

Voici une définition qui est le dual de la définition 1.3.1 d'une algèbre instable :

**Définition 1.4.12.** — Une  $\mathcal{A}_2$ -coalgèbre instable  $C$  est un  $\mathcal{A}_2$ -module instable à droite muni d'un coproduit cocommutatif, counitaire,  $\mathcal{A}_2$ -linéaire et tel que  $xSq_0 = V(x)$  pour tout  $x \in C$ . On désigne par  $\mathcal{K}^\sharp$  la **catégorie des coalgèbres instables** sur l'algèbre de Steenrod  $\mathcal{A}_2$ .

**Exemple 1.4.13.** — L'homologie singulière (modulo 2)  $H_*X$  d'un espace topologique  $X$  est une coalgèbre instable dont le coproduit est induit par la diagonale  $X \rightarrow X \times X$ .

## 1.5 Loi de groupe formel

Dans cette section, on rappelle quelques définitions et résultats sur les lois de groupe formel (de dimension 1). On renvoie à [Frö68] pour plus de détails.

### 1.5.1 Définitions et exemples

On commence par rappeler un résultat sur les séries formelles (cf. [Frö68, Chapter 1, §3, Proposition 1]).

**Proposition 1.5.1.** — Soit  $A$  un anneau commutatif. Soit  $F(x, y)$  une série formelle à 2 indéterminées sur  $A$  telle que  $F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$  et  $F(x, 0) = F(0, x) = x$ . Alors, il existe une et une seule série formelle  $i(x) \in A[[x]]$  telle que  $F(x, i(x)) = F(i(x), x) = 0$ .

Ce résultat explique la définition suivante de loi de groupe formel, car on n'a pas besoin d'imposer l'axiome d'existence d'une inverse.

**Définition 1.5.2.** — Une **loi de groupe formel** (de dimension 1) sur un anneau commutatif  $A$  est une série formelle  $F(x, y) \in A[[x, y]]$  qui satisfait les axiomes suivants :

1. (Associativité)  $F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$ ,
2. (Elément "neutre")  $F(x, 0) = F(0, x) = x$ .

Elle est dite **loi de groupe formel commutatif** si elle satisfait de plus l'axiome :

3. (Commutativité)  $F(x, y) = F(y, x)$ .

**Notation 1.5.3.** — On note  $F(x, y, z)$  la série formelle  $F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$ . Plus généralement, on désigne par  $F(x_1, x_2, x_3, \dots)$  la série formelle évidente.

**Définition 1.5.4.** — Soit  $n$  un entier naturel. Deux séries formelles  $F$  et  $G$  sur un anneau commutatif  $A$  sont dits **congrus modulo degré  $n$**  si leur différence  $F - G$  est sans terme de degré inférieur à  $n$ . On désigne cette relation par

$$F \equiv G \pmod{\deg n}.$$

**Remarque 1.5.5.** — Pour toute loi de groupe formel  $F$ , on a  $F(0, 0) = 0$ . Cela implique que  $F$  est sans terme constant, *i.e.*  $F \equiv 0 \pmod{\deg 1}$ .

## 1.5. Loi de groupe formel

---

**Exemples 1.5.6.** — Les lois suivantes sont des lois de groupe formel commutatif.

1. La loi additive :  $F(x, y) = x + y$ .
2. La loi multiplicative :  $F(x, y) = x + y + axy$  où  $a \in A$ . Cette loi est dite multiplicative puisque l'on a l'identité

$$1 + aF(x, y) = (1 + ax)(1 + ay).$$

**Exemple 1.5.7.** — On considère la loi de groupe formel

$$F(x, y) = (x + y)(1 - xy + (xy)^2 - (xy)^3 + (xy)^4 + \dots).$$

Puisque  $(1 - xy + (xy)^2 - (xy)^3 + (xy)^4 + \dots)$  est la série formelle inverse de  $(1 + xy)$ , on peut utiliser la notation  $F(x, y) = \frac{x+y}{1+xy}$  pour désigner la loi ci-dessus. Alors, la vérification des axiomes de la définition 1.5.2 est plus simple.

**Exemple 1.5.8.** — Soit  $E^*(-)$  une théorie de cohomologie généralisée complexe orientée (voir [Rav86]). Son anneau de coefficients, que l'on note  $E^*$ , est gradué commutatif. On considère la structure de  $H$ -groupe sur  $\mathbb{C}P^\infty$  donnée par

$$m: \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$$

$$((s_0, \dots, s_n, \dots), (t_0, \dots, t_n, \dots)) \longmapsto (s_0 t_0, \dots, \sum_{i+j=n} s_i t_j, \dots).$$

En appliquant  $E^*(-)$ , on obtient un morphisme de  $E^*$ -algèbres  $m^*$  de  $E^*(\mathbb{C}P^\infty) \cong E^*[[x]]$  vers  $E^*(\mathbb{C}P^\infty \otimes \mathbb{C}P^\infty) \cong E^*[[x \otimes 1, 1 \otimes x]]$ . La série formelle  $F(x \otimes 1, 1 \otimes x) := m^*(x)$  satisfait tous les axiomes de la définition 1.5.2 (voir [Haz12, 31.1.2]). Elle est appelée la **loi de groupe formel commutatif associée à  $E^*(-)$** .

Soit  $C_n(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$  défini par

$$C_n(x, y) = \epsilon_n ((x + y)^n - x^n - y^n)$$

où  $\epsilon_n = \frac{1}{p}$  si  $n$  est une puissance du nombre premier  $p$  et  $\epsilon_n = 1$  sinon. On a le résultat suivant, dû à Lazard, sur la comparaison entre deux lois de groupe formel.

**Théorème 1.5.9** ([Laz55, Proposition 3]). — Soient  $F$  et  $G$  deux lois de groupe formel sur un anneau commutatif  $A$  telles que  $F \equiv G \pmod{\deg n}$ . Alors on a

$$F \equiv G + aC_n \pmod{\deg n + 1}$$

pour un certain  $a \in A$ .

**Définition 1.5.10.** — Soient  $F, G$  deux lois de groupe formel sur un anneau commutatif  $A$ . Un **morphisme de lois**  $f: F \rightarrow G$  est une série formelle  $f(x) \in A[[x]]$  sans terme



constant telle que

$$f(F(x, y)) = G(f(x), f(y)).$$

**Remarque 1.5.11.** — En notant  $x +_F y = F(x, y)$  pour toute loi de groupe formel  $F$ , on peut considérer que tout morphisme de lois préserve l'addition. En d'autres termes, pour  $f: F \rightarrow G$  un morphisme de lois quelconque, on a l'identité

$$f(x +_F y) = f(x) +_G f(y).$$

**Exemples 1.5.12.** — Des exemples importants de morphismes sont les  **$n$ -séries** d'une loi de groupe formel ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Soit  $F$  une loi quelconque, la  $n$ -série de  $F$  ( $n \geq 2$ ) est définie par  $[n]_F(x) = x +_F \cdots +_F x$  où  $x$  apparaît  $n$  fois. De plus, on convient que  $[1]_F(x) = x$ ,  $[0]_F(x) = 0$  et  $[-1]_F(x) = i(x)$ . On peut alors définir la  $n$ -série de  $F$ , pour  $n \leq -2$ , par  $[n]_F(x) = i(x) +_F \cdots +_F i(x)$  où  $i(x)$  apparaît  $(-n)$  fois. Si  $F$  est une loi de groupe formel commutatif, toutes les  $n$ -séries  $[n]_F$  sont des endomorphismes de  $F$ .

**Proposition 1.5.13.** — Soient  $F$  et  $G$  deux lois de groupe formel commutatif sur l'anneau commutatif  $A$ . Alors  $\text{Hom}_A(F, G)$  est un groupe abélien dont l'addition est donnée par

$$(f + g)(x) := f(x) +_G g(x).$$

De plus,  $\text{End}_A(F) := \text{Hom}_A(F, F)$  muni des opérations addition et composition est un anneau unitaire avec l'unité  $[1]_F$ .

*Démonstration.* — On vérifie la distributivité à gauche de la multiplication par rapport à l'addition. Pour  $f, g, h \in \text{End}_A(F)$ , on a

$$(h \circ (f + g))(x) = h(f(x) +_F g(x)) = h(f(x)) +_F h(g(x)) = (h \circ f + h \circ g)(x).$$

Les autres propriétés sont directes. □

**Définition 1.5.14.** — Soit  $f: F \rightarrow G$  un morphisme de lois de groupe formel sur l'anneau commutatif  $A$ . Le morphisme  $f$  est un **isomorphisme** s'il existe une série formelle  $g \in A[[x]]$  telle que  $g(0) = 0$  et  $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ . On appelle  $g$  l'inverse de  $f$  par rapport à la composition.

**Remarque 1.5.15.** — Le critère pour l'existence d'une inverse d'un morphisme de lois de groupe formel est donné à la proposition 1.5.19.

**Proposition 1.5.16.** — Si  $f: F \rightarrow G$  est un isomorphisme de lois, l'inverse de  $f$  par rapport à la composition est encore un isomorphisme de lois, mais de  $G$  vers  $F$ .

*Démonstration.* — Soit  $g$  l'inverse de  $f$ . Observons d'abord que  $g$  est une série formelle sans terme constant puisque  $g(f(x)) = x$ . On a de plus

$$g(x +_G y) = g[f(g(x)) +_G f(g(y))] = (g \circ f)[g(x) +_F g(y)] = g(x) +_F g(y).$$

Cela signifie que  $g$  est un morphisme de lois de  $G$  vers  $F$ . La proposition s'ensuit.  $\square$

### 1.5.2 La catégorie des lois de groupe formel

**Définition 1.5.17.** — Soit  $A$  un anneau commutatif.

1. La catégorie  $\mathcal{L}_A$  est la catégorie des lois de groupe formel sur  $A$  dont les flèches sont les morphismes de lois.
2. La catégorie  $C\mathcal{L}_A$  est la catégorie des lois de groupe formel commutatif sur  $A$ . C'est une catégorie préadditive.

**Remarque 1.5.18.** — Un anneau commutatif quelconque  $A$  peut être considéré comme une catégorie préadditive avec un seul objet, les flèches sont les éléments de  $A$  et la composition est la multiplication de  $A$ . En effet, soit  $\mathbf{pt}$  l'objet de cette catégorie,  $\text{Hom}(\mathbf{pt}, \mathbf{pt}) = A$  est un groupe abélien par rapport à l'addition. On a de plus la distributivité de la composition par rapport à l'addition.

Soit  $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$  une série formelle sur  $A$ . En désignant  $f'(x)$  la série formelle  $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$ , on considère le foncteur  $D_A: \mathcal{L}_A \rightarrow A$  qui envoie  $f \in \text{Morph}(\mathcal{L}_A)$  sur  $f'(0) \in A$ . Explicitement, on a  $D_A(g \circ f) = D_A(g)D_A(f)$  et  $D_A(f+g) = D_A(f) + D_A(g)$ .

**Proposition 1.5.19.** — Soit  $f: F \rightarrow G$  un morphisme de lois sur  $A$ . Le morphisme  $f$  est un isomorphisme si et seulement si  $D_A(f)$  est inversible.

*Démonstration.* — Si  $f$  est un isomorphisme, il découle de la définition 1.5.14 et la proposition 1.5.16 que  $D_A(f)$  est inversible. Pour la réciproque, supposons que  $f(x) \equiv ax \pmod{\text{deg } 2}$  où  $a \in A$  est inversible. On va construire l'inverse de  $f$  par récurrence.

En posant  $g_1(x) := a^{-1}x$ , on obtient que  $g_1(f(x)) \equiv x \pmod{\text{deg } 2}$ . Supposons que nous ayons le polynôme  $g_n(x)$  de degré  $n$  tel que  $g_n(f(x)) \equiv x \pmod{\text{deg } n+1}$ . On considère le polynôme homogène  $h_n(x)$  de degré  $n+1$  tel que

$$h_n(x) \equiv g_n(f(x)) - x \pmod{\text{deg } n+2}.$$

On pose  $g_{n+1}(x) := g_n(x) - h_n(a^{-1}x)$ . On a alors

$$\begin{aligned} g_{n+1}(f(x)) &= g_n(f(x)) - h_n(a^{-1}f(x)) \\ &\equiv g_n(f(x)) - h_n(a^{-1}(ax)) \pmod{\text{deg } n+2} \\ &\equiv x \pmod{\text{deg } n+2}. \end{aligned}$$

L'inverse à gauche de  $f$  est défini par  $g(x) := \lim_n g_n(x)$ . Par construction, on a  $g(f(x)) = x$ .

De la même manière, en considérant  $\tilde{g}_1(x) = a^{-1}x$ ,  $f(\tilde{g}_n(x)) \equiv x \pmod{\text{deg } n+1}$ ,  $\tilde{h}_n(x) \equiv f(\tilde{g}_n(x)) - x \pmod{\text{deg } n+2}$  et  $\tilde{g}_{n+1}(x) = \tilde{g}_n(x) - a^{-1}\tilde{h}_n(x)$ , on obtient l'inverse à droite  $\tilde{g}$  de  $f$ . Puisque

$$g = g \circ (f \circ \tilde{g}) = (g \circ f) \circ \tilde{g} = \tilde{g},$$

le morphisme de lois  $f$  est donc un isomorphisme.  $\square$

**Proposition 1.5.20.** — Un morphisme d'anneaux  $\varphi: A \rightarrow B$  s'étend canoniquement en un foncteur  $\mathcal{L}_\varphi: \mathcal{L}_A \rightarrow \mathcal{L}_B$  qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_A & \xrightarrow{\mathcal{L}_\varphi} & \mathcal{L}_B \\ D_A \downarrow & & \downarrow D_B \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array} .$$

De plus,  $\mathcal{L}_\varphi$  se restreint à un foncteur additif  $C\mathcal{L}_\varphi$  de  $C\mathcal{L}_A$  vers  $C\mathcal{L}_B$ .

*Démonstration.* — Soit  $F(x, y) = \sum a_{ij}x^i y^j$  une loi de groupe formel sur  $A$ , on définit  $\mathcal{L}_\varphi(F)(x, y) = \sum \varphi(a_{ij})x^i y^j$ . Les images des flèches sont définies de manière similaire. De plus, l'additivité de  $C\mathcal{L}_\varphi$  découle du fait que

$$\mathcal{L}_\varphi(f + g)(x) = \mathcal{L}_\varphi(f)(x) + \mathcal{L}_\varphi(g)(x),$$

pour tous  $F, G \in C\mathcal{L}_A$  et  $f, g \in \text{Hom}_A(F, G)$ . Les détails sont faciles à vérifier.  $\square$

**Théorème 1.5.21** (Cf. [Frö68, Chapter 1, §3, Theorem 2]). — Soit  $f: F \rightarrow G$  un morphisme de lois sur  $A$ .

1. Supposons que  $(A, +)$  est sans torsion. Alors  $D_A(f) = 0$  si et seulement si  $f = 0$ .
2. Supposons que  $(A, +)$  est d'exposant premier  $p$ . Alors  $D_A(f) = 0$  si et seulement si  $f = 0$  ou  $f(x) = g(x^{p^h})$  où  $D_A(g) \neq 0$  et  $h > 0$ .

*Démonstration.* — On suppose que  $f(x) = a_{r_1}x^{r_1} + a_{r_2}x^{r_2} + \dots$  où  $2 \leq r_1 < r_2 < \dots$  et  $a_{r_i} \neq 0, \forall i$ . Puisque  $f: F \rightarrow G$  est un morphisme de lois, on a l'identité

$$f(F(x, y)) = G(f(x), f(y)). \tag{1.4}$$

On compare les termes homogènes de degré  $r_1$  de cette identité pour obtenir

$$a_{r_1}(x + y)^{r_1} = a_{r_1}x^{r_1} + a_{r_1}y^{r_1}.$$

En comparant les coefficients de  $x^{r_1-1}y$ , on obtient  $r_1 a_{r_1} = 0$ .

Si  $(A, +)$  est sans torsion, on en déduit que  $a_{r_1} = 0$ . Ceci est une contradiction.

Si  $(A, +)$  est d'exposant  $p$ , on peut récrire  $r_1 = s_1 p$ . Supposons que  $r_2$  n'est pas de la forme  $s_2 p$ . Alors on a l'identité

$$a_{r_2}(x + y)^{r_2} = a_{r_2}x^{r_2} + a_{r_2}y^{r_2}$$

en comparant les termes homogènes de degré  $r_2$  de (1.4). Il en résulte que  $r_2 a_{r_2} = 0$ . Cette contradiction implique  $r_2 = s_2 p$ . De même manière, on peut vérifier que  $r_i = s_i p$  pour tout  $i$ .

## 1.5. Loi de groupe formel

---

Cela dit que  $f(x) = g(x^p)$  où  $g(x) = a_{s_1}x^{s_1} + a_{s_2}x^{s_2} + \dots$ . Donc, le résultat va être démontré par induction si l'on peut montrer que  $g$  est un morphisme de lois de groupe formel. En effet, on considère le morphisme de Frobenius  $\varphi: A \rightarrow A$  qui envoie  $a$  sur  $a^p$ . D'après la proposition 1.5.20, il s'étend en un foncteur  $\mathcal{L}_\varphi: \mathcal{L}_A \rightarrow \mathcal{L}_A$ . Ce foncteur envoie la loi  $F$  sur  $F^{(p)}$  qui satisfait  $F^{(p)}(x^p, y^p) = (F(x, y))^p$ . Alors on a

$$g(F^{(p)}(x^p, y^p)) = g((F(x, y))^p) = f(F(x, y)) = G(f(x), f(y)) = G(g(x^p), g(y^p)).$$

Cela signifie que  $g$  est un morphisme de lois de  $F^{(p)}$  vers  $G$ . □

### 1.5.3 Une classification des lois de groupe formel commutatif

Dans cette section, on rappelle, sans démonstration, la classification de Lazard des lois de groupe formel commutatif sur un corps  $\mathbb{F}$  de caractéristique  $p$ .

**Définition 1.5.22 (Hauteur d'un morphisme de lois de groupe formel).** — Soit  $f: F \rightarrow G$  un morphisme de lois sur  $\mathbb{F}$ .

- Si  $f = 0$ , on dit que  $f$  est de hauteur infinie.
- Dans le cas contraire, à l'aide du théorème 1.5.21, il existe un morphisme de lois  $g$  tel que  $f(x) = g(x^{p^h})$  où  $h \geq 0$  et  $D_{\mathbb{F}}(g) \neq 0$ . On dit que  $f$  est de hauteur  $h$ .

On désigne par  $\text{ht}(f)$  la hauteur du morphisme de lois  $f$ .

**Proposition 1.5.23.** — Soient  $f, \tilde{f} \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(F, G)$  et  $g \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(G, H)$ . On a

1.  $\text{ht}(f + \tilde{f}) \geq \min\{\text{ht}(f), \text{ht}(\tilde{f})\}$ ,
2.  $\text{ht}(g \circ f) = \text{ht}(g) + \text{ht}(f)$ .

**Définition 1.5.24 (Hauteur d'une loi de groupe formel).** — Soit  $F$  une loi de groupe formel commutatif sur  $\mathbb{F}$ . Alors  $[p]_F$  est un endomorphisme de  $F$ . On définit la hauteur de  $F$  par  $\text{ht}(F) := \text{ht}([p]_F)$ .

**Exemples 1.5.25 (Cf. l'exemple 1.5.6).** — La loi additive est de hauteur infinie. La loi multiplicative est de hauteur 1.

**Proposition 1.5.26 ([Laz55, Corollaire 1]).** — Soit  $\mathbb{F}$  un corps de caractéristique  $p$ . Pour tout entier naturel  $h$ , il existe une loi de groupe formel commutatif de hauteur  $h$  à coefficients dans  $\mathbb{F}$ .

**Théorème 1.5.27 ([Laz55, Théorème 3]).** — Soit  $\mathbb{F}$  un corps séparablement clos de caractéristique  $p$ . Alors, deux lois de groupe formel commutatif sur  $\mathbb{F}$  sont isomorphes si et seulement si elles sont de même hauteur.



# *K*-théories de Morava des 2-groupes abéliens élémentaires



LES *K*-THÉORIES DE MORAVA  $\{K(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , pour un premier  $p$  fixé, forment une famille de théories de cohomologie généralisée qui jouent un rôle fondamental en théorie d'homotopie stable moderne. Dans le cadre de ce chapitre, nous considérons le premier  $p = 2$  et étudions le foncteur covariant  $V \mapsto K(n)^*(BV^\sharp)$  en tant qu'objet de la catégorie  $\mathcal{F}$ . Nous étudions également ses sous-objets et sous-quotients. Enfin, nous montrons que ce foncteur est analytique et auto-dual.

## Sommaire

<b>2.1 Introduction</b> . . . . .	<b>54</b>
<b>2.2 Nature du foncteur</b> $V \mapsto K(n)^*(BV^\sharp)$ . . . . .	<b>56</b>
2.2.1 La loi de groupe formel associée à $K(n)^*(-)$ . . . . .	56
2.2.2 Reconstruction du foncteur $V \mapsto K(n)^*(BV^\sharp)$ . . . . .	58
2.2.3 Quelques applications . . . . .	60
<b>2.3 Structure du foncteur</b> $\mathcal{K}_2$ . . . . .	<b>63</b>
2.3.1 Les sous-foncteurs $K_{p,q}$ du foncteur $\mathcal{K}_2$ . . . . .	64
2.3.2 La filtration décroissante du foncteur $\mathcal{K}_2$ . . . . .	69
2.3.3 La bi-filtration du foncteur $\mathcal{K}_2$ . . . . .	71
<b>2.4 Auto-dualité du foncteur</b> $\mathcal{K}_2$ . . . . .	<b>77</b>
2.4.1 Foncteur auto-dual . . . . .	77
2.4.2 La forme bilinéaire $\langle -, - \rangle : \mathcal{K}_2(V) \times \mathcal{K}_2(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$ . . . . .	78
2.4.3 Calcul des valeurs et exemples . . . . .	82
2.4.4 L'existence de la forme bilinéaire $\langle -, - \rangle$ . . . . .	86
2.4.5 Non dégénérescence de la forme bilinéaire $\langle -, - \rangle$ . . . . .	87
2.4.6 Démonstration du théorème 2.4.3 . . . . .	89

## 2.1 Introduction

Pour chaque nombre premier  $p$  et chaque entier naturel  $n$ , il existe une théorie cohomologique complexe orientée, la  $n$ -ième  $K$ -théorie de Morava modulo  $p$   $K(n)^*(-)$ , dont l'anneau de coefficients est  $K(n)^* = \mathbb{F}_p[\nu_n, \nu_n^{-1}]$ , où  $|\nu_n| = 2 - 2p^n$  (cf. [Rav86]). La loi de groupe formel  $F_n$  associée à  $K(n)^*(-)$  est la loi de Honda de hauteur  $n$  dont la  $p$ -série est donnée par  $[p]_{F_n}(x) = \nu_n x^{p^n}$ . Dans ce chapitre, on n'étudie que les  $K$ -théories de Morava modulo 2, et plus particulièrement la théorie  $K(2)^*(-)$ .

Rappelons du chapitre 1 que  $\mathcal{F}$  est la catégorie dont les objets sont les foncteurs de la catégorie  $\mathcal{V}$  des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels de dimension finie dans la catégorie  $\mathbf{Vect}$  des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels, et dont les morphismes sont les transformations naturelles. Soit  $\hat{\mathcal{F}}$  la sous-catégorie de  $\mathcal{F}$  dont les objets sont des foncteurs à valeurs dans la catégorie des  $\mathbb{F}_2$ -algèbres graduées, dont les morphismes préservent le degré. Pour comprendre de manière naturelle les  $K$ -théories de Morava des 2-groupes abéliens élémentaires, on étudie le foncteur covariant  $V \mapsto K(n)^*(BV^\sharp)$  où  $BV^\sharp$  désigne l'espace classifiant du dual linéaire  $V^\sharp$  de  $V$ . On peut considérer ce foncteur en tant qu'objet de la catégorie  $\mathcal{F}$  et aussi en tant qu'objet de la catégorie  $\hat{\mathcal{F}}$ .

La  $K$ -théorie de Morava  $K(n)^*(-)$  est  $(2^{n+1} - 2)$ -périodique : la multiplication par  $\nu_n$  et celle par  $\nu_n^{-1}$  induisent un isomorphisme d'espaces vectoriels  $K(n)^k(X) \cong K(n)^{k+2^{n+1}-2}(X)$  pour  $X$  un  $CW$ -complexe quelconque. On peut alors considérer l'algèbre  $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$ -graduée  $K(n)^{\bar{k}}(X)$ , avec  $K(n)^{\bar{k}}(X) := K(n)^k(X)$  où la classe  $\bar{k} \in \mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$  est représentée par  $k \in \mathbb{Z}$ . On obtient un isomorphisme de  $\mathbb{F}_2$ -algèbres  $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$ -graduées :

$$K(n)^{\bar{k}}(X) \cong \mathbb{F}_2 \otimes_{K(n)^*} K(n)^*(X),$$

où la structure de  $K(n)^*$ -algèbre de  $\mathbb{F}_2$  est donnée par le morphisme d'anneaux  $\epsilon$  de  $K(n)^*$  dans  $\mathbb{F}_2$  qui envoie  $\nu_n$  sur 1 ( $\epsilon$  est "gradué" en considérant  $\mathbb{F}_2$  comme un espace vectoriel  $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$ -gradué, trivial en degré différent de  $\bar{0}$ ,  $\epsilon$  envoie le degré  $k$  vers le degré  $\bar{k}$ ). Puisque tout module gradué sur  $K(n)^*$  est libre,  $K(n)^*(X)$  peut être récupéré à partir de  $K(n)^{\bar{k}}(X)$ . On convient de confondre désormais un élément quelconque de  $K(n)^*(X)$  avec son image dans  $K(n)^{\bar{k}}(X)$ . L'étude de  $K(n)^{\bar{k}}(X)$  est plus commode que celle de  $K(n)^*(X)$  puisque l'on peut éviter l'action de  $\nu_n$  et travailler sur le corps  $\mathbb{F}_2$  (voir [RW80] pour plus de détails). On donne deux exemples de cet avantage.

Premièrement, on considère la structure de  $H$ -groupe  $\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \xrightarrow{m} \mathbb{C}P^\infty$ . Cette multiplication induit un morphisme de  $K(n)^*$ -algèbres  $m^*$  de  $K(n)^*(\mathbb{C}P^\infty) \cong K(n)^*[[x]]$  dans  $K(n)^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \cong K(n)^*[[x \otimes 1, 1 \otimes x]]$  (cf. [Rav86]). La loi de groupe formel associée à  $K(n)^*(-)$  est définie par  $F_n(x \otimes 1, 1 \otimes x) = m^*(x) \in K(n)^*[[x \otimes 1, 1 \otimes x]]$ . En passant au produit tensoriel  $\mathbb{F}_2 \otimes_{K(n)^*} -$ ,  $m^*$  induit un morphisme de  $\mathbb{F}_2$ -algèbres  $m^*$  de  $K(n)^{\bar{k}}(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{F}_2[[x]]$  dans  $K(n)^{\bar{k}}(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{F}_2[[x \otimes 1, 1 \otimes x]]$ . La série  $\bar{F}_n(x \otimes 1, 1 \otimes x)$  définie par  $m^{\bar{k}}(x)$  dans  $\mathbb{F}_2[[x \otimes 1, 1 \otimes x]]$  satisfait alors les axiomes d'une loi de groupe formel commutatif (voir la section 1.5) :

## 2.1. Introduction

---

1. (Identité)  $\bar{F}_n(x, 0) = \bar{F}_n(0, x) = x$ ,
2. (Associativité)  $\bar{F}_n(\bar{F}_n(x, y), z) = \bar{F}_n(x, \bar{F}_n(y, z))$ ,
3. (Commutativité)  $\bar{F}_n(x, y) = \bar{F}_n(y, x)$ .

De plus, elle est une loi de hauteur  $n$  sur le corps  $\mathbb{F}_2$  et sa 2-série est donnée par le morphisme  $[2]_{\bar{F}_n}(x) = x^{2^n}$ . Cette loi est une réduction de la loi  $F_n$  donnée par  $\epsilon$ , on l'appelle *la loi de groupe formel associée à  $K(n)^{\bar{*}}(-)$* .

Deuxièmement, d'après [RW80, Theorem 5.7], en utilisant la suite exacte de Gysin associée à la fibration  $S^1 \rightarrow B\mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ , on obtient que l'algèbre  $K(n)^*(B\mathbb{Z}/2)$  est isomorphe à  $K(n)^*[x]/(x^{2^n})$  où  $x$  est la classe d'Euler (associée à la théorie  $K(n)^*(-)$ ) du complexifié d'un fibré en droite réelle non trivial quelconque sur  $B\mathbb{Z}/2$ . Soit  $V$  un  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel de dimension  $d$ . On rappelle que l'on dispose de l'isomorphisme de Künneth en  $K$ -théorie de Morava. Puisque  $K(n)^*(B\mathbb{Z}/2)$  est un  $K(n)^*$ -module libre de rang fini, on en déduit que

$$K(n)^*(BV^\sharp) \cong K(n)^*((B\mathbb{Z}/2)^d) \cong K(n)^*(B\mathbb{Z}/2)^{\otimes_{K(n)^*}^d}.$$

On insiste sur le fait que cet isomorphisme donne un système de générateurs de  $K(n)^*(BV^\sharp)$  en tant que  $K(n)^*$ -algèbre :

$$K(n)^*(BV^\sharp) \cong K(n)^*[x_1, \dots, x_d]/(x_1^{2^n}, \dots, x_d^{2^n}). \quad (2.1)$$

Il donne de plus l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_d$  sur  $K(n)^*(BV^\sharp)$  par les permutations des générateurs, cependant l'action du groupe linéaire  $GL(V^\sharp) = GL_d(\mathbb{F}_2)$  provient de la loi de groupe formel  $F_n$  associée à  $K(n)^*(-)$ . Par exemple, on peut voir [Bru96] pour le cas où le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $V$  est de dimension 2. On rencontre un problème similaire pour l'action du monoïde  $\text{End}(V^\sharp)$  sur  $K(n)^*(BV^\sharp)$  (cf. [Kuh87]). On va discuter la nature de cette action dans la deuxième section de ce chapitre. Retournons à l'isomorphisme (2.1), en passant au produit tensoriel  $\mathbb{F}_2 \otimes_{K(n)^*} -$ , on obtient un isomorphisme de  $\mathbb{F}_2$ -algèbres  $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$ -graduées :

$$K(n)^{\bar{*}}(BV^\sharp) \cong \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_d]/(x_1^{2^n}, \dots, x_d^{2^n}),$$

où  $x_i$  est de degré  $\bar{2}$  pour tout  $i$ .

Grâce aux arguments ci-dessus, on transfère l'étude du foncteur  $V \mapsto K(n)^*(BV^\sharp)$  au foncteur  $V \mapsto K(n)^{\bar{*}}(BV^\sharp)$ , que l'on notera  $\mathcal{K}_n$ . On analyse ensuite la loi de groupe formel associée à  $K(n)^{\bar{*}}(-)$  pour obtenir certaines relations importantes dans  $K(n)^{\bar{*}}(BV^\sharp)$ . En utilisant ces relations, on construit un isomorphisme naturel entre  $K(n)^{\bar{*}}(BV^\sharp)$  et un certain quotient de l'algèbre symétrique de l'idéal d'augmentation de l'algèbre de groupe  $\mathbb{F}_2[V]$ .

Dans le cas  $n = 2$ , on peut également utiliser ces relations pour obtenir une description des sous-objets et sous-quotients du foncteur  $\mathcal{K}_2$  via une *bi-filtration*. Cela nous permet d'affirmer que ce foncteur est analytique. Une autre application de cette bi-filtration est de montrer que le foncteur  $\mathcal{K}_2$  est auto-dual et que la dualité échange les deux filtrations.



## 2.2 Nature du foncteur $V \mapsto K(n)^{\overline{*}}(BV^{\sharp})$

Dans cette section, on va reconstruire le foncteur  $V \mapsto K(n)^{\overline{*}}(BV^{\sharp})$ . Ce travail dépend fortement de la loi de groupe formel associée à  $K(n)^{\overline{*}}(-)$ . Les notations de base sur des lois de groupes formels sont introduites dans la partie 1.5. Dans la section 2.2.1, on travaille parfois sur un nombre premier quelconque. Mais, **dans tous les autres sections de ce chapitre, on suppose que le cas  $p = 2$ .**

### 2.2.1 La loi de groupe formel associée à $K(n)^{\overline{*}}(-)$

Pour chaque nombre premier  $p$ , on rappelle que la théorie de Lazard [Laz55] classe les lois de groupes formels commutatifs sur un corps de caractéristique  $p$  algébriquement clos en fonction de la hauteur. Cela signifie que, pour tout entier naturel  $h$ , il existe une unique loi de groupe formel, à *isomorphisme près*, de hauteur  $h$ .

Le lemme 2.2.4 va donner une approximation de la loi de groupe formel commutatif  $F_n$  associée à la  $K$ -théorie de Morava modulo  $p$   $K(n)^*(-)$ .

Rappelons encore que la théorie de Brown-Peterson est une théorie de cohomologie généralisée dont l'anneau de coefficients est  $BP^* = \mathbb{Z}_{(p)}[\nu_1, \nu_2, \dots]$  où  $|\nu_i| = 2 - 2p^i$  et  $\mathbb{Z}_{(p)}$  est la localisation de  $\mathbb{Z}$  correspondant au nombre premier  $p$  (cf. [Rav86]). On désigne par  $F_{BP}$  la loi de groupe formel associée à cette théorie.

On considère le morphisme d'anneaux  $\varphi_n: BP^* \rightarrow K(n)^*$  qui préserve  $\nu_n$  et envoie  $\nu_i$  sur 0 pour tout  $i \neq n$ . D'après la proposition 1.5.20, il s'étend en le foncteur additif  $C\mathcal{L}_{\psi_n}: C\mathcal{L}_{BP^*} \rightarrow C\mathcal{L}_{K(n)^*}$ . Ce foncteur envoie la loi de groupe formel  $F_{BP}$  sur la loi  $F_n$  (cf. [Wür91]). L'approximation dans le lemme 2.2.4 provient d'une description de la loi  $F_{BP}$ . Pour les comprendre, on a besoin du résultat suivant qui provient de la théorie des vecteurs de Witt.

**Lemme 2.2.1** (Cf. [Haz09, §5]). — *Pour tout entier  $n > 0$ , il existe des polynômes symétriques homogènes à coefficients entiers  $\omega_i = \omega_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de degré  $p^i$  tels que*

$$\sum_t x_t^{p^k} = \sum_{i=0}^k p^i \omega_i^{p^{k-i}}, \quad \forall k \geq 0.$$

**Exemples 2.2.2.** — Pour  $n = 2$ , en considérant l'identité où  $k = 0$ , on obtient

$$\omega_0(x, y) = x + y.$$

On déduit ensuite du cas  $k = 1$  que

$$\omega_1(x, y) = \frac{1}{p}(x^p + y^p - \omega_0^p) = \frac{1}{p}(x^p + y^p - (x + y)^p) = -C_p(x, y),$$

où les polynômes  $C_j(x, y)$  sont définis dans la partie 1.5.

## 2.2. Nature du foncteur $V \mapsto K(n)^{\overline{*}}(BV^{\sharp})$

**Proposition 2.2.3.** — On considère la version réduite  $K(n)^{\overline{*}}(-)$  de la  $n$ -ième  $K$ -théorie de Morava modulo  $p$ . Soit  $\overline{F}_n$  la loi de groupe formel associée à  $K(n)^{\overline{*}}(-)$ . On a l'identité suivante dans  $\mathbb{F}_p[[x, y]]$  ( $|x| = |y| = \overline{2}$ ) :

$$\overline{F}_n(x, y) = \sum_{s \geq 0}^{\overline{F}_n} \omega_s(x, y) p^{s(n-1)},$$

où  $\sum^{\overline{F}_n}$  désigne la somme par la loi de groupe formel  $\overline{F}_n$  (voir la remarque 1.5.11).

*Démonstration.* — Ravenel a donné la description suivante de la loi de groupe formel  $F_{BP}$  associée à la théorie de Brown-Peterson. En définissant  $\nu_{\emptyset} = 1$  et  $\nu_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} = \nu_{i_1}(\nu_{(i_2, \dots, i_k)})^{p^{i_1}}$ , le résultat de Ravenel [Rav86, Theorem 4.3.9] dit que l'on a l'identité suivante dans  $BP^*[[x_1, x_2, \dots]]$  :

$$\sum_t^{F_{BP}} x_t = \sum_I^{F_{BP}} \nu_I \omega_I(x_1, x_2, \dots), \quad (2.2)$$

où la somme à droite est prise sur l'ensemble des  $k$ -uplets ( $k \in \mathbb{N}$ ), et  $\omega_I$  est un certain polynôme symétrique de degré  $p^{i_1+i_2+\dots+i_k}$  avec  $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ . Il montre encore que, si  $I = (n, n, \dots, n)$  où  $n$  apparaît  $s$  fois, alors  $\omega_I = \omega_s^{p^{s(n-1)}}$  où  $\omega_s$  est défini par le lemme 2.2.1.

On applique le foncteur  $\mathcal{C}\mathcal{L}_{\psi_n}$  à l'identité (2.2). Puisque le seul élément qui survit dans le groupe de coefficients  $K(n)^*$  est  $\nu_n$ , alors  $\nu_I \neq 0$  si et seulement si  $I = (n, n, n, \dots)$ . Donc, on obtient

$$\sum_t^{F_n} x_t = \sum_s^{F_n} \nu_n^{(p^{sn}-1)/(p^n-1)} \omega_s(x_1, x_2, \dots) p^{s(n-1)}.$$

Par passage au produit tensoriel  $\mathbb{F}_2 \otimes_{K(n)^*} -$ , la proposition est démontrée.  $\square$

**Lemme 2.2.4** (Cf. [BP03, Lemma 5.3]). — On a

$$\overline{F}_n(x, y) \equiv x + y - C_p(x^{p^{n-1}}, y^{p^{n-1}}) \pmod{\deg(p^n + 1)},$$

où  $\overline{F}_n$  est la loi de groupe formel associée à  $K(n)^{\overline{*}}(-)$ .

*Démonstration.* — On réécrit l'identité de la proposition 2.2.3 sous la forme :

$$\overline{F}_n(x, y) = \overline{F}_n(\omega_0(x, y), \omega_1(x, y)^{p^{n-1}}, \omega_2(x, y)^{p^{2(n-1)}}, \dots).$$

Puisque  $\omega_i(x, y)^{p^{i(n-1)}}$  est homogène de degré  $p^{in}$ , qui est plus grand que  $(p^n + 1)$  pour tout  $i \geq 2$ , on a les congruences modulo degré  $(p^n + 1)$  suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{F}_n(x, y) &\equiv \overline{F}_n(x + y, \omega_1(x, y)^{p^{n-1}}) \\ &\equiv \overline{F}_n(x + y + \omega_1(x, y)^{p^{n-1}}, \omega_1(x + y, \omega_1(x, y)^{p^{n-1}})^{p^{n-1}}) \\ &\equiv x + y + \omega_1(x, y)^{p^{n-1}}. \end{aligned}$$

Le lemme se déduit de l'égalité  $C_p(x, y)^p = C_p(x^p, y^p)$  à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$ .  $\square$

**Corollaire 2.2.5.** — Pour le cas  $p = 2$ , on a

$$\bar{F}_n(x, y) \equiv x + y + x^{2^{n-1}} y^{2^{n-1}} \pmod{\deg(2^n + 1)}.$$

Rappelons que la loi de groupe formel  $\bar{F}_n(x, y)$  est définie par l'image d'un élément homogène de degré  $\bar{2}$  par le morphisme de  $\mathbb{F}_2$ -algèbres  $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$ -graduées, de  $K(n)^{\bar{*}}(\mathbb{C}P^\infty)$  dans  $K(n)^{\bar{*}}(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{F}_2[[x, y]]$  où  $x, y$  sont de degré  $\bar{2}$ . La loi  $\bar{F}_n(x, y)$  est alors un élément homogène de degré  $\bar{2}$  de  $\mathbb{F}_2[[x, y]]$ . Elle n'a donc que les termes  $x^i y^j$  tels que  $(i+j) \equiv 1 \pmod{(2^n - 1)}$ . En particulier, il n'y a aucun terme  $x^i y^j$  avec  $2^n + 1 \leq i + j \leq 2(2^n - 1)$ . On en déduit :

**Proposition 2.2.6.** — On a

$$\bar{F}_n(x, y) \equiv x + y + x^{2^{n-1}} y^{2^{n-1}} \pmod{\deg(2^{n+1} - 1)},$$

où  $\bar{F}_n$  est la loi de groupe formel associée à  $K(n)^{\bar{*}}(-)$  pour  $p = 2$ .

Ce résultat a un rôle important dans la description explicite du foncteur  $V \mapsto K(n)^{\bar{*}}(BV^\sharp)$  qui va être fait dans la section suivante.

## 2.2.2 Reconstruction du foncteur $V \mapsto K(n)^{\bar{*}}(BV^\sharp)$

On remarque tout d'abord que l'on a la bijection

$$V \xrightarrow{\cong} H^1(BV^\sharp, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} [BV^\sharp, B\mathbb{Z}/2].$$

Cette bijection envoie un élément quelconque  $u$  de  $V$  sur une classe d'équivalence des fibrés en droites réelles de base  $BV^\sharp$  que l'on appelle le *fibré réel associé* à cet élément. Le complexifié  $u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  correspond alors à la classe d'équivalence d'homotopie de la composée

$$BV^\sharp \xrightarrow{u} B\mathbb{Z}/2 \longrightarrow BS^1 \cong \mathbb{C}P^\infty.$$

Soit  $x^{K(n)} \in K(n)^{\bar{2}}(\mathbb{C}P^\infty)$  l'orientation complexe associée à  $K(n)^{\bar{*}}(-)$ . Le morphisme  $K(n)^{\bar{2}}(\mathbb{C}P^\infty) \rightarrow K(n)^{\bar{2}}(BV^\sharp)$  induit par  $u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  envoie  $x^{K(n)}$  sur un élément de  $K(n)^{\bar{2}}(BV^\sharp)$  que l'on appelle la **classe d'Euler** associée à  $u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ , et que l'on note  $\epsilon(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ .

Soit  $J(V)$  l'idéal d'augmentation de l'algèbre de groupe  $\mathbb{F}_2[V] = \{ \sum_{u \in V} \epsilon_u[u] \mid \epsilon_u \in \mathbb{F}_2 \}$ . On considère l'application linéaire de  $J(V)$  dans  $K(n)^{\bar{*}}(BV^\sharp)$  qui associe à un générateur  $(u) = [u] - [0]$  de  $J(V)$  l'élément  $\epsilon(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$  de  $K(n)^{\bar{2}}(BV^\sharp)$ . Elle s'étend canoniquement en un morphisme d'algèbres, que l'on note  $\vartheta_V$ , de l'algèbre symétrique  $S^*(J(V))$  dans l'algèbre commutative  $K(n)^{\bar{*}}(BV^\sharp)$ .

Soient  $u$  et  $v$  des éléments quelconques de  $V$ , on désigne également par  $u, v$  les fibrés réels associés à ces éléments. L'élément  $(u + v)$  de  $V$  correspond alors au fibré réel  $u \otimes_{\mathbb{R}} v$ . On rappelle que l'on dispose, par définition de la loi de groupe formel (cf. [Rav86]), de la

## 2.2. Nature du foncteur $V \mapsto K(n)^{\overline{*}}(BV^{\sharp})$

relation suivante dans  $K(n)^{\overline{*}}(BV^{\sharp})$  :

$$\mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \mathbf{e}((u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})) = \bar{F}_n(\mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}), \mathbf{e}(v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})). \quad (2.3)$$

**Lemme 2.2.7.** — On a les relations suivantes dans  $K(n)^*(BV^{\sharp})$  :

1.  $(\mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))^{2^n} = 0$  pour  $u$  quelconque dans  $V$ ,
2.  $\mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) + \mathbf{e}(v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) + (\mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))^{2^{n-1}} (\mathbf{e}(v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))^{2^{n-1}}$  pour  $u, v$  quelconques dans  $V$ .

*Démonstration.* — D'après la proposition 2.2.6, la relation (2.3) nous donne :

$$\mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \equiv \mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) + \mathbf{e}(v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) + (\mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))^{2^{n-1}} (\mathbf{e}(v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))^{2^{n-1}} \pmod{\deg(2^{n+1} - 1)}$$

pour  $u, v$  quelconques dans  $V$ . On pose  $u = v$  et on obtient alors  $0 = (\mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))^{2^n} (1 + \dots)$  puisque  $u \otimes_{\mathbb{R}} u$  est trivial. Comme la série formelle entre parenthèses est inversible ([Frö68, Chapter 1, §1, Proposition 1]), il en résulte que  $(\mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))^{2^n} = 0$  pour  $u$  quelconque. On en déduit que, dans la relation (2.3), tous les termes  $(\mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))^i (\mathbf{e}(v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))^j$  tels que  $i + j \geq 2^{n+1} - 1$  sont nuls puisque soit  $i$ , soit  $j$  est alors supérieur ou égal à  $2^n$ . La relation

$$\mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) + \mathbf{e}(v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) + (\mathbf{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))^{2^{n-1}} (\mathbf{e}(v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))^{2^{n-1}}$$

en découle. □

On en déduit que le noyau du morphisme  $\vartheta_V: S^*(J(V)) \rightarrow K(n)^{\overline{*}}(BV^{\sharp})$  contient tous les éléments de la forme  $(u + v) + (u) + (v) + (u)^{2^{n-1}}(v)^{2^{n-1}}$ . Il induit donc un morphisme d'algèbres, que l'on note encore  $\vartheta_V$ , de  $S^*(J(V))/\mathcal{R}_n(V)$  dans  $K(n)^{\overline{*}}(BV^{\sharp})$ . Ici  $\mathcal{R}_n(V)$  est l'idéal engendré par les éléments de la forme  $(u + v) + (u) + (v) + (u)^{2^{n-1}}(v)^{2^{n-1}}$  pour  $u, v$  quelconques dans  $V$ .

**Définition 2.2.8.** — On désigne par  $\mathcal{K}_n$  le foncteur  $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$ -gradués qui à un  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel de dimension finie quelconque  $V$  associe la  $\mathbb{F}_2$ -algèbre  $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$ -graduée  $S^*(J(V))/\mathcal{R}_n(V)$ , où  $J(V)$  est concentré en degré  $\bar{2}$ . Le morphisme  $\vartheta_V$  est alors un morphisme préservant le degré, de  $\mathcal{K}_n(V)$  dans  $K(n)^{\overline{*}}(BV^{\sharp})$ .

**Théorème 2.2.9.** — Pour tout  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie,

$$\vartheta_V: \mathcal{K}_n(V) \longrightarrow K(n)^{\overline{*}}(BV^{\sharp})$$

est un isomorphisme de  $\mathbb{F}_2$ -algèbres  $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$ -graduées. Donc, les isomorphismes  $\vartheta_V$  déterminent une équivalence naturelle entre le foncteur  $\mathcal{K}_n$  et le foncteur  $V \mapsto K(n)^{\overline{*}}(BV^{\sharp})$ .

*Démonstration.* — Supposons que l'espace vectoriel  $V$  est de dimension  $d$  et soit  $\{e_1, \dots, e_d\}$  une base de  $V$ . La surjectivité de  $\vartheta_V$  est une conséquence de l'isomorphisme

$$K(n)^{\overline{*}}(BV^{\sharp}) \cong \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_d]/(x_1^{2^n}, \dots, x_d^{2^n}),$$

où  $x_i$  est la classe d'Euler  $\epsilon(e_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$  avec  $1 \leq i \leq d$  (cf. (2.1)).

On va ensuite montrer que la dimension de la source est inférieure ou égale à la dimension du but. En effet, le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $K(n)^*(BV^\sharp)$  admet une base de  $2^{nd}$  éléments de la forme  $x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}$ , où  $0 \leq i_k \leq 2^n - 1$ . D'autre part, l'idéal  $\mathcal{R}_n(V)$  donne la relation suivante dans  $\mathcal{K}_n(V)$  :

$$(u + v) = (u) + (v) + (u)^{2^{n-1}}(v)^{2^{n-1}}, \quad (2.4)$$

pour  $u, v$  quelconques dans  $V$ . En posant  $u = v$ , on obtient que

$$(u)^{2^n} = 0 \quad (2.5)$$

pour  $u$  quelconque dans  $V$ . Ainsi, tout élément de  $S^*(J(V))/\mathcal{R}_n(V)$  est un polynôme aux indéterminées  $(u)$  avec  $u \in V$  où la puissance de  $(u)$  dans chaque monôme est inférieur à  $2^n$ . De plus, en utilisant la relation (2.4), on peut décomposer cet élément en combinaison linéaire de  $2^{nd}$  éléments de la forme  $(e_1)^{i_1} \cdots (e_d)^{i_d}$ , où  $0 \leq i_k \leq 2^n - 1$ . Le théorème est démontré.  $\square$

**Corollaire 2.2.10.** — *Le foncteur  $\mathcal{K}_n$  est exponentiel, i.e. on a une équivalence naturelle de  $\mathbb{F}_2$ -algèbres  $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$ -graduées :  $\mathcal{K}_n(V \oplus W) \cong \mathcal{K}_n(V) \otimes \mathcal{K}_n(W)$ .*

*Démonstration.* — Le produit de l'algèbre symétrique  $S^*$  induit un morphisme naturel  $\mathcal{K}_n(V) \otimes \mathcal{K}_n(W) \rightarrow \mathcal{K}_n(V \oplus W)$ . Par ailleurs, en tant que  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels, c'est un isomorphisme grâce à l'isomorphisme de Künneth pour la  $K$ -théorie de Morava  $K(n)^*(-)$ . Le résultat s'ensuit.  $\square$

**Proposition 2.2.11.** —  *$\mathcal{K}_n(V)$  a une structure d'algèbre de Hopf où la diagonale est donnée par la formule  $\delta((u)) = (u) \otimes 1 + 1 \otimes (u) + (u)^{2^{n-1}} \otimes (u)^{2^{n-1}}$  pour tout  $u \in V$ . Les éléments  $(u)^{2^i}$  sont primitifs pour tout  $i \geq 1$ .*

*Démonstration.* — On sait que  $K(n)^*(BV^\sharp)$  est une algèbre de Hopf. Il suffit d'identifier la diagonale. Soit  $u$  un fibré en droite réelle sur  $BV^\sharp$ , et  $\mu: BV^\sharp \times BV^\sharp \rightarrow BV^\sharp$  la loi de ce  $H$ -espace. On a

$$\delta(\epsilon(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})) := \mu^*(\epsilon(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})) = F_n(\epsilon(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes 1, 1 \otimes \epsilon(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})).$$

Pour le second point, il suffit d'élever la formule ci-dessus à la puissance  $2^i$  et d'utiliser la relation (2.5). La proposition s'ensuit.  $\square$

### 2.2.3 Quelques applications

**Proposition 2.2.12.** —  $\Delta(\mathcal{K}_n) = \mathcal{K}_n^{\oplus(2^n-1)}$ .

*Démonstration.* — Puisque le foncteur  $\mathcal{K}_n$  est exponentiel, l'espace  $\mathcal{K}_n(V \oplus \mathbb{F}_2)$  s'écrit

$$\mathcal{K}_n(V \oplus \mathbb{F}_2) \cong \mathcal{K}_n(V) \otimes \mathcal{K}_n(\mathbb{F}_2) \cong \bigoplus_{i=0}^{2^n-1} \mathcal{K}_n(V) \otimes (e)^i \cong \bigoplus_{i=0}^{2^n-1} \mathcal{K}_n(V)$$

## 2.2. Nature du foncteur $V \mapsto K(n)^{\#}(BV^{\#})$

en désignant par  $e$  générateur de  $\mathbb{F}_2$ , et  $\mathcal{K}_n(V) \otimes (e)^i := \{x \otimes (e)^i \mid x \in \mathcal{K}_n(V)\}$ .  $\square$

**Proposition 2.2.13.** — Soit  $S_{2^n}^*$  le foncteur puissance symétrique tronquée (voir l'exemple 1.1.7). En considérant  $S_{2^n}^*(J(V))$  comme une  $\mathbb{F}_2$ -algèbre  $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$ -graduée où  $J(V)$  est concentré en degré  $\bar{2}$ , on a l'équivalence de foncteurs  $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$ -gradués suivant :

$$\mathcal{K}_n \cong (S_{2^n}^* \circ J) / \tilde{\mathcal{R}}_n,$$

où  $\tilde{\mathcal{R}}_n$  est le foncteur envoyant  $V \in \mathcal{V}$  sur l'idéal de  $S_{2^n}^*(J(V))$  engendré par les éléments de la forme  $(u + v) + (u) + (v) + (u)^{2^{n-1}}(v)^{2^{n-1}}$  pour  $u, v$  quelconques dans  $V$ .

*Démonstration.* — Considérons la surjection canonique  $(S^* \circ J) \rightarrow \mathcal{K}_n = (S^* \circ J) / \mathcal{R}_n$ . Elle se factorise à travers  $S_{2^n}^* \circ J$  grâce à la relation (2.5) dans  $\mathcal{K}_n(V)$ , puis à travers  $(S_{2^n}^* \circ J) / \tilde{\mathcal{R}}_n$  puisque tous les éléments de la forme  $(u + v) + (u) + (v) + (u)^{2^{n-1}}(v)^{2^{n-1}}$  sont nuls dans  $\mathcal{K}_n(V)$ . Le résultat se déduit du fait que les deux espaces  $\mathcal{K}_n(V)$  et  $S_{2^n}^*(J(V)) / \tilde{\mathcal{R}}_n(V)$  sont de même dimension  $2^{nd}$ , où  $d$  est la dimension de  $V$ .  $\square$

**Lemme 2.2.14.** — On a, dans  $\mathcal{K}_n(V)$ , la relation  $(u + v)^{2^i} = (u)^{2^i} + (v)^{2^i}$  pour tous  $u, v \in V$  et pour tout  $i \geq 1$ .

*Démonstration.* — Par élévation au carré de la relation (2.4) et en utilisant la relation (2.5), on obtient que

$$(u + v)^2 = (u)^2 + (v)^2$$

pour  $u, v$  quelconques dans  $V$ . Il en résulte que  $(u + v)^{2^i} = (u)^{2^i} + (v)^{2^i}$  pour tout  $i \geq 1$ .  $\square$

**Proposition 2.2.15.** — Par construction de  $\mathcal{K}_n$ , on a un morphisme naturel de  $J$  dans  $\mathcal{K}_n$ . Si  $n \geq 2$ , ce morphisme se factorise à travers la deuxième puissance divisée  $\Gamma^2$ , i.e. on a la factorisation suivante :

$$\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathcal{K}_n \\ & \searrow & \nearrow \\ & \Gamma^2 & \end{array}$$

*Démonstration.* — Rappelons que  $J$  admet une unique filtration convergente décroissante

$$J = J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_k \supset J_{k+1} \supset \cdots$$

telle que  $J_k / J_{k+1} \cong \Lambda^k$  (voir la proposition 1.1.40). Rappelons encore que  $J_3(V)$  est le sous- $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel de  $J(V)$  engendré par les éléments de la forme

$$(u) + (v) + (w) + (u + v) + (v + w) + (w + u) + (u + v + w)$$

pour  $u, v, w$  quelconques dans  $V$ .

