



HAL
open science

Emphasising nonlinear behaviors for cubic coupled Schrödinger systems

Victor Vilaça da Rocha

► **To cite this version:**

Victor Vilaça da Rocha. Emphasising nonlinear behaviors for cubic coupled Schrödinger systems. Analysis of PDEs [math.AP]. Université de Nantes Faculté des sciences et des techniques, 2017. English. NNT: . tel-01562293v2

HAL Id: tel-01562293

<https://hal.science/tel-01562293v2>

Submitted on 19 Jul 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Victor VILAÇA DA ROCHA

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences et technologies de l'information et mathématiques (STIM)

Discipline : Mathématiques, section CNU 25-26

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Soutenue le 27 juin 2017

**Emphasising nonlinear behaviors for cubic
coupled Schrödinger systems**

JURY

Président : **M. Jean-Marc DELORT**, Professeur, Université Paris 13
Rapporteur : **M^{me} Valeria BANICA**, Maître de conférences HDR, Université d'Évry Val d'Essonne
Examineurs : **M. Gueorgui POPOV**, Professeur, Université de Nantes
M. Nikolay TZVETKOV, Professeur, Université de Cergy-Pontoise
Directeurs de thèse : **M. Benoît GRÉBERT**, Professeur, Université de Nantes
M. Laurent THOMANN, Professeur, Université de Lorraine

Rapporteur : **M. Nicola VISCIGLIA**, Professeur, Università di Pisa

À Kadoc !

Kadoc, Kaamelott, Livre II

Si vous croyez comprendre la mécanique quantique, c'est que vous ne la comprenez pas.

Richard Feynman

Tsahaha ! What a story Mark !

Tommy Wiseau, The Room

Attention, ce mansucrit n'est pas un mansucrit sur le cyclimse.

MERCI DE VOTRE COMPRÉHENSION.

Thanks / Remerciements

Il est de bon augure de commencer un manuscrit de thèse en remerciant celles et ceux qui nous ont accompagné le long de ce périple. C'est donc avec un grand plaisir que je vais ici saluer toutes ces personnes, et évoquer quelques souvenirs qui ont fait de ce doctorat un voyage enrichissant et passionnant. En particulier, à celles et à ceux qui ne veulent pas écouter ma soutenance, bonne lecture (si vous en avez le temps) !

Dans un premier temps, je tiens évidemment à remercier les deux capitaines qui ont su me guider sur la bonne voie, Benoît GRÉBERT et Laurent THOMANN. Merci pour votre patience, vos conseils, votre bonne humeur... Ces trois années sont passées extrêmement vite, grâce à cette sérénité que vous avez mis dans ce projet.

Je me rappelle encore très bien le moment du choix de stage de Master 2, et du conseil donné par mes aînés : *“Il ne faut pas choisir le sujet qui te plaît le mieux, de toute façon, tu n’y connais rien pour le moment. Ce qu’il faut, c’est choisir la personne avec qui tu a envie de travailler pendant trois ans.”* Mon choix s’est porté sur le sujet de Benoît, notamment parce que j’étais très enthousiasmé par cette phrase dans le projet de recherche : *“En pratique vous seriez intégré à notre petit groupe (B. Grébert, E. Paturel, L. Thomann).”* Trois ans et demi plus tard, j’ai la certitude d’avoir fait le bon choix.

De ces trois années de doctorat, je retiendrai beaucoup de discussions (mathématiques ou autres) dans nos bureaux, autour d’une bière sur une terrasse de Maiori, dans la salle d’embarquement de l’aéroport d’Ajaccio, ou plus personnellement en famille autour d’une (délicieuse) quiche, ou dans l’enfer de Clisson autour d’une (moins délicieuse) bière (encore). Tant sur le plan mathématique que sur le reste, vous êtes vraiment pour moi des exemples à suivre. Je suis à la fois fier et reconnaissant d’avoir pu travailler avec vous, pourvu que ça dure ! Merci encore.

Je tiens également à remercier chaleureusement mes deux rapporteurs, Valeria BANICA et Nicola VISCIGLIA. Merci d’avoir accepté de me relire, d’avoir eu la patience de le faire, et d’avoir été si bienveillants dans vos rapports.

Un grand merci, évidemment, à Jean-Marc DELORT, Gueorgui POPOV et Nikolay TZVETKOV pour avoir accepté de constituer mon jury de thèse. Je remercie particulièrement Nikolay, également membre de mon comité de suivi de thèse, pour ces échanges par mail très précieux qui ont débloqué la rédaction du chapitre 4, et pour cette discussion très sympa avant un séminaire à Cergy.

Encore un fois, j’ai vraiment passé trois superbes années au Laboratoire de Mathématiques Jean Leray. C’est en grande partie grâce au génial secrétariat qui fait que tout tourne si bien. Merci à Ana Paula, Anaïs, Annick, Brigitte, Colette, Dominique, Katrin et

Stéphanie. Merci pour votre aide dans toutes nos démarches (ordres de mission, organisation de conférences, organisation de la soutenance, toutes les démarches administratives, et tout le reste).

Merci également à Éric et Saïd (et leur armée de stagiaires) du service informatique du laboratoire, à qui j'ai visiblement donné beaucoup de fil à retordre avec mon petit portable. Merci à Claude qui anime avec force et joyeuseté le CRDM, une bonne humeur qui transparaît à chacun de ses mails lorsqu'il joue le rôle de Jacques Pradel à la recherche des ouvrages perdus.

Un énorme merci aussi à Bertrand, (appelé aussi Bertrand DE LACAFÈT), gardien assez poreux de mille et un secrets, protecteur de la bonne ambiance de la cafétéria, distributeur officiel de blagues (plus ou moins coquines) et de ragots (plus ou moins coquins), et ennemi juré des amateurs de Sprite[®] et de Schweppes Agrum[®]. Comment remercier Bertrand sans citer ses drôles de dames, avec une mention spéciale à Catherine et Sophie avec qui on peut tout autant rigoler.

Toujours dans le laboratoire, un grand merci à tous les permanents qui participent à cette superbe ambiance, et grâce à qui on se sent vraiment dans une grande famille ici. En particulier, je remercie les membres de l'équipe EDP, notamment Frédéric BERNICOT, Jean-François COULOMBEL, Frédéric HÉRAU, François NICOLEAU, Eric PATUREL, Gueorgui POPOV, Didier ROBERT et Joe VIOLA, pour les réponses toujours très attentionnées à toutes les questions que j'ai posées, aussi naïves fussent-elles.

Pour des discussions (toujours intéressantes) au détour d'un couloir, je tiens également à remercier Anaïs, Bernard, Friedrich, Gilles, Hélène, Nicolas, Philippe, Samuel, Sylvain, Xavier et tous les autres membres du laboratoire.

Encore un grand merci à l'ensemble du laboratoire, une grande famille qui va très certainement me manquer. Que de bons souvenirs, dans des soirées endiablées pour fêter Noël en salle Éole (en chantant la reine des neiges, en faisant la petite chenille...), à Pornic en dansant jusqu'à l'épuisement, en salle du courrier ou en salle commune à n'importe quelle occasion, voir même au camping en fin d'année. Si le LMJL est le plus grand des petits laboratoires et une si belle famille, c'est aussi grâce à cette merveilleuse ambiance !

S'il faut parler de l'ambiance dans le laboratoire, il faut évidemment parler des doctorants. Merci à tous ces collègues, qui sont devenus autant d'amis, pour tous ces moments partagés, pour le meilleur comme pour le pire. Ces trois années n'auraient pas été les mêmes sans toutes ces pauses cafés, ces verres à la Scène Michelet, au Sur Mesure, au Berlin... , ces galettes des rois, ces séminaires des doctorants pour apprendre à se mettre la pression en douceur, ces 4442 parties de taroinche (même si la concurrence n'était pas vraiment rude !), ces préparations de TD, ces partages de perles dans les copies (" $e^k = \sum_{k=0}^k \frac{k!}{k!} = 1 + 2 + 3 + \dots$ ", "un espace vectoriel est un espace géométrique situé sur un plan", "un espace vectoriel est l'ensemble des points qu'il contient"...), ces chansons dans les couloirs (Sing a happy song aura finalement fini par s'essouffler) et bien sûr toutes ces soutenances (et pots) de thèse.

Commençons par remercier les plus anciens, ceux qui terminaient quand je commençais. Merci à Antoine, grand amateur de camomille (surtout celle de Roscoff), spécialiste des coins, qui est à ma connaissance le seul doctorant au monde à avoir envoyé un mail à son chef commençant par "Salut mon canard". Cet acte de bravoure est entré dans la légende. Merci à Christophe pour son rire et sa joyeuseté tellement communicatifs,

merci de m'avoir fait découvrir Alestorm et d'avoir deviné qu'un "We are here, to drink your beer" allait forcément me plaire, pour l'accueil quand mon grand frère était parti, pour les conseils avisés sur la gestion de l'agreg et des post-docs ou sur les avantages et désavantages de la collocation, et merci pour tout le reste. Stykke og Ære ! Merci à Ilaria (Ma che pizza !), pour ta gentillesse inversement proportionnelle à la puissance moyenne de ta voix. Tu as mis un point d'honneur à bien accueillir les nouveaux doctorants, et tu as brillamment réussi. Merci aussi pour le partage de tes dossiers de candidature (CNRS, qualif' et MCF) et les conseils qui vont avec, en espérant qu'ils puissent m'aider à avoir autant de réussite que toi. Quand tu veux pour une nouvelle discussion sur le cinéma, même si la prochaine fois on pourra aller voir un film plus simple à suivre qu'Enemy (dont je garde au passage un excellent souvenir). Merci à Moudhaffar (ou Moody, ou Moudhajafar), mon grand frère ! Merci d'avoir assumé ce rôle de grand frère mathématique, en me guidant de confs en confs et en choisissant même de redécorer mes chaussures quand le style ne te plaisait pas (je suis fier d'avoir assisté à ce moment important pour toi). Une petite bière, un banc à Rome, et Gangsta's Paradise sur nos téléphones, y a pas à dire, on était bien à Rome, quel départ canon pour ma thèse. J'aurais probablement été complètement perdu si tu n'avais pas été là à ce moment (et beaucoup d'autres). Je reste également admiratif devant tes capacités d'adaptation immédiate aux conférences qui ne t'intéressent pas ! Merci à Thomas G, doctorant émérite, maître des nœuds, et gardien ancestral des traditions taroinchiennes. Merci pour l'accueil et l'excellente cuisine dont tu nous a fait profité (aussi bien pour la soirée chez toi que pour tes essais culinaires passagers qui étaient tous aussi réussis). Tu nous a bien fait cogiter dans le bureau avec tes énigmes du calendrier de l'avant mathématique (fichu ver !). Et merci à Virgile, la force *essentiellement* tranquille. Tu m'impressionnais quand, petit étudiant de M2, j'étais venu préparer une leçon d'agreg avec toi. Ça a été un plaisir de te côtoyer par la suite en tant que doctorant. Bonne chance pour la prépa à Nancy.

Vient ensuite la génération qui nous a précédée. Commençons par les trois mousquetaires, la triplète (très joueuse) dont les jouets hantent probablement toujours quelque recoin du bureau 09. D'abord, un grand merci collectif à vous trois, pour nous avoir guidés et maintes et maintes fois conseillés depuis la prépa Agreg. Merci pour ce rôle d'éclaireur, et cette capacité à tout relativiser pour mieux se motiver pour la suite. Plus personnellement maintenant, merci Damien, cher Gobinou (ou Bingo), nouveau compatriote de notre tendre Céline Dion. Merci pour ton site internet, les fichiers tex de ton premier article ou de tes beamers, ou pour le coaching à la taroinche. On a bien rigolé, à tellement de moments différents. Je retiens entre autres une soirée particulièrement arrosée du côté de la Scène Michelet, ou après une dernière tournée de shooters, tu te rendais compte que le TD du lendemain matin allait être particulièrement difficile ("Mais vous n'avez qu'à ne pas y aller", "Mais c'est moi le prof !"). Encore une fois merci pour les conseils sur l'après thèse (et la gestion de l'agreg, jusqu'ici tout va bien). Merci à Pierre, heureux papa, et grand maître de la chanson française. Merci pour ta bonne humeur constante, tes chansons entêtantes, tes expressions pas piquées du hanneton pendant les parties cousues main de taroinche plaisir, et ton rire ! ♪*Moi je fais la vaisselle, c'est bête, mais je suis fait comme ça*♪. Au passage, quand je me suis rendu compte que ton "Seasons in the Sun", c'est une reprise du Moribond de Brel, j'ai eu une révélation ! Merci Valentin, merci pour gentillesse qui nous a autant émerveillé que ta moustache en cheveux. Merci pour ces discussions passionnantes sur les plus folles théories autour de Squall, Linoa et

Ultimecia, et sur les autres épisodes de FF. Et merci pour tous les coups de mains que tu as pu me passer sur la compréhension de HPTV, sans tes notes du groupe de travail, je serais peut être encore plongé dans les calculs. Toujours dans la même génération, merci aux deux numérologues. De la même manière, je commence par un merci collectif à vous deux Florian et Victor, pour tous ces coups de mains que vous avez pu nous filer au moindre problème informatique (ce qui, il faut le dire, arrivait souvent). En particulier, merci Florian, la Blache, pour avoir si efficacement rempli ton rôle de conseiller au près de l'ED en nous traduisant dans un langage compréhensible chaque mail. Merci pour le coup de main pour *tikz*, c'est vrai que c'est chouette ! Merci aussi de m'avoir hébergé puis proposé une brosse à dents, quand après une soirée arrosée, une leçon de conduite m'attendait. Merci pour tes mots doux ("Touriste !"), ton amour des prochaines générations ("Ils font chier ces jeunes communistes !"), et ton cosplay permanent de Denis la Malice. Merci Victor (quel beau prénom) pour ton travail de fond visant à redonner au fromage la place qu'il mérite. Un énorme merci pour avoir relu mes premiers essais en anglais (cette catastrophe) et tous les conseils (pour l'anglais autant que pour latex) que tu as pu me donner à l'occasion. Merci pour ta batterie portable qui m'a été utile pendant qu'on chantait en boucle "We're not gonna take it", et ton compte Amazon premium qui a pu me dépanner l'occasion.

Passons maintenant aux membres de ma génération ! Merci Guillaume, même si Guy Roux te va beaucoup mieux comme nom. Merci pour les coups de mains sur Inkscape (ça semble facile quand on te regarde faire), pour les discussions sur (et découvertes de) quelques grandes musiques : ta passion pour Yoko Shimomura (promis j'aime bien), la magie de Kiki, les belles musiques de XCX, la gestuelle de Brel et sa gueule de cheval, l'orchestre symphonique suédois avec quelques perles musicales sur Skyrim ou Bloodborne, Juliette évidemment (même La Beauce l'aime bien depuis qu'elle a participé à une émission de radio en même temps que JLM), des chanteurs d'opéra polonais complètement barrés avec un Asereje d'anthologie et un Dragostea Din Tei magique (ils sont vraiment épiques ces gens là)... Merci Johan, expatrié angevin, mais toujours nantais dans nos cœurs. Merci pour l'occasion donnée de visiter Angers et de parler aux RDL2016 (où la joie débordante du visage de Sainte Marie Euphrasie nous a accompagné pour la première fois). Merci de m'avoir donné goût au port de t-shirt à caractère geek/drôle/classe/bien, mais surtout au port de la barbe. Tel que tu me vois aujourd'hui, je ne suis pas entier, c'est étrange, et ça démange. Et merci d'avoir démontré qu'une bonne installation électrique, c'est bien pratique quand on veut faire une raclette avec trois appareils. Merci Noémie pour ses douces envolées lyriques, et désolé de ne pas avoir rejoint le cœur universitaire. Les chants de Noël, c'était tellement classe ! Merci pour ces éclats de rire que rien n'arrête, surtout pas le petit mur entre nos bureaux, qui sont tellement communicatifs. Même devant les films tristes, tu commences par rigoler, et ça c'est fort (même si c'est vrai que l'accent canadien dans *Incendies*, c'est drôle). Bon courage pour l'aventure parisienne à venir. Merci Olivier (Holly Vier, la sainte bite). Merci pour les innombrables fois où tu as débloqué mes calculs et écouté mes exposés, tu aurais presque pu cosigner mon manuscrit. Merci pour tous les délires dans les différentes confs (à Angers, Bordeaux, Rennes, Rome ou Roscoff). Merci de ne pas avoir paniqué quand la cinquième vitesse nous a lâché sur la route de Bordeaux justement, c'était flippant. Merci pour le calendrier de citations numéro 2, qui, avec son prédécesseur, et au grand désarroi de mes co-bureaux, nous aura donné de nombreux fous rires en compagnie de nos acolytes (est-ce

que c'est un prénom du labo ?) : Eve Angeli, Steevy Boulay, Georges W. Bush, Jacques Chirac, Jean-Claude Van Damme (l'idole de Capheus), Johnny Hallyday, Barack Obama, Sarah Palin, Michel Rocard, Ségolène Royal, Donald Trump . . . Mention spéciale à Mariah Carey, la bien-pensante, qui a quand même sorti : "À chaque fois que je regarde la télé et que je vois ces pauvres enfants qui meurent de faim partout dans le monde je ne peux pas m'empêcher de pleurer. Je veux dire, j'adorerais être aussi maigre qu'eux mais pas avec toutes ces mouches, et la mort et tout ça." Merci Radek (Stepanek) Novak (Djokovic), le géant tchèque (+1 pour la rime avec Radek) que je n'ai jamais vu joué au tennis. Thank you for the czech beer you brought back when we were at La Blache's place. Thank you for "Contact", which is a very good game, even if it's hard in english. Your slides will remain an inspiration for me (Keep calm, the end is near, finding nemo, the one with Homer Simpson...). Děkuji ! Merci Ronan, le second expatrié, très loin du côté de Poitiers, grand amateur de couilles péruviennes (ça ne s'écrit pas comme ça, mais c'est plus drôle comme ça). On aura bien rigolé pendant les M2. Inaugurer les séminaires de M2 en anglais, ce n'était pas simple, mais j'utilise toujours maintenant la phase stationnaire que tu avais présenté avec tant d'aisance. Merci pour ces fous-rires à ton anniversaire ou à Corsept, où j'ai découvert qu'on pouvait mélanger la dégustation de pâté et l'écoute (oui juste le son) d'un porno allemand, et où j'ai pu découvrir des nouveaux mets gastronomiques locaux, qui nous ont bien fait rire. L'ordre alphabétique nous amène à mes co-bureaux, avec qui on aura partagé plus que du thé pendant ces trois années. Merci Thomas Mélenchon Beaudouin, nouveau fan de parachutage. Je suis très content que malgré tes penchants anarcho-extrême-gauchistes, tu aies su garder ton sang-froid et laissé mon bureau et ma voiture intacts (même si cette dernière a failli sombrer sous le poids de tes tracts). J'ai pris du plaisir à t'embêter sur JLM, mais j'avoue qu'au final, j'ai y cru. Par contre, je ne suis toujours pas convaincu (j'en suis même très loin) par le véganisme. Bonne continuation avec la thèse, l'enseignement, le futur retour sur Nantes, ton futur rôle de député après 2027, et l'organisation de toujours plus de parties de tarot. Merci Thomas Danish Jeanne d'Arc (avec toutes les voix que tu entends...j'ai entendu chambrage !) John Wayne (est-ce que c'est toi ?) Louis Armstrong (t'es beaucoup plus fort que lui pour les instruments à vent, même si ça t'oblige à ouvrir la fenêtre à chaque ré-pet-ition) Wallez. Merci de m'avoir ramené vers la lumière des mathématiques nantaises quand je me suis égaré là bas loin dans le sud. Merci pour les innombrables trajets en voiture, en particulier les soirs du M2 Agreg, quand à la fermeture de la BU, c'était quand même très sympa de ne pas se taper 1h00 de transport en commun. D'une manière générale, merci pour ces 7 années communes passées à l'université de Nantes où on a quand même bien rigolé, et toutes celles d'avant où on rigolait tout autant. Merci pour les soirées Trials, Crawl, Battleblock Theater, Duck Game, Hidden in Plain Sight. . . Merci pour tout, et force et honneur pour la suite. Enfin, merci Vytauté, pour toute cette classe naturelle, cette joie de vivre quotidienne, et ce nom si chantant. Ačiū už tai, kad čia šiandien, ir sėkmės jums.

Commençons la génération suivante, merci Caroline V pour toutes ces discussions où, à l'heure du départ (trop) tard le soir, ou au détour d'un couloir un samedi matin, c'est quand même vachement sympa de parler de la mer (et des ancres), de voitures (Michel président, bon courage à toi) de parler voyage (Yo ho Mexico), de parler célébrités (Geralt de Rive ça passe comme nom français), de parler médecine (et de salières géantes), de parler cartes (vive le Gwent), de parler des qualités des gens (c'est bien d'être humble, surtout à partir de 1€), de parler religion (et de leprechauns roux), de parler de nos doutes

sur le paradis (mais surtout sur l'enfer clissonais)... Bref, de joyeux commérages qui font du bien. Merci Hala. Merci pour tous les délicieux (et même plus encore) plats que tu nous as concoctés, à l'occasion de repas chez toi ou au laboratoire. Merci pour toute cette gentillesse dont tu fais preuve à chaque instant. Pour tout ça et pour tout le reste, merci chef !

Passons à celles qui terminent leur première année. Merci Caroline R ($K\rho_B$). Merci pour cet exemple de motivation sans failles (bon week-end VS les gâteaux de la petite boulangerie). Merci pour cette bonne humeur persistante (probablement due à ce que tu consommes le matin avant de venir de très très loin). Mais pas merci pour les As troisièmes ou quatrièmes. Que ta passion pour les petites balades puisse te mener bien loin. Merci Hélène d'avoir accepté de prendre la relève au conseil du département, et félicitations pour ton élection triomphale. Je suis content d'avoir pu te transmettre les conseils avisés de mon prédécesseur. Merci Solène, championne de cache-cache pour meubles en tout genre, digne héritière de la puissance de Bulbizarre, pour avoir démontré tes talents de stratège hors pair du côté de Saint Julien de Concelles. Merci Zeinab pour tes sourires quotidiens qui cachent une répartie toujours ravageuse. Bonne route sur le doux chemin des EDP, et continue de suivre tes plaisirs coupables à travers tes lectures Hérau-Thomann.

Enfin, finissons ce tour des doctorants nantais avec les futurs arrivants Côme et Matthieu, déjà bien intégrés aux meilleures coutumes du labo. Merci Côme, l'ennemi des arbres au nom si apprécié de Freddy Mercury, qui aura lu (et imprimé) plus d'articles en 4 mois que beaucoup en 3 ans. Merci Matthieu Dudusse, fils de tellement de pères, futur doctorant calfeutré, pour la fonction f de Dussaule qui m'a tiré une belle épine du pied. Tu as redonné ses lettres de noblesse à l'accent belge, même si ça peut devenir excessivement énervant.

Une grande pensée également et un merci tout aussi grand pour les ATER et post-docs que j'ai pu croisés ici. Merci Alberto, la puissance tranquille italienne, pour tous les conseils que tu as pu me donner, aussi bien sur des problèmes mathématiques que pour des choix d'orientation. Merci d'avoir participé à ce génial projet d'exploration de Mars avec la team KAM (Kolmogorov And March). J'ai hâte de te revoir et j'espère qu'on pourra travailler ensemble. Merci Claire, franc-parleuse à l'accent chantant, conseillère en mode officielle du labo, d'avoir tenté de me décourager avec mon (pourtant si beau) pull rose. Merci Gilberto de m'avoir fait redécouvrir Lori Lieberman, d'avoir prêté une oreille attentive à mes essais en italien (depuis une chanson reprise avec Noémie ou à partir de films et séries). Merci Guillem, spécialiste du kiwi et distributeur de courrier d'un autre genre en fin de soirée. Merci Nicolas même si tu ne veux jamais manger avec nous. Merci Niccolò pour tous ces coups de mains pour les TD de proba. Je pense que j'aurais eu bien des soucis sans ta patience nécessaire pour expliquer le cours aussi bien à tes collègues qu'à tes étudiants. Merci Simon, sosie officiel de Matt Pokora (même si je pense plutôt que c'est lui ton sosie), reconnu mondialement pour ses performances d'acteur dans les plus grandes séries américaines, l'homme qui connaît tout le monde, et que tout le monde est content de connaître. Merci Victoria pour avoir eu la patience de me supporter, moi et mes chansons, pendant 2 ans, en gardant ce calme qui te caractérise si bien. Merci Zoé, championne du monde d'accueil de soirées (à Nantes et Bordeaux) et détentrice de multiples records homologués pour ton pot de thèse, tant sur la durée que sur le nombre de bouteilles écoulées.

Je remercie également tous les doctorants, post-doctorants et titulaires avec qui j'ai partagé de très agréables moments lors des diverses conférences qui ont jalonné cette thèse. Merci Adrien et Marine pour ces superbes balades à Rome et pour l'accueil et les bonbons à Rennes. Félicitations pour le mariage. Merci Alexandre pour le guide des meilleurs bars de Lyon. Merci Annalaura, toi qui connaît tous les doctorants du monde, pour ces franches rigolades à Rome, Paris, Nantes ou encore Roscoff. Merci Axel, Professeur Rogue One. Merci Baptiste, troubadour vidéoludique, d'avoir prolongé le plaisir de ta thèse pour passer plus de temps avec nous en confs et jouer les aventuriers sur l'île de Batz. Merci Benjamin même si tu ne veux pas me parler des ennemis de Chuck Norris. Merci Biagio pour cette moustache digne de Joaquin Phoenix et ces conseils pour Bilbao. Merci Charles et Thibault pour cette aventure chilienne, remplie de très bons souvenirs et d'aussi bon délire (Victor, nettoyeur ; pour moi il y a 3 villes dans le monde, Rome, Paris, et Santiago ; et vive Jacques Brel, les terremotos de Valparaiso et les touristes de San Pedro de Atacama). Merci Christophe, maître Jedi qui m'a formé du côté de Rome puis de Cargese, avant de suivre sa voie fort fort loin dans l'est. Merci Ivan et Ludovick pour le Genepi, la passion pour les pipes, surtout celles d'Autrans, l'accent candien, et désolé pour Vald. Merci Joseph pour ta gentillesse démesurée. Merci Lysianne pour ces moments à Roscoff ou Nantes, et surtout merci pour l'invitation à Besançon, pour la fondue, et pour la soirée légendaire avec "le vin et l'assiette". Merci Nathalie (mon amour des JMJ) pour cette semaine épique passée à Roscoff avec Baptiste, Lysianne et Olivier. Merci pour les parties de contact et de Code Names (avec ta chance démesurément faible), dans l'unique conférence où l'on peut parler sérieusement d'optimisation du nombre d'hommes nécessaires pour faire un certain cercle. Par contre, désolé pour la playlist où les chansons Disney se sont montrées trop timides. Merci Yannick, nous sommes devenus des légendes à Maiori, tonight's the night ! Merci Zhiyan pour tout, sauf la diffusion de vidéos compromettantes !

Merci à tous les autres avec qui on a bien rigolé : Agathe, Alessandra, Alice, Angelo (Osasuna !), Benoit, Charles le niçois, Chiarra (félicitations pour ta thèse), Clément, Clémentine, Coralie, David, Éléonore, Felice, Florentin, Hélène, Jacek, Jaime, James (vive Lisa Hannigan et Carrickfergus), Jessica, Luca, Mario, Neel, Nikolaos, Nikolay, Olivier, Pierre-Damien (merci pour la serviette), Romain, Stefano (pas mon futur collègue), Stefano (mon futur collègue) et tellement d'autres encore.

Je tiens également à remercier ceux qui ont apporté leur soutien financier à cette belle aventure et m'ont permis de voyager et rencontrer toutes les belles personnes précédemment citées. Merci à l'école doctorale ED STIM et au Centre Henri Lebesgue pour les aides pour les départs en conf (Chili, Maiori...) et l'organisation des rencontres doctorales. Une pensée plus particulière pour le CHL qui m'a accompagné dès le M2 grâce aux bourses pour étudiants. Merci également aux différentes ANR grâce auxquelles j'ai pu partir en mission, parmi lesquelles les ANR ANAE, BeKAM, DynQua et Isdeec.

Pour finir ces remerciements, je tiens à remercier ma famille et mes amis qui me soutiennent depuis longtemps en se demandant ce qu'il peut bien y avoir à chercher en mathématiques (vu qu'on connaît déjà tous les nombres).

Merci papa, merci maman de m'avoir logé et supporté pendant ces longues années d'étude, c'est fini maintenant ! En particulier, une grosse bise à toi maman pour m'avoir poussé au cul quand la date limite approchait pour l'inscription en 2010, c'était juste

l'impulsion qu'il me fallait pour lancer ces 7 années d'étude à l'Université de Nantes. Merci Annabelle, Valentin et Louna pour tous les apéros qui ont rythmé ces trois années, et merci de la confiance dont vous avez fait preuve en me choisissant parrain de Louna, c'est vraiment une chouette année 2017 ! Merci Pierre, Lionel, Adeline et Jules d'avoir cru en votre petit frère/beau-frère/tonton. Promis je vous expliquerai tout sur mes recherches, sans que ce soit trop chiant. Toujours dans la famille très proche, merci Christine et José, les meilleurs parrains/marraines du monde, toujours présents, toujours souriants. Merci pour tout, c'est un énorme plaisir de vous voir ici (même si c'est par la pensée pour Christine). Merci Mélanie (et Pich !) d'avoir manifesté de l'intérêt pour ma thèse et de représenter fièrement en ce jour l'ensemble de notre "cousinité" à qui j'en profite pour faire une grosse bise. Et merci Manu, fringant nouveau bachelier, de m'avoir fait la belle surprise de venir assister à la soutenance, en digne représentant de la communauté portugaise de France.

Merci à tous mes amis pour ces innombrables soirées qui m'ont permis de ne pas me noyer dans mes mathématiques en m'offrant de sacrés bols d'air. Merci aux membres du Clan de m'avoir supporté ces trois années et plus encore. Merci aux quatre autres membres du 5 majeur d'avoir financé mes confs avec vos impôts, d'avoir partagé 51 000 pizzas et 5 100 burgers, pendant des matchs de foot, des tarots, des 6 qui prend... Bref, merci Fenec, Fro, Lène, LOD et bien sûr la nouvelle génération avec Naïs et Loan. Merci 51 et Charlotte la marmotte (et John, même si son nom changera probablement, Victor-2 c'est pas mal si vous avez encore besoin d'une idée) pour ces saucissons-bières d'après kiné. Merci Céline et Machime, pour ces soirées déjà cultes dans votre nouvelle et parfaite maison. Merci Popo et Thomas pour cette superbe parenthèse tourangelle, et félicitations à Elsa pour tous ces sourires dévastateurs sur les photos. Merci Anna, Charlène, Kromu et Pairo pour ces accueils sur Paris pour être sûr que chaque conf là bas se termine d'une manière épique (et souvent assez douloureuse pour les cheveux). Merci Jejej, Kiki et Val, les expatriés du grand est, du nord et du grand nord, d'avoir fait le déplacement (ou presque pour Kiki) aujourd'hui. You are fucking awesome, je vous aime. Merci Estelle de m'avoir rendu présentable niveau cheveux pour aujourd'hui. Merci Amandine, Divad, Élise, JF (Phillipe !), Jo, Mask (Phillipe aussi !), Mushu, Romain, Sarah, Tinss et tous ceux que j'oublie d'être toujours présents et toujours si bien.

Un bien beau merci également à la folle communauté du forum *ff7.fr*, gardienne de beaucoup trop de délires, de joies partagées sur le tarot des anciens, sur les divers topics, via diverses guirlandes, mais surtout lors de belles IRL (et de loup-garous, de Koh-Lanta, de Wanted, de quiz...). Une communauté où l'on trouve un soutien indéfectible à tout instant, et un groupe privilégié pour décompresser. En particulier (désolé pour les oublis), merci à Ace_Hanlon, Acro, Aeris-sama (+ Amandine et Lucile), Aladore, Bahamut-Omega, Bibiisted, Blank, Boody, Ced, Charles Apollon, Clado Gahan, Crift, CS58, Dexter, Elen, Éléo, Greatyy, Fullmetal, IcarusGW, ilares, JasMouse, Jeffou, Jr, Jrette, Juntaru, KarlpEKu, Kartseven, Kista, Laïna, Lamèrèàjeffou, Lunariss, Menencia, mexico, myst6re, N3r0, Oeil de Nuit, ozOz, PanStyle, Rand, Renzokuken, return, RJ, satsuki_yatoshi, Sharleen, Shadowtribal, Shinra, Siegfried, Skyroth, Stenerman, steven, Taz, Teh Aerith, Tezio, Tofu, Torino, twinsen21, VGR255, Yodel, Yomi, Yui, yuyu, Ze Ring et Zell pour ces bons moments partagés depuis de nombreuses années maintenant.

Enfin, merci et toutes mes excuses à ceux que j'ai oubliés. Force et honneur. Bonne lecture pour les plus courageux.

Contents

1	Introduction	17
1.1	À propos de l'étude des équations aux dérivées partielles	17
1.1.1	Équations dispersives et données initiales petites	21
1.1.2	La transformée de Fourier	24
1.1.3	Comportements linéaires et non linéaires	27
1.2	À propos de l'équation de Schrödinger	30
1.2.1	De Schrödinger linéaire à Schrödinger cubique	31
1.2.2	De Schrödinger cubique au système de Schrödinger cubique couplé	32
1.2.3	La formule de Duhamel	34
1.2.4	Scattering et scattering modifié	36
1.2.5	Introduction des profils	39
1.3	Motivation : sur la croissance de normes Sobolev	40
1.4	Plan de la thèse et présentation des résultats	43
1.4.1	Étude sur le tore \mathbb{T} : les effets de battement	43
1.4.2	Étude sur la droite réelle \mathbb{R} : scattering modifié et déphasage	46
1.4.3	Étude sur l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$: scattering modifié et effets de battement	48
2	Shifted beating effect for a cubic coupled Schrödinger system on \mathbb{T}	55
2.1	The Hamiltonian formalism	57
2.1.1	The Fourier series expansions	58
2.1.2	The framework of the study	58
2.1.3	The symplectic polar coordinates	59
2.2	The Birkhoff normal form	59
2.2.1	Construction of the normal form	60
2.2.2	About the resonant part Z_4	64
2.3	The reduced model	65
2.3.1	The beating effect	66
2.3.2	The shifted beating effect	70
2.4	Beating effect solutions for the initial system	75
2.4.1	Almost preservation of the quantities K_1 , K_2 and K_3	76
2.4.2	Proximity between the Hamiltonians H^B and H_0^r	78
2.4.3	Construction of the beating solutions	81
2.4.4	Proof of Theorem 2.0.2	83
2.4.5	Limit of the period $2T_\gamma$ when $\gamma \rightarrow \frac{1}{2}$	84
2.5	Shifted beating effect solutions for the initial system	86
2.5.1	Proximity between the Hamiltonians H^B and \tilde{H}_0^r	87

2.5.2	Proof of Theorem 2.0.1	89
2.5.3	Limit cases of the period $2T_\gamma$	91
3	Modified scattering for a cubic coupled Schrödinger system on \mathbb{R}	93
3.1	Introduction	93
3.1.1	Motivation and background.	93
3.1.2	Notations and norms.	95
3.1.3	Statement of the results.	96
3.2	Preliminaries	97
3.2.1	Introduction of the profile.	97
3.2.2	Properties of the linear Schrödinger group.	99
3.3	The a priori estimates	100
3.3.1	The decay of R , one L^∞ estimate.	100
3.3.2	Some L^2 estimates.	102
3.3.3	Conclusion of the proof.	105
3.4	The asymptotic behavior	105
3.4.1	Local existence and uniqueness of the solution.	105
3.4.2	Global existence of the solution.	111
3.4.3	The decay estimate.	112
3.4.4	The long-range scattering.	113
3.4.5	The asymptotic formula.	114
4	Modified scattering and beating effect for a cubic coupled Schrödinger system on $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$	115
4.1	Introduction	115
4.1.1	Motivations and background	116
4.1.2	The results	119
4.1.3	Overview of proof	122
4.1.4	Plan of the paper	123
4.2	Preliminaries	123
4.2.1	Norms and notations	123
4.2.2	Introduction of the profiles	126
4.2.3	Preliminary results	127
4.2.4	The transfer principle	129
4.2.5	A first estimate result	133
4.3	Decomposition of the nonlinearity	134
4.3.1	The high frequency estimates	135
4.3.2	The low frequency estimates	144
4.3.3	The resonant level set	153
4.3.4	High frequency estimates for the resonant part	163
4.3.5	Proof of Theorem 4.3.1	165
4.4	Study of the resonant system	167
4.4.1	Estimates about the solutions of the resonant system	167
4.4.2	From the reduced resonant system to the resonant system	174
4.4.3	About the reduced resonant system, the Hamiltonian formalism	174
4.4.4	Example of nonlinear dynamics: the beating effect	176
4.4.5	Beating effect and wave operator: proof of Theorem 4.1.4	179

4.4.6	Persistence of the beating effect and convolution potentials	180
4.5	The modified scattering	181
4.5.1	Global existence of the solutions	181
4.5.2	The decay estimate	184
4.5.3	The asymptotic behavior	185
4.6	The modified wave operator	189
Conclusion and perspectives		195
Appendices		201
A	Hamiltonian formalism	201
B	The stationary phase approximation	204
Bibliography		210
List of figures		211

Introduction

Note for the non-French-speaking reader : Chapters 2 and after are independent, self-contained, and will not refer to this introduction.

Le but de ce manuscrit est de proposer une étude de comportements non linéaires pour des solutions d'un système de deux équations de Schrödinger cubiques couplées de la forme

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_x u &= |v|^2 u, \\ i\partial_t v + \Delta_x v &= |u|^2 v. \end{cases} \quad (1.0.1)$$

Dans cette introduction, nous allons aborder tous les thèmes nécessaires à la compréhension de l'enjeu. Dans une première partie, nous verrons au sens très large pourquoi l'étude des équations aux dérivées partielles nous intéresse, et quels sont les types de comportements non linéaires qui peuvent entrer en jeu. Ensuite, nous verrons pourquoi nous avons choisi pour cette étude de nous pencher sur un système de deux équations de Schrödinger cubiques couplées, et comment ce choix s'articule autour de résultats mathématiques récents. Enfin, nous verrons via le plan du manuscrit que le choix de l'espace des positions influe sur le type de comportement non linéaire obtenu.

1.1 Étude des équations aux dérivées partielles

En mathématiques, une équation aux dérivées partielles (appelée EDP dans la suite) est une équation dont les solutions sont des fonctions de plusieurs variables vérifiant certaines relations mettant en jeu leurs dérivées partielles. Formellement, pour une fonction u de n variables (x_1, \dots, x_n) , une EDP est une équation de la forme

$$f\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_n}, \dots\right) = 0.$$

Dans le cas particulier où f est une fonction linéaire en u et ses dérivées, l'EDP sera dite linéaire. Ce cas particulier, donnant lieu à des équations plus simples à résoudre, apporte

souvent un grand nombre d'informations sur le cas plus général des EDP non linéaires. Ici, on s'intéresse au cas où il y a au moins deux variables ($n \geq 2$). On aura ainsi dans la suite une variable pour le temps (notée t) et une ou plusieurs variables d'espace (notée x dans le cas d'une variable d'espace). Le cas d'une seule variable donne lieu à l'étude des équations différentielles ordinaires, cadre dans lequel ne s'inscrit pas l'équation de Schrödinger. Enfin, lorsque l'on rajoute à l'EDP une condition initiale (pour t fixé), permettant d'étudier l'unicité des solutions, on parle alors de problème de Cauchy.

L'étude de telles équations a été introduite, vraisemblablement, par D'Alembert en 1746 pour décrire la vibration des cordes d'un violon, ou par Leonhard Euler en 1757 pour décrire l'écoulement de fluides (des liquides ou des gaz). Depuis, les EDP sont fortement utilisées pour décrire une large variété de phénomènes, et ce dans divers domaines. Le but de l'étude des EDP est, entre autres, de mieux comprendre ces phénomènes, l'influence possible des paramètres sur ceux-ci, et de pouvoir contrôler ou prévoir le comportement des solutions. Parmi les domaines dans lesquels sont utilisés les EDP, on peut citer quelques exemples intéressants.

En biologie, l'équation de Fisher KPP (1937) modélise la dispersion d'un gène ou la propagation de maladies dans une population. On peut également citer l'équation de McKendrick-Von Foerster qui permet d'étudier la prolifération cellulaire, prenant en compte l'âge des cellules.

En économie, l'introduction de l'équation de Black et Scholes (1973), qui modélise le prix d'une option européenne d'achat, a permis de décrire le marché financier avec un modèle mathématique simple et efficace. Cette équation a eu un effet remarquable sur les marchés financiers, dans lesquels elle est depuis largement utilisée. Elle a entre autres donné lieu à divers sous-modèles utilisés dans toutes les branches des marchés économiques, et son étude par Merton et Scholes a été récompensée par le prix Nobel d'économie en 1997.

Les EDP sont également très largement utilisées dans les autres branches des mathématiques, dans le traitement d'images, pour la prévision météorologique, en théorie des jeux, en informatique, en chimie...

Néanmoins, puisque les EDP ont pour but de modéliser toute sorte de phénomène observé, leur étude possède un rapport particulier avec la Physique. Depuis l'équation d'Euler en 1757, mathématiciens et physiciens ont cherché à développer les EDP en accord avec les avancées de notre compréhension du son, de la chaleur, de l'optique, du comportement des fluides, de l'électromagnétisme, de la physique quantique... Ce contexte fait de l'analyse des EDP un lieu d'échange privilégié et un lien fort entre les Mathématiques et la Physique. Nous allons ici évoquer, à divers niveaux d'observation (des phénomènes microscopiques à la mécanique céleste), ces liens en évoquant quelques EDP importantes.

Au niveau microscopique (niveau de l'atome et de l'électron), on peut citer l'équation de Schrödinger, qui décrit la densité de probabilité de présence d'une particule massique non relativiste, introduite par Erwin Schrödinger en 1925 pour décrire la position de l'électron dans l'atome. L'année suivante, en 1926, Oskar Klein et Walter Gordon proposent une version relativiste de l'équation de Schrödinger pour des électrons de spin nul : l'équation de Klein-Gordon. Le cas relativiste avec des électrons de spin non nul est traité en 1928 par l'équation de Dirac. Une autre approche est donnée en 1927 via l'équation de Hartree, qui est une version non locale de l'équation de Schrödinger, prenant en compte les interactions entre les électrons. En 1961, Eugene Gross et Lev Petrovich

Pitaevskii décrivent, indépendamment, un système de bosons identiques, pour offrir un modèle simplifié (dans un gaz dilué) d'étude des condensats de Bose-Einstein, donnant lieu à l'équation de Gross-Pitaevskii.

Au niveau mésoscopique (échelle intermédiaire entre le niveau microscopique et le niveau macroscopique), un cadre important est donné par la théorie cinétique des gaz. L'idée est de considérer qu'un gaz est un nuage de particules qui se déplacent librement et peuvent donc s'entrechoquer. À la vue du nombre important de particules, il paraît illusoire de se placer au niveau microscopique et d'écrire l'équation de mouvement de chaque particule (dans un mètre cube de gaz, il y a environ 10^{25} particules). Pour relier les grandeurs macroscopiques (comme la température du gaz, sa pression, sa viscosité, son volume...) aux grandeurs microscopiques (comme la vitesse des particules, leurs collisions...), on considère alors la densité des particules. C'est ainsi qu'est apparue la théorie cinétique des gaz au XVIII^{ème} siècle via les idées de quelques scientifiques (dont Daniel Bernoulli), mais elle sera formalisée mathématiquement qu'au siècle suivant. Plusieurs modèles mathématiques découlent de cette théorie. La première grande équation de la théorie cinétique est l'équation de Boltzmann (1872), décrivant l'évolution d'un gaz hors équilibre. L'équation de Fokker-Planck (1931) propose un autre modèle pour le terme collisionnel en considérant de multiples petites collisions. L'étude du cas non collisionnel (sans collisions entre les particules), mais prenant en compte des forces électromagnétiques non linéaires, donne lieu à l'équation de Vlasov-Maxwell (1938). On peut également citer le cas particulier de l'équation de Vlasov-Poisson (1938), obtenue en négligeant les forces magnétiques de l'équation de Vlasov-Maxwell. De ce point de vue non collisionnel, l'équation de Vlasov-Poisson est souvent utilisée pour décrire l'évolution des galaxies, que l'on peut modéliser comme étant un "gaz" dont les particules (ici les étoiles) n'entrent pas en collision.

Au niveau macroscopique (observable par l'humain, éventuellement à l'aide de microscopes), on peut citer les équations de la mécanique des fluides. Parmi elles, l'équation d'Euler (1757), déjà évoquée, ou encore les équations de Saint-Venant (1843), Navier-Stokes (1845), Tricomi (1923) ou encore l'équation de Burgers (1948), également utilisée pour modéliser le trafic routier ou en acoustique. Un cas particulièrement intéressant pour la recherche de comportements non linéaire est introduit en 1877 par Boussinesq, il s'agit de l'équation appelée maintenant équation de Korteweg-de Vries. Cette équation modélise le comportement des vagues en faible profondeur, offrant un cadre mathématique remarquable puisque qu'elle permet de mettre en évidence l'existence de solitons. Les solitons sont des ondes solitaires se propageant sans se déformer, décrites initialement par John Scott Russel en 1834, en observant une vague dans un canal qui semblait ne pas changer de forme et de vitesse. C'est un exemple de comportement non linéaire.

L'étude de l'électromagnétisme est lancée durant la seconde partie du XIX^{ème} siècle, avec les équations de Maxwell (dont la première version, comportant 20 équations, date de 1865). Beaucoup d'équations découlent de celles de Maxwell, comme l'équation des télégraphistes, introduite par Heaviside vers 1880, qui modélise l'évolution de la tension et du courant sur une ligne électrique en fonction de la distance et du temps.

Le couplage entre les équations de l'hydrodynamique (équations de Navier-Stokes) et l'électromagnétisme (équations de Maxwell) a conduit Alfvén à introduire en 1942 les équations de la magnétohydrodynamique pour étudier des fluides conducteurs, comme les plasmas. Cette étude permet entre autres d'analyser le noyau fluide de la Terre, à

l'origine du champ magnétique terrestre.

Toujours au niveau macroscopique, on peut citer d'autres types d'études. L'étude de la vibration des cordes d'un violon par Bernoulli puis D'Alembert a conduit à la mise en place de l'équation des ondes en 1746. Le cas des solutions stationnaires de cette équation (i.e ne dépendant pas du temps) donne lieu à l'équation de Helmholtz (1871). En 1811, Joseph Fourier propose l'équation de la chaleur, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. Enfin, un dernier exemple intéressant provient de la théorie des poutres. L'étude de la résistance des poutres (au sens large) a intéressé les scientifiques depuis des études de Léonard De Vinci (XV^{ème}-XVI^{ème} siècle) et Galilée (XVI^{ème}-XVII^{ème} siècle). Un grand pas dans cette étude est fait vers 1750 avec la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, qui néglige les effets de cisaillement. Pour un modèle prenant en compte ces effets, il faudra attendre le début du XX^{ème} siècle avec l'équation de Timoshenko.

Enfin, au niveau de la mécanique céleste, on retrouve également les EDP à plusieurs niveaux. L'exemple le plus parlant est probablement l'équation d'Einstein, pierre angulaire de la théorie de la relativité. Cette équation, publiée en 1925, modélise l'influence de la matière et de l'énergie sur la géométrie de l'espace-temps.

Une des propriétés remarquables de l'étude des EDP est donc la diversité des domaines d'applications. Cette diversité est également visible à l'échelle d'une EDP particulière. Nous avons introduit ici le contexte dans lequel les équations ont été introduites et les phénomènes décrits originellement. Mais comme on a pu le voir à travers les exemples de l'équation de Burgers (de l'écoulement des fluides au trafic routier) ou de l'équation de Vlasov-Poisson (de l'étude des gaz au mouvement des étoiles dans la galaxie), chaque modèle d'équation peut être amené à décrire des phénomènes parfois très variés. C'est en particulier le cas de l'équation de Schrödinger, comme nous le verrons dans une introduction plus poussée de cette équation dans la partie 1.2.

Tous ces exemples, qui ne reflètent qu'une partie de l'étendue des applications des équations aux dérivées partielles, mettent en évidence l'importance du défi mathématique qu'est la compréhension et la résolution de ces diverses équations. Ainsi, parallèlement à ces avancées sur la compréhension des phénomènes physiques, beaucoup d'outils mathématiques ont été développés, de la décomposition en séries de Fourier en 1822 donnant un moyen efficace de recherche de solutions, à la théorie des distributions de Laurent Schwartz en 1950 permettant d'élargir le concept de solutions. Aujourd'hui encore, l'étude des EDP, tant sur le plan théorique que sur le plan numérique, est l'un des domaines des mathématiques les plus vivants. Du point de vue mathématique, l'étude de ces équations traite, entre autres, les questions suivantes :

- ▷ Existe-t-il des solutions ? Le cas échéant, sont-elles uniques ?
- ▷ Quel est le temps d'existence des solutions ? En particulier, les solutions sont-elles globales (i.e définies pour tout temps) ?
- ▷ Peut-on construire ou approcher les solutions ?
- ▷ Les solutions sont-elles stables par rapport aux données initiales ? (Autrement dit, une légère modification des données initiales entraîne-t-elle une légère modification des solutions ?)
- ▷ Peut-on contrôler les solutions en agissant sur les équations ?
- ▷ Quel est le comportement (éventuellement en temps long) des solutions ?

Dans ce manuscrit, nous allons nous intéresser principalement à la dernière question, en mettant en évidence des comportements non linéaires, en temps long. Mais avant de définir ce qu'est un comportement linéaire ou non linéaire, nous allons introduire la notion d'équation dispersive, une famille d'EDP dont nous étudierons quelques propriétés, puis nous introduirons la transformée de Fourier, un outil primordial pour les calculs effectués dans cette thèse.

1.1.1 Équations dispersives et données initiales petites

Dans cette partie, nous allons définir la notion d'équation dispersive, qui donne un cadre plus précis de famille d'équations à laquelle appartient l'équation de Schrödinger, et nous allons voir en quoi la dispersion joue un rôle dans les résultats attendus.

On se place ici dans le cas d'une solution $u = u(t, x)$, avec $t \in \mathbb{R}$ le temps et $x \in \mathbb{R}^n$ la variable d'espace.

Ondes planes et équations dispersives

On appelle onde plane monochromatique une fonction de la forme

$$u(t, x) = e^{i(\omega t - k \cdot x)}.$$

On appelle cette fonction une onde dans la mesure où, pour un bon choix de ω , cette fonction u est solution de l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0.$$

Elle est dite plane car dans le cas $n = 1$, les fronts d'onde sont des plans infinis tous perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde. Enfin, le terme monochromatique vient ici du fait qu'il n'y a qu'une seule fréquence (une seule couleur) ω . Bien que physiquement pas rigoureux, les ondes planes monochromatiques sont très utilisées car c'est un modèle simple et donnant une bonne approximation de nombreuses ondes.

Ainsi, face à une EDP, une bonne idée dans la recherche de solution est l'utilisation des ondes planes. On cherche à écrire une solution particulière de l'EDP étudiée sous la forme d'onde plane, on obtient alors une relation sur ω et k , dite relation de dispersion, de la forme $\omega = \omega(k)$. Une EDP est alors dite dispersive si

$$\omega(k) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \omega''(k) \neq 0.$$

Dans ce cas, on appelle $w'(k)$ la vitesse de groupe de l'équation. Cette définition de la vitesse de groupe sera légitimée par le lemme de la phase stationnaire étudié plus en profondeur dans l'appendice B. Une EDP est donc dite dispersive si la vitesse de groupe $w'(k)$ dépend de k . En d'autres termes, une EDP est dispersive si différentes fréquences se propagent à différentes vitesses. On peut déjà remarquer que la condition $\omega(k) \in \mathbb{R}$ fait que l'équation de la chaleur n'est pas une équation dispersive. Nous pouvons donner trois exemples d'EDP dispersives en dimension $n = 1$.

Trois exemples d'EDP dispersives linéaires sur \mathbb{R}

Dans le cas qui nous intéresse particulièrement dans cette thèse, concernant l'équation de Schrödinger linéaire sur \mathbb{R}

$$i\partial_t u + \partial_{xx} u = 0,$$

les ondes planes $e^{i(-k^2 t - kx)}$ sont solutions. Dans ce cas nous avons :

$$\omega(k) = -k^2, \quad \omega'(k) = -2k, \quad \omega''(k) = -2.$$

L'équation de Schrödinger linéaire est donc bien dispersive. On remarque que la vitesse de groupe ω' n'est pas bornée, on parle donc de vitesse de propagation infinie. Cette vitesse infinie vient du fait que les hautes fréquences s'échappent vers l'infini très rapidement.

Un second exemple similaire est donné par l'équation de Airy, qui est le linéarisé de l'équation de Korteweg-de Vries :

$$\partial_t u + \partial_{xxx} u = 0.$$

On remarque alors que les ondes planes $e^{i(k^3 t - kx)}$ sont solutions. Dans ce cas nous avons :

$$\omega(k) = k^3, \quad \omega'(k) = 3k^2, \quad \omega''(k) = 6k.$$

L'équation de Airy est donc bien dispersive et est également à vitesse de propagation infinie.

On peut étudier un troisième exemple via l'équation de Klein-Gordon linéaire

$$\partial_t^2 u - \partial_{xx} u + mu = 0.$$

Cette EDP admet pour solutions les ondes planes de la forme $e^{i(\sqrt{k^2+m}t - kx)}$. On a donc

$$\omega(k) = \sqrt{k^2 + m}, \quad \omega'(k) = \frac{k}{\sqrt{k^2 + m}}, \quad \omega''(k) = \frac{m}{(k^2 + m)^{\frac{3}{2}}}.$$

On peut faire deux remarques quant à la forme de ω . Premièrement, nous remarquons que contrairement à l'équation de Schrödinger, la vitesse de groupe est ici bornée. Cette équation est donc moins dispersive que les équations de Schrödinger et Airy. Ensuite, nous remarquons que pour $m = 0$, on a $\omega''(k) = 0$. Ainsi, le cas $m = 0$, correspondant à l'équation des ondes, est un exemple d'EDP non dispersive (ce résultat est propre à la dimension 1, l'équation des ondes étant dispersive en dimension supérieure). Par rapport aux EDP citées en introduction, on peut remarquer que les équations des poutres d'Euler-Bernoulli, de Korteweg-de Vries, de Schrödinger cubique, d'Einstein ou encore de Hartree sont d'autres exemples d'EDP dispersives.

Inégalités de dispersion

Physiquement, une EDP dispersive est une équation pour laquelle les solutions tendent à "s'étaler", dû aux vitesses des différentes fréquences. En d'autres termes, même pour une donnée initiale très localisée, les solutions vont se disperser dans tout l'espace. Du point de vue mathématique, cette tendance se traduit par des inégalités dites de dispersion sur la norme infinie de la solution. Une inégalité de dispersion est donc une estimée garantissant

la décroissance en temps de la norme L^∞ de la solution devant une certaine norme de la donnée initiale.

Ainsi, nous obtenons pour les équations de Klein-Gordon et de Schrödinger sur \mathbb{R} des inégalités de dispersion

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|u_0\|_N.$$

La norme N est différente dans les deux cas. Alors qu'il suffit de choisir la norme L^1 pour le cas de l'équation de Schrödinger, le cas de l'équation de Klein-Gordon demande plus de contrôle sur la donnée initiale, car cette équation est moins dispersive (la vitesse de propagation est finie).

Équations dispersives linéaires et non linéaires

Les trois exemples étudiés ci-dessus sont trois équations linéaires. Pour les équations non linéaires, le phénomène de dispersion se traduit habituellement de deux manières.

Soit la non-linéarité a tendance à compenser la dispersion. Dans ce cas, on peut ne pas avoir de décroissance de la norme infinie. C'est ce qui se produit en passant de l'équation de Airy à l'équation de Korteweg-de Vries, où cette compensation permet de mettre en évidence l'existence de solitons.

Soit la non-linéarité perturbe la dispersion, sans la compenser. Dans ce cas, on continue à obtenir une décroissance de la norme infinie. C'est le cas pour l'équation de Klein-Gordon, mais surtout dans le cas qui nous intéresse ici pour l'équation de Schrödinger cubique défocalisante. Ainsi, dans ce manuscrit, on s'attend à une décroissance de la norme infinie pour les variables d'espace euclidiennes, c'est ce que nous verrons dans les chapitres 3 et 4.

Données initiales petites et théorème de point fixe

Face à une EDP, pour répondre aux questions d'existence, d'unicité, et de comportement des solutions, la méthode habituelle est l'utilisation d'un théorème de point fixe. Ici, nous utiliserons le théorème du point fixe de Banach-Picard :

Théorème du point fixe de Banach-Picard. *Soit E un espace métrique complet non vide et f une application contractante de E dans E . Alors f admet un unique point fixe.*

Ainsi, si, par exemple par la formule de Duhamel explicitée dans la sous-partie 1.2.3, on montre que pour un bon espace E et une bonne fonction f on a :

$$u \text{ solution d'une EDP} \quad \Leftrightarrow \quad f(u) = u.$$

Alors, il suffit de montrer que f est contractante pour prouver l'existence et l'unicité de la solution. Les estimées de normes obtenues sur f sont alors appelées estimées a priori, car on considère des estimées sur la solution u sous la forme $f(u)$ avant de savoir si la solution u existe. Dans cette optique, les inégalités de dispersion couplées à un choix de données initiales petites offrent un outil de choix pour prouver que f est contractante. Le gros du travail sera alors souvent de trouver le bon espace E dans lequel se placer. C'est cet aspect des EDP dispersives qui nous intéresse dans ce manuscrit.

1.1.2 La transformée de Fourier

Nous allons ici introduire la transformée de Fourier, un outil de calcul puissant qui sera utilisé dans toute la suite du manuscrit. En accord avec la suite du manuscrit, nous nous contenterons ici du cas d'une variable périodique ou euclidienne. Cette transformation a été introduite dans un premier temps par Joseph Fourier, sous forme de série de Fourier, pour étudier l'équation de la chaleur en 1822. Le but étant de décomposer une fonction périodique en série (c'est à dire une somme infinie) trigonométrique. Pour une fonction périodique $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, on définit la série de Fourier associée par

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j e^{ijx}.$$

Les f_j sont alors appelés les modes (de Fourier) de la fonction f . La généralisation de cette transformation sous forme d'intégrale est due, au début du XX^{ème} siècle, à Lebesgue suite à ces travaux sur l'introduction de l'intégrale de Lebesgue.

Pour une fonction intégrable (au sens de Lebesgue) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, on définit alors la transformée de Fourier associée par

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx.$$

La variable ξ est alors appelée fréquence, alors que la variable x est appelée position. On peut également noter qu'il existe plusieurs conventions pour la transformée de Fourier, chacune ayant ses avantages et inconvénients. Par exemple ici, le choix dans la définition de la constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ est arbitraire. Ce choix a l'avantage d'offrir une symétrie avec la transformée de Fourier inverse. Dans le chapitre 4, on choisira comme constante $\frac{1}{2\pi}$, ce choix aura alors l'avantage de supprimer la constante sur la transformée de Fourier inverse, choix qui sera opportun car cette transformée inverse sera très utilisée dans le chapitre. Dans la suite, on parle de transformée de Fourier aussi bien pour désigner les séries de Fourier (chapitre 2), la forme intégrale de Fourier (chapitre 3), ou les deux (chapitre 4).

Depuis son introduction, la transformée de Fourier est utilisée de manière intensive dans de nombreux domaines, notamment en théorie du signal, mais aussi dans le cadre qui nous intéresse de l'analyse des équations aux dérivées partielles. L'intérêt de cette transformation vient de ces deux propriétés fondamentales :

- ▷ La transformée de Fourier transforme la dérivation en produit.
- ▷ La transformée de Fourier est réversible : on peut ainsi ré-obtenir f à partir de sa transformée de Fourier.

L'utilisation de ces deux propriétés en fait un outil très commode pour l'étude des EDP, car une transformée de Fourier en espace transforme une équation aux dérivées partielles en une équation différentielle ordinaire (une seule variable est concernée par la dérivation), souvent bien plus simple à résoudre. Nous allons expliciter cette méthode grâce à l'exemple suivant sur l'équation de Schrödinger linéaire. Nous verrons ensuite à travers le lemme de la phase stationnaire un moyen d'étude des intégrales fournies par la transformée de Fourier. Enfin, nous introduirons la décomposition de Littlewood-Paley, un outil permettant de travailler sur l'espace des fréquences.

L'équation de Schrödinger linéaire et le groupe de Schrödinger

A travers l'étude de l'équation de Schrödinger linéaire, nous allons introduire ici le groupe de Schrödinger $\{e^{it\Delta}, t \in \mathbb{R}\}$. On part de l'équation de Schrödinger linéaire

$$i\partial_t u + \Delta u = 0.$$

Grâce à la transformée de Fourier en espace de u , on transforme cette EDP en équation différentielle ordinaire que l'on peut résoudre facilement. Si la transformée de Fourier inverse de cette solution est bien définie, nous obtenons alors une solution de notre EDP initiale. Cette méthode est résumée dans le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 i\partial_t u + \Delta u = 0 & \xleftarrow{\text{Solution}} & u(t, x) = e^{it\Delta} u(0, x) \\
 \downarrow \text{Transformée de Fourier} & & \uparrow \text{Transformée de Fourier inverse} \\
 i\partial_t \hat{u} - \xi^2 \hat{u} = 0 & \xrightarrow{\text{Résolution}} & \hat{u}(t, \xi) = e^{-it\xi^2} \hat{u}(0, \xi)
 \end{array}$$

Nous avons donc ici introduit la notation $e^{it\Delta}$, définissant un opérateur unitaire sur les espaces de Sobolev $e^{it\Delta} : H^s \rightarrow H^s$ (pour $s \in \mathbb{R}$), via la transformée de Fourier, comme lue dans le schéma ci-contre, par

$$u(t, x) = e^{it\Delta} f(t, x) \iff \hat{u}(t, \xi) = e^{-it\xi^2} \hat{f}(t, \xi). \quad (1.1.1)$$

On parle alors de groupe de Schrödinger car l'ensemble $\{e^{it\Delta}, t \in \mathbb{R}\}$ ainsi défini est un groupe pour la composition :

$$e^{it\Delta} e^{-is\Delta} = e^{i(t-s)\Delta}.$$

Sur le lemme de la phase stationnaire

Une autre propriété intéressante de la transformée de Fourier est la transformation d'un produit de fonctions en convolution :

$$\widehat{fg}(\xi) = c(\hat{f} * \hat{g})(\xi),$$

où la constante c dépend du choix de convention évoqué précédemment pour la transformée de Fourier.

Là où la transformée de Fourier permettait de traiter le cas linéaire de l'équation de Schrödinger directement, le cas non linéaire va poser plus de difficultés. En particulier, dans le cas qui nous intéresse d'une non-linéarité cubique (de la forme $|u|^2 u$), la transformée de Fourier va faire apparaître de la convolution et donc dans ce cas (cubique) une intégrale sur \mathbb{R}^2 . Ainsi, on va se ramener à étudier des intégrales dites oscillantes de la forme

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{it\varphi(x)} a(x) dx.$$

Dans la recherche de comportement en temps long de solutions, le lemme de la phase stationnaire va nous permettre de mettre en évidence le comportement asymptotique de ce genre d'intégrale.

Avant d'énoncer ce résultat, nous rappelons la définition de point critique non dégénéré. On considère $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ .

Définition. Un point x est appelé point critique de φ si

$$\varphi'(x) = 0.$$

Un point critique x de φ est dit non dégénéré si

$$\det(\varphi''(x)) \neq 0.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le lemme de la phase stationnaire :

Lemme de la phase stationnaire. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ admettant un seul point critique $x_c \in \mathbb{R}^n$, non dégénéré. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{it\varphi(x)} a(x) dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{it\varphi(x_c)} \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} |\det \varphi''(x_c)|^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(\varphi''(x_c))} a(x_c),$$

où $\operatorname{sgn}(\varphi''(x_c))$ est la signature de la hessienne de φ en x_c .

Bien que nous ne serons jamais dans la suite dans le cadre des hypothèses de ce résultat (en particulier pour les hypothèses de régularité sur a), le lemme de la phase stationnaire va nous permettre de mettre en évidence de manière intuitive les parties prépondérantes des intégrales de cette forme que nous rencontrerons dans les chapitres 3 et 4. Nous reviendrons plus en détail sur ce lemme et son utilisation dans nos calculs dans l'appendice B.

Un pas vers l'analyse harmonique et la décomposition de Littlewood-Paley

L'analyse harmonique est une branche des mathématiques directement liée à la transformée de Fourier. Elle consiste en partie en l'étude des relations entre l'espace des positions et l'espace des fréquences. On peut par exemple penser aux théorèmes de Paley-Wiener reliant la décroissance à l'infini d'une fonction à la régularité de sa transformée de Fourier.

Nous avons vu, via l'utilisation d'inégalités de dispersion dans le théorème de point fixe, l'importance des estimées a priori pour prouver l'existence de solutions. Dans cette optique, on utilisera dans le chapitre 4 un outil d'analyse harmonique : la décomposition de Littlewood-Paley. L'idée, pour mieux comprendre le comportement d'une fonction, est d'effectuer un découpage en fréquences de la fonction et d'étudier les différentes parties (grâce à une séparation basse-haute fréquences).

Une définition formelle de cette décomposition est introduite dans le chapitre 4.

1.1.3 Comportements linéaires et non linéaires

Qu'est-ce qu'un modèle satisfaisant d'équation aux dérivées partielles pour un physicien ? Comment aborder la recherche de solutions d'EDP pour un mathématicien ? Ces deux questions sont très liées à la question de non-linéarité.

Comme énoncé en introduction de ce manuscrit, le but premier des EDP est de modéliser tout type de phénomène, en particulier physique. De ce point de vue, une EDP sera satisfaisante quand elle décrira avec précision les phénomènes observés. Or, la plupart des phénomènes physiques observables mettent en évidence des comportements dit non linéaires (aussi bien en mécanique des fluides que des solides, qu'en biologie, chimie, géologie...). La compréhension des comportements non linéaires est donc probablement la frontière la plus importante dans notre compréhension de la nature.

Pour bien comprendre ce qu'est un comportement non linéaire, plaçons nous du point de vue du mathématicien. Face à une EDP non linéaire (ce qui, encore une fois, est souvent le cas pour les EDP décrivant précisément des phénomènes naturels), la première approche est de supprimer la non-linéarité et d'étudier l'EDP linéaire associée (par exemple grâce à la transformée de Fourier introduite précédemment). Cette équation linéaire est certes moins précise dans sa description des phénomènes observés, mais cette perte de précision est compensée par un énorme gain de facilité dans la résolution de l'équation. Tout type de comportement de solution mis en évidence pour l'équation linéaire est alors appelé comportement linéaire. À partir de cette étude, on peut alors passer à l'étude de l'équation non linéaire d'origine. On observe alors deux type de résultats :

- Soit les solutions de l'équation non linéaire vont tendre à reproduire des comportements de solutions de l'équation linéaire associée. C'est un résultat auquel l'on peut s'attendre lorsque par exemple la non-linéarité reste très petite (éventuellement grâce à la petitesse des conditions initiales). De ce point de vue, on peut distinguer deux grandes familles de résultats :

- ★ On peut premièrement penser aux résultats de scattering (ou diffusion) non linéaire. On dit justement qu'une solution exhibe du scattering si elle converge en temps long vers une solution de l'équation linéaire associée. De ce point de vue, on peut citer autour de l'équation de Schrödinger sur les espaces euclidiens, les travaux de Bourgain avec du scattering en norme H^1 sur \mathbb{R}^3 ([5]) ; les multiples travaux de Dodson (par exemple l'article [14] pour le cas de l'équation de Schrödinger cubique sur \mathbb{R}^3 pour obtenir une plus grande régularité pour le scattering) et le cas de l'équation de Schrödinger quintique traité par Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka et Tao sur \mathbb{R}^3 ([12]). Le cas des variétés hyperboliques a été également très étudié, on peut citer par exemple les travaux de Banica, Carles et Staffilani pour obtenir du scattering en norme H^1 sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 ([3]) ; le cas des plus grandes dimensions est traité d'une part par Banica, Carles et Duyckaerts ([2]), d'autre part par Ionescu et Staffilani ([35]) ; enfin, on peut citer l'article de Ionescu, Pausader et Staffilani sur la mise en évidence de scattering pour le cas critique de l'équation de Schrödinger quintique sur \mathbb{H}^3 ([34]).
- ★ Une autre approche pour trouver des solutions qui reproduisent des comportements de solutions des équations linéaires est donnée par la théorie KAM. Le but d'un théorème KAM (le mot KAM vient des mathématiciens Kolmogorov, Arnold et

Moser qui ont développé cette théorie entre 1954 et 1963) est d'étudier la persistance de tores invariants soumis à de petites perturbations. Ainsi, en perturbant une EDP linéaire en ajoutant un petit terme non linéaire, ou en examinant le comportement de perturbations des solutions linéaires dans le cas de l'EDP non linéaire, on pourra étudier la persistance des tores invariants décrits par les solutions du cas linéaire. Autour de cette idée, on peut citer les travaux de Kuksin (dont le livre [39], reprenant ses travaux sur la théorie KAM et les EDP), et les travaux de Pöschel (notamment l'article [45] sur un théorème KAM pour des systèmes hamiltoniens de dimension infinie). On peut également citer le travail des deux auteurs précédemment cités, Kuksin et Pöschel, qui ont mis en évidence un grand nombre de tores conservés pour un large choix de non-linéarité sur l'équation de Schrödinger ([40]).

- Soit les solutions de l'équation non linéaire présentent un nouveau type de comportement, plus exotique. Tout nouveau type de comportement (par nouveau on entend absent du cas linéaire), sera alors appelé comportement non linéaire. On recense de nombreux types de comportements non linéaires, parmi lesquels on peut citer, toujours autour de l'équation de Schrödinger :

- ★ L'explosion des solutions en temps fini. Un premier exemple de comportement non linéaire est donné par l'explosion de la norme des solutions en temps fini. De nombreux articles traitent cette question, avec différents paramètres (le choix de l'espace des positions, d'un potentiel, de la non-linéarité...). Parmi ces nombreux résultats, on peut citer, pour l'équation de Schrödinger, l'étude de Merle et Raphael dans [43]. Néanmoins, dans notre cas, on a conservation de l'énergie des solutions. En particulier, la norme de Sobolev H^1 étant conservée, elle ne pourra pas exploser. On ne cherchera donc pas dans ce manuscrit à mettre en évidence ce type de comportements. L'idée sera donc pour nous de considérer des petites perturbations du cas linéaire (via des petites non-linéarités et des données initiales petites), et de trouver des comportements non linéaires plus "fins".
- ★ La croissance des normes Sobolev des solutions (par la construction de cascades d'énergie). Plutôt qu'une explosion en temps fini, on peut mettre en évidence d'autres types de croissance des normes Sobolev. On peut citer sur ce point les travaux réalisés sur le tore \mathbb{T}^2 par Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka et Tao dans [13] puis par Guardia et Kaloshin dans [25], par Haus et Procesi dans [30], et enfin par Guardia, Haus et Procesi dans [24]. Dans les quatre articles cités, le but est de montrer qu'en temps fini, une solution partant d'une donnée initiale arbitrairement petite peut devenir arbitrairement grande. Pour un comportement en temps infini, le premier résultat de croissance des normes Sobolev pour l'équation de Schrödinger vient de l'article [27] de Hani, Pausader, Tzvetkov et Visciglia via une étude de l'équation sur l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$ (avec $2 \leq d \leq 4$).
- ★ L'existence de solitons. Déjà introduite concernant l'équation de Korteweg-de Vries, on a évoqué que pour obtenir ce genre de solution, il faut que la non-linéarité compense la dispersion de l'équation linéaire, ce qui n'est pas le cas par exemple pour l'équation de Schrödinger cubique dite défocalisante

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u.$$

Par contre, pour le cas focalisant (avec un signe $-$ devant la non-linéarité cubique), on peut voir dans le livre [47] de Catherine Sulem et Pierre-Louis Sulem la mise en évidence de solitons. On peut aussi choisir un autre type de non-linéarité, comme par exemple dans l'équation dite de Schrödinger dérivée. Dans cette équation, provenant de l'étude de plasmas en magnétohydrodynamique ou de l'optique non linéaire, la non-linéarité est la différentielle en espace d'une non-linéarité cubique. De nombreux travaux, basés sur des méthodes de scattering inverse, ont mis en évidence l'existence de solitons dans ce cas. On peut citer par exemple l'article de Chen, Xiang-Jun et leurs collaborateurs ([11]) sur l'étude de l'existence de solitons et leurs collisions.

- ★ La mise en évidence d'échanges d'énergie. Le but ici est de montrer que différents modes de la solution (ou du couple de solutions dans le cas d'un système) échangent de l'énergie en temps long. Sur ce type de comportement, en temps fini, on peut citer l'article de Grébert et Villegas-Blas ([23]) dans le cas d'une non-linéarité cubique perturbée par un cosinus ; l'article de Grébert et Thomann ([22]) puis celui de Haus et Thomann ([32]) sur l'équation de Schrödinger quintique ; et l'article de Grébert, Paturel et Thomann sur un système de deux équations de Schrödinger cubiques couplées ([20]). Le second chapitre de ce manuscrit s'appuie sur ce dernier résultat. En temps infini, Takaoka a mis en évidence un échange d'énergie sur l'équation de Schrödinger dérivée ([48]). On peut également citer, pour l'équation de Schrödinger quintique, le travail de Procesi et Haus ([31]) pour construire des solutions quasi-périodiques convergeant en temps infini vers des solutions d'un modèle réduit qui échangent de l'énergie, à l'aide d'un théorème KAM.
- ★ L'instabilité de tores linéaires. Toujours à l'aide de théorèmes KAM, on peut mettre en évidence des phénomènes d'instabilité linéaire. On peut de nouveau ici citer le livre de Kuksin [39] dans lequel il exhibe des tores linéaires instables pour l'équation de Sine-Gordon. Autour de Schrödinger, on peut citer les résultats "d'instabilité modulaire", obtenus en perturbant le module et la phase de solutions linéaires. Une vue d'ensemble de ce type d'instabilité et les références associées sont données par Sulem et Sulem dans [47].
- ★ Des modifications de résultats de scattering. Si les résultats de scattering mettent en évidence des comportements linéaires, des perturbations de ces résultats peuvent permettre d'exhiber des comportements non linéaires. Nous reviendrons sur le type de modifications possibles dans la sous-partie 1.2.4. Les troisièmes et quatrièmes chapitres de ce manuscrit s'inscrivent dans cette optique, en proposant chacun un type de modification du scattering linéaire.

Cette diversité de comportements non linéaires pour l'équation de Schrödinger contrastée par la simplicité de l'équation en fait un modèle d'EDP très intéressant. C'est une des raisons du choix de cette équation pour ce manuscrit, et c'est l'occasion pour nous ici de nous pencher un peu plus sur l'équation de Schrödinger. En particulier, nous allons justifier le choix d'étude du système de deux équations de Schrödinger cubiques couplées.

1.2 À propos de l'équation de Schrödinger

Dans l'introduction des équations aux dérivées partielles, nous avons évoqué la démarche scientifique visant à associer aux systèmes physiques des variables dynamiques, obéissant à une EDP. La physique classique, portée par les lois de la mécanique de Newton en 1687 puis les lois de l'électromagnétisme de Maxwell en 1865, s'est alors développée en accord avec les nouvelles découvertes expérimentales, du moins jusqu'à la fin du XIX^{ème} siècle.

Du point de vue de la physique classique, on distingue deux types d'objets pour former l'univers :

- ▷ La matière, faite de corpuscules, dont la position et la vitesse obéissent aux lois de Newton.
- ▷ Le rayonnement, obéissant aux lois de l'électromagnétisme de Maxwell.

La physique classique semblait régir tous les phénomènes observés, de la mécanique céleste à l'étude des solides macroscopiques, et même microscopiques. Pourtant, avec l'avancée des découvertes sur l'atome, beaucoup de résultats expérimentaux sur l'interaction entre la matière et le rayonnement (effet photoélectrique, effet Compton...) entrèrent en contradiction avec la théorie classique de la physique. Deux limites apparaissent alors :

- ▷ Le traitement des grandes vitesses (de l'ordre de la vitesse de la lumière). Ce cas limite donne lieu à la physique relativiste (introduite par Einstein). La physique classique apparaît alors comme étant un cas particulier dans lequel les vitesses sont négligeables devant la vitesse de la lumière.
- ▷ Le traitement des corps à l'échelle atomique. Ce cas limite donne lieu à la physique quantique. C'est le cas qui nous intéresse ici.

Afin de traiter le cas de ces contradictions expérimentales sur le cas de l'étude au niveau atomique, et en particulier pour expliquer les discontinuités observées, deux théories sont introduites en 1925 : la mécanique des matrices d'Heisenberg, et la mécanique ondulatoire de Schrödinger. Erwin Schrödinger montra l'année suivante que ces deux théories sont équivalentes. C'est à partir de ces travaux qu'est née la théorie quantique, formalisée par Dirac en 1958.

Là où la physique classique modélisait une particule par un point dans l'espace et écrivait les équations définissant la position et la vitesse de ce point, l'idée nouvelle de Louis de Broglie (1924), reprise par Erwin Schrödinger est de considérer une fonction d'onde, donc le module décrit la densité de probabilité de présence d'un électron dans une région donnée à un temps donné. Ainsi, par son équation, Schrödinger modélise l'évolution dans le temps de la fonction d'onde d'une petite particule massique non relativiste (sa vitesse est négligeable devant la vitesse de la lumière). De ce point de vue, l'équation de Schrödinger en mécanique quantique joue le rôle du principe fondamental de la dynamique de Newton en mécanique classique. C'est donc une pierre angulaire de la mécanique quantique, depuis utilisée pour décrire des phénomènes dans de nombreux autres domaines, parmi lesquels l'optique non linéaire, l'étude des condensats de Bose-Einstein, la physique des plasmas, l'astrophysique, la chimie...

Dans la suite de cette partie, nous allons voir pourquoi le choix de la non-linéarité cubique est intéressant du point de vue physique et mathématique. Nous verrons ensuite

en quoi le choix du système de Schrödinger cubique couplé offre un cadre idéal pour la recherche de comportements non linéaires. À travers ce système, et grâce à un exemple d'équation différentielle ordinaire, nous introduirons la formule de Duhamel pour la recherche de solutions et la notion de scattering pour le comportement asymptotique de ces solutions. Enfin, nous verrons en quoi à travers ces notions les profils apparaissent naturellement.

1.2.1 De Schrödinger linéaire à Schrödinger cubique

De par ses multiples applications, l'équation de Schrödinger, sous ses multiples formes (ajout de potentiels, choix de la non-linéarité, choix de l'espace des positions...), suscite logiquement beaucoup d'intérêt. Le parti pris de ce manuscrit est de partir de l'équation de Schrödinger cubique défocalisante :

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u.$$

Le choix de la non-linéarité cubique provient de considérations physiques et mathématiques.

L'équation de Schrödinger cubique est un des modèles les plus importants en physique non linéaire. On retrouve cette équation dans l'étude de la propagation de la lumière en optique non linéaire et la propagation de faisceaux laser dans la ionosphère. D'autres exemples sont données par l'étude des ondes de gravité de faible amplitude à la surface de l'eau, les collisions d'ions lourds en physique nucléaire, ou encore l'étude des plasmas chauds (via la fréquence de Langmuir). Au contraire, pour des températures proches du zéro absolu, on retrouve des généralisations de l'équation de Schrödinger cubique à travers l'équation de Ginzburg-Landau (1950) pour étudier les supraconducteurs, ou l'équation de Gross-Pitaevskii (1961) pour l'étude des condensats de Bose-Einstein. Le choix de la non-linéarité cubique provient également de la précision de ce modèle pour décrire les interactions entre les particules lorsque l'on étudie un système quantique composé d'un grand nombre de particules.

Du point de vue mathématique, ce choix est tout autant légitime. L'idée est d'avoir une équation :

- ▷ avec une non-linéarité petite car on s'intéresse à des perturbations de systèmes linéaires.
- ▷ hamiltonienne car, en plus d'être le cas le plus physique, la structure hamiltonienne offre un cadre de travail privilégié.

Considérant des non-linéarités petites, l'idée est alors d'effectuer un développement limité de la non-linéarité en 0 pour obtenir une non-linéarité polynomiale. Pour rester dans le cadre hamiltonien (comme l'équation linéaire), il est alors nécessaire que les monômes soient de degré impair. On obtient alors une équation de la forme

$$i\partial_t u + \Delta u = \sum_{k \geq 0} \alpha_k |u|^{2k} u \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Les coefficients α_k sont choisis réels pour assurer la conservation de la masse (c'est à dire ici la norme L^2) des solutions. On remarque dans un premier temps que l'on peut éliminer

les termes linéaires du terme de droite de l'équation par un changement de variable, appelé plus couramment dans ce cas changement de jauge :

$$v(t, x) := e^{i\alpha_0 t} u(t, x).$$

En effet, la nouvelle inconnue v , ainsi définie, vérifie l'équation

$$i\partial_t v + \Delta v = \sum_{k \geq 1} \alpha_k |v|^{2k} v \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

De plus, par le choix de petitesse des conditions initiales, les termes dominants de la non-linéarité sont donnés par les monômes de plus petits degrés. De ce point de vue, le premier choix logique de non-linéarité est le choix cubique (le terme quintique et les suivants sont négligeables devant le terme cubique). On obtient alors une équation du type

$$i\partial_t u + \Delta u = \alpha |u|^2 u \quad \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Le module $|\alpha|$ n'a généralement pas d'influence sur le comportement des solutions, on peut se ramener à $|\alpha| = 1$ par un changement d'échelle sur les solutions. En revanche, le signe de α revêt une grande importance, en séparant le cas de l'équation dite focalisante (avec $\alpha < 0$) de l'équation dite défocalisante (avec $\alpha > 0$). Néanmoins, étant dans le cadre de données initiales petites et donc d'une petite non-linéarité, la différence entre les deux cas (focalisant ou défocalisant) ne joue pas de rôle majeur. Dans la suite, on choisit donc $\alpha = 1$. Nous allons maintenant justifier le choix de l'étude de systèmes de Schrödinger couplés dans ce manuscrit.

1.2.2 De l'équation cubique au système cubique couplé

Nous avons jusqu'ici peu parlé du choix de l'espace des positions. Si le choix de l'étude de l'équation de Schrödinger sur la droite réelle permet de profiter du caractère dispersif de l'équation (introduit dans la sous-partie 1.1.1) et joue donc un rôle sur le type de comportement des solutions, le choix de l'étude sur le cercle (donc de solutions périodiques) permet quant à lui de travailler sur les résonances dans l'équation pour espérer mettre en évidence des comportements non linéaires. Ainsi, l'étude de l'équation de Schrödinger sur les tores, via les résonances et l'absence de dispersion, semble offrir plus de possibilités de comportements non linéaires que l'étude sur la droite réelle, où les inégalités de dispersion et le choix de données initiales petites semblent promettre un comportement proche du comportement linéaire en temps long.

De ce point de vue, et dans l'optique d'étudier une équation la plus simple possible, le premier candidat semble être l'équation de Schrödinger cubique sur le cercle :

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u, \quad x \in \mathbb{T}.$$

Or, depuis les travaux de Zakharov et Shabat en 1971 ([55]) par des méthodes de scattering inverse, et jusqu'à la mise en place formelle d'un système de coordonnées globales action-angle par Grébert et Kappeler en 2014 ([19]), on sait que l'équation de Schrödinger cubique sur le tore est intégrable au sens de Liouville. En particulier, par cette intégrabilité, on sait que beaucoup de quantités sont conservées (la masse, le moment, l'énergie,

et une infinité d'autres quantités). Cette rigidité semble nous éloigner de la mise en évidence d'un comportement non linéaire. Pour sortir de ce cadre trop restrictif, plusieurs solutions sont envisageables et ont été pour la plupart déjà introduites dans l'étude des comportements non linéaires :

- ▷ Sortir du cubique en regardant une autre non-linéarité. Plusieurs choix sont possibles. On peut ajouter des résonances en perturbant la non-linéarité (par exemple l'ajout d'un cosinus dans [23], par Grébert et Villegas). On peut aussi plus simplement sortir du cas cubique, par exemple en regardant le cas de la non-linéarité quintique ([22],[31],[32]...).
- ▷ Changer de dimension. Le résultat d'intégrabilité de Zakharov et Shabat étant lié à la dimension 1, une solution est donc de regarder le cas d'une variable d'espace sur le tore à d dimensions \mathbb{T}^d pour $d \geq 2$. On peut dans cette optique rappeler les résultats de croissance des normes Sobolev en temps fini de Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka et Tao dans [13] ou de Guardia et Kaloshin dans [25]. Dans la même idée de construire des cascades d'énergie, on peut également citer le résultat de Carles et Faou ([8]) pour la création de modes arbitrairement grands. Enfin, pour la mise en évidence d'une croissance des normes Sobolev en temps infini, on peut penser au travail de Hani, Pausader, Tzvetkov et Visciglia ([27]) sur l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$, avec $2 \leq d \leq 4$, qui utilise également, via l'étude d'un système résonant, la construction de cascades d'énergie lorsque l'on sort de la dimension 1 sur le tore.
- ▷ Ajouter un potentiel ou un obstacle. Depuis les années 60-70 avec des travaux, entre autres, de Rauch, Reed, Simon, Wilcox ou encore Zakharov, la question d'existence de scattering après perturbation par un potentiel, ou à l'extérieur d'un domaine (présence d'un obstacle) a été très largement traitée. On voit à travers ces exemples qu'une perturbation du cas linéaire pose déjà plusieurs problèmes techniques. Ainsi, pour rester autour d'une non-linéarité cubique, cette option ne sera pas choisie ici. Une autre possibilité, moins physique, pourrait être d'ajouter un potentiel de convolution. L'ajout d'un tel potentiel a tendance à tuer les résonances, et donc plutôt tendance à tuer les comportements non linéaires induits par ses résonances (comme par exemple dans [21]). Ce n'est donc pas la solution envisagée dans cette thèse.
- ▷ Passer au système couplé. En considérant plusieurs équations de Schrödinger couplées entre elles par des non-linéarités cubiques, on peut espérer que les termes de couplage génèrent des nouveaux types de comportements. C'est l'idée développée par Grébert, Paturel et Thomann dans [20] avec la mise en évidence d'échanges d'énergie entre les modes des solutions.

Parce qu'elle permet de rester en dimension 1 (les calculs sont donc plus simples) et de rester dans le cas cubique (qui est à la fois le cas le plus physique, et la non-linéarité la plus simple pour rester dans le cadre hamiltonien), c'est cette dernière option qui a été choisie dans ce manuscrit. De nombreux choix de couplages cubiques sont alors envisageables.

Par exemple, Li et Sunagawa proposent dans [41] un système couplé de la forme :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2m_1} \Delta u &= \lambda_1 |u|^2 u + \nu_1 \bar{u}^2 v, \\ i\partial_t v + \frac{1}{2m_2} \Delta v &= \lambda_2 |v|^2 v + \nu_2 u^3, \end{cases}$$

avec $m_1, m_2 \in \mathbb{R}^*$, et $\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{C}$. On pourrait faire ce choix et étudier l'influence des paramètres ici (ce que les auteurs ont fait sur \mathbb{R} pour obtenir diverses inégalités de dispersion). Par contre, ce choix ne conserve pas la structure hamiltonienne de l'équation de Schrödinger cubique, et ne sera donc pas étudié dans ce manuscrit.