En utilisant les relations (2.4) et le lemme 2.2.14, nous obtenons la relation suivante dans  $\mathcal{K}_2(V)$  :

$$\begin{aligned}
 & (u + v + w) + (u + v) + (v + w) + (w + u) + (u) + (v) + (w) = \\
 & = ((u + v + w) + (u + v) + (w)) + ((v + w) + (v) + (w)) + ((w + u) + (w) + (u)) \\
 & = (u + v)^{2^{n-1}}(w)^{2^{n-1}} + (v)^{2^{n-1}}(w)^{2^{n-1}} + (w)^{2^{n-1}}(u)^{2^{n-1}} \\
 & = ((u)^{2^{n-1}} + (v)^{2^{n-1}})(w)^{2^{n-1}} + (v)^{2^{n-1}}(w)^{2^{n-1}} + (w)^{2^{n-1}}(u)^{2^{n-1}} \quad (\text{car } n \geq 2) \\
 & = 0.
 \end{aligned}$$

On en déduit que le morphisme de  $J$  dans  $\mathcal{K}_2$  se factorise à travers  $J/J_3$ . D'autre part, les foncteurs  $J/J_3$  et  $\Gamma^2$  sont des extensions non-triviales de  $\Lambda^1$  par  $\Lambda^2$ . De plus, d'après [FLS94],  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^1, \Lambda^2) = \mathbb{F}_2$ . On obtient donc  $J/J_3 \cong \Gamma^2$ .  $\square$

**Remarque 2.2.16.** — La démonstration de la proposition 2.2.15 ne fonctionne pas si  $n = 1$  puisque l'on n'a pas la relation  $(u + v) = (u) + (v)$  dans  $\mathcal{K}_1(V)$ .

**Corollaire 2.2.17.** — Le foncteur  $\mathcal{K}_n$  est analytique si et seulement si  $n \geq 2$ .

*Démonstration.* — On note que le foncteur  $\mathcal{K}_1$  est isomorphe au projectif standard  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}$ , i.e.  $\mathcal{K}_1(V) \cong \mathbb{F}_2[V]$ . Le projectif standard  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}$  n'est pas analytique (voir [HLS93]).

Si  $n \geq 2$ , par la construction de  $\mathcal{K}_n$ , on a un épimorphisme de  $S^* \circ J$  vers  $\mathcal{K}_n$ . Il se factorise à travers  $S^* \circ \Gamma^2$  grâce à la proposition 2.2.15. Le foncteur  $\mathcal{K}_n$  est donc un objet quotient du foncteur analytique  $S^* \circ \Gamma^2$ , il est alors analytique.  $\square$

On a une autre conséquence du lemme 2.2.14 :

**Proposition 2.2.18.** — L'application de  $V$  dans  $\mathcal{K}_n(V)$ , qui à  $u \in V$  associe l'élément  $(u)^2 \in \mathcal{K}_n(V)$ , est une application linéaire. Elle s'étend canoniquement en un morphisme d'algèbres de Hopf de  $S_{2^{n-1}}^*(V)$  dans  $\mathcal{K}_n(V)$ . Ce morphisme est injectif et fonctoriel en  $V$ .

De plus, en considérant  $S_{2^{n-1}}^*(V)$  comme une  $\mathbb{F}_2$ -algèbre  $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$ -graduée où  $V$  est concentré en degré  $\bar{4}$ , le monomorphisme d'algèbres de  $S_{2^{n-1}}^*(V)$  dans  $\mathcal{K}_n(V)$  est un monomorphisme préservant le degré.

*Démonstration.* — Il suit du lemme 2.2.14 que l'application de  $V$  vers  $\mathcal{K}_n(V)$  définie dans l'énoncé est une application linéaire. Elle s'étend en un morphisme d'algèbres de  $S^*(V)$  dans  $\mathcal{K}_n(V)$  qui se factorise à travers  $S_{2^{n-1}}^*(V)$  puisque la relation  $((u)^2)^{2^{n-1}} = (u)^{2^n} = 0$  est vraie dans  $\mathcal{K}_n(V)$ . On obtient donc un morphisme naturel  $\psi: S_{2^{n-1}}^* \rightarrow \mathcal{K}_n$  qui est bien défini par

$$\psi_V(u_1 \dots u_k) := (u_1)^2 \cdots (u_k)^2$$

où  $k \in \mathbb{N}$ , et  $u_i$  quelconques dans  $V$ .

Afin de montrer que le morphisme  $\psi$  est injectif, on utilise un argument de dimension. Supposons que l'espace vectoriel  $V$  est de dimension  $d$  et soit  $\{e_1, \dots, e_d\}$  une base de  $V$ . Soit  $k$  un entier naturel quelconque. En utilisant la relation (2.7), il est évident que

### 2.3. Structure du foncteur $\mathcal{K}_2$

l'image de  $S_{2^{n-1}}^k(V)$  par  $\psi$  est le  $\mathbb{F}_2$ -sous-espace vectoriel de  $\mathcal{K}_n(V)$  engendré par le système  $\{(e_1)^{2i_1} \cdots (e_d)^{2i_d} : i_1 + \cdots + i_d = k \text{ et } 0 \leq i_j < 2^{n-1}\}$ . Ce système est libre grâce à l'isomorphisme

$$\mathcal{K}_n(V) \cong K(n)^{\bar{*}}(BV^{\sharp}) \cong \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_d]/(x_1^{2^n}, \dots, x_d^{2^n}), \quad (2.6)$$

où  $x_i$  est la classe d'Euler  $\epsilon(e_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ . La dimension de  $\psi(S_{2^{n-1}}^k(V))$  est alors égale à celle de  $S_{2^{n-1}}^k(V)$  puisque  $S_{2^{n-1}}^k(V)$  admet une base de la même forme. De plus, on déduit de l'isomorphisme ci-dessus que la famille  $\{\psi(S_{2^{n-1}}^k(V))\}_{k \in \mathbb{N}}$  est en somme directe. Il en résulte que le morphisme  $\psi$  est injectif.  $\square$

**Corollaire 2.2.19.** — *En considérant la graduation de  $S_{2^{n-1}}^*(V)$  comme dans la proposition 2.2.18,  $\mathcal{K}_n(V)$  est un  $S_{2^{n-1}}^*(V)$ -module  $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$ -gradué libre de rang  $2^d$ , où  $d$  est la dimension du  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $V$ . Autrement dit, on a une équivalence naturelle  $\mathcal{K}_n(V) \otimes_{S_{2^{n-1}}^*(V)} \mathbb{F}_2 \cong \Lambda^*(V)$ .*

*Démonstration.* — Considérons la composée des surjections canoniques  $S^*(V) \rightarrow \mathcal{K}_n(V)$  et  $\mathcal{K}_n(V) \rightarrow \mathcal{K}_n(V) \otimes_{S_{2^{n-1}}^*(V)} \mathbb{F}_2$ . Elle se factorise à travers  $\Lambda^*(V)$  puisque  $(u)^2 \in S_{2^{n-1}}^*(V)$ . Donc, pour conclure, il suffit d'utiliser un argument de dimension. En effet, si on a une base  $\{e_1, \dots, e_d\}$  de  $V$ , une base de  $\mathcal{K}_n(V) \otimes_{S_{2^{n-1}}^*(V)} \mathbb{F}_2$  est donnée par les éléments de la forme

$$(e)_I = \prod_{i \in I} (e_i),$$

pour tout sous-ensemble  $I$  de  $\{1, \dots, d\}$ .  $\square$

### 2.3 Structure du foncteur $\mathcal{K}_2$

Dans cette section, nous allons analyser la structure du foncteur  $\mathcal{K}_2$  qui est isomorphe au foncteur  $V \mapsto K(2)^{\bar{*}}(BV^{\sharp})$ . En détail, nous étudierons des sous-objets et des sous-quotients de  $\mathcal{K}_2$ .

Rappelons que  $\mathcal{K}_2(V)$  est une  $\mathbb{F}_2$ -algèbre  $\mathbb{Z}/6$ -graduée, où le degré de tout élément de  $J(V)$  est  $\bar{2}$ . Cette graduation induit une décomposition du foncteur  $\mathcal{K}_2$ , que l'on appelle la décomposition par le poids. A savoir, toutes les composantes correspondantes aux degrés impairs sont nulles, alors  $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2^{\bar{0}} \oplus \mathcal{K}_2^{\bar{2}} \oplus \mathcal{K}_2^{\bar{4}}$ , où le foncteur  $\mathcal{K}_2^{\bar{2}k}$  est isomorphe au foncteur  $V \mapsto K(2)^{\bar{2}k}(BV^{\sharp})$  pour  $0 \leq k \leq 2$ .

Rappelons encore que, dans  $\mathcal{K}_2(V)$ , on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (u + v) &= (u) + (v) + (u)^2(v)^2, \\ (u)^4 &= 0, \\ (u + v)^2 &= (u)^2 + (v)^2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

pour  $u, v$  quelconques dans  $V$ .



### 2.3.1 Les sous-foncteurs $K_{p,q}$ du foncteur $\mathcal{K}_2$

Soient  $p, q$  deux entiers naturels. Rappelons que  $J$  est le foncteur qui associe à l'espace vectoriel  $V$  l'idéal d'augmentation de l'algèbre du groupe  $\mathbb{F}_2[V]$ . Il découle de la définition du foncteur  $\mathcal{K}_2$  que l'on a un morphisme naturel de  $J$  dans  $\mathcal{K}_2$ . On a encore un morphisme de  $\Lambda^q$  dans  $\mathcal{K}_2$  d'après la proposition 2.2.18. On obtient donc un morphisme  $\theta^{p,q}$  du produit tensoriel  $(T^p \circ J) \otimes \Lambda^q$  dans  $\mathcal{K}_2$  en utilisant le produit de  $\mathcal{K}_2$ , où  $T^*$  est le foncteur puissance tensorielle.

**Lemme 2.3.1.** — *Le morphisme  $\theta^{p,q}$  se factorise à travers  $(S^p \circ \Gamma^2) \otimes \Lambda^q$ .*

*Démonstration.* — Grâce à la proposition 2.2.15,  $\theta^{p,q}$  se factorise à travers  $(T^p \circ \Gamma^2) \otimes \Lambda^q$ . Il se factorise ensuite à travers  $(S^p \circ \Gamma^2) \otimes \Lambda^q$  grâce à la commutativité du produit de  $\mathcal{K}_2$ . En d'autres termes, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (T^p \circ J) \otimes \Lambda^q & \xrightarrow{\theta^{p,q}} & \mathcal{K}_2 \\ \downarrow & & \uparrow \\ (T^p \circ \Gamma^2) \otimes \Lambda^q & \twoheadrightarrow & (S^p \circ \Gamma^2) \otimes \Lambda^q. \end{array}$$

□

**Définition 2.3.2.** — L'image du morphisme  $\theta^{p,q}$  détermine un sous-foncteur du foncteur  $\mathcal{K}_2$  que l'on note  $K_{p,q}$ . Autrement dit,  $K_{p,q}$  est le foncteur qui à tout espace vectoriel  $V$  associe le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{K}_2(V)$  qui est engendré par les éléments de la forme

$$(u_1) \cdots (u_p)(v_1)^2 \cdots (v_q)^2$$

pour  $u_i$  et  $v_j$  quelconques dans  $V$ .

**Corollaire 2.3.3.** — *Le foncteur  $K_{p,q}$  est polynomial de degré inférieur ou égal à  $(2p+q)$ , pour  $p, q \in \mathbb{N}$ .*

*Démonstration.* — D'après le lemme 2.3.1, le foncteur  $K_{p,q}$  est le quotient du foncteur polynomial  $(S^p \circ \Gamma^2) \otimes \Lambda^q$ . □

**Remarque 2.3.4.** — Rappelons que  $\mathcal{K}_2$  est un foncteur exponentiel de Hopf, il admet un produit naturel  $\mathcal{K}_2 \otimes \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{K}_2$  et un coproduit naturel  $\mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{K}_2 \otimes \mathcal{K}_2$  qui font de  $\mathcal{K}_2(V)$  une  $\mathbb{F}_2$ -algèbre de Hopf pour tout  $V \in \mathcal{V}$  (cf. le corollaire 2.2.10 et la proposition 2.2.11). Cette structure est compatible avec la famille  $\{K_{p,q}\}$  :

$$K_{p,q} \otimes K_{s,t} \longrightarrow K_{p+s,q+t},$$

et

$$K_{p,q} \longrightarrow \sum_{i+2j+i'+2j' \equiv p+2q \pmod{3}} K_{i,j} \otimes K_{i',j'}.$$

### 2.3. Structure du foncteur $\mathcal{K}_2$

**Définition 2.3.5.** — Soit  $\preceq$  l'ordre partiel sur l'ensemble  $\mathbb{N}^2$  qui est engendré par la relation :  $(p, q) \prec (s, t)$  si  $(s, t) = (p, q) + (2, -1)$  ou  $(s, t) = (p, q) + (1, -2)$ .

**Lemme 2.3.6.** — Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $(p, q) \preceq (s, t)$ .
2. Il existe  $m, n \geq 0$  tels que  $(s, t) = (p, q) + m(2, -1) + n(1, -2)$ .
3. Il existe  $m, n \geq 0$  tels que  $(2s + t) - (2p + q) = 3m$  et  $(p + 2q) - (s + 2t) = 3n$ .

**Remarque 2.3.7.** — Si  $(p, q)$  et  $(s, t)$  sont comparables, alors  $p + 2q \equiv s + 2t \pmod{3}$ . On note que cette condition est équivalente à la condition  $2p + q \equiv 2s + t \pmod{3}$ .

*Démonstration de 2.3.6.* — Le fait que la première assertion est équivalente à la seconde est déduit explicitement de la définition ci-dessus de l'ordre partiel  $\preceq$ . On obtient l'équivalence entre la seconde et la troisième par un calcul direct.  $\square$

**Proposition 2.3.8.** — Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $d$ . On a

$$\dim K_{p,q}(V) = \sum_{(i,j) \preceq (p,q)} \binom{d}{i} \binom{d}{j}.$$

*Démonstration.* — Fixons une base  $\{e_1, \dots, e_d\}$  de  $V$ . Rappelons que l'espace vectoriel  $K_{p,q}(V)$  est engendré par les éléments de la forme  $(u_1) \cdots (u_p)(v_1)^2 \cdots (v_q)^2$  pour  $u_i$  et  $v_j$  quelconques dans  $V$ . En utilisant les relations (2.7), on trouve que  $K_{p,q}(V)$  est engendré par le système  $\varepsilon$  qui est composé par les éléments de la forme

$$(e_{k_1}) \cdots (e_{k_i})(e_{l_1})^2 \cdots (e_{l_j})^2,$$

où  $k_1 < \dots < k_i$ ,  $l_1 < \dots < l_j$  et  $(i, j) \preceq (p, q)$ . Le système  $\varepsilon$  est de plus libre grâce à l'isomorphisme

$$\mathcal{K}_2(V) \cong K(2)^{\overline{*}}(BV^\sharp) \cong \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_d]/(x_1^4, \dots, x_d^4), \quad (2.8)$$

où  $x_i$  est la classe d'Euler  $\epsilon(e_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ . La proposition s'ensuit.  $\square$

**Remarque 2.3.9.** — Rappelons que  $\dim \Lambda^n(V) = \binom{\dim V}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On a donc :

$$\dim K_{p,q}(V) = \sum_{(i,j) \preceq (p,q)} \dim(\Lambda^i(V) \otimes \Lambda^j(V)).$$

**Lemme 2.3.10.** —  $K_{p,q} \hookrightarrow K_{s,t}$  si  $(p, q) \preceq (s, t)$ .

*Démonstration.* — On voit facilement que  $K_{p,q} \hookrightarrow K_{p+2,q-1}$  pour  $q \geq 1$ . On a aussi une inclusion  $K_{p,q} \hookrightarrow K_{p+1,q-2}$  pour  $q \geq 2$  puisque l'on a la relation  $(v_i)^2(v_j)^2 = (v_i) + (v_j) + (v_i + v_j)$  dans  $\mathcal{K}_2(V)$ . Le lemme s'ensuit.  $\square$

**Proposition 2.3.11.** — Si  $p + 2q$  et  $s + 2t$  ne sont pas congrus modulo 3,  $K_{p,q} \cap K_{s,t} = 0$ . Dans le cas contraire, supposons que  $p + 2q \geq s + 2t$ . Alors,

1. Si  $(p, q) \preceq (s, t)$ ,  $K_{p,q} \cap K_{s,t} = K_{p,q}$ .
2. Si  $(p, q) \not\preceq (s, t)$ ,  $K_{p,q} \cap K_{s,t} = K_{m,n}$  avec  $m = \frac{4s+2t-p-2q}{3}$ ,  $n = \frac{2p+4q-2s-t}{3}$ .

**Remarque 2.3.12.** — On explique ici les hypothèses de la proposition 2.3.11. Pour  $p, q, s, t$  des nombres naturels tels que  $p + 2q \equiv s + 2t \pmod{3}$  et que  $p + 2q \geq s + 2t$ , on compare  $2p + q$  et  $2s + t$  :

1. Si  $2p + q \leq 2s + t$ ,  $K_{p,q} \cap K_{s,t} = K_{p,q}$ .
2. Si  $2p + q \geq 2s + t$ , cette intersection est  $K_{m,n}$  où

$$\begin{cases} m + 2n = p + 2q \\ 2m + n = 2s + t \end{cases} \iff \begin{cases} m = \frac{4s+2t-p-2q}{3} \\ n = \frac{2p+4q-2s-t}{3} \end{cases} .$$

On donne ici une illustration qui fait une partie des figures 2.2, 2.3 et 2.4 (page 68). La position de  $K_{p,q}$  par rapport à  $K_{s,t}$  dépend des conditions de la proposition :  $K_{p,q}$  est situé à droite de  $K_{s,t}$ .

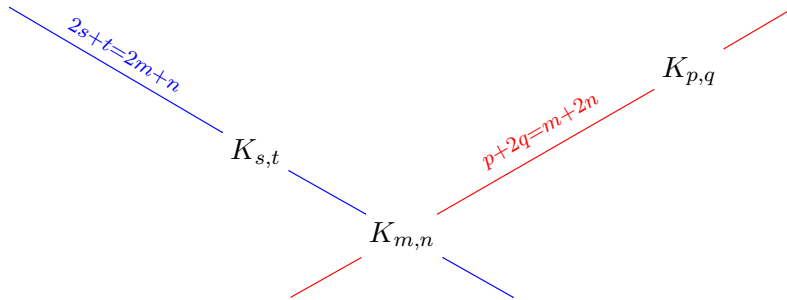


FIGURE 2.1 —  $K_{p,q} \cap K_{s,t} = K_{m,n}$ , où  $(p + 2q) - (s + 2t) = 3k \geq 0$  et  $(p, q) \not\preceq (s, t)$ .

*Démonstration de 2.3.11.* — Si  $p + 2q$  et  $s + 2t$  ne sont pas congrus modulo 3, le résultat se déduit de la décomposition par le poids du foncteur  $\mathcal{K}_2$ . Dans le cas contraire, le résultat correspondant au cas  $(p, q) \preceq (s, t)$  suit du lemme 2.3.10, il reste à considérer le cas où  $(p, q) \not\preceq (s, t)$ .

On observe d'abord que  $(m, n)$  est strictement plus petit que  $(p, q)$  et  $(s, t)$  par rapport à l'ordre partiel  $\preceq$ . On déduit du lemme 2.3.10 que  $K_{m,n}$  est un sous-foncteur de  $K_{p,q} \cap K_{s,t}$ . Il suffit alors de montrer la proposition par des arguments de dimension.

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie  $d$  quelconque. Fixons une base  $\{e_1, \dots, e_d\}$  de  $V$ . La base de  $K_{p,q}(V)$  est alors donnée par

$$\varepsilon_{p,q} = \{ (e_{k_1}) \cdots (e_{k_i})(e_{l_1})^2 \cdots (e_{l_j})^2 \mid k_1 < \dots < k_i, l_1 < \dots < l_j, (i, j) \preceq (p, q) \},$$

### 2.3. Structure du foncteur $\mathcal{K}_2$

et celle de  $K_{s,t}(V)$  est donnée par

$$\varepsilon_{s,t} = \{ (e_{k_1}) \cdots (e_{k_i})(e_{l_1})^2 \cdots (e_{l_j})^2 \mid k_1 < \dots < k_i, l_1 < \dots < l_j, (i, j) \preceq (s, t) \}.$$

On considère l'espace vectoriel  $K_{p,q}(V) + K_{s,t}(V)$ . Il est engendré par le système  $\varepsilon := \varepsilon_{p,q} \cup \varepsilon_{s,t}$ . L'isomorphisme (2.8) dit que le système  $\varepsilon$  est libre. Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} \dim(K_{p,q}(V) + K_{s,t}(V)) &= |\varepsilon_{p,q} \cup \varepsilon_{s,t}| \\ &= |\varepsilon_{p,q}| + |\varepsilon_{s,t}| - |\varepsilon_{p,q} \cap \varepsilon_{s,t}|. \\ &= \dim(K_{p,q}(V)) + \dim(K_{s,t}(V)) - |\varepsilon_{p,q} \cap \varepsilon_{s,t}|. \end{aligned}$$

Il en résulte que la dimension de  $K_{p,q}(V) \cap K_{s,t}(V)$  est égale au cardinal de l'ensemble  $\varepsilon_{p,q} \cap \varepsilon_{s,t}$  dont les éléments sont de la forme

$$(e_{k_1}) \cdots (e_{k_i})(e_{l_1})^2 \cdots (e_{l_j})^2,$$

où  $k_1 < \dots < k_i$ ,  $l_1 < \dots < l_j$ ,  $(i, j) \preceq (p, q)$  et  $(i, j) \preceq (s, t)$ . En utilisant la troisième assertion du lemme 2.3.6, on obtient l'équivalence suivante où les conditions de congruences sont satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i, j) \preceq (p, q) \\ (i, j) \preceq (s, t) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} i + 2j \geq p + 2q \\ 2i + j \leq 2p + q \\ i + 2j \geq s + 2t \\ 2i + j \leq 2s + t \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} i + 2j \geq p + 2q \\ 2i + j \leq 2s + t \end{array} \right\} \iff (i, j) \preceq (m, n).$$

Ceci implique que  $\varepsilon_{p,q} \cap \varepsilon_{s,t}$  est une base de  $K_{m,n}(V)$ . La proposition est démontrée.  $\square$

**Corollaire 2.3.13.** —  $K_{p,q} \cap K_{p+1,q+1} = K_{p-1,q+2}$ .

*Démonstration.* — On calcule pour le cas où  $(p+1) + 2(q+1) \equiv p + 2q \pmod{3}$ ,  $(p+1) + 2(q+1) \geq p + 2q$  et  $(p+1, q+1) \not\preceq (p, q)$ . On obtient que  $(m, n) = (p-1, q+2)$ .  $\square$

**Corollaire 2.3.14.** —  $K_{p,q} \hookrightarrow K_{s,t}$  si et seulement si  $(p, q) \preceq (s, t)$ .

*Démonstration.* — Si  $(p, q) \preceq (s, t)$ ,  $K_{p,q} \hookrightarrow K_{s,t}$  d'après le lemme 2.3.10. Si  $(p, q) \not\preceq (s, t)$ ,  $K_{p,q} \cap K_{s,t}$  est strictement plus petit que  $K_{p,q}$  d'après la proposition 2.3.11.  $\square$

**Proposition 2.3.15.** — Le foncteur  $\mathcal{K}_2$  est la limite inductive du système  $\{K_{p,q}\}$ .

*Démonstration.* — La limite inductive du système  $\{K_{p,q}\}$  est la somme  $\sum_{p,q} K_{p,q}$ . Elle est un sous-foncteur de  $\mathcal{K}_2$ .

D'autre part, soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie  $d$  quelconque. Rappelons que

$$\mathcal{K}_2(V) = S^*(J(V))/\mathcal{R}_2(V).$$

On fixe une base  $\{e_1, \dots, e_d\}$  de  $V$ . On déduit alors des relations (2.7) que l'espace vectoriel  $\mathcal{K}_2(V)$  est engendré par les éléments de la forme  $(e_{k_1}) \cdots (e_{k_i})(e_{l_1})^2 \cdots (e_{l_j})^2$ , où  $k_1 < \dots < k_i, l_1 < \dots < l_j, i \leq d$  et  $j \leq d$ . Ceci implique que  $\mathcal{K}_2(V)$  est un sous-espace vectoriel de  $\sum_{p,q \leq d} K_{p,q}(V) \subset \sum_{p,q} K_{p,q}(V)$ .

On obtient donc que  $\mathcal{K}_2(V) = \sum_{p,q} K_{p,q}(V)$  pour tout espace vectoriel de dimension finie  $V$ . Cela signifie également que  $\mathcal{K}_2 = \sum_{p,q} K_{p,q}$ . La proposition s'ensuit.  $\square$

**Remarque 2.3.16.** — On considère la décomposition par le poids du foncteur  $\mathcal{K}_2$  (voir à la page 63). En rappelant que  $(u)$  est un élément de degré  $\bar{2}$  de  $\mathcal{K}_2(V)$  pour tout  $u \in V$ , on en déduit que  $K_{p,q}$  est un sous-foncteur de  $\mathcal{K}_2^{\bar{k}}$  si et seulement si  $p + 2q \equiv k \pmod{3}$ .

On observe de plus que, si  $K_{p,q}$  est un sous-foncteur de  $\mathcal{K}_2^{\bar{k}}$ , le foncteur  $K_{s,t}$  est également un sous-foncteur de  $\mathcal{K}_2^{\bar{k}}$  pour tout  $(s, t) \preceq (p, q)$ . On a les diagrammes suivants, où les  $l_{\mathcal{D}_k}$  (resp.  $l_{\mathcal{D}_k}$ ) sont les lignes de base de déterminer la filtration croissante  $\mathcal{C}_*$  (resp. la filtration décroissante  $\mathcal{D}_*$ ) du foncteur  $\mathcal{K}_2$  (pour la définition des filtrations  $\mathcal{C}_*$  et  $\mathcal{D}_*$ , on renvoie aux sous-sections suivantes) :

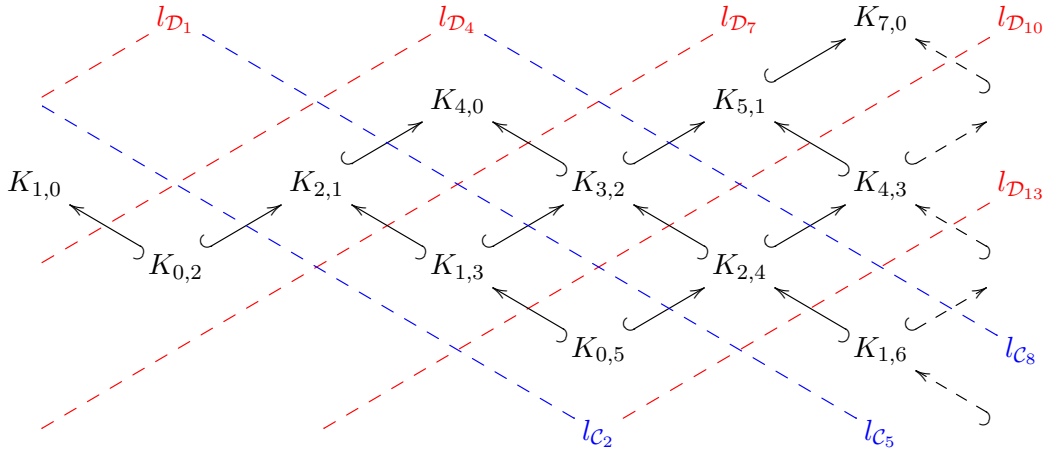


FIGURE 2.2 – Sous-foncteurs du foncteur  $\mathcal{K}_2^{\bar{2}} : V \mapsto K(2)^{\bar{2}}(BV^\#)$ ,

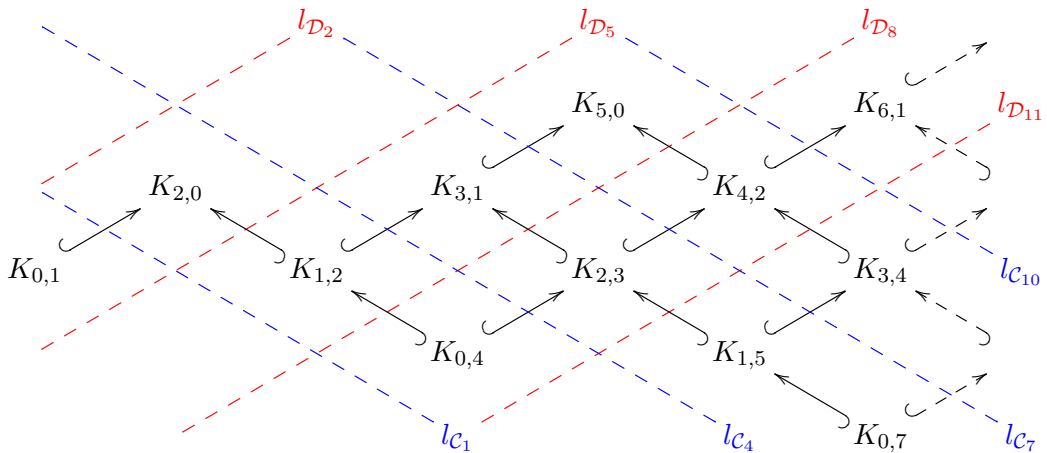
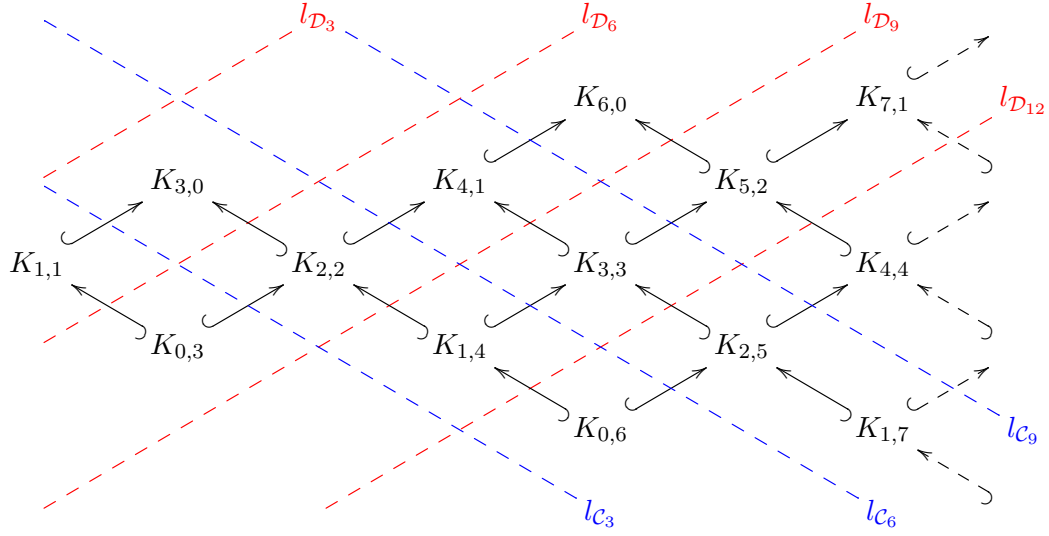


FIGURE 2.3 – Sous-foncteurs du foncteur  $\mathcal{K}_2^{\bar{4}} : V \mapsto K(2)^{\bar{4}}(BV^\#)$ ,



et

$$K_{0,0} = \mathbb{F}_2$$

FIGURE 2.4 – Sous-foncteurs du foncteur  $\mathcal{K}_2^{\bar{0}} : V \mapsto K(2)^{\bar{0}}(BV^{\#})$ .

**Remarque 2.3.17.** — Les résultats de cette section nous permet de définir des filtrations convergentes de  $\mathcal{K}_2$ . En effet, dans les sections suivantes, on va construire une filtration décroissante  $\{\mathcal{D}_k\}$  et une filtration croissante  $\{\mathcal{C}_k\}$  du foncteur  $\mathcal{K}_2$ . On en déduit ensuite une bi-filtration du foncteur  $\mathcal{K}_2$  dont les sous-quotients sont le produit tensoriel des puissances extérieures.

### 2.3.2 La filtration décroissante du foncteur $\mathcal{K}_2$

**Définition 2.3.18.** — Pour tout entier naturel  $k$ , on note  $\mathcal{D}_k$  la somme  $\sum_{p+2q \geq k} K_{p,q}$ . On obtient alors la **filtration décroissante** du foncteur  $\mathcal{K}_2$  :

$$\mathcal{K}_2 = \mathcal{D}_0 \supset \cdots \supset \mathcal{D}_k \supset \cdots .$$

La proposition 2.3.15 dit que cette filtration est *convergente*.

**Exemple 2.3.19.** — Grâce à la proposition 2.3.11, on peut déterminer l'intersection de  $\mathcal{D}_k$  et les composantes de la décomposition par le poids du foncteur  $\mathcal{K}_2$ . Par exemple,

- $\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{K}_2^{\bar{2}} = (K_{0,2} + K_{2,1} + K_{4,0}) + (K_{1,3} + K_{3,2} + K_{5,1} + K_{7,0}) + \cdots ,$
- $\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{K}_2^{\bar{4}} = (K_{1,2} + K_{3,1} + K_{5,0}) + (K_{0,4} + K_{2,3} + K_{4,2} + K_{6,1} + K_{8,0}) + \cdots ,$
- $\mathcal{D}_3 \cap \mathcal{K}_2^{\bar{0}} = (K_{1,1} + K_{3,0}) + (K_{0,3} + K_{2,2} + K_{4,1} + K_{6,0}) + \cdots .$

En général, on a l'illustration suivante de  $\mathcal{D}_k$  (cf. les figures 2.2, 2.3 et 2.4) :

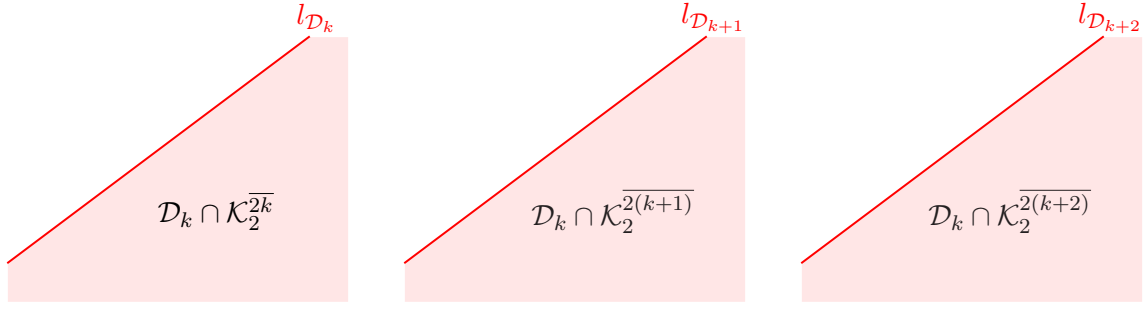


FIGURE 2.5 –  $\mathcal{D}_k = \left( \mathcal{D}_k \cap \mathcal{K}_2^{2k} \right) \oplus \left( \mathcal{D}_k \cap \mathcal{K}_2^{2(k+1)} \right) \oplus \left( \mathcal{D}_k \cap \mathcal{K}_2^{2(k+2)} \right)$ .

On a le résultat suivant sur les quotients successifs de la filtration décroissante  $\{\mathcal{D}_k\}$ .

**Proposition 2.3.20.** — On a

$$\mathcal{D}_n / \mathcal{D}_{n+1} \cong K_{n,0} / K_{n-1,2}.$$

*Démonstration.* — En utilisant la décomposition par le poids du foncteur  $\mathcal{K}_2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}_n}{\mathcal{D}_{n+1}} &= \frac{\mathcal{D}_n \cap \mathcal{K}_2^{2n}}{\mathcal{D}_{n+1} \cap \mathcal{K}_2^{2n}} \oplus \frac{\mathcal{D}_n \cap \mathcal{K}_2^{2n+2}}{\mathcal{D}_{n+1} \cap \mathcal{K}_2^{2n+2}} \oplus \frac{\mathcal{D}_n \cap \mathcal{K}_2^{2n+4}}{\mathcal{D}_{n+1} \cap \mathcal{K}_2^{2n+4}} \\ &= \frac{\mathcal{D}_n \cap \mathcal{K}_2^{2n}}{\mathcal{D}_{n+3} \cap \mathcal{K}_2^{2n}} \oplus \frac{\mathcal{D}_{n+1} \cap \mathcal{K}_2^{2n+2}}{\mathcal{D}_{n+1} \cap \mathcal{K}_2^{2n+2}} \oplus \frac{\mathcal{D}_{n+2} \cap \mathcal{K}_2^{2n+4}}{\mathcal{D}_{n+2} \cap \mathcal{K}_2^{2n+4}} \\ &= \frac{K_{n,0}}{K_{n-1,2}} \oplus 0 \oplus 0. \end{aligned}$$

La proposition est démontrée. □

D'après la définition 2.3.2, on a l'épimorphisme

$$\theta^{n,0} : T^n \circ J \longrightarrow K_{n,0}.$$

On considère le foncteur  $J_2$  de la filtration décroissante de  $J$  (voir la proposition 1.1.40). On rappelle que pour tout espace vectoriel  $V$  de dimension finie, le sous-espace vectoriel  $J_2(V)$  de  $J(V)$  est engendré par les éléments de la forme  $(u + v) + (u) + (v)$  pour  $u, v$  quelconques dans  $V$ . On considère encore le morphisme composé de  $\theta_V^{n,0}$  par la projection  $K_{n,0}(V) \rightarrow K_{n,0}(V) / K_{n-1,2}(V)$ . L'image de  $(J(V))^{\otimes(n-1)} \otimes J_2(V)$  par ce morphisme est nulle puisque  $K_{n-1,2}(V)$  est engendré par les éléments de la forme

$$(u_1) \cdots (u_{n-1})((u_n + u'_n) + (u_n) + (u'_n)).$$

En remarquant que  $J/J_2 = J_1/J_2 \cong \Lambda^1 \cong \text{Id}$ , le morphisme composé ci-dessus induit alors

### 2.3. Structure du foncteur $\mathcal{K}_2$

un épimorphisme de  $(T^{n-1} \circ J) \otimes \text{Id}$  dans  $K_{n,0}$ . Par récurrence, on obtient l'épimorphisme

$$T^n \longrightarrow K_{n,0}/K_{n-1,2}.$$

Il se factorise ensuite à travers  $S^n$  grâce à la commutativité du produit de  $\mathcal{K}_2(V)$ . Rappelons que  $S_4^n$  le foncteur puissance symétrique tronquée qui est défini par le conoyau de la composée

$$S^{n-4} \otimes S^1 \xrightarrow{1 \otimes \phi} S^{n-4} \otimes S^4 \xrightarrow{\text{produit}} S^n$$

où  $\phi: S^1 \rightarrow S^4$  est le morphisme de Frobenius (voir l'exemple 1.1.7). Comme on a  $(v)^4 = 0$  dans  $\mathcal{K}_2(V)$  pour tout  $v \in V$ , l'épimorphisme

$$S^n \longrightarrow K_{n,0}/K_{n-1,2}$$

se factorise alors à travers  $S_4^n$ .

**Théorème 2.3.21.** — *L'épimorphisme naturel*

$$S_4^n \longrightarrow K_{n,0}/K_{n-1,2}$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — On montre le théorème par un argument de dimensions. Supposons que  $V$  est un espace vectoriel de dimension  $d$ . Grâce au corollaire 2.3.8, on peut calculer

$$\dim(K_{n,0}(V)/K_{n-1,2}(V)) = \sum_{i+2j=n} \binom{d}{i} \binom{d}{j}.$$

Ce résultat est exactement la dimension de l'espace vectoriel  $S_4^n(V)$ . Le théorème s'ensuit.  $\square$

#### 2.3.3 La bi-filtration du foncteur $\mathcal{K}_2$

**Définition 2.3.22.** — En définissant  $\mathcal{C}_k := \sum_{2p+q \leq k} K_{p,q}$ , on obtient alors la **filtration croissante** du foncteur  $\mathcal{K}_2$  :

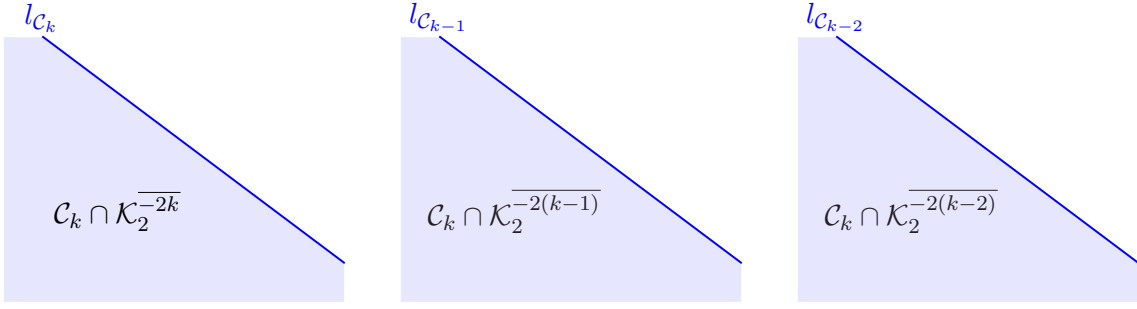
$$\mathcal{C}_0 \subset \dots \subset \mathcal{C}_k \subset \dots \subset \mathcal{K}_2.$$

On en déduit la **bi-filtration**  $\{\mathcal{F}_{s,t}\}_{s,t \geq 0}$  de  $\mathcal{K}_2$  où  $\mathcal{F}_{s,t} := \mathcal{C}_s \cap \mathcal{D}_t$ . Cette bi-filtration satisfait que  $\mathcal{F}_{s,t} \subset \mathcal{F}_{s',t'}$  si  $s \leq s'$  et  $t \geq t'$ . Le **gradué** associé à cette bi-filtration est défini par

$$\text{gr } \mathcal{K}_2 := \bigoplus_{s,t} \text{gr}_{s,t} \mathcal{K}_2, \quad \text{gr}_{s,t} \mathcal{K}_2 := \frac{\mathcal{F}_{s,t}}{\mathcal{F}_{s-1,t} + \mathcal{F}_{s,t+1}}.$$

On a l'illustration suivante de  $\mathcal{C}_k$  (cf. les figures 2.2, 2.3 et 2.4) :




 FIGURE 2.6 –  $\mathcal{C}_k = \left( \mathcal{C}_k \cap \mathcal{K}_2^{-2k} \right) \oplus \left( \mathcal{C}_k \cap \mathcal{K}_2^{-2(k-1)} \right) \oplus \left( \mathcal{C}_k \cap \mathcal{K}_2^{-2(k-2)} \right)$ .

**Définition 2.3.23.** — A partir des filtrations du foncteur  $\mathcal{K}_2$ , on peut former les filtrations des composantes  $\mathcal{K}_2^{\overline{2k}}$  de la décomposition par le poids de  $\mathcal{K}_2$  :

- La filtration croissante de  $\mathcal{K}_2^{\overline{2}}$  est  $\{\mathcal{C}_s^{\overline{2}} = \mathcal{C}_{3s+2} \cap \mathcal{K}_2^{\overline{2}}\}_{s \geq 0}$ , la filtration décroissante de celui est  $\{\mathcal{D}_t^{\overline{2}} = \mathcal{D}_{3t+1} \cap \mathcal{K}_2^{\overline{2}}\}_{t \geq 0}$ . La bi-filtration de celui est alors  $\{\mathcal{F}_{s,t}^{\overline{2}} = \mathcal{C}_s^{\overline{2}} \cap \mathcal{D}_t^{\overline{2}}\}_{s,t \geq 0}$ .
- La filtration croissante de  $\mathcal{K}_2^{\overline{4}}$  est  $\{\mathcal{C}_s^{\overline{4}} = \mathcal{C}_{3s+1} \cap \mathcal{K}_2^{\overline{4}}\}_{s \geq 0}$ , la filtration décroissante de celui est  $\{\mathcal{D}_t^{\overline{4}} = \mathcal{D}_{3t+2} \cap \mathcal{K}_2^{\overline{4}}\}_{t \geq 0}$ . La bi-filtration de celui est alors  $\{\mathcal{F}_{s,t}^{\overline{4}} = \mathcal{C}_s^{\overline{4}} \cap \mathcal{D}_t^{\overline{4}}\}_{s,t \geq 0}$ .
- La filtration croissante de  $\mathcal{K}_2^{\overline{0}}$  est  $\{\mathcal{C}_s^{\overline{0}} = \mathcal{C}_{3s} \cap \mathcal{K}_2^{\overline{0}}\}_{s \geq 0}$ , la filtration décroissante de celui est  $\{\mathcal{D}_t^{\overline{0}} = \mathcal{D}_{3t} \cap \mathcal{K}_2^{\overline{0}}\}_{t \geq 0}$ . La bi-filtration de celui est alors  $\{\mathcal{F}_{s,t}^{\overline{0}} = \mathcal{C}_s^{\overline{0}} \cap \mathcal{D}_t^{\overline{0}}\}_{s,t \geq 0}$ .

**Convention 2.3.24.** — On convient dans les résultats suivants que si  $s < 0$  ou  $t < 0$ , alors  $K_{s,t} = 0$ ,  $\mathcal{C}_s = 0$ ,  $\mathcal{D}_t = 0$ ,  $\mathcal{F}_{s,t} = 0$ ,  $\mathcal{C}_s^{\overline{2k}} = 0$ ,  $\mathcal{D}_t^{\overline{2k}} = 0$  et  $\mathcal{F}_{s,t}^{\overline{2k}} = 0$ .

**Proposition 2.3.25.** — Pour  $s, t$  deux entiers naturels quelconques, on a

1.  $\mathcal{F}_{s,t}^{\overline{0}} = K_{2s-t, 2t-s}$ ,
2.  $\mathcal{F}_{s,t}^{\overline{2}} = K_{2s-t+1, 2t-s}$ ,
3.  $\mathcal{F}_{s,t}^{\overline{4}} = K_{2s-t, 2t-s+1}$ .

*Démonstration.* — En utilisant le résultat 2.3.11, on peut déterminer l'intersection de  $\mathcal{C}_a$ ,  $\mathcal{D}_b$  et  $\mathcal{K}_2^{\overline{2k}}$  pour le cas où  $a \equiv (-b) \equiv k \pmod{3}$ . En effet,

$$\mathcal{C}_a \cap \mathcal{D}_b \cap \mathcal{K}_2^{\overline{2k}} = K_{p,q} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 2p + q = a \\ p + 2q = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = (2a - b)/3 \\ q = (2b - a)/3 \end{cases}.$$

La proposition se déduit alors de la définition des  $\mathcal{F}_{s,t}^{\overline{2k}}$ . □

**Corollaire 2.3.26.** — Pour  $p, q$  deux entiers naturels quelconques, supposons que  $p+2q \equiv k \pmod{3}$  avec  $k \in \{0, 1, 2\}$ . On a  $K_{p,q} = \mathcal{F}_{s,t}^{\overline{2k}}$  où :

1. Si  $k = 0$ , alors  $s = (2p + q)/3$  et  $t = (p + 2q)/3$ .
2. Si  $k = 1$ , alors  $s = (2p + q - 2)/3$  et  $t = (p + 2q - 1)/3$ .
3. Si  $k = 2$ , alors  $s = (2p + q - 1)/3$  et  $t = (p + 2q - 2)/3$ .

### 2.3. Structure du foncteur $\mathcal{K}_2$

*Démonstration.* — Le corollaire découle de la proposition 2.3.25 par calcul direct.  $\square$

**Corollaire 2.3.27.** — Pour tous  $p, q \in \mathbb{N}$ , on a

$$\frac{K_{p,q}}{K_{p-2,q+1} + K_{p-1,q+2}} = \text{gr}_{s,t} \mathcal{K}_2^{2k}$$

où les nombres  $k, s, t$  sont déterminés dans le corollaire 2.3.26.

*Démonstration.* — Le résultat se déduit directement du corollaire 2.3.26.  $\square$

**Remarque 2.3.28.** — On a la décomposition suivante :

$$\mathcal{F}_{s,t} = \mathcal{C}_s \cap \mathcal{D}_t = (\mathcal{C}_s \cap \mathcal{D}_t \cap \mathcal{K}_2^{\bar{0}}) \oplus (\mathcal{C}_s \cap \mathcal{D}_t \cap \mathcal{K}_2^{\bar{2}}) \oplus (\mathcal{C}_s \cap \mathcal{D}_t \cap \mathcal{K}_2^{\bar{4}}).$$

De plus, l'intersection de  $\mathcal{C}_s$ ,  $\mathcal{D}_t$  et  $\mathcal{K}_2^{2k}$  peut être déterminée à l'aide de la proposition 2.3.25 et des tableaux suivants où on convient que  $\mathcal{C}_r = 0$  et  $\mathcal{D}_r = 0$  si  $r < 0$  :

	$\mathcal{C}_s$
$\mathcal{K}_2^{\bar{0}}$	$\mathcal{C}_{3r} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{0}} = \mathcal{C}_{3r+1} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{0}} = \mathcal{C}_{3r+2} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{0}} = \mathcal{C}_r^{\bar{0}}$
$\mathcal{K}_2^{\bar{2}}$	$\mathcal{C}_{3r+2} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{2}} = \mathcal{C}_{3r+3} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{2}} = \mathcal{C}_{3r+4} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{2}} = \mathcal{C}_r^{\bar{2}}$
$\mathcal{K}_2^{\bar{4}}$	$\mathcal{C}_{3r+1} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{4}} = \mathcal{C}_{3r+2} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{4}} = \mathcal{C}_{3r+3} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{4}} = \mathcal{C}_r^{\bar{4}}$

FIGURE 2.7 –  $\mathcal{C}_s \cap \mathcal{K}_2^{2k}$ ,

	$\mathcal{D}_t$
$\mathcal{K}_2^{\bar{0}}$	$\mathcal{D}_{3r-2} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{0}} = \mathcal{D}_{3r-1} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{0}} = \mathcal{D}_{3r} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{0}} = \mathcal{D}_r^{\bar{0}}$
$\mathcal{K}_2^{\bar{2}}$	$\mathcal{D}_{3r-1} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{2}} = \mathcal{D}_{3r} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{2}} = \mathcal{D}_{3r+1} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{2}} = \mathcal{D}_r^{\bar{2}}$
$\mathcal{K}_2^{\bar{4}}$	$\mathcal{D}_{3r} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{4}} = \mathcal{D}_{3r+1} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{4}} = \mathcal{D}_{3r+2} \cap \mathcal{K}_2^{\bar{4}} = \mathcal{D}_r^{\bar{4}}$

FIGURE 2.8 –  $\mathcal{D}_t \cap \mathcal{K}_2^{2k}$ .

On peut donc décomposer  $\mathcal{F}_{s,t}$  en somme directe des  $K_{p,q}$ .

**Exemple 2.3.29.** — On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{7,5} &= \mathcal{C}_7 \cap \mathcal{D}_5 \\ &= \left( (\mathcal{C}_7 \cap \mathcal{D}_5) \cap \mathcal{K}_2^{\bar{0}} \right) \oplus \left( (\mathcal{C}_7 \cap \mathcal{D}_5) \cap \mathcal{K}_2^{\bar{2}} \right) \oplus \left( (\mathcal{C}_7 \cap \mathcal{D}_5) \cap \mathcal{K}_2^{\bar{4}} \right) \\ &= \left( (\mathcal{C}_6 \cap \mathcal{D}_6) \cap \mathcal{K}_2^{\bar{0}} \right) \oplus \left( (\mathcal{C}_5 \cap \mathcal{D}_7) \cap \mathcal{K}_2^{\bar{2}} \right) \oplus \left( (\mathcal{C}_7 \cap \mathcal{D}_5) \cap \mathcal{K}_2^{\bar{4}} \right) \\ &= K_{2,2} \oplus K_{1,3} \oplus K_{3,1}. \end{aligned}$$

On peut de plus comprendre le gradué associé à la bi-filtration  $\{\mathcal{F}_{s,t}\}_{s,t \geq 1}$  en comprenant ceux des foncteurs  $\mathcal{K}_2^{2k}$  pour  $0 \leq k \leq 2$ .

**Proposition 2.3.30.** — Soient  $p, q$  deux entiers naturels quelconques.

1. Si  $(p + q)$  n'est pas divisible par 3, alors  $\mathrm{gr}_{p,q}\mathcal{K}_2$  est nul.
2. Si  $(p + q)$  est un multiple de 3,  $(p, q)$  est d'une des trois formes  $(3s, 3t)$ ,  $(3s + 2, 3t + 1)$  ou  $(3s + 1, 3t + 2)$ . Alors,  $\mathrm{gr}_{p,q}\mathcal{K}_2 = \mathrm{gr}_{s,t}\mathcal{K}_2^{\overline{2q}}$ .

*Démonstration.* — On a

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}_{p,q}\mathcal{K}_2 &= \frac{\mathcal{F}_{p,q}}{\mathcal{F}_{p-1,q} + \mathcal{F}_{p,q+1}} \\ &= \frac{\mathcal{C}_p \cap \mathcal{D}_q}{\mathcal{C}_{p-1} \cap \mathcal{D}_q + \mathcal{C}_p \cap \mathcal{D}_{q+1}} \\ &= \frac{\mathcal{C}_p \cap \mathcal{D}_q \cap \mathcal{K}_2^{\overline{0}}}{\mathcal{C}_{p-1} \cap \mathcal{D}_q \cap \mathcal{K}_2^{\overline{0}} + \mathcal{C}_p \cap \mathcal{D}_{q+1} \cap \mathcal{K}_2^{\overline{0}}} \oplus \frac{\mathcal{C}_p \cap \mathcal{D}_q \cap \mathcal{K}_2^{\overline{2}}}{\mathcal{C}_{p-1} \cap \mathcal{D}_q \cap \mathcal{K}_2^{\overline{2}} + \mathcal{C}_p \cap \mathcal{D}_{q+1} \cap \mathcal{K}_2^{\overline{2}}} \\ &\quad \oplus \frac{\mathcal{C}_p \cap \mathcal{D}_q \cap \mathcal{K}_2^{\overline{4}}}{\mathcal{C}_{p-1} \cap \mathcal{D}_q \cap \mathcal{K}_2^{\overline{4}} + \mathcal{C}_p \cap \mathcal{D}_{q+1} \cap \mathcal{K}_2^{\overline{4}}}. \end{aligned}$$

Supposons que  $(p + q)$  n'est pas divisible par 3. Alors  $(p, q)$  n'est pas de la forme  $(3s, 3t)$ . Si  $p \neq 3s$ , on a  $\mathcal{C}_p \cap \mathcal{D}_q \cap \mathcal{K}_2^{\overline{0}} = \mathcal{C}_{p-1} \cap \mathcal{D}_q \cap \mathcal{K}_2^{\overline{0}}$  (cf. la figure 2.7). Si  $q \neq 3t$ , on a  $\mathcal{C}_p \cap \mathcal{D}_q \cap \mathcal{K}_2^{\overline{0}} = \mathcal{C}_p \cap \mathcal{D}_{q+1} \cap \mathcal{K}_2^{\overline{0}}$  (cf. la figure 2.8). Ainsi,  $(\mathcal{C}_p \cap \mathcal{D}_q \cap \mathcal{K}_2^{\overline{0}}) / (\mathcal{C}_{p-1} \cap \mathcal{D}_q \cap \mathcal{K}_2^{\overline{0}} + \mathcal{C}_p \cap \mathcal{D}_{q+1} \cap \mathcal{K}_2^{\overline{0}})$  est nul. De la même manière, on peut montrer que les autres facteurs directs de  $\mathrm{gr}_{p,q}\mathcal{K}_2$  sont nuls. Il en résulte que  $\mathrm{gr}_{p,q}\mathcal{K}_2$  est nul si  $(p + q)$  n'est pas divisible par 3.

Si  $(p + q)$  est un multiple de 3, on calcule de manière analogue pour obtenir les cas suivants :

- Si  $p = 3s$  et  $q = 3t$ ,  $\mathrm{gr}_{p,q}\mathcal{K}_2 = \mathrm{gr}_{s,t}\mathcal{K}_2^{\overline{0}}$ ,
- Si  $p = 3s + 2$  et  $q = 3t + 1$ ,  $\mathrm{gr}_{p,q}\mathcal{K}_2 = \mathrm{gr}_{s,t}\mathcal{K}_2^{\overline{2}}$ ,
- Si  $p = 3s + 1$  et  $q = 3t + 2$ ,  $\mathrm{gr}_{p,q}\mathcal{K}_2 = \mathrm{gr}_{s,t}\mathcal{K}_2^{\overline{4}}$ .