Pour obtenir un système cubique couplé conservant la structure hamiltonienne, on peut penser à l'exemple de Manakov ([42]) :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u &= |u|^2 u + |v|^2 u, \\ i\partial_t v + \Delta v &= |v|^2 v + |u|^2 v. \end{cases}$$

Le problème ici est que ce système est intégrable sur le tore. De ce fait, pour la même raison que pour l'équation de Schrödinger cubique, nous n'étudierons pas cette forme de couplage.

Ainsi, suite aux travaux de Grébert, Paturel et Thomann dans [20], le couplage retenu sera le couplage suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u &= |v|^2 u, \\ i\partial_t v + \Delta v &= |u|^2 v. \end{cases}$$

Du point de vue physique, ce genre de système apparaît lors du couplage de deux guides d'ondes en optique, lors de l'étude de deux composants polarisés orthogonalement voyageant à différentes vitesses, ou encore l'étude de deux impulsions d'ondes portées par des fréquences différentes mais avec la même polarisation. Pour ces trois exemples, on peut se référer au livre "Contemporary Nonlinear Optics" ([1]) de Agrawal et Boyd pour voir apparaître ce système dans la description de ces phénomènes.

1.2.3 La formule de Duhamel

Nous allons ici introduire la formule de Duhamel, un outil primordial qui sera la base de nos calculs dans les chapitres 3 et 4. Pour ce faire, nous allons étudier l'équation différentielle ordinaire (EDO) de type Ricatti suivante :

$$y'(t) + y(t) = y^2(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.2.1)$$

Les solutions de l'équation linéaire associée (appelée aussi équation homogène) sont données par

$$y(t) = ce^{-t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

De part la forme de ces solutions, nous effectuons le changement de variable $z(t) := e^t y(t)$, visant à supprimer le terme linéaire. L'équation devient alors

$$z'(t) = e^t y^2(t).$$

Par la formule fondamentale de l'analyse, on obtient alors, pour $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t e^s y^2(s) ds.$$

Ainsi, si l'intégrale est bien définie, la solution y de l'EDO (1.2.1) vérifie

$$y(t) = e^{(t_0-t)} y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-(t-s)} y^2(s) ds.$$

C'est cette formule que l'on appelle formule de Duhamel, du nom de Jean-Marie Duhamel, qui avait le premier introduit cette méthode pour résoudre l'équation de la chaleur au XIX^{ème} siècle. Pour les équations aux dérivées partielles, comme l'équation de la chaleur ou l'équation de Schrödinger, la méthode est en effet la même. Par exemple, pour la première équation de notre système :

$$i\partial_t u(t, x) + \Delta u(t, x) = |v(t, x)|^2 u(t, x).$$

On a vu grâce à la transformée de Fourier que les solutions de l'équation linéaire associée sont données par $u(t, x) = e^{it\Delta} u_0(x)$, où l'opérateur $e^{it\Delta}$ est défini via l'équation (1.1.1). Ainsi, pour éliminer le terme linéaire de l'équation, on effectue le changement de variable

$$f(t, x) = e^{-it\Delta} u(t, x).$$

Par la formule fondamentale de l'analyse une nouvelle fois, on obtient alors, pour $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$f(t, x) = f(t_0, x) - i \int_{t_0}^t e^{-is\Delta} (|v(s, x)|^2 u(s, x)) ds.$$

La formule de Duhamel pour u est ainsi donnée par :

$$u(t, x) = e^{i(t-t_0)\Delta} u(t_0, x) - i \int_{t_0}^t e^{i(t-s)\Delta} (|v(s, x)|^2 u(s, x)) ds.$$

De la même manière, on obtient une formule de Duhamel symétrique pour v . Ainsi, on introduit l'application $\Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v))$, via les formules de Duhamel de u et de v , par

$$\begin{cases} \Phi_1(u, v) = e^{i(t-t_0)\Delta} u(t_0, x) - i \int_{t_0}^t e^{i(t-s)\Delta} (|v(s, x)|^2 u(s, x)) ds, \\ \Phi_2(u, v) = e^{i(t-t_0)\Delta} v(t_0, x) - i \int_{t_0}^t e^{i(t-s)\Delta} (|u(s, x)|^2 v(s, x)) ds. \end{cases}$$

Un couple (u, v) sera alors solution du système (1.0.1) si et seulement si $\Phi(u, v) = (u, v)$. Comme évoqué dans l'introduction du théorème du point fixe, le but est donc maintenant, pour obtenir l'existence et l'unicité des solutions, de montrer que Φ admet un unique point fixe. La question qui se pose est alors de trouver le bon espace (donc la bonne norme) pour effectuer un théorème de point fixe. En particulier, on revoit ici apparaître le rôle des inégalités de dispersion et des données initiales petites dans le but de montrer que dans le bon espace complet choisi, l'application Φ est contractante.

1.2.4 Scattering et scattering modifié

Dans les chapitres 3 et 4 du manuscrit, nous exhiberons des résultats de scattering modifié. Avant de définir ces modifications, nous allons ici définir c'est que sont le scattering et les opérateurs des ondes associés, et mettre en évidence ce type de comportement à l'aide d'un exemple d'EDO.

Pour parler de scattering sur l'équation de Schrödinger cubique, le bon cadre pour l'espace des positions est l'espace \mathbb{R}^d , pour $d \geq 2$. On étudie donc ici l'équation

$$i\partial_u + \Delta_{\mathbb{R}^d} u = |u|^2 u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d. \quad (1.2.2)$$

On dit qu'une solution u de cette équation exhibe du scattering vers une fonction W de x si, pour une certaine norme N définie sur l'espace des positions,

$$\|u(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{R}^d}} W\|_{N_x} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0. \quad (1.2.3)$$

Par définition, $e^{it\Delta_{\mathbb{R}^d}} W$ est une solution de l'équation linéaire associée à l'équation (1.2.2). Ainsi, une solution exhibe du scattering si elle se comporte, en temps long, comme une solution de équation linéaire associée.

Si la norme permet de passer à la transformée de Fourier (ce qui est le cas des normes Sobolev), une définition équivalente du scattering peut être donnée. On dira alors qu'une solution u de l'équation (1.2.2) exhibe du scattering vers une fonction W de x si

$$\|\hat{u}(t) - e^{-it|\xi|^2} \hat{W}\|_{\tilde{N}_\xi} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0, \quad (1.2.4)$$

où la norme \tilde{N} sur l'espace des fréquences est la norme duale par transformée de Fourier de la norme N sur l'espace des positions.

Après avoir mis en place un résultat de scattering, la question naturelle qui se pose est la question de la complétude de ce résultat. Si l'on montre que chaque solution u exhibe du scattering vers une fonction W dans un certain espace fonctionnel sur l'espace des positions, peut-on inverser le résultat ? Autrement dit, pour une fonction W quelconque de cet espace fonctionnel, existe-t-il une solution u qui exhibe du scattering vers W ? Si la réponse est positive, l'opérateur

$$WO : W \mapsto u \quad \text{solution de (1.2.2), tel que } \|u(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{R}^d}} W\|_{N_x} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0,$$

est appelé opérateur d'ondes (Wave Operator en anglais). Lorsque l'on a existence et unicité de la solution du problème de Cauchy (pour l'équation initiale ou pour l'équation linéaire), on peut faire l'analogie dans l'opérateur d'ondes entre la solution et sa condition initiale. Notons qu'il est souvent plus simple de construire un opérateur d'ondes (donc trouver une solution ayant le comportement asymptotique voulu) que de construire un résultat de scattering (connaître le comportement asymptotique de chaque solution donnée). Nous pouvons maintenant illustrer par un exemple simple d'EDO les définitions de scattering et d'opérateur d'ondes.

Un exemple de scattering via une EDO

Une nouvelle fois, prenons comme exemple l'équation différentielle de type Riccati suivante

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = y^2(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Dans un premier temps, on peut résoudre explicitement cette équation. Si $0 < y_0 < 1$, alors l'équation admet pour solution globale la fonction y définie par

$$y(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y_0} - 1\right)e^t}.$$

Nous cherchons ici à mettre en évidence un comportement en temps long, ainsi on choisit dans la suite $0 < y_0 < 1$ (pour éviter les explosions ou les solutions constantes $y \equiv 0$ et $y \equiv 1$). Rappelons également que les solutions de l'équation linéaire associée sont données par

$$y(t) = y(0)e^{-t}, \quad y(0) \in \mathbb{R}.$$

Pour mettre en évidence un résultat de scattering pour l'équation (1.2.5), nous repartons de la formule de Duhamel pour l'équation en définissant

$$\Phi(y)(t) := e^{-t}y_0 + \int_0^t e^{-(t-s)}y^2(s)ds,$$

On cherche maintenant une bonne norme pour effectuer un théorème de point fixe en montrant que Φ est contractante. De la définition de Φ , on obtient

$$e^t\Phi(y)(t) = y_0 + \int_0^t e^s y^2(s)ds.$$

Au regard du terme de gauche de l'équation, on introduit la norme

$$\|y\| := \sup_{t>0} |e^t y(t)|.$$

On obtient alors

$$\|\Phi(y)\| \leq |y_0| + \sup_{t>0} \int_0^t e^{-s} \|y\|^2 ds \leq |y_0| + \|y\|^2.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on définit alors notre espace dans lequel appliquer le théorème de point fixe par

$$B_{\|\cdot\|}(2\varepsilon) := \{y, \|y\| \leq 2\varepsilon\}.$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et pour une petite donnée initiale vérifiant $|y_0| \leq \varepsilon$, on a

$$\|\Phi(y)\| \leq \varepsilon + 4\varepsilon^2 = \varepsilon(1 + 4\varepsilon) \leq 2\varepsilon \quad \text{dès que} \quad \varepsilon < \frac{1}{4}.$$

L'application Φ satisfait donc $\Phi : B_{\|\cdot\|}(2\varepsilon) \mapsto B_{\|\cdot\|}(2\varepsilon)$. Montrons maintenant que Φ est une contraction. Pour $y, z \in B_{\|\cdot\|}(2\varepsilon)$ on a

$$(\Phi(y) - \Phi(z))(t) = \int_0^t e^{-(t-s)}(y^2(s) - z^2(s))ds = \int_0^t e^{-(t-s)}(y(s) - z(s))(y(s) + z(s))ds.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \|\Phi(y) - \Phi(z)\| &\leq \sup_{t>0} \left| \int_0^t e^{-s} e^s |y(s) - z(s)| e^s |y(s) + z(s)| ds \right| \\ &\leq \|y - z\| \|y + z\| \leq \|y - z\| (\|y\| + \|z\|) \leq 4\varepsilon \|y - z\|. \end{aligned}$$

Pour ε suffisamment petit (toujours $\varepsilon < \frac{1}{4}$), on a donc une contraction, et ainsi existence et unicité d'une solution à notre équation différentielle par le théorème de point fixe.

Maintenant, pour étudier le comportement en temps long de notre solution y , on introduit

$$y_0^+ := y_0 + \int_0^{+\infty} e^s y^2(s) ds = \frac{y_0}{1 - y_0}.$$

Par nos calculs précédents, on a donc scattering de la solution y de (1.2.2) vers la solution de l'équation linéaire $t \mapsto e^{-t} y_0^+$ dans le sens suivant :

$$e^t |y(t) - e^{-t} y_0^+| = \left| \int_t^{+\infty} e^s y^2(s) ds \right| \leq e^{-t} \|y\|^2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

On remarque que $t \mapsto e^{-t} y_0^+$ est une solution de l'équation linéaire associée à (1.2.2), avec pour condition initiale $y_0^+ \neq y_0$. Ainsi, la solution y de (1.2.2) se comporte en temps long comme une solution de l'équation linéaire associée avec une condition initiale différente. C'est très souvent le cas dans un résultat de scattering, autrement dit, l'opérateur d'ondes est rarement l'identité. Dans notre exemple, en identifiant la solution du problème de Cauchy à sa condition initiale, l'opérateur d'ondes est donc donné par

$$\begin{aligned} WO :]0, +\infty[&\longrightarrow]0, 1[\\ y_0^+ &\longmapsto y_0 = \frac{y_0^+}{1 + y_0^+}. \end{aligned}$$

Les modifications du scattering

Par sa définition, un théorème de scattering est donc un résultat qui montre que la solution d'une EDP non linéaire se comporte en temps long comme une solution de l'équation linéaire associée. Or, le but de cette thèse est l'étude de comportements non linéaires. De ce point de vue, les résultats de scattering ne sont pas adaptés. On cherchera donc ici à obtenir des modifications de scattering, de deux types différents.

Dans un premier temps, dans le chapitre 3, nous mettrons en évidence une modification du scattering par un terme de déphasage. Le but est d'obtenir une modification de la définition (1.2.4) dans l'espace des fréquences du scattering, du type

$$\|\hat{u}(t) - e^{i\varphi(\hat{u}(t))} e^{-it\xi^2} \hat{W}\|_{\tilde{N}_\xi} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

où $u(t, x)$ est la solution de l'équation de Schrödinger considérée, \hat{W} est une fonction ne dépendant pas du temps, $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, et \tilde{N} une norme sur l'espace des fréquences. Le nouveau terme $e^{i\varphi(u(t))}$ est de module 1, c'est un terme de déphasage. Ce type de résultat a été introduit pour l'équation de Schrödinger par Ozawa en 1991 dans [44], en considérant une non-linéarité cubique et une non-linéarité plus grande (mais sous quintique), sur \mathbb{R} . Le cas de la dimension supérieure (\mathbb{R}^n pour $n = 2$ ou 3) est traité par Ginibre et Ozawa en 1993 dans [17]. Depuis, plusieurs articles exhibent ce genre de modification de scattering, dont les travaux de Hayashi et Naumkin dans [33] et de Kato et Pusateri dans [37]. L'enjeu du chapitre 3 sera alors d'appliquer le travail de Kato et Pusateri au cas du système de Schrödinger cubique couplé (1.0.1) sur l'espace euclidien \mathbb{R} .

Dans un second temps, dans le chapitre 4, nous présenterons une modification plus profonde du scattering, en écrivant que les solutions n'exhibent plus de scattering vers une

solution de l'équation linéaire associée, mais du scattering vers une solution d'une autre équation, plus simple, appelée équation résonante. On obtient donc une modification de la définition (1.2.3) du scattering, du type

$$\|u(t) - e^{it\Delta}W(t)\|_{N_x} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

où $u(t, x)$ est la solution de l'équation de Schrödinger considérée, W est solution de l'équation différentielle dite résonante, et N une norme sur l'espace des positions. Avec un tel résultat de scattering modifié, l'idée est alors de trouver des comportements non linéaires pour l'équation résonante, et construire un opérateur d'ondes pour trouver des solutions de l'équation de Schrödinger qui miment ces comportements en temps long. C'est l'idée qui a été développée par Hani, Pausader, Tzvetkov et Visciglia dans [27] pour construire, grâce au système résonant déjà étudié par Hani dans [26], des solutions de l'équation de Schrödinger cubique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$ ($2 \leq d \leq 4$) dont les normes Sobolev grandissent en temps infini. Cette méthode a par la suite été adaptée, autour de l'équation de Schrödinger cubique, à travers des modifications de l'équation (voir par exemple les articles [21], [28], [54]). L'enjeu du chapitre 4 sera donc d'appliquer cette méthode au cas du système de Schrödinger cubique couplé (1.0.1) sur l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$.

À travers ces deux types de modification de scattering, on voit apparaître une notion de non-linéarité critique pour passer de résultats de scattering à des résultats de scattering modifié. On voit à travers les exemples cités que sur \mathbb{R} , cette non-linéarité critique est la non-linéarité cubique. C'est ici une autre raison profonde pour le choix de la non-linéarité cubique dans ce manuscrit.

1.2.5 Introduction des profils

Pour mettre en évidence les résultats de scattering dans les chapitres 3 et 4, nous allons travailler sur les profils des couples de solutions (u, v) du système (1.0.1), définis par

$$f(t, x) := e^{-it\Delta}u(t, x), \quad g(t, x) := e^{-it\Delta}v(t, x).$$

Nous allons voir ici en quoi l'introduction de ces profils est naturelle dans notre cadre d'étude, à travers la formule de Duhamel et la notion de scattering.

Tout d'abord, nous pouvons remarquer que ce n'est pas la première fois quand les profils sont introduits dans cette introduction. En effet, c'est le changement de variable qui a été choisi dans la construction de la formule de Duhamel pour u . La propriété intéressante des profils utilisée ici est le fait que l'équation d'évolution satisfaite par ceux-ci est devenue une équation différentielle ordinaire, car la conjugaison par le flot linéaire $e^{it\Delta}$ permet de supprimer les dérivations en espace. On obtient en effet :

$$\begin{cases} i\partial_t f(t) &= e^{-it\Delta} \left(e^{it\Delta} g(t) e^{-it\Delta} \overline{g(t)} e^{it\Delta} f(t) \right), \\ i\partial_t g(t) &= e^{-it\Delta} \left(e^{it\Delta} f(t) e^{-it\Delta} \overline{f(t)} e^{it\Delta} g(t) \right). \end{cases}$$

C'est ainsi que l'on a d'abord écrit la formule de Duhamel pour f (et aussi par symétrie pour g) avant de l'écrire pour le couple (u, v) . On retrouve ici l'importance du travail dans l'espace des fréquences de Fourier (car on a défini l'opérateur $e^{it\Delta}$ via sa transformée de Fourier).

L'importance des profils se lit aussi dans les résultats de scattering. Si l'opérateur $e^{it\Delta}$ est unitaire sur les espaces de positions considérés (ce qui est le cas sur les espaces de Sobolev H^s), alors on a

$$\|u(t) - e^{it\Delta}W\|_{N_x} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|f(t) - W\|_{N_x} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, si $f(t)$ converge vers une fonction indépendante du temps W , alors on a scattering de la solution $u = e^{it\Delta}f(t, x)$ vers la solution de l'équation linéaire associée de condition initiale W . Dans cette optique, la recherche d'un résultat de scattering, éventuellement modifié, est plus simple du point de vue des profils des solutions.

On retrouve ce rôle du profil dans l'exemple d'équation différentielle (1.2.5) étudiée précédemment. En effet, de part la forme des solutions de l'équation linéaire associée, on définit alors le profil z associé à la solution y par

$$z(t) := e^t y(t).$$

On a alors scattering de la solution y vers une solution de l'équation linéaire associée avec donnée initiale y_0^+ si et seulement si le profil z tend vers la constante y_0^+ . En effet, on a :

$$e^t |y(t) - e^{-t} y_0^+| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = e^t y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} y_0^+.$$

1.3 Motivation : sur la croissance de normes Sobolev

À travers l'introduction des comportements non linéaires et des différentes notions associées (comme le scattering modifié), nous avons déjà mis en avant beaucoup de résultats qui ont fortement influencé la mise en place de cette thèse. Dans cette partie, nous allons présenter comment les recherches sur la croissance des normes Sobolev de solutions d'une équation de Schrödinger cubique ont motivé l'étude du système de Schrödinger cubique couplé. En particulier, nous verrons pourquoi cet historique nous a amené à étudier nos systèmes sur l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$.

Le problème de Bourgain

En 1996, Bourgain met en évidence dans [4] une borne polynomiale en temps pour les normes Sobolev des solutions de l'équation de Schrödinger cubique sur \mathbb{T}^2 et \mathbb{T}^3 . Cette borne sera plusieurs fois améliorée, notamment par Bourgain lui-même ou Staffilani ([46]). Néanmoins, dans chacun de ces travaux, rien n'indique que ces bornes soient optimales, et aucune solution de l'équation de Schrödinger cubique avec une croissance des normes Sobolev en temps infini n'est exhibée. Or, si ce genre de solution n'existe pas, on devrait pouvoir exhiber bien mieux qu'une borne polynomiale (qui elle grandit en temps infini) pour contrôler les normes Sobolev des solutions.

En 2000, Bourgain énonce dans [6] une liste de problèmes qui ne seront, selon son opinion, pas résolus dans un futur proche. Parmi ces problèmes, convaincu que les bornes polynomiales obtenues sont dans un certain sens optimales, Bourgain énonce le problème suivant, concernant les solutions de l'équation de Schrödinger cubique sur le tore à d dimensions \mathbb{T}^d (pour $d = 2$ ou 3) :

“ Existe-t-il une croissance de $\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{T}^d)}$ pour $t \rightarrow +\infty$? ”

Pour construire de telles solutions, la stratégie évoquée est de construire des transferts d'énergie des modes de Fourier de petites fréquences vers les modes de Fourier de grandes fréquences (car dans les normes Sobolev, les modes de plus hautes fréquences ont plus de poids). C'est ce qu'on appelle des cascades d'énergie.

Dans cet article, Bourgain évoque aussi la question sur \mathbb{R}^d . Le problème étant que sur l'espace euclidien, les résultats de scattering (dus à la dispersion de l'équation) vont contre cette intuition. En effet, si la solution $u(t)$ exhibe du scattering en norme H^s vers une fonction $W \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \|W\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$

et en particulier,

$$\sup_{t>0} \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} < +\infty.$$

Bien que nous ne cherchons pas à mettre en évidence un résultat de croissance de norme dans cette thèse, nous allons maintenant voir en quoi les travaux autour de cette question nous ont guidé vers l'étude sur l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$.

Choix de l'espace des positions

Nous allons évoquer ici, via l'étude de l'équation de Schrödinger cubique sur divers espaces, certains travaux qui permettent de répondre en partie à la question de la mise en évidence possible de croissance des normes Sobolev des solutions.

Sur les espaces euclidiens \mathbb{R}^d , nous avons vu dans l'introduction de ce manuscrit que la dispersion de l'équation de Schrödinger cubique peut entraîner des résultats de scattering. Par exemple, sur \mathbb{R}^d , pour $d = 2$ ou 3 , le scattering des solutions est démontré par Ginibre et Ozawa en 1993 dans [17]. Dans ce cas, comme indiqué précédemment, on ne peut pas avoir de croissance des normes Sobolev. Le cas critique pour l'équation de Schrödinger cubique est de ce point de vue le cas de la dimension 1 : l'étude sur \mathbb{R} . On a vu que dans ce cas, par l'article [44] d'Ozawa en 1991, (voir aussi [33] et [37]), on a des résultats de scattering modifié. La modification de scattering étant ici le fait d'un terme de déphasage, celle-ci ne modifie pas le comportement des normes de Sobolev, on ne peut donc pas avoir de croissance des normes Sobolev dans ce cas non plus.

Le cas des solutions périodiques, proposé par Bourgain, semble plus propice à ces comportements parce qu'il n'y a pas de dispersion. Dans son papier, Bourgain écarte le cas de l'étude sur \mathbb{T} . En effet, on sait depuis 1972 par Zakharov et Shabat ([55], voir aussi [19] pour une preuve différente) que l'équation de Schrödinger cubique est complètement intégrable sur le tore. De ce fait, on ne pourra pas obtenir de croissance des normes Sobolev. Sur \mathbb{T}^2 , une première approche de croissance des normes Sobolev en temps infini est faite par Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka et Tao en 2010 dans [13]. Ils montrent dans cet article, pour tout $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut, et pour toute constante $M > 0$ aussi grande que l'on veut, il existe un temps $T > 0$ tel que :

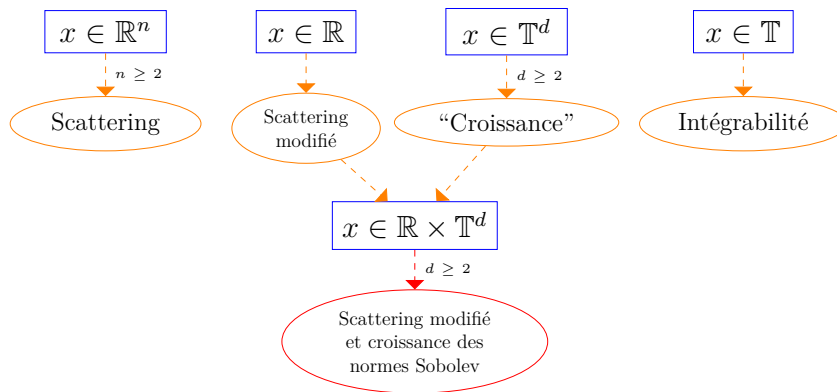
$$\|u(0)\|_{H^s} \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|u(T)\|_{H^s} \geq M,$$

et ce pour tout $s > 1$. Cette réponse partiellement positive au problème de Bourgain, car si on a bien ici un phénomène de croissance des normes Sobolev, il est en temps fini.

La première réponse positive au problème de Bourgain arrive en 2013 par Hani, Pausader, Tzvetkov et Visciglia dans [27]. Dans cet article, les auteurs se placent sur l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$, avec $2 \leq d \leq 4$. L'idée est alors de profiter des effets de scattering modifié propres à l'espace \mathbb{R} et des cascades d'énergie propres à l'espace \mathbb{T}^d pour mettre en évidence un résultat de scattering modifié des solutions de l'équation de Schrödinger cubique vers des solutions d'une autre équation, dont les normes Sobolev grandissent en temps infini.

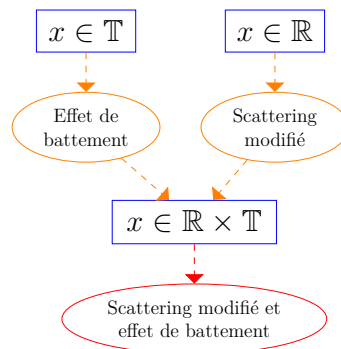
Ces différents résultats sont résumés dans le schéma suivant :

Figure 1.1 – Croissance des normes Sobolev ?



Si, du point de vue de la recherche de croissance des normes Sobolev pour l'équation de Schrödinger cubique, l'étude sur le tore \mathbb{T} n'est pas pertinente au regard de la complète intégrabilité de l'équation, il en est autrement pour le système de Schrödinger cubique couplé (1.0.1). En effet, pour ce système, on a vu sur le tore \mathbb{T} que l'on peut mettre en évidence un comportement vraiment non linéaire : l'échange d'énergie sous forme d'effet de battement de Grébert, Paturel et Thomann ([20]). Cet échange d'énergie étant un comportement en temps fini, l'idée de ce manuscrit est donc d'appliquer la méthode déployée par Hani, Pausader, Tzvetkov et Visciglia dans [27]. En se plaçant sur l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$, le but est d'exhiber des solutions qui échangent de l'énergie en temps infini. La stratégie employée dans ce manuscrit est résumée dans le schéma suivant :

Figure 1.2 – Stratégie du manuscrit



1.4 Plan de la thèse et présentation des résultats

Nous sommes maintenant en mesure de présenter les résultats obtenus dans les trois prochains chapitres, afin de donner une vue d'ensemble des résultats de la thèse. D'après l'historique présenté, la question importante ici est de déterminer dans quel espace prendre les positions x .

Dans le chapitre 2, nous nous placerons sur le tore \mathbb{T} pour mettre en évidence un premier comportement non linéaire : l'effet de battement. Dans les deux chapitres suivants, (sur \mathbb{R} pour le chapitre 3 puis sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ pour le chapitre 4), l'enjeu sera alors de répondre à ces deux questions :

- ▷ Peut-on espérer transposer les résultats obtenus pour l'équation de Schrödinger cubique aux systèmes cubiques couplés ?
- ▷ Le cas échéant, quel sera alors le rôle du couplage ?

Les trois prochains chapitres peuvent être lus indépendamment. En particulier, les chapitres 3 et 4 ont donné lieu à des articles soumis et contiennent leur propre introduction. Nous allons maintenant présenter plus en détail les résultats des différentes parties.

1.4.1 Étude sur le tore \mathbb{T} : les effets de battement

Ici, on se place dans le cas d'une coordonnée spatiale périodique, avec le système suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{xx} u = |v|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \\ i\partial_t v + \partial_{xx} v = |u|^2 v, \end{cases} \quad (1.4.1)$$

où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est le tore de dimension 1.

Le but de ce chapitre est d'étendre le résultat d'effet de battement obtenu par Grébert, Patrel et Thomann dans [20]. Nous obtenons ainsi notre premier comportement non linéaire pour les solutions du système 1.4.1, un effet de battement décalé, mis en évidence par le théorème suivant :

Théorème A. *Pour tout $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[^3$ et pour tout*

$$\gamma \in (\max(0, \tau_3 - \tau_2), \min(1 + \tau_1, 1 + \tau_3)) \setminus \{\gamma_c\},$$

où $\gamma_c = \gamma_c(\tau)$ est un point, il existe :

— $T_\gamma \in]0, \frac{\pi}{\gamma f_\tau(\gamma)}[$, où f_τ est une fonction continue qui vérifie

$$f_\tau(\gamma) > |\tau_3 - \tau_1| \quad \text{et} \quad \lim_{\gamma \rightarrow \max(0, \tau_3 - \tau_2)} f_\tau(\gamma) = |\tau_3 - \tau_1|,$$

— $K_\gamma : \mathbb{R} \mapsto]0, 1[$ une fonction $2T_\gamma$ -périodique non constante avec $K_\gamma(0) = \gamma$,

— $\varepsilon_0 < \gamma^2$,

tels que pour tout couple d'entiers distincts $p, q \in \mathbb{Z}$ et pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, alors il existe un couple de solutions (u, v) du système (1.4.1) qui vérifie, quelque soit $|t| \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}$:

$$\begin{cases} u(t, x) = u_p(t)e^{ipx} + u_q(t)e^{iqx} + \varepsilon^{\frac{5}{2}} r_u(t, x), \\ v(t, x) = v_p(t)e^{ipx} + v_q(t)e^{iqx} + \varepsilon^{\frac{5}{2}} r_v(t, x), \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} |u_q(t)|^2 = \varepsilon^2 K_\gamma(\varepsilon^2 t), & |v_p(t)|^2 = \varepsilon^2 (K_\gamma(\varepsilon^2 t) + \tau_2 - \tau_3), \\ |u_p(t)|^2 = \varepsilon^2 (1 + \tau_1 - K_\gamma(\varepsilon^2 t)), & |v_q(t)|^2 = \varepsilon^2 (1 + \tau_3 - K_\gamma(\varepsilon^2 t)). \end{cases}$$

De plus, les termes de reste r_u et r_v satisfont :

- r_u et r_v sont régulières en temps et analytiques en espace sur $[-\varepsilon^{-\frac{5}{2}}, \varepsilon^{-\frac{5}{2}}] \times \mathbb{T}$,
- pour $r = r_u$ ou r_v , et pour un certain $\rho > 0$, on a

$$\sup_{|t| \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}} |\hat{r}_j(t)| \leq C e^{-\rho|j|},$$

uniformément en $\varepsilon > 0$ et $p, q \in \mathbb{Z}$.

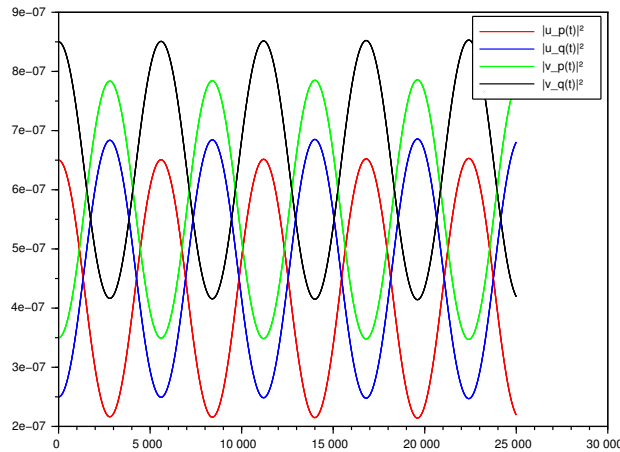
L'avantage de ce résultat est le comportement vraiment non linéaire mis en évidence : l'échange d'énergie entre les modes, appelé effet de battement. On voit en effet que les modes u_q et v_p vibrent ensemble, à un décalage près fixé par le vecteur constant τ choisi. Il en est de même pour le second couple (u_p, v_q) . Enfin, ces deux couples échangent de l'énergie entre eux : c'est l'effet de battement. Cet échange est caractérisé par la fonction périodique K_γ .

Par exemple, pour les choix de valeurs

$$\tau = (-0.1, 0.2, 0.1), \quad \gamma = 0.25, \quad \text{et} \quad \varepsilon = 10^{-3},$$

on obtient :

Figure 1.3 – Exemple d'effet de battement décalé



Le désavantage ici, c'est que l'on montre ce comportement seulement en temps long, mais fini. Que se passe-t-il quand le temps grandit trop ? La construction de ce résultat ne permet pas d'y répondre.

Méthode et idée de la preuve

Pour étudier le système (1.4.1), nous utilisons son caractère hamiltonien. Posons

$$H(u, \bar{u}, v, \bar{v}) := \int_{\mathbb{T}} (|\partial_x u|^2 + |\partial_x v|^2 + |u|^2 |v|^2) dx,$$

l'énergie totale du système. Alors H est l'hamiltonien du système dans le sens suivant :

$$\begin{cases} \dot{u} &= -i \frac{\partial H}{\partial \bar{u}}, & \dot{\bar{u}} &= i \frac{\partial H}{\partial u}, \\ \dot{v} &= -i \frac{\partial H}{\partial \bar{v}}, & \dot{\bar{v}} &= i \frac{\partial H}{\partial v}. \end{cases}$$

Ainsi, nous voyons que l'étude du système se ramène ici à l'étude de H . Étant sur le tore, nous effectuons un développement en séries de Fourier des inconnues u et v :

$$u(t, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j(t) e^{ijx}, \quad v(t, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j(t) e^{ijx}.$$

Dans ces coordonnées, nous avons

$$H = N + P := \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 (|u_j|^2 + |v_j|^2) + \sum_{\substack{p, q, r, s \in \mathbb{Z} \\ p - q + r - s = 0}} u_p \bar{u}_q v_r \bar{v}_s.$$

Le premier terme, N , est constant pour les solutions de l'équation linéaire : c'est la conservation de l'énergie du couple de solutions. Le point important ici est que ce terme ne dépend que des "actions" ($|u_j|^2$ et $|v_j|^2$, pour $j \in \mathbb{Z}$), il ne jouera donc pas de rôle dans la dynamique des solutions. C'est donc le second terme qui va nous intéresser. Dans un premier temps, par un changement de variables, on met en évidence les termes prédominants dans le polynôme P . De part le côté hamiltonien du système, la stratégie employée est l'utilisation d'une forme normale de Birkhoff, donnée par :

$$H^B := H \circ \tau = N + Z_4 + R_6,$$

où :

- ▷ τ est une transformation symplectique proche de l'identité. Cela rend légitime l'étude du nouvel hamiltonien H^B , dont les dynamiques observées seront alors proches des dynamiques de l'hamiltonien d'origine H .
- ▷ Z_4 est un polynôme d'ordre 4, qui contient les termes dominants du polynôme P . On parle ici de forme normale car Z_4 commute avec N au sens des crochets de Poisson.
- ▷ R_6 est un terme de reste d'ordre 6, qu'on pourra négliger pour des temps longs, mais finis.

Une fois cette forme normale mise en place, la preuve du résultat se compose de deux étapes. Premièrement, on oublie le terme de reste R_6 , et on étudie des modèles réduits (avec peu de modes excités pour u et v) dans le but de trouver des comportements intéressants, comme l'effet de battement. Le terme N étant préservé, l'étude ici se concentre sur le terme résonant

$$Z_4 = \sum_{\substack{p, q, r, s \in \mathbb{Z} \\ p - q + r - s = 0 \\ p^2 - q^2 + r^2 - s^2 = 0}} u_p \bar{u}_q v_r \bar{v}_s. \quad (1.4.2)$$

En particulier, en introduisant l'ensemble résonant

$$\Gamma_0 := \left\{ (p, q, r, s) \in \mathbb{Z}^4 \mid p - q + r - s = 0, p^2 - q^2 + r^2 - s^2 = 0 \right\},$$

le système hamiltonien associé à Z_4 est

$$\begin{cases} i\partial_t u_p = \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} v_q \bar{v}_r u_s, \\ i\partial_t v_p = \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} u_q \bar{u}_r v_s. \end{cases}$$

La seconde partie de la preuve consiste à démontrer que tous les comportements observés sur le modèle réduit se retrouvent sur le système associé à l'hamiltonien H^B . C'est dans cette étape que la gestion du terme de reste R_6 nous contraint à une analyse en temps fini.

1.4.2 Étude sur \mathbb{R} : scattering modifié et déphasage

Le travail effectué dans ce chapitre fait l'objet d'un article ([52]) publié dans la revue "Dynamics of Partial Differential Equations", en janvier 2016.

Ici, on se place dans le cas d'une coordonnée spatiale euclidienne, c'est à dire que la variable x vit sur la droite réelle. On a :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{xx} u = |v|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ i\partial_t v + \partial_{xx} v = |u|^2 v. \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Le but de ce chapitre est de mettre en évidence un résultat de scattering modifié. La modification du scattering apparaît ici dans un terme de déphasage mettant en évidence l'effet de couplage. On obtient également une inégalité de dispersion et un développement asymptotique pour les solutions. Avant d'énoncer le théorème, nous avons besoin de quelques préliminaires.

Dans le théorème suivant, plutôt que demander un contrôle des conditions initiales au temps 0, on demande une hypothèse de petitesse sur les solutions au temps 1. De ce point de vue, on introduit l'intervalle $I = [1, +\infty)$. On définit ainsi :

$$u_1(x) = u(1, x), \quad v_1(x) = v(1, x).$$

Ce choix de contrôle, qui a pour but d'éviter les problèmes d'intégration en 0 (ce qui est cohérent quand on cherche un comportement en temps long), est légitimé par l'existence locale de solutions pour notre système de Schrödinger 1.4.3. On introduit l'espace fonctionnel suivant

$$H^{1,1} := \left\{ \varphi \in L_x^2, \|\varphi\|_{H_x^1} + \|x\varphi\|_{L_x^2} < +\infty \right\}.$$

Enfin, on rappelle que les profils sont définis par

$$f(t, x) := e^{-it\partial_{xx}} u(t, x), \quad g(t, x) := e^{-it\partial_{xx}} v(t, x).$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème :

Théorème B. Fixons $0 < \nu < \frac{1}{4}$. Supposons que le couple $(u_1, v_1) \in H^{1,1} \times H^{1,1}$ vérifie

$$\|u_1\|_{H^{1,1}} + \|v_1\|_{H^{1,1}} \leq \varepsilon,$$

où $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. Alors le système de Schrödinger cubique couplé (1.4.3) admet une unique paire de solutions $(u, v) \in \mathcal{C}(I; H^{1,1}) \times \mathcal{C}(I; H^{1,1})$.

Cette paire de solutions satisfait les inégalités de dispersion suivantes :

$$\|u(t, \cdot)\|_{L_x^\infty} \lesssim \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}, \quad \|v(t, \cdot)\|_{L_x^\infty} \lesssim \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}.$$

De plus, on a un résultat de scattering modifié dans le sens suivant : il existe une unique paire de fonctions $(W_f, W_g) \in (L_\xi^\infty \cap L_\xi^2) \times (L_\xi^\infty \cap L_\xi^2)$ telle que pour tout temps $t \geq 1$,

$$\begin{cases} \left\| \hat{f}(t, \cdot) \exp\left(\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^t \frac{1}{s} |\hat{v}(s, \cdot)|^2 ds\right) - W_f \right\|_{L_\xi^\infty} \lesssim t^{-\frac{1}{4}+\nu}, \\ \left\| \hat{g}(t, \cdot) \exp\left(\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^t \frac{1}{s} |\hat{u}(s, \cdot)|^2 ds\right) - W_g \right\|_{L_\xi^\infty} \lesssim t^{-\frac{1}{4}+\nu}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \left\| \hat{f}(t, \cdot) \exp\left(\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^t \frac{1}{s} |\hat{v}(s, \cdot)|^2 ds\right) - W_f \right\|_{L_\xi^2} \lesssim t^{-\frac{1}{8}+\frac{\nu}{2}}, \\ \left\| \hat{g}(t, \cdot) \exp\left(\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^t \frac{1}{s} |\hat{u}(s, \cdot)|^2 ds\right) - W_g \right\|_{L_\xi^2} \lesssim t^{-\frac{1}{8}+\frac{\nu}{2}}, \end{cases}$$

où f et g sont les profils des solutions u et v .

Enfin, nous avons un développement asymptotique des solutions : il existe une unique paire de fonctions $(\Gamma_f, \Gamma_g) \in (L_\xi^\infty \cap L_\xi^2) \times (L_\xi^\infty \cap L_\xi^2)$ telle que pour des temps grands,

$$\begin{cases} u(t, x) = \frac{1}{(2it)^{\frac{1}{2}}} W_f\left(\frac{x}{2t}\right) \exp\left(i\frac{x^2}{4t} - \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} (|W_g|^2\left(\frac{x}{2t}\right) \ln(t) + \Gamma_g\left(\frac{x}{2t}\right))\right) + \mathcal{O}(t^{-\frac{3}{4}+\nu}), \\ v(t, x) = \frac{1}{(2it)^{\frac{1}{2}}} W_g\left(\frac{x}{2t}\right) \exp\left(i\frac{x^2}{4t} - \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} (|W_f|^2\left(\frac{x}{2t}\right) \ln(t) + \Gamma_f\left(\frac{x}{2t}\right))\right) + \mathcal{O}(t^{-\frac{3}{4}+\nu}). \end{cases}$$

Le théorème énoncé dans le chapitre 3 permet de rajouter des poids sur l'estimée de scattering L^2 afin d'obtenir un scattering en normes Sobolev, moyennant un plus grand contrôle des données initiales (ce qui est nouveau par rapport aux résultats de Kato et Pusateri). L'avantage de ce résultat est le temps infini dans le comportement asymptotique. Le désavantage ici, c'est que le comportement non linéaire (i.e la modification du scattering) n'apparaît que via un terme de déphasage. Le rôle du couplage se lit justement ici dans ce terme de déphasage.

Méthode et idée de la preuve

On commence par écrire la formule de Duhamel pour le couple de solutions, on obtient par exemple pour u :

$$u(t, x) = e^{i(t-1)\partial_{xx}} u_1(x) - i \int_1^t e^{i(t-s)\partial_{xx}} |v(s, x)|^2 u(s, x) ds.$$

Pour simplifier l'expression, dû à la présence des termes en $e^{-it\partial_{xx}}$, on réécrit cette équation du point de vue des profils f et g , on obtient

$$f(t, x) = e^{-i\partial_{xx}} u_1(x) - i \int_1^t e^{-is\partial_{xx}} \left(e^{is\partial_{xx}} g(s, x) e^{-is\partial_{xx}} \bar{g}(s, x) e^{is\partial_{xx}} f(s, x) \right) ds.$$

Pour pouvoir gérer les termes en $e^{\pm is\partial_{xx}}$, on effectue alors une transformée de Fourier en espace. Le produit des trois termes dans l'intégrale de droite va donc faire apparaître un double produit de convolution. Après une dérivation en temps, on obtient alors (pour une constante $c > 0$ dépendant de la convention de Fourier utilisée) :

$$i\partial_t \hat{f}(t, \xi) = c \int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} \hat{g}(t, \xi - \kappa) \bar{\hat{g}}(t, \xi - \eta - \kappa) \hat{f}(t, \xi - \eta) d\kappa d\eta.$$

Il faut maintenant étudier le terme intégral, et en dégager les termes dominants en temps long pour une analyse asymptotique de la solution. Intuitivement, le lemme de la phase stationnaire nous dirige vers la décomposition suivante (voir appendice B pour plus de détails sur ce passage) :

$$i\partial_t \hat{f}(t, \xi) = \frac{\tilde{c}}{t} |\hat{g}(t, \xi)|^2 \hat{f}(t, \xi) + R(t, \xi).$$

Le terme R , qui sera notre terme de reste, a un bon comportement en temps long : il décroît plus vite (en norme infinie) que $\frac{1}{t}$. Pour tirer profit de cette décroissance et gérer le premier terme, on effectue le nouveau changement de variable

$$\hat{w}_f(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi) \exp \left(i\tilde{c} \int_1^t \frac{1}{s} |\hat{g}(s, \xi)|^2 ds \right) = \hat{f}(t, \xi) \exp \left(i\tilde{c} \int_1^t \frac{1}{s} |\hat{v}(s, \xi)|^2 ds \right).$$

On reconnaît dans \hat{w} le premier terme de notre résultat de scattering modifié. Le but est donc d'étudier la convergence de $\hat{w}(t)$. Cette étude, utilisant des résultats de complétude de l'espace choisi (L^2 ou L^∞), se fera alors grâce à la décroissance de R puisque

$$\partial_t \hat{w}_f(t, \xi) = -i \exp \left(i\tilde{c} \int_1^t \frac{1}{s} |\hat{g}(s, \xi)|^2 ds \right) R(t, \xi).$$

L'existence globale des solutions, les inégalités de dispersion et le comportement asymptotique sont donnés par des estimées intermédiaires à la mise en place du résultat de scattering.

1.4.3 Étude sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$: scattering modifié et effets de battement

Le travail effectué dans ce chapitre fait l'objet d'un article ([53]) soumis en septembre 2016. Afin de profiter du comportement non linéaire observé sur le tore (les effets de battement) et du scattering modifié observé sur la droite réelle, on considère l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$, c'est à dire une coordonnée euclidienne et une coordonnée périodique. On étudie alors le système suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}} u &= |v|^2 u, & (t, x, y) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \\ i\partial_t v + \Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}} v &= |u|^2 v. \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Ayant une variable d'espace euclidienne et une variable d'espace périodique, on espère donc pouvoir mettre en évidence les comportements non linéaires du cas périodique, et transporter ces comportements en temps infini grâce au résultat de scattering du cas euclidien.

En adaptant la méthode de Hani, Pausader, Tzvetkov et Visciglia exposée dans [27] au cas des systèmes couplés, le but est d'obtenir une correspondance entre les comportements asymptotiques des solutions du système initial (1.4.4) et celui des solutions d'un système plus simple, appelé système résonant, de la forme :

$$\begin{cases} i\partial_\tau W_u(\tau) = \mathcal{R}[W_v(\tau), W_v(\tau), W_u(\tau)], \\ i\partial_\tau W_v(\tau) = \mathcal{R}[W_u(\tau), W_u(\tau), W_v(\tau)], \end{cases} \quad (1.4.5)$$

où la transformée de Fourier de la non-linéarité \mathcal{R} dans les deux variables d'espace est donnée par :

$$\mathcal{FR}[f, g, h](\xi, p) = \sum_{\substack{p-q+r-s=0 \\ p^2-q^2+r^2-s^2=0}} \hat{f}(\xi, q) \overline{\hat{g}(\xi, r)} \hat{h}(\xi, s).$$

On remarque ici que ce système résonant \mathcal{R} , exprimé dans ses fréquences (ξ, p) de Fourier, ressemble beaucoup au système hamiltonien associé à la non-linéarité Z_4 défini en (1.4.2) pour l'étude du système de Schrödinger couplé sur \mathbb{T} . C'est cet aspect qui a motivé l'étude sur l'espace produit dans ce manuscrit. C'est également la raison pour laquelle nous avons choisi d'approfondir l'étude des systèmes de Schrödinger cubiques couplés sur le tore \mathbb{T} dans le chapitre 2.

Afin d'introduire les résultats de cette partie, il est nécessaire de s'intéresser à la norme utilisée pour assurer la petitesse des conditions initiales. La norme S^+ , utilisée dans les énoncés suivants, est une norme, basée sur la norme L^2 , qui contrôle un grand nombre de dérivées selon les deux variables d'espace et nécessite de la localisation selon la variable euclidienne. La définition de cette norme est donnée dans le chapitre 4 via l'équation (4.2.4). Pour cette introduction, on peut se contenter de savoir que l'espace induit par cette norme est un espace de Banach (on pourra donc appliquer un théorème de point fixe) qui contient l'espace de Schwartz des fonctions régulières à décroissance rapide.

Nous pouvons maintenant énoncer les résultats de cette partie, qui s'articulent autour de deux idées :

- ▷ La mise en place d'un résultat de scattering modifié et ses conséquences dynamiques. Nous verrons ici en quoi le résultat de scattering énoncé permet de contrôler les normes Sobolev des solutions du système (1.4.4).
- ▷ La mise en place d'un opérateur d'ondes modifié et ses conséquences dynamiques. Le but ici est d'utiliser l'opérateur d'ondes pour construire des solutions du système (1.4.4) qui échangent de l'énergie en temps infini grâce aux résultats du chapitre 2.

Le scattering modifié

Premièrement, on obtient un résultat de scattering modifié, analogue au résultat de Hani, Pausader, Tzvetkov et Visciglia dans [27] :

Théorème C (Scattering modifié). *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si :*

- $u_0, v_0 \in S^+$ vérifient $\|u_0\|_{S^+} + \|v_0\|_{S^+} \leq \varepsilon$,
- $(u(t), v(t))$ est solution du système (1.4.4) avec donnée initiale (u_0, v_0) ,

alors $(u, v) \in \mathcal{C}([0, +\infty) : H^N) \times \mathcal{C}([0, +\infty) : H^N)$ est une solution globale et exhibe un scattering modifié vers une solution du système résonant (1.4.5) dans le sens suivant : il existe un couple de solutions $(W_u(t), W_v(t))$ du système résonant (1.4.5) tel que

$$\|u(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} W_u(\pi \ln(t))\|_{H^N(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} + \|v(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} W_v(\pi \ln(t))\|_{H^N(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus, on a l'inégalité de dispersion suivante :

$$\|u(t)\|_{L_x^\infty H_y^1} + \|v(t)\|_{L_x^\infty H_y^1} \lesssim (1 + |t|)^{-\frac{1}{2}}.$$

D'abord, on remarque que l'inégalité de dispersion n'est pas étonnante : on retrouve le même comportement que pour le système (1.4.3) dans le cas d'une seule variable d'espace euclidienne, ce qui est cohérent car on a également ici une norme infinie sur la variable euclidienne. La variable périodique ne semble donc pas jouer de rôle ici, cela vient du choix de la norme H^1 pour cette variable, norme qui est conservée dans le système linéaire pour la variable périodique.

Ensuite, ce théorème nous dit donc que, pour des conditions initiales suffisamment petites, chaque couple de solutions du système (1.4.4) se comporte asymptotiquement comme une certaine solution du système résonant (1.4.5). En particulier, un contrôle des normes Sobolev des solutions du système résonant (1.4.5) permet d'obtenir un contrôle des normes Sobolev du système initial (1.4.4). C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème D (Contrôle des normes Sobolev). *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si :*

- $u_0, v_0 \in S^+$ vérifient $\|u_0\|_{S^+} + \|v_0\|_{S^+} \leq \varepsilon$,
- $(u(t), v(t))$ est solution du système (1.4.4) avec donnée initiale (u_0, v_0) ,

alors $(u, v) \in \mathcal{C}([0, +\infty) : H^N) \times \mathcal{C}([0, +\infty) : H^N)$ est une solution globale et pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\|u(t)\|_{H_{x,y}^s} + \|v(t)\|_{H_{x,y}^s} \lesssim \varepsilon.$$

De plus, il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\|u(t)\|_{H_{x,y}^s} + \|v(t)\|_{H_{x,y}^s} \right) = c.$$

Ce résultat assure donc qu'il n'est pas possible pour le système (1.4.4) étudié ici de présenter un résultat de croissance des normes Sobolev pour des données initiales arbitrairement petites. Si ce résultat n'est pas surprenant du fait de la dimension 1 de la variable euclidienne pour le système, il n'est pas non plus attendu, d'autant que la question de la complète intégrabilité du système (1.4.4) n'est pas réglée.

L'opérateur d'ondes modifié

Après la mise en évidence d'un résultat de scattering, il est naturel d'examiner la complétude de ce résultat en tentant de construire un résultat réciproque : un opérateur d'ondes. On peut une nouvelle fois généraliser au système le résultat de [27] via le théorème suivant :

Théorème E (Opérateur d'ondes modifié). *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si :*

- $W_{u,0}, W_{v,0} \in S^+$ vérifient $\|W_{u,0}\|_{S^+} + \|W_{v,0}\|_{S^+} \leq \varepsilon$,
- $(W_u(t), W_v(t))$ est solution du système (1.4.5) avec donnée initiale $(W_{u,0}, W_{v,0})$,

alors il existe un couple $(u, v) \in \mathcal{C}([0, +\infty) : H^N) \times \mathcal{C}([0, +\infty) : H^N)$ solution du système initial (1.4.4) tel que

$$\|u(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} W_u(\pi \ln(t))\|_{H^N(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} + \|v(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} W_v(\pi \ln(t))\|_{H^N(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Ce résultat nous assure donc que pour toute paire de solutions du système résonant (1.4.5), on peut trouver une paire de solutions du système initial (1.4.4) qui exhibe le même comportement asymptotique dans le sens du scattering modifié. Ainsi, tout comportement non linéaire mis en évidence pour le système résonant peut se retrouver sur une solution du système initial.

En particulier, la ressemblance entre le système résonant (1.4.5) et le système associé à la partie résonante Z_4 de l'étude sur le tore nous permet d'énoncer le théorème suivant, alliant le scattering modifié et les effets de battement :

Théorème F (Scattering et effets de battement). *Soient I un intervalle ouvert, (p, q) un couple d'entiers distincts et $0 < \gamma < \frac{1}{2}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $W_{u,0}, W_{v,0} \in S^+$ vérifient*

$$\|W_{u,0}\|_{S^+} + \|W_{v,0}\|_{S^+} \leq \varepsilon,$$

alors il existe :

- une constante $0 < T_\gamma \lesssim |\ln(\gamma)|$ et une fonction $2T_\gamma$ -périodique $K_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ telles que

$$K_\gamma(0) = \gamma, \quad K_\gamma(T_\gamma) = 1 - \gamma;$$

- un couple de solutions (W_u, W_v) du système résonant (1.4.5) avec données initiales $(W_{u,0}, W_{v,0})$ qui exhibe un effet de battement dans le sens suivant :

$$\begin{cases} \hat{W}_u(t, \xi, y) = \mathcal{F}(W_u)(t, \xi, p)e^{ipy} + \mathcal{F}(W_u)(t, \xi, q)e^{iqy}, \\ \hat{W}_v(t, \xi, y) = \mathcal{F}(W_v)(t, \xi, p)e^{ipy} + \mathcal{F}(W_v)(t, \xi, q)e^{iqy}, \end{cases}$$

où, $\forall \xi \in I$,

$$\begin{cases} |\hat{W}_v(t, \xi, p)|^2 = |\hat{W}_u(t, \xi, q)|^2 = \varepsilon^2 K_\gamma(\varepsilon^2 t), \\ |\hat{W}_u(t, \xi, p)|^2 = |\hat{W}_v(t, \xi, q)|^2 = \varepsilon^2 (1 - K_\gamma(\varepsilon^2 t)); \end{cases}$$

- un couple de solutions (u, v) du système initial (1.4.4) qui exhibe du scattering modifié vers le couple (W_u, W_v) dans le sens suivant :

$$\|u(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} W_u(\pi \ln(t))\|_{H^N(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} + \|v(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} W_v(\pi \ln(t))\|_{H^N(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Par ce résultat, nous remplissons notre cahier des charges établi avant l'étude du système de Schrödinger cubique couplé sur l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$: nous avons exhibé un comportement vraiment non linéaire en temps infini. Comme espéré, on a réussi à profiter des résultats de scattering amenés par la variable euclidienne, et des échanges d'énergie propres à la variable périodique.

Méthode et idée de la preuve

Comme pour l'étude précédente \mathbb{R} , on commence par écrire la formule de Duhamel pour les solutions, et on regarde cette formule au niveau des profils. On obtient par exemple pour le profil de u , toujours défini par $f(t) = e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}u(t)$,

$$i\partial_t f(t) = e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} \left(e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}g(t)e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}\overline{g(t)}e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}f(t) \right) =: \mathcal{N}^t[g(t), g(t), f(t)].$$

Da la même manière que l'étude de l'hamiltonien permettait de connaître parfaitement le système dans l'étude sur le tore, le but est ici d'étudier la non-linéarité, et en particulier d'en exhiber les termes dominants. Comme dans les parties précédentes, on passe donc, via la transformée de Fourier dans les variables de position, dans l'espace des fréquences. On obtient ici

$$\mathcal{FN}^t[f, g, h](\xi, p) = \sum_{p-q+r-s=0} e^{it(p^2-q^2+r^2-s^2)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} \hat{f}_q(\xi - \eta) \overline{\hat{g}_r(\xi - \eta - \kappa)} \hat{h}_s(\xi - \kappa) d\eta d\kappa.$$

Pour le terme intégral, on reconnaît un terme semblable à celui de l'étude précédente sur \mathbb{R} . Ainsi, le lemme de la phase stationnaire nous pousse donc à écrire (cf appendice B pour plus de détails) :

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} \hat{f}_q(\xi - \eta) \overline{\hat{g}_r(\xi - \eta - \kappa)} \hat{h}_s(\xi - \kappa) d\eta d\kappa \approx \frac{\pi}{t} \hat{f}_q(\xi) \overline{\hat{g}_r(\xi)} \hat{h}_s(\xi).$$

Pour la sommation sur p , comme dans l'étude du système sur \mathbb{T} avec la forme normale de Birkhoff, on peut penser que le terme dominant sera donné par la relation de résonance

$$p - q + r - s = 0, \quad p^2 - q^2 + r^2 - s^2 = 0.$$

Ainsi, on voit donc le terme \mathcal{R} apparaître, et on veut décomposer la non-linéarité \mathcal{N}^t sous la forme

$$\mathcal{N}^t[f, g, h] = \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[f, g, h] + \mathcal{E}^t[f, g, h].$$

Ainsi, en montrant que le terme de reste \mathcal{E}^t décroît suffisamment vite, on montrera la proximité entre les non-linéarités $\mathcal{N}^t[f, g, h]$ et $\frac{\pi}{t} \mathcal{R}$, menant aux résultats de scattering et d'opérateur d'ondes modifiés. On obtient donc ici une correspondance entre les solutions du système initial (associé à la non-linéarité \mathcal{N}^t) et les solutions du système résonant (associé à la non-linéarité \mathcal{R}). On remarque que le terme $\frac{\pi}{t}$ devant la non-linéarité \mathcal{R} est à l'origine du changement d'échelle de temps en $\pi \ln(t)$ dans les deux théorèmes de scattering et d'opérateur d'ondes.

De part le résultat de scattering modifié, le contrôle des normes Sobolev du théorème D est une conséquence immédiate du contrôle des normes Sobolev des solutions du système résonant.

Pour mettre en évidence les effets de battement, revenons à la définition de la non-linéarité \mathcal{R} :

$$\mathcal{FR}[f, g, h](\xi, p) = \sum_{\substack{p, q, r, s \in \mathbb{Z} \\ p - q + r - s = 0 \\ p^2 - q^2 + r^2 - s^2 = 0}} \hat{f}(\xi, q) \overline{\hat{g}(\xi, r)} \hat{h}(\xi, s).$$

Dans cette définition, ξ n'est qu'un paramètre, ainsi, on aimerait faire un lien entre cette non-linéarité et la non-linéarité suivante :

$$R[f, g, h]_p = \sum_{\substack{p, q, r, s \in \mathbb{Z} \\ p - q + r - s = 0 \\ p^2 - q^2 + r^2 - s^2 = 0}} f_q \overline{g_r} h_s,$$

obtenue en supprimant la variable euclidienne. Cette nouvelle non-linéarité R nous définit un nouveau système, appelé système résonant réduit. On remarque ici que ce système associé à R est exactement le système associé à Z_4 , défini en (1.4.2), que l'on avait dans l'étude du système sur le tore \mathbb{T} , et grâce auquel on a pu mettre en évidence les effets de battement. De part la "brutalité" de la méthode d'obtention de cette non-linéarité (on a supprimé une variable), on ne peut pas espérer une correspondance bilatérale entre les solutions du système résonant réduit et les solutions du système résonant. Néanmoins, on peut espérer construire une solution du système résonant à partir d'une solution du système résonant réduit, et ainsi profiter de toutes les dynamiques de celui-ci. Ce transfert de solutions est donné par la méthode suivante :

Soit (a, b) une solution du système résonant réduit dont on veut mimer le comportement (par exemple l'effet de battement). C'est à dire :

$$i\partial_t a_p = R[b, b, a]_p, \quad i\partial_t b_p = R[a, a, b]_p.$$

On choisit alors une condition initiale du type

$$W_{u,0}(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x)\alpha(y), \quad W_{v,0}(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x)\beta(y),$$

où φ est une fonction quelconque, et α et β sont donnés par $\alpha_p = a_p(0)$, $\beta_p = b_p(0)$. Grâce à la séparation des variables pour les données initiales, on construit alors une solution (W_u, W_v) du système résonant en posant

$$\mathcal{F}(W_U)(t, \xi, p) = \varphi(\xi)a_p(\varphi(\xi)^2 t), \quad \mathcal{F}(W_V)(t, \xi, p) = \varphi(\xi)b_p(\varphi(\xi)^2 t).$$

En particulier, si $\varphi = 1$ sur un intervalle I , alors

$$(\mathcal{F}W_u(t, \xi, p), \mathcal{F}W_v(t, \xi, p)) = (a_p(t), b_p(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \xi \in I.$$

On retrouve donc par cette méthode l'introduction de l'intervalle I présent dans l'énoncé du théorème F. Cette stratégie de preuve est résumée dans le schéma de la figure 4.1, présent dans l'introduction du chapitre 4.

Shifted beating effect for a cubic coupled Schrödinger system on \mathbb{T}

In this chapter, we study the cubic coupled Schrödinger system with initial data

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{xx} u = |v|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \\ i\partial_t v + \partial_{xx} v = |u|^2 v, \\ u(0, x) = u_0(x), & v(0, x) = v_0(x). \end{cases} \quad (2.0.1)$$

where $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ is the one dimensional torus. The goal of the chapter is to highlight some energy exchange between different modes of the couples of solutions. The exchange, named “shifted beating effect” in reference of the beating effect of Grébert, Paturel and Thomann in [20], is given by the following theorem:

Theorem 2.0.1. *For all $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^3$. For all*

$$\gamma \in (\max(0, \tau_3 - \tau_2), \min(1 + \tau_1, 1 + \tau_3)) \setminus \{\gamma_c\},$$

where $\gamma_c = \gamma_c(\tau)$ is a point, there exists:

$$- T_\gamma \in \left] 0, \frac{\pi}{\sqrt{\gamma f_\tau(\gamma)}} \right], \text{ where } f_\tau \text{ is a continuous function that satisfies}$$

$$f_\tau(\gamma) > |\tau_3 - \tau_1| \quad \text{and} \quad \lim_{\gamma \rightarrow \max(0, \tau_3 - \tau_2)} f_\tau(\gamma) = |\tau_3 - \tau_1|,$$

$$- K_\gamma : \mathbb{R} \mapsto]0, 1[\text{ a non constant } 2T_\gamma\text{-periodic function with } K_\gamma(0) = \gamma,$$

$$- \varepsilon_0 < \gamma^2,$$

such as if $p, q \in \mathbb{Z}$ and $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, then there exists a solution of the system (2.0.2) which satisfies for all $|t| \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}$:

$$\begin{cases} u(t, x) = u_p(t)e^{ipx} + u_q(t)e^{iqx} + \varepsilon^{\frac{5}{2}}r_u(t, x), \\ v(t, x) = v_p(t)e^{ipx} + v_q(t)e^{iqx} + \varepsilon^{\frac{5}{2}}r_v(t, x), \end{cases}$$

where

$$\begin{cases} |u_q(t)|^2 = \varepsilon^2 K_\gamma(\varepsilon^2 t), & |v_p(t)|^2 = \varepsilon^2 (K_\gamma(\varepsilon^2 t) + \tau_2 - \tau_3), \\ |u_p(t)|^2 = \varepsilon^2 (1 + \tau_1 - K_\gamma(\varepsilon^2 t)), & |v_q(t)|^2 = \varepsilon^2 (1 + \tau_3 - K_\gamma(\varepsilon^2 t)). \end{cases} \quad (2.0.2)$$

Moreover, the terms r_u and r_v satisfy :

- r_u and r_v are smooth in time and analytic in space on $[-\varepsilon^{-\frac{5}{2}}, \varepsilon^{-\frac{5}{2}}] \times \mathbb{T}$,
- for $r = r_u$ or r_v , and for some $\rho > 0$:

$$\sup_{|t| \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}} |\hat{r}_j(t)| \leq C e^{-\rho|j|},$$

uniformly in $\varepsilon > 0$ and $p, q \in \mathbb{Z}$.

This theorem highlights an exchange of energy, for long times, between the two couples of modes (u_p, v_q) and (u_q, v_p) . While the couple (u_q, v_p) behaves, up to a shift induced by the choice of the constant term $\tau_2 - \tau_3$, like the function K_γ , the other couple (u_p, v_q) is behaving (always up to a constant induced by the choice of τ) like $1 - K_\gamma$. This periodic exchange (of period $\varepsilon^{-2}T_\gamma$), which appears to be a really nonlinear behavior, is named the shifted beating effect.

First, we remark that the energy exchange does occur because the period $\varepsilon^{-2}T_\gamma$ is small in front of the existence time of the decomposition for ε small enough. Indeed we have, for γ fixed, and ε small enough:

$$\varepsilon^{-2}T_\gamma < \frac{\pi\varepsilon^{-2}}{\sqrt{\gamma f_\tau(\gamma)}} \ll \varepsilon^{-\frac{5}{2}}.$$

Then, we see that the shift induced by the constant $\tau \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^3$ may not be relevant if τ is too small ($\tau = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$), because of the remainder terms $\varepsilon^{\frac{5}{2}}r_u$ and $\varepsilon^{\frac{5}{2}}r_v$. Finally, we remark that the choice $\tau = (0, 0, 0)$ gives us the beating effect theorem of Grébert, Paturel and Thomann:

Theorem 2.0.2 (Grébert, Paturel, Thomann, 2013). *For all $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$, there exists:*

- $T_\gamma \in]0, \frac{|\ln \gamma|}{1-2\gamma}[$,
- $K_\gamma : \mathbb{R} \mapsto]0, 1[$ a $2T_\gamma$ -periodic function with

$$K_\gamma(0) = \gamma, \quad K_\gamma(T_\gamma) = 1 - \gamma.$$

- $\varepsilon_0 < \gamma^2$,

such as if $p, q \in \mathbb{Z}$ and $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, then there exists a solution of the system (2.0.2) which satisfies for all $|t| \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}$:

$$\begin{cases} u(t, x) = u_p(t)e^{ipx} + u_q(t)e^{iqx} + \varepsilon^{\frac{5}{2}}r_u(t, x), \\ v(t, x) = v_p(t)e^{ipx} + v_q(t)e^{iqx} + \varepsilon^{\frac{5}{2}}r_v(t, x), \end{cases}$$

where

$$\begin{cases} |u_q(t)|^2 = |v_p(t)|^2 = \varepsilon^2 K_\gamma(\varepsilon^2 t) \\ |u_p(t)|^2 = |v_q(t)|^2 = \varepsilon^2 (1 - K_\gamma(\varepsilon^2 t)). \end{cases} \quad (2.0.3)$$

Moreover, the terms r_u and r_v satisfy :

- r_u and r_v are smooth in time and analytic in space on $[-\varepsilon^{-\frac{5}{2}}, \varepsilon^{-\frac{5}{2}}] \times \mathbb{T}$,
- for $r = r_u$ or r_v , and for some $\rho > 0$:

$$\sup_{|t| \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}} |\hat{r}_j(t)| \leq C e^{-\rho|j|},$$

uniformly in $\varepsilon > 0$ and $p, q \in \mathbb{Z}$.

This second statement is more specific (this is just one choice of vector τ). This specificity allows us to be more precise about the behavior of the function $K\gamma$ (here we know that $K_\gamma(T_\gamma) = 1 - \gamma$) and give us more symmetries. Indeed, we have

$$|u_q(t)|^2 = |v_p(t)|^2 \quad \text{and} \quad |u_p(t)|^2 = |v_q(t)|^2.$$

However, the proof of Theorem 2.0.1 is highly related to the proof of this specific case. Therefore, we will first give a proof of Theorem 2.0.2 and adapt this proof in order to obtain Theorem 2.0.1.

This chapter is organized as follows. First, we set up in Section 2.1 the Hamiltonian formalism (in particular, we introduce the polar symplectic coordinates) which is the good tool for the study of the Hamiltonian system (2.0.1). Then, in Section 2.2, we perform a Birkhoff normal form in order to obtain a more convenient Hamiltonian of the form

$$H^B := H \circ \tau = Z + R,$$

where :

- τ is a symplectic transformation close to the identity.
- Z is a polynomial which contains all interesting dynamics.
- R is a remainder term.

From this Hamiltonian, we extract a reduced model, obtained by truncating the remainder term R of the normal form and considering just two modes excited. This reduced model, in which we highlight the shifted beating effects, is studied in Section 2.3. Finally, we prove Theorem 2.0.2 in section 2.4 and Theorem 2.0.1 in Section 2.5, by controlling the proximity between the initial Hamiltonian and the reduced ones.

2.1 The Hamiltonian formalism

First, we remark that the system

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{xx} u &= |v|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \\ i\partial_t v + \partial_{xx} v &= |u|^2 v, \end{cases}$$

is Hamiltonian. For that purpose, we introduce

$$H := \int_{\mathbb{T}} (|\partial_x u|^2 + |\partial_x v|^2) dx + \int_{\mathbb{T}} |u|^2 |v|^2 dx.$$

Thus defined, H is the Hamiltonian of the system and we have

$$\begin{cases} \dot{u} &= -i\frac{\partial H}{\partial \bar{u}}, & \dot{\bar{u}} &= i\frac{\partial H}{\partial u}, \\ \dot{v} &= -i\frac{\partial H}{\partial \bar{v}}, & \dot{\bar{v}} &= i\frac{\partial H}{\partial v}. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Although this is just a rewriting of the system (2.0.1), the Hamiltonian formulation of the system allows us to use several tools of the Hamiltonian formalism. In particular, we want to write a normal form expansion of H in order to understand more deeply the dynamics of the system. However, we can't do it with this formulation which doesn't allow to differentiate the different modes of the solutions. The idea now is to rewrite this system in other coordinates appropriate to the normal form.

2.1.1 The Fourier series expansions

In order to take profit of the geometry of the torus (the solutions are periodic), we write the Fourier series expansion of u , \bar{u} , v and \bar{v} :

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j(t) e^{ijx}, & \bar{u}(t, x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \bar{u}_j(t) e^{-ijx}, \\ v(t, x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j(t) e^{ijx}, & \bar{v}(t, x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \bar{v}_j(t) e^{-ijx}. \end{aligned}$$

We define the nonlinearity P by:

$$\begin{aligned} P(u, v) &:= \int_{\mathbb{T}} |u(t, x)|^2 |v(t, x)|^2 dx, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{p, q, r, s \in \mathbb{Z}} u_p \bar{u}_q v_r \bar{v}_s e^{i(p-q+r-s)x} \right) dx, \\ &= \sum_{\substack{p, q, r, s \in \mathbb{Z} \\ p-q+r-s=0}} u_p \bar{u}_q v_r \bar{v}_s. \end{aligned}$$

Written in these variables, the Hamiltonian system (2.1.1) becomes

$$\begin{cases} i\dot{u}_j &= j^2 u_j + \frac{\partial P}{\partial \bar{u}_j} = \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_j}, & -i\dot{\bar{u}}_j &= j^2 \bar{u}_j + \frac{\partial P}{\partial u_j} = \frac{\partial H}{\partial u_j}, & j \in \mathbb{Z}, \\ i\dot{v}_j &= j^2 v_j + \frac{\partial P}{\partial \bar{v}_j} = \frac{\partial H}{\partial \bar{v}_j}, & -i\dot{\bar{v}}_j &= j^2 \bar{v}_j + \frac{\partial P}{\partial v_j} = \frac{\partial H}{\partial v_j}, & j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

2.1.2 The framework of the study

Let us now introduce the spaces and structures chosen for the study of the Hamiltonian:

- The regularity of the solution isn't our goal here. Therefore, for some $\rho > 0$, we chose for the phase space the following space

$$\mathcal{A}_\rho := \left\{ (u, v) \in \left(\ell^1(\mathbb{Z}) \right)^2 \times \left(\ell^1(\mathbb{Z}) \right)^2, \quad \|(u, v)\|_\rho := \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{\rho|j|} (|u_j| + |v_j|) < \infty \right\}.$$

In \mathcal{A}_ρ , we consider (u, v) as the sequence of the Fourier modes of (u, \bar{u}, v, \bar{v}) .

— For the symplectic structure, we endow \mathcal{A}_ρ with the canonical symplectic form

$$-i \sum_j (du_j \wedge d\bar{u}_j + dv_j \wedge d\bar{v}_j).$$

Thus, the Poisson bracket between two functions f and g of (u, v) is written:

$$\{f, g\} = -i \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial g}{\partial \bar{u}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{u}_j} \frac{\partial g}{\partial u_j} + \frac{\partial f}{\partial v_j} \frac{\partial g}{\partial \bar{v}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{v}_j} \frac{\partial g}{\partial v_j} \right).$$

Moreover, we denote by X_H the Hamiltonian vector field of a Hamiltonian H . The structure induced by the Poisson bracket induced the definitions of symplectic transformations and complete integrable systems. We refer to Appendice A for these definitions and the related results used in the following.

— We introduce $B_\rho(r)$, the ball of radius r centered at the origin in \mathcal{A}_ρ .

2.1.3 The symplectic polar coordinates

It is suitable to work in the symplectic polar coordinates $(I_j, \theta_j, J_j, \varphi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ defined by:

$$u_j = \sqrt{I_j} e^{i\theta_j}, \quad v_j = \sqrt{J_j} e^{i\varphi_j}.$$

As a warm up, we check that this change of variable is symplectic. We have

$$\begin{aligned} du_j \wedge d\bar{u}_j &= \left(I_j^{\frac{1}{2}} i e^{i\theta_j} d\theta_j + \frac{1}{2} I_j^{-\frac{1}{2}} i e^{i\theta_j} dI_j \right) \wedge \left(-I_j^{\frac{1}{2}} i e^{-i\theta_j} d\theta_j + \frac{1}{2} I_j^{-\frac{1}{2}} i e^{-i\theta_j} dI_j \right) \\ &= \frac{1}{2} i d\theta_j \wedge dI_j - \frac{1}{2} i dI_j \wedge d\theta_j = i d\theta_j \wedge dI_j. \end{aligned}$$

By symmetry, we deduce that

$$du \wedge d\bar{u} + dv \wedge d\bar{v} = i (d\theta \wedge dI + i d\varphi \wedge dJ).$$

Therefore, the system (2.1.2) becomes in the symplectic polar coordinates

$$\begin{cases} \dot{\theta}_j &= -\frac{\partial H}{\partial I_j}, & \dot{I}_j &= \frac{\partial H}{\partial \theta_j}, & j \in \mathbb{Z}, \\ \dot{\varphi}_j &= -\frac{\partial H}{\partial J_j}, & \dot{J}_j &= \frac{\partial H}{\partial \varphi_j}, & j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

In this structure, the variables I and J are called the actions, whereas the variables θ and φ are called the angles. We are now equipped to deal with the study of the Hamiltonian H . The goal of the next section is to write a normal form theorem for H .

2.2 The Birkhoff normal form

The aim of this section is to construct a Birkhoff normal form for the Hamiltonian H . The idea is to show that, thanks to a symplectic change of variable close to the identity,

we can transform H into a more convenient form, called the Birkhoff normal form. Back to the equation (2.1.2), we have a first decomposition

$$H = N + P,$$

with

$$N(u, v) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 (|u_j|^2 + |v_j|^2) \quad \text{and} \quad P(u, v) = \sum_{\substack{p, q, r, s \in \mathbb{Z} \\ p - q + r - s = 0}} u_p \bar{u}_q v_r \bar{v}_s. \quad (2.2.1)$$

Written in the symplectic polar coordinates, the term N , which is the linear part of the equation, depends only on the actions $I_j = |u_j|^2$ and $J_j = |v_j|^2$. This is a good behavior that we want to preserve. Thus, we have to transform the nonlinear part P in a more convenient form. For that purpose, we define the resonant set Γ_0 by

$$\Gamma_0 := \left\{ (p, q, r, s) \in \mathbb{Z}^4 \mid p - q + r - s = 0, p^2 - q^2 + r^2 - s^2 = 0 \right\}.$$

The Birkhoff normal form is given in the following proposition:

Proposition 2.2.1. *For ε small enough, there exists a symplectic change of variables τ from the ball $B_\rho(\varepsilon)$ to the ball $B_\rho(2\varepsilon)$ such as:*

$$H^B := H \circ \tau = N + Z_4 + R_6, \quad (2.2.2)$$

where :

i) N depends only on the actions:

$$N = N(I, J) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 (I_j + J_j).$$

ii) Z_4 is the 4th order homogeneous polynomial:

$$Z_4(u, v) = \sum_{(p, q, r, s) \in \Gamma_0} u_p \bar{u}_q v_r \bar{v}_s.$$

In particular, Z_4 is resonant in the following sense: $\{N, Z_4\} = 0$.

iii) R_6 is the remainder of order 6. It means that R_6 is a Hamiltonian function which satisfies

$$\|X_{R_6}(u, v)\|_\rho \leq C \|(u, v)\|_\rho^5 \quad \text{for all } (u, v) \in B_\rho(\varepsilon).$$

iv) τ is close to the identity: there exists C_ρ such as

$$\|\tau(u, v) - (u, v)\|_\rho \leq C_\rho \|(u, v)\|_\rho^3 \quad \text{for all } (u, v) \in B_\rho(\varepsilon).$$

2.2.1 Construction of the normal form

The proof of this Birkhoff normal form is made easier by the absence of small divisors. Indeed, we have

$$p^2 - q^2 + r^2 - s^2 = 0 \quad \text{or} \quad |p^2 - q^2 + r^2 - s^2| \geq 1.$$

Proof. The idea is to search τ as the time 1 flow φ_1 of χ where χ is a Hamiltonian polynomial of order 4. We write

$$\chi(u, v) := \sum_{p, q, r, s \in \mathbb{Z}} a(p, q, r, s) u_p \bar{u}_q v_r \bar{v}_s.$$

For F a Hamiltonian, the Taylor expansion of $F \circ \varphi_t$ between $t = 0$ and $t = 1$ gives:

$$F \circ \tau := F \circ \varphi_1 = F + \{F, \chi\} + \int_0^1 (1-t) \{\{F, \chi\}, \chi\} \circ \varphi_t dt.$$

Applying this formula to $F = H = N + P$ we obtain

$$H \circ \tau = \underbrace{N}_N + \underbrace{P + \{N, \chi\}}_{Z_4} + \underbrace{\{P, \chi\} + \int_0^1 (1-t) \{\{H, \chi\}, \chi\} \circ \varphi_t dt}_{R_6}. \quad (2.2.3)$$

Thus defined, the first point of the proposition is already checked. We have now to choose the polynomial χ such as τ , Z_4 and R_6 satisfy the hypothesis of Proposition 2.2.1.

Construction of the polynomial χ

According to the equation (2.2.3), we want to solve the homological equation

$$\{\chi, N\} = P - Z_4, \quad (2.2.4)$$

where N , P are given by equation (2.2.1) and Z_4 is given by Proposition 2.2.1. For the right hand-side polynomial term, we have

$$(P - Z_4)(u, v) = \sum_{\substack{p, q, r, s \in \mathbb{Z} \\ p - q + r - s = 0 \\ p^2 - q^2 + r^2 - s^2 \neq 0}} u_p \bar{u}_q v_r \bar{v}_s.$$

The left hand-side Poisson bracket term gives

$$\begin{aligned} \{\chi, N\} &= -i \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\partial \chi}{\partial u_j} \frac{\partial N}{\partial \bar{u}_j} - \frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}_j} \frac{\partial N}{\partial u_j} + \frac{\partial \chi}{\partial v_j} \frac{\partial N}{\partial \bar{v}_j} - \frac{\partial \chi}{\partial \bar{v}_j} \frac{\partial N}{\partial v_j} \right) \\ &= -i \sum_{p, q, r, s \in \mathbb{Z}} (p^2 - q^2 + r^2 - s^2) a(p, q, r, s) u_p \bar{u}_q v_r \bar{v}_s. \end{aligned}$$

Therefore, in order to solve the homological equation (2.2.4), it suffices to choose

$$a(p, q, r, s) = \begin{cases} \frac{i}{(p^2 - q^2 + r^2 - s^2)} & \text{if } p - q + r - s = 0 \text{ and } p^2 - q^2 + r^2 - s^2 \neq 0, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

The resonant term Z_4

Thanks to the choice of χ , we have constructed the polynomial Z_4 . It remains to prove that Z_4 is resonant, i.e

$$\{N, Z_4\} = 0.$$

With the same computations as in the χ construction, we have:

$$\{N, Z_4\} = i \sum_{p,q,r,s \in \mathbb{Z}} (p^2 - q^2 + r^2 - s^2) z(p, q, r, s) u_p \bar{u}_q v_r \bar{v}_s,$$

where

$$z(p, q, r, s) = \begin{cases} 1 & \text{if } p - q + r - s = 0 \text{ and } p^2 - q^2 + r^2 - s^2 = 0, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Therefore,

$$\forall (p, q, r, s) \in \mathbb{Z}^4, (p^2 - q^2 + r^2 - s^2) z(p, q, r, s) = 0,$$

and we have $\{N, Z_4\} = 0$. The proof of the second point of the proposition is completed.

Properties of the change of variables τ

Let us begin with a generic remark about polynomials on \mathcal{A}_ρ .

Lemma 2.2.2. *Let Q be a polynomial defined by*

$$Q(u, v) := \sum_{\substack{p,q,r,s \in \mathbb{Z} \\ p-q+r-s=0}} a(p, q, r, s) u_p \bar{u}_q v_r \bar{v}_s.$$

If the family of coefficients $(a(p, q, r, s))_{p,q,r,s \in \mathbb{Z}}$ is bounded, then

- *The polynomial Q is well defined and continuous on \mathcal{A}_ρ .*
- *The associated vector field X_Q is bounded from \mathcal{A}_ρ to \mathcal{A}_ρ .*

Proof. We assume that for a constant $M > 0$,

$$\forall (p, q, r, s) \in \mathbb{Z}^4, |a(p, q, r, s)| < M.$$

Separating the sum with respect to the four variables, we have

$$\begin{aligned} |Q(u, v)| &\leq M \sum_{p,q,r,s \in \mathbb{Z}} |u_p| |u_q| |v_r| |v_s| \\ &\leq M \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j| \right)^2 \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j| \right)^2 \\ &\leq M \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j| + |v_j| \right)^4 \\ &\leq M \| (u, v) \|_\rho^4, \end{aligned}$$

where, for the last inequality, we use that $e^{\rho|j|} \geq 1, \forall j \in \mathbb{Z}$. Therefore, the polynomials Z_4 and χ are well defined and continuous on \mathcal{A}_ρ . For the vector field X_Q we get

$$\begin{aligned} \|X_Q(u, v)\|_\rho &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{\rho|j|} \left(\left| \frac{\partial Q}{\partial u_j} \right| + \left| \frac{\partial Q}{\partial \bar{u}_j} \right| + \left| \frac{\partial Q}{\partial v_j} \right| + \left| \frac{\partial Q}{\partial \bar{v}_j} \right| \right) \\ &\lesssim M \sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{\rho|p|} \sum_{\substack{q,r,s \in \mathbb{Z} \\ p-q+r-s=0}} (|u_q| |v_r| |v_s| + |v_q| |u_r| |u_s|). \end{aligned}$$

Here, we use that $p - q + r - s = 0 \Rightarrow |p| \leq |q| + |r| + |s|$. It follows

$$\begin{aligned} \|X_Q(u, v)\|_\rho &\lesssim M \sum_{q, r, s \in \mathbb{Z}} \left(|u_q| e^{\rho|q|} |v_r| e^{\rho|r|} |v_s| e^{\rho|s|} + |v_q| e^{\rho|q|} |u_r| e^{\rho|r|} |u_s| e^{\rho|s|} \right) \\ &\lesssim M \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{\rho|j|} |u_j| \right) \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{\rho|j|} |v_j| \right)^2 + M \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{\rho|j|} |u_j| \right)^2 \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{\rho|j|} |v_j| \right) \\ &\lesssim M \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{\rho|j|} (|u_j| + |v_j|) \right)^3 = M \|(u, v)\|_\rho^3. \end{aligned}$$

Thus, the vector field X_Q is bounded from \mathcal{A}_ρ to \mathcal{A}_ρ . \square

By construction, the coefficients of χ are bounded. Thus, the previous proposition gives

$$\|X_\chi(u, v)\|_\rho = \mathcal{O} \|(u, v)\|_\rho^3. \quad (2.2.5)$$

We now want to prove that τ is well defined, i.e. we want to prove that the flow φ_t is defined at least up to $t = 1$. For that purpose, the idea here is to use a bootstrap argument. We introduce $T = T(u, v) > 0$ the existence time of the flow $\varphi_t(u, v)$, and we consider a smaller time $0 \leq s \leq T$. Writing the fundamental theorem of calculus for φ_t , the flow of χ , between $t = 0$ and $t = s$, we obtain

$$\begin{aligned} \varphi_s(u, v) - \varphi_0(u, v) &= \int_0^s \dot{\varphi}_t(u, v) dt \\ &= \int_0^s X_\chi(\varphi_t(u, v)) dt. \end{aligned}$$

By definition, we have $\varphi_0 = Id$. Thus, the equation (2.2.5) implies (with $C > 0$ a constant):

$$\|\varphi_s(u, v) - (u, v)\|_\rho \leq C \int_0^s \|\varphi_t(u, v)\|_\rho^3 dt. \quad (2.2.6)$$

We choose $(u, v) \in B_\rho(\varepsilon)$. As long as

$$\|\varphi_s(u, v) - (u, v)\|_\rho \leq 2\|(u, v)\|_\rho,$$

we have (using that $(u, v) \in B_\rho(\varepsilon)$),

$$\begin{aligned} \|\varphi_s(u, v) - (u, v)\|_\rho &\leq Cs(2\|(u, v)\|_\rho)^3 \\ &\leq (8C\varepsilon^2s) \|(u, v)\|_\rho \end{aligned}$$

For ε small enough, we have $8C\varepsilon^2 \leq 1$. Thus we obtain

$$\|\varphi_s(u, v)\|_\rho \leq (1 + s)\|(u, v)\|_\rho.$$

This bound is satisfied as soon as $\|\varphi_s(u, v) - (u, v)\|_\rho \leq 2\|(u, v)\|_\rho$ and $s \leq T(u, v)$. Therefore, by continuity, we have $T(u, v) \geq 1$ and

$$\forall s \in [0, 1], \quad \|\varphi_s(u, v)\|_\rho \leq 2\|(u, v)\|_\rho. \quad (2.2.7)$$

The fact that $T(u, v) \geq 1$ implies that $\tau = \varphi_1$ is well defined. Thus, writing the equation (2.2.6) for $s = 1$ and using the bound (2.2.7), we obtain

$$\|\tau(u, v) - (u, v)\|_\rho \lesssim \|(u, v)\|_\rho^3.$$

We have thus proved the fourth point of the proposition.

The remainder term R_6

We recall that by construction, the remainder term R_6 is

$$R_6 := \{P, \chi\} + \int_0^1 (1-t) \{\{H, \chi\}, \chi\} \circ \varphi_t dt$$

The polynomials P, χ, N and Z_4 have bounded coefficients. Therefore, using the homological equation (2.2.4), the same is true for the polynomials Q_1 and Q_2 defined by

$$Q_1 := \{P, \chi\} \quad \text{and} \quad Q_2 := \{\{H, \chi\}, \chi\} = \{Z_4, \chi\} - \{P, \chi\} + \{\{P, \chi\}, \chi\}.$$

Moreover, the polynomials P, χ and Z_4 are of order 4. Thus, the polynomials Q_1 and Q_2 are of order at least 6. Therefore, the computations of Lemma 2.2.2 give

$$\|X_{Q_1}(u, v)\|_\rho \lesssim \|(u, v)\|_\rho^5 \quad \text{and} \quad \|X_{Q_2}(u, v)\|_\rho \lesssim \|(u, v)\|_\rho^5.$$

Finally, for ε small enough and $(u, v) \in B_\rho(\varepsilon)$, we can use the estimate (2.2.7) to deduce that

$$\|X_{R_6}(u, v)\|_\rho \lesssim \|(u, v)\|_\rho^5.$$

The proof of the point iii) and thus the proof of the proposition is completed. \square

2.2.2 About the resonant part Z_4

In order to complete the construction of this Birkhoff normal form, we can give an explicit formulation of Z_4 . For that purpose we introduce:

$$I = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j|^2, \quad J = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j|^2 \quad \text{and} \quad S = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j \bar{v}_j.$$

Whereas I and J are just the L^2 norms of the vectors u and v , we see that the term S contains the informations of the coupling. With these notations, we have

Proposition 2.2.3. *The polynomial Z_4 reads:*

$$Z_4 = IJ + |S|^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 |v_n|^2. \quad (2.2.8)$$

Proof. We recall that $Z_4 = \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} u_p \bar{u}_q v_r \bar{v}_s$, where

$$\Gamma_0 = \left\{ (p, q, r, s) \in \mathbb{Z}^4 \mid p - q + r - s = 0, p^2 - q^2 + r^2 - s^2 = 0 \right\}.$$

For $(p, q, r, s) \in \Gamma_0$ we have

$$0 = p^2 - q^2 + r^2 - s^2 = (p-q)(p+q) + (r-s)(r+s) = (p-q)(p+q-r-s) = 2(p-q)(p-s).$$

Necessarily, we have $\{p, r\} = \{q, s\}$. Therefore, we can write Z_4 as

$$\begin{aligned} Z_4 &= \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} u_p \bar{u}_q v_r \bar{v}_s \\ &= \sum_{p,r \in \mathbb{Z}} u_p \bar{u}_p v_r \bar{v}_r + \sum_{p,r \in \mathbb{Z}} u_p \bar{u}_r v_r \bar{v}_p - \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \bar{u}_n v_n \bar{v}_n \\ &= \sum_{p,r \in \mathbb{Z}} |u_p|^2 |v_r|^2 + \sum_{p,r \in \mathbb{Z}} (u_p \bar{v}_p) \overline{(u_r \bar{v}_r)} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 |v_n|^2 \\ &= IJ + |S|^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 |v_n|^2. \end{aligned}$$

\square

With this simplified form for Z_4 , we want to study the dynamical consequences of the Birkhoff normal form transformation of the Hamiltonian. The first step here is the study of a reduced model we introduce in the next section.

2.3 The reduced model

The aim of the study of reduced models is to find some interesting dynamics for the solutions of the reduced system associated. To take advantage of the coupling effect, the first natural idea is to reduced the study to a two-modes system. For that purpose, we introduce the space

$$\mathcal{J}(p, q) = \{(u, v) \in \mathcal{A}_p \mid u_j = \bar{u}_j = v_j = \bar{v}_j = 0 \text{ if } j \neq p, q\}.$$

We denote by H^r the associated Hamiltonian:

$$H^r = H|_{\mathcal{J}(p, q)}.$$

Writing $H^r = N^r + P^r$ we have, for $(u, v) \in \mathcal{J}(p, q)$,

$$N^r(u, v) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 (I_j + J_j) = p^2 (I_p + J_p) + q^2 (I_q + J_q),$$

and

$$\begin{aligned} P^r(u, v) &= \sum_{\substack{i, j, k, l \in \mathbb{Z} \\ i-j+k-l=0}} u_i \bar{u}_j v_k \bar{v}_l = (u_p \bar{u}_p + u_q \bar{u}_q)(v_p \bar{v}_p + v_q \bar{v}_q) + u_p \bar{u}_q v_q \bar{v}_p + u_q \bar{u}_p v_p \bar{v}_q \\ &= (I_p + I_q)(J_p + J_q) + 2\sqrt{I_p I_q J_p J_q} \cos(\theta_p - \theta_q + \varphi_q - \varphi_p). \end{aligned}$$

We introduce the angle $\psi_0 := \theta_p - \theta_q + \varphi_q - \varphi_p$, the Hamiltonian H^r reads:

$$H^r = p^2 (I_p + J_p) + q^2 (I_q + J_q) + (I_p + I_q)(J_p + J_q) + 2\sqrt{I_p I_q J_p J_q} \cos \psi_0.$$

For $(\theta_p, \theta_q, \phi_p, \phi_q) \in \mathbb{T}^4$ and $(I_p, I_q, J_p, J_q) \in \mathbb{R}^4$, the finite Hamiltonian system associated to H^r is

$$\begin{cases} \dot{\theta}_j = -\frac{\partial H^r}{\partial I_j}, & \dot{I}_j = \frac{\partial H^r}{\partial \theta_j}, & j = p, q, \\ \dot{\varphi}_j = -\frac{\partial H^r}{\partial J_j}, & \dot{J}_j = \frac{\partial H^r}{\partial \varphi_j}, & j = p, q. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Through the following lemma, we want to study the integrability of this system and find a more convenient system of coordinates:

Lemma 2.3.1. *The system (2.3.1) is completely integrable. Moreover, the change of variables:*

$$\begin{cases} K_1 = I_q + I_p, & K_2 = J_q + J_p, & K_3 = I_q + J_q, & K_0 = I_q, \\ \psi_1 = \theta_p, & \psi_2 = \varphi_p, & \psi_3 = \varphi_q - \varphi_p, & \psi_0 = \theta_q - \theta_p + \varphi_p - \varphi_q, \end{cases} \quad (2.3.2)$$

is symplectic in the following sense: $dI \wedge d\theta + dJ \wedge d\varphi = dK \wedge d\psi$.

Proof. In order to show that the system (2.3.1) is completely integrable, let us show that the variables K_1 , K_2 et K_3 are constants of motion. For example, we have for K_1 :

$$\begin{aligned} \{K_1, H^r\} &= \sum_{j=p,q} \left(\frac{\partial K_1}{\partial I_j} \frac{\partial H^r}{\partial \theta_j} - \frac{\partial K_1}{\partial \theta_j} \frac{\partial H^r}{\partial I_j} + \frac{\partial K_1}{\partial J_j} \frac{\partial H^r}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial K_1}{\partial \varphi_j} \frac{\partial H^r}{\partial J_j} \right) \\ &= \frac{\partial H^r}{\partial \theta_p} + \frac{\partial H^r}{\partial \theta_q} = 2\sqrt{I_p I_q J_p J_q} (\sin \psi_0 - \sin \psi_0) = 0. \end{aligned}$$

The same computations show that

$$\{K_2, H^r\} = \frac{\partial H^r}{\partial \varphi_p} + \frac{\partial H^r}{\partial \varphi_q} = 0 \quad \text{and} \quad \{K_3, H^r\} = \frac{\partial H^r}{\partial \theta_q} + \frac{\partial H^r}{\partial \varphi_q} = 0.$$

Moreover, K_1 , K_2 and K_3 do not depend on the angles $\theta_{p,q}$, $\varphi_{p,q}$. Thus, they are in involution:

$$\{K_1, K_2\} = \{K_1, K_3\} = \{K_3, K_2\} = 0.$$

Finally, it is straightforward to check that K_1 , K_2 and K_3 are independent. They also are independent with H which depends on angles. Therefore, we have a system of 8 equations with 4 first integrals (K_1 , K_2 , K_3 and H): the system (2.3.1) is completely integrable. Another easier way to check this integrability is just to remark that the Hamiltonian H^r depends only on one angle. However, the goal of this lemma is to find an appropriate set of new variables. This is the reason why it is interesting here to work with K_1 , K_2 and K_3 .

We now have to prove that the change of variables (2.3.2) is symplectic. We have

$$\begin{aligned} d\Psi \wedge dK &= d\Psi_0 \wedge dK_0 + d\Psi_1 \wedge dK_1 + d\Psi_2 \wedge dK_2 + d\Psi_3 \wedge dK_3 \\ &= dI_q \wedge d(\theta_q - \theta_p + \varphi_p - \varphi_q + \theta_p + \varphi_q - \varphi_p) \\ &\quad + dI_p \wedge d\theta_p + dJ_p \wedge d\varphi_p + dJ_q \wedge d(\varphi_p + \varphi_q - \varphi_p) \\ &= dI \wedge d\theta + dJ \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Thus, the change of variables (2.3.2) is symplectic and the proof of the lemma is completed. \square

In this new set of coordinates, the Hamiltonian H^r reads:

$$\begin{aligned} H^r &= H^r(\psi_0, K_0, K_1, K_2, K_3) \\ &= p^2(K_1 + K_2 - K_3) + q^2 K_3 + K_1 K_2 \\ &\quad + 2[K_0(K_1 - K_0)(K_3 - K_0)(K_2 - K_3 + K_0)]^{\frac{1}{2}} \cos \psi_0. \end{aligned}$$

In this expression, the last term plays the important role because K_1 , K_2 and K_3 are constants. We now have to fix these constants, which should be of order ε^2 for initial data of order ε . The different choices may give different kind of behaviors.

2.3.1 The beating effect

As the non constant term in H^r is given by

$$2[K_0(K_1 - K_0)(K_3 - K_0)(K_2 - K_3 + K_0)]^{\frac{1}{2}} \cos \psi_0,$$

the first natural idea to deal with the Hamiltonian H^r is to kill the square-root. For that purpose, we fix $K_1 = K_2 = K_3 = \varepsilon^2$, we obtain:

$$\begin{aligned} H_0^r(\psi_0, K_0) &:= H^r(\psi_0, K_0, \varepsilon^2, \varepsilon^2, \varepsilon^2) \\ &= \varepsilon^2(p^2 + q^2) + \varepsilon^4 + 2K_0(\varepsilon^2 - K_0) \cos \psi_0. \end{aligned}$$

Back to the definitions of K_1, K_2 and K_3 in (2.3.2), we see that the choice $K_1 = K_2 = K_3$ implies

$$I_p = J_q \quad \text{and} \quad I_q = J_p.$$

We have now a Hamiltonian system given by

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 2 \cos \psi_0 (2K_0 - \varepsilon^2) = -\frac{\partial H_0^r}{\partial K_0}, \\ \dot{K}_0 = -2K_0(\varepsilon^2 - K_0) \sin \psi_0 = \frac{\partial H_0^r}{\partial \psi_0}. \end{cases}$$

For convenient computations, we want to kill the dependence on the size ε of the initial data. For that purpose, we proceed to the change of unknowns:

$$\psi_0(t) = \psi(\varepsilon^2 t) \quad \text{and} \quad K_0(t) = \varepsilon^2 K(\varepsilon^2 t).$$

The previous system becomes:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -2(1 - 2K) \cos \psi = -\frac{\partial H_\star^r}{\partial K}, \\ \dot{K} = -2K(1 - K) \sin \psi = \frac{\partial H_\star^r}{\partial \psi}, \end{cases} \quad (2.3.3)$$

where

$$H_\star^r = H_\star^r(\psi, K) = 2K(1 - K) \cos \psi. \quad (2.3.4)$$

We remark here that for the new Hamiltonian H_\star^r , we don't care about the constant terms present in H^r . Let us show that the expression of H_\star^r in (2.3.4) insures the existence of periodic orbits. From now, we fix $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$. For an initial condition of the form

$$(\psi_\gamma(0), K_\gamma(0)) = (0, \gamma).$$

the conservation of the Hamiltonian gives

$$H_\star^r(\psi(t), K(t)) = 2K(t)(1 - K(t)) \cos \psi(t) = 2\gamma(1 - \gamma) \in (0, \frac{1}{2}).$$

From this conservation, we know that

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 < K(t) < 1 \quad \text{and} \quad -\frac{\pi}{2} < \psi(t) < \frac{\pi}{2}. \quad (2.3.5)$$

In order to prove the existence of periodic orbits, we want to show that the velocity vector defined by $(\dot{\psi}(t), \dot{K}(t))$ never cancels. From the Hamiltonian system (2.3.3) and the conditions on the variables ψ and K given in (2.3.5), we have

$$\dot{\psi}(t) = 0 \Leftrightarrow K(t) = \frac{1}{2}, \quad \dot{K}(t) = 0 \Leftrightarrow \psi(t) = 0.$$

Let us assume that there exist a time t_0 such that $(\psi_\gamma(t_0), K_\gamma(t_0)) = (0, \frac{1}{2})$. Thus we have

$$H_\star^r(\psi(t_0), K(t_0)) = \frac{1}{2} = 2\gamma(1 - \gamma),$$

which is impossible for $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$.

Therefore, the velocity vector $(\dot{\psi}(t), \dot{K}(t))$ never cancels and the solutions are periodic. Moreover, we have informations on the behavior of the couple $(\psi(t), K(t))$ given by the following symmetries

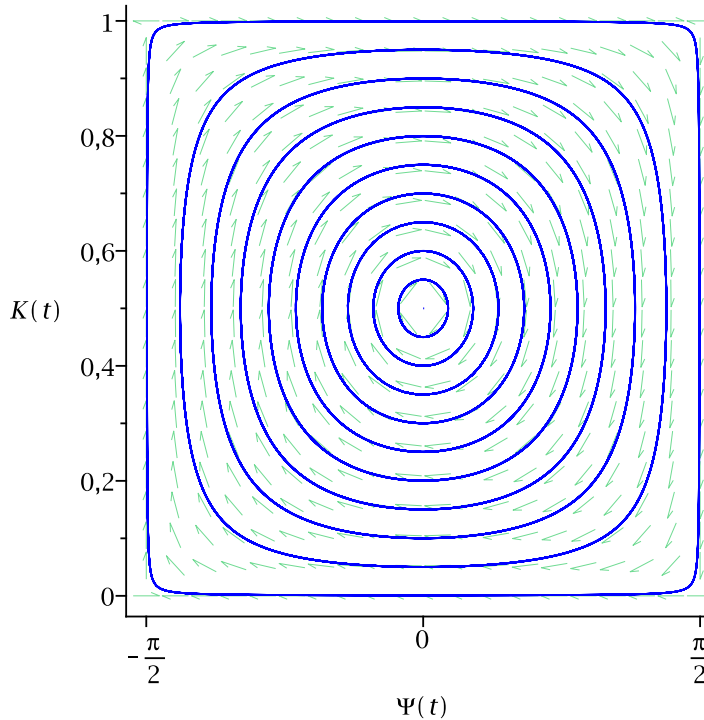
$$H_\star^r(-\Psi, K) = H_\star^r(\Psi, K), \quad H_\star^r(\Psi, 1 - K) = H_\star^r(\Psi, K).$$

These symmetries insure that there exists a time T_γ such that the solution $(\psi_\gamma(t), K_\gamma(t))$ associated to the initial value $(\psi_\gamma(0), K_\gamma(0)) = (0, \gamma)$ is $2T_\gamma$ -periodic and satisfies

$$K_\gamma(0) = \gamma, \quad K_\gamma\left(\frac{T_\gamma}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad K_\gamma(T_\gamma) = 1 - \gamma.$$

Another way to check the existence of these periodic orbits and symmetries is to draw the phase portrait of the system (2.3.3), which is given by:

Figure 2.1 – Phase portrait of the Hamiltonian H_\star^r



From this phase portrait (and the previous study), we deduce the following result:

Lemma 2.3.2. *Let $0 < \gamma < \frac{1}{2}$. The system (2.3.3) associated to the Hamiltonian H_\star^r admits a periodic orbit $\Gamma_\gamma := \{(\psi_\gamma(t), K_\gamma(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ of period $2T_\gamma$, which satisfies the conditions:*

$$(\psi_\gamma(0), K_\gamma(0)) = (0, \gamma) \quad \text{and} \quad (\psi_\gamma(T_\gamma), K_\gamma(T_\gamma)) = (0, 1 - \gamma).$$

Before dealing with the results provided by this lemma, we can take a look at the limit cases from the condition $0 < \gamma < \frac{1}{2}$.

Remark 2.3.3. *They are two limit cases in Lemma 2.3.2 that we can observe.*

- $\gamma = 0$: the “one-mode” case.

If the initial data is $(\psi(0), K(0)) = (0, 0)$, it means that initially, the modes u_q and v_p are not excited. Indeed, we have

$$I_q(0) = J_p(0) = 0.$$

Thanks to the system (2.3.3), we see that

$$\dot{K}(0) = 0 \quad \text{because} \quad K(0) = 0.$$

We deduce that

$$\forall t \geq 0, \quad I_q(t) = J_p(t) = 0.$$

It corresponds to the case where we have just one mode excited for u and v . In this case, we have

$$H^r = p^2 I_p + q^2 J_q + I_p J_q.$$

The Hamiltonian here doesn't depend on an angle, thus the actions I_p and J_q are constants, and there is no exchange of energy.

- $\gamma = \frac{1}{2}$: the “decoupled” case.

If the initial data is $(\psi(0), K(0)) = (0, \frac{1}{2})$, we see in the system (2.3.3) that

$$\dot{\psi}(0) = 0 \quad \text{because} \quad (1 - 2K(0)) = 0, \quad \text{and} \quad \dot{K}(0) = 0 \quad \text{because} \quad \sin \psi(0) = 0.$$

Therefore,

$$\forall t \geq 0, \quad I_q(t) = \varepsilon^2 K(t) = \frac{1}{2} \varepsilon^2.$$

Thanks to the conservations of K_1, K_2 and K_3 , we deduce that

$$\forall t \geq 0, \quad I_p(t) = I_q(t) = J_p(t) = J_q(t) = \frac{1}{2} \varepsilon^2. \quad (2.3.6)$$

Once again, no exchange of energy is possible. Moreover, the conservation of Ψ implies

$$\forall t \geq 0, \quad \varphi_p(t) - \varphi_q(t) = \theta_p(t) - \theta_q(t). \quad (2.3.7)$$

Thus, equations (2.3.6) and (2.3.7) give

$$\begin{aligned} |v(t)|^2 &= \left| J_p(t) e^{i\varphi_p(t)} + J_q(t) e^{i\varphi_q(t)} \right|^2 = J_p(t)^2 + J_q(t)^2 + 2J_p(t)J_q(t) \cos(\varphi_p(t) - \varphi_q(t)) \\ &= I_p(t)^2 + I_q(t)^2 + 2I_p(t)I_q(t) \cos(\theta_p(t) - \theta_q(t)) \\ &= |u(t)|^2. \end{aligned}$$

Therefore, the system (2.0.1) is decoupled.

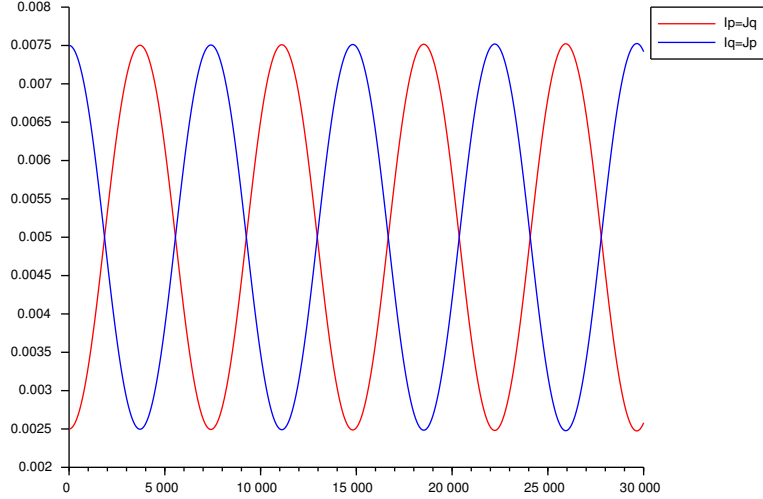
The study of the two limit cases show that the exchange of energy is possible only if the system is really coupled and if we really excite the four modes u_p, u_q, v_p and v_q . These are the natural assumptions of our study. By the symmetries of the Hamiltonian H_\star^r , we see that we can obtain a more general setting for the lemma by choosing

$$\gamma \in (0, 1) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

However, the orbits obtained with this choice are exactly the same obtained by the previous choice $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$. Therefore, we keep this last choice in the following.

Out of these two cases, for $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, Lemma 2.3.2 gives solutions which provide a beating effect for the resonant system. For example, if we fix $\gamma = 0.25$ and $\varepsilon = 0.1$, we obtain:

Figure 2.2 – Beating effect for the reduced system



2.3.2 The shifted beating effect

Let us go back to the Hamiltonian:

$$H^r = p^2(K_1 + K_2 - K_3) + q^2 K_3 + K_1 K_2 + 2[K_0(K_1 - K_0)(K_3 - K_0)(K_2 - K_3 + K_0)]^{\frac{1}{2}} \cos \psi_0.$$

In the previous subsection, we fixed $K_1 = K_2 = K_3$ in order to kill the square-root and obtain a more convenient form for the Hamiltonian H^r . This choice implies $I_q = J_p$ and $I_p = J_q$, because we have

$$\begin{aligned} I_p - J_q &= (K_1 - K_0) - (K_3 - K_0) = K_1 - K_3, \\ I_q - J_p &= K_0 - (K_2 - K_3 + K_0) = K_3 - K_2. \end{aligned}$$

Therefore, out of the choice $K_1 = K_2 = K_3$, the difference between I_q and J_p (or the one between I_p and J_q) is still constant but non necessary null. Thus, for a good choice of constants K_1 , K_2 and K_3 , we can expect a shifted beating effect, i.e. a beating effect in which we have $I_p \neq J_q$ or $I_q \neq J_p$. For more generality, we can consider now these

constants fixed by

$$\begin{aligned} K_1 &= I_q + I_p = \varepsilon^2(1 + \tau_1), \\ K_2 &= J_q + J_p = \varepsilon^2(1 + \tau_2), \\ K_3 &= I_q + J_q = \varepsilon^2(1 + \tau_3), \end{aligned}$$

where τ_1 , τ_2 and τ_3 are three constants to fix. Of course, we can't choose any constant for the vector $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. The first obstruction is that for initial data of order ε , we should have K_1 , K_2 and K_3 of order ε^2 . Thus, we have to choose

$$\tau_1 = \mathcal{O}(1), \quad \tau_2 = \mathcal{O}(1) \quad \text{and} \quad \tau_3 = \mathcal{O}(1). \quad (2.3.8)$$

Moreover, the second obstruction is to keep for the considered times

$$I_q(t) > 0, \quad I_p(t) > 0, \quad J_q(t) > 0, \quad \text{and} \quad J_p(t) > 0.$$

It implies

$$\forall t \geq 0, \quad 0, K_3 - K_2 < K_0(t) < K_1, K_3.$$

If we fix the initial value

$$K_0(0) = \varepsilon^2 \gamma,$$

the previous equation implies, for the time $t = 0$,

$$\max(0, \tau_3 - \tau_2) < \gamma < \min(1 + \tau_1, 1 + \tau_3). \quad (2.3.9)$$

We obtain here the hypotheses on γ required in Theorem 2.0.1. This inequality is well defined because with the choice $\tau \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^3$, we always have

$$\max(0, \tau_3 - \tau_2) < \min(1 + \tau_1, 1 + \tau_3). \quad (2.3.10)$$

From now, we fix the constant vector $\tau \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^3$. For the following of the study of this Hamiltonian system, we use once again the change of unknowns

$$\psi_0(t) = \psi(\varepsilon^2 t) \quad \text{and} \quad K_0(t) = \varepsilon^2 K(\varepsilon^2 t),$$

The Hamiltonian system satisfied by the couple (ψ, K) is:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\frac{\partial H_{sh}^r}{\partial K}, \\ \dot{K} = \frac{\partial H_{sh}^r}{\partial \psi}, \end{cases} \quad (2.3.11)$$

where the reduced Hamiltonian of the shifted case H_{sh}^r is defined by

$$H_{sh}^r = H_{sh}^r(\psi, K) = 2 [K(1 + \tau_1 - K)(1 + \tau_3 - K)(\tau_2 - \tau_3 + K)]^{\frac{1}{2}} \cos \psi. \quad (2.3.12)$$

The conservation of this Hamiltonian implies the bound

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \max(0, \tau_3 - \tau_2) < K(t) < \min(1 + \tau_1, 1 + \tau_3) \quad \text{and} \quad -\frac{\pi}{2} < \psi(t) < \frac{\pi}{2}. \quad (2.3.13)$$

In order to study this Hamiltonian, we introduce the polynomial P_τ defined by

$$P_\tau(X) := X(1 + \tau_1 - X)(1 + \tau_3 - X)(\tau_2 - \tau_3 + X).$$

With this polynomial P_τ and the expression of the Hamiltonian H_{sh}^r in (2.3.12), the system (2.3.11) reads

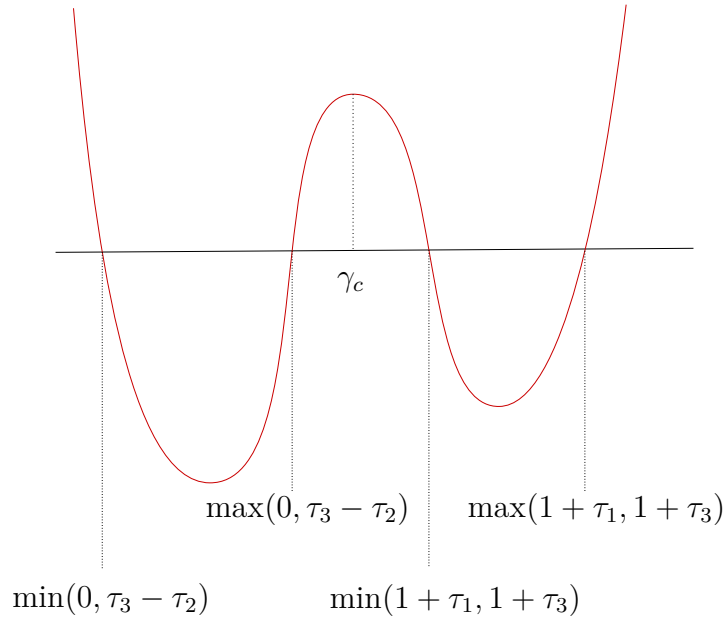
$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\frac{P'_\tau(K)}{\sqrt{P_\tau(K)}} \cos \psi, \\ \dot{K} = -2\sqrt{P_\tau(K)} \sin \psi. \end{cases}$$

Thanks to the equation (2.3.10), the polynomial P_τ has at least two different roots. In the particular case of the beating effect (i.e for $\tau = 0_{\mathbb{R}^3}$), we have $P_0(X) := X^2(1 - X)^2$ and there is exactly two different roots. The important property of the polynomial P_τ comes from its form, we have

$$\exists ! \gamma_c = \gamma_c(\tau) \in (\max(0, \tau_3 - \tau_2), \min(1 + \tau_1, 1 + \tau_3)) \quad \text{such that} \quad P'_\tau(\gamma_c) = 0.$$

It is useful for understanding the notations and the ideas to draw the graph of the polynomial P_τ :

Figure 2.3 – Graph of the polynomial P_τ



To prove the existence of periodic orbits, we need once again to show that the velocity vector $(\dot{\psi}(t), \dot{K}(t))$ never cancels. We have, from the bounds (2.3.13):

$$\dot{\psi}(t) = 0 \Leftrightarrow K(t) = \gamma_c, \quad \dot{K}(t) = 0 \Leftrightarrow \psi(t) = 0.$$

Let us assume that there exist a time t_0 such that $(\psi_\gamma(t_0), K_\gamma(t_0)) = (0, \gamma_c)$. In this case, the conservation of the Hamiltonian H_{sh}^r gives, for $t \in \mathbb{R}$,

$$H_{sh}^r(t) = H_{sh}^r(\psi(t_0), K(t_0)) = 2\sqrt{P_\tau(\gamma_c)} = 2\sqrt{\sup_{\max(0, \tau_3 - \tau_2) < K(s) < \min(1 + \tau_1, 1 + \tau_3)} (P_\tau(K(s)))}.$$

Therefore, we have, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{P_\tau(K(t))} \cos \psi(t) = \sqrt{\sup_{K(t)} (P_\tau(K(t)))},$$

and we deduce that

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (\psi(t), K(t)) = (0, \gamma_c).$$

This solution corresponds to the case $(\psi(0), K(0)) = (0, \frac{1}{2})$ in the study of the beating (i.e for $\tau = 0$), which also gives a stationary couple of solution. Out of this special case, for

$$\gamma \in (\max(0, \tau_3 - \tau_2), \min(1 + \tau_1, 1 + \tau_3)) \setminus \{\gamma_c\},$$

we obtain periodic couples of solutions $(\psi(t), K(t))$. Here, due to the dependence of the polynomial P_τ on the vector τ , we only have the symmetry

$$H_{sh}^r(-\Psi, K) = H_{sh}^r(\Psi, K).$$

As in the beating case, we can check this result by drawing a phase portrait. For example, we choose

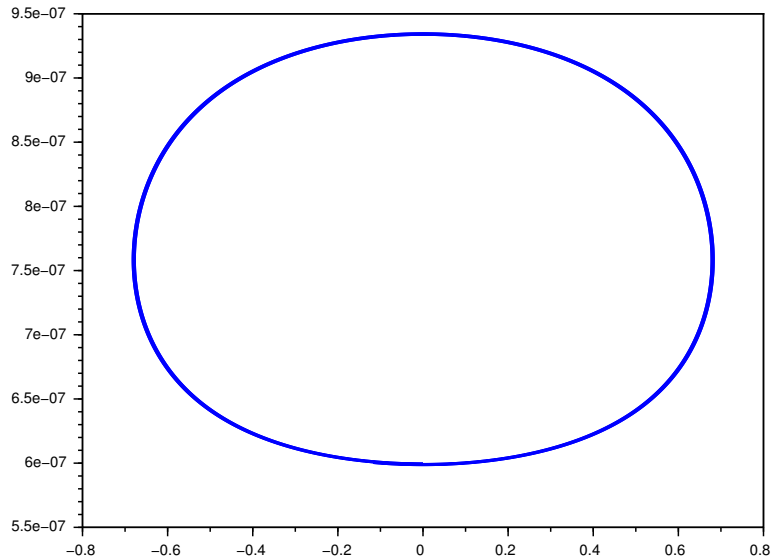
$$\tau = (0.1, -0.3, 0.2), \quad \gamma = 0.6 \quad \text{and} \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

The conditions (2.3.8) and (2.3.9) are satisfied because we have

$$\max(0, \tau_3 - \tau_2) = 0.5 < \gamma = 0.6 < 1.1 = \min(1 + \tau_1, 1 + \tau_3).$$

For this choice of constants, we obtain the following phase portrait:

Figure 2.4 – Phase portrait of the shifted beating effect solutions



From the previous study, we obtain the following lemma:

Lemma 2.3.4. *Let $\tau \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^3$. For all*

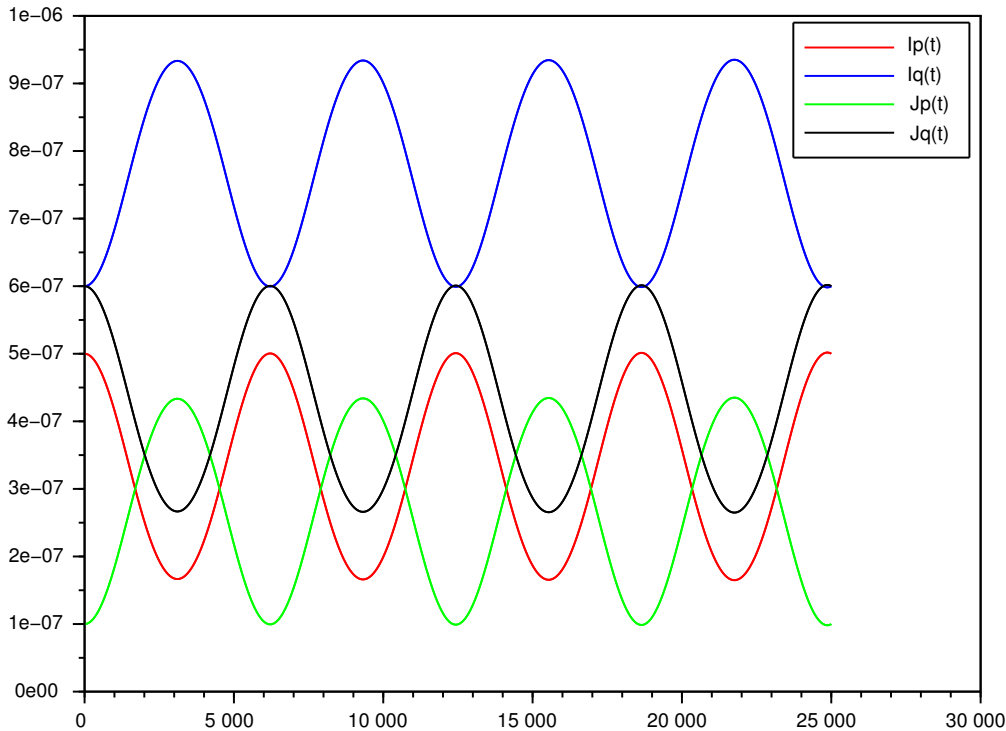
$$\gamma \in (\max(0, \tau_3 - \tau_2), \min(1 + \tau_1, 1 + \tau_3)) \setminus \{\gamma_c\},$$

where $\gamma_c = \gamma_c(\tau)$ is a point, the system (2.3.11) associated to the Hamiltonian H_{sh}^r admits a periodic orbit $\Gamma_\gamma := \{(\psi_\gamma(t), K_\gamma(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ of period $2T_\gamma$, non reduced to a point, which satisfies

$$(\psi_\gamma(0), K_\gamma(0)) = (0, \gamma).$$

These solutions are called the shifted beating solutions. For example, with the previous choice of constants τ and γ , we obtain for the actions I_p , I_q , J_p and J_q (obtained from $K(t)$) the following behavior:

Figure 2.5 – Shifted beating effect for the reduced system



We recall that the shift between the actions I_p and J_q (the same stands the shift between I_q and J_p) is determined by the choice of the vector τ , on which we have a large freedom.

2.4 Beating effect solutions for the initial system

The goal of this section is to highlight the desired energy exchange of Theorem 2.0.2: the beating effect. For that purpose, we show that for a good choice of initial datum, the solutions of the Hamiltonian system associated to H^B in Proposition 2.2.1 stay close to the solutions of the systems associated to the reduced Hamiltonians H^r or H_\star^r defined in the study of the reduced model of Subsection 2.3.1. The conclusion then comes from the proximity between the Hamiltonian H^B from the Birkhoff normal form and the Hamiltonian H from the initial system (2.0.1).

The first step is to make the change of variables from Lemma 2.3.1 on the modes p and q . We obtain for H^B the complete system:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{K}_j = \frac{\partial H^B}{\partial \psi_j}, \quad i\dot{u}_k = \frac{\partial H^B}{\partial \bar{u}_k}, \quad i\dot{v}_k = \frac{\partial H^B}{\partial \bar{v}_k}, \\ \dot{\psi}_j = -\frac{\partial H^B}{\partial K_j}, \quad -i\dot{\bar{u}}_k = \frac{\partial H^B}{\partial u_k}, \quad -i\dot{\bar{v}}_k = \frac{\partial H^B}{\partial v_k}, \end{array} \right. \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad k \neq p, q. \quad (2.4.1)$$

We denote now $\mathcal{D} = \{p, q\}$ and $\mathcal{L} = \mathcal{Z} \setminus \{p, q\}$. By equations (2.2.2) and (2.2.8) we have:

$$H^B = N + IJ + |S|^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 |v_n|^2 + R_6.$$

Thus, separating the terms by counting inner modes (from \mathcal{D}) and outer modes (from \mathcal{L}), we get

$$\begin{aligned} H^B &= p^2(I_p + J_p) + q^2(I_q + J_q) + (I_p + I_q)(J_p + J_q) + (u_p \bar{u}_q v_q \bar{v}_p + \bar{u}_p u_q \bar{v}_q v_p) \\ &+ (I_p + I_q) \sum_{j \in \mathcal{L}} J_j + (J_p + J_q) \sum_{j \in \mathcal{L}} I_j + (u_p \bar{v}_p + u_q \bar{v}_q) \sum_{j \in \mathcal{L}} \bar{u}_j v_j + (\bar{u}_p v_p + \bar{u}_q v_q) \sum_{j \in \mathcal{L}} u_j \bar{v}_j \\ &+ \left(\sum_{j \in \mathcal{L}} I_j \right) \left(\sum_{j \in \mathcal{L}} J_j \right) + \sum_{j, l \in \mathcal{L}} u_j \bar{v}_j \bar{u}_l v_l - \sum_{n \in \mathcal{L}} I_n J_n + \sum_{j \in \mathcal{L}} j^2 (I_j + J_j) + R_6. \end{aligned}$$

Therefore,

$$H^B = H^r + R_I + Z_{4,2} + Z_{4,4} + R_6, \quad (2.4.2)$$

where

$$\begin{aligned} R_I &:= \sum_{j \in \mathcal{L}} j^2 (I_j + J_j), \\ Z_{4,2} &:= (I_p + I_q) \sum_{j \in \mathcal{L}} J_j + (J_p + J_q) \sum_{j \in \mathcal{L}} I_j + (u_p \bar{v}_p + u_q \bar{v}_q) \sum_{j \in \mathcal{L}} \bar{u}_j v_j + (\bar{u}_p v_p + \bar{u}_q v_q) \sum_{j \in \mathcal{L}} u_j \bar{v}_j, \\ Z_{4,4} &:= \left(\sum_{j \in \mathcal{L}} I_j \right) \left(\sum_{j \in \mathcal{L}} J_j \right) + \sum_{j, l \in \mathcal{L}} u_j \bar{v}_j \bar{u}_l v_l - \sum_{n \in \mathcal{L}} I_n J_n. \end{aligned}$$

The polynomial $Z_{4,2}$ contains all fourth order monomials with 2 indices outside the set \mathcal{D} , whereas $Z_{4,4}$ contains all fourth order monomials with 4 indices outside \mathcal{D} . Thanks to this form, we can now show that H^B and H^r are close. The first step is the study of the quantities K_1 , K_2 and K_3 which were constants of motion in the study of the reduced model.

2.4.1 Almost preservation of the quantities K_1 , K_2 and K_3

We want to study the behavior of the K_j (for $j = 1, 2, 3$), defined by the symplectic change of variables (2.3.2). Out of the study of the reduced model, K_1 , K_2 and K_3 aren't constants of motions anymore for the system (2.4.1). However, the following lemma show that these quantities are almost preserved.

Lemma 2.4.1. *Assume that:*

$$u_j(0), v_j(0) = \mathcal{O}(\varepsilon), \forall j \in \mathcal{D} \quad \text{and} \quad u_j(0), v_j(0) = \mathcal{O}(\varepsilon^2), \forall j \in \mathcal{L}. \quad (2.4.3)$$

Then, for all $0 \leq t \leq C\varepsilon^{-3}$, we have

$$I_j(t), J_j(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad \text{when} \quad j \in \mathcal{L}, \quad (2.4.4)$$

and

$$K_j(t) = K_j(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^6)t, \quad \text{for} \quad j = 1, 2, 3.$$

Proof. Let us begin with the almost conservation of the quantities I_n and J_n , for $n \in \mathcal{L}$. For that purpose, and in order to take advantage of the coupling effect, we introduce the quantity

$$L_n := I_n + J_n.$$

We can remark that I_n , J_n and N don't depend on angles. Therefore we have

$$\{L_n, N\} = \{I_n, N\} = \{J_n, N\} = 0.$$

From this remark and the equation (2.2.2), we have, for all $n \in \mathbb{Z}$:

$$\dot{L}_n = \{L_n, H^B\} = \{L_n, Z_4\} + \{L_n, R_6\}.$$

Let us show that we also have $\{L_n, Z_4\} = 0$. We recall that with the notations of Proposition 2.2.3, we have

$$Z_4 = IJ + |S|^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 |v_n|^2.$$

From this form, we deduce the following relation:

$$\{L_n, Z_4\} = \{L_n, |S|^2\}.$$

Therefore, we obtain

$$\begin{aligned} i \{L_n, Z_4\} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\partial L_n}{\partial u_j} \frac{\partial |S|^2}{\partial \bar{u}_j} - \frac{\partial L_n}{\partial \bar{u}_j} \frac{\partial |S|^2}{\partial u_j} + \frac{\partial L_n}{\partial v_j} \frac{\partial |S|^2}{\partial \bar{v}_j} - \frac{\partial L_n}{\partial \bar{v}_j} \frac{\partial |S|^2}{\partial v_j} \\ &= \bar{u}_n \frac{\partial |S|^2}{\partial \bar{u}_n} - u_n \frac{\partial |S|^2}{\partial u_n} + \bar{v}_n \frac{\partial |S|^2}{\partial \bar{v}_n} - v_n \frac{\partial |S|^2}{\partial v_n} \\ &= \bar{u}_n v_n S - u_n \bar{v}_n \bar{S} + \bar{v}_n u_n \bar{S} - v_n \bar{u}_n S \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finally, we have

$$\dot{L}_n = \{L_n, R_6\}. \quad (2.4.5)$$

We set now T_ε the maximal time such that, for all $|t| \leq T_\varepsilon$,

$$u_j(t) = v_j(t) = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{for } j \in \mathcal{D}, \quad u_j(t) = v_j(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{for } j \in \mathcal{L}.$$

Thanks to the hypothesis (2.4.3), we know that $T_\varepsilon > 0$. For $|t| \leq T_\varepsilon$ and $n \in \mathcal{L}$, considering that the remainder term R_6 contains monomials of order 6 in (u, v) , we have

$$\{L_n, R_6\}(t) = \bar{u}_n(t) \frac{\partial R_6}{\partial \bar{u}_n}(t) - u_n(t) \frac{\partial R_6}{\partial u_n}(t) + \bar{v}_n(t) \frac{\partial R_6}{\partial \bar{v}_n}(t) - v_n(t) \frac{\partial R_6}{\partial v_n}(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^{2+5}).$$

Therefore, from the equation (2.4.5), we have, for $|t| \leq T_\varepsilon$ and $n \in \mathcal{L}$,

$$L_n(t) = L_n(0) + \int_0^t \{L_n, R_6\}(s) ds = \mathcal{O}(\varepsilon^4) + t\mathcal{O}(\varepsilon^7).$$

The same computations show that, for $|t| \leq T_\varepsilon$ and $n \in \mathcal{D}$, we have

$$L_n(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) + t\mathcal{O}(\varepsilon^6).$$

Thus, by a bootstrap argument, we conclude that

$$T_\varepsilon \geq C \min(\varepsilon^{4-7}, \varepsilon^{2-6}) = C\varepsilon^{-3}.$$

This concludes the proof of the equation (2.4.4).

It remains to prove that $K_j(t) = K_j(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^6)t$, for $j = 1, 2, 3$. We have the Hamiltonian

$$H^B = N + Z_4 + R_6 = N + Z_{4,0} + Z_{4,2} + Z_{4,4} + R_6,$$

where $Z_{4,k}$ ($k = 0, 2, 4$) contains all fourth order monomials of Z_4 with k indices outside the set \mathcal{D} . We remark that $Z_{4,0}$ is the part of the nonlinearity Z_4 corresponding to the reduced model, we have

$$Z_{4,0} := \underbrace{(I_p + I_q)(J_p + J_q)}_{Z_{4,0}^{ap}} + \underbrace{(u_p \bar{u}_q v_q \bar{v}_p + \bar{u}_p u_q \bar{v}_q v_p)}_{Z_{4,0}^{eff}}.$$

The linear term N , the action preserving part $Z_{4,0}^{ap}$ of the polynomial $Z_{4,0}$, and the quantities K_j (for $j = 1, 2, 3$), do not depend on angles. Thus, we have

$$\{K_j, N\} = \{K_j, Z_{4,0}^{ap}\} = 0 \quad \text{for } j = 1, 2, 3.$$

For the effective part $Z_{4,0}^{eff}$ of $Z_{4,0}$, we remark that by symmetry we have

$$\{I_p, Z_{4,0}^{eff}\} = -\{I_q, Z_{4,0}^{eff}\} = -\{J_p, Z_{4,0}^{eff}\} = \{J_q, Z_{4,0}^{eff}\}.$$

Therefore, we have

$$\begin{aligned} \{K_1, Z_{4,0}^{eff}\} &= \{I_q + I_p, Z_{4,0}^{eff}\} = 0, \\ \{K_2, Z_{4,0}^{eff}\} &= \{J_q + J_p, Z_{4,0}^{eff}\} = 0, \\ \{K_3, Z_{4,0}^{eff}\} &= \{I_q + J_q, Z_{4,0}^{eff}\} = 0. \end{aligned}$$

Moreover, the terms K_j contain only terms in \mathcal{D} , whereas the term $Z_{4,4}$ contains only terms out of \mathcal{D} . Thus, we also have

$$\{K_j, Z_{4,4}\} = 0 \quad \text{for } j = 1, 2, 3.$$

Finally, we have

$$\dot{K}_j = \{K_j, Z_{4,2}\} + \{K_j, R_6\} \quad \text{for } j = 1, 2, 3.$$

We remark now that each monomial in $\{K_j, Z_{4,2}\}$ is of order 4 with two modes inside \mathcal{L} , and each monomial in $\{K_j, R_6\}$ is of order 6 with at least one mode inside \mathcal{L} . Therefore, for $0 \leq t \leq C\varepsilon^{-3}$, we have

$$\{K_j, Z_{4,2}\} = \mathcal{O}(\varepsilon^6), \quad \text{and} \quad \{K_j, R_6\} = \mathcal{O}(\varepsilon^7).$$

Finally, we deduce that, for $0 \leq t \leq C\varepsilon^{-3}$,

$$\dot{K}_j = \mathcal{O}(\varepsilon^6) \quad \text{and} \quad K_j(t) = K_j(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^6)t,$$

and the proof is completed. \square

Without loss of generality, we assume now that the constant $C = 1$. From now, we fix the initial data corresponding to the beating effect:

$$\begin{cases} K_1(0) = \varepsilon^2, K_2(0) = \varepsilon^2, K_3(0) = \varepsilon^2, \\ |u_j(0)|, |\bar{u}_j(0)|, |v_j(0)|, |\bar{v}_j(0)| \leq C\varepsilon^2 \quad \text{for } j \neq q, p. \end{cases} \quad (2.4.6)$$

This lemma show that, for a long time, the solutions of the Hamiltonian system associated to H^B remain close to the solutions of the reduced system associated to H_0^r . Therefore, we want to write $H^B = H_0^r + R$ with R a remainder term which stays small for the considered times ($0 \leq t \leq \varepsilon^{-3}$).

2.4.2 Proximity between the Hamiltonians H^B and H_0^r

The strategy is to focus on the couple (ψ_0, K_0) . As in the study of the reduced model, we make the change of unknowns:

$$\psi_0(t) = \psi(\varepsilon^2 t) \quad \text{and} \quad K_0(t) = \varepsilon^2 K(\varepsilon^2 t). \quad (2.4.7)$$

For the other variables of the system, we introduce

$$w = (K_j, \psi_j, u_k, \bar{u}_k, v_k, \bar{v}_k)_{j=1,2,3, k \neq p,q}.$$

Proposition 2.4.2. *We consider the solution of the Hamiltonian system (2.4.1) with the initial data (2.4.6). The couple (ψ, K) defined by (2.4.7) satisfies, for $0 \leq t \leq \varepsilon^{-1}$:*

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) &= -\frac{\partial H_\star^r}{\partial K}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \dot{K}(t) &= \frac{\partial H_\star^r}{\partial \psi}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{cases}$$

where the Hamiltonian H_\star^r is defined by

$$H_\star^r = 2K(1 - K) \cos \psi.$$

Proof. The goal of this proposition is to show that the variables (ψ, K) of the solutions of the Hamiltonian system associated to the Hamiltonian H^B stay close to the solutions of the reduced Hamiltonian system associated to H_\star^r . For that purpose, we recall that we have (equation (2.4.2)):

$$H^B = H^r + R_I + Z_{4,2} + Z_{4,4} + R_6.$$

We introduce Q defined by

$$\begin{aligned} Q &:= H^r(\psi_0, K_0, K_1, K_2, K_3) - H^r(\psi_0, K_0, \varepsilon^2, \varepsilon^2, \varepsilon^2) \\ &= H^r(\psi_0, K_0, K_1, K_2, K_3) - H_0^r. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Therefore, we obtain

$$H^B = H_0^r + R \quad \text{with} \quad R = Q + R_I + Z_{4,2} + Z_{4,4} + R_6.$$

We recall that by the system (2.4.1), (ψ_0, K_0) satisfies:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0(t) &= -\frac{\partial H^B}{\partial K_0}(\psi_0(t), K_0(t), w(t)), \\ \dot{K}_0(t) &= \frac{\partial H^B}{\partial \psi_0}(\psi_0(t), K_0(t), w(t)). \end{cases}$$

After the change of variables (2.4.7), we obtain:

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) &= -\frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial H^B}{\partial K} \left(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) \right), \\ \dot{K}(t) &= \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial H^B}{\partial \psi} \left(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) \right). \end{cases}$$

We know that H_0^r is close to H_\star^r . Indeed we have

$$H_0^r(\psi, \varepsilon^2 K) = H^r(\psi, \varepsilon^2 K, \varepsilon^2, \varepsilon^2, \varepsilon^2) = C_\varepsilon + \varepsilon^4 H_\star^r(\psi, K).$$

Therefore, writing $H^B = H_0^r + R$ in the previous system, we get

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) &= -\frac{\partial H_\star^r}{\partial \psi}(t) - \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial R}{\partial K} \left(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) \right), \\ \dot{K}(t) &= \frac{\partial H_\star^r}{\partial \psi}(t) + \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial R}{\partial \psi} \left(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) \right). \end{cases}$$

In order to prove the proposition, we have to show that for $0 \leq t \leq \varepsilon^3$, we have

$$\partial_K R \left(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^6) \quad \text{and} \quad \partial_\psi R \left(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^6),$$

where $R = Q + R_I + Z_{4,2} + Z_{4,4} + R_6$. First, we remark that if a polynomial P depends only on external modes $(u_j, \bar{u}_j, v_j, \bar{v}_j)_{j \in \mathcal{L}}$, we have

$$\partial_K P(\psi, \varepsilon^2 K, w) = \partial_\psi P(\psi, \varepsilon^2 K, w) = 0.$$

Therefore, we obtain

$$\partial_K R_I(\psi, \varepsilon^2 K, w) = \partial_\psi R_I(\psi, \varepsilon^2 K, w) = \partial_K Z_{4,4}(\psi, \varepsilon^2 K, w) = \partial_\psi Z_{4,4}(\psi, \varepsilon^2 K, w) = 0.$$

Then, we remark that if a polynomial P contains k internal modes $(u_j, \bar{u}_j, v_j, \bar{v}_j)_{j \in \mathcal{D}}$ (with $k > 0$) and l external modes $(u_j, \bar{u}_j, v_j, \bar{v}_j)_{j \in \mathcal{L}}$, we have

$$\partial_K P(\psi, \varepsilon^2 K, w) = \mathcal{O}(\varepsilon^{k+2l}), \quad \partial_\psi P(\psi, \varepsilon^2 K, w) = \mathcal{O}(\varepsilon^{k+2l}).$$

Thus, we have (considering for R_6 only the monomials with at least one internal mode)

$$\begin{aligned} \partial_K Z_{4,2}(\psi, \varepsilon^2 K, w) &= \mathcal{O}(\varepsilon^6), & \partial_\psi Z_{4,2}(\psi, \varepsilon^2 K, w) &= \mathcal{O}(\varepsilon^6), \\ \partial_K R_6(\psi, \varepsilon^2 K, w) &= \mathcal{O}(\varepsilon^7), & \partial_\psi R_6(\psi, \varepsilon^2 K, w) &= \mathcal{O}(\varepsilon^7). \end{aligned}$$

It remains to estimate the derivatives of Q . By definition (2.4.8), we have

$$Q(\psi_0, K_0, w) = f(p, q, \varepsilon, K_1, K_2, K_3) + 2g(K_0, \varepsilon, K_1, K_2, K_3) \cos(\psi_0),$$

where f is a polynomial which doesn't play a role because it doesn't depend on the variables K_0 and ψ_0 ; and g is defined by

$$g(K_0, \varepsilon, K_1, K_2, K_3) := (K_0(K_1 - K_0)(K_3 - K_0)(K_2 - K_3 + K_0))^{\frac{1}{2}} - K_0(\varepsilon^2 - K_0).$$

In order to use the almost preservation of the K_i ($i = 1, 2, 3$), we introduce the quantity ΔK_i defined by

$$\Delta K_i(t) := K_i(t) - K_i(0) = K_i(t) - \varepsilon^2.$$

By Lemma 2.4.1, we have

$$\Delta K_i(\varepsilon^{-2}t) = \mathcal{O}(\varepsilon^6) \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad \text{and } 0 \leq t \leq \varepsilon^{-1}.$$

In the variables (ψ, K) , we have

$$\begin{aligned} g(\varepsilon^2 K, w) &= \varepsilon^4 \left(K(\tilde{\Delta}K_1 + 1 - K)(\tilde{\Delta}K_3 + 1 - K)(\tilde{\Delta}K_2 - \tilde{\Delta}K_3 + K) \right)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^4 K(1 - K) \\ &= \frac{\varepsilon^4 K(\tilde{\Delta}K_1 + 1 - K)(\tilde{\Delta}K_3 + 1 - K)(\tilde{\Delta}K_2 - \tilde{\Delta}K_3 + K) - \varepsilon^4 K^2(1 - K)^2}{\left(K(\tilde{\Delta}K_1 + 1 - K)(\tilde{\Delta}K_3 + 1 - K)(\tilde{\Delta}K_2 - \tilde{\Delta}K_3 + K) \right)^{\frac{1}{2}} + K(1 - K)} \\ &= \frac{K P_1(\varepsilon, \Delta K) + K^2 P_2(\varepsilon, \Delta K) + K^3 P_3(\varepsilon, \Delta K)}{\left(K(\tilde{\Delta}K_1 + 1 - K)(\tilde{\Delta}K_3 + 1 - K)(\tilde{\Delta}K_2 - \tilde{\Delta}K_3 + K) \right)^{\frac{1}{2}} + K(1 - K)}, \end{aligned}$$

where $\tilde{\Delta}K_i = \varepsilon^{-2} \Delta K_i$, and the polynomials P_1 , P_2 and P_3 are given by

$$\begin{aligned} P_1(\varepsilon, \Delta K_1, \Delta K_2, \Delta K_3) &= \varepsilon^2(1 + \varepsilon^{-2} \Delta K_1)(1 + \varepsilon^{-2} \Delta K_3)(\Delta K_2 - \Delta K_3), \\ P_2(\varepsilon, \Delta K_1, \Delta K_2, \Delta K_3) &= (3\Delta K_3 - 2\Delta K_2 + \Delta K_1)\varepsilon^2 + \Delta K_1 \Delta K_3 \\ &\quad + (\Delta K_3 + \Delta K_1)(\Delta K_3 - \Delta K_2), \\ P_3(\varepsilon, \Delta K_1, \Delta K_2, \Delta K_3) &= \varepsilon^2(-2\Delta K_3 + \Delta K_2 - \Delta K_1). \end{aligned}$$

Therefore, we have

$$P_i(\varepsilon, \Delta K_1, \Delta K_2, \Delta K_3)(\varepsilon^{-2}t) = \mathcal{O}(\varepsilon^8) \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad \text{and } 0 \leq t \leq \varepsilon^{-1}.$$

Using that K and ψ are dimensionless variables, we deduce that

$$\partial_\psi Q(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w(\varepsilon^{-2}t)) = -2g(\varepsilon^2 K(t), w(\varepsilon^{-2}t)) \sin(\psi(t)) = \mathcal{O}(\varepsilon^8).$$

For the derivative with respect to K , we need to derivate g . For that purpose, we introduce the denominator

$$D(K, w) := \left(K(\tilde{\Delta}K_1 + 1 - K)(\tilde{\Delta}K_3 + 1 - K)(\tilde{\Delta}K_2 - \tilde{\Delta}K_3 + K) \right)^{\frac{1}{2}} + K(1 - K).$$

We see that

$$D(K, w)(t) = \mathcal{O}(1) \quad \text{and} \quad \partial_K D(K, w)(t) = \mathcal{O}(1).$$

Therefore, we have

$$\partial_K g(\varepsilon^2 K(t), w(\varepsilon^{-2}t)) = \frac{(P_1 + 2KP_2 + 3K^2P_3)D - \partial_K D(KP_1 + K^2P_2 + K^3P_3)}{D^2} = \mathcal{O}(\varepsilon^8).$$

Finally, we can conclude that, for $0 < t < \varepsilon^{-1}$,

$$\partial_K Q(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w(\varepsilon^{-2}t)) = 2\partial_K g(\varepsilon^2 K, w(\varepsilon^{-2}t)) \cos(\psi(t)) = \mathcal{O}(\varepsilon^8),$$

and the proof is completed. \square

2.4.3 Construction of the beating solutions

We see that the Hamiltonian H^B is closed to the Hamiltonians H_0^r and H_\star^r in the sense of Proposition 2.4.2. The goal now is to use this proximity to construct solutions of the Hamiltonian system associated to H^B which stay close to known solutions (as the beating ones) of the reduced Hamiltonian system associated to H_\star^r . For that purpose, we consider (ψ_γ, K_γ) the solution of the reduced system (2.3.3) given by Lemma 2.3.2, with initial data $(\psi_\gamma, K_\gamma)(0) = (0, \gamma)$ where we choose $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \leq \gamma \leq 1$. We want to compare this solution with the solution (ψ, K) of the system (2.4.1) with the same initial data.

Lemma 2.4.3. *For all $0 \leq t \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}$, we have:*

$$(\psi, K)(t) = (\psi_\gamma, K_\gamma)(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)t + \mathcal{O}(\varepsilon^2)t^2.$$

Proof. We consider the system (2.3.3) and the open domain $\mathcal{U} = (-\pi, \pi) \times (0, 1)$. The system (2.3.3) is Hamiltonian of size 2, thus it is completely integrable (in the Liouville sense). Therefore, by the Arnold-Liouville Theorem, this system admits action-angle coordinates $(L, \alpha) = \phi(\psi, K)$, where ϕ is a symplectic transformation defined on the domain $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \setminus \{0, 0\}$, which satisfies the action-angle property

$$H(L, \alpha) = H(L),$$

and, uniformly on any compact of the domain \mathcal{U}^* ,

$$\|d\phi\| \leq C \quad \text{and} \quad \|d\phi^{-1}\| \leq C.$$

Using that ϕ is a symplectic, we obtain for $0 \leq t \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}$:

$$\frac{d}{dt}(L, \alpha) = \frac{d}{dt}\phi(\psi, K) = d\phi(\psi, K)(\dot{\psi}, \dot{K}).$$

Moreover, (ψ, K) is a solution of the system (2.4.1). Therefore, Proposition 2.4.2 and the bound for $d\phi$ imply

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(L, \alpha) &= d\phi(\psi, K) \left(-\frac{\partial H_\star^r}{\partial K}, \frac{\partial H_\star^r}{\partial \psi} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ &= \left(-\frac{\partial H_\star^r}{\partial \alpha}, \frac{\partial H_\star^r}{\partial L} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ &= \left(0, \frac{\partial H_\star^r}{\partial L} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

From the equation $\frac{d}{dt}L = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, we deduce that there exists $L_\star \in \mathbb{R}$ such that

$$L(t) = L_\star + \mathcal{O}(\varepsilon^2)t.$$

For the equation on α , the form of L implies

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\partial H_\star^r}{\partial L}(L_\star + \mathcal{O}(\varepsilon^2)t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Therefore, we obtain

$$\alpha(t) = \alpha_\star + \frac{\partial H_\star^r}{\partial L}(L_\star)t + \mathcal{O}(\varepsilon^2)t^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)t.$$

We remark that, by construction, we also have

$$\phi(\psi_\gamma, K_\gamma)(t) = (L_\star, \alpha_\star + \frac{\partial H_\star^r}{\partial L}(L_\star)t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Finally, we use that $d\phi^{-1}$ is bounded to get

$$\begin{aligned} (\psi(t), K(t)) &= \phi^{-1}(L(t), \alpha(t)) = \phi^{-1}(L_\star, \alpha_\star + \frac{\partial H_\star^r}{\partial L}(L_\star)t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)t + \mathcal{O}(\varepsilon^2)t^2 \\ &= (\psi_\gamma(t), K_\gamma(t)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)t + \mathcal{O}(\varepsilon^2)t^2. \end{aligned}$$

□

We can now check that the remainder is small in front of K_γ . Due to the change of variable (2.4.7), we need to estimate

$$\left| (\psi, K)(\varepsilon^2 t) - (\psi_\gamma, K_\gamma)(\varepsilon^2 t) \right|.$$

Using that $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \leq \gamma$ and $t \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}$, we have

$$\left| (\psi, K)(\varepsilon^2 t) - (\psi_\gamma, K_\gamma)(\varepsilon^2 t) \right| = |\mathcal{O}(\varepsilon^4)t| + |\mathcal{O}(\varepsilon^6)t^2| = \mathcal{O}(\varepsilon) \ll \gamma \leq K_\gamma.$$

Therefore, the solution $(\psi(t), K(t))$ is close to the solution (ψ_γ, K_γ) for $0 \leq t \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}$.

2.4.4 Proof of Theorem 2.0.2

Thanks to the previous results, we are now equipped to prove Theorem 2.0.2.

Proof of Theorem 2.0.2. From Lemma 2.4.3, the solution of the system (2.4.1) with initial data (2.4.6) and $(\psi_0, K_0)(0) = (0, \varepsilon^2\gamma)$ satisfies, for all $0 \leq t \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}$:

$$\begin{cases} K_0(t) = \varepsilon^2 K(\varepsilon^2 t) = \varepsilon^2 K_\gamma(\varepsilon^2 t) + \mathcal{O}(\varepsilon^6 t) + \mathcal{O}(\varepsilon^8 t^2), \\ \psi_0(t) = \psi(\varepsilon^2 t) = \psi_\gamma(\varepsilon^2 t) + \mathcal{O}(\varepsilon^4 t) + \mathcal{O}(\varepsilon^6 t^2). \end{cases}$$

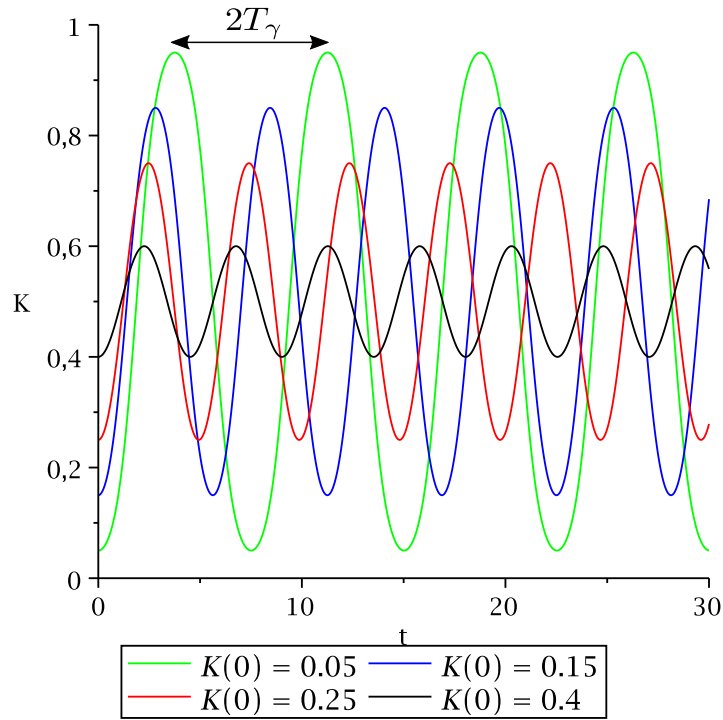
Using that $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \leq \gamma$ and the fact that the symplectic change of variable τ is close to the identity in the Birkhoff normal form decomposition of Proposition 2.2.1, we obtain (2.0.3).

For example, we can check that, for $0 \leq t \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}$,

$$I_p(t) = (K_1 - K_0)(t) = \varepsilon^2(1 - K_\gamma(\varepsilon^2 t) + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

It remains to estimate the period $2T_\gamma$. Due to the following figure, (with the choice $\varepsilon = 1$ in order to have $\gamma = K(0)$), it seems that T_γ grows when γ decreases.

Figure 2.6 – Influence of $\gamma = K(0)$ on the period of the beating effect



We choose $t \leq \frac{T_\gamma}{2}$. For such times, using the phase portrait of Figure 2.1, we know that $\psi(t)$ keeps the same sign. Using that

$$\psi(0) = 0 \quad \text{and} \quad \dot{\psi}(0) = -2(1 - 2\gamma) < 0,$$

we deduce that $\psi(t) \leq 0$ for $t \leq \frac{T_\gamma}{2}$. Moreover, by the conservation of the Hamiltonian H_\star^r , we have

$$H_\star^r(t) = 2K(t)(1 - K(t)) \cos \psi(t) = H_\star^r(0) = 2\gamma(1 - \gamma).$$

Therefore, for $t \leq \frac{T_\gamma}{2}$, we have

$$\sin \psi(t) = -\sqrt{1 - \frac{\gamma^2(1-\gamma)^2}{K(t)^2(1-K(t))^2}}.$$

Thus, we obtain

$$\dot{K}(t) = 2K(t)(1-K(t))\sqrt{1 - \frac{\gamma^2(1-\gamma)^2}{K(t)^2(1-K(t))^2}} = 2\sqrt{K(t)^2(1-K(t))^2 - \gamma^2(1-\gamma)^2}.$$

In the interval $(0, \frac{T_\gamma}{2})$, the function K is strictly increasing, hence invertible. Using that we have $K(0) = \gamma$ and $K(\frac{T_\gamma}{2}) = \frac{1}{2}$, and writing the derivative of the inverse function of K , we obtain

$$\frac{T_\gamma}{2} - 0 = \int_\gamma^{\frac{1}{2}} (K^{-1})'(u) du = \int_\gamma^{\frac{1}{2}} \frac{dK(t)}{2\sqrt{K(t)^2(1-K(t))^2 - \gamma^2(1-\gamma)^2}}.$$

Instead of computing this elliptic integral, we can remark that for $0 < \gamma < x < \frac{1}{2}$, there exists a constant $C_\gamma > 0$ such that

$$x^2(1-x)^2 - \gamma^2(1-\gamma)^2 = (x^2 - \gamma^2) \left((1-x)^2 + \gamma^2 - \frac{2\gamma^2}{x+\gamma} \right) \geq C_\gamma(x^2 - \gamma^2).$$

Indeed, we have for the second part of the right-hand side term:

$$(1-x)^2 + \gamma^2 - \frac{2\gamma^2}{x+\gamma} \geq \frac{1}{4} + \gamma^2 - \frac{2\gamma^2}{2\gamma} = \frac{1}{4} + \gamma(\gamma-1) = \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)^2 =: C_\gamma.$$

Therefore, using the properties of the inverse hyperbolic cosine, we conclude the proof of the theorem by the estimate

$$T_\gamma \leq C_\gamma^{-\frac{1}{2}} \int_\gamma^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \gamma^2}} = C_\gamma^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{2\gamma}\right) = \frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{2\gamma}\right)}{\frac{1}{2} - \gamma},$$

and we obtain the desired bound for T_γ by using the logarithm expression of the inverse hyperbolic cosine (we have $\frac{1}{2\gamma} > 1$). This ends the proof of the theorem. \square

2.4.5 Limit of the period $2T_\gamma$ when $\gamma \rightarrow \frac{1}{2}$

In the statement of Theorem 2.0.2, the upper bound

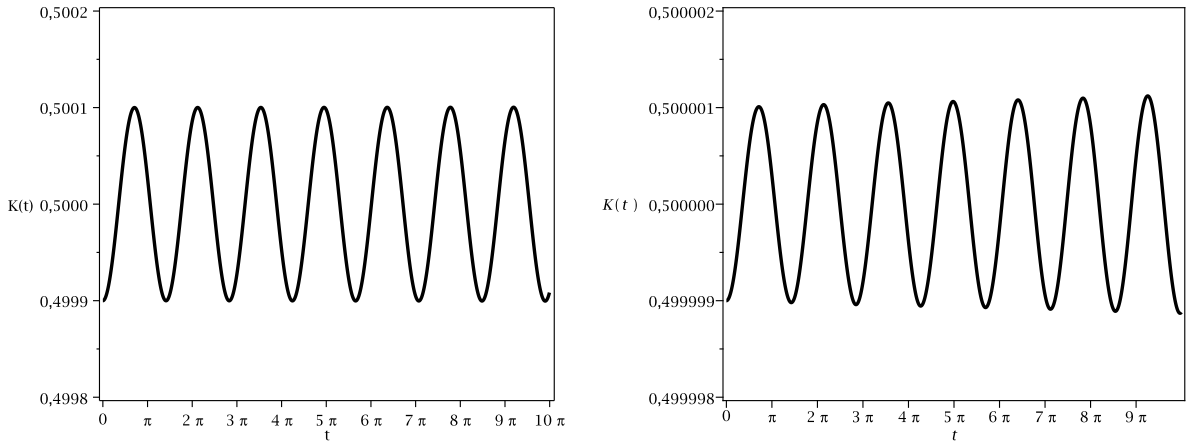
$$T_\gamma < \frac{|\ln \gamma|}{\frac{1}{2} - \gamma},$$

may not be optimal. On the one hand, we obtained a bound that grows when γ decreases, which is consistent with the Figure 2.6. On the other hand, the bound also grows when γ tends to $\frac{1}{2}$, which is, this time, inconsistent with the Figure 2.6. Indeed, in this figure, it seems that T_γ decreases when γ grows. From that point of view, we

expect T_γ to be bounded by a constant as γ tends to $\frac{1}{2}$. We recall that for $\gamma = \frac{1}{2}$, the function K_γ is constant and can be considered as a periodic function of period 0. Thus, the first natural assumption is that T_γ may tend to 0 when γ tends the critical value $\frac{1}{2}$, which is not the case.

In order to study this limit case ($\gamma \rightarrow \frac{1}{2}$), we draw in the following figure the behavior of $K(t)$ for an initial condition γ very close to $\frac{1}{2}$ (we have $\gamma = 0.499$ in the left example and $\gamma = 0.499999$ in the right one):

Figure 2.7 – Behavior of the period $2T_\gamma$ when γ is close to $\frac{1}{2}$



From these two graphs, it seems that there exists a constant T_{limit} , close to $\frac{10\pi}{14}$, such that

$$T_\gamma \xrightarrow{\gamma \rightarrow \frac{1}{2}} T_{limit} \approx \frac{10\pi}{14}.$$

In order to prove this statement, we have to refine the computations we did for the first bound of T_γ . This time, we use that the function K is strictly increasing, hence invertible, in the interval $(0, T_\gamma)$. The previous strategy gives us for T_γ the equation

$$T_\gamma = \int_\gamma^{1-\gamma} \frac{dx}{2\sqrt{x^2(1-x)^2 - \gamma^2(1-\gamma)^2}}. \quad (2.4.9)$$

In order to study of the denominator, we introduce the polynomial P defined by

$$P(x) := x^2(1-x)^2 - \gamma^2(1-\gamma)^2 = (x-\gamma)(1-\gamma-x) \left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right) \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} - x \right),$$

where Δ is defined by

$$\Delta := \sqrt{1 + 4\gamma(1-\gamma)} \in (1, \sqrt{2}).$$

For the roots of the polynomial P , we have the following order:

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} < 0 < \gamma < x < 1 - \gamma < 1 < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}.$$

Using this order to obtain bounds on the two last terms of P , we obtain the bounds

$$(x-\gamma)(1-\gamma-x) \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2 \leq P(x) \leq (x-\gamma)(1-\gamma-x) \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} + \frac{1}{2} - \gamma \right)^2. \quad (2.4.10)$$

Moreover, it is straightforward to check that for $A < B$ we have

$$\int_A^B \frac{dx}{\sqrt{(x-A)(B-x)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi. \quad (2.4.11)$$

Thanks to the equations (2.4.10) and (2.4.11), and the definition (2.4.9), we obtain for the period $2T_\gamma$ the bounds

$$\frac{\pi}{\frac{\sqrt{\Delta}}{2} + \frac{1}{2} - \gamma} \leq 2T_\gamma \leq \frac{\pi}{\frac{\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{1}{2} + \gamma}. \quad (2.4.12)$$

Taking the limits when $\gamma \rightarrow \frac{1}{2}$ on both sides of the previous equation, (we have $\Delta \rightarrow 2$ in this case), we obtain by the sandwich rule

$$\lim_{\gamma \rightarrow \frac{1}{2}} T_\gamma = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

which is coherent with the Figure 2.7, where it seems to be seven periods (i.e $7 \times 2T_\gamma$) for the final time 10π . Indeed, we have the approximation

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx \frac{10\pi}{14} \approx 0,71.$$

For $\gamma \rightarrow 0$, the bound (2.4.12) gives

$$\pi \leq 2T_\gamma \leq \frac{\pi}{2\gamma + o(\gamma)},$$

where we use the Taylor expansion $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1 + 4\gamma(1-\gamma)} = 1 + 2\gamma + o(\gamma)$ around 0. The upper bound obtained here is less precise than the one we obtained in the proof of Theorem 2.0.2, that is close to $2|\ln \gamma|$ when γ goes to 0. Nevertheless, the first upper bound $\frac{|\ln \gamma|}{\frac{1}{2} - \gamma}$ is sufficient for our result, for all $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$, as we can see in the following remark:

Remark 2.4.4. *We remark that the period $2T_\gamma$ of the beating effect is large enough to see as many periods of beating as we want. Indeed, for $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ fixed, we have*

$$K_0(t) = \varepsilon^2(K_\gamma(\varepsilon^2 t) + \mathcal{O}(\varepsilon)) \quad \text{for } t \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}.$$

Moreover, for ε small enough, we have

$$\varepsilon^{-2} 2T_\gamma < \frac{|\ln \gamma|}{1 - 2\gamma} \varepsilon^{-2} \ll \varepsilon^{-\frac{5}{2}}.$$

2.5 The shifted beating effect solutions

The difference between the beating effect and the shifted beating effect comes from the choice of the initial values $K_1(0)$, $K_2(0)$ and $K_3(0)$. Therefore, the previous results

that doesn't depend on the choice of the initial values of K_1 , K_2 and K_3 always stand for the study of the shifted beating effect. In particular, by Lemma 2.4.1, we still have

$$\Delta K_i(t) := K_i(t) - K_i(0) = \mathcal{O}(\varepsilon^6) \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad \text{and} \quad 0 \leq t \leq \varepsilon^{-3}.$$

This time, we fix the initial values

$$\begin{cases} K_1(0) = \varepsilon^2(1 + \tau_1), & K_2(0) = \varepsilon^2(1 + \tau_2), & K_3(0) = \varepsilon^2(1 + \tau_3), \\ |u_j(0)|, |\bar{u}_j(0)|, |v_j(0)|, |\bar{v}_j(0)| \leq C\varepsilon^2 & \text{for } j \neq q, p, \end{cases} \quad (2.5.1)$$

where τ_1 , τ_2 and τ_3 satisfy the conditions (2.3.8). The next step is to study the proximity between the Hamiltonian H^B (from the system (2.4.1)) and the Hamiltonian \tilde{H}_0^r , defined by

$$\tilde{H}_0^r := H^r(\psi_0, K_0, \varepsilon^2(1 + \tau_1), \varepsilon^2(1 + \tau_2), \varepsilon^2(1 + \tau_3)). \quad (2.5.2)$$

2.5.1 Proximity between the Hamiltonians H^B and \tilde{H}_0^r

We want to prove a similar version of Proposition 2.4.2. Once again, we focus on the couple (ψ_0, K_0) by the change of variables

$$\psi_0(t) = \psi(\varepsilon^2 t) \quad \text{and} \quad K_0(t) = \varepsilon^2 K(\varepsilon^2 t). \quad (2.5.3)$$

and the introduction for the other variables of the notation

$$w = (K_j, \psi_j, u_k, \bar{u}_k, v_k, \bar{v}_k)_{j=1,2,3, k \neq p,q}.$$

Proposition 2.5.1. *We consider the solution of the Hamiltonian system (2.4.1) with the initial data (2.5.1). The couple (ψ, K) defined by (2.5.3) satisfies, for $0 \leq t \leq \varepsilon^{-1}$:*

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) &= -\frac{\partial H_{sh}^r}{\partial K}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \dot{K}(t) &= \frac{\partial H_{sh}^r}{\partial \psi}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{cases}$$

where the Hamiltonian H_{sh}^r is defined by

$$H_{sh}^r(\psi, K) = 2 [K(1 + \tau_1 - K)(1 + \tau_3 - K)(\tau_2 - \tau_3 + K)]^{\frac{1}{2}} \cos \psi$$

Proof. We have to check that the Hamiltonian H^B is close to the Hamiltonian H_{sh}^r . As in the study of the beating effect, we still have

$$H^B = H^r + R_I + Z_{4,2} + Z_{4,4} + R_6 = \tilde{H}_0^r + \tilde{Q} + R_I + Z_{4,2} + Z_{4,4} + R_6,$$

where \tilde{H}_0^r is defined in (2.5.2) and \tilde{Q} is defined by

$$\tilde{Q} := H^r - \tilde{H}_0^r.$$

Once again, the Hamiltonian system satisfied by the couple (ψ, K) defined in (2.5.3) is given by

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) &= -\frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial H^B}{\partial K} \left(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) \right), \\ \dot{K}(t) &= \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial H^B}{\partial \psi} \left(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) \right). \end{cases}$$

Writing $H^B = \tilde{H}_0^r + R$ (with $R = \tilde{Q} + R_I + Z_{4,2} + Z_{4,4} + R_6$) in the previous system, and using that $\tilde{H}_0^r = H_{sh}^r$ up to an additive constant, we get

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) &= -\frac{\partial H_{sh}^r}{\partial \psi}(t) - \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial R}{\partial K} \left(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) \right), \\ \dot{K}(t) &= \frac{\partial H_{sh}^r}{\partial \psi}(t) + \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial R}{\partial \psi} \left(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right) \right). \end{cases}$$

The estimates on R_I , $Z_{4,2}$, $Z_{4,4}$ and R_6 from Proposition 2.4.2 always stand. Therefore, we just need to prove that, for $0 \leq t \leq \varepsilon^{-1}$,

$$\partial_\psi \tilde{Q}(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w(\varepsilon^{-2}t)) = \mathcal{O}(\varepsilon^6), \quad \partial_K \tilde{Q}(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w(\varepsilon^{-2}t)) = \mathcal{O}(\varepsilon^6).$$

By definition, we have

$$\tilde{Q}(\psi_0, K_0, w) = P_{\tilde{Q}}(p, q, \varepsilon, K_1, K_2, K_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3) + 2f_{\tilde{Q}}(K_0, \varepsilon, K_1, K_2, K_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \cos(\psi_0),$$

where $P_{\tilde{Q}}$ is a polynomial which doesn't play a role because it doesn't depend on the variables K_0 and ψ_0 ; and the function $f_{\tilde{Q}}$ is defined by

$$\begin{aligned} f_{\tilde{Q}}(K_0, \varepsilon, K_1, K_2, K_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3) &:= (K_0(K_1 - K_0)(K_3 - K_0)(K_2 - K_3 + K_0))^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \left(K_0(\varepsilon^2(1 + \tau_1) - K_0)(\varepsilon^2(1 + \tau_3) - K_0)(\varepsilon^2(\tau_2 - \tau_3) + K_0) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

We use the notations

$$\tilde{\Delta}K_i = \varepsilon^{-2}\Delta K_i \quad \text{for } i = 1, 2, 3,$$

In the variables (ψ, K, w) , we obtain for $f_{\tilde{Q}}$ the expression

$$\begin{aligned} f_{\tilde{Q}} &:= \varepsilon^4 \left(K(1 + \tau_1 - K + \tilde{\Delta}K_1)(1 + \tau_3 - K + \tilde{\Delta}K_3)(\tau_2 - \tau_3 + K + \tilde{\Delta}K_2 - \tilde{\Delta}K_3) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \varepsilon^4 \left(K(1 + \tau_1 - K)(1 + \tau_3 - K)(\tau_2 - \tau_3 + K) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Therefore, writing $\Delta K = (\Delta K_1, \Delta K_2, \Delta K_3)$ and $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, we obtain

$$f_{\tilde{Q}} = \frac{K\tilde{P}_1(\varepsilon, \Delta K, \tau) + K^2\tilde{P}_2(\varepsilon, \Delta K, \tau) + K^3\tilde{P}_3(\varepsilon, \Delta K, \tau)}{\tilde{D}(K, \Delta K, \tau)},$$

where the polynomials P_1 , P_2 and P_3 are given by

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1 &= \varepsilon^2 \Delta K_1 (1 + \tau_3)(\tau_2 - \tau_3) + \varepsilon^2 \Delta K_2 (1 + \tau_3)(1 + \tau_1) - \varepsilon^2 \Delta K_3 (1 + \tau_1)(1 - \tau_2 + 2\tau_3) \\ &\quad + \Delta K_1 \Delta K_2 (1 + \tau_3) - \Delta K_1 \Delta K_3 (1 - \tau_2 + 2\tau_3) + (\Delta K_2 \Delta K_3 - \Delta K_3^2)(1 + \tau_1) \\ &\quad + \varepsilon^{-2} \Delta K_1 \Delta K_3 (\Delta K_2 - \Delta K_3), \\ \tilde{P}_2 &= \varepsilon^2 \Delta K_1 (1 + 2\tau_3 - \tau_2) - \varepsilon^2 \Delta K_2 (2 + \tau_1 + \tau_3) + \varepsilon^2 \Delta K_3 (3 + 2\tau_1 - \tau_2 + 2\tau_3) \\ &\quad + \Delta K_1 \Delta K_3 + (\Delta K_3 + \Delta K_1)(\Delta K_3 - \Delta K_2), \\ \tilde{P}_3 &= \varepsilon^2 (-\Delta K_1 + \Delta K_2 - 2\Delta K_3), \end{aligned}$$

and the denominator \tilde{D} is defined by

$$\begin{aligned} \tilde{D} := & \left(K(1 + \tau_1 - K + \tilde{\Delta}K_1)(1 + \tau_3 - K + \tilde{\Delta}K_3)(\tau_2 - \tau_3 + K + \tilde{\Delta}K_2 - \tilde{\Delta}K_3) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + (K(1 + \tau_1 - K)(1 + \tau_3 - K)(\tau_2 - \tau_3 + K))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

We remark that for $\tau = (0, 0, 0)$, we find here the same polynomials P_1 , P_2 and P_3 and the same denominator D defined in the beating case. Once again, using that K and ψ are dimensionless variables, we have

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i(\varepsilon, \Delta K(\varepsilon^{-2}t), \tau) &= \mathcal{O}(\varepsilon^8) \quad \text{for } i = 1, 2, 3 \quad \text{and } 0 \leq t \leq \varepsilon^{-1}, \\ \tilde{D}(K(t), w(\varepsilon^{-2}t)) &= \mathcal{O}(1) \quad \text{and} \quad \partial_K D(K(t), w(\varepsilon^{-2}t)) = \mathcal{O}(1) \quad \text{for } 0 \leq t \leq \varepsilon^{-1}. \end{aligned}$$

Therefore, we obtain, for $0 \leq t \leq \varepsilon^{-1}$

$$\begin{aligned} \partial_\psi \tilde{Q}(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w(\varepsilon^{-2}t)) &= -2f_{\tilde{Q}}(\varepsilon^2 K(t), w(\varepsilon^{-2}t)) \sin(\psi(t)) = \mathcal{O}(\varepsilon^8), \\ \partial_K \tilde{Q}(\psi(t), \varepsilon^2 K(t), w(\varepsilon^{-2}t)) &= 2 \left(\partial_K f_{\tilde{Q}} \right) (\varepsilon^2 K(t), w(\varepsilon^{-2}t)) \cos(\psi(t)) = \mathcal{O}(\varepsilon^8). \end{aligned}$$

This concludes the proof of the proposition. \square

2.5.2 Proof of Theorem 2.0.1

Because it is not depending on the choice of the initial value, Lemma 2.4.3 always stands in this more general setting. Therefore, thanks to the previous results, we are now equipped to prove Theorem 2.0.1.