Le deuxième point de la proposition s'ensuit. □

Considérons les exemples suivantes :

**Exemple 2.3.31.** — On a

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}_{4,7}\mathcal{K}_2 &= \frac{\mathcal{F}_{4,7}}{\mathcal{F}_{3,7} + \mathcal{F}_{4,8}} \\ &= \frac{\mathcal{C}_4 \cap \mathcal{D}_7}{\mathcal{C}_3 \cap \mathcal{D}_7 + \mathcal{C}_4 \cap \mathcal{D}_8} \\ &= \frac{\mathcal{C}_0^{\overline{2}} \cap \mathcal{D}_2^{\overline{2}}}{(\mathcal{C}_0^{\overline{2}} \cap \mathcal{D}_2^{\overline{2}}) + (\mathcal{C}_0^{\overline{2}} \cap \mathcal{D}_3^{\overline{2}})} \oplus \frac{\mathcal{C}_1^{\overline{4}} \cap \mathcal{D}_2^{\overline{4}}}{(\mathcal{C}_0^{\overline{4}} \cap \mathcal{D}_2^{\overline{4}}) + (\mathcal{C}_1^{\overline{4}} \cap \mathcal{D}_2^{\overline{4}})} \oplus \frac{\mathcal{C}_0^{\overline{0}} \cap \mathcal{D}_2^{\overline{0}}}{(\mathcal{C}_0^{\overline{0}} \cap \mathcal{D}_2^{\overline{0}}) + (\mathcal{C}_0^{\overline{0}} \cap \mathcal{D}_2^{\overline{0}})} \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Exemple 2.3.32.** — On a

$$\begin{aligned}
 \mathrm{gr}_{7,5}\mathcal{K}_2 &= \frac{\mathcal{F}_{7,5}}{\mathcal{F}_{6,5} + \mathcal{F}_{7,6}} \\
 &= \frac{\mathcal{C}_7 \cap \mathcal{D}_5}{\mathcal{C}_6 \cap \mathcal{D}_5 + \mathcal{C}_7 \cap \mathcal{D}_6} \\
 &= \frac{\mathcal{C}_1^{\bar{2}} \cap \mathcal{D}_2^{\bar{2}}}{\left(\mathcal{C}_1^{\bar{2}} \cap \mathcal{D}_2^{\bar{2}}\right) + \left(\mathcal{C}_1^{\bar{2}} \cap \mathcal{D}_2^{\bar{2}}\right)} \oplus \frac{\mathcal{C}_2^{\bar{4}} \cap \mathcal{D}_1^{\bar{4}}}{\left(\mathcal{C}_1^{\bar{4}} \cap \mathcal{D}_1^{\bar{4}}\right) + \left(\mathcal{C}_2^{\bar{4}} \cap \mathcal{D}_2^{\bar{4}}\right)} \oplus \frac{\mathcal{C}_1^{\bar{0}} \cap \mathcal{D}_1^{\bar{0}}}{\left(\mathcal{C}_1^{\bar{0}} \cap \mathcal{D}_1^{\bar{0}}\right) + \left(\mathcal{C}_1^{\bar{0}} \cap \mathcal{D}_1^{\bar{0}}\right)} \\
 &= \frac{\mathcal{C}_2^{\bar{4}} \cap \mathcal{D}_1^{\bar{4}}}{\left(\mathcal{C}_1^{\bar{4}} \cap \mathcal{D}_1^{\bar{4}}\right) + \left(\mathcal{C}_2^{\bar{4}} \cap \mathcal{D}_2^{\bar{4}}\right)} \\
 &= \mathrm{gr}_{2,1}\mathcal{K}_2^{\bar{4}} = \frac{K_{3,1}}{K_{1,2} + K_{2,3}}.
 \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.3.30 et le corollaire 2.3.27, pour comprendre le gradué associé à la bi-filtration  $\{\mathcal{F}_{s,t}\}_{s,t \geq 1}$  de  $\mathcal{K}_2$ , il reste à décrire les quotients

$$\frac{K_{p,q}}{K_{p-2,q+1} + K_{p-1,q+2}}.$$

On considère maintenant l'épimorphisme

$$\theta^{p,q}: (\mathbb{T}^p \circ J) \otimes \Lambda^q \longrightarrow K_{p,q},$$

et on le compose avec la projection de  $K_{p,q}$  vers  $K_{p,q}/(K_{p-2,q+1} + K_{p-1,q+2})$ . De manière analogue à la section précédente (voir à la page 70), on peut montrer que l'épimorphisme composé ci-dessus se factorise à travers  $(\mathbb{T}^{p-1} \circ J) \otimes \mathrm{Id} \otimes \Lambda^q$ . Par récurrence, on obtient un épimorphisme

$$\mathbb{T}^p \otimes \Lambda^q \longrightarrow \frac{K_{p,q}}{K_{p-2,q+1} + K_{p-1,q+2}}.$$

Ce morphisme se factorise à travers  $S^p \otimes \Lambda^q$  grâce à la commutativité du produit de  $\mathcal{K}_2(V)$  pour  $V$  un espace vectoriel de dimension finie quelconque. De plus, on observe que tous les éléments de la forme  $(u_1) \cdots (u_p)(v_1)^2 \cdots (v_q)^2$ , où il existe  $1 \leq i < j \leq p$  tels que  $u_i = u_j$ , sont dans  $K_{p-2,q+1}(V)$ . L'épimorphisme de  $S^p \otimes \Lambda^q$  vers  $K_{p,q}/(K_{p-2,q+1} + K_{p-1,q+2})$  se factorise ainsi à travers  $\Lambda^p \otimes \Lambda^q$  puisque  $\Lambda^p = S^p/(x^2 = 0)$ .

**Théorème 2.3.33.** — *Le morphisme  $\theta^{p,q}$  induit une équivalence naturelle*

$$\Theta^{p,q}: \Lambda^p \otimes \Lambda^q \longrightarrow \frac{K_{p,q}}{K_{p-2,q+1} + K_{p-1,q+2}}$$

*Démonstration.* — Pour  $V$  un espace vectoriel de dimension finie quelconque, le morphisme  $\Theta_V^{p,q}$  est un épimorphisme d'après la construction ci-dessus. On va ensuite montrer que la dimension du but est égale à celle de la source.

Si  $V$  est un espace vectoriel de dimension  $d < \max\{p, q\}$ , alors  $\Lambda^p(V) \otimes \Lambda^q(V) = 0$ , on

n'a rien à faire.

Supposons que  $d \geq p$  et  $d \geq q$ . A la suite du corollaire 2.3.13, on a

$$\begin{aligned} & \dim(K_{p-2,q+1}(V) + K_{p-1,q+2}(V)) \\ &= \dim(K_{p-2,q+1}(V)) + \dim(K_{p-1,q+2}(V)) - \dim(K_{p-2,q+1}(V) \cap K_{p-1,q+2}(V)) \\ &= \dim(K_{p-2,q+1}(V)) + \dim(K_{p-1,q+2}(V)) - \dim(K_{p-3,q+3}(V)). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} & \dim \frac{K_{p,q}(V)}{K_{p-2,q+1}(V) + K_{p-1,q+2}(V)} \\ &= \dim(K_{p,q}(V)) - \dim(K_{p-2,q+1}(V)) - \dim(K_{p-1,q+2}(V)) + \dim(K_{p-3,q+3}(V)). \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 2.3.8, on obtient que  $K_{p,q}(V)/(K_{p-2,q+1}(V) + K_{p-1,q+2}(V))$  est de dimension  $\binom{d}{p} \binom{d}{q}$  qui est exactement la dimension de  $\Lambda^p(V) \otimes \Lambda^q(V)$ . Le théorème est démontré.  $\square$

**Corollaire 2.3.34.** — Soit  $k \in \mathbb{N}$ , et soit  $n = 2k$  ou  $n = 2k + 1$ . Le foncteur puissance symétrique tronquée  $S_4^n$  admet une filtration

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{k+1} = S_4^n$$

telle que  $F_i/F_{i-1} = \Lambda^{n-2(k-i+1)} \otimes \Lambda^{k-i+1}$ .

*Démonstration.* — En posant

$$F_i = \frac{K_{n-2k+2i-2,k-i+1}}{K_{n-2k+2i-3,k-i+3}},$$

on obtient une inclusion canonique de  $F_{i-1}$  dans  $F_i$  pour  $0 \leq i \leq k+1$ . De plus, à la suite du théorème 2.3.21, on a  $F_{k+1} = S_4^n$ . On en déduit une filtration de  $S_4^n$  :

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{k+1} = S_4^n.$$

Ses quotients successifs sont :

$$\begin{aligned} F_i/F_{i-1} &= \frac{K_{n-2k+2i-2,k-i+1}}{K_{n-2k+2i-3,k-i+3}} \bigg/ \frac{K_{n-2k+2i-4,k-i+2}}{K_{n-2k+2i-5,k-i+4}} \\ &= \frac{K_{n-2k+2i-2,k-i+1}}{K_{n-2k+2i-3,k-i+3} + K_{n-2k+2i-4,k-i+2}} \\ &= \Lambda^{n-2(k-i+1)} \otimes \Lambda^{k-i+1} \quad (\text{d'après le théorème 2.3.33}). \end{aligned}$$

Le corollaire est démontré.  $\square$

**Corollaire 2.3.35.** — Soit  $k \in \mathbb{N}$ , et soit  $n = 2k$  ou  $n = 2k + 1$ . La filtration du foncteur

## 2.4. Auto-dualité du foncteur $\mathcal{K}_2$

$S_4^n$  introduite dans le corollaire 2.3.34 est la filtration polynomiale. En effet,

$$t_i(S_4^n) = \begin{cases} S_4^n & i > n, \\ F_{i-n+k+1} & n-k \leq i \leq n, \\ 0 & 0 \leq i < n-k. \end{cases}$$

*Démonstration.* — On observe d'abord que  $S_4^n$  est un foncteur polynomial de degré  $n$ . Alors,  $t_i(S_4^n) = S_4^n$  si  $i \geq n$ .

On démontre ensuite par récurrence que, pour  $1 \leq i \leq k+1$ ,  $F_i$  est un foncteur polynomial de degré  $(i+n-k-1)$ . En effet, le foncteur  $F_1 = \Lambda^{n-2k} \otimes \Lambda^k$  est polynomial de degré  $(n-k)$ . Supposons que le foncteur  $F_{i-1}$  est polynomial de degré  $(i+n-k-2)$  pour  $1 < i \leq k+1$ . On utilise la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow F_i \longrightarrow \Lambda^{n-2(k-i+1)} \otimes \Lambda^{k-i+1} \longrightarrow 0$$

pour conclure que  $F_i$  est un foncteur polynomial de degré  $(i+n-k-1)$ .

Supposons que  $F_i \neq t_{i+n-k-1}(S_4^n)$ . Alors,  $t_{i+n-k-1}(S_4^n)/F_i$  est un sous-foncteur non-trivial du foncteur  $F_{i+1}/F_i \cong \Lambda^{n-2(k-i)} \otimes \Lambda^{k-i}$  qui est polynomial homogène de degré  $(i+n-k)$ . Le foncteur  $t_{i+n-k-1}(S_4^n)/F_i$  est donc polynomial de degré  $(i+n-k)$ . Il en résulte que  $t_{i+n-k-1}(S_4^n)$  est un foncteur polynomial de degré  $(i+n-k)$ . On obtient une contradiction.

Les foncteurs  $t_i(S_4^n)$  sont nuls pour tout  $0 \leq i < n-k$  puisque le foncteur  $t_{n-k}(S_4^n) = F_1 = \Lambda^{n-2k} \otimes \Lambda^k$  est polynomial homogène de degré  $(n-k)$ .  $\square$

**Remarque 2.3.36.** — En passant au quotient par la relation  $x^4 = 0$ , la filtration polynomiale du foncteur puissance symétrique  $S^n$  donnée dans [Tro02, §1.5.3] induit la filtration polynomiale de  $S_4^n$ . Elle est identique avec la filtration donnée dans le corollaire ci-dessus.

## 2.4 Auto-dualité du foncteur $\mathcal{K}_2$

Dans cette section, on va montrer que le foncteur  $\mathcal{K}_2$  est auto-dual. Tout d'abord, on introduit la définition de foncteur auto-dual.

### 2.4.1 Foncteur auto-dual

Soit  $F$  un objet quelconque de la catégorie  $\mathcal{F}$ , i.e. un foncteur de la catégorie  $\mathcal{V}$  des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels de dimension finie vers la catégorie **Vect** des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels. Le foncteur dual  $F^\natural$  de  $F$  est défini par  $F^\natural(V) = F(V^\natural)^\natural$ . On rappelle de la définition 1.1.12 que :

**Définition 1.1.12.** — Le foncteur  $F$  est appelé *auto-dual* s'il existe une équivalence naturelle  $\gamma_F: F \xrightarrow{\cong} F^\natural$  qui vérifie  $\gamma_F^\natural \circ \eta_F = \gamma_F$ , où la transformation naturelle  $\gamma_F^\natural: (F^\natural)^\natural \rightarrow F^\natural$  est induite par  $\gamma_F$ , et  $\eta_F$  est la transformation canonique de  $F$  dans son bidual.

D'autre part, en posant  $\langle x, \alpha \rangle_V := (\gamma_F)_V(x)(\alpha)$  pour  $V \in \mathcal{V}$ ,  $x \in F(V)$  et  $\alpha \in F(V^\sharp)$ , on a la définition suivante qui est équivalente à la définition 1.1.12.

**Définition 2.4.1.** — Le foncteur  $F$  est auto-dual s'il existe pour tout  $V$  une forme bilinéaire non dégénérée  $\langle -, - \rangle_V : F(V) \times F(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$  qui vérifie que :

( $\mathcal{A}_1$ ) Soient  $V, W$  deux  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels quelconques et soit  $\varphi$  dans  $\text{Hom}(V, W)$ . Alors  $\langle x, F(\varphi^\sharp)(\alpha) \rangle_V = \langle F(\varphi)(x), \alpha \rangle_W$  pour tout  $x \in F(V)$  et tout  $\alpha \in F(W^\sharp)$ . Ici, le morphisme  $\varphi^\sharp \in \text{Hom}(W^\sharp, V^\sharp)$  est le dual de  $\varphi$ .

( $\mathcal{A}_2$ ) Pour tout  $x \in F(V)$  et tout  $\alpha \in F(V^\sharp)$ , on a  $\langle x, \alpha \rangle_V = \langle \alpha, x \rangle_{V^\sharp}$ .

En notant que  $\langle x, \alpha \rangle_V = (\gamma_F)_V(x)(\alpha)$ , la première condition provient de la naturalité de  $\gamma_F$  dans la définition originale. La deuxième condition provient de l'identité  $\gamma_F^\sharp \circ \eta_F = \gamma_F$  puisque, pour tout  $x \in F(V)$  et tout  $\alpha \in F(V^\sharp)$ , on a

$$\begin{aligned} (\gamma_F)_V(x)(\alpha) &= ((\gamma_F^\sharp)_V \circ (\eta_F)_V)(x)(\alpha) \\ \Leftrightarrow (\gamma_F)_V(x)(\alpha) &= ((\gamma_F^\sharp)_V((\eta_F)_V(x)))(\alpha) \\ \Leftrightarrow (\gamma_F)_V(x)(\alpha) &= ((\eta_F)_V(x) \circ (\gamma_F)_{V^\sharp})(\alpha) \\ \Leftrightarrow (\gamma_F)_V(x)(\alpha) &= (\eta_F)_V(x)((\gamma_F)_{V^\sharp}(\alpha)) \\ \Leftrightarrow (\gamma_F)_V(x)(\alpha) &= (\gamma_F)_{V^\sharp}(\alpha)(x). \end{aligned}$$

**Exemple 2.4.2.** — Les foncteurs  $\Lambda^n$  sont des exemples de foncteurs auto-duaux. Ici, la forme bilinéaire non dégénérée  $\langle -, - \rangle_V : \Lambda^n(V) \times \Lambda^n(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$  est définie par

$$\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_n, \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_n \rangle = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n \mu_i(u_{\sigma(i)})$$

pour  $u_1, \dots, u_n$  quelconques dans  $V$  et  $\mu_1, \dots, \mu_n$  quelconques dans  $V^\sharp$ .

Dans ce qui suit, on va construire une forme bilinéaire  $\langle -, - \rangle_V : \mathcal{K}_2(V) \times \mathcal{K}_2(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$ , puis montrer que cette forme est bien définie et non dégénérée. De plus, elle vérifie les conditions ( $\mathcal{A}_1$ ) et ( $\mathcal{A}_2$ ). Ceci signifie que

**Théorème 2.4.3.** — Le foncteur  $\mathbb{Z}/6$ -gradué  $\mathcal{K}_2$  est auto-dual. C'est-à-dire que

1.  $(\mathcal{K}_2^{\bar{2}})^\sharp \cong \mathcal{K}_2^{\bar{4}}$  et  $(\mathcal{K}_2^{\bar{4}})^\sharp \cong \mathcal{K}_2^{\bar{2}}$ .
2.  $(\mathcal{K}_2^{\bar{0}})^\sharp \cong \mathcal{K}_2^{\bar{0}}$ .

### 2.4.2 La forme bilinéaire $\langle -, - \rangle : \mathcal{K}_2(V) \times \mathcal{K}_2(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$

Pour la construction, on rappelle d'abord les partitions ordonnées.

**Notation 2.4.4.** — Soient  $n_1, \dots, n_k$  des entiers naturels. On pose  $n_1 + \dots + n_k = n$ . Soit  $X$  un ensemble de  $n$  entiers naturels deux à deux distincts  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

- On désigne par  $[n_1, \dots, n_k]^X$  l'ensemble de tous les rangements des éléments de l'ensemble  $X$  dans  $k$  tiroirs tels que le  $i$ -ième tiroir ne contient que  $n_i$  élément(s) pour  $1 \leq i \leq k$ . Si  $X = \{1, \dots, n\}$ , on note  $[n_1, \dots, n_k]$  au lieu de  $[n_1, \dots, n_k]^X$ .
- Soit  $\mathcal{P}$  un élément de  $[n_1, \dots, n_k]^X$ , on note  $\mathcal{P}_i$ , avec  $1 \leq i \leq k$ , l'ensemble de tous les nombres dans le  $i$ -ième tiroir du rangement  $\mathcal{P}$ . Remarquons que  $\mathcal{P}_i$  est de cardinal  $n_i$  pour tout  $i$  et l'ensemble  $[n_1, \dots, n_k]^X$  est fini de cardinal  $\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k}$ .

**Remarque 2.4.5 (Stabilisation d'une partition ordonnée).** — Toute transposition de l'ensemble  $X$  induit une bijection de l'ensemble  $[n_1, \dots, n_k]^X$  dans lui-même. On considère la transposition qui échange deux éléments  $x_i$  et  $x_j$ . La bijection induit envoie  $\mathcal{P} \in [n_1, \dots, n_k]^X$  sur  $\bar{\mathcal{P}}$ . Alors,  $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$  si et seulement s'il existe  $t$  tel que  $x_i$  et  $x_j$  sont dans  $\mathcal{P}_t$ .

**Remarque 2.4.6 (Réordonner une partition).** — Parce que l'ordre des tiroirs est pris en compte dans la définition de  $[n_1, \dots, n_k]^X$ , l'ensemble  $[\dots, n_i, \dots, n_j, \dots]^X$  est différent de  $[\dots, n_j, \dots, n_i, \dots]^X$  avec  $i \neq j$ . Mais, on a une bijection entre ces deux ensembles qui envoie  $\mathcal{P}$  du premier ensemble sur  $\bar{\mathcal{P}}$  du deuxième ensemble dont  $\bar{\mathcal{P}}_i = \mathcal{P}_j$ ,  $\bar{\mathcal{P}}_j = \mathcal{P}_i$  et  $\bar{\mathcal{P}}_k = \mathcal{P}_k$  pour tout  $k \neq i, j$ . On suppose  $n_1 = \dots = n_k$ . On a alors une bijection de  $[n_1, \dots, n_k]^X$  dans lui-même qui envoie  $\mathcal{P}$  sur  $\bar{\mathcal{P}} \neq \mathcal{P}$ .

Maintenant, on va construire une forme bilinéaire  $\langle -, - \rangle_V : \mathcal{K}_2(V) \times \mathcal{K}_2(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$  pour  $V$  un espace vectoriel quelconque de dimension finie ; on la notera  $\langle -, - \rangle$  s'il n'y a aucune confusion. Dans les étapes ci-dessous, on convient que  $u, v, u_i, v_i$  sont des éléments de l'espace  $V$  et  $\mu, \xi, \mu_i, \xi_i$  sont des éléments de l'espace  $V^\sharp$ , pour tout entier naturel  $i$ .

On considère l'ensemble de  $n$  entiers strictement positifs  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Grâce à la commutativité du produit de  $\mathcal{K}_2(V)$ , on peut noter  $(u)_X$  le produit  $(u_{x_1}) \dots (u_{x_n})$ . De même,  $(\mu)_X$  désigne le produit  $(\mu_{x_1}) \dots (\mu_{x_n})$ . On convient que si  $X$  est vide,  $(u)_X$  et  $(\mu)_X$  sont alors 1 dans  $\mathbb{F}_2$ .

**Proposition 2.4.7.** — Il existe une unique forme bilinéaire symétrique<sup>1</sup>

$$\langle -, - \rangle : \mathcal{K}_2(V) \times \mathcal{K}_2(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$$

telle que :

1. (**Conditions initiales**) : Pour  $u \in V$  et  $\mu \in V^\sharp$ ,

$$\begin{aligned} \langle 1, 1 \rangle &= 1, \\ \langle (u), 1 \rangle &= \langle 1, (\mu) \rangle = 0, \\ \langle (u), (\mu) \rangle &= 0, \\ \langle (u), (\mu)^2 \rangle &= \langle (u)^2, (\mu) \rangle = \mu(u). \end{aligned}$$

---

1. au sens de la condition (A<sub>2</sub>).



2. (*Compatibilité avec le produit et le coproduit de  $\mathcal{K}_2$* ) : Pour tous  $x, y \in \mathcal{K}_2(V)$  et  $\alpha, \beta \in \mathcal{K}_2(V^\sharp)$ ,

$$\langle xy, \alpha \rangle = \sum_i \langle x, \alpha'_i \rangle \langle y, \alpha''_i \rangle, \quad \text{où } \delta(\alpha) = \sum_i \alpha'_i \otimes \alpha''_i,$$

et

$$\langle x, \alpha\beta \rangle = \sum_i \langle x'_i, \alpha \rangle \langle x''_i, \beta \rangle, \quad \text{où } \delta(x) = \sum_i x'_i \otimes x''_i.$$

Ici  $\delta: \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{K}_2 \otimes \mathcal{K}_2$  est le coproduit naturel (voir la proposition 2.2.11).

**Remarque 2.4.8.** — Si nous savons à priori que la condition  $(\mathcal{A}_2)$  est satisfaite, les deux conditions de compatibilité sont équivalentes. En effet, pour tout  $V \in \mathcal{V}$ , tous  $x, y \in \mathcal{K}_2(V)$  et  $\alpha \in \mathcal{K}_2(V^\sharp)$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle xy, \alpha \rangle_V &= \sum_i \langle x, \alpha'_i \rangle_V \langle y, \alpha''_i \rangle_V \\ \Leftrightarrow \langle \alpha, xy \rangle_{V^\sharp} &= \sum_i \langle \alpha'_i, x \rangle_{V^\sharp} \langle \alpha''_i, y \rangle_{V^\sharp}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la seconde formule signifie que

$$\langle x, \alpha\beta \rangle_V = \sum_i \langle x'_i, \alpha \rangle_V \langle x''_i, \beta \rangle_V,$$

pour tous  $x \in \mathcal{K}_2(V)$  et  $\alpha, \beta \in \mathcal{K}_2(V^\sharp)$ , d'où le résultat.

Afin de reconstruire la forme bilinéaire  $\langle -, - \rangle$ , dans un premier temps, on va tirer des conséquences des propriétés imposées dans la proposition 2.4.7. Puis on va déterminer ses valeurs. Enfin, on vérifiera l'existence de la forme. Les énoncés jusqu'à 2.4.23 s'entendent, *si la forme existe*, alors la propriété a lieu.

**Lemme 2.4.9.** — On a  $\langle (u), (\mu_1)(\mu_2) \rangle = \mu_1(u)\mu_2(u)$ . De plus, si  $\alpha$  est un monôme en les  $(\mu_i)$  :  $\alpha = (\mu_1) \cdots (\mu_n)$ , et si  $\langle (u), \alpha \rangle$  est non-nul, alors  $n = 2$ .

On a également le résultat symétrique :  $\langle (u_1)(u_2), (\mu) \rangle = \mu(u_1)\mu(u_2)$ . De plus, si  $x$  est un monôme en les  $(u_i)$  :  $x = (u_1) \cdots (u_n)$ , et si  $\langle x, (\mu) \rangle$  est non-nul, alors  $n = 2$ .

*Démonstration.* — Comme  $\delta((u)) = (u) \otimes 1 + 1 \otimes (u) + (u)^2 \otimes (u)^2$ ,

$$\begin{aligned} \langle (u), (\mu_1)(\mu_2) \rangle &= \langle \delta((u)), (\mu_1) \otimes (\mu_2) \rangle \\ &= \langle (u), (\mu_1) \rangle \langle 1, (\mu_1) \rangle + \langle 1, (\mu_1) \rangle \langle (u), (\mu_2) \rangle + \langle (u)^2, (\mu_1) \rangle \langle (u)^2, (\mu_2) \rangle \\ &= \mu_1(u)\mu_2(u). \end{aligned}$$

Le reste du lemme est facile à vérifier. Le résultat suit. □

**Notation 2.4.10.** — On désigne par  $\langle x \otimes y, \delta(\alpha) \rangle$  la somme  $\sum_i \langle x, \alpha'_i \rangle \langle y, \alpha''_i \rangle$ , où  $\delta(\alpha) = \sum_i \alpha'_i \otimes \alpha''_i$ . Plus généralement, si  $n \geq 2$ , on désigne par  $\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, \delta^{(n-1)}\alpha \rangle$  la somme

## 2.4. Auto-dualité du foncteur $\mathcal{K}_2$

évidente où  $\delta^{(n-1)} : \mathcal{K}_2(V) \rightarrow (\mathcal{K}_2(V))^{\otimes n}$  est la diagonale itérée  $(n-1)$  fois. On a la notation similaire pour le cas symétrique :  $\langle \delta^{(n-1)}(x), \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n \rangle$ .

**Lemme 2.4.11.** — Les valeurs de la forme bilinéaire  $\langle -, - \rangle$  (si elle existe) sont déterminées complètement par les conditions initiales (cf. la proposition 2.4.7), et par récurrence sur  $a$  :

$$\langle (u_1) \cdots (u_a), \alpha \rangle = \langle (u_1) \cdots (u_{a-1}) \otimes (u_a), \delta(\alpha) \rangle,$$

où  $\alpha$  est un monôme quelconque en les  $(\mu_i) : \alpha = (\mu_1) \cdots (\mu_b)$ .

*Démonstration.* — En effet, les valeurs du cas  $a = 1$  sont donnés par le lemme 2.4.9.  $\square$

**Lemme 2.4.12.** — Les valeurs de la forme bilinéaire déterminées de la manière du lemme 2.4.11 satisfont la condition de compatibilité de la proposition 2.4.7. En particulier, on a :

$$\langle (u_1) \cdots (u_a), \alpha \rangle = \langle (u_1) \otimes \cdots \otimes (u_a), \delta^{(a-1)}(\alpha) \rangle.$$

*Démonstration.* — Puisque  $(\delta \otimes 1) \circ \delta = (1 \otimes \delta) \circ \delta = \delta^{(2)}$  (la coassociativité du coproduit), on utilise la formule suivante qui sert dans la récurrence

$$\langle xy \otimes z, \delta(\alpha) \rangle = \langle x \otimes yz, \delta(\alpha) \rangle = \langle x \otimes y \otimes z, \delta^{(2)}(\alpha) \rangle$$

pour  $x, y, z$  quelconques de la forme  $(u_1) \cdots (u_i)$ . En général, on obtient la relation :

$$\langle (u_1) \cdots (u_a), \alpha \rangle = \langle (u_1) \otimes \cdots \otimes (u_a), \delta^{(a-1)}(\alpha) \rangle,$$

d'où le résultat.  $\square$

**Définition 2.4.13 (La forme canonique de  $\delta$ ).** — Grâce à la proposition 2.2.11, on obtient la formule suivante, pour tout  $u \in V$  :

$$\begin{aligned} \delta^{(s-1)}((u)) &= \sum_{i=1}^s 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes (u) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \\ &+ \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \{1, \dots, s\} \\ \alpha < \beta}} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes (u)_{\alpha}^2 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes (u)_{\beta}^2 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \cdots \otimes 1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $i$  est la position de  $(u)$ , et  $\alpha, \beta$  sont les positions de  $(u)^2$ . On appelle cette formule la **forme canonique** de  $\delta^{(s-1)}((u))$ . La forme canonique de  $\delta^{(s-1)}((u_1) \cdots (u_a))$  est obtenue en développant le produit des formes canoniques de  $\delta^{(s-1)}((u_1)), \dots, \delta^{(s-1)}((u_1))$  sans utiliser les relations  $(u+v) + (u) + (v) = (u)^2(v)^2$  dans  $\mathcal{K}_2(V)$ .

On va maintenant calculer les valeurs de la forme bilinéaire  $\langle -, - \rangle$  en utilisant la formule du lemme 2.4.12 et les formes canoniques de  $\delta$  : on commence par établir des conditions d'annulation ; puis en procédant par étape, on donnera les valeurs. On terminera en vérifiant

à près que la forme est bien définie, c'est-à-dire que ses valeurs sont compatibles avec les relations  $(u + v) + (u) + (v) = (u)^2(v)^2$  dans  $\mathcal{K}_2(V)$ .

### 2.4.3 Calcul des valeurs et exemples

On établit d'abord une condition d'annulation :

**Lemme 2.4.14 (Première condition d'annulation).** — Si  $\langle (u_1) \cdots (u_a), (\mu_1) \cdots (\mu_b) \rangle$  est non nul, il existe des entiers naturels  $m, n$  tels que  $a = 2m + n$  et  $b = m + 2n$ .

**Remarque 2.4.15.** — L'existence de  $m, n \in \mathbb{Z}$  telle que  $a = 2m + n$  et  $b = m + 2n$  est équivalente à la divisibilité par 3 de  $a + b$ . En effet, si  $a + b = 3d$ , alors  $m = a - d$ ,  $n = b - d$ ; réciproquement, si  $a = 2m + n$ ,  $b = m + 2n$ , alors  $a + b = 3(m + n)$ .

*Démonstration.* — On démontre par récurrence en  $a$ . Le cas  $a = 1$  provient du lemme 2.4.9. Supposons que le lemme est vrai pour  $a - 1$ . En écrivant  $\delta((\mu_1) \cdots (\mu_b)) = \sum_i \alpha'_i \otimes \alpha''_i$ , on a

$$\langle (u_1) \cdots (u_a), (\mu_1) \cdots (\mu_b) \rangle = \sum_i \langle (u_1) \cdots (u_{a-1}), \alpha'_i \rangle \langle (u_a), \alpha''_i \rangle.$$

Si ce scalaire est non-nul,  $\langle (u_1) \cdots (u_{a-1}), \alpha'_i \rangle$  et  $\langle (u_a), \alpha''_i \rangle$  sont non nuls pour un certain  $i$ . Il en résulte que  $\alpha''_i$  est de la forme  $(\mu_k)^2$  pour certain  $k$ , ou de la forme  $(\mu_k)(\mu_l)$  avec  $k \neq l$ . Dans premier cas,  $\alpha'_i = (\mu_k)^2 \prod_{j \neq k} (\mu_j)$  de longueur  $b+1$ . Dans le second cas,  $\alpha'_i = \prod_{j \neq k, l} (\mu_j)$  et de longueur  $b - 2$ . On peut appliquer l'hypothèse de récurrence :  $(a - 1) + (b - 2) \equiv (a - 1) + (b + 1) \equiv 0 \pmod{3}$ . Cela signifie qu'il existe  $m, n \in \mathbb{Z}$  tels que  $a = 2m + n$  et  $b = m + 2n$ .

Pour conclure le résultat, il suffit de montrer que  $(2a - b)$  et  $(2b - a)$  sont positifs ou nuls. En écrivant

$$\langle (u_1) \cdots (u_a), (\mu_1) \cdots (\mu_b) \rangle = \langle (u_1) \otimes \cdots \otimes (u_a), \delta^{(a-1)}((\mu_1) \cdots (\mu_b)) \rangle,$$

on observe que  $\delta^{(a-1)}((\mu_1) \cdots (\mu_b))$  est un tenseur à  $a$  termes, où il y a au plus  $2b$  termes différents de 1. Pour que ce scalaire soit non-nul, il faut que  $2b \geq a$ . De la même manière, on écrit

$$\langle (u_1) \cdots (u_a), (\mu_1) \cdots (\mu_b) \rangle = \langle \delta^{(b-1)}((u_1) \cdots (u_a)), (\mu_1) \otimes \cdots \otimes (\mu_b) \rangle$$

pour obtenir que  $2a \geq b$ . Le lemme est démontré. □

On calcule maintenant les valeurs éventuellement non nulles.

**Lemme 2.4.16.** — Pour  $n$  un entier strictement positif quelconque, on a

$$\langle (u_1) \cdots (u_n), (\mu_1)^2 \cdots (\mu_n)^2 \rangle = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n \mu_i(u_{\sigma(i)}), \quad \text{et} \quad (2.10)$$

$$\langle (u_1)^2 \cdots (u_n)^2, (\mu_1) \cdots (\mu_n) \rangle = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n \mu_i(u_{\sigma(i)}). \quad (2.11)$$

*Démonstration.* — La démonstration est faite par calculs directs : elle découle du fait que tous les  $(u_i)^2$  et  $(\mu_j)^2$  sont primitifs.  $\square$

**Lemme 2.4.17.** — On a :

$$\langle (u_1) \cdots (u_{2n}), (\mu_1) \cdots (\mu_n) \rangle = \sum_{\substack{\mathcal{P} \in [2, \dots, 2] \\ n \text{ fois}}} \prod_{i=1}^n \langle (u)_{\mathcal{P}_i}, (\mu_i) \rangle, \text{ et} \quad (2.12)$$

$$\langle (u_1) \cdots (u_n), (\mu_1) \cdots (\mu_{2n}) \rangle = \sum_{\substack{\mathcal{P} \in [2, \dots, 2] \\ n \text{ fois}}} \prod_{i=1}^n \langle (u_i), (\mu)_{\mathcal{P}_i} \rangle. \quad (2.13)$$

*Démonstration.* — On calcule  $\langle (u_1) \cdots (u_{2n}), (\mu_1) \cdots (\mu_n) \rangle$  de manière suivante :

$$\langle (u_1) \cdots (u_{2n}), (\mu_1) \cdots (\mu_n) \rangle = \left\langle (u_1) \otimes \cdots \otimes (u_{2n}), \delta^{(2n-1)}((\mu_1) \cdots (\mu_n)) \right\rangle$$

où  $\delta^{(2n-1)}$  est la diagonale itérée  $(2n-1)$  fois. Pour qu'un terme  $\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{2n}$  apparaissant dans  $\delta^{(2n-1)}((\mu_1) \cdots (\mu_n))$  s'évalue non trivialement sur  $(u_1) \otimes \cdots \otimes (u_{2n})$ , il faut que chaque  $\varepsilon_i$  soit de la forme  $(\mu_j)^2$  pour un certain  $j$ , soit de la forme  $(\mu_k)(\mu_l)$  avec  $k \neq l$ . Ce dernier cas est cependant exclu car le monôme de  $\delta^{(2n-1)}((\mu_1) \cdots (\mu_n))$ , s'il contient un facteur  $(\mu_k)(\mu_l)$ , doit aussi contenir un facteur 1, et donc s'évalue sur  $(u_1) \otimes \cdots \otimes (u_{2n})$  en 0.

Donc, à l'ordre près, seul le forme

$$(\mu_1)^2 \otimes (\mu_1)^2 \otimes \cdots \otimes (\mu_n)^2 \otimes (\mu_n)^2$$

donne une évaluation non-nulle. Le résultat suit.  $\square$

**Lemme 2.4.18.** — On a :

$$\langle (u_1) \cdots (u_{2m+n}), (\mu_1) \cdots (\mu_{m+2n}) \rangle = \sum_{\mathcal{P} \in [2m, n]} \sum_{\mathcal{Q} \in [m, 2n]} \langle (u)_{\mathcal{P}_1}, (\mu)_{\mathcal{Q}_1} \rangle \langle (u)_{\mathcal{P}_2}, (\mu)_{\mathcal{Q}_2} \rangle$$

pour  $m, n$  des entiers naturels quelconques.

*Démonstration.* — Ecrivons

$$\langle (u_1) \cdots (u_{2m+n}), (\mu_1) \cdots (\mu_{m+2n}) \rangle = \langle (u_1) \otimes \cdots \otimes (u_{2m+n}), \delta^{(2m+n-1)}((\mu_1) \cdots (\mu_{m+2n})) \rangle,$$

il faut chercher dans l'écriture de  $\delta^{(2m+n-1)}((\mu_1) \cdots (\mu_{m+2n}))$  comme somme de monômes les termes  $\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{2m+n}$  pour lesquels  $\varepsilon_i = (\mu_l)^2$  pour certain  $l$  ou  $\varepsilon_i = (\mu_k)(\mu_l)$  avec  $k \neq l$ . On commence par observer que s'il y a un terme  $\varepsilon_i = (\mu_l)^2$ , nécessairement un autre terme  $\varepsilon_j$  ( $i \neq j$ ) est aussi égal à  $(\mu_l)^2$  : le facteur  $(\mu_l)^2$  apparaît dans un des monômes de

$\delta^{(2m+n-1)}(\mu_l)$  en position  $i$  et  $j$ , tous les autres facteurs soient égaux à 1 (voir la formule 2.9). On note  $2a$  le nombre des facteurs  $\varepsilon_i$  de ce type. Puis on note  $b$  le nombre des termes  $\varepsilon_i$  de la forme  $(\mu_k)(\mu_l)$ , avec  $k \neq l$

Donc, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} a + 2b = m + 2n & (\text{le nombre des facteurs } \mu_i) \\ 2a + b = 2m + n & (\text{le nombre des facteurs } u_i). \end{cases}$$

Evidemment, on a  $a = m$  et  $b = n$ .

On a donc  $n$  sous-ensembles (deux à deux distincts) à deux éléments de  $\{1, \dots, m + 2n\}$ , on notera leur réunion  $\mathcal{Q}_2$ ,  $|\mathcal{Q}_2| = 2n$ . Soit  $\mathcal{Q}_1$  le complémentaire,  $|\mathcal{Q}_1| = m$ . On a de même  $m$  sous-ensembles (deux à deux distincts) à deux éléments de  $\{1, \dots, 2m + n\}$ , on notera leur réunion  $\mathcal{P}_1$ ,  $|\mathcal{P}_1| = 2m$ , et  $\mathcal{P}_2$  le complémentaire,  $|\mathcal{P}_2| = n$ .

Si on somme sur tous les termes  $\varepsilon_1 \otimes \dots \otimes \varepsilon_{2m+n}$  auxquels sont associés  $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$  et  $(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ , on obtient le facteur  $\langle (u)_{\mathcal{P}_1}, (\mu)_{\mathcal{Q}_1} \rangle \langle (u)_{\mathcal{P}_2}, (\mu)_{\mathcal{Q}_2} \rangle$ . Ceci finit la démonstration, on obtient la formule en sommant sur tous les  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \in [2m, n] \times [m, 2n]$ .  $\square$

**Exemple 2.4.19.** — On considère l'exemple de calcul de la formule (2.12) où  $n = 2$ . Des informations de l'ensemble  $[2, 2]$  sont donnés par le tableau suivant

$\mathcal{P}_1$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 4\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 4\}$	$\{3, 4\}$
$\mathcal{P}_2$	$\{3, 4\}$	$\{2, 4\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 4\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 2\}$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \langle (u_1)(u_2)(u_3)(u_4), (\mu_1)(\mu_2) \rangle &= \sum_{\mathcal{P} \in [2, 2]} \langle (u)_{\mathcal{P}_1}, (\mu_1) \rangle \langle (u)_{\mathcal{P}_2}, (\mu_2) \rangle \\ &= \langle (u_1)(u_2), (\mu_1) \rangle \langle (u_3)(u_4), (\mu_2) \rangle + \langle (u_1)(u_3), (\mu_1) \rangle \langle (u_2)(u_4), (\mu_2) \rangle + \\ &\quad \langle (u_1)(u_4), (\mu_1) \rangle \langle (u_2)(u_3), (\mu_2) \rangle + \langle (u_2)(u_3), (\mu_1) \rangle \langle (u_1)(u_4), (\mu_2) \rangle + \\ &\quad \langle (u_2)(u_4), (\mu_1) \rangle \langle (u_1)(u_3), (\mu_2) \rangle + \langle (u_3)(u_4), (\mu_1) \rangle \langle (u_1)(u_2), (\mu_2) \rangle \\ &= \mu_1(u_1)\mu_1(u_2)\mu_2(u_3)\mu_2(u_4) + \mu_1(u_1)\mu_1(u_3)\mu_2(u_2)\mu_2(u_4) + \\ &\quad \mu_1(u_1)\mu_1(u_4)\mu_2(u_2)\mu_2(u_3) + \mu_1(u_2)\mu_1(u_3)\mu_2(u_1)\mu_2(u_4) + \\ &\quad \mu_1(u_2)\mu_1(u_4)\mu_2(u_1)\mu_2(u_3) + \mu_1(u_3)\mu_1(u_4)\mu_2(u_1)\mu_2(u_2). \end{aligned}$$

**Exemple 2.4.20.** — Pour la formule qui contient  $m$  et  $n$ , on considère le cas où  $m = n = 1$ . On a les tableaux suivants qui correspondent aux ensembles  $[2, 1]$  et  $[1, 2]$  :

$\mathcal{P}_1$	$\{2, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 2\}$
$\mathcal{P}_2$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$

$\mathcal{Q}_1$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
$\mathcal{Q}_2$	$\{2, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 2\}$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
 \langle (u_1)(u_2)(u_3), (\mu_1)(\mu_2)(\mu_3) \rangle &= \sum_{\mathcal{Q} \in [1,2]} \sum_{\mathcal{P} \in [2,1]} \langle (u)_{\mathcal{P}_1}, (\mu)_{\mathcal{Q}_1} \rangle \langle (u)_{\mathcal{P}_2}, (\mu)_{\mathcal{Q}_2} \rangle \\
 &= \langle (u_1)(u_2), (\mu_1) \rangle \langle (u_3), (\mu_2)(\mu_3) \rangle + \langle (u_1)(u_3), (\mu_1) \rangle \langle (u_2), (\mu_2)(\mu_3) \rangle + \\
 &\quad \langle (u_2)(u_3), (\mu_1) \rangle \langle (u_1), (\mu_2)(\mu_3) \rangle + \langle (u_1)(u_2), (\mu_2) \rangle \langle (u_3), (\mu_1)(\mu_3) \rangle + \\
 &\quad \langle (u_1)(u_3), (\mu_2) \rangle \langle (u_2), (\mu_1)(\mu_3) \rangle + \langle (u_2)(u_3), (\mu_2) \rangle \langle (u_1), (\mu_1)(\mu_3) \rangle + \\
 &\quad \langle (u_1)(u_2), (\mu_3) \rangle \langle (u_3), (\mu_1)(\mu_2) \rangle + \langle (u_1)(u_3), (\mu_3) \rangle \langle (u_2), (\mu_1)(\mu_2) \rangle + \\
 &\quad \langle (u_2)(u_3), (\mu_3) \rangle \langle (u_1), (\mu_1)(\mu_2) \rangle.
 \end{aligned}$$

On énonce ci-dessus la seconde condition d'annulation qui sera utile un peu plus loin (on renvoie au lemme 2.4.14 pour la première), puis on donne la formule générale :

**Lemme 2.4.21 (Seconde condition d'annulation).** — *Si*

$$\langle (u_1) \cdots (u_s)(v_1)^2 \cdots (v_t)^2, (\mu_1) \cdots (\mu_{t'}) (\xi_1)^2 \cdots (\xi_{s'})^2 \rangle$$

*est non nul, alors  $(s, t) \succeq (s', t')$ .*

**Remarque 2.4.22.** — Rappelons du lemme 2.3.6 que

$$\begin{aligned}
 (s, t) \succeq (s', t') &\Leftrightarrow \text{Il existe } m, n \geq 0 \text{ tels que } (s, t) = (s', t') + m(2, -1) + n(1, -2) \\
 &\Leftrightarrow \text{Il existe } m, n \geq 0 \text{ tels que } \begin{cases} s = s' + 2m + n \\ t' = t + m + 2n \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Notons également que  $(s, t) \succeq (s', t') \Leftrightarrow (t', s') \succeq (t, s)$ .

*Démonstration du lemme 2.4.21.* — En écrivant

$$\begin{aligned}
 &\langle (u_1) \cdots (u_s)(v_1)^2 \cdots (v_t)^2, (\mu_1) \cdots (\mu_{t'}) (\xi_1)^2 \cdots (\xi_{s'})^2 \rangle \\
 &= \langle (u_1) \otimes \cdots \otimes (u_s) \otimes (v_1)^{\otimes 2} \otimes \cdots \otimes (v_t)^{\otimes 2}, \delta^{(s+2t-1)}((\mu_1) \cdots (\mu_{t'}) (\xi_1)^2 \cdots (\xi_{s'})^2) \rangle,
 \end{aligned}$$

on étudie dans  $\delta^{(s+2t-1)}((\mu_1) \cdots (\mu_{t'}) (\xi_1)^2 \cdots (\xi_{s'})^2)$  les termes  $\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{s+2t}$  avec  $\varepsilon_i = (\mu_i)^2$  pour certain  $i$ , ou  $\varepsilon_i = (\mu_k)(\mu_l)$  avec  $k \neq l$ .

Pour que  $(u_1) \otimes \cdots \otimes (u_{p+2m+n}) \otimes (v_1)^{\otimes 2} \otimes \cdots \otimes (v_q)^{\otimes 2}$  s'évalue non trivialement sur

$$\delta^{(p+2q+2m+n-1)}((\mu_1) \cdots (\mu_{q+m+2n}) (\xi_1)^2 \cdots (\xi_p)^2),$$

il faut que, pour  $1 \leq i \leq q$ , les deux facteurs  $(v_i)$  s'évaluent sur le même facteur  $(\mu_j)^2$ . Cela signifie aussi que  $(v_i)^2$  s'évalue sur  $(\mu_j)$ . On obtient alors que  $t \leq t'$ . De même, on a  $s' \leq s$ .

Donc, quitte à réindexer, il existe au moins un terme

$$[\langle (u_1), (\xi_1)^2 \rangle \cdots \langle (u_{s'}), (\xi_{s'})^2 \rangle] [\langle (v_1)^2, (\mu_1) \rangle \cdots \langle (v_t)^2, (\mu_t) \rangle] \langle (u_{s'+1}) \cdots (u_s), (\mu_{t+1}) \cdots (\mu_t) \rangle$$

qui est non nul. D'après la première condition d'annulation (cf. le lemme 2.4.14), le fait que  $\langle (u_{s'+1}) \cdots (u_s), (\mu_{t+1}) \cdots (\mu_t) \rangle$  est non nul implique que  $s - s' = 2m + n$  et  $t' - t = m + 2n$  pour certains  $m, n \in \mathbb{N}$ . Le résultat suit.  $\square$

La démonstration du lemme 2.4.21 nous donne encore le résultat suivant :

**Lemme 2.4.23 (Formule générale).** — On a :

$$\begin{aligned} & \langle (u_1) \cdots (u_{p+2m+n})(v_1)^2 \cdots (v_q)^2, (\mu_1) \cdots (\mu_{q+m+2n})(\xi_1)^2 \cdots (\xi_p)^2 \rangle \\ &= \sum_{\mathcal{Q} \in [q, m+2n]} \sum_{\mathcal{P} \in [p, 2m+n]} \langle (u)_{\mathcal{P}_1}, (\xi_1)^2 \cdots (\xi_p)^2 \rangle \langle (v_1)^2 \cdots (v_q)^2, (\mu)_{\mathcal{Q}_1} \rangle \langle (u)_{\mathcal{P}_2}, (\mu)_{\mathcal{Q}_2} \rangle \end{aligned} \quad (2.14)$$

pour  $m, n$  deux entiers naturels quelconques.

**Exemple 2.4.24.** — On considère le cas  $p = 2, q = 1, m = n = 0$ . On a

$$\begin{aligned} \langle (u_1)(u_2)(v_1)^2, (\mu_1)(\xi_1)^2(\xi_2)^2 \rangle &= \langle (u_1)(u_2), (\xi_1)^2(\xi_2)^2 \rangle \langle (v_1)^2, (\mu_1) \rangle \\ &= \mu_1(v_1)(\xi_1(u_1)\xi_2(u_2) + \xi_1(u_2)\xi_2(u_1)) \\ &= \mu_1(v_1)\xi_1(u_1)\xi_2(u_2) + \mu_1(v_1)\xi_1(u_2)\xi_2(u_1). \end{aligned}$$

De plus, en posant  $u_3 = u_4 = v_1$  dans l'exemple 2.4.19, on obtient

$$\langle (u_1)(u_2)(v_1)^2, (\mu_1)(\mu_2) \rangle = \mu_1(u_1)\mu_1(u_2)\mu_2(v_2) + \mu_1(v_1)\mu_2(u_1)\mu_2(u_2).$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} & \langle (u_1)(u_2)(v_1)^2, (\mu_1)((\xi_1 + \xi_2) + (\xi_1) + (\xi_2)) \rangle \\ &= \mu_1(v_1)(\xi_1(u_1) + \xi_2(u_1))(\xi_1(u_2) + \xi_2(u_2)) + \mu_1(v_1)\xi_1(u_1)\xi_1(u_2) + \mu_1(v_1)\xi_2(u_1)\xi_2(u_2) \\ &= \mu_1(v_1)\xi_1(u_1)\xi_2(u_2) + \mu_1(v_1)\xi_1(u_2)\xi_2(u_1) \\ &= \langle (u_1)(u_2)(v_1)^2, (\mu_1)(\xi_1)^2(\xi_2)^2 \rangle. \end{aligned}$$

Cela signifie que les formules définies ci-dessus sont compatibles dans les cas particuliers que l'on considère.

#### 2.4.4 L'existence de la forme bilinéaire $\langle -, - \rangle$

Pour montrer la proposition 2.4.7, il suffit de démontrer le lemme suivant :

**Lemme 2.4.25.** — Pour  $u, v \in V$ ,  $\mu, \xi \in V^\sharp$ ,  $x \in \mathcal{K}_2(V)$  et  $\alpha \in \mathcal{K}_2(V^\sharp)$ , on a :

$$\langle x((u) + (v) + (u + v)), \alpha \rangle = \langle x(u)^2(v)^2, \alpha \rangle,$$

## 2.4. Auto-dualité du foncteur $\mathcal{K}_2$

et

$$\langle x, \alpha((\mu) + (\xi) + (\mu + \xi)) \rangle = \langle x, \alpha(\mu)^2(\xi)^2 \rangle.$$

*Démonstration.* — Ecrivons

$$\begin{aligned} \langle x((u) + (v) + (u + v)), \alpha \rangle + \langle x(u)^2(v)^2, \alpha \rangle = \\ \langle x \otimes ((u) + (v) + (u + v)), \delta(\alpha) \rangle + \langle x \otimes ((u)^2(v)^2), \delta(\alpha) \rangle. \end{aligned}$$

Supposons que  $\alpha = (\mu_1) \cdots (\mu_n)$ . Alors  $\delta(\alpha)$  s'écrit sous la forme  $\sum_I \mu'_I \otimes \mu''_I$ . Les seuls termes qui peuvent contribuer non trivialement à l'évaluation sur le nombre de gauche sont ceux pour lesquels  $\mu''_I$  est égal à  $(\mu_i)^2$  pour certain  $i$ , ou  $(\mu_k)(\mu_l)$  avec  $k \neq l$ .

Considérons la quantité  $(u) + (v) + (u + v)$ . Elle s'évalue trivialement sur  $(\mu_i)^2$  puisque  $\mu_i$  est une application linéaire et on est en caractéristique 2. Donc, il faut seulement considérer l'évaluation sur les termes  $(\mu_k)(\mu_l)$  avec  $k \neq l$ . Ce qui donne tout calcul fait la valeur  $\mu_k(u)\mu_l(v) + \mu_l(v)\mu_k(u)$ .

Considérons la quantité  $(u)^2(v)^2$ . Elle s'évalue trivialement sur  $(\mu_i)^2$  puisque

$$\langle (u)^2(v)^2, (\mu_i)^2 \rangle = \mu_i(u)\mu_i(v) + \mu_i(v)\mu_i(u) = 0.$$

Son évaluation sur les  $(\mu_k)(\mu_l)$  avec  $k \neq l$  est égale à  $\mu_k(u)\mu_l(v) + \mu_l(v)\mu_k(u)$ .

Les termes qui apparaissent en facteurs de ces quantités sont égaux : ce sont  $\langle x, \mu'_I \rangle$ . Donc, les deux contributions s'annulent et le lemme est démontré.  $\square$

### 2.4.5 Non dégénérescence de la forme bilinéaire $\langle -, - \rangle$

Dans cette sous-section, on démontre que la forme bilinéaire bien définie ci-dessus est non dégénérée.

**Proposition 2.4.26.** — *La forme bilinéaire  $\langle -, - \rangle : \mathcal{K}_2(V) \times \mathcal{K}_2(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$  est non dégénérée.*

**Remarque 2.4.27.** — Pour faire la démonstration, on va calculer la matrice de la forme dans une base de  $\mathcal{K}_2(V)$  associée à une base de  $V$ , et sa duale. Le point de départ du calcul sera la proposition 2.4.21. Puis on fera des calculs explicites.

*Démonstration.* — Soit  $x$  un élément de  $\mathcal{K}_2(V)$  qui vérifie  $\langle x, f \rangle = 0$  pour  $f$  quelconque dans  $\mathcal{K}_2(V^\sharp)$ . On va montrer que  $x$  est nul. Clairement l'élément  $x$  est dans  $\sum_{p+q>0} K_{p,q}(V)$  parce que s'il n'y est pas, on a  $\langle x, 1 \rangle = 1$ . Supposons que l'espace vectoriel  $V$  est de dimension  $d$ . Soient  $\{e_1, \dots, e_d\}$  une base de  $V$  et  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_d\}$  la base duale de  $\{e_1, \dots, e_d\}$ . On considère l'ensemble  $X = \{1, \dots, d\}$ . Rappelons que  $(e)_I$  désigne le produit  $(e_{i_1}) \cdots (e_{i_s})$  pour  $I = \{i_1, \dots, i_s\}$  une partie quelconque de  $X$ . On désigne encore par  $(e)_I^2$  le produit  $(e_{i_1})^2 \cdots (e_{i_s})^2$ . L'élément  $x$  de  $\tilde{\mathcal{K}}_2(V)$  est alors de la forme

$$\sum_{\substack{I, J \subset X \\ |I|+|J|>0}} \varepsilon_{I,J}(e)_I(e)_J^2$$



où  $\varepsilon_{I,J} \in \mathbb{F}_2$  et  $|\cdot|$  désigne le cardinal d'un ensemble. Pour deux sous-ensembles quelconques  $I, J$  de  $X$  qui vérifient  $|I| + |J| > 0$ , on considère l'élément  $(\zeta)_J(\zeta)_I^2$  de  $\mathcal{K}_2(V^\sharp)$  et le scalaire  $\langle (e)_I(e)_J^2, (\zeta)_J(\zeta)_I^2 \rangle$ . On rappelle encore que l'ordre partiel  $\preceq$  sur l'ensemble  $\mathbb{N}^2$  que l'on considère ci-dessous est défini au début de la section 3.

Si  $(|I|, |J|) \prec (|I|, |J|)$  ou  $(|I|, |J|)$  n'est pas comparable avec  $(|I|, |J|)$ , le scalaire  $\langle (e)_I(e)_J^2, (\zeta)_J(\zeta)_I^2 \rangle$  est nul d'après la définition de la forme bilinéaire  $\langle -, - \rangle$ .