Proof of Theorem 2.0.1. From Lemma 2.4.3, the solution of the system (2.4.1) with initial data (2.5.1) and $(\psi_0, K_0)(0) = (0, \varepsilon^2 \gamma)$ satisfies, for all $0 \leq t \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}$:

$$\begin{cases} K_0(t) = \varepsilon^2 K(\varepsilon^2 t) = \varepsilon^2 K_\gamma(\varepsilon^2 t) + \mathcal{O}(\varepsilon^6 t) + \mathcal{O}(\varepsilon^8 t^2), \\ \psi_0(t) = \psi(\varepsilon^2 t) = \psi_\gamma(\varepsilon^2 t) + \mathcal{O}(\varepsilon^4 t) + \mathcal{O}(\varepsilon^6 t^2). \end{cases}$$

Using that $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \leq \gamma$ and the fact that the symplectic change of variable is close to the identity in the Birkhoff normal form decomposition of Proposition 2.2.1, we obtain the shifted beating behavior of equation (2.0.2). For example, we can check that for the considered times $0 \leq t \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}$, we have

$$J_p(t) = (K_2 - K_3 + K_0)(t) = \varepsilon^2 \left(\tau_2 - \tau_3 + K_\gamma(\varepsilon^2 t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right)$$

As in the beating case, it remains to estimate the period $2T_\gamma$. For that purpose, we want to solve the equation

$$P_\tau(x) = P_\tau(\gamma),$$

where we recall that

$$P_\tau(X) := X(1 + \tau_1 - X)(1 + \tau_3 - X)(\tau_2 - \tau_3 + X).$$

Indeed, we have

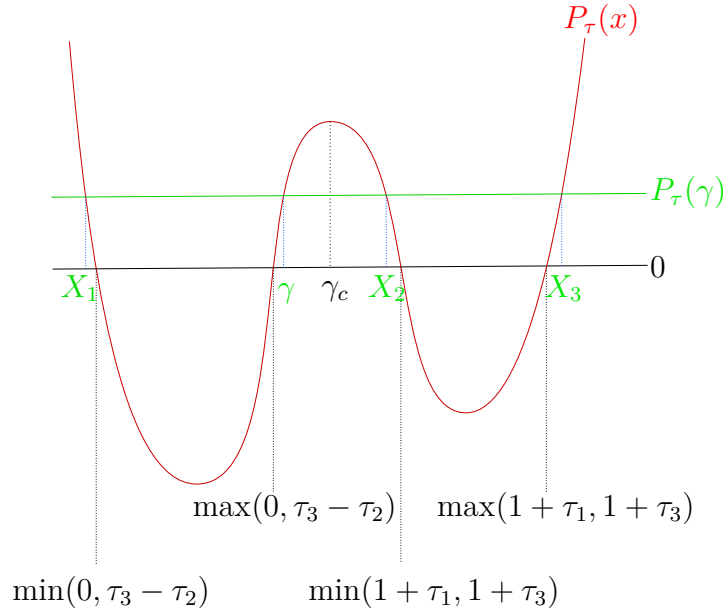
$$\dot{K}_\gamma = -2\sqrt{P_\tau(K_\gamma)} \sin \psi_\gamma \quad \text{and} \quad (\psi_\gamma, K_\gamma)(0) = (0, \gamma).$$

Therefore, the conservation of the Hamiltonian implies

$$\dot{K}_\gamma(t) = 0 \Leftrightarrow P_\tau(K_\gamma(t)) = P_\tau(\gamma).$$

In the following, we consider that $\max(0, \tau_3 - \tau_2) < \gamma < \gamma_c$. The case $\gamma > \gamma_c$ leads to the same orbits with different initial conditions, thus this choice has no consequences on the result. We define the polynomial Q by $Q(x) := P_\tau(x) - P_\tau(\gamma)$. We see through the following figure that Q has exactly four different roots:

Figure 2.8 – Roots of the polynomial $Q(x) := P_\tau(x) - P_\tau(\gamma)$



The roots γ , X_1 , X_2 and X_3 of the polynomial Q verify

$$X_1 < m_1 \leq M_1 < \gamma < \gamma_c < X_2 < m_2 \leq M_2 < X_3,$$

where the constants m_1 , M_1 , m_2 and M_2 are given by

$$\begin{aligned} m_i &= \min(\alpha_i, \beta_i), & M_i &= \max(\alpha_i, \beta_i), & i &= 1, 2 \quad \text{and} \\ \alpha_1 &= 0, & \beta_1 &= \tau_3 - \tau_2, & \alpha_2 &= 1 + \tau_1, & \beta_2 &= 1 + \tau_3. \end{aligned}$$

Thanks to the conservation of the Hamiltonian, the function K is strictly increasing, hence invertible, in the interval $(0, T_\gamma)$. The same strategy as in the beating case gives us for T_γ the equation

$$2T_\gamma = \int_\gamma^{X_2} \frac{dx}{\sqrt{(x - X_1)(x - \gamma)(X_2 - x)(X_3 - x)}}. \quad (2.5.4)$$

Due to the equation (2.4.11), we want to find a lower bound for the polynomial Q while keeping the term $(x - \gamma)(X_2 - x)$ related to the bounds of the integral. The main difficulty here comes from the fact that we don't know the values of X_1 , X_2 and X_3 (which depend

continuously on τ and γ). Nevertheless, we can obtain some bounds on the terms $(x - X_1)$ and $(X_3 - x)$. For the X_1 -term, we simply use that $X_1 < 0$ and $x > \gamma$ to obtain

$$x - X_1 > \gamma.$$

The X_3 -term is more delicate. We use that for τ fixed, the difference $X_3 - X_2$ depends continuously on the parameter γ . Thus, using that $x < X_2$, we have

$$X_3 - X \leq X_3 - X_2 =: f_\tau(\gamma),$$

where f_τ is a continuous function that satisfies

$$\lim_{\gamma \rightarrow \max(0, \tau_3 - \tau_2)} f_\tau(\gamma) = |\tau_3 - \tau_1|.$$

Therefore, we have, for $\gamma < x < X_2$,

$$Q(x) > (x - \gamma)(X_2 - x)\gamma f_\tau(\gamma).$$

Finally, the equation (2.4.11) and the definition (2.5.4) of the period $2T_\gamma$ give

$$2T_\gamma < \frac{\pi}{\sqrt{\gamma f_\tau(\gamma)}},$$

and the proof of Theorem 2.0.1 is completed. \square

As in the beating case, we can remark that the period $2T_\gamma$ is small enough to be controlled by the smallness of the initial condition ε :

Remark 2.5.2. *We remark that the period $2T_\gamma$ of the shifted beating effect is large enough to see as many periods of shifted beating as we want. Indeed, for $\tau \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^3$ and for all initial condition $\gamma \in (\max(0, \tau_3 - \tau_2), \min(1 + \tau_1, 1 + \tau_3)) \setminus \{\gamma_c\}$ fixed, we have*

$$K_0(t) = \varepsilon^2(K_\gamma(\varepsilon^2 t) + \mathcal{O}(\varepsilon)) \quad \text{for } t \leq \varepsilon^{-\frac{5}{2}}.$$

Moreover, for ε small enough, we have

$$\varepsilon^{-2} 2T_\gamma < \frac{\pi \varepsilon^{-2}}{\sqrt{\gamma f_\tau(\gamma)}} \ll \varepsilon^{-\frac{5}{2}}.$$

2.5.3 Limit cases of the period $2T_\gamma$

The first natural question here is to study the existence of a limit period when γ tends to γ_c in the more general setting of the shifted beating effect. We recall that in the beating case (i.e for $\tau = (0, 0, 0)$), we have $\gamma_c = \frac{1}{2}$ and

$$\lim_{\gamma \rightarrow \frac{1}{2}} 2T_\gamma = \sqrt{2}\pi.$$

Now, for $\tau \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^3$ fixed and for $\gamma \in (\max(0, \tau_3 - \tau_2), \gamma_c)$, back to the equation (2.5.4), we have

$$2T_\gamma = \int_\gamma^{X_2} \frac{dx}{\sqrt{(x - X_1)(x - \gamma)(X_2 - x)(X_3 - x)}} = \int_\gamma^{X_2} \frac{dx}{\sqrt{Q(x)}}.$$

Moreover, we have (see Figure 2.8):

$$(x - \gamma)(X_2 - x)(X_3 - X_2)(\gamma - X_1) \leq Q(x) \leq (x - \gamma)(X_2 - x)(X_3 - \gamma)(X_2 - X_1).$$

From these two equations (and with the equation (2.4.11)), we obtain

$$\frac{\pi}{\sqrt{(X_3 - \gamma)(X_2 - X_1)}} \leq 2T_\gamma \leq \frac{\pi}{\sqrt{(X_3 - X_2)(\gamma - X_1)}}.$$

The key point here is the fact that

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_c} X_2 = \gamma_c.$$

Therefore, we obtain the same limit as γ tends to γ_c on both left and right sides of the previous inequality. The sandwich rule gives

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_c} 2T_\gamma = \frac{\pi}{\sqrt{(X_3^c - \gamma_c)(\gamma_c - X_1^c)}}, \quad (2.5.5)$$

where

$$X_1^c(\tau) = X_1(\tau, \gamma_c) \quad \text{and} \quad X_3^c(\tau) = X_3(\tau, \gamma_c).$$

Thus, as in the beating case, we obtain a critic value of the period $2T_\gamma$ as $\gamma \rightarrow \gamma_c$. This is coherent with the critic period obtained for the beating case. Indeed, for $\tau = (0, 0, 0)$, we have

$$\gamma_c = \frac{1}{2}, \quad X_1^c(0) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{and} \quad X_3^c(0) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Therefore, the formula (2.5.5) gives once again the limit of the period for the beating case:

$$\lim_{\substack{\tau=0 \\ \gamma \rightarrow \gamma_c}} 2T_\gamma = \sqrt{2}\pi.$$

The second natural question is to study the behavior of the period $2T_\gamma$ when γ tends to $\max(0, \tau_3 - \tau_2)$. We remark that (see Figure 2.8):

$$(X_3 - X_2)(\gamma - X_1) \geq |(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)|$$

In particular, this inequality implies that in the case where $\tau_3 \notin \{\tau_1, \tau_3\}$, the period $2T_\gamma$ is bounded, for all $\gamma \in (\max(0, \tau_3 - \tau_2), \gamma_c)$. This is not the case for the beating effect ($\tau = (0, 0, 0)$), where we see thanks to the expression (2.4.9) that the period grows to ∞ when γ tends to 0.

Here, when $\gamma \rightarrow \max(0, \tau_3 - \tau_2)$, the roots of the polynomial Q tend to the roots of the polynomial P_τ . Therefore, if $\tau_3 \notin \{\tau_1, \tau_3\}$, we have

$$\lim_{\gamma \rightarrow \max(0, \tau_3 - \tau_2)} 2T_\gamma = \frac{\pi}{\sqrt{|(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)|}}.$$

Modified scattering for a cubic coupled Schrödinger system on \mathbb{R}

In this chapter, we study a coupled nonlinear Schrödinger system with small initial data in the one dimension Euclidean space. Such a system appears in the context of the coupling between two different optical waveguides. We establish an asymptotic nonlinear behavior and a decay estimate for solutions of this system. The proof uses a recent work of Kato and Pusateri. This work has been published in *Dynamics of Partial Differential Equations* in January 2016 (see [52]).

3.1 Introduction

We consider the following system

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{xx} u = |v|^2 u, & (t, x) \in [1, +\infty) \times \mathbb{R}, \\ i\partial_t v + \partial_{xx} v = |u|^2 v, \\ u(1, x) = u_1(x), & v(1, x) = v_1(x). \end{cases} \quad (3.1.1)$$

3.1.1 Motivation and background.

An interesting area within the study of the asymptotic behavior of small solutions of nonlinear dispersive PDEs is the search of nonlinear global dynamics. In the well-known case of the cubic Schrödinger equation, different methods have been treated by several authors.

On the one hand, the asymptotic behavior depends on the geometry of the spatial domain.

- For Euclidean spaces, we mainly have phase corrections results. For example, Kato and Pusateri treat the case $x \in \mathbb{R}$ in [37] using only tools from the analysis in Fourier space. For general Euclidean spaces, we can look at [33] where Hayashi and Naumkin deal with $x \in \mathbb{R}^n$.

- In the case of compact domains, the usual example is the study of the torus \mathbb{T}^d . We can for example mention the work of Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka and Tao who showed some first results in the search of unboundedness of Sobolev norms for small initial data in the spatial space \mathbb{T}^2 in [13].
- Combining these two kinds of spaces, we can study the product spaces $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d$. The first to consider such spaces were Tzvetkov and Visciglia. They obtained some scattering behaviors in $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$, where \mathcal{M} is a compact manifold (see [50]), or in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}$ where they extended their point of view and studied the well-posedness of their equation (see [51]). For the case $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$, we can cite the work of Hani, Pausader, Tzvetkov and Visciglia, who showed in 2013 (see [27]) a real growth of Sobolev norms by adding a direction of diffusion to the compact problem. For that purpose, they exhibited a modified scattering of the solution of the Schrödinger equation to the solution of the resonant system associated. Contrary to the Euclidean case, this is an effective scattering, and not only a phase correction.

On the other hand, after the geometry of the spatial domain, we can deal with the equation itself. Using the method presented in [27], similar results have been obtained by adding a potential (see [21]), a harmonic trapping (see [28]), or by considering different derivatives along the Euclidean direction and the periodic one (see [54]). In the last mentioned article, Xu exhibits a modified scattering result between the cubic Schrödinger equation $i\partial_t U + \Delta_{\mathbb{R}} U - |\nabla_{\mathbb{T}}|U = |U|^2 U$ in the spatial domain $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ and the cubic Szegő equation.

In this article, we focus on a coupled Schrödinger system. Such a system occurs while, for example, looking for the coupling between two different optical waveguides, that can be provided by a dual-core single-mode fiber (see [1]). Other examples are given by two orthogonally polarized components traveling at different speeds because of different refractive indices associated with them; or by two distinct pulses with different carrier frequencies but with the same polarization. A surprising fact about these examples is that they lead to a system close to the Schrödinger system (3.1.1), obtained by interchanging the spatial and temporal coordinates.

From our point of view, such a system is interesting. Indeed this coupling effect can provide more nonlinear asymptotic behavior than a single equation. For example, Grébert, Paturel and Thomann exhibited some beating effects (see [20]), that is to say some energy exchanges between different modes of the solutions, although they were just dealing with the spatial domain \mathbb{T} . Another example of study of Schrödinger systems is given by Kim in [38]. Considering relations on the masses in the equations, the author obtains L^∞ decay of the solution for the spatial domain \mathbb{R} .

The goal of this article is to present a self contained proof of nonlinear behavior in the spatial domain \mathbb{R} . Following the method of Kato and Pusateri in [37], we will first prove a L^∞ decay of the solutions. Then, we will highlight an asymptotic behavior, in the sense that we will be looking for a pair (W_f, W_g) depending only on the space variable in a space to be determined, such that:

$$\begin{cases} \|\hat{w}_f(t, \cdot) - W_f\| & \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \\ \|\hat{w}_g(t, \cdot) - W_g\| & \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

where $|\hat{w}_f(t, \xi)| = |\hat{u}(t, \xi)|$ and $|\hat{w}_g(t, \xi)| = |\hat{v}(t, \xi)|$. This is a result of phase correction scattering, and it is interesting to see what effect the coupling has in this case, to get informations on W_f and W_g , and to approximate the speed of this convergence. Moreover, we exhibit an asymptotic formula for large time of the solutions.

3.1.2 Notations and norms.

We define the spatial Fourier transform in Schwartz space, for $\varphi \in S(\mathbb{R})$, by

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(x) dx.$$

We use the notation $f \lesssim g$ to denote that there exists a positive constant M such that we have $f \leq Mg$. This notation will be useful, allowing us to avoid dealing with all the constants in the different inequalities.

When a function depends on two variables t and x , we denote by $\varphi(t)$ the function defined on the spatial domain $\varphi(t) : x \mapsto \varphi(t, x)$.

Working with small initial data, we can expect the nonlinearity to stay small, and thus the linear dynamics to be dominant. This is the reason why it is interesting to consider the profile of a solution, which is the backwards linear evolution of a solution of the nonlinear equation. We define f (respectively g) the profile of the solution u (respectively v) by

$$f(t, x) := e^{-it\partial_{xx}} u(t, x) \quad g(t, x) := e^{-it\partial_{xx}} v(t, x). \quad (3.1.3)$$

We will see in Subsection 3.2.1 that after considering Duhamel's formula of the solutions, the equations in f and g are easier to treat than the ones with u and v . This is the main reason why the profiles have been introduced.

The norm used will be essential in order to prove the global existence of the solutions. Let $n \in \mathbb{N}$, we define the spaces $H_x^{n,0}$, $H_x^{0,n}$ and L_T^∞ corresponding to the following norms:

$$\begin{aligned} & \text{--- } \|\varphi\|_{L_x^\infty} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|, \\ & \text{--- } \|\varphi\|_{H_x^{n,0}} := \sum_{i=0}^n \|\partial_x^i \varphi\|_{L_x^2}, \\ & \text{--- } \|\varphi\|_{H_x^{0,n}} := \sum_{i=0}^n \|x^i \varphi\|_{L_x^2}, \\ & \text{--- } \|\varphi\|_{L_T^\infty} := \sup_{t \in [1, T]} |\varphi(t)|. \end{aligned}$$

With these norms, we follow the method of Kato and Pusateri in [37] to construct the space

$$X_T := \left\{ \varphi, \|\varphi\|_{X_T} := \|\varphi\|_{L_T^\infty L_x^\infty} + \|t^{-\alpha} \varphi\|_{L_T^\infty H_x^{1,0}} + \|t^{-\alpha} \varphi\|_{L_T^\infty H_x^{0,2n+1}} < \infty \right\},$$

where $\alpha > 0$ is small enough.

We want to obtain a L^∞ decay of the solutions. For that purpose, we need to control the behavior of the cubic nonlinearity, which is why the terms $\|\varphi\|_{L_T^\infty L_x^\infty}$ and $\|t^{-\alpha} \varphi\|_{L_T^\infty H_x^{1,0}}$ are required in the definition of the norm. With these two terms, we can show that we have a unique and global pair of solutions, and that the scattering limits W_f, W_g of the equations (3.1.2) are in L^∞ . The last term $\|t^{-\alpha} \varphi\|_{L_T^\infty H_x^{0,2n+1}}$ will allow us to show that the functions W_f, W_g are also in $H^{0,n}$.

3.1.3 Statement of the results.

The idea here is to apply the result of [37] to our coupled Schrödinger system (3.1.1). As we can expect, we also obtain a global existence, a decay estimate, a scattering result and an asymptotic formula.

Theorem 3.1.1. *Fix $n \in \mathbb{N}$ and $0 < \nu < \frac{1}{4}$. Assume that*

$$\|u_1\|_{H_x^{2n+1,0}} + \|u_1\|_{H_x^{0,1}} + \|v_1\|_{H_x^{2n+1,0}} + \|v_1\|_{H_x^{0,1}} \leq \varepsilon,$$

for ε small enough. Let $I = [1, +\infty)$ and set $\mathcal{F} := \mathcal{C}(I; H^{2n+1,0}(I) \cap H^{0,1}(I))$. Then the system (3.1.1) admits a unique pair of solutions $(u, v) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$. The pair of solutions satisfies the following decay estimates:

$$\|u(t)\|_{L_x^\infty} \lesssim \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}, \quad \|v(t)\|_{L_x^\infty} \lesssim \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}.$$

Furthermore, there exists a unique pair of functions $(W_f, W_g) \in (L_\xi^\infty \cap H_\xi^{0,n}) \times (L_\xi^\infty \cap H_\xi^{0,n})$ such that for $t \geq 1$,

$$\begin{cases} \left\| \hat{f}(t, \cdot) \exp\left(\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^t \frac{1}{s} |\hat{v}(s, \cdot)|^2 ds\right) - W_f \right\|_{L_\xi^\infty} & \lesssim t^{-\frac{1}{4}+\nu}, \\ \left\| \hat{g}(t, \cdot) \exp\left(\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^t \frac{1}{s} |\hat{u}(s, \cdot)|^2 ds\right) - W_g \right\|_{L_\xi^\infty} & \lesssim t^{-\frac{1}{4}+\nu}, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \left\| \hat{f}(t, \cdot) \exp\left(\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^t \frac{1}{s} |\hat{v}(s, \cdot)|^2 ds\right) - W_f \right\|_{H_\xi^{0,n}} & \lesssim t^{-\frac{1}{8}+\frac{\nu}{2}}, \\ \left\| \hat{g}(t, \cdot) \exp\left(\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^t \frac{1}{s} |\hat{u}(s, \cdot)|^2 ds\right) - W_g \right\|_{H_\xi^{0,n}} & \lesssim t^{-\frac{1}{8}+\frac{\nu}{2}}, \end{cases}$$

where f and g are defined in (3.1.3). Finally, we have an asymptotic formula. There exists an unique pair of functions $\Gamma_f, \Gamma_g \in L_\xi^\infty$ such that for large time t ,

$$\begin{cases} u(t, x) = \frac{1}{(2it)^{\frac{1}{2}}} W_f\left(\frac{x}{2t}\right) \exp\left(i\frac{x^2}{4t} - \frac{i}{2\sqrt{2\pi}}(|W_g|^2\left(\frac{x}{2t}\right) \ln(t) + \Gamma_g\left(\frac{x}{2t}\right))\right) + \mathcal{O}(t^{-\frac{3}{4}+\nu}), \\ v(t, x) = \frac{1}{(2it)^{\frac{1}{2}}} W_g\left(\frac{x}{2t}\right) \exp\left(i\frac{x^2}{4t} - \frac{i}{2\sqrt{2\pi}}(|W_f|^2\left(\frac{x}{2t}\right) \ln(t) + \Gamma_f\left(\frac{x}{2t}\right))\right) + \mathcal{O}(t^{-\frac{3}{4}+\nu}). \end{cases}$$

Remark 3.1.2. *Let us begin with some remarks about this theorem.*

- We see that, as we can expect, the role of the coupling appears here as a phase correction term of the scattering result.
- By taking $n = 0$ in Theorem 3.1.1, we obtain that $W_f, W_g \in L_\xi^\infty \cap L_\xi^2$ for a small initial data in $H_x^{1,0} \cap H_x^{0,1}$. This is the coupled equivalent of Theorem 1.1 of [37]. In this article, we are able to get the control of the $H^{0,n}$ norms too.
- The decay estimate is not new here. Indeed, Kim already obtained it in [38], but without scattering result on the solutions.

- We see that we need a control on the derivatives on u_1, v_1 to obtain a control on the $H^{0,n}$ norm of W_f, W_g . The reason is that W_f, W_g are the asymptotic behaviors of w_f and w_g , defined in (3.2.5), which are, up to a phase correction, the Fourier transforms of u and v .
- They are two losses that can be surprising. First, the loss of speed between the L^∞ behavior and the $H^{0,n}$ one. Secondly, the need for $2n+1$ derivatives in u, v to obtain n multiplications in W_f, W_g . Both losses are connected to the same phenomenon. The key part of all the estimations will be the good decay in L^∞ of a remainder term R defined in (3.2.3). To control the $H^{0,n}$ norm of R by using this L^∞ decay, we use the inequality (3.4.6), which gives us these losses. These losses may not be sharp, as this control of the $H^{0,n}$ norm may not be optimal.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 3.2, we will do some preliminary computations and introduce the notion of profile. In Section 3.3, we will prove a key proposition. Finally, the proof of Theorem 3.1.1 will be treated in Section 3.4.

3.2 Preliminaries

In this section, we reformulate the problem by considering Duhamel's formula of the profiles of the solutions. Moreover, we state a proposition, which will be the main ingredient to begin the proof of Theorem 3.1.1. Finally, we state and prove a classical estimate of the Schrödinger linear group.

3.2.1 Introduction of the profile.

We apply Duhamel's formula to the system (3.1.1). If the solution u exists, then we have $u = \Phi(u)$, where

$$\Phi(u)(t, x) = e^{i(t-1)\partial_{xx}}u_1(x) - i \int_1^t e^{i(t-s)\partial_{xx}}|v(s, x)|^2u(s, x)ds.$$

To get the existence of the solution, we have to apply the fixed point theorem. We filter out the linear contribution by introducing the profile here. For f defined in (3.1.3), Duhamel's formula becomes (with the same notation Φ for the profile),

$$\Phi(f)(t, x) = e^{-i\partial_{xx}}u_1(x) - i \int_1^t e^{-is\partial_{xx}}v(s, x)\bar{v}(s, x)u(s, x)ds.$$

Using that $\widehat{uv} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{u} * \hat{v}$, we compute the spatial Fourier transform of $\Phi(f)$ as follows:

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi(f)}(t, \xi) &= e^{i\xi^2}\hat{u}_1(\xi) - i \int_1^t e^{is\xi^2}\widehat{v\bar{v}u}(s, \xi)ds \\ &= e^{i\xi^2}\hat{u}_1(\xi) - \frac{i}{2\pi} \int_1^t \int_{\mathbb{R}^2} e^{is\xi^2}\hat{u}(s, \alpha)\hat{v}(s, \eta - \alpha)\hat{v}(s, \xi - \eta)d\eta d\alpha ds \\ &= e^{i\xi^2}\hat{u}_1(\xi) - \frac{i}{2\pi} \int_1^t \int_{\mathbb{R}^2} e^{is\xi^2}\hat{u}(s, \alpha)\bar{\hat{v}}(s, \alpha - \eta)\hat{v}(s, \xi - \eta)d\eta d\alpha ds. \end{aligned}$$

Now, we reintroduce $f = e^{-it\partial_{xx}}u$ and $g = e^{-it\partial_{xx}}v$ in the above equation to get:

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi(f)}(t, \xi) &= e^{i\xi^2}\hat{u}_1(\xi) \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \int_1^t \int_{\mathbb{R}^2} e^{is(\xi^2 - \alpha^2 + (\alpha - \eta)^2 - (\xi - \eta)^2)} \hat{f}(s, \alpha) \bar{\hat{g}}(s, \alpha - \eta) \hat{g}(s, \xi - \eta) d\eta d\alpha ds \\ &= e^{i\xi^2}\hat{u}_1(\xi) - \frac{i}{2\pi} \int_1^t \int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta(\xi - \alpha)} \hat{f}(s, \alpha) \bar{\hat{g}}(s, \alpha - \eta) \hat{g}(s, \xi - \eta) d\eta d\alpha ds.\end{aligned}$$

After the change of variables $\alpha \leftrightarrow \xi - \sigma$, we get

$$\widehat{\Phi(f)}(t, \xi) = e^{i\xi^2}\hat{u}_1(\xi) - \frac{i}{2\pi} \int e^{2is\eta\sigma} \hat{g}(s, \xi - \sigma) \bar{\hat{g}}(s, \xi - \eta - \sigma) \hat{f}(s, \xi - \eta) d\sigma d\eta ds. \quad (3.2.1)$$

We define

$$F(s, \eta, \sigma, \xi) := \hat{g}(s, \xi - \sigma) \bar{\hat{g}}(s, \xi - \eta - \sigma) \hat{f}(s, \xi - \eta). \quad (3.2.2)$$

Using the Plancherel formula on (3.2.1) we get

$$\widehat{\Phi(f)}(t, \xi) = e^{i\xi^2}\hat{u}_1(\xi) - \frac{i}{2\pi} \int_1^t \int \mathcal{F}_{\eta, \sigma} [e^{2is\eta\sigma}] \mathcal{F}_{\eta, \sigma}^{-1} [F(s, \eta, \sigma, \xi)] d\sigma d\eta ds.$$

Using $\hat{\delta}_a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-iax}$, $e^{iax} = \sqrt{2\pi}\delta_a$ and the fact that $\widehat{f_\lambda}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$ where $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$, we have

$$\mathcal{F}_{\eta, \sigma} [e^{2is\eta\sigma}] (a, b) = \mathcal{F}_\eta [\sqrt{2\pi}\delta_{2s\eta}(b)] (a) = \frac{1}{2s}e^{-i\frac{ab}{2s}}.$$

Therefore, with the definition of F in (3.2.2),

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi(f)}(t, \xi) &= e^{i\xi^2}\hat{u}_1(\xi) - \frac{i}{4\pi} \int_1^t \int \frac{1}{s} e^{-i\frac{ab}{2s}} \mathcal{F}_{\eta, \sigma}^{-1} [F(s, \eta, \sigma, \xi)] (a, b) da db ds \\ &= e^{i\xi^2}\hat{u}_1(\xi) - \frac{i}{4\pi} \int_1^t \frac{1}{s} \int \mathcal{F}_{\eta, \sigma}^{-1} [F(s, \eta, \sigma, \xi)] (a, b) da db ds \\ &\quad - \frac{i}{4\pi} \int_1^t \frac{1}{s} \int (e^{-i\frac{ab}{2s}} - 1) \mathcal{F}_{\eta, \sigma}^{-1} [F(s, \eta, \sigma, \xi)] (a, b) da db ds \\ &= e^{i\xi^2}\hat{u}_1(\xi) - \frac{i\sqrt{2\pi}}{4\pi} \int_1^t \frac{1}{s} |\hat{g}(s, \xi)|^2 \hat{f}(s, \xi) ds + \int_1^t R(s, \xi) ds,\end{aligned}$$

where

$$R(s, \xi) = R(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s, \xi) := -\frac{i}{4\pi s} \int (e^{-i\frac{ab}{2s}} - 1) \mathcal{F}_{\eta, \sigma}^{-1} [F(s, \eta, \sigma, \xi)] (a, b) da db. \quad (3.2.3)$$

Thus, we obtain

$$\partial_t \widehat{\Phi(f)}(t, \xi) = -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}t} |\hat{g}(t, \xi)|^2 \hat{f}(t, \xi) + R(t, \xi). \quad (3.2.4)$$

The idea is to use the good behavior of R , which has a good decay in time. To take advantage of this decay, we introduce a last change of variable. We set

$$\begin{aligned}B_g(t, \xi) &= \exp\left(\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^t \frac{1}{s} |\hat{g}(s, \xi)|^2 ds\right), \quad \hat{w}_f(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi) B_g(t, \xi), \\ B_f(t, \xi) &= \exp\left(\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^t \frac{1}{s} |\hat{f}(s, \xi)|^2 ds\right), \quad \hat{w}_g(t, \xi) = \hat{g}(t, \xi) B_f(t, \xi).\end{aligned} \quad (3.2.5)$$

The main property of this change of variables is the conservation of the modulus of f : we have $|\hat{w}_f(t, \xi)| = |\hat{f}(t, \xi)|$. Thus, we have $\hat{f} = \widehat{\Phi(f)}$ if and only if \hat{w}_f is a solution of the following differential equation:

$$\partial_t \hat{w}_f(t, \xi) = B_g(t, \xi)R(t, \xi).$$

Applying Duhamel's formula a second time, we define the Duhamel form for (\hat{w}_f, \hat{w}_g) (still using the same notation Φ) by:

$$\begin{cases} \Phi_1(\hat{w}_f, \hat{w}_g)(t, \xi) &= \hat{w}_f^1(\xi) + \int_1^t B_g(s, \xi)R(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s, \xi)ds, \\ \Phi_2(\hat{w}_f, \hat{w}_g)(t, \xi) &= \hat{w}_g^1(\xi) + \int_1^t B_f(s, \xi)R(\hat{f}, \hat{f}, \hat{g})(s, \xi)ds, \end{cases} \quad (3.2.6)$$

where $\hat{w}_f^1(\xi) = \hat{w}_f(1, \xi)$ and $\hat{w}_g^1(\xi) = \hat{w}_g(1, \xi)$. They are the equations that we will treat to get the existence of the solutions. For that purpose, we are now able to state the key result of the article.

Proposition 3.2.1. *Assume $\|\hat{w}_f^1\|_{H_\xi^{1,0}} + \|\hat{w}_f^1\|_{H_\xi^{0,2n+1}} + \|\hat{w}_g^1\|_{H_\xi^{1,0}} + \|\hat{w}_g^1\|_{H_\xi^{0,2n+1}} \leq \varepsilon$, then there exists a positive constant M such that*

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(\hat{w}_f, \hat{w}_g)\|_{X_T} &\leq \varepsilon + M \|\hat{w}_f\|_{X_T} \|\hat{w}_g\|_{X_T}^2 (1 + \|\hat{w}_f\|_{X_T}^4)(1 + \|\hat{w}_g\|_{X_T}^4), \\ \|\Phi_2(\hat{w}_f, \hat{w}_g)\|_{X_T} &\leq \varepsilon + M \|\hat{w}_g\|_{X_T} \|\hat{w}_f\|_{X_T}^2 (1 + \|\hat{w}_g\|_{X_T}^4)(1 + \|\hat{w}_f\|_{X_T}^4). \end{aligned}$$

Remark 3.2.2. *There are two main differences between this estimation and Proposition 1.3 of Kato and Pusateri in [37]. First, we are dealing here with a result about w , and not about u directly. The reason is in the equation (3.2.4). As long as we have no proof of the existence of f , we cannot take $\Phi(f) = f$ and do a legit change of variables in this equation. But the existence of f is equivalent to the existence of w , which is why we focus on w here. Secondly, the right-hand side in [37] is a cubic term. The apparition of $(1 + \|\hat{w}_f\|_{X_T}^4)(1 + \|\hat{w}_g\|_{X_T}^4)$ terms in this paper is due to the choice of the X_T -norm. In particular, the terms $\|\partial_\xi \hat{f}(s)\|_{L_\xi^2}$ and $\|\partial_\xi \hat{g}(s)\|_{L_\xi^2}$ are not controlled by the definition of the X_T -norm. In fact, as soon as we consider small solutions, the right-hand side is very close to a cubic term.*

3.2.2 Properties of the linear Schrödinger group.

Before dealing with the computations on the X_T norm, we introduce the following result of independent interest, about the linear Schrödinger group. This lemma will be used in both proofs of Proposition 3.2.1 and Theorem 3.1.1.

Lemma 3.2.3. *For all $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ and for all $0 < \beta < \frac{1}{4}$, we have*

$$\|e^{it\partial_{xx}}\varphi\|_{L_x^\infty} \lesssim \frac{1}{|t|^{\frac{1}{2}}} \|\hat{\varphi}\|_{L_\xi^\infty} + \frac{1}{|t|^{\frac{1}{2}+\beta}} \|\hat{\varphi}\|_{H_\xi^{1,0}}.$$

Proof. The following proof is based on the proof of the more general Lemma in [33]. The idea is to write $e^{it\partial_{xx}}\varphi$ as an integral with a kernel. Recall that for

$$K_t(x) = (4i\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4it}},$$

we have $e^{it\partial_{xx}}\varphi = K_t * \varphi$. Thus,

$$\begin{aligned} e^{it\partial_{xx}}\varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)K_t(x-y)dy \\ &= (4i\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4it}} dy \\ &= (4i\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{i\frac{y^2}{4t}} e^{-i\frac{xy}{2t}} dy \\ &= (4i\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{x^2}{4t}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{-i\frac{xy}{2t}} dy + \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)(e^{i\frac{y^2}{4t}} - 1)e^{-i\frac{xy}{2t}} dy \right). \end{aligned}$$

We define A_φ such that

$$e^{it\partial_{xx}}\varphi(x) := (2it)^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{x^2}{4t}} \hat{\varphi}\left(\frac{x}{2t}\right) + A_\varphi(t, x). \quad (3.2.7)$$

The first part of the sum gives us the L^∞ part of the lemma. We now deal with the remainder term A_φ by using the fact that (with $0 < \beta < \frac{1}{4}$):

$$|e^{ix} - 1| = 2 \left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right| \lesssim x^\beta. \quad (3.2.8)$$

This trivial inequality gives us for A

$$\begin{aligned} \|A_\varphi(t)\|_{L_x^\infty} &\lesssim |t|^{-\frac{1}{2}} \left\| |x|^{2\beta} |t|^{-\beta} \varphi \right\|_{L_x^1} \\ &\lesssim |t|^{-\frac{1}{2}-\beta} \left\| |x|^{2\beta} \langle x \rangle^{-1} \varphi \right\|_{L_x^1} \\ &\lesssim |t|^{-\frac{1}{2}-\beta} \left\| |x|^{2\beta} \langle x \rangle^{-1} \right\|_{L_x^2} \|\langle x \rangle \varphi\|_{L_x^2} \\ &\lesssim |t|^{-\frac{1}{2}-\beta} \|\hat{\varphi}\|_{H_\xi^{1,0}}. \end{aligned}$$

This concludes the proof of the lemma. \square

3.3 The a priori estimates

In this section, we prove Proposition 3.2.1, following the proof of the similar proposition in [37]. We want to deal with the X_T norms of \hat{w}_f and \hat{w}_g . Here we write the computations for \hat{w}_f , obviously, the results are the same mutatis mutandis for \hat{w}_g . We split the proof in three parts because of the several estimations needed in the X_T norm.

3.3.1 The decay of R , one L^∞ estimate.

We first focus on R . We recall that

$$R(s, \xi) = R(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s, \xi) = -\frac{i}{4\pi s} \int (e^{-i\frac{ab}{2s}} - 1) \mathcal{F}_{\eta, \sigma}^{-1}[F(s, \eta, \sigma, \xi)](a, b) da db,$$

with

$$F(s, \eta, \sigma, \xi) := \hat{g}(s, \xi - \sigma) \overline{\hat{g}(s, \xi - \eta - \sigma)} \hat{f}(s, \xi - \eta).$$

We have the following lemma:

Lemma 3.3.1. *For all $0 < 3\alpha < \delta < \frac{1}{4}$ we have*

$$|R(s, \xi)| \lesssim s^{-1-\delta} \|\hat{g}\|_{H_\xi^{1,0}}^2 \|\hat{f}\|_{H_\xi^{1,0}}.$$

Remark 3.3.2. *This lemma is the key of the estimates we will deal with.*

- *The important result here is this small δ that ensures the integrability of $\|R(s, \cdot)\|_{L_\xi^\infty}$. Moreover, this provides a good decay that will erase the behavior of the other parts, because $3\alpha < \delta$, and ensures the existence of the solutions of our system (3.1.1).*
- *We see here why we choose the time 1 for initial data in the system (3.1.1). Indeed, here is the main problem with the integral in 0. Almost all the $\frac{1}{t}$ terms can be controlled in 0 by changing the coefficients in the X_T norm (for example by changing the t in $1+t$), but not this $\frac{1}{s^{1+\delta}}$ here. This is a consequence of the behavior of the solution of the linear Schrödinger equation near 0. Our purpose here is to highlight an asymptotic behavior, this is the reason why we just avoid this problem by taking a strictly positive time for the initial data.*
- *This lemma is satisfied for all $0 < 3\alpha < \delta < \frac{1}{4}$. The goal after the lemma is to take α small enough, and δ as big as possible. Keeping this in mind, in the Subsection 3.4.4, it will be natural to consider that we can choose α and δ such that $0 < 4\alpha < \delta < \frac{1}{4}$.*

Proof. By definition we have

$$|R(s, \xi)| \lesssim \frac{1}{s} \int \left| e^{-i\frac{ab}{2s}} - 1 \right| \left| \mathcal{F}_{\eta, \sigma}^{-1} [F(s, \eta, \sigma, \xi)](a, b) \right| da db.$$

Once again we use (3.2.8), with $0 < \delta < \frac{1}{4}$, to obtain

$$|R(s, \xi)| \lesssim s^{-1-\delta} \int |a|^\delta |b|^\delta \left| \mathcal{F}_{\eta, \sigma}^{-1} [F(s, \eta, \sigma, \xi)](a, b) \right| da db.$$

Let us focus on $\mathcal{F}_{\eta, \sigma}^{-1} F$. We have

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\eta, \sigma}^{-1} [F(s, \eta, \sigma, \xi)](a, b) &= \mathcal{F}_{\eta, \sigma}^{-1} \left[\hat{g}(s, \xi - \sigma) \bar{\hat{g}}(s, \xi - \eta - \sigma) \hat{f}(s, \xi - \eta) \right](a, b) \\ &= \mathcal{F}_\eta^{-1} \left[\hat{f}(s, \xi - \eta) \mathcal{F}_\sigma^{-1} \left(\hat{g}(s, \xi - \sigma) \bar{\hat{g}}(s, \xi - \eta - \sigma) \right) (b) \right](a). \end{aligned}$$

But $\mathcal{F}^{-1}(fg) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$. Therefore,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\eta, \sigma}^{-1} [F(s, \eta, \sigma, \xi)](a, b) &= \\ \mathcal{F}_\eta^{-1} \left[\hat{f}(s, \xi - \eta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_\sigma^{-1} \hat{g}(s, \xi - \sigma) * \mathcal{F}_\sigma^{-1} \bar{\hat{g}}(s, \xi - \eta - \sigma)(b) \right](a). \end{aligned}$$

Moreover, we have the classical Fourier relations

$$\mathcal{F}_\sigma^{-1}[\hat{g}(\xi - \sigma)](b) = e^{i\xi b} g(-b) \quad \text{and} \quad \mathcal{F}_\sigma^{-1}[\overline{\hat{g}(\xi - \sigma)}](b) = e^{i\xi b} \bar{g}(b).$$

Thus, we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\eta, \sigma}^{-1} [F(s, \eta, \sigma, \xi)](a, b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_\eta^{-1} \left[\hat{f}(s, \xi - \eta) \left(e^{ib\xi} g(s, -b) *_b e^{ib(\xi-\eta)} \bar{g}(s, b) \right) (b) \right](a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_\eta^{-1} \left[\hat{f}(s, \xi - \eta) \int_{\mathbb{R}} e^{iy\xi} g(s, -y) e^{i(b-y)(\xi-\eta)} \bar{g}(s, b-y) dy \right](a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ib\xi} g(s, -y) \bar{g}(s, b-y) \mathcal{F}_\eta^{-1} \left(e^{-i(b-y)\eta} \hat{f}(s, \xi - \eta) \right) (a) dy. \end{aligned}$$

But $\mathcal{F}_\eta^{-1}[e^{-ib\eta}\hat{f}(\xi - \eta)](a) = e^{i\xi(a-b)}f(b-a)$, this gives us

$$\mathcal{F}_{\eta,\sigma}^{-1}[F(s, \eta, \sigma, \xi)](a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ib\xi} g(s, -y) \bar{g}(s, b-y) e^{i\xi(y+a-b)} f(s, b-y-a) dy.$$

Finally, with the change of variables $x \leftrightarrow (b-y)$, we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\eta,\sigma}^{-1}[F(s, \eta, \sigma, \xi)](a, b) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ib\xi} g(s, x-b) \bar{g}(s, x) e^{i\xi(a-x)} f(s, x-a) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(a+b)\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} g(s, x-b) \bar{g}(s, x) f(s, x-a) dx. \end{aligned}$$

Therefore, back on the remainder term R , we have

$$|R(s, \xi)| \lesssim s^{-1-\delta} \int |a|^\delta |b|^\delta |g(s, x-b)| |g(s, x)| |f(s, x-a)| dx dadb.$$

Using that $|a|^\delta |b|^\delta \lesssim (|x-a|^\delta + |x|^\delta)(|x-b|^\delta + |x|^\delta)$, we obtain

$$\begin{aligned} |R(s, \xi)| &\lesssim s^{-1-\delta} \int |x-b|^\delta |g(s, x-b)| |g(s, x)| |x-a|^\delta |f(s, x-a)| dx dadb \\ &\quad + s^{-1-\delta} \int |g(s, x-b)| |x|^\delta |g(s, x)| |x-a|^\delta |f(s, x-a)| dx dadb \\ &\quad + s^{-1-\delta} \int |x-b|^\delta |g(s, x-b)| |x|^\delta |g(s, x)| |f(s, x-a)| dx dadb \\ &\quad + s^{-1-\delta} \int |g(s, x-b)| |x|^{2\delta} |g(s, x)| |f(s, x-a)| dx dadb \\ &\lesssim s^{-1-\delta} \left(\| |x|^\delta g \|_{L_x^1} \|g\|_{L_x^1} \| |x|^\delta f \|_{L_x^1} + \|g\|_{L_x^1} \| |x|^\delta g \|_{L_x^1} \| |x|^\delta f \|_{L_x^1} \right. \\ &\quad \left. + \| |x|^\delta g \|_{L_x^1} \| |x|^\delta g \|_{L_x^1} \|f\|_{L_x^1} + \| |x|^{2\delta} g \|_{L_x^1} \|g\|_{L_x^1} \|g\|_{L_x^1} \right). \end{aligned}$$

Using now the Cauchy-Schwarz inequality and the fact that $\delta < \frac{1}{4}$, we get

$$\| \langle x \rangle^{2\delta} f \|_{L_x^1} \leq \| \langle x \rangle^{2\delta} \langle x \rangle^{-1} \|_{L_x^2} \| \langle x \rangle f \|_{L_x^2} \lesssim \| \hat{f} \|_{H_\xi^{1,0}}.$$

Therefore, we conclude that

$$|R(s, \xi)| \lesssim s^{-1-\delta} \| \hat{f} \|_{H_\xi^{1,0}} \| \hat{g} \|_{H_\xi^{1,0}}^2.$$

□

3.3.2 Some L^2 estimates.

By the previous estimation, we see that we first need to control the $\| \hat{f} \|_{H_\xi^{1,0}}$ term, which will occur in a lot of our computations. By definition,

$$\begin{aligned} \| \hat{f}(t) \|_{H_\xi^{1,0}} &= \| \hat{f}(t) \|_{L_\xi^2} + \| \partial_\xi \hat{f}(t) \|_{L_\xi^2} \\ &= \| \hat{w}_f(t) \|_{L_\xi^2} + \| \partial_\xi(\hat{w}_f \bar{B}_g)(t) \|_{L_\xi^2} \\ &\leq \| \hat{w}_f(t) \|_{L_\xi^2} + \| \partial_\xi \hat{w}_f(t) \|_{L_\xi^2} + \| \hat{w}_f(t) \|_{L_\xi^\infty} \| \partial_\xi B_g(t) \|_{L_\xi^2} \\ &\leq \| \hat{w}_f(t) \|_{H_\xi^{1,0}} + \| \hat{w}_f(t) \|_{L_\xi^\infty} \int_1^t s^{-1} \| \partial_\xi \hat{w}_g \cdot \hat{w}_g(s) \|_{L_\xi^2} ds. \end{aligned}$$

Thus, using the definition of the X_T -norm, we obtain

$$\|\hat{f}(t)\|_{H_\xi^{1,0}} \lesssim t^\alpha \|\hat{w}_f\|_{X_T} (1 + \|\hat{w}_g\|_{X_T}^2). \quad (3.3.1)$$

We now have all the tools for studying $\|R(s)\|_{L_\xi^2}$. By construction, we have

$$R(s, \xi) = \frac{i\sqrt{2\pi}}{4\pi} \frac{1}{s} |\hat{g}(s, \xi)|^2 \hat{f}(s, \xi) - i\mathcal{F}_\xi \left(e^{-is\partial_{xx}} (|e^{is\partial_{xx}} g(s, x)|^2 e^{is\partial_{xx}} f(s, x)) \right).$$

Using that $\|e^{is\partial_{xx}} \varphi\|_{L_\xi^2} = \|\varphi\|_{L_\xi^2}$ and the conservation of the L^2 norm of Fourier's transform, we get

$$\|R(s)\|_{L_\xi^2} \lesssim \frac{1}{s} \|\hat{g}(s)\|_{L_\xi^\infty}^2 \|\hat{f}(s)\|_{L_\xi^2} + \|e^{is\partial_{xx}} g(s)\|_{L_x^\infty}^2 \|f(s)\|_{L_x^2}.$$

Thus, using Lemma 3.2.3 with $\alpha < \beta$ and the fact that $(a+b)^2 \lesssim a^2 + b^2$, we get

$$\begin{aligned} \|R(s)\|_{L_\xi^2} &\lesssim s^{-1} \left(\|\hat{g}(s)\|_{L_\xi^\infty}^2 \|\hat{f}(s)\|_{L_\xi^2} + s^{-2\beta} \|\hat{g}(s)\|_{H_\xi^{1,0}}^2 \|\hat{f}(s)\|_{L_\xi^2} \right) \\ &\lesssim s^{-1} \left(\|\hat{w}_g(s)\|_{L_\xi^\infty}^2 \|\hat{w}_f(s)\|_{L_\xi^2} + s^{2(\alpha-\beta)} \|\hat{w}_g(s)\|_{X_T}^2 (1 + \|\hat{w}_f(s)\|_{X_T}^2) \|\hat{w}_f(s)\|_{L_\xi^2} \right). \end{aligned}$$

Thus we get

$$\|R(s)\|_{L_\xi^2} \lesssim s^{-1+\alpha} \|\hat{w}_g\|_{X_T}^2 \|\hat{w}_f\|_{X_T} (1 + \|\hat{w}_f\|_{X_T}^4), \quad (3.3.2)$$

Now, let us deal with the derivative with respect to ξ . In the computations to obtain the estimate (3.3.1), it has already been shown that

$$\|\partial_\xi B_g(t)\|_{L_\xi^2} \lesssim t^\alpha \|\hat{w}_g\|_{X_T}^2. \quad (3.3.3)$$

For R , we go back once again to its construction. We have

$$\begin{aligned} R(s, \xi) &= \frac{-i}{2\pi} \int e^{2is\eta\sigma} \hat{g}(s, \xi - \sigma) \bar{\hat{g}}(s, \xi - \eta - \sigma) \hat{f}(s, \xi - \eta) d\sigma d\eta + \frac{i\sqrt{2\pi}}{4\pi} \frac{1}{s} |\hat{g}(s, \xi)|^2 \hat{f}(s, \xi) \\ &=: I(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s, \xi) + \frac{1}{s} N(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s, \xi). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Then, by linearity,

$$\begin{aligned} \partial_\xi R &= I(\partial_\xi \hat{g}, \hat{g}, \hat{f}) + I(\hat{g}, \partial_\xi \hat{g}, \hat{f}) + I(\hat{g}, \hat{g}, \partial_\xi \hat{f}) \\ &\quad + \frac{1}{s} N(\partial_\xi \hat{g}, \hat{g}, \hat{f}) + \frac{1}{s} N(\hat{g}, \partial_\xi \hat{g}, \hat{f}) + \frac{1}{s} N(\hat{g}, \hat{g}, \partial_\xi \hat{f}). \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Obviously, the three terms in I and N play the same role. We will focus on one of each.

$$\begin{aligned} \|I(\partial_\xi \hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s)\|_{L_\xi^2} &\lesssim \|\mathcal{F}_\xi \left(e^{-is\partial_{xx}} (e^{is\partial_{xx}} x g(s, x) e^{-is\partial_{xx}} \bar{g}(s, x) e^{is\partial_{xx}} f(s, x)) \right)\|_{L_\xi^2} \\ &\lesssim \|e^{is\partial_{xx}} f(s)\|_{L_x^\infty} \|e^{is\partial_{xx}} g(s)\|_{L_x^\infty} \|xg(s)\|_{L_x^2} \\ &\lesssim s^{-1} (\|\hat{f}(s)\|_{L_\xi^\infty} + s^{-\beta} \|\hat{f}(s)\|_{H_\xi^{1,0}}) (\|\hat{g}(s)\|_{L_\xi^\infty} + s^{-\beta} \|\hat{g}(s)\|_{H_\xi^{1,0}}) \|\partial_\xi \hat{g}(s)\|_{L_\xi^2} \\ &\lesssim s^{-1+\alpha} \|\hat{w}_f\|_{X_T} (1 + \|\hat{w}_g\|_{X_T}^2) \|\hat{w}_g\|_{X_T}^2 (1 + \|\hat{w}_f\|_{X_T}^4). \end{aligned}$$

For N , we have

$$\begin{aligned} \|s^{-1}N(\partial_\xi \hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s)\|_{L_\xi^2} &\lesssim s^{-1}\|\hat{f}(s)\|_{L_\xi^\infty}\|\hat{g}(s)\|_{L_\xi^\infty}\|\partial_\xi \hat{g}(s)\|_{L_\xi^2} \\ &\lesssim s^{-1+\alpha}\|\hat{w}_f\|_{X_T}\|\hat{w}_g\|_{X_T}^2(1+\|\hat{w}_f\|_{X_T}^2). \end{aligned}$$

Thus, we can conclude that

$$\|\partial_\xi R(s, \xi)\|_{L_\xi^2} \lesssim s^{-1+\alpha}\|\hat{w}_f\|_{X_T}\|\hat{w}_g\|_{X_T}^2(1+\|\hat{w}_g\|_{X_T}^2)(1+\|\hat{w}_f\|_{X_T}^4). \quad (3.3.6)$$

The computations are almost the same for the $H_\xi^{0,2n+1}$ part. Since $|B(s, \xi)| = 1$, we just focus on R . With the decomposition (3.3.4), we have

$$\left|\xi^{2n+1}R(s, \xi)\right| \leq \left|\xi^{2n+1}I(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s, \xi)\right| + \frac{1}{s}\left|\xi^{2n+1}N(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s, \xi)\right|.$$

For the I term, using that by convexity of $x \mapsto x^{2n+1}$ on \mathbb{R}^+ , we have

$$|\xi|^{2n+1} \lesssim |\xi - \sigma|^{2n+1} + |\xi - \eta|^{2n+1} + |\xi - \sigma - \eta|^{2n+1}. \quad (3.3.7)$$

We obtain

$$\left|\xi^{2n+1}I(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s, \xi)\right| \leq \left|I(\xi^{2n+1}\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s, \xi)\right| + \left|I(\hat{g}, \xi^{2n+1}\hat{g}, \hat{f})(s, \xi)\right| + \left|I(\hat{g}, \hat{g}, \xi^{2n+1}\hat{f})(s, \xi)\right|.$$

Let us deal for example with the third part, we have

$$\begin{aligned} \|I(\hat{g}, \hat{g}, \xi^{2n+1}\hat{f})(s, \xi)\|_{L_\xi^2} &\lesssim \|e^{is\partial_{xx}}g(s)\|_{L_x^\infty}^2\|\partial_x^{2n+1}f(s)\|_{L_x^2} \\ &\lesssim s^{-1}(\|\hat{g}(s)\|_{L_\xi^\infty} + s^{-\beta}\|\hat{g}(s)\|_{H_\xi^{1,0}})^2\|\xi^{2n+1}\hat{f}(s)\|_{L_\xi^2} \\ &\lesssim s^{-1+\alpha}\|\hat{w}_f\|_{X_T}\|\hat{w}_g\|_{X_T}^2(1+\|\hat{w}_f\|_{X_T}^4). \end{aligned}$$

Doing the same for the two other parts, we conclude for the I part by

$$\|\xi^{2n+1}I(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s)\|_{L_\xi^2} \lesssim s^{-1+\alpha}\|\hat{w}_f\|_{X_T}\|\hat{w}_g\|_{X_T}^2(1+\|\hat{w}_g\|_{X_T}^2)(1+\|\hat{w}_f\|_{X_T}^4).$$

The N term is simpler, cause we remark that

$$\left|\xi^{2n+1}N(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s, \xi)\right| = \left|N(\xi^{2n+1}\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s, \xi)\right|.$$

Thus we have

$$\begin{aligned} \|s^{-1}\xi^{2n+1}N(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s)\|_{L_\xi^2} &\lesssim s^{-1}\|\hat{f}(s)\|_{L_\xi^\infty}\|\hat{g}(s)\|_{L_\xi^\infty}\|\xi^{2n+1}\hat{g}(s)\|_{L_\xi^2} \\ &\lesssim s^{-1+\alpha}\|\hat{w}_f\|_{X_T}\|\hat{w}_g\|_{X_T}^2. \end{aligned}$$

Finally we conclude for R that

$$\|\xi^{2n+1}R(s)\|_{L_\xi^2} \lesssim s^{-1+\alpha}\|\hat{w}_g\|_{X_T}^2\|\hat{w}_f\|_{X_T}(1+\|\hat{w}_g\|_{X_T}^2)(1+\|\hat{w}_f\|_{X_T}^4). \quad (3.3.8)$$

3.3.3 Conclusion of the proof.

We have to compile our estimates with the norms that defined the X_T norm. We remind that

$$\|\hat{w}_f\|_{X_T} := \|\hat{w}_f\|_{L_T^\infty L_\xi^\infty} + \|t^{-\alpha}\hat{w}_f\|_{L_T^\infty H_\xi^{1,0}} + \|t^{-\alpha}\hat{w}_f\|_{L_T^\infty H_\xi^{0,2n+1}},$$

and

$$\Phi_1(\hat{w}_f, \hat{w}_g)(t, \xi) := \hat{w}_f^1(\xi) + \int_1^t B_g(s, \xi)R(s, \xi)ds.$$

For the L^∞ part, we use Lemma 3.3.1, the equation (3.3.1) and the relation $3\alpha - \delta < 0$ to get

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(\hat{w}_f, \hat{w}_g)(t)\|_{L_\xi^\infty} &\leq \|\hat{w}_f^1\|_{L_\xi^\infty} + \int_1^t \|R(s)\|_{L_\xi^\infty} ds \\ &\lesssim \varepsilon + \|\hat{w}_f\|_{X_T} \|\hat{w}_g\|_{X_T}^2 (1 + \|\hat{w}_g\|_{X_T}^2)(1 + \|\hat{w}_f\|_{X_T}^4). \end{aligned}$$

For the $H^{1,0}$ part, we use Lemma 3.3.1 and the equations (3.3.2), (3.3.3) and (3.3.6). We have

$$\begin{aligned} \|t^{-\alpha}\Phi_1(\hat{w}_f, \hat{w}_g)(t)\|_{H_\xi^{1,0}} &\leq \|\hat{w}_f^1\|_{H_\xi^{1,0}} + t^{-\alpha} \int_1^t \left(\|R(s)\|_{H_\xi^{1,0}} + \|R(s)\|_{L_\xi^\infty} \|\partial_\xi B_g(s)\|_{L_\xi^2} \right) ds \\ &\lesssim \varepsilon + \|\hat{w}_f\|_{X_T} \|\hat{w}_g\|_{X_T}^2 (1 + \|\hat{w}_f\|_{X_T}^4)(1 + \|\hat{w}_g\|_{X_T}^4). \end{aligned}$$

The $H^{0,2n+1}$ part is easier, just using (3.3.8) we get

$$\|t^{-\alpha}\Phi_1(\hat{w}_f, \hat{w}_g)(t)\|_{H_\xi^{0,2n+1}} \lesssim \varepsilon + \|\hat{w}_f\|_{X_T} \|\hat{w}_g\|_{X_T}^2 (1 + \|\hat{w}_f\|_{X_T}^4)(1 + \|\hat{w}_g\|_{X_T}^2).$$

Finally, we have, with a constant $M > 0$,

$$\|\Phi_1(\hat{w}_f, \hat{w}_g)\|_{X_T} \leq \varepsilon + M \|\hat{w}_f\|_{X_T} \|\hat{w}_g\|_{X_T}^2 (1 + \|\hat{w}_f\|_{X_T}^4)(1 + \|\hat{w}_g\|_{X_T}^4).$$

The other equation is obtained by the same way by symmetry of the roles of u and v . \square

3.4 The asymptotic behavior

We are now able to use the proposition in order to prove Theorem 3.1.1. First, this gives us a local existence, by a fixed point argument in a suitable space. Moreover, by a continuity argument, we prove a global one. In the two last parts of this section, we use our estimates to get the L^∞ decay and the scattering.

3.4.1 Local existence and uniqueness of the solution.

For the introduction of the function Φ , we need to take care of the notations while considering two pairs of solutions. We consider the application

$$\Phi : (\hat{w}_f, \hat{w}_g) \mapsto (\Phi_1(\hat{w}_f, \hat{w}_g), \Phi_2(\hat{w}_f, \hat{w}_g)),$$

with Φ_1 and Φ_2 defined in (3.2.6). The idea is to apply a fixed point argument to Φ in

$$E := \{(\hat{w}_f, \hat{w}_g) \in X_T, \|\hat{w}_f\|_{X_T} < 2\varepsilon, \|\hat{w}_g\|_{X_T} < 2\varepsilon\},$$

that we endow with the norm $\|(\hat{w}_f, \hat{w}_g)\|_E = \|\hat{w}_f\|_{X_T} + \|\hat{w}_g\|_{X_T}$.

Using Proposition 3.2.1, we have

$$\begin{cases} \|\Phi_1(\hat{w}_f, \hat{w}_g)\|_{X_T} & \leq \varepsilon + M \|\hat{w}_f\|_{X_T} \|\hat{w}_g\|_{X_T}^2 (1 + \|\hat{w}_f\|_{X_T}^4)(1 + \|\hat{w}_g\|_{X_T}^4), \\ \|\Phi_2(\hat{w}_f, \hat{w}_g)\|_{X_T} & \leq \varepsilon + M \|\hat{w}_g\|_{X_T} \|\hat{w}_f\|_{X_T}^2 (1 + \|\hat{w}_g\|_{X_T}^4)(1 + \|\hat{w}_f\|_{X_T}^4). \end{cases}$$

For ε small enough,

$$8M\varepsilon^3(1 + 16\varepsilon^4)^2 \leq \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (3.4.1)$$

In this case, E is invariant under the action of Φ . For this invariance, we could have chosen just ε instead of $\frac{1}{2}\varepsilon$ in the RHS of (3.4.1). The result would have been the same, but we will need a deeper accuracy for the global existence in the next part. We now have to show that the application Φ is a contraction, therefore we have to consider two pairs of solutions. Let $(\hat{w}_{f_1}, \hat{w}_{g_1}), (\hat{w}_{f_2}, \hat{w}_{g_2}) \in E$, we have

$$\begin{aligned} \|\Phi(\hat{w}_{f_1}, \hat{w}_{g_1}) - \Phi(\hat{w}_{f_2}, \hat{w}_{g_2})\|_E &= \|\Phi_1(\hat{w}_{f_1}, \hat{w}_{g_1}) - \Phi_1(\hat{w}_{f_2}, \hat{w}_{g_2})\|_{X_T} \\ &\quad + \|\Phi_2(\hat{w}_{f_1}, \hat{w}_{g_1}) - \Phi_2(\hat{w}_{f_2}, \hat{w}_{g_2})\|_{X_T}. \end{aligned}$$

We do the computations for Φ_1 , they are *mutatis mutandis* the same for Φ_2 . We start from

$$\begin{aligned} (\Phi_1(\hat{w}_{f_1}, \hat{w}_{g_1}) - \Phi_1(\hat{w}_{f_2}, \hat{w}_{g_2}))(t, \xi) &= \int_1^t B_{g_1}(s, \xi) R_1(s, \xi) ds - \int_1^t B_{g_2}(s, \xi) R_2(s, \xi) ds \\ &= \int_1^t B_{g_1}(R_1 - R_2)(s, \xi) ds + \int_1^t R_2(B_{g_1} - B_{g_2})(s, \xi) ds. \end{aligned}$$

As we saw in the proof of Proposition 3.2.1, the role of $\|\hat{f}_1(t) - \hat{f}_2(t)\|_{H_\xi^{1,0}}$ will be predominant, but we have to do some preliminary computations before. We first focus on the coupling effect of $B_{g_1} - B_{g_2}$, which give us in a second time estimates for $\hat{f}_1 - \hat{f}_2$. In the third part of the proof, we will focus on the effect of the $R_1 - R_2$ terms. To be as clear as possible, we split the proof by announcing the estimates we are going to prove.

The $B_{g_1} - B_{g_2}$ estimates.

First of all, let us rewrite $B_{g_1} - B_{g_2}$. We observe that

$$e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Therefore, we get

$$\begin{aligned} (B_{g_1} - B_{g_2})(t, \xi) &= 2i \sin\left(\int_1^t \frac{|\hat{w}_{g_1}(s, \xi)|^2 - |\hat{w}_{g_2}(s, \xi)|^2}{2s} ds\right) \\ &\quad \times \exp\left(i\left(\int_1^t \frac{|\hat{w}_{g_1}(s, \xi)|^2 + |\hat{w}_{g_2}(s, \xi)|^2}{2s} ds\right)\right). \end{aligned}$$

Thus, we have the following relations:

- $\|(B_{g_1} - B_{g_2})(t)\|_{L_\xi^\infty} \lesssim \ln(t)\varepsilon \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T}$.

Actually, we have

$$\begin{aligned} \|(B_{g_1} - B_{g_2})(t)\|_{L_\xi^\infty} &\lesssim \left\| \int_1^t s^{-1} (|\hat{w}_{g_1}(s)|^2 - |\hat{w}_{g_2}(s)|^2) ds \right\|_{L_\xi^\infty} \\ &\lesssim \int_1^t s^{-1} \|\hat{w}_{g_1}(s) - \hat{w}_{g_2}(s)\|_{L_\xi^\infty} (\|\hat{w}_{g_1}(s)\|_{L_\xi^\infty} + \|\hat{w}_{g_2}(s)\|_{L_\xi^\infty}) ds. \\ \bullet \quad \|\partial_\xi(B_{g_1} - B_{g_2})(t)\|_{L_\xi^2} &\lesssim t^\alpha \varepsilon (1 + \varepsilon^2 \ln(t)) \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T}. \end{aligned}$$

For this relation, we need more computations due to the derivative. We have

$$\begin{aligned} \|\partial_\xi(B_{g_1} - B_{g_2})(t)\|_{L_\xi^2} &\leq \left\| \partial_\xi \sin \left(\int_1^t \frac{|\hat{w}_{g_1}(s)|^2 - |\hat{w}_{g_2}(s)|^2}{2s} ds \right) \right\|_{L_\xi^2} \\ &\quad + \left\| \sin \left(\int_1^t \frac{|\hat{w}_{g_1}(s)|^2 - |\hat{w}_{g_2}(s)|^2}{2s} ds \right) \partial_\xi e^{i \left(\int_1^t \frac{|\hat{w}_{g_1}(s)|^2 + |\hat{w}_{g_2}(s)|^2}{2s} ds \right)} \right\|_{L_\xi^2}. \end{aligned}$$

We consider separately the two parts of the sum. For the first part,

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\| \partial_\xi \sin \left(\int_1^t \frac{|\hat{w}_{g_1}(s)|^2 - |\hat{w}_{g_2}(s)|^2}{2s} ds \right) \right\|_{L_\xi^2} \\ &\lesssim \left\| \int_1^t s^{-1} \partial_\xi (|\hat{w}_{g_1}(s)|^2 - |\hat{w}_{g_2}(s)|^2) ds \right\|_{L_\xi^2} \\ &\lesssim \int_1^t s^{-1} \left(\|\partial_\xi \hat{w}_{g_1}(s)\|_{L_\xi^2} + \|\partial_\xi \hat{w}_{g_2}(s)\|_{L_\xi^2} \right) \|\hat{w}_{g_1}(s) - \hat{w}_{g_2}(s)\|_{L_\xi^\infty} \\ &\quad + \left(\|\hat{w}_{g_1}(s)\|_{L_\xi^\infty} + \|\hat{w}_{g_2}(s)\|_{L_\xi^\infty} \right) \|\partial_\xi (\hat{w}_{g_1}(s) - \hat{w}_{g_2}(s))\|_{L_\xi^2} ds \\ &\lesssim t^\alpha \varepsilon \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T}. \end{aligned}$$

For the second one, using the same relation for the coupled part,

$$\begin{aligned} I_2 &= \left\| \sin \left(\int_1^t \frac{|\hat{w}_{g_1}(s)|^2 - |\hat{w}_{g_2}(s)|^2}{2s} ds \right) \partial_\xi e^{i \left(\int_1^t \frac{|\hat{w}_{g_1}(s)|^2 + |\hat{w}_{g_2}(s)|^2}{2s} ds \right)} \right\|_{L_\xi^2} \\ &\lesssim \int_1^t s^{-1} \|\hat{w}_{g_1}(s) - \hat{w}_{g_2}(s)\|_{L_\xi^\infty} (\|\hat{w}_{g_1}(s)\|_{L_\xi^\infty} + \|\hat{w}_{g_2}(s)\|_{L_\xi^\infty}) ds \\ &\quad \times \int_1^t s^{-1} \left(\|\partial_\xi \hat{w}_{g_1}(s)\|_{L_\xi^2} \|\hat{w}_{g_1}(s)\|_{L_\xi^\infty} + \|\partial_\xi \hat{w}_{g_2}(s)\|_{L_\xi^2} \|\hat{w}_{g_2}(s)\|_{L_\xi^\infty} \right) ds \\ &\lesssim t^\alpha \ln(t) \varepsilon^3 \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T}. \end{aligned}$$

The $\hat{f}_1 - \hat{f}_2$ estimates.

Using the previous estimates, we now deal with the coupling effect of $\hat{f}_1 - \hat{f}_2$. First, we remark that

$$\hat{f}_1 - \hat{f}_2 = \hat{w}_{f_1} \bar{B}_{g_1} - \hat{w}_{f_2} \bar{B}_{g_2} = \hat{w}_{f_1} (\bar{B}_{g_1} - \bar{B}_{g_2}) + \bar{B}_{g_2} (\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2}).$$

Thanks to this decomposition, we deal with the L^∞ , $H^{1,0}$ and $H^{0,2n+1}$ norms of $\hat{f}_1 - \hat{f}_2$. First, we show that

$$\bullet \quad \|(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)(t)\|_{L_\xi^\infty} \lesssim \ln(t) \varepsilon^2 \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T} + \|\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2}\|_{X_T}.$$

We prove this inequality by using the estimation of $\|(B_{g_1} - B_{g_2})(t)\|_{L_\xi^\infty}$. We have

$$\|(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)(t)\|_{L_\xi^\infty} \lesssim \|\hat{w}_{f_1}(t)\|_{L_\xi^\infty} \|(B_{g_1} - B_{g_2})(t)\|_{L_\xi^\infty} + \|(\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2})(t)\|_{L_\xi^\infty}.$$

- $\|(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)(t)\|_{L_\xi^2} \lesssim t^\alpha \ln(t) \varepsilon^2 \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T} + t^\alpha \|\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2}\|_{X_T}.$

Indeed, by the exact same way but with the L^2 control of the \hat{w} terms,

$$\|(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)(t)\|_{L_\xi^2} \lesssim \|\hat{w}_{f_1}(t)\|_{L_\xi^2} \|(B_{g_1} - B_{g_2})(t)\|_{L_\xi^\infty} + \|(\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2})(t)\|_{L_\xi^2}.$$

- $\|\xi^{2n+1}(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)(t)\|_{L_\xi^2} \lesssim t^\alpha \ln(t) \varepsilon^2 \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T} + t^\alpha \|\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2}\|_{X_T}.$

This is the same estimation and exactly the same computation because

$$\|\xi^{2n+1}(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)(t)\|_{L_\xi^2} \lesssim \|\xi^{2n+1}\hat{w}_{f_1}(t)\|_{L_\xi^2} \|(B_{g_1} - B_{g_2})(t)\|_{L_\xi^\infty} + \|\xi^{2n+1}(\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2})(t)\|_{L_\xi^2}.$$

- $\|\partial_\xi(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)(t)\|_{L_\xi^2} \lesssim t^\alpha \ln(t) \varepsilon^2 \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T} + t^\alpha \|\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2}\|_{X_T}.$

For this last one we have

$$\begin{aligned} \|\partial_\xi(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)(t)\|_{L_\xi^2} &\lesssim \|\partial_\xi \hat{w}_{f_1}(t)\|_{L_\xi^2} \|(B_{g_1} - B_{g_2})(t)\|_{L_\xi^\infty} + \|\hat{w}_{f_1}(t)\|_{L_\xi^\infty} \|\partial_\xi(B_{g_1} - B_{g_2})(t)\|_{L_\xi^2} \\ &\quad + \|\partial_\xi B_{g_2}(t)\|_{L_\xi^2} \|(\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2})(t)\|_{L_\xi^\infty} + \|\partial_\xi(\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2})(t)\|_{L_\xi^2}. \end{aligned}$$

Here, we can use the previous relations of this part, the equation (3.3.3), and the fact that ε is small to obtain the desired estimate.

Computing these estimates, we finally have

$$\begin{aligned} \|(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)(t)\|_{L_\xi^\infty} &\lesssim \ln(t) \varepsilon^2 \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T} + \|\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2}\|_{X_T}, \\ \|(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)(t)\|_{H_\xi^{1,0}} &\lesssim t^\alpha \ln(t) \varepsilon^2 \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T} + t^\alpha \|\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2}\|_{X_T}, \\ \|(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)(t)\|_{H_\xi^{0,2n+1}} &\lesssim t^\alpha \ln(t) \varepsilon^2 \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T} + t^\alpha \|\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2}\|_{X_T}. \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

The $R_1 - R_2$ estimates.

For the $R_1 - R_2$ terms, the first estimate we deal with is the following

- $\|(R_1 - R_2)(t)\|_{L_\xi^\infty} \lesssim t^{-1-\delta+3\alpha} \varepsilon^2 (\ln(t) \varepsilon^2 + 1) (\|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T} + \|\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2}\|_{X_T}).$

Indeed, by definition of R we have

$$\begin{aligned} |(R_1 - R_2)(t, \xi)| &= |R(\hat{g}_1, \hat{g}_1, \hat{f}_1)(t, \xi) - R(\hat{g}_2, \hat{g}_2, \hat{f}_2)(t, \xi)| \\ &\leq \left(|R(\hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{g}_1, \hat{f}_1)| + |R(\hat{g}_2, \hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{f}_1)| + |R(\hat{g}_2, \hat{g}_2, \hat{f}_1 - \hat{f}_2)| \right) (t, \xi). \end{aligned}$$

Therefore, using Lemma 3.3.1 and the equation (3.4.2), we obtain the announced result. Then, we show that

- $\|(R_1 - R_2)(t)\|_{L_\xi^2} \lesssim t^{-1+\alpha} \varepsilon^2 (\ln(t) \varepsilon^2 + 1) (\|\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2}\|_{X_T} + \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T}).$

In order to get this estimate, we have, tanks to the relation (3.3.4), the inequality

$$\begin{aligned} \|(R_1 - R_2)(t)\|_{L_\xi^2} &\leq \|(I(\hat{g}_1, \hat{g}_1, \hat{f}_1) - I(\hat{g}_2, \hat{g}_2, \hat{f}_2))(t)\|_{L_\xi^2} \\ &\quad + t^{-1} \|(N(\hat{g}_1, \hat{g}_1, \hat{f}_1) - N(\hat{g}_2, \hat{g}_2, \hat{f}_2))(t)\|_{L_\xi^2}. \end{aligned}$$

Once again, by linearity, we remark that

$$\begin{aligned} I(\hat{g}_1, \hat{g}_1, \hat{f}_1) - I(\hat{g}_2, \hat{g}_2, \hat{f}_2) &= I(\hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{g}_1, \hat{f}_1) + I(\hat{g}_2, \hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{f}_1) + I(\hat{g}_2, \hat{g}_2, \hat{f}_1 - \hat{f}_2), \\ N(\hat{g}_1, \hat{g}_1, \hat{f}_1) - N(\hat{g}_2, \hat{g}_2, \hat{f}_2) &= N(\hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{g}_1, \hat{f}_1) + N(\hat{g}_2, \hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{f}_1) + N(\hat{g}_2, \hat{g}_2, \hat{f}_1 - \hat{f}_2). \end{aligned}$$

Here, we just show how to control one term in I , and one in N , all the other computations are the same. For I we use Lemma 3.2.3 and the equations (3.3.1) and (3.4.2),

$$\begin{aligned} \|I(\hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{g}_1, \hat{f}_1)(t)\|_{L_\xi^2} &\lesssim \|e^{it\partial_{xx}} g_1(t)\|_{L_x^\infty} \|e^{it\partial_{xx}} f_1(t)\|_{L_x^\infty} \|(g_1 - g_2)(t)\|_{L_x^2} \\ &\lesssim t^{-1} (\|\hat{g}_1\|_{L_\xi^\infty} + t^{-\beta} \|\hat{g}_1\|_{H_\xi^{1,0}}) (\|\hat{f}_1\|_{L_\xi^\infty} + t^{-\beta} \|\hat{f}_1\|_{H_\xi^{1,0}}) \|\hat{g}_1 - \hat{g}_2\|_{L_\xi^2} \\ &\lesssim t^{-1+\alpha} \varepsilon^2 (\ln(t) \varepsilon^2 \|\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2}\|_{X_T} + \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T}). \end{aligned}$$

For the N term, by equation (3.4.2) we have

$$\begin{aligned} \|N(\hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{g}_1, \hat{f}_1)(t)\|_{L_\xi^2} &= \|(\hat{g}_1 - \hat{g}_2) \overline{\hat{g}_1} \hat{f}_1(t)\|_{L_\xi^2} \\ &\lesssim \|\hat{f}_1\|_{L_\xi^\infty} \|\hat{g}_1\|_{L_\xi^\infty} \|(\hat{g}_1 - \hat{g}_2)\|_{L_\xi^2} \\ &\lesssim t^\alpha \varepsilon^2 (\ln(t) \varepsilon^2 \|\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2}\|_{X_T} + \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T}). \end{aligned}$$

Combining these results, we have the desired one. For the $H^{1,0}$ part, we want to show that

$$\bullet \quad \|\partial_\xi(R_1 - R_2)(t)\|_{L_\xi^2} \lesssim t^{-1+\alpha} \varepsilon^2 (\ln(t) \varepsilon^2 + 1) (\|\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2}\|_{X_T} + \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T}).$$

To prove this one, we write $\partial_\xi(R_1 - R_2)$ by using the equation (3.3.5), we obtain twelve terms, six terms in I , six in N . We need to couple these terms, using the same method as previously. For example, for I we have

$$I(\partial_\xi \hat{g}_1, \hat{g}_1, \hat{f}_1) - I(\partial_\xi \hat{g}_2, \hat{g}_2, \hat{f}_2) = I(\partial_\xi(\hat{g}_1 - \hat{g}_2), \hat{g}_1, \hat{f}_1) + I(\partial_\xi \hat{g}_2, \hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{f}_1) + I(\partial_\xi \hat{g}_2, \hat{g}_2, \hat{f}_1 - \hat{f}_2).$$

Thus, we obtain eighteen terms with a coupled part in each of them. Following the way of the estimation of $\|(R_1 - R_2)(t)\|_{L_\xi^2}$, and using the equations (3.3.1) and (3.4.2), we finally obtain the result. The last estimate we deal with is

$$\bullet \quad \|\xi^{2n+1}(R_1 - R_2)(t)\|_{L_\xi^2} \lesssim t^{-1+\alpha} \varepsilon^2 (\ln(t) \varepsilon^2 + 1) (\|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T} + \|\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2}\|_{X_T}).$$

This is the same estimation as $\|(R_1 - R_2)(t)\|_{L_\xi^2}$, and the computations are almost the same too. As in the previous estimate, we use the following decomposition,

$$|\xi^{2n+1}(R_1 - R_2)| \leq |\xi^{2n+1} R(\hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{g}_1, \hat{f}_1)| + |\xi^{2n+1} R(\hat{g}_2, \hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{f}_1)| + |\xi^{2n+1} R(\hat{g}_2, \hat{g}_2, \hat{f}_1 - \hat{f}_2)|.$$

Let us just focus on the first term, using the equation (3.3.4), we have

$$|\xi^{2n+1} R(\hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{g}_1, \hat{f}_1)| \leq |\xi^{2n+1} I(\hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{g}_1, \hat{f}_1)| + t^{-1} |\xi^{2n+1} N(\hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{g}_1, \hat{f}_1)|.$$

For the I term, we use a second time the equation (3.3.7) to obtain

$$\begin{aligned} & |\xi^{2n+1}I(\hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{g}_1, \hat{f}_1)| \\ & \leq |I(\xi^{2n+1}(\hat{g}_1 - \hat{g}_2), \hat{g}_1, \hat{f}_1)| + |I(\hat{g}_1 - \hat{g}_2, \xi^{2n+1}\hat{g}_1, \hat{f}_1)| + |I(\hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{g}_1, \xi^{2n+1}\hat{f}_1)|. \end{aligned}$$

Now we just do the same computations that previously. We take the L_x^2 part of the norm for the coupling part, and the other ones in L_x^∞ . For N , we simply have

$$|\xi^{2n+1}N(\hat{g}_1 - \hat{g}_2, \hat{g}_1, \hat{f}_1)| = |N(\hat{g}_1 - \hat{g}_2, \xi^{2n+1}\hat{g}_1, \hat{f}_1)|.$$

As we have the relation $|\xi^{2n+1}\hat{g}_1| = |\xi^{2n+1}\hat{w}_{g_1}|$, we have the same bound once again.

Conclusion.

Set $\psi(t) := (\Phi_1(\hat{w}_{f_1}, \hat{w}_{g_1}) - \Phi_1(\hat{w}_{f_2}, \hat{w}_{g_2}))(t)$, we remind that

$$\psi(t) = \int_1^t B_{g_1}(R_1 - R_2)(s, \xi)ds + \int_1^t R_2(B_{g_1} - B_{g_2})(s, \xi)ds.$$

Thus, we have

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\|_{L_\xi^\infty} & \leq \int_1^t \|(R_1 - R_2)(s)\|_{L_\xi^\infty}ds + \int_1^t \|R_2(s)\|_{L_\xi^\infty}\|(B_{g_1} - B_{g_2})(s)\|_{L_\xi^\infty}ds, \\ \|\psi(t)\|_{L_\xi^2} & \leq \int_1^t \|(R_1 - R_2)(s)\|_{L_\xi^2}ds + \int_1^t \|R_2(s)\|_{L_\xi^2}\|(B_{g_1} - B_{g_2})(s)\|_{L_\xi^\infty}ds, \\ \|\xi^{2n+1}\psi(t)\|_{L_\xi^2} & \leq \int_1^t \|\xi^{2n+1}(R_1 - R_2)(s)\|_{L_\xi^2}ds + \int_1^t \|\xi^{2n+1}R_2(s)\|_{L_\xi^2}\|(B_{g_1} - B_{g_2})(s)\|_{L_\xi^\infty}ds, \\ \|\partial_\xi\psi(t)\|_{L_\xi^2} & \leq \int_1^t \|\partial_\xi B_{g_1}(s)\|_{L_\xi^2}\|(R_1 - R_2)(s)\|_{L_\xi^\infty}ds + \int_1^t \|\partial_\xi(R_1 - R_2)(s)\|_{L_\xi^2}ds \\ & \quad + \int_1^t \|R_2(s)\|_{L_\xi^\infty}\|\partial_\xi(B_{g_1} - B_{g_2})(s)\|_{L_\xi^2}ds \\ & \quad + \int_1^t \|\partial_\xi R_2(s)\|_{L_\xi^2}\|(B_{g_1} - B_{g_2})(s)\|_{L_\xi^\infty}ds. \end{aligned}$$

Finally, we find, for a constant $M > 0$,

$$\|\Phi_1(\hat{w}_{f_1}, \hat{w}_{g_1}) - \Phi_1(\hat{w}_{f_2}, \hat{w}_{g_2})\|_{X_T} \leq M\varepsilon^2(1 + \ln(t)\varepsilon^2)(\|\hat{w}_{f_1} - \hat{w}_{f_2}\|_{X_T} + \|\hat{w}_{g_1} - \hat{w}_{g_2}\|_{X_T}).$$

We chose ε small enough. Thus, for T sufficiently close to 1, $M\varepsilon^2(1 + \varepsilon^2 \ln(T)) \leq \frac{1}{4}$, and we get

$$\|\Phi(\hat{w}_{f_1}, \hat{w}_{g_1}) - \Phi(\hat{w}_{f_2}, \hat{w}_{g_2})\|_E \leq \frac{1}{2}\|(\hat{w}_{f_1}, \hat{w}_{g_1}) - (\hat{w}_{f_2}, \hat{w}_{g_2})\|_E.$$

Finally, for such a T , Φ is a contraction. We can apply the fixed point theorem to get the local existence of the solutions. Let us see now of to pass from the local existence to the global one.

3.4.2 Global existence of the solution.

The key argument for the transition from the local existence to the global one is the continuity. First, we show that the map

$$t \mapsto \|\hat{w}_f(t)\|_{L_\xi^\infty} + \|t^{-\alpha}\hat{w}_f(t)\|_{H_\xi^{1,0}} + \|t^{-\alpha}\hat{w}_f(t)\|_{H_\xi^{0,2n+1}},$$

is continuous. Then we will conclude by a connectivity argument. Let us remark that, for the times $1 < t_1 < t_2 < T$, with T defined in the previous section, we have

$$\hat{w}_f(t_2) - \hat{w}_f(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} B_g(s, \xi) R(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s, \xi) ds.$$

By Lemma 3.3.1 and the estimate (3.3.1), we obtain

$$\begin{aligned} \left| \|\hat{w}_f(t_2)\|_{L_\xi^\infty} - \|\hat{w}_f(t_1)\|_{L_\xi^\infty} \right| &\leq \|\hat{w}_f(t_2) - \hat{w}_f(t_1)\|_{L_\xi^\infty} \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|R(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s)\|_{L_\xi^\infty} ds \\ &\lesssim \left| t_2^{3\alpha-\delta} - t_1^{3\alpha-\delta} \right| \xrightarrow{t_1 \rightarrow t_2} 0. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

For the L^2 part, we remark that

$$\left| t_2^{-\alpha}\hat{w}_f(t_2) - t_1^{-\alpha}\hat{w}_f(t_1) \right| \leq \left| t_2^{-\alpha} - t_1^{-\alpha} \right| |\hat{w}_f(t_2)| + t_1^{-\alpha} |\hat{w}_f(t_2) - \hat{w}_f(t_1)|.$$

With Proposition 3.2.1, we control the $\|\hat{w}_f(t_2)\|_{H_\xi^{1,0}}$ and $\|\hat{w}_f(t_2)\|_{H_\xi^{0,2n+1}}$ terms. Therefore, using this time Lemma 3.3.1 and the estimates (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3), (3.3.6) and (3.3.8), we have

$$\begin{aligned} \|\hat{w}_f(t_2) - \hat{w}_f(t_1)\|_{H_\xi^{1,0}} &\leq \int_{t_1}^{t_2} (\|R(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s)\|_{H_\xi^{1,0}} + \|R(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s)\|_{L_\xi^\infty} \|\partial_\xi B(s)\|_{L_\xi^2}) ds \\ &\lesssim |t_2^\alpha - t_1^\alpha| + \left| t_2^{4\alpha-\delta} - t_1^{4\alpha-\delta} \right| \xrightarrow{t_1 \rightarrow t_2} 0, \\ \|\hat{w}_f(t_2) - \hat{w}_f(t_1)\|_{H_\xi^{0,2n+1}} &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|R(\hat{g}, \hat{g}, \hat{f})(s)\|_{H_\xi^{0,2n+1}} ds \\ &\lesssim |t_2^\alpha - t_1^\alpha| \xrightarrow{t_1 \rightarrow t_2} 0. \end{aligned}$$

Thus, we obtain by the previous computation the continuity of the application

$$t \mapsto \|\hat{w}_f(t)\|_{L_\xi^\infty} + \|t^{-\alpha}\hat{w}_f(t)\|_{H_\xi^{1,0}} + \|t^{-\alpha}\hat{w}_f(t)\|_{H_\xi^{0,2n+1}}.$$

Finally, taking the supremum of this application on $[1, T]$, we have the continuity of the application $T \mapsto \|\hat{w}_f\|_{X_T}$. Thanks to this continuity, we define the space

$$A := \{T \geq 1, \|\hat{w}_f\|_{X_T} \leq 2\varepsilon\} \subset [1, +\infty).$$

Now, we show that $A = [1, +\infty)$. Let us remark that,

- A is non empty. Indeed, by the hypothesis of Theorem 3.1.1 and the embedding of $H^1(\mathbb{R})$ in $L^\infty(\mathbb{R})$, $1 \in A$.

- A is closed. This is due to the large inequality in the definition of A and the continuity of the application $T \mapsto \|\hat{w}_f\|_{X_T}$.
- A is open. Here we use Proposition 3.2.1, if $T \in A$, then we have:

$$\begin{aligned} \|\hat{w}_f\|_{X_T} &\leq \varepsilon + M \|\hat{w}_f\|_{X_T} \|\hat{w}_g\|_{X_T}^2 (1 + \|\hat{w}_f\|_{X_T}^4)(1 + \|\hat{w}_g\|_{X_T}^4) \\ &\leq \varepsilon + 8M\varepsilon^3(1 + 16\varepsilon^4)^2. \end{aligned}$$

Therefore, by the choice of ε in (3.4.1), $\|\hat{w}_f\|_{X_T} \leq \frac{3}{2}\varepsilon$, we can go further for T .

Finally, A is non empty, open, closed and included in the interval $[1, +\infty)$. Therefore, by connectivity, we have $A = [1, +\infty)$. Thus, we have the global existence of the solutions under the assumptions of Proposition 3.2.1. The last thing to check is that these assumptions are satisfied under the ones of Theorem 3.1.1. Fix $\varepsilon > 0$ and suppose that

$$\|u_1\|_{H_x^{1,0}} + \|u_1\|_{H_x^{0,2n+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

We want to control $\hat{w}_f^1(\xi) = \hat{f}(1, \xi) = e^{i\xi^2} \hat{u}(1, \xi)$. We have

$$\begin{aligned} \|\hat{w}_f^1(\xi)\|_{H_\xi^{1,0}} &\leq \|\hat{u}(1)\|_{L_\xi^2} + \|\xi \hat{u}(1)\|_{L_\xi^2} + \|\partial_\xi \hat{u}(1)\|_{L_\xi^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ \|\hat{w}_f^1(\xi)\|_{H_\xi^{0,2n+1}} &= \|\hat{u}(1)\|_{H_\xi^{0,2n+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\|\hat{w}_f^1(\xi)\|_{H_\xi^{1,0}} + \|\hat{w}_f^1(\xi)\|_{H_\xi^{0,2n+1}} \leq \varepsilon.$$

The hypotheses of Proposition 3.2.1 are checked, and we have the global solution for Theorem 3.1.1.

3.4.3 The decay estimate.

This estimate comes from Lemma 3.2.3. Indeed, let (u, v) be the pair of solutions of our problem (3.1.1), thus we have, for all $\beta \in (0, \frac{1}{4})$,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L_x^\infty} &= \|e^{it\partial_{xx}} f(t)\|_{L_x^\infty} \lesssim \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \|\hat{f}(t)\|_{L_\xi^\infty} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}+\beta}} \|\hat{f}(t)\|_{H_\xi^{1,0}} \\ &\lesssim \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \|\hat{w}_f\|_{L_\xi^\infty} + \frac{1}{t^{\frac{1}{2}+\beta}} \|\hat{f}(t)\|_{H_\xi^{1,0}}. \end{aligned}$$

By the definition of the X_T norm and the bound (3.3.1), we get

$$\|u(t)\|_{L_x^\infty} \lesssim t^{-\frac{1}{2}}(1 + t^{\alpha-\beta}) \|\hat{w}_f\|_{X_T} (1 + \|\hat{w}_g\|_{X_T}^2).$$

Remembering that $\alpha < \beta$, we finally use the control of the X_T norm from the previous subsection to get the desired decay of Theorem 3.1.1.