Si  $(|I|, |J|) \succ (|I|, |J|)$ , on peut poser  $|I| = p + 2m + n$ ,  $|J| = q$ ,  $|I| = p$  et  $|J| = q + m + 2n$  avec  $p, q, m, n$  des entiers naturels et  $m + n > 0$ . La formule (2.14) dit que

$$\begin{aligned} & \langle (e)_I(e)_J^2, (\zeta)_J(\zeta)_I^2 \rangle \\ &= \sum_{\mathcal{Q} \in [q, m+2n]^J} \sum_{\mathcal{P} \in [p, 2m+n]^I} \langle (e)_{\mathcal{P}_1}, (\zeta)_{\mathcal{I}}^2 \rangle \langle (e)_J^2, (\zeta)_{\mathcal{Q}_1} \rangle \langle (e)_{\mathcal{P}_2}, (\zeta)_{\mathcal{Q}_2} \rangle \\ &= \sum_{\mathcal{Q} \in [q, m, 2n]^J} \sum_{\mathcal{P} \in [p, 2m, n]^I} \langle (e)_{\mathcal{P}_1}, (\zeta)_{\mathcal{I}}^2 \rangle \langle (e)_J^2, (\zeta)_{\mathcal{Q}_1} \rangle \langle (e)_{\mathcal{P}_2}, (\zeta)_{\mathcal{Q}_2} \rangle \langle (e)_{\mathcal{P}_3}, (\zeta)_{\mathcal{Q}_3} \rangle. \end{aligned}$$

Parce que l'on a  $\langle (e_i)(e_j), (\zeta_k) \rangle = 0$  et  $\langle (e_k), (\zeta_i)(\zeta_j) \rangle = 0$  pour  $1 \leq i, j, k \leq d$ ,  $i \neq j$ , alors  $\langle (e)_{\mathcal{P}_2}, (\zeta)_{\mathcal{Q}_2} \rangle$  et  $\langle (e)_{\mathcal{P}_3}, (\zeta)_{\mathcal{Q}_3} \rangle$  sont nuls dans  $\mathbb{F}_2$ . Le scalaire considéré est également nul.

Si  $(|I|, |J|) = (|I|, |J|)$  et  $(I, J) \neq (I, J)$ , on pose  $|I| = |I| = p$  et  $|J| = |J| = q$ . Sans perte de généralité, on suppose que  $I \neq I$ . Il existe alors un élément  $i$  dans la différence  $I \setminus I$ . On obtient donc  $\langle (e_i), (\zeta_i)^2 \rangle = \zeta_i(e_i) = 0$  pour tout  $i$  dans  $I$ . On en déduit que  $\langle (e)_I, (\zeta)_I^2 \rangle = \sum_{\mathcal{P} \in [1, \dots, 1]^I} \prod_{k=1}^p \langle (e)_{\mathcal{P}_k}, (\zeta_{i_k})^2 \rangle = 0$  où on numérote  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ . D'après la formule (2.14), on a  $\langle (e)_I(e)_J^2, (\zeta)_J(\zeta)_I^2 \rangle = \langle (e)_I, (\zeta)_I^2 \rangle \langle (e)_J^2, (\zeta)_J \rangle$ . Le scalaire considéré est donc nul.

De plus, soit  $I = \{i_1, \dots, i_s\}$  une partie quelconque de  $X$ , on a

$$\langle (e)_I, (\zeta)_I^2 \rangle = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_s} \prod_{k=1}^s \zeta_{i_k}(e_{i_{\sigma(k)}}) = \begin{vmatrix} \zeta_{i_1}(e_{i_1}) & \cdots & \zeta_{i_1}(e_{i_s}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{i_s}(e_{i_1}) & \cdots & \zeta_{i_s}(e_{i_s}) \end{vmatrix} = 1$$

parce que dans toute colonne (ligne) du déterminant, tous les éléments sont nuls, sauf un élément qui est égal à 1.

D'après les arguments ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{\substack{I, J \subset X \\ |I| + |J| > 0}} \varepsilon_{I,J} (e)_I(e)_J^2, (\zeta)_J(\zeta)_I^2 \right\rangle \\ &= \varepsilon_{I,J} \langle (e)_I(e)_J^2, (\zeta)_J(\zeta)_I^2 \rangle \\ &= \varepsilon_{I,J} \langle (e)_I, (\zeta)_I^2 \rangle \langle (e)_J^2, (\zeta)_J \rangle \\ &= \varepsilon_{I,J}. \end{aligned}$$

L'élément  $x$  est donc nul dans  $\mathcal{K}_2(V)$  parce que  $\varepsilon_{I,J} = 0$  pour tous les sous-ensembles  $I, J$

## 2.4. Auto-dualité du foncteur $\mathcal{K}_2$

de  $X$  qui vérifient  $|I| + |J| > 0$ . De même, soit  $f$  un élément de  $\mathcal{K}_2(V^\sharp)$  qui vérifie  $\langle x, f \rangle = 0$  pour  $x$  quelconque dans  $\mathcal{K}_2(V)$ , on peut montrer que  $f$  est nul. La forme bilinéaire  $\langle -, - \rangle$  est alors non dégénérée.  $\square$

### 2.4.6 Démonstration du théorème 2.4.3

Pour démontrer que le foncteur  $\mathcal{K}_2$  est auto-dual, il suffit de montrer la proposition suivante :

**Proposition 2.4.28.** — *La forme bilinéaire non dégénérée*

$$\langle -, - \rangle_V : \mathcal{K}_2(V) \times \mathcal{K}_2(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$$

*vérifie les conditions  $(\mathcal{A}_1)$  et  $(\mathcal{A}_2)$  (voir la section 2.4.1).*

**Corollaire 2.4.29.** — *La dualité échange les filtrations  $\mathcal{C}_*$  et  $\mathcal{D}_*$  de  $\mathcal{K}_2$ . En particulier, on a que  $\mathcal{C}_k^\natural \cong \mathcal{K}_2/\mathcal{D}_{k+1}$  et  $\mathcal{D}_k^\natural \cong \mathcal{K}_2/\mathcal{C}_{k-1}$ .*

*Démonstration.* — Pour tous  $s, t \in \mathbb{N}$  tels que  $2s + t \leq k$ , et pour tous  $s', t' \in \mathbb{N}$  tels que  $2t' + s' > k$ , le lemme 2.3.6 dit que  $(s, t) \not\prec (t', s')$ . Alors, d'après le lemme 2.4.21, le scalaire

$$\langle (u_1) \cdots (u_s)(v_1)^2 \cdots (v_t)^2, (\mu_1) \cdots (\mu_{s'}) (\xi_1)^2 \cdots (\xi_{t'})^2 \rangle$$

est nul. La forme bilinéaire  $\langle -, - \rangle_V : \mathcal{K}_2(V) \times \mathcal{K}_2(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$  induit donc la forme bilinéaire non-dégénérée

$$\langle -, - \rangle_V : \mathcal{C}_k(V) \times [\mathcal{K}_2(V^\sharp)/\mathcal{D}_{k+1}(V^\sharp)] \rightarrow \mathbb{F}_2,$$

qui satisfait la condition suivante :

$$\left\langle x, [\mathcal{K}_2/\mathcal{D}_{k+1}](\varphi^\sharp)(\alpha) \right\rangle_V = \langle \mathcal{C}_k(\varphi)(x), \alpha \rangle_W,$$

pour  $V, W$  deux  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels de dimension finie quelconques,  $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ ,  $x \in \mathcal{C}_k(V)$  et  $\alpha \in \mathcal{K}_2(W^\sharp)/\mathcal{D}_{k+1}(W^\sharp)$ . Cette condition dit que l'application

$$\gamma_V : \mathcal{K}_2(V)/\mathcal{D}_{k+1}(V) \rightarrow \mathcal{C}_k^\natural(V),$$

définie par  $\gamma_V(\alpha)(x) = \langle x, \alpha \rangle_V$  pour  $\alpha \in \mathcal{K}_2(V)/\mathcal{D}_{k+1}(V)$  et  $x \in \mathcal{C}_k(V)$ , est une équivalence naturelle (cf. l'argument dans la sous-section 2.4.1).

La démonstration du reste est similaire.  $\square$

On donne maintenant une démonstration de la proposition 2.4.28 :

*Démonstration de 2.4.28.* — La condition  $(\mathcal{A}_2)$  se déduit directement de la construction de  $\langle -, - \rangle_V$ , i.e.  $\langle x, f \rangle_V$  est *symétrique* par rapport à  $x$  et  $f$ . Considérons la condition  $(\mathcal{A}_1)$ .

Soient  $V, W$  deux  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels, et soit  $\varphi$  dans  $\text{Hom}(V, W)$ . Le morphisme induit  $\varphi^\sharp \in \text{Hom}(W^\sharp, V^\sharp)$  est déterminé par  $\varphi^\sharp(\mu)(u) = \mu(\varphi(v))$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \left\langle (u_1)(u_2), \mathcal{K}_2(\varphi^\sharp)((\mu_1)) \right\rangle_V &= \left\langle (u_1)(u_2), \varphi^\sharp(\mu_1) \right\rangle_V = \varphi^\sharp(\mu_1)(u_1)\varphi^\sharp(\mu_1)(u_2) \\ &= \mu_1(\varphi(u_1))\mu_1(\varphi(u_2)) = \langle (\varphi(u_1))(\varphi(u_2)), \mu_1 \rangle_W \\ &= \langle \mathcal{K}_2(\varphi)((u_1)(u_2)), (\mu_1) \rangle_W \end{aligned} \quad (2.15)$$

et de même,

$$\left\langle (u_1), \mathcal{K}_2(\varphi^\sharp)((\mu_1)(\mu_2)) \right\rangle_V = \langle \mathcal{K}_2(\varphi)((u_1)), (\mu_1)(\mu_2) \rangle_W \quad (2.16)$$

pour  $u_i \in V$  et  $\mu_i \in W^\sharp$ . On observe que, pour tout espace  $V$ , la formule pour la forme bilinéaire  $\langle -, - \rangle_V$  est déterminée par les combinaisons de la somme et le produit des scalaires de la forme  $\langle (u_1)(u_2), (\mu_1) \rangle$  ou  $\langle (u_1), (\mu_1)(\mu_2) \rangle$  (cf. les lemmes 2.4.14 et 2.4.18). La condition  $(\mathcal{A}_1)$  se déduit des identités (2.15), (2.16) et du fait que  $\mathcal{K}_2(\varphi)((u_1) \cdots (u_s)) = (\varphi(u_1)) \cdots (\varphi(u_s))$  pour  $V, W$  des espaces vectoriels de dimension finie quelconques,  $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$  et  $u_i \in V$ . La proposition est démontrée.  $\square$

**Théorème 2.4.3.** — *Le foncteur  $\mathbb{Z}/6$ -gradué  $\mathcal{K}_2$  est auto-dual. C'est-à-dire que*

1.  $(\mathcal{K}_2^{\bar{2}})^\sharp \cong \mathcal{K}_2^{\bar{4}}$ , et  $(\mathcal{K}_2^{\bar{4}})^\sharp \cong \mathcal{K}_2^{\bar{2}}$ .
2.  $(\mathcal{K}_2^{\bar{0}})^\sharp \cong \mathcal{K}_2^{\bar{0}}$ .

*Démonstration.* — On déduit du lemme 2.4.14 que la forme  $\langle -, - \rangle_V : \mathcal{K}_2(V) \times \mathcal{K}_2(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$  induit les formes bilinéaires non-dégénérées suivantes :

- $\langle -, - \rangle_V^{\bar{0}, \bar{0}} : \mathcal{K}_2^{\bar{0}}(V) \times \mathcal{K}_2^{\bar{0}}(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$ ,
- $\langle -, - \rangle_V^{\bar{2}, \bar{4}} : \mathcal{K}_2^{\bar{2}}(V) \times \mathcal{K}_2^{\bar{4}}(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$ ,
- $\langle -, - \rangle_V^{\bar{4}, \bar{2}} : \mathcal{K}_2^{\bar{4}}(V) \times \mathcal{K}_2^{\bar{2}}(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$ .

La forme  $\langle -, - \rangle_V^{\bar{0}, \bar{0}}$  satisfait les conditions  $(\mathcal{A}_1)$  et  $(\mathcal{A}_2)$ . La paire des formes  $\langle -, - \rangle_V^{\bar{2}, \bar{4}}$  et  $\langle -, - \rangle_V^{\bar{4}, \bar{2}}$  satisfait également les conditions  $(\mathcal{A}_1)$  et  $(\mathcal{A}_2)$  réénoncées comme suit :

$(\mathcal{A}_1)$  Soient  $V, W$  deux  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels quelconques et soit  $\varphi$  dans  $\text{Hom}(V, W)$ . Alors

$$\left\langle x, \mathcal{K}_2^{\bar{4}}(\varphi^\sharp)(\alpha) \right\rangle_V^{\bar{2}, \bar{4}} = \left\langle \mathcal{K}_2^{\bar{2}}(\varphi)(x), \alpha \right\rangle_W^{\bar{2}, \bar{4}},$$

et

$$\left\langle y, \mathcal{K}_2^{\bar{2}}(\varphi^\sharp)(\beta) \right\rangle_V^{\bar{4}, \bar{2}} = \left\langle \mathcal{K}_2^{\bar{4}}(\varphi)(y), \beta \right\rangle_W^{\bar{4}, \bar{2}},$$

pour  $x \in \mathcal{K}_2^{\bar{2}}(V)$ ,  $y \in \mathcal{K}_2^{\bar{4}}(V)$ ,  $\alpha \in \mathcal{K}_2^{\bar{4}}(W^\sharp)$  et  $\beta \in \mathcal{K}_2^{\bar{2}}(W^\sharp)$ .

$(\mathcal{A}_2)$  Pour tout  $x \in \mathcal{K}_2^{\bar{2}}(V)$  et tout  $\alpha \in \mathcal{K}_2^{\bar{4}}(V^\sharp)$ , on a  $\langle x, \alpha \rangle_V^{\bar{2}, \bar{4}} = \langle \alpha, x \rangle_{V^\sharp}^{\bar{4}, \bar{2}}$ .

Le théorème est démontré.  $\square$

## Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$



ONSIDÉRONs LE FONCTEUR  $\mathcal{K}_2$  qui est isomorphe au foncteur  $V \mapsto K(2)^{\overline{\ast}}(BV^{\sharp})$  (cf. le théorème 2.2.9). Il admet la filtration convergente décroissante

$$\mathcal{K}_2 = \mathcal{D}_0 \supset \dots \supset \mathcal{D}_k \supset \dots$$

dont le quotient successif  $\mathcal{D}_n/\mathcal{D}_{n+1}$  est isomorphe au foncteur puissance symétrique tronquée  $S_4^n$  pour  $n \geq 0$  (voir la section 2.3.2).

Le foncteur  $\mathcal{K}_1(V)$  est isomorphe à  $\mathbb{F}_2[V]$ . Soit  $J$  son idéal d'augmentation. Son dual  $J^{\sharp}$  est unisériel (voir la proposition 1.1.40), ses facteurs de composition sont les  $\Lambda^n$ , et on sait que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^i, \Lambda^j) = \mathbb{F}_2$  si  $|i - j| = 1$ , et 0 sinon. Ceci donne une forme d'unicité pour  $J^{\sharp}$ . Il est naturel de se poser la question suivante : y-a-t'il une propriété d'unicité analogue pour le foncteur  $\mathcal{K}_2$  relativement à ces sous-quotients et leurs extensions ? Pour l'aborder, il faut calculer les groupes  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^n, S_4^{n+3k})$  avec  $k \geq 1$ , et plus généralement le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$ . Enfin, on déterminera la classe d'extension dans  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^n, S_4^{n+3})$  qui correspond au sous-quotient  $(\mathcal{D}_n \cap \mathcal{K}_2^{\overline{2k}})/(\mathcal{D}_{n+6} \cap \mathcal{K}_2^{\overline{2k}})$  de  $\mathcal{K}_2$  (cf. la page 126).

On va montrer que la dimension de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^n, S_4^{n+3})$  est bornée (voir le corollaire 3.4.25). On conjecture que  $\mathcal{K}_2$  est le seul (ou à tout le moins qu'il n'y a qu'un nombre fini de) foncteur(s) ayant une filtration dont les quotients sont les  $S_4^n$  et tels que les extensions entre deux étages successives soient toujours non triviales.

Dans la première partie de ce chapitre, on étudie le foncteur exponentiel de Hopf  $S_4^*$ . Dans la seconde, on étudie les algèbres d'endomorphisme, et dans la troisième et quatrième les groupes  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1$  comme module sur ces algèbres.

### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Préliminaires</b> . . . . .	<b>92</b>
3.1.1	Le foncteur exponentiel de Hopf $S_4^*$ . . . . .	92
3.1.2	Les foncteurs bigradués $\Lambda^{*,*}$ et $S_4^{*,*}$ . . . . .	94
3.1.3	Rappels sur les suites spectrales d'hypercohomologie . . . . .	97
<b>3.2</b>	<b>Les algèbres de Hopf <math>\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)</math> et <math>\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)</math></b> . . . . .	<b>97</b>
<b>3.3</b>	<b>Le module <math>\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)</math></b> . . . . .	<b>102</b>
3.3.1	$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$ est un module libre sur $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$ . . . . .	103
3.3.2	Un système de générateurs du module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$ . . . . .	104
3.3.3	Premiers résultats sur $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2^l})$ . . . . .	105

3.3.4	Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h})$ avec $h \geq 1$ . . . . .	107
3.3.5	Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h})$ avec $h \geq 1$ . . . . .	108
3.3.6	Résultat principal et conséquences . . . . .	110
<b>3.4</b>	<b>Le module <math>\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)</math></b> . . . . .	<b>112</b>
3.4.1	Premiers résultats sur $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, S_4^{2^l})$ . . . . .	113
3.4.2	Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, S_4^{2^h})$ avec $h \geq 1$ . . . . .	113
3.4.3	Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h})$ avec $h \geq 1$ . . . . .	115
3.4.4	Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^{h+1}})$ avec $h \geq 1$ . . . . .	119
3.4.5	Résultat principal et conséquences . . . . .	126
3.4.6	$\mathcal{K}_2$ et foncteurs polynomiaux stricts . . . . .	128

## 3.1 Préliminaires

Le foncteur  $\mathcal{K}_2$  admet la filtration convergente décroissante

$$\mathcal{K}_2 = \mathcal{D}_0 \supset \cdots \supset \mathcal{D}_k \supset \cdots.$$

La proposition 2.3.20 et le théorème 2.3.21 affirment que le quotient  $\mathcal{D}_n/\mathcal{D}_{n+1}$  est isomorphe au foncteur puissance symétrique tronquée  $S_4^n$  qui est défini comme le conoyau de la composée

$$S^{n-4} \otimes S^1 \xrightarrow{1 \otimes \phi} S^{n-4} \otimes S^4 \xrightarrow{\text{produit}} S^n \quad (3.1)$$

où  $\phi: S^1 \rightarrow S^4$  est le morphisme de Frobenius itéré. On va calculer  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$  en utilisant les suites spectrales d'hypercohomologie associées aux complexes qui sont introduits dans la partie 3.1.2. Mais tout d'abord, on montre que  $S_4^*$  est un foncteur exponentiel de Hopf. Il satisfait alors des propriétés qui sont rappelées dans l'appendice A (pour celles du cas général, voir [FFSS99]).

### 3.1.1 Le foncteur exponentiel de Hopf $S_4^*$

*Proposition 3.1.1.* — *Le foncteur gradué*

$$S_4^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_4^n$$

*est un foncteur exponentiel.*

*Remarque 3.1.2.* — Rappelons que le foncteur algèbre symétrique  $S^*$  est exponentiel. Soit  $Y^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Y^n$  le sous-foncteur gradué de  $S^*$ , où  $Y^n$  est l'image de la composée (3.1). D'après la proposition A.2.4, afin de démontrer que  $S_4^*$  est un foncteur exponentiel, il suffit de démontrer que  $Y^*$  est un idéal exponentiel de  $S^*$ .

*Démonstration.* — On rappelle d'abord l'équivalence naturelle  $S^*(V \oplus W) \cong S^*(V) \otimes S^*(W)$ , où  $V, W$  sont des espaces vectoriels de dimension finie quelconques (cf. [Tro02, Prop. 1.3.2]).

### 3.1. Préliminaires

Pour  $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \mathbb{N}$ , on désigne par  $v_I$  le produit  $v_{i_1} \cdots v_{i_k} \in S^k(V)$ , et  $w_I$  le produit qui appartient à  $S^k(W)$ . Alors, le morphisme

$$\begin{aligned} \varphi: S^*(V) \otimes S^*(W) &\longrightarrow S^*(V \oplus W) \\ v_I \otimes w_J &\longmapsto v_I w_J \end{aligned}$$

est l'inverse du morphisme

$$\begin{aligned} \psi: S^*(V \oplus W) &\longrightarrow S^*(V) \otimes S^*(W) \\ (v_1 + w_1) \cdots (v_n + w_n) &\longmapsto \sum_{I \sqcup J = \underline{n}} v_I \otimes w_J, \end{aligned}$$

où  $\underline{n}$  est l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  et  $\sqcup$  désigne la réunion disjointe d'ensembles.

On montre maintenant que

$$Y^*(V \oplus W) \cong S^*(V) \otimes Y^*(W) + Y^*(V) \otimes S^*(W).$$

Le fait que  $S^*(V) \otimes Y^*(W) + Y^*(V) \otimes S^*(W) \hookrightarrow Y^*(V \oplus W)$  se déduit directement de la définition de  $\varphi$ . Il reste à montrer l'inclusion réciproque.

Puisque  $Y^n = 0$  pour  $0 \leq n \leq 3$ , il suffit de considérer le cas  $n \geq 4$ . Considérons l'élément  $x = (v_1 + w_1) \cdots (v_n + w_n) \in Y^n(V \oplus W)$ . Il existe alors  $k_1, k_2, k_3, k_4$  tels que  $v_{k_1} + w_{k_1} = v_{k_2} + w_{k_2} = v_{k_3} + w_{k_3} = v_{k_4} + w_{k_4}$ . On va calculer son image par  $\psi$ . Par la commutativité, on suppose que  $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (1, 2, 3, 4)$ . On en déduit que  $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$  et  $w_1 = w_2 = w_3 = w_4$ . On obtient alors que

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{I_2 \sqcup J_2 = \underline{n} \setminus \underline{4}} \left( \sum_{k=0}^4 \left( \sum_{\substack{I_1 \sqcup J_1 = \underline{4} \\ |I_1| = k}} (v_{I_1} v_{I_2}) \otimes (w_{J_1} w_{J_2}) \right) \right) \\ &= \sum_{I_2 \sqcup J_2 = \underline{n} \setminus \underline{4}} \left( \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (v_1^k v_{I_2}) \otimes (w_1^{4-k} w_{J_2}) \right) \\ &= \sum_{I_2 \sqcup J_2 = \underline{n} \setminus \underline{4}} (v_{I_2} \otimes (w_1^4 w_{J_2}) + (v_1^4 v_{I_2}) \otimes w_{J_2}) \quad (\text{car } \binom{4}{k} \text{ est pair pour } k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Cela signifie que  $Y^*(V \oplus W) \hookrightarrow S^*(V) \otimes Y^*(W) + Y^*(V) \otimes S^*(W)$ . La proposition est démontrée.  $\square$

**Corollaire 3.1.3.** — *Le foncteur gradué  $S_4^*$  est un foncteur exponentiel de Hopf.*

*Démonstration.* — Les produits naturels sur  $S_4^*$ , qui sont définis par

$$S_4^i(V) \otimes S_4^j(V) \hookrightarrow S_4^{i+j}(V \oplus V) \xrightarrow{S_4^{i+j}(\nabla)} S_4^{i+j}(V),$$

où  $\nabla$  est la somme, vérifient l'hypothèse de la proposition A.2.6. □

**Remarque 3.1.4.** — Le point clé de la démonstration de la proposition 3.1.1 est que  $\binom{4}{k}$  est pair pour  $k = 1, 2, 3$ . Pour tout entier naturel  $\alpha$ , on a  $\binom{2^\alpha}{k} \equiv 0 \pmod{2}$  si  $1 \leq k \leq 2^\alpha - 1$ . Donc, on peut montrer encore que le foncteur

$$S_{2^\alpha}^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_{2^\alpha}^n$$

est aussi exponentiel de Hopf. Ici, le foncteur  $S_{2^\alpha}^n$  est défini comme le conoyau de la composée

$$S^{n-2^\alpha} \otimes S^1 \xrightarrow{1 \otimes \phi} S^{n-2^\alpha} \otimes S^{2^\alpha} \xrightarrow{\text{produit}} S^n.$$

### 3.1.2 Les foncteurs bigradués $\Lambda^{*,*}$ et $S_4^{*,*}$

Pour calculer le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\text{Id}, S^*)$ , Franjou, Lannes et Schwartz [FLS94] ont utilisé les suites spectrales d'hypercohomologie associées aux complexes de cochaines obtenus à partir du foncteur bigradué  $S^{*,*}$ . Cette technique est développée par Friedlander et Suslin [FS97, §8]. Les foncteurs bigradués  $\Lambda^{*,*}$  et  $S_4^{*,*}$  ci-dessous sont étudiés de la même manière pour calculer le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$ .

On utilise la notation  $B^*$  pour indiquer un des foncteurs exponentiels de Hopf  $\Lambda^*$  ou  $S_4^*$ . Pour tout  $V \in \mathcal{V}$ , en posant  $B^{i,j}(V) = B^i(V) \otimes B^j(V)$ ,  $B^{*,*}(V) = \bigoplus_{i,j} B^{i,j}(V)$  est naturellement une algèbre bigraduée commutative. On définit la transformation naturelle  $d$  par la composée

$$d: B^{i,j} \longrightarrow B^{i-1,1} \otimes B^j \cong B^{i-1} \otimes B^{1,j} \longrightarrow B^{i-1,j+1},$$

où les applications de gauche et de droite sont respectivement induites par le coproduit et le produit de  $B^*$ .

**Lemme 3.1.5.** — *L'application  $d$  est une différentielle, i.e.  $d^2 = 0$ . Elle est de plus une dérivation de bidegré  $(-1, 1)$ , ce qui fait de  $B^{*,*}(V)$  une algèbre différentielle bigraduée commutative.*

*Démonstration.* — On obtient le résultat en notant que  $d: B^{i,j}(V) \rightarrow B^{i-1,j+1}(V)$  envoie  $(x_1 \cdots x_i) \otimes (y_1 \cdots y_j)$  sur  $\sum_{k=1}^i (x_1 \cdots x_{k-1} x_{k+1} \cdots x_i) \otimes (x_k y_1 \cdots y_j)$ . □

**Notation et remarque 3.1.6.** — En écrivant  $B_n^i(V) := B^{n-i,i}(V)$ , on appelle  $i$  le **degré homologique** et  $n$  le **degré total**. Alors,  $B^{*,*}(V)$  est encore une algèbre différentielle bigraduée par rapport à ces deux types de degré. La différentielle  $d$  préserve le degré total et augmente le degré homologique de 1, i.e. elle est de bidegré  $(0, 1)$  par rapport à cette bigraduation. Il en résulte donc que  $H_*(B^{*,*}) = \bigoplus_n H_*(B_n^*)$  où  $B_n^* = \bigoplus_i B_n^i$ .

### 3.1. Préliminaires

Grâce au lemme 3.1.5, l'homologie  $H_*(B^{*,*}(V))$  est aussi une algèbre bigraduée commutative. De plus, puisque  $B^*$  est un foncteur exponentiel de Hopf, on a

$$B^{*,*}(V \oplus W) = B^{*,*}(V) \otimes B^{*,*}(W).$$

Par l'isomorphisme de Künneth, on obtient

$$H_*(B^{*,*}(V \oplus W)) = H_*(B^{*,*}(V) \otimes B^{*,*}(W)) \cong H_*(B^{*,*}(V)) \otimes H_*(B^{*,*}(W)). \quad (3.2)$$

Donc, pour calculer l'homologie  $H_*(B^{*,*}(V))$ , il suffit de considérer le cas d'un espace vectoriel de dimension 1.

**Proposition 3.1.7.** — *On a l'isomorphisme naturel en  $V$  :*

$$H_*(\Lambda^{*,*}(V)) \cong \Lambda^*(V^{(2,1)}),$$

où  $(2,1)$  indique que  $V$  est de degré total 2 et de degré homologique 1 dans  $H_*(\Lambda^{*,*}(V))$ .

*Démonstration.* — On dispose d'un morphisme naturel de  $V$  dans  $H_1(\Lambda_2^*(V))$  qui envoie chaque élément  $v \in V$  sur la classe homologique du cycle  $v \otimes v \in \Lambda^1(V) \otimes \Lambda^1(V) = \Lambda_2^1(V)$ . Il s'étend canoniquement en un morphisme d'algèbres bigraduées (en considérant le degré total et le degré homologique) de  $\Lambda^*(V^{(2,1)})$  dans  $H_*(\Lambda^{*,*}(V))$ , puisque la classe  $(v \wedge v) \otimes (v \wedge v)$  est nulle dans  $\Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V) = \Lambda_4^2(V)$ .

Afin de montrer que ce morphisme est un isomorphisme, il suffit d'utiliser un argument de dimension. On considère l'algèbre différentielle bigraduée  $\Lambda^{*,*}(\mathbb{F}_2)$  :

$$\begin{array}{rcl} \text{Degré total 0} & & \mathbb{F}_2 \\ & & \\ & 1 & \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_2 \\ & 2 & 0 \longrightarrow \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0 \\ & 3 & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 . \end{array}$$

Il en résulte que  $H_*(\Lambda^{*,*}(\mathbb{F}_2)) \cong \Lambda^*(\mathbb{F}_2^{(2,1)})$ . Le résultat général est démontré par récurrence sur la dimension de l'espace vectoriel  $V$  en utilisant l'isomorphisme (3.2).  $\square$

**Remarque 3.1.8.** — Le résultat ci-dessus montre que les complexes

$$\Lambda^{2k+1} \longrightarrow \Lambda^{2k} \otimes \Lambda^1 \longrightarrow \Lambda^{2k-1} \otimes \Lambda^2 \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^1 \otimes \Lambda^{2k} \longrightarrow \Lambda^{2k+1}$$

sont acycliques, tandis que les complexes

$$\Lambda^{2k} \longrightarrow \Lambda^{2k-1} \otimes \Lambda^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^k \otimes \Lambda^k \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^1 \otimes \Lambda^{2k-1} \longrightarrow \Lambda^{2k}$$

sont exacts sauf en position  $k$  où l'homologie est  $\Lambda^k$ .



**Proposition 3.1.9.** — On a l'isomorphisme naturel en  $V$  :

$$H_*(S_4^{*,*}(V)) \cong \Lambda^*(V^{(2,0)}) \otimes \Lambda^*(V^{(4,3)}).$$

*Démonstration.* — On dispose d'un morphisme naturel de  $V$  dans  $H_0((S_4)_2^*(V))$  qui envoie chaque élément  $v \in V$  sur la classe homologique du cycle  $v^2 \in S_4^2(V) = (S_4)_2^0(V)$ . D'autre part, on dispose d'un morphisme naturel de  $V$  dans  $H_3((S_4)_4^*(V))$  qui envoie  $v \in V$  sur la classe homologique du cycle  $v \otimes v^3 \in S_4^1(V) \otimes S_4^3(V) = (S_4)_4^3(V)$ . Puisque  $v^4 = 0 \in S_4^4(V) = (S_4)_4^0(V)$  et  $v^2 \otimes v^6 = 0 \in S_4^2(V) \otimes S_4^6(V) = (S_4)_8^6(V)$ , la somme des morphismes ci-dessus s'étend canoniquement en un morphisme d'algèbres bigraduées de  $\Lambda^*(V^{(2,0)}) \otimes \Lambda^*(V^{(4,3)})$  dans  $H_*(S_4^{*,*}(V))$  (en considérant le degré total et le degré homologique).

Afin de montrer que ceci soit un isomorphisme, il suffit d'utiliser un argument de dimension. On considère l'algèbre différentielle bigraduée  $S_4^{*,*}(\mathbb{F}_2)$  :

Degré total 0	$\mathbb{F}_2$
1	$\mathbb{F}_2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_2$
2	$\mathbb{F}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_2$
3	$\mathbb{F}_2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_2$
4	$0 \longrightarrow \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0$
5	$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$
6	$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{F}_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$
7	$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$

Il en résulte que  $H_*(S_4^{*,*}(\mathbb{F}_2)) \cong \Lambda^*(\mathbb{F}_2^{(2,0)}) \otimes \Lambda^*(\mathbb{F}_2^{(4,3)})$ . Le cas général est démontré par récurrence sur la dimension de l'espace vectoriel  $V$  en utilisant l'isomorphisme (3.2).  $\square$

**Corollaire 3.1.10.** — En considérant le complexe  $(S_4)_{2^h}^*$ ,  $h \geq 1$  :

$$S_4^{2^h} \longrightarrow S_4^{2^h-1} \otimes S_4^1 \longrightarrow S_4^{2^h-2} \otimes S_4^2 \longrightarrow S_4^{2^h-3} \otimes S_4^3 \longrightarrow \dots \longrightarrow S_4^1 \otimes S_4^{2^h-1} \longrightarrow S_4^{2^h},$$

qui est la partie homogène de degré total  $2^h$  de  $S^{*,*}$ , on a

1.  $H_0((S_4)_{2^h}^*) \cong \Lambda^{2^h-1}$ ,
2.  $H_1((S_4)_{2^h}^*) = H_2((S_4)_{2^h}^*) = 0$ ,
3.  $H_3((S_4)_{2^h}^*) \cong \Lambda^{2^h-1-2} \otimes \Lambda^1$ .

*Démonstration.* — Le corollaire est déduit de la proposition 3.1.9 en comparant les degrés homologiques et les degrés totaux des deux termes.  $\square$

### 3.1.3 Rappels sur les suites spectrales d'hypercohomologie

Les complexes  $(\mathbb{S}_4)_{2h}^*$  (voir le corollaire 3.1.10) sont utilisés pour calculer le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^*, \mathbb{S}_4^*)$  en comparant les suites spectrales d'hypercohomologie associées. Rappelons la construction de ces suites spectrales (cf. [CE56, Chapter XVII]). Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie abélienne qui a assez d'injectifs. Soit  $C^* : C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots \rightarrow C^i \rightarrow \dots$  un complexe de  $\mathcal{C}$ . Il existe alors

- un bicomplexe du premier quadrant  $I^{*,*}$ ,
- une augmentation  $C^* \rightarrow I^{*,0}$ ,

tels que  $I^{m,*}$  est une résolution injective de  $C^m$ , et de plus, les cycles, les bords, les cohomologies de  $I^{*,n}$  forment respectivement des résolutions injectives des cycles, des bords et des cohomologies de  $C^*$ . On appelle  $I^{*,*}$  une **résolution injective de Cartan-Eilenberg** du complexe  $C^*$ .

Soit  $A$  un objet de la catégorie  $\mathcal{C}$ . On considère le bicomplexe obtenu en appliquant à  $I^{*,*}$  le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ . On a deux **suites spectrales d'hypercohomologie** associées à ce bicomplexe :  $\{\mathbf{I}_r\}_{r \geq 1}$  (resp.  $\{\mathbf{II}_r\}_{r \geq 1}$ ) est obtenue en prenant l'homologie suivant les lignes puis suivant les colonnes (resp. suivant les colonnes puis suivant les lignes).

**Proposition 3.1.11.** — *Les suites spectrales d'hypercohomologie  $\{\mathbf{I}_r\}_{r \geq 1}$  et  $\{\mathbf{II}_r\}_{r \geq 1}$  sont indépendantes du choix de la résolution injective de Cartan-Eilenberg du complexe  $C^*$ . Elles convergent vers une même cohomologie, que l'on note  $\mathbb{E}\text{xt}_{\mathcal{C}}^*(A, C^*)$ . Leurs pages initiales sont déterminées par*

- $\mathbf{I}_1^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^t(A, C^s)$ ,
- $\mathbf{II}_2^{s,t} = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^s(A, H^t(C^*))$ .

De plus, dans les deux suites spectrales, la différentielle  $d_r$  de la  $r$ -ième page est de bidegré  $(r, 1 - r)$ .

**Remarque 3.1.12.** — Pour étudier  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^*, \mathbb{S}_4^*)$ , on va montrer dans les sections suivantes qu'il suffit de calculer  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^{2^k}, \mathbb{S}_4^{2^l})$  avec  $k, l \in \mathbb{N}$ . En utilisant les suites spectrales d'hypercohomologie associées aux complexes dans le corollaire 3.1.10, grâce à la proposition 3.1.11, on observe qu'il faut d'abord étudier le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^*, \Lambda^*)$ .

## 3.2 Les algèbres de Hopf $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}_4^*, \mathbb{S}_4^*)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}_4^*, \Lambda^*)$

Puisque  $\mathbb{S}_4^*$  est un foncteur exponentiel de Hopf, d'après la proposition A.3.5,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\mathbb{S}_4^*, \mathbb{S}_4^*)$  est muni d'une structure d'algèbre de Hopf tri-graduée. Cette structure se restreint à une structure d'algèbre de Hopf bigraduée sur  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}_4^*, \mathbb{S}_4^*)$ . Le but de cette section est d'établir le résultat suivant :

**Proposition 3.2.1.** — *En tant que  $\mathbb{F}_2$ -algèbre bigraduée,*

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}_4^*, \mathbb{S}_4^*) \cong \bigotimes_k \Lambda(b_{[2^k, 2^k]}) \bigotimes_l \Lambda(b_{[2^l, 2^l+1]}),$$

où les morphismes  $b_{[m,n]}: S_4^m \rightarrow S_4^n$  sont définis dans 3.2.3. D'autre part, dans la structure de  $\mathbb{F}_2$ -algèbre de Hopf bigraduée de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$ , le coproduit est caractérisé par le morphisme *Verschiebung* qui est donné par :

- $V(b_{[1,1]}) = V(b_{[1,2]}) = 0$ ,
- $V(b_{[2^k, 2^k]}) = b_{[2^{k-1}, 2^{k-1}]}$ , et  $V(b_{[2^k, 2^{k+1}]}) = b_{[2^{k-1}, 2^k]}$ , pour tout  $k \geq 1$ .

Pour démontrer cette proposition, on détermine d'abord une base de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$  en tant que  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel. Ce travail est similaire à celui sur  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S^*, S^*)$  ([Kuh94a, 6.11 – 6.19]). Ensuite, on va étudier les relations algébriques entre les éléments de la base ci-dessus et ainsi déduire le résultat.

On obtient un résultat similaire pour  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$ . La démonstration est laissée au lecteur puisqu'elle fonctionne de manière analogue à celle pour  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$ .

**Proposition 3.2.2.** — *En tant que  $\mathbb{F}_2$ -algèbre bigraduée,*

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*) \cong \bigotimes_k \Lambda(\tilde{b}_{2^k}),$$

où  $\tilde{b}_m: S_4^m \rightarrow \Lambda^m$ ,  $x_1 \cdots x_m \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_m$  pour  $m \in \mathbb{N}$  quelconque. D'autre part, dans la structure de  $\mathbb{F}_2$ -algèbre de Hopf bigraduée de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$ , le coproduit est caractérisé par le morphisme *Verschiebung* qui est donné par :

- $V(\tilde{b}_1) = 0$ ,
- $V(\tilde{b}_{2^k}) = \tilde{b}_{2^{k-1}}$ , pour tout  $k \geq 1$ .

Maintenant, pour commencer à démontrer la proposition 3.2.1, on considère la définition suivante :

**Définition 3.2.3.** — Soient  $m, n \in \mathbb{N}$  tels que  $m \leq n \leq 2m$ . On pose  $k = 2m - n$ . Alors  $0 \leq k \leq m$ . On définit le morphisme naturel  $b_{[m,n]}: S_4^m \rightarrow S_4^n$  par

$$b_{[m,n]}(x_1 \cdots x_m) = \sum_{\substack{I \sqcup J = \{1, \dots, m\}, \\ |I| = k}} x_I x_J^2.$$

Ici  $x_L$ ,  $x_L^2$  désignent respectivement  $x_{l_1} \cdots x_{l_j}$  et  $x_{l_1}^2 \cdots x_{l_j}^2$  pour  $L = \{l_1, \dots, l_j\}$ . De plus, on convient que  $x_L = x_L^2 = 1 \in \mathbb{F}_2$  si  $L = \emptyset$ .

**Remarque 3.2.4.** — Le morphisme  $b_{[m,m]}$  est le morphisme identité de  $S_4^m$ , et le morphisme  $b_{[n,2n]}: S_4^n \rightarrow S_4^{2n}$  est le morphisme de Frobenius.

**Proposition 3.2.5.** — *Le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$  est librement engendré par les morphismes  $b_{[m,n]}$  pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$  tels que  $m \leq n \leq 2m$ .*

*Démonstration.* — Soient  $m, n \in \mathbb{N}$ . Soit  $\varphi: S_4^m \rightarrow S_4^n$  un morphisme non trivial. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $m + 1$ , et soit  $\{e_1, \dots, e_{m+1}\}$  une base de  $V$ . On a alors la

décomposition suivante

$$\varphi_V(e_1 \cdots e_m) = \sum_{j_1 + \cdots + j_{m+1} = n} \lambda(j_1, \dots, j_{m+1}) e_1^{j_1} \cdots e_{m+1}^{j_{m+1}},$$

où  $\lambda(j_1, \dots, j_{m+1}) \in \mathbb{F}_2$  et  $0 \leq j_k \leq 3$ .

Soient  $x_1, \dots, x_m$  des éléments quelconques dans  $V$ . En considérant l'application linéaire  $\alpha: V \rightarrow V$  qui envoie  $e_i$  sur  $x_i$  pour  $i \leq m$ , et envoie  $e_{m+1}$  sur 0, puisque  $\varphi$  est une transformation naturelle, on obtient que

$$\begin{aligned} \varphi_V(x_1 \cdots x_m) &= \varphi_V(\alpha(e_1 \cdots e_m)) \\ &= \alpha(\varphi_V(e_1 \cdots e_m)) \\ &= \sum_{j_1 + \cdots + j_{m+1} = n} \lambda(j_1, \dots, j_{m+1}) \alpha(e_1^{j_1} \cdots e_{m+1}^{j_{m+1}}) \\ &= \sum_{j_1 + \cdots + j_m = n} \lambda(j_1, \dots, j_m, 0) x_1^{j_1} \cdots x_m^{j_m}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Donc, la proposition va être démontrée si on peut montrer que dans la somme ci-dessus, si  $\lambda(j_1, \dots, j_m, 0) \neq 0$ , alors  $j_k$  est égal à 1 ou 2 pour tout  $k$ . En effet, on considère l'identité

$$\varphi_V(e_1 \cdots e_{m-1}(e_m + e_{m+1})) = \varphi_V(e_1 \cdots e_{m-1}e_m) + \varphi_V(e_1 \cdots e_{m-1}e_{m+1}).$$

En appliquant la formule (3.3), on obtient que

$$\sum \lambda(j_1, \dots, j_m, 0) e_1^{j_1} \cdots (e_m + e_{m+1})^{j_m} = \sum \lambda(j_1, \dots, j_m, 0) e_1^{j_1} \cdots (e_m^{j_m} + e_{m+1}^{j_m}).$$

Si  $\lambda(j_1, \dots, j_m, 0) \neq 0$ , on a alors  $(e_m + e_{m+1})^{j_m} = e_m^{j_m} + e_{m+1}^{j_m}$ . Il en résulte que  $j_m \in \{1, 2\}$ . En utilisant la symétrie, on obtient encore le résultat similaire pour tous les  $j_k$ .

Puisque  $\varphi$  est non trivial, il existe  $(j_1, \dots, j_m)$  tel que  $\lambda(j_1, \dots, j_m, 0) = 1$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $j_1 \leq \cdots \leq j_m$ . Soit  $1 \leq k \leq m$  tel que  $j_1 = \cdots = j_k = 1$  et  $j_{k+1} = \cdots = j_m = 2$ . On en déduit que  $m \leq n \leq 2m$  et  $k = 2m - n$  car  $j_1 + \cdots + j_m = n$ . De plus, puisque  $\varphi_V(x_1 \cdots x_m)$  contient le terme  $x_1 \cdots x_k x_{k+1}^2 \cdots x_m^2$ , par la symétrie, elle contient tous les termes de la forme  $x_I x_J^2$  tels que  $I \sqcup J = \{1, \dots, m\}$  et  $|I| = k$ . On obtient donc que  $\varphi = b_{[m,n]}$  et  $\dim \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}_4^m, \mathbb{S}_4^n) = 1$ . La proposition s'ensuit.  $\square$

**Remarque 3.2.6.** — Le point clé de la démonstration ci-dessus est la détermination d'une base de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^m, \mathbb{S}_4^n)$ . En effet, c'est la famille  $\{b_{[m,n]}^\sigma : \sigma \in \mathfrak{S}_m\}$ , où

$$b_{[m,n]}^\sigma(x_1 \cdots x_m) := x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)} x_{\sigma(k+1)}^2 \cdots x_{\sigma(m)}^2,$$

avec  $k = 2m - n$  (sous la condition  $m \leq n \leq 2m$ ).

L'image du morphisme  $b_{[m,n]}: \mathbb{S}_4^m \rightarrow \mathbb{S}_4^n$  s'identifie alors à celle de la somme  $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} b_{[m,n]}^\sigma$  qui est un élément de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{T}^m, \mathbb{S}_4^n)$  invariant sous l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_m$ .

Autrement dit, on a l'isomorphisme  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^m, S_4^*) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{\mathcal{F}}(T^m, S_4^*)^{\mathfrak{S}_m}$  qui est induit par la projection  $T^m \rightarrow S_4^m$ .

De manière analogue à la démonstration de la proposition 3.2.5, on obtient le résultat suivant :

**Proposition 3.2.7.** — Soient  $m, n$  des entiers naturels. L'espace vectoriel  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\Lambda^m, S_4^n)$  est trivial si  $2m - n \geq 2$ .

*Démonstration.* — Soit  $\varphi$  un morphisme non nul de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\Lambda^m, S_4^n)$ . Alors,  $\varphi$  est de la forme

$$\varphi_V(x_1 \wedge \cdots \wedge x_m) = \sum_{j_1 + \cdots + j_m = n} \lambda(j_1, \dots, j_m) x_1^{j_1} \cdots x_m^{j_m}, \quad (3.4)$$

où  $\lambda(j_1, \dots, j_m) \in \mathbb{F}_2$  et  $0 \leq j_k \leq 3$ . On peut montrer que les exposants  $j_k$  admet une des deux valeurs 1 ou 2 si  $\lambda(j_1, \dots, j_m) \neq 0$ . On pose  $a$  le nombre des exposants égaux à 1, et  $b$  le nombre des exposants égaux à 2. On obtient donc que  $a + 2b = n$ , et  $a + b = m$ . On en déduit que  $a = 2m - n$ . Si  $a \geq 2$ , supposons que  $j_k = j_l = 1$  avec  $k \neq l$ . Soit  $\{e_1, \dots, e_m\}$  une base de l'espace vectoriel  $V$  de dimension  $m$ . On a une contradiction en posant dans (3.4) que  $x_k = x_l = e_k$ , et  $x_i = e_i$  pour  $i \neq k, l$ . Cela signifie qu'il n'existe pas un morphisme non nul de  $\Lambda^m$  vers  $S_4^n$  si  $2m - n \geq 2$ .  $\square$

La proposition 3.2.5 fournit une base de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$  en tant que  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel. Le lemme ci-dessous donne les relations algébriques entre les éléments de cette base. Pour les comprendre, on rappelle d'abord la structure d'algèbre de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$ . La structure de foncteur exponentiel de  $S_4^*$  fournit les produits naturels  $S_4^i \otimes S_4^j \rightarrow S_4^{i+j}$  et les coproduits naturels  $S_4^{i+j} \rightarrow S_4^i \otimes S_4^j$  (voir la section A.2.6). Soient  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{i_1}, S_4^{j_1})$  et  $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{i_2}, S_4^{j_2})$ . D'après la remarque A.3.4, le produit  $\varphi\psi$  est défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} S_4^{i_1+i_2} & \xrightarrow{\varphi\psi} & S_4^{j_1+j_2} \\ \text{coproduit} \downarrow & & \uparrow \text{produit} \\ S_4^{i_1} \otimes S_4^{i_2} & \xrightarrow{\varphi \otimes \psi} & S_4^{j_1} \otimes S_4^{j_2} \end{array} .$$

**Lemme 3.2.8.** — On a

1. Pour tout  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^m, S_4^n)$ , on a  $f^2 = 0$ ; en particulier,  $b_{[m,m]}^2 = b_{[m,2m]}^2 = 0$ .

2.  $b_{[i+j, i+2j]} = b_{[i,i]} b_{[j,2j]}$ .

De plus, si on réécrit  $m = 2^{k_1} + \cdots + 2^{k_s}$  avec  $k_1 < \cdots < k_s$ , on obtient alors les identités suivantes :

3.  $b_{[m,m]} = b_{[2^{k_1}, 2^{k_1}]} \cdots b_{[2^{k_s}, 2^{k_s}]}$ ,

4.  $b_{[m,2m]} = b_{[2^{k_1}, 2^{k_1+1}]} \cdots b_{[2^{k_s}, 2^{k_s+1}]}$ .

### 3.2. Les algèbres de Hopf $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}_4^*, \mathbb{S}_4^*)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}_4^*, \Lambda^*)$

*Démonstration.* — Le coproduit  $\mathbb{S}_4^{i+j} \rightarrow \mathbb{S}_4^i \otimes \mathbb{S}_4^j$  envoie  $x_1 \cdots x_{i+j}$  sur la somme

$$\sum_{\substack{I \sqcup J = \{1, \dots, i+j\} \\ |I|=i}} x_I \otimes x_J.$$

Le lemme est démontré par calcul direct. Par exemple, on donne ici une démonstration des premier et troisième points.

Pour le premier point, on a

$$f^2(x_1 \cdots x_{2m}) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, 2m\} \\ |I|=m}} f(x_I) f(x_{\{1, \dots, 2m\} \setminus I}).$$

Les termes se regroupent par deux et s'annulent.

Pour le troisième, le produit  $b_{[2^{k_1}, 2^{k_1}]} \cdots b_{[2^{k_s}, 2^{k_s}]}$  est défini par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_4^{2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}} & \xrightarrow{b_{[2^{k_1}, 2^{k_1}]} \cdots b_{[2^{k_s}, 2^{k_s}]}} & \mathbb{S}_4^{2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}} \\ \delta \downarrow & & \uparrow \mu \\ \mathbb{S}_4^{2^{k_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbb{S}_4^{2^{k_s}} & \xrightarrow{id} & \mathbb{S}_4^{2^{k_1}} \otimes \cdots \otimes \mathbb{S}_4^{2^{k_s}}, \end{array}$$

où  $\mu$  est induit par les produits naturels de  $\mathbb{S}_4^*$ , et  $\delta$  par les coproduits naturels. Puisque

$$\delta(x_1 \cdots x_{2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}}) = \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_s = \{1, \dots, 2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}\} \\ |I_t| = 2^{k_t}, \forall t}} x_{I_1} \otimes \cdots \otimes x_{I_s},$$

on obtient la composée

$$\mu \circ \delta = \binom{2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}}{2^{k_s}} \binom{2^{k_1} + \dots + 2^{k_{s-1}}}{2^{k_{s-1}}} \cdots \binom{2^{k_1}}{2^{k_1}} \cdot id.$$

On a de plus un résultat classique :

$$\binom{2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}}{2^{k_s}} \binom{2^{k_1} + \dots + 2^{k_{s-1}}}{2^{k_{s-1}}} \cdots \binom{2^{k_1}}{2^{k_1}} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Donc,  $b_{[2^{k_1}, 2^{k_1}]} \cdots b_{[2^{k_s}, 2^{k_s}]} = \mu \circ \delta = id_{\mathbb{S}_4^m} = b_{[m, m]}$ . □

Nous allons maintenant démontrer la proposition 3.2.1 qui est énoncée au début de cette section.

**Proposition 3.2.1.** — *En tant que  $\mathbb{F}_2$ -algèbre bigraduée,*

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}_4^*, \mathbb{S}_4^*) \cong \bigotimes_k \Lambda(b_{[2^k, 2^k]}) \bigotimes_l \Lambda(b_{[2^l, 2^{l+1}]}).$$

D'autre part, dans la structure de  $\mathbb{F}_2$ -algèbre de Hopf bigraduée de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$ , le coproduit est caractérisé par le morphisme *Verschiebung* qui est donné par :

- $V(b_{[1,1]}) = V(b_{[1,2]}) = 0$ ,
- $V(b_{[2^k, 2^k]}) = b_{[2^{k-1}, 2^{k-1}]}$ , et  $V(b_{[2^k, 2^{k+1}]}) = b_{[2^{k-1}, 2^k]}$ , pour tout  $k \geq 1$ .

*Démonstration.* — Supposons que  $b_{[2^k, 2^k]} = b_{[i,i]}b_{[j,j]}$  où  $i + j = 2^k$  et  $i, j < 2^k$ . On réécrit  $i = 2^{\alpha_1} + \dots + 2^{\alpha_s}$  et  $j = 2^{\beta_1} + \dots + 2^{\beta_t}$ . Il existe alors  $s_0$  et  $t_0$  tels que  $\alpha_{s_0} = \beta_{t_0}$  puisque sinon,  $i + j \leq 1 + 2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1 < 2^k$ . Grâce au lemme 3.2.8, on a  $b_{[2^k, 2^k]} = b_{[2^{\alpha_{s_0}}, 2^{\alpha_{s_0}}]} \dots = 0$ . Ceci est une contradiction. De même, on peut montrer qu'il n'existe pas de décomposition de  $b_{[2^l, 2^{l+1}]}$ . Le premier point du lemme 3.2.8 dit que  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$  est une algèbre extérieure.

Pour calculer le morphisme *Verschiebung*  $V(f)$  avec  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2m}, S_4^{2n})$ , il faut analyser le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} S_4^{2m} & \xrightarrow{f} & S_4^{2n} \\ \text{produit} \uparrow & & \uparrow \text{produit} \\ S_4^m \otimes S_4^m & \xrightarrow{\sum_i \varphi_i \otimes \varphi_i + \sum_j (\psi_j \otimes \mu_j + \mu_j \otimes \psi_j)} & \bigoplus_{k+l=2n} S_4^k \otimes S_4^l, \end{array}$$

alors  $V(f) = \sum_i \varphi_i$ . Ou bien de manière équivalente : on considère

$$f: S_4^{2m}(V \oplus W) \rightarrow S_4^{2n}(V \oplus W),$$

et on décrit la restriction au facteur direct  $S_4^m(V) \otimes S_4^m(W)$  dont le but est  $S_4^n(V) \otimes S_4^n(W)$ . Dans le cas  $b_{[2^k, 2^k]}$  (resp.  $b_{[2^k, 2^{k+1}]}$ ), cette restriction est  $b_{[2^{k-1}, 2^{k-1}]} \otimes b_{[2^{k-1}, 2^{k-1}]}$  (resp.  $b_{[2^{k-1}, 2^k]} \otimes b_{[2^{k-1}, 2^k]}$ ) si  $k \geq 1$ , et elle est nulle si  $k = 1$ .  $\square$

### 3.3 Le module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$

En utilisant la structure de  $\mathbb{F}_2$ -algèbre de Hopf tri-graduée sur  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, \Lambda^*)$ , on observe que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$  est un module sur l'algèbre de Hopf  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$ . On peut de plus montrer que ce module est libre à l'aide d'un résultat de Milnor et Moore [MM65].

**Théorème 3.3.1.** — Les  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^1, \Lambda^2)$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, \Lambda^1)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, \Lambda^2)$  sont isomorphes à  $\mathbb{F}_2$ . Soient respectivement  $\tilde{\epsilon}_{[1,2]}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{[4,1]}$  et  $\tilde{\epsilon}_{[2,2]}$  leurs générateurs. Alors, en tant que module sur l'algèbre de Hopf  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$  est librement engendré par  $\tilde{\epsilon}_{[1,2]}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{[4,1]}$  et  $\tilde{\epsilon}_{[2,2]}$ .

Afin de démontrer le théorème ci-dessus, on montre d'abord que le calcul de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$  se ramène aux cas particuliers  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2^l})$  avec  $k, l \in \mathbb{N}$  :

**Proposition 3.3.2.** — Si  $m \neq 2^k$  ou  $n \neq 2^l$ , tout élément de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^m, \Lambda^n)$  est décomposable par rapport au produit de Hopf sur  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, \Lambda^*)$ .

### 3.3. Le module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$

**Remarque 3.3.3.** — La proposition 3.3.2 dit que le produit de Hopf sur  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, \Lambda^*)$  induit un épimorphisme de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$ -modules :

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*) \otimes \left( \bigoplus_{k,l \in \mathbb{N}} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2^l}) \right) \twoheadrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*).$$

Nous exhibons ensuite les premiers calculs sur  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2^l})$  :

$$\textbf{Proposition 3.3.4.} \text{ — } \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^{h+i}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq 2, \\ 0 & \text{si } i = 1, h \geq 1, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 1, h = 0. \end{cases}$$

$$\textbf{Proposition 3.3.5.} \text{ — } \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+i}}, \Lambda^{2^h}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq 3, \\ 0 & \text{si } i = 2, h \geq 1, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 2, h = 0. \end{cases}$$

Grâce aux propositions 3.3.4 et 3.3.5, nous continuons à ramener le calcul de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$  à ceux de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+i}}, \Lambda^{2^h})$  où  $i = 0, 1$  et  $h \geq 1$ . En utilisant des suites spectrales d'hypercohomologie associées au complexe  $\Lambda_{2^h}^*$  (cf. la section 3.1.2), nous obtenons les résultats suivants qui nous permettent de conclure le théorème 3.3.1.

**Proposition 3.3.6.** —  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h}) = 0, \forall h \geq 1$ .

**Proposition 3.3.7.** — Le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h})$  est isomorphe à  $\mathbb{F}_2$  pour tout  $h \geq 1$ . Il est engendré par le produit de Hopf  $\tilde{b}_{2^h-2} \tilde{\epsilon}_{[2,2]}$ , où  $\tilde{b}_m$  est défini dans la proposition 3.2.2, et  $\tilde{\epsilon}_{[2,2]}$  est le générateur de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, \Lambda^2)$ .

#### 3.3.1 $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$ est un module libre sur $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$

On a besoin du résultat suivant, dû à Milnor et Moore :

**Proposition 3.3.8** (Cf. [MM65, Theorem 4.4]). — Soit  $K$  un anneau commutatif. Soient  $A, B$  des algèbres de Hopf graduées connexes sur  $K$  telles que  $B$  est un  $A$ -module à gauche. Posons  $C = K \otimes_A B$ . Soient  $i: A \rightarrow B$  et  $\pi: B \rightarrow C$  les morphismes canoniques. Si les suites  $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B$  et  $B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$  sont scindées en tant que  $K$ -modules gradués, il existe alors  $h: B \rightarrow A \otimes C$  qui est un isomorphisme de  $A$ -modules à gauche et de  $C$ -comodules à droite.

**Corollaire 3.3.9.** —  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, \Lambda^*)$  est un module libre sur l'algèbre de Hopf  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$ . En particulier,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$  est un module libre sur  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$ .

*Démonstration.* — Nous allons vérifier les hypothèses de la proposition 3.3.8. Rappelons que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, \Lambda^*)$  est un module sur l'algèbre de Hopf  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$  (voir la section A.3). D'autre part, puisque les morphismes canoniques

$$i: \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*) \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, \Lambda^*), \text{ et}$$



$$\pi : \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, \Lambda^*) \rightarrow \mathbb{F}_2 \otimes_{\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, \Lambda^*)$$

sont des morphismes de  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels, ils sont scindés. D'après la proposition 3.3.8, il existe un isomorphisme de modules sur  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$  :

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, \Lambda^*) \cong \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*) \otimes \left[ \mathbb{F}_2 \otimes_{\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, \Lambda^*) \right].$$

Le résultat s'ensuit. □

### 3.3.2 Un système de générateurs du module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$

**Lemme 3.3.10.** — Soient  $k_1, \dots, k_s$  des entiers naturels tels que  $k_1 < \dots < k_s$ . Alors,

1.  $\Lambda^{2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}}$  est un facteur direct de  $\Lambda^{2^{k_1}} \otimes \dots \otimes \Lambda^{2^{k_s}}$ ,
2.  $S_4^{2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}}$  est un facteur direct de  $S_4^{2^{k_1}} \otimes \dots \otimes S_4^{2^{k_s}}$ .

*Démonstration.* — On montre dans la démonstration du lemme 3.2.8 que l'on a deux morphismes  $\mu$  et  $\delta$

$$S_4^{2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta} \\ \xleftarrow{\mu} \end{array} S_4^{2^{k_1}} \otimes \dots \otimes S_4^{2^{k_s}}$$

qui vérifient  $\mu \circ \delta = id$ . Le deuxième résultat s'ensuit. De même, on obtient une démonstration pour le cas de  $\Lambda^*$ . □

**Remarque 3.3.11.** — Un résultat plus général se trouve dans la thèse de Troesch [Tro02, Lemme 3.4.4].

**Lemme 3.3.12.** — Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie abélienne. Soient  $A, B$  deux objets de  $\mathcal{C}$  tels que  $A$  est un facteur direct de  $B$ . Alors,  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X, A)$  (resp.  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(A, X)$ ) est un facteur direct de  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(X, B)$  (resp.  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(B, X)$ ) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* — Ceci est un résultat classique en algèbre homologique. □

On déduit directement des deux lemmes précédents le fait que :

**Corollaire 3.3.13.** — Soient  $m, n$  quelconques dans  $\mathbb{N}$ . On réécrit  $m = 2^{k_1} + \dots + 2^{k_s}$ ,  $n = 2^{l_1} + \dots + 2^{l_t}$  avec  $0 \leq k_1 < \dots < k_s$  et  $0 \leq l_1 < \dots < l_t$ . Alors on a une inclusion

$$i : \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^m, \Lambda^n) \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{k_1}} \otimes \dots \otimes S_4^{2^{k_s}}, \Lambda^{2^{l_1}} \otimes \dots \otimes \Lambda^{2^{l_t}}),$$

et un scindement canonique

$$p : \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{k_1}} \otimes \dots \otimes S_4^{2^{k_s}}, \Lambda^{2^{l_1}} \otimes \dots \otimes \Lambda^{2^{l_t}}) \twoheadrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^m, \Lambda^n).$$

### 3.3. Le module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$

D'après [FSS99, Corollary 1.8] (voir aussi l'appendice A), on a la décomposition

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^{2^{k_1}} \otimes \cdots \otimes S_4^{2^{k_s}}, \Lambda^{2^{l_1}} \otimes \cdots \otimes \Lambda^{2^{l_t}}) \\ \cong \bigoplus_{\substack{\sum_{b=1}^t \alpha_{a,b} = 2^{k_a}, \forall a=1, \dots, s \\ \sum_{b=1}^s \beta_{a,b} = 2^{l_a}, \forall a=1, \dots, t}} \bigotimes_{\substack{i=1, \dots, s \\ j=1, \dots, t}} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^{\alpha_{i,j}}, \Lambda^{\beta_{j,i}}). \end{aligned}$$

Il en résulte que, pour  $x$  un élément quelconque du terme à gauche,  $x$  s'identifie à un élément  $\sum \bigotimes_{i=1, \dots, s; j=1, \dots, t} \tau_{i,j}$  du terme à droite, où  $\tau_{i,j} \in \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^{\alpha_{i,j}}, \Lambda^{\beta_{j,i}})$ . Les morphismes dans la démonstration du lemme 3.3.10 sont induits par les produits et les coproduits naturels des foncteurs exponentiels de Hopf  $S_4^*$  et  $\Lambda^*$ . Le morphisme  $p$ , par définition, envoie  $x$  sur la somme des produits de Hopf  $\sum \prod_{i=1, \dots, s; j=1, \dots, t} \tau_{i,j}$  (cf. la proposition A.3.5 et la remarque A.3.4).

En particulier, on obtient le résultat 3.3.2 qui a été énoncé à la page 102 :

**Proposition 3.3.2.** — *Si  $m \neq 2^k$  ou  $n \neq 2^l$ , tout élément de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^m, \Lambda^n)$  est décomposable par rapport au produit de Hopf sur  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, \Lambda^*)$ .*

Le corollaire ci-dessous se déduit directement de la proposition 3.3.2.

**Corollaire 3.3.14.** — *Le produit de Hopf sur  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, \Lambda^*)$  induit un épimorphisme de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$ -modules :*

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*) \otimes \left( \bigoplus_{k,l \in \mathbb{N}} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2^l}) \right) \twoheadrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*).$$

#### 3.3.3 Premiers résultats sur $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2^l})$

Rappelons que le foncteur  $S_4^{2^k}$  admet la filtration

$$0 = F_0^k \subset F_1^k \subset \cdots \subset F_{2^{k-1}+1}^k = S_4^{2^k}$$

telle que  $F_i^k / F_{i-1}^k = \Lambda^{2^{i-2}} \otimes \Lambda^{2^{k-1-i+1}}$  (voir le corollaire 2.3.34). Le résultat suivant est une conséquence directe du corollaire A.4.5.

**Lemme 3.3.15.** — *Si  $2^l \geq 2^k + 2$  ou  $2^l \leq 2^{k-1} - 2$ , alors  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2^l}) = 0$ .*

*Démonstration.* — En utilisant la filtration de  $S_4^{2^k}$ , on a la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^{2^i} \otimes \Lambda^{2^{k-1-i}}, \Lambda^{2^l}) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(F_{i+1}^k, \Lambda^{2^l}) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(F_i^k, \Lambda^{2^l}) \longrightarrow \cdots \quad (3.5)$$

pour  $0 \leq i \leq 2^{k-1}$ .

Si  $2^l \geq 2^k + 2$ , on a  $|(2i + 2^{k-1} - i) - 2^l| = 2^l - 2^{k-1} - i \geq 2^l - 2^k \geq 2$ . Si  $2^l \leq 2^{k-1} - 2$ , on a  $|(2i + 2^{k-1} - i) - 2^l| = 2^{k-1} + i - 2^l \geq 2$ . Alors, d'après le corollaire A.4.5, on obtient que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^{2^i} \otimes \Lambda^{2^{k-1-i}}, \Lambda^{2^l}) = 0$  pour tout  $0 \leq i \leq 2^{k-1}$ .

Pour le cas initial  $i = 0$ , on a  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(F_0^k, \Lambda^{2^l}) = 0$ . Par récurrence, on obtient que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2^l}) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(F_{2^{k-1}+1}^k, \Lambda^{2^l}) = 0$  en utilisant les suites exactes (3.5).  $\square$

**Remarque 3.3.16.** — On explique ici les hypothèses du lemme 3.3.15 :

- $2^l \geq 2^k + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} l > k & \text{si } k > 0, \\ l \geq 2 & \text{si } k = 0. \end{cases}$
- $2^l \leq 2^{k-1} - 2 \Leftrightarrow 2^{k-1} \geq 2^l + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} k > l + 1 & \text{si } l > 0, \\ k \geq 3 & \text{si } l = 0. \end{cases}$

**Lemme 3.3.17.** —  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\text{Id}, S_4^n) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^n, \text{Id}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 4, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } n = 4. \end{cases}$

*Démonstration.* — Si  $n \leq 3$ , on a  $S_4^n = S^n$ , alors  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\text{Id}, S_4^n) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^n, \text{Id}) = 0$  (d'après [FLS94]). Si  $n \geq 5$ , par l'argument utilisé dans la démonstration du lemme 3.3.15, on obtient le résultat. Si  $n = 4$ , on considère les suites exactes

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\text{Id}, \Lambda^{2^i} \otimes \Lambda^{2^{-i}}) &\longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\text{Id}, F_i^2) \\ &\longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\text{Id}, F_{i+1}^2) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\text{Id}, \Lambda^{2^i} \otimes \Lambda^{2^{-i}}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

pour  $i = 1, 2$ . Puisque les groupes  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\text{Id}, \Lambda^{2^i} \otimes \Lambda^{2^{-i}})$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\text{Id}, \Lambda^{2^i} \otimes \Lambda^{2^{-i}})$  sont nuls pour tout  $i \neq 0$  (voir le corollaire A.4.5), alors

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\text{Id}, S_4^4) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\text{Id}, F_2^2) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\text{Id}, F_1^2) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^1, \Lambda^2) = \mathbb{F}_2.$$

De la même manière, on obtient l'inclusion

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^1) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(F_2^2, S_4^1) \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(F_1^2, S_4^1) \cong \mathbb{F}_2.$$

De plus, rappelons que nous avons, par définition de  $S_4^4$ , une extension

$$0 \longrightarrow \text{Id} \longrightarrow S^4 \longrightarrow S_4^4 \longrightarrow 0.$$

Elle est non-triviale puisque  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S^4, \text{Id}) = 0$ . Il en résulte que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, \text{Id}) = \mathbb{F}_2$ . La proposition est démontrée.  $\square$

On déduit des lemmes 3.3.15 et 3.3.17 les résultats 3.3.4 et 3.3.5 qui ont déjà été énoncés au début de cette section :

**Proposition 3.3.4.** —  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^{h+i}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq 2, \\ 0 & \text{si } i = 1, h \geq 1, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 1, h = 0. \end{cases}$

*Démonstration.* — Le fait que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^1, \Lambda^2) = \mathbb{F}_2$  est un cas particulier du lemme A.4.4.  $\square$

**Proposition 3.3.5.** —  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+i}}, \Lambda^{2^h}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq 3, \\ 0 & \text{si } i = 2, h \geq 1, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 2, h = 0. \end{cases}$

*Démonstration.* — Ce résultat est déduit des lemmes 3.3.15 et 3.3.17.  $\square$

Grâce aux propositions 3.3.2, 3.3.4 et 3.3.5, pour étudier  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$ , il suffit de calculer les groupes  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h})$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h})$  où  $h \geq 1$ . On va utiliser des suites spectrales d'hypercohomologie.

### 3.3.4 Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h})$ avec $h \geq 1$

On considère le complexe (voir 3.1.7 et 3.1.8) :

$$\Lambda_{2^h}^* : \Lambda^{2^h} \longrightarrow \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^{2^h-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^{2^h},$$

et les deux suites spectrales d'hypercohomologie qui ont pour aboutissement commun la cohomologie totale  $\mathbb{E}\text{xt}_{\mathcal{F}}^*(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda_{2^h}^*)$ .

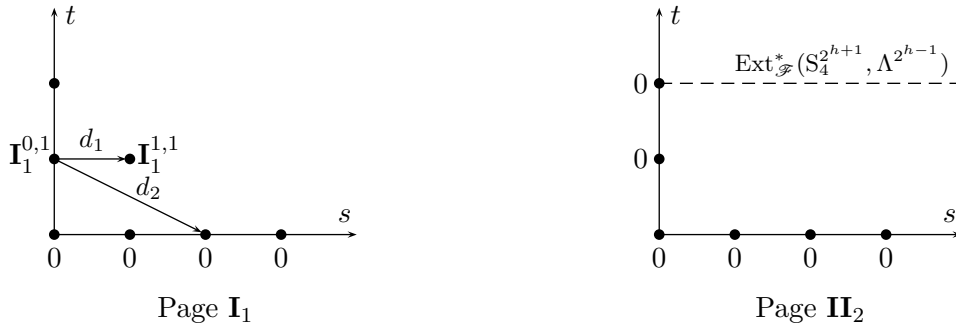


FIGURE 3.1 – Calcul de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h})$ ,  $h \geq 1$ .

On a que la ligne  $\mathbf{II}_{\infty}^{*,0} = \mathbf{II}_2^{*,0} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^{2^{h+1}}, H^0(\Lambda_{2^h}^*)) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^{2^{h+1}}, 0) = 0$ . De plus, puisque  $H^*(\Lambda_{2^h}^*) \cong \Lambda^{2^h-1}$  est de degré  $2^h-1$ , tandis que  $S_4^{2^{h+1}}$  a pour cosocle  $\Lambda^{2^{h+1}}$  qui est de degré  $2^{h+1}$ , alors, la colonne  $\mathbf{II}_2^{0,*} = \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^{h+1}}, H^*(\Lambda_{2^h}^*))$  est nulle. On obtient encore que  $\mathbf{II}_{\infty}^{0,*} = \mathbf{II}_2^{0,*} = 0$  puisque cette suite spectrale est nulle en degrés négatifs.

On travaille maintenant sur la suite spectrale  $\mathbf{I}$  dont  $\mathbf{I}_1^{0,1} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h})$ . On considère la ligne  $\mathbf{I}_1^{*,0} = \bigoplus_{i=0}^{2^h-1} \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h-i} \otimes \Lambda^i)$ . En utilisant l'argument sur des cosocles, on obtient qu'elle est nulle.

On va ensuite démontrer la proposition 3.3.6 (énoncée à la page 103) :

**Proposition 3.3.6.** —  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h}) = 0, \forall h \geq 1$ .

*Démonstration.* — On a  $\mathbf{I}_{\infty}^{*,0} = \mathbf{I}_1^{*,0} = 0$ . De plus, puisque  $\mathbf{II}_{\infty}^{1,0}$  et  $\mathbf{II}_{\infty}^{0,1}$  sont nuls, on déduit que  $\mathbf{I}_{\infty}^{0,1} = 0$ . On considère les différentielles  $d_1$  et  $d_2$  comme dans la figure ci-dessus. On observe que  $d_2$  est une flèche de  $\text{Ker } d_1$  vers 0, et  $\text{Ker } d_2 = \mathbf{I}_{\infty}^{0,1} = 0$ . Alors  $\text{Ker } d_1 = 0$ ,

on a une inclusion de  $\mathbf{I}_1^{0,1}$  dans  $\mathbf{I}_1^{1,1} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^1)$ . Il reste à montrer que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^1) = 0$ .

En effet, dans le cas  $h = 1$ , puisque  $S_4^*$  est un foncteur exponentiel, on utilise le théorème A.3.1 pour montrer que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^1, \Lambda^1 \otimes \Lambda^1) = 0$ . Si  $h \geq 2$ , on utilise encore le théorème A.3.1 pour obtenir la décomposition

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^1) &\cong \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}-1}, \Lambda^{2^h-1}) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^1, \Lambda^1) \\ &\oplus \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^{h+1}-4}, \Lambda^{2^h-1}) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, \Lambda^1). \end{aligned}$$

Comme  $h \geq 2$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^{h+1}-4}, \Lambda^{2^h-1}) = 0$  (voir la proposition 3.2.2). De plus, nous avons l'inclusion

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}-1}, \Lambda^{2^h-1}) \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^1 \otimes S_4^2 \otimes \dots \otimes S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h-1}).$$

Puisque  $\Lambda^*$  est un foncteur exponentiel, alors

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^1 \otimes S_4^2 \otimes \dots \otimes S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h-1}) \\ \cong \bigoplus_{a_0 + \dots + a_h = 2^h - 1} \bigoplus_{k=0}^h \left( \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{a_k}) \otimes \bigotimes_{i \neq k} \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^i}, \Lambda^{a_i}) \right). \end{aligned}$$

A la suite de la proposition 3.2.2,  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^i}, \Lambda^{a_i}) \neq 0$  si et seulement si  $a_i = 2^i$ . On obtient ainsi que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^1 \otimes S_4^2 \otimes \dots \otimes S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h-1}) \cong \bigoplus_{k=0}^h \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2^k-2^h}) = 0$  car  $2^k - 2^h \leq 0$ . Il en résulte que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^1) = 0$  pour  $h \geq 2$ , et donc pour tout  $h \geq 1$ . La proposition est démontrée.  $\square$

### 3.3.5 Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h})$ avec $h \geq 1$

On utilise les suites spectrales d'hypercohomologie qui ont pour aboutissement commun la cohomologie totale  $\mathbb{E}\text{xt}_{\mathcal{F}}^*(S_4^{2^h}, \Lambda_{2^h}^*)$ .

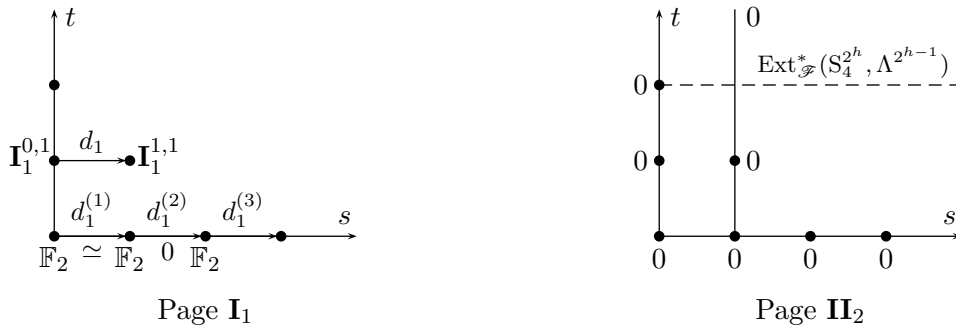


FIGURE 3.2 – Calcul de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h})$ ,  $h \geq 1$ .

### 3.3. Le module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$

Pour la page  $\mathbf{II}_2$ , on a les résultats similaires au cas  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^{h-1}})$ . De plus, la colonne  $\mathbf{II}_2^{1,*} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, H^*(\Lambda_{2^h}^*))$  est nulle puisque  $H^*(\Lambda_{2^h}^*) = \Lambda^{2^{h-1}}$  (voir la proposition 3.3.6). On en déduit que  $\mathbf{II}_{\infty}^{i,j} = 0$  si  $i + j \leq 2$ . Ceci implique que  $\mathbf{I}_{\infty}^{0,0} = 0$ , la différentielle  $d_1^{(1)}$  de la page  $\mathbf{I}_1$  est alors un isomorphisme. On obtient de plus que la différentielle  $d_1^{(2)}$  est nulle (on renvoie à la figure 3.2 pour les notations).

On va démontrer le résultat suivant (énoncé à la page 103) :

**Proposition 3.3.7.** — *Le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h})$  est isomorphe à  $\mathbb{F}_2$  pour tout  $h \geq 1$ . Il est engendré par le produit de Hopf  $\tilde{b}_{2^h-2}\tilde{\epsilon}_{[2,2]}$ , où  $\tilde{b}_m$  est défini dans la proposition 3.2.2, et  $\tilde{\epsilon}_{[2,2]}$  est le générateur de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, \Lambda^2)$ .*

*Démonstration.* — On considère le cas  $h = 1$  et on fait des arguments sur la page  $\mathbf{I}_1$  de la suite spectrale  $\mathbf{I}$  (voir la figure 3.2). Comme  $\mathbf{I}_1^{3,0} = 0$ , on obtient  $\text{Ker } d_1^{(3)} = \mathbb{F}_2$ . D'autre part, on a  $\mathbf{I}_1^{1,1} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, \Lambda^1 \otimes \Lambda^1) = 0$ . Ceci implique  $\text{Ker } d_1 = \mathbf{I}_1^{0,1} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, \Lambda^2)$ . On considère ensuite la différentielle  $d_2$  de  $\text{Ker } d_1$  vers  $\text{Ker } d_1^{(3)}$ . Puisque  $\mathbf{I}_{\infty}^{2,0} = 0$ ,  $d_2$  est surjective. De plus,  $d_2$  est injective puisque  $\mathbf{I}_{\infty}^{0,1} = 0$ . On obtient ainsi l'isomorphisme

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, \Lambda^2) = \text{Ker } d_1 = \text{Ker } d_1^{(3)} = \mathbb{F}_2.$$

Si  $h \geq 2$ , on a  $\mathbf{I}_1^{2,0} = \mathbf{I}_1^{3,0} = \mathbb{F}_2$ . Alors  $d_1^{(3)}$  est un isomorphisme, et  $d_2$  est une flèche de  $\text{Ker } d_1$  vers 0. Le fait que  $\mathbf{I}_{\infty}^{0,1} = 0$  implique ensuite que  $\text{Ker } d_1 = \text{Ker } d_2 = 0$ , *i.e.* on a l'inclusion  $d_1$  de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h})$  dans  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^{h-1}} \otimes \Lambda^1)$ .

On démontre la proposition par récurrence. Supposons que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h}) = \mathbb{F}_2$  pour tout  $1 \leq h \leq \alpha - 1$ , et que son générateur est le produit de Hopf  $\tilde{b}_{2^h-2}\tilde{\epsilon}_{[2,2]}$ . D'après l'argument ci-dessus, on a une inclusion de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^\alpha}, \Lambda^{2^\alpha})$  dans  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^\alpha}, \Lambda^{2^{\alpha-1}} \otimes \Lambda^1)$ .

De manière analogue à la démonstration de la proposition 3.3.6, nous obtenons que le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^\alpha}, \Lambda^{2^{\alpha-1}} \otimes \Lambda^1)$  est isomorphe à  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{\alpha-1}}, \Lambda^{2^{\alpha-1}})$ , qui est inclus dans  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^1 \otimes S_4^2 \otimes \cdots \otimes S_4^{2^{\alpha-1}}, \Lambda^{2^{\alpha-1}})$ . De plus, puisque  $\Lambda^*$  est un foncteur exponentiel, on obtient la décomposition

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^1 \otimes S_4^2 \otimes \cdots \otimes S_4^{2^{\alpha-1}}, \Lambda^{2^{\alpha-1}}) \\ \cong \bigoplus_{k=0}^{\alpha-1} \left( \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^1, \Lambda^1) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2^k}) \otimes \bigotimes_{i \neq k} \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^i}, \Lambda^{2^i}) \right). \end{aligned}$$

L'argument qui nous donne la proposition 3.3.2 (voir la page 105) dit alors que, en tant que  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{\alpha-1}}, \Lambda^{2^{\alpha-1}})$  est engendré par les produits de Hopf entre les éléments de l'algèbre  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$  et les générateurs  $\tilde{b}_{2^k-2}\tilde{\epsilon}_{[2,2]}$  de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2^k})$  où  $k < \alpha$  (par hypothèse de récurrence). Il en résulte que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{\alpha-1}}, \Lambda^{2^{\alpha-1}}) = \mathbb{F}_2$  grâce à la proposition 3.2.2 et le corollaire 3.3.9.

Le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^\alpha}, \Lambda^{2^\alpha})$  est inclus dans  $\mathbb{F}_2$ . Puisqu'il admet le générateur  $\tilde{b}_{2^\alpha-2}\tilde{\epsilon}_{[2,2]}$ , alors  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^\alpha}, \Lambda^{2^\alpha}) = \mathbb{F}_2$ . La proposition est démontrée.  $\square$

### 3.3.6 Résultat principal et conséquences

**Théorème 3.3.1.** — En tant que module sur l'algèbre de Hopf  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$  est librement engendré par les éléments  $\tilde{\epsilon}_{[1,2]}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{[4,1]}$  et  $\tilde{\epsilon}_{[2,2]}$ .

*Démonstration.* — Le théorème se déduit du corollaire 3.3.14, de la structure de  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^l})$  (cf. les propositions 3.3.4, 3.3.5, 3.3.6 et 3.3.7), et du corollaire 3.3.9, en observant que les trois générateurs dans l'énoncé sont des indécomposables de l'algèbre de Hopf tri-graduée  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, \Lambda^*)$ .  $\square$

**Corollaire 3.3.18.** —  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^m, \Lambda^n) = 0$  si  $(m - n) \notin \{-1, 0, 3\}$ .

*Démonstration.* — Par la proposition 3.2.2,  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^m, \Lambda^n) \neq 0$  si et seulement si  $m = n$ . On en déduit le résultat en considérant les générateurs ci-dessus de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$ .  $\square$

On a besoin du lemme suivant pour calculer  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h})$  :

**Lemme 3.3.19.** —  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^1) = 0, \forall h \geq 0$ .

*Démonstration.* — Puisque  $S_4^*$  est exponentiel, en convenant que  $S_4^k = \Lambda^k = 0$  si  $k < 0$ , on obtient la décomposition

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^1) &= \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^h-1}, \Lambda^{2^h-1}) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^1) \\ &\quad \oplus \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}-4}, \Lambda^{2^h-1}) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, \Lambda^1) \\ &\quad \oplus \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^{h+1}-1}, \Lambda^{2^h-1}) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\Lambda^1, \Lambda^1). \end{aligned}$$

On observe que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^1)$  est inclus dans  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^h} \otimes S_4^1, \Lambda^1)$ . De plus, le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^h} \otimes S_4^1, \Lambda^1)$  est nul, par théorème A.3.1 appliqué au foncteur exponentiel  $\Lambda^*$  (voir aussi le théorème d'annulation de Pirashvili [JP91]). Le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^1)$  est donc nul.

D'autre part, on considère le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}-4}, \Lambda^{2^h-1})$ . Il est nul si  $h \leq 1$  (cf. le lemme 3.3.17). Il est également nul si  $h \geq 2$  puisque  $(2^{h+1}-4) - (2^h-1) = 2^h - 3 \notin \{-1, 0, 3\}$ .

Finalement, désignons par  $G_h$  le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^1 \otimes S_4^2 \otimes \cdots \otimes S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h-1})$ . On a  $G_0 = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^1, \mathbb{F}_2) = 0$ . On a encore  $G_1 = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^1 \otimes S_4^2, \Lambda^1) = 0$ , puisque le foncteur  $\Lambda^*$  est exponentiel. Si  $h \geq 2$ , on a la décomposition

$$\begin{aligned} G_h &= \bigoplus_{0 \leq k < l \leq h} \left( \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{a_k}) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^l}, \Lambda^{a_l}) \otimes \bigotimes_{i \neq k, i \neq l} \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^i}, \Lambda^{2^i}) \right) \\ &\quad \oplus \bigoplus_{k=0}^h \left( \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^k}, \Lambda^{2^k-2^h}) \otimes \bigotimes_{i \neq k} \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^i}, \Lambda^{2^i}) \right), \end{aligned}$$

où  $a_k + a_l = 2^k + 2^l - 2^h$ . Les groupes  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^k}, \Lambda^{2^k-2^h})$  sont nuls car  $k \leq h$ . De plus, soit  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{a_k})$  soit  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^l}, \Lambda^{a_l})$  est nul puisque la somme  $(2^k - a_k) + (2^l - a_l) = 2^h$

### 3.3. Le module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, \Lambda^*)$

n'est pas une des valeurs  $\{-1, 0, 3, 2, -2, 6\}$ . Ainsi, on obtient  $G_h = 0$  pour tout  $h \geq 0$ . Il en résulte que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^{h+1}-1}, \Lambda^{2^h-1}) = 0$ , puisqu'il est inclus dans  $G_h$ .

Donc, le lemme suit de la décomposition ci-dessus.  $\square$

**Proposition 3.3.20.** —  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h}) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \geq 2, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } h = 0 \text{ ou } 1. \end{cases}$

*Démonstration.* — On utilise les suites spectrales d'hypercohomologie qui sont obtenues en appliquant le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^{h+1}}, -)$  à une résolution injective de Cartan-Eilenberg du complexe  $\Lambda_{2^h}^*$  (voir la figure 3.1). Pour calculer  $\mathbf{I}_1^{0,2} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h})$ , il faut calculer  $\mathbf{I}_1^{1,2} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^1)$  et  $\mathbf{I}_1^{2,1} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h-2} \otimes \Lambda^2)$ . Ici, on convient que  $\Lambda^k = 0$  si  $k < 0$ .

Grâce à la proposition 3.2.2 et la propriété exponentielle de  $S_4^*$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1^{2,1} &= \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^h-2}, \Lambda^{2^h-2}) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h+2}, \Lambda^2) \\ &\quad \oplus \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}-2}, \Lambda^{2^h-2}) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^2, \Lambda^2). \end{aligned}$$

De plus, d'après le corollaire 3.3.18,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h+2}, \Lambda^2)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}-2}, \Lambda^{2^h-2})$  sont nuls, on obtient donc  $\mathbf{I}_1^{2,1} = 0$ . Il en résulte que  $\mathbf{I}_{\infty}^{2,1} = \mathbf{I}_2^{2,1} = \mathbf{I}_1^{2,1} = 0$ . On a la figure suivante :

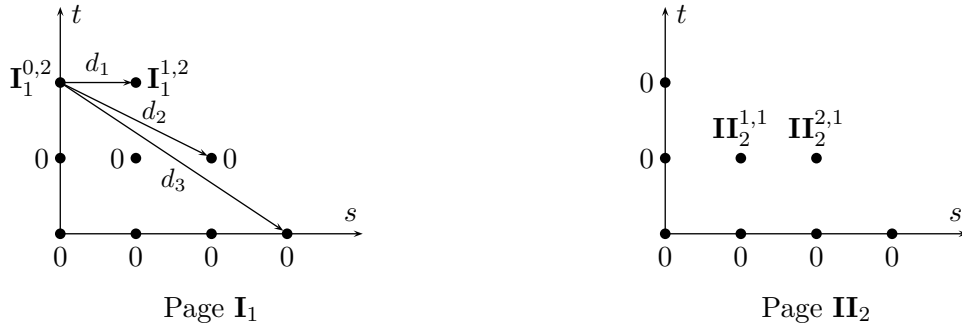


FIGURE 3.3 – Calcul de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h})$ .

Le lemme 3.3.19 montre que  $\mathbf{I}_1^{1,2} = 0$ . On en déduit que le noyau de la différentielle  $d_1$  est  $\mathbf{I}_1^{0,2}$ . Ensuite, le fait  $\mathbf{I}_{\infty}^{2,1} = \mathbf{I}_{\infty}^{3,0} = 0$  implique  $\mathbf{I}_{\infty}^{0,2} = \text{Ker } d_3 = \text{Ker } d_2 = \text{Ker } d_1 = \mathbf{I}_1^{0,2}$ . Donc,  $\mathbf{I}_1^{0,2} = \mathbf{II}_{\infty}^{1,1}$  puisque  $\mathbf{I}_{\infty}^{1,1} = \mathbf{I}_{\infty}^{2,0} = 0$  et  $\mathbf{II}_{\infty}^{0,2} = \mathbf{II}_{\infty}^{2,0} = 0$  (voir à la page 107).

- Si  $h \geq 2$ , on a  $\mathbf{II}_{\infty}^{1,*} = \mathbf{II}_2^{1,*} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, H^*(\Lambda_{2^h}^*)) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, \Lambda^{2^h-1}) = 0$ . Il en résulte que  $\mathbf{II}_{\infty}^{1,1} = 0$ .
- Si  $h = 1$ ,  $\mathbf{II}_2^{1,1} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, \Lambda^1) = \mathbb{F}_2$ . On obtient ainsi que  $\mathbf{II}_{\infty}^{1,1} = \mathbf{II}_2^{1,1} = \mathbb{F}_2$  car  $\mathbf{II}_2^{3,0} = 0$ .
- Si  $h = 0$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^2, \Lambda^1) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S^2, S^1) = \mathbb{F}_2$  d'après [FLS94].

La proposition est démontrée.  $\square$



### 3.4 Le module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$

Dans cette section, on va étudier  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$  en tant que module sur  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$ . Cette structure provient du produit de Hopf tri-gradué de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, S_4^*)$ .

**Théorème 3.4.1.** — *Les  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^1, S_4^4)$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^1)$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, S_4^4)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^2)$  sont isomorphes à  $\mathbb{F}_2$ . Soient respectivement  $\epsilon_{[1,4]}$ ,  $\epsilon_{[4,1]}$ ,  $\epsilon_{[2,4]}$  et  $\epsilon_{[4,2]}$  leurs générateurs. Alors, en tant que module sur l'algèbre de Hopf  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$  est librement engendré par  $\epsilon_{[1,4]}$ ,  $\epsilon_{[4,1]}$ ,  $\epsilon_{[2,4]}$  et  $\epsilon_{[4,2]}$ .*

Afin de démontrer le théorème, on a besoin du résultat suivant qui se déduit directement de la proposition 3.3.8.

**Lemme 3.4.2.** —  *$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, S_4^*)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$  sont des modules libres sur l'algèbre de Hopf  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$ .*

On observe de plus que l'argument dans §3.3.2 peut aussi être utilisé pour restreindre le calcul de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$  à celui des  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, S_4^{2^l})$  pour tous  $k, l \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 3.4.3.** — *Si  $m \neq 2^k$  ou  $n \neq 2^l$ , tout élément de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^m, S_4^n)$  est décomposable par rapport au produit de Hopf sur  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, S_4^*)$ .*

Les démonstrations du lemme 3.4.2 et de la proposition 3.4.3 sont laissées au lecteur. On notera ici la conséquence directe suivante de la proposition 3.4.3.

**Corollaire 3.4.4.** — *Le produit de Hopf sur  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, S_4^*)$  induit un épimorphisme de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$ -modules :*

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*) \otimes \left( \bigoplus_{k, l \in \mathbb{N}} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, S_4^{2^l}) \right) \twoheadrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*).$$

On énonce ensuite les premiers cas où  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, S_4^{2^l})$  est nul.

**Proposition 3.4.5.** — *Si  $|k - l| \geq 2$  et  $k, l > 0$ , alors  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, S_4^{2^l}) = 0$ .*

Par ailleurs, on a calculé dans lemme 3.3.17 les cas  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\text{Id}, S_4^n)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^n, \text{Id})$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donc, pour conclure la démonstration du théorème 3.4.1, il reste à calculer  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, S_4^{2^h})$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h})$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^{h+1}})$  où  $h \geq 1$ . On énonce les résultats :

**Proposition 3.4.6.** —  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, S_4^{2^h}) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \geq 2, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } h = 1. \end{cases}$

**Proposition 3.4.7.** — *En tant que  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel,*

1. *Si  $h = 1$  ou  $h = 2$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h}) = 0$ .*
2. *Si  $h \geq 3$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h})$  est isomorphe à  $\mathbb{F}_2^{\oplus 2}$ . Il est engendré par les produits de Hopf  $b_{[2^h-4, 2^h-1]} \epsilon_{[4,1]}$  et  $b_{[2^h-2, 2^h-2]} \epsilon_{[4,2]}$ , où  $b_{[m,n]}$  est défini dans la définition 3.2.3,  $\epsilon_{[4,1]}$  et  $\epsilon_{[4,2]}$  sont respectivement les générateurs des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^1)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^2)$ .*

### 3.4. Le module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$

**Proposition 3.4.8.** — En tant que  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel,

1. Si  $h = 1$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^{h+1}}) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, S_4^4) = \mathbb{F}_2$ .
2. Si  $h \geq 2$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^{h+1}})$  est isomorphe à  $\mathbb{F}_2^{\oplus 2}$ . Il est engendré par les produits de Hopf  $b_{[2^h-1, 2^{h+1}-4]} \in \epsilon_{[1,4]}$  et  $b_{[2^h-2, 2^{h+1}-4]} \in \epsilon_{[2,4]}$ , où  $b_{[m,n]}$  est défini dans la définition 3.2.3,  $\epsilon_{[1,4]}$  et  $\epsilon_{[2,4]}$  sont respectivement les générateurs des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^1, S_4^4)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, S_4^4)$ .

#### 3.4.1 Premiers résultats sur $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, S_4^{2^l})$

On va démontrer dans cette sous-section la proposition 3.4.5 énoncée ci-dessus :

**Proposition 3.4.5.** — Si  $|k - l| \geq 2$  et  $k, l > 0$ , alors  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, S_4^{2^l}) = 0$ .

*Démonstration.* — On utilise la filtration de  $S_4^{2^l}$  (cf. le corollaire 2.3.34) pour obtenir les suites exactes

$$\cdots \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, F_i^l) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, F_{i+1}^l) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2i} \otimes \Lambda^{2^{l-1}-i}) \longrightarrow \cdots \quad (3.6)$$

pour tout  $i$ . Il faut calculer  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2i} \otimes \Lambda^{2^{l-1}-i})$ . On utilise maintenant la filtration de  $S_4^{2^k}$  et on considère les suites exactes suivantes

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^{2j} \otimes \Lambda^{2^{k-1}-j}, \Lambda^{2i} \otimes \Lambda^{2^{l-1}-i}) &\longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(F_{j+1}^k, \Lambda^{2i} \otimes \Lambda^{2^{l-1}-i}) \\ &\longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(F_j^k, \Lambda^{2i} \otimes \Lambda^{2^{l-1}-i}) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \quad (3.7)$$

Puisque  $|k - l| \geq 2$  et  $k, l > 0$ , on a  $|(2j + 2^{k-1} - j) - (2i + 2^{l-1} - i)| > 1$ . On déduit du corollaire A.4.5 que

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^{2j} \otimes \Lambda^{2^{k-1}-j}, \Lambda^{2i} \otimes \Lambda^{2^{l-1}-i}) = 0.$$

Dans le cas particulier  $j = 0$ , on a  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(F_1^k, \Lambda^{2i} \otimes \Lambda^{2^{l-1}-i}) = 0$  car  $F_1^k = \Lambda^{2^{k-1}}$ . Par récurrence, on obtient que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, \Lambda^{2i} \otimes \Lambda^{2^{l-1}-i}) = 0$  en utilisant les suites exactes (3.7) pour  $1 \leq j \leq 2^{k-1} + 1$ . On pose  $i = 0$  et on obtient  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, F_1^l) = 0$ . On déduit des suites exactes (3.6) le fait que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, S_4^{2^l}) = 0$ .  $\square$

**Remarque 3.4.9.** — Le calcul de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, S_4^{2^l})$ , si  $k = 0$  ou  $l = 0$ , est fourni par le lemme 3.3.17. Donc, grâce à la proposition 3.4.5, pour déterminer  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$ , il reste à calculer

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, S_4^{2^h}), \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h}) \text{ et } \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^{h+1}}), \text{ où } h \geq 1.$$

Les deux premiers cas sont étudiés en utilisant les suites spectrales d'hypercohomologie associées au complexe  $(S_4)_{2^h}^*$  (voir le corollaire 3.1.10).

#### 3.4.2 Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, S_4^{2^h})$ avec $h \geq 1$

On considère les suites spectrales d'hypercohomologie qui ont pour aboutissement commun la cohomologie totale  $\mathbb{E}\text{xt}_{\mathcal{F}}^*(S_4^{2^{h+1}}, (S_4)_{2^h}^*)$ . Dans la seconde suite spectrale, les lignes

$\mathbf{II}_2^{*,1} = \mathbf{II}_2^{*,2} = 0$ , puisque  $H^1((S_4)_{2^h}^*) = H^2((S_4)_{2^h}^*) = 0$ . De plus, on a  $\mathbf{II}_2^{0,0} = 0$  car  $H^0((S_4)_{2^h}^*) = \Lambda^{2^{h-1}}$  (cf. le corollaire 3.1.10 et la proposition 3.2.2). On a encore  $\mathbf{II}_2^{1,0} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, H^0((S_4)_{2^h}^*)) = 0$  si  $h \geq 2$  (cf. la proposition 3.3.5).

En utilisant les notations comme dans la figure ci-dessous, on démontre la proposition 3.4.6 (déjà énoncée à la page 112).

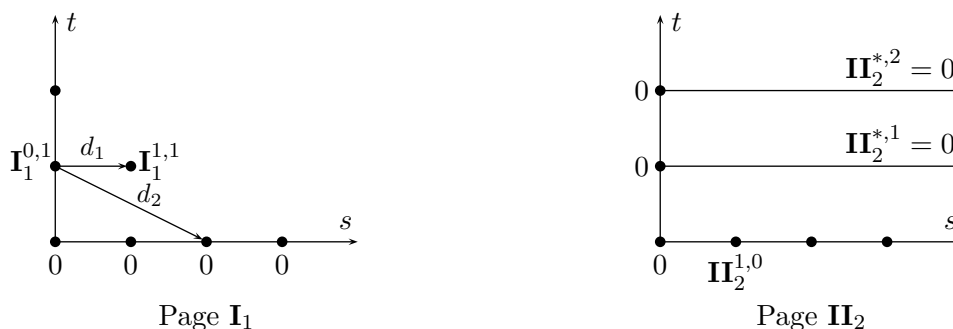


FIGURE 3.4 – Calcul de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, S_4^{2^h})$ ,  $h \geq 2$ .

**Proposition 3.4.6.** —  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, S_4^{2^h}) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \geq 2, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } h = 1. \end{cases}$

*Démonstration.* — En travaillant sur la première suite spectrale d'hypercohomologie ci-dessus, on obtient  $\mathbf{I}_1^{1,1} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, S_4^{2^h-1} \otimes S_4^1) = 0$  de manière analogue à celle utilisée pour montrer que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^{h-1}-1} \otimes \Lambda^1) = 0$  (cf. la démonstration de la proposition 3.3.6). Alors, le noyau de la différentielle  $d_1$  est  $\mathbf{I}_1^{0,1} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, S_4^{2^h})$ .

Si  $h \geq 2$ , puisque le cosocle de  $S_4^{2^{h+1}}$  est  $\Lambda^{2^{h+1}}$ , tandis que  $S_4^{2^h-k} \otimes S_4^k$  est un foncteur polynomial de degré  $2^h$  pour tout  $0 \leq k \leq 2^h$ , alors la ligne  $\mathbf{I}_1^{*,0}$  est nulle. On en déduit que  $\mathbf{I}_{\infty}^{*,0}$  est aussi nulle. D'autre part,  $\mathbf{II}_{\infty}^{1,0} = \mathbf{II}_2^{1,0} = 0$ . Il en résulte que  $\mathbf{I}_1^{0,1} = \mathbf{I}_{\infty}^{0,1}$ . Alors,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, S_4^{2^h}) = \mathbf{I}_1^{0,1} = 0$ .

Pour le cas  $h = 1$ , la suite exacte courte  $0 \rightarrow S^1 \rightarrow S^4 \rightarrow S_4^4 \rightarrow 0$  induit la suite exacte longue suivante :

$$\cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S^4, S_4^2) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S^1, S_4^2) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^2) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S^4, S_4^2) \longrightarrow \cdots$$

Ici, on a

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S^4, S_4^2) \cong \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S^4, S^2) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S^1, S_4^2) \cong \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S^1, S^2) = \mathbb{F}_2, \text{ et}$$

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S^4, S_4^2) \cong \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S^4, S^2) = 0 \text{ (voir [BFSS99, Theorem 6.3]).}$$

Alors,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^2) = \mathbb{F}_2$ . □

**Remarque 3.4.10.** — L'argument de suites spectrales ne fonctionne pas pour  $h = 1$  puisque  $\mathbf{II}_2^{1,0} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^{h+1}}, H^0((S_4)_{2^h}^*)) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, \text{Id}) = \mathbb{F}_2$  (cf. le lemme 3.3.17).

### 3.4.3 Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h})$ avec $h \geq 1$

L'objectif de cette sous-section est de démontrer la proposition 3.4.7 (déjà énoncée à la page 112).

**Proposition 3.4.7.** — *En tant que  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel,*

1. Si  $h = 1$  ou  $h = 2$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h}) = 0$ .
2. Si  $h \geq 3$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h})$  est isomorphe à  $\mathbb{F}_2^{\oplus 2}$ . Il est engendré par les produits de Hopf  $b_{[2^h-4, 2^h-1]} \in \epsilon_{[4,1]}$  et  $b_{[2^h-2, 2^h-2]} \in \epsilon_{[4,2]}$ , où  $b_{[m,n]}$  est défini dans la définition 3.2.3,  $\epsilon_{[4,1]}$  et  $\epsilon_{[4,2]}$  sont respectivement les générateurs des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels de dimension une  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^1)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^2)$ .

Dans ce cas, on utilise les suites spectrales d'hypercohomologie qui sont obtenues en appliquant le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^h}, -)$  à une résolution injective de Cartan-Eilenberg du complexe  $(S_4)_{2^h}^*$ . Grâce au corollaire 3.1.10, les lignes  $\mathbf{II}_2^{*,1}$  et  $\mathbf{II}_2^{*,2}$  sont nulles. De plus, la proposition 3.3.6 dit que  $\mathbf{II}_2^{1,0} = 0$ .

Par hypothèse  $h \geq 1$ , alors les groupes  $\mathbf{I}_1^{0,0}$ ,  $\mathbf{I}_1^{1,0}$  et  $\mathbf{I}_1^{2,0}$  sont isomorphes à  $\mathbb{F}_2$ . Puisque  $\mathbf{I}_\infty^{0,0} = \mathbf{II}_\infty^{0,0} = 0$ , la différentielle  $d_1^{(1)}$  est un isomorphisme. Puisque  $\mathbf{II}_\infty^{0,1}$  et  $\mathbf{II}_\infty^{1,0}$  sont nuls, la différentielle  $d_1^{(2)}$  est nulle.

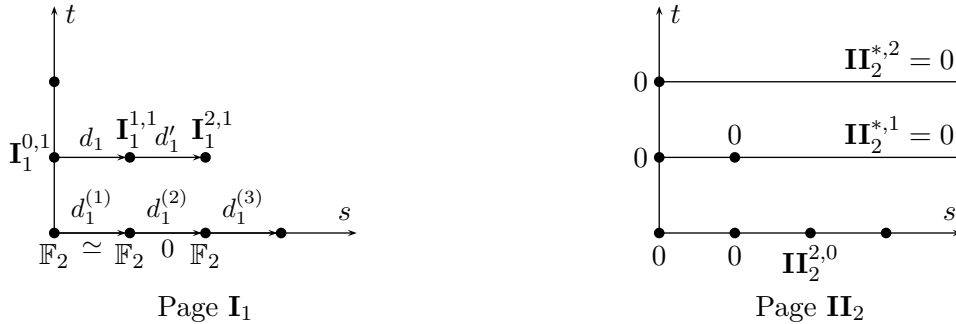


FIGURE 3.5 – Calcul de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h})$ ,  $h \geq 1$ .

**Notation 3.4.11.** — Soit  $0 \rightarrow F \xrightarrow{i} H \xrightarrow{p} G \rightarrow 0$  une suite exacte courte dans la catégorie  $\mathcal{F}$ , on la notera  $[H]$  s'il n'y a pas de confusion de  $F$  et  $G$ . Soient  $\varphi: F \rightarrow F'$  et  $\psi: G' \rightarrow G$  des morphismes dans  $\mathcal{F}$ .

- On désigne par  $[H]\psi$  la suite exacte courte  $0 \rightarrow F \rightarrow H \times_G G' \rightarrow G' \rightarrow 0$ , où  $H \times_G G'$  est le produit fibré correspondant aux morphismes  $H \xrightarrow{p} G$  et  $G' \xrightarrow{\psi} G$ . On désigne par  $[\psi]: [H]\psi \rightarrow [H]$  le morphisme de suites exactes courtes associé.
- De même, on désigne par  $\varphi[H]$  la suite exacte courte  $0 \rightarrow F' \rightarrow H \sqcup_F F' \rightarrow G \rightarrow 0$ , où  $H \sqcup_F F'$  est la somme amalgamée correspondante aux morphismes  $F \xrightarrow{i} H$  et  $F \xrightarrow{\varphi} F'$ . On désigne par  $[\varphi_H]: [H] \rightarrow \varphi[H]$  le morphisme associé.

**Lemme 3.4.12.** — *Étant données  $[H]$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  comme dans la notation 3.4.11. De manière analogue, on considère les données  $[\bar{H}]$ ,  $\bar{\varphi}$  et  $\bar{\psi}$ .*

1.  $(\varphi[H])\psi = \varphi([H]\psi)$ .
2. Supposons que nous ayons un morphisme  $[H] \rightarrow [\bar{H}]$ . Supposons de plus que nous ayons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} G & \xleftarrow{\psi} & G' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{G} & \xleftarrow{\bar{\psi}} & \bar{G}' \end{array}$$

Alors, le morphisme canonique de  $H \times_G G'$  vers  $\bar{H} \times_{\bar{G}} \bar{G}'$  fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} [H] & \xleftarrow{[H]\psi} & [H]\psi \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\bar{H}] & \xleftarrow{[\bar{H}]\bar{\psi}} & [\bar{H}]\bar{\psi} \end{array}$$

3. Le résultat analogue vaut pour les sommes amalgamées.

*Démonstration.* — Le lemme découle des résultats classiques sur la catégorie des modules. Pour le premier point, voir [ML71, Lemma 1.6]. Le deuxième point se déduit directement de la définition du produit fibré.  $\square$

**Remarque 3.4.13.** — Rappelons que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^1, \mathbb{S}_4^1) = \mathbb{F}_2$  (voir le lemme 3.3.17). Son générateur est  $\epsilon_{[4,1]} \cong [\mathbb{S}^4]$  où  $\mathbb{S}^4$  est la 4-ième puissance symétrique.

D'autre part, on a l'inclusion de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^5, \mathbb{S}_4^2)$  dans  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^1 \otimes \mathbb{S}_4^4, \mathbb{S}_4^2) \cong \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}_4^1, \mathbb{S}_4^1) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^4, \mathbb{S}_4^2) \cong \mathbb{F}_2$ . Grâce au lemme 3.4.2, le produit de Hopf  $b_{[1,1]\epsilon_{[4,1]}} \in \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^5, \mathbb{S}_4^2)$  est non nul. On en déduit que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^5, \mathbb{S}_4^2) \cong \mathbb{F}_2$ .

**Proposition 3.4.14.** — Si  $h \geq 3$ , la différentielle  $d'_1$  de  $\mathbf{I}_1^{1,1} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^{2h}, \mathbb{S}_4^{2h-1} \otimes \mathbb{S}_4^1)$  vers  $\mathbf{I}_1^{2,1} = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^{2h}, \mathbb{S}_4^{2h-2} \otimes \mathbb{S}_4^2)$  est non triviale.

*Démonstration.* — Dans cette démonstration, on note  $\delta$  tous les coproduits naturels de  $\mathbb{S}_4^*$  (on renvoie à §A.2 pour la définition des produits et coproduits naturels d'un foncteur exponentiel), on signale de plus dans chaque cas particulier la source et le but de  $\delta$ .

Puisque le foncteur  $\mathbb{S}_4^*$  est exponentiel, on a la décomposition

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^{2h}, \mathbb{S}_4^{2h-1} \otimes \mathbb{S}_4^1) &= \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^{2h-1}, \mathbb{S}_4^{2h-1}) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}_4^1, \mathbb{S}_4^1) \\ &\oplus \text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}_4^{2h-4}, \mathbb{S}_4^{2h-1}) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^4, \mathbb{S}_4^1). \end{aligned}$$

De plus, l'inclusion de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{S}_4^{2h-4}, \mathbb{S}_4^{2h-1}) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^4, \mathbb{S}_4^1)$  dans  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^{2h}, \mathbb{S}_4^{2h-1} \otimes \mathbb{S}_4^1)$  envoie  $b_{[2^h-4, 2^h-1]} \otimes \epsilon_{[4,1]}$  sur l'élément

$$x := (b_{[2^h-4, 2^h-1]} \otimes b_{[1,1]})[\mathbb{S}_4^{2h-4} \otimes \mathbb{S}_4^1]\delta,$$

### 3.4. Le module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$

où  $\delta: S_4^{2^h} \rightarrow S_4^{2^h-4} \otimes S_4^4$ , et  $[S_4^{2^h-4} \otimes S_4^4] \in \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h-4} \otimes S_4^4, S_4^{2^h-4} \otimes S_4^1)$ . On renvoie à la démonstration de [FFSS99, Theorem 1.7] pour plus de détails.

De manière analogue, on a une inclusion de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^h-5}, S_4^{2^h-2}) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^5, S_4^2)$  dans  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h-2} \otimes S_4^2)$ . Notons de plus que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^5, S_4^2) \cong \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^1, S_4^1) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^1)$ . Cette inclusion envoie  $b_{[2^h-5, 2^h-2]} \otimes b_{[1,1]} \otimes \epsilon_{[4,1]}$  sur l'élément

$$y := (b_{[2^h-5, 2^h-2]} \otimes \mu)[S_4^{2^h-5} \otimes S_4^1 \otimes S_4^4] \tilde{\delta},$$

où  $\mu: S_4^1 \otimes S_4^1 \rightarrow S_4^2$  est le produit naturel,  $\tilde{\delta}$  est la composée de  $\delta: S_4^{2^h} \rightarrow S_4^{2^h-5} \otimes S_4^5$  avec  $S_4^{2^h-5} \otimes S_4^5 \xrightarrow{b_{[2^h-5, 2^h-5]} \otimes \delta} S_4^{2^h-5} \otimes S_4^1 \otimes S_4^4$ , et la suite exacte courte  $[S_4^{2^h-5} \otimes S_4^1 \otimes S_4^4]$  est un élément de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h-5} \otimes S_4^1 \otimes S_4^4, S_4^{2^h-5} \otimes S_4^1 \otimes S_4^1)$ .