3.4.4 The long-range scattering.

All the ingredients we need to exhibit the long-range scattering are already in the equation (3.4.3),

$$\|\hat{w}_f(t_2) - \hat{w}_f(t_1)\|_{L_\xi^\infty} \lesssim |t_2^{3\alpha-\delta} - t_1^{3\alpha-\delta}|.$$

As $3\alpha - \delta < 0$, the Cauchy criterion for the existence of a limit of a function allows us to construct the application $W_f^\infty \in L_\xi^\infty(\mathbb{R})$ by

$$W_f^\infty : \xi \mapsto \lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{w}_f(t, \xi) \quad \text{in the } L^\infty \text{ sense.}$$

Let $t_1 \rightarrow +\infty$ in the previous equation, we obtain

$$\|\hat{w}_f(t) - W_f^\infty\|_{L_\xi^\infty} \lesssim t^{3\alpha-\delta}. \quad (3.4.4)$$

We still have to deal with the $H^{0,n}$ case. For that purpose, we'll use the following embedding

$$\|f\|_{L_\xi^1} \lesssim \|f\|_{L_\xi^{\frac{1}{2}}} \|xf\|_{L_\xi^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.4.5)$$

Let us prove this inequality, using Cauchy-Schwarz. Let $M > 0$,

$$\|f\|_{L_x^1} = \int_{|x|<M} 1|f| + \int_{|x|>M} x^{-1}x|f| \lesssim M^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_x^2} + M^{-\frac{1}{2}}\|xf\|_{L_x^2}.$$

Choosing $M = \|xf\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_x^2}^{-\frac{1}{2}}$, we get the inequality (3.4.5). Thereby, we have

$$\begin{aligned} \|\xi^n R\|_{L_\xi^2} &\lesssim \|R^{\frac{1}{2}}\|_{L_\xi^\infty} \|\xi^n R^{\frac{1}{2}}\|_{L_\xi^2} \\ &\lesssim \|R\|_{L_\xi^\infty}^{\frac{1}{2}} \|\xi^{2n} R\|_{L_\xi^1}^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \|R\|_{L_\xi^\infty}^{\frac{1}{2}} \|R\|_{H_\xi^{0,2n+1}}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

where we used (3.4.5) in the last inequality. Finally we have

$$\|\hat{w}_f(t_2) - \hat{w}_f(t_1)\|_{H_\xi^{0,n}} \lesssim |t_2^{\frac{4\alpha-\delta}{2}} - t_1^{\frac{4\alpha-\delta}{2}}|.$$

As $4\alpha - \delta < 0$ (see Remark 3.3.2), the Cauchy criterion for the existence of a limit of a function allows us to construct the application $W_f^n \in H_\xi^{0,n}(\mathbb{R})$ by

$$W_f^n : \xi \mapsto \lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{w}_f(t, \xi) \quad \text{in the } H^{0,n} \text{ sense.}$$

Let $t_1 \rightarrow +\infty$ in the previous equation, we obtain

$$\|\hat{w}_f(t) - W_f^n\|_{H_\xi^{0,n}} \lesssim t^{\frac{4\alpha-\delta}{2}}.$$

These inequalities are verified for all α small enough and all $0 < \delta < \frac{1}{4}$. The idea is to take the limits for $\alpha \rightarrow 0$ and $\delta \rightarrow \frac{1}{4}$. Let $\nu := \frac{1}{4} - \delta + 4\alpha \in (0, \frac{1}{4})$, we obtain the desired estimates of long-range scattering. The last thing to check is that $W_f^\infty = W_f^n$. This is a consequence of the Riesz-Fischer Theorem for the completeness of L^p . Indeed, it is proved in this theorem that if $\hat{w}_f(t_n)$ converges to W in L^p , then there exists a subsequence $\hat{w}_f(t_{\varphi(n)})$ that converges to W almost everywhere. Taking $p = 2$ and $p = \infty$, we show that $W_f^\infty = W_f^n$ almost everywhere. Thus we can define

$$W_f := W_f^\infty = W_f^n \in L_\xi^\infty \cap H^{0,n}.$$

3.4.5 The asymptotic formula.

From the previous part, we know that there exists a unique $W_f \in L_\xi^\infty(\mathbb{R})$ such that

$$\|\hat{f}(t, \cdot) \exp\left(\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^t \frac{1}{s} |\hat{v}(s, \cdot)|^2 ds\right) - W_f\|_{L_\xi^\infty} \lesssim t^{-\frac{1}{4}+\nu}.$$

By the equation (3.2.7) we have

$$u(t, x) = e^{it\partial_{xx}} f(t, x) = (2it)^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{x^2}{4t}} \hat{f}\left(\frac{x}{2t}\right) + A_f(t, x),$$

where, using the bound (3.3.1),

$$\|A_f(t)\|_{L_x^\infty} \lesssim t^{-\frac{1}{2}-\delta} \|\hat{f}\|_{H_\xi^{1,0}} \lesssim t^{-\frac{1}{2}+\alpha-\delta} \lesssim t^{-\frac{3}{4}+\nu}.$$

Thus, we obtain the following asymptotic expansion for u , for a large time t :

$$u(t, x) = \frac{1}{(2it)^{\frac{1}{2}}} \exp(i\frac{x^2}{4t}) W_f\left(\frac{x}{2t}\right) \exp\left(\frac{-i}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^t \frac{1}{\tau} |\hat{v}(\tau, \frac{x}{2t})|^2 d\tau\right) + \mathcal{O}(t^{-\frac{3}{4}+\nu}). \quad (3.4.7)$$

This is an implicit formula. Indeed we have a v term in the RHS of the equality. To deal with this term, we follow the method of Hayashi and Naumkin in [33]. Let us define

$$\gamma_g(t) := \int_1^t (|\hat{w}_g(\tau)|^2 - |\hat{w}_g(t)|^2) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (3.4.8)$$

Thus, for $1 \leq s \leq t$, we have

$$\gamma_g(t) - \gamma_g(s) = \int_s^t (|\hat{w}_g(\tau)|^2 - |\hat{w}_g(t)|^2) \frac{d\tau}{\tau} + (|\hat{w}_g(s)|^2 - |\hat{w}_g(t)|^2) \ln(s).$$

We use the bounds of Lemma 3.3.1 and the equation (3.3.1) to get

$$\left| |\hat{w}_g(\tau)|^2 - |\hat{w}_g(t)|^2 \right| \lesssim \left| |\hat{w}_g(\tau)| - |\hat{w}_g(t)| \right| \lesssim \left| \tau^{3\alpha-\delta} - t^{3\alpha-\delta} \right|.$$

By using this bound in the previous equation we obtain

$$|\gamma_g(t) - \gamma_g(s)| \lesssim \left| t^{3\alpha-\delta} - s^{3\alpha-\delta} \right| + \left| t^{3\alpha-\delta} \ln(t) - s^{3\alpha-\delta} \ln(s) \right|.$$

Therefore, by the Cauchy criterion, there exists $\Gamma_g \in L_\xi^\infty(\mathbb{R})$ defined by

$$\Gamma_g : \xi \mapsto \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_g(t, \xi) \quad \text{in } L_\xi^\infty.$$

Let $t \rightarrow +\infty$ in the previous equation. We use that $\ln(t) \lesssim t^\alpha$ to obtain

$$|\gamma_g(s) - \Gamma_g| \lesssim s^{4\alpha-\delta}. \quad (3.4.9)$$

Back to the definition of γ_g in (3.4.8), we have

$$\begin{aligned} \int_1^t |\hat{w}_g(\tau)|^2 \frac{d\tau}{\tau} &= \gamma_g(t) + |\hat{w}_g(t)|^2 \ln(t) \\ &= |W_g|^2 \ln(t) + \Gamma_g + (\gamma_g(t) - \Gamma_g) + (|\hat{w}_g(t)|^2 - |W_g|^2) \ln(t). \end{aligned}$$

Thus, using the equations (3.4.4) and (3.4.9), we obtain

$$\left\| \int_1^t |\hat{w}_g(\tau)|^2 \frac{d\tau}{\tau} - |W_g|^2 \ln(t) - \Gamma_g \right\|_{L_\xi^\infty} \lesssim t^{4\alpha-\delta} \lesssim t^{\nu-\frac{1}{4}}.$$

We combine this equation with the equation (3.4.7) to get the asymptotic formula for u for large time t . The formula for v is obtained by symmetry. This concludes the proof of Theorem 3.1.1.

Modified scattering and beating effect for a cubic coupled Schrödinger system on $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$

In this chapter, we study a coupled nonlinear Schrödinger system with small initial data in a product space. We establish a modified scattering of the solutions of this system and we construct a modified wave operator. The study of the resonant system, which provides the asymptotic dynamics, allows us to highlight a control of the Sobolev norms and interesting dynamics with the beating effect. The proof uses a recent work of Hani, Pausader, Tzvetkov and Visciglia for the modified scattering, and a recent work of Grébert, Paturel and Thomann for the study of the resonant system.

4.1 Introduction

The purpose of this paper is to study the asymptotic behavior of the following cubic defocusing coupled nonlinear Schrödinger system with small initial data:

$$\begin{cases} i\partial_t U + \Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}} U &= |V|^2 U, & (t, x, y) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \\ i\partial_t V + \Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}} V &= |U|^2 V, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

where $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ is the one dimensional torus and U, V are complex valued functions on the spatial product space $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$. We construct some solutions of this system which exhibit a modified scattering to solutions of a nonlinear resonant system. Thanks to the nonlinearity, we construct solutions which exhibit a beating effect, namely a transfer of energy between two different modes of the couple of solutions. This is a genuine nonlinear behavior.

4.1.1 Motivations and background

When dealing with small solutions of nonlinear evolution equations, there are usually two main axes of research. The first one is the linear approach. The idea is to show that for small initial data, the solutions of these equations tend to be close to solutions of the associated linear equations. The second way to analyze these equations is the nonlinear approach. This is the approach we choose in this paper. This time, the goal is to find some solutions with a nonlinear behavior, i.e a behavior that doesn't exist for the linear equation. From this point of view, we can expect a large range of results, depending on the kind of nonlinear behavior we want to highlight. First, we can expect different kinds of nonlinear behavior. For example, we can expect some growth of the Sobolev norms, or even a blow-up of the solutions. We can also expect some interaction between the modes and frequencies of the solutions (e.g. some exchange of energy), existence of solitons... Then, nonlinear effects can appear on different time scales. This can be finite time behavior, large but finite time behavior depending of the size of the initial data, or even infinite time behavior. Finally, we can make a new dichotomy with the way the solutions are enjoying the behavior: are the solutions presenting themselves the nonlinear behavior, or are they scattering to solutions of other equations which present this behavior ?

From the point of view of the search of nonlinear behaviors, the cubic nonlinear Schrödinger equation is a perfect candidate due to this cubic nonlinearity that offers some resonant opportunities. Physically, the cubic nonlinear Schrödinger equation

$$i\partial_t U + \frac{1}{2}\Delta U = \lambda|U|^2U,$$

with $\lambda \in \mathbb{R}$, appears in a large range of phenomena, like for example, the propagation of light in nonlinear optical fibers, the Bose-Einstein condensates theory, the gravity waves, the water waves, the plasma oscillations in magnetohydrodynamics... This duality between the physical and mathematical interest makes this equation one of the most studied and one of the most important models in nonlinear science. The kind of nonlinear behavior we can obtain depends on the geometry of the spatial domain. Let us present some of these nonlinear results.

For Euclidean spaces, we can show that the solutions exist globally, are decreasing and exhibit some kind of scattering to free solutions. We refer to Kato and Pusateri in [37] for the critical case of the space \mathbb{R} (in this case the scattering result is modified), and to Hayashi and Naumkin in [33] for the more general case of the Euclidean space \mathbb{R}^n . Both results are extensions of initial works of Ozawa for the dimension 1 ([44]), and Ginibre and Ozawa for the higher dimensions ([17]).

For hyperbolic spaces, they are also a lot of scattering results for the cubic Schrödinger equation. For example, Banica, Carles and Staffilani show in [3] that we have a scattering behavior and a wave operator in $H^1(\mathbb{H}^3)$. Higher dimension cases are treated, for smaller nonlinearities and always in H^1 , by Banica, Carles and Duyckaerts with radial assumptions ([2]), or by Ionescu, Pausader and Staffilani without radial assumptions ([34]).

For compact domains, in the case of the torus, we can use the resonances between the modes of the solutions to exhibit some growth of the Sobolev norms (see Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka and Tao in the case of the torus \mathbb{T}^2 in [13]). We can also use

these resonances to see that the equation is strongly illposed on the Sobolev spaces H^s (with $s < 0$), in the torus \mathbb{T}^d for $d \geq 2$ (see Carles and Kappeler in [9]); or to see the equation is instable with respect to the initial value (see Carles, Dumas and Sparber in [7]).

Finally, for product spaces, we can expect to mix some of these geometric domains to obtain two different kinds of nonlinearity at the same time. The initial idea of Tzvetkov and Visciglia in [50] is to study the equation on the space $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$, with \mathcal{M} a compact Riemannian manifold. They show that the solutions exist globally and scatter to free solutions for small initial data. The two authors extend their result to the large data case with the compact manifold $\mathcal{M} = \mathbb{T}$ in [51]. They obtain again a global existence and a scattering behavior. As in the Euclidean spaces case, the problem is here that solutions of the cubic Schrödinger equation scatter to free solutions, which prevents from all the compact-kind nonlinear behavior such as a growth of the norms.

From the point of view of the product space, Hani, Pausader, Tzvetkov and Visciglia in [27] avoid this problem by considering the space $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$, for $1 \leq d \leq 4$. The idea is to keep a direction of diffusion with \mathbb{R} to enable scattering results and to add the compact manifold \mathbb{T}^d to obtain interesting nonlinear behaviors. The result here is very interesting because they show that, for small initial data, the solutions of the cubic Schrödinger equation scatter to solutions of another equation called the resonant equation, instead of free solutions. They also obtain a modified wave operator from this resonant equation to the cubic Schrödinger equation. As a consequence, we can expect a whole new range of nonlinearity mixing the scattering theory from the Euclidean part, and all the kind of nonlinearity we can highlight for the resonant equation. In particular, they show how to transfer solutions of a reduced resonant equation on the torus \mathbb{T}^d to solutions of the resonant equation. Therefore, we can expect all 'torus-kind' of nonlinearity (thanks to the resonances) for the resonant equation, as a growth of the Sobolev norms, and thus find solutions to the the cubic Schrödinger equation that scatter to these solutions.

An interesting feature of this method employed by Hani, Pausader, Tzvetkov and Visciglia, is the fact that it is adaptable. From example, adding a convolution potential in order to kill the resonances, Grébert, Paturel and Thomann show in [21] that the modified equation admits modified scattering and a wave operator too, but they show that all the Sobolev norms of their solutions tend to be constant. Another example is given by Hani and Thomann in [28]. They add a harmonic trapping and obtain once again a modified scattering result and the existence of the modified wave operator. The important fact here is that the resonant dynamics allow them to justify and extend some physical approximations in the theory of Bose-Einstein condensates in cigar-shaped traps. Finally, a last example is given by Haiyan Xu in [54]. By modifying the equation, she establishes a scattering theory between the cubic Schrödinger equation on the cylinder $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ and the Szegő equation. Thanks to the study of the Szegő equation (see for example the article [16] of Gérard and Grellier), this allows her to construct global unbounded solutions to this modified cubic Schrödinger equation.

As in the three previous examples, the goal of this paper is to transport the method of Hani, Pausader, Tzvetkov and Visciglia to another problem, the study of the cubic coupled Schrödinger system. Indeed, the cubic coupled Schrödinger systems present some interesting dynamical properties we can present now.

From the mathematical point of view, the study of systems offers more possibilities than a single equation. However, the first step is often to check that we can extend the results of the equation case study to the system case. In that optic, we can see from a general point of view on evolution systems that the presence of a direction of diffusion seems to allow scattering. For example, for the Klein Gordon equation on product spaces, Hari and Visciglia in [29] obtain scattering of the solutions to free solutions for small initial data. In the case of Schrödinger systems, Cassano and Tarulli show in [10] a scattering result and the existence of the wave operator, but this study doesn't allow to look at the cubic case when there is just one Euclidean space direction. Let us now deal with cubic coupled Schrödinger systems.

As the cubic Schrödinger equation, the cubic coupled Schrödinger system presents at the same time a physical and a mathematical interest. Physically, the cubic coupled Schrödinger system occurs in nonlinear optics while, for example, looking two orthogonally polarized components traveling at different speeds because of different refractive indices associated with them. We can also study the coupling between two different optical waveguides, that can be provided by a dual-core single-mode fiber. Another example is given by two distinct pulses with different carrier frequencies but with the same polarization. For more precisions on these examples, we can refer to the book [1] of G. Agrawal and R. Boyd on nonlinear optics.

Of course, the kind of result we obtain for systems depends on the geometry of the space domain. For Euclidean spaces, the role of the coupling is not predominant. Basically, we obtain same kind of results as in the one equation case. As in the Hayashi-Naumkin article [33], the Euclidean direction can provide some decrease of the L^∞ norms. For example, Donghyun Kim studies in [38] a cubic coupled Schrödinger system with different mass. He obtains the global existence and a decay of the solutions. Another example is given by Li and Sunagawa in [41], where the authors study the decay rate of the L^∞ norms for a large range of cubic nonlinearities, including the derivative nonlinearities. The diffusion direction allows extension of the results of Kato and Pusateri ([37]) in the case of a cubic coupled Schrödinger system on \mathbb{R} , with global existence, a scattering result and a decreasing of the solutions (see [52]). For bigger Euclidean spaces, we can cite the recent work of Farah and Pastor who show global existence and scattering in $H^1(\mathbb{R}^3)$ in [15].

For the torus case, the study of systems allows to create more nonlinear behaviors by creating mixing between the different modes of the solutions. This is the main interest of the study of the cubic coupled Schrödinger systems. For example, Grébert, Patureau and Thomann in [20] highlight a beating effect for cubic coupled Schrödinger systems on \mathbb{T} . This beating effect consists in an exchange of energy between different modes of the solution. This surprising behavior can be observed by simple experiences, for example, with two identical clothespins on a wire. In this experience, with a small perturbation, we can observe a beating effect between the two clothespins (see the video [18], in French). The existence of the beating effect for the cubic coupled Schrödinger systems, based on a Birkhoff normal form decomposition of the Hamiltonian of the system, is thus proved for large but finite time. This kind of nonlinear behavior is made possible by the mixing effect mentioned above.

The goal of this article is to obtain a beating effect behavior for the cubic coupled Schrödinger systems in infinite time. For this purpose, two main solutions may be envi-

sioned: the KAM theory or the use of scattering results.

Concerning the KAM theory, an example is given by the study of the quintic Schrödinger equation on the torus. First, Grébert and Thomann obtained for this equation a beating effect for finite time in [22]. Thanks to a KAM theorem, Haus and Procesi then constructed quasi-periodic solutions that exchange energy, through the beating effect, over an infinite time ([31]). The advantage of this method is the fact that it allows to stay on the torus in order to obtain the infinite time behavior, when we need for the scattering method to add a dispersive direction.

In this paper, we choose the second method and thus consider the spatial domain $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$. The goal is to use the diffusion direction to get a modified scattering result and construct a modified wave operator by using the method of Hani, Pausader, Tzvetkov and Visciglia; and to use the compact component \mathbb{T} to obtain interesting dynamics such as the beating effect of Grébert, Patrel and Thomann. By mixing these two approaches, we obtain a couple of solutions of our system (1.0.1) that scatters to a solution of a resonant system that provides a beating effect. Moreover, we show that the construction of the modified scattering implies some dynamical consequences, such as the control of the Sobolev norms.

4.1.2 The results

In this section, we present the main theorems of the paper. In the following results, we denote by $\mathcal{F}H(\xi, p) = \hat{H}(\xi, p) = \hat{H}_p(\xi)$ the Fourier transform of $H : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ at the point $(\xi, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. We recall that we study the system

$$\begin{cases} i\partial_t U + \Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}} U &= |V|^2 U, & (t, x, y) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \\ i\partial_t V + \Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}} V &= |U|^2 V. \end{cases}$$

Due to the approach of Hani, Pausader, Tzvetkov and Visciglia in [27], we want to make a link between the behavior of the system (4.1.1) and a resonant system we define here:

$$\begin{cases} i\partial_\tau W_U(\tau) = \mathcal{R}[W_V(\tau), W_V(\tau), W_U(\tau)], \\ i\partial_\tau W_V(\tau) = \mathcal{R}[W_U(\tau), W_U(\tau), W_V(\tau)], \end{cases} \quad (4.1.2)$$

with

$$\mathcal{FR}[F, G, H](\xi, p) = \sum_{\substack{p, q, r, s \in \mathbb{Z} \\ p - q + r - s = 0 \\ p^2 - q^2 + r^2 - s^2 = 0}} \hat{F}(\xi, q) \overline{\hat{G}(\xi, r)} \hat{H}(\xi, s).$$

First, in order to make a link between these two systems, we state two theorems (about modified scattering and the construction of a modified wave operator) which are extensions of the results of Hani, Pausader, Tzvetkov and Visciglia in [27] to our coupled system case. Then, we use these theorems to highlight a control of the Sobolev norms, and a beating effect of the solutions of the system (4.1.1) with the method of Grébert, Patrel and Thomann in [20]. In the four theorems, S^+ is a strong $L^2_{x,y}$ based Banach space, introduced in Subsection 4.2.1, which contains the Schwartz functions. Moreover, $N \geq 12$ is an integer.

The modified scattering and the wave operator

We present here the modified scattering result and the existence of the modified wave operator, that we obtain with the strategy of [27]. First, the following theorem show that solutions of the initial system (4.1.1) scatter to solutions of the resonant system (4.1.2).

Theorem 4.1.1. *There exists $\varepsilon > 0$ such that if $U_0, V_0 \in S^+$ satisfies*

$$\|U_0\|_{S^+} + \|V_0\|_{S^+} \leq \varepsilon,$$

and if $(U(t), V(t))$ solves the system (4.1.1) with initial data (U_0, V_0) , then the couple of solutions $(U, V) \in \mathcal{C}([0, +\infty) : H^N) \times \mathcal{C}([0, +\infty) : H^N)$ exists globally and exhibits modified scattering to its resonant dynamics (4.1.2) in the following sense: there exists $(W_{U,0}, W_{V,0})$ such that if $(W_U(t), W_V(t))$ is the solution of (4.1.2) with initial data $(W_{U,0}, W_{V,0})$, then

$$\begin{cases} \|U(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} W_U(\pi \ln(t))\|_{H^N(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} & \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow +\infty, \\ \|V(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} W_V(\pi \ln(t))\|_{H^N(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} & \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Furthermore, we have the following decay estimate

$$\begin{cases} \|U(t)\|_{L_x^\infty H_y^1} & \lesssim (1 + |t|)^{-\frac{1}{2}}, \\ \|V(t)\|_{L_x^\infty H_y^1} & \lesssim (1 + |t|)^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

After the existence of a scattering result, the natural question is to look for a wave operator. Indeed, if we know that each couple of solutions of the system (4.1.1) scatters to a couple of solutions of the resonant system (4.1.2), we want to know if all the couples of solutions of the resonant system (4.1.2) are limits of couples of solutions of the initial system. The answer is given by the following theorem:

Theorem 4.1.2. *There exists $\varepsilon > 0$ such that if $W_{U,0}, W_{V,0} \in S^+$ satisfies*

$$\|W_{U,0}\|_{S^+} + \|W_{V,0}\|_{S^+} \leq \varepsilon,$$

and if $(W_U(t), W_V(t))$ solves the resonant system (4.1.2) with initial data $(W_{U,0}, W_{V,0})$, then there exists a couple $(U, V) \in \mathcal{C}([0, +\infty) : H^N) \times \mathcal{C}([0, +\infty) : H^N)$ solution of (4.1.1) such that

$$\begin{cases} \|U(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} W_U(\pi \ln(t))\|_{H^N(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} & \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow +\infty, \\ \|V(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} W_V(\pi \ln(t))\|_{H^N(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} & \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

The aim now is to use these two theorems to obtain some dynamical consequences for the initial system (4.1.1).

The control of the Sobolev norms

The first dynamical consequence we obtain is the control of all the Sobolev norms of the couples of solutions. Using the modified scattering operator of Theorem 4.1.1, we have the following theorem:

Theorem 4.1.3. *There exists $\varepsilon > 0$ such that if $U_0, V_0 \in S^+$ satisfies*

$$\|U_0\|_{S^+} + \|V_0\|_{S^+} \leq \varepsilon,$$

and if $(U(t), V(t))$ solves the system (4.1.1) with initial data (U_0, V_0) , then the couple of solutions $(U, V) \in \mathcal{C}([0, +\infty) : H^N) \times \mathcal{C}([0, +\infty) : H^N)$ exists globally and, for all $s \in \mathbb{R}$, there exists a constant $c \geq 0$ such that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\|U(t)\|_{H_{x,y}^s} + \|V(t)\|_{H_{x,y}^s} \right) = c. \quad (4.1.3)$$

The beating effect

Thanks to the construction of the modified wave operator in Theorem 4.1.2, the idea is to find some interesting nonlinear behavior of the resonant system (4.1.2) in order to transfer this behavior to the initial system. As a consequence, we follow the strategy of [20] to construct couples of solutions of the initial system (4.1.1) which scatter to beating effect solutions of the resonant system (4.1.2):

Theorem 4.1.4. *Let $I \subset \mathbb{R}$ be a bounded open interval, (p, q) a couple of different integers and $0 < \gamma < \frac{1}{2}$. For $\varepsilon = \varepsilon(p, q, I) > 0$ small enough, there exists:*

- *a constant $0 < T_\gamma \lesssim |\ln(\gamma)|$ and a $2T_\gamma$ -periodic function $K_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ such that*

$$K_\gamma(0) = \gamma, \quad K_\gamma(T_\gamma) = 1 - \gamma;$$

- *a couple of solutions (W_U, W_V) of the resonant system (4.1.2) which exhibits a beating effect in the following sense:*

$$\begin{cases} \hat{W}_U(t, \xi, y) = \mathcal{F}(W_U)(t, \xi, p)e^{ipy} + \mathcal{F}(W_U)(t, \xi, q)e^{iqy}, \\ \hat{W}_V(t, \xi, y) = \mathcal{F}(W_V)(t, \xi, p)e^{ipy} + \mathcal{F}(W_V)(t, \xi, q)e^{iqy}, \end{cases}$$

and $\forall \xi \in I$,

$$\begin{cases} |\hat{W}_V(t, \xi, p)|^2 = |\hat{W}_U(t, \xi, q)|^2 = \varepsilon^2 K_\gamma(\varepsilon^2 t), \\ |\hat{W}_U(t, \xi, p)|^2 = |\hat{W}_V(t, \xi, q)|^2 = \varepsilon^2 (1 - K_\gamma(\varepsilon^2 t)); \end{cases}$$

- *a couple of solutions (U, V) of the initial system (1.0.1) which exhibits modified scattering to this couple (W_U, W_V) in the following sense:*

$$\begin{cases} \|U(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} W_U(\pi \ln(t))\|_{H^N(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \rightarrow 0 & \text{as } t \rightarrow +\infty, \\ \|V(t) - e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} W_V(\pi \ln(t))\|_{H^N(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} \rightarrow 0 & \text{as } t \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

With this theorem, we see the importance of both parts of the product space. On the one hand, the bounded component allows us to construct couple of solutions with very nonlinear behavior such as this beating effect (see [20]). On the other hand, the Euclidean component gives an infinite time behavior (see [52]). Therefore, thanks to the product space, we have here an asymptotic convergence to the beating effect, which is a new result. The counterpart of this construction is the fact that this behavior is local in the Euclidean coordinate.

4.1.3 Overview of proof

The modified scattering and the wave operator

According to previous results in scattering theory for Schrödinger equations and systems (see examples given in [3],[10],[21],[27],[28], [29],[33],[37],[50],[51],[52],[54]...), it is relevant to introduce the profiles (F, G) of the solutions (U, V) , which are the backwards linear evolutions of solutions to the nonlinear equations:

$$F(t, x, y) := e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} U(t, x, y), \quad G(t, x, y) := e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} V(t, x, y).$$

The system described by the profiles looks like

$$\begin{cases} i\partial_t F(t) &= \mathcal{N}^t[G(t), G(t), F(t)], \\ i\partial_t G(t) &= \mathcal{N}^t[F(t), F(t), G(t)]. \end{cases}$$

To isolate a resonant system, the idea is to work on the structure of the nonlinearity \mathcal{N}^t . According to a stationary phase intuition, we decompose the nonlinearity as

$$\mathcal{N}^t = \frac{\pi}{t} \mathcal{R} + \mathcal{E}.$$

The integrable part \mathcal{E} enjoys a fast decrease. The idea is to show that it doesn't play a role in the asymptotic dynamics of F and G . Thus, the system described by \mathcal{R} is our resonant system, the system which contains all the asymptotically dynamics. The goal is thus to find interesting dynamics such as the beating effect for this resonant system. For that purpose, we construct a new system, the reduced resonant system, which is obtained from the resonant system by deleting the Euclidean variable. This reduced resonant system lives on the torus \mathbb{T} , where we have the beating effect thanks to [20]. Therefore, we have to show how to transfer solutions of the reduced resonant system to solutions of the resonant system.

Thanks to the fast decrease of the \mathcal{E} part of the nonlinearity, fixed point arguments allow us to prove the existence of the modified scattering and modified wave operators.

The dynamical consequences

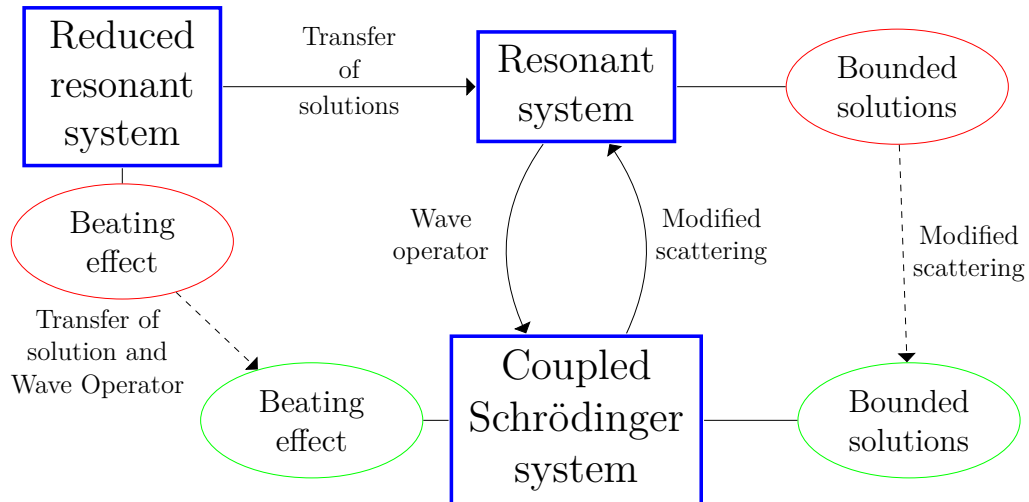
Both theorems (the modified scattering and the modified wave operator) imply dynamical consequences for the initial system (4.1.1).

The modified scattering theorem shows that all solutions of the initial system (4.1.1) scatter to solutions of the resonant system (4.1.2). Thus, proving that all the solutions of the resonant system (4.1.2) are bounded in Sobolev spaces, we obtain that all the solutions of the initial system (4.1.1) are also bounded in Sobolev spaces. This prevents any kind of growth of Sobolev norms for our cubic coupled Schrödinger system on $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$.

The modified wave operator theorem shows that for all solution of the resonant system (4.1.2), there exists a solution of the initial system (4.1.1) which scatters to this resonant system solution. Thanks to this operator, we can transfer the beating effect from the resonant system to the initial system and thus obtain solutions of the system (4.1.1) which scatter to beating effect solutions of the resonant system.

This strategy is summarized in the following sketch:

Figure 4.1 – Sketch of the strategy



4.1.4 Plan of the paper

In Section 4.2, we introduce the different norms and notations we need and state some preliminary estimates. In particular, we state a transfer principle in Subsection 4.2.4 which is predominant for the study of the nonlinearity. In Section 4.3, we introduce a decomposition of the nonlinearity and we study the behavior of the different parts of this decomposition. The resonant system is introduced and studied in Section 4.4. In particular, we construct here the solutions which provide some beating effect. Finally, we prove Theorem 4.1.1 about modified scattering in Section 4.5, and Theorem 4.1.2 about the modified wave operator in Section 4.6.

4.2 Preliminaries

In this section, we first introduce in Subsection 4.2.1 all the notations and norms we use in the paper. Then, in Subsection 4.2.2, we introduce the profiles and the nonlinearity associated to the profile system. Subsection 4.2.3 gives some preliminary estimates that we use in the following parts of the paper. In Subsection 4.2.4, we prove a crucial transfer principle that allow to pass from L^2 bound estimates to other L^2 -based norm estimates. Finally, we present a first estimate for the nonlinearity in Subsection 4.2.5 which implies the local existence of the solutions to the cubic coupled Schrödinger system.

4.2.1 Norms and notations

Some notations

We mainly follow the notations of [27].

Concerning standard notations, we use the notation $f \lesssim g$ to denote that there exists a constant $c > 0$ such that $f \leq cg$. This notation allows us to avoid dealing with all the constants in the different inequalities. We also use the usual notation $\langle p \rangle := \sqrt{1 + p^2}$.

Most of the time, we use the distinction between lower case letters and capitalized letters to specify on which spatial domain the functions are defined. On the one hand, we use lower case letters to denote functions of the Euclidean variable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ or sequences $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. On the other hand, we use capitalized letters to denote functions on the product space $F : \mathbb{R} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$. Exceptions are given by Littlewood-Paley operators and dyadic numbers which are capitalized.

We define the spatial Fourier transform in Schwartz space, for $\varphi \in S(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, by

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi, p) = \hat{\varphi}_p(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}} e^{-ix\xi} e^{-iyp} \varphi(x, y) dx dy.$$

We see with this definition that we use the notation $\hat{f}(\xi)$ for the Fourier transform of a function defined on \mathbb{R} , and the notation a_p for the Fourier transform of a function defined on the torus \mathbb{T} . One of the interest of this Fourier transform convention is that there is no π -coefficient for the inverse Fourier transform.

As mentioned in the motivations, it seems relevant to introduce the profiles (F, G) of a solution (U, V) , defined by

$$F(t, x, y) := e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} U(t, x, y) \quad G(t, x, y) := e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} V(t, x, y). \quad (4.2.1)$$

As we work with small initial data, we can expect the nonlinearity to stay small, and thus the solutions of the system (4.1.1) to stay close to their profiles which are the solutions of the linear system.

For the Littlewood-Paley theory approach, we introduce the full frequency space Littlewood-Paley projectors P defined by

$$(\mathcal{F}P_{\leq N}F)(\xi, p) := \varphi\left(\frac{\xi}{N}\right)\varphi\left(\frac{p}{N}\right)(\mathcal{F}F)(\xi, p),$$

where N is a dyadic number, and the function $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ satisfy $\varphi(x) = 1$ when $|x| \leq 1$, and $\varphi(x) = 0$ when $|x| \geq 2$. The function φ localizes near the origin, in order to obtain a function which localizes near a given frequency, we also define

$$\phi(x) := \varphi(x) - \varphi(2x).$$

From these Littlewood-Paley projectors, we also define the projectors

$$P_N = P_{\leq N} - P_{\leq \frac{N}{2}}, \quad P_{\geq N} = 1 - P_{\leq \frac{N}{2}}.$$

Therefore, given a function F , we are able to separate the low and the high frequencies with respect to a dyadic number N by writing

$$F = P_{\leq N}F + P_{\geq 2N}F.$$

In order to localize only in the Euclidean variable, we introduce the partial Littlewood-Paley projectors Q defined by

$$(\mathcal{F}Q_{\leq N}F)(\xi, p) := \varphi\left(\frac{\xi}{N}\right)(\mathcal{F}F)(\xi, p).$$

We also define Q_N and $Q_{\geq N}$ by the same way.

Moreover, after these space frequency localizations, we can look at time localization. For that purpose, we introduce the function $q_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, for $T \gtrsim 1$, which satisfy

$$0 \leq q_T(s) \leq 1, \quad q_T(s) = 0 \quad \text{if} \quad |s| \leq \frac{T}{4} \quad \text{or} \quad |s| \geq T, \quad \int_{\mathbb{R}} |q'_T(t)| dt \lesssim 1. \quad (4.2.2)$$

Concerning the frequency sets we use here, we first introduce the momentum level set

$$\mathcal{M} := \{(p, q, r, s) \in \mathbb{Z}^4 : m(p, q, r, s) := p - q + r - s = 0\}.$$

Thanks to this set, we define the resonant level sets by

$$\Gamma_\omega := \{(p, q, r, s) \in \mathcal{M} : \omega(p, q, r, s) := p^2 - q^2 + r^2 - s^2 = \omega\}.$$

In particular, the resonant level set associated to our resonant system is the set Γ_0 . We show in Remark 4.4.3 that

$$(p, q, r, s) \in \Gamma_0 \quad \text{if and only if} \quad \{p, r\} = \{q, s\}.$$

Finally, for the constants used in the paper, we fix the small parameter $\delta \leq 10^{-3}$ and the integer $N \geq 12$ for the definitions of the norms we present just below.

The norms

First, for the sequences $a = (a_p)_{p \in \mathbb{Z}}$, we defined the associated Sobolev norm by

$$\|a\|_{h_p^s}^2 := \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1 + p^2)^s |a_p|^2.$$

Then, for the functions, we use mainly three time-independent norms. The first one is a weak norm, Z , defined by

$$\|F\|_Z^2 := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} (1 + \xi^2)^2 \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1 + p^2) |\hat{F}_p(\xi)|^2. \quad (4.2.3)$$

The two others are two strong norms S and S^+ defined by

$$\|F\|_S := \|F\|_{H_{x,y}^N} + \|xF\|_{L_{x,y}^2}, \quad \|F\|_{S^+} := \|F\|_S + \|(1 - \partial_{xx})^4 F\|_S + \|xF\|_S. \quad (4.2.4)$$

The subscripted letters x, y and p in the definitions of the norms indicate the variable concerned by the integration, and thus the canonical integration domain associated (\mathbb{R} for the variables x, y and ξ ; and \mathbb{Z} for the variable p). We prove in Subsection 4.2.3 the following hierarchy between the norms:

$$\|F\|_{H_{x,y}^1} \lesssim \|F\|_Z \lesssim \|F\|_{L_{x,y}^2}^{\frac{1}{4}} \|F\|_S^{\frac{3}{4}} \lesssim \|F\|_S \lesssim \|F\|_{S^+}.$$

The important information about the choice of the Z norm is the fact that this norm is conserved by the solutions of the resonant system (4.1.2). We also remark that the S^+ norm is a stronger norm than the S norm, but only in x .

For the time dependent norms, we introduce the norms X_T and X_T^+ defined by

$$\|F\|_{X_T} := \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\|F(t)\|_Z + (1 + |t|)^{-\delta} \|F(t)\|_S + (1 + |t|)^{1-3\delta} \|\partial_t F(t)\|_S \right), \quad (4.2.5)$$

$$\|F\|_{X_T^+} := \|F\|_{X_T} + \sup_{0 \leq t \leq T} \left((1 + |t|)^{-5\delta} \|F(t)\|_{S^+} + (1 + |t|)^{1-7\delta} \|\partial_t F(t)\|_{S^+} \right). \quad (4.2.6)$$

These are the norm we use to construct a completed space which will allow the fixed point arguments we use to prove the modified scattering and the modified wave operator.

4.2.2 Introduction of the profiles

By writing the system (4.1.1) with the profiles we get

$$\begin{cases} i\partial_t F(t) &= e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} \left(e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} G(t) e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} \overline{G(t)} e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} F(t) \right) = \mathcal{N}^t[G(t), G(t), F(t)], \\ i\partial_t G(t) &= e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} \left(e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} F(t) e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} \overline{F(t)} e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} G(t) \right) = \mathcal{N}^t[F(t), F(t), G(t)], \end{cases}$$

where

$$\mathcal{N}^t[F(t), G(t), H(t)] := e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} \left(e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} F e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} \overline{G} e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} H \right).$$

Let us compute the Fourier transform of $\mathcal{N}^t[F(t), G(t), H(t)]$. We first remark that, taking the Fourier transform with respect to the y variable, we get for F

$$e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} F(t, x, y) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} e^{iqy} e^{-itq^2} \left(e^{it\partial_{xx}} F_q(t, x) \right).$$

Thus, by taking this expression for F, G and H , we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{FN}^t[F, G, H](\xi, p) &= \frac{e^{it\xi^2}}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}} e^{-ix\xi} \sum_{q, r, s \in \mathbb{Z}} e^{-im(p, q, r, s)y} e^{it\omega(p, q, r, s)} \left(e^{it\partial_{xx}} F_q e^{-it\partial_{xx}} \overline{G_r} e^{it\partial_{xx}} H_s \right) (x) dx dy \\ &= \frac{e^{it\xi^2}}{2\pi} \sum_{(p, q, r, s) \in \mathcal{M}} e^{it\omega(p, q, r, s)} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \left(e^{it\partial_{xx}} F_q e^{-it\partial_{xx}} \overline{G_r} e^{it\partial_{xx}} H_s \right) (x) dx \\ &= \sum_{(p, q, r, s) \in \mathcal{M}} e^{it\omega(p, q, r, s)} \mathcal{I}^t[\widehat{F_q}, \widehat{G_r}, H_s](\xi), \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

where

$$\mathcal{I}^t[F_q, G_r, H_s](x) := e^{-it\partial_{xx}} \left(e^{it\partial_{xx}} F_q e^{-it\partial_{xx}} \overline{G_r} e^{it\partial_{xx}} H_s \right) (x). \quad (4.2.8)$$

We compute $\mathcal{I}^t[\widehat{F_q}, \widehat{G_r}, H_s]$ using the properties of the Fourier transform, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^t[\widehat{F_q}, \widehat{G_r}, H_s](\xi) &= e^{it\xi^2} \left(e^{it\partial_{xx}} F_q e^{-it\partial_{xx}} \overline{G_r} e^{it\partial_{xx}} H_s \right) (\xi) \\ &= e^{it\xi^2} \int_{\mathbb{R}^2} (\widehat{e^{it\partial_{xx}} F_q})(\xi - a - b) (\widehat{e^{-it\partial_{xx}} \overline{G_r}})(a) (\widehat{e^{it\partial_{xx}} H_s})(b) da db \\ &= e^{it\xi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{it(b^2 - a^2 - (\xi - a - b)^2)} \widehat{F}_q(\xi - a - b) \widehat{G}_r(a) \widehat{H}_s(b) da db, \end{aligned}$$

we now use the changes of variable $\eta = a + b$ and $\kappa = \xi - a$ to get

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} \widehat{F}_q(\xi - \eta) \widehat{G}_r(\xi - \eta - \kappa) \widehat{H}_s(\xi - \kappa) d\eta d\kappa.$$

Thus, back to \mathcal{N}^t , we have

$$\mathcal{FN}^t[F, G, H](\xi, p) = \sum_{(p, q, r, s) \in \mathcal{M}} e^{it\omega(p, q, r, s)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} \widehat{F}_q(\xi - \eta) \widehat{G}_r(\xi - \eta - \kappa) \widehat{H}_s(\xi - \kappa) d\eta d\kappa.$$

From this equation, by a formal stationary phase intuition, we define the resonant part of the nonlinearity \mathcal{N}^t by

$$\mathcal{FR}[F, G, H](\xi, p) = \sum_{(p, q, r, s) \in \Gamma_0} \widehat{F}_q(\xi) \widehat{G}_r(\xi) \widehat{H}_s(\xi). \quad (4.2.9)$$

In the next section, Theorem 4.3.1 ensures that this is a wise choice.

4.2.3 Preliminary results

In the following lemma, we state some bounds we are going to use through this article.

Lemma 4.2.1. *We use the following bounds.*

i) *For the Euclidean variable, we have*

$$\forall \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \quad \|f\|_{L_x^1} \lesssim \|f\|_{L_x^2}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|x^\alpha f\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2\alpha}}. \quad (4.2.10)$$

ii) *We also use the well-known following dispersive bound for Schrödinger equation on \mathbb{R} ,*

$$\|e^{it\partial_{xx}} f\|_{L_x^\infty} \lesssim |t|^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L_x^1}. \quad (4.2.11)$$

iii) *For the periodic variable, we use that*

$$\left\| \sum_{(p,q,r,s) \in \mathcal{M}} c_q^1 c_r^2 c_s^3 \right\|_{\ell_p^2} \lesssim \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|c^{\sigma(1)}\|_{\ell_p^2} \|c^{\sigma(2)}\|_{\ell_p^1} \|c^{\sigma(3)}\|_{\ell_p^1}. \quad (4.2.12)$$

iv) *Concerning the norms, we have the hierarchy*

$$\|F\|_{H_{x,y}^1} \lesssim \|F\|_Z \lesssim \|F\|_{L_{x,y}^2}^{\frac{1}{4}} \|F\|_S^{\frac{3}{4}} \lesssim \|F\|_S \lesssim \|F\|_{S^+}. \quad (4.2.13)$$

Proof. i) Let us prove this inequality, using Cauchy-Schwarz. Let $M > 0$,

$$\|f\|_{L_x^1} = \int_{|x| < M} |f| + \int_{|x| > M} |x|^{-\alpha} |x|^\alpha |f| \lesssim M^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_x^2} + M^{\frac{1}{2}-\alpha} \|x^\alpha f\|_{L_x^2}.$$

Choosing $M = \left(\frac{\|x^\alpha f\|_{L_x^2}}{\|f\|_{L_x^2}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, we get the inequality.

ii) The idea is to write $e^{it\partial_{xx}} f$ as an integral with a kernel. For

$$K_t(x) = (8i\pi^2 t)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4it}},$$

we have $e^{it\partial_{xx}} f = K_t * f$. Thus, by the Young inequality, we obtain

$$\|e^{it\partial_{xx}} f\|_{L_x^\infty} \leq \|K_t\|_{L_x^\infty} \|f\|_{L_x^1} \lesssim |t|^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L_x^1}.$$

iii) For this bound, we also use the Young inequality. We first remark that

$$\sum_{(p,q,r,s) \in \mathcal{M}} c_q^1 c_r^2 c_s^3 = \sum_{p,r,s \in \mathbb{Z}} c_{p+r-s}^1 c_r^2 c_s^3.$$

Moreover, we see that

$$\sum_{r,s \in \mathbb{Z}} c_{p+r-s}^1 c_r^2 c_s^3 = (c^1 * c^2 * c^3)_p$$

Thus, $\left\| \sum_{(p,q,r,s) \in \mathcal{M}} c_q^1 c_r^2 c_s^3 \right\|_{\ell_p^2} = \|c^1 * c^2 * c^3\|_{\ell_p^2}$, and we conclude by the Young inequality for the convolution.

iv) The two last inequalities are obvious, let us focus on the two first ones. For the first inequality, we remark that

$$\begin{aligned} \|F\|_{H_{x,y}^1}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1+p^2)(1+\xi^2) |\hat{F}_p(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} (1+\xi^2)^2 \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1+p^2) |\hat{F}_p(\xi)|^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+\xi^2)} d\xi \\ &\lesssim \|F\|_Z^2. \end{aligned}$$

The second inequality is a Gagliardo-Nirenberg type bound. For N a dyadic integer, we first remark that, using equation (4.2.10) with $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned} |\widehat{Q_N F_p}(\xi)| &\lesssim \|Q_N F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|x Q_N F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim N^{-\frac{5}{2}} \|N^5 Q_N F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|x Q_N F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim N^{-\frac{5}{2}} \|(1 - \partial_{xx})^{\frac{5}{2}} F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|x F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Thus, we have

$$\begin{aligned} (1+\xi^2) |\hat{F}_p(\xi)| &\lesssim \sum_N N^2 |\widehat{Q_N F_p}(\xi)| \\ &\lesssim \sum_N N^{-\frac{1}{2}} \|(1 - \partial_{xx})^{\frac{5}{2}} F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|x F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \|F_p\|_{H_x^5}^{\frac{1}{2}} \|x F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Now, back to the definition of the Z norm in (4.2.3), we use Cauchy Schwarz twice to obtain

$$\begin{aligned} \|F\|_Z^2 &\lesssim \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1+p^2) \|F_p\|_{H_x^5} \|x F_p\|_{L_x^2} \\ &\lesssim \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} (1+p^2)^2 \|F_p\|_{H_x^5}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \|x F_p\|_{L_x^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1+p^2)^2 (1+\xi^2)^5 |\hat{F}_p(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \|x F\|_{L_{x,y}^2} \\ &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{F}_p(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1+p^2)^4 (1+\xi^2)^{10} |\hat{F}_p(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{4}} \|x F\|_{L_{x,y}^2} \\ &\lesssim \|F\|_S^{\frac{3}{2}} \|F\|_{L_{x,y}^2}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

where we use that $N \geq 10$ in the last inequality. □

Remark 4.2.2. With equation (4.2.10) for $\alpha = 1$, and the simple bound $\|f\|_{L_x^\infty} \leq \|\hat{f}\|_{L_\xi^1}$, we obtain the Sobolev embedding

$$\|f\|_{L_x^\infty} \lesssim \|f\|_{H_x^1}. \quad (4.2.14)$$

4.2.4 The transfer principle

In this subsection, we present the transfer principle which allows us to obtain S and S^+ bounds for our trilinear operators from L^2 bounds. Once again, we follow the proof of Lemma 7.4 of Hani, Pausader, Tzvetkov and Visciglia in [27]. Before stating the result, we need to introduce some definitions.

A family $\tilde{Q} = \{\tilde{Q}_A\}$ of operators indexed by dyadic numbers is called a *LP-family* if it satisfies, for any function f ,

$$\widehat{\tilde{Q}_1 f}(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi) \hat{f}(\xi), \quad \widehat{\tilde{Q}_A f}(\xi) = \tilde{\phi}\left(\frac{\xi}{A}\right) \hat{f}(\xi), \quad A \geq 2,$$

for two localized functions $\tilde{\varphi}, \tilde{\phi} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, such that $\phi = 0$ in a neighborhood of the origin. We see of course the relation with the two functions φ and ϕ introduced in Subsection 4.2.1.

From a LP-family \tilde{Q} , we define the set of *admissible transformations* to be the family of operators $\{T_B\}_B$ that satisfy, for any dyadic number B ,

$$T_B = \lambda_B \tilde{Q}_B, \quad |\lambda_B| \leq 1.$$

With four admissible transformations T, T', T'' and T''' , we define an *admissible realization* of a trilinear operator \mathfrak{T} at a 4-tuples set of dyadic integers Λ to be an operator of the form

$$\mathfrak{T}_\Lambda[F, G, H] = \sum_{(A,B,C,D) \in \Lambda} T_D \mathfrak{T}[T'_A F, T''_B G, T'''_C H],$$

We finally define the set of norms we use in this article. A norm \mathcal{B} is said to be *admissible* if for any admissible transformations $\{T_A\}_A$, we have

$$\left\| \sum_A T_A F \right\|_{\mathcal{B}} \lesssim \|F\|_{\mathcal{B}}.$$

The important fact is that all the norms of the article (in particular Z and S) are admissible.

Lemma 4.2.3. *Assume that a trilinear operator \mathfrak{T} satisfies the Leibniz rule*

$$Z\mathfrak{T}[F, G, H] = \mathfrak{T}[ZF, G, H] + \mathfrak{T}[F, ZG, H] + \mathfrak{T}[F, G, ZH], \quad (4.2.15)$$

where $Z \in \{x, \partial_x, \partial_y\}$ and let Λ be a set of 4-tuples of dyadic integers. If for all admissible realizations of \mathfrak{T} at Λ , we have the bound

$$\|\mathfrak{T}_\Lambda[F^a, F^b, F^c]\|_{L^2_{x,y}} \leq K \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{L^2_{x,y}} \|F^{\sigma(b)}\|_{\mathcal{B}} \|F^{\sigma(c)}\|_{\mathcal{B}}, \quad (4.2.16)$$

for a norm \mathcal{B} admissible. Then, for all admissible realizations of \mathfrak{T} at Λ we have

$$\|\mathfrak{T}_\Lambda[F^a, F^b, F^c]\|_S \lesssim K \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_S \|F^{\sigma(b)}\|_{\mathcal{B}} \|F^{\sigma(c)}\|_{\mathcal{B}}, \quad (4.2.17)$$

Therefore, if for $Y \in \{x, (1 - \partial_{xx})^4\}$, we have

$$\|YF\|_{\mathcal{B}} \lesssim \theta_1 \|F\|_{S^+} + \theta_2 \|F\|_S, \quad (4.2.18)$$

Then, for all admissible realizations of \mathfrak{T} at Λ we have

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{T}_\Lambda[F^a, F^b, F^c]\|_{S^+} &\lesssim K \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{S^+} (\|F^{\sigma(b)}\|_{\mathcal{B}} + \theta_1 \|F^{\sigma(b)}\|_S) \|F^{\sigma(c)}\|_{\mathcal{B}} \\ &\quad + \theta_2 K \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_S \|F^{\sigma(b)}\|_S \|F^{\sigma(c)}\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Proof. Let \mathcal{B} be an admissible norm. We start the proof with the S bound.

- The H^N part of the S norm.

Let $Z \in \{\partial_x, \partial_y\}$. Let P_N be the Littlewood-Paley projection either in the x or the y direction and let s be a positive integer. By definition, we have $1 = P_{\leq M} + P_{\geq 2M}$, so we can decompose

$$\mathfrak{T}_\Lambda[F, G, H] = \mathfrak{T}_{\Lambda, M, low}[F, G, H] + \mathfrak{T}_{\Lambda, M, high}[F, G, H],$$

where

$$\mathfrak{T}_{\Lambda, M, low}[F, G, H] := \mathfrak{T}_\Lambda[P_{\leq M}F, P_{\leq M}G, P_{\leq M}H]$$

and

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\Lambda, M, high}[F, G, H] &:= \mathfrak{T}_\Lambda[P_{\geq 2M}F, G, H] + \mathfrak{T}_\Lambda[P_{\leq M}F, P_{\geq 2M}G, H] \\ &\quad + \mathfrak{T}_\Lambda[P_{\leq M}F, P_{\leq M}G, P_{\geq 2M}H]. \end{aligned}$$

For the $\mathfrak{T}_{\Lambda, M, high}$ term, the idea is to take advantage of the term with the high frequency localization in each of the three trilinear part. Let us for example deal with the second term. We use the boundedness assumption (4.2.16) to get

$$\begin{aligned} \sum_M M^{2s} \|\mathfrak{T}_\Lambda[P_{\leq M}F, P_{\geq 2M}G, H]\|_{L_{x,y}^2}^2 &\leq K^2 \sum_M M^{2s} \|P_{\geq 2M}G\|_{L_{x,y}^2}^2 \|P_{\leq M}F\|_{\mathcal{B}}^2 \|H\|_{\mathcal{B}}^2 \\ &\lesssim K^2 \|G\|_{H_{x,y}^s}^2 \|F\|_{\mathcal{B}}^2 \|H\|_{\mathcal{B}}^2. \end{aligned}$$

Finally, dealing with the three terms and summing the bounds, we have

$$\|\mathfrak{T}_{\Lambda, M, high}[F^a, F^b, F^c]\|_{H_{x,y}^N} \lesssim K \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_S \|F^{\sigma(b)}\|_{\mathcal{B}} \|F^{\sigma(c)}\|_{\mathcal{B}}. \quad (4.2.20)$$

For the $\mathfrak{T}_{\Lambda, M, low}$ term, we need to go deeper in the sense that we don't have a higher frequency localization to attract the derivatives. Nevertheless, we can decompose the projector $P_{\leq M} = \sum_{M_1 \leq M} P_{M_1}$ to obtain

$$\begin{aligned} M^s \|P_M \mathfrak{T}_{\Lambda, M, low}[F, G, H]\|_{L_{x,y}^2} &\lesssim M^{-s} \|M^{2s} \mathfrak{T}_\Lambda[P_{\leq M}F, P_{\leq M}G, P_{\leq M}H]\|_{L_{x,y}^2} \\ &\lesssim M^{-s} \sum_{M_1, M_2, M_3 \leq M} \sum_{a+b+c=2s} \|\mathfrak{T}_\Lambda[Z^a P_{M_1}F, Z^b P_{M_2}G, Z^c P_{M_3}H]\|_{L_{x,y}^2}. \end{aligned}$$

Now, we are able to treat this bound with the same argument as in the $\mathfrak{T}_{\Lambda, M, high}$ case. Indeed, we can split the sum in M_1, M_2, M_3 to take advantage of the highest frequency. For example, when $M_2, M_3 \leq M_1$, we use the boundedness assumption (4.2.16) of the lemma and we sum over M_2 and M_3 to get

$$\begin{aligned} M^{-s} \sum_{\substack{M_2, M_3 \leq M_1 \leq M \\ a+b+c=2s}} \|\mathfrak{T}_\Lambda[Z^a P_{M_1}F, Z^b P_{M_2}G, Z^c P_{M_3}H]\|_{L_{x,y}^2} \\ &\lesssim KM^{-s} \sum_{M_1 \leq M} M_1^{2s} \|P_{M_1}F\|_{L_{x,y}^2} \|G\|_{\mathcal{B}} \|H\|_{\mathcal{B}} \\ &\lesssim K \left(\sum_{M_1 \leq M} \left(\frac{M_1}{M}\right)^s \|Z^s P_{M_1}F\|_{L_{x,y}^2} \right) \|G\|_{\mathcal{B}} \|H\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

By the Cauchy-Schwarz inequality and the properties of the dyadic integers, we deal with the right hand-side term of the previous inequality

$$\begin{aligned} \sum_{M_1 \leq M} \left(\frac{M_1}{M}\right)^s \|Z^s P_{M_1} F\|_{L^2_{x,y}} &\leq \left(\sum_{M_1 \leq M} \left(\frac{M_1}{M}\right)^s\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{M_1 \leq M} \left(\frac{M_1}{M}\right)^s \|Z^s P_{M_1} F\|_{L^2_{x,y}}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left(\sum_{M_1 \leq M} \left(\frac{M_1}{M}\right)^s \|Z^s P_{M_1} F\|_{L^2_{x,y}}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Thus, squaring and summing in M , we obtain

$$\begin{aligned} \sum_M \left(\sum_{M_1 \leq M} \left(\frac{M_1}{M}\right)^s \|Z^s P_{M_1} F\|_{L^2_{x,y}}\right)^2 &\lesssim \sum_M \sum_{M_1 \leq M} \left(\frac{M_1}{M}\right)^s \|Z^s P_{M_1} F\|_{L^2_{x,y}}^2 \\ &\lesssim \sum_{M_1} \left(\sum_{M \geq M_1} \left(\frac{M_1}{M}\right)^s\right) \|Z^s P_{M_1} F\|_{L^2_{x,y}}^2 \\ &\lesssim \sum_{M_1} \|P_{M_1} Z^s F\|_{L^2_{x,y}}^2. \end{aligned}$$

By symmetry, we have the same results for $M_1, M_3 \leq M_2$ and $M_1, M_2 \leq M_3$. Compiling these bounds, we obtain

$$\begin{aligned} \sum_M M^{2s} \|P_M \mathfrak{I}_{\Lambda, M, low}[F, G, H]\|_{L^2_{x,y}}^2 \\ \lesssim K^2 (\|F\|_{H^s}^2 \|G\|_{\mathcal{B}}^2 \|H\|_{\mathcal{B}}^2 + \|F\|_{\mathcal{B}}^2 \|G\|_{H^s}^2 \|H\|_{\mathcal{B}}^2 + \|F\|_{\mathcal{B}}^2 \|G\|_{\mathcal{B}}^2 \|H\|_{H^s}^2). \end{aligned}$$

Thus, we finally have

$$\|\mathfrak{I}_{\Lambda, M, low}[F^a, F^b, F^c]\|_{H^N_{x,y}} \lesssim K \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_S \|F^{\sigma(b)}\|_{\mathcal{B}} \|F^{\sigma(c)}\|_{\mathcal{B}}. \quad (4.2.21)$$

Then, we conclude for the H^N part with equations (4.2.20) and (4.2.21),

$$\|\mathfrak{I}_{\Lambda}[F^a, F^b, F^c]\|_{H^N_{x,y}} \leq K \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_S \|F^{\sigma(b)}\|_{\mathcal{B}} \|F^{\sigma(c)}\|_{\mathcal{B}}. \quad (4.2.22)$$

- The L^2 part of the S norm.

For this part of the S norm, the key information we need is that, for \tilde{Q} corresponding to the family $(\tilde{\varphi}, \tilde{\phi})$,

$$[x, \tilde{Q}_A] = iA^{-1}\tilde{Q}'_A, \quad (4.2.23)$$

where \tilde{Q}' corresponds to the family $(\tilde{\varphi}', \tilde{\phi}')$. Indeed, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([x, \tilde{Q}_A]f)(\xi) &= \mathcal{F}(x\tilde{Q}_A f)(\xi) - \mathcal{F}(\tilde{Q}_A x f)(\xi) \\ &= i\partial_{\xi}(\tilde{\phi}'\left(\frac{\xi}{A}\right)\hat{f}(\xi)) - i\tilde{\phi}'\left(\frac{\xi}{A}\right)\partial_{\xi}\hat{f}(\xi) \\ &= iA^{-1}\tilde{\phi}'\left(\frac{\xi}{A}\right)\hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Thus, if T_A is an admissible transformation, then $[x, T_A]$ too because $|iA^{-1}| \leq 1$. The idea now is to write $xT_A = [x, T_A] + T_A x$ for using these admissible transformations. Thus, we have

$$x\mathfrak{I}_{\Lambda}[F, G, H] = \sum_{(A,B,C,D) \in \Lambda} [x, T_D]\mathfrak{I}[T'_A F, T''_B G, T'''_C H] + \sum_{(A,B,C,D) \in \Lambda} T_D x \mathfrak{I}[T'_A F, T''_B G, T'''_C H]$$

The first term of this some is an admissible realization of \mathfrak{T} at Λ . For the second term, due to the Leibniz rule (4.2.15) for $x\mathfrak{T}$, we have

$$\begin{aligned} x\mathfrak{T}[T'_A F, T''_B G, T'''_C H] = & \\ & \mathfrak{T}[[x, T'_A]F, T''_B G, T'''_C H] + \mathfrak{T}[T'_A F, [x, T''_B]G, T'''_C H] + \mathfrak{T}[T'_A F, T''_B G, [x, T'''_C]H] \\ & + \mathfrak{T}[T'_A xF, T''_B G, T'''_C H] + \mathfrak{T}[T'_A F, T''_B xG, T'''_C H] + \mathfrak{T}[T'_A F, T''_B G, T'''_C xH]. \end{aligned}$$

Here, the first line corresponds to other admissible realizations of \mathfrak{T} at Λ . Thus, we have

$$x\mathfrak{T}_\Lambda[F, G, H] = \mathfrak{T}_\Lambda[xF, G, H] + \mathfrak{T}_\Lambda[F, xG, H] + \mathfrak{T}_\Lambda[F, G, xH] + \tilde{\mathfrak{T}}_\Lambda[F, G, H], \quad (4.2.24)$$

where $\tilde{\mathfrak{T}}_\Lambda$ is a sum of four admissible realizations of \mathfrak{T} at Λ . Finally, using the assumption (4.2.16), we have

$$\begin{aligned} \|x\mathfrak{T}_\Lambda[F, G, H]\|_{L^2} \leq & K(\|xF\|_{L^2}\|G\|_{\mathcal{B}}\|H\|_{\mathcal{B}} + \|F\|_{\mathcal{B}}\|xG\|_{L^2}\|H\|_{\mathcal{B}} \\ & + \|F\|_{\mathcal{B}}\|G\|_{\mathcal{B}}\|xH\|_{L^2} + \|F\|_{\mathcal{S}}\|G\|_{\mathcal{B}}\|H\|_{\mathcal{B}}). \end{aligned}$$

We can conclude for this part that

$$\|x\mathfrak{T}_\Lambda[F^a, F^b, F^c]\|_{L^2} \lesssim K \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{\mathcal{S}} \|F^{\sigma(b)}\|_{\mathcal{B}} \|F^{\sigma(c)}\|_{\mathcal{B}}.$$

Using this equation and equation (4.2.22), we finish the proof of the bound (4.2.17).

- The S^+ estimate.

We now have to deal with inequality (4.2.19) concerning the S^+ norm. Recall that

$$\|F\|_{S^+} = \|F\|_{\mathcal{S}} + \|xF\|_{\mathcal{S}} + \|(1 - \partial_{xx})^4 F\|_{\mathcal{S}}.$$

The first term term is controlled by the above computations. For the xF term, we use the Leibniz rule (4.2.24) and the bound (4.2.17) to get

$$\begin{aligned} \|x\mathfrak{T}_\Lambda[F^a, F^b, F^c]\|_{\mathcal{S}} \lesssim & K \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|xF^{\sigma(a)}\|_{\mathcal{S}} \|F^{\sigma(b)}\|_{\mathcal{B}} \|F^{\sigma(c)}\|_{\mathcal{B}} \\ & + K \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|xF^{\sigma(a)}\|_{\mathcal{B}} \|F^{\sigma(b)}\|_{\mathcal{S}} \|F^{\sigma(c)}\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

For the $(1 - \partial_{xx})^4$ term, we use the same method as the H^N part of the S norm to obtain the same relation

$$\begin{aligned} \|(1 - \partial_{xx})^4 \mathfrak{T}_\Lambda[F^a, F^b, F^c]\|_{\mathcal{S}} \lesssim & K \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|(1 - \partial_{xx})^4 F^{\sigma(a)}\|_{\mathcal{S}} \|F^{\sigma(b)}\|_{\mathcal{B}} \|F^{\sigma(c)}\|_{\mathcal{B}} \\ & + K \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|(1 - \partial_{xx})^4 F^{\sigma(a)}\|_{\mathcal{B}} \|F^{\sigma(b)}\|_{\mathcal{S}} \|F^{\sigma(c)}\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Now, we just use the bound (4.2.18) to get

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{T}_\Lambda[F^a, F^b, F^c]\|_{S^+} \lesssim & K \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{S^+} \|F^{\sigma(b)}\|_{\mathcal{B}} \|F^{\sigma(c)}\|_{\mathcal{B}} \\ & + K \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} (\theta_1 \|F^{\sigma(a)}\|_{S^+} + \theta_2 \|F^{\sigma(a)}\|_{\mathcal{S}}) \|F^{\sigma(b)}\|_{\mathcal{S}} \|F^{\sigma(c)}\|_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

and we deduce the equation (4.2.19) directly from this one. \square

Remark 4.2.4. We use this lemma for two different norms \mathcal{B} in this paper. In most of the cases, we will have $\mathcal{B} = S$, thus the bounds become simpler. Indeed, by definition of the S^+ norm, for $Y \in \{x, (1 - \partial_{xx})^4\}$,

$$\|YF\|_S \lesssim \|F\|_{S^+}$$

Thus we have, for the case $\mathcal{B} = S$,

$$\|\mathfrak{T}_\Lambda[F, G, H]\|_S \lesssim K \|F\|_S \|G\|_S \|H\|_S, \quad (4.2.25)$$

$$\|\mathfrak{T}_\Lambda[F^a, F^b, F^c]\|_{S^+} \lesssim K \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{S^+} \|F^{\sigma(b)}\|_S \|F^{\sigma(c)}\|_S. \quad (4.2.26)$$

4.2.5 A first estimate result

The following proposition gives us a first example of use of Lemma 4.2.3 to obtain first estimates on the nonlinearity \mathcal{N}^t .

Proposition 4.2.5. We have the following estimates:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}^t[F^a, F^b, F^c]\|_S &\lesssim (1 + |t|)^{-1} \|F^a\|_S \|F^b\|_S \|F^c\|_S, \\ \|\mathcal{N}^t[F^a, F^b, F^c]\|_{S^+} &\lesssim (1 + |t|)^{-1} \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{S^+} \|F^{\sigma(b)}\|_S \|F^{\sigma(c)}\|_S. \end{aligned}$$

Proof. By the definition of \mathcal{I}^t in (4.2.8), we have

$$\|\mathcal{I}^t[f^a, f^b, f^c]\|_{L_x^2} \leq \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|f^{\sigma(a)}\|_{L_x^2} \|e^{it\partial_{xx}} f^{\sigma(b)}\|_{L_x^\infty} \|e^{it\partial_{xx}} f^{\sigma(c)}\|_{L_x^\infty}. \quad (4.2.27)$$

If $|t| \geq 1$, we use the Schrödinger dispersive bound (4.2.11) and the bound (4.2.10) (with the parameter $\alpha = 1$) to get

$$\|e^{it\partial_{xx}} f\|_{L_x^\infty} \lesssim |t|^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L_x^1} \lesssim (1 + |t|)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L_x^2} \|xf\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}}.$$

Thus we have

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} \|e^{it\partial_{xx}} F_p\|_{L_x^\infty} \lesssim (1 + |t|)^{-\frac{1}{2}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \langle p \rangle^{-2} \|\langle p \rangle^4 F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|x F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \lesssim (1 + |t|)^{-\frac{1}{2}} \|F\|_S.$$

If $|t| \leq 1$, we use the embedding (4.2.14) to obtain

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} \|e^{it\partial_{xx}} F_p\|_{L_x^\infty} \lesssim \sum_{p \in \mathbb{Z}} \|F_p\|_{H_x^1} \lesssim \|F\|_S \lesssim (1 + |t|)^{-\frac{1}{2}} \|F\|_S.$$

Then, we can deal with \mathcal{N}^t by using equation (4.2.27) and the ℓ_p^2 bound (4.2.12) on equation (4.2.7)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}^t[F^a, F^b, F^c]\|_{L_x^2} &\lesssim \left\| \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \sum_{(p,q,r,s) \in \mathcal{M}} \|F_{\sigma(q)}^{\sigma(a)}\|_{L_x^2} \|e^{it\partial_{xx}} F_{\sigma(r)}^{\sigma(b)}\|_{L_x^\infty} \|e^{it\partial_{xx}} F_{\sigma(s)}^{\sigma(c)}\|_{L_x^\infty} \right\|_{\ell_p^2} \\ &\lesssim \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F_p^{\sigma(a)}\|_{L_x^2 \ell_p^2} \|e^{it\partial_{xx}} F_p^{\sigma(b)}\|_{L_x^\infty \ell_p^1} \|e^{it\partial_{xx}} F_p^{\sigma(c)}\|_{L_x^\infty \ell_p^1} \\ &\lesssim (1 + |t|)^{-1} \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{L_{x,y}^2} \|F^{\sigma(b)}\|_S \|F^{\sigma(c)}\|_S. \end{aligned}$$

From this inequality, we can use the transfer principle of Lemma 4.2.3 through the equations (4.2.25) and (4.2.26) with $K = (1 + |t|)^{-1}$ to conclude the proof of Proposition 4.2.5. \square

4.3 Decomposition of the nonlinearity

In this section, we decompose the nonlinearity as

$$\mathcal{N}^t[F, G, H] = \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[F, G, H] + \mathcal{E}^t[F, G, H], \quad (4.3.1)$$

where \mathcal{R} is defined in (4.2.9). The goal of this section is to prove the following theorem which states some properties of this decomposition.

Theorem 4.3.1. *Assume that for $T \geq 1$ and $F, G, H : \mathbb{R} \rightarrow S$ satisfy*

$$\|F\|_{X_T} + \|G\|_{X_T} + \|H\|_{X_T} \leq 1. \quad (4.3.2)$$

Then we can decompose \mathcal{E}^t defined in (4.3.1) as follows

$$\mathcal{E}^t[F(t), G(t), H(t)] = \mathcal{E}_1^t[F(t), G(t), H(t)] + \mathcal{E}_2^t[F(t), G(t), H(t)],$$

where, if we note $\mathcal{E}_i(t) := \mathcal{E}_i^t[F(t), G(t), H(t)]$ for $i = 1, 2$, we have the following bounds, uniformly in $T \geq 1$,

$$\begin{aligned} T^{-\delta} \left\| \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \mathcal{E}_i(t) dt \right\|_S &\lesssim 1, \quad i = 1, 2, \\ T^{1+\delta} \sup_{\frac{T}{4} \leq t \leq T} \|\mathcal{E}_1(t)\|_Z &\lesssim 1, \\ T^{\frac{1}{10}} \sup_{\frac{T}{4} \leq t \leq T} \|\mathcal{E}_3(t)\|_S &\lesssim 1, \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

where $\mathcal{E}_2(t) = \partial_t \mathcal{E}_3(t)$. Assuming in addition that

$$\|F\|_{X_T^+} + \|G\|_{X_T^+} + \|H\|_{X_T^+} \leq 1, \quad (4.3.4)$$

then we also have

$$T^{2\delta} \left\| \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \mathcal{E}_i(t) dt \right\|_S \lesssim 1, \quad T^{-5\delta} \left\| \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \mathcal{E}_i(t) dt \right\|_{S^+} \lesssim 1, \quad i = 1, 2. \quad (4.3.5)$$

The first decomposition of \mathcal{N}^t we deal with is

$$\mathcal{N}^t[F, G, H] = \Pi^t[F, G, H] + \tilde{\mathcal{N}}^t[F, G, H], \quad (4.3.6)$$

where

$$\mathcal{F}\Pi^t[F, G, H](\xi, p) := \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} \mathcal{F}_x \mathcal{I}^t[F_q, G_r, H_s](\xi). \quad (4.3.7)$$

In Subsection 4.3.1, we first study $\mathcal{N}^t[F, G, H]$ when at least one of the functions F, G, H contains high frequencies. Then, in the opposite case, i.e. when F, G, H are localized in low frequency domains, we introduce the decomposition $\mathcal{N}^t = \tilde{\mathcal{N}}^t + \Pi^t$. Therefore, we deal with the case of the $\tilde{\mathcal{N}}^t$ part in Subsection 4.3.2. In Subsection 4.3.3, we study the Π^t term and show that this part is close to the resonant nonlinearity \mathcal{R} . Next, in Subsection 4.3.4, we study the particular case of the high frequency part of the resonant nonlinearity, in order to obtain some decreasing behavior. Finally, we give the proof of Theorem 4.3.1 in Subsection 4.3.5.

4.3.1 The high frequency estimates

In this subsection, we prove the following proposition about high frequency localized functions.

Proposition 4.3.2. *Assume that $T \geq 1$, the following estimates hold uniformly in T :*

$$\forall t \geq \frac{T}{4}, \quad \left\| \sum_{\substack{A,B,C \\ \max(A,B,C) \geq T^{\frac{1}{6}}}} \mathcal{N}^t[Q_A F, Q_B G, Q_C H] \right\|_Z \lesssim T^{-\frac{7}{6}} \|F\|_S \|G\|_S \|H\|_S, \quad (4.3.8)$$

$$\left\| \sum_{\substack{A,B,C \\ \max(A,B,C) \geq T^{\frac{1}{6}}}} \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \mathcal{N}^t[Q_A F(t), Q_B G(t), Q_C H(t)] dt \right\|_S \lesssim T^{-\frac{1}{50}} \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T}, \quad (4.3.9)$$

$$\left\| \sum_{\substack{A,B,C \\ \max(A,B,C) \geq T^{\frac{1}{6}}}} \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \mathcal{N}^t[Q_A F(t), Q_B G(t), Q_C H(t)] dt \right\|_{S^+} \lesssim T^{-\frac{1}{50}} \|F\|_{X_T^+} \|G\|_{X_T^+} \|H\|_{X_T^+}. \quad (4.3.10)$$

The one dimensional bilinear Strichartz estimates

Before proving this proposition, we state a result about the one dimensional bilinear Strichartz estimates.

Lemma 4.3.3. *Assume that $\lambda \geq 10\mu \geq 1$. Then, for all $f, g \in L_x^2$ we have*

$$\|(e^{it\partial_{xx}} Q_\lambda f)(e^{it\partial_{xx}} Q_\mu g)\|_{L_{x,t}^2} \lesssim \lambda^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L_x^2} \|g\|_{L_x^2}.$$

Proof. We follow here the proof of Hani and Thomann in [28] and work by duality. For a function $K \in L_{x,t}^2$ we set

$$I_K := \left\langle (e^{it\partial_{xx}} Q_\lambda f)(e^{it\partial_{xx}} Q_\mu g), K \right\rangle_{L_{x,t}^2 \times L_{x,t}^2}.$$

By the Parseval's Theorem we obtain

$$I_K = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-it\eta^2} e^{-it(\xi-\eta)^2} \phi\left(\frac{\eta}{\lambda}\right) \phi\left(\frac{\xi-\eta}{\mu}\right) \hat{f}(\eta) \hat{g}(\xi-\eta) \overline{\hat{K}(t, \xi)} d\eta dt d\xi.$$

With the change of variables $\xi_1 \leftrightarrow \eta, \xi_2 \leftrightarrow \xi - \eta$, this equation becomes

$$I_K = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-it(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \phi\left(\frac{\xi_1}{\lambda}\right) \phi\left(\frac{\xi_2}{\mu}\right) \hat{f}(\xi_1) \hat{g}(\xi_2) \overline{\hat{K}(t, \xi_1 + \xi_2)} dt d\xi_1 d\xi_2.$$

But

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-it(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \overline{\hat{K}(t, \xi_1 + \xi_2)} dt = \mathcal{F}_t(\overline{\hat{K}})(\xi_1^2 + \xi_2^2, \xi_1 + \xi_2).$$

Thus, we have

$$I_K = \int_{\mathbb{R}^2} \phi\left(\frac{\xi_1}{\lambda}\right) \phi\left(\frac{\xi_2}{\mu}\right) \hat{f}(\xi_1) \hat{g}(\xi_2) \mathcal{F}_t(\overline{\hat{K}})(\xi_1^2 + \xi_2^2, \xi_1 + \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

and applying Cauchy-Schwarz in ξ_1 and in ξ_2 , we get

$$I_K \leq \|f\|_{L_x^2} \|g\|_{L_x^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \phi\left(\frac{\xi_1}{\lambda}\right) \phi\left(\frac{\xi_2}{\mu}\right) \mathcal{F}_t(\widehat{K})(\xi_1^2 + \xi_2^2, \xi_1 + \xi_2) \right|^2 d\xi_1 d\xi_2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

The term in the integral in the right hand-side is localized in the four regions of \mathbb{R}^2 where we have $\frac{\lambda}{2} \leq |\xi_1| \leq 2\lambda$ and $\frac{\mu}{2} \leq |\xi_2| \leq 2\mu$. In these regions, we can apply the change of variables $\phi(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^2 + \xi_2^2, \xi_1 + \xi_2)$. The Jacobian of this transformation is $2(\xi_1 - \xi_2)$. Moreover, in these regions, $|\xi_1 - \xi_2| \simeq \lambda$ (because $\mu \leq 10\lambda$). Thus, considering that the function ϕ is bounded, we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \phi\left(\frac{\xi_1}{\lambda}\right) \phi\left(\frac{\xi_2}{\mu}\right) \mathcal{F}_t(\widehat{K})(\xi_1^2 + \xi_2^2, \xi_1 + \xi_2) \right|^2 d\xi_1 d\xi_2 \lesssim \lambda^{-1} \|\mathcal{F}_t(\widehat{K})\|_{L_{\xi_1, \xi_2}^2}.$$

Back to I_K we have

$$I_K \lesssim \lambda^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L_x^2} \|g\|_{L_x^2} \|K\|_{L_{x,t}^2}.$$

It suffices to take $K = (e^{it\partial_{xx}} Q_\lambda f)(e^{it\partial_{xx}} Q_\mu g)$ to end the proof. \square

Remark 4.3.4. *This inequality is very used in the study of Schrödinger equations, and many proofs are available. For an original proof which stands for higher dimension, we can refer to [49], where Tao gives a 'physical space proof' of this estimate using mainly integration by parts arguments.*

Proof of Proposition 4.3.2

We can now deal with Proposition 4.3.2.

Proof. We begin with inequality (4.3.8). We fix $t \geq \frac{T}{4}$. Due to the bound (4.2.13), we can control the Z norm by the norms S and $L_{x,y}^2$. For the S norm, by Proposition 4.2.5 we have

$$\left\| \sum_{\substack{A,B,C \\ \max(A,B,C) \geq T^{\frac{1}{6}}}} \mathcal{N}^t[Q_A F, Q_B G, Q_C H] \right\|_S \lesssim T^{-1} \|F\|_S \|G\|_S \|H\|_S.$$

For the $L_{x,y}^2$ norm, back to \mathcal{I}^t and using the bound (4.2.27) and the Sobolev embedding (4.2.14), we have

$$\|\mathcal{I}^t[Q_A F_q, Q_B G_r, Q_C H_s]\|_{L_x^2} \lesssim \|Q_A F\|_{H_x^1} \|Q_B G\|_{H_x^1} \|Q_C H\|_{H_x^1}.$$

With the Littlewood-Paley decomposition properties, we have

$$\|Q_A F_q\|_{H_x^1} = A^{-11} \|A^{11} Q_A F_q\|_{H_x^1} \lesssim A^{-11} \|Q_A F_q\|_{H_x^{12}}.$$

Thus, we obtain

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}^t[Q_A F_q, Q_B G_r, Q_C H_s]\|_{L_x^2} &\lesssim (ABC)^{-11} (\langle q \rangle \langle r \rangle \langle s \rangle)^{-2} \times \\ &\quad \|\langle q \rangle^2 Q_A F_q\|_{H_x^{12}} \|\langle r \rangle^2 Q_B G_r\|_{H_x^{12}} \|\langle s \rangle^2 Q_C H_s\|_{H_x^{12}}. \end{aligned}$$

We first remark that

$$(ABC)^{-11} \leq \max(A, B, C)^{-10}(ABC)^{-1} \lesssim T^{-\frac{5}{3}}(ABC)^{-1}.$$

Thus, summing the previous inequality, we obtain

$$\| \sum_{\substack{A, B, C \\ \max(A, B, C) \geq T^{\frac{1}{6}}}} \mathcal{N}^t[Q_A F, Q_B G, Q_C H] \|_{L^2_{x,y}} \lesssim T^{-\frac{5}{3}} \|F\|_S \|G\|_S \|H\|_S.$$

Finally, with the bound (4.2.13), we deduce that

$$\begin{aligned} \| \sum_{\substack{A, B, C \\ \max(A, B, C) \geq T^{\frac{1}{6}}}} \mathcal{N}^t[Q_A F, Q_B G, Q_C H] \|_Z &\lesssim T^{-\frac{5}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{3}{4}} \|F\|_S \|G\|_S \|H\|_S \\ &\lesssim T^{-\frac{7}{6}} \|F\|_S \|G\|_S \|H\|_S. \end{aligned}$$

We now have to deal with estimates (4.3.9) and (4.3.10). We introduce the notation $\text{med}(A, B, C)$ to denote the second largest number between A, B and C . With this notation, we split the sum over A, B, C depending on whether

$$\text{med}(A, B, C) \geq \frac{T^{\frac{1}{6}}}{16} \quad \text{or} \quad \text{med}(A, B, C) \leq \frac{T^{\frac{1}{6}}}{16}.$$

- If $\text{med}(A, B, C) \geq \frac{T^{\frac{1}{6}}}{16}$.

For $K \in L^2_{x,p}$, we introduce

$$I_K := \left\langle K, \sum_{(A, B, C) \in \Lambda_1} \mathcal{N}^t[Q_A F, Q_B G, Q_C H] \right\rangle_{L^2_{x,p} \times L^2_{x,p}},$$

where Λ_1 is the set of dyadic numbers A, B, C such that

$$\max(A, B, C) \geq T^{\frac{1}{6}} \quad \text{and} \quad \text{med}(A, B, C) \geq \frac{T^{\frac{1}{6}}}{16}.$$

Writing the scalar product, using the triangle inequality and the expression (4.2.7) of \mathcal{N}^t , we obtain

$$I_K \leq \sum_{(p, q, r, s) \in \mathcal{M}} \sum_{(A, B, C) \in \Lambda_1} \left| \int_{\mathbb{R}} U(t)(Q_A F_q) \overline{U(t)(Q_B G_r)} U(t)(Q_C H_s) \overline{U(t)(K_p)} dx \right|.$$

Decomposing K_p with the Littlewood-Paley projectors, we get

$$I_K \lesssim \sum_{(p, q, r, s) \in \mathcal{M}} \sum_{(A, B, C) \in \Lambda_{1, D}} \left| \int_{\mathbb{R}} U(t)(Q_A F_q) \overline{U(t)(Q_B G_r)} U(t)(Q_C H_s) \overline{U(t)(Q_D K_p)} dx \right|.$$

Thus, by the Cauchy-Schwarz inequality, this inequality becomes

$$I_K \lesssim \sum_{(p, q, r, s) \in \mathcal{M}} \sum_{(A, B, C) \in \Lambda_{1, D}} \|Q_A F_q\|_{L^2_x} \|U(t)(Q_B G_r)\|_{L^\infty_x} \|U(t)(Q_C H_s)\|_{L^\infty_x} \|Q_D K_p\|_{L^2_x}.$$

Now, by the Sobolev embedding (4.2.14) and the properties of the Littlewood-Paley decomposition, we have

$$\|U(t)(Q_B G_r)\|_{L_x^\infty} \lesssim \|Q_B G_r\|_{H_x^1} \lesssim B^{-11} \|Q_B G_r\|_{H_x^{12}}.$$

Thus

$$I_K \lesssim \sum_{(p,q,r,s) \in \mathcal{M}} \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_1, D} (BC)^{-11} \|Q_A F_q\|_{L_x^2} \|Q_B G_r\|_{H_x^{12}} \|Q_C H_s\|_{H_x^{12}} \|Q_D K_p\|_{L_x^2}.$$

We remark that, due to the condition $\text{med}(A, B, C) \geq \frac{T^{\frac{1}{6}}}{16}$,

$$(BC)^{-11} \lesssim (\text{med}(A, B, C))^{-10} (BC)^{-1} \lesssim T^{-\frac{5}{3}} B^{-1}.$$

Therefore, summing over A, C, D and applying Cauchy-Schwarz in B , we obtain

$$I_K \lesssim \sum_{(p,q,r,s) \in \mathcal{M}} T^{-\frac{5}{3}} \|F_q\|_{L_x^2} \|G_r\|_{H_x^{12}} \|H_s\|_{H_x^{12}} \|K_p\|_{L_x^2}.$$

By another application of Cauchy-Schwarz, but this time in p , we get

$$I_K \lesssim T^{-\frac{5}{3}} \|K\|_{L_{x,p}^2} \left\| \sum_{(p,q,r,s) \in \mathcal{M}} \|F_q\|_{L_x^2} \|G_r\|_{H_x^{12}} \|H_s\|_{H_x^{12}} \right\|_{\ell_p^2}.$$

Thus, applying the ℓ_p^2 bound (4.2.12), we finally have

$$I_K \lesssim T^{-\frac{5}{3}} \|K\|_{L_{x,p}^2} \|F\|_{L_{x,y}^2} \|G\|_{H_x^{12} \ell_p^1} \|H\|_{H_x^{12} \ell_p^1}.$$

Always with Cauchy-Schwarz,

$$\|G\|_{H_x^{12} \ell_p^1} \leq \|\langle p \rangle^{-1}\|_{\ell_p^2} \|\langle p \rangle G\|_{H_x^{12} \ell_p^2} \lesssim \|G\|_S.$$

Taking $K = \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_1} \mathcal{N}^t[Q_A F, Q_B G, Q_C H]$ in the definition of I_K , we obtain

$$\left\| \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_1} \mathcal{N}^t[Q_A F, Q_B G, Q_C H] \right\|_{L_{x,y}^2} \lesssim T^{-\frac{5}{3}} \|F\|_{L_{x,y}^2} \|G\|_S \|H\|_S.$$

By symmetry, we can change the roles of F, G and H . Thus, by Lemma 4.2.3, we obtain

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_1} \mathcal{N}^t[Q_A F, Q_B G, Q_C H] \right\|_S &\lesssim T^{-\frac{5}{3}} \|F\|_S \|G\|_S \|H\|_S, \\ \left\| \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_1} \mathcal{N}^t[Q_A F, Q_B G, Q_C H] \right\|_{S^+} &\lesssim T^{-\frac{5}{3}} \|F\|_{S^+} \|G\|_{S^+} \|H\|_{S^+}. \end{aligned}$$

Now, by the definitions (4.2.5) and (4.2.6) of the norms X_T and X_T^+ , and by the definition of q_T we have

$$\|F\|_S \lesssim T^\delta \|F\|_{X_T}, \quad \|F\|_{S^+} \lesssim T^{5\delta} \|F\|_{X_T^+}, \quad \|q_T\|_{L_t^1} \lesssim T.$$

Thus, we finally have

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_1} \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \mathcal{N}^t[Q_A F(t), Q_B G(t), Q_C H(t)] dt \right\|_S \lesssim T^{-\frac{2}{3}+3\delta} \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T}, \\ & \left\| \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_1} \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \mathcal{N}^t[Q_A F(t), Q_B G(t), Q_C H(t)] dt \right\|_{S^+} \lesssim T^{-\frac{2}{3}+15\delta} \|F\|_{X_T^+} \|G\|_{X_T^+} \|H\|_{X_T^+}, \end{aligned}$$

which is sufficient to prove equations (4.3.9) and (4.3.10) in the case $\text{med}(A, B, C) \geq \frac{T^{\frac{1}{6}}}{16}$.

- If $\text{med}(A, B, C) \leq \frac{T^{\frac{1}{6}}}{16}$.

We now work on

$$E_{(+)} := \left\| \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_2} \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \mathcal{N}^t[Q_A F(t), Q_B G(t), Q_C H(t)] dt \right\|_{S^{(+)}}$$

where $E_{(+)} = \|F\|_{S^{(+)}}$ means that $E = \|F\|_S$ and $E_+ = \|F\|_{S^+}$, and Λ_2 is the set of all dyadic numbers A, B, C such that

$$\max(A, B, C) \geq T^{\frac{1}{6}} \quad \text{and} \quad \text{med}(A, B, C) \leq \frac{T^{\frac{1}{6}}}{16}.$$

Once again, the idea is to split E for bound it. For that purpose, we consider a regular function $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ such that

$$\chi(x) = 0 \quad \text{if} \quad |x| \geq 2 \quad \text{and} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(x - k) \equiv 1.$$

Using this new function χ , we have for a function a depending on time, that

$$\int_{\mathbb{R}} q_T(t) a(t) dt = \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \sum_{j \in \mathbb{Z}} \chi\left(\frac{t}{T^{\frac{9}{10}}} - j\right) a(t) dt.$$

But on the support of q_T , we have $|t| \leq T$, and on the support of χ , we have $|\frac{t}{T^{\frac{9}{10}}} - j| \leq 2$. Thus

$$q_T(t) \chi\left(\frac{t}{T^{\frac{9}{10}}} - j\right) = 0 \quad \text{as soon as} \quad j \notin [-T^{\frac{1}{10}} - 2, T^{\frac{1}{10}} + 2].$$

Using this remark, we define $J := \{j \in \mathbb{Z}, -T^{\frac{1}{10}} - 2 \leq j \leq T^{\frac{1}{10}} + 2\}$. We have $\#J \lesssim T^{\frac{1}{10}}$ and

$$\int_{\mathbb{R}} q_T(t) a(t) dt = \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \chi\left(\frac{t}{T^{\frac{9}{10}}} - j\right) a(t) dt.$$

Therefore, if we denote $t_j := T^{\frac{9}{10}} j$, we have

$$E_{(+)} \lesssim E_{1,(+)} + E_{2,(+)},$$

where

$$\begin{aligned} E_{1,(+)} := & \left\| \sum_{j \in J} \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_2} \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \chi\left(\frac{t}{T^{\frac{9}{10}}} - j\right) \right. \\ & \left. \left(\mathcal{N}^t[Q_A F(t), Q_B G(t), Q_C H(t)] - \mathcal{N}^t[Q_A F(t_j), Q_B G(t_j), Q_C H(t_j)] \right) dt \right\|_{S^{(+)}} \end{aligned}$$

and

$$E_{2,(+)} := \left\| \sum_{j \in J} \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_2} \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \chi\left(\frac{t}{T^{10}} - j\right) \mathcal{N}^t [Q_A F(t_j), Q_B G(t_j), Q_C H(t_j)] dt \right\|_{S^{(+)}}.$$

We start with the $E_{1,(+)}$ part. The idea is to take advantage of the time localization induced by χ in the difference between the two \mathcal{N}^t terms in $E_{1,(+)}$. With this in mind, we decompose $E_{1,(+)}$ as follows

$$E_{1,(+)} \leq \sum_{j \in J} \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \chi\left(\frac{t}{T^{10}} - j\right) E_{1,j,(+)}(t) dt,$$

where

$$E_{1,j,(+)}(t) := \left\| \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_2} \left(\mathcal{N}^t [Q_A F(t), Q_B G(t), Q_C H(t)] - \mathcal{N}^t [Q_A F(t_j), Q_B G(t_j), Q_C H(t_j)] \right) \right\|_{S^{(+)}}.$$

By trilinearity of \mathcal{N}^t , we have

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^t [F(t), G(t), H(t)] - \mathcal{N}^t [F(t_j), G(t_j), H(t_j)] &= \mathcal{N}^t [F(t) - F(t_j), G(t), H(t)] \\ &\quad + \mathcal{N}^t [F(t_j), G(t) - G(t_j), H(t)] + \mathcal{N}^t [F(t_j), G(t_j), H(t) - H(t_j)]. \end{aligned}$$

Moreover, we use that in Λ_2 , we have one and only one dyadic number bigger than $T^{\frac{1}{6}}$, and the two others are smaller than $\frac{T^{\frac{1}{6}}}{16}$ to get

$$\begin{aligned} \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_2} \mathcal{N}^t [Q_A F(t), Q_B G(t), Q_C H(t)] &= \mathcal{N}^t [Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t), Q_{\leq \frac{T^{\frac{1}{6}}}{16}} G(t), Q_{\leq \frac{T^{\frac{1}{6}}}{16}} H(t)] \\ &\quad + \mathcal{N}^t [Q_{\leq \frac{T^{\frac{1}{6}}}{16}} F(t), Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} G(t), Q_{\leq \frac{T^{\frac{1}{6}}}{16}} H(t)] + \mathcal{N}^t [Q_{\leq \frac{T^{\frac{1}{6}}}{16}} F(t), Q_{\leq \frac{T^{\frac{1}{6}}}{16}} G(t), Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} H(t)]. \end{aligned}$$

Using that the Littlewood-Paley projectors are bounded on the L^2 based spaces S and S^+ , and applying Proposition 4.2.5, we obtain

$$\begin{aligned} E_{1,j,(+)}(t) &\lesssim (1 + |t|)^{-1} \left(\|F(t) - F(t_j)\|_{S^{(+)}} \|G(t)\|_{S^{(+)}} \|H(t)\|_{S^{(+)}} \right. \\ &\quad + \|F(t)\|_{S^{(+)}} \|G(t) - G(t_j)\|_{S^{(+)}} \|H(t)\|_{S^{(+)}} \\ &\quad \left. + \|F(t)\|_{S^{(+)}} \|G(t)\|_{S^{(+)}} \|H(t) - H(t_j)\|_{S^{(+)}} \right). \end{aligned}$$

Due to the support of χ , we have in $|t - t_j| \leq 2T^{\frac{9}{10}}$ in $E_{1,j,(+)}$. Thus, applying the fundamental Theorem of calculus, we obtain

$$\|F(t) - F(t_j)\|_{S^{(+)}} \lesssim \int_{t_j}^t \|\partial_t F(\tau)\|_{S^{(+)}} d\tau.$$

Therefore, with the definitions (4.2.5) and (4.2.6) of the norms X_T and X_T^+ , we obtain

$$\|\partial_t F(\tau)\|_S \lesssim \tau^{-1+3\delta} \|F\|_{X_T}, \quad \|\partial_t F(\tau)\|_{S^+} \lesssim \tau^{-1+7\delta} \|F\|_{X_T^+}.$$

Thus, we obtain

$$\begin{aligned} E_{1,j}(t) &\lesssim T^{-\frac{11}{10}+5\delta} \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T}, \\ E_{1,j,+}(t) &\lesssim T^{-\frac{11}{10}+17\delta} \|F\|_{X_T^+} \|G\|_{X_T^+} \|H\|_{X_T^+}. \end{aligned}$$

Back to $E_{1,(+)}$ and using the properties of q_T and χ , we have

$$\sum_{j \in J} \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \chi\left(\frac{t}{T^{\frac{9}{10}}} - j\right) dt \lesssim T,$$

then, we conclude that

$$\begin{aligned} E_1 &\lesssim T^{-\frac{1}{10}+5\delta} \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T} \lesssim T^{-\frac{1}{50}} \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T}, \\ E_{1,+} &\lesssim T^{-\frac{1}{10}+17\delta} \|F\|_{X_T^+} \|G\|_{X_T^+} \|H\|_{X_T^+} \lesssim T^{-\frac{1}{50}} \|F\|_{X_T^+} \|G\|_{X_T^+} \|H\|_{X_T^+}. \end{aligned}$$

It remains now to deal with the $E_{2,(+)}$ term. This time, we will not use the time localization because the trilinearity $\mathcal{N}^t[Q_A F(t_j), Q_B G(t_j), Q_C H(t_j)]$ is fixed. The idea here is to use the Strichartz estimate of Lemma 4.3.3 and the transfer principle of Lemma 4.2.3. From this perspective, we decompose $E_{2,(+)}$ as follows

$$E_{2,(+)} \leq \sum_{j \in J} \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_2} E_{2,j,(+)}^{A,B,C},$$

where

$$E_{2,j,(+)}^{A,B,C} := \left\| \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \chi\left(\frac{t}{T^{\frac{9}{10}}} - j\right) \mathcal{N}^t[Q_A F(t_j), Q_B G(t_j), Q_C H(t_j)] dt \right\|_{S^{(+)}}.$$

We first show that

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{(p,q,r,s) \in \mathcal{M}} \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \chi\left(\frac{t}{T^{\frac{9}{10}}} - j\right) \mathcal{I}^t[Q_A F_q^a, Q_B F_r^b, Q_C F_s^c] dt \right\|_{L_{x,p}^2} \\ &\lesssim (\max(A, B, C))^{-1} \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{L_{x,y}^2} \|F^{\sigma(b)}\|_S \|F^{\sigma(c)}\|_S. \end{aligned}$$

For $K \in L_{x,p}^2$, we introduce

$$\begin{aligned} I_K &:= \left\langle K, \sum_{(p,q,r,s) \in \mathcal{M}} \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \chi\left(\frac{t}{T^{\frac{9}{10}}} - j\right) \mathcal{I}^t[Q_A F_q^a, Q_B F_r^b, Q_C F_s^c] dt \right\rangle_{L_{x,p}^2 \times L_{x,p}^2} \\ &= \sum_{(p,q,r,s) \in \mathcal{M}} \int_{\mathbb{R}^2} q_T(t) \chi\left(\frac{t}{T^{\frac{9}{10}}} - j\right) U(t) (Q_A F_q^a) \overline{U(t) (Q_B F_r^b)} U(t) (Q_C F_s^c) \overline{U(t) (K_p)} dx dt. \end{aligned}$$

In view of Lemma 4.3.3, we would like to localize K_p . For that purpose, we first focus on the x -integral of the scalar product I_K and we set

$$I_{K,x} := \int_{\mathbb{R}} U(t) (Q_A F_q^a) \overline{U(t) (Q_B F_r^b)} U(t) (Q_C F_s^c) \overline{U(t) (K_p)} dx. \quad (4.3.11)$$

With the Littlewood-Paley decomposition of K_p , we thus have

$$I_{K,x} = \sum_D \int_{\mathbb{R}} U(t) (Q_A F_q^a) \overline{U(t) (Q_B F_r^b)} U(t) (Q_C F_s^c) \overline{U(t) (Q_D K_p)} dx.$$

Thus, with the Parseval identity, we have

$$I_{K,x} = \sum_D \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_x(U(t)(Q_A F_q^a)U(t)(Q_C F_s^c)) \overline{\mathcal{F}_x(U(t)(Q_B F_r^b)U(t)(Q_D K_p))} d\xi.$$

Computing the Fourier transforms, thanks to the properties of the projectors Q , we obtain

$$I_{K,x} = \sum_D \int_{\mathbb{R}^3} e^{2it(\kappa-\eta)(\eta+\kappa-\xi)} \phi\left(\frac{\eta}{A}\right) \phi\left(\frac{\xi-\eta}{C}\right) \phi\left(\frac{\kappa}{B}\right) \phi\left(\frac{\xi-\kappa}{D}\right) \widehat{F}_q^a(\xi) \widehat{F}_s^c(\xi) \overline{\widehat{F}_r^b(\xi) \widehat{K}_p(\xi)} d\xi d\eta d\kappa.$$

Therefore, due to the properties of ϕ which localize the frequencies near 1, we have in the support of integration

$$|\eta| \simeq A, \quad |\kappa| \simeq B, \quad |\xi - \eta| \simeq C, \quad |\xi - \kappa| \simeq D.$$

Now, using the triangle inequality $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$ and $\xi - \kappa = (\xi - \eta) + \eta - \kappa$, we have

$$\max(A, B, C) - (\text{med}(A, B, C) + \min(A, B, C)) \lesssim D \lesssim A + B + C.$$

But in Λ_2 , we have

$$\max(A, B, C) - (\text{med}(A, B, C) + \min(A, B, C)) \simeq A + B + C \simeq \max(A, B, C).$$

Thus, we can assume that $K_p = Q_D K_p$ where $D \simeq \max(A, B, C)$. Then, by Cauchy-Schwarz applied to equation (4.3.11), with $K_p = Q_D K_p$, we obtain

$$|I_{K,x}| \lesssim \|U(t)(Q_D K_p)U(t)(\widetilde{Q_{\min} F_{\min}})\|_{L_x^2} \|U(t)(\widetilde{Q_{\max} F_{\max}})U(t)(\widetilde{Q_{\text{med}} F_{\text{med}}})\|_{L_x^2},$$

where $\widetilde{F} = F$ or \overline{F} and $Q_{\min} F_{\min} = Q_{\sigma(A)} F_{\sigma(q)}^{\sigma(a)}$ with $\sigma(A) = \min(A, B, C)$. Applying Cauchy-Schwarz in t (q_T and χ are bounded), we obtain for I_K

$$|I_K| \lesssim \sum_{(p,q,r,s) \in \mathcal{M}} \|U(t)(Q_D K_p)U(t)(\widetilde{Q_{\min} F_{\min}})\|_{L_{x,t}^2} \|U(t)(\widetilde{Q_{\max} F_{\max}})U(t)(\widetilde{Q_{\text{med}} F_{\text{med}}})\|_{L_{x,t}^2}.$$

We can now apply Lemma 4.3.3 to obtain

$$\begin{aligned} |I_K| &\lesssim \sum_{(p,q,r,s) \in \mathcal{M}} D^{-\frac{1}{2}} \|K_p\|_{L_x^2} \|F_{\min}\|_{L_x^2} \times (\max(A, B, C))^{-\frac{1}{2}} \|F_{\max}\|_{L_x^2} \|F_{\text{med}}\|_{L_x^2} \\ &\lesssim (\max(A, B, C))^{-1} \sum_{(p,q,r,s) \in \mathcal{M}} \|K_p\|_{L_x^2} \|F_q^a\|_{L_x^2} \|F_r^b\|_{L_x^2} \|F_s^c\|_{L_x^2}. \end{aligned}$$

Applying Cauchy-Schwarz in p , we obtain

$$I_K \lesssim (\max(A, B, C))^{-1} \|K\|_{L_{x,p}^2} \left\| \sum_{(p,q,r,s) \in \mathcal{M}} \|F_q^a\|_{L_x^2} \|F_r^b\|_{L_x^2} \|F_s^c\|_{L_x^2} \right\|_{\ell_p^2}.$$

Thus, applying (4.2.12) for the norm of the sum, we get

$$I_K \lesssim (\max(A, B, C))^{-1} \|K\|_{L_{x,p}^2} \|F^a\|_{L_{x,y}^2} \|F^b\|_{L_{x,p}^2 \ell_p^1} \|F^c\|_{L_{x,p}^2 \ell_p^1}.$$

With Cauchy-Schwarz we have $\|F\|_{L^2_{x,y}} \lesssim \|F\|_S$, thus taking K equals to the right hand-side term of the definition of I_K , we obtain

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \chi\left(\frac{t}{T^{\frac{9}{10}}} - j\right) \mathcal{N}^t[Q_A F^a(t_j), Q_B F^b(t_j), Q_C F^c(t_j)] dt \right\|_{L^2_{x,y}} \\ \lesssim (\max(A, B, C))^{-1} \|F^a\|_{L^2_{x,y}} \|F^b\|_S \|F^c\|_S. \end{aligned}$$

By symmetry, we can change the roles of F^a, F^b and F^c . Thus, by Lemma 4.2.3, we obtain

$$\begin{aligned} E_{2,j}^{A,B,C} &\lesssim (\max(A, B, C))^{-1} \|F\|_S \|G\|_S \|H\|_S, \\ E_{2,j,+}^{A,B,C} &\lesssim (\max(A, B, C))^{-1} \|F\|_{S^+} \|G\|_{S^+} \|H\|_{S^+}. \end{aligned}$$

Now, by the definitions (4.2.5) and (4.2.6) of the norms X_T and X_T^+ , and using that we have $|t_j| \lesssim T$, we have

$$\|F(t_j)\|_S \lesssim T^\delta \|F\|_{X_T}, \quad \|F(t_j)\|_{S^+} \lesssim T^{5\delta} \|F\|_{X_T^+}.$$

Thus, back to $E_{2,(+)}$ we have

$$\begin{aligned} E_2 &\lesssim \sum_{j \in J} \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_2} (\max(A, B, C))^{-1} T^{3\delta} \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T}, \\ E_{2,+} &\lesssim \sum_{j \in J} \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_2} (\max(A, B, C))^{-1} T^{15\delta} \|F\|_{X_T^+} \|G\|_{X_T^+} \|H\|_{X_T^+}, \end{aligned}$$

But in Λ_2 , we have $\max(A, B, C) \geq T^{\frac{1}{6}}$. Recall that $\#J \lesssim T^{\frac{1}{10}}$, we obtain

$$\sum_{j \in J} \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_2} (\max(A, B, C))^{-1} \lesssim T^{\frac{1}{10}} \sum_{A \geq T^{\frac{1}{6}}} A^{-1} \lesssim T^{-\frac{1}{15}}.$$

Therefore, we have

$$\begin{aligned} E_2 &\lesssim T^{-\frac{1}{15}+3\delta} \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T} \lesssim T^{-\frac{1}{50}} \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T}, \\ E_{2,+} &\lesssim T^{-\frac{1}{15}+15\delta} \|F\|_{X_T^+} \|G\|_{X_T^+} \|H\|_{X_T^+} \lesssim T^{-\frac{1}{50}} \|F\|_{X_T^+} \|G\|_{X_T^+} \|H\|_{X_T^+}. \end{aligned}$$

Finally, we have

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_2} \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \mathcal{N}^t[Q_A F(t), Q_B G(t), Q_C H(t)] dt \right\|_S &\lesssim T^{-\frac{1}{50}} \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T}, \\ \left\| \sum_{(A,B,C) \in \Lambda_2} \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \mathcal{N}^t[Q_A F(t), Q_B G(t), Q_C H(t)] dt \right\|_{S^+} &\lesssim T^{-\frac{1}{50}} \|F\|_{X_T^+} \|G\|_{X_T^+} \|H\|_{X_T^+}, \end{aligned}$$

which completes the proof of the estimates (4.3.9) and (4.3.10), and ends the proof of Proposition 4.3.2. \square

4.3.2 The low frequency estimates

The goal of this subsection is to prove the following proposition for low frequencies localized functions.

Proposition 4.3.5. *Let $T \geq 1$. Assume that $F, G, H : \mathbb{R} \rightarrow S$ satisfy (4.3.2) and*

$$F = Q_{\leq T^{\frac{1}{6}}} F, \quad G = Q_{\leq T^{\frac{1}{6}}} G, \quad H = Q_{\leq T^{\frac{1}{6}}} H.$$

Then we can write

$$\tilde{\mathcal{N}}^t[F(t), G(t), H(t)] = \tilde{\mathcal{E}}_1^t[F(t), G(t), H(t)] + \mathcal{E}_2^t[F(t), G(t), H(t)],$$

where, if we note $\tilde{\mathcal{E}}_1(t) = \tilde{\mathcal{E}}_1^t[F(t), G(t), H(t)]$ and $\mathcal{E}_2(t) = \mathcal{E}_2^t[F(t), G(t), H(t)]$, then it holds that uniformly in $T \geq 1$ we have

$$T^{1+2\delta} \sup_{\frac{T}{4} \leq t \leq T} \|\tilde{\mathcal{E}}_1(t)\|_S \lesssim 1, \quad T^{\frac{1}{10}} \sup_{\frac{T}{4} \leq t \leq T} \|\mathcal{E}_3(t)\|_S \lesssim 1,$$

where $\mathcal{E}_2(t) = \partial_t \mathcal{E}_3(t)$. Assuming in addition that (4.3.4) holds, then we also have

$$T^{1+2\delta} \sup_{\frac{T}{4} \leq t \leq T} \|\tilde{\mathcal{E}}_1(t)\|_{S^+} \lesssim 1, \quad T^{\frac{1}{10}} \sup_{\frac{T}{4} \leq t \leq T} \|\mathcal{E}_3(t)\|_{S^+} \lesssim 1.$$

Decomposition of the nonlinearity $\tilde{\mathcal{N}}^t$ and introduction of a new norm

The idea is to decompose $\tilde{\mathcal{N}}^t$ as follows

$$\tilde{\mathcal{N}}^t[F(t), G(t), H(t)] = \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} e^{it\omega} \left(\mathcal{O}_1^t[F_q, G_r, H_s](\xi) + \mathcal{O}_2^t[F_q, G_r, H_s](\xi) \right),$$

where \mathcal{O}_1^t and \mathcal{O}_2^t are defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1^t[f, g, h](\xi) &:= \int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} (1 - \varphi(t^{\frac{1}{4}}\eta\kappa)) \hat{f}(\xi - \eta) \bar{\hat{g}}(\xi - \eta - \kappa) \hat{h}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa, \\ \mathcal{O}_2^t[f, g, h](\xi) &:= \int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} \varphi(t^{\frac{1}{4}}\eta\kappa) \hat{f}(\xi - \eta) \bar{\hat{g}}(\xi - \eta - \kappa) \hat{h}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa. \end{aligned}$$

For this subsection, we introduce a new norm defined by

$$\|f\|_Y := \|x^{\frac{9}{10}} f\|_{L_x^2} + \|f\|_{H_x^{\frac{3N}{4}}}.$$

The interest of this norm is to pass from bounds for functions of one Euclidean variable to bounds for functions defined in $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ by

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} \|F_p\|_Y \lesssim \|F\|_S. \quad (4.3.12)$$

Let us show this inequality, by the Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} \|x^{\frac{9}{10}} F_p\|_{L_x^2} \lesssim \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \langle p \rangle^2 \|x^{\frac{9}{10}} F_p\|_{L_x^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Then, by the Young inequality, we get

$$\langle p \rangle |x|^{\frac{9}{10}} \lesssim \langle p \rangle^{10} + |x|.$$

Thus,

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} \|x^{\frac{9}{10}} F_p\|_{L_x^2} \lesssim \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \|x F_p\|_{L_x^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \langle p \rangle^{20} \|F_p\|_{L_x^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|F\|_{L_x^2 H_y^{10}} + \|F\|_{L_{x,y}^2} \lesssim \|F\|_S.$$

For the second part of the Y norm, we just use the Cauchy-Schwarz inequality, and we obtain the desired bound (4.3.12). Before dealing with Proposition 4.3.5, we will focus on estimates on \mathcal{O}_1^t and \mathcal{O}_2^t in the two following lemmas.

The \mathcal{O}_1^t and \mathcal{O}_2^t estimates

First, for low frequencies localized functions, we have:

Lemma 4.3.6. *Assume that t, f^a, f^b, f^c satisfy*

$$\frac{T}{4} \leq t \leq T, \quad f^a = Q_{\leq T^{\frac{1}{6}}} f^a, \quad f^b = Q_{\leq T^{\frac{1}{6}}} f^b, \quad f^c = Q_{\leq T^{\frac{1}{6}}} f^c,$$

then

$$\|\mathcal{O}_2^t[f^a, f^b, f^c]\|_{L_\xi^2} \lesssim T^{-1+\frac{\delta}{100}} \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|f^{\sigma(a)}\|_{L_x^2} \|f^{\sigma(b)}\|_Y \|f^{\sigma(c)}\|_Y. \quad (4.3.13)$$

Proof. First, we remark that, due to the localization of f, g and h , we have

$$\mathcal{O}_2^t[f, g, h](\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} \varphi\left(t^{\frac{1}{4}}\eta\kappa\right) \varphi\left(\frac{\eta}{4T^{\frac{1}{6}}}\right) \varphi\left(\frac{\kappa}{4T^{\frac{1}{6}}}\right) \hat{f}(\xi - \eta) \bar{\hat{g}}(\xi - \eta - \kappa) \hat{h}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa. \quad (4.3.14)$$

Indeed, $f^a = Q_{\leq T^{\frac{1}{6}}} f^a$, thus by definition we get

$$\hat{f}(\xi - \eta) = \varphi\left(\frac{\xi - \eta}{T^{\frac{1}{6}}}\right) \hat{f}(\xi - \eta).$$

Writing the same for g and h , we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_2^t[f, g, h](\xi) = \\ \int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} \varphi\left(t^{\frac{1}{4}}\eta\kappa\right) \varphi\left(\frac{\xi - \eta}{T^{\frac{1}{6}}}\right) \varphi\left(\frac{\xi - \eta - \kappa}{T^{\frac{1}{6}}}\right) \varphi\left(\frac{\xi - \kappa}{T^{\frac{1}{6}}}\right) \hat{f}(\xi - \eta) \bar{\hat{g}}(\xi - \eta - \kappa) \hat{h}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa. \end{aligned}$$

In the support of this integral, we have $|\eta| \leq |(\xi - \eta - \kappa) - (\xi - \kappa)| \leq 4T^{\frac{1}{6}}$, and by the same computation, we have too $|\kappa| \leq 4T^{\frac{1}{6}}$. Moreover, $\varphi\left(\frac{\eta}{4T^{\frac{1}{6}}}\right)$ and $\varphi\left(\frac{\kappa}{4T^{\frac{1}{6}}}\right)$ are equal to 1 for such η, κ . Thus we have the expression (4.3.14), and we can consider the multiplier of $\mathcal{O}_2^t[f, g, h]$ defined by

$$m(\eta, \kappa) := \varphi\left(t^{\frac{1}{4}}\eta\kappa\right) \varphi\left(\frac{\eta}{4T^{\frac{1}{6}}}\right) \varphi\left(\frac{\kappa}{4T^{\frac{1}{6}}}\right). \quad (4.3.15)$$

The idea of taking another multiplier for the definition of $\mathcal{O}_2^t[f, g, h]$ is to have good properties on the Fourier transform of the multiplier. The Fourier transform of the multiplier appears while using the Plancherel's Theorem. Indeed, by Plancherel, we have first that, up to a constant,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{O}_2^t[f^a, f^b, f^c]\|_{L_\xi^2} &= \|\mathcal{F}\mathcal{O}_2^t[f^a, f^b, f^c]\|_{L_x^2} \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix\xi} e^{2it\eta\kappa} m(\eta, \kappa) \hat{f}(\xi - \eta) \bar{\hat{g}}(\xi - \eta - \kappa) \hat{h}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa d\xi \right\|_{L_x^2}. \end{aligned}$$

Set

$$J^t(x) := \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix\xi} e^{2it\eta\kappa} m(\eta, \kappa) \hat{f}(\xi - \eta) \bar{\hat{g}}(\xi - \eta - \kappa) \hat{h}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa d\xi,$$

we will show that

$$\|J^t\|_{L_x^2} \lesssim \|\mathcal{F}_{\eta, \kappa}^{-1} m\|_{L_{\mathbb{R}^2}^1} \|\mathcal{I}^t[f, g, h]\|_{L_x^2}. \quad (4.3.16)$$

Denoting by u, v the dual variables of η, κ and applying the Plancherel's Theorem a second time, we obtain

$$\begin{aligned} \|J^t\|_{L_x^2} &= \\ &\left\| \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{F}_{\eta, \kappa}^{-1} m(u, v) \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x\xi + u\eta + v\kappa)} e^{2it\eta\kappa} \hat{f}(\xi - \eta) \bar{\hat{g}}(\xi - \eta - \kappa) \hat{h}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa \right) dudvd\xi \right\|_{L_x^2}. \end{aligned}$$

We denote by $\tau_u f$ the translated function defined by $\tau_u f(x) := f(x - u)$, usual Fourier computations give $\widehat{\tau_u f}(\xi) = e^{-iu\xi} \hat{f}(\xi)$. With this notation, the previous equality becomes

$$\begin{aligned} \|J^t\|_{L_x^2} &= \\ &\left\| \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{F}_{\eta, \kappa}^{-1} m(u, v) \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi(x+u+v)} e^{2it\eta\kappa} \widehat{\tau_u f}(\xi - \eta) \bar{\hat{g}}(\xi - \eta - \kappa) \widehat{\tau_v h}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa \right) d\xi dudv \right\|_{L_x^2}. \end{aligned}$$

Therefore, we have

$$\|J^t\|_{L_x^2} = \left\| \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}_{\eta, \kappa}^{-1} m(u, v) \mathcal{I}^t[f, g, h](x + u + v) dudv \right\|_{L_x^2}.$$

Thus, by the Young inequality, we have (4.3.16). We now have to deal with the inverse Fourier term $\|\mathcal{F}_{\eta, \kappa}^{-1} m\|_{L_{\mathbb{R}^2}^1}$. By (4.3.15), we have

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\eta, \kappa}^{-1} m(u, v) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(u\eta + v\kappa)} \varphi\left(t^{\frac{1}{4}} \eta \kappa\right) \varphi\left(\frac{\eta}{4T^{\frac{1}{6}}}\right) \varphi\left(\frac{\kappa}{4T^{\frac{1}{6}}}\right) d\eta d\kappa \\ &= 16T^{\frac{1}{3}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i4T^{\frac{1}{6}}(u\eta + v\kappa)} \varphi\left(16T^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{4}} \eta \kappa\right) \varphi(\eta) \varphi(\kappa) d\eta d\kappa. \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_{\eta, \kappa}^{-1} m\|_{L_{\mathbb{R}^2}^1} &= 16T^{\frac{1}{3}} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{i4T^{\frac{1}{6}}(u\eta + v\kappa)} \varphi\left(16T^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{4}} \eta \kappa\right) \varphi(\eta) \varphi(\kappa) d\eta d\kappa \right| dudv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(u\eta + v\kappa)} \varphi\left(16T^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{4}} \eta \kappa\right) \varphi(\eta) \varphi(\kappa) d\eta d\kappa \right| dudv \end{aligned}$$

We remark that for $t \simeq T$, we have $16T^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{4}} \simeq T^{\frac{7}{12}}$. Therefore, we have

$$\|\mathcal{F}_{\eta, \kappa}^{-1} m\|_{L_{\mathbb{R}^2}^1} = \|I\|_{L_{x_1, x_2}^1},$$

where

$$I(x_1, x_2) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix_1\eta} e^{ix_2\kappa} \varphi(S\eta\kappa) \varphi(\eta) \varphi(\kappa) d\eta d\kappa \quad \text{and} \quad S \simeq T^{\frac{7}{12}}.$$

Let us show that, for all $\varepsilon > 0$, we have

$$\begin{cases} |I(x_1, x_2)| \lesssim T^\varepsilon (1 + |x_1|)^{-1} (1 + |x_2|)^{-1}, \\ |I(x_1, x_2)| \lesssim T^{\frac{7}{4}} (1 + |x_1|)^{-2} (1 + |x_2|)^{-2}. \end{cases} \quad (4.3.17)$$

Let us start with the first line of (4.3.17). We have to control the terms

$$|I(x_1, x_2)|, \quad |x_1 I(x_1, x_2)|, \quad |x_2 I(x_1, x_2)| \quad \text{and} \quad |x_1 x_2 I(x_1, x_2)|.$$

The bound of $|I(x_1, x_2)|$ is trivial, indeed, we have

$$|I(x_1, x_2)| \leq \int_{-2 \leq \eta \leq 2} \int_{-2 \leq \kappa \leq 2} 1 d\eta d\kappa \leq 4.$$

To deal with a multiplication by x_1 or x_2 , we integrate by parts. For example, for the multiplication for x_1 , we get

$$\int_{\mathbb{R}} x_1 e^{ix_1\eta} \varphi(S\eta\kappa) \varphi(\eta) d\eta = i \int_{\mathbb{R}} e^{ix_1\eta} \varphi(S\eta\kappa) \varphi'(\eta) d\eta + i \int_{\mathbb{R}} e^{ix_1\eta} S\kappa \varphi'(S\eta\kappa) \varphi(\eta) d\eta.$$

The first term is bounded by the same way of the bound of $|I(x_1, x_2)|$. For the second one, we use the control of η induced by the term $\varphi'(S\eta\kappa)$. We have

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix_1\eta} S\kappa \varphi'(S\eta\kappa) \varphi(\eta) d\eta \leq \|\varphi'\|_{L^\infty} \int_{|\eta| \lesssim \frac{2}{S\kappa}} S\kappa d\eta \lesssim 1.$$

Let us us now treat the $|x_1 x_2 I(x_1, x_2)|$ bound. We integrate by parts twice to obtain

$$\begin{aligned} x_1 x_2 I(x_1, x_2) &= \\ &- \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix_1\eta} e^{ix_2\kappa} (\varphi(S\eta\kappa) \varphi'(\eta) \varphi'(\kappa) + S\eta \varphi'(S\eta\kappa) \varphi'(\eta) \varphi(\kappa) + S\kappa \varphi'(S\eta\kappa) \varphi(\eta) \varphi'(\kappa)) d\eta d\kappa \\ &- \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix_1\eta} e^{ix_2\kappa} (S\varphi'(S\eta\kappa) \varphi(\eta) \varphi(\kappa) d\eta d\kappa + S^2 \eta \kappa \varphi''(S\eta\kappa) \varphi(\eta) \varphi(\kappa)) d\eta d\kappa =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

By the previous computations, we already have that $|I_1| \lesssim 1$. The second term provides us the desire estimate. First, we remark that $\text{supp}(\varphi') \in [-2, -1] \cup [1, 2]$. Then, the product $\varphi(S\eta\kappa) \varphi(\eta) \varphi(\kappa)$ is supported in $\{(\eta, \kappa), \frac{2}{S} < |\eta|, |\kappa| < 2\}$. The important fact here is that these supports do not contain 0. Thus, we have the $|x_1 x_2 I(x_1, x_2)|$ bound with

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix_1\eta} e^{ix_2\kappa} S\varphi'(S\eta\kappa) \varphi(\eta) \varphi(\kappa) d\eta d\kappa \right| &\lesssim \int_{\frac{1}{2S}}^2 e^{ix_1\eta} S \frac{1}{S\eta} d\eta \lesssim \ln(T), \\ \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix_1\eta} e^{ix_2\kappa} S^2 \eta \kappa \varphi''(S\eta\kappa) \varphi(\eta) \varphi(\kappa) d\eta d\kappa \right| &\lesssim \int_{\frac{1}{2S}}^2 e^{ix_1\eta} S^2 \eta \frac{1}{S^2 \eta^2} d\eta \lesssim \ln(T). \end{aligned}$$

Remark that $\ln(T) \lesssim T^\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, this completes the proof of the first line of (4.3.17). The proof of the second line comes from our last computation. The term with the highest power of S will be the term in $|x_1^2 x_2^2 I(x_1, x_2)|$ with $S^4 \varphi^{(4)}(S\eta\kappa)$. While integrating this

term, we lose a power of S , like in the computation for $|x_1 x_2 I(x_1, x_2)|$. It remains then a finite integral with a factor $S^3 \simeq T^{\frac{7}{4}}$. This concludes the proof of both inequalities of (4.3.17). Let us now analyze these two inequalities. The first line of (4.3.17) provides us an acceptable growth in T , but a non integrable contribution in x_1, x_2 , whereas in the second line, we have a bad contribution in T , but an integrable part in x_1, x_2 . The idea is thus to interpolate between these two inequalities in order to get an acceptable growth in T and an integrable contribution in x_1, x_2 . We obtain

$$|I(x_1, x_2)| \lesssim T^{\lambda\varepsilon + (1-\lambda)\frac{7}{4}} (1+x_1)^{-2+\lambda} (1+x_2)^{-2+\lambda}, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Then, choosing $\varepsilon < \frac{\delta}{100}$ and $\lambda = \frac{\frac{7}{4} - \frac{\delta}{100}}{\frac{7}{4} - \varepsilon} \in (0, 1)$, we obtain

$$\|\mathcal{F}_{\eta, \kappa}^{-1} m\|_{L^1_{\mathbb{R}^2}} = \|I\|_{L^1_{x_1, x_2}} \lesssim T^{\frac{\delta}{100}}. \quad (4.3.18)$$

This inequality (4.3.18), combined with equations (4.3.16) and (4.2.27), leads to

$$\|\mathcal{O}_2^t[f^a, f^b, f^c]\|_{L^2_\xi} \lesssim T^{\frac{\delta}{100}} \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|f^{\sigma(a)}\|_{L^2_x} \|e^{it\partial_{xx}} f^{\sigma(b)}\|_{L^\infty_x} \|e^{it\partial_{xx}} f^{\sigma(c)}\|_{L^\infty_x}. \quad (4.3.19)$$

Now, with the Schrödinger dispersive bound (4.2.11) and the bound (4.2.10), we have

$$\|e^{it\partial_{xx}} f\|_{L^\infty_x} \lesssim T^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2_x}^{1-\frac{1}{2\alpha}} \|x^\alpha f\|_{L^2_x}^{\frac{1}{2\alpha}}, \quad \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \quad (4.3.20)$$

For $\alpha = \frac{9}{10}$, we obtain

$$\|e^{it\partial_{xx}} f\|_{L^\infty_x} \lesssim T^{-\frac{1}{2}} \|f\|_Y. \quad (4.3.21)$$

This inequality, combined with (4.3.19), completes the proof of this lemma. \square

Remark 4.3.7. *We have*

$$\mathcal{O}_1^t[f, g, h] + \mathcal{O}_2^t[f, g, h] = \widehat{\mathcal{I}^t[f, g, h]},$$

and by (4.2.27), $\widehat{\mathcal{I}^t[f, g, h]}$ satisfies a better bound than $\mathcal{O}_2^t[f, g, h]$. We deduce that the term $\mathcal{O}_1^t[f, g, h]$ satisfies the same bound (4.3.13).

In fact, we have a better bound for $\mathcal{O}_1^t[f, g, h]$, as shown in the following lemma.

Lemma 4.3.8. *Assume that t, f^a, f^b, f^c satisfy*

$$\frac{T}{4} \leq t \leq T, \quad f^a = Q_A f^a, \quad f^b = Q_B f^b, \quad f^c = Q_C f^c, \quad \max(A, B, C) \leq T^{\frac{1}{6}},$$

then

$$\|\mathcal{O}_1^t[f^a, f^b, f^c]\|_{L^2_\xi} \lesssim T^{-\frac{6}{5}} \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|f^{\sigma(a)}\|_{L^2_x} \|f^{\sigma(b)}\|_Y \|f^{\sigma(c)}\|_Y.$$

Proof. As seen in Remark 4.3.7, \mathcal{O}_1^t has at least the same behavior as \mathcal{O}_2^t , thus we already have

$$\|\mathcal{O}_1^t[f^a, f^b, f^c]\|_{L^2_\xi} \lesssim T^{\frac{\delta}{100}} \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|f^{\sigma(a)}\|_{L^2_x} \|e^{it\partial_{xx}} f^{\sigma(b)}\|_{L^\infty_x} \|e^{it\partial_{xx}} f^{\sigma(c)}\|_{L^\infty_x}. \quad (4.3.22)$$

By symmetry, we just have to show that

$$\|\mathcal{O}_1^t[f, g, h]\|_{L_\xi^2} \lesssim T^{-\frac{6}{5}} \|f\|_{L_x^2} \|g\|_Y \|h\|_Y.$$

To improve the inequality (4.3.22), the idea is to do a spatial decomposition of g and h . Set

$$g = g_c + g_e, \quad g_c(x) = \varphi\left(\frac{x}{D}\right)g(x), \quad h = h_c + h_e, \quad h_c(x) = \varphi\left(\frac{x}{D}\right)h(x), \quad D = T^{\frac{4}{3}}.$$

Thus, by (4.3.22), we have

$$\begin{aligned} \|\mathcal{O}_1^t[f, g, h]\|_{L_\xi^2} &\lesssim T^{\frac{\delta}{100}} \|f\|_{L_x^2} \left(\|e^{it\partial_{xx}} g_c\|_{L_x^\infty} \|e^{it\partial_{xx}} h_c\|_{L_x^\infty} + \|e^{it\partial_{xx}} g_c\|_{L_x^\infty} \|e^{it\partial_{xx}} h_e\|_{L_x^\infty} \right. \\ &\quad \left. + \|e^{it\partial_{xx}} g_e\|_{L_x^\infty} \|e^{it\partial_{xx}} h_c\|_{L_x^\infty} + \|e^{it\partial_{xx}} g_e\|_{L_x^\infty} \|e^{it\partial_{xx}} h_e\|_{L_x^\infty} \right). \end{aligned}$$

For the extern terms g_e and h_e , the important behavior due to the localization comes from

$$\|x^\alpha g_e\|_{L_x^2} \leq \sup_{|x| \geq T^{\frac{4}{3}}} |x|^{\alpha - \frac{9}{10}} \|x^{\frac{9}{10}} g_e\|_{L_x^2} \lesssim T^{\frac{4}{3}(\alpha - \frac{9}{10})} \|g\|_Y,$$

where $\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{9}{10}]$. Thus, for g_e (the same holds for h_e), equation (4.3.20) becomes

$$\|e^{it\partial_{xx}} g_e\|_{L_x^\infty} \lesssim T^{-\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\beta} \|g\|_Y,$$

where $\beta = \frac{\frac{9}{10} - \alpha}{2\alpha} \in [0, \frac{2}{5})$. From now we fix $\beta = \frac{1}{5}$ (i.e $\alpha = \frac{9}{14} \in (\frac{1}{2}, 1)$). With this equation, the embedding (4.3.21) for g_c and h_c and the bound (4.3.22), we obtain

$$\begin{aligned} \|\mathcal{O}_1^t[f, g_e, h_e]\|_{L_\xi^2} &\lesssim T^{\frac{\delta}{100} - 1 - \frac{8}{15}} \|f\|_{L_x^2} \|g\|_Y \|h\|_Y, \\ \|\mathcal{O}_1^t[f, g_e, h_c]\|_{L_\xi^2} + \|\mathcal{O}_1^t[f, g_c, h_e]\|_{L_\xi^2} &\lesssim T^{\frac{\delta}{100} - 1 - \frac{4}{15}} \|f\|_{L_x^2} \|g\|_Y \|h\|_Y. \end{aligned}$$

Remind that $\delta < 10^{-3}$, we have $\frac{\delta}{100} - \frac{4}{15} < -\frac{3}{15} = -\frac{1}{5}$, thus we have an acceptable bound for these three terms. It remains to deal with the $\mathcal{O}_1^t[f, g_c, h_c]$ term. This time, for the centered terms g_c and h_c , the important behavior due to the localization comes from

$$\begin{aligned} \|x^{1+\alpha} g_c\|_{L_x^2} &\leq \sup_{|x| \leq T^{\frac{4}{3}}} |x|^{\alpha + \frac{1}{10}} \|x^{\frac{9}{10}} g_c\|_{L_x^2} \lesssim T^{\frac{4}{3}(\alpha + \frac{1}{10})} \|g\|_Y, \\ \|x g_c\|_{L_x^2} &\leq \sup_{|x| \leq T^{\frac{4}{3}}} |x|^{\frac{1}{10}} \|x^{\frac{9}{10}} g_c\|_{L_x^2} \lesssim T^{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{10}} \|g\|_Y. \end{aligned}$$

Thus, for g_c (the same holds for h_c), equation (4.3.20) applied to xg_c becomes

$$\|e^{it\partial_{xx}} xg_c\|_{L_x^\infty} \lesssim T^{\frac{3}{10}} \|g\|_Y. \quad (4.3.23)$$

The frequency localization of f, g and h allows us to do an integration by parts in κ to obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1^t[f, g_c, h_c] &= \frac{-1}{2it} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\eta} e^{2it\eta\kappa} \hat{f}(\xi - \eta) \partial_\kappa \left[(1 - \varphi(t^{\frac{1}{4}}\eta\kappa)) \widehat{g}_c(\xi - \eta - \kappa) \widehat{h}_c(\xi - \kappa) \right] d\eta d\kappa \\ &=: \mathcal{O}_{1,\varphi}^t[f, g_c, h_c] + \mathcal{O}_{1,g}^t[f, g_c, h_c] + \mathcal{O}_{1,h}^t[f, g_c, h_c], \end{aligned}$$

where $\mathcal{O}_{1,\varphi}^t[f, g_c, h_c]$ is the term where the derivative in κ falls in φ . For the $\mathcal{O}_{1,\varphi}^t[f, g_c, h_c]$ term, we have

$$\mathcal{O}_{1,\varphi}^t[f, g_c, h_c] = \frac{t^{\frac{1}{4}}}{2it} \int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} \varphi'(t^{\frac{1}{4}}\eta\kappa) \hat{f}(\xi - \eta) \widehat{g_c}(\xi - \eta - \kappa) \widehat{h_c}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa.$$

We use the bound (4.2.27) to get

$$\|\mathcal{O}_{1,\varphi}^t[f, g_c, h_c]\|_{L_\xi^2} \lesssim T^{-\frac{3}{4}} \|f\|_{L_x^2} \|e^{it\partial_{xx}} g_c\|_{L_x^\infty} \|e^{it\partial_{xx}} h_c\|_{L_x^\infty}.$$

Then, by equation (4.3.21), we obtain

$$\|\mathcal{O}_{1,\varphi}^t[f, g_c, h_c]\|_{L_\xi^2} \lesssim T^{-\frac{3}{4}-1} \|f\|_{L_x^2} \|g\|_Y \|h\|_Y,$$

which is an acceptable bound. For the $\mathcal{O}_{1,g}^t[f, g_c, h_c]$ term, we have

$$\mathcal{O}_{1,g}^t[f, g_c, h_c] = \frac{-1}{2t} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\eta} e^{2it\eta\kappa} (1 - \varphi(t^{\frac{1}{4}}\eta\kappa)) \hat{f}(\xi - \eta) \widehat{xg_c}(\xi - \eta - \kappa) \widehat{h_c}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa.$$

Due to the localization assumption of the lemma, in the support of integration, we have $\eta, \kappa \lesssim T^{\frac{1}{6}}$. Thus we remark that in the support of $(1 - \varphi(t^{\frac{1}{4}}\eta\kappa))$, we have

$$\eta \gtrsim \frac{1}{t^{\frac{1}{4}}\kappa} \gtrsim T^{-\frac{5}{12}}.$$

Therefore, we have

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{O}_{1,g}^t[f, g_c, h_c]\|_{L_\xi^2} \\ & \lesssim T^{-\frac{7}{12}} \left\| \int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} \frac{(1 - \varphi(t^{\frac{1}{4}}\eta\kappa))}{T^{\frac{5}{12}}\eta} \hat{f}(\xi - \eta) \widehat{xg_c}(\xi - \eta - \kappa) \widehat{h_c}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa \right\|_{L_\xi^2}. \end{aligned}$$

We bound the right hand-side of this inequality by using (4.3.22),

$$\|\mathcal{O}_{1,g}^t[f, g_c, h_c]\|_{L_\xi^2} \lesssim T^{-\frac{7}{12} + \frac{\delta}{100}} \|f\|_{L_x^2} \|e^{it\partial_{xx}} xg_c\|_{L_x^\infty} \|e^{it\partial_{xx}} h_c\|_{L_x^\infty}.$$

Then, by equations (4.3.23) for g_c and (4.3.21) for h_c , we have

$$\|\mathcal{O}_{1,g}^t[f, g_c, h_c]\|_{L_\xi^2} \lesssim T^{-\frac{7}{12} + \frac{\delta}{100} - 1 + \frac{3}{10}} \|f\|_{L_x^2} \|g\|_Y \|h\|_Y,$$

and $-\frac{7}{12} + \frac{\delta}{100} + \frac{3}{10} = -\frac{17}{60} + \frac{\delta}{100} < -\frac{1}{5}$. By symmetry, we have the same bound for the term $\mathcal{O}_{1,h}^t[f, g_c, h_c]$, then for $\mathcal{O}_1^t[f, g_c, h_c]$, and finally for $\mathcal{O}_1^t[f, g, h]$. \square

Proof of Proposition 4.3.5

We are now able to deal with the proof of Proposition 4.3.5.

Proof. We fix $t \in [\frac{T}{4}, T]$. Recall that

$$\tilde{\mathcal{N}}^t[F(t), G(t), H(t)] = \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} e^{it\omega} \left(\mathcal{O}_1^t[F_q, G_r, H_s](\xi) + \mathcal{O}_2^t[F_q, G_r, H_s](\xi) \right),$$

the idea is to show that the \mathcal{O}_1^t part of the sum corresponds to $\tilde{\mathcal{E}}_1^t$, whereas the \mathcal{O}_2^t part splits itself in $\tilde{\mathcal{E}}_1^t$ and \mathcal{E}_2^t .

- The \mathcal{O}_1^t sum.

Using Lemma 4.3.8, we have

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} e^{it\omega} \mathcal{O}_1^t[F_q^a, F_r^b, F_s^c] \right\|_{L_{\xi,p}^2} \\ & \lesssim T^{-\frac{6}{5}} \left\| \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F_{\sigma(q)}^{\sigma(a)}\|_{L_x^2} \|F_{\sigma(r)}^{\sigma(b)}\|_Y \|F_{\sigma(s)}^{\sigma(c)}\|_Y \right\|_{\ell_p^2}. \end{aligned}$$

Thus, by the bound (4.2.12), we obtain

$$\left\| \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} e^{it\omega} \mathcal{O}_1^t[F_q^a, F_r^b, F_s^c] \right\|_{L_{\xi,p}^2} \lesssim T^{-\frac{6}{5}} \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{L_x^2 \ell_p^2} \|F^{\sigma(b)}\|_Y \|F^{\sigma(c)}\|_Y.$$

Therefore, using the relation (4.3.12) to deal with the Y norm, we obtain

$$\left\| \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} e^{it\omega} \mathcal{O}_1^t[F_q^a, F_r^b, F_s^c] \right\|_{L_{\xi,p}^2} \lesssim T^{-\frac{6}{5}} \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{L_{x,y}^2} \|F^{\sigma(b)}\|_S \|F^{\sigma(c)}\|_S.$$

We can now use equations (4.2.25) and (4.2.26) from Lemma 4.2.3 to obtain

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} e^{it\omega} \mathcal{O}_1^t[F_q^a, F_r^b, F_s^c] \right\|_S \lesssim T^{-\frac{6}{5}} \|F^a\|_S \|F^b\|_S \|F^c\|_S \\ & \lesssim T^{-\frac{6}{5}+3\delta} \|F^a\|_{X_T} \|F^b\|_{X_T} \|F^c\|_{X_T}, \\ & \left\| \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} e^{it\omega} \mathcal{O}_1^t[F_q^a, F_r^b, F_s^c] \right\|_{S^+} \lesssim T^{-\frac{6}{5}+7\delta} \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{X_T^+} \|F^{\sigma(b)}\|_{X_T} \|F^{\sigma(c)}\|_{X_T}. \end{aligned}$$

Thus, under the assumptions (4.3.2) and (4.3.4), $\tilde{\mathcal{O}}_1(t) := \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} e^{it\omega} \mathcal{O}_1^t[F_q^a, F_r^b, F_s^c]$ satisfies

$$T^{1+2\delta} \sup_{\frac{T}{4} \leq t \leq T} \|\tilde{\mathcal{O}}_1(t)\|_S \lesssim 1 \quad \text{and} \quad T^{1+2\delta} \sup_{\frac{T}{4} \leq t \leq T} \|\tilde{\mathcal{O}}_1(t)\|_{S^+} \lesssim 1.$$

- The \mathcal{O}_2^t sum.

We do the exact same proof as in the \mathcal{O}_1^t case but starting with Lemma 4.3.6. We obtain

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} e^{it\omega} \mathcal{O}_2^t[F_q^a, F_r^b, F_s^c] \right\|_S \lesssim T^{-1+\frac{\delta}{100}} \|F^a\|_S \|F^b\|_S \|F^c\|_S, \\ & \left\| \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} e^{it\omega} \mathcal{O}_2^t[F_q^a, F_r^b, F_s^c] \right\|_{S^+} \lesssim T^{-1+\frac{\delta}{100}} \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{S^+} \|F^{\sigma(b)}\|_S \|F^{\sigma(c)}\|_S. \end{aligned}$$

We need a better decay than $T^{-1+\frac{\delta}{100}}$, for that purpose, we use that

$$\begin{aligned} e^{it\omega} \mathcal{O}_2^t[f, g, h](\xi) &= \partial_t \left(\frac{e^{it\omega}}{i\omega} \mathcal{O}_2^t[f, g, h](\xi) \right) \\ &\quad - \frac{e^{it\omega}}{i\omega} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t \left(e^{2it\eta\kappa} \varphi(t^{\frac{1}{4}}\eta\kappa) \right) \hat{f}(\xi - \eta) \bar{\hat{g}}(\xi - \eta - \kappa) \hat{h}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa \\ &\quad - \frac{e^{it\omega}}{i\omega} \left(\mathcal{O}_2^t[\partial_t f, g, h](\xi) + \mathcal{O}_2^t[f, \partial_t g, h](\xi) + \mathcal{O}_2^t[f, g, \partial_t h](\xi) \right). \end{aligned}$$

In $\tilde{\mathcal{N}}^t$, we sum over $\omega(p, q, r, s) = p^2 - q^2 + r^2 - s^2 \neq 0$. Therefore, the division by ω in the previous equality doesn't lead to small divisor problems. Indeed, $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, so $|\omega| \geq 1$ in $\tilde{\mathcal{N}}^t$. Let us show that the two last lines of the previous inequality contributes to $\tilde{\mathcal{E}}_1^t$. For the third line terms, we remark that with (4.3.2), we have $\|F\|_S \lesssim T^\delta$ and $\|\partial_t F\|_S \lesssim T^{-1+3\delta}$. Thus, we obtain for example (using (4.3.4) for the second line),

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} \frac{e^{it\omega}}{i\omega} \mathcal{O}_2^t[\partial_t F_q, G_r, H_s] \right\|_S &\lesssim T^{-2+\frac{\delta}{100}+5\delta} \lesssim T^{-1-2\delta}, \\ \left\| \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} \frac{e^{it\omega}}{i\omega} \mathcal{O}_2^t[\partial_t F_q, G_r, H_s] \right\|_{S^+} &\lesssim T^{-2+\frac{\delta}{100}+9\delta} \lesssim T^{-1-2\delta}. \end{aligned}$$

By symmetry, the same holds for the terms with the time derivative on G or H , and all the third line terms contributes to $\tilde{\mathcal{E}}_1^t$. For the second line term, we have

$$\partial_t \left(e^{2it\eta\kappa} \varphi(t^{\frac{1}{4}}\eta\kappa) \right) = \eta\kappa \left(2i\varphi(t^{\frac{1}{4}}\eta\kappa) + \frac{t^{-\frac{3}{4}}}{4} \varphi'(t^{\frac{1}{4}}\eta\kappa) \right) e^{2it\eta\kappa}.$$

But in the support of integration, we have $|\eta\kappa| \lesssim T^{-\frac{1}{4}}$. Thus, if we note

$$\mathcal{O}_{2,\varphi}^t[F_q^a, F_r^b, F_s^c] := \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t \left(e^{2it\eta\kappa} \varphi(t^{\frac{1}{4}}\eta\kappa) \right) \hat{f}(\xi - \eta) \bar{\hat{g}}(\xi - \eta - \kappa) \hat{h}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa,$$

we have

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} \frac{e^{it\omega}}{i\omega} \mathcal{O}_{2,\varphi}^t[F_q^a, F_r^b, F_s^c] \right\|_S &\lesssim T^{-1-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{100}} \|F^a\|_S \|F^b\|_S \|F^c\|_S, \\ \left\| \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} \frac{e^{it\omega}}{i\omega} \mathcal{O}_{2,\varphi}^t[F_q^a, F_r^b, F_s^c] \right\|_{S^+} &\lesssim T^{-1-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{100}} \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{S^+} \|F^{\sigma(b)}\|_S \|F^{\sigma(c)}\|_S. \end{aligned}$$

Finally, this term contributes too to $\tilde{\mathcal{E}}_1^t$. It remains to deal with the first line term. We define \mathcal{E}_3 by

$$\mathcal{F}_{x,y} \mathcal{E}_3[F^a(t), F^b(t), F^c(t)](\xi, p) := \sum_{\omega \neq 0} \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_\omega} \frac{e^{it\omega}}{i\omega} \mathcal{O}_2^t[F_q^a, F_r^b, F_s^c](\xi).$$

By the estimates on \mathcal{O}_2^t , always using that $\frac{1}{\omega} \leq 1$, the bounds (4.3.2) and (4.3.4) give us

$$\|\mathcal{E}_3(t)\|_S \lesssim T^{-1+\frac{\delta}{100}+3\delta} \lesssim T^{-\frac{1}{10}}, \quad \|\mathcal{E}_3(t)\|_{S^+} \lesssim T^{-1+\frac{\delta}{100}+7\delta} \lesssim T^{-\frac{1}{10}}.$$

This completes the estimate of the \mathcal{E}_3 term and the proof of Proposition 4.3.5. \square

4.3.3 The resonant level set

We study now the resonant part Π^t defined in (4.3.7). In view of Theorem 4.3.1, we want to show that Π^t stay close to $\frac{\pi}{t}\mathcal{R}$ where \mathcal{R} is defined in (4.2.9). In this subsection, we use the following norm

$$\|F\|_{\tilde{Z}_t} := \|F\|_Z + (1 + |t|)^{-\delta} \|F\|_S. \quad (4.3.24)$$

We remark first that this norm is controlled by the norm X_T defined in (4.2.5). The second interest of this norm is that \tilde{Z}_t is an acceptable norm for the transfer principle of Lemma 4.2.3, because this norm is based on the $L_{x,y}^2$ norm. The purpose of this subsection is to prove the following

Proposition 4.3.9. *Let $t \geq 1$. Π^t satisfies the estimates*

$$\|\Pi^t[F^a, F^b, F^c]\|_S \lesssim (1 + |t|)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{\tilde{Z}_t} \|F^{\sigma(b)}\|_{\tilde{Z}_t} \|F^{\sigma(c)}\|_S, \quad (4.3.25)$$

$$\begin{aligned} \|\Pi^t[F^a, F^b, F^c]\|_{S^+} &\lesssim (1 + |t|)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{\tilde{Z}_t} \|F^{\sigma(b)}\|_{\tilde{Z}_t} \|F^{\sigma(c)}\|_{S^+} \\ &\quad + (1 + |t|)^{-1+2\delta} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{\tilde{Z}_t} \|F^{\sigma(b)}\|_S \|F^{\sigma(c)}\|_S. \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

Moreover, we have the same behavior for \mathcal{R} ,

$$\|\frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F^a, F^b, F^c]\|_S \lesssim (1 + |t|)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{\tilde{Z}_t} \|F^{\sigma(b)}\|_{\tilde{Z}_t} \|F^{\sigma(c)}\|_S, \quad (4.3.27)$$

$$\begin{aligned} \|\frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F^a, F^b, F^c]\|_{S^+} &\lesssim (1 + |t|)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{\tilde{Z}_t} \|F^{\sigma(b)}\|_{\tilde{Z}_t} \|F^{\sigma(c)}\|_{S^+} \\ &\quad + (1 + |t|)^{-1+2\delta} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{\tilde{Z}_t} \|F^{\sigma(b)}\|_S \|F^{\sigma(c)}\|_S. \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

Furthermore, Π^t is close to $\frac{\pi}{t}\mathcal{R}$ in the following sense

$$\|\Pi^t[F, G, H] - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F, G, H]\|_Z \lesssim (1 + |t|)^{-\frac{17}{16}} \|F\|_S \|G\|_S \|H\|_S, \quad (4.3.29)$$

$$\|\Pi^t[F, G, H] - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F, G, H]\|_S \lesssim (1 + |t|)^{-\frac{9}{8}} \|F\|_{S^+} \|G\|_{S^+} \|H\|_{S^+}. \quad (4.3.30)$$

Before starting the proof of this proposition, we state two lemmas.

About the behavior of the resonant part

The first lemma we need concerns the resonant part \mathcal{R} , we have

Lemma 4.3.10. *For every sequences $(a^1)_p$, $(a^2)_p$ and $(a^3)_p$ indexed by \mathbb{Z} , we have*

$$\left\| \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} a_q^1 \bar{a}_r^2 a_s^3 \right\|_{\ell_p^2} \lesssim \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|a^{\sigma(1)}\|_{\ell_p^2} \|a^{\sigma(2)}\|_{h_p^1} \|a^{\sigma(3)}\|_{h_p^1}. \quad (4.3.31)$$

More generally, for all $\nu \geq 0$, it holds

$$\left\| \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} a_q^1 \bar{a}_r^2 a_s^3 \right\|_{h_p^\nu} \lesssim \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|a^{\sigma(1)}\|_{h_p^\nu} \|a^{\sigma(2)}\|_{h_p^1} \|a^{\sigma(3)}\|_{h_p^1}. \quad (4.3.32)$$

Remark 4.3.11. — *The operator we deal with here is not really the resonant non-linearity \mathcal{R} , because we don't deal with the ξ variable. In fact, this operator is the reduced resonant nonlinearity we introduce later in Section 4.4.*

- *The bound (4.3.31) is very close to the bound (4.2.12) we obtain in Subsection 4.2.3. In the actual case, we have a deeper condition on the frequency set, because we take the resonant level set Γ_0 , whereas we have a bigger momentum set \mathcal{M} in (4.2.12). The new condition $p^2 - q^2 + r^2 - s^2 = 0$ allow us here to find this more accurate bound.*

Proof. We proceed by duality. Set the sequence $(R)_p = (\sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} a_q^1 \bar{a}_r^2 a_s^3)_p$. For $a^0 \in \ell_p^2$ we have

$$\langle a^0, R \rangle_{\ell_p^2 \times \ell_p^2} = \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} a_p^0 \bar{a}_q^1 a_r^2 \bar{a}_s^3.$$

But in one dimension, $(p, q, r, s) \in \Gamma_0$ implies $\{p, r\} = \{q, s\}$ (see Remark 4.4.3). Thus

$$\langle a^0, R \rangle_{\ell_p^2 \times \ell_p^2} = \sum_{p,r \in \mathbb{Z}} a_p^0 \bar{a}_p^1 a_r^2 \bar{a}_r^3 + \sum_{p,r \in \mathbb{Z}} a_p^0 \bar{a}_r^1 a_r^2 \bar{a}_p^3 - \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^0 \bar{a}_p^1 a_p^2 \bar{a}_p^3.$$

For the first term, we have by Cauchy-Schwarz in p and r

$$\sum_{p,r \in \mathbb{Z}} a_p^0 \bar{a}_p^1 a_r^2 \bar{a}_r^3 = \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^0 \bar{a}_p^1 \right) \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r^2 \bar{a}_r^3 \right) \leq \|a^0\|_{\ell_p^2} \|a^1\|_{\ell_p^2} \|a^2\|_{\ell_p^2} \|a^3\|_{\ell_p^2}.$$

The same holds for the second term. For the last term, we have by Cauchy Schwarz

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p^0 \bar{a}_p^1 a_p^2 \bar{a}_p^3 \leq \|a^0\|_{\ell_p^2} \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|a^{\sigma(1)}\|_{\ell_p^2} \|a^{\sigma(2)}\|_{\ell_p^\infty} \|a^{\sigma(3)}\|_{\ell_p^\infty},$$

which is sufficient due to the embedding $h_p^1 \hookrightarrow \ell_p^2 \hookrightarrow \ell_p^\infty$. Therefore, we get

$$\langle a^0, R \rangle_{\ell_p^2 \times \ell_p^2} \lesssim \|a^0\|_{\ell_p^2} \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|a^{\sigma(1)}\|_{\ell_p^2} \|a^{\sigma(2)}\|_{h_p^1} \|a^{\sigma(3)}\|_{h_p^1}.$$

This completes the proof of (4.3.31). For equation (4.3.32), we remark that

$$\text{for } (p, q, r, s) \in \Gamma_0, \quad p^2 - q^2 + r^2 - s^2 = 0 \Rightarrow \langle p \rangle^\nu \leq \langle q \rangle^\nu + \langle r \rangle^\nu + \langle s \rangle^\nu.$$

In fact, here we have $\langle p \rangle = \langle q \rangle$ or $\langle s \rangle$, but the previous inequality is sufficient for the estimate. Indeed, this inequality implies

$$\langle a^0, \langle p \rangle^\nu R \rangle_{\ell_p^2 \times \ell_p^2} \leq \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} |a_p^0| \left(\langle q \rangle^\nu |\bar{a}_q^1 a_r^2 \bar{a}_s^3| + |\bar{a}_q^1| \langle r \rangle^\nu |a_r^2 \bar{a}_s^3| + |\bar{a}_q^1 a_r^2| \langle s \rangle^\nu |\bar{a}_s^3| \right).$$

Then, it suffices to apply (4.3.31) to each part of the sum, taking the ℓ_p^2 for the term in the sum with the weight. This concludes the proof of this lemma. \square

Remark 4.3.12. *The fact that we take $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ is crucial for this proof. In higher dimension (in $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$ with $2 \leq d \leq 4$), this method doesn't fit anymore, whereas the result always holds. Taking $(p, q, r, s) \in \Gamma_0$ implies that p, q, r, s are the vertices of a rectangle. Thus, in dimension one, we have a flat rectangle and Γ_0 is a trivial set. In dimension 2 or more, Γ_0 becomes much harder, and the proof of Lemma 4.3.10 becomes more technical, as we can see in [27, Lemma 7.1].*

Remark 4.3.13. *From this lemma and Lemma 4.2.3, we deduce the following estimates about the resonant nonlinearity \mathcal{R} :*

$$\|\mathcal{R}[F^1, F^2, F^3]\|_S \lesssim \max_{\sigma \in \mathfrak{G}_3} \|F^{\sigma(1)}\|_S \|F^{\sigma(1)}\|_Z \|F^{\sigma(1)}\|_Z, \quad (4.3.33)$$

$$\|\mathcal{R}[F, G, H]\|_Z \lesssim \|F\|_Z \|G\|_Z \|H\|_Z. \quad (4.3.34)$$

A localization estimate

The second lemma we need is a result about localization, which gives us a key argument to show that Π^t and $\frac{\pi}{t}\mathcal{R}$ are close.

Lemma 4.3.14. *Assume that $f^a, f^b, f^c \in L_x^2$ and*

$$f^a(x) = \varphi(s^{-\frac{1}{4}}x)f^a(x), \quad f^b(x) = \varphi(s^{-\frac{1}{4}}x)f^b(x), \quad f^c(x) = \varphi(s^{-\frac{1}{4}}x)f^c(x), \quad s \geq 1.$$

Then, for ν an integer, we have

$$\begin{aligned} |\xi|^\nu \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta\kappa} \widehat{f^a}(\xi - \eta) \overline{\widehat{f^b}(\xi - \eta - \kappa)} \widehat{f^c}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa - \frac{\pi}{s} \widehat{f^a}(\xi) \overline{\widehat{f^b}(\xi)} \widehat{f^c}(\xi) \right| \\ \lesssim s^{-\frac{9}{8}} \min_{\sigma \in \mathfrak{G}_3} \|f^{\sigma(a)}\|_{H_x^\nu} \|f^{\sigma(b)}\|_{L_x^2} \|f^{\sigma(c)}\|_{L_x^2}. \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

Proof. We begin with the case $\nu = 0$. First, the idea is to rewrite the left hand-side of the equation to obtain a better form. With the Fourier transform definition, we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta\kappa} \widehat{f^a}(\xi - \eta) \overline{\widehat{f^b}(\xi - \eta - \kappa)} \widehat{f^c}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} f^a(y_1) \overline{f^b(y_2)} f^c(y_3) \int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta\kappa - iy_1(\xi - \eta) + iy_2(\xi - \eta - \kappa) - iy_3(\xi - \kappa)} d\eta d\kappa dy_1 dy_2 dy_3. \end{aligned}$$

Now we use that

$$e^{2is\eta\kappa + iy_1\eta - iy_2(\eta + \kappa) + iy_3\kappa} = e^{i \left[(\sqrt{2s}\eta + \frac{y_3 - y_2}{\sqrt{2s}})(\sqrt{2s}\kappa + \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{2s}}) - \frac{(y_3 - y_2)(y_1 - y_2)}{2s} \right]},$$

and the changes of variable $\alpha \leftrightarrow \sqrt{2s}\eta + \frac{y_3 - y_2}{\sqrt{2s}}$, $\beta \leftrightarrow \sqrt{2s}\kappa + \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{2s}}$, to obtain

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta\kappa} \widehat{f^a}(\xi - \eta) \overline{\widehat{f^b}(\xi - \eta - \kappa)} \widehat{f^c}(\xi - \kappa) d\eta d\kappa = \\ \frac{1}{2s} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} f^a(y_1) \overline{f^b(y_2)} f^c(y_3) e^{-i\xi(y_1 - y_2 + y_3) - i\frac{(y_3 - y_2)(y_1 - y_2)}{2s}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\alpha\beta} d\alpha d\beta \right) dy_1 dy_2 dy_3. \end{aligned}$$

But

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\alpha\beta} d\alpha d\beta = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[1](-\alpha) d\alpha = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \delta_0(\alpha) d\alpha = 2\pi.$$

On the other side, we simply have

$$\widehat{f^a}(\xi) \overline{\widehat{f^b}(\xi)} \widehat{f^c}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} f^a(y_1) \overline{f^b(y_2)} f^c(y_3) e^{-i\xi(y_1 - y_2 + y_3)} dy_1 dy_2 dy_3.$$

Therefore, we have

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta\kappa} \hat{f}^a(\xi - \eta) \overline{\hat{f}^b}(\xi - \eta - \kappa) \hat{f}^c(\xi - \kappa) d\eta d\kappa - \frac{\pi}{s} \hat{f}^a(\xi) \overline{\hat{f}^b}(\xi) \hat{f}^c(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{s} \int_{\mathbb{R}^3} f^a(y_1) \overline{f^b}(y_2) f^c(y_3) e^{-i\xi(y_1 - y_2 + y_3)} \left(e^{-i\frac{(y_3 - y_2)(y_1 - y_2)}{2s}} - 1 \right) dy_1 dy_2 dy_3.$$

With this form, we can now use the assumptions of the lemma to obtain bounds. We denote by f one of the functions f^a, f^b, f^c . Due to the localization hypothesis

$$f(x) = \varphi(s^{-\frac{1}{4}}x) f(x),$$

we have

$$\|xf\|_{L_x^2} \lesssim s^{\frac{1}{4}} \|f\|_{L_x^2}.$$

Thus, equation (4.2.10) becomes

$$\|f\|_{L_x^1} \lesssim s^{\frac{1}{8}} \|f\|_{L_x^2}.$$

Moreover, we use that

$$\left| e^{ix} - 1 \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right| \lesssim |x|.$$

Using these estimates, we obtain

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta\kappa} \hat{f}^a(\xi - \eta) \overline{\hat{f}^b}(\xi - \eta - \kappa) \hat{f}^c(\xi - \kappa) d\eta d\kappa - \frac{\pi}{s} \hat{f}^a(\xi) \overline{\hat{f}^b}(\xi) \hat{f}^c(\xi) \right| \\ & \lesssim s^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} |f^a(y_1)| |f^b(y_2)| |f^c(y_3)| |y_3 - y_2| |y_1 - y_2| dy_1 dy_2 dy_3 \\ & \lesssim s^{-2} \left(\|xf^a\|_{L_x^1} \|f^b\|_{L_x^1} \|xf^c\|_{L_x^1} + \|xf^a\|_{L_x^1} \|xf^b\|_{L_x^1} \|f^c\|_{L_x^1} \right. \\ & \quad \left. + \|f^a\|_{L_x^1} \|xf^b\|_{L_x^1} \|xf^c\|_{L_x^1} + \|f^a\|_{L_x^1} \|x^2 f^b\|_{L_x^1} \|f^c\|_{L_x^1} \right) \\ & \lesssim s^{-\frac{9}{8}} \|f^a\|_{L_x^2} \|f^b\|_{L_x^2} \|f^c\|_{L_x^2}. \end{aligned}$$

It completes the proof for the case $\nu = 0$. Now ν is a positive integer. Let us prove the inequality with the H^ν norm on the f^b term. The idea is to write, by convexity,

$$|\xi|^\nu \leq |\xi - \eta - \kappa|^\nu + |\eta + \kappa|^\nu. \quad (4.3.36)$$

Thus, we have

$$\begin{aligned} & |\xi|^\nu \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta\kappa} \hat{f}^a(\xi - \eta) \overline{\hat{f}^b}(\xi - \eta - \kappa) \hat{f}^c(\xi - \kappa) d\eta d\kappa - \frac{\pi}{s} \hat{f}^a(\xi) \overline{\hat{f}^b}(\xi) \hat{f}^c(\xi) \right| \\ & \lesssim \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta\kappa} \hat{f}^a(\xi - \eta) (\xi - \eta - \kappa)^\nu \overline{\hat{f}^b}(\xi - \eta - \kappa) \hat{f}^c(\xi - \kappa) d\eta d\kappa - \frac{\pi}{s} \hat{f}^a(\xi) (\xi^\nu \overline{\hat{f}^b})(\xi) \hat{f}^c(\xi) \right| \\ & \quad + \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta\kappa} \hat{f}^a(\xi - \eta) \overline{\hat{f}^b}(\xi - \eta - \kappa) \hat{f}^c(\xi - \kappa) (\eta + \kappa)^\nu d\eta d\kappa \right|. \end{aligned}$$

The first term is controlled by the above computations by $s^{-\frac{9}{8}} \|f^b\|_{H_x^\nu} \|f^a\|_{L_x^2} \|f^c\|_{L_x^2}$. Due to the Newton binomial expansion, we have for the second term

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta\kappa} \hat{f}^a(\xi - \eta) \overline{\hat{f}^b}(\xi - \eta - \kappa) \hat{f}^c(\xi - \kappa) (\eta + \kappa)^\nu d\eta d\kappa \right| \\ & \lesssim \sum_{k=0}^{\nu} \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta\kappa} \hat{f}^a(\xi - \eta) \overline{\hat{f}^b}(\xi - \eta - \kappa) \hat{f}^c(\xi - \kappa) \eta^k \kappa^{\nu-k} d\eta d\kappa \right| =: \sum_{k=0}^{\nu} |\mathcal{T}_k(\hat{f}^a, \hat{f}^b, \hat{f}^c)|. \end{aligned}$$

Performing an integration by parts in κ , we obtain the bound

$$|\mathcal{T}_k(\hat{f}^a, \hat{f}^b, \hat{f}^c)| \lesssim s^{-1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta\kappa} \hat{f}^a(\xi - \eta) \partial_\kappa \left[\overline{\hat{f}^b}(\xi - \eta - \kappa) \hat{f}^c(\xi - \kappa) \kappa^{\nu-k} \right] \eta^{k-1} d\eta d\kappa \right|.$$

Thus, we compute k integrations by parts in κ and $(\nu - k)$ in η , we get

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_k(\hat{f}^a, \hat{f}^b, \hat{f}^c)| &\lesssim s^{-\nu} \sum_{k_1+k_2+k_3 \leq \nu} \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta\kappa} \partial_\xi^{k_1} \hat{f}^a(\xi - \eta) \partial_\xi^{k_2} \overline{\hat{f}^b}(\xi - \eta - \kappa) \partial_\xi^{k_3} \hat{f}^c(\xi - \kappa) d\eta d\kappa \right| \\ &\lesssim s^{-\nu} \sum_{k_1+k_2+k_3 \leq \nu} \|\partial_\xi^{k_1} \hat{f}^a\|_{L_\xi^2} \|\partial_\xi^{k_2} \overline{\hat{f}^b}\|_{L_\xi^1} \|\partial_\xi^{k_3} \hat{f}^c\|_{L_\xi^2}. \end{aligned}$$

But, due to the localization assumptions of the lemma, the inequality of Young and the bound (4.2.10), we have

$$\begin{aligned} \|\partial_\xi^{k_1} \hat{f}^a\|_{L_\xi^2} &= \|x^{k_1} f^a\|_{L_x^2} \lesssim s^{\frac{k_1}{4}} \|\hat{f}^a\|_{L_\xi^2}, \\ \|\partial_\xi^{k_2} \overline{\hat{f}^b}\|_{L_\xi^1} &\lesssim \|\mathcal{F}(\varphi(s^{-\frac{1}{4}}x)x^n)\|_{L_\xi^1} \|\hat{f}^b\|_{L_\xi^1} \lesssim \|\varphi(s^{-\frac{1}{4}}x)x^n\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|\partial_x(\varphi(s^{-\frac{1}{4}}x)x^n)\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|\hat{f}^b\|_{L_\xi^1} \\ &\lesssim s^{\frac{k_2}{4}} \|\hat{f}^b\|_{L_\xi^1}. \end{aligned}$$

Therefore,

$$|\mathcal{T}_k(\hat{f}^a, \hat{f}^b, \hat{f}^c)| \lesssim s^{-\frac{3}{4}\nu} \|\hat{f}^a\|_{L_\xi^2} \|\hat{f}^b\|_{L_\xi^1} \|\hat{f}^c\|_{L_\xi^2},$$

and finally

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta\kappa} \hat{f}^a(\xi - \eta) \overline{\hat{f}^b}(\xi - \eta - \kappa) \hat{f}^c(\xi - \kappa) (\eta + \kappa)^\nu d\eta d\kappa \right| \lesssim s^{-\frac{3}{4}\nu} \|\hat{f}^a\|_{L_\xi^2} \|\hat{f}^b\|_{L_\xi^1} \|\hat{f}^c\|_{L_\xi^2}.$$

We use now that (4.2.10) (with $\alpha = 1$) gives $\|\hat{f}^b\|_{L_\xi^1} \lesssim \|f^b\|_{H_x^1} \lesssim \|f^b\|_{H_x^\nu}$ to get

$$\begin{aligned} |\xi|^\nu \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{2is\eta\kappa} \hat{f}^a(\xi - \eta) \overline{\hat{f}^b}(\xi - \eta - \kappa) \hat{f}^c(\xi - \kappa) d\eta d\kappa - \frac{\pi}{s} \hat{f}^a(\xi) \overline{\hat{f}^b}(\xi) \hat{f}^c(\xi) \right| \\ \lesssim (s^{-\frac{9}{8}} + s^{-\frac{3}{4}\nu}) \|f^a\|_{L_x^2} \|f^b\|_{H_x^\nu} \|f^c\|_{L_x^2}. \end{aligned}$$

We remark that we have the result (4.3.35) with the H^ν norm on f^b as soon as $\nu \geq 2$, because in this case, we have $s^{-\frac{3}{4}\nu} \leq s^{-\frac{9}{8}}$. By interpolation, this bound holds when $\nu = 1$, and thus for all integer ν . We can of course have the same result with the H^ν norm on f^a or f^c , simply considering the bounds $|\xi|^\nu \leq |\xi - \eta|^\nu + |\eta|^\nu$ or $|\xi|^\nu \leq |\xi - \kappa|^\nu + |\kappa|^\nu$ instead of equation (4.3.36), and keep following the rest of the proof *mutatis mutandis*. \square

Proof of Proposition 4.3.9

We are now able to deal with Proposition 4.3.9.

Proof. We begin with equation (4.3.25). Recall that by the definition (4.3.7), we have

$$\mathcal{F}\Pi^t[F, G, H](\xi, p) = \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} \mathcal{F}_x \mathcal{I}^t[F_q, G_r, H_s](\xi).$$

Thus, by the definition (4.2.8) of \mathcal{I}^t , we have

$$\|\Pi^t[F^a, F^b, F^c](x)\|_{L_y^2} \leq \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} \| |e^{it\partial_{xx}} F_q^a(x)| \cdot |e^{it\partial_{xx}} F_r^b(x)| \cdot |e^{it\partial_{xx}} F_s^c(x)| \|_{L_y^2}.$$

We apply Lemma 4.3.10 to obtain

$$\|\Pi^t[F^a, F^b, F^c](x)\|_{L_y^2} \lesssim \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|e^{it\partial_{xx}} F_p^{\sigma(a)}(x)\|_{\ell_p^2} \|e^{it\partial_{xx}} F_p^{\sigma(b)}(x)\|_{h_p^1} \|e^{it\partial_{xx}} F_p^{\sigma(c)}(x)\|_{h_p^1}.$$

Therefore, applying the L_x^2 norm on the both sides, we obtain

$$\|\Pi^t[F^a, F^b, F^c]\|_{L_{x,y}^2} \lesssim \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{L_{x,y}^2} \|e^{it\partial_{xx}} F_p^{\sigma(b)}\|_{h_p^1 L_x^\infty} \|e^{it\partial_{xx}} F_p^{\sigma(c)}\|_{h_p^1 L_x^\infty}. \quad (4.3.37)$$

In order to apply Lemma 4.2.3 with the new norm \tilde{Z}_t defined in (4.3.24), let us show that

$$\|e^{it\partial_{xx}} F_p\|_{h_p^1 L_x^\infty} \lesssim (1 + |t|)^{-\frac{1}{2}} \|F\|_{\tilde{Z}_t}. \quad (4.3.38)$$

We want to bound the term

$$\|e^{it\partial_{xx}} F_p\|_{h_p^1}^2 = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1 + p^2) |e^{it\partial_{xx}} F_p(x)|^2.$$

The idea is to split the sum in p .

- If $|p| \leq t^{\frac{1}{8}}$.

Writing $e^{it\partial_{xx}} F_p$ as an integral with a kernel, it is straightforward to check that

$$e^{it\partial_{xx}} F_p = K_t * F_p, \quad \text{where} \quad K_t(x) = (4i\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4it}}.$$

Thus, splitting the integral in two parts, we get

$$e^{it\partial_{xx}} F_p(x) := (2it)^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{x^2}{4t}} \hat{F}_p\left(\frac{x}{2t}\right) + A_{F_p}(t, x), \quad (4.3.39)$$

where, for all $\beta \in (0, \frac{1}{4})$,

$$\|A_{F_p}\|_{L_x^\infty} \lesssim |t|^{-\frac{1}{2}-\beta} \|\hat{F}_p\|_{H_\xi^1}. \quad (4.3.40)$$

For more details on this computation, we can refer to [52, Lemma 2.3] or the more general lemma from Hayashi and Naumkin ([33, Lemma 2.2]). Thus, using the equations (4.3.39) and (4.3.40), we have for all $\beta \in (0, \frac{1}{4})$,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ |p| \leq t^{\frac{1}{8}}}} (1 + p^2) |e^{it\partial_{xx}} F_p(x)|^2 &\lesssim t^{-1} \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ |p| \leq t^{\frac{1}{8}}}} (1 + p^2) |\hat{F}_p\left(\frac{x}{2t}\right)|^2 + t^{-1+2\beta} \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ |p| \leq t^{\frac{1}{8}}}} (1 + p^2) \|\hat{F}_p\|_{H_\xi^1}^2 \\ &\lesssim t^{-1} \|F\|_Z^2 + t^{-1-2\beta+\frac{1}{4}} (\|F\|_{L_{x,y}^2}^2 + \|xF\|_{L_{x,y}^2}^2). \end{aligned}$$

We choose $\beta = \frac{1}{8} + \delta \in (0, \frac{1}{4})$ to obtain

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ |p| \leq t^{\frac{1}{8}}}} (1 + p^2) |e^{it\partial_{xx}} F_p(x)|^2 \lesssim t^{-1} (\|F\|_Z^2 + t^{-2\delta} \|F\|_S^2) \lesssim t^{-1} \|F\|_{\tilde{Z}_t}^2. \quad (4.3.41)$$

- If $|p| \geq t^{\frac{1}{8}}$.

We write

$$(1 + p^2) = (1 + p^2)^{N-1} (1 + p^2)^{2-N} \lesssim t^{\frac{1}{2} - \frac{N}{4}} (1 + p^2)^{N-1}.$$

Thus, using the Sobolev embedding (4.2.14),

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ |p| \geq t^{\frac{1}{8}}}} (1 + p^2) |e^{it\partial_{xx}} F_p(x)|^2 \lesssim t^{\frac{1}{2} - \frac{N}{4}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1 + p^2)^{N-1} \|F_p\|_{H_x^1}^2 \lesssim t^{\frac{1}{2} - \frac{N}{4}} \|F\|_S^2.$$

But $N \geq 10$, in particular, $N \geq 6 + 8\delta$, thus

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ |p| \geq t^{\frac{1}{8}}}} (1 + p^2) |e^{it\partial_{xx}} F_p(x)|^2 \lesssim t^{-1-2\delta} \|F\|_S^2 \lesssim t^{-1} \|F\|_{\tilde{Z}_t}^2. \quad (4.3.42)$$

Finally, we combine (4.3.41) and (4.3.42) to obtain (4.3.38). Then, back to (4.3.37), we have

$$\|\Pi^t[F^a, F^b, F^c]\|_{L_{x,y}^2} \lesssim (1 + |t|)^{-1} \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{L_{x,y}^2} \|F_p^{\sigma(b)}\|_{\tilde{Z}_t} \|F_p^{\sigma(c)}\|_{\tilde{Z}_t}.$$

We can now apply the first part of Lemma 4.2.3, this ends the proof of the bound (4.3.25).