On va montrer que  $y$  est l'image de  $x$  par la différentielle  $d'_1$ . On a d'abord le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} S_4^{2^h-4} \otimes S_4^1 & \hookrightarrow & S_4^{2^h-4} \otimes S_4^4 & \twoheadrightarrow & S_4^{2^h-4} \otimes S_4^4 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_4^{2^h-5} \otimes S_4^1 \otimes S_4^1 & \hookrightarrow & S_4^{2^h-5} \otimes S_4^1 \otimes S_4^4 & \twoheadrightarrow & S_4^{2^h-5} \otimes S_4^1 \otimes S_4^4, \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont induits par le coproduit  $\delta: S_4^{2^h-4} \rightarrow S_4^{2^h-5} \otimes S_4^1$ . Grâce au lemme 3.4.12, il suffit de montrer que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} S_4^{2^h} & \xrightarrow{\delta} & S_4^{2^h-4} \otimes S_4^4 \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta \otimes b_{[4,4]} \\ S_4^{2^h-5} \otimes S_4^5 & \xrightarrow{b_{[2^h-5, 2^h-5]} \otimes \delta} & S_4^{2^h-5} \otimes S_4^1 \otimes S_4^4, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S_4^{2^h-4} \otimes S_4^1 & \xrightarrow{b_{[2^h-4, 2^h-1]} \otimes b_{[1,1]}} & S_4^{2^h-1} \otimes S_4^1 \\ \delta \otimes b_{[1,1]} \downarrow & & \downarrow d \\ S_4^{2^h-5} \otimes S_4^1 \otimes S_4^1 & \xrightarrow{b_{[2^h-5, 2^h-2]} \otimes \mu} & S_4^{2^h-2} \otimes S_4^2, \end{array}$$

où  $d: S_4^{2^h-1} \otimes S_4^1 \rightarrow S_4^{2^h-2} \otimes S_4^2$  est la différentielle du complexe  $(S_4)_{2^h}^*$ . La vérification est faite par calculs directs. La proposition s'ensuit.  $\square$

**Lemme 3.4.15.** — *Un système de générateurs du  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h-1}, S_4^{2^h-1})$  est obtenu en faisant agir l'algèbre  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$  sur les générateurs des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^k, S_4^l)$  où  $0 \leq l \leq k \leq h-1$ .*

*Démonstration.* — D'après le corollaire 3.4.4, on dispose d'un épimorphisme de  $\mathbb{F}_2$ -espaces

vectoriels :

$$\bigoplus_{k,l \in \mathbb{N}} \left( \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^h-2^k-1}, S_4^{2^h-2^l-1}) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, S_4^{2^l}) \right) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h-1}, S_4^{2^h-1}).$$

De plus, il faut avoir  $k \geq l$  dans la somme directe ci-dessus, puisque  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S^m, S^n) \neq 0$  seulement si  $m \leq n \leq 2m$ .  $\square$

On donne maintenant une démonstration de la proposition 3.4.7 :

*Démonstration de 3.4.7.* — Le cas  $h = 1$  découle du théorème 6.3 de [FFSS99], car  $S_4^2 = S^2$ . Si  $h = 2$ , la suite exacte courte  $0 \rightarrow S^1 \rightarrow S^4 \rightarrow S_4^4 \rightarrow 0$  induit les suites exactes suivantes

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S^1, S_4^4) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^4) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S^4, S_4^4) \longrightarrow \dots, \\ \dots &\longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S^4, S^4) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S^4, S_4^4) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S^4, S^1) \longrightarrow \dots, \end{aligned}$$

où les groupes  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S^1, S_4^4)$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S^4, S_4^4)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S^4, S^1)$  sont triviaux. On en déduit que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^4) = 0$ .

Si  $h \geq 3$ , considérons la figure 3.5. D'après la proposition 3.3.20, on a  $\mathbf{II}_{\infty}^{2,0} = \mathbf{II}_2^{2,0} = 0$ , la différentielle  $d_1^{(3)}$  est alors un isomorphisme de  $\mathbf{I}_1^{2,0} = \mathbb{F}_2$  vers  $\mathbf{I}_1^{3,0} = \mathbb{F}_2$ . Ceci implique  $\mathbf{I}_2^{2,0} = 0$ . On note  $d_2$  la différentielle de  $\text{Ker } d_1$  vers  $\mathbf{I}_2^{2,0} = 0$  de la page  $\mathbf{I}_2$ . Alors,  $\text{Ker } d_1 = \text{Ker } d_2 = \mathbf{I}_{\infty}^{0,1} = 0$  puisque  $\mathbf{II}_{\infty}^{1,0} = \mathbf{II}_{\infty}^{0,1} = 0$ . Cela signifie que l'on a une inclusion de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h})$  dans  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h-1} \otimes S_4^1)$ . De plus, puisque  $S_4^*$  est un foncteur exponentiel, on a la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h-1} \otimes S_4^1) &= \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h-1}, S_4^{2^h-1}) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^1, S_4^1) \\ &\quad \oplus \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^h-4}, S_4^{2^h-1}) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

On va démontrer par récurrence que les  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h-1}, S_4^{2^h-1})$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h})$  sont isomorphes à  $\mathbb{F}_2^{\oplus 2}$  pour  $h \geq 3$ .

En effet, si  $h = 3$ , pour calculer  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^7, S_4^7)$ , d'après le lemme 3.4.15, on a besoin de calculer  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, S_4^{2^l})$  où  $0 \leq l \leq k \leq 2$ . Rappelons que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, S_4^{2^l}) = 0$  si  $0 \leq l \leq k \leq 1$  (cf. [FFSS99, Theorem 6.3]). On a encore que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^4) = 0$  (voir plus haut). De plus,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^1) = \mathbb{F}_2$  (voir le lemme 3.3.17) et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, S_4^2) = \mathbb{F}_2$  (voir la proposition 3.4.6). Le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^7, S_4^7)$  est alors engendré par  $b_{[3,6]\epsilon_{[4,1]}}$  et  $b_{[3,5]\epsilon_{[4,2]}}$ . Puisque les éléments  $\epsilon_{[4,1]}$  et  $\epsilon_{[4,2]}$  sont des indécomposables de l'algèbre de Hopf tri-graduée  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, S_4^*)$ , d'après le lemme 3.4.2, les éléments  $b_{[3,6]\epsilon_{[4,1]}}$  et  $b_{[3,5]\epsilon_{[4,2]}}$  sont linéairement indépendants. On en déduit que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^7, S_4^7) = \mathbb{F}_2^{\oplus 2}$ .

D'autre part, d'après la proposition 3.4.14 et la décomposition (3.8), on obtient que

$$\dim(\text{Ker } d'_1) \leq \dim \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^7, S_4^7) = 2.$$

Alors  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^8, S_4^8) = \mathbb{F}_2^{\oplus 2}$  puisqu'il est inclus dans  $\text{Ker } d'_1$  et de plus, il admet les deux

### 3.4. Le module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$

éléments linéairement indépendants  $b_{[4,7]\epsilon_{[4,1]}}$  et  $b_{[4,6]\epsilon_{[4,2]}}$ .

Supposons que l'énoncé de récurrence est vrai pour tout  $3 \leq h \leq \alpha - 1$ . De manière analogue au calcul de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^7, S_4^7)$ , en utilisant les résultats 3.4.5, 3.4.6 et l'hypothèse de récurrence, on montre que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^\alpha-1}, S_4^{2^\alpha-1}) = \mathbb{F}_2^{\oplus 2}$ . Il en résulte que la dimension du noyau de  $d'_1$  est au plus deux et que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^\alpha}, S_4^{2^\alpha}) = \mathbb{F}_2^{\oplus 2}$ , puisqu'il admet les deux éléments linéairement indépendants  $b_{[2^\alpha-4, 2^\alpha-1]\epsilon_{[4,1]}}$  et  $b_{[2^\alpha-4, 2^\alpha-2]\epsilon_{[4,2]}}$ . La proposition s'ensuit.  $\square$

#### 3.4.4 Calcul de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^{h+1}})$ avec $h \geq 1$

Dans cette sous-section, on va démontrer la proposition 3.4.8 énoncée au début de cette section (voir la page 113) :

**Proposition 3.4.8.** — *En tant que  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel,*

1. Si  $h = 1$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^{h+1}}) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, S_4^4) = \mathbb{F}_2$ .
2. Si  $h \geq 2$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^{h+1}})$  est isomorphe à  $\mathbb{F}_2^{\oplus 2}$ . Il est engendré par les produits de Hopf  $b_{[2^h-1, 2^{h+1}-4]\epsilon_{[1,4]}}$  et  $b_{[2^h-2, 2^{h+1}-4]\epsilon_{[2,4]}}$ , où  $b_{[m,n]}$  est défini dans la définition 3.2.3,  $\epsilon_{[1,4]}$  et  $\epsilon_{[2,4]}$  sont respectivement les générateurs des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels de dimension une  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^1, S_4^4)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, S_4^4)$ .

Dans la démonstration du lemme 3.3.17, on a utilisé la filtration de  $S_4^4$  pour calculer  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\text{Id}, S_4^4)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^4, \text{Id})$ . De même, on va calculer  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^{h+1}})$  en utilisant la filtration de  $S_4^{2^{h+1}}$  (voir le corollaire 2.3.34). On a les suites exactes longues suivantes

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^h}, \Lambda^{2i} \otimes \Lambda^{2^h-i}) &\longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, F_i^{h+1}) \\ &\longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, F_{i+1}^{h+1}) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2i} \otimes \Lambda^{2^h-i}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

pour  $i = 1, 2, \dots, 2^h$ .

Le calcul de  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, \Lambda^*)$  (voir la proposition 3.2.2) implique que  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^h}, \Lambda^{2i} \otimes \Lambda^{2^h-i}) = 0$  pour tout  $i \geq 1$ . Il implique encore que

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2i} \otimes \Lambda^{2^h-i}) &= \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^i, \Lambda^{2i}) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^h-i}, \Lambda^{2^h-i}) \\ &\oplus \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2i}, \Lambda^{2i}) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h-2i}, \Lambda^{2^h-i}). \end{aligned}$$

Ainsi, grâce au théorème 3.3.1, on obtient que

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2i} \otimes \Lambda^{2^h-i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \leq i \leq 2^h, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 1, h = 1, \\ \mathbb{F}_2^{\oplus 2} & \text{si } i = 1, h \geq 2. \end{cases}$$

**Lemme 3.4.16.** —  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^{h+1}}) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, F_2^{h+1}), \forall h \geq 1$ .

*Démonstration.* — Le résultat est déduit des suites exactes longues ci-dessus et du fait que  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^h}, \Lambda^{2i} \otimes \Lambda^{2^h-i}) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2i} \otimes \Lambda^{2^h-i}) = 0$  pour  $i \geq 2$ .  $\square$



Si  $i = 1$ , la suite exacte longue ci-dessus est de la forme :

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^h}, \Lambda^2 \otimes \Lambda^{2^h-1}) &\longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h}) \xrightarrow{i_1} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, F_2^{h+1}) \\ &\xrightarrow{p_1} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^2 \otimes \Lambda^{2^h-1}) \xrightarrow{\varrho_1} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h}) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \quad (3.9)$$

où  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^{2^h}, \Lambda^2 \otimes \Lambda^{2^h-1}) = 0$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h}) = \mathbb{F}_2$ . On démontrera dans la proposition 3.4.20 que le connectant  $\varrho_1$  est non trivial. Mais tout d'abord, on observe que, sous cette hypothèse, la proposition 3.4.8 peut être démontrée comme suit.

*Démonstration de 3.4.8.* — On considère la suite exacte (3.9). Puisque le morphisme  $i_1$  est une inclusion, on a  $\text{Im } i_1 = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h}) = \mathbb{F}_2$ . De plus, puisque le connectant  $\varrho_1$  n'est pas trivial (voir la proposition 3.4.20), la dimension de son noyau est alors strictement inférieure à la dimension de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^i} \otimes \Lambda^{2^h-i})$ .

Si  $h = 1$ , on applique le théorème A.3.1 au foncteur exponentiel  $S_4^*$  pour obtenir que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, \Lambda^2 \otimes \Lambda^1) = \mathbb{F}_2$ . On en déduit que  $\text{Im } p_1 = \text{Ker } \varrho_1 = 0$ . Ceci implique  $\text{Ker } p_1 = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, F_2^2)$ . D'autre part,  $\text{Ker } p_1 = \text{Im } i_1 = \mathbb{F}_2$ . On obtient alors  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, S_4^4) = \mathbb{F}_2$ .

Si  $h \geq 2$ ,  $\dim \text{Im } p_1 = \dim \text{Ker } \varrho_1 \leq 1$ . Alors,

$$\dim \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, F_2^{h+1}) = \dim \text{Ker } p_1 + \dim \text{Im } p_1 \leq 2.$$

De plus, on va démontrer que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h+1})$  est exactement de dimension 2 en exhibant deux générateurs linéairement indépendants. En effet, soient  $\iota_{(1,1,4)}$  le générateur de l'espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^1, S_4^4)$ , et  $\iota_{(1,2,4)}$  de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^2, S_4^4)$ . Par raison de degré, ces deux éléments sont des indécomposables de l'algèbre de Hopf tri-graduée  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, S_4^*)$ . Donc, les produits  $\iota_{(1,1,4)} b_{[2^h-1, 2^h+1-4]}$  et  $\iota_{(1,2,4)} b_{[2^h-2, 2^h+1-4]}$  forment une base de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^h+1})$ , où les morphismes  $b_{[m,n]} \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^m, S_4^n)$  sont définis dans 3.2.3.  $\square$

Donc, pour conclure cette partie, il suffit de montrer que le connectant

$$\varrho_1: \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^2 \otimes \Lambda^{2^h-1}) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h})$$

est non-trivial. On a besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.4.17.** — *Considérons la suite exacte courte  $\Lambda^{2^h} \hookrightarrow F_2^{h+1} \rightarrow \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2$  (voir le corollaire 2.3.34). Soit  $\delta: \Lambda^{2^h+1} \rightarrow \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2$  le coproduit naturel. Alors,  $[F_2^{h+1}] \delta$  est une suite exacte courte non scindée<sup>1</sup>.*

*Démonstration.* — On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^{2^h} & \hookrightarrow & F_2^{h+1} \times_{\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2} & \Lambda^{2^h+1} & \twoheadrightarrow & \Lambda^{2^h+1} \\ \parallel & & \downarrow i & & & \downarrow \delta \\ \Lambda^{2^h} & \hookrightarrow & F_2^{h+1} & \twoheadrightarrow & \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2. & \end{array}$$

1. Voir la notation 3.4.11.

### 3.4. Le module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$

Supposons que la suite exacte en haut soit scindée. On obtient alors une inclusion de  $\Lambda^{2^h+1}$  dans  $F_2^{h+1} \times_{\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2} \Lambda^{2^h+1}$ . Sa composée par le morphisme  $i$  est non triviale ; en effet, dans le cas contraire, le coproduit naturel  $\Lambda^{2^h+1} \hookrightarrow \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2$  est trivial, on a une contradiction. D'autre part, on a une inclusion de  $F_2^{h+1}$  dans  $S_4^{2^h+1}$ . Il en résulte que l'on a un morphisme non trivial de  $\Lambda^{2^h+1}$  dans  $S_4^{2^h+1}$ . Ceci contredit le fait que  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\Lambda^{2^h+1}, S_4^{2^h+1}) = 0$  (voir la proposition 3.2.7). Le lemme s'ensuit.  $\square$

**Remarque 3.4.18.** — Puisque  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^{2^h+1}, \Lambda^{2^h}) = \mathbb{F}_2$  (cf. [FLS94]), il y a une seule extension non scindée de  $\Lambda^{2^h+1}$  par  $\Lambda^{2^h}$ , à isomorphisme près. On désigne par  $E_{(2^h+1, 2^h)}$  le produit fibré  $F_2^{h+1} \times_{\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2} \Lambda^{2^h+1}$ .

D'autre part, le coproduit naturel  $\delta$  est injectif, puisqu'il est le dual du produit naturel  $\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^{2^h+1}$  qui est surjectif. D'après le lemme des cinq, le morphisme  $i$  est également injectif.

L'idée pour le lemme 3.4.17 découle du diagramme de Loewy du foncteur  $F_2^{h+1}$ . Pour plus de détails, voir l'appendice de cette sous-section à la page 123.

**Proposition 3.4.19.** — *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^2 \otimes \Lambda^{2^h-1}) & \xrightarrow{\varrho_1} & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h}), \\ \uparrow \iota & \nearrow \varrho'_1 & \\ \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h+1}) & & \end{array}$$

où le morphisme vertical  $\iota$  est induit par l'inclusion  $\Lambda^{2^h+1} \hookrightarrow \Lambda^2 \otimes \Lambda^{2^h-1}$ , le connectant  $\varrho_1$  provient de la suite exacte longue (3.9), et le connectant  $\varrho'_1$  provient de la suite exacte longue associée à la suite exacte courte non scindée unique  $\Lambda^{2^h} \hookrightarrow E_{(2^h+1, 2^h)} \rightarrow \Lambda^{2^h+1}$ .

*Démonstration.* — Soit  $\Lambda^{2^h+1} \hookrightarrow E \rightarrow S_4^{2^h}$  un élément de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h+1})$ . On le désigne par  $[E]$ . On considère le diagramme suivant où le carré (3) est un diagramme de somme amalgamée, la suite exacte en haut représente l'élément  $\varrho'_1([E])$ , la suite exacte en bas représente l'élément  $\varrho_1(\iota([E]))$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda^{2^h} & \hookrightarrow & E_{(2^h+1, 2^h)} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & S_4^{2^h} \\ \parallel & & \downarrow \text{dashed} & \searrow & \downarrow & & \parallel \\ \Lambda^{2^h} & \hookrightarrow & F_2^{h+1} & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & S_4^{2^h} \\ & & \downarrow & \searrow & \downarrow & & \\ & & \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2 & & & & \end{array}$$

(1)                      (2)                      (3)

Donc, s'il existe un morphisme de  $E_{(2^h+1, 2^h)}$  dans  $F_2^{h+1}$  qui fait commuter les carrés (1) et

(2), la proposition sera démontrée. Mais d'après le lemme 3.4.17, un tel morphisme existe, il est de plus une inclusion.  $\square$

**Proposition 3.4.20.** — *Le connectant*

$$\varrho_1: \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^2 \otimes \Lambda^{2^h-1}) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h})$$

est non-trivial.

*Démonstration.* — Dans cette démonstration, on va construire un élément, que l'on notera ci-dessous  $[\tilde{E}_{(2^h, 2^h+1)}]$ , du groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h+1})$ . Ensuite, on va montrer que son image par le morphisme  $\varrho'_1$  n'est pas nulle dans  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h})$ . Autrement dit,  $\varrho'_1$  n'est pas trivial. On en déduit que le morphisme  $\varrho_1$  n'est pas trivial.

Rappelons que nous avons la suite exacte courte  $F_{2^h-1}^h \hookrightarrow S_4^{2^h} \twoheadrightarrow \Lambda^{2^h}$  qui provient de la filtration de  $S_4^{2^h}$  (voir à la page 105). On observe encore que  $F_{2^h-1}^h$  est un foncteur polynomial de degré  $2^h - 1$ . Soit  $\Lambda^{2^h+1} \hookrightarrow E_{(2^h, 2^h+1)} \twoheadrightarrow \Lambda^{2^h}$  la suite exacte courte non scindée unique. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \hookrightarrow & F_{2^h-1}^h & \xlongequal{\quad} & F_{2^h-1}^h \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^{2^h+1} & \hookrightarrow & \tilde{E}_{(2^h, 2^h+1)} & \twoheadrightarrow & S_4^{2^h} \\ \parallel & & \downarrow & (1) & \downarrow \\ \Lambda^{2^h+1} & \hookrightarrow & E_{(2^h, 2^h+1)} & \twoheadrightarrow & \Lambda^{2^h} \end{array} , \quad (3.10)$$

où le carré (1) est un diagramme de produit fibré, et la suite exacte courte horizontale du milieu est un élément de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h+1})$  que l'on désigne par  $[\tilde{E}_{(2^h, 2^h+1)}]$ . Grâce à l'exactitude du foncteur différence  $\Delta$ , en appliquant  $\Delta^{2^h-1}$  au diagramme (3.10), on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \hookrightarrow & \Delta^{2^h-1} F_{2^h-1}^h & \xlongequal{\quad} & \Delta^{2^h-1} F_{2^h-1}^h \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^2 & \hookrightarrow & \Delta^{2^h-1} \tilde{E}_{(2^h, 2^h+1)} & \twoheadrightarrow & \Delta^{2^h-1} S_4^{2^h} \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^2 & \hookrightarrow & \Gamma^2 & \twoheadrightarrow & \text{Id} \end{array} , \quad (3.11)$$

où le fait que  $\Delta^{2^h-1}(E_{(2^h, 2^h+1)}) = \Gamma^2$  est déduit du corollaire 1.1.35 en remarquant que  $E_{(2^h, 2^h+1)}$  est le foncteur dual de  $t_{2^h+1}(\mathbb{I})/t_{2^h-1}(\mathbb{I})$ . De plus, en appliquant  $\Delta^{2^h-1}$  à la suite exacte courte

$$F_{2^h-1-1}^h \hookrightarrow F_{2^h-1}^h \twoheadrightarrow \Lambda^{2^h-2} \otimes \Lambda^1,$$

### 3.4. Le module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$

on obtient que  $\Delta^{2^h-1}F_{2^h-1}^h \cong \Delta^{2^h-1}(\Lambda^{2^h-2} \otimes \Lambda^1)$  puisque  $F_{2^h-1-1}^h$  est un foncteur polynomial de degré  $2^h - 2$ . Il en résulte que l'on peut calculer  $\Delta^{2^h-1}F_{2^h-1}^h$  en utilisant la formule

$$\Delta(F \otimes G) = (\Delta F \otimes G) \oplus (F \otimes \Delta G) \oplus (\Delta F \otimes \Delta G).$$

On obtient que  $\Delta^{2^h-1}F_{2^h-1}^h = \mathbb{F}_2^{\oplus(2^h-1)}$ . Alors, on déduit du diagramme (3.11) le fait que  $\Delta^{2^h-1}S_4^{2^h} = \text{Id} \oplus \mathbb{F}_2^{\oplus(2^h-1)}$  et  $\Delta^{2^h-1}\tilde{E}_{(2^h, 2^h+1)} = \Gamma^2 \oplus \mathbb{F}_2^{\oplus(2^h-1)}$ .

Considérons maintenant le morphisme

$$\rho'_1 : \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h+1}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(S_4^{2^h}, \Lambda^{2^h}).$$

Il envoie l'élément  $[\tilde{E}_{(2^h, 2^h+1)}]$  sur l'élément qui est représenté par la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda^{2^h} & \longrightarrow & E_{(2^h+1, 2^h)} & \longrightarrow & \tilde{E}_{(2^h, 2^h+1)} \longrightarrow S_4^{2^h} \longrightarrow 0. \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & & \Lambda^{2^h+1} & \end{array}$$

On lui applique le foncteur  $\Delta^{2^h-1}$  pour obtenir la suite exacte suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Id} & \longrightarrow & S^2 & \longrightarrow & \Gamma^2 \oplus \mathbb{F}_2^{\oplus(2^h-1)} \longrightarrow \text{Id} \oplus \mathbb{F}_2^{\oplus(2^h-1)} \longrightarrow 0. \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & & \Lambda^2 & \end{array} \quad (3.12)$$

D'autre part, on considère l'isomorphisme

$$\chi : \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(\text{Id}, \text{Id}) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(\text{Id} \oplus \mathbb{F}_2^{\oplus(2^h-1)}, \text{Id})$$

qui est induit par la projection canonique  $\text{Id} \oplus \mathbb{F}_2^{\oplus(2^h-1)} \rightarrow \text{Id}$ . On rappelle que la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Id} & \longrightarrow & S^2 & \longrightarrow & \Gamma^2 \longrightarrow \text{Id} \longrightarrow 0 \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & & \Lambda^2 & \end{array}$$

représente un élément non nul dans  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(\text{Id}, \text{Id})$  (voir [FLS94] ou [FS97, Lemma 4.12]). Son image par l'isomorphisme  $\chi$  qui est représentée par la suite exacte (3.12) est alors non nulle. Donc,  $\rho'_1([\tilde{E}_{(2^h, 2^h+1)}])$  n'est pas nul. La proposition s'ensuit.  $\square$

#### ■ Appendice : Le diagramme de Loewy du foncteur $F_2^{h+1}$

Puisque  $F_2^{h+1}$  est une extension de  $\Lambda^2 \otimes \Lambda^{2^h-1}$  par  $\Lambda^{2^h}$ , on étudie d'abord les facteurs de composition du foncteur  $\Lambda^2 \otimes \Lambda^{2^h-1}$ . Si  $h \geq 2$ , le foncteur  $\Lambda^2 \otimes \Lambda^{2^h-1} \cong \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2$  admet

la filtration de Weyl

$$0 \subset W_{(2^h-1,2)}^{(2)} \subset W_{(2^h-1,2)}^{(1)} \subset W_{(2^h-1,2)}^{(0)} = \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2$$

dont les sous-quotients sont, respectivement de bas en haut, les foncteurs de Weyl  $W_{(2^h-1,2)}$ ,  $W_{(2^h,1)} = S_{(2^h,1)}$  et  $W_{(2^h+1)} = S_{(2^h+1)} = \Lambda^{2^h+1}$  (voir la section 1.1.3).

Rappelons que nous avons la suite exacte  $\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^{2^h} \otimes \Lambda^1 \rightarrow \Lambda^{2^h+1}$  (voir la section 3.1.2). On en déduit un morphisme surjectif  $\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2 \twoheadrightarrow W_{(2^h,1)}$  qui envoie chaque élément  $(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{2^h-1}) \otimes (y_1 \wedge y_2)$  sur la somme

$$(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{2^h-1} \wedge y_1) \otimes y_2 + (x_1 \wedge \cdots \wedge x_{2^h-1} \wedge y_2) \otimes y_1.$$

La composée  $\Lambda^{2^h} \otimes \Lambda^1 \rightarrow \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^{2^h} \otimes \Lambda^1$  induit ainsi une composée

$$W_{(2^h,1)} \longrightarrow \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2 \longrightarrow W_{(2^h,1)}.$$

On vérifie directement que cette composée est une identité. Le foncteur de Weyl  $W_{(2^h,1)} = S_{(2^h,1)}$  est alors un facteur direct du foncteur  $\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2$ .

D'autre part, on considère la composée

$$(\Lambda^{2^h} \otimes \Lambda^1) \oplus \Lambda^{2^h+1} \xrightarrow{\Psi^\natural} \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2 \xrightarrow{\Psi} (\Lambda^{2^h} \otimes \Lambda^1) \oplus \Lambda^{2^h+1}$$

qui est induite par les produits et les coproduits naturels du foncteur exponentiel de Hopf  $\Lambda^*$ . Puisque

$$(\Psi \circ \Psi^\natural)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{2^h} \otimes y) = \sum_{i=1}^{2^h} x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_{2^h} \wedge y \otimes x_i,$$

où  $\widehat{x}_i$  désigne l'absence de  $x_i$ , on obtient que  $\text{Ker } \Psi \cap \Psi^\natural(\Lambda^{2^h} \otimes \Lambda^1) = 0$ . Ensuite, puisque  $(\Psi \circ \Psi^\natural)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{2^h+1}) = 0$  pour tout  $h \geq 2$ , on en déduit que

$$\text{Ker } \Psi \cap \text{Im } \Psi^\natural = \text{Ker } \Psi \cap \Psi^\natural(\Lambda^{2^h+1}) = \Psi^\natural(\Lambda^{2^h+1}).$$

De plus, le morphisme  $\Psi^\natural|_{\Lambda^{2^h+1}} : \Lambda^{2^h+1} \rightarrow \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2$  est le dual du morphisme surjectif  $\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2 \twoheadrightarrow \Lambda^{2^h+1}$ , il est alors une inclusion. Ceci implique que  $\Psi^\natural(\Lambda^{2^h+1}) \cong \Lambda^{2^h+1}$ . Il en résulte que l'on a une suite exacte courte (cf. [PS98, B.1])

$$0 \longrightarrow \Lambda^{2^h+1} \longrightarrow W_{(2^h-1,2)} \longrightarrow S_{(2^h-1,2)} \longrightarrow 0,$$

qui n'est pas scindée puisque la composée  $\Lambda^{2^h+1} \hookrightarrow \Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2 \twoheadrightarrow \Lambda^{2^h+1}$  est nulle. On obtient donc le résultat ci-dessous où le cas  $h = 1$  se trouve dans [Pir97, Exemple 1.2.9] :

**Lemme 3.4.21.** — *Si  $h = 1$ ,  $\Lambda^2 \otimes \Lambda^1 \cong \Lambda^3 \oplus S_{(2,1)}$ . Si  $h \geq 2$ , les facteurs de composition du foncteur  $\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2$  sont  $\Lambda^{2^h+1}$ ,  $S_{(2^h,1)}$  et  $S_{(2^h-1,2)}$ . De plus, l'apparition de ces facteurs*

### 3.4. Le module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$

dans  $\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2$  est donnée par le diagramme de Loewy suivant :

$$\begin{array}{c} (2^h + 1) \\ | \\ (2^h - 1, 2) \\ | \\ (2^h + 1) \quad \oplus \quad (2^h, 1). \end{array}$$

Cela signifie que  $\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2 \cong S_{(2^h, 1)} \oplus F$  où  $F$  est unisériel, il admet la filtration de socles

$$0 = \text{soc}_0 F \subset \text{soc}_1 F \subset \text{soc}_2 F \subset \text{soc}_3 F = F$$

avec  $\text{soc}_1 F = \text{soc } F = \Lambda^{2^h+1}$ ,  $\text{soc}_2 F / \text{soc}_1 F = S_{(2^h-1, 2)}$  et  $\text{soc}_3 F / \text{soc}_2 F = \Lambda^{2^h+1}$ . En particulier,  $\text{soc}_2 F$  est le foncteur de Weyl  $W_{(2^h-1, 2)}$ .

**Remarque 3.4.22.** — Dans le diagramme de Loewy ci-dessus, chaque parenthèse  $(m, n)$  représente le foncteur simple  $S_{(m, n)}$ , et chaque segment qui relie deux parenthèses représente un sous-quotient de  $\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2$  qui est une extension non triviale du foncteur simple associé à la parenthèse du haut par le foncteur simple associé à la parenthèse du bas. En particulier, la segment inférieur représente le sous-objet  $W_{(2^h-1, 2)}$  de  $\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2$ .

**Corollaire 3.4.23.** — On a les diagrammes de Loewy suivants des facteurs de composition du sous-foncteur  $F_2^{h+1}$  du foncteur  $S_4^{2^h+1}$  :

- Si  $h = 1$ ,

$$F_2^2 = \begin{array}{c} (3) \\ | \\ (2) \quad \oplus \quad (2, 1). \end{array}$$

- Si  $h \geq 2$ ,

$$F_2^{h+1} = \begin{array}{c} (2^h + 1) \\ | \\ (2^h - 1, 2) \\ | \\ (2^h + 1) \\ | \\ (2^h) \quad \oplus \quad (2^h, 1). \end{array}$$

*Démonstration.* — Rappelons de la proposition 3.2.7 que le groupe  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\Lambda^{2^h+1}, S_4^{2^h+1})$  est nul. On en déduit que  $\Lambda^{2^h+1}$  n'est pas un sous-foncteur de  $S_4^{2^h+1}$ . Ceci implique qu'il n'est pas un sous-foncteur de  $F_2^{h+1}$ . D'après la définition 1.1.53, le facteur  $\Lambda^{2^h}$  doit ainsi être écrit en première ligne du diagramme de Loewy de  $F_2^{h+1}$ .

D'autre part, en utilisant la propriété exponentielle du foncteur  $\Lambda^*$ , on obtient que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^{2^h} \otimes \Lambda^1, \Lambda^{2^h}) = \mathbb{F}_2$ . A la suite de [Pir97], on a  $\Lambda^{2^h} \otimes \Lambda^1 \cong \Lambda^{2^h+1} \oplus S_{(2^h, 1)}$ . On en déduit que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_{(2^h, 1)}, \Lambda^{2^h})$  est nul puisque  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^{2^h+1}, \Lambda^{2^h}) = \mathbb{F}_2$ . Alors, il n'y a pas de

segment qui relie  $\Lambda^{2^h}$  et  $S_{(2^h, 1)}$  dans le diagramme de Loewy de  $F_2^{h+1}$ .

Le résultat se déduit du fait que  $F_2^{h+1}$  est une extension de  $\Lambda^{2^h-1} \otimes \Lambda^2$  par  $\Lambda^{2^h}$ .  $\square$

### 3.4.5 Résultat principal et conséquences

**Théorème 3.4.1.** — *En tant que module sur l'algèbre de Hopf  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$  est librement engendré par  $\epsilon_{[1,4]}$ ,  $\epsilon_{[4,1]}$ ,  $\epsilon_{[2,4]}$  et  $\epsilon_{[4,2]}$ .*

*Démonstration.* — Rappelons du corollaire 3.4.4 que, en tant que module sur  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$  est engendré par les générateurs des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^k}, S_4^{2^l})$  pour  $k, l$  quelconques. Le théorème se déduit des résultats sur la structure de  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{2^h}, S_4^{2^l})$  (cf. le lemme 3.3.17 et les propositions 3.4.6, 3.4.7 et 3.4.8), du lemme 3.4.2, et du fait que les quatre générateurs dans l'énoncé sont des indécomposables de l'algèbre de Hopf tri-graduée  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S_4^*, S_4^*)$ .  $\square$

**Corollaire 3.4.24.** —  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{n+3}, S_4^n) = \mathbb{F}_2$  pour  $n \geq 1$ .

*Démonstration.* — Le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^{n+3}, S_4^n)$  admet des générateurs de la forme  $b_{[n+3-s, n-t]\epsilon_{[s,t]}}$  où  $[s, t] \in \{[1, 4], [4, 1], [2, 4], [4, 2]\}$ . Pour que  $b_{[n+3-s, n-t]}$  soit non nul, il faut avoir  $n+3-s \leq n-t \leq 2n+6-2s$ . On en déduit que  $s \geq t+3$ . La seule paire qui satisfait cette condition est  $[s, t] = [4, 1]$ . Le corollaire s'ensuit.  $\square$

**Corollaire 3.4.25.** —  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^n, S_4^{n+3}) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } 1 \leq n \leq 2, \\ \mathbb{F}_2^{\oplus 2} & \text{si } 3 \leq n \leq 8, \\ \mathbb{F}_2^{\oplus 3} & \text{si } n = 9, \\ \mathbb{F}_2^{\oplus 4} & \text{si } n \geq 10. \end{cases}$

*Démonstration.* — De manière analogue à la démonstration du corollaire 3.4.24, les données des générateurs de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^n, S_4^{n+3})$  sont exhibées par le tableau suivant :

$\epsilon_{[s,t]}$	$b_{[n-s, n+3-t]}$	Condition
[1, 4]	$[k-1, k-1]$	$k \geq 1$
[4, 1]	$[k-4, k+2]$	$0 \leq k-4 \leq k+2 \leq 2k-8 \Leftrightarrow k \geq 10$
[2, 4]	$[k-2, k-1]$	$0 \leq k-2 \leq k-1 \leq 2k-4 \Leftrightarrow k \geq 3$
[4, 2]	$[k-4, k+1]$	$0 \leq k-4 \leq k+1 \leq 2k-8 \Leftrightarrow k \geq 9$

On en déduit le résultat.  $\square$

**Remarque 3.4.26.** — Le corollaire 3.4.25 nous dit que, pour  $n \geq 3$ , le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^n, S_4^{n+3})$  est librement engendré par au moins 2 générateurs.

D'autre part, d'après la proposition 2.3.20 et le théorème 2.3.21, le foncteur  $\mathcal{K}_2$  admet la filtration convergente décroissante  $\mathcal{K}_2 = \mathcal{D}_0 \supset \mathcal{D}_1 \supset \dots \supset \mathcal{D}_k \supset \mathcal{D}_{k+1} \supset \dots$  qui satisfait

$$\frac{\mathcal{D}_k}{\mathcal{D}_{k+1}} \cong \frac{\mathcal{D}_k \cap \overline{\mathcal{K}_2^{2k}}}{\mathcal{D}_{k+3} \cap \overline{\mathcal{K}_2^{2k}}} \cong \frac{K_{k,0}}{k_{k-1,2}} \cong S_4^k.$$

### 3.4. Le module $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^*, \mathbb{S}_4^*)$

Le sous-quotient  $\mathcal{E}_k = (\mathcal{D}_k \cap \mathcal{K}_2^{2k}) / (\mathcal{D}_{k+6} \cap \mathcal{K}_2^{2k})$  de  $\mathcal{K}_2^{2k} \subset \mathcal{K}_2$  est une extension non triviale de  $\mathbb{S}_4^k$  par  $\mathbb{S}_4^{k+3}$ . En particulier,  $\mathcal{E}_1$  est l'unique extension non triviale de  $\mathbb{S}_4^1$  par  $\mathbb{S}_4^4$  : elle est identique avec le générateur  $\epsilon_{[1,4]} \in \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{S}_4^1, \mathbb{S}_4^4)$ .

**Proposition 3.4.27.** — L'extension  $\mathcal{E}_{n+1}$  est le produit de Hopf de  $\mathcal{E}_1$  par l'identité de  $\mathbb{S}_4^n$ .

*Démonstration.* — Cela résulte du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{S}_4^n \otimes \mathbb{S}_4^4 & \longrightarrow & \mathbb{S}_4^n \otimes \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{p} & \mathbb{S}_4^n \otimes \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \mu & & \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{S}_4^{n+4} & \longrightarrow & \mathcal{E}'_{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{S}_4^n \otimes \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow = & & \uparrow \gamma & & \uparrow \delta & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{S}_4^{n+4} & \longrightarrow & \mathcal{E}_{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{S}_4^{n+1} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où les applications  $\mu, \delta$  sont la multiplication et la diagonale,  $\mathcal{E}'_{n+1}$  est l'extension induite de  $\mathbb{S}_4^n \otimes \mathcal{E}_1$  via  $\mu$ .

Il reste à montrer que l'on a une application  $\gamma$  qui fait commuter la partie inférieure du diagramme.

Le foncteur  $\mathcal{E}_{n+1} = (\mathcal{D}_{n+1} \cap \mathcal{K}_2^{2n+2}) / (\mathcal{D}_{n+7} \cap \mathcal{K}_2^{2n+2})$  est un quotient de

$$(\mathbb{S}^{n+1} \circ J) \oplus (\mathbb{S}^{n+7} \circ J).$$

Donc, pour définir  $\gamma$ , nous devons le définir sur  $\mathbb{S}^{n+1}(J(V))$  et  $\mathbb{S}^{n+4}(J(V))$ , puis vérifier la compatibilité. Posons

- $\gamma((u_1) \dots (u_{n+4})) = (u_1) \dots (u_{n+4}) \in \mathbb{S}_4^{n+4}(V)$ ,
- $\gamma((u_1) \dots (u_{n+1})) = \sum_i (u_1) \dots (u_{i-1})(u_{i+1}) \dots (u_{n+1}) \otimes (u_i) \in \mathbb{S}_4^n \otimes \mathcal{E}_1$ ,

La compatibilité suit, en effet il suffit de comparer

$$\gamma((u_1) \dots (u_n)(v_1)^2(v_2)^2), \text{ à}$$

$$\gamma((u_1) \dots (u_n)((v_1) + (v_2) + (v_1 + v_2))).$$

Il faut seulement calculer le second terme. Mais il y a annulation de tous les termes

$$[(u_1) \dots (u_{i-1})(u_{i+1}) \dots (u_n)((v_1) + (v_2) + (v_1 + v_2))] \otimes (u_i)$$

si  $i < n$ , car  $(v_1) + (v_2) + (v_1 + v_2)$  est nul dans  $\mathbb{S}^1(V)$ . Il ne reste que le terme final de la somme et le résultat suit.  $\square$

**Remarque 3.4.28.** — Rappelons que le foncteur différence  $\Delta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  est exact (voir la proposition 1.1.27), il induit alors un morphisme, que l'on notera encore  $\Delta$  :

$$\Delta: \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, G) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Delta F, \Delta G)$$



pour tous  $F, G \in \mathcal{F}$ . La proposition suivante détermine l'image, par les applications  $\Delta$  de ce type, des générateurs  $\epsilon_{[1,4]}$ ,  $\epsilon_{[4,1]}$ ,  $\epsilon_{[2,4]}$  et  $\epsilon_{[4,2]}$  du  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$ -module  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S_4^*, S_4^*)$ .

**Proposition 3.4.29.** — *Tous les  $\Delta(\epsilon_{[1,4]})$ ,  $\Delta(\epsilon_{[4,1]})$ ,  $\Delta(\epsilon_{[2,4]})$  et  $\Delta(\epsilon_{[4,2]})$  sont nuls.*

*Démonstration.* — Rappelons du corollaire 1.1.25 que :

1.  $\Delta S_4^1 = \mathbb{F}_2$ ,
2.  $\Delta S_4^2 = \mathbb{F}_2 \oplus S^1$ ,
3.  $\Delta S_4^4 = S^1 \oplus S^1 \oplus S^3$ .

De plus, d'après [FFSS99, Theorem 6.3],  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(S^m, S^n) = 0$  pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$  (ceci se montre aussi à la main). Le résultat s'ensuit.  $\square$

**Remarque 3.4.30.** — On peut montrer aussi que si  $\epsilon$  est dans la liste du théorème 3.4.1, et si  $b \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S_4^*, S_4^*)$ ,  $\Delta(b\epsilon) = (\Delta b)\epsilon$ .

On peut également montrer :

**Proposition 3.4.31.** — *En tant que foncteur gradué on a les isomorphismes :*

$$\Delta(\mathcal{D}_n) \cong \mathcal{D}_{n-1} \oplus \mathcal{D}_{n-2} \oplus \mathcal{D}_{n-3}, \text{ et}$$

$$\Delta(\mathcal{C}_n) \cong \mathcal{C}_{n-1} \oplus \mathcal{C}_{n-2} \oplus \mathcal{C}_{n-3}$$


*Démonstration.* — Calcul analogue à ce qui a été fait pour  $\mathcal{K}_2$ .  $\square$

On en déduit les formules pour  $\Delta(\mathcal{E}_n)$ .

### 3.4.6 $\mathcal{K}_2$ et foncteurs polynomiaux stricts

Le foncteur  $\mathcal{K}_2$  ne peut pas être un foncteur polynomial strict. Cependant, on conjecture que chaque  $\mathcal{C}_k$  est l'oubli d'un foncteur polynomial strict. Ceci sera l'objet de futures investigations.

# Relation entre le foncteur $\mathcal{K}_2$ et l'anneau de Hopf $H_*\underline{K(2)}_{\overline{*}}$

OIT  $K(2) = \{\underline{K(2)}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  LE  $\Omega$ -SPECTRE qui représente la  $K$ -théorie de Morava  $K(2)^*(-)$  (pour  $p = 2$ ). Cela signifie que  $\{\underline{K(2)}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une famille d'espaces topologiques non-pointés munie des équivalences d'homotopies

$$\underline{K(2)}_k \xrightarrow{\simeq} \Omega \underline{K(2)}_{k+1}$$

telle que

$$K(2)^k(X) \cong [X, \underline{K(2)}_{\overline{k}}], \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

est une équivalence naturelle en  $X$ , où  $[X, Y]$  désigne l'ensemble des classes d'équivalence d'homotopie non-pointée des applications continues de  $X$  vers  $Y$ .

Soient  $H_*(-)$  et  $H^*(-)$  l'homologie et la cohomologie singulière modulo 2. Wilson a décrit, dans [Wil84], la structure d'anneau de Hopf de  $H_*\underline{K(2)}_{\overline{*}} := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H_*\underline{K(2)}_k$ . Dans ce chapitre, on étudie la relation entre la structure du foncteur  $V \mapsto K(2)^*(BV^\sharp)$  (cf. le chapitre 2) et la structure d'anneau de Hopf de  $H_*\underline{K(2)}_{\overline{*}}$ . Grâce à la périodicité, il suffit de considérer le foncteur  $\mathcal{K}_2$  et le  $\Omega$ -spectre "périodique"  $\{\underline{K(2)}_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in \mathbb{Z}/6}$  que l'on désigne aussi par  $K(2)$ .

## Sommaire

<b>4.1 Rappels sur les anneaux de Hopf</b> . . . . .	<b>130</b>
4.1.1 Définitions et exemples . . . . .	130
4.1.2 Le foncteur anneau de Hopf libre . . . . .	131
4.1.3 Le morphisme de Frobenius et le morphisme <i>Verschiebung</i> . . . . .	132
<b>4.2 L'homologie d'un <math>\Omega</math>-spectre</b> . . . . .	<b>134</b>
4.2.1 Structure d'anneau de Hopf de $E_*\underline{G}_*$ . . . . .	134
4.2.2 Relation principale . . . . .	135
4.2.3 Modèle algébrique de $E_*\underline{G}_*$ . . . . .	136
<b>4.3 Structures de <math>H_*\underline{K(2)}_{\overline{*}}</math></b> . . . . .	<b>137</b>
4.3.1 Structure d'anneau de Hopf de $H_*\underline{K(2)}_{\overline{*}}$ . . . . .	137
4.3.2 La relation principale pour $H_*\underline{K(2)}_{\overline{*}}$ et quelques conséquences . . . . .	139
4.3.3 Structure de coalgèbre instable de $H_*\underline{K(2)}_{\overline{*}}$ . . . . .	140

<b>4.4</b>	<b>Liens avec le foncteur <math>\mathcal{K}_2</math></b> . . . . .	141
4.4.1	Relation entre $H_*\underline{K}(2)_*$ et le foncteur $\mathcal{K}_2$ . . . . .	141
4.4.2	Relation entre $H_*\underline{K}(2)_*$ et le foncteur $\mathcal{K}_2$ . . . . .	142
<b>4.5</b>	<b>Résultats sur le modèle algébrique <math>H_*^R\underline{K}(2)_*</math></b> . . . . .	<b>144</b>
4.5.1	Structure de module instable à droite sur $Q(H_*^R\underline{K}(2)_*)$ et relation avec les sous-foncteurs $K_{p,q}$ . . . . .	144
4.5.2	Démonstration du théorème 4.5.3 . . . . .	147
4.5.3	Le module des primitifs $P(H_*^R\underline{K}(2)_*)$ et quelques conséquences . . . . .	149

---

## 4.1 Rappels sur les anneaux de Hopf

On rappelle d'abord la définition d'un anneau de Hopf et ses propriétés. On renvoie à [RW77] pour plus de détails.

### 4.1.1 Définitions et exemples

Soit  $R$  un anneau gradué commutatif unitaire. Soit  $\text{CoAlg}_R$  la catégorie des coalgèbres (graduées, cocommutatives, coassociatives et counitaires) sur  $R$ , les morphismes sont les morphismes de  $R$ -coalgèbres.

*Remarque 4.1.1.* —  $\text{CoAlg}_R$  est une catégorie avec un objet final et des produits finis :

- L'anneau  $R$  est l'objet final de la catégorie  $\text{CoAlg}_R$  : pour tout  $C \in \text{CoAlg}_R$ , l'unique morphisme  $C \rightarrow R$  est la counité  $\epsilon_C$ .
- Soient  $C, D$  des coalgèbres quelconques sur  $R$ . Leur produit est le produit tensoriel de  $R$ -coalgèbres  $C \otimes_R D$  (on le note simplement  $C \otimes D$ ) ; les projections canoniques sont  $id_C \otimes \epsilon_D : C \otimes D \rightarrow C$  et  $\epsilon_C \otimes id_D : C \otimes D \rightarrow D$ .

Considérons le groupe abélien  $\mathbb{k}$  qui est soit  $\mathbb{Z}$  soit  $\mathbb{Z}/n$  où  $n$  est un entier naturel. On désigne par  $\text{CoAlg}_R^*$  la catégorie des objets  $\mathbb{k}$ -gradués de  $\text{CoAlg}_R$  : les objets sont de la forme  $C = \bigoplus_{k \in \mathbb{k}} C_*(k)$  où chaque  $C_*(k)$  est un objet de  $\text{CoAlg}_R$  (on dit que  $C_*(k)$  est **en poids**  $k$ ), les morphismes sont les morphismes préservant le poids et le degré.

Soit  $\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in \mathbb{k}} \mathcal{H}_*(k)$  un objet de  $\text{CoAlg}_R^*$ . On dit que  $\mathcal{H}$  est un **objet en groupe abélien gradué** si chaque  $\mathcal{H}_*(k)$  est une algèbre de Hopf sur  $R$ .

*Notation 4.1.2.* — Notons respectivement  $\delta_k, \epsilon_k, \star_k, \eta_k, \chi_k$  le coproduit, la counité, le produit, l'unité et l'antipode de  $\mathcal{H}_*(k)$ .

- Posons  $[0_k] = \eta_k(1) \neq 0$ . Nous avons alors  $[0_k] \star_k a = a$  pour tout  $a \in \mathcal{H}_*(k)$ .
- Il convient d'écrire  $\delta, \epsilon, \star, \eta$  et  $\chi$  pour tout  $k \in \mathbb{k}$  sans confusion.
- Si  $x \in \mathcal{H}_s(k)$  pour un certain  $k \in \mathbb{k}$ , on dit que  $x$  est degré  $s$ , et on notera  $|x| = s$ .

*Définition 4.1.3.* — L'objet en groupe abélien gradué  $\mathcal{H}$  ci-dessus est appelé un **anneau de Hopf** sur  $R$  s'il est muni de morphismes de  $R$ -coalgèbres  $\bullet : \mathcal{H}_*(k) \otimes \mathcal{H}_*(l) \rightarrow \mathcal{H}_*(k+l)$

#### 4.1. Rappels sur les anneaux de Hopf

---

(pour  $k, l$  quelconques dans  $\mathbb{k}$ ) et  $e: R \rightarrow \mathcal{H}_*(0)$  qui satisfont, pour tout  $a \in \mathcal{H}_{s_1}(t_1)$ ,  $b \in \mathcal{H}_{s_2}(t_2)$ ,  $\tilde{b} \in \mathcal{H}_{s'_2}(t_2)$  et  $c \in \mathcal{H}_{s_3}(t_3)$ , aux propriétés suivantes :

1. Multiplication par zéro :  $[0_k] \bullet a = \eta\epsilon(a)$ ,
2. Multiplication par l'unité :  $[1] \bullet a = a$  où  $[1] := e(1) \in \mathcal{H}_0(0)$ ,
3. Compatibilité avec l'antipode :  $\chi(a \bullet b) = \chi(a) \bullet b = a \bullet \chi(b)$ ,
4. Associativité :  $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ ,
5. Commutativité :  $a \bullet b = (-1)^{|a||b|} \chi([1])^{\bullet t_1 t_2} \bullet b \bullet a = (-1)^{|a||b|} \chi^{t_1 t_2}(b \bullet a)$ ,
6. Distributivité :  $a \bullet (b \star \tilde{b}) = \sum (-1)^{|a''||b|} (a' \bullet b) \star (a'' \bullet \tilde{b})$ , où  $\delta(a) = \sum a' \otimes a''$ .

**Remarque 4.1.4.** — A cause des propriétés dans la définition 4.1.3, on appelle encore  $\mathcal{H}$  un **objet en anneau commutatif** dans la catégorie  $\text{CoAlg}_R : (\mathcal{H}_*(k), \star_k)$  est un objet en groupe abélien pour tout  $k \in \mathbb{k}$ ,  $(\mathcal{H}, \bullet)$  est un objet en monoïde abélien gradué, et on dispose de la distributivité de  $\bullet$  par rapport à  $\star$ .

**Définition 4.1.5.** — La catégorie  $\mathcal{H}_R$  est la catégorie des anneaux de Hopf sur  $R$ , les morphismes sont les morphismes (préservant le poids et le degré) de  $R$ -modules gradués compatibles avec  $(\delta, \epsilon)$ ,  $(\star, \eta)$ ,  $\chi$  et  $(\bullet, e)$ .

**Exemple 4.1.6.** — Soient  $R$  et  $S$  des anneaux gradués commutatifs unitaires. L'anneau

$$R[S] := \left\{ \sum_{s \in S} r_s [s] \mid r_s \in R \right\}$$

est muni d'une structure d'anneau de Hopf sur  $R$  dont les poids sont induits par la graduation de  $S$ , et dont les gradués sont induits par la graduation de  $R$  :

- Le coproduit et la counité :  $\delta([s]) = [s] \otimes [s]$ ,  $\epsilon([s]) = 1$ .
- Le premier produit et la première unité :  $[s] \star [s'] = [s + s']$ ,  $\eta(1) = [0]$ .
- L'antipode :  $\chi([s]) = [-s]$ .
- Le second produit et la seconde unité :  $[s] \bullet [s'] = [ss']$ ,  $e(1) = [1]$ .

#### 4.1.2 Le foncteur anneau de Hopf libre

**Définition 4.1.7.** — Soient  $R$  et  $S$  des anneaux commutatifs unitaires. Un objet  $\mathcal{H} \in \mathcal{H}_R$  muni d'un morphisme (dans  $\mathcal{H}_R$ )  $R[S] \rightarrow \mathcal{H}$  est dit un  **$R[S]$ -anneau de Hopf**. On désigne par  ${}_S \mathcal{H}_R$  la catégorie des  $R[S]$ -anneaux de Hopf, ses morphismes sont les morphismes de  $R$ -anneaux de Hopf  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}' \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & R[S] & \end{array} .$$

Soit  $\text{UCoAlg}_R$  la catégorie des coalgèbres unitaires sur  $R$  : un objet  $C \in \text{UCoAlg}_R$  est un objet de  $\text{CoAlg}_R$  muni d'un morphisme de coalgèbres  $\eta: R \rightarrow C$  tel que  $\epsilon \circ \eta = id_R$ . Soit  $\text{UCoAlg}_R^*$  la catégorie des objets gradués de  $\text{UCoAlg}_R$  (au même sens de la définitions de  $\text{CoAlg}_R^*$ ), les morphismes sont les morphismes de coalgèbres unitaires préservant le poids et le degré.

Considérons le foncteur d'oubli de la catégorie des  $R[S]$ -anneaux de Hopf  ${}_S\mathcal{H}_R$  vers la catégorie des coalgèbres unitaires graduées, en oubliant l'action de  $R[S]$ , les produits  $\star, \bullet$  et l'antipode  $\chi$ .

**Lemme 4.1.8** (Cf. [RW77]). — *Le foncteur d'oubli de  ${}_S\mathcal{H}_R$  vers  $\text{UCoAlg}_R^*$  admet un adjoint à gauche  $\mathfrak{F}_{R[S]}: \text{UCoAlg}_R^* \rightarrow {}_S\mathcal{H}_R$ , i.e. on a l'isomorphisme d'adjonction :*

$$\text{Hom}_{{}_S\mathcal{H}_R}(\mathfrak{F}_{R[S]}(C), \mathcal{H}) \cong \text{Hom}_{\text{UCoAlg}_R^*}(C, \mathcal{H}),$$

pour tout  $C \in \text{UCoAlg}_R^*$  et tout  $\mathcal{H} \in {}_S\mathcal{H}_R$ . On appelle  $\mathfrak{F}_{R[S]}$  le **foncteur  $R[S]$ -anneau de Hopf libre**.

*Démonstration.* — Pour tout objet  $C = \bigoplus_{k \in \mathbb{k}} C_*(k)$  de  $\text{UCoAlg}_R^*$ , on va construire le  $R[S]$ -anneau de Hopf libre associé.

Soit  $\eta_k$  l'unité  $R \rightarrow C_*(k)$  pour tout  $k$ . Considérons le  $R$ -module libre  $M$  engendré par tous les produits  $\star$  finis possibles de tous les produits  $\bullet$  finis possibles des éléments de  $R[S]$  et  $C$ . Le  $R[S]$ -anneau de Hopf libre  $\mathfrak{F}_{R[S]}(C)$  est obtenu en prenant le quotient de  $M$  par la relation  $C_0(k) \ni \eta_k(1) = [0_n] \in R[S]$  et les relations d'anneau de Hopf donnée dans la définition 4.1.3. □

### 4.1.3 Le morphisme de Frobenius et le morphisme Verschiebung

Soit  $\mathcal{H}$  un  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel gradué. Rappelons de la définition 1.2.7 que

$$(\Phi\mathcal{H})_i = \begin{cases} \mathcal{H}_{i/2} & \text{si } 2 \mid i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Afin de simplifier la présentation, on utilise désormais  $a$  au lieu de  $\Phi a$  pour élément de  $\Phi\mathcal{H}$ .