Let us now deal with the equation (4.3.26). In order to apply the second part of Lemma 4.2.3, we need a bound on $\|YF\|_{\tilde{Z}_t}$ for $Y \in \{x, (1 - \partial_{xx})^4\}$. Thus, according to (4.3.26), we need to show that

$$\|YF\|_{\tilde{Z}_t} \lesssim (1 + |t|)^{-\delta} \|F\|_{S^+} + (1 + |t|)^{2\delta} \|F\|_S. \quad (4.3.43)$$

First, recall that $\|F\|_{\tilde{Z}_t} := \|F\|_Z + (1 + |t|)^{-\delta} \|F\|_S$. By definition of the S^+ norm (4.2.4), we have

$$(1 + |t|)^{-\delta} \|YF\|_S \lesssim (1 + |t|)^{-\delta} \|F\|_{S^+}, \quad \text{for } Y \in \{x, (1 - \partial_{xx})^4\}.$$

For the $\|(1 - \partial_{xx})^4 F\|_Z$ term, we follow the computations of the proof of the second inequality in (4.2.13). We have, for a dyadic integer N , and using (4.2.10),

$$|\widehat{Q_N F_p}(\xi)| \lesssim \|Q_N F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|x Q_N F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \lesssim N^{-\frac{11}{2}} \|(1 - \partial_{xx})^{\frac{11}{2}} F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|x F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}}.$$

Thus, we have

$$(1 + \xi^2)^5 |\hat{F}_p(\xi)| \lesssim \sum_N N^{-\frac{1}{2}} \|(1 - \partial_{xx})^{\frac{11}{2}} F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|x F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \lesssim \|F_p\|_{H_x^{11}}^{\frac{1}{2}} \|x F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}}.$$

Therefore, we use Cauchy Schwarz to obtain

$$\begin{aligned} \|(1 - \partial_{xx})^4 F\|_Z^2 &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}} (1 + \xi^2)^{10} \|\hat{F}_p(\xi)\|_{h^1}^2 \\ &\lesssim \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1 + p^2) \|F_p\|_{H_x^{11}} \|x F_p\|_{L_x^2} \lesssim \|F\|_{H_x^{11} H_y^2} \|x F\|_{L_{x,y}^2} \lesssim \|F\|_S^2. \end{aligned}$$

Note that we use that $N \geq 11$ in the last inequality. It remains to deal with the $\|x F\|_Z$ term, we have to show that

$$\|x F\|_Z \lesssim (1 + |t|)^{-\delta} \|F\|_{S^+} + (1 + |t|)^{2\delta} \|F\|_S. \quad (4.3.44)$$

The idea is to use the Littlewood-Paley projectors, we have

$$\|xF\|_Z = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} (1 + \xi^2) \|\mathcal{F}(xF_p)(\xi)\|_{h_p^1} \sim \sup_M (1 + M^2) \|\mathcal{F}(Q_M x F_p)\|_{L_\xi^\infty h_p^1}.$$

Thus, we want to control the term $\|\mathcal{F}(Q_M x F_p)\|_{L_\xi^\infty h_p^1}$. Now, as in the bound (4.2.10), we localize $x F_p$ inside and outside a neighborhood of 0. Let R_p be positive. We write

$$x F_p(x) = x(1 - \varphi(\frac{x}{R_p})) F_p(x) + x \varphi(\frac{x}{R_p}) F_p(x).$$

We fix p . By the continuity of the Fourier transform from L_x^1 to L_ξ^∞ and the continuity of the Littlewood-Paley projectors we have for the outside part

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(Q_M x(1 - \varphi(\frac{x}{R_p})) F_p)\|_{L_\xi^\infty} &\lesssim \|x(1 - \varphi(\frac{x}{R_p})) F_p\|_{L_x^1} \\ &\lesssim \|x^{-1}(1 - \varphi(\frac{x}{R_p}))\|_{L_x^2} \|x^2 F_p\|_{L_x^2} \\ &\lesssim R_p^{-\frac{1}{2}} \|x^2 F_p\|_{L_x^2}. \end{aligned}$$

For the inside part we have by (4.2.10) and Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(Q_M x \varphi(\frac{x}{R_p}) F_p)\|_{L_\xi^\infty} &\lesssim \|Q_M x \varphi(\frac{x}{R_p}) F_p\|_{L_x^1} \\ &\lesssim \|Q_M x \varphi(\frac{x}{R_p}) F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|x Q_M x \varphi(\frac{x}{R_p}) F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

For the first term, we have

$$\|Q_M x \varphi(\frac{x}{R_p}) F_p\|_{L_x^2} \lesssim \|x \varphi(\frac{x}{R_p}) F_p\|_{L_x^2} \lesssim R_p \|F_p\|_{L_x^2} \lesssim R_p M^{-N} \|F_p\|_{H_x^N}.$$

For the second term, using the notations of (4.2.23) and the relation

$$Q_M x = [Q_M, x] + x Q_M,$$

we have

$$\begin{aligned} \|x Q_M x \varphi(\frac{x}{R_p}) F_p\|_{L_x^2} &\lesssim \|x^2 \varphi(\frac{x}{R_p}) F_p\|_{L_x^2} + \|Q'_M x \varphi(\frac{x}{R_p}) F_p\|_{L_x^2} \\ &\lesssim R_p (\|x F_p\|_{L_x^2} + \|F_p\|_{L_x^2}). \end{aligned}$$

Combining these two terms and the bound about the inside part, we obtain

$$\|\mathcal{F}(Q_M x F_p)\|_{L_x^\infty} \lesssim R_p^{-\frac{1}{2}} \|x^2 F_p\|_{L_x^2} + R_p M^{-\frac{N}{2}} \|F_p\|_{H_x^N}^{\frac{1}{2}} (\|F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} + \|x F_p\|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}}).$$

We choose $R_p := (1 + p^2)R$ for R positive to be fixed, then we square and we multiply both sides by $(1 + p^2)$, we get

$$\begin{aligned} (1 + p^2) \|\mathcal{F}(Q_M x F_p)\|_{L_x^\infty}^2 &\lesssim R^{-1} \|x^2 F_p\|_{L_x^2}^2 + (1 + p^2)^3 R^2 M^{-N} \|F_p\|_{H_x^N} (\|F_p\|_{L_x^2} + \|x F_p\|_{L_x^2}) \\ &\lesssim R^{-1} \|x^2 F_p\|_{L_x^2}^2 + (1 + p^2)^3 R^2 M^{-N} \|F_p\|_{H_x^N}^2 \\ &\quad + (1 + p^2)^6 R^2 M^{-N} \|F_p\|_{H_x^N}^2 + R^2 M^{-N} \|x F_p\|_{L_x^2}^2. \end{aligned}$$

Therefore, using that $N \geq 6$ we take the sum over p ,

$$\|\mathcal{F}(Q_M x F_p)\|_{L_x^\infty h_p^1}^2 \lesssim R^{-1} \|F\|_{S^+}^2 + R^2 M^{-N} \|F\|_S^2.$$

We choose $R = (1+M^2)^2(1+|t|)^{2\delta}$, we multiply by $(1+M^2)$ and we take the supremum over M to conclude the proof of (4.3.44). Thus, we can apply the second part of Lemma 4.2.3 and the proof of (4.3.26) is completed.

Then, we want to obtain similar estimates for \mathcal{R} . The previous computations give us this result almost immediately. Indeed, by Lemma 4.3.10, we have

$$\|\mathcal{F}\mathcal{R}[F^a, F^b, F^c](\xi)\|_{\ell_p^2} \lesssim \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|\hat{F}_p^{\sigma(a)}(\xi)\|_{\ell_p^2} \|\hat{F}_p^{\sigma(b)}(\xi)\|_{h_p^1} \|\hat{F}_p^{\sigma(c)}(\xi)\|_{h_p^1}.$$

Therefore, taking the L_x^2 norm and using that the Z_t norm is controlled by the \tilde{Z}_t norm, we get

$$\|\mathcal{R}[F^a, F^b, F^c]\|_{L_{x,y}^2} \lesssim \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F^{\sigma(a)}\|_{L_{x,y}^2} \|F^{\sigma(b)}\|_{\tilde{Z}_t} \|F^{\sigma(c)}\|_{\tilde{Z}_t}. \quad (4.3.45)$$

Thus, using (4.3.43), the transfer principle of Lemma 4.2.3 gives us both equations (4.3.27) and (4.3.28).

Finally, we have to bound the difference between Π^t and $\frac{\pi}{t}\mathcal{R}$. In order to apply Lemma 4.3.14, we decompose F^a, F^b and F^c with a centered component and an extern one as follows

$$F = F_c + F_e, \quad \text{where} \quad F_c(x, y) = \varphi(t^{-\frac{1}{4}}x)F(x, y).$$

The idea is to write

$$\begin{aligned} |\Pi^t[F^a, F^b, F^c] - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F^a, F^b, F^c]| &\lesssim |\Pi^t[F^a, F^b, F^c] - \Pi^t[F_c^a, F_c^b, F_c^c]| \\ &\quad + |\Pi^t[F_c^a, F_c^b, F_c^c] - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F_c^a, F_c^b, F_c^c]| + \frac{1}{t}|\mathcal{R}[F^a, F^b, F^c] - \mathcal{R}[F_c^a, F_c^b, F_c^c]|. \end{aligned} \quad (4.3.46)$$

We want to deal with the S and Z norms. Therefore, for the first line terms, we use that there is always a extern component (as F_e^a for example), because we killed the component in $[F_c^a, F_c^b, F_c^c]$. For the second line term, we use Lemma 4.3.14 because we have just centered components. Let us begin with the first line terms. Let us show that

$$\begin{aligned} \|\Pi^t[F^a, F^b, F^c] - \Pi^t[F_c^a, F_c^b, F_c^c]\|_Z + \frac{1}{t}\|\mathcal{R}[F^a, F^b, F^c] - \mathcal{R}[F_c^a, F_c^b, F_c^c]\|_Z \\ \lesssim (1+|t|)^{-\frac{17}{16}} \|F^a\|_S \|F^b\|_S \|F^c\|_S, \end{aligned} \quad (4.3.47)$$

$$\begin{aligned} \|\Pi^t[F^a, F^b, F^c] - \Pi^t[F_c^a, F_c^b, F_c^c]\|_S + \frac{1}{t}\|\mathcal{R}[F^a, F^b, F^c] - \mathcal{R}[F_c^a, F_c^b, F_c^c]\|_S \\ \lesssim (1+|t|)^{-\frac{5}{4}} \|F^a\|_{S^+} \|F^b\|_{S^+} \|F^c\|_{S^+}. \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

We introduce the notation \tilde{F} for either F_c or F_e . As mentioned before, there is always a extern part here, we take advantage of this extern part with the bounds

$$\begin{aligned} \|F_e\|_{L_{x,y}^2} &\leq \|(1 - \varphi(t^{-\frac{1}{4}}x))F_e\|_{L_{x,y}^2} \leq \|x^{-1}(1 - \varphi(t^{-\frac{1}{4}}x))\|_{L_x^\infty} \|xF_e\|_{L_{x,y}^2} \lesssim (1+|t|)^{-\frac{1}{4}} \|F\|_S, \\ \|F_e\|_S &\leq \|(1 - \varphi(t^{-\frac{1}{4}}x))F_e\|_S \leq \|x^{-1}(1 - \varphi(t^{-\frac{1}{4}}x))\|_{L_x^\infty} \|xF_e\|_S \lesssim (1+|t|)^{-\frac{1}{4}} \|F\|_{S^+}. \end{aligned}$$

Indeed, we have $\|xF\|_{L^2_{x,y}} \leq \|F\|_S$ and $\|xF\|_S \leq \|F\|_{S^+}$. Here, we see that the control of the multiplication by x allows us to pass from weaker norms to stronger ones with a gain of decrease in time. Thus, for the Π term, we use equations (4.3.37) and (4.3.38); for \mathcal{R} , we use Lemma 4.3.10 to get

$$\begin{aligned} \|\Pi^t[F_e^a, \tilde{F}^b, \tilde{F}^c]\|_{L^2_{x,y}} + \|\frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F_e^a, \tilde{F}^b, \tilde{F}^c]\|_{L^2_{x,y}} &\lesssim (1+|t|)^{-1}\|F_e^a\|_{L^2_{x,y}}\|\tilde{F}^b\|_S\|\tilde{F}^c\|_S \\ &\lesssim (1+|t|)^{-\frac{5}{4}}\|F^a\|_S\|F^b\|_S\|F^c\|_S. \end{aligned}$$

Using Lemma 4.2.3, with also have

$$\begin{aligned} \|\Pi^t[F_e^a, \tilde{F}^b, \tilde{F}^c]\|_S + \|\frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F_e^a, \tilde{F}^b, \tilde{F}^c]\|_S &\lesssim (1+|t|)^{-1}\|F_e^a\|_S\|\tilde{F}^b\|_S\|\tilde{F}^c\|_S \\ &\lesssim (1+|t|)^{-\frac{5}{4}}\|F^a\|_{S^+}\|F^b\|_{S^+}\|F^c\|_{S^+}. \end{aligned}$$

We have the same result considering the terms in $[\tilde{F}_e^a, F^b, \tilde{F}^c]$ and $[\tilde{F}_e^a, \tilde{F}^b, F^c]$, thus, the second line completes the proof of (4.3.48). We use the first line of this inequality and the relation (4.2.13) between the norms S , L^2 and Z to get

$$\|\Pi^t[F_e^a, \tilde{F}^b, \tilde{F}^c]\|_Z + \|\frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F_e^a, \tilde{F}^b, \tilde{F}^c]\|_Z \lesssim (1+|t|)^{-\frac{5}{16}-\frac{3}{4}}\|F^a\|_S\|F^b\|_S\|F^c\|_S.$$

This completes the proof of (4.3.47). We now have to deal with the second line term of the equation (4.3.46). We have

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Pi^t[F_c^a, F_c^b, F_c^c] - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F_c^a, F_c^b, F_c^c])(\xi, p) = \\ \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} \hat{F}_{q,c}^a(\xi - \eta) \overline{\hat{F}_{r,c}^b}(\xi - \eta - \kappa) \hat{F}_{s,c}^c(\xi - \kappa) d\eta d\kappa - \frac{\pi}{t} \hat{F}_{q,c}^a \overline{\hat{F}_{r,c}^b} \hat{F}_{s,c}^c(\xi) \right). \end{aligned}$$

First, we write

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(\Pi^t[F_c^a, F_c^b, F_c^c] - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F_c^a, F_c^b, F_c^c])(\xi, p)\|_{L^2_\xi} \\ \lesssim \|\langle \xi \rangle \mathcal{F}(\Pi^t[F_c^a, F_c^b, F_c^c] - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F_c^a, F_c^b, F_c^c])(\xi, p)\|_{L^2_\xi}. \end{aligned}$$

Then, we apply Lemma 4.3.14 to obtain

$$\begin{aligned} |\langle \xi \rangle| \|\mathcal{F}(\Pi^t[F_c^a, F_c^b, F_c^c] - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F_c^a, F_c^b, F_c^c])(\xi, p)\| \\ \lesssim \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} t^{-\frac{9}{8}} \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F_{q,c}^{\sigma(a)}\|_{H^1_x} \|F_{r,c}^{\sigma(b)}\|_{L^2_x} \|F_{s,c}^{\sigma(c)}\|_{L^2_x} \end{aligned}$$

Thus, applying (4.2.12), we obtain

$$\|\mathcal{F}(\Pi^t[F_c^a, F_c^b, F_c^c] - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F_c^a, F_c^b, F_c^c])\|_{L^2_\xi \ell^2_p} \lesssim t^{-\frac{9}{8}} \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F_{p,c}^{\sigma(a)}\|_{L^2_x \ell^2_p} \|F_{p,c}^{\sigma(b)}\|_{H^1_x \ell^1_p} \|F_{p,c}^{\sigma(c)}\|_{L^2_x \ell^1_p}.$$

Therefore, using the injection $h^1_p \hookrightarrow \ell^1_p$, we have

$$\|\Pi^t[F_c^a, F_c^b, F_c^c] - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F_c^a, F_c^b, F_c^c]\|_{L^2_{x,y}} \lesssim t^{-\frac{9}{8}} \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \|F_c^{\sigma(a)}\|_{L^2_{x,y}} \|F_c^{\sigma(b)}\|_S \|F_c^{\sigma(c)}\|_S.$$

An application of Lemma 4.2.3 gives us

$$\|\Pi^t[F_c^a, F_c^b, F_c^c] - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}[F_c^a, F_c^b, F_c^c]\|_S \lesssim t^{-\frac{9}{8}} \|F^a\|_S \|F^b\|_S \|F^c\|_S.$$

This is sufficient to prove (4.3.30) thanks to the second part of Lemma 4.2.3. The proof of (4.3.29) follows from this equation and the Gagliardo-Nirenberg type bound (4.2.13). This finally completes the proof of Proposition 4.3.9. \square

4.3.4 High frequency estimates for the resonant part

For the resonant part of the nonlinearity, the estimates we obtain in the last subsection are not sufficient to prove Theorem 4.3.1. More precisely, we want to be more accurate than the estimate (4.3.27) in order to show that the high frequency part of $\frac{\pi}{t}\mathcal{R}$ contributes to \mathcal{E}_1^t in Theorem 4.3.1. Indeed, we need to obtain a better decreasing behavior (with respect to T) than the one given by equations (4.3.27) and (4.3.34). For that purpose, we state the following proposition.

Proposition 4.3.15. *Assume that $T \geq 1$, the following estimates hold uniformly in T :*

$$\forall t \leq T, \quad \|\mathcal{R}[Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t), G(t), H(t)]\|_Z \lesssim T^{-\frac{1}{20}} \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T}, \quad (4.3.49)$$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t), G(t), H(t)] dt \right\|_S \lesssim T^{-1} \|F\|_{X_T^+} \|G\|_{X_T^+} \|H\|_{X_T^+}. \quad (4.3.50)$$

Proof. Let us begin with the first equation. We fix $t \leq T$. In order to gain some decreasing not present in equation (4.3.34), we use the better behavior of the L^2 norm. The Gagliardo-Nirenberg type inequality $\|F\|_Z \lesssim \|F\|_{L_{x,y}^2}^{\frac{1}{4}} \|F\|_S^{\frac{3}{4}}$ from Lemma 4.2.1 will allow us to transport this gain of decreasing from the L^2 norm estimates to the Z norm estimates. For that purpose, we use the equation (4.3.45) to obtain

$$\|\mathcal{R}[Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t), G(t), H(t)]\|_{L_{x,y}^2} \lesssim \|Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t)\|_{L_{x,y}^2} \|G(t)\|_{\tilde{Z}_t} \|H(t)\|_{\tilde{Z}_t}.$$

Focus on the first term of the right-hand side, we have

$$\begin{aligned} \|Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t)\|_{L_{x,y}^2} &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1 + \xi^2)^{-1} (1 + \xi^2) \left| \left(1 - \varphi\left(\frac{2\xi}{T^{\frac{1}{6}}}\right)\right) \hat{F}_p(\xi) \right|^2 d\xi \\ &\lesssim T^{-\frac{1}{3}} \|F\|_{H_{x,y}^1} \lesssim T^{-\frac{1}{3}} \|F\|_Z \lesssim T^{-\frac{1}{3}} \|F\|_{X_T}. \end{aligned}$$

For the two other terms, we just use the control of the \tilde{Z}_t norm by the X_T norm. It follows

$$\|\mathcal{R}[Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t), G(t), H(t)]\|_{L_{x,y}^2} \lesssim T^{-\frac{1}{3}} \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T}.$$

For the S norm estimate, we just use the equation (4.3.33) to obtain

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}[Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t), G(t), H(t)]\|_S &\lesssim \|Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t)\|_S \|G(t)\|_S \|H(t)\|_S \\ &\lesssim T^{3\delta} \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T}. \end{aligned}$$

Finally, by the inequality (4.2.13) we get

$$\|\mathcal{R}[Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t), G(t), H(t)]\|_Z \lesssim T^{-\frac{1}{12} + \frac{9\delta}{4}} \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T}.$$

The estimate (4.3.49) follows by considering that δ is small enough.

The proof of estimate (4.3.50) is slightly more delicate. We can't just use the equation (4.3.27) with the bound $\|F\|_S \lesssim T^\delta \|F\|_{X_T}$, because we need more decreasing in T . Moreover, we can't use just the L^2 behavior to obtain some decreasing for the S norm estimates. Therefore, the strategy here is to use the $\|(1 - \partial_{xx})^4 F\|_S$ term in the definition

of the S^+ norm in (4.2.4) to gain a better decay. More precisely, let us show that for times $t \leq T$,

$$\|Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t)\|_S \lesssim T^{-\frac{4}{3}+5\delta} \|F\|_{X_T^+}. \quad (4.3.51)$$

We begin the proof of (4.3.51) with the L^2 part of the S norm. We have

$$\begin{aligned} \|xQ_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F\|_{L_{x,y}^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \partial_{\xi} \left((1 - \varphi(\frac{2\xi}{T^{\frac{1}{6}}})) (1 + \xi^2)^{-4} (1 + \xi^2)^4 \hat{F}_p(\xi) \right) \right|^2 d\xi \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1 - \varphi(\frac{2\xi}{T^{\frac{1}{6}}}))^2 (1 + \xi^2)^{-8} \left| \partial_{\xi} \left((1 + \xi^2)^4 \hat{F}_p(\xi) \right) \right|^2 d\xi \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \partial_{\xi} \left((1 - \varphi(\frac{2\xi}{T^{\frac{1}{6}}})) (1 + \xi^2)^{-4} \right) \right|^2 \left| (1 + \xi^2)^4 \hat{F}_p(\xi) \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

For the first term of the right-hand side, we use that

$$(1 - \varphi(\frac{2\xi}{T^{\frac{1}{6}}}))^2 (1 + \xi^2)^{-8} \lesssim T^{-\frac{8}{3}},$$

we obtain thus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1 - \varphi(\frac{2\xi}{T^{\frac{1}{6}}}))^2 (1 + \xi^2)^{-8} \left| \partial_{\xi} \left((1 + \xi^2)^4 \hat{F}_p(\xi) \right) \right|^2 d\xi &\lesssim T^{-\frac{8}{3}} \|x(1 - \partial_{xx})^4 F\|_{L_{x,y}^2}^2 \\ &\lesssim T^{-\frac{8}{3}} \|F\|_{S^+}^2. \end{aligned}$$

For the second term of the right-hand side, we have

$$\begin{aligned} \left| \partial_{\xi} \left((1 - \varphi(\frac{2\xi}{T^{\frac{1}{6}}})) (1 + \xi^2)^{-4} \right) \right| &\lesssim T^{-\frac{1}{6}} \varphi'(\frac{2\xi}{T^{\frac{1}{6}}}) (1 + \xi^2)^{-4} + (1 - \varphi(\frac{2\xi}{T^{\frac{1}{6}}})) \xi (1 + \xi^2)^{-5} \\ &\lesssim T^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

In the last inequality, we used that the function $x \mapsto x(1+x^2)^5$ is decreasing for $x \geq 1/2$, and here we have $\xi \geq \frac{T^{\frac{1}{6}}}{2} \geq \frac{1}{2}$. Thus, we obtain for this second term the inequality

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \partial_{\xi} \left((1 - \varphi(\frac{2\xi}{T^{\frac{1}{6}}})) (1 + \xi^2)^{-4} \right) \right|^2 \left| (1 + \xi^2)^4 \hat{F}_p(\xi) \right|^2 d\xi &\lesssim T^{-3} \|(1 - \partial_{xx})^4 F\|_{L_{x,y}^2}^2 \\ &\lesssim T^{-3} \|F\|_{S^+}^2. \end{aligned}$$

Finally, we obtain

$$\|xQ_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F\|_{L_{x,y}^2} \lesssim T^{-\frac{4}{3}} \|F\|_{S^+}.$$

To prove the inequality (4.3.51), it remains to deal with the H^N part of the S norm. We just write

$$\begin{aligned} \|Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F\|_{H_{x,y}^N}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1 + p^2)^N (1 + \xi^2)^N (1 + \xi^2)^{-8} \left| (1 - \varphi(\frac{2\xi}{T^{\frac{1}{6}}})) (1 + \xi^2)^4 \hat{F}_p(\xi) \right|^2 d\xi \\ &\lesssim T^{-\frac{8}{3}} \|(1 - \partial_{xx})^4 F\|_{H_{x,y}^N}^2 \lesssim T^{-\frac{8}{3}} \|F\|_{S^+}^2. \end{aligned}$$

Therefore, we also obtain

$$\|Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F\|_{H_{x,y}^N} \lesssim T^{-\frac{4}{3}} \|F\|_{S^+},$$

and finally,

$$\|Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F\|_S \lesssim T^{-\frac{4}{3}} \|F\|_{S^+}.$$

Thanks to the definition of the X_T^+ norm in (4.2.6), the proof of the inequality (4.3.51) is completed.

We can now deal with the inequality (4.3.50). By the estimate (4.3.27), we have

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t), G(t), H(t)] \right\|_S \\ & \lesssim (1 + |t|)^{-1} \|Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t)\|_{\tilde{Z}_t} (\|G(t)\|_{\tilde{Z}_t} \|H(t)\|_S + \|G(t)\|_S \|H(t)\|_{\tilde{Z}_t}) \\ & \quad + (1 + |t|)^{-1} \|Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t)\|_S \|G(t)\|_{\tilde{Z}_t} \|H(t)\|_{\tilde{Z}_t}. \end{aligned}$$

Using that the \tilde{Z}_t norm is controlled by the S norm, we obtain for $\frac{T}{4} \leq t \leq T$,

$$\left\| \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t), G(t), H(t)] \right\|_S \lesssim T^{-\frac{7}{3} + 6\delta} \|F\|_{X_T^+} \|G\|_{X_T^+} \|H\|_{X_T^+}.$$

Thus, the proof of (4.3.50) comes from the smallness of δ and the estimate

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t), G(t), H(t)] dt \right\|_S \lesssim T \sup_{\frac{T}{4} \leq t \leq T} \left\| \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t), G(t), H(t)] \right\|_S.$$

□

4.3.5 Proof of Theorem 4.3.1

With the previous estimates about the different parts of the nonlinearity, we are now able to prove Theorem 4.3.1.

Proof. We first introduce some notations. Due to the high frequencies estimates of Proposition 4.3.2, we want to split \mathcal{N}^t between low and high frequencies. For that purpose, for a trilinear operator \mathfrak{T} (here, we take $\mathfrak{T} \in \{\mathcal{N}^t, \tilde{\mathcal{N}}^t, \Pi^t, \mathcal{R}\}$), we set $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{low} + \mathfrak{T}_{high}$ where

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{high}[F, G, H] & := \sum_{\substack{A, B, C \\ \max(A, B, C) \geq T^{\frac{1}{6}}}} \mathfrak{T}[Q_A F, Q_B G, Q_C H], \\ \mathfrak{T}_{low}[F, G, H] & := \mathfrak{T}[Q_{\leq T^{\frac{1}{6}}} F, Q_{\leq T^{\frac{1}{6}}} G, Q_{\leq T^{\frac{1}{6}}} H]. \end{aligned}$$

According to this idea and the decomposition (4.3.6), we decompose the nonlinearity \mathcal{N}^t as follows:

$$\mathcal{N}^t = \mathcal{N}_{high}^t + \tilde{\mathcal{N}}_{low}^t + \Pi_{low}^t. \quad (4.3.52)$$

Moreover, due to the proximity between Π^t and the term $\frac{\pi}{t} \mathcal{R}$ that we want to isolate (see Proposition 4.3.9), we decompose Π_{low}^t in

$$\Pi_{low}^t = \frac{\pi}{t} \mathcal{R} + (\Pi_{low}^t - \frac{\pi}{t} \mathcal{R}_{low}) - \frac{\pi}{t} \mathcal{R}_{high}.$$

Therefore, we have the decomposition

$$\mathcal{N}^t = \frac{\pi}{t}\mathcal{R} + \mathcal{N}_{high}^t + \tilde{\mathcal{N}}_{low}^t + (\Pi_{low}^t - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}_{low}) - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}_{high}. \quad (4.3.53)$$

Using Proposition 4.3.2, the \mathcal{N}_{high}^t term contributes to \mathcal{E}_1^t in Theorem 4.3.1. For example, we can see that equation (4.3.8) gives us

$$\sup_{\frac{T}{4} \leq t \leq T} \|\mathcal{N}_{high}(t)\|_Z \lesssim T^{-\frac{7}{6}+3\delta} \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T}.$$

For the other terms, we use the properties of the support of q_T and the integral of q_T' introduced in (4.2.2) to obtain

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \mathcal{E}_1(t) dt \right\|_{S^{(+)}} &\lesssim T \sup_{\frac{T}{4} \leq t \leq T} \|\mathcal{E}_1(t)\|_{S^{(+)}} \\ \left\| \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \mathcal{E}_2(t) dt \right\|_{S^{(+)}} &\lesssim \sup_{\frac{T}{4} \leq t \leq T} \|\mathcal{E}_3(t)\|_{S^{(+)}}. \end{aligned}$$

Thus, Proposition 4.3.5 shows that the $\tilde{\mathcal{N}}$ term splits in two term $\tilde{\mathcal{E}}_1$ and \mathcal{E}_2 which contributes respectively to \mathcal{E}_1^t and \mathcal{E}_2^t . Remarking that the Littlewood-Paley projector $Q_{\leq T^{\frac{1}{6}}}$ doesn't increase the Z and S norms, the $(\Pi_{low}^t - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}_{low})$ term of (4.3.53) contributes to the term \mathcal{E}_1^t by Proposition 4.3.9. For example, we see that the control of the \tilde{Z}_t norm by the X_T norm gives

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} q_T(t) (\Pi_{low}(t) - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}_{low}) dt \right\|_S &\lesssim T \sup_{\frac{T}{4} \leq t \leq T} (\|\Pi(t)\|_S + \|\frac{\pi}{t}\mathcal{R}\|_S) \\ &\lesssim T^\delta \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T}. \end{aligned}$$

Finally, the last term we have to control is $\frac{\pi}{t}\mathcal{R}_{high}$. We want to show that this term also contributes to \mathcal{E}_1^t . By Proposition 4.3.15, we have

$$\begin{aligned} \sup_{\frac{T}{4} \leq t \leq T} \left\| \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t), G(t), H(t)] \right\|_Z &\lesssim T^{-\frac{21}{20}} \|F\|_{X_T} \|G\|_{X_T} \|H\|_{X_T}, \\ \left\| \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F(t), G(t), H(t)] dt \right\|_S &\lesssim T^{-1} \|F\|_{X_T^+} \|G\|_{X_T^+} \|H\|_{X_T^+}. \end{aligned}$$

Writing that

$$\mathcal{R}_{high}[F, G, H] = \mathcal{R}[Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} F, G, H] + \mathcal{R}[Q_{< T^{\frac{1}{6}}} F, Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} G, H] + \mathcal{R}[Q_{< T^{\frac{1}{6}}} F, Q_{< T^{\frac{1}{6}}} G, Q_{\geq T^{\frac{1}{6}}} H],$$

it suffices to prove two of the inequalities of Theorem 4.3.1 for $\frac{\pi}{t}\mathcal{R}_{high}$, because there is always one high-frequency-localized term. The two other inequalities come directly from the equations (4.3.33) and (4.3.28). This concludes the proof of Theorem 4.3.1. \square

Remark 4.3.16. *Through the previous theorem, we see the importance of all the terms of the S^+ norm. In particular, in order to show that the resonant parts $(\Pi_{low}^t - \frac{\pi}{t}\mathcal{R}_{low})$ and $\frac{\pi}{t}\mathcal{R}_{high}$ contribute to \mathcal{E}_1^t in Theorem 4.3.1, we have to gain a decreasing behavior, with respect to T , to show that*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} q_T(t) \mathcal{E}_1(t) dt \right\|_S \lesssim T^{-2\delta} \|F\|_{X_T^+} \|G\|_{X_T^+} \|H\|_{X_T^+}.$$

For that purpose, we see in Subsection 4.3.3 the role of the $\|xF\|_S$ term of the S^+ norm to control $(\Pi^t - \frac{\pi}{t}\mathcal{R})$, for example through the proof of the equation (4.3.48). With the same idea, we see in Subsection 4.3.4 the importance of the $\|(1 - \partial_{xx})^4 F\|_S$ term of the S^+ norm to control $\frac{\pi}{t}\mathcal{R}_{high}$, with the estimate (4.3.51).

4.4 Study of the resonant system

In this section, we want to study the resonant system

$$\begin{cases} i\partial_\tau W_U(\tau) = \mathcal{R}[W_V(\tau), W_V(\tau), W_U(\tau)], \\ i\partial_\tau W_V(\tau) = \mathcal{R}[W_U(\tau), W_U(\tau), W_V(\tau)], \end{cases}$$

with

$$\mathcal{FR}[F, G, H](\xi, p) = \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} \hat{F}(\xi, q) \overline{\hat{G}(\xi, r)} \hat{H}(\xi, s)$$

and

$$\Gamma_0 = \{(p, q, r, s) \in \mathbb{Z}^4, \{p, r\} = \{q, s\}\}.$$

In the definition of the nonlinearity \mathcal{R} , the Euclidean variable ξ acts just like a parameter. According to this idea, by deleting this variable, we define the reduced resonant system for two vectors $a = \{a_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ and $b = \{b_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$, by

$$\begin{cases} i\partial_t a(t) = R(b(t), b(t), a(t)), \\ i\partial_t b(t) = R(a(t), a(t), b(t)), \end{cases} \quad (4.4.1)$$

with

$$R(a(t), b(t), c(t))_p = \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} a_q(t) \overline{b_r(t)} c_s(t).$$

First, we study the resonant system in Subsection 4.4.1 to obtain some estimates about the solutions of the resonant system. Then, to take advantage of the reduced resonant system, we want to show in Subsection 4.4.2 that we can transfer solutions from the reduced resonant system associated to R to solutions of the resonant system associated to \mathcal{R} . Thus, in Subsection 4.4.3, we study the structure of this reduced resonant system. Finally, we obtain some dynamical consequences for solutions of the initial system (4.1.1), like the control of the Sobolev norms (Remark 4.4.2), and an example of nonlinear behavior with the beating effect (Subsection 4.4.4).

4.4.1 Estimates about the solutions of the resonant system

In this subsection, we study the behavior of solutions of the resonant system (4.1.2). More precisely, we deal with two lemmas which will be useful to prove Theorem 4.1.1 (Section 4.5) and Theorem 4.1.2 (Section 4.6). First, let us prove this following result, which helps to prove the existence of the solutions of the resonant system.

Lemma 4.4.1. *Assume $W_{U,0}, W_{V,0} \in S^{(+)}$, and let (W_U, W_V) be the solution of the resonant system (4.1.2) with initial data $(W_{U,0}, W_{V,0})$. Then, for $t \geq 1$, we have two conservation estimates.*

$$\|W_U(\ln t)\|_Z + \|W_V(\ln t)\|_Z = \|W_{U,0}\|_Z + \|W_{V,0}\|_Z, \quad (4.4.2)$$

$$\|W_U(t)\|_{H_{x,y}^\sigma} + \|W_V(t)\|_{H_{x,y}^\sigma} = \|W_{U,0}\|_{H_{x,y}^\sigma} + \|W_{V,0}\|_{H_{x,y}^\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}. \quad (4.4.3)$$

Moreover, we also have a control of the growth of the S and S^+ norms by

$$\|W_U(\ln t)\|_S + \|W_V(\ln t)\|_S \lesssim (1 + |t|)^{\delta'} (\|W_{U,0}\|_S + \|W_{V,0}\|_S), \quad (4.4.4)$$

$$\|W_U(\ln t)\|_{S^+} + \|W_V(\ln t)\|_{S^+} \lesssim (1 + |t|)^{\delta''} (\|W_{U,0}\|_{S^+} + \|W_{V,0}\|_{S^+}), \quad (4.4.5)$$

where $\delta' \simeq \|W_{V,0}\|_Z^2 + \|W_{U,0}\|_Z^2$ and $\delta'' \simeq \|W_{V,0}\|_S^2 + \|W_{U,0}\|_S^2$.

Basically, the goal of the second part of this lemma is to transform exponential bounds of Grönwall estimates into polynomial bounds, thanks to the $\ln(t)$ time present in the resonant terms of Theorem 4.1.1 and Theorem 4.1.2. The gain of this transformation is primary because we have a control on the power of the polynomial bounds. Before proving this lemma, let us begin with two remarks. First, we have a dynamical consequence.

Remark 4.4.2. *On the one hand, estimates (4.4.2), (4.4.4) and (4.4.5) are just some generalizations of the case of the cubic Schrödinger equation. Indeed, we have the same estimates with just one equation (see [27, Lemma 4.3] or [54, Lemma 4.2]). On the other hand, we have the estimate (4.4.3), about the conservation of the sum of the H^s norm of the solutions of the resonant system (4.1.2). This estimate is related to the dimension one of the compact part \mathbb{T} of the spatial domain. In particular, due to Theorem 4.1.1, this estimate prevents every kind of growth of the Sobolev norms of the solutions of the initial system (4.1.1). We have thus a first dynamical consequence of this theorem: all the couple of solutions of the system (4.1.1) are bounded in every Sobolev space H^s (for all $s \in \mathbb{R}$). In particular, this is sufficient to prove the estimate (4.1.3) and thus Theorem 4.1.3 follows.*

The second remark concerns the structure of the set Γ_0 .

Remark 4.4.3. *Let $(p, q, r, s) \in \Gamma_0$:*

$$0 = (p^2 - q^2) + (r^2 - s^2) = (p - q)(p + q) + (r - s)(r + s) = (p - q)(p + q - r - s) = 2(p - q)(p - s).$$

Thus, we have $p = q$ or $p = s$, and it follows that $\{p, r\} = \{q, s\}$. As a consequence, we see that

$$\begin{aligned} & \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} \widehat{W}_{V,p}(t) \overline{\widehat{W}_{V,q}(t)} \widehat{W}_{U,r}(t) \overline{\widehat{W}_{U,s}(t)} \\ &= \sum_{p,r \in \mathbb{Z}} |\widehat{W}_{V,p}(t)|^2 |\widehat{W}_{U,r}(t)|^2 + \left| \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{W}_{V,p}(t) \overline{\widehat{W}_{U,q}(t)} \right|^2 - \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\widehat{W}_{V,p}(t)|^2 |\widehat{W}_{U,p}(t)|^2. \end{aligned}$$

In particular, this quantity is real.

We can now prove Lemma 4.4.1.

Proof. Let us see the computations for W_U . We begin with conservation equations (4.4.2) and (4.4.3). By definition of the resonant system, we have

$$i\partial_t \mathcal{F}W_U(t, \xi, p) = \mathcal{F}\mathcal{R}[W_V, W_V, W_U](t, \xi, p) = \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} \widehat{W}_{V,q}(t, \xi) \overline{\widehat{W}_{V,r}(t, \xi)} \widehat{W}_{U,s}(t, \xi).$$

Thus, for $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a real function, we have

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{p \in \mathbb{Z}} h(p) |\widehat{W}_{U,p}|^2 &= 2 \sum_{p \in \mathbb{Z}} h(p) \Re \left(\partial_t \widehat{W}_{U,p} \cdot \overline{\widehat{W}_{U,p}} \right) \\ &= 2 \sum_{p \in \mathbb{Z}} h(p) \Im \left(i \partial_t \widehat{W}_{U,p} \cdot \overline{\widehat{W}_{U,p}} \right) \\ &= 2 \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} h(p) \Im \left(\overline{\widehat{W}_{U,p}} \widehat{W}_{V,q} \overline{\widehat{W}_{V,r}} \widehat{W}_{U,s} \right). \end{aligned}$$

By Remark 4.4.3, we see that for constant function $h \equiv 1$, the right-hand side of the equation is 0. Thus, we have the conservation of the ℓ_p^2 norm of W_U and W_V . For higher Sobolev norm, let us rewrite the right-hand side by developing the imaginary part. We have

$$\partial_t \sum_{p \in \mathbb{Z}} h(p) |\widehat{W}_{U,p}|^2 = -i \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} \left(h(p) \overline{\widehat{W}_{U,p}} \widehat{W}_{V,q} \overline{\widehat{W}_{V,r}} \widehat{W}_{U,s} - h(p) \widehat{W}_{U,p} \overline{\widehat{W}_{V,q}} \widehat{W}_{V,r} \overline{\widehat{W}_{U,s}} \right).$$

By symmetry this equation becomes

$$\partial_t \sum_{p \in \mathbb{Z}} h(p) |\widehat{W}_{U,p}|^2 = -i \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} (h(p) - h(s)) \overline{\widehat{W}_{U,p}} \widehat{W}_{V,q} \overline{\widehat{W}_{V,r}} \widehat{W}_{U,s}.$$

Here, we have no more symmetry because of the different \widehat{W}_U and \widehat{W}_V terms. To avoid this problem, we take advantage of the coupling effect by looking the sum of the norms of the solutions. We have

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{p \in \mathbb{Z}} h(p) (|\widehat{W}_{U,p}|^2 + |\widehat{W}_{V,p}|^2) &= -i \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} (h(p) - h(s)) \overline{\widehat{W}_{U,p}} \widehat{W}_{V,q} \overline{\widehat{W}_{V,r}} \widehat{W}_{U,s} \\ &\quad - i \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} (h(p) - h(s)) \overline{\widehat{W}_{V,p}} \widehat{W}_{U,q} \overline{\widehat{W}_{U,r}} \widehat{W}_{V,s}. \end{aligned}$$

Now, by symmetry we have

$$\partial_t \sum_{p \in \mathbb{Z}} h(p) (|\widehat{W}_{U,p}|^2 + |\widehat{W}_{V,p}|^2) = -i \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} (h(p) - h(q) + h(r) - h(s)) \overline{\widehat{W}_{U,p}} \widehat{W}_{V,q} \overline{\widehat{W}_{V,r}} \widehat{W}_{U,s}.$$

By Remark 4.4.3, we have $\{p, r\} = \{q, s\}$, thus

$$\partial_t \sum_{p \in \mathbb{Z}} h(p) (|\widehat{W}_{U,p}|^2 + |\widehat{W}_{V,p}|^2) = 0.$$

From this equation, we deduce the conservation of all the sum of the h_p^σ norms (for $\sigma \in \mathbb{R}$). Equation (4.4.3) follows immediately. From conservation of the h_p^1 norm of W_U and W_V , we have

$$\|\mathcal{F}W_U(t, \xi)\|_{h_p^1} + \|\mathcal{F}W_V(t, \xi)\|_{h_p^1} = \|\mathcal{F}W_{U,0}(\xi)\|_{h_p^1} + \|\mathcal{F}W_{V,0}(\xi)\|_{h_p^1}. \quad (4.4.6)$$

Multiplying by $(1 + \xi^2)^2$ and taking the supremum in ξ , we obtain equation (4.4.2).

Let us now deal with the proof of the inequality (4.4.4) for the S norm. From Lemma 4.3.10 (equation (4.3.32)) and equation (4.4.2), we have

$$\begin{aligned} \|\mathcal{FR}[W_V, W_V, W_U](\xi)\|_{h_p^\nu} &\lesssim \|\hat{W}_V(\xi)\|_{h_p^\nu} \|\hat{W}_V(\xi)\|_{h_p^1} \|\hat{W}_U(\xi)\|_{h_p^1} + \|\hat{W}_U(\xi)\|_{h_p^\nu} \|\hat{W}_V(\xi)\|_{h_p^1}^2 \\ &\lesssim (\|W_{U,0}\|_Z + \|W_{V,0}\|_Z)^2 (\|\hat{W}_U(\xi)\|_{h_p^\nu} + \|\hat{W}_V(\xi)\|_{h_p^\nu}). \end{aligned}$$

With the same method, using this time equation (4.3.31), we also have

$$\begin{aligned} \|\partial_\xi \mathcal{FR}[W_V, W_V, W_U](\xi)\|_{\ell_p^2} &\lesssim \|\partial_\xi \hat{W}_V(\xi)\|_{\ell_p^2} \|\hat{W}_V(\xi)\|_{h_p^1} \|\hat{W}_U(\xi)\|_{h_p^1} + \|\partial_\xi \hat{W}_U(\xi)\|_{\ell_p^2} \|\hat{W}_V(\xi)\|_{h_p^1}^2 \\ &\lesssim (\|W_{U,0}\|_Z + \|W_{V,0}\|_Z)^2 (\|\partial_\xi \hat{W}_U(\xi)\|_{\ell_p^2} + \|\partial_\xi \hat{W}_V(\xi)\|_{\ell_p^2}). \end{aligned}$$

Therefore, with these two estimates, we have

$$\begin{aligned} \|\partial_t W_U(t)\|_S &= \|\mathcal{R}[W_V(t), W_V(t), W_U(t)]\|_S \\ &= \|\mathcal{R}[W_V(t), W_V(t), W_U(t)]\|_{H_{x,y}^N} + \|\partial_\xi \mathcal{FR}[W_V(t), W_V(t), W_U(t)]\|_{L_{\xi,p}^2} \\ &\lesssim (\|W_{U,0}\|_Z + \|W_{V,0}\|_Z)^2 (\|W_U(t)\|_S + \|W_V(t)\|_S). \end{aligned}$$

By symmetry, we also have

$$\|\partial_t W_V(t)\|_S \lesssim (\|W_{U,0}\|_Z + \|W_{V,0}\|_Z)^2 (\|W_U(t)\|_S + \|W_V(t)\|_S).$$

Now, we use that by Cauchy-Schwarz we have

$$\partial_t \|W_U(t)\|_S^2 \lesssim \|W_U(t)\|_S \|\partial_t W_U(t)\|_S,$$

to obtain, thanks to the Young inequality $ab \lesssim a^2 + b^2$,

$$\partial_t (\|W_U(t)\|_S^2 + \|W_V(t)\|_S^2) \lesssim (\|W_{U,0}\|_Z + \|W_{V,0}\|_Z)^2 (\|W_U(t)\|_S^2 + \|W_V(t)\|_S^2).$$

We apply the Grönwall Lemma to obtain for a constant $c > 0$,

$$\|W_U(t)\|_S^2 + \|W_V(t)\|_S^2 \lesssim (\|W_{V,0}\|_S^2 + \|W_{U,0}\|_S^2) \exp(c(\|W_{V,0}\|_Z^2 + \|W_{U,0}\|_Z^2)t). \quad (4.4.7)$$

Therefore, for the time $\ln(t)$ and the constant $\delta' = \frac{c}{2}(\|W_{V,0}\|_Z^2 + \|W_{U,0}\|_Z^2)$, we have proved equation (4.4.4) for the S norm.

It remains to deal with the S^+ norm estimate of equation (4.4.5). We already have the first part of the S^+ norm with the previous computations. For the $\|xF\|_S$ part, always from Lemma 4.3.10 and equation (4.4.2), we have

$$\begin{aligned} \|\partial_\xi \mathcal{FR}[W_V, W_V, W_U]\|_{h_p^\nu} &\lesssim (\|W_{U,0}\|_Z + \|W_{V,0}\|_Z)^2 (\|\partial_\xi \hat{W}_U\|_{h_p^\nu} + \|\partial_\xi \hat{W}_V\|_{h_p^\nu}) \\ &\quad + (\|W_{U,0}\|_Z + \|W_{V,0}\|_Z) (\|\hat{W}_U\|_{h_p^\nu} \|\partial_\xi \hat{W}_V\|_{h_p^1} + \|\hat{W}_V\|_{h_p^\nu} \|\partial_\xi \hat{W}_V\|_{h_p^1} + \|\hat{W}_V\|_{h_p^\nu} \|\partial_\xi \hat{W}_U\|_{h_p^1}), \\ \|\partial_\xi^2 \mathcal{FR}[W_V, W_V, W_U]\|_{\ell_p^2} &\lesssim (\|W_{U,0}\|_Z + \|W_{V,0}\|_Z)^2 (\|\partial_\xi^2 \hat{W}_U\|_{\ell_p^2} + \|\partial_\xi^2 \hat{W}_V\|_{\ell_p^2}) \\ &\quad + (\|W_{U,0}\|_Z + \|W_{V,0}\|_Z) (\|\partial_\xi \hat{W}_V\|_{\ell_p^2} \|\partial_\xi \hat{W}_U\|_{h_p^1} + \|\partial_\xi \hat{W}_V\|_{\ell_p^2} \|\partial_\xi \hat{W}_V\|_{h_p^1}). \end{aligned}$$

Therefore, for $\nu = N$, we take the H_x^N norm in the first line and the L_x^2 one in the second line. We obtain

$$\begin{aligned} \|\partial_t(xW_U)\|_{H_{x,y}^N} + \|\partial_t(x^2W_U)\|_{L_{x,y}^2} &\lesssim (\|xW_V\|_S + \|xW_U\|_S)(\|W_{U,0}\|_Z^2 + \|W_{V,0}\|_Z^2) \\ &\quad + (\|W_{U,0}\|_Z + \|W_{V,0}\|_Z)(\|W_U\|_S + \|W_V\|_S)(\|\partial_\xi \hat{W}_U\|_{h_p^1 L_\xi^\infty} + \|\partial_\xi \hat{W}_V\|_{h_p^1 L_\xi^\infty}). \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Here, the main difficulty comes from the $\|\partial_\xi \hat{W}_V(\xi)\|_{h_p^1 L_\xi^\infty}$ and $\|\partial_\xi \hat{W}_U(\xi)\|_{h_p^1 L_\xi^\infty}$ terms that are not controlled immediately by the Z norm of the initial data. Thus, we focus first on the first line in the previous equation for $\nu = 1$. We obtain

$$\|\partial_\xi \mathcal{FR}[W_V, W_V, W_U](\xi)\|_{h_p^1} \lesssim (\|W_{U,0}\|_Z + \|W_{V,0}\|_Z)^2 (\|\partial_\xi \hat{W}_U(\xi)\|_{h_p^1} + \|\partial_\xi \hat{W}_V(\xi)\|_{h_p^1}).$$

Therefore, by symmetry, we obtain

$$\|\partial_t \partial_\xi \hat{W}_U(\xi)\|_{h_p^1} + \|\partial_t \partial_\xi \hat{W}_V(\xi)\|_{h_p^1} \lesssim (\|W_{U,0}\|_Z + \|W_{V,0}\|_Z)^2 (\|\partial_\xi \hat{W}_U(\xi)\|_{h_p^1} + \|\partial_\xi \hat{W}_V(\xi)\|_{h_p^1}).$$

Thus, following the computations of the S norm case, we obtain for a constant $\tilde{c} > 0$ and the associated parameter $\delta_1'' = \frac{\tilde{c}}{2}(\|W_{V,0}\|_Z^2 + \|W_{U,0}\|_Z^2)$,

$$\|\partial_\xi \hat{W}_U(t)\|_{h_p^1 L_\xi^\infty} + \|\partial_\xi \hat{W}_V(t)\|_{h_p^1 L_\xi^\infty} \lesssim (\|xW_{V,0}\|_Z + \|xW_{U,0}\|_Z) e^{\delta_1'' t}.$$

We plug this bound and the bound (4.4.7) in equation (4.4.8). We get

$$\begin{aligned} \|\partial_t(xW_U)(t)\|_S + \|\partial_t(xW_V)(t)\|_S &\lesssim (\|W_{U,0}\|_Z^2 + \|W_{V,0}\|_Z^2)(\|xW_V(t)\|_S + \|xW_U(t)\|_S) \\ &\quad + (\|W_{U,0}\|_Z + \|W_{V,0}\|_Z)(\|W_{V,0}\|_S + \|W_{U,0}\|_S)(\|xW_{V,0}\|_Z + \|xW_{U,0}\|_Z) e^{(\delta' + \delta_1'')t}. \end{aligned}$$

With the Cauchy-Schwarz and Young inequalities, we obtain for a constant $c > 0$,

$$\begin{aligned} \partial_t(\|(xW_U)(t)\|_S + \|(xW_V)(t)\|_S)^2 &\leq c(\|W_{U,0}\|_S^2 + \|W_{V,0}\|_S^2)(\|xW_V(t)\|_S + \|xW_U(t)\|_S)^2 \\ &\quad + c(\|W_{U,0}\|_Z^2 + \|W_{V,0}\|_Z^2)(\|xW_{V,0}\|_Z^2 + \|xW_{U,0}\|_Z^2) e^{2(\delta' + \delta_1'')t}. \end{aligned}$$

We set

$$\begin{aligned} y &:= (\|(xW_U)(t)\|_S + \|(xW_V)(t)\|_S)^2, \quad \delta_2'' := c(\|W_{U,0}\|_S^2 + \|W_{V,0}\|_S^2), \\ K &:= c(\|W_{U,0}\|_Z^2 + \|W_{V,0}\|_Z^2)(\|xW_{V,0}\|_Z^2 + \|xW_{U,0}\|_Z^2) \quad \text{and} \quad f := K e^{2(\delta' + \delta_1'')t}. \end{aligned}$$

We have

$$\dot{y} \leq \delta_2'' y + f,$$

thus, we deduce that

$$y(t) \leq e^{\delta_2'' t} y_0 + e^{\delta_2'' t} \int_0^t e^{-\delta_2'' s} f(s) ds.$$

Back to our variables, it becomes

$$\begin{aligned} &(\|(xW_U)(t)\|_S + \|(xW_V)(t)\|_S)^2 \\ &\leq e^{\delta_2'' t} (\|(xW_U)_0\|_S + \|(xW_V)_0\|_S)^2 + K e^{\delta_2'' t} \int_0^t e^{(-\delta_2'' + 2(\delta' + \delta_1''))s} ds. \end{aligned}$$

In the integral, we just use that $-\delta_2'' + 2(\delta' + \delta_1'') \leq 2(\delta' + \delta_1'')$. Moreover, we have for a constant $c > 0$,

$$\delta_2'' + 2(\delta' + \delta_1'') \leq c(\|W_{U,0}\|_S^2 + \|W_{V,0}\|_S^2) := 2\delta''.$$

Therefore, we obtain

$$(\|(xW_U)(t)\|_S + \|(xW_V)(t)\|_S)^2 \lesssim (\|W_{V,0}\|_{S^+}^2 + \|W_{U,0}\|_{S^+}^2)e^{\delta_2''t} + (\|xW_{V,0}\|_Z^2 + \|xW_{U,0}\|_Z^2)e^{2\delta''t}.$$

We conclude the proof of this part by remarking that $\|xW_{V,0}\|_Z \leq \|xW_{V,0}\|_S \leq \|W_{V,0}\|_{S^+}$.

The last thing to do is to deal with the $\|(1 - \partial_{xx})^4 F\|_S$ of the S^+ norm. The key here is the fact that in Fourier's variables, the $(1 - \partial_{xx})^4$ becomes a multiplication by $(1 + \xi^2)^4$. Thus, we can just follow the same computations as the S norm case, just by putting the ξ factors in the non Z terms. Namely, for the H^N part we have

$$\begin{aligned} \|(1 + \xi^2)^4 \mathcal{FR}[W_V, W_V, W_U](\xi)\|_{h_p^\nu} &\lesssim \\ &(\|W_{U,0}\|_Z^2 + \|W_{V,0}\|_Z^2)(\|(1 + \xi^2)^4 \hat{W}_U(\xi)\|_{h_p^\nu} + \|(1 + \xi^2)^4 \hat{W}_V(\xi)\|_{h_p^\nu}). \end{aligned}$$

We remark that we have the same bound as in the S norm case. The difficulty comes with the L^2 part of the norm, because we have to deal with derivatives and multiplications in the same time. We get

$$\begin{aligned} \|(1 + \xi^2)^4 \partial_\xi \mathcal{FR}[W_V, W_V, W_U]\|_{\ell_p^2} & \\ &\lesssim K_0 \left(\|\partial_\xi \hat{W}_V\|_{\ell_p^2} \|(1 + \xi^2)^4 \hat{W}_U\|_{h_p^1} + \|\partial_\xi \hat{W}_U\|_{\ell_p^2} \|(1 + \xi^2)^4 \hat{W}_V\|_{h_p^1} \right), \\ \|\partial_\xi((1 + \xi^2)^4) \mathcal{FR}[W_V, W_V, W_U]\|_{\ell_p^2} &\lesssim K_0^2 \frac{\xi}{1 + \xi^2} \left(\|(1 + \xi^2)^4 \hat{W}_U\|_{\ell_p^2} + \|(1 + \xi^2)^4 \hat{W}_V\|_{\ell_p^2} \right), \end{aligned}$$

where $K_0 := \|W_{U,0}\|_Z + \|W_{V,0}\|_Z$. The strategy now is the same as in the $\|xF\|_S$ part of the norm. We can treat the case $\nu = 1$ in the last h^ν equation or just use the h^N bound to see that we have the same bound for the terms $\|\langle \xi \rangle^8 \hat{W}_U\|_{h_p^1 L_\xi^\infty}$ and $\|\langle \xi \rangle^8 \hat{W}_V\|_{h_p^1 L_\xi^\infty}$ as in the S norm case. Thus we can conclude the proof with the same inhomogeneous Grönwall inequation as in the $\|xF\|_S$ case. \square

Remark 4.4.4. *Through the previous computations, we also have the following estimates about \mathcal{R} :*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}[W_V, W_V, W_U](t)\|_S &\lesssim (\|W_U(0)\|_S + \|W_V(0)\|_S)(\|W_U\|_Z^2 + \|W_V\|_Z^2)(1 + |t|)^{\delta'}, \\ \|\mathcal{R}[W_V, W_V, W_U](t)\|_{S^+} &\lesssim (\|W_U(0)\|_{S^+} + \|W_V(0)\|_{S^+})(\|W_U\|_Z^2 + \|W_V\|_Z^2)(1 + |t|)^{\delta''} \\ &\quad + (\|W_U(0)\|_{S^+}^2 + \|W_V(0)\|_{S^+}^2)(\|W_U\|_Z + \|W_V\|_Z)(1 + |t|)^{2\delta'}. \end{aligned}$$

We now control the growth of the solutions of the resonant system (4.1.2). The next lemma gives us an estimate in order to control the growth of the difference of two couples of solutions with close initial data. We have:

Lemma 4.4.5. *Assume that for (A^1, B^1) and (A^2, B^2) solutions of the system (4.1.2) we have*

$$\|A^1(0)\|_S + \|A^2(0)\|_S + \|B^1(0)\|_S + \|B^2(0)\|_S \lesssim \varepsilon,$$

and

$$\|A^1(0) - A^2(0)\|_S + \|B^1(0) - B^2(0)\|_S \leq \delta.$$

Then, for all $0 \leq t \leq T$, there exists a constant $C > 0$ such that

$$\|A^1(t) - A^2(t)\|_S + \|B^1(t) - B^2(t)\|_S \leq \delta e^{C\varepsilon^2 t}.$$

Proof. The idea is to write

$$\begin{aligned} i\partial_t(A^1 - A^2) &= \mathcal{R} [B^1, B^1, A^1] - \mathcal{R} [B^2, B^2, A^2] \\ &= \mathcal{R} [B^1 - B^2, B^1, A^1] + \mathcal{R} [B^2, B^1 - B^2, A^1] + \mathcal{R} [B^2, B^2, A^1 - A^2]. \end{aligned}$$

For the S norm, we follow the strategy of the previous lemma. Let us deal with the first term of the sum. By the estimate (4.3.33), we have

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R} [B^1 - B^2, B^1, A^1]\|_S &\lesssim \|B^1 - B^2\|_S \|A^1\|_Z \|B^1\|_Z \\ &\quad + \|B^1 - B^2\|_Z (\|A^1\|_S \|B^1\|_Z + \|A^1\|_Z \|B^1\|_S). \end{aligned}$$

Here, we can use that

$$\|A^1(t)\|_Z \leq \|A^1(0)\|_Z + \|B^1(0)\|_Z \leq \|A^1(0)\|_S + \|B^1(0)\|_S \lesssim \varepsilon.$$

Therefore, with the two other terms of the sum, and the estimate for the B part, we obtain

$$\begin{aligned} \partial_t(\|(A^1 - A^2)(t)\|_S^2 + \|(B^1 - B^2)(t)\|_S^2) &\lesssim \varepsilon^2(\|(A^1 - A^2)(t)\|_S^2 + \|(B^1 - B^2)(t)\|_S^2) \\ &\quad + \delta^2(\|A^1(t)\|_S^2 + \|A^2(t)\|_S^2 + \|B^1(t)\|_S^2 + \|B^2(t)\|_S^2). \end{aligned}$$

The previous lemma for the estimates on the second right-side term and an application of Grönwall inequality gives

$$\|(A^1 - A^2)(t)\|_S^2 + \|(B^1 - B^2)(t)\|_S^2 \lesssim \delta^2 e^{C\varepsilon^2 t} + \delta^2 \varepsilon^2 e^{C\varepsilon^2 t} \int_0^t e^{(\tilde{C}-C)\varepsilon^2 s} ds.$$

This completes the proof of the lemma. \square

From these lemmas, we can deduce the global existence of the solutions of the resonant system

Lemma 4.4.6. *Let $\nu \in \mathbb{N}^*$. For any $(W_{U,0}, W_{V,0}) \in H_{x,y}^\nu \times H_{x,y}^\nu$, there exists a unique couple of solutions $(W_U, W_V) \in \mathcal{C}(\mathbb{R} : H_{x,y}^\nu) \times \mathcal{C}(\mathbb{R} : H_{x,y}^\nu)$ of the resonant system (4.1.2) with initial data $(W_{U,0}, W_{V,0})$.*

Proof. From the estimate (4.3.31) of Lemma 4.3.10, we have the local existence of the solutions. Then, equation (4.4.3) allows us to pass from local existence to global existence. \square

4.4.2 From the reduced resonant system to the resonant system

As mentioned in the introduction of the section, we want to take profit of the study of the reduced resonant system (4.4.1). In view of this idea, the following computations show how to transfer informations from a solution of the reduced resonant system (4.4.1) to a solution of the system (4.1.2). Therefore, the wave operator theorem allows us to transfer these informations to solutions of the initial system (4.1.1). The idea is to take an initial data of the form

$$W_{U,0}(x, y) = \check{\varphi}(x)\alpha(y), \quad W_{V,0}(x, y) = \check{\varphi}(x)\beta(y),$$

where $\alpha_p = a_p(0)$, $\beta_p = b_p(0)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ and $\check{\varphi}$ is the inverse Fourier transform of φ . Thus, thanks to the separated variables x and y in the initial data, it is straightforward to check that the solution of the resonant system (4.1.2) with initial data $(W_{U,0}, W_{V,0})$ is given by

$$\mathcal{F}(W_U)(t, \xi, p) = \varphi(\xi)a_p(\varphi(\xi)^2t), \quad \mathcal{F}(W_V)(t, \xi, p) = \varphi(\xi)b_p(\varphi(\xi)^2t).$$

Indeed, we have for example for W_U :

$$i\partial_t \mathcal{F}(W_U)(t, \xi, p) = \varphi(\xi)^3(i\partial_t a_p)(\varphi(\xi)^2t) = \mathcal{FR}[W_V(t), W_V(t), W_U(t)]_p(\xi).$$

In particular, if $\varphi = 1$ on an open interval I , then $\mathcal{F}W_U(t, \xi, p) = a_p(t)$ and $\mathcal{F}W_V(t, \xi, p) = b_p(t)$, for all $t \in \mathbb{R}$ and all $\xi \in I$. Thus, for $\xi \in I$, the resonant system (4.1.2) behaves like the reduced resonant system (4.4.1).

Remark 4.4.7. *The solutions we obtain from this method for the resonant system (4.1.2) are constant with respect to ξ on the interval I we choose. The idea is to take the interval I as big as we want. Thus, we have a big interval in which we conserve the behavior of the resonant system on the torus. One can think that we completely kill the role of the Euclidean variable x with this construction, whereas the goal of this construction is to take profit of the dynamics of the resonant system and to gain a large time behavior thanks to the Euclidean variable. Therefore, this method is really adapted to our aim which is to construct a couple of solution of the initial system (4.1.1) with asymptotic dynamical properties of the reduced resonant system.*

4.4.3 About the reduced resonant system, the Hamiltonian formalism

Let us now see some properties of the reduced resonant system. First, we can deduce some results for this system from the computations of Subsection 4.4.1. From Lemma 4.4.6, we deduce the global existence of the solutions of the reduced resonant system:

Lemma 4.4.8. *Let $\sigma \in \mathbb{R}$. For any $(a_0, b_0) \in h_p^\sigma \times h_p^\sigma$, there exists a unique couple of solutions $(a, b) \in \mathcal{C}(\mathbb{R} : h_p^\sigma) \times \mathcal{C}(\mathbb{R} : h_p^\sigma)$ of the resonant system (4.4.1) with initial data (a_0, b_0) .*

The computations of estimate (4.4.6) imply that $R[b, b, \cdot]$ is self-adjoint and satisfy

$$\langle iR[b, b, a], a \rangle_{h_p^1 \times h_p^1} = 0, \quad \forall a, b \in h_p^1. \quad (4.4.9)$$

More generally, the computations of (4.4.3) give us, for a solution (a, b) of the reduced system (4.4.1), $\forall \sigma \in \mathbb{R}$

$$\|a(t)\|_{h_p^\sigma} + \|b(t)\|_{h_p^\sigma} = \|a_0\|_{h_p^\sigma} + \|b_0\|_{h_p^\sigma}. \quad (4.4.10)$$

Then, we remark that the system (4.4.1) is Hamiltonian, for the Hamiltonian

$$H := \sum_{(p,q,r,s) \in \Gamma_0} a_p \bar{a}_q b_r \bar{b}_s = \sum_{\{p,r\}=\{q,s\}} a_p \bar{a}_q b_r \bar{b}_s,$$

which is real due to Remark 4.4.3. Indeed, with H thus defined, we have the infinite system:

$$\begin{cases} i\partial_t a_j = \frac{\partial H}{\partial \bar{a}_j}, & -i\partial_t \bar{a}_j = \frac{\partial H}{\partial a_j}, & j \in \mathbb{Z}, \\ i\partial_t b_j = \frac{\partial H}{\partial \bar{b}_j}, & -i\partial_t \bar{b}_j = \frac{\partial H}{\partial b_j}, & j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

The associated symplectic structure is given by $-i \sum_{j \in \mathbb{Z}} (da_j \wedge d\bar{a}_j + db_j \wedge d\bar{b}_j)$. Thus, the Poisson bracket between two functions f and g of (a, \bar{a}, b, \bar{b}) is given by

$$\{f, g\} = -i \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\partial f}{\partial a_j} \frac{\partial g}{\partial \bar{a}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{a}_j} \frac{\partial g}{\partial a_j} + \frac{\partial f}{\partial b_j} \frac{\partial g}{\partial \bar{b}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{b}_j} \frac{\partial g}{\partial b_j} \right).$$

In order to rewrite the Hamiltonian, we set

$$I := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2, \quad J := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|^2, \quad S := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \bar{b}_n.$$

Therefore, thanks to Remark 4.4.3, we can write the Hamiltonian H as

$$H = IJ + |S|^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 |b_n|^2. \quad (4.4.11)$$

With this new structure, we can give a new proof of estimates (4.4.3) and (4.4.10). For an integer $n \in \mathbb{N}$ we have

$$\begin{aligned} \partial_t(|a_n|^2 + |b_n|^2) &= \{|a_n|^2, H\} + \{|b_n|^2, H\} \\ &= -i \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{a}_n} - a_n \frac{\partial H}{\partial a_n} \right) - i \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{b}_n} - b_n \frac{\partial H}{\partial b_n} \right) \\ &= -i (a_n \bar{b}_n S - a_n \bar{b}_n \bar{S}) - i (a_n \bar{b}_n S - \bar{a}_n b_n S) \\ &= 0. \end{aligned}$$

This implies the conservation of the H^σ norms for the reduced resonant system (4.4.1), but also for the resonant system (4.1.2), where the quantities a_n, b_n, I, J and S depend on ξ too. We are now able to prove the existence of the beating effect.

4.4.4 Example of nonlinear dynamics: the beating effect

In this subsection, we adapt the proof of the beating effect of Grébert, Patutel and Thomann in [20] to prove Theorem 4.1.4. We want to highlight an exchange between two modes of the solutions. According to this idea, we introduce the reduced space

$$\mathcal{J}_{p,q} = \{(a, b), a_n = \bar{a}_n = b_n = \bar{b}_n = 0, n \notin \{p, q\}\},$$

and we note \tilde{H} the reduced Hamiltonian defined by

$$\tilde{H} = H_{\mathcal{J}_{p,q}}.$$

For more simplicity, we work in the symplectic polar coordinates $(I_j, J_j, \theta_j, \varphi_j)$ defined by:

$$a_j = \sqrt{I_j} e^{i\theta_j}, \quad b_j = \sqrt{J_j} e^{i\varphi_j}.$$

This is a symplectic change of variables because we have the relation

$$d\alpha \wedge d\bar{\alpha} + d\beta \wedge d\bar{\beta} = i(d\theta \wedge dI + d\varphi \wedge dJ).$$

Therefore, the expression (4.4.11) of the Hamiltonian H becomes for the reduced case

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= (I_p + I_q)(J_p + J_q) + (a_p \bar{b}_p + a_q \bar{b}_q)(\bar{a}_p b_p + \bar{a}_q b_q) - (a_p^2 b_p^2 + a_q^2 b_q^2) \\ &= (I_p + I_q)(J_p + J_q) + 2(I_p I_q J_p J_q)^{\frac{1}{2}} \cos(\Psi_0), \end{aligned}$$

where $\Psi_0 := \theta_q - \theta_p + \varphi_p - \varphi_q$. We obtain thus the following Hamiltonian system

$$\begin{cases} \partial_t \theta_j &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial I_j}, & \partial_t I_j &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta_j}, & j &= p, q, \\ \partial_t \varphi_j &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial J_j}, & \partial_t J_j &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi_j}, & j &= p, q. \end{cases} \quad (4.4.12)$$

Let us show that this system is completely integrable.

Lemma 4.4.9. *The system (4.4.12) is completely integrable. Moreover, the following change of variables is symplectic:*

$$\begin{cases} K_0 &= I_q, & K_1 &= I_q + I_p, & K_2 &= J_q + J_p, & K_3 &= I_q + J_q, \\ \Psi_0 &= \theta_q - \theta_p + \varphi_p - \varphi_q, & \Psi_1 &= \theta_p, & \Psi_2 &= \varphi_p, & \Psi_3 &= \varphi_q - \varphi_p. \end{cases}$$

Proof. First, we easily see that K_1, K_2 and K_3 are constants of motion. Indeed, we can for example check for K_1 that

$$\begin{aligned} \{K_1, \tilde{H}\} &= \sum_{j=p,q} \left(\frac{\partial K_1}{\partial I_j} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial K_1}{\partial \theta_j} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial I_j} + \frac{\partial K_1}{\partial J_j} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial K_1}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial J_j} \right) \\ &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta_p} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta_q} = 2\sqrt{I_p I_q J_p J_q} (\sin \psi_0 - \sin \psi_0) = 0. \end{aligned}$$

Then, K_1, K_2 and K_3 are independent of the angles $\theta_p, \theta_q, \varphi_p$ and φ_q . Therefore, they are in involution:

$$\{K_1, K_2\} = \{K_1, K_3\} = \{K_2, K_3\} = 0.$$

Finally, K_1, K_2 and K_3 are clearly independent (they do not depend on the same actions) and are independent with \tilde{H} which is the only to depend on an angle. Thus, the system is completely integrable.

Concerning the change of variables, we have

$$\begin{aligned} d\Psi \wedge dK &= d\Psi_0 \wedge dK_0 + d\Psi_1 \wedge dK_1 + d\Psi_2 \wedge dK_2 + d\Psi_3 \wedge dK_3 \\ &= dI_q \wedge d(\theta_q - \theta_p + \varphi_p - \varphi_q + \theta_p + \varphi_q - \varphi_p) \\ &\quad + dI_p \wedge d\theta_p + dJ_p \wedge d\varphi_p + dJ_q \wedge d(\varphi_p + \varphi_q - \varphi_p) \\ &= dI \wedge d\theta + dJ \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Thus the change of variables is symplectic. \square

Remark 4.4.10. *The fact that the system (4.4.12) is integrable is not a surprise. Indeed, we can remark that the Hamiltonian \tilde{H} depends only on one angle (Ψ_0). This gives us three constants of motion, which with the Hamiltonian itself form a family of four independent constants of motions in involution. Thus the system (4.4.12) is completely integrable. Another easy way to check this integrability is to consider the conservations of the mass and moment of the solutions, given by the conservation of the h^1 norm of the solution thanks to equation (4.4.9). Therefore, the goal of this lemma is not to prove that the system is integrable, but to find a new explicit set of variable in order to obtain a simpler system.*

In this new system of coordinates, the Hamiltonian becomes

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \tilde{H}(\Psi_0, K_0, K_1, K_2, K_3) \\ &= K_1 K_2 + 2(K_0(K_1 - K_0)(K_3 - K_0)(K_2 - K_3 + K_0))^{\frac{1}{2}} \cos(\Psi_0). \end{aligned}$$

K_1, K_2 and K_3 and constants of motion. Thus, for initial data of the size ε , we can fixed

$$K_1 = K_2 = K_3 = \varepsilon^2.$$

Thus, we obtain a new Hamiltonian \tilde{H}_0 defined by

$$\tilde{H}_0(\Psi_0, K_0) = \tilde{H}(\Psi_0, K_0, \varepsilon^2, \varepsilon^2, \varepsilon^2) = \varepsilon^4 + 2K_0(\varepsilon^2 - K_0) \cos(\Psi_0).$$

To deal with all the ε terms in the right-hand side of the previous equation, we make a change of unknown by setting

$$\Psi_0(t) =: \Psi(\varepsilon^2 t), \quad K_0(t) =: \varepsilon^2 K(\varepsilon^2 t).$$

We obtain the system:

$$\begin{cases} \dot{\Psi} &= 2(2K - 1) \cos \Psi = -\frac{\partial H_\star}{\partial K}, \\ \dot{K} &= 2K(K - 1) \sin \Psi = \frac{\partial H_\star}{\partial \Psi}, \end{cases} \quad (4.4.13)$$

where the new Hamiltonian H_\star is defined by

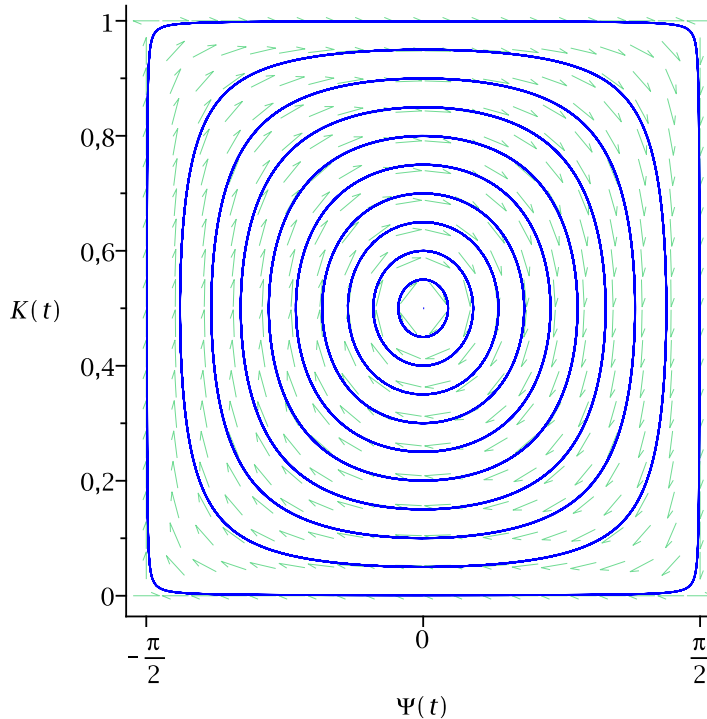
$$H_\star = H_\star(\Psi, K) := 2K(1 - K) \cos \Psi.$$

Thanks to the conservation of the Hamiltonian, we can check that the velocity vector never cancels (for a good choice of initial data). Therefore we obtain periodic solutions, and the symmetries

$$H_\star(-\Psi, K) = H_\star(\Psi, K), \quad H_\star(\Psi, 1 - K) = H_\star(\Psi, K),$$

give us informations on the solutions (Ψ, K) . Another way to check this periodicity of the solutions is to draw the phase portrait of the system defined by (4.4.13):

Figure 4.2 – Phase portrait of the Hamiltonian



From this phase portrait, we deduce the following lemma:

Lemma 4.4.11. *For all $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$, there exists a time T_γ such that the system (4.4.13) admits an orbit of period $2T_\gamma$ with*

$$\begin{cases} (\Psi_\gamma(0), K_\gamma(0)) = (0, \gamma), \\ (\Psi_\gamma(T_\gamma), K_\gamma(T_\gamma)) = (0, 1 - \gamma). \end{cases}$$

Remark 4.4.12. *We can show that the period T_γ satisfies the bound*

$$0 < T_\gamma \lesssim |\ln(\gamma)|.$$

We refer to [20, Theorem 1.1] for the proof of this estimate.

From Lemma 4.4.11, we have the beating effect in the following sense: for any couple of different integers (p, q) , there exists a solution (a, b) of the reduced resonant system (4.4.1) such that

$$\begin{cases} |b_p(t)|^2 = |a_q(t)|^2 = \varepsilon^2 K_\gamma(\varepsilon^2 t), \\ |a_p(t)|^2 = |b_q(t)|^2 = \varepsilon^2 (1 - K_\gamma(\varepsilon^2 t)). \end{cases}$$

Indeed, we can for example check the identity for a_p by writing

$$|a_p(t)|^2 = I_p(t) = K_1 - K_0(t) = \varepsilon^2(1 - K(\varepsilon^2 t)).$$

We remark that we have a ε^2 factor in the right-hand side which is not present in [20]. But in this article, this factor is present in the system. We are now able to prove Theorem 4.1.4.

4.4.5 Beating effect and wave operator: proof of Theorem 4.1.4

Let $I \subset \mathbb{R}$ be a bounded open interval, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ and (p, q) a couple of different integers. We chose:

- $\varepsilon > 0$ small enough.
- (a, b) a solution of the reduced resonant system (4.4.1) with initial data

$$\begin{cases} a_p(0) = b_q(0) = \varepsilon^2 \gamma, \\ b_p(0) = a_q(0) = \varepsilon^2(1 - \gamma), \end{cases}$$

that enjoys a beating effect between the modes p and q , as constructed in the previous subsection.

- $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ a compact supported function such that $\varphi \equiv 1$ on I .

As in Subsection 4.4.3, we construct from (a, b) a solution of the resonant system by choosing the initial data

$$\begin{cases} W_{U,0} = \check{\varphi}(x) (a_p(0)e^{ipy} + a_q(0)e^{iqy}) = \check{\varphi}(x)\varepsilon^2 (\gamma e^{ipy} + (1 - \gamma)e^{iqy}), \\ W_{V,0} = \check{\varphi}(x) (b_p(0)e^{ipy} + b_q(0)e^{iqy}) = \check{\varphi}(x)\varepsilon^2 ((1 - \gamma)e^{ipy} + \gamma e^{iqy}). \end{cases} \quad (4.4.14)$$

By construction, the solution (W_U, W_V) of the resonant system (4.1.2) with initial data $(W_{U,0}, W_{V,0})$ satisfies

$$\mathcal{F}(W_U)(t, \xi, k) = \varphi(\xi)a_k(\varphi(\xi)^2 t), \quad \mathcal{F}(W_V)(t, \xi, k) = \varphi(\xi)b_k(\varphi(\xi)^2 t).$$

By the choice of the solution (a, b) , and the fact that $\varphi \equiv 1$ on I , this completes the proof of the first and second parts of Theorem 4.1.4. For the third part of the theorem, in order to apply the modified wave operator from Theorem 4.1.2, we have to check that for ε small enough, the constructed initial data $(W_{U,0}, W_{V,0})$ satisfies

$$\|W_{U,0}\|_{S^+} + \|W_{V,0}\|_{S^+} \leq \varepsilon. \quad (4.4.15)$$

For example, for $W_{U,0}$, we have by (4.4.14):

$$|\mathcal{F}(W_U)(t, \xi, k)| \leq \varepsilon^2 |\varphi(\xi)| \quad \text{if } k \in p, q, \quad |\mathcal{F}(W_U)(t, \xi, k)| = 0 \quad \text{else.}$$

Therefore, using that:

- there is only two modes for the periodic variable,
- $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ is a compact supported function,

— there is a ε^2 factor and ε is small enough,
the proof of (4.4.15) and thus of Theorem 4.1.4 is completed. Indeed, we recall that

$$\begin{aligned} \|W_{U,0}\|_{S^+} &:= \|W_{U,0}\|_{H_{x,y}^N} + \|xW_{U,0}\|_{L_{x,y}^2} + \|xW_{U,0}\|_{H_{x,y}^N} + \|x^2W_{U,0}\|_{L_{x,y}^2} \\ &\quad + \|(1 - \partial_{xx})^4W_{U,0}\|_{H_{x,y}^N} + \|x(1 - \partial_{xx})^4W_{U,0}\|_{L_{x,y}^2}. \end{aligned}$$

For example, we can check that for ε small enough,

$$\|x(1 - \partial_{xx})^4W_{U,0}\|_{L_{x,y}^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \varepsilon^4(\gamma^2 + (1 - \gamma)^2) \left| \partial_{\xi} \left((1 + \xi)^4 \varphi(\xi) \right) \right|^2 d\xi \leq \frac{\varepsilon^2}{144}.$$

□

4.4.6 Persistence of the beating effect and convolution potentials

Going back to the single cubic Schrödinger equation on $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$:

$$i\partial_t U + \Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d} U = |U|^2 U,$$

the method of Hani, Pausader, Tzvetkov and Visiglia in [27] allows to construct solutions that provide a growth of the Sobolev norms when $2 \leq d \leq 4$. The idea is to find some particular solutions of the resonant equation and then to use the wave operator theorem.

In order to perturb the eigenvalues of the Laplacian, we can add a convolution potential:

$$i\partial_t U + \Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d} U + V \star U = |U|^2 U.$$

In this case, Grébert, Paturel and Thomann show in [21] that for generic choice of convolution potential, the resonances are killed. For these potentials, there is no more any growth of the Sobolev norms. More precisely, the Sobolev norms of small solutions are asymptotically constant.

The natural question is thus to transpose the question about potentials to the system case. Are the potentials generically killing the beating effect? Are the Sobolev norms of the couples of solutions asymptotically constants? The answer of the first question is given by a simple observation. The key argument in [21] to kill the resonances and the growth of the Sobolev norms is to perturb the equation, thanks to the potentials, in order to obtain a smaller resonant set

$$\Gamma_{0,conv,d} = \left\{ (p, q, r, s) \in (\mathbb{Z}^d)^4 : p - q + r - s = 0, \{|p|, |r|\} = \{|q|, |s|\} \right\}.$$

In our case, we already have this relation. Indeed, we have

$$\Gamma_0 = \left\{ (p, q, r, s) \in \mathbb{Z}^4 : \{p, r\} = \{q, s\} \right\} = \Gamma_{0,conv,1}.$$

Therefore, we can conclude that the add of convolution potentials generically doesn't kill the beating effect. Thus, why are the Sobolev norms constants in [21] and not in our coupled system case? This is just a consequence of the coupled effect: what we have in our case is the fact that the sums of the Sobolev norms of the couples of solutions are asymptotically constants, which is the system equivalent of the result of [21].

4.5 The modified scattering

To prove the existence of the modified scattering, we set the following theorem which is a more general setting of Theorem 4.1.1.

Theorem 4.5.1. *There exists $\varepsilon > 0$ such that if $(U_0, V_0) \in S^+ \times S^+$ satisfies*

$$\|U_0\|_{S^+} + \|V_0\|_{S^+} \leq \varepsilon,$$

and if (U, V) is the couple of solutions of the system (4.1.1) with initial data (U_0, V_0) , then there exists a couple $(\tilde{W}_U, \tilde{W}_V)$ of solutions of (4.1.2) such that we have scattering of the solutions (U, V) of (4.1.1) to the solutions $(\tilde{W}_U, \tilde{W}_V)$ of (4.1.2) in the following sense:

$$\|e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}U(t) - \tilde{W}_U(\pi \ln(t))\|_S + \|e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}V(t) - \tilde{W}_V(\pi \ln(t))\|_S \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow +\infty.$$

Before dealing with the proof of this theorem, we need to show that the system (4.1.1) admits global solutions.

4.5.1 Global existence of the solutions

We need a priori estimates to prove the global existence of the solutions. By Proposition 4.2.5, we can show that we have local solutions. Indeed, let $\varepsilon > 0$ small enough and $(U_0, V_0) \in S^+ \times S^+$ such that $\|U_0\|_{S^+} + \|V_0\|_{S^+} \leq \varepsilon$. We introduce the profiles $F(t) = e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}U(t)$ and $G(t) = e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}V(t)$, the system (4.1.1) becomes

$$\begin{cases} i\partial_t F(t) &= \mathcal{N}^t[G(t), G(t), F(t)], \\ i\partial_t G(t) &= \mathcal{N}^t[F(t), F(t), G(t)]. \end{cases}$$

Thus we write

$$F(t) = U_0 - i \int_0^t \mathcal{N}^s[G(s), G(s), F(s)]ds, \quad G(t) = V_0 - i \int_0^t \mathcal{N}^s[F(s), F(s), G(s)]ds.$$

Proposition 4.2.5 thus gives us

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}^s[G(s), G(s), F(s)]\|_{S^+} &\lesssim (1 + |t|)^{-1} \|G(s)\|_{S^+} \|F(s)\|_{S^+}^2, \\ \|\mathcal{N}^s[F(s), F(s), G(s)]\|_{S^+} &\lesssim (1 + |t|)^{-1} \|F(s)\|_{S^+} \|G(s)\|_{S^+}^2. \end{aligned}$$

Therefore, a fixed point theorem on a small interval $[0, T]$ gives us the local existence of the solutions. In order to prove that the solutions are global, we need a global bound, given by the following:

Proposition 4.5.2. *There exists $\varepsilon > 0$ such that if $(U_0, V_0) \in S^+ \times S^+$ satisfies*

$$\|U_0\|_{S^+} + \|V_0\|_{S^+} \leq \varepsilon,$$

then there exists a global couple of solutions of (4.1.1) with initial data (U_0, V_0) . Moreover, for all $T > 0$, this couple of solution satisfies

$$\|F\|_{X_T^+} \leq 2\varepsilon, \quad \|G\|_{X_T^+} \leq 2\varepsilon, \tag{4.5.1}$$

where the profiles F, G are defined in (4.2.1).

We know that $T \mapsto \|F\|_{X_T^+}$ is continue, so by a bootstrap argument, this proposition gives us that the couple of solutions is global. We just have to prove this a priori estimate. For that purpose, due to the continuity, it suffices to show that for a constant $C > 0$ and for all $T > 0$,

$$\|F\|_{X_T^+} \leq \|U_0\|_{S^+} + C\|G\|_{X_T^+}^2\|F\|_{X_T^+}, \quad \|G\|_{X_T^+} \leq \|V_0\|_{S^+} + C\|F\|_{X_T^+}^2\|G\|_{X_T^+}. \quad (4.5.2)$$

Proof. Let us remind that by definition, we have

$$\begin{aligned} \|F\|_{X_T} &:= \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\|F(t)\|_Z + (1 + |t|)^{-\delta} \|F(t)\|_S + (1 + |t|)^{1-3\delta} \|\partial_t F(t)\|_S \right), \\ \|F\|_{X_T^+} &:= \|F\|_{X_T} + \sup_{0 \leq t \leq T} \left((1 + |t|)^{-5\delta} \|F(t)\|_{S^+} + (1 + |t|)^{1-7\delta} \|\partial_t F(t)\|_{S^+} \right). \end{aligned}$$

By symmetry, we do the computations only for F . Due to these definitions, we split the proof in three parts. First, we deal with the time derivatives estimates, then we look at the Z norm term, and finally we treat the other $S^{(+)}$ norms.

- The time derivatives estimates.

By Proposition 4.2.5, we have

$$\begin{aligned} \|\partial_t F(t)\|_S &\lesssim (1 + |t|)^{-1} \|G(t)\|_S^2 \|F(t)\|_S \lesssim (1 + |t|)^{-1+3\delta} \|G\|_{X_T}^2 \|F\|_{X_T}, \\ \|\partial_t F(t)\|_{S^+} &\lesssim (1 + |t|)^{-1} (\|F(t)\|_{S^+} \|G(t)\|_S^2 + \|G(t)\|_{S^+} \|G(t)\|_S \|F(t)\|_S) \\ &\lesssim (1 + |t|)^{-1+7\delta} \|G\|_{X_T^+}^2 \|F\|_{X_T^+}. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

These are the wished bounds for the derivative part.

- The Z norm term.

Recall that by definition,

$$\|F\|_Z^2 := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} (1 + \xi^2)^2 \|\hat{F}_p(\xi)\|_{h_p^1}^2,$$

we begin to deal with the h_p^1 norm. In order to use the results of Theorem 4.3.1, we use the decomposition (4.3.1), we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{1}{2} \|\hat{F}_p(s, \xi)\|_{h_p^1}^2 &= \Re \left\langle \partial_s \hat{F}_p(s, \xi), \hat{F}_p(s, \xi) \right\rangle_{h_p^1 \times h_p^1} \\ &= \Im \left(\left\langle \frac{\pi}{s} \mathcal{FR}[G, G, F](s, \xi, p), \hat{F}_p(s, \xi) \right\rangle_{h_p^1 \times h_p^1} + \left\langle \mathcal{FE}^s[G, G, F](s, \xi, p), \hat{F}_p(s, \xi) \right\rangle_{h_p^1 \times h_p^1} \right). \end{aligned}$$

The first term of the right-hand side terms is canceled by equation (4.4.9). Therefore, we can write

$$\begin{aligned} \|\hat{F}_p(t, \xi)\|_{h_p^1}^2 &= \|\hat{F}_p(0, \xi)\|_{h_p^1}^2 + \int_0^t \frac{d}{ds} \frac{1}{2} \|\hat{F}_p(s, \xi)\|_{h_p^1}^2 ds \\ &\leq \|\hat{F}_p(0, \xi)\|_{h_p^1}^2 + \int_0^t \left| \left\langle \mathcal{FE}^s[G, G, F](s, \xi, p), \hat{F}_p(s, \xi) \right\rangle_{h_p^1 \times h_p^1} \right| ds. \end{aligned}$$

With ξ fixed, we multiply by $(1 + \xi^2)^2$ on the both sides of the equation. We use Theorem 4.3.1 to bound the right side term. For the \mathcal{E}_1 part of \mathcal{E} , we have by Cauchy-Schwarz

$$(1 + \xi^2)^2 \int_0^t \left| \left\langle \hat{\mathcal{E}}_1^s[G, G, F](s, \xi, p), \hat{F}_p(s, \xi) \right\rangle_{h_p^1 \times h_p^1} \right| ds \lesssim \int_0^t \|\mathcal{E}_1^s[G, G, F](s)\|_Z \|F(s)\|_Z ds.$$

Therefore, thanks to equation (4.3.3), we have

$$\begin{aligned} & (1 + \xi^2)^2 \int_0^t \left| \left\langle \hat{\mathcal{E}}_1^s[G, G, F](s, \xi, p), \hat{F}_p(s, \xi) \right\rangle_{h_p^1 \times h_p^1} \right| ds \\ & \lesssim \|G\|_{X_T^+}^2 \|F\|_{X_T^+} \int_0^t (1 + |s|)^{-1-\delta} ds \sup_{0 \leq s \leq t} \|F(s)\|_Z. \end{aligned}$$

For the \mathcal{E}_3 part of \mathcal{E} , we write by integration by parts,

$$\begin{aligned} & (1 + \xi^2)^2 \int_0^t \left| \left\langle \partial_s \hat{\mathcal{E}}_3^s[G, G, F](s), \hat{F}_p(s) \right\rangle_{h_p^1 \times h_p^1} \right| ds \lesssim (1 + \xi^2)^2 \left| \left\langle \hat{\mathcal{E}}_3^t[G, G, F](t), \hat{F}_p(t) \right\rangle_{h_p^1 \times h_p^1} \right| \\ & \quad + (1 + \xi^2)^2 \left| \left\langle \hat{\mathcal{E}}_3^t[G, G, F](0), \hat{F}_p(0) \right\rangle_{h_p^1 \times h_p^1} \right| \\ & \quad + (1 + \xi^2)^2 \int_0^t \left| \left\langle \hat{\mathcal{E}}_3^s[G, G, F](s), \partial_s \hat{F}_p(s) \right\rangle_{h_p^1 \times h_p^1} \right| ds. \end{aligned}$$

For the two first terms, equation (4.3.3) gives us for $s \in [0, t]$,

$$\begin{aligned} & (1 + \xi^2)^2 \left| \left\langle \hat{\mathcal{E}}_3^t[G, G, F](t), \hat{F}_p(t) \right\rangle_{h_p^1 \times h_p^1} \right| \lesssim \|\mathcal{E}_3^s[G, G, F](s)\|_Z \|F(s)\|_Z \\ & \lesssim \|G\|_{X_T^+}^2 \|F\|_{X_T^+} (1 + |s|)^{-\frac{1}{10}} \sup_{0 \leq s \leq t} \|F(s)\|_Z. \end{aligned}$$

For the integral term, we have by Proposition 4.2.5,

$$\begin{aligned} & (1 + \xi^2)^2 \int_0^t \left| \left\langle \hat{\mathcal{E}}_3^s[G, G, F](s), \partial_s \hat{F}_p(s) \right\rangle_{h_p^1 \times h_p^1} \right| ds \\ & \lesssim \int_0^t \|\mathcal{E}_3^s[G, G, F](s)\|_Z \|\mathcal{N}^s[G, G, F](s)\|_Z ds \\ & \lesssim \|G\|_{X_T^+}^4 \|F\|_{X_T^+}^2 \int_0^t (1 + |s|)^{-1+3\delta-\frac{1}{10}} ds. \end{aligned}$$

Thus, we have for the \mathcal{E}_3 part

$$\begin{aligned} & (1 + \xi^2)^2 \int_0^t \left| \left\langle \partial_s \hat{\mathcal{E}}_3^s[G, G, F](s), \hat{F}_p(s) \right\rangle_{h_p^1 \times h_p^1} \right| ds \\ & \lesssim \|G\|_{X_T^+}^2 \|F\|_{X_T^+} \sup_{0 \leq s \leq t} \|F(s)\|_Z + \|G\|_{X_T^+}^4 \|F\|_{X_T^+}^2. \end{aligned}$$

Finally, by taking the supremum in ξ and t , we conclude for the Z norm that

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \|F(s)\|_Z \leq \|F(0)\|_Z + C \|G\|_{X_T^+}^2 \|F\|_{X_T^+} + C \|G\|_{X_T^+}^4 \|F\|_{X_T^+},$$

and thus

$$\|F(t)\|_Z \leq \|F(0)\|_Z + C \|G\|_{X_T^+}^2 \|F\|_{X_T^+}. \quad (4.5.4)$$

- The $\|F(t)\|_{S^{(+)}}$ bounds.

For these estimates, we split the proof depending on the time. For $0 \leq t \leq 1$, we use Proposition 4.2.5 to get

$$\|F(t) - F(0)\|_{S^{(+)}} \lesssim \sup_{0 \leq s \leq t} \|\partial_s F(s)\|_{S^{(+)}} \lesssim \|G\|_{X_T^{(+)}}^2 \|F\|_{X_T^{(+)}}.$$

This bound is sufficient to prove our estimate (4.5.2) for $0 \leq t \leq 1$. Now we consider greater times $1 \leq t \leq T$. By the decomposition (4.3.1) of Theorem 4.3.1, we have

$$\begin{aligned} \|F(t) - F(1)\|_{S^{(+)}} &\lesssim \left\| \int_1^t \mathcal{N}^s[G(s), G(s), F(s)] ds \right\|_{S^{(+)}} \\ &\lesssim \int_1^t \left\| \frac{\pi}{s} \mathcal{R}[G(s), G(s), F(s)] \right\|_{S^{(+)}} ds + \left\| \int_1^t \mathcal{E}^s[G(s), G(s), F(s)] ds \right\|_{S^{(+)}}. \end{aligned}$$

For the S norm, we have by Proposition 4.3.9 (equation (4.3.30))

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\pi}{s} \mathcal{R}[G, G, F] \right\|_S &\lesssim (1 + |s|)^{-1} (\|G\|_{X_T}^2 \|F\|_S + \|G\|_{X_T} \|F\|_{X_T} \|G\|_S) \\ &\lesssim (1 + |s|)^{-1+\delta} \|G\|_{X_T}^2 \|F\|_{X_T}, \end{aligned}$$

and we use equation (4.3.5) of Theorem 4.3.1 to get

$$\left\| \int_1^t \mathcal{E}^s[G(s), G(s), F(s)] ds \right\|_S \lesssim (1 + |t|)^{-2\delta} \|G\|_{X_T^+}^2 \|F\|_{X_T^+}.$$

Thus we have

$$(1 + |t|)^{-\delta} \|F(t)\|_S \leq \|F(1)\|_S + C \|G\|_{X_T^+}^2 \|F\|_{X_T^+} \leq \|F(0)\|_S + C \|G\|_{X_T^+}^2 \|F\|_{X_T^+}. \quad (4.5.5)$$

It remains to deal with the S^+ norm, with the same method, equation (4.3.26) give us

$$\left\| \frac{\pi}{s} \mathcal{R}[G, G, F] \right\|_{S^+} \lesssim (1 + |s|)^{-1+5\delta} \|G\|_{X_T^+}^2 \|F\|_{X_T^+},$$

and equation (4.3.5) of Theorem 4.3.1 implies

$$\left\| \int_1^t \mathcal{E}^s[G(s), G(s), F(s)] ds \right\|_{S^+} \lesssim (1 + |t|)^{5\delta} \|G\|_{X_T^+}^2 \|F\|_{X_T^+}.$$

Therefore, we have

$$(1 + |t|)^{-5\delta} \|F(t)\|_{S^+} \leq \|F(1)\|_{S^+} + C \|G\|_{X_T^+}^2 \|F\|_{X_T^+} \leq \|F(0)\|_{S^+} + C \|G\|_{X_T^+}^2 \|F\|_{X_T^+}. \quad (4.5.6)$$

The equations (4.5.3), (4.5.4), (4.5.5) and (4.5.6) imply the a priori estimate (4.5.2). This concludes the proof of the proposition, and shows that the solutions are global. \square

4.5.2 The decay estimate

Let (U, V) a solution of system (4.1.1), and (F, G) the associated profiles. Using equations (4.2.10) and (4.2.11), we obtain for U

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{L_x^\infty H_y^1} &= \|e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} F(t)\|_{L_x^\infty H_y^1} = \|e^{it\Delta_{\mathbb{R}}} F(t)\|_{L_x^\infty H_y^1} \\ &\lesssim \frac{1}{\sqrt{t}} \|F(t)\|_{L_x^2 H_y^1} \|xF(t)\|_{L_x^2 H_y^1}. \end{aligned}$$

The last term, controlled by the X_T norm, gives some growth in time, which is not coherent with the wished estimate. Thus, we need to be more accurate in the bound (4.2.11). Back

to the proof of estimate (4.2.11), we have $e^{it\Delta_{\mathbb{R}}}F = K_t * F$ with $K_t(x) = (8i\pi^2t)^{-1/2}e^{-\frac{x^2}{4it}}$. Thanks to this expression, we have

$$\begin{aligned} e^{it\partial_{xx}}F(x) &= \int_{\mathbb{R}} F(\sigma)K_t(x-\sigma)d\sigma = (8i\pi^2t)^{-\frac{1}{2}}e^{i\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} F(\sigma)e^{i\frac{\sigma^2}{4t}}e^{-i\frac{x\sigma}{2t}}d\sigma \\ &= (8i\pi^2t)^{-\frac{1}{2}}e^{i\frac{x^2}{4t}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(\sigma)e^{-i\frac{x\sigma}{2t}}d\sigma + \int_{\mathbb{R}} F(\sigma)(e^{i\frac{\sigma^2}{4t}} - 1)e^{-i\frac{x\sigma}{2t}}d\sigma \right). \end{aligned}$$

For the second term of the right-hand side, we use that for $5\delta < \beta < \frac{1}{4}$, we have

$$|e^{ix} - 1| = 2 \left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right| \lesssim x^\beta.$$

Therefore, using equation (4.2.10), we obtain by Cauchy-Schwarz

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} F(\sigma)(e^{i\frac{\sigma^2}{4t}} - 1)e^{-i\frac{x\sigma}{2t}}d\sigma \right\|_{L_x^\infty} \lesssim \left\| |x|^{2\beta} |t|^{-\beta} F \right\|_{L_x^1} \lesssim |t|^{-\beta} \|\langle x \rangle F\|_{L_x^2}.$$

Thus, we finally obtain

$$\|e^{it\Delta_{\mathbb{R}}}F(t)\|_{L_x^\infty} \lesssim \frac{1}{|t|^{\frac{1}{2}}}\|\hat{F}\|_{L_\xi^\infty} + \frac{1}{|t|^{\frac{1}{2}+\beta}}\|\langle x \rangle F\|_{L_x^2}. \quad (4.5.7)$$

Now, we can control the growth of the second term thanks to the $t^{-\beta}$ term. Indeed, equation (4.5.7) implies

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{L_x^\infty H_y^1} &\lesssim \frac{1}{|t|^{\frac{1}{2}}}\|\hat{F}(t)\|_{L_\xi^\infty H_y^1} + \frac{1}{|t|^{\frac{1}{2}+\beta}}\|\langle x \rangle F(t)\|_{L_x^2 H_y^1} \\ &\lesssim \frac{1}{|t|^{\frac{1}{2}}}\|F(t)\|_Z + \frac{1}{|t|^{\frac{1}{2}+\beta}}\|F(t)\|_{S^+} \\ &\lesssim \frac{1}{|t|^{\frac{1}{2}}}(1 + |t|^{5\delta-\beta})\|F\|_{X_T^+}. \end{aligned}$$

Thanks to the choice of β , we have $5\delta - \beta < 0$. Thus, we use Proposition 4.5.1 to conclude the proof of the decay estimate of Theorem 4.1.1.

4.5.3 The asymptotic behavior

We can now prove Theorem 4.5.1, which is based on Grönwall's Lemma.

Proof. We define the time $T_n = e^{\frac{n}{\pi}}$, and we set

$$W_U^n(t) := \tilde{W}_U^n(\pi \ln(t)) \quad \text{and} \quad W_V^n(t) := \tilde{W}_V^n(\pi \ln(t)),$$

where $(\tilde{W}_U^n, \tilde{W}_V^n)$ is the solution of (4.1.2) with Cauchy data

$$\tilde{W}_U^n(n) = W_U^n(T_n) = F(T_n), \quad \tilde{W}_V^n(n) = W_V^n(T_n) = G(T_n),$$

where the profiles F and G of U and V are defined in (4.2.1). The interest of these definitions of the two W terms depending on the \tilde{W} is to get the equations

$$i\partial_t W_U^n(t) = \frac{\pi}{t}\mathcal{R}[W_V^n(t), W_V^n(t), W_U^n(t)], \quad i\partial_t W_V^n(t) = \frac{\pi}{t}\mathcal{R}[W_U^n(t), W_U^n(t), W_V^n(t)].$$

Therefore, we can take advantage of the decomposition (4.3.1) of Theorem 4.3.1. First, we show that for all $t \geq T_n$, uniformly in $n \geq 0$, we have

$$\bullet \|W_U^n(t)\|_Z + (1 + |t|)^{-\delta} \|W_U^n(t)\|_S + (1 + |t|)^{-5\delta} \|W_U^n(t)\|_{S^+} + (1 + |t|)^{1-\delta} \|\partial_t W_U^n(t)\|_S \lesssim \varepsilon. \quad (4.5.8)$$

For the Z norm term, we use equations (4.5.1) and (4.4.2) to obtain

$$\begin{aligned} \|W_U^n(t)\|_Z &= \|\tilde{W}_U^n(\pi \ln(t))\|_Z \leq \|\tilde{W}_U^n(n)\|_Z + \|\tilde{W}_V^n(n)\|_Z = \|F(T_n)\|_Z + \|G(T_n)\|_Z \\ &\leq \|F\|_{X_T^+} + \|G\|_{X_T^+} \lesssim \varepsilon. \end{aligned}$$

For the S terms, Remark 4.4.4 gives us

$$\begin{aligned} \|\partial_t W_U^n(t)\|_S &= \left\| \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[W_V^n(t), W_V^n(t), W_U^n(t)] \right\|_S \\ &\lesssim t^{-1} (\|W_U^n\|_Z^2 + \|W_V^n\|_Z^2) (\|W_U^n(t)\|_S + \|W_V^n(t)\|_S) \\ &\lesssim t^{-1} \varepsilon^2 (\|W_U^n(t)\|_S + \|W_V^n(t)\|_S). \end{aligned}$$

Thus, we have

$$\partial_t (\|W_U^n(t)\|_S^2 + \|W_V^n(t)\|_S^2) \leq t^{-1} C \varepsilon^2 (\|W_U^n(t)\|_S^2 + \|W_V^n(t)\|_S^2).$$

The Grönwall's Lemma between T_n and t gives us

$$\|W_U^n(t)\|_S^2 + \|W_V^n(t)\|_S^2 \leq (\|W_U^n(T_n)\|_S^2 + \|W_V^n(T_n)\|_S^2) t^{C\varepsilon^2} T_n^{-C\varepsilon^2}.$$

Moreover, Proposition 4.5.2 gives us $\|W_U^n(T_n)\|_S = \|F(T_n)\|_S \lesssim \varepsilon T_n^\delta$. Thus, as $t \geq T_n$, we have for $\varepsilon > 0$ small enough (such that $\delta - C\varepsilon^2 > 0$),

$$\|W_U^n(t)\|_S + \|W_V^n(t)\|_S \lesssim \varepsilon t^\delta.$$

Therefore we conclude that

$$(1 + |t|)^{-\delta} \|W_U^n(t)\|_S + (1 + |t|)^{1-\delta} \|\partial_t W_U^n(t)\|_S \lesssim \varepsilon.$$

It remains to deal with the S^+ term. With Proposition 4.3.9 we have

$$\begin{aligned} \|\partial_t W_U^n(t)\|_{S^+} &= \left\| \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[W_V^n, W_V^n, W_U^n] \right\|_{S^+} \\ &\lesssim (1 + |t|)^{-1} (\|W_V^n\|_{\tilde{Z}_t}^2 \|W_U^n\|_{S^+} + \|W_V^n\|_{\tilde{Z}_t} \|W_U^n\|_{\tilde{Z}_t} \|W_V^n\|_{S^+}) \\ &\quad + (1 + |t|)^{-1+2\delta} (\|W_V^n\|_{\tilde{Z}_t} \|W_V^n\|_S \|W_U^n\|_S + \|W_U^n\|_{\tilde{Z}_t} \|W_V^n\|_S^2). \end{aligned}$$

But by the previous estimates and the definition (4.3.24) of the \tilde{Z}_t norm, we get

$$\|W_V^n(t)\|_{\tilde{Z}_t} := \|W_V^n(t)\|_Z + (1 + |t|)^{-\delta} \|W_V^n(t)\|_S \lesssim \varepsilon, \quad \|W_V^n(t)\|_S \lesssim t^\delta \varepsilon,$$

thus we have

$$\|\partial_t W_U^n(t)\|_{S^+} + \|\partial_t W_V^n(t)\|_{S^+} \lesssim \varepsilon^2 t^{-1} (\|W_U^n\|_{S^+} + \|W_V^n\|_{S^+}) + \varepsilon^3 t^{-1+4\delta}.$$

This time, we use the inhomogeneous Grönwall's Lemma to get

$$\begin{aligned} \|W_U^n(t)\|_{S^+}^2 + \|W_V^n(t)\|_{S^+}^2 &\leq e^{(C\varepsilon^2(\ln(t)-\ln(T_n)))} (\|W_U^n(T_n)\|_{S^+}^2 + \|W_V^n(T_n^+)\|_{S^+}^2) \\ &\quad + e^{(C\varepsilon^2(\ln(t)-\ln(T_n)))} \int_{T_n}^t e^{-(C\varepsilon^2(\ln(s)-\ln(T_n)))} C\varepsilon^3 s^{-1+4\delta} ds. \end{aligned}$$

Moreover, we have by Proposition 4.5.2 $\|W_U^n(T_n)\|_{S^+} = \|F(T_n)\|_{S^+} \lesssim \varepsilon T_n^{5\delta}$, it implies

$$\|W_U^n(t)\|_{S^+} + \|W_V^n(t)\|_{S^+} \lesssim \varepsilon (t^{C\varepsilon^2 T_n^{5\delta-C\varepsilon^2}} + t^{4\delta} + t^{C\varepsilon^2 T_n^{4\delta-C\varepsilon^2}}).$$

Thus, as $t \geq T_n$, we have for $\varepsilon > 0$ small enough

$$(1 + |t|)^{-5\delta} \|W_U^n(t)\|_{S^+} \lesssim \varepsilon.$$

This concludes the proof of the estimate (4.5.8). Then, we want to show that

$$\bullet \sup_{T_n \leq t \leq T_{n+4}} \|F(t) - W_U^n(t)\|_S \lesssim \varepsilon^3 T_n^{-\delta}. \quad (4.5.9)$$

We use the relations

$$\begin{cases} i\partial_t F(t) = \mathcal{N}^t[G(t), G(t), F(t)], \\ i\partial_t W_U^n(t) = \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[W_V^n(t), W_V^n(t), W_U^n(t)], \\ F(T_n) = W_U^n(T_n). \end{cases}$$

Therefore, the decomposition (4.3.1) gives

$$\begin{aligned} F(t) - W_U^n(t) &= -i \int_{T_n}^t (\mathcal{N}^s[G, G, F] - \frac{\pi}{s} \mathcal{R}[W_V^n(s), W_V^n(s), W_U^n(s)]) ds \\ &= -i \int_{T_n}^t \mathcal{E}^s[G, G, F] ds - i \int_{T_n}^t \frac{\pi}{s} (\mathcal{R}[G(s), G(s), F(s)] - \mathcal{R}[W_V^n(s), W_V^n(s), W_U^n(s)]) ds. \end{aligned}$$

To bound the first term, we use the equation (4.3.5) of Theorem 4.3.1. For $T_n \leq t \leq T_{n+4}$, we obtain

$$\left\| \int_{T_n}^t \mathcal{E}^s[G, G, F] ds \right\|_S \lesssim \varepsilon^3 T_n^{-2\delta}.$$

Thus, using equation (4.3.34), we have (always for $T_n \leq t \leq T_{n+4}$),

$$\begin{aligned} \|F(t) - W_U^n(t)\|_Z + \|G(t) - W_V^n(t)\|_Z &\lesssim \varepsilon^3 T_n^{-2\delta} + \\ &\int_{T_n}^t (\|F(s)\|_Z^2 + \|G(s)\|_Z^2 + \|W_U^n(s)\|_Z^2 + \|W_V^n(s)\|_Z^2) \\ &\quad \times (\|F(s) - W_U^n(s)\|_Z + \|G(s) - W_V^n(s)\|_Z) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

We use now the bounds (4.5.8) and (4.5.1), it becomes

$$\begin{aligned} \|F(t) - W_U^n(t)\|_Z + \|G(t) - W_V^n(t)\|_Z &\lesssim \varepsilon^3 T_n^{-2\delta} \\ &\quad + \varepsilon^2 \int_{T_n}^t (\|F(s) - W_U^n(s)\|_Z + \|G(s) - W_V^n(s)\|_Z) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Moreover, we have $\|F(T_n) - W_U^n(T_n)\|_Z + \|G(T_n) - W_V^n(T_n)\|_Z = 0$, the Grönwall's Lemma gives

$$\sup_{T_n \leq t \leq T_{n+4}} \|F(t) - W_U^n(t)\|_Z \lesssim \varepsilon^3 T_n^{-2\delta}.$$

For the S norm, we use equation (4.3.27) and the bounds

$$\|F(s)\|_{\tilde{Z}_t} \leq \|F\|_{X_T} \lesssim \varepsilon \quad \text{and} \quad \|W_U^n(s)\|_{\tilde{Z}_t} \lesssim \varepsilon,$$

to get

$$\begin{aligned} \|F(t) - W_U^n(t)\|_S + \|G(t) - W_V^n(t)\|_S &\lesssim \varepsilon^3 T_n^{-2\delta} \\ &+ \varepsilon^2 \int_{T_n}^t (\|F(s) - W_U^n(s)\|_S + \|G(s) - W_V^n(s)\|_S) \frac{ds}{s} \\ &+ \varepsilon \int_{T_n}^t (\|F(s)\|_S + \|G(s)\|_S + \|W_U^n(s)\|_S + \|W_V^n(s)\|_S) \\ &\quad \times (\|F(s) - W_U^n(s)\|_Z + \|G(s) - W_V^n(s)\|_Z) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Now, equations (4.5.8), (4.5.1) and the previous case imply

$$\begin{aligned} \|F(t) - W_U^n(t)\|_S + \|G(t) - W_V^n(t)\|_S &\lesssim \varepsilon^3 T_n^{-\delta} \\ &+ \varepsilon^2 \int_{T_n}^t (\|F(s) - W_U^n(s)\|_S + \|G(s) - W_V^n(s)\|_S) \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Therefore, as $\|F(T_n) - W_U^n(T_n)\|_S + \|G(T_n) - W_V^n(T_n)\|_S = 0$, the Grönwall's Lemma finishes the proof of the bound (4.5.9). We see here that $F(t)$ is close to $\tilde{W}_U^n(\pi \ln(t))$. However, we can't conclude that one $(\tilde{W}_U^n, \tilde{W}_V^n)$ couple is solution of the problem, because if we want to take $t \rightarrow +\infty$, the time t becomes bigger than any T_{n+4} for a fixed n . The idea is thus to find some limit of the \tilde{W}_U^n terms. Because of the different intervals $[T_n, T_{n+4}]$ for the estimates, we can't hope to take directly the limit of the \tilde{W}_U^n . This is the reason why we look now at the initial data. Therefore, the next step of the proof is the inequality

$$\bullet \|\tilde{W}_U^{n+1}(0) - \tilde{W}_U^n(0)\|_S \lesssim \varepsilon^3 e^{-\frac{n\delta}{4}}. \quad (4.5.10)$$

First, we remark by (4.5.9) that

$$\|\tilde{W}_U^{n+1}(n+1) - \tilde{W}_U^n(n+1)\|_S = \|F(T_{n+1}) - W_U^n(T_{n+1})\|_S \lesssim \varepsilon^3 T_n^{-\delta}.$$

In order to apply Lemma 4.4.5, we define

$$\begin{aligned} A^1(t) &:= -\tilde{W}_U^{n+1}(n+1-t), & B^1(t) &:= -\tilde{W}_V^{n+1}(n+1-t), \\ A^2(t) &:= -\tilde{W}_U^n(n+1-t), & B^2(t) &:= -\tilde{W}_V^n(n+1-t). \end{aligned}$$

By the estimate (4.5.10), we remark that

$$\|A^1(0)\|_S = \|\tilde{W}_U^{n+1}(n+1)\|_S = \|W_U^{n+1}(T_{n+1})\|_S \lesssim \varepsilon T_{n+1}^\delta.$$

Thus, (A^1, B^1) and (A^2, B^2) are solutions of the system (4.1.2) and we have

$$\begin{aligned} \|A^1(0)\|_S + \|A^2(0)\|_S + \|B^1(0)\|_S + \|B^2(0)\|_S &\leq C\varepsilon T_n^\delta \\ \|A^1(0) - A^2(0)\|_S + \|B^1(0) - B^2(0)\|_S &\leq C\varepsilon^3 T_n^{-\delta}. \end{aligned}$$

An application of Lemma 4.4.5 gives us, for ε small enough,

$$\|\tilde{W}_U^{n+1}(0) - \tilde{W}_U^n(0)\|_S = \|A^1(n+1) - A^2(n+1)\|_S \lesssim \varepsilon^3 T_n^{-\delta} e^{C\varepsilon^2 T_n^{2\delta}(n+1)} \lesssim \varepsilon^3 e^{-n\frac{\delta}{4}}.$$

The proof of equation (4.5.10) is completed, we can now finish the proof of the theorem. From the estimate (4.5.10), we see that the sequence $(\tilde{W}_U^n(0))_n$ is a Cauchy sequence in the complete space S . Thus there exists an element $W_{U,0,\infty} \in S$, limit of this sequence, which satisfies (with $W_{V,0,\infty} \in S$ the limit of the sequence $(\tilde{W}_V^n(0))_n$),

$$\begin{aligned} \|W_{U,0,\infty}\|_S + \|W_{V,0,\infty}\|_S &\lesssim \varepsilon, \\ \|W_{U,0,\infty} - \tilde{W}_U^n(0)\|_S + \|W_{V,0,\infty} - \tilde{W}_V^n(0)\|_S &\lesssim \varepsilon^3 e^{-n\frac{\delta}{4}}. \end{aligned}$$

We denote now by $(\tilde{W}_{U,\infty}, \tilde{W}_{V,\infty})$ the couple of solutions of the resonant system (4.1.2) with the couple of initial data $(W_{U,0,\infty}, W_{V,0,\infty})$. Another use of Lemma 4.4.5 implies, always for ε small enough, gives

$$\sup_{0 \leq t \leq T_{n+2}} \|\tilde{W}_U^n(\pi \ln(t)) - \tilde{W}_{U,\infty}(\pi \ln(t))\|_S \lesssim \varepsilon^3 e^{-n\frac{\delta}{4}} T_n^{C\varepsilon^2 \pi} \lesssim \varepsilon^3 e^{-n\frac{\delta}{5}}. \quad (4.5.11)$$

Thanks to equations (4.5.9) and (4.5.11), we can now conclude the proof of the theorem by writing

$$\begin{aligned} \sup_{T_n \leq t \leq T_{n+1}} \|e^{-\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}} U(t)} - \tilde{W}_{U,\infty}(\pi \ln(t))\|_S &= \sup_{T_n \leq t \leq T_{n+1}} \|F(t) - \tilde{W}_{U,\infty}(\pi \ln(t))\|_S \\ &\leq \sup_{T_n \leq t \leq T_{n+1}} \|F(t) - W_U^n(t)\|_S + \sup_{T_n \leq t \leq T_{n+1}} \|\tilde{W}_U^n(\pi \ln(t)) - \tilde{W}_{U,\infty}(\pi \ln(t))\|_S \\ &\lesssim \varepsilon^3 e^{-n\frac{\delta}{5}}. \end{aligned}$$

□

4.6 The modified wave operator

To prove the existence of the modified wave operator, we set the following theorem that implies Theorem 4.1.2.

Theorem 4.6.1. *There exists $\varepsilon > 0$ such that if $(U_0, V_0) \in S^+ \times S^+$ satisfies*

$$\|U_0\|_{S^+} + \|V_0\|_{S^+} \leq \varepsilon,$$

and if $(\tilde{W}_U, \tilde{W}_V)$ is the couple of solutions of the resonant system (4.1.2) with initial data (U_0, V_0) , then there exists a couple (U, V) of solutions of (4.1.1) such that $e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} U(t)$, $e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} V(t) \in \mathcal{C}([0, +\infty), S)$ and

$$\|e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} U(t) - \tilde{W}_U(\pi \ln(t))\|_S + \|e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}} V(t) - \tilde{W}_V(\pi \ln(t))\|_S \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow +\infty.$$

Proof. The idea is to use a fixed point theorem. First, like in the previous theorem, we set $W_U(t) = \tilde{W}_U(\pi \ln(t))$ and $W_V(t) = \tilde{W}_V(\pi \ln(t))$ in order to obtain

$$i\partial_t W_U(t) = \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[W_V(t), W_V(t), W_U(t)], \quad i\partial_t W_V(t) = \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[W_U(t), W_U(t), W_V(t)].$$

The map we define for the fixed point theorem is

$$\Phi(F, G)(t) := (\Phi_1(F, G)(t), \Phi_2(F, G)(t)),$$

where

$$\begin{aligned} \Phi_1(F, G)(t) &:= i \int_t^{+\infty} \left(\mathcal{N}^s[G + W_V, G + W_V, F + W_U] - \frac{\pi}{s} \mathcal{R}[W_V(s), W_V(s), W_U(s)] \right) ds, \\ \Phi_2(F, G)(t) &:= i \int_t^{+\infty} \left(\mathcal{N}^s[F + W_U, F + W_U, G + W_V] - \frac{\pi}{s} \mathcal{R}[W_U(s), W_U(s), W_V(s)] \right) ds. \end{aligned}$$

The space we define for the fixed point theorem is the small ball

$$B_{\tilde{\mathfrak{A}}}(2\varepsilon) = \left\{ (F, G) \in \tilde{\mathfrak{A}}, \|(F, G)\|_{\tilde{\mathfrak{A}}} \leq 2\varepsilon \right\},$$

where

$$\|(F, G)\|_{\tilde{\mathfrak{A}}} = \|F\|_{\mathfrak{A}} + \|G\|_{\mathfrak{A}},$$

and the space \mathfrak{A} is defined by the norm

$$\|F\|_{\mathfrak{A}} = \sup_{t>1} \left((1 + |t|)^\delta \|F(t)\|_S + (1 + |t|)^{2\delta} \|F(t)\|_Z + (1 + |t|)^{1-\delta} \|\partial_t F(t)\|_S \right).$$

Let us begin with some remarks about the choice of the \mathfrak{A} norm.

Remark 4.6.2. — *First, about the time $t > 1$ in the definition of the norm. We want to prove a asymptotic behavior with this theorem, thus, we avoid the problems near the origin with this choice. The continuity of the solution in $(0, 1)$ is classical.*

- *Then, we see that this norm is not really new here. Indeed, the idea of the modified wave operator is to do a fixed point argument near the infinity. Therefore, we can't use the X_T norm directly, because this norm localize near 1, so we use this \mathfrak{A} norm which is some new version of the X_T norm for $T = +\infty$. In order to compare these norms, we will use that $\|F\|_{X_T} \lesssim \|F\|_{\mathfrak{A}}$.*
- *Finally, we will see the role of each component of the norm during the computations. But we see already that the first term is overriding for the proof of the theorem, because we need to obtain a decreasing behavior for the S norm.*

To apply the fixed point theorem, we need to show that for ε small enough, Φ is a contraction. Let us see how it is sufficient to prove the theorem. Assume that Φ is a contraction, by the fixed point theorem, there exists an unique couple (F, G) such that $\Phi(F, G) = (F, G)$. It follows that

$$\begin{aligned} i\partial_t F(t) &= \mathcal{N}^t[G + W_V, G + W_V, F + W_U] - \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[W_V(t), W_V(t), W_U(t)], \\ i\partial_t G(t) &= \mathcal{N}^t[F + W_U, F + W_U, G + W_V] - \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[W_U(t), W_U(t), W_V(t)]. \end{aligned}$$

Thus, with the choice of (W_U, W_V) , we get

$$\begin{cases} i\partial_t(F + W_U)(t) = \mathcal{N}^t[G + W_V, G + W_V, F + W_U], \\ i\partial_t(G + W_V)(t) = \mathcal{N}^t[F + W_U, F + W_U, G + W_V]. \end{cases}$$

Now we set $U := e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}(F + W_U)$ and $V := e^{it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}(G + W_V)$, then (U, V) solves (4.1.1) and by definition, for $(F, G) \in B_{\mathfrak{A}}(2\varepsilon)$, we have

$$\begin{aligned} \|e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}U(t) - \tilde{W}_U(\pi \ln(t))\|_S &= \|F\|_S \leq (1 + |t|)^{-\delta} \|F(t)\|_{\mathfrak{A}} \leq 2\varepsilon(1 + |t|)^{-\delta} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0, \\ \|e^{-it\Delta_{\mathbb{R} \times \mathbb{T}}}V(t) - \tilde{W}_V(\pi \ln(t))\|_S &= \|G\|_S \leq (1 + |t|)^{-\delta} \|G(t)\|_{\mathfrak{A}} \leq 2\varepsilon(1 + |t|)^{-\delta} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

The proof of the theorem is thus completed. We now have to show that Φ is a contraction for ε small enough.

We do the computations for Φ_1 , by symmetry, the results are the same for Φ_2 . By Theorem 4.3.1 (see equation (4.3.1)), we have the decomposition:

$$\mathcal{N}^t[W_V, W_V, W_U] = \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[W_V, W_V, W_U] + \mathcal{E}^t[W_V, W_V, W_U]$$

Thus, we decompose the integrand part of $\Phi_1(F, G)$ as follows:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^t[G + W_V, G + W_V, F + W_U] - \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[W_V, W_V, W_U] &= \\ \mathcal{E}^t[W_V, W_V, W_U] + \mathcal{L}_{W_U, W_V}^t[F, G] + \mathcal{Q}_{W_U, W_V}^t[F, G] + \mathcal{N}^t[G, G, F], \end{aligned}$$

where the linear part (in F and G) \mathcal{L}^t and the quadratic part \mathcal{Q}^t are defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W_U, W_V}^t[F, G] &:= \mathcal{N}^t[G, W_V, W_U] + \mathcal{N}^t[W_V, G, W_U] + \mathcal{N}^t[W_V, W_V, F], \\ \mathcal{Q}_{W_U, W_V}^t[F, G] &:= \mathcal{N}^t[G, G, W_U] + \mathcal{N}^t[G, W_V, W_U] + \mathcal{N}^t[W_V, G, F]. \end{aligned}$$

Let us show that $\Phi(B_{\mathfrak{A}}(2\varepsilon)) \subset B_{\mathfrak{A}}(2\varepsilon)$ for ε small enough. We have

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(F, G)\|_{\mathfrak{A}} &\leq \left\| \int_t^{+\infty} \mathcal{E}^s[W_V, W_V, W_U] ds \right\|_{\mathfrak{A}} + \left\| \int_t^{+\infty} \mathcal{L}_{W_U, W_V}^s[F, G] ds \right\|_{\mathfrak{A}} \\ &\quad + \left\| \int_t^{+\infty} \mathcal{Q}_{W_U, W_V}^s[F, G] ds \right\|_{\mathfrak{A}} + \left\| \int_t^{+\infty} \mathcal{N}^s[G, G, F] ds \right\|_{\mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

We choose $\varepsilon \lesssim \delta^{\frac{1}{2}}$ in order to have $3\delta' \leq \frac{\delta}{100}$ and $\delta'' \leq \frac{\delta}{100}$ with δ', δ'' defined in Lemma 4.4.1. The idea is to use that by the definition of \mathfrak{A} , we have for $F \in \mathfrak{A}$:

$$(1 + |t|)^\delta \|F(t)\|_S + (1 + |t|)^{2\delta} \|F(t)\|_Z + (1 + |t|)^{1-\delta} \|\partial_t F(t)\|_S \lesssim \varepsilon,$$

and, by Lemma 4.4.1 (equations (4.4.2) and (4.4.5)) and Remark 4.4.4 for the derivatives, the choice of ε gives us

$$\begin{aligned} \|W_U(t)\|_{S^+} + \|W_V(t)\|_{S^+} + (1 + |t|) \|\partial_t W_U(t)\|_{S^+} + (1 + |t|) \|\partial_t W_V(t)\|_{S^+} \\ \lesssim \varepsilon(1 + |t|)^{\frac{\delta}{100}}, \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

$$\|W_U(t)\|_Z + \|W_V(t)\|_Z \lesssim \varepsilon. \tag{4.6.2}$$

We begin with the first term. Let us show that

$$\bullet \left\| \int_t^{+\infty} \mathcal{E}^s[W_V, W_V, W_U] ds \right\|_{\mathfrak{A}} \lesssim \varepsilon^3. \tag{4.6.3}$$

From Proposition 4.2.5 and Remark 4.4.4, we have

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}^t[W_V, W_V, W_U]\|_S &\lesssim (1 + |t|)^{-1} \|W_V(t)\|_S^2 \|W_U(t)\|_S \lesssim \varepsilon^3 (1 + |t|)^{-1+\delta}, \\ \|\frac{\pi}{t} \mathcal{R}[W_V(t), W_V(t), W_U(t)]\|_S &\lesssim \varepsilon^3 (1 + |t|)^{-1+\delta}. \end{aligned}$$

This gives us for the derivative part of the \mathfrak{A} norm:

$$(1 + |t|)^{1-\delta} \|\partial_t \int_t^{+\infty} \mathcal{E}^s[W_V, W_V, W_U] ds\|_S \lesssim \varepsilon^3.$$

For the two other terms, we first remark that due to equations (4.6.1) and (4.6.2), we have for $T = +\infty$

$$\|W_U\|_{X_{T^+}} + \|W_V\|_{X_{T^+}} \lesssim \varepsilon.$$

Therefore, Theorem 4.3.1 gives us (with $t_j := 2^j t$):

$$\begin{aligned} \|\int_t^{+\infty} \mathcal{E}^s[W_V, W_V, W_U] ds\|_S &\lesssim \sum_{j=0}^{+\infty} \|\int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathcal{E}^s[W_V, W_V, W_U] ds\|_S \\ &\lesssim \varepsilon^3 \sum_{j=0}^{+\infty} t_j^{-2\delta} \lesssim \varepsilon^3 (1 + |t|)^{-2\delta}. \end{aligned}$$

We just have to bound the Z norm by the S norm to conclude that

$$(1 + |t|)^\delta \|\int_t^{+\infty} \mathcal{E}^s[W_V, W_V, W_U] ds\|_S + (1 + |t|)^{2\delta} \|\int_t^{+\infty} \mathcal{E}^s[W_V, W_V, W_U] ds\|_Z \lesssim \varepsilon^3.$$

This finished the proof of equation (4.6.3). For the second term of the estimate of $\|\Phi_1(F, G)\|_{\mathfrak{A}}$, let us show that

$$\bullet \|\int_t^{+\infty} \mathcal{L}_{W_U, W_V}^s[F, G] ds\|_{\mathfrak{A}} \lesssim \varepsilon^2 (\|F\|_{\mathfrak{A}} + \|G\|_{\mathfrak{A}}). \quad (4.6.4)$$

First, we see that by Proposition 4.2.5 and Lemma 4.4.1, we have

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{W_U, W_V}^t[F, G]\|_S &\lesssim (1 + |t|)^{-1} (\|W_V(t)\|_S^2 + \|W_U(t)\|_S^2) (\|F(t)\|_S + \|G(t)\|_S) \\ &\lesssim \varepsilon^2 (1 + |t|)^{-1+\delta} (\|F\|_{\mathfrak{A}} + \|G\|_{\mathfrak{A}}). \end{aligned}$$

Thus, for the derivative part of the \mathfrak{A} norm, we have

$$(1 + |t|)^{1-\delta} \|\partial_t \int_t^{+\infty} \mathcal{L}_{W_U, W_V}^t[F, G] ds\|_S \lesssim \varepsilon^2 (\|F\|_{\mathfrak{A}} + \|G\|_{\mathfrak{A}}).$$

The proof of the two other parts of the \mathfrak{A} norm is more delicate. We deal for example with the first term $\mathcal{N}^t[G, W_V, W_U]$. The idea is to use the decomposition (4.3.52), we have

$$\mathcal{N}^t = \mathcal{N}_{high}^t + \tilde{\mathcal{N}}_{low}^t + \Pi_{low}^t.$$

By Proposition 4.3.2, we have for the \mathcal{N}_{high}^t term

$$\begin{aligned} \|\int_t^{+\infty} \mathcal{N}_{high}^s[G, W_V, W_U] ds\|_S &\lesssim \sum_{j=0}^{+\infty} \|\int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathcal{N}^s[G, W_V, W_U] ds\|_S \\ &\lesssim \left(\sum_{j=0}^{+\infty} t_j^{-\frac{1}{50}}\right) \|G\|_{X_T} \|W_V\|_{X_T} \|W_U\|_{X_T} \lesssim \varepsilon^2 (1 + |t|)^{-\frac{1}{50}} \|G\|_{\mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

Therefore, we have

$$(1+|t|)^\delta \left\| \int_t^{+\infty} \mathcal{N}_{high}^s[G, W_V, W_U] ds \right\|_S + (1+|t|)^{2\delta} \left\| \int_t^{+\infty} \mathcal{N}_{high}^s[G, W_V, W_U] ds \right\|_Z \lesssim \varepsilon^2 \|G\|_{\mathfrak{A}}.$$

For the $\tilde{\mathcal{N}}_{low}^t$ term, we use Proposition 4.3.5. We have $\tilde{\mathcal{N}}_{low}^t = \tilde{\mathcal{E}}_1^t + \mathcal{E}_2^t = \tilde{\mathcal{E}}_1^t + \partial_t \mathcal{E}_3^t$. Thus, by the estimates of Proposition 4.3.5 we have

$$\begin{aligned} \left\| \int_t^{+\infty} \tilde{\mathcal{N}}_{low}^s[G, W_V, W_U] ds \right\|_S &\lesssim \sum_{j=0}^{+\infty} \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \tilde{\mathcal{N}}_{low}^s[G, W_V, W_U] ds \right\|_S \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{+\infty} (t_j \sup_{t_j \leq t \leq 2t_j} \|\tilde{\mathcal{E}}_1(t)\|_S + \sup_{t_j \leq t \leq 2t_j} \|\mathcal{E}_3(t)\|_S) \\ &\lesssim \varepsilon^2 (1+|t|)^{-2\delta} \|G\|_{\mathfrak{A}} + \varepsilon^2 (1+|t|)^{-\frac{1}{10}} \|G\|_{\mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

This is sufficient for the $\tilde{\mathcal{N}}_{low}^t$ bound. We now have to deal with the Π_{low}^t term. This time, we can't just use the S bound to deduce the Z bound because we have not enough decay for the S norm. Indeed, we have by Proposition 4.3.9

$$\begin{aligned} \|\Pi^t[G, W_V, W_U]\|_S &\lesssim (1+|t|)^{-1} (\|G\|_{X_T} \|W_U\|_S \|W_V\|_{X_T} + \|G\|_{X_T} \|W_V\|_S \|W_U\|_{X_T}) \\ &\quad + (1+|t|)^{-1} \|G\|_S \|W_U\|_{X_T} \|W_V\|_{X_T} \\ &\lesssim \varepsilon^2 (1+|t|)^{-1-\delta} \|G\|_{\mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

From this equation we deduce that

$$\begin{aligned} \left\| \int_t^{+\infty} \Pi_{low}^s[G, W_V, W_U] ds \right\|_S &\lesssim \sum_{j=0}^{+\infty} \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Pi_{low}^s[G, W_V, W_U] ds \right\|_S \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{+\infty} t_j \sup_{t_j \leq t \leq 2t_j} \|\Pi_{low}(t)\|_S \lesssim \varepsilon^2 (1+|t|)^{-\delta} \|G\|_{\mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

As announced, we see here that we just have a “ $-\delta$ ” decay, so we can't just say that

$$\begin{aligned} (1+|t|)^{2\delta} \left\| \int_t^{+\infty} \Pi_{low}^s[G, W_V, W_U] ds \right\|_Z &\lesssim (1+|t|)^{2\delta} \left\| \int_t^{+\infty} \Pi_{low}^s[G, W_V, W_U] ds \right\|_S \\ &\lesssim \varepsilon^2 (1+|t|)^\delta \|G\|_{\mathfrak{A}}, \end{aligned}$$

because we can't deal with a growing polynomial term in the right-hand side of the equation. Therefore, we have to be more accurate with the Z norm. In the view of the estimates of Proposition 4.3.9, we write

$$\Pi_{low}^t = (\Pi_{low}^t - \frac{\pi}{t} \mathcal{R}_{low}) + \frac{\pi}{t} \mathcal{R}_{low}.$$

From equation (4.3.34), we have

$$\left\| \frac{\pi}{t} \mathcal{R}_{low}[G, W_V, W_U] \right\|_Z \lesssim (1+|t|)^{-1} \|G\|_Z \|W_U\|_Z \|W_V\|_Z \lesssim \varepsilon^2 (1+|t|)^{-1-2\delta} \|G\|_{\mathfrak{A}}.$$

Moreover, equation (4.3.29) from Proposition 4.3.9 gives us

$$\begin{aligned} \left\| \Pi_{low}^t[G, W_V, W_U] - \frac{\pi}{t} \mathcal{R}_{low}[G, W_V, W_U] \right\|_Z &\lesssim (1+|t|)^{-\frac{17}{16}} \|G\|_S \|W_U\|_S \|W_V\|_S \\ &\lesssim \varepsilon^2 (1+|t|)^{-1-2\delta} \|G\|_{\mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

Thus, we can conclude with the same computation as in the S norm case. By symmetry, we have the same result for the two other terms of $\mathcal{L}_{W_U, W_V}^t[F, G]$. This finishes the proof of the estimate (4.6.4). It remains now to deal with the $\mathcal{Q}_{W_U, W_V}^t[F, G]$ and $\mathcal{N}^t[G, G, F]$, let us show that

$$\bullet \left\| \int_t^{+\infty} \mathcal{Q}_{W_U, W_V}^s[F, G] ds \right\|_{\mathfrak{X}} + \left\| \int_t^{+\infty} \mathcal{N}^s[G, G, F] ds \right\|_{\mathfrak{X}} \lesssim \varepsilon (\|F\|_{\mathfrak{X}}^2 + \|G\|_{\mathfrak{X}}^2). \quad (4.6.5)$$

For the \mathcal{Q}_{W_U, W_V}^t term, we do the same computations as in the \mathcal{L}_{W_U, W_V}^t case. This time, we have two terms in F and G , and only one term in W_U or W_V in the \mathcal{N}^t terms, but the strategy is the same. For the $\mathcal{N}^t[G, G, F]$ term, Proposition 4.2.5 gives us

$$\|\mathcal{N}^t[G, G, F]\|_S \lesssim (1 + |t|)^{-1} \|G\|_S^2 \|F\|_S \lesssim (1 + |t|)^{-1-3\delta} \|G\|_{\mathfrak{X}}^2 \|F\|_{\mathfrak{X}}.$$

Considering that we are here in the ball $B_{\mathfrak{X}}$, this is sufficient to prove inequality (4.6.5) (with for example the same method as in the \mathcal{N}_{high}^t part of the $\mathcal{L}_{W_U, W_V}^t[F, G]$ term). Finally, estimates (4.6.3), (4.6.4) and (4.6.5) allow us to show that for ε small enough and $(F, G) \in B_{\mathfrak{X}}$, we have

$$\|\Phi_1(F, G)\|_{\mathfrak{X}} \leq \varepsilon,$$

and $\Phi(B_{\mathfrak{X}}(2\varepsilon)) \subset B_{\mathfrak{X}}(2\varepsilon)$.

It remains to show that Φ is a contraction. Let $(F_1, G_1), (F_2, G_2) \in B_{\mathfrak{X}}$. We have :

$$\begin{aligned} (\Phi_1(F_1, G_1) - \Phi_1(F_2, G_2))(t) &= i \int_t^{+\infty} \left(\mathcal{L}_{W_U, W_V}^s[F_1 - F_2, G_1 - G_2] \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{Q}_{W_U, W_V}^s[F_1, G_1] - \mathcal{Q}_{W_U, W_V}^s[F_2, G_2]) + (\mathcal{N}^s[G_1, G_1, F_1] - \mathcal{N}^s[G_2, G_2, F_2]) \right) ds. \end{aligned}$$

For the \mathcal{L}_{W_U, W_V}^s part, equation (4.6.4) gives

$$\left\| \int_t^{+\infty} \mathcal{L}_{W_U, W_V}^s[F_1 - F_2, G_1 - G_2] ds \right\|_{\mathfrak{X}} \lesssim \varepsilon^2 (\|F_1 - F_2\|_{\mathfrak{X}} + \|G_1 - G_2\|_{\mathfrak{X}}).$$

For the \mathcal{Q}_{W_U, W_V}^s and \mathcal{N}^s parts, the idea is just to use the trilinearity of \mathcal{N}^t in order to apply the previous estimate (4.6.5). For example for \mathcal{Q} :

$$\mathcal{N}^t[W_V, G_1, F_1] - \mathcal{N}^t[W_V, G_2, F_2] = \mathcal{N}^t[W_V, G_1 - G_2, F_1] + \mathcal{N}^t[W_V, G_2, F_1 - F_2].$$

For the \mathcal{N}^s part we have we the same idea

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^t[G_1, G_1, F_1] - \mathcal{N}^t[G_2, G_2, F_2] \\ = \mathcal{N}^t[G_1 - G_2, G_1, F_1] + \mathcal{N}^t[G_2, G_1 - G_2, F_1] + \mathcal{N}^t[G_2, G_2, F_1 - F_2]. \end{aligned}$$

Thus, estimate (4.6.5) finally gives us

$$\|\Phi_1(F_1, G_1) - \Phi_1(F_2, G_2)\|_{\mathfrak{X}} \lesssim \varepsilon^2 (\|F_1 - F_2\|_{\mathfrak{X}} + \|G_1 - G_2\|_{\mathfrak{X}}),$$

and the same equation for Φ_2 shows that Φ is a contraction for ε small enough. This completes the proof of the theorem. \square

Conclusion and perspectives

Conclusion

In this manuscript, we have studied some nonlinear behaviors for solutions of a system of two cubic Schrödinger equations, coupled as follow:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_x u &= |v|^2 u, \\ i\partial_t v + \Delta_x v &= |u|^2 v. \end{cases} \quad (\text{CNLS})$$

For the spatial domain, that plays a great role in the kind of nonlinear behavior we can obtain, we have considered the case of one periodic coordinate (Chapter 2), the case of one Euclidean coordinate (Chapter 3), and the case of two spatial coordinates, one periodic and one Euclidean (Chapter 4). Along the different chapters, various tools have been used in order to highlight the desired behaviors. The range of tools used and results obtained justifies the choice of the system (CNLS) as a toy model for the thesis.

Among these tools, we can cite the use of the Hamiltonian formalism of the coupled nonlinear Schrödinger system (CNLS) on the one dimensional torus \mathbb{T} in Chapter 2. In particular, we have constructed a Birkhoff normal form, that allows to highlight an exchange of energy between different Fourier modes of the solutions (for a large range of parameters), this is the shifted beating effect of Theorem 2.0.1. This is a truly nonlinear behavior, but only for large (but finite) times.

In chapter 3, we have used classical tools such as the Duhamel Formula and the work on a priori estimates in order to prove a modified scattering result in Theorem 3.1.1 for the system (CNLS) on \mathbb{R} . This is a behavior for infinite time, but close to a linear behavior in the sense that the modification of the scattering result holds here in a phase correction. Nevertheless, we see the role of the coupling in this phase correction.

In order to unite these two approaches, we have studied in Chapter 4 the coupled system (CNLS) on the product space $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$. We have first obtained a modified scattering theorem (Theorem 4.1.1): the solutions to the initial system (CNLS) scatter to solutions of a resonant system. The study of the resonant system allows to prove that solutions of the system (CNLS) are bounded in all Sobolev spaces: this is the purpose of Theorem 4.1.3. Then, we have constructed a modified wave operator in Theorem 4.1.2 in order to transfer all nonlinear behavior from the resonant system to solutions of the initial system. Thanks to this wave operator and the links between the resonant system and the resonant system of Chapter 2 obtained by the Birkhoff normal form, we have thus obtained the main result of this thesis in Theorem 4.1.4: an energy exchange in infinite time thanks to a modified scattering result.

Perspectives

Several perspectives of this work can be envisioned. Due to the richness and the simplicity of the system (CNLS), we can hope to obtain some improvements on the results of the manuscript, or modify some assumptions to obtain different nonlinear behaviors. Two other important perspectives are given by the KAM theory and the adaption of this work for other equations.

To go further with more excited modes

On Chapter 2, it can be very interesting to consider the reduced resonant system, obtained after the Birkhoff normal form, with more than two excited modes. We recall that the resonant part Z_4 reads

$$Z_4 = IJ + |S|^2 - \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2 |v_n|^2,$$

with

$$I = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j|^2, \quad J = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_j|^2 \quad \text{and} \quad S = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j \bar{v}_j.$$

Therefore, with n modes (p_1, p_2, \dots, p_n) excited (for $n > 1$), the reduced part of Z_4 becomes

$$Z_4^r = \left(\sum_{j=1}^n I_j \right) \left(\sum_{j=1}^n J_j \right) + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \sqrt{I_j I_k J_j J_k} \cos(\psi^{j,k}),$$

where we use the coordinates $u_{p_j} = \sqrt{I_j} e^{i\theta_j}$, $v_{p_j} = \sqrt{J_j} e^{i\varphi_j}$, and the notation $\psi^{j,k}$ for the angle

$$\psi^{j,k} = \theta_{p_j} - \theta_{p_k} + \varphi_{p_k} - \varphi_{p_j}.$$

From the previous study, we have the following set of constants of motions

$$\begin{cases} L_j := I_j + J_j = |u_{p_j}|^2 + |v_{p_j}|^2, & j = 1 \dots n, \\ I = \sum_{j=1}^n I_j, & J = \sum_{j=1}^n J_j. \end{cases}$$

We obtain from this set $(n + 1)$ independent constants of motions (we have for example the relation $I + J = \sum_{j=1}^n L_j$). Therefore, we have only $(n - 1)$ true actions. Thanks to the relation

$$\psi^{j,k} + \psi^{k,l} = \psi^{j,l},$$

we also have $(n - 1)$ independent angles. For example, we can choose to focus on the actions $(I_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ and the angles $(\varphi^{1,k})_{2 \leq k \leq n}$.

Thus, in order to exhibit some interesting dynamics, we have to deal with a Hamiltonian system of $2(n - 1)$ equations. For $n = 2$ (this is the choice made in Chapter 2), we have thus a Hamiltonian system of 2 equations: this system is completely integrable. This integrability, which is a key element in the proof of the shifted beating effect, is unclear for $n \geq 3$.

The other point to study is the kind of behavior we can expect. When, for $n = 2$, we have the exchange of energy thanks to the relation

$$I_1 - J_2 = I_1 - (L_1 - I_1) = L_1 = cst,$$

the generalization of this relation for n modes (with $n \geq 3$) is given by (for example for $n = 2k + 1$ an odd integer)

$$\sum_{i=1}^k I_{2i+1} - \sum_{i=1}^k J_{2i} = \sum_{i=1}^{k-1} I_{2i+1} + (I - \sum_{i=1}^{2k} I_i) - \sum_{i=1}^k (L_{2i} - I_{2i}) = I - \sum_{i=1}^k L_{2i} = cst. \quad (5.1)$$

The same is true for n an even integer, for example for $n = 4$ we have

$$I_1 - J_2 + I_3 - J_4 = I - L_2 - L_4 = cst.$$

The problem here is to understand these relations as exchanges of energy between the modes of the solutions.

To sum up, in order to study more than 3 excited modes, we need to:

- ★ Study the integrability of the new reduced resonant part Z_4^r . This step may not be relevant in the case of the study of the system on the product space $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ like in Chapter 4, where the resonant system is exactly given by Z_4 (i.e without remainder terms).
- ★ Understand the relations (5.1) as exchanges of energy, possibly by making an appropriate change of variables.
- ★ Make some numerical simulations to understand the observed behaviors.

To go further by modifying the problem

Around the study proposed in this manuscript, some modifications of the assumptions may give new nonlinear behaviors. Among these possibilities, one may think to consider:

- ★ Other spaces for the spatial coordinates. On the one hand, the choice of the Euclidean space \mathbb{R} in Chapters 3 and 4 seems to be optimal in the sense that it allows to obtain modifications of the scattering. On the other hand, the choice of the one dimensional torus \mathbb{T} in Chapters 2 and 4 is questionable. The aim of this thesis is to make a link between the modified scattering of Hani, Pausader, Tzvetkov and Visciglia ([27]) and the beating effect of Grébert, Paturel and Thomann ([20]), hence the choice of \mathbb{T} . Out of this consideration, one can envisage studying the system (CNLS) on other Riemannian compact manifolds. First, one may think about the higher dimensions for the torus. For example, results on the growth of Sobolev norms have been highlighting on \mathbb{T}^2 (see for example the articles [13],[24] and [25]) or on the product space $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ ([27]). It can be interesting to study the influence of the coupling for the construction of energy cascades that leads to the growth of the Sobolev norms. Then, one may consider more generic spaces such as for example any Riemannian compact manifold (see [50]), hyperbolic spaces (see [3])...
- ★ The add of potentials. In Chapter 4, we deal with the add of convolution potentials, that do not influence the resonant set in our case. Nevertheless, the case of multiplication potentials, that is a more physical but also more difficult case because it perturbs the resonant set, is not treated in this thesis.

★ Other choices of nonlinearity. The choice of the cubic nonlinearity present in the system (CNLS) is relevant in order to obtain a Hamiltonian system that may not be completely integrable. From this point of view, the next relevant case is the study of the quintic nonlinearity. In order to obtain the same structure, it seems that in this case, the natural system to study is the following system of three coupled Schrödinger equations:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_x u &= |v|^2 |w|^2 u, \\ i\partial_t v + \Delta_x v &= |u|^2 |w|^2 v, \\ i\partial_t w + \Delta_x w &= |u|^2 |v|^2 w, \end{cases}$$

associated to the Hamiltonian

$$H := \int (|\partial_x u|^2 + |\partial_x v|^2 + |\partial_x w|^2) dx + \int |u|^2 |v|^2 |w|^2 dx.$$

One can generalize this idea for a nonlinearity of order $(2p - 1)$ with a system of p coupled Schrödinger equations. It can be here pertinent to study for such systems the persistence and the form of exchanges of energy.

Other modifications may be studied, as other choices of nonlinearity (possibly non Hamiltonian ones), the work with random initial conditions or the use of different norms. As an example for this last point, one can think about the negative Sobolev spaces used by Carles and Kappeler to highlight some strong illposedness for the nonlinear Schrödinger equation thanks to the resonances in [9].

To go further with the KAM theory

In order to transfer a finite time behavior (as the shifted beating of Chapter 2) to an infinite time behavior, two main options are available. In this thesis, we choose the use of the scattering theory, which allows us in Chapter 4 to obtain solutions which are closed to shifted beating solutions for infinite times. The other main option is the KAM theory.

First, one may think of using the KAM theory in Chapter 2 in order to obtain the shifted beating effect in infinite time on \mathbb{T} . This strategy has been used by Haus and Procesi in [31] to construct solutions of the quintic NLS equation that provides some exchange of energy. The adaptation of this method, based on the choice of the right change of variable and the use of the Floquet's Theorem to kill the angles, should allow us to construct solutions that exhibit the shifted beating effect in infinite time on \mathbb{T} . This is a work in progress with Emanuele Haus.

Then, in Chapter 4, it can be relevant to write a KAM theorem for the reduced resonant system (4.4.1) on the torus. Indeed, all behavior observed on this reduced resonant system can be transferred to solutions of the initial system (CNLS) on the product space $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ by the strategy developed in the chapter (first, a transfer of the solution of the reduced resonant system to a solution of the resonant system on the product space, then the use of the modified wave operator of Theorem 4.1.2). Nevertheless, the system may be too rigid (there is a lot of constants of motion) to obtain interesting dynamics.

Finally, out of the study of the shifted beating effect, one may use the KAM theory on the system (CNLS) in order to study the stability of linear tori for the system (CNLS) on \mathbb{T} . Through a simple example of a couple of linear solutions given by

$$\begin{cases} u(t, x) = \alpha e^{ik_1 x} e^{-ik_1^2 t}, \\ v(t, x) = \beta e^{ik_2 x} e^{-ik_2^2 t}. \end{cases}$$

Thanks to a KAM theorem, we can show that the case $k_1 \neq k_2$ leads to an unstable linear torus, whereas the case $k_1 = k_2$ leads to a stable linear torus. This is a work in progress with Benoît Grébert.

To go further on other equations

The last perspective is the use of the methods developed in this thesis for the study of other equations. Due to the resemblance as dispersive equations (they have the same dispersive rate), the first natural candidate is the Klein-Gordon equation. From the point of view of coupled systems, as in this manuscript, we can hope to develop some modified scattering theorem for a system of two cubic Klein-Gordon equations. It also can be challenging to consider the coupling between a cubic Schrödinger equation and a cubic Klein-Gordon one.

Appendices

A Hamiltonian formalism

In this first appendix, we state some definitions and theorems we use in Chapter 2. These are classical tools from the Hamiltonian formalism, thus, we don't give the complete proofs. For more details, the reader may for example take a look at the book *KdV & KAM* ([36]) from Kappeler and Pöschel.

Let us recall the system studied in Chapter 2:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_{xx} u = |v|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \\ i\partial_t v + \partial_{xx} v = |u|^2 v, \end{cases}$$

which is a Hamiltonian system associated to the Hamiltonian

$$H := \int_{\mathbb{T}} (|\partial_x u|^2 + |\partial_x v|^2) dx + \int_{\mathbb{T}} |u|^2 |v|^2 dx.$$

In the Fourier modes, the system reads

$$\begin{cases} i\dot{u}_j = \frac{\partial H}{\partial \bar{u}_j}, & -i\dot{\bar{u}}_j = \frac{\partial H}{\partial u_j}, & j \in \mathbb{Z}, \\ i\dot{v}_j = \frac{\partial H}{\partial \bar{v}_j}, & -i\dot{\bar{v}}_j = \frac{\partial H}{\partial v_j}, & j \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

and the Hamiltonian is given by

$$H = \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 (|u_j|^2 + |v_j|^2) + \sum_{\substack{p, q, r, s \in \mathbb{Z} \\ p - q + r - s = 0}} u_p \bar{u}_q v_r \bar{v}_s.$$

Finally, we recall that the Poisson bracket between two functions f and g of (u, v) , associated to the symplectic structure $-i \sum_j (du_j \wedge d\bar{u}_j + dv_j \wedge d\bar{v}_j)$, is written:

$$\{f, g\} = -i \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial g}{\partial \bar{u}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{u}_j} \frac{\partial g}{\partial u_j} + \frac{\partial f}{\partial v_j} \frac{\partial g}{\partial \bar{v}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{v}_j} \frac{\partial g}{\partial v_j} \right).$$

In this section, we come back to two important notions mentioned in Chapter 2: the symplectic transformations and the complete integrability.

Symplectic transformations

In Chapter 2, we use the expression “symplectic change of variables” in order to qualify the polar coordinates, the change of variable τ in the Birkhoff normal form Proposition 2.2.1, in the study of the reduces model in Lemma 2.3.1, and the change of variable induced by the Arnold-Liouville theorem in the proof of Lemma 2.4.3. By this denomination, we mean that these changes of variables are symplectic transformation in the following sense:

Definition. A diffeomorphism φ is called symplectic if it preserves the Poisson bracket, i.e:

$$\{f, g\} \circ \varphi = \{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}, \quad \text{for any Hamiltonians } f \text{ and } g.$$

Therefore, in order to conserve the symplectic structure of our system, it is natural to consider only symplectic changes of variables. We show in Lemma 2.4.3 that the change of variables proposed is symplectic. It remains to insure that it also holds for the polar coordinates and for the change of variables from the Birkhoff normal form. On the one hand, it is straightforward to check that the change of variables defined by the polar coordinates is symplectic. On the other hand, we need more tools for the change of variables τ from the Birkhoff normal form in Proposition 2.2.1. By construction, τ is a Lie transform, is the time 1 flow φ_1 of a Hamiltonian χ . The fact that τ is symplectic comes from the following proposition:

Proposition. *A Lie transform is symplectic.*

Proof. We fix f, g and χ three Hamiltonians (i.e regular functions) and we suppose that the flow φ_t of χ is defined on $[0, t_0]$. We introduce the function u defined on $[0, t_0]$ by

$$u : t \mapsto \{f, g\} \circ \varphi_t - \{f \circ \varphi_t, g \circ \varphi_t\}.$$

We first remark that $u(0) = 0$, because we have $\varphi_0 = \text{id}$ by definition of the flow. Using the Jacobi identity

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0, \quad \text{for any } A, B \text{ and } C \text{ Hamiltonians,}$$

we show that

$$\begin{cases} u'(t) = \{u(t), \chi \circ \varphi_t\}, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

We conclude by a Cauchy theorem that $u \equiv 0$. □

During the construction of the Birkhoff normal form, we used the following proposition concerning the Taylor expansion and the Lie transform:

Proposition. *Let G and χ be Hamiltonians and φ_t the flow of χ . We have*

$$\frac{d}{dt}(G \circ \varphi_t) = \{G, \chi\} \circ \varphi_t.$$

Furthermore, we have the Taylor expansion

$$G \circ \varphi(q, p) = \sum_{i=0}^k G_i(q, p) + (k+1) \int_0^1 (1-t)^k G_{k+1} \circ \varphi_t(q, p) dt,$$

where $G_l = \frac{1}{l} \{G_{l-1}, \chi\}$, $G_0 = G$ and $\varphi = \varphi_1$ is the Lie transform of χ .

Proof. The first equality is a direct consequence of the definition of φ_t as the flow of χ and the use of the previous proposition. The second equation is constructed, thanks to the first one, by induction (using one more time that $\varphi_0 = \text{id}$). \square

About the complete integrability

One of the key points of the proof of the shifted beating effect is the Arnold-Liouville theorem, used in the proof of Lemma 2.4.3. To understand this theorem, we need to define the complete integrability we use in Lemma 2.3.1.

Definition. A Hamiltonian system on a symplectic manifold M of dimension $2n$ is called (completely) integrable in the sense of Liouville if its Hamiltonian H admits n independent integrals F_1, \dots, F_n in involution. This means

1. $\{H, F_i\} = 0$ for $i = 1 \dots n$: the F_i are constants of motion (also called integrals).
2. $\{F_i, F_j\} = 0$ for $1 \leq i, j \leq n$: the F_i are in involution.
3. $(\nabla F_i)_{1 \leq i \leq n}$ are linearly independent: the F_i are independent.

We see in Lemma 2.3.1 that the family (H, K_1, K_2, K_3) satisfies the assumptions of the previous definition in a Hamiltonian system of 8 equations. The system (2.3.2) is thus completely integrable.

Due to the definition of a integrable system, an important remark is the fact that any Hamiltonian system of dimension 2 is completely integrable (the Hamiltonian itself plays the role of the system of constants of motions). Thanks to this remark, the systems (2.3.3) and (2.3.11) are completely integrables. This is a key point that allows us in both cases to use the Arnold-Liouville theorem:

Arnold-Liouville Theorem. *Let H be a Liouville integrable Hamiltonian on M a symplectic manifold of dimension $2n$, and let F_1, \dots, F_n be a set of independent constants of motion of H in involution. If one of its leaves*

$$M_c := \{(q, p) \in M, F_j(q, p) = c_j, j = 1 \dots n\}$$

is compact and connected, then there exists a neighborhood \mathcal{U} of this leave, a neighborhood D of 0 in \mathbb{R}^n , and a change of variable

$$\begin{aligned} \Psi : D \times \mathbb{T}^n &\longrightarrow \mathcal{U} \\ (I, \theta) &\longmapsto (q, p), \end{aligned}$$

such that

- ▷ $H \circ \Psi = h(I)$ is a function of the actions I alone,
- ▷ the change of variable Ψ is symplectic.

The new variables (I, θ) are called action-angle variables. In other words, the Arnold-Liouville theorem says that any complete integrable system (in the Liouville sense) with compact connected leaves is equivalent to a canonical system where the Hamiltonian depends only on the actions.

B The stationary phase approximation

Through the different results of this thesis, we have studied some asymptotic behaviors for our system of two cubic coupled Schrödinger equations. In all chapters, the first step of the study is to consider the Fourier transform (in the spatial domain) of the equations. As soon as we consider the case of one Euclidean variable (as in Chapter 3 and 4), the Fourier transform of the cubic nonlinearity, expressed in the profiles f and g of the solutions u and v , gives a convolution term of the form:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} \hat{g}(t, \xi - \kappa) \bar{\hat{g}}(t, \xi - \eta - \kappa) \hat{f}(t, \xi - \eta) d\kappa d\eta.$$

In order to deal with this kind of terms, an efficient tool is given by the stationary phase principle. First, we recall the definition of a non-degenerate critical point:

Definition. Let $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. A point $x_c \in \mathbb{R}^n$ is said a critical point (or stationary point) of φ if $\varphi'(x_c) = 0$. A critical point x_c of φ is said non-degenerate if $\varphi''(x_c) \neq 0$.

Thanks to this definition, we can state the stationary phase principle:

The stationary phase approximation. Let $n \in \mathbb{N}^*$ be an integer and $a \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ a smooth function with compact support. If the phase $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ admits an unique critical point $x_c \in \mathbb{R}^n$, non-degenerate, then

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{it\varphi(x)} a(x) dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{it\varphi(x_c)} \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} |\det \varphi''(x_c)|^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(\varphi''(x_c))} a(x_c),$$

where $\operatorname{sgn}(\varphi''(x_c))$ is the signature of the Hessian of φ in x_c .

In the following, we give the main ideas of the proof and show how this principle gives us the right intuition to exhibit the predominant terms for the nonlinearity in Chapters 3 and 4.

Idea of the proof

The proof of the stationary is divided in three parts. We give here just the main ideas, the complete proof is classical and available in some books, as the book [56] of Zuiily.

First, we have to prove a “non stationary phase approximation” result. This statement consists in a decay estimate in the case where the phase φ has no critical point (the phase is non stationary). In this non stationary configuration, we can, by an appropriate change of variable, reduced the integral to the case of the Riemann-Lebesgue lemma.

The second step is to consider a particular case: the quadratic case. When the phase is quadratic, thanks to some works on the Gaussian, we can obtain the desired approximation for the integral.

Finally, to pass from the particular case to the general case, we use the Morse lemma, that provides a change of variable to transform the general case into the quadratic case.

Application to our systems

On Chapter 2, there is no Euclidean variable. In order to study the asymptotic behavior of the nonlinearity, the stationary phase lemma is replaced by the Birkhoff normal form.

On Chapter 3 and 4, the Euclidean variable leads to the term

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} \hat{g}(t, \xi - \kappa) \overline{\hat{g}}(t, \xi - \eta - \kappa) \hat{f}(t, \xi - \eta) d\kappa d\eta,$$

where f and g are the profiles of the solutions u and v . In this example, the phase is given by $\varphi(\eta, \kappa) = 2\eta\kappa$. Thus we have

$$\varphi'(\eta, \kappa) = (2\kappa, 2\eta), \quad \varphi''(\eta, \kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad |\det \varphi''(\eta, \kappa)|^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \quad \text{sgn}(\varphi''(\eta, \kappa)) = 0.$$

The expression of the derivative of the phase φ' shows that there is only one critical point (this is $(0, 0)$) that is non-degenerate. Thus φ satisfies the assumptions of the stationary phase Lemma. Nevertheless, this is not the case for the amplitude, defined by

$$a(t, \eta, \kappa, \xi) = \hat{g}(t, \xi - \kappa) \overline{\hat{g}}(t, \xi - \eta - \kappa) \hat{f}(t, \xi - \eta).$$

Indeed, the amplitude a also depends on time and is not regular with compact support. However, one may use the stationary phase approximation in order to obtain an intuition of the asymptotic behavior. We obtain, for the unique critical point $(0, 0)$ (and with $n = 2$ in our case):

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} \hat{g}(t, \xi - \kappa) \overline{\hat{g}}(t, \xi - \eta - \kappa) \hat{f}(t, \xi - \eta) d\kappa d\eta \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{t} |\hat{g}(t, \xi)|^2 \hat{f}(t, \xi).$$

Here, we find the decomposition of the nonlinearity in Chapter 3 from equation (3.2.4). In Chapter 4, this intuition and the use of the Birkhoff normal form (for the resonant terms on the torus) are the key of the decomposition of the nonlinearity

$$\mathcal{N}^t = \frac{\pi}{t} \mathcal{R} + \mathcal{E}^t,$$

studied in Theorem 4.3.1. By definition, the nonlinearity \mathcal{N}^t is given by

$$\mathcal{F}\mathcal{N}^t[F, G, H](\xi, p) = \sum_{p-q+r-s=0} e^{it\omega(p,q,r,s)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{2it\eta\kappa} \hat{F}_q(\xi - \eta) \overline{\hat{G}_r(\xi - \eta - \kappa)} \hat{H}_s(\xi - \kappa) d\eta d\kappa,$$

where

$$\omega(p, q, r, s) := p^2 - q^2 + r^2 - s^2.$$

The integral of the right term, approximated by the stationary phase principle, gives

$$\mathcal{F}\mathcal{N}^t[F, G, H](\xi, p) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{p-q+r-s=0} e^{it\omega(p,q,r,s)} \frac{\pi}{t} \hat{F}_q(\xi) \overline{\hat{G}_r(\xi)} \hat{H}_s(\xi).$$

The Birkhoff normal form decomposition then implies

$$\mathcal{F}\mathcal{N}^t[F, G, H](\xi, p) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{t} \sum_{\substack{p-q+r-s=0 \\ p^2-q^2+r^2-s^2=0}} \hat{F}_q(\xi) \overline{\hat{G}_r(\xi)} \hat{H}_s(\xi) =: \frac{\pi}{t} \mathcal{R}[F, G, H](\xi, p).$$

In particular, the stationary phase lemma approximation justifies the $\frac{\pi}{t}$ term in front of the resonant linearity, that implies the change of scale of the form $\pi \ln(t)$ in the modified scattering result of Theorem 4.1.1 and in the modified wave operator constructed in Theorem 4.1.2.

Bibliography

- [1] G. Agrawal and R. Boyd. Contemporary Nonlinear Optics. pages 60–67, 1992.
- [2] V. Banica, R. Carles, and T. Duyckaerts. On scattering for NLS: from Euclidean to hyperbolic space. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 24(4):1113–1127, 2009.
- [3] V. Banica, R. Carles, and G. Staffilani. Scattering theory for radial nonlinear Schrödinger equations on hyperbolic space. *Geom. Funct. Anal.*, 18(2):367–399, 2008.
- [4] J. Bourgain. On the growth in time of higher Sobolev norms of smooth solutions of Hamiltonian PDE. *Internat. Math. Res. Notices*, (6):277–304, 1996.
- [5] J. Bourgain. Scattering in the energy space and below for 3D NLS. *J. Anal. Math.*, 75:267–297, 1998.
- [6] J. Bourgain. Problems in Hamiltonian PDE’s. *Geom. Funct. Anal.*, (Special Volume, Part I):32–56, 2000. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999).
- [7] R. Carles, E. Dumas, and C. Sparber. Multiphase weakly nonlinear geometric optics for Schrödinger equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(1):489–518, 2010.
- [8] R. Carles and E. Faou. Energy cascades for NLS on the torus. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 32(6):2063–2077, 2012.
- [9] R. Carles and T. Kappeler. Norm-inflation for periodic NLS equations in negative Sobolev spaces. *arXiv preprint arXiv:1507.04218*, 2015.
- [10] B. Cassano and M. Tarulli. H1-scattering for systems of N-defocusing weakly coupled NLS equations in low space dimensions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 430(1):528–548, 2015.
- [11] X.-J. Chen, J. Yang, and W. K. Lam. N -soliton solution for the derivative nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions. *J. Phys. A*, 39(13):3263–3274, 2006.
- [12] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao. Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in \mathbb{R}^3 . *Annals of Mathematics*, pages 767–865, 2008.
- [13] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao. Transfer of energy to high frequencies in the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation. *Invent. Math.*, 181(1):39–113, 2010.
- [14] B. Dodson. Global well-posedness and scattering for the defocusing, cubic nonlinear Schrödinger equation when $n = 3$ via a linear-nonlinear decomposition. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(5):1905–1926, 2013.
- [15] L. G. Farah and A. Pastor. Scattering for a 3d coupled nonlinear Schrödinger system. *arXiv preprint arXiv:1603.05723*, 2016.

- [16] P. Gérard and S. Grellier. On the growth of Sobolev norms for the cubic Szegő equation. In *Séminaire Laurent Schwartz—Équations aux dérivées partielles et applications. Année 2014–2015*, pages Exp No. XI, 20. Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2016.
- [17] J. Ginibre and T. Ozawa. Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension $n \geq 2$. *Comm. Math. Phys.*, 151(3):619–645, 1993.
- [18] B. Grébert. Du ressort à l’atome, une histoire de résonance... <http://www.lebesgue.fr/fr/video/5min/grebert>, 2016.
- [19] B. Grébert and T. Kappeler. *The defocusing NLS equation and its normal form*. EMS Series of Lectures in Math. European Mathematical Society, Zürich, 2014.
- [20] B. Grébert, É. Patrel, and L. Thomann. Beating effects in cubic Schrödinger systems and growth of Sobolev norms. *Nonlinearity*, 26(5):1361–1376, 2013.
- [21] B. Grébert, É. Patrel, and L. Thomann. Modified scattering for the cubic Schrödinger equation on product spaces: the nonresonant case. *Math. Res. Lett.*, 23(3):841–861, 2016.
- [22] B. Grébert and L. Thomann. Resonant dynamics for the quintic nonlinear Schrödinger equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 29(3):455–477, 2012.
- [23] B. Grébert and C. Villegas-Blas. On the energy exchange between resonant modes in nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 28(1):127–134, 2011.
- [24] M. Guardia, E. Haus, and M. Procesi. Growth of Sobolev norms for the analytic NLS on \mathbb{T}^2 . *Adv. Math.*, 301:615–692, 2016.
- [25] M. Guardia and V. Kaloshin. Growth of Sobolev norms in the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(1):71–149, 2015.
- [26] Z. Hani. Long-time instability and unbounded Sobolev orbits for some periodic nonlinear Schrödinger equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 211(3):929–964, 2014.
- [27] Z. Hani, B. Pausader, N. Tzvetkov, and N. Visciglia. Modified scattering for the cubic Schrödinger equation on product spaces and applications. *Forum Math. Pi*, 3:e4, 63, 2015.
- [28] Z. Hani and L. Thomann. Asymptotic behavior of the nonlinear Schrödinger equation with harmonic trapping. *Comm. Pure Appl. Math.*, 69(9):1727–1776, 2016.
- [29] L. Hari and N. Visciglia. Small data scattering for energy-subcritical and critical Nonlinear Klein Gordon equations on product spaces. *arXiv preprint arXiv:1603.06762*, 2016.
- [30] E. Haus and M. Procesi. Growth of Sobolev norms for the quintic NLS on T^2 . *Anal. PDE*, 8(4):883–922, 2015.
- [31] E. Haus and M. Procesi. KAM for Beating Solutions of the Quintic NLS. *Comm. Math. Phys.*, 354(3):1101–1132, 2017.
- [32] E. Haus and L. Thomann. Dynamics on resonant clusters for the quintic non linear Schrödinger equation. *Dyn. Partial Differ. Equ.*, 10(2):157–169, 2013.

- [33] N. Hayashi and P. I. Naumkin. Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations. *Amer. J. Math.*, 120(2):369–389, 1998.
- [34] A. D. Ionescu, B. Pausader, and G. Staffilani. On the global well-posedness of energy-critical Schrödinger equations in curved spaces. *Anal. PDE*, 5(4):705–746, 2012.
- [35] A. D. Ionescu and G. Staffilani. Semilinear Schrödinger flows on hyperbolic spaces: scattering H^1 . *Math. Ann.*, 345(1):133–158, 2009.
- [36] T. Kappeler and J. Pöschel. *KdV & KAM*, volume 45 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [37] J. Kato and F. Pusateri. A new proof of long-range scattering for critical nonlinear Schrödinger equations. *Differential Integral Equations*, 24(9-10):923–940, 2011.
- [38] D. Kim. A note on decay rates of solutions to a system of cubic nonlinear Schrödinger equations in one space dimension. *Asymptot. Anal.*, 98(1-2):79–90, 2016.
- [39] S. Kuksin. *Analysis of Hamiltonian PDEs*, volume 19 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [40] S. Kuksin and J. Pöschel. Invariant Cantor manifolds of quasi-periodic oscillations for a nonlinear Schrödinger equation. *Ann. of Math. (2)*, 143(1):149–179, 1996.
- [41] C. Li and H. Sunagawa. On Schrödinger systems with cubic dissipative nonlinearities of derivative type. *Nonlinearity*, 29(5):1537–1563, 2016.
- [42] S. V. Manakov. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves. *Soviet Physics-JETP*, 38(2):248–253, 1974.
- [43] F. Merle and P. Raphael. The blow-up dynamic and upper bound on the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation. *Ann. of Math. (2)*, 161(1):157–222, 2005.
- [44] T. Ozawa. Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension. *Comm. Math. Phys.*, 139(3):479–493, 1991.
- [45] J. Pöschel. A KAM-theorem for some nonlinear partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 23(1):119–148, 1996.
- [46] G. Staffilani. On the growth of high Sobolev norms of solutions for KdV and Schrödinger equations. *Duke Math. J.*, 86(1):109–142, 1997.
- [47] C. Sulem and P.-L. Sulem. *The nonlinear Schrödinger equation, self-focusing and wave collapse*, volume 139 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1999.
- [48] H. Takaoka. Energy transfer model for the derivative nonlinear Schrödinger equations on the torus. *arXiv preprint arXiv:1603.01947*, 2016.
- [49] T. Tao. A physical space proof of the bilinear Strichartz and local smoothing estimates for the Schrödinger equation. *UTN-FRA, Buenos Aires*.
- [50] N. Tzvetkov and N. Visciglia. Small data scattering for the nonlinear Schrödinger equation on product spaces. *Comm. Partial Differential Equations*, 37(1):125–135, 2012.
- [51] N. Tzvetkov and N. Visciglia. Well-posedness and scattering for nonlinear Schrödinger equations on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}$ in the energy space. *Rev. Mat. Iberoam.*, 32(4):1163–1188, 2016.

-
- [52] V. Vilaça Da Rocha. Asymptotic behavior of solutions to the cubic coupled Schrödinger systems in one space dimension. *Dyn. Partial Differ. Equ.*, 13(1):53–74, 2016.
- [53] V. Vilaça Da Rocha. Modified scattering and beating effect for coupled Schrödinger systems on product spaces with small initial data. *arXiv preprint arXiv:1609.03848*, 2016.
- [54] H. Xu. Unbounded Sobolev trajectories and modified scattering theory for a wave guide nonlinear Schrödinger equation. *Math. Z.*, 286(1-2):443–489, 2017.
- [55] V. E. Zakharov and A. B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Ž. Èksper. Teoret. Fiz.*, 61(1):118–134, 1971.
- [56] C. Zuily. *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles : cours et problèmes résolus*. Sciences sup. Dunod, 2002.

List of Figures

1.1	Cubic NLS and growth of the Sobolev norms: sketch of the known results .	42
1.2	Coupled cubic Schrödinger systems: sketch of the strategy	42
1.3	Example of shifted beating effect	44
2.1	Phase portrait of the reduced Hamiltonian on the circle	68
2.2	Beating effect for the reduced system on \mathbb{T}	70
2.3	Study of a polynomial in order to highlight the shifted beating effect . . .	72
2.4	Phase portrait of the shifted beating effect solutions	73
2.5	Shifted beating effect for the reduced system on \mathbb{T}	74
2.6	Influence of γ on the period of the beating effect	83
2.7	Beating effect : behavior of the period $2T_\gamma$ when γ is close to $\frac{1}{2}$	85
2.8	Study of the period of the shifted beating effect via the graph of a polynomial	90
4.1	Modified scattering and beating effect: sketch of the strategy	123
4.2	Phase portrait of the reduced Hamiltonian, the product spaces case	178

Thèse de Doctorat

Victor VILAÇA DA ROCHA

Mise en évidence de comportements non linéaires pour des systèmes de Schrödinger cubiques couplés

Emphasising nonlinear behaviors for cubic coupled Schrödinger systems

Résumé

L'objectif de ce travail est de proposer une étude de divers comportements non linéaires pour un système de deux équations de Schrödinger cubiques couplées. Selon le choix de l'espace des positions, nous mettons en évidence différents exemples de comportements non linéaires.

Dans le premier chapitre, nous introduisons les notions et outils nécessaires à la compréhension de l'enjeu. En particulier, nous justifions ce choix de modèle par des résultats récents sur l'équation de Schrödinger non linéaire.

Le second chapitre est dédié à l'étude de ce système sur le tore (une coordonnée périodique). Nous mettons en évidence un échange d'énergie en temps long (mais fini) entre différents modes de Fourier des solutions : c'est l'effet de battement (éventuellement décalé).

Le troisième chapitre porte sur l'étude du système sur la droite réelle (une coordonnée euclidienne). Nous mettons en place un résultat de scattering modifié pour obtenir un comportement non linéaire en temps infini.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous nous plaçons dans un espace produit (une coordonnée euclidienne et une coordonnée périodique). Nous exhibons alors le résultat principal de cette thèse : un échange d'énergie en temps infini via un résultat de scattering modifié.

Mots clés

comportements non linéaires, équation de Schrödinger non linéaire, systèmes couplés, effet de battement, scattering modifié, opérateur d'ondes modifié.

Abstract

The aim of this work is to propose a study of various nonlinear behaviors for a system of two coupled cubic Schrödinger equations. Depending on the choice of the spatial domain, we highlight different examples of nonlinear behaviors.

In the first chapter, we introduce the notions and tools needed to understand the issue. In particular, we justify this choice of model by recent results on the nonlinear Schrödinger equation.

The second chapter is dedicated to the study of this system on the torus (one periodic coordinate). Here, we exhibit an energy exchange for long (but finite) times between different Fourier modes of the solutions: this is the (possibly shifted) beating effect.

The third chapter deals with the study of the system on the real line (one Euclidean coordinate). We set up a modified scattering result to get a nonlinear behavior in infinite time.

Finally, in the fourth chapter, we consider a product space (one Euclidean coordinate and one periodic coordinate). We obtain the main result of this thesis: an energy exchange in infinite time thanks to a modified scattering result.

Key Words

nonlinear behaviors, nonlinear Schrödinger equation, coupled systems, beating effect, modified scattering, modified wave operator.