**Lemme 4.1.9.** — *On a la suite exacte suivante de  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels gradués :*

$$0 \longrightarrow \Phi\mathcal{H} \xrightarrow{\tilde{F}} S^2(\mathcal{H}) \xrightarrow{N} \Gamma^2(\mathcal{H}) \xrightarrow{\tilde{V}} \Phi\mathcal{H} \longrightarrow 0,$$

où, pour tout  $a, b \in \mathcal{H}$ ,

- $\tilde{F}(a) := a^2$ ,
- $N(ab) := a \otimes b + b \otimes a$ ,
- $\tilde{V}(a \otimes b + b \otimes a) := 0$  et  $\tilde{V}(a \otimes a) := a$ .

*Démonstration.* — Le résultat suit des calculs directs. □

#### 4.1. Rappels sur les anneaux de Hopf

---

Supposons de plus que  $\mathcal{H}$  soit une  $\mathbb{F}_2$ -algèbre de Hopf.

**Définition 4.1.10.** — Le **morphisme de Frobenius**  $F: \Phi\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est défini par

$$\begin{array}{ccc} \Phi\mathcal{H} & \xrightarrow{F} & \mathcal{H} \\ & \searrow \tilde{F} & \nearrow \mu \text{ (le produit)} \\ & & \mathcal{S}^2(\mathcal{H}) \end{array} .$$

Le **morphisme Verschiebung**  $V: \mathcal{H} \rightarrow \Phi\mathcal{H}$  est défini par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{V} & \Phi\mathcal{H} \\ & \searrow \delta \text{ (le coproduit)} & \nearrow \tilde{V} \\ & & \Gamma^2(\mathcal{H}) \end{array} .$$

**Remarque 4.1.11.** — Le morphisme de Frobenius et le Verschiebung sont des morphismes préservant le degré. Mais, en oubliant la graduation, on a :

- $F(a) = a^2$ .
- $\delta(a) = V(a) \otimes V(a) + T(a)$ , où  $T(a)$  est le terme du coproduit  $\delta(a)$  qui est dans l'image de la norme  $N$ , *i.e.*  $T(a)$  est de la forme  $\sum_{a' \neq a''} (a' \otimes a'' + a'' \otimes a')$ .

Notons que la structure de  $\mathbb{F}_2$ -algèbre de Hopf de  $\mathcal{H}$  induit une telle structure sur  $\Phi\mathcal{H}$ .

**Proposition 4.1.12.** — *En oubliant la graduation, on a les propriétés suivantes :*

1.  $F$  et  $V$  sont des morphismes d'algèbres de Hopf. En particulier, on a  $F \circ V = V \circ F$ .
2. Si  $\mathcal{H}$  est un  $\mathbb{F}_2$ -anneau de Hopf, alors  $V(a \bullet b) = V(a) \bullet V(b)$ , et  $F(V(a) \bullet b) = a \bullet F(b)$ .

**Remarque 4.1.13.** — Dans un  $\mathbb{F}_2$ -anneau de Hopf, le morphisme de Frobenius correspond au produit  $\star : F(a) = a^{\star 2}$ .

*Démonstration.* — La première assertion se déduit du fait que, dans une  $\mathbb{F}_2$ -algèbre de Hopf, le produit est compatible avec le coproduit. On va montrer, par exemple, le Verschiebung  $V$  préserve le produit, que l'on désigne par  $\star$ .

Considérons  $\delta(a \star b) = V(a \star b) \otimes V(a \star b) + T(a \star b)$ . Grâce à la compatibilité entre le produit et le coproduit, on obtient que

$$\begin{aligned} \delta(a \star b) &= \delta(a) \star \delta(b) \\ &= [V(a) \otimes V(a) + T(a)] \star [V(b) \otimes V(b) + T(b)] \\ &= [V(a) \otimes V(a)] \star [V(b) \otimes V(b)] + T(a) \star T(b) \\ &\quad + [V(a) \otimes V(a)] \star T(b) + T(a) \star [V(b) \otimes V(b)] \\ &= [V(a) \star V(b)] \otimes [V(a) \star V(b)] + T(a \star b). \end{aligned}$$

On en déduit que  $V(a \star b) = V(a) \star V(b)$ .

Pour la seconde assertion, le fait que  $V(a \bullet b) = V(a) \bullet V(b)$  se déduit de la compatibilité entre le produit  $\bullet$  et le coproduit  $\delta$ . Le reste est une conséquence de la distributivité du produit  $\bullet$  par rapport au produit  $\star$  (cf. la définition 4.1.3).  $\square$

## 4.2 L'homologie d'un $\Omega$ -spectre

Soient  $E$  et  $G$  des spectres en anneau. Soient  $E_*(-)$  la théorie d'homologie généralisée associée au spectre  $E$ , et  $G^*(-)$  la théorie de cohomologie généralisée associée au spectre  $G$ , les deux théories sont **non-réduites**. Soit  $\{\underline{G}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  le  $\Omega$ -spectre multiplicatif qui représente la théorie  $G^*(-)$ . On renvoie à [Rav86] pour les définitions et propriétés des spectres.

On rappelle dans cette section quelques propriétés de  $E_*\underline{G}_* := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} E_*\underline{G}_k$ .

### 4.2.1 Structure d'anneau de Hopf de $E_*\underline{G}_*$

**Hypothèse 4.2.1.** — Dans cette sous-section, on suppose que la théorie d'homologie  $E_*(-)$  admet l'isomorphisme de Künneth

$$E_*(X) \otimes_{E_*} E_*(Y) \cong E_*(X \times Y),$$

où  $E_*$  est l'anneau de coefficients.

**Exemple 4.2.2.** — Quelques exemples de théories d'homologie généralisée multiplicative qui admettent l'isomorphisme de Künneth sont :

- l'homologie singulière à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  ;
- l'homologie singulière à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$ , pour tout nombre premier  $p$  ;
- les  $K$ -théories de Morava modulo  $p$   $K(n)_*(-)$ .

**Proposition 4.2.3.** —  $E_*\underline{G}_* := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} E_*\underline{G}_k$  est un anneau de Hopf sur  $E_*$ .

*Démonstration.* — Grâce à l'isomorphisme de Künneth, chaque  $E_*\underline{G}_k$  est une co-algèbre dont le coproduit est induit par la diagonale  $\underline{G}_k \rightarrow \underline{G}_k \times \underline{G}_k$  et dont la counité est induite par l'application  $\underline{G}_k \rightarrow \mathbf{pt}$ , où  $\mathbf{pt}$  désigne l'espace topologique d'un seul point. De plus, la structure de  $H$ -espace sur l'espace de lacets  $\underline{G}_k$  induit le produit  $\star$  et l'unité  $\eta$ , la structure multiplicative de  $\{\underline{G}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  induit le produit  $\bullet$  et l'unité  $e$ . Donc,  $E_*\underline{G}_*$  est un anneau de Hopf sur  $E_*$ .  $\square$

Soit  $x$  un élément quelconque de l'anneau de coefficients  $G^*$ . On rappelle que  $G^* \cong [\mathbf{pt}, \underline{G}_*]$  où  $[X, Y]$  désigne l'ensemble des classes d'équivalence d'homotopie *non-pointée* des applications continues de  $X$  dans  $Y$ . On considère  $x$  comme une telle classe d'équivalence. Il induit alors un morphisme de l'anneau de coefficients  $E_* = E_*(\mathbf{pt})$  vers  $E_*\underline{G}_*$ .

**Remarque 4.2.4.** — Par rapport à la structure d'anneau de Hopf de  $E_*\underline{G}_*$ , le morphisme induit par  $0_k \in G^k$  est l'unité  $\eta_k$ , celui qui est induit par  $1 \in G^0$  est l'unité  $e$  (cf. la notation 4.1.2 et la définition 4.1.3).

## 4.2. L'homologie d'un $\Omega$ -spectre

**Définition 4.2.5.** — Soit  $x$  un élément de l'anneau de coefficients  $G^*$ . On désigne par  $[x]$  l'image de  $1 \in E_0$  par le morphisme

$$E_*(x): E_* \longrightarrow E_*\underline{G}_*,$$

de sorte que  $[x] \in E_0\underline{G}_*$ .

On a le résultat suivant :

**Lemme 4.2.6** ([RW77, Lemma 1.14]). — Soient  $x, y \in G^k$ , soit  $z \in G^l$ . On a

1.  $\delta([x]) = [x] \otimes [x]$ ,
2.  $[x] \star [y] = [x + y] = [y + x] = [y] \star [x]$ ,
3.  $[x] \bullet [z] = [xz] = [zx] = [z] \bullet [x]$ .

*Démonstration.* — Les deux premiers résultats viennent en appliquant l'homologie aux diagrammes commutatifs suivants

1.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{pt} & \xrightarrow{x} & \underline{G}_k \\ \Delta \downarrow \cong & & \downarrow \Delta \\ \mathbf{pt} \times \mathbf{pt} & \xrightarrow{x \times x} & \underline{G}_k \times \underline{G}_k \end{array} ,$$

où  $\Delta$  est la diagonale,

2.

$$\mathbf{pt} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{pt} \times \mathbf{pt} \xrightarrow{x \times y} \underline{G}_k \times \underline{G}_k \xrightarrow{\mu} \underline{G}_k ,$$

$\xrightarrow{x+y}$

où  $\mu$  est le produit pour la structure de  $H$ -espace de  $\underline{G}_k$ .

Le troisième résultat est similaire au deuxième, mais on utilise ici la structure multiplicative de  $\{\underline{G}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . □

**Corollaire 4.2.7.** — L'anneau  $E_*[G^*]$  est un  $E_*$ -sous-anneau de Hopf de  $E_*\underline{G}_*$ . Donc,  $E_*\underline{G}_*$  est un  $E_*[G^*]$ -anneau de Hopf.

*Démonstration.* — Le résultat se déduit directement du lemme 4.2.6. □

### 4.2.2 Relation principale

**Hypothèse 4.2.8.** — Dans cette sous-section, on suppose que  $E$  et  $G$  sont des spectres en anneaux complexes orientés, *i.e.* les théories de cohomologie associées  $E^*(-)$  et  $G^*(-)$  sont complexes orientées (cf. [Rav86]). Soient  $x^E \in E^2(\mathbb{C}P^\infty)$ ,  $x^G \in G^2(\mathbb{C}P^\infty)$  leur orientation, et soient  $F_E, F_G$  les lois de groupe formel commutatif associées respectivement à  $E^*(-)$  et  $G^*(-)$  (cf. l'exemple 1.5.8).



Rappelons que la cohomologie  $E^*(\mathbb{C}P^\infty)$  est isomorphe à l'anneau des séries formelles  $E^*[[x^E]]$ . L'homologie  $E_*(\mathbb{C}P^\infty)$  est un  $E_*$ -module librement engendré par les classes  $\beta_i \in E_{2i}(\mathbb{C}P^\infty)$ , où  $\langle (x^E)^i, \beta_j \rangle = \delta_{ij}$  avec  $i, j \geq 0$ .

D'autre part, comme  $x^G \in G^2(\mathbb{C}P^\infty) \cong [\mathbb{C}P^\infty, \underline{G}_2]$ , on considère  $x^G$  comme une classe d'équivalence d'homotopie des applications continues de  $\mathbb{C}P^\infty$  dans  $\underline{G}_2$ . Elle induit alors un morphisme de  $E_*$ -modules

$$x_*^G : E_*(\mathbb{C}P^\infty) \longrightarrow E_*(\underline{G}_2).$$

**Définition 4.2.9.** — Soit  $b_i \in E_{2i}\underline{G}_2$  l'image de  $\beta_i \in E_{2i}(\mathbb{C}P^\infty)$  par le morphisme  $x_*^G$ . On note  $b(s)$  la somme  $\sum_{n \geq 0} b_n s^n \in E_*\underline{G}_*[[s]]$ . Par ailleurs, en écrivant  $F_G(x, y) = \sum_{i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j$ , on note

$$b(s) +_{[F_G]} b(t) = \star_{i, j \geq 0} ([a_{ij}] \bullet b(s)^{\bullet i} \bullet b(t)^{\bullet j}) \in E_*\underline{G}_*[[s, t]],$$

où le produit  $\star$  est induit par la structure de  $H$ -espace de  $\underline{G}_k$  ( $\forall k \in \mathbb{Z}$ ), le produit  $\bullet$  est induit par la structure multiplicative de  $\{\underline{G}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , et  $[a_{ij}] \in E_0\underline{G}_*$  (voir la définition 4.2.5).

**Remarque 4.2.10.** — Les produits  $\star$  et  $\bullet$  dans la définition 4.2.9 fonctionnent de manière suivante :

1. Ils sont distributif par rapport à l'addition  $+$ .
2.  $(\lambda s^i) \bullet (\lambda' s^j) = (\lambda \bullet \lambda') s^{i+j}$ .
3.  $(\lambda s^i) \star (\lambda' s^j) = (\lambda \star \lambda') s^{i+j}$ .

On énonce, sans démonstration, le résultat suivant, qui est dû à Ravenel et Wilson [RW77, Theorem 3.8] :

**Théorème 4.2.11 (Relation principale).** — Dans  $E_*\underline{G}_*[[s, t]]$ , on a :

1.  $b(s +_{F_E} t) = b(s) +_{[F_G]} b(t)$ ,
2.  $b([n]_{F_E}(s)) = [n]_{[F_G]}(b(s))$  pour  $n \geq 1$ , où  $[n]_{F_E}$  est la  $n$ -série de la loi  $F_E$ ,  $[n]_{[F_G]}(b(s))$  est l'addition sur  $[F_G]$  des  $n$  termes  $b(s)$ .

**Remarque 4.2.12.** — La relation principale donne les relations entre les éléments  $b_i$  et  $[a_{ij}]$  (dans  $E_*\underline{G}_*$ ) par rapport aux opérations  $+$ ,  $\star$  et  $\bullet$ .

### 4.2.3 Modèle algébrique de $E_*\underline{G}_*$

Dans cette sous-section, on a besoin des hypothèses 4.2.1 et 4.2.8.

Considérons le morphisme de  $E_*$ -coalgèbres unitaires

$$x_*^G : E_*(\mathbb{C}P^\infty) \longrightarrow E_*\underline{G}_*.$$

D'après le lemme 4.1.8, il s'étend en un morphisme de  $E_*[G^*]$ -anneau de Hopf, que l'on note aussi  $x_*^G$  :

$$x_*^G : \mathfrak{F}_{E_*[G^*]}(E_*(\mathbb{C}P^\infty)) \longrightarrow E_*\underline{G}_*.$$

### 4.3. Structures de $H_*\underline{K}(2)_{\overline{*}}$

**Définition 4.2.13.** — On note  $E_*^R\underline{G}_*$  le quotient de  $\mathfrak{F}_{E_*[G^*]}(E_*(\mathbb{C}P^\infty))$  par les relations entre les  $\beta_i$  et  $[a_{ij}]$  qui sont induites par la relation principale dans  $E_*\underline{G}_*[[s, t]]$ . On appelle  $E_*^R\underline{G}_*$  le **modèle algébrique** de  $E_*\underline{G}_*$ .

**Proposition 4.2.14.** — On a un morphisme canonique d’anneaux de Hopf

$$E_*^R\underline{G}_* \longrightarrow E_*\underline{G}_*.$$

*Démonstration.* — Le morphisme  $x_*^G$  se factorise à travers  $E_*^R\underline{G}_*$  puisque les relations par lesquelles on doit quotienter pour obtenir  $E_*^R\underline{G}_*$  sont vraies dans  $E_*\underline{G}_*$ .  $\square$

### 4.3 Structures de $H_*\underline{K}(2)_{\overline{*}}$

Soient  $H_*(-)$  et  $H^*(-)$  l’homologie et la cohomologie singulière modulo 2. Soit  $K(2) = \{\underline{K}(2)_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  le  $\Omega$ -spectre qui représente la  $K$ -théorie de Morava  $K(2)^*(-)$  pour  $p = 2$ . On étudie dans cette section la structure d’anneau de Hopf et la structure de coalgèbre instable de  $H_*\underline{K}(2)_{\overline{*}}$ . Grâce à la périodicité de  $K(2)$ , il suffit de considérer le  $\Omega$ -spectre “périodique”  $\{\underline{K}(2)_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in \mathbb{Z}/6}$  et l’homologie  $H_*\underline{K}(2)_{\overline{*}}$ .

#### 4.3.1 Structure d’anneau de Hopf de $H_*\underline{K}(2)_{\overline{*}}$

Considérons  $H_*\underline{K}(2)_{\overline{*}} := \bigoplus_{\overline{k} \in \mathbb{Z}/6} H_*\underline{K}(2)_{\overline{k}}$ . Puisque nous disposons de l’isomorphisme de Künneth pour l’homologie singulière à coefficients dans  $\mathbb{F}_2$  :

$$H_*(X) \otimes_{\mathbb{F}_2} H_*(Y) \cong H_*(X \times Y),$$

d’après la proposition 4.2.3,  $H_*\underline{K}(2)_{\overline{*}}$  est munie d’une structure d’anneau de Hopf sur  $\mathbb{F}_2$ . On rappelle les résultats de Wilson (pour le cas  $p = 2$ ) qui donnent une description de la structure de cet anneau de Hopf. Mais d’abord, on définit des éléments particuliers  $a_i, b_j$ .

Soient  $H\mathbb{F}_2$  le  $\Omega$ -spectre d’Eilenberg-MacLane qui représente la cohomologie singulière modulo 2, et  $k(2)$  le  $\Omega$ -spectre qui représente la deuxième  $K$ -théorie de Morava connexe modulo 2. Le morphisme canonique de spectres  $k(2) \rightarrow H\mathbb{F}_2$  induit des isomorphismes entre les groupes d’homotopie  $\pi_i(\underline{K}(2)_{\overline{1}}) \cong \pi_i(K(\mathbb{Z}/2, 1))$  pour  $0 \leq i \leq 6$  : en effet,

$$\pi_i(\underline{K}(2)_{\overline{1}}) \cong \pi_i(\underline{K}(2)_{\overline{1}}) \cong K(2)^{i-1} \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } i = 6k + 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $K(2)^*$  est l’anneau de coefficients de  $K(2)^*(-)$  (cf. [Rav86]). Par ailleurs,  $\underline{K}(2)_{\overline{1}}$  et  $K(\mathbb{Z}/2, 1)$  sont des  $CW$ -complexes connexes. A la suite du théorème de Whitehead, on obtient des isomorphismes en homologie :  $H_i\underline{K}(2)_{\overline{1}} \cong H_i(K(\mathbb{Z}/2, 1))$ , pour  $0 \leq i \leq 5$ . On note de plus que, pour tout  $i \geq 0$ , le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $H_i(K(\mathbb{Z}/2, 1))$  est engendré par un seul élément  $\alpha_i$ .

**Définition 4.3.1.** — Soit  $a_i \in H_i\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}}$  l'image de  $\alpha_i$  par l'isomorphisme

$$H_i\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}} \cong H_i(K(\mathbb{Z}/2, 1)),$$

pour  $0 \leq i \leq 5$ . On pose  $a_{(0)} = a_1$ ,  $a_{(1)} = a_2$ ,  $a_{(2)} = a_4$ .

**Définition 4.3.2.** — Soit  $b_i \in H_{2i}\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}}$  défini comme dans la définition 4.2.9 (pour tout  $i \geq 0$ ). On pose  $b_{(j)} = b_{2^j}$ .

**Proposition 4.3.3** (Cf. [Wil84, Proposition 1.1]). — On a les propriétés suivantes dans  $H_*\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}}$  :

1.  $a_1 \bullet$  — est la suspension homologique,
2. le coproduit est donné par  $a_k \mapsto \sum_{j=0}^k a_{k-j} \otimes a_j$  et  $b_l \mapsto \sum_{j=0}^l b_{l-j} \otimes b_j$ ,
3.  $a_1 \bullet a_1 = b_1$ ,
4.  $a_{(i)} \star a_{(j)} = a_{(j)} \star a_{(i)}$ ,  $b_{(i)} \star b_{(j)} = b_{(j)} \star b_{(i)}$ ,  $a_{(i)} \star b_{(j)} = b_{(j)} \star a_{(i)}$ ,
5.  $a_{(i)} \bullet a_{(j)} = a_{(j)} \bullet a_{(i)}$ ,  $b_{(i)} \bullet b_{(j)} = b_{(j)} \bullet b_{(i)}$ ,  $a_{(i)} \bullet b_{(j)} = b_{(j)} \bullet a_{(i)}$ ,
6.  $a_{(1)}^{\star 2} = 0$  et  $b_{(i)}^{\star 2} = 0$ ,
7.  $a_{(0)} \bullet b_{(0)}^{\star 3} = 0$  et  $a_{(1)} \bullet b_{(0)}^{\star 3} = a_{(2)}^{\star 2}$ ,
8.  $b_{(i)}^{\star 4} = 0$ .

**Notation 4.3.4.** — On désigne par  $\mathfrak{P}(x)$  le **poids** d'un élément "homogène"  $x \in H_*\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}}$ . Par exemple,  $\mathfrak{P}(a_i) = \overline{1}$ ,  $\mathfrak{P}(b_j) = \overline{2}$  pour tout  $i, j$ . On a encore que  $\mathfrak{P}(x \star y) = \mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(y)$  et

$$\mathfrak{P}(x \bullet y) = \mathfrak{P}(x) + \mathfrak{P}(y).$$

Soit  $I = (i_0, i_1, i_2)$  où  $i_k = 0$  ou  $1$ , et soit  $J = (j_0, j_1, \dots)$  une suite finie où  $0 \leq j_k \leq 3$ . On pose  $a^I b^J = a_{(0)}^{\bullet i_0} \bullet a_{(1)}^{\bullet i_1} \bullet a_{(2)}^{\bullet i_2} \bullet b_{(0)}^{\bullet j_0} \bullet b_{(1)}^{\bullet j_1} \bullet \dots$  en convenant que  $a^I b^J = [1] - [0_0]$  si  $I = (0, 0, 0)$  et  $J = (0, 0, \dots)$ . On a

$$\mathfrak{P}(a^I b^J) = \overline{\left( \sum i_k + 2 \sum j_k \right)} \in \mathbb{Z}/6.$$

**Théorème 4.3.5** (Cf. [Wil84, Theorem 1]). — En tant que  $\mathbb{F}_2$ -algèbres,

$$\begin{aligned} H_*\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}} \cong & \bigotimes_{j_0 < 3} \Lambda(b^J) \bigotimes_{j_0 < 3} \Lambda(a_{(0)} \bullet b^J) \bigotimes_{j_0 < 3} \Lambda(a_{(0)} \bullet a_{(1)} \bullet b^J) \\ & \bigotimes_{j_0 < 3} \Lambda(a_{(0)} \bullet a_{(2)} \bullet b^J) \bigotimes_{j_0 < 3} \Lambda(a_{(0)} \bullet a_{(1)} \bullet a_{(2)} \bullet b^J) \\ & \bigotimes_{j_0 < 3} \Lambda(a_{(1)} \bullet b^J) \bigotimes_{j_0 < 3} S(a_{(1)} \bullet a_{(2)} \bullet b^J) \bigotimes_{j_0 < 3} S_4(a_{(2)} \bullet b^J). \end{aligned}$$

en convenant que  $\Lambda(a^I b^J)$ ,  $S(a^I b^J)$  et  $S_4(a^I b^J)$  sont isomorphes à  $\mathbb{F}_2$  si  $\mathfrak{P}(a^I b^J) \neq \overline{k}$ . Ici,  $\Lambda(x)$  est l'algèbre extérieure,  $S(x)$  l'algèbre symétrique, et  $S_4(x) := S(x)/x^4$  l'algèbre symétrique tronquée. Les produits sur les algèbres extérieures, symétriques, symétriques tronquées et le produit tensoriel correspondent au produit  $\star$  dans la structure d'algèbre de Hopf de  $H_*\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}}$ .

### 4.3.2 La relation principale pour $H_*\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}_2}$ et quelques conséquences

Rappelons du théorème 4.2.11 que :

**Proposition 4.3.6.** — Dans  $H_*\underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}_2}[[s, t]]$ , on a

1.  $b(s + t) = b(s) +_{[\overline{\mathbb{F}}_2]} b(t)$ ,
2.  $b(2s) = [2]_{[\overline{\mathbb{F}}_2]}(b(s))$ ,

où  $\overline{\mathbb{F}}_2$  est la loi de groupe formel associée à  $K(2)_{\overline{\mathbb{F}}_2}(-)$ .

**Corollaire 4.3.7.** — On a :

1.  $b_0 = [0_{\overline{2}}]$ ,
2.  $b_0 \star b_i = b_i$  pour tout  $i$ ,
3.  $b_0^{\bullet k} = [0_{\overline{2k}}]$  et  $b_0 \bullet b_i = 0$  si  $i > 0$ .

*Démonstration.* — En comparant les termes constants de la première identité de la proposition 4.3.6, on obtient  $b_0 = [0_{\overline{2}}]$ . On en déduit le deuxième énoncé. Le troisième énoncé découle de la formule  $[0_{\overline{2}}] \bullet b_i = \eta_4 \epsilon_2(b_i)$  (voir la définition 4.1.3).  $\square$

**Corollaire 4.3.8.** — On a :

1.  $b(s)^{\bullet 4} = b_0$ ,
2.  $b(s + t) = b(s) \star b(t) \star (b(s)^{\bullet 2} \bullet b(t)^{\bullet 2})$ .

*Démonstration.* — Rappelons que la 2-série de la loi  $\overline{\mathbb{F}}_2$  est  $[2]_{\overline{\mathbb{F}}_2}(x) = x^4$ . De plus, puisque l'on travaille sur le corps  $\mathbb{F}_2$ , la deuxième identité de la proposition 4.3.6 est équivalente à

$$b_0 = b(0) = b(2s) = b(s)^{\bullet 4}.$$

On déduit de ce fait et de la remarque 4.3.7 que tous les termes de la forme  $b(s)^{\bullet i} \bullet b(t)^{\bullet j}$  où  $i + j \geq 7$  et  $(i + j) \equiv 1 \pmod{3}$  sont égaux à  $b_0$ . Grâce à la proposition 2.2.6 pour le cas  $n = 2$ , on obtient

$$\begin{aligned} b(s + t) &= b(s) \star b(t) \star (b(s)^{\bullet 2} \bullet b(t)^{\bullet 2}) \star \left( \star_{\substack{i+j \geq 7 \\ (i+j) \equiv 1 \pmod{3}}} [a_{ij}] \bullet b(s)^{\bullet i} \bullet b(t)^{\bullet j} \right) \\ &= b(s) \star b(t) \star (b(s)^{\bullet 2} \bullet b(t)^{\bullet 2}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Le corollaire est démontré.  $\square$

Le modèle algébrique  $H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}_2}$  de  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}_2}$  est déterminé par le résultat suivant :

**Corollaire 4.3.9.** — Le morphisme canonique d'anneaux de Hopf

$$H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}_2} \longrightarrow H_* \underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}_2}$$

est injectif. En particulier,  $H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{\mathbb{F}}_2} \cong \bigotimes_{\mathfrak{p}(b^J) = \overline{k}} \Lambda(b^J)$ .

*Démonstration.* — Pour  $n \neq 2^k$  quelconque, il existe  $0 < i < n$  tel que  $\binom{n}{i} \equiv 1 \pmod{2}$ . En comparant des coefficients de  $s^i t^{n-i}$  dans l'identité (4.1), on en déduit que  $b_n$  est décomposable par rapport à  $\star$ . On obtient la même propriété pour les  $\beta_n \in H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$ . Désignons par  $\beta^J$  de la manière analogue à  $b^J$  (voir la notation 4.3.4). En tant que  $\mathbb{F}_2$ -algèbre de Hopf (par rapport au produit  $\star$ ),  $H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$  est engendrée par les indécomposables  $\beta^J$  dont l'image dans  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$  est  $b^J$ . Le résultat s'ensuit.  $\square$

### 4.3.3 Structure de coalgèbre instable de $H_* \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$

Dans la suite, on va utiliser les modules instables à droite, on renvoie à §1.4.1 pour les définitions et propriétés. On explique d'abord le fait que la structure d'anneau de Hopf de  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$  est compatible avec la structure de coalgèbre instable en chaque poids.

Rappelons que  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$  est un  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel de type fini, *i.e.* il est de dimension finie en chaque degré. Donc,  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$  est une coalgèbre instable (sous l'action à droite de l'algèbre de Steenrod  $\mathcal{A}_2$ ). En effet, la condition d'instabilité sur  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$  se déduit de celle sur module instable à gauche  $H^* \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$  : on a  $\gamma S q^i = 0$  pour tout  $\gamma \in H_* \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$  tel que  $|\gamma| < 2i$ .

Par ailleurs, comme conséquence directe de la définition de la structure de module instable à droite du produit tensoriel (cf. la définition 1.4.4), la structure de module instable à droite sur  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$  est compatible avec la structure d'anneau de Hopf via les formules de Cartan suivantes :

$$(\alpha \star \beta) S q^i = \sum_j \alpha S q^j \star \beta S q^{i-j}$$

et

$$(\alpha \bullet \beta) S q^i = \sum_j \alpha S q^j \bullet \beta S q^{i-j}.$$

L'action à droite de  $\mathcal{A}_2$  sur  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$  est donnée par le résultat suivant :

**Proposition 4.3.10.** — *On a*

1.  $a_i S q^k = \binom{i-k}{k} a_{i-k}$  pour  $0 \leq i \leq 5$ .
2.  $b_i S q^{2k} = \binom{i-k}{k} b_{i-k}$ ,  $b_i S q^{2k+1} = 0$  pour tout  $i \geq 0$ .

*Démonstration.* — Par définitions de  $a_i$  et  $b_i$  (voir 4.3.1 et 4.3.2), le résultat découle de l'action de l'algèbre de Steenrod  $\mathcal{A}_2$  sur  $H_*(K(\mathbb{Z}/2, 1)) \cong H_* \mathbb{R}P^\infty$  et celle sur  $H_* \mathbb{C}P^\infty$  : pour  $i \geq 0$ ,  $\alpha_i S q^k = \binom{i-k}{k} \alpha_{i-k}$ ,  $\beta_i S q^{2k} = \binom{i-k}{k} \beta_{i-k}$  et  $\beta_i S q^{2k+1} = 0$ .  $\square$

**Corollaire 4.3.11.** — *Le Verschiebung  $V: H_* \underline{K}(2)_{\overline{\star}} \rightarrow H_* \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$  est déterminé par :*

1.  $V(a_{(2)}) = a_{(1)}$ ,  $V(a_{(1)}) = a_{(0)}$ ,  $V(a_{(0)}) = 0$ .
2.  $V(b_{(0)}) = 0$ , et  $V(b_{(i+1)}) = b_{(i)}$  pour tout  $i \geq 0$ .

*Démonstration.* — Ceci est une conséquence directe de la proposition 4.3.10 et de la condition d'instabilité  $V(x) = x S q^{|x|/2}$ . D'une autre manière, il se déduit de la détermination du coproduit sur  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$  (voir la proposition 4.3.3).  $\square$

#### 4.4. Liens avec le foncteur $\mathcal{K}_2$

**Notation 4.3.12.** — Pour  $I = (i_0, i_1, i_2)$  où  $i_k = 0$  ou  $1$ , et  $J = (j_0, j_1, \dots)$  où  $0 \leq j_k \leq 3$ , on définit  $\Sigma(I) = (i_1, i_2, 0)$  et  $\Sigma(J) = (j_1, j_2, \dots)$ . On définit encore  $\Sigma^{-1}(I) = (0, i_0, i_1)$ ,  $\Sigma^{-1}(J) = (0, j_0, j_1, \dots)$ .

**Proposition 4.3.13.** — *Le modèle algébrique  $H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{\ast}}$  est le plus grand sous-module réduit (gradué par le poids) de  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{\ast}}$ .*

*Démonstration.* — Rappelons que l'on dénote  $a^I b^J = a_{(0)}^{\bullet i_0} \bullet a_{(1)}^{\bullet i_1} \bullet a_{(2)}^{\bullet i_2} \bullet b_{(0)}^{\bullet j_0} \bullet b_{(1)}^{\bullet j_1} \bullet \dots$  (cf. la notation 4.3.4). Grâce au corollaire 4.3.11, on a

$$V(\star_{I,J} a^I b^J) = \begin{cases} \star_{I,J} a^{\Sigma(I)} b^{\Sigma(J)} & \text{si } i_0 = j_0 = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que  $V(b^{\Sigma^{-1}(J)}) = b^J$ . Le module  $\bigotimes_{\mathfrak{p}(b^J)=\overline{k}} \Lambda(b^J)$  est ainsi un sous-module réduit de  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{k}}$ .

D'autre part, si  $i_2 \neq 0$ , il n'existe pas  $I', J'$  pour que  $V(a^{I'} b^{J'}) = a^{\Sigma(I')} b^{\Sigma(J')} = a^I b^J$  puisque le troisième terme de  $\Sigma(I')$  est absolument nul. Alors, les éléments de la forme  $\star_{I,J} a^I b^J$  tels qu'il existe  $I$  dont  $i_2 \neq 0$  ne sont pas dans le plus grand sous-module réduit de  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{k}}$ . On en déduit la situation similaire pour les éléments de la forme  $\star_{I,J} a^I b^J$ , où il existe  $I \neq (0, 0, 0)$ . Donc, le module  $\bigotimes_{\mathfrak{p}(b^J)=\overline{k}} \Lambda(b^J)$  est le plus grand sous-module réduit de  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{k}}$ . Le résultat suit.  $\square$

## 4.4 Liens avec le foncteur $\mathcal{K}_2$

### 4.4.1 Relation entre $H_* \underline{K}(2)_{\overline{\ast}}$ et le foncteur $\mathcal{K}_2$

On renvoie à §1.2.2 pour les définitions et propriétés des foncteurs  $f$  et  $m$  :

$$\mathcal{U} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{m} \end{array} \mathcal{F} .$$

Voici le résultat principal de cette sous-section.

**Proposition 4.4.1.** — *On a un isomorphisme de modules instables à gauche*

$$m(\mathcal{K}_2^{\overline{6-k}}) \xrightarrow{\cong} P((m \circ f)(H_* \underline{K}(2)_{\overline{k}})) ,$$

où  $P(-)$  désigne le module des primitifs.

On utilisera la proposition 1.3.16 du chapitre 1, qui est réénoncée comme suite :

**Proposition 1.3.16.** — *Soit  $K$  une algèbre instable telle que :*

- $g(K): V \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*V)$  est un foncteur à valeurs dans la catégorie  $\mathcal{V}$ ,
- $g(K)^\sharp: V \mapsto (\text{Hom}_{\mathcal{K}}(K, H^*V))^\sharp$  est un foncteur analytique.

Alors, le morphisme canonique d'algèbres de Hopf instables

$$U(m(g(K)^\sharp)) \longrightarrow (m \circ f)(K)$$

est un isomorphisme, où  $U$  est le foncteur de Steenrod-Epstein.

Considérons l'algèbre instable  $H^*\underline{K}(2)_{\bar{k}}$ . A la suite de [Lan92, 1.11], on a

$$g(H^*\underline{K}(2)_{\bar{k}})(V) = \text{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*\underline{K}(2)_{\bar{k}}, H^*V) \cong [BV, \underline{K}(2)_{\bar{k}}] \cong \mathcal{K}_2^{\bar{k}}(V^\sharp). \quad (4.2)$$

La démonstration du théorème 2.2.9 montre que le foncteur ( $\mathbb{Z}/6$ -gradué)  $\mathcal{K}_2$  est à valeurs dans les  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels de dimension finie. Il est de plus analytique à la suite du corollaire 2.2.17, et auto-dual d'après le théorème 2.4.3. Il en résulte que son dual  $\mathcal{K}_2^\sharp$  est un foncteur ( $\mathbb{Z}/6$ -gradué) analytique : les foncteurs  $(\mathcal{K}_2^{\bar{k}})^\sharp$  sont analytiques, pour tout  $\bar{k} \in \mathbb{Z}/6$ . On obtient le résultat suivant qui nous permet de démontrer la proposition 4.4.1 :

**Corollaire 4.4.2.** — *On a un isomorphisme d'algèbres de Hopf instables*

$$U(m(\mathcal{K}_2^{\overline{6-k}})) \xrightarrow{\cong} (m \circ f)(H^*\underline{K}(2)_{\bar{k}}).$$

*Démonstration.* — Le résultat se déduit directement de la proposition 1.3.16. On note ici que  $(\mathcal{K}_2^{\bar{k}})^\sharp \cong \mathcal{K}_2^{\overline{6-k}}$  d'après le théorème 2.4.3. □

On donne ensuite une démonstration de la proposition 4.4.1.

*Démonstration de 4.4.1.* — Le résultat découle du corollaire 4.4.2 puisque  $m(\mathcal{K}_2^{\overline{6-k}})$  est le module des primitifs de  $U(m(\mathcal{K}_2^{\overline{6-k}}))$  (cf. la proposition 1.3.11). □

Afin de terminer cette sous-section, nous exhibons la conséquence directe suivante de l'isomorphisme (4.2) :

**Corollaire 4.4.3.** — *Si  $k$  est impair, le module instable  $\tilde{H}^*\underline{K}(2)_{\bar{k}}$  est nilpotent, où  $\tilde{H}^*(-)$  est la cohomologie singulière modulo 2 réduite.*

*Démonstration.* — Le résultat se déduit du théorème 1.2.15 et du fait que

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*\underline{K}(2)_{\bar{k}}, H^*(V^\sharp)) \cong K(2)^{\bar{k}}(V^\sharp) = 0$$

si  $k$  est impair. □

#### 4.4.2 Relation entre $H_*\underline{K}(2)_{\bar{k}}$ et le foncteur $\mathcal{K}_2$

Considérons d'abord l'unité  $\eta: 1_{\mathcal{M}} \rightarrow m \circ f$  de l'adjonction (1.2) (voir à la page 38) :

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}}(f(M), F) \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}}(M, m(F)).$$

#### 4.4. Liens avec le foncteur $\mathcal{K}_2$

Soit  $\mathbf{R}_{\bar{k}}$  l'image du morphisme  $\eta_{H^* \underline{K}(2)_{\bar{k}}}$ . Alors,  $\mathbf{R}_{\bar{k}}$  est un module instable à gauche réduit. Par ailleurs, d'après [HLS93, Proposition 7.2 - Corollary 7.4], on a deux suites exactes courtes de modules instables à gauche :

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow H^* \underline{K}(2)_{\bar{k}} \xrightarrow[\eta]{(1)} \mathbf{R}_{\bar{k}} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{R}_{\bar{k}} \xrightarrow{(2)} (m \circ f)(H^* \underline{K}(2)_{\bar{k}}) \longrightarrow N_2 \longrightarrow 0,$$

où  $N_1, N_2$  sont nilpotents. Par dualité, on obtient des suites exactes courtes dans  $\mathcal{U}^\sharp$  :

$$0 \longrightarrow \mathbf{R}_{\bar{k}}^\sharp \xrightarrow{(3)} H_* \underline{K}(2)_{\bar{k}} \longrightarrow N_1^\sharp \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow N_2^\sharp \longrightarrow (m \circ f)(H^* \underline{K}(2)_{\bar{k}})^\sharp \xrightarrow{(4)} \mathbf{R}_{\bar{k}}^\sharp \longrightarrow 0.$$

**Remarque 4.4.4.** — Le module instable à droite  $(m \circ f)(H^* \underline{K}(2)_{\bar{k}})^\sharp$  est *Nil*-fermé (cf. la définition 1.4.8 et la proposition 1.4.11).

On a le résultat suivant :

**Lemme 4.4.5.** —  $\mathbf{R}_{\bar{k}}^\sharp \cong H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}}$ .

*Démonstration.* — D'après la proposition 1.4.10 et le fait que  $N_1^\sharp$  est un module instable à droite nilpotent, on obtient que  $\mathbf{R}_{\bar{k}}^\sharp$  est le plus grand sous-module à droite réduit de  $H_* \underline{K}(2)_{\bar{k}}$ . Le résultat suit de la proposition 4.3.13.  $\square$

**Définition 4.4.6.** — On désigne par  $H_R^* \underline{K}(2)_{\bar{k}}$  le module instable à gauche réduit  $\mathbf{R}_{\bar{k}}$ , pour tout  $\bar{k} \in \mathbb{Z}/6$ . On appelle  $H_R^* \underline{K}(2)_{\bar{*}} = \bigoplus_{\bar{k} \in \mathbb{Z}/6} H_R^* \underline{K}(2)_{\bar{k}}$  le *modèle algébrique* de la cohomologie  $H^* \underline{K}(2)_{\bar{*}}$ .

**Remarque 4.4.7.** — Rappelons du corollaire 4.3.9 que  $H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{*}}$  est un sous-anneau de Hopf de  $H_* \underline{K}(2)_{\bar{*}}$ . La structure d'algèbre de Hopf sur chaque  $H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}}$  ( $\bar{k} \in \mathbb{Z}/6$ ) induit une telle structure sur  $H_R^* \underline{K}(2)_{\bar{k}}$  (cf. [MM65, §3]). En particulier, on a

$$P(H_R^* \underline{K}(2)_{\bar{k}}) \cong Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}})^\sharp,$$

où  $Q(-)$  désigne le module des indécomposables (par rapport au produit  $\star$ ). On notera  $P(H_R^* \underline{K}(2)_{\bar{*}}) = \bigoplus_{\bar{k} \in \mathbb{Z}/6} P(H_R^* \underline{K}(2)_{\bar{k}})$ . De la même manière, on a la notation  $Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{*}})$  et les notations similaires pour le module  $P, Q$  de l'homologie  $H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{*}}$ .

**Lemme 4.4.8.** — On a l'isomorphisme suivant dans la catégorie  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$  :

$$P(H_R^* \underline{K}(2)_{\bar{k}}) \cong P((m \circ f)(H^* \underline{K}(2)_{\bar{k}})).$$

*Démonstration.* — Les morphismes (1), (2), (3), (4) dans les suites exactes courtes ci-dessus sont naturellement des morphismes d'algèbres de Hopf instables : ils sont induits par la diagonale et la structure de  $H$ -espace sur l'espace de lacets  $\underline{K}(2)_{\bar{k}}$ . Le résultat s'ensuit.  $\square$



On en déduit le résultat principal de cette sous-section :

**Théorème 4.4.9.** — On a l'isomorphisme naturel de foncteurs :

$$f(Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}})^\sharp) \cong \mathcal{K}_2^{\overline{6-k}},$$

où  $H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}}$  est le modèle algébrique de l'homologie  $H_*\underline{K}(2)_{\bar{k}}$ .

*Démonstration.* — Le résultat découle des isomorphismes

$$Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}})^\sharp \cong P(H_R^* \underline{K}(2)_{\bar{k}}) \cong P((m \circ f)(H_* \underline{K}(2)_{\bar{k}})) \cong m(\mathcal{K}_2^{\overline{6-k}})$$

dans la catégorie  $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ . □

**Proposition 4.4.10.** — Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_*^R \underline{K}(2)_{2i} \otimes H_*^R \underline{K}(2)_{2j} & \xrightarrow{\bullet} & H_*^R \underline{K}(2)_{2i+2j} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q(H_*^R \underline{K}(2)_{2i}) \otimes Q(H_*^R \underline{K}(2)_{2j}) & \xrightarrow{\bullet} & Q(H_*^R \underline{K}(2)_{2i+2j}) \end{array} .$$

*Démonstration.* — Il suffit de montrer que le produit  $a \bullet b$  est décomposable si l'un des  $a$  et  $b$  en est, où  $a, b \in \mathbf{R}^\sharp$ . Ce fait suit de la formule de la distributivité dans la définition 4.1.3. D'une autre manière, le produit  $\bullet$  est fermé sur la base  $\{b^J\}_J$  de  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}})$ . □

Appliquons maintenant le foncteur  $\mathcal{U}^\sharp \rightarrow \mathcal{F}, M \mapsto f(M^\sharp)^\sharp$  au produit

$$Q(H_*^R \underline{K}(2)_{2i}) \otimes Q(H_*^R \underline{K}(2)_{2j}) \xrightarrow{\bullet} Q(H_*^R \underline{K}(2)_{2i+2j}),$$

on obtient un morphisme

$$\mathcal{K}_2^{\overline{2i}} \otimes \mathcal{K}_2^{\overline{2j}} \longrightarrow \mathcal{K}_2^{\overline{2i+2j}}$$

qui n'est rien d'autre que le produit du foncteur  $\mathcal{K}_2$ .

## 4.5 Résultats sur le modèle algébrique $H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}}$

### 4.5.1 Structure de module instable à droite sur $Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}})$ et relation avec les sous-foncteurs $K_{p,q}$

On a l'isomorphisme d'anneaux de Hopf

$$H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}} \cong \bigotimes_{\mathfrak{P}(b^J)=\bar{k}} \Lambda(b^J),$$

#### 4.5. Résultats sur le modèle algébrique $H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$

où le produit sur l'algèbre extérieure et le produit tensoriel correspondent au produit  $\star$  de  $H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{k}}$  (voir le corollaire 4.3.9). On en déduit que, en tant que  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel (gradué par le poids), le module des indécomposables  $Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{\star}})$  est librement engendré par les éléments  $b^J$ . L'action à droite de l'algèbre de Steenrod  $\mathcal{A}_2$  sur ce module est induite par la structure d'anneau de Hopf instable (à droite) de  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$  (cf. §4.3.3). Grâce aux formules de Cartan, afin de déterminer cette action, il suffit de déterminer l'action des opérations  $Sq^k$  sur les éléments  $b_{(i)}$ .

**Proposition 4.5.1.** — *On a les identités suivantes dans  $Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{\star}})$  (modulo des éléments décomposables par rapport au produit  $\star$ ) :*

1.  $b_{(0)}Sq^k \equiv 0$  pour tout  $k \geq 1$ .

2. Cas  $i = 1$  ou  $i = 2$  :  $b_{(i)}Sq^k \equiv \begin{cases} b_{(i)} & \text{si } k = 0, \\ b_{(i-1)} & \text{si } k = 2^i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

3. Cas  $i \geq 3$  :  $b_{(i)}Sq^k \equiv \begin{cases} b_{(i)} & \text{si } k = 0, \\ b_{(i-2)}^{\bullet 2} \bullet b_{(i-3)}^{\bullet 2} & \text{si } k = 2^{i-1}, \\ b_{(i-1)} & \text{si } k = 2^i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

La démonstration de la proposition 4.5.1 est donnée plus loin. Le corollaire suivant découle directement de cette proposition. Pour l'ordre partiel  $\preceq$  sur  $\mathbb{N}^2$ , on renvoie à la définition 2.3.5.

**Corollaire 4.5.2.** — *Soient  $p, q$  des entiers naturels. Le sous- $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel gradué de  $Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{2p+4q}})$  engendré par les  $b_{(i_1)} \bullet \cdots \bullet b_{(i_s)} \bullet b_{(j_1)}^{\bullet 2} \bullet \cdots \bullet b_{(j_t)}^{\bullet 2}$  pour tout  $(s, t) \preceq (p, q)$  est un sous-module instable de  $Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{2p+4q}})$ . On le notera  $K_{p,q}^Q$ .*

Voici le résultat principal de cette section, dont une démonstration est donnée dans la sous-section 4.5.2 :

**Théorème 4.5.3.** — *On a une équivalence de foncteurs*

$$f((K_{p,q}^Q)^\sharp) \cong K_{p,q}^\natural.$$

Maintenant, afin de démontrer la proposition 4.5.1, on a besoin de la remarque suivante :

**Remarque 4.5.4.** — Rappelons de la proposition 4.3.10 que l'on a  $b_i Sq^{2k} = \binom{i-k}{k} b_{i-k}$ . Pour démontrer la proposition, il faut réécrire le terme à droite en combinaison de produit  $\bullet$  des éléments indécomposables  $b_{(i)}$  (modulo les éléments de la forme  $x \star y$ , où  $x$  et  $y$  sont distincts de  $[0_{\overline{k}}]$ ). On va utiliser la relation principale dans  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{\star}}$  (voir l'identité (4.1)) :

$$b(s+t) = b(s) \star b(t) \star (b(s)^{\bullet 2} \bullet b(t)^{\bullet 2}).$$

**Lemme 4.5.5.** —  $b_n \equiv 0$  pour tout entier naturel impair  $n$ .

*Démonstration.* — Pour réécrire  $b_n$ , on compare les coefficients de l'identité (4.1) ci-dessus. Les comparaisons des coefficients de  $s^n$  ou  $t^n$  ne donnent rien de nouveau. On considère les coefficients de  $s^k t^{n-k}$  dans  $b(s)^{\bullet 2} \bullet b(t)^{\bullet 2}$  (avec  $1 \leq k \leq n-1$ ). Mais dans  $b(s)^{\bullet 2} \bullet b(t)^{\bullet 2}$ , il n'y a que les termes de la forme  $s^{2i} t^{2j}$ . Le lemme s'ensuit.  $\square$

**Lemme 4.5.6.** — L'élément  $b_n$  n'est pas congru à 0 si et seulement si  $n = 2^{m_1} + 2^{m_2}$  pour certains entiers positifs  $m_1, m_2$ .

*Démonstration.* — Si  $m_1 = m_2$ ,  $b_{2^{m_1+2^{m_2}}} = b_{(m_1+1)}$  est indécomposable. Si  $m_1 > m_2 \geq 1$ , on obtient alors que  $b_{2^{m_1+2^{m_2}}} \equiv b_{(m_1-1)}^{\bullet 2} \bullet b_{(m_2-1)}^{\bullet 2}$  en considérant les coefficients de  $s^{2^{m_1}} t^{2^{m_2}}$  dans l'identité (4.1), puisque  $\binom{2^{m_1+2^{m_2}}}{2^{m_1}} \equiv \binom{1}{1} \binom{1}{0} \equiv 1 \pmod{2}$ .

Soit  $n$  un entier pair positif qui n'est pas de la forme  $2^{m_1} + 2^{m_2}$  avec  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ , i.e.  $n$  est écrit sous la forme  $2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_k}$  où  $m_1 > m_2 > \dots > m_k > 0$  et  $k \geq 3$ . On montre que  $b_n \equiv 0$  par récurrence sur  $k$ . On va utiliser le fait que

$$\binom{2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_k}}{2^{m_1}} \equiv \binom{1}{1} \binom{1}{0} \dots \binom{1}{0} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Supposons que  $k = 3$ , on considère les coefficients de  $s^{2^{m_1}} t^{2^{m_2}+2^{m_3}}$  et on obtient

$$b_n \equiv b_{(m_1-1)}^{\bullet 2} \bullet b_{2^{m_2-1}+2^{m_3-1}}.$$

- Si  $2^{m_2-1} + 2^{m_3-1}$  est impair, on a  $b_{2^{m_2-1}+2^{m_3-1}} \equiv 0$ .
- Si  $2^{m_2-1} + 2^{m_3-1}$  est pair, on a  $b_{2^{m_2-1}+2^{m_3-1}} \equiv b_{(m_2-1)}^{\bullet 4} \bullet b_{(m_3-1)}^{\bullet 4} = 0$  (voir plus haut).

L'énoncé de récurrence est ainsi vrai pour le cas  $k = 3$ . Supposons qu'il soit vérifié jusqu'à  $k \geq 3$ , on considère alors le cas de  $k + 1$ . En comparant les coefficients de  $s^{2^{m_1}} t^{2^{m_2}+\dots+2^{m_k}}$ , on obtient

$$b_n \equiv b_{(m_1-1)}^{\bullet 2} \bullet b_{2^{m_2-1}+\dots+2^{m_k-1}}.$$

Si  $2^{m_2-1} + \dots + 2^{m_k-1}$  est impair,  $b_{2^{m_2-1}+\dots+2^{m_k-1}} \equiv 0$ . Si il est pair, grâce à l'hypothèse de récurrence, on obtient encore que  $b_{2^{m_2-1}+\dots+2^{m_k-1}} \equiv 0$ . Il en résulte que  $b_n \equiv 0$ . L'énoncé de récurrence est vérifié.  $\square$

En utilisant deux lemmes ci-dessus, on donne une démonstration de la proposition 4.5.1 :

*Démonstration de 4.5.1.* — On rappelle que  $b_{(i)} S q^{2k} = \binom{2^i-k}{k} b_{2^i-k}$ . Le premier point de cette proposition est trivial. Les cas  $i = 1$  et  $i = 2$  sont faciles à vérifier. Il reste à montrer le résultat pour le cas  $i \geq 3$ . D'après le lemme 4.5.6, l'élément  $b_{2^i-k}$  n'est pas nul si et seulement si  $2^i - k = 2^m + 2^n$  pour certains entiers positifs  $m, n$ . On considère ensuite le coefficient binomial  $A = \binom{2^m+2^n}{2^i-2^m-2^n}$ . Sans perte de généralité, on suppose que  $m \geq n$ . La condition  $0 < 2^i - 2^m - 2^n \leq 2^m + 2^n$  implique  $i - 2 \leq m < i$ .

#### 4.5. Résultats sur le modèle algébrique $H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{*}}$

- Le cas  $m = i - 1$  : Si  $n \neq i - 2$ , le coefficient binomial  $A = \binom{2^{i-1}+2^n}{2^{i-2}+\dots+2^n}$  est congru à 0 modulo 2. Dans le cas  $n = i - 2$ , ce coefficient est alors congru à 1 modulo 2 et on a

$$b_{(i)} S q^{2^{i-1}} = b_{2^{i-1}+2^{i-2}} \equiv b_{(i-2)}^{\bullet} \bullet b_{(i-3)}^{\bullet}.$$

- Le cas  $m = i - 2$  : Si  $n \neq i - 2$ , le coefficient binomial  $A = \binom{2^{i-2}+2^n}{2^{i-1}+2^{i-3}+\dots+2^n}$  est congru à 0 modulo 2. Si  $n = i - 2$ , alors  $A = \binom{2^{i-1}}{2^{i-1}} = 1$  et

$$b_{(i)} S q^{2^i} = b_{2^{i-1}} = b_{(i-1)}.$$

La proposition est démontrée.  $\square$

#### 4.5.2 Démonstration du théorème 4.5.3

Considérons le foncteur  $\bar{f}$ , de la catégorie des modules instables à droite de type fini  $\mathcal{U}^{\sharp}$  vers la catégorie des foncteurs  $\mathcal{F}$ , qui à chaque module instable  $M$  associe le foncteur covariant  $V \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{U}}(M^{\sharp}, H^*(V^{\sharp}))$ . Observons que l'exactitude de  $\bar{f}$  découle de celle du foncteur  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$  (cf. le théorème 1.2.13).

Soit  $x^{K(2)} \in K(2)^{\overline{2}}(\mathbb{C}P^{\infty})$  l'orientation complexe associée à  $K(2)^{\overline{*}}(-)$ . Rappelons de la définition 4.3.2 qu'elle induit en homologie le morphisme  $x_*^{K(2)}: H_*(\mathbb{C}P^{\infty}) \rightarrow H_* K(2)_{\overline{2}}$  qui définit les classe  $b_i$  dans  $H_{2i} K(2)_{\overline{2}}$ . Ce morphisme se factorise à travers le modèle algébrique  $H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{2}}$  d'après le corollaire 4.3.9. En désignant par  $\tilde{H}_*(-)$  la théorie d'homologie réduite, on a le lemme suivant :

**Lemme 4.5.7.** — La composée que l'on note  $\tilde{x}_*$  :

$$\tilde{H}_*(\mathbb{C}P^{\infty}) \hookrightarrow H_*(\mathbb{C}P^{\infty}) \xrightarrow{x_*^{K(2)}} H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{2}} \twoheadrightarrow Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{2}})$$

correspond, par le foncteur  $\bar{f}$ , au morphisme naturel  $J \rightarrow \mathcal{K}_2$  du chapitre 2 (voir §2.2.2).

*Démonstration.* — Le théorème 4.4.9 dit que l'image de  $Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{2}})$  par  $\bar{f}$  est isomorphe au foncteur  $\mathcal{K}_2$ . Par ailleurs, on sait que  $\bar{f}(\tilde{H}_*(\mathbb{C}P^{\infty})) \cong J$  est l'idéal d'augmentation de  $P_{\mathbb{F}_2} \cong \bar{f}(H_*(\mathbb{C}P^{\infty}))$  (cf. le corollaire 1.3.6). Le résultat découle de la définition du morphisme  $J \rightarrow \mathcal{K}_2$  qui associe à chaque fibré en droite réelle de base  $BV^{\sharp}$  la classe d'Euler de son complexifié.  $\square$

On observe que le produit  $\bullet$  de  $H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{*}}$  induit un produit, que l'on note aussi  $\bullet$ , sur  $Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{*}})$  (cf. la proposition 4.4.10).

**Lemme 4.5.8.** — Le produit  $\bullet$  sur  $Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{*}})$  correspond par le foncteur  $\bar{f}$  au produit du  $\mathcal{K}_2$ .

*Démonstration.* — Puisque le morphisme  $\bar{f}$  préserve le produit tensoriel, le résultat découle du fait que le produit  $\bullet$  sur  $H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{*}}$  et celui de  $\mathcal{K}_2$  sont induits par la structure multiplicative du  $\Omega$ -spectre  $K(2)$ .  $\square$

**Remarque 4.5.9.** — D'après la proposition 2.2.15, le morphisme  $J \rightarrow \mathcal{K}_2$  se factorise à travers  $\Gamma^2$ . Plus généralement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le morphisme  $T^n \circ J \rightarrow \mathcal{K}_2$  se factorise à travers  $S^n \circ \Gamma^2$ .

Rappelons que  $F(1)$  est le sous-module instable de  $\tilde{H}^*(\mathbb{R}P^\infty)$  engendré par un élément de degré un. On a l'inclusion  $\Phi F(1) \hookrightarrow \Phi \tilde{H}^*(\mathbb{R}P^\infty) \cong \tilde{H}^*(\mathbb{C}P^\infty)$ . Par dualité, on obtient une surjection  $\tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty) \rightarrow \Phi F(1)^\sharp$ . Pour plus de détails, on renvoie aux sous-sections 1.2.1 et 1.4.1. On a également un résultat dans la catégorie  $\mathcal{U}^\sharp$  qui correspond à la factorisation ci-dessus.

**Lemme 4.5.10.** — *Le morphisme  $\tilde{x}_* : \tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty) \rightarrow Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{2}})$  se factorise à travers  $\Gamma^2(\Phi F(1)^\sharp)$ . Plus généralement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le morphisme*

$$T^n(\tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty)) \xrightarrow{\tilde{x}_*^{\otimes n}} T^n(Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{2}})) \xrightarrow{\bullet} Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{2}n})$$

*se factorise à travers  $S^n(\Gamma^2(\Phi F(1)^\sharp))$ .*

*Démonstration.* — Grâce au lemme 4.5.6,  $\tilde{x}_*$  se factorise à travers le quotient de  $\tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty)$  par le sous-module engendré par les classes  $\beta_i$ , où la longueur de la décomposition 2-adique de  $i$  est plus grand que 2. Ce module est isomorphe à  $\Gamma^2(\Phi F(1)^\sharp)$ .

Le reste du lemme se déduit de la commutativité du produit  $\bullet$ . □

De la même manière, nous obtenons le résultat suivant qui nous donne un morphisme dans  $\mathcal{U}^\sharp$  correspondant à l'inclusion  $\Lambda^* \hookrightarrow \mathcal{K}_2$  dans  $\mathcal{F}$ .

**Lemme 4.5.11.** — *La composée suivante qui est linéaire, que l'on note  $F_\bullet$  :*

$$\Phi \tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty) \xrightarrow{F} \tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty)^{\otimes 2} \xrightarrow{\tilde{x}_*^{\otimes 2}} Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{2}})^{\otimes 2} \xrightarrow{\bullet} Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{4}})$$

*est un morphisme de modules instables à droite, où  $F : \Phi \tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty) \rightarrow \tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty)^{\otimes 2}$  envoie  $\beta$  sur  $\beta \otimes \beta$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_\bullet$  s'étend en le morphisme suivant*

$$T^n(\Phi \tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty)) \xrightarrow{F_\bullet^{\otimes n}} T^n(Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{4}})) \xrightarrow{\bullet} Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{4}n})$$

*qui se factorise à travers  $\Lambda^n(\Phi^2 F(1)^\sharp)$ .*

*Démonstration.* — Tout d'abord, en utilisant le lemme 4.5.6, on obtient que

$$F_\bullet(\beta_k) = \begin{cases} b_{(i)}^{\bullet 2} & \text{si } k = 2^i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour démontrer que  $F_\bullet$  est un morphisme de modules instables à droite, il suffit de vérifier la compatibilité avec l'action de l'algèbre de Steenrod  $\mathcal{A}_2$ . Autrement dit, il faut démontrer que  $F_\bullet(\beta_k Sq^l) = F_\bullet(\beta_k) Sq^l$ . Mais, ce fait découle directement de la structure de module instable de  $\Phi \tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty)$  et celle de  $\text{Im } F_\bullet$  qui se déduit de la proposition 4.5.1 :

#### 4.5. Résultats sur le modèle algébrique $H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{*}}$

1. Sur  $\Phi \tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty)$ ,  $\beta_k Sq^l = 0$  si  $l \not\equiv 0 \pmod{4}$ . Par ailleurs, si  $\beta_k Sq^l = \beta_{2^i}$ , il faut avoir  $(k, l) = (2^i, 0)$  ou  $(2^{i+1}, 2^{i+2})$ .

2. Sur  $\text{Im } F_\bullet$ ,

$$b_{(i)}^{\bullet 2} Sq^l \equiv \begin{cases} b_{(i)}^{\bullet 2} & \text{si } l = 0, \\ b_{(i-1)}^{\bullet 2} & \text{si } l = 2^{i+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le reste de ce lemme découle des relations  $b_k^{\bullet 4} = 0$  dans  $H_* \underline{K}(2)_{\bar{*}}$ , et en particulier  $b_{(i)}^{\bullet 4} = 0$  dans  $Q(H_* \underline{K}(2)_{\bar{*}})$  (voir la proposition 4.3.3) : en tant que modules instables à droite,  $\Lambda^n(\Phi^2 F(1)^\sharp)$  est isomorphe au sous- $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel de  $Q(H_* \underline{K}(2)_{\bar{*}})$  engendré par les éléments de la forme  $b_{(i_1)}^{\bullet 2} \bullet \cdots \bullet b_{(i_n)}^{\bullet 2}$ .  $\square$

On donne ensuite une démonstration du théorème 4.5.3.

*Démonstration de 4.5.3.* — On note que l'image du module  $S^p(\Gamma^2(\Phi F(1)^\sharp)) \otimes \Lambda^q(\Phi^2 F(1)^\sharp)$  par le foncteur  $\bar{f}$  est isomorphe au foncteur  $(S^p \circ \Gamma^2) \otimes \Lambda^q$ .

Le foncteur  $K_{p,q}$  est l'image du morphisme naturel  $(S^p \circ \Gamma^2) \otimes \Lambda^q \rightarrow \mathcal{K}_2$ . Mais comme le module  $K_{p,q}^Q$  est l'image du morphisme

$$S^p(\Gamma^2(\Phi F(1)^\sharp)) \otimes \Lambda^q(\Phi^2 F(1)^\sharp) \longrightarrow Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{*}}),$$

par application du foncteur exact  $\bar{f}$ , on obtient que  $\bar{f}(K_{p,q}^Q) \cong K_{p,q}$ . Le théorème se déduit du fait que  $f((K_{p,q}^Q)^\sharp) = \bar{f}(K_{p,q}^Q)^\sharp$ .  $\square$

#### 4.5.3 Le module des primitifs $P(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{*}})$ et quelques conséquences

Soit  $\mathfrak{J}$  l'ensemble des suites finies  $J = (j_0, j_1, \dots)$ , où  $0 \leq j_k \leq 3$ . Soit  $\mathfrak{J}_1$  le sous-ensemble de  $\mathfrak{J}$  dont les éléments sont les suites  $J$  telles que  $j_0 = 0$ . Soit  $\mathfrak{J}_2$  le complémentaire de  $\mathfrak{J}_1$ . L'objectif de cette sous-section est de démontrer le résultat suivant :

**Proposition 4.5.12.** — *En tant que  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel,  $P(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{*}})$  est librement engendré par les éléments de la forme  $b^J$  avec  $J \in \mathfrak{J}_2$ .*

Pour la démontrer, on a besoin du résultat suivant, dû à Milnor et Moore :

**Proposition 4.5.13** (Cf. [MM65, Proposition 4.20]). — *Soit  $H$  une  $\mathbb{F}_2$ -algèbre de Hopf  $\mathbb{N}$ -graduée commutative connexe. Le morphisme naturel  $P(H) \rightarrow Q(H)$  est un monomorphisme si et seulement si le morphisme de Frobenius  $F: H \rightarrow H$  envoie tous les éléments homogènes  $x$  de degré positif sur zéro.*

**Corollaire 4.5.14.** — *On a l'inclusion canonique de modules instables à droite*

$$P(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}}) \hookrightarrow Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}}),$$

pour tout  $\bar{k} \in \mathbb{Z}/6$ .

*Démonstration.* — Considérons l'algèbre de Hopf  $\mathbb{N}$ -graduée commutative connexe

$$H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}} \cong \bigotimes_{\mathfrak{P}(b^J)=\bar{k}} \Lambda(b^J).$$

Son morphisme de Frobenius satisfait la condition de la proposition 4.5.13 puisque  $(b^J)^{*2} = 0$  pour tout  $J$ . De plus, les morphismes sont  $\mathcal{A}_2$ -linéaires, puisque la structure d'anneau de Hopf de  $H_*\underline{K}(2)_{\bar{k}}$  est compatible avec sa structure de coalgèbre instable en chaque poids. Le corollaire s'ensuit.  $\square$

**Corollaire 4.5.15.** — *Pour tout  $\bar{k} \in \mathbb{Z}/6$ , le modèle algébrique “cohomologique”  $H_R^* \underline{K}(2)_{\bar{k}}$  est une algèbre de Hopf instable primitivement engendrée. On dit également que  $H_R^* \underline{K}(2)_{\bar{k}}$  est une algèbre de Hopf instable (graduée par le poids) primitivement engendrée.*

*Démonstration.* — Par dualité, on déduit du corollaire 4.5.14 que le morphisme canonique

$$P(H_R^* \underline{K}(2)_{\bar{k}}) \longrightarrow Q(H_R^* \underline{K}(2)_{\bar{k}})$$

est un épimorphisme, pour tout  $\bar{k} \in \mathbb{Z}/6$ . Le résultat suit.  $\square$

Maintenant, afin d'obtenir la proposition 4.5.12, en utilisant le corollaire 4.5.14, il suffit de vérifier quels générateurs de  $Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}})$  sont primitifs.

**Lemme 4.5.16.** — *Si  $J \in \mathfrak{J}_1$ , alors  $b^J$  n'est pas primitif.*

*Démonstration.* — Pour tout  $J = (0, j_1, j_2, \dots) \in \mathfrak{J}_1$ , en posant  $\Sigma(J) = (j_1, j_2, \dots)$ , grâce au corollaire 4.3.11, on obtient que  $V(b^J) = b^{\Sigma(J)} \neq 0$ , où  $V$  est le morphisme Verschiebung (pour les propriétés du morphisme  $V$ , on renvoie à §4.3.3). Il en résulte que  $b^J$  n'est pas primitif. Le lemme est démontré.  $\square$

Le résultat suivant est une conséquence du troisième point du corollaire 4.3.7.

**Lemme 4.5.17.** — *Si  $J \in \mathfrak{J}_2$ , alors  $b^J$  est primitif.*

*Démonstration.* — Pour tout  $J = (j_0, j_1, \dots) \in \mathfrak{J}_2$ , posons  $J' = (j_0 - 1, j_1, \dots) \in \mathfrak{J}$  et supposons que le poids  $\mathfrak{P}(b^{J'}) = s$ . On a

$$\begin{aligned} \delta(b^J) &= \delta(b_{(0)}) \bullet \delta(b^{J'}) \\ &= (b_{(0)} \otimes b_0 + b_0 \otimes b_{(0)}) \bullet \left( b^{J'} \otimes [0_{\bar{s}}] + [0_{\bar{s}}] \otimes b^{J'} + \sum_{\text{certains } x, y \neq [0_{\bar{s}}]} x \otimes y \right) \end{aligned}$$

où  $\delta$  est le coproduit de  $H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}}$  qui est induit par celui sur  $H_*\underline{K}(2)_{\bar{k}}$ . Le résultat découle alors du fait que  $b_0 \bullet [0_{\bar{s}}] = [0_{\bar{s}+2}]$  et  $b_0 \bullet b_i = 0$  si  $i > 0$  (voir le corollaire 4.3.7).  $\square$

On donne maintenant une démonstration de la proposition 4.5.12.

#### 4.5. Résultats sur le modèle algébrique $H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{*}}$

---

*Démonstration de 4.5.12.* — La proposition 4.5.12 découle du corollaire 4.5.14 et des lemmes 4.5.16, 4.5.17 en notant que le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{*}})$  est librement engendré par les classes  $b^J$ ,  $J$  parcourant  $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \sqcup \mathfrak{J}_2$ .  $\square$

On conclut cette partie par la remarque suivante :

**Remarque 4.5.18.** — La double suspension homologique sur  $H_* \underline{K}(2)_{\overline{*}}$  (voir la proposition 4.3.3) induit un endomorphisme du module instable (gradué par le poids)  $Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{*}})$  vers lui-même qui se factorise à travers  $P(H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{*}})$ . Autrement dit, on a le diagramme commutatif suivant de modules instables à droite :

$$\begin{array}{ccc}
 Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{*}}) & \xrightarrow{b_{(0)} \bullet -} & Q(H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{*}}) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & P(H_*^R \underline{K}(2)_{\overline{*}}) & 
 \end{array}$$






---

## Foncteurs exponentiels de Hopf

---

 OBJECTIF de cette appendice est de rappeler la définition de foncteur exponentiel et quelques résultats de Franjou, Friedlander, Scorichenko et Suslin [FFSS99] qui sont utiles afin de calculer des groupes d'extensions dans la catégorie  $\mathcal{F}$ .

On traitera ici seulement sur le nombre premier  $p = 2$ .

### Sommaire

---

<b>A.1 Foncteurs exponentiels Hopf</b> . . . . .	<b>154</b>
<b>A.2 Foncteurs gradués exponentiels de Hopf</b> . . . . .	<b>155</b>
<b>A.3 Les groupes d'extensions dans la catégorie <math>\mathcal{F}</math></b> . . . . .	<b>156</b>
<b>A.4 Sur les groupes <math>\text{Ext}_{\mathcal{F}}^m(\Lambda^I, \Lambda^J)</math></b> . . . . .	<b>158</b>

---

## A.1 Foncteurs exponentiels Hopf

Soient  $\mathbf{Vect}$  la catégorie des  $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels, et  $\mathcal{V}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Vect}$  dont les objets sont de dimension finie. Rappelons que  $\mathcal{F}$  est la catégorie des foncteurs de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbf{Vect}$  (cf. §1.1).

**Définition A.1.1.** — Un foncteur  $F \in \mathcal{F}$  est dit **exponentiel** s'il est à valeurs dans la catégorie  $\mathcal{V}$  et de plus, on a un isomorphisme

$$F(V \oplus W) \cong F(V) \otimes F(W)$$

naturel en  $V$  et  $W$ .

**Exemple A.1.2.** — Le projectif standard  $P_{\mathbb{F}_2}$  et l'injectif standard  $I_{\mathbb{F}_2}$  sont des foncteurs exponentiels (cf. la définition 1.1.16 et la proposition 1.1.17).

On a le résultat suivant qui découle directement de la définition du produit tensoriel.

**Proposition A.1.3.** — *Le produit tensoriel des foncteurs exponentiels est exponentiel.*

**Définition A.1.4.** — Un sous-foncteur  $I$  du foncteur exponentiel  $F$  est appelé un **idéal exponentiel** si l'isomorphisme naturel  $F(V \oplus W) \cong F(V) \otimes F(W)$  induit un isomorphisme

$$I(V \oplus W) \cong F(V) \otimes I(W) + I(V) \otimes F(W).$$

On a le résultat suivant :

**Proposition A.1.5.** — *Soient  $F$  un foncteur exponentiel, et  $I$  son idéal exponentiel. Alors le foncteur quotient  $F/I$  est exponentiel.*

*Démonstration.* — On déduit des hypothèses de la proposition un isomorphisme

$$F(V \oplus W)/I(V \oplus W) \cong F(V)/I(V) \otimes F(W)/I(W)$$

qui est naturel en  $V$  et  $W$ . La proposition suit. □

**Définition A.1.6.** — Soit  $F$  un foncteur exponentiel. Le **produit naturel** de  $F$  est défini par la composée

$$F(V) \otimes F(V) \xrightarrow{\simeq} F(V \oplus V) \xrightarrow{F(\mathfrak{s})} F(V),$$

où  $\mathfrak{s}$  est la somme. De même, on définit le **coproduit naturel** de  $F$  par

$$F(V) \xrightarrow{F(\mathfrak{d})} F(V \oplus V) \xrightarrow{\simeq} F(V) \otimes F(V)$$

avec  $\mathfrak{d}$  est la diagonale.

**Définition A.1.7.** — Un foncteur exponentiel  $F$  est dit **exponentiel de Hopf** si :

## A.2. Foncteurs gradués exponentiels de Hopf

---

1.  $F(0) \cong \mathbb{F}_2$ ,
2. le produit, coproduit et les morphismes canoniques  $F(0) \rightarrow F(V)$ ,  $F(V) \rightarrow F(0)$  équipent  $F(V)$  d'une structure d'algèbre de Hopf.

**Exemple A.1.8.** — Les foncteurs  $P_{\mathbb{F}_2}$  et  $I_{\mathbb{F}_2}$  de l'exemple A.1.2 sont exponentiels de Hopf.

**Exemple A.1.9.** — Le foncteur  $V \mapsto K(n)^*(BV^\sharp)$  est exponentiel de Hopf, pour tout  $n \geq 1$  (cf. la proposition 2.2.11).

## A.2 Foncteurs gradués exponentiels de Hopf

Soit  $A^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A^n$  un foncteur gradué de  $\mathcal{F}$ , i.e.  $A^n \in \mathcal{F}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Définition A.2.1.** — Le foncteur  $A^*$  est dit **exponentiel** si les foncteurs  $A^n$  sont à valeurs dans la catégorie  $\mathcal{V}$ , et de plus, on a des isomorphismes naturels (gradués) :

1.  $A^0 = \mathbb{F}_2$ ,
2.  $A^*(V \oplus W) \cong A^*(V) \otimes A^*(W)$  pour tous  $V, W \in \mathcal{V}$ .

**Exemple A.2.2.** — Les foncteurs suivants sont des foncteurs gradués exponentiels :

1. Le foncteur algèbre symétrique  $S^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n$ ,
2. Le foncteur algèbre extérieure  $\Lambda^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Lambda^n$ ,
3. Le foncteur algèbre des puissances divisées  $\Gamma^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma^n$ .

**Définition A.2.3.** — Soit  $I^*$  un sous-foncteur gradué du foncteur gradué exponentiel  $A^*$ . On dira  $I^*$  un **idéal exponentiel** de  $A^*$  si :

1.  $I^0 = 0$ ,
2. L'isomorphisme naturel  $A^*(V \oplus W) \cong A^*(V) \otimes A^*(W)$  induit un isomorphisme :

$$I^*(V \oplus W) \cong A^*(V) \otimes I^*(W) + I^*(V) \otimes A^*(W).$$

**Proposition A.2.4.** — Soient  $A^*$  un foncteur gradué exponentiel, et  $I^*$  son idéal gradué exponentiel. Alors, le foncteur quotient  $A^*/I^*$  est aussi gradué exponentiel.

*Démonstration.* — La proposition est démontrée de manière analogue à la démonstration de A.1.5. On note de plus que  $A^0/I^0 = \mathbb{F}_2$ . □

En définissant le produit tensoriel des foncteurs gradués par

$$(A^* \otimes B^*)^n = \bigoplus_{m=0}^n A^m \otimes B^{n-m},$$

on a le résultat suivant :

**Proposition A.2.5.** — *Le produit tensoriel des foncteurs gradués exponentiels est gradué exponentiel.*

On va ensuite définir un foncteur gradué exponentiel de Hopf. Soit  $A^*$  un foncteur gradué exponentiel quelconque. On définit les morphismes  $A^i \otimes A^j \rightarrow A^{i+j}$  et  $A^{i+j} \rightarrow A^i \otimes A^j$  par

$$\begin{aligned} A^i(V) \otimes A^j(V) &\hookrightarrow A^{i+j}(V \oplus V) \xrightarrow{A^{i+j}(\mathfrak{s})} A^{i+j}(V), \\ A^{i+j}(V) &\xrightarrow{A^{i+j}(\mathfrak{d})} A^{i+j}(V \oplus V) \twoheadrightarrow A^i(V) \otimes A^j(V), \end{aligned}$$

où  $\mathfrak{s}$  est la somme et  $\mathfrak{d}$  est la diagonale. Le morphisme  $A^i \otimes A^j \rightarrow A^{i+j}$  est appelé **produit naturel** et le morphisme  $A^{i+j} \rightarrow A^i \otimes A^j$  **coproduct naturel**.

**Proposition A.2.6** ([FFSS99, Lemma 1.10]). — *Si pour tout  $V \in \mathcal{V}$ , les produits naturels font de  $A^*(V)$  une algèbre graduée associative unitaire d'unité  $1 \in A^0(V) = \mathbb{F}_2$ , alors  $A^*(V)$  est une algèbre de Hopf graduée avec la co-unité  $\epsilon: A^*(V) \rightarrow A^0(V)$ .*

**Définition A.2.7.** — Un foncteur gradué exponentiel  $A^*$  qui vérifie l'hypothèse de la proposition A.2.6 est dit **exponentiel de Hopf**. De plus, il est dit **commutatif** si pour tous  $i, j \in \mathbb{N}$  et  $V \in \mathcal{V}$ , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A^i(V) \otimes A^j(V) & \longrightarrow & A^{i+j}(V \oplus V) \\ \downarrow T & & \downarrow A^{i+j}(\tau) \\ A^j(V) \otimes A^i(V) & \longrightarrow & A^{i+j}(V \oplus V), \end{array}$$

où

$$\tau: V \oplus V \rightarrow V \oplus V, (u, v) \mapsto (v, u)$$

et

$$T: A^i(V) \otimes A^j(V) \rightarrow A^j(V) \otimes A^i(V), a \otimes b \mapsto b \otimes a.$$

**Exemple A.2.8.** — Les foncteurs  $S^*, \Lambda^*$  et  $\Gamma^*$  de l'exemple A.2.2 sont des foncteurs gradués exponentiels de Hopf commutatifs.

**Convention A.2.9.** — Dans cette thèse, un foncteur gradué exponentiel (de Hopf) est dit simplement *exponentiel (de Hopf)* sans confusion.

### A.3 Les groupes d'extensions dans la catégorie $\mathcal{F}$

Les résultats suivants, dûs aux [FFSS99, Theorem 1.7 et Corollary 1.8], sont des outils importants qui nous permettent de calculer des groupes d'extensions dans la catégorie  $\mathcal{F}$ .

**Théorème A.3.1.** — *Soit  $A^*$  un foncteur exponentiel. On a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^n, B \otimes C) \cong \bigoplus_{m=0}^n \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^m, B) \otimes \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^{n-m}, C)$$

### A.3. Les groupes d'extensions dans la catégorie $\mathcal{F}$

pour tous  $B, C \in \mathcal{F}$ . De plus, si les foncteurs  $B$  et  $C$  sont à valeurs dans la catégorie  $\mathcal{V}$ , on a alors

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(B \otimes C, A^n) \cong \bigoplus_{m=0}^n \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(B, A^m) \otimes \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(C, A^{n-m}).$$

**Corollaire A.3.2.** — Soient  $A^*$  et  $B^*$  deux foncteurs exponentiels. On a l'isomorphisme naturel

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^{k_1} \otimes \cdots \otimes A^{k_n}, B^{l_1} \otimes \cdots \otimes B^{l_m}) \cong \bigoplus_{\substack{k_{1,1}+\cdots+k_{1,m}=k_1, \dots, k_{n,1}+\cdots+k_{n,m}=k_n \\ l_{1,1}+\cdots+l_{1,n}=l_1, \dots, l_{m,1}+\cdots+l_{m,n}=l_m}} \bigotimes_{s=1}^n \bigotimes_{t=1}^m \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^{k_{s,t}}, B^{l_{t,s}})$$

pour  $m, n \in \mathbb{N}^*$  et  $k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_m \in \mathbb{N}$ .

Par ailleurs, la structure de foncteur exponentiel de  $A^*$  et  $B^*$  induit le **produit et le coproduit tri-gradué** sur le groupe  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^*, B^*)$ .

**Lemme A.3.3.** — Soient  $A^*$  et  $B^*$  deux foncteurs exponentiels. Alors, les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^*, B^*) \otimes \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^*, B^*) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^* \otimes A^*, B^*) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^*, B^* \otimes B^*) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^*, B^*) \quad , \\ \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^*, B^*) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^* \otimes A^*, B^*) \\ \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^*, B^* \otimes B^*) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^*, B^*) \otimes \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^*, B^*) \quad , \end{array}$$

où les isomorphismes viennent du théorème A.3.1, les autres morphismes sont induits par les produits et les coproduits naturels sur  $A^*$  et  $B^*$ .

**Remarque A.3.4.** — Soient  $e \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^i(A^n, B^m)$  et  $e' \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^{i'}(A^{n'}, B^{m'})$ . Il est montré que le produit tri-gradué  $ee'$  est l'image du produit tensoriel

$$e \otimes e' \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^{i+i'}(A^n \otimes A^{n'}, B^m \otimes B^{m'})$$

par le morphisme  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^n \otimes A^{n'}, B^m \otimes B^{m'}) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^{n+n'}, B^{m+m'})$  qui est induit par le coproduit  $A^{n+n'} \rightarrow A^n \otimes A^{n'}$  et le produit  $B^m \otimes B^{m'} \rightarrow B^{m+m'}$  (cf. [FFSS99]).

La proposition suivante fournit une condition suffisante pour que  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^*, B^*)$  soit une algèbre de Hopf tri-gradué.

**Proposition A.3.5.** — Soient  $A^*$  et  $B^*$  deux foncteurs exponentiels de Hopf. L'espace vectoriel  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^*, B^*)$  est alors muni d'une structure naturelle d'algèbre de Hopf tri-gradué.

De plus, si  $A^*$  et  $B^*$  sont commutatifs, on a les diagrammes commutatifs suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ext}_{\mathcal{F}}^s(A^i, B^j) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^t(A^k, B^l) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{s+t}(A^{i+k}, B^{j+l}) \\
 \simeq \downarrow & & \downarrow = \\
 \text{Ext}_{\mathcal{F}}^t(A^k, B^l) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^s(A^i, B^j) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{s+t}(A^{i+k}, B^{j+l}) , \\
 \\ 
 \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{s+t}(A^{i+k}, B^{j+l}) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^s(A^i, B^j) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^t(A^k, B^l) \\
 = \downarrow & & \downarrow \simeq \\
 \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{s+t}(A^{i+k}, B^{j+l}) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^t(A^k, B^l) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^s(A^i, B^j) ,
 \end{array}$$

où les flèches horizontales, qui sont dites **produit et coproduit de Hopf (tri-gradué)**, sont données par le lemme A.3.3.

#### A.4 Sur les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^m(\Lambda^I, \Lambda^J)$

Dans cette section, on ne détaille que des résultats de [FFSS99] en faisant des calculs directs. Pour tout  $s \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $I = (i_1, \dots, i_s)$  où  $i_j \in \mathbb{N}$ , on pose  $\Lambda^I = \Lambda^{i_1} \otimes \dots \otimes \Lambda^{i_s}$ . On va donner les cas où le groupe  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^m(\Lambda^I, \Lambda^J)$  est trivial. On commence par rappeler un résultat sur la structure d'algèbre de Hopf tri-graduée de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Lambda^*, \Lambda^*)$ .

**Théorème A.4.1** (Cf. [FFSS99, Theorem 6.3]). — On a

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^m(\Lambda^p, \Lambda^q) = \mathbb{F}_2$$

si  $(m, p, q) = (r2^{s+1} + 2^s - 1, 1, 2^s)$  avec  $r \geq 0, s \geq 0$ , ou  $(m, p, q) = (r2^{t+1} + 2^t - 1, 2^t, 1)$  avec  $r \geq 0, t \geq 1$ . On note  $\iota_{(m,p,q)}$  son générateur. L'algèbre de Hopf tri-graduée

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Lambda^*, \Lambda^*)$$

est alors l'algèbre des puissances divisées, primitivement engendrée par ces générateurs.

**Corollaire A.4.2.** — L'espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^m(\Lambda^p, \Lambda^q)$  est trivial si  $|p - q| > m$ .

*Démonstration.* — Si  $(m, p, q) = (r2^{s+1} + 2^s - 1, 1, 2^s)$  ou  $(r2^{s+1} + 2^s - 1, 2^s, 1)$ , on a  $|p - q| = 2^s - 1 \leq r2^{s+1} + 2^s - 1 = m$ . De plus, pour tous  $p, p', q, q', m, m' \in \mathbb{N}$  tels que  $|p - q| \leq m$  et  $|p' - q'| \leq m'$ , on a l'inégalité

$$|(p + p') - (q + q')| \leq |p - q| + |p' - q'| \leq m + m'.$$

Il en résulte que, si  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^m(\Lambda^p, \Lambda^q)$  n'est pas trivial, alors  $|p - q| \leq m$  puisque l'algèbre de Hopf tri-graduée  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Lambda^*, \Lambda^*)$  est engendrée par les générateurs  $\iota_{(r2^{s+1}+2^s-1, 1, 2^s)}$  et  $\iota_{(r2^{t+1}+2^t-1, 2^t, 1)}$ . □

#### A.4. Sur les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^m(\Lambda^I, \Lambda^J)$

---

Pour tout  $I = (i_1, \dots, i_s)$ , on note  $\sigma(I) = i_1 + \dots + i_s$ . Le résultat plus général suivant est une conséquence des corollaires A.4.2 et A.3.2.

**Corollaire A.4.3.** — *L'espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^m(\Lambda^I, \Lambda^J)$  est trivial si  $|\sigma(I) - \sigma(J)| > m$ .*

Pour les cas  $m = 0, 1, 2, 3$ , on a les résultats plus détaillés suivants :

**Lemme A.4.4.** — *On a*

1.  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\Lambda^p, \Lambda^q) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2.  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^p, \Lambda^q) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } |p - q| = 1 \text{ et } p, q \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On note encore  $\iota_{(s,p,q)}$ , pour  $s = 0, 1$ , le générateur de l'espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^s(\Lambda^p, \Lambda^q)$  s'il n'est pas trivial.

*Démonstration.* — Ce résultat se déduit du théorème A.4.1. On peut aussi le démontrer par calculs directs.  $\square$

**Corollaire A.4.5.** — *On a*

1. *L'espace vectoriel  $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(\Lambda^I, \Lambda^J)$  est trivial si  $|\sigma(I) - \sigma(J)| \neq 0$ .*
2. *L'espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^I, \Lambda^J)$  est trivial si  $|\sigma(I) - \sigma(J)| \neq 1$ .*
3. *L'espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^2(\Lambda^I, \Lambda^J)$  est trivial si  $|\sigma(I) - \sigma(J)| \neq 0, 2$ .*
4. *L'espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^3(\Lambda^I, \Lambda^J)$  est trivial si  $|\sigma(I) - \sigma(J)| \neq 1, 3$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de rappeler les générateurs  $\iota_{(m,p,q)}$  mentionnés dans le théorème A.4.1, pour  $m = 0, 1, 2, 3$ . Ils sont  $\iota_{(0,1,1)}$ ,  $\iota_{(1,2,1)}$ ,  $\iota_{(1,1,2)}$ ,  $\iota_{(2,1,1)}$ ,  $\iota_{(3,4,1)}$  et  $\iota_{(3,1,4)}$ .  $\square$

Dans ce qui suit, on va calculer les groupes d'extensions  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^p \otimes \Lambda^q, \Lambda^m \otimes \Lambda^n)$ . Puisque le foncteur  $\Lambda^k$  est auto-dual<sup>1</sup> pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a besoin du résultat suivant :

**Lemme A.4.6** ([**FFSS99**, Lemma 1.12]). — *Soient  $F, G \in \mathcal{F}$  des foncteurs à valeurs dans la catégorie  $\mathcal{V}$ . Alors, le morphisme de dualité*

$$\natural: \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, G) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(G^{\natural}, F^{\natural})$$

*est un isomorphisme.*

Grâce au lemme ci-dessus et au corollaire A.4.5, il suffit de calculer

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^m \otimes \Lambda^n, \Lambda^p \otimes \Lambda^q)$$

---

1. Voir définition 1.1.12 pour celle de foncteur auto-dual.



pour le cas  $m+n = p+q+1$ . De plus, par la commutativité du produit tensoriel de foncteurs, il suffit de considérer le cas où  $m \geq n$  et  $p \geq q$ . Il résulte de ces conditions que  $m \geq q+1$  et  $p \geq n$ .

On réécrit le corollaire A.3.2 pour le cas où  $A^* = B^* = \Lambda^*$ . On a

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Lambda^m \otimes \Lambda^n, \Lambda^p \otimes \Lambda^q) \cong \bigoplus_{\substack{0 \leq i \leq m, 0 \leq i' \leq n \\ 0 \leq j \leq p, 0 \leq j' \leq q}} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Lambda^i, \Lambda^j) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Lambda^{m-i}, \Lambda^{j'}) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Lambda^{i'}, \Lambda^{p-j}) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Lambda^{n-i'}, \Lambda^{q-j'}).$$

On en déduit le résultat suivant :

**Proposition A.4.7.** — *Le  $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\Lambda^m \otimes \Lambda^n, \Lambda^p \otimes \Lambda^q)$  admet une base d'éléments de la forme*

$$\iota_{(s_1, i, j)} \otimes \iota_{(s_2, m-i, j')} \otimes \iota_{(s_3, i', p-j)} \otimes \iota_{(s_4, n-i', q-j')}$$

où  $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1$  et  $i, i', j, j'$  sont donnés par le tableau suivant :

$(s_1, s_2, s_3, s_4)$	$(i, i', j, j')$	<i>Condition</i>
$(1, 0, 0, 0)$	$(t, p-t+1, t-1, m-t)$	$\max\{2, m-q\} \leq t \leq \min\{p+1, m\}$
$(0, 1, 0, 0)$	$(t, p-t, t, m-t-1)$	$m-q-1 \leq t \leq \min\{p, m-2\}$
$(0, 0, 1, 0)$	$(t, p-t+1, t, m-t)$	$m-q \leq t \leq \min\{p-1, m\}$
$(0, 0, 0, 1)$	$(t, p-t, t, m-t)$	$m-q+1 \leq t \leq \min\{p, m\}$

# Index des notations

$+_F, x +_F y := F(x, y)$ . . . . .	48	$E_*\underline{G}_* := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} E_*\underline{G}_k$ . . . . .	134
$\circ: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ . . . . .	23	$E_*^R \underline{G}_*$ . . . . .	137
$\langle -, - \rangle: \mathcal{K}_2(V) \times \mathcal{K}_2(V^\sharp) \rightarrow \mathbb{F}_2$ . . . . .	79	$\mathbb{E}xt_{\mathcal{C}}^*(A, C^*), d_r$ . . . . .	97
$\natural: \mathcal{F}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{F}$ . . . . .	23	<b>Ens</b> . . . . .	25
$\otimes: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ . . . . .	23	$\epsilon(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ . . . . .	58
$\preceq$ , l'ordre partiel sur $\mathbb{N}^2$ . . . . .	65	$\epsilon_{[1,4]}, \epsilon_{[4,1]}, \epsilon_{[2,4]}, \epsilon_{[4,2]}$ . . . . .	112
$\alpha_i \in H_i(K(\mathbb{Z}/2, 1))$ . . . . .	138	$\eta: 1_{\mathcal{U}} \rightarrow m \circ f$ . . . . .	142
$\mathcal{A}_2$ . . . . .	35	$\eta_F: F \rightarrow (F^\sharp)^\sharp$ . . . . .	24
$a_i \in H_i \underline{K}(2)_{\overline{1}}$ pour $0 \leq i \leq 5, a_{(i)}$ . . . . .	138	$\tilde{\epsilon}_{[1,2]}, \tilde{\epsilon}_{[4,1]}, \tilde{\epsilon}_{[2,2]}$ . . . . .	102
$B^{*,*}$ , avec $B^* = \Lambda^*$ ou $S_4^*$ . . . . .	94	$F: \Phi\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . . . . .	133
$B_n^* := \bigoplus_i B_n^i$ . . . . .	94	$F(1)$ . . . . .	35
$\beta_i \in E_{2i}(\mathbb{C}P^\infty)$ et $b_i \in E_{2i}\underline{G}_2$ . . . . .	136	$F(1)^\sharp$ . . . . .	44
$\tilde{b}_m: S_4^m \rightarrow \Lambda^m$ . . . . .	98	$F(n)$ . . . . .	36
$b(s), b(s) +_{[FG]} b(t)$ . . . . .	136	$F(n)^\sharp$ . . . . .	44
$b_{(j)}$ . . . . .	138	$F_n$ . . . . .	54
$b_{[m,n]}: S_4^m \rightarrow S_4^n$ . . . . .	98	$\mathbb{F}_2[V]$ . . . . .	30
$C_n(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ . . . . .	47	$\mathcal{F}_{s,t}$ , la bi-filtration de $\mathcal{K}_2$ . . . . .	71
$\mathcal{C}_*$ , la filtration croissante de $\mathcal{K}_2$ . . . . .	71	$\bar{F}_n$ . . . . .	54
$\text{CoAlg}_R$ . . . . .	130	$\mathcal{F}$ . . . . .	22
$\text{CoAlg}_R^*$ . . . . .	130	$\mathcal{F}_\omega$ . . . . .	28
$\mathcal{C}$ . . . . .	22	$\mathfrak{F}_{R[S]}: \text{UCoAlg}_R^* \rightarrow s\mathcal{H}_R$ . . . . .	132
$\Delta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ . . . . .	26	$f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$ . . . . .	37
$\mathcal{D}_*$ , la filtration décroissante de $\mathcal{K}_2$ . . . . .	69	$\Gamma^n$ . . . . .	23
$\delta: \mathcal{K}_n \rightarrow \mathcal{K}_n \otimes \mathcal{K}_n$ . . . . .	60	$\text{gr } \mathcal{K}_2 := \bigoplus_{s,t} \text{gr}_{s,t} \mathcal{K}_2$ . . . . .	71
$\delta^{(n-1)}: \mathcal{K}_2(V) \rightarrow (\mathcal{K}_2(V))^{\otimes n}$ . . . . .	81	$g(K): V \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}}(K, H^*V)$ . . . . .	39
$d: B^{i,j} \rightarrow B^{i-1,j+1}$ . . . . .	94	$H_R^* \underline{K}(2)_{\bar{k}}$ . . . . .	143
		$H_* \underline{K}(2)_{\bar{k}} := \bigoplus_{\bar{k} \in \mathbb{Z}/6} H_* \underline{K}(2)_{\bar{k}}$ . . . . .	137
		$H_*^R \underline{K}(2)_{\bar{k}}$ . . . . .	139

$[H]$ . . . . .	115	$\mathfrak{P}(x)$ . . . . .	138
$\mathcal{H}, (\delta, \epsilon), (\star, \eta), \chi, (\bullet, e)$ . . . . .	130	$\psi_\lambda$ . . . . .	32
$\mathcal{H}_R$ . . . . .	131		
${}_S\mathcal{H}_R$ . . . . .	131	$Q(-)$ . . . . .	143
$\text{Id}$ . . . . .	22	$R[S]$ . . . . .	131
$\mathbb{I}_W, \mathbb{I}_{\mathbb{F}_p}$ . . . . .	25	$\mathcal{R}_n(V)$ . . . . .	59
$\{\mathbb{I}_r\}_{r \geq 1}, \{\mathbb{II}_r\}_{r \geq 1}$ . . . . .	97	$\varrho_1$ . . . . .	120
$J, J_k$ . . . . .	30	$S_\lambda$ . . . . .	32
$\tilde{\mathfrak{J}}, \tilde{\mathfrak{J}}_1, \tilde{\mathfrak{J}}_2$ . . . . .	149	$Sq^i$ . . . . .	35
		$Sq_0 x := Sq^{ x } x$ . . . . .	36
$K(2) := \{K(2)_{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}/6}$ . . . . .	129	$\Sigma F(1)$ . . . . .	36
$K(n)^* = \mathbb{F}_p[\nu_n, \nu_n^{-1}],  \nu_n  = 2 - 2p^n$ . . . . .	54	$\Sigma(I), \Sigma(J), \Sigma^{-1}(I), \Sigma^{-1}(J)$ . . . . .	141
$K(n)^*(-)$ . . . . .	54	$S^n$ . . . . .	23
$K(n)^{\bar{*}}(-)$ . . . . .	54	$S_4^n$ . . . . .	92
$K_{p,q} \cap K_{s,t}$ . . . . .	66	$S_{p^k}^n$ . . . . .	23
$K_{p,q}$ . . . . .	64	$\beta S q_0 := \beta S q^{ \beta /2}$ . . . . .	45
$K_{p,q}^{-Q}$ . . . . .	145		
$\mathcal{K}_2^{\bar{k}}, \bar{k} \in \mathbb{Z}/6$ . . . . .	63	$T^n$ . . . . .	23
$\mathcal{K}_n$ , le foncteur $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$ -gradué . . . . .	59	$t_n(F)$ . . . . .	29
$\mathcal{K}$ . . . . .	39		
$\mathcal{K}^\sharp$ . . . . .	46	$(u) := [u] - [0]$ . . . . .	58
		$U: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{K}$ . . . . .	40
$\Lambda^n$ . . . . .	23	$\mathcal{U}$ . . . . .	36
$\Lambda^\lambda, \Lambda^{\bar{\lambda}}$ . . . . .	32	$\mathcal{U}/\text{Nil}$ . . . . .	37
$\mathcal{L}_A, C\mathcal{L}_A$ . . . . .	49	$\mathcal{U}^\sharp$ . . . . .	44
		$\text{UCoAlg}_R$ . . . . .	132
$m: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{U}$ . . . . .	38	$\text{UCoAlg}_R^*$ . . . . .	132
		$V: \mathcal{H} \rightarrow \Phi\mathcal{H}$ . . . . .	133
$[n]_F(x)$ . . . . .	48	<b>Vect</b> . . . . .	22
$[n_1, \dots, n_k]^X, \mathcal{P}, \mathcal{P}_i$ . . . . .	79	$\mathcal{V}$ . . . . .	22
$P(-)$ . . . . .	141	$W_\lambda, W_{(m,n)}^{(i)}$ . . . . .	32
$\Phi: \mathcal{U}^\sharp \rightarrow \mathcal{U}^\sharp$ . . . . .	44		
$\Phi: \mathcal{V}^* \rightarrow \mathcal{V}^*, \Phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ . . . . .	36		
$P_W, P_{\mathbb{F}_p}$ . . . . .	25	$[x] \in E_0 \underline{G}_*$ avec $x \in G^*$ . . . . .	135

---

# Index

---

## A

Algèbre	
de Hopf instable . . . . .	39
de Steenrod . . . . .	35
instable . . . . .	38
Anneau de Hopf . . . . .	130
libre . . . . .	132

## B

Bi-filtration . . . . .	71
-------------------------	----

## C

Catégorie	
des algèbres instables . . . . .	39
des coalgèbres instables . . . . .	46
des foncteurs . . . . .	22
des modules instables à droite . . . . .	44
des modules instables à gauche . . . . .	36
Classe d'Euler . . . . .	58
Coalgèbre instable . . . . .	46
Congruence modulo degré $n$ . . . . .	46
Coproduit naturel . . . . .	154, 156
Cosocle . . . . .	33

## D

Degré d'un foncteur polynomial . . . . .	28
Diagramme de Loewy . . . . .	34
Dual de foncteurs . . . . .	23

## E

Ensemble	
de cogénérateurs d'une catégorie . . . . .	25
de générateurs d'une catégorie . . . . .	25

## F

Facteurs de composition . . . . .	30
Filtration	
de Weyl . . . . .	32
des socles . . . . .	33
polynomiale . . . . .	29
Foncteur	
analytique . . . . .	28
auto-dual . . . . .	24
de Weyl . . . . .	32
exponentiel . . . . .	154, 155
exponentiel de Hopf . . . . .	154, 156
polynomial . . . . .	28
polynomial homogène . . . . .	28
puissance divisée . . . . .	23
puissance extérieure . . . . .	23
puissance symétrique . . . . .	23
puissance symétrique tronquée . . . . .	23
puissance tensorielle . . . . .	23
Foncteur de Steenrod-Epstein . . . . .	40
Foncteur de Taylor . . . . .	29
Foncteur différence . . . . .	26
Forme canonique de $\delta$ . . . . .	81

**H**

Hauteur  
 d'un morphisme de lois de groupe formel . . . . . 51  
 d'une loi de groupe formel . . . . . 51

**I**

Idéal exponentiel . . . . . 154, 155  
 Injectifs standard . . . . . 25  
 Isomorphisme de lois de groupe formel . . . . . 48

**L**

Loi de groupe formel . . . . . 46  
 associée à une théorie cohomologique 47

**M**

Modèle algébrique . . . . . 137, 143  
 Module instable à droite . . . . . 44  
     *Nil*-fermé . . . . . 45  
     nilpotent . . . . . 45  
     réduit . . . . . 45  
 Module instable à gauche . . . . . 35  
     *Nil*-fermé . . . . . 37  
     nilpotent . . . . . 36  
     réduit . . . . . 37  
 Morphisme  
     de Frobenius . . . . . 133  
     de lois de groupe formel . . . . . 47  
     Verschiebung . . . . . 133

**N**

*n*-séries . . . . . 48  
*Nil*-fermeture . . . . . 38  
*Nil*-isomorphisme . . . . . 37

**O**

Objet  
     fini . . . . . 30  
     semi-simple . . . . . 30  
     simple . . . . . 30  
     unisériel . . . . . 30  
 $\Omega$ -spectre . . . . . 129  
 $\Omega$ -spectre périodique . . . . . 129

**P**

Partition  
     *p*-régulière . . . . . 31  
     d'un entier naturel . . . . . 31  
     ordonnée . . . . . 79  
 Poids . . . . . 130  
 Produit  
     de Hopf tri-gradué . . . . . 158  
     naturel . . . . . 154, 156  
     tri-gradué . . . . . 157  
 Projectifs standard . . . . . 25

**R**

Résolution injective de Cartan-Eilenberg 97  
 Relation principale . . . . . 136

**S**

Série de composition . . . . . 30  
 Socle . . . . . 33  
 Suites spectrales d'hypercohomologie . . . . . 97

---

# Bibliographie

---

- [AGM85] J. F. ADAMS, J. H. GUNAWARDENA et H. MILLER – « The Segal conjecture for elementary abelian  $p$ -groups », *Topology* **24** (1985), no. 4, p. 435–460.
- [AS69] M. F. ATIYAH et G. B. SEGAL – « Equivariant  $K$ -theory and completion », *J. Differential Geometry* **3** (1969), p. 1–18.
- [Ati61] M. F. ATIYAH – « Characters and cohomology of finite groups », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1961), no. 9, p. 23–64.
- [BP03] M. BAKURADZE et S. PRIDY – « Transfer and complex oriented cohomology rings », *Algebr. Geom. Topol.* **3** (2003), p. 473–509 (electronic).
- [Bru96] M. BRUNETTI – « On the canonical  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$ -module structure of  $K(n)^*(B\mathbf{Z}/2 \times B\mathbf{Z}/2)$  », Algebraic topology : new trends in localization and periodicity (Sant Feliu de Guíxols, 1994), Progr. Math., vol. 136, Birkhäuser, Basel, 1996, p. 51–59.
- [CE56] H. CARTAN et S. EILENBERG – *Homological algebra*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
- [Dja06] A. DJAMENT – « Représentations génériques des groupes linéaires : catégories de foncteurs en grassmanniennes, avec applications à la conjecture artinienne », Thèse de doctorat, Université Paris 13, 2006.
- [FFSS99] V. FRANJOU, E. M. FRIEDLANDER, A. SCORICHENKO et A. SUSLIN – « General linear and functor cohomology over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 2, p. 663–728.
- [FLS94] V. FRANJOU, J. LANNES et L. SCHWARTZ – « Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 513–538.
- [Frö68] A. FRÖHLICH – *Formal groups*, Lecture Notes in Mathematics, No. 74, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968.
- [FS97] E. M. FRIEDLANDER et A. SUSLIN – « Cohomology of finite group schemes over a field », *Invent. Math.* **127** (1997), no. 2, p. 209–270.
- [Gab62] P. GABRIEL – « Des catégories abéliennes », *Bulletin de la Société Mathématique de France* **90** (1962), p. 323–448 (fre).
- [Haz09] M. HAZEWINKEL – « Witt vectors. I », Handbook of algebra. Vol. 6, Handb. Algebr., vol. 6, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2009, p. 319–472.

- [Haz12] — , *Formal groups and applications*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2012, Corrected reprint of the 1978 original.
- [HLS93] H.-W. HENN, J. LANNES et L. SCHWARTZ – « The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects », *Amer. J. Math.* **115** (1993), no. 5, p. 1053–1106.
- [JP91] M. JIBLADZE et T. PIRASHVILI – « Cohomology of algebraic theories », *J. Algebra* **137** (1991), no. 2, p. 253–296.
- [Kuh87] N. J. KUHN – « The Morava  $K$ -theories of some classifying spaces », *Trans. Amer. Math. Soc.* **304** (1987), no. 1, p. 193–205.
- [Kuh94a] — , « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I », *Amer. J. Math.* **116** (1994), no. 2, p. 327–360.
- [Kuh94b] — , « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II », *K-Theory* **8** (1994), no. 4, p. 395–428.
- [Kuh00] — , « The generic representation theory of finite fields : a survey of basic structure », Infinite length modules (Bielefeld, 1998), Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2000, p. 193–212.
- [Lan92] J. LANNES – « Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un  $p$ -groupe abélien élémentaire », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1992), no. 75, p. 135–244, With an appendix by Michel Zisman.
- [Laz55] M. LAZARD – « Sur les groupes de Lie formels à un paramètre », *Bull. Soc. Math. France* **83** (1955), p. 251–274.
- [LS89] J. LANNES et L. SCHWARTZ – « Sur la structure des  $A$ -modules instables injectifs », *Topology* **28** (1989), no. 2, p. 153–169.
- [LZ86] J. LANNES et S. ZARATI – « Sur les  $\mathcal{U}$ -injectifs », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* **19** (1986), no. 2, p. 303–333 (fre).
- [LZ87] J. LANNES et S. ZARATI – « Sur les foncteurs dérivés de la déstabilisation », *Math. Z.* **194** (1987), no. 1, p. 25–59.
- [ML71] S. MAC LANE – *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.
- [MM65] J. W. MILNOR et J. C. MOORE – « On the structure of Hopf algebras », *Ann. of Math. (2)* **81** (1965), p. 211–264.
- [Pir95] L. PIRIOU – « Extensions entre foncteurs de la catégorie des espaces vectoriels sur le corps premier à  $p$  éléments dans elle-même », Thèse de doctorat, Université Paris 7 - Denis Diderot, 1995.
- [Pir97] — , « Sous-objets de  $\bar{I} \otimes \Lambda^n$  dans la catégorie des foncteurs entre  $\mathbf{F}_2$ -espaces vectoriels », *J. Algebra* **194** (1997), no. 1, p. 53–78.
- [PS98] L. PIRIOU et L. SCHWARTZ – « Extensions de foncteurs simples », *K-Theory* **15** (1998), no. 3, p. 269–291.

- [Rav86] D. C. RAVENEL – *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, Pure and Applied Mathematics, vol. 121, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.
- [RW80] D. C. RAVENEL et W. S. WILSON – « The Morava  $K$ -theories of Eilenberg-Mac Lane spaces and the Conner-Floyd conjecture », *Amer. J. Math.* **102** (1980), no. 4, p. 691–748.
- [RW77] — , « The Hopf ring for complex cobordism », *J. Pure Appl. Algebra* **9** (1976/77), no. 3, p. 241–280.
- [Sch94] L. SCHWARTZ – *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan’s fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.
- [Sch03] — , « Algèbre de Steenrod, modules instables et foncteurs polynomiaux », Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology, Panor. Synthèses, vol. 16, Soc. Math. France, Paris, 2003, p. 55–100.
- [Ste62] N. E. STEENROD – *Cohomology operations*, Lectures by N. E. STEENROD written and revised by D. B. A. Epstein, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962, Annals of Mathematics Studies, No. 50.
- [Tro02] A. TROESCH – « Extensions de foncteurs composés », Thèse de doctorat, Université Paris 13, 2002.
- [Wil84] W. S. WILSON – « The Hopf ring for Morava  $K$ -theory », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **20** (1984), no. 5, p. 1025–1036.
- [Wür91] U. WÜRGLER – « Morava  $K$ -theories : a survey », Algebraic topology Poznań 1989, Lecture Notes in Math., vol. 1474, Springer, Berlin, 1991, p. 111–138.







# Thèse de Doctorat

Quyêt NGUYEN LE CHI

**Une description fonctorielle des  
K-théories de Morava des 2-groupes  
abéliens élémentaires**

## Résumé

Le but de cette thèse est l'étude, d'un point de vue fonctoriel, des K-théories de Morava modulo 2 des 2-groupes abéliens élémentaires. Autrement dit, nous étudions les foncteurs covariants  $V \mapsto K(n)^*(BV^\sharp)$  pour le premier  $p = 2$  et  $n$  un entier positif.

Le cas  $n = 1$ , qui résulte directement du travail d'Atiyah sur la K-théorie topologique, nous donne un foncteur coanalytique qui ne possède aucun sous-foncteur polynomial non-constant. Il est très différent du cas  $n > 1$ , où les foncteurs mentionnés ci-dessus s'avèrent être analytiques. La théorie de Henn-Lannes-Schwartz fournit une correspondance entre les foncteurs analytiques et les modules instables sur l'algèbre de Steenrod. Nous déterminons le module instable correspondant au foncteur analytique  $V \mapsto K(2)^*(BV^\sharp)$ , en étudiant la relation entre ce foncteur et la structure d'anneau de Hopf de l'homologie du  $\Omega$ -spectre associé à la théorie  $K(2)^*(-)$ .

## Mots clés

Cohomologie généralisée, K-théorie de Morava, loi de groupe formel, représentation générique, catégorie des foncteurs, algèbre de Steenrod, module instable, algèbre instable, algèbre de Hopf instable, coalgèbre instable, anneau de Hopf, groupe d'extensions, foncteur exponentiel.

**A functorial description of the Morava  
K-theories of elementary abelian  
2-groups**

## Abstract

The aim of this PhD thesis is to study, from a functorial point of view, the mod 2 Morava K-theories of elementary abelian 2-groups. Namely, we study the covariant functors  $V \mapsto K(n)^*(BV^\sharp)$  for the prime  $p = 2$  and  $n$  a positive integer.

The case  $n = 1$ , which follows directly from the work of Atiyah on topological K-theory, gives us a coanalytic functor which contains no non-constant polynomial sub-functor. This is very different from the case  $n > 1$ , where the above-mentioned functors are analytic. The theory of Henn-Lannes-Schwartz provides a correspondence between analytic functors and unstable modules over the Steenrod algebra. We determine the unstable module corresponding to the analytic functor  $V \mapsto K(2)^*(BV^\sharp)$ , by studying the relation between this functor and the Hopf ring structure of the homology of the  $\Omega$ -spectrum associated to the theory  $K(2)^*(-)$ .

## Key Words

Generalized cohomology, Morava K-theory, formal group law, generic representation, functor category, Steenrod algebra, unstable module, unstable algebra, unstable Hopf algebra, unstable coalgebra, Hopf ring, extension group, exponential functor